



Théorie semi-analytique des mouvements quasi-circulaires moyens en mécanique spatiale : applications aux satellites géodésique

Florent Deleflie

► To cite this version:

Florent Deleflie. Théorie semi-analytique des mouvements quasi-circulaires moyens en mécanique spatiale : applications aux satellites géodésique. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2002. Français. \langle NNT : 2002OBSP0103 \rangle . \langle tel-02167389 \rangle

HAL Id: tel-02167389

<https://hal.science/tel-02167389v1>

Submitted on 27 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Ecole Doctorale *Astronomie & Astrophysique* d'Ile de France

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
EN DYNAMIQUE DES SYSTÈMES GRAVITATIONNELS

**Théorie semi-analytique
des mouvements quasi-circulaires moyens
en mécanique spatiale**

-

Applications aux satellites géodésiques

présentée par

Florent Deleflie

*soutenue à l'Observatoire de la Côte d'Azur, à Grasse,
le 18 décembre 2002, devant le jury composé de :*

Nicole Capitaine
Anne Lemaître
Georges Balmino
Véronique Dehant
Alain Vienne
Pierre Exertier

*Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de Thèse*

Travaux effectués à l'UMR 6527/CERGA, OCA, Av. N. Copernic, F-06130 Grasse

Ecole Doctorale *Astronomie & Astrophysique d'Ile de France*
THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
EN «DYNAMIQUE DES SYSTÈMES GRAVITATIONNELS»

**Théorie semi-analytique
des mouvements quasi-circulaires moyens
en mécanique spatiale**

-

Applications aux satellites géodésiques

présentée par

Florent Deleflie

*soutenue à l'Observatoire de la Côte d'Azur, à Grasse,
le 18 décembre 2002, devant le jury composé de :*

| | |
|------------------|---------------------------|
| Nicole Capitaine | <i>Président</i> |
| Anne Lemaître | <i>Rapporteur</i> |
| Georges Balmino | <i>Rapporteur</i> |
| Véronique Dehant | <i>Examineur</i> |
| Alain Vienne | <i>Examineur</i> |
| Pierre Exertier | <i>Directeur de Thèse</i> |



Travaux effectués à l'UMR 6527/CERGA, OCA, Av. N. Copernic, F-06130 Grasse

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Avant-Propos | 9 |
| Introduction | 11 |
| I La théorie du mouvement moyen pour les orbites quasi-circulaires | 21 |
| Jeux de variables, jeux d'équations | 23 |
| Les méfaits et bienfaits des singularités | 25 |
| Utilisation d'éléments non singuliers dans la littérature | 25 |
| Deux types de théories pour une mécanique spatiale spécifique | 29 |
| L'élimination de la variable rapide des équations de la dynamique | 29 |
| L'élimination de la variables rapide des observations | 30 |
| La cohérence de l'approche | 30 |
| Etat d'esprit de l'étude | 31 |
| 1 Construction des équations moyennes de la dynamique | 33 |
| 1.1 Les outils d'élimination de la variable rapide | 34 |
| 1.1.1 Equations de Lagrange, équations de Gauss | 34 |
| 1.1.2 La pertinence du cadre hamiltonien | 37 |
| 1.1.3 Hiérarchie des perturbations | 39 |
| 1.1.4 Définition et obtention du mouvement moyen | 40 |
| 1.1.5 Définition et obtention du mouvement centré | 43 |
| 1.1.6 Développements des hamiltoniens et couplages | 44 |
| 1.2 Traitement des perturbations avec couplages | 46 |
| 1.2.1 Effets du potentiel terrestre zonal | 46 |
| 1.2.2 Effets de troisièmes corps | 53 |
| 1.2.3 Pression de radiation solaire directe (sans ombre) | 55 |
| 1.3 Perturbations sans couplages | 57 |
| 1.3.1 Effets des coefficients zonaux de hauts degrés | 57 |
| 1.3.2 Les marées océaniques | 59 |
| 1.3.3 Correction fréquentielle des marées terrestres | 62 |
| 1.3.4 Corrections relativistes | 64 |
| 1.3.5 Les effets de la précession-nutation | 71 |
| 1.4 Autres forces non gravitationnelles | 75 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 1.4.1 | Cas général : résolution par quadratures numériques | 76 |
| 1.4.2 | Cas particulier de la pression de radiation avec ombre | 76 |
| 1.5 | Récapitulation : le modèle d'orbite moyenne | 76 |
| 2 | Construction des éléments moyens «observés» | 81 |
| 2.1 | Position du problème : un filtrage en deux étapes | 82 |
| 2.2 | Première étape : une étape analytique | 82 |
| 2.2.1 | Des paramètres de description spécifiques | 84 |
| 2.2.2 | Méthode d'intégration des équations non singulières $\frac{dC}{dt}$ et $\frac{dS}{dt}$ | 89 |
| 2.2.3 | Conséquence : choix d'une hypothèse d'intégration | 91 |
| 2.2.4 | Une intégration analytique des 6 équations de Lagrange | 100 |
| 2.2.5 | Etablissement d'un bulletin moyen de départ | 106 |
| 2.3 | Deuxième étape : une étape numérique | 106 |
| 3 | Validation de la cohérence entre le modèle et les observations | 111 |
| 3.1 | Construction pratique des éléments moyens «observés» | 112 |
| 3.1.1 | Construction d'orbites osculatrices | 112 |
| 3.1.2 | Choix des paramètres de filtrage | 112 |
| 3.2 | Intégration numérique des équations moyennes | 115 |
| 3.3 | Exactitude de la méthode : un bilan d'erreur | 115 |
| 3.4 | Note sur les calculs des annexes | 126 |
| II | Application à l'étude du champ de gravité de la Terre | 127 |
| 4 | Méthode de détermination de paramètres géodynamiques dans le cadre du mouvement moyen | 129 |
| 4.1 | Principe de la méthode des moindres carrés | 130 |
| 4.2 | Les équations variationnelles | 133 |
| 4.3 | Méthode de combinaison des observations | 136 |
| 4.3.1 | Pondérations des observations pour un même satellite | 136 |
| 4.3.2 | Utilisation d'observations issues de satellites différents | 136 |
| 4.4 | Un exemple académique | 137 |
| 5 | L'importance des forces non gravitationnelles | 143 |
| 5.1 | Une illustration sur LAGEOS | 143 |
| 5.2 | Le mouvement moyen de CHAMP | 148 |
| 5.2.1 | Les données utilisées | 148 |
| 5.2.2 | Exploitation des données : des arcs longs de CHAMP | 151 |
| 5.2.3 | Conclusion | 154 |
| 5.3 | Modèles nominaux pour les autres satellites | 155 |
| 5.3.1 | LAGEOS-2 | 155 |
| 5.3.2 | STARLETTE | 155 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 5.3.3 | STELLA | 161 |
| 5.3.4 | AJISAI | 162 |
| 5.4 | Conclusion de ce chapitre | 168 |
| 6 | Estimation de paramètres géodynamiques | 169 |
| 6.1 | La marée à 18,6 ans et $\dot{C}_{2,0}$ | 169 |
| 6.2 | Des séries temporelles des premiers zonaux satellite par satellite | 173 |
| 6.2.1 | Une tentative avec un seul satellite : LAGEOS-1 | 175 |
| 6.2.2 | Des valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ | 175 |
| 6.3 | Une tentative de combinaison des satellites | 178 |
| 6.4 | Résultat : des valeurs pour les premiers coefficients zonaux | 183 |
| III | Le «nouveau chapitre de la thèse» | 185 |
| | Les enjeux du projet | 188 |
| | Contexte général | 188 |
| | Ce que le projet apporte | 188 |
| | Mon regard sur la gestion et le déroulement du projet | 189 |
| | Un enjeu de méthode : le retour au «papier-crayon» | 189 |
| | Un travail passionnant | 189 |
| | La gestion du temps | 190 |
| | Le coût d'un projet d'équipe | 190 |
| | Mes principales compétences développées dans le cadre du projet | 191 |
| | Mes principaux domaines d'expertise | 191 |
| | Mon regard sur le métier de chercheur | 191 |
| | Ma place dans la communauté | 192 |
| | Enseignements personnels. Quelles retombées pour le projet ? | 193 |
| | Conclusions et perspectives | 195 |
| | Orbites quasi-circulaires moyennes | 197 |
| | La contribution des longues périodes à la géodynamique | 199 |
| | L'analyse de mission à long terme | 200 |
| | Géodynamique et mécanique céleste | 206 |
| | Les apports de ces travaux | 208 |
| | Epilogue | 208 |
| | Annexes | 209 |
| A | Synthèse des étapes de la théorie | 211 |
| A.1 | Motivation | 211 |
| A.2 | Principe | 211 |
| A.3 | Etapes successives | 212 |
| B | Transformations entre jeux de variables | 215 |

| | | |
|----------|--|------------|
| C | Les équations de la dynamique | 219 |
| C.1 | Définition de deux repères liés au satellite | 219 |
| C.1.1 | Définition de coordonnées sphériques | 219 |
| C.1.2 | Un repère orienté par la position radiale | 220 |
| C.1.3 | Un repère orienté par la vitesse | 221 |
| C.2 | Les équations de Lagrange | 222 |
| C.3 | Les équations de Gauss | 226 |
| C.3.1 | Equations de Gauss moyennes | 231 |
| C.3.2 | Dérivées partielles des équations de Gauss | 237 |
| C.4 | Récapitulatif | 238 |
| D | Ma solution non singulière aux équations de Lagrange | 239 |
| D.1 | Expression du potentiel en éléments non singuliers | 239 |
| D.2 | Solution pour C et S | 243 |
| D.2.1 | Système différentiel principal vérifié par C et S | 244 |
| D.2.2 | Un oscillateur harmonique | 245 |
| D.2.3 | Une méthode pour exprimer les courtes périodes de C et S | 248 |
| D.2.4 | Un développement en série de Fourier des fonctions de C et S | 250 |
| D.2.5 | Détail de la solution pour ΔC et ΔS | 251 |
| D.2.6 | Calcul de $\Delta C_{2n,m,p,q}$ et $\Delta S_{2n,m,p,q}$ | 251 |
| D.2.7 | Calcul de $\Delta C_{1n,m,p,q}$ et de $\Delta S_{1n,m,p,q}$ | 254 |
| D.2.8 | Calcul de $\Delta C_{3n,m,p,q}$ et $\Delta S_{3n,m,p,q}$ | 255 |
| D.3 | Détail de la solution pour a | 256 |
| D.4 | Détail de la solution pour Ω | 256 |
| D.4.1 | Variation séculaire $\dot{\Omega}$ | 257 |
| D.4.2 | Calcul des courtes périodes de $\Delta\Omega(t)$ | 257 |
| D.4.3 | Calcul des longues périodes de $\Delta\Omega(t)$ | 258 |
| D.5 | Détail de la solution pour i | 258 |
| D.5.1 | Calcul des courtes périodes de $\Delta i(t)$ | 259 |
| D.5.2 | Calcul des longues périodes de $\Delta i(t)$ | 260 |
| D.6 | Détail de la solution pour λ | 261 |
| D.6.1 | Variation séculaire $\dot{\lambda}$ | 261 |
| D.6.2 | Calcul des courtes périodes de $\Delta\lambda(t)$ | 262 |
| D.6.3 | Calcul des longues périodes de $\Delta\lambda(t)$ | 263 |
| D.6.4 | La correction du moyen mouvement | 265 |
| E | Principe du développement de Kaula | 267 |
| E.1 | Introduction des fonctions d'inclinaison | 267 |
| E.2 | Introduction de l'excentricité | 268 |
| E.3 | Ecriture des développements | 269 |
| F | Éléments moyens de satellites | 271 |
| F.1 | LAGEOS-1 | 271 |
| F.2 | LAGEOS-2 | 276 |
| F.3 | STARLETTE | 279 |
| F.4 | STELLA | 283 |

| | | |
|----------|---|------------|
| F.5 | AJISAI | 285 |
| F.6 | T/P | 289 |
| F.7 | CHAMP | 289 |
| G | Inventaire des travaux annexes | 291 |
| G.1 | Publications dans revues à comité de lecture | 291 |
| G.2 | Présentations dans des colloques internationaux | 291 |
| G.3 | Rapports | 291 |
| G.4 | Supports de cours | 292 |
| G.5 | Autres publications et présentations | 292 |
| G.6 | Divers | 292 |
| | Table des figures | 293 |
| | Liste des tableaux | 297 |
| | Bibliographie | 299 |

Avant-Propos

Les changements globaux qui affectent la Terre se traduisent par de grands transferts de masses entre ses composantes principales que sont la terre solide, les océans, les glaces et l'atmosphère. Ces changements modifient à la fois la forme de la Terre (on peut citer le rebond post-glaciaire) et son champ de gravité. Un des grands défis actuels est d'identifier et de séparer correctement les différentes causes possibles de leurs variations à différentes échelles spatiales, les causes locales - à l'échelle d'un bassin hydrologique par exemple - ne devant pas être attribuées à des causes plus globales. Ces transferts de masse ont des périodes caractéristiques largement différentes, allant de quelques jours, quelques mois à plusieurs milliers d'années, voire beaucoup plus si l'on se place sur l'échelle des temps géologiques.

Depuis le lancement des premiers satellites artificiels qui ont permis une approche globale de l'étude de ces changements, la géodésie spatiale s'est spécialisée dans la recherche de méthodes dynamiques, dites *inverses*, de caractérisation des paramètres du champ de gravité. Ces méthodes sont fondées sur la reconstruction des mouvements orbitaux de satellites à partir d'observations.

Mon travail s'est placé dans un contexte d'analyse originale des perturbations orbitales. Il a consisté à développer une méthode la plus adaptée possible, en sensibilité, en facilité d'utilisation, et en exactitude, pour :

- (i) rendre compte des effets géodynamiques sur des temps extrêmement longs dans les différentes orbites observées de l'ensemble des satellites géodésiques,
- (ii) les modéliser grâce aux équations du mouvement en vue d'établir les signaux théoriques correspondants,
- (iii) estimer les coefficients ou paramètres géodynamiques, en les décorrélant entre eux du mieux possible, dans le but de contraindre des modèles d'évolution de la géophysique.

L'originalité de ce travail réside donc dans la possibilité de construire des trajectoires sur de très grandes périodes de temps, en prenant en compte l'ensemble des observations disponibles pour un satellite donné ; ces observations peuvent désormais s'étaler sur des périodes de plus de vingt ans. La méthode développée ici repose sur la notion d'orbite moyenne, et ne s'intéresse qu'aux variations à longues périodes des éléments caractérisant le mouvement. En outre, toute la formulation est réalisée en éléments non singuliers en excentricité, afin d'être appliquée à tous les satellites dédiés aux études géodynamiques, et dont les orbites sont pour la plupart quasi-circulaires. Ceci va permettre de mettre en évidence des phénomènes géodynamiques à longues périodes et de faibles amplitudes (par exemple la marée à 18,6 ans).

Je ne voudrais pas oublier, avant de commencer l'étude proprement dite, de mentionner et de saluer du mieux que je le peux, les personnes qui ont fait en sorte que ce travail puisse

se réaliser : celles qui ont permis sa réalisation au jour le jour, celles qui ont préparé tout son contexte au cours des années, ainsi que celles qui me font aujourd'hui l'honneur de l'évaluer.

Au premier rang se trouve **Pierre Exertier**, qui a été bien plus qu'un directeur de thèse : au cours de ces trois années, nous avons appris à nous connaître, pour développer au fil du temps une certaine complicité qui a largement dépassé le seul cadre des interactions scientifiques. A ses côtés se trouve **Gilles Métris** qui fut un interlocuteur vraiment privilégié, et qui j'espère va le devenir de plus en plus au fil du temps. Un remerciement tout particulier à l'ensemble de l'équipe «**Géodésie et Mécanique Céleste**» : ce fut un vrai plaisir de découvrir ce qu'est vraiment un travail d'équipe, surtout quand il est, je crois, de qualité, et qu'on peut le faire de manière très sérieuse sans pour autant se prendre toujours très au sérieux : **Olivier Laurain** et **Philippe Berio** tout d'abord, notamment pour leurs interventions essentielles dans le traitement des données, **Joëlle Nicolas** et **David Coulot** ensuite, de vrais amis sur qui on peut compter à toute heure du jour et de la nuit, sans bien évidemment oublier **Pascal Bonnefond** et **François Barlier**, toujours pleins de dynamisme, et aussi, **Christine**, **Karin**, **Mimi**, toujours prêtes à rendre de grands services, de même qu'**Anny**, **Martine**, de l'indispensable "staff" de l'Observatoire.

Un grand merci également à **François Mignard** pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, ainsi qu'à **Daniel Gambis**, mon «parrain» de thèse, qui a suivi mon travail depuis l'Observatoire de Paris.

Je voudrais remercier tout spécialement chacun des membres de mon jury : **Nicole Capitaine**, Astronome à l'Observatoire de Paris, qui m'avait déjà accueilli en DEA en 1998 ; **Georges Balmino**, Docteur d'Etat, Chef de la division de Géodésie Spatiale du CNES (Toulouse) ; **Anne Lemaître**, Professeur à l'Université de Namur (Belgique) ; **Véronique Dehant**, Professeur à l'Observatoire Royal de Belgique ; **Alain Vienne**, Maître de Conférence à l'Université de Lille 1 et à l'IMCCE (Paris) ; et **Pierre Exertier** bien sûr, Directeur de Recherche à l'Observatoire de la Côte d'Azur (Grasse). A vous six, un grand merci pour avoir accepté de faire partie de ce jury, et pour avoir eu la gentillesse de consacrer une part non négligeable de votre temps à l'évaluation de mon travail, malgré des emplois du temps que je sais fort chargés.

Je ne peux malheureusement pas remercier l'ensemble des personnes à qui je pense en écrivant ces lignes, je garantis au lecteur qu'elles sont trop nombreuses pour cela. Mais grâce à toutes celles et ceux que j'ai aimé croiser durant ces trois années, et qui j'espère en appellent d'autres, j'ai pris conscience que même si la mécanique céleste est pleine d'équations qui peuvent rendre les manuscrits parfois un peu austères, faire de la recherche, c'est avant tout participer à une bien belle aventure humaine.

Introduction

L'ensemble de ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche méthodologique en mécanique céleste, celle des corps spatiaux en orbite autour de la Terre. En outre, il trouve une application à l'étude des changements globaux du champ de gravité de la Terre. Ces changements sont difficiles à appréhender, car ils couvrent un spectre spatio-temporel très large et sont caractérisés par des amplitudes souvent très faibles.

La dynamique orbitale

Les progrès de la géodésie ont été constants depuis l'époque où l'Ecole de Pythagore a pour la première fois proposé une forme sphérique pour la Terre. Le lancement le 4 octobre 1957 du satellite géodésique Spoutnik-1 a propulsé la géodésie dans l'ère spatiale et a ouvert la voie aux études globales de la Terre depuis l'espace. Un certain nombre de ces études globales se basent sur les principes de la dynamique orbitale, branche de la mécanique céleste qui vise à améliorer en parallèle les méthodes de calcul d'orbites des satellites artificiels, et les modèles de forces (dont on déduit les modèles géodynamiques) qui perturbent leurs mouvements. Le but est ainsi double : il s'agit d'une part de proposer des méthodes de calcul du mouvement des corps spatiaux, à un niveau de précision de l'ordre de quelques centimètres, et d'autre part d'établir des modèles capables de rendre compte des perturbations des mouvements spatiaux dues au système «Terre» dans son ensemble.

De plus, les techniques spatiales d'observation ayant énormément progressé, la modélisation se doit de rendre compte d'un niveau de précision très élevé. Elle est d'autant plus difficile que la Terre est pour nous un objet très privilégié de l'Univers, le plus observé avec un tel degré de précision.

Les enjeux sont multiples, et sont liés à la géophysique, à la géodynamique, ou même à la physique fondamentale : à travers l'étude du champ de gravité, c'est la physique de la planète Terre dans de multiples aspects qu'il est possible d'appréhender, par le biais des déplacements et des déformations de ses composantes que sont la terre solide, les océans, les glaces et l'atmosphère (figure 1).

La dynamique orbitale doit en pratique être développée pour des altitudes comprises, dans l'environnement terrestre, entre 400 et 20000 kilomètres. Entre ces deux altitudes, les forces agissant sur les satellites ont des amplitudes très variées, forces que l'on peut classer en deux catégories : les forces d'origine gravitationnelle (champ de gravité, effets de troisièmes corps, marées terrestres, océaniques ou atmosphériques), et les forces non gravitationnelles (freinage atmosphérique, pressions de radiation, effets relativistes, ...). Améliorer les modèles de ces forces revient donc à améliorer la connaissance de la répartition et des transferts de masse à la

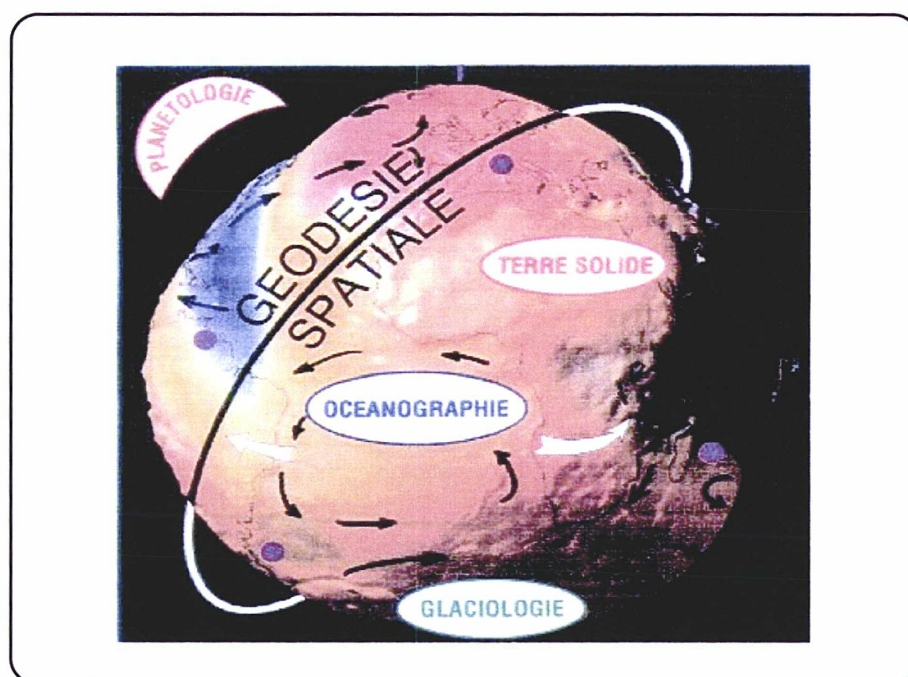


FIG. 1 – La géodésie spatiale : une science multidisciplinaire (Document GRGS).

surface et à l'intérieur de la Terre (bilan de circulation d'eau, niveau des océans...), à améliorer aussi la connaissance de la haute atmosphère, la rotation de la Terre, le mouvement du pôle...

Le principe fondamental de la dynamique

Les différents modèles de forces permettent d'exprimer la résultante des forces qui régit le mouvement du corps dont on étudie la trajectoire. Grâce au principe fondamental de la dynamique, qui relie cette résultante à l'accélération de ce corps, il est ainsi possible d'associer à un phénomène géophysique ou géodynamique un effet sur l'orbite : c'est l'*extrapolation d'orbite*, qui donne une estimation de la position d'un satellite à une date donnée, à partir de conditions initiales. Mais la connaissance très imparfaite des conditions initiales lors du lancement d'un satellite, et les limites de la modélisation des forces, donnent à l'extrapolation d'orbite une consistance bien faible, puisque les positions calculées ne peuvent pas rendre compte des positions réelles, et ce souvent au bout seulement de quelques révolutions du satellite pour les satellites de faibles altitudes.

En dynamique orbitale, calculer une trajectoire consiste en fait à relier le mieux possible le mouvement du satellite tel qu'il est intégré grâce aux modèles, et le mouvement « observé » reconstitué à partir des observations issues des réseaux de poursuite au sol ou dans l'espace (réseau de télémétrie laser, réseau DORIS, constellation GPS notamment) : c'est la *restitution d'orbite*. La recherche de ce lien est rendue très difficile dès que la longueur de l'arc calculé atteint plusieurs jours (2 jours pour les satellites les plus bas, une dizaine de jours pour les plus élevés), car les écarts entre observations et modèles deviennent vite importants : le problème est fortement non linéaire !

Comme les éléments orbitaux du satellite sont reliés aux forces qui perturbent son mouvement, les différences entre modèles et observations traduisent tout autant un défaut du modèle d'orbite qu'une mauvaise détermination des paramètres décrivant le champ de forces. Pire, les différences peuvent parfois être dues à une modélisation géophysique incomplète de certains phénomènes, comme c'est certainement le cas dans les modèles actuels pour le changement de signe de \dot{J}_2 observé depuis 1998 (voir par exemple [Deleflie, 2003b]). La cohérence de l'ensemble de la chaîne de calcul (prise en compte des observations, calcul de l'orbite, détermination de paramètres géodynamiques) doit ainsi être parfaitement maîtrisée, pour permettre une estimation exacte des paramètres, et ne pas attribuer un effet sur l'orbite à un coefficient géodynamique qui en traduit un autre.

Une vision sur le long terme

La dynamique orbitale a ainsi montré une énorme et unique capacité à relier les phénomènes géodynamiques globaux à des effets observables sur les trajectoires. Cela nécessite une bonne compréhension des causes (reliée à la modélisation de ces phénomènes), et la mise en évidence des conséquences, les perturbations orbitales, à travers les équations du mouvement.

Les études de dynamique orbitale s'appuient sur un ensemble de mesures réalisées maintenant depuis plus de vingt ans, grâce aux réseaux internationaux de poursuite de satellites par les techniques spatiales, comme la télémétrie laser (depuis les années 1970) ou le système DORIS (depuis 1990). La télémétrie laser est présente dans le contexte international de la géodésie spatiale depuis le début des années 1970, avec des cibles géodésiques phare, telles STARLETTE (1975) à 800 kilomètres d'altitude, ou LAGEOS (1976) à 6000 kilomètres. La communauté scientifique a d'ailleurs longtemps privilégié ces cibles pour la géodynamique, ce qui a donné lieu à de très nombreuses publications. Depuis, d'autres satellites sont venus compléter la constellation (AJISAI en 1986, ETALON en 1989, STELLA en 1993, ...), permettant ainsi un mélange de différentes sensibilités d'orbite (les conséquences) pour la recherche de mêmes effets géodynamiques (les causes), en les décorrélant.

Pour certains satellites, les données issues du réseau de télémétrie laser couvrent donc désormais plusieurs décennies. Le principe de base de l'ensemble de l'étude que je présente ici repose ainsi sur la construction d'arcs d'orbites uniques qui rendent compte de l'ensemble des observations disponibles pour un satellite donné.

C'est donc une méthode spécifique de perturbations qu'il faut développer, (presque) uniquement dédiée aux variations à long et très long terme des trajectoires. Une telle méthode permet ainsi d'étudier le champ de gravité, de manière inverse, dans ses composantes statiques, ou variant de façon séculaire ou à longues périodes (en pratique : supérieures à 6 mois et pouvant aller jusqu'à plusieurs décennies). Cette méthode a été nommée, par les précurseurs du GRGS, *méthode de centrage*. C'est une méthode de moyennisation.

Un bref historique de la méthode de centrage

La méthode de centrage repose sur la notion d'orbite moyenne qui, à l'inverse des orbites osculatrices, ne prend en compte que les variations à longues périodes des éléments orbitaux : un phénomène géodynamique donné est en effet la cause de variations au cours du temps des paramètres caractérisant l'orbite des satellites. Une description «géométrique» d'une telle orbite se prête beaucoup mieux à une interprétation dynamique des perturbations qu'une description basée sur des positions et des vitesses : les positions et les vitesses d'un satellite subissent au cours d'une révolution des variations beaucoup trop importantes pour permettre une analyse fine des perturbations.

Une telle description géométrique utilise habituellement les 6 éléments suivants (figure 2) : 2 pour décrire la forme de l'ellipse (le demi-grand axe a , l'excentricité e), 2 pour positionner le plan de l'orbite dans l'espace (l'inclinaison i , la longitude du nœud ascendant Ω), 2 pour repérer la position du corps le long de sa trajectoire (l'argument du périégée ω , l'anomalie vraie v). Grâce à cette description, on peut distinguer dans ces éléments des variations à courtes périodes (du même ordre de grandeur que la période de révolution du satellite), et des variations à longues périodes (liées aux vitesses de rotation du plan de l'orbite et du périégée) : par exemple, les coefficients tesséraux du champ de gravité¹ sont à l'origine de courtes périodes ; les effets gravitationnels de la Lune, du Soleil ou des autres planètes du système solaire sont à l'origine d'effets à longues périodes ; les coefficients zonaux du champ de gravité² donnent lieu, quant à eux, à la fois à des effets à courtes et à longues périodes (figure 3). Ceci n'est pour autant pas exclusif : les tesséraux peuvent produire, dans certains cas, des variations à longues périodes, ainsi que les forces non gravitationnelles.

Cette méthode est parfaitement adaptée à la situation décrite précédemment, et la complexité de sa mise en œuvre a impliqué un développement en plusieurs étapes. La première étape, «historique», remonte aux années 1970, période où les calculateurs ne permettaient pas de prendre en compte de très nombreux paramètres, sans un coût important en temps de calcul et une divergence certaine des solutions même à très court terme (quelques jours). Au moins deux groupes se sont lancés dans cette méthode, qui allait très vite devenir une méthode combinée, avec une composante analytique et une autre numérique. Il s'agit des groupes du Goddard (NASA) et du Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale (GRGS) du CNES (travaux initiés par Georges Balmino et Nicole Borderies. Voir par exemple [Borderies, 1976]).

Ensuite, la méthode a trouvé quelques raffinements, numériques pour la plupart, rendus nécessaires en raison de la grande complexité de la partie analytique, eu égard à la précision des observations qui de plus, allait croissante. Il faut attendre la fin des années 1980 et le début des années 1990, avec les thèses de Pierre Exertier puis de Gilles Métris, pour atteindre une cohérence de la modélisation analytique qui permette des applications concrètes. Ces applications ont été traduites dans la thèse de Sean Bruinsma [Bruinsma, 2002].

Ces derniers travaux ont cependant été limités, pour des raisons analytiques profondes : les développements proposés par Gilles Métris et Pierre Exertier dans [Métris, 1991] et [Métris and Exertier, 1995], en tant que premiers vrais développements analytiques à ordre élevé,

¹schématiquement : ceux qui décrivent la forme de la Terre selon la longitude (et la latitude).

²schématiquement : ceux qui décrivent la forme de la Terre indépendamment de la longitude.

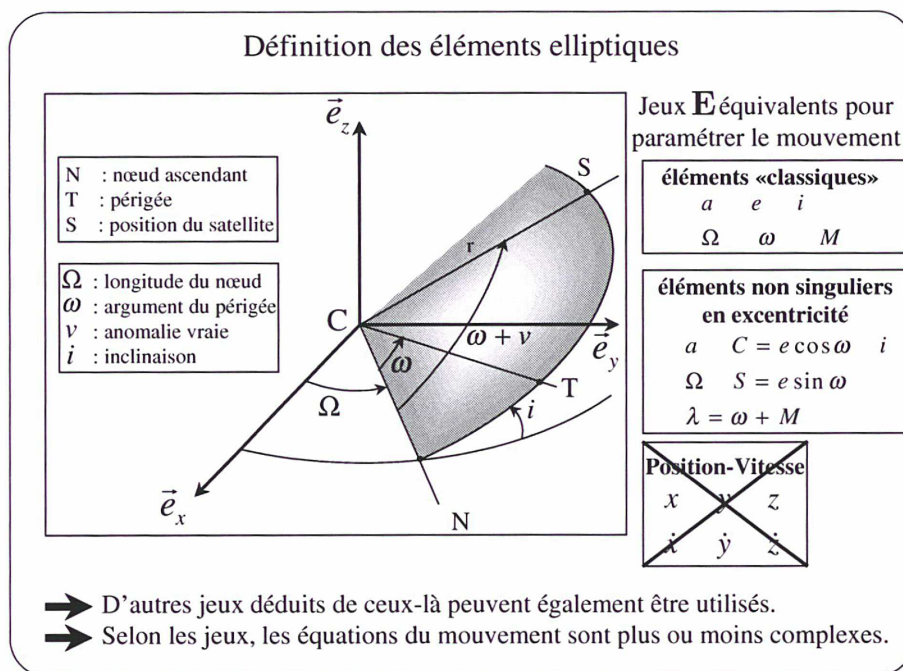


FIG. 2 – Une description en éléments orbitaux.

A l'inverse d'une description en position-vitesse, les jeux d'éléments orbitaux permettent d'associer facilement une perturbation à un effet sur l'orbite.

ont utilisé les variables canoniques de Delaunay. Un tel choix limite en effet au maximum la complexité de la moyennisation des équations. Cependant, les satellites géodésiques sont plutôt lancés sur des orbites quasi-circulaires, et ces variables sont singulières pour les faibles excentricités.

En géodésie spatiale, on parle usuellement d'une excentricité faible dès lors que e est de l'ordre de 10^{-3} . Les développements qui font l'objet des travaux que je présente ici peuvent en fait s'appliquer à partir d'excentricités de l'ordre de 10^{-2} . En mécanique céleste, toutes ces excentricités peuvent apparaître comme faibles voire très faibles, puisque il n'est pas rare d'étudier des trajectoires à excentricités très fortes (des orbites de comètes peuvent avoir une excentricité de l'ordre de 0.6 ou plus). La distinction faite en géodésie spatiale est justifiée par la grande différence dynamique qui existe entre l'intégration des orbites dites à faibles excentricités (de 10^{-1} à $0.5 \cdot 10^{-2}$), et celles dites à très faibles excentricités (moins de $0.5 \cdot 10^{-2}$).

L'étude que je présente ici permet désormais d'appliquer la méthode à l'ensemble de la constellation de satellites géodésiques, quelles que soient les excentricités, et d'une manière plus générale, à une grande partie des satellites artificiels de la Terre.

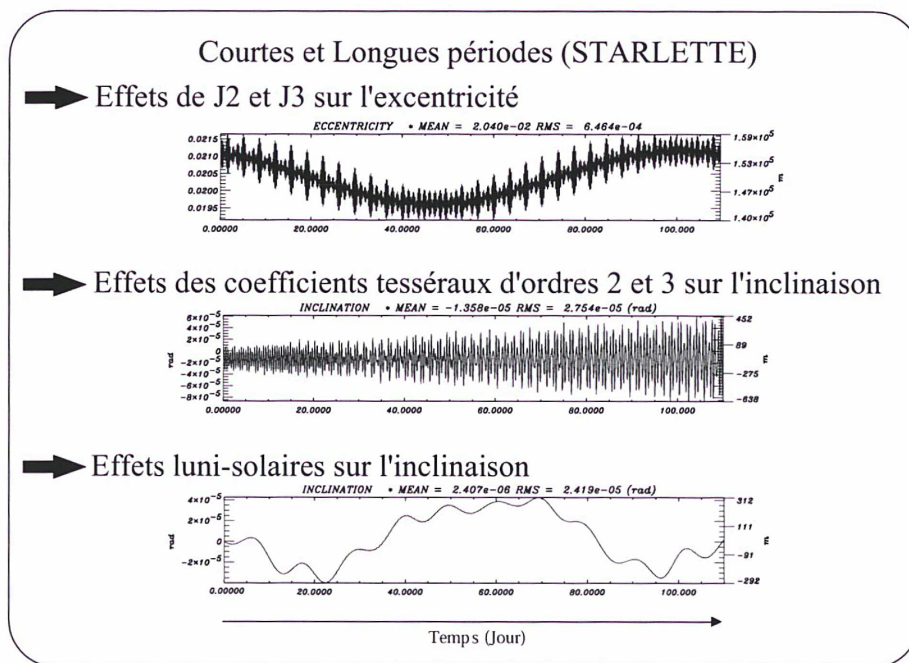


FIG. 3 – Courtes et longues périodes dans le mouvement orbital. Les coefficients géodynamiques sont à l'origine de courtes et de longues périodes dans les éléments orbitaux décrivant la trajectoire. En ne s'intéressant qu'aux longues périodes, il est possible de déterminer d'autant mieux les coefficients zonaux puisque toute l'information à courtes périodes, assimilée à du bruit (y compris celle, fort complexe, liée aux tesséraux), est éliminée par filtrage analytico-numérique.

Une approche semi-analytique en éléments non singuliers

La méthode de centrage repose sur l'élimination de l'influence de la variable rapide (l'anomalie moyenne M , ou toute autre variable rapide qui peut en être déduite) des équations de la dynamique.

L'élimination de la variable rapide s'appuie, pour toutes les perturbations qui dérivent d'un potentiel et pour lesquelles il est nécessaire de disposer d'une solution à ordre élevé, sur un algorithme analytique développé dans [Deprit, 1969]. En offrant une grande stabilité des solutions, les théories analytiques sont très bien adaptées aux études dynamiques à long terme en géodésie spatiale, mais se révèlent très complexes à mettre en œuvre. Dans le cadre de la méthode de centrage, les transformations analytiques sont réalisées une fois pour toutes. Les autres perturbations sont traitées, selon les cas, de manière complètement analytique (moyennisation «à la main» des équations du mouvement), ou à l'aide de quadratures (le freinage atmosphérique par exemple).

Les systèmes différentiels moyens alors obtenus sont ensuite intégrés numériquement, avec un pas d'intégration environ 100 à 1000 fois plus grand que celui utilisé dans les méthodes purement numériques habituelles. La méthode de centrage est ainsi qualifiée de *semi-analytique*.

La plupart des développements en mécanique céleste que je présente dans cette étude concernent ainsi l'élimination de la singularité en excentricité. J'ai utilisé un jeu d'éléments

non singuliers en excentricité, en remplaçant les variables e, ω, M par $C = e \cos \omega, S = e \sin \omega$, et $\lambda = \omega + M$. Mais pour éliminer cette singularité à tous les niveaux, il ne suffit pas de rajouter à la première version des développements de la méthode une simple projection d'un jeu de variables sur un autre : il s'agit bien de redéterminer et de reprogrammer l'ensemble des équations de la dynamique en éléments non singuliers en excentricité.

Les éléments non singuliers en excentricité ont en effet, au voisinage des excentricités nulles, une dynamique bien spécifique. De plus, l'intégration analytique des équations différentielles vérifiées par C et S est complexe, ne serait-ce que parce que l'élément métrique e et l'élément angulaire ω sont maintenant mixés dans les éléments que j'utilise ici.

L'ensemble de cette dynamique est illustré dans le chapitre sur le filtrage des observations. Ce chapitre développe l'indispensable stratégie d'élimination des courtes périodes dans les orbites des satellites, ajustées sur les mesures, de manière à obtenir des «observations» compatibles avec les éléments générés, avec le modèle théorique, dans le programme CODIOR. Cette stratégie est complètement indépendante de l'approche semi-analytique développée pour le modèle moyen ; elle constitue, à elle seule, une autre étape incontournable dans la théorie du mouvement moyen. Elle se fonde sur une intégration analytique des équations de Lagrange, intégration réalisée explicitement en éléments non singuliers en excentricité.

La pertinence de la méthode de centrage

Sur le plan de la géodynamique et de l'analyse de missions spatiales, la méthode de centrage permet de mettre en évidence, directement sur les éléments moyens, des effets faibles mais cumulatifs, et ce sur plusieurs années éventuellement. Elle permet aussi l'estimation de paramètres avec une précision supérieure à celle atteinte avec le cumul d'arcs courts, car de la même manière qu'une droite est d'autant mieux déterminée que les deux points qui la définissent sont éloignés l'un de l'autre, la méthode permet de prendre en compte des observations sur une période très longue (et ce même s'il y a des «trous» dans les observations entre les dates de début et de fin d'arcs).

Tous les signaux orbitaux à long terme peuvent ainsi être étudiés, que ce soit dans un but géodynamique ou dans celui de l'analyse stratégique d'une trajectoire pour une future mission spatiale. Il ne faut pas oublier non plus la possibilité de calculer simultanément les trajectoires d'un grand nombre de corps célestes ou spatiaux (constellations de satellites de télécommunication, débris spatiaux, ...) puisque le pas d'intégration utilisé est très grand.

La méthode, à cause du filtrage qu'elle impose, permet certes d'ajuster un nombre beaucoup plus limité de paramètres que les méthodes purement numériques. Mais il ne faudrait pas penser pour autant que c'est un inconvénient majeur : la restitution d'orbite dans CODIOR ne fait ajuster qu'un seul jeu de conditions initiales par arc long, ce qui assure une description continue de l'évolution de chaque variable sur la période considérée³. Et le signal à interpréter s'en trouve théoriquement beaucoup plus pur.

³alors que le cumul des arcs courts dans les méthodes purement numériques fait ajuster autant de conditions initiales qu'il y a d'arcs courts à cumuler.

La géodynamique globale

Dans la plupart des méthodes traditionnelles, c'est grâce à des arcs construits sur quelques jours que sont déterminés, par méthodes inverses, un certain nombre de paramètres géodynamiques : coefficients du champ de gravité, avec parties statique et lentement variable, coefficients de marées, ...

Ces paramètres correspondent à des phénomènes géodynamiques aux périodes caractéristiques qui couvrent un large spectre temporel. Pour le champ de gravité par exemple, les échelles de temps mises en jeu vont de quelques milliers d'années (rebond post-glaciaire) à quelques jours voire quelques heures (phénomènes d'origine atmosphérique). La modélisation de ces effets fait ainsi appel à des coefficients qui peuvent ou non dépendre du temps : si la marée océanique à 18,6 ans est caractérisée par une amplitude supposée fixe dans le temps, l'aplatissement dynamique de la Terre, J_2 , comporte quant à lui une partie statique, une partie séculaire (qui correspond au rebond post-glaciaire), des variations saisonnières, ...

Parallèlement, l'amélioration de la précision des mesures de positions a permis d'augmenter considérablement le nombre de paramètres géodynamiques constituant les modèles, et donc d'augmenter la résolution spatiale de la description de la forme de la Terre et de son fonctionnement à grandes et moyennes échelles.

Aujourd'hui se pose la question de la cohérence de la détermination de l'ensemble de ces paramètres, que ce soit sur des échelles de temps courtes ou longues, à des résolutions spatiales faibles ou élevées. Comment s'assurer, par exemple, que des paramètres empiriques d'orbite ne viennent pas dégrader la n -ième décimale des coefficients du champ de gravité censée être améliorée par les missions spatiales les plus récentes ? Cette cohérence reste à établir, même si les solutions apportées au fil du temps par les différents groupes de géodésie spatiale (on peut citer les modèles successifs de champ de gravité : EGM96 ([Lemoine *et al.*, 1998]), GRIM4, GRIM5 [Biancale *et al.*, 2000], puis maintenant EIGEN, ...) n'ont pas cessé de progresser. Car chaque difficulté peut être surmontée : si certains phénomènes géodynamiques provoquent, par exemple, des effets sensiblement similaires sur les orbites, l'utilisation non pas d'un seul satellite, mais d'une constellation entière - aux inclinaisons par rapport à l'équateur et aux altitudes largement différentes (figure 4) - assure une bonne décorrélation des paramètres.

Plan de l'étude

Je propose ainsi de diviser l'étude en deux parties principales.

La première partie présente le problème «direct». Il explicite la construction du système différentiel moyen d'un satellite artificiel à orbite (quasi-)circulaire, ainsi que la transformation des données osculatrices pour générer des observations d'une nature comparable aux éléments moyens intégrés dans CODIOR.

La deuxième partie présente le problème «inverse», et est ainsi dédiée à la restitution d'orbite. Elle détaille l'estimation de paramètres géodynamiques dans le cadre du mouvement moyen. L'application de la méthode à des satellites placés sur des orbites différentes, à la fois en altitude et en inclinaison, replace l'ensemble de l'étude dans le contexte de l'utilisation

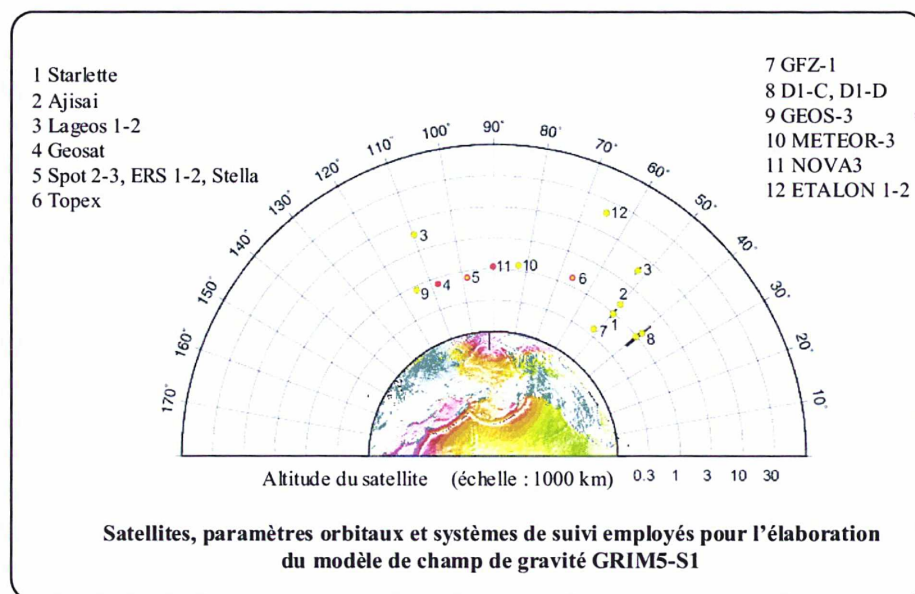


FIG. 4 – Une constellation de satellites géodésiques.

L'utilisation de satellites aux altitudes et aux inclinaisons très différentes assure une bonne décorrélation des paramètres ajustés. Document GRGS.

d'un ensemble de satellites géodésiques. Elle souligne ensuite l'importance de disposer d'un modèle de forces non gravitationnelles suffisamment complet pour permettre l'estimation de coefficients géodynamiques avec une exactitude pertinente. Cette estimation est réalisée dans une troisième sous-partie.

Une troisième partie est constituée par «Le Nouveau Chapitre de la thèse». C'est la deuxième année que cette expérience se déroule, sous l'égide de l'Association Bernard Grégory. Cela a été pour moi l'occasion de mener une réflexion sur la manière dont ces trois années, vues en tant que première expérience professionnelle, ont été gérées. En particulier, j'essaie de synthétiser les enseignements que je tire de ces trois années sur l'apprentissage du métier de chercheur.

La conclusion et les annexes, où je rassemble un certain nombre de formules qui auraient hâché le discours, terminent l'étude.

Première partie

La théorie du mouvement moyen pour les orbites
quasi-circulaires

Jeux de variables, jeux d'équations

Le mouvement du satellite artificiel est décrit par un système d'équations différentielles, qui fait appel au modèle qui décrit l'ensemble des forces (gravitationnelles \vec{F}_G et non gravitationnelles \vec{F}_{NG}) subies par le satellite. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en repère géocentrique :

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} + \vec{F}_G + \vec{F}_{NG} \end{array} \right. \quad (1)$$

où \vec{r} est le vecteur géocentrique Terre-satellite, et μ le produit de la constante gravitationnelle par la masse de la Terre.

De l'équation différentielle (1) du second ordre, on déduit un système de six équations différentielles du premier ordre. Les calculs d'orbite classiques utilisent les coordonnées rectangulaires du satellite (3 équations pour la position, 3 équations pour la vitesse). Ces coordonnées sont certes non singulières mais rendent impossible toute définition dynamique du mouvement moyen. C'est une première justification pour l'emploi d'éléments orbitaux. Une deuxième est l'étude plus aisée des signaux engendrés par les perturbations sur les orbites.

Plusieurs critères doivent être pris en compte pour définir le jeu de variables qui sera le mieux adapté aux études de dynamique orbitale des satellites à orbites quasi-circulaires : parmi ceux-ci, la simplicité des expressions des équations à intégrer.

Dans toute l'étude, a , e , i , Ω , ω , M , désignent, ainsi que je l'ai déjà dit, les éléments orbitaux classiques. Pour des raisons «historiques», j'ai aussi été amené à utiliser les éléments de Delaunay définis par : $L = \sqrt{\mu a}$, $G = L\sqrt{1 - e^2}$ et $H = G \cos i$ pour les éléments métriques, $l = M$, $g = \omega$, $h = \Omega$ pour les éléments angulaires.

En fait, dans le jeu des six éléments orbitaux classiques, seule la paire (e, ω) n'est pas adaptée à la description des orbites quasi-circulaires, car l'argument du périégée ω (noté g sous forme canonique) devient indéfini lorsqu'on se rapproche du pôle ($e = 0$).

En revanche, les coordonnées du type rectangulaire ($C = e \cos \omega$, $S = e \sin \omega$) restent, elles, bien définies. De plus, l'addition de l'anomalie moyenne M (l sous notation canonique) et de l'argument du périégée ω (on définit ainsi la longitude moyenne $\lambda = \omega + l$) élimine l'occurrence de divisions par l'excentricité.

Les variables (C, S, λ) présentent l'avantage de rester proches des éléments orbitaux classiques. Elles ne sont cependant pas canoniques, ce qui aurait permis de rendre l'expression des équations de la dynamique très simples.

Des variables canoniques non singulières ont été introduites par Poincaré [Thiry, 1970, pp157-158] :

$$\left| \begin{array}{l} X_1 = L \\ X_2 = \sqrt{2(L-G)} \cos g \\ X_3 = H \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = l + g \\ x_2 = -\sqrt{2(L-G)} \sin g \\ x_3 = h \end{array} \right|$$

La simplification n'est qu'apparente, car :

- ces variables sont suffisamment différentes des éléments orbitaux classiques pour rendre difficile l'interprétation géodynamique des perturbations calculées ;
- pour l'intégration numérique, il faudrait développer la fonction perturbatrice par rapport à ces variables, ce qui peut se révéler très complexe ;
- les fonctions intervenant dans la dynamique des satellites s'écrivent beaucoup plus naturellement avec les variables (e, ω) .

Les éléments non singuliers en excentricité que j'ai finalement utilisés constituent un bon compromis entre facilité de manipulation des expressions non singulières, et proximité par rapport aux variables du mouvement elliptique très utilisées en géodésie spatiale $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$:

$$\left| \begin{array}{l} L \\ C \\ H \end{array} \right| = e \cos \omega \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = \omega + M \\ S = e \sin \omega \\ h \end{array} \right|$$

Il a fallu réécrire les équations aux perturbations, puisqu'elles sont exprimées dans des variables d'utilisation en général peu courantes :

- les équations de Gauss tout d'abord, où intervient l'équation de Kepler exprimée en fonction de $\psi = \omega + u$ (u désigne l'anomalie excentrique). Les expressions sont plus complexes qu'avec les éléments orbitaux traditionnels. Je m'attache néanmoins à les exprimer en fonction de quantités déduites du problème des deux corps, comme $e \cos u$ (noté ν) et $e \sin u$ (noté ξ),
- les équations de Lagrange ensuite, avec une attention particulière sur le calcul des dérivées partielles, puisque le jeu retenu n'est pas constitué de variables indépendantes (H est fonction de L, C, S).

On trouvera dans l'annexe C les différentes équations de la dynamique.

J'ai en fait été amené à manipuler différents jeux de variables :

1. les éléments képlériens traditionnels pour leur côté pratique,
2. les variables canoniques de Delaunay (L, G, H, l, g, h) , utilisées par [Métris, 1991],
3. les éléments non singuliers $(a, C, i, \Omega, S, \lambda)$,
4. le jeu mixte (L, C, H, λ, S, h) permettant de conserver certaines des expressions déjà utilisées en variables de Delaunay.

Les méfaits et bienfaits des singularités

«La singularité fournit presque toujours un indice.
Plus un crime est banal et sans caractéristique,
plus il est difficile d'en découvrir l'auteur»
Le mystère du Val Boscombe

La transformation géométrique entre les coordonnées de type polaire (e, ω) et celles de type rectangulaire (C, S) est très bien définie, même pour des excentricités très petites. En particulier, il est tout à fait possible de définir correctement l'argument du périhélie à partir de C et S . Il n'y a donc aucun inconvénient à formuler une théorie analytique dans un jeu de variables plutôt que dans un autre, si l'on ne s'intéresse qu'à l'existence, au sens mathématique, de ces jeux.

D'un point de vue dynamique, la situation est tout à fait différente. Il est bien connu qu'il vaut mieux décrire un mouvement à l'aide de paramètres non singuliers (de type rectangulaire comme les positions et les vitesses), surtout quand on se situe justement au voisinage de singularités.

Les tables et graphes qui suivent illustrent cela. Si l'on se situe loin de singularités, les différences entre deux intégrations numériques d'un même système différentiel exprimé dans des variables différentes met en évidence les propriétés de l'intégrateur. C'est le cas de STARLETTE dans la figure 5.

Pour STELLA au contraire, l'excentricité est suffisamment petite pour entraîner la présence de petits diviseurs dans les équations de Lagrange exprimées en éléments orbitaux classiques. La figure 6 est une illustration de l'influence de ces petits diviseurs. Avec des équations exprimées en éléments non singuliers, on retrouve le niveau de stabilité des algorithmes d'intégration numérique. Voir figure 7. À noter que si les équations de Lagrange exprimées en éléments orbitaux ne contiennent des divisions par e que pour les éléments e, ω, M , c'est l'ensemble du système différentiel qui est déstabilisé par ces divisions. La table 1 le montre clairement, à l'aide d'une quantité statistique que l'on peut assimiler à χ^2 .

Utilisation d'éléments non singuliers dans la littérature

De nombreux auteurs ont déjà manipulé dans leurs travaux des éléments non singuliers, mais la complexité de leur définition, et la difficulté à manipuler les équations qu'ils vérifient, rendent leur utilisation beaucoup moins courante que les éléments képlériens bien connus. C'est pourtant dans ces jeux de variables, dits *universels* s'ils ne contiennent plus aucune singularité, que résident les futurs progrès des théories analytiques, ainsi que le souligne [Wnuk, 1999].

On trouve les équations de Lagrange formulées dans de tels éléments universels dans [Giacaglia, 1977], [Nacozy and Dallas, 1977], [Wytrzyszczak, 1986]. [Wnuk, 1988] les a même intégrées, mais utilise l'hypothèse d'une variation séculaire du périhélie ω due à J_2 , hypothèse certainement discutable (partie 2.2). On peut aussi mentionner les travaux de P. Bretagnon

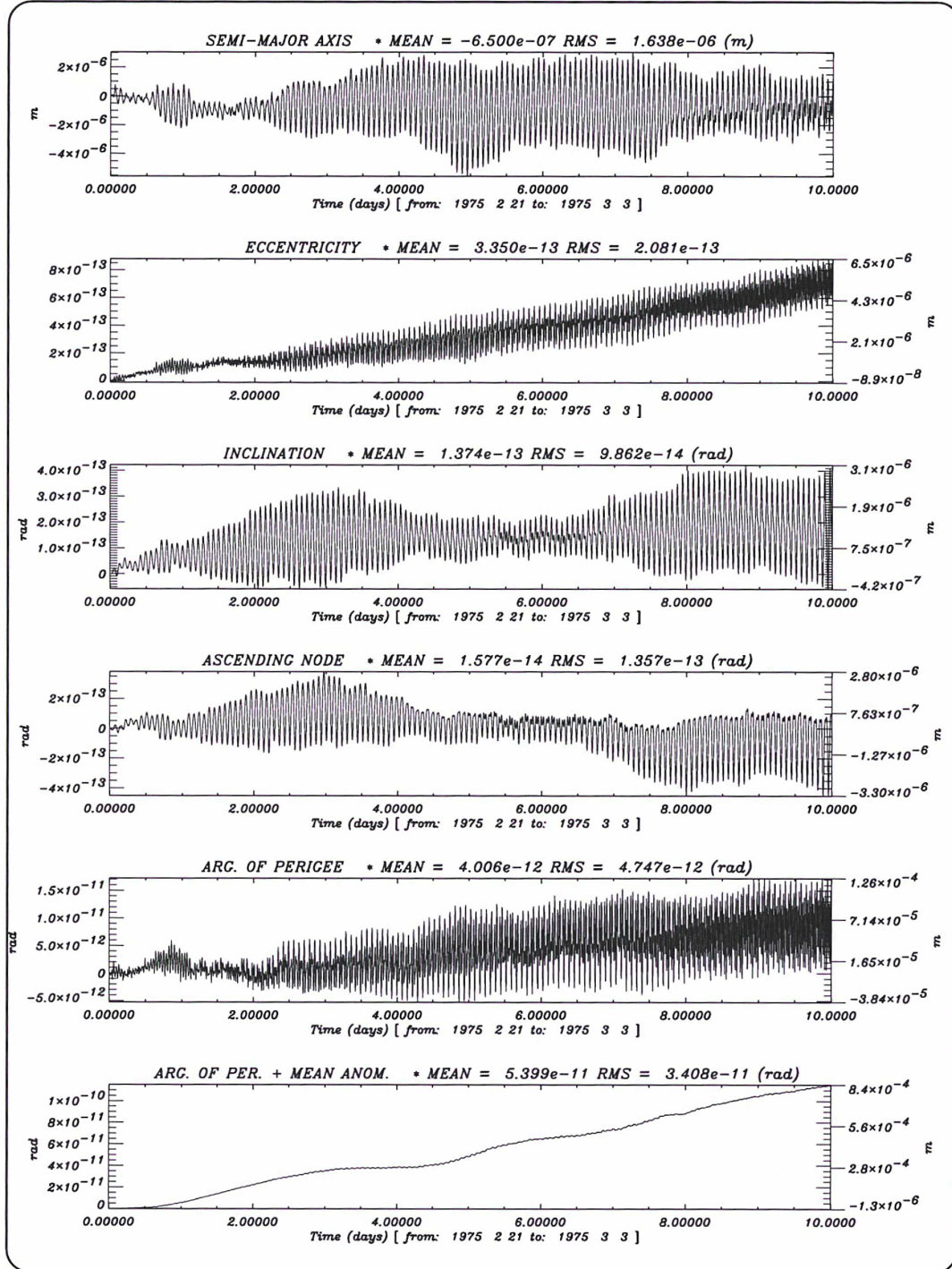


FIG. 5 – Evaluation de l'intégration numérique sur STARLETTE. Différence sur 10 jours entre une orbite intégrée en éléments orbitaux et une orbite intégrée en coordonnées rectangulaires. Le potentiel gravitationnel perturbateur est développé jusqu'aux degré et ordre 20. Le pas d'intégration est de 30 secondes.

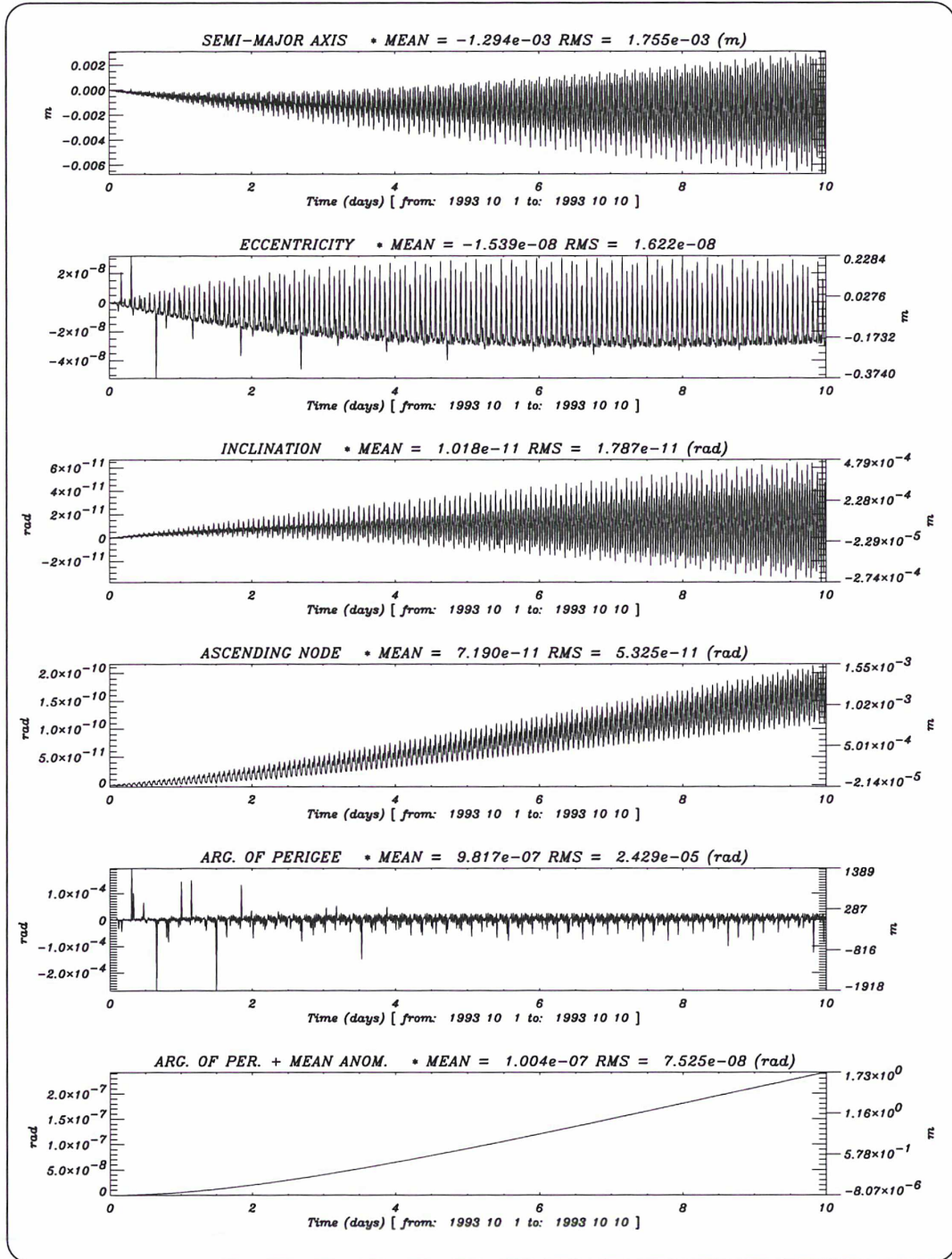


FIG. 6 – Evaluation de l'intégration numérique sur STELLA (éléments orbitaux).

Différence sur 10 jours entre une orbite intégrée en éléments orbitaux et une orbite intégrée en coordonnées rectangulaires. Le potentiel gravitationnel perturbateur est développé jusqu'aux degré et ordre 20. Pas d'intégration de 30 secondes.

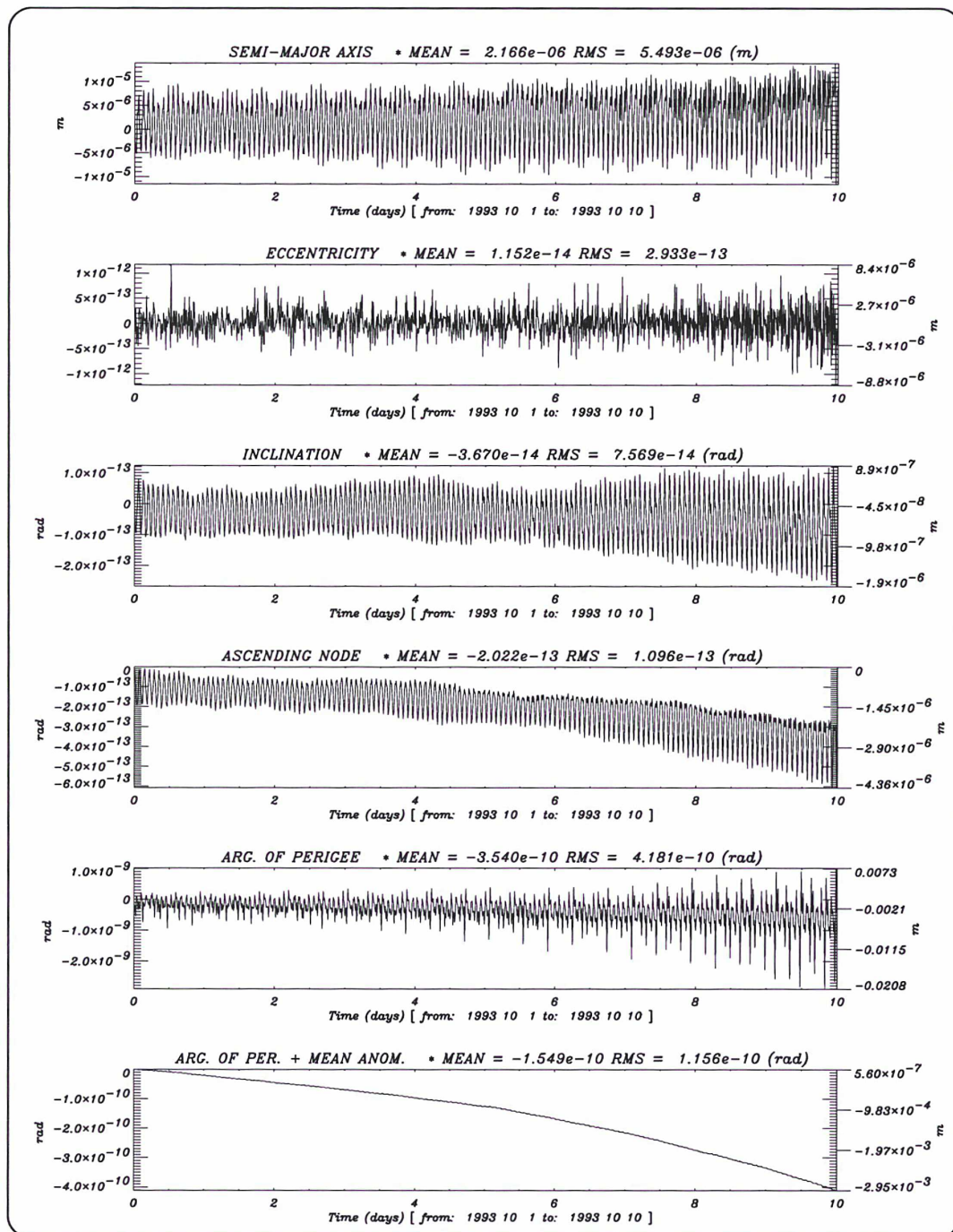


FIG. 7 – Evaluation de l'intégration numérique sur STELLA (éléments non singuliers).

Différence sur 10 jours entre une orbite intégrée en éléments non singuliers et une orbite intégrée en coordonnées rectangulaires. Le potentiel gravitationnel perturbateur est développé jusqu'au degré et ordre 20. Pas d'intégration de 30 secondes.

TAB. 1 – STELLA : indication statistique des cumuls d’erreurs dues à l’intégration numérique.

Potentiel J_2 à J_{20} . Pas d’intégration : 30 secondes. Sur 10 jours, on compare les n points x'_i intégrés avec des équations exprimées en éléments orbitaux ou en éléments non singuliers, aux n points x_i intégrés avec des équations exprimées en coordonnées rectangulaires, considérées comme référence. χ^2 est défini par : $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x'_i - x_i)^2}{|x_i|}$. ‘Corr.’

désigne le coefficient de corrélation, qui ne permet pas, ici (mais dans la suite de l’étude oui), de caractériser la qualité des intégrations.

| $a_0 = 7169 \text{ km}, e_0 = 0.1202 \cdot 10^{-2}, i_0 = 98.66^\circ$ | | | | | |
|--|-------|------------------------|-------|-------------------------|-------|
| | | Eléments orbitaux | | Eléments non singuliers | |
| | | χ^2 | Corr. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $0.158 \cdot 10^{-8}$ | 1.000 | $0.116 \cdot 10^{-13}$ | 1.000 |
| e | | $0.128 \cdot 10^{-8}$ | 1.000 | $0.281 \cdot 10^{-18}$ | 1.000 |
| i | (rad) | $0.588 \cdot 10^{-18}$ | 1.000 | $0.985 \cdot 10^{-23}$ | 1.000 |
| Ω | (rad) | $0.310 \cdot 10^{-17}$ | 1.000 | $0.205 \cdot 10^{-22}$ | 1.000 |
| ω | (rad) | $0.186 \cdot 10^{-5}$ | 1.000 | $0.773 \cdot 10^{-15}$ | 1.000 |
| λ | (rad) | $0.645 \cdot 10^{-6}$ | 1.000 | $0.269 \cdot 10^{-15}$ | 1.000 |

(voir [Bretagnon and Francou, 1988] par exemple), qui utilise pour les potentiels de troisièmes corps, et dans un cas planétaire, $k = e \cos(\omega + \Omega)$ et $h = e \sin(\omega + \Omega)$, éléments proches de C et S .

Deux types de théories pour une mécanique spatiale spécifique

Pourquoi spécifique ? Parce qu’elle repose sur l’élimination de la variable rapide, et ce, à la fois dans le système des équations de la dynamique (définissant ainsi un *modèle moyen*), et dans les orbites ajustées sur les mesures (définissant là la notion d’*éléments moyens observés*).

L’élimination de la variable rapide des équations de la dynamique

La méthode consiste à éliminer analytiquement la dépendance des équations du mouvement avec l’anomalie moyenne.

Cette élimination sera effectuée, quand c’est possible, dans un cadre hamiltonien. Même si toutes les perturbations ne peuvent pas s’écrire sous cette forme, le formalisme hamiltonien permet de ne raisonner que sur une seule grandeur scalaire, l’hamiltonien, au lieu de trois lorsque l’on considère individuellement les composantes de chaque force.

Ce cadre hamiltonien ne peut pas s’appliquer pour toutes les perturbations, et il faut alors renoncer au « confort » de calcul qui lui est sous-jacent, pour se lancer avec courage dans l’écriture d’équations perturbation par perturbation.

C’est donc une méthode analytique qui a été retenue pour éliminer l’anomalie moyenne des équations du mouvement. Bien qu’il existe des moyens numériques pour réaliser approxi-

mativement une telle opération sur le second membre des équations de la dynamique (par quadrature numérique par exemple), la transformation analytique permet d'allier précision et rapidité de calcul au cours de l'intégration des nouvelles équations obtenues.

L'élimination de la variables rapide des observations

Il faut aussi pouvoir déduire, à partir d'observations réelles (mesures de distances), des éléments moyens «observés». Pour cela, des arcs les plus courts possibles sont construits par intégration numérique ajustée sur ces données, satellite par satellite. On obtient des orbites osculatrices décrites en éléments orbitaux, qu'il faut filtrer pour éliminer toutes les courtes périodes. Ce filtrage est analytico-numérique, la partie analytique fournissant une expression explicite et littérale des courtes périodes.

De plus, la formulation de ces courtes périodes a été l'occasion de mettre en évidence une caractéristique intéressante sur le comportement des orbites, même celles dont l'excentricité n'est pas petite : l'argument du périhélie ne circule pas forcément ! C'est une des applications de la formulation en éléments non singuliers (chapitre 2) : Sherlock Holmes, comme d'habitude, avait raison...

La cohérence de l'approche

Cette mécanique spatiale est spécifique aussi parce qu'il faut, dans les deux démarches totalement indépendantes, aboutir à une même et unique représentation du mouvement moyen : à partir du modèle, et à partir des observations. C'est pourquoi il a fallu aborder une gamme de problèmes très généraux : si le modèle moyen, *in fine*, est certes spécifique, les expressions, les calculs, sont applicables partout en mécanique céleste.

Le résultat est la définition du *mouvement centré*, qui dépend du jeu de variables dans lequel il est construit. Ce n'est pas un mouvement observable, mais il représente en moyenne la dynamique de l'ensemble d'une orbite.

Le «mouvement centré» est ainsi le mouvement décrit par 6 paramètres orbitaux dans lequel toutes les variations à courtes périodes ont été retirées, du modèle comme des observations. Il est très proche de ce qui est habituellement appelé «mouvement moyen» ; la différence provient du fait que les éléments centrés que nous utilisons contiennent, par construction, toutes les variations à longues périodes, tandis qu'une partie de ces longues périodes est souvent perdue avec des variables moyennes.

On peut avoir une idée intuitive de ce que sont les éléments centrés en faisant la moyenne géométrique des éléments osculateurs d'une orbite.

De manière complémentaire, pour illustrer ce que sont les éléments moyens, on peut dire que ce sont, en première approximation, les éléments définis à la première itération de la solution de Kaula aux équations de Lagrange [Kaula, 1966]. Ce sont donc celles qui servent de base à la deuxième itération, et en particulier au calcul des courtes périodes correctives à l'orbite précessante.

La différence entre éléments moyens et éléments centrés n'est de l'ordre que de quelques mètres, mais doit absolument être gérée dans le logiciel pour rendre compte de la précision des observations.

Etat d'esprit de l'étude

La difficulté principale réside en la présence de petits diviseurs dans toutes les équations intervenant dans la méthode, ce qui mène à de nombreuses aberrations lorsqu'on s'intéresse à cette classe d'orbites, même en utilisant un calcul numérique avec 14 chiffres significatifs.

Pour éliminer réellement, et à tous les niveaux, la singularité en excentricité, il ne suffit pas de rajouter à une formulation de la méthode, comme je l'ai déjà dit, une simple projection d'un jeu de variables sur un autre : s'il est justifié de déduire de $r = a(1 - e \cos u)$ une expression de Δr en fonction de Δa , Δe et Δu , on ne peut pas affirmer pour autant, d'emblée, que cette expression est non singulière, simplement parce qu'il n'y a pas de divisions par l'excentricité dans le résultat final. Il s'agit donc bien de redéterminer l'ensemble des équations de la dynamique en éléments non singuliers en excentricité : problème des deux corps, sensibilités, équations du mouvement, calculs des seconds membres de ces équations et de leurs dérivées partielles, et des changements de variables à partir des hamiltoniens et des générateurs exprimés en variables de Delaunay.

Chapitre 1

Construction des équations moyennes de la dynamique

Montrons maintenant comment construire et utiliser les éléments moyens, déduits de l'intégration des équations moyennes, comme intermédiaire à l'obtention des éléments centrés. Les équations moyennes sont obtenues grâce à l'élimination de la variable rapide des équations instantanées.

L'intégralité de la méthode utilisée pour éliminer les courtes périodes dans les équations du mouvement est formulée en éléments non singuliers en excentricité. Ceci évite la présence de petits diviseurs dans les équations différentielles moyennes, source d'instabilités fortes lors de l'intégration numérique de ces équations. De plus, il est indispensable d'assurer la cohérence entre quantités calculées (à travers le modèle d'orbites moyennes) et quantités observées, ce qui impose l'utilisation d'un seul et même jeu d'éléments, comme nous le verrons dans le prochain chapitre.

Le choix retenu est : (L, C, H, λ, S, h) .

Il s'agit ainsi d'obtenir une formulation explicite des seconds membres moyens des équations de la dynamique, pour chacune des perturbations qui constituent le modèle, *i.e.* les quantités :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dL'}{dt} = \\ \frac{dC'}{dt} = \\ \frac{dH'}{dt} = \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d\lambda'}{dt} = \\ \frac{dS'}{dt} = \\ \frac{d\Omega'}{dt} = \end{array} \right|$$

Les variables $(L', C', H', \lambda', S', \Omega')$ sont les variables moyennes, celles-là mêmes qui, une fois les équations différentielles qu'elles vérifient intégrées, permettent de représenter le mouvement sur de longues périodes de temps. Ces équations différentielles sont déduites des équations différentielles qu'on peut qualifier d'*instantanées* $\frac{dL}{dt}, \frac{dC}{dt}, \frac{dH}{dt}, \frac{d\lambda}{dt}, \frac{dS}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}$, à condition de définir une période de coupure entre les *courtes* et les *longues* périodes. Les variables paramétrant le mouvement sont ainsi supposées être développables en série de Fourier du temps.

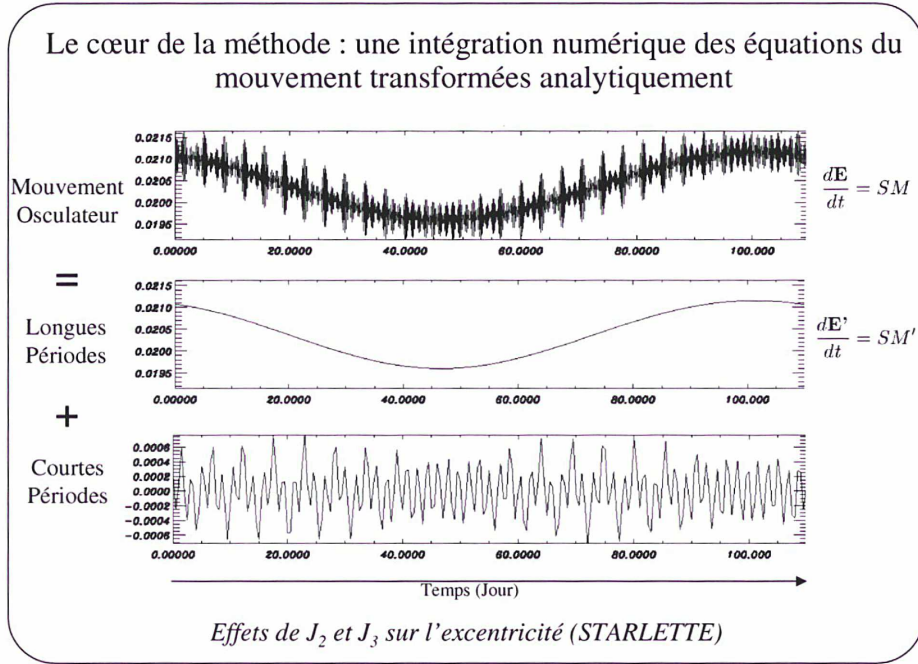


FIG. 1.1 – Principe de la méthode.

Si le mouvement orbital est décrit dans un jeu d'éléments orbitaux, on peut séparer les longues périodes des courtes périodes. Le but est d'obtenir une expression explicite du système différentiel affranchi de toutes les variations à courtes périodes : à partir du second membre SM des équations osculatrices de la dynamique, il faut déduire le second membre moyen SM' . C'est ce second membre moyen qui est intégré numériquement.

Nous verrons plus loin qu'il n'y a *a priori* aucune raison pour que les 6 éléments moyens $\mathbf{E}'(t)$ déduits des équations différentielles qu'ils vérifient soient justement les éléments centrés $\bar{\mathbf{E}}(t)$ qui décrivent le mouvement à longues périodes.

1.1 Les outils d'élimination de la variable rapide

1.1.1 Equations de Lagrange, équations de Gauss

Equations de Gauss moyennes

Une force perturbatrice \vec{F} étant donnée, on peut la décomposer dans un certain repère lié au satellite, par exemple le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$ défini par la position radiale du satellite (défini dans la partie C.1.2).

Dans ce repère, on note :

$$\vec{F} = R\vec{e}_r + S\vec{e}_s + W\vec{e}_w$$

Les équations de Gauss prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{dL}{dt} \\ \frac{dC}{dt} \\ \frac{dH}{dt} \\ \frac{d\lambda}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Supprimer la dépendance de ces équations avec la variable rapide λ consiste à prendre la valeur moyenne de chaque dérivée sur une révolution du satellite. On définit dans ce cas l'opération $\langle \dots \rangle_\lambda$ par

$$\langle \dots \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\lambda \quad (1.2)$$

ce qui permet de définir les variables moyennes par :

$$\begin{pmatrix} \frac{dL'}{dt} \\ \frac{dC'}{dt} \\ \frac{dH'}{dt} \\ \frac{d\lambda'}{dt} \\ \frac{dS'}{dt} \\ \frac{d\Omega'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_\lambda \\ \left\langle \frac{dC}{dt} \right\rangle_\lambda \\ \left\langle \frac{dH}{dt} \right\rangle_\lambda \\ \left\langle \frac{d\lambda}{dt} \right\rangle_\lambda \\ \left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle_\lambda \\ \left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_\lambda \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Si les composantes \mathbf{R} , \mathbf{S} et \mathbf{W} ne sont pas affectées par des courtes périodes, il suffit de calculer les valeurs moyennes des composantes de la matrice 6×3 (voir le détail de ce calcul en C.3.1 : les formules (C.29) et (C.35) donnent ces valeurs moyennes exprimées en éléments orbitaux, tandis que les formules (C.31) et (C.36) donnent les analogues en éléments non singuliers en excentricité). Cette situation se produit par exemple lorsque l'on ajuste une force empirique moyenne (c'est donc une force constante) le long de la trajectoire de LAGEOS, en

lieu et place de la force de freinage atmosphérique.

Si les composantes \mathbf{R} , \mathbf{S} et \mathbf{W} sont affectées par des courtes périodes (*i.e.* si elles contiennent des variables rapides : λ , $\omega + v$, ...), le calcul des équations de Gauss moyennes nécessite une expression explicite des composantes des forces, car c'est alors l'ensemble du produit matriciel qu'il faut moyenner. Le principe est beaucoup plus lourd, ainsi que l'illustre le cas des corrections relativistes moyennes et des forces d'inertie moyennes traitées ci-après.

Equations de Lagrange moyennes

Si la force perturbatrice dérive d'un potentiel U , le principe est beaucoup plus simple puisqu'on peut ne travailler que sur cette seule grandeur scalaire.

Les équations de la dynamique sont les équations de Lagrange, du type :

$$\begin{pmatrix} \frac{dL}{dt} \\ \frac{dC}{dt} \\ \frac{dH}{dt} \\ \frac{d\lambda}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \\ \frac{dh}{dt} \end{pmatrix} = M_{\text{dyn}}(L, C, S, H) \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial L} \\ \frac{\partial U}{\partial C} \\ \frac{\partial U}{\partial H} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial U}{\partial S} \\ \frac{\partial U}{\partial h} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où $M_{\text{dyn}}(L, C, S, H)$ est une matrice 6×6 qui est indépendante de la variable rapide λ du satellite.

En définissant le potentiel moyen $\langle U \rangle_\lambda$ par

$$\langle U \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\lambda \quad (1.5)$$

on peut définir les équations moyennes de Lagrange correspondantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{dL'}{dt} \\ \frac{dC'}{dt} \\ \frac{dH'}{dt} \\ \frac{d\lambda'}{dt} \\ \frac{dS'}{dt} \\ \frac{dh'}{dt} \end{pmatrix} = M_{\text{dyn}}(L', C', S', H') \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'} \\ \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial C'} \\ \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial H'} \\ \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \lambda'} \\ \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial S'} \\ \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial h'} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Remarques :

- la dépendance du potentiel moyen avec les variables moyennes est implicite,
- on a en particulier $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \lambda'} = 0$, ce qui entraîne $\frac{dL'}{dt} = 0$: au premier ordre, les perturbations gravitationnelles qui dérivent d'un potentiel n'entraînent aucune variation du demi-grand axe.

Ce formalisme est très pratique, et n'est pas trop lourd à mettre en œuvre. En revanche, il n'est pas adapté à la prise en compte des forces moyennes les plus importantes, car il ne permet pas de prendre en compte les *couplages* entre les forces. Voir ci-après. Le cadre hamiltonien permet de résoudre cette difficulté.

1.1.2 La pertinence du cadre hamiltonien

Les fonctions scalaires considérées ici sont les hamiltoniens \mathcal{H} des forces perturbatrices, qui sont les opposés des potentiels. De la même manière que précédemment, on peut donc définir la notion d'*hamiltonien moyen* \mathcal{H}' .

Développement en fonction d'un petit paramètre

Considérons un mouvement orbital décrit par 3 variables angulaires $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et 3 variables métriques $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ (par exemple les variables canoniques de Delaunay (l, g, h, L, G, H)).

Quelle que soit la fonction perturbatrice considérée, le système différentiel vérifié par les variables (\mathbf{v}, \mathbf{V}) peut se mettre sous la forme (avec éventuellement des paramètres supplémentaires) :

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{V}, \epsilon, t) \\ \frac{dV_i}{dt} = \psi(\mathbf{v}, \mathbf{V}, \epsilon, t) \end{cases} \quad (1.7)$$

où ϵ est un petit paramètre suffisamment voisin de 0.

Quand $\epsilon = 0$, le système est intégrable : c'est la solution képlérienne. Les solutions sont alors notées $\mathbf{v}_0(t)$ et $\mathbf{V}_0(t)$.

Poincaré a montré l'existence de solutions à ce système, sous réserve de conditions sur φ et ψ vérifiées ici, solutions qui sont développables en séries entières de ϵ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, \epsilon) &= v_0(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} v_n(t) \\ \mathbf{V}(t, \epsilon) &= V_0(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} V_n(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pour les forces dérivant d'un potentiel, les fonctions φ et ψ peuvent s'exprimer en fonction d'un hamiltonien \mathcal{H} , fonction des variables \mathbf{v} , \mathbf{V} , du temps t et du paramètre ϵ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(v, V, \epsilon, t) \tag{1.9}$$

Si l'on décompose l'hamiltonien en fonction des puissances de ϵ , et si l'on écrit ϵ en fonction des paramètres physiques qui caractérisent les perturbations à prendre en compte, on pourra disposer d'autant de sous-systèmes différentiels qu'il y a de puissances de ϵ : on pourra raisonner ordre par ordre.

La manière la plus naturelle d'ordonner toutes les perturbations présentes dans l'hamiltonien \mathcal{H} est de classer ces perturbations en fonction de la valeur des paramètres qui les caractérisent. On peut de cette manière définir l'*ordre d'une perturbation*, en référence à un développement en série de Taylor du petit paramètre ϵ qui, dans le cas présent, est l'aplatissement dynamique J_2 (de l'ordre de 10^{-3}).

Crochets de Poisson

Soit ϕ une fonction quelconque développable en série de Taylor :

$$\phi(v_i, V_i, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \left(\frac{d^n \phi}{d\epsilon^n}(v_i, V_i) \right) \Big|_{\epsilon=0} \tag{1.10}$$

La dérivée totale de ϕ par rapport à ϵ s'écrit :

$$\frac{d\phi}{d\epsilon} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial v_k} \frac{dv_k}{d\epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial V_k} \frac{dV_k}{d\epsilon} \right)$$

La méthode de centrage utilise l'algorithme de [Deprit, 1969] pour construire l'hamiltonien moyen à partir de l'hamiltonien initial. Cet algorithme a recours à une fonction génératrice $W(v_i, V_i, \epsilon)$ qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_k}{d\epsilon} \\ \frac{dV_k}{d\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial V_k} \\ -\frac{\partial W}{\partial v_k} \end{pmatrix}$$

On a ainsi :

$$\frac{d\phi}{d\epsilon}(v_i, V_i, \epsilon) = \frac{\partial\phi}{\partial\epsilon} + \{\phi, W\} \quad (1.11)$$

où $\{\phi, W\}$ est appelé *crochet de Poisson* de ϕ et de W , défini par :

$$\{\phi, W\} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial\phi}{\partial v_k} \frac{\partial W}{\partial V_k} - \frac{\partial\phi}{\partial V_k} \frac{\partial W}{\partial v_k} \right) \quad (1.12)$$

Cette définition est très utile, puisqu'elle permet, d'emblée, d'établir les équations de la dynamique que l'on recherche. En effet, quelle que soit la variable E que l'on considère, canonique ou non, on a :

$$\frac{dE}{dt} = \{E, \mathcal{H}\} \quad (1.13)$$

et du point de vue des équations moyennes :

$$\frac{dE'}{dt} = \{E', \mathcal{H}'\} \quad (1.14)$$

Pour pouvoir raisonner ordre par ordre, la fonction génératrice W est également développée en puissances du petit paramètre :

$$W(v, V, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} W_n(v, V) \quad (1.15)$$

1.1.3 Hiérarchie des perturbations

On écrira donc \mathcal{H} sous la forme :

$$\mathcal{H}(v, V, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n(v, V) \quad (1.16)$$

ou, pour reprendre les notations de [Deprit, 1969] :

$$\mathcal{H}(v, V, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n^0(v, V) \quad (1.17)$$

Cette écriture ne nécessite pas d'exprimer chaque perturbation en fonction des puissances de J_2 mais implique néanmoins un classement des perturbations par ordre de grandeur (de J_2). Par exemple, J_3 ($\simeq 10^{-6}$) sera dit¹ d'ordre 2 car il est du même ordre que J_2^2 .

¹Si l'on tient vraiment à exprimer les coefficients zonaux en fonction du petit paramètre, il convient d'écrire des relations du type : $J_3 = \frac{J_2^2}{2!} \left(\frac{2J_3}{J_2^2} \right)$.

TAB. 1.1 – Classement ordre par ordre des perturbations gravitationnelles.

D'après [Métris, 1991].

| Ordre en J_2 | Nature | Coefficients |
|----------------|--|--|
| Ordre 1 | potentiel terrestre | J_2 |
| Ordre 2 | potentiel terrestre perturbations luni-solaires marées | termes J_3 à J_5 $\left(\frac{r}{r_P}\right)^n$ ($n = 2, 5$) k_2 |
| Ordre 3 | potentiel terrestre marées | termes J_6 à J_{20} k_3 |
| Ordre 4 | potentiel terrestre : autres harmoniques zonaux | J_n ($n \geq 20$) |

La table 1.1, empruntée à [Métris, 1991], classe de manière empirique les perturbations gravitationnelles par ordre (les notations relatives au troisième corps sont définies plus loin). Nous avons travaillé jusqu'à l'ordre 4, mais rien n'empêcherait de prendre en compte les perturbations d'ordres supérieurs.

La répartition, nécessaire pour raisonner ordre par ordre, est ainsi un compromis entre tous ces paramètres, compromis qui n'agit en rien sur la précision des calculs puisqu'il n'affecte pas le principe général d'élimination de l'anomalie moyenne. Il sert essentiellement à faciliter sa mise en œuvre. Néanmoins, ceci nécessite une compréhension fine des calculs analytiques, et une bonne connaissance de la dynamique orbitale, afin de calculer tous les couplages nécessaires (voir ci-après). Car il est bien évident que les amplitudes engendrées par les différents types de perturbations varient en fonction des caractéristiques des orbites ; par exemple, l'influence du potentiel de troisième corps est d'autant plus grande que le satellite est élevé.

1.1.4 Définition et obtention du mouvement moyen

Le mouvement orbital est décrit à l'aide des éléments angulaires \mathbf{v} et métriques \mathbf{V} . Ces éléments sont développables en série de Fourier. Ce développement justifie la distinction d'effets à courtes et à longues périodes sur les variables du mouvement, la période de coupure entre les deux étant la période de révolution du satellite (liée à l'anomalie moyenne).

Le but est ainsi de pouvoir définir un nouveau jeu de 6 variables $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{V}})$ au moyen d'une transformation du type

$$(\mathbf{v}, \mathbf{V}) \longmapsto (\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{V}})$$

de telle manière que les nouvelles variables contiennent exactement les longues périodes présentes dans les variables initiales (\mathbf{v}, \mathbf{V}) .

Cela revient à dire que l'on impose aux différences $\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}$ et $\bar{\mathbf{V}} - \mathbf{V}$ d'être de moyenne nulle (i.e. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots dl = 0$) par rapport à la variable rapide l , les différences $(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{V} - \bar{\mathbf{V}})$ étant les variations à courtes périodes engendrées par les différentes perturbations.

Analyse de la transformation

La transformation précédente, à laquelle on impose d'être canonique², est notée

$$(\mathbf{v}, \mathbf{V}) \longmapsto (\mathbf{v}', \mathbf{V}')$$

Cette transformation étant canonique, les nouvelles variables $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ sont caractérisées par un hamiltonien \mathcal{H}' qui s'écrit sous la forme³ :

$$\mathcal{H}'(\mathbf{v}', \mathbf{V}', \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathcal{H}_0^n(\mathbf{v}', \mathbf{V}') \quad (1.18)$$

Déterminer \mathcal{H}_0^n à chaque ordre revient à déterminer l'hamiltonien \mathcal{H}' , et donc à déterminer le système différentiel vérifié par $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$.

A chaque ordre, et c'est là une des forces de la méthode, \mathcal{H}_0^n est déterminé, de même que W_n , par une équation du type :

$$\mathcal{H}_0^n = \{\mathcal{H}_0^0, W_n\} + \Phi \quad (1.19)$$

où

$$\{\mathcal{H}_0^0, W_n\} = -\frac{\mu^2}{L'^3} \frac{\partial W_n}{\partial l'} \quad (1.20)$$

On rappelle que μ est le produit de la constante de gravitation par la masse de l'astre attracteur.

Les inconnues sont \mathcal{H}_0^n et W_n , et Φ est une fonction qui dépend des composantes de \mathcal{H}' précédemment établies et du terme \mathcal{H}_n de l'hamiltonien initial.

Puisque l'on dispose d'un degré de liberté, on impose à \mathcal{H}_0^n d'être indépendant de la variable rapide : les variables $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ sont donc des variables à longues périodes, dites variables *moyennes*.

Non unicité du mouvement moyen

Les variables moyennes $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ se déduisent de (\mathbf{v}, \mathbf{V}) par une transformation canonique engendrée par un générateur W qui se développe en puissances du petit paramètre $\epsilon = J_2$, générateur déterminé par l'équation (1.19).

Le choix de l'hamiltonien (indépendant de la variable rapide), et la relation (1.20) montrent que :

→ la dérivée partielle du générateur par rapport à la variable rapide est de moyenne nulle :

$$\left\langle \frac{\partial W_n}{\partial l'} \right\rangle_{l'} = 0 \quad (1.21)$$

²et c'est justement parce que l'on impose cette condition qu'il faut examiner si une telle transformation canonique existe bien, et ce qu'il faut faire si, comme nous allons le montrer, ce n'est pas le cas.

³bien noter, pour la clarté de la suite, que le 'n' du nouvel hamiltonien est placé en exposant.

→ le générateur est défini à une constante d'intégration près, constante qui est une fonction des longues périodes : il existe donc une infinité de mouvements moyens.

Synthèse de la transformation

La transformation est ainsi de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{v}' &= \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} T_n^{\mathbf{v}} \\ \mathbf{V} - \mathbf{V}' &= \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} T_n^{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les variables moyennes $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ telles qu'on vient de les définir satisfont-elles la contrainte imposée ?

Aux deux premiers ordres, d'après [Métris, 1991], on a :

- à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} T_1^{v_i} &= \frac{\partial W_1}{\partial V'_i} \\ T_1^{V_i} &= -\frac{\partial W_1}{\partial v'_i} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le générateur W_1 , puisqu'il est développé en excentricité, vérifie $\langle W_1 \rangle_{l'} = 0$ et on a donc bien : $\langle T_1^{\mathbf{v}} \rangle_{l'} = \langle T_1^{\mathbf{V}} \rangle_{l'} = 0$.

- à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} T_2^{v_i} &= \left(\frac{\partial W_2}{\partial V'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}, W_1 \right\} \right) \\ T_2^{V_i} &= - \left(\frac{\partial W_2}{\partial v'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}, W_1 \right\} \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \langle T_2^{v_i} \rangle_{l'} &= \left\langle \frac{\partial W_2}{\partial V'_i} \right\rangle_{l'} + \left\langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}, W_1 \right\} \right\rangle_{l'} \\ \langle T_2^{V_i} \rangle_{l'} &= - \left\langle \frac{\partial W_2}{\partial v'_i} \right\rangle_{l'} - \left\langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}, W_1 \right\} \right\rangle_{l'} \end{aligned}$$

On a bien $\left\langle \frac{\partial W_2}{\partial V'_i} \right\rangle_{l'} = 0$ et $\left\langle \frac{\partial W_2}{\partial v'_i} \right\rangle_{l'} = 0$, mais il n'en est pas de même pour la moyenne du crochet de Poisson : avec par exemple $W_1 = L' \sin l'$, on a $\left\{ \frac{\partial W_1}{\partial l'_i}, W_1 \right\} = L'$

On a donc en général :

$$\begin{aligned} \langle T_2^{\mathbf{V}} \rangle_{l'} &\neq 0 \\ \langle T_2^{\mathbf{V}} \rangle_{l'} &\neq 0 \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i \rangle_{l'} \neq 0 \\ \langle \mathbf{V}_i - \mathbf{V}'_i \rangle_{l'} \neq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Les variables moyennes $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ sont déduites du jeu initial par une transformation canonique et obéissent à un système différentiel, mais ne contiennent pas exactement toutes les longues périodes des variables initiales.

On pourrait de plus montrer qu'il n'existe aucun système hamiltonien décrivant exactement l'évolution à longues périodes des paramètres du mouvement : il n'existe pas de transformation canonique permettant d'obtenir directement les variables $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{V}})$ [Métris, 1991, pp 39-44].

1.1.5 Définition et obtention du mouvement centré

Les variables centrées $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{V}})$ s'obtiennent par un nouveau changement de variables qui cette fois n'est pas canonique [Métris, 1991] :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}' + \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}' \rangle_{l'} \\ \bar{\mathbf{V}} &= \mathbf{V}' + \langle \mathbf{V} - \mathbf{V}' \rangle_{l'} \end{aligned}$$

Ces variables vérifient bien

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \rangle_{l'} &= 0 \\ \langle \bar{\mathbf{V}} - \mathbf{V} \rangle_{l'} &= 0 \end{aligned}$$

La transformation est de la forme :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}' \rangle_{l'} &= \sum_{n \geq 2} \frac{\epsilon^n}{n!} \langle T_n^{\mathbf{V}} \rangle_{l'} \\ \langle \mathbf{V} - \mathbf{V}' \rangle_{l'} &= \sum_{n \geq 2} \frac{\epsilon^n}{n!} \langle T_n^{\mathbf{V}} \rangle_{l'} \end{aligned}$$

avec par exemple pour le premier ordre non nul (ordre 2) :

$$\begin{aligned} \langle T_2^{v_i} \rangle_{l'} &= \left\langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}, W_1 \right\} \right\rangle_{l'} \\ \langle T_2^{V_j} \rangle_{l'} &= - \left\langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}, W_1 \right\} \right\rangle_{l'} \end{aligned}$$

A l'ordre 3, la transformation est un peu plus compliquée :

$$\begin{aligned} \langle T_3^{v_i} \rangle_{\nu'} &= \left\langle \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial V_i'}, W_1 \right\} \right\rangle_{\nu'} + \left\langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V_i'}, W_2 \right\} \right\rangle_{\nu'} + \left\langle \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial V_i'} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V_i'}, W_1 \right\}, W_1 \right\} \right\rangle_{\nu'} \\ \langle T_3^{V_i} \rangle_{\nu'} &= - \left(\left\langle \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial v_i'}, W_1 \right\} \right\rangle_{\nu'} + \left\langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v_i'}, W_2 \right\} \right\rangle_{\nu'} + \left\langle \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial v_i'} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v_i'}, W_1 \right\}, W_1 \right\} \right\rangle_{\nu'} \right) \end{aligned}$$

Les calculs peuvent en fait être réalisés automatiquement puisque qu'il y a des relations simples entre les différents hamiltoniens, instantanés ou non : c'est le triangle de Lie ([Métris, 1991]).

Conclusion

Le changement de variables se met, en fait, sous la forme :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{V}) \longmapsto (\mathbf{v}', \mathbf{V}') \longmapsto (\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{V}})$$

La deuxième transformation n'est cette fois plus canonique, et il n'existe pas de système différentiel centré correspondant à ces variables centrées : les variables centrées contiennent bien toutes les longues périodes des variables initiales (\mathbf{v}, \mathbf{V}) , mais ce sont les variables moyennes $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ qui permettent d'écrire les systèmes différentiels caractérisant le mouvement moyen.

1.1.6 Développements des hamiltoniens et couplages

Lors de la construction terme à terme des hamiltoniens moyens, il convient de tenir compte d'éventuelles associations entre les paramètres géodynamiques, les *couplages*, même si c'est toujours la quantité ϵ^n , et elle seule, qui intervient dans les équations.

En effet, pour des raisons pratiques, on effectue un calcul d'hamiltonien moyen par coefficient géodynamique : à J_2 correspond un hamiltonien instantané qui est transformé pour déduire l'hamiltonien moyen correspondant. Il en est de même pour J_3 , ...

Avec une telle approche, les perturbations sont donc considérées indépendantes les unes des autres.

Mais c'est à l'ensemble des termes perturbateurs qu'il faudrait appliquer l'algorithme. En effet, supposons que l'hamiltonien d'ordre 1 comprenne 2 perturbations d'origines physiques différentes (par exemple J_2 et J_3). Dans notre cas, cela n'arrivera qu'à partir de l'ordre 2, mais cette hypothèse permet une explication plus simple. L'hamiltonien s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{H}_1^0 = \hat{\mathcal{H}}_1^0 + \tilde{\mathcal{H}}_1^0} \quad (1.26)$$

D'après l'algorithme de Deprit, le générateur de la transformation W_1 et le nouvel hamiltonien \mathcal{H}_0^1 obéissent à l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1 &= \mathcal{H}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0, W_1\} \\ &= \hat{\mathcal{H}}_1^0 + \tilde{\mathcal{H}}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0, W_1\} \end{aligned} \quad (1.27)$$

que l'on peut remplacer par le système équivalent :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\mathcal{H}}_0^1 = \hat{\mathcal{H}}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0, \hat{W}_1\} \\ \hat{\tilde{H}}_0^1 = \tilde{\mathcal{H}}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0, \tilde{W}_1\} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

avec

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{H}_0^1 = \hat{\mathcal{H}}_0^1 + \tilde{\mathcal{H}}_0^1 \\ W_1 = \hat{W}_1 + \tilde{W}_1 \end{array}} \quad (1.29)$$

Si l'on considère maintenant la transformation à l'ordre 2, on a selon [Deprit, 1969] :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^2 &= \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0, W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1, W_1\} + \{\mathcal{H}_0^0, W_2\} \\ &= \hat{\mathcal{H}}_2^0 + \tilde{\mathcal{H}}_2^0 + \{\hat{\mathcal{H}}_1^0, \hat{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_1^0, \tilde{W}_1\} \\ &\quad + \{\hat{\mathcal{H}}_1^0, \tilde{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_1^0, \hat{W}_1\} + \{\hat{\mathcal{H}}_0^1, \hat{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_0^1, \tilde{W}_1\} \\ &\quad + \{\hat{\mathcal{H}}_0^1, \tilde{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_0^1, \hat{W}_1\} + \{\mathcal{H}_0^0, W_2\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

La séparation

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{H}_0^2 = \hat{\mathcal{H}}_0^2 + \tilde{\mathcal{H}}_0^2 \\ W_2 = \hat{W}_2 + \tilde{W}_2 \end{array}} \quad (1.31)$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\mathcal{H}}_0^2 = \hat{\mathcal{H}}_2^0 + \{\hat{\mathcal{H}}_1^0, \hat{W}_1\} + \{\hat{\mathcal{H}}_0^1, \hat{W}_1\} + \{\mathcal{H}_0^0, \hat{W}_2\} \\ \tilde{\mathcal{H}}_0^2 = \tilde{\mathcal{H}}_2^0 + \{\tilde{\mathcal{H}}_1^0, \tilde{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_0^1, \tilde{W}_1\} + \{\mathcal{H}_0^0, \tilde{W}_2\} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

ne suffit plus ; il faut encore ajouter à \mathcal{H}_0^2 et W_2 les termes \mathcal{H}_{0C}^2 et W_{2C} correspondant aux termes manquants, avec en particulier :

$$\left| \mathcal{H}_{0C}^2 = \{\hat{\mathcal{H}}_1^0, \tilde{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_1^0, \hat{W}_1\} + \{\hat{\mathcal{H}}_0^1, \tilde{W}_1\} + \{\tilde{\mathcal{H}}_0^1, \hat{W}_1\} + \{\mathcal{H}_0^0, W_{2C}\} \right. \quad (1.33)$$

Les termes complémentaires \mathcal{H}_{0C}^2 et W_{2C} contiennent des crochets de Poisson mixtes $\{\hat{\cdot}, \tilde{\cdot}\}$: ce sont les termes dits *de couplage* qu'il faut rajouter si l'on a traité les deux perturbations de manière séparée. On a bien entendu des termes identiques aux ordres suivants, mais ils sont de plus en plus compliqués. Ici, les premiers couplages seront caractérisés par les produits $J_2 J_2$ et $J_2 J_3$.

Ainsi, les composantes successives \mathcal{H}'_n du nouvel hamiltonien devront contenir les termes en ϵ^n issus de l'hamiltonien \mathcal{H} initial, ainsi que les termes issus de multiplications de termes en ϵ^k avec $k < n$, dus au caractère non linéaire des équations de l'algorithme d'élimination, au delà de l'ordre 1.

1.2 Traitement des perturbations avec couplages

En référence à la méthode exposée ci-dessus, les calculs dont nous présentons un inventaire dans les sections qui suivent sont de deux types différents et complémentaires :

- Seconds membres des systèmes différentiels (premier type de calcul) qui permettent, par intégration numérique des équations de Lagrange moyennes correspondantes, de calculer les variables moyennes $(\mathbf{v}', \mathbf{V}')$.
- Parties à longues périodes contenues dans les variables moyennes. Pour centrer les variables moyennes, il convient d'ajouter les parties à longues périodes du changement de variables $(\mathbf{v}, \mathbf{V}) \mapsto (\mathbf{v}', \mathbf{V}')$ (deuxième type de calcul).

Les deux types de calculs ont été développés en puissances de l'excentricité, à l'aide du manipulateur de séries MS de l'Université de Namur [Claes *et al.*, 1988]. Il permet la composition linéaire, le produit, la dérivation par rapport à une variable, de séries composées d'une somme de termes de la forme :

$$T = \alpha \prod_{i=1}^{NVP} P_i^{\exp(i)} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{NVT} \text{Arg}(j) A_j \right)$$

Dans l'expression précédente,

→ α est un réel,

→ P_i sont les variables polynômiales,

→ A_j sont les variables trigonométriques,

→ NVP et NVT représentent les nombres de variables polynômiales et trigonométriques,

→ $\exp(i)$ et $\text{Arg}(j)$ sont des entiers.

Les variables P_i et A_j sont les variables qui apparaissent explicitement dans les séries, mais les quantités traitées par le logiciel sont les coefficients réels α , les exposants $\exp(i)$ et les coefficients entiers des angles $\text{Arg}(j)$.

Par analogie avec la présentation informatique des résultats, et avec la forme sous laquelle ils sont utilisés dans le programme CODIOR, on désignera dans toute la suite ces résultats par le terme générique *séries*.

1.2.1 Effets du potentiel terrestre zonal

Effets du second harmonique zonal

Le potentiel engendré par J_2 est, en référence à (E.5) (Annexe E) :

$$U_2 = \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \quad (1.34)$$

avec

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\omega + v)$$

L'hamiltonien est du premier ordre et s'écrit ainsi :

$$\left| \mathcal{H}_1^0 = \frac{1}{2} J_2 R_0^2 \frac{\mu^4}{L^6} \frac{a^3}{r^3} \left(-1 + \frac{3}{2} \sin^2 i - \frac{3}{2} \sin^2 i \cos(2(\omega + v)) \right) \right. \quad (1.35)$$

TAB. 1.2 – Nomenclature des variables de codage utilisées avec le manipulateur.

| correspondance avec les variables de codage | |
|---|--|
| T | variable de type trigonométrique |
| PTL | l |
| PTG | g |
| PTH | h |
| P | variable de type polynômial |
| GRL | L |
| e | e |
| s | $\sin i$ |
| c | $\cos i$ |
| Re | R_0 (rayon équatorial) |
| GM | μ |
| C20 | premier harmonique zonal |
| C20 CNO CMO | coefficients zonaux (deux indices N et M pour les couplages) |
| XL YL ZL | coordonnées rectangulaires du troisième corps |
| GML | constante gravitationnelle du troisième corps |

L'hamiltonien moyenné traduisant la perturbation en $J_2 = -C_{2,0}$ s'écrit ainsi :

$$\mathcal{H}_0^1 = -J_2 \frac{R_0^2 \mu^4}{L^6} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \quad (1.36)$$

En développant par exemple à l'ordre 4 en excentricité⁴, on obtient :

$$\mathcal{H}_0^1 = -J_2 \frac{R_0^2 \mu^4}{L^6} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i + \frac{3}{4} e^2 - \frac{9}{8} e^2 \sin^2 i + \frac{15}{16} e^4 - \frac{45}{32} e^4 \sin^2 i \right) \quad (1.37)$$

Pour construire les systèmes différentiels moyens, cette expression est codée de la manière suivante :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
| SERIES : | H | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| NUMBER OF TERMS : | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | Re | GM | C20 | CNO | CMO | XL | YL | ZL | RL |
| 5.0000000000000D-01 | COS | . | . | . | -6 | . | . | . | 2 | 4 | 1 | . | . | . | . | . | . |
| -7.5000000000000D-01 | COS | . | . | . | -6 | . | 2 | . | 2 | 4 | 1 | . | . | . | . | . | . |
| 7.5000000000000D-01 | COS | . | . | . | -6 | 2 | . | . | 2 | 4 | 1 | . | . | . | . | . | . |
| -1.1250000000000D+00 | COS | . | . | . | -6 | 2 | 2 | . | 2 | 4 | 1 | . | . | . | . | . | . |
| 9.3750000000000D-01 | COS | . | . | . | -6 | 4 | . | . | 2 | 4 | 1 | . | . | . | . | . | . |
| -1.4062500000000D+00 | COS | . | . | . | -6 | 4 | 2 | . | 2 | 4 | 1 | . | . | . | . | . | . |

⁴les calculs ont en fait été menés à des puissances de l'excentricité plus élevées. Dans toutes les tables qui suivent, je ne prétends pas avoir optimisé la puissance limite du développement. Je pense simplement qu'elle est suffisante pour ne pas introduire de défaut notoire dans le modèle.

L'hamiltonien est d'ordre 1, il comprend six termes décrits chacun par :

- leur coefficient,
- les arguments de la ligne trigonométrique indiquée,
- les puissances des variables polynômiales entrant en jeu.

Calcul du système différentiel moyen

- second membre pour L :

Puisque l'hamiltonien est indépendant de l , la manipulation confirme

$$\frac{dL'}{dt} = 0$$

```

NOMBRE DE TERMES :      0
J2 H
DIF : SYSTEME DIFFERENTIEL
ORDRE = 1
SECOND MEMBRE POUR  GRL

```

- autres seconds membres :

Il suffit simplement d'utiliser (1.14). On obtient par exemple pour C' :

$$\frac{dC'}{dt} = -J_2 \frac{\mu^4 R_0^2}{L^7} \sin g \left(3e - \frac{9}{4}e \sin^2 i + 6e^3 - \frac{15}{2}e^3 \sin^2 i \right) \quad (1.38)$$

Le codage informatique de cette expression est :

```

J2 H
DIF : SYSTEME DIFFERENTIEL
ORDRE = 1
SECOND MEMBRE POUR  ECG
  Re ** 2  EN FACTEUR
  GM ** 4  EN FACTEUR
  C20 ** 1  EN FACTEUR
  CNO ** 0  EN FACTEUR
  CMO ** 0  EN FACTEUR
  RL  ** 0  EN FACTEUR
  GML ** 0  EN FACTEUR
ARG. MINI.      0  1  0 -7  1  0  0  0  0  0
ARG. MAXI.      0  1  0 -7  3  2  0  0  0  0

```

```

SERIES :      0

```

```

NUMBER OF TERMS :      4

```

| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|----|
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | XL | YL | ZL |
| -0.375000000000000E+01 | SIN | 0 | 1 | 0 | -7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.750000000000000E+01 | SIN | 0 | 1 | 0 | -7 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.300000000000000E+01 | SIN | 0 | 1 | 0 | -7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.600000000000000E+01 | SIN | 0 | 1 | 0 | -7 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Pour les autres variables, la présentation des résultats est analogue.

Calcul du changement de variables

NOMBRE DE TERMES : 0
 J2 W
 VLP : PARTIE LONGUE PERIODE DU CHANGEMENT DE VARIABLES
 ORDRE = 1
 SECOND MEMBRE POUR GRL

NOMBRE DE TERMES : 0
 J2 W
 VLP : PARTIE LONGUE PERIODE DU CHANGEMENT DE VARIABLES
 ORDRE = 1
 SECOND MEMBRE POUR ECG

Ordres supérieurs en J_2 : On calcule selon le même principe les séries correspondant aux perturbations dues à J_2^2 , J_2^3 et J_2^4 .

Si l'on se place par exemple à l'ordre 2, en référence au développement de l'hamiltonien en fonction du petit paramètre, le terme d'ordre 2 de ce développement, \mathcal{H}_0^2 , dépend de toutes les perturbations que l'on a classées dans cet ordre, supposées indépendantes entre elles. Ici, seul le terme en J_2 d'ordre 2, J_2^2 , intervient.

L'hamiltonien correspondant se développe selon :

$$\mathcal{H}_0^2(J_2^2) = -J_2^2 \frac{R_0^4 \mu^6}{L^{10}} \left(\frac{39}{32} \cos 2g e^2 \sin^2 i - \frac{45}{32} \cos 2g e^2 \sin^4 i - \frac{9}{8} + \frac{45}{16} \sin^2 i \right. \\ \left. - \frac{57}{32} \sin^4 i - \frac{63}{16} e^2 + \frac{303}{32} e^2 \sin^2 i - \frac{729}{128} e^2 \sin^4 i \right) \quad (1.39)$$

Dans le codage, le terme en $C_{2,0}$ est affecté d'une puissance 2 :

SERIES : H 2

NUMBER OF TERMS : 8

| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|-----|
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | Re | GM | C20 | CNO | CMO | XL | YL | ZL | RL | GML |
| 1.218750000000D+00 | COS | . | 2 | . | -10 | 2 | 2 | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| -1.406250000000D+00 | COS | . | 2 | . | -10 | 2 | 4 | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| -1.125000000000D+00 | COS | . | . | . | -10 | . | . | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| 2.812500000000D+00 | COS | . | . | . | -10 | . | 2 | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| -1.781250000000D+00 | COS | . | . | . | -10 | . | 4 | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| -3.937500000000D+00 | COS | . | . | . | -10 | 2 | . | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| 9.468750000000D+00 | COS | . | . | . | -10 | 2 | 2 | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| -5.695312500000D+00 | COS | . | . | . | -10 | 2 | 4 | . | 4 | 6 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |

L'écriture du système différentiel s'effectue d'une manière analogue à l'ordre 1, et la présentation des séries développées en excentricité est la même que dans le cas des systèmes différentiels.

L'exemple qui suit illustre la nécessité d'introduire la notion de variables centrées, à la suite du changement de variables canonique, ainsi que cela a été montré dans l'étude théorique.

Le changement de variables correspondant à J_2^2 fait intervenir les deux premiers termes W_1 et W_2 du générateur.

Les expressions suivantes sont limitées à la puissance 1 en excentricité à l'ordre 1, et à la puissance 0 à l'ordre 2 :

$$W_1 = J_2 \frac{R_0^2 \mu^2}{L^3} \left(-\frac{3}{8} e \sin^2 i \sin(l + 2g) + \frac{3}{8} \sin^2 i \sin(2l + 2g) + \frac{7}{8} e \sin^2 i \sin(3l + 2g) \right. \\ \left. - \frac{9}{4} e \sin^2 i \sin l + \frac{3}{2} e \sin l \right)$$

SERIES : W 1

NUMBER OF TERMS : 5

| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|-----|
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | Re | GM | C20 | CN0 | CM0 | XL | YL | ZL | RL | GML |
| -3.7500000000000D-01 | SIN | 1 | 2 | . | -3 | 1 | 2 | . | 2 | 2 | 1 | . | . | . | . | . | . | . |
| 3.7500000000000D-01 | SIN | 2 | 2 | . | -3 | . | 2 | . | 2 | 2 | 1 | . | . | . | . | . | . | . |
| 8.7500000000000D-01 | SIN | 3 | 2 | . | -3 | 1 | 2 | . | 2 | 2 | 1 | . | . | . | . | . | . | . |
| -2.2500000000000D+00 | SIN | 1 | . | . | -3 | 1 | 2 | . | 2 | 2 | 1 | . | . | . | . | . | . | . |
| 1.5000000000000D+00 | SIN | 1 | . | . | -3 | 1 | . | . | 2 | 2 | 1 | . | . | . | . | . | . | . |

$$W_2 = J_2^2 \frac{R_0^4 \mu^4}{L^7} \left(\frac{3}{4} \sin^2 i \sin(2l + 2g) - \frac{9}{16} \sin^4 i \sin(2l + 2g) + \frac{3}{64} \sin^4 i \sin(4l + 4g) \right)$$

SERIES : W 2

NUMBER OF TERMS : 3

| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|-----|
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | Re | GM | C20 | CN0 | CM0 | XL | YL | ZL | RL | GML |
| 7.5000000000000D-01 | SIN | 2 | 2 | . | -7 | . | 2 | . | 4 | 4 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| -5.6250000000000D-01 | SIN | 2 | 2 | . | -7 | . | 4 | . | 4 | 4 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |
| 4.6875000000000D-02 | SIN | 4 | 4 | . | -7 | . | 4 | . | 4 | 4 | 2 | . | . | . | . | . | . | . |

A l'ordre 1, on retrouve le fait que le générateur de moyenne nulle assure la nullité de la partie à longues périodes :

NOMBRE DE TERMES : 0

J2~2 W

VLP : PARTIE LONGUE PERIODE DU CHANGEMENT DE VARIABLES

ORDRE = 1

SECOND MEMBRE POUR GRL

Les variables centrées (\bar{v}_i, \bar{V}_i) sont alors définies implicitement en ne retenant dans la transformation précédente que la partie à longues périodes (seuls les termes ne contenant pas 0 PTL sont conservés) :

TAB. 1.3 – Inventaire des séries calculées pour J_2 .

La première colonne correspond à l'ordre en J_2 de la perturbation qui est indiquée dans la deuxième colonne. Les deux colonnes suivantes indiquent la puissance en excentricité qui a été retenue lors de la construction du système différentiel des variables moyennes, et de la partie à longues périodes du changement de variables.

| Ordre | Perturbation | Syst. diff. | Chgmt. Var. |
|-------|--------------|-------------|-------------|
| 1 | J_2 | 10 | 11 |
| 2 | J_2^2 | 10 | 8 |
| 3 | J_2^3 | 8 | 5 |
| 4 | J_2^4 | 4 | 2 |
| 5 | J_2^5 | 4 | 2 |

```

NOMBRE DE TERMES :          3
J2~2 W
PARTIE LONGUE PERIODE DU CHANGEMENT DE VARIABLES
ORDRE = 2
SECOND MEMBRE POUR  GRL
  Re ** 4  EN FACTEUR
  GM ** 4  EN FACTEUR
  C20 ** 2  EN FACTEUR
  CNO ** 0  EN FACTEUR
  CMO ** 0  EN FACTEUR
  RL  ** 0  EN FACTEUR
  GML ** 0  EN FACTEUR
ARG. MINI.
ARG. MAXI.

```

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | -7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -7 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | |
|--|--|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|----|
| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | |
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | XL | YL | ZL |

```

-0.281250000000000E+01  COS  0  0  0  -7  0  2  0  0  0  0
0.112500000000000E+01  COS  0  0  0  -7  0  0  0  0  0  0
0.220312500000000E+01  COS  0  0  0  -7  0  4  0  0  0  0

```

A noter qu'il est inutile de se soucier de la moyenne du générateur : elle est forcément nulle, puisque les calculs sont développés en excentricité (et donc en série de Fourier de l'anomalie moyenne). Ceci est une différence par rapport aux travaux de [Métris, 1991], pour les perturbations traitées sous forme fermée.

Les tableaux qui suivent (dont le tableau 1.3 pour J_2) résument les caractéristiques de toutes les séries construites.

Effets des autres coefficients zonaux

Il y a tout d'abord une difficulté spécifique aux termes J_3 , J_4 , J_5 , et J_6 : j'ai considéré que ces termes étaient d'ordre 2. Le calcul ayant été réalisé jusqu'à l'ordre 4, il convient de prendre en considération les perturbations induites par J_3^2 , J_4^2 , J_5^2 , J_6^2 , et également par les combinaisons de ces termes entre eux : J_3J_4 , J_3J_5 , J_3J_6 , J_4J_5 , J_4J_6 et J_5J_6 . Comme J_2^2 est

TAB. 1.4 – Inventaire des séries calculées pour les premiers coefficients zonaux.

La structure est la même que dans la table précédente.

| Ordre | Perturbation | Syst. diff. | Chgmt. Var. |
|-------|--------------|-------------|-------------|
| 2 | J_3 | 9 | 7 |
| | J_4 | 8 | 7 |
| | J_5 | 9 | 7 |
| | J_6 | 9 | 7 |
| 3 | $J_2 J_3$ | 7 | 5 |
| | $J_2 J_4$ | 6 | 5 |
| | $J_2 J_5$ | 7 | 5 |
| | $J_2 J_6$ | 7 | 5 |
| 4 | $J_2^2 J_3$ | 3 | 2 |
| | $J_2^2 J_4$ | 4 | 2 |
| | $J_2^2 J_5$ | 3 | 2 |
| | $J_2^2 J_6$ | 3 | 2 |
| | J_3^2 | 4 | 2 |
| | J_4^2 | 4 | 3 |
| | J_5^2 | 4 | 3 |
| | J_6^2 | 4 | 3 |
| | $J_3 J_4$ | 3 | 2 |
| | $J_3 J_5$ | 4 | 3 |
| | $J_3 J_6$ | 4 | 3 |
| | $J_4 J_5$ | 3 | 3 |
| | $J_4 J_6$ | 3 | 3 |
| | $J_5 J_6$ | 3 | 3 |

d'ordre 2, il faut aussi prendre en compte les combinaisons $J_2^2 J_3$, $J_2^2 J_4$, $J_2^2 J_5$ et $J_2^2 J_6$.
A l'ordre 3, on ne trouve que les couplages avec J_2 : $J_2 J_3$, $J_2 J_4$, $J_2 J_5$ et $J_2 J_6$.

Le calcul des systèmes différentiels ne pose aucun problème pratique, car le système différentiel est linéaire par rapport à l'hamiltonien : chaque perturbation est considérée indépendamment des autres.

Quant au calcul des parties à longues périodes contenues dans les variables moyennes, il est plus complexe car le changement de variables n'est pas linéaire par rapport au générateur : il faut faire intervenir, en raison des couplages, deux générateurs différents, et à différents ordres.

Pour les coefficients zonaux de degrés supérieurs, nous avons considéré les termes de J_7 à J_{10} comme étant d'ordre 3. Les seuls couplages à considérer sont ceux avec J_2 , d'ordre 4.

Remarque : le calcul des changements de variables pour les perturbations en J_7 , J_8 , J_9 , J_{10} ne fait intervenir, compte tenu de la hiérarchie des perturbations que nous avons retenue, qu'un seul terme dans le développement du générateur : $W_3(J_n)$. Les crochets de Poisson sont triviaux, et le générateur est de moyenne nulle : il n'y a rien à calculer (séries repérées dans les tableaux suivants par '-').

Enfin, les séries avec couplages avec J_2 ont été calculées jusqu'à J_{40} . Elles ont été développées jusqu'à l'ordre 3 en excentricité. De plus, pour ces degrés, il est inutile de calculer les valeurs moyennes des changements de variables, les amplitudes étant trop faibles. Ces moyennes sont en pratique utilisées jusque J_7 .

1.2.2 Effets de troisièmes corps

Les calculs s'effectuent exactement de la même manière que dans le cas des coefficients du potentiel terrestre.

Lune et Soleil, planètes

En effet, la forme de l'expression du potentiel perturbateur de troisième corps est :

$$U = \frac{\mathcal{G}M_P}{r_P} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{r}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (1.40)$$

Dans cette équation,

- r est la distance entre le centre de la Terre et le satellite,
- \mathcal{G} est la constante de la gravitation universelle et M_P la masse du corps perturbateur,
- r_P est la distance entre le centre de la Terre et le centre du corps perturbateur,
- P_n sont les polynômes de Legendre,
- ψ est l'angle géocentrique entre le satellite et le corps perturbateur.

Exprimée en coordonnées sphériques, l'expression (1.40) devient :

$$U = \frac{\mathcal{G}M_P}{r_P} \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{r_P} \right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) (A_{n,m} \cos m\lambda + B_{n,m} \sin m\lambda) \quad (1.41)$$

où

- λ est la longitude du satellite,
- φ sa latitude,
- n est appelé le *degré* du développement (qui dans le cas présent, dépasse rarement 5),
- et m son *ordre* ;
- les coefficients $A_{n,m}$ et $B_{n,m}$ caractérisent la position du corps dans l'espace :

$$\begin{cases} A_{n,m} = \delta_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin \delta_P) \cos m\alpha_P \\ B_{n,m} = \delta_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin \delta_P) \sin m\alpha_P \end{cases} \quad (1.42)$$

- $P_{n,m}$ sont les fonctions associées aux polynômes de Legendre,
- δ_P et α_P désignent la déclinaison et l'ascension droite du corps perturbateur.

La forme de cette dernière expression est à rapprocher de celle du potentiel gravitationnel terrestre (E.1). Néanmoins, elle ne dépend pas directement du vecteur 'Satellite-Corps Perturbateur', ce qui est une difficulté à la mise en œuvre de l'algorithme d'élimination de la variable rapide. En repartant de (1.40), et en utilisant la relation $\cos \psi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_P}{r r_P}$, où $\frac{\vec{r}_P}{r_P}$ est défini par ses cosinus directeurs XL, YL, ZL, l'élimination de la variable rapide ne pose plus de problème.

On a en effet :

$$\begin{aligned} \cos \psi = & \quad \text{XL} (\cos \Omega \cos(\omega + v) - \sin \Omega \sin(\omega + v) \cos i) \\ & + \quad \text{YL} (\sin \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \sin(\omega + v) \cos i) \\ & + \quad \text{ZL} \sin(\omega + v) \sin i \end{aligned} \quad (1.43)$$

TAB. 1.5 – Inventaire des séries construites pour les effets de troisièmes corps.

Chacun des chiffres représente la puissance maximale du développement en excentricité. $3C_*$ signifie : développement du potentiel de troisième corps au degré $*$.

| Ordre | Perturbation | Syst. diff. | Chgmt. Var. |
|-------|--------------|-------------|-------------|
| 3 | $3C_2$ | 8 | - |
| | $3C_3$ | 5 | - |
| | $3C_4$ | 5 | - |
| | $3C_5$ | 3 | - |
| | k_2 | 6 | - |
| | k_3 | 4 | - |
| 4 | $J_2 3C_2$ | 6 | 4 |
| | $J_2 3C_3$ | 1 | 1 |
| | $J_2 3C_4$ | 3 | 0 |
| | $J_2 k_2$ | 4 | 4 |

$$\Delta U = \frac{\mu_c}{r_c} \sum_{n \geq 2} k_n \left(\frac{R_0}{r_c} \right)^n \left(\frac{R_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (1.44)$$

ψ est l'angle géocentrique entre le satellite et le corps perturbateur. $\cos \psi$ est fonction des coordonnées du satellite et des cosinus directeurs XL, YL, ZL.

On ne considère que les cas $n = 2$ ou $n = 3$ car sinon $\left(\frac{R_0}{r_c} \right)^n \left(\frac{R_0}{r} \right)^{n+1}$ devient très petit.

Récapitulation

Le calcul des séries relatives au troisième corps a été effectué jusqu'au degré 5 du potentiel. Les effets directs sont d'ordre 2, les couplages avec J_2 (calculés jusqu'au degré 4) sont d'ordre 3.

Quant aux marées terrestres, les séries prenant en compte les termes en k_2 , k_3 , et en $J_2 k_2$ ont été calculées. En pratique, ce sont des valeurs nominales de k_2 (0,299) et k_3 (0,094), considérées constantes, qui ont été utilisées pour évaluer les seconds membres à partir des séries.

1.2.3 Pression de radiation solaire directe (sans ombre)

La perturbation engendrée par la pression de radiation solaire a une expression relativement simple. Comme les satellites considérés dans cette étude ont une forme sphérique, l'accélération perturbatrice s'écrit :

$$\left| \vec{\gamma}_{pr} = \sigma \left(\frac{a_s}{\Delta} \right)^2 \vec{u} \right. \quad (1.45)$$

Dans (1.45) :

- a_s est une distance de référence égale à une unité astronomique,
- Δ est la distance Soleil-satellite, que l'on peut assimiler à la distance Soleil-Terre,
- de même, \vec{u} est le vecteur Soleil-satellite, assimilé au vecteur Soleil-Terre $-\vec{r}_{\odot}$,
- $\sigma = \alpha \frac{\Sigma}{m c} \chi$ où α est le coefficient de réflectivité, Σ est la surface efficace perpendiculaire au rayonnement (exprimée en m^2), m est la masse du satellite, χ est la constante solaire (exprimée en W/m^2), et c désigne la vitesse de la lumière.

L'hamiltonien instantané s'écrit ainsi :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{H} = \sigma \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^2 \vec{r} \cdot \hat{r}_{\odot} \end{array} \right. \tag{1.46}$$

Toujours avec le même algorithme, on en déduit l'hamiltonien moyen, qui sert au calcul des équations moyennes :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|-----|---|
| SERIES : | | H | | 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| NUMBER OF TERMS : | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | Re | GM | C20 | CN0 | CM0 | XL | YL | ZL | RL | GML | |
| -7.500000000000D-01 | COS | . | 1 | 1 | 2 | 1 | . | . | . | -1 | . | . | . | 1 | . | . | -2 | . | . |
| -7.500000000000D-01 | COS | . | 1 | 1 | 2 | 1 | . | 1 | . | -1 | . | . | . | 1 | . | . | -2 | . | . |
| -7.500000000000D-01 | COS | . | 1 | -1 | 2 | 1 | . | . | . | -1 | . | . | . | 1 | . | . | -2 | . | . |
| 7.500000000000D-01 | COS | . | 1 | -1 | 2 | 1 | . | 1 | . | -1 | . | . | . | 1 | . | . | -2 | . | . |
| -1.500000000000D+00 | SIN | . | 1 | . | 2 | 1 | 1 | . | . | -1 | . | . | . | . | . | 1 | -2 | . | . |
| -7.500000000000D-01 | SIN | . | 1 | 1 | 2 | 1 | . | . | . | -1 | . | . | . | . | 1 | . | -2 | . | . |
| -7.500000000000D-01 | SIN | . | 1 | 1 | 2 | 1 | . | 1 | . | -1 | . | . | . | . | 1 | . | -2 | . | . |
| 7.500000000000D-01 | SIN | . | 1 | -1 | 2 | 1 | . | . | . | -1 | . | . | . | . | 1 | . | -2 | . | . |
| -7.500000000000D-01 | SIN | . | 1 | -1 | 2 | 1 | . | 1 | . | -1 | . | . | . | . | 1 | . | -2 | . | . |

Les couplages avec J_2 ont également été calculés.

1.3 Perturbations sans couplages

L'algorithme «automatique» de [Deprit, 1969] permet de calculer les couplages entre tous les phénomènes géodynamiques jusqu'à un ordre quelconque. D'une certaine manière, il illustre la complexité de la mise en œuvre des méthodes analytiques. C'est le sens physique qui incite à négliger nombre de couplages, même s'ils existent d'un point de vue mathématique. Pour calculer les seconds membres des équations de la dynamique dus à ces phénomènes, seuls les effets directs sont à considérer : il suffit d'écrire les équations de Lagrange ou de Gauss correspondant à ces effets directs.

C'est ce qui est fait ici pour compléter le modèle de forces moyennes, complément indispensable aux effets gravitationnels couplés entre eux : un modèle de forces cohérent, même s'il est moyen, se doit de prendre en compte tous les effets qui ont des amplitudes comparables.

1.3.1 Effets des coefficients zonaux de hauts degrés

Les séries de seconds membres issues du manipulateur traduisant les effets des coefficients zonaux du champ de gravité ont été calculées jusque J_{40} , aux ordres 2 et 3. Les coefficients zonaux de degrés supérieurs sont traités grâce à une formulation déduite de [Kaula, 1966]. Cette formulation (équivalente à de l'ordre 2 au sens où nous l'avons défini) ne permet pas de calculer les couplages avec J_2 qui sont négligeables.

Il faut noter qu'avec une expression du potentiel perturbateur moyen, il suffit de donner les dérivées partielles du potentiel moyen par rapport aux éléments non singuliers : une multiplication de ce vecteur à 6 lignes par la matrice 6×6 des équations de Lagrange permet de déduire le second membre. Rappelons que cette matrice, indépendante de la variable rapide, peut en effet aussi bien être considérée comme une matrice moyenne que comme une matrice instantanée en fonction du type d'éléments avec lesquels elle est calculée.

La partie D.1 établit une formulation du potentiel classique de gravité en éléments non singuliers. Elle aboutit à :

$$U = \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \times \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

R_0 désigne le rayon équatorial de l'ellipsoïde de référence. Les $F_{n,m,p}(i)$ sont les fonctions classiques d'inclinaison. $G \cos_{n,p,q}(C, S)$ et $G \sin_{n,p,q}(C, S)$ des fonctions déduites des classiques fonctions d'excentricité $G_{n,p,q}(e)$ (voir annexe D pour leur expression explicite en fonction de C et S). Elles sont tabulées ou peuvent être calculées par récurrence. Dans le cadre des degrés élevés, les fonctions d'excentricité ont été testées jusqu'aux degrés et ordres 140 à l'aide de formules, basées sur des transformations de Fourier, qui considèrent l'excentricité comme un simple paramètre [Goad, 1987]. Pour les excentricités non petites, la précision relative reste toujours de l'ordre de 10^{-10} .

On a aussi :

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,m} & s_{n,m} \\ -s_{n,m} & c_{n,m} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{si } n-m \text{ est pair} \\ \text{si } n-m \text{ est impair} \end{array} \quad (1.48)$$

et

$$\tilde{\psi}_{n,m,p,q} = (n - 2p + q)\lambda + m(\Omega - TS_G) \quad (1.49)$$

où TS_G désigne le temps sidéral à Greenwich.

Le potentiel (1.47) dépend en fait de quatre indices n, m, p, q . Etablir l'expression du potentiel moyen correspondant revient à ne considérer que les combinaisons d'indice où la variable rapide n'intervient pas ($n - 2p + q = 0$), et où l'expression de la perturbation est indépendante du temps sidéral ($m = 0$). Pour un jeu $n, 0, p, q$ donné, $U_{n,0,p,q}$, qui est implicitement un hamiltonien *moyen*, s'écrit ainsi⁵ :

$$U_{n,0,p,q} = -\frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) J_n G \cos_{n,p,q}(C, S) \quad \text{si } n \text{ est pair} \quad (1.50)$$

$$= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) J_n G \sin_{n,p,q}(C, S) \quad \text{si } n \text{ est impair} \quad (1.51)$$

Avec $\frac{1}{a} = \frac{\mu}{L^2}$, on obtient une formulation qui ne dépend que des variables par rapport auxquelles on dérive :

$$\begin{cases} U_{n,0,p,q} = -\frac{\mu^{n+2} R_0^n}{L^{2n+2}} F_{n,m,p}(i) J_n G \cos_{n,p,q}(C, S) & \text{si } n \text{ est pair} \\ = \frac{\mu^{n+2} R_0^n}{L^{2n+2}} F_{n,m,p}(i) J_n G \sin_{n,p,q}(C, S) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.52)$$

Les dérivées partielles se déduisent de l'expression précédente, en ayant présent à l'esprit le fait que les variables ($L, C, H, \lambda, S, \Omega$) ne sont pas indépendantes entre elles : H dépend de L, C, S . Le calcul des dérivées partielles doit ainsi s'inspirer du jacobien (B.3).

On déduit ainsi :

$$\frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial H} = -\frac{1}{L\eta \sin i} \times \begin{cases} \left(-\frac{\mu^{n+2} R_0^n}{L^{2n+2}} F'_{n,m,p}(i) J_n G \cos_{n,p,q}(C, S) \right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\frac{\mu^{n+2} R_0^n}{L^{2n+2}} F'_{n,m,p}(i) J_n G \sin_{n,p,q}(C, S) \right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.53)$$

⁵en toute rigueur, il faudrait le noter $\langle U_{n,0,p,q} \rangle$ et noter les éléments dont il dépend avec '.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial L} &= -\eta \cos i \frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial H} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial a} \\
&= -\eta \cos i \frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial H} - \frac{2(n+1)}{L} U_{n,0,p,q}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Si on désigne par $\frac{\partial U_{eo}}{\partial C}$ et $\frac{\partial U_{eo}}{\partial S}$ les dérivées partielles par rapport à C et S du potentiel exprimé indépendamment de H mais uniquement avec L, C, S, i , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial C} &= \frac{\partial U_{eo}}{\partial C} + \frac{LC \cos i}{\eta} \frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial H} \\
\frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial S} &= \frac{\partial U_{eo}}{\partial S} + \frac{LS \cos i}{\eta} \frac{\partial U_{n,0,p,q}}{\partial H}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{eo}}{\partial \frac{C}{S}} = -\frac{\mu^{n+2} R_0^n}{L^{2n+2}} F_{n,m,p}(i) J_n \frac{\partial}{\partial \frac{C}{S}} G \cos_{n,p,q}(C, S) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{\partial U_{eo}}{\partial \frac{C}{S}} = \frac{\mu^{n+2} R_0^n}{L^{2n+2}} F_{n,m,p}(i) J_n \frac{\partial}{\partial \frac{C}{S}} G \sin_{n,p,q}(C, S) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \tag{1.56}$$

ce qui termine le calcul de ces dérivées partielles puisque le potentiel moyen ne dépend ni de Ω ni de λ . Ceci peut en toute rigueur arriver en cas de résonance. Je ne traite pas les résonances dans cette étude, mais c'est un effet auquel il faut néanmoins prendre garde pour générer les orbites à longues périodes. Il suffit pour cela d'utiliser des périodes de filtrage compatibles entre le modèle d'orbite moyenne et les observations (voir les deux chapitres suivants). Le calcul des dérivées partielles des nouvelles fonctions d'excentricité s'effectue sans difficulté, à partir de leur formulation explicite⁶.

1.3.2 Les marées océaniques

La modification $\Delta C_{n,m}$ et $\Delta S_{n,m}$ des coefficients dénormalisés du géopotential due aux marées océaniques est donnée par exemple dans les "Standard IERS" (1989) :

$$\begin{cases} \Delta C_{n,m} = \mathcal{F}_n \sum_{s(n,m)} \left((C_{s(n,m)}^+ + C_{s(n,m)}^-) \cos \theta_s + (S_{s(n,m)}^+ + S_{s(n,m)}^-) \sin \theta_s \right) \\ \Delta S_{n,m} = \mathcal{F}_n \sum_{s(n,m)} \left((S_{s(n,m)}^+ - S_{s(n,m)}^-) \cos \theta_s - (C_{s(n,m)}^+ - C_{s(n,m)}^-) \sin \theta_s \right) \end{cases} \tag{1.57}$$

où

$$\rightarrow \mathcal{F}_n = \frac{4\pi G \rho}{g} \frac{1 + k'_n}{2n+1} : \rho \text{ est la masse volumique de l'eau, } k'_n \text{ désigne le coefficient de déformation (de charge) élastique dû à la quantité d'eau qui vient s'ajouter au potentiel de «départ» de l'eau,}$$

⁶je rappelle qu'on les trouvera en annexe D.

→ θ_s est l'argument de Doodson, qui caractérise la marée d'onde s . Il est relié aux éléments orbitaux angulaires (Ω , ω , M) de la Lune et du Soleil exprimés dans un repère équatorial terrestre⁷,

→ $C_{s(n,m)}^\pm$ et $S_{s(n,m)}^\pm$ sont les coefficients des marées relatives aux amplitudes $\hat{C}_{s(n,m)}^\pm$ et phases $\epsilon_{s(n,m)}^\pm$ définies par Schwiderski par $C_{s(n,m)}^\pm - iS_{s(n,m)}^\pm = -i\hat{C}_{s(n,m)}^\pm e^{i(\epsilon_{s(n,m)}^\pm + \chi_s)}$, χ_s valant 0, $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ selon les ondes.

Dans la suite, on met θ_s sous la forme :

$$\left| \begin{aligned} \theta_s &= \sum_{j=1}^6 n_{s_j} \beta_j \\ &= n_{s_1} (TS_G + \pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_{s_j} \beta_j \\ &= n_{s_1} (TS_G + \pi - s) + \theta_s \end{aligned} \right. \quad (1.58)$$

s et β_j (pour $(j = 2, 6)$) sont des angles circulant lentement reliés aux mouvements de la Lune et du Soleil (voir note de bas de page). Les n_{s_j} sont des entiers positifs ou nuls.

On note aussi : $\psi_{n,m,p} = (n - 2p)(\omega + v) + m(\Omega - TS_G)$.

Pour calculer le potentiel moyen, il faut considérer, en plus de la variable rapide, le temps sidéral comme étant à l'origine de courtes périodes. On distingue ainsi les ondes progrades (où θ_s intervient avec un signe +) et les ondes rétrogrades (où θ_s intervient avec un signe -).

En effet, il existe des ondes progrades pour lesquelles $n_{s_1} = m$. On a alors :

$$\psi_{n,m,p} + \theta_s = (n - 2p)(\omega + v) + m\Omega + n_{s_1}(\pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_{s_j} \beta_j \quad (1.59)$$

Le temps sidéral n'intervient plus. Le potentiel $\Delta U_{n,m}^1$ correspondant à ces ondes s'écrit :

⁷Doodson définit $\theta_s = k_1\tau + (k_2 - 5)s + (k_3 - 5)h + (k_4 - 5)p + (k_5 - 5)N' + (k_6 - 5)PS$ où :

- τ est le jour lunaire moyen. Il est défini par $\tau = \alpha - s - \pi$ où α est l'ascension droite du lieu et $s = \Omega_l + \omega_l + M_l$ est le mois tropique moyen,

- $h = \Omega_\odot + \omega_\odot + M_\odot$ est l'année tropique moyenne,

- $p = \Omega_l + \omega_l = s - M_l$ est le cycle du périégée lunaire moyen,

- $N' = -\Omega_l$ est le cycle du nœud lunaire moyen,

- $PS = \Omega_\odot + \omega_\odot = h - M_\odot$ est le cycle du périhélie de la Terre.

Une marée est ainsi caractérisée par son nombre de Doodson : $A = k_1 k_2 k_3, k_4 k_5 k_6$.

$$\begin{aligned}
\Delta U_{n,m}^1 = & \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \mathcal{F}_n \sum_{p=0}^n F_{n,m,p}(i) \times \\
& \sum_{\substack{s(n,m) \\ n_{s1}=m}} \left(C_{s(n,m)}^+ \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{n,p,q}(e) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}_{(n-m)_{\text{pair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \begin{pmatrix} (n-2p+q)M + (n-2p)\omega \\ +m(\Omega + \pi - s) + \tilde{\theta}_s \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + S_{s(n,m)}^+ \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{n,p,q}(e) \begin{pmatrix} \sin \\ -\cos \end{pmatrix}_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \begin{pmatrix} (n-2p+q)M + (n-2p)\omega \\ +m(\Omega + \pi - s) + \tilde{\theta}_s \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{1.60}$$

La valeur moyenne de $\Delta U_{n,m}^1$ sur une révolution du satellite est toujours nulle, sauf quand $n - 2p + q = 0$. Dans ce cas, on a⁸ :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta U_{n,m}^1 \rangle = & \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \mathcal{F}_n \sum_{p=0}^n F_{n,m,p}(i) \times \\
& \sum_{\substack{s(n,m) \\ n_{s1}=m}} \left(C_{s(n,m)}^+ G_{n,p,-(n-2p)}(e) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \begin{pmatrix} (n-2p)\omega \\ +m(\Omega + \pi - s) + \tilde{\theta}_s \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + S_{s(n,m)}^+ G_{n,p,-(n-2p)}(e) \begin{pmatrix} \sin \\ -\cos \end{pmatrix}_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \begin{pmatrix} (n-2p)\omega \\ +m(\Omega + \pi - s) + \tilde{\theta}_s \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{1.61}$$

En développant les lignes trigonométriques, pour isoler l'influence de $(n - 2p)\omega$, on déduit une expression complète du potentiel moyen en éléments non singuliers :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta U_{n,m}^1 \rangle = & \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \mathcal{F}_n \sum_{p=0}^n F_{n,m,p}(i) \times \\
& \sum_{\substack{s(n,m) \\ n_{s1}=m}} \left(\begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau_{s(n,m),p} & \sin \tau_{s(n,m),p} \\ \sin \tau_{s(n,m),p} & -\cos \tau_{s(n,m),p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,-(n-2p)}(C, S) \\ G \sin_{n,p,-(n-2p)}(C, S) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{1.62}$$

avec

$$\tau_{s(n,m),p} = m(\Omega + \pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_{sj} \beta_j \tag{1.63}$$

⁸là encore, en toute rigueur, les éléments orbitaux dont dépend le potentiel moyen devraient être affectés de '.

et

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{s(n,m)}^+ & S_{s(n,m)}^+ \\ -S_{s(n,m)}^+ & C_{s(n,m)}^+ \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{si } n-m \text{ est pair} \\ \text{si } n-m \text{ est impair} \end{matrix} \quad (1.64)$$

Je n'ai traité que le cas des ondes progrades pour lesquelles $n_{s_1} = m$. Dans tous les autres cas - cas des ondes rétrogrades et autres ondes progrades - le temps sidéral intervient dans les expressions du potentiel. Comme je ne modélise pas les effets de résonance, on peut maintenant déduire de (1.62) les dérivées partielles du potentiel par rapport aux variables avec lesquelles on intègre. On adopte le même raisonnement que pour les zonaux de haut degré. A l'aide de (B.3), cela ne pose aucune difficulté.

1.3.3 Correction fréquentielle des marées terrestres

Pour affiner la modélisation des marées terrestres, John Wahr, en 1980, a proposé de moduler l'intensité de la réponse de la Terre à la fréquence de l'excitation. Cela se traduit par une variabilité des nombres de Love. Une telle approche n'est pas incompatible avec les calculs réalisés en section 1.2.2, puisque la variabilité n'est prise en compte, pour la correction, qu'à travers la différence entre la partie variable et la valeur nominale ; en conséquence, il n'est pas nécessaire de considérer les couplages entre J_2 et cette différence.

Les coefficients du géopotential $C_{n,m}$ et $S_{n,m}$ sont ainsi modifiés de $\Delta C_{n,m}$ et $\Delta S_{n,m}$ selon :

$$\left| \begin{aligned} \Delta \bar{C}_{n,m} - i \Delta \bar{S}_{n,m} &= A_m \sum_{s(n,m)} H_s \delta k_s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} e^{i\theta_s} \end{aligned} \right. \quad (1.65)$$

Dans cette formule :

- $A_m = \frac{(-1)^m}{R_0 \sqrt{4\pi(2 - \delta_{0m})}}$ où δ est le symbole de Kronecker,
- δk_s est la correction de Wahr au nombre de Love k_s par rapport à la valeur nominale,
- H_s est l'amplitude de la correction,
- θ_s est l'argument de Doodson défini en (1.58) : β_1 contient le temps sidéral et β_2 à β_6 contiennent les longues périodes,
- $\bar{C}_{n,m}$ et $\bar{S}_{n,m}$ sont les coefficients normalisés du champ.

Dans la pratique, je ne considère que le cas $n = 2$ avec $m = 1$ ou 2 puisque pour $m = 0$: $\Delta S_{2,0} = 0$ de même que $S_{2,0}$, et $\Delta C_{2,0} = 0$ ne varie pas avec la position de la Lune et du Soleil (marée permanente).

La modification de potentiel résultant de cette correction de Wahr est ainsi :

$$\Delta U_{n,m}^{\text{Wahr}} = \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n (-1)^{n-m} F_{n,m,p}(i) G_{n,p,q}(e) \times A_m \sum_{s(n,m)} H_s \delta k_s \cos(\psi_{n,m,p,q} + \theta_s) \quad (1.66)$$

L'angle intervenant dans cette expression est

$$\psi_{n,m,p,q} + \theta_s = (n - 2p + q)M + (n - 2p)\omega + m\Omega + m(\pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_j \beta_j$$

où l'on ne considère que les cas $n - 2p + q = 0$: $(n, p, q) = (2, 0, -2)$ ou $(2, 1, 0)$ ou $(2, 2, 2)$ avec dans chaque cas $m = 1$ ou 2 .

En explicitant les fonctions d'excentricité et d'inclinaison, on conclut que seules deux combinaisons d'indices mènent à des termes non nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta U_{2,1} \rangle = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \left(-\frac{3}{2} \sin i \cos i \right) \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad \times \left(-\Delta S_{2,1} \cos(\Omega - TS_G) + \Delta C_{2,1} \sin(\Omega - TS_G) \right) \\ \langle \Delta U_{2,2} \rangle = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 i \right) \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad \times \left(\Delta C_{2,2} \cos(\Omega - TS_G) + \Delta S_{2,2} \sin(\Omega - TS_G) \right) \end{array} \right. \quad (1.67)$$

Pour $(n, m) = (2, 1)$, la formule (1.65) a la forme :

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{2,1} \\ \Delta \bar{S}_{2,1} \end{pmatrix} = \sum_{s(n,m)} K \begin{pmatrix} \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

et pour $(n, m) = (2, 2)$:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{2,2} \\ \Delta \bar{S}_{2,2} \end{pmatrix} = \sum_{s(n,m)} K \begin{pmatrix} \cos \theta_s \\ -\sin \theta_s \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{pmatrix} = N_{n,m} \begin{pmatrix} \bar{C}_{n,m} \\ \bar{S}_{n,m} \end{pmatrix}$$

avec

$$N_{n,m} = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0,m})}{(n+m)!}}$$

on peut définir

$$\begin{aligned}
AC_1^* &= \sum_{s(n,m)} K \sqrt{\frac{5}{3}} \cos(\theta_s - TS_G) \\
AS_1^* &= \sum_{s(n,m)} K \sqrt{\frac{5}{3}} \sin(\theta_s - TS_G) \\
AC_2^* &= \sum_{s(n,m)} K \sqrt{\frac{5}{12}} \cos(\theta_s - 2TS_G) \\
AS_2^* &= \sum_{s(n,m)} K \sqrt{\frac{5}{12}} \sin(\theta_s - 2TS_G)
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Ces définitions permettent d'aboutir à une formulation du potentiel moyen⁹ pour la correction de Wahr :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta U \rangle &= \frac{\mu^4}{L^6} R_0^2 \frac{3}{2} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\times \left(\frac{H \sqrt{L^2(1-e^2)} - H^2}{L^2(1-e^2)} (AC_1^* \cos \Omega - AS_1^* \sin \Omega) \right. \\
&\quad \left. + \frac{L^2(1-e^2) - H^2}{L^2(1-e^2)} (AC_2^* \cos 2\Omega - AS_2^* \sin 2\Omega) \right)
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Les quantités AC_1^* , AS_1^* , AC_2^* , AS_2^* étant indépendantes du paramétrage de l'orbite, le calcul des dérivées partielles de $\langle \Delta U \rangle$ par rapport aux variables $L, C, H, \Omega, S, \lambda$ ne pose aucun problème.

1.3.4 Corrections relativistes

Les effets mentionnés dans les sections précédentes sont gouvernés par des potentiels. Il suffit donc de calculer les dérivées partielles de l'hamiltonien ou du potentiel moyen pour en déduire, à travers les équations de Lagrange, les seconds membres moyens correspondants.

A l'inverse, les équations moyennes des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel ne peuvent être établies qu'en prenant en compte chacune des composantes des forces perturbatrices¹⁰. Si ces composantes ne sont pas affectées par des courtes périodes, il suffit de calculer les valeurs moyennes des équations de Gauss (voir le détail de ce calcul en C.3.1 : les formules (C.29) et (C.35) donnent ces valeurs moyennes exprimées en éléments orbitaux, tandis que les formules (C.31) et (C.36) donnent les analogues en éléments non singuliers en excentricité). Si les composantes sont affectées par des courtes périodes, le calcul des équations de Gauss moyennes nécessite une expression explicite des composantes des forces, car c'est l'ensemble du produit matriciel des composantes des équations de Gauss et des composantes de la perturbation qu'il faut moyenner. Le principe est beaucoup plus lourd, ainsi que l'illustre le cas des corrections relativistes moyennes traitées dans ce paragraphe.

⁹même remarque : il est implicitement fonction des variables moyennes.

¹⁰ou des accélérations, selon les cas.

[Huang *et al.*, 1990], [Huang and Liu, 1991] et [Soffel, 1989] mentionnent 4 effets post-newtoniens à prendre en compte dans les orbites des satellites artificiels :

- la correction de Schwarzschild,
- la précession géodésique,
- l'effet Lense-Thirring,
- l'effet relativiste de l'aplatissement de la Terre.

L'accélération relativiste \vec{a}_{rel} se décompose ainsi en :

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$$

avec pour la correction de Schwarzschild, où c désigne la vitesse de la lumière,

$$\left| \vec{A}_1 = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left(\left(4 \frac{\mu}{r} - V^2 \right) \vec{r} + 4 (\vec{V} \cdot \vec{r}) \vec{V} \right) \right. \quad (1.72)$$

L'accélération correspondant à la précession géodésique est :

$$\left| \vec{A}_2 = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} \right. \quad (1.73)$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur de la vitesse de rotation du repère localement inertiel par rapport au repère cinématiquement non tournant, que l'on peut assimiler à un repère inertiel centré au centre de masse du système solaire. On a :

$$\left| \vec{\Omega} = -\frac{3}{2} \vec{V}_{\odot} \wedge \frac{\mu_{\odot}}{c^2 r_{\odot}^3} \vec{r}_{\odot} \right. \quad (1.74)$$

où \vec{r}_{\odot} et \vec{V}_{\odot} désignent respectivement la position et la vitesse géocentriques du Soleil.

L'effet Lense-Thirring est caractérisé par

$$\left| \vec{A}_3 = 2 \frac{\mu}{c^2 r^3} \left(\frac{3}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r} \wedge \vec{V} + \vec{V} \wedge \vec{J} \right) \right. \quad (1.75)$$

où \vec{J} désigne le moment angulaire par unité de masse. C'est un vecteur qui est perpendiculaire à l'équateur. On a :

$$\|\vec{J}\| = J = 9,8 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Enfin, \vec{A}_4 , accélération qui correspond à l'effet relativiste de l'aplatissement terrestre, est :

$$\left| \vec{A}_4 = \frac{1}{c^2} \left(-4 \vec{\nabla} \left(\frac{\mu}{r} R \right) + V^2 \vec{\nabla} R - 4 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} R) \vec{V} \right) \right. \quad (1.76)$$

avec¹¹

$$R = -\frac{J_2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right)$$

Les notations sont empruntées à [Huang and Liu, 1991].

En pratique pour LAGEOS, si $\vec{A}_0 = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$ représente l'accélération gravitationnelle de la Terre assimilée à un point, on a :

¹¹Rappelons que φ est une des trois coordonnées sphériques du satellite. Voir figure C.1.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\|\vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_0\|} = 10^{-9} \\ \frac{\|\vec{A}_3\|}{\|\vec{A}_0\|} = 10^{-11} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\|\vec{A}_2\|}{\|\vec{A}_0\|} = 10^{-11} \\ \frac{\|\vec{A}_4\|}{\|\vec{A}_0\|} = 0,5 \cdot 10^{-12} \end{array} \right|$$

L'effet le plus important est la correction de Schwarzschild. Il se traduit essentiellement par un effet séculaire sur l'argument du périée qui peut atteindre le kilomètre sur une période de révolution du périée (environ 5 ans pour LAGEOS-1). C'est peu, mais suffisant pour être détectable dans les arcs longs, puisque l'effet est cumulatif. Je donne ici uniquement les équations moyennes dues à la correction de Schwarzschild et à l'effet Lense-Thirring. A terme, il serait intéressant de toutes les inclure dans le modèle moyen, ne serait-ce que pour tenter de mettre en évidence avec CODIOR l'effet Lense-Thirring dans les orbites des satellites artificiels, en complément des travaux de [Lucchesi, 2002].

Dans toute l'étude, je me suis implicitement placé dans le cadre de la mécanique classique. Notons que ces effets n'auraient pas à être rajoutés de manière *ad hoc* si le problème avait été formulé dans le cadre de la relativité générale, car ils seraient déjà présents à l'intérieur de la théorie. Il faut noter que le temps qui intervient dans les équations relativistes est un Temps Coordonné, qui doit être rattaché à un temps physique, le TAI par exemple. C'est ce qui est fait en pratique.

Le formalisme utilisé est celui des équations de Gauss moyennes. Comme les composantes de l'accélération sont affectées par des courtes périodes (à travers \vec{r} et \vec{V}), c'est l'ensemble du second membre dont il faut calculer la moyenne sur une révolution. Cela nécessite de formuler explicitement les équations instantanées en fonction des éléments orbitaux. Ce sont les équations de Gauss (C.25) exprimées dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$ lié au satellite qui sont utilisées.

Correction de Schwarzschild

Calcul des composantes de l'accélération

Puisque

$$\begin{aligned} 4\frac{\mu}{r} - V^2 &= 2\frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} \\ r &= a(1 - \nu) \end{aligned}$$

on déduit :

$$\frac{1}{r^2} \left(2\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) = \frac{\mu^4}{L^6} \left(\frac{2}{(1 - \nu)^3} + \frac{1}{(1 - \nu)^2} \right) \quad (1.77)$$

ν désigne $e \cos u = C \cos \psi + S \sin \psi$ et ξ désigne $e \sin u = C \sin \psi - S \cos \psi$ où u est l'anomalie excentrique du satellite. Voir annexe C.

D'autre part, puisque la composante radiale de la vitesse est $\frac{1}{r} \bar{n} a^2 e \sin u$, on déduit $\vec{V} \cdot \vec{r} = \bar{n} a^2 \xi$ pour exprimer l'accélération du deuxième terme de (1.72) selon

$$\frac{4}{r^3} \bar{n} a^2 \xi V e_T \vec{r}$$

\vec{e}_T se décompose dans (\vec{e}_r, \vec{e}_s) en :

$$\vec{e}_T = \frac{\bar{n}ae \sin v}{V\eta} \vec{e}_r + \frac{\bar{n}a}{V\eta}(1 + e \cos v) \vec{e}_s \quad (1.78)$$

On en déduit que le deuxième terme de (1.72) se décompose

$$\rightarrow \text{sur } \vec{e}_r \text{ en : } \frac{4}{r^3} \frac{\bar{n}a^2 \xi \bar{n}ae \sin v}{\eta} = 4\bar{n}^2 \frac{\xi^2}{(1-\nu)^4}$$

$$\rightarrow \text{sur } \vec{e}_s \text{ en : } \frac{4}{r^3} \bar{n}a^2 \xi \frac{\bar{n}a}{\eta} (1 + e \cos v) = 4\bar{n}^2 \frac{\xi \eta}{(1-\nu)^4}$$

Conclusion : en rassemblant les différentes contributions, et en utilisant la troisième loi de Kepler, on obtient :

$$\mathbf{R} = \frac{\mu^5}{c^2 L^6} \left(\frac{2}{(1-\nu)^3} + \frac{1}{(1-\nu)^2} + 4 \frac{\xi^2}{(1-\nu)^4} \right) \quad (1.79)$$

$$\mathbf{S} = 4 \frac{\mu^5}{c^2 L^6} \frac{\xi \eta}{(1-\nu)^4} \quad (1.80)$$

On a aussi bien évidemment

$$\mathbf{W} = 0 \quad (1.81)$$

puisque l'accélération perturbatrice s'exprime complètement dans le plan de l'orbite.

Calcul des équations moyennes suivant S

(1.80) inséré dans les équations de Gauss (C.25) mène pour L à :

$$\left| \frac{dL}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^4} \left(\frac{\xi}{(1-\nu)^4} + \frac{\xi \nu}{(1-\nu)^5} - \frac{e^2 \xi}{(1-\nu)^5} \right) \right. \quad (1.82)$$

Le calcul de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi}{(1-\nu)^4} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi}{(1-\nu)^3} d\psi = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \nu}{(1-\nu)^5} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \nu}{(1-\nu)^4} d\psi = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi}{(1-\nu)^5} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi}{(1-\nu)^4} d\psi = 0 \end{aligned}$$

permet de conclure

$$\left| \frac{dL'}{dt} = 0 \right. \quad (1.83)$$

Les équations instantanées vérifiées par C et S sont obtenues en plus grâce à (C.23) :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = & 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} \eta \left(\eta \frac{\xi \cos \psi}{(1-\nu)^5} - C \eta \frac{\xi}{(1-\nu)^5} + \frac{S \eta}{1+\eta} \frac{\xi^2}{(1-\nu)^5} \right. \\ & \left. + \frac{\xi \cos \psi}{(1-\nu)^4} - \frac{C}{1+\eta} \frac{\xi \nu}{(1-\nu)^4} \right) \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} \eta \left(\eta \frac{\xi \sin \psi}{(1-\nu)^5} - S \eta \frac{\xi}{(1-\nu)^5} - \frac{S \eta}{1+\eta} \frac{\xi^2}{(1-\nu)^5} \right. \\ & \left. + \frac{\xi \sin \psi}{(1-\nu)^4} - \frac{S}{1+\eta} \frac{\xi \nu}{(1-\nu)^4} \right) \end{aligned} \quad (1.85)$$

Les seules intégrales non nulles à calculer sont, à l'ordre 2 en excentricité¹² :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \cos \psi}{(1-\nu)^4} d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi \cos \psi d\psi = -\frac{S}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \sin \psi}{(1-\nu)^4} d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi \sin \psi d\psi = \frac{C}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \cos \psi}{(1-\nu)^3} d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi \cos \psi d\psi = -\frac{S}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \sin \psi}{(1-\nu)^3} d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi \sin \psi d\psi = \frac{C}{2} \end{aligned}$$

On déduit, à l'ordre 2 en excentricité :

$$\begin{cases} \frac{dC'}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} \left(-\frac{S}{2} - \frac{S}{2} \right) \\ \frac{dS'}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} \left(\frac{C}{2} + \frac{C}{2} \right) \end{cases} \quad (1.86)$$

ou d'une manière plus rigoureuse

$$\begin{cases} \frac{dC'}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \left(-\frac{S'}{2} - \frac{S'}{2} \right) \\ \frac{dS'}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \left(\frac{C'}{2} + \frac{C'}{2} \right) \end{cases} \quad (1.87)$$

Pour H , l'équation instantanée s'écrit :

$$\frac{dH}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{H \mu^4}{L^5} \left(\frac{\xi}{(1-\nu)^4} - \frac{1}{\eta} \frac{\nu \xi}{(1-\nu)^4} + \frac{C^2 + S^2}{\eta(1+\eta)} \frac{\nu \xi}{(1-\nu)^4} \right) \quad (1.88)$$

de laquelle on déduit :

$$\left| \frac{dH'}{dt} = 0 \right. \quad (1.89)$$

Ensuite, la forme des équations de Gauss permet de déduire directement :

¹²les résultats sont en $o(e^2)$, c'est amplement suffisant. Cela implique en particulier $\eta = 1$.

$$\left| \frac{d\Omega'}{dt} \right| = 0 \quad (1.90)$$

Pour λ , enfin, l'équation instantanée est :

$$\frac{d\lambda}{dt} = 4 \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} \frac{\eta}{1+\eta} \left((2-e^2) \frac{\xi^2}{(1-\nu)^5} - \frac{\nu \xi^2}{(1-\nu)^5} \right) \quad (1.91)$$

Tous les termes étant au moins d'ordre 2 en excentricité, on déduit :

$$\left| \frac{d\lambda'}{dt} \right| = 0 \quad (1.92)$$

Calcul des équations moyennes suivant \mathbf{R}

Le principe des calculs est le même. Les équations instantanées sont :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^4} \left(2 \frac{\xi}{(1-\nu)^4} + \frac{\xi}{(1-\nu)^3} + 4 \frac{\xi^3}{(1-\nu)^5} \right) \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} & \left(2\eta \frac{\sin \psi}{(1-\nu)^4} - \eta \frac{\sin \psi}{(1-\nu)^3} + 4\eta \frac{\xi^2 \sin \psi}{(1-\nu)^5} - 2\eta S \frac{1}{(1-\nu)^4} + \eta S \frac{1}{(1-\nu)^3} \right. \\ & \left. - 4\eta S \frac{\xi^2}{(1-\nu)^5} - \frac{2C\eta}{1+\eta} \frac{\xi}{(1-\nu)^4} + \frac{C\eta}{1+\eta} \frac{\xi}{(1-\nu)^3} - \frac{4C\eta}{1+\eta} \frac{\xi^3}{(1-\nu)^5} \right) \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} & \left(2\eta \frac{\cos \psi}{(1-\nu)^4} - \eta \frac{\cos \psi}{(1-\nu)^3} + 4\eta \frac{\xi^2 \cos \psi}{(1-\nu)^5} - 2\eta C \frac{1}{(1-\nu)^4} + \eta C \frac{1}{(1-\nu)^3} \right. \\ & \left. - 4\eta C \frac{\xi^2}{(1-\nu)^5} + \frac{2S\eta}{1+\eta} \frac{\xi}{(1-\nu)^4} - \frac{S\eta}{1+\eta} \frac{\xi}{(1-\nu)^3} + \frac{4S\eta}{1+\eta} \frac{\xi^3}{(1-\nu)^5} \right) \end{aligned} \quad (1.95)$$

Les composantes sur H et Ω sont triviales, et on a pour λ :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L^5} & \left(-4 \frac{1}{(1-\nu)^2} + 2 \frac{1}{1-\nu} - 8 \frac{\xi^2}{(1-\nu)^3} + \frac{2\eta e^2}{1+\eta} \frac{1}{(1-\nu)^4} - \frac{\eta e^2}{1+\nu} \frac{1}{(1-\nu)^3} \right. \\ & \left. + \frac{4\eta e^2}{1+\eta} \frac{\xi^2}{(1-\nu)^5} - \frac{2\eta}{1+\eta} \frac{\nu}{(1-\nu)^4} + \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\nu}{(1-\nu)^3} - \frac{4\eta}{1+\eta} \frac{\xi^2 \nu}{(1-\nu)^5} \right) \end{aligned} \quad (1.96)$$

Comme pour la composante suivant \mathbf{S} , la moyenne des équations instantanées est calculée en déterminant la moyenne des quantités dépendant de la variable rapide λ . En ne retenant que les intégrales non nulles à l'ordre 2 en excentricité, on obtient :

$$\left| \frac{dL'}{dt} \right| = 0 \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{dC'}{dt} \right| &= \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} S' \\ \left| \frac{dS'}{dt} \right| &= -\frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} C' \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\left| \frac{dH'}{dt} = 0 \right. \quad (1.99)$$

$$\left| \frac{d\Omega'}{dt} = 0 \right. \quad (1.100)$$

$$\left| \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{-2}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \right. \quad (1.101)$$

Récapitulation

En rassemblant la contribution des deux composantes \mathbf{R} et \mathbf{S} , on conclut. A l'ordre 2 en excentricité, on a :

$$\begin{array}{ll} \frac{dL'}{dt} = 0 & \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{2}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \\ \frac{dC'}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} (3S') & \frac{dS'}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} (3C') \\ \frac{dH'}{dt} = 0 & \frac{d\Omega'}{dt} = 0 \end{array} \quad (1.102)$$

L'effet Lense-Thirring

La démarche est exactement la même que précédemment : on commence par exprimer l'accélération perturbatrice (1.75) dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$ lié au satellite, et en fonction des éléments par rapport auxquels on intègre. La seule relation non encore fournie est celle qui relie \vec{e}_z de (1.75) aux vecteurs précédents. C'est un des résultats classiques de l'intégration du problème des deux corps :

$$\vec{e}_z = \sin i \sin(\omega + v) \vec{e}_r + \sin i \cos(\omega + v) \vec{e}_s + \cos i \vec{e}_w \quad (1.103)$$

Après quelques manipulations, on peut déduire :

$$\mathbf{R} = 2 \frac{\mu^5}{c^2 L^8} H J \frac{1}{(1 - \nu)^4} \quad (1.104)$$

$$\mathbf{S} = -2 \frac{\mu^5}{c^2 L^8} H J \frac{\xi}{\eta} \frac{1}{(1 - \nu)^4} \quad (1.105)$$

et

$$\mathbf{W} = 2 \frac{\mu^5}{c^2 L^8} \sqrt{L^2 \eta^2 - H^2} J \frac{1}{(1 - \nu)^4} \left(2 \sin(\omega + v) + \frac{\xi}{\eta} \cos(\omega + v) \right) \quad (1.106)$$

On déduit ensuite les équations moyennes suivantes, à partir des équations osculatrices, et en négligeant dans les intégrales entrant en jeu tous les termes d'ordre 2 et plus en excentricité :

$$\begin{array}{ll}
 \frac{dL'}{dt} = 0 & \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{6}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \frac{1}{L'^2} JH' \\
 \frac{dC'}{dt} = \frac{6}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \frac{H'}{L'^2} (JS') & \frac{dS'}{dt} = -\frac{6}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \frac{H'}{L'^2} (JC') \\
 \frac{dH'}{dt} = 0 & \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{2}{c^2} \frac{\mu^4}{L'^5} \frac{J}{L'}
 \end{array} \quad (1.107)$$

1.3.5 Les effets de la précession-nutation

Le repère céleste instantané n'est pas inertiel. Il subit une faible rotation de vecteur $\vec{\Omega}$ par rapport au repère céleste inertiel, cette rotation étant due à la précession et la nutation. La précession et la nutation sont donc à l'origine de forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, puisque le repère dans lequel on intègre n'est pas galiléen.

L'accélération perturbatrice s'écrit ainsi :

$$\vec{\gamma}_i = - \left(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right) \quad (1.108)$$

$\vec{\Omega}$ et $\dot{\vec{\Omega}}$ peuvent s'exprimer dans un référentiel géocentrique $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Leurs variations, dans ce repère, n'ont pas de courtes périodes. Cela revient, dans la moyennisation par rapport à la variable rapide du satellite, à considérer les composantes de $\vec{\Omega}$ et $\dot{\vec{\Omega}}$ constantes :

$$\left. \vec{\Omega} \right| \begin{array}{c} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{array} \quad \left. \dot{\vec{\Omega}} \right| \begin{array}{c} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{array} \quad (1.109)$$

Le principe de calcul des accélérations moyennes dues aux forces d'inertie est le même que pour la correction de Schwarzschild : on moyenne les équations de Gauss par rapport à λ , après avoir exprimé les composantes de l'accélération perturbatrice dans le repère dans lequel sont exprimées les équations de Gauss. Comme précédemment, j'ai choisi d'effectuer les calculs dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$. [Branchu, 1993] les effectue dans un repère orienté par la position du périégée, car même s'il dépend du temps, le périégée n'a pas de variations à courtes périodes (il ne varie pas avec la position instantanée du satellite). Dans le cas des orbites circulaires, ce repère est également très bien défini, mais il faudrait écrire un jeu d'équations de Gauss supplémentaire. Cet investissement ne serait d'ailleurs que peu rentable, puisque l'expérience m'a montré qu'il y a, en mécanique céleste, des « constantes » dans la complexité des équations à manipuler : si les équations de la dynamique sont simples (comme les équations canoniques), ce sont les dérivées partielles (voir celles par rapport à H dans l'annexe C) qui sont compliquées, et inversement. Je me contenterai donc de tout exprimer dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$.

Les composantes $(\Omega_R, \Omega_S, \Omega_W)$ et $(\dot{\Omega}_R, \dot{\Omega}_S, \dot{\Omega}_W)$ se déduisent des composantes dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ classiquement selon trois rotations successives : la première d'angle la longitude du nœud ascendant¹³ Ω selon le troisième axe, la seconde d'angle l'inclinaison i selon le premier axe, la troisième d'angle $\omega + v$ selon le premier axe. On déduit :

$$\left| \begin{array}{l} \Omega_R = (\cos(\omega + v) \cos \Omega - \cos i \sin \Omega \sin(\omega + v)) \Omega_x \\ \quad + (\cos(\omega + v) \sin \Omega + \cos i \cos \Omega \sin(\omega + v)) \Omega_y \\ \quad + \sin i \sin(\omega + v) \Omega_z \\ \Omega_S = (-\sin(\omega + v) \cos \Omega - \cos i \sin \Omega \cos(\omega + v)) \Omega_x \\ \quad + (-\sin(\omega + v) \sin \Omega + \cos i \cos \Omega \cos(\omega + v)) \Omega_y \\ \quad + \sin i \cos(\omega + v) \Omega_z \\ \Omega_W = (\sin i \sin \Omega) \Omega_x - (\sin i \cos \Omega) \Omega_y + \cos i \Omega_z \end{array} \right. \quad (1.110)$$

et aussi

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\Omega}_R = (\cos(\omega + v) \cos \Omega - \cos i \sin \Omega \sin(\omega + v)) \dot{\Omega}_x \\ \quad + (\cos(\omega + v) \sin \Omega + \cos i \cos \Omega \sin(\omega + v)) \dot{\Omega}_y \\ \quad + \sin i \sin(\omega + v) \dot{\Omega}_z \\ \dot{\Omega}_S = (-\sin(\omega + v) \cos \Omega - \cos i \sin \Omega \cos(\omega + v)) \dot{\Omega}_x \\ \quad + (-\sin(\omega + v) \sin \Omega + \cos i \cos \Omega \cos(\omega + v)) \dot{\Omega}_y \\ \quad + \sin i \cos(\omega + v) \dot{\Omega}_z \\ \dot{\Omega}_W = (\sin i \sin \Omega) \dot{\Omega}_x - (\sin i \cos \Omega) \dot{\Omega}_y + \cos i \dot{\Omega}_z \end{array} \right. \quad (1.111)$$

Remarquons de suite que Ω_W et $\dot{\Omega}_W$ ne comportent pas de courtes périodes dues à la révolution orbitale du satellite.

Avec $\vec{r} = a(1 - \nu)\vec{e}_r$ et $\vec{V} = \frac{\bar{n}a\xi}{1 - \nu}\vec{e}_r + \frac{\bar{n}a\eta}{1 - \nu}\vec{e}_s$, on peut déduire l'expression de l'accélération perturbatrice $\vec{\gamma}_i = \gamma_R\vec{e}_r + \gamma_S\vec{e}_s + \gamma_W\vec{e}_w$. Je ne donne ici que le résultat, le calcul n'étant pas difficile mais comportant plusieurs dizaines de termes. En synthétisant les expressions, on obtient :

$$\gamma_R = \frac{2\bar{n}a\eta}{1 - \nu} \Omega_W + a(1 - \nu) (G_1 \cos(\omega + v) \sin(\omega + v) + G_2 \cos^2(\omega + v) - G_2 \sin^2(\omega + v) + \Omega_W^2)$$

(1.112)

où G_1 et G_2 ne contiennent que des longues périodes :

$$\left| \begin{array}{l} G_1 = (-\cos^2 \Omega + \cos^2 i \sin^2 \Omega) \Omega_x^2 - (1 + \cos^2 i) (\sin 2\Omega) \Omega_x \Omega_y - (\sin 2i \sin \Omega) \Omega_x \Omega_z \\ \quad + (-\sin^2 \Omega + \cos^2 i \cos^2 \Omega) \Omega_y^2 + (\sin 2i \cos \Omega) \Omega_y \Omega_z + (\sin^2 i) \Omega_z^2 \\ G_2 = (-\cos i \cos \Omega \sin \Omega) \Omega_x^2 + (\cos i \cos 2\Omega) \Omega_x \Omega_y + (\sin i \cos \Omega) \Omega_x \Omega_z \\ \quad + (\cos i \cos \Omega \sin \Omega) \Omega_y^2 + (\sin i \sin \Omega) \Omega_y \Omega_z \end{array} \right. \quad (1.113)$$

En posant maintenant :

¹³cet Ω là n'a ni flèche, ni indice...

$$\begin{cases}
P_1 &= (-\cos i \sin 2\Omega) \Omega_x^2 + (2 \cos i \cos 2\Omega) \Omega_x \Omega_y + (2 \cos \Omega \sin i) \Omega_x \Omega_z \\
&\quad + (\cos i \sin 2\Omega) \Omega_y^2 + (2 \sin i \sin \Omega) \Omega_y \Omega_z \\
P_2 &= (\cos^2 \Omega) \Omega_x^2 + (\sin 2\Omega) \Omega_x \Omega_y + (\sin^2 \Omega) \Omega_y^2 \\
P_3 &= (\cos^2 i \sin^2 \Omega) \Omega_x^2 + (-\cos^2 i \sin 2\Omega) \Omega_x \Omega_y + (-\sin \Omega \sin 2i) \Omega_x \Omega_z \\
&\quad + (\cos^2 i \cos^2 \Omega) \Omega_y^2 + (\sin 2i \cos \Omega) \Omega_y \Omega_z + (\sin^2 i) \Omega_z^2
\end{cases} \quad (1.114)$$

on déduit :

$$\gamma_S = -\frac{2\bar{n}a\xi}{1-\nu} \Omega_W - a(1-\nu) \left(\dot{\Omega}_W + P_1 \cos(\omega+v) \sin(\omega+v) + P_2 \cos^2(\omega+v) + P_3 \sin^2(\omega+v) \right) \quad (1.115)$$

Pour synthétiser l'expression de γ_S , il est avantageux de séparer les influences de $\dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z$ de celles de $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$.

On pose ainsi :

$$\begin{cases}
A_1 &= (\cos \Omega) \dot{\Omega}_x + (\sin \Omega) \dot{\Omega}_y \\
B_1 &= (\cos \Omega) \Omega_x + (\sin \Omega) \Omega_y \\
A_2 &= (-\cos i \sin \Omega) \dot{\Omega}_x + (\cos i \cos \Omega) \dot{\Omega}_y + (\sin i) \dot{\Omega}_z \\
B_2 &= (-\cos i \sin \Omega) \Omega_x + (\cos i \cos \Omega) \Omega_y + (\sin i) \Omega_z
\end{cases} \quad (1.116)$$

d'une part, et :

$$\begin{cases}
E_1 &= (\sin i \cos \Omega \sin \Omega) \Omega_x^2 + (-\sin i \cos 2\Omega) \Omega_x \Omega_y + (\cos i \cos \Omega) \Omega_x \Omega_z \\
&\quad + (-\sin i \cos \Omega \sin \Omega) \Omega_y^2 + (\cos i \sin \Omega) \Omega_y \Omega_z \\
E_2 &= (-\cos i \sin i \sin^2 \Omega) \Omega_x^2 + (\cos i \sin i \sin 2\Omega) \Omega_x \Omega_y + (-\cos 2i \sin \Omega) \Omega_x \Omega_z \\
&\quad + (-\cos i \sin i \cos^2 \Omega) \Omega_y^2 + (\cos 2i \cos \Omega) \Omega_y \Omega_z + (\cos i \sin i) \Omega_z^2
\end{cases} \quad (1.117)$$

d'autre part. On obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma_W &= a(1-\nu) ((A_1 - E_1) \cos(\omega+v) + (A_2 - E_2) \sin(\omega+v)) \\
&\quad + \frac{2\bar{n}a}{1-\nu} (\xi (B_2 \cos(\omega+v) - B_1 \sin(\omega+v)) \\
&\quad \quad - \eta (B_1 \cos(\omega+v) + B_2 \sin(\omega+v)))
\end{aligned} \quad (1.118)$$

On déduit ensuite les équations différentielles instantanées vérifiées par chacun des éléments en faisant intervenir les composantes (1.112), (1.115) et (1.118) dans les équations de Gauss (C.25). Les intégrales à calculer pour obtenir les équations moyennes sont facilement identifiables, puisqu'il suffit de retenir les termes où interviennent les facteurs ξ, ν, ψ (également à travers (C.23)). Les calculs ont été menés à l'ordre 1 en excentricité, cela permet de simplifier bon nombre d'expressions (en particulier quand C et S , eux-mêmes d'ordre 1 en excentricité, interviennent explicitement).

Equations moyennes suivant R

$$\begin{aligned}
\frac{dL'}{dt} &= 0 \\
\frac{dC'}{dt} &= \frac{a'\eta L'}{\mu} \left(-\bar{n}\eta S'\Omega_W - \frac{3}{2}S'\Omega_W^2 - \frac{3}{8}C'G_1 + \frac{3}{4}S'G_2 \right) \\
\frac{dH'}{dt} &= 0 \\
\frac{d\lambda'}{dt} &= 2\frac{a'L'}{\mu}\Omega_W (\Omega_W - 2\bar{n}\eta) \\
\frac{dS'}{dt} &= \frac{a'\eta L'}{\mu} \left(\bar{n}\eta C'\Omega_W + \frac{3}{2}C'\Omega_W^2 + \frac{3}{8}S'G_1 + \frac{3}{4}C'G_2 \right) \\
\frac{d\Omega'}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Equations moyennes suivant S

$$\begin{aligned}
\frac{dL'}{dt} &= -\frac{a'\eta L'^2}{\mu} \left(\dot{\Omega}_W + \frac{P_2 + P_3}{2} \right) \\
\frac{dC'}{dt} &= \frac{a'L'}{\mu} \left(\dot{\Omega}_W C' \left(1 + \frac{3}{2}\eta \right) + \bar{n}\Omega_W S'(1 + \eta) + \frac{S'}{2}P_1 \left(1 + \frac{3}{4}\eta \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8}\eta C'P_3 + C'P_2 \left(1 + \frac{9}{8}\eta \right) \right) \\
\frac{dH'}{dt} &= -\frac{a'L'}{\mu} L' \cos i \left(\dot{\Omega}_W + \frac{P_2 + P_3}{2} \right) \\
\frac{d\lambda'}{dt} &= 0 \\
\frac{dS'}{dt} &= \frac{a'L'}{\mu} \left(\dot{\Omega}_W S' \left(1 + \frac{3}{2}\eta \right) - \bar{n}\Omega_W C'(1 + \eta) + \frac{C'}{2}P_1 \left(1 + \frac{3}{4}\eta \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8}\eta S'P_2 + S'P_3 \left(1 + \frac{9}{8}\eta \right) \right) \\
\frac{d\Omega'}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Equations moyennes suivant W

$$\begin{aligned}
 \frac{dL'}{dt} &= 0 \\
 \frac{dC'}{dt} &= \frac{a' L'}{\mu} \frac{H'}{\sqrt{L'^2 \eta^2 - H'^2}} \frac{S'}{\eta} \left(\frac{A_2 - E_2}{2} - \bar{n} \eta B_2 \right) \\
 \frac{dH'}{dt} &= -\frac{a' L'}{\mu} \frac{\sqrt{L'^2 \eta^2 - H'^2}}{\eta} \left(\frac{A_1 - E_1}{2} - \bar{n} \eta B_1 \right) \\
 \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{a' L'}{\mu} \frac{H'}{\eta \sqrt{L'^2 \eta^2 - H'^2}} \left(\frac{A_2 - E_2}{2} - \bar{n} \eta B_2 \right) \\
 \frac{dS'}{dt} &= -\frac{a' L'}{\mu} \frac{H'}{\sqrt{L'^2 \eta^2 - H'^2}} \frac{C'}{\eta} \left(\frac{A_2 - E_2}{2} - \bar{n} \eta B_2 \right) \\
 \frac{d\Omega'}{dt} &= \frac{a' L'}{\mu} \frac{L'}{\sqrt{L'^2 \eta^2 - H'^2}} \left(\frac{A_2 - E_2}{2} - \bar{n} \eta B_2 \right)
 \end{aligned} \tag{1.121}$$

Récapitulation

On se rend compte dans les équations moyennes précédentes que les variables moyennes et les variables instantanées sont vraiment d'une nature comparable : si les équations moyennes dépendent effectivement des variables moyennes L', C', \dots , elles dépendent aussi des quantités moyennes qui en sont déduites : il faudrait définir η', Ω'_W, \dots

A l'inverse de [Branchu, 1993], je n'ai pas calculé de couplages avec J_2 . Cela nécessiterait des calculs encore plus longs, et encore plus fastidieux. A moins d'avoir recours, comme il l'avait d'ailleurs fait, au manipulateur de séries.

1.4 Autres forces non gravitationnelles

Beaucoup des paramètres permettant de décrire des forces non gravitationnelles ne peuvent pas être considérés constants sur une révolution du satellite. C'est le cas du freinage atmosphérique, la densité dépendant fortement de l'altitude, c'est aussi le cas de la pression de radiation (qui est nulle lors des passages du satellite dans l'ombre de la Terre, ce qui exclut finalement tout formalisme purement hamiltonien).

De plus, [Exertier, 1988] précise que «si les différents couplages entre les termes de plusieurs potentiels sont souvent d'un ordre de grandeur plus faibles que les effets propres aux perturbations respectives, il n'en est pas de même ici, où les perturbations induites (couplages avec J_2 principalement) dépassent de beaucoup les effets des forces elles-mêmes.»

1.4.1 Cas général : résolution par quadratures numériques

Aussi, la seule façon de tenir compte le plus exactement possible de ces couplages, est de moyenner le second membre des équations différentielles initiales par une quadrature numérique, en supposant non pas les éléments constants pendant la moyenne, mais au contraire, affectés des principales courtes périodes pendant la révolution du satellite.

Le calcul des équations différentielles moyennes est ainsi du type :

$$\left| \frac{d\mathbf{E}'}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \frac{d\mathbf{E}(u)}{dt} du \right. \quad (1.122)$$

où $\mathbf{E}(u)$ sont des éléments osculateurs, calculés à partir de grandeurs moyennes, au moyen de théories qui fournissent les courtes périodes (Kaula, Brouwer, ou celle présentée en annexe D).

1.4.2 Cas particulier de la pression de radiation avec ombre

C'est une telle approche qui a été retenue pour gérer les passages des satellites dans le cône d'ombre de la Terre. En cas de phénomènes d'ombre, on ajoute à l'hamiltonien vrai \mathcal{H}_v composé uniquement d'un hamiltonien analytique (calculé à travers les séries), une partie numérique qui dépend d'une fonction d'ombre classique f_0 ($f_0 = 0$ si le satellite est dans l'ombre, $f_0 = 1$ s'il est éclairé). La valeur moyenne des équations instantanées déduites de l'hamiltonien instantané (1.46) a effectivement été obtenue par quadrature. L'expression explicite de l'hamiltonien instantané en fonction des variables instantanées est la suivante :

$$\left| \begin{aligned} \mathcal{H} = & \sigma \left(\frac{a_\odot}{r_\odot} \right)^2 a \\ & \times \left(A_C \left(\left(\cos \psi - C + \frac{1}{1+\eta} S\xi \right) \cos \Omega - \left(\sin \psi - S - \frac{1}{1+\eta} C\xi \right) \sin \Omega \cos i \right) \right. \\ & + B_C \left(\left(\cos \psi - C + \frac{1}{1+\eta} S\xi \right) \sin \Omega + \left(\sin \psi - S - \frac{1}{1+\eta} C\xi \right) \cos \Omega \cos i \right) \\ & \left. + C_C \left(\sin \psi - S - \frac{1}{1+\eta} C\xi \right) \sin i \right) \end{aligned} \right. \quad (1.123)$$

Des dérivées partielles qu'on en déduit, on peut interpréter la forme des signaux engendrés par le passage des satellites dans le cône d'ombre de la Terre (Figures 1.2 et 1.3).

1.5 Récapitulation : le modèle d'orbite moyenne

A part dans le cas spécifique des quadratures numériques, les équations osculatrices du mouvement ont été transformées une fois pour toutes pour obtenir un système dynamique moyen. Ce système moyen est ensuite intégré numériquement. Le principal atout de la méthode est donc de pouvoir proposer l'intégration d'un mouvement orbital sur une période de

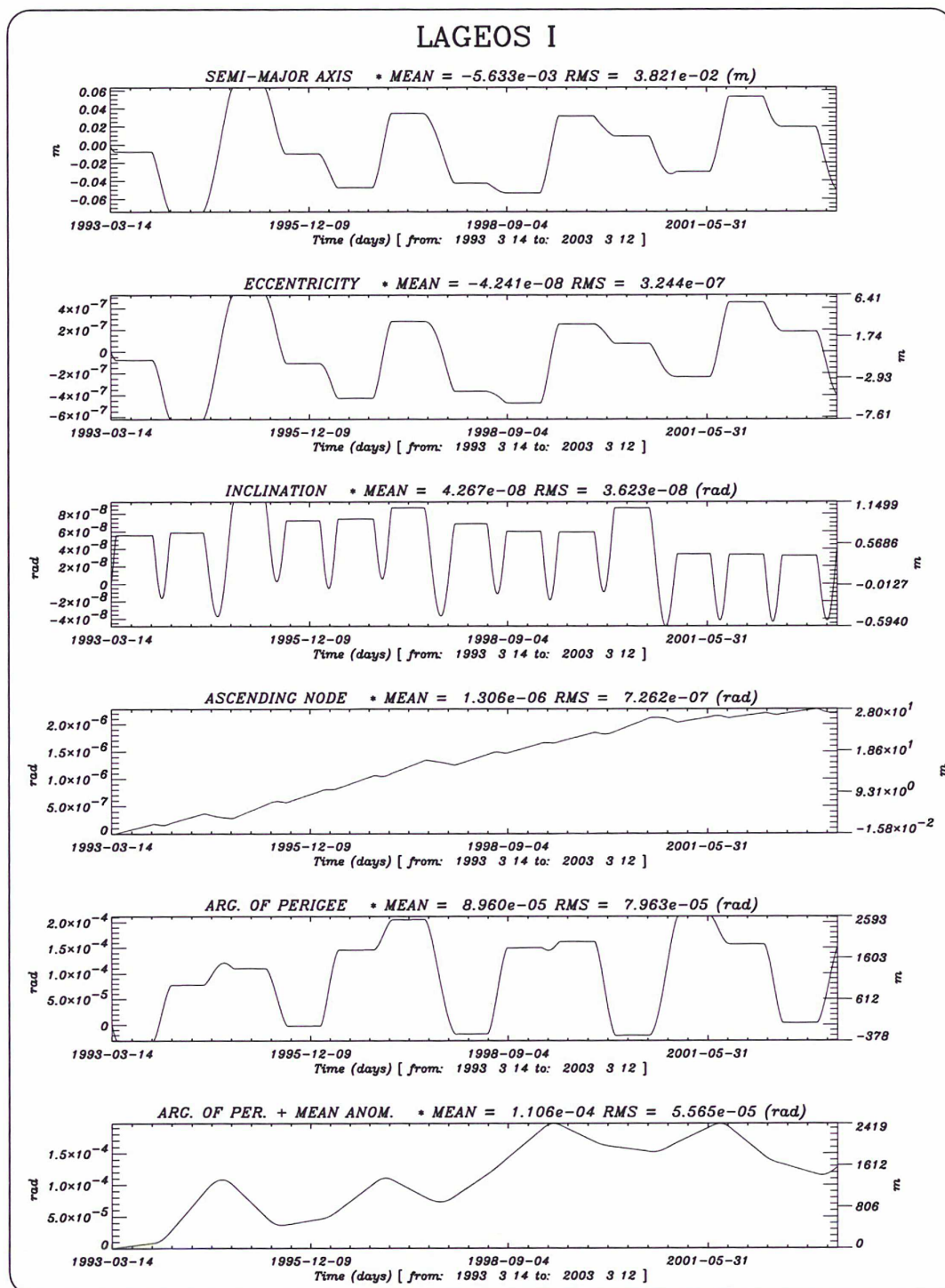


FIG. 1.2 – Effet des passages de LAGEOS-1 dans le cône d'ombre de la Terre.

Cette figure est une différence de deux extrapolations sur 10 ans. On remarquera en particulier l'effet sur le demi-grand axe et les périodes de 110 jours.

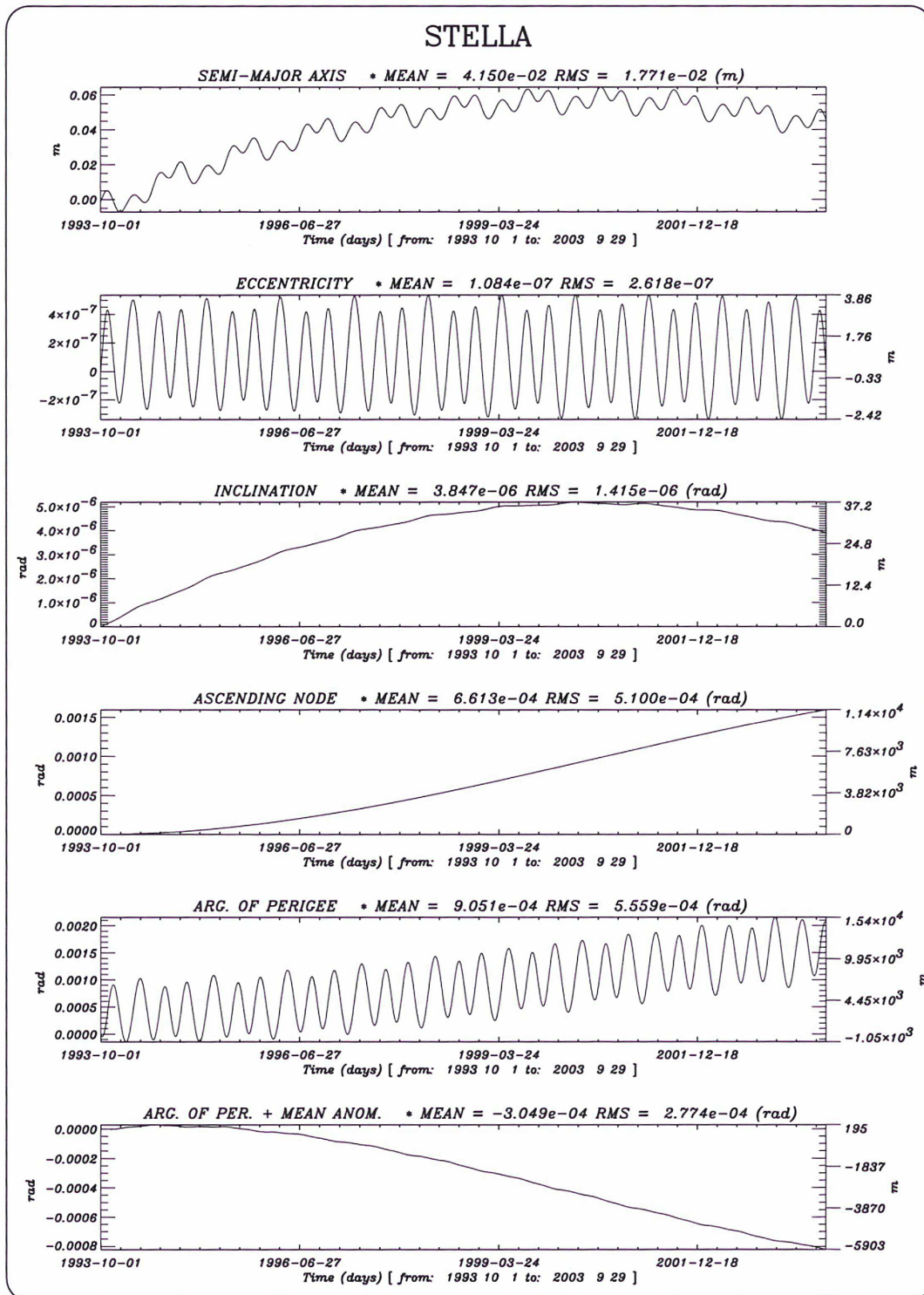


FIG. 1.3 – Effet des passages de STELLA dans le cône d'ombre de la Terre.

Cette figure est une différence de deux extrapolations sur 10 ans. On remarquera en particulier l'effet sur l'inclinaison (rappelons que STELLA est un satellite héliosynchrone).

temps très grande, avec un modèle physique relativement complet. Il resterait maintenant à développer davantage le modèle de forces non gravitationnelles (en particulier pour les pressions de radiation autres que la pression de radiation solaire (*i.e.* albédo, infrarouge) qui pourront être traitées par quadratures numériques, ainsi que l'effet thermique Yarkovsky.).

TAB. 1.6 – Modèle dynamique moyen - Forces gravitationnelles.

| Perturbation | Modèle et commentaires |
|------------------------|--|
| Champ de Gravité | Tous les calculs sont développés en excentricité. |
| J_2 | Couplages jusqu'à l'ordre 5 (J_2^5). |
| Zonaux | $J_3 - J_{10}$: couplages jusqu'à l'ordre 4. Ordre 3 : couplages avec J_2 : $J_2 J_n$. Ordre 4 : couplages avec J_2 : $J_2^2 J_n$, couplages du type $J_n - J_m$ (utilisés en pratique jusque J_7). $J_{10} - J_{40}$, avec couplages avec J_2 . J_{41} - , perturbations non codées sous forme de séries. Formalisme déduit de [Kaula, 1966] (pas de couplage avec J_2). |
| Tesséraux | Couplages à longue période entre $C_{n,m}$ et $S_{n,m}$. Projection en éléments non singuliers de la formulation de [Métris <i>et al.</i> , 1993]. |
| Résonances | Détection possible par sélection des combinaisons l, m, p, q, r , sans pour autant autoriser un calcul explicite. |
| Variations temporelles | J_2 à J_{10} , séculaires et saisonnières. Prise en compte de modèles et/ou de mesures (champs de pression atmosphérique). |
| Troisième corps | Calculs jusqu'au degré 5, avec couplages des degrés 2 et 3 avec J_2 . Les troisièmes corps sont : la Lune, le Soleil, et les planètes (Vénus, Mars, Jupiter). |
| Marées terrestres | Degrés 2 et 3 dus à la Lune et au Soleil, avec couplages du degré 2 avec J_2 . |
| Termes de Wahr | Formalisme de Lagrange. Ondes diurnes (de degré 1) et semi-diurnes (de degré 2). |
| Marées océaniques | Formalisme de Kaula ; ondes progrades (longues périodes d'ordre 0, diurnes d'ordre 1, semi-diurnes d'ordre 2). |

TAB. 1.7 – Modèle dynamique moyen - Forces non gravitationnelles.

| Perturbation | Modèle et commentaires |
|-------------------------------|--|
| Freinage | Quadrature numérique, sans couplage ; plusieurs modèles d'atmosphère disponibles (DTM-94, MSIS-86). |
| activité solaire | Flux solaire (10.7 cm) et coefficient d'activité géomagnétique tri-horaires K_p . |
| Pression de radiation solaire | |
| sans ombre | Champ analytique, et couplages avec J_2 . |
| avec ombre | Quadrature numérique en mode différentiel (avec et sans ombre). |
| Relativité | Schwarzschild, Lense-Thirring. |
| Précession-Nutation | Forces apparentes, moyennes analytiques (pas de couplages avec J_2) ; repère vrai de la date (UAI 1976 et 1980, [IERS, 1992]) / J2000. |
| Alternative | Prise en compte de données accélérométriques dans trois directions (radiale, tangentielle, normale), dans différents repères liés au satellite. Possibilité d'ajustement de biais et de facteurs d'échelle moyens dans les trois directions radiale, tangentielle et normale. |

Chapitre 2

Construction des éléments moyens «observés»

Dans le premier chapitre, on a établi les équations moyennes de la dynamique, exprimées en éléments non singuliers en excentricité. Pour intégrer l'ensemble du système différentiel moyen, il faut maintenant disposer de conditions initiales. De plus, pour estimer des paramètres géodynamiques, il faut également disposer d'observations de la même nature que les éléments moyens générés à travers l'intégration numérique de ce système différentiel.

Dans les deux cas, il s'agit du même problème à résoudre : l'obtention d'éléments centrés à partir d'orbites osculatrices. Ces orbites osculatrices, dites «observées», sont générées par intégration numérique, et ajustées sur les données issues des différentes techniques de géodésie spatiale : réseau mondial de télémétrie laser, données GPS notamment. Ces orbites osculatrices sont ce que je considère dans cette étude comme les données de base, et sont réalisées en amont du processus que j'explique ici.

Tout repose sur l'hypothèse que les éléments \mathbf{E} décrivant le mouvement orbital au cours du temps sont développables en série de Fourier (éventuellement avec des périodes infinies). Cette hypothèse est plus que réaliste dans la mesure où les périodes qui interviennent sont des combinaisons linéaires de multiples des périodes fondamentales du mouvement, à savoir : la période de révolution orbitale, la période de révolution de la Terre, la période du périégée, et la période du nœud. A long terme, des effets dissipatifs remettent en cause cette hypothèse. Mais comme on s'intéresse ici aux courtes périodes, on peut écrire :

$$\left| \mathbf{E}(t) = \sum_{T>0} \left(A_T \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_T \right) \right) \right. \quad (2.1)$$

chaque terme étant caractérisé par une amplitude A_T et une phase φ_T .

La période de coupure T_C qui fait la séparation entre effets à courtes et à longues périodes étant choisie, les éléments centrés que l'on cherche à construire sont donc :

$$\left| \bar{\mathbf{E}}(t) = \sum_{T>T_C} \left(A_T \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_T \right) \right) \right. \quad (2.2)$$

2.1 Position du problème : un filtrage en deux étapes

La transformation entre (2.1) et (2.2) s'apparente à un filtrage. Le but est d'isoler le signal à longues périodes dans les orbites osculatrices (figure 2.1).

Une des premières méthodes pour effectuer cette transformation a été purement numérique. Ce calcul fut vite abandonné à cause de l'amplitude des courtes périodes résiduelles [Goad, 1977]. Il faut en effet disposer d'une méthode qui permette de construire les éléments moyens «observés» avec une précision compatible avec celle de la méthode : il s'agit d'éliminer toutes les courtes périodes dont les amplitudes sont comprises entre 10 kilomètres et une dizaine de centimètres, à 10 centimètres près (voire moins). Gagner 5 ordres de grandeur n'est pas chose facile avec un filtre numérique, d'autant plus qu'il devrait être adapté à diverses configurations dynamiques : demi-grands axes, inclinaisons, zones de résonance.

Le processus de filtrage comporte en fait deux étapes :

1. une étape analytique, basée sur une formulation explicite des courtes périodes dans le jeu d'éléments non singuliers en excentricité : cette formulation utilise une intégration des équations de Lagrange formulées en éléments non singuliers en excentricité. Elle est détaillée dans l'annexe D. Je détaille ci-dessous les principes et les motivations d'une telle intégration.

La solution est utilisée comme suit : les éléments osculateurs \mathbf{E} contiennent des courtes et des longues périodes. On peut donc écrire $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{LP} + \mathbf{E}_{CP}$, où $\mathbf{E}_{LP} = \bar{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{E}_{CP} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}$ (en référence aux notations du chapitre précédent). L'intégration analytique donne, pour chaque élément, l'expression de E_{CP} .

Cette étape permet d'éliminer tous les termes dont l'amplitude est comprise entre 10 kilomètres (termes dus à J_2) et quelques décimètres.

2. une étape numérique, basée sur un produit de convolution. C'est le signal filtré analytiquement qui est filtré numériquement. Cela permet d'éliminer les courtes périodes résiduelles, dues ou non aux coefficients du géopotentiel, en particulier les résonances dont la période caractéristique est de l'ordre de quelques jours.

La figure 2.2 présente les résultats de ce filtrage dans le cas de CHAMP.

2.2 Première étape : une étape analytique

Le problème à résoudre est double : il faut d'une part examiner quelle théorie utiliser pour la formulation des courtes périodes, d'autre part construire les éléments permettant d'initialiser cette théorie. La difficulté essentielle provient de la nature même des variables utilisées : l'approche est nécessairement spécifique aux faibles excentricités.

Je réexamine ici l'hypothèse d'intégration classique des équations de Lagrange réalisée en deux itérations : caractérisation d'une orbite précessante dans une première étape, établissement de corrections à cette orbite précessante ensuite.

Je montre que les éléments non singuliers en excentricité C et S vérifient un système différentiel qui peut être assimilé à celui d'un oscillateur harmonique, caractérisé par une pulsation k . [Cook, 1966] donne une formulation de cette pulsation, en ne considérant que les

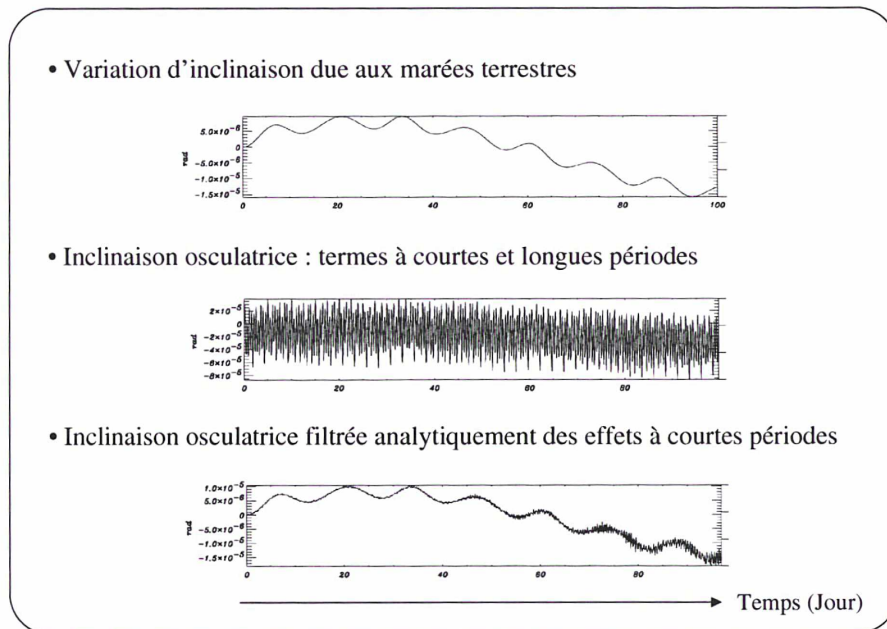


FIG. 2.1 – Le filtrage : une mise en évidence des effets à longues périodes.

Les éléments orbitaux comportent des variations à courtes et à longues périodes. Les courtes périodes ont le plus souvent de fortes amplitudes, qui peuvent atteindre 10 kilomètres (J_2).

En tant que potentiel extérieur, les effets de troisièmes corps, et en particulier les effets des marées terrestres, sont essentiellement des effets à longues périodes. La forme et l'amplitude du signal peuvent être obtenues par la différence de deux intégrations numériques (premier graphique). Les effets à longues périodes dus aux marées ne peuvent pas facilement être mis en évidence, en raison de l'amplitude des courtes périodes (deuxième graphique). En exprimant analytiquement les courtes périodes, et en retirant (*i.e.* en filtrant) leurs valeurs en chaque point de l'orbite osculatrice, il est possible d'isoler, dans les observations, le signal à longues périodes.

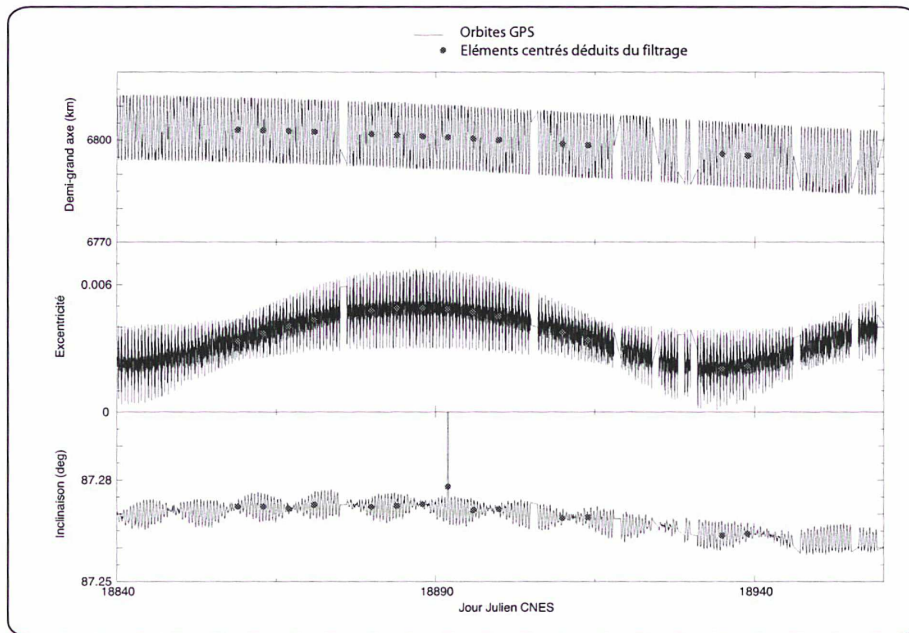


FIG. 2.2 – Éléments moyens observés de CHAMP, déduits de l’orbite GPS osculatrice par filtrage mixte, analytique et numérique.

premiers zonaux pairs. La formule que je donne ici tient compte de l’influence de tous les coefficients zonaux pairs. Le système différentiel est ensuite complètement caractérisé par une deuxième quantité, k' , qui est fonction des coefficients zonaux impairs. Je montre en fait comment les coefficients zonaux impairs influencent le calcul des effets séculaires sur l’argument du périégée ω , et que cette influence est particulièrement forte dans le cas de faibles excentricités. Une formulation de ces effets en éléments non singuliers C et S est ainsi judicieuse (section 2.2.1).

Je formule ensuite une méthode perturbative destinée à exprimer directement les courtes périodes en fonction de C et S (section 2.2.2).

Une des conséquences de l’influence des zonaux impairs est la remise en cause de l’hypothèse classique d’intégration analytique des équations de Lagrange, basée en particulier, à la première itération, sur un taux de variation $\dot{\omega}$ constant dans le temps de l’argument du périégée ω . Je compare ainsi les hypothèses d’intégration entre elles, pour montrer, grâce à un exemple académique, que celle réalisée en section 2.2.2 est bien la plus adaptée aux faibles excentricités (section 2.2.3). J’expose ensuite le principe de l’intégration analytique des équations de Lagrange (section 2.2.4). On pourra trouver le détail de ces calculs (effets à longues périodes, corrections à courtes périodes, pour chacune des 6 variables), dans l’annexe D.

Enfin, je présente le calcul des conditions initiales permettant d’appliquer cette théorie (section 2.2.5).

2.2.1 Des paramètres de description spécifiques

La difficulté principale d’intégration est induite par la définition même des éléments non singuliers, qui mixent l’élément métrique e et l’élément angulaire ω .

Le système différentiel vérifié par C et S a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_{n,m,p,q}(t)S - (n-2p+q)C f_{n,m,p,q}(t) + \beta_{1n,m,p,q}(t) \right) \\ \frac{dS}{dt} = \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(-\alpha_{n,m,p,q}(t)C - (n-2p+q)S f_{n,m,p,q}(t) + \beta_{2n,m,p,q}(t) \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

L'expression des fonctions $\alpha_{n,m,p,q}$, $f_{n,m,p,q}$, $\beta_{1n,m,p,q}$ et $\beta_{2n,m,p,q}$ est donnée en (D.21).

Je me suis placé dans le contexte d'une théorie linéaire, où le système des équations de Lagrange est divisé en deux parties : pour chaque élément, l'intégration exacte d'une première partie du système différentiel permet d'obtenir une solution dite *principale*. L'intégration de la seconde partie est ensuite basée sur une méthode perturbative, qui mène à une solution dite *complémentaire*, et qui utilise le résultat de la première itération.

Dans le système différentiel (2.3), les hautes fréquences sont gouvernées par la période de révolution orbitale du satellite reliée à λ et à la période de révolution sidérale de la Terre reliée au temps sidéral à Greenwich TS_G . Par conséquent, pour étudier en première approximation le comportement de ce système différentiel, on peut ne retenir que les combinaisons d'indices qui vérifient $n-2p+q=0$ et $m=0$. Dans ce cas, les fonctions $\alpha_{n,m,p,q}(t) = \alpha_{n,m,p,q}(a(t), e(t), i(t))$, $\beta_{1n,m,p,q}(t) = \beta_{1n,m,p,q}(a(t), e(t), i(t))$, et $\beta_{2n,m,p,q}(t) = \beta_{2n,m,p,q}(a(t), e(t), i(t))$ sont lentement variables avec le temps, de même que les éléments métriques $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$.

La dépendance de ces fonctions avec l'excentricité est en réalité une dépendance avec C et S , à travers les fonctions $G\cos_{n,p,q}(C, S)$, $G\sin_{n,p,q}(C, S)$, et de leurs dérivées partielles (on a donc 6 fonctions d'excentricité). Chacune de ces fonctions étant développable en série entière de C et de S , il est possible (annexe D) d'écrire le système différentiel (2.3) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \sum_{n_1+n_2 \geq 0} \gamma_{n_1,n_2}^C C^{n_1} S^{n_2} \\ \frac{dS}{dt} &= \sum_{n_1+n_2 \geq 0} \gamma_{n_1,n_2}^S C^{n_1} S^{n_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

En ne retenant que les termes d'ordres 0 et 1 en excentricité dans le système (2.4) dans lequel on a supposé $n-2p+q=0$ et $m=0$, on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\alpha_1 S + k' + o(e^2) \\ \frac{dS}{dt} &= \alpha_2 C + o(e^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec (C_0, S_0) comme conditions initiales, et :

$$\alpha_1 = \sum_{p \geq 1} J_{2p} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} \times \left(\frac{\cos i}{\sin i} F'_{2p,0,p}(i) - p(2p+1)F_{2p,0,p}(i) + \frac{1}{2}(p-1)(2p-1) \left(F_{2p,0,p-1}(i) + F_{2p,0,p+1}(i) \right) \right) \quad (2.6)$$

$$\alpha_2 = \sum_{p \geq 1} J_{2p} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} \times \left(\frac{\cos i}{\sin i} F'_{2p,0,p}(i) - p(2p+1)F_{2p,0,p}(i) - \frac{1}{2}(p-1)(2p-1) \left(F_{2p,0,p-1}(i) + F_{2p,0,p+1}(i) \right) \right) \quad (2.7)$$

L'expression de α_1 a été obtenue en retenant les termes constants des $\alpha_{n,m,p,q}$, et les termes en S des $\beta_{1n,m,p,q}$ (qui n'ont pas de termes en C). Celle de α_2 a été obtenue en retenant les termes constants des $\alpha_{n,m,p,q}$, et les termes en C des $\beta_{2n,m,p,q}$ (qui n'ont pas de termes en S).

On a aussi :

$$k' = \sum_{p \geq 1} J_{2p+1} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p+1} p \left(F_{2p+1,0,p}(i) - F_{2p+1,0,p+1}(i) \right) \quad (2.8)$$

en retenant les termes constants des $\beta_{1n,m,p,q}$ (il n'y a pas de termes constants dans les $\beta_{2n,m,p,q}$).

On peut déduire des formules (2.6) et (2.7) que $\alpha_1 \alpha_2 > 0$: compte tenu de la valeur des différents coefficients, il suffit d'examiner ce qui se passe pour J_2 . Cela revient à comparer $\left| \frac{\cos i}{\sin i} F'_{2p,0,p}(i) - p(2p+1)F_{2p,0,p}(i) \right|$ à $|(p-1)(2p-1)F_{2p,0,p+1}(i)|$ quand $p = 1$.

La solution exacte de ce système (2.5) est ainsi, où $k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$:

$$\begin{aligned} C(t) &= C_0 \cos(kt) - \frac{\alpha_1}{k} \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \sin(kt) \\ S(t) &= \frac{\alpha_2}{k} C_0 \sin(kt) + \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \cos(kt) + \frac{k'}{\alpha_1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Interprétation géométrique

Lorsque le champ est limité au terme en J_2 , on a $\alpha_1 = \alpha_2 = k$. Je suppose cette égalité vérifiée dans tout le paragraphe. Dans ce cas, la solution (2.9) se simplifie en :

$$\left| \begin{array}{lcl} C(t) & = & C_0 \cos(kt) - \left(S_0 - \frac{k'}{k}\right) \sin(kt) \\ S(t) & = & C_0 \sin(kt) + \left(S_0 - \frac{k'}{k}\right) \cos(kt) + \frac{k'}{k} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Le terme constant $\frac{k'}{k}$ dans l'expression de $S(t)$ explique en particulier, et à l'inverse de $C(t)$, pourquoi la valeur moyenne de S sur une période de révolution du périhélie n'est pas nulle.

Puisque $C^2(t) + \left(S(t) - \frac{k'}{k}\right)^2 = C_0^2 + \left(S_0 - \frac{k'}{k}\right)^2$ est alors une constante, on peut en conclure que dans le plan (C, S) , l'ensemble de points $(C(t), S(t))$ décrit un cercle de centre O' de coordonnées $\left(0, \frac{k'}{k}\right)$ et de rayon R égal à [Cook, 1966, section6] :

$$R = \sqrt{C_0^2 + \left(S_0 - \frac{k'}{k}\right)^2} \quad (2.11)$$

On appelle θ l'angle polaire qui repère le point $(C(t), S(t))$ par rapport au centre O' selon l'axe $O'C$ (figure 2.3).

Par opposition à ω , θ est linéaire avec le temps, le coefficient de proportionnalité étant égal à k :

$$\theta(t) = \theta_0 + kt \quad (2.12)$$

θ_0 , ω_0 , R_0 et e_0 sont les valeurs initiales de θ , ω , R , e , déduites facilement de C_0 et S_0 . Avec ces différentes notations, on peut écrire d'une manière équivalente :

$$\left| \begin{array}{lcl} C(t) & = & e(t) \cos(\omega(t)) \\ & = & R(t) \cos(\theta(t)) \\ S(t) & = & e(t) \sin(\omega(t)) \\ & = & R(t) \sin(\theta(t)) + \frac{k'}{k} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

En appliquant la relation d'Al Kashi dans le triangle $(OO'M)$, on obtient la loi de variation de e avec le temps :

$$\left| \begin{array}{lcl} e^2 & = & R^2 + \left(\frac{k'}{k}\right)^2 + 2\frac{k'}{k}R \sin(\theta) \\ & = & R^2 - \left(\frac{k'}{k}\right)^2 + 2\frac{k'}{k}e \sin(\omega) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Pour résumer, les caractéristiques principales d'un système différentiel tel (2.5) sont les suivantes :

- $R(t)$ est constant avec le temps, tandis que le terme en $\frac{k'}{k}$ est à l'origine de variations sur e ;

- $\theta(t)$, à la différence de $\omega(t)$, est linéaire avec le temps ;
- la différence de dynamique entre les variables (R, θ) et (e, ω) est d'autant plus importante que le rayon du cercle est proche de la valeur de $\frac{k'}{k}$, ce qui arrive quand l'excentricité est petite. Typiquement, k est de l'ordre de 10^{-3} (comme J_2), k' de l'ordre de 10^{-6} (comme J_3). Par conséquent, un ordre de grandeur de $\frac{k'}{k}$ est 10^{-3} . Pour des orbites avec une excentricité de 10^{-2} , il n'y a qu'une faible différence entre θ et ω , et e varie alors quasiment de manière sinusoïdale dans le temps : $\frac{k'}{k}$ est négligeable comparé à R . Pour des orbites avec une excentricité plus petite, il y a une grande différence entre la dynamique de θ et celle de ω (figure 2.4) ;
- OO' traduit l'asymétrie du potentiel terrestre par rapport à l'équateur, exprimée en fait par les zonaux impairs et en premier lieu par J_3 . La découverte de cet effet au début de l'ère spatiale de la géodésie a eu un certain retentissement médiatique : la Terre a la forme d'une poire aplatie !

A noter que le décentrage $\frac{k'}{k}$ entre O et O' est principalement à affecter aux coefficients du champ de gravité, et ne dépend qu'en partie des paramètres orbitaux. Ainsi, la formule (2.14) qui donne l'expression de l'excentricité permet de conclure : les orbites circulaires n'existent pas ! Il est bien connu que le freinage atmosphérique, par exemple, a tendance à circulariser les orbites. Mais la présence de $\frac{k'}{k}$ dans (2.14) montre que la valeur moyenne de l'excentricité est «forcée» par le champ de gravité. Ceci n'exclut pas pour autant la présence de points précis où l'excentricité moyenne est nulle.

Ajoutons enfin, en revenant à la solution (2.9), que les différences relatives entre k , α_1 et α_2 sont du même ordre de grandeur que la différence relative entre J_2 et J_4 , ainsi que leurs définitions peuvent le suggérer.

2.2.2 Méthode d'intégration des équations non singulières $\frac{dC}{dt}$ et $\frac{dS}{dt}$

Le système (2.4) qu'il s'agit d'intégrer peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\alpha_1 S + k' + \epsilon a(C, S, t) \\ \frac{dS}{dt} &= \alpha_2 C + \epsilon b(C, S, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec comme conditions initiales (C_0, S_0) . Les fonctions a et b sont des polynômes en C et S , en référence au développement des fonctions $G\cos$, $G\sin$ et de leurs dérivées partielles en puissances de l'excentricité. Elles contiennent toutes les courtes périodes du système.

Rappelons

$$k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad (2.16)$$

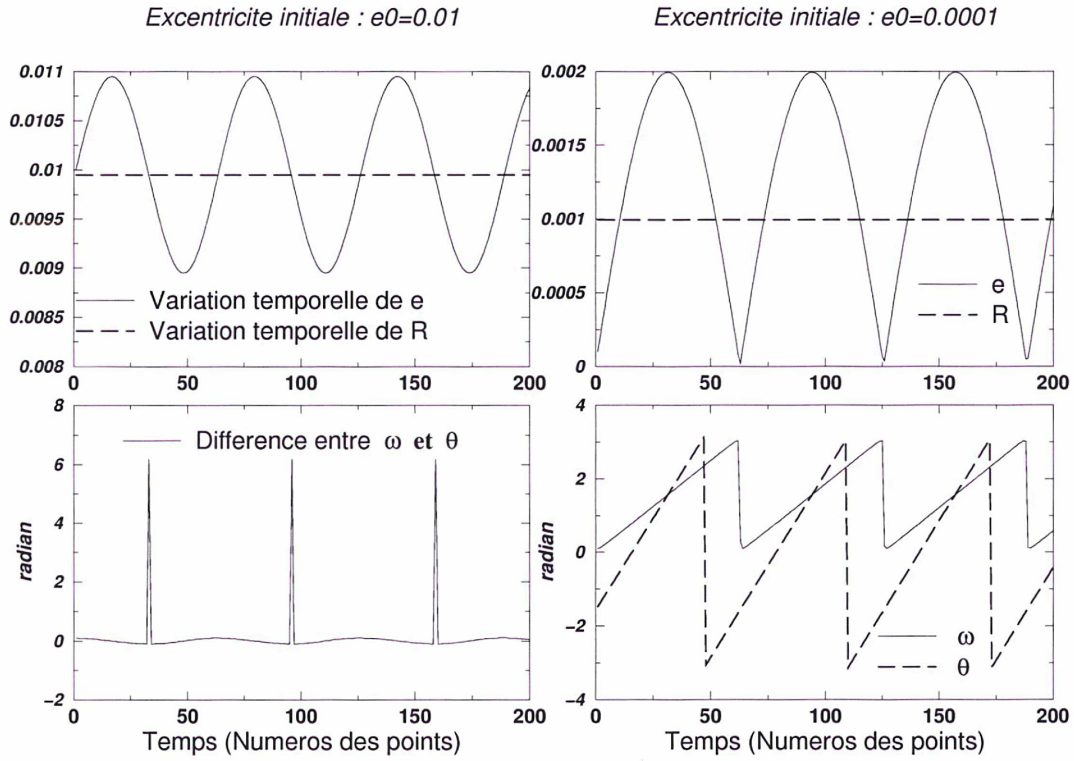


FIG. 2.4 – Dynamique des variables e , R , ω , θ en fonction de l'excentricité initiale.

Système étudié : $dC/dt = -kS + k'$, $dS/dt = kC$, avec $k = 10^{-3}$, $k' = 10^{-6}$. Conditions initiales : $e_0 = 1.10^{-2}$ sur la gauche, $e_0 = 1.10^{-4}$ sur la droite, $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}$. Les courbes indiquent les variations de R et e . A gauche, il n'y a pas de grande différence entre θ et ω car l'excentricité n'est pas très petite. A droite, on peut remarquer que ω ne varie pas entre 0 et 2π .

et on définit la quantité complexe (avec $i^2 = -1$)

$$z = C + i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}S \quad (2.17)$$

ainsi que

$$A(z, t) = a(C, S, t) + i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}b(C, S, t) \quad (2.18)$$

Avec ces notations, le système (2.15) peut s'écrire sous forme complexe selon :

$$\left| \frac{dz}{dt} = ikz + k' + \epsilon A(z, t) \right. \quad (2.19)$$

Quand $\epsilon = 0$, (2.19) s'intègre de manière exacte en :

$$z(t, 0) = z_0 e^{ikt} + i\frac{k'}{k} \left(1 - e^{ikt}\right) \quad (2.20)$$

où

$$z_0 = C_0 + i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}S_0 \quad (2.21)$$

Le but est de définir $z(t, \epsilon)$ pour ϵ petit. Cette définition est faite, toujours dans l'annexe D, sur la base d'un développement au premier ordre en ϵ .

On obtient :

$$z(t, \epsilon) = z(t, 0) + \epsilon \left(\int_0^t e^{ik(t-u)} A(z(u, 0), u) du + (\Delta C_0 + i\Delta S_0) e^{ikt} \right) + o(\epsilon) \quad (2.22)$$

ΔC_0 et ΔS_0 désignent les perturbations initiales sur C et S , qui sont éventuellement nulles¹.

Ceci permet de définir

$$\Delta C(t) + i\Delta S(t) = \epsilon \left(\int_0^t e^{ik(t-u)} A(z(u, 0), u) du + (\Delta C_0 + i\Delta S_0) e^{ikt} \right) \quad (2.23)$$

La solution complète de (2.15) est par conséquent :

$$\begin{aligned} C(t) &= C_0 \cos(kt) - \frac{\alpha_1}{k} \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \sin(kt) + \Delta C(t) \\ S(t) &= \frac{\alpha_2}{k} C_0 \sin(kt) + \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \cos(kt) + \frac{k'}{\alpha_1} + \Delta S(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Il est très important de noter que les perturbations qui peuvent s'écrire sous la forme $A^*(z) = \gamma iz$ doivent être insérées dans le système principal et intégrées de manière exacte, en substituant α_1 à $\alpha_1 \pm \epsilon\gamma$ (selon les cas) dans (2.20) (respectivement α_2 à $\alpha_2 \pm \epsilon\gamma$). Dans le cas contraire, garder $A^*(z)$ dans le système complémentaire mènerait inévitablement à des termes proportionnels au temps du type te^{ikt} , caractéristiques d'un mauvais choix de la pulsation de l'oscillateur harmonique.

2.2.3 Conséquence : choix d'une hypothèse d'intégration

De la formule (2.13) de définition de C et S , on déduit :

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} = \cos \omega \frac{dC}{dt} + \sin \omega \frac{dS}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{e} \sin \omega \frac{dC}{dt} + \frac{1}{e} \cos \omega \frac{dS}{dt} \end{cases} \quad (2.25)$$

¹ce qui revient, à l'instant initial, à phaser les courtes périodes sur les longues périodes.

et d'autre part :

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \cos \theta \frac{dC}{dt} + \sin \theta \frac{dS}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{R} \sin \theta \frac{dC}{dt} + \frac{1}{R} \cos \theta \frac{dS}{dt} \end{cases} \quad (2.26)$$

Ces formules vont permettre d'étudier dans quel jeu de variables il est le plus pertinent de formuler l'hypothèse d'intégration analytique des équations de Lagrange, dans le cas de faibles excentricités.

Les méthodes classiques d'intégration analytique des équations de Lagrange, dites méthodes *par itérations*, divisent le système différentiel en deux parties, de manière à :

- tout d'abord calculer les variations séculaires $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$, \dot{M} des éléments angulaires Ω , ω , M : ces variations sont dues aux coefficients zonaux pairs. Dans le même temps, les éléments métriques sont constants. On a ainsi $a = a_0$, $e = e_0$, $i = i_0$, $\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}t$, $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t$, $M = M_0 + \dot{M}t$;
- ensuite incorporer la solution précédente dans la partie du système différentiel non concernée lors de la première étape : cela permet de formuler les corrections à l'orbite précédente : $a(t) = a_0 + \Delta a(t)$, $e(t) = e_0 + \Delta e(t)$, $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t + \Delta \omega(t)$, ...

Etudions donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = -kS + k' - \epsilon \cos t \\ \frac{dS}{dt} = kC + \epsilon \cos t \end{cases} \quad (2.27)$$

avec pour conditions initiales (C_0, S_0) à $t = 0$.

Ce système académique peut être intégré de manière exacte, en appliquant les règles classiques de calcul différentiel² :

$$\begin{aligned} C &= \left(C_0 - \frac{\epsilon k}{1 - k^2} \right) \cos(kt) - \left(S_0 - \frac{k'}{k} - \frac{\epsilon k}{1 - k^2} \right) \sin(kt) \\ &\quad + \frac{\epsilon k}{1 - k^2} \cos(t) - \frac{\epsilon}{1 - k^2} \sin(t) \\ S &= \left(C_0 - \frac{\epsilon k}{1 - k^2} \right) \sin(kt) + \left(S_0 - \frac{k'}{k} - \frac{\epsilon k}{1 - k^2} \right) \cos(kt) \\ &\quad + \frac{k'}{k} + \frac{\epsilon}{1 - k^2} \sin(t) + \frac{\epsilon k}{1 - k^2} \cos(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

²résolution de l'équation sans second membre, et méthode de «variation des constantes».

Système correspondant dans les variables (e, ω)

Le système en (e, ω) est déduit de (2.27) :

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} = k' \cos(\omega) + \epsilon \cos(t)(\sin(\omega) - \cos(\omega)) \\ \frac{d\omega}{dt} = k - \frac{k'}{e} \sin(\omega) + \frac{\epsilon}{e} \cos(t)(\sin(\omega) + \cos(\omega)) \end{cases} \quad (2.29)$$

La solution principale est obtenue en ne retenant dans le second membre que les termes indépendants du temps. Dans notre exemple, ceci revient à supposer, dans une première itération, que $k' = 0$ et $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= 0 \\ \frac{d\omega}{dt} &= k \end{aligned}$$

La solution principale est par conséquent :

$$\begin{aligned} e &= e_0 \\ \omega &= \omega_0 + kt \end{aligned}$$

Pour obtenir la solution complémentaire $\Delta e(t)$ et $\Delta \omega(t)$, il faut insérer la solution principale dans les deux équations différentielles indépendantes l'une de l'autre :

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} = k' \cos(\omega_0 + kt) + \epsilon \cos(t)(\sin(\omega_0 + kt) - \cos(\omega_0 + kt)) \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k'}{e_0} \sin(\omega_0 + kt) + \frac{\epsilon}{e_0} \cos(t)(\sin(\omega_0 + kt) + \cos(\omega_0 + kt)) \end{cases} \quad (2.30)$$

On en déduit, en supposant que $\Delta e(0) = 0$ et $\Delta \omega(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{k'}{k} \sin(\omega_0 + kt) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} (\sin \omega_0 - \cos \omega_0) \left(\frac{1}{k+1} \sin(k+1)t + \frac{1}{k-1} \sin(k-1)t \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} (\sin \omega_0 + \cos \omega_0) \left(\frac{-1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{-1}{k-1} \cos(k-1)t \right) \\ &\quad - \frac{k'}{k} \sin(\omega_0) - \frac{\epsilon}{2} (\sin \omega_0 + \cos \omega_0) \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{-1}{k-1} \right) \\ \Delta \omega &= \frac{k'}{k} \frac{1}{e_0} \cos(\omega_0 + kt) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{e_0} (\sin \omega_0 - \cos \omega_0) \left(\frac{-1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{-1}{k-1} \cos(k-1)t \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{e_0} (\sin \omega_0 + \cos \omega_0) \left(\frac{1}{k+1} \sin(k+1)t + \frac{1}{k-1} \sin(k-1)t \right) \\ &\quad - \frac{k'}{k} \frac{1}{e_0} \cos(\omega_0) + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{e_0} (\sin \omega_0 - \cos \omega_0) \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{-1}{k-1} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

La solution complète de (2.27) peut par conséquent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} e(t) &= e_0 + \Delta e(t) \\ \omega(t) &= \omega_0 + kt + \Delta\omega(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

ou, d'une manière équivalente :

$$\begin{cases} C(t) &= e(t) \cos(\omega(t)) \\ S(t) &= e(t) \sin(\omega(t)) \end{cases} \quad (2.33)$$

Il est possible de comparer la solution (2.33) à la solution exacte (2.28). Mais c'est une évidence de dire que l'inconvénient principal des variables (e, ω) vient du fait que l'hypothèse $\frac{de}{dt} = 0$ n'est pas très réaliste, surtout quand l'excentricité devient petite (figure 2.6). De plus, ω ne varie pas continûment, à l'inverse de θ , entre 0 et 2π , et ce même en première approximation (figure 2.5). C'est pourquoi les variables (e, ω) ne sont pas celles avec lesquelles il est le plus facile de formuler une hypothèse d'intégration pertinente, ainsi que je l'illustre maintenant.

Système correspondant dans les variables (R, θ)

La formule de définition de C et S (2.13) justifie que l'on puisse appliquer aux variables (R, θ) le même genre de méthode que celle appliquée à (e, ω) .

Le système différentiel (2.27) peut être réécrit en fonction de R et θ selon :

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} &= \epsilon \cos(t)(\sin(\theta) - \cos(\theta)) \\ \frac{d\theta}{dt} &= k + \frac{\epsilon}{R} \cos(t)(\sin(\theta) + \cos(\theta)) \end{cases} \quad (2.34)$$

Le système principal est obtenu en supposant que $\epsilon = 0$ (pour l'obtenir, il n'est plus nécessaire de supposer, comme précédemment, $k' = 0$ puisque (2.34) est indépendant de k') :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= k \end{aligned}$$

qui s'intègre en :

$$\begin{aligned} R &= R_0 \\ \theta &= \theta_0 + kt \end{aligned}$$

Le système complémentaire est composé de deux équations différentielles indépendantes :

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} &= \epsilon \cos(t)(\sin(\theta_0 + kt) - \cos(\theta_0 + kt)) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\epsilon}{R_0} \cos(t)(\sin(\theta_0 + kt) + \cos(\theta_0 + kt)) \end{cases} \quad (2.35)$$

Les solutions, notées $\Delta R(t)$ et $\Delta\theta(t)$, sont, en supposant que $\Delta R(0) = 0$ et $\Delta\theta(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta R &= +\frac{\epsilon}{2} (\sin \theta_0 - \cos \theta_0) \left(\frac{1}{k+1} \sin(k+1)t + \frac{1}{k-1} \sin(k-1)t \right) \\
&\quad +\frac{\epsilon}{2} (\sin \theta_0 + \cos \theta_0) \left(\frac{-1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{-1}{k-1} \cos(k-1)t \right) \\
&\quad -\frac{\epsilon}{2} (\sin \theta_0 + \cos \theta_0) \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{-1}{k-1} \right) \\
\Delta \theta &= -\frac{\epsilon}{2 R_0} (\sin \theta_0 - \cos \theta_0) \left(\frac{-1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{-1}{k-1} \cos(k-1)t \right) \\
&\quad +\frac{\epsilon}{2 R_0} (\sin \omega_0 + \cos \omega_0) \left(\frac{1}{k+1} \sin(k+1)t + \frac{1}{k-1} \sin(k-1)t \right) \\
&\quad +\frac{\epsilon}{2 R_0} (\sin \theta_0 - \cos \theta_0) \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{-1}{k-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

La solution complète de (2.27) peut par conséquent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} R(t) = R_0 + \Delta R(t) \\ \theta(t) = \theta_0 + kt + \Delta \theta(t) \end{cases} \tag{2.37}$$

ou, d'une manière équivalente :

$$\begin{cases} C(t) = R(t) \cos(\theta(t)) \\ S(t) = R(t) \sin(\theta(t)) + \frac{k'}{k} \end{cases} \tag{2.38}$$

Comparés aux termes de (2.31), tous les termes de la solution complémentaire (2.36) exprimée en fonction de R et θ , ont ϵ en facteur, alors qu'il y a un terme proportionnel à $\frac{k'}{k}$ dans (2.31). Un inconvénient majeur des variables (e, ω) est maintenant résolu. Néanmoins, si l'on veut intégrer les équations de Lagrange par rapport à ces variables, cela nécessite d'exprimer tout le second membre par rapport à R et θ , ce qui n'est pas chose facile. C'est là où la formulation de la méthode par rapport à C et S trouve tout son intérêt.

Système correspondant dans les variables (C, S)

La méthode contient donc 2 itérations. Dans une première itération, c'est la solution principale qui est recherchée, solution principale qui est solution du système (2.27) où $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -kS + k' \\ \frac{dS}{dt} &= kC \end{aligned} \tag{2.39}$$

Cette solution est :

$$\begin{cases} C = C_0 \cos((k + \epsilon)t) - \left(S_0 - \frac{k'}{k + \epsilon} \right) \sin((k + \epsilon)t) \\ S = C_0 \sin((k + \epsilon)t) + \left(S_0 - \frac{k'}{k + \epsilon} \right) \cos((k + \epsilon)t) + \frac{k'}{k + \epsilon} \end{cases} \tag{2.40}$$

En appliquant (2.23), on obtient, en supposant $\Delta C(0) = 0$ et $\Delta S(0) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C(t) = -\frac{\epsilon}{2} \left((\cos kt + \sin kt) \left(\frac{1}{k+1} \sin(k+1)t + \frac{1}{k-1} \sin(k-1)t \right) \right. \\ \quad \left. + (\sin kt - \cos kt) \left(\frac{-1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{-1}{k-1} \cos(k-1)t - \frac{2k}{1-k^2} \right) \right) \\ \Delta S(t) = \frac{\epsilon}{2} \left((\cos kt - \sin kt) \left(\frac{1}{k+1} \sin(k+1)t + \frac{1}{k-1} \sin(k-1)t \right) \right. \\ \quad \left. + (\sin kt + \cos kt) \left(\frac{-1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{-1}{k-1} \cos(k-1)t - \frac{2k}{1-k^2} \right) \right) \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Après quelques simplifications, on aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C(t) = \epsilon \left(\frac{k}{1-k^2} \cos t - \frac{1}{1-k^2} \sin t + \frac{k}{1-k^2} \sin kt - \frac{k}{1-k^2} \cos kt \right) \\ \Delta S(t) = \epsilon \left(\frac{k}{1-k^2} \cos t + \frac{1}{1-k^2} \sin t - \frac{k}{1-k^2} \sin kt - \frac{k}{1-k^2} \cos kt \right) \end{array} \right. \quad (2.42)$$

La solution finale s'écrit donc sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = C_0 \cos((k+\epsilon)t) - \left(S_0 - \frac{k'}{k+\epsilon} \right) \sin((k+\epsilon)t) + \Delta C(t) \\ S = C_0 \sin((k+\epsilon)t) + \left(S_0 - \frac{k'}{k+\epsilon} \right) \cos((k+\epsilon)t) + \frac{k'}{k+\epsilon} + \Delta S(t) \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Dans ce cas, la solution (2.43) avec (2.42) est la solution exacte. Ceci se comprend facilement puisque l'exemple académique, de même que la méthode, est linéaire en ϵ .

Comparons les trois méthodes d'intégration : la table 2.1 résume différentes quantités statistiques³ qui caractérisent les propriétés des différentes méthodes utilisées pour intégrer (2.15) sur 1 jour et sur 10 jours. Dans cet exemple, la formulation en (C, S) est la meilleure. Celle utilisant la formulation en (e, ω) est vraiment la moins bonne, même pour une excentricité initiale non petite (table 2.2).

L'hypothèse d'intégration exprimée avec C et S est bien la meilleure, et dans chacun des exemples de base qui peuvent "décomposer" le véritable système différentiel vérifié par C et S . Les résultats spectaculaires des tables précédentes doivent maintenant être modulés : k et k' ne sont pas réellement constants, mais peuvent être affectés par les lentes variations de a , e , i . Néanmoins, d'un point de vue dynamique, puisque la méthode est basée sur des quantités qui sont parfaitement définies même dans le cas de faibles excentricités, elle apparaît plus performante que d'autres exprimées avec (e, ω) .

En conclusion, la figure (2.7) illustre comment la solution à longues périodes pour C et S permet de caractériser facilement le cercle décrit par le point $M(C, S)$.

³sur une période de temps fixée, on compare les n points x'_i calculés avec les trois méthodes aux n points x_i correspondant à la solution exacte. χ^2 est défini par : $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x'_i - x_i)^2}{x_i}$.

TAB. 2.1 – Comparaison des méthodes d'intégration.

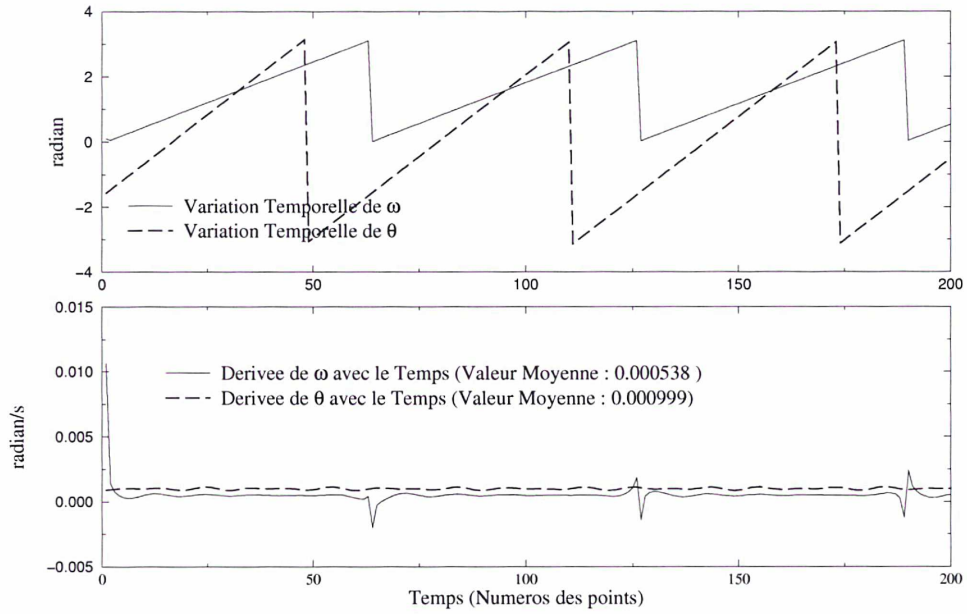
Système testé : $dC/dt = -kS + k' - \epsilon \cos t$, $dS/dt = kC + \epsilon \cos t$ où $k = 10^{-3}$, $k' = 10^{-6}$, $\epsilon = 10^{-7}$. Conditions initiales : $e_0 = 5.10^{-4}$, $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}$. Pour calculer les erreurs absolues, la référence est la solution exacte.

| | | Hypothèse d'intégration : | | |
|---|---------|---|---|--|
| | | basée sur (e, ω) (voir (2.33)) | basée sur (R, θ) (voir (2.38)) | basée sur (C, S) (voir (2.43)) |
| Intégration sur 1 jour (Nombre de points : 86400) | | | | |
| Moyenne des erreurs absolues | sur C | $4.74 \cdot 10^{-4}$ | $-6.97 \cdot 10^{-14}$ | $6.47 \cdot 10^{-22}$ |
| | sur S | $-1.23 \cdot 10^{-3}$ | $-4.81 \cdot 10^{-14}$ | $9.71 \cdot 10^{-23}$ |
| RMS des erreurs absolues | sur C | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $3.75 \cdot 10^{-12}$ | $3.40 \cdot 10^{-19}$ |
| | sur S | $1.09 \cdot 10^{-3}$ | $3.78 \cdot 10^{-12}$ | $3.64 \cdot 10^{-19}$ |
| χ^2 | sur C | $7.75 \cdot 10^1$ | $3.18 \cdot 10^{-14}$ | $7.48 \cdot 10^{-29}$ |
| | sur S | $1.94 \cdot 10^2$ | $8.67 \cdot 10^{-15}$ | $1.50 \cdot 10^{-28}$ |
| Intégration sur 10 jours (Nombre de points : 864000) | | | | |
| Moyenne des erreurs absolues | sur C | $4.73 \cdot 10^{-4}$ | $-9.56 \cdot 10^{-15}$ | $2.59 \cdot 10^{-22}$ |
| | sur S | $-1.21 \cdot 10^{-3}$ | $-9.67 \cdot 10^{-15}$ | $-2.07 \cdot 10^{-22}$ |
| RMS des erreurs absolues | sur C | $4.50 \cdot 10^{-4}$ | $3.77 \cdot 10^{-12}$ | $3.20 \cdot 10^{-18}$ |
| | sur S | $1.09 \cdot 10^{-3}$ | $3.77 \cdot 10^{-12}$ | $3.20 \cdot 10^{-18}$ |
| χ^2 | sur C | $7.94 \cdot 10^2$ | $2.97 \cdot 10^{-13}$ | $6.38 \cdot 10^{-26}$ |
| | sur S | $2.10 \cdot 10^3$ | $9.48 \cdot 10^{-14}$ | $1.72 \cdot 10^{-25}$ |

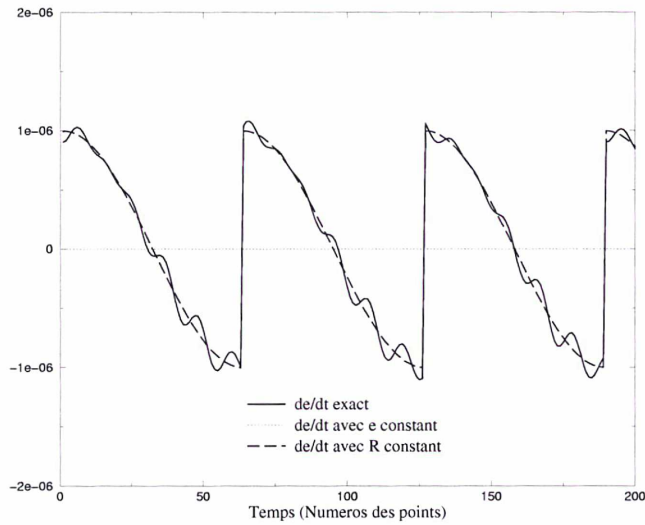
TAB. 2.2 – Comparaison des hypothèses d'intégration : influence de l'excentricité initiale.

Système testé : $dC/dt = -kS + k' - \epsilon \cos t$, $dS/dt = kC + \epsilon \cos t$, où $k = 10^{-3}$, $k' = 10^{-6}$, $\epsilon = 10^{-7}$. Intégration sur 10 jours, avec $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}$. Pour calculer les erreurs absolues, la référence est la solution exacte.

| | | Hypothèse d'intégration : | | |
|--------------------------------------|---------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| | | basée sur (e, ω) | basée sur (R, θ) | basée sur (C, S) |
| Excentricité initiale : $e_0 = 0.1$ | | | | |
| Moyenne des erreurs absolues | sur C | $9.94 \cdot 10^{-6}$ | $-7.39 \cdot 10^{-17}$ | $-4.65 \cdot 10^{-21}$ |
| | sur S | $-5.69 \cdot 10^{-7}$ | $-3.59 \cdot 10^{-17}$ | $1.24 \cdot 10^{-20}$ |
| RMS des erreurs absolues | sur C | $8.00 \cdot 10^{-6}$ | $4.18 \cdot 10^{-14}$ | $9.89 \cdot 10^{-18}$ |
| | sur S | $2.88 \cdot 10^{-6}$ | $3.94 \cdot 10^{-14}$ | $9.89 \cdot 10^{-18}$ |
| χ^2 | sur C | $8.06 \cdot 10^{-3}$ | $3.23 \cdot 10^{-19}$ | $1.94 \cdot 10^{-27}$ |
| | sur S | $2.18 \cdot 10^{-4}$ | $2.58 \cdot 10^{-19}$ | $2.64 \cdot 10^{-27}$ |
| Excentricité initiale : $e_0 = 0.01$ | | | | |
| Moyenne des erreurs absolues | sur C | $9.87 \cdot 10^{-5}$ | $-7.56 \cdot 10^{-16}$ | $6.09 \cdot 10^{-22}$ |
| | sur S | $-1.12 \cdot 10^{-5}$ | $-5.44 \cdot 10^{-16}$ | $-5.28 \cdot 10^{-22}$ |
| RMS des erreurs absolues | sur C | $7.91 \cdot 10^{-5}$ | $4.07 \cdot 10^{-13}$ | $3.34 \cdot 10^{-18}$ |
| | sur S | $3.02 \cdot 10^{-5}$ | $4.06 \cdot 10^{-13}$ | $3.42 \cdot 10^{-18}$ |
| χ^2 | sur C | $1.01 \cdot 10^1$ | $1.55 \cdot 10^{-16}$ | $7.39 \cdot 10^{-27}$ |
| | sur S | $5.81 \cdot 10^{-1}$ | $1.55 \cdot 10^{-16}$ | $1.20 \cdot 10^{-26}$ |

Excentricite Initiale : $e_0=0.000001$ **FIG. 2.5** – Variation temporelle des variables ω et θ .

Système testé : $dC/dt = -kS + k' - \epsilon \cos t$, $dS/dt = kC + \epsilon \cos t$ où $k = 10^{-3}$, $k' = 10^{-6}$, $\epsilon = 10^{-7}$. Conditions initiales : $e_0 = 1.10^{-6}$, $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}$. Par opposition à θ , ω ne varie pas de 0 à 2π : $\omega(t)$ n'est pas une fonction continue. Ceci est confirmé par la forme de la dérivée de ω par rapport au temps. De plus, la valeur moyenne de $\dot{\theta}$ est plus proche de k que la valeur moyenne de $\dot{\omega}$.

**FIG. 2.6** – Comparaison graphique des hypothèses d'intégration.

Système testé : $dC/dt = -kS + k' - \epsilon \cos t$, $dS/dt = kC + \epsilon \cos t$ où $k = 10^{-3}$, $k' = 10^{-6}$, $\epsilon = 10^{-7}$. Conditions initiales : $e_0 = 1.10^{-6}$, $\omega_0 = 0.1 \text{ rad}$. Il y a trois courbes : la première correspond à la variation exacte de la dérivée de l'excentricité $\frac{de}{dt}$ calculée à partir de $\frac{dC}{dt}$ et $\frac{dS}{dt}$. Les deux autres illustrent la valeur de la dérivée adoptée par la méthode d'intégration retenue : $e = e_0$ ou $R = R_0$.

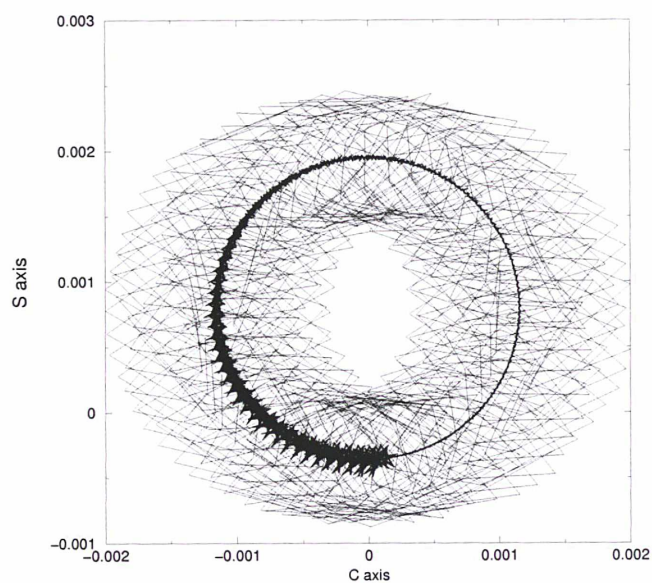


FIG. 2.7 – Cercle moyen et cercle osculateur décrits par C et S . Dans cette figure, on trouve 2 courbes qui correspondent à la valeur de S en fonction de C : la première provient de l'intégration numérique du système différentiel vérifié par C et S , et est par conséquent composée de longues et de courtes périodes. La seconde résulte du filtrage analytique de tous les points de l'orbite osculatrice. On remarque que la solution à longues périodes, même si elle est affectée par du bruit en extrémité d'arc, permet de caractériser le cercle en définissant son centre et son rayon.

2.2.4 Une intégration analytique des 6 équations de Lagrange

La méthode d'intégration des équations de Lagrange vérifiées par C et S est donc bien robuste pour les faibles excentricités. Elle permet d'aboutir aux variations explicites avec le temps (2.24). On trouvera dans l'annexe D le détail de tous les calculs, et en particulier ceux de $\Delta C(t)$ et $\Delta S(t)$.

Pour les autres éléments, a , i , Ω , λ , l'hypothèse d'intégration de Kaula n'est pas remise en cause par les faibles excentricités. Pour formuler les courtes périodes, j'aurais ainsi pu utiliser une formulation avec les fonctions classiques d'excentricité $G_{n,p,q}(e)$, l'excentricité e étant déduite des expressions de C et S . [Métris, 1991] souligne néanmoins l'importance de disposer de théories homogènes, et recommande fortement d'éviter de combiner entre elles plusieurs théories différentes. La remarque concerne la prise en compte des différents termes du géopotential, et elle est d'autant plus justifiée dans le cas présent où il s'agirait de combiner des théories différentes selon le type d'élément orbital (la solution (2.24) pour C et S , la solution de Kaula pour les autres éléments).

C'est pourquoi j'ai établi également une solution analytique des équations de Lagrange vérifiées par a , i , Ω , λ avec les nouvelles fonctions d'excentricité : je donne, toujours dans l'annexe D, l'expression des variations séculaires $\dot{\Omega}$, $\dot{\lambda}$, ainsi que celle des corrections à l'orbite «non perturbée» (au sens «perturbation du système différentiel») Δa , Δi , $\Delta \Omega$, $\Delta \lambda$. La forme globale de la solution, ainsi que les références des différentes formules, est donnée dans la table 2.3.

Il faut noter également qu'une telle formulation, grâce notamment aux fonctions $G\cos_{n,p,q}$ et $G\sin_{n,p,q}$, revient à prendre en compte dans la deuxième étape de l'intégration des variations séculaires ou à longues périodes de 4 des six éléments (les angles bien évidemment, mais également l'excentricité).

Cela permet de comprendre, intuitivement, pourquoi il y a dans les formules une sommation sur r : le potentiel gravitationnel est développé en harmoniques sphériques. La décomposition fait intervenir deux indices n et m . La formulation de ce potentiel en fonction des éléments orbitaux du satellite fait intervenir les fonctions d'inclinaison $F_{n,m,p}(i)$ et d'excentricité $G_{n,p,q}(e)$ (annexe E). D'où deux indices supplémentaires m et p . Une telle décomposition permet de transformer la formulation en coordonnées sphériques en une décomposition où seuls, avec une orbite précessante, trois des six éléments varient. Ici la solution «quasi-précessante» tient compte également des variations de l'excentricité. D'où une sommation supplémentaire, sur r .

Test de la solution dans diverses configurations dynamiques

Les tables suivantes caractérisent, d'un point de vue statistique, la solution de [Kaula, 1966] et celle développée ici. Les deux méthodes sont comparées à une même intégration numérique, considérée comme référence.

Les conditions initiales sont celles d'un satellite à environ 800 kilomètres d'altitude, avec une excentricité initiale qui n'est donc pas trop faible dans les tables 2.4 et 2.5. Dans les

TAB. 2.3 – Méthode d'intégration des équations de Lagrange :
récapitulation de la forme de la solution.

| Elément | Solution du système différentiel | | |
|----------------|--|---|---|
| | première partie | | seconde partie |
| $a(t) =$ | a_0 | + | $\Delta a(t)$ si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} \neq 0$: (D.76) si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} = 0$: \emptyset |
| $C(t) =$ | $C_0 \cos(kt)$ $-\frac{\alpha_1}{k} \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \sin(kt)$ $k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ k' : formule (2.8) α_1 : formule(2.6) α_2 : formule(2.7) | + | $\Delta C(t)$ si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} \neq 0$: (D.64)+(D.59)+(D.69) si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} = 0$: \emptyset |
| $i(t) =$ | i_0 | + | $\Delta i(t)$ si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} \neq 0$: (D.90) si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} = 0$: (D.95)+(D.96) |
| $\Omega(t) =$ | $\Omega_0 + \dot{\Omega}t$ $\dot{\Omega}$: formule (D.79) | + | $\Delta \Omega(t)$ si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} \neq 0$: (D.83) si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} = 0$: (D.86) |
| $S(t) =$ | $\frac{\alpha_2}{k} C_0 \sin(kt)$ $+ \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \cos(kt) + \frac{k'}{\alpha_1}$ $k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ k' : formule (2.8) α_1 : formule(2.6) α_2 : formule(2.7) | + | $\Delta S(t)$ si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} \neq 0$: (D.65)+(D.61)+(D.70) si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} = 0$: \emptyset |
| $\lambda(t) =$ | $\lambda_0 + \bar{n}t + \dot{\lambda}t$ $\dot{\lambda}$: formule (D.98) | + | $\Delta \lambda(t) + \Delta \Delta \bar{n}(t)$ si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} \neq 0$: (D.100)+(D.109) si $\dot{\psi}_{n,m,p,q} = 0$: (D.105)+(D.106)+(D.107) |

tables 2.6 et 2.7, l'excentricité initiale a été considérablement diminuée. Dans chaque cas, le potentiel de la Terre a été développé jusqu'au degré et ordre 10.

Pour chacune des valeurs indiquées dans les tables, on a comparé les n points x_i de l'orbite obtenue par intégration numérique aux n points x'_i de l'orbite obtenue par intégration analytique. Dans chaque table, les deux premières colonnes indiquent la valeur moyenne et l'écart-type des erreurs absolues $x_i - x'_i$. La troisième colonne indique le coefficient $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x'_i - x_i)^2}{|x_i|}$: la similitude entre l'intégration numérique et l'intégration analytique est d'autant meilleure que ce paramètre est petit. Cette quantité est plus représentative de la dynamique des orbites que le coefficient de corrélation, indiqué en colonne 4.

TAB. 2.4 – Intégration analytique : excentricité non faible sur un arc de quelques jours.
Comparaison sur une période de 4 jours entre l'intégration numérique, et deux méthodes d'intégration analytique : celle de Kaula, et celle formulée en C et S .

| $a_0 = 7340 \text{ km}, e_0 = 0.2107 \cdot 10^{-1}, i_0 = 49.83^\circ$ Longueur de l'arc : 4 jours | | | | |
|---|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| Méthode de Kaula | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a (m) | $-0.107 \cdot 10^1$ | $0.405 \cdot 10^1$ | $0.689 \cdot 10^{-2}$ | 1.000 |
| C | $0.692 \cdot 10^{-4}$ | $0.494 \cdot 10^{-4}$ | $0.172 \cdot 10^{-2}$ | 0.999 |
| i (rad) | $0.123 \cdot 10^{-4}$ | $0.198 \cdot 10^{-6}$ | $0.500 \cdot 10^{-6}$ | 1.000 |
| Ω (rad) | $-0.133 \cdot 10^{-3}$ | $0.630 \cdot 10^{-4}$ | $0.166 \cdot 10^{-4}$ | 1.000 |
| S | $-0.762 \cdot 10^{-3}$ | $0.735 \cdot 10^{-5}$ | $0.938 \cdot 10^{-1}$ | 0.999 |
| λ (rad) | $0.381 \cdot 10^{-3}$ | $0.179 \cdot 10^{-3}$ | $0.556 \cdot 10^{-3}$ | 1.000 |
| Notre méthode | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a (m) | $-0.107 \cdot 10^1$ | $0.382 \cdot 10^{-1}$ | $0.619 \cdot 10^{-2}$ | 1.000 |
| C | $-0.901 \cdot 10^{-4}$ | $0.520 \cdot 10^{-4}$ | $0.260 \cdot 10^{-2}$ | 0.999 |
| i (rad) | $-0.106 \cdot 10^{-7}$ | $0.175 \cdot 10^{-6}$ | $0.101 \cdot 10^{-9}$ | 1.000 |
| Ω (rad) | $-0.993 \cdot 10^{-4}$ | $0.572 \cdot 10^{-4}$ | $0.101 \cdot 10^{-4}$ | 1.000 |
| S | $-0.793 \cdot 10^{-5}$ | $0.696 \cdot 10^{-5}$ | $0.189 \cdot 10^{-4}$ | 0.999 |
| λ (rad) | $0.293 \cdot 10^{-3}$ | $0.169 \cdot 10^{-3}$ | $0.359 \cdot 10^{-3}$ | 1.000 |

Les tables 2.4 et 2.5 illustrent la quasi-équivalence des deux méthodes analytiques quand l'excentricité n'est pas trop faible, et ce même sur une longue période de temps. En particulier, en tant que méthodes d'ordre 1, les deux méthodes ont les mêmes caractéristiques vis à vis des effets séculaires sur les angles.

Les tables 2.6 et 2.7 illustrent le comportement des deux méthodes dans le cas de faibles excentricités. Même sur un arc de quelques jours, la méthode de Kaula apparaît moins performante que notre méthode pour décrire le comportement de l'excentricité et de l'argument du périhélie. Voir pour cela les valeurs des coefficients de corrélation. La méthode développée ici, au contraire, garde le même niveau de performance que pour les excentricités non faibles.

Les quatre tables confirment également que les solutions des deux méthodes sont quasiment

TAB. 2.5 – Intégration analytique : excentricité non faible sur une révolution du périégée.

Comparaison sur une période de révolution du périégée entre l'intégration numérique, et deux méthodes d'intégration analytique : celle de Kaula, et celle formulée en C et S .

| | | $a_0 = 7340 \text{ km}, e_0 = 0.2107 \cdot 10^{-1}, i_0 = 49.83^\circ$ Longueur de l'arc : 110 jours | | | |
|------------------|-------|---|-----------------------|-----------------------|-------|
| Méthode de Kaula | | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $-0.104 \cdot 10^1$ | $0.704 \cdot 10^2$ | $0.178 \cdot 10^1$ | 0.999 |
| C | | $-0.115 \cdot 10^{-4}$ | $0.558 \cdot 10^{-3}$ | $0.146 \cdot 10^0$ | 0.999 |
| i | (rad) | $0.117 \cdot 10^{-4}$ | $0.403 \cdot 10^{-5}$ | $0.468 \cdot 10^{-6}$ | 0.999 |
| Ω | (rad) | $-0.351 \cdot 10^{-3}$ | $0.122 \cdot 10^0$ | $0.630 \cdot 10^1$ | 0.997 |
| S | | $0.168 \cdot 10^{-4}$ | $0.562 \cdot 10^{-3}$ | $0.211 \cdot 10^0$ | 0.999 |
| λ | (rad) | $0.925 \cdot 10^{-3}$ | $0.212 \cdot 10^0$ | $0.571 \cdot 10^5$ | 0.993 |
| Notre méthode | | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $-0.104 \cdot 10^1$ | $0.695 \cdot 10^2$ | $0.174 \cdot 10^1$ | 0.999 |
| C | | $-0.116 \cdot 10^{-4}$ | $0.516 \cdot 10^{-3}$ | $0.721 \cdot 10^{-1}$ | 0.999 |
| i | (rad) | $-0.390 \cdot 10^{-7}$ | $0.400 \cdot 10^{-5}$ | $0.485 \cdot 10^{-7}$ | 0.999 |
| Ω | (rad) | $-0.373 \cdot 10^{-3}$ | $0.122 \cdot 10^0$ | $0.631 \cdot 10^1$ | 0.997 |
| S | | $-0.740 \cdot 10^{-3}$ | $0.527 \cdot 10^{-3}$ | $0.815 \cdot 10^0$ | 0.999 |
| λ | (rad) | $0.936 \cdot 10^{-3}$ | $0.212 \cdot 10^0$ | $0.571 \cdot 10^5$ | 0.993 |

TAB. 2.6 – Intégration analytique : excentricité faible sur un arc de quelques jours.

Comparaison sur un arc de quelques jours entre l'intégration numérique, et deux méthodes d'intégration analytique : celle de Kaula, et celle formulée en C et S .

| | | $a_0 = 7340 \text{ km}, e_0 = 0.2107 \cdot 10^{-3}, i_0 = 49.83^\circ$ Longueur de l'arc : 4 jours | | | |
|------------------|-------|---|-----------------------|-----------------------|-------|
| Méthode de Kaula | | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $-0.671 \cdot 10^0$ | $0.402 \cdot 10^1$ | $0.650 \cdot 10^{-2}$ | 1.000 |
| C | | $-0.244 \cdot 10^{-3}$ | $0.325 \cdot 10^{-3}$ | $0.305 \cdot 10^1$ | 0.536 |
| i | (rad) | $-0.139 \cdot 10^{-6}$ | $0.197 \cdot 10^{-6}$ | $0.193 \cdot 10^{-9}$ | 1.000 |
| Ω | (rad) | $-0.111 \cdot 10^{-3}$ | $0.632 \cdot 10^{-4}$ | $0.124 \cdot 10^{-4}$ | 1.000 |
| S | | $-0.143 \cdot 10^{-3}$ | $0.529 \cdot 10^{-3}$ | $0.744 \cdot 10^1$ | 0.699 |
| λ | (rad) | $0.300 \cdot 10^{-3}$ | $0.171 \cdot 10^{-3}$ | $0.445 \cdot 10^{-3}$ | 1.000 |
| Notre méthode | | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $-0.670 \cdot 10^0$ | $0.380 \cdot 10^1$ | $0.585 \cdot 10^{-2}$ | 1.000 |
| C | | $-0.866 \cdot 10^{-4}$ | $0.501 \cdot 10^{-4}$ | $0.441 \cdot 10^0$ | 0.992 |
| i | (rad) | $-0.177 \cdot 10^{-7}$ | $0.190 \cdot 10^{-6}$ | $0.120 \cdot 10^{-9}$ | 1.000 |
| Ω | (rad) | $-0.110 \cdot 10^{-3}$ | $0.634 \cdot 10^{-4}$ | $0.124 \cdot 10^{-4}$ | 1.000 |
| S | | $-0.646 \cdot 10^{-5}$ | $0.596 \cdot 10^{-5}$ | $0.385 \cdot 10^{-2}$ | 0.999 |
| λ | (rad) | $0.298 \cdot 10^{-3}$ | $0.171 \cdot 10^{-3}$ | $0.441 \cdot 10^{-3}$ | 1.000 |

TAB. 2.7 – Intégration analytique : excentricité faible sur une révolution du périégée.

Comparaison sur une période de révolution du périégée entre l'intégration numérique, et deux méthodes d'intégration analytique : celle de Kaula, et celle formulée en C et S .

| | | $a_0 = 7340 \text{ km}, e_0 = 0.2107 \cdot 10^{-3}, i_0 = 49.83^\circ$ Longueur de l'arc : 110 jours | | | |
|------------------|-------|---|-----------------------|-----------------------|-------|
| Méthode de Kaula | | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $-0.743 \cdot 10^0$ | $0.595 \cdot 10^2$ | $0.104 \cdot 10^1$ | 0.999 |
| C | | $0.183 \cdot 10^{-3}$ | $0.959 \cdot 10^{-3}$ | $0.448 \cdot 10^1$ | 0.056 |
| i | (rad) | $-0.717 \cdot 10^{-6}$ | $0.338 \cdot 10^{-5}$ | $0.296 \cdot 10^{-7}$ | 0.999 |
| Ω | (rad) | $0.439 \cdot 10^{-3}$ | $0.135 \cdot 10^0$ | $0.630 \cdot 10^1$ | 0.997 |
| S | | $0.681 \cdot 10^{-3}$ | $0.817 \cdot 10^{-3}$ | $0.301 \cdot 10^1$ | 0.178 |
| λ | (rad) | $-0.204 \cdot 10^{-2}$ | $0.234 \cdot 10^0$ | $0.152 \cdot 10^6$ | 0.992 |
| Notre méthode | | Moy. | Ecart-t. | χ^2 | Corr. |
| a | (m) | $-0.743 \cdot 10^0$ | $0.575 \cdot 10^2$ | $0.972 \cdot 10^0$ | 0.999 |
| C | | $-0.857 \cdot 10^{-4}$ | $0.553 \cdot 10^{-3}$ | $0.218 \cdot 10^1$ | 0.972 |
| i | (rad) | $-0.210 \cdot 10^{-7}$ | $0.330 \cdot 10^{-5}$ | $0.271 \cdot 10^{-7}$ | 0.999 |
| Ω | (rad) | $0.437 \cdot 10^{-3}$ | $0.135 \cdot 10^0$ | $0.630 \cdot 10^1$ | 0.997 |
| S | | $-0.898 \cdot 10^{-3}$ | $0.502 \cdot 10^{-3}$ | $0.445 \cdot 10^1$ | 0.981 |
| λ | (rad) | $-0.204 \cdot 10^{-2}$ | $0.234 \cdot 10^0$ | $0.153 \cdot 10^6$ | 0.992 |

équivalentes pour les éléments a , i , Ω , λ , avec pourtant un léger avantage à notre méthode.

En fait, cette méthode d'intégration trouve toute sa force dans le calcul des courtes périodes, même dans le cas d'excentricités non faibles. La figure 2.8 montre les différences sur l'excentricité entre la méthode de Kaula et l'intégration numérique d'une part, entre notre méthode et la même intégration numérique d'autre part. La figure 2.9 montre le même genre de différence pour l'argument du périégée.

Conclusion : Une spécificité des orbites quasi-circulaires

Le centre du cercle décrit par C et S est d'autant plus éloigné du point qui définit l'angle polaire ω que l'excentricité de l'orbite est petite. Par conséquent, même s'il est géométriquement très bien défini, le périégée des orbites quasi-circulaires n'a pas, en première approximation, une variation séculaire. Les orbites de STELLA et de TOPEX/POSEIDON en sont une illustration (partie II). En effet, les fonctions d'excentricité $G_{n, \frac{n+q}{2}, q=\pm 1}$ (avec n impair) ont un développement en puissances de e qui est impair. Ils contiennent donc des termes qui engendrent d'autres termes constants dans les dérivées par rapport à e : la division par l'excentricité dans le terme $\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial e}$ de l'équation de Lagrange pour ω , où U est le potentiel gravitationnel, ne peut pas être simplifiée. Par conséquent, pour e très proche de zéro, les effets des harmoniques impairs peuvent devenir prépondérants sur ceux des harmoniques pairs. C'est pourquoi nous avons défini l'angle θ . De plus, k et k' dépendent de tous les coefficients zonaux du géopotentiel, c'est en ce sens une généralisation de [Cook, 1966].

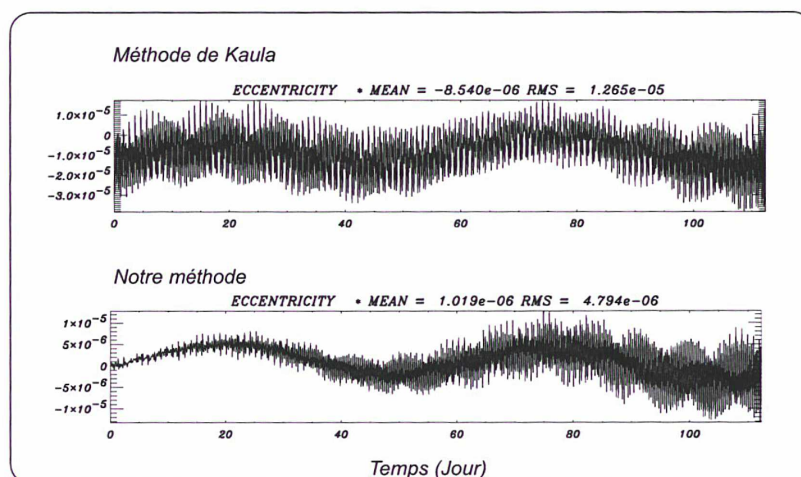


FIG. 2.8 – Validité des courtes périodes calculées sur l'excentricité de STARLETTE.

On considère un arc de 110 jours de STARLETTE calculé par intégration numérique. Les deux graphiques présentent les différences entre cette intégration numérique, et les orbites calculées analytiquement avec la méthode de Kaula et notre méthode.

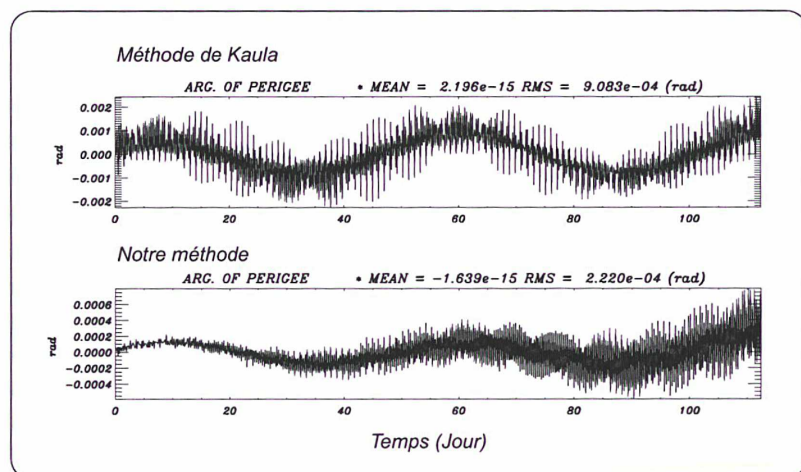


FIG. 2.9 – Validité des courtes périodes calculées sur l'argument du péricée de STARLETTE.

Les deux graphiques présentent, cette fois-ci sur l'argument du péricée, les deux mêmes différences que la figure précédente. Pour illustrer la pertinence des deux méthodes analytiques vis à vis des courtes périodes, une droite a été ajustée pour annuler la différence des effets séculaires.

2.2.5 Etablissement d'un bulletin moyen de départ

Les conditions initiales utilisées dans les exemples de la partie précédente sont des variables *moyennes*, au sens où on les a définies dans le chapitre 1. Pour utiliser la théorie analytique exprimée en éléments non singuliers, il faut ainsi pouvoir déduire les variables moyennes \mathbf{E}' des variables osculatrices \mathbf{E} . Or, c'est précisément la dépendance «inverse» qui s'écrit naturellement, puisque l'on a une relation du type suivant entre les éléments métriques \mathbf{V} et les éléments angulaires \mathbf{v} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} T_n^{\mathbf{V}}(\mathbf{v}', \mathbf{V}') \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}' + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} T_n^{\mathbf{V}}(\mathbf{v}', \mathbf{V}') \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Il n'y a qu'une différence de quelques mètres entre les éléments centrés et les éléments moyens (tous les éléments étant ramenés au demi-grand axe). Néanmoins, cette différence a toute son importance pour le calcul des observations, surtout quand on les calcule sur des périodes de plusieurs dizaines de jours.

Cette importance est mise en évidence dans la figure 2.10, où les perturbations sont calculées avec une approximation des éléments centrés de départ (on peut considérer qu'une moyenne arithmétique des premiers points d'une orbite osculatrice donne une bonne idée de la valeur des éléments centrés. Dans le cas présent, seul le demi-grand axe diffère d'une manière conséquente des éléments moyens qui seront finalement utilisés. La différence est d'une quarantaine de mètres environ).

On peut déduire de (2.44) écrite avec $n = 1$ une approximation de la formule cherchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \epsilon T_1^{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{V}) \\ \mathbf{V}' = \mathbf{V} - \epsilon T_1^{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{V}) \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Cette formule justifie l'approche suivante :

- les éléments centrés approchés servent au calcul des effets séculaires, qui permettent de propager en début d'arc les courtes périodes, également calculées avec ces éléments ;
- les courtes périodes sont ensuite retirées aux points de l'orbite osculatrice, définissant ainsi une meilleure approximation des éléments de départ ;
- on itère le processus qui converge très vite ;
- une régression linéaire permet enfin de déterminer les éléments moyens de départ.

A noter qu'une telle approche est incompatible avec la présence de singularités : dès que l'excentricité est plus petite que 10^{-3} , le processus utilisant la théorie classique de [Kaula, 1966] ou celle de [Berger, 1975] n'aboutit pas. Et pour des excentricités de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$, les écarts-types issus de la régression linéaire peuvent atteindre plusieurs centaines de kilomètres. Avec la théorie exprimée en éléments non singuliers, tout se passe bien (table 2.8).

2.3 Deuxième étape : une étape numérique

La deuxième étape est numérique. Il s'agit de filtrer les éléments issus du filtrage analytique, qui contiennent encore différents termes périodiques et séculaires.

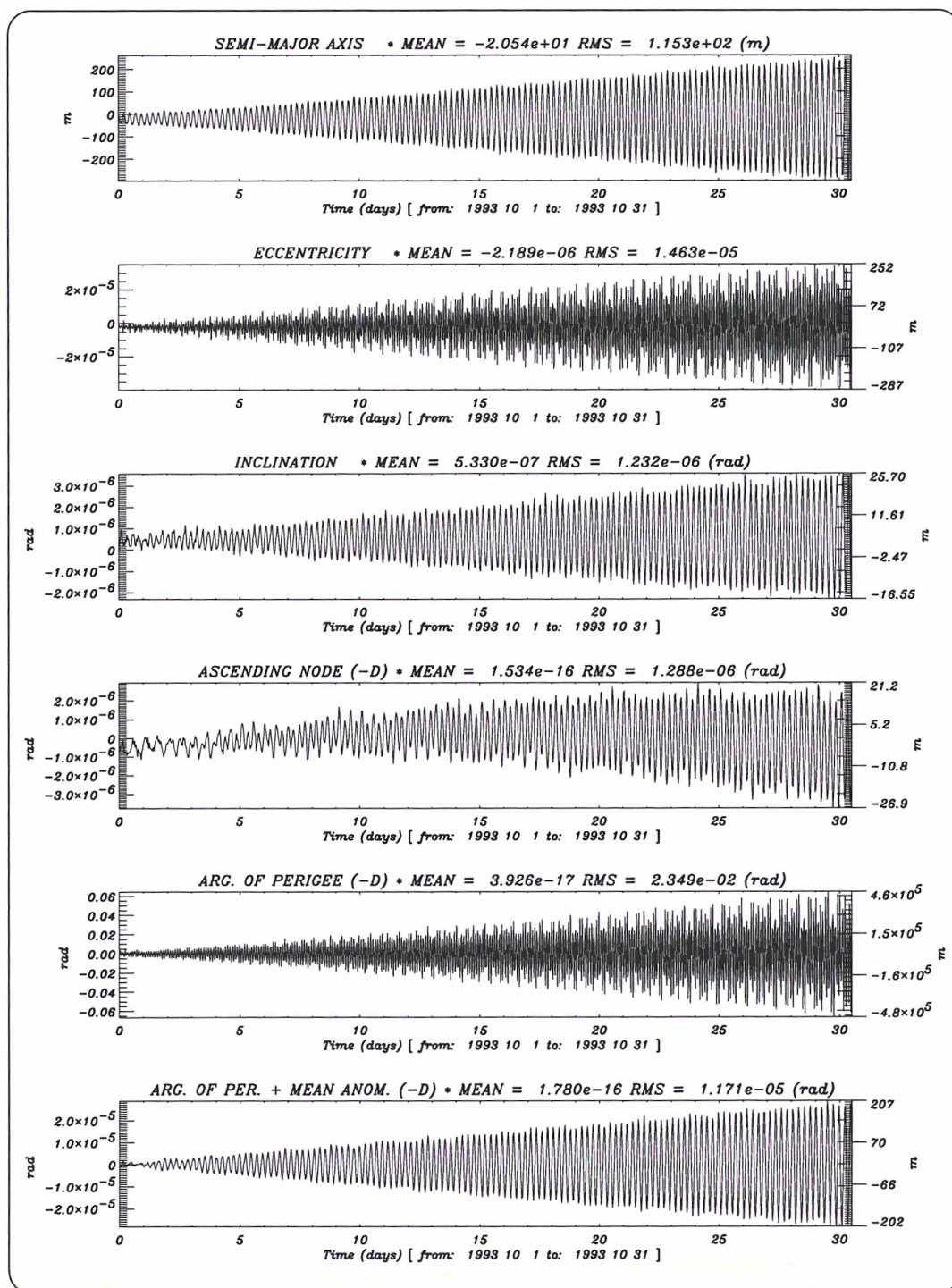


FIG. 2.10 – Filtrage analytique initialisé avec des éléments centrés approchés.

Différence entre une orbite de STELLA calculée par intégration numérique, et calculée par intégration analytique, avec la méthode du paragraphe précédent. Les éléments servant à calculer analytiquement les perturbations sont des éléments centrés approchés. STELLA est ici soumis à un potentiel développé jusqu'aux degré et ordre 30.

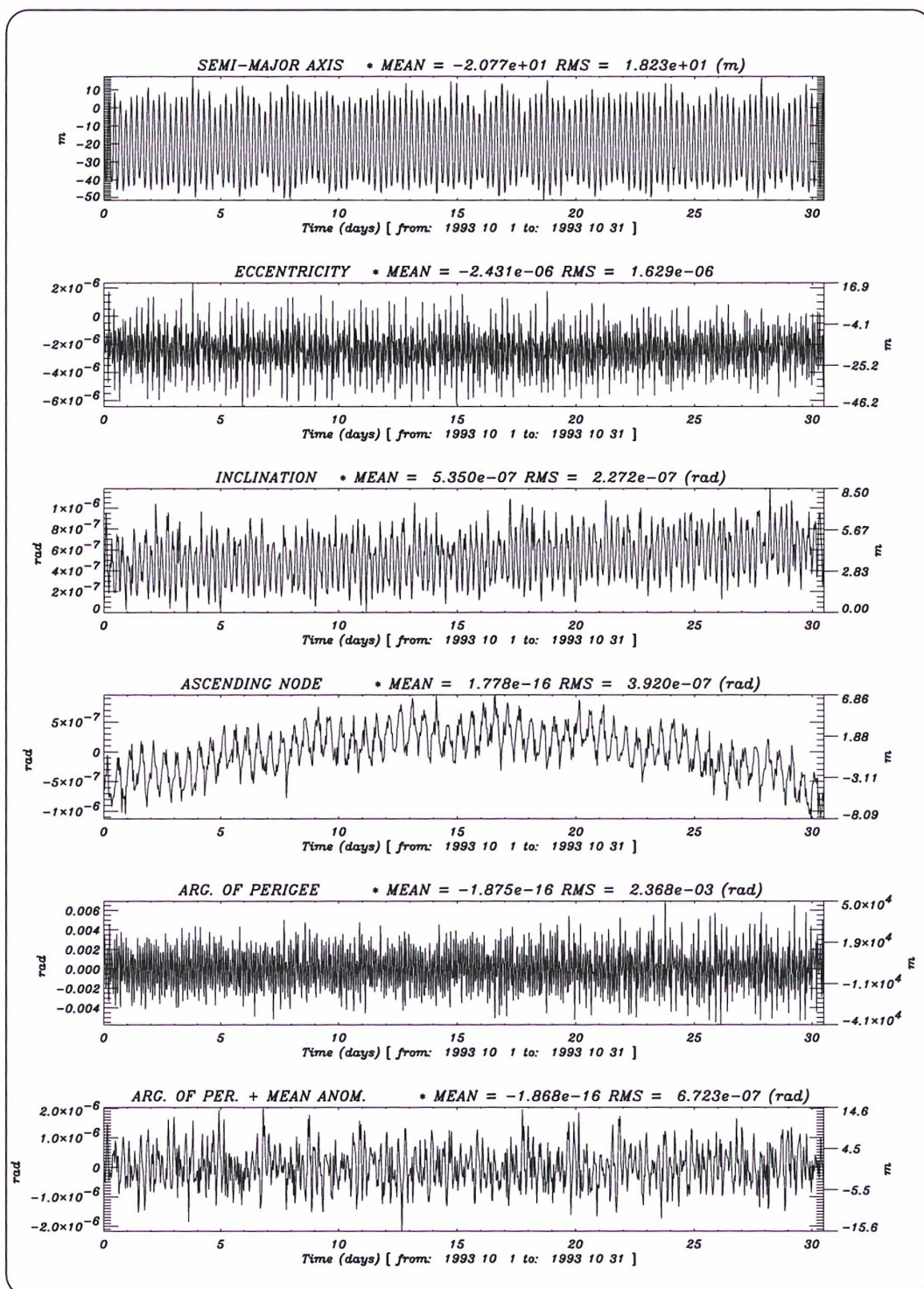


FIG. 2.11 – Filtrage analytique initialisé avec des éléments moyens approchés.

Différence entre une orbite de STELLA calculée par intégration numérique, et calculée par intégration analytique, avec la méthode du paragraphe précédent. Les éléments servant à calculer analytiquement les perturbations sont des éléments moyens approchés. STELLA est ici soumis à un potentiel développé jusqu'aux degré et ordre 30.

TAB. 2.8 – Qualité de la détermination de l'initialisation du filtrage analytique.

Le calcul des éléments moyens de départ est basé sur une formulation explicite des perturbations. La formulation en éléments non singuliers présentée dans cette étude est plus proche de la réalité physique du mouvement orbital que la théorie de Kaula ou la théorie de [Berger, 1975] (d'ordre 2). Ceci est confirmé par les écarts-types obtenus lors de l'ajustement numérique des éléments de départ, même dans le cas d'excentricités non faibles. Dans chacun des deux cas, le potentiel est développé jusqu'au degré 7 (le degré maximal de la théorie de Berger). Toutes les quantités sont exprimées en mètres.

| | Théorie non singulière | Théorie de Berger |
|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Cas de STARLETTE | | |
| Ecart-type sur : a | 6.19m | a 6.10m |
| Ecart-type sur : C | 11.7m | e 106m |
| Ecart-type sur : i | 0.17m | i $0.5 \cdot 10^{-7}$ m |
| Ecart-type sur : Ω | 6.3m | Ω 6.2m |
| Ecart-type sur : S | 20.3m | ω 2708m |
| Ecart-type sur : λ | 6.5m | M 4216m |
| Cas de LAGEOS 1 | | |
| Ecart-type sur : a | 2.5m | a 2.6m |
| Ecart-type sur : C | 1.8m | e 185m |
| Ecart-type sur : i | 0.01m | i $0.21 \cdot 10^{-7}$ m |
| Ecart-type sur : Ω | 0.18m | Ω 0.49m |
| Ecart-type sur : S | 1.7m | ω $0.22 \cdot 10^5$ m |
| Ecart-type sur : λ | 0.81m | M $0.24 \cdot 10^5$ m |

Le filtrage est obtenu en faisant le produit de convolution du signal filtré analytiquement \mathbf{E}_{fa} par une fonction du type sinus cardinal :

$$\bar{\mathbf{E}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{fa}}(u) \frac{\sin(\omega_C(t-u))}{2\pi(t-u)} du \quad (2.46)$$

[Exertier, 1988] explique que ce produit de convolution «correspond, dans l'espace des fréquences, au produit de la transformée de Fourier par une fonction porte. Le signal filtré est obtenu sur tous les points du quart centré de la fenêtre, puis, une moyenne arithmétique permet de définir la valeur moyenne finale au milieu de la fenêtre».

En pratique, pour éviter d'introduire du bruit purement numérique, il convient de choisir des fenêtres de filtrage au moins 8 fois plus grandes que la période de coupure $\frac{2\pi}{\omega_C}$.

Le nombre d'observations dont on peut disposer avec une telle approche est donc de loin inférieur au nombre de points de l'orbite osculatrice de départ. Avec un point tous les 24 jours pour des satellites comme LAGEOS (puisque les premières résonances ont une période de l'ordre de 3 jours), le nombre d'observations est suffisant pour des études géodynamiques à long terme. Par contre, pour des altitudes plus basses, le facteur 8 est un handicap. Il faudrait dans ce cas utiliser d'autres filtres numériques. Dans tous les cas d'ailleurs, on aurait certainement intérêt à utiliser des filtres numériques plus sophistiqués. Cela permettrait notamment (par comparaison des résultats issus de différents filtres) de quantifier les erreurs induites par l'étape numérique du filtrage, et de densifier le nombre d'observations, ce qui serait très utile pour construire des arcs d'orbite de quelques mois (avec des applications certaines à l'analyse de missions spatiales.). La difficulté majeure inhérente à une telle approche, la perte de l'indépendance de toutes les observations entre elles, pourrait être résolue par la prise en compte de matrices de corrélation réalistes lors de l'inversion des équations normales (chapitre 4).

D'autre part, [Métris, 1991] souligne l'importance de réaliser le filtrage numérique dans les mêmes variables que celles avec lesquelles sont intégrées les équations moyennes de la dynamique, sous peine de perdre une partie des longues périodes. Le jeu d'éléments non singuliers utilisé dans toute cette étude étant spécifique, c'est l'ensemble des orbites osculatrices pouvant être générées depuis le début des années 1980 qu'il a fallu filtrer : celles dont les données de poursuite sont déjà disponibles dans [Métris, 1991], ainsi que toutes celles disponibles depuis.

Chapitre 3

Validation de la cohérence entre le modèle et les observations

Les concepts présentés dans le chapitre 1 concernent le problème «direct» de la dynamique orbitale : c'est l'extrapolation d'orbite moyenne, fondée sur :

- l'intégration d'un système différentiel moyen, à partir de
- conditions initiales et
- d'un modèle de forces moyennes.

L'extrapolation d'orbite permet ainsi, en l'absence de données, l'analyse d'une mission spatiale : quels sont les effets sur une orbite fixée de tel ou tel phénomène géodynamique ? Et sur quelle échelle de temps ?

D'autre part, il faut relier les paramètres du modèle de forces et les conditions initiales aux observations, telles qu'on les a construites dans le chapitre 2 : c'est le problème «inverse», ou restitution d'orbite, basé sur la recherche d'un lien entre quantités modélisées et quantités observées. La théorie est développée dans le chapitre suivant, dans le cadre de l'estimation générale de paramètres, et en particulier de paramètres géodynamiques.

Dans chacun des deux cas, si \mathbf{E}_C désigne un ensemble d'éléments orbitaux - par exemple non singuliers en excentricité - tels qu'ils peuvent être calculés par les modèles, et \mathbf{E}'_C l'ensemble des éléments moyens associés, l'équation de la dynamique est du type :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}'_C}{dt} &= SM(\mathbf{E}'_C, \Sigma) \\ \mathbf{E}'_C(t_0) &= \mathbf{E}'_0 \end{aligned}} \quad (3.1)$$

où \mathbf{E}'_0 est le vecteur des 6 éléments de départ à t_0 .

A travers le second membre SM de ces équations différentielles moyennes, le modèle de forces moyennes, qu'il soit formulé au moyen ou non de séries issues du manipulateur, dépend d'un certain nombre de paramètres $\Sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$. Dans ce chapitre, je m'intéresse aux paramètres «conditions initiales» dont l'ajustement va permettre de vérifier, de manière mathématique, le modèle d'orbite moyenne.

3.1 Construction pratique des éléments moyens «observés»

3.1.1 Construction d'orbites osculatrices

Le programme d'orbite moyenne CODIOR ne peut pas utiliser directement des mesures de distances issues, notamment, du réseau de télémétrie laser. Les observations sur lesquelles il s'appuie sont des éléments moyens, qui doivent être construits indépendamment de ce programme.

C'est avec le logiciel GINS du GRGS que sont prises en compte les données. En ajustant les arcs osculateurs sur les données, et non sur les modèles dynamiques qui lui sont sous-jacents, GINS permet d'avoir une vision pratiquement géométrique des orbites osculatrices : en réalisant des arcs sur des intervalles les plus courts possibles (à condition qu'il y ait des données, bien entendu...), et en libérant certains paramètres empiriques d'orbite (1 paramètre empirique de force de freinage par révolution par exemple), ce sont bien des arcs pratiquement indépendants du modèle d'orbites de GINS que l'on fabrique. Typiquement, ces arcs ont une longueur comprise entre 5 et 15 jours.

3.1.2 Choix des paramètres de filtrage

Ces arcs courts sont ensuite filtrés, selon le processus décrit dans le chapitre 2, pour constituer de véritables *points moyens dynamiques*.

L'ensemble du traitement GINS-CANEL (CANEL étant le logiciel qui construit les points moyens) doit utiliser des modèles cohérents. En particulier, les modèles de champ de gravité utilisés dans les deux logiciels doivent être identiques. En pratique, les tests ont montré qu'il n'y avait pourtant aucune différence entre des éléments filtrés avec le champ EGM96 et le champ GRIM-5, en dépit d'une différence pour la constante gravitationnelle de la Terre.

Les paramètres de filtrage sont fortement liés à la volonté de retrait de tous les multiples et sous-multiples de la période orbitale dans les éléments caractérisant le mouvement. Les premiers coefficients zonaux sont ceux qui produisent les plus grandes amplitudes.

Pour tous les autres coefficients, sachant que l'on n'élimine que les périodes liées à la période de révolution orbitale, il faut faire la distinction entre les coefficients zonaux, et les coefficients tesséraux, ces derniers pouvant générer des périodes de l'ordre du jour (la période de révolution de la Terre), ou également de quelques jours (en cas de résonances).

Le choix le plus important est ainsi celui de la période de coupure, tant pour la partie analytique que pour la partie numérique. Elle doit être suffisamment grande pour permettre de filtrer les premières résonances (figure 3.2). D'un point de vue numérique, le calcul des effets séculaires est stable jusque J_{65} . En pratique, on dépasse rarement J_{30} (annexe F), d'autant plus que pour les degrés élevés le signal est souvent à longues périodes (figure 3.1). De plus, il est inutile lors du filtrage analytique de retenir des termes dont l'amplitude est plus petite que quelques centimètres, puisqu'ils seront filtrés numériquement.

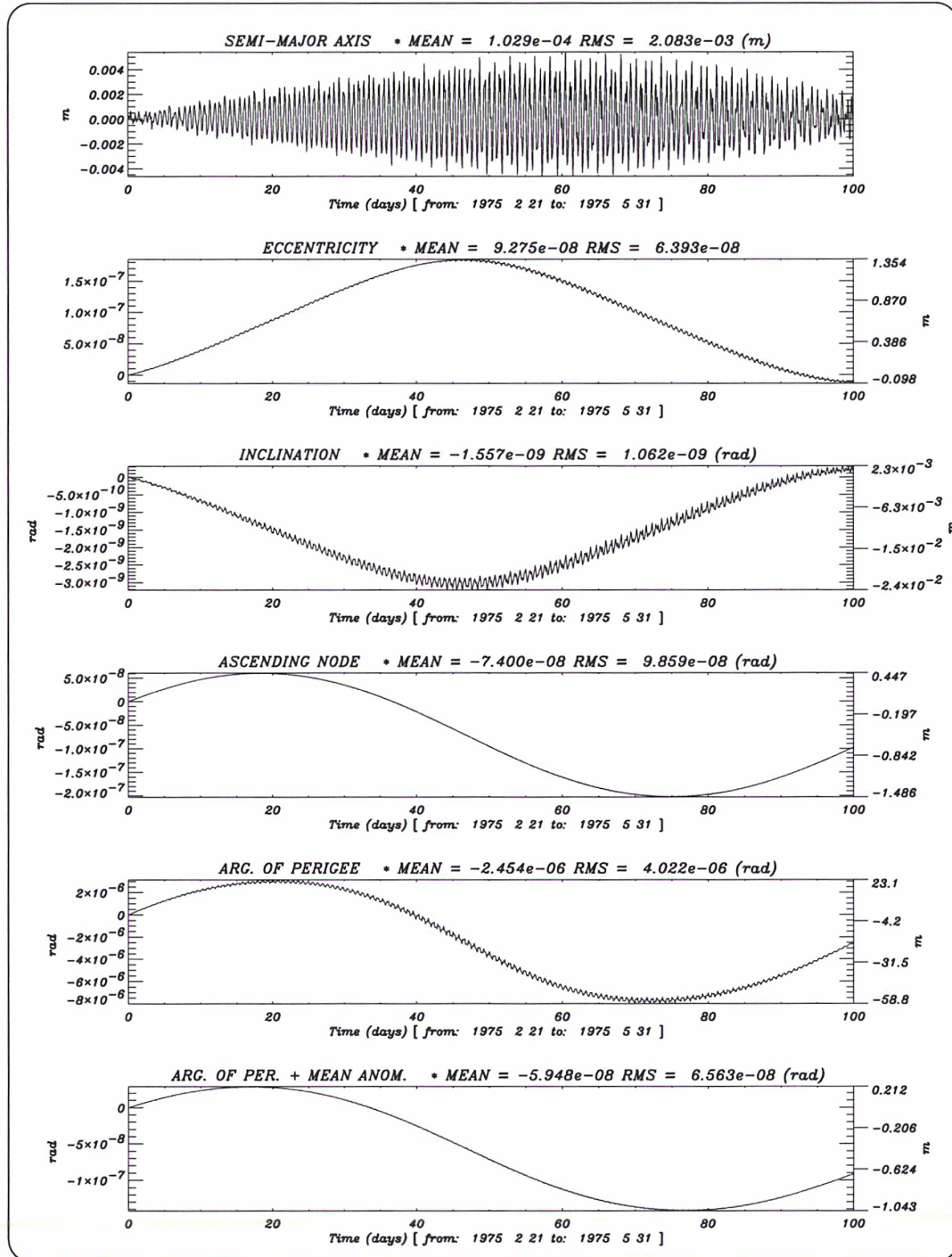


FIG. 3.1 – Effets de J_{40} sur l'orbite de STARLETTE : essentiellement des longues périodes.

Les coefficients de hauts degrés sont à l'origine essentiellement de longues périodes. On peut donc filtrer ces termes uniquement avec une approche numérique.

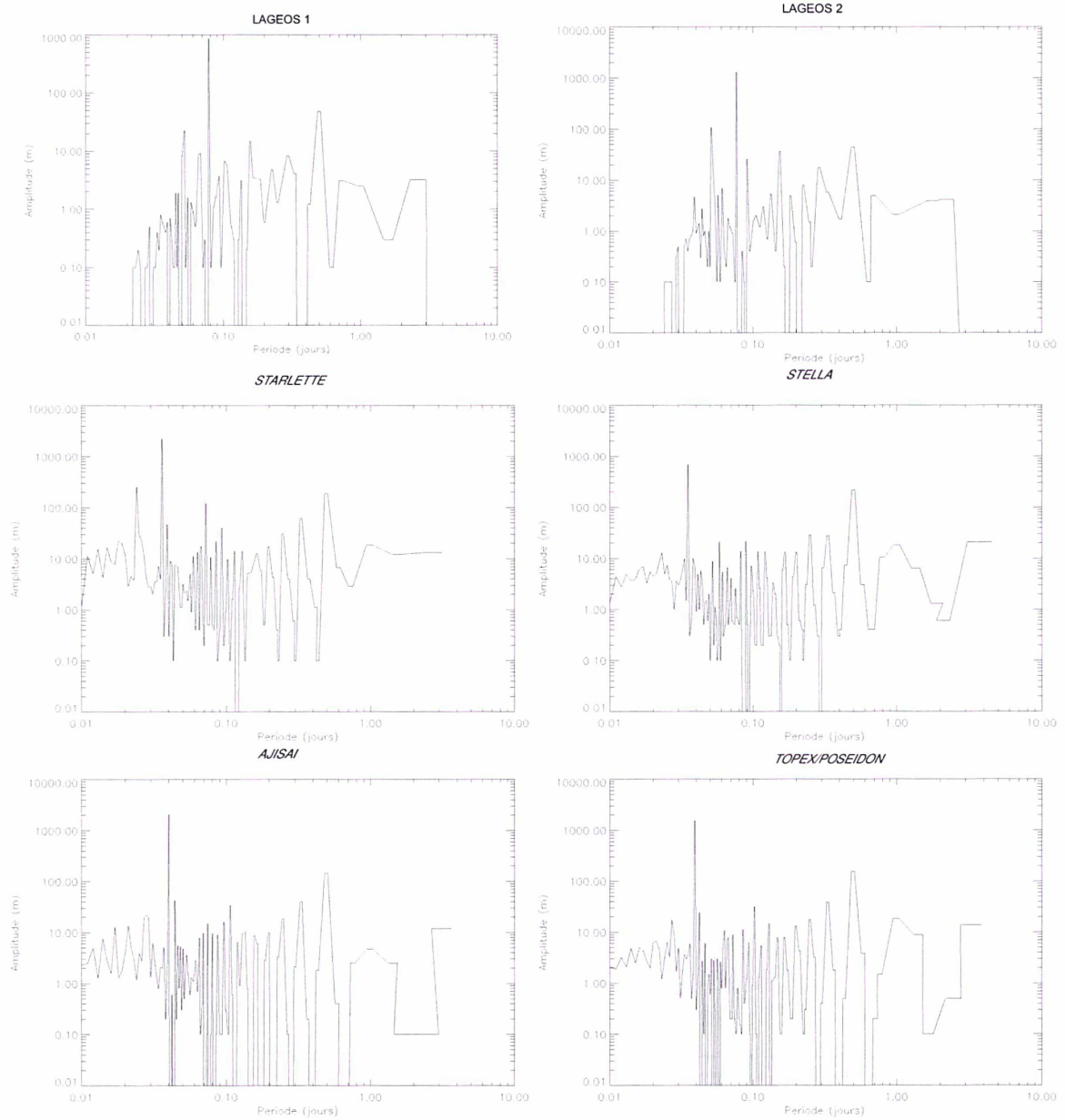


FIG. 3.2 – Spectre de courtes périodes des satellites utilisés. Chacun des exemples concerne l'inclinaison (pourquoi pas...). On distingue nettement la période de révolution orbitale du satellite. Les résonances situées entre 3 et 4 jours, doivent être filtrées.

TAB. 3.1 – Ajustement d'orbite suivant décentrage ou non.

Les valeurs présentes dans cette table correspondent à l'ajustement d'orbite de la figure 3.5. Les deux premières lignes correspondent aux valeurs ajustées en deux itérations lorsque le bulletin de départ, issu d'observations, subit la transformation non canonique du chapitre 1 («décentrage»). En fait, les valeurs décentrées constituent d'emblée les valeurs de convergence. Dans les deux lignes suivantes, le bulletin de départ n'a pas subi la transformation non canonique.

La différence entre demi-grand axe centré et demi-grand axe moyen est donc ici de 75 cm.

| | Δa | Δe | Δi | $\Delta \Omega$ | $\Delta \omega$ | ΔM |
|-------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | Bulletin «décentré» | | | | | |
| itération 1 | $0.14 \cdot 10^{-4}$ | $0.47 \cdot 10^{-12}$ | $0.14 \cdot 10^{-12}$ | $-0.26 \cdot 10^{-11}$ | $0.39 \cdot 10^{-12}$ | $-0.21 \cdot 10^{-7}$ |
| itération 2 | $0.84 \cdot 10^{-7}$ | $0.48 \cdot 10^{-11}$ | $0.13 \cdot 10^{-13}$ | $0.28 \cdot 10^{-13}$ | $0.15 \cdot 10^{-11}$ | $0.27 \cdot 10^{-9}$ |
| | Bulletin «non décentré» | | | | | |
| itération 1 | $-0.75 \cdot 10^0$ | $0.13 \cdot 10^{-9}$ | $0.11 \cdot 10^{-7}$ | $-0.26 \cdot 10^{-11}$ | $0.37 \cdot 10^{-10}$ | $-0.20 \cdot 10^{-7}$ |
| itération 2 | $-0.27 \cdot 10^{-6}$ | $0.48 \cdot 10^{-11}$ | $0.30 \cdot 10^{-13}$ | $0.71 \cdot 10^{-15}$ | $0.15 \cdot 10^{-11}$ | $0.24 \cdot 10^{-8}$ |

3.2 Intégration numérique des équations moyennes

La théorie semi-analytique de centrage consiste ainsi à intégrer numériquement les équations différentielles du mouvement moyen d'un satellite, *i.e.* les équations moyennes de la dynamique. Comme les variations à courtes périodes ont été éliminées d'une manière analytique, les pas d'intégration typiques que cette méthode permet d'employer sont de l'ordre de 300 à 900 minutes (table 3.3).

Les algorithmes d'intégration numérique ont énormément progressé en précision et en stabilité, depuis les débuts de la géodésie spatiale, grâce aux capacités toujours croissantes des ordinateurs [Kovalevsky, 1989].

Aujourd'hui, la cohérence interne des algorithmes d'intégration numérique est telle que les erreurs générées par ces algorithmes sont complètement négligeables par rapport à la précision des observations.

L'algorithme utilisé dans CODIOR est à pas liés, et utilise un système de prédiction-correction très efficace (figure 3.4).

3.3 Exactitude de la méthode : un bilan d'erreur

Tous les tests ont validé le modèle d'orbite moyenne par rapport à l'intégration numérique : l'algorithme de [Bulirsch and Stoer, 1966] (voir [Stoer and Bulirsch, 1980]) générant des points très espacés les uns des autres, a été utilisé pour produire des points séparés de quelques dizaines de jours. Ces points sont ensuite utilisés comme autant de conditions initiales pour intégrer numériquement une orbite osculatrice sur quelques jours. L'algorithme est alors celui de Adams-Bashforth-Moulton [Demailly, 1996]. Chaque petit arc est alors filtré, de la même manière que les vraies données, pour générer un point moyen «observé» (même s'il est simulé dans le cas de tests).

C'est sur ces points observés que sont ajustés les arcs moyens.

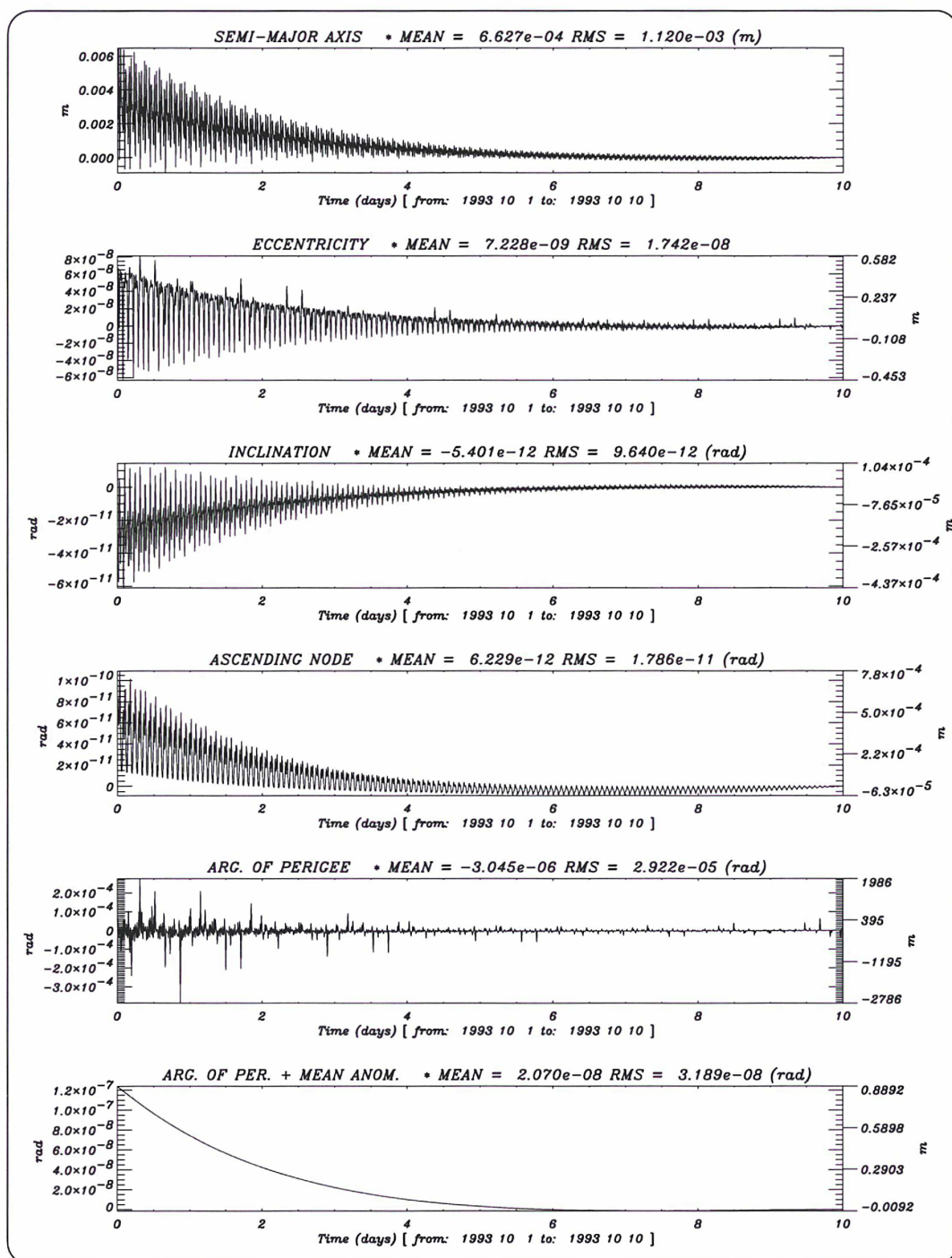


FIG. 3.3 – Stabilité de l'intégration numérique en présence de petits diviseurs.

Orbite de STELLA intégrée en éléments orbitaux. Le pas d'intégration est de 30 secondes. Le potentiel a été développé jusqu'aux degré et ordre 30.

L'évaluation est réalisée par aller/retour : des conditions initiales à t_0 permettent d'intégrer l'orbite jusqu'à l'instant t_1 . Les valeurs des éléments à t_1 sont ensuite utilisées comme conditions initiales pour une intégration «en marche arrière». Le graphique représente la différence de ces deux intégrations. Le zéro se situe donc en t_1 .

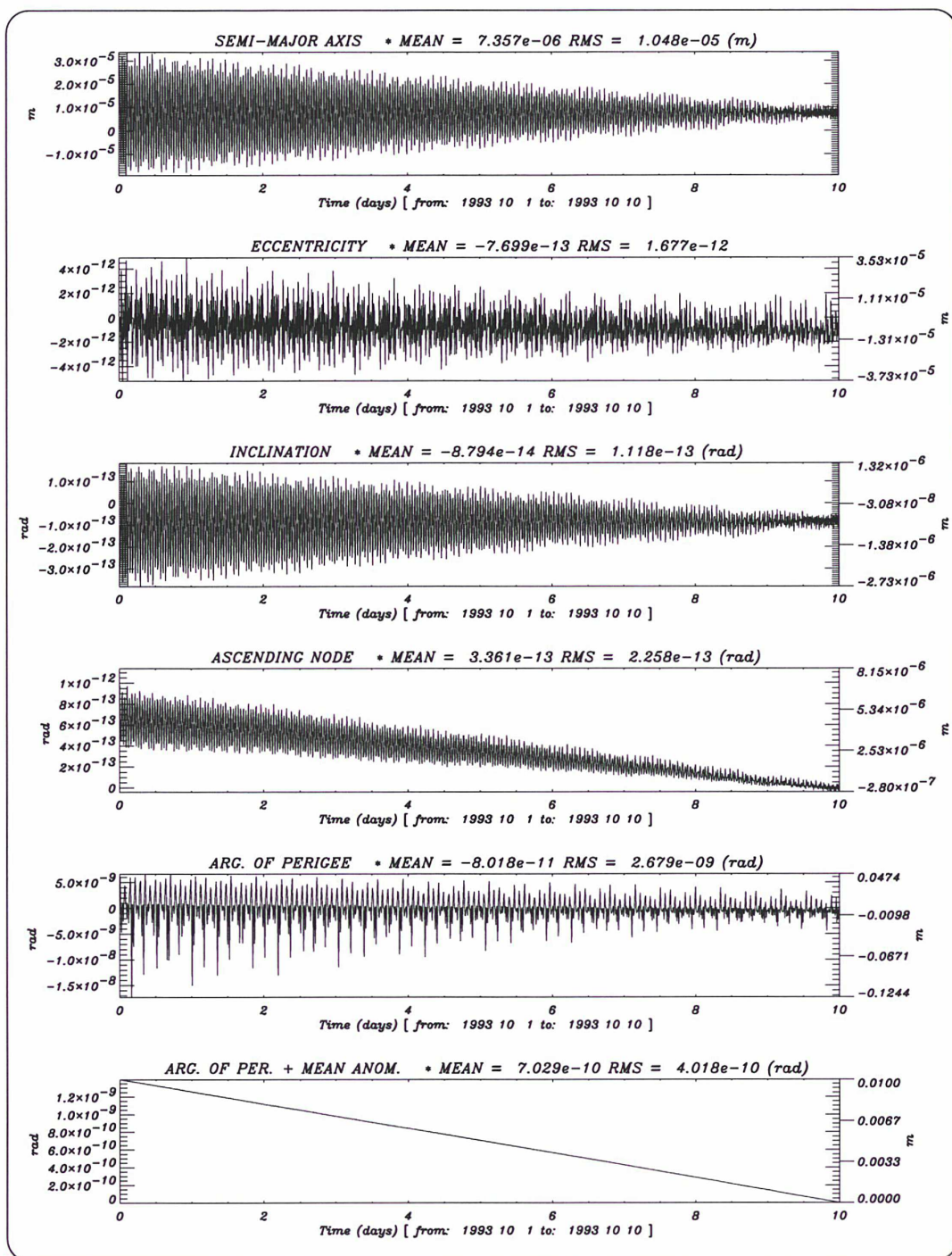


FIG. 3.4 – Stabilité de l'intégration numérique sans présence de petits diviseurs.

Orbite de STELLA intégrée en éléments non singuliers. Le pas d'intégration est de 30 secondes. Le potentiel a été développé jusqu'aux degré et ordre 30.

L'évaluation est réalisée par aller/retour. Puisque c'est le même algorithme qui est utilisé pour intégrer les équations moyennes, la stabilité que ce graphique met en évidence est aussi celle d'un arc de près de 13 ans si les équations moyennes sont intégrées avec un pas de 14400 secondes.

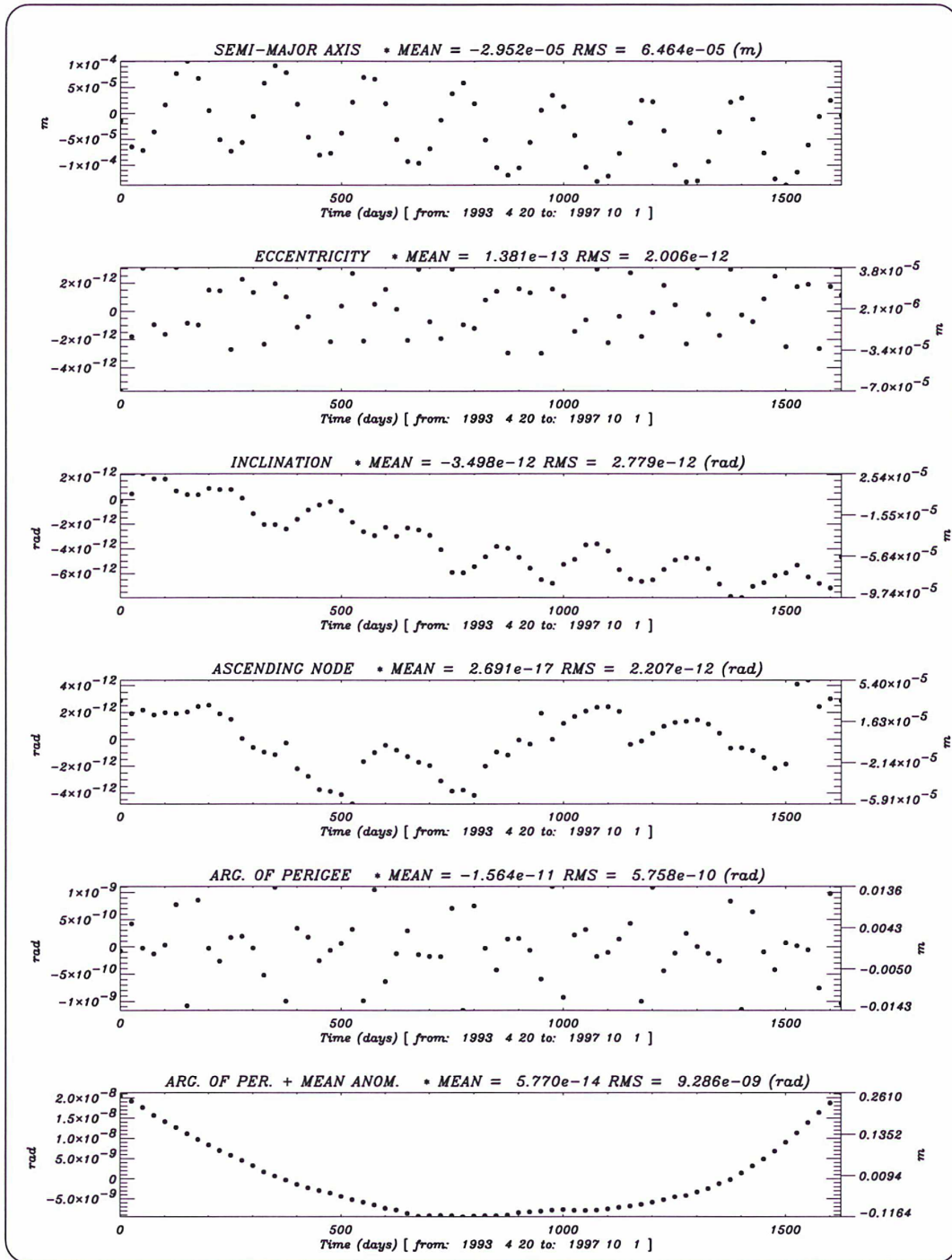


FIG. 3.5 – Résidus de l'orbite moyenne de LAGEOS avec la seule perturbation J_2 .
2 itérations sont suffisantes pour atteindre la convergence.

Les figures qui suivent (à partir de la figure 3.5, jusqu'à la figure 3.10) mettent ce principe en application, et concernent d'abord LAGEOS, d'altitude élevée, puis ensuite CHAMP, d'altitude plus basse.

Une conclusion s'impose : les fortes amplitudes dues aux courtes périodes ont certes été filtrées, mais le signal des longues périodes a, lui aussi, des amplitudes importantes à modéliser (figure 3.6).

C'est en multipliant les tests du même genre que ceux je présente ici que l'ensemble des équations, moyennes ou osculatrices, ont été validées. Dans le même temps, ces tests m'ont permis d'acquérir, dans une certaine mesure, une bonne expérience de la dynamique des satellites artificiels, et notamment des types de signaux engendrés sur les paramètres orbitaux par telle ou telle perturbation. Certains des résultats sont rassemblés dans la table 3.2.

TAB. 3.2 – Effets à longues périodes sur les paramètres orbitaux : amplitudes théoriques dues aux effets gravitationnels, et résidus correspondants dans CODIOR.

Pour chaque satellite, on trouve d'abord l'amplitude des effets gravitationnels (hors J_2) à modéliser, puis la valeur moyenne des résidus. Effets gravitationnels considérés : partie statique du champ de gravité développé jusqu'aux degré et ordre 40, marées terrestres et océaniques, effets luni-solaires. Dans chaque cas, les arcs ont été calculés sur 200 jours. On remarquera en particulier qu'en l'absence d'effets non gravitationnels, le demi-grand axe est remarquablement stable.

| | LAGEOS $\simeq 6000km$ | | STELLA $\simeq 800km$ | | CHAMP $\simeq 400km$ | |
|------------|---------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| | Ampl. du signal (m) | RMS (m) | Ampl. du signal (m) | RMS (m) | Ampl. du signal (m) | RMS (m) |
| a' | $4.7 \cdot 10^{-3}$ | $4.5 \cdot 10^{-3}$ | $9.6 \cdot 10^{-3}$ | $9.5 \cdot 10^{-3}$ | $5.3 \cdot 10^{-3}$ | $5.3 \cdot 10^{-3}$ |
| i' | $6.0 \cdot 10^3$ | $7.9 \cdot 10^{-5}$ | $3.8 \cdot 10^3$ | $6.6 \cdot 10^{-1}$ | $1.1 \cdot 10^3$ | $2.2 \cdot 10^{-1}$ |
| Ω' | $4.8 \cdot 10^3$ | $6.4 \cdot 10^{-5}$ | $4.5 \cdot 10^4$ | $2.0 \cdot 10^0$ | $2.0 \cdot 10^3$ | $2.0 \cdot 10^0$ |
| λ' | $1.3 \cdot 10^5$ | $2.5 \cdot 10^0$ | $1.9 \cdot 10^6$ | $7.6 \cdot 10^1$ | $3.8 \cdot 10^5$ | $4.4 \cdot 10^2$ |
| C' | $3.5 \cdot 10^3$ | $1.1 \cdot 10^{-2}$ | $1.4 \cdot 10^4$ | $4.3 \cdot 10^{-2}$ | $2.6 \cdot 10^3$ | $2.6 \cdot 10^0$ |
| S' | $1.2 \cdot 10^2$ | $3.6 \cdot 10^{-9}$ | $1.1 \cdot 10^3$ | $1.4 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^3$ | $5.7 \cdot 10^{-4}$ |

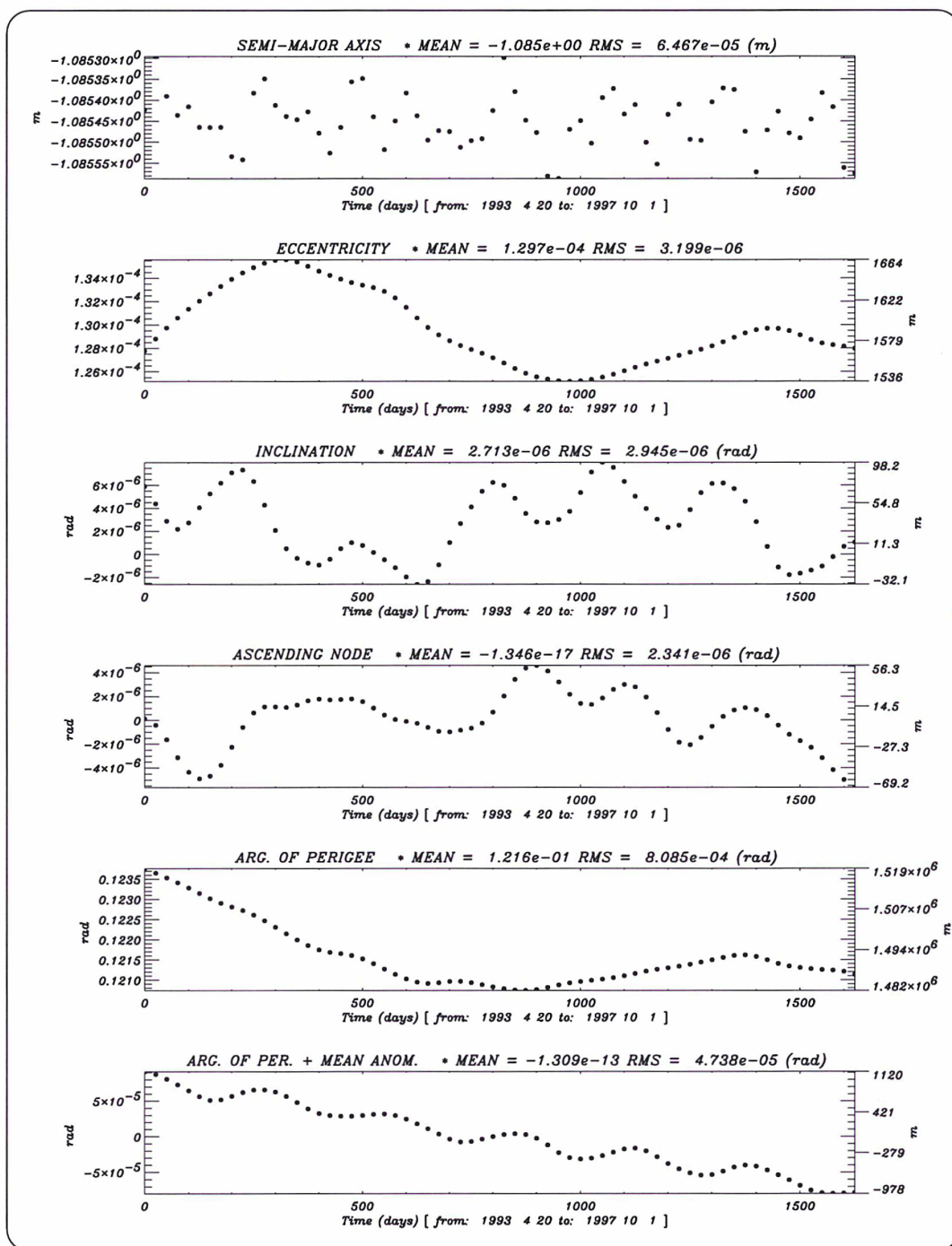


FIG. 3.6 – Signaux des effets gravitationnels (hors J_2) à modéliser sur LAGEOS.

Les perturbations générées par intégration numériques des équations instantanées sont : potentiel développé jusqu'au degré 40, termes lunisolaires, potentiel de marées terrestres de degré 2. Les orbites oscultrices sont filtrées pour simuler des éléments moyens «observés». L'orbite moyenne est ajustée sur ces données, où seul le terme en J_2 a été pris en compte dans le modèle moyen.

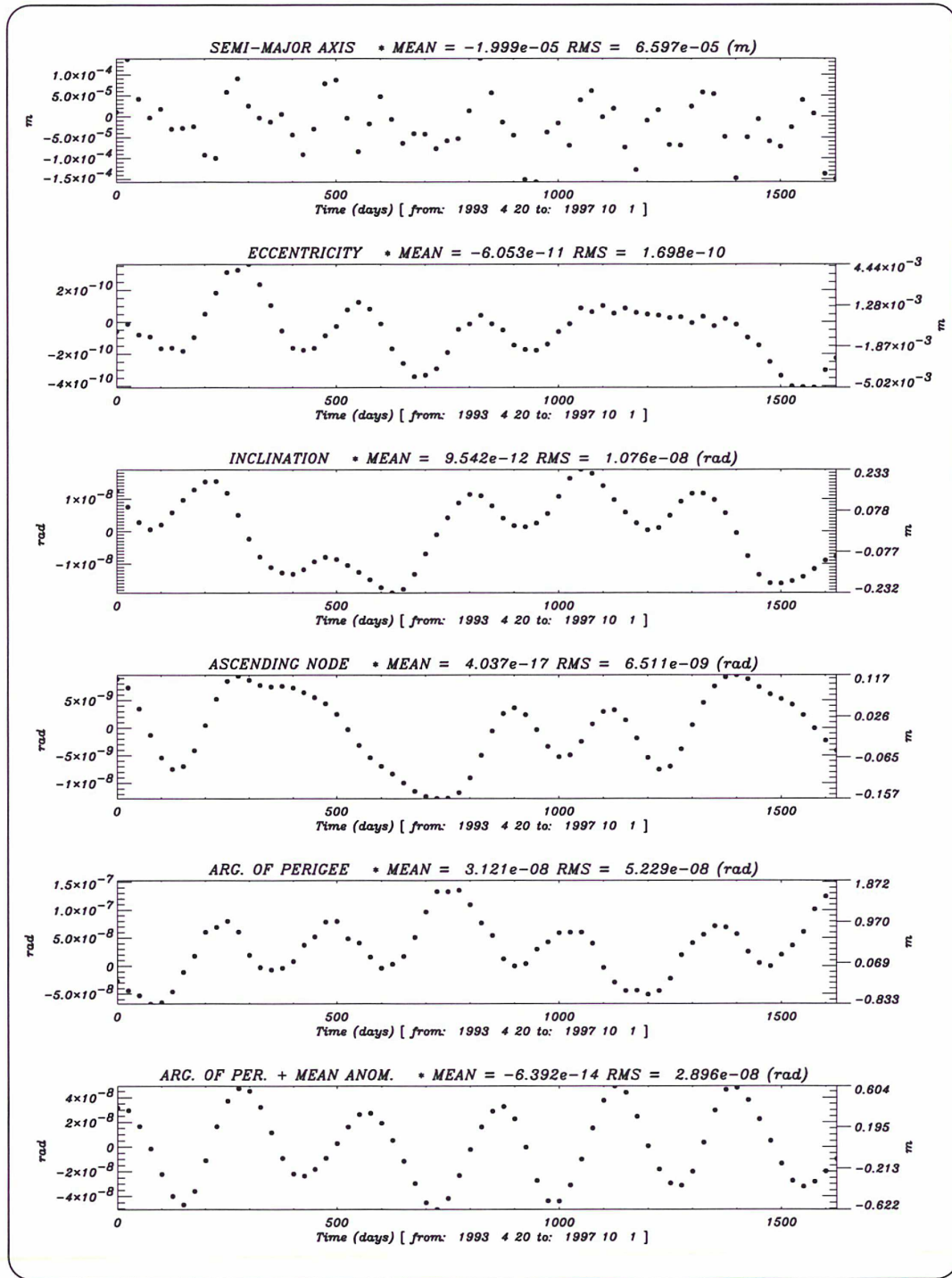


FIG. 3.7 – Résidus sur l'orbite de LAGEOS après prise en compte du modèle gravitationnel.

La situation est la même que dans la figure précédente, mais le modèle moyen est ici complet. Seule une différence de 10^{-3} a été introduite, dans les données simulées, sur le nombre de Love k_2 . Ceci entraîne sur i et Ω des résidus importants (précision relative 3.10^{-6}). La précision de la méthode est ainsi mise en évidence : elle peut détecter, à travers les signaux orbitaux sur les paramètres moyens du mouvement, des effets géodynamiques très petits.

Pour les altitudes basses, il est en effet également indispensable de réaliser un bilan d'erreur de la méthode, même si on trouve là un cas limite d'application de la théorie, car :

- les couplages entre coefficients zonaux non pris en compte dans le modèle d'orbites moyennes peuvent avoir un impact dans les amplitudes des résidus ;
- le filtrage analytico-numérique peut être moins performant qu'à altitudes élevées, en raison de la richesse du signal à courtes périodes engendré par les coefficients zonaux et tesséraux du champ de gravité.

Pour CHAMP, le pas d'intégration utilisé dans CODIOR est compris entre 1 heure et 2 heures. Dans les logiciels d'intégration numérique purs, il est de 10 à 20 secondes : le rapport d'1/300 à 1/700 observé pour les satellites élevés est conservé.

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 montrent que même si la méthode trouve certaines limites à basse altitude, elle reste encore performante si l'on adopte des stratégies adaptées : sur une année, le bilan flatteur 3.2 est un peu à tempérer, surtout lorsqu'il s'agit d'un champ complet, où la complexité des signaux à filtrer engendrés par les coefficients tesséraux est très grande (figure 3.9). Une des méthodes consistera, en cas d'utilisation de vraies données, à diviser l'arc en plusieurs zones différentes, et à estimer dans chacune de ces zones, quelques paramètres empiriques (figure 3.10). Rappelons néanmoins que, pour établir les figures 3.8 et 3.9, seules les conditions initiales (*i.e.* 6 quantités) ont été estimées.

TAB. 3.3 – Standards utilisés dans CODIOR.

| | Modèle | haute altit. | basse altit. |
|--------------------------|---|----------------|---------------------------------|
| Dynamique | | | |
| Champ de Gravité | EGM96, GRIM5 | 30 | 60 |
| Luni-solaires | BDL - (VSOP82, ELP2000) | | |
| Marées terrestres | degré 2 ($k_2 = 0.30$), degré 3 $k_3 = 0,094$ | | |
| Termes de Wahr | Ondes diurnes et semi-diurnes | | |
| Marées océaniques | 11 ondes, [Schwiderski, 1980] | 6,2 | 10,2 |
| Freinage | DTM94, [Barlier <i>et al.</i> , 1977] | - | |
| Pression de rad. solaire | avec ombre | | |
| Relativité | Schwarzschild | | |
| Forces spécifiques | possibilité de prise en compte des coeff. d'acc. empiriques | | - |
| Coefficients | | | |
| surf. | m^2 | 0.2826 (LA1&2) | 0.04523 (STA/STE) 3,63 (AJI) |
| masse | kg | 407,82 (LA1&2) | 47,25 (STA/STE) 685 (AJI) |
| aérodynamique | ajust. c_X global | | |
| Précession-Nutation | vrai de la date / J2000, [IERS, 1992] | | |
| Intégrateur et pas | Adams-Bashforth-Moulton, Ordre 10 | 12 h | 1,5-4 h |

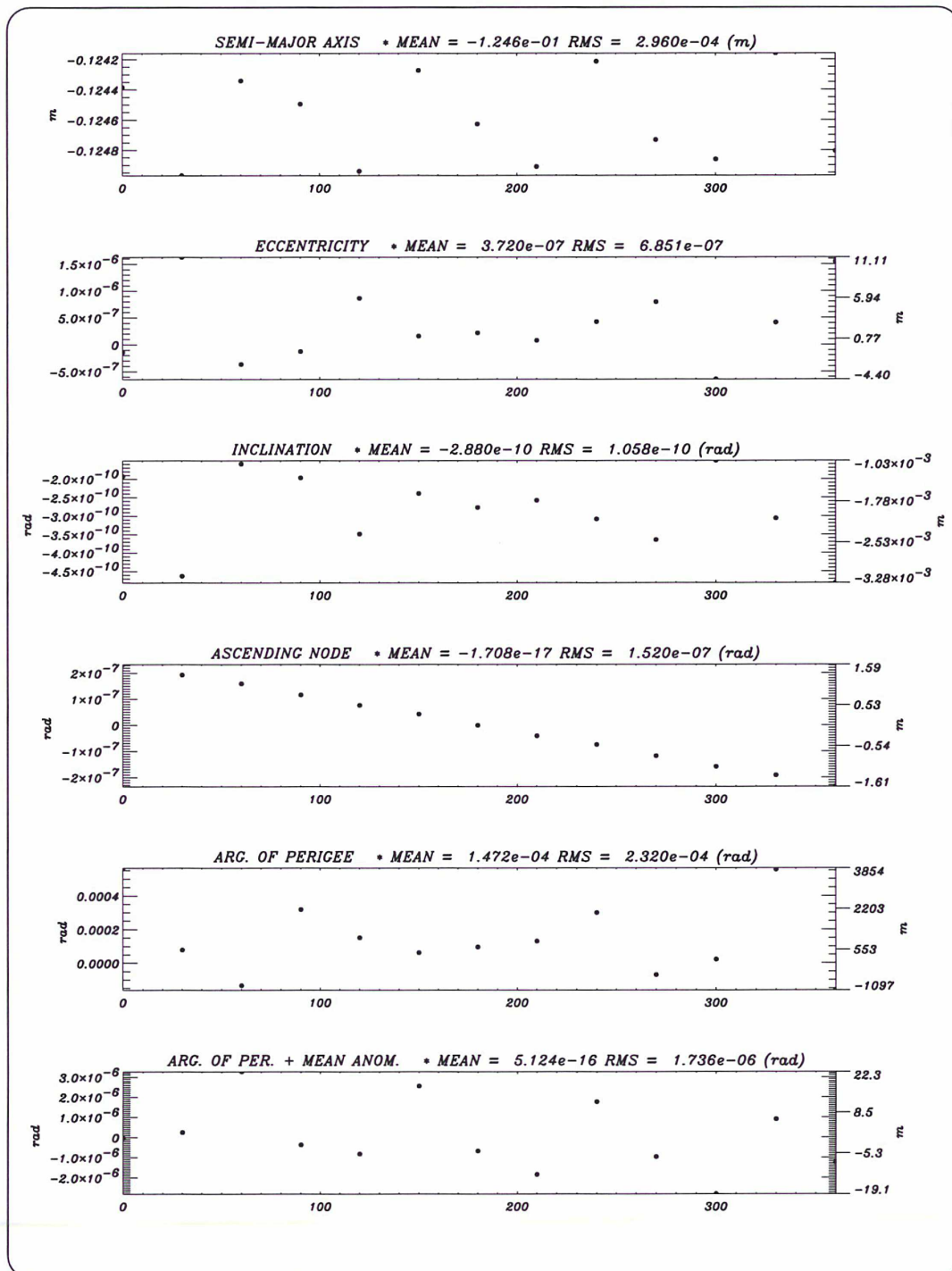


FIG. 3.8 – Simulation d'une restitution CODIOR de CHAMP - Champ zonal.

On considère ici 4 révolutions du périégée. Le champ de gravité est développé jusqu'au degré 37. La restitution d'orbite s'appuie ainsi sur 78 observations, avec un point moyen observé tous les 30 jours.

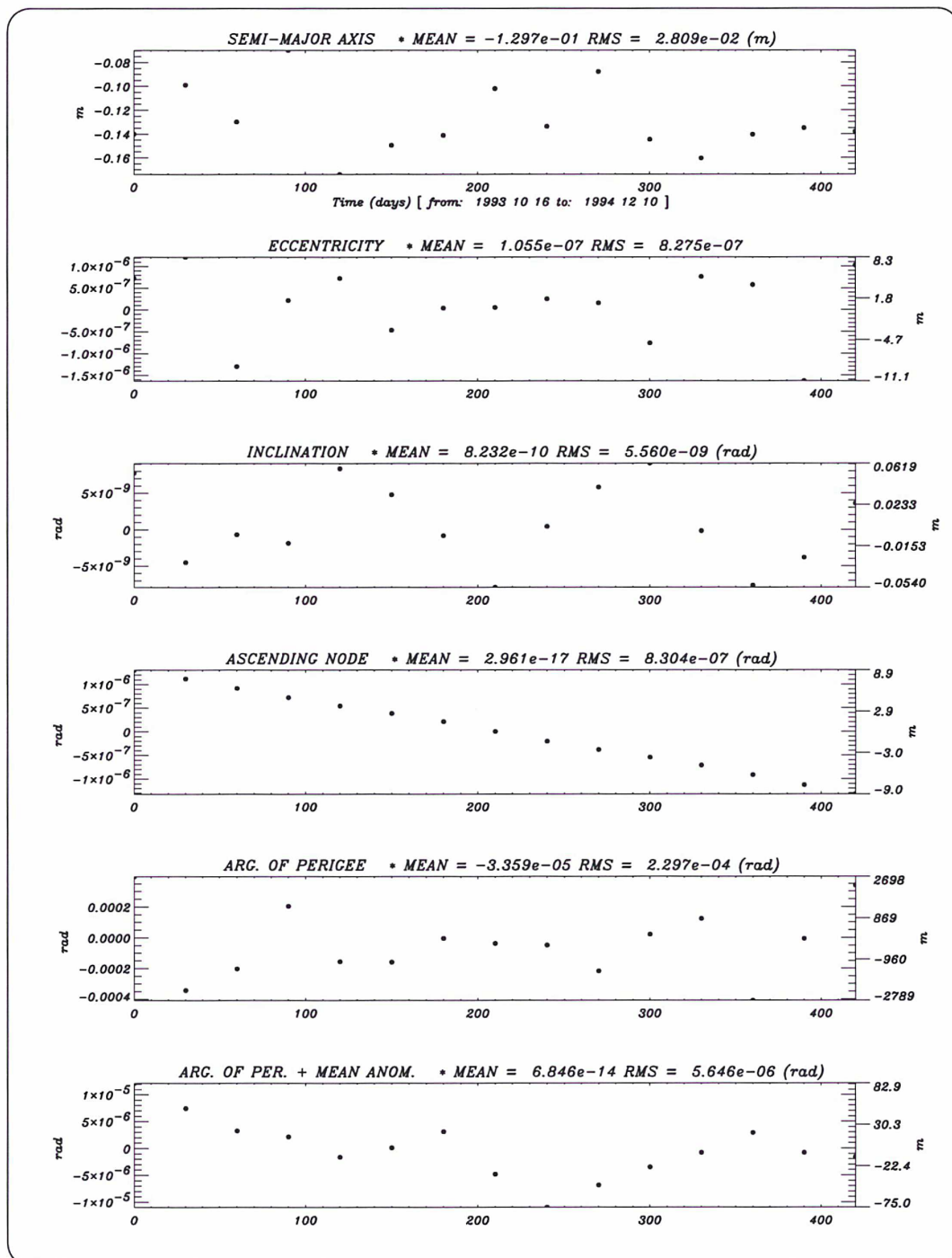


FIG. 3.9 – Simulation d’une restitution CODIOR de CHAMP - Champ complet.

On considère ici 4 révolutions du périégée. Le champ de gravité est développé jusqu’aux degré et ordre 37. La restitution d’orbite s’appuie ainsi sur 78 observations, avec un point moyen observé tous les 30 jours.

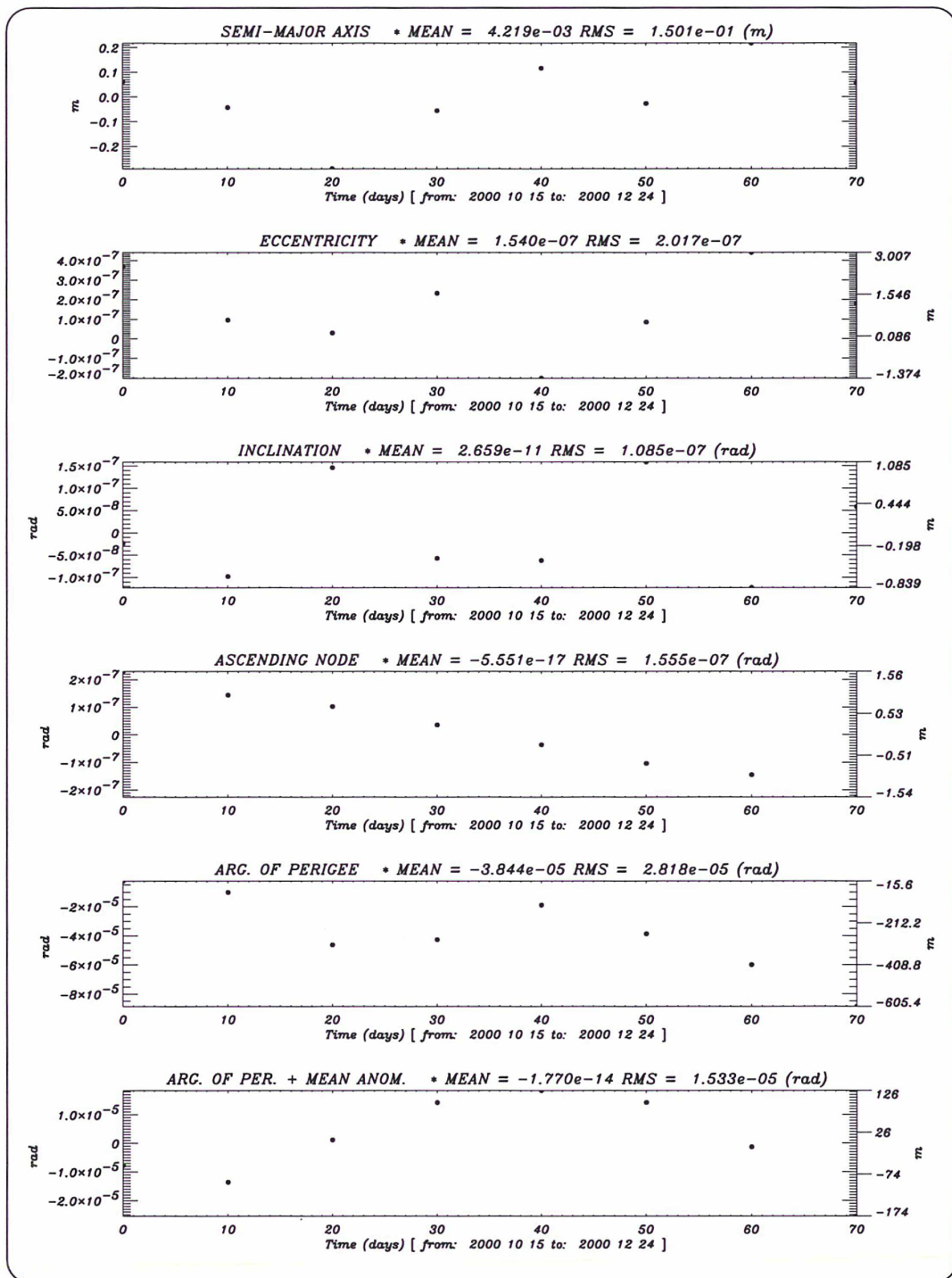


FIG. 3.10 – Simulation d'une restitution CODIOR de CHAMP - Champ complet et freinage atmosphérique.

La période considérée est plus courte que dans les figures précédentes. Ceci provient des couplages entre J_2 et l'atmosphère qui ne sont pas modélisés, et qui à cette altitude sont importants. Ils pourraient donc remettre en cause la convergence des orbites. Avec de vraies données, on aura recours à un découpage de l'arc d'orbite en quelques zones dans lesquelles on ajustera un coefficient empirique.

Le potentiel gravitationnel est développé jusqu'au degré et ordre 37. Un coefficient global et adaptatif de freinage a été ajusté : il vaut 1.003.

3.4 Note sur les calculs des annexes

Il est bien loin le temps où tous les calculs étaient menés par plusieurs personnes de front, indépendantes les unes des autres et véritables calculatrices manuelles, qui pouvaient aligner des centaines de lignes d'équations dans des salles grandes comme celles qui abritaient les premiers ordinateurs. Cette redondance des calculs n'évitait pas toutes les erreurs...

Dans la théorie semi-analytique, je ne pourrais pas dire si les milliers de termes des seconds membres moyens calculés avec le manipulateur sont exacts, et en particulier si les derniers chiffres sont bien significatifs, en raison d'éventuels problèmes numériques pour les hauts degrés (problèmes numériques dus au nombre fini de chiffres utilisés par les ordinateurs pour effectuer les calculs). L'important est d'avoir confiance dans la robustesse des algorithmes, à force de tests dans diverses configurations dynamiques.

De la même manière, chacune des équations présentées dans les annexes ont été écrites pour la plupart plusieurs fois sur le papier, puis vérifiées numériquement, en utilisant le programme CODIOR ou de façon indépendante. Il est vrai qu'il y a des termes qui comptent moins que d'autres, et qu'une erreur dans ceux-ci est par conséquent moins facilement détectable. En particulier pour la solution analytique aux équations de Lagrange.

Pour les équations de la dynamique, les termes ont été testés les uns après les autres : équations de Lagrange, et équations de Gauss dans les deux repères. La cohérence des calculs a été établie à divers niveaux. Cohérence avec les dérivées partielles tout d'abord : pour chacun des $6 \times 6 \times 6$ termes¹, je trouve une différence relative de l'ordre de 10^{-10} entre les dérivées partielles «analytiques» et les approximations $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$. Cohérence par rapport à la formulation en éléments képlériens ensuite : par exemple, on a $\frac{dC}{dt} = \frac{de}{dt} \cos \omega - e \sin \omega \frac{d\omega}{dt}$. En connaissant les éléments orbitaux $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$, on peut déduire les dérivées $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ correspondantes, et en déduire $\frac{dC}{dt}$. On peut aussi déduire de $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ les éléments $(a, C, i, \Omega, S, \lambda)$, et donc obtenir $\frac{dC}{dt}$ directement en fonction des éléments non singuliers. La différence relative de ces deux $\frac{dC}{dt}$ est de l'ordre de 10^{-15} . C'est le même ordre de grandeur pour tous les autres éléments, sur les équations instantanées comme sur les équations moyennes.

Enfin, la cohérence globale de ces développements est donnée par les processus d'intégration numérique qui convergent correctement, et par l'ajustement de paramètres parfaitement réalistes (comme des coefficients tangentiels sur les orbites de LAGEOS très cohérents avec ceux ajustés avec une formulation en éléments orbitaux).

J'ai ainsi pris le plus grand soin pour établir toutes ces équations, mais nul n'est à l'abri d'une erreur...

¹dont beaucoup sont nuls, heureusement !

Deuxième partie

Application à l'étude du champ de gravité de la Terre

Chapitre 4

Méthode de détermination de paramètres géodynamiques dans le cadre du mouvement moyen

Les paramètres $\Sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ qui interviennent dans les équations de la dynamique du type (3.1) peuvent être divisés en trois catégories :

- les conditions initiales $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_6)$,
- les paramètres dynamiques propres à un satellite (qui caractérisent le plus souvent des forces non gravitationnelles comme le coefficient aérodynamique c_X , qui traduit l'interaction entre la surface du satellite et les molécules de l'atmosphère),
- les paramètres géodynamiques communs à tous les satellites, comme les coefficients du champ de gravité.

La restitution d'orbite permet ainsi de déterminer un certain nombre de ces paramètres en minimisant la différence, selon une norme donnée, entre l'orbite et les mesures (en fait entre les mesures et la quantité équivalente calculée à l'aide d'une intégration d'orbite). Le processus est en général itératif, et basé sur une intégration de (3.1) à l'étape $n + 1$ à l'aide des paramètres déterminés à l'étape n . Pour les paramètres communs à tous les satellites, il faut de plus pouvoir profiter de la redondance des observations, de manière à assurer une détermination d'autant meilleure de ces paramètres.

Ce chapitre présente les équations utilisées dans la restitution des orbites moyennes. La méthode est celle des moindres carrés. Parce qu'elle est basée sur un formalisme matriciel très pratique à mettre en œuvre, cette méthode est largement utilisée pour résoudre des systèmes où il y a plus d'équations que d'inconnues. Elle est particulièrement bien adaptée à la restitution des orbites moyennes car les observations sur lesquelles elle s'appuie ici sont des éléments moyens, filtrés en amont : il ne devrait donc pas y avoir de points aberrants dans les observations, qui dégradent fortement la qualité des estimations, ainsi que le montre [Coulot, 2002]. L'adéquation de la méthode à la restitution d'orbites moyennes est notamment illustrée par le fait que deux itérations, voire une seule, sont suffisantes pour atteindre la solution finale : au-delà, les valeurs ajustées sont pratiquement constantes d'une itération à l'autre, et en particulier les corrections aux éléments moyens de départ. Une fois la convergence atteinte, il faut néanmoins s'assurer que les résidus sont effectivement centrés.

Je mentionne également la technique de cumul des observations, placée dans le cadre d'une pondération des observations entre elles. Cette pondération doit être menée à deux niveaux : d'une part pour optimiser la pondération entre les éléments orbitaux d'un même satellite,

d'autre part pour optimiser la pondération de plusieurs satellites quand il s'agit de l'analyse d'une constellation¹. Elle permet également de relier d'une manière cohérente la qualité des observations à la qualité des estimations (à travers les écarts-types), même si la qualité des estimations dépend certes de celle des observations, mais aussi de celle du modèle.

4.1 Principe de la méthode des moindres carrés

Le but est de déterminer p paramètres ϵ_k ($k = 1, p$) à l'aide de $6n$ observations² \mathbf{E}' réparties dans le temps. On a bien sûr $6n > p$. Les paramètres $\Sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ caractérisent à la fois le modèle d'orbite et le modèle géodynamique utilisé pour calculer les 6 éléments moyens $\mathbf{E}'_C = f(\Sigma, t)$, où $f(\Sigma, t) = (f_1(\Sigma, t), \dots, f_6(\Sigma, t))$ caractérise le modèle utilisé. Si les modèles étaient parfaits et complets, on aurait à chaque date t_i $f(\Sigma, t_i) = \mathbf{E}'(t_i)$. Comme ce n'est pas le cas, chaque mesure est affectée d'un écart-type $\sigma'_j(t_i)$, et il faut chercher à minimiser $f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t)$, considérée comme une fonction des paramètres Σ . Pour minimiser cet écart, on peut par exemple utiliser la fonction de coût des moindres carrés pondérés par une matrice de poids P diagonale³ :

$$\boxed{(f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t))^T \cdot P \cdot (f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 \left(\frac{f_j(\Sigma, t_i) - \mathbf{E}'_j(t_i)}{\sigma'_j(t_i)} \right)^2} \quad (4.1)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma'_1(t_1)^2} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sigma'_6(t_1)^2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{\sigma'_1(t_n)^2} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \frac{1}{\sigma'_6(t_n)^2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La forme diagonale de la matrice de poids sous-entend que les observations sont indépendantes entre elles, ce qui sera le cas dans toute la suite de l'étude puisqu'un même arc court calculé par GINS ne servira qu'à la construction d'un seul élément moyen «observé».

On introduit ainsi la fonction

$$\begin{cases} \varphi & : & \mathbb{R}^p & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \Sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) & \mapsto & (f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t))^T \cdot P \cdot (f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t)) \end{cases} \quad (4.3)$$

qu'il faut chercher à minimiser. Un tel minimum, s'il existe, vérifie nécessairement $\varphi'(\Sigma) = 0$.

¹les deux approches peuvent d'ailleurs être menées de front.

²dans toute l'étude, le nombre d'observations sera toujours un multiple de 6, puisque pour une date donnée, 6 éléments orbitaux constituent 6 observations considérées indépendantes.

³dans le cas où les écarts-types ne sont pas connus, la matrice de poids, faute de mieux, est égale à la matrice identité, et on a : $(f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t))^T \cdot P \cdot (f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t)) = \|f(\Sigma, t) - \mathbf{E}'(t)\|^2$ où $\| \cdot \|$ est la norme usuelle (euclidienne) de \mathbb{R}^{6n} .

Ce problème général n'a pas de solution analytique évidente si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire. Dans la quasi-totalité des cas, on dispose d'une solution approchée $\Sigma_0 = (\epsilon_{1_0}, \dots, \epsilon_{p_0})$ à l'équation $\varphi'(\Sigma) = 0$, ne serait-ce que pour amorcer l'intégration des équations du mouvement.

On peut donc écrire⁴ le développement de Taylor de f au voisinage de Σ_0 :

$$f(\Sigma, t) = f(\Sigma_0, t) + f'(\Sigma_0, t).(\Sigma - \Sigma_0) + o(\Sigma - \Sigma_0) \quad (4.4)$$

avec $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma_0} o(\Sigma - \Sigma_0) = 0$, ce qui signifie :

$$\varphi(\Sigma) \simeq (f(\Sigma_0, t) + f'(\Sigma_0, t).(\Sigma - \Sigma_0) - \mathbf{E}'(t))^T . P. (f(\Sigma_0, t) + f'(\Sigma_0, t).(\Sigma - \Sigma_0) - \mathbf{E}'(t)) \quad (4.5)$$

La matrice A de l'application linéaire tangente $f'(\Sigma_0, t)$ est une matrice à p colonnes et $6n$ lignes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_1}(\Sigma_0, t_1) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_p}(\Sigma_0, t_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \epsilon_1}(\Sigma_0, t_1) & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial \epsilon_p}(\Sigma_0, t_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_1}(\Sigma_0, t_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_p}(\Sigma_0, t_n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \epsilon_1}(\Sigma_0, t_n) & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial \epsilon_p}(\Sigma_0, t_n) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

En notant :

$$\begin{cases} X &= \Sigma - \Sigma_0 \\ Y &= \mathbf{E}'(t) - f(\Sigma_0, t) \end{cases} \quad (4.7)$$

(X étant un vecteur à p lignes, Y à $6n$ lignes), le problème consiste ainsi à minimiser la fonction

$$\Phi(X) = (AX - Y)^T . P. (AX - Y) \quad (4.8)$$

En développant, on obtient :

$$\Phi(X) = X^T A^T P A X - X^T A^T P Y - Y^T P A X + Y^T P Y \quad (4.9)$$

Φ étant une fonction numérique, l'application linéaire qui lui est tangente en X , $\Phi'(X)$, est une forme linéaire et on peut écrire, en calculant la différentielle de la précédente relation, $\forall dX \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} \Phi'(X).dX &= dX^T A^T P A X + X^T A^T P A dX - dX^T A^T P Y - Y^T P A dX \\ &= 2(X^T A^T P A - Y^T P A).dX \end{aligned}$$

⁴sous réserve d'hypothèses mathématiques vérifiées ici, en particulier la différentiabilité de f , que je ne détaille pas. Voir [Coulot, 2002] pour plus de détails.

donc

$$\Phi'(X) = 2(X^T A^T P A - Y^T P A) \quad (4.10)$$

Donc \hat{X} est un point critique de Φ si et seulement si $\hat{X}^T A^T P A = Y^T P A$ c'est-à-dire, en prenant la transposée de l'expression précédente, si et seulement si $A^T P A \hat{X} = A^T P Y$. En supposant de plus que la matrice $A^T P A$ est inversible (ce qui est le cas si A est de plein rang), on en déduit la solution notée \hat{X} :

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P Y \quad (4.11)$$

Ainsi, le minimum local Σ recherché pour Φ vaut nécessairement⁵ :

$$\Sigma = \Sigma_0 + (A^T P A)^{-1} A^T P (\mathbf{E}'(t) - f(\Sigma_0, t)) \quad (4.12)$$

On remarque que Σ est invariante par homothétie sur la matrice de poids P . On peut donc la définir à un facteur multiplicatif près.

Le vecteur X est le *vecteur des paramètres*. Le vecteur $Y = \mathbf{E}'(t) - f(\Sigma_0, t)$ est appelé *vecteur des observations*, dénomination abusive (à cause du terme $-f(\Sigma_0, t)$) à laquelle on préfère généralement le terme de *pseudo-observations*. La matrice A des dérivées partielles est la *matrice modèle*. La matrice $A^T P A$ est la *matrice normale*.

Dans le calcul précédent, tout se passe comme si l'on partait de l'équation approchée d'inconnue Σ_0

$$\mathbf{E}'(t) = f(\Sigma, t) \simeq f(\Sigma_0, t) + f'(\Sigma_0, t) \cdot (\Sigma - \Sigma_0) \Leftrightarrow Y \simeq A X \quad (4.13)$$

On multiplie alors chaque membre de l'équation par la matrice $A^T P$ (c'est le processus de *normalisation*) pour obtenir l'*équation normale*

$$A^T P A X = A^T P Y \quad (4.14)$$

dont la solution est évidente.

Enfin, on définit le *vecteur des résidus* $\hat{V} = A\hat{X} - Y$, vecteur fondamental de la théorie des moindres carrés. C'est en effet ce vecteur qui contient le signal résiduel dans Y après retrait du modèle estimé $A\hat{X}$. On va notamment y trouver les éventuelles erreurs de mesures ainsi que les lacunes du modèle. Le vecteur des pseudo-observations $\mathbf{E}'(t) - f(\Sigma_0, t)$ est parfois appelé vecteur des résidus *a priori* puisqu'il représente en effet le vecteur des résidus avant l'estimation.

⁵[Coulot, 2002] discute toutes les hypothèses pour examiner si la condition nécessaire est suffisante. Dans la pratique, on fera en sorte que ce soit toujours le cas : la seule restriction forte est l'inversibilité de la matrice $A^T P A$.

4.2 Les équations variationnelles

Pour mettre en œuvre la méthode des moindres carrés, il faut donc pouvoir disposer, pour construire la matrice A , des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \epsilon_k}$ aux dates t_i d'observations, c'est-à-dire des quantités $\frac{\partial \mathbf{E}'_C}{\partial \epsilon_k}$.

Or la seule quantité que l'on peut formuler facilement est $\frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \left(\frac{d\mathbf{E}'_C}{dt} \right)$ en vertu de l'équation (3.1).

Dans le cas général, on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \left(\frac{d\mathbf{E}'_C}{dt} \right) \right| = \frac{\partial SM}{\partial \mathbf{E}'_C} \frac{\partial \mathbf{E}'_C}{\partial \epsilon_k} + \frac{\partial SM}{\partial \epsilon_k} \quad (4.15)$$

En général, $\frac{\partial SM}{\partial \epsilon_k}$ est la division formelle du système différentiel par le paramètre que l'on cherche à estimer, sauf dans certains cas particuliers dus aux couplages entre les coefficients zonaux :

- estimation de J_2 : division par J_2 si le système différentiel est d'ordre 1, par $\frac{J_2}{2}$ s'il est d'ordre 2, et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. L'estimation ne peut se faire qu'une fois faite la somme des contributions des différents ordres ;
- estimation des autres zonaux : le principe est le même, mais il faut faire attention à la multiplicité des combinaisons, J_n , J_n^2 , $J_2^2 J_n$, $J_n J_m$;
- estimation des dérivées séculaires \dot{J}_n : la date de référence t_{ref} du modèle gravitationnel utilisé doit alors être prise en compte car la loi de variation de J_n est alors $J_n(t) = J_n(t_{\text{ref}}) + \dot{J}_n(t - t_{\text{ref}})$. L'estimation simultanée de $J_n(t_{\text{ref}})$ et \dot{J}_n est possible, d'autant plus que ces deux paramètres sont naturellement bien décorrélés. Dans GRIM-5, t_{ref} est situé au premier janvier 1997. Le calcul de $\frac{\partial SM}{\partial \epsilon_k}$ doit alors tenir compte de la différence entre la date courante et cette date de référence.

Dans le cas où le paramètre ϵ_k est l'une des conditions initiales $\mathbf{E}'_C(t_0)$, on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \left(\frac{d\mathbf{E}'_C}{dt} \right) \right| = \frac{\partial SM}{\partial \mathbf{E}'_C(t_0)} \frac{\partial \mathbf{E}'_C(t_0)}{\partial \epsilon_k} \quad (4.16)$$

Si les conditions initiales ajustées sont exprimées dans d'autres variables que celles avec lesquelles sont intégrées les équations de la dynamique, $\frac{\partial \mathbf{E}'_C(t_0)}{\partial \epsilon_k}$ est la matrice jacobienne de la transformation. Dans le cas contraire, cette matrice est l'identité, et on a simplement :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \left(\frac{d\mathbf{E}'_C}{dt} \right) \right| = \frac{\partial SM}{\partial \mathbf{E}'_C} \quad (4.17)$$

Les quantités $\frac{\partial SM}{\partial \mathbf{E}'_C}$ ont été calculées à l'aide du manipulateur de séries, pour les perturbations J_2 , J_2^2 , J_3 , J_4 , J_5 .

A titre d'exemple, voici le second membre en C' pour J_2^2 :

SECOND MEMBRE POUR ECG

| | | | | | | | | | | | |
|------------|------------|---|---|---|-----|---|---|---|---|---|---|
| Re ** 4 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| GM ** 6 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| C20 ** 2 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| CNO ** 0 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| CMO ** 0 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| RL ** 0 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| GML ** 0 | EN FACTEUR | | | | | | | | | | |
| ARG. MINI. | | 0 | 1 | 0 | -11 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ARG. MAXI. | | 0 | 3 | 0 | -11 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |

NUMBER OF TERMS : 15

| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|----|
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | XL | YL | ZL |
| 0.839062500000000E+01 | SIN | 0 | 3 | 0 | -11 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.341953125000000E+02 | SIN | 0 | 3 | 0 | -11 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.121875000000000E+01 | SIN | 0 | 3 | 0 | -11 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.785156250000000E+01 | SIN | 0 | 3 | 0 | -11 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.496875000000000E+01 | SIN | 0 | 3 | 0 | -11 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.320214843750000E+02 | SIN | 0 | 3 | 0 | -11 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.292500000000000E+02 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.105515625000000E+03 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.244500000000000E+03 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.135000000000000E+02 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.157031250000000E+02 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.518437500000000E+02 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.522656250000000E+02 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.125718750000000E+03 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.113320312500000E+03 | SIN | 0 | 1 | 0 | -11 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |

De

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial e} = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial}{\partial C} C + \frac{\partial}{\partial S} S \right) \\ \frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial S} C - \frac{\partial}{\partial C} S + \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

on peut déduire, avec λ constant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial C} = \frac{C}{e} \frac{\partial}{\partial e} - \frac{S}{e^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \\ \frac{\partial}{\partial S} = \frac{S}{e} \frac{\partial}{\partial e} + \frac{C}{e^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

On en déduit ensuite, par exemple, $\frac{\partial}{\partial S'} \left(\frac{dC'}{dt} \right)$:

DERIVEE DU SECOND MEMBRE POUR ECG PAR RAPPORT A ESG

| | |
|----------|------------|
| Re ** 4 | EN FACTEUR |
| GM ** 6 | EN FACTEUR |
| C20 ** 2 | EN FACTEUR |
| CNO ** 0 | EN FACTEUR |

```

CMO ** 0 EN FACTEUR
RL ** 0 EN FACTEUR
GML ** 0 EN FACTEUR
ARG. MINI.      0  0  0 -11  0  0  0  0  0  0
ARG. MAXI.      0  4  0 -11  4  4  2  0  0  0

```

NUMBER OF TERMS : 28

| | | T | T | T | P | P | P | P | P | P | P |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|----|
| | | PTL | PTG | PTH | GRL | e | s | c | XL | YL | ZL |
| -0.803437500000000E+02 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.314062500000000E+02 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -0.352218750000000E+03 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.120234375000000E+03 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0.481875000000000E+02 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.287109375000000E+02 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.292500000000000E+02 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0.231562500000000E+03 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.985546875000001E+02 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.126375000000000E+03 | COS | 0 | 2 | 0 | -11 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0.292500000000000E+02 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.211031250000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.314062500000000E+02 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0.733500000000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.135937500000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -0.135000000000000E+02 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.157031250000000E+02 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.103687500000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.104531250000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.292500000000000E+02 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -0.377156250000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.339960937500000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.134765625000000E+03 | COS | 0 | 0 | 0 | -11 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -0.341953125000000E+02 | COS | 0 | 4 | 0 | -11 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.157031250000000E+02 | COS | 0 | 4 | 0 | -11 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0.496875000000000E+01 | COS | 0 | 4 | 0 | -11 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.320214843750000E+02 | COS | 0 | 4 | 0 | -11 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.839062500000000E+01 | COS | 0 | 4 | 0 | -11 | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |

Par exemple, le terme 7 du second membre (qui commence page 133) est $29, 25 \sin g \frac{1}{L_{11}} e \sin^2 i$. Sa dérivée par rapport à S est le terme 11 des dérivées partielles : il s'agit de $29, 25 \frac{1}{L_{11}} \sin^2 i$.

Notons enfin qu'on peut disposer facilement d'un meilleur modèle pour $\frac{\partial SM}{\partial \mathbf{E}'_C}$, grâce notamment aux dérivées partielles de l'annexe C, en particulier quand les composantes des forces sont constantes (cf chapitre 1).

En faisant l'hypothèse, contestable certes, mais largement utilisée en géodésie spatiale, que

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \left(\frac{d\mathbf{E}'_C}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{E}'_C}{\partial \epsilon_k} \right)$$

on dispose d'équations différentielles qui peuvent être intégrées numériquement, pour obtenir les quantités finalement recherchées. Ces équations différentielles sont intégrées en même temps que les équations du mouvement, avec le même algorithme et les mêmes paramètres (même si on peut utiliser un pas d'intégration plus grand ou un intégrateur d'ordre moins élevé).

TAB. 4.1 – Valeurs des poids utilisés pour la pondération des éléments de chaque satellite.

Les valeurs indiquées correspondent aux poids p_i avant «normalisation» par le demi-grand axe, «normalisation» destinée à rendre d'emblée les observations plus homogènes. La matrice de poids P est définie par $P = \text{diag}(\pi_a, \pi_C, \pi_i, \pi_\Omega, \pi_S, \pi_\lambda)$, où $\pi_a = \frac{a}{\mu} p_a$, $\pi_i = \frac{a}{\mu} \frac{1}{\cos^2 i} p_i$, $\pi_C = a^2 p_C$, $\pi_S = a^2 p_S$, $\pi_\Omega = a^2 p_\Omega$, $\pi_\lambda = a^2 p_\lambda$.

Ces valeurs ont été obtenues grâce à la méthode du degré de liberté, initialisée avec une matrice de poids unitaire. On remarque par exemple la dissymétrie entre les poids trouvés pour C et S .

| | p_a | p_C | p_i | p_Ω | p_S | p_λ |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| LAGEOS 1 | 0.77 10 ³ | 0.23 10 ¹ | 0.21 10 ⁰ | 0.29 10 ¹ | 0.36 10 ⁰ | 0.12 10 ⁻⁴ |
| LAGEOS 2 | 0.35 10 ³ | 0.14 10 ¹ | 0.32 10 ¹ | 0.93 10 ⁰ | 0.27 10 ¹ | 0.49 10 ⁻⁵ |
| STELLA | 0.16 10 ¹ | 0.60 10 ⁰ | 0.11 10 ⁻³ | 0.37 10 ⁻⁵ | 0.45 10 ⁰ | 0.13 10 ⁻⁷ |
| STARLETTE | 0.17 10 ² | 0.11 10 ¹ | 0.45 10 ¹ | 0.16 10 ⁻¹ | 0.84 10 ⁰ | 0.14 10 ⁻⁶ |
| AJISAI | 0.41 10 ² | 0.40 10 ⁰ | 0.47 10 ⁰ | 0.19 10 ⁻¹ | 0.72 10 ⁻¹ | 0.61 10 ⁻⁶ |

4.3 Méthode de combinaison des observations

4.3.1 Pondérations des observations pour un même satellite

On se reportera à [Sahin, 1992] ou [Coulot, 2002] pour plus de détails. Les méthodes d'analyse de composantes de la variance sont utilisées lorsque l'on veut compenser des observations statistiquement hétérogènes, ce qui est le cas ici, puisqu'il n'y a aucune raison d'attribuer *a priori* les mêmes poids aux différents éléments.

Pour un satellite donné, on suppose que le vecteur des observations est scindé en 6 vecteurs d'observations $Y = (Y_1, \dots, Y_6)$. Ces 6 vecteurs, correspondant aux observations sur les 6 éléments orbitaux, sont deux à deux indépendants et leurs matrices de poids sont connues à un facteur multiplicatif près.

La méthode fournit des estimateurs sans biais de ces facteurs multiplicatifs, sur lesquels on peut bâtir un test d'égalité des facteurs de la variance. Dans le cas présent, on impose au facteur unitaire de variance global la valeur 1.

Dans la table 4.1 figurent les poids qui ont été utilisés pour le calcul des orbites des satellites, déterminés par la méthode d'Helmert, après avoir initialisé π_a , π_C , π_i , π_Ω , π_S , π_λ à 1.

4.3.2 Utilisation d'observations issues de satellites différents

Pour décorréler les paramètres géodynamiques entre eux (voir ci-après un exemple de corrélation), on peut utiliser les observations de plusieurs satellites, considérés comme autant de sources d'observations différentes.

On considère m équations d'observations indépendantes relatives au même vecteur de paramètres X :

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} X \simeq Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$$

Les systèmes d'observations étant supposés indépendants, la matrice de poids du vecteur d'observations global est

$$\Pi = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_m \end{pmatrix}$$

chaque matrice P_i étant la matrice de poids du vecteur des observations Y_i .

La matrice normale du système est

$$\left| \begin{aligned} A^T . P . A &= (A_1^T \cdots A_m^T) . \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \\ &= (A_1^T \cdots A_m^T) . \begin{pmatrix} P_1 . A_1 \\ \vdots \\ P_m . A_m \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (4.20)$$

soit finalement

$$A^T . \Pi . A = \sum_{i=1}^n A_i^T . P_i . A_i \quad (4.21)$$

de sorte que le système normal global s'écrit ainsi

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i^T . P_i . A_i \right) X = \sum_{i=1}^n A_i^T . P_i . Y_i \quad (4.22)$$

Ce système résulte donc du cumul des sous-systèmes normaux. Il est bien évident qu'il doit être réalisé uniquement pour les paramètres communs à plusieurs satellites, et non pour les paramètres spécifiques à chacun (il faut alors «réduire» les systèmes). Les matrices issues du cumul peuvent ainsi contenir beaucoup de '0'.

On peut aussi mener le cumul de front avec les méthodes d'analyse de la variance, pour pondérer différemment les satellites d'une constellation.

4.4 Un exemple académique

La figure 4.1 présente les résidus d'un arc de deux ans de STELLA soumis à un potentiel développé jusqu'au degré 40. Les seuls éléments ajustés sont les éléments moyens de départ.

TAB. 4.2 – Corrélation entre les 7 paramètres estimés sur l’arc académique de STELLA.

| | a_0 | e_0 | i_0 | Ω_0 | ω_0 | M_0 | J_2 |
|------------|-------|-------|-------|------------|------------|-------|-------|
| a_0 | 1.00 | | | | | | |
| e_0 | 0.00 | 1.00 | | | | | |
| i_0 | 0.04 | 0.00 | 1.00 | | | | |
| Ω_0 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | | | |
| ω_0 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 1.00 | | |
| M_0 | 0.78 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | |
| J_2 | 0.01 | 0.00 | 0.67 | 0.58 | 0.01 | 0.04 | 1.00 |

TAB. 4.3 – Corrélation entre les 10 paramètres estimés sur l’arc académique de STELLA.

| | a_0 | e_0 | i_0 | Ω_0 | ω_0 | M_0 | J_2 | J_3 | J_4 | J_5 |
|------------|-------|-------|-------|------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_0 | 1.00 | | | | | | | | | |
| e_0 | 0.73 | 1.00 | | | | | | | | |
| i_0 | 0.82 | 0.60 | 1.00 | | | | | | | |
| Ω_0 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 1.00 | | | | | | |
| ω_0 | 0.24 | 0.26 | 0.18 | 0,00 | 1.00 | | | | | |
| M_0 | 0.00 | 0.00 | 0.04 | 0,00 | 0.00 | 1.00 | | | | |
| J_2 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0,35 | 0.01 | 0.02 | 1.00 | | | |
| J_3 | 1.00 | 0.73 | 0.82 | 0,02 | 0.24 | 0.00 | 0.09 | 1.00 | | |
| J_4 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0,35 | 0.00 | 0.02 | 1.00 | 0.09 | 1.00 | |
| J_5 | 1.00 | 0.73 | 0.82 | 0,00 | 0.24 | 0.00 | 0.03 | 1.00 | 0.04 | 1.00 |

Cet exemple est à ajouter aux autres graphiques qui établissent le bilan d’erreur de la méthode.

Si maintenant on élimine artificiellement toute la partie centrale des observations (sur un an), le niveau de précision reste le même (figure 4.2) : la méthode ne souffre absolument pas de la présence de trous de données. Un exemple spectaculaire est constitué par l’arc long d’AJISAI (voir chapitres suivants). On peut même réaliser une estimation de paramètres géodynamiques, J_2 dans la figure 4.4, avec un niveau de précision très bon.

Cela fait donc 7 paramètres estimés. On retrouve dans la table 4.2 les corrélations entre ces 7 paramètres, qui fait voir l’orbite comme un instrument de mesure géodynamique : J_2 est très corrélé à l’inclinaison et à la longitude du nœud.

Si l’on estime maintenant sur un même arc plusieurs coefficients géodynamiques, ceux-ci sont très corrélés entre eux (table 4.3). Cela explique la moins bonne précision obtenue sur chacun d’eux (figure 4.4). Mais une chose est sûre : les coefficients zonaux pairs sont estimés grâce aux signaux orbitaux sur Ω , tandis que les coefficients zonaux impairs sont estimés grâce aux signaux orbitaux sur e .

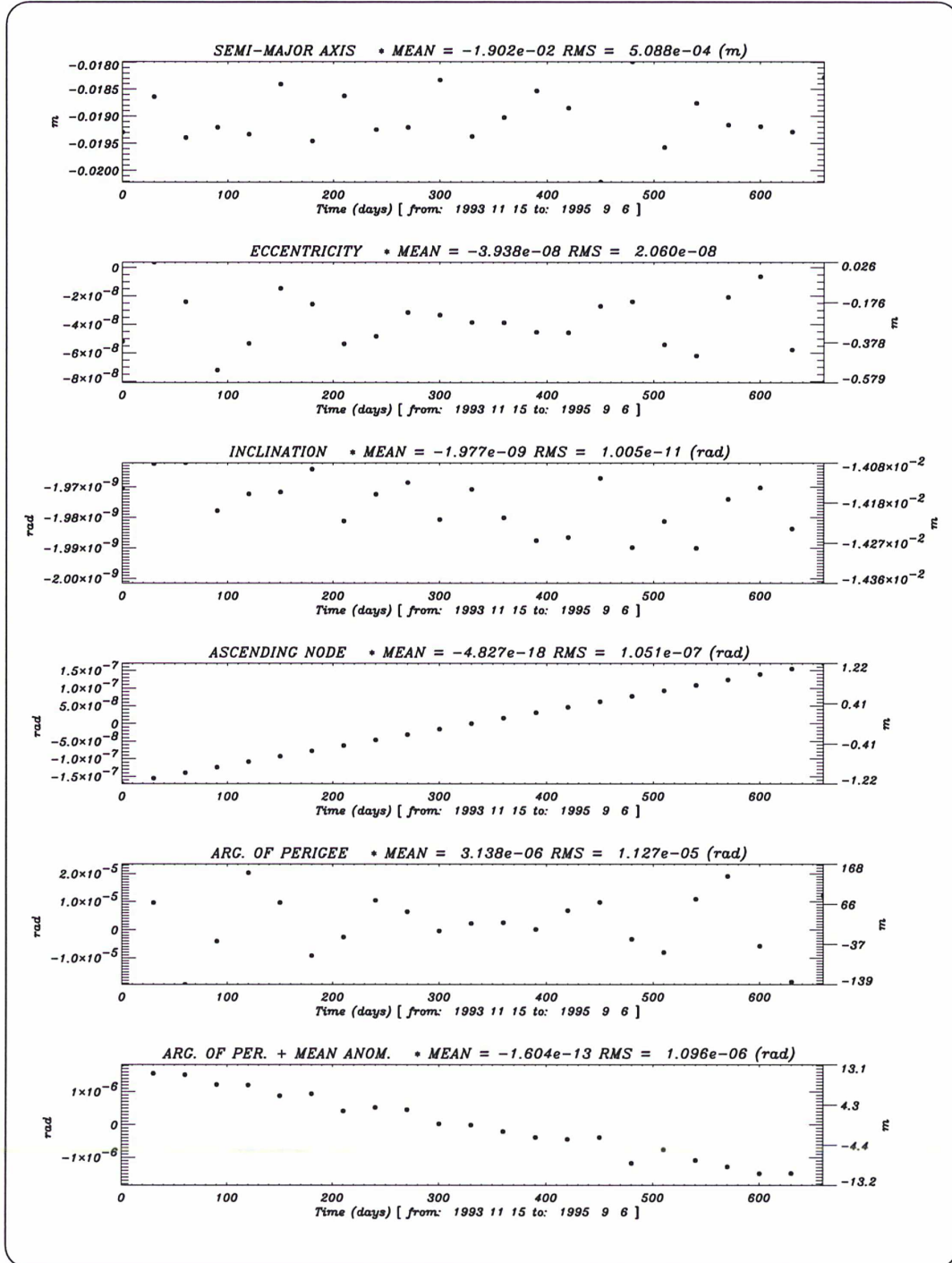


FIG. 4.1 – Restitution de 2 ans de STELLA. Potentiel $J_2 J_{40}$. 132 observations. 2 itérations. Paramètres ajustés : 6 éléments de départ.

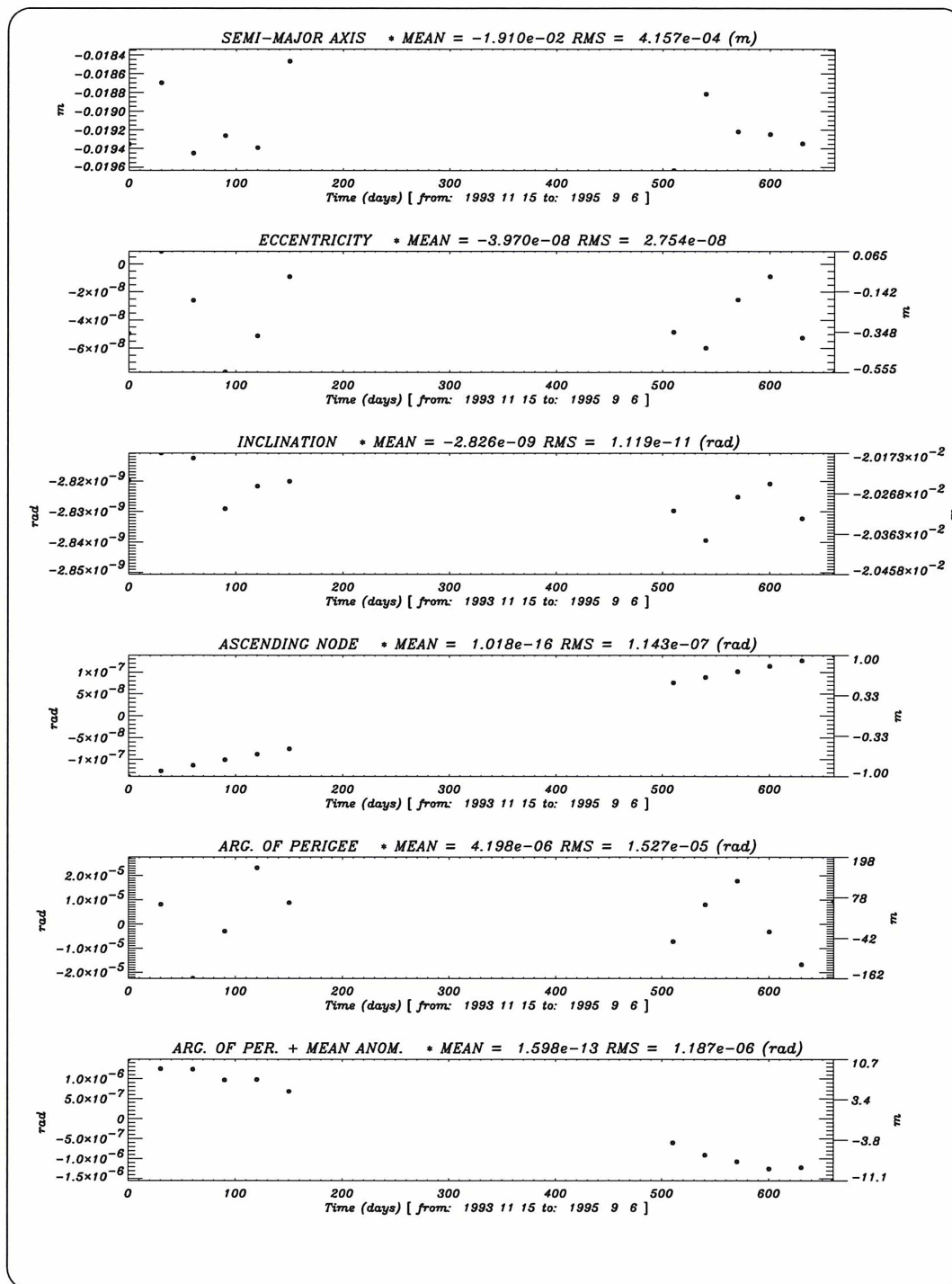


FIG. 4.2 – Effets d'un trou de données sur STELLA.
Restitution de 2 ans de STELLA. Potentiel J_2J_{40} . 72 observations.
2 itérations. Paramètres ajustés : 6 éléments de départ. En comparant
cette figure à la figure 4.1, on ne voit pratiquement pas de différence
significative : la description continue de l'évolution des éléments moyens
n'est pas remise en cause par l'absence de données sur une certaine
période de temps.

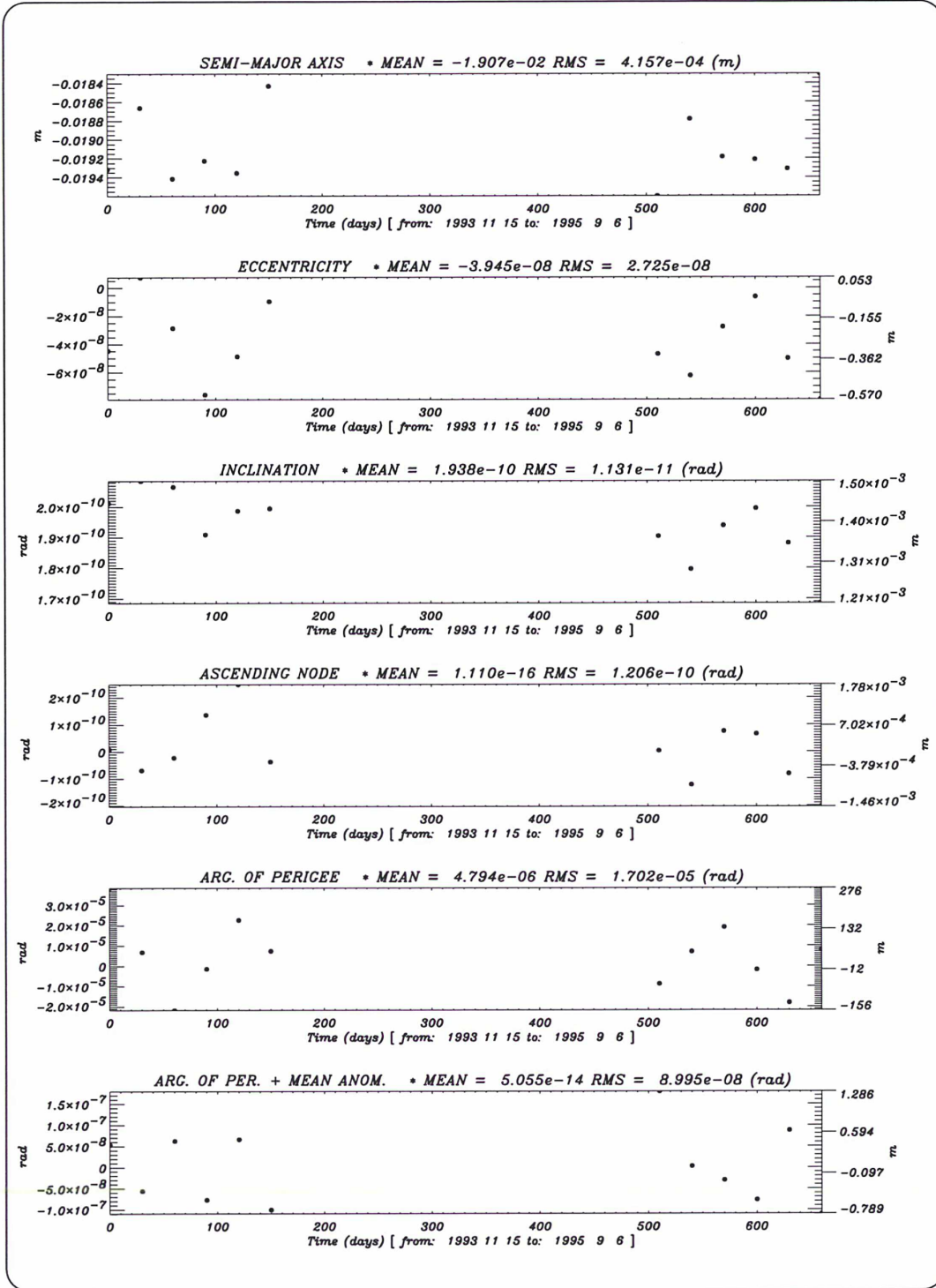


FIG. 4.3 – Effets d'un trou de données sur STELLA pour l'ajustement géodynamique (1).

Restitution de 2 ans de STELLA. Potentiel $J_2 J_{40}$. 72 observations. 2 itérations. Paramètres ajustés : 6 éléments de départ, J_2 . Valeur initiale : $C_{2,0} = -0.10826261107 \cdot 10^{-2}$. Valeur estimée : $C_{2,0} = -0.10826261583 \cdot 10^{-2}$.

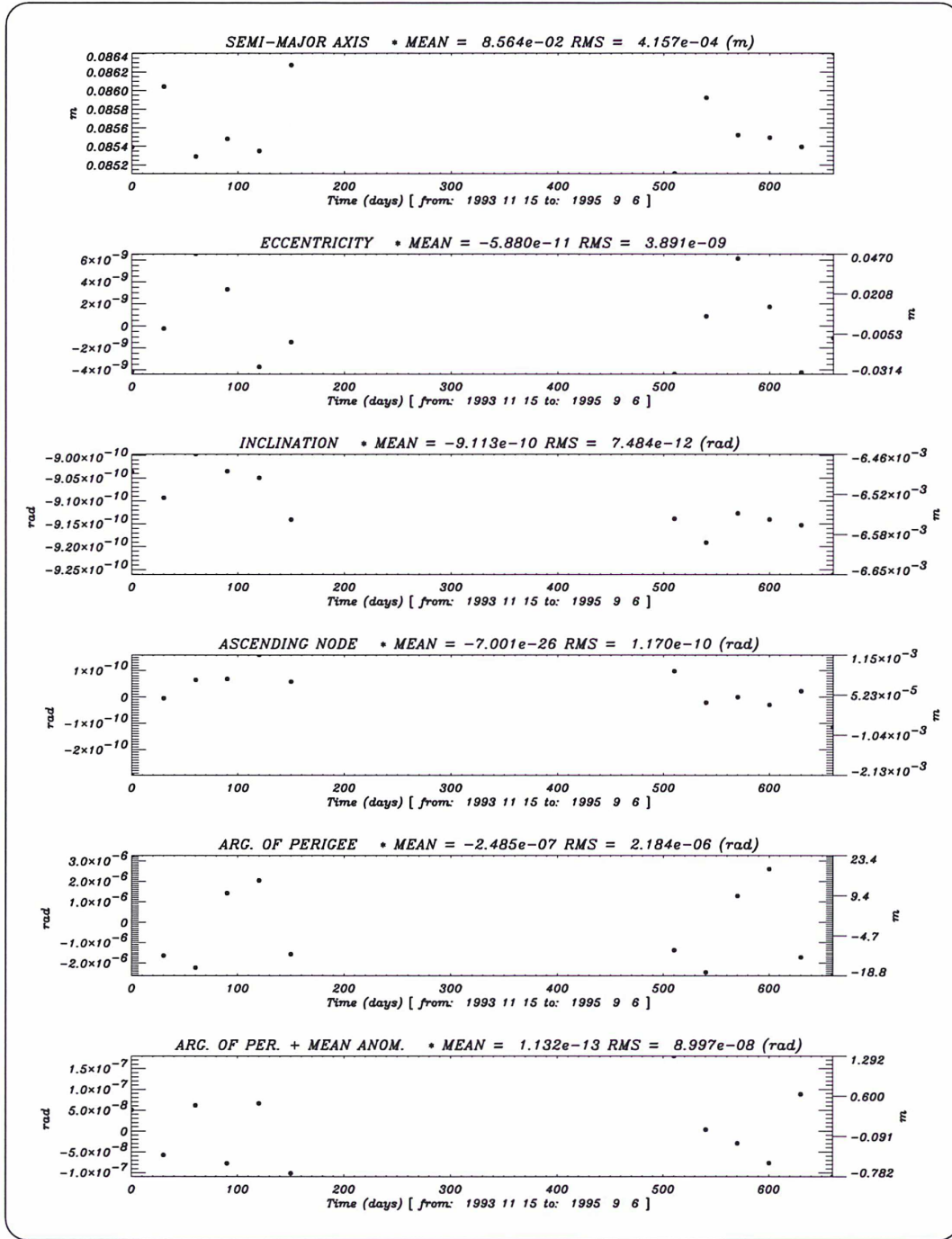


FIG. 4.4 – Effets d'un trou de données sur STELLA pour l'ajustement géodynamique (2).

Restitution de 2 ans de STELLA. Potentiel $J_2 J_{40}$. 72 observations. Paramètres ajustés : 6 éléments de départ, J_2 , J_3 , J_4 , J_5 . Valeurs initiales : $C_{2,0} = -0.10826261 \cdot 10^{-2}$, $C_{3,0} = 0.25361508 \cdot 10^{-5}$, $C_{4,0} = 0.16193635 \cdot 10^{-5}$, $C_{5,0} = 0.22289 \cdot 10^{-6}$. Valeurs estimées : $C_{2,0} = -0.10826616 \cdot 10^{-2}$, $C_{3,0} = 0.25359972 \cdot 10^{-5}$, $C_{4,0} = 0.16447143 \cdot 10^{-5}$, $C_{5,0} = 0.22293 \cdot 10^{-6}$.

Chapitre 5

L'importance des forces non gravitationnelles

Dans ce chapitre et dans le suivant, ce sont désormais les éléments moyens observés, déduits des données de poursuite de télémétrie laser (ou de la constellation GPS pour CHAMP) qui sont utilisés. Pour chaque satellite, on trouvera ces éléments dans l'annexe F, ainsi que tous les paramètres des filtrages.

Il s'agit ici d'avoir accès aux signaux orbitaux engendrés par les coefficients du champ de gravité, sans que ces signaux soient affectés par des effets non gravitationnels. Il faut donc développer des stratégies pour que les forces non gravitationnelles, qu'il est très difficile voire impossible à modéliser de façon exacte et exhaustive, aient la plus petite influence possible sur les signaux que j'attribuerai dans le prochain chapitre à des effets gravitationnels.

5.1 Une illustration sur LAGEOS

L'importance de la compréhension de la dynamique de l'ensemble d'une orbite est clairement mise en évidence dans les figures précédentes. Considérons par exemple l'évolution du demi-grand axe de LAGEOS. Il est affecté depuis 1997 par des effets non gravitationnels responsables d'une augmentation de quelques mètres (figure 5.1).

Ces effets n'ont pas une origine géodynamique, et il faut prendre garde à ce qu'ils n'influent pas sur l'estimation des paramètres du champ de gravité. Or, l'équation de Lagrange vérifiée par la longitude du nœud ascendant Ω est dans le cas général :

$$\left| \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \sin(i)} \frac{\partial U}{\partial i} \right. \quad (5.1)$$

Si l'on restreint le géopotential à la seule influence de $C_{2,0}$, on obtient :

$$\left| \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \sin(i)} C_{2,0}(t) \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 F'_{2,0,1}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{2,1,q}(e) \cos(\psi(M, \omega, \Omega, TS_G)) \right. \quad (5.2)$$

avec $C_{2,0}$ qui peut en première approximation être décomposé selon :

$$C_{2,0}(t) = C_{2,0} + \dot{C}_{2,0}(t - t_0) \quad (5.3)$$

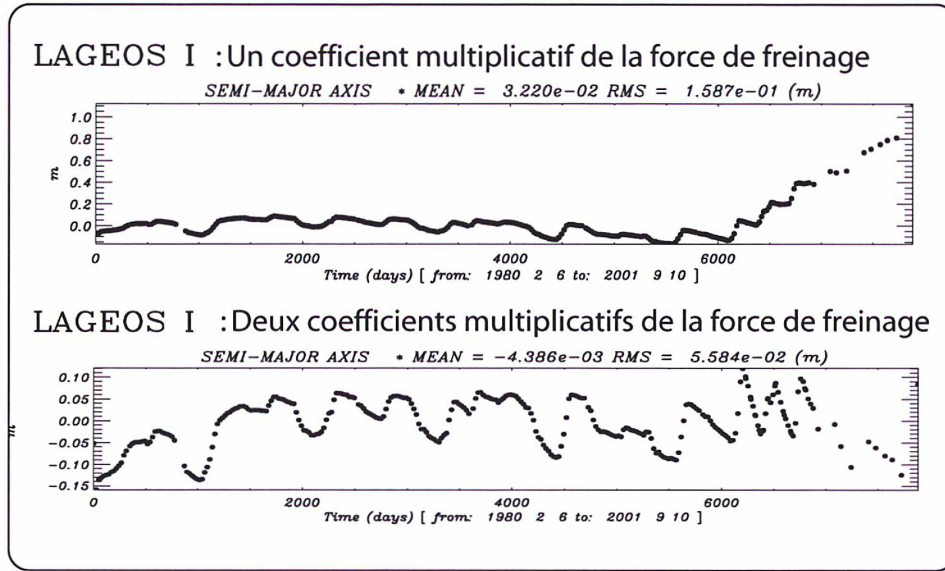


FIG. 5.1 – Résidus sur le demi-grand axe de LAGEOS-1.

Paramètres ajustés pour le premier graphique : conditions initiales, une accélération moyenne empirique de freinage ($-0.3541 \cdot 10^{-11} \text{ m.s}^{-2}$). Paramètres ajustés pour le deuxième graphique : conditions initiales, deux accélérations moyennes empiriques de freinage ($-0.2656 \cdot 10^{-11} \text{ m.s}^{-2}$ pour la période 1980/1997, $-0.808 \cdot 10^{-12} \text{ m.s}^{-2}$ pour 1997/2001). Les grandes différences s'interprètent comme un changement de régime de rotation de LAGEOS-1 sur lui-même.

Dans cette équation, la partie statique $C_{2,0}$ est considérée comme une valeur initiale à une époque de référence (le 1er janvier 1997 pour GRIM-5). $\dot{C}_{2,0}$ représente la variation séculaire de $C_{2,0}$, liée en grande partie au rebond post-glaciaire.

En tenant compte de la loi de variation de $C_{2,0}(t)$ dans l'équation de Lagrange (5.2), il est facile de voir que $C_{2,0}$ entraîne une variation séculaire de Ω tandis que $\dot{C}_{2,0}$ entraîne une variation parabolique.

Quand le demi-grand axe n'est pas constant, cela induit sur Ω un signal supplémentaire : en effet, en modélisant la variation de a par une droite $a_0 + a_1 t$ (a_0 désigne le demi-grand axe moyen), $\frac{d\Omega}{dt}$ devient proportionnel à $(C_{2,0} + \dot{C}_{2,0}t)(a_0 + a_1 t)^{-\frac{7}{2}}$.

C'est pourquoi il ne suffit pas d'ajuster un coefficient global de freinage sur l'ensemble de la période considérée : en ajustant plusieurs coefficients de freinage sur des zones judicieusement choisies, il est ainsi possible de préserver une description continue de l'évolution de la longitude du nœud sur toute la durée de l'orbite (figure 5.2). Quand le modèle non gravitationnel est plus complet (figure 5.3), les signaux géodynamiques que l'on observe à travers les résidus sont beaucoup plus purs (en particulier, dans le cas où les passages dans le cône d'ombre de la Terre sont gérés, sur l'excentricité et l'argument du périée).

La figure (5.4) présente un autre exemple intéressant. Ainsi que je l'ai déjà dit, l'estimation des coefficients zonaux impairs est basée sur les signaux orbitaux engendrés, notamment,

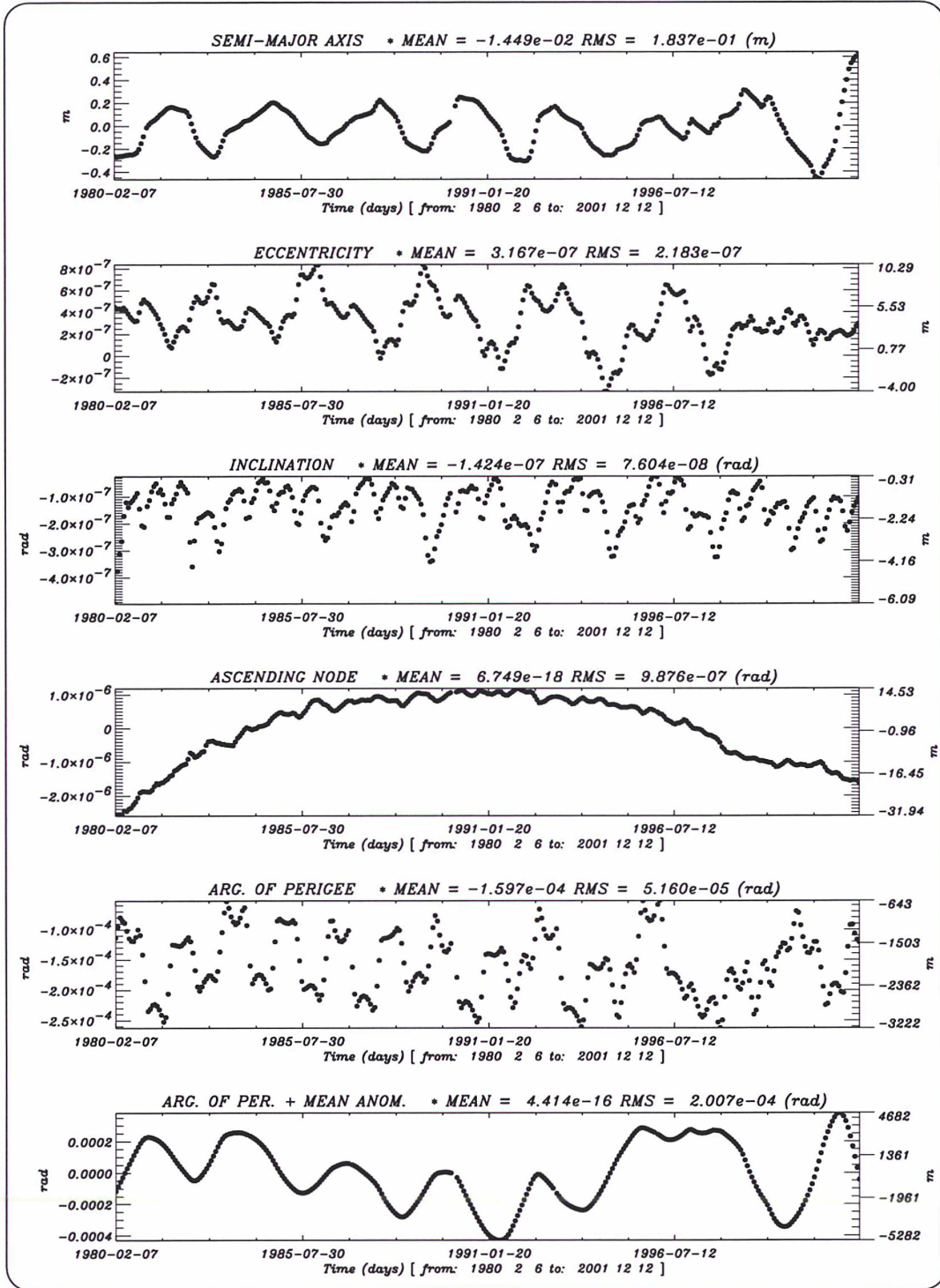


FIG. 5.2 – Résidus de l'arc long de LAGEOS-1 (1).

Paramètres ajustés : éléments orbitaux de départ, trois accélérations empiriques de freinage ($-0.26 \cdot 10^{-11} m.s^{-2}$ des Jours Juliens CNES (JJ) 10969 à 17669, $0.60 \cdot 10^{-12} m.s^{-2}$ de 17669 à 18569, $-0.49 \cdot 10^{-11} m.s^{-2}$ de 18569 à 19000), 1 coefficient multiplicatif (0.95) de la force de pression de radiation solaire (sans ombre).

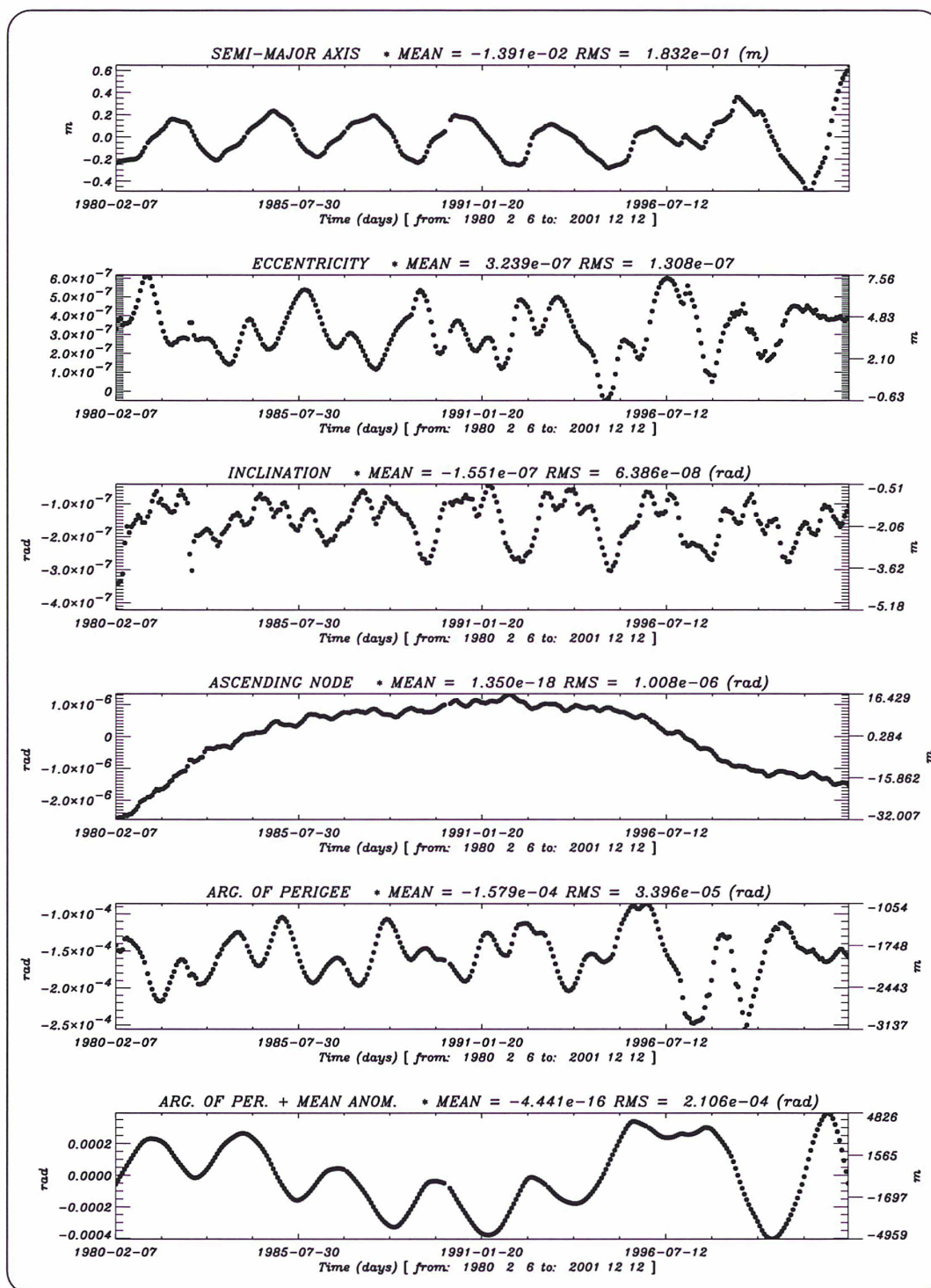


FIG. 5.3 – Résidus de l'arc long de LAGEOS-1 (2).

Paramètres ajustés : éléments orbitaux de départ, trois accélérations empiriques de freinage ($-0.26 \cdot 10^{-11} \text{ m.s}^{-2}$ des Jours Juliens CNES (JJ) 10969 à 17669, $0.73 \cdot 10^{-12} \text{ m.s}^{-2}$ de 17669 à 18569, $-0.55 \cdot 10^{-11} \text{ m.s}^{-2}$ de 18569 à 19000), 1 coefficient multiplicatif (0.998) de la force de pression de radiation solaire (avec ombre).

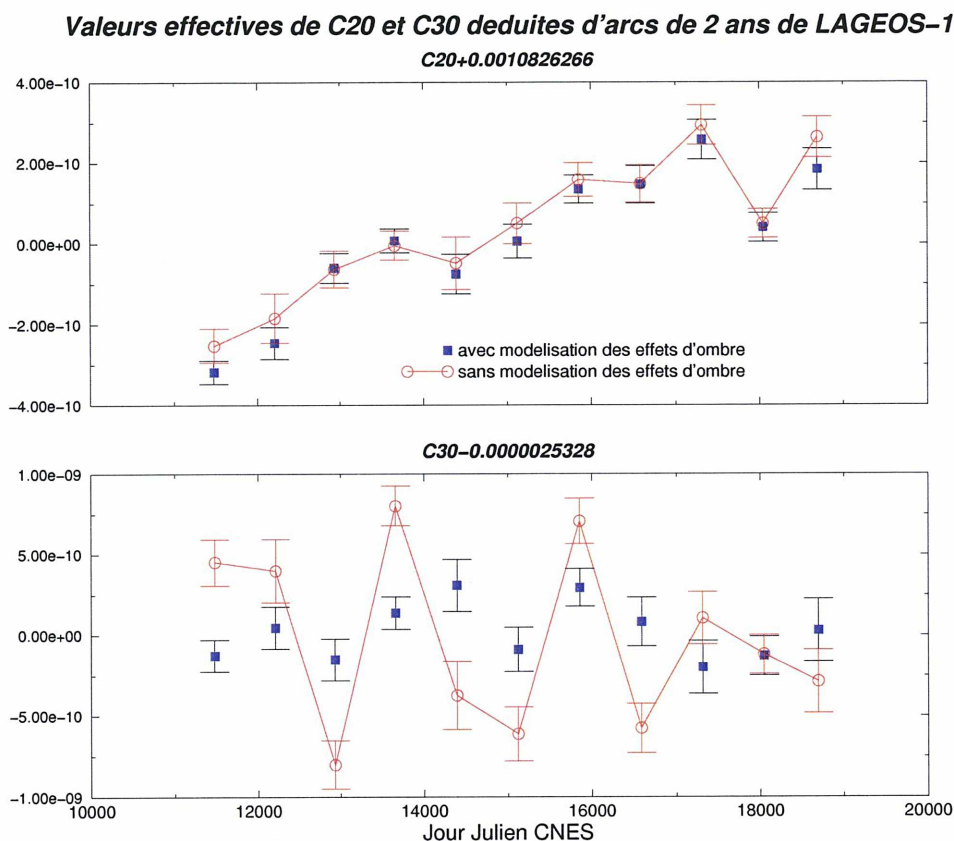


FIG. 5.4 – Modélisation des effets d’ombre et estimation géodynamique.

Cette figure présente les conséquences de la modélisation ou non des effets d’ombre sur l’estimation de valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$, à partir d’arcs de LAGEOS-1 de 2 ans indépendants les uns des autres. Aucune dérive séculaire n’a été modélisée dans le modèle gravitationnel moyen. On notera des différences significatives pour la série de $C_{3,0}$, mais qui restent néanmoins du même ordre de grandeur. La série temporelle de $C_{3,0}$ est ainsi beaucoup plus pure, ce qui permet d’envisager une estimation précise de ce coefficient.

sur l’excentricité. Or, de nombreuses forces non gravitationnelles sont sources de variations importantes de l’excentricité [Métris *et al.*, 1997]. Pour estimer les paramètres géodynamiques avec la meilleure précision possible, il faut donc disposer d’un modèle des forces non gravitationnelles avec lesquelles ils risquent d’être très fortement corrélés. Ainsi, il apparaît qu’une série temporelle de $C_{3,0}$, avec un point tous les deux ans déduits d’orbites de LAGEOS-1, perd une partie de son sens lorsque les passages du satellite dans les cônes d’ombre de la Terre ne sont pas gérés, modifiant par conséquent la force moyenne de pression de radiation solaire. Sur cette figure (5.4), par opposition, l’estimation de $C_{2,0}$ est beaucoup moins affectée, car elle est basée sur un signal présent avant tout sur le nœud.

Une alternative existe maintenant, pour certains satellites, si l’on ne dispose pas d’un modèle non gravitationnel complet : la prise en compte de données accélérométriques. C’est le cas du satellite CHAMP.

5.2 Le mouvement moyen de CHAMP

A basse altitude, les forces non gravitationnelles qui agissent sur le mouvement des satellites ne peuvent être modélisées avec grande précision à tout instant en tout point de l'espace, en raison de leur caractère non prédictible. L'utilisation de modèles, et en particulier de modèles de densité de la haute atmosphère, est donc limitée. C'est la raison pour laquelle certains satellites, dont CHAMP, emportent à leur bord des accéléromètres : plus besoin de modèles, les accélérations mesurées \mathbf{T}_{mes} , \mathbf{N}_{mes} , et \mathbf{W}_{mes} , correspondent pratiquement directement aux composantes des forces non gravitationnelles, à un biais et un facteur d'échelle près, faisant la liaison entre la force effective et les propriétés de l'instrument :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{\text{mes}} &= C_T \mathbf{T}_{\text{reel}} + B_T \\ \mathbf{N}_{\text{mes}} &= C_N \mathbf{N}_{\text{reel}} + B_N \\ \mathbf{W}_{\text{mes}} &= C_W \mathbf{W}_{\text{reel}} + B_W \end{cases} \quad (5.4)$$

Cette partie reprend certains points abordés dans *A First Analysis of the Mean Motion of CHAMP* publié dans "Advances in Geosciences" [Deleffie *et al.*, 2003a]. Avec une altitude très basse donc une orbite très complexe, CHAMP constitue un cas limite d'application de la théorie du mouvement moyen. C'est néanmoins un très bon exemple d'analyse d'orbite sur une longue période de temps.

Comme pour les orbites d'altitudes plus élevées, il n'y a que peu de paramètres empiriques ajustés dans CODIOR sur l'orbite moyenne de CHAMP. Cela permet de conserver une compréhension globale de l'orbite sur le long terme, mais impose de renoncer par ailleurs à une compensation fine des sauts dans les données accélérométriques, sauts liés au fonctionnement de l'accéléromètre STAR et non aux forces non gravitationnelles qu'il mesure [Perret *et al.*, 2001].

Même si beaucoup de ces défauts et erreurs correspondent à des courtes périodes, qui n'affectent donc pas les éléments moyens, il est ainsi difficile de rendre compte dans CODIOR de l'orbite de CHAMP avec une précision comparable à celles des orbites plus élevées. La méthode reste pertinente même à ces altitudes basses dans son principe, mais elle souffre du faible nombre de paramètres ajustés.

Je ne fais ici aucune exploitation géodynamique de l'orbite de CHAMP, et me contente de montrer qu'il est préférable d'utiliser des données accélérométriques, quand elles sont disponibles.

5.2.1 Les données utilisées

Les données ont été fournies par le GRGS/Toulouse. Un grand merci à eux. Elles sont de deux types :

- les données accélérométriques de l'accéléromètre STAR de CHAMP, pour construire le second membre moyen des équations de la dynamique dû aux forces non gravitationnelles : les composantes mesurées sont instantanées, et sont utilisées dans les équations de Gauss instantanées pour moyenner l'ensemble du second membre ;

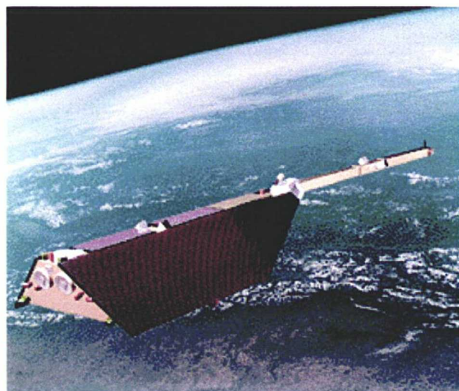


FIG. 5.5 – Le satellite CHAMP (vue d'artiste).

- les orbites de CHAMP déterminées par le GRGS/Toulouse à partir des mesures de suivi par le système GPS, orbites dites «orbites GPS» qui ont été filtrées pour construire les éléments moyens «observés» de CHAMP.

Les données accélérométriques

L'accéléromètre STAR de CHAMP mesure l'accélération totale due aux forces non gravitationnelles¹ dans trois directions : direction radiale, direction tangentielle² à la trajectoire - orientée selon le bras du satellite -, direction normale³ au plan de l'orbite : les équations de Gauss correspondantes s'expriment dans les repères classiques dits (R, S, W) ou (N, T, W) (voir partie C.3), où \vec{e}_s est très proche de \vec{e}_T , puisque l'excentricité est très faible.

Ce sont les données dites de «niveau 1» qui ont été utilisées, fournies par le centre de recherches géodésiques de Postdam (GFZ) : nous avons pu, dans l'équipe, développer et appliquer notre propre algorithme de filtrage, avant l'utilisation dans CODIOR. Ce traitement numérique comporte trois étapes :

- filtrage des courtes périodes (plus courtes que la période de révolution du satellite, d'environ 5400 secondes) grâce à un filtre de Vondrák, [Vondrák, 1969] et [Vondrák, 1977] ;
- détection et élimination des points aberrants par comparaison entre données brutes et données issues du filtre de Vondrák (critère d'élimination à 3σ) ;
- remplissage des trous de données grâce à des interpolations par splines.

Cet algorithme semble performant pour des erreurs dans les mesures qui ne sont pas trop petites : les erreurs «petites», comme des petits sauts de biais liés exclusivement à l'accéléromètre, sont très difficilement détectables. Mais on peut supposer qu'elles se moyennent alors très bien. Une réflexion sur la pertinence d'un fichier d'événements est en cours au GRGS et au GFZ. Il faut également noter qu'il y a des périodes entières (lors d'orages magnétiques par exemple) où les données accélérométriques semblent inutilisables, comme l'a indiqué no-

¹freinage atmosphérique, albédo terrestre, pression de radiation... Les manœuvres, près de 400 par jour, sont également prise en compte. La plupart sont en fait des corrections d'attitude.

²dite «along-track».

³dite «across-track».

tamment K.H. Neumayer lors du colloque d'automne 2001 de l'AGU [Koenig *et al.*, 2001]. L'utilisation des données accélérométriques dans CODIOR se place donc dans ce contexte.

Les «orbites GPS»

Nous avons utilisé l'intégralité des orbites construites à partir des positionnements par le système GPS disponibles au GRGS au printemps 2002.

Le positionnement centimétrique de satellites bas est réalisé à l'aide de récepteurs GPS embarqués à bord. Les satellites GPS sont en effet situés bien plus haut, à quelque 20000 kilomètres d'altitude. A ces altitudes, la constellation GPS constitue le meilleur moyen de positionner les satellites, en trois dimensions, avec une précision de quelques centimètres et en continu. Le réseau de poursuite par télémétrie laser n'est en effet pas assez dense, puisque les cercles de visibilité ont des rayons petits, et il n'y a pas assez d'observations (figure 5.6). En revanche, localement, les données laser sont très efficaces et essentielles pour valider l'orbitographie GPS.

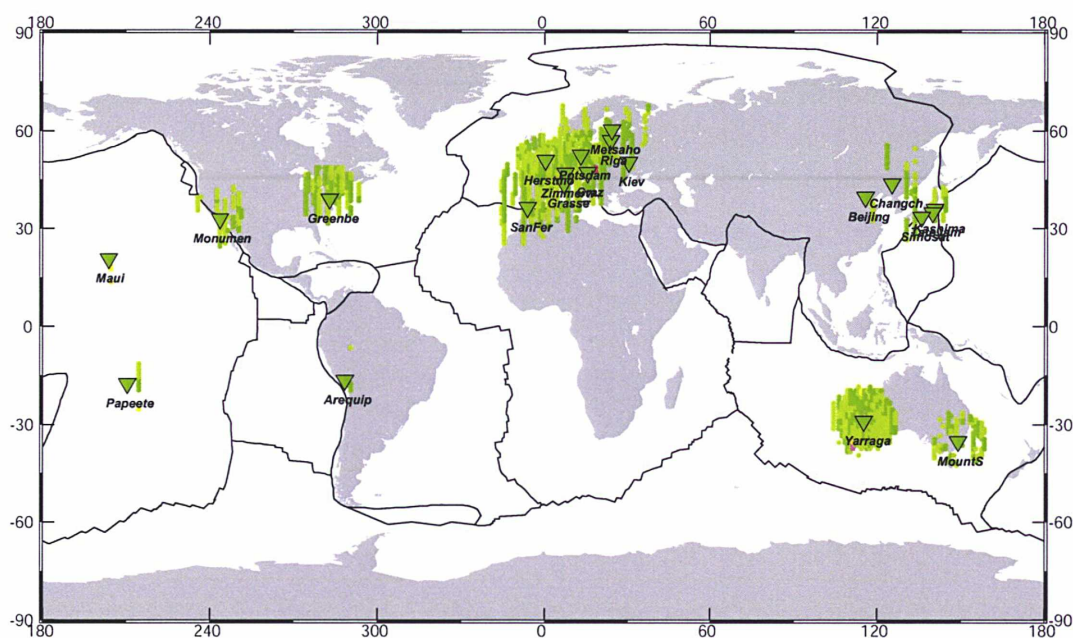


FIG. 5.6 – Densité d'observations de CHAMP par le réseau SLR.

La figure représente la répartition spatiale au cours d'une journée des stations du réseau de télémétrie laser ayant obtenu des échos sur CHAMP. Même si on ne peut pas affirmer que cette répartition caractérise la densité usuelle d'observations (les variations peuvent être dues à la couverture nuageuse par exemple), il est clair que les cercles de visibilité sont très petits, et que la couverture de CHAMP est loin d'être suffisante pour atteindre dans les orbites laser le même niveau de précision que les orbites de satellites plus élevés comme LAGEOS.

Les «orbites GPS» ont été filtrées pour obtenir un point moyen tous les 10 jours, selon l'algorithme décrit dans le chapitre 2.

TAB. 5.1 – Orbite de CHAMP : Valeurs des facteurs multiplicatifs adaptatifs de la force de freinage atmosphérique.
Sur chaque zone, un coefficient multiplicatif tangentiel est ajusté.

| | Limites de zone (Jour de l'Année en 2001) | coefficient de freinage |
|--------|--|-------------------------|
| Zone 1 | de 143 à 173 | 1.03 |
| Zone 2 | de 173 à 226 | 1.10 |
| Zone 3 | de 226 à 281 | 0.94 |
| Zone 4 | de 281 à 293 | 1.18 |
| Zone 5 | de 293 à 335 | 0.82 |

TAB. 5.2 – Données ajustées sur les données accélérométriques.
 C_T : facteur d'échelle tangentiel. C_N : facteur d'échelle normal. B_T : biais tangentiel. B_N : biais normal.

| | Limites de zone (Jour Julien CNES) | C_T | C_N | B_T ($m.s^{-2}$) | B_N ($m.s^{-2}$) |
|--------|---------------------------------------|-------|-------|-------------------------|-------------------------|
| Zone 1 | 18770-18800 | 0.42 | 0.47 | $-1.64 \cdot 10^{-6}$ | $-0.47 \cdot 10^{-6}$ |
| Zone 2 | 18800-18853 | 0.71 | 0.25 | $-2.6 \cdot 10^{-6}$ | $0.33 \cdot 10^{-6}$ |
| Zone 3 | 18853-18908 | 0.77 | 0.25 | $-2.8 \cdot 10^{-6}$ | $0.8 \cdot 10^{-7}$ |
| Zone 4 | 18908-18920 | 0.85 | 0.25 | $-3.2 \cdot 10^{-6}$ | $0.8 \cdot 10^{-7}$ |
| Zone 5 | 18920-18968 | 0.62 | 0.25 | $-2.3 \cdot 10^{-6}$ | $0.19 \cdot 10^{-6}$ |

5.2.2 Exploitation des données : des arcs longs de CHAMP

Dans l'équation (5.4), le paramètre le plus sensible est le facteur d'échelle le long de la composante tangentielle. C'est en effet le long de cette direction que les équations de Gauss moyennes sont les plus sensibles (équation (C.35) en annexe C), puisque sur tous les éléments (à l'exception de M), seule la voie tangentielle T n'a pas l'excentricité en facteur.

Nous avons calculé un arc de 200 jours de CHAMP, en divisant la période d'intégration en 5 zones différentes. Dans chacune de ces zones ont été ajustés, le long des directions tangentielle et normale, un biais et un facteur d'échelle. Voir la table 5.2. Ces valeurs caractérisent le comportement moyen des accéléromètres de CHAMP, au sens où nous l'avons défini, avec les restrictions dues aux sauts dans les données accélérométriques que cela suppose. Une comparaison entre les résultats obtenus par CODIOR et GINS est présentée dans la figure 5.9. Il faut faire attention, cependant, au fait que pour GINS, les coefficients tracés sont C_T , C_N , $C_T\beta_T$, $C_N\beta_N$, puisque les paramètres des accéléromètres estimés dans GINS, C_T , C_N , β_T , β_N , vérifient :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\text{real}} &= C_R(\mathbf{R}_{\text{STAR}} + \beta_R) \\ \mathbf{T}_{\text{real}} &= C_T(\mathbf{T}_{\text{STAR}} + \beta_T) \\ \mathbf{N}_{\text{real}} &= C_N(\mathbf{N}_{\text{STAR}} + \beta_N) \end{cases} \quad (5.5)$$

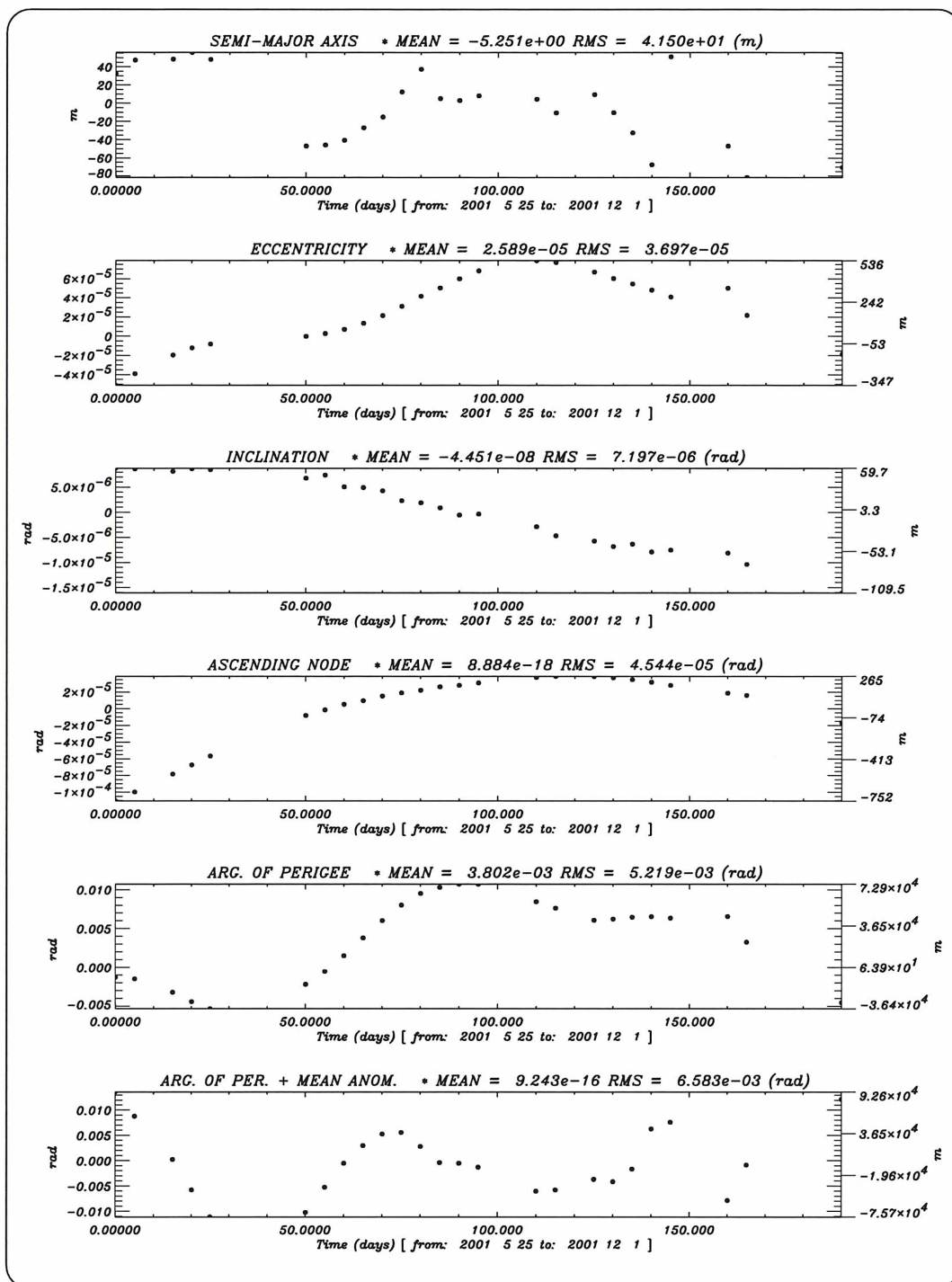


FIG. 5.7 – Résidus de l'arc CODIOR de CHAMP sur 200 jours calculé avec le modèle non gravitationnel.

Le modèle gravitationnel est nominal, les forces non gravitationnelles sont modélisées : freinage atmosphérique, pression de radiation (sans ombre), forces d'inertie, correction de Schwarzschild. La période d'intégration est divisée en 5 zones. Dans chaque zone sont estimés un coefficient multiplicatif de freinage (direction tangentielle) et un coefficient multiplicatif de la pression de radiation. Avec en plus une estimation des éléments moyens de départ, cela fait en tout 16 paramètres estimés.

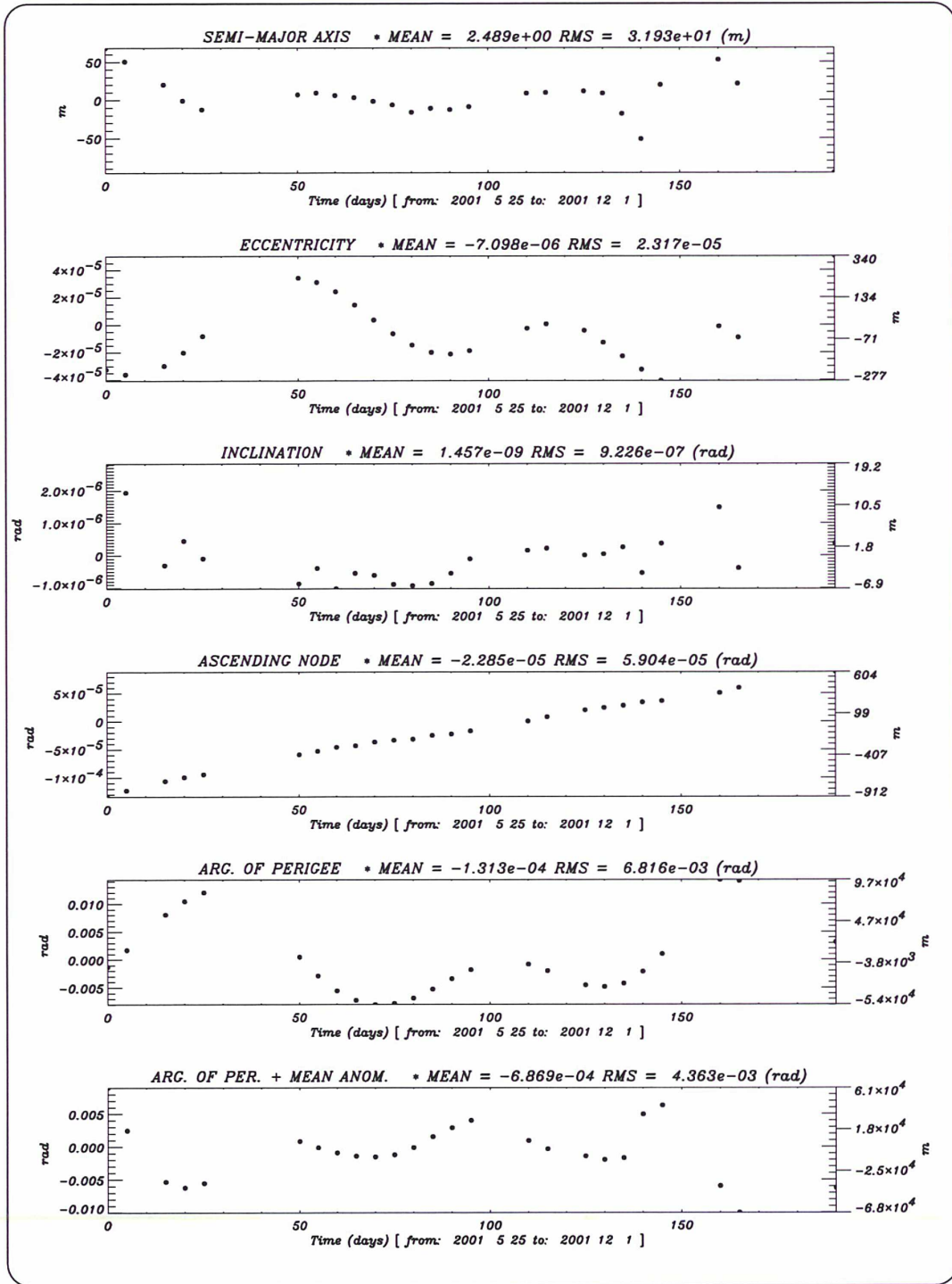


FIG. 5.8 – Résidus de l'arc CODIOR de CHAMP sur 200 jours calculé avec les données accélérométriques.

Le modèle gravitationnel est nominal, les forces non gravitationnelles sont mesurées par les accéléromètres de CHAMP. La période d'intégration est divisée en 5 zones. Dans chaque zone sont estimés un facteur d'échelle et un biais le long des directions tangentielle et normale. Avec en plus une estimation des éléments moyens de départ, cela fait en tout 16 paramètres estimés. On notera en particulier l'amélioration pour l'inclinaison.

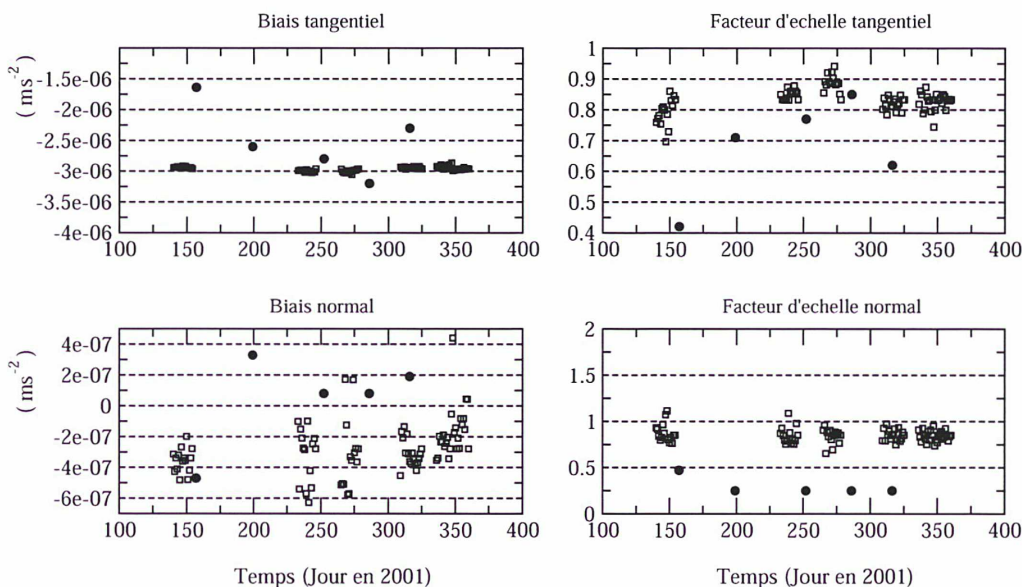


FIG. 5.9 – Comparaison des résultats obtenus par GINS et CODIOR pour l'accéléromètre STAR.

La période considérée a été divisée en 5 zones. Dans chaque zone, quatre coefficients ont été obtenus par le logiciel CODIOR (cercles pleins). On peut comparer ces résultats avec ceux obtenus par GINS (carrés vides). Des différences importantes mais difficiles à justifier peuvent être observées.

5.2.3 Conclusion

Si le concept du mouvement moyen peut s'appliquer à tout type d'orbite, la qualité de sa mise en œuvre pratique s'avère plus difficile pour les orbites basses que pour les orbites élevées : de nombreuses forces négligeables à haute altitude doivent être prises en compte et les modèles trouvent là leurs limites, sur le court comme sur le long terme. Ceci est vrai pour les orbites centrées comme pour les orbites osculatrices : les orbites de CHAMP générées avec GINS sont calculées en général sur environ 2 jours alors que celles des LAGEOS atteignent presque le mois. Sur ces périodes, l'utilisation de nombreux paramètres empiriques permet de corriger, en partie, les défauts des modèles de forces comme ceux des modèles d'orbite. Le concept de mouvement moyen repose, lui, sur l'ajustement d'un faible nombre de paramètres empiriques. C'est un premier pas possible vers une compréhension globale de l'étude de la corrélation entre les paramètres empiriques, et l'influence qu'ils ont sur la précision de la détermination des coefficients géodynamiques.

Les tests ont montré les capacités de la méthode de centrage à calculer des orbites moyennes pour un satellite d'altitude basse comme CHAMP.

En conclusion, calculer un arc unique de CHAMP long de plusieurs mois constitue un véritable défi sur le plan de l'orbitographie : sur 40 jours, nous obtenons des résidus sur le demi-grand axe de l'ordre de 10 mètres (à comparer à la variation totale d'environ 4000 mètres), et sur l'excentricité de l'ordre de 30 mètres (à comparer à la variation totale de 7000 mètres).

D'autre part, l'utilisation de données accélérométriques, même si elles ne sont pas prises en compte avec les meilleures précautions, mène à des résidus plus faibles qu'avec l'utilisation de modèles de forces non gravitationnelles.

5.3 Modèles nominaux pour les autres satellites

Les figures qui suivent présentent, pour chaque satellite, les résidus obtenus sur chaque élément (sauf cas particulier), en fonction d'un modèle non gravitationnel donné. Ce sont les modèles les plus performants qui seront retenus dans le prochain chapitre pour estimer des paramètres du champ de gravité. En particulier, il apparaît judicieux de diviser les arcs en plusieurs périodes, en isolant les périodes de forte activité solaire. Au cours de ces périodes, les modèles d'atmosphère ne représentent que d'une manière approximative l'évolution du demi-grand axe, et il est alors souhaitable d'estimer dans ce cas un coefficient multiplicatif correctif de la force de freinage, pour chaque période considérée.

De plus, puisque c'est l'influence des forces non gravitationnelles sur les signaux orbitaux que l'on étudie ici, notons que c'est un champ statique qui a été employé pour chacun des arcs (sans dérives séculaires, ni effets annuels ou semi-annuels, à l'exception des marées bien entendu.).

Pour ne pas alourdir inutilement le discours et la longueur de la section suivante, tous les satellites ne sont pas exposés d'une manière uniforme. Je me suis attaché à simplement présenter ce qui fait l'originalité de chacun.

5.3.1 LAGEOS-2

L'orbite de LAGEOS-2 a une dynamique qui ressemble beaucoup à celle de LAGEOS-1, abstraction faite des effets non gravitationnels dus à son spin. Ainsi, il est suffisant, surtout sur une période plus courte, de n'ajuster qu'une seule force empirique de freinage sur toute la durée de l'arc (figure 5.10).

On notera également le signal d'origine gravitationnel qui s'amorce sur le nœud au début de l'année 1998 (aux environs du Jour Julien CNES 17500).

5.3.2 STARLETTE

Avec une pondération des observations adaptée aux éléments non singuliers, les orbites de STARLETTE dont je présente les résidus dans les figures 5.12 et 5.13 ont des précisions équivalentes à celles construites il y a quelques années en éléments orbitaux [Bruinsma, 2002].

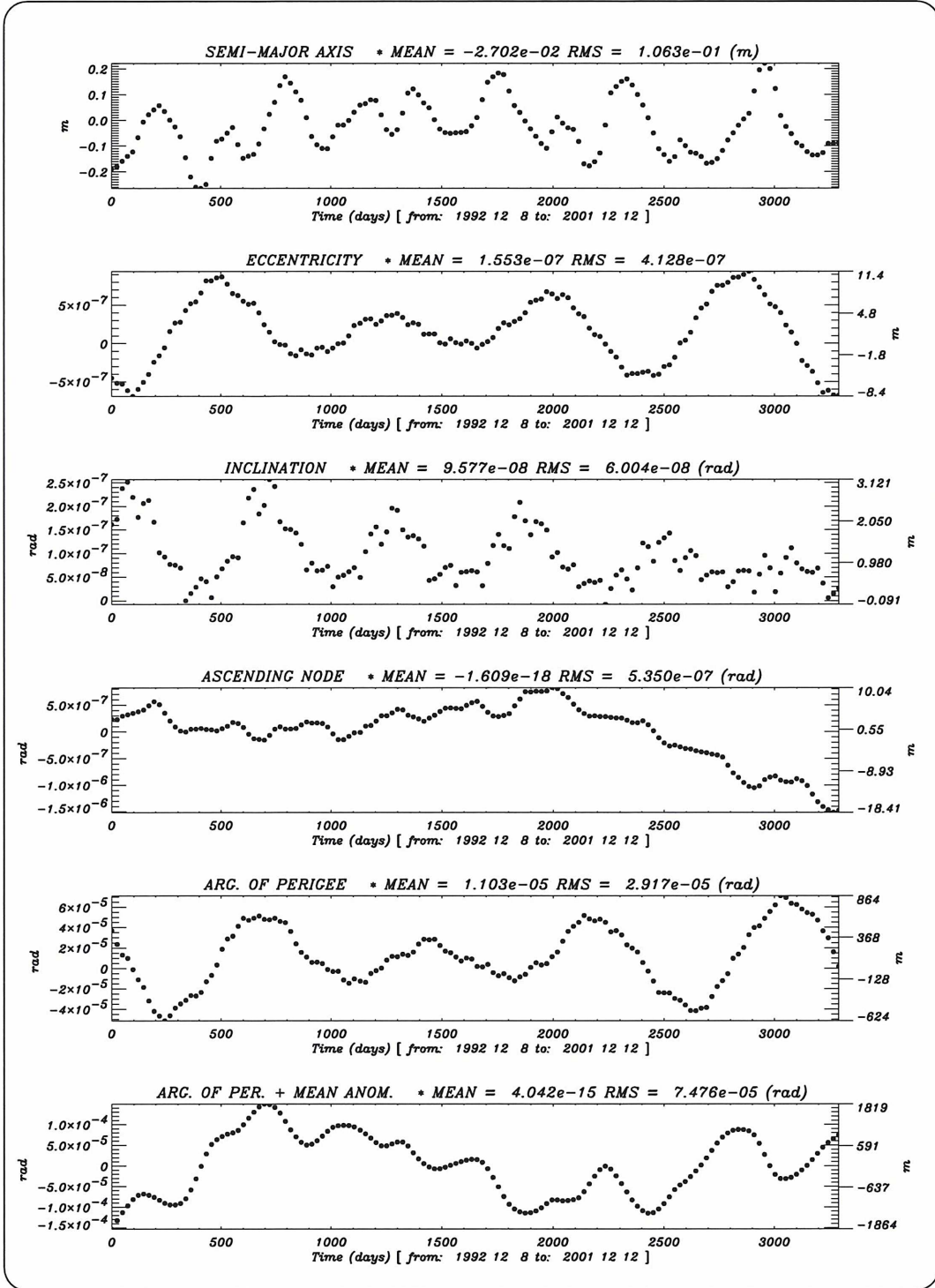


FIG. 5.10 – Résidus de l'arc long de LAGEOS-2.

8 paramètres estimés : conditions initiales, une accélération tangentielle de freinage ($-0.23 \cdot 10^{-11} \text{ m.s}^{-2}$), 1 coefficient multiplicatif (0.89) de la pression de radiation (ici : sans ombre). Pour l'estimation de paramètres géodynamiques, la gestion de l'ombre sera bien évidemment rajoutée.

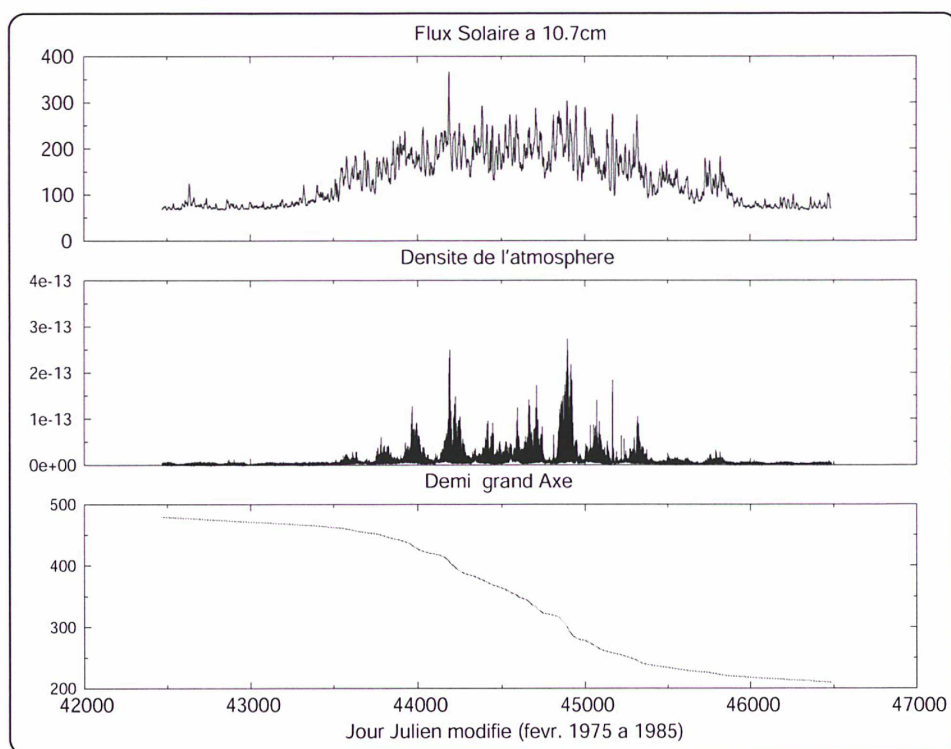


FIG. 5.11 – Lien entre l'activité solaire et l'évolution du demi-grand axe de STARLETTE.

Temps de vie estimé : 20000 ans. La valeur moyenne du flux solaire est de $150 \cdot 10^{-22} \text{ W/m}^2/\text{Hz}$. Il influence fortement la densité de l'atmosphère (exprimée en kg/m^3). La corrélation entre la densité de l'atmosphère et la décroissance du demi-grand axe est très nette : au moment d'une forte activité solaire, la décroissance devient très forte.

Ainsi que l'indiquent ces figures, la dynamique de l'orbite de STARLETTE est fortement liée à celle de son demi-grand axe, elle-même reliée à l'activité solaire (figure 5.11).

De plus, il semble exister une décroissance des résidus de l'inclinaison, que l'on devine séculaire. Cette décroissance a elle aussi des conséquences sur l'estimation de paramètres géodynamiques. Elle peut être éliminée en faisant varier la période de révolution sidérale de la Terre (figures 5.14 et 5.15). Bien évidemment, il n'y a aucune justification physique pour procéder de la sorte. Mais quand toutes les pressions de radiation seront prises en compte, et qu'une étude fine de l'influence de la pondération des observations aura été menée, il sera possible d'étudier si oui ou non il y a une «super-rotation» de l'atmosphère terrestre à l'altitude de STARLETTE, comme cela a été déjà observé à plus basse altitude [King-Hele, 1964].

La méthode permet également l'étude de la densité atmosphérique sur de grandes périodes de temps [Bruinsma, 2003]. La figure 5.12 présente par exemple les résidus sur le demi-grand axe de STARLETTE sur un arc de près de 20 ans. Le modèle d'atmosphère utilisé est DTM-94.

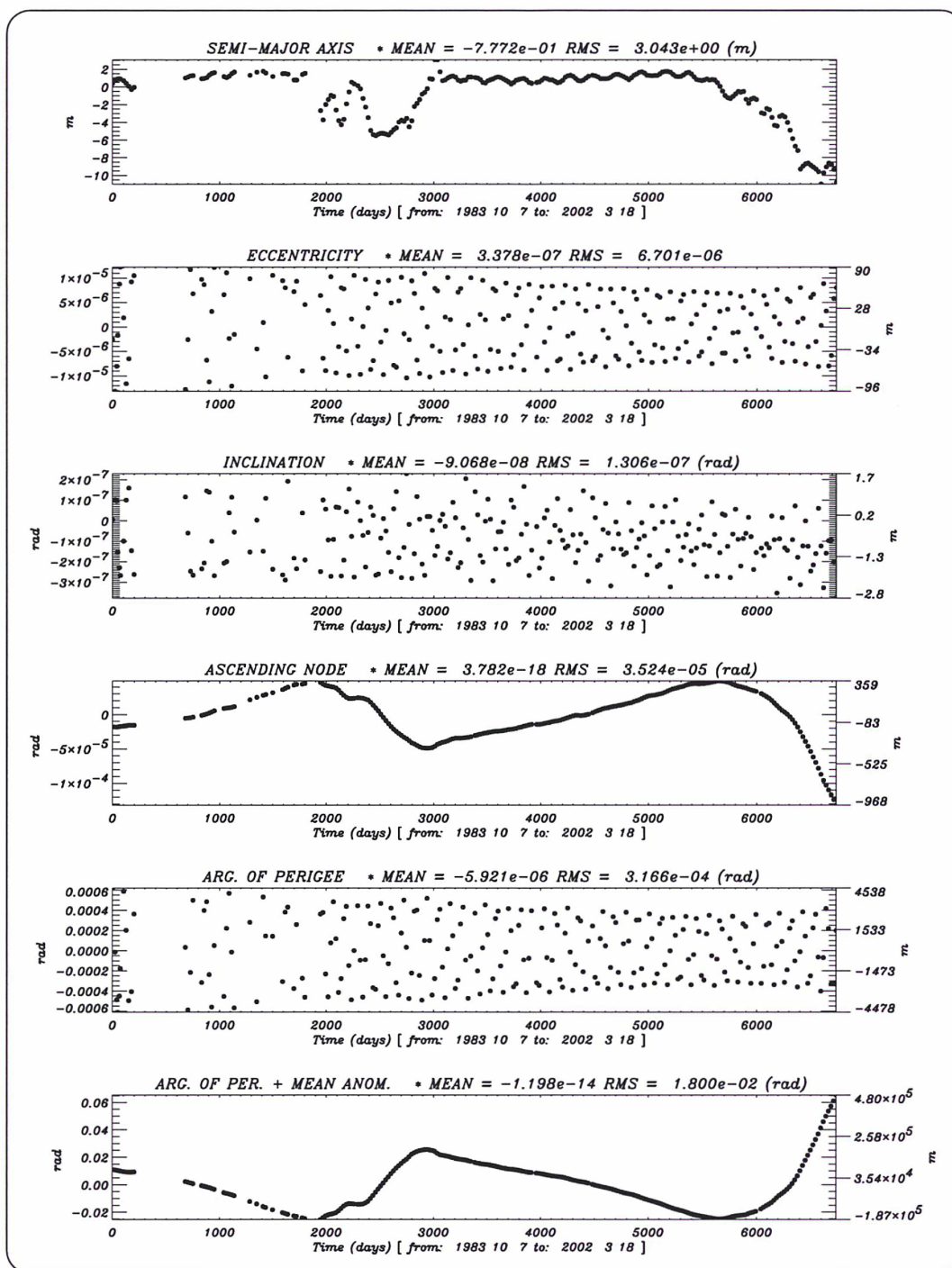


FIG. 5.12 – Résidus sur l'arc long de STARLETTE (1).

8 paramètres estimés : conditions initiales, 1 coefficient de freinage (1.01814, qui est stable au niveau de 10^{-6} en relatif entre deux itérations dans CODIOR.), 1 coefficient multiplicatif (0.96) de pression de radiation (sans ombre). Les résidus sur le demi-grand axe montrent les erreurs de modélisation du freinage atmosphérique, en particulier pendant les périodes de forte activité solaire. Sur l'ensemble de la période, la variation du demi-grand axe moyen est d'environ 300 mètres.

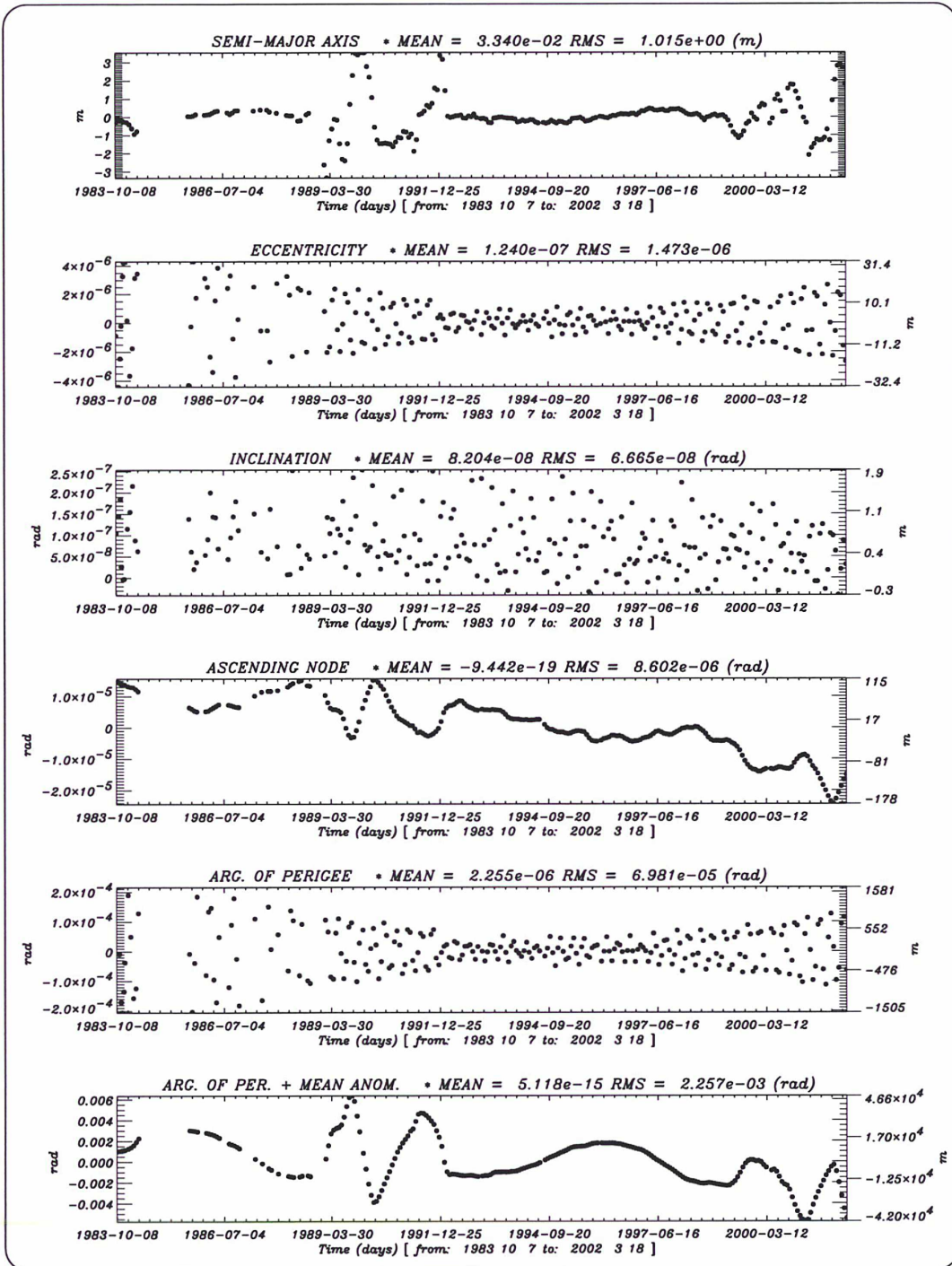


FIG. 5.13 – Résidus sur l'arc long de STARLETTE (2).

16 paramètres estimés : conditions initiales, 9 coefficients de freinage (table 5.3), 1 coefficient multiplicatif (0.94) de pression de radiation (avec ombre). On notera les grandes variations de a , très corrélées avec l'activité solaire. On notera aussi les modifications entraînées, par rapport à la figure 5.12, par la modélisation des passages du satellite dans le cône d'ombre de la Terre : sur l'excentricité certes (où d'autres radiations restent de toute évidence à modéliser), mais aussi sur le demi-grand-axe.

TAB. 5.3 – Division de l’arc long de STARLETTE en différentes zones.

Dans chacune des zones est estimé un coefficient multiplicatif à la force de freinage. Les dates sont en Jour Julien CNES. La dernière colonne, si elle est étoilée, indique que c’est une zone de forte activité solaire.

| | | | |
|--------|-------------|------|---|
| Zone A | 12308-14108 | 1.00 | |
| Zone B | 14108-14508 | 1.06 | * |
| Zone C | 14508-14708 | 1.06 | * |
| Zone D | 14708-15108 | 0.99 | * |
| Zone E | 15198-15408 | 0.97 | |
| Zone F | 15408-17708 | 1.01 | |
| Zone G | 17708-18208 | 1.07 | |
| Zone H | 18208-18708 | 1.11 | * |
| Zone I | 18708-19100 | 1.11 | * |

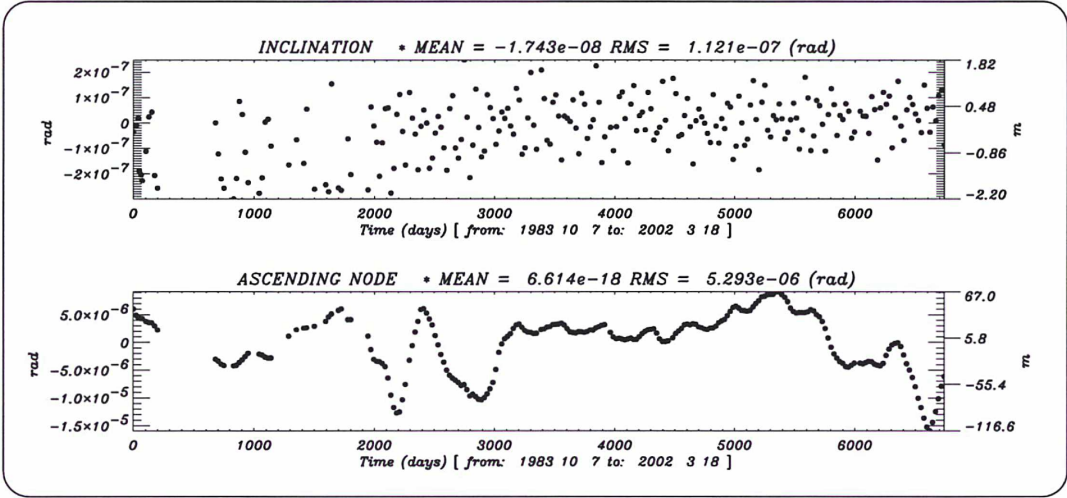


FIG. 5.14 – STARLETTE : évolution séculaire de l’inclinaison (1).

Les passages du satellite dans le cône d’ombre de la Terre ne sont ici pas pris en compte dans le modèle.

A titre d’étude de sensibilité des effets de vents zonaux et de variations d’inclinaison, la période de rotation sidérale de la Terre a été multipliée par 1,1. Conséquence sur estimation de \dot{J}_2 : $\dot{J}_2 = 3.82 \cdot 10^{-11}$. Cette valeur de \dot{J}_2 , qui est une valeur effective, n’est pas à retenir en tant que telle : le but est simplement de montrer les rapports qui existent entre les deux variables i et Ω à travers les équations de Lagrange (Annexe C), selon le facteur multiplicatif de la période de rotation sidérale. Voir aussi figure 5.15.

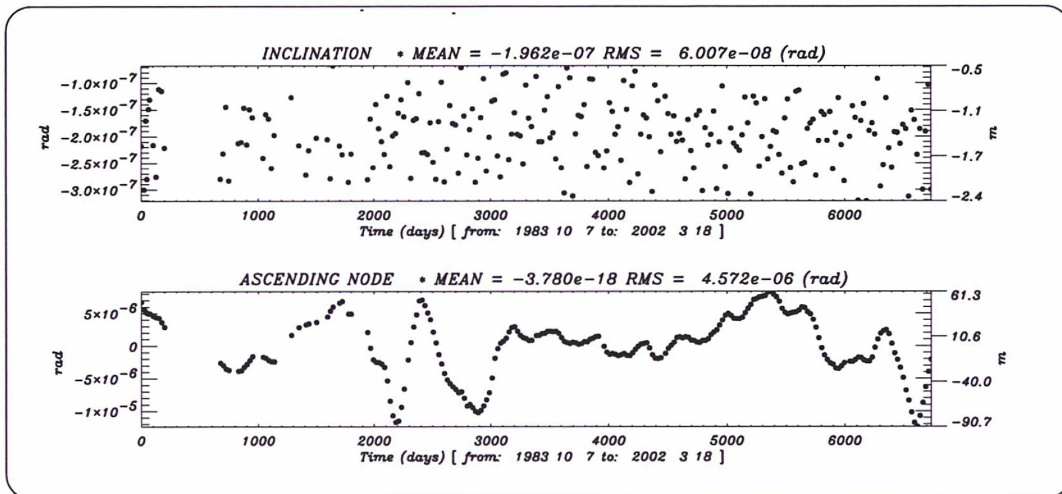


FIG. 5.15 – STARLETTE : évolution séculaire de l'inclinaison (2).

Cette figure est à rapprocher de la figure 5.14. Ici, la période de rotation sidérale de la Terre a été multipliée par 1,05. Conséquence sur l'estimation de \dot{J}_2 : $\dot{J}_2 = 2.73 \cdot 10^{-11}$. Comme précédemment, la valeur de \dot{J}_2 n'est pas à retenir. Mais la sensibilité de \dot{J}_2 aux variations de i est ainsi clairement mise en évidence.

5.3.3 STELLA

Le calcul d'orbite du satellite STELLA semble très sensible à la pondération des observations utilisée. En guise d'exemple, la figure 5.16 présente les résidus obtenus sur l'excentricité quand on utilise une pondération inadaptée, en l'occurrence celle de LAGEOS-1 : on constatera un fort signal à longues périodes (r.m.s. $4.5 \cdot 10^{-5}$). Quand la pondération est adaptée, le r.m.s. sur e est de l'ordre de $2.5 \cdot 10^{-7}$.

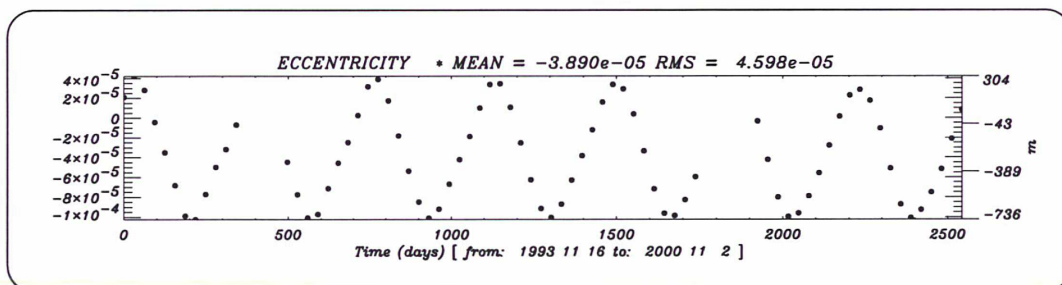


FIG. 5.16 – Effet d'une mauvaise pondération des observations sur STELLA.

Les résidus sur l'excentricité, quand on utilise comme ici la pondération des observations mise au point pour LAGEOS-1, sont très grands. On comparera leurs valeurs avec celles des figures 5.18 et 5.19.

STELLA est un satellite géosynchrone, qui occupe donc une position relative par rapport au Soleil constante dans le temps. Le passage dans le cône d'ombre de la Terre entraîne ainsi une variation spécifique de l'inclinaison. On remarquera également que l'argument

TAB. 5.4 – Division de l’arc long de STELLA en différentes zones. Dans chacune des zones est estimé un coefficient multiplicatif à la force de freinage. Les dates sont en Jour julien CNES. La dernière colonne, si elle est étoilée, indique que c’est une zone de forte activité solaire.

| | | Pondération STELLA | Pondération STARLETTE | |
|--------|-------------|--------------------|-----------------------|---|
| Zone A | 15991-17641 | 0.94 | 0.95 | |
| Zone B | 17641-17991 | 1.08 | 1.06 | |
| Zone C | 17991-18191 | 0.93 | 1.01 | |
| Zone D | 18191-18600 | 1.05 | 1.00 | * |

du périée libre entre deux valeurs limites (figure 5.17). STELLA constitue ainsi, avec TOPEX/POSEIDON, le deuxième satellite parmi ceux dont nous avons calculé les orbites, où je mets en évidence cette caractéristique. Lancé en même temps que STELLA, le satellite SPOT-3, ainsi que sans doute beaucoup d’autres, présente aussi cette caractéristique.

Le calcul de la pression de radiation solaire dépend fortement, même si on peut s’en étonner, de la pondération utilisée (figures 5.18 et 5.19). Cette sensibilité doit certainement être vérifiée dans la gestion d’autres forces non gravitationnelles. C’est un point qu’il faudra étudier en détail ultérieurement.

5.3.4 AJISAI

Avec une masse d’environ 685 kg et une section d’environ 3,63 m², le satellite AJISAI a un rapport surface/masse très atypique dans la famille des satellites géodésiques. Ceci explique certainement les valeurs fortes des coefficients multiplicatifs de la force de freinage atmosphérique (figure 5.20 et table 5.5). D’une manière plus générale, ce satellite est un très bon candidat pour la modélisation des forces non gravitationnelles : en particulier, une telle surface en rotation présente des zones de températures très différentes, créant ainsi des poussées parfois appelées *poussées photoniques*. Malgré un modèle non gravitationnel encore un peu incomplet, c’est pourtant une orbite extrêmement stable que nous avons calculée, ainsi que l’attestent les résidus présentés dans les figures 5.20 et 5.21.

Une caractéristique essentielle de cette orbite est l’absence de points moyens observés sur une période d’environ 1400 jours consécutifs. Mais ainsi que je l’ai illustré dans un cas académique sur STELLA (chapitre 4), un tel trou de données n’affecte en rien la continuité de la description de l’orbite moyenne à travers le modèle.

Parmi les caractéristiques de l’orbite, on notera la décroissance, apparemment séculaire, de l’inclinaison. Pourtant, AJISAI est situé environ à quelque 400 kilomètres plus haut que STELLA...

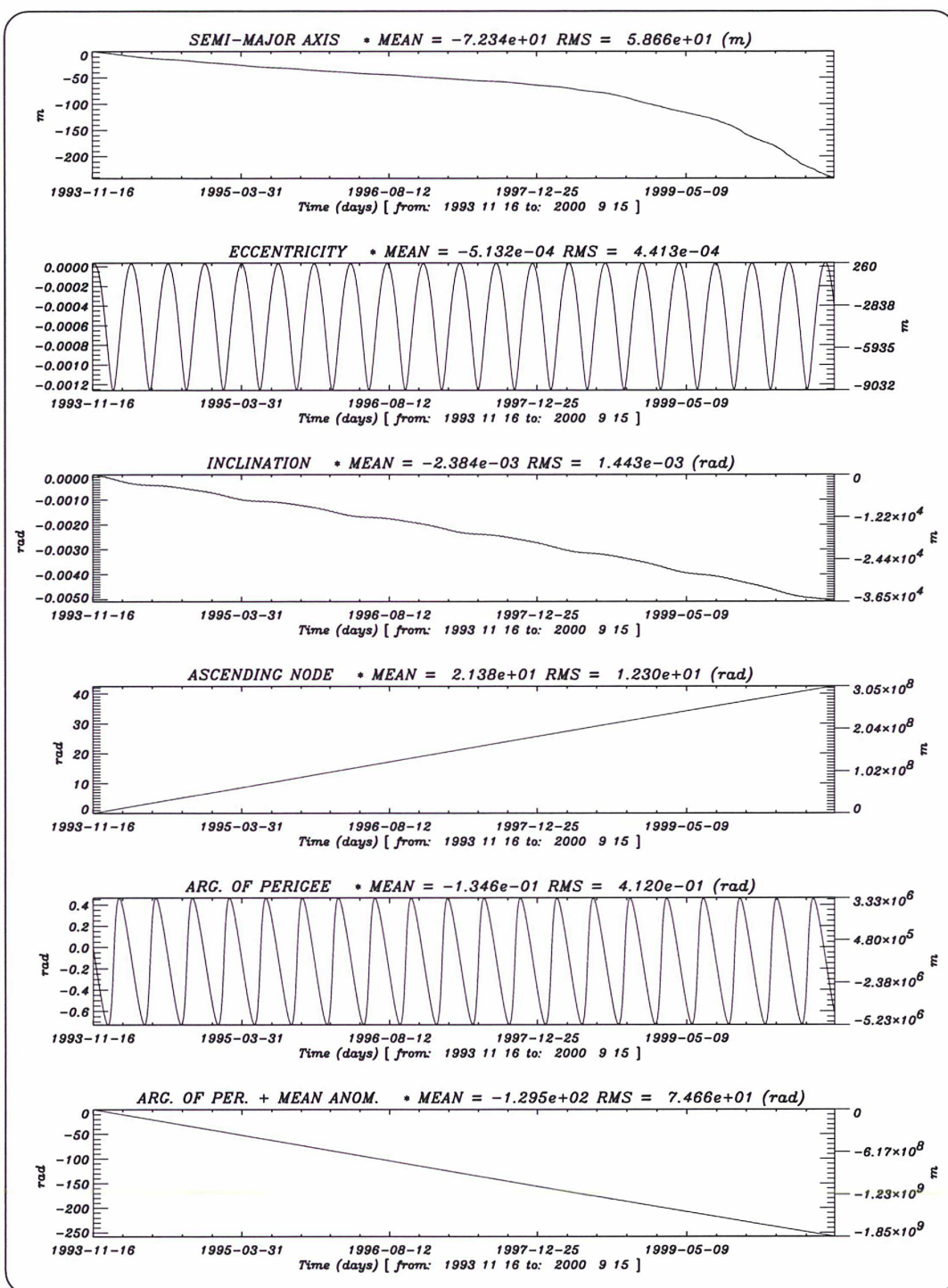


FIG. 5.17 – Orbite à longues périodes de STELLA.

On remarquera les évolutions spécifiques de l'inclinaison et de l'argument du périée. Paramètres estimés : 6 conditions initiales, 1 coefficient multiplicatif de la force de pression de radiation solaire, 4 coefficients multiplicatifs de la force de freinage atmosphérique (table 5.4).

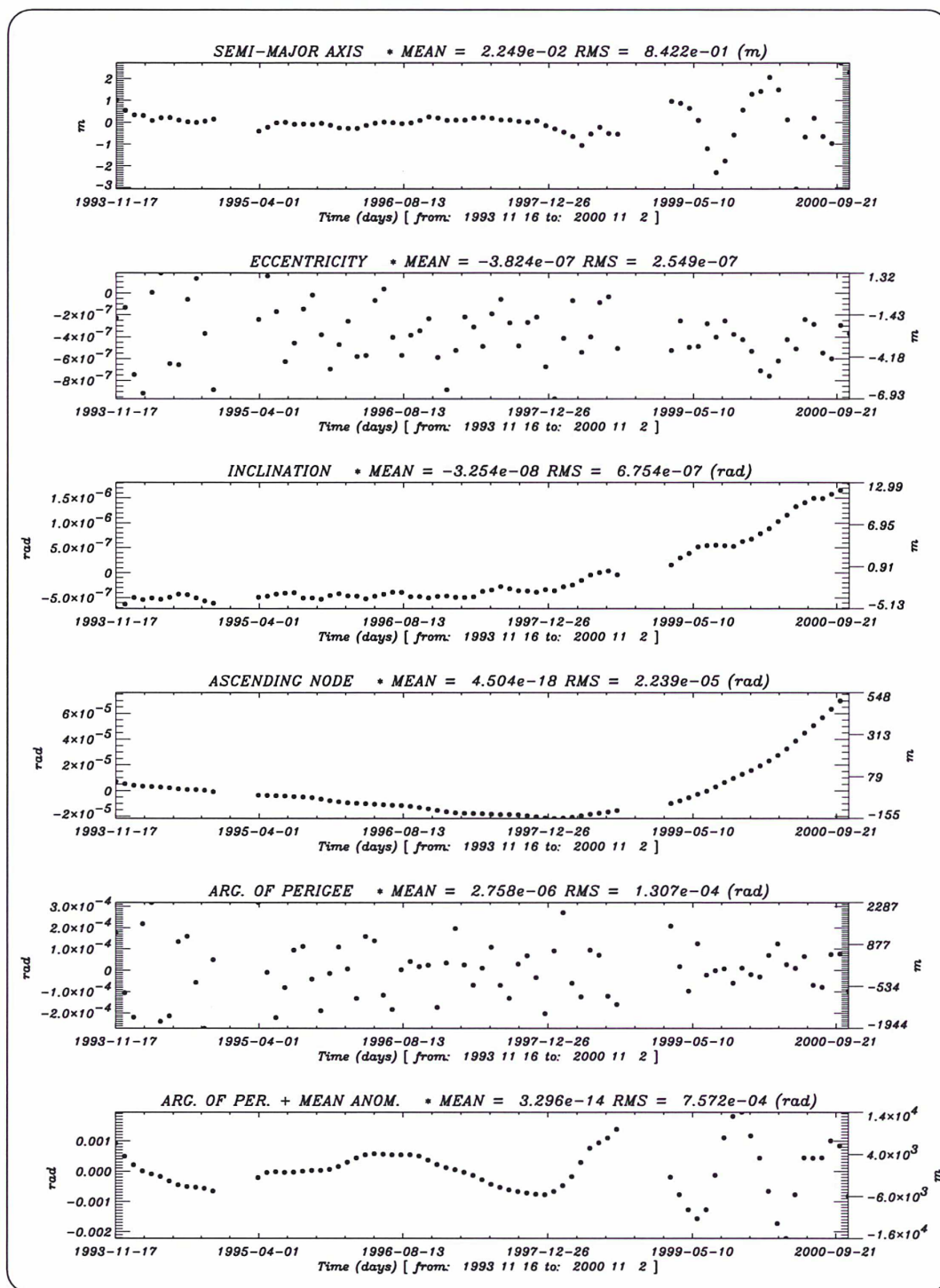


FIG. 5.18 – Résidus obtenus sur l'orbite de STELLA (1).

On remarquera en particulier le signal résiduel sur l'inclinaison. Ici, c'est la pondération déterminée dans le chapitre 4 qui a été utilisée. Paramètres estimés : conditions initiales, 1 coefficient multiplicatif (1.09) de la pression de radiation (avec ombre), 5 coefficients multiplicatifs de la force de freinage atmosphérique (table 5.4).

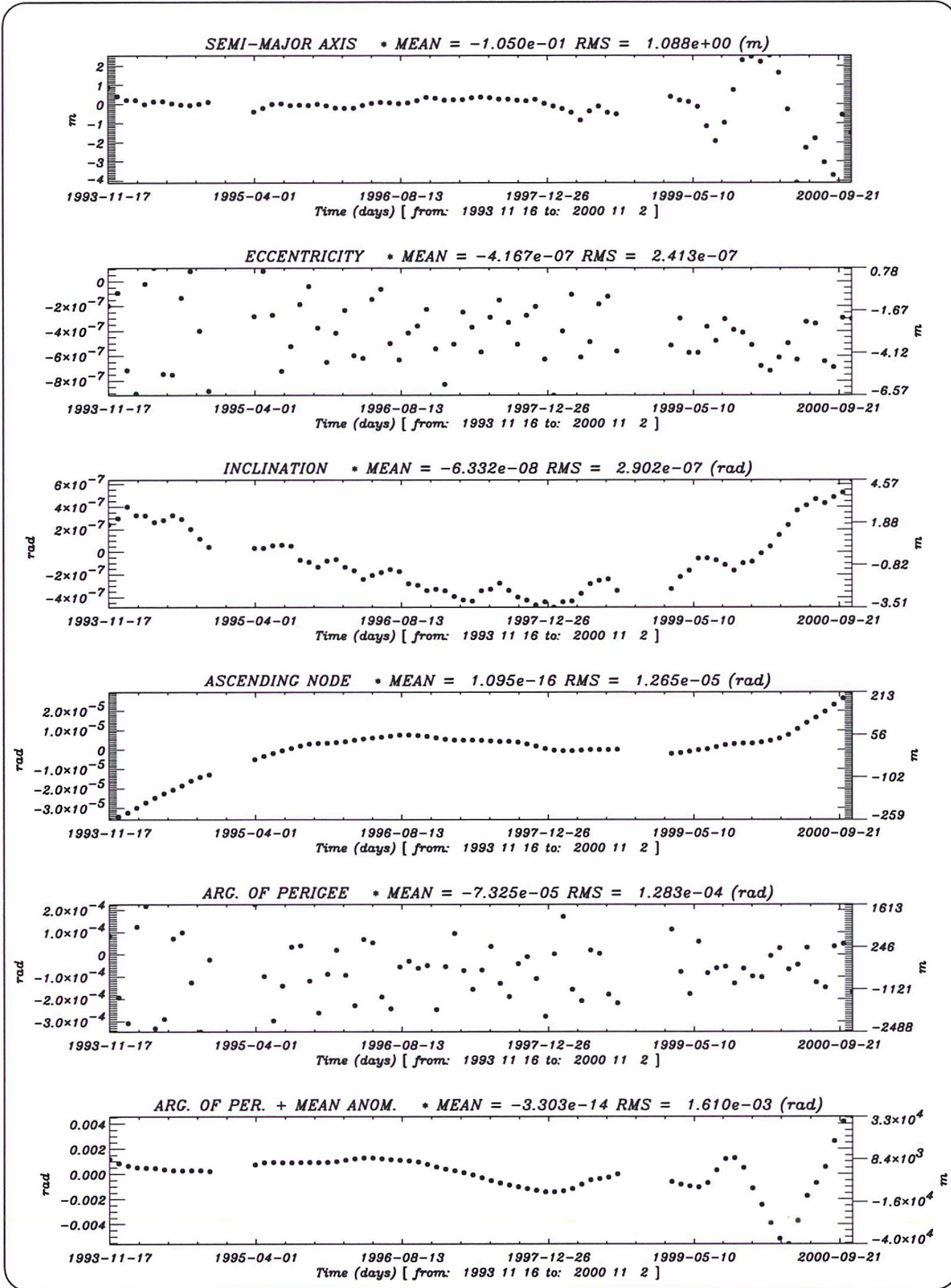


FIG. 5.19 – Résidus obtenus sur l'orbite de STELLA (2).

On remarquera en particulier le signal résiduel sur l'inclinaison. Ici, c'est la pondération déterminée dans le chapitre 4 pour STARLETTE qui a été utilisée. Paramètres estimés : conditions initiales, 1 coefficient multiplicatif (1.25) de la pression de radiation (avec ombre), 5 coefficients multiplicatifs de la force de freinage atmosphérique (table 5.4). Étonnamment, les résultats sont améliorés par rapport à la figure 5.18. Il faut dire que les valeurs des pondérations des observations pour chaque satellite ont été obtenues à partir de simulations où les effets d'ombre n'étaient pas gérés. C'est une voie à explorer...

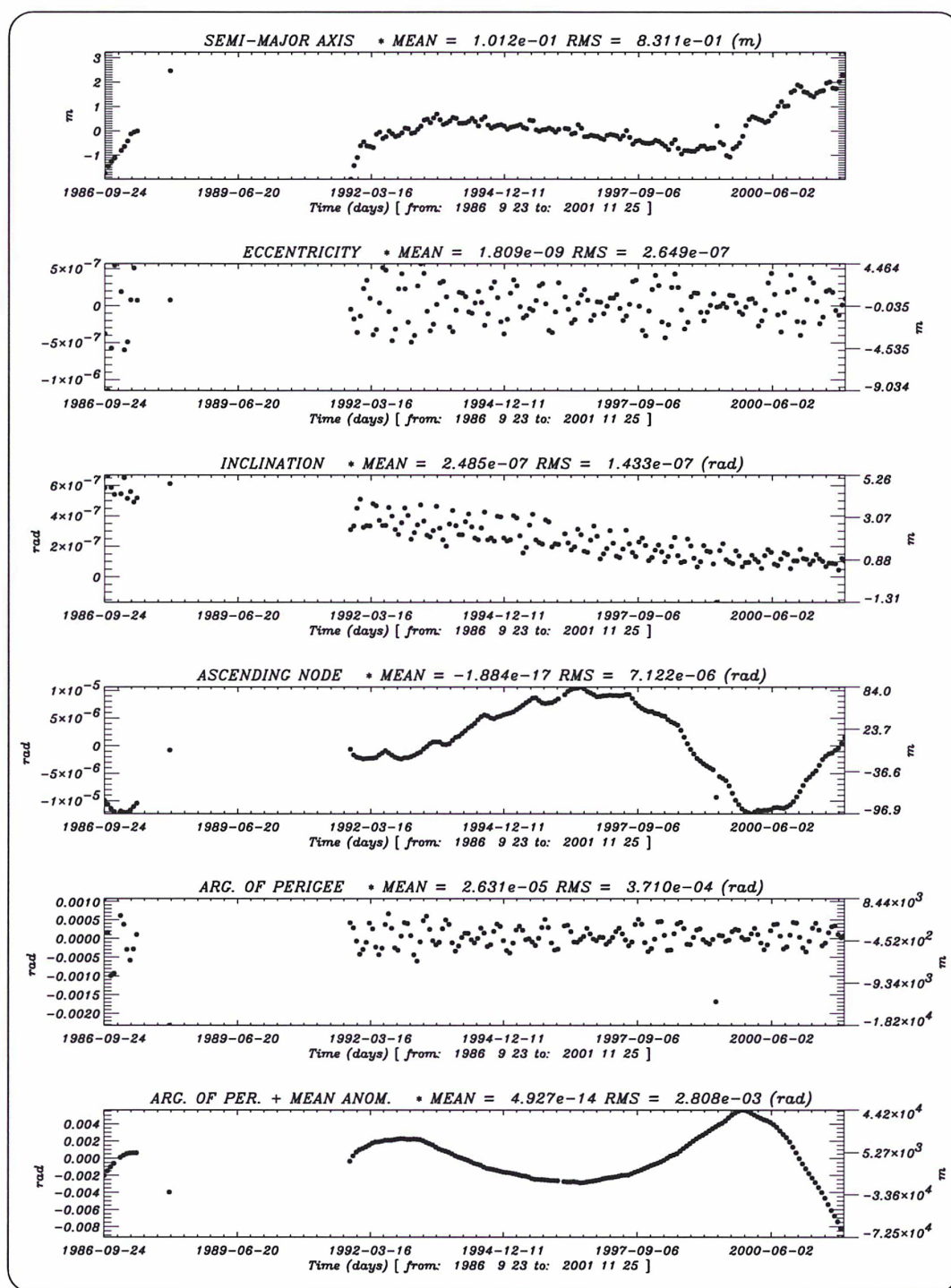


FIG. 5.20 – Résidus sur l'arc long d'AJISAI (1).

8 paramètres estimés : conditions initiales, 1 coefficient multiplicatif (1.01) de la pression de radiation (avec ombre), 1 coefficient multiplicatif de la force de freinage atmosphérique (1.32).

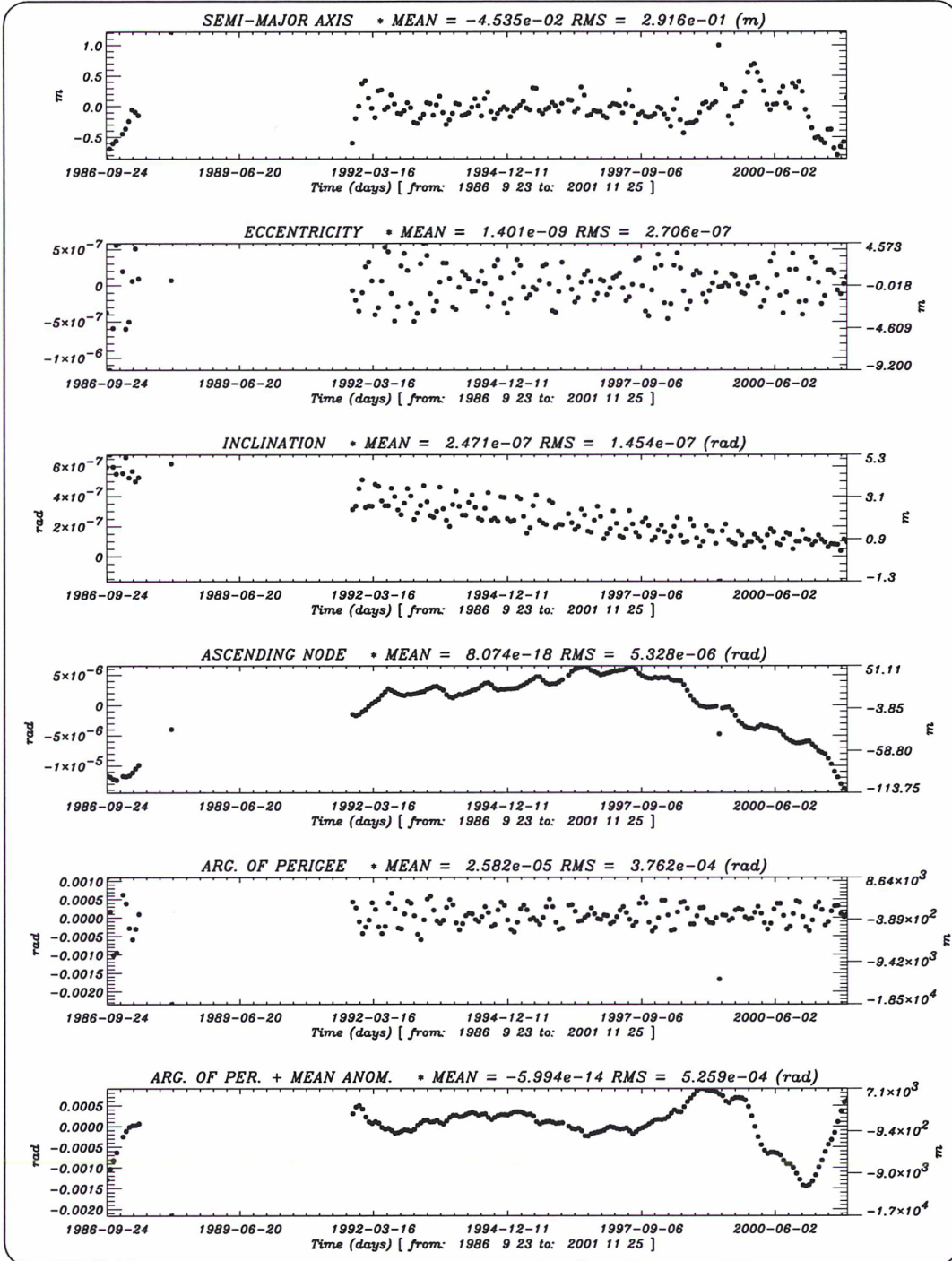


FIG. 5.21 – Résidus sur l'arc long d'AJISAI (2).
 12 paramètres estimés : conditions initiales, 1 coefficient multiplicatif (1.01) de la pression de radiation (avec ombre), 5 coefficients multiplicatifs de la force de freinage atmosphérique (voir table 5.5).

TAB. 5.5 – Division de l’arc long d’AJISAI en plusieurs zones. La période est divisée en plusieurs zones. Dans chacune des zones est estimé un coefficient multiplicatif adaptatif de la force de freinage. Les dates sont en Jour julien CNES. La dernière colonne, si elle est étoilée, indique que c’est une zone de forte activité solaire.

| | | | |
|--------|-------------|------|---|
| Zone A | 13390-14090 | 1.61 | |
| Zone B | 14090-15040 | 1.17 | * |
| Zone C | 15040-15940 | 1.26 | |
| Zone D | 15940-18060 | 1.35 | |
| Zone E | 18060-18990 | 1.25 | * |

5.4 Conclusion de ce chapitre

Les forces non gravitationnelles agissant sur les satellites sont souvent difficiles à modéliser. Si des stratégies spécifiques à chaque orbite ne sont pas développées, on peut perdre la capacité de mesurer les forces gravitationnelles, et donc celle d’estimer les signaux géodynamiques correspondants.

Dans l’estimation générale des paramètres orbitaux et des paramètres géodynamiques, on peut certes obtenir une bonne précision. Il est nécessaire, cependant, de prendre garde à ce que des erreurs systématiques, issues d’une méconnaissance des forces non gravitationnelles, ne viennent pas entraîner des inexactitudes non négligeables sur ces paramètres. Dans ce chapitre, je me suis ainsi attaché à présenter les techniques qui permettent de corriger voire d’estimer cette méconnaissance, satellite par satellite. Malgré tout, ces techniques ne constituent qu’une alternative à une modélisation exhaustive des effets non gravitationnels, modélisation qu’il faut essayer de rendre toujours plus exacte, sauf quand des données accélérométriques sont disponibles.

Chapitre 6

Estimation de paramètres géodynamiques

Ce chapitre est consacré à l'estimation de coefficients zonaux du champ de gravité, à partir d'arcs longs de satellites divisés en zones successives. Selon les cas, des variations temporelles du champ de gravité sont ou non prises en compte dans le modèle ($\dot{C}_{2,0}$, $\dot{C}_{3,0}$, $\dot{C}_{4,0}$; ainsi que des effets annuels et semi-annuels.).

Diverses catégories de paramètres peuvent être estimés : partie zonale statique du champ de gravité, partie variable dans le temps avec des périodes caractéristiques supérieures à six mois : effets semi-annuels, annuels, marées à longues périodes, variation séculaire des premiers zonaux. En particulier, sur des échelles de temps de 20 ans, certains de ces paramètres peuvent être décorrélés, comme la variation séculaire de $C_{2,0}$ peut l'être de la marée à 18,6 ans. [Exertier et al., 1999] établit d'ailleurs, sur la base du mouvement moyen de LAGEOS-1, l'amplitude de la marée à 18,6 ans à 1.64 cm. On peut aussi estimer certains paramètres liés à la modélisation des forces non gravitationnelles.

Le modèle de forces non gravitationnelles moyennes étant pour l'instant encore un peu incomplet, ce chapitre prétend juste être une application des concepts présentés dans tout le document.

6.1 La marée à 18,6 ans et $\dot{C}_{2,0}$

En ne raisonnant qu'avec un seul satellite à la fois, on ne peut estimer que des valeurs effectives des coefficients géodynamiques [Eanes, 1995 ; Eanes and Bettadpur, 1996]. Ce concept de valeurs effectives sera présenté plus loin dans le chapitre. Ici, il suffit de savoir que l'on attribue à un seul coefficient donné (dit donc *effectif*) les effets de plusieurs.

En ne prenant en compte aucune variation temporelle du champ dans le modèle, on retrouve ces variations dans les séries temporelles des coefficients qu'on estime. Dans la figure 6.1 par exemple, chaque point est obtenu à partir d'un arc de 2 ans, afin de s'affranchir des fortes variations annuelles et semi-annuelles des coefficients zonaux qui se moyennent sur une telle période.

Sur cette figure, on distingue nettement une tendance principale, à affecter en grande partie au rebond post-glaciaire, tendance principale caractérisée dans une valeur effective de $\dot{C}_{2,0}$. Un grand changement intervient cependant dans les années 1997-98, sans doute dû à une re-

distribution des masses d'eau au niveau équatorial [Cox and Chao, 2002]. Ce changement est encore plus perceptible quand les fenêtres temporelles se chevauchent, même si les points ne sont alors plus indépendants entre eux (figure 6.2).

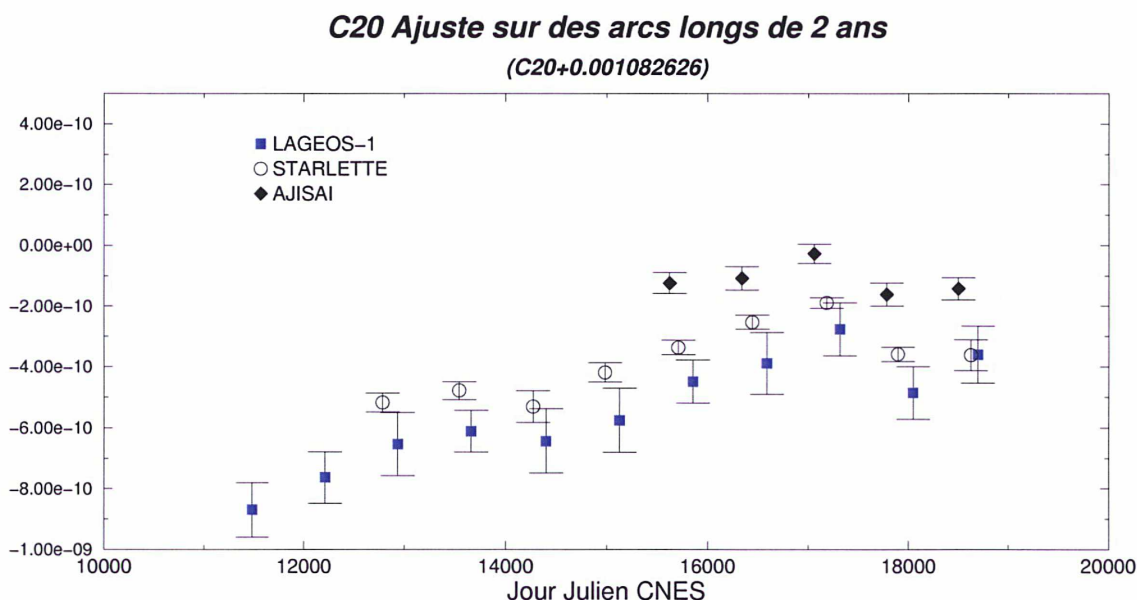


FIG. 6.1 – Une série temporelle de $C_{2,0}$ (points indépendants). Ce sont des arcs de 2 ans qui ont été ici utilisés. Tous les points, avec leurs barres d'erreur, sont indépendants entre eux. On note la grande cohérence du signal mis en évidence par les différents satellites, même si ce ne sont que des valeurs effectives de $C_{2,0}$ qui sont estimées (ce qui explique la différence de niveau de chaque courbe). Aucune variation temporelle du champ n'a été prise en compte dans le modèle.

$C_{2,0}$ traduit en fait tout ce qui se passe, dans le champ de gravité, au degré 2 et à l'ordre 0, et peut ainsi être décomposé en une somme de plusieurs termes :

$$C_{2,0}(t) = C_{2,0}(t_0) + \dot{C}_{2,0}(t - t_0) + a_{18,6} \cos(\omega_{18,6}t) + a_{9,3} \cos(\omega_{9,3}t) + T_{AN} + T_{SA} \quad (6.1)$$

où les valeurs 18,6 et 9,3 correspondent respectivement aux quantités liées aux marées à 18,6 ans et à 9,3 ans. T_{AN} est un terme annuel, T_{SA} un terme semi-annuel.

Le changement de signe de la pente est clairement mis en évidence par différents groupes mondiaux de géodésie spatiale. Ce brusque changement intervient précisément au bout d'une vingtaine d'années d'observations, ce qui pourrait laisser penser à une corrélation entre la valeur de $\dot{C}_{2,0}$ et la marée à 18,6 ans. Chaque coefficient produisant sur les orbites des signaux spécifiques, les figures 6.3 et 6.4 montrent ces signaux théoriques engendrés sur le nœud ascendant par $\dot{C}_{2,0}$ et la marée à 18,6 ans : ces signaux ne ressemblent pas au signal effectivement observé (figure 6.5). Etudions ceci de plus près.

Pour évaluer l'impact de cette étrange variation sur la valeur des paramètres de marée, j'ai ensuite calculé deux arcs, le premier de 1980 à 1996 (qui finit donc avant la période en cause),

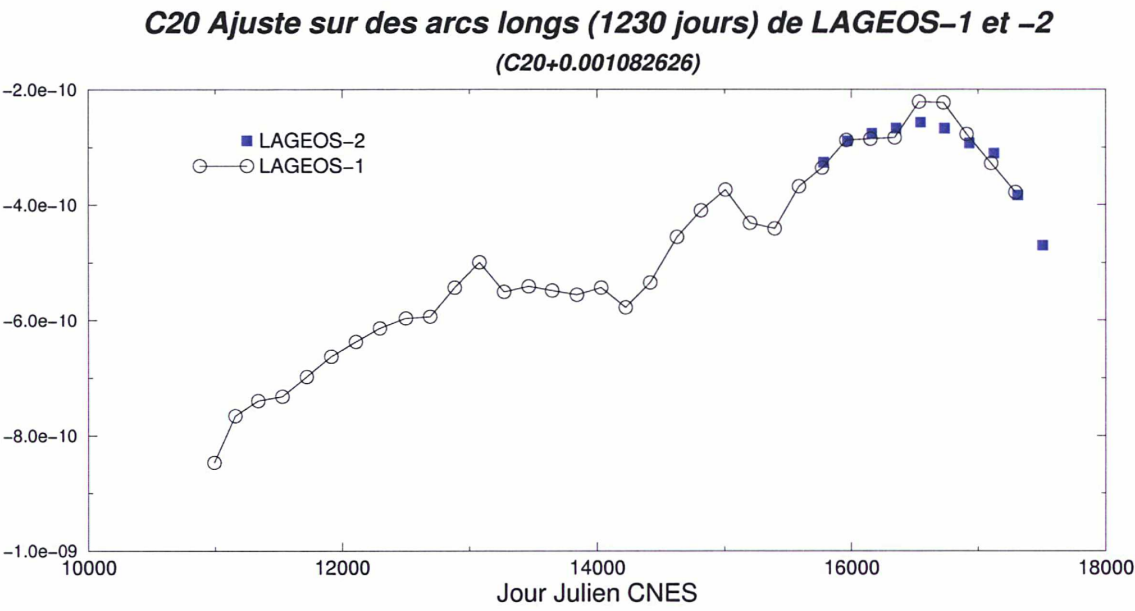


FIG. 6.2 – Une série temporelle de $C_{2,0}$ (points liés).
Des arcs de 5 ans de LAGEOS-1 et -2 ont été utilisés pour réaliser cette figure. Les points étant séparés de six mois, ils ne sont pas indépendants les uns des autres. Mais le signal est d’autant mieux mis en évidence.

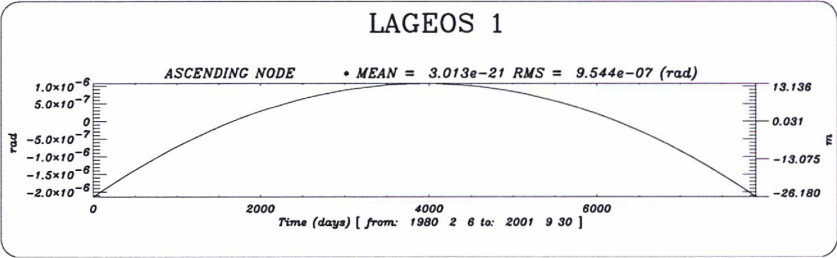


FIG. 6.3 – Effet de $\dot{C}_{2,0}$ sur le nœud ascendant de LAGEOS-1.
Cette figure est la différence de deux extrapolations.

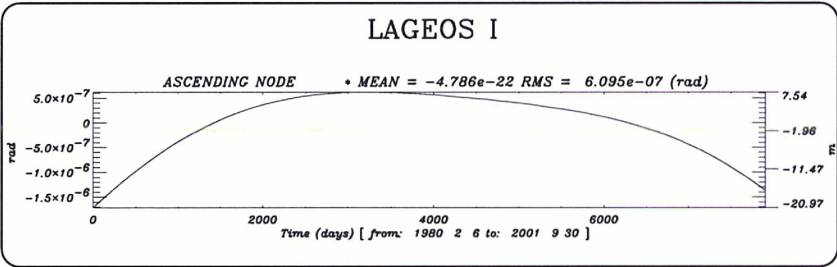


FIG. 6.4 – Effets combinés de la marée à 18,6 ans et de $\dot{C}_{2,0}$.
L’amplitude de la marée à 18,6 ans est, ici, supérieure de 30% à la valeur nominale *i.e.* 1.64 cm. Cette figure est la différence de deux extrapolations.

TAB. 6.1 – Estimation de $C_{2,0}$ et $\dot{C}_{2,0}$, selon la solution retenue.

| Arc | Période de l'arc | $C_{2,0}$ | $\dot{C}_{2,0}$ |
|-----|------------------|---|--|
| | | | an^{-1} |
| 1 | 1980-1996 | $-0.108262643 \cdot 10^{-2} \pm 0.1 \cdot 10^{-9}$ | $2.72 \cdot 10^{-11} \pm 0.1 \cdot 10^{-10}$ |
| 2 | 1980-2002 | $-0.108262636 \cdot 10^{-2} \pm 0.4 \cdot 10^{-10}$ | $2.70 \cdot 10^{-11} \pm 0.9 \cdot 10^{-12}$ |
| 3 | 1980-2002 | $-0.108262636 \cdot 10^{-2} \pm 0.4 \cdot 10^{-10}$ | $2.83 \cdot 10^{-11} \pm 0.7 \cdot 10^{-12}$ |

TAB. 6.2 – Paramètres de marées estimés, selon la solution retenue.

| Arc | Période de l'arc | 18,6 ans | | | | 9,3 ans | | | |
|-----|------------------|--------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | Ampl. <i>cm</i> | Phase <i>deg</i> | $C_{s(n,m)}^+$ <i>cm</i> | $S_{s(n,m)}^+$ <i>cm</i> | Ampl. <i>cm</i> | Phase <i>deg</i> | $C_{s(n,m)}^+$ <i>cm</i> | $S_{s(n,m)}^+$ <i>cm</i> |
| 1 | 1980-1996 | 1.60 | 81 | $1.58 \pm 0,1$ | 0.27 ± 0.5 | 0.25 | −7 | 0.03 ± 0.09 | -0.25 ± 0.2 |
| 2 | 1980-2002 | 1.45 | 77 | 1.41 ± 0.05 | 0.34 ± 0.03 | 0.49 | −50 | 0.37 ± 0.05 | -0.32 ± 0.04 |
| 3 | 1980-2002 | 1.50 | 78 | 1.47 ± 0.04 | $0,31 \pm 0.03$ | - | - | - | - |

le second de 1980 à 2002. Ils sont basés sur un modèle géodynamique nominal, comprenant en particulier les marées à longues périodes et les effets dus à $\dot{C}_{2,0}$.

La figure 6.5 met en évidence dans ce cas le signal «douteux» sur le nœud de LAGEOS-1.

Les figures 6.6, 6.7, 6.8 montrent les résidus sur le nœud ascendant dans chaque cas que je détaille maintenant, selon les paramètres géodynamiques ajustés.

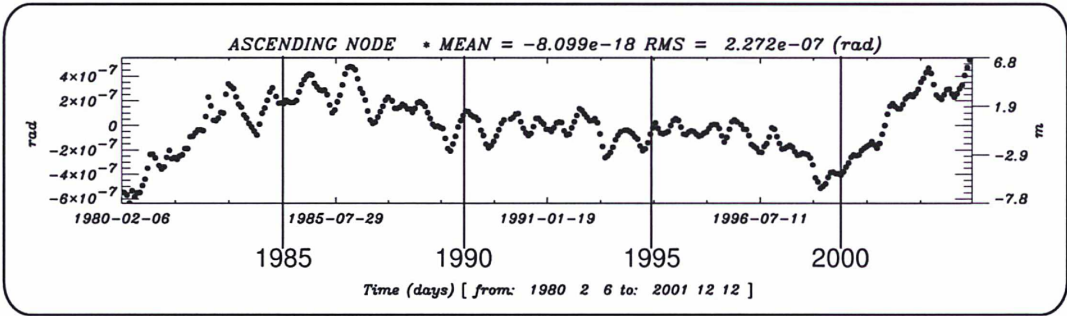


FIG. 6.5 – Qu’observe-t-on sur le nœud ?

Cette figure montre les résidus sur le nœud d’un arc couvrant 1980 à 2002. Aucun paramètre géodynamique n’est estimé. Paramètres estimés : conditions initiales, 5 accélérations tangentielles empiriques (variant de $-0.2644 \cdot 10^{-11} \text{ ms}^{-2}$ à $-0.4841 \cdot 10^{-11} \text{ ms}^{-2}$), un facteur d’échelle pour la pression de radiation (valant 0.95) Le modèle gravitationnel comporte une valeur nominale de $\dot{C}_{2,0}$.

Pour évaluer l’impact de cette étrange variation sur la valeur des paramètres de marée, j’ai calculé un arc (appelé Solution 1) entre 1980 et 1996 (figure 6.6). Les marées à 18,6 ans et à 9,3 ans ont été estimées (table 6.2), de même que $C_{2,0}(t_0)$ et $\dot{C}_{2,0}$ (table 6.1).

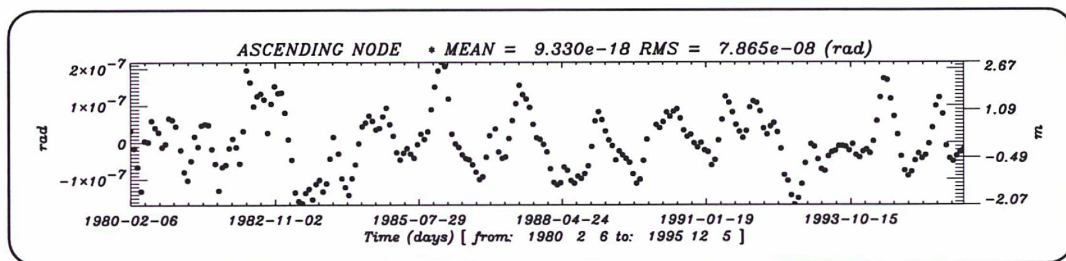


FIG. 6.6 – Résidus sur le nœud ascendant de LAGEOS-1 avec un arc calculé de 1980 à 1996 (Solution 1).
Paramètres géodynamiques estimés : marée à 18,6 ans, marée à 9,3 ans, $C_{2,0}$ et $\dot{C}_{2,0}$. Un terme annuel et un terme semi-annuel ont également été estimés.

J'ai ensuite effectué le même calcul entre 1980 et 2002 (Solution 2 : figure 6.7). En raison d'une valeur estimée de la marée à 9,3 ans qui n'est pas acceptable d'un point de vue géophysique (de même que dans la Solution 1), et qui peut absorber une partie du signal à 18,6 ans, j'ai alors calculé un arc entre 1980 et 1996 sans ajuster la marée à 9,3 ans (Solution 3). On peut d'ailleurs remarquer à l'œil nu sur la figure 6.8 qu'il y a effectivement un signal à cette période.

Les valeurs estimées de $C_{2,0}(t_0)$ et $\dot{C}_{2,0}$ ont une stabilité remarquable entre les solutions, et ne sont pas affectées par la forte variation que l'on peut observer dans les résidus (Solutions 2 et 3). De plus, ces valeurs sont bien décorrélées de la valeur de l'amplitude de la marée à 18,6 ans (corrélation égale à 0.25 dans la Solution 1 entre $\dot{C}_{2,0}$ et $C_{18,6}$). On remarque également que l'amplitude de la marée à 18,6 ans est très stable ; la différence de 0,1 cm entre les Solutions 1 et 3 ne peut de toute façon pas engendrer un signal plus grand que 2 mètres.

J'en conclus que ce qui se passe au début de 1998, observé dans la Figure 6.8, ne peut pas être absorbé par la marée à 18,6 ans, ni par une variation purement séculaire de $C_{2,0}$. Il s'agit vraisemblablement d'une redistribution des masses d'eau peut-être liée, au moins en partie, au phénomène El Niño de 1997-1998. Ceci devrait être confirmé ou infirmé par les études en cours de différents groupes mondiaux de géophysique globale.

6.2 Des séries temporelles des premiers zonaux satellite par satellite

De manière à étudier, en guise d'exemple, les variations temporelles des premiers coefficients zonaux du champ de gravité (et en particulier les variations séculaires), je propose maintenant de généraliser les figures 6.1 et 6.2 pour les premiers coefficients zonaux : de J_2 à J_5 (en fait : de $C_{2,0}$ à $C_{5,0}$). Pour chaque satellite, un point est obtenu à partir d'un arc d'orbite de 2 ans, sauf en cas de l'absence d'éléments moyens observés. Le point est alors daté du jour de milieu d'arc. Comme précédemment, une telle période présente l'avantage d'assurer une moyennisation d'effets annuels importants. De plus, la recherche de périodes communes entre les différents satellites facilitera la combinaison des équations d'observation.

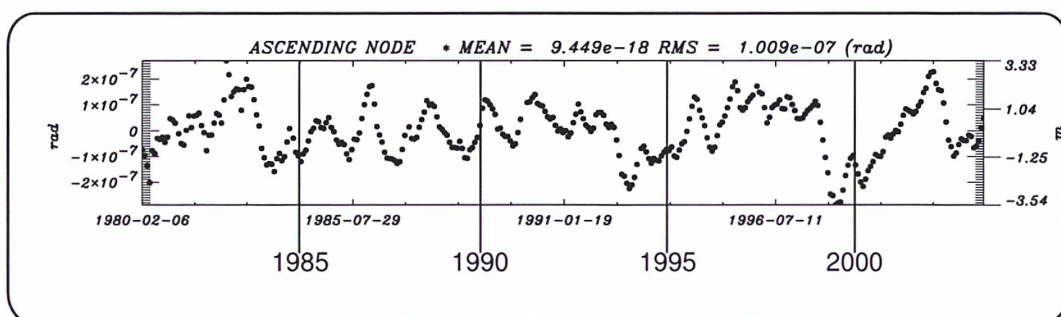


FIG. 6.7 – Résidus sur le nœud ascendant de LAGEOS-1 sur un arc couvrant 1980 à 2002, et comportant l'estimation de la marée à 9,3 ans (Solution 2).

Paramètres géodynamiques estimés : marée à 18,6 ans, marée à 9,3 ans, $C_{2,0}$ et $\dot{C}_{2,0}$. Un terme annuel et un terme semi-annuel ont également été estimés.

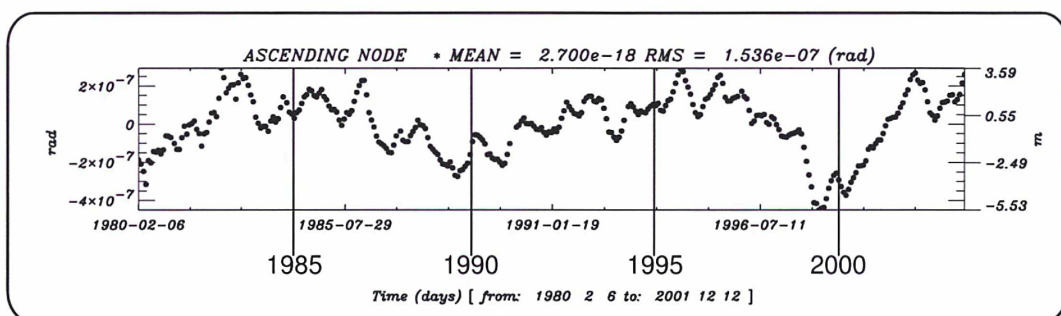


FIG. 6.8 – Résidus sur le nœud ascendant de LAGEOS-1 sur un arc couvrant 1980 à 2002, et NE comportant PAS l'estimation de la marée à 9,3 ans (Solution 3).

Paramètres géodynamiques ajustés : marée à 18,6 ans, $C_{2,0}$ et $\dot{C}_{2,0}$. Un terme annuel et un terme semi-annuel ont également été estimés.

6.2.1 Une tentative avec un seul satellite : LAGEOS-1

La figure 6.9 présente les évolutions temporelles des coefficients J_2 à J_5 évalués à partir d'un seul satellite. Comme ces coefficients, les pairs d'une part (notamment sur le nœud), les impairs d'autre part (notamment sur l'excentricité), sont à l'origine de signaux orbitaux sensiblement similaires, ces estimations sont complètement corrélées.

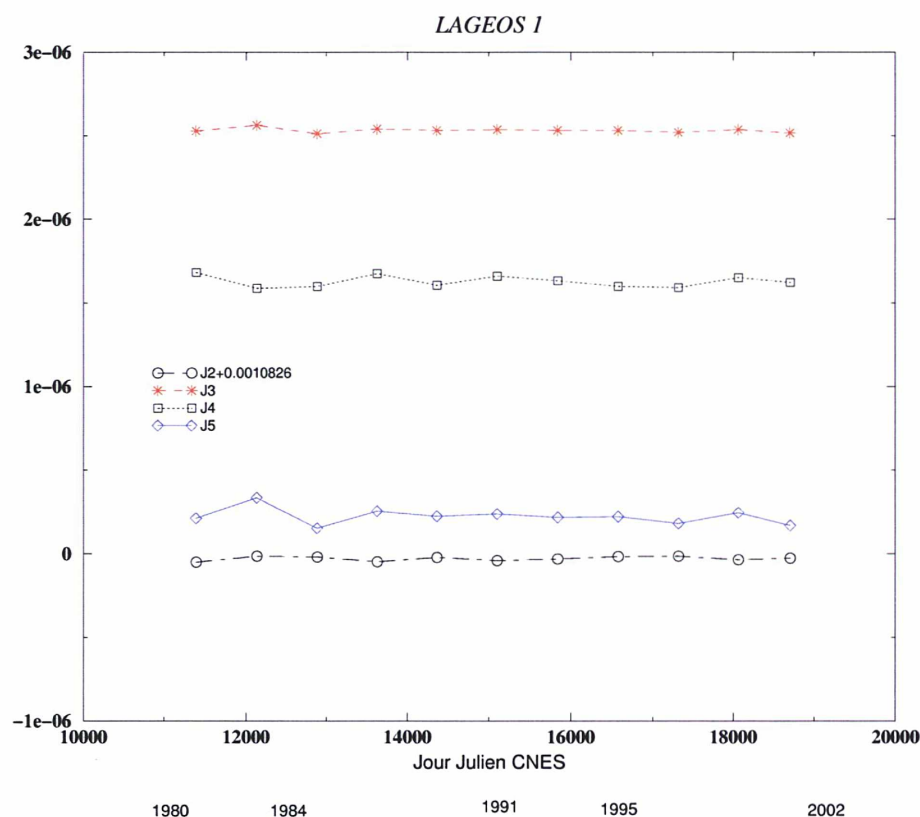


FIG. 6.9 – Ajustement sur un même satellite de 4 coefficients géodynamiques.

Il apparaît, même à l'œil nu, que les paramètres sont complètement corrélés : J_2 et J_4 d'une part, J_3 et J_5 d'autre part.

Il faut donc renoncer à vouloir utiliser les satellites comme des «senseurs de forces» indépendants les uns des autres. Il faut donc les combiner entre eux, et tirer ainsi profit d'inclinaisons et d'altitudes différentes, *i.e.* de sensibilités différentes, cela assurant une bonne décorrélation.

6.2.2 Des valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$

J'utilise ici des arcs d'environ 2 ans de LAGEOS-1, LAGEOS-2, STARLETTE, STELLA et AJISAI. Comme les observations les plus nombreuses et les plus étalées dans le temps étant celles de LAGEOS-1, c'est par rapport à ce satellite que seront repérées les orbites de tous les satellites (pour LAGEOS-1, on ira de l'arc 1 à l'arc 11, pour AJISAI de l'arc 7 à l'arc 11, etc...).

Donnons nous d'emblée un critère de comparaison de la qualité des différents arcs, fondé sur la valeur du facteur unitaire de variance (figure 6.10). Il apparaît que c'est bien au cours des périodes de maximum d'activité solaire que les orbites sont les moins bonnes, mettant là en évidence certains défauts des modèles de freinage atmosphérique, et toute la difficulté de les modéliser en cas de forte activité.

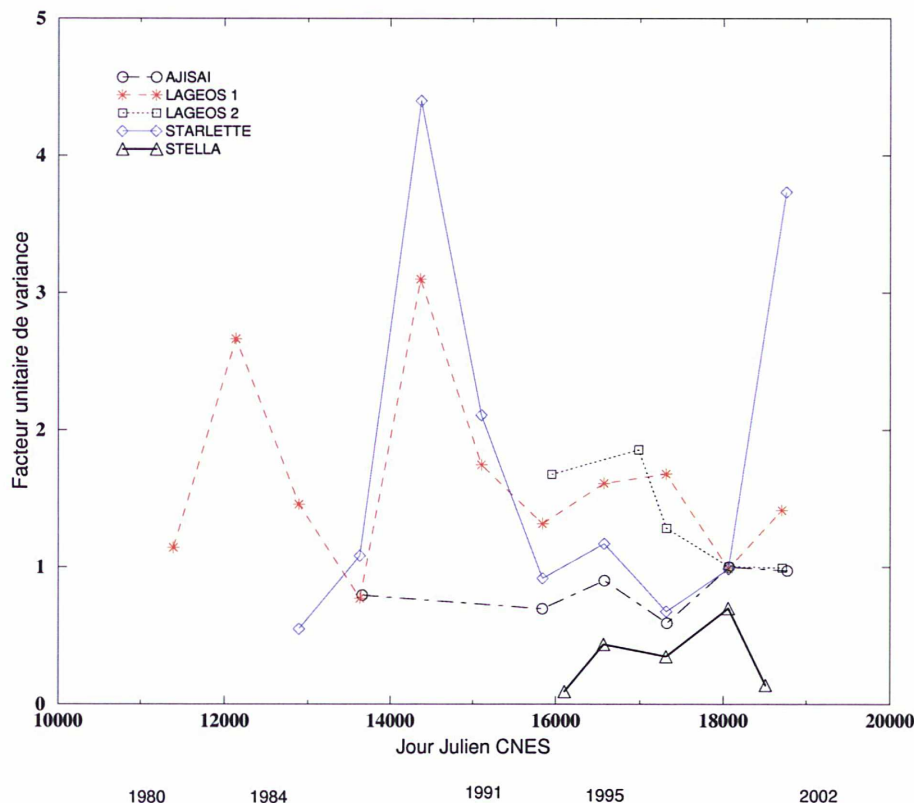


FIG. 6.10 – Qualité des orbites de deux ans selon la date de début d'arc.

Pour un arc et un satellite donnés, la pondération des éléments orbitaux peut être choisie de telle manière que le facteur unitaire de variance vaille un. Ici, la pondération est la même pour tous les arcs d'un même satellite. Elle a été réalisée pour l'arc numéro 10 en période de minimum d'activité solaire. La variation du facteur unitaire de variance est ainsi une indication de la qualité de l'ajustement au cours du temps de l'orbite moyenne sur les observations.

Pour chaque satellite considéré indépendamment des autres, seules les quantités $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ peuvent en fait être estimées sans être complètement corrélées. Plus exactement, ce sont des valeurs effectives $C_{2,0}^{eff}$ et $C_{3,0}^{eff}$ qui sont estimées, et qui sont combinaison linéaire des zonaux de même parité. Les coefficients de ces combinaisons linéaires dépendent des caractéristiques orbitales de chaque satellite : cela explique les différences de niveau des différentes courbes dans la figure 6.11.

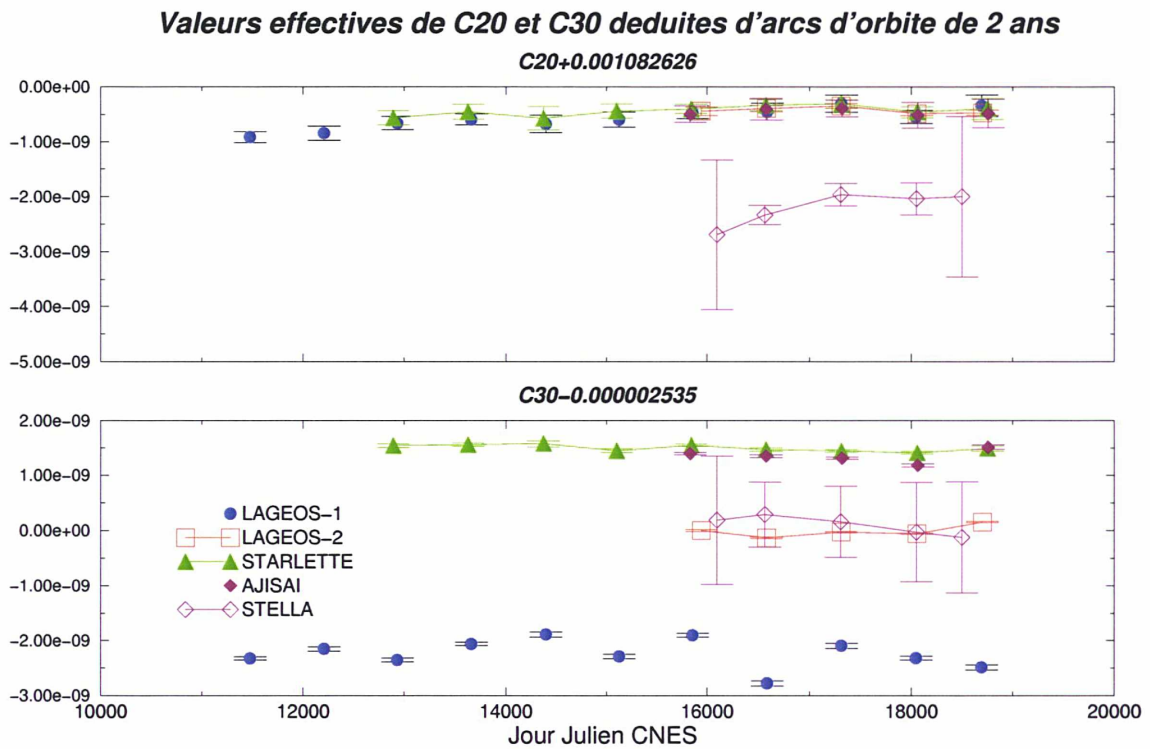


FIG. 6.11 – Valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ estimées par différents satellites.

Le satellite STELLA donne des résultats qui ne sont pas du même ordre de grandeur que les autres, sans que je puisse encore pour l'instant expliquer pourquoi. Dans le reste de l'étude, je ne le considère donc plus. Le modèle gravitationnel ne contient aucune variation séculaire.

En fait, il est abusif de vouloir dans deux seuls coefficients, un pour les zonaux pairs et un pour les zonaux impairs, retrouver l'ensemble des signaux orbitaux engendrés par J_2, J_4, \dots d'une part, et par J_3, J_5, \dots d'autre part : ce sont des *corrections* aux valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ que l'on peut estimer. La figure 6.12 présente les même séries temporelles que la figure 6.11, mais avec les variations séculaires de GRIM5 prises en compte dans le modèle.

De cette dernière figure, on peut déduire, sans pour autant tenir compte des arcs 5, 10 et 11, sans doute très affectés par des redistributions de masses d'eau [Dickey *et al.*, 2002] :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{C}_{2,0}^{\text{eff}}(\text{LAGEOS-1}) &= 3.16 \cdot 10^{-12} \text{an}^{-1} & \Delta\dot{C}_{3,0}^{\text{eff}}(\text{STARLETTE}) &= -1.64 \cdot 10^{-11} \text{an}^{-1} \\ \Delta\dot{C}_{2,0}^{\text{eff}}(\text{STARLETTE}) &= 2.41 \cdot 10^{-12} \text{an}^{-1} & \Delta\dot{C}_{3,0}^{\text{eff}}(\text{LAGEOS-2}) &= 1.47 \cdot 10^{-12} \text{an}^{-1}\end{aligned}$$

Ceci permet de déduire $\Delta\dot{C}_{2,0}$, $\Delta\dot{C}_{3,0}$, $\Delta\dot{C}_{4,0}$ et $\Delta\dot{C}_{5,0}$ à partir des relations données, satellite par satellite, par exemple dans [Eanes, 1995 ; Eanes and Bettadpur, 1996] :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{C}_{2,0}^{\text{eff}}(\text{LAGEOS-1}) &= \Delta\dot{C}_{2,0} + 0.371\Delta\dot{C}_{4,0} + \dots \\ \Delta\dot{C}_{2,0}^{\text{eff}}(\text{LAGEOS-2}) &= \Delta\dot{C}_{2,0} + 0.073\Delta\dot{C}_{4,0} + \dots \\ \Delta\dot{C}_{2,0}^{\text{eff}}(\text{STARLETTE}) &= \Delta\dot{C}_{2,0} + 0.040\Delta\dot{C}_{4,0} + \dots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta\dot{C}_{3,0}^{\text{eff}}(\text{LAGEOS-1}) &= \Delta\dot{C}_{3,0} - 0.27\Delta\dot{C}_{5,0} + \dots \\ \Delta\dot{C}_{3,0}^{\text{eff}}(\text{LAGEOS-2}) &= \Delta\dot{C}_{3,0} + 0.53\Delta\dot{C}_{5,0} + \dots \\ \Delta\dot{C}_{3,0}^{\text{eff}}(\text{STARLETTE}) &= \Delta\dot{C}_{3,0} + 1.05\Delta\dot{C}_{5,0} + \dots\end{aligned}$$

On peut donc déduire nos propres valeurs $\dot{C}_{2,0} = \dot{C}_{2,0}^{\text{GRIM5}} + \Delta\dot{C}_{2,0}$ et $\dot{C}_{3,0} = \dot{C}_{3,0}^{\text{GRIM5}} + \Delta\dot{C}_{3,0}$, $\dot{C}_{4,0} = \dot{C}_{4,0}^{\text{GRIM5}} + \Delta\dot{C}_{4,0}$ et $\dot{C}_{5,0} = \dot{C}_{5,0}^{\text{GRIM5}} + \Delta\dot{C}_{5,0}$. Voir ci-dessous la table 6.8, page 183.

Ainsi, tentons maintenant de combiner les observations des différents satellites entre elles.

6.3 Une tentative de combinaison des satellites

Pour terminer l'ensemble de l'étude, je propose dans cette partie de combiner entre elles les observations issues des différents satellites utilisés, pour décorrélér au maximum l'estimation des paramètres géodynamiques.

Je ne traite ici que l'exemple de l'estimation des premiers coefficients zonaux, exemple qui prétend uniquement être une illustration de ce que la combinaison de données peut apporter à la restitution du champ de gravité : la combinaison de données est en effet un domaine complet de la recherche en géodésie spatiale, qui nécessite une grande pratique des outils statistiques.

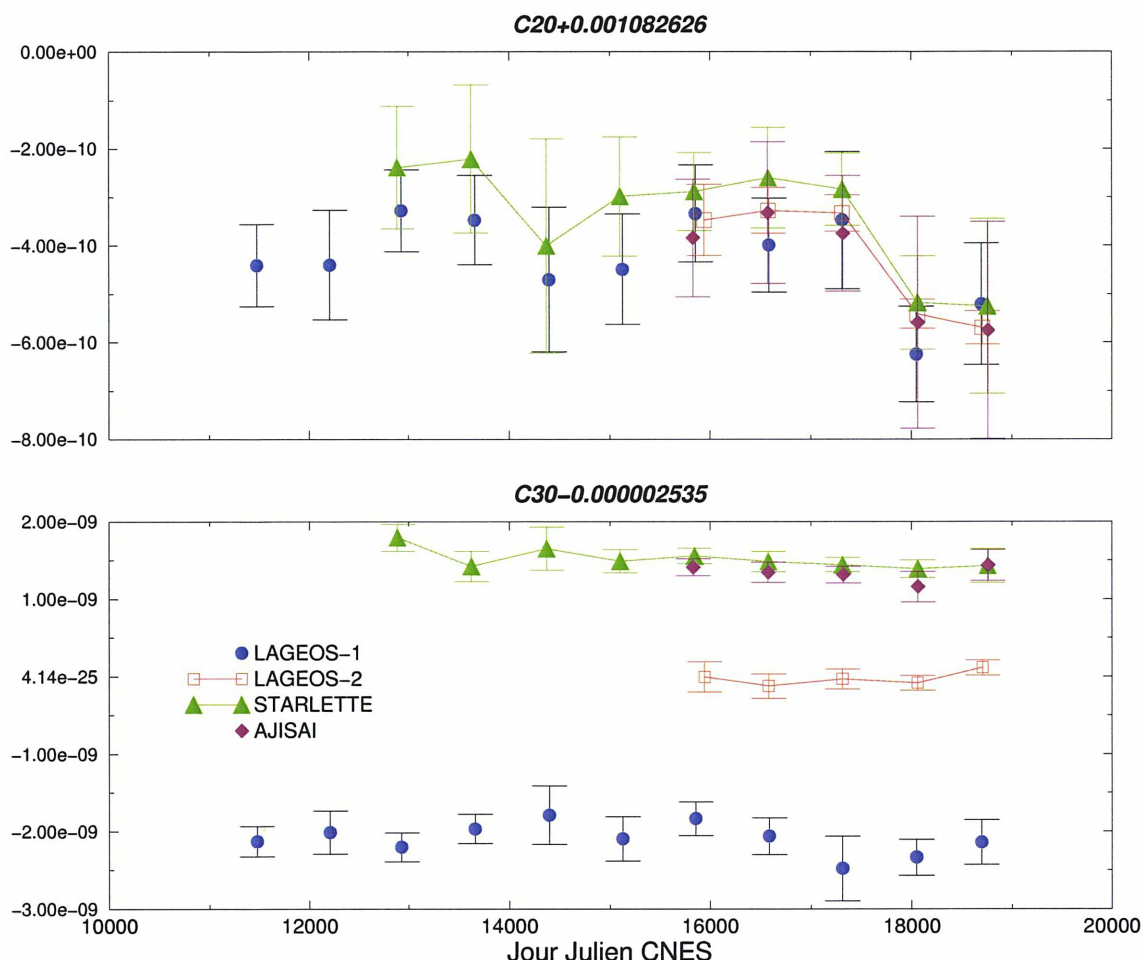
Corrections aux valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$.

FIG. 6.12 – Corrections aux valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ estimées par différents satellites.

Les variations séculaires données dans le modèle GRIM5 ont été prises en compte : $\dot{C}_{2,0}^{GRIM5} = 3.08 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$, $\dot{C}_{3,0}^{GRIM5} = 7.41 \cdot 10^{-12} \text{ an}^{-1}$, $\dot{C}_{4,0}^{GRIM5} = 3.67 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$.

Il existe certaines difficultés liées à la géométrie des constellations, qui peuvent parfois amener plus de corrélation dans les paramètres qu'elle n'en enlève [Coulot, 2000]. Il faut donc manipuler les outils de combinaison avec grande précaution.

La méthode de combinaison est encore la méthode d'Helmert, mise en œuvre grâce à un outil informatique fort pratique de David Coulot. Ici, on ne répond plus les poids sur les éléments de chaque satellite, qui ont été fixés précédemment, mais on pondère la contribution de chaque satellite en fonction du nombre et de la qualité des mesures qu'il apporte.

Un autre aspect dont il faut être bien conscient : la qualité des orbites joue un grand rôle dans l'estimation des paramètres géodynamiques, et il y a des arcs qui sont forcément d'une moins bonne qualité que d'autres. Les périodes dans lesquelles les orbites sont les moins bonnes sont souvent les mêmes pour tous les satellites, comme par exemple en période de maximum

d'activité solaire. C'est ce qu'illustre la figure 6.10, à travers les variations du facteur unitaire de variance. Ce ne sont pas les valeurs qu'il faut retenir¹, mais l'allure générale : pour tous les satellites, c'est en période de maximum d'activité solaire, ainsi que je l'ai déjà dit, que la qualité des orbites est la moins bonne.

Les valeurs des variations séculaires de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$, $C_{5,0}$ établies dans la section précédente ont été utilisées pour générer les arcs avec lesquels je vais maintenant établir les valeurs statiques de ces coefficients. Des paramètres annuels et semi-annuels ont également été estimés, sur chaque arc.

La figure 6.13, montre les résultats de l'ajustement des séries temporelles de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$, $C_{5,0}$ à partir de la combinaison d'orbites différentes. Les points 1 et 2 ne sont pas tracés, puisqu'ils correspondent à des périodes où seules les données de LAGEOS-1 sont disponibles. Ainsi, les barres d'erreur sur les coefficients correspondants sont vraiment très élevées. On trouvera dans la table 6.3 les poids respectifs associés à chaque satellite pour chaque arc, sans que je sache expliquer pour le moment les grandes variations constatées.

TAB. 6.3 – Poids respectifs de chaque satellite dans la combinaison des observations.
'LA1' correspond à LAGEOS-1, 'LA2' à LAGEOS-2, 'STA' à STARLETTE, 'AJI' à AJISAI.

| | Jour Julien CNES (Date Civile) | Satellites intervenant dans la combinaison | Poids respectifs | | | |
|-------------|-----------------------------------|---|------------------|------|------|------|
| arc 1 | 11478 | LA1 | 1.00 | | | |
| (non tracé) | (5/6/1981) | | | | | |
| arc 2 | 12209 | LA1 | 1.00 | | | |
| (non tracé) | (6/6/1983) | | | | | |
| arc 3 | 12934 | LA1+STA | 1.96 | 1.98 | | |
| | (31/5/1985) | | | | | |
| arc 4 | 13662 | LA1+STA+AJI | 2.00 | 0.97 | 3.14 | |
| | (29/5/1987) | | | | | |
| arc 5 | 14398 | LA1+STA | 0.66 | 0.22 | | |
| | (3/6/1989) | | | | | |
| arc 6 | 15126 | LA1+STA | 1.11 | 0.47 | | |
| | (1/6/1991) | | | | | |
| arc 7 | 15854 | LA1+LA2+STA+AJI | 1.41 | 0.76 | 1.17 | 5.62 |
| | (29/5/1993) | | | | | |
| arc 8 | 16590 | LA1+LA2+STA+AJI | 1.05 | 0.97 | 0.79 | 4.12 |
| | (31/5/1997) | | | | | |
| arc 9 | 17317 | LA1+LA2+STA+AJI | 0.79 | 1.50 | 1.44 | 5.79 |
| | (3/6/1989) | | | | | |
| arc 10 | 18049 | LA1+LA2+STA+AJI | 1.40 | 2.14 | 0.93 | 1.79 |
| | (2/6/1999) | | | | | |
| arc 11 | 18697 | LA1+LA2+STA+AJI | 4.42 | 3.61 | 0.29 | 3.35 |
| | (11/3/2001) | | | | | |

¹puisque le facteur unitaire de variance est défini à un facteur multiplicatif près.

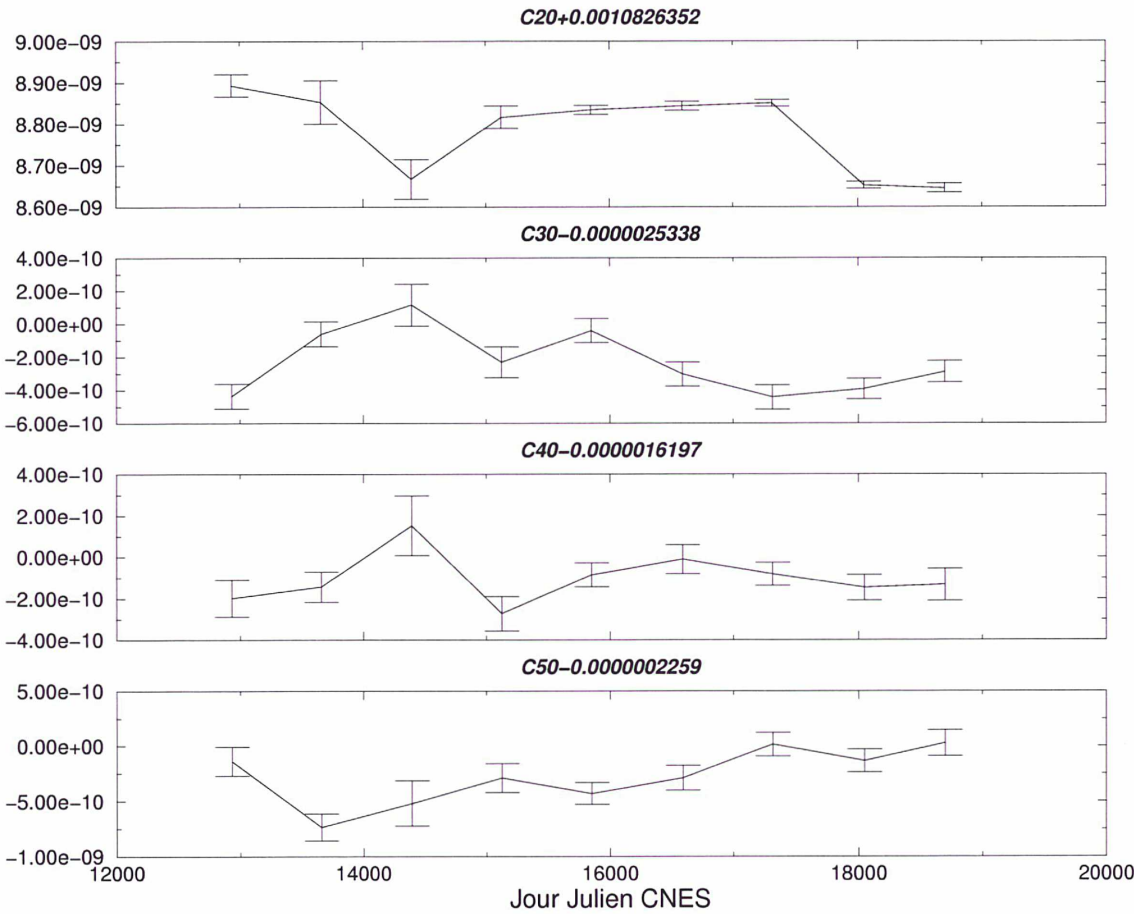


FIG. 6.13 – Valeurs au cours du temps de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$, $C_{5,0}$ obtenues par combinaison des données.

TAB. 6.4 – Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{2,0}$.

| Date (JJ CNES) | Valeur de $C_{2,0}$ | Ecart-type | Corrélation avec $C_{3,0}$ | Corrélation avec $C_{4,0}$ | Corrélation avec $C_{5,0}$ |
|-------------------|---------------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| arc1 (11478) | -0.1082630161E-02 | 0.16E-08 | 0.04 | -1.00 | 0.01 |
| arc2 (12209) | -0.1082620731E-02 | 0.45E-08 | -0.03 | -1.00 | 0.00 |
| arc3 (12934) | -0.1082626307E-02 | 0.27E-10 | -0.19 | 0.16 | -0.01 |
| arc4 (13662) | -0.1082626347E-02 | 0.52E-10 | -0.08 | 0.00 | 0.00 |
| arc5 (14398) | -0.1082626533E-02 | 0.47E-10 | -0.04 | 0.00 | 0.00 |
| arc6 (15126) | -0.1082626384E-02 | 0.27E-10 | -0.04 | -0.04 | 0.00 |
| arc7 (15854) | -0.1082626366E-02 | 0.10E-10 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| arc8 (16590) | -0.1082626356E-02 | 0.10E-10 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| arc9 (17317) | -0.1082626349E-02 | 0.83E-11 | 0.03 | 0.00 | 0.00 |
| arc10 (18049) | -0.1082626548E-02 | 0.87E-11 | 0.04 | 0.00 | 0.00 |
| arc11 (18697) | -0.1082626555E-02 | 0.10E-10 | 0.00 | -0.01 | -0.01 |

TAB. 6.5 – Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{3,0}$.

| Date (JJ CNES) | Valeur de $C_{3,0}$ | Ecart-type | Corrélation avec $C_{4,0}$ | Corrélation avec $C_{5,0}$ |
|-------------------|---------------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|
| arc1 (11478) | 0.252427E-05 | 0.60E-08 | -0.03 | 1.00 |
| arc2 (12209) | 0.254516E-05 | 0.12E-07 | 0.01 | 1.00 |
| arc3 (12934) | 0.253336E-05 | 0.73E-10 | -0.39 | 0.01 |
| arc4 (13662) | 0.253374E-05 | 0.75E-10 | 0.00 | 0.00 |
| arc5 (14398) | 0.253391E-05 | 0.12E-09 | 0.06 | 0.00 |
| arc6 (15126) | 0.253357E-05 | 0.93E-10 | 0.02 | 0.00 |
| arc7 (15854) | 0.253376E-05 | 0.73E-10 | -0.02 | 0.00 |
| arc8 (16590) | 0.253349E-05 | 0.73E-10 | 0.00 | 0.00 |
| arc9 (17317) | 0.253335E-05 | 0.73E-10 | 0.03 | 0.00 |
| arc10 (18049) | 0.253340E-05 | 0.62E-10 | 0.01 | 0.00 |
| arc11 (18697) | 0.253351E-05 | 0.65E-10 | 0.01 | 0.00 |

TAB. 6.6 – Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{4,0}$.

| Date (JJ CNES) | Valeur de $C_{4,0}$ | Ecart-type | Corrélation avec $C_{5,0}$ |
|-------------------|---------------------|------------|-------------------------------|
| arc1 (11478) | 0.162930E-05 | 0.60E-08 | -0.00 |
| arc2 (12209) | 0.160351E-05 | 0.17E-07 | -0.02 |
| arc3 (12934) | 0.161950E-05 | 0.89E-10 | -0.02 |
| arc4 (13662) | 0.161955E-05 | 0.73E-10 | -0.12 |
| arc5 (14398) | 0.161985E-05 | 0.14E-09 | -0.03 |
| arc6 (15126) | 0.161942E-05 | 0.82E-10 | -0.06 |
| arc7 (15854) | 0.161961E-05 | 0.57E-10 | -0.08 |
| arc8 (16590) | 0.161969E-05 | 0.69E-10 | -0.13 |
| arc9 (17317) | 0.161961E-05 | 0.55E-10 | -0.16 |
| arc10 (18049) | 0.161955E-05 | 0.61E-10 | -0.15 |
| arc11 (18697) | 0.161956E-05 | 0.77E-10 | -0.04 |

TAB. 6.7 – Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{5,0}$.

| Date (JJ CNES) | Valeur de $C_{5,0}$ | Ecart-type |
|-------------------|---------------------|------------|
| arc1 (11478) | 0.19016E-06 | 0.18E-09 |
| arc2 (12209) | 0.26889E-06 | 0.27E-09 |
| arc3 (12934) | 0.22576E-06 | 0.12E-09 |
| arc4 (13662) | 0.22516E-06 | 0.12E-09 |
| arc5 (14398) | 0.22538E-06 | 0.20E-09 |
| arc6 (15126) | 0.22561E-06 | 0.13E-09 |
| arc7 (15854) | 0.22547E-06 | 0.97E-10 |
| arc8 (16590) | 0.22561E-06 | 0.11E-09 |
| arc9 (17317) | 0.22591E-06 | 0.10E-09 |
| arc10 (18049) | 0.22576E-06 | 0.10E-09 |
| arc11 (18697) | 0.22592E-06 | 0.11E-09 |

TAB. 6.8 – Les valeurs que je propose pour les premiers coefficients du champ de gravité.
Les variations séculaires ont été obtenues après résolution des équations de sensibilité (section 6.2.2), les valeurs statiques, initialisées comme le modèle GRIM5-S1 au 1er janvier 1997, sont obtenues en prenant pour chaque coefficient, la valeur moyenne des tables 6.4, 6.5, 6.6, 6.7.

| | |
|-----------------------------|--|
| $C_{2,0} = -0.001082626233$ | $\dot{C}_{2,0} = 2.26 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ |
| $C_{3,0} = 0.000002533609$ | $\dot{C}_{3,0} = 1.16 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ |
| $C_{4,0} = 0.000001619694$ | $\dot{C}_{4,0} = 2.41 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ |
| $C_{5,0} = 0.000000225487$ | $\dot{C}_{5,0} = -1.98 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ |

TAB. 6.9 – Les premières valeurs du champ GRIM5-S1.

| | |
|--|---|
| $C_{2,0} = -0.001082626111 \pm 0.80 \cdot 10^{-10}$ | $\dot{C}_{2,0} = 3.05 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ |
| $C_{3,0} = 0.0000025361508 \pm 0.62 \cdot 10^{-10}$ | $\dot{C}_{3,0} = 7.45 \cdot 10^{-12} \text{ an}^{-1}$ |
| $C_{4,0} = 0.000001619363525 \pm 0.41 \cdot 10^{-9}$ | $\dot{C}_{4,0} = 3.67 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ |
| $C_{5,0} = 0.000000228817754 \pm 0.12 \cdot 10^{-8}$ | $\dot{C}_{5,0} = 0$ |

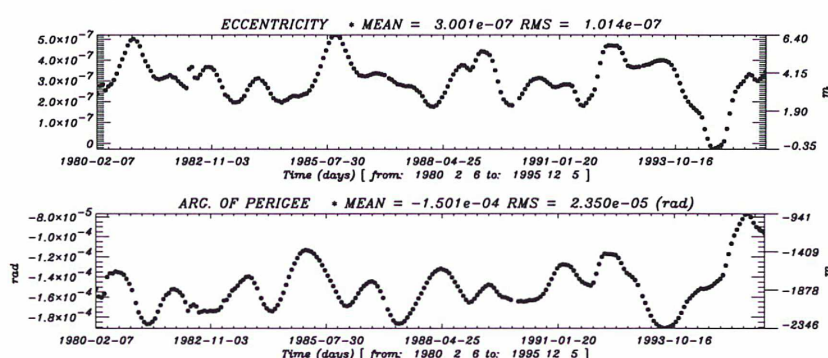
6.4 Résultat : des valeurs pour les premiers coefficients zonaux

Il faut interpréter ces différents résultats avec une extrême prudence. En effet, avec une combinaison des satellites, encore plus de facteurs peuvent avoir une influence sur les solutions qu’avec un seul : qualités diverses des arcs utilisés, structure imparfaite de la matrice de poids (quelle erreur sur chaque élément moyen ?), géométrie de la constellation. C’est néanmoins assurément une voie à creuser, même s’il ne s’agissait ici que d’un exercice ne prétendant pas atteindre une grande exactitude dans les paramètres. Cela est pour une prochaine étape...

Néanmoins, je peux d’ores et déjà regrouper dans la table 6.8 les résultats issus des deux sections précédentes pour les premiers coefficients zonaux : les variations séculaires (issues de la section 6.2.2) et les valeurs moyennes statiques (issus de la section 6.3). Les valeurs moyennes statiques de la table 6.8 sont les valeurs moyennes des valeurs obtenues pour chaque arc, à l’exception des arcs 1 et 2 (1 seul satellite), 5, 10, 11 (pour lesquels on peut penser qu’ils sont fortement corrélés aux effets de redistribution de masses océaniques [Dickey *et al.*, 2003]. Ainsi, elles sont valides pour le Jour Julien 15202. Dans la table, elles ont été ramenées au Jour Julien 17167 (1er janvier 1997), pour les comparer à celles de GRIM5-S1.

Même si certaines de ces valeurs sont certainement discutables, elles ont au moins le mérite d’améliorer le centrage des éléments orbitaux de LAGEOS-1 (figure 6.14) ; d’autres effets temporels, les effets annuels et semi-annuels notamment, restent à modéliser. On notera les différences par rapport au modèle GRIM5-S1 (table 6.9).

Résidus sur le vecteur excentricité de LAGEOS-1,
avec les valeurs de GRIM-5.



Résidus sur le vecteur excentricité de LAGEOS-1,
avec les valeurs déterminées dans cette étude.

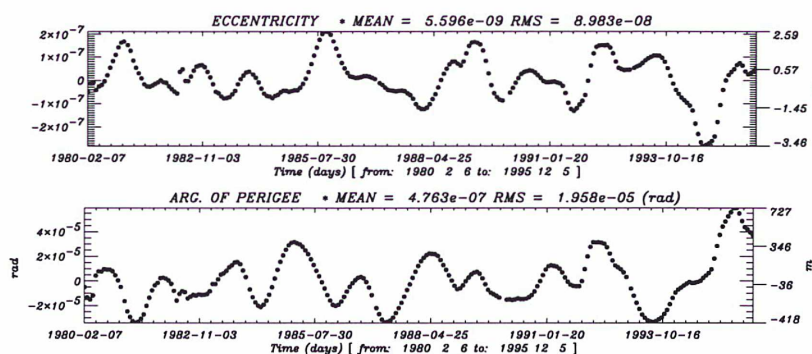


FIG. 6.14 – Un apport de ce «mini-modèle» de champ.
On remarquera qu'avec notre modèle, les résidus sur l'arc long de
LAGEOS-1 sont beaucoup mieux centrés.

Troisième partie

Le «nouveau chapitre de la thèse»

C'est la deuxième année que l'expérience pilote du «Nouveau Chapitre de la Thèse» est menée. Je trouve le concept de cette expérience très intéressant : il fait faire au futur docteur une analyse critique de son travail, sur un plan qui n'est pas celui de la pertinence ou de la qualité des résultats scientifiques qu'il apporte, mais bien sur la manière dont ont été obtenus ces résultats. Je ne détaille donc pas ici les points scientifiques qui font l'originalité du projet², puisqu'on pourra pour cela se référer au manuscrit de la thèse. En plus de leurs qualités scientifiques propres, les chercheurs et futurs chercheurs se doivent désormais de savoir partager leurs connaissances dans un discours accessible aux non-initiés, de savoir rassembler et coordonner, autour de projets spatiaux par exemple, des équipes entières aux compétences multiples et variées, de savoir estimer et gérer des budgets parfois lourds ; en d'autres termes de montrer qu'ils sont de véritables acteurs de la recherche spatiale dans nos sociétés technologiques. Pour tenter d'atteindre cet objectif d'ici quelques années, il m'a paru très important de montrer, à travers ma propre expérience, qu'un travail de thèse constitue bien une première expérience professionnelle.

Florent Deleflie, le 12 août 2002³.

**Ecole Doctorale Astronomie et Astrophysique d'Ile de France
Formation Doctorale «Dynamique des Systèmes Gravitationnels»**

**Laboratoire d'Accueil : Centre d'Etudes et de Recherche en Géodynamique et
Astrométrie - Observatoire de la Côte d'Azur, GRASSE**

"Mentor" : Philippe Bertrand, ATEMA Conseil

²Ce terme est récurrent dans les pages qui suivent, puisque l'un des principes de cette expérience est justement de présenter et de valoriser le doctorat comme un véritable premier projet professionnel.

³Pour plus d'informations sur le principe du «Nouveau Chapitre», consulter le site <http://www.abg.asso.fr/activites/nct/>

A la fin août 2002, je me rends compte qu'il manque dans la version adressée à l'Association Bernard Gregory (ABG) une analyse critique du déroulement de ces trois années de thèse : je n'évoque pas certaines difficultés, notamment d'ordre personnel, qu'il a fallu surmonter au début du projet. La motivation de tous les instants a finalement permis de transformer ces difficultés en atouts : il faut simplement un peu de temps pour trouver sa place dans un environnement donné. Corollaire : il y a également une vie en dehors du travail de doctorat, que ce soit à l'intérieur du laboratoire ou à l'extérieur. Heureusement !

Les enjeux du projet

Contexte général

Mon projet vise à développer une méthode originale d'orbitographie des satellites artificiels de la Terre sur de grandes périodes de temps, dans le but d'étudier les variations temporelles du champ de gravité. Il s'inscrit dans le cadre des études de dynamique orbitale menées à l'OCA/CERGA (Observatoire de la Côte d'Azur, Centre d'Etudes et de Recherche en Géodynamique et Astrométrie) au sein de l'équipe «Géodésie et Mécanique Céleste» dirigée par Pierre Exertier. Depuis 1974, date de sa création, le laboratoire a ainsi développé de très grandes compétences en dynamique orbitale, grâce notamment aux travaux initiés par François Barlier et Jean Kovalevsky.

La dynamique orbitale réunit à la fois la mécanique céleste et la géodynamique. Le but de cette discipline, qui est la compréhension des phénomènes affectant le système Terre, est double : il s'agit d'une part de proposer des méthodes de calcul du mouvement des corps, célestes ou spatiaux, à un degré de précision de l'ordre de quelques centimètres, et d'autre part d'établir des modèles capables de rendre compte des déviations (perturbations) des mouvements spatiaux dues au système Terre-Lune. Les techniques spatiales d'observation ayant énormément progressé, ceci est d'autant plus difficile aujourd'hui que la Terre est l'objet de l'Univers le plus observé à un tel degré de précision.

Ce que le projet apporte

Pour résoudre les difficultés liées aux arcs d'orbite calculés seulement sur quelques jours, et de manière opposée, je propose une méthode d'orbitographie qui permet de prendre en compte, à travers un seul très long arc, l'ensemble des observations disponibles pour un satellite donné, que ce soit depuis 1976 pour un satellite comme LAGEOS, ou depuis 2000 pour un satellite comme CHAMP. Cette méthode, appelée méthode de centrage, permet de ne retenir dans le mouvement orbital que la partie à longue période. Ce projet se situe dans le prolongement des efforts menés notamment par Georges Balmino, Nicole Borderies, Pierre Exertier et Gilles Métris pour mettre au point une première version de la méthode de centrage, qui ne s'appliquait qu'à deux satellites. La méthode peut désormais s'appliquer à l'ensemble des satellites géodésiques, puisqu'elle gère maintenant les orbites à faibles excentricités, aux dynamiques spécifiques.

Comme elle peut désormais être appliquée à une vaste classe d'orbites, la méthode de centrage laisse entrevoir un champ d'applications extrêmement large :

- orbitographie des satellites altimétriques ou d'observation de la Terre (Jason-1, ERS-2, ENVISAT, SPOT, TOPEX/POSEIDON). Par exemple, pour établir le niveau moyen des mers avec les missions altimétriques, il est essentiel de décrire de manière continue l'altitude du satellite sur de longues périodes de temps ;
- interprétation des perturbations orbitales des missions d'étude des variations temporelles du champ de gravité de la Terre (CHAMP, GRACE, GOCE). La longueur des arcs que nous générons permet de mettre en évidence l'influence de paramètres géodynamiques qui produisent sur les orbites des effets faibles mais cumulatifs ;
- étude du mouvement des débris spatiaux...

Les enjeux de notre projet portent en fait tout autant sur les aspects descriptifs des grands changements qui affectent la Terre (champ de gravité, fonte des glaces, circulation océanique, etc...) que sur les aspects de mécanique et de calcul de mouvements des corps.

En terme de mécanique spatiale, c'est sur le plan de l'analyse de mission à long terme que cette méthode peut se révéler efficace : sur quelle orbite placer les satellites GALILEO pour assurer une consommation minimale de carburant par exemple ?

Le CNES utilise déjà une première version de la méthode, appliquée au sein du logiciel CODIOR. Au regard d'une part de la pertinence de l'utilisation d'arcs longs en analyse de mission, d'autre part du nombre de satellites lancés ou à lancer sur des orbites quasi-circulaires (pas forcément autour de la Terre), cette méthode sera très facilement valorisable, et ce dès 2003. A plus long terme, parmi les extensions possibles, il reste une classe d'orbite à exploiter : les orbites à excentricités très fortes, notamment pour étudier les orbites des sondes autour d'autres planètes (Vénus par exemple).

Mon regard sur la gestion et le déroulement du projet

Un enjeu de méthode : le retour au «papier-crayon»

A l'heure où les méthodes purement numériques sont légion, développer une nouvelle méthode basée sur un algorithme analytique et en montrer la pertinence consistait un premier défi à relever. Les six premiers mois de la première année sont passés sans que je ne touche à un ordinateur : ils m'ont permis de me forger une solide culture des méthodes traditionnelles de mécanique céleste, et de dessiner les contours de cette vision cohérente entre géodynamique et mécanique spatiale qui me paraît nécessaire. Les applications numériques sont venues ensuite, une fois les bases acquises. Grâce à ce travail en amont, la méthode de centrage établit ainsi un lien explicite entre phénomènes géodynamiques et effets sur l'orbite. Aujourd'hui, j'aimerais présenter cette méthode comme une alternative, au moins pour une partie, aux méthodes dites «tout numérique», méthodes où ce lien explicite n'existe pas toujours. L'interprétation physique des perturbations est alors beaucoup plus difficile.

Un travail passionnant

Je n'ai jamais vraiment su trancher, au cours de mes études universitaires, entre des études de mathématiques et de physique. Cette double étiquette m'a été fort utile, puisque les développements analytiques ont été guidés par mes connaissances en physique, et que les mathématiques ont grandement facilité la modélisation de nombreux phénomènes physiques. Plus que dans n'importe quel autre domaine de l'astronomie, les études de dynamique orbitale appliquées à la Terre nécessitent de maîtriser l'ensemble de la chaîne de traitement des mesures, depuis l'acquisition et la transformation des données brutes, jusqu'à l'interprétation des perturbations orbitales en termes de phénomènes géodynamiques. Ce fut une grande chance pour moi qu'un sujet qui nécessite une double compétence en mathématiques et en physique soit proposé, d'autant que cela m'ouvre à la carrière d'astronome, l'astronomie étant pour moi une passion depuis de nombreuses années.

Le sens étymologique grec de passion est «souffrance»⁴. Il traduit bien la minutie avec laquelle il faut travailler pour construire des théories compatibles avec la précision centimétrique des mesures : il faut à la fois être endurant et acharné. Ce sont aussi des qualités lorsque l'on veut faire de la métrologie (des distances, du temps, des accélérations).

La gestion du temps

La gestion du temps est certainement le point le plus difficile à maîtriser, que ce soit à très court terme (la journée) ou à moyen terme (l'année). Le sujet étant bien cadré, son orientation initiale a été parfaitement respectée. J'ai sans doute passé plus de temps que prévu à la méthode de filtrage à appliquer aux données, mais ce développement particulier a donné lieu à une nouvelle théorie analytique du mouvement des satellites qui dépasse largement le seul cadre de la mise en œuvre de ce filtrage (théorie qui représente près de 400 pages de calcul dont la construction s'est étalée sur plus d'une année). Les principales difficultés sont venues des délais à tenir, les développements analytiques nécessitant, à l'inverse des approches purement numériques, parfois beaucoup plus de temps que prévu. Solution apportée : acharnement, et écoute des conseils des uns et des autres...

Outre le sujet, une autre chance a été d'intégrer une équipe dont non seulement les qualités scientifiques, mais également les qualités humaines sont reconnues. Je sais désormais ce qu'est un travail en équipe, et ai appris à en gérer les principales difficultés. Le terme «nous» que j'emploie çà et là traduit bien ce travail d'équipe. L'avancée des travaux a été résumée régulièrement, notamment pour tenir les partenaires informés. Quant aux collaborations quotidiennes, elles se sont faites sous la forme d'une grande complicité et d'une complémentarité efficaces (notamment pour la mise en œuvre informatique des développements) avec les chercheurs de l'équipe. L'implication des ingénieurs de l'équipe dans ces travaux a donné lieu à de nombreuses discussions dont chacun de nous a eu l'initiative à tour de rôle.

Le coût d'un projet d'équipe

Ce projet, dont j'ai d'abord été l'acteur et ensuite le moteur, est réellement un projet d'équipe : 5 à 10 personnes ont été plus ou moins impliquées (pour des discussions, développements théoriques, aspects informatiques, édition scientifique, ...) et notamment les deux ingénieurs de l'équipe (à 50% de leur temps principalement la dernière année). Outre les dépenses usuelles associées à un tel projet (missions, inscriptions aux colloques), le budget global est ainsi de l'ordre de 300 à 400 kE, constitué à 80% de masse salariale (ce chiffre ne prend pas en compte le coût lié à l'acquisition des données, pour la plupart issues du réseau mondial de télémétrie laser). 20% de ce chiffre correspondent à l'achat des calculateurs autonomes et très performants dont nous avons eu besoin pour mener à bien les développements. Le budget global apparaît ainsi relativement faible par rapport au coût des missions spatiales dont CODIOR peut désormais analyser l'orbite avant leur lancement.

⁴comme dans «pathologie»...

Mes principales compétences développées dans le cadre du projet

Mes principaux domaines d'expertise

Sur la base d'une formation universitaire, entamée après 3 années de classes «prépa», je dispose au terme de ces 3 années de thèse d'une double compétence : en mathématiques (mécanique céleste, mécanique spatiale, analyse de mission), et en physique (géodynamique globale : effets gravitationnels, non gravitationnels, étude de la variation temporelle de la répartition des masses à la surface et à l'intérieur de la Terre).

En termes de savoir-faire, les mots-clefs sont : modélisation (mise en équation, validation, le but essentiel étant la cohérence entre le modèle analytique et l'intégration numérique), informatique scientifique (élaboration de A à Z de logiciels opérationnels, maîtrise d'outils divers), algorithmie, résolution de problèmes inverses, manipulation de bases de données volumineuses (données GPS ou issues de la télémétrie laser).

Il me faut aussi mentionner les qualités qui me semblent indispensables partout où il y a des interactions entre différents acteurs - dans la recherche, pour l'enseignement, ou dans la vie quotidienne d'ailleurs - : structuration du discours, goût du contact, animation de groupes de travail notamment.

Outre les connaissances liées au projet, la principale compétence qu'il a fallu développer est le travail en temps partagé : impossible de ne pas mener plusieurs tâches de front, lorsqu'il faut s'attaquer aux données alors que la méthode analytique n'est pas complètement validée, qu'il faut réserver du temps pour l'enseignement et les quelques tâches d'observations, sans que cela nuise à l'avancée du projet, surtout quand plusieurs personnes sont concernées. D'autre part, les compétences que j'ai acquises reposent sur la double spécialisation inhérente au projet : mathématiques et physique, à travers le développement de méthodes de mécanique spatiale pour la modélisation d'effets géodynamiques. J'ai appris à aller chercher l'information déjà existante, pour savoir dégager la pertinence des nouveaux développements et les mettre en œuvre, pour ensuite pouvoir diffuser les nouveaux résultats.

Mon regard sur le métier de chercheur

Par ailleurs, je crois qu'il est impossible pour un chercheur, dans le domaine spatial, de se limiter à travailler dans son coin sur un sujet donné : il doit désormais être un véritable acteur des projets qu'il porte, en ayant une vision d'ensemble des différentes tâches à accomplir, même si ce n'est pas forcément lui qui les accomplit effectivement. C'est un des enseignements que je tire de ces trois années, et du «Stage d'Initiation à la Conduite de Projet» que j'ai suivi à l'automne 2000. Au cours de ces trois années, je me suis attaché à compartimenter les différentes activités que j'avais à mener de front, pour ensuite «sous-compartimenter» chacune des catégories et atteindre des tâches élémentaires. Cette notion de compartiment m'est utile, puisque c'est elle qui permet, d'emblée, d'avoir une vision d'ensemble d'un projet, et ce même si toutes les catégories ne se «sous-compartimentent» pas à la même vitesse. Je pense que tout le savoir-faire d'un chercheur repose sur deux aspects complémentaires : l'analyse d'un problème, la formulation de ce problème et sa mise en œuvre avec des moyens et du temps.

L'analyse d'un problème fait appel aux étapes scientifiques suivantes :

1) recherche et connaissance des travaux déjà effectués sur un problème donné (s'appuyer sur «l'épaule de ses prédécesseurs»), 2) pertinence des recherches à mener, 3) les recherches proprement dites, 4) diffusion de l'information.

La formulation du problème, est, elle, fortement liée à la notion de moyens. C'est lors de cette étape que le chercheur doit, à mon sens, associer un compartiment, pas forcément découpé de manière élémentaire, à un type de tâche à accomplir (recherche, validation, traitement de données, édition, ...).

C'est d'une certaine façon dans ce cadre que Pierre Exertier et moi avons soumis le projet DYNSPA en réponse à l'appel à idées lancé par le CNES pour la préparation de sa future politique scientifique.

Ma place dans la communauté

Je fais maintenant partie essentiellement de deux communautés, la communauté de mécanique céleste et la communauté d'étude de la Terre sur le plan global. Cela m'amène à faire partie du GRGS, Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale, et des Groupes de Recherche AGRET (Astrométrie, Systèmes de Référence) et GREX (Gravitation Expérimentale). De plus, la participation à différents colloques internationaux m'a fait connaître de nombreux collègues étrangers. J'ai animé et organisé différents ateliers de géodynamique, je fais désormais partie de l'équipe qui peut enseigner la matière, et essaie depuis un an de fédérer cette communauté au moyen d'un message hebdomadaire regroupant un certain nombre d'informations utiles à tous (divisées en cinq thèmes : océanographie spatiale, télémétrie laser et autres techniques, mécanique céleste, géodynamique, physique fondamentale). Mon rôle a également consisté à entretenir l'interface R&D entre notre équipe et le groupe MS/AM (Mathématiques Spatiales/Analyse de Mission) du CNES. Au-delà, grâce notamment à ma participation au Conseil Scientifique du CERGA et au Bureau de l'Ecole Doctorale, j'ai maintenant une certaine connaissance, même si elle est encore à compléter, du mode de fonctionnement de la recherche : rôle des différents acteurs, rapports de forces, interactions entre les institutions.

Enseignements personnels. Quelles retombées pour le projet ?

Je reviens un instant sur la gestion du temps, car je trouve que c'est ce qui est le plus difficile à maîtriser et à quantifier. Avec de la motivation et de la détermination, une équipe peut relever n'importe quel défi. Seul le temps qui passe peut l'en empêcher, dans un temps donné. Ce qu'il faut faire : travailler avec passion, et s'investir à chaque instant, quelquefois par périodes de 18 heures par jour, week-ends compris (que ce soit pour respecter les dates limites, pour permettre aux collaborateurs de continuer à avancer, ou pour expérimenter telle ou telle nouvelle idée). L'idéal est de pouvoir associer une gestion intuitive du temps, avec des plannings réalistes qui tiennent compte des impératifs de chacun. Il ne faut en aucun cas être déterminé par son agenda ; c'est même strictement l'inverse : il faut s'attacher à maîtriser son temps⁵.

Le projet conforte la place de l'équipe dans la communauté qui est la sienne. Elle dispose désormais d'outils complémentaires qui couvrent une large classe d'orbites. Ces outils peuvent être utilisés à la fois en analyse de mission (pour les besoins du CNES par exemple), ou pour l'ajustement de paramètres géodynamiques sur des arcs longs : la méthode de centrage appliquée à toute une constellation de satellites trouve là tout son intérêt, et pourrait peut-être avoir des applications dans d'autres domaines que la mécanique spatiale.

En guise de conclusion, je crois que quelle que soit la manière dont ils valorisent leur doctorat, les jeunes docteurs ne peuvent plus se permettre de rester cloîtrés dans leurs laboratoires, à rédiger ou consulter des grimoires, même si ce sont aujourd'hui des E-grimoires ou des i-grimoires. Parfois sans le savoir, ils développent de nombreuses compétences qui viennent compléter celles acquises «automatiquement» au cours de leur cursus, qu'il soit universitaire ou non. Je ne sais pas dans quel cadre je pourrai exploiter celles que j'ai acquises au cours de ces trois années, il est encore trop tôt pour le dire. Mais le «Nouveau Chapitre» a été pour moi l'occasion de les recenser rapidement. J'en ai conclu que les expressions «formation par la recherche» et «formation pour la recherche» que l'on oppose parfois ne sont absolument pas incompatibles : elles sont même complémentaires.

⁵c'est malheureusement beaucoup plus facile à dire qu'à faire...

Conclusions et perspectives

Il est maintenant possible de calculer sur de très grandes périodes de temps les orbites moyennes de tous les satellites artificiels de la Terre dédiés aux études géodynamiques : la théorie du centrage est accessible à une nouvelle classe d'orbites, grâce à une formulation en éléments non singuliers des longues comme des courtes périodes contenues dans le mouvement orbital.

Orbites quasi-circulaires moyennes

La présence de singularités dans les équations de la dynamique limitait fortement les possibilités d'application, puisque ces équations, quand elles sont exprimées en éléments képlériens, contiennent explicitement des divisions par l'inclinaison et l'excentricité. Si les satellites géodésiques ne sont jamais équatoriaux, ils sont pour la plupart placés sur des orbites quasi-circulaires.

Les éléments non singuliers donnent lieu à une formulation complexe des équations de la dynamique, qui s'expriment plus naturellement selon des éléments orbitaux traditionnels. Ils doivent n'apparaître que comme un moyen de mettre en œuvre la méthode dans sa nouvelle configuration, et non comme une complexité supplémentaire par rapport à la version du début des années 1990 : quels que soient les types de variables utilisées, les difficultés essentielles de la méthode résident plutôt dans les concepts utilisés (modèle d'orbite moyenne, adéquation entre la nature des éléments calculés et celle des éléments observés).

J'ai ainsi essayé dans toute l'étude de mettre l'accent sur l'importance du choix des variables dans chacune des étapes de la mise en œuvre de la méthode de centrage. L'expression des équations de la dynamique dans différents jeux de variables en est une illustration. Ce choix intervient dans chacun des concepts utilisés :

- l'expression des longues périodes contenues dans les seconds membres moyens des équations de la dynamique dépend du type de variables utilisées - variables de Delaunay, éléments képlériens, éléments non singuliers -, puisque la transformation entre ces différents jeux n'est pas linéaire ;
- ceci est également vérifié lors du calcul de la transformation non canonique qui permet d'obtenir les variables centrées ;
- le retrait analytique des courtes périodes contenues dans les orbites osculatrices est fondé sur une intégration analytique des équations de Lagrange. Cette intégration analytique utilise une hypothèse d'intégration qui dépend du type de variables utilisées ;
- le filtrage numérique des courtes périodes doit absolument être réalisé dans le même jeu de variables que celui dans lequel sont intégrées numériquement les équations de

la dynamique. Dans le cas contraire, certaines longues périodes peuvent être perdues lors de cette étape. Rien n'empêche, une fois cette intégration réalisée, de projeter l'orbite obtenue en éléments képlériens classiques. Cette dernière projection est purement géométrique, et non plus dynamique.

De plus, il est inutile de conserver des formulations ou des représentations en éléments non singuliers quand une projection en éléments képlériens classiques est possible. En particulier,

- les séries explicitant la transformation analytique réalisée une fois pour toutes des seconds membres moyens des équations de la dynamique sont codées en fonction des variables «excentricité» et «argument du périégée» ;
- la plupart des graphiques sont basés sur une projection de l'orbite en éléments képlériens traditionnels.

Hors du cadre particulier de la méthode de centrage, on peut généraliser certains concepts utilisés dans cette étude :

- les variables *osculatrices* sont celles qui décrivent le mouvement orbital dans toutes ses composantes : effets séculaires, longues périodes, courtes périodes. Ce sont elles qui sont générées, par intégration numérique, lors de la prise en compte des observations (mesures de distances). Les variables osculatrices permettent de déduire les variables centrées.

- les variables *centrées*, qui ne diffèrent des variables osculatrices que par les variations à courtes périodes (toutes celles-là, exactement celles-là, mais seulement celles-là). Ce sont elles qui permettent de décrire géométriquement les grandes caractéristiques d'une orbite : son demi-grand axe, son excentricité...

- les variables *moyennes*, elles, sont celles qui servent aux calculs des perturbations, que ce soit pour intégrer les équations moyennes de la dynamique ou pour formuler les courtes périodes d'une théorie. Elles sont relativement proches des variables centrées, et sont différentes de ce que les mécaniciens célestes appellent habituellement «variables moyennes», car ces dernières ne contiennent plus de variations à longues périodes. En géodésie spatiale, on les qualifie de *variables moyennes moyennes*. Ces variables moyennes moyennes permettent aussi de donner certaines caractéristiques des orbites : si l'on voulait par exemple déterminer les angles limites de libration du périégée de STELLA à l'aide des formules du chapitre 2, il faudrait en toute rigueur utiliser des variables ne contenant plus aucune variation dans le temps.

Nous avons mis en évidence de grandes différences de comportement dynamique entre des orbites d'excentricités faibles : selon les cas, le périégée peut être affecté, en première approximation, d'un mouvement libratoire ou de circulation. Cela est une caractéristique de nature topologique, déterminée par les conditions initiales. La formulation en éléments non singuliers mène désormais à des résidus plus faibles que celle en éléments orbitaux dès que l'excentricité est plus petite que quelques 10^{-2} .

La contribution des longues périodes à la géodynamique

L'estimation de coefficients géodynamiques à partir de l'interprétation des perturbations orbitales est habituellement basée sur une restitution d'orbites osculatrices. La méthode de centrage, elle, base l'estimation sur des orbites moyennes. Elle ne permet certes l'estimation que d'une partie des coefficients du champ de gravité, mais se révèle par nature même, complémentaire aux méthodes purement numériques : intuitivement, il est bien préférable d'utiliser des arcs longs pour mettre en évidence des phénomènes dont la période caractéristique est de quelques années ou plus.

Pour de multiples raisons, calculer des arcs longs d'orbites osculatrices est très difficile. On peut citer :

- l'intégration numérique des équations du mouvement : les erreurs dues aux algorithmes se propagent beaucoup plus vite que dans CODIOR, puisque le pas d'intégration est 300 à 1000 fois plus petit ;
- la prise en compte des observations : temps de calcul prohibitif, surtout quand de nombreuses itérations des estimations sont nécessaires. On peut se demander également quel est l'impact des erreurs de mesures et des trous de données ;
- la validité des modèles géodynamiques, qui doivent être compatibles à la fois avec les courtes et les longues périodes. C'est sans doute le point le plus délicat, d'autant plus que le nombre d'observations et de paramètres à gérer augmente vite de manière exponentielle. Il peut atteindre plusieurs centaines de milliers sur une période de vingt ans, ce qui nuit à l'application globale d'une restitution d'orbite osculatrice sur une durée aussi longue.

Cependant, l'utilisation opérationnelle de CODIOR dans un but géodynamique est encore, pour une certaine part, à venir : il reste certaines petites améliorations à apporter au modèle d'orbite moyenne, notamment dans la modélisation des forces non gravitationnelles (le premier effort sera porté sur une étude générale de l'influence des poids accordés aux observations, et leur lien avec le calcul d'effets fins, comme les passages du satellite dans l'ombre de la Terre, l'effet Yarkovsky ou encore les pressions de radiation (albédo et infrarouge)). Cela entraîne des résidus, en particulier sur l'excentricité, pour l'instant encore un peu importants pour permettre une estimation ultra-précise et idéale de nombreux coefficients zonaux du champ de gravité. La pleine valorisation du logiciel pour la géodynamique nécessite encore quelques efforts, surtout si l'on cherche à interpréter les variations temporelles du champ de gravité en termes de transfert de masse à grandes échelles spatiales, et ce, même si tous les concepts sont validés et les difficultés liées au caractère semi-analytique de la méthode surmontées.

Le but n'est pour autant pas très loin : une seule amélioration du modèle d'orbite moyenne, et c'est plus de 80 années d'orbite qui sont recalculées par un seul «lancement» du logiciel (rappelons que les observations moyennes sont construites de manière complètement indépendante).

Les quelques applications géodynamiques de cette étude montrent l'importance et l'influence des modèles de forces non gravitationnelles dans l'estimation des paramètres géodynamiques. Cela illustre la finesse et la rigueur nécessaires à l'estimation de ces paramètres. De telles estimations ne peuvent se faire sans une connaissance très précise de la dynamique



de chaque orbite, connaissance qui ne peut s'acquérir qu'une fois les concepts de mécanique céleste complètement entérinés.

Enfin, l'utilisation d'équations normales moyennes peut désormais être placée dans le cadre d'un ensemble de satellites géodésiques. Les travaux en cours devraient aboutir à une meilleure décorrélation des paramètres du champ de gravité et de ses variations spatio-temporelles à grande longueur d'onde. Ces travaux concernent LAGEOS-1, LAGEOS-2, STARLETTE, STELLA, AJISAI, TOPEX/Poséïdon, et pourraient être étendus à de nombreux autres satellites (JASON-1, par exemple).

L'analyse de mission à long terme

D'autre part, le modèle de forces moyennes est désormais relativement complet, et les orbites formulées en éléments non singuliers peuvent ainsi être gérées dans CODIOR au même titre que celles formulées en éléments képlériens classiques.

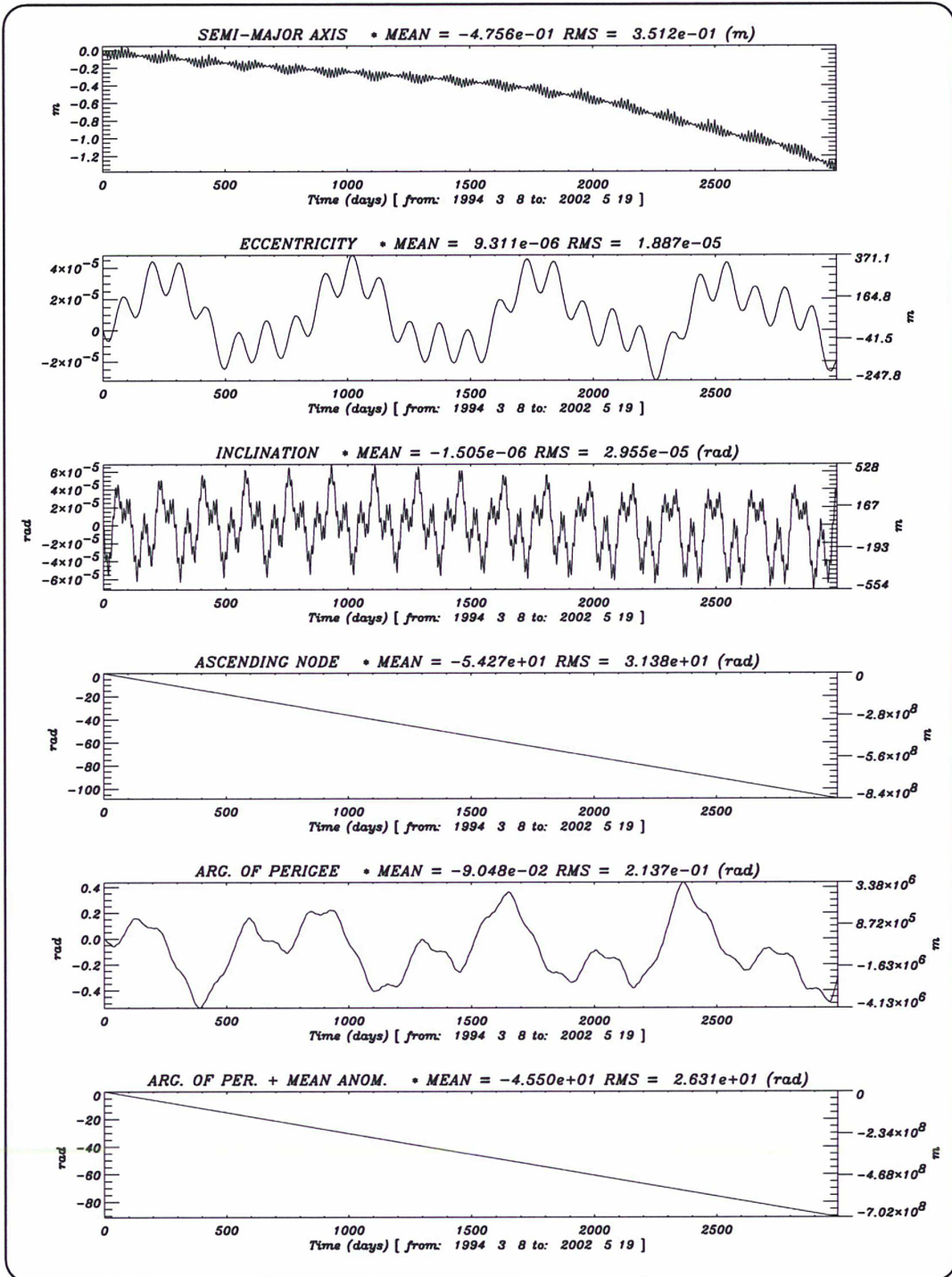
Il est d'un grand intérêt d'analyser la trajectoire d'une mission spatiale sur de grandes périodes de temps. Le concept du mouvement moyen est parfaitement adapté à ce genre d'analyse, pour les missions à haute altitude comme pour les autres. Ceci est d'autant plus vrai que le logiciel CODIOR peut désormais prendre en compte des données accélérométriques, pour pallier aux déficiences des modèles de forces non gravitationnelles à basse altitude.

Les développements menés depuis quelques années, ainsi que ceux à venir, renforcent la place de l'exploitation du mouvement moyen pour la géodynamique et l'analyse de mission. CODIOR pourrait ainsi se révéler une alternative, certes partielle, aux méthodes dites «tout numérique».

Vers une modélisation des perturbations instantanées

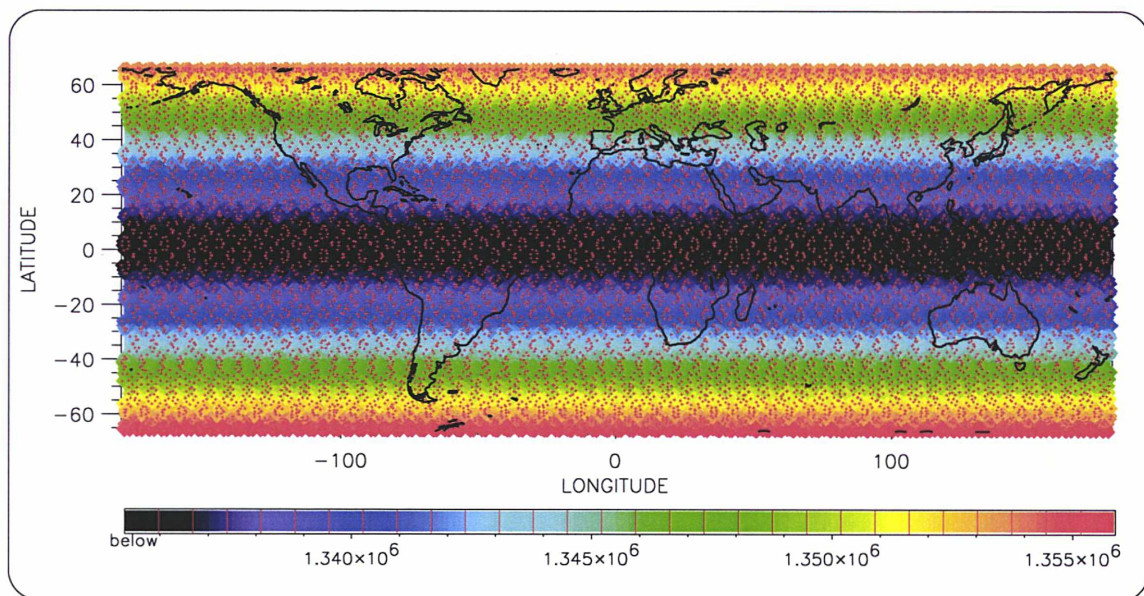
En guise d'illustration, l'orbite de TOPEX/Poséïdon sur 8 ans que j'ai calculée traduit bien, malgré les manœuvres subies par le satellite, l'ensemble de la dynamique de l'orbite sur une telle période. La figure page 201 montre l'évolution temporelle des éléments orbitaux moyens, et l'on devine grâce à la projection de cette orbite à la surface de la Terre (figure page 202) que même l'orbite moyenne de TOPEX/Poséïdon est à traces répétitives. Il faudrait étudier de plus près les relations entre la dynamique de l'orbite d'une part (incluant les manœuvres qui forcent les variations de ω et Ω), et la rotation de la Terre d'autre part, pour comprendre la dispersion des points.

Une des prochaines étapes du développement pourrait ainsi être la compréhension fine de l'impact de perturbations instantanées sur le mouvement moyen : manœuvres orbitales, corrections d'attitude, passages dans le cône d'ombre de la Terre, ... Il pourrait s'agir d'intégrer directement l'accélération moyenne générée par une telle perturbation. Le formalisme retenu pourrait être celui des distributions, ou tout simplement celui des séries de fonctions qui permettraient de rendre continue voire dérivable ces perturbations instantanées sur un intervalle $\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]$ autour des instants t_0 des poussées. Cette approche permettrait de préserver la description continue de l'orbite moyenne. Pour l'instant, la non prise en compte des



Orbite à longues périodes de TOPEX/Poséidon.

On remarquera en particulier que l'argument du périée ω ne circule pas, mais libre entre deux valeurs limites.



Projection de l'orbite moyenne de T/P sur la Terre.

Les points rouges indiquent les positions moyennes de T/P. Comme l'orbite osculatrice, l'orbite moyenne de T/P est à traces répétitives. Les altitudes moyennes à la surface de la Terre sont repérées par les niveaux de couleur. La Terre étant aplatie aux pôles, elles sont plus basses à l'équateur.

manœuvres des satellites subissant des poussées comme TOPEX/Poséidon, affecte la valeur moyenne des résidus (figure page 203).

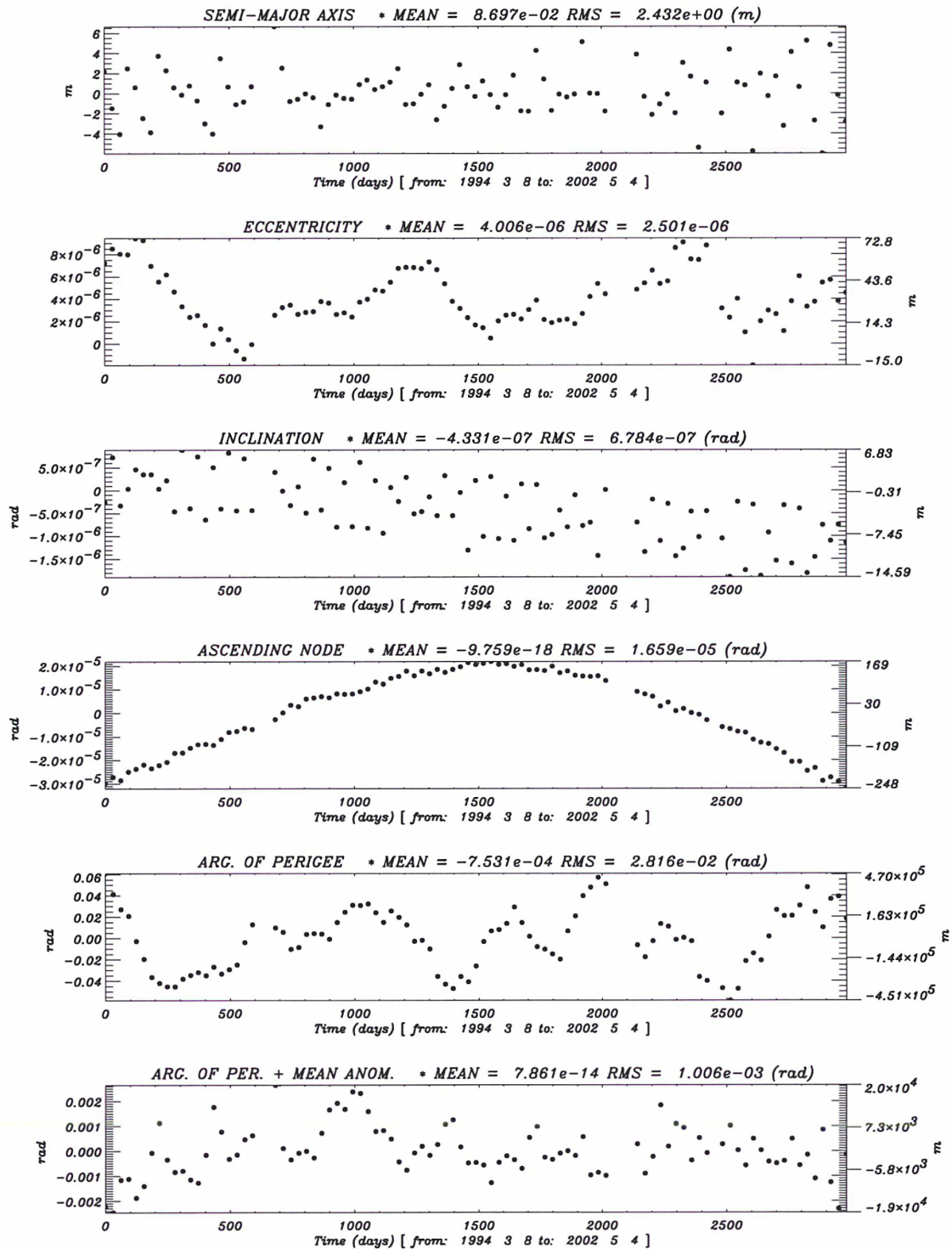
Les résonances profondes du champ de gravité

Un autre des prochains développements concerne la prise en compte des résonances profondes dues au champ de gravité terrestre, avec des périodes qui peuvent atteindre plusieurs années. Les plus courtes de ces résonances, d'une période de quelques jours, sont pour l'instant absentes des observations grâce au processus de filtrage qui peut les détecter sans pour autant les calculer avec une exactitude parfaite. On détecte même dans l'orbite de CHAMP une variation de l'amplitude de ces résonances (figure page 204), ce qui renforce les possibilités d'étude de la modélisation de tels effets. Pour cela, on pourrait par exemple s'inspirer du calcul explicite, dans un pur cadre de mécanique céleste, des résonances entre satellites naturels, tel qu'il est présenté dans [Champenois and Vienne, 1999].

Une étude fine devra également prendre en compte les potentiels de troisièmes corps, afin de faire intervenir dans un seul angle, les éléments angulaires du satellite, et les éléments angulaires des corps perturbateurs M_P et ω_P :

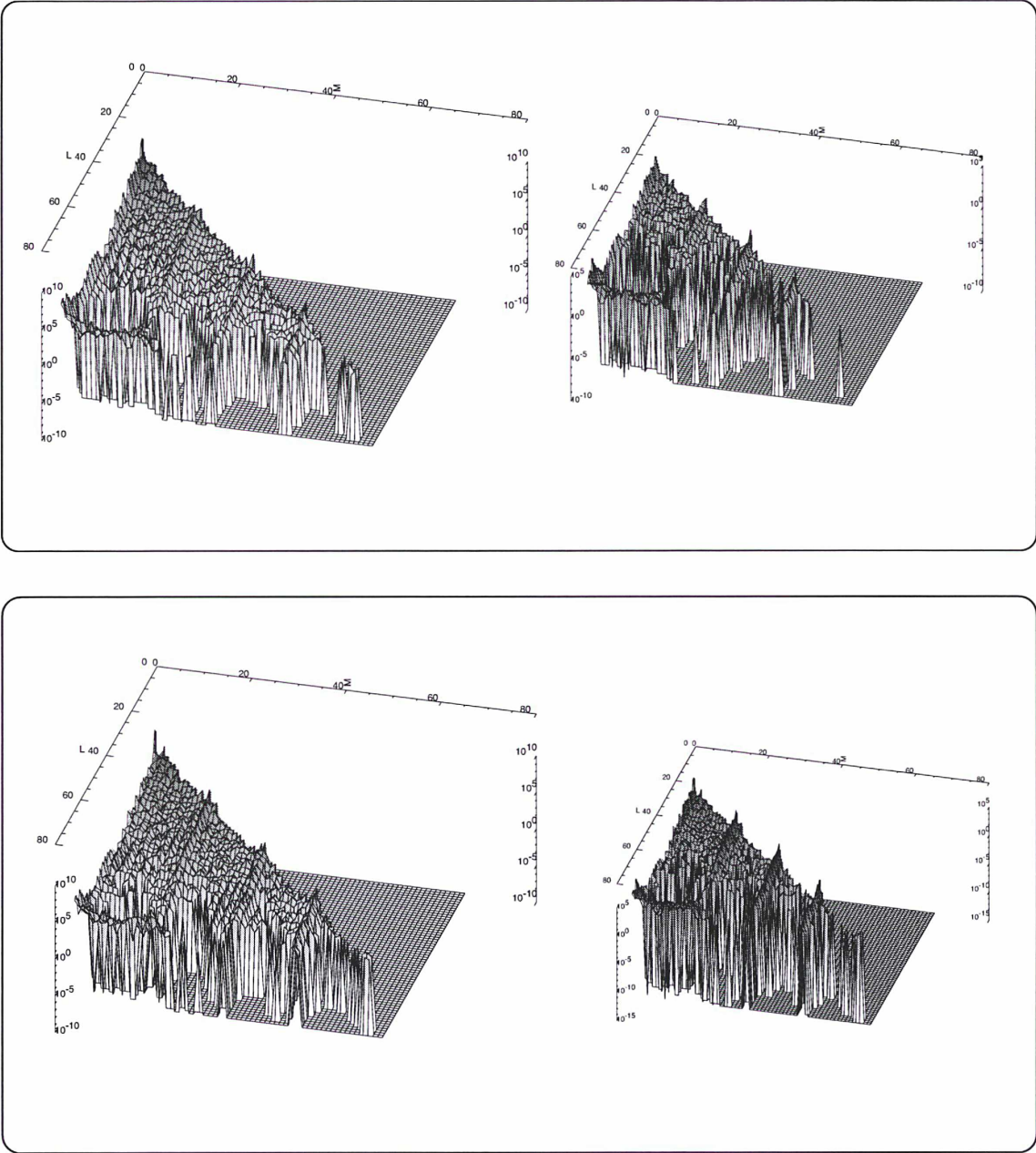
$$\psi_{n,m,p,p',q,q'} = (n - 2p + q)M - (n - 2p' + q')M_P + (n - 2p)\omega - (n - 2p')\omega_P + m(\Omega - \Omega_P)$$

Le potentiel de troisième corps peut en effet se mettre sous la forme :



Résidus sur l'orbite T/P pour chacun des éléments.

Les résidus contiennent tout ce que le modèle d'orbite moyenne ne contient pas. En particulier, les manœuvres affectent le demi-grand axe, et J_2 entraîne une variation parabolique de la longitude du nœud ascendant (chapitre 6).



Amplitudes des effets du potentiel sur CHAMP.

Dans la solution aux équations de Lagrange présentée en annexe D, un degré n et un ordre m du champ de gravité sont associés à une amplitude sur chacun des éléments. La figure du haut correspond à l'élément C , celle du bas à la longitude du nœud acendant Ω . On distingue parfaitement, sous forme de pics, l'effet des résonances aux ordres multiples de 16. Sur une même ligne, la figure plus petite représente l'évolution, centimétrique, de ces amplitudes au bout de deux mois. Les amplitudes sont exprimées en mètres selon une échelle logarithmique.

$$U_{n,m} = \frac{\mathcal{G}M_P}{a_P} \left(\frac{a}{a_P}\right)^n \delta_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sum_{p=0}^n \sum_{p'=0}^n F_{n,m,p}(i) F_{n,m,p'}(i_P) \\ \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{q'=-\infty}^{+\infty} H_{n,p,q}(e) G_{n,p',q'}(e_P) \cos \psi_{n,m,p,p',q,q'}$$

où l'on pourrait faire intervenir les fonctions $Hcos$ et $Hsin$, analogues pour un potentiel extérieur aux fonctions $Gcos$ et $Gsin$. Cette formulation ne se substituerait pas aux calculs effectués pour le troisième corps en section 1.2.2 (où ce sont les cosinus directeurs qui caractérisent la position du corps perturbateur), mais permettrait de calculer finement l'influence de chaque paramètre.

On peut introduire pour cela $\beta = \frac{e}{1+\eta}$ et surtout l'angle

$$\tilde{\psi}_{n,m,p,p',q,q'} = (n-2p+q)\lambda - (n-2p'+q')M_P - (n-2p')\omega_P + m(\Omega - \Omega_P)$$

de telle sorte que $\tilde{\psi}_{n,m,p,p',q,q'} = \psi_{n,m,p,p',q,q'} + q\omega$.

Les fonctions $Hcos$ et $Hsin$ sont ainsi définies par :

$$\begin{array}{lcl} Hcos_{n,p,q}(C, S) & = & H_{n,p,q}(e) \cos(q\omega) \\ Hsin_{n,p,q}(C, S) & = & H_{n,p,q}(e) \sin(q\omega) \end{array}$$

Cas $n-2p+q=0$

De

$$H_{n,p,q}(e) = \frac{(-\beta)^{n-2p}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \sum_{d=\sup(0,2p-n)}^{\inf(2p+1,n+1)} \binom{2p+1}{d} \binom{2n-2p+1}{n-2p+d} \beta^{2d}$$

on déduit :

$$\left| \begin{array}{l} Hcos_{n,p,q}(C, S) = \frac{(-1)^{n-2p}}{(1+\eta)^{n-2p} (1+\beta^2)^{n+1}} (C^2 + S^2)^{\frac{n-2p-|q|}{2}} \\ \sum_{d=\sup(0,2p-n)}^{\inf(2p+1,n+1)} \binom{2p+1}{d} \binom{2n-2p+1}{n-2p+d} \beta^{2d} \\ \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j} C^{|q|-2j} S^{2j} \end{array} \right|$$

et pour $q \neq 0$:

$$Hsin_{n,p,q}(C, S) = \frac{(-1)^{n-2p}}{(1+\eta)^{n-2p} (1+\beta^2)^{n+1}} (C^2 + S^2)^{\frac{n-2p-|q|}{2}} \sum_{d=\sup(0, 2p-n)}^{\inf(2p+1, n+1)} \binom{2p+1}{d} \binom{2n-2p+1}{n-2p+d} \beta^{2d} \frac{|q|}{q} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|-1}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j-3} C^{|q|-2j-1} S^{2j+1}$$

Cas $n - 2p + q \neq 0$

De

$$H_{n,p,q}(e) = \frac{(-\beta)^{|q|}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{r=0}^{h_r} P_K (1+\eta)^r \right) \left(\sum_{i=0}^{h_i} Q_K (1+\eta)^i \right) \beta^{2d}$$

on déduit :

$$Hcos_{n,p,q}(C, S) = \frac{(-1)^{|q|}}{(1+\eta)^{|q|} (1+\beta^2)^{n+1}} \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{r=0}^{h_r} P_K (1+\eta)^r \right) \sum_{i=0}^{h_i} Q_K (1+\eta)^i \beta^{2d} \times \left(\sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j} C^{|q|-2j} S^{2j} \right)$$

et pour $q \neq 0$:

$$Hsin_{n,p,q}(C, S) = \frac{(-1)^{|q|}}{(1+\eta)^{|q|} (1+\beta^2)^{n+1}} \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{r=0}^{h_r} P_K (1+\eta)^r \right) \sum_{i=0}^{h_i} Q_K (1+\eta)^i \beta^{2d} \times \left(\frac{|q|}{q} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|-1}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j-3} C^{|q|-2j-1} S^{2j+1} \right)$$

Géodynamique et mécanique céleste

La portée de la méthode de centrage pourra encore être étendue si l'on dispose de davantage d'observations « moyennes », en particulier dans l'optique de l'étude des satellites de basses altitudes. Le filtrage numérique des observations limite pour l'instant le nombre d'observations

moyennes disponibles (1 point tous les 24 jours pour un satellite comme LAGEOS), même s'il est largement suffisant pour les satellites élevés. Cela est par contre gênant dans le cas de missions à basses altitudes (CHAMP), ou lancées depuis peu de temps (GRACE).

En tant que véritable théorie «planétaire», la méthode de centrage a certainement encore de beaux jours devant elle, en tant que méthode semi-numérique. Très schématiquement, la méthode traite analytiquement tout ce qu'il est possible et utile de traiter analytiquement, et traite numériquement tout le reste.

Je voudrais conclure dans un cadre de pure mécanique céleste, et de développement de méthodes spécifiques.

[Wnuk, 1999] précise : "Qualitative analysis of a satellite motion needs an application of analytical formulas that describe the motion. Thus the development of analytical theories is still a task of great importance".

Il continue : "in order to be effective and precise, the analytical theory should satisfy the following requirements : (1) the theory should take into account the influence of all zonal and tesseral harmonics of an arbitrary degree and order, (2) it should be of appropriately high order for zonal harmonics, (3) it should include second order perturbations due to tesseral harmonics coefficients as well as perturbations due to products of zonal and tesseral harmonics, (4) it should include resonance effects, and (5) it should not contain any singularities for inclination and eccentricity. (...) None of the existing theories satisfies all these requirements."

Les développements analytiques ont donc, s'il était encore besoin de les justifier, de beaux jours devant eux. Et en particulier la méthode de centrage, qui apparaît comme une véritable théorie «planétaire». Et *a fortiori* si ces développements, utilisés dans un cadre géodynamique ou non, se révèlent plus performants que les méthodes numériques dans certains cas bien particuliers. Dans une certaine mesure, les développements menés depuis 3 ans pour cette étude répondent en partie à certains des points mentionnés plus haut par Edwin Wnuk. Il resterait maintenant à aborder les autres.

Un autre champ d'investigation pourrait compléter les types d'excentricités accessibles à la méthode. Les excentricités fortes, *i.e.* supérieures à 0.1, nécessiteraient en effet des études d'un autre type. Toutes les étapes de la méthode devraient être analysées de nouveau : depuis l'intégration numérique des équations du mouvement (quelle stabilité pour les algorithmes ? Voir par exemple [Emel'yanenko, 2002]), formulation des forces moyennes (qui sont pour la plupart pour l'instant développées en excentricité), quel concept de freinage moyen (puisque le corps serait soumis au cours d'une même révolution à des densités atmosphériques largement différentes ?).

Une telle réflexion permettrait également de placer la méthode dans un cadre planétaire, et pourrait exploiter les données orbitales de missions autour d'autres planètes du système solaire (Vénus, Mars). On pourrait en profiter pour effectuer les développements en éléments non singuliers également pour les faibles inclinaisons.

Parmi les champs d'application de cette étape, figure aussi la reconstruction explicite des orbites de certains débris spatiaux, situés au même endroit à un instant donné, et séparés les uns des autres par une explosion (troisième étape de fusée, poussées lentes et continues ou

fortes et rapides). Le grand pas d'intégration utilisé dans CODIOR rend en effet compatible l'analyse des trajectoires d'un grand nombre d'objets sur de longues périodes de temps, avec un temps de calcul très raisonnable. Voir [Moons, 1993] pour évoquer les points déjà abordés dans ce domaine.

Les apports de ces travaux

Le premier apport réside assurément dans la formulation des équations de la dynamique dans un jeu de variables spécifiques, pour étudier les longues périodes du mouvement orbital. Le chapitre sur le filtrage des orbites utilise une théorie tout à fait originale, qui vient compléter la panoplie des théories d'ordre 1 bien connues comme [Kaula, 1966] ou [Brouwer, 1959]. Le chapitre sur la moyennisation concentre la partie hamiltonienne de ces travaux qui est, en quelque sorte, la partie la plus moderne.

Le second apport est relatif à sur l'estimation de paramètres géodynamiques spécifiques. Il met en évidence l'intérêt de revenir à la dynamique en tant que discipline très puissante, en particulier en géodésie spatiale où tout ou presque, se fait désormais par des techniques numériques.

Epilogue

En conclusion, ne s'intéresser qu'aux effets à longues périodes rompt le mixage entre effets à courtes et à longues périodes dans les coefficients zonaux et tesséraux du champ de gravité. En conséquence, des imprécisions et indéterminations sur les paramètres causant des effets à courtes périodes (en toute rigueur : à l'exception de possibles effets d'aliasing ou de biais) n'ont pas d'influence sur les estimations finales. La méthode développée à travers la théorie du mouvement moyen ne permet certes pas d'estimer l'ensemble du champ de gravité d'un corps central, c'est vrai. Mais elle met en évidence l'intérêt d'appliquer aux satellites artificiels des méthodes et des concepts de mécanique céleste.

Comme je le dis plus haut, de nouveaux développements pourraient venir de la prise en compte de perturbations instantanées, ou d'une formulation complémentaire pour les excentricités fortes (pour envisager une application à Mars Express par exemple ?). Le logiciel pourrait aussi être adapté pour permettre un calcul explicite des trajectoires d'un grand nombre d'objets (débris spatiaux, familles d'astéroïdes aussi ?).

Annexes

Annexe A

Synthèse des étapes de la théorie

A.1 Motivation

Que ce soit dans un but d'interprétation géodynamique des perturbations orbitales ou pour l'analyse de missions spatiales, on souhaite pouvoir calculer les orbites des satellites artificiels sur de grandes périodes de temps. Les arcs les plus longs que nous avons calculés sont par exemple de l'ordre de 20 ans pour STARLETTE (100 000 révolutions) et de 200 jours pour CHAMP (3100 révolutions). Ces études sur le long terme permettent notamment d'étudier les modifications profondes de la nature des orbites, et de mettre en évidence d'une manière continue des phénomènes géodynamiques qui ont des effets très faibles mais cumulatifs sur les orbites. De plus, notre approche permet de prendre en compte, dans le mode « restitution », l'ensemble des données disponibles dans un seul arc pour un satellite donné, avec un minimum d'inconnues, permettant une décorrélation optimale des phénomènes.

Il faut pour cela disposer d'un modèle d'orbite qui soit compatible avec un pas d'intégration grand, pour l'intégration numérique des équations du mouvement sur plusieurs dizaines de milliers de révolutions orbitales. En particulier :

- les modèles géodynamiques utilisés doivent être fiables sur le long terme,
- les algorithmes constituant l'ensemble de la méthode (intégration numérique, filtrage des observations) doivent assurer la pertinence des trajectoires moyennes sur le long terme : la mise en évidence d'effets faibles mais cumulatifs est à ce prix.

A.2 Principe

Le mouvement orbital est décrit par un jeu d'éléments orbitaux. A la différence de descriptions plus classiques en positions-vitesses, ce mode de description permet de distinguer dans chacun des éléments des courtes et des longues périodes.

Le jeu d'éléments retenu permet de décrire toutes les orbites des satellites géodésiques, puisqu'il est non singulier en excentricité.

L'idée est d'éliminer de manière analytique la dépendance des équations du mouvement avec la variable rapide :

- les forces dérivant d'un potentiel (champ de gravité, marées, troisièmes corps, pression de radiation sans ombre) sont traitées dans un cadre hamiltonien. Les perturbations sont développées selon un petit paramètre (J_2) jusqu'à l'ordre 2, 3, 4 ou 5 selon les

cas. L'élimination de la variable rapide repose sur un algorithme présenté dans [Deprit, 1969], et est réalisée une fois pour toutes ;

- les forces ne dérivant pas d'un potentiel (freinage atmosphérique, effets relativistes, ...) sont traitées numériquement : l'élimination de la variable rapide est réalisée au moyen de quadratures.

Une fois la variable rapide éliminée, le système différentiel est intégré numériquement avec un pas d'intégration 100 à 1000 fois plus grand que celui utilisé dans les méthodes purement numériques. Avec ses deux étapes complémentaires, algorithme analytique puis intégration numérique, la méthode est dite *semi-numérique*.

A.3 Etapes successives

1. Hypothèse de base : le jeu de variables décrivant l'orbite est développable en série de Fourier. Cela permet de définir une période de coupure (la période de révolution du satellite) et de distinguer ainsi les composantes à courtes et à longues périodes dans le mouvement du satellite
2. Le but de la méthode est de définir un nouveau jeu de variables, qui contient les longues périodes du mouvement : exactement celles-là, toutes celles-là, mais seulement celles-là.
3. La technique de l'élimination de la dépendance des perturbations avec la variable rapide repose sur des dérivées de Lie. Cette transformation, qui est canonique, est caractérisée par un générateur qui est lui-même défini par l'expression de ses dérivées partielles par rapport à la variable rapide.
4. Les variables définies à partir de ce générateur ne dépendent plus de la variable rapide : on parle de variables *moyennes* et de système différentiel moyen associé.
5. Le générateur est donc défini à une constante près, constante qui est en fait fonction des longues périodes. Les variables moyennes ne correspondent donc pas tout à fait aux variables définies en 2., puisqu'il existe une infinité de mouvements moyens.
6. Cette indétermination mène à la notion de variables *centrées*, variables qui ne diffèrent des variables moyennes que par des termes à longues périodes : les variables centrées contiennent toutes les longues périodes du mouvement initial.
7. Ce "recalage" des longues périodes correspond à une nouvelle transformation qui cette fois n'est plus canonique. En conséquence ([Métris, 1991]), il n'est pas possible d'obtenir un système différentiel centré. C'est donc le système moyen qu'il faut intégrer numériquement.
8. Après l'intégration du système différentiel moyen, l'ajout analytique de longues périodes permet d'obtenir les variables centrées.
9. Parallèlement à la transformation analytique puis à l'intégration numérique du système différentiel, un processus de filtrage qui élimine les courtes périodes permet de déduire à partir d'éléments osculateurs, des éléments de la même nature que ceux générés par CODIOR : les éléments centrés «observés». Ils définissent les conditions initiales des systèmes différentiels moyens, et constituent les observations sur lesquelles s'appuie la restitution d'orbite.

Parallèlement, une transformation des orbites osculatrices permet de générer les “observations” moyennes sur lesquelles s’appuie la méthode, observations moyennes qui sont d’une nature comparable aux éléments moyens intégrés numériquement. Les orbites osculatrices sont construites sur les plus courtes périodes de temps possibles, à partir de données issues des réseaux de poursuite de géodésie spatiale (télémétrie laser en particulier).

Cette transformation est assimilée à un filtrage des orbites osculatrices, qui élimine dans chacune des variables décrivant le mouvement, toutes les périodes inférieures à une période de coupure donnée. Cette période de coupure dépend des caractéristiques orbitales de chaque satellite. Elle doit être suffisamment élevée pour permettre d’éliminer les premières résonances dues à la commensurabilité entre la période de révolution orbitale et la période de révolution sidérale de la Terre.

La transformation des orbites osculatrices est réalisée indépendamment du programme CODIOR, et comporte deux étapes :

1. la première est analytique : elle se base sur une formulation explicite des courtes périodes, grâce à une intégration analytique du premier ordre des équations de Lagrange exprimées en éléments non singuliers en excentricité. Cette étape permet de filtrer les courtes périodes dont l’amplitude est comprise entre 10 kilomètres et un décimètre. Il y a dans le signal filtré analytiquement autant de points qu’il y en avait dans l’orbite osculatrice ;
2. la seconde étape filtre numériquement les courtes périodes résiduelles encore contenues dans le signal filtré analytiquement. Ce filtrage doit être explicitement réalisé dans le jeu de variables dans lequel sont intégrées les équations du mouvement, au risque de dégrader certaines longues périodes. Le filtrage numérique permet d’obtenir un point moyen «dynamique» tous les 20 à 30 jours, en moyenne.

Annexe B

Transformations entre jeux de variables

Pour les raisons évoquées dans l'introduction, tous les développements ont été exprimés dans des jeux d'éléments orbitaux, déduits du jeu classique d'éléments képlériens $a e i \Omega \omega M$. Nous avons été amenés à utiliser des jeux différents selon les besoins et les contraintes, car la mise en œuvre de la nouvelle version de la méthode de centrage repose en partie sur des programmes existant avant mon arrivée dans l'équipe. Ainsi, l'intégration numérique est réalisée dans le jeu dit de «type 6», même si le calcul des dérivées partielles des équations de la dynamique est rendu complexe par le fait que les variables ne sont pas toutes indépendantes entre elles; la théorie analytique de retrait des courtes périodes des orbites osculatrices est exprimée dans le jeu dit de «type 3»; tous les graphiques ont été projetés en éléments képlériens dit de «type 2» : voir table B.1.

Il faut donc pouvoir relier entre eux ces différents jeux de variables : d'une part en calculant les dérivées partielles d'une même quantité¹ fonction de deux jeux différents, d'autre part en écrivant les jacobiens des transformations².

Tout repose sur la formule de la différentielle d'une fonction composée, que je rappelle

¹un potentiel de marées par exemple, qui peut tout autant s'exprimer en fonction des éléments orbitaux classiques ou des éléments non singuliers.

²des matrices 6×6 du type $\frac{\partial \text{Type}_n}{\partial \text{Type}_m}$

TAB. B.1 – Inventaire des différents jeux de variables.

Tous les jeux sont déduits du jeu classique d'éléments képlériens. Pour être exhaustif dans cet inventaire, je mentionne également le jeu de coordonnées sphériques dit de «type 5», même s'il n'intervient pas explicitement dans CODIOR. Pour pouvoir traiter l'intégralité des problèmes de mécanique céleste, il resterait à ajouter un ou plusieurs jeux de variables universelles (également non singuliers en inclinaison).

| | | | | | | |
|--------|--------------------|-----------------------|------------------------------|------------------------|---------------------|------------------------|
| Type 1 | x | y | z | \dot{x} | \dot{y} | \dot{z} |
| Type 2 | a | e | i | Ω | ω | M |
| Type 3 | a | $C = e \cos \omega$ | i | Ω | $S = e \sin \omega$ | $\lambda = \omega + M$ |
| Type 4 | $L = \sqrt{\mu a}$ | $G = L\sqrt{1 - e^2}$ | $H = G \cos i$ | $l = M$ | $g = \omega$ | $h = \Omega$ |
| Type 5 | r | φ | λ | \dot{r} | $\dot{\varphi}$ | $\dot{\lambda}$ |
| Type 6 | $L = \sqrt{\mu a}$ | $C = e \cos \omega$ | $H = L\sqrt{1 - e^2} \cos i$ | $\lambda = \omega + M$ | $S = e \sin \omega$ | $h = \Omega$ |

ci-après dans le cas de deux variables.

On considère deux variables r et s indépendantes. Ces deux variables permettent de définir deux nouvelles variables³, x et y : $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$. Une fonction z de x et y ($z = F(x, y)$) définit donc une fonction de r et s : $z = f(r, s)$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ce qui est vrai pour 2 variables est également vrai pour 6. En envisageant l'expression d'une même quantité fonction des variables de type 2 (fonction f) ou des variables de type 6 (fonction F), on peut déduire de :

$$f(a, e, i, \Omega, \omega, M) = F(L, C, H, \lambda, S, \Omega)$$

les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial F}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial e} &= \frac{\partial F}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial e} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial e} + \frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial e} \\ \frac{\partial f}{\partial i} &= \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial i} \\ \frac{\partial f}{\partial \omega} &= \frac{\partial F}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial \omega} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + \frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \omega} \end{aligned}$$

³fonctions !

On conclut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\partial F}{\partial L} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \cos i \frac{\partial F}{\partial H} \\
 \frac{\partial f}{\partial e} &= \cos \omega \frac{\partial F}{\partial C} - \frac{L e \cos i}{\eta} \frac{\partial F}{\partial H} + \sin \omega \frac{\partial F}{\partial S} \\
 \frac{\partial f}{\partial i} &= -L \eta \sin i \frac{\partial F}{\partial H} \\
 \frac{\partial f}{\partial \Omega} &= \frac{\partial F}{\partial \Omega} \\
 \frac{\partial f}{\partial \omega} &= -e \sin \omega \frac{\partial F}{\partial C} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} + e \cos \omega \frac{\partial F}{\partial S} \\
 \frac{\partial f}{\partial M} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

CODIOR intègre les équations moyennes dans les variables de type 6. Il faut donc relier les dérivées partielles type 6 aux dérivées partielles type 3, puisque les équations de la dynamique s'expriment plus naturellement dans ce dernier jeu de variables. De même que précédemment, on peut déduire de

$$f(a, C, i, \Omega, S, \lambda) = F(L, C, H, \lambda, S, \Omega)$$

les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\partial F}{\partial L} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \cos i \frac{\partial F}{\partial H} \\ \frac{\partial f}{\partial C} &= \frac{\partial F}{\partial C} - \frac{LC \cos i}{\eta} \frac{\partial F}{\partial H} \\ \frac{\partial f}{\partial i} &= -L\eta \sin i \frac{\partial F}{\partial H} \\ \frac{\partial f}{\partial \Omega} &= \frac{\partial F}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{\partial F}{\partial S} - \frac{LS \cos i}{\eta} \frac{\partial F}{\partial H} \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

(B.3)

Annexe C

Les équations de la dynamique

Je rappelle dans cette annexe les équations de Gauss et de Lagrange qui ont été utilisées dans toute l'étude. Elles sont exprimées en éléments orbitaux classiques $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ ou en éléments non singuliers en excentricité $(a, C = e \cos \omega, i, \Omega, S = e \sin \omega, \lambda = \omega + M)$. La méthode de détermination de ces équations est basée sur une différentiation des formules du problème des deux corps. On peut la trouver dans de nombreux ouvrages de mécanique céleste. Pierre Exertier et moi présentons une des approches possibles sur ce thème dans la note de cours de l'Ecole d'été 2002 du GRGS. Ici, je ne détaille que la transformation entre la formulation en éléments classiques et celle en éléments non singuliers. Il faut aussi noter qu'à la différence de la plupart des formulations qu'on trouve dans la littérature, j'exprime les équations de Gauss en fonction d'un seul type d'anomalie (vraie v ou excentrique u : voir figure C.2) : cela facilite sensiblement le calcul des dérivées partielles.

\bar{n} désigne le moyen mouvement du satellite qui intervient dans la troisième loi de Kepler $\bar{n}^2 a^3 = \mu$, où μ désigne la constante gravitationnelle de la Terre. J'utilise aussi les notations classiques $L = \sqrt{\mu a}$ et $\eta = \sqrt{1 - e^2}$.

C.1 Définition de deux repères liés au satellite

Dans un certain repère géocentrique $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le satellite S est repéré par rapport au point C , centre des masses de la Terre, dans un jeu de coordonnées rectangulaires : $S \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

C.1.1 Définition de coordonnées sphériques

Le but dans un premier temps est de définir un jeu de coordonnées sphériques ¹ : $S \begin{cases} r \\ \lambda \\ \varphi \end{cases}$

Le point s désigne la projection orthogonale du point S dans le plan $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (figure C.1). Le premier vecteur de base, vecteur radial \vec{e}_r , est défini par :

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\|\vec{CS}\|} \vec{CS}$$

¹ λ désigne une longitude, et φ la latitude par rapport à un équateur.

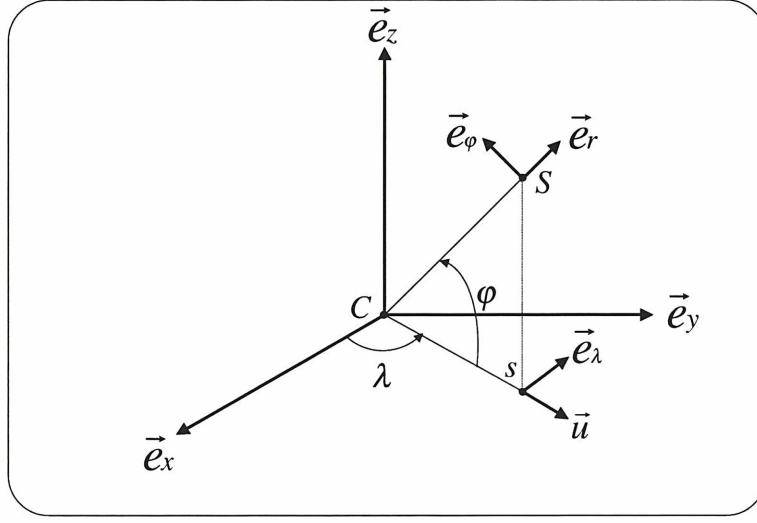


FIG. C.1 – Coordonnées sphériques.
Le plan $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est le plan de l'équateur, \vec{e}_x étant dirigé par exemple vers le point vernal.

Pour définir la longitude λ (par rapport à la direction \vec{e}_x), on introduit le vecteur \vec{u} défini par

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{C}s\|} \vec{C}s$$

On définit ainsi $\lambda = (\vec{e}_x, \vec{u})$. Le vecteur de base correspondant \vec{e}_λ est construit de telle manière que $(\vec{u}, \vec{e}_\lambda) = \frac{\pi}{2}$ et orienté par \vec{e}_z .

La latitude φ est définie par : $\varphi = (\vec{u}, \vec{e}_r)$, angle orienté par \vec{e}_λ .

Le troisième vecteur de base, \vec{e}_φ , est défini par :

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\lambda$$

de telle manière que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi)$ constitue une base orthonormale directe.

On a ainsi :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

C.1.2 Un repère orienté par la position radiale

Il s'agit du repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, \vec{e}_s se situe dans le plan de l'orbite, orienté de telle sorte que $(\vec{e}_r, \vec{e}_s) = \frac{\pi}{2}$. \vec{e}_w est défini par $\vec{e}_w = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_s$.

Dans ce repère, la résultante \vec{F} de la force agissant sur le satellite se décompose selon :

$$\vec{F} = R\vec{e}_r + S\vec{e}_s + W\vec{e}_w \quad (\text{C.1})$$

C.1.3 Un repère orienté par la vitesse

Ce repère est très utile lorsqu'il s'agit de modéliser les forces proportionnelles à la vitesse (le freinage atmosphérique par exemple).

Le repère du plan de l'orbite (\vec{e}_r, \vec{e}_s) est alors remplacé par (\vec{e}_T, \vec{e}_N) , où \vec{e}_T est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, et \vec{e}_N le vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire. $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_w)$ est ainsi un repère direct. Voir figure C.2.

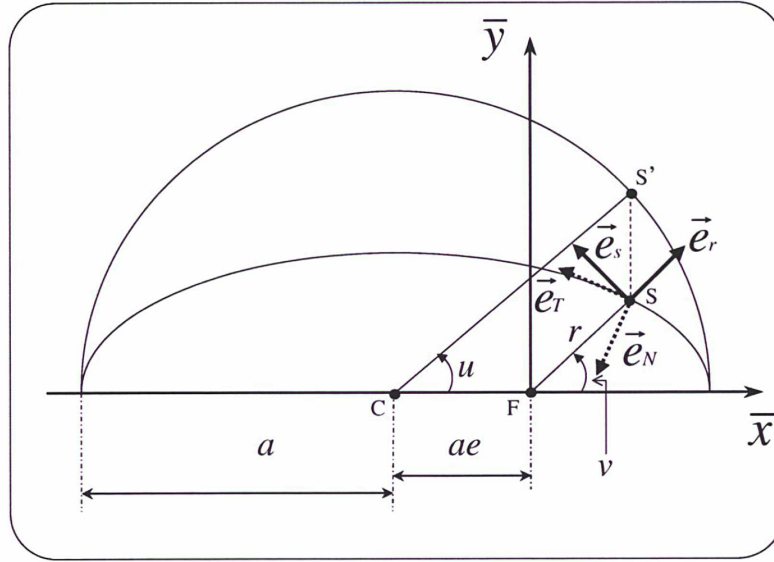


FIG. C.2 – Deux repères mobiles avec le satellite.
C désigne le centre de l'ellipse. C'est aussi le centre du cercle osculateur qui permet de définir le point S', qui permet, lui, de définir l'anomalie excentrique u. Les deux repères sont ainsi (\vec{e}_r, \vec{e}_s) et (\vec{e}_T, \vec{e}_N) .

Dans ce repère, on note :

$$\vec{F} = T\vec{e}_T + N\vec{e}_N + W\vec{e}_w \quad (\text{C.2})$$

Les formules qui permettent d'exprimer T et N en fonction de R et S font appel à certaines relations de cinématique et du problème des deux corps : la vitesse \vec{V} du satellite

s'exprime par :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V\vec{e}_T \\ &= \dot{\vec{r}} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{v}\vec{e}_\lambda\end{aligned}$$

En utilisant ensuite

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{a(1-e^2)}(1+e\cos v) \\ C &= r^2\dot{v} \text{ (constante des aires)} \\ C &= \bar{n}a^2\sqrt{1-e^2}\end{aligned}$$

on aboutit à \vec{e}_T :

$$\vec{e}_T = \frac{\bar{n}ae\sin v}{V\sqrt{1-e^2}}\vec{e}_r + \frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v)\vec{e}_s$$

et aussi, par simple rotation des repères :

$$\vec{e}_N = -\frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v)\vec{e}_r + \frac{\bar{n}ae\sin v}{V\sqrt{1-e^2}}\vec{e}_s$$

A noter que si $e = 0$, on a bien $\vec{e}_N = -\vec{e}_r$ et $\vec{e}_T = \vec{e}_s$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}}(\mathbf{T}e\sin v - \mathbf{N}(1+e\cos v)) \\ \mathbf{S} &= \frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}}(\mathbf{T}(1+e\cos v) + \mathbf{N}e\sin v)\end{aligned}\tag{C.3}$$

C.2 Les équations de Lagrange

Si U désigne le potentiel de la force qui perturbe le mouvement, les équations de Lagrange formulées en éléments képlériens classiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial U}{\partial M} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial M} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial \omega} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\cos i}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\
 \frac{dM}{dt} &= \bar{n} - \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial e}
 \end{aligned} \right| \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial e} &= \frac{1}{e} \left(\frac{\partial}{\partial C} C + \frac{\partial}{\partial S} S \right) \\
 \frac{\partial}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial S} C - \frac{\partial}{\partial C} S + \frac{\partial}{\partial \lambda} \\
 \frac{\partial}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}
 \end{aligned} \right| \quad (C.5)$$

et que

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dC}{dt} &= \cos \omega \frac{de}{dt} - e \sin \omega \frac{d\omega}{dt} \\
 \frac{dS}{dt} &= \sin \omega \frac{de}{dt} + e \cos \omega \frac{d\omega}{dt} \\
 \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} + \frac{dM}{dt}
 \end{aligned} \right| \quad (C.6)$$

on peut déduire l'expression des équations de Lagrange en éléments non singuliers en excentricité :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a}{L} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
\frac{dC}{dt} &= -\frac{\eta}{L} \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{S \cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} - \frac{C}{L} \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
&\quad + C \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial S} - S \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial C} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{\eta}{L} \frac{\partial U}{\partial C} - \frac{C \cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} - \frac{S}{L} \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
\frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \frac{C}{L} \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\partial U}{\partial C} + \frac{S}{L} \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\partial U}{\partial S} \\
&\quad - \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} - \frac{2a}{L} \frac{\partial U}{\partial a}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Ces équations s'écrivent aussi sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{dC}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{dS}{dt} \\ \frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} \end{pmatrix} = E(a, C, i, S) \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} \\ \frac{\partial U}{\partial C} \\ \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{\partial U}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial U}{\partial S} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

où E est une matrice à 6 lignes et 6 colonnes².

Avec une écriture matricielle, les termes à calculer pour la restitution d'orbite sont facilement mis en évidence. En effet :

²on remarquera qu'exprimée en éléments orbitaux, elle ne dépend que des éléments métriques.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{da}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{dC}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{di}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{dS}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} \right) \end{pmatrix} = \\
& \frac{\partial E(a, C, i, S)}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} \\ \frac{\partial U}{\partial C} \\ \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{\partial U}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial U}{\partial S} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial C} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial \Omega} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(a, C, i, \Omega, S, \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) \end{pmatrix} \quad (C.9)
\end{aligned}$$

Il est donc nécessaire pour la restitution d'orbite de calculer d'une part les dérivées secondes du potentiel U par rapport aux variables dont on exprime les dérivées, et d'autre part les dérivées des composantes de la matrice de la dynamique³ E . Je ne mentionne pas ces dérivées partielles, puisqu'il n'y a aucune difficulté intrinsèque (à part pour le jeu de type 6, les variables 2 et 3 sont indépendantes entre elles.).

C.3 Les équations de Gauss

Dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, les équations de Gauss formulées en éléments orbitaux classiques s'écrivent, en ne considérant comme variable rapide que l'anomalie excentrique u :

³il s'agit donc d'une matrice $6 \times 6 \times 6$.

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2ae \sin u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{R} + \frac{2a\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{S} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\eta^2 \sin u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{R} + \frac{\eta(2 \cos u - e \cos^2 u - e)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{S} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1 - e \cos u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \cos(\omega + v) \mathbf{W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1 - e \cos u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta \sin i} \sin(\omega + v) \mathbf{W} \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{\sin u(2 - e \cos u - e^2)}{1 - e \cos(u)} \mathbf{S} \\
&\quad - \frac{(1 - e \cos u) \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta \sin i} \sin(\omega + v) \mathbf{W} \\
\frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(-3e + \frac{e^3 - 2e^3 \cos^2 u + \cos u}{1 - e \cos u} \right) \mathbf{R} - \frac{\eta \sin u(2 - e \cos u - e^2)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e(1 - e \cos u)} \mathbf{S}
\end{aligned}
\tag{C.10}$$

L'expression analogue en v est obtenue⁴ en déduisant

$$\begin{cases} \cos u &= \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} \\ \sin u &= \eta \frac{\sin v}{1 + e \cos v} \end{cases}
\tag{C.11}$$

de l'expression de r en fonction des deux types d'anomalies (figure C.2).

⁴dans la pratique, les équations de Gauss sont en fait établies plus naturellement directement en fonction de v .

On déduit :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2ae \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \mathbf{R} + \frac{2a(1+e \cos v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \mathbf{S} \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{\eta \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{e + 2 \cos v + e \cos^2 v}{1 + e \cos v} \mathbf{S} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\eta \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v)} \mathbf{W} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\eta \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\eta \cos v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \mathbf{R} + \frac{\eta \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) \mathbf{S} \\
 &\quad - \frac{\eta \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(\frac{-2e}{1 + e \cos v} + \cos v \right) \mathbf{R} - \frac{\eta^2 \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) \mathbf{S}
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

L'expression dans le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_w)$ est déduite de (C.12) en utilisant (C.3) :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v} \mathbf{T} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\eta^2}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \frac{\sin v}{1 + e \cos v} \mathbf{N} + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{2(e + \cos v)}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \mathbf{T} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\eta \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v)} \mathbf{W} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\eta \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{2e + \cos v + e^2 \cos v}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \frac{1}{1 + e \cos v} \mathbf{T} + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{2 \sin v}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \mathbf{N} \\
 &\quad - \frac{\eta \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{dM}{dt} - \bar{n} &= -\frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \frac{\eta^2 \cos v}{1 + e \cos v} \mathbf{T} \\
 &\quad - \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} 2 \sin v \left(1 + \frac{e^2}{1 + e \cos v}\right) \mathbf{N}
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

avec

$$\cos(\omega + v) = \cos \omega \cos v - \sin v \sin \omega \quad (\text{C.14})$$

$$= \cos \omega \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} - \sin \omega \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \quad (\text{C.15})$$

$$\sin(\omega + v) = \sin \omega \cos v + \sin v \cos \omega \quad (\text{C.16})$$

$$= \sin \omega \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} + \cos \omega \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \quad (\text{C.17})$$

L'expression analogue en fonction de l'anomalie excentrique u est :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\sqrt{1 + e \cos u}}{1 - e \cos u} \mathbf{T} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \sqrt{\frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos u}} \sin u \mathbf{N} + \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} 2 \cos u \mathbf{T} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{(1 - e \cos u) \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{(1 - e \cos u) \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \sqrt{\frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos u}} (e + \cos u) \mathbf{N} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} \eta 2 \sin u \mathbf{T} \\ &\quad - \frac{\cos i (1 - e \cos u) \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \sqrt{\frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos u}} (e - \cos u) \mathbf{N} \\ &\quad - \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} 2 \eta \sin u \left(1 + \frac{e^2}{\eta^2} (1 - e \cos u) \right) \mathbf{T} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

En éléments non singuliers en excentricité, on définit l'analogie de u par

$$\boxed{\psi = \omega + u} \quad (\text{C.19})$$

On a ainsi la correspondance (il suffit d'utiliser la définition de ψ et de développer les lignes trigonométriques) :

$$\boxed{\begin{aligned} e \cos u &= C \cos \psi + S \sin \psi \\ e \sin u &= C \sin \psi - S \cos \psi \end{aligned}} \quad (\text{C.20})$$

En particulier, l'équation de Kepler

$$\boxed{M = u - e \sin u} \quad (\text{C.21})$$

s'écrit :

$$\boxed{\lambda = \psi - C \sin \psi + S \cos \psi} \quad (\text{C.22})$$

En définissant les notations $\nu = C \cos \psi + S \sin \psi$ et $\xi = C \sin \psi - S \cos \psi$ on a ainsi :

$$\cos(\omega + v) = \frac{\cos \psi - C}{1 - \nu} + \frac{1}{1 + \eta} \frac{S\xi}{1 - \nu} \quad (\text{C.23})$$

$$\sin(\omega + v) = \frac{\sin \psi - S}{1 - \nu} - \frac{1}{1 + \eta} \frac{C\xi}{1 - \nu} \quad (\text{C.24})$$

On établit les équations de Gauss exprimées en éléments non singuliers de manière analogue aux équations de Lagrange : en utilisant la relation (C.6) entre $\frac{dC}{dt}$, $\frac{dS}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$ en fonction de $\frac{da}{dt}$, $\frac{dC}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$. Le calcul est même plus simple puisqu'il n'y a pas de transformation de dérivées partielles à envisager.

En ne considérant plus ici⁵ que deux seuls angles, λ et ψ , on obtient⁶ dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\xi}{1 - \nu} \mathbf{R} + \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \left(1 + \frac{\nu - (C^2 + S^2)}{1 - \nu} \right) \mathbf{S} \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{\eta \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(\eta \cos(\omega + v) + \cos \psi - \frac{C\nu}{1 + \eta} \right) \mathbf{S} \\ &\quad + \frac{S(1 - \nu) \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{(1 - \nu) \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{(1 - \nu) \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{dS}{dt} &= -\frac{\eta \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(\eta \sin(\omega + v) + \sin \psi - \frac{S\nu}{1 + \eta} \right) \mathbf{S} \\ &\quad - \frac{C(1 - \nu) \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \left(-2 \frac{1 - \nu}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\eta(\nu - (C^2 + S^2))}{(1 + \eta)(1 - \nu)} \right) \mathbf{R} \\ &\quad + \frac{\xi(2 - \nu - (C^2 + S^2))}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - \nu)(1 + \eta)} \mathbf{S} - \frac{(1 - \nu) \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

⁵ au lieu de trois auparavant, pour éviter des redondances d'équations déjà complexes : les équations ne sont pas données explicitement en fonction de l'angle $\omega + v$.

⁶ on a aussi, pour les éléments de Delaunay L et H :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = \frac{L^2}{\mu} \frac{\xi}{1 - \nu} \mathbf{R} + \frac{L^2}{\mu} \frac{\eta}{1 - \nu} \mathbf{S} \\ \frac{dH}{dt} = \frac{L^2}{\mu} \cos i (1 - \nu) \mathbf{S} - \frac{\sqrt{L^2 \eta^2 - H^2}}{\eta} \frac{(1 - \nu) \cos(\omega + v)}{\frac{\mu}{L}} \mathbf{W} \end{cases}$$

Parallèlement, les équations exprimées dans le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_w)$ utilisent :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} (-\eta \mathbf{N} + \xi \mathbf{T}) \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} (\xi \mathbf{N} + \eta \mathbf{T}) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Ces équations sont :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \mathbf{T} \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(-\eta^2 \sin(\omega+v) + \xi \left(\eta \cos(\omega+v) + \cos \psi - \frac{C\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{N} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(\xi \eta \sin(\omega+v) + \eta \left(\eta \cos(\omega+v) + \cos \psi - \frac{C\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{T} \\ &\quad + \frac{S(1-\nu) \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{(1-\nu) \cos(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{(1-\nu) \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(\eta^2 \cos(\omega+v) + \xi \left(\eta \sin(\omega+v) + \sin \psi - \frac{S\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{N} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(-\xi \eta \cos(\omega+v) + \eta \left(\eta \sin(\omega+v) + \sin \psi - \frac{S\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{T} \\ &\quad - \frac{C(1-\nu) \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\ \frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(2\eta(1-\nu) + \frac{1}{(1+\eta)(1-\nu)} (\eta^2(\nu-e^2) + \xi^2(2-\nu-e^2)) \right) \mathbf{N} \\ &\quad + \frac{2\xi}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(-1 + \nu + \frac{\eta}{1+\eta} \right) \mathbf{T} - \frac{(1-\nu) \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

C.3.1 Equations de Gauss moyennes

Dans le cadre de la théorie du mouvement moyen, il faut intégrer numériquement des seconds membres de systèmes différentiels dans lesquels la dépendance avec la variable rapide (M ou λ selon les cas) est éliminée. Dans le cas des équations de Gauss, il faut donc calculer la valeur moyenne du second membre obtenu par une relation du type :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\cdots}{dt} \\ \frac{d\cdots}{dt} \\ \frac{d\cdots}{dt} \\ \frac{d\cdots}{dt} \\ \frac{d\cdots}{dt} \\ \frac{d\cdots}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Si les composantes du vecteur force (3 lignes, 1 colonne) sont constantes ou varient lentement⁷ dans le temps, calculer la valeur moyenne du second membre est équivalent à calculer la valeur moyenne de la matrice de la dynamique (6 lignes, 3 colonnes).

En calculant la différentielle (à e constant) de l'équation de Kepler, on a⁸ :

$$dM = (1 - e \cos u) du \quad (\text{C.28})$$

On a par exemple, dans le cas des équations de Gauss exprimées en fonction de l'anomalie excentrique u :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Omega}{dt}(t) \right) dM &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u) \sin(\omega + v) dM \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u)^2 \sin(\omega + v) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u) (\sin \omega (\cos u - e) + \cos \omega \eta \sin u) du \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} e \sin \omega \end{aligned}$$

En procédant selon la même technique pour tous les termes, on obtient les résultats suivants :

⁷avec une période caractéristique très grande devant la période de révolution du satellite.

⁸On déduit aussi :

$$dM = \frac{1}{\eta} (1 - e \cos u)^2 dv$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} S \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{\eta e}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} S \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{e \cos \omega}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} W \\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{e \sin \omega}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} W \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} R + \frac{3}{2} \frac{e \sin \omega \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} W \\
\frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{-3}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} R
\end{aligned} \tag{C.29}$$

A noter qu'on obtient les mêmes résultats selon que l'on utilise une expression par rapport à u ou par rapport à v .

En éléments non singuliers, la mise en moyenne des équations de Gauss fait intervenir des intégrales par rapport à la variable λ .

En calculant la différentielle de l'équation de Kepler exprimée en éléments non singuliers, on obtient sur une révolution⁹ :

$$d\lambda = (1 - C \cos \psi - S \sin \psi) d\psi \tag{C.30}$$

On en déduit par exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (C \cos \psi + S \sin \psi) d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (C \cos \psi + S \sin \psi)(1 - C \cos \psi - S \sin \psi) d\psi \\
&= -\frac{C^2}{2} - \frac{S^2}{2}
\end{aligned}$$

⁹ C et S sont donc considérés constants.

ou encore :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \psi d\lambda &= -\frac{C}{2} \\
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi d\lambda &= -\frac{S}{2} \\
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega + v) d\lambda &= -C \\
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega + v) d\lambda &= -S \\
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - C \cos \psi - S \sin \psi) \cos(\omega + v) d\lambda &= -\frac{3}{2}C \\
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - C \cos \psi - S \sin \psi) \sin(\omega + v) d\lambda &= -\frac{3}{2}S
 \end{aligned}$$

Dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} S \\
 \frac{dC}{dt} &= -\frac{S\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(-C\eta - \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \frac{C(C^2 + S^2)}{1 + \eta} \right) S \\
 &\quad - \frac{3S}{2} \frac{S \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{C}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{S}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{dS}{dt} &= \frac{C\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(-S\eta - \frac{S}{2} + \frac{1}{2} \frac{S(C^2 + S^2)}{1 + \eta} \right) S \\
 &\quad + \frac{3S}{2} \frac{C \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} (-3 + \eta) \mathbf{R} + \frac{3S}{2} \frac{\cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} S
 \end{aligned} \tag{C.31}$$

La mise en moyenne des équations exprimées dans le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_w)$, tant avec une formulation en éléments orbitaux qu'avec une formulation en éléments non singuliers, fait intervenir des intégrales elliptiques.

En effet, on a par exemple :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\bar{n}^2 a} V$$

où la vitesse V s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 V &= \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1}{\eta} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u}}
 \end{aligned} \tag{C.32}$$

Les quantités à moyenner sont donc du type

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} V dM &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u}} dM \\
 &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u}} (1 - e \cos u) du \\
 &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} du
 \end{aligned}$$

Une des méthodes pour contourner cet obstacle consiste à effectuer un développement par rapport à l'excentricité e qui intervient dans l'expression de la vitesse :

$$\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} = 1 + e\cos u + \frac{1}{2}(e\cos u)^2 + \frac{1}{2}(e\cos u)^3 + \frac{3}{8}(e\cos u)^4 + o(e^4) \quad (\text{C.33})$$

$$\sqrt{\frac{1-e\cos u}{1+e\cos u}} = 1 - e\cos u + \frac{1}{2}(e\cos u)^2 - \frac{1}{2}(e\cos u)^3 + \frac{3}{8}(e\cos u)^4 + o(e^4) \quad (\text{C.34})$$

En moyennant les équations de Gauss instantanées exprimées avec l'anomalie excentrique (équation (C.18)), on a¹⁰ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 \right) \mathbf{T} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(-e - \frac{3}{8}e^3 \right) \mathbf{T} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} e \cos \omega \mathbf{W} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta \sin i} e \sin \omega \mathbf{W} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{21}{64}e^4 \right) \mathbf{N} + \frac{3}{2} \frac{\cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta \sin i} e \sin \omega \mathbf{W} \\ \frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{21}{64}e^4 \right) \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Détaillons par exemple l'équation en e .

La quantité à calculer pour la composante en \mathbf{N} est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-e\cos u}{1+e\cos u}} \sin u \, dM &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-e\cos u}{1+e\cos u}} \sin u (1-e\cos u) \, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin u - 2e \cos u \sin u + \frac{3}{2}e^2 \cos^2 u \sin u - e^3 \cos^3 u \sin u \right) \, du \\ &= 0 \end{aligned}$$

La quantité à moyenner pour la composante en \mathbf{T} est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} \cos u \, dM &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} (1-e\cos u) \, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-e\cos u}{1+e\cos u}} \cos u \, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos u - e \cos^2 u + \frac{1}{2}e^2 \cos^3 u - \frac{1}{2}e^3 \cos^4 u \right) \, du \\ &= -\frac{1}{2}e - \frac{3}{16}e^3 \end{aligned}$$

¹⁰ à l'ordre 4 en excentricité : ces équations sont en $o(e^4)$.

Les équations correspondantes en éléments non singuliers en excentricité sont¹¹ :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(1 - \frac{1}{4}e^2\right) T \\
 \frac{dC}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{S}{2} N - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{C}{2} T - \frac{3}{2} S^2 \frac{\cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} W \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{C}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} W \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{S}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} W \\
 \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{C}{2} N - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{S}{2} T + \frac{3}{2} SC \frac{\cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} W \\
 \frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(2 + \frac{1}{2}e^2\right) N + \frac{3}{2} S \frac{\cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} W
 \end{aligned} \tag{C.36}$$

C.3.2 Dérivées partielles des équations de Gauss

De la même manière que pour les équations de Lagrange, il est nécessaire pour la restitution d'orbite de calculer les dérivées partielles $\frac{\partial E(a, C, i, S, \lambda)}{\partial (a, C, i, \Omega, S, \lambda)}$ ou $\frac{\partial E(a, e, i, M)}{\partial (a, e, i, \omega, M)}$ de la matrice de la dynamique. Ces variables sont indépendantes entre elles. L'anomalie excentrique u (respectivement ψ) dépend de e et de M (respectivement de C , S et λ) à travers l'équation de Kepler.

En calculant la différentielle de l'équation de Kepler exprimée en éléments orbitaux, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\sin u}{1 - e \cos u} \\ \frac{\partial u}{\partial M} = \frac{1}{1 - e \cos u} \end{cases} \tag{C.37}$$

Le calcul des dérivées partielles fait intervenir de nombreux termes, je ne mentionne ici que le principe des calculs.

On a par exemple :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial e} \cos v &= \frac{\partial}{\partial e} \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \\
 &= \frac{-(1 - e \cos u) - (\cos u - e)(-\cos u)}{(1 - e \cos u)^2} + \frac{\partial u}{\partial e} \frac{(-\sin u)(1 - e \cos u) - (\cos u - e)(e \sin u)}{(1 - e \cos u)^2} \\
 &= \frac{\sin^2 u}{(1 - e \cos u)^2} \left(-1 + \frac{e^2 - 1}{1 - e \cos u} \right)
 \end{aligned}$$

La différentiation de tous les termes intervenant dans les équations s'effectue de la même manière : des calculs qui ne sont pas difficiles, mais fastidieux.

¹¹ à l'ordre 2 en excentricité : ces équations sont en $o(e^2)$.

TAB. C.1 – Inventaire des types d'équations de la dynamique utilisées.
Variables de type 2 : Eléments orbitaux classiques ($a, e, i, \Omega, \omega, M$).
Variables de type 3 : Eléments non singuliers déduits du type 2 ($a, C, i, \Omega, \omega, \lambda$). Variables de type 6 : Eléments non singuliers «déduts» des variables de Delaunay ($L, C, H, \lambda, S, \Omega$). La lettre 'G' à côté du 'OK' indique qu'en plus des équations, les «gradients» sont aussi codés. Les équations de Lagrange moyennes ne sont pas mentionnées, puisqu'elles sont implicitement contenues dans les séries analytiques.

| Type de Variables | 2 | 3 | 6 |
|--|------|------|------|
| équations de Lagrange instantanées | OK+G | OK+G | OK+G |
| équations de Gauss instantanées dans (R, S, W) | OK+G | OK+G | OK+G |
| équations de Gauss instantanées dans (N, T, W) | OK+G | OK+G | OK+G |
| équations de Gauss moyennes dans (R, S, W) | OK+G | OK | OK+G |
| équations de Gauss moyennes dans (N, T, W) | OK | OK | OK |

Pour les éléments non singuliers, on obtient en calculant la différentielle de l'équation de Kepler (C.22) :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial C} = \frac{\sin \psi}{1 - C \cos \psi - S \sin \psi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial S} = -\frac{\cos \psi}{1 - C \cos \psi - S \sin \psi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{1}{1 - C \cos \psi - S \sin \psi} \end{array}\right. \tag{C.38}$$

L'écriture des dérivées partielles est encore plus lourde qu'en éléments orbitaux mais tout aussi indispensable.

C.4 Récapitulatif

Les équations de la dynamique à utiliser lors des calculs d'orbite sont de deux types : les équations de Lagrange si les forces dérivent d'un potentiel, les équations de Gauss sinon. Ces équations, dites «instantanées» ou moyennées pour une utilisation dans le cadre du mouvement moyen, doivent être formulées dans différents types de variables. L'inventaire de l'ensemble de ces équations est présenté dans la table C.1.

Annexe D

Ma solution non singulière aux équations de Lagrange

Je reprends ici les formules développées dans “Circular Orbits: How defining the Period of Revolution of the Perigee” et “An Analytical Solution of the Lagrange Planetary Equations Valid Also for Very Low Eccentricities”, soumis à *Celestial Mechanics*, selon une méthode mise au point en collaboration avec Gilles Métris.

Le but est d'intégrer analytiquement les équations de Lagrange qui prennent en compte l'influence d'un potentiel central, équations qui sont ici exprimées en éléments non singuliers en excentricité. Les méthodes traditionnelles, qui traitent de manière différente les variables métriques (a, e, i) et angulaires (Ω, ω, M), ne peuvent pas s'appliquer puisque e et ω sont mixés à travers C et S . Nous avons ainsi développé une méthode permettant d'intégrer directement le système différentiel vérifié par C et S . L'intégration des autres éléments (a, i, Ω, λ), même si elle profite des techniques développées pour C et S , est basée sur la méthode classique de [Kaula, 1966].

D.1 Expression du potentiel en éléments non singuliers

On considère donc le système différentiel constitué par les équations de Lagrange exprimées en éléments non singuliers en excentricité (voir équation (C.7)) d'une part, par les conditions initiales¹ $a_0, C_0, i_0, \Omega_0, S_0$, et λ_0 d'autre part.

U désigne le potentiel gravitationnel, décomposé selon [Kaula, 1966] en 4 sommations :

$$U = \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} U_{n,m,p,q} \quad (\text{D.1})$$

avec

$$U_{n,m,p,q} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) G_{n,p,q}(e) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{n,m,p,q} \\ \sin \psi_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

¹déduites éventuellement de conditions initiales exprimées dans d'autres jeux de variables.

avec

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc} c_{n,m} & s_{n,m} \end{array} \right) && \text{si } n-m \text{ est pair} \\ &= \left(\begin{array}{cc} -s_{n,m} & c_{n,m} \end{array} \right) && \text{si } n-m \text{ est impair} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Dans (D.2) et (D.3), R_0 désigne le rayon équatorial de l'ellipsoïde de référence, et $c_{n,m}$ et $s_{n,m}$ les coefficients du champ de gravité développé en harmoniques sphériques.

L'angle ψ est défini par :

$$\psi_{n,m,p,q} = (n - 2p + q)M + (n - 2p)\omega + m(\Omega - TS_G) \quad (\text{D.4})$$

où TS_G désigne le temps sidéral à Greenwich.

Enfin, $G_{n,p,q}(e)$ et $F_{n,m,p}(i)$ correspondent aux classiques fonctions d'excentricité et d'inclinaison dont on peut par exemple trouver l'expression dans [Kaula, 1966].

Détaillons l'expression des fonctions d'excentricité, pour déduire une formulation en fonction de C et S qui sera utile dans la suite du chapitre. Cette expression diffère légèrement de celle donnée dans la quatrième partie de [Wytrzyszczak, 1986] : nous avons essayé, par souci de simplicité, de rester le plus proche possible de la formulation de Kaula. En particulier, nous avons conservé la quantité β définie par :

$$\left| \begin{array}{l} \eta = \sqrt{1 - e^2} \\ \beta = \frac{e}{1 + \eta} \end{array} \right. \quad (\text{D.5})$$

Selon [Tisserand, 1890], on a :

$$\begin{aligned} G_{n,p,q}(e) &= (-\beta)^{|q|} (1 + \beta^2)^n \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{r=0}^{h_r} P_K (1 + \eta)^r \right) \\ &\times \left(\sum_{i=0}^{h_i} Q_K (1 + \eta)^i \right) \beta^{2d} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

où

$$\begin{aligned} P_K &= \binom{-2(n-p)}{h_r - r} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{k}{2} \right)^r \\ Q_K &= \binom{-2p}{h_i - i} \frac{1}{i!} \left(\frac{k}{2} \right)^i \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

avec

$$\begin{array}{lll} h_r = d + q & h_i = d & \text{si } q > 0 \\ h_r = d & h_i = d - q & \text{sinon} \end{array} \quad (\text{D.8})$$

et

$$k = n - 2p + q. \quad (\text{D.9})$$

Dans le cas où $n - 2p + q = 0$, la sommation sur d est finie :

$$G_{n,p,q}(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{n-1}{2d+n-2p'} \binom{2d+n-2p'}{d} \left(\frac{e}{2}\right)^{2d+n-2p'} \quad (\text{D.10})$$

avec

$$\begin{cases} p' = p & \text{si } q \leq 0 \\ p' = n-p & \text{si } q \geq 0 \end{cases}$$

Ces formules vont permettre de définir les fonctions $G\cos_{n,p,q}$ et $G\sin_{n,p,q}$.

Pour isoler l'influence de ω , et pour en permettre le mixage avec les fonctions d'excentricité, on introduit l'angle $\tilde{\psi}$ défini par² :

$$\tilde{\psi}_{n,m,p,q} = (n-2p+q)\lambda + m(\Omega - TS_G) \quad (\text{D.11})$$

de telle manière que

$$\psi_{n,m,p,q} = \tilde{\psi}_{n,m,p,q} - q\omega$$

Nous utilisons cet angle $\tilde{\psi}_{n,m,p,q}$ pour définir les fonctions $G\cos_{n,p,q}$ et $G\sin_{n,p,q}$ par la relation matricielle :

$$\begin{aligned} G_{n,p,q}(e) \begin{pmatrix} \cos \psi_{n,m,p,q} \\ \sin \psi_{n,m,p,q} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n,p,q}(e) \cos(q\omega) \\ G_{n,p,q}(e) \sin(q\omega) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G\cos_{n,p,q}(C, S) \\ G\sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

L'expression explicite de ces fonctions utilise le développement de Newton des formules d'Euler de $\cos q\omega$ et $\sin q\omega$:³

$$\cos q\omega = \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j} (\cos \omega)^{|q|-2j} (\sin \omega)^{2j}$$

et pour $q \neq 0$:

$$\sin q\omega = \frac{|q|}{q} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|-1}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j+1} (\cos \omega)^{|q|-2j-1} (\sin \omega)^{2j+1}$$

Dans le cas général, en utilisant (D.6) et (D.13), on obtient ainsi :

²pour aboutir à des formulations plus courtes, il arrive que la notation $\tilde{\psi}$ soit utilisée à la place de $\tilde{\psi}_{n,m,p,q}$.

³ $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$.

$$\begin{aligned}
 Gcos_{n,p,q}(C, S) &= \frac{(-1)^{|q|}}{(1+\eta)^{|q|}} (1+\beta^2)^n \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{r=0}^{h_r} P_K (1+\eta)^r \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=0}^{h_i} Q_K (1+\eta)^i \right) \beta^{2d} \\
 &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j} C^{|q|-2j} S^{2j} \right)
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

et pour⁴ $q \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 Gsin_{n,p,q}(C, S) &= \frac{(-1)^{|q|}}{(1+\eta)^{|q|}} (1+\beta^2)^n \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{r=0}^{h_r} P_K (1+\eta)^r \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=0}^{h_i} Q_K (1+\eta)^i \right) \beta^{2d} \\
 &\quad \times \left(\frac{|q|}{q} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|-1}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j+1} C^{|q|-2j-1} S^{2j+1} \right)
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Dans le cas particulier où $n - 2p + q = 0$, on obtient de même :

$$\begin{aligned}
 Gcos_{n,p,q}(C, S) &= \frac{1}{(1 - C^2 - S^2)^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{n-1}{2d+n-2p'} \binom{2d+n-2p'}{d} \left(\frac{1}{2}\right)^{2d+n-2p'} \\
 &\quad (C^2 + S^2)^d \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j} C^{|q|-2j} S^{2j}
 \end{aligned}$$

et pour $q \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 Gsin_{n,p,q}(C, S) &= \frac{1}{(1 - C^2 - S^2)^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{n-1}{2d+n-2p'} \binom{2d+n-2p'}{d} \left(\frac{1}{2}\right)^{2d+n-2p'} \\
 &\quad (C^2 + S^2)^d \frac{|q|}{q} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{|q|-1}{2}\right)} (-1)^j \binom{|q|}{2j+1} C^{|q|-2j-1} S^{2j+1}
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

L'expression du potentiel terrestre en fonction de $(a, C, i, \Omega, S, \lambda)$ est ainsi :

$$\begin{aligned}
 U_{n,m,p,q} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^n F_{n,m,p}(i) \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Gcos_{n,p,q}(C, S) \\ Gsin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

⁴pour $q = 0$, on a toujours $Gsin_{n,p,q} = 0$.

On déduit les dérivées partielles du potentiel qui interviennent dans les équations de Lagrange (C.7) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} U_{n,m,p,q} &= -\frac{n+1}{a} U_{n,m,p,q} \\
 \frac{\partial}{\partial i} U_{n,m,p,q} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F'_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial}{\partial C} U_{n,m,p,q} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial C} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ \frac{\partial}{\partial C} G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial}{\partial S} U_{n,m,p,q} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ \frac{\partial}{\partial S} G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial}{\partial \Omega} U_{n,m,p,q} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) m \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial}{\partial \lambda} U_{n,m,p,q} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) (n - 2p + q) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

D.2 Solution pour C et S

En référence à la décomposition de U , le système différentiel vérifié par C et S est décomposé en autant de sous-systèmes différentiels qu'il y a de jeux n, m, p, q :

$$\begin{aligned}
 \frac{dC}{dt} &= \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{dC_{n,m,p,q}}{dt} \\
 \frac{dS}{dt} &= \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{dS_{n,m,p,q}}{dt}
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Il en sera de même pour les autres éléments.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{n,m,p,q}}{dt} &= \alpha_{n,m,p,q}(t) S - (n - 2p + q) C f_{n,m,p,q}(t) + \beta_{1n,m,p,q}(t) \\
 \frac{dS_{n,m,p,q}}{dt} &= -\alpha_{n,m,p,q}(t) C - (n - 2p + q) S f_{n,m,p,q}(t) + \beta_{2n,m,p,q}(t)
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n,m,p,q}(t) &= \frac{\cos i}{L\eta \sin i} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^n F'_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 f_{n,m,p,q}(t) &= \frac{\eta}{L(1+\eta)} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^n F_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 \beta_{1n,m,p,q}(t) &= -\frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^n F_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ \frac{\partial}{\partial S} G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\
 \beta_{2n,m,p,q}(t) &= \frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^n F_{n,m,p}(i) \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial C} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ \frac{\partial}{\partial C} G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

Dans (D.20), on peut distinguer trois types de fréquences : celles liées à ω ou Ω (lentement variables avec le temps), et les hautes fréquences gouvernées d'une part par la période de révolution du satellite (liée à λ) et d'autre part par la période de révolution sidérale de la Terre (à travers TS_G).

Nous adoptons ici une démarche analogue à celle de [Kaula, 1966] : chaque équation est séparée en deux parties, la première partie contenant des longues périodes⁵ qui caractérisent le comportement «principal» du système différentiel sur le long terme, la deuxième partie contenant, elle, les autres périodes. Pour les éléments C et S , toutes les longues périodes seront prises en compte dans le système principal.

D.2.1 Système différentiel principal vérifié par C et S

Pour étudier le comportement du système différentiel (D.20) sur le long terme, on peut se limiter, dans une première approximation, au cas $n - 2p + q = 0$ et $m = 0$: les influences de λ et du temps sidéral sont ainsi éliminées. Dans ce cas, les fonctions $\alpha_{n,m,p,q}(t) = \alpha_{n,m,p,q}(a(t), e(t), i(t))$, $\beta_{1n,m,p,q}(t) = \beta_{1n,m,p,q}(a(t), e(t), i(t))$, $\beta_{2n,m,p,q}(t) = \beta_{2n,m,p,q}(a(t), e(t), i(t))$ sont lentement variables avec le temps, de même que les éléments métriques $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$.

Sous cette hypothèse, le système différentiel vérifié par C et S (D.20) est alors le système principal :

⁵dans la méthode de Kaula, la division est triviale : les équations différentielles vérifiées par les éléments métriques ont des seconds membres nuls, celles vérifiées par les éléments angulaires donnent des effets séculaires.

$$\begin{aligned}
\left| \begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \sum_{n' \geq 1} \left(\sum_{p=0}^{2n'} c_{2n',0} \left(-\frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'} F_{2n',0,p}(i) \frac{\partial}{\partial S} G \cos_{2n',p,2p-2n'}(C, S) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + S \frac{1}{L\eta} \frac{\cos i}{\sin i} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'} F'_{2n',0,p}(i) G \cos_{2n',p,2p-2n'}(C, S) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=0}^{2n'+1} c_{2n'+1,0} \left(-\frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'+1} F_{2n'+1,0,p}(i) \frac{\partial}{\partial S} G \sin_{2n'+1,p,2p-2n'-1}(C, S) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + S \frac{1}{L\eta} \frac{\cos i}{\sin i} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'+1} F'_{2n'+1,0,p}(i) G \sin_{2n'+1,p,2p-2n'-1}(C, S) \right) \right) \\
\frac{dS}{dt} &= \sum_{n' \geq 1} \left(\sum_{p=0}^{2n'} c_{2n',0} \left(\frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'} F_{2n',0,p}(i) \frac{\partial}{\partial C} G \cos_{2n',p,2p-2n'}(C, S) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - C \frac{1}{L\eta} \frac{\cos i}{\sin i} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'} F'_{2n',0,p}(i) G \cos_{2n',p,2p-2n'}(C, S) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=0}^{2n'+1} c_{2n'+1,0} \left(\frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'+1} F_{2n'+1,0,p}(i) \frac{\partial}{\partial C} G \sin_{2n'+1,p,2p-2n'-1}(C, S) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - C \frac{1}{L\eta} \frac{\cos i}{\sin i} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2n'+1} F'_{2n'+1,0,p}(i) G \sin_{2n'+1,p,2p-2n'-1}(C, S) \right) \right)
\end{aligned} \right. \tag{D.22}
\end{aligned}$$

D.2.2 Un oscillateur harmonique

Il est très difficile d'intégrer le système principal (D.22) d'une manière exacte, même s'il peut être développé, à travers les fonctions d'excentricité, en puissances de C et S :

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \sum_{n_1+n_2 \geq 0} \gamma_{n_1,n_2}^C C^{n_1} S^{n_2} \\
\frac{dS}{dt} &= \sum_{n_1+n_2 \geq 0} \gamma_{n_1,n_2}^S C^{n_1} S^{n_2}
\end{aligned}$$

En limitant ce développement à l'ordre 1 en excentricité, on obtient un développement du type :

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= k_C^0 + k_C^1 C + k_C^2 S + o(e^2) \\
\frac{dS}{dt} &= k_S^0 + k_S^1 C + k_S^2 S + o(e^2)
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Chacun des coefficient va être obtenu en développant les fonctions $G \cos_{n,p,q}(C, S)$, $G \sin_{n,p,q}(C, S)$, et leurs dérivées partielles correspondantes à l'ordre 1 en excentricité.

Au regard de la structure du système principal, il s'agit en fait d'identifier, quand ils existent :

1. pour n pair : les termes constants dans $G \cos_{n,p,q}(C, S)$; les termes constants, les termes en S et en C dans $\frac{\partial}{\partial S} G \cos_{n,p,q}$; les termes constants, les termes en S et en C dans $\frac{\partial}{\partial C} G \cos_{n,p,q}$;

2. pour n impair : les termes constants dans $G\sin_{n,p,q}(C, S)$; les termes constants, les termes en S et en C dans $\frac{\partial}{\partial S}G\sin_{n,p,q}$; les termes constants, les termes en S et en C dans $\frac{\partial}{\partial C}G\sin_{n,p,q}$.

Ainsi, pour écrire le système différentiel principal (D.22) avec une structure telle celle de (D.23), il ne faut garder dans les fonctions d'excentricité $G\cos_{n,p,q}(C, S)$ et $G\sin_{n,p,q}(C, S)$ que les termes d'ordres inférieurs ou égaux à 2, et ceci uniquement lorsque $|q| = |n - 2p| \leq 2$, puisque l'on peut écrire :

$$G_{n,p,q}(e) = e^{|q|} \sum_{n_1 \geq 0} g_{2n_1} e^{2n_1} \quad (\text{avec } g_0 \neq 0) \quad (\text{D.24})$$

Les expressions (D.16) $G\cos_{n,p,q}(C, S)$ et $G\sin_{n,p,q}(C, S)$ à longues périodes sont le produit de trois facteurs. En isolant, dans chaque facteur, les termes d'ordre 2 en excentricité, on obtient :

pour n pair :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{si } q = 0 : & G\cos_{n,p,q}(C, S) = 1 + \frac{n(n+1)}{4} (C^2 + S^2) \\ \text{si } q = \pm 2 : & G\cos_{n,p,q}(C, S) = \frac{1}{8} (n-1)(n-2)(C^2 - S^2) \end{array} \right. \quad (\text{D.25})$$

pour n impair :

$$\left| \text{si } q = \pm 1 : \quad G\sin_{n,p,q}(C, S) = \frac{1}{2} \frac{q}{|q|} (n-1) S \right. \quad (\text{D.26})$$

On peut ainsi écrire, pour $\frac{dC}{dt}$ par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = & - \sum_{p \geq 1} \frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} F_{2p,0,p}(i) (-J_{2p} p (2p+1)) S \\ & + \sum_{p \geq 1} \frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} F_{2p,0,p \pm 1}(i) (-J_{2p} (2p-1)(2p-2)) S \\ & + \sum_{p \geq 1} \frac{S \cos i}{L \eta \sin i} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} F'_{2p,0,p}(i) (-J_{2p} \times 1) \\ & - \sum_{p \geq 2} \frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p-1} F_{2p-1,0,p}(i) (-J_{2p-1}(-p)) \\ & - \sum_{p \geq 1} \frac{\eta}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p+1} F_{2p+1,0,p}(i) (-J_{2p+1}(p)) \\ & + o(e) \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

$\frac{dS}{dt}$ a une structure similaire.

On en déduit ainsi que le système principal se met sous la forme (forme du système et expression des coefficients également données dans le chapitre 2) :

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= -\alpha_1 S + k' + o(e) \\ \frac{dS}{dt} &= \alpha_2 C + o(e)\end{aligned}\tag{D.28}$$

avec

$$\alpha_1 = \sum_{p \geq 1} J_{2p} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} \times \left(\frac{\cos i}{\sin i} F'_{2p,0,p}(i) - p(2p+1)F_{2p,0,p}(i) + \frac{1}{2}(p-1)(2p-1)(F_{2p,0,p-1}(i) + F_{2p,0,p+1}(i)) \right)\tag{D.29}$$

$$\alpha_2 = \sum_{p \geq 1} J_{2p} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p} \times \left(\frac{\cos i}{\sin i} F'_{2p,0,p}(i) - p(2p+1)F_{2p,0,p}(i) - \frac{1}{2}(p-1)(2p-1)(F_{2p,0,p-1}(i) + F_{2p,0,p+1}(i)) \right)\tag{D.30}$$

$$k' = \sum_{p \geq 1} J_{2p+1} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{R_0}{a} \right)^{2p+1} p(F_{2p+1,0,p}(i) - F_{2p+1,0,p+1}(i))\tag{D.31}$$

Les conditions initiales sont (C_0, S_0) .

On peut déduire des formules (D.29) et (D.30) que $\alpha_1 \alpha_2 > 0$: compte tenu de la valeur des différents coefficients, il suffit d'examiner ce qui se passe pour J_2 . Cela revient à comparer $\left| \frac{\cos i}{\sin i} F'_{2p,0,p}(i) - p(2p+1)F_{2p,0,p}(i) \right|$ à $|(p-1)(2p-1)F_{2p,0,p+1}(i)|$ quand $p = 1$.

La solution exacte de ce système (D.28) est ainsi, où $k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$:

$$\begin{aligned}C(t) &= C_0 \cos(kt) - \frac{\alpha_1}{k} \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \sin(kt) \\ S(t) &= \frac{\alpha_2}{k} C_0 \sin(kt) + \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \cos(kt) + \frac{k'}{\alpha_1}\end{aligned}\tag{D.32}$$

On remarquera que, dans la définition de α_1 et α_2 , seuls les coefficients zonaux pairs sont concernés, de même que dans les descriptions classiques de la variation séculaire du périégée : ici, $\frac{2\pi}{k}$ correspond effectivement à la période du périégée (chapitre 2).

Notons également que seuls les zonaux impairs interviennent dans l'expression de k' .

L'oscillateur harmonique est donc complètement caractérisé : k est de l'ordre de 10^{-3} (comme J_2), k' de l'ordre de 10^{-6} (comme J_3). Ajoutons enfin que les différences relatives entre k , α_1 et α_2 sont du même ordre de grandeur que la différence relative entre J_2 et J_4 , ainsi que leurs définitions peuvent le suggérer.

D.2.3 Une méthode pour exprimer les courtes périodes de C et S

Les termes à courtes périodes constituant le système dit complémentaire doivent maintenant être intégrés.

De manière à pouvoir écrire la solution complète du système sous la forme

$$\begin{aligned} C(t) &= C_0 \cos(kt) - \frac{\alpha_1}{k} \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \sin(kt) + \Delta C(t) \\ S(t) &= \frac{\alpha_2}{k} C_0 \sin(kt) + \left(S_0 - \frac{k'}{\alpha_1} \right) \cos(kt) + \frac{k'}{\alpha_1} + \Delta S(t) \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

nous avons défini, en nous inspirant de [Demailly, 1996], une méthode pour exprimer explicitement $\Delta C(t)$ et $\Delta S(t)$.

Le système (2.4) qu'il s'agit d'intégrer peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\alpha_1 S + k' + \epsilon a(C, S, t) \\ \frac{dS}{dt} &= \alpha_2 C + \epsilon b(C, S, t) \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

avec comme conditions initiales (C_0, S_0) , les fonctions a et b étant des polynômes en C et S , en référence aux développements de $G\cos$ et $G\sin$ et de leurs dérivées partielles.

Quand $\epsilon = 0$, le système (D.34) est intégrable, sa solution est (D.32). Le but est de définir une correction à la solution principale, les termes en ϵ étant considérés comme une perturbation du système différentiel.

Pour cela, on rappelle

$$k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad (\text{D.35})$$

et on définit la quantité complexe (avec $i^2 = -1$)

$$z = C + i \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} S \quad (\text{D.36})$$

ainsi que

$$A(z, t) = a(C, S, t) + i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}b(C, S, t) \quad (\text{D.37})$$

Avec ces notations, le système (D.34) peut s'écrire sous forme complexe selon :

$$\left| \frac{dz}{dt} = ikz + k' + \epsilon A(z, t) \right. \quad (\text{D.38})$$

avec comme condition initiale $z_0 = C_0 + i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}S_0$.

Quand $\epsilon = 0$, on note $z(t, 0)$ la solution de (D.34) ou (D.38).

On a :

$$z(t, 0) = z_0 e^{ikt} + i\frac{k'}{k} \left(1 - e^{ikt}\right) \quad (\text{D.39})$$

Le but est d'exprimer $z(t, \epsilon)$ quand ϵ est petit. Ecrivons pour cela un développement de $z(t, \epsilon)$ au premier ordre en ϵ :

$$z(t, \epsilon) = z(t, 0) + \epsilon \frac{\partial z}{\partial \epsilon}(t, 0) + o(\epsilon) \quad (\text{D.40})$$

En dérivant à présent (D.38) par rapport à ϵ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(ikz + \epsilon A(z, t) \right) \\ &= ik \frac{\partial z}{\partial \epsilon} + A(z, t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} A(z(t, \epsilon), t) \end{aligned}$$

Par conséquent, avec $\epsilon = 0$, la fonction v définie par

$$\left| v(t) = \frac{\partial z}{\partial \epsilon}(t, 0) \right. \quad (\text{D.41})$$

vérifie l'équation différentielle

$$\left| \frac{dv}{dt} = ikv + A(z(t, 0), t) \right. \quad (\text{D.42})$$

avec une condition initiale donnée que l'on écrit :

$$\left| v(0) = \frac{\partial z}{\partial \epsilon}(0, 0) = \Delta C_0 + i\Delta S_0 \right. \quad (\text{D.43})$$

La solution de (D.42) sans le second membre $A(z(t, 0), t)$ est :

$$\left| v(t) = K e^{ikt} \right. \quad (\text{D.44})$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on obtient :

$$\left| K(t) = \int_0^t e^{-iku} A(z(u, 0)) du + K_1 \right. \quad (\text{D.45})$$

où K_1 est une certaine constante.

La solution finale de (D.38) est donc :

$$\left| \begin{aligned} z(t, \epsilon) &= z(t, 0) + \epsilon \left(\int_0^t e^{ik(t-u)} A(z(u, 0), u) du + (\Delta C_0 + i\Delta S_0) e^{ikt} \right) + o(\epsilon) \end{aligned} \right. \quad (\text{D.46})$$

ΔC_0 et ΔS_0 désignent les perturbations initiales sur C et S , qui sont éventuellement nulles. En pratique, on peut toujours se ramener à ce cas.

En termes de C et S , on définit ΔC et ΔS par

$$\boxed{\Delta C(t) + i\Delta S(t) = \epsilon \int_0^t e^{ik(t-u)} A(z(u, 0), u) du + o(\epsilon)} \quad (\text{D.47})$$

de telle sorte que :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta C(t) &= \Re(z(t, \epsilon) - z(t, 0)) \\ \Delta S(t) &= \Im(z(t, \epsilon) - z(t, 0)) \end{aligned}} \quad (\text{D.48})$$

D.2.4 Un développement en série de Fourier des fonctions de C et S

La méthode définie dans la section précédente ne peut s'appliquer que si l'on dispose d'une expression explicite en fonction du temps des quantités qu'on veut intégrer.

Les fonctions $G\cos_{n,p,q}$ et $G\sin_{n,p,q}$ sont définies comme le produit de deux fonctions⁶ de période $\frac{2\pi}{k}$: elles sont elles-mêmes périodiques de période $\frac{2\pi}{k}$ et donc développables en série de Fourier⁷. Les équations suivantes définissent les notations des coefficients :

$$\left| \begin{aligned} (G\cos_{n,p,q}(C, S))(t) &= \sum_{r \geq 0} \left(GC1_r \cos(rkt) + GC2_r \sin(rkt) \right) \\ (G\sin_{n,p,q}(C, S))(t) &= \sum_{r \geq 0} \left(GS1_r \cos(rkt) + GS2_r \sin(rkt) \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{D.49})$$

⁶La première est $\frac{1}{e^{|q|}} G_{n,p,q}(e)$, la seconde est $e^{|q|} \times (\text{D.13})$, considérée comme une fonction de C et S principaux (formule (D.32)).

⁷car C^1 par morceaux.

Leurs dérivées par rapport à C et S sont aussi développables sous la même forme :

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \right) (t) &= \sum_{r \geq 0} \left(dCGC1_r \cos(rkt) + dCGC2_r \sin(rkt) \right) \\
 \left(\frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \right) (t) &= \sum_{r \geq 0} \left(dCGS1_r \cos(rkt) + dCGS2_r \sin(rkt) \right) \\
 \left(\frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \right) (t) &= \sum_{r \geq 0} \left(dSGC1_r \cos(rkt) + dSGC2_r \sin(rkt) \right) \\
 \left(\frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \right) (t) &= \sum_{r \geq 0} \left(dSGS1_r \cos(rkt) + dSGS2_r \sin(rkt) \right)
 \end{aligned} \right. \quad (D.50)
 \end{aligned}$$

En donnant un développement explicite en fonction du temps, le formalisme des séries de Fourier est bien adapté à la mise en œuvre de la méthode, même s'il s'avère certainement être une solution de «facilité». Je ne détaille pas ici le calcul des coefficients de Fourier, qui fait appel à des calculs classiques de transformées rapides basés sur un échantillonnage des fonctions à transformer. De plus, il n'y a qu'un petit nombre de coefficients qui sont non nuls (en tous cas supérieurs à l' ϵ machine), même si je donne dans toute la suite les formules avec une sommation sur r .

D.2.5 Détail de la solution pour ΔC et ΔS

Le second membre (D.20) des équations de Lagrange vérifiées par C et S comprend trois termes. Le premier, correspondant à l'influence $\alpha_{n,m,p,q}(t)$, donne $\Delta C_1(t)$ et $\Delta S_1(t)$; le second donne $\Delta C_2(t)$ et $\Delta S_2(t)$, le troisième $\Delta C_3(t)$ et $\Delta S_3(t)$ (correspondant respectivement à l'influence de $f_{n,m,p,q}(t)$ d'une part, $\beta_{1n,m,p,q}(t)$ et $\beta_{2n,m,p,q}(t)$ d'autre part).

Je donne ainsi trois solutions, à courtes périodes, pour chacun de ces termes sous la forme :

$$\left| \begin{aligned}
 \Delta C_{n,m,p,q}(t) &= \Delta C_{1n,m,p,q}(t) + \Delta C_{2n,m,p,q}(t) + \Delta C_{3n,m,p,q}(t) \\
 \Delta S_{n,m,p,q}(t) &= \Delta S_{1n,m,p,q}(t) + \Delta S_{2n,m,p,q}(t) + \Delta S_{3n,m,p,q}(t)
 \end{aligned} \right. \quad (D.51)$$

Les résultats qui suivent utilisent la formule intégrale (D.47).

Les calculs, fastidieux, ne sont pas explicités en détails. Ils comportent trois étapes : tout d'abord le développement de la formulation matricielle sur la base de relations trigonométriques, ensuite l'intégration en elle-même, enfin la recombinaison des résultats obtenus sous une nouvelle forme matricielle (avec en général une matrice 2×2 supplémentaire). On part du calcul le plus simple ($\Delta z_2 = \Delta C_{2n,m,p,q} + i\Delta S_{2n,m,p,q}$) pour terminer par le plus compliqué ($\Delta z_3 = \Delta C_{3n,m,p,q} + i\Delta S_{3n,m,p,q}$).

D.2.6 Calcul de $\Delta C_{2n,m,p,q}$ et $\Delta S_{2n,m,p,q}$

En fonction de $z = C + iS$, et en utilisant (D.2) le système différentiel à intégrer est :

$$\left| \frac{dz_{n,m,p,q}}{dt} = \frac{1}{L} \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i)(n-2p+q)(-z) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \right. \quad (D.52)$$

En référence à la formule (D.47), la quantité à calculer est :

$$\left| \int_0^t e^{ik(t-u)}(-z) \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (D.53)$$

On a :

$$\left| e^{ik(t-u)}(-z) = \left(-C_0 - i \left(S_0 - \frac{k'}{k} \right) \right) e^{ikt} - i \frac{k'}{k} e^{ik(t-u)} \right. \quad (D.54)$$

En utilisant le développement en série de Fourier (D.49) et un certain nombre de formules trigonométriques, on obtient :

$$\left| \begin{aligned} & -\sin \tilde{\psi} G \cos_{n,p,q}(C, S) + \cos \tilde{\psi} G \sin_{n,p,q}(C, S) = \sum_{r \geq 0} \\ & \left(\frac{GC2_r + GS1_r}{2} \cos(\tilde{\psi} + rku) + \frac{GS2_r - GC1_r}{2} \sin(\tilde{\psi} + rku) \right. \\ & \left. + \frac{GS1_r - GC2_r}{2} \cos(\tilde{\psi} - rku) + \frac{-GC1_r - GS2_r}{2} \sin(\tilde{\psi} - rku) \right) \\ & \cos \tilde{\psi} G \cos_{n,p,q}(C, S) + \sin \tilde{\psi} G \sin_{n,p,q}(C, S) = \sum_{r \geq 0} \\ & \left(\frac{GC1_r - GS2_r}{2} \cos(\tilde{\psi} + rku) + \frac{GC2_r + GS1_r}{2} \sin(\tilde{\psi} + rku) \right. \\ & \left. + \frac{GC1_r + GS2_r}{2} \cos(\tilde{\psi} - rku) + \frac{GS1_r - GC2_r}{2} \sin(\tilde{\psi} - rku) \right) \end{aligned} \right. \quad (D.55)$$

Notons qu'ici $\dot{\tilde{\psi}} \neq 0$. Le contraire signifierait $n - 2p + q = 0$ et l'équation n'aurait plus lieu d'être. Il n'y a par conséquent que des termes à courtes périodes dans $\Delta C_{2n,m,p,q}$ et $\Delta S_{2n,m,p,q}$. Pour aboutir à une formulation synthétique, complètement matricielle, nous avons supposé dans le calcul des intégrales que la période du périégée est très grande devant la période de révolution du satellite⁸.

On obtient ainsi :

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^t e^{ik(t-u)}(-z) \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi} G \cos_{n,p,q}(C, S) + \cos \tilde{\psi} G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du = \\ & -z \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \right. \quad (D.56)$$

⁸ce qui en pratique signifie : la fréquence du périégée est négligeable devant l'inverse de la période de révolution du satellite.

et

$$\left| \int_0^t e^{ik(t-u)} (-z) \left(\cos \tilde{\psi} G \cos_{n,p,q}(C, S) + \sin \tilde{\psi} G \sin_{n,p,q}(C, S) \right) du = \right. \\ \left. -z \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \right. \quad (D.57)$$

On en déduit :

$$\left| Re \left(\int e^{ik(t-u)} (-z) \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du \right) = \right. \\ \left. -C \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \right. \quad (D.58)$$

et donc

$$\Delta C_{2n,m,p,q} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\eta}{1+\eta} F_{n,m,p}(i)(n-2p+q)(-C) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ - \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}_0} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (D.59)$$

On déduit aussi :

$$\left| Im \left(\int e^{ik(t-u)} (-z) \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du \right) = \right. \\ \left. -S \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \right. \quad (D.60)$$

et donc

$$\Delta S_{2n,m,p,q} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\eta}{1+\eta} F_{n,m,p}(i)(n-2p+q)(-S) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ - \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}_0} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (D.61)$$

où $\tilde{\psi}_0$ représente la valeur de l'angle $\tilde{\psi}$ à l'instant initial.

D.2.7 Calcul de $\Delta C_{1n,m,p,q}$ et de $\Delta S_{1n,m,p,q}$

On s'intéresse maintenant à $\alpha_{n,m,p,q}(t)$.

Sur la base de (D.2), l'équation différentielle à considérer est :

$$\left| \frac{dz_{n,m,p,q}}{dt} = \frac{1}{L} \frac{\cos(i)}{\sin(i)\eta} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F'_{n,m,p}(i) (S - iC) \times \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \right. \quad (D.62)$$

L'expression à intégrer est ainsi :

$$\left| \int e^{ik(t-u)} (-iz) \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (D.63)$$

A ce stade, il faut en toute rigueur distinguer deux cas : les variations à longues périodes et celles à courtes périodes (respectivement distinguer les cas $\dot{\tilde{\psi}}_{n,m,p,q} = 0$ ou non), car le calcul des intégrales en est affecté. En particulier, si $\dot{\tilde{\psi}}_{n,m,p,q} = 0$, on ne peut pas supposer que la fréquence du périégée est négligeable devant... 0. Mais pour les éléments C et S cette distinction est immédiate, puisque toutes les corrections du système complémentaire sont à courtes périodes.

On en déduit :

$$\Delta C_{1n,m,p,q} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\cos(i)}{\eta \sin(i)} F'_{n,m,p}(i) (S) \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \\ \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ - \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}_0} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(D.64)

et :

$$\Delta S_{1n,m,p,q} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\cos(i)}{\eta \sin(i)} F'_{n,m,p}(i) (-C) \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \\ \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ - \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}_0} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right)$$

(D.65)

D.2.8 Calcul de $\Delta C_{3n,m,p,q}$ et $\Delta S_{3n,m,p,q}$

Intéressons nous enfin à $\beta_{1n,m,p,q}(t)$ et $\beta_{2n,m,p,q}(t)$.

Le système différentiel à considérer est :

$$\left| \begin{aligned} \frac{dz_{n,m,p,q}}{dt} &= -\frac{1}{L} \eta \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -\frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) + i \frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \\ -\frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) + i \frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \right| \quad (D.66)$$

Et l'intégrale à calculer est :

$$\left| \int_0^t e^{ik(t-u)} \frac{dz}{dt}(u) du \right| \quad (D.67)$$

i.e.

$$\left| \begin{aligned} &\int_0^t e^{ik(t-u)} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \\ -\frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \end{pmatrix} du \\ &\int_0^t e^{ik(t-u)} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \\ \frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \end{pmatrix} du \end{aligned} \right| \quad (D.68)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta C_{3n,m,p,q} &= \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \eta F_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &\times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dSGC1_r & dSGC2_r \\ dSGS1_r & dSGS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right. \\ &\left. - \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}_0} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dSGC1_r & dSGC2_r \\ dSGS1_r & dSGS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (D.69)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta S_{3n,m,p,q} &= -\frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \eta F_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &\times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dCGC1_r & dCGC2_r \\ dCGS1_r & dCGS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right. \\ &\left. - \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\tilde{\psi}}_0} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{0n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dCGC1_r & dCGC2_r \\ dCGS1_r & dCGS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (D.70)$$

D.3 Détail de la solution pour a

Pour intégrer les équations différentielles vérifiées par les autres éléments, on utilise le même genre de développement en fonction du temps des fonctions d'excentricité que celui utilisé pour C et S .

L'élément a vérifie l'équation :

$$\left| \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i)(n-2p+q) \\ &\times \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (D.71)$$

De la même manière que pour C et S , cette équation est divisée en deux parties. Le cas $n-2p+q=0$ mène à :

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (D.72)$$

i.e.

$$a(t) = a_0 \quad (D.73)$$

Le calcul de $\Delta a(t)$ fait intervenir les deux quantités suivantes :

$$\int_0^t \left(-\sin(\tilde{\psi}) G \cos_{n,p,q}(C, S) + \cos(\tilde{\psi}) G \sin_{n,p,q}(C, S) \right) du \quad (D.74)$$

$$\int_0^t \left(\cos(\tilde{\psi}) G \cos_{n,p,q}(C, S) + \sin(\tilde{\psi}) G \sin_{n,p,q}(C, S) \right) du \quad (D.75)$$

Comme on a ici $n-2p+q \neq 0$, on déduit $\tilde{\psi} \neq 0$ et $\dot{\tilde{\psi}} \neq 0$. On peut ainsi utiliser les intégrales déjà calculées pour C et S pour déduire :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta a_{n,m,p,q} &= \frac{2a}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i)(n-2p+q) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &\times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G C 1_r & G C 2_r \\ G S 1_r & G S 2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}} \quad (D.76)$$

D.4 Détail de la solution pour Ω

L'équation différentielle vérifiée par Ω est :

$$\left| \begin{aligned} \frac{d\Omega_{n,m,p,q}}{dt} &= \frac{1}{\eta \sin(i)} \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F'_{n,m,p}(i) \times \\ &\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ -G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (D.77)$$

D.4.1 Variation séculaire $\dot{\Omega}$

Avec $n - 2p + q = 0$ et $m = 0$, (D.77) se réécrit :

$$\left| \frac{d\Omega_{n,0,p,q}}{dt} = \frac{1}{\eta \sin(i)} \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F'_{n,0,p}(i) \times \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ -G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \right. \quad (\text{D.78})$$

Comme la somme sur q de tous les termes en $G \sin$ est nulle (voir ci-après la démonstration pour i), on établit à nouveau le fait que les harmoniques zonales impaires n'ont pas d'influence sur la variation séculaire de Ω (on a cherché les termes en $C^0 S^0$).

On conclut :

$$\dot{\Omega} = \sum_{p \geq 1} (-J_{2p}) \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta \sin i} F'_{2p,0,p}(i) G \cos_{2p,p,0}(C, S) \quad (\text{D.79})$$

Il est donc nécessaire, pour établir les corrections $\Delta\Omega$, de définir une fonction d'excentricité qui ne prenne pas en compte les termes ayant servi à la définition de $\dot{\Omega}$: $\hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S)$.

$$\left| \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) = G \cos_{n,p,q}(C, S) - G \cos_{2p,p,0}(C, S) (1 - |\operatorname{sgn}(n - 2p)|) \right. \quad (\text{D.80})$$

qui se développe également en série de Fourier :

$$\left| \left(\hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) \right) (t) = \sum_{r \geq 0} \left(\hat{G} C 1_r \cos(rkt) + \hat{G} C 2_r \sin(rkt) \right) \right. \quad (\text{D.81})$$

D.4.2 Calcul des courtes périodes de $\Delta\Omega(t)$

Il est basé sur :

$$\left| \int_0^t \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{G} \cos_{npq}(C, S) \\ \hat{G} \sin_{npq}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (\text{D.82})$$

sachant que $\dot{\tilde{\psi}} \neq 0$.

De la même manière que précédemment, on établit :

$$\Delta\Omega_{n,m,p,q} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta \sin(i)} F'_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{G} C 1_r & \hat{G} C 2_r \\ \hat{G} S 1_r & \hat{G} S 2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \quad (\text{D.83})$$

D.4.3 Calcul des longues périodes de $\Delta\Omega(t)$

Il est basé sur la valeur de

$$\left| \int_0^t \begin{pmatrix} \hat{G}cos_{npq}(C, S) \\ -Gsin_{npq}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (D.84)$$

Avec les intégrales déjà calculées, on obtient :

$$\left| \int_0^t \begin{pmatrix} \hat{G}cos_{n,p,q}(C, S) \\ -Gsin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} \hat{G}C1_0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right. \quad (D.85)$$

$$\left. + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{rk} \begin{pmatrix} \hat{G}C1_r & \hat{G}C2_r \\ -GS1_r & -GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(rkt) \\ 1 - \cos(rkt) \end{pmatrix} \right|$$

On a par conséquent :

$$\Delta\Omega_{n,m,p,q} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta \sin(i)} F'_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (D.86)$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} \hat{G}C1_0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{rk} \begin{pmatrix} \hat{G}C1_r & \hat{G}C2_r \\ -GS1_r & -GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(rkt) \\ 1 - \cos(rkt) \end{pmatrix} \right)$$

D.5 Détail de la solution pour i

L'équation différentielle vérifiée par i est :

$$\left| \frac{di_{n,m,p,q}}{dt} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} F_{n,m,p}(i) \left(-m \frac{1}{\sin(i)} + (n - 2p + q) \frac{\cos(i)}{\sin(i)} \right) \right. \quad (D.87)$$

$$\times \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Gcos_{n,p,q}(C, S) \\ Gsin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F_{n,m,p}(i)$$

$$\times \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix}$$

$$\left(C \begin{pmatrix} \frac{\partial Gcos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \\ \frac{\partial Gsin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} \frac{\partial Gcos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \\ \frac{\partial Gsin_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \end{pmatrix} \right)$$

Avec $n - 2p + q = 0$ et $m = 0$, (D.87) peut être réécrit selon :

$$\left| \frac{di_{n,m,p,q}}{dt} = \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F_{n,m,p}(i) \times \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \right. \quad (D.88)$$

$$\left(C \begin{pmatrix} \frac{\partial Gcos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \\ -\frac{\partial Gsin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} \frac{\partial Gcos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \\ -\frac{\partial Gsin_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \end{pmatrix} \right)$$

Sachant que : $\left(C \frac{\partial}{\partial S} - S \frac{\partial}{\partial C} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega}$, on déduit :

- $\left(C \frac{\partial}{\partial S} - S \frac{\partial}{\partial C} \right) (G \cos_{n,p,q}(C, S)) = \frac{\partial}{\partial \omega} (G_{n,p,q}(e) \cos(q\omega)) = -q G_{n,p,q}(e) \sin(q\omega)$
- $\left(C \frac{\partial}{\partial S} - S \frac{\partial}{\partial C} \right) (G \sin_{n,p,q}(C, S)) = q G_{n,p,q}(e) \cos(q\omega)$

On peut en déduire l'impact des coefficients zonaux à longue période sur i ($n - 2p + q = 0$) :

puisque $\sum_{q=-\infty}^{+\infty} q \cos(q\omega) = 0$, il n'y a aucune variation séculaire sur i due aux zonaux impairs.

Pour les zonaux pairs, $n = 2p$ entraîne $q = 0$, et par conséquent il n'y a pas non plus de variation séculaire.

Conclusion : la première partie du système différentiel vérifié par i est :

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{D.89})$$

Pour calculer les corrections $\Delta i_{n,m,p,q}(t)$, les fonctions $G \cos_{n,p,q}$ de (D.88) doivent être remplacées par $\hat{G} \cos_{n,p,q}$, de même que les dérivées partielles par $\frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S)$ et $\frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S)$, avec un développement en série de Fourier caractérisé par les coefficients $dC \hat{G} C 1_r$, $dC \hat{G} C 2_r$, $dS \hat{G} C 1_r$, $dS \hat{G} C 2_r$.

D.5.1 Calcul des courtes périodes de $\Delta i(t)$

On peut utiliser un certain nombre d'intégrales déjà calculées dans les cas $\dot{\psi} \neq 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta i_{n,m,p,q} = & \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} F_{n,m,p}(i) \\ & \times \left(-m \frac{1}{\sin(i)} + (n - 2p + q) \frac{\cos(i)}{\sin(i)} \right) \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \\ & \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{G} C 1_r & \hat{G} C 2_r \\ G S 1_r & G S 2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ & + \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F_{n,m,p}(i) \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \\ & \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\psi}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \left(C \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_r & dS \hat{G} C 2_r \\ dS G S 1_r & dS G S 2_r \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} dC \hat{G} C 1_r & dC \hat{G} C 2_r \\ dC G S 1_r & dC G S 2_r \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

D.5.2 Calcul des longues périodes de $\Delta i(t)$

Les intégrales à calculer sont

$$\left| \int_0^t \begin{pmatrix} \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) \\ -G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (\text{D.91})$$

et également

$$\left| \int_0^t C \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \\ -\frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (\text{D.92})$$

$$\left| \int_0^t S \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \\ -\frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \end{pmatrix} du \right. \quad (\text{D.93})$$

On obtient finalement :

$$\Delta i_{n,m,p,q} = \Delta i_{1n,m,p,q} + \Delta i_{2n,m,p,q} \quad (\text{D.94})$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta i_{1n,m,p,q} = & \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ & \times \left(\frac{1}{k} (S - S_0) \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_0 \\ -dS G S 1_0 \end{pmatrix} \right. \\ & + \frac{1}{k} \sin(kt) \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_1 & dS \hat{G} C 2_1 \\ -dS G S 1_1 & -dS G S 2_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} C \\ \frac{1}{2} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \end{pmatrix} \\ & + \sum_{r \geq 2} \frac{1}{k} \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_r & dS \hat{G} C 2_r \\ -dS G S 1_r & -dS G S 2_r \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{r^2-1} \left(S_0 - \frac{k'}{k} \right) \\ \frac{r}{r^2-1} C_0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \left. + \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) & \frac{r}{r^2-1} C \\ -\frac{r}{r^2-1} C & -\frac{1}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.95})$$

et

$$\begin{aligned}
 \Delta i_{2n,m,p,q} = & -\frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F_{n,m,p}(i) \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \\
 & \times \left(-\frac{1}{k} (C - C_0) \left(\begin{array}{cc} dC\hat{G}C1_0 & \\ -dCGS1_0 & \end{array} \right) \right. \\
 & + \frac{1}{k} \sin(kt) \left(\begin{array}{cc} dC\hat{G}C1_1 & dC\hat{G}C2_1 \\ -dCGS1_1 & -dCGS2_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \\ -\frac{1}{2} C \end{array} \right) \\
 & + \frac{k'}{k} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{rk} \left(\begin{array}{cc} dC\hat{G}C1_1 & dC\hat{G}C2_1 \\ -dCGS1_1 & -dCGS2_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \sin(rkt) \\ 1 - \cos(rkt) \end{array} \right) \\
 & + \sum_{r \geq 2} \frac{1}{k} \left(\begin{array}{cc} dC\hat{G}C1_r & dC\hat{G}C2_r \\ -dCGS1_r & -dCGS2_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{r^2-1} C_0 \\ \frac{r}{r^2-1} \left(S_0 - \frac{k'}{k} \right) \end{array} \right) \\
 & \left. + \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{r^2-1} C & \frac{r}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \\ -\frac{r}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) & \frac{1}{r^2-1} C \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{array} \right) \right) \Bigg)
 \end{aligned} \tag{D.96}$$

D.6 Détail de la solution pour λ

L'équation différentielle vérifiée par λ est :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} \right. = & \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\eta}{1+\eta} F_{n,m,p}(i) \\
 & \times \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{array} \right) \\
 & \left(C \left(\begin{array}{c} \frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \\ \frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial C}(C, S) \end{array} \right) + S \left(\begin{array}{c} \frac{\partial G \cos_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \\ \frac{\partial G \sin_{n,p,q}}{\partial S}(C, S) \end{array} \right) \right) \\
 & + \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \left(-\frac{\cos(i)}{\eta \sin(i)} F'_{n,m,p}(i) + 2(n+1) F_{n,m,p}(i) \right) \times \\
 & \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} G \cos_{n,p,q}(C, S) \\ G \sin_{n,p,q}(C, S) \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{D.97}$$

D.6.1 Variation séculaire $\dot{\lambda}$

Pour la même raison que pour i , les zonaux impairs n'ont pas d'influence sur la variation séculaire de λ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \sum_{p \geq 1} (-J_{2p}) \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \left(\frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F'_{2p,0,p}(i) - 2(n+1) F_{2p,0,p}(i) \right) G \cos_{2p,0}(C, S) \\ & + \sum_{p \geq 1} (-J_{2p}) \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{1}{1+\eta} F_{2p,0,p}(i) \\ & \times \left(C \frac{\partial}{\partial C} G \cos_{2p,0}(C, S) + S \frac{\partial}{\partial S} G \cos_{2p,0}(C, S) \right) \end{aligned} \quad (D.98)$$

D.6.2 Calcul des courtes périodes de $\Delta\lambda(t)$

Les intégrales à évaluer sont

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t C \left(\cos \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial C} \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) + \sin \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial C} G \sin_{n,p,q}(C, S) \right) du \right. \\ & \left. \int_0^t C \left(\sin \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial C} \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) - \cos \tilde{\psi} \frac{\partial}{\partial C} G \sin_{n,p,q}(C, S) \right) du \right. \end{aligned} \quad (D.99)$$

desquelles on déduit

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{n,m,p,q} = & \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \\ & \times \left(-\frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F'_{n,m,p}(i) + 2(n+1) F_{n,m,p}(i) \right) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ & \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{G}C1_r & \hat{G}C2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ & + \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\eta}{1+\eta} F_{n,m,p}(i) \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ & \times \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\tilde{\psi}} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \\ -\cos \tilde{\psi}_{n,m,p,q} & -\sin \tilde{\psi}_{n,m,p,q} \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \left(C \begin{pmatrix} dC\hat{G}C1_r & dC\hat{G}C2_r \\ dCGS1_r & dCGS2_r \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} dS\hat{G}C1_r & dS\hat{G}C2_r \\ dSGS1_r & dSGS2_r \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (D.100)$$

D.6.3 Calcul des longues périodes de $\Delta\lambda(t)$

Avec $n - 2p + q = 0$ et $m = 0$, (D.87) peut être réécrit, en omettant maintenant les termes de $\dot{\lambda}$:

$$\left| \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} - n &= C \frac{\eta}{1+\eta} \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \times (\dots \dots) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S)}{\partial C} \\ -\frac{\partial \hat{G} \sin_{n,p,q}(C, S)}{\partial C} \end{pmatrix} \\ &+ S \frac{\eta}{1+\eta} \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \times (\dots \dots) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S)}{\partial S} \\ -\frac{\partial \hat{G} \sin_{n,p,q}(C, S)}{\partial S} \end{pmatrix} \\ &- \frac{\cos(i)}{\eta \sin(i)} \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F'_{n,m,p}(i) \times (\dots \dots) \begin{pmatrix} \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) \\ -\hat{G} \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \\ &+ 2(n+1) \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i) \times (\dots \dots) \begin{pmatrix} \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S) \\ -\hat{G} \sin_{n,p,q}(C, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \right| \quad (D.101)$$

Les intégrales qui n'ont pas encore été calculées sont :

$$\left| \begin{aligned} &\int_0^t C \frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}(C, S)}{\partial C} du \\ &\int_0^t -C \frac{\partial \hat{G} \sin_{n,p,q}(C, S)}{\partial C} du \end{aligned} \right| \quad (D.102)$$

On obtient par exemple :

$$\left| \begin{aligned} \int_0^t S \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{G} \cos_{n,p,q}}{\partial S} \\ -\frac{\partial \hat{G} \sin_{n,p,q}}{\partial S} \end{pmatrix} du &= \left(-\frac{1}{k}(C - C_0) + \frac{k'}{k}t \right) \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_0 \\ -dS \hat{G} S 1_0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_1 & dS \hat{G} C 2_1 \\ -dS \hat{G} S 1_1 & -dS \hat{G} S 2_1 \end{pmatrix} \left(\left(\left(S_0 - \frac{k'}{k} \right)^{\frac{1}{2}t} \right) + \frac{1}{k} \sin(kt) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \\ -\frac{1}{2} C \end{pmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k'}{k} \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sin(kt) \\ 1 - \cos(kt) \end{pmatrix} \right) \\ &+ \sum_{r \geq 2} \frac{1}{k} \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_r & dS \hat{G} C 2_r \\ -dS \hat{G} S 1_r & -dS \hat{G} S 2_r \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2-1} C_0 \\ \frac{r}{r^2-1} \left(S_0 - \frac{k'}{k} \right) \end{pmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2-1} C & \frac{r}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \\ -\frac{r}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) & \frac{1}{r^2-1} C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \right) \\ &+ \frac{k'}{k} \sum_{r \geq 2} \frac{1}{rk} \begin{pmatrix} dS \hat{G} C 1_r & dS \hat{G} C 2_r \\ -dS \hat{G} S 1_r & -dS \hat{G} S 2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(rkt) \\ 1 - \cos(rkt) \end{pmatrix} \end{aligned} \right| \quad (D.103)$$

En reliant les différentes expressions des intégrales, on obtient ainsi :

$$\boxed{\Delta\lambda_{n,m,p,q} = \Delta\lambda_{1n,m,p,q} + \Delta\lambda_{2n,m,p,q} + \Delta\lambda_{3n,m,p,q}} \quad (D.104)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_{1n,m,p,q} &= \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\eta}{1+\eta} F_{n,m,p}(i) \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{k} (S - S_0) \left(\begin{array}{cc} d\hat{C}\hat{G}C1_0 & \\ -d\hat{C}GS1_0 & \end{array} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{k} \sin(kt) \left(\begin{array}{cc} d\hat{C}\hat{G}C1_1 & d\hat{C}\hat{G}C2_1 \\ -d\hat{C}GS1_1 & -d\hat{C}GS2_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \end{array} \right) \\
&\quad + \sum_{r \geq 2} \frac{1}{k} \left(\begin{array}{cc} d\hat{C}\hat{G}C1_r & d\hat{C}\hat{G}C2_r \\ -d\hat{C}GS1_r & -d\hat{C}GS2_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1}{r^2-1} \left(S_0 - \frac{k'}{k} \right) \\ \frac{r}{r^2-1} C_0 \end{array} \right) \\
&\quad \left. + \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) & \frac{r}{r^2-1} C \\ -\frac{r}{r^2-1} C & -\frac{1}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{array} \right) \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{D.105}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_{2n,m,p,q} &= \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \frac{\eta}{1+\eta} F_{n,m,p}(i) \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \\
&\times \left(-\frac{1}{k} (C - C_0) \left(\begin{array}{cc} dS\hat{G}C1_0 & \\ -dSGS1_0 & \end{array} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{k} \sin(kt) \left(\begin{array}{cc} dS\hat{G}C1_1 & dS\hat{G}C2_1 \\ -dSGS1_1 & -dSGS2_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \\ -\frac{1}{2}C \end{array} \right) \\
&\quad + \frac{k'}{k} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{rk} \left(\begin{array}{cc} dS\hat{G}C1_r & dS\hat{G}C2_r \\ -dSGS1_r & -dSGS2_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \sin(rkt) \\ 1 - \cos(rkt) \end{array} \right) \\
&\quad + \sum_{r \geq 2} \frac{1}{k} \left(\begin{array}{cc} dS\hat{G}C1_r & dS\hat{G}C2_r \\ -dSGS1_r & -dSGS2_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{r^2-1} C_0 \\ \frac{r}{r^2-1} \left(S_0 - \frac{k'}{k} \right) \end{array} \right) \\
&\quad \left. + \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{r^2-1} C & \frac{r}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) \\ -\frac{r}{r^2-1} \left(S - \frac{k'}{k} \right) & \frac{1}{r^2-1} C \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{array} \right) \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{D.106}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_{3n,m,p,q} &= \frac{1}{L} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \left(2(n+1)F_{n,m,p}(i) - \frac{1}{\eta} \frac{\cos(i)}{\sin(i)} F'_{n,m,p}(i) \right) \left(\begin{array}{cc} \cdots & \cdots \end{array} \right) \\
&\times \left(\left(\begin{array}{cc} \hat{G}C1_0 & \\ 0 & \end{array} \right) t + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{rk} \left(\begin{array}{cc} \hat{G}C1_r & \hat{G}C2_r \\ -GS1_r & -GS2_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \sin(rkt) \\ 1 - \cos(rkt) \end{array} \right) \right)
\end{aligned} \tag{D.107}$$

D.6.4 La correction du moyen mouvement

En calculant la différentielle de la troisième loi de Kepler $\bar{n}^2 a^3 = \mu$, on obtient : $d\bar{n} = -\frac{3}{2} \frac{\bar{n}}{a} da$. La variation $\Delta\bar{n}(t)$ du moyen mouvement est ainsi reliée à la variation $\Delta a(t)$ du demi-grand axe selon :

$$\left| \begin{aligned} \Delta\bar{n}(t) &= -\frac{3}{2} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \Delta a(t) \\ &= -3 \frac{1}{a^2} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i)(n-2p+q) \times (\cdots \cdots) \\ &\quad \sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\psi}} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & \sin \tilde{\psi} \\ \sin \tilde{\psi} & -\cos \tilde{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (D.108)$$

en référence à l'équation (D.76).

De la même manière que \bar{n} dans les équations de Lagrange est intégrée en $\bar{n}t$, (D.108) est intégrée en⁹ $\Delta\Delta\bar{n}(t)$:

$$\Delta\Delta\bar{n}_{n,m,p,q}(t) = -3 \frac{1}{a^2} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n F_{n,m,p}(i)(n-2p+q) \times (\cdots \cdots)$$

$$\sum_{r \geq 0} \frac{1}{\dot{\psi}^2} \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi} & -\cos \tilde{\psi} \\ -\cos \tilde{\psi} & -\sin \tilde{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GC1_r & GC2_r \\ GS1_r & GS2_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(rkt) \\ \sin(rkt) \end{pmatrix}$$

(D.109)

⁹remarque : puisque $\bar{n} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$, la période caractéristique de $\Delta\Delta\bar{n}_{n,m,p,q}(t)$ est $T = \frac{2\pi\bar{n}}{\dot{\psi}_{n,m,p,q}^2}$ ce qui est bien une quantité homogène à un temps.

Annexe E

Principe du développement de Kaula

L'expression du potentiel perturbateur gravitationnel exprimé en coordonnées sphériques dans un repère lié au centre de masse de la Terre (ce qui explique l'absence de termes de degré 1) est :

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_0}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda)) P_{n,m}(\sin \varphi) \quad (\text{E.1})$$

Dans cette écriture (voir figure C.1) :

- r est la distance entre le centre de la Terre et le satellite,
- λ est la longitude du satellite,
- φ sa latitude ;
- on a $\mu = GM$ où G est la constante de la gravitation universelle et M la masse de la Terre ;
- n est appelé le *degré* du développement, et m son *ordre*.
- R_0 est le rayon équatorial de la Terre ;
- le modèle du champ de gravité est caractérisé par les coefficients $C_{n,m}$ et $S_{n,m}$.

Le but est de formuler les équations de Lagrange de manière homogène, avec les mêmes variables dans les dérivées par rapport au temps que dans les seconds membres. Il faut ainsi transformer l'expression en coordonnées sphériques du potentiel (E.1) pour obtenir une formulation en éléments orbitaux, et en déduire facilement une expression en éléments non singuliers en excentricité.

E.1 Introduction des fonctions d'inclinaison

La première étape de cette transformation consiste à exprimer les angles des coordonnées sphériques en fonction des angles qui repèrent «géométriquement» l'orbite dans l'espace : l'inclinaison i , l'argument du nœud Ω , la position du périée ω , et l'anomalie vraie v .

On a ainsi, grâce aux fonctions d'inclinaison $F_{n,m,p}(i)$ dont on peut trouver une expression

explicite dans [Kaula, 1966] :

$$\begin{aligned} (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\sin \varphi) = \\ \sum_{p=0}^n F_{n,m,p}(i) \left(\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} C_{n,m} \\ -S_{n,m} \end{array} \right]_{(n-m)_{\text{pair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \cos((n-2p)(\omega+v) + m(\Omega - TS_G)) \\ & + \left[\begin{array}{c} S_{n,m} \\ C_{n,m} \end{array} \right]_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \sin((n-2p)(\omega+v) + m(\Omega - TS_G)) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Cette transformation contient implicitement un changement de repère. Grâce à l'introduction du temps sidéral à Greenwich TS_G , le nouveau repère dans lequel on exprime le potentiel devient indépendant de la rotation terrestre.

E.2 Introduction de l'excentricité

La deuxième étape de la transformation nécessite de prendre en compte le terme en

$$\frac{R_0^n}{r^{n+1}} = \frac{R_0^n}{a^{n+1}} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{1}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1}$$

Le demi grand-axe a été introduit pour développer

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}$$

en puissances de l'excentricité.

Les fonctions¹ $G_{n,p,q}(e)$, dont on trouve également une expression dans [Kaula, 1966], permettent de transformer, dans le plan de l'orbite, la formulation en fonction des coordonnées polaires r et v en une formulation qui dépend des éléments képlériens e et M :

$$\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} e^{i((n-2p)v)} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{n,p,q}(e) e^{i((n-2p+q)M)} \quad (\text{E.3})$$

En ajoutant un argument angulaire quelconque Arg , on a :

$$\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} e^{i((n-2p)v+Arg)} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{n,p,q}(e) e^{i((n-2p+q)M+Arg)} \quad (\text{E.4})$$

Cette formule traduit la spécificité du développement de Kaula, qui est un développement en fonction de l'anomalie moyenne M . Il s'agit en fait d'un développement en série de Fourier.

Ce développement est exact, dans la mesure où il ne suppose aucune approximation. En pratique, le développement en excentricité est une somme finie, et la puissance de l'excentricité la plus élevée présente dans chaque développement est $|q|$. Dans le cas des satellites quasi-circulaires, le champ de variation de q est ainsi fortement limité².

¹qui sont un cas particulier de fonctions dites de Hansen : $G_{n,p,q} = X_{n-2p+q}^{-(n+1),(n-2p)}$.

²et même dans le cas de STARLETTE, avec une excentricité de quelques centièmes, les termes avec $|q| \geq 3$ ont une amplitude subcentimétrique.

E.3 Ecriture des développements

Il suffit d'appliquer les deux formules précédentes (E.2) et (E.4), avec $Arg = (n - 2p)\omega + m(\Omega - TS_G)$:

$$U_{n,m} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_0}{a} \right)^n \sum_{p=0}^n F_{n,m,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{n,p,q}(e) \times \left(\begin{bmatrix} C_{n,m} \\ -S_{n,m} \end{bmatrix}_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \cos \psi_{n,m,p,q} + \begin{bmatrix} S_{n,m} \\ C_{n,m} \end{bmatrix}_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \sin \psi_{n,m,p,q} \right) \quad (\text{E.5})$$

avec :

$$\psi_{n,m,p,q} = (n - 2p + q)M + (n - 2p)\omega + m(\Omega - TS_G). \quad (\text{E.6})$$

Annexe F

Éléments moyens de satellites

Je présente ici les résultats de l'exploitation des données issues du réseau de télémétrie laser (sauf pour TOPEX/Poséidon et CHAMP), disponibles à Grasse à l'été 2002. Les éléments centrés présentés dans chacun des tableaux suivants ont été obtenus selon le processus décrit dans le chapitre 2 : les orbites osculatrices des satellites, construites indépendamment de la théorie du centrage, sont filtrées. Deux étapes successives, la première analytique, la seconde numérique, permettent de ne retenir dans chacune des variables décrivant le mouvement des satellites que les composantes à longues périodes.

Même si le filtrage a été effectué en éléments non singuliers en excentricité, les tableaux présentent les résultats en éléments orbitaux classiques. Notons que ce sont bien les observations formulées en éléments non singuliers qui constituent les «éléments moyens observés», puisque les longues périodes dépendent du type d'éléments utilisés pour décrire le mouvement orbital.

Il faut saisir tout l'intérêt de telles valeurs pour l'analyse d'une orbite donnée sur le long terme : les éléments centrés sont indépendants du modèle d'orbite moyenne utilisé pour la restitution. Ils permettent ainsi de mettre en évidence les impacts de toutes les améliorations successives du modèle d'orbite, et ce sur l'ensemble de la période durant laquelle des observations sont disponibles. Il suffit pour cela d'un seul lancement du logiciel.

Je ne détaille pas les niveaux usuels de précision atteints sur la convergence des orbites osculatrices construites avec GINS. En guise d'illustration, les éléments centrés de LAGEOS-2 qui figurent dans la table F.5 et la suivante ont été obtenus grâce au filtrage de 140 arcs de 24 jours, issus de GINS. Sur l'ensemble de la période, le RMS moyen de chaque arc est de 4 cm, avec un maximum à 7,5 cm, et un minimum à 1,4 cm.

F.1 LAGEOS-1

Caractéristiques du mouvement de LAGEOS-1 (déterminées sur le premier arc filtré) :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 12270,022$ km, $e = 0,4241 \cdot 10^{-2}$,
 $i = 109,83^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = 0.691 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\theta} = -0.432 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$,
 $\dot{\lambda} = 0.464406 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,

Tab. F.1 – Éléments moyens «observés» de LAGEOS 1.
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 10993 | 12270.023428 | 4.167689e - 03 | 1.916995e + 00 | 2.424269e + 00 | 5.841794e + 00 | 3.588427e + 00 |
| 11017 | 12270.023426 | 4.121141e - 03 | 1.916928e + 00 | 2.567743e + 00 | 5.746356e + 00 | 5.349136e + 00 |
| 11041 | 12270.023174 | 4.076890e - 03 | 1.916782e + 00 | 2.711190e + 00 | 5.650212e + 00 | 8.273130e - 01 |
| 11065 | 12270.023010 | 4.037645e - 03 | 1.916621e + 00 | 2.854588e + 00 | 5.553054e + 00 | 2.589519e + 00 |
| 11089 | 12270.023247 | 4.000833e - 03 | 1.916538e + 00 | 2.997989e + 00 | 5.454878e + 00 | 4.352673e + 00 |
| 11113 | 12270.023070 | 3.970092e - 03 | 1.916455e + 00 | 3.141417e + 00 | 5.355083e + 00 | 6.117475e + 00 |
| 11137 | 12270.022771 | 3.939916e - 03 | 1.916392e + 00 | 3.284813e + 00 | 5.254545e + 00 | 1.599725e + 00 |
| 11161 | 12270.022941 | 3.915247e - 03 | 1.916438e + 00 | 3.428198e + 00 | 5.152602e + 00 | 3.366554e + 00 |
| 11185 | 12270.023175 | 3.895170e - 03 | 1.916539e + 00 | 3.571616e + 00 | 5.050678e + 00 | 5.133496e + 00 |
| 11209 | 12270.023131 | 3.879263e - 03 | 1.916641e + 00 | 3.715038e + 00 | 4.948318e + 00 | 6.177566e - 01 |
| 11233 | 12270.022914 | 3.868593e - 03 | 1.916776e + 00 | 3.858441e + 00 | 4.845892e + 00 | 2.385289e + 00 |
| 11257 | 12270.022906 | 3.861489e - 03 | 1.916954e + 00 | 4.001863e + 00 | 4.743171e + 00 | 4.153243e + 00 |
| 11281 | 12270.023155 | 3.860524e - 03 | 1.917056e + 00 | 4.145352e + 00 | 4.640326e + 00 | 5.921479e + 00 |
| 11305 | 12270.022927 | 3.860378e - 03 | 1.917078e + 00 | 4.288860e + 00 | 4.537111e + 00 | 1.406860e + 00 |
| 11339 | 12270.022907 | 3.873746e - 03 | 1.917108e + 00 | 4.492227e + 00 | 4.392432e + 00 | 2.340225e + 00 |
| 11363 | 12270.023107 | 3.887340e - 03 | 1.917020e + 00 | 4.635821e + 00 | 4.290372e + 00 | 4.107940e + 00 |
| 11387 | 12270.022946 | 3.908409e - 03 | 1.916973e + 00 | 4.779362e + 00 | 4.188265e + 00 | 5.875715e + 00 |
| 11411 | 12270.022923 | 3.935150e - 03 | 1.917004e + 00 | 4.922873e + 00 | 4.087610e + 00 | 1.359071e + 00 |
| 11435 | 12270.023070 | 3.965658e - 03 | 1.917034e + 00 | 5.066371e + 00 | 3.987773e + 00 | 3.124908e + 00 |
| 11459 | 12270.023091 | 4.002911e - 03 | 1.917109e + 00 | 5.209840e + 00 | 3.889291e + 00 | 4.889351e + 00 |
| 11483 | 12270.022947 | 4.042217e - 03 | 1.917270e + 00 | 5.353300e + 00 | 3.791643e + 00 | 3.698005e - 01 |
| 11507 | 12270.022814 | 4.087090e - 03 | 1.917439e + 00 | 5.496800e + 00 | 3.695380e + 00 | 2.132191e + 00 |
| 11531 | 12270.022901 | 4.134351e - 03 | 1.917516e + 00 | 5.640360e + 00 | 3.600274e + 00 | 3.893420e + 00 |
| 11555 | 12270.022911 | 4.185484e - 03 | 1.917581e + 00 | 5.783942e + 00 | 3.506973e + 00 | 5.652750e + 00 |
| 11579 | 12270.022817 | 4.236948e - 03 | 1.917621e + 00 | 5.927535e + 00 | 3.415345e + 00 | 1.127346e + 00 |
| 11603 | 12270.022825 | 4.287363e - 03 | 1.917521e + 00 | 6.071121e + 00 | 3.324504e + 00 | 2.884393e + 00 |
| 11627 | 12270.022825 | 4.337993e - 03 | 1.917369e + 00 | 6.214653e + 00 | 3.235311e + 00 | 4.639678e + 00 |
| 11651 | 12270.022766 | 4.386790e - 03 | 1.917262e + 00 | 7.492845e - 02 | 3.146027e + 00 | 1.118816e - 01 |
| 11675 | 12270.022734 | 4.434612e - 03 | 1.917184e + 00 | 2.183330e - 01 | 3.057550e + 00 | 1.866571e + 00 |
| 11699 | 12270.022772 | 4.481537e - 03 | 1.917115e + 00 | 3.617150e - 01 | 2.969423e + 00 | 3.620893e + 00 |
| 11723 | 12270.022688 | 4.526724e - 03 | 1.917161e + 00 | 5.051192e - 01 | 2.882341e + 00 | 5.374053e + 00 |
| 11747 | 12270.022569 | 4.569964e - 03 | 1.917314e + 00 | 6.485841e - 01 | 2.796171e + 00 | 8.432381e - 01 |
| 11771 | 12270.022607 | 4.612009e - 03 | 1.917418e + 00 | 7.921089e - 01 | 2.710398e + 00 | 2.595252e + 00 |
| 11795 | 12270.022555 | 4.648902e - 03 | 1.917492e + 00 | 9.356842e - 01 | 2.625833e + 00 | 4.345916e + 00 |
| 11819 | 12270.022322 | 4.685837e - 03 | 1.917570e + 00 | 1.079297e + 00 | 2.541154e + 00 | 6.096714e + 00 |
| 11843 | 12270.022171 | 4.719759e - 03 | 1.917562e + 00 | 1.222902e + 00 | 2.457234e + 00 | 1.563655e + 00 |
| 11867 | 12270.022249 | 4.752694e - 03 | 1.917439e + 00 | 1.366461e + 00 | 2.373635e + 00 | 3.313404e + 00 |
| 11891 | 12270.022358 | 4.783929e - 03 | 1.917294e + 00 | 1.509980e + 00 | 2.290683e + 00 | 5.062367e + 00 |
| 11915 | 12270.022058 | 4.811370e - 03 | 1.917179e + 00 | 1.653493e + 00 | 2.208168e + 00 | 5.277527e - 01 |
| 11939 | 12270.021965 | 4.838275e - 03 | 1.917004e + 00 | 1.796974e + 00 | 2.125885e + 00 | 2.276082e + 00 |
| 11963 | 12270.022154 | 4.859412e - 03 | 1.916860e + 00 | 1.940440e + 00 | 2.043601e + 00 | 4.024194e + 00 |
| 11987 | 12270.022049 | 4.881849e - 03 | 1.916821e + 00 | 2.083947e + 00 | 1.961647e + 00 | 5.771882e + 00 |
| 12011 | 12270.021716 | 4.898728e - 03 | 1.916809e + 00 | 2.227480e + 00 | 1.880426e + 00 | 1.235616e + 00 |
| 12035 | 12270.021598 | 4.912872e - 03 | 1.916795e + 00 | 2.370989e + 00 | 1.799448e + 00 | 2.982121e + 00 |
| 12059 | 12270.021838 | 4.923696e - 03 | 1.916822e + 00 | 2.514471e + 00 | 1.718903e + 00 | 4.728007e + 00 |
| 12083 | 12270.021980 | 4.930263e - 03 | 1.916870e + 00 | 2.657952e + 00 | 1.638274e + 00 | 1.907580e - 01 |
| 12107 | 12270.021618 | 4.933331e - 03 | 1.916827e + 00 | 2.801397e + 00 | 1.557630e + 00 | 1.936685e + 00 |
| 12131 | 12270.021767 | 4.930693e - 03 | 1.916749e + 00 | 2.944782e + 00 | 1.476282e + 00 | 3.683139e + 00 |
| 12155 | 12270.022085 | 4.924842e - 03 | 1.916688e + 00 | 3.088179e + 00 | 1.395423e + 00 | 5.429070e + 00 |
| 12179 | 12270.021966 | 4.910826e - 03 | 1.916585e + 00 | 3.231593e + 00 | 1.314662e + 00 | 8.917174e - 01 |
| 12203 | 12270.021641 | 4.894152e - 03 | 1.916467e + 00 | 3.374985e + 00 | 1.233912e + 00 | 2.637441e + 00 |
| 12227 | 12270.021604 | 4.874030e - 03 | 1.916417e + 00 | 3.518365e + 00 | 1.153300e + 00 | 4.382988e + 00 |
| 12251 | 12270.021863 | 4.851954e - 03 | 1.916431e + 00 | 3.661776e + 00 | 1.072494e + 00 | 6.128832e + 00 |
| 12275 | 12270.021848 | 4.826395e - 03 | 1.916454e + 00 | 3.805197e + 00 | 9.913343e - 01 | 1.591932e + 00 |
| 12299 | 12270.021502 | 4.800042e - 03 | 1.916549e + 00 | 3.948576e + 00 | 9.091509e - 01 | 3.339261e + 00 |
| 12323 | 12270.021761 | 4.771387e - 03 | 1.916742e + 00 | 4.091983e + 00 | 8.272339e - 01 | 5.086537e + 00 |
| 12347 | 12270.021982 | 4.739516e - 03 | 1.916917e + 00 | 4.235439e + 00 | 7.446744e - 01 | 5.514428e - 01 |
| 12371 | 12270.021788 | 4.708241e - 03 | 1.917074e + 00 | 4.378908e + 00 | 6.619795e - 01 | 2.299704e + 00 |
| 12395 | 12270.021510 | 4.673984e - 03 | 1.917237e + 00 | 4.522406e + 00 | 5.785358e - 01 | 4.048822e + 00 |
| 12430 | 12270.021703 | 4.623941e - 03 | 1.917312e + 00 | 4.731807e + 00 | 4.549543e - 01 | 1.104038e + 00 |
| 12454 | 12270.021595 | 4.586161e - 03 | 1.917273e + 00 | 4.875419e + 00 | 3.700874e - 01 | 2.854815e + 00 |
| 12478 | 12270.021470 | 4.545135e - 03 | 1.917237e + 00 | 5.019012e + 00 | 2.839738e - 01 | 4.606998e + 00 |
| 12502 | 12270.021523 | 4.503290e - 03 | 1.917175e + 00 | 5.162581e + 00 | 1.971053e - 01 | 7.692789e - 02 |
| 12526 | 12270.021701 | 4.458693e - 03 | 1.917097e + 00 | 5.306102e + 00 | 1.087779e - 01 | 1.831497e + 00 |
| 12550 | 12270.021607 | 4.414561e - 03 | 1.917124e + 00 | 5.449548e + 00 | 2.016127e - 02 | 3.586293e + 00 |
| 12574 | 12270.021441 | 4.367677e - 03 | 1.917229e + 00 | 5.592970e + 00 | 6.213529e + 00 | 5.342441e + 00 |
| 12598 | 12270.021501 | 4.320759e - 03 | 1.917305e + 00 | 5.736421e + 00 | 6.122953e + 00 | 8.161705e - 01 |
| 12622 | 12270.021522 | 4.274101e - 03 | 1.917421e + 00 | 5.879898e + 00 | 6.032055e + 00 | 2.573287e + 00 |
| 12646 | 12270.021443 | 4.227609e - 03 | 1.917570e + 00 | 6.023409e + 00 | 5.939688e + 00 | 4.331947e + 00 |
| 12670 | 12270.021411 | 4.180913e - 03 | 1.917635e + 00 | 6.166958e + 00 | 5.846877e + 00 | 6.091135e + 00 |
| 12694 | 12270.021423 | 4.135272e - 03 | 1.917592e + 00 | 2.733679e - 02 | 5.752420e + 00 | 1.568715e + 00 |
| 12718 | 12270.021364 | 4.089921e - 03 | 1.917524e + 00 | 1.708792e - 01 | 5.656959e + 00 | 3.330395e + 00 |
| 12742 | 12270.021296 | 4.048903e - 03 | 1.917442e + 00 | 3.143684e - 01 | 5.559874e + 00 | 5.093817e + 00 |
| 12766 | 12270.021356 | 4.012089e - 03 | 1.917270e + 00 | 4.577968e - 01 | 5.461394e + 00 | 5.754681e - 01 |
| 12790 | 12270.021303 | 3.978062e - 03 | 1.917153e + 00 | 6.011926e - 01 | 5.362010e + 00 | 2.341105e + 00 |
| 12814 | 12270.021162 | 3.950680e - 03 | 1.917161e + 00 | 7.445953e - 01 | 5.261234e + 00 | 4.108228e + 00 |
| 12838 | 12270.021161 | 3.925189e - 03 | 1.917200e + 00 | 8.880290e - 01 | 5.159814e + 00 | 5.876086e + 00 |
| 12862 | 12270.021222 | 3.907063e - 03 | 1.917255e + 00 | 1.031518e + 00 | 5.057646e + 00 | 1.361417e + 00 |
| 12886 | 12270.021111 | 3.892542e - 03 | 1.917367e + 00 | 1.175084e + 00 | 4.955183e + 00 | 3.130143e + 00 |
| 12910 | 12270.020772 | 3.883501e - 03 | 1.917485e + 00 | 1.318706e + 00 | 4.852535e + 00 | 4.899114e + 00 |
| 12934 | 12270.020831 | 3.881067e - 03 | 1.917480e + 00 | 1.462312e + 00 | 4.749877e + 00 | 3.848890e - 01 |
| 12958 | 12270.021048 | 3.884204e - 03 | 1.917424e + 00 | 1.605896e + 00 | 4.646743e + 00 | 2.154137e + 00 |
| 12982 | 12270.020855 | 3.894724e - 03 | 1.917353e + 00 | 1.749477e + 00 | 4.544464e + 00 | 3.922536e + 00 |
| 13006 | 12270.020668 | 3.906193e - 03 | 1.917188e + 00 | 1.893011e + 00 | 4.442117e + 00 | 5.691001e + 00 |
| 13030 | 12270.020796 | 3.923174e - 03 | 1.916969e + 00 | 2.036484e + 00 | 4.340661e + 00 | 1.175203e + 00 |
| 13054 | 12270.020939 | 3.942077e - 03 | 1.916796e + 00 | 2.179944e + 00 | 4.239850e + 00 | 2.941770e + 00 |
| 13078 | 12270.020691 | 3.965179e - 03 | 1.916669e + 00 | 2.323423e + 00 | 4.139510e + 00 | 4.707795e + 00 |
| 13102 | 12270.020182 | 3.992831e - 03 | 1.916548e + 00 | 2.466882e + 00 | 4.040168e + 00 | 1.895096e - 01 |
| 13126 | 12270.020414 | 4.026432e - 03 | 1.916501e + 00 | 2.610296e + 00 | 3.941493e + 00 | 1.953493e + 00 |
| 13150 | 12270.020622 | 4.061730e - 03 | 1.916551e + 00 | 2.753739e + 00 | 3.844621e + 00 | 3.715611e + 00 |
| 13174 | 12270.020356 | 4.099369e - 03 | 1.916587e + 00 | 2.897170e + 00 | 3.748274e + 00 | 5.477174e + 00 |
| 13198 | 12270.020264 | 4.141698e - 03 | 1.916617e + 00 | 3.040546e + 00 | 3.653716e + 00 | 9.536492e - 01 |

TAB. F.2 – Éléments moyens «observés» de LAGEOS-1 (suite 1).
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 13222 | 12270.020515 | 4.186440e-03 | 1.916672e+00 | 3.183910e+00 | 3.560252e+00 | 2.712193e+00 |
| 13246 | 12270.020667 | 4.235085e-03 | 1.916697e+00 | 3.327301e+00 | 3.467759e+00 | 4.469831e+00 |
| 13270 | 12270.020329 | 4.286256e-03 | 1.916658e+00 | 3.470696e+00 | 3.375853e+00 | 6.226886e+00 |
| 13294 | 12270.019931 | 4.340621e-03 | 1.916622e+00 | 3.614070e+00 | 3.284761e+00 | 1.699915e+00 |
| 13318 | 12270.020315 | 4.392278e-03 | 1.916620e+00 | 3.757488e+00 | 3.194267e+00 | 3.455669e+00 |
| 13342 | 12270.020381 | 4.444807e-03 | 1.916582e+00 | 3.900951e+00 | 3.104455e+00 | 5.210836e+00 |
| 13366 | 12270.020107 | 4.495199e-03 | 1.916588e+00 | 4.044394e+00 | 3.016113e+00 | 6.813951e-01 |
| 13390 | 12270.020104 | 4.544102e-03 | 1.916688e+00 | 4.187838e+00 | 2.928210e+00 | 2.434897e+00 |
| 13414 | 12270.020374 | 4.592630e-03 | 1.916821e+00 | 4.331314e+00 | 2.841309e+00 | 4.187636e+00 |
| 13438 | 12270.020471 | 4.640269e-03 | 1.916963e+00 | 4.474796e+00 | 2.754994e+00 | 5.939892e+00 |
| 13462 | 12270.020172 | 4.686482e-03 | 1.917162e+00 | 4.618265e+00 | 2.670295e+00 | 1.407420e+00 |
| 13486 | 12270.019969 | 4.727669e-03 | 1.917380e+00 | 4.761770e+00 | 2.586335e+00 | 3.157597e+00 |
| 13526 | 12270.020047 | 4.787725e-03 | 1.917547e+00 | 5.001082e+00 | 2.448604e+00 | 6.072502e+00 |
| 13550 | 12270.020194 | 4.821585e-03 | 1.917509e+00 | 5.144723e+00 | 2.366564e+00 | 1.537727e+00 |
| 13574 | 12270.020152 | 4.851096e-03 | 1.917439e+00 | 5.288333e+00 | 2.285275e+00 | 3.285364e+00 |
| 13598 | 12270.019974 | 4.877266e-03 | 1.917362e+00 | 5.431889e+00 | 2.203741e+00 | 5.033397e+00 |
| 13622 | 12270.020080 | 4.901029e-03 | 1.917221e+00 | 5.575399e+00 | 2.122125e+00 | 4.983728e-01 |
| 13646 | 12270.020166 | 4.920117e-03 | 1.917134e+00 | 5.718837e+00 | 2.041021e+00 | 2.245876e+00 |
| 13670 | 12270.020025 | 4.938379e-03 | 1.917171e+00 | 5.862213e+00 | 1.959608e+00 | 3.993737e+00 |
| 13694 | 12270.019962 | 4.950473e-03 | 1.917226e+00 | 6.005583e+00 | 1.878624e+00 | 5.741242e+00 |
| 13718 | 12270.019973 | 4.960462e-03 | 1.917297e+00 | 6.148983e+00 | 1.797436e+00 | 1.205685e+00 |
| 13742 | 12270.019943 | 4.964981e-03 | 1.917433e+00 | 6.292396e+00 | 1.716285e+00 | 2.953228e+00 |
| 13766 | 12270.019884 | 4.966962e-03 | 1.917586e+00 | 6.436303e+00 | 1.635274e+00 | 4.700732e+00 |
| 13790 | 12270.019952 | 4.968035e-03 | 1.917619e+00 | 6.580289e+00 | 1.554360e+00 | 1.649921e-01 |
| 13814 | 12270.019942 | 4.965241e-03 | 1.917587e+00 | 6.724347e+00 | 1.473477e+00 | 1.912272e+00 |
| 13838 | 12270.019808 | 4.963134e-03 | 1.917551e+00 | 6.868392e+00 | 1.392759e+00 | 3.659448e+00 |
| 13862 | 12270.019844 | 4.954624e-03 | 1.917419e+00 | 7.012439e+00 | 1.311716e+00 | 5.407057e+00 |
| 13886 | 12270.019940 | 4.945487e-03 | 1.917247e+00 | 7.156486e+00 | 1.230988e+00 | 8.710880e-01 |
| 13910 | 12270.019873 | 4.930444e-03 | 1.917154e+00 | 7.300533e+00 | 1.150042e+00 | 2.618497e+00 |
| 13934 | 12270.019654 | 4.910947e-03 | 1.917139e+00 | 7.444580e+00 | 1.069003e+00 | 4.366082e+00 |
| 13958 | 12270.019595 | 4.888384e-03 | 1.917128e+00 | 7.588627e+00 | 9.880873e-01 | 6.113530e+00 |
| 13982 | 12270.019777 | 4.863671e-03 | 1.917153e+00 | 7.732674e+00 | 9.068174e-01 | 1.577927e+00 |
| 14006 | 12270.019492 | 4.836569e-03 | 1.917244e+00 | 7.876721e+00 | 8.263421e-01 | 3.324673e+00 |
| 14030 | 12270.019190 | 4.804071e-03 | 1.917268e+00 | 8.020768e+00 | 7.448702e-01 | 5.072412e+00 |
| 14054 | 12270.019375 | 4.769031e-03 | 1.917216e+00 | 8.164815e+00 | 6.637031e-01 | 5.364656e-01 |
| 14078 | 12270.019533 | 4.729483e-03 | 1.917153e+00 | 8.308862e+00 | 5.817216e-01 | 2.284379e+00 |
| 14102 | 12270.019356 | 4.689050e-03 | 1.917041e+00 | 8.452909e+00 | 4.987631e-01 | 4.033237e+00 |
| 14126 | 12270.019055 | 4.647690e-03 | 1.916849e+00 | 8.596956e+00 | 4.149489e-01 | 5.782844e+00 |
| 14150 | 12270.019125 | 4.606779e-03 | 1.916647e+00 | 8.741003e+00 | 3.299028e-01 | 1.250278e+00 |
| 14174 | 12270.019341 | 4.562554e-03 | 1.916516e+00 | 8.885050e+00 | 2.438362e-01 | 3.001807e+00 |
| 14198 | 12270.018888 | 4.516798e-03 | 1.916387e+00 | 9.029077e+00 | 1.566754e-01 | 4.755378e+00 |
| 14222 | 12270.018653 | 4.469185e-03 | 1.916308e+00 | 9.173104e+00 | 6.711385e-02 | 2.259984e-01 |
| 14246 | 12270.018954 | 4.419343e-03 | 1.916348e+00 | 9.317131e+00 | 6.260519e+00 | 1.980968e+00 |
| 14270 | 12270.019109 | 4.370379e-03 | 1.916441e+00 | 9.461158e+00 | 6.169969e+00 | 3.736769e+00 |
| 14294 | 12270.018901 | 4.322218e-03 | 1.916538e+00 | 9.605185e+00 | 6.078520e+00 | 5.493487e+00 |
| 14318 | 12270.018688 | 4.275644e-03 | 1.916666e+00 | 9.749212e+00 | 5.986488e+00 | 9.676295e-01 |
| 14342 | 12270.018927 | 4.228585e-03 | 1.916815e+00 | 9.893239e+00 | 5.893336e+00 | 2.726233e+00 |
| 14366 | 12270.019055 | 4.184650e-03 | 1.916878e+00 | 1.003666e+00 | 5.799140e+00 | 4.486017e+00 |
| 14390 | 12270.018634 | 4.139932e-03 | 1.916903e+00 | 1.018093e+00 | 5.704686e+00 | 6.246066e+00 |
| 14414 | 12270.018596 | 4.098987e-03 | 1.916945e+00 | 1.032520e+00 | 5.608669e+00 | 1.724647e+00 |
| 14438 | 12270.018891 | 4.062084e-03 | 1.916938e+00 | 1.046947e+00 | 5.511888e+00 | 3.487363e+00 |
| 14462 | 12270.018951 | 4.029813e-03 | 1.916897e+00 | 1.061374e+00 | 5.413719e+00 | 5.251531e+00 |
| 14486 | 12270.018736 | 4.000294e-03 | 1.916913e+00 | 1.075801e+00 | 5.315058e+00 | 7.330981e-01 |
| 14510 | 12270.018656 | 3.973079e-03 | 1.916996e+00 | 1.090228e+00 | 5.215030e+00 | 2.499448e+00 |
| 14534 | 12270.018946 | 3.949936e-03 | 1.917072e+00 | 1.104655e+00 | 5.114114e+00 | 4.266847e+00 |
| 14558 | 12270.018938 | 3.927271e-03 | 1.917189e+00 | 1.119082e+00 | 5.012862e+00 | 6.034522e+00 |
| 14582 | 12270.018633 | 3.912173e-03 | 1.917389e+00 | 1.133509e+00 | 4.910703e+00 | 1.520042e+00 |
| 14606 | 12270.018710 | 3.890912e-03 | 1.917610e+00 | 1.147936e+00 | 4.808524e+00 | 6.237288e+00 |
| 14630 | 12270.018904 | 3.891719e-03 | 1.917535e+00 | 1.162363e+00 | 4.706347e+00 | 1.723365e+00 |
| 14654 | 12270.018805 | 3.902935e-03 | 1.917470e+00 | 1.176790e+00 | 4.604170e+00 | 3.492555e+00 |
| 14678 | 12270.018737 | 3.916815e-03 | 1.917332e+00 | 1.191217e+00 | 4.502000e+00 | 5.261613e+00 |
| 14702 | 12270.018772 | 3.939968e-03 | 1.917179e+00 | 1.205644e+00 | 4.400823e+00 | 7.467586e-01 |
| 14726 | 12270.018742 | 3.966605e-03 | 1.917128e+00 | 1.220091e+00 | 4.300646e+00 | 2.514517e+00 |
| 14750 | 12270.018668 | 3.997851e-03 | 1.917167e+00 | 1.234538e+00 | 4.200555e+00 | 4.281237e+00 |
| 14774 | 12270.018659 | 4.033849e-03 | 1.917215e+00 | 1.248985e+00 | 4.100464e+00 | 6.046579e+00 |
| 14798 | 12270.018648 | 4.072419e-03 | 1.917303e+00 | 1.263432e+00 | 4.000373e+00 | 1.527493e+00 |
| 14822 | 12270.018501 | 4.115961e-03 | 1.917476e+00 | 1.277879e+00 | 3.900282e+00 | 3.289329e+00 |
| 14846 | 12270.018467 | 4.160105e-03 | 1.917586e+00 | 1.292326e+00 | 3.800191e+00 | 5.050741e+00 |
| 14870 | 12270.018509 | 4.205945e-03 | 1.917590e+00 | 1.306773e+00 | 3.700100e+00 | 5.263960e-01 |
| 14894 | 12270.018388 | 4.250857e-03 | 1.917572e+00 | 1.321220e+00 | 3.600009e+00 | 2.284668e+00 |
| 14918 | 12270.018241 | 4.295780e-03 | 1.917488e+00 | 1.335667e+00 | 3.500918e+00 | 4.042261e+00 |
| 14942 | 12270.018262 | 4.340901e-03 | 1.917306e+00 | 1.350114e+00 | 3.401827e+00 | 5.799143e+00 |
| 15006 | 12270.018441 | 4.388177e-03 | 1.917112e+00 | 1.364561e+00 | 3.302736e+00 | 1.272443e+00 |
| 15030 | 12270.018267 | 4.434369e-03 | 1.917016e+00 | 1.379008e+00 | 3.203645e+00 | 3.027673e+00 |
| 15054 | 12270.017962 | 4.481957e-03 | 1.916937e+00 | 1.393455e+00 | 3.104554e+00 | 4.783275e+00 |
| 15078 | 12270.018073 | 4.526361e-03 | 1.916874e+00 | 1.407902e+00 | 3.005463e+00 | 2.542016e-01 |
| 15102 | 12270.018136 | 4.569506e-03 | 1.916905e+00 | 1.422349e+00 | 2.906372e+00 | 2.008034e+00 |
| 15126 | 12270.017881 | 4.612907e-03 | 1.916947e+00 | 1.436796e+00 | 2.807281e+00 | 3.760666e+00 |
| 15150 | 12270.017667 | 4.653897e-03 | 1.916935e+00 | 1.451243e+00 | 2.708190e+00 | 5.512115e+00 |
| 15174 | 12270.017765 | 4.693594e-03 | 1.916901e+00 | 1.465690e+00 | 2.609099e+00 | 9.793274e-01 |
| 15198 | 12270.017978 | 4.729744e-03 | 1.916876e+00 | 1.480137e+00 | 2.510008e+00 | 2.728972e+00 |
| 15222 | 12270.017621 | 4.765826e-03 | 1.916782e+00 | 1.494584e+00 | 2.410917e+00 | 4.478383e+00 |
| 15246 | 12270.017390 | 4.795651e-03 | 1.916635e+00 | 1.509031e+00 | 2.311826e+00 | 6.226744e+00 |
| 15270 | 12270.017643 | 4.823823e-03 | 1.916536e+00 | 1.523076e+00 | 2.212735e+00 | 1.691764e+00 |
| 15294 | 12270.017631 | 4.850062e-03 | 1.916447e+00 | 1.537121e+00 | 2.113644e+00 | 3.438941e+00 |
| 15318 | 12270.017297 | 4.873999e-03 | 1.916367e+00 | 1.551166e+00 | 2.014553e+00 | 5.185700e+00 |
| 15342 | 12270.017136 | 4.895344e-03 | 1.916376e+00 | 1.565211e+00 | 1.915462e+00 | 6.489253e-01 |
| 15366 | 12270.017360 | 4.913356e-03 | 1.916485e+00 | 1.579256e+00 | 1.816371e+00 | 2.395612e+00 |
| 15390 | 12270.017584 | 4.928389e-03 | 1.916612e+00 | 1.593301e+00 | 1.717280e+00 | 4.142273e+00 |
| 15414 | 12270.017219 | 4.934043e-03 | 1.916751e+00 | 1.607346e+00 | 1.618189e+00 | 5.889010e+00 |
| 15438 | 12270.017217 | 4.938049e-03 | 1.916954e+00 | 1.621391e+00 | 1.519098e+00 | 1.352797e+00 |

TAB. F.3 – Eléments moyens «observés» de LAGEOS-1 (suite 2).
(à 0^h 0^{min} 0^s pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 15462 | 12270.017538 | 4.936102e-03 | 1.917102e+00 | 4.008660e+00 | 1.594526e+00 | 3.099256e+00 |
| 15486 | 12270.017523 | 4.931495e-03 | 1.917163e+00 | 4.152181e+00 | 1.514254e+00 | 4.845686e+00 |
| 15510 | 12270.017306 | 4.921244e-03 | 1.917212e+00 | 4.295714e+00 | 1.434140e+00 | 3.088202e-01 |
| 15534 | 12270.017296 | 4.907847e-03 | 1.917233e+00 | 4.439282e+00 | 1.353613e+00 | 2.055725e+00 |
| 15558 | 12270.017530 | 4.891636e-03 | 1.917173e+00 | 4.582882e+00 | 1.272893e+00 | 3.802943e+00 |
| 15582 | 12270.017630 | 4.870311e-03 | 1.917088e+00 | 4.726456e+00 | 1.191573e+00 | 5.550730e+00 |
| 15606 | 12270.017363 | 4.851617e-03 | 1.917094e+00 | 4.869969e+00 | 1.110052e+00 | 1.015638e+00 |
| 15630 | 12270.017449 | 4.827056e-03 | 1.917107e+00 | 5.013465e+00 | 1.028385e+00 | 2.764080e+00 |
| 15654 | 12270.017603 | 4.803893e-03 | 1.917136e+00 | 5.156933e+00 | 9.464622e-01 | 4.512734e+00 |
| 15678 | 12270.017502 | 4.776884e-03 | 1.917271e+00 | 5.300374e+00 | 8.640220e-01 | 6.261873e+00 |
| 15718 | 12270.017368 | 4.730911e-03 | 1.917519e+00 | 5.539510e+00 | 7.261430e-01 | 2.894510e+00 |
| 15742 | 12270.017217 | 4.699194e-03 | 1.917615e+00 | 5.683053e+00 | 6.429182e-01 | 4.644585e+00 |
| 15766 | 12270.017273 | 4.668593e-03 | 1.917583e+00 | 5.826634e+00 | 5.600597e-01 | 1.110138e-01 |
| 15790 | 12270.017236 | 4.633513e-03 | 1.917540e+00 | 5.970206e+00 | 4.763981e-01 | 1.861408e+00 |
| 15814 | 12270.017157 | 4.594830e-03 | 1.917455e+00 | 6.113740e+00 | 3.922131e-01 | 3.612439e+00 |
| 15838 | 12270.017125 | 4.552610e-03 | 1.917300e+00 | 6.257217e+00 | 3.072559e-01 | 5.364257e+00 |
| 15862 | 12270.017118 | 4.507084e-03 | 1.917162e+00 | 1.174549e-01 | 2.209426e-01 | 8.341264e-01 |
| 15886 | 12270.017036 | 4.459664e-03 | 1.917142e+00 | 2.608550e-01 | 1.342507e-01 | 2.587571e+00 |
| 15910 | 12270.017003 | 4.411181e-03 | 1.917159e+00 | 4.042577e-01 | 4.543224e-02 | 4.343273e+00 |
| 15934 | 12270.017055 | 4.361117e-03 | 1.917179e+00 | 5.476855e-01 | 6.239674e+00 | 6.099013e+00 |
| 15958 | 12270.016926 | 4.310498e-03 | 1.917304e+00 | 6.911882e-01 | 6.149116e+00 | 1.573130e+00 |
| 15982 | 12270.016783 | 4.260083e-03 | 1.917443e+00 | 8.347674e-01 | 6.057652e+00 | 3.331457e+00 |
| 16006 | 12270.016756 | 4.209892e-03 | 1.917492e+00 | 9.783802e-01 | 5.965244e+00 | 5.090696e+00 |
| 16030 | 12270.016775 | 4.162010e-03 | 1.917477e+00 | 1.121995e+00 | 5.871640e+00 | 5.677978e-01 |
| 16054 | 12270.016655 | 4.114033e-03 | 1.917438e+00 | 1.265602e+00 | 5.777288e+00 | 2.328790e+00 |
| 16078 | 12270.016458 | 4.071229e-03 | 1.917305e+00 | 1.409166e+00 | 5.680976e+00 | 4.091808e+00 |
| 16102 | 12270.016611 | 4.028799e-03 | 1.917085e+00 | 1.552652e+00 | 5.583696e+00 | 5.855662e+00 |
| 16126 | 12270.016729 | 3.991068e-03 | 1.916927e+00 | 1.696112e+00 | 5.484476e+00 | 1.338129e+00 |
| 16150 | 12270.016450 | 3.958099e-03 | 1.916813e+00 | 1.839595e+00 | 5.384918e+00 | 3.104144e+00 |
| 16174 | 12270.016294 | 3.928580e-03 | 1.916701e+00 | 1.983068e+00 | 5.284622e+00 | 4.870762e+00 |
| 16198 | 12270.016350 | 3.904476e-03 | 1.916662e+00 | 2.126535e+00 | 5.183779e+00 | 3.545265e-01 |
| 16222 | 12270.016401 | 3.883754e-03 | 1.916708e+00 | 2.270023e+00 | 5.082174e+00 | 2.121477e+00 |
| 16246 | 12270.016143 | 3.870011e-03 | 1.916752e+00 | 2.413520e+00 | 4.979825e+00 | 3.890502e+00 |
| 16270 | 12270.015983 | 3.858392e-03 | 1.916757e+00 | 2.556965e+00 | 4.876773e+00 | 5.659432e+00 |
| 16294 | 12270.016328 | 3.854059e-03 | 1.916799e+00 | 2.700385e+00 | 4.773056e+00 | 1.145764e+00 |
| 16318 | 12270.016416 | 3.852440e-03 | 1.916813e+00 | 2.843823e+00 | 4.670005e+00 | 2.914690e+00 |
| 16342 | 12270.016134 | 3.855592e-03 | 1.916742e+00 | 2.987235e+00 | 4.569666e+00 | 4.683553e+00 |
| 16366 | 12270.016078 | 3.863666e-03 | 1.916678e+00 | 3.130625e+00 | 4.464468e+00 | 1.686141e-01 |
| 16390 | 12270.016202 | 3.876342e-03 | 1.916632e+00 | 3.274044e+00 | 4.362164e+00 | 1.936719e+00 |
| 16414 | 12270.016181 | 3.894078e-03 | 1.916564e+00 | 3.417499e+00 | 4.260536e+00 | 3.704211e+00 |
| 16438 | 12270.015835 | 3.914953e-03 | 1.916507e+00 | 3.560941e+00 | 4.158973e+00 | 5.471610e+00 |
| 16462 | 12270.015801 | 3.943952e-03 | 1.916566e+00 | 3.704369e+00 | 4.058559e+00 | 9.547475e-01 |
| 16486 | 12270.016168 | 3.974109e-03 | 1.916673e+00 | 3.847838e+00 | 3.959385e+00 | 2.720051e+00 |
| 16510 | 12270.016159 | 4.011316e-03 | 1.916781e+00 | 3.991301e+00 | 3.861571e+00 | 4.484052e+00 |
| 16534 | 12270.015952 | 4.051536e-03 | 1.916963e+00 | 4.134742e+00 | 3.764993e+00 | 6.246880e+00 |
| 16558 | 12270.015965 | 4.096781e-03 | 1.917160e+00 | 4.278221e+00 | 3.669231e+00 | 1.725913e+00 |
| 16582 | 12270.016075 | 4.145474e-03 | 1.917277e+00 | 4.421755e+00 | 3.574556e+00 | 3.487158e+00 |
| 16606 | 12270.016029 | 4.196892e-03 | 1.917327e+00 | 4.565315e+00 | 3.480602e+00 | 5.247662e+00 |
| 16630 | 12270.015778 | 4.251813e-03 | 1.917374e+00 | 4.708886e+00 | 3.388637e+00 | 7.230422e-01 |
| 16654 | 12270.015864 | 4.303722e-03 | 1.917348e+00 | 4.852496e+00 | 3.297203e+00 | 2.481271e+00 |
| 16678 | 12270.016069 | 4.357077e-03 | 1.917229e+00 | 4.996103e+00 | 3.207577e+00 | 4.237674e+00 |
| 16702 | 12270.016001 | 4.407829e-03 | 1.917158e+00 | 5.139650e+00 | 3.118459e+00 | 5.993547e+00 |
| 16726 | 12270.015904 | 4.458068e-03 | 1.917133e+00 | 5.283150e+00 | 3.029943e+00 | 1.465813e+00 |
| 16750 | 12270.015935 | 4.506981e-03 | 1.917105e+00 | 5.426612e+00 | 2.942265e+00 | 3.220477e+00 |
| 16774 | 12270.015962 | 4.554375e-03 | 1.917145e+00 | 5.570041e+00 | 2.855268e+00 | 4.974376e+00 |
| 16813 | 12270.015844 | 4.625201e-03 | 1.917387e+00 | 5.803139e+00 | 2.716505e+00 | 5.465676e+00 |
| 16837 | 12270.015761 | 4.665296e-03 | 1.917537e+00 | 5.946656e+00 | 2.632273e+00 | 9.337368e-01 |
| 16861 | 12270.015750 | 4.702521e-03 | 1.917582e+00 | 6.090225e+00 | 2.548607e+00 | 2.684385e+00 |
| 16885 | 12270.015720 | 4.736318e-03 | 1.917575e+00 | 6.233814e+00 | 2.465539e+00 | 4.434351e+00 |
| 16909 | 12270.015633 | 4.766312e-03 | 1.917548e+00 | 6.420616e-02 | 2.382965e+00 | 6.183889e+00 |
| 16933 | 12270.015596 | 4.797101e-03 | 1.917426e+00 | 2.377418e-01 | 2.300062e+00 | 1.650662e+00 |
| 16957 | 12270.015601 | 4.822407e-03 | 1.917251e+00 | 3.812160e-01 | 2.217799e+00 | 3.399859e+00 |
| 16981 | 12270.015488 | 4.848879e-03 | 1.917175e+00 | 5.246532e-01 | 2.135286e+00 | 5.149263e+00 |
| 17005 | 12270.015457 | 4.870861e-03 | 1.917132e+00 | 6.680786e-01 | 2.053401e+00 | 6.150038e-01 |
| 17029 | 12270.015505 | 4.890840e-03 | 1.917093e+00 | 8.115094e-01 | 1.971711e+00 | 2.363680e+00 |
| 17053 | 12270.015457 | 4.907045e-03 | 1.917142e+00 | 9.549871e-01 | 1.890414e+00 | 4.111874e+00 |
| 17077 | 12270.015269 | 4.918480e-03 | 1.917267e+00 | 1.098539e+00 | 1.809315e+00 | 5.859912e+00 |
| 17101 | 12270.015131 | 4.929402e-03 | 1.917353e+00 | 1.242139e+00 | 1.728426e+00 | 1.324588e+00 |
| 17125 | 12270.015262 | 4.934781e-03 | 1.917370e+00 | 1.385740e+00 | 1.647325e+00 | 3.072490e+00 |
| 17149 | 12270.015289 | 4.941599e-03 | 1.917386e+00 | 1.529342e+00 | 1.566376e+00 | 4.820123e+00 |
| 17173 | 12270.015155 | 4.941395e-03 | 1.917322e+00 | 1.672922e+00 | 1.485745e+00 | 2.843384e-01 |
| 17197 | 12270.015344 | 4.937916e-03 | 1.917137e+00 | 1.816427e+00 | 1.405149e+00 | 2.031573e+00 |
| 17221 | 12270.015489 | 4.929288e-03 | 1.916962e+00 | 1.959895e+00 | 1.324706e+00 | 3.778514e+00 |
| 17245 | 12270.015380 | 4.915754e-03 | 1.916823e+00 | 2.103369e+00 | 1.243963e+00 | 5.525734e+00 |
| 17269 | 12270.015077 | 4.899240e-03 | 1.916684e+00 | 2.246837e+00 | 1.163231e+00 | 9.896968e-01 |
| 17293 | 12270.014971 | 4.878915e-03 | 1.916577e+00 | 2.390274e+00 | 1.081878e+00 | 2.737256e+00 |
| 17317 | 12270.015151 | 4.858209e-03 | 1.916585e+00 | 2.533718e+00 | 1.000924e+00 | 4.484286e+00 |
| 17341 | 12270.014972 | 4.830414e-03 | 1.916625e+00 | 2.677188e+00 | 9.197596e-01 | 6.231556e+00 |
| 17365 | 12270.014735 | 4.801800e-03 | 1.916641e+00 | 2.820620e+00 | 8.385299e-01 | 1.695608e+00 |
| 17389 | 12270.014999 | 4.770332e-03 | 1.916713e+00 | 2.964028e+00 | 7.572606e-01 | 3.442806e+00 |
| 17413 | 12270.015217 | 4.738316e-03 | 1.916792e+00 | 3.107460e+00 | 6.752757e-01 | 5.190798e+00 |
| 17437 | 12270.015121 | 4.705162e-03 | 1.916805e+00 | 3.250892e+00 | 5.925229e-01 | 6.563900e-01 |
| 17461 | 12270.014834 | 4.671531e-03 | 1.916780e+00 | 3.394300e+00 | 5.085489e-01 | 2.406321e+00 |
| 17485 | 12270.014848 | 4.636453e-03 | 1.916774e+00 | 3.537715e+00 | 4.241374e-01 | 4.156708e+00 |
| 17509 | 12270.015022 | 4.595938e-03 | 1.916725e+00 | 3.681187e+00 | 3.381109e-01 | 5.908829e+00 |
| 17533 | 12270.014744 | 4.554843e-03 | 1.916636e+00 | 3.824661e+00 | 2.517041e-01 | 1.378120e+00 |
| 17557 | 12270.014621 | 4.509383e-03 | 1.916633e+00 | 3.968118e+00 | 1.642168e-01 | 3.131724e+00 |
| 17581 | 12270.014901 | 4.464188e-03 | 1.916690e+00 | 4.111606e+00 | 7.568211e-02 | 4.886596e+00 |
| 17605 | 12270.015021 | 4.418456e-03 | 1.916761e+00 | 4.255093e+00 | 6.269199e+00 | 3.595203e-01 |
| 17629 | 12270.014889 | 4.373934e-03 | 1.916894e+00 | 4.398549e+00 | 6.178796e+00 | 2.116404e+00 |
| 17653 | 12270.014720 | 4.328244e-03 | 1.917098e+00 | 4.542008e+00 | 6.088128e+00 | 3.873690e+00 |
| 17677 | 12270.014825 | 4.282012e-03 | 1.917266e+00 | 4.685520e+00 | 5.995943e+00 | 5.632670e+00 |

TAB. F.4 – Eléments moyens «observés» de LAGEOS-1 (suite 3).
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 17701 | 12270.014910 | 4.235875e-03 | 1.917352e+00 | 4.829070e+00 | 5.904070e+00 | 1.108115e+00 |
| 17725 | 12270.014766 | 4.190072e-03 | 1.917448e+00 | 4.972641e+00 | 5.810531e+00 | 2.868433e+00 |
| 17749 | 12270.014793 | 4.147400e-03 | 1.917476e+00 | 5.116259e+00 | 5.716296e+00 | 4.629626e+00 |
| 17773 | 12270.014951 | 4.107214e-03 | 1.917384e+00 | 5.259892e+00 | 5.620685e+00 | 1.090243e-01 |
| 17797 | 12270.014968 | 4.069323e-03 | 1.917278e+00 | 5.403478e+00 | 5.524039e+00 | 1.872600e+00 |
| 17821 | 12270.014883 | 4.032788e-03 | 1.917211e+00 | 5.547002e+00 | 5.426260e+00 | 3.637407e+00 |
| 17845 | 12270.014842 | 4.001459e-03 | 1.917142e+00 | 5.690475e+00 | 5.326623e+00 | 5.404184e+00 |
| 17869 | 12270.014904 | 3.971005e-03 | 1.917090e+00 | 5.833902e+00 | 5.226713e+00 | 8.879635e-01 |
| 17893 | 12270.014842 | 3.947116e-03 | 1.917188e+00 | 5.977304e+00 | 5.125416e+00 | 2.656260e+00 |
| 17917 | 12270.014763 | 3.925886e-03 | 1.917339e+00 | 6.120743e+00 | 5.023914e+00 | 4.424910e+00 |
| 17941 | 12270.014759 | 3.910135e-03 | 1.917439e+00 | 6.264242e+00 | 4.921693e+00 | 6.194238e+00 |
| 17965 | 12270.014757 | 3.899160e-03 | 1.917544e+00 | 1.246080e-01 | 4.819003e+00 | 1.680755e+00 |
| 17989 | 12270.014759 | 3.893102e-03 | 1.917627e+00 | 2.681929e-01 | 4.716012e+00 | 3.450833e+00 |
| 18013 | 12270.014807 | 3.896081e-03 | 1.917592e+00 | 4.117760e-01 | 4.613055e+00 | 5.220943e+00 |
| 18037 | 12270.014857 | 3.902577e-03 | 1.917459e+00 | 5.553214e-01 | 4.510125e+00 | 7.077432e-01 |
| 18061 | 12270.014729 | 3.918115e-03 | 1.917356e+00 | 6.988231e-01 | 4.407826e+00 | 2.477025e+00 |
| 18085 | 12270.014669 | 3.936297e-03 | 1.917260e+00 | 8.422872e-01 | 4.305883e+00 | 4.246101e+00 |
| 18109 | 12270.014786 | 3.960510e-03 | 1.917122e+00 | 9.857174e-01 | 4.204830e+00 | 6.014241e+00 |
| 18133 | 12270.014742 | 3.988469e-03 | 1.917072e+00 | 1.129160e+00 | 4.104818e+00 | 1.498048e+00 |
| 18157 | 12270.014539 | 4.019124e-03 | 1.917118e+00 | 1.272656e+00 | 4.005499e+00 | 3.264416e+00 |
| 18181 | 12270.014441 | 4.054445e-03 | 1.917163e+00 | 1.416196e+00 | 3.907837e+00 | 5.029146e+00 |
| 18205 | 12270.014508 | 4.092845e-03 | 1.917202e+00 | 1.559765e+00 | 3.811095e+00 | 5.096136e-01 |
| 18229 | 12270.014486 | 4.135344e-03 | 1.917278e+00 | 1.703364e+00 | 3.716515e+00 | 2.270976e+00 |
| 18253 | 12270.014176 | 4.177737e-03 | 1.917320e+00 | 1.846971e+00 | 3.622797e+00 | 4.031516e+00 |
| 18277 | 12270.014293 | 4.222112e-03 | 1.917224e+00 | 1.990512e+00 | 3.530240e+00 | 5.790791e+00 |
| 18301 | 12270.014591 | 4.265900e-03 | 1.917103e+00 | 2.134008e+00 | 3.438730e+00 | 1.265658e+00 |
| 18325 | 12270.014506 | 4.312703e-03 | 1.916970e+00 | 2.277498e+00 | 3.347422e+00 | 3.023506e+00 |
| 18349 | 12270.014253 | 4.361800e-03 | 1.916780e+00 | 2.420961e+00 | 3.257062e+00 | 4.780341e+00 |
| 18373 | 12270.014205 | 4.413240e-03 | 1.916599e+00 | 2.564384e+00 | 3.167114e+00 | 2.533710e-01 |
| 18397 | 12270.014364 | 4.464101e-03 | 1.916511e+00 | 2.707805e+00 | 3.078213e+00 | 2.008392e+00 |
| 18421 | 12270.014257 | 4.513496e-03 | 1.916477e+00 | 2.851248e+00 | 2.989256e+00 | 3.763450e+00 |
| 18445 | 12270.013834 | 4.561995e-03 | 1.916443e+00 | 2.994658e+00 | 2.901315e+00 | 5.517400e+00 |
| 18469 | 12270.014099 | 4.605174e-03 | 1.916498e+00 | 3.138032e+00 | 2.814151e+00 | 9.872718e-01 |
| 18493 | 12270.014356 | 4.648674e-03 | 1.916605e+00 | 3.281440e+00 | 2.727939e+00 | 2.739467e+00 |
| 18517 | 12270.014206 | 4.690127e-03 | 1.916680e+00 | 3.424850e+00 | 2.642926e+00 | 4.490504e+00 |
| 18541 | 12270.014010 | 4.730241e-03 | 1.916750e+00 | 3.568235e+00 | 2.558904e+00 | 6.240516e+00 |
| 18565 | 12270.014059 | 4.766578e-03 | 1.916838e+00 | 3.711639e+00 | 2.475730e+00 | 1.706554e+00 |
| 18589 | 12270.014221 | 4.801854e-03 | 1.916869e+00 | 3.855099e+00 | 2.392775e+00 | 3.455678e+00 |
| 18613 | 12270.014003 | 4.832861e-03 | 1.916818e+00 | 3.998582e+00 | 2.310983e+00 | 5.203646e+00 |
| 18637 | 12270.013641 | 4.859563e-03 | 1.916790e+00 | 4.142056e+00 | 2.229005e+00 | 6.686464e-01 |
| 18661 | 12270.013984 | 4.885826e-03 | 1.916787e+00 | 4.285575e+00 | 2.147624e+00 | 2.416471e+00 |
| 18685 | 12270.014151 | 4.909717e-03 | 1.916767e+00 | 4.429103e+00 | 2.066443e+00 | 4.164205e+00 |
| 18709 | 12270.014019 | 4.929928e-03 | 1.916825e+00 | 4.572584e+00 | 1.985654e+00 | 5.911605e+00 |
| 18733 | 12270.013962 | 4.944191e-03 | 1.916980e+00 | 4.716045e+00 | 1.904906e+00 | 1.375956e+00 |
| 18757 | 12270.014129 | 4.955278e-03 | 1.917142e+00 | 4.859532e+00 | 1.824068e+00 | 3.123745e+00 |
| 18781 | 12270.014281 | 4.957897e-03 | 1.917275e+00 | 5.003044e+00 | 1.743737e+00 | 4.871013e+00 |
| 18805 | 12270.014131 | 4.958082e-03 | 1.917439e+00 | 5.146570e+00 | 1.662975e+00 | 3.355249e-01 |
| 18829 | 12270.014050 | 4.954740e-03 | 1.917569e+00 | 5.290148e+00 | 1.582651e+00 | 2.082960e+00 |
| 18853 | 12270.014290 | 4.948819e-03 | 1.917557e+00 | 5.433781e+00 | 1.502219e+00 | 3.830517e+00 |
| 18877 | 12270.014351 | 4.939285e-03 | 1.917511e+00 | 5.577397e+00 | 1.421575e+00 | 5.578211e+00 |
| 18901 | 12270.014285 | 4.926045e-03 | 1.917447e+00 | 5.720972e+00 | 1.340558e+00 | 1.043188e+00 |
| 18925 | 12270.014272 | 4.912961e-03 | 1.917316e+00 | 5.864496e+00 | 1.259278e+00 | 2.791698e+00 |
| 18949 | 12270.014312 | 4.894858e-03 | 1.917165e+00 | 6.007953e+00 | 1.177708e+00 | 4.540416e+00 |
| 18973 | 12270.014293 | 4.877283e-03 | 1.917129e+00 | 6.151345e+00 | 1.096095e+00 | 5.927740e-03 |

- Période de révolution orbitale : 225 minutes (6,4 révolutions par jour), période du périégée : 1682 jours, période du nœud : 1051 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,54 \cdot 10^{-3}$. Cette valeur est inférieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périégée circule,
- Premières périodes de résonance : 2,664 jour ($m = 6$ ou 7).

Caractéristiques du filtrage :

- Sur chaque variable, tous les termes du géopotential jusqu'aux degré 20 et ordre 20 d'une amplitude de quelques centimètres, et dont les périodes sont comprises entre 0,01 et 3 jours, sont filtrés analytiquement. Cela représente environ 400 combinaisons (n, m, p, q, r) .
- $|q_{max}|$ pour les développements en excentricité : 3,
- Ecart-types sur la détermination des éléments moyens ayant servi au calcul des perturbations : $a(6, 2 \text{ m})$, $C(9, 2 \text{ m})$, $i(2, 3 \text{ m})$, $\Omega(1, 7 \text{ m})$, $S(10, 9 \text{ m})$, $\lambda(11, 7 \text{ m})$,
- Filtrage numérique sur des fenêtres de 24 jours, avec filtrage des périodes inférieures à 3 jours.

Nombre d'observations :

- Dans la table F.1 et la suivante, on trouve 329 éléments moyens qui constituent 1974 observations. Le premier point moyen est donné au 6 février 1980 (Jour julien CNES 10993), le dernier au 12 décembre 2001 (Jour julien CNES 18973),
- l'échantillonnage des observations est en général de 24 jours.

F.2 LAGEOS-2

Caractéristiques du mouvement de LAGEOS-2 (déterminées sur le premier arc filtré) :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 12162,072 \text{ km}$, $e = 0,1341 \cdot 10^{-1}$, $i = 52,64^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = -0.127 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\theta} = 0.883 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\lambda} = 0.470813 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,
- Période de révolution orbitale : 222 minutes (6,4 révolutions par jour), période du périégée : 823 jours, période du nœud : 569 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,51 \cdot 10^{-3}$. Cette valeur est inférieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périégée circule,
- Premières périodes de résonance : 1,794 et 2,236 jour ($m = 6$ ou 7).

TAB. F.5 – Éléments moyens «observés» de LAGEOS-2.
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 15682 | 12162.073394 | 1.332210e-02 | 9.190161e-01 | 1.486957e+00 | 4.067093e+00 | 5.311481e+00 |
| 15706 | 12162.073232 | 1.329005e-02 | 9.190832e-01 | 1.222292e+00 | 4.256931e+00 | 1.223652e+00 |
| 15730 | 12162.073321 | 1.326999e-02 | 9.190950e-01 | 9.575387e-01 | 4.447293e+00 | 3.418488e+00 |
| 15754 | 12162.073482 | 1.325667e-02 | 9.191780e-01 | 6.927196e-01 | 4.637612e+00 | 5.613427e+00 |
| 15778 | 12162.073457 | 1.325214e-02 | 9.193358e-01 | 4.279895e-01 | 4.827464e+00 | 1.525338e+00 |
| 15802 | 12162.073125 | 1.326486e-02 | 9.194331e-01 | 1.633805e-01 | 5.016799e+00 | 3.720550e+00 |
| 15826 | 12162.073239 | 1.330104e-02 | 9.194015e-01 | 6.181948e+00 | 5.205540e+00 | 5.916295e+00 |
| 15850 | 12162.073671 | 1.335458e-02 | 9.193389e-01 | 5.917241e+00 | 5.393817e+00 | 1.829506e+00 |
| 15874 | 12162.073698 | 1.341957e-02 | 9.193290e-01 | 5.652523e+00 | 5.581946e+00 | 4.026102e+00 |
| 15898 | 12162.073365 | 1.349458e-02 | 9.193199e-01 | 5.387895e+00 | 5.769728e+00 | 6.222915e+00 |
| 15922 | 12162.073134 | 1.357892e-02 | 9.192172e-01 | 5.123297e+00 | 5.956414e+00 | 2.137747e+00 |
| 15946 | 12162.073197 | 1.367063e-02 | 9.190517e-01 | 4.858576e+00 | 6.141443e+00 | 4.337948e+00 |
| 15970 | 12162.073382 | 1.376828e-02 | 9.189546e-01 | 4.593696e+00 | 4.172135e-02 | 2.570569e-01 |
| 15994 | 12162.073274 | 1.387145e-02 | 9.189582e-01 | 4.328821e+00 | 2.240411e-01 | 2.460532e+00 |
| 16018 | 12162.073015 | 1.397621e-02 | 9.189381e-01 | 4.064093e+00 | 4.053642e-01 | 4.664694e+00 |
| 16042 | 12162.073069 | 1.407521e-02 | 9.188172e-01 | 3.799410e+00 | 5.856308e-01 | 5.868124e-01 |
| 16066 | 12162.073079 | 1.416048e-02 | 9.186918e-01 | 3.534628e+00 | 7.647144e-01 | 2.793879e+00 |
| 16090 | 12162.072936 | 1.422942e-02 | 9.187137e-01 | 3.269777e+00 | 9.425759e-01 | 5.002515e+00 |
| 16114 | 12162.072854 | 1.428517e-02 | 9.188386e-01 | 3.004993e+00 | 1.119418e+00 | 9.286743e-01 |
| 16138 | 12162.073004 | 1.432946e-02 | 9.188754e-01 | 2.740280e+00 | 1.295654e+00 | 3.138194e+00 |
| 16162 | 12162.073110 | 1.435899e-02 | 9.187749e-01 | 2.475510e+00 | 1.471719e+00 | 5.347960e+00 |
| 16186 | 12162.072916 | 1.436799e-02 | 9.187038e-01 | 2.210649e+00 | 1.647744e+00 | 1.274932e+00 |
| 16210 | 12162.072945 | 1.435196e-02 | 9.188056e-01 | 1.945818e+00 | 1.823775e+00 | 3.485124e+00 |
| 16234 | 12162.073215 | 1.431780e-02 | 9.189779e-01 | 1.681089e+00 | 1.999961e+00 | 5.694757e+00 |
| 16258 | 12162.073172 | 1.427032e-02 | 9.190672e-01 | 1.416397e+00 | 2.176463e+00 | 1.620481e+00 |
| 16282 | 12162.072857 | 1.421214e-02 | 9.190667e-01 | 1.151619e+00 | 2.353738e+00 | 3.828579e+00 |
| 16306 | 12162.072639 | 1.414337e-02 | 9.190982e-01 | 8.867677e-01 | 2.532283e+00 | 6.035481e+00 |
| 16330 | 12162.072744 | 1.406163e-02 | 9.192217e-01 | 6.219869e-01 | 2.712374e+00 | 1.957418e+00 |
| 16354 | 12162.073058 | 1.396716e-02 | 9.193475e-01 | 3.573509e-01 | 2.893970e+00 | 4.160586e+00 |
| 16378 | 12162.073022 | 1.386614e-02 | 9.193748e-01 | 9.275022e-02 | 3.076673e+00 | 7.926916e-02 |
| 16402 | 12162.072807 | 1.376522e-02 | 9.193379e-01 | 6.111225e+00 | 3.260011e+00 | 2.280686e+00 |
| 16426 | 12162.073027 | 1.367137e-02 | 9.193351e-01 | 5.846456e+00 | 3.444183e+00 | 4.481375e+00 |
| 16450 | 12162.073228 | 1.359189e-02 | 9.193444e-01 | 5.581773e+00 | 3.629542e+00 | 3.975353e-01 |
| 16474 | 12162.073105 | 1.352603e-02 | 9.192520e-01 | 5.317168e+00 | 3.816164e+00 | 2.595603e+00 |
| 16498 | 12162.072805 | 1.346788e-02 | 9.190747e-01 | 5.052476e+00 | 4.003889e+00 | 4.793002e+00 |
| 16522 | 12162.072720 | 1.341555e-02 | 9.189683e-01 | 4.787630e+00 | 4.192442e+00 | 7.068836e-01 |
| 16546 | 12162.072958 | 1.337311e-02 | 9.189895e-01 | 4.522753e+00 | 4.381412e+00 | 2.903607e+00 |
| 16570 | 12162.073025 | 1.334512e-02 | 9.190065e-01 | 4.257978e+00 | 4.570539e+00 | 5.100010e+00 |
| 16594 | 12162.072700 | 1.333616e-02 | 9.188884e-01 | 3.993280e+00 | 4.759725e+00 | 1.013270e+00 |
| 16618 | 12162.072616 | 1.334535e-02 | 9.187284e-01 | 3.728523e+00 | 4.948965e+00 | 3.210113e+00 |
| 16642 | 12162.072654 | 1.336793e-02 | 9.186916e-01 | 3.463685e+00 | 5.138277e+00 | 5.407214e+00 |
| 16666 | 12162.072617 | 1.340000e-02 | 9.187949e-01 | 3.198876e+00 | 5.327397e+00 | 1.321118e+00 |
| 16690 | 12162.072536 | 1.344185e-02 | 9.188856e-01 | 2.934150e+00 | 5.515936e+00 | 3.518384e+00 |
| 16714 | 12162.072567 | 1.349791e-02 | 9.188431e-01 | 2.669407e+00 | 5.703475e+00 | 5.716671e+00 |
| 16738 | 12162.072710 | 1.356859e-02 | 9.187456e-01 | 2.404552e+00 | 5.889836e+00 | 1.633382e+00 |
| 16762 | 12162.072683 | 1.364951e-02 | 9.187612e-01 | 2.139673e+00 | 6.075263e+00 | 3.834357e+00 |
| 16786 | 12162.072559 | 1.373607e-02 | 9.189089e-01 | 1.874926e+00 | 6.259893e+00 | 6.035662e+00 |
| 16810 | 12162.072568 | 1.383099e-02 | 9.190175e-01 | 1.577155e+00 | 1.831237e-01 | 4.585908e+00 |
| 16834 | 12162.072622 | 1.391403e-02 | 9.190173e-01 | 1.312396e+00 | 3.652873e-01 | 5.059504e-01 |
| 16858 | 12162.072700 | 1.399598e-02 | 9.190669e-01 | 1.047529e+00 | 5.457582e-01 | 2.711063e+00 |
| 16882 | 12162.072608 | 1.407638e-02 | 9.192153e-01 | 7.827157e-01 | 7.248235e-01 | 4.917390e+00 |
| 16906 | 12162.072324 | 1.415124e-02 | 9.193448e-01 | 5.180427e-01 | 9.030928e-01 | 8.408603e-01 |
| 16930 | 12162.072275 | 1.421425e-02 | 9.193539e-01 | 2.534121e-01 | 1.081049e+00 | 3.047605e+00 |
| 16954 | 12162.072661 | 1.425867e-02 | 9.193013e-01 | 6.271897e+00 | 1.258630e+00 | 5.254841e+00 |
| 16978 | 12162.072730 | 1.427771e-02 | 9.192965e-01 | 6.007167e+00 | 1.435497e+00 | 1.179689e+00 |
| 17002 | 12162.072359 | 1.427042e-02 | 9.193281e-01 | 5.742499e+00 | 1.611795e+00 | 3.388167e+00 |
| 17026 | 12162.072265 | 1.424563e-02 | 9.192817e-01 | 5.477880e+00 | 1.787923e+00 | 5.596786e+00 |
| 17050 | 12162.072388 | 1.421022e-02 | 9.191392e-01 | 5.213175e+00 | 1.964351e+00 | 1.522289e+00 |
| 17074 | 12162.072537 | 1.416496e-02 | 9.190160e-01 | 4.948317e+00 | 2.141582e+00 | 3.730690e+00 |
| 17100 | 12162.072483 | 1.410578e-02 | 9.189913e-01 | 4.683433e+00 | 2.319932e+00 | 5.938097e+00 |
| 17125 | 12162.072302 | 1.402971e-02 | 9.189841e-01 | 4.418683e+00 | 2.499485e+00 | 1.860852e+00 |
| 17149 | 12162.072342 | 1.394154e-02 | 9.188863e-01 | 4.154013e+00 | 2.680159e+00 | 4.065676e+00 |
| 17173 | 12162.072405 | 1.385065e-02 | 9.187599e-01 | 3.889252e+00 | 2.861695e+00 | 6.270193e+00 |
| 17197 | 12162.072203 | 1.376101e-02 | 9.187429e-01 | 3.624380e+00 | 3.044053e+00 | 2.191181e+00 |
| 17221 | 12162.072093 | 1.367336e-02 | 9.188402e-01 | 3.359547e+00 | 3.227954e+00 | 4.393593e+00 |
| 17245 | 12162.072128 | 1.358990e-02 | 9.188882e-01 | 3.094812e+00 | 3.413636e+00 | 3.105624e-01 |
| 17269 | 12162.072177 | 1.351203e-02 | 9.188015e-01 | 2.830072e+00 | 3.600631e+00 | 2.509394e+00 |
| 17293 | 12162.072088 | 1.344103e-02 | 9.187133e-01 | 2.565247e+00 | 3.788265e+00 | 4.707986e+00 |
| 17317 | 12162.072071 | 1.337924e-02 | 9.187795e-01 | 2.300409e+00 | 3.976244e+00 | 6.232332e-01 |
| 17341 | 12162.072316 | 1.333238e-02 | 9.189454e-01 | 2.035656e+00 | 4.164869e+00 | 2.820689e+00 |
| 17365 | 12162.072402 | 1.330388e-02 | 9.190407e-01 | 1.770954e+00 | 4.354280e+00 | 5.016891e+00 |
| 17389 | 12162.072175 | 1.329162e-02 | 9.190253e-01 | 1.506192e+00 | 4.544306e+00 | 9.291588e-01 |
| 17413 | 12162.072043 | 1.329230e-02 | 9.190267e-01 | 1.241336e+00 | 4.734550e+00 | 3.124542e+00 |
| 17437 | 12162.072139 | 1.330401e-02 | 9.191404e-01 | 9.765076e-01 | 4.924427e+00 | 5.320197e+00 |
| 17461 | 12162.072338 | 1.332736e-02 | 9.192981e-01 | 7.118237e-01 | 5.113509e+00 | 1.233011e+00 |
| 17485 | 12162.072247 | 1.336628e-02 | 9.193673e-01 | 4.472168e-01 | 5.301874e+00 | 3.429394e+00 |
| 17509 | 12162.071952 | 1.342646e-02 | 9.193381e-01 | 1.825264e-01 | 5.489760e+00 | 5.626343e+00 |
| 17533 | 12162.072084 | 1.350395e-02 | 9.193209e-01 | 6.200941e+00 | 5.677200e+00 | 1.540714e+00 |
| 17557 | 12162.072225 | 1.358837e-02 | 9.193390e-01 | 5.936239e+00 | 5.864215e+00 | 3.738581e+00 |
| 17581 | 12162.071906 | 1.367494e-02 | 9.192938e-01 | 5.671634e+00 | 6.050523e+00 | 5.937029e+00 |
| 17605 | 12162.071617 | 1.376375e-02 | 9.191511e-01 | 5.406968e+00 | 6.235452e+00 | 1.853968e+00 |
| 17629 | 12162.071608 | 1.385572e-02 | 9.190288e-01 | 5.142141e+00 | 1.354165e-01 | 4.056379e+00 |
| 17653 | 12162.071857 | 1.395101e-02 | 9.190162e-01 | 4.877257e+00 | 3.168700e-01 | 6.260682e+00 |
| 17677 | 12162.072091 | 1.404579e-02 | 9.190262e-01 | 4.612467e+00 | 4.969897e-01 | 2.183007e+00 |
| 17701 | 12162.071868 | 1.413612e-02 | 9.189229e-01 | 4.347780e+00 | 6.762040e-01 | 4.389421e+00 |
| 17725 | 12162.071727 | 1.421659e-02 | 9.187568e-01 | 4.083052e+00 | 8.545008e-01 | 3.139508e-01 |
| 17749 | 12162.071810 | 1.427937e-02 | 9.186944e-01 | 3.818213e+00 | 1.031829e+00 | 2.523044e+00 |
| 17773 | 12162.071762 | 1.432409e-02 | 9.187863e-01 | 3.553361e+00 | 1.208338e+00 | 4.732917e+00 |

Tab. F.6 – Éléments moyens «observés» de LAGEOS-2 (suite).
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 17797 | 12162.071601 | 1.435473e - 02 | 9.188855e - 01 | 3.288598e + 00 | 1.384200e + 00 | 6.598672e - 01 |
| 17821 | 12162.071497 | 1.437074e - 02 | 9.188478e - 01 | 3.023867e + 00 | 1.559790e + 00 | 2.870187e + 00 |
| 17845 | 12162.071604 | 1.436881e - 02 | 9.187288e - 01 | 2.759051e + 00 | 1.735608e + 00 | 5.080677e + 00 |
| 17869 | 12162.071642 | 1.434520e - 02 | 9.187106e - 01 | 2.494183e + 00 | 1.911895e + 00 | 1.007774e + 00 |
| 17893 | 12162.071508 | 1.430027e - 02 | 9.188561e - 01 | 2.229415e + 00 | 2.088533e + 00 | 3.217348e + 00 |
| 17917 | 12162.071696 | 1.423618e - 02 | 9.189988e - 01 | 1.964739e + 00 | 2.265482e + 00 | 5.426082e + 00 |
| 17941 | 12162.071918 | 1.415967e - 02 | 9.190199e - 01 | 1.699991e + 00 | 2.443187e + 00 | 1.350770e + 00 |
| 17965 | 12162.071742 | 1.407816e - 02 | 9.190180e - 01 | 1.435105e + 00 | 2.622023e + 00 | 3.557741e + 00 |
| 17989 | 12162.071515 | 1.399116e - 02 | 9.191201e - 01 | 1.170235e + 00 | 2.802217e + 00 | 5.763284e + 00 |
| 18013 | 12162.071519 | 1.389534e - 02 | 9.192730e - 01 | 9.055293e - 01 | 2.983953e + 00 | 1.683593e + 00 |
| 18037 | 12162.071831 | 1.379350e - 02 | 9.193463e - 01 | 6.409367e - 01 | 3.167201e + 00 | 3.885139e + 00 |
| 18061 | 12162.072044 | 1.369524e - 02 | 9.193352e - 01 | 3.763031e - 01 | 3.351539e + 00 | 6.085587e + 00 |
| 18085 | 12162.071563 | 1.360676e - 02 | 9.193384e - 01 | 1.115748e - 01 | 3.536399e + 00 | 2.002509e + 00 |
| 18109 | 12162.071321 | 1.352864e - 02 | 9.193783e - 01 | 6.130044e + 00 | 3.722079e + 00 | 4.201766e + 00 |
| 18133 | 12162.071423 | 1.346468e - 02 | 9.193677e - 01 | 5.865411e + 00 | 3.909051e + 00 | 1.164194e - 01 |
| 18157 | 12162.071432 | 1.341543e - 02 | 9.192407e - 01 | 5.600771e + 00 | 4.097318e + 00 | 2.313126e + 00 |
| 18181 | 12162.071290 | 1.337581e - 02 | 9.190794e - 01 | 5.336003e + 00 | 4.286487e + 00 | 4.509389e + 00 |
| 18205 | 12162.071126 | 1.334137e - 02 | 9.190133e - 01 | 5.071152e + 00 | 4.476055e + 00 | 4.223552e - 01 |
| 18229 | 12162.071243 | 1.331393e - 02 | 9.190268e - 01 | 4.806368e + 00 | 4.665683e + 00 | 2.618340e + 00 |
| 18253 | 12162.071608 | 1.330241e - 02 | 9.189834e - 01 | 4.541675e + 00 | 4.855307e + 00 | 4.814302e + 00 |
| 18277 | 12162.071368 | 1.331534e - 02 | 9.188291e - 01 | 4.276943e + 00 | 5.044710e + 00 | 7.277751e - 01 |
| 18301 | 12162.071086 | 1.334683e - 02 | 9.187176e - 01 | 4.012099e + 00 | 5.233957e + 00 | 2.925093e + 00 |
| 18325 | 12162.071112 | 1.339088e - 02 | 9.187586e - 01 | 3.747241e + 00 | 5.423055e + 00 | 5.122498e + 00 |
| 18349 | 12162.071193 | 1.344446e - 02 | 9.188398e - 01 | 3.482483e + 00 | 5.611608e + 00 | 1.036799e + 00 |
| 18373 | 12162.071132 | 1.350868e - 02 | 9.188159e - 01 | 3.217778e + 00 | 5.799133e + 00 | 3.235188e + 00 |
| 18397 | 12162.071050 | 1.358510e - 02 | 9.187285e - 01 | 2.953007e + 00 | 5.985331e + 00 | 5.435328e + 00 |
| 18421 | 12162.071155 | 1.367127e - 02 | 9.187241e - 01 | 2.688164e + 00 | 6.170283e + 00 | 1.353903e + 00 |
| 18445 | 12162.071333 | 1.376158e - 02 | 9.188264e - 01 | 2.423360e + 00 | 7.102353e - 02 | 3.556463e + 00 |
| 18469 | 12162.071126 | 1.384890e - 02 | 9.189291e - 01 | 2.158655e + 00 | 2.541992e - 01 | 5.759166e + 00 |
| 18493 | 12162.071015 | 1.393194e - 02 | 9.189546e - 01 | 1.893945e + 00 | 4.365470e - 01 | 1.679276e + 00 |
| 18517 | 12162.071132 | 1.400975e - 02 | 9.189548e - 01 | 1.629119e + 00 | 6.173963e - 01 | 3.884285e + 00 |
| 18541 | 12162.071230 | 1.408034e - 02 | 9.190513e - 01 | 1.364242e + 00 | 7.964581e - 01 | 6.091187e + 00 |
| 18565 | 12162.071154 | 1.414297e - 02 | 9.192320e - 01 | 1.099479e + 00 | 9.741903e - 01 | 2.015828e + 00 |
| 18589 | 12162.071058 | 1.419697e - 02 | 9.193504e - 01 | 8.348565e - 01 | 1.151389e + 00 | 4.223617e + 00 |
| 18613 | 12162.071286 | 1.423815e - 02 | 9.193451e - 01 | 5.702284e - 01 | 1.328481e + 00 | 1.481418e - 01 |
| 18637 | 12162.071748 | 1.425808e - 02 | 9.193216e - 01 | 3.055169e - 01 | 1.505292e + 00 | 2.356266e + 00 |
| 18661 | 12162.071397 | 1.424985e - 02 | 9.193715e - 01 | 4.081443e - 02 | 1.681731e + 00 | 4.564735e + 00 |
| 18685 | 12162.070877 | 1.422075e - 02 | 9.194022e - 01 | 6.059385e + 00 | 1.858052e + 00 | 4.899508e - 01 |
| 18709 | 12162.070755 | 1.418057e - 02 | 9.193145e - 01 | 5.794769e + 00 | 2.034508e + 00 | 2.698318e + 00 |
| 18733 | 12162.071006 | 1.413263e - 02 | 9.191675e - 01 | 5.530015e + 00 | 2.211650e + 00 | 4.906469e + 00 |
| 18757 | 12162.071195 | 1.407362e - 02 | 9.190808e - 01 | 5.265170e + 00 | 2.390056e + 00 | 8.305266e - 01 |
| 18781 | 12162.070952 | 1.400088e - 02 | 9.190503e - 01 | 5.000401e + 00 | 2.570092e + 00 | 3.036100e + 00 |
| 18805 | 12162.070696 | 1.391841e - 02 | 9.189773e - 01 | 4.735744e + 00 | 2.751575e + 00 | 5.240149e + 00 |
| 18829 | 12162.070858 | 1.383057e - 02 | 9.188450e - 01 | 4.471054e + 00 | 2.933826e + 00 | 1.160582e + 00 |
| 18853 | 12162.070898 | 1.373916e - 02 | 9.187527e - 01 | 4.206220e + 00 | 3.116711e + 00 | 3.364169e + 00 |
| 18877 | 12162.070679 | 1.365112e - 02 | 9.187747e - 01 | 3.941339e + 00 | 3.300722e + 00 | 5.566811e + 00 |
| 18901 | 12162.070606 | 1.357180e - 02 | 9.188476e - 01 | 3.676553e + 00 | 3.486072e + 00 | 1.484560e + 00 |
| 18925 | 12162.070741 | 1.350155e - 02 | 9.188212e - 01 | 3.411861e + 00 | 3.672711e + 00 | 3.683902e + 00 |
| 18949 | 12162.070836 | 1.343831e - 02 | 9.186967e - 01 | 3.147132e + 00 | 3.860396e + 00 | 5.882453e + 00 |
| 18973 | 12162.070727 | 1.338409e - 02 | 9.186580e - 01 | 2.882321e + 00 | 4.048888e + 00 | 1.797469e + 00 |

Caractéristiques du filtrage :

- Sur chaque variable, tous les termes du géopotential jusqu'aux degré 20 et ordre 20 d'une amplitude de quelques centimètres, et dont les périodes sont comprises entre 0,01 et 3 jours, sont filtrés analytiquement. Cela représente environ 500 combinaisons (n, m, p, q, r) .
- $|q_{max}|$ pour les développements en excentricité : 2,
- Ecarts-types sur la détermination des éléments moyens ayant servi au calcul des perturbations : $a(4, 1 \text{ m})$, $C(6, 3 \text{ m})$, $i(1, 6 \text{ m})$, $\Omega(1, 4 \text{ m})$, $S(6, 6 \text{ m})$, $\lambda(7, 8 \text{ m})$,
- Filtrage numérique sur des fenêtres de 24 jours, avec filtrage des périodes inférieures à 3 jours.

Nombre d'observations :

- Dans la table F.5 et les suivantes, on trouve 138 éléments moyens qui constituent 828 observations. Le premier point moyen est donné au 8 décembre 1992 (Jour julien CNES 15682), le dernier au 12 décembre 2001 (Jour julien CNES 18973),
- l'échantillonnage des observations est en général de 24 jours.

F.3 STARLETTE

Caractéristiques du mouvement de STARLETTE (déterminées sur le premier arc filtré)¹ :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 7335,389 \text{ km}$, $e = 0,1986 \cdot 10^{-1}$, $i = 49,82^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = -0.796 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\theta} = 0.666 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\lambda} = 0.100574 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,
- Période de révolution orbitale : 104 minutes (13,8 révolutions par jour), période du périgée : 109 jours, période du nœud : 91 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,77 \cdot 10^{-3}$. Cette valeur est inférieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périgée circule,
- Premières périodes de résonance : 1,534 et 2,765 jour ($m = 14$).

Caractéristiques du filtrage :

- Sur chaque variable, tous les termes du géopotential jusqu'aux degré 30 et ordre 25 d'une amplitude de quelques centimètres, et dont les périodes sont comprises entre 0,01 et 4,2 jours, sont filtrés analytiquement. Cela représente environ 300 combinaisons (n, m, p, q, r) .

¹en fin d'arc, les principaux changements sont : $a = 7334,825 \text{ km}$, $e = 0,2067 \cdot 10^{-1}$. Cette excentricité n'est pas aberrante, en étant plus grande qu'en début d'arc et ce en dépit du freinage atmosphérique. Ces valeurs sont des valeurs moyennes qui subissent, en accord avec la théorie, des variations à longues périodes.

TAB. F.7 – Eléments moyens «observés» de STARLETTE.
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 12332 | 7335.390450 | 2.108634e-02 | 8.695550e-01 | 1.501572e+00 | 6.737278e-01 | 1.082422e+00 |
| 12356 | 7335.389604 | 2.131022e-02 | 8.696017e-01 | 6.132073e+00 | 2.011374e+00 | 5.526974e+00 |
| 12371 | 7335.388966 | 2.082037e-02 | 8.695749e-01 | 5.099120e+00 | 2.855712e+00 | 1.228208e+00 |
| 12380 | 7335.388859 | 2.042695e-02 | 8.695870e-01 | 4.479370e+00 | 3.373799e+00 | 3.664109e+00 |
| 12395 | 7335.388421 | 1.992056e-02 | 8.695514e-01 | 3.446495e+00 | 4.258292e+00 | 5.608776e+00 |
| 12404 | 7335.388127 | 1.984859e-02 | 8.695449e-01 | 2.826755e+00 | 4.796642e+00 | 1.741526e+00 |
| 12434 | 7335.387317 | 2.081604e-02 | 8.695965e-01 | 7.610062e-01 | 2.751066e-01 | 5.638435e+00 |
| 12458 | 7335.386045 | 2.139015e-02 | 8.695808e-01 | 5.391492e+00 | 1.619936e+00 | 3.794027e+00 |
| 12482 | 7335.384256 | 2.073663e-02 | 8.695616e-01 | 3.738715e+00 | 2.968023e+00 | 1.947557e+00 |
| 12506 | 7335.382458 | 1.988672e-02 | 8.695756e-01 | 2.086096e+00 | 4.376208e+00 | 4.160637e-02 |
| 12530 | 7335.380998 | 2.025168e-02 | 8.696206e-01 | 4.334717e-01 | 5.805368e+00 | 4.398481e+00 |
| 13008 | 7335.369680 | 2.134607e-02 | 8.695843e-01 | 5.216878e+00 | 1.891912e+00 | 5.649795e-01 |
| 13032 | 7335.369356 | 2.051513e-02 | 8.695644e-01 | 3.564112e+00 | 3.249627e+00 | 4.998808e+00 |
| 13056 | 7335.368971 | 1.984295e-02 | 8.695640e-01 | 1.911482e+00 | 4.668765e+00 | 3.088022e+00 |
| 13080 | 7335.368502 | 2.045745e-02 | 8.696245e-01 | 2.588603e-01 | 6.090478e+00 | 1.174560e+00 |
| 13162 | 7335.366377 | 1.984999e-02 | 8.696084e-01 | 8.953589e-01 | 4.487948e+00 | 3.193973e+00 |
| 13186 | 7335.366035 | 2.031840e-02 | 8.696164e-01 | 5.525973e+00 | 5.914975e+00 | 1.276019e+00 |
| 13210 | 7335.365409 | 2.125804e-02 | 8.695456e-01 | 3.873237e+00 | 1.000081e+00 | 5.700824e+00 |
| 13234 | 7335.364993 | 2.115990e-02 | 8.695422e-01 | 2.220490e+00 | 2.336529e+00 | 3.874483e+00 |
| 13258 | 7335.364689 | 2.017491e-02 | 8.696175e-01 | 5.677671e-01 | 3.713959e+00 | 2.007182e+00 |
| 13282 | 7335.364318 | 1.989958e-02 | 8.696065e-01 | 5.198381e+00 | 5.144817e+00 | 8.615077e-02 |
| 13373 | 7335.362515 | 1.999856e-02 | 8.696001e-01 | 5.215164e+00 | 4.067683e+00 | 4.543810e+00 |
| 13397 | 7335.361870 | 2.006754e-02 | 8.695785e-01 | 3.562508e+00 | 5.500323e+00 | 2.622626e+00 |
| 13421 | 7335.361549 | 2.104761e-02 | 8.695539e-01 | 1.909845e+00 | 6.048709e-01 | 7.464121e-01 |
| 13445 | 7335.361274 | 2.133334e-02 | 8.696047e-01 | 2.570820e-01 | 1.943439e+00 | 5.202517e+00 |
| 13469 | 7335.360857 | 2.047733e-02 | 8.695898e-01 | 4.887541e+00 | 3.302888e+00 | 3.354549e+00 |
| 13617 | 7335.357433 | 2.013197e-02 | 8.696018e-01 | 9.792685e-01 | 5.615801e+00 | 1.295727e-01 |
| 13682 | 7335.356465 | 2.068875e-02 | 8.695501e-01 | 2.786393e+00 | 3.011824e+00 | 2.462839e+00 |
| 13742 | 7335.355642 | 2.079409e-02 | 8.695744e-01 | 4.938049e+00 | 2.606986e-01 | 3.998057e+00 |
| 13766 | 7335.354865 | 2.138181e-02 | 8.695643e-01 | 3.285262e+00 | 1.605976e+00 | 2.167257e+00 |
| 13831 | 7335.352157 | 1.999199e-02 | 8.695981e-01 | 5.092476e+00 | 5.376586e+00 | 4.412831e+00 |
| 13924 | 7335.349718 | 1.987520e-02 | 8.695989e-01 | 4.971507e+00 | 4.418810e+00 | 3.538640e-01 |
| 13948 | 7335.349001 | 2.027816e-02 | 8.695708e-01 | 3.318826e+00 | 5.847264e+00 | 4.725552e+00 |
| 13972 | 7335.347934 | 2.123277e-02 | 8.695379e-01 | 1.666084e+00 | 9.357473e-01 | 2.871137e+00 |
| 14029 | 7335.344520 | 1.994889e-02 | 8.695906e-01 | 4.024107e+00 | 4.178802e+00 | 1.624576e+00 |
| 14053 | 7335.343265 | 2.012839e-02 | 8.695632e-01 | 2.371474e+00 | 5.610461e+00 | 5.995504e+00 |
| 14108 | 7335.341036 | 2.109640e-02 | 8.695599e-01 | 4.867219e+00 | 2.439041e+00 | 7.355750e-01 |
| 14132 | 7335.339973 | 2.011096e-02 | 8.695830e-01 | 3.214468e+00 | 3.821680e+00 | 5.156858e+00 |
| 14276 | 7335.313397 | 2.030990e-02 | 8.696198e-01 | 5.864754e+00 | 5.902546e+00 | 2.225323e-01 |
| 14300 | 7335.305392 | 2.125489e-02 | 8.695413e-01 | 4.212002e+00 | 9.883541e-01 | 4.670506e+00 |
| 14324 | 7335.297475 | 2.116246e-02 | 8.695632e-01 | 2.559208e+00 | 2.324878e+00 | 2.870991e+00 |
| 14348 | 7335.293420 | 2.017623e-02 | 8.696010e-01 | 9.064058e-01 | 3.701825e+00 | 1.034029e+00 |
| 14372 | 7335.290385 | 1.989185e-02 | 8.696073e-01 | 5.536969e+00 | 5.132328e+00 | 5.427575e+00 |
| 14396 | 7335.287478 | 2.079038e-02 | 8.695722e-01 | 3.884281e+00 | 2.536627e-01 | 3.565133e+00 |
| 14420 | 7335.281686 | 2.138779e-02 | 8.695522e-01 | 2.231470e+00 | 1.599346e+00 | 1.764370e+00 |
| 14444 | 7335.277352 | 2.075172e-02 | 8.695900e-01 | 5.786895e-01 | 2.946316e+00 | 6.247083e+00 |
| 14468 | 7335.272939 | 1.988700e-02 | 8.696122e-01 | 5.209204e+00 | 4.353013e+00 | 4.388302e+00 |
| 14492 | 7335.267453 | 2.023232e-02 | 8.695744e-01 | 3.556474e+00 | 5.782762e+00 | 2.509314e+00 |
| 14516 | 7335.260123 | 2.120309e-02 | 8.695404e-01 | 1.903702e+00 | 8.743738e-01 | 6.882629e-01 |
| 14540 | 7335.252634 | 2.122890e-02 | 8.696053e-01 | 2.508442e-01 | 2.211086e+00 | 5.190986e+00 |
| 14564 | 7335.246763 | 2.026756e-02 | 8.696010e-01 | 4.881254e+00 | 3.582302e+00 | 3.378471e+00 |
| 14588 | 7335.240469 | 1.986385e-02 | 8.695552e-01 | 3.228573e+00 | 5.010372e+00 | 1.512394e+00 |
| 14622 | 7335.234274 | 2.109464e-02 | 8.695812e-01 | 8.871671e-01 | 7.045229e-01 | 1.012745e+00 |
| 14646 | 7335.229418 | 2.128352e-02 | 8.695995e-01 | 5.517523e+00 | 2.042127e+00 | 5.524842e+00 |
| 14670 | 7335.223679 | 2.038137e-02 | 8.695662e-01 | 3.864674e+00 | 3.406023e+00 | 3.729813e+00 |
| 14694 | 7335.217033 | 1.983335e-02 | 8.695707e-01 | 2.211960e+00 | 4.829952e+00 | 1.877557e+00 |
| 14718 | 7335.209679 | 2.056320e-02 | 8.696039e-01 | 5.591703e-01 | 6.246492e+00 | 3.584994e-02 |
| 14742 | 7335.203371 | 2.135050e-02 | 8.695844e-01 | 5.189529e+00 | 1.318582e+00 | 4.541544e+00 |
| 14766 | 7335.198710 | 2.094058e-02 | 8.695489e-01 | 3.536681e+00 | 2.659353e+00 | 2.781041e+00 |
| 14790 | 7335.196541 | 1.997307e-02 | 8.695799e-01 | 1.883865e+00 | 4.053053e+00 | 9.692706e-01 |
| 14814 | 7335.195212 | 2.003808e-02 | 8.696125e-01 | 2.311400e-01 | 5.485860e+00 | 5.401735e+00 |
| 14838 | 7335.193805 | 2.102597e-02 | 8.695750e-01 | 4.861585e+00 | 5.907929e-01 | 3.596025e+00 |
| 14862 | 7335.189903 | 2.132320e-02 | 8.695549e-01 | 3.208648e+00 | 1.929552e+00 | 1.841529e+00 |
| 14886 | 7335.185418 | 2.046510e-02 | 8.695519e-01 | 1.555756e+00 | 3.288591e+00 | 6.850898e-02 |
| 14910 | 7335.178330 | 1.981758e-02 | 8.696283e-01 | 6.186205e+00 | 4.7090077e+00 | 4.519113e+00 |
| 14934 | 7335.172639 | 2.047107e-02 | 8.695940e-01 | 4.533438e+00 | 6.129953e+00 | 2.688751e+00 |
| 14958 | 7335.168760 | 2.133183e-02 | 8.695168e-01 | 2.880561e+00 | 1.206323e+00 | 9.223749e-01 |
| 14982 | 7335.165616 | 2.103445e-02 | 8.695800e-01 | 1.227656e+00 | 2.544824e+00 | 5.461716e+00 |
| 15006 | 7335.162499 | 2.004455e-02 | 8.696304e-01 | 5.858034e+00 | 3.932309e+00 | 3.669550e+00 |
| 15030 | 7335.158422 | 1.997942e-02 | 8.695584e-01 | 4.205286e+00 | 5.365002e+00 | 1.834018e+00 |
| 15054 | 7335.152328 | 2.094817e-02 | 8.695487e-01 | 2.552431e+00 | 4.760264e-01 | 3.949394e-02 |
| 15078 | 7335.143487 | 2.135572e-02 | 8.695769e-01 | 8.994449e-01 | 1.817055e+00 | 4.584514e+00 |
| 15102 | 7335.135933 | 2.056785e-02 | 8.696025e-01 | 5.529790e+00 | 3.171540e+00 | 2.836219e+00 |
| 15126 | 7335.130968 | 1.983298e-02 | 8.695726e-01 | 3.876993e+00 | 4.587435e+00 | 1.029228e+00 |
| 15150 | 7335.126537 | 2.038002e-02 | 8.695591e-01 | 2.224147e+00 | 6.011753e+00 | 5.499453e+00 |
| 15174 | 7335.121850 | 2.128040e-02 | 8.695898e-01 | 5.712684e-01 | 1.093233e+00 | 3.747614e+00 |
| 15198 | 7335.118268 | 2.108618e-02 | 8.695841e-01 | 5.201574e+00 | 2.431015e+00 | 2.024017e+00 |
| 15222 | 7335.114983 | 2.009855e-02 | 8.695593e-01 | 3.548640e+00 | 3.813303e+00 | 2.580282e-01 |
| 15246 | 7335.112241 | 1.992236e-02 | 8.695645e-01 | 1.895820e+00 | 5.245082e+00 | 4.726857e+00 |
| 15270 | 7335.108940 | 2.085821e-02 | 8.696148e-01 | 2.429582e-01 | 3.611721e-01 | 2.946144e+00 |
| 15294 | 7335.103247 | 2.135936e-02 | 8.695728e-01 | 4.873211e+00 | 1.704450e+00 | 1.223130e+00 |
| 15318 | 7335.100188 | 2.063949e-02 | 8.695337e-01 | 3.220276e+00 | 3.055503e+00 | 5.77826e+00 |
| 15342 | 7335.094480 | 1.983679e-02 | 8.696042e-01 | 1.567420e+00 | 4.467398e+00 | 3.990495e+00 |
| 15366 | 7335.087492 | 2.029340e-02 | 8.696176e-01 | 6.197783e+00 | 5.894957e+00 | 2.189849e+00 |
| 15390 | 7335.077283 | 2.124385e-02 | 8.695396e-01 | 4.544894e+00 | 9.811574e-01 | 4.512112e-01 |
| 15414 | 7335.069273 | 2.115758e-02 | 8.695629e-01 | 2.891866e+00 | 2.318033e+00 | 5.032665e+00 |
| 15438 | 7335.065963 | 2.016927e-02 | 8.695860e-01 | 1.238890e+00 | 3.694864e+00 | 2.93170e+00 |
| 15462 | 7335.063704 | 1.987583e-02 | 8.696137e-01 | 5.869278e+00 | 5.125350e+00 | 1.500498e+00 |
| 15486 | 7335.062330 | 2.077286e-02 | 8.695735e-01 | 4.216387e+00 | 2.470585e-01 | 6.017567e+00 |
| 15510 | 7335.061518 | 2.137559e-02 | 8.695403e-01 | 2.563389e+00 | 1.593000e+00 | 4.311369e+00 |

TAB. F.8 – Éléments moyens «observés» de STARLETTE (suite 1).
(à 0^h 0^{min} 0^s pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 15534 | 7335.060519 | 2.074087e-02 | 8.695925e-01 | 9.104401e-01 | 2.939980e+00 | 2.604224e+00 |
| 15558 | 7335.059275 | 1.987051e-02 | 8.696161e-01 | 5.540752e+00 | 4.346454e+00 | 8.377434e-01 |
| 15582 | 7335.058030 | 2.021159e-02 | 8.695634e-01 | 3.887870e+00 | 5.776343e+00 | 5.331937e+00 |
| 15606 | 7335.056670 | 2.118910e-02 | 8.695600e-01 | 2.234943e+00 | 8.682913e-01 | 3.598276e+00 |
| 15630 | 7335.055275 | 2.122152e-02 | 8.695937e-01 | 5.818965e-01 | 2.205300e+00 | 1.903375e+00 |
| 15654 | 7335.053919 | 2.025860e-02 | 8.695939e-01 | 5.212144e+00 | 3.576627e+00 | 1.742939e-01 |
| 15678 | 7335.052455 | 1.984799e-02 | 8.695736e-01 | 3.559303e+00 | 5.004705e+00 | 4.672461e+00 |
| 15718 | 7335.050358 | 2.124984e-02 | 8.695762e-01 | 8.044169e-01 | 1.035794e+00 | 3.859398e+00 |
| 15742 | 7335.049383 | 2.111639e-02 | 8.696041e-01 | 5.434643e+00 | 2.373149e+00 | 2.166252e+00 |
| 15766 | 7335.047859 | 2.013084e-02 | 8.695646e-01 | 3.781667e+00 | 3.752579e+00 | 4.320169e-01 |
| 15790 | 7335.045404 | 1.989635e-02 | 8.695583e-01 | 2.128794e+00 | 5.183727e+00 | 4.930134e+00 |
| 15814 | 7335.043480 | 2.081036e-02 | 8.696056e-01 | 4.758441e-01 | 3.027354e-01 | 3.174912e+00 |
| 15838 | 7335.042216 | 2.136122e-02 | 8.695798e-01 | 5.106060e+00 | 1.647640e+00 | 1.477248e+00 |
| 15862 | 7335.041407 | 2.068190e-02 | 8.695390e-01 | 3.453087e+00 | 2.997001e+00 | 6.059064e+00 |
| 15886 | 7335.040736 | 1.984408e-02 | 8.695862e-01 | 1.800152e+00 | 4.406389e+00 | 4.298375e+00 |
| 15910 | 7335.040248 | 2.024639e-02 | 8.696129e-01 | 1.472980e-01 | 5.835040e+00 | 2.518097e+00 |
| 15934 | 7335.039900 | 2.121168e-02 | 8.695615e-01 | 4.777591e+00 | 9.237521e-01 | 7.945681e-01 |
| 15958 | 7335.039360 | 2.118512e-02 | 8.695518e-01 | 3.124511e+00 | 2.260571e+00 | 5.390160e+00 |
| 15982 | 7335.038493 | 2.020705e-02 | 8.695666e-01 | 1.471507e+00 | 3.634676e+00 | 3.665499e+00 |
| 16006 | 7335.037383 | 1.985801e-02 | 8.696250e-01 | 6.101856e+00 | 5.064233e+00 | 1.885289e+00 |
| 16030 | 7335.036332 | 2.073070e-02 | 8.695777e-01 | 4.448942e+00 | 1.885195e-01 | 1.277011e-01 |
| 16054 | 7335.035264 | 2.137907e-02 | 8.695214e-01 | 2.795920e+00 | 1.536195e+00 | 4.714088e+00 |
| 16078 | 7335.034535 | 2.078594e-02 | 8.695939e-01 | 1.142930e+00 | 2.881716e+00 | 3.019659e+00 |
| 16102 | 7335.034010 | 1.988316e-02 | 8.696246e-01 | 5.773221e+00 | 4.285544e+00 | 1.266745e+00 |
| 16126 | 7335.033355 | 2.016394e-02 | 8.695506e-01 | 4.120341e+00 | 5.716337e+00 | 5.770527e+00 |
| 16150 | 7335.032742 | 2.115101e-02 | 8.695541e-01 | 2.467361e+00 | 8.109275e-01 | 4.044646e+00 |
| 16174 | 7335.031964 | 2.124306e-02 | 8.695890e-01 | 8.142834e-01 | 2.148083e+00 | 2.359736e+00 |
| 16198 | 7335.031085 | 2.029854e-02 | 8.695933e-01 | 5.444528e+00 | 3.516735e+00 | 6.431405e-01 |
| 16222 | 7335.030143 | 1.983486e-02 | 8.695747e-01 | 3.791654e+00 | 4.943470e+00 | 5.152258e+00 |
| 16246 | 7335.029584 | 2.063217e-02 | 8.695742e-01 | 2.138720e+00 | 7.270837e-02 | 3.393323e+00 |
| 16294 | 7335.028816 | 2.085587e-02 | 8.695787e-01 | 5.115954e+00 | 2.767609e+00 | 4.824038e-03 |
| 16318 | 7335.028417 | 1.991705e-02 | 8.695774e-01 | 3.462965e+00 | 4.166462e+00 | 4.543026e+00 |
| 16342 | 7335.028177 | 2.008673e-02 | 8.695725e-01 | 1.810085e+00 | 5.598345e+00 | 2.764992e+00 |
| 16366 | 7335.027771 | 2.107768e-02 | 8.696017e-01 | 1.571245e-01 | 6.981370e-01 | 1.035839e+00 |
| 16390 | 7335.027001 | 2.127648e-02 | 8.695734e-01 | 4.787262e+00 | 2.036068e+00 | 5.635086e+00 |
| 16414 | 7335.026306 | 2.037309e-02 | 8.695530e-01 | 3.134293e+00 | 3.400144e+00 | 3.925585e+00 |
| 16438 | 7335.025798 | 1.981765e-02 | 8.696072e-01 | 1.481409e+00 | 4.824133e+00 | 2.156530e+00 |
| 16462 | 7335.025148 | 2.054996e-02 | 8.696033e-01 | 6.111684e+00 | 6.240912e+00 | 3.945332e-01 |
| 16486 | 7335.024260 | 2.135097e-02 | 8.695449e-01 | 4.458698e+00 | 1.313085e+00 | 4.977525e+00 |
| 16510 | 7335.023615 | 2.094734e-02 | 8.695774e-01 | 2.805649e+00 | 2.653841e+00 | 3.292615e+00 |
| 16534 | 7335.023205 | 1.997256e-02 | 8.695874e-01 | 1.152655e+00 | 4.047381e+00 | 1.555127e+00 |
| 16558 | 7335.022912 | 2.002573e-02 | 8.696035e-01 | 5.782984e+00 | 5.479982e+00 | 6.061420e+00 |
| 16582 | 7335.022545 | 2.101651e-02 | 8.695784e-01 | 4.130028e+00 | 5.853220e-01 | 4.328923e+00 |
| 16606 | 7335.022196 | 2.132545e-02 | 8.695436e-01 | 2.476985e+00 | 1.924232e+00 | 2.646644e+00 |
| 16630 | 7335.021825 | 2.047085e-02 | 8.695878e-01 | 8.240085e-01 | 3.283155e+00 | 9.441719e-01 |
| 16654 | 7335.021257 | 1.981422e-02 | 8.696169e-01 | 5.454307e+00 | 4.703348e+00 | 5.463535e+00 |
| 16678 | 7335.020520 | 2.045713e-02 | 8.695676e-01 | 3.801374e+00 | 6.124315e+00 | 3.699609e+00 |
| 16702 | 7335.019905 | 2.132154e-02 | 8.695484e-01 | 2.148381e+00 | 1.201200e+00 | 1.996846e+00 |
| 16726 | 7335.019371 | 2.102954e-02 | 8.695936e-01 | 4.952978e-01 | 2.540153e+00 | 3.154750e-01 |
| 16750 | 7335.019009 | 2.003622e-02 | 8.696020e-01 | 5.125531e+00 | 3.927910e+00 | 4.868303e+00 |
| 16774 | 7335.018744 | 1.996094e-02 | 8.695659e-01 | 3.472672e+00 | 5.360556e+00 | 3.093380e+00 |
| 16813 | 7335.018122 | 2.133294e-02 | 8.695794e-01 | 7.865711e-01 | 1.312597e+00 | 3.444253e+00 |
| 16837 | 7335.017648 | 2.093772e-02 | 8.695998e-01 | 5.416764e+00 | 2.653404e+00 | 1.761319e+00 |
| 16861 | 7335.017150 | 1.996973e-02 | 8.695597e-01 | 3.763768e+00 | 4.046691e+00 | 2.659981e-02 |
| 16885 | 7335.016454 | 2.002215e-02 | 8.695656e-01 | 2.110862e+00 | 5.479242e+00 | 4.536003e+00 |
| 16909 | 7335.015815 | 2.100842e-02 | 8.696070e-01 | 4.578764e-01 | 5.846668e-01 | 2.806368e+00 |
| 16933 | 7335.015323 | 2.131540e-02 | 8.695701e-01 | 5.088046e+00 | 1.924017e+00 | 1.125964e+00 |
| 16957 | 7335.014979 | 2.046487e-02 | 8.695435e-01 | 3.435053e+00 | 3.283547e+00 | 5.709032e+00 |
| 16981 | 7335.014724 | 1.981353e-02 | 8.695967e-01 | 1.782115e+00 | 4.703998e+00 | 3.948425e+00 |
| 17005 | 7335.014528 | 2.045957e-02 | 8.696071e-01 | 1.292315e-01 | 6.124674e+00 | 2.187134e+00 |
| 17029 | 7335.014347 | 2.132054e-02 | 8.695498e-01 | 4.759453e+00 | 1.201040e+00 | 4.869968e-01 |
| 17053 | 7335.014030 | 2.102432e-02 | 8.695630e-01 | 3.106350e+00 | 2.539947e+00 | 5.091365e+00 |
| 17077 | 7335.013474 | 2.003253e-02 | 8.695829e-01 | 1.453354e+00 | 3.927894e+00 | 3.363539e+00 |
| 17101 | 7335.012794 | 1.996619e-02 | 8.696134e-01 | 6.083681e+00 | 5.360555e+00 | 1.590823e+00 |
| 17125 | 7335.012087 | 2.093989e-02 | 8.695718e-01 | 4.430704e+00 | 4.714745e-01 | 6.140315e+00 |
| 17149 | 7335.011379 | 2.135565e-02 | 8.695325e-01 | 2.777655e+00 | 1.812294e+00 | 4.460644e+00 |
| 17173 | 7335.011108 | 2.056421e-02 | 8.696012e-01 | 1.124667e+00 | 3.166964e+00 | 2.767123e+00 |
| 17197 | 7335.010892 | 1.981881e-02 | 8.696178e-01 | 5.754944e+00 | 4.583027e+00 | 1.011938e+00 |
| 17221 | 7335.010583 | 2.036224e-02 | 8.695508e-01 | 4.102014e+00 | 6.007565e+00 | 5.531858e+00 |
| 17245 | 7335.010347 | 2.127680e-02 | 8.695633e-01 | 2.449006e+00 | 1.089081e+00 | 3.828661e+00 |
| 17269 | 7335.009952 | 2.109427e-02 | 8.695908e-01 | 7.959099e-01 | 2.426774e+00 | 2.152639e+00 |
| 17293 | 7335.009328 | 2.010149e-02 | 8.695889e-01 | 5.426141e+00 | 3.808923e+00 | 4.319489e-01 |
| 17317 | 7335.008554 | 1.991104e-02 | 8.695808e-01 | 3.773256e+00 | 5.240746e+00 | 4.945271e+00 |
| 17341 | 7335.008123 | 2.084342e-02 | 8.695744e-01 | 2.120292e+00 | 3.573565e-01 | 3.208123e+00 |
| 17365 | 7335.007809 | 2.135684e-02 | 8.695790e-01 | 4.672845e-01 | 1.700966e+00 | 1.526855e+00 |
| 17389 | 7335.007429 | 2.064192e-02 | 8.695814e-01 | 5.097470e+00 | 3.052065e+00 | 6.121302e+00 |
| 17413 | 7335.006969 | 1.983243e-02 | 8.695859e-01 | 3.444486e+00 | 4.463731e+00 | 4.372658e+00 |
| 17437 | 7335.006597 | 2.027519e-02 | 8.695685e-01 | 1.791579e+00 | 5.890965e+00 | 2.608419e+00 |
| 17461 | 7335.006249 | 2.122422e-02 | 8.695947e-01 | 1.385692e-01 | 9.773668e-01 | 9.018549e-01 |
| 17485 | 7335.005630 | 2.115240e-02 | 8.695790e-01 | 4.768687e+00 | 2.314490e+00 | 5.511111e+00 |
| 17509 | 7335.004919 | 2.017270e-02 | 8.695580e-01 | 3.115728e+00 | 3.691448e+00 | 3.797863e+00 |
| 17533 | 7335.004305 | 1.987752e-02 | 8.696029e-01 | 1.462830e+00 | 5.121893e+00 | 2.031470e+00 |
| 17557 | 7335.003504 | 2.077102e-02 | 8.695993e-01 | 6.093067e+00 | 2.434182e-01 | 2.907256e-01 |
| 17581 | 7335.002536 | 2.137722e-02 | 8.695463e-01 | 4.440047e+00 | 1.589520e+00 | 4.892280e+00 |
| 17605 | 7335.001638 | 2.074017e-02 | 8.695758e-01 | 2.786989e+00 | 2.937091e+00 | 3.209877e+00 |
| 17629 | 7335.000752 | 1.986532e-02 | 8.695894e-01 | 1.133983e+00 | 4.344075e+00 | 1.468400e+00 |
| 17653 | 7335.000040 | 2.020256e-02 | 8.696021e-01 | 5.764295e+00 | 5.773705e+00 | 5.987327e+00 |
| 17677 | 7334.999431 | 2.118121e-02 | 8.695741e-01 | 4.111307e+00 | 8.651713e-01 | 4.278583e+00 |
| 17701 | 7334.998872 | 2.121867e-02 | 8.695405e-01 | 2.458234e+00 | 2.201866e+00 | 2.608455e+00 |
| 17725 | 7334.998138 | 2.025399e-02 | 8.695949e-01 | 8.052580e-01 | 3.573137e+00 | 9.036114e-01 |

TAB. F.9 – Eléments moyens «observés» de STARLETTE (suite 2).
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 17749 | 7334.997244 | 1.984029e-02 | 8.696178e-01 | 5.435558e+00 | 5.001548e+00 | 5.424898e+00 |
| 17773 | 7334.995872 | 2.067357e-02 | 8.695561e-01 | 3.782586e+00 | 1.284149e-01 | 3.682277e+00 |
| 17797 | 7334.994076 | 2.136860e-02 | 8.695428e-01 | 2.129543e+00 | 1.478117e+00 | 2.000724e+00 |
| 17821 | 7334.992080 | 2.082851e-02 | 8.696071e-01 | 4.764524e-01 | 2.822444e+00 | 3.252376e-01 |
| 17845 | 7334.990442 | 1.990145e-02 | 8.695983e-01 | 5.106698e+00 | 4.223956e+00 | 4.876172e+00 |
| 17869 | 7334.989038 | 2.011613e-02 | 8.695530e-01 | 3.453808e+00 | 5.655658e+00 | 3.114701e+00 |
| 17893 | 7334.987655 | 2.110322e-02 | 8.695672e-01 | 1.800780e+00 | 7.529767e-01 | 1.405400e+00 |
| 17917 | 7334.986586 | 2.125589e-02 | 8.695933e-01 | 1.477409e-01 | 2.090554e+00 | 6.022151e+00 |
| 17941 | 7334.985565 | 2.033395e-02 | 8.695733e-01 | 4.777961e+00 | 3.456937e+00 | 4.327306e+00 |
| 17965 | 7334.983658 | 1.982074e-02 | 8.695784e-01 | 3.124976e+00 | 4.882396e+00 | 2.574542e+00 |
| 17989 | 7334.981730 | 2.058212e-02 | 8.695655e-01 | 1.471984e+00 | 1.362910e-02 | 8.335409e-01 |
| 18013 | 7334.979417 | 2.134719e-02 | 8.695952e-01 | 6.102173e+00 | 1.367058e+00 | 5.437203e+00 |
| 18037 | 7334.977165 | 2.090473e-02 | 8.695698e-01 | 4.449103e+00 | 2.709192e+00 | 3.770033e+00 |
| 18061 | 7334.975569 | 1.995072e-02 | 8.695447e-01 | 2.796109e+00 | 4.105576e+00 | 2.049869e+00 |
| 18085 | 7334.973969 | 2.006154e-02 | 8.696077e-01 | 1.143207e+00 | 5.538030e+00 | 2.940387e-01 |
| 18109 | 7334.973064 | 2.105182e-02 | 8.696011e-01 | 5.773429e+00 | 6.403107e-01 | 4.868570e+00 |
| 18133 | 7334.972087 | 2.130603e-02 | 8.695267e-01 | 4.120348e+00 | 1.978545e+00 | 3.207958e+00 |
| 18157 | 7334.970565 | 2.042509e-02 | 8.695694e-01 | 2.467288e+00 | 3.340188e+00 | 1.524640e+00 |
| 18181 | 7334.968579 | 1.981266e-02 | 8.696190e-01 | 8.142978e-01 | 4.762673e+00 | 6.064174e+00 |
| 18205 | 7334.965356 | 2.049811e-02 | 8.695811e-01 | 5.444579e+00 | 6.181510e+00 | 4.324914e+00 |
| 18229 | 7334.959494 | 2.133297e-02 | 8.695435e-01 | 3.791528e+00 | 1.255564e+00 | 2.649573e+00 |
| 18253 | 7334.955834 | 2.098998e-02 | 8.695658e-01 | 2.138407e+00 | 2.595134e+00 | 9.942892e-01 |
| 18277 | 7334.953180 | 2.000186e-02 | 8.696135e-01 | 4.854507e-01 | 3.985767e+00 | 5.571901e+00 |
| 18301 | 7334.950955 | 1.998272e-02 | 8.695872e-01 | 5.115743e+00 | 5.418836e+00 | 3.824805e+00 |
| 18325 | 7334.948699 | 2.096134e-02 | 8.695529e-01 | 3.462669e+00 | 5.272577e-01 | 2.120801e+00 |
| 18373 | 7334.940938 | 2.051096e-02 | 8.696137e-01 | 1.565187e-01 | 3.224134e+00 | 5.085595e+00 |
| 18397 | 7334.937961 | 1.980876e-02 | 8.695879e-01 | 4.786718e+00 | 4.642466e+00 | 3.358813e+00 |
| 18421 | 7334.935207 | 2.039727e-02 | 8.695507e-01 | 3.133770e+00 | 6.065405e+00 | 1.629032e+00 |
| 18445 | 7334.931676 | 2.128381e-02 | 8.695897e-01 | 1.480717e+00 | 1.144585e+00 | 6.244344e+00 |
| 18469 | 7334.926135 | 2.105051e-02 | 8.695936e-01 | 6.110819e+00 | 2.483065e+00 | 4.601639e+00 |
| 18493 | 7334.922417 | 2.006351e-02 | 8.695572e-01 | 4.457800e+00 | 3.868303e+00 | 2.914529e+00 |
| 18517 | 7334.920280 | 1.993310e-02 | 8.695930e-01 | 2.804813e+00 | 5.300729e+00 | 1.181726e+00 |
| 18541 | 7334.917849 | 2.087975e-02 | 8.695807e-01 | 1.151751e+00 | 4.144054e-01 | 5.768490e+00 |
| 18565 | 7334.915522 | 2.134409e-02 | 8.695756e-01 | 5.781867e+00 | 1.756306e+00 | 4.127663e+00 |
| 18589 | 7334.912765 | 2.059622e-02 | 8.695809e-01 | 4.128760e+00 | 3.109368e+00 | 2.477184e+00 |
| 18613 | 7334.909647 | 1.982515e-02 | 8.695724e-01 | 2.475756e+00 | 4.523546e+00 | 7.671902e-01 |
| 18637 | 7334.905740 | 2.032345e-02 | 8.696008e-01 | 8.228109e-01 | 5.949378e+00 | 5.329807e+00 |
| 18661 | 7334.901904 | 2.125619e-02 | 8.695853e-01 | 5.452937e+00 | 1.033050e+00 | 3.669574e+00 |
| 18685 | 7334.898822 | 2.112745e-02 | 8.695504e-01 | 3.799768e+00 | 2.370333e+00 | 2.040933e+00 |
| 18709 | 7334.895702 | 2.013634e-02 | 8.695726e-01 | 2.146718e+00 | 3.750298e+00 | 3.708232e-01 |
| 18733 | 7334.889314 | 1.989098e-02 | 8.696211e-01 | 4.936954e-01 | 5.181883e+00 | 4.934376e+00 |
| 18757 | 7334.887229 | 2.080284e-02 | 8.695806e-01 | 5.123853e+00 | 3.008389e-01 | 3.245550e+00 |
| 18781 | 7334.885875 | 2.135941e-02 | 8.695442e-01 | 3.470761e+00 | 1.645154e+00 | 1.615602e+00 |
| 18805 | 7334.884252 | 2.068320e-02 | 8.695788e-01 | 1.817624e+00 | 2.994105e+00 | 6.265089e+00 |
| 18829 | 7334.883138 | 1.983700e-02 | 8.696123e-01 | 1.646200e-01 | 4.403571e+00 | 4.570900e+00 |
| 18853 | 7334.881828 | 2.022512e-02 | 8.695798e-01 | 4.794852e+00 | 5.832498e+00 | 2.857737e+00 |
| 18877 | 7334.878961 | 2.119333e-02 | 8.695637e-01 | 3.141727e+00 | 9.216541e-01 | 1.202503e+00 |
| 18901 | 7334.872419 | 2.118275e-02 | 8.695519e-01 | 1.488550e+00 | 2.258486e+00 | 5.867723e+00 |
| 18925 | 7334.862713 | 2.020877e-02 | 8.696169e-01 | 6.118673e+00 | 3.632728e+00 | 4.215459e+00 |
| 18949 | 7334.853767 | 1.984663e-02 | 8.695978e-01 | 4.465646e+00 | 5.062711e+00 | 2.511846e+00 |
| 18973 | 7334.848888 | 2.070338e-02 | 8.695317e-01 | 2.812598e+00 | 1.873360e-01 | 8.337146e-01 |
| 18997 | 7334.844711 | 2.135085e-02 | 8.695807e-01 | 1.159462e+00 | 1.535296e+00 | 5.500275e+00 |
| 19021 | 7334.841090 | 2.076941e-02 | 8.696111e-01 | 5.789521e+00 | 2.881120e+00 | 3.886975e+00 |
| 19045 | 7334.836595 | 1.987320e-02 | 8.695607e-01 | 4.136452e+00 | 4.285382e+00 | 2.217401e+00 |
| 19069 | 7334.830759 | 2.015113e-02 | 8.695671e-01 | 2.483410e+00 | 5.716134e+00 | 5.237684e-01 |

- $|q_{max}|$ pour les développements en excentricité : 4,
- Ecarts-types sur la détermination des éléments moyens ayant servi au calcul des perturbations : $a(6, 2 \text{ m})$, $C(5, 8 \text{ m})$, $i(1, 1 \text{ m})$, $\Omega(8, 3 \text{ m})$, $S(14, 9 \text{ m})$, $\lambda(8, 3 \text{ m})$,
- Filtrage numérique sur des fenêtres de 24 jours, avec filtrage des périodes inférieures à 3 jours.

Nombre d'observations :

- Dans la table F.7 et les suivantes, on trouve 235 éléments moyens qui constituent 1410 observations. Le premier point moyen est donné au 7 octobre 1983 (Jour julien CNES 12332), le dernier au 18 mars 2002 (Jour julien CNES 19069),
- l'échantillonnage des observations est en général de 24 jours.

F.4 STELLA

Caractéristiques du mouvement de STELLA (déterminées sur le premier arc filtré) :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 7176,674 \text{ km}$, $e = 0,622 \cdot 10^{-3}$, $i = 98,68^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = 0.201 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\theta} = -0.589 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\lambda} = 0.103722 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$,
- Période de révolution orbitale : 101 minutes (14,3 révolutions par jour), période du périégée : 123 jours, période du nœud : 362 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,12 \cdot 10^{-2}$. Cette valeur est supérieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périégée libre,
- Premières périodes de résonance : 3,799 jour ($m = 14$), 1,357 jour ($m=15$).

Caractéristiques du filtrage :

- Sur chaque variable, tous les termes du géopotential jusqu'aux degré 36 et ordre 36 d'une amplitude de quelques centimètres, et dont les périodes sont comprises entre 0,01 et 5,2 jours, sont filtrés analytiquement. Cela représente environ 2800 combinaisons (n, m, p, q, r) .
- $|q_{max}|$ pour les développements en excentricité : 2,
- Ecarts-types sur la détermination des éléments moyens ayant servi au calcul des perturbations : $a(19, 1 \text{ m})$, $C(12, 6 \text{ m})$, $i(1, 0 \text{ m})$, $\Omega(1, 7 \text{ m})$, $S(12, 6 \text{ m})$, $\lambda(6, 2 \text{ m})$,
- Filtrage numérique sur des fenêtres de 30 jours, avec filtrage des périodes inférieures à 4 jours.

TAB. F.10 – Éléments moyens «observés» de STELLA.
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 16025 | 7176.747480 | 1.762590e - 03 | 1.722257e + 00 | 5.708815e - 01 | 1.703516e + 00 | 1.459643e - 01 |
| 16056 | 7176.745139 | 1.500067e - 03 | 1.722183e + 00 | 1.107569e + 00 | 1.157318e + 00 | 1.621083e + 00 |
| 16087 | 7176.742857 | 5.850229e - 04 | 1.722095e + 00 | 1.644021e + 00 | 1.180105e + 00 | 2.528214e + 00 |
| 16118 | 7176.740634 | 1.108760e - 03 | 1.721997e + 00 | 2.180178e + 00 | 2.150997e + 00 | 2.488108e + 00 |
| 16149 | 7176.738082 | 1.767986e - 03 | 1.721911e + 00 | 2.716027e + 00 | 1.692920e + 00 | 3.877951e + 00 |
| 16180 | 7176.736006 | 1.486062e - 03 | 1.721859e + 00 | 3.251638e + 00 | 1.149071e + 00 | 5.354557e + 00 |
| 16211 | 7176.734267 | 5.729548e - 04 | 1.721843e + 00 | 3.787112e + 00 | 1.211413e + 00 | 6.225919e + 00 |
| 16242 | 7176.732770 | 1.131957e - 03 | 1.721838e + 00 | 4.322511e + 00 | 2.145106e + 00 | 6.226831e + 00 |
| 16273 | 7176.731623 | 1.773344e - 03 | 1.721815e + 00 | 4.857825e + 00 | 1.680375e + 00 | 1.343673e + 00 |
| 16304 | 7176.730697 | 1.469725e - 03 | 1.721766e + 00 | 5.392981e + 00 | 1.138514e + 00 | 2.821290e + 00 |
| 16335 | 7176.729623 | 5.591666e - 04 | 1.721703e + 00 | 5.927925e + 00 | 1.240705e + 00 | 3.655219e + 00 |
| 16366 | 7176.728168 | 1.151998e - 03 | 1.721642e + 00 | 1.794705e - 01 | 2.139761e + 00 | 3.692778e + 00 |
| 16522 | 7176.720175 | 1.785734e - 03 | 1.721273e + 00 | 2.867041e + 00 | 1.635598e + 00 | 4.258858e + 00 |
| 16553 | 7176.718711 | 1.407652e - 03 | 1.721228e + 00 | 3.400351e + 00 | 1.103437e + 00 | 5.731251e + 00 |
| 16584 | 7176.717368 | 5.227842e - 04 | 1.721207e + 00 | 3.933553e + 00 | 1.376779e + 00 | 1.156151e - 01 |
| 16615 | 7176.716247 | 1.232105e - 03 | 1.721187e + 00 | 4.466692e + 00 | 2.115130e + 00 | 3.188325e - 01 |
| 16646 | 7176.715300 | 1.788920e - 03 | 1.721152e + 00 | 4.999729e + 00 | 1.620841e + 00 | 1.755222e + 00 |
| 16677 | 7176.714469 | 1.385522e - 03 | 1.721098e + 00 | 5.532596e + 00 | 1.092438e + 00 | 3.226101e + 00 |
| 16708 | 7176.713362 | 5.138789e - 04 | 1.721037e + 00 | 6.065248e + 00 | 1.426517e + 00 | 3.834854e + 00 |
| 16739 | 7176.711938 | 1.255894e - 03 | 1.720987e + 00 | 3.145096e - 01 | 2.106534e + 00 | 4.098173e + 00 |
| 16770 | 7176.710480 | 1.790022e - 03 | 1.720940e + 00 | 8.467749e - 01 | 1.605214e + 00 | 5.543458e + 00 |
| 16801 | 7176.709222 | 1.362386e - 03 | 1.720877e + 00 | 1.378844e + 00 | 1.081021e + 00 | 7.289284e - 01 |
| 16832 | 7176.708210 | 5.083242e - 04 | 1.720793e + 00 | 1.910660e + 00 | 1.481386e + 00 | 1.273340e + 00 |
| 16863 | 7176.707208 | 1.282870e - 03 | 1.720702e + 00 | 2.442176e + 00 | 2.097068e + 00 | 1.602605e + 00 |
| 16894 | 7176.706157 | 1.792648e - 03 | 1.720626e + 00 | 2.973409e + 00 | 1.589729e + 00 | 3.055116e + 00 |
| 16925 | 7176.704965 | 1.338141e - 03 | 1.720577e + 00 | 3.504449e + 00 | 1.070631e + 00 | 4.519777e + 00 |
| 16956 | 7176.703889 | 5.068273e - 04 | 1.720547e + 00 | 4.035389e + 00 | 1.540794e + 00 | 4.995687e + 00 |
| 16987 | 7176.703046 | 1.311191e - 03 | 1.720520e + 00 | 4.566254e + 00 | 2.085331e + 00 | 5.397731e + 00 |
| 17018 | 7176.702277 | 1.794137e - 03 | 1.720485e + 00 | 5.096994e + 00 | 1.572132e + 00 | 5.747356e - 01 |
| 17049 | 7176.701452 | 1.311687e - 03 | 1.720439e + 00 | 5.627548e + 00 | 1.058291e + 00 | 2.035864e + 00 |
| 17080 | 7176.700391 | 5.056335e - 04 | 1.720388e + 00 | 6.157885e + 00 | 1.601426e + 00 | 2.440322e + 00 |
| 17111 | 7176.699227 | 1.337310e - 03 | 1.720337e + 00 | 4.048220e - 01 | 2.074001e + 00 | 2.915731e + 00 |
| 17142 | 7176.697887 | 1.792480e - 03 | 1.720282e + 00 | 9.347445e - 01 | 1.553919e + 00 | 4.384289e + 00 |
| 17173 | 7176.696707 | 1.282809e - 03 | 1.720211e + 00 | 1.464450e + 00 | 1.046174e + 00 | 5.840967e + 00 |
| 17204 | 7176.695725 | 5.098065e - 04 | 1.720117e + 00 | 1.993885e + 00 | 1.665411e + 00 | 6.170938e + 00 |
| 17235 | 7176.694626 | 1.366696e - 03 | 1.720013e + 00 | 2.523012e + 00 | 2.060366e + 00 | 4.421947e - 01 |
| 17266 | 7176.693438 | 1.792705e - 03 | 1.719928e + 00 | 3.051861e + 00 | 1.535368e + 00 | 1.916847e + 00 |
| 17297 | 7176.692161 | 1.252947e - 03 | 1.719877e + 00 | 3.580514e + 00 | 1.035459e + 00 | 3.366855e + 00 |
| 17328 | 7176.691016 | 5.186659e - 04 | 1.719850e + 00 | 4.109049e + 00 | 1.731710e + 00 | 3.621256e + 00 |
| 17359 | 7176.690126 | 1.396588e - 03 | 1.719828e + 00 | 4.637486e + 00 | 2.046350e + 00 | 4.257822e + 00 |
| 17390 | 7176.689358 | 1.790176e - 03 | 1.719793e + 00 | 5.165783e + 00 | 1.515983e + 00 | 5.739775e + 00 |
| 17421 | 7176.688262 | 1.220481e - 03 | 1.719746e + 00 | 5.693874e + 00 | 1.024191e + 00 | 9.002992e - 01 |
| 17452 | 7176.686701 | 5.306130e - 04 | 1.719692e + 00 | 6.221722e + 00 | 1.794576e + 00 | 1.082323e + 00 |
| 17483 | 7176.684954 | 1.424618e - 03 | 1.719630e + 00 | 4.661436e - 01 | 2.030747e + 00 | 1.799234e + 00 |
| 17514 | 7176.682906 | 1.785095e - 03 | 1.719555e + 00 | 9.935194e - 01 | 1.495031e + 00 | 3.288895e + 00 |
| 17545 | 7176.681374 | 1.185214e - 03 | 1.719465e + 00 | 1.520648e + 00 | 1.013375e + 00 | 4.725245e + 00 |
| 17576 | 7176.679832 | 5.481357e - 04 | 1.719361e + 00 | 2.047489e + 00 | 1.858679e + 00 | 4.835166e + 00 |
| 17607 | 7176.677909 | 1.456209e - 03 | 1.719257e + 00 | 2.574013e + 00 | 2.014233e + 00 | 5.635367e + 00 |
| 17638 | 7176.675133 | 1.781126e - 03 | 1.719173e + 00 | 3.100247e + 00 | 1.474245e + 00 | 8.488540e - 01 |
| 17669 | 7176.672550 | 1.149676e - 03 | 1.719121e + 00 | 3.626268e + 00 | 1.004458e + 00 | 2.276585e + 00 |
| 17700 | 7176.670607 | 5.715108e - 04 | 1.719097e + 00 | 4.152148e + 00 | 1.915244e + 00 | 2.324921e + 00 |
| 17731 | 7176.668417 | 1.486586e - 03 | 1.719079e + 00 | 4.677906e + 00 | 1.995679e + 00 | 3.204712e + 00 |
| 17762 | 7176.666140 | 1.773150e - 03 | 1.719039e + 00 | 5.203501e + 00 | 1.451778e + 00 | 4.709981e + 00 |
| 17948 | 7176.640385 | 6.291448e - 04 | 1.718528e + 00 | 2.068270e + 00 | 2.017921e + 00 | 3.669758e + 00 |
| 17979 | 7176.635792 | 1.547205e - 03 | 1.718427e + 00 | 2.591899e + 00 | 1.956282e + 00 | 4.707329e + 00 |
| 18010 | 7176.631912 | 1.752578e - 03 | 1.718347e + 00 | 3.115209e + 00 | 1.405096e + 00 | 6.236462e + 00 |
| 18041 | 7176.627703 | 1.025034e - 03 | 1.718293e + 00 | 3.638273e + 00 | 9.835922e - 01 | 1.354721e + 00 |
| 18072 | 7176.622897 | 6.679403e - 04 | 1.718259e + 00 | 4.161173e + 00 | 2.057402e + 00 | 1.263381e + 00 |
| 18103 | 7176.617812 | 1.577787e - 03 | 1.718223e + 00 | 4.683935e + 00 | 1.933601e + 00 | 2.372577e + 00 |
| 18134 | 7176.613185 | 1.737645e - 03 | 1.718167e + 00 | 5.206507e + 00 | 1.379877e + 00 | 3.914197e + 00 |
| 18165 | 7176.608109 | 9.783760e - 04 | 1.718083e + 00 | 5.728804e + 00 | 9.794445e - 01 | 5.305213e + 00 |
| 18196 | 7176.601315 | 7.075694e - 04 | 1.717984e + 00 | 6.250767e + 00 | 2.091580e + 00 | 5.186431e + 00 |
| 18227 | 7176.590466 | 1.606066e - 03 | 1.717893e + 00 | 4.892131e - 01 | 1.909489e + 00 | 8.322491e - 02 |
| 18258 | 7176.582183 | 1.719915e - 03 | 1.717814e + 00 | 1.010554e + 00 | 1.353320e + 00 | 1.642928e + 00 |
| 18289 | 7176.576040 | 9.298528e - 04 | 1.717730e + 00 | 1.531619e + 00 | 9.795598e - 01 | 3.023949e + 00 |
| 18320 | 7176.568416 | 7.530411e - 04 | 1.717629e + 00 | 2.052380e + 00 | 2.118972e + 00 | 2.895259e + 00 |
| 18351 | 7176.555609 | 1.635842e - 03 | 1.717522e + 00 | 2.572797e + 00 | 1.884269e + 00 | 4.146184e + 00 |
| 18382 | 7176.538429 | 1.700611e - 03 | 1.717429e + 00 | 3.092879e + 00 | 1.327149e + 00 | 5.728756e + 00 |
| 18413 | 7176.528891 | 8.809091e - 04 | 1.717362e + 00 | 3.612699e + 00 | 9.867040e - 01 | 8.179072e - 01 |
| 18444 | 7176.521796 | 8.038752e - 04 | 1.717313e + 00 | 4.132342e + 00 | 2.137279e + 00 | 7.038169e - 01 |
| 18475 | 7176.511809 | 1.663586e - 03 | 1.717263e + 00 | 4.651833e + 00 | 1.856928e + 00 | 2.025299e + 00 |
| 18506 | 7176.504434 | 1.675525e - 03 | 1.717196e + 00 | 5.171106e + 00 | 1.299503e + 00 | 3.629122e + 00 |
| 18537 | 7176.496672 | 8.274799e - 04 | 1.717111e + 00 | 5.690070e + 00 | 9.974173e - 01 | 4.981382e + 00 |
| 18568 | 7176.485241 | 8.555020e - 04 | 1.717020e + 00 | 6.208673e + 00 | 2.152252e + 00 | 4.882026e + 00 |

Nombre d'observations :

- Dans la table F.10, on trouve 74 éléments moyens qui constituent 444 observations. Le premier point moyen est donné au 16 novembre 1993 (Jour julien CNES 16025), le dernier au 2 novembre 2000 (Jour julien CNES 18568),
- l'échantillonnage des observations est en général de 30 jours.

F.5 AJISAI

Caractéristiques du mouvement de AJISAI (déterminées sur le premier arc filtré) :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 7866,953 \text{ km}$, $e = 0,68 \cdot 10^{-3}$, $i = 50,01^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = -0.621 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\theta} = 0.513 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\lambda} = 0.905442 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,
- Période de révolution orbitale : 116 minutes (12,4 révolutions par jour), période du périégée : 142 jours, période du nœud : 117 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,74 \cdot 10^{-3}$. Cette valeur est inférieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périégée circule,
- Premières périodes de résonance : 1,437 jour ($m = 13$), 3,171 jour ($m = 12$).

Caractéristiques du filtrage :

- Sur chaque variable, tous les termes du géopotential jusqu'aux degré 30 et ordre 30 d'une amplitude de quelques centimètres, et dont les périodes sont comprises entre 0,001 et 4,2 jours, sont filtrés analytiquement. Cela représente environ 2400 combinaisons (n, m, p, q, r) .
- $|q_{max}|$ pour les développements en excentricité : 2,
- Ecarts-types sur la détermination des éléments moyens ayant servi au calcul des perturbations : $a(2,9 \text{ m})$, $C(2,8 \text{ m})$, $i(0,9 \text{ m})$, $\Omega(3,0 \text{ m})$, $S(1,8 \text{ m})$, $\lambda(5,0 \text{ m})$,
- Filtrage numérique sur des fenêtres de 24 jours, avec filtrage des périodes inférieures à 3,2 jours.

Nombre d'observations :

- Dans la table F.11 et la suivante, on trouve 165 éléments moyens qui constituent 990 observations. Le premier point moyen est donné au 23 septembre 1986 (Jour julien CNES 13414), le dernier au 25 novembre 2001 (Jour julien CNES 18956),
- l'échantillonnage des observations est en général de 24 jours (malgré un trou d'environ 1400 jours consécutifs).

TAB. F.11 – Éléments moyens «observés» de AJISAI.
(à $0^h 0^{min} 0^s$ pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 13414 | 7866.954524 | 9.570399e-04 | 8.727876e-01 | 2.210287e+00 | 1.266236e-01 | 3.324395e+00 |
| 13438 | 7866.953858 | 1.610548e-03 | 8.728479e-01 | 9.225379e-01 | 9.046795e-01 | 1.400814e+00 |
| 13462 | 7866.953247 | 1.861112e-03 | 8.728613e-01 | 5.918130e+00 | 1.556953e+00 | 5.885694e+00 |
| 13486 | 7866.952706 | 1.626618e-03 | 8.728334e-01 | 4.630450e+00 | 2.205722e+00 | 4.091463e+00 |
| 13534 | 7866.951295 | 3.901054e-04 | 8.728155e-01 | 2.055090e+00 | 4.777475e+00 | 5.513783e+00 |
| 13558 | 7866.950723 | 1.029705e-03 | 8.728379e-01 | 7.673936e-01 | 2.092957e-01 | 2.654147e+00 |
| 13582 | 7866.950137 | 1.668214e-03 | 8.728690e-01 | 5.762955e+00 | 9.675632e-01 | 7.510418e-01 |
| 13606 | 7866.949554 | 1.877526e-03 | 8.728080e-01 | 4.475226e+00 | 1.626813e+00 | 5.230854e+00 |
| 13630 | 7866.948728 | 1.580975e-03 | 8.728045e-01 | 3.187560e+00 | 2.290780e+00 | 3.423102e+00 |
| 13654 | 7866.947959 | 8.950116e-04 | 8.727961e-01 | 1.899830e+00 | 3.091567e+00 | 1.479180e+00 |
| 13901 | 7866.941255 | 1.782022e-03 | 8.728280e-01 | 1.213861e+00 | 1.955641e+00 | 4.733076e+00 |
| 15260 | 7866.823183 | 1.181325e-03 | 8.728096e-01 | 3.695000e+00 | 3.660485e-01 | 4.844915e+00 |
| 15284 | 7866.820051 | 1.752735e-03 | 8.727594e-01 | 2.407216e+00 | 1.093490e+00 | 3.019547e+00 |
| 15308 | 7866.817544 | 1.862223e-03 | 8.728319e-01 | 1.119416e+00 | 1.746402e+00 | 1.269798e+00 |
| 15332 | 7866.815760 | 1.480876e-03 | 8.728565e-01 | 6.114869e+00 | 2.415617e+00 | 5.787035e+00 |
| 15356 | 7866.813443 | 7.566210e-04 | 8.728406e-01 | 4.827167e+00 | 3.279958e+00 | 3.826631e+00 |
| 15380 | 7866.810617 | 4.926289e-04 | 8.727888e-01 | 3.539348e+00 | 5.565034e+00 | 4.471110e-01 |
| 15404 | 7866.807389 | 1.239041e-03 | 8.728074e-01 | 2.251599e+00 | 4.542719e-01 | 4.464331e+00 |
| 15428 | 7866.804954 | 1.772217e-03 | 8.728225e-01 | 9.637466e-01 | 1.156012e+00 | 2.670180e+00 |
| 15452 | 7866.803033 | 1.849591e-03 | 8.728559e-01 | 5.959205e+00 | 1.806272e+00 | 9.276679e-01 |
| 15476 | 7866.801388 | 1.434526e-03 | 8.728362e-01 | 4.671406e+00 | 2.490658e+00 | 5.435087e+00 |
| 15500 | 7866.799892 | 6.933502e-04 | 8.727874e-01 | 3.383661e+00 | 3.440460e+00 | 3.394729e+00 |
| 15524 | 7866.799119 | 5.848789e-04 | 8.728196e-01 | 2.095871e+00 | 5.757851e+00 | 6.270734e+00 |
| 15548 | 7866.798734 | 1.330448e-03 | 8.728368e-01 | 8.081156e-01 | 5.403635e-01 | 4.114941e+00 |
| 15572 | 7866.797865 | 1.805188e-03 | 8.728646e-01 | 5.803545e+00 | 1.233735e+00 | 2.331393e+00 |
| 15596 | 7866.796784 | 1.811166e-03 | 8.727899e-01 | 4.515753e+00 | 1.879361e+00 | 5.961782e-01 |
| 15620 | 7866.795778 | 1.350433e-03 | 8.728099e-01 | 3.227938e+00 | 2.560388e+00 | 5.109397e+00 |
| 15644 | 7866.794617 | 6.059355e-04 | 8.727872e-01 | 1.940112e+00 | 3.559804e+00 | 3.021628e+00 |
| 15668 | 7866.793361 | 6.392626e-04 | 8.728635e-01 | 6.523474e-01 | 5.917965e+00 | 5.858373e+00 |
| 15692 | 7866.792018 | 1.392831e-03 | 8.728541e-01 | 5.647777e+00 | 6.080422e-01 | 3.796931e+00 |
| 15716 | 7866.790618 | 1.844308e-03 | 8.727927e-01 | 4.360051e+00 | 1.294454e+00 | 2.022951e+00 |
| 15740 | 7866.789711 | 1.804785e-03 | 8.727796e-01 | 3.072195e+00 | 1.948750e+00 | 2.822416e-01 |
| 15764 | 7866.788646 | 1.287831e-03 | 8.727985e-01 | 1.784413e+00 | 2.652585e+00 | 4.775148e+00 |
| 15788 | 7866.787360 | 5.326976e-04 | 8.728600e-01 | 4.965750e-01 | 3.776426e+00 | 2.565200e+00 |
| 15812 | 7866.786314 | 7.239031e-04 | 8.728464e-01 | 5.492041e+00 | 6.085545e+00 | 5.453064e+00 |
| 15836 | 7866.785390 | 1.448388e-03 | 8.728208e-01 | 4.204236e+00 | 6.955693e-01 | 3.474362e+00 |
| 15860 | 7866.784396 | 1.838584e-03 | 8.727579e-01 | 2.916438e+00 | 1.364383e+00 | 1.720802e+00 |
| 15884 | 7866.783764 | 1.754382e-03 | 8.728151e-01 | 1.628629e+00 | 2.010620e+00 | 6.273375e+00 |
| 15908 | 7866.783340 | 1.216675e-03 | 8.728444e-01 | 3.408495e-01 | 2.721416e+00 | 4.477864e+00 |
| 15932 | 7866.782613 | 4.842089e-04 | 8.728583e-01 | 5.336312e+00 | 3.974604e+00 | 2.139893e+00 |
| 15956 | 7866.781755 | 8.120825e-04 | 8.727990e-01 | 4.048477e+00 | 6.188489e+00 | 5.125295e+00 |
| 15980 | 7866.781018 | 1.529860e-03 | 8.728026e-01 | 2.760687e+00 | 7.654853e-01 | 3.181467e+00 |
| 16004 | 7866.780217 | 1.875039e-03 | 8.727958e-01 | 1.472814e+00 | 1.439015e+00 | 1.424822e+00 |
| 16028 | 7866.779681 | 1.719603e-03 | 8.728545e-01 | 1.850554e-01 | 2.091809e+00 | 5.971741e+00 |
| 16052 | 7866.779061 | 1.124586e-03 | 8.728529e-01 | 5.180452e+00 | 2.817266e+00 | 4.162945e+00 |
| 16076 | 7866.778060 | 4.151457e-04 | 8.727918e-01 | 3.892699e+00 | 4.251604e+00 | 1.645828e+00 |
| 16100 | 7866.777283 | 8.823718e-04 | 8.728189e-01 | 2.604878e+00 | 4.002628e-02 | 4.775400e+00 |
| 16124 | 7866.776526 | 1.568971e-03 | 8.728151e-01 | 1.317089e+00 | 8.385636e-01 | 2.894742e+00 |
| 16148 | 7866.775665 | 1.874776e-03 | 8.728656e-01 | 2.927747e-02 | 1.498916e+00 | 1.152358e+00 |
| 16172 | 7866.774788 | 1.687586e-03 | 8.728179e-01 | 5.024667e+00 | 2.155941e+00 | 5.696687e+00 |
| 16196 | 7866.773880 | 1.063838e-03 | 8.728175e-01 | 3.736856e+00 | 2.915386e+00 | 3.855987e+00 |
| 16220 | 7866.773062 | 4.169099e-04 | 8.727855e-01 | 2.449038e+00 | 4.570449e+00 | 1.120381e+00 |
| 16244 | 7866.772876 | 9.846440e-04 | 8.728486e-01 | 1.161266e+00 | 1.387104e-01 | 4.471511e+00 |
| 16268 | 7866.772484 | 1.634811e-03 | 8.728564e-01 | 6.156664e+00 | 9.186725e-01 | 2.610649e+00 |
| 16292 | 7866.771678 | 1.870682e-03 | 8.728135e-01 | 4.868927e+00 | 1.575069e+00 | 8.734558e-01 |
| 16316 | 7866.771100 | 1.618806e-03 | 8.727867e-01 | 3.581049e+00 | 2.228544e+00 | 5.423315e+00 |
| 16340 | 7866.770572 | 9.671471e-04 | 8.727926e-01 | 2.293249e+00 | 2.995643e+00 | 3.576351e+00 |
| 16364 | 7866.769864 | 3.964993e-04 | 8.728392e-01 | 1.005378e+00 | 4.856545e+00 | 6.359358e-01 |
| 16388 | 7866.769069 | 1.050646e-03 | 8.728576e-01 | 6.000827e+00 | 2.269982e-01 | 4.185566e+00 |
| 16412 | 7866.768369 | 1.684684e-03 | 8.728338e-01 | 4.713036e+00 | 9.787465e-01 | 2.354311e+00 |
| 16436 | 7866.767626 | 1.890338e-03 | 8.727581e-01 | 3.425235e+00 | 1.637155e+00 | 6.171376e-01 |
| 16460 | 7866.767105 | 1.586735e-03 | 8.728097e-01 | 2.137408e+00 | 2.304865e+00 | 5.154229e+00 |
| 16484 | 7866.766521 | 8.906693e-04 | 8.728263e-01 | 8.495818e-01 | 3.118646e+00 | 3.261880e+00 |
| 16508 | 7866.765978 | 4.287485e-04 | 8.728700e-01 | 5.845013e+00 | 5.191756e+00 | 1.100162e-01 |
| 16532 | 7866.765420 | 1.130925e-03 | 8.728186e-01 | 4.557182e+00 | 3.339916e-01 | 3.889538e+00 |
| 16556 | 7866.764639 | 1.710318e-03 | 8.727993e-01 | 3.269383e+00 | 1.056812e+00 | 2.088837e+00 |
| 16580 | 7866.763891 | 1.855377e-03 | 8.727840e-01 | 1.981515e+00 | 1.703675e+00 | 3.648005e-01 |
| 16604 | 7866.763687 | 1.519484e-03 | 8.728420e-01 | 6.937416e-01 | 2.367891e+00 | 4.906226e+00 |
| 16628 | 7866.763293 | 8.162844e-04 | 8.728595e-01 | 5.689136e+00 | 3.214985e+00 | 2.981476e+00 |
| 16652 | 7866.762360 | 4.797644e-04 | 8.728049e-01 | 4.401376e+00 | 5.412464e+00 | 5.989928e+00 |
| 16676 | 7866.761726 | 1.218006e-03 | 8.728176e-01 | 3.113522e+00 | 4.042814e-01 | 3.638449e+00 |
| 16700 | 7866.761220 | 1.770676e-03 | 8.727985e-01 | 1.825714e+00 | 1.125367e+00 | 1.840819e+00 |
| 16724 | 7866.760702 | 1.855739e-03 | 8.728530e-01 | 5.378622e-01 | 1.779544e+00 | 1.102420e-01 |
| 16748 | 7866.760195 | 1.450708e-03 | 8.728350e-01 | 5.533260e+00 | 2.454366e+00 | 4.642003e+00 |
| 16772 | 7866.759552 | 7.148344e-04 | 8.728273e-01 | 4.245456e+00 | 3.349264e+00 | 2.670910e+00 |
| 16796 | 7866.758859 | 5.259936e-04 | 8.727839e-01 | 2.957637e+00 | 5.678776e+00 | 5.549124e+00 |
| 16820 | 7866.758545 | 1.276086e-03 | 8.728408e-01 | 1.669857e+00 | 4.985353e-01 | 3.370702e+00 |
| 16868 | 7866.757202 | 1.836762e-03 | 8.728329e-01 | 5.377454e+00 | 1.839513e+00 | 6.161674e+00 |
| 16892 | 7866.756516 | 1.400747e-03 | 8.728018e-01 | 4.089567e+00 | 2.526872e+00 | 4.399478e+00 |
| 16916 | 7866.755735 | 6.542993e-04 | 8.727877e-01 | 2.801763e+00 | 3.511588e+00 | 2.340133e+00 |
| 16940 | 7866.755227 | 6.206369e-04 | 8.728257e-01 | 1.513895e+00 | 5.844842e+00 | 5.215976e+00 |
| 16964 | 7866.755055 | 1.366029e-03 | 8.728561e-01 | 2.261403e-01 | 5.805259e-01 | 3.122457e+00 |
| 16988 | 7866.754496 | 1.819083e-03 | 8.728425e-01 | 5.221543e+00 | 1.269606e+00 | 1.358799e+00 |
| 17012 | 7866.753787 | 1.795614e-03 | 8.727664e-01 | 3.933733e+00 | 1.916289e+00 | 5.921395e+00 |
| 17036 | 7866.753329 | 1.311362e-03 | 8.728050e-01 | 2.645883e+00 | 2.603655e+00 | 4.160566e+00 |
| 17060 | 7866.752736 | 5.651125e-04 | 8.728065e-01 | 1.358031e+00 | 3.655046e+00 | 2.035673e+00 |
| 17084 | 7866.752084 | 6.795671e-04 | 8.728723e-01 | 7.023941e-02 | 5.999177e+00 | 4.901142e+00 |
| 17108 | 7866.751472 | 1.424730e-03 | 8.728315e-01 | 5.065614e+00 | 6.480637e-01 | 2.895581e+00 |
| 17132 | 7866.750768 | 1.853655e-03 | 8.728012e-01 | 3.777817e+00 | 1.328893e+00 | 1.141764e+00 |
| 17156 | 7866.750082 | 1.790647e-03 | 8.727763e-01 | 2.489948e+00 | 1.983004e+00 | 5.698665e+00 |
| 17180 | 7866.749740 | 1.253585e-03 | 8.728314e-01 | 1.202161e+00 | 2.694182e+00 | 3.914989e+00 |
| 17204 | 7866.749376 | 5.015558e-04 | 8.728620e-01 | 6.197526e+00 | 3.886823e+00 | 1.649753e+00 |

TAB. F.12 – Éléments moyens «observés» de AJISAI (suite).
(à 0^h 0^{min} 0^s pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 17228 | 7866.748780 | 7.692561e - 04 | 8.728187e - 01 | 4.909758e + 00 | 6.153447e + 00 | 4.593843e + 00 |
| 17252 | 7866.748129 | 1.483466e - 03 | 8.728207e - 01 | 3.621878e + 00 | 7.357710e - 01 | 2.656609e + 00 |
| 17276 | 7866.747357 | 1.847590e - 03 | 8.727822e - 01 | 2.334057e + 00 | 1.400839e + 00 | 9.199828e - 01 |
| 17300 | 7866.746925 | 1.734119e - 03 | 8.728378e - 01 | 1.046197e + 00 | 2.046963e + 00 | 5.485775e + 00 |
| 17324 | 7866.746639 | 1.176528e - 03 | 8.728427e - 01 | 6.041597e + 00 | 2.764725e + 00 | 3.696335e + 00 |
| 17348 | 7866.745840 | 4.575753e - 04 | 8.728330e - 01 | 4.753808e + 00 | 4.096506e + 00 | 1.293154e + 00 |
| 17372 | 7866.745001 | 8.506022e - 04 | 8.727870e - 01 | 3.465974e + 00 | 6.245116e + 00 | 4.357178e + 00 |
| 17396 | 7866.744705 | 1.555681e - 03 | 8.728313e - 01 | 2.178174e + 00 | 8.007718e - 01 | 2.447832e + 00 |
| 17420 | 7866.744254 | 1.878558e - 03 | 8.728337e - 01 | 8.903095e - 01 | 1.471708e + 00 | 7.064024e - 01 |
| 17444 | 7866.743544 | 1.697279e - 03 | 8.728496e - 01 | 5.885718e + 00 | 2.126793e + 00 | 5.263790e + 00 |
| 17468 | 7866.742852 | 1.083020e - 03 | 8.728130e - 01 | 4.597844e + 00 | 2.864039e + 00 | 3.456439e + 00 |
| 17492 | 7866.742133 | 3.978168e - 04 | 8.727894e - 01 | 3.310045e + 00 | 4.409247e + 00 | 8.414499e - 01 |
| 17516 | 7866.741526 | 9.237775e - 04 | 8.728168e - 01 | 2.022182e + 00 | 9.868103e - 02 | 4.082899e + 00 |
| 17540 | 7866.741024 | 1.593612e - 03 | 8.728510e - 01 | 7.344095e - 01 | 8.776009e - 01 | 2.234397e + 00 |
| 17564 | 7866.740258 | 1.872803e - 03 | 8.728548e - 01 | 5.729795e + 00 | 1.533079e + 00 | 5.094109e - 01 |
| 17588 | 7866.739425 | 1.660486e - 03 | 8.727759e - 01 | 4.441973e + 00 | 2.188706e + 00 | 5.068052e + 00 |
| 17612 | 7866.738627 | 1.020950e - 03 | 8.728029e - 01 | 3.154099e + 00 | 2.957484e + 00 | 3.230940e + 00 |
| 17636 | 7866.737530 | 4.093977e - 04 | 8.727864e - 01 | 1.866228e + 00 | 4.723001e + 00 | 3.974328e - 01 |
| 17660 | 7866.736774 | 1.024388e - 03 | 8.728657e - 01 | 5.784163e - 01 | 1.907755e - 01 | 3.861666e + 00 |
| 17684 | 7866.736273 | 1.658287e - 03 | 8.728429e - 01 | 5.573808e + 00 | 9.566786e - 01 | 2.027712e + 00 |
| 17708 | 7866.735413 | 1.867216e - 03 | 8.728009e - 01 | 4.286022e + 00 | 1.611947e + 00 | 3.048429e - 01 |
| 17732 | 7866.734590 | 1.587225e - 03 | 8.727742e - 01 | 2.998146e + 00 | 2.267888e + 00 | 4.865427e + 00 |
| 17756 | 7866.733988 | 9.193652e - 04 | 8.728166e - 01 | 1.710337e + 00 | 3.050313e + 00 | 3.016176e + 00 |
| 17780 | 7866.733137 | 4.024950e - 04 | 8.728540e - 01 | 4.224813e - 01 | 5.028608e + 00 | 6.254323e + 00 |
| 17804 | 7866.732012 | 1.089076e - 03 | 8.728383e - 01 | 5.417901e + 00 | 2.789682e - 01 | 3.654090e + 00 |
| 17828 | 7866.730730 | 1.702159e - 03 | 8.728225e - 01 | 4.130017e + 00 | 1.016578e + 00 | 1.850742e + 00 |
| 17852 | 7866.729269 | 1.881646e - 03 | 8.727733e - 01 | 2.842199e + 00 | 1.671910e + 00 | 1.302153e - 01 |
| 17876 | 7866.728083 | 1.555315e - 03 | 8.728254e - 01 | 1.554329e + 00 | 2.341585e + 00 | 4.679189e + 00 |
| 17900 | 7866.727150 | 8.462776e - 04 | 8.728449e - 01 | 2.665355e - 01 | 3.176642e + 00 | 2.779357e + 00 |
| 17924 | 7866.726050 | 4.511035e - 04 | 8.728444e - 01 | 5.261931e + 00 | 5.339942e + 00 | 5.834793e + 00 |
| 17948 | 7866.724790 | 1.173983e - 03 | 8.727885e - 01 | 3.974067e + 00 | 3.837111e - 01 | 3.444365e + 00 |
| 17972 | 7866.723523 | 1.731986e - 03 | 8.728203e - 01 | 2.686240e + 00 | 1.096630e + 00 | 1.668341e + 00 |
| 17996 | 7866.723291 | 1.845530e - 03 | 8.728125e - 01 | 1.398340e + 00 | 1.741624e + 00 | 6.243933e + 00 |
| 18020 | 7866.721378 | 1.483664e - 03 | 8.728569e - 01 | 1.105518e - 01 | 2.407199e + 00 | 4.515687e + 00 |
| 18044 | 7866.720174 | 7.691378e - 04 | 8.728277e - 01 | 5.105888e + 00 | 3.277543e + 00 | 2.583120e + 00 |
| 18068 | 7866.718586 | 5.056023e - 04 | 8.727901e - 01 | 3.818092e + 00 | 5.537010e + 00 | 5.545317e + 00 |
| 18092 | 7866.717438 | 1.253347e - 03 | 8.728121e - 01 | 2.530228e + 00 | 4.485839e - 01 | 3.289978e + 00 |
| 18116 | 7866.716676 | 1.784428e - 03 | 8.728391e - 01 | 1.242425e + 00 | 1.161211e + 00 | 1.516556e + 00 |
| 18140 | 7866.715404 | 1.843106e - 03 | 8.728633e - 01 | 6.237776e + 00 | 1.815256e + 00 | 6.085066e + 00 |
| 18164 | 7866.714028 | 1.414003e - 03 | 8.727958e - 01 | 4.949961e + 00 | 2.494944e + 00 | 4.345276e + 00 |
| 18188 | 7866.712558 | 6.693014e - 04 | 8.728040e - 01 | 3.662072e + 00 | 3.425874e + 00 | 2.355144e + 00 |
| 18212 | 7866.710809 | 5.631478e - 04 | 8.727729e - 01 | 2.374208e + 00 | 5.787361e + 00 | 5.218353e + 00 |
| 18236 | 7866.708699 | 1.312485e - 03 | 8.728584e - 01 | 1.086372e + 00 | 5.444612e - 01 | 3.120102e + 00 |
| 18260 | 7866.707101 | 1.797345e - 03 | 8.728521e - 01 | 6.081758e + 00 | 1.229114e + 00 | 1.377640e + 00 |
| 18284 | 7866.705492 | 1.818243e - 03 | 8.728074e - 01 | 4.793973e + 00 | 1.874438e + 00 | 5.958348e + 00 |
| 18308 | 7866.703919 | 1.360513e - 03 | 8.727724e - 01 | 3.506062e + 00 | 2.563298e + 00 | 4.213624e + 00 |
| 18332 | 7866.701761 | 6.096444e - 04 | 8.727972e - 01 | 2.218221e + 00 | 3.586655e + 00 | 2.134742e + 00 |
| 18356 | 7866.699136 | 6.544276e - 04 | 8.728392e - 01 | 9.303154e - 01 | 5.934846e + 00 | 5.015051e + 00 |
| 18380 | 7866.696626 | 1.398303e - 03 | 8.728550e - 01 | 5.925732e + 00 | 6.244477e - 01 | 2.988008e + 00 |
| 18404 | 7866.694769 | 1.827304e - 03 | 8.728293e - 01 | 4.637868e + 00 | 1.307468e + 00 | 1.251808e + 00 |
| 18428 | 7866.692874 | 1.773842e - 03 | 8.727690e - 01 | 3.350040e + 00 | 1.954015e + 00 | 5.836262e + 00 |
| 18452 | 7866.691532 | 1.265431e - 03 | 8.728131e - 01 | 2.062165e + 00 | 2.646294e + 00 | 4.092597e + 00 |
| 18476 | 7866.689979 | 5.203558e - 04 | 8.728379e - 01 | 7.743369e - 01 | 3.757642e + 00 | 1.929804e + 00 |
| 18500 | 7866.688470 | 7.168783e - 04 | 8.728603e - 01 | 5.769715e + 00 | 6.082659e + 00 | 4.836866e + 00 |
| 18524 | 7866.686645 | 1.450868e - 03 | 8.727986e - 01 | 4.481840e + 00 | 6.920881e - 01 | 2.894168e + 00 |
| 18548 | 7866.684538 | 1.853976e - 03 | 8.728156e - 01 | 3.193984e + 00 | 1.365932e + 00 | 1.171028e + 00 |
| 18572 | 7866.682183 | 1.765689e - 03 | 8.727912e - 01 | 1.906082e + 00 | 2.019088e + 00 | 5.752760e + 00 |
| 18596 | 7866.680058 | 1.209215e - 03 | 8.728591e - 01 | 6.182633e - 01 | 2.737143e + 00 | 3.986722e + 00 |
| 18620 | 7866.678395 | 4.666816e - 04 | 8.728436e - 01 | 5.613603e + 00 | 4.015900e + 00 | 1.660521e + 00 |
| 18644 | 7866.676548 | 8.153102e - 04 | 8.727927e - 01 | 4.325792e + 00 | 6.226540e + 00 | 4.686496e + 00 |
| 18668 | 7866.674994 | 1.518043e - 03 | 8.728088e - 01 | 3.037892e + 00 | 7.807719e - 01 | 2.803642e + 00 |
| 18692 | 7866.673649 | 1.853408e - 03 | 8.728171e - 01 | 1.750049e + 00 | 1.441313e + 00 | 1.097759e + 00 |
| 18716 | 7866.671656 | 1.707347e - 03 | 8.728662e - 01 | 4.621613e - 01 | 2.087392e + 00 | 5.689946e + 00 |
| 18740 | 7866.669189 | 1.128029e - 03 | 8.728226e - 01 | 5.457534e + 00 | 2.811462e + 00 | 3.921564e + 00 |
| 18764 | 7866.667370 | 4.275412e - 04 | 8.728097e - 01 | 4.169655e + 00 | 4.245635e + 00 | 1.444182e + 00 |
| 18788 | 7866.665893 | 8.924860e - 04 | 8.727700e - 01 | 2.881792e + 00 | 2.770428e - 02 | 4.619825e + 00 |
| 18812 | 7866.664772 | 1.582442e - 03 | 8.728448e - 01 | 1.593938e + 00 | 8.419515e - 01 | 2.763640e + 00 |
| 18836 | 7866.663929 | 1.878466e - 03 | 8.728575e - 01 | 3.061015e - 01 | 1.509240e + 00 | 1.054230e + 00 |
| 18860 | 7866.662671 | 1.669325e - 03 | 8.728278e - 01 | 5.301494e + 00 | 2.167010e + 00 | 5.637751e + 00 |
| 18884 | 7866.661144 | 1.035546e - 03 | 8.727769e - 01 | 4.013565e + 00 | 2.918135e + 00 | 3.845930e + 00 |
| 18908 | 7866.658757 | 3.872284e - 04 | 8.727871e - 01 | 2.725702e + 00 | 4.596027e + 00 | 1.127932e + 00 |
| 18932 | 7866.655581 | 9.689205e - 04 | 8.728156e - 01 | 1.437763e + 00 | 1.594597e - 01 | 4.525542e + 00 |
| 18956 | 7866.652714 | 1.618469e - 03 | 8.728666e - 01 | 1.499773e - 01 | 9.204617e - 01 | 2.725973e + 00 |

TAB. F.13 – Eléments moyens «observés» de TOPEX/Poséidon (T/P).
(à 0^h 1^{min} 0^s pour chaque date)

| Date | a (km) | e | i (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | M (rad) |
|-------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|
| 16137 | 7714.433768 | 9.496475e-05 | 1.152641e+00 | 2.464040e+00 | 1.705910e+00 | 3.866308e+00 |
| 16168 | 7714.430031 | 9.117749e-05 | 1.152606e+00 | 1.340141e+00 | 1.644260e+00 | 4.238386e+00 |
| 16199 | 7714.427469 | 1.099520e-04 | 1.152684e+00 | 2.163787e-01 | 1.644621e+00 | 4.549398e+00 |
| 16230 | 7714.434083 | 1.167615e-04 | 1.152657e+00 | 5.375704e+00 | 1.737110e+00 | 4.767112e+00 |
| 16261 | 7714.432125 | 1.069790e-04 | 1.152613e+00 | 4.251959e+00 | 1.788514e+00 | 5.025059e+00 |
| 16292 | 7714.429051 | 1.126327e-04 | 1.152633e+00 | 3.128104e+00 | 1.743881e+00 | 5.380968e+00 |
| 16323 | 7714.427608 | 1.336220e-04 | 1.152608e+00 | 2.004339e+00 | 1.704030e+00 | 5.732479e+00 |
| 16354 | 7714.435279 | 1.336922e-04 | 1.152658e+00 | 8.804541e-01 | 1.695209e+00 | 6.053089e+00 |
| 16385 | 7714.433750 | 1.183158e-04 | 1.152671e+00 | 6.039879e+00 | 1.603146e+00 | 1.704362e-01 |
| 16416 | 7714.432091 | 1.228884e-04 | 1.152653e+00 | 4.916035e+00 | 1.451931e+00 | 6.313495e-01 |
| 16447 | 7714.431373 | 1.353601e-04 | 1.152601e+00 | 3.792265e+00 | 1.375680e+00 | 1.018010e+00 |
| 16478 | 7714.432260 | 1.192616e-04 | 1.152643e+00 | 2.668463e+00 | 1.282609e+00 | 1.421428e+00 |
| 16509 | 7714.430748 | 1.002999e-04 | 1.152604e+00 | 1.544653e+00 | 1.130312e+00 | 1.883993e+00 |
| 16540 | 7714.428381 | 1.029365e-04 | 1.152699e+00 | 4.208163e-01 | 1.114957e+00 | 2.210823e+00 |
| 16571 | 7714.427520 | 1.009678e-04 | 1.152643e+00 | 5.580203e+00 | 1.218912e+00 | 2.418822e+00 |
| 16602 | 7714.434913 | 7.939669e-05 | 1.152650e+00 | 4.456417e+00 | 1.295150e+00 | 2.651737e+00 |
| 16633 | 7714.432101 | 6.396828e-05 | 1.152609e+00 | 3.332609e+00 | 1.369997e+00 | 2.886481e+00 |
| 16664 | 7714.430315 | 7.599920e-05 | 1.152637e+00 | 2.208858e+00 | 1.519500e+00 | 3.047575e+00 |
| 16695 | 7714.430606 | 8.484120e-05 | 1.152640e+00 | 1.084995e+00 | 1.691354e+00 | 3.186859e+00 |
| 16726 | 7714.432079 | 7.301682e-05 | 1.152690e+00 | 6.244414e+00 | 1.820223e+00 | 3.368190e+00 |
| 16819 | 7714.438049 | 9.381305e-05 | 1.152612e+00 | 2.872998e+00 | 1.638932e+00 | 4.482751e+00 |
| 16850 | 7714.433932 | 7.597009e-05 | 1.152634e+00 | 1.749264e+00 | 1.610523e+00 | 4.818887e+00 |
| 16881 | 7714.430531 | 7.928651e-05 | 1.152681e+00 | 6.253663e-01 | 1.526584e+00 | 5.212923e+00 |
| 16912 | 7714.430839 | 9.698287e-05 | 1.152656e+00 | 5.784827e+00 | 1.602942e+00 | 5.446716e+00 |
| 16943 | 7714.431338 | 9.679139e-05 | 1.152664e+00 | 4.660975e+00 | 1.748759e+00 | 5.611297e+00 |
| 16974 | 7714.430941 | 8.705318e-05 | 1.152606e+00 | 3.537225e+00 | 1.846490e+00 | 5.823720e+00 |
| 17005 | 7714.428025 | 1.020061e-04 | 1.152641e+00 | 2.413442e+00 | 1.834273e+00 | 6.147586e+00 |
| 17036 | 7714.430270 | 1.248520e-04 | 1.152642e+00 | 1.289654e+00 | 1.836489e+00 | 1.734916e-01 |
| 17067 | 7714.431202 | 1.226360e-04 | 1.152691e+00 | 1.658222e-01 | 1.869678e+00 | 4.508306e-01 |
| 17098 | 7714.430796 | 1.120709e-04 | 1.152636e+00 | 5.325247e+00 | 1.811812e+00 | 8.184767e-01 |
| 17129 | 7714.430802 | 1.255835e-04 | 1.152667e+00 | 4.201402e+00 | 1.665420e+00 | 1.275964e+00 |
| 17160 | 7714.432219 | 1.388618e-04 | 1.152587e+00 | 3.077640e+00 | 1.569192e+00 | 1.682752e+00 |
| 17191 | 7714.432676 | 1.222637e-04 | 1.152665e+00 | 1.953900e+00 | 1.467262e+00 | 2.094441e+00 |
| 17222 | 7714.431641 | 1.117898e-04 | 1.152647e+00 | 8.300282e-01 | 1.315361e+00 | 2.556011e+00 |
| 17253 | 7714.431969 | 1.233196e-04 | 1.152684e+00 | 5.989483e+00 | 1.269469e+00 | 2.911886e+00 |
| 17284 | 7714.432442 | 1.198519e-04 | 1.152649e+00 | 4.865623e+00 | 1.315570e+00 | 3.175817e+00 |
| 17315 | 7714.433736 | 9.615416e-05 | 1.152630e+00 | 3.741864e+00 | 1.325521e+00 | 3.475302e+00 |
| 17346 | 7714.430183 | 8.668040e-05 | 1.152615e+00 | 2.618070e+00 | 1.336351e+00 | 3.774894e+00 |
| 17377 | 7714.430268 | 9.859527e-05 | 1.152662e+00 | 1.494324e+00 | 1.437483e+00 | 3.984821e+00 |
| 17408 | 7714.431197 | 9.550798e-05 | 1.152669e+00 | 3.704568e-01 | 1.573836e+00 | 4.159122e+00 |
| 17439 | 7714.432054 | 7.796583e-05 | 1.152662e+00 | 5.529928e+00 | 1.627425e+00 | 4.415095e+00 |
| 17470 | 7714.428640 | 7.990471e-05 | 1.152648e+00 | 4.406027e+00 | 1.532117e+00 | 4.821449e+00 |
| 17501 | 7714.429986 | 9.702519e-05 | 1.152599e+00 | 3.282297e+00 | 1.509157e+00 | 5.155593e+00 |
| 17532 | 7714.431782 | 8.892627e-05 | 1.152656e+00 | 2.158499e+00 | 1.495508e+00 | 5.480254e+00 |
| 17563 | 7714.434049 | 7.128373e-05 | 1.152639e+00 | 1.034704e+00 | 1.400331e+00 | 5.884667e+00 |
| 17594 | 7714.431895 | 7.868486e-05 | 1.152691e+00 | 6.194083e+00 | 1.353095e+00 | 6.241454e+00 |
| 17625 | 7714.430922 | 9.012649e-05 | 1.152635e+00 | 5.070287e+00 | 1.491065e+00 | 1.305403e-01 |
| 17656 | 7714.432417 | 7.787768e-05 | 1.152642e+00 | 3.946450e+00 | 1.657570e+00 | 2.744965e-01 |
| 17687 | 7714.431064 | 6.784162e-05 | 1.152601e+00 | 2.822686e+00 | 1.791805e+00 | 4.501774e-01 |
| 17718 | 7714.429809 | 8.825428e-05 | 1.152661e+00 | 1.698901e+00 | 1.839299e+00 | 7.141688e-01 |
| 17749 | 7714.431108 | 1.091874e-04 | 1.152645e+00 | 5.750821e-01 | 1.915655e+00 | 9.483928e-01 |
| 17780 | 7714.432911 | 1.058729e-04 | 1.152692e+00 | 5.734504e+00 | 2.008816e+00 | 1.165153e+00 |
| 17811 | 7714.429411 | 1.040639e-04 | 1.152612e+00 | 4.610630e+00 | 1.948627e+00 | 1.535609e+00 |
| 17842 | 7714.429372 | 1.253767e-04 | 1.152630e+00 | 3.486853e+00 | 1.785488e+00 | 2.010437e+00 |
| 17873 | 7714.435415 | 1.364586e-04 | 1.152617e+00 | 2.363034e+00 | 1.694125e+00 | 2.413177e+00 |
| 17904 | 7714.432517 | 1.185016e-04 | 1.152652e+00 | 1.239268e+00 | 1.593118e+00 | 2.823382e+00 |
| 17935 | 7714.429371 | 1.168937e-04 | 1.152676e+00 | 1.154193e-01 | 1.432194e+00 | 3.294589e+00 |
| 17966 | 7714.431034 | 1.329222e-04 | 1.152646e+00 | 5.274847e+00 | 1.368842e+00 | 3.668337e+00 |
| 17997 | 7714.430689 | 1.250521e-04 | 1.152620e+00 | 4.150955e+00 | 1.382971e+00 | 3.965110e+00 |
| 18028 | 7714.430990 | 1.001564e-04 | 1.152619e+00 | 3.027201e+00 | 1.349667e+00 | 4.308767e+00 |
| 18059 | 7714.436155 | 9.850574e-05 | 1.152630e+00 | 1.903350e+00 | 1.358598e+00 | 4.611589e+00 |
| 18090 | 7714.431138 | 1.094279e-04 | 1.152647e+00 | 7.795907e-01 | 1.467435e+00 | 4.811531e+00 |
| 18121 | 7714.430948 | 1.001306e-04 | 1.152691e+00 | 5.938934e+00 | 1.588181e+00 | 5.001238e+00 |
| 18152 | 7714.429210 | 8.198554e-05 | 1.152598e+00 | 4.815139e+00 | 1.600984e+00 | 5.298765e+00 |
| 18279 | 7714.434874 | 7.894754e-05 | 1.152650e+00 | 2.110870e-01 | 1.305039e+00 | 3.220544e+00 |
| 18310 | 7714.430582 | 9.249995e-05 | 1.152668e+00 | 5.370491e+00 | 1.292581e+00 | 3.542095e+00 |
| 18341 | 7714.428715 | 9.273313e-05 | 1.152595e+00 | 4.246597e+00 | 1.382584e+00 | 3.763746e+00 |
| 18372 | 7714.429782 | 6.854849e-05 | 1.152625e+00 | 3.122818e+00 | 1.468370e+00 | 3.990679e+00 |
| 18403 | 7714.430742 | 6.246354e-05 | 1.152611e+00 | 1.998954e+00 | 1.568512e+00 | 4.200038e+00 |
| 18434 | 7714.428876 | 8.484056e-05 | 1.152654e+00 | 8.751841e-01 | 1.714926e+00 | 4.365053e+00 |
| 18465 | 7714.433760 | 9.481430e-05 | 1.152673e+00 | 6.034517e+00 | 1.896538e+00 | 4.493776e+00 |
| 18496 | 7714.432458 | 8.876127e-05 | 1.152617e+00 | 4.910732e+00 | 2.040543e+00 | 4.658964e+00 |
| 18527 | 7714.425350 | 9.743665e-05 | 1.152610e+00 | 3.786838e+00 | 1.942082e+00 | 5.069434e+00 |
| 18558 | 7714.431820 | 1.249163e-04 | 1.152612e+00 | 2.663071e+00 | 1.835626e+00 | 5.486072e+00 |
| 18620 | 7714.428720 | 1.095199e-04 | 1.152655e+00 | 4.154137e-01 | 1.704087e+00 | 6.239567e+00 |
| 18651 | 7714.435029 | 1.186864e-04 | 1.152675e+00 | 5.574745e+00 | 1.533129e+00 | 4.386469e-01 |
| 18682 | 7714.431668 | 1.357619e-04 | 1.152574e+00 | 4.450937e+00 | 1.484575e+00 | 7.970419e-01 |
| 18713 | 7714.431423 | 1.181651e-04 | 1.152645e+00 | 3.327083e+00 | 1.464464e+00 | 1.127616e+00 |
| 18744 | 7714.424831 | 9.844586e-05 | 1.152581e+00 | 2.203251e+00 | 1.389435e+00 | 1.514791e+00 |
| 18775 | 7714.432597 | 1.09552e-04 | 1.152659e+00 | 1.079428e+00 | 1.397581e+00 | 1.817103e+00 |
| 18806 | 7714.430236 | 1.181542e-04 | 1.152659e+00 | 6.238790e+00 | 1.508531e+00 | 2.016234e+00 |
| 18837 | 7714.432266 | 1.015996e-04 | 1.152640e+00 | 5.114980e+00 | 1.588471e+00 | 2.246833e+00 |
| 18868 | 7714.427281 | 9.156151e-05 | 1.152582e+00 | 3.991121e+00 | 1.566341e+00 | 2.580215e+00 |
| 18899 | 7714.434616 | 1.106091e-04 | 1.152637e+00 | 2.867331e+00 | 1.540381e+00 | 2.918052e+00 |
| 18930 | 7714.431053 | 1.187775e-04 | 1.152590e+00 | 1.743435e+00 | 1.549506e+00 | 3.219121e+00 |
| 18961 | 7714.435662 | 9.635103e-05 | 1.152681e+00 | 6.196658e-01 | 1.490682e+00 | 3.589043e+00 |
| 18992 | 7714.427763 | 9.169945e-05 | 1.152657e+00 | 5.778982e+00 | 1.327852e+00 | 4.061618e+00 |
| 19023 | 7714.424317 | 1.064660e-04 | 1.152597e+00 | 4.655218e+00 | 1.280611e+00 | 4.421536e+00 |
| 19054 | 7714.435123 | 9.650707e-05 | 1.152625e+00 | 3.531325e+00 | 1.303266e+00 | 4.708211e+00 |
| 19085 | 7714.430121 | 6.877341e-05 | 1.152595e+00 | 2.407549e+00 | 1.243379e+00 | 5.078054e+00 |
| 19116 | 7714.427478 | 6.609024e-05 | 1.152641e+00 | 1.283654e+00 | 1.284215e+00 | 5.350698e+00 |

F.6 T/P

Caractéristiques du mouvement de TOPEX/Poséidon (déterminées sur le premier arc filtré) :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 7714,423$ km, $e = 0,88 \cdot 10^{-4}$, $i = 66,04^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = -0.419 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\theta} = -0.911 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\lambda} = 0.931428 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,
- Période de révolution orbitale : 112 minutes (12,8 révolutions par jour), période du périégée : 798 jours, période du nœud : 173 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,97 \cdot 10^{-4}$. Cette valeur est supérieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périégée libre,
- Premières périodes de résonance : 3,307 jour ($m = 13$).

Caractéristiques du filtrage :

- Sur chaque variable, tous les termes du géopotential jusqu'aux degré 35 et ordre 35 d'une amplitude de quelques centimètres, et dont les périodes sont comprises entre 0,001 et 5,2 jours, sont filtrés analytiquement. Cela représente environ 2700 combinaisons (n, m, p, q, r) .
- $|q_{max}|$ pour les développements en excentricité : 2,
- Ecarts-types sur la détermination des éléments moyens ayant servi au calcul des perturbations : $a(8,0 \text{ m})$, $C(5,7 \text{ m})$, $i(0,5 \text{ m})$, $\Omega(1,3 \text{ m})$, $S(5,8 \text{ m})$, $\lambda(5,3 \text{ m})$,
- Filtrage numérique sur des fenêtres de 30 jours, avec filtrage des périodes inférieures à 4 jours.

Nombre d'observations :

- Dans la table F.13, on trouve 91 éléments moyens qui constituent 546 observations. Le premier point moyen est donné au 8 mars 1994 (Jour julien CNES 16137), le dernier au 4 mai 2002 (Jour julien CNES 19116),
- l'échantillonnage des observations est en général de 30 jours.

F.7 CHAMP

Les caractéristiques du mouvement de CHAMP suivantes ont été déterminées au 27 mai 2001 :

- Ordre de grandeur des éléments moyens métriques : $a = 6806,185$ km, ($a = 6790,649$ km au 21 décembre 2001.) $e = 0,4085 \cdot 10^{-2}$, $i = 87,26^\circ$,
- Variation séculaire des angles : $\dot{\Omega} = -0.76 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\omega} = -0.79 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\lambda} = 0.1122 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,

TAB. F.14 – Eléments moyens «observés» de CHAMP.

| Date | (à 0 ^h 0 ^{min} 19 ^s pour chaque date) | | | | | |
|------------|--|-------------------------|----------------|---------|---------|----------------|
| | <i>a</i> (km) | <i>e</i> | <i>i</i> (rad) | Ω (rad) | ω (rad) | <i>M</i> (rad) |
| 25/5/2001 | 6806.2 | 0.3888 10 ⁻² | 1.52313 | 0.57168 | 2.814 | 5.663 |
| 4/6/2001 | 6805.8 | 0.4726 10 ⁻² | 1.52330 | 0.50574 | 2.270 | 2.131 |
| 14/6/2001 | 6805.4 | 0.5027 10 ⁻² | 1.52309 | 0.43999 | 1.751 | 5.253 |
| 14/7/2001 | 6804.2 | 0.3556 10 ⁻² | 1.52307 | 0.24219 | 0.155 | 2.639 |
| 24/7/2001 | 6803.9 | 0.2646 10 ⁻² | 1.52308 | 0.17622 | 5.887 | 4.758 |
| 3/8/2001 | 6803.6 | 0.2228 10 ⁻² | 1.52309 | 0.11026 | 4.662 | 4.474 |
| 13/8/2001 | 6803.2 | 0.2714 10 ⁻² | 1.52311 | 0.04434 | 3.661 | 1.859 |
| 23/8/2001 | 6802.7 | 0.3611 10 ⁻² | 1.52314 | 6.26161 | 2.934 | 5.747 |
| 12/9/2001 | 6801.4 | 0.4836 10 ⁻² | 1.52313 | 6.12977 | 1.846 | 0.946 |
| 22/9/2001 | 6800.6 | 0.4831 10 ⁻² | 1.52321 | 6.06387 | 1.351 | 5.019 |
| 2/10/2001 | 6799.5 | 0.4375 10 ⁻² | 1.52312 | 5.99782 | 0.843 | 3.017 |
| 12/10/2001 | 6798.5 | 0.3560 10 ⁻² | 1.52308 | 5.93172 | 0.282 | 1.307 |
| 1/11/2001 | 6796.1 | 0.2009 10 ⁻² | 1.52300 | 5.79929 | 4.835 | 5.476 |
| 1/12/2001 | 6792.9 | 0.4142 10 ⁻² | 1.52296 | 5.60005 | 2.408 | 4.005 |
| 11/12/2001 | 6791.8 | 0.4667 10 ⁻² | 1.52296 | 5.53357 | 1.904 | 3.657 |
| 21/12/2001 | 6790.6 | 0.4743 10 ⁻² | 1.52299 | 5.46706 | 1.425 | 3.535 |

- Période de révolution orbitale : 93 minutes (15,5 révolutions par jour), période du périégée : 92 jours, période du nœud : 954 jours,
- Caractérisation de l'intérêt d'un filtrage exprimé en éléments non singuliers : $\frac{k'}{\alpha_1} = 0,140\ 10^{-2}$. Cette valeur est inférieure au rayon R (déterminé par exemple sur le premier élément moyen) du cercle décrit par C et S : le périégée circule,
- Premières périodes de résonance : 2,611 jour ($m = 15$) et 1,611 jour ($m = 16$).

Annexe G

Inventaire des travaux annexes

G.1 Publications dans revues à comité de lecture

- Deleflie F., G. Métris, P. Exertier, *Circular Orbits: How Defining the Period of Revolution of the Perigee*, soumis à *Celestial Mechanics*.
- Deleflie F., G. Métris, P. Exertier, *An Analytical Solution of the Lagrange Planetary Equations Valid Also for Very Low Eccentricities: Influence of a central potential*, soumis à *Celestial Mechanics*.
- Deleflie F., P. Exertier, P. Berio, G. Métris, O. Laurain, J.-M. Lemoine, S. Loyer, *A First Analysis of the mean motion of CHAMP*, *Advances in Geosciences*, 1, 95-101, 2003a.
- Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, P. Berio, O. Laurain, J.-M. Lemoine, R. Biancale, *Why the 18.6 year tide cannot explain the change of sign observed in J_2 dot ?*, *Advances in Geosciences*, 1, 103-108, 2003b.

G.2 Présentations dans des colloques internationaux

- Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, *Near circular orbits : A semi-Analytical Method Which Permits to Calculate Orbits over Several Years*, 16th International Symposium on Space Flight Dynamics, Pasadena, 2001.
- Colloque d'automne 2001 de l'AGU : Deleflie F., P. Exertier, S. Loyer, G. Métris, *A Validation of CHAMP Accelerometer Data Through a Computation of a Single Long arc Orbit*, *Eos. Trans. AGU*, 82(47), Fall Meet. Suppl., Abstract G41C-08, 2001.
- EGS 2002 - Nice : Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, P. Berio, O. Laurain, S. Loyer, J.-M. Lemoine, *A long period approach to study the behavior of the CHAMP accelerometer : comparisons of biais and scale factor with the GRGS tools GINS and CODIOR*.
- EGS 2002 - Nice : Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, P. Berio, O. Laurain, J.-M. Lemoine, R. Biancale, *A new solution of the first zonal term of the gravity field from LAGEOS 1 and LAGEOS 2, in view of GRACE*.
- *Celestial Mechanics 2002*, IAA Saint Petersburg : Deleflie F., G. Métris, P. Exertier, *An analytical Solution of Lagrange Planetary equations Valid Also for Very Low Eccentricities*.

G.3 Rapports

- Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, *Une théorie semi-analytique du mouvement des satellites à orbites quasi-circulaires*, Note Technique, Contrat de R&D Analyse de Missions

spatiales, CNES, Depart. Mathématiques Spatiales, J. Foliard, P. Brousse, 2000.

- Deleflie F., *Une théorie semi-analytique du mouvement des satellites à orbites quasi-circulaires*, Rapport d'étape CNES, septembre 2002.

G.4 Supports de cours

- Deleflie F., *Développements du potentiel perturbateur de troisième corps*, Compte rendu des Centres de Compétences Techniques du CNES, 2000.

- Deleflie F., P. Exertier, *Développement du champ de gravité en harmoniques sphériques*, DEA «Dynamique des Systèmes gravitationnels» de l'Observatoire de Paris, 2001.

- Exertier P., F. Deleflie, *Les équations du mouvement orbital perturbé*, Ecole d'été du GRGS, 2002.

- Exertier P., F. Deleflie, G. Métris, *Théorie du mouvement orbital moyen : l'outil CO-DIOR*, Ecole d'été du GRGS, 2002.

G.5 Autres publications et présentations

- Deleflie F., J. Nicolas, *Une définition géophysique des nombres de Love à l'usage des géodésiens*, GdR AGRET, 2002.

- Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, *La forme de la Terre : un concept multidisciplinaire*, Bulletin de l'Association pour le Développement International de l'Observatoire de Nice, 2001.

- Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, S. Bruinsma, O. Laurain, P. Berio, F. Barlier, *Théorie du Mouvement Orbital Moyen : Bilan des développements et perspectives pour l'étude du champ de gravité*, Rapport d'activité du CNFGG, 2003.

- Deleflie F., P. Exertier, G. Métris, *Une validation basse fréquence des missions spatiales GRACE et GOCE par filtrage d'orbites*, Journée «Gravimétrie Spatiale», CNES, 2001.

G.6 Divers

- Séminaire «Temps-Espace» de l'Observatoire de Paris, 5 février 2002 : *Principe des études de dynamique orbitale à long terme*.

Table des figures

| | | |
|------|---|-----|
| 1 | La géodésie spatiale : une science multidisciplinaire (Document GRGS). | 12 |
| 2 | Une description en éléments orbitaux. | 15 |
| 3 | Courtes et longues périodes dans le mouvement orbital. | 16 |
| 4 | Une constellation de satellites géodésiques. | 19 |
| 5 | Evaluation de l'intégration numérique sur STARLETTE. | 26 |
| 6 | Evaluation de l'intégration numérique sur STELLA (éléments orbitaux). | 27 |
| 7 | Evaluation de l'intégration numérique sur STELLA (éléments non singuliers). | 28 |
| 1.1 | Principe de la méthode. | 34 |
| 1.2 | Effet des passages de LAGEOS-1 dans le cône d'ombre de la Terre. | 77 |
| 1.3 | Effet des passages de STELLA dans le cône d'ombre de la Terre. | 78 |
| 2.1 | Le filtrage : une mise en évidence des effets à longues périodes. | 83 |
| 2.2 | Éléments moyens observés de CHAMP, déduits de l'orbite GPS osculatrice par filtrage mixte, analytique et numérique. | 84 |
| 2.3 | Définition des angles θ et ω , et de R et e | 88 |
| 2.4 | Dynamique des variables e , R , ω , θ en fonction de l'excentricité initiale. | 90 |
| 2.5 | Variation temporelle des variables ω et θ | 98 |
| 2.6 | Comparaison graphique des hypothèses d'intégration. | 98 |
| 2.7 | Cercle moyen et cercle osculateur décrits par C et S | 99 |
| 2.8 | Validité des courtes périodes calculées sur l'excentricité de STARLETTE. | 105 |
| 2.9 | Validité des courtes périodes calculées sur l'argument du périhélie de STARLETTE. | 105 |
| 2.10 | Filtrage analytique initialisé avec des éléments centrés approchés. | 107 |
| 2.11 | Filtrage analytique initialisé avec des éléments moyens approchés. | 108 |
| 3.1 | Effets de J_{40} sur l'orbite de STARLETTE : essentiellement des longues périodes. | 113 |
| 3.2 | Spectre de courtes périodes des satellites utilisés. | 114 |
| 3.3 | Stabilité de l'intégration numérique en présence de petits diviseurs. | 116 |
| 3.4 | Stabilité de l'intégration numérique sans présence de petits diviseurs. | 117 |
| 3.5 | Résidus de l'orbite moyenne de LAGEOS avec la seule perturbation J_2 | 118 |
| 3.6 | Signaux des effets gravitationnels (hors J_2) à modéliser sur LAGEOS. | 120 |
| 3.7 | Résidus sur l'orbite de LAGEOS après prise en compte du modèle gravitationnel. | 121 |
| 3.8 | Simulation d'une restitution CODIOR de CHAMP - Champ zonal. | 123 |
| 3.9 | Simulation d'une restitution CODIOR de CHAMP - Champ complet. | 124 |
| 3.10 | Simulation d'une restitution CODIOR de CHAMP - Champ complet et freinage atmosphérique. | 125 |
| 4.1 | Restitution de 2 ans de STELLA. Potentiel $J_2 J_{40}$ | 139 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.2 | Effets d'un trou de données sur STELLA. | 140 |
| 4.3 | Effets d'un trou de données sur STELLA pour l'ajustement géodynamique (1). | 141 |
| 4.4 | Effets d'un trou de données sur STELLA pour l'ajustement géodynamique (2). | 142 |
| 5.1 | Résidus sur le demi-grand axe de LAGEOS-1. | 144 |
| 5.2 | Résidus de l'arc long de LAGEOS-1 (1). | 145 |
| 5.3 | Résidus de l'arc long de LAGEOS-1 (2). | 146 |
| 5.4 | Modélisation des effets d'ombre et estimation géodynamique. | 147 |
| 5.5 | Le satellite CHAMP (vue d'artiste). | 149 |
| 5.6 | Densité d'observations de CHAMP par le réseau SLR. | 150 |
| 5.7 | Résidus de l'arc CODIOR de CHAMP sur 200 jours calculé avec le modèle non gravitationnel. | 152 |
| 5.8 | Résidus de l'arc CODIOR de CHAMP sur 200 jours calculé avec les données accélérométriques. | 153 |
| 5.9 | Comparaison des résultats obtenus par GINS et CODIOR pour l'accéléromètre STAR. | 154 |
| 5.10 | Résidus de l'arc long de LAGEOS-2. | 156 |
| 5.11 | Lien entre l'activité solaire et l'évolution du demi-grand axe de STARLETTE. | 157 |
| 5.12 | Résidus sur l'arc long de STARLETTE (1). | 158 |
| 5.13 | Résidus sur l'arc long de STARLETTE (2). | 159 |
| 5.14 | STARLETTE : évolution séculaire de l'inclinaison (1). | 160 |
| 5.15 | STARLETTE : évolution séculaire de l'inclinaison (2). | 161 |
| 5.16 | Effet d'une mauvaise pondération des observations sur STELLA. | 161 |
| 5.17 | Orbite à longues périodes de STELLA. | 163 |
| 5.18 | Résidus obtenus sur l'orbite de STELLA (1). | 164 |
| 5.19 | Résidus obtenus sur l'orbite de STELLA (2). | 165 |
| 5.20 | Résidus sur l'arc long d'AJISAI (1). | 166 |
| 5.21 | Résidus sur l'arc long d'AJISAI (2). | 167 |
| 6.1 | Une série temporelle de $C_{2,0}$ (points indépendants). | 170 |
| 6.2 | Une série temporelle de $C_{2,0}$ (points liés). | 171 |
| 6.3 | Effet de $\dot{C}_{2,0}$ sur le nœud ascendant de LAGEOS-1. | 171 |
| 6.4 | Effets combinés de la marée à 18,6 ans et de $\dot{C}_{2,0}$ | 171 |
| 6.5 | Qu'observe-t-on sur le nœud ? | 172 |
| 6.6 | Résidus sur le nœud ascendant de LAGEOS-1 avec un arc calculé de 1980 à 1996 (Solution 1). | 173 |
| 6.7 | Résidus sur le nœud ascendant de LAGEOS-1 sur un arc couvrant 1980 à 2002, et comportant l'estimation de la marée à 9,3 ans (Solution 2). | 174 |
| 6.8 | Résidus sur le nœud ascendant de LAGEOS-1 sur un arc couvrant 1980 à 2002, et NE comportant PAS l'estimation de la marée à 9,3 ans (Solution 3). | 174 |
| 6.9 | Ajustement sur un même satellite de 4 coefficients géodynamiques. | 175 |
| 6.10 | Qualité des orbites de deux ans selon la date de début d'arc. | 176 |
| 6.11 | Valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ estimées par différents satellites. | 177 |
| 6.12 | Corrections aux valeurs effectives de $C_{2,0}$ et $C_{3,0}$ estimées par différents satellites. | 179 |
| 6.13 | Valeurs au cours du temps de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$, $C_{5,0}$ obtenues par combinaison des données. | 181 |
| 6.14 | Un apport de ce «mini-modèle» de champ. | 184 |

| | | |
|-----|---|-----|
| C.1 | Coordonnées sphériques. | 220 |
| C.2 | Deux repères mobiles avec le satellite. | 221 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 1 | STELLA : indication statistique des cumuls d'erreurs dues à l'intégration numérique. | 29 |
| 1.1 | Classement ordre par ordre des perturbations gravitationnelles. | 40 |
| 1.2 | Nomenclature des variables de codage utilisées avec le manipulateur. | 47 |
| 1.3 | Inventaire des séries calculées pour J_2 | 51 |
| 1.4 | Inventaire des séries calculées pour les premiers coefficients zonaux. | 52 |
| 1.5 | Inventaire des séries construites pour les effets de troisièmes corps. | 55 |
| 1.6 | Modèle dynamique moyen - Forces gravitationnelles. | 79 |
| 1.7 | Modèle dynamique moyen - Forces non gravitationnelles. | 79 |
| 2.1 | Comparaison des méthodes d'intégration. | 97 |
| 2.2 | Comparaison des hypothèses d'intégration : influence de l'excentricité initiale. . . | 97 |
| 2.3 | Méthode d'intégration des équations de Lagrange : récapitulation de la forme de la solution. | 101 |
| 2.4 | Intégration analytique : excentricité non faible sur un arc de quelques jours. . . | 102 |
| 2.5 | Intégration analytique : excentricité non faible sur une révolution du périégée. . | 103 |
| 2.6 | Intégration analytique : excentricité faible sur un arc de quelques jours. | 103 |
| 2.7 | Intégration analytique : excentricité faible sur une révolution du périégée. . . . | 104 |
| 2.8 | Qualité de la détermination de l'initialisation du filtrage analytique. | 109 |
| 3.1 | Ajustement d'orbite suivant décentrage ou non. | 115 |
| 3.2 | Effets à longues périodes sur les paramètres orbitaux : amplitudes théoriques dues aux effets gravitationnels, et résidus correspondants dans CODIOR. . . . | 119 |
| 3.3 | Standards utilisés dans CODIOR. | 122 |
| 4.1 | Valeurs des poids utilisés pour la pondération des éléments de chaque satellite. . | 136 |
| 4.2 | Corrélation entre les 7 paramètres estimés sur l'arc académique de STELLA. . . | 138 |
| 4.3 | Corrélation entre les 10 paramètres estimés sur l'arc académique de STELLA. . | 138 |
| 5.1 | Orbite de CHAMP : Valeurs des facteurs multiplicatifs adaptatifs de la force de freinage atmosphérique. | 151 |
| 5.2 | Données ajustées sur les données accélérométriques. | 151 |
| 5.3 | Division de l'arc long de STARLETTE en différentes zones. | 160 |
| 5.4 | Division de l'arc long de STELLA en différentes zones. | 162 |
| 5.5 | Division de l'arc long d'AJISAI en plusieurs zones. | 168 |
| 6.1 | Estimation de $C_{2,0}$ et $\dot{C}_{2,0}$, selon la solution retenue. | 172 |

| | | |
|------|--|-----|
| 6.2 | Paramètres de marées estimés, selon la solution retenue. | 172 |
| 6.3 | Poids respectifs de chaque satellite dans la combinaison des observations. | 180 |
| 6.4 | Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{2,0}$ | 181 |
| 6.5 | Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{3,0}$ | 182 |
| 6.6 | Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{4,0}$ | 182 |
| 6.7 | Estimations simultanées de $C_{2,0}$, $C_{3,0}$, $C_{4,0}$ et $C_{5,0}$: statistiques sur $C_{5,0}$ | 182 |
| 6.8 | Les valeurs que je propose pour les premiers coefficients du champ de gravité. | 183 |
| 6.9 | Les premières valeurs du champ GRIM5-S1. | 183 |
| B.1 | Inventaire des différents jeux de variables. | 215 |
| C.1 | Inventaire des types d'équations de la dynamique utilisées. | 238 |
| F.1 | Eléments moyens «observés» de LAGEOS 1. | 272 |
| F.2 | Eléments moyens «observés» de LAGEOS-1 (suite 1). | 273 |
| F.3 | Eléments moyens «observés» de LAGEOS-1 (suite 2). | 274 |
| F.4 | Eléments moyens «observés» de LAGEOS-1 (suite 3). | 275 |
| F.5 | Eléments moyens «observés» de LAGEOS-2. | 277 |
| F.6 | Eléments moyens «observés» de LAGEOS-2 (suite). | 278 |
| F.7 | Eléments moyens «observés» de STARLETTE. | 280 |
| F.8 | Eléments moyens «observés» de STARLETTE (suite 1). | 281 |
| F.9 | Eléments moyens «observés» de STARLETTE (suite 2). | 282 |
| F.10 | Eléments moyens «observés» de STELLA. | 284 |
| F.11 | Eléments moyens «observés» de AJISAI. | 286 |
| F.12 | Eléments moyens «observés» de AJISAI (suite). | 287 |
| F.13 | Eléments moyens «observés» de TOPEX/Poséidon (T/P). | 288 |
| F.14 | Eléments moyens «observés» de CHAMP. | 290 |

Bibliographie

- [1] Balmino G., J.-P. Barriot, *Numerical integration techniques revisited*, Manuscr. Geodastica, 15, 1-10, 1990
- [2] Barlier F., C. Berger, J.-L. Falin, G. Kockarts, G. Thuillier, *A thermospheric model based on satellite drag data*, Aeronomica Acta, 185, 1977
- [3] Berger X., *Théorie analytique programmée du mouvement des satellites artificiels sous l'action gravitationnelle de la Terre*, Celest. Mech. 11, 281-300, 1975
- [4] Biancale R., G. Balmino, J.-M. Lemoine, J.-C. Marty, B. Moynot, F. Barlier, P. Exertier, O. Laurain, P. Gegout, *A new global Earth's gravity field model from satellite orbit perturbations: GRIM5-S1*, Geophys. Res. Letters, 27, 22, 3611-3614, 2000
- [5] Borderies N., *La méthode de centrage en géodésie spatiale*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, U.E.R. de physique spatiale, 1976
- [6] Branchu S., *Prise en compte des forces d'inertie dans l'étude des longues périodes du mouvement des satellites artificiels*, Mémoire du DEA «Astronomie fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie», Observatoire de Paris, 1993
- [7] Bretagnon P., G. Francou, *Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions*, Astron. & Astroph., 202, 309-315, 1988
- [8] Brouwer D., *Solution of the problem of artificial satellite without drag*, Astron. J., 64, 378-397, 1959
- [9] Brouwer D., G.M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, 1961
- [10] Bruinsma S.L., *Estimation of Geodynamical Parameters using a semi-analytical Mean Orbit Theory*, Ph.D. Thesis, Delft University of Tech., Delft, Pays-Bas, 2002
- [11] Bulirsch R., J. Stoer, *Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods*, Numerische Math., 8, 93-104, 1966
- [12] Cazenave A., K. Feigl, *Formes et mouvements de la Terre. Satellites et géodésie*, CNRS Editions, 1994.
- [13] Casotto S., *Spectral Decomposition of Geopotential, Earth and Ocean Tidal Perturbations in Linear Satellite Theory*, Celest. Mech., 50, 125-141, 1991
- [14] Casotto S., *The mapping of Kaula's solution into the orbital reference frame*, Celest. Mech. 55, 223-241, 1993
- [15] Cazenave A., P. Gegout, G. Ferhat and R. Biancale, *Temporal variations of the gravity field from Lageos 1 and Lageos 2 observations*, Global Gravity Field and its Temporal Variations, Int. Assoc. of Geod. Symp., Vol. 116, Springer-Verlag, New York, 141-151, 1996



- [16] Champenois S., A. Vienne, *Chaos and Secondary Resonances in the Mimas-Tethys System*, Celest. Mech. 74, 111-146, 1999
- [17] Chao B.F., and R. Eanes, *Global gravitational changes due to atmospheric mass redistribution as observed by the Lageos nodal residual*, Geophys. J. Int., 122, 755-764, 1995
- [18] Cheng M.K., C.K. Shum, B.D. Tapley, *Determination of long-term changes in the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations*, J. Geophys. Res., 102(B10), 22377-22390, 1997
- [19] Cheng C., B.D. Tapley, *Seasonal variations in low degree zonal harmonics of the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations*, Journ. of Geophys. Res., 104 B2, 2667-2681, 1999
- [20] Claes H., J. Henrard, J.-M. Zune, M. Moons, A. Lemaitre, *Guide d'utilisation du manipulateur de séries [MS]*, Int. Publication, Department of Mathematics, FUNDP, Namur, 1988
- [21] Cook G.E., *Perturbations of near-circular orbits by the Earth's gravitational potential*, Planet. Space Sci., 14, 433-444, 1966
- [22] Coulot D., *Etude analytique des perturbations du mouvement des satellites artificiels : origine géodynamique*, Mémoire de stage du DEA «Astronomie fondamentale, Mécanique céleste et Géodésie», Observatoire de Paris, 2000
- [23] Coulot D., *Initiations théorique et pratique à la méthode d'estimation par moindres carrés*, Notes des cours de l'Ecole d'été du GRGS, 2002.
- [24] Cox C.M., B.F. Chao, *Detection of a Large-Scale Mass Redistribution in the Terrestrial System Since 1998*, Science, 297, 831-833, 2002
- [25] Demailly J.-P., *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996
- [26] Deprit A., *Canonical transformations depending on a small parameter*, Celest. Mech. 1, 12-30, 1969
- [27] Deprit A., A. Rom, *The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities*, Celest. Mech. 2, 166-206, 1970
- [28] Dickey J.O., S.L. Marcus, O. de Viron, I. Fukumori, *Recent Earth oblateness variations: Unraveling climate and post glacial rebound effects*, Science, 298, 1975-1977, 2002
- [29] Eanes R.J., *A study of temporal variations in Earth's gravitational field using LAGEOS-1 laser range observations*, Ph.D. Thesis CSR-95-8, The University of Texas at Austin, 1995
- [30] Eanes R.J., S. Bettadpur, in "Global Gravity Field and Its Temporal Variations", pp30-41, Springer-Verlag, New York, 1996
- [31] Emel'yanenko V.V., *Symplectic integrators for studying the long-term evolution of high-eccentricity orbits*, IAA Transactions, No. 8, "Celestial Mechanics", 2002
- [32] David B. Enfield, *El Niño, Past and Present*, Reviews of Geophysics, Vol 27, p159-187.
- [33] Exertier P., *Orbitographie des satellites artificiels sur de grandes périodes de temps. Possibilités d'applications*, Thèse de doctorat de l'observatoire de Paris, 1988
- [34] Exertier P., *Precise determination of mean orbital elements from osculating elements, by semi-analytical filtering*, manuscripta geodaetica, 15, 115-123, 1990
- [35] Exertier P., *Geopotential From Space Techniques*, Celest. Mech., 57, 137-153, 1993

- [36] Exertier P., G. Métris, Y. Boudon, *Notice d'utilisation et de synthèse du programme d'extrapolation d'orbite moyennes CODIOR - Version pour l'analyse de mission*, CNES, 1993
- [37] Exertier P., G. Métris, Y. Boudon, and F. Barlier, *Simultaneous Determination of the 18.6 Year Ocean Tide and J2 from the Mean Orbital Motion of Lageos*, XXIe General Assembly I.U.G.G., Symposium G3, Boulder, Colorado, July 2-14, 1995
- [38] Exertier P., G. Métris, F. Barlier, C. Berger, Y. Boudon, S. Bruinsma, J. Bardina, *Simulation de trajectoire de satellites en orbite basse sur de grandes périodes de temps*, CNES, 1996
- [39] Exertier P., S. Bruinsma, G. Métris, Y. Boudon and F. Barlier, *Geodynamics from mean orbital motion of geodetic satellites*, UGGI General Assembly, Birmingham (UK), 121, 262-270, 1999
- [40] Exertier P., G. Métris, *Dynamique des satellites artificiels et ses applications*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.1, Série IV, 523-536, 2000
- [41] Gegout P., A. Cazenave, *Temporal variations of the Earth gravity field for 1985-1989 derived from Lageos*, Geophys. J. Int., 114, 347-359, 1993
- [42] Giacaglia G.E.O., *A Note on Hansen's Coefficients in Satellite Theory*, Celest. Mech. 14, 515-523, 1976
- [43] Giacaglia G.E.O., *The equations of motion of an artificial satellite in non singular variables*, Celest. Mech. 15, 191-215, 1977
- [44] Goad C.C., *Application of a digital filtering to satellite geodesy*, Tech. Report, NOS71-NGS6, NOAA, 1977
- [45] Goad C.C., *An efficient algorithm for the evaluation of inclination and eccentricity functions*, manuscripta geodaetica, 12, 11-15, 1987
- [46] Gruber T., A. Bode, C. Reigber, P. Schwintzer, G. Balmino, R. Biancale, J.-M. Lemoine, *GRIM5-C1: Combination solution of the global gravity field to degree and order 120*, Geophys. Res. Letters, 27, 24, 4005-4008, 2000
- [47] Huang C., L. Liu, *Analytical solutions to the four post-newtonian effects in a near-Earth satellite theory*, Celest. Mech. 53, 293-307, 1992
- [48] IERS Standards, *IERS Technical Note*, 17, Mc Carty D.D. (Ed.), Obs. de Paris, 1996
- [49] Kaula W.M., *Theory of satellite geodesy*, Blaisdell publ. Co., 1966
- [50] Kaula W.M., *Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite*, Astron. Journ., 67, 300-303, 1962
- [51] King-Hele D., *The rotational speed of the upper atmosphere, determined from changes in satellite orbits*, Planet. Space. Sc., 12, 835-853, 1964
- [52] King-Hele D., D.M.C. Walker, *Upper-atmosphere zonal winds from satellite orbit analysis*, Planet. Space. Sc., 31, 509-535, 1983
- [53] Koenig R., K.H. Neumayer, C. Reigber, S.-H. Zhu, *Aspects of Accelerometry in CHAMP Precise Orbit Determination*, Eos. Trans. AGU, 82(47), Fall Meet. Suppl., Abstract G41C-07, 2001
- [54] Kovalevsky J., *Applications of Computers to Celestial Mechanics*, Celest. Mech., 45, 11-17, 1989

- [55] Kovalevsky J., *Introduction à la mécanique céleste*, Librairie Armand Colin, 1963
- [56] Laskar J., *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, Astron. & Astroph., 198, 341-362, 1988
- [57] Lemoine F.G., S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, N.K. Pavlis, D.S. Chinn, C.M. Cox, S.M. Klosko, S.B. Luthcke, M.H. Torrence, Y.M. Wang, R.G. Williamson, E.C. Pavlis, R.H. Rapp, T.R. Olson, *The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96*, NASA Technical Paper NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1998
- [58] Lucchesi D., *Effets des Forces non-gravitationnelles sur les Satellites LAGEOS : Impact sur la Détermination de l'Effet Lense-Thirring*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nice-Sophia Antipolis, 2002
- [59] Lyddane, R.H., *Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite*, The Astronomical Journal, 68, 8, 555-558, 1963
- [60] Max J., et J.L. Lacoume, *Méthodes et Techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Tome 1 : Principes généraux et méthodes classiques*, Masson, 1996.
- [61] P. Melchior, *The tides of the planet Earth*, Pergamon Press, 1978
- [62] P. Melchior, *Physique et Dynamique planétaires : géodésie et astronomie géodésique*, Vander, 1971
- [63] Melchior P., *Physique et Dynamique planétaires : gravimétrie et potentiel gravitationnel de la Terre et de la Lune*, Vander, 1971
- [64] Melchior P., *Physique et Dynamique planétaires : géodynamique*, Vander, 1972
- [65] Melchior P., *Physique et Dynamique planétaires : géodynamique*, Vander, 1973
- [66] Le Mouél J.-L., V. Courtillot, D. Jault, *Changes in Earth rotation rate*, Nature, Vol 355, Janvier 1992.
- [67] Métris G., *Théorie du Mouvement du Satellite Artificiel — Développement des Equations du Mouvement Moyen — Application à l'Etude des Longues Périodes*, Thèse de Doctorat de l'Observatoire de Paris, 188p., 1991
- [68] Métris G., P. Exertier, Y. Boudon, F. Barlier *Long period variations of the motion of a satellite due to non-resonant tesseral harmonics of a gravity potential*, Celest. Mech., 57, 175-188, 1993
- [69] Métris G., and P. Exertier, *Semi-analytical Theory of the Mean Orbital Motion*, Astron. & Astrophys., 294, 278-286, 1995
- [70] Métris G., D. Vokroulický, J.C. Ries, R.J. Eanes, *Non gravitational effects and the LAGEOS eccentricity excitations*, J. Geophys. Res., 102(B2), 2711-2729, 1997
- [71] Moons M., *Averaging approaches*, Proceedings of the "Artificial Satellite Theory Workshop", U.S.N.O. Washington D.C., November 1993
- [72] Morando B., *Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre*, Gordon & Breach, 1974
- [73] Nacozy P.E., S.S. Dallas, *The geopotential in non singular orbital elements*, Celest. Mech. 15, 453-466, 1977
- [74] Perret A., R. Biancale, A.L. Camus, J.-M. Lemoine, T. Fayard, S. Loyer, F. Perosanz, M. Sarraillh, *CHAMP mission: STAR Commissioning Phase Calibration/Validation Activities in CNES*, Technical Report CNES, 2001

- [75] Ray R.D., and D.E. Cartwright, *Satellite altimeter observations of the Mf and Mm ocean tides, with simultaneous orbit corrections*, in Gravimetry and Space Techniques Applied to Geodynamics and Ocean Dynamics, edited by B.E. Schutz, A. Anderson, C. Froidevaux, and M. Parke, 69-78, American Geophysical Union Geophysical Monograph 82, IUGG Vol. 17, Washington D.C., 1994
- [76] Sahin M., P.A. Cross, P.C. Sellers, *Variance component estimation applied to satellite laser ranging*, Bulletin Géodésique, 66, 284-295, 1992
- [77] Scharroo R., K.F. Wakker, B.A.C. Ambrosius, R. Noomen, *On the Along-Track Acceleration of the LAGEOS Satellite*, Journ. Geophys. Res., 96(B1), 729-740, 1991
- [78] Schwiderski E.W., *Ocean tides, Part 1: Global ocean tidal equations*, Marine Geodesy, 3, 161-207, 1980
- [79] Sillard P., *Estimation par moindres carrés*, Collection ENSG-IGN, Hermes Sciences Publications, Lavoisier, 2001.
- [80] Soffel M.H., *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer-Verlag 1989
- [81] Stoer J., R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, 1980
- [82] Thiry Y., *Les fondements de la mécanique céleste*, Gordon & Breach, 1970
- [83] Tisserand F., *Traité de mécanique céleste*, Gauthiers Villards, 1890, rééd. 1960-1962
- [84] Vondrák J., *A contribution to the problem of smoothing observational data*, Bull. Astron. Inst. Czech, 20, 6, 349-355, 1969
- [85] Vondrák J., *Problem of smoothing observational data II*, Bull. Astron. Inst. Czech, 28, 2, 84-89, 1977
- [86] Wagner C.A., *Zonal gravity harmonics from long satellite arcs by semi-numeric method*, Journal of Geophysical Research, 78-17, 3271-3280, 1973
- [87] Wahr J., *Les variations de rotation de la Terre*, La Recherche, Vol 17, 181, Octobre 1986.
- [88] Wnuk E., *Tesseral harmonic perturbations for high order and degree harmonics*, Celest. Mech. 44, 179-191, 1988
- [89] Wnuk E., *Recent progress in analytical orbit theories*, Adv. Space Res. 23, 4, 677-687, 1999
- [90] Wytrzyszczak I., *Non singular elements in description of the motion of small eccentricity and inclination satellites*, Celest. Mech. 38, 101-109, 1986
- [91] Zarrouati O., *Trajectoires spatiales*, CNES, Cepadues-Editions, 1987
- [92] Zhu Y., C.K. Shum, M.K. Cheng, B.D. Tapley, and B.F. Chao, *Long-period variations in gravity field caused by mantle anelasticity*, Journal of Geophysical Res., 101, B.5, 11,243-11,248, 1996



RÉSUMÉ

Le sujet se place dans le cadre des études de dynamique orbitale menées au CERGA depuis sa création. En associant phénomènes géodynamiques aux effets correspondants sur les orbites des satellites artificiels, il porte à la fois sur des aspects de mécanique céleste et spatiale, et sur les grands changements qui affectent le champ de gravité de la Terre.

L'originalité de ce travail réside dans la possibilité de construire des arcs d'orbites très longs. Alors que la plupart des méthodes traditionnelles d'orbitographie permettent de construire des orbites osculatrices, dont la longueur typique varie habituellement entre 1 jour et 1 mois, la méthode développée ici repose sur la notion d'orbite moyenne. Par définition, elle s'intéresse uniquement aux variations à longues périodes des éléments caractérisant l'orbite. Elle est formulée en éléments non singuliers en excentricité, pour être adaptée à tous les satellites dédiés aux études géodynamiques, et dont les orbites sont pour la plupart quasi-circulaires. De plus, cette méthode exploite les observations issues des différentes techniques de géodésie spatiale, et en particulier celles du réseau mondial de télémétrie laser et de la constellation GPS, qui peuvent désormais s'étaler sur des périodes de plus de vingt ans.

Ces développements théoriques trouvent des applications dans les deux domaines liés à l'orbitographie sur le long terme : l'analyse d'une trajectoire sur l'ensemble de la durée de vie d'une mission spatiale, et l'estimation de paramètres géodynamiques qui produisent sur les orbites des effets à longues périodes, et en particulier ceux qui entraînent des perturbations d'orbites faibles mais cumulatives.

L'étude est ainsi divisée en deux parties complémentaires :

- Construction du modèle d'orbite : établissement des équations moyennes de la dynamique pour les satellites artificiels à faibles excentricités. Etude particulière de ces orbites à la dynamique spécifique. Etablissement d'une solution analytique aux équations de Lagrange, pour disposer d'observations compatibles avec le modèle,
- Application à la géodynamique globale, grâce à l'utilisation d'observations sur le long terme : les premiers coefficients zonaux sont estimés ; les effets dus au rebond post-glaciaire et à la marée à 18.6 ans sont étudiés grâce à un arc de 19 ans pour STARLETTE et de 21 ans pour LAGEOS-1. Les estimations sont en effet basées sur des arcs de plusieurs satellites, afin d'assurer une bonne décorrélation des paramètres.

ABSTRACT

By linking geodynamical phenomena to corresponding effects on the orbits of artificial satellites, this study deals with aspects of celestial mechanics and also with the changes of the gravity field of the Earth over large spatial scales.

The originality of this work is the determination of orbits over long periods of time, which take into account the whole observations tracked by the SLR network or by the GPS constellation. The method is based on the notion of mean motion. For very specific applications, it is focused only on long period variations of the parameters describing the movement. It is formulated in non singular elements for eccentricity, to be adapted to all the satellites dedicated to geodynamical studies.

Thus, the theory of mean motion can now be applied to various kinds of orbits, leading to the two main fields of applications of orbitography over large time scales. The first one is the analysis of a trajectory over the whole duration of a mission, on the basis of given initial conditions. The second field is the adjustment of specific geodynamical parameters which produce long periods on the orbits, and in particular those which produce small but cumulative effects.

The study is therefore divided into two complementary parts:

- Building of the orbital model, through the mean equations of dynamics, for satellites with low eccentricities. Use of an analytical solution of Lagrange equations, for the coherence between the model and the observations,
- Application to global geodynamics: the first zonal coefficients of the gravity field are estimated; effects due to the post glacial rebound and to the 18.6 year tide are studied thanks to a 19 year long arc for STARLETTE and to a 21 year long arc for LAGEOS-1. Indeed, these estimations are based on arcs of several satellites, to decorrelate the different parameters.

MOTS-CLEFS : Mécanique céleste, champ de gravité, équations de Lagrange et de Gauss analytiques et numériques, moyennisation, rebond post-glaciaire, marées à longues périodes, sat