



**HAL**  
open science

## Modèles d'Univers inhomogènes à Big-Bang retardé

Marie-Noëlle Thérond-Célérier

► **To cite this version:**

Marie-Noëlle Thérond-Célérier. Modèles d'Univers inhomogènes à Big-Bang retardé. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Diderot - Paris 7, 1998. Français. NNT : 1998PA077295 . tel-02158137

**HAL Id: tel-02158137**

**<https://hal.science/tel-02158137>**

Submitted on 17 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale de Physique Théorique d'Ile de France

**THÈSE de DOCTORAT**  
**Université PARIS VII Denis Diderot**

présentée par

Marie-Noëlle THÉRON-D-CÉLÉRIER

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'Université Paris VII

Spécialité : Physique Théorique

**MODÈLES D'UNIVERS INHOMOGÈNES À BIG-BANG  
RETARDÉ**

Soutenue le 2 Décembre 1998, devant le jury composé de :

M. Bernard DIU	président
M. Jean SCHNEIDER	directeur de thèse
M. Alain BLANCHARD	rapporteur
M. Philippe TOURRENC	rapporteur
M. Claude BARRABES	examineur
M. Galliano VALENT	examineur

26 FEV. 1999

École doctorale de Physique Théorique d'Ile de France

**THÈSE de DOCTORAT**  
**Université PARIS VII Denis Diderot**

présentée par

**Marie-Noëlle THÉROND-CÉLÉRIER**

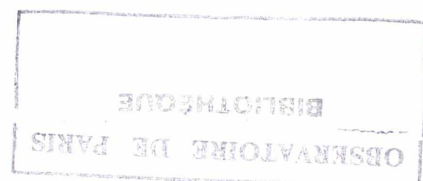
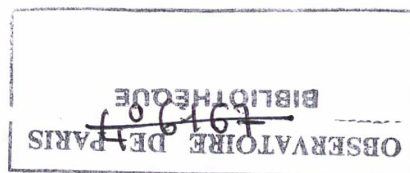
pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'Université Paris VII

Spécialité : Physique Théorique

**MODÈLES D'UNIVERS INHOMOGÈNES À BIG-BANG  
RETARDÉ**

Soutenue le 2 Décembre 1998, devant le jury composé de :

M. Bernard DIU	président
M. Jean SCHNEIDER	directeur de thèse
M. Alain BLANCHARD	rapporteur
M. Philippe TOURENC	rapporteur
M. Claude BARRABES	examineur
M. Galliano VALENT	examineur



*A Nicolas, Florent et Antoine,  
auxquels j'offre, en espérant la  
transmettre, cette joie de la recherche  
de connaissances nouvelles*

## Remerciements

Lorsque j'ai repris, en 1992, des études interrompues en 1973, je savais que le chemin serait difficile mais je possédais la grande dose d'enthousiasme et la petite dose d'inconscience suffisantes pour me lancer dans l'aventure.

J'ai eu la chance, tout au long de ces six années consacrées, d'abord à me remettre en selle, puis à m'imprégner des développements les plus passionnants de la physique moderne, d'avoir été encouragée et soutenue par des personnalités, pour la plupart exceptionnelles.

Je tiens à les en remercier, car sans elles il m'aurait été impossible de mener à bien ce travail.

Je remercie Galliano Valent qui m'a accueillie le premier, lorsque je me suis présentée à Paris VII pour m'inscrire en toute innocence... en DEA de Physique Théorique. Il m'a fort utilement conseillée dans le choix d'un programme de remise à niveau et a finalement accepté de m'inscrire à ce fameux DEA, puis, plus tard, de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie les autres professeurs et maîtres assistants de Paris VII qui m'ont transmis leur savoir tout au long de cette année de demi-maîtrise, et ont répondu avec patience à toutes mes questions : en premier lieu, Bernard Diu, que je remercie également d'avoir accepté de présider ce jury, et aussi Alain Lavergne, Bertrand Delamotte, Danielle Lederer et Dominique Mouhanna.

Je remercie ceux qui m'ont encouragée et soutenue pendant mes deux années de DEA à l'École Normale. Je suis tout particulièrement reconnaissante à Edouard Brézin qui, malgré les immenses responsabilités dont il était chargé, a bien voulu m'accorder de nombreux entretiens et encadrer mon travail de recherche bibliographique.

Je remercie également Monique Signore, rencontrée au hasard de mes recherches de stage, dont la porte m'était toujours ouverte lorsque j'avais besoin de conseils, et qui, pendant un an, a partagé mes difficultés et soutenu mes efforts.

J'ai eu ensuite la chance d'effectuer cette thèse au sein du prestigieux Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie.

Je remercie Jean Schneider de m'avoir proposé un sujet original et passionnant et de m'avoir fait bénéficier, au cours de ces trois années, de ses idées foisonnantes et de sa grande rigueur scientifique.

Je remercie Nathalie Deruelle d'avoir pris le risque d'accueillir une étudiante un peu atypique et de m'avoir donné les moyens de travailler au sein d'une équipe exceptionnelle. Son amical soutien me fut également très précieux.

Je remercie tous les membres du Département et en particulier ceux qui m'ont aidée à me sortir des griffes souvent hostiles d'une informatique capricieuse : Bernard Pichon, Alejandro Gangui et David Scialom.

Je remercie Guillaume Faye de m'avoir initiée aux subtilités de Mathematica.

Je remercie Jean-Philippe Uzan qui, grâce à ses remarques et objections judicieuses, m'a, à plusieurs reprises, conduite à préciser ma pensée sur des points délicats.

Je remercie David Langlois, puis Guillaume Dubus, d'avoir accepté de partager avec moi leur espace vital. Ce fut un plaisir de travailler dans l'ambiance studieuse et amicale qu'ils ont contribué à créer.

Je remercie Alain Blanchard et Philippe Tourrenc d'avoir accepté la charge consistant à être rapporteur de cette thèse, et Claude Barrabes qui, faisant partie du jury, a apporté sa caution scientifique à ce travail.

Je tiens également à remercier celles dont l'aide m'a été essentielle dans la vie administrative quotidienne : Annie Touchant, rue Lhomond, Cécile Rosolen et Dominique Lopes, à Meudon, dont j'ai apprécié la grande gentillesse et la totale disponibilité. Je réserve un remerciement particulier à Isabelle Roy qui a dactylographié cette thèse.

Rien enfin n'aurait été fait sans l'affection résignée d'Alain, mon mari, dans son rôle de mécène. Bien que j'ai toujours eu le souci de préserver une part non négligeable de mon temps pour la vie familiale, je sais qu'il a pu souffrir à certains moments de mon manque de disponibilité. J'espère qu'il voudra bien me pardonner et je le remercie d'avoir eu le courage d'aller, avec moi, jusqu'au bout.

Mes enfants, malgré leurs railleries affectueuses pour cette mère étudiante, ont également été une source de stimulation essentielle. Qu'ils en soient eux aussi remerciés.

## Résumé

Le modèle standard d'évolution de l'Univers, dit de Big-Bang chaud, malgré d'indéniables succès, laisse irrésolus un certain nombre de problèmes.

L'objet de cette thèse est de proposer une classe de modèles d'univers inhomogènes qui palient plusieurs imperfections du modèle standard, tout en conservant ses prédictions les plus robustes.

Il est montré, en faisant appel, pour cette étude préliminaire, à des hypothèses très simplificatrices :

1. que la notion de Big-Bang inhomogène mérite d'être exploitée .

Les conséquences observables d'une singularité initiale inhomogène, de type "retardé", sont étudiées, sous certaines conditions. Le problème de l'horizon est ainsi résolu sans qu'il soit besoin de recourir à l'hypothèse d'une phase d'inflation. Les problèmes de la platitude et de la constante cosmologique disparaissent. Des mécanismes pouvant expliquer l'origine de la formation des structures sont avancés.

2. que les paramètres du modèle peuvent être ajustés de façon à reproduire les données issues des observations.

Un tel ajustement est ainsi réalisé, pour reproduire, avec une bonne approximation, les moments dipolaire et quadrupolaire des anisotropies de température du rayonnement de fond cosmologique.

Sont étudiées, par ailleurs, plusieurs classes particulières d'équations d'Einstein pour un fluide parfait relativiste à symétrie sphérique, dont est proposée une forme réduite, à variables séparées.





## Abstract

The hot Big-Bang standard model for the evolution of the Universe, despite strong successes, lets unresolved a number of problems.

The purpose of this thesis is to propose a class of inhomogeneous models of Universe, getting rid of some of the drawbacks of the standard model, while leaving unimpaired its main cornerstones.

It is shown, with the help, for this preliminary study, of very simplifying assumptions :

1. that the notion of inhomogeneous Big-Bang is worth being developed.

The observable consequences of an inhomogeneous initial singularity, of “delayed” type, are studied, under some peculiar conditions. The horizon problem is thus solved without need for any inflationary phase. The flatness and cosmological constant problems disappear. Mechanisms able to explain the origin of structure formation are put forward.

2. that the parameters of the model can be tuned such as to reproduce the data obtained from observations.

Such a tuning is thus performed to reproduce, with good approximation, the dipole and quadrupole moments of the temperature anisotropies of the cosmological micro-wave background radiation.

Are also studied a number of special classes of Einstein’s equations for a relativistic spherically symmetric perfect fluid, of which a reduced form, with separated variables, is proposed.



# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Introduction	1
<b>1 Cadre observationnel et théorique général</b>	<b>3</b>
1.1 Cosmologie observationnelle . . . . .	3
1.1.1 Décalage vers le rouge et expansion . . . . .	4
1.1.2 Recombinaison et rayonnement de fond cosmologique . . . . .	4
1.1.3 L'abondance des éléments légers . . . . .	7
1.1.4 L'âge des plus vieilles étoiles . . . . .	8
1.1.5 Résumé de l'état actuel des observations à caractère cosmologique .	9
1.2 Cadre théorique général . . . . .	11
1.2.1 La Relativité Générale . . . . .	11
1.2.2 La conservation de l'énergie . . . . .	14
1.2.3 Le Principe Cosmologique . . . . .	15
1.2.4 L'approximation de fluide parfait . . . . .	16
1.3 Modèle standard et au-delà . . . . .	17
1.3.1 Le modèle standard homogène : ses succès, ses problèmes . . . . .	17
1.3.2 Au-delà du modèle standard : l'inflation . . . . .	21
<b>2 Description de la classe de modèles inhomogènes étudiée</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Le modèle Tolman-Bondi . . . . .	24
2.3 Le modèle Tolman-Bondi plat . . . . .	27
2.4 Croisement des coquilles et problème corrélé . . . . .	28
2.5 Equilibre thermodynamique et définition de la température en cosmologie inhomogène . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Une solution au problème de l'horizon</b>	<b>35</b>
3.1	Le problème de l'horizon en cosmologie standard . . . . .	35
3.2	Article 1 : A solution to the horizon problem : a delayed Big-Bang singularity	38
3.3	Méthode numérique . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Moments dipolaire et quadrupolaire des anisotropies de température du RFC dans un univers à Big-Bang cône</b>	<b>41</b>
4.1	Introduction . . . . .	41
4.2	Article 2 : Models of Universe with an inhomogeneous Big Bang singularity. II. CMBR dipole anisotropy as a byproduct of a conic Big-Bang singularity	42
4.3	Méthode numérique . . . . .	43
4.4	Discussion . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Etat des lieux et perspectives</b>	<b>45</b>
5.1	Récapitulation des résultats et discussion des propriétés du modèle . . . . .	45
5.1.1	Problèmes cosmologiques standards résolus . . . . .	45
5.1.2	Problème cosmologique standard en suspens . . . . .	49
5.1.3	Fluctuations de densité à l'origine de la formation des structures . . . . .	50
5.1.4	Résumé du statut actuel des modèles à Big-Bang retardé . . . . .	51
5.2	Tests observationnels . . . . .	53
5.2.1	Relecture des observations à caractère cosmologique . . . . .	53
5.2.2	Utilisation, comme test, de la relation entre luminosités apparente et absolue d'une source . . . . .	54
5.3	Les paramètres du modèle . . . . .	58
5.4	Une question de vocabulaire . . . . .	59
	<b>Conclusion</b>	<b>61</b>
	<b>Annexe : Classes d'équations d'Einstein réduites pour un fluide parfait relativiste à symétrie sphérique</b>	<b>63</b>
1	Motivations à l'origine du travail exposé . . . . .	63
2	Equations réduites de Podurets-Misner-Sharp . . . . .	63
2.1	Système d'équations réduites . . . . .	63
2.2	Interprétation de $m$ . . . . .	66
2.3	Interprétation de $R$ . . . . .	67
3	Article 3 : Classes of reduced Einstein's equations for a relativistic spheri- cally symmetric perfect fluid . . . . .	68
	<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>

1. Dans la colonne "Type", la première lettre indique : configuration (C) ou interféromètre (I) ; la seconde : expérience au sol (S) ou en ballon (B).

2. Un "t" placé après le nom de l'expérience indique que celle-ci est terminée ; un "c", qu'elle est en cours ; un "p", qu'elle est en projet, c'est-à-dire qu'elle peut être en cours mais qu'aucune donnée n'est encore disponible.

Deux missions satellites, destinées à obtenir des précisions angulaires accrues, avec de meilleures sensibilités, sont, par ailleurs, programmées pour les années à venir.

MAP (Microwave Anisotropy Probe), sélectionnée par la NASA en 1996, devrait être mise en orbite vers 2001. Son objectif est de mesurer la température du RFC sur l'ensemble du ciel avec une résolution angulaire de  $0,3^\circ$ , une sensibilité de  $20\mu\text{K}$  par pixel de  $0,3^\circ$  carré et des effets systématiques limités à  $5\mu\text{K}$  par pixel. Cinq bandes de fréquence seront explorées à 22, 30, 40, 60 et 90 GHz.

La mission Planck Surveyor de l'ESA, prévue pour être lancée en 2004, cartographiera également le ciel entier, mais avec une résolution angulaire d'environ  $8'-30'$ , et une sensibilité de signal approchant  $\Delta T/T \sim 10^{-6}$ . Planck embarquera deux instruments : le Low Frequency Instrument (LFI) qui balayera la bande de fréquence comprise entre 30 et 100 GHz et le High Frequency Instrument (HFI) qui couvrira la bande 90-850 GHz. Utilisant une technologie plus sophistiquée, Planck aura une sensibilité dix fois supérieure à celle de MAP, une résolution angulaire deux à trois fois supérieure, en fonction de la fréquence, et une couverture de fréquences six fois plus large.

### 1.1.3 L'abondance des éléments légers

Remontant toujours plus loin dans le "passé", on atteint une température moyenne d'environ  $10^9 \text{ }^\circ\text{K} \sim 0,1 \text{ MeV}$ .

C'est l'échelle d'énergie à laquelle peuvent se former les noyaux des éléments les plus légers, du deutérium au lithium-7.

Au cours de cette nucléosynthèse, la probabilité de former un noyau de deutérium, en un point donné de l'espace-temps, ne dépend que du rapport du nombre de baryons au nombre de photons en ce point. D'où l'intérêt de mesurer les abondances de cet élément pour estimer la valeur de ce paramètre essentiel en cosmologie.

Ce noyau très fragile - il suffit d'une énergie de 2,2 MeV pour briser le couple neutron-proton qui le compose - est toutefois totalement brûlé dans les étoiles, avant même que ne s'engage la fusion de l'hydrogène.

Pour estimer son abondance primitive, il convient donc de mesurer son abondance actuelle dans les milieux qui ont été le moins contaminés par les générations d'étoiles qui se sont succédées depuis la nucléosynthèse. On le détecte ainsi dans les nuages extraga-

lactiques, essentiellement composés d'hydrogène et d'hélium, à partir de l'empreinte qu'il laisse dans le spectre de quasars plus lointains sous forme de raies d'absorption.

Là aussi, comme pour la détermination de la valeur locale de  $H_0$ , deux écoles s'affrontent. L'une annonce des abondances de l'ordre de  $2.10^{-4}$  par rapport à l'hydrogène (voir, par exemple, Songaila *et al.*, 1994; Carswell *et al.*, 1994), avec une limite basse à  $4.10^{-5}$  (Songaila, Wampler et Cowie, 1997), l'autre obtient des valeurs inférieures, autour de  $3.10^{-5}$  (Tytler, Fan et Burles, 1996).

Toutes les abondances de deutérium mesurées jusqu'à présent l'ont été à des distances ne dépassant pas  $z \sim 5$ .

L'hélium-3, qui vient après le deutérium dans la chaîne de réactions de la nucléosynthèse, possède une abondance primordiale beaucoup plus difficile à déduire des mesures effectuées localement, en raison de notre ignorance de son histoire chimique et stellaire.

Son isotope, l'hélium-4, élément le plus abondant après l'hydrogène, est plus facile à cerner. Mais, étant fabriqué lors des réactions nucléaires au sein des étoiles, il ne peut figurer avec une abondance proche de sa valeur primordiale que dans les objets de très faible métallicité.

Là encore les résultats divergent, moins dramatiquement que pour le deutérium, mais les barres d'erreur ne se recoupent pas :  $0,234 \pm 0,003$  pour le groupe d'Olive (Olive, Steigman et Skillman, 1997), contre  $0,243 \pm 0,003$  pour celui d'Izotov (Izotov, Thuan et Lipovetsky, 1997).

Pour le lithium-7, enfin, les abondances primordiales déduites des mesures dans les étoiles anciennes semblent converger vers une valeur d'environ  $2.10^{-10}$  (voir, par exemple, Spite *et al.*, 1996; Bonifacio et Molaro, 1997).

#### 1.1.4 L'âge des plus vieilles étoiles

En un point comobile donné de l'espace, l'âge des plus vieilles étoiles ne peut dépasser le temps écoulé depuis l'époque où les conditions physiques y étaient réunies pour que la formation stellaire puisse commencer.

Pour un univers avec singularité initiale de type Big-Bang, l'âge des plus vieilles étoiles, mesuré dans notre environnement proche, constitue une limite basse au temps écoulé depuis cette singularité dans notre région.

Les données les plus récentes, qui prennent en compte les résultats du satellite Hipparcos pour la détermination des distances au sein de notre galaxie, permettent de situer l'âge des plus vieilles étoiles du halo entre 9 et 13 milliards d'années (voir, par exemple, Chaboyer *et al.*, 1998; Jimenez, Flynn et Kotoneva, 1998).

### 1.1.5 Résumé de l'état actuel des observations à caractère cosmologique

La cosmologie observationnelle a développé, au cours des dernières années, d'autres méthodes originales pour tenter de cerner la géométrie et la dynamique de l'Univers. Citons pour mémoire : l'utilisation des supernovae de type Ia ou des effets de lentille gravitationnelle, l'étude de la distribution de la matière - lumineuse ou sombre - à différentes échelles, etc.

Les résultats sont prometteurs, mais demandent, pour la plupart, à être confirmés, soit par une extension des échantillons observés (une dizaine d'amas seulement pour l'effet de lentille gravitationnelle), soit par un affinement de la méthode (élimination de différents biais pour les supernovae Ia).

Les observations actuellement utilisables pour la construction d'un modèle d'univers sont celles qui ont été décrites dans les quatre paragraphes précédents. Leurs résultats sont résumés sur la Fig. 1.1, page suivante.

Nous ne pouvons observer l'Univers qu'à partir d'un seul événement spatio-temporel, ici et maintenant.

Toutes les informations qui peuvent nous parvenir sont, en théorie, issues d'événements situés à l'intérieur ou sur notre cône de lumière passé.

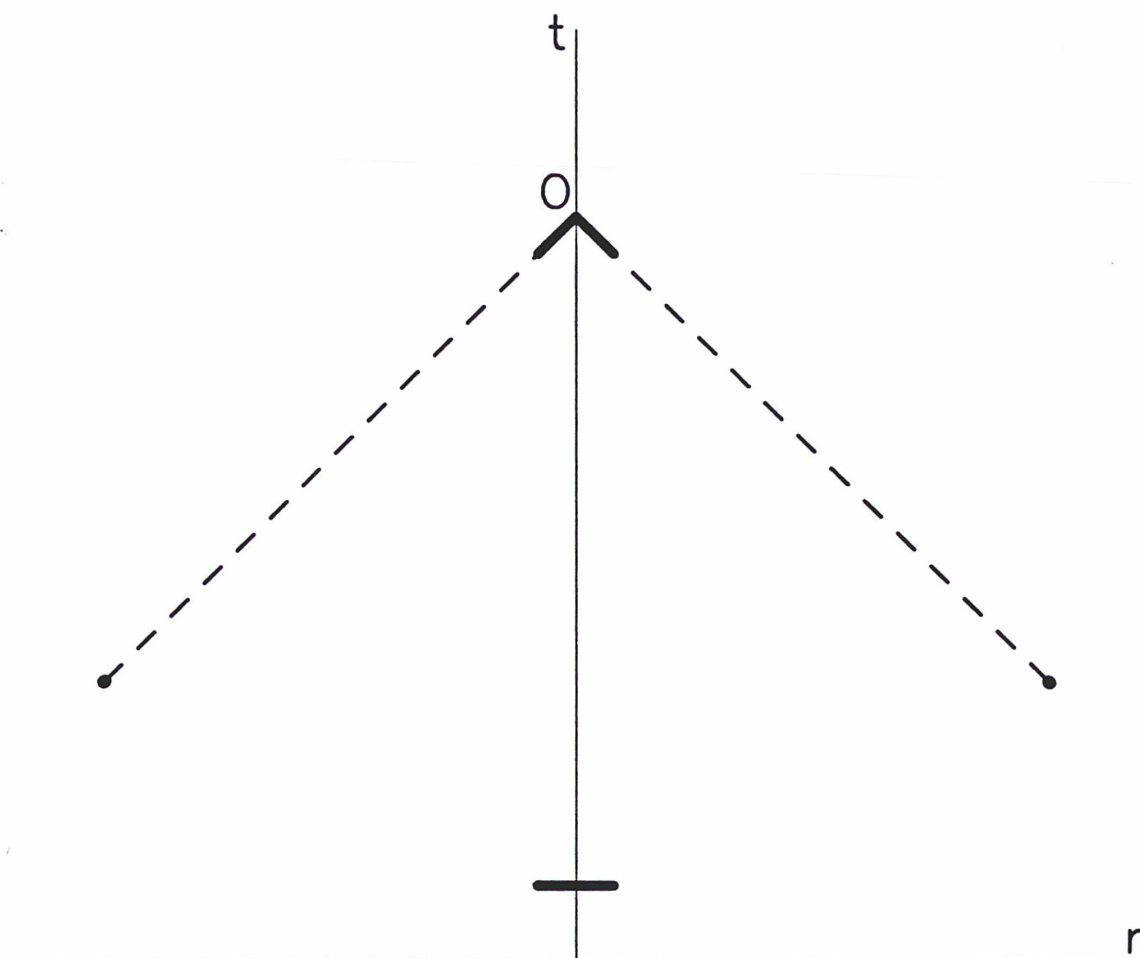
En pratique, la quasi-totalité des informations astronomiques nous parviennent sous forme d'ondes électro-magnétiques. Même les abondances des éléments légers, qui sont représentées à l'intérieur du cône de lumière sur la Fig. 1.1 (ce qui suppose bien connue leur évolution depuis la nucléosynthèse), sont le plus souvent mesurées à partir de raies d'absorption dans les rayons lumineux issus d'objets plus ou moins lointains.

Grâce à ses propriétés immuables de corps noir, le rayonnement cosmologique observé de nos jours nous donne accès à l'information la plus ancienne que nous serons de tout temps en mesure d'obtenir sur un événement de notre cône de lumière passé : la dernière diffusion. Les photons, piégés dans le plasma qui baignait cette partie de l'Univers à des époques plus chaudes, ne parviendront jamais à un télescope quel qu'il soit.

Nous pouvons par contre espérer, dans le futur, faire avancer de plus en plus loin sur notre cône de lumière passé les données observationnelles astronomiques de toute nature et à toutes longueurs d'onde que les techniques actuelles limitent à des décalages spectraux  $z$  de l'ordre de 5.

Ceci, ainsi qu'une amélioration des résolutions, constitue à peu près tout ce qu'un cosmologiste est en droit d'attendre de la technologie du futur, sauf révélations imprévues, mais qui ne sont pas si rares dans l'histoire des sciences.

La possibilité de détecter des ondes gravitationnelles, si elles se vérifiait, ouvrirait ainsi à notre connaissance tout un aspect inédit de l'Univers.



**Fig. 1.1** : Dans ce diagramme d'espace-temps, où  $t$  est une coordonnée de genre temps et où  $r$  représente les coordonnées de genre espace,  $O$  est l'évènement spatio-temporel d'où nous observons l'Univers, qui occupe toute la surface du graphique. Sur notre cône de lumière passé, schématisé par le trait hâché, figurent en gras : deux points représentant l'intersection de ce cône avec la surface de dernière diffusion (ou de recombinaison) et deux traits de part et d'autre de  $O$  correspondant aux observations astronomiques de toute nature et à toutes longueurs d'onde effectuées depuis notre système solaire jusqu'à des distances actuellement limitées à  $z \sim 5$ . Le petit trait gras horizontal, en bas du diagramme, symbolise les mesures d'abondances d'éléments légers effectuées dans notre environnement proche,  $z \leq 5$ .



La Fig. 1.1 montre à quel point les données que nous possédons actuellement, et vraisemblablement celles que nous pourrions posséder dans l'avenir, sont limitées par rapport au volume de l'Univers.

Ceci ne remet pas en cause la démarche cosmologique, qui a fait faire à la physique, particulièrement à la physique des particules, et bien sûr à l'astrophysique, des progrès considérables au cours des dernières années. Mais, garder cette image à l'esprit permet :

1. De supposer qu'il pourrait exister plusieurs modèles d'univers, et peut-être une infinité, compatibles avec les données disponibles. Ceci oblige à se montrer très prudent quant aux conclusions à adopter concernant la validité d'un modèle, quelle que soit sa faculté à reproduire les résultats observationnels. Cette remarque s'applique, entre autres, au modèle qui va être présenté dans cette thèse.
2. D'éviter de confondre, avec les résultats bruts des observations, les interprétations et les extrapolations qui en sont faites, soit au nom de choix plus ou moins arbitraires (voir Introduction), soit dans le cadre d'un modèle considéré comme standard.

Il faut, par ailleurs, souligner que, malgré son apparente indigence, la cosmologie observationnelle fournit suffisamment de matériaux à la cosmologie théorique pour lui permettre de forger des modèles capables en retour de bâtir des prédictions vérifiables et parfois vérifiées.

Il convient donc de ne pas non plus sous-estimer la richesse des données disponibles, dont seuls les aspects les plus immédiatement utilisables en cosmologie ont été soulignés dans ce chapitre.

La plupart des objets et phénomènes observables à grande échelle dans l'Univers dépendent de sa géométrie, de sa dynamique et, également, de sa topologie.

Le problème de la topologie de l'Univers est évoqué au paragraphe 1.2.3, où est discuté le Principe Cosmologique.

## 1.2 Cadre théorique général

Les grandes lignes du cadre théorique dans lequel s'inscrivent les travaux présentés dans cette thèse sont tracées dans ce paragraphe.

Les caractéristiques particulières de la classe de modèles proposée sont décrites au chapitre 2.

### 1.2.1 La Relativité Générale

Pour étudier les interactions et évolutions à grande échelle, il est nécessaire de disposer d'une théorie éprouvée de la gravitation.

Toutes les théories modernes classiques (par opposition à quantiques) de gravitation reposent sur le principe d'équivalence dit d'Einstein.

Ce principe se décline en trois volets :

1. Le principe d'équivalence faible : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre dans un champ de gravitation ne dépend ni de sa structure interne, ni de sa composition.
2. L'invariance de Lorentz locale : le résultat de toute expérience locale mettant en jeu des interactions non gravitationnelles est indépendant de la vitesse du référentiel en chute libre dans lequel est effectuée cette expérience.
3. L'invariance locale de position : le résultat de toute expérience locale mettant en jeu des interactions non gravitationnelles ne dépend ni de l'instant ni du lieu où cette expérience est réalisée.

Depuis l'avènement de la Relativité Générale, et même depuis le XVII<sup>ème</sup> siècle en ce qui concerne le principe d'équivalence faible, de nombreuses expériences ont été dédiées à la vérification des trois postulats composant cette version faible du principe d'équivalence.

Le principe d'équivalence faible a été testé par des expériences du type Eötvös. Les plus récentes permettent de conclure que des corps de nature différente tombent dans un champ gravitationnel avec la même accélération à  $10^{-12}$  près (voir, par exemple, Su *et al.*, 1994).

L'invariance de Lorentz locale est vérifiée chaque fois que, dans une expérience de physique des hautes énergies, la théorie de la relativité restreinte s'applique. Des séries d'expériences spécialement dédiées au test de ce principe ont été inaugurées par Hughes, Robinson et Beltran-Lopez (1960) et Drever (1961), puis améliorées récemment jusqu'à obtenir une limite de l'anisotropie ou de la dépendance directionnelle de l'énergie du noyau d'éléments lourds égale à  $10^{-25}$  en valeur relative (voir, par exemple, Lamoreaux *et al.*, 1986 ; Chupp *et al.*, 1989).

Le décalage gravitationnel vers le rouge, qui vérifie l'existence d'une dépendance spatiale des valeurs locales des étalons de fréquence ou horloges atomiques dans un champ gravitationnel, généralement terrestre, constitue le principal test de l'invariance locale de position. Une expérience réalisée à bord d'une fusée en 1976 par Vessot et Levine a confirmé les prévisions théoriques avec une précision de  $2.10^{-4}$  (Vessot et Levine, 1979).

Il est donc légitime, au vu des résultats de l'ensemble de ces tests, de retenir que la géométrie de l'Univers est valablement décrite par une théorie de la gravitation vérifiant le principe d'équivalence d'Einstein.

Or, seules théories de la gravitation qui réalisent ce principe sont celles qui satisfont aux postulats des théories métriques :

1. L'espace-temps est muni d'une métrique.
2. Les trajectoires des corps en chute libre sont des géodésiques.
3. Dans un référentiel local, les lois de la physique non gravitationnelle sont celles de la relativité restreinte.

La Relativité Générale est une théorie métrique de la gravitation, mais elle n'est pas la seule.

Les différentes théories métriques se distinguent les unes des autres par la manière dont la matière, et éventuellement d'autres champs gravitationnels (scalaires, vectoriels ou tensoriels), engendrent la métrique. Ces théories peuvent être comparées entre elles dans le cadre du formalisme paramétrisé post-newtonien (PPN). Il s'avère en effet qu'à la limite des champs faibles et des mouvements lents, la plupart de ces théories prédisent des métriques dont la structure peut être caractérisée par dix paramètres sans dimension. Ce nombre peut être ramené à cinq pour les théories munies d'une loi de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement ou reposant sur un principe de moindre action.

Il se trouve qu'un certain nombre d'effets prédits par ces théories métriques ont une amplitude dépendant de la valeur prise par un ou plusieurs de ces paramètres PPN. Ces effets ont été mesurés au cours d'expériences destinées à évaluer la validité des différentes théories disponibles, dont la Relativité Générale.

Des tests dits "classiques" ont été réalisés à l'intérieur du système solaire. Ils mettent en jeu les effets suivants:

- La courbure des rayons lumineux par le Soleil : l'analyse de dix années de mesures réalisées avec le VLBI par Robertson, Carter et Dillinger (1991) donne une valeur du paramètre PPN  $\gamma$  compatible avec celle qu'il possède en Relativité Générale à  $2 \cdot 10^{-4}$  près.

- Le retard subi par la fréquence de signaux lumineux lors de leur passage au voisinage du Soleil (effet Shapiro) : les résultats les plus précis ont été obtenus à partir du programme Viking utilisant des signaux radio échangés entre la Terre et Mars. Le paramètre  $\gamma$  a été mesuré à sa valeur en Relativité Générale à  $2 \cdot 10^{-3}$  près (Reasenberg *et al.*, 1979).

- L'avance du périhélie de Mercure : cet effet dépend des paramètres PPN  $\beta$  et  $\gamma$ , mais également de l'aplatissement éventuel du Soleil mesuré par le moment quadrupolaire  $J_2$  de son champ gravitationnel. Shapiro et ses collaborateurs ont mesuré une avance du périhélie compatible à  $3 \cdot 10^{-3}$  près avec les valeurs prises par  $\beta$  et  $\gamma$  en Relativité Générale, sous réserve que  $J_2$  soit de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-7}$  (Shapiro, 1989). Une valeur de  $J_2 = 1,7 \cdot 10^{-7}$  a été confirmée peu après (Brown *et al.*, 1989).

Le principe d'équivalence possède, par ailleurs, une version forte qui s'énonce ainsi:

1. Le principe d'équivalence faible s'applique non seulement aux corps tests mais également aux corps auto-gravitants (corps de dimension planétaire ou stellaire possédant leur propre énergie interne d'origine gravitationnelle).
2. Le résultat de toute expérience locale, gravitationnelle ou non, est indépendant de la vitesse du référentiel en chute libre dans lequel est réalisée l'expérience.
3. L'invariance locale de position s'applique comme dans le principe d'équivalence d'Einstein.

La Relativité Générale est la seule théorie métrique de gravitation connue vérifiant ce principe d'équivalence fort. La vérification expérimentale de ce principe constitue donc un test de validité pour cette théorie.

L'éventuelle violation du principe d'équivalence faible par des corps massifs auto-gravitants, ou effet Nordtvedt, est régulièrement testée depuis la pose sur la Lune, par Apollo 11, en 1969, d'un réflecteur (programme lunar laser-ranging, LURE). A ce jour, aucune élongation apparente de l'orbite de la Lune dans la direction Terre-Soleil n'a pu être mise en évidence (voir, par exemple, Adelberger *et al.*, 1990 ; Müller *et al.*, 1991).

Cette expérience d'Eötvös à grande échelle, testant l'accélération de la Terre et de la Lune dans le champ de gravitation du Soleil, ne permet donc pas d'invalidiser le volet 1 du principe fort.

Différents effets pouvant provenir de la violation du volet 2 ont également été imaginés et recherchés. Certains sont liés à la vitesse du laboratoire par rapport au référentiel propre de l'Univers (effets de référentiel privilégié), d'autres à la localisation du laboratoire par rapport à un corps gravitant proche (effets de localisation privilégiée). Ces effets induiraient en particulier des variations et des anisotropies de la constante gravitationnelle mesurée localement, conduisant à des effets de marée anormaux sur Terre, des variations de sa vitesse de rotation, des contributions anormales au décalage des périhélie de Mercure et de la Terre, des auto-accélération de pulsars et des oscillations anormales de l'axe de rotation du Soleil par rapport au plan de l'écliptique. Une recherche infructueuse de tels effets a généré de fortes contraintes sur certains des paramètres PPN, en faveur de la Relativité Générale.

Une autre conséquence possible de l'éventuelle violation du volet 2 du principe fort est la variation de la constante gravitationnelle dans le temps. Grâce encore aux programmes Viking et LURE, une limite supérieure à la variation relative de cette constante sur un an a pu être fixée à  $10^{-11}$  (Shapiro, 1989 ; Müller *et al.*, 1991).

De nombreuses autres expériences ont été mises en oeuvre afin de vérifier la validité de la Relativité Générale (pour une revue, voir, par exemple, Will, 1992).

Jusqu'à présent, elle a résisté à tous les tests tendant à l'invalidiser. C'est donc elle qui est retenue comme cadre théorique aux travaux présentés dans cette thèse.

## 1.2.2 La conservation de l'énergie

La loi de conservation de la masse-énergie constitue l'un des piliers de la physique moderne et il n'existe pas d'exemple qu'elle ait été mise expérimentalement en défaut.

Un modèle d'univers quasi-stationnaire, développé voici une cinquantaine d'années par Bondi, Gold et Hoyle (Bondi et Gold, 1948 ; Hoyle, 1948) et encore défendu de nos jours par un nombre restreint de cosmologistes, viole toutefois ce principe, mais à un niveau indétectable en laboratoire. Un tel univers a toujours été en expansion et le restera éternellement car une génération continue de matière lui permet de conserver indéfiniment

la même densité et la même température. Pour cela, la création de  $10^{-43}$ g par seconde par  $\text{cm}^3$  suffit.

Cet univers n'a donc jamais connu ni la nucléosynthèse, ni la recombinaison, et les galaxies y sont immuables. De plus, la Relativité Générale n'y est pas la bonne théorie de la gravitation.

Compte tenu de l'ensemble des données expérimentales qui viennent d'être rappelées plus haut, il semble de nos jours difficile de défendre un modèle de ce type.

La loi de conservation de la masse-énergie est donc retenue dans cette thèse.

### 1.2.3 Le Principe Cosmologique

Le modèle cosmologique standard du Big-Bang chaud repose sur une hypothèse, posée en Principe Cosmologique par Einstein (1917) : l'Univers est homogène à grande échelle.

L'existence des étoiles, galaxies et amas de galaxies, caractéristique d'une répartition de matière inhomogène à petite échelle, ne remet pas en cause ce principe. Ces objets ne révèlent que d'infimes perturbations de la métrique.

La justification standard du Principe Cosmologique repose sur deux arguments :

- le premier, de nature observationnelle, s'appuie sur l'isotropie - ou quasi-isotropie - du RFC et, dans une moindre mesure, car les données sont moins lisibles, sur le fait que les structures de l'Univers semblent distribuées autour de nous de façon isotrope.

- le second, de type copernicien, postule que, notre localisation n'étant pas particulière, l'isotropie que nous observons doit pouvoir l'être de n'importe quel autre point de l'Univers.

Un univers de distribution de matière isotrope en tout point étant homogène, le Principe Cosmologique en découle.

Le premier argument, s'il semble compatible avec les données actuellement disponibles, reste toutefois à vérifier, avec une précision acceptable, en ce qui concerne la distribution des structures. Les comptages réalisés à ce jour ne portent que sur des objets principalement composés de matière lumineuse et nous ne possédons que très peu d'informations sur la distribution d'une éventuelle matière sombre. Or celle-ci pourrait représenter une fraction non négligeable de la totalité de la matière présente dans l'Univers.

Le second argument, de nature purement philosophique, n'est pas vérifiable et semble ne pas pouvoir l'être dans un avenir prévisible.

L'hypothèse d'homogénéité découle, par ailleurs, d'un choix topologique, le plus souvent implicite : l'Univers serait simplement connexe.

Si l'Univers est, en effet, doté d'une topologie multiplement connexe, même si sa maille élémentaire n'est pas homogène, la répétition de cette maille à l'infini peut donner une illusion d'homogénéité à grande échelle.

Les résultats obtenus jusqu'à présent par les études de distribution des amas de galaxies et la recherche d'images fantômes excluent de manière définitive un univers multiplement connexe de dimensions inférieures à 100 Mpc (Lachièze-Rey et Luminet, 1995).

Dans cette thèse, est retenue la quasi-isotropie de l'Univers observée autour de notre point d'espace-temps, aux anisotropies de la température du RFC près.

Il en est toutefois proposé une interprétation qui exclut à la fois l'hypothèse d'une topologie multiplement connexe et le principe copernicien "fort" conduisant au Principe Cosmologique : le modèle est inhomogène, à symétrie sphérique, et l'observateur est situé plus ou moins près du centre selon le degré d'inhomogénéité initiale.

Ces caractéristiques sont discutées en détail aux chapitres 3 et 5.

#### 1.2.4 L'approximation de fluide parfait

Un gaz classique à température de laboratoire (300 °K environ) et pression atmosphérique ( $10^5$  Pa) est valablement décrit dans l'approximation de gaz parfait (voir, par exemple, Diu *et al*, 1989).

La validité de cette approximation est proportionnelle à la température et à l'inverse de la pression et de la concentration moléculaire du gaz.

A température ordinaire et pression atmosphérique, le volume moyen occupé par une molécule de gaz parfait est :

$$v = \frac{V}{N} = \frac{k_B T}{P} \simeq 4.10^{-20} \text{ cm}^3 \quad (1.1)$$

où  $V$  est le volume total occupé par le gaz,  $N$ , le nombre de molécules dans ce volume,  $k_B$ , la constante de Boltzmann,  $T$ , la température, et  $P$ , la pression.

La densité numérique est donc d'environ  $2,5.10^{19}$  molécules par  $\text{cm}^3$ .

Bien que la densité moyenne de l'Univers ne soit pas connue avec précision, on estime généralement que la densité critique du modèle standard,  $\rho_c \sim 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ , correspondant à environ  $10^{-5}$  atome d'hydrogène par  $\text{cm}^3$ , possède un ordre de grandeur voisin.

Ainsi donc, même si la température moyenne de l'Univers est inférieure de deux ordres de grandeur à celle d'un laboratoire terrestre ordinaire, il semble légitime d'utiliser l'approximation de fluide parfait pour décrire le fluide cosmique.

Cette approximation, utilisée en cosmologie standard, est donc également retenue ici.

## 1.3 Modèle standard et au-delà

### 1.3.1 Le modèle standard homogène : ses succès, ses problèmes

Le modèle standard de Big-Bang chaud homogène est bâti sur les trois principaux postulats théoriques suivants :

- les lois de la physique actuellement vérifiées sont valables partout et de tout temps, y compris dans l'Univers primordial : ceci s'applique en particulier à la Relativité Générale et à la loi de conservation de l'énergie.

- le Principe Cosmologique

- la description du contenu matériel de l'Univers par une approximation de fluide parfait.

auxquels s'ajoute une quatrième hypothèse, généralement implicite : la topologie de l'Univers est simplement connexe.

La métrique la plus générale décrivant un univers obéissant au Principe Cosmologique, en coordonnées sphériques comobiles et temps propre, est celle de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), qui s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (1.2)$$

$a(t)$  est appelé facteur d'échelle cosmique ou paramètre d'expansion.

Le paramètre de courbure  $k$  est une constante qui peut prendre les valeurs 1, 0 et -1.

Pour  $k = 1$ , les hyper-surfaces spatiales ( $t = \text{const.}$ ) sont elliptiques : l'univers, clos, possède un volume fini.

Pour  $k = 0$ , ces hyper-surfaces sont des espaces euclidiens plats, et pour  $k = -1$ , des hyper-surfaces hyperboliques (univers ouvert). Dans ces deux derniers cas le volume de l'univers est infini.

Pour un fluide parfait homogène et isotrope de densité d'énergie  $\rho c^2$  et de pression  $p$ , les solutions des équations d'Einstein, avec constante cosmologique  $\Lambda$ , sont les équations de Friedmann :

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) a + \frac{\Lambda a}{3} \quad (1.3)$$

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{a^2}{3} (8\pi G\rho + \Lambda) \quad (1.4)$$

le point représentant la dérivation par rapport au temps cosmologique propre  $t$ .

On retient, dans la suite, l'hypothèse  $\Lambda = 0$ .

De l'équation (1.4), on déduit la courbure :

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \left( \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right) \quad (1.5)$$

où la densité critique  $\rho_c$  est définie comme la densité pour laquelle l'univers est plat ( $k = 0$ ).

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (1.6)$$

Si l'on définit le paramètre de densité :

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.7)$$

L'espace est clos ( $k = 1$ ), plat ( $k = 0$ ) ou ouvert ( $k = -1$ ) si  $\Omega$  est respectivement supérieur, égal ou inférieur à 1.

Aux deux équations d'évolution (1.3) et (1.4), pour trois variables  $a, \rho, p$ , il convient d'ajouter une troisième équation, qui est l'équation d'état de la matière, considérée comme un fluide parfait unique :

$$p = w\rho c^2 \quad (1.8)$$

où le paramètre  $w$  est une constante, appelée intervalle de Zel'dovich, telle que :  $0 \leq w \leq 1$ .

Le cas  $w = 0$  (pression nulle) est celui de la poussière et constitue une bonne approximation d'un fluide non relativiste.

Un fluide de particules non dégénérées, ultra-relativistes, à l'équilibre thermodynamique, a pour équation d'état :  $w = \frac{1}{3}$ .

Les équations de Friedmann (1.3) et (1.4) peuvent être déduites l'une de l'autre si l'on fait l'hypothèse de l'expansion adiabatique de l'univers :

$$d(\rho c^2 a^3) = -p da^3 \quad (1.9)$$

Des équations (1.8) et (1.9), on déduit :

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{const.} = \rho_0 a_0^{3(1+w)} \quad (1.10)$$

où l'indice 0 désigne les valeurs prises par les variables au temps présent.

En particulier, pour un univers poussière, dominé par la matière :

$$\rho a^3 \equiv \rho_m a^3 = \text{const.} = \rho_{0m} a_0^3 \quad (1.11)$$



et pour un univers radiatif, dominé par le rayonnement :

$$\rho a^4 \equiv \rho_r a^4 = \text{const.} = \rho_{0r} a_0^4 \quad (1.12)$$

Dans un tel modèle, l'évolution du paramètre d'expansion  $a(t)$ , liée à celle de la densité  $\rho$ , permet d'écrire une histoire énergétique, ou thermique, de l'univers.

On montre qu'il existe un moment particulier de cette histoire où la densité d'énergie du rayonnement, qui évolue en  $a^{-4}$ , devient équivalente à celle de la matière, qui évolue en  $a^{-3}$ . Pour toute la période antérieure à cette époque dite d'égalité, la radiation domine l'univers et l'équation d'état du fluide cosmique s'écrit avec  $w = \frac{1}{3}$ . Pour toute la période postérieure, la densité d'énergie de l'univers est dominée par celle de la matière, d'équation d'état  $w = 0$  (pression nulle).

On démontre, par ailleurs, que la singularité du Big-Bang est inévitable dans tout modèle friedmannien contenant des fluides dont le paramètre d'équation d'état  $w$  est supérieur à  $-1/3$  (ce qui inclut l'intervalle de Zel'dovich).

Le modèle standard de Big-Bang chaud décrit ainsi un univers homogène et isotrope dont l'évolution est gouvernée par les équations de Friedmann, obtenues à partir de celles de la Relativité Générale, dont les principaux constituants sont des fluides de matière et de radiation et dont les propriétés cinématiques sont celles d'un univers en expansion. Il est, de plus, supposé que la composante radiative de la densité d'énergie est d'origine cosmologique, d'où le nom de chaud donné au modèle.

### Les succès du modèle standard

Ce modèle doit son succès à son adéquation à certaines des principales données observationnelles décrites au paragraphe 1.1.

1. Il décrit un univers en expansion qui vérifie la loi de Hubble.

Soit  $d_{pr}$ , la distance propre d'un point  $P$  à un autre point  $P'$ , à l'instant  $t$ . On démontre qu'en métrique FRW, la vitesse radiale relative  $v_r$  entre les points  $P$  et  $P'$  obéit à la loi de Hubble :

$$v_r = H(t)d_{pr} \quad (1.13)$$

où  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  est appelé paramètre ou "constante" de Hubble.

L'équation (1.13) écrite au temps présent  $t_0$  donne la loi observationnelle de Hubble présentée au paragraphe 1.1.1.

2. Il a permis de prédire l'existence, la nature de corps noir et la température du RFC, avant sa découverte par Penzias et Wilson (1965).
3. Il prédit, grâce à un scénario approprié de nucléosynthèse, des abondances pour les éléments légers compatibles avec les observations.

4. Il établit la sensibilité à l'abondance primordiale d'hélium-4 du nombre de familles de particules élémentaires (quarks, leptons, neutrinos). Trois familles, dont le nombre est égal à celui des espèces connues de neutrinos, suffisent ainsi à expliquer les abondances observées.
5. Les limites fixées à l'âge de l'Univers par ce modèle, compte tenu de la fourchette déduite des observations pour la valeur de la constante de Hubble  $H_0$ , sont compatibles avec l'âge des plus vieilles étoiles mesuré dans notre environnement proche.

### Les problèmes du modèle standard

Les propriétés de ce modèle, dont la simplicité n'exclut pas la richesse prédictive, suscitent toutefois un certain nombre de problèmes :

1. Celui de l'origine du spectre primordial des fluctuations de densité nécessaires à la formation des structures : étoiles, galaxies, amas.
2. Le problème de l'horizon : on montre que, dans les modèles FRW possédant un paramètre d'équation d'état  $0 \leq w \leq 1$ , il existe un horizon des particules ou cosmologique, à chaque instant  $t$ . Cet horizon est défini comme le rayon de l'hyper-sphère dans laquelle est inscrit l'ensemble des points de l'Univers susceptibles d'avoir émis à un temps quelconque un signal lumineux reçu à l'instant  $t$  par un observateur situé au centre de cette 3-sphère. L'existence d'un horizon cosmologique est en contradiction avec le Principe Cosmologique d'homogénéité et avec la quasi-isotropie observée du RFC. Ceux-ci impliquent en effet qu'il doit exister une très forte corrélation entre les conditions physiques prévalant dans des régions qui n'ont jamais été en contact causal, car situées les unes en dehors des horizons des autres. On montre, par exemple, qu'à l'époque de la recombinaison, le rayon de la surface de dernière diffusion, c'est-à-dire la taille de l'hyper-sphère sur laquelle le RFC était homogène et isotrope à moins de  $10^{-5}$  près, était au moins dix fois plus grand que l'horizon. Ce problème est analysé plus en détail au chapitre 3.
3. Le problème de la platitude : l'analyse des données observationnelles disponibles, lorsqu'elle est réalisée dans l'hypothèse du modèle standard, implique que le paramètre de densité actuel  $\Omega_0$  soit relativement proche de l'unité. Or, les équations de Friedmann révèlent que la solution  $\Omega = 1$  est une solution instable. En particulier, pour obtenir  $10^{-2} \leq \Omega_0 \leq 1$ , il faut que la densité d'énergie de l'Univers à l'époque de Planck, définie par  $t_{Pl} \simeq 10^{-43}$ s, ait été proche de la densité critique  $\Omega = 1$  à  $10^{-60}$  près. C'est cet ajustement extrêmement fin des paramètres, considéré comme "non naturel", qui aurait permis à l'Univers de survivre au-delà d'une fraction de seconde. Ce problème est généralement connu sous le nom de problème de la platitude (ou de la courbure) de l'Univers, ou encore problème de l'âge (car cette propriété est liée à l'âge minimum de l'Univers actuel), ou encore problème de l'entropie (car une autre façon de poser ce problème conduit à affecter une valeur énorme à l'entropie sans dimension de l'Univers, supérieure à  $10^{86}$ ).

4. Le problème de la constante cosmologique : il y a également plusieurs façon de considérer ce problème. Une analyse détaillée en a été donnée par S. Weinberg (1989). Celui-ci montre, notamment, que la densité d'énergie du vide agit comme une constante cosmologique effective et que la limite supérieure expérimentale qui peut être attribuée à  $\Lambda_{eff}$  induit, en raison de la structure des équations de Friedmann avec constante cosmologique, une contrainte d'ajustement particulièrement fin (à  $10^{-118}$  près!) entre les valeurs de la densité d'énergie du vide et de  $\frac{\Lambda}{8\pi G}$ .
5. Le problème des monopôles : en théorie des particules de grande unification, la brisure spontanée d'une symétrie de rang plus élevé associée au groupe de jauge  $U(1)$  de l'électromagnétisme produit des défauts topologiques de dimension nulle appelés monopôles. Le modèle standard veut que cette transition de phase se produise lorsque la température de l'Univers atteint  $T_{GUT} \sim 10^{16}$  GeV. Si la symétrie brisée est locale, les monopôles formés sont stables. Compte tenu de leur évolution ultérieure, ils devraient de nos jours dominer l'Univers, avec un paramètre de densité de l'ordre de  $10^{16}$ , ce qui semble difficilement être le cas puisqu'aucun monopôle magnétique n'a pu être, jusqu'ici, mis expérimentalement en évidence.

### 1.3.2 Au-delà du modèle standard : l'inflation

Pour résoudre certains des problèmes du modèle de Big-Bang chaud, Brout, Englert et Gunzig (1979) et indépendamment Guth (1981) ont proposé l'hypothèse de l'inflation.

Les premières versions de "vieille", puis de "nouvelle" inflation ayant échoué, Linde (1983) imagina un modèle qui est de nos jours la base de la plupart des scénarios d'inflation en vogue. Le dernier en date, le modèle d'inflation chaotique, propose que l'Univers soit un ensemble de régions distinctes, chacune d'elles connaissant à un moment donné de son histoire une phase d'expansion accélérée, pilotée par un (parfois plusieurs) champ scalaire dénommé inflaton.

Si elle réussit à résoudre efficacement les problèmes de l'origine des fluctuations de densité, de l'horizon, de la platitude et des monopôles, l'inflation possède le défaut de susciter des problèmes nouveaux ou d'en aggraver d'anciens. Les plus génériques, communs aux modèles d'inflation récents, sont les suivants :

1. L'inflaton et l'amplitude des fluctuations : pour générer des fluctuations dont l'évolution soit compatible avec l'amplitude des anisotropies de la température du RFC et avec les inhomogénéités de densité présentes de nos jours à l'échelle des amas de galaxies, le nombre sans dimension correspondant à la constante de couplage du champ scalaire doit posséder une valeur très faible, de l'ordre de  $10^{-14}$  (voir, par exemple, Hawking, 1982; Starobinsky, 1982; Adams, Freese et Guth, 1991). Or, il n'existe actuellement aucune théorie des particules, à cette échelle de grande unification, capable de produire un tel champ, susceptible de jouer le rôle de l'inflaton.
2. Le problème du réchauffage : à la fin de l'inflation, l'inflaton doit se coupler aux champs de matière ordinaire pour créer de la matière et de la radiation. Les méca-

nismes en jeu lors de cette phase, appelée réchauffage (reheating, en anglais), sont encore loin d'être bien compris (voir, par exemple, Kofman, Linde et Starobinsky, 1996 ; Kolb, Linde et Riotto, 1996 ; Khlebnikov et Tkachev, 1996 ; *ibid.*, 1997).

3. Le problème de la constante cosmologique : la valeur du vrai vide du potentiel de l'inflaton agit vis-à-vis de la dynamique gravitationnelle comme une constante cosmologique effective. Le problème de la constante cosmologique, évoqué au paragraphe 1.3.1 dans le cadre du modèle standard homogène, en est d'autant accru (voir, par exemple, Weinberg, 1989).
4. Le problème de l'échelle Super-Planck : dans beaucoup de modèles d'inflation chaotique, la période d'inflation est si longue que des échelles comobiles d'intérêt cosmologique de nos jours correspondent à des échelles d'énergie excédant, au début de l'inflation, de beaucoup celle de Planck . Or, au-delà de telles énergies, interviennent des effets quantiques susceptibles de perturber notre compréhension des phénomènes physiques liés à la gravitation (Brandenberger, 1997).
5. Autre problème lié à l'introduction d'effets quantiques : l'inflation crée dans le champ de gravité du modèle standard des perturbations que l'on traite dans le cadre de la théorie quantique. La cohérence voudrait qu'un cadre également quantique soit utilisé pour étudier l'évolution du fond de gravité uniforme. Or nous ne possédons pour l'instant aucune théorie quantique de la gravitation (Deruelle, 1998).

Il apparaît donc que le modèle standard du Big-Bang chaud, même muni des améliorations apportées par l'inflation, est insuffisant pour décrire de façon parfaitement cohérente une histoire de l'Univers compatible avec l'ensemble des données observationnelles et des théories physiques éprouvées disponibles.

L'objet du travail entrepris dans le cadre de cette thèse est de proposer une classe de modèles d'évolution d'univers qui puisse, à terme, résoudre les problèmes du scénario standard tout en conservant ses prédictions les plus robustes.

# Chapitre 2

## Description de la classe de modèles inhomogènes étudiée

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Le modèle Tolman-Bondi . . . . .	24
2.3	Le modèle Tolman-Bondi plat . . . . .	27
2.4	Croisement des coquilles et problème corrélé . . . . .	28
2.5	Equilibre thermodynamique et définition de la température en cosmologie inhomogène . . . . .	29

---

*L'effort vers la connaissance, par sa nature propre, nous pousse en même temps à l'intelligence de l'extrême variété de l'expérience et à la maîtrise de la simplicité économique des hypothèses fondamentales*

Albert Einstein  
*Comment je vois le monde*

### 2.1 Introduction

La classe de solutions aux équations d'Einstein, proposée, dans cette thèse, comme modèle pour décrire l'évolution de l'Univers, repose, comme il a été dit au paragraphe 1.2.3, sur une interprétation de la quasi-isotropie des structures observées autour de nous qui exclut le Principe Cosmologique ainsi qu'une topologie multiplement connexe : le modèle est inhomogène, à symétrie sphérique et l'observateur est situé plus ou moins près du centre selon le degré d'inhomogénéité de la singularité initiale.

De plus, pour la première approche, évidemment incomplète, que constitue cette thèse, les raisonnements et calculs sont limités à la région de l'Univers dominée par la matière, où le fluide cosmique est décrit dans l'approximation poussière, d'équation d'état  $p = 0$ .

Une classe de solutions des équations d'Einstein, à symétrie sphérique, comportant la poussière comme source d'énergie gravitationnelle, a été proposée par Lemaître (1933), puis reprise par Tolman (1934) et analysée par Bondi (1947).

Ce modèle, connu sous le nom de Tolman-Bondi, est présenté, et ses caractéristiques discutées, dans la suite du présent chapitre.

## 2.2 Le modèle Tolman-Bondi

Dans la notation adoptée par Tarantola (1976), inspirée par celle de Bondi (1947), l'élément de longueur de la métrique s'écrit, en coordonnées comobiles  $(r, \theta, \varphi)$  et temps propre  $t$  :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(r, t) dr^2 - R^2(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.1)$$

Les équations d'Einstein, avec constante cosmologique nulle, et tenseur énergie-impulsion de la poussière, donnent les contraintes suivantes sur les coefficients  $S$  et  $R$  de la métrique :

$$S^2(r, t) = \frac{R'^2(r, t)}{1 + \frac{2E(r)}{c^2}} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2(r, t) - \frac{GM(r)}{R(r, t)} = E(r) \quad (2.3)$$

$$4\pi\rho(r, t) = \frac{M'(r)}{R'(r, t)R^2(r, t)} \quad (2.4)$$

où  $E(r)$  et  $M(r)$  sont deux fonctions de la coordonnée radiale comobile  $r$ , a priori arbitraires, et où un prime dénote la dérivation par rapport à  $r$  et un point, la dérivation par rapport à  $t$ .  $\rho(r, t)$  est la densité d'énergie inhomogène, figurant dans l'expression du tenseur énergie-impulsion de la poussière, et  $G$ , la constante gravitationnelle.

On vérifie facilement que l'équation (2.3) possède des solutions en  $R(r, t)$  différentes selon le signe de la fonction  $E(r)$ , qui sont les suivantes :

1. pour  $E(r) > 0$ ,  $R(r, t)$  s'écrit sous forme paramétrique :

$$R = \frac{GM(r)}{2E(r)} (chu - 1) \quad (2.5)$$

$$t - t_0(r) = \frac{GM(r)}{[2E(r)]^{3/2}} (shu - u)$$

2. pour  $E(r) = 0$

$$R(r, t) = \left[ \frac{9GM(r)}{2} \right]^{1/3} [t - t_0(r)]^{2/3} \quad (2.6)$$

3. pour  $E(r) < 0$ , la solution est obtenue de nouveau sous forme paramétrique :

$$R = \frac{GM(r)}{-2E(r)} (1 - \cos u) \quad (2.7)$$

$$t - t_0(r) = \frac{GM(r)}{[-2E(r)]^{3/2}} (u - \sin u)$$

Ces solutions font intervenir une nouvelle fonction, a priori arbitraire,  $t_0(r)$ .

En reportant l'équation (2.2) dans l'équation (2.1), on obtient :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R'^2(r, t)}{1 + \frac{2E(r)}{c^2}} dr^2 - R^2(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.8)$$

avec pour conditions sur  $R(r, t)$  les équations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7).

Ces équations contiennent quatre fonctions inconnues  $R(r, t)$ ,  $M(r)$ ,  $E(r)$  et  $t_0(r)$ , qu'il convient d'interpréter.

Bondi (1947) a montré que la relation entre la luminosité absolue  $C$  d'une source de rayonnement électromagnétique située en  $r = 0$  et sa luminosité apparente  $U$ , mesurée par un observateur en  $(r, \theta, \varphi)$ , s'écrit :

$$U = \frac{C}{(1+z)^2 R^2(r, t)} \quad (2.9)$$

où  $z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$  est le décalage spectral de la source mesuré en  $r$ .

Après correction de l'effet Doppler classique, on voit que  $U$  est proportionnel à  $\frac{C}{R^2(r, t)}$ , à comparer à la formule ordinairement usitée en astronomie :  $\ell = \frac{L}{4\pi d^2}$ .

$R(r, t)$  peut donc être interprété comme la distance-luminosité à l'origine  $r = 0$  de la particule de coordonnée radiale comobile  $r$  à l'instant  $t$ .

Une discussion de cette propriété est développée au chapitre 5.

Si l'on utilise, pour définir les distances radiales, non pas la distance-métrique issue de l'équation (2.8), mais la distance-luminosité, le volume-luminosité s'écrit :

$$dV_L = R'(r, t) dr \cdot R(r, t) d\theta \cdot R(r, t) \sin \theta d\varphi$$

Ceci permet de définir la masse-luminosité à l'intérieur d'une sphère centrée en  $r = 0$  et de rayon  $r$  comme l'intégrale de  $\rho dV_L$  :

$$\int_0^r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(r, t) R'(r, t) R^2(r, t) \sin \theta = \quad (2.10)$$

$$4\pi \int_0^r \rho(r, t) R'(r, t) R^2(r, t) dr$$

ce qui, d'après la forme intégrale de l'équation (2.4), correspond à  $M(r)$ .

$M(r)$  peut donc s'interpréter comme la masse-luminosité à l'intérieur de la sphère de coordonnée radiale  $r$ . Cette coordonnée étant comobile, il est normal que la masse ainsi définie ne dépende pas de  $t$ .

Avec les interprétations ci-dessus de  $R(r, t)$  et de  $M(r)$ , on reconnaît dans le membre de gauche de l'équation (2.3) :

- un terme d'énergie cinétique par unité de masse :  $\frac{1}{2} \dot{R}^2(r, t)$

- un terme d'énergie potentielle par unité de masse :  $-\frac{GM(r)}{R(r, t)}$

$E(r)$  représente donc l'énergie totale par unité de masse. Elle est indépendante du temps  $t$  et donc conservée.

Si l'on considère, enfin, l'hyper-surface d'équation  $t = t_0(r)$ . D'après les équations (2.5), (2.6) et (2.7), sur cette hyper-surface :

$$R(r, t = t_0(r)) = 0 \quad (2.11)$$

ce qui, reporté dans l'équation (2.4), donne :

$$\rho(r, t = t_0(r)) = \infty \quad (2.12)$$

L'hyper-surface  $t = t_0(r)$  est donc singulière. Dans un modèle cosmologique, elle est interprétée comme hyper-surface de Big-Bang.

Pour calculer la courbure spatiale de toute section tridimensionnelle de cet espace-temps à un instant  $t$  fixé, on considère la partie spatiale de la métrique (2.8) :

$$d\sigma^2 = \frac{R'^2}{1 + \frac{2E}{c^2}} dr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.13)$$

L'instant  $t$  de cette section étant fixé,  $R$  peut être interprété comme une fonction de  $r$  seul. Etant une fonction monotone de  $r$ , elle peut être choisie pour définir la coordonnée comobile  $r$ . Et donc, à l'instant  $t$  :

$$r \equiv R(r, t) \quad (2.14)$$



La métrique (2.13) de la section spatiale s'écrit alors :

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{2E}{c^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.15)$$

La courbure riemannienne scalaire  $G$  de l'espace tridimensionnel possédant cette métrique est la trace du tenseur de Ricci qui lui est associé. Un calcul rapide donne pour cette courbure :

$$G = \frac{4}{c^2 r^2} \frac{d}{dr} [rE(r)] \quad (2.16)$$

La conséquence de cette équation est que les sections spatiales des espaces de type Tolman-Bondi sont plates si, et seulement si :  $E(r) = 0$ . Dans ce cas, l'expression pour  $R(r, t)$  est donnée par l'équation (2.6).

Si, par ailleurs,  $rE(r) \equiv RE(R)$  est une fonction croissante de  $R$ , pour  $t$  fixé, la courbure des 3-espaces est positive. Elle est négative dans le cas opposé.

La courbure spatiale des sections  $t = \text{const.}$  est donc entièrement déterminée par l'énergie totale des particules emplissant l'espace.

Il est intéressant de noter que cette propriété ne s'applique pas obligatoirement à l'espace entier, mais peut ne concerner qu'un groupe de particules occupant une coquille de taille finie. Si, par exemple, toutes les particules de coordonnée comobile  $r$ , telle que :  $r_1 < r < r_2$ , ont une énergie totale nulle, elles sont alors incluses dans une section spatiale plate s'étendant, au moins, de  $r_1$  à  $r_2$ .

Revenons, à présent, à l'espace décrit par la métrique complète (2.8).

Les fonctions  $M(r)$ ,  $E(r)$  et  $t_0(r)$  intervenant dans la détermination des coefficients de cette métrique sont toutes les trois des fonctions arbitraires de la coordonnée radiale comobile  $r$ . Elles peuvent donc être utilisées pour définir un choix particulier de coordonnée et deux quantités physiques indépendantes.

Compte tenu des interprétations proposées ci-dessus,  $M(r)$  est généralement retenue pour définir la coordonnée  $r$ . Dans le cadre de cette thèse, il est ainsi posé :  $M(r) \equiv M_0 r^3$ ,  $M_0$  étant une constante.

## 2.3 Le modèle Tolman-Bondi plat

Les résultats des mesures, qui, lorsqu'ils sont exploités dans le cadre du modèle FRW standard, donnent pour ordre de grandeur du paramètre de densité une valeur proche de la valeur critique, semblent indiquer que nous vivons dans une région de l'Univers à sections spatiales relativement plates.

L'expression (2.6) de  $R(r, t)$  dans un modèle Tolman-Bondi plat ( $E(r) = 0$ ) est beaucoup plus simple et maniable que les équations paramétriques (2.5) ou (2.7) correspondant à des univers fermés ou ouverts.

En raison de considérations pratiques, du type de celles numérotées 3 dans l'Introduction, l'hypothèse de la platitude est, dans cette thèse, extrapolée, selon une pratique numérotée 2, à la totalité de la région de l'Univers dominée par la matière. Celle-ci est donc décrite par un modèle Tolman-Bondi d'énergie totale nulle.

Cette hypothèse devra toutefois être revue si des observations ultérieures venaient à montrer que cette région de l'Univers n'est pas aussi plate qu'elle le semble.

Avec la définition de la coordonnée radiale comobile retenue au paragraphe 2.2 ci-dessus, l'expression (2.6) de  $R(r, t)$  s'écrit :

$$R(r, t) = \left( \frac{9GM_0}{2} \right)^{1/3} r[t - t_0(r)]^{2/3} \quad (2.17)$$

Cette expression, reportée dans l'équation (2.4), donne :

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2\pi G[3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)][t - t_0(r)]} \quad (2.18)$$

## 2.4 Croisement des coquilles et problème corrélé

L'expression de  $\rho$  ci-dessus induit des conséquences qui peuvent, à première vue, paraître inopportunes :

1. La fonction  $\rho(r, t)$  devient infinie non seulement sur la surface de singularité initiale  $t = t_0(r)$ , mais également sur la surface de "croisement des coquilles" (en anglais : shell-crossing), d'équation  $t = t_0(r) + \frac{2}{3}rt'_0(r)$ .
2. Elle prend des valeurs négatives dans la région située entre les deux surfaces singulières de densité infinie, et l'on peut s'interroger sur la signification physique d'une densité d'énergie négative pour de la poussière!

Cette particularité n'est pas propre aux modèles Tolman-Bondi plats. Elle est commune à toute la classe Tolman-Bondi et au-delà, à la plupart des modèles à symétrie sphérique. Elle pose un problème de redéfinition de la coordonnée comobile  $r$  aux points de croisement des coquilles mais doit être considérée comme une particularité purement mathématique.

En astrophysique de l'effondrement gravitationnel ou de l'explosion de supernovae, par exemple, il est courant d'avoir des coquilles de matière dont les trajectoires se croisent, et pourtant la physique de ces phénomènes est généralement bien comprise.

Dans le premier article présenté dans cette thèse, le problème est soulevé et traité comme suit.

La fonction  $t_0(r)$  étant croissante, la surface de croisement des coquilles est située entre l'observateur et la surface de Big-Bang. La fonction  $\rho(r, t)$  possède donc des valeurs négatives dans une portion de la région de l'espace-temps a priori retenue pour décrire l'Univers.

Même si le problème de l'horizon est résolu à l'aide de géodésiques entièrement situées dans la région  $\rho > 0$ , l'existence d'une région  $\rho < 0$  semble devoir être expliquée pour valider la cohérence du modèle. Deux solutions sont proposées au paragraphe 2.2 de cet article :

1. Considérer que, comme la densité d'énergie augmente lorsque l'on se rapproche de la surface de croisement des coquilles par les valeurs décroissantes de  $t$ , la radiation devient la composante dominante au sein de l'Univers, la pression ne peut plus être négligée, et le modèle Tolman-Bondi devient inapplicable.

2. Procéder à une redéfinition de  $\rho$ .

La solution la plus acceptable est toutefois la première.

L'apparition de quantités infinies est généralement considérée en physique comme une aberration à éviter.

Si le modèle Tolman-Bondi poussière peut valablement représenter notre Univers jusqu'aux échelles d'énergie où la composante radiative devient dominante, ceci n'est plus vrai au-delà. La surface de croisement des coquilles, telle qu'elle apparaît dans cette classe de solutions, n'est donc jamais atteinte, et encore moins la région  $\rho < 0$  du modèle.

Il convient de souligner que cette surface de croisement des coquilles peut être considérée comme une véritable singularité physique.

Le coefficient (2.2) de la métrique (2.1) s'annule, en effet, sur cette surface, et un rapide calcul montre que, non seulement la densité d'énergie  $\rho$ , mais également l'invariant de courbure scalaire, y deviennent infinis.

L'Univers observable s'identifie donc, dans ce modèle, à la région  $t > t_0(r) + 2/3rt'_0(r)$ .

En toute rigueur, cependant, seule la région de l'Univers dominée par la densité d'énergie de la matière est valablement représentée par ce modèle.

## 2.5 Equilibre thermodynamique et définition de la température en cosmologie inhomogène

Les travaux qui sont présentés dans les deux chapitres suivants font référence à la température du RFC au sein de modèles d'univers purement inhomogènes, de type Tolman-Bondi.

Une définition rigoureuse de la température du rayonnement en milieu inhomogène est donc indispensable.

Il va être, tout d'abord, montré que l'équilibre thermodynamique local strict d'un gaz de photons immergé dans un espace-temps Tolman-Bondi est impossible.

Il s'agit d'étudier le comportement thermodynamique d'un gaz test de photons, dans l'hypothèse où la densité d'énergie de ce gaz est très inférieure à celle de la poussière. La radiation peut ainsi être négligée en tant que source de champ gravitationnel.

Pour cette étude, la convention d'unités  $G = c = \hbar = k = 1$  est adoptée.

La fonction de distribution d'un gaz de bosons à l'équilibre thermodynamique est de la forme (Ehlers, 1971) :

$$f(x, p) = \frac{1}{a(x) \exp[-\beta_\mu(x) p^\mu] - 1} \quad (2.19)$$

$\beta^\mu$  est un champ de vecteurs de genre temps, orientés vers le futur :

$$\beta^\mu = \beta u^\mu \quad \text{avec} \quad u_\mu u^\mu = -1 \quad (2.20)$$

$u^\mu$  étant la 4-vitesse moyenne du gaz

$$\beta_\mu \beta^\mu = -\frac{1}{T^2} \quad (2.21)$$

$T$  étant la température du gaz.

Supposant que la condition d'équilibre détaillé est vérifiée par les photons, on peut écrire l'équation de Liouville :

$$\mathcal{L}(f) = 0 \quad (2.22)$$

On obtient, alors, la relation entre  $\beta_\mu$  et les composantes du tenseur métrique (Tauber et Weinberg, 1961) :

$$D_\mu \beta_\nu + D_\nu \beta_\mu = 2\lambda(x) g_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

où  $D$  dénote la dérivation covariante et où  $\lambda(x)$  est la fonction scalaire :

$$\lambda(x) = \frac{1}{4} D_\mu \beta^\mu \quad (2.24)$$

Pour des particules de masse au repos  $m$  non nulle,  $\lambda(x) = 0$ . Pour des particules de masse nulle,  $\lambda(x) \neq 0$ . Tauber et Weinberg (1961) déduisent ces propositions de :  $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2$ .

En coordonnées comobiles, la seule composante non nulle du 4-vecteur  $\beta^\mu$  est  $\beta^0$ , ou, en composantes covariantes,  $\beta_0$ , la métrique de Tolman-Bondi (2.8) étant diagonale.

Les équations (2.23), écrites pour chaque couple d'indices  $\mu - \nu$ , donnent, dans cette métrique :

$$\frac{\frac{\partial \beta_0}{\partial t}}{\beta_0} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}'}{R'} + \frac{2\dot{R}}{R} \right) \quad \text{pour } \mu = \nu = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\frac{\partial \beta_0}{\partial t}}{\beta_0} = \frac{3\dot{R}'}{R'} - \frac{2\dot{R}}{R} \quad \text{pour } \mu = \nu = 1 \quad (2.26)$$

$$\frac{\frac{\partial \beta_0}{\partial t}}{\beta_0} = \frac{2\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}'}{R'} \quad \text{pour } \mu = \nu = 2 \quad \text{et } \mu = \nu = 3 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } \mu = 0 \quad \nu = 1 \quad \text{et } \mu = 1 \quad \nu = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour } \mu = 0 \quad \nu = 2 \quad \text{et } \mu = 2 \quad \nu = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{pour } \mu = 0 \quad \nu = 3 \quad \text{et } \mu = 3 \quad \nu = 0 \quad (2.30)$$

Les autres valeurs des indices  $\mu$  et  $\nu$  donnent des équations identiquement nulles.

Les équations (2.28), (2.29) et (2.30) impliquent que  $\beta_0$  ne dépend que de  $t$ .

Les équations (2.25), (2.26) et (2.27) donnent trois expressions différentes pour  $\frac{\partial \beta_0}{\partial t} / \beta_0$  qui doivent évidemment être égales, d'où :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}'}{R'} + \frac{2\dot{R}}{R} \right) = \frac{3\dot{R}'}{R'} - \frac{2\dot{R}}{R} = \frac{2\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}'}{R'} \quad (2.31)$$

L'équation ci-dessus est équivalente à :

$$\frac{\dot{R}'}{R'} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.32)$$

Cette équation intégrée une première fois par rapport à  $t$ , une seconde fois par rapport à  $r$ , implique que  $R(r, t)$  doit être de la forme :

$$R(r, t) = A(t)B(r) \quad (2.33)$$

$A(t)$  et  $B(r)$  étant des fonctions arbitraires de  $t$  et de  $r$ .

Si l'on reporte l'expression (2.33) de  $R(r, t)$  dans l'équation (2.3), il vient :

$$2M(r) = \dot{A}^2(t)A(t)B^3(r) - 2A(t)B(r)E(r) \quad (2.34)$$

que l'on dérive par rapport à  $t$ , d'où :

$$0 = \dot{A}(t)B(r)[2\ddot{A}(t)A(t)B^2(r) + \dot{A}^2(t)B^2(r) - 2E(r)] \quad (2.35)$$

qui a pour solutions non triviales :

1. soit  $\dot{A}(t) = 0$   
qui équivaut à  $R(r, t) = R(r)$  et correspond à un espace-temps statique avec  $\rho = \rho(r)$ .

2. soit :

$$2E(r) = B^2(r)[2\ddot{A}(t)A(t) + \dot{A}^2(t)] \quad (2.36)$$

ce qui implique,  $E(r)$  étant une fonction de  $r$  seul :

$$2E(r) = E_0B^2(r) \quad (2.37)$$

$E_0$  étant une constante arbitraire vérifiant :

$$E_0 = 2\ddot{A}(t)A(t) + \dot{A}^2(t) \quad (2.38)$$

Avec les conventions d'unités retenues, et en y reportant les expressions (2.33) de  $R(r, t)$  et (2.37) de  $2E(r)$ , la métrique (2.8) s'écrit :

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[ \frac{B^2(r)}{1 + E_0B^2(r)} dr^2 + B^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (2.39)$$

$B(r)$  peut alors être utilisée pour définir la coordonnée comobile  $r$ , en posant :

$$r \equiv B(r) \quad (2.40)$$

Après changement de coordonnée, la métrique devient :

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 + E_0r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (2.41)$$

Il s'agit de la métrique (1.2) de l'espace-temps FRW, avec  $A(t) \equiv a(t)$  et  $E_0 = -k$ .

En conclusion, dans un espace-temps de la classe Tolman-Bondi, l'hypothèse que la radiation est dans un état d'équilibre thermique local implique :

- soit que l'espace-temps est statique
- soit qu'il s'agit d'une solution FRW.

Ce résultat peut être rapproché de celui obtenu par Chernikov (1962). Cet auteur démontre qu'un gaz parfait de particules de masse nulle, présentant une distribution relativiste de Maxwell-Boltzmann, plongé dans un espace-temps quelconque, impose aux composantes  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique une condition qui s'écrit :  $g_{\alpha\beta} = \rho(x^0, x^1, x^2, x^3)h_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)$ . Le tenseur métrique ne diffère du tenseur statique que d'un facteur scalaire arbitraire inhomogène  $\rho$ .

Le résultat obtenu ci-dessus dans le cas particulier de la métrique Tolman-Bondi peut être directement déduit de la condition de Chernikov.

Il faut toutefois se garder de ne considérer ce résultat que comme la simple application, à une métrique particulière, de cette condition. Il est, en effet, obtenu pour la forme la plus générale de la statistique de Bose-Einstein, cf. l'équation (2.19), tandis que Chernikov n'établit sa condition que pour le cas particulier d'une distribution de Maxwell-Boltzmann.

Ce résultat ne peut non plus être assimilé à une application du théorème Ehlers-Geren-Sachs (1968). D'après ce théorème, en effet, la métrique doit être statique ou FRW dans la mesure où le gaz source du champ gravitationnel possède une fonction de distribution obéissant à l'équation de Liouville.

Dans le cas étudié ici, il suffit que cette propriété soit vérifiée par un gaz test de photons immergé dans un espace-temps dont la géométrie est générée par de la poussière, à propos de laquelle aucune hypothèse d'équilibre thermique n'est nécessaire, pour que cette condition s'impose à la métrique.

Dans un univers de type Tolman-Bondi purement inhomogène, il ne peut donc y avoir équilibre thermodynamique local rigoureux de la radiation. La température du rayonnement ne peut alors y être strictement définie.

Pour utiliser, dans une telle classe de modèles, la notion de température du RFC, son équilibre thermodynamique local ne peut être considéré que comme une approximation, dans des conditions restant à définir.

Supposons un univers rempli d'un gaz de particules identiques, de densité numérique  $n$ , et de photons. La section efficace des collisions particule-photon est notée  $\sigma$ .

Les photons étant relativistes, de vitesse  $c$ , le temps moyen entre deux collisions est :

$$t_{coll} = \frac{1}{\sigma n c} \tag{2.42}$$

Si l'univers est homogène ( $n = n(t)$ ), au bout d'un temps  $t \gg t_{coll}$ , ( $t \sim 10 t_{coll}$ ), la fonction de distribution des photons devient planckienne. La matière a thermalisé le rayonnement.

Dans le cas d'un univers inhomogène ( $n = n(r, t)$ ), la longueur caractéristique des fluctuations de densité  $L$  s'écrit :

$$L = \frac{n}{\frac{\partial n}{\partial r}} \quad (2.43)$$

Le libre parcours moyen des photons est :

$$L_{coll} = \frac{1}{\sigma n} \quad (2.44)$$

Dans leur présentation de la théorie ETL (Equilibre Thermodynamique Local), Cox et Giuli (1968) discutent les domaines de validité de cette théorie.

L'hypothèse fondamentale de l'ETL est que les lois de distribution décrivant l'état de la matière et des photons en un point sont les lois d'équilibre thermodynamique pour une température, commune en chaque point à la matière et à la radiation, qui est la température cinétique locale des électrons.

En particulier, en un point où la température cinétique locale des électrons est  $T_k$ , le champ de radiation est décrit, avec une bonne approximation, par une fonction de Planck,  $B_\nu(T_k)$ .

La condition de validité de cette hypothèse ETL est que le nombre  $N$  d'absorptions-réémissions successives par la matière, qu'un photon moyen doit subir pour diffuser sur la distance  $L$  séparant deux régions de caractéristiques physiques, mesurées par exemple par  $T_k$ , appréciablement différentes, doit vérifier  $N \gg 1$ .

$L_{coll}$  étant le libre parcours moyen des photons entre deux absorptions-réémissions, on peut écrire:

$$\frac{L}{L_{coll}} \sim N^2 \quad (2.45)$$

La condition de validité ci-dessus s'écrit donc :

$$L_{coll} \ll L \quad (2.46)$$

Dans un univers inhomogène, l'approximation d'équilibre thermodynamique local de la radiation, et donc la définition de sa température par la loi de Stefan :  $n_\gamma = a_n T^3$ , est valable si l'échelle caractéristique des inhomogénéités de densité  $L = \frac{n}{\frac{\partial n}{\partial r}} = \frac{\rho}{\frac{\partial \rho}{\partial r}}$  est beaucoup plus grande que la longueur caractéristique de l'interaction photon-baryon  $L_{coll} = \frac{1}{\sigma n}$ .



# Chapitre 3

## Une solution au problème de l'horizon

### Sommaire

---

3.1	Le problème de l'horizon en cosmologie standard . . . . .	35
3.2	Article 1 : A solution to the horizon problem : a delayed Big-Bang singularity . . . . .	38
3.3	Méthode numérique . . . . .	39

---

*Au sein d'un univers de structure convergente, la seule façon possible pour un élément de se rapprocher des éléments voisins est de resserrer le cône, c'est-à-dire de faire se mouvoir dans la direction du sommet la nappe entière du Monde où il se trouve engagé.*

Pierre Teilhard de Chardin  
*Hymne de l'Univers*

### 3.1 Le problème de l'horizon en cosmologie standard

Le problème de l'horizon a été évoqué au paragraphe 1.3, parmi les principales questions que pose le modèle standard de Big-Bang chaud. Il est revu ici plus en détail.

Dans un modèle friedmannien de paramètre d'expansion  $a(t)$ , l'ensemble des points de l'univers susceptibles d'avoir émis, à un instant quelconque, un signal lumineux reçu au temps  $t$  par un observateur situé à l'origine ( $r = 0$ ) s'inscrit dans une sphère de rayon :

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \quad (3.1)$$

$R_H(t)$  est appelé horizon des particules de l'observateur à l'instant  $t$  et n'existe que si l'intégrale converge.

On montre qu'il existe un horizon dans les modèles FRW possédant un paramètre d'équation d'état  $0 \leq w \leq 1$ . Cette condition est vérifiée pour tout univers dont l'histoire se scinde en deux régions : l'une dominée par la radiation ( $w = \frac{1}{3}$ ), l'autre, par la poussière ( $w = 0$ ), ce qui est le cas en modèle standard.

Si le paramètre d'expansion  $a(t)$  tend vers zéro aux temps primordiaux comme  $t^\beta$  (avec  $\beta > 0$ ), l'horizon des particules au temps  $t$  existe si  $\beta < 1$ , condition de convergence de l'intégrale ci-dessus.

La première équation (1.3) de Friedmann, avec constante cosmologique nulle, donne, pour  $a(t) \propto t^\beta$  :

$$\beta(\beta - 1) = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) t^2 \propto \ddot{a} \quad (3.2)$$

On en déduit que la condition d'existence du Big-Bang,  $\ddot{a} < 0$ , implique  $0 < \beta < 1$ , la convergence de l'intégrale dans l'expression de  $R_H(t)$  et donc l'existence d'un horizon.

Il a été montré au chapitre 1 comment l'existence de cet horizon cosmologique est en contradiction avec l'hypothèse fondatrice de la cosmologie standard, à savoir le Principe Cosmologique.

Une façon de visualiser ce problème de l'horizon est de le représenter en temps conforme, sur un diagramme d'espace-temps (Fig. 3.1).

En introduisant une coordonnée  $\eta$ , appelée temps conforme, dans la métrique (1.2), par la transformation :  $dt = ad\eta$ , on obtient :

$$ds^2 = a^2(\eta)(c^2 d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j) \quad (3.3)$$

Les géodésiques nulles sont alors des droites de pente  $\pm 1$ .

On voit, sur la Fig. 3.1, que les points  $P_1$  et  $Q_1$  de la surface de dernière diffusion n'ont jamais été en contact causal puisqu'il est impossible de remonter dans le passé plus loin que le Big-Bang.

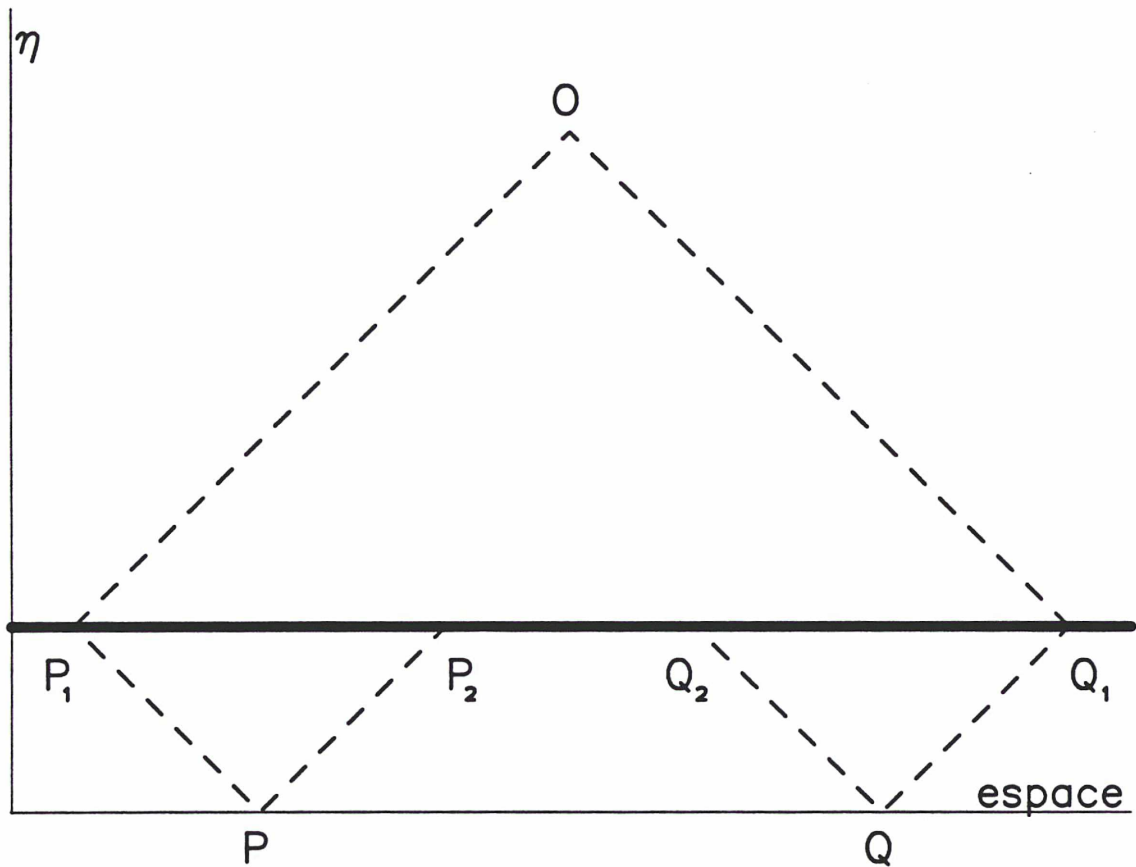
Il est donc difficile d'expliquer comment la température du RFC peut être observée homogène et isotrope à moins de  $10^{-5}$  près.

L'hypothèse de l'inflation apporte une solution très élégante à ce problème.

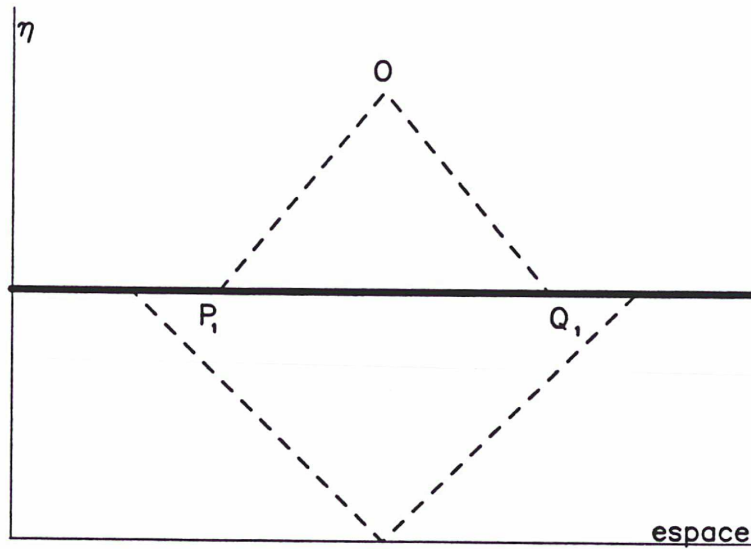
Dans une région de l'Univers primordial caractérisée par une phase d'expansion accélérée, la taille comobile de l'horizon décroît entre le début et la fin de cette phase dite d'"inflation", tandis qu'elle croît comme  $t^\beta$  en dehors de cette période.

Toute échelle comobile de taille inférieure à celle de l'horizon au début de l'inflation mais supérieure à celle de l'horizon à la fin de cette période, pénètre une première fois dans l'horizon avant le début de l'inflation. Elle devient alors causalement connectée jusqu'à sa sortie de l'horizon dans le courant de la phase d'inflation.

Si la taille de l'horizon en début d'inflation est inférieure à celle de l'horizon actuel, cette échelle comobile va pénétrer une seconde fois à l'intérieur de l'horizon entre la fin



**Fig. 3.1** : Dans ce diagramme conforme d'espace-temps,  $O$  est l'évènement, ici et maintenant, d'où nous observons la surface de dernière diffusion représentée par le trait gras horizontal. Les points d'intersection  $P_1$  et  $Q_1$  de notre cône de lumière passé avec cette surface appartiennent aux cônes de lumière futurs de deux points  $P$  et  $Q$  situés sur la surface de Big-Bang, d'équation  $\eta = 0$ . Les zones de relation causale sur la surface de dernière diffusion,  $P_1P_2$  et  $Q_1Q_2$  ne se recoupent pas.



**Fig. 3.2** : Dans ce diagramme conforme, la surface de dernière diffusion est plus “éloignée” de la surface de Big-Bang que dans la Fig. 3.1. La région  $P_1Q_1$ , observable depuis  $O$ , est alors causalement connectée.

de l’inflation et notre époque présente. Un observateur, qui ignorerait l’existence de l’inflation, pourrait penser que cette échelle pénètre dans l’horizon pour la première fois et, s’il la trouve homogène, se croirait confronté à un problème d’horizon.

Une représentation de la résolution de ce problème par l’inflation est proposée Fig. 3.2. On considère que, dans le diagramme de la Fig. 3.1, la “distance” cosmologique entre le Big-Bang et la surface de dernière diffusion est dilatée. Les points  $P_1$  et  $Q_1$  sont donc inclus à l’intérieur du cône de lumière futur issu d’un point unique situé sur la surface de Big-Bang.

Une autre façon de résoudre le problème consiste à remplacer la dilatation des “distances” par une géométrie de l’espace-temps qui, en courbant les géodésiques, permette de rétablir la connexion causale de  $P_1$  et  $Q_1$  avant d’atteindre la surface de Big-Bang.

C’est une solution de ce type, faisant intervenir un modèle d’univers inhomogène à singularité initiale “retardée”, qui est adoptée dans cette thèse et analysée au paragraphe 3.2 ci-dessous.

### 3.2 Article 1 : A solution to the horizon problem : a delayed Big-Bang singularity

# A solution to the horizon problem: a delayed Big-Bang singularity

M.N. Célérier, J. Schneider

*Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, Observatoire de  
Paris-Meudon, 92195 Meudon Cédex, France*

---

## Abstract

One of the main drawbacks of standard cosmology, known as the horizon problem, was until now thought to be only solvable in an inflationary scenario. A delayed Big-Bang in an inhomogeneous universe is shown to solve this problem while leaving unimpaired the main successful features of the standard model.

---

## 1 Introduction

Standard cosmology is known to rest on three observational pillars: the expansion of the universe following Hubble law, the nearly isotropic black body cosmic microwave background radiation (CMBR) and the abundances of light elements produced during nucleosynthesis.

Besides these successful predictions, it leaves ununderstood other peculiar features of the observed universe.

In the present letter, a large class of initial singularity surfaces, the study of which has been initiated in a previous work [1], will be used to address one of the drawbacks of standard cosmology: the horizon problem.

The problem is the following: in hot Big-Bang (BB) universes, the comoving region over which the CMBR is observed to be homogeneous to better than one part in  $10^5$  is much larger than the comoving future light cone from the BB to the last scattering surface. The latter provides the maximal distance over which causal processes could have propagated since a given point on the BB surface. Hence, the observed quasi-isotropy of the CMBR remains unexplained.

Solving this problem was one of the main purposes of the inflationary paradigm

as it was first put forward by Brout, Englert and Gunzig [2] in 1979 and independently by Guth [3] in 1981. But, as inflationary scenarii inflated, some self-produced undesirable features came into the way: for instance, reheating is not actually well understood and important details are still under study [4].

But despite these drawbacks, inflation has by now become a quasi-standard paradigm as it was thought to be the only way to deal with the major horizon problem.

Following a suggestion by Hu, Turner and Weinberg [5], Liddle [6] has even proposed a proof that inflation is the only possible causal mechanism capable of generating density perturbations on scales well in excess of the Hubble radius, and hence the only way of solving the horizon problem.

As it was stressed by these authors, this problem involves the homogeneity and isotropy of the Freedmann-Robertson-Walker (FRW) model, proceeding from the Cosmological Principle upon which rests standard cosmology. Liddle's entire argument depends only on the properties of the FRW metric.

The so-called Cosmological Principle is in fact not an a priori principle, but at most a simplifying working hypothesis: the universe being as it is, all astrophysics can do is to build models compatible with observation, should they contradict the Cosmological Principle. We come back to this point in the discussion.

The purpose of this letter is to solve the horizon problem by means of a delayed BB singularity in an inhomogeneous model of universe, thus discarding this Principle. For simplicity, we use a Tolman-Bondi model, since it allows a fully analytical exact reasoning.

This model will be described in section 2. Calculations and arguments will be developed in section 3 and some examples given in section 4. Section 5 will be devoted to a brief discussion of the results and to the conclusion.

## **2 An inhomogeneous delayed Big Bang model**

In an expanding universe, going backward along the parameter called the cosmic time  $t$  means going to growing energy densities and temperatures.

As one goes down the past, from our present matter dominated age defined by the constant temperature hypersurface  $T \sim 2.73^\circ K$ , one reaches an epoch when the radiation energy density overcomes the matter one. This radiation dominated area lasts until Planck time,  $T_{Pl} \sim 10^{19} GeV$ , which marks the

limit beyond which quantum gravitational effects are expected to confuse our understanding of the laws of physics.

To deal with the horizon problem, one has to compute light cones. As will be further shown, a large class of models can be found for which the horizon problem is solved by means of light cones never leaving the matter dominated area. We will thus retain the Tolman-Bondi model for dust, an ideal non zero rest mass pressureless gas.

### 2.1 The class of Tolman-Bondi models retained

The Bondi line-element [7], in comoving coordinates  $(r, \theta, \varphi)$  and proper time  $t$ , is:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + S^2(r, t) dr^2 + R^2(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

Solving Einstein's equation for this metric with the dust stress-energy tensor gives:

$$S^2(r, t) = \frac{R'^2(r, t)}{1 + 2E(r)/c^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2(r, t) - \frac{GM(r)}{R(r, t)} = E(r) \quad (3)$$

$$4\pi\rho(r, t) = \frac{M'(r)}{R'(r, t)R^2(r, t)} \quad (4)$$

where a dot denotes differentiation with respect to  $t$  and a prime with respect to  $r$ .  $\rho(r, t)$  is the energy density of the matter.

$E(r)$  and  $M(r)$  are arbitrary functions of  $r$ .  $E(r)$  can be interpreted as the total energy per unit mass and  $M(r)$  as the mass within the sphere of comoving radial coordinate  $r$ .

$M(r)$  remaining constant with time, it is used to define a radial coordinate  $r$ :  $M(r) \equiv M_0 r^3$ , where  $M_0$  is a constant.

Equation (3) can be solved and gives a parametric expression for  $R(r, t)$  for  $E(r) \neq 0$  and an analytic one for  $E(r) = 0$ .

As there are evidences that the observed universe does not present appreciable spatial curvature, it can be reliably approximated by a flat  $E(r) = 0$  Tolman-Bondi model.

With the above definition for the radial coordinate  $r$ ,  $R(r, t)$  possesses thus an analytical expression, which we write:

$$R(r, t) = \left(\frac{9GM_0}{2}\right)^{1/3} r[t - t_0(r)]^{2/3} \quad (5)$$

$t_0(r)$  is another arbitrary function of  $r$ , representing the BB singularity surface for which  $R(r, t) = 0$ . One can always choose  $t_0(r) = 0$  at the center ( $r = 0$ ) of the universe by an appropriate translation of the  $t = \text{const.}$  surfaces and describe our universe by the  $t > t_0(r)$  part of the  $(r, t)$  plane, increasing  $t$  corresponding to going from the past to the future.

Equation (5) substituted into equation (4) gives:

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2\pi G[3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)][t - t_0(r)]} \quad (6)$$

## 2.2 Shell-crossing

The above expression for  $\rho$  leads to two undesirable consequences:

1) The energy density goes to infinity not only on the BB surface  $t = t_0(r)$ , but also on the shell-crossing surface:

$$t = t_0(r) + \frac{2}{3}rt'_0(r) \quad (7)$$

2) This energy density presents negative values in the region of the universe located between the shell-crossing surface (7) and the BB singularity, corresponding to  $3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r) < 0$  and  $t - t_0(r) > 0$ . One can wonder what does physically mean a negative energy density for dust.

Shell-crossing is thus generally considered as a mischief of Tolman-Bondi models and physicists usually try to avoid it [8], e.g. by assuming  $t'_0(r) \leq 0$  for all  $r$ .

But, as will be developed in next section, we need an increasing BB function  $t_0(r)$  to solve the horizon problem. Let us hence briefly show how to circumvent these two difficulties while keeping  $t'_0(r) > 0$ .

1) A way out the shell-crossing surface problem is to consider that, as the energy density increases while reaching its neighbourhood from higher values



of  $t$ , radiation becomes the dominant component of the universe, pressure can no more be neglected and the Tolman-Bondi model does no longer hold.

2) A negative value of  $\rho$  proceeds from a negative value of  $R'$  in equation (4) .

The physical definition of energy density is:

$$\rho \equiv \frac{\delta M}{\delta V} \quad (8)$$

$\delta M$  being the element of mass in an element of volume  $\delta V$ .

The element of 3-volume corresponding to the flat Tolman-Bondi metric, i.e. metric (1) with  $S^2(r, t) = R'^2(r, t)$ , is:

$$\delta V = R' R^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (9)$$

which, when integrated over  $\theta$  and  $\varphi$ , becomes:

$$\delta V = 4\pi R' R^2 dr \quad (10)$$

As the physical volume  $\delta V$  is by convention always positive, equation (10) possesses a physical meaning only if it is written:

$$\delta V = 4\pi |R'| R^2 dr \quad (11)$$

And thus, in equation (4), one has to replace  $R'$  by  $|R'|$ <sup>1</sup>, which gives in equation (6):

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2\pi G |3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)| [t - t_0(r)]} \quad (12)$$

However, as, in the following, the light cones of interest never leave the region situated above the shell-crossing surface in the  $(r, t)$  plane,  $3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)$  remains positive and equation (6) holds.

### 2.3 Definition of the temperature

In the course of this letter, we shall be led to use surfaces of constant temperature  $T$ . Since the universe is not homogeneous, there is, at a given  $t$ , no

---

<sup>1</sup> pour une formulation plus rigoureuse, voir paragraphe 2.4, chapitre 2

global thermodynamical equilibrium, and  $T$  is not readily defined. We assume that the characteristic scale of the  $\rho$  inhomogeneity is much larger than the characteristic length of the photon-baryon interaction and that there is always a local thermodynamical equilibrium. This enables us to define a local specific entropy  $S$  by:

$$S(r) \equiv \frac{k_B n_\gamma(r, t) m_b}{\rho(r, t)} \quad (13)$$

where  $m_b$  is the baryon mass and  $k_B$  the Boltzmann constant.

We then define  $T$  by:

$$n_\gamma = a_n T^3 \quad (14)$$

where  $a_n = \frac{2\zeta(3)k_B^3}{\pi^2(\hbar c)^3}$

The following expression for  $T$  can then be obtained from equations (12) to (14):

$$T(r, t) = \left( \frac{S(r)}{2\pi G k_B m_b a_n |3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)|[t - t_0(r)]} \right)^{1/3} \quad (15)$$

The equation of the  $T = \text{const.}$  surfaces located after the shell-crossing surface, i.e. with  $3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r) > 0$ , is thus the positive solution of the second order in  $t$  equation derived from equation (15):

$$t = t_0(r) + \frac{r}{3}t'_0(r) + \frac{1}{3}\sqrt{r^2 t_0'^2(r) + \frac{3S(r)}{2\pi G k_B a_n m_b T^3}} \quad (16)$$

#### 2.4 The “centered Earth” assumption

In this first approach of a delayed BB solution, the Earth will be assumed situated sufficiently close to the “center” of the universe, so as to justify the approximation  $r_p = 0$ , the subscript  $p$  referring to our actual location at the present time. We shall comment on this “center” of the universe in the final discussion.

The value  $S_p$  of the entropy function at  $(r_p, t_p)$  is  $S_p = k_B \eta_p$ ,  $\eta_p$  being the present local photon to baryon density ratio, which is taken to be of order  $10^8$ .

Remembering that  $t_0(r=0)$  has been chosen to be zero, one can add to the specifications of the  $t_0(r)$  function:

$$rt'_0|_{r=0} = 0$$

to get at ( $r = 0$ ):

$$\begin{array}{ll} t_p \sim 3.10^{17}s & \text{for } T_p = 2.73^\circ K \\ t_{ls} \sim 6.10^{12}s & \text{for } T_{ls} = 4000^\circ K \end{array}$$

These values are of the same order of magnitude as in the standard hot BB model. The nucleosynthesis scenario would thus approximately be the standard one for the here described universe in the vicinity of  $r = 0$ , provided the characteristic length of the density inhomogeneities is much larger than the mean free path of the nucleons. This latter condition will be discussed in section 5.

As the light elements abundances predicted by standard cosmology fit rather well the data observed in our neighbourhood, the choice of the “center” of the universe for the location of the Earth seems justified, as far as the above cited condition obtains.

This good agreement between the observed data and the abundances predicted by the standard model led Liddle [6] to adopt the Cosmological Principle and thus assert that the FRW metric obtains for the whole universe. This was a key-assumption for his tentative proof discussed in our Introduction.

But this assumption seems exceedingly narrowing as far as the present available data have been measured in our direct neighbourhood as compared to cosmological distances - the today most remote measured abundances are for deuterium at redshifts  $z < 5$  [9]. The “centered Earth” assumption seems thus enough to complete the game.

### 3 Solving the horizon problem

Light travels from the last scattering surface to a present local observer on a light cone going from  $(r_p = 0, t_p)$  to a 2-sphere  $(r_{ls}, t_{ls})$  on the last scattering 3-sphere defined by  $T = 4000^\circ K$ .

To solve the horizon problem, it is sufficient to show that this 2-sphere can be contained inside the future light cone of any  $(r = 0, t > 0)$  point of space-time.

One of the key-points of the reasoning here proposed is a shell-crossing surface situated above the BB surface and monotonously increasing with increasing  $r$ , which is always verified if:

$$\begin{aligned} t'_0(r) &> 0 && \text{for all } r \\ 5t'_0(r) + 2rt''_0(r) &> 0 && \text{for all } r \end{aligned}$$

A  $t_0(r)$  function increasing with  $r$  implies that the BB “occured” at later  $t$  for larger  $r$ , hence the evocative “delayed Big-Bang” we choosed to qualify this singularity.

The model being spherically symmetrical and the null geodesics being radial, the relevant light cones are obtained for  $\theta = \text{const.}$  and  $\varphi = \text{const.}$  in equation (1).

Writing  $ds^2 = 0$  in this equation, one gets a differential equation for the null cones:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{R'}{c} \quad (17)$$

Substituting above the expression of  $R'$  obtained from equation (5), one finds:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{3c} \left( \frac{9GM_0}{2} \right)^{1/3} \frac{3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)}{[t - t_0(r)]^{1/3}} \quad (18)$$

Comparing to equation (7), one immediately sees that the curves representing the light cones in the  $(r, t)$  plane possess an horizontal tangent on and only on the shell-crossing surface, where  $3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)$  goes to zero.

The curve  $t(r)$  for the past light cone from  $(r_p, t_p)$  verifies equation (18) with the minus sign.

As far as one considers the part of this light cone located after the shell-crossing surface, and thus after the BB singularity,  $3t - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)$  and  $t - t_0(r)$  remain positive and  $\frac{dt}{dr}$  is always negative.  $t(r)$  is a strictly decreasing function of  $r$  and the light cone will have to cross the strictly increasing shell-crossing surface at a finite point where the derivative of  $t(r)$  goes to zero.

On its way to shell-crossing, the null geodesic will cross in turn each  $T = \text{const.}$  surface at a finite point.

Let  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  be the coordinates of the crossing point on the last scattering surface  $T = 4000^\circ \text{ K.}$

Now consider a backward null radial geodesic starting from any point above the shell-crossing surface and directed towards  $r = 0$ . Its equation is a solution of differential equation (18) with the plus sign.

Its derivative remains positive as long as it does not reach the shell-crossing surface. If it was to reach this surface before the “center” of the universe, its derivative would go directly from a positive value to zero, which would imply for the curve of the light cone an horizontal tangent in the  $(r, t)$  plane.

Since we consider models for which the curve representing the shell-crossing surface is strictly increasing with  $r$ , it cannot be horizontally crossed from upper values of  $r$  and  $t$  by a strictly increasing curve. And thus one is led to an inconsistency.

This implies that the backward light cone starting from any point above the shell-crossing surface reaches  $r = 0$  at  $t_c$  without crossing this surface, and thus with  $t_c > 0$ .

This statement holds for every light cone issued from any point on the last scattering surface.

There is thus an infinite number of points  $(r = 0, t_c > 0)$  of which the future light cone contains the sphere on the last scattering surface seen today in the CMBR.

Every point on this sphere can be causally connected and the horizon problem is solved.

#### 4 Examples of appropriate Big Bang functions

In previous sections, conditions have been imposed upon the BB function  $t_0(r)$ . They can be summarized as follows:

$$\begin{aligned} t_0(r = 0) &= 0 \\ t'_0(r) &> 0 \quad \text{for all } r \\ 5t'_0(r) + 2rt''_0(r) &> 0 \quad \text{for all } r \\ rt'_0|_{r=0} &= 0 \end{aligned}$$

It is easy to verify that the class of functions:

$$t_0(r) = br^n \quad b > 0 \quad n > 0 \quad (19)$$

fulfills these conditions.

Another feature imposed upon the model to justify the dust approximation is that the light cones, for the Tolman-Bondi metric, never leave the matter dominated area. This prescription has been tested upon peculiar models of the above class with  $S(r) = \text{const.} = k_B \eta_p$ .

A number of light cones were numerically integrated with different values for  $n$  and  $b$ , in units  $c = 1$ ,  $t_p = \frac{9GM_0}{2}$ .

It has been in particular found that:

(1) For  $n = 1$ , the backward null geodesics starting from  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  reach  $r = 0$  without leaving the matter dominated area (approximately delimited near  $r = 0$  by  $T = T_{eq} = 10^5 \text{ }^\circ K$ ) provided  $b$  is kept larger than about  $10^{12} s$ .

(2) for  $n = 2$ , an analogous condition holds, the limiting value for  $b$  being about  $10^{14} s$ .

Fig. 1 and 2 show the case  $n = 2$ ,  $b = 5 \times 10^{14} s$  for which  $t_c = 2.18 \cdot 10^{12} s$ .

## 5 Discussion and conclusion

Using a delayed BB universe, the horizon problem has been solved for a class of simple models fulfilling some restricting conditions. Further work will be necessary to discriminate between these conditions which are generic and which are only generated by the assumptions made for simplification purpose.

For instance, the dust approximation used in this letter has been retained to allow analytical calculations. It was shown in section 4 that this dust choice provided constraints upon the BB function  $t_0(r)$ .

The behaviour of light cones in the radiation dominated region is thus an appealing issue for future work. If it could be proven that the geometry of this region does not bend the light cones such as to have them reach the BB surface before  $r = 0$ , then the above constraints could be discarded.

One could therefore consider the a priori interesting case of a BB function, fulfilling conditions summarized at the beginning of section 4, but arbitrarily close to the FRW  $t_0(r) = 0$ .

In this case, the “unnatural” prescription “centered Earth” would no more be needed as the conditions for standard nucleosynthesis could be verified for an observer located at arbitrary values of  $r$ .

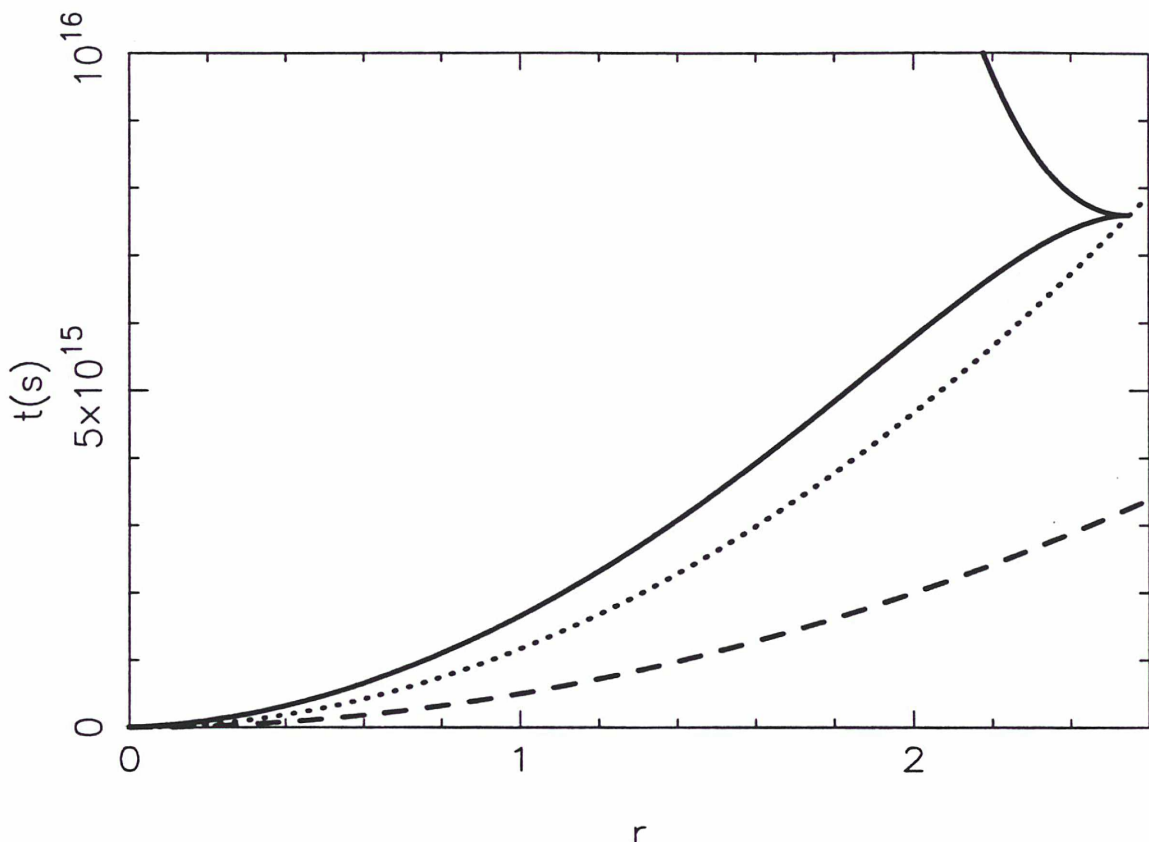


Fig. 1. case  $n = 2$ ,  $b = 5 \times 10^{14}$ . The solid lines are the light cones, the upper one being the null geodesic issued from  $(r_p, t_p)$  ending at  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  on the last scattering surface, the lower one being the null cone from  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  to  $(r = 0, t_c)$ . The dashed line represents the Big-Bang surface, and the plotted one, the last scattering and the shell-crossing surfaces which cannot be resolved at the scale of the figure.

This would imply that the characteristic length of the density inhomogeneities, written for the radiation dominated model, at the Earth location, is much smaller than the mean free path of the nucleons. A constraint would thus appear on  $t_0(r)$ , i.e. limiting  $b$  to small values compatible with the “close to FRW” assumption.

The authors are well aware of a potential difficulty of the present model, namely to put the observer near the “center” of the universe. In addition to the fact that such a location is not forbidden by scientific but only by philosophical principles (which they do not accept), they want to stress that the present model is only a first “toy-model”. They hope to build, in the future, less simple models, getting rid of this prescription.

In a recent work, they have shown that a delayed BB of type  $t_0(r) = br$  can reproduce the observed dipole and quadrupole in the CMBR anisotropies - a first version of this work has been submitted for publication [1] with a decreasing BB function (negative values for  $b$ ), but it is easy to see that the same results hold for  $b > 0$ .

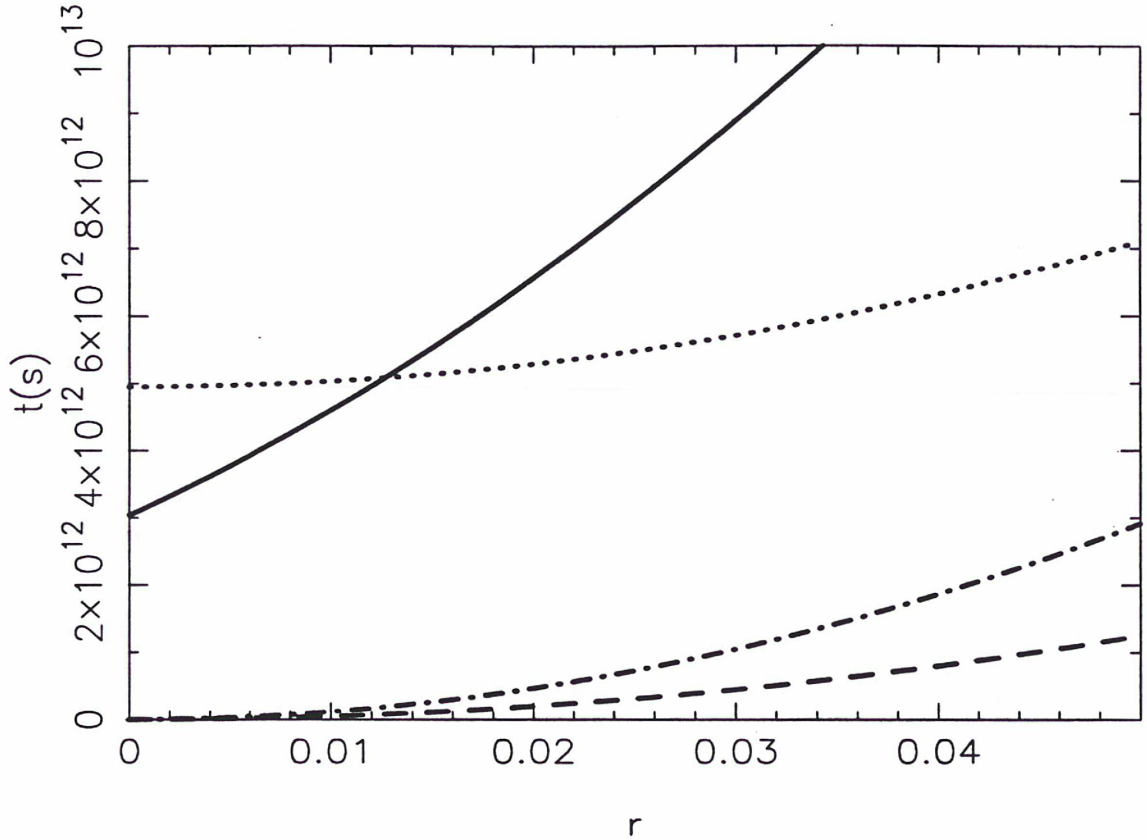


Fig. 2. Figure 1 zoomed on small values of  $r$  and  $t$ . The solid line is the light cone from  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  to  $(r = 0, t_c)$ . The dashed line represents the Big-Bang surface, the dotted one, the last scattering surface and the dash-dot-dashed one, the shell-crossing and the radiation-matter equality surfaces which cannot be resolved at the scale of the figure.

It comes out from this work that to any given value of the location  $r_p$  of the observer corresponds a value of  $b$  for which the observed data are reproduced.  $b$  is all the smaller as  $r_p$  is larger.

A reliable model of universe of this kind could thus get rid of the “centered Earth” assumption, provided  $b$  should be sufficiently small. This implies that the null geodesics, if causally connected, should be so in the radiation dominated region.

Now, why should we feel uncomfortable with the idea that we could be located near the “center” of the universe? Following Ellis, Maartens and Nel [10,11], who also dared assume such an “unnatural” prescription in their Static Spherically Symmetric (SSS) model of universe, one can claim that this is no more (un)reasonable than the belief in a Cosmological Principle. The purpose is not to put the observer at the “center” a priori, but to answer the question as it was put forward by these authors in their cited papers: “Given a universe model of the type proposed, where would one be likely to find life like that we know on Earth?”. The answer of Ellis is: “where conditions are favorable for



life of this kind ... near the center, where the universe is cool.”

The flat universe approximation, even if it seems more physically justified, can also be discussed. If our universe would be proved not so flat as it seems to be, the study of the open (closed ?) case would become necessary.

However, even if the here proposed class of models appears as a restrictive answer to the horizon problem, it might, with some easy to conceive improvements, equally account for structure formation and all scales anisotropies of the CMBR, which could otherwise proceed from a topological defects like mechanism. This will be the purpose of other work to come.

Inflation was, from the beginning of its success story, equally aimed at solving the flatness and monopole problems.

As it is a mere product of Friedmann’s equations, the flatness problem only pertains to FRW universes and is thus irrelevant for the class of models here proposed.

As for the monopole problem, delayed BB without inflation only implies that topological defects theories leading to a production of local stable monopoles are ruled out.

This letter is a first attempt to show that the delayed BB scenario, as it is a natural and simple way to solve the problems of standard cosmology while keeping its best successful predictions, is worth spending time and efforts to bring it to at least as worthy a paradigm as any other on the market place.

The last point to emphasize is the following. In the years to come, two satellite boarded missions, MAP to be launched by NASA and Planck to be launched by ESA, will be dedicated to a high-resolution mapping of the CMBR anisotropies. One of their main purposes is to provide a test of cosmological theories and an estimation of cosmological parameters.

Number of recent papers attempt to show how the values of these parameters could be determined by an analysis of the data thus obtained, see e.g. [12], [13] and [14]. In these papers, the BB function  $t_0(r)$  is always implicitly or explicitly set to a constant value over the spatial coordinate  $r$ , and the cosmological parameters considered are those pertaining to a universe with FRW background.

To be complete, the analysis of these future data will also have to be performed in the light of the present results.

## References

- [1] J. Schneider and M.N. Célérier, *Astron. Astrophys.* (1998), submitted.
- [2] R. Brout, F. Englert, E. Gunzig, *Gen. Rel. Grav.* **10** (1979) 1.
- [3] A.H. Guth, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 347.
- [4] e.g., L. Kofman, A. Linde, A.A. Starobinsky, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 1011; E.W. Kolb, A. Linde, A. Riotto, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4290; S.Y. Khlebnikov and I.I. Tkachev, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 219; *ibid.* **79** (1997) 1607.
- [5] Y. Hu, M.S. Turner, E.J. Weinberg, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 3830.
- [6] A.R. Liddle, *Phys. Rev.* **D51** (1995) R5347.
- [7] H. Bondi, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **107** (1947) 410.
- [8] C. Hellaby and K. Lake, *Astrophys. J.* **290** (1985) 381.
- [9] E.J. Wampler et al., *Astron. Astrophys.* **316** (1996) 33.
- [10] G.F.R. Ellis, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 87.
- [11] G.F.R. Ellis, R. Maartens, S.D. Nel, (1978), *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **184** (1978) 439.
- [12] J.R. Bond et al., *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 13.
- [13] G. Jungman et al., *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1332.
- [14] J.R. Bond, G. Efstathiou, M. Tegmark, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **291** (1997) L33.

### 3.3 Méthode numérique

Les exemples de fonctions de Big-Bang proposés au paragraphe 4 de l'article précédent ont été sélectionnés et calculés numériquement, à l'aide d'un programme d'intégration de géodésiques spécialement conçu à cet effet.

Pour un couple de valeurs de  $b > 0$  et  $n > 0$ , caractérisant la fonction :  $t_0(r) = br^n$ , on intègre tout d'abord la géodésique passée issue du point  $(t_p = 2,77.10^{17}s, r_p = 0)$  correspondant à la localisation de l'observateur actuel, jusqu'à la surface de dernière diffusion, définie par l'équation (16) avec  $T = 4000^\circ K$ .

$t_p$  est évalué à partir de l'équation (16) avec  $T = 2,73^\circ K$ .

On obtient ainsi les valeurs du couple de coordonnées  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  identifiant la 2-sphère représentant le RFC sur la surface de recombinaison.

On intègre alors la géodésique passée issue de  $(r_{ls1}, t_{ls1})$  et dirigée vers les  $r$  décroissants jusqu'au centre ( $r = 0$ ).

On compare la valeur  $t_c$  obtenue en ce point à la coordonnée  $t_{eq}$  de la surface d'égalité matière-radiation en  $r = 0$ . Cette dernière est définie, près du centre, par sa température en modèle FRW,  $T_{eq} = 10^5 \text{ }^\circ K$ .

Si  $t_c > t_{eq}$ , le problème de l'horizon est résolu à l'aide de géodésiques entièrement situées dans la région dominée par la matière et pour lesquelles le modèle Tolmann-Bondi s'applique sans restrictions.

Le programme principal a été entièrement conçu, écrit en langage fortran et mis au point dans le cadre de cette thèse, pour réaliser les étapes de calcul décrites ci-dessus et pour tracer les courbes des Fig. 1 et 2, présentées dans l'article.

Il a été testé en modèle FRW pour valider les résultats produits.

Le sous-programme d'intégration utilisé est un code Runge-Kutta dans une version améliorée par Gill.



# Chapitre 4

## Moments dipolaire et quadrupolaire des anisotropies de température du RFC dans un univers à Big-Bang cône

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	41
4.2	Article 2 : Models of Universe with an inhomogeneous Big Bang singularity. II. CMBR dipole anisotropy as a byproduct of a conic Big-Bang singularity . . . . .	42
4.3	Méthode numérique . . . . .	43
4.4	Discussion . . . . .	44

---

*Propterea quid sit prius actum respicere actas  
nostra nequit, nisi qua ratio vestigia monstrat*

Lucrece  
*De rerum natura*

### 4.1 Introduction

Dans un article, paru en 1990, Paczyński et Piran (1990) donnent une interprétation originale du moment dipolaire des anisotropies de température du RFC. Celui-ci ne serait pas dû, comme il est généralement admis, à l'effet Doppler généré par le mouvement propre de l'observateur terrestre par rapport au référentiel de ce RFC, mais serait la conséquence d'un gradient d'entropie au sein d'un univers inhomogène.

Pour leur démonstration, ces auteurs utilisent un modèle d'univers Tolman-Bondi à singularité initiale "plate" ( $t_0(r) = \text{const.}$ ) et concluent que, pour certaines formes particulières de la fonction d'entropie  $S(r)$ , il est possible de reproduire les valeurs observées du dipôle et du quadrupôle.

Le travail présenté dans ce chapitre procède d'une idée inspirée par ces résultats.

Au sein de la classe de modèles résolvant le problème de l'horizon, décrits au chapitre précédent, ceux présentant une singularité initiale cônica ( $t_0(r) = br$ ) sont retenus, à titre d'exemple, pour reproduire les moments dipolaire et quadrupolaire des anisotropies de température du RFC.

## 4.2 Article 2 : Models of Universe with an inhomogeneous Big Bang singularity. II. CMBR dipole anisotropy as a byproduct of a conic Big-Bang singularity

# Models of Universe with an inhomogeneous Big Bang singularity

## II. CMBR dipole anisotropy as a byproduct of a conic Big-Bang singularity

Jean Schneider and Marie-Noëlle Célérier

CNRS UPR 176 - Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, Observatoire de Paris-Meudon,  
5 place Jules Janssen, 92195 Meudon Cédex, France

Received 1998 / Accepted

**Abstract.** The existence of stars and galaxies requires cosmological models with an inhomogeneous matter and radiation distribution. But in these models the initial singularity surface  $t_0(r)$  is in general homogeneous (independent of  $r$ ). In this second paper of a series devoted to an inhomogeneous Big Bang singularity, we investigate the cosmic microwave background radiation (CMBR) dipole. A special Tolman-Bondi Universe is used to study the effect of a Big-Bang singularity, depending linearly on  $r$ , on the CMBR anisotropy. It is shown that, for an observer located off the 'center' of this Universe ( $r = 0$ ), the parameters of the model can be tuned so as to reproduce, with a good approximation, the dipole and the quadrupole moments of the CMBR anisotropy observed in recent experiments. If the dipole should prove cosmological, a slight delaying of the Big-Bang over spatial coordinates would thus be a good candidate for its interpretation.

**Key words:** cosmic microwave background - cosmology: theory

### 1. Introduction

The standard cosmological models rest mainly on a homogeneous and spherically symmetric Robertson-Walker metric  $f_{\mu\nu}$ , subject to the Einstein equations, with a matter-energy tensor depending only on the parameter (called the cosmic time <sup>1</sup>) labelling the 3-surfaces.

The particular choice of one model lies in the choice of an equation of state. Inflationary cosmologies are part of this framework with peculiar choices of the equation of state imported from particle physics. Departures from

this standard framework are developed for instance by the use of generalizations of the Einstein equations or by taking into account inhomogeneities in the matter distribution. Whereas there are presently no compelling reasons to abandon the Einstein equations, the introduction of inhomogeneities is unavoidable since there are large and small-scale structures in the observed Universe. These inhomogeneities induce inhomogeneities in the metric. They are used for the study of the formation of galaxies and large scale structures and of the fluctuations of the cosmic background at  $3K$  (CMBR). In these models the metric  $g_{\mu\nu}$  is a weakly perturbed Robertson-Walker metric:  $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ . In this framework the perturbation  $h_{\mu\nu}$  is generally small and depends on the spatial coordinates, but the main term  $f_{\mu\nu}$ , characterized by a scale parameter  $R(t)$  is independent of position. Therefore the cosmological singularity  $R = 0$  is an equal time 3-surface; in astronomical terms, the age of the Universe is the same everywhere.

Solutions of the Einstein equations with inhomogeneous  $R = 0$  hyper-surfaces have been studied analytically by Tolman (1934) and Bondi (1947). The Tolman-Bondi universes have been applied to cosmological contexts such as clusters of galaxies (Tarentola, 1976) or the CMBR dipole (Paczynski and Piran, 1990).

But the parameters of the model are then set in such a way that they lead to a spatially homogeneous  $R = 0$  Big Bang singular surface. There are no more reasons for this choice than for a strictly homogeneous matter and radiation distribution. For instance, if the present universe were the result of the re-bounce from a collapse prior to the standard Big Bang (a solution which cannot be excluded), a strictly homogeneous  $R = 0$  surface would result from a very unlikely fine tuning.

Send offprint requests to: M.-N. Célérier

Correspondence to: celerier@obspm.fr

<sup>1</sup> Although this is an inappropriate denomination (Schneider, 1994)

In a recent work (Célérier & Schneider, 1998), we have identified a class of inhomogeneous models of Universe, with a Big-Bang of ‘‘delayed’’ type, solving the standard horizon problem without need for an inflationary phase. In the present paper, we investigate the application of a peculiar model of this class to the CMBR anisotropy.

From a purely geometrical point of view, it is always possible to re-label the 3-surfaces so as to make the hypersurface  $R = 0$  independent of  $r$ . But such an arbitrary re-labelling is forbidden by the description of physical phenomena by the Schrödinger equation in curved space time. This equation, which gives the rate of evolution of phenomena, in particular, the thermal history of the Universe (through nucleosynthesis of light elements and matter-radiation decoupling), provides, in an inhomogeneous universe, a clock imposing on time-like world lines a given time coordinate. Each hamiltonian used in the Schrödinger equation gives a different time scale (*e.g.* the atomic transition rates) which depends on the local curvature. But there is an implicit postulate, that there is a fundamental time scale, the Planck time  $\sqrt{Gh/c^3}$ . Thus, the time coordinate can only be, with the choice of a given time unit, rescaled globally with a universal affine transformation  $t \rightarrow at + b$  where the coefficient  $a$  and  $b$  are independent on  $r$  and  $t$ .

The dipole moment in the cosmic microwave background radiation (CMBR) anisotropy is the most prominent feature in the recent observational data, as probed by the four years COBE experiments<sup>2</sup>. It overcomes the quadrupole, of order  $5.10^{-6}$ , by more than two orders of magnitude, its value being of order  $10^{-3}$  (Smoot et al., 1992; Kogut et al., 1993).

This dipole is usually considered as resulting from a Doppler effect produced by our motion with respect to the CMBR rest-frame (Partridge, 1988). A few authors (Gunn, 1988; Paczynski & Piran, 1990; Turner, 1991; Langlois & Piran, 1996; Langlois, 1996), in the recent past, intended however to show that its origin could be in the large scale features of the universe.

Paczynski and Piran (1990), using an ad hoc toy model, emphasized the possibility for the dipole to be generated by an entropy gradient in a Tolman-Bondi dust Universe. In the peculiar model they did study, they have assumed that the time of the Big-Bang was the same for

all observers.

Hereafter we show that the dipole, and quadrupole, anisotropy, or part of it, could be considered as the outcome of a conic Big-Bang surface.

We first describe, in the following section, the special Tolman-Bondi model we use for our derivation. The calculations will be developed in Sect.3 and the results exposed in Sect.4. Our conclusions and a brief discussion are given in Sect. 5.

## 2. A flat dust spherically symmetrical model

We consider here the light cone emitted from the last scattering surface - temperature of order  $4.10^3$  K - towards the Earth at our present time. Since this period is matter dominated - the radiation was dynamically relevant only at times prior to a temperature of order  $10^4$  K - we are considering the behaviour of a photon gas immersed into an Universe satisfying

$$\rho_{\text{radiation}} \ll \rho_{\text{dust}}$$

that is, we neglect the radiation as source of gravitational field.

We then choose a Tolman-Bondi (Tolman, 1934; Bondi, 1947) model which figures out a dust (ideal non zero rest mass pressureless gas) dominated, spatially spherically symmetrical inhomogeneous Universe.

The Bondi line element, in co-moving coordinates and proper time, is:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + S^2(r, t) dr^2 + R^2(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

It reduces to the usual Friedmann-Robertson-Walker metric for an homogeneous Universe.

Solving Einstein equations for this metric gives:

$$S^2(r, t) = \frac{R'^2(r, t)}{1 + 2E(r)/c^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2(r, t) - \frac{GM(r)}{R(r, t)} = E(r) \quad (3)$$

$$4\pi\rho(r, t) = \frac{M'(r)}{R'(r, t)R^2(r, t)} \quad (4)$$

a dot denoting differentiation with respect to  $t$  and a prime differentiation with respect to  $r$ .

$\rho(r, t)$  is the energy density  $\rho_{\text{dust}}$

$E(r)$  and  $M(r)$  are arbitrary functions of  $r$ .  $E(r)$  can be interpreted as the total energy per unit mass and  $M(r)$

<sup>2</sup> The three experiments aboard the COsmic Background Explorer satellite (COBE) are the Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer (FIRAS) 60 - 630 GHz, the Differential Microwave Radiometers (DMR) 30 - 90 GHz and the Diffuse InfraRed Background Experiment (DIRBE) 1.2 - 240  $\mu\text{m}$ . All experiments provide maps of small temperature fluctuations from an average  $2.73^\circ$  K for the CMBR.



as the baryonic mass within the sphere of co-moving radial coordinate  $r$ .  $M(r)$  remaining constant with time, we use it to define the radial coordinate:  $M(r) \equiv M_0 r^3$ , where  $M_0$  is a constant.

Eq.(3) can be solved and gives a parametric expression for  $R(r, t)$  in case  $E(r) \neq 0$  and an analytic one in case  $E(r) = 0$ .

We retain the flat Universe model  $E(r) = 0$  and the analytic expression:

$R(r, t) = [9GM(r)/2]^{1/3} [t - t_0(r)]^{2/3}$   
 which, with the above definition for the radial coordinate, becomes:

$$R(r, t) = (9GM_0/2)^{1/3} r [t - t_0(r)]^{2/3} \quad (5)$$

The homogeneous limit of our model is the Einstein-de Sitter Universe with  $\Omega = 1$ .

$t_0(r)$  is another arbitrary function of  $r$ . It is the Big-Bang hyper-surface.

A class of models, identified as solving the horizon problem (Célérier & Schneider, 1998), exhibits a Big-Bang function of the form:

$$t_0(r) = br^n \quad b > 0, n > 0 \quad (6)$$

We here choose, for simplicity, to investigate the properties of the subclass:

$$t_0(r) = br \quad \text{with} \quad 1/R_H > b > 0 \quad (7)$$

This conic surface corresponds to perturbations with low ( $k < 1/R_H$ ,  $R_H$  being the horizon radius) spatial frequencies.

Eq. (5) thus becomes:

$$R(r, t) = (9GM_0/2)^{1/3} r (t - br)^{2/3} \quad (8)$$

The specific entropy  $S$  is usually defined as the ratio of the number density of photons over the number density of baryons:

$$S \equiv \frac{k_B n_\gamma(r, t) m_b}{\rho(r, t)} \quad (9)$$

where  $m_b$  is the baryon mass and  $k_B$ , the Boltzmann constant.

In order to decouple the effect of inhomogeneous entropy distribution (as already studied by Paczynski and Piran, 1990) from an inhomogeneous  $R = 0$  surface, we retain:

$S = \text{const.}$

The observed deviation of the CMBR from a perfect homogeneous pattern being very small, we can assume, as a reasonable approximation, thermodynamical

equilibrium for the photons, so as to write, at the ultra-relativistic limit for bosons:

$$n_\gamma = a_n T^3 \quad (10)$$

$T$  being the radiation temperature and  $a_n = 2\zeta(3)k_B^3/[\pi^2(\hbar c)^3]$ .

Letting, with no loss of generality,  $S = \text{const.} = k_B \eta_0$ , and taking the present photon to baryon density ratio  $\eta_0$  to be  $10^8/(2.66\Omega_b h_0^2)$ , we derive the following expression for  $T$ :

$$T(r, t) = \left( \frac{10^8}{2.66h_0^2 2\pi G a_n m_b (3t - 5br)(t - br)} \right)^{1/3} \quad (11)$$

where  $h_0$  is the Hubble constant in units 100 km/s/Mpc. Hereafter, for numerical applications, we take  $h_0 = 0.75$ .

### 3. Integration of the null geodesics and determination of the dipole and quadrupole moments

Let an observer, for example the COBE satellite, be located at  $(t_0, r_0)$  where the average temperature is  $T_0$ , of order 2.7 K. The radial co-moving coordinate  $r_0$  is chosen to be non zero so as to put the observer off the center of the Universe.

The light travelling from the last scattering surface to this observer follows null geodesics which we are going to numerically integrate, from the observer, until we reach this surface defined by its temperature  $T_{ls} = 4.10^3 K$ .

In principle, one should integrate the optical depth equation along with the null geodesic equations. Here, we approximate the optical depth by a step-function. This procedure leads to integrate the null geodesics until the temperature reaches  $T_{ls} = 4.10^3 K$ .

Our toy Universe being spherically symmetrical, an observer at a distance from the center sees an axially symmetrical Universe in the center direction. It is thus legitimate to integrate the geodesics in the meridional plane. The photons path is uniquely defined by the observer position  $(r_0, t_0)$  and the angle  $\alpha$  between the direction from which comes the light ray as seen by the observer and the direction towards the center of the Universe.

In the following, we adopt the units:  
 $c = 1$ ,  $8\pi G/3 = 1$  and  $M_0 = 1$ .

For the metric given by Eq.(1), the meridional plane is defined as:

$$\theta = \pi/2 \quad \sin \theta = 1 \quad k^\theta = 0$$

$k^\theta$  being the  $\theta$  component of the photon wave-vector defined as:

$k^\mu = -\frac{dx^\mu}{d\lambda}$   
which gives:

$$\frac{dt}{d\lambda} = -k^t \quad (12)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{k_r}{R'^2} = (16\pi/27)^{2/3} \frac{9(t-br)^{2/3}}{(3t-5br)^2} k_r \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k_\varphi}{R^2} \quad (14)$$

From the geodesic equations of light:

$$dk^\mu/d\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu k^\nu k^\lambda = 0$$

we obtain after some calculations:

$$\frac{dk^t}{d\lambda} = -2 \left( \frac{16\pi}{27} \right)^{2/3} \left[ \frac{3(3t-2br)}{(3t-5br)^3(t-br)^{1/3}} (k_r)^2 + \frac{1}{3r^2(t-br)^{7/3}} (k_\varphi)^2 \right] \quad (15)$$

$$\frac{dk_r}{d\lambda} = - \left( \frac{16\pi}{27} \right)^{2/3} \left[ \frac{6b(2t-5br)}{(3t-5br)^3(t-br)^{1/3}} (k_r)^2 + \frac{3t-5br}{3r^3(t-br)^{7/3}} (k_\varphi)^2 \right] \quad (16)$$

$$k_\varphi = \text{const.} \quad (17)$$

For photons:  $ds^2 = 0$  coupled with Eq.(12) to (14) gives:

$$(k^t)^2 = \left( \frac{k_r}{R'} \right)^2 + \left( \frac{k_\varphi}{R} \right)^2 \quad (18)$$

The equation for the redshift  $z_{\ell s}$  in co-moving coordinates is:

$$1 + z_{\ell s} = \frac{(k^t)_{\ell s}}{(k^t)_0}$$

$(k^t)_{\ell s}$  and  $(k^t)_0$  being the time-like component of the photons wave-vector at the last-scattering and at the observer respectively.

The former equations system can be integrated, the following initial conditions being given at the observer:

$$t = t_0 \quad r = r_0 \quad (k^t)_0 = 1 \quad (19)$$

And thus:

$$1 + z_{\ell s} = (k^t)_{\ell s} \quad (20)$$

At a given couple  $(t_0, r_0)$  corresponds values for  $R$  and its partial derivatives at  $t_0, r_0$ .

We denote:

$$R_0 \equiv R(t_0, r_0) \quad \text{given by Eq.(8)}$$

$$R'_0 \equiv R'(t_0, r_0) \quad \text{and so on}$$

The observer at  $(t_0, r_0)$  seeing the photons trajectory making an angle  $\alpha$  with the direction towards the center of the Universe, we can write:

$$(k_r)_0 = A \cos \alpha \quad (k_\varphi)_0 = B \sin \alpha$$

Substituting the former values of the coordinates of  $\mathbf{k}_0$  into Eq.(18) written at  $(t_0, r_0)$ , we find:

$$A = R'_0 \quad B = R_0$$

And thus:

$$(k_r)_0 = R'_0 \cos \alpha \quad (k_\varphi)_0 = R_0 \sin \alpha \quad (21)$$

Eq.(17) becomes:

$$k_\varphi = R_0 \sin \alpha$$

Substituting in Eq.(18), we get:

$$(k_r)^2 = R'^2 [(k^t)^2 - (R_0 \sin \alpha / R)^2]$$

which possesses two solutions:

$$k_r = \pm R' [(k^t)^2 - (R_0 \sin \alpha / R)^2]^{1/2} \quad (22)$$

From Eq.(4), with  $M(r) \equiv r^3$ , comes:

$$\rho_{\text{dust}} = (3/4\pi) \frac{r^2}{R' R^2}$$

As we want, for physical consistency,  $\rho_{\text{dust}} \geq 0$ , we get:

$$R' \geq 0$$

And because Eq.(13) implies the same sign for  $dr/d\lambda$  and  $k_r$ , it follows that:

Eq.(22) with the plus sign is the solution  $dr/d\lambda > 0$ , where  $r$  is increasing with increasing  $\lambda$  parameter.

Eq.(22) with the minus sign is the solution  $dr/d\lambda < 0$ , where  $r$  is decreasing with increasing  $\lambda$ .

Substituting Eq.(22) into Eq.(12) to (17), we get, after some calculations, the reduced system of three differential equations:

$$\frac{dt}{d\lambda} = -k^t \quad (23)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \left( \frac{16\pi}{27} \right)^{1/3} \frac{3(t-br)^{1/3}}{3t-5br} \left[ (k^t)^2 - \frac{r_0^2(t_0-br_0)^{4/3} \sin^2 \alpha}{r^2(t-br)^{4/3}} \right]^{1/2} \quad (24)$$

$$\frac{dk^t}{d\lambda} = \frac{2(3t-2br)}{9(t-br)(3t-5br)} (k^t)^2 + \frac{2br_0^2(t-br_0)^{4/3} \sin^2 \alpha}{r(3t-5br)(t-br)^{7/3}} \quad (25)$$

Provided we choose the affine parameter  $\lambda$  increasing from  $\lambda = 0$  at  $(t_0, r_0)$  to  $\lambda = \lambda_{\ell s}$  at  $(t_{\ell s}, r_{\ell s})$  on the last

scattering surface, we have to consider two cases:

- the ‘‘out-case’’: the observer looks at a direction opposite to the center of the Universe ( $\alpha > \pi/2$ ). We thus integrate the null geodesics from  $(t_0, r_0)$  to  $(t_{\ell s}, r_{\ell s})$  with an always increasing  $r$ . We have to retain the plus sign in Eq.(24).

- the ‘‘in-case’’: the observer looks at a light ray first approaching the center of the Universe, then moving away from it before reaching her eyes ( $\alpha < \pi/2$ ). Eq.(24) with the minus sign first obtains until  $dr/d\lambda = 0$ , then the minus sign in Eq.(24) changes to a plus sign.

As, in the system of Eq.(23) to (25), the dependence in  $\alpha$  is of the form  $\sin \alpha$  and as  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ , we can only discriminate between the ‘‘out’’ and ‘‘in’’ cases by the behaviour of the sign of  $dr/d\lambda$ .

We integrate a number of ‘‘in’’ and ‘‘out’’ null geodesics, each characterized by a value for  $\alpha$  between zero and  $\pi/2$ , back in time from the observer at  $(t_0, r_0, T_0)$  until the temperature, as given by Eq.(11) reaches  $T_{\ell s} = (4/2.7)10^3 T_0$ , which approximately defines the last scattering surface.

At this temperature, the redshift with respect to the observer, as given by Eq.(20), is  $z_{\ell s}^{\text{in-out}}(\alpha)$ , somewhat varying, with the  $\alpha$  angle and the ‘‘in’’ and ‘‘out’’ direction, about an average  $z_{\ell s}^{\text{av}}$ .

The apparent temperature of the CMBR measured in the  $\alpha$  in-out direction is:

$$T_{\text{CMBR}}^{\text{in-out}}(\alpha) = \frac{T_{\ell s}}{1 + z_{\ell s}^{\text{in-out}}(\alpha)} = T_{\text{CMBR}}^{\text{av}} \frac{1 + z_{\ell s}^{\text{av}}}{1 + z_{\ell s}^{\text{in-out}}(\alpha)}$$

where the averages for  $T$  and  $z$  are calculated over the whole sky. We write with simplified notations:

$$\frac{T_{\text{CMBR}}}{T^{\text{av}}} = \frac{1 + z^{\text{av}}}{1 + z_{\ell s}} \quad (26)$$

The CMBR temperature fluctuations are expanded in spherical harmonics:

$$\frac{T_{\text{CMBR}}(\alpha, \varphi)}{T^{\text{av}}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\alpha, \varphi)$$

$\alpha$  being the Euler angle usually called  $\theta$  in spherical coordinates, and with:

$$a_{\ell m} = \int \frac{T_{\text{CMBR}}(\alpha, \varphi)}{T^{\text{av}}} Y_{\ell m}^*(\alpha, \varphi) \sin \alpha \, d\alpha \, d\varphi \quad (27)$$

The dipole and quadrupole moments are defined as:

$$D = (|a_{1-1}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2)^{1/2}$$

$$Q = (|a_{2-2}|^2 + |a_{2-1}|^2 + |a_{20}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2)^{1/2}$$

In the special case we are interested in, the fluctuations only depend on the  $\alpha$  angle so that all the  $a_{\ell m}$  with  $m \neq 0$  are zero.

The dipole and quadrupole moments thus reduce to:

$$D = a_{10} \quad Q = a_{20}$$

$a_{10}$  and  $a_{20}$  being given by Eq.(27) with:

$$Y_{10}(\alpha) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \alpha \quad Y_{20}(\alpha) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right)$$

It follows:

$$D = (1 + z^{\text{av}}) \int_0^\pi \frac{Y_{10}(\alpha)}{1 + z_{\ell s}(\alpha)} \sin \alpha \, d\alpha \quad (28)$$

$$Q = (1 + z^{\text{av}}) \int_0^\pi \frac{Y_{20}(\alpha)}{1 + z_{\ell s}(\alpha)} \sin \alpha \, d\alpha \quad (29)$$

Taking into account Eq.(20) and the spherical symmetry of the model, we obtain:

$$D = \left| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} k_{\text{av}}^t \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{k_{\text{in}}^t(\alpha)} d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{k_{\text{out}}^t(\alpha)} d\alpha \right] \right| \quad (30)$$

$$Q = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} k_{\text{av}}^t \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha}{k_{\text{in}}^t(\alpha)} d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha}{k_{\text{out}}^t(\alpha)} d\alpha \right] \quad (31)$$

## 4. Results

We have first numerically integrated a number of ‘‘out’’ and ‘‘in’’ null geodesics, for various  $r_0$  and  $b$ , and for values of  $\alpha$  going from 0 to  $\frac{\pi}{2}$ , with  $t_0$  corresponding to  $T_0 = 2.7K$  in Eq.(11).

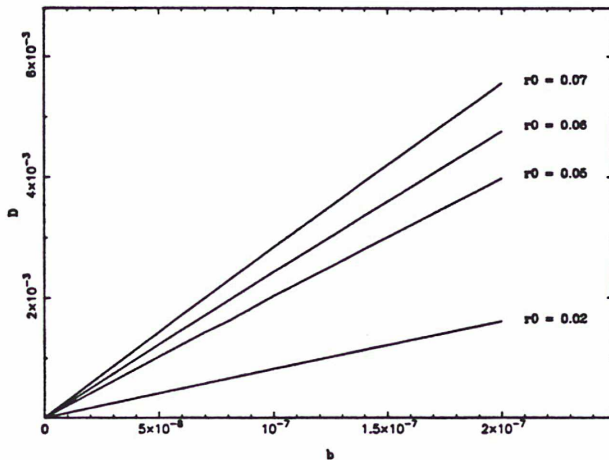
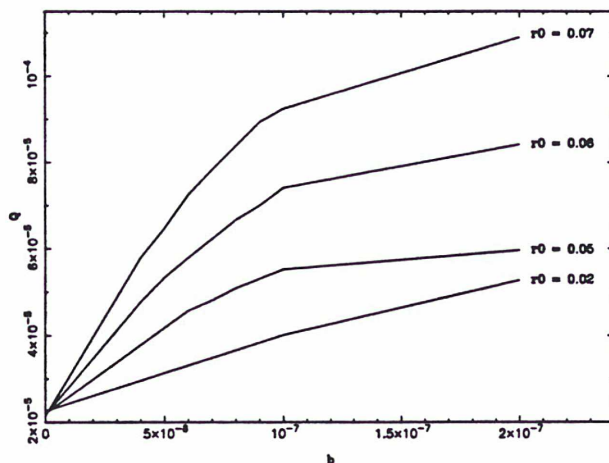
We have then calculated the dipole and quadrupole moments  $D$  and  $Q$ , according to Eqs.(30) and (31).

We have selected the values of the triplets leading to  $D$  and  $Q$  approaching the observed values <sup>3</sup>  $D \sim 10^{-3}$ ,  $Q \sim 10^{-5}$ . These results are given in Fig. 1 and 2.

<sup>3</sup> This choice will be discussed in section 5.

Table 1. Best fitted values of  $r_0$  and  $b$ 

$r_0$	$b$	$D$	$Q$
0.02	$2 \cdot 10^{-7}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$	$5.27 \cdot 10^{-5}$
0.03	$9 \cdot 10^{-8}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$3.70 \cdot 10^{-5}$
0.04	$7 \cdot 10^{-8}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$3.99 \cdot 10^{-5}$
0.05	$6 \cdot 10^{-8}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$4.57 \cdot 10^{-5}$
0.06	$5 \cdot 10^{-8}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$5.33 \cdot 10^{-5}$
0.07	$4 \cdot 10^{-8}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$5.79 \cdot 10^{-5}$

Fig. 1 : The Dipole as a function of  $b$  for various  $r_0$ Fig. 2 : The Quadrupole as a function of  $b$  for various  $r_0$ 

The best fitted values of  $r_0$  and  $b$  giving  $D$  close to  $10^{-3}$  and  $Q$  close to  $10^{-5}$  are shown in Table 1.

## 5. Conclusion and discussion

Using a toy model, chosen within the class of delayed Big-Bang models identified as solving the horizon problem without need for any inflationary phase (Célérier & Schneider, 1998), and presenting the following main features:

- dust dominated spherically symmetrical Tolman-Bondi Universe

- conic Big-Bang singularity

- observer located off the center of the Universe

we showed that can be found values for the parameters of the model - the location of the observer in space-time and the increasing rate of the Big-Bang function - that allow to somehow reproduce the observed dipole and quadrupole moments in the CMBR anisotropy.

This provides a new possible interpretation of the dipole (or part of it, as it is obvious that there is probably a Doppler component due to the local motion of the Galaxy with respect to the CMBR rest frame).

As has been stressed by other authors (Paczynski & Piran, 1990; Turner, 1991; Langlois & Piran, 1996; Langlois, 1996), there are various observational ways to discriminate between a local and a cosmological origin for the dipole.

From an analysis of a sparse-sampled redshift survey of IRAS Point Source Catalog  $60-\mu\text{m}$  sources, performed with the tools of standard cosmology, Rowan-Robinson et al. (1990) concluded, for instance, that the peculiar velocity of the Local Group should be  $579 \Omega_0^{0.6} \text{km s}^{-1}$  towards  $(l, b) = (269.5, 29.8)$ .

For  $\Omega_0 \sim 0.3$ , this would give a velocity of order  $280 \text{km s}^{-1}$ , to be compared to the CMBR dipole velocity:  $600 \pm 50 \text{km s}^{-1}$  (Partridge, 1988) towards  $(l, b) = (124.7 \pm 0.8, 48.2 \pm 0.5)$  (Smoot et al., 1992).

In this framework, the local component of the dipole would be of order 50% of the total dipole.

If, from future analyses of observational data, part of the dipole was confirmed to appear non Doppler, other work, connected in particular with multipole moments of higher order, would be needed to discriminate between the various cosmological candidate interpretations.

It has to be stressed that, if the inhomogeneous Big Bang assumption is thus retained, a 50% shift in the dipole cosmological component would not significantly affect the results given in above Table 1.

In our formerly cited paper (Célérier & Schneider, 1998), we have shown that the horizon problem can be solved by means of a delayed Big-Bang, provided the ob-

server is located near the center of a spherically symmetrical Universe. Work is in progress to extend these results to models with an observer arbitrarily situated off the center.

Another interesting feature of the here presented work is to show that, in a model of the above studied class, the occurrence of a cosmological component of the dipole implies a relation between the location  $r_0$  of the observer and the slope  $b$  of the Big-Bang function.

It can be seen, from Table 1, that the larger  $r_0$ , the smaller  $b$ , and this yields a selection within the parameters space of the conic Big-Bang models.

We conjecture that such a feature pertains to any subclass of the delayed Big-Bang models.

## References

- Bondi, H., 1947, MNRAS, 107, 410  
 Célérier, M.N. & Schneider, J., 1998, Phys. Lett. A249, 37  
 Gunn, J.E., 1988, in: "The Extragalactic Distance Scale" eds. S. van der Bergh and C. Pritchett (ASP Conf. Series) p.344  
 Kogut, A., Lineweaver, C., Smoot, G.F., et al., 1993, ApJ, 419, 1  
 Langlois, D., 1996, Phys. Rev. D54, 2447  
 Langlois, D. & Piran, T., 1996, Phys. Rev. D53, 2908  
 Paczynski, B. & Piran, T., 1990, ApJ, 364, 341  
 Partridge, R.B., 1988, Rept. Progr. Phys., 51, 647  
 Rowan-Robinson, M., Lawrence, A., Saunders, W., et al., 1990, MNRAS, 247, 1  
 Schneider, J., 1994, The Now, Relativity Theory and Quantum Mechanics in *Time, Now and Quantum Mechanics*, M. Bitbol and E. Ruhnau eds, Editions Frontières (Gif/Yvette, France)  
 Smoot, G.F., Bennett, C.L., Kogut, A., et al., 1992, ApJ, 396, L1  
 Tarentola, A., 1976, Thesis, University Pierre et Marie Curie, Paris.  
 Tolman, R.C., 1934, Proc. Nat. Acad. Sci., 20, 169  
 Turner, M.S., 1991, Phys. Rev. D44, 3737

## 4.3 Méthode numérique

La sélection des couples de valeurs de  $r_0$  et  $b$  pertinents pour la résolution du problème posé, ainsi que le calcul des dipôles et quadrapôles correspondants, ont été effectués à l'aide de programmes numériques spécialement conçus à cet effet.

Pour un couple  $(r_0, b)$  donné, le premier programme intègre, de  $(t_0, r_0)$  à  $(t_{\ell_s}, r_{\ell_s})$ , les géodésiques de type "out" pour une centaine de valeurs de  $\alpha$  comprises entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Il génère ainsi un tableau de résultats où sont inscrits les  $k_{out}^t(\alpha)$ .

Le second programme procède de même pour les géodésiques de type "in" et produit ainsi un tableau des valeurs des  $k_{in}^t(\alpha)$ .

Le troisième programme utilise les données de ces deux tableaux de résultats pour calculer les valeurs correspondantes du dipôle et du quadrapôle, conformément aux équations (29) et (30) de l'article.

La validité de cette méthode a été testée, avec plusieurs valeurs de  $r_0$ , pour  $b = 0$  correspondant au modèle Einstein-de Sitter pour lequel  $D = Q = 0$ . Ce test a permis d'évaluer l'ordre de grandeur des erreurs systématiques produites par les approximations numériques, qui est de  $10^{-7}$  à  $10^{-6}$  pour le dipôle et  $10^{-5}$  pour le quadrapôle.

Si l'erreur systématique attachée au calcul du dipôle est acceptable, dans la mesure où elle est inférieure à la valeur recherchée d'au moins trois ordres de grandeur, celle qui entâche la valorisation du quadrapôle est plus gênante, étant du même ordre de grandeur que le résultat visé.

Le moyen le plus direct pour obtenir une amélioration sensible de la précision aurait été de multiplier le nombre des  $k^t(\alpha)$  calculés, pour  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , et donc le nombre des intégrations de géodésiques au sein des programmes "out" et "in".

Or, dans la configuration adoptée, les calculs numériques sont déjà très lourds. L'obtention d'un seul couple  $(D, Q)$  nécessite près d'une journée de calcul-machine. La production des données nécessaires à cette étude, y compris les ajustements et tests divers, a ainsi été le fruit de plusieurs mois de travail. Il était donc matériellement impossible de réduire, de façon significative, les marges d'erreur.

Il a donc été recouru à une méthode d'approche des valeurs recherchées par extrapolation à partir de valeurs supérieures, pour lesquelles l'erreur relative est plus faible, et donc acceptable.

Les Fig. 1 et 2 de l'article permettent de visualiser cette approche. Chaque courbe correspond, pour  $r_0$  fixé, à la valeur du dipôle, respectivement du quadrapôle, obtenue en faisant varier la valeur de  $b$ . Partant de valeurs de  $b$ , et donc des moments correspondants, élevées, pour lesquelles l'erreur systématique relative est faible, ces valeurs sont ajustées à la baisse, pour que les résultats convergent vers une valorisation du couple dipôle-quadrapôle conforme aux observations.

La validité de cette méthode est attestée par la continuité et la monotonie des courbes

obtenues.

Les trois programmes principaux ont été entièrement conçus, écrits en langage fortran et mis au point dans le cadre de cette thèse.

Le sous-programme d'intégration est le même que celui utilisé pour les applications numériques présentées au chapitre 3.

## 4.4 Discussion

Il convient de souligner que sont uniquement présentés ici les résultats, à savoir les valeurs du couple  $(r_0, b)$  tendant à reproduire le plus exactement possible les valeurs observées, et donc ceux pour lesquels l'origine du dipôle serait exclusivement cosmologique.

Si, comme cela est vraisemblable, des analyses d'observations, autres que celles des anisotropies de température du RFC, venaient, dans le futur, à confirmer un mouvement propre du système solaire par rapport au référentiel du RFC suffisant pour expliquer tout ou partie significative du dipôle, ceci ne remettrait pas en cause la validité des modèles à Big-Bang cône.

Les nombreux essais de valeurs du couple  $(r_0, b)$ , qui ont été nécessaires pour ajuster les résultats, ont montré que tout couple de valeurs pour D et Q peut être reproduit par un couple  $(r_0, b)$  à déterminer.

Compte tenu de la similitude des équations en jeu, il semble légitime de conjecturer que cette propriété est commune, en particulier, à l'ensemble des modèles à Big-Bang retardé de la classe proposée au paragraphe 4 de l'article 1, chapitre 3. Ceci sera évidemment à vérifier lors de travaux ultérieurs.

# Chapitre 5

## Etat des lieux et perspectives

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Récapitulation des résultats et discussion des propriétés du modèle . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>5.2</b>	<b>Tests observationnels . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>5.3</b>	<b>Les paramètres du modèle . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>5.4</b>	<b>Une question de vocabulaire . . . . .</b>	<b>59</b>

---

*En dépit de son apparente liberté, notre pensée est en réalité confinée dans des limites très étroites et toute la puissance créatrice de l'esprit ne se borne à rien qu'à la faculté de composer, transposer, augmenter ou diminuer les matériaux fournis par les sens et par l'expérience.*

David Hume

*Enquêtes sur l'entendement humain*

### 5.1 Récapitulation des résultats et discussion des propriétés du modèle

Dans les deux chapitres précédents, ont été présentées les propriétés de modèles très simplifiés d'univers à Big-Bang inhomogène. Il convenait en effet, dans un premier temps, de tester la productivité de l'idée, en évitant de surcharger inutilement les calculs.

Bien que très préliminaires, les résultats peuvent être jugés encourageants. Ils sont récapitulés ci-après.

#### 5.1.1 Problèmes cosmologiques standards résolus

##### Le problème de l'horizon

Ce problème a été résolu au chapitre 3, à l'aide d'un Big-Bang de type "retardé", et pour un modèle simplifié d'univers, dont les principales caractéristiques sont rappelées et



commentées ci-dessous :

1. Dans un univers à symétrie sphérique, la Terre est supposée située à proximité du centre de symétrie ; à proximité, et non pas au centre même, car dans ce dernier cas, il serait impossible de reproduire les anisotropies de température du RFC selon la méthode présentée au chapitre 4. L'hypothèse "Terre centrée" du chapitre 3 n'est donc qu'une approximation.

2. La fonction de Big-Bang  $t_0(r)$  doit croître suffisamment "vite" avec  $r$  pour que la causalité soit rétablie à l'intérieur de la région dominée par la matière.

3. Le modèle retenu est spatialement plat.

4. L'équilibre thermodynamique local (ETL) est supposé réalisé, au moins de l'égalité jusqu'à la recombinaison.

Les conditions 1 à 3 proviennent d'une contrainte technique. Les solutions des équations d'Einstein pour un fluide avec équation d'état de la radiation sont inconnues. Pour un fluide de type poussière à symétrie sphérique, par contre, ce sont les modèles Tolman-Bondi. Dans un espace-temps plat, ces solutions prennent une forme analytique simple, qui autorise un raisonnement mathématique rigoureux.

Or, si l'approximation d'un modèle plat peut être considérée comme valable du point de vue de l'observation, il serait intéressant de pouvoir se libérer des contraintes sur la pente de la fonction  $t_0(r)$ . Ceci permettrait de relâcher la contrainte "Terre centrée", dans une mesure restant à préciser.

Il est en effet indéniable que, malgré les arguments avancés dans la discussion du paragraphe 5 de l'article 1 pour justifier la validité physique d'une telle hypothèse, des freins psychologiques forts s'opposent à son adoption par certains.

De plus, se débarrasser d'une contrainte inutile ouvrirait au modèle des perspectives accrues. Plus un modèle possède de paramètres libres, plus ses possibilités de se raccorder à la réalité des observations sont fortes.

Or, il a été montré au chapitre 4, pour le cas particulier d'un Big-Bang "cônique", que la contrainte sur les paramètres du modèle induite par les valeurs observées des dipôle et quadrupôle des anisotropies de température du RFC est : plus l'observateur se trouve éloigné du centre de symétrie de l'Univers, plus la pente de la fonction de Big-Bang doit être faible.

En conjecturant, ce qui semble physiquement plausible, que ce résultat reste valable pour tout type de Big-Bang retardé, on obtient qu'éloigner la Terre du centre revient à réduire la pente de la fonction  $t_0(r)$ .

Les résultats numériques présentés au paragraphe 4 de l'article 1 montrent que, pour de faibles valeurs de la pente  $b$ , les géodésiques nulles atteignent la région de l'Univers dominée par la radiation avant de se connecter causalement au centre.

Si l'on souhaite donc conserver la plus grande latitude dans la possibilité de fixer

l'emplacement de la Terre au sein de l'Univers, il faudra vérifier que les géodésiques ne sont pas sensiblement déviées de leur trajectoire radiale par un apport de pression de radiation.

La portion de géodésique incluse dans la région dominée par la radiation est cependant négligeable devant celle comprise dans la région poussière. Dans cette classe de modèles, la matière domine pendant au moins 99% du temps cosmique  $t$  séparant les surfaces de dernière diffusion et de croisement des coquilles.

Hormis donc le cas où la déviation induite par la pression de radiation viendrait courber excessivement les cônes de lumière vers les surfaces singulières, la causalité resterait établie et le problème de l'horizon résolu.

La question qui vient alors à l'esprit est : quelle est la conséquence pour la nucléosynthèse d'une position excentrée de l'observateur?

Ce qui compte dans le déclenchement de ce processus est le niveau de la température. Or, diminuer la pente de  $t_0(r)$  revient à diminuer celle des surfaces  $T = \text{const.}$ , (cf. l'équation (16) de l'article 1), et à les rapprocher des surfaces  $t = \text{const.}$  du modèle standard. Ceci éloigne du centre la limite pour la position de l'observateur en-deça de laquelle l'approximation standard reste valable pour la nucléosynthèse.

Il convient de souligner que, la nucléosynthèse ayant lieu à une époque dominée par l'énergie de la radiation, tout raisonnement de ce type suppose implicitement que la pression ne modifie pas trop sensiblement les résultats obtenus en modèle poussière.

L'hypothèse de symétrie sphérique mérite également d'être discutée.

La quasi-isotropie de l'Univers n'est, en effet, observée que sur notre cône de lumière passé. L'extrapolation de la symétrie sphérique à l'ensemble du modèle relève donc d'une démarche de type numéroté 2 et 3 dans l'Introduction.

Or, des surfaces singulières violant la symétrie sphérique, à diverses échelles, au-delà de leur portion comprise à l'intérieur de notre cône de lumière passé, seraient parfaitement compatibles avec les observations. Nous ne sommes pas assurés que l'isotropie de l'Univers soit conservée à des échelles plus grandes que celle de l'horizon actuel.

La conséquence de cette violation éventuelle ne serait observable que dans le futur : l'Univers, vu depuis la Terre, apparaîtrait alors plus ou moins anisotrope, dans un avenir plus ou moins lointain.

La condition 4 ETL a été analysée au paragraphe 2.5 du chapitre 2. Il a été montré que cette hypothèse n'est valable que dans la mesure où l'échelle caractéristique des inhomogénéités de densité  $L = \frac{\rho}{\frac{\partial \rho}{\partial r}}$  est beaucoup plus grande que la longueur caractéristique de l'interaction photon-baryon  $L_{coll}$ .

Cette prescription implique une contrainte sur la fonction  $t_0(r)$ , comme on peut s'en persuader à l'aide de l'exemple simple ci-dessous.

Il s'agit d'examiner ici dans quelles conditions l'ETL est réalisé à proximité du centre de symétrie d'un modèle à Big-Bang cône  $t_0(r) = br$ .

L'équation (6) de l'article 1 donnant l'expression de  $\rho(r, t)$ , implique :

$$\frac{\rho}{\rho'}|_{r=0} = \frac{3t}{8t'_0(r=0)} \quad (5.1)$$

La condition ETL s'écrit pour  $t'_0(r=0) = b$  :

$$b \ll \frac{3t}{8L_{coll}} \quad (5.2)$$

ceci pour  $t > t_{eq}$ , domaine de validité du modèle.

La condition (5.2), écrite dans les unités retenues au chapitre 3, à l'époque de la dernière diffusion, est :

$$b \ll 10^3 s \quad (5.3)$$

Appliquée à l'époque de l'égalité,  $t_{eq}$ , elle donne  $b \ll 10^4 s$ .

La condition (5.3), plus contraignante, calculée à proximité de  $r = 0$ , ne donne qu'une indication qualitative. Il conviendrait, en effet, de l'étudier tout le long de la courbe  $T = 4.000^0 K$  définissant l'époque de la dernière diffusion.

Elle montre toutefois qu'une limite est imposée à la pente de la fonction de Big-Bang par l'hypothèse ETL.

Comme il ressort de la discussion développée plus haut, une telle condition va dans le sens de l'objectif consistant à éloigner l'observateur du centre de symétrie de l'Univers.

L'équilibre thermodynamique n'est toutefois pas nécessaire à la résolution du problème de l'horizon telle qu'elle a été présentée au chapitre 3. L'hypothèse ETL sert à définir les surfaces de dernière diffusion et d'égalité radiation-matière à l'aide de leur température, mais elle n'intervient pas dans la géométrie des géodésiques.

Tous les points d'une 2-surface  $r = const.$  quelconque, située au-dessus de la surface de croisement des coquilles dans le plan  $(r, t)$ , sont causalement connectés si la pente de  $t_0(r)$  vérifie les conditions limites imposées par le modèle poussière, indépendamment de toute hypothèse sur l'équilibre thermodynamique du modèle.

Il faudra, bien évidemment, préciser quantitativement, lors de travaux ultérieurs, et pour chaque cas particulier de modèle, les limites de validité des différentes hypothèses et approximations discutées ci-dessus.

### Les problèmes issus des équations de Friedmann

Deux autres problèmes cosmologiques standards sont trivialement résolus en cosmologie inhomogène :

- le problème de la platitude
- le problème de la constante cosmologique

Ces deux problèmes sont en effet directement issus de la structure des équations de Friedmann, (cf. paragraphe 1.3.1, les problèmes du modèle standard), et ne sont donc pertinents qu'en cosmologie homogène.

Il convient toutefois de rappeler que le modèle simplifié, étudié dans le cadre de cette thèse, est obtenu pour des équations d'Einstein à constante cosmologique nulle.

Il sera certainement intéressant d'analyser, par la suite, comment l'énergie du vide intervient en modèle à Big-Bang retardé.

### 5.1.2 Problème cosmologique standard en suspens

Il s'agit du problème des monopôles.

Ce problème a été décrit succinctement au paragraphe 1.3.1.

La formation de monopôles stables intervient lors de la brisure spontanée d'une symétrie locale de rang plus élevé associée au groupe de jauge  $U(1)$ . Selon le modèle standard de la physique des particules, une telle transition de phase se produit lorsque la température de l'Univers atteint  $T_{GUT} \sim 10^{16} \text{Gev}$ . Elle conduit à la production d'une quantité de monopôles excessive, incompatible avec les observations cosmologiques.

Or, ce modèle standard, pour le domaine des très hautes énergies, demeure une théorie qui n'a pas encore fait ses preuves expérimentales. De plus, des résultats très récents issus de l'expérience Super-Kamiokande (T. Kajita *et al.*, 1998) semblent remettre en cause certaines prédictions du modèle, notamment, la masse nulle des neutrinos.

Outre l'inflation qui résout cet éventuel problème des monopôles, plusieurs solutions de nature non cosmologique ont été proposées par différents auteurs.

Quelques exemples, parmi les plus significatifs, sont mentionnés ci-dessous.

Dans le mécanisme dit Langacker-Pi (Langacker et Pi, 1980) les monopôles sont connectés aux antimonopôles par le moyen de cordes, ce qui conduit à leur annihilation.

Une autre solution s'appuie sur la non-restauration de la symétrie grande-unifiée. Dans ce cas, la transition de phase au cours de laquelle des monopôles auraient pu être produits n'a jamais eu lieu (voir, par exemple, Dvali, Melfo et Senjanović, 1995).

Dvali, Liu et Vachaspati (1998) proposent, pour leur part, de supprimer les monopôles formés dans les modèles de Grande Unification standard par interaction avec des murs de domaines, instables à des échelles d'énergie inférieures, qui s'annihilent donc à leur tour avant l'époque présente.

Les exemples cités ci-dessus, qui sont loin d'épuiser le sujet, montrent que le problème des monopôles peut être considéré comme relevant plus de la physique des particules que de la cosmologie.

### 5.1.3 Fluctuations de densité à l'origine de la formation des structures

Un modèle cosmologique complet se doit d'expliquer l'origine et le spectre des fluctuations de densité ayant contribué à la formation des structures de l'Univers et des anisotropies de température du RFC.

Dans un modèle à Big-Bang inhomogène, des perturbations peuvent être générées directement sur la surface singulière. Les fluctuations de densité entre deux points voisins de l'Univers proviennent alors d'un "écart d'âge" entre ces deux points.

Une fonction de singularité non monotone est cependant extrêmement délicate à manier d'un point de vue mathématique.

L'hypothèse d'un "Big-Bang" perturbé n'étant toutefois pas physiquement interdite, il faudra rechercher dans l'avenir des moyens astucieux pour traiter la difficulté technique évoquée et analyser les conséquences observationnelles d'une telle hypothèse.

Les résultats expérimentaux les plus riches à exploiter dans ce but sont les mesures des anisotropies de température du RFC. Certaines des expériences citées au paragraphe 1.1.2 permettent déjà, lorsqu'elles sont analysées dans le formalisme du modèle standard, de contraindre les spectres des fluctuations de densité jusqu'à des moments d'ordre avoisinant 1.000, avec, il est vrai, des barres d'erreurs conséquentes. La prochaine décennie devrait apporter des améliorations substantielles en pouvoir de résolution et en précision.

Il pourra être alors possible de contraindre fortement les fluctuations de la fonction de Big-Bang jusqu'à des échelles très fines, en analysant les résultats, non plus dans le formalisme du modèle standard, mais par des méthodes analogues à celles employées au chapitre 4 pour le calcul des moments dipolaire et quadrupolaire.

Une telle étude, réalisée à l'aide des résultats d'observations d'ores et déjà disponibles, devrait figurer parmi les travaux constituant la suite logique la plus immédiate de cette thèse.

Quant à l'origine de telles perturbations, les hypothèses pouvant prétendre à l'expliquer sortent du cadre de la physique, c'est à dire du domaine des propositions testables ou falsifiables.

Ceci se produit généralement, en cosmologie, lorsque l'on aborde la question des causes premières. C'est en particulier le cas des réflexions, parfois intellectuellement très riches, menées depuis quelques années sur les "physiques" dites de pré-Big-Bang.

Pour ne pas laisser le lecteur démuni, une explication rationnelle est toutefois présentée ici <sup>1</sup>.

Nous serions situés à l'intérieur d'une région de l'Univers qui, à la suite d'une période d'effondrement gravitationnel lui ayant permis d'atteindre des énergies comprises, par

---

<sup>1</sup>proposée, entre autres, par Jean Schneider

exemple, entre l'échelle de Planck et celle de la nucléosynthèse primordiale, aurait rebondi en une "explosion" de type supernova. Les différentes couches de cette "hyper-supernova", de taille au moins égale à celle de l'horizon dit "cosmologique", seraient parvenues à l'énergie de rebond avec un décalage inhomogène dans le temps. Notre "bulle d'univers" présenterait ainsi des caractères analogues à ceux d'un modèle à Big-Bang retardé effectif, dont les perturbations auraient été générées dans la phase de contraction préalable.

Rien n'empêche alors de nous figurer un immense Univers au sein duquel contractions et "explosions" de multitudes d'hyper-supernovae produiraient des mondes multiples aux caractéristiques très diverses.

Il convient de noter, par ailleurs, que les théories produisant les structures de l'Univers à partir de défauts topologiques sont compatibles avec le modèle à Big-Bang retardé. Si ces théories parvenaient à passer avec succès le test des anisotropies de température du RFC, dans le formalisme inhomogène, elles pourraient constituer une alternative acceptable aux perturbations des surfaces singulières, évoquées ci-dessus.

#### 5.1.4 Résumé du statut actuel des modèles à Big-Bang retardé

Pour apprécier l'intérêt que peut présenter le développement, dans l'avenir, de cette classe de modèles, un tableau comparatif des résultats obtenus dans le cadre de cette thèse et par les scénarios d'inflation est proposé ci-dessous.

Il n'existe pas de théorie standard d'inflation, mais une multitude de modèles construits sur l'hypothèse d'une, ou plusieurs, phase accélérée d'expansion de tout ou partie de l'Univers.

Les résultats mentionnés au tableau 2 dans la colonne "inflation", sans prétendre à l'exhaustivité, sont donc ceux qui peuvent être considérés comme communs à la plupart des modèles récents. Ils ont été discutés au paragraphe 1.3.2.

Tableau 2. Comparaison des résultats génériques des modèles Big-Bang retardés et inflation.

Problèmes	Inflation	Big-Bang retardé
<b><u>Problèmes standards</u></b>		
Problème de l'horizon	résolu	résolu
Problème de la platitude	résolu	non pertinent
Problème de la constante cosmologique	aggravé	non pertinent
Problème des monopôles (voir physique des particules)	résolu	exclut les théories produisant des monopôles stables
Origine des fluctuations de densité primordiales	résolu? spectre à tester (MAP, Planck)	perturbations sur la surface de Big-Bang, défauts topologiques?
<b><u>Nouveaux problèmes</u></b>	origine de l'inflaton valeur de la cte de couplage réchauffage (reheating) échelle super-Planck $\Omega = 1$ ? open inflation? gravité quantique? etc...	non identifiés

## 5.2 Tests observationnels

### 5.2.1 Relecture des observations à caractère cosmologique

Si l'Univers s'avère inhomogène, l'ensemble des observations à caractère cosmologique sont à réanalyser dans une optique et avec des outils théoriques différents. La plupart des paramètres cosmologiques standards ne sont plus, en effet, pertinents.

A titre d'exemple, la "constante" de Hubble ne varie pas seulement avec la coordonnée de genre temps  $t$ , mais également avec la coordonnée comobile radiale  $r$ . Il en est de même du décalage spectral  $z$ . En conséquence, la loi de Hubble n'est pas représentée par une droite (de pente  $H_0$  constante), mais par une courbe reliée à la géométrie de l'espace-temps et dépendant, dans un univers à Big-Bang inhomogène, de la fonction  $t_0(r)$ .

D'autres paramètres du modèle standard ne sont pas définis. C'est le cas, par exemple, du paramètre de densité  $\Omega$ .

La discrimination entre modèles homogène et inhomogène est donc, en théorie, parfaitement lisible dans les résultats observationnels de plus en plus nombreux et précis.

Il apparaît toutefois probable que la distinction entre modèles standard et à Big-Bang inhomogène ne pourra se faire qu'à grande distance (valeurs élevées de  $z$ ), car le modèle standard demeure une bonne approximation pour la description de notre environnement proche.

La revue des observations recensées au chapitre 1 montre que les seules données à grand  $z$  que nous possédions actuellement concernent les anisotropies de température du RFC.

Or, le spectre des moments multipolaires généré par les modèles d'inflation présente une structure caractéristique, avec des "pics Doppler" assez bien localisés.

Un test (définitif?) de la validité de cette hypothèse devrait donc être fourni au cours de la prochaine décennie par les résultats des futures expériences de mesure de ces anisotropies. Les premières données issues de la plus précise d'entre elles, Planck Surveyor, ne devraient toutefois pas être disponibles avant une bonne dizaine d'années.

Si leur analyse concluait à la mise à l'écart de l'inflation, il serait intéressant de disposer de modèles cosmologiques constituant des alternatives valables.

Les modèles à Big-Bang inhomogène pourraient être alors de bons candidats.

Il conviendra, en attendant, d'étudier les contraintes sur leurs paramètres pouvant être extraites des données d'ores et déjà disponibles.

Pour ce faire, une méthode analogue à celle décrite au chapitre 4 pour le calcul des moments dipolaire et quadrupolaire devra être appliquée au calcul des moments d'ordre plus élevé, et, les hypothèses sur la forme de  $t_0(r)$ , réduites par la confrontation avec les résultats des observations.

Il est cependant extrêmement probable que la levée de la dégénérescence, à l'aide d'un



faisceau convergent d'épreuves expérimentales, sera difficile.

La sous-classe  $t_0(r) = br^n$  est, en effet, loin de constituer l'ensemble des fonctions  $t_0(r)$  satisfaisant les conditions imposées et récapitulées au paragraphe 4 de l'article 1. On peut imaginer des fonctions telles que  $t_0(r)$  dépende d'un nombre de paramètres bien supérieur à deux, et/ou variant eux-mêmes avec  $r$ .

Le problème serait toutefois simplifié s'il apparaissait une région dans l'espace des paramètres  $\{b, n\}$  telle que  $t_0(r) = br^n$  constitue une bonne approximation pour la description de l'Univers observable.

Cette considération conduit à proposer, à titre d'exemple, une série de tests dont la réalisation semble possible à relativement court terme.

### 5.2.2 Utilisation, comme test, de la relation entre luminosités apparente et absolue d'une source

L'interprétation du coefficient du tenseur métrique  $R(r, t)$ , dans l'article où il analyse les propriétés de la solution Lemaître-Tolman, conduit Bondi (1947) à identifier une relation (équation (2.9)) entre la luminosité apparente  $U$  d'une source observée radialement, sa luminosité absolue  $C$ , son décalage spectral  $z$  et  $R(r, t)$ .

Bondi note que cette relation permet de déterminer  $R$  en mesurant  $U$  et  $z$ , si la luminosité absolue de la source est connue.

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment cette relation peut être utilisée pour tester l'un quelconque des modèles de la classe inhomogène proposée.

Dans ce qui suit, la convention  $c = G = 1$  est adoptée.

#### Le décalage spectral en modèle Tolman-Bondi plat

Un rayon lumineux, provenant d'une source de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  et dirigé radialement vers un observateur situé au centre de l'Univers, satisfait l'équation :

$$\frac{dt}{dr} = -S(r, t) \quad (5.4)$$

issue de  $ds^2 = 0$  dans l'équation (2.1) avec  $\theta = \text{const.}$ ,  $\varphi = \text{const.}$

Pour  $S(r, t)$  donné, l'équation (5.4) possède une infinité de solutions, de la forme  $t(r)$ , sachant que le choix de la constante d'intégration dépend des conditions initiales à la source, ou des conditions finales à l'observateur.

On considère deux rayons lumineux émis par la même source à des instants décalés de  $\tau$ .

L'équation du premier rayon peut s'écrire :

$$t = T(r) \quad (5.5)$$

L'équation du second rayon est alors :

$$t = T(r) + \tau(r) \quad (5.6)$$

On fait l'hypothèse :  $\tau(r) \ll T(r)$  quel que soit  $r$ .

L'équation (5.5) reportée dans l'équation (5.4) donne :

$$\frac{dT(r)}{dr} = -S[r, T(r)] \quad (5.7)$$

L'équation (5.6), reportée, de même, dans l'équation (5.4), permet d'obtenir :

$$\frac{dT(r)}{dr} + \frac{d\tau(r)}{dr} = -S[r, T(r) + \tau(r)] \quad (5.8)$$

Le développement limité de  $S$  s'écrit :

$$S[r, T(r) + \tau(r)] = S[r, T(r)] + \tau(r) \frac{\partial S}{\partial t}[r, T(r)] + \mathcal{O}[\tau^2(r)] \quad (5.9)$$

On reporte ce développement limité dans l'équation (5.8), en négligeant les termes en  $\tau(r)$  d'ordre supérieur à 1.

$$\frac{dT(r)}{dr} + \frac{d\tau(r)}{dr} = -S[r, T(r)] - \tau(r) \frac{\partial S}{\partial t}[r, T(r)] \quad (5.10)$$

A l'aide de l'équation (5.7), cette expression se simplifie en :

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = -\tau(r) \frac{\partial S}{\partial t}[r, T(r)] \quad (5.11)$$

On a ainsi l'équation (5.7) d'un rayon et l'équation (5.11) de la variation de  $\tau(r)$  le long de ce rayon.

Soient  $\tau(r)$  la période d'oscillation d'une ligne spectrale émise par la source en  $(t, r, \theta, \varphi)$  et  $\tau(0)$  sa période mesurée en  $r = 0$  par l'observateur ; la définition du décalage spectral  $z$  est :

$$1 + z = \frac{\tau(0)}{\tau(r)} \quad (5.12)$$

La classe des modèles Tolman-Bondi à sections spatiales plates correspond à un univers d'énergie totale nulle (voir chapitre 2).

En posant  $E(r) = 0$  dans l'équation (2.2), on obtient :

$$S(r, t) = R'(r, t) \quad (5.13)$$

L'équation (5.12), donnant la définition du décalage spectral, peut s'écrire :

$$\tau(r) = \frac{\tau(0)}{1+z} \quad (5.14)$$

que l'on dérive par rapport à  $r$  :

$$\frac{d\tau(r)}{dr} = -\tau(0) \frac{\partial z}{\partial r} \frac{1}{(1+z)^2} \quad (5.15)$$

On identifie cette expression pour  $\frac{d\tau(r)}{dr}$  avec celle donnée par l'équation (5.11) où  $S$  est remplacé par  $R'$ , selon l'équation (5.13), et l'on utilise l'équation (5.14) pour obtenir :

$$\frac{dz}{1+z} = \dot{R}'[r, T(r)] dr \quad (5.16)$$

que l'on intègre entre  $(r = 0, z = 0)$  et  $(r, z)$  :

$$\log(1+z) = \int_0^r \dot{R}'[r, T(r)] dr \quad (5.17)$$

où  $T(r)$  est la solution de l'équation (5.7) réécrite :

$$\frac{dT(r)}{dr} = -R'[r, T(r)] \quad (5.18)$$

passant par le point  $(r = 0, t_p = T(0))$ , correspondant à l'observateur centré au temps présent.

En modèle Tolman-Bondi plat, l'expression de  $R$  est donnée par l'équation (2.17), qui, avec les conventions d'unités du présent chapitre, permet d'écrire, pour l'équation (5.18) :

$$\frac{dT(r)}{dr} = - \left( \frac{M_0}{6} \right)^{1/3} \left\{ \frac{3T(r) - 3t_0(r) - 2rt'_0(r)}{[T(r) - t_0(r)]^{1/3}} \right\} \quad (5.19)$$

et pour l'équation (5.17) :

$$\log(1+z) = \left( \frac{4M_0}{81} \right)^{1/3} \int_0^r \frac{3T(r) - 3t_0(r) + 2rt'_0(r)}{[T(r) - t_0(r)]^{4/3}} dr \quad (5.20)$$

En modèle Tolman-Bondi plat, le décalage spectral  $z$  d'une source mesuré par un observateur situé au centre,  $r = 0$ , vérifie l'équation (5.20), avec  $T(r)$  solution de l'équation différentielle (5.19) passant par le point  $(r = 0, t_p = T(0))$ .

### Test observationnel

En mesurant la luminosité apparente et le décalage spectral d'une source dont on connaît par ailleurs la luminosité absolue, on peut évaluer sa distance-luminosité  $R$ , grâce à la relation (2.9).

L'idée est d'en déduire une méthode permettant de tester, à partir de telles observations, tout modèle particulier d'univers à Big-Bang inhomogène.

Il est, pour cela, nécessaire de disposer d'un échantillon de sources lumineuses, suffisamment éloignées pour que leurs décalages spectraux possèdent des valeurs significatives, et dont on soit capable d'évaluer la luminosité absolue par une méthode indépendante.

Le décalage spectral mesuré pour la source  $i$  est noté  $z_i$ .

Le rayon lumineux issu de la source  $i$  se propage selon une trajectoire dont l'équation est  $T(r)$ , solution de l'équation différentielle (5.19) passant par  $(r = 0, t_p = T(0))$ .

Ayant mesuré  $z_i$ , on détermine les coordonnées  $(r_i, T(r_i))$  de la source de la façon suivante.

Par une méthode numérique appropriée, analogue à celles décrites aux chapitres 3 et 4, on intègre pas à pas l'équation (5.19), en partant de  $(r = 0, t_p = T(0))$ .

A chaque pas d'intégration, est calculé un couple  $(r, T(r))$  représentant les coordonnées de l'un des points de la trajectoire.

Pour chaque couple  $(r, T(r))$ , on intègre numériquement, en parallèle, l'équation (5.20) jusqu'à ce que la valeur calculée pour  $\log(1+z)$  soit égale à  $\log(1+z_i)$ . Le couple  $(r_i, T(r_i))$  correspondant représente les coordonnées de la source de décalage spectral  $z_i$ .

Connaissant  $(r_i, T(r_i))$ , il est aisé de calculer la distance-luminosité correspondante  $R[r_i, T(r_i)]$  en reportant ces valeurs dans l'équation suivante, issue de l'équation (2.17) :

$$R[r, T(r)] = \left(\frac{9M_0}{2}\right)^{1/2} r[T(r) - t_0(r)]^{2/3} \quad (5.21)$$

Ce résultat est comparé à la valeur "observationnelle" de  $R_i$  déduite de la relation (2.9) écrite sous la forme :

$$R_i^2 = \frac{C_i}{U_i(1+z_i)^2} \quad (5.22)$$

Une telle méthode, si elle permet de tester un modèle dont on s'est donné, a priori, la fonction  $t_0(r)$ , est difficilement applicable à une vérification globale de la classe concernée.

Un résultat négatif peut, en effet, avoir deux causes :

- soit la classe de modèles, dans son ensemble, est inadaptée à la description de l'Univers.

- soit l'écart provient uniquement d'une expression erronée retenue pour  $t_0(r)$ .

De plus, les équations ci-dessus ne s'appliquent que dans l'approximation "observateur centré". Ce test, dans sa version la plus simple, ne serait donc pertinent que pour un univers de type  $r_p$  faible,  $b$  fort.

Pour d'autres valeurs des paramètres du modèle, il reste, bien sûr, envisageable, mais avec des équations, et donc une procédure numérique, de difficulté accrue.

Son emploi suppose donc, a priori, une approche conjointe par les autres méthodes évoquées au paragraphe 5.2.1.

La précision qui peut être obtenue, si l'on dispose d'un échantillon suffisamment vaste de sources, valide toutefois l'intérêt qui peut être porté à ce type de vérification.

Il convient, par ailleurs, de souligner que l'emploi de cette méthode nécessite un échantillon de sources, situées à des distances significatives, et dont la luminosité absolue puisse être rigoureusement évaluée.

Les supernovae de type Ia (SNeIa) pourraient être de bonnes candidates.

Plusieurs groupes travaillent actuellement à développer les observations de ce type de chandelles cosmiques, à des  $z$  croissants.

Le groupe français Supernova Cosmology Project, en particulier, envisage, dans un avenir proche, la recherche de SNeIa à des  $z$  approchant 1 et, à plus long terme, dans le cadre du projet MEGACAM, à des  $z$  bien supérieurs.

Une collaboration avec ce groupe, actuellement envisagée de manière encore informelle, pourrait se révéler fructueuse dans l'avenir.

### 5.3 Les paramètres du modèle

La fonction de Big-Bang  $t_0(r)$ , si elle constitue un paramètre fondamental de la classe étudiée, car c'est sa forme qui permet notamment la résolution du problème de l'horizon, n'est pas le seul paramètre libre du modèle.

Il a été montré, au paragraphe 2.3 de l'article 1, que la définition de la température dépend également de la fonction d'entropie spécifique  $S(r)$ .

Toutes les applications numériques présentées dans cette thèse ont été effectuées avec l'hypothèse  $S(r) = \text{const.}$

Or, c'est une forme particulière choisie pour cette fonction qui a permis à Pasczyński et Piran (1990) de reproduire, avec l'hypothèse  $t_0(r) = \text{const.}$ , les valeurs observées des moments dipolaire et quadrupolaire des anisotropies de température du RFC.

L'influence de ce paramètre sur les propriétés du modèle ne pourra donc pas être négligée au cours de ses développements futurs.

Dans un univers de type Tolman-Bondi, la fonction énergie totale  $E(r)$  est aussi un paramètre libre du modèle.

Pour cette première étude, l'hypothèse d'un univers à sections spatiales plates,  $E(r) = 0$ , a été retenue.

Il se peut toutefois qu'une approche plus fine de la réalité conduise à adopter ultérieurement  $E(r) \neq 0$ , dans une mesure qui devra être contrainte par les observations.

L'hypothèse de symétrie sphérique, retenue ici en raison des simplifications notables qu'elle apporte aux calculs, sera vraisemblablement à réexaminer.

L'influence, enfin, d'une constante cosmologique non nulle devra également être analysée.

## 5.4 Une question de vocabulaire

Avec les coordonnées adoptées dans cette étude, la signification du nom "Big-Bang retardé", attribué au modèle, est immédiate : une fonction  $t_0(r)$  croissante avec  $r$  implique que, dans le temps propre de chaque particule du fluide cosmique, le Big-Bang effectif se "produit" à des époques d'autant plus "récentes" que l'on s'éloigne du centre de l'Univers.

L'interprétation peut cependant sembler abusive, si l'on considère le changement de coordonnée de genre temps :

$$\tilde{t} = t - t_0(r) \quad (5.23)$$

Dans le temps propre  $\tilde{t}$ , le Big-Bang se "produit" pour tout  $r$  à  $\tilde{t} = \text{const.} = 0$ . Il n'y a pas de Big-Bang "retardé".

Considérons toutefois la classe de modèles donnée comme exemple :

$$t_0(r) = br^n \quad b > 0 \quad n > 0 \quad (5.24)$$

$$S(r) = \text{const.} \quad (5.25)$$

Le phénomène pertinent pour la description de l'évolution d'un tel univers est l'augmentation de la densité d'énergie, et donc de la température, lorsque l'on se dirige vers les valeurs de  $n$  importe quelle coordonnée de genre temps correspondant à notre passé.

Dans cette classe de modèles, la surface de croisement des coquilles est asymptote, pour  $r \rightarrow \infty$ , de chaque surface  $T = \text{const.}$  Pour une coordonnée de genre temps donnée, la température croît donc plus rapidement pour des valeurs croissantes de la coordonnée radiale  $r$ .

Comme il a été montré au paragraphe 2.4 de cette thèse, la surface de croisement des coquilles peut alors être interprétée comme singularité effective du modèle. Un observateur plongé dans cet univers expérimente une singularité effective "retardée" lorsqu'il se dirige vers les valeurs croissantes de  $r$ .



# Conclusion

La démarche, proposée dans le cadre de cette thèse, est issue d'un triple constat.

Le Principe Cosmologique, sur lequel est fondée la cosmologie standard, procède d'un choix philosophique qu'il est loisible d'accepter, mais également de refuser.

Le modèle standard du Big-Bang chaud, malgré d'indéniables succès, constitue incontestablement une approximation trop grossière des phénomènes, dont certains aspects essentiels restent inexpliqués dans ce contexte.

L'hypothèse de l'inflation, si elle apporte une solution à certains des problèmes du modèle standard, possède la propriété embarrassante d'en générer de nouveaux.

Il a paru intéressant d'adopter, à ce stade, une démarche originale, consistant à s'affranchir du Principe Cosmologique et du paradigme de l'inflation qui lui est associé.

Parmi la multitude de modèles susceptibles d'être retenus comme candidats au remplacement de l'actuel modèle standard, il a été choisi d'étudier, dans le cadre de la Relativité Générale d'Einstein, l'hypothèse d'un univers inhomogène à symétrie sphérique.

Au sein de cette classe de modèles, a été identifiée une sous-classe, à singularité initiale retardée, qui permet de résoudre les problèmes de l'horizon, de la platitude et de la constante cosmologique, tout en conservant les prédictions les plus robustes du modèle standard.

Les propriétés de cette sous-classe sont compatibles avec les valeurs observées des moments dipolaire et quadrupolaire du rayonnement de fond cosmologique qui imposent certaines contraintes aux paramètres du modèle.

D'autres contraintes pourraient être imposées dans l'avenir à ces paramètres par les données issues de futures observations à caractère cosmologique, dans la mesure où celles-ci concerneront des régions de l'Univers suffisamment éloignées.

Deux mécanismes pouvant expliquer l'origine de la formation des structures ont été évoqués : soit des fluctuations de densité primordiales générées sur les surfaces singulières, soit une production à partir de défauts topologiques.

Dans ce contexte, le modèle standard homogène subsiste en tant qu'approximation convenant à la description de notre univers proche.

Il a été toutefois souligné que le travail réalisé ne représente qu'une ébauche de construction d'un modèle cosmologique, a priori prometteur, mais qu'il reste à développer, à contraindre et à évaluer sous tous ses aspects.



Le modèle pourra gagner, dans l'avenir, à s'affranchir de l'hypothèse "Terre centrée", bien que celle-ci ne soit pas physiquement interdite. Les arguments en faveur d'une telle perspective ont été présentés au chapitre 5.

Toute l'étude de la région dominée par l'énergie radiative demeure, par ailleurs, à effectuer. C'est la raison qui a conduit à aborder, en annexe, l'étude des équations d'Einstein pour un fluide parfait inhomogène, à symétrie sphérique, vérifiant l'équation d'état d'un gaz relativiste.

Mon souhait, pour l'avenir, est que cet embryon de modèle soit perçu comme suffisamment attractif pour me permettre de convaincre plusieurs collègues de poursuivre, avec ou sans moi, le développement de modèles cosmologiques inhomogènes.

Le travail présenté ici montre que l'on peut obtenir des résultats intéressants, sans avoir nécessairement recours à une modélisation complexe, ni à des calculs numériques trop lourds.

# Annexe : Classes d'équations d'Einstein réduites pour un fluide parfait relativiste à symétrie sphérique

## 1 Motivations à l'origine du travail exposé

Au chapitre 3, le problème de l'horizon a été résolu grâce à la structure des équations du modèle Tolman-Bondi, par connexion causale à l'intérieur de la région de l'Univers dominée par la matière.

On a vu que la poursuite ultérieure du développement des modèles présentés implique l'étude de leur comportement dans la région dominée par la radiation, d'équation d'état  $p = \frac{\rho}{3}$ .

Ces considérations constituent le motif du travail présenté ici, qui aboutit à une simplification du problème posé.

Aucune solution analytique complète n'ayant pu toutefois être mise en évidence, les résultats de cette étude n'ont pas été utilisés dans le cadre de cette thèse. C'est pourquoi ils sont ici fournis en annexe.

## 2 Equations réduites de Podurets-Misner-Sharp

### 2.1 Système d'équations réduites

Pour traiter le problème de l'effondrement gravitationnel d'une sphère de fluide parfait avec gradient de pression (d'équation d'état  $p \neq 0$ ), Misner et Sharp (1964) et, indépendamment, Podurets (1964) ont réduit les équations d'Einstein à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, chacune possédant une signification physique identifiée.

Ces équations servent de point de départ au travail présenté dans l'article 3 du présent chapitre.

Un bref rappel de la façon dont ces équations ont été établies par ces auteurs est proposé dans les lignes qui suivent.

Les unités  $G = c = 1$  sont conservées.

L'élément de longueur retenu présente, pour un espace-temps à symétrie sphérique, la forme diagonale :

$$ds^2 = e^\sigma dt^2 - e^\omega dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

$\sigma, \omega$  et  $R$  étant des fonctions de la coordonnée de genre temps  $t$  et de la coordonnée radiale  $r$ .

Les équations d'Einstein, avec constante cosmologique nulle, s'écrivent :

$$G_i^j = -8\pi T_i^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3 = t, r, \theta, \varphi \quad (2)$$

Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait est :

$$T_i^j = (p + \rho)u_i u^j - pg_i^j \quad (3)$$

$p$  dénotant la pression et  $\rho$ , la densité d'énergie.

Le référentiel local est choisi au repos le long des lignes d'univers  $r = \text{const.}, \theta = \text{const.}, \varphi = \text{const.}$

En coordonnées comobiles, les composantes de la quadri-vitesse s'écrivent donc :

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0 \quad u^0 = e^{-\frac{\sigma}{2}} \quad (4)$$

Avec la métrique (1), les composantes non nulles du tenseur d'Einstein sont :

$$G_0^0 = e^{-\omega} \left( 2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{R'\omega'}{R} \right) - e^{-\sigma} \left( \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\dot{R}\dot{\omega}}{R} \right) - \frac{1}{R^2} \quad (5)$$

$$G_1^1 = e^{-\omega} \left( \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R'\sigma'}{R} \right) - e^{-\sigma} \left( 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\dot{R}\dot{\sigma}}{R} \right) - \frac{1}{R^2} \quad (6)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{e^{-\omega}}{4} \left( 2\sigma'' + \sigma'^2 + \frac{4R''}{R} - 2\frac{R'\omega'}{R} + 2\frac{R'\sigma'}{R} - \sigma'\omega' \right) - \frac{e^{-\sigma}}{4} \left( 2\ddot{\omega} + \dot{\omega}^2 + \frac{4\ddot{R}}{R} - 2\frac{\dot{R}\dot{\sigma}}{R} + 2\frac{\dot{R}\dot{\omega}}{R} - \dot{\omega}\dot{\sigma} \right) \quad (7)$$

$$G_0^1 = -e^{\sigma-\omega} G_1^0 = \frac{e^{-\omega}}{R} (\dot{\omega} R' + \sigma' \dot{R} - 2\dot{R}') \quad (8)$$

Les expressions (3) à (8) reportées dans les équations (2) donnent quatre équations indépendantes :

$$e^{-\omega} \left( 2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{R'\omega'}{R} \right) - e^{-\sigma} \left( \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\dot{R}\dot{\omega}}{R} \right) - \frac{1}{R^2} = -8\pi\rho \quad (9)$$

$$e^{-\omega} \left( \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R'\sigma'}{R} \right) - e^{-\sigma} \left( 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\dot{R}\dot{\sigma}}{R} \right) - \frac{1}{R^2} = 8\pi p \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\omega}}{4} \left( 2\sigma'' + \sigma'^2 + \frac{4R''}{R} - \frac{2R'\omega'}{R} + \frac{2R'\sigma'}{R} - \sigma'\omega' \right) \\ & - \frac{e^{-\sigma}}{4} \left( 2\ddot{\omega} + \dot{\omega}^2 + \frac{4\ddot{R}}{R} - \frac{2\dot{R}\dot{\sigma}}{R} + 2\frac{\dot{R}\dot{\omega}}{R} - \dot{\omega}\dot{\sigma} \right) = 8\pi p \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\omega} R' + \sigma' \dot{R} - 2\dot{R}' = 0 \quad (12)$$

En multipliant l'équation (9) par  $R^2 R'$ , et en utilisant l'équation (12), on obtient :

$$8\pi\rho R^2 R' = \frac{\partial}{\partial r} (R + R e^{-\sigma} \dot{R}^2 - R e^{-\omega} R'^2) \quad (13)$$

En multipliant l'équation (10) par  $R^2 \dot{R}$  et en utilisant l'équation (12), il vient :

$$8\pi p R^2 \dot{R} = -\frac{\partial}{\partial t} (R + R e^{-\sigma} \dot{R}^2 - R e^{-\omega} R'^2) \quad (14)$$

Les équations du mouvement s'écrivent, par ailleurs :

$$D_j T_i^j = 0 \quad (15)$$

Les symboles de Christoffel d'intérêt étant :

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\omega}}{2} \quad \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{R}}{R} \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{\sigma'}{2} \quad (16)$$

on obtient deux équations indépendantes :

$$\dot{\omega} = -2\frac{\dot{\rho}}{\rho+p} - 4\frac{\dot{R}}{R} \quad (17)$$

$$\sigma' = -2\frac{p'}{\rho+p} \quad (18)$$

On démontre facilement (mais les calculs fastidieux ne sont pas reportés ici) que les équations (11), (12), (17) et (18) ne sont pas indépendantes. On remplace alors, dans

le système d'équations différentielles, les équations ( 11) et ( 12) par les équations ( 17) et ( 18).

On introduit, ensuite, une variable supplémentaire, la fonction  $m(r, t)$ , définie par :

$$m = \frac{R}{2}(1 + e^{-\sigma} \dot{R}^2 - e^{-\omega} R'^2) \quad (19)$$

Le système d'équations différentielles constitué par les équations du champ peut alors s'écrire sous la forme de cinq équations aux dérivées partielles, du premier ordre :

$$m = \frac{R}{2}(1 + e^{-\sigma} \dot{R}^2 - e^{-\omega} R'^2) \quad (20)$$

$$\dot{m} = -4\pi p R^2 \dot{R} \quad (21)$$

$$m' = 4\pi \rho R^2 R' \quad (22)$$

$$\sigma' = -2 \frac{p'}{\rho + p} \quad (23)$$

$$\dot{\omega} = -2 \frac{\dot{p}}{\rho + p} - 4 \frac{\dot{R}}{R} \quad (24)$$

Avec l'équation d'état du fluide, on a bien six équations pour six inconnues  $m, R, \rho, p, \sigma, \omega$ .

## .2.2 Interprétation de $m$

Pour une valeur fixée de la coordonnée de genre temps  $t$ , l'intégration de l'équation ( 22) entre  $r = 0$  et  $r$ , donne, avec l'hypothèse  $m(r = 0) = 0$  :

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \rho R^2 R' dr \quad (25)$$

L'élément de volume propre de la métrique ( 1) s'écrit :

$$dv = e^{\frac{\omega}{2}} R^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (26)$$

qui, intégré sur  $\theta$  et  $\varphi$ , devient :

$$dv = 4\pi e^{\frac{\omega}{2}} R^2 dr \quad (27)$$

Reportée dans l'équation ( 25), l'expression de  $4\pi R^2 dr$ , extraite de l'équation ( 27), implique :

$$m(r) = \int_0^r \rho e^{\frac{\omega}{2}} R' dv \quad (28)$$

L'équation ( 20) permet d'écrire :

$$e^{\frac{\omega}{2}} R' = \left(1 + e^{-\sigma} \dot{R}^2 - \frac{2m}{R}\right)^{1/2} \quad (29)$$

que l'on reporte dans l'équation ( 28 ) :

$$m(r) = \int_0^r \rho \left( 1 + e^{-\sigma} \dot{R}^2 - \frac{2m}{R} \right)^{1/2} dv \quad (30)$$

On définit la vitesse relative  $V d\theta$  de particules de fluide adjacentes sur une même sphère  $r = \text{const.}$  :

$$V = D_t R \quad (31)$$

où  $D_t$  est la dérivée covariante par rapport au temps propre :

$$D_t \equiv u^i \frac{\partial}{\partial x^i} = u^0 \frac{\partial}{\partial x^0} = e^{\frac{-\sigma}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_r \quad (32)$$

Ce qui donne, pour l'équation ( 31 ) :

$$V = e^{\frac{-\sigma}{2}} \dot{R} \quad (33)$$

En reportant  $V$  dans l'équation ( 30), et en rétablissant les expressions des constantes fondamentales  $G$  et  $c$ , on obtient :

$$m(r) = \int_0^r \rho \left( 1 + V^2 - \frac{2Gm}{c^2 R} \right)^{1/2} dv \quad (34)$$

Le premier terme sous l'intégrale est identifiable à la masse au repos des particules du fluide, le second est un terme d'énergie cinétique et le troisième un terme d'énergie potentielle gravitationnelle.

$m(r)$  peut donc s'interpréter physiquement comme étant la masse ou l'énergie totale des particules de fluide contenues dans une sphère de rayon  $r$  centrée sur  $r = 0$ , au temps  $t$ .

### 2.3 Interprétation de $R$

Pour une valeur fixée de la coordonnée  $t$ , l'intégration de l'équation ( 22) entre  $R = 0$  et  $R$ , avec l'hypothèse  $m(R = 0) = 0$ , donne :

$$m(R) = \int_0^R 4\pi\rho(R)R^2 dR \quad (35)$$

$R$  peut donc s'assimiler physiquement à un rayon, dont la nature reste à préciser.

L'équation ( 21) peut alors être interprétée comme reliant la variation avec le temps de la "masse"  $m$  d'une sphère de particules centrée sur  $r = 0$  et de rayon  $r$  au travail effectué par les forces de pression sur la surface de la sphère de rayon  $R$ .

### **3 Article 3 : Classes of reduced Einstein's equations for a relativistic spherically symmetric perfect fluid**

# Classes of reduced Einstein's equations for a relativistic spherically symmetric perfect fluid

Marie-Noëlle CÉLÉRIER <sup>1</sup>

Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie  
Observatoire de Paris-Meudon  
5 place Jules Janssen 92195 Meudon Cédex FRANCE

## Abstract

Classes of inhomogeneous and non static reduced field equations are given for a relativistic spherically symmetric perfect fluid, i.e. with no energy flow and equation of state  $p = \frac{\rho}{3}$ . Cosmological and astrophysical applications are considered.

PACS numbers: 04.40.Dg, 04.40.Nr, 95.30.Sf, 98.80.Hw

Short title: Reduced Einstein equations for relativistic fluids

---

<sup>1</sup>E-mail address: [celerier@obspm.fr](mailto:celerier@obspm.fr)



# 1 Introduction

In order to deal with the problem of gravitational collapse for a fluid sphere with pressure gradient, C.W. Misner and D.H. Sharp [1] and independently M.A. Podurets [2] have reduced Einstein's field equations to a system of partial differential equations of the first order, each one bearing a clear physical meaning.

Coupled with a realistic equation of state for the fluid, those equations were used by different authors to study the properties of several physical situations. The related studies led mostly to heavy numerical calculations.

The purpose of the present paper is to simplify the problem for a relativistic perfect fluid, i.e. with equation of state  $p = \frac{\rho}{3}$ .

This study will be useful for the development of a class of primordial cosmological models of inhomogeneous type, which has been undertaken by the author, in collaboration with J. Schneider, [3] to deal with the major problems encountered in standard cosmology.

Classes of solutions are proposed, reducing the field equations to a single ordinary differential equation with separated variables.

## 2 Einstein's reduced equations for an ideal relativistic spherically symmetric fluid

In the following, the units  $G = c = 1$  are adopted.

The line element for a spherically symmetric space-time can be written with the diagonal form:

$$ds^2 = e^\sigma dt^2 - e^\omega dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

$\sigma, \omega$ , and  $R$  being functions of  $t$  and the radial coordinate  $r$ .

Einstein's equations, with zero cosmological constant, are given by:

$$G_i^j = -8\pi T_i^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3 = t, r, \theta, \varphi \quad (2)$$

The stress-energy tensor of the fluid is that of an ideal gas:

$$T_i^j = (p + \rho)u_i u^j - g_i^j p \quad (3)$$

$p$  denoting the pressure and  $\rho$  the energy density.

The local reference frame is chosen at rest along the  $r = \text{const.}$ ,  $\theta = \text{const.}$ ,  $\varphi = \text{const.}$  world lines. In comoving coordinates, the components of the four-velocity are thus:

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0 \quad u^0 = e^{-\frac{\sigma}{2}} \quad (4)$$

Using the conservation law:

$$D_j T_i^j = 0 \quad (5)$$

and the above assumptions, M.A. Podurets [2] has derived, for the case  $R' \neq 0$ , the following system of reduced equations:

$$m = \frac{R}{2}(1 + e^{-\sigma} \dot{R}^2 - e^{-\omega} R'^2) \quad (6)$$

$$\dot{m} = -4\pi p R^2 \dot{R} \quad (7)$$

$$m' = 4\pi \rho R^2 R' \quad (8)$$

$$\sigma' = -2 \frac{p'}{\rho + p} \quad (9)$$

$$\dot{\omega} = -2 \frac{\dot{\rho}}{\rho + p} - \frac{4\dot{R}}{R} \quad (10)$$

where a dot denotes derivation with respect to  $t$  and a prime derivation with respect to  $r$ .

Equation (6) defines a function  $m(t, r)$  serving as an intermediate tool for the calculations, allowing to write more concisely the above system of partial differential equations.  $m(t, r)$ , which possesses the dimension of a mass, is interpreted as the total mass energy contained within the sphere of radius  $r$  at time  $t$ .

One thus obtains, with the equation of state of the fluid, six equations for six unknown functions:  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $m$ .

### 3 Field equations with $p = \frac{\rho}{3}$ equation of state

An ultra-relativistic gas with isotropic pressure possesses the equation of state:

$$p = \frac{\rho}{3} \quad (11)$$

The substitution of expression (11) for  $p$  into the system of equations (6) to (10) gives:

$$m = \frac{R}{2}(1 + e^{-\sigma} \dot{R}^2 - e^{-\omega} R'^2) \quad (12)$$

$$\dot{m} = -\frac{4\pi}{3}\rho R^2 \dot{R} \quad (13)$$

$$m' = 4\pi\rho R^2 R' \quad (14)$$

$$\sigma' = -\frac{\rho'}{2\rho} \quad (15)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{4\dot{R}}{R} \quad (16)$$

Equation (15) integrated with respect to  $r$  becomes:

$$e^\sigma = \frac{A^2(t)}{\sqrt{\rho}} \quad (17)$$

$A(t)$  being an arbitrary function of  $t$ .

Equation (16) integrated with respect to  $t$  gives:

$$e^\omega = \frac{B^2(r)}{\rho^{\frac{3}{2}} R^4} \quad (18)$$

$B(r)$  being an arbitrary function of  $r$ .

Considering the nonuniqueness of the determination of the variables  $t$  and  $r$ , the functions  $A(t)$  and  $B(r)$  can be set to unity.

Substituting expressions (17) and (18) into equation (12), the system reduces to three partial differential equations:

$$m = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{\rho}\dot{R}^2 - \rho^{\frac{3}{2}}R^4 R'^2) \quad (19)$$

$$\dot{m} = -\frac{4\pi}{3}\rho R^2 \dot{R} \quad (20)$$

$$m' = 4\pi\rho R^2 R' \quad (21)$$

which, substituting expression (19) for  $m$  into equations (20) and (21), can be considered as a system of only two partial differential equations with two un-

known functions  $R(t, r)$  and  $\rho(t, r)$ .

## 4 Reduction of the equations for peculiar classes of solutions

Equation (20) derived with respect to  $r$  becomes:

$$\dot{m}' = -\frac{4\pi}{3}\rho'R^2\dot{R} - \frac{8\pi}{3}\rho RR'\dot{R} - \frac{4\pi}{3}\rho R^2\dot{R}' \quad (22)$$

Equation (21) derived with respect to  $t$  becomes:

$$\dot{m}' = 4\pi\dot{\rho}R^2R' + 8\pi\rho RR'\dot{R} + 4\pi\rho R^2\dot{R}' \quad (23)$$

The identification between the two latter expressions for  $\dot{m}'$  gives:

$$3\dot{\rho}RR' + \rho'R\dot{R} + 8\rho R'\dot{R} + 4\rho R\dot{R}' = 0 \quad (24)$$

The set of solutions of the system of equations (19), (20) and (24), or of equations (19), (21) and (24), which are equivalent, is a subclass of the set of solutions of the system of equations (19) to (21)

Peculiar classes of exact solutions can be obtained by splitting equation (24) into the two following ones:

$$3R' \frac{\partial}{\partial t}(\rho R) + (4 - n)\rho \frac{\partial}{\partial t}(RR') = 0 \quad (25)$$

$$\dot{R} \frac{\partial}{\partial r}(\rho R) + n\rho \frac{\partial}{\partial r}(R\dot{R}) = 0 \quad (26)$$

$n$  being any arbitrary real number.

It is these classes that are here studied.

Dividing equation (25) by  $\rho RR'$  and integrating over  $t$ , then dividing equation (26) by  $\rho R\dot{R}$  and integrating over  $r$ , leads to:

$$\rho^3 R^{7-n} R'^{4-n} = F(r) \quad (27)$$

$$\rho R^{n+1} \dot{R}^n = G(t) \quad (28)$$

$F(r)$  and  $G(t)$  being a priori arbitrary functions of  $r$  and  $t$ .

The solutions will thus be obtained by solving:

- either the system of differential equations (19), (20), (27) and (28)

- or the system of differential equations (19), (21), (27) and (28)

which are equivalent, as equations (20), (27) and (28) give equation (21) and equations (21), (27) and (28) give equation (20).

The method which will be further adopted is the following:

- first, eliminating  $\rho$  between equations (27) and (28), expressions for  $R(t, r)$  will be derived for some special values of  $n$ , thus giving corresponding expressions for  $\rho(t, r)$  from either one of these two equations.

- then, eliminating  $m$  between the two remaining equations of the system, one obtains a constraint over the a priori arbitrary functions of separated variables  $t$  and  $r$  defining  $R$ .

The first step of the above presented method gives:

$$\frac{(RR')^{4-n}}{F(r)} = \frac{(R\dot{R})^{3n}}{G^3(t)} \quad (29)$$

#### 4.1 Case $n = 1$

Equation (29) becomes:

$$\frac{R'}{F^{\frac{1}{3}}(r)} = \frac{\dot{R}}{G(t)} \quad (30)$$

Proceeding to the change of coordinates:

$$G(t)dt = d\tau \quad (31)$$

$$F^{\frac{1}{3}}(r)dr = d\tilde{r} \quad (32)$$

one obtains for equation (30):



$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial R}{\partial \tau} \quad (33)$$

which implies that  $R$  is a function of  $u = \tau + \tilde{r}$ ; or, considering two arbitrary functions  $g(t)$  and  $f(r)$ , defined by:

$$f'(r) = F^{\frac{1}{3}}(r) \quad (34)$$

$$\dot{g}(t) = G(t) \quad (35)$$

that  $R$  is a function of  $u = g(t) + f(r)$ , which can be written:

$$R = R(u) \quad \text{with} \quad u = g(t) + f(r) \quad (36)$$

To any solution  $R(t, r)$  of equation (36) corresponds an energy density function  $\rho(t, r)$  equivalently given by equation (27) or (28) with  $n = 1$ , which can be written:

$$\rho = \frac{\dot{g}(t)}{R^2 \dot{R}} = \frac{f'(r)}{R^2 R'} = \frac{1}{R^2 \frac{dR}{du}} \quad (37)$$

It now remains to write the constraint on  $R$ ,  $f$  and  $g$ .

The analytical expression for  $m(t, r)$  obtained from the integration of equations (20) and (21), where  $\rho$  has been replaced by respectively the first and the second expression given in equation (37), is:

$$m(t, r) = 4\pi f(r) - \frac{4\pi}{3} g(t) \quad (38)$$

Substituting the expressions for  $R'$  and  $\dot{R}$  issued from equation (36), the expression for  $\rho$  given by equation (37) and the expression for  $m$  given by equation (38) into equation (19), allows to write the constraint equation:

$$R - 8\pi f + \frac{8\pi}{3}g - f'^2 R^2 \left(\frac{dR}{du}\right)^{\frac{1}{2}} + \dot{g}^2 \left(\frac{dR}{du}\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (39)$$

Consider now the two differential operators  $D_1$  and  $D_2$ , defined as:

$$D_1 \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} = \frac{1}{f'(r)} \frac{\partial}{\partial r} \quad (40)$$

$$D_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\dot{g}(t)} \frac{\partial}{\partial t} \quad (41)$$

For any function  $\psi$  of  $u$  :

$$(D_1 - D_2)\psi(u) = 0 \quad (42)$$

The  $D_1 - D_2$  operator applied three times to equation (39), rewritten :

$$8\pi \left(f - \frac{g}{3}\right) = R(u) - \alpha(u)f'^2(r) + \beta(u)\dot{g}^2(t) \quad (43)$$

gives :

$$\frac{D_1 A}{B} + A \frac{D_2 B}{B^2} = 0 \quad (44)$$

$A$  and  $B$  being arbitrary functions of, respectively,  $r$  and  $t$ , verifying :

$$\frac{A(r)}{B(t)} \equiv \frac{D_1^2(f'^2)}{D_2^2(\dot{g}^2)} = \frac{\beta(u)}{\alpha(u)} \quad (45)$$

Integrating equation (44), it comes :

$$\frac{1}{f'(r)} \frac{A'(r)}{A(r)} = -\frac{1}{\dot{g}(t)} \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \lambda \quad (46)$$

$\lambda$  being a constant.

For  $\lambda \neq 0$ , and after some integrations, one obtains :

$$f'^2(r) = \frac{A_0}{\lambda^2} e^{\lambda f} + A_1 f + A_2 \quad (47)$$

$$\dot{g}^2(t) = \frac{B_0}{\lambda^2} e^{-\lambda g} + B_1 g + B_2 \quad (48)$$

$$R(u) = \frac{\lambda B'_0 R_0}{\lambda B'_0 - A'_0 R_0 e^{\lambda u}} \quad (49)$$

$A_0, A'_0, A_1, A_2, B_0, B'_0, B_1, B_2$  being constants.

Substituting above expressions (47) and (48) into equation (43), one obtains:

$$8\pi \left( f - \frac{g}{3} \right) = R(u) - \alpha(u) \left( \frac{A_0}{\lambda^2} e^{\lambda f} + A_1 f + A_2 \right) + \beta(u) \left( \frac{B_0}{\lambda^2} e^{-\lambda g} + B_1 g + B_2 \right) \quad (50)$$

which must be verified for any value of  $r$  and  $t$ .

For a fixed value of  $t$ ,  $g(t) = g_0 = \text{const.}$ , and equation (50) becomes :

$$8\pi \left( f - \frac{g_0}{3} \right) = R(u = f+g_0) - \alpha(u = f+g_0) \left( \frac{A_0}{\lambda^2} e^{\lambda f} + A_1 f + A_2 \right) + \beta(u = f+g_0) B_3 \quad (51)$$

with :

$$B_3 = \frac{B_0}{\lambda^2} e^{-\lambda g_0} + B_1 g_0 + B_2 = \text{const.} \quad (52)$$

Equation (51) is transcendental in  $f$ , and has thus for solution  $f = \text{const.}$ , implying  $R' = 0$ , which forbids the use of Poduret's reduced equations (see above section 2).

For  $\lambda = 0$  the conclusion is identical.

Case  $n = 1$  is not therefore solution of Einstein's equations.

## 4.2 Case $n = 4$

In this case, equation (29) becomes:

$$R\dot{R} = \frac{G^{\frac{1}{4}}(t)}{F^{\frac{1}{12}}(r)} \quad (53)$$

which, after integration over  $t$ , gives:

$$R(t, r) = \left[ \frac{g(t)}{f(r)} + h(r) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

with:

$$G^{\frac{1}{4}}(t) = \frac{\dot{g}(t)}{2} \quad (55)$$

and

$$F^{\frac{1}{12}}(r) = f(r) \quad (56)$$

$h(r)$  being an a priori arbitrary function of  $r$ .

The plus sign has been retained for  $R$  in equation (54) to get a positive expression for  $\rho$  below.

This expression for  $\rho$  proceeds from equation (27) with  $n = 4$ , into which are substituted equations (54) and (56):

$$\rho(t, r) = \frac{f^4(r)}{\left[\frac{g(t)}{f(r)} + h(r)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (57)$$

Substituting the above expressions for  $R$  and  $\rho$  into equations (17) and (18) with  $A(t)$  and  $B(r)$  being set to unity, it comes:

$$e^{\sigma} = \frac{\left[\frac{g(t)}{f(r)} + h(r)\right]^{\frac{1}{4}}}{f^2(r)} \quad (58)$$

$$e^{\omega} = \frac{1}{f^6(r) \left[\frac{g(t)}{f(r)} + h(r)\right]^{\frac{5}{4}}} \quad (59)$$

To obtain the last equation, giving the dependence between the three functions  $f(r)$ ,  $g(t)$  and  $h(r)$ , one can eliminate either  $\dot{m}$  between equation (20) and

equation (19) derived with respect to  $t$ , or  $m'$  between equation (21) and equation (19) derived with respect to  $r$ , then substitute the expressions for  $R$  and  $\rho$  given by equations (54) and (57).

In the present case, the simplest expression follows from the first choice which will thus be retained. After some calculations, one here obtains:

$$8 \left( \frac{g}{f} + h \right)^{\frac{5}{4}} \left[ 8\pi f^4 \left( \frac{g}{f} + h \right)^{\frac{1}{2}} + 3 \right] = 9\dot{g}^2 - 24f\ddot{g} \left( \frac{g}{f} + h \right) + f^2 \left( \frac{g}{f} + h \right)^{\frac{3}{2}} (f'g - f^2h')(33f'g + 24ff'h - 9f^2h') \quad (60)$$

For this peculiar case,  $n = 4$ , Einstein's equations have been reduced to the single second order ordinary differential equation with separated variables (49), the metric tensor components being given by equations (54), (58) and (59).

This class of solutions possesses a singularity, obtained for  $R(t, r) = 0$ . The equation of the singularity surface in the  $(r, t)$  plane can thus be written:

$$g(t) = -f(r)h(r) \quad (61)$$

For cosmological applications, one has to consider a "Big-Bang" surface equation, which has to imply a time-like variable, usually called "cosmological time", corresponding to a conformal time of the metric. This implies to write the singularity equation (61) with a new time-like coordinate  $\tau$ , defined by:

$$d\tau^2 = e^\sigma dt^2 \quad (62)$$

which, considering equation (58), can be written:

$$d\tau = \pm \frac{\left[ \frac{g(t)}{f(r)} + h(r) \right]^{\frac{1}{8}}}{f(r)} dt \quad (63)$$

which, for each given  $g(t)$ , must be integrated over  $t$ , to obtain  $\tau(t, r)$ .

Inverting this expression for  $\tau$ , one obtains, implicitly or explicitly,  $t(\tau, r)$ , which, substituted into equation (61), gives the singularity equation in conformal time:

$$g[t(\tau, r)] = g(\tau, r) = -f(r)h(r) \quad (64)$$

from which one can, implicitly or explicitly, derive the “Big-Bang” surface equation  $\tau_0(r)$ .

### 4.3 Case $n = 0$

The scheme of the calculations will here follow the one adopted in the preceding subsection.

Equation (29) becomes:

$$RR' = \frac{F^{\frac{1}{4}}(r)}{G^{\frac{3}{4}}(t)} \quad (65)$$

which, after integration over  $r$ , gives:

$$R(t, r) = \left[ \frac{f(r)}{g(t)} + h(t) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (66)$$

with:

$$F^{\frac{1}{4}}(r) = \frac{f'(r)}{2} \quad (67)$$

and

$$G^{\frac{3}{4}}(t) = g(t) \quad (68)$$

$h(t)$  being an a priori arbitrary function of  $t$ .

The expression for  $\rho$  follows as:

$$\rho(t, r) = \frac{g^{\frac{4}{3}}(t)}{\left[ \frac{f(r)}{g(t)} + h(t) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (69)$$

and thus:

$$e^{\sigma} = \frac{\left[ \frac{f(r)}{g(t)} + h(t) \right]^{\frac{1}{4}}}{g^{\frac{2}{3}}(t)} \quad (70)$$

$$e^{\omega} = \frac{1}{g^2(t) \left[ \frac{f(r)}{g(t)} + h(t) \right]^{\frac{5}{4}}} \quad (71)$$



In the present case, the simplest expression for the equation giving the dependence between the three functions  $f(r)$ ,  $g(t)$  and  $h(t)$  will be obtained by eliminating  $m'$  between equation (21) and equation (19) derived with respect to  $r$ . The result is as follows:

$$8g^{\frac{10}{3}} \left(\frac{f}{g} + h\right)^{\frac{5}{4}} \left[1 - 8\pi g^{\frac{4}{3}} \left(\frac{f}{g} + h\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 8g^{\frac{13}{3}} f'' \left(\frac{f}{g} + h\right)^{\frac{5}{2}} + 3g^{\frac{10}{3}} f'^2 \left(\frac{f}{g} + h\right)^{\frac{3}{2}} + (g^2 \dot{h} - f\dot{g})(5f\dot{g} + 3g^2 \dot{h} + 8gh\dot{g}) \quad (72)$$

For the case  $n = 0$ , Einstein's equations have again been reduced to a single second order ordinary differential equation with separated variables.

The equation of the singularity surface in the  $(r, t)$  plane is:

$$f(r) = -g(t)h(t) \quad (73)$$

The discussion about the "Big-Bang" surface equation, as developed in the former subsection, is left to the reader.

#### 4.4 Cases $n \neq 0, 1, 4$

For any real value of  $n$ , the form of equation (29) leads to seek for a solution of the form:

$$R(t, r) = [f(r) + g(t)]^p \quad (74)$$

Substituting this expression into equation (29) gives:

$$\frac{[pf'(f+g)^{2p-1}]^{4-n}}{F(r)} = \frac{[pg(f+g)^{2p-1}]^{3n}}{G^3(t)} \quad (75)$$

which is verified if, simultaneously:

$$\frac{(pf')^{4-n}}{F(r)} = \frac{(pg)^{3n}}{G^3(t)} = a^3 = \text{const.} \quad (76)$$

and

$$(f+g)^{(2p-1)(4-n)} = (f+g)^{(2p-1)3n} \quad (77)$$

$f$  and  $g$  being a priori arbitrary functions of  $r$  and  $t$ , this implies equalizing the exponents on the left and right sides of equation (77). As  $n$  is, in the case under study, different from unity,  $p$  must be equal to  $\frac{1}{2}$ . The expression for  $R$  follows:

$$R(t, r) = [f(r) + g(t)]^{\frac{1}{2}} \quad (78)$$

with, from equation (75):

$$F(r) = \frac{f'^{4-n}}{2^{4-n}a^3} \quad (79)$$

and

$$G(t) = \frac{\dot{g}^n}{2^n a} \quad (80)$$

This solution is no other than case  $n = 4$  with  $f(r) = \text{const.}$ , or case  $n = 0$  with  $g(t) = \text{const.}$

Unless equation (29) gives simple expressions for  $R(t, r)$  that were not identified in the present work, the case  $n \neq 0, 1, 4$  provides no useful simplification of the problem.

## 5 Conclusion

A special class of Einstein's equations for a relativistic spherically symmetric perfect fluid, i.e. with equation of state  $p = \frac{\rho}{3}$ , has been investigated.

These equations reduce to a single second order ordinary differential equation with separated variables, for some peculiar values of the parameter here called  $n$ .

They provide explicit expressions for the metric tensor components and the energy density, and exhibit a singularity for which equations are given.

Although no analytic solution has yet been found, these reduced forms should simplify the numerical resolution of the equations.

The well-known static ( $\dot{R} = 0$ ) metric is solution of these equations. It

however remains to investigate, analytically or numerically, the inhomogeneous ( $R' \neq 0, \dot{R} \neq 0$ ) solutions of the ordinary differential equations pertaining to this class, and to show that this set of solutions is not empty.

The present work has thus to be considered as a tentative progress towards solutions of pressing need for as much cosmological as astrophysical use.

Provided the physical meaning of the mathematical conditions a priori assumed would be evaluated for each peculiar solution of this class, these solutions, coupled to the corresponding well-known dust dominated Tolman-Bondi models [4, 5], would provide a complete cosmological description of an inhomogeneous spherically symmetric Universe, from the radiation to the dust dominated areas.

The interest for this class of models has recently been increased by the discovery that they are involved into the development of a promising way out major problems encountered in standard cosmology [3].

This type of solutions are also relevant for astrophysical applications, such as the gravitational collapse of relativistic fluids with spherical symmetry.

## 6 Acknowledgment

The author expresses her gratitude to Jean Schneider, Philippe Tournenc and Galliano Valent for valuable advices for the presentation of this work.

## References

- [1] Misner C W and Sharp D H, 1964, *Phys. Rev. B* **136**, 571
- [2] Podurets M A, 1964, *Soviet Astronomy - AJ* **8**, 19
- [3] Celerier M N and Schneider J, 1998, *Phys. Lett. A* **249**, 37
- [4] Tolman R C, 1934, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 169
- [5] Bondi H, 1947, *Monthly Not. R. A. S.* **107**, 410

# Bibliographie

- Adams, F. C., Freese, K. et Guth, A. H., 1991, *Phys. Rev.* **D43**, 965
- Adelberger, E. G. *et al.*, 1990, *Nature* **347**, 261
- Bennett, C. L. *et al.*, 1996, *Astrophys. J.* **464**, L1
- Bond, J. R. *et al.*, 1994, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 13
- Bond, J. R., Efstathiou, G. et Tegmark, M., 1997, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **291**, L33
- Bondi, H., 1947, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **107**, 410
- Bondi, H. et Gold, T., 1948, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **108**, 252
- Bonifacio, P. et Molaro, P., 1997, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **285**, 847
- Brandenberger, R. H., 1997, dans *Proceedings of the 1997 ICTP Trieste Summer School on Particle Physics and Cosmology*, sous presse, astro-ph/9711106
- Brout, R., Englert, F. et Gunzig., E., 1979, *Gen. Rel. Grav.* **10**, 1
- Brown, T. M. *et al.*, 1989, *Astrophys. J.* **343**, 526
- Carswell, R. F. *et al.*, 1994, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **268**, L1
- Célérier, M.N. et Schneider, J., 1998, *Phys. Lett.* **A249**, 37
- Chaboyer, B. *et al.*, 1998, *Astrophys. J.* **494**, 96
- Chernikov, N. A., 1962, *Soviet Physics-Doklady* **7**, 428
- Chupp, T. E. *et al.*, 1989, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1541

Cox, J. P. et Giuli, R. T., 1968, dans *Principles of Stellar Structure - Physical Principles (vol. 1)*, Ed. Gordon and Breach, New-York

Deruelle, N., 1998, *La Recherche*, hors série avril 1998, p. 30

Diu, B. *et al.*, 1989, *Physique Statistique*, Collection Enseignement des sciences, Hermann, Paris. p. 47-52

Drever, R. W. P., 1961, *Philos. Mag.* **6**, 683

Dvali, G., Liu, H. et Vachaspati, T., 1998, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2281

Dvali, G., Melfo, A. et Senjanović, G., 1995, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4559

Ehlers, J., 1971, General Relativity and Kinetic Theory, dans *Relativita Generale e Cosmologia - Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica Enrico Fermi, XLVII Corso*, Ed. Sachs, R., Academic Press, New-York and London

Ehlers, J., Geren, P. et Sachs, R. K., 1968, *J. Math. Phys.*, **9**, 1344

Einstein, A., 1917, *Sitzungsber.*, Berlin

Ellis, G. F. R., 1978, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 87

Ellis, G. F. R., Maartens, R. et Nel, S. D., 1978, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **184**, 439

Fixsen, D. J. *et al.*, 1996, *Astrophys. J.* **473**, 576

Freedman, W. *et al.*, 1998, dans *Cosmological parameters and the evolution of the universe, Proceedings of the IAU Symposium 183*, sous presse

Gunn, J. E., 1988, dans *The Extragalactic Distance Scale*, Eds. van der Bergh, S. et Pritchet, C., ASP Conf. Series, p.344

Guth, A. H., 1981, *Phys. Rev.* **D23**, 347

Hawking, S. W., 1982, *Phys. Lett.* **B115**, 295

Hellaby, C. et Lake, K., 1985, *Astrophys. J.* **290**, 381

Hoyle, F., 1948, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **108**, 372

- Hu, Y., Turner, M.S. et Weinberg, E.J., 1994, *Phys. Rev.* **D49**, 3830
- Hubble, E. P., 1929, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **15**, 168
- Hughes, V. W., Robinson, H. G. et Beltran-Lopez, V., 1960, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 342
- Izotov, Y. I., Thuan, T. X. et Lipovetsky, V. A., 1997, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **108**, 1
- Jimenez, R., Flynn, C. et Kotoneva, E., 1998, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **299**, 515
- Jungman, G. *et al.*, 1996, *Phys. Rev.* **D54**, 1332
- Kajita T. *et al.*, 1998, communication lors de la Neutrino-98 Conference, Takayama, Japon, 4-9 juin 1998
- Khlebnikov, S. et Tkachev, I., 1997, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1607
- Khlebnikov, S. Y. et Tkachev, I. I., 1996, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 219
- Kofman, L., Linde, A. et Starobinsky, A. A., 1996, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1011
- Kogut, A. *et al.*, 1993, *Astrophys. J.* **419**, 1
- Kolb, E. W., Linde, A. et Riotto, A., 1996, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4290
- Lachièze-Rey, M. et Luminet, J.-P., 1995, *Phys. Rep.* **254**, 135
- Lamoreaux, S. K. *et al.*, 1986, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 3125
- Langacker, P. et Pi, S. Y., 1980, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1
- Langlois, D., 1996, *Phys. Rev.* **D54**, 2447
- Langlois, D. et Piran, T., 1996, *Phys. Rev.* **D53**, 2908
- Lemaître, G., 1933, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **A53**, 51
- Liddle, A.R., 1995, *Phys. Rev.* **D51**, R5347
- Linde, A. D., 1983, *Phys. Lett.* **B129**, 177
- Misner, C. W. et Sharp, D. H., 1964, *Phys. Rev.* **B136**, 571



- Müller, J. *et al.*, 1991, *Astrophys. J.* **382**, L101
- Olive, K. A., Steigman, G. et Skillman, E. D., 1997, *Astrophys. J.* **483**, 788
- Paczynski, B. et Piran, T., 1990, *Astrophys. J.* **364**, 341
- Page, L. A., 1997, astro-ph/9703054
- Partridge, R. B., 1988, *Rep. Prog. Phys.* **51**, 647
- Penzias, A. A. et Wilson, R. W., 1965, *Astrophys. J.* **142**, 419
- Podurets, M. A., 1964, *Soviet Astronomy-AJ* **8**, 19
- Reasenber, R. D. *et al.*, 1979, *Astrophys. J.* **234**, L219
- Robertson, D. S., Carter, W. E. et Dillinger, W. H., 1991, *Nature* **349**, 768
- Rowan-Robinson, M. *et al.*, 1990, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **247**, 1
- Schneider, J., 1994, *The Now, Relativity Theory and Quantum Mechanics*, dans *Time, Now and Quantum Mechanics*, Eds. Bitbol, M. et Ruhnau, E., Editions Frontières, Gif/Yvette, France
- Scott, P. F. *et al.*, 1996, *Astrophys. J.* **461**, L1
- Shapiro I. I., 1989, dans *General Relativity and Gravitation*, Eds. Ashby, N., Bartlett, D. F. et Wyss, W., Cambridge University Press, Cambridge, p. 313
- Smoot, G. F. *et al.*, 1992, *Astrophys. J.* **396**, L1
- Songaila, A. *et al.*, 1994, *Nature* **368**, 599
- Songaila, A., Wampler, E. J. et Cowie, L. L., 1997, *Nature* **385**, 137
- Spite, M. *et al.*, 1996, *Astron. Astrophys.* **307**, 172
- Starobinsky, A. A., 1982, *Phys. Lett.* **B117**, 175
- Su, Y. *et al.*, 1994, *Phys. Rev.* **D50**, 3614
- Subrahmanyan, R. *et al.*, 1993, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **263**, 416

- Tammann, G. A., 1998, dans *General Relativity, Proc. of the 8th Marcel Grossmann Symposium*, Ed. Piran, T., Singapore, World Scientific, sous presse, astro-ph/9805013
- Tarantola, A., 1976, Thèse de 3ème cycle de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI
- Tauber, G. E. et Weinberg, J. W., 1961, *Phys. Rev.* **122**, 1342
- Tolman, R. C., 1934, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **20**, 169
- Tucker, G. S. et al., 1993, *Astrophys. J.* **419**, L45
- Turner, M. S., 1991, *Phys. Rev.* **D44**, 3737
- Tytler, D., Fan, X. M. et Burles, S., 1996, *Nature* **381**, 207
- Vessot, R. F. C. et Levine, M. W., 1979, *Gen. Rel. Grav.* **10**, 181
- Wampler, E.J. et al., 1996, *Astron. Astrophys.* **316**, 33
- Weinberg, S., 1989, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1
- Will, C. M., 1992, *Intern. J. Mod. Phys.* **D1**, 13



