



HAL
open science

Théorie analytique de la rotation d'un satellite artificiel : application à Hipparcos

Eric Bois

► **To cite this version:**

Eric Bois. Théorie analytique de la rotation d'un satellite artificiel : application à Hipparcos. Planète et Univers [physics]. Observatoire de Paris, 1987. Français. NNT : 1987OBSP0002 . tel-02149314

HAL Id: tel-02149314

<https://hal.science/tel-02149314v1>

Submitted on 6 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

(NOUVEAU RÉGIME)

87 OBSP 0002

EN
ASTRONOMIE STATISTIQUE ET DYNAMIQUE

présentée par

Eric BOIS

Sujet de la thèse :

THEORIE ANALYTIQUE DE LA ROTATION
D'UN SATELLITE ARTIFICIEL
- APPLICATION A HIPPARCOS -

Soutenue à l'Observatoire de Paris, le 29 juin 1987, devant le jury composé de :

Monsieur Kovalevsky

Directeur de thèse

Monsieur Barlier

Monsieur Chapront

Monsieur Nahon

Madame Stellmacher

Monsieur Van der Ha

Madame Turon

Invitée

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
(NOUVEAU RÉGIME)
EN
ASTRONOMIE STATISTIQUE ET DYNAMIQUE

présentée par

Eric BOIS

Sujet de la thèse :

THEORIE ANALYTIQUE DE LA ROTATION
D'UN SATELLITE ARTIFICIEL
- APPLICATION A *HIPPARCOS* -



Soutenu à l'Observatoire de Paris, le 29 juin 1987, devant le jury composé de :

*Monsieur Kovalevsky
Monsieur Barlier
Monsieur Chapront
Monsieur Nahon
Madame Stellmacher
Monsieur Van der Ha
Madame Turon*

Directeur de thèse

Invitée

REMERCIEMENTS

C'est avec une profonde gratitude que j'aimerais exprimer ici ma plus vive reconnaissance à Monsieur J. Kovalevsky qui a guidé mon parcours dans la Mécanique Céleste avec une amabilité et une patience constantes. L'acuité de son discernement et la justesse de ses conseils m'ont procuré une confiance permanente et une aide précieuse tout en me laissant une entière liberté.

Je suis très reconnaissant à Monsieur J. Chapront, responsable de la formation doctorale de l'Observatoire de Paris, ainsi qu'à Mesdames I. Stellmacher et C. Turon et à Messieurs F. Barlier, F. Nahon et J. Van der Ha d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie enfin l'équipe HIPPARCOS du C.E.R.G.A. qui m'a accueilli dans son groupe de recherche, et Madame J. Falin qui, outre différents services en dactylographie, m'a fait gagné un temps précieux en tapant le texte de cette thèse.

Que tous ceux qui ont favorisé ma tâche, par une contribution à ce travail, une aide technique, ou simplement par leur gentillesse et leurs encouragements soient assurés de toute ma gratitude.

INTRODUCTION ET JUSTIFICATION D'UNE RECHERCHE ANALYTIQUE
DE L'EVOLUTION D'ATTITUDE D'UN SATELLITE

L'ère nouvelle des télescopes satellisés nécessite de connaître leur attitude avec une grande précision afin de bénéficier pleinement du gain de l'astronomie spatiale sur la précision des paramètres astrométriques. Il faut en effet connaître la direction de visée des télescopes avec une précision analogue à celle avec laquelle on observe les étoiles. De plus pour HIPPARCOS, satellite à balayage continu du ciel, il est nécessaire de pouvoir prédire puis représenter l'évolution de son attitude au cours du temps. Or le travail considérable de calcul numérique que représente la recherche systématique des nouvelles conditions initiales est tel que la reconstitution de l'évolution d'attitude par intégration numérique n'est guère envisageable sur une mission de deux années et demie. Même si le mouvement du satellite est prévu proche d'une loi nominale telle qu'il ne s'en écarte pas de plus d'une certaine tolérance pendant un certain intervalle de temps, les conditions initiales doivent être réajustées périodiquement, l'intégration numérique des équations différentielles du mouvement doit être en conséquence réitérée et finalement le processus de calcul s'avère beaucoup trop long. L'avantage d'une solution analytique est de mettre sous forme littérale une série de paramètres relatifs aux conditions initiales ou à un modèle réaliste des couples perturbateurs.

Le gain de temps de calcul machine est alors considérable, plusieurs ordres de grandeur, et il reste éventuellement possible d'employer la solution analytique par intervalles de temps successifs, s'il s'avère nécessaire d'ajuster les constantes d'intégration. Ainsi il est souhaitable d'employer une représentation analytique, utilisant le moins possible de paramètres, avec un algorithme valable si possible pour toute la durée d'une mission.

Mais ceci pose un problème de Mécanique Céleste: comment représenter le mouvement de rotation d'un corps à trois axes d'inertie inégaux, soumis à des couples perturbateurs, l'axe pointant loin d'une position d'équilibre? Et ce problème est envisagé, dans la présente étude, sous son aspect le plus aigu: celui où l'énergie de rotation est petite devant l'intensité des perturbations. En effet, ce travail étant plus particulièrement suscité par des satellites à des fins de balayage du ciel, il est naturel

et même essentiel de se placer dans le cas d'une rotation lente. Cependant ce cas ne constitue pas une hypothèse restrictive quant à la généralité du problème. Au contraire il s'agit de la configuration où la solution analytique comportera le plus de termes.

En résumé, la contrainte principale de ce travail est celle d'une rotation lente fortement perturbée.

Une théorie analytique développée à tel ou tel ordre ne représente, bien entendu, qu'un modèle approché de la réalité. Elle ne peut, par conséquent, fournir les conditions initiales réelles du phénomène mais elle propose, en revanche, des valeurs initiales qui seront d'autant plus proches des conditions initiales réelles que le degré d'approximation spécifique de la théorie sera réduit. Cette étude, bien que suscitée par le projet HIPPARCOS, n'est pas seulement orientée dans cette perspective. En effet la recherche d'une théorie analytique de l'évolution d'attitude d'un satellite en rotation lente fortement perturbée est en premier lieu un problème de dynamique ayant un intérêt en soi. De plus, les tentatives d'aller relativement loin dans la représentation du mouvement d'attitude n'ont pas été très développées jusqu'à présent. C'est pourquoi, dans un premier temps, cette étude se propose de définir les bases et le développement d'une théorie relativement générale tout en restant proche des configurations concrètes pour lesquelles HIPPARCOS est choisi pour référence; les problèmes de constantes d'intégration, de conditions initiales et d'intervalles successifs de représentation de l'attitude seront, eux, ramenés au problème d'une bonne adaptation d'une théorie à une application donnée, ici HIPPARCOS.

D'autre part, les contraintes extrêmement exigeantes d'HIPPARCOS (visant une précision de l'ordre de celle des meilleures observations de la rotation de la Terre) sont actuellement prises en compte, et ceci depuis bien avant le début de cette thèse, par des procédés numériques ad hoc liés à certaines propriétés du satellite. Aussi l'application des premiers ordres de cette théorie au satellite HIPPARCOS aura pour conséquence, d'une part, de confirmer, justifier et généraliser les intuitions et les hypothèses établies lors de l'élaboration de ces méthodes numériques par le consortium FAST chargé de la réduction des données d'HIPPARCOS, et d'autre part, de montrer la convergence des expressions issues de cette théorie, suivant les ordres croissants des développements, vers les très grandes précisions espérées pour la détermination de l'attitude du satellite HIPPARCOS.

**BREF HISTORIQUE DES TRAVAUX RELATIFS
A LA REPRESENTATION DU MOUVEMENT DE ROTATION
D'UN CORPS RIGIDE DANS L'ESPACE**

Représenter le mouvement de rotation d'un corps rigide dans l'espace nécessite de décomposer une rotation de \mathfrak{R}^3 en une succession de trois rotations élémentaires et indépendantes autour des axes de coordonnées. Les équations différentielles gouvernant le mouvement d'une telle rotation dans l'espace sont appelées les équations d'Euler. Et il est bien connu que le mouvement d'une rotation libre d'un corps rigide dans l'espace a été d'une part, tout à fait bien décrit par l'analyse géométrique de Poincaré, et possède d'autre part une solution analytique exacte impliquant les fonctions elliptiques de Jacobi. L'on peut trouver le développement de cette solution dans le *Traité de Dynamique Analytique* de Whittaker (1964) ou dans celui de *Mécanique* de Landau et Lifchitz (1969). Andoyer en 1923, puis Deprit en 1967, montrent que ce problème peut être utilement réduit à un système hamiltonien à un degré de liberté. Lorsque deux des principaux moments d'inerties sont extrêmement voisins, le système hamiltonien de Deprit possède la même forme que celui du problème de la résonance canonique. C'est dans ce cas particulier que Jupp, lors de nombreuses publications (1969, 1972, 1973 et 1974), construit plusieurs solutions formelles sous forme de séries développées suivant les puissances d'un petit paramètre en relation précisément avec la différence des deux principaux moments d'inertie. Mentionnons également le travail de Zare qui, en 1970, développe une théorie établissant les critères permettant de déterminer les régions de mouvement possible dans une configuration réduite de l'espace pour un corps rigide ayant un point fixe.

Notons encore, bien que ces travaux soient très peu connus dans nos pays, que toute une école soviétique s'est spécialisée, à la suite de G.N. Doubochine, aux problèmes de l'interaction entre le mouvement de rotation et le mouvement du centre de masse d'un satellite, puis aux problèmes de mouvement de rotation de ces satellites. Les résultats de ces travaux, ainsi qu'une nombreuse bibliographie, sont présentés dans les deux livres de Beletsky (1965 et 1975). Ceux-ci, cependant, ne donnent que des développements très généraux, sauf pour certains cas de résonance (Lune, Mercure, etc...) et ne contiennent qu'un embryon de théorie générale de la rotation d'un satellite artificiel considérée comme une perturbation du mouvement de Poincaré.

En fait, les tentatives de résolution des équations d'Euler, mutuellement couplées et fortement non linéaires, ont été largement suscitées par l'étude de la rotation de la Lune et par celle de la Terre qui représentent les seuls cas de Mécanique Céleste vraiment traités avant 1960. Citons, par exemple, au sujet du mouvement de la Lune, les travaux plus récents de Migus (1977) qui amène le problème à celui de la résolution d'un Hamiltonien conduisant parallèlement à la détermination analytique du centre d'équilibre et à celle du mouvement de libration. Et concernant la rotation de la Terre, citons les travaux de Kinoshita (1977) qui préfère l'usage des variables canoniques d'Andoyer (1923) à celui des angles d'Euler de façon à appliquer aisément une théorie des perturbations, basée sur les transformations canoniques, permettant alors de séparer le mouvement de précession de celui de nutation, c'est-à-dire les effets séculaires des effets périodiques.

INTRODUCTION A L'ETUDE DE L'EVOLUTION D'ATTITUDE D'UN SATELLITE EN ROTATION PERTURBEE

L'évolution d'attitude d'un satellite est fonction de plusieurs paramètres. Mais l'influence du rapport "intensité résultante des couples perturbateurs - énergie de rotation" sur la dérive d'attitude par rapport à une théorie donnée, est telle que plus celui-ci sera faible, plus un ordre faible du développement de la théorie suffira à donner une bonne précision sur la connaissance de l'évolution de l'attitude.

L'action sur le mouvement autour du centre de masse des perturbations d'origines diverses (gravitationnelle, électrostatique, magnétique, aérodynamique, ...) a été étudiée par de nombreux auteurs.

En 1968, Crenshaw et Fitzpatrick développent une théorie au premier ordre pour le cas d'un satellite à symétrie axiale, en rotation rapide et dont le centre de masse est contraint de décrire une orbite circulaire en précession autour d'un pôle d'attraction. Par la théorie des transformations canoniques, ils obtiennent la solution du mouvement libre Eulerien non-perturbé, puis une série d'équations différentielles analogues aux équations planétaires de Lagrange qu'ils intègrent ensuite au premier ordre. Ils appliquent cette théorie à l'étude du couple d'origine gravitationnelle.

En 1971, Hitzl et Breakwell étudient les problèmes de résonance dûs aux perturbations du gradient de gravité sur un satellite triaxial, en rotation rapide et dont le centre de masse est contraint de décrire une orbite elliptique fixe. Pour cela, ils utilisent également la théorie des transformations canoniques mais en moyennant l'hamiltonien sur l'orbite afin d'éliminer les effets à courte période et obtenir ainsi les équations différentielles qui précisent, dans l'évolution d'attitude, les variations de longues périodes dues aux effets résonants ou non-résonants du gradient de gravité.

Cochran, toujours en 1971, propose une formulation valable quels que soient le couple extérieur et la forme dynamique du satellite mais pour le cas où l'intensité résultante des couples extérieurs est petite comparée à l'intensité du moment angulaire de rotation. Puis, en 1972, une méthode des perturbations générales, basée sur l'utilisation des séries de Lie pour générer des transformations canoniques approchées, est appliquée à nouveau par Cochran à l'étude des effets du gradient de gravité sur le mouvement de rotation d'un satellite rigide triaxial dont le centre de masse est contraint de décrire une orbite elliptique d'inclinaison constante, de précession et de rotation libres. Il obtient alors de façon analytique les termes séculaires non-résonants

dûs aux perturbations d'origine gravitationnelle sur le moment angulaire de rotation, lorsque sont pris en compte certains effets séculaires de l'évolution de l'orbite.

En 1975, Liu et Fitzpatrick considèrent le même problème que celui de Cochran (1972), mais avec une méthode différente utilisant les équations de Poisson. Leurs résultats sont pour l'essentiel en accord avec ceux de Cochran (1972), mais les auteurs considèrent leur approche conceptuelle plus directe et plus claire que les méthodes habituelles de transformations canoniques.

I. Stellmacher, en 1972 et 1974, étudie en détail les effets du couple d'origine magnétique, non seulement dans le cas où cet effet est faible vis à vis de l'énergie de rotation du satellite (cas gyroscopique), mais aussi dans le cas où l'intensité du couple est suffisamment grande pour modifier fortement l'attitude du satellite dans l'espace. L'auteur propose ainsi trois types de solutions à partir desquelles on peut représenter le mouvement du satellite autour du centre de gravité selon l'importance relative du couple magnétique et de l'énergie de rotation :

- Solution 1 : couple magnétique perturbateur,
- Solution 2 : moment cinétique fixe dans un repère lié au corps,
- Solution 3 : moment cinétique s'écartant peu d'une direction fixe par rapport au corps.

En outre, ce travail de I. Stellmacher s'adresse à un satellite, en orbite circulaire, possédant une symétrie de révolution autour de l'axe portant le plus grand moment d'inertie, le moment magnétique étant dirigé suivant cet axe.

Donaldson et Jezewski publient, en 1977, une bonne discussion à propos du choix et du bien fondé des paramètres entrant dans la formulation du mouvement perturbé d'un corps autour de son centre de masse. Ils proposent à ce sujet une formulation restreinte à 6 paramètres dont les intégrations numériques, pour des couples perturbateurs inférieurs à une certaine intensité, comportent un gain de temps de calcul par rapport à celles effectuées dans la formulation classique d'Euler.

Van der Ha présente, en 1985, une solution analytique approchée aux problèmes dynamiques d'attitude d'un corps rigide de forme quelconque soumis à des couples perturbateurs constants dans le repère lié au corps. Et il applique son modèle entre autre pour prédire le mouvement d'attitude du satellite HIPPARCOS dans sa phase d'initialisation où les couples constants induits par les gyroscopes se trouvent dominants.

La théorie proposée dans la présente thèse s'étend à tout satellite, quel que soit sa structure dynamique, quelles que soient les caractéristiques géométriques et dynamiques de son orbite, soumis à tout couple constant ou variable fonction de l'angle de rotation propre.

Une application au satellite HIPPARCOS (**HI**gh **P**recision **PAR**allax **COL**lecting **S**atellite) est également développée dans cette thèse. Le satellite HIPPARCOS présente une originalité et des conditions initiales jamais totalement et simultanément réunies dans les théories citées précédemment. Une description de ce satellite et du projet d'astrométrie spatiale qu'il représente peuvent être trouvées dans les publications de Bernacca (1985) et Kovalevsky (1982 et 1984). De plus, la réussite du projet HIPPARCOS nécessite tout particulièrement une très grande précision sur la connaissance de l'évolution d'attitude du satellite (Kovalevsky, 1984, page 34). Les perturbations prépondérantes sur HIPPARCOS, satellite géostationnaire de haute altitude, seront les réactions de ses gyroscopes et surtout la pression de radiation solaire (*cf annexe 1*, Kovalevsky et Bois, 1986, page 349).

PREMIERE PARTIE

La représentation de l'attitude d'un satellite dérivant des conditions initiales du mouvement et du modèle des couples perturbateurs, la première partie de cette thèse présente un système de base qui soit applicable à tout satellite en rotation perturbée.

- CHAPITRE I : LE SYSTEME DE BASE
- CHAPITRE II: LES PERTURBATIONS

CHAPITRE I

LE SYSTEME DE BASE

I.1. LES SYSTEMES D'AXES DE COORDONNÉES

I.1.1. Le système de référence

Soit $OXYZ$, un système d'axes fixes dont l'origine est au centre de masse du satellite. Nous choisissons $OXYZ$ de telle façon que l'axe OZ soit proche de la direction initiale de l'axe de rotation propre du satellite. Et, afin de simplifier la solution, nous conservons la possibilité d'ajuster la position du système de référence, mais ce dernier sera gardé fixe pendant le mouvement.

I.1.2. Le système d'axes liés au corps

Soit $Oxyz$, un système d'axes de coordonnées liés au corps et définis par les axes principaux d'inertie du satellite.

I.2. LES DONNÉES RELATIVES AU SATELLITE

- A, B, C : moments principaux d'inertie du satellite
- $\vec{\omega}$: vecteur de rotation instantanée
- p, q, r : composantes de $\vec{\omega}$ dans le système $Oxyz$
- \vec{L} : moment cinétique
- (I) : tenseur d'inertie. Dans le système $Oxyz$, la matrice (I) est diagonale.

I.3. RECHERCHE DES ANGLES DE POSITION

Dans la plupart des ouvrages de Mécanique Céleste, par exemple Goldstein (1957), Beletsky (1965 et 1975), les discussions sur le mouvement d'un corps rigide

sont effectuées sur la base des angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) désignant respectivement la précession, la nutation et la rotation propre. Cependant, les raisons ne sont guère données pour justifier le choix d'une telle succession de rotations. C'est pourquoi, dans un souci de clarifier une certaine confusion dans l'esprit des étudiants, Gupta et Narchal publient, en 1972, une note où ils montrent la possibilité d'utiliser d'autres séquences équivalentes. Ainsi chacun des 12 systèmes de 3 rotations élémentaires indépendantes et successives peut être compris comme un cas particulier du principe Eulérien de la décomposition d'une rotation de \mathfrak{R}^3 . L'évolution d'attitude sera ainsi décrite par la variation de 3 angles de position. Aussi, il convient de choisir la séquence la plus adaptée pour représenter la rotation lente fortement perturbée d'un corps dont l'axe pointe loin d'une position d'équilibre. Or le simple énoncé de ce problème de Mécanique Céleste entraîne les remarques suivantes :

- la dérivée par rapport au temps de l'angle de rotation propre doit être initialement proche de la vitesse angulaire nominale ω du satellite,
- à l'origine des temps, les deux autres angles sont petits ou nuls et leurs dérivées par rapport au temps sont de petites quantités.

Ce sont là les seules hypothèses dont nous disposons. Mais elles nous conduisent à rechercher une séquence parmi celles composées d'une grande rotation et de deux petites.

Afin de distinguer les diverses décompositions d'une rotation de \mathfrak{R}^3 , désignons respectivement par les chiffres 1, 2 ou 3 les axes X ou x , Y ou y , Z ou z , par rapport auxquels sont effectuées les rotations élémentaires. Il existe ainsi 12 séquences possibles de 3 rotations indépendantes directes :

1.2.3 2.1.3 3.1.2 1.2.1 2.1.2 3.1.3
1.3.2 2.3.1 3.2.1 1.3.1 2.3.2 3.2.3

Si l'axe Oz reste proche de l'axe OZ , le chiffre 3 désigne une grande rotation et, par conséquent, ne doit pas apparaître plus d'une fois. Autrement dit, nous pouvons dès à présent éliminer la séquence Eulérienne habituelle 3.1.3 composée de deux grandes rotations et d'une petite.

Nous proposons de retenir les séquences 1.2.3 et 3.2.1 et d'en effectuer une étude comparative.

★ Séquence 1.2.3 :

Connue sous le nom des angles de Tait-Bryan, la séquence 1.2.3 est composée de 3 rotations directes (*figure 1*) effectuées dans l'ordre suivant :

1. Une rotation α autour de l'axe OX , de Y vers Z .
2. Une rotation β autour du nouvel axe Oy_1 , de z_1 vers X .
3. Une rotation γ autour du nouvel axe $Oz_2 = Oz$, de x_2 vers y_1 .

$$\alpha = (OY, Oy_1) = (OZ, Oz_1)$$

$$\beta = (OX, Ox_2) = (Oz_1, Oz)$$

$$\gamma = (Ox_2, Ox) = (Oy_1, Oy)$$

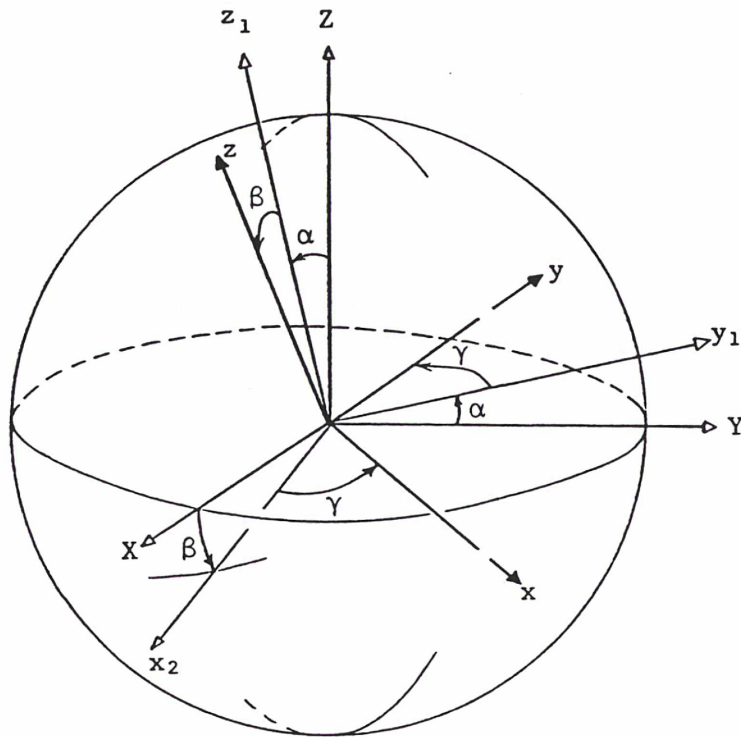


Figure 1 - Définition des angles de position

Ce système d'angles peut ainsi répondre aux conditions souhaitées du problème :

- si l'axe Oz est l'axe de rotation, γ représente la rotation propre du système,
- si l'axe Oz reste proche de l'axe OZ , les angles α et β sont petits.

★ Séquence 3.2.1 :

La séquence 1.2.3 étant finalement celle adoptée, le lecteur pourra trouver un formulaire de la séquence 3.2.1 en *appendice I* de cette thèse. Dans la séquence 3.2.1, la rotation propre est décrite cette fois par l'angle U autour de l'axe fixe OZ , tandis que V et W représentent les deux petites rotations. Pour ces deux séquences, les matrices de passage du système $OXYZ$ au système $Oxyz$ sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{123} &= \mathcal{R}_3(\gamma) \mathcal{R}_2(\beta) \mathcal{R}_1(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{321} &= \mathcal{R}_1(W) \mathcal{R}_2(V) \mathcal{R}_3(U) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos W & \sin W \\ 0 & -\sin W & \cos W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos V & 0 & -\sin V \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin V & 0 & \cos V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos U & \sin U & 0 \\ -\sin U & \cos U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La série d'angles (α, β, γ) peut être exprimée en fonction de la série d'angles (U, V, W) et vice versa par égalisation des éléments correspondants entre les matrices \mathcal{M}_{123} et \mathcal{M}_{321} , une fois les produits ci-dessus effectués. Il est alors aisé de vérifier l'égalité de ces matrices. Et d'une manière générale, toutes les séquences dans lesquelles deux rotations consécutives ne se font jamais autour du même axe, peuvent être ainsi utilisées pour décrire l'orientation finale d'un corps rigide par rapport à un système d'axes fixes dans l'espace (Gupta et Narchal, 1972).

★ Discussion :

Dans une perspective de résolution littérale des équations différentielles du mouvement, il est remarquable de constater un certain "déplacement" des singularités mathématiques suivant les séquences de rotations utilisées et par rapport aux situations physiques étudiées. En particulier, nous avons constaté un recul des difficultés avec l'usage de la séquence 3.2.1. Lorsque nous souhaitons résoudre le système d'équations différentielles du mouvement libre non-perturbé, il est d'usage, afin de simplifier les calculs, de choisir l'un des axes fixes OX , OY ou OZ le long de la direction constante du moment cinétique \vec{L} . En effet, les relations entre les composantes p , q , r du vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$ et les lignes trigonométriques en α , β , γ sont obtenues par l'intersection de deux systèmes d'équations dont l'un résulte de la projection du vecteur \vec{L} sur les axes liés au solide :

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \vec{L} = (I) \cdot \vec{\omega}$$

où $\mathcal{M}_{\alpha\beta\gamma}$ est la matrice de passage du repère fixe au repère lié au solide, et (I) est la matrice diagonale du tenseur d'inertie du solide. Les calculs qui en résultent sont alors les plus simples pour le choix de l'axe OX dans la séquence 1.2.3 et pour le choix de l'axe OZ dans la séquence 3.2.1. Cependant, selon les hypothèses de ce problème, il est naturel de prendre l'axe OZ le long du vecteur \vec{L} . Dans les deux systèmes en effet, le vecteur \vec{L} n'est pas très éloigné de l'axe OZ , mais ceci toutefois pour des raisons légèrement différentes :

- séquence 1.2.3 : le vecteur \vec{L} est proche de l'axe Oz (rotation propre autour de Oz) et l'axe Oz est proche de l'axe OZ (α et β petites rotations), par conséquent le vecteur \vec{L} n'est pas très éloigné de l'axe OZ .
- séquence 3.2.1 : le vecteur \vec{L} est proche de l'axe OZ (rotation propre autour de OZ).

C'est pourquoi, avec la séquence 3.2.1, le choix mathématique le plus avantageux coïncide avec la réalité physique du problème. Et pour un même choix (celui de l'axe OZ), les trois équations différentielles de premier ordre, qui se subsistent alors à celles du second ordre, sont sensiblement plus simples avec la séquence 3.2.1 qu'avec la séquence 1.2.3 (cf *appendice II*). Cette différence s'applique spécialement au problème du mouvement libre. Pour le mouvement perturbé étudié selon la méthode développée dans cette thèse, les deux séquences 1.2.3 et 3.2.1 sont tout aussi appropriées. Or la séquence 1.2.3 est celle choisie officiellement pour le satellite HIPPARCOS. Aussi

nous avons été conduit à opter finalement pour cette séquence qui, par rapport à la séquence 3.2.1, se caractérise par une rotation propre autour d'un axe tournant lié au satellite.

Considérons, pour conclure cette discussion, la séquence 3.1.3 des angles habituels d'Euler (ψ, θ, ϕ) . On peut retrouver leurs définitions exactes par exemple dans Tisserand (édition 1960), mais dans le présent travail, les angles sont définis par rapport au noeud ascendant :

3 ψ : précession

1 θ : nutation

3 ϕ : rotation propre

Il est bien connu que cette série d'angles possède une singularité pour $\theta = 0$. Il suffit pour s'en rendre compte d'observer les équations cinématiques en $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ (Cochran, 1971). Notons simplement à ce sujet que les séquences 1.2.3 et 3.2.1 ne présentent pas cette singularité; *se reporter aux formules (2) et (3) de l'appendice I (séquence 3.2.1) et aux formules (2) et (3) dans la suite de cette étude (séquence 1.2.3).*

Les formules de transformation effective de la séquence 1.2.3 à la séquence type 3.1.3 et vice versa peuvent être obtenues par égalisation des éléments respectifs des matrices de passage (*cf annexe 2, Bois, 1987, page 5*).

Nous trouverons en *appendice III* un formulaire de la résolution du mouvement libre pour les trois séquences 3.1.3, 3.2.1 et 1.2.3.

I.4. LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Les composantes p , q , r du vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$ dans le système d'axes liés au solide, sont données par les trois équations cinématiques suivantes :

$$\begin{aligned} p &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ q &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ r &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (1)$$

Le système inverse du système (1) est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{\cos \beta} (p \cos \gamma - q \sin \gamma) \\ \dot{\beta} &= p \sin \gamma + q \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= r - (p \cos \gamma - q \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (2)$$

En différenciant le système (2), on obtient les trois équations cinématiques d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \frac{1}{\cos \beta} (\dot{p} \cos \gamma - \dot{q} \sin \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) \\ \ddot{\beta} &= \dot{p} \sin \gamma + \dot{q} \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \\ \ddot{\gamma} &= \dot{r} - (\dot{p} \cos \gamma - \dot{q} \sin \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma}) \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\cos \beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

Appliquons maintenant la loi fondamentale du mouvement d'un corps solide en rotation perturbée (Goldstein, 1964, page 172) :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{L} = \sum \vec{N}_i \quad (4)$$

avec:

$$\vec{L} = (I) \cdot \vec{\omega} \quad (5)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha} \vec{e}_1 + \dot{\beta} \vec{e}_2 + \dot{\gamma} \vec{e}_3 \quad (6)$$

$$(I) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (7)$$

où les \vec{N}_i désignent les couples perturbateurs et où les trois vecteurs unitaires \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 représentent les axes des trois rotations élémentaires. Dans la séquence 1.2.3, le développement de l'équation vectorielle (6) donne, dans le système d'axes $Oxyz$, la formule (1).

De façon générale, le développement analytique de l'équation vectorielle (4) donne les trois équations dynamiques suivantes, dans lesquelles nous ne ferons aucune hypothèse sur les moments principaux d'inertie :

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= N_1 \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= N_2 \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= N_3 \end{aligned} \quad (8)$$

où N_1 , N_2 , N_3 sont les composantes des couples dans les axes liés au corps. Les systèmes (1) et (8) constituent alors les six équations d'ordre 1 du mouvement.

Au lieu d'utiliser ces six équations, on peut obtenir trois équations d'ordre 2 par différenciation et substitution des équations (1) dans les équations (8) :

$$\begin{aligned} (A \cos \beta \cos \gamma)\ddot{\alpha} + (A \sin \gamma)\ddot{\beta} + [(-A - B + C) \sin \beta \cos \gamma] \dot{\alpha}\dot{\beta} \\ + [(-A + B - C) \cos \beta \sin \gamma] \dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ + [(A - B + C) \cos \gamma] \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ + [(B - C) \sin \beta \cos \beta \sin \gamma] \dot{\alpha}^2 = N_1 \\ (-B \cos \beta \sin \gamma)\ddot{\alpha} + (B \sin \gamma)\ddot{\beta} + [(A + B - C) \sin \beta \sin \gamma] \dot{\alpha}\dot{\beta} \\ + [(A - B - C) \cos \beta \cos \gamma] \dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ + [(A - B - C) \sin \gamma] \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ + [(A - C) \sin \beta \cos \beta \cos \gamma] \dot{\alpha}^2 = N_2 \\ (C \sin \beta)\ddot{\alpha} + C\ddot{\gamma} + \{[(-A + B) \cos 2\gamma + C] \cos \beta\} \dot{\alpha}\dot{\beta} \\ + [(-A + B) \sin \gamma \cos \gamma] (\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) = N_3 \end{aligned} \quad (9)$$

C'est ce système d'équations différentielles qui sera exploité par la méthode de résolution.

En ce qui concerne les équations (9) sans second membre, nous en avons immédiatement une solution particulière, à partir des équations (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 0 \\ q = 0 \\ r = \dot{\gamma} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \omega(t - t_0) \end{array} \right. \quad (10)$$

avec, à partir de (5), $\omega = r = L/C$.

Et l'on reconnaît la solution générale d'une rotation simple uniforme non perturbée dans un système isolé.

CHAPITRE II

LES PERTURBATIONS

La plupart des forces perturbatrices peuvent générer des couples agissant sur le mouvement d'attitude d'un satellite. Ces couples sont les suivants :

II.1. LE COUPLE DE PRESSION DE RADIATION SOLAIRE DIRECTE

Ce couple est créé par les variations de surface irradiée par le Soleil. La fonction d'ombre dépend donc non seulement du temps, mais aussi de la configuration géométrique du satellite. Pour le calcul de ce couple, les parties de chaque panneau de satellite soumises aux variations d'éclairement sont "découpées" en une collection de figures géométriques simples et de structure de surface uniforme. Ainsi, pour chaque élément de surface, il convient de tenir compte de la position \vec{R}_T du centre de pression et de l'aire A_T de la surface irradiée. Si \vec{S} est la direction du Soleil, le couple est alors donné par la formule suivante :

$$\vec{T} = k A_T \vec{S} \wedge \vec{R}_T \quad (11)$$

où k est le coefficient de proportionnalité mesurant la pression solaire par unité de surface. Une formule plus générale, tenant compte non seulement des radiations absorbées mais aussi des radiations réfléchies, est donnée par Van der Ha (1977).

II.2. LES COUPLES PRODUITS PAR LES GYROSCOPES

Le couple induit par la rotation de chacun des gyroscopes est donné par la

formule suivante :

$$\vec{N}_{gy} = -\vec{v} \wedge \vec{h} \quad (12)$$

où \vec{h} est le moment angulaire dû à la rotation des roues dont la vitesse de rotation instantanée est \vec{v} .

II.3. LE COUPLE DE GRADIENT DE GRAVITÉ TERRESTRE

Appelons ξ , η , ζ les composantes du vecteur satellite-Terre \vec{R} dans le système lié au satellite (système des axes principaux d'inertie). D'autre part, soit \vec{I} le vecteur inertie tel que $\vec{I} = (I)\vec{R}$ où (I) est la matrice diagonale du tenseur d'inertie. Si μ est la constante géométrique de la gravitation, le couple de gradient de gravité est alors donné par la formule suivante :

$$\vec{C}_{gr} = \frac{3\mu}{R^5} \vec{R} \wedge \vec{I} \quad (13)$$

où $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

II.4. LE COUPLE D'ORIGINE MAGNÉTIQUE

Le couple d'origine magnétique est donné par la formule suivante :

$$\vec{C}_{mg} = \vec{M} \wedge \vec{H} \quad (14)$$

où \vec{M} est le moment magnétique et \vec{H} le champ magnétique terrestre.

II.5. AUTRES COUPLES

Citons également les effets des phénomènes de surface suivants :

- La pression de radiation solaire réémise par la Terre et la pression de radiation infra-rouge terrestre. L'étude physique de ces rayonnements frappant la surface d'un satellite a été étudiée par F. Barlier, Y. Boudon, A.M. Mainguy et J.J. Walch (1978, 1979). Les auteurs proposent une voie nouvelle pour estimer le bilan radiatif terrestre; J.J. Walch (1984) donne une nouvelle méthode de calcul de ces pressions de radiation agissant sur la surface d'un satellite.

- La traînée électrique (Afonso et al, 1985).

- L'émission thermique de la surface (Boudon et al,1979) (Barlier et al., 1986).

- Le freinage atmosphérique (forces aérodynamiques) (F. Barlier, C. Berger, J.L. Falin, G. Kockarts et G. Thuillier, 1978).

Tous ces effets sont susceptibles de créer des couples pour des raisons d'asymétrie. Ils pourraient être pris en compte dans la présente théorie. Néanmoins, il est certain que l'effet de la pression de radiation solaire directe reste le phénomène le plus important à une altitude élevée du satellite, alors que c'est le freinage atmosphérique qui est dominant aux basses altitudes. L'anisotropie thermique de la surface peut être significative, mais cette anisotropie est liée à l'ensoleillement, aussi certains effets tels que ceux dus à la pression de radiation solaire directe et à l'émission thermique, peuvent être voisins et difficilement séparables.

II.6. DÉVELOPPEMENTS DES PERTURBATIONS EN SÉRIES DE FOURIER

En utilisant, si besoin est, la matrice de passage de la séquence 1.2.3, toutes les expressions physiques de ces couples s'expriment dans le système des axes principaux d'inertie sous forme de fonctions périodiques, de période 2π , continues, intégrables. Aussi, à titre d'exemple et en vue de l'application à HIPPARCOS, nous avons développé, en vertu du théorème de Fourier, le gradient de gravité (13) sous forme de séries de Fourier multipériodiques. Il a fallu pour cela élaborer des programmes de manipulation algébrique transformant de façon formelle un produit ou une somme de produits de sinus ou cosinus à un seul argument en une somme de cosinus et sinus à plusieurs arguments. Ces programmes ont été également étendus au calcul formel des additions et produits de séries pondérées à un ou plusieurs arguments.

Ainsi les seconds membres des équations différentielles (9) prennent la forme générale suivante, où peut s'insérer le développement des différents couples :

$$N_t(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \left\{ \sum_{ijkl} \left[A_{ijkl} \cos(i\alpha + j\beta + k\gamma + l\lambda) + B_{ijkl} \sin(i\alpha + j\beta + k\gamma + l\lambda) \right] \right\} \cdot \varepsilon \quad (15)$$

où :

- les A_{ijkl} et B_{ijkl} sont des coefficients numériques,
- λ désigne la longitude moyenne du satellite,
- ε est le petit paramètre choisi comme étant caractéristique de l'ordre de grandeur des couples.

Notons que nous allons considérer λ comme une constante dès lors que l'on recherche l'évolution d'attitude par intervalle de temps faible par rapport à la période de révolution du satellite autour de la Terre. Dans le cas contraire, il faudrait se limiter à des satellites de haute altitude là où le gradient de gravité et les autres effets dépendant de λ deviennent, en première approximation, négligeables par rapport aux effets dépendant d'une direction fixe dans l'espace. Ces deux possibilités conviennent dans le cas de l'application au satellite HIPPARCOS.

La méthode de résolution, présentée dans le chapitre suivant, permet de donner une solution analytique dans laquelle un développement limité des angles (α, β, γ) s'exprime en fonction littérale des coefficients ci-dessus.

DEUXIEME PARTIE

La deuxième partie de cette thèse présente la méthode de résolution et la solution formelle obtenue pour représenter l'évolution d'attitude d'un satellite en rotation perturbée.

- CHAPITRE III : THEORIE DEVELOPPEE AU PREMIER ORDRE
- CHAPITRE IV : THEORIE DEVELOPPEE AU DEUXIEME ORDRE
- CHAPITRE V : QUELQUES ELEMENTS DU TROISIEME ORDRE

CHAPITRE III

THEORIE DEVELOPPEE AU PREMIER ORDRE

III.1. RECHERCHE DE LA FORME DE LA SOLUTION

D'après le théorème de Poincaré qui généralise celui de Cauchy basé principalement sur des conditions d'holomorphie (Kovalevsky, 1963, p. 109), lorsque la fonction perturbatrice est fonction d'un paramètre ε , supposé suffisamment petit, alors la solution peut se développer en puissance de ce petit paramètre, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots \\ \beta &= \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \dots \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots\end{aligned}\tag{16}$$

où $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ représente la solution d'ordre zéro, c'est-à-dire en absence de force perturbatrice.

Reportons ici, brièvement, l'essentiel de la démonstration (Kovalevsky, 1963, p. 101-110). La mise en place de la forme globale de la solution en utilise et extrapole des résultats. Notons à ce sujet que nous ne faisons aucune hypothèse sur la canonicité du système.

Soit une fonction perturbatrice R telle que :

$$R = \sum A_j \cos(\sum j_p l_p)\tag{17}$$

où :

– les j_p sont des nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls,

– les l_p sont des variables angulaires,
 – les A_j sont des coefficients numériques,
 et, par ailleurs, R est développable en puissance du petit paramètre ε .
 Par suite, les équations ont la forme générale suivante :

$$\frac{dl_i}{dt} = a_i + \sum b_{ij} \cos\left(\sum j_p l_p\right) \quad (a)$$

où :

- les a_i peuvent être nuls ou, au contraire, finis,
- mais tous les b_{ij} ont en facteur le petit paramètre ε caractéristique de R .

En vertu du théorème de Poincaré, la solution prend la forme suivante :

$$l_i = l_{i_0} + \varepsilon l_{i_1} + \varepsilon^2 l_{i_2} + \dots \quad (b)$$

Les substitutions des expressions de (b) en (a) puis, après développement en séries de Taylor, les identifications selon les puissances de ε donnent les résultats suivants :

- les l_{i_0} sont soit des constantes, soit des fonctions linéaires du temps :

$$l_{i_0} = \overline{l_{i_0}} \quad \text{ou bien} \quad l_{i_0} = a_{i_0}(t - t_0) = n_{i_0}(t - t_0) \quad (c)$$

- les l_{i_1} prennent la forme suivante :

$$l_{i_1} = a_{i_1}(t - t_0) + \sum \frac{b_{ij}^1 \sin(\sum j_p l_{p_0})}{\sum j_p n_{p_0}} \quad (d)$$

et l'on s'en tiendra ici à la solution d'ordre 1.

Ainsi, tenant compte des résultats ci-dessus, la recherche de la solution à notre problème se fera à partir de la forme globale suivante :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 \\ \beta &= \beta_0 + \varepsilon \beta_1 \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon \gamma_1 \end{aligned} \quad (18)$$

avec:

$$\alpha_0 = n_{\alpha_0}(t - t_0) + \overline{\alpha_0}$$

$$\beta_0 = n_{\beta_0}(t - t_0) + \overline{\beta_0}$$

$$\gamma_0 = n_{\gamma_0}(t - t_0) + \overline{\gamma_0}$$

et :

$$\alpha_1 = n_{\alpha_1}(t - t_0) + \sum_{ijk} \frac{as_{ijk}^1 \sin(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} + \sum_{ijk} \frac{ac_{ijk}^1 \cos(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}}$$

$$\beta_1 = n_{\beta_1}(t - t_0) + \sum_{ijk} \frac{bs_{ijk}^1 \sin(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} + \sum_{ijk} \frac{bc_{ijk}^1 \cos(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}}$$

$$\gamma_1 = n_{\gamma_1}(t - t_0) + \sum_{ijk} \frac{cs_{ijk}^1 \sin(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} + \sum_{ijk} \frac{cc_{ijk}^1 \cos(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}}$$

Afin de mieux suivre, tout au long des développements d'ordre 1 puis 2, le "parcours" des paramètres as , ac , bs , bc , cs et cc apparaissant en coefficients des lignes trigonométriques, une notation en double lettre a été ainsi utilisée. Les lettres a , b , c sont respectivement relatives aux composantes α , β , γ tandis que la lettre s ou c rappellera que le paramètre est coefficient d'un sinus ou d'un cosinus dans la forme littérale de la solution. L'indice supérieur précise, quant à lui, l'ordre de la solution dont ces paramètres sont issus. Pour la clarté des calculs, nous décidons de laisser ε à l'extérieur des coefficients. γ représentant la rotation propre, n_{γ_0} est un nombre grand par rapport à n_{α_0} et n_{β_0} qui sont petits. n_{α_1} , n_{β_1} et n_{γ_1} traduisent respectivement les perturbations séculaires sur les périodes propres, tandis que les lignes trigonométriques traduisent les perturbations périodiques à courte et longue périodes.

En référence au paragraphe I.3, à l'origine des temps ($t = t_0$), α_i et β_i sont petits ou nuls et $\dot{\alpha}_i$ et $\dot{\beta}_i$ sont des petites quantités de l'ordre des perturbations. Par conséquent, la solution d'ordre zéro qui représente une rotation en absence de perturbation est, dans un système isolé, telle que $n_{\alpha_0} = n_{\beta_0} = 0$. De plus, ici à l'ordre zéro, les constantes d'intégration coïncident avec les conditions initiales. Par conséquent, $\overline{\alpha_0}$ et $\overline{\beta_0}$ sont petits et un léger ajustement de la position du système de référence peut suffire à les annuler, et ceci sans perdre de généralité au problème.

Ainsi, la solution générale d'ordre zéro peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0 \\ \beta_0 &= 0 \\ \gamma_0 &= \omega(t - t_0) + \overline{\gamma_0}\end{aligned}\tag{19}$$

où ω est la vitesse angulaire nominale de rotation propre et $\overline{\gamma_0}$ un angle arbitraire.

On reconnaît là une solution particulière des équations différentielles (9) sans second membre. Mais il s'agit en fait de la seule solution (aux deux constantes $\overline{\alpha_0}$ et $\overline{\beta_0}$ près) fonction linéaire du temps qui soit solution des équations différentielles (9) sans second membre :

- si $n_{\alpha_0} = 0$, alors $n_{\beta_0} = 0$ et vice versa,
- une solution non locale au cours du temps est telle que, nécessairement, n_{α_0} ou n_{β_0} soit nul.

Finalement, la solution d'ordre n aura la forme suivante :

$$\begin{aligned}\alpha &= \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots \\ \beta &= \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \dots \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots\end{aligned}\tag{20}$$

et la solution littérale développée au premier ordre en négligeant ε^2 s'écrit :

$$\begin{aligned}\alpha &= \left[n_{\alpha_1}(t - t_\alpha) + \sum_k \frac{as_k^1 \sin k\gamma_0 + ac_k^1 \cos k\gamma_0}{k\omega} \right] \cdot \varepsilon \\ \beta &= \left[n_{\beta_1}(t - t_\beta) + \sum_k \frac{bs_k^1 \sin k\gamma_0 + bc_k^1 \cos k\gamma_0}{k\omega} \right] \cdot \varepsilon \\ \gamma &= \gamma_0 + \left[n_{\gamma_1}(t - t_\gamma) + \sum_k \frac{cs_k^1 \sin k\gamma_0 + cc_k^1 \cos k\gamma_0}{k\omega} \right] \cdot \varepsilon\end{aligned}\tag{21}$$

avec $\gamma_0 = \omega(t - t_\gamma) + \overline{\gamma_0}$ et où $n_{\alpha_1}t_\alpha$, $n_{\beta_1}t_\beta$ et $n_{\gamma_1}t_\gamma$ sont les déphasages provoqués par les conditions initiales. En effet, à partir de l'ordre 1 les constantes d'intégration ne coïncident plus avec les conditions initiales.

Ainsi, la solution ne dépend que de γ .

III.2. SUBSTITUTION, IDENTIFICATION ET RÉOLUTION

En substituant (20) dans (9) et en faisant $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ dans les coefficients périodiques, on obtient, en se limitant au premier ordre, le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ (A \cos \gamma_0) \ddot{\alpha}_1 + (A \sin \gamma_0) \ddot{\beta}_1 + \omega(-A + B - C) \left[(\sin \gamma_0) \dot{\alpha}_1 - (\cos \gamma_0) \dot{\beta}_1 \right] \right\} &= N_1 \\ \varepsilon \left\{ (-B \sin \gamma_0) \ddot{\alpha}_1 + (B \cos \gamma_0) \ddot{\beta}_1 + \omega(A - B - C) \left[(\cos \gamma_0) \dot{\alpha}_1 + (\sin \gamma_0) \dot{\beta}_1 \right] \right\} &= N_2 \\ \varepsilon \{ C \ddot{\gamma}_1 \} &= N_3 \end{aligned} \quad (22)$$

De même, une approximation du même ordre dans le second membre (15) donne :

$$\begin{aligned} N_1 &= \left[K + \sum_{i=1}^m (p_i \sin i\gamma_0 + q_i \cos i\gamma_0) \right] .\varepsilon \\ N_2 &= \left[K' + \sum_{i=1}^m (r_i \sin i\gamma_0 + t_i \cos i\gamma_0) \right] .\varepsilon \\ N_3 &= \left[\sum_{i=1}^{m'} (u_i \sin i\gamma_0 + v_i \cos i\gamma_0) \right] .\varepsilon \end{aligned} \quad (23)$$

où les constantes K et K' peuvent éventuellement représenter l'action d'un couple constant. L'hypothèse selon laquelle l'axe Oz de rotation du satellite reste proche d'une direction fixe, se retrouve dans le fait que le couple ne dépende que de l'angle de rotation propre γ (λ étant une constante ramenée dans les coefficients).

Une égalisation respective est donc possible entre les expressions (22) et (23) ainsi factorisées selon la même puissance du petit paramètre ε . Injectons la solution (21) et ses dérivées dans les équations différentielles (22). Après substitutions, il faut convertir les produits trigonométriques en sommes de sinus et cosinus. Ensuite, après factorisations, on obtient :

Première équation:

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega}{2} \sum_k [-(1+k)A + B - C](as_k^1 + bc_k^1) \sin(1+k)\gamma_0 \\
& + \frac{\omega}{2} \sum_k [(k-1)A + B - C](as_k^1 - bc_k^1) \sin(1-k)\gamma_0 \\
& + \frac{\omega}{2} \sum_k [(1+k)A - B + C](bs_k^1 - ac_k^1) \cos(1+k)\gamma_0 \\
& + \frac{\omega}{2} \sum_k [(1-k)A - B + C](ac_k^1 + bs_k^1) \cos(1-k)\gamma_0 \\
& + \omega(-A + B - C)(n_{\alpha_1}) \sin \gamma_0 \\
& + \omega(A - B + C)(n_{\beta_1}) \cos \gamma_0 \\
& = K + \sum_{i=1}^m (p_i \sin i\gamma_0 + q_i \cos i\gamma_0)
\end{aligned} \tag{24}$$

Deuxième équation:

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega}{2} \sum_k [A - (1+k)B - C](bs_k^1 - ac_k^1) \sin(1+k)\gamma_0 \\
& + \frac{\omega}{2} \sum_k [A + (k-1)B - C](ac_k^1 + bs_k^1) \sin(1-k)\gamma_0 \\
& + \frac{\omega}{2} \sum_k [A - (1+k)B - C](as_k^1 + bc_k^1) \cos(1+k)\gamma_0 \\
& + \frac{\omega}{2} \sum_k [A + (k-1)B - C](as_k^1 - bc_k^1) \cos(1-k)\gamma_0 \\
& + \omega(A - B - C)(n_{\alpha_1}) \cos \gamma_0 \\
& + \omega(A - B - C)(n_{\beta_1}) \sin \gamma_0 \\
& = K' + \sum_{i=1}^m (r_i \sin i\gamma_0 + t_i \cos i\gamma_0)
\end{aligned} \tag{25}$$

Troisième équation:

$$-kC\omega \sum_k (cs_k^1 \sin k\gamma_0 + cc_k^1 \cos k\gamma_0) = \sum_{i=1}^{m'} (u_i \sin i\gamma_0 + v_i \cos i\gamma_0) \tag{26}$$

L'identification se fait aisément dans la troisième équation. Les résultats sont donnés plus loin avec la totalité de la solution. Par contre, l'identification en sinus et cosinus, dans les deux premières équations, ne fournit pas immédiatement les coefficients. Cependant, pour chaque valeur de $i \geq 1$, on peut déduire k tel que $k \geq 1$. Quelle que soit la valeur positive de l'indice i , il n'est jamais strictement nécessaire que l'indice k soit nul ou négatif pour permettre une identification. Il suffit ici d'utiliser la parité des lignes trigonométriques. Le fait de ne point utiliser k nul présente l'avantage appréciable d'éviter le problème d'un diviseur nul dans la solution (21).

Le processus systématique d'identification aboutit à un système de $4m+10$ équations à $4m+6$ inconnues ($as_k^1, ac_k^1, bs_k^1, bc_k^1, cs_k^1$ et cc_k^1 pour $k = 1$ à $m+1$, n_{α_1} et n_{β_1}); et en fait, 8 de ces équations sont équivalentes 2 à 2. Le système est donc soluble.

Les calculs ont montré que les coefficients de la solution présentaient une sorte d'antisymétrie croisée et que nous pouvions introduire deux formules itératives S_j et D_j fonction des coefficients perturbateurs p_i, q_i, r_i et t_i telles que l'on ait, pour $k > 1$:

$$\begin{aligned}
 as_k^1 + bc_k^1 &= 2S_{k+1}(p_{k+1}, t_{k+1}) \\
 as_k^1 - bc_k^1 &= -2D_{-(k-1)}(p_{k-1}, t_{k-1}) \\
 ac_k^1 + bs_k^1 &= -2S_{-(k-1)}(q_{k-1}, r_{k-1}) \\
 ac_k^1 - bs_k^1 &= 2D_{k+1}(q_{k+1}, r_{k+1}) \\
 n_{\alpha_1} &= S_1(p_1, t_1) \\
 n_{\beta_1} &= -D_1(q_1, r_1) \\
 n_{\gamma_1} &\text{ quelconque}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Avec la connaissance de S_j et D_j , as_1^1, ac_1^1, bs_1^1 et bc_1^1 , la solution se trouve totalement déterminée.

III.3. LA SOLUTION

La formulation complète de la solution analytique générale d'ordre 1 traduisant l'évolution d'attitude d'un satellite en rotation (lente) (fortement) perturbée, est la suivante, compte-tenu des conditions initiales (soit $\alpha_i = \beta_i = 0$ et $\gamma_i = \bar{\gamma}_0$) :

Solution formelle :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \left[n_{\alpha_1}(t - t_0) + \sum_{k=1}^M \frac{as_k^1 \sin k\gamma_0 + ac_k^1 \sin k\gamma_0}{k\omega} - \bar{\alpha}_1 \right] .\varepsilon \\
 \beta &= \left[n_{\beta_1}(t - t_0) + \sum_{k=1}^M \frac{bs_k^1 \sin k\gamma_0 + bc_k^1 \sin k\gamma_0}{k\omega} - \bar{\beta}_1 \right] .\varepsilon \\
 \gamma &= \gamma_0 + \left[n_{\gamma_1}(t - t_0) + \sum_{k=1}^M \frac{cs_k^1 \sin k\gamma_0 + cc_k^1 \sin k\gamma_0}{k\omega} - \bar{\gamma}_1 \right] .\varepsilon
 \end{aligned} \tag{28}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \omega(t - t_0) + \bar{\gamma}_0 \\
 \bar{\alpha}_1 &= \sum_{k=1}^M \frac{as_k^1 \sin k\bar{\gamma}_0 + ac_k^1 \cos k\bar{\gamma}_0}{k\omega} \\
 \bar{\beta}_1 &= \sum_{k=1}^M \frac{bs_k^1 \sin k\bar{\gamma}_0 + bc_k^1 \cos k\bar{\gamma}_0}{k\omega} \\
 \bar{\gamma}_1 &= \sum_{k=1}^M \frac{cs_k^1 \sin k\bar{\gamma}_0 + cc_k^1 \cos k\bar{\gamma}_0}{k\omega}
 \end{aligned}$$

$$M = \sup(m + 1, m')$$

où m et m' sont les bornes supérieures de variation des indices des séries exprimant les couples (23). La longueur de ces séries n'est pas limitée.

Coefficients itératifs :

$$k = 1$$

$$n_{\alpha_1} = S_1(p_1, t_1) = -\frac{(p_1 + t_1)}{2\omega C}$$

$$n_{\beta_1} = -D_1(q_1, r_1) = \frac{(q_1 - r_1)}{2\omega C}$$

$$n_{\gamma_1} \text{ arbitraire}$$

$$as_1^1 = S_2(p_2, t_2) + K'/[\omega(A - C)]$$

$$ac_1^1 = D_2(q_2, r_2) + K/[\omega(C - B)]$$

$$bs_1^1 = -D_2(q_2, r_2) + K/[\omega(C - B)]$$

$$bc_1^1 = S_2(p_2, t_2) - K'/[\omega(A - C)]$$

$$k > 1$$

$$as_k^1 = S_{k+1}(p_{k+1}, t_{k+1}) - D_{-(k-1)}(p_{k-1}, t_{k-1}) \quad (29)$$

$$ac_k^1 = -S_{-(k-1)}(q_{k-1}, r_{k-1}) + D_{k+1}(q_{k+1}, r_{k+1})$$

$$bs_k^1 = -S_{-(k-1)}(q_{k-1}, r_{k-1}) - D_{k+1}(q_{k+1}, r_{k+1})$$

$$bc_k^1 = S_{k+1}(p_{k+1}, t_{k+1}) + D_{-(k-1)}(p_{k-1}, t_{k-1})$$

$$k \geq 1$$

$$cs_k^1 = -\frac{u_k}{k\omega C}$$

$$cc_k^1 = -\frac{v_k}{k\omega C}$$

avec la loi de formation suivante où les variables x_i, y_i désignent les paramètres p_i, q_i, r_i, t_i pour $i \geq 1$ et où $j = i$ ou $-i$:

$$S_j(x_i, y_i) = \frac{x_i(A + jB - C) + y_i(jA + B - C)}{2\omega [C^2 - BC - AC - (j+1)(j-1)AB]} \quad (30)$$

$$D_j(x_i, y_i) = \frac{x_i(A + jB - C) - y_i(jA + B - C)}{2\omega [C^2 - BC - AC - (j+1)(j-1)AB]}$$

Cette théorie au premier ordre, suivie d'une application au satellite HIPPARCOS, est présentée dans une publication de l'auteur donnée en *annexe 2* de cette thèse.

CHAPITRE IV

THEORIE DEVELOPPEE AU DEUXIEME ORDRE

IV.1. RECHERCHE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Selon le développement de Poincaré (16) et les résultats précédents relatifs à la solution d'ordre 0 (19), nous cherchons à présent à déterminer la solution $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ d'ordre 2 telle que :

$$\begin{aligned}\alpha &= \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 \\ \beta &= \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2\end{aligned}\tag{31}$$

avec $\gamma_0 = \omega(t - t_0) + \overline{\gamma_0}$.

Substituons alors (31) et ses dérivées successives dans les équations différentielles initiales (9). Nous obtenons le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon\mathcal{P} + \varepsilon^2\mathcal{S} + \dots &= N_1 \\ \varepsilon\mathcal{Q} + \varepsilon^2\mathcal{T} + \dots &= N_2 \\ \varepsilon\mathcal{R} + \varepsilon^2\mathcal{V} + \dots &= N_3\end{aligned}\tag{32}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{A}_1\ddot{\alpha}_1 + \mathcal{A}_2\ddot{\beta}_1 + \mathcal{A}_4\omega\dot{\alpha}_1 + \mathcal{A}_5\omega\dot{\beta}_1 \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{B}_1\ddot{\alpha}_1 + \mathcal{B}_2\ddot{\beta}_1 + \mathcal{B}_4\omega\dot{\alpha}_1 + \mathcal{B}_5\omega\dot{\beta}_1 \\ \mathcal{R} &= \mathcal{C}_1\ddot{\alpha}_1 + \mathcal{C}_2\ddot{\gamma}_1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \mathcal{A}_1 \ddot{\alpha}_2 + \mathcal{A}_2 \ddot{\beta}_2 + \mathcal{A}_4 \omega \dot{\alpha}_2 + \mathcal{A}_5 \omega \dot{\beta}_2 + \mathcal{A}_3 \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 + \mathcal{A}_4 \dot{\alpha}_1 \dot{\gamma}_1 + \mathcal{A}_5 \dot{\beta}_1 \dot{\gamma}_1 + \mathcal{A}_6 \dot{\alpha}_1^2 \\
\mathcal{T} &= \mathcal{B}_1 \ddot{\alpha}_2 + \mathcal{B}_2 \ddot{\beta}_2 + \mathcal{B}_4 \omega \dot{\alpha}_2 + \mathcal{B}_5 \omega \dot{\beta}_2 + \mathcal{B}_3 \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 + \mathcal{B}_4 \dot{\alpha}_1 \dot{\gamma}_1 + \mathcal{B}_5 \dot{\beta}_1 \dot{\gamma}_1 + \mathcal{B}_6 \dot{\alpha}_1^2 \\
\mathcal{V} &= \mathcal{C}_1 \ddot{\alpha}_2 + \mathcal{C}_2 \ddot{\gamma}_2 + \mathcal{C}_3 \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 + \mathcal{C}_4 \dot{\alpha}_1^2 + \mathcal{C}_5 \dot{\beta}_1^2
\end{aligned}$$

où les \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_i et \mathcal{C}_i sont les coefficients périodiques des équations différentielles (9) tels que ces dernières s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 \ddot{\alpha} + \mathcal{A}_2 \ddot{\beta} + \mathcal{A}_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} + \mathcal{A}_4 \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \mathcal{A}_5 \dot{\beta} \dot{\gamma} + \mathcal{A}_6 \dot{\alpha}^2 &= N_1 \\
\mathcal{B}_1 \ddot{\alpha} + \mathcal{B}_2 \ddot{\beta} + \mathcal{B}_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} + \mathcal{B}_4 \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \mathcal{B}_5 \dot{\beta} \dot{\gamma} + \mathcal{B}_6 \dot{\alpha}^2 &= N_2 \\
\mathcal{C}_1 \ddot{\alpha} + \mathcal{C}_2 \ddot{\gamma} + \mathcal{C}_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} + \mathcal{C}_4 \dot{\alpha}^2 + \mathcal{C}_5 \dot{\beta}^2 &= N_3
\end{aligned} \tag{33}$$

Or ces coefficients dépendent de β et γ qui vérifient le théorème de Poincaré. Par conséquent, par des développements de Taylor-Mac Laurin des lignes trigonométriques constituant les \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_i , \mathcal{C}_i , ces derniers sont alors eux-mêmes développables en puissance du petit paramètre ε :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i &= \mathcal{A}_i^0 + \varepsilon \mathcal{A}_i^1 + \varepsilon^2 \mathcal{A}_i^2 + \dots \\
\mathcal{B}_i &= \mathcal{B}_i^0 + \varepsilon \mathcal{B}_i^1 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_i^2 + \dots \\
\mathcal{C}_i &= \mathcal{C}_i^0 + \varepsilon \mathcal{C}_i^1 + \varepsilon^2 \mathcal{C}_i^2 + \dots
\end{aligned} \tag{34}$$

Et par simple linéarité, il en est de même des \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} et \mathcal{S} , \mathcal{T} , \mathcal{V} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \mathcal{P}^0 + \varepsilon \mathcal{P}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{P}^2 + \dots & \mathcal{S} &= \mathcal{S}^0 + \varepsilon \mathcal{S}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{S}^2 + \dots \\
\mathcal{Q} &= \mathcal{Q}^0 + \varepsilon \mathcal{Q}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{Q}^2 + \dots & \mathcal{T} &= \mathcal{T}^0 + \varepsilon \mathcal{T}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{T}^2 + \dots \\
\mathcal{R} &= \mathcal{R}^0 + \varepsilon \mathcal{R}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{R}^2 + \dots & \mathcal{V} &= \mathcal{V}^0 + \varepsilon \mathcal{V}^1 + \varepsilon^2 \mathcal{V}^2 + \dots
\end{aligned} \tag{35}$$

D'autre part, la fonction perturbatrice étant fonction de ε (base du théorème de Poincaré), elle a pour propriété de pouvoir se développer de façon convergente par rapport à ce petit paramètre. Il en sera de même de ses dérivées partielles, c'est-à-dire de la force perturbatrice. Par conséquent, les couples perturbateurs se développent ainsi :

$$\begin{aligned}
N_1 &= \varepsilon N_1^0 + \varepsilon^2 N_1^1 + \dots \\
N_2 &= \varepsilon N_2^0 + \varepsilon^2 N_2^1 + \dots \\
N_3 &= \varepsilon N_3^0 + \varepsilon^2 N_3^1 + \dots
\end{aligned} \tag{36}$$

où N_1^0 , N_2^0 et N_3^0 sont respectivement les seconds nombres des équations (24), (25) et (26) de la théorie limité à l'ordre 1.

Finalement, le système initial (9) développé à l'ordre 2 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \mathcal{P}^0 + \varepsilon^2 [\mathcal{P}^1 + \mathcal{S}^0] &= \varepsilon N_1^0 + \varepsilon^2 N_1^1 \\
\varepsilon \mathcal{Q}^0 + \varepsilon^2 [\mathcal{Q}^1 + \mathcal{T}^0] &= \varepsilon N_2^0 + \varepsilon^2 N_2^1 \\
\varepsilon \mathcal{R}^0 + \varepsilon^2 [\mathcal{R}^1 + \mathcal{V}^0] &= \varepsilon N_3^0 + \varepsilon^2 N_3^1
\end{aligned} \tag{37}$$

et l'identification selon les puissances de ε donne les deux systèmes suivants :

$$(I) \begin{cases} \mathcal{P}^0 = N_1^0 \\ \mathcal{Q}^0 = N_2^0 \\ \mathcal{R}^0 = N_3^0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \mathcal{S}^0 + \mathcal{P}^1 = N_1^1 \\ \mathcal{T}^0 + \mathcal{Q}^1 = N_2^1 \\ \mathcal{V}^0 + \mathcal{R}^1 = N_3^1 \end{cases}$$

Tandis qu'avec le système (I) on retrouve les équations de la théorie du premier ordre, le système (II) est celui du deuxième ordre de la théorie.

Ainsi, après une série de développements de Taylor, le système (II) donne les équations différentielles suivantes :

Première équation :

$$\begin{aligned}
& (A \cos \gamma_0) \ddot{\alpha}_2 + (A \sin \gamma_0) \ddot{\beta}_2 + \omega(-A + B - C) \left[(\sin \gamma_0) \dot{\alpha}_2 - (\cos \gamma_0) \dot{\beta}_2 \right] \\
& + \gamma_1 \left\{ (-A \sin \gamma_0) \ddot{\alpha}_1 + (A \cos \gamma_0) \ddot{\beta}_1 + \omega(-A + B - C) \left[(\cos \gamma_0) \dot{\alpha}_1 + (\sin \gamma_0) \dot{\beta}_1 \right] \right\} \\
& + \dot{\gamma}_1 \left\{ (-A + B - C) \left[(\sin \gamma_0) \dot{\alpha}_1 - (\cos \gamma_0) \dot{\beta}_1 \right] \right\} \\
& = \gamma_1 \sum_{i=1}^m i(p_i \cos i\gamma_0 - q_i \sin i\gamma_0) \tag{38}
\end{aligned}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned}
& (-B \sin \gamma_0) \ddot{\alpha}_2 + (B \cos \gamma_0) \ddot{\beta}_2 + \omega(A - B - C) \left[(\cos \gamma_0) \dot{\alpha}_2 + (\sin \gamma_0) \dot{\beta}_2 \right] \\
& + \gamma_1 \left\{ (-B \cos \gamma_0) \ddot{\alpha}_1 + (-B \sin \gamma_0) \ddot{\beta}_1 + \omega(A - B - C) \left[(-\sin \gamma_0) \dot{\alpha}_1 + (\cos \gamma_0) \dot{\beta}_1 \right] \right\} \\
& + \dot{\gamma}_1 \left\{ (A - B - C) \left[(\cos \gamma_0) \dot{\alpha}_1 + (\sin \gamma_0) \dot{\beta}_1 \right] \right\} \\
& = \gamma_1 \sum_{i=1}^m i(r_i \cos i\gamma_0 - t_i \sin i\gamma_0) \tag{39}
\end{aligned}$$

Troisième équation :

$$\begin{aligned}
& C \ddot{\gamma}_2 + C \beta_1 \ddot{\alpha}_1 + [C - (A - B) \cos 2\gamma_0] \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}(A - B)(\sin 2\gamma_0)(\dot{\alpha}_1^2 - \dot{\beta}_1^2) \\
& = \gamma_1 \sum_{i=1}^{m'} i(u_i \cos i\gamma_0 - v_i \sin i\gamma_0) \tag{40}
\end{aligned}$$

Pour le cas où les couples perturbateurs ne dépendent pas seulement de γ mais aussi de α et β , l'identification des $p_i, q_i, r_i, t_i, u_i, v_i$ présents dans les seconds membres des équations (38), (39), (40) aux $p_i, q_i, r_i, t_i, u_i, v_i$ des seconds membres des équations du premier ordre, correspond à faire une approximation qui reste toutefois licite tant que l'on reste proche des conditions initiales (*cf III.2.,(23)*). En effet les développements de Taylor des seconds membres (15) créent l'apparition de α_1 et β_1 en plus de γ_1 visible dans les seconds membres des équations (38), (39) et (40). Or α_1 et β_1 étant pour une part fonction de γ_0 , on pourrait calculer de nouvelles séries de Fourier avec de nouveaux $p_i, q_i, r_i, t_i, u_i, v_i$. Cependant α_1 et β_1 , ainsi que γ_1 , contiennent également des termes séculaires qui peuvent devenir grands avec le temps, ce qui finirait par ne plus permettre les développements de Taylor. Il conviendrait alors d'effectuer des développements en séries entières sur des intervalles de temps courts (exemple des théories planétaires). C'est pourquoi l'on s'en tiendra ici à l'approximation faite sur α_1 et β_1 sachant que l'on pourrait éventuellement affiner le calcul des paramètres des seconds membres. Du reste la méthode de résolution des équations différentielles issues de la théorie d'ordre 2, peut tout à fait s'appliquer quelle que soit la série de paramètres impliqués dans les seconds membres. Il n'y a alors que le degré de simplification de la solution qui diffère (*cf IV.2.6.*).

En outre, l'application au satellite HIPPARCOS, décrite en troisième partie, ne subit pas cette approximation. En effet les couples perturbateurs ne dépendent que de γ seul (*cf (92)*; dans le cas contraire, rappelons que la difficulté ne se poserait qu'au second ordre.) De plus, la représentation de l'évolution d'attitude du satellite HIPPARCOS est recherchée sur un intervalle de temps limité, inférieur à 1000 secondes. Par conséquent $\varepsilon\gamma_1$ reste toujours très petit par rapport à γ_0 .

IV.2. MÉTHODE DE RÉOLUTION

IV.2.1. Conversion des équations différentielles

La méthode de résolution des équations de la théorie étendue à l'ordre 2 consiste pour une part essentielle à réutiliser, autant de fois qu'il est nécessaire, le principe de l'algorithme de l'ordre 1 de la théorie. Pour ce faire une adaptation analytique des équations est nécessaire. Observons les équations différentielles (38), (39) et (40). Les termes d'ordre 2, spécialement pour les deux premières équations, se trouvent combinés exactement sous la même formulation que les termes d'ordre 1 dans les équations de la théorie d'ordre 1. Aussi, considérant que les résultats acquis par le

premier ordre restent valables au deuxième ordre, il serait avantageux de remplacer les expressions combinant des termes d'ordre 1 dans les équations (38), (39) et (40) par une formulation analogue aux seconds membres perturbateurs des équations de la théorie d'ordre 1. Cependant, les produits de séries visiblement présents dans les équations (38), (39) et (40) introduisent des difficultés analytiques.

Dans une première étape, considérons les équations (38) et (39) où les produits de séries permettent des factorisations par rapport à γ_1 et $\hat{\gamma}_1$. Les expressions ainsi factorisées et constituées uniquement de termes d'ordre 1 sont donc convertibles en séries de Fourier mixtes (sinus et cosinus). Notons en outre qu'une factorisation par γ_1 sera alors possible entre les expressions concernées converties et les seconds membres de ces équations (38) et (39). Il y a là une source de simplification des équations et l'économie de 8 produits de séries mixtes par équation. Au total la transformation de ces deux premières équations fait passer le nombre de produits de séries mixtes de 24 à 4.

Cette transformation des équations constitue en fait le problème réciproque de celui posé à l'ordre 1 de la théorie, c'est-à-dire connaissant les coefficients de la solution en fonction des paramètres perturbateurs, comment reconstituer les seconds membres des équations. La méthode consiste à développer les 4 expressions concernées sous une forme analogue à celle des expressions (24) et (25), puis à remplacer les combinaisons de coefficients par les expressions en S_j et D_j données en (27), ceci en ayant soin de choisir convenablement les valeurs initiales et finales des indices, non identiques d'une formule à l'autre. Enfin, quelques factorisations et manipulations de sommations permettent de déduire les coefficients des séries de Fourier ainsi obtenues.

Ainsi finalement, les équations différentielles de la théorie du second ordre se réduisent à l'écriture suivante :

Première équation :

$$\begin{aligned}
 & (A \cos \gamma_0) \ddot{\alpha}_2 + (A \sin \gamma_0) \ddot{\beta}_2 + \omega(-A + B - C) \left[(\sin \gamma_0) \dot{\alpha}_2 - (\cos \gamma_0) \dot{\beta}_2 \right] \\
 & = \gamma_1 \left[\lambda + \sum_{i=1}^m (p'_i \sin i\gamma_0 + q'_i \cos i\gamma_0) \right] \\
 & + \dot{\gamma}_1 \left[\mu + \sum_{i=1}^m (p''_i \sin i\gamma_0 + q''_i \cos i\gamma_0) \right]
 \end{aligned} \tag{41}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned}
 & (-B \sin \gamma_0) \ddot{\alpha}_2 + (B \cos \gamma_0) \ddot{\beta}_2 + \omega(A - B - C) \left[(\cos \gamma_0) \dot{\alpha}_2 + (\sin \gamma_0) \dot{\beta}_2 \right] \\
 & = \gamma_1 \left[\lambda' + \sum_{i=1}^m (r'_i \sin i\gamma_0 + t'_i \cos i\gamma_0) \right] \\
 & + \dot{\gamma}_1 \left[\mu' + \sum_{i=1}^m (r''_i \sin i\gamma_0 + t''_i \cos i\gamma_0) \right]
 \end{aligned} \tag{42}$$

Troisième équation :

$$\begin{aligned}
 & C \ddot{\gamma}_2 = -C \beta_1 \ddot{\alpha}_1 \\
 & - [C - (A - B) \cos 2\gamma_0] \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 - \frac{1}{2}(A - B)(\sin 2\gamma_0)(\dot{\alpha}_1^2 - \dot{\beta}_1^2) \\
 & + \gamma_1 \left[\sum_{i=1}^{m'} (u'_i \sin i\gamma_0 + v'_i \cos i\gamma_0) \right]
 \end{aligned} \tag{43}$$

Avec les notations et résultats suivants :

$$\begin{cases} p'_i = -(iq_i + x_i) \\ q'_i = (ip_i - y_i) \end{cases} \quad \begin{cases} r'_i = -(it_i + s_i) \\ t'_i = (ir_i - z_i) \end{cases} \quad \begin{cases} u'_i = -iv_i \\ v'_i = iu_i \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} p''_i = -x'_i \\ q''_i = -y'_i \end{cases} \quad \begin{cases} r''_i = -s'_i \\ t''_i = -z'_i \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -X \\ \lambda' = -X' \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = -Y \\ \mu' = -Y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i = \omega [(iA - B + C)D_i(q_i, r_i) + (iA + B - C)S_{-i}(q_i, r_i)] \\ y_i = \omega [-(iA - B + C)S_i(p_i, t_i) - (iA + B - C)D_{-i}(p_i, t_i)] \\ s_i = \omega [(-A + iB + C)S_i(p_i, t_i) - (A + iB - C)D_{-i}(p_i, t_i)] \\ z_i = \omega [(-A + iB + C)D_i(q_i, r_i) - (A + iB - C)S_{-i}(q_i, r_i)] \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} x'_i = (-A + B - C)[S_i(p_i, t_i) + D_{-i}(p_i, t_i)] \\ y'_i = (-A + B - C)[D_i(q_i, r_i) + S_{-i}(q_i, r_i)] \\ s'_i = (A - B - C)[S_{-i}(q_i, r_i) - D_i(q_i, r_i)] \\ z'_i = (A - B - C)[S_i(p_i, t_i) + D_{-i}(p_i, t_i)] \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} X = \frac{(B - C)}{(A - C)}K' \\ X' = \frac{(A - C)}{(C - B)}K \end{cases} \quad \begin{cases} Y = \frac{(-A + B - C)}{\omega(B - C)}K \\ Y' = \frac{(A - B - C)}{\omega(A - C)}K' \end{cases} \quad (47)$$

IV.2.2. Discussion

Les équations (41), (42) et (43) sont ainsi mises sous une forme analogue à celle des équations de la théorie limitée au premier ordre. Cependant, la nature des termes de leurs seconds membres diffère. En effet ceux-ci ne sont plus simplement constitués de termes sinusoïdaux, mais aussi de termes de Poisson. Cela ne pose pas de problème quant à la résolution de la troisième équation (43). En revanche, la résolution des deux premières équations (41) et (42) par simple analogie à la méthode établie au premier ordre, se trouve compromise ou tout du moins sensiblement plus compliquée. Par ailleurs, l'existence de produits de séries dans ces seconds membres présente une difficulté analytique. En effet l'algorithme de multiplication de deux séries est tel qu'à chaque nouvelle incrémentation de l'indice de sommation, sont créés des termes d'indice inférieur. De ce fait, l'identification pure et simple selon la méthode du premier ordre de la théorie reste difficilement envisageable. Cependant ces produits de séries peuvent s'effectuer numériquement. L'erreur due à la différence est relativement petite d'autant que le nombre de produits de séries a été considérablement diminué par le passage des équations (38) et (39) aux équations (41) et (42). Les sommes et produits de séries pondérées sont réalisés par deux programmes élaborés lors du calcul des perturbations (*chap.II*). Ils sont construits pour manipuler des séries de Fourier complexes en effectuant successivement codage, tri, compactage, simplification et décodage des variables affectées de leurs coefficients. Ils ont été écrits en FORTRAN V, double précision VAX.

La méthode de résolution développée au second ordre consiste à définir un découpage de la solution où le maximum de termes peuvent être totalement déterminés de façon analytique.

IV.2.3. Conventions concernant les notations

Afin de simplifier l'écriture des calculs, nous adoptons les conventions suivantes :
— l'astérisque (*) signifie qu'il s'agit d'un terme constitué uniquement d'une série de Fourier mixte.

$$\text{Exemple : } \quad x^* = \sum_{k=1}^m \frac{(xs_k \sin k\gamma_0 + xc_k \cos k\gamma_0)}{k\omega}$$

— la barre (\bar{x}) signifie que cette série est prise au temps $t = t_0$.

$$\text{Exemple : } \quad \bar{x}^* = \sum_{k=1}^m \frac{(xs_k \sin k\bar{\gamma}_0 + xc_k \cos k\bar{\gamma}_0)}{k\omega}$$

—Par ailleurs, nous poserons successivement :

$$\begin{aligned} \Lambda_1^* &= \sum_{i=1}^{m_1} (p'_i \sin i\gamma_0 + q'_i \cos i\gamma_0) \\ \Lambda_2^* &= \sum_{i=1}^{m_1} (r'_i \sin i\gamma_0 + t'_i \cos i\gamma_0) \\ \Lambda_3^* &= \sum_{i=1}^{m'_1} (u'_i \sin i\gamma_0 + v'_i \cos i\gamma_0) \\ \Pi_1^* &= \sum_{i=1}^{m_1} (p''_i \sin i\gamma_0 + q''_i \cos i\gamma_0) \\ \Pi_2^* &= \sum_{i=1}^{m_1} (r''_i \sin i\gamma_0 + t''_i \cos i\gamma_0) \end{aligned} \tag{48}$$

où $m_1 = m$ et $m'_1 = m'$.

IV.2.4. Résolution de la troisième équation (43)

Le second membre de la troisième équation contient successivement les termes suivants :

1° Un terme sinusoïdal,

$$\sum_{i=1}^{m'_2} (U_i \sin i\gamma_0 + V_i \cos i\gamma_0), \quad (49)$$

représentant le calcul résultant de tous les termes sinusoïdaux du second membre :

$$\begin{aligned} & (\gamma_1^* - \overline{\gamma_1^*})(\Lambda_3^*) - C(\beta_1^* - \overline{\beta_1^*})(\ddot{\alpha}_1^*) - C(\dot{\alpha}_1^* + \dot{\beta}_1^*) \\ & + (A - B)(\cos 2\gamma_0)(n_{\alpha_1} + \dot{\alpha}_1^*)(n_{\beta_1} + \dot{\beta}_1^*) \\ & - \frac{1}{2}(A - B)(\sin 2\gamma_0) \left[(n_{\alpha_1} + \dot{\alpha}_1^*)^2 - (n_{\beta_1} + \dot{\beta}_1^*)^2 \right] \end{aligned} \quad (50)$$

La solution γ_2 doit alors contenir un terme sinusoïdal γ_2^* tel que :

$$\gamma_2^* = \sum_{k=1}^{m'_2} \frac{(cs_k^2 \sin k\gamma_0 + cc_k^2 \cos k\gamma_0)}{k\omega} \quad (51)$$

où pour $k \geq 1$:

$$cs_k^2 = -\frac{U_k}{k\omega C}$$

$$cc_k^2 = -\frac{V_k}{k\omega C}$$

2° Un terme constant,

$$\kappa - Cn_{\alpha_1}n_{\beta_1}, \quad (52)$$

où κ est une constante résultant des produits et sommes de séries précédents (50). L'intégration de ce terme induit dans la solution γ_2 , un terme parabolique $\nu(t - t_0)^2$ tel que :

$$\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{C} - n_{\alpha_1}n_{\beta_1} \right) \quad (53)$$

3° Deux termes de Poisson,

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= -C n_{\beta_1} (t - t_0) \ddot{\alpha}_1^* \\
 P_2(t) &= n_{\gamma_1} (t - t_0) \Lambda_3^* = \frac{C n_{\gamma_1}}{\omega} (t - t_0) \frac{d\ddot{\gamma}_1^*}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

L'intégration de ces termes provoque dans la solution γ_2 l'apparition des expressions suivantes :

a) une expression séculaire $n_{\gamma_2}(t - t_0)$ telle que :

$$n_{\gamma_2} = -n_{\beta_1} \overline{\alpha}_1^* + \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} \overline{\dot{\gamma}}_1^* \tag{55}$$

b) une expression sinusoïdale :

$$\Sigma(t) = 2n_{\beta_1} \int_{t_0}^t \alpha_1^* dt - 2 \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} (\gamma_1^* - \overline{\gamma}_1^*) \tag{56}$$

c) une expression mixte :

$$P(t) = (-n_{\beta_1} \alpha_1^* + \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} \dot{\gamma}_1^*)(t - t_0) \tag{57}$$

Finalement, la résolution de l'équation (43) donne la solution d'ordre 2 ayant la forme suivante :

$$\gamma_2 = n_{\gamma_2}(t - t_0) + \nu(t - t_0)^2 + \gamma_2^* - \overline{\gamma}_2^* + \Sigma(t) + P(t) \tag{58}$$

où n_{γ_2} , ν , $\Sigma(t)$, $P(t)$ et les coefficients de γ_2^* sont donnés respectivement en (55), (53), (56), (57) et (51). γ_2 est écrite ici telle que à $t = t_0$, $\gamma_{2i} = 0$.

IV.2.5. Résolution des deux premières équations (41) et (42)

En accord avec les notations adoptées en IV.2.3., les seconds membres de ces deux équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (\gamma_1^* - \overline{\gamma_1^*})(\lambda + \Lambda_1^*) + (n_{\gamma_1} + \dot{\gamma}_1^*)(\mu + \Pi_1^*) + n_{\gamma_1}(\lambda + \Lambda_1^*)(t - t_0) \\ \mathcal{F}_2 &= (\gamma_1^* - \overline{\gamma_1^*})(\lambda' + \Lambda_2^*) + (n_{\gamma_1} + \dot{\gamma}_1^*)(\mu' + \Pi_2^*) + n_{\gamma_1}(\lambda' + \Lambda_2^*)(t - t_0)\end{aligned}\quad (59)$$

La présence de termes de Poisson dans ces seconds membres conduit à chercher la solution d'ordre 2 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= n_{\alpha_2}(t - t_0) + \alpha_2^* - \overline{\alpha_2^*} + x^*(t - t_0) - \int_{t_0}^t x^* dt \\ \beta_2 &= n_{\beta_2}(t - t_0) + \beta_2^* - \overline{\beta_2^*} + y^*(t - t_0) - \int_{t_0}^t y^* dt\end{aligned}\quad (60)$$

Les équations (41) et (42) développées à partir de cette formulation permettent la réalisation du principe de résolution du premier ordre de la théorie mais toutefois selon deux étapes non distinctes. En effet, les équations ne permettent pas d'appliquer de façon indépendante deux fois l'algorithme de la solution, une fois pour les expressions sinusoïdales, une fois pour les expressions de Poisson. L'introduction, dans la solution, des termes de Poisson en x^* et y^* induisent des expressions purement sinusoïdales supplémentaires dans les équations. Les deux intégrales présentes dans la solution servent surtout à minimiser le nombre de ces expressions supplémentaires. Il convient donc de procéder en premier lieu à la résolution des expressions de Poisson issues des équations, afin de considérer les expressions sinusoïdales supplémentaires (en \dot{x}^* et \dot{y}^*) comme une portion connue à ajouter aux seconds membres de la partie uniquement sinusoïdale des équations.

Soit alors le formalisme suivant traduisant le compactage par nature des termes des seconds membres (59) :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \tilde{\mathcal{K}} + \sum_{i=1}^{m_2} (\tilde{P}_i \sin i\gamma_0 + \tilde{Q}_i \cos i\gamma_0) + n_{\gamma_1}(\lambda + \Lambda_1^*)(t - t_0) \\ \mathcal{F}_2 &= \tilde{\mathcal{K}}' + \sum_{i=1}^{m_2} (\tilde{R}_i \sin i\gamma_0 + \tilde{T}_i \cos i\gamma_0) + n_{\gamma_1}(\lambda' + \Lambda_2^*)(t - t_0)\end{aligned}\quad (61)$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}} + \sum_{i=1}^{m_2} (\tilde{P}_i \sin i\gamma_0 + \tilde{Q}_i \cos i\gamma_0) &= \mathcal{K} + \sum_{i=1}^{m_2} (P_i \sin i\gamma_0 + Q_i \cos i\gamma_0) + n_{\gamma_1}(\mu + \Pi_1^*) \\ \tilde{\mathcal{K}}' + \sum_{i=1}^{m_2} (\tilde{R}_i \sin i\gamma_0 + \tilde{T}_i \cos i\gamma_0) &= \mathcal{K}' + \sum_{i=1}^{m_2} (R_i \sin i\gamma_0 + T_i \cos i\gamma_0) + n_{\gamma_1}(\mu' + \Pi_2^*)\end{aligned}\quad (62)$$

où les séries en P_i, Q_i, R_i, T_i , représentent les expressions comportant des produits de séries (cf (67) et fin de chapitre).

★ Première étape : détermination des coefficients itératifs de x^* et y^* .

Selon la méthode de résolution établie à l'ordre 1, l'identification des termes de Poisson issus des équations d'ordre 2 donne les résultats suivants :

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}xs_1 &= \{S_2(p'_2, t'_2) + \lambda'/[\omega(A - C)]\} n_{\gamma_1} \\ xc_1 &= \{D_2(q'_2, r'_2) + \lambda/[\omega(C - B)]\} n_{\gamma_1} \\ ys_1 &= \{-D_2(q'_2, r'_2) + \lambda/[\omega(C - B)]\} n_{\gamma_1} \\ yc_1 &= \{S_2(p'_2, t'_2) - \lambda'/[\omega(A - C)]\} n_{\gamma_1}\end{aligned}$$

$$2 \leq k \leq m_1 + 1$$

$$\begin{aligned}xs_k &= [S_{k+1}(p'_{k+1}, t'_{k+1}) - D_{-(k-1)}(p'_{k-1}, t'_{k-1})] n_{\gamma_k} \\ xc_k &= [-S_{-(k-1)}(q'_{k-1}, r'_{k-1}) + D_{k+1}(q'_{k+1}, r'_{k+1})] n_{\gamma_1} \\ ys_k &= [-S_{-(k-1)}(q'_{k-1}, r'_{k-1}) - D_{k+1}(q'_{k+1}, r'_{k+1})] n_{\gamma_1} \\ yc_k &= [S_{k+1}(p'_{k+1}, t'_{k+1}) + D_{-(k-1)}(p'_{k-1}, t'_{k-1})] n_{\gamma_1}\end{aligned}\quad (63)$$

avec la même loi de formation (30) que celle pour les coefficients itératifs de la solution d'ordre 1. Les paramètres $\lambda, \lambda', p'_i, q'_i, r'_i$ et t'_i sont donnés en (44).

Normalement, afin d'utiliser "mécaniquement" l'algorithme de résolution établi à l'ordre 1, il faudrait rajouter dans les expressions littérales de la solution (60), deux termes paraboliques, respectivement :

$$\frac{1}{2}\rho(t-t_0)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\sigma(t-t_0)^2,$$

de façon que dans les équations déduites de l'identification des expressions de Poisson, il y ait " $\dot{x}^* + \rho$ " et " $\dot{y}^* + \sigma$ " à la place de " \dot{x}^* " et " \dot{y}^* " seuls; ρ et σ joueraient alors le rôle des termes séculaires habituels n_α et n_β , et se calculeraient ainsi :

$$\begin{aligned} \rho &= n_{\gamma_1} S_1(p'_1, t'_1) = -n_{\gamma_1} \frac{p'_1 + t'_1}{2\omega C} = -\frac{n_{\gamma_1}}{2\omega C} [-q_1 - x_1 + r_1 - z_1] \\ \sigma &= -n_{\gamma_1} D_1(q'_1, r'_1) = n_{\gamma_1} \frac{q'_1 - r'_1}{2\omega C} = \frac{n_{\gamma_1}}{2\omega C} [p_1 - y_1 + t_1 + s_1] \end{aligned} \quad (64)$$

Or il est possible de simplifier ces expressions en utilisant les formules (45) donnant x_1, y_1, s_1 et z_1 en fonction de p_1, q_1, r_1 et t_1 . On en déduit alors que :

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \sigma = 0,$$

mais, dans ce cas, cette simplification implique que l'on identifie les p_1, q_1, r_1, t_1 des seconds membres des équations du second ordre à ceux des seconds membres des équations du premier ordre. Dans le cas contraire, ρ et σ donnés par les expressions (64) interviendraient simplement en plus dans les expressions de $\hat{P}_1, \hat{Q}_1, \hat{R}_1$ et \hat{T}_1 données en (66).

★ Deuxième étape : détermination des coefficients itératifs de α_2^* et β_2^* .

La résolution et l'identification des parties sinusoïdales issues des équations (41) et (42) aboutissent aux résultats d'ordre 2 suivants :

$$k = 1$$

$$n_{\alpha_2} = S_1(\hat{P}_1, \hat{T}_1) = -\frac{(\hat{P}_1 + \hat{T}_1)}{2\omega C}$$

$$n_{\beta_2} = -D_1(\hat{Q}_1, \hat{R}_1) = \frac{(\hat{Q}_1 - \hat{R}_1)}{2\omega C}$$

$$as_1^2 = S_2(\hat{P}_2, \hat{T}_2) + \hat{K}' / [\omega(A - C)]$$

$$ac_1^2 = D_2(\hat{Q}_2, \hat{R}_2) + \hat{K}' / [\omega(C - B)]$$

$$bs_1^2 = -D_2(\hat{Q}_2, \hat{R}_2) + \hat{K}' / [\omega(C - B)]$$

$$bc_1^2 = S_2(\hat{P}_2, \hat{T}_2) - \hat{K}' / [\omega(A - C)]$$

(65)

$$2 \leq k \leq m_2 + 1$$

$$as_k^2 = S_{k+1}(\hat{P}_{k+1}, \hat{T}_{k+1}) - D_{-(k-1)}(\hat{P}_{k-1}, \hat{T}_{k-1})$$

$$ac_k^2 = -S_{-(k-1)}(\hat{Q}_{k-1}, \hat{R}_{k-1}) + D_{k+1}(\hat{Q}_{k+1}, \hat{R}_{k+1})$$

$$bs_k^2 = -S_{-(k-1)}(\hat{Q}_{k-1}, \hat{R}_{k-1}) - D_{k+1}(\hat{Q}_{k+1}, \hat{R}_{k+1})$$

$$bc_k^2 = S_{k+1}(\hat{P}_{k+1}, \hat{T}_{k+1}) + D_{-(k-1)}(\hat{P}_{k-1}, \hat{T}_{k-1})$$

toujours avec la loi de formation (30) en S_j et D_j issue de la résolution du premier ordre de la théorie. Mais les paramètres sont, cette fois, donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{K} &= \tilde{K} - \frac{A}{2}(xs_1 - yc_1) \\
\hat{K}' &= \tilde{K}' - \frac{B}{2}(xc_1 + ys_1) \\
\hat{P}_1 &= \tilde{P}_1 + \frac{A}{2}(ys_2 + xc_2) \\
\hat{Q}_1 &= \tilde{Q}_1 - \frac{A}{2}(xs_2 - yc_2) \\
\hat{R}_1 &= \tilde{R}_1 - \frac{B}{2}(xs_2 - yc_2) \\
\hat{T}_1 &= \tilde{T}_1 - \frac{B}{2}(ys_2 + xc_2) \\
\hat{P}_i &= \tilde{P}_i - \frac{A}{2}[(ys_{i-1} - xc_{i-1}) - (ys_{i+1} + xc_{i+1})] \\
\hat{Q}_i &= \tilde{Q}_i - \frac{A}{2}[(xs_{i-1} + yc_{i-1}) + (xs_{i+1} - yc_{i+1})] \\
\hat{R}_i &= \tilde{R}_i + \frac{B}{2}[(xs_{i-1} + yc_{i-1}) - (xs_{i+1} - yc_{i+1})] \\
\hat{T}_i &= \tilde{T}_i - \frac{B}{2}[(ys_{i-1} - xc_{i-1}) + (ys_{i+1} + xc_{i+1})]
\end{aligned} \tag{66}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= \mathcal{K} + n_{\gamma_1} \mu & \mathcal{K} &= -\lambda \overline{\gamma_1^*} \\
\tilde{K}' &= \mathcal{K}' + n_{\gamma_1} \mu' & \mathcal{K}' &= -\lambda' \overline{\gamma_1^*}
\end{aligned}$$

de $i = 1$ à m_1 :

de $i = m_1 + 1$ à m_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_i &= P_i + n_{\gamma_1} p_i'' & \tilde{P}_i &= P_i \\
\tilde{Q}_i &= Q_i + n_{\gamma_1} q_i'' & \tilde{Q}_i &= Q_i \\
\tilde{R}_i &= R_i + n_{\gamma_1} r_i'' & \tilde{R}_i &= R_i \\
\tilde{T}_i &= T_i + n_{\gamma_1} t_i'' & \tilde{T}_i &= T_i
\end{aligned} \tag{67}$$

IV.2.6. Découpage de la solution par rapport à n_{γ_1}

n_{γ_1} est le terme séculaire de γ_1 dont ni les équations de la théorie d'ordre 1, ni celles de la théorie d'ordre 2 ne peuvent donner une formulation littérale exacte. Dans le chapitre suivant (V), à l'aide du développement à l'ordre 3 d'une relation annexe, une bonne expression approchée en sera proposée.

La résolution établie précédemment donne une formulation de la solution ordonnée selon la nature des termes qui constituent cette solution. Or cette résolution permet de plus d'introduire une nouvelle formulation qui consiste en un découpage de la solution par rapport à n_{γ_1} et dont la comparaison à la précédente formulation permettra de déduire des simplifications analytiques dans la solution.

Pour cela, nous adopterons tout d'abord une écriture fonctionnelle des équations (41) et (42) d'ordre 2. Soit $f = f(\ddot{\alpha}_2, \ddot{\beta}_2, \dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_2, \gamma_0)$ la fonction désignant l'expression typique du premier membre de ces équations. Le *tableau 1* donne l'organisation des successions de notations relatives à l'ensemble du traitement des seconds membres des équations de la théorie étendue à l'ordre 2.

TABLEAU 1

NOTATIONS SUCCESSIVES DANS LE TRAITEMENT ANALYTIQUE
DES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS (41) ET (42)

$$\begin{aligned}
 & \gamma_1 \left[\sum_i (p_i, q_i, r_i, t_i) \right] + \gamma_1 \left[\lambda + \sum_i (x_i, y_i, s_i, z_i) \right] \rightarrow \gamma_1 \left[\lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right] \\
 & \dot{\gamma}_1 \left[\mu + \sum_i (x'_i, y'_i, s'_i, z'_i) \right] \rightarrow \dot{\gamma}_1 \left[\mu + \sum_i (p''_i, q''_i, r''_i, t''_i) \right] \\
 & (\gamma_1^* - \bar{\gamma}_1^*) \left[\lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right] + \dot{\gamma}_1^* \left[\mu + \sum_i (p''_i, q''_i, r''_i, t''_i) \right] \rightarrow H + \sum_i (P_i, Q_i, R_i, T_i) \\
 & n_{\gamma_1} \left[\mu + \sum_i (p''_i, q''_i, r''_i, t''_i) \right] + \underbrace{\left[\text{cste} + \sum_i (x_{si}, x_{ci}, y_{si}, y_{ci}) \right]}_{\text{issu des premiers membres}} \rightarrow n_{\gamma_1} \left[I + \sum_i (P'_i, Q'_i, R'_i, T'_i) \right] \\
 & H + \sum_i (P_i, Q_i, R_i, T_i) + n_{\gamma_1} \left[I + \sum_i (P'_i, Q'_i, R'_i, T'_i) \right] \rightarrow \hat{K} + \sum_i (\hat{P}_i, \hat{Q}_i, \hat{R}_i, \hat{T}_i)
 \end{aligned}$$

d'où f se décompose successivement de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 f & \equiv \gamma_1 \left[\sum_i (p_i, q_i, r_i, t_i) \right] + \gamma_1 \left[\lambda + \sum_i (x_i, y_i, s_i, z_i) \right] + \dot{\gamma}_1 \left[\mu + \sum_i (x'_i, y'_i, s'_i, z'_i) \right] \\
 & \equiv \gamma_1 \left[\lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right] + \dot{\gamma}_1 \left[\mu + \sum_i (p''_i, q''_i, r''_i, t''_i) \right] \\
 & \equiv (\gamma_1^* - \bar{\gamma}_1^*) \left[\lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right] + n_{\gamma_1} (t - t_0) \left[\lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right] \\
 & \quad + \dot{\gamma}_1^* \left[\mu + \sum_i (p''_i, q''_i, r''_i, t''_i) \right] + n_{\gamma_1} \left[\mu + \sum_i (p''_i, q''_i, r''_i, t''_i) \right] \\
 \tilde{f} & \equiv \left\{ \hat{K} + \sum_i (\hat{P}_i, \hat{Q}_i, \hat{R}_i, \hat{T}_i) \right\} + n_{\gamma_1} \left\{ \lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right\} (t - t_0) \\
 & \equiv \left\{ H + \sum_i (P_i, Q_i, R_i, T_i) \right\} + n_{\gamma_1} \left\{ I + \sum_i (P'_i, Q'_i, R'_i, T'_i) \right\} \\
 & \quad + n_{\gamma_1} \left\{ \lambda + \sum_i (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) \right\} (t - t_0)
 \end{aligned}$$

Pour obtenir cette formulation selon un découpage autour de n_{γ_1} , on utilise en fait la linéarité des fonctions itératives S_j et D_j . n_{γ_1} est mis à l'extérieur des coefficients itératifs de x^* et y^* (cf formule 63), et les formules (66) et (67) sont séparées en deux morceaux si bien que seuls les P_i, Q_i, R_i, T_i sont déterminés numériquement tandis que les autres paramètres sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 H &= -\lambda \bar{\gamma}_1^* & I &= -K/\omega \\
 H' &= -\lambda' \bar{\gamma}_1^* & I' &= -K'/\omega \\
 P'_1 &= p''_1 - A S_{-1}(q'_1, r'_1) \\
 Q'_1 &= q''_1 + A D_{-1}(p'_1, t'_1) \\
 R'_1 &= r''_1 + B D_{-1}(p'_1, t'_1) \\
 T'_1 &= t''_1 + B S_{-1}(q'_1, r'_1) \\
 P'_i &= p''_i + A [D_i(q'_i, r'_i) - S_{-i}(q'_i, r'_i)] \\
 Q'_i &= q''_i - A [S_i(p'_i, t'_i) - D_{-i}(p'_i, t'_i)] \\
 R'_i &= r''_i + B [S_i(p'_i, t'_i) + D_{-i}(p'_i, t'_i)] \\
 T'_i &= t''_i + B [D_i(q'_i, r'_i) + S_{-i}(q'_i, r'_i)]
 \end{aligned} \tag{68}$$

Et les (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) et les $(p''_i, q''_i, r''_i, t''_i)$ sont donnés en fonction des paramètres de base (p_i, q_i, r_i, t_i) par les formules (44), (45) et (46).

Ce découpage des paramètres permet de pousser les calculs dans une perspective de simplification de la solution que nous écrivons alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \varphi_2 + n_{\gamma_1} \varphi'_2 \\
 \beta_2 &= \psi_2 + n_{\gamma_1} \psi'_2
 \end{aligned} \tag{69}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= \eta_{\alpha_2}(t - t_0) + \varphi_2^* - \bar{\varphi}_2^* \\
 \psi_2 &= \eta_{\beta_2}(t - t_0) + \psi_2^* - \bar{\psi}_2^*
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \varphi'_2 &= \eta'_{\alpha_2}(t - t_0) + \varphi_2'^* - \bar{\varphi}_2'^* + \mathcal{X}^*(t - t_0) - \int_{t_0}^t \mathcal{X}^* dt \\
 \psi'_2 &= \eta'_{\beta_2}(t - t_0) + \psi_2'^* - \bar{\psi}_2'^* + \mathcal{Y}^*(t - t_0) - \int_{t_0}^t \mathcal{Y}^* dt
 \end{aligned}$$

avec \mathcal{X}^* , \mathcal{Y}^* , η_{α_2} , η'_{α_2} , η_{β_2} , η'_{β_2} , φ_2^* , $\varphi_2'^*$, ψ_2^* , $\psi_2'^*$, tels que :

$$\begin{cases} x^* = n_{\gamma_1} \mathcal{X}^* \\ y^* = n_{\gamma_1} \mathcal{Y}^* \end{cases} \quad \begin{cases} n_{\alpha_2} = \eta_{\alpha_2} + n_{\gamma_1} \eta'_{\alpha_2} \\ n_{\beta_2} = \eta_{\beta_2} + n_{\gamma_1} \eta'_{\beta_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2^* = \varphi_2^* + n_{\gamma_1} \varphi_2'^* \\ \beta_2^* = \psi_2^* + n_{\gamma_1} \psi_2'^* \end{cases}$$

où η_{α_2} , η_{β_2} et les coefficients de φ_2^* et ψ_2^* dépendent des paramètres H , H' , P_i , Q_i , R_i et T_i , tandis que η'_{α_2} , η'_{β_2} et les coefficients de $\varphi_2'^*$ et $\psi_2'^*$ dépendent des paramètres I , I' , P'_i , Q'_i , R'_i et T'_i .

Les simplifications analytiques qui vont suivre se font dans le cadre de l'hypothèse où les p_i , q_i , r_i , t_i des seconds membres des équations du second ordre sont identifiables aux p_i , q_i , r_i , t_i des seconds membres des équations du premier ordre. Dans le cas contraire, notons que les formulations (60) ou (69) de la solution des deux premières équations, ainsi que la solution (58) de la troisième équation, conviennent même si les équations différentielles de l'ordre 2 s'appliquent à une nouvelle série de paramètres p_i , q_i , r_i , t_i , u_i , v_i non identifiables à ceux du premier ordre.

Les calculs suivants consistent donc à démontrer brièvement des relations de proportionnalité simples entre certaines séries ainsi introduites par les calculs précédents. L'existence de ces relations impliquent en outre l'existence de relations plus simples que (45), (46) et (68) entre les (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) et les (p_i, q_i, r_i, t_i) d'une part, et entre les (P'_i, Q'_i, R'_i, T'_i) et les (p_i, q_i, r_i, t_i) d'autre part. Le premier point de la démonstration consiste à différencier membre à membre les équations de la théorie d'ordre 1 et à les comparer ensuite aux résultats de la conversion des expressions facteurs de γ_1 dans les équations (38) et (39) de la théorie d'ordre 2 (§IV.2.1). Une simple substitution permet alors de déduire un système d'équations différentielles d'ordre 3. Par comparaison de ce système à celui, extrait des équations (41) et (42), qui permet le calcul des coefficients (63) de x^* et y^* – et par suite de \mathcal{X}^* et \mathcal{Y}^* – il en résulte la première relation de proportionnalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \dot{\alpha}_1^* / \omega \\ \mathcal{Y} &= \dot{\beta}_1^* / \omega \end{aligned} \tag{70}$$

Ces relations impliquent à leur tour, moyennant quelques calculs simples, les relations couplées entre les (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) et les (p_i, q_i, r_i, t_i) , dont la simplicité est à comparer aux formules (44) et (45). Ces relations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall i = 1, m_1 \quad S_i(p'_i, t'_i) &= -(i-1)D_i(q_i, r_i) \\
D_{-i}(p'_i, t'_i) &= -(i+1)S_{-i}(q_i, r_i) \\
S_{-i}(q'_i, r'_i) &= (i+1)D_{-i}(p_i, t_i) \\
D_i(q'_i, r'_i) &= (i-1)S_i(p_i, t_i)
\end{aligned} \tag{71}$$

Ces quatre relations permettent d'obtenir, en évitant un calcul direct très laborieux, les relations entre les (P'_i, Q'_i, R'_i, T'_i) et les (p_i, q_i, r_i, t_i) , dont la simplicité est à comparer aux formules (68) combinant les formules (44), (45) et (46). En injectant les formules (71) dans les formules (68), puis en utilisant les formules (46) et, enfin, en développant les S_j et D_j , on obtient les relations en question :

$$\begin{aligned}
\forall i = 1, m_1 \quad P'_i &= -p_i/\omega \\
Q'_i &= -q_i/\omega \\
R'_i &= -r_i/\omega \\
T'_i &= -t_i/\omega
\end{aligned} \tag{72}$$

Formules auxquelles il convient d'ajouter $I = -K/\omega$ et $I' = -K'/\omega$ donnés en (68), afin que la série de paramètres soit complète. Ces relations extrêmement simples permettent de déduire la deuxième relation de proportionnalité entre les séries introduites en (69) :

$$\begin{aligned}
\varphi_2'^* &= -\alpha_1^*/\omega \\
\psi_2'^* &= -\beta_1^*/\omega
\end{aligned} \tag{73}$$

Les termes séculaires η'_{α_2} et η'_{β_2} se déduisent également facilement :

$$\begin{aligned}
\eta'_{\alpha_2} &= -n_{\alpha_1}/\omega \\
\eta'_{\beta_2} &= -n_{\beta_1}/\omega
\end{aligned} \tag{74}$$

La synthèse des relations de proportionnalité donne les identités suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{X}^* + \dot{\varphi}_2'^* = 0 \\ \mathcal{Y}^* + \dot{\psi}_2'^* = 0 \end{cases} \tag{75}$$

Ces identités, caractéristiques du formalisme développé, prouvent en grande partie l'exactitude des calculs analytiques menés dans l'élaboration de cette théorie. En outre, ces identités contiennent implicitement des relations couplées entre les (P'_i, Q'_i, R'_i, T'_i) et les (p'_i, q'_i, r'_i, t'_i) .

Finalement, φ'_2 et ψ'_2 s'écrivent plus simplement qu'en (69) et de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi'_2 &= \eta'_{\alpha_2}(t - t_0) + \mathcal{A}^*(t - t_0) - 2 \int_{t_0}^t \mathcal{A}^* dt \\ \psi'_2 &= \eta'_{\beta_2}(t - t_0) + \mathcal{Y}^*(t - t_0) - 2 \int_{t_0}^t \mathcal{Y}^* dt\end{aligned}\tag{76}$$

avec η'_{α_2} et η'_{β_2} , \mathcal{A}^* et \mathcal{Y}^* donnés en (74) et (70).

IV.3. LA SOLUTION

La formulation complète de la solution analytique générale d'ordre 2 traduisant l'évolution d'attitude d'un satellite en rotation (lente) (fortement) perturbée est donnée par (31) où $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sont donnés par (28) et (29) et où $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \varphi_2 + n_{\gamma_1} \varphi_2' \\ \beta_2 &= \psi_2 + n_{\gamma_1} \psi_2' \\ \gamma_2 &= \vartheta_2 + n_{\gamma_1} \vartheta_2'\end{aligned}\tag{77}$$

où :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \eta_{\alpha_2}(t - t_0) + \varphi_2^* - \bar{\varphi}_2^* \\ \psi_2 &= \eta_{\beta_2}(t - t_0) + \psi_2^* - \bar{\psi}_2^* \\ \vartheta_2 &= \eta_{\gamma_2}(t - t_0) + \gamma_2^* - \bar{\gamma}_2^* + \nu(t - t_0)^2 + \theta^*(t - t_0) - 2 \int_{t_0}^t \theta^* dt\end{aligned}\tag{78}$$

et :

$$\begin{aligned}\varphi_2' &= \eta'_{\alpha_2}(t - t_0) + \mathcal{X}^*(t - t_0) - 2 \int_{t_0}^t \mathcal{X}^* dt \\ \psi_2' &= \eta'_{\beta_2}(t - t_0) + \mathcal{Y}^*(t - t_0) - 2 \int_{t_0}^t \mathcal{Y}^* dt \\ \vartheta_2' &= \eta'_{\gamma_2}(t - t_0) + \mathcal{Z}^*(t - t_0) - 2 \int_{t_0}^t \mathcal{Z}^* dt\end{aligned}\tag{79}$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{X}^* = \dot{\alpha}_1^*/\omega \\ \mathcal{Y}^* = \dot{\beta}_1^*/\omega \\ \mathcal{Z}^* = \dot{\gamma}_1^*/\omega \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \eta'_{\alpha_2} = -n_{\alpha_1}/\omega \\ \eta'_{\beta_2} = -n_{\beta_1}/\omega \\ \eta'_{\gamma_2} = \bar{\mathcal{Z}}^* \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \theta^* = -n_{\beta_1} \alpha_1^* \\ \nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{C} - n_{\alpha_1} n_{\beta_1} \right) \\ \eta_{\gamma_2} = \bar{\theta}^* \end{array} \right.\tag{80}$$

et:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \varphi_2^* &= \sum_{k=1}^{m_2+1} \frac{as_k^2 \sin k\gamma_0 + ac_k^2 \sin k\gamma_0}{k\omega} \\
 \psi_2^* &= \sum_{k=1}^{m_2+1} \frac{bs_k^2 \sin k\gamma_0 + bc_k^2 \sin k\gamma_0}{k\omega} \\
 \gamma_2^* &= \sum_{k=1}^{m_2'} \frac{cs_k^2 \sin k\gamma_0 + cc_k^2 \sin k\gamma_0}{k\omega}
 \end{aligned} \right. \quad (81)$$

η_{α_2} , η_{β_2} et les coefficients itératifs des séries (81) ci-dessus, sont donnés respectivement par les formules suivantes :

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{\alpha_2} &= S_1(P_1, T_1) = -\frac{(P_1 + T_1)}{2\omega C} \\
 \eta_{\beta_2} &= -D_1(Q_1, R_1) = \frac{(Q_1 - R_1)}{2\omega C}
 \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
 as_1^2 &= S_2(P_2, T_2) + H'/[\omega(A - C)] \\
 ac_1^2 &= D_2(Q_2, R_2) + H'/[\omega(C - B)] \\
 bs_1^2 &= -D_2(Q_2, R_2) + H'/[\omega(C - B)] \\
 bc_1^2 &= S_2(P_2, T_2) - H'/[\omega(A - C)]
 \end{aligned} \quad (83)$$

$$k > 1$$

$$\begin{aligned}
 as_k^2 &= S_{k+1}(P_{k+1}, T_{k+1}) - D_{-(k-1)}(P_{k-1}, T_{k-1}) \\
 ac_k^2 &= -S_{-(k-1)}(Q_{k-1}, R_{k-1}) + D_{k+1}(Q_{k+1}, R_{k+1}) \\
 bs_k^2 &= -S_{-(k-1)}(Q_{k-1}, R_{k-1}) - D_{k+1}(Q_{k+1}, R_{k+1}) \\
 bc_k^2 &= S_{k+1}(P_{k+1}, T_{k+1}) + D_{-(k-1)}(P_{k-1}, T_{k-1})
 \end{aligned} \quad (84)$$

$$k \geq 1$$

$$\begin{aligned}
 cs_k^2 &= -\frac{U_k}{k\omega C} \\
 cc_k^2 &= -\frac{V_k}{k\omega C}
 \end{aligned} \quad (85)$$

avec la loi de formation (30).

— Les (P_i, Q_i, R_i, T_i) et les (U_i, V_i) sont déterminés par produits et additions numériques des séries constituant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 H + \sum_{i=1}^{m_2} (P_i \sin i\gamma_0 + Q_i \cos i\gamma_0) &\equiv (\gamma_1^* - \bar{\gamma}_1^*)(\lambda + \Lambda_1^*) + \dot{\gamma}_1^*(\mu + \Pi_1^*) \\
 H' + \sum_{i=1}^{m_2} (R_i \sin i\gamma_0 + T_i \cos i\gamma_0) &\equiv (\gamma_1^* - \bar{\gamma}_1^*)(\lambda' + \Lambda_2^*) + \dot{\gamma}_1^*(\mu' + \Pi_2^*) \\
 \sum_{i=1}^{m'_2} (U_i \sin i\gamma_0 + V_i \cos i\gamma_0) &\equiv \text{cf formule (50)},
 \end{aligned} \tag{86}$$

— $\Lambda_1^*, \Lambda_2^*, \Pi_1^*, \Pi_2^*$ sont donnés en formule (48),

— $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ sont donnés par les formules (44) et (47),

— H et H' sont immédiatement tirés de (86), *se reporter aux formules (68)*,

— Une détermination analytique approchée de n_{γ_1} est donnée au chapitre suivant.

On obtient également les expressions littérales du deuxième ordre de la solution à l'origine des temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2i} = 0 \\ \beta_{2i} = 0 \\ \gamma_{2i} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_{2i} = \eta_{\alpha_2} + \bar{\varphi}_2^* - \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} (n_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1^*) \\ \dot{\beta}_{2i} = \eta_{\beta_2} + \bar{\psi}_2^* - \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} (n_{\beta_1} + \bar{\beta}_1^*) \\ \dot{\gamma}_{2i} = \bar{\gamma}_2^* \end{array} \right. \tag{87}$$

CHAPITRE V

QUELQUES ELEMENTS DU TROISIEME ORDRE

V.1. ORDRE 3 DE LA TROISIÈME ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

En employant la même méthode qu'au *paragraphe IV.1*, on obtient assez aisément la troisième équation du système différentiel initial (9) développé à l'ordre 3 de la présente théorie :

$$\begin{aligned}
& C\ddot{\gamma}_3 + C\beta_1\ddot{\alpha}_2 + 2(A - B)\gamma_1\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1 \sin 2\gamma_0 + (A - B)\gamma_1(\dot{\alpha}_1^2 - \dot{\beta}_1^2) \cos 2\gamma_0 \\
& + [C - (A - B) \cos 2\gamma_0](\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_1\dot{\alpha}_2) + 2(A - B)(\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 - \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2) \sin 2\gamma_0 \\
& = \sum_{i=1}^{m'_1} \left[-i(v_i\gamma_2 + iu_i\frac{\gamma_1^2}{2}) \sin i\gamma_0 + i(u_i\gamma_2 - iv_i\frac{\gamma_1^2}{2}) \cos i\gamma_0 \right]
\end{aligned} \tag{88}$$

On y retrouve une formulation assez analogue à l'équation (43), en ce sens qu'il existe un seul terme d'indice 3, $C\ddot{\gamma}_3$. Cela permettrait éventuellement une résolution analytique en s'inspirant de la technique du *paragraphe IV.2.4*. Les autres termes étant déterminés par les résolutions précédentes, il serait également possible de déterminer $\ddot{\gamma}_3$ numériquement.

V.2. CALCUL D'UNE INTÉGRALE PREMIÈRE DE $\dot{\gamma}_3$

En prenant le module membre à membre de l'équation vectorielle (6) exprimée dans $Oxyz$, ce qui revient à effectuer la somme des carrés membre à membre des équations (1), on obtient la relation suivante :

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta = \omega^2 \quad (89)$$

En développant cette relation à l'ordre 3, selon les formules (16) et (19), on obtient une intégrale première de $\dot{\gamma}_3$ où ω est la constante.

$$\dot{\gamma}_3 = -\frac{\dot{\gamma}_1}{\varepsilon^2} - \frac{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\beta}_1^2 + \dot{\gamma}_1^2}{2\omega\varepsilon} - \frac{\beta_1\dot{\alpha}_1 + \dot{\gamma}_2}{\varepsilon} - \frac{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2}{\omega} - (\beta_1\dot{\alpha}_2 + \beta_2\dot{\alpha}_1 + \beta_1\dot{\alpha}_1\dot{\gamma}_1) \quad (90)$$

Une détermination de γ_3 est ainsi plus accessible.

V.3. DÉTERMINATION DU TERME SÉCULAIRE n_{γ_1}

En se plaçant à l'origine des temps et en supposant $\dot{\gamma}_3$, négligeable, on peut se servir de la formule (90) pour donner une bonne expression approchée du paramètre n_{γ_1} resté indéterminé jusqu'à présent. n_{γ_1} est alors une des deux solutions de l'équation du second degré suivante, obtenue en ordonnant les termes de (90) suivant les puissances respectives de n_{γ_1} :

$$\mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}X + \mathcal{C} = 0 \quad (91)$$

où

$$\mathcal{A} = \varepsilon$$

$$\mathcal{B} = \omega + \varepsilon\bar{\gamma}_1^* + \varepsilon^2 \left\{ \bar{\gamma}_2^* - \frac{1}{\omega} \left[(n_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1^*)^2 + (n_{\beta_1} + \bar{\beta}_1^*)^2 \right] \right\}$$

$$\mathcal{C} = 2\omega\bar{\gamma}_1^* + \varepsilon \left\{ (\bar{\gamma}_1^*)^2 + 2\omega\bar{\gamma}_2^* + (n_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1^*)^2 + (n_{\beta_1} + \bar{\beta}_1^*)^2 \right\} \\ + 2\varepsilon^2 \left\{ \bar{\gamma}_1^*\bar{\gamma}_2^* + (n_{\alpha_1} + \bar{\alpha}_1^*)(\eta_{\alpha_2} + \bar{\varphi}_2^*) + (n_{\beta_1} + \bar{\beta}_1^*)(\eta_{\beta_2} + \bar{\psi}_2^*) \right\}$$

Si, à l'aide de l'équation différentielle (88), on calculait et déterminait $\dot{\gamma}_3$, comme indépendant de n_{γ_1} , alors il conviendrait d'ajouter $2\omega\varepsilon^2\dot{\gamma}_3$, dans l'expression \mathcal{C} ci-dessus.

TROISIEME PARTIE

Du point de vue de la Mécanique Céleste, il est intéressant d'observer sur une longue durée l'évolution de la théorie en la comparant à une intégration numérique basée sur un modèle réaliste des couples agissant sur le satellite et tenant compte de sa structure.

En ce qui concerne HIPPARCOS, une grande précision est nécessaire sur une durée de 600 secondes correspondant approximativement à l'intervalle de temps probable entre deux corrections d'attitude par jets de gaz. Aussi, dans l'application qui est faite ici de la théorie, on recherche plutôt la précision sur un tel intervalle de temps, court par rapport aux diverses périodes en présence, plutôt qu'une représentation conforme à long terme.

- CHAPITRE VI : APPLICATION AU SATELLITE HIPPARCOS

*CHAPITRE VI***APPLICATION AU SATELLITE HIPPARCOS****VI.1. INTRODUCTION**

Les principaux couples agissant sur la rotation du satellite HIPPARCOS sont respectivement les suivants :

- le couple dû à la pression de radiation solaire directe,
- les couples produits par les gyroscopes,
- le couple de gradient de gravité terrestre.

Les autres couples, comme ceux produits par la pression de radiation réémise par la Terre ou le champ magnétique, sont totalement négligeables. Or nous avons effectué une application numérique qui montre que le couple dû au gradient de gravité est d'un ordre de grandeur 100 fois plus faible que celui dû à la pression de radiation et aux gyroscopes. C'est pourquoi l'action du gradient de gravité peut être négligée en première approximation. Et de toute façon, elle ne peut modifier de façon significative les perturbations induites par les deux premières causes.

Le satellite HIPPARCOS est décrit par J. Kovalevsky (1982). En première approximation, le mouvement de rotation du satellite est donné par une loi nominale de balayage. Et sous l'action des jets de gaz, le satellite est forcé à ne pas s'écarter de son attitude nominale de plus d'une certaine petite valeur (10 minutes d'arc). La période P nominale de rotation, adoptée actuellement pour HIPPARCOS, est d'une révolution en 2,13 heures. La structure et les conditions initiales de l'orbite d'HIPPARCOS (*cf dernier paragraphe du chapitre II*) sont telles que la pression

de radiation (11) peut se développer sous forme d'une série de Fourier à une seule période, la période de rotation propre du satellite. Les effets des gyroscopes sont partiellement et mutuellement compensés de telle façon que le couple résultant soit un couple constant. Seule la première composante de ce couple est actuellement prévue non nulle et sera alors représentée ici par la constante K de la formule (23). Le lecteur est invité à se reporter à *l'annexe 1*, J. Kovalevsky et E. Bois, 1986, page 349, où les graphes obtenus par Pinard et al. (1983) donnent les valeurs des principaux couples agissant sur HIPPARCOS en fonction de l'angle de rotation du satellite par rapport à la direction du Soleil.

Nous avons donc appliqué la présente théorie à un modèle de couples réalistes tenant compte de la structure du satellite HIPPARCOS. Ce modèle, fourni par MATRA ESPACE (1982), ne dépend que de γ (par rapport à la formule 15) mais reste valable toute la durée de la mission. En effet, par une propriété de la loi de balayage, l'axe de rotation du satellite fait un angle constant avec la direction du Soleil (écart moyen : 2', écart maximum : 10'; approximation moyenne : 0.06 pour cent, approximation maximale : 0.3 pour cent). Après conversion dans le système de base de la théorie, l'expression des perturbations dues à la pression de radiation et aux gyroscopes est alors la suivante (l'unité est le newton-mètre) :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (10.6 - 5.442 \sin \gamma - 0.234 \sin 2\gamma + 0.471 \sin 4\gamma - 0.165 \sin 5\gamma \\
 &\quad + 6.206 \cos \gamma - 1.779 \cos 2\gamma - 0.126 \cos 4\gamma + 0.335 \cos 5\gamma) 10^{-6} \text{N.m} \\
 N_2 &= (-6.218 \sin \gamma - 1.792 \sin 2\gamma + 0.127 \sin 4\gamma + 0.314 \sin 5\gamma \\
 &\quad - 5.452 \cos \gamma + 0.236 \cos 2\gamma + 0.474 \cos 4\gamma + 0.155 \cos 5\gamma) 10^{-6} \text{N.m} \\
 N_3 &= (1.146 \sin 3\gamma - 0.144 \sin 6\gamma - 0.022 \sin 9\gamma \\
 &\quad + 0.765 \cos 3\gamma - 0.346 \cos 6\gamma + 0.111 \cos 9\gamma) 10^{-6} \text{N.m}
 \end{aligned} \tag{92}$$

Il va de soi qu'il existe une certaine imprécision dans la construction d'un modèle prévisionnel des couples extérieurs agissant sur la rotation d'un satellite. Dans le cas, par exemple, du couple de pression de radiation solaire, cette imprécision peut atteindre jusqu'à 10 pour cent du total. En effet, d'une part les propriétés de surface d'un satellite (absorption, réflexion, etc...), ne sont jamais simulées avec une totale exactitude, et d'autre part des imperfections peuvent être dues au modèle lui-même

s'il ne tient pas compte des effets radiatifs secondaires (émission thermique, etc..., cf II.5). Aussi une utilisation fiable de la théorie nécessiterait d'envisager, au préalable, un ajustement des constantes du modèle par rapport aux observations. Mais de toute façon, nous pouvons illustrer ici une application de la théorie par rapport à une série de paramètres perturbateurs donnés.

VI.2. THÉORIE LIMITÉE AU PREMIER ORDRE

La description complète de l'application de la théorie d'ordre 1 a été effectuée dans une publication de l'auteur (Bois, 1987), ci-jointe en *annexe 2* de la présente thèse.

La solution analytique est présentée selon un échantillonnage du temps de 10 en 10 secondes sur 10 révolutions. Les conditions initiales sont les suivantes (pour n_{γ_1} pris arbitrairement nul) :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{\alpha}_i = (n_{\alpha_1} + \sum_k a s_k^1) \cdot \varepsilon \\ \dot{\beta}_i = (n_{\beta_1} + \sum_k b s_k^1) \cdot \varepsilon \\ \dot{\gamma}_i = \omega + (\sum_k c s_k^1) \cdot \varepsilon \end{array} \quad (93)$$

où $\varepsilon = 10^{-6}$.

L'intégration numérique des équations différentielles initiales (9) affectées des seconds membres (92), à partir des conditions initiales (93), a été effectuée sur le même échantillonnage. Le programme d'intégration utilisé est basé sur la méthode de Runge Kutta-Verner d'ordre 5 et 6. A chaque appel du programme, c'est à dire à chaque échelon de la variable indépendante, celui-ci se charge de trouver lui-même le pas de lissage. Pour cela, le programme se donne un pas de départ et l'ajuste conditionnellement à une tolérance choisie par l'utilisateur et comparée à une erreur estimée par le programme sur la solution extraite, ainsi adoptée ou non. Le processus est réitéré jusqu'à ce que la variable indépendante atteigne la valeur finale de l'échelon. Le programme d'intégration présentait donc l'avantage d'un auto-ajustement du pas de recherche de convergence et le calcul a été mené en double précision avec une tolérance de 10^{-15} sur la solution estimée. Les valeurs de α_N , β_N , γ_N issues de l'intégration numérique sont ensuite comparées aux valeurs α_A , β_A , γ_A calculées à l'aide de la solution analytique. Les différences $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ qui en résultent sont en partie dues à une identité non rigoureuse dans le choix des conditions initiales et en partie dues aux termes du second ordre. Nous reviendrons sur ce sujet dans la troisième partie de ce chapitre (VI.3).

Les courbes de ces différences (*figure 2*), tracées sur près de 4 révolutions, mettent nettement en évidence l'existence de termes périodiques aux ordres supérieurs.

Nous pouvons constater l'absence de termes séculaires significatifs dans le second ordre de α et β , mais une erreur séculaire est clairement apparente dans $\Delta\gamma$. Les termes séculaires d'ordre 1, n_{α_1} et n_{β_1} , sont respectivement d'un ordre de grandeur 42 et 37 fois plus faibles que la vitesse angulaire nominale ω . D'autre part, la non détermination de n_{γ_1} par l'ordre 1 de la théorie explique en partie la croissance rapide de $\Delta\gamma$. Nous pouvons retrouver dans les courbes $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$, la période nominale de rotation d'environ 7700 secondes. La régularité des courbes, notamment celle de $\Delta\beta$, montre le bon accord de la théorie. Bien entendu pour HIPPARCOS, avec l'action répétée des jets de gaz, on limite l'observation de la dérive d'attitude à 10 minutes d'arc, mais d'un point de vue de la Mécanique Céleste, il est également intéressant d'en observer l'évolution bien au-delà. C'est pourquoi il n'y a pas ici l'intervention des jets de gaz pour corriger l'attitude, même si les écarts dépassent de plusieurs fois la tolérance stipulée à 10 minutes d'arc.

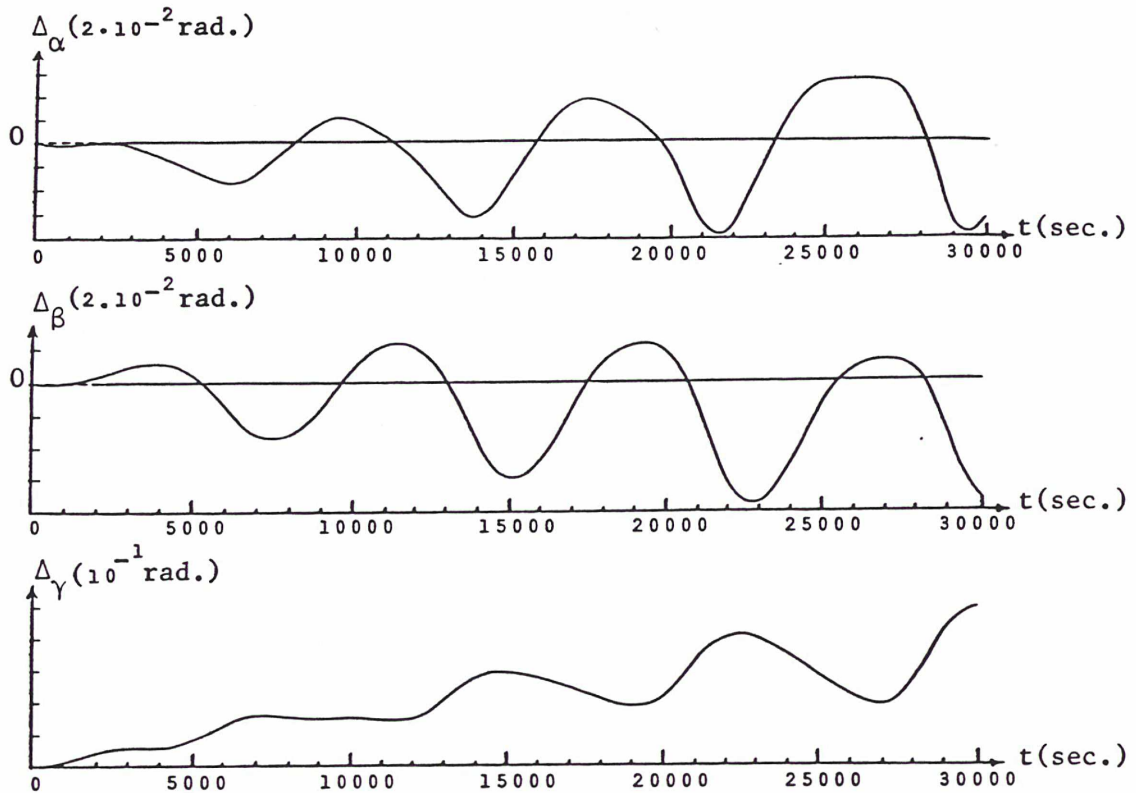


Figure 2. Différences entre l'intégration numérique et la solution analytique durant les 4 premières révolutions du satellite.

Par ailleurs, de 10 à 600 secondes (intervalle de temps probable entre deux réajustements par jets de gaz des conditions initiales de la rotation d'HIPPARCOS), la précision absolue passe de $0''.001$ à $18''$ pour α , de $0''.0002$ à $4''$ pour β , et de $0''.04$ à $6'.8$ pour γ sachant que son terme séculaire n_{γ_1} n'a pas été déterminé. D'autre part toujours sur 600 secondes et afin d'illustrer les difficultés introduites par l'hypothèse d'une rotation lente, les calculs ont été réitérés en augmentant ω . Ainsi lorsque la vitesse de rotation est 10 fois moins lente :

1. n_{α_1} et n_{β_1} sont 100 fois plus petits.
2. La précision absolue est 100 fois meilleure sur les trois positions.
3. La divergence moyenne reste la même sur γ mais devient 100 fois plus faible sur α et β .

Ces résultats expriment simplement que l'influence du rapport "intensité résultante des couples perturbateurs-énergie de rotation" sur la dérive d'attitude est telle que plus celui-ci sera faible, plus un ordre faible du développement de la théorie suffira à donner une bonne précision sur la connaissance de l'évolution de l'attitude.

Afin de montrer que la raison des imperfections est à attribuer aux termes négligés de l'ordre 2, nous avons étudié le cas le plus défavorable (à l'ordre 1 de la théorie) qui est celui de γ :

Sur 10 000 secondes, l'erreur séculaire dans $\Delta\gamma$ est d'environ 15.10^{-6} rad/s. Une correction numérique de cette valeur supprime la pente de $\Delta\gamma$. Il reste alors une courbe similaire aux courbes $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$.

En parallèle, nous notons que la troisième équation développée au second ordre (40) comprend beaucoup de termes sinusoïdaux et ne contient en outre, à part $\ddot{\gamma}_2$, que des termes déterminés par le premier ordre de la théorie. Une estimation numérique de l'erreur sinusoïdale de $\Delta\gamma$ corrigée de son erreur séculaire, est donc possible. La première portion de la courbe de $\ddot{\gamma}_2$ (figure 9) est la demi période d'une sinusoïde dont la période est environ 2560 secondes. Cela est caractéristique des termes en 3γ provenant du second membre de l'équation (40). Nous pouvons alors évaluer γ_2 , sous la forme suivante :

$$\tilde{\gamma}_2 = -\frac{A \sin(3\gamma_0 + \phi)}{\omega^2}, \quad (94)$$

avec une période imposée égale à 2556 secondes, c'est à dire $P/3$, et en utilisant un programme de moindres carrés pour obtenir l'amplitude A et la phase ϕ par rapport à l'origine. $\tilde{\gamma}_2$ est d'un ordre de grandeur 6 fois plus petit que $\Delta\gamma$, mais par la présence d'un petit diviseur ω^2 , $\tilde{\gamma}_2$ a le même ordre de grandeur que $\Delta\gamma$. Nous pouvons à nouveau remarquer l'effet de l'hypothèse d'une rotation lente. La méthode consiste ensuite à ajouter $\tilde{\gamma}_2$ à la solution analytique γ_A . Le résultat est alors comparé à l'intégration numérique γ_N . Et on obtient une nouvelle courbe $\Delta\gamma$ qui, moyennant une correction de sa pente, est proche d'une sinusoïde de période 1280 secondes, c'est à dire formée par des termes en 6γ . En soustrayant ensuite à $\Delta\gamma$ un modèle de cette portion de fonction sinusoïdale de période $P/6$, nous obtenons la courbe finale de $\Delta\gamma$ en *figure 4*. La précision absolue est réellement améliorée :

$$|\Delta\gamma| < 0''.4$$

La *figure 4* montre également les courbes $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ de la *figure 2* mais tracées sur 600 secondes (intervalle de temps typique pour HIPPARCOS). Rien qu'avec ces deux méthodes simples, on réussit à réduire l'incertitude absolue en γ à moins d'une seconde d'arc. La même opération sur α et β donnerait des résultats encore plus appréciables. Cependant, ces calculs restent liés à l'application spécifique à HIPPARCOS. Aussi, puisque nous disposons de la résolution analytique de l'ordre 2, il convient plutôt d'employer ici la solution analytique complète. Le degré d'amélioration des résultats sera alors plus significatif pour apprécier la précision du modèle.

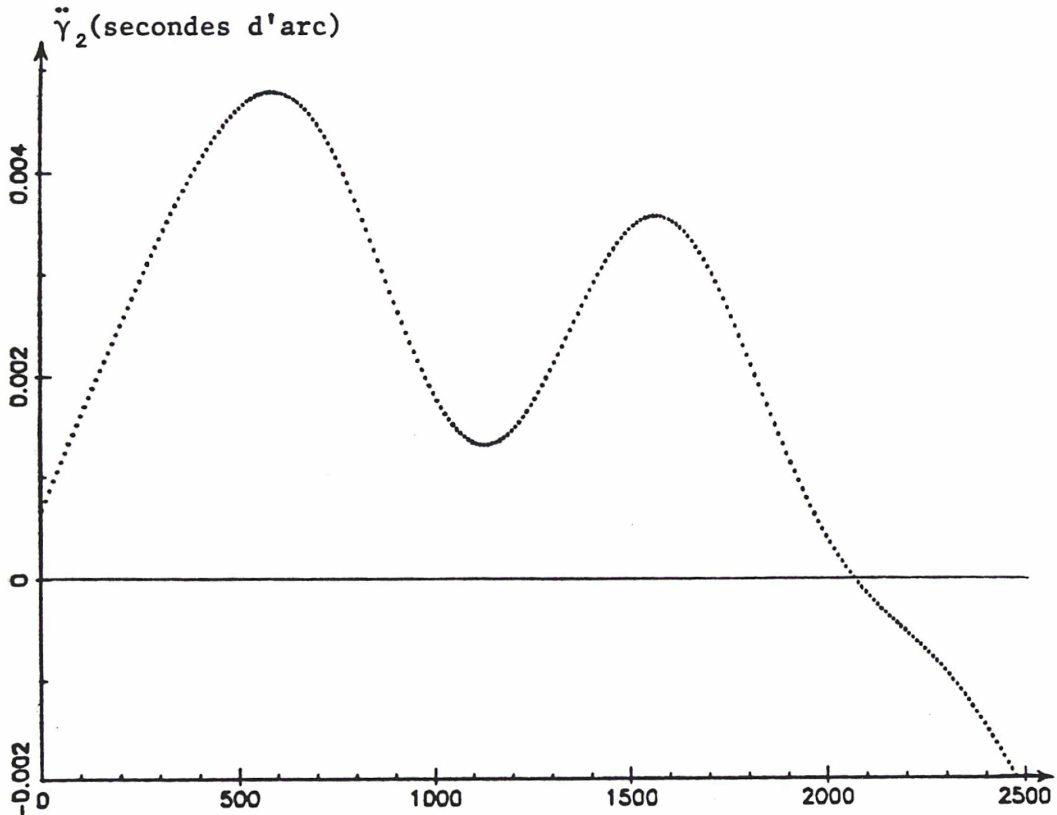


Figure 3. Courbe de $\ddot{\gamma}_2$ sur 2500 secondes.

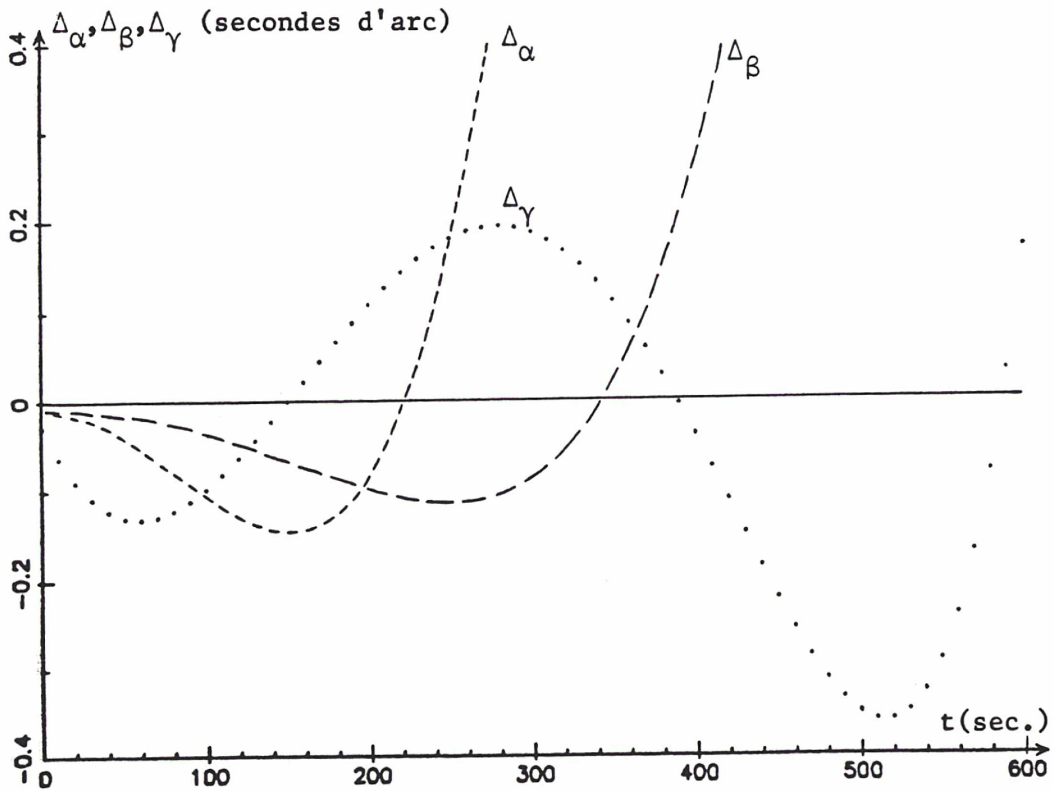


Figure 4. Différences, sur 600 secondes, entre l'intégration numérique et la solution analytique. γ a été ajusté par un terme en 3γ puis en 6γ .

VI.3. THÉORIE ÉTENDUE AU DEUXIÈME ORDRE

La comparaison de la solution analytique d'ordre 2 à l'intégration numérique a été effectuée selon le même principe qu'au paragraphe VI.2, mais avec les nouvelles conditions initiales de la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{\alpha}_i = \varepsilon \left(1 - \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} \varepsilon\right) (n_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{m_1+1} a s_k^1) + \varepsilon^2 (\eta_{\alpha_2} + \sum_{k=1}^{m_2+1} a s_k^2) \\ \dot{\beta}_i = \varepsilon \left(1 - \frac{n_{\gamma_1}}{\omega} \varepsilon\right) (n_{\beta_1} + \sum_{k=1}^{m_1+1} b s_k^1) + \varepsilon^2 (\eta_{\beta_2} + \sum_{k=1}^{m_2+1} b s_k^2) \\ \dot{\gamma}_i = \omega + \varepsilon (n_{\gamma_1} + \sum_{k=1}^{m'_1} c s_k^1) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m'_2} c s_k^2 \end{array} \quad (95)$$

Il s'agit tout d'abord de s'interroger sur la signification de cette comparaison. Une solution formelle a été développée suivant les puissances d'un petit paramètre mais jusqu'à présent aucune approximation théorique n'a été rajoutée aux différents ordres (1 et 2) de la résolution. A chaque ordre (1 et 2), la solution est une solution littérale du système différentiel correspondant :

★ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ est solution exacte des équations différentielles (22).

★ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ est, aux produits numériques près, solution exacte des équations différentielles (38), (39) et (40).

Mais (α, β, γ) n'est, bien entendu, qu'une solution approchée des équations différentielles générales (9). Aussi il convient de préciser ici que la comparaison d'une solution analytique formelle développée à tel ou tel ordre, avec une intégration numérique basée sur les valeurs initiales de cette solution analytique, introduit de fait des différences systématiques car l'on ne compare pas deux systèmes différentiels identiques. Il faudrait que l'intégration numérique puisse démarrer avec les valeurs initiales issues d'une solution fonctionnelle du système différentiel général, ou bien il faudrait disposer d'une série d'observations du phénomène que l'on cherche à modéliser. Dans le cas présent, nous ne disposons ni de l'un ni de l'autre. Aussi il est parfaitement licite de chercher à minimiser les écarts en modifiant certains paramètres.

Or n_{γ_1} n'est pas simplement un terme d'ordre 1 caractéristique de l'ordre de grandeur de l'erreur séculaire en γ , terme dont il suffirait de s'approcher numériquement pour rendre compte une fois pour toutes de la pente globale en $\Delta\gamma$. En effet, les différents essais numériques pour modéliser un terme séculaire global dans la solution analytique semblaient être fonction du temps de comparaison. En réalité n_{γ_1} est un terme que l'on retrouve dans les expressions analytiques des ordres supérieurs. Les perturbations séculaires de γ s'expriment en fait, à chaque ordre, par une certaine fonction de n_{γ_1} à chaque fois différente :

$$\begin{aligned} n_{\gamma_1} &= f_1(n_{\gamma_1}) = n_{\gamma_1} \\ n_{\gamma_2} &= f_2(n_{\gamma_1}) = \bar{Z}^* n_{\gamma_1} + \bar{\theta}^* = \frac{\bar{\gamma}_1^*}{\omega} n_{\gamma_1} - n_{\beta_1} \bar{\alpha}_1^* \\ n_{\gamma_3} &= f_3(n_{\gamma_1}) = an_{\gamma_1}^2 + bn_{\gamma_1} + c \\ &\dots\dots\dots \\ n_{\gamma_n} &= f_n(n_{\gamma_1}) \end{aligned}$$

où a, b, c sont calculables par identification en déterminant la somme des constantes dans l'expression (90) de $\dot{\gamma}_3$.

La pente globale en $\Delta\gamma$ (aux différences de conditions initiales près) est la somme de la série suivante :

$$\begin{aligned} n_{\gamma} &= \varepsilon n_{\gamma_1} + \varepsilon^2 n_{\gamma_2} + \varepsilon^3 n_{\gamma_3} + \dots + \varepsilon^n n_{\gamma_n} + \dots \\ &= \varepsilon f_1(n_{\gamma_1}) + \varepsilon^2 f_2(n_{\gamma_1}) + \varepsilon^3 f_3(n_{\gamma_1}) + \dots + \varepsilon^n f_n(n_{\gamma_1}) + \dots \end{aligned} \quad (96)$$

Le terme $U_n = \varepsilon^n f_n(n_{\gamma_1})$ et la somme $\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ de cette série convergente sont évidemment difficilement calculables mais les calculs numériques ont montré que la courbe $y = g(U_n)$ ne représentait pas une fonction linéaire mais une fonction plus complexe. Aussi cette série semble converger à la manière d'une série alternée, ce qui explique que les premiers n_{γ_i} ne suffisent pas à rendre compte de n_{γ} . En revanche, cette difficulté ne se produit pas pour les n_{α_i} et n_{β_i} dont les déterminations successives semblent se rapprocher progressivement des valeurs globales n_{α} et n_{β} . Ainsi, bien que la détermination de n_{γ_1} exposée au paragraphe V.3 donne une bonne approximation de la valeur réelle de ce paramètre, celle-ci reste trop éloignée de la somme de la série en question, c'est-à-dire de la valeur de la pente globale n_{γ} . Aussi il est préférable d'effectuer un balayage continu de n_{γ_1} de façon à déduire la valeur la plus favorable telle que la somme tronquée $\varepsilon n_{\gamma_1} + \varepsilon^2 n_{\gamma_2}$ suffise à minimiser l'erreur séculaire sur une

durée donnée. La *figure 5* donne alors la courbe des différences $\Delta\gamma$ ainsi obtenues. Tandis que $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ restent supérieurs à la seconde d'arc, on obtient la précision suivante sur γ :

$$|\Delta\gamma| \leq 0''.04 \quad \text{sur 530 secondes}$$

γ est l'angle de la rotation principale. Or, HIPPARCOS est conçu d'une manière telle qu'une grande précision est recherchée sur cet angle tout en acceptant une précision inférieure sur les deux autres.

Mais il est également nécessaire d'obtenir une bonne précision de façon cohérente sur les trois positions. Aussi, à cet égard, un processus de balayage et d'ajustement des conditions initiales a été effectué de façon à, rappelons-le, ajuster les deux systèmes différentiels que l'on compare. En effet, les différences systématiques précédemment évoquées sont dues à l'approximation faite non seulement sur les termes de nature séculaire, mais aussi sur tous les termes d'ordres supérieurs. Ce travail d'ajustement des conditions initiales (principalement des $\dot{\alpha}_i$, $\dot{\beta}_i$, $\dot{\gamma}_i$) s'avère extrêmement délicat. La variation de l'une d'entre elles peut, tout en améliorant une différence sur une position, dégrader une autre ou même les deux autres différences. C'est pourquoi les courbes présentées en *figure 6* traduisent simplement une des moyennes possibles entre $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ et $\Delta\gamma$. Cependant, le cap de la seconde d'arc a été simultanément franchi sur les trois positions. Les précisions obtenues sont alors les suivantes :

$$|\Delta\alpha| \leq 0''.6 \quad \text{sur 500 secondes}$$

$$|\Delta\beta| \leq 0''.5 \quad \text{sur 700 secondes}$$

$$|\Delta\gamma| \leq 0''.4 \quad \text{sur 600 secondes}$$

Par la suite, si pour tel ou tel satellite, c'est-à-dire pour une vitesse de rotation et des moments d'inertie donnés, l'on souhaitait nécessairement une précision supérieure, il serait alors possible de reprendre, avec les éléments déterminés de l'ordre 3, une ou deux opérations analogues à celles effectuées sur γ et $\Delta\gamma$ lors de l'application de la solution d'ordre 1, en fin du paragraphe VI.2.

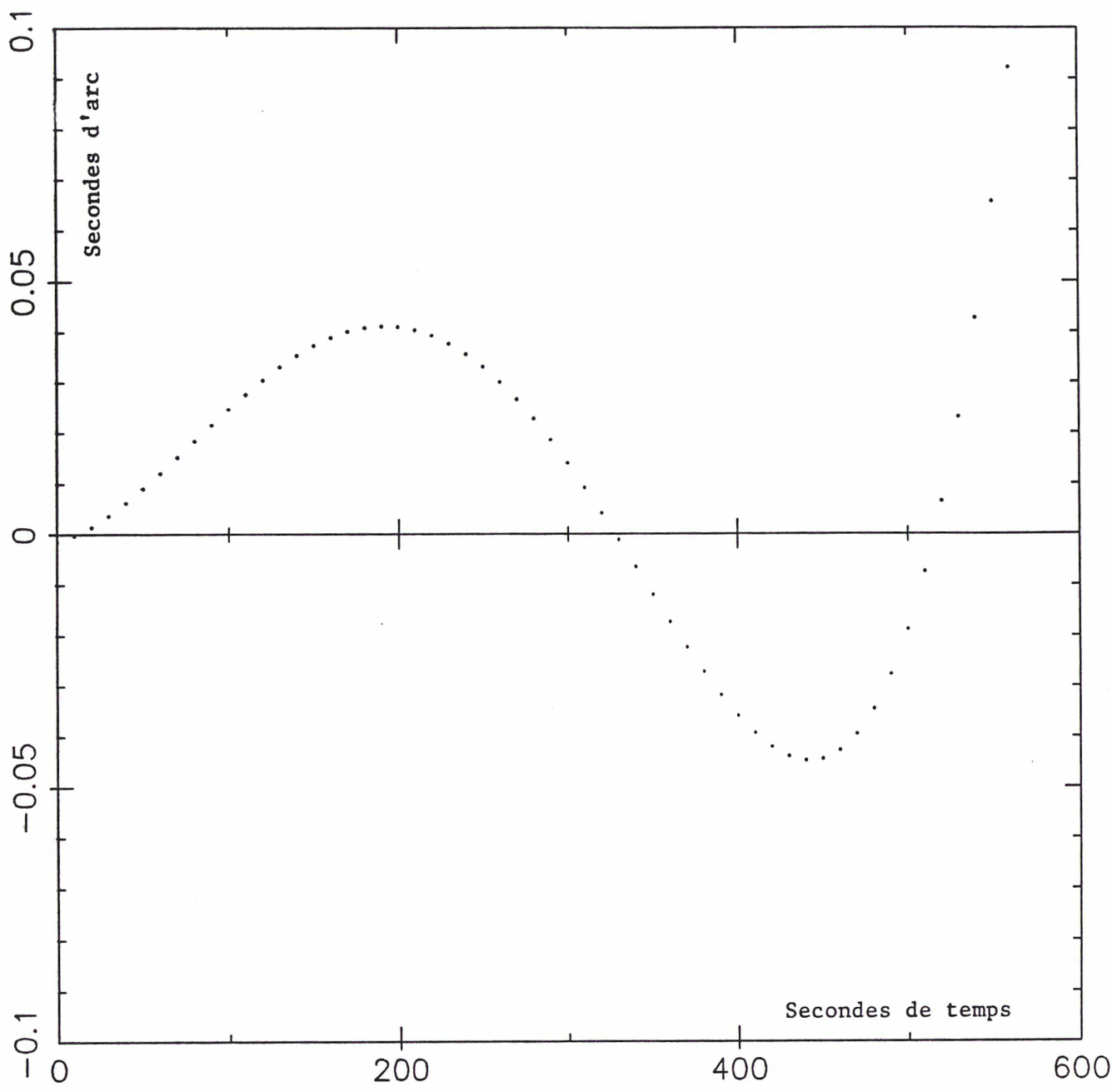


Figure 5. Différences entre l'intégration numérique et la solution analytique pour γ , autour d'une valeur moyenne de $n\gamma$.

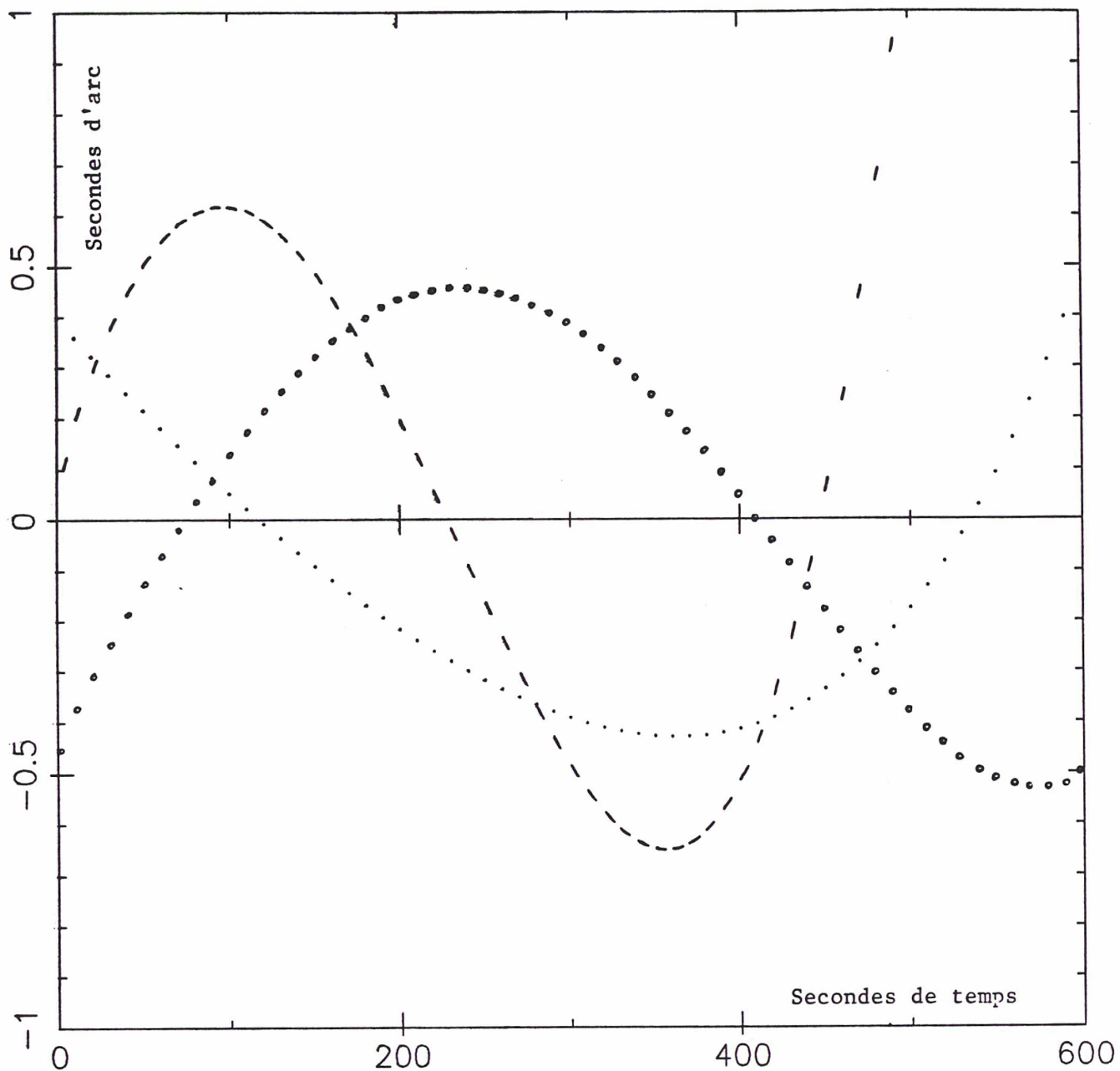


Figure 6. Différences entre la solution analytique et l'intégration numérique avec ajustement des conditions initiales.

Légende : - - - : $\Delta\alpha$
 • • • : $\Delta\beta$
 . . . : $\Delta\gamma$

CONCLUSION

Une description détaillée de la reconstitution de l'attitude du satellite HIPPARCOS est donnée en *annexe 1*, J. Kovalevsky et E. Bois, 1986, p. 346-348. La conception du satellite HIPPARCOS est telle que la détermination de l'attitude permise par les grilles inclinées du "star-mapper" puisse atteindre une précision prévue meilleure que $0''.1$ sur les trois composantes. De plus cette précision peut être améliorée sur une des composantes en utilisant les observations sur la grille principale (partie centrale de la surface focale). En effet, l'axe de rotation propre du satellite est tenu d'être aussi parallèle que possible aux fentes toutes parallèles de cette grille principale. Par conséquent, la composante perpendiculaire à ces fentes est celle correspondant à l'angle γ . Et la précision sur sa détermination atteint alors $0''.003$ à $0''.005$ à la fin des réductions des données HIPPARCOS. L'attitude le long du balayage étant fortement corrélée avec la position des étoiles, il est en effet nécessaire d'obtenir la même précision que celle avec laquelle on détermine l'abscisse des étoiles sur les grands cercles de balayage, c'est-à-dire justement quelques millièmes de secondes d'arc.

Ainsi, dans la réduction des données HIPPARCOS, et par le principe même de la conception de ce satellite, l'information de l'attitude apparaît à deux endroits différents. Aussi, afin de prévoir la reconstruction de l'attitude, c'est-à-dire afin de pouvoir modéliser l'évolution de l'attitude, deux procédés numériques différents ont été mis en oeuvre par les consortiums d'HIPPARCOS :

La variation des angles α et β devant rester inférieure à une certaine valeur, la courbe de l'évolution de l'attitude est découpée en intervalles de temps de durées voisines de 600 secondes. Les jets de gaz correctifs sont effectués aux bornes de ces intervalles. D'une part une précision de quelques millièmes de secondes d'arc sur γ est obtenue par l'utilisation des fonctions splines. En effet, puisqu'il s'agit de décrire une simple portion de la solution en se rapprochant d'une seule courbe, les fonctions splines suffisent pour obtenir une très grande précision. D'autre part le procédé permettant d'obtenir une précision cohérente sur les trois composantes est le suivant :

Considérant que sur une rotation entière du satellite, l'expression analytique des couples, qui ne dépendent que de γ , varie très peu, il est supposé en être de même pour α , β et $\gamma - \gamma_0$. Dans ces conditions, et les fins jets de gaz étant eux équivalents à de petites quantités $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$, il est supposé que les termes périodiques de α , β et γ restent les mêmes d'un intervalle à l'autre, tandis que les seules différences sensibles résident dans les termes séculaires. L'algorithme ainsi construit ne diffère

d'un intervalle à l'autre que d'une fonction linéaire. Ceci a été proposé par Donati (Belforte et al., 1983). Cet algorithme, de forme identique sur les trois angles et donné ici sur l'intervalle $t = T_{i-1}$ à $t = T_i$, est le suivant :

$$\alpha_t = n_\alpha^i(t - T_{i-1}) + \sum_{k=1}^{15} \frac{s_k \sin k\gamma_0 + c_k \cos k\gamma_0}{k\omega} \quad (97)$$

où $\gamma_0 = \omega t$. Les s_k et c_k sont les mêmes pour tous les intervalles dont se compose une rotation complète du satellite. Les paramètres de ce modèle sont calculés numériquement par moindres carrés à l'aide des observations sur le star-mapper pendant une rotation du satellite.

La théorie proposée dans cette thèse présente d'une part un intérêt pour la Mécanique Céleste par l'étude du mouvement autour du centre de gravité et, d'autre part, une confirmation des hypothèses faites dans les procédés numériques de calcul du mouvement d'attitude d'HIPPARCOS. En effet, la théorie développe une résolution analytique des paramètres d'un algorithme généralisant celui proposé pour HIPPARCOS (97). Et il a été montré qu'effectivement de petites variations des conditions initiales (symbolisant celles dues aux jets de gaz) ne modifiaient pas sensiblement l'allure des courbes mais revenaient à effectuer une correction séculaire, c'est-à-dire à induire un changement de pente dans ces courbes. De plus, la théorie limitée au premier ordre aboutissant à une précision de l'ordre de $10''$, en moyenne entre les trois composantes, tandis que la théorie étendue aux deuxième ordre passant à $0''.5$, il est ainsi manifeste que, bien que la théorie n'atteigne pas encore la précision requise par les contraintes extrêmement exigeantes d'HIPPARCOS, cette amélioration d'un facteur 20 suggère la convergence de la théorie. De plus, en ce qui concerne le deuxième aspect des soucis d'HIPPARCOS, la théorie donne également une précision inférieure à $0''.05$ sur γ lorsque l'on privilégie cette composante. Il est donc raisonnable de penser que le troisième ou le quatrième ordre de cette théorie pourrait pourvoir au facteur 10 manquant. Les tentatives d'aller relativement loin dans la représentation du mouvement d'attitude n'ont pas été très développées jusqu'à présent, par suite, probablement, d'un manque d'applications. Il se trouve que tout d'un coup, la première grande application, HIPPARCOS, exige une précision extrêmement grande qu'il paraît difficile d'atteindre dès les premiers ordres. A titre d'indication cette précision de quelques millièmes de secondes d'arc pour HIPPARCOS est pratiquement analogue aux meilleures précisions actuelles obtenues pour la

rotation de la Terre.

La contrainte d'une rotation aussi lente que celle d'HIPPARCOS est loin d'être générale à tous les satellites. Rappelons qu'une vitesse 10 fois moins lente induit des résultats 100 fois meilleurs avec simplement la théorie limitée à l'ordre 1. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'influence du rapport "intensité résultante des couples perturbateurs - énergie de rotation" sur la dérive d'attitude par rapport à une théorie donnée, est telle que plus celui-ci sera faible, plus un ordre faible du développement de la théorie suffira à donner une bonne précision sur la connaissance de l'évolution de l'attitude. Aussi il serait intéressant de chercher à définir un critère d'évaluation d'une théorie, qui devrait en tout état de cause tenir compte de ce rapport, du petit paramètre par rapport auquel est développée la solution, de l'ordre du développement de la théorie et de la précision obtenue à cet ordre. Par exemple, dans la perspective d'une étude similaire ou bien différente d'une rotation perturbée, la séquence 3.2.1 pourrait servir de base aux calculs, peut-être plus avantageusement.

La présence d'une loi itérative dans la solution présente, en outre, l'avantage de pouvoir tenir compte des perturbations habituellement négligées et d'effectuer des études comparatives de leurs influences respectives. En effet, cela revient simplement à ajouter des paramètres perturbateurs supplémentaires dans les séries de Fourier représentant les couples. On pourrait ainsi, par exemple, mettre assez facilement en évidence l'influence des effets de l'émission thermique sur l'évolution d'attitude d'un satellite soumis à un couple de pression de radiation solaire.

Par ailleurs, dans une perspective de recherche de couplage entre le mouvement du centre de gravité et celui autour du centre de gravité, une meilleure détermination de celui-ci pourrait contribuer à mieux préciser celui-là, et cela non seulement pour les satellites artificiels, mais aussi pour les corps naturels.

Précisons finalement au lecteur prompt à se lancer dans la résolution du troisième ordre de la présente théorie, qu'il pourrait être grandement satisfaisant d'essayer au préalable d'injecter la solution d'ordre 1 dans les arguments des lignes trigonométriques de la solution d'ordre 2. Cela revient à développer la solution non pas autour de la solution d'ordre zéro suivant les puissances de ϵ , mais autour de sa valeur moyenne jusqu'à un certain ordre en ϵ . Ce procédé peut permettre d'améliorer le comportement de la solution en évitant l'apparition des termes de Poisson de grande amplitude.

APPENDICE I

FORMULAIRE DE LA SEQUENCE 3.2.1

La séquence 3.2.1 est composée de 3 rotations directes effectuées dans l'ordre suivant :

1. Une rotation U autour de l'axe OZ , de X vers Y .
2. Une rotation V autour du nouvel axe Oy_1 , de Z vers x_1 .
3. Une rotation W autour du nouvel axe $Ox_2 = Ox$, de y_1 vers z_2 .

$$U = (OX, Ox_1) = (OY, Oy_1)$$

$$V = (Ox_1, Ox) = (OZ, Oz_2)$$

$$W = (Oy_1, Oy) = (Oz_2, Oz)$$

Systèmes d'équations cinématiques :

$$(1) \quad \begin{cases} p = -\dot{U} \sin V + \dot{W} \\ q = \dot{U} \cos V \sin W + \dot{V} \cos W \\ r = \dot{U} \cos V \cos W - \dot{V} \sin W \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{\cos V} (q \sin W + r \cos W) \\ \dot{V} = q \cos W - r \sin W \\ \dot{W} = p + (q \sin W + r \cos W) \operatorname{tg} V \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{U} = \frac{1}{\cos V} (\dot{q} \sin W + \dot{r} \cos W + \dot{V} \dot{W} + \dot{V} \dot{U} \sin V) \\ \ddot{V} = \dot{q} \cos W - \dot{r} \sin W - \dot{U} \dot{W} \cos V \\ \ddot{W} = \dot{p} + (\dot{q} \sin W + \dot{r} \cos W) \operatorname{tg} V + \frac{1}{\cos V} \dot{U} \dot{V} + \dot{V} \dot{W} \operatorname{tg} V \end{cases}$$

Système d'équations dynamiques :

$$(4) \quad \begin{cases} (-A \sin V) \ddot{U} + A \ddot{W} + \{[(C - B) \cos 2W - A] \cos V\} \dot{U} \dot{V} \\ + \frac{1}{2} (C - B) (\sin 2W) (\dot{U}^2 \cos^2 V - \dot{V}^2) = N_1 \\ (B \cos V \sin W) \ddot{U} + (B \cos W) \ddot{V} + [(A - B - C) \sin V \sin W] \dot{U} \dot{V} \\ + [(A + B - C) \cos V \cos W] \dot{U} \dot{W} + [-(A + B - C) \sin W] \dot{V} \dot{W} \\ + [-(A - C) \sin V \cos V \cos W] \dot{U}^2 = N_2 \\ (C \cos V \cos W) \ddot{U} + (-C \sin W) \ddot{V} + [(A - B - C) \sin V \cos W] \dot{U} \dot{V} \\ + [-(A - B + C) \cos V \sin W] \dot{U} \dot{W} + [-(A - B + C) \cos W] \dot{V} \dot{W} \\ + [(A - B) \sin V \cos V \sin W] \dot{U}^2 = N_3 \end{cases}$$

APPENDICE II

COMPARAISON ENTRE LES SEQUENCES 1.2.3 ET 3.2.1

À PROPOS DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT LIBRE RAMENÉES À L'ORDRE 1

Hypothèse : Choix de l'axe fixe OZ le long de la direction constante du moment cinétique \vec{L} .

*Séquence 1.2.3 :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = -\frac{L}{AB \cos \beta} [(A - B) \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha + (A \sin^2 \gamma + B \cos^2 \gamma) \cos \alpha \sin \beta] \\ \dot{\beta} = \frac{L}{AB} [(A - B) \sin \gamma \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + (A \cos^2 \gamma + B \sin^2 \gamma) \sin \alpha] \\ \dot{\gamma} = \frac{L}{AB} [(A - B) \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha + (A \sin^2 \gamma + B \cos^2 \gamma) \cos \alpha \sin \beta] \operatorname{tg} \beta \\ \quad + \frac{L}{C} \cos \alpha \cos \beta \end{array} \right.$$

*Séquence 3.2.1 :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = \frac{L}{BC} (B \cos^2 W + C \sin^2 W) \\ \dot{V} = \frac{L(C - B)}{2BC} \cos V \sin 2W \\ \dot{W} = L \sin V \left[\frac{1}{BC} (B \cos^2 W + C \sin^2 W) - \frac{1}{A} \right] \end{array} \right.$$

avec $V \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

APPENDICE III

FORMULAIRE DE LA RESOLUTION DU MOUVEMENT LIBRE
DANS LES SEQUENCES 1.2.3, 3.2.1 ET 3.1.3.

Equations d'Euler :

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)pr = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases}$$

Hypothèses :

$$C > B > A \text{ ou } C < B < A$$

Solution :

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{2TC - L^2}{A(C - A)}} \operatorname{cn}\tau \\ q = \sqrt{\frac{2TC - L^2}{B(C - B)}} \operatorname{sn}\tau \\ r = \sqrt{\frac{L^2 - 2TA}{C(C - A)}} \operatorname{dn}\tau \end{cases}$$

où:

$$\tau = t \sqrt{\frac{(C - B)(L^2 - 2TA)}{ABC}} \quad \tau : \text{fonction du temps } t$$

$$\begin{cases} 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \\ L^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} T : \text{énergie cinétique} \\ L : \text{moment cinétique} \end{array}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}\tau = s \\ \operatorname{cn}\tau = \sqrt{1 - s^2} \\ \operatorname{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2s^2} \end{cases}$$

sn, cn, dn :
3 fonctions elliptiques de Jacobi
fonction de τ telles que:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}} \quad \text{avec } k^2 = \frac{(A - B)(L^2 - 2TC)}{(C - B)(L^2 - 2TA)} > 1$$

A l'aide d'un certain nombre de transformations assez compliquées, on peut exprimer cette intégrale au moyen de la fonction dite "fonction thêta" (Landau and Lifthitz, 1969, page 166).

Solutions du mouvement par rapport au système fixe $OXYZ$:

• Avec les angles dits d'Euler (séquence 3.1.3):

(Choix de l'axe fixe OZ le long du vecteur constant \vec{L})

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \sqrt{\frac{C(L^2 - 2TA)}{L^2(C - A)}} \operatorname{dn} \tau \\ \operatorname{tg} \phi = \sqrt{\frac{A(C - B) \operatorname{cn} \tau}{B(C - A) \operatorname{sn} \tau}} \\ \frac{d\psi}{dt} = L \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} \end{array} \right.$$

• Avec les angles U, V, W (séquence 3.2.1):

(Choix de l'axe fixe OZ le long du vecteur constant \vec{L})

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin V = -\sqrt{\frac{A(2TC - L^2)}{L^2(C - A)}} \operatorname{cn} \tau \\ \operatorname{tg} W = \sqrt{\frac{B(C - A)(2TC - L^2) \operatorname{sn} \tau}{C(C - B)(L^2 - 2TA) \operatorname{dn} \tau}} \\ \frac{dU}{dt} = L \frac{Bq^2 + Cr^2}{B^2q^2 + C^2r^2} \end{array} \right.$$

• Avec les angles α, β, γ (séquence 1.2.3):

(Choix de l'axe fixe OX le long du vecteur constant \vec{L})

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \sqrt{\frac{C(L^2 - 2TA)}{L^2(C - A)}} \operatorname{dn} \tau \\ \operatorname{tg} \gamma = -\sqrt{\frac{B(C - A) \operatorname{sn} \tau}{A(C - B) \operatorname{cn} \tau}} \\ \frac{d\alpha}{dt} = L \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} \end{array} \right.$$

Temps écoulé entre deux positions globales identiques du corps : (c'est-à-dire temps au bout duquel le vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$ revient à sa position initiale par rapport aux axes liés au corps)

$$P = 4K \sqrt{\frac{ABC}{(C-B)(L^2 - 2TA)}} \quad \text{où} \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

ANNEXE 1

ATTITUDE DETERMINATION OF THE HIPPARCOS SATELLITE

(Space Dynamics and Celestial Mechanics)

ATTITUDE DETERMINATION OF THE HIPPARCOS SATELLITE

J. Kovalevsky and E. Bois
CERGA, Avenue Copernic, F-06130 Grasse

ABSTRACT. In a first part, the measurements by the star-mapper that permit an accurate attitude determination are described. Every observation gives a condition equation that is used to determine the attitude variations. In the second part, the torques acting on the satellite are given and the construction of a first order analytical theory of the rotation of the satellite is sketched. Finally, the form of the solution is given. Two simpler representations that are actually adopted in the HIPPARCOS data reduction Consortia are also described and justified.

1. INTRODUCTION

The satellite HIPPARCOS is the first purely astrometric satellite that has ever been decided. Approved in 1980 by the European Space Agency, its design has been completed in 1983 and it is now being built. It is expected to be launched in 1988.

The principle of the satellite and of the mission has been described in many occasions (see, for instance, Kovalevsky, 1984a,b; or Perryman, 1985). Further technical details may be found in Bouffard and Zeis, 1983. For the understanding of what follows, it is only necessary to know that the satellite is pointing simultaneously towards two fields of view owing to a beam combiner that directs on a single receiver the light coming from two directions separated by 58° . The satellite rotates slowly around an axis perpendicular to the direction of the two fields so that the star images drift along the focal plane. The observations are made through a grid that modulates the light generated by all the stars of both fields. From the modulation of each of them - separated from the others by an image dissector - it is possible to derive the angles between the stars, provided that the attitude of the satellite is known at every instant.

It can be shown that the ultimate accuracy of the attitude that is necessary in order to meet with the objectives of the mission ($0''.002$ error in the position and apparent displacements of the stars), it is necessary to determine the position of the axis of rotation with an accuracy of $0''.1$ and the along track rotation angle to a few milliseconds of arc. This is several orders of magnitude better than the attitude

reconstitution achieved in any of the current satellites. In addition, because of the tremendous computing work load to determine the initial conditions after every gas jet actuation, it is not possible to reconstruct the attitude using numerical integration. It is necessary to have an analytical representation valid for some limited interval of time, using as few parameters as possible. Such an algorithm must be suitable to represent the attitude with that accuracy throughout the two and a half years of the mission. In what follows, we shall describe how such an accuracy can be obtained and what representations can be used to describe the rotational motion of the satellite.

2. ATTITUDE RECONSTITUTION

Let us assume that the positions of stars are known with an error smaller than the accuracy with which one seeks to determine the attitude. This is not true at the beginning of the mission, but the data reduction - which includes the attitude reconstitution - is an iterative process which converges rather rapidly. The assumption is therefore valid for the last iterations and it is used here in order to simplify the description by eliminating the sources of error that are external to the satellite.

The main instrument that permits this determination is the star-mapper. The focal plane of HIPPARCOS, has the structure shown in fig.1.

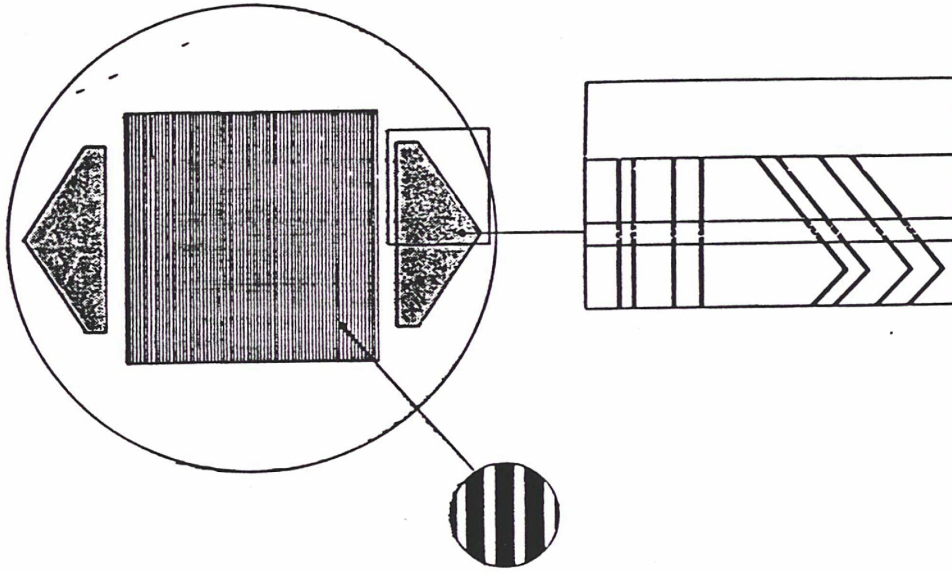


Figure 1 - The focal plane of HIPPARCOS

The central part is the main grid containing about 3000 parallel slits

which is used to determine the relative positions of star images in the focal plane by comparing the phases of their modulation curves. The star-mapper consists of two series of four inequally spaced slits: one is parallel to the main grid slits, the other is inclined with an angle equal to 45° .

A star image crossing one of the star-mapper series of slits produces a light-curve analogous to the one presented in fig.2, light curve that also includes the background illumination. It differs from the theoretical instrumental response by the effects of photon noise and other minor perturbations. The signal is converted into photon counts by photomultipliers as shown also in the same figure. By comparing these photon counts to the theoretical response, it is possible to determine the instant t_0 at which the star crossed the barycenter of the grid.

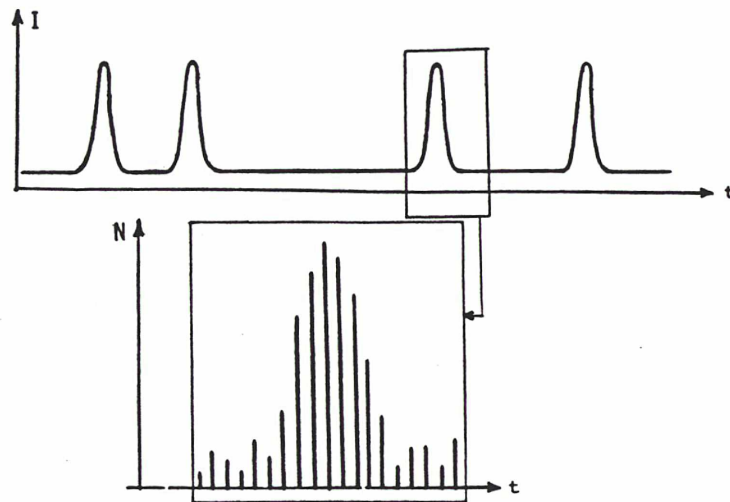


Figure 2 - Star on the star-mapper : light curve and photon counts

Let us now assume that the position of the star on the sky is known. The interpretation of the measurement is that at time t_i , the projection of the central line of the star-mapper grid on the sky crosses the star. The star-mapper being solidly linked to the OXYZ satellite coordinate system, this means that there exist at time t_i a well defined relation between OXYZ and the reference celestial coordinate frame Oxyz. The attitude of the satellite being defined by three Eulerian angles ψ, θ, ϕ determining the rotation $Oxyz \rightarrow OXYZ$, the above mentioned determination can be written as :

$$F = (\psi(t_i), \theta(t_i), \phi(t_i)) = 0 \quad (1)$$

Every observation of a star crossing a grid system in the star-mapper at any time t_i gives rise to an equation (1).

If we now assume that, during a time interval T_1-T_2 each of the

three angles ψ , θ and ϕ can be represented by a certain function of a well defined form :

$$\begin{aligned} \psi &= \Psi(t, a_1, a_2, \dots, a_k) \\ \theta &= \Theta(t, b_1, b_2, \dots, b_k) \\ \phi &= \Phi(t, c_1, c_2, \dots, c_k) \end{aligned} \quad (2)$$

where a_i , b_i and c_i are parameters, and if during this interval of time one can observe a sufficient number of stars so that there are more condition equations (1) than free parameters in (2), one may determine the latter and consequently have a continuous determination of the attitude between T_1 and T_2 .

The precision of this determination depends upon the accuracy with which one may determine the crossing times t_i , but also upon the quality of the attitude model given by (2) and its time interval of validity $T_2 - T_1$. The precision of the time of crossing of a star corresponds to an accuracy of positioning the projection of the star-mapper slits on the sky. It is of the order of $0''.03$ for bright stars (magnitude < 8.5) degrading to about $0''.07$ for stars of magnitude 10. Assuming that the attitude model does not introduce additional errors, it has been shown that an accuracy of $0''.08$ to $0''.10$ can be reached for the attitude as determined by the star-mapper (Donati and Canuto, 1985).

This result can be improved by using the observations on the main grid. The slits of the main grid are all parallel so that the attitude information that can be obtained concerns only the component of the rotation perpendicular to the slits. In HIPPARCOS, the rotation axis is set up to be as parallel as possible to these slits. Consequently, only the rotation proper of the satellite and not the direction of the axis of rotation can be determined from main grid observations. While the star-mapper observation lasts about 0.16 seconds, the observation of a star on the main grid may last several seconds. It results that the accuracy of a crossing time on the main grid is much better than on the star-mapper and is of the order of a few milliseconds of arc precision on the sky. As a result the rotation angle of the satellite will be determined, at the end of the reduction of the HIPPARCOS data to an accuracy of $0''.003$ to $0''.005$.

3. TORQUES ACTING ON THE SATELLITE

The HIPPARCOS project requires that the sky is scanned in a strictly predetermined manner. The axis of rotation of the satellite is supposed to revolve around the Sun on a cone of a semi-aperture of 43° in about 57 days. The rotation of the satellite itself is set to take 2.13 hours. Of course, this scanning law cannot be obtained by letting the satellite drift under the effects of natural torques. Even if it is acceptable that this law be followed only approximatively ($\pm 10'$ is the limit currently set), it is necessary to periodically correct the attitude drift by actuating gas jets. In practice, the mean interval between gas jets to meet this requirement will be of the order of 600 seconds.

The main torques that act on the satellite are the following :

3.1. The radiation torque produced by the illumination by the Sun

Its expression is not simple because of the rather complicated shape of the satellite: a hexagonal parallelepiped with three large rectangular wings with solar cells. A simplification comes from the scanning law that imposes a fixed angle between the direction of the Sun and the axis of the satellite. It results that the solar radiation torque practically depends only upon the angle s of rotation of the satellite with respect to the direction of the Sun.

3.2. Torques produced by the gyroscopes

The gyroscopes have been disposed in such a way that their reaction induces an effect only on the X component in the satellite reference frame.

3.3. The gravity gradient torque

It is approximately 100 times smaller than the first two and it can be neglected in a first approximation. In any case, it does not modify significantly the perturbations induced by the first two causes. Other torques produced by the Earth's radiation or by the magnetic field are totally negligible.

Figure 3 gives the values of the mean torques acting on the satellite in function of s as defined above. Using this model of torques, the problem is now to get a model representing the variations of attitude (see Pinard et al, 1983).

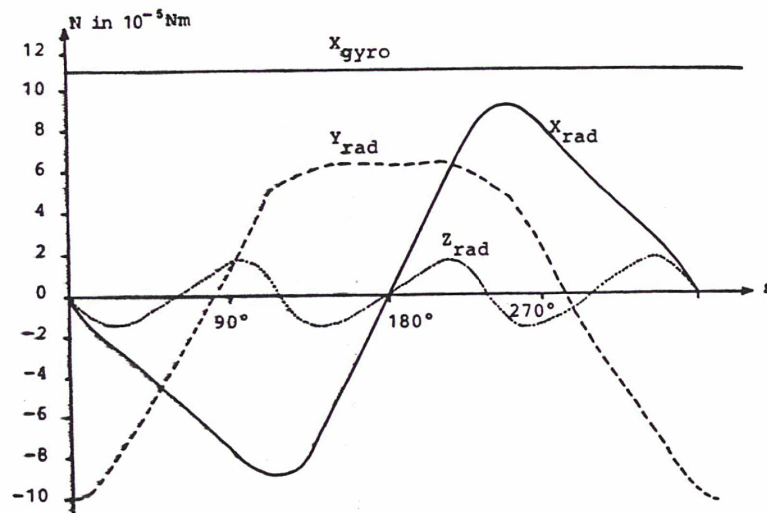


Figure 3 - Values of the torques acting on HIPPARCOS in function of s

4. MODELLING THE ATTITUDE

Between two gas jets, the rotation of the satellite is governed solely by the torques described above. It results that the attitude representation can be derived from the torque model and the initial conditions. Because of the scanning law requirements, the initial conditions are such that they represent a motion very close to a slow rotation around the main axis of inertia of the satellite. If we choose the celestial plane defined by the nominal scanning law, one may choose the following three angles to define the attitude (fig.4):

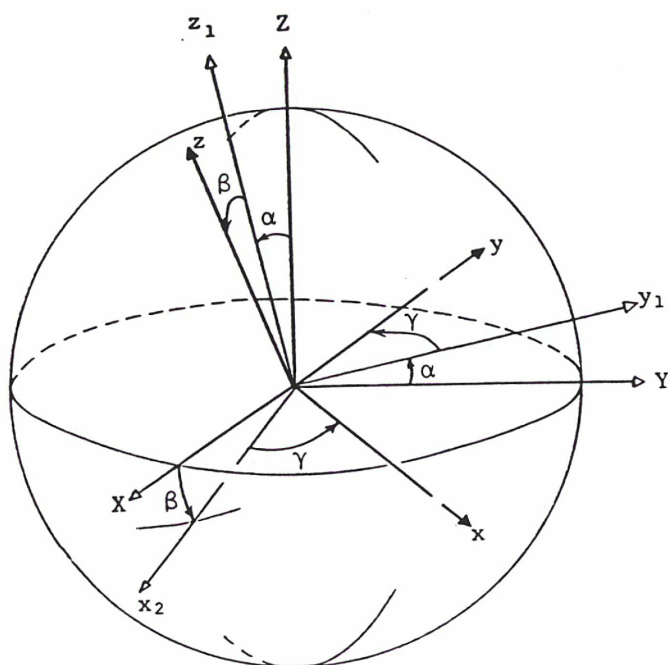


Figure 4 - Definition of the angles describing the rotation of HIPPARCOS

- a) A rotation α around the Ox axis,
- b) A rotation β around the new Oy' axis.
- c) A rotation γ around the new $Oz''=OZ$ axis.

The choice of the Oxy plane involves that, at the origin of times, the angles α_0, β_0 as well as their time derivatives $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ are small. Finally, γ_0 is an arbitrary angle and $\dot{\gamma}_0$ must be close to the nominal rotation velocity ω (one revolution per 2.13 hours).

Let us choose the body axes $OXYZ$ along the principal axes of inertia. The corresponding moments of inertia are A, B, C . In the body axes the rotational motion of the body is governed by the following diffe-

rential equations :

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= N_1 \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= N_2 \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= N_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where p q r are the components of the rotation vector $\vec{\omega}$ and N_i are the components of the torques, all being referred to the body axes (Goldstein, 1964).

With the system of Eulerian angles just chosen, one has :

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ q &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ r &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Eliminating p , q and r in (3) and (4), one obtains three equations of the second order in α , β and γ .

$$\left. \begin{aligned} (A \cos \beta \cos \gamma) \ddot{\alpha} + (A \sin \gamma) \ddot{\beta} + ((-A-B+C) \sin \beta \cos \gamma) \dot{\alpha} \dot{\beta} \\ + (-A+B-C) \cos \beta \sin \gamma) \dot{\alpha} \dot{\gamma} + ((A-B+C) \cos \gamma) \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ + (B-C) \sin \beta \cos \beta \sin \gamma) \dot{\alpha}^2 = N_1 \\ (-B \cos \beta \sin \gamma) \ddot{\alpha} + (B \cos \gamma) \ddot{\beta} + ((A+B-C) \sin \beta \sin \gamma) \dot{\alpha} \dot{\beta} \\ + ((A-B-C) \cos \beta \cos \gamma) \dot{\alpha} \dot{\gamma} + (A-B-C) \sin \gamma) \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ + ((A-C) \sin \beta \cos \beta \cos \gamma) \dot{\alpha}^2 = N_2 \\ (C \sin \beta) \ddot{\alpha} + C \dot{\gamma} + ((-A+B) \cos 2\gamma + C) \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \\ + ((-A+B) \sin \gamma \cos \gamma) (\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) = N_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

The components of the torques as described in 3 are periodic functions of γ only. These equations can be solved using classical perturbation method of a zero-order solution. The latter is a solution with $N_1=N_2=N_3=0$. Taking into account the condition following which $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ are small quantities as well as α_0 and β_0 , we select the following initial solution of (5) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= 0 \\ \bar{\beta} &= 0 \\ \bar{\gamma} &= \omega t + \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

The choice of $\alpha_0=\beta_0=0$ can be realized by moving slightly the Oxyz system of coordinates.

The n -th order solution will have the form :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} + \epsilon \alpha' = \epsilon \alpha_1 + \epsilon^2 \alpha_2 + \dots \\ \beta &= \bar{\beta} + \epsilon \beta' = \epsilon \beta_1 + \epsilon^2 \beta_2 + \dots \\ \gamma &= \bar{\gamma} + \epsilon \gamma' = \gamma_0 + \omega t + \epsilon \gamma_1 + \epsilon^2 \gamma_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Here ϵ , is of the order 10^{-5} characterizing the magnitude of \vec{N} .

A litteral solution for the first order may be obtained in substituting (7) in (5), equating all the terms of order ϵ and developing $\cos\beta$ and $\sin\beta$. The first order solution depends only on $\bar{\gamma}$ and have the general form :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= n_\alpha (t-t_\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \sin k\bar{\gamma} + c_k \cos k\bar{\gamma}}{k\omega} \\ \beta &= n_\beta (t-t_\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s'_k \sin k\bar{\gamma} + c'_k \cos k\bar{\gamma}}{K\omega} \\ \gamma &= \bar{\gamma} + n_\gamma (t-t_\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s''_k \sin k\bar{\gamma} + c''_k \cos k\bar{\gamma}}{k\omega} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where all the quantities introduced are of the order of ϵ .

Substituting (8) into (5) and identifying the two members of the equations, one may compute all the coefficients. If the torques are developed in the form :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= K + \sum_{i=1}^{\infty} (p_i \sin i\bar{\gamma} + q_i \cos i\bar{\gamma}) \\ N_2 &= K' + \sum_{i=1}^{\infty} (r_i \sin i\bar{\gamma} + t_i \cos i\bar{\gamma}) \\ N_3 &= \sum_{i=1}^{\infty} (u_i \sin i\bar{\gamma} + v_i \cos i\bar{\gamma}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

then one obtains all the coefficients in a litteral manner. In particular, one gets :

$$\begin{aligned} n_\alpha &= -(p_1 + t_1) / 2\omega C \\ n_\beta &= (q_1 - r_1) / 2\omega C \\ n_\gamma &= 0 \end{aligned}$$

The full solution is described in Bois (1986).

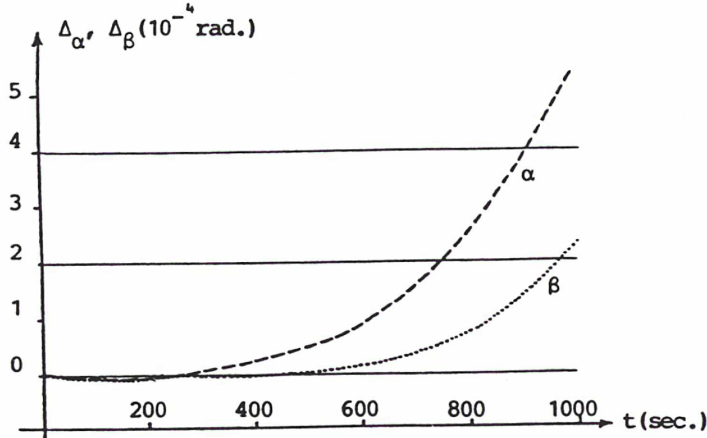


Figure 5 - Differences between the analytical solution and the numerical integration for α and β during the first 1000 seconds. At larger times, residuals show a periodicity equal to the rotation period.

A comparison of the analytical results with a numerical integration based upon the HIPPARCOS model described in 3, gave a good consistency between the results. The differences that remain are partly due to a non rigorous identity in the choice of initial conditions and partly to the second order terms (see figure 5).

5. PRACTICAL REPRESENTATIONS OF THE SOLUTION

The analytical solution, as well as the numerical integrations confirm the fact that the angles stay in the prescribed limits of $\pm 10'$ from the nominal scanning law only a few minutes. During this short time, the argument $\bar{\gamma}$ changes only by a fraction of a radian. So in practice it would be absurd to use complex trigonometric expressions to describe such a small portion of the solution. This is why, during the interval between gas jets, a simple cubic spline description of the attitude angles is sufficient and is indeed used by one of the data reduction consortia (NDAC) throughout the reduction and by FAST for the accurate representation of the rotation angle.

However, F. Donati, in FAST, has proposed an interesting and quite efficient representation of the attitude over a whole period of rotation of the satellite, despite the fact that a dozen or more jet actuations occur in the meantime (Belforte et al, 1983). The driving idea is the following. The periodic part of the solution as given by (8) is, in a short time interval, not sensitive to the small modifications of the initial conditions in α and β and $\gamma - \bar{\gamma}$ that may have been introduced in the course of time. This means that in every time interval between gas jet actuations the solution may be represented by (8) with values of n_α , n_β and n_γ as modified by the jets.

The global representation has therefore the following form (identical for the three angles and for $t=T_{i-1}$ to $t=T_i$):

$$\alpha_t = n_\alpha^i (t - T_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin k\bar{\gamma} + c_k \cos k\bar{\gamma}}{k\omega} \quad \text{etc...}$$

Different tests of accuracy have shown that, taking into account the number of star-mapper observations available during a rotation of the satellite, the optimum value for K is about 15. This model gives the necessary accuracy of a few 10^{-2} arc seconds over a complete revolution of the satellite. At this level of precision, one needs less arbitrary parameters to represent the attitude than if one uses splines (Donati et al, 1985).

REFERENCES

- Belforte, P., Canuto, E., Donati, F. and Villa, A., 1983, in P.L. Bernacca (ed.), "The FAST Thinkshop", Asiago, Univ. Og Padova, p 163.
 Bois, E., 1986, "First order analytic theory of satellite attitude; application to HIPPARCOS", submitted to Celestial Mechanics.
 Bouffard, M. and Zeis, E., 1983, in P.L. Bernacca (ed.), "The FAST Thinkshop", Asiago, Univ. of Padova, p 31.

- Donati, F. and Canuto, E., 1985, in J. Kovalevsky (ed.), "The second FAST Thinkshop, Marseille, p 111.
- Donati, F., Canuto, E. and Belforte, P., 1985, in J. Kovalevsky (ed.), "The second FAST Thinkshop", Marseille, p 113.
- Goldstein, H., 1964, "Mécanique classique", Presses Universitaires de France, p 172.
- Kovalevsky, J., 1984a, Mitteilungen der Astron. Gesellschaft, 62, p 63
- Kovalevsky, J., 1984b, Space Science Reviews, 39, p 1.
- Perryman, M.A.C., 1985, "Ad Astra, Hipparcos", ESA Document ESA-BR-24.
- Pinard, M., Stellmacher, I., Van der Marel, H., Kovalevsky, J. and Saint-Crit, L., 1983, in P.L. Bernacca (ed.), "The FAST thinkshop" Asiago, Univ. of Padova, p 91.

ANNEXE 2

**FIRST-ORDER THEORY OF SATELLITE ATTITUDE MOTION
APPLICATION TO HIPPARCOS**

*(accepté à *Celestial Mechanics*)*

FIRST-ORDER THEORY OF SATELLITE ATTITUDE MOTION
APPLICATION TO HIPPARCOS

Eric Bois
CERGA, Avenue Copernic, F-06130 Grasse

ABSTRACT. This work aims at finding an analytic solution corresponding to the attitude evolution in space of a satellite submitted to disturbing torques. This paper presents a basic frame applicable to any perturbed rotation satellite, and a method of resolution leading to a formal solution which is given here in the first order. Thus, the main problem is the slow rotation of a body with three unequal axes of inertia, essentially submitted to a dominant solar radiation pressure torque, with the axis pointing far away from a position of equilibrium. The comparison of the results with a numerical integration based upon a HIPPARCOS model is convincing.

1. INTRODUCTION

The new era of satellised telescopes involves knowing with great accuracy the evolution of their attitude. In particular, the attitude reconstitution of the HIPPARCOS satellite with a precision down to a few milliseconds of arc is a necessary condition for the success of the mission. To reach an accuracy of $0''.002$ in the astrometric parameters of the stars, it is indeed necessary to determine the position of the axis of rotation with an accuracy of $0''.1$ and the along track rotation angle to a few milliseconds of arc (Kovalevsky, 1984, see page 34).

In this case, the attitude reconstruction by numerical integration is not suitable; it is necessary to have an analytical representation, using as few parameters as possible, with an algorithm suitable for the whole time of a mission. The saving of computation time is thus considerable, several orders of magnitude. We are then faced with this problem of Celestial Mechanics: how to represent the rotational motion of a body submitted to solar radiation and gyroscope reaction torques, with the axis pointing far away from a position of equilibrium. Indeed, any functional representation could be used in representing the motion. In particular, cubic splines proved to be very efficient in this respect. However, it is interesting to check whether expressions justified on dynamical grounds could be useful in representing the attitude of HIPPARCOS.

The theory described throughout this paper is not restricted to the particular conditions of HIPPARCOS but it extends to any perturbed

rotation of a satellite. That is why some references about the project HIPPARCOS are just given here for information only. The reader might refer for instance to Bernacca (1985) or Kovalevsky (1982 and 1984).

The attitude evolution of a satellite is function of many parameters. In particular, it is connected to the ratio between the rotation velocity of the satellite and the intensity of the external torques. The action of torques of various origins (gravitational, electrostatic, magnetic, aerodynamic) on the motion about the center of mass has been studied by many authors. Cochran, in 1971, propounds a formulation available whatever are the external torque and the satellite's dynamic shape but when the magnitude of the total external torque is small compared to the magnitude of the rotational angular momentum. Crenshaw and Fitzpatrick, in 1968, have already adopted this formulation in order to study the gravity effects on the rotational motion of an uniaxial artificial satellite. Stellmacher, in 1972, studies in detail the effects of the torque of magnetic origin, not only in the case where these effects are small with respect to the rotation energy of the satellite (gyroscopic case), but also in the case where the intensity of the torque is sufficiently large to strongly modify the satellite's attitude in space. More recently, in 1985, Van der Ha has presented a perturbation approach to attitude dynamics problems under body-fixed torques. He has also applied his model to HIPPARCOS attitude motion but in the initialization phase where the constant torques induced by the gyroscopes are dominant. Let us mention also the works connected with the particular conditions of the motion of the Moon (Migus, 1977, and Cappallo, 1980).

In this present work, the problem is generalized to a body without symmetry of inertia and where the order of magnitude of the dominating but variable disturbing torques may be large compared to the order of magnitude of the rotational angular momentum. So the main hypothesis will be that of a strongly perturbed slow rotation.

2. PRESENTATION OF THE WORK

This work aims at studying the rotational motion of a satellite, with any initial conditions, so long as the rotational axis is not too far away from its initial position. Nevertheless, the problem is more general with the main hypothesis of a slow rotation. Indeed the solution will contain more terms than in the case of a fast rotation. The pulsation of the rotation being at the denominator of the solution, a small rotation energy introduces an additional difficulty.

The actual attitude of the satellite is obtained by taking into account the solar radiation pressure and gyroscope induced torques (Froeschlé and Mignard, 1983). The influence of gravity gradient has been considered comparatively, but because of its order of magnitude, it will be neglected in this study. For the same reason other torques produced by the Earth's radiation or by the magnetic field are neglected.

The attitude evolution is described by the variation of three position angles. The time derivative of the angle describing the satelli-

te's rotation must be initially close to the nominal rotation velocity ω . At the origin of times, the other two angles are small or zero-value and their time derivatives are small quantities. This turns out to be the only hypotheses of this work.

In the end, the attitude representation derives from the torque model and the initial conditions.

An application to the HIPPARCOS satellite is given at the end of this paper.

3. THE BASIC FRAME

3.1. Systems of coordinates

3.1.1. Reference frame

Let OXYZ be a fixed frame with its origin at the satellite's center of mass. Its orientation is determined by two angles as follows :

- OX is directed towards the ascending node of the OXY-plane to the celestial Equator-plane.
- θ_0 is the inclination of the OXY-plane on the celestial plane.
- ψ_0 is the longitude of the ascending node.

We choose OXYZ such that the OZ-axis is close to the initial direction of the satellite's rotational axis. In order to simplify the solution, we may adjust the reference frame but it will be kept fixed during the motion.

3.1.2. Body-fixed coordinates

Let Oxyz be a body-fixed system of coordinates defined by the satellite's principal axes of inertia.

3.2. Satellite's data

A, B, C : satellite's principal moments of inertia.

$\vec{\omega}$: instantaneous rotation vector.

p, q, r : components of $\vec{\omega}$ in the Oxyz-frame.

\vec{L} : angular momentum.

(I) : tensor of inertia. In the Oxyz-frame, the matrix of (I) is diagonal.

3.3. Definition and justification of the position angles

Known as the sequence of the Tait-Bryan angles, the adopted system of angles is composed of three direct rotations (figure 1) in the following order :

1. A rotation α about the OX axis, from Y towards Z.
2. A rotation β about the new Oy₁ axis, from z₁ towards X.
3. A rotation γ about the new Oz₂=Oz axis, from x₂ towards y₁.

$$\alpha = (OY, Oy_1) = (OZ, Oz_1)$$

$$\beta = (OX, Ox_2) = (Oz_1, Oz)$$

$$\gamma = (Ox_2, Ox) = (Oy_1, Oy)$$

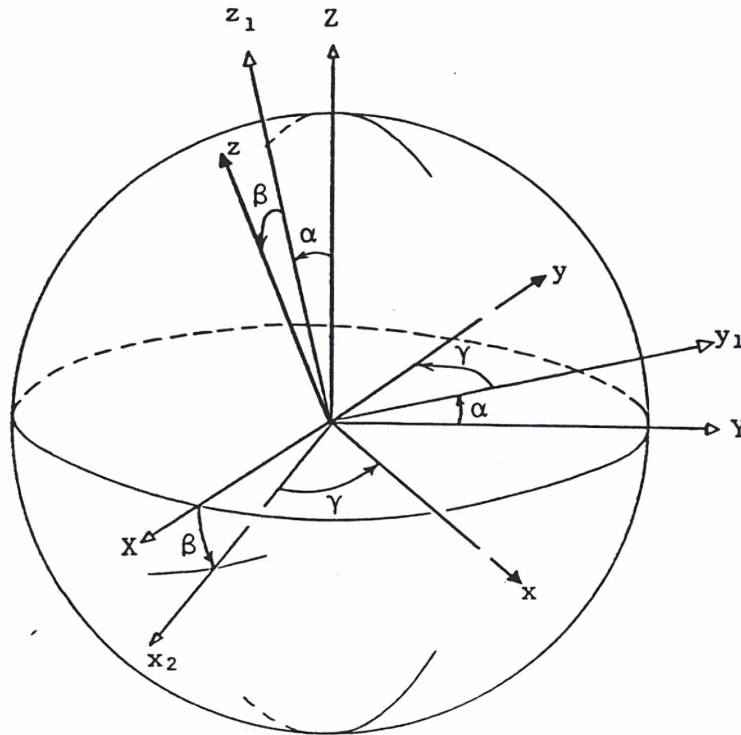


Figure 1. Definition of the position angles

Because of its definition, this combination will be called the 1-2-3-system. The numbers 1, 2, 3 indicate X or x, Y or y, Z or z axes respectively. This system can so answer to the conditions required by the problem :

- if the Oz-axis is the rotational axis, γ represents the proper rotation of the system,
- if the Oz-axis remains close to the OZ-axis, the angles α and β are small.

Thus composed of two small rotations and of a large one, the 123-system proves to be adequate to express the required motion. The variations of α , β and γ in the course of time will account for the satellite's attitude evolution in space.

Another system could have been suitable. It refers to the 321-system where the large rotation is done, this time, with the angle α about the fixed OZ-axis. β and γ represent then the two small rotations. If we want to solve the system of differential equations of the unperturbed motion, it is usual, in order to simplify the calculations, to choose one of the fixed axes OX, OY or OZ and to make it coincide with the direction of the constant angular momentum \vec{L} . In fact, the calculations are simpler with the 123-system for the choice of the OX-axis and with the 321-system for the choice of the OZ-axis. However, according to the hypotheses of this problem, it is natural to take the OZ-axis along the vector \vec{L} . In both systems, the vector \vec{L} is not very far away from the OZ-axis, but for slightly different reasons :

- 123-system: the vector \vec{L} is close to the Oz-axis (proper rotation about Oz) and the Oz-axis is close to the OZ-axis, so the the vector \vec{L} is not very far away from the OZ-axis.
- 321-system: the vector \vec{L} is close to the OZ-axis (proper rotation about OZ).

That is why, with the 321-system, the most advantageous mathematical choice squares to the physical reality of the problem. The three first-order differential equations resulting from the second-order system are far more simple with the 321-system than with the 123-system. This difference applies especially to the free-motion problem. In the perturbed motion investigated according to the present method, the 321 and 123-systems are quite as suitable. In this paper, we have chosen the 123-system.

On the other hand, the 123-system is different from the 313-system of the Eulerian angles composed of two large rotations and a small one (see, for instance, Tisserand, 1960, but in the present paper the angles are defined with respect to the ascending node) :

- 3 ψ : precession
- 1 θ : nutation
- 3 ϕ : rotation

The formulas of effective transformation from the 123-system into the Eulerian 313-system, and vice-versa, are as follows :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta \cos \psi \\ \sin \beta = \sin \theta \sin \psi \\ \cos^2 \beta = \cos^2 \psi + \cos^2 \theta \sin^2 \psi \\ \sin \gamma = \cos \alpha \left[\frac{\cos \psi \sin \phi}{\cos \theta} + \sin \psi \cos \phi \right] \\ \cos \gamma = \cos \alpha \left[\frac{\cos \psi \cos \phi}{\cos \theta} - \sin \psi \sin \phi \right] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} \\ \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta \\ \sin^2 \theta = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha \\ \sin \phi = \sin \psi \left[\frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta} - \cos \alpha \cos \gamma \right] \\ \cos \phi = \sin \psi \left[\frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\sin \beta} + \cos \alpha \sin \gamma \right] \end{array} \right.$$

3.4. The equations of motion

Let us apply the fundamental law for the perturbed rotation of a solid body (Goldstein, 1964, see page 172) :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{L} = \Sigma \vec{N}_t \quad (1)$$

with :

$$\vec{L} = (I) \vec{\omega} \quad (2)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad (3)$$

$$(I) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (4)$$

where \vec{N}_t are the disturbing torques. The difference of stability in the rotation of a top around its three axes of inertia is explained by Lan-

dau and Lifchitz (see chap. VI and in particular p. 162, 1969). So we can assume for the principal moments of inertia the following hypotheses :

$$\begin{aligned} & C > \sup(A,B) \\ \text{or } & C < \inf(A,B) \end{aligned}$$

The components p, q, r of the rotation vector $\vec{\omega}$ in the body axes are given by three kinematic equations :

$$\begin{aligned} p &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ q &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ r &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (5)$$

together with the three dynamic equations :

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= N_1 \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= N_2 \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= N_3 \end{aligned} \quad (6)$$

where N_1, N_2, N_3 are the components of the torques in the body-axes, (5) and (6) are the six first-order equations of motion.

Instead of using these six equations, one can obtain three second order equations by differentiating the equations (5) and, then, substituting them into the equations (6), one gets :

$$\begin{aligned} (A\cos\beta\cos\gamma)\ddot{\alpha} + (A\sin\gamma)\ddot{\beta} + ((-A-B+C)\sin\beta\cos\gamma)\dot{\alpha}\dot{\beta} \\ + ((-A+B-C)\cos\beta\sin\gamma)\dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ + ((A-B+C)\cos\gamma)\dot{\beta}\dot{\gamma} \\ + ((B-C)\sin\beta\cos\beta\sin\gamma)\dot{\alpha}^2 = N_1 \\ (-B\cos\beta\sin\gamma)\ddot{\alpha} + (B\cos\gamma)\ddot{\beta} + ((A+B-C)\sin\beta\sin\gamma)\dot{\alpha}\dot{\beta} \\ + ((A-B-C)\cos\beta\cos\gamma)\dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ + ((A-B-C)\sin\gamma)\dot{\beta}\dot{\gamma} \\ + ((A-C)\sin\beta\cos\beta\cos\gamma)\dot{\alpha}^2 = N_2 \\ (C\sin\beta)\ddot{\alpha} + C\ddot{\gamma} + (((-A+B)\cos 2\gamma + C)\cos\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} \\ + ((-A+B)\sin\gamma\cos\gamma)(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2\cos^2\beta) = N_3 \end{aligned} \quad (7)$$

This form for these equations will be used throughout this paper.

As regards the equations (7) without right hand side we immediately have a particular solution :

$$\left| \begin{array}{l} p = 0 \\ q = 0 \\ r = \dot{\gamma} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \omega(t-t_0) \end{array} \right. \quad (8)$$

with $\omega = \frac{L}{C}$

It is the general solution for one uniform and unperturbed rotation in an isolated system.

4. PERTURBATIONS

To examine the physical expressions of the gravity gradient torque, of the solar radiation pressure torques and of those produced by the gyroscopes, one can refer to the publication of Pinard et al. (1983). By using the transformation matrix to the 123-system, these expressions, which actually are those of the disturbing force, can be expressed in the principal axes system as periodical continuous and integrable functions of period 2π . Hence, according to the Fourier theorem, these expressions can be expanded in multiple Fourier series for gravity gradient, with only one period for radiation pressure; as for the gyroscope induced torque, it remains constant. So the right hand side of the differential system (7) has the general following form :

$$\begin{aligned}
 N_t(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = & \sum_{ijkl} A_{ijkl} \cos(i\alpha + j\beta + k\gamma + l\lambda) \\
 & + \sum_i P_i \sin i\gamma + \sum_i Q_i \cos i\gamma \\
 & + K
 \end{aligned} \quad (9)$$

where A_{ijkl} , P_i and Q_i are numerical coefficients, K is a constant representing the resulting action of the gyroscopes, and λ refers to the orbital mean longitude position.

A numerical application showed that the disturbing force induced by the gravity gradient was by two orders of magnitude smaller than that of the disturbing force induced by the radiation pressure and the gyroscopes. That is why these calculations are limited, in a first approximation, to the dominating action of the solar radiation pressure and the gyroscopes. As a consequence of the hypothesis that the solar radiation torque depends only upon the rotation angle of the satellite, the satellite's z-axis remains close to a fixed direction. That is why we can expand the dominating torques in terms of γ alone. The analytic form of the perturbing right hand side is then as follows :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \left[K + \sum_{i=1}^m (p_i \sin i\gamma + q_i \cos i\gamma) \right] \cdot \varepsilon \\
 N_2 &= \left[K' + \sum_{i=1}^m (r_i \sin i\gamma + t_i \cos i\gamma) \right] \cdot \varepsilon \\
 N_3 &= \left[\sum_{i=1}^m (u_i \sin i\gamma + v_i \cos i\gamma) \right] \cdot \varepsilon
 \end{aligned} \quad (10)$$

where, in every numerical application, all the coefficients p_i , q_i , r_i , t_i , u_i , v_i and the two constants K and K' will have to be converted into a fixed decimal point, so that the small parameter ε may be the common power of 10 (negative).

The following method gives an analytic solution in which the angles (α, β, γ) are expressed literally according to the above coefficients.

5. METHOD OF RESOLUTION

5.1. Research of the form of the solution

According to the Poincaré theorem, the disturbing function depending on ϵ , assumed to be small enough, the solution can expand to the power of this small parameter, in the following form :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \dots \\ \beta &= \beta_0 + \epsilon\beta_1 + \epsilon^2\beta_2 + \dots \\ \gamma &= \gamma_0 + \epsilon\gamma_1 + \epsilon^2\gamma_2 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

where $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ represent the zero-order solution, that is to say in the absence of disturbing force.

Let us report briefly here the essentials of the demonstration (Kovalevsky, 1963). The setting up of the global form of the solution uses some of the results and extrapolates from them. Let us notice for this research it does not see there a canonical system of conjugate variables but a method of substitutions :

Let R be a disturbing function such as :

$$R = \sum_j A_j \cos(\sum_p j_p l_p) \quad (12)$$

where :

- the j_p are positive, negative or zero integers,
- the l_p are angular variables,
- the A_j are numerical coefficients.

Furthermore, R expands to the power of the small parameter ϵ . Subsequently, the equations have the following general form :

$$\frac{dl_i}{dt} = a_i + \sum b_{ij} \cos(\sum_p j_p l_p) \quad (a)$$

where :

- the a_i can be zero-value, or on the contrary finite,
- but all the b_{ij} have as a factor the small parameter ϵ characteristic of R.

In accordance with the Poincaré theorem, the solution has the following form :

$$l_i = l_{i0} + \epsilon l_{i1} + \epsilon^2 l_{i2} + \dots \quad (b)$$

The substitutions of the expressions from (b) into (a), then the identifications according to ϵ , after expansion into Taylor series, give the following results :

- the l_{i0} are, either constants or linear functions of time :

$$\text{and } l_{i0} = \overline{l_{i0}} \text{ or } l_{i0} = a_i(t-t_0) = n_{i0}(t-t_0) \quad (c)$$

$$l_{i1} = a_{i1}(t-t_0) + \sum \frac{b_{ij}^1 \cos(\sum_p j_p l_{p0})}{\sum_p j_p n_{p0}} \quad (d)$$

and here, we will restrict ourselves to the solution of the first-order.

And so, taking into account the above results, let us come back to our problem and seek the solution from the following global form :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 \\ \beta &= \beta_0 + \varepsilon\beta_1 \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1\end{aligned}\tag{13}$$

with :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= n_{\alpha_0}(t-t_0) + \overline{\alpha_0} \\ \beta_0 &= n_{\beta_0}(t-t_0) + \overline{\beta_0} \\ \gamma_0 &= n_{\gamma_0}(t-t_0) + \overline{\gamma_0}\end{aligned}$$

and :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= n_{\alpha_1}(t-t_0) + \sum_{ijk} \frac{as_{ijk}^1 \sin(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} + \sum_{ijk} \frac{ac_{ijk}^1 \cos(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} \\ \beta_1 &= n_{\beta_1}(t-t_0) + \sum_{ijk} \frac{bs_{ijk}^1 \sin(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} + \sum_{ijk} \frac{bc_{ijk}^1 \cos(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} \\ \gamma_1 &= n_{\gamma_1}(t-t_0) + \sum_{ijk} \frac{cs_{ijk}^1 \sin(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}} + \sum_{ijk} \frac{cc_{ijk}^1 \cos(i\alpha_0 + j\beta_0 + k\gamma_0)}{in_{\alpha_0} + jn_{\beta_0} + kn_{\gamma_0}}\end{aligned}$$

To make the subsequent calculations clear, we decide to leave ε outside the coefficients. γ representing the proper rotation, n_{γ_0} is a short period term, n_{α_0} and n_{β_0} are long period ones. n_{α_1} , n_{β_1} and n_{γ_1} each express the secular perturbations on the proper periods, while the trigonometric functions express the periodical perturbations with short and long periods.

Examining the differential equations (7), we notice that they have periodical coefficients in β and γ but constant ones in α . As for the right hand members (10), they only depend on γ . Therefore, it is inferred that $i=0$ in the global solution (13).

On the other hand, in accordance with the hypothesis, at the initial time ($t=t_0$), α_i and β_i are small or zero-value and $\overline{\alpha_i}$ and $\overline{\beta_i}$ are small quantities due to disturbing effects. Therefore, the zero-order solution which represents one rotation without perturbation is, in an isolated system, such as $n_{\alpha_0} = n_{\beta_0} = 0$. Moreover, here at the zero-order, the constants of integration coincide with the initial conditions. Therefore, $\overline{\alpha_0}$ and $\overline{\beta_0}$ are small and, by slightly changing the position of the reference frame, they can be cancelled (there exist θ_0 and ψ_0 such as, still remaining in the general, $\overline{\alpha_0} = \overline{\beta_0} = 0$. See 3.1.1.).

So, the general solution of zero-order can be written :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0 \\ \beta_0 &= 0 \\ \gamma_0 &= \omega(t-t_0) + \overline{\gamma_0}\end{aligned}\tag{14}$$

where $\overline{\gamma_0}$ is an arbitrary angle.

Here, we recognize a particular solution of the differential equations (7) without right hand sides. But in fact it is the only time linear function (within about the two constants α_0 and β_0) that is the solution of the differential equations (7) without right hand sides :

- if $n_{\alpha_0} = 0$, then $n_{\beta_0} = 0$ and vice-versa,
- a non local solution in the course of time is such as n_{α_0} or n_{β_0} is necessarily of zero-value.

The n-th order solution will finally have the following form :

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots \\ \beta &= \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

and the first order literal solution is written :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[n_{\alpha} (t - t_{\alpha}) + \sum_k \frac{as_k \sin k\gamma_0 + ac_k \cos k\gamma_0}{k\omega} \right] \cdot \varepsilon \\ \beta &= \left[n_{\beta} (t - t_{\beta}) + \sum_k \frac{bs_k \sin k\gamma_0 + bc_k \cos k\gamma_0}{k\omega} \right] \cdot \varepsilon \\ \gamma &= \gamma_0 + \left[n_{\gamma} (t - t_{\gamma}) + \sum_k \frac{cs_k \sin k\gamma_0 + cc_k \cos k\gamma_0}{k\omega} \right] \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (16)$$

with $\gamma_0 = \omega (t - t_{\gamma}) + \overline{\gamma_0}$.

and where t_{α} , t_{β} , and t_{γ} signify the existence of phase differences caused by the initial conditions. Starting from the first order the constants of integration no longer coincide with the initial conditions.

The solution, in the end, just like the disturbing torques, only depends on γ .

5.2. Substitution, identification and resolution

Substituting (15) in (7) and making $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ in the periodical coefficients, one obtains, if we restrict ourselves to the first order, the following system :

$$\begin{aligned} \varepsilon \{ (A \cos \gamma_0) \ddot{\alpha}_1 + (A \sin \gamma_0) \ddot{\beta}_1 + (-A+B-C) (\omega \sin \gamma_0) \dot{\alpha}_1 + (A-B+C) (\omega \cos \gamma_0) \dot{\beta}_1 \} &= N_1 \\ \varepsilon \{ (-B \sin \gamma_0) \ddot{\alpha}_1 + (B \cos \gamma_0) \ddot{\beta}_1 + (A-B-C) (\omega \cos \gamma_0) \dot{\alpha}_1 + (A-B-C) (\omega \sin \gamma_0) \dot{\beta}_1 \} &= N_2 \\ \varepsilon \{ C \ddot{\gamma}_1 \} &= N_3 \end{aligned} \quad (17)$$

In the same way, a similar approximation in the right hand members gives :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \left[K + \sum_{i=1}^m (p_i \sin i\gamma_0 + q_i \cos i\gamma_0) \right] \cdot \epsilon \\
 N_2 &= \left[K' + \sum_{i=1}^m (r_i \sin i\gamma_0 + t_i \cos i\gamma_0) \right] \cdot \epsilon \\
 N_3 &= \left[\sum_{i=1}^{m'} (u_i \sin i\gamma_0 + v_i \cos i\gamma_0) \right] \cdot \epsilon
 \end{aligned} \tag{18}$$

It is then possible to equate expressions ((17) and (18)) factorised to the same power of the small parameter ϵ . Let us inject the solution (16) and its derivatives in the differential equations(17). After substitution, we must convert the trigonometric products into sums of sine and cosine. Then, after factorisation, one obtains :

First equation :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[-(1+k)A+B-C \right] (as_k + bc_k) \sin(1+k)\gamma_0 \\
 + & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[(k-1)A+B-C \right] (as_k - bc_k) \sin(1-k)\gamma_0 \\
 + & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[(1+k)A-B+C \right] (bs_k - ac_k) \cos(1+k)\gamma_0 \\
 + & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[(1-k)A-B+C \right] (ac_k + bs_k) \cos(1-k)\gamma_0 \\
 + & \omega(-A+B-C) (n_\alpha) \sin\gamma_0 \\
 + & \omega(A-B+C) (n_\beta) \cos\gamma_0 \\
 = & K + \sum_{i=1}^m p_i \sin i\gamma_0 + \sum_{i=1}^m q_i \cos i\gamma_0
 \end{aligned} \tag{19}$$

Second equation :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[A-(1+k)B-C \right] (bs_k - ac_k) \sin(1+k)\gamma_0 \\
 + & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[A+(k-1)B-C \right] (ac_k + bs_k) \sin(1-k)\gamma_0 \\
 + & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[A-(1+k)B-C \right] (as_k + bc_k) \cos(1+k)\gamma_0 \\
 + & \frac{\omega}{2} \sum_k \left[A+(k-1)B-C \right] (as_k - bc_k) \cos(1-k)\gamma_0 \\
 + & \omega(A-B-C) (n_\alpha) \cos\gamma_0 \\
 & \dots\dots
 \end{aligned} \tag{20}$$

.....(continued)

$$\begin{aligned}
 &+ \omega(A-B-C)(n_\beta) \sin \gamma_0 \\
 = &K' + \sum_{i=1}^m r_i \sin i\gamma_0 + \sum_{i=1}^m t_i \cos i\gamma_0
 \end{aligned}$$

Third equation :

$$-C \sum_k k \omega c_k \sin k\gamma_0 - C \sum_k k \omega c_k \cos k\gamma_0 = \sum_{i=1}^{m'} u_i \sin i\gamma_0 + \sum_{i=1}^{m'} v_i \cos i\gamma_0 \quad (21)$$

The identification is easily done in the third equation. The results are given below with the entire solution. On the contrary, the identification in sine and cosine in the first two equations, does not give the coefficients immediately. Let us remark first of all, that, whatever the positive value of the index i , it is never absolutely necessary for the index k to be zero or negative to allow an identification. It is sufficient here to use the parity of the trigonometric functions. Therefore, for each value of i , we can infer k as $k \geq 1$. Not using $k=0$ presents the appreciable advantage of avoiding the problem of a zero divisor in the solution (16).

The systematic process of identification ends up in a system of $4N+10$ equations in $4N+6$ unknowns; and in fact 8 of these equations are equivalent by pairs. The system is then solvable.

The calculations have shown that the coefficients of the solution presented a sort of cross antisymmetry and that we could introduce two iterative formulae (S_i and D_i) in function of the disturbing coefficients p_i , q_i , r_i and t_i , so that we may have, for k greater than 1 :

$$\begin{aligned}
 as_k + bc_k &= 2 S_{k+1}(p_{k+1}, t_{k+1}) \\
 as_k - bc_k &= -2 D_{-(k-1)}(p_{k-1}, t_{k-1}) \\
 ac_k + bs_k &= -2 S_{-(k-1)}(q_{k-1}, r_{k-1}) \\
 ac_k - bs_k &= 2 D_{k+1}(q_{k+1}, r_{k+1}) \\
 n_\alpha &= S_1(p_1, t_1) \\
 n_\beta &= -D_1(q_1, r_1) \\
 n_\gamma &\text{ any value}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Knowing S_i and D_i , as_1 , bc_1 , ac_1 and bs_1 , the solution is totally determined.

6. SOLUTION

The complete formulation of the first order general analytic solution which expresses the attitude evolution of a satellite in a (strongly) perturbed (slow) rotation is the following, considering the initial conditions (let be $\alpha_i = \beta_i = 0$ and $\gamma_i = \overline{\gamma_0}$) :

Formal solution :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[n_\alpha (t-t_0) + \sum_{k=1}^M \frac{as_k \text{sink}\gamma_0 + ac_k \text{cosk}\gamma_0}{k\omega} - \overline{\alpha_1} \right] \cdot \epsilon \\ \beta &= \left[n_\beta (t-t_0) + \sum_{k=1}^M \frac{bs_k \text{sink}\gamma_0 + bc_k \text{cosk}\gamma_0}{k\omega} - \overline{\beta_1} \right] \cdot \epsilon \\ \gamma &= \gamma_0 + \left[n_\gamma (t-t_0) + \sum_{k=1}^M \frac{cs_k \text{sink}\gamma_0 + cc_k \text{cosk}\gamma_0}{k\omega} - \overline{\gamma_1} \right] \cdot \epsilon \end{aligned} \quad (23)$$

with :

$$\gamma_0 = \omega(t-t_0) + \overline{\gamma_0}$$

$$\overline{\alpha_1} = \sum_{k=1}^M \frac{as_k \text{sink}\overline{\gamma_0} + ac_k \text{cosk}\overline{\gamma_0}}{k\omega}$$

$$\overline{\beta_1} = \sum_{k=1}^M \frac{bs_k \text{sink}\overline{\gamma_0} + bc_k \text{cosk}\overline{\gamma_0}}{k\omega}$$

$$\overline{\gamma_1} = \sum_{k=1}^M \frac{cs_k \text{sink}\overline{\gamma_0} + cc_k \text{cosk}\overline{\gamma_0}}{k\omega}$$

$$M = \text{Sup}(m+1, m')$$

where m and m' are the highest boundaries of the variation indexes of the disturbing function (18).

Iterative coefficients :

$$\begin{aligned}
 k=1 \\
 n_{\alpha} &= S_1(p_1, t_1) = - \frac{(p_1 + t_1)}{2\omega C} \\
 n_{\beta} &= -D_1(q_1, r_1) = \frac{(q_1 - r_1)}{2\omega C} \\
 n_{\gamma} &= 0 \\
 as_1 &= S_2(p_2, t_2) + K' / [\omega(A-C)] \\
 ac_1 &= D_2(q_2, r_2) + K / [\omega(C-B)] \\
 bs_1 &= -D_2(q_2, r_2) + K / [\omega(C-B)] \\
 bc_1 &= S_2(p_2, t_2) - K' / [\omega(A-C)]
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 k>1 \\
 as_k &= S_{k+1}(p_{k+1}, t_{k+1}) - D_{-(k-1)}(p_{k-1}, t_{k-1}) \\
 ac_k &= -S_{-(k-1)}(q_{k-1}, r_{k-1}) + D_{k+1}(q_{k+1}, r_{k+1}) \\
 bs_k &= -S_{-(k-1)}(q_{k-1}, r_{k-1}) - D_{k+1}(q_{k+1}, r_{k+1}) \\
 bc_k &= S_{k+1}(p_{k+1}, t_{k+1}) + D_{-(k-1)}(p_{k-1}, t_{k-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k \geq 1 \\
 cs_k &= - \frac{u_k}{k\omega C} \\
 cc_k &= - \frac{v_k}{k\omega C}
 \end{aligned}$$

with the following formation law :

$$\begin{aligned}
 S_i(x_i, y_i) &= \frac{x_i(A+iB-C) + y_i(iA+B-C)}{2\omega[C^2 - BC - AC - (i+1)(i-1)AB]} \\
 D_i(x_i, y_i) &= \frac{x_i(A+iB-C) - y_i(iA+B-C)}{2\omega[C^2 - BC - AC - (i+1)(i-1)AB]}
 \end{aligned}$$

7. APPLICATION OF THE FIRST-ORDER THEORY

We have applied this theory for a realistic torque model accounting for the HIPPARCOS satellite's structure. After conversion into the basic frame of this work, the expression of the perturbations due to the radiation pressure and the gyroscopes, is the following :

$$N_1 = (10.6 - 5.442 \sin \gamma - 0.234 \sin 2\gamma + 0.471 \sin 4\gamma - 0.165 \sin 5\gamma + 6.206 \cos \gamma - 1.779 \cos 2\gamma - 0.126 \cos 4\gamma + 0.335 \cos 5\gamma) 10^{-6} \text{ N.m}$$

$$N_2 = (-6.218 \sin \gamma - 1.792 \sin 2\gamma + 0.127 \sin 4\gamma + 0.314 \sin 5\gamma - 5.452 \cos \gamma + 0.236 \cos 2\gamma + 0.474 \cos 4\gamma + 0.155 \cos 5\gamma) 10^{-6} \text{ N.m} \quad (25)$$

$$N_3 = (1.146 \sin 3\gamma - 0.144 \sin 6\gamma - 0.022 \sin 9\gamma + 0.765 \cos 3\gamma - 0.346 \cos 6\gamma + 0.111 \cos 9\gamma) 10^{-6} \text{ N.m}$$

The satellite HIPPARCOS is described by Kovalevsky (1982). In a first approximation, the rotational motion of the satellite is given by a nominal scanning law. And indeed, under the periodical action of gas jets, the satellite will not move away from its nominal attitude by more than a small value (10 minutes of arc). The nominal period P of rotation is the one adopted at present for HIPPARCOS, namely one revolution per 2.13 hours. It has been noticed that n_α and n_β were of an order respectively 42 and 37 times lower than ω .

The analytic solution has been presented according to a time sampling of 10 by 10 seconds within 10 revolutions. The initial conditions are :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 0 & \dot{\alpha}_i &= (n_\alpha + \sum_k a s_k) \epsilon \\ \beta_i &= 0 & \dot{\beta}_i &= (n_\beta + \sum_k b s_k) \epsilon \\ \gamma_i &= 0 & \dot{\gamma}_i &= \omega + (\sum_k c s_k) \epsilon \end{aligned} \quad (26)$$

where $\epsilon = 10^{-6}$.

The numerical integration of the initial equations (7) bearing the right hand members (25), starting from the initial conditions (26), has been computed according to the same sampling. The integration programme offered the advantage of a self-adjustment of the step of the seeking of convergence; and the computation has been carried out with double precision and with a 10^{-15} tolerance on the estimated solution. The values of $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N$ stemming from the numerical integration are compared with the values of $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A$ computed from the analytic solution. The differences that remain are partly due to a non rigorous identity in the choice of initial conditions and partly to the second order terms.

The curves of these differences (see figure 2) drawn within about 4 revolutions clearly point out the existence of periodical terms in higher orders. We can notice the absence of significant secular terms in the second order of α and β , but a secular error term is clearly apparent in Δ_γ . We can rediscover in curves Δ_α and Δ_β the nominal rota-

tion period of about 7700 seconds. The regularity of the curves, particularly that of curve Δ_β , shows the good consistency of this theory. Of course for HIPPARCOS, with the periodical action of the gas jets, we limit the observation of the attitude drift to 10 minutes of arc but from a point of view of the Celestial Mechanics, it is worth observing its evolution well beyond. Accordingly there are no gas jet firings to correct the attitude, even though discrepancies grow to many times the stipulated tolerance of $10'$.

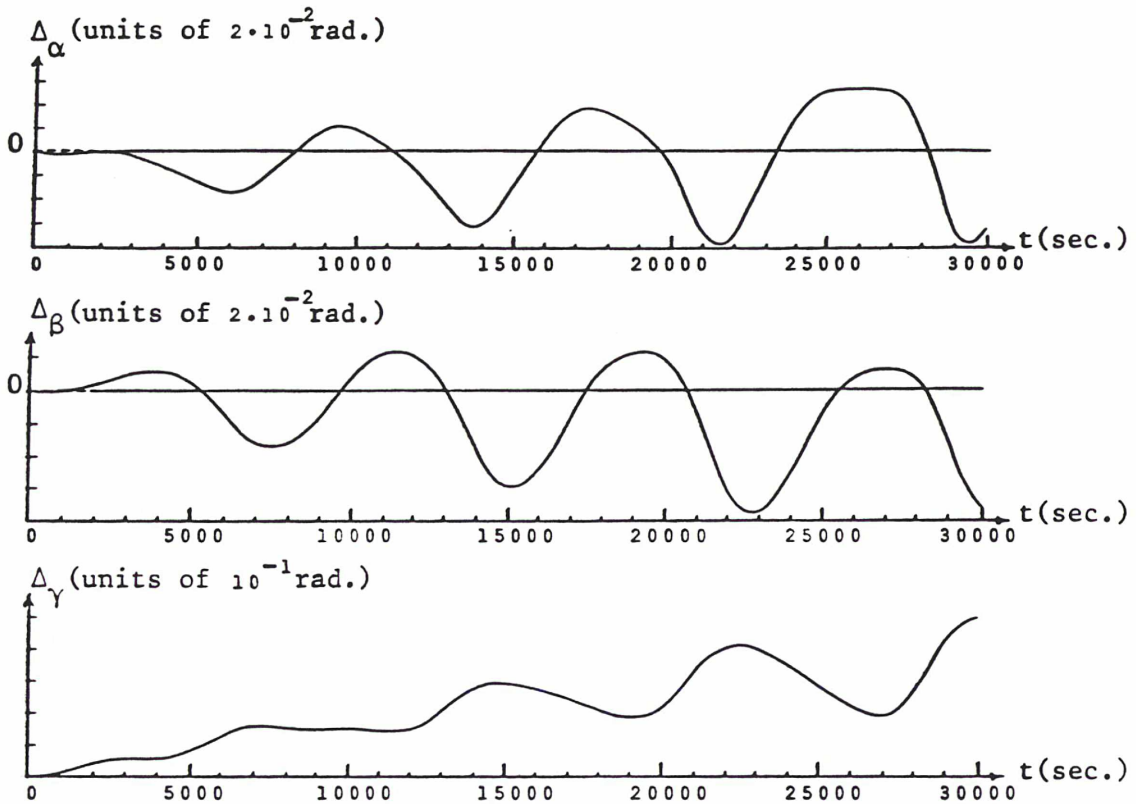


Figure 2. Differences between the analytical solution and the numerical integration during the first 4 revolutions.

The discrepancy occurs beyond 65 000 seconds, towards the eighth revolution. It can be attributed to a drift of the numerical integration. The round-off errors become larger than the differences.

On the other hand, from 10 to 600 seconds (probable time interval between resetting the initial condition of the rotation of HIPPARCOS by gas jets), the absolute accuracy goes from $0''.001$ to $18''$ for α , from $0''.0002$ to $4''$ for β , from $0''.04$ to $6''.8$ for γ . β seems to be the angle from which we can expect the best accuracy. These results are not satisfactory. By the method described lower (see 8. Discussion) we have shown that the reason of shortcomings was the neglected second-order terms of the theory.

The computations have also been taken up by increasing the rotation velocity. When we go from ω to 10 times ω :

1. n_α and n_β are 100 times smaller,
2. the accuracy is 100 times better on the three positions,
3. the discrepancy remains the same on γ but becomes 100 times lower on α and β .

This last result simply expresses the sensitivity of the influence of the ratio "perturbations-rotation velocity" towards the attitude drifting and the importance of the second order terms.

8. DISCUSSION

In order to find out the reason of the misfit we have studied the most unfavourable case which is that of γ .

On 10 000 seconds, the secular error in Δ_γ is about $15 \cdot 10^{-6}$ rad/s. The numerical correction of this value suppresses the slope of curve Δ_γ . It remains then a curve similar to curves Δ_α or Δ_β .

In parallel, we note that the expansion to the second-order of the third equation of the differential system (7) includes many sinusoidal terms :

$$\ddot{\gamma}_2 + \left[1 - \frac{(A-B)}{C} \cos 2\gamma_0 \right] \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 + \frac{1}{2} \frac{(A-B)}{C} (\dot{\alpha}_1^2 - \dot{\beta}_1^2) \sin 2\gamma_0 \quad (27)$$

$$+ \beta_1 \ddot{\alpha}_1 = \frac{\gamma_1}{C} \sum_{i=1}^{m'} i (u_i \cos i\gamma_0 - v_i \sin i\gamma_0)$$

This equation expanded to the second-order contains only terms determined by the first-order theory. A numerical estimation of the sinusoidal term is then possible.

The first portion of the curve of $\ddot{\gamma}_2$ (see figure 3) is half of the period of a sinusoid whose period is about 2560 seconds. That is typical of terms in 3γ arising from the right hand member of the equation (27). We evaluated it under the form :

$$\gamma_2 = - \frac{A \sin(3\gamma_0 + \phi)}{\omega^2} \quad (28)$$

with an imposed period equal to 2556 seconds, i.e. $P/3$, using a least squares programme to get the amplitude A and the phase ϕ with respect to the origin. $\ddot{\gamma}_2$ is by six orders of magnitude smaller than Δ_γ , but by the presence of the small divisor ω^2 , γ_2 has the same order of magnitude than Δ_γ . We note again the effect of the hypothesis of a slow rotation. Let us add γ_2 to the analytic solution γ_A . The result is compared to the numerical solution γ_N . And one obtains a new curve Δ_γ which, with a correction of the slope, is close to a sinusoid of period 1280 seconds, that is to say formed by terms in 6γ . In subtracting afterwards to Δ_γ , a model of this portion of a sine function of period $P/6$, we obtain the new curve of Δ_γ in figure 4. The absolute accuracy is really improved :

$$\left| \Delta_\gamma \right| < 0.4$$

The figure 4 shows also Δ_α and Δ_β of the figure 2 but drawn on 600 seconds (typical time interval for HIPPARCOS).

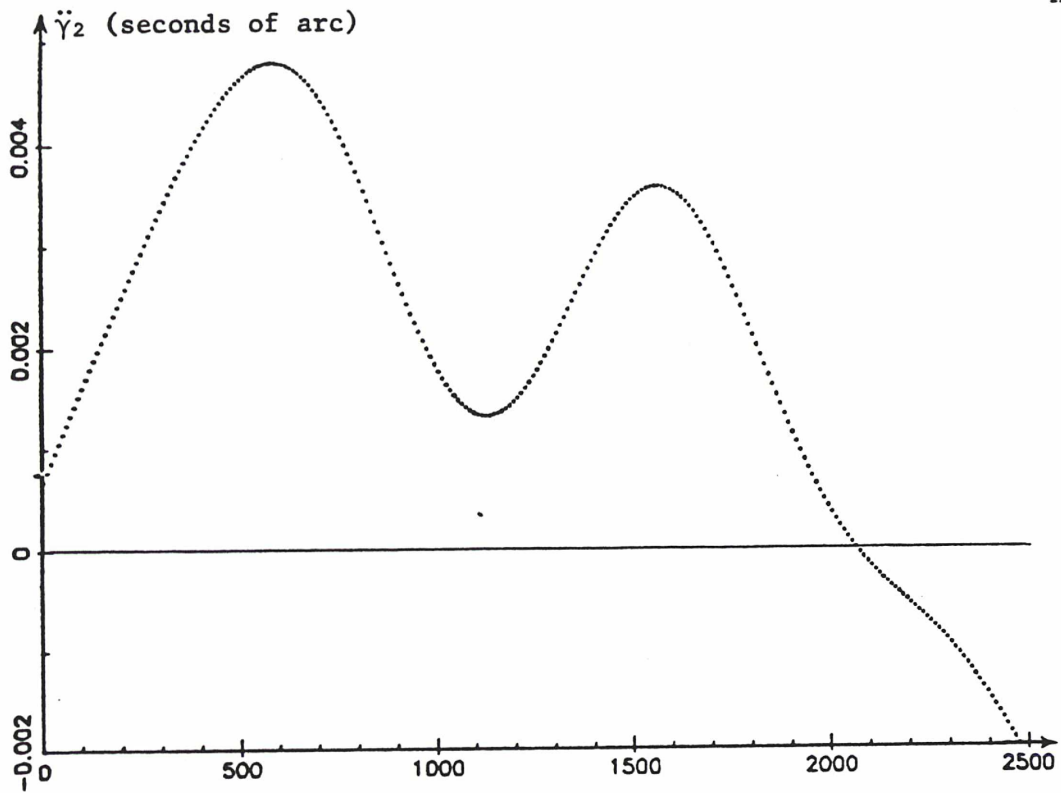


Figure 3. Curve of $\ddot{\gamma}_2$ on 2 500 seconds.

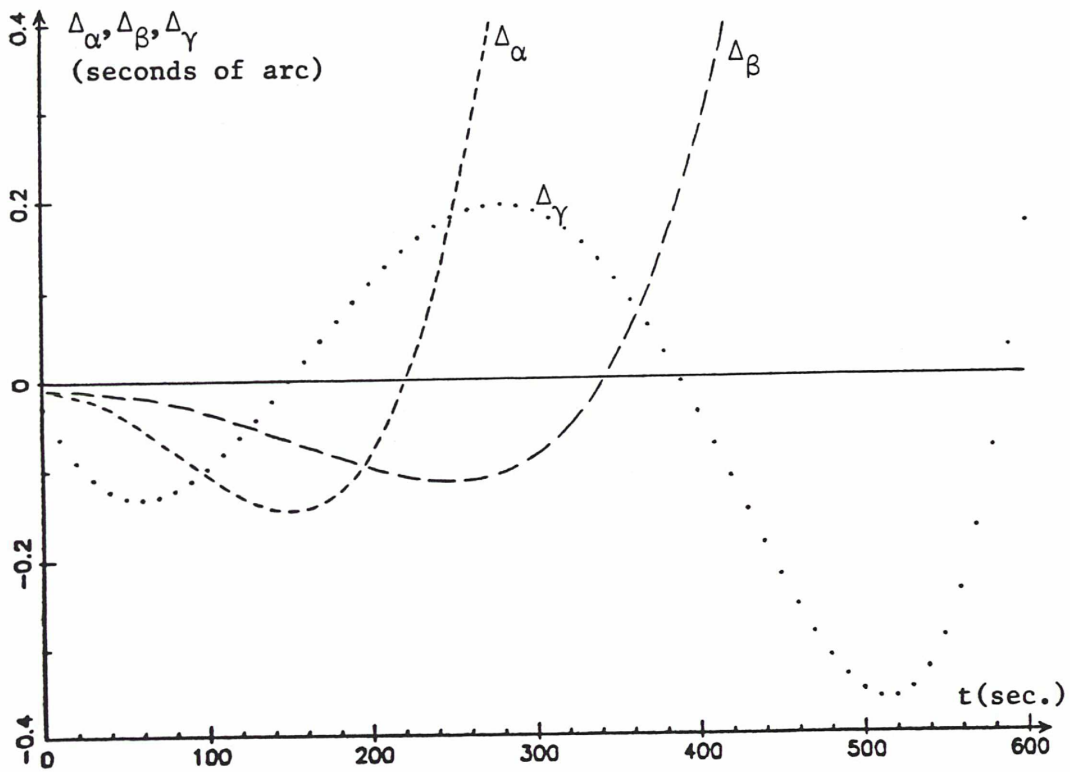


Figure 4. Differences between the analytical solution and the numerical integration on 600 seconds.

Only with these two simple methods we succeeded in going reducing the error to less than a second of arc. The same procedure on α and β would give some even more appreciable results. In order to check this and to present a fully consistent theory, it is necessary to build a complete second-order theory. We are presently doing this, but the tests presented here already show that such a theory would greatly improve the results.

9. CONCLUSION

The mathematical representation of the attitude motion of a satellite constitutes the main subject of this study. The method of resolution and the solution of the fundamental equations of the rotation motion is finally applicable to any disturbing right hand member expanded into sinusoidal series. The existence of an iterative formation law for the coefficients of the solution represents the advantage of this method. Beyond the saving of computation time, the number of terms of the series of the right hand member may be as large as necessary. The numerical application shows how the theory behaves on a large time scale but also on a short one. The reason of misfit of the results are principally to be assigned to the second-order. The accuracy of the results arising from the theory restricted to the first-order alone remains insufficient with respect to the astrometric requirements of HIPPARCOS. Nevertheless it is the form of the solution which must be taken into account and an analytical second-order theory will provide, hopefully, the required accuracy.

REFERENCES

- Bernacca, P.L., 1985, "Project HIPPARCOS", *Astrophysics and Space Science* 110 (1985), p. 21-45.
- Cappallo, R.J., 1980, "The rotation of the Moon", Ph.D.Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Cochran, J.E., 1971, "Rotational equations of motion for a triaxial rigid body", *A.I.A.A. Journal*, New-York, vol. 9, n°6, June 1971, p. 1195-1197.
- Crenshaw, J.W. and Fitzpatrick, P.M., 1968, "Gravity effects on the rotational motion of a uniaxial artificial satellite", *A.I.A.A. Journal*, vol. 6, n°11, Nov. 1968, p. 2140-2145.
- Froeschlé, M. and Mignard, F., 1983, "La simulation des données brutes HIPPARCOS - Les rendez-vous", in P.L. Bernacca (ed.), "The FAST Thinkshop: Processing of scientific data from the ESA Astrometry Satellite HIPPARCOS", Held in Asiago, Mai 1983, Univ. of Padova, p. 81.
- Goldstein, H., 1964, "Mécanique Classique", Presses Universitaires de France, p. 172.
- Kovalevsky, J., 1963, "Introduction à la Mécanique Céleste", Armand Colin, p. 101-110.

- Kovalevsky, J., 1982, "The satellite HIPPARCOS", Proceedings of an International Colloquium on the scientific aspects of the HIPPARCOS mission, held at Strasbourg, February 1982, ESA-SP-177, p. 15.
- Kovalevsky, J., 1984, "Prospects for space stellar astrometry", Space Science Reviews 39 (1984), p. 1-63.
- Landau, L., et Lifchitz, E., 1969, "Mecanique", MIR Moscou, p. 162.
- Migus, A., 1977, "Théorie analytique de la libration physique de la Lune", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- Pinard, M., Stellmacher, I., Van der Marel, H., Kovalevsky, J., and Saint-Crit, L., 1983, "HIPPARCOS Attitude simulation", in P.L. Bernacca (ed.), "The FAST Thinkshop: Processing of scientific data from the ESA Astrometry Satellite HIPPARCOS", Held in Asiago, Mai 1983, Univ. of Padova, p. 91.
- Stellmacher, I., 1972, "Evolution d'attitude d'un satellite dans le champ magnétique terrestre", Note technique GRGS/BDL/1972/100.
- Stellmacher, I., 1972, "Influence du champ magnétique terrestre sur le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité", Celestial Mechanics, vol. 5, n°4, p. 470.
- Stellmacher, I., 1974, "Contribution à l'étude du mouvement autour du centre de gravité d'un satellite en rotation dans le champ magnétique terrestre", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- Tisserand, F., 1960, "Traité de Mécanique Céleste", Gauthier-Villars, vol. II, p. 372.
- Van der Ha, J., 1985, "Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques", Acta Astronautica, vol. 12, n°10, October 1985, p. 861-869.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Afonso, G., Barlier, F., Berger, C., Mignard, F., Walch, J.J., 1985, "Reassessment of the charge and neutral drag of LAGEOS, and its geophysical implications", *JGR Vol. 90, B11*, p. 9381-9398.

Andoyer, H., 1923, "Cours de Mécanique Céleste", vol. 1, Gauthiers- Villars, Paris.

Barlier, F., Berger, C., Falin, J.L., Kockarts, G. and Thuillier, G., 1978, "A thermospheric model based on satellite drag data", *Ann. Geophys.*, t. 34, fasc. 1, p. 9-24.

Barlier, F., Carpino, M., Farinella, P., Mignard, F., Milani, A., Nobili, A.M., 1986, "Non-gravitational perturbations on the semimajor axis of LAGEOS", *Annales Geophysicae*, vol. 4, A3, p. 193-210.

Barlier, F., Pastre, C., Mainguy, A.M., Juillerat, R., Paillous, A., Romero, M., Walch, J.J., Boudon, Y., Cazenave, A., 1978, "Study of atmospheric balance by measurement of radiation pressure", *ESA Journal*, vol. 2, p. 28-36.

Beletzky, V.V., 1965, "Mouvement d'un satellite artificiel par rapport à son centre de masse", Editions Naouka, Moscou, en russe.

Beletzky, V.V., 1975, "Mouvement d'un satellite par rapport à son centre de masse dans un champ de gravitation", Editions Université de Moscou, en russe.

Bernacca, P.L., 1985, "Project HIPPARCOS", *Astrophysics and Space Science*, vol. 110, p. 21-45.

Bois, E., 1987, "First-order theory of satellite attitude motion - Application to HIPPARCOS", accepté à *Celestial Mechanics*.

Boudon, Y., Barlier, F., Bernard, A., Juillerat, R., Mainguy, A.M., Walch, J.J., 1979, "Synthesis of flight results of the CACTUS accelerometer for accelerations below $10^{-9}g$ ", *Astronautica Acta*, vol. 6, n. 9.

Cochran, J.E., 1971, "Rotational equations of motion for a triaxial rigid body", *A.I.A.A. Journal*, vol. 9, n. 6, p. 1195-1197.

Cochran, J.E., 1972, "Effects of gravity-gradient torque on the rotational motion of a triaxial satellite in a precessing elliptic orbit", *Celestial Mechanics*, vol. 6, p. 127-150.

Crenshaw, J.W. and Fitzpatrick, P.M., 1968, "Gravity effects on the rotational motion of a uniaxial artificial satellite", *A.I.A.A. Journal*, Vol. 6, n. 11, p. 2140-2145.

Deprit, A., 1967, *Amer. J. Phys.*, vol. 35, p 424-428.

Donaldson, J.D. and Jezewski, D.J., "An element formulation for perturbed motion about the center of mass", *Celestial Mechanics*, vol. 16, p. 367-387.

Donati, F., Canuto, E., Fassino, B. and Belforte, P., 1986, "High accuracy on-ground attitude reconstitution for the ESA astrometry HIPPARCOS mission", *manuscripta geodaetica*, vol. 11, n. 2, p. 119.

Froeschlé, M. and Mignard, F., 1983, "La simulation des données brutes HIPPARCOS - Les rendez-vous", in P.L. Bernacca ed., "The FAST Thinkshop: Processing of scientific data from the ESA Astrometry Satellite HIPPARCOS", held in Asiago, Mai 1983, Univ. of Padova, p. 81.

Goldstein, H., 1957, "Classical Mechanics" (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957), p. 107-109.

Goldstein, H., 1964, "Mécanique classique", Presses Universitaires de France, p. 172.

Gupta, S.C. and Narchal, M.L., 1972, "A note on Euler's angles", *Am. J. Physics*, vol. 40, p. 345-346.

Hitzl, D.L. and Breakwell, J.V., 1971, "Resonant and non-resonant gravity - gradient perturbations of a tumbling tri-axial satellite, *Celestial Mechanics*, vol. 3. p. 346-383.

Jupp, A.H., 1969, *Astron. J.*, vol. 74, p. 35-53.

Jupp, A.H., 1972, *Celestial Mechanics*, vol. 5, p. 8-26.

Jupp, A.H., 1973, *Celestial Mechanics*, vol. 8, p. 523.

Jupp, A.H., 1974, "On the free rotation of a rigid body", *Celestial Mechanics*,

vol. 9, p. 3-20.

Kinoshita, H., 1977, "Theory of the rotation of the rigid Earth", *Celestial Mechanics*, vol. 15, p. 277-326.

Kovalevsky, J., 1963, "Introduction à la Mécanique Céleste", Armand Colin, p. 101-110.

Kovalevsky, J., 1982, "The satellite HIPPARCOS", *Proceedings of an International Colloquium on the scientific aspects of the HIPPARCOS mission, held at Strasbourg, ESA-SP-177*, p. 15-20.

Kovalevsky, J., 1984, "Prospects for space stellar astrometry", *Space Science Reviews*, vol. 39, p. 1-63.

Kovalevsky, J. and Bois, E., 1986, "Attitude determination of the HIPPARCOS satellite", *Space Dynamics and Celestial Mechanics*, p. 345-354.

Landau, L. and Lifchitz, E., 1969, "Mécanique", Editions MIR, Moscou, p. 166.

Liu, J.J.F. and Fitzpatrick, P.M., 1975, "Poisson equations of rotational motion for a rigid triaxial body with application to a tumbling artificial satellite", *Celestial Mechanics*, vol. 12, p. 463-487.

MATRA ESPACE, 1982, "HIPPARCOS", Doc. n. : E21-HIP-00767.

Migus, A., 1977, "Théorie analytique de la libration physique de la Lune", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Pinard, M., Stellmacher, I., Van der Marel, H., Kovalevsky, J. and Saint-Crit, L., 1983, "HIPPARCOS attitude simulation", in P.L. Bernacca, ed., "The FAST Thinkshop: Processing of scientific data from the ESA Astrometry Satellite HIPPARCOS", held in Asiago, Mai 1983, Univ. of Padova, p. 91.

Stellmacher, I., 1972, "Evolution d'attitude d'un satellite dans le champ magnétique terrestre", Note technique GRGS/BDL/1972/100.

Stellmacher, I., 1972, "Influence du champ magnétique terrestre sur le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité", *Celestial Mechanics*, vol. 5. n. 4, p. 470.

Stellmacher, I., 1974, "Contribution à l'étude du mouvement du centre de gravité

d'un satellite en rotation dans le champ magnétique terrestre", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Tisserand, F., 1960, "Traité de Mécanique Céleste", Gauthiers-Villars, vol. II, p. 372.

Van der Ha, J.C., 1977, "Analytical evaluation of solar radiation induced orbital perturbations of space structures", *Journal of Astronautical Sciences*, vol. 25, n. 4, p. 283-306, formule (11).

Van der Ha, J.C., 1985, "Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques", *Acta Astronautica*, vol. 12, n. 10, p. 861-869.

Walch, J.J., 1984, "Etude de la pression de radiation réémise par la Terre. Applications à la climatologie et la géodésie", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Whittaker, E.T., 1964, "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies", Cambridge University Press, London.

Zare, K., 1976, "The effects of integrals on the totality of solutions of dynamical systems", Doctoral dissertation, University of Texas at Austin.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	2
INTRODUCTION ET JUSTIFICATION D'UNE RECHERCHE ANALYTIQUE DE L'EVOLUTION D'ATTITUDE D'UN SATELLITE	3
BREF HISTORIQUE DES TRAVAUX RELATIFS À LA REPRÉSENTATION DU MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS RIGIDE DANS L'ESPACE	5
INTRODUCTION À L'ETUDE DE L'EVOLUTION D'ATTITUDE D'UN SATELLITE EN ROTATION PERTURBÉE	7
<u>PREMIÈRE PARTIE</u>	10
CHAPITRE I : LE SYSTEME DE BASE	11
I.1. LES SYSTÈMES D'AXES DE COORDONNÉES.....	11
I.1.1. LE SYSTÈME DE RÉFÉRENCE.....	11
I.1.2. LE SYSTÈME D'AXES LIÉS AU CORPS	11
I.2. LES DONNÉES RELATIVES AU SATELLITE.....	11
I.3. RECHERCHE DES ANGLES DE POSITION	11
I.4. LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT	17
CHAPITRE II : LES PERTURBATIONS	20
II.1. LE COUPLE DE PRESSION DE RADIATION SOLAIRE DIRECTE	20
II.2. LES COUPLES PRODUITS PAR LES GYROSCOPES	20
II.3. LE COUPLE DE GRADIENT DE GRAVITÉ TERRESTRE	21
II.4. LE COUPLE D'ORIGINE MAGNÉTIQUE	21
II.5. AUTRES COUPLES	21
II.6. DÉVELOPPEMENTS DES PERTURBATIONS EN SÉRIES DE FOURIER	22
<u>DEUXIÈME PARTIE</u>	24
CHAPITRE III : THEORIE DEVELOPPEE AU PREMIER ORDRE	25
III.1. RECHERCHE DE LA FORME DE LA SOLUTION	25
III.2. SUBSTITUTION, IDENTIFICATION ET RÉOLUTION	29
III.3. LA SOLUTION	32

CHAPITRE IV : THEORIE DEVELOPPEE AU DEUXIEME ORDRE	34
IV.1. RECHERCHE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	34
IV.2. MÉTHODE DE RÉOLUTION	38
IV.2.1. CONVERSION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	38
IV.2.2. DISCUSSION	42
IV.2.3. CONVENTIONS CONCERNANT LES NOTATIONS	43
IV.2.4. RÉOLUTION DE LA TROISIÈME ÉQUATION (43)	44
IV.2.5. RÉOLUTION DES DEUX PREMIÈRES ÉQUATIONS (41) ET (42)	46
IV.2.6. DÉCOUPAGE DE LA SOLUTION PAR RAPPORT À n_{γ_1}	51
IV.3. LA SOLUTION	57
CHAPITRE V : QUELQUES ELEMENTS DU TROISIEME ORDRE	60
V.1. ORDRE 3 DE LA TROISIÈME ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE	60
V.2. CALCUL D'UNE INTÉGRALE PREMIÈRE DE $\dot{\gamma}_3$	60
V.3. DÉTERMINATION DU TERME SÉCULAIRE n_{γ_1}	61
<u>TROISIÈME PARTIE</u>	62
CHAPITRE VI : APPLICATION AU SATELLITE HIPPARCOS	63
VI.1. INTRODUCTION	63
VI.2. THÉORIE LIMITÉE AU PREMIER ORDRE	66
VI.3. THÉORIE ÉTENDUE AU DEUXIÈME ORDRE	71
CONCLUSION	76
APPENDICE I : FORMULAIRE DE LA SÉQUENCE 3.2.1	79
APPENDICE II : COMPARAISON ENTRE LES SÉQUENCES 1.2.3 ET 3.2.1	80
APPENDICE III: FORMULAIRE DE LA RÉOLUTION DU MOUVEMENT LIBRE DANS LES SÉQUENCES 1.2.3, 3.2.1 ET 3.1.3	81
ANNEXE 1 : "ATTITUDE DETERMINATION OF THE HIPPARCOS SATELLITE"	84
ANNEXE 2 : "FIRST-ORDER THEORY OF SATELLITE ATTITUDE MOTION. APPLICATION TO HIPPARCOS"	95
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	116
TABLE DES MATIERES	120