



HAL
open science

Recherches sur la densité et la loi de force dans la galaxie au voisinage du Soleil

Catherine Turon Lacarrieu

► **To cite this version:**

Catherine Turon Lacarrieu. Recherches sur la densité et la loi de force dans la galaxie au voisinage du Soleil. Planète et Univers [physics]. Faculté des sciences de Paris, 1968. Français. NNT : 1968PA000008 . tel-02147540

HAL Id: tel-02147540

<https://hal.science/tel-02147540>

Submitted on 4 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E

PRESENTEE A

LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

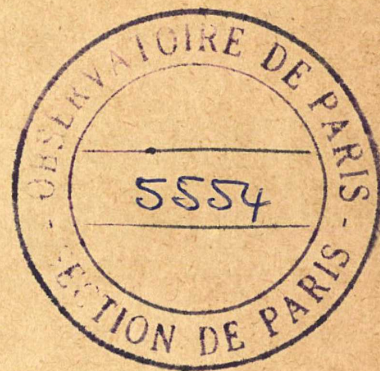
POUR L'OBTENTION

DU DOCTORAT 3^{ème} CYCLE

Spécialité : ASTRONOMIE

par

Catherine TURON LACARRIEU



Sujet de la Thèse : « Recherches sur la densité et la loi de force dans la galaxie au voisinage du soleil ».

Soutenue le 19 Novembre 1968 devant la Commission composée de :

MM. THIRY

Président

RÖSCH

Examineurs

DELHAYE

T H E S E

PRESENTEE A

LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

POUR L'OBTENTION

DU DOCTORAT 3^{ème} CYCLE

Spécialité : ASTRONOMIE

par

Catherine TURON LACARRIEU



Sujet de la Thèse : «Recherches sur la densité et la loi de force dans la galaxie au voisinage du soleil».

Soutenue le 19 Novembre 1968 devant la Commission composée de :

MM. THIRY	<i>Président</i>
RÖSCH	<i>Examineurs</i>
DELHAYE	

P L A N

INTRODUCTION

I - BASE THEORIQUE ET RECHERCHES ANTERIEURES

- 1) Hypothèses et équations de base
- 2) Recherches antérieures

II - UTILISATION DE LA METHODE DE KING POUR L'ETUDE DES MOUVEMENTS PERPENDICULAIRES AU PLAN GALACTIQUE

- 1) Introduction et définition des pseudo-moments
- 2) Equations utilisées
- 3) Calcul de ρ_0 . Matériel : gK (Miss ROMAN, UPGREN)
 - a) Matériel de Miss ROMAN (1952). Calcul du pseudo-moment
 - b) Matériel d'UPGREN.(1962). Calcul de la dérivée seconde de la densité pour $z = 0$
 - c) Calcul de ρ_0
- 4) Calcul de ρ_0 et de $Kz(z) - z \leq 110$ pc
Matériel : gKO à K2 (EGGEN)
 - a) Matériel d'EGGEN
 - b) Calcul de $\frac{d}{dz} \text{Log } N$ en fonction de z et de $\left(\frac{d^2}{dz^2} \text{Log } N \right)_{z=0}$
 - c) Calcul du pseudo-moment en fonction de z -
 - d) Calcul de $Kz(z)$ pour $z \leq 110$ pc et de ρ_0

5) Calcul de ρ_0 et de $Kz(z)$ $z \leq 150$ pc
Matériel : gKO - K2 (EGGEN) pour les vitesses
gKO (UPGREN) pour la densité

a) Calcul de $\frac{d}{dz} \text{Log } N$ en fonction de z

b) Calcul de $Kz(z)$ $z \leq 150$ pc et de ρ_0

6) Calcul de ρ_0 et de $Kz(z)$ $z \leq 1250$ pc
Matériel : gKO (UPGREN) pour la densité
résultats de HILL (1960) pour les vitesses

a) Résultats de HILL (1960)

b) Calcul du pseudo-moment en fonction de z

c) Calcul de la dérivée $\frac{d}{dz} \text{Log } N$ en fonction de z

d) Calcul de $Kz(z)$ $z \leq 1250$ pc et de ρ_0

7) Conclusion

III - CALCUL DE $Kz(z)$ PAR L'EQUATION DE POISSON DISCUSSION DES LOIS DE VITESSES ET DE DENSITE

1) Calcul d'un potentiel vérifiant l'équation de POISSON simplifiée

a) Données de BLAAUW

b) Choix des lois de densité

c) Calcul des potentiels correspondant aux lois de densité proposées

d) Influence de la répartition de la "matière inconnue" sur le potentiel

2) Calcul de la dispersion des vitesses en fonction de z pour le groupe 3 : vieille population I

3) Conclusion

CONCLUSION GENERALE

INTRODUCTION :

L'étude des mouvements perpendiculaires au plan galactique est particulièrement intéressante car elle permet d'atteindre, par l'intermédiaire du potentiel galactique et de l'équation de POISSON, la densité de masse totale au voisinage du soleil (nous l'appellerons densité théorique). Les résultats obtenus : 0,08 à 0,23 M_{\odot}/pc^3 (0,15 étant la valeur généralement admise) posent le problème de l'existence de la matière inconnue. En effet, l'observation directe des différentes sortes d'étoiles et de la matière interstellaire (gaz et poussière) conduit à une valeur inférieure à la majorité des résultats obtenus par l'étude dynamique :

BLAAUW (1965) donne 0,061 M_{\odot}/pc^3 pour les objets brillants,
0,025 pour la matière interstellaire,

ce qui donne une densité totale observée de 0,086 M_{\odot}/pc^3 .

LUYTEN (1967) donne 0,064 M_{\odot}/pc^3 pour les objets brillants, on obtient alors une densité totale observée de 0,089 M_{\odot}/pc^3 .

WIEDERMAN (1967) trouve, pour les naines blanches, une densité de masse de 0,015 à 0,030 M_{\odot}/pc^3 (BLAAUW donne 0,008 M_{\odot}/pc^3).

On obtient alors une densité totale observée de 0,096 à 0,111 M_{\odot}/pc^3 .

Le problème est donc de savoir si l'écart entre ces deux séries de valeurs est significatif ou non. Pour EELSALU (1961), et WOOLLEY et STEWART (1967) qui trouvent respectivement 0,08 et 0,11 M_{\odot}/pc^3 pour la densité théorique, l'écart n'est pas significatif, les incertitudes sur les mesures étant suffisamment grandes pour le justifier. Pour la plupart des autres auteurs, le problème reste posé :

.../...

- existence de matière inconnue trop peu lumineuse ou trop lointaine pour être observée actuellement.

- données d'observation trop imprécises ou trop peu nombreuses pour que l'étude dynamique soit vraiment valable.

- validité des hypothèses à discuter :

- 1) Stationnarité du système d'étoiles considéré,
- 2) Homogénéité de la galaxie.

Après OORT (1932), l'étude a été reprise par NAHON (1957), WOOLLEY (1957), HILL (1960), OORT (1960), EELSALU (1961), YASUDA (1961), JONES (1962); et plus récemment par STOTHERS et TECH (1964), PERRY (1965), WOOLLEY et STEWART (1967). PERRY a essayé d'éliminer une des principales causes d'erreur : il a déterminé les distributions de densité et de vitesse à partir des mêmes étoiles, qu'il a observé lui-même. Son étude repose, pour les étoiles A, le problème de la stationnarité. WOOLLEY, qui avait été amené, à la suite de sa première étude, à supposer l'existence d'une concentration de matière à environ 150 pc du soleil (conclusion reprise par JONES en 1962), a repris le problème avec STEWART à partir de nouvelles données. Ils ont considéré le potentiel comme somme d'un potentiel newtonien dû à la masse totale de la galaxie concentrée en son centre et d'un potentiel dû seulement à l'action des étoiles du cylindre considéré. Ils arrivent ainsi à une des seules valeurs compatibles avec la densité obtenue par l'observation. STOTHERS et TECH (1964) résolvent le problème de façon totalement différente, en abandonnant la stationnarité.

De nouveaux catalogues ont été établis : comptages d'étoiles vers le pôle galactique Nord (UPGREN, 1962), vers le pôle galactique Sud (BOK et BASINSKI, 1964) ; vitesses spatiales (EGGEN, 1962). Les données de base actuellement disponibles sur la répartition spatiale (en particulier : densité

dans le plan galactique, distance à laquelle la densité est divisée par 10) et sur la cinématique (en particulier : dispersion des vitesses dans la direction perpendiculaire au plan galactique) ont été rassemblées par BLAAUW (Galactic Structure, 1965).

D'autre part, KING (1965) et NAHON (1966) ont chacun étudié une méthode pour simplifier l'équation de l'hydrodynamique.

Le but de ce travail est d'appliquer la méthode de KING à l'étude des mouvements perpendiculaires au plan galactique. L'introduction des "pseudo-moments" dans l'équation de l'hydrodynamique permet de calculer l'accélération perpendiculaire au plan galactique $K_z(z)$ directement à partir de la loi de densité et du "pseudo-moment". Le passage à la limite pour $z = 0$ permet d'obtenir, par l'intermédiaire de l'équation de POISSON, la densité totale au voisinage du soleil. Ce travail a été effectué à partir de différents matériels, les données de vitesses et de densité ne provenant pas toujours d'une même source. Les résultats obtenus pour ρ_0 sont acceptables mais peu précis, par contre les solutions trouvées pour $K_z(z)$ ne sont pas satisfaisantes (elles sont incompatibles avec l'équation de POISSON simplifiée par l'hypothèse de symétrie axiale). Il semble donc préférable, dans l'état actuel des observations, de calculer $K_z(z)$ en intégrant directement l'équation de POISSON, ρ_0 étant déterminée au préalable par la première méthode. C'est ce qui sera fait dans la deuxième partie de ce travail. La loi de force ainsi obtenue est tout à fait satisfaisante. Elle permet, en particulier, de discuter les lois de vitesse et de densité.

Un matériel plus complet et plus précis permettrait d'une part d'améliorer ces résultats et d'autre part de discuter la validité des hypothèses de stationnarité et d'homogénéité.

I - BASE THEORIQUE ET RECHERCHES ANTERIEURES :

1) Hypothèses et équations de base :

Les deux équations fondamentales en dynamique stellaire sont :

- l'équation de POISSON :

$$\Delta V = - 4 \pi G \rho$$

V : potentiel galactique

G : c^{te} de la gravitation

ρ : densité de masse totale

- et l'équation de BOLTZMANN :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

f : densité dans l'espace des phases

x_k : coordonnées dans l'espace des phases : $\underbrace{x, y, z}_{\text{position}}, \underbrace{u, v, w}_{\text{vitesse}}$

Trois hypothèses permettent de simplifier ces équations :

- 1° - Le système d'étoiles considéré est en état d'équilibre,
- 2° - Le système d'étoiles considéré est à symétrie axiale,
- 3° - Le potentiel est séparable en z et en r (distance au centre galactique).

... / ...

En introduisant l'accélération K

K_r : dans la direction du centre

K_z : dans la direction perpendiculaire au plan galactique

on obtient :

$$(I) \quad \frac{\partial K_r}{\partial r} + \frac{K_r}{r} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = -4\pi G \rho$$

$$(II) \quad u \frac{\partial f}{\partial r} + w \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{uv}{r} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

En multipliant l'équation II par w, et en intégrant sur tout l'espace des vitesses, on obtient l'équation de l'hydrodynamique pour les mouvements perpendiculaires au plan galactique :

$$(III) \quad \frac{\partial (N w^2)}{\partial z} = -N \frac{\partial v}{\partial z} = N K_z$$

avec $N = \int f \, d\Omega$ $d\Omega$: élément de volume de l'espace des vitesses.

Les équations I et III sont la base de la plupart des recherches sur les mouvements perpendiculaires au plan galactique.

... / ...

2) Recherches antérieures :

Les premières recherches sur le sujet sont celles de OORT (1932). Il applique l'équation III, en supposant $\overline{w^2}$ constant, aux systèmes des étoiles A et des géantes G - K. Les solutions calculées sont en désaccord entre elles et avec la solution générale calculée en groupant les étoiles d'après leur magnitude absolue. Une étude ultérieure (1941) sur les RR Lyrae donne encore un résultat différent. NAHON (1957) s'inspire de la solution "générale" de OORT pour donner une forme analytique simple à Kz :

$$\begin{aligned} Kz &= -k^2 z \text{ pour } z < a \\ &= -k^2 a \text{ pour } z > a \end{aligned}$$

Il calcule k^2 et a.

HILL (1960) utilise de nouveau l'équation III, mais sans supposer que $\overline{w^2}$ est constant. Il utilise, pour le calculer, les géantes K du matériel de Miss ROMAN. Ces étoiles sont séparées en trois groupes : "strong-line", "weak-line", et étoiles à grande vitesse, chaque groupe ayant une distribution de vitesse gaussienne. La solution pour Kz ainsi obtenue est en contradiction avec l'équation de POISSON sous sa forme (I) pour $z > 500$ pc. En effet, les deux premiers termes étant positifs :

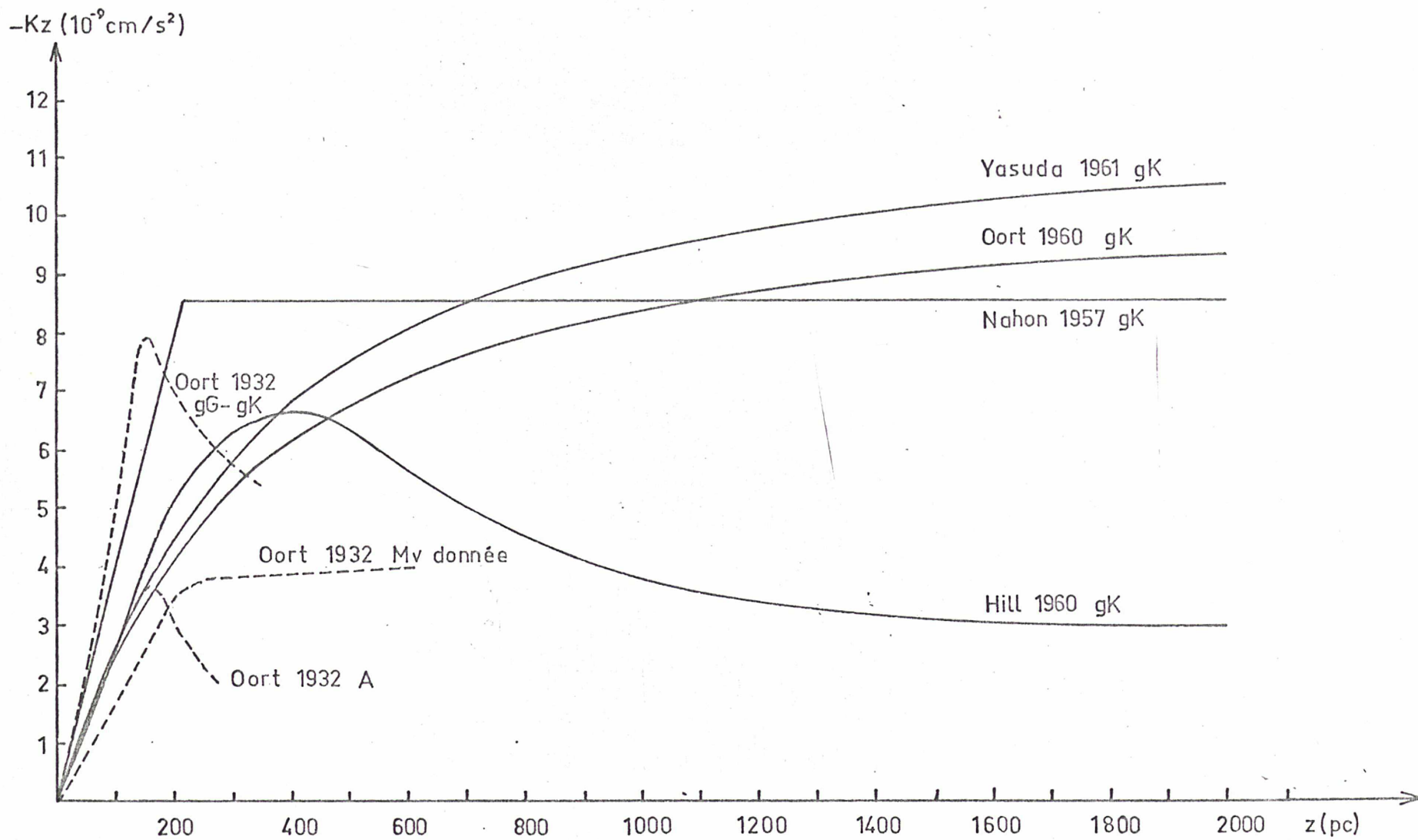
$$\left(\frac{\partial K_r}{\partial r} + \frac{K_r}{r} = 2(A-B)(A+B) \right)$$

dans le plan galactique et décroît légèrement, quand z croît, d'après le modèle de SCHMIDT), l'équation I impose :

$$\frac{\partial K_z}{\partial z} < 0$$

Cette contradiction entraîne OORT à reprendre le problème en partant uniquement de l'équation de POISSON (I). Il calcule un Kz minimum, obtenu en supposant qu'il n'y a pas d'étoiles plus faibles que $m_v = +15$. La solution finale est obtenue en supposant que la distribution des étoiles de magnitude plus grande que 15 est identique à celle des étoiles observées et en essayant plusieurs facteurs multiplicatifs. La comparaison avec l'observation des géantes K conduit à la relation : $\rho = 2,0 \rho_{\text{min}}$.

fig.1: Accélération $Kz(z)$



Les différentes solutions obtenues pour Kz sont représentées sur la figure 1.

Les résultats obtenus pour la densité totale au voisinage du soleil : ρ_0 , sont indiqués ci-dessous :

OORT	1932	$0,09 M_{\odot} \text{ pc}^3$
NAHON	1957	0,23
WOOLLEY	1957	0,18
HILL	1960	0,13
OORT	1960	0,15
YASUDA	1961	0,15
JONES	1962	0,14
WOLLEY - STEWART	1967	0,11
STOTHERS - TECH	1964	0,13

II - UTILISATION DE LA METHODE DE KING POUR L'ETUDE DES MOUVEMENTS PERPENDICULAIRES AU PLAN GALACTIQUE :

1) Introduction et définition des pseudo-moments :

L'équation de l'hydrodynamique pour les mouvements perpendiculaires au plan galactique (équation III) ne permet pas de séparer la variation de N de celle w^2 . La méthode de KING (1965) permet d'éviter cet inconvénient.

Au lieu de multiplier l'équation II par w , on la multiplie par $\frac{1}{w}$ et on intègre sur tout l'espace des vitesses.

... / ...

En posant :

$$\langle w^{-2} \rangle = -\frac{1}{N} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w} \frac{\partial f}{\partial w} du dv dw$$

on obtient :

$$(IV) \quad \frac{\partial}{\partial z} \text{Log } N = -\langle w^{-2} \rangle \frac{\partial V}{\partial z} = \langle w^{-2} \rangle K_z$$

Les intégrales du type de celle qui définit $\langle w^{-2} \rangle$ sont appelées "pseudo-moments" par KING. Leurs propriétés sont, en effet, analogues à celles des moments.

Si f est gaussienne, on obtient : $\langle w^{-2} \rangle = \frac{1}{w^2}$

Le problème est, maintenant, d'estimer les pseudo-moments à partir de l'échantillon observé. Nous avons utilisé deux méthodes différentes :

- f peut être représentée par une fonction mathématique. Le pseudo-moment est alors calculé en fonction des paramètres utilisés.
- f ne peut pas être approchée, de façon satisfaisante, par une fonction mathématique. Nous avons établi, par analogie avec la formule donnant une valeur approchée du moment d'ordre n quand la fonction de distribution est en escalier, une formule donnant le pseudo-moment quand la fonction de fréquence f est en escalier :

$$(V) \quad \langle w_{-2} \rangle = \frac{\sum_i \frac{1}{x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]}{\sum_i f(x_i) (x_{i+1} - x_i)}$$

Voir figure 2 pour les notations.

Un essai sur une fonction connue à laquelle on adapte un histogramme de pas $\frac{\sigma}{4}$ conduit à une erreur de 1 % (le même essai avec la formule classique donnant la variance conduit à 26 % d'erreur).

2) Equations utilisées :

Pour calculer K_z en fonction de z , on utilise l'équation IV :

$$\frac{\partial}{\partial z} \text{Log } N = \langle \bar{w}^2 \rangle K_z$$

Quand on ne dispose de données que dans l'environnement immédiat du plan galactique, on utilise la limite, pour z tendant vers 0, de l'équation IV. N et K_z étant des fonctions paires de z , on obtient, d'après la formule de TAYLOR :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \text{Log } N = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{Log } N \right)_0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} K_z = \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} \right)_0$$

D'où
(VI)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{Log } N \right)_0 = \langle \bar{w}^2 \rangle_0 \cdot \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} \right)_0$$

De V et I on tire :

$$(VII) \rho_0 = - \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{1}{\langle \bar{w}^2 \rangle_0} \left(\frac{\partial^2 \text{Log } N}{\partial z^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial K_r}{\partial r} + \frac{K_r}{r} \right)_0 \right]$$

... / ...

fig. 2

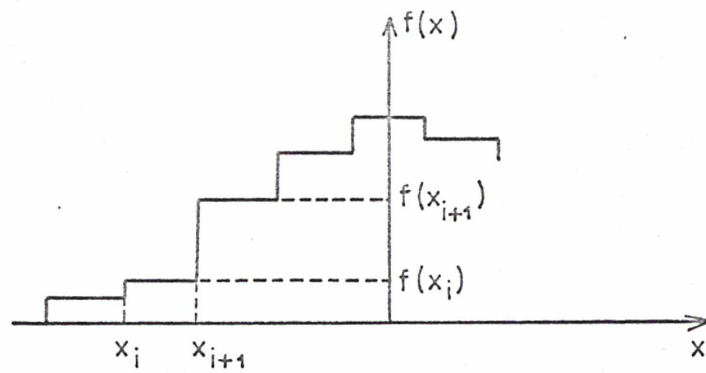
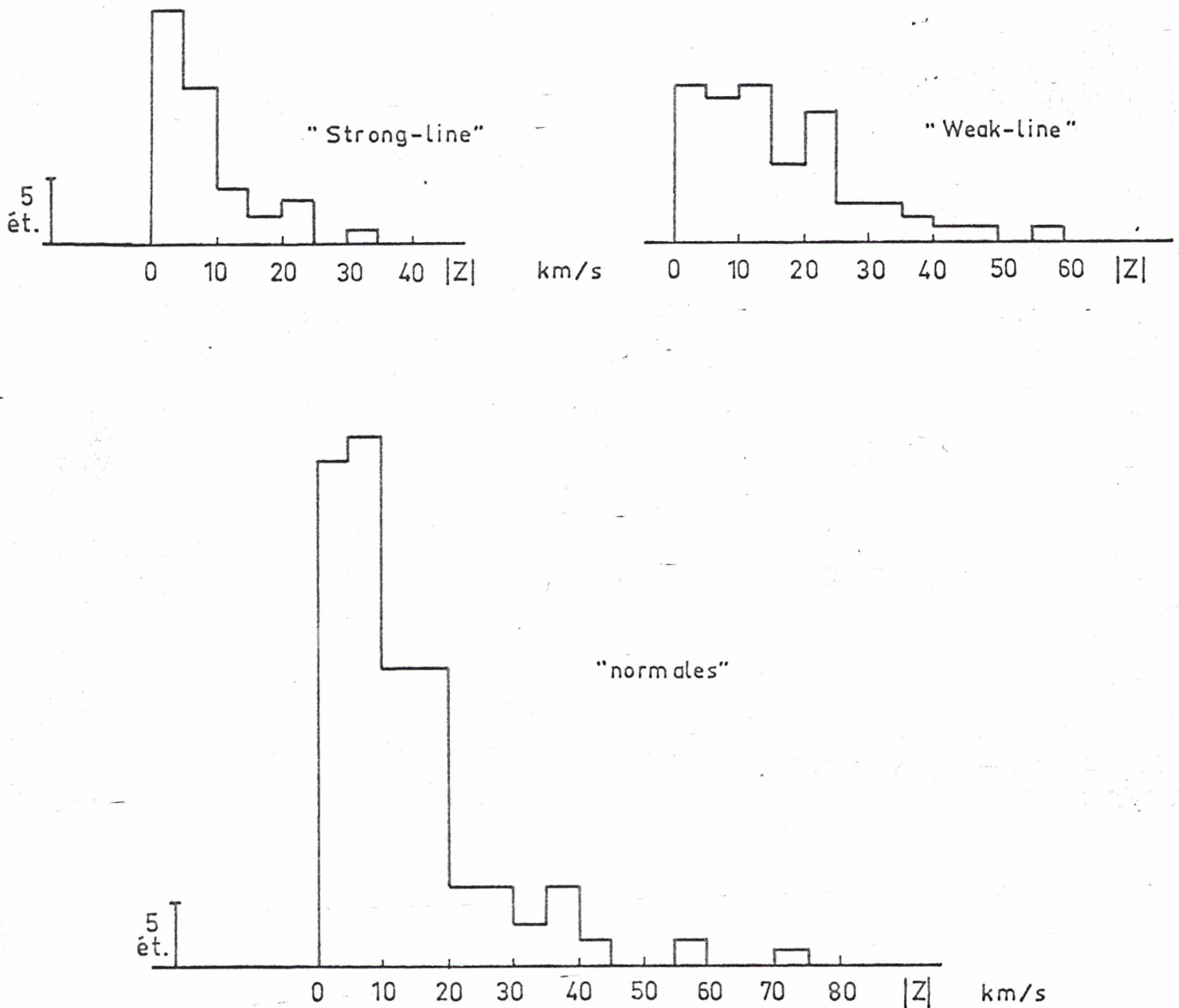


fig.3: Distribution de la composante en z de la vitesse spatiale.
Étoiles KIII du matériel de Miss-Roman.



3) Calcul de ρ_0 - Matériel : gK (Miss ROMAN, Upgren)

a) Matériel de Miss ROMAN (1952). Calcul du pseudo-moment :

Miss ROMAN considère des étoiles très proches : $m \leq 5,5$. Pour les géantes K, cela signifie : $r \leq 75$ pc. On ne pourra donc utiliser ce matériel pour déterminer la densité en fonction de z . Par contre, il nous donnera des indications sur la répartition des vitesses dans le plan galactique.

Pour calculer le pseudo-moment, on est amené à faire les hypothèses suivantes :

- on peut séparer les géantes K en groupes à peu près homogènes ;
- chaque groupe admet une loi de distribution de vitesse gaussienne.

Pour la séparation des géantes K en groupes à peu près homogènes, on se base sur des critères spectroscopiques étudiés par Miss ROMAN.

Dans son premier article (1950), Miss ROMAN distingue deux groupes, qui contiennent environ 85 % des étoiles, parmi les naines et les géantes de type spectral compris entre F5 et G5. Les raies du spectre de l'un des groupes sont systématiquement plus faibles que celles de l'autre. Pour cette raison, le premier groupe sera appelé "étoiles weak-line", le second "strong-line".

Dans son deuxième article (1952), Miss ROMAN étend son étude aux étoiles de type spectral compris entre F5 et K5 et publie un catalogue de 641 étoiles plus brillantes que la magnitude 5,5. C'est ce dernier qui sera utilisé par la suite.

Des distinctions cinématiques et photométriques confirment la séparation de ces étoiles en deux groupes : la vitesse moyenne et la dispersion des vitesses des "weak-line" sont plus grandes que celles des "strong-line" ; d'autre part, certains diagrammes à deux indices de la photométrie de Genève permettent de séparer graphiquement ces deux sortes d'étoiles.

On supposera donc que ces groupes sont homogènes. Par contre, le problème reste entier pour les étoiles qui ne sont ni "weak" ni "strong" et supposées normales. On peut constater que leur distribution de vitesse est intermédiaire entre celle des "weak" et celle des "strong". On peut considérer cela comme une propriété intrinsèque des étoiles normales ou comme le résultat d'un mélange de "strong" et de "weak" non encore identifiées. A défaut d'autres renseignements, on considèrera provisoirement ce groupe comme homogène.

En supposant que les trois lois de distribution sont gaussiennes, on obtient $\langle W^2 \rangle_0$:

$$(VIII) \quad \langle W^2 \rangle_0 = \frac{P_{st}}{\sigma_{st}^2} + \frac{P_{wk}}{\sigma_{wk}^2} + \frac{P_n}{\sigma_n^2}$$

P_{st} , P_{wk} , P_n étant les proportions relatives des "strong", "weak", et normales; σ_{st} , σ_{wk} , σ_n étant leurs dispersions des vitesses dans la direction perpendiculaire au plan galactique.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs obtenues à partir des géantes K du matériel de Miss ROMAN.

Les histogrammes des vitesses de différents groupes sont représentés sur la figure 3 .

Groupe :	Proportion : p_i	$\overline{W^2} = \sigma^2$ (km/s) ² :	Nombre d'étoiles : n_i
"weak" :	0,24	402	62
"strong" :	0,16	100	40
"normales" :	0,60	269	168

... / ...

L'utilisation des valeurs ci-avant dans la relation (VIII) donne :

$$\begin{aligned} \langle w^{-2} \rangle_0 &= 0,0044 \text{ (Km/s)}^{-2} \\ &= 4,2 \cdot 10^{24} \text{ (pc/s)}^{-2} \end{aligned}$$

Calcul d'erreur sur $\langle w^{-2} \rangle_0$:

L'erreur sur $\langle w^{-2} \rangle_0$ est due, d'une part aux erreurs sur les dispersions des vitesses : $\sigma^2 = w^2$, d'autre part aux erreurs sur les proportions relatives des différents groupes. Les trois termes $\frac{p_{st}}{\sigma_{st}^2}$, $\frac{p_{wk}}{\sigma_{wk}^2}$, $\frac{p_n}{\sigma_n^2}$ n'étant pas indépendants (puisque $p_{st} + p_{wk} + p_n = 1$), on utilisera la formule simple donnant une borne supérieure de l'erreur sur $\langle w^{-2} \rangle_0$ en fonction des erreurs sur chacun des trois termes :

$$\Delta(\langle w^{-2} \rangle_0) = \Delta\left(\frac{p_{st}}{\sigma_{st}^2}\right) + \Delta\left(\frac{p_{wk}}{\sigma_{wk}^2}\right) + \Delta\left(\frac{p_n}{\sigma_n^2}\right)$$

L'erreur sur chaque terme se calcule par l'intermédiaire des erreurs relatives :

$$\frac{\Delta\left(\frac{p_i}{\sigma_i^2}\right)}{\frac{p_i}{\sigma_i^2}} = \frac{\Delta p_i}{p_i} + \frac{\Delta \sigma_i^2}{\sigma_i^2}$$

.../...

Erreur sur les dispersions des vitesses :

Deux propriétés connues des lois de distributions permettent de calculer l'intervalle de confiance dans lequel la variance σ^2 d'un échantillon de n objets a 95 % de chance de se trouver :

1) La valeur calculée de la variance d'un échantillon de n objets se distribue autour de la valeur théorique d'après une loi de χ^2 . Celle-ci tend vers une loi de GAUSS pour un nombre suffisamment grand d'objets ($n > 30$), ce qui est le cas ici.

2) Pour une loi de Gauss centrée et normée, la variable x a 95 % de chance de se trouver dans l'intervalle $[-1,96\sigma_c, +1,96\sigma_c]$, σ_c étant l'écart-type de la loi de Gauss.

Ces deux propriétés permettent de démontrer que l'intervalle de confiance défini ci-dessus est donné par :

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1,96}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot 2\sigma^2$$

Erreur sur les proportions relatives des différents groupes :

La valeur calculée de la proportion p_i d'un groupe ayant une certaine propriété dans un échantillon de N objets se distribue autour de la valeur théorique d'après une loi binômiale. Celle-ci tend vers une loi de Gauss pour un nombre suffisant d'objets, ce qui est le cas ici.

On démontre alors que la variance de cette loi de Gauss est donnée par :

$$\sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{N}$$

.../...

L'erreur sur p_i sera donc donnée par : $\Delta p_i = 1.96 \sigma_{p_i}$
 $= 1.96 \left[\frac{p_i(1-p_i)}{N} \right]^{1/2}$

Calcul des erreurs :

Le tableau II donne les valeurs calculées pour les différentes erreurs : Δp_i et $\Delta \sigma_i^2$

TABLEAU II

Groupe	n_i	p_i	Δp_i	σ_i^2 (km/s) ²	$\Delta \sigma_i^2$ (km/s) ²	$\Delta \left(\frac{p_i}{\sigma_i^2} \right)$ (km/s) ⁻²	$\frac{p_i}{\sigma_i^2}$ (km/s) ⁻²
"weak"	62	0,24	0,05	402	143	3, 4.10 ⁻⁴	6, 0.10 ⁻⁴
"strong"	40	0,16	0,04	100	48	11, 7.10 ⁻⁴	16, 0.10 ⁻⁴
"normales"	168	0,60	0,05	269	58	6, 7.10 ⁻⁴	22, 3.10 ⁻⁴

On obtient alors, pour l'erreur sur $\langle W^{-2} \rangle_0$

$$\Delta(\langle W^{-2} \rangle_0) = 21.8 \cdot 10^{-4} \text{ (km/s)}^{-2}$$

$$\langle W^{-2} \rangle_0 = 4.4 \cdot 10^{-3} \pm 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ (km/s)}^{-2}$$

.../...

b) Matériel d'UPGREN. Calcul de la dérivée seconde de la densité pour $z = 0$.

UPGREN (1962) effectue des comptages d'étoiles proches du pôle galactique Nord en fonction de la distance r , jusqu'à la magnitude 13. Pour les géantes KO, cela entraîne donc jusqu'à 2 000 pc. Le cône ainsi exploré a un angle au sommet suffisamment petit pour qu'on puisse assimiler z , distance au plan galactique, perpendiculairement à ce plan, à r , distance de l'étoile observée à l'observateur. On obtient donc des courbes de densité en fonction de z .

La magnitude absolue choisie pour les géantes K est : 1,8.

La courbe de densité obtenue pour les géantes KO est représentée sur la figure 4.

Une détermination graphique de $\left(\frac{d^2 \ln N}{dz^2}\right)_0$ donne :

$$\left(\frac{d^2 \ln N}{dz^2}\right)_0 = 0,3 \cdot 10^{-4} \pm 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ pc}^{-2}$$

c) Calcul de ρ_0 :

Pour utiliser l'équation VI, il faut encore connaître le terme :

$$\left(\frac{\partial \kappa_r}{\partial r} + \frac{\kappa_r}{r}\right)_0$$

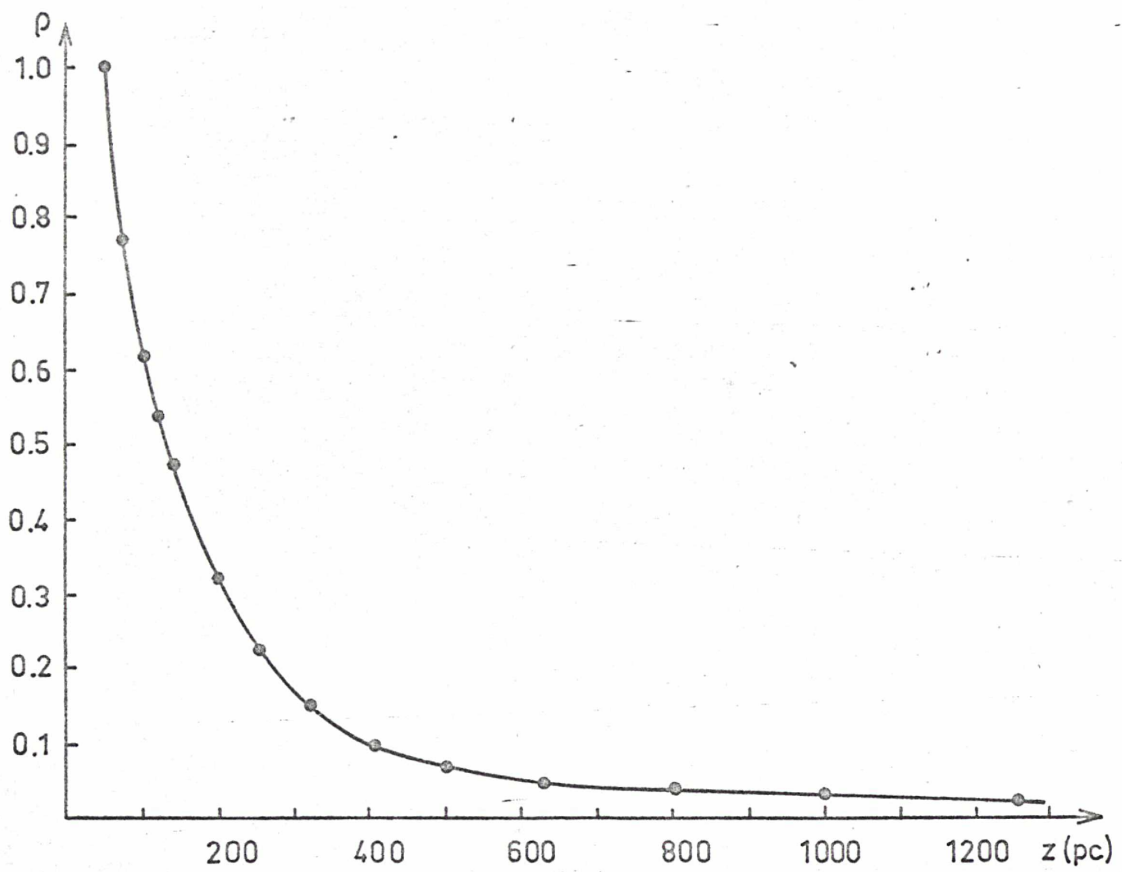


fig. 4: Densité $\rho(z)$ des géantes K0, obtenue par Uppgren (1962)

On démontre que :

$$\left(\frac{\partial K_r}{\partial r} + \frac{K_r}{r} \right)_0 = 2(A - B)(A + B) = 0,6 \cdot 10^{-30} \text{ s}^{-2}$$

A et B sont les constantes de OORT. Elles interviennent dans l'étude de la rotation galactique.

On a obtenu tous les éléments nécessaires au calcul de ρ_0 , densité totale au voisinage du soleil.

Le calcul donne : $\rho_0 = 0,13 M_{\odot} / \text{pc}^3$

Les approximations sont nombreuses et les erreurs très difficiles à déterminer, d'autant plus qu'on a été obligé d'utiliser deux sources de matériel différentes, celui de Miss ROMAN se limitant à des étoiles trop proches. Les calculs d'erreur ci-dessus, sur $\langle w^{-2} \rangle_0$ et $\left(\frac{d^2 \ln N}{dz^2} \right)_0$ permettent quand même d'avoir une idée approximative de l'erreur totale.

On obtient :

$$\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta(\langle w^{-2} \rangle_0)}{\langle w^{-2} \rangle_0} + \frac{\Delta \left(\frac{d^2 \text{Log} N}{dz^2} \right)_0}{\left(\frac{d^2 \text{Log} N}{dz^2} \right)_0} = 0.83$$

d'où

$$\rho_0 = 0,13 \pm 0,10 M_{\odot} / \text{pc}^3$$

... / ...

On voit que la méthode ainsi utilisée est particulièrement imprécise et ne permet pas de conclure à l'existence ou à la non-existence de matière inconnue. Ceci est dû, en grande partie, au nombre insuffisant d'étoiles observées par Miss ROMAN : pour le troisième groupe, étoiles dites "normales", qui contient 168 étoiles, les erreurs sont en effet beaucoup plus raisonnables que pour les deux autres groupes.

4) Calcul de ρ_0 et de Kz point par point. $z \leq 110$ pc
Matériel : gKO à K2 (EGGEN)

a) Matériel d'EGGEN :

Le catalogue d'EGGEN fournit des données jusqu'à la magnitude apparente 7, il permet donc d'aller plus loin que le matériel de Miss ROMAN. Pour les géantes K, on atteindra 250 pc.

Ici, on utilisera seulement les composantes w (perpendiculaires au plan galactique) des vitesses des géantes KO à K2, corrigées de la vitesse du soleil, ainsi que les distances z au-dessus du plan galactique. L'avantage de ce catalogue est justement de donner simultanément ces deux quantités pour les mêmes étoiles.

Les figures 5 et 6 représentent les histogrammes de densité et de vitesse (perpendiculairement au plan galactique) des 450 étoiles considérées.

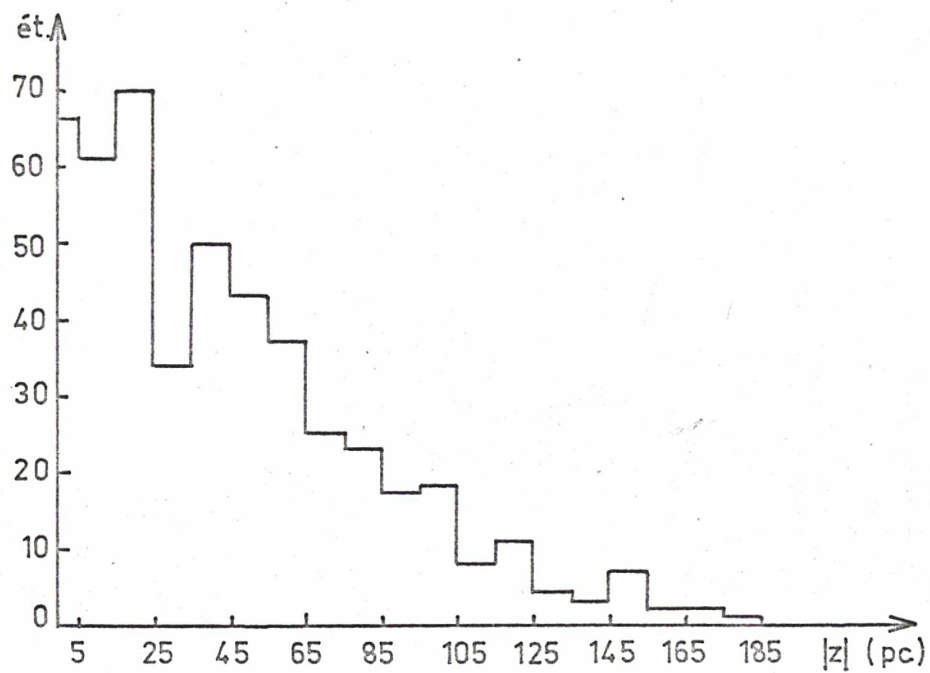


fig. 5 : Histogramme de la densité en fonction de z.

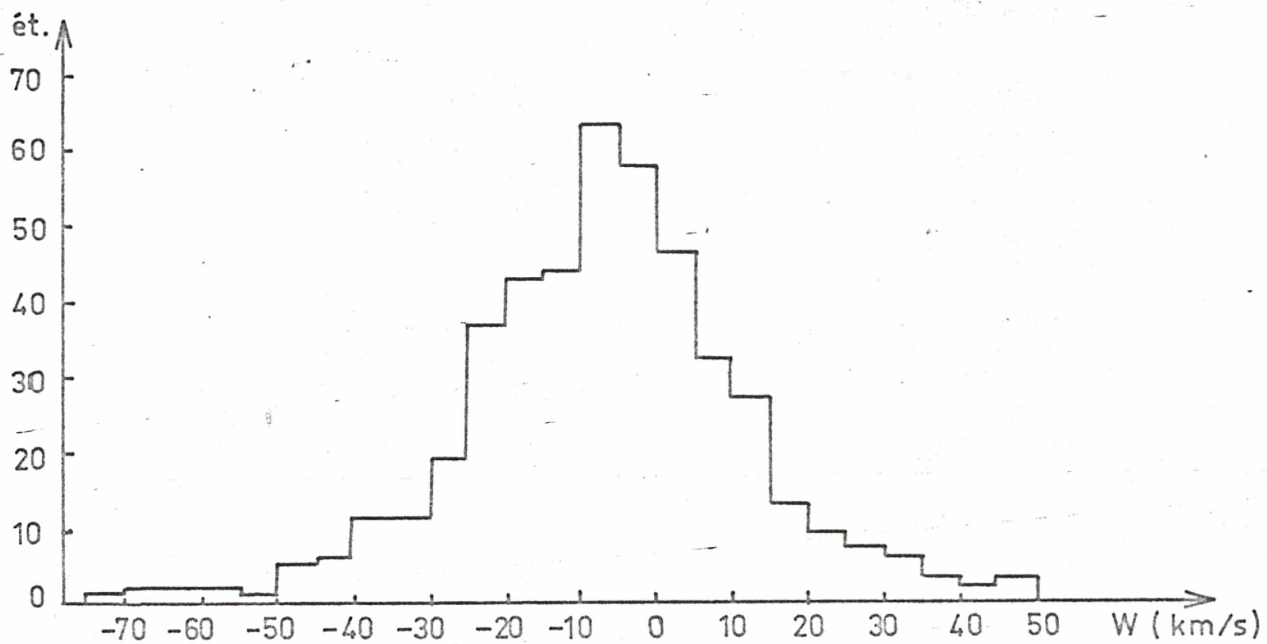


fig. 6 : Histogramme des vitesses perpendiculaires au plan galactique.

Précision des données :

L'erreur sur les distances est essentiellement due à la dispersion des magnitudes absolues des gK. D'après B. LJUNGGREN et T. OJA (1965), celle-ci est de l'ordre de 0,8 magnitude, ce qui entraîne une erreur sur les distances de près de 50 %.

L'erreur sur les vitesses est due, d'une part aux erreurs de mesure, d'autre part aux erreurs sur les distances par l'intermédiaire de la vitesse tangentielle. On obtient une erreur totale de 5 à 10 Km/s.

b) Calcul de $\frac{d \ln N}{dz}$ en fonction de z et de $\left(\frac{d^2 \ln N}{dz^2}\right)_{z=0}$

Deux méthodes permettent de calculer la dérivée de la densité :

- tracer une courbe régulière s'adaptant le mieux possible à l'histogramme. Ceci n'est guère possible ici car l'histogramme n'est pas assez régulier.

- estimer la variance de la distribution des positions, à partir des valeurs individuelles correspondant à chaque étoile.

Trois méthodes permettent d'estimer la variance :

$$1) \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_i (z_i - \bar{z})^2}{n - 1} \quad \sigma_1 = 64 \text{ pc}$$

... / ...

$$2) \quad \sigma_2 = 1,25 \cdot \mu$$

avec μ : écart moyen

$$\mu = |z - \bar{z}| = 49,2 \text{ pc}$$

$$\sigma_2 = 61 \text{ pc}$$

$$3) \quad \sigma_3 = 1,5 \cdot \rho$$

avec ρ : écart médian = 41 pc

(probabilité pour que $|z| < \rho = \frac{1}{2}$)

$$\sigma_3 = 61 \text{ pc}$$

La valeur adoptée est la moyenne des trois valeurs obtenues :

$\sigma = 62 \text{ pc}$. On constate que la gaussienne de variance $\sigma = 62 \text{ pc}$ s'adapte de façon satisfaisante à l'histogramme observé.

On aura donc :

$$N(z) = \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$\frac{d}{dz} \text{Log } N(z) = -\frac{z}{\sigma^2} = -2,6 \cdot 10^{-4} \cdot z \quad (\text{pc}^{-1})$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} \text{Log } N(z) \right) = -\frac{1}{\sigma^2} = -2,6 \cdot 10^{-4} \quad (\text{pc}^{-2})$$

.../...

Précision :

L'intervalle de confiance 95 % pour la variance σ^2 de la distribution des positions est donné par :

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1,96}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot 2 \sigma^2 \quad (\text{voir II, 3})$$

n étant le nombre total d'étoiles.

On obtient : $\Delta\sigma^2 = 501 \text{ pc}^2$

$$\Delta\sigma = 4 \text{ pc}$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = 0,34 \cdot 10^{-4} \text{ pc}^{-2}$$

$$\frac{\Delta\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)}{1/\sigma^2} = 0,13$$

D'où : $\sigma = 62 \pm 4 \text{ pc}$

$$\frac{d}{dz} \text{Log } N(z) = -2,6 \cdot 10^{-4} \cdot z \pm 0,34 \cdot 10^{-4} z \quad \text{pc}^{-1}$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} \text{Log } N(z) \right]_0 = -2,6 \cdot 10^{-4} \pm 0,34 \cdot 10^{-4} \quad \text{pc}^{-2}$$

... / ...

c) Calcul du pseudo-moment en fonction de z :

Pour calculer le pseudo-moment à différentes valeurs de z, on sépare les 454 étoiles considérées en groupes à peu près égaux, chaque groupe correspondant à un intervalle en z déterminé. Chaque groupe doit contenir un nombre suffisamment grand d'étoiles pour que le calcul du pseudo-moment soit valable, mais, d'autre part, le nombre de groupes doit être assez grand pour que la courbe $\langle w^{-2} \rangle (z)$ soit représentée avec une précision suffisante. Ce compromis nous a amenés à utiliser successivement plusieurs découpages différents : de 6 à 3 groupes.

La méthode la plus simple pour estimer le pseudo-moment utilise l'histogramme des vitesses. Là encore, on rencontre la difficulté signalée ci-dessus : le pas h de l'histogramme doit être suffisamment grand pour que la fluctuation relative du nombre d'étoiles dans chaque groupe soit faible et suffisamment petit pour que l'on puisse assimiler la dérivée de la courbe de fréquence f(w), dans l'intervalle considéré, à une variation finie. Des pas de 5 et 10 Km/s ont été successivement utilisés pour le calcul du pseudo-moment à l'aide de la formule approchée (V) :

$$\langle w^{-2} \rangle = \frac{\sum_i \frac{1}{w_i} [f(w_{i-1}) - f(w_i)]}{\sum_i f(w_i) (w_{i+1} - w_i)}$$

Voir tableau III et figure 8.

.../...

TABLEAU III

Conditions sur z	Nombre d'étoiles	Vitesse moyenne (Km/s)	Dispersion (Km/s)	Pseudo-moment (Km/s) ⁻² Pas de l'histogramme	
				5 Km/s	10 Km/s
○ z ≤ 12 pc	77	- 0,2	18,5	0,0187	0,0069
12 < z ≤ 23 pc	75	- 1,5	17,7	0,0089	0,0071
23 < z ≤ 40 pc	77	0,8	18,8	0,0090	0,0038
40 < z ≤ 60 pc	74	3,1	16,4	0,0062	0,0068
60 < z ≤ 85 pc	75	- 1,5	20,1	0,0078	0,0053
85 < z ≤ 250 pc	76	0,4	21,7	- 0,0061	- 0,0014
● z ≤ 15 pc	95	- 1,4	19,2	0,0216	0,0073
15 < z ≤ 30 pc	92	- 0,7	18,3	0,0109	0,0052
30 < z ≤ 50 pc	86	2,8	15,7	0,0156	0,0063
50 < z ≤ 75 pc	82	0,4	19,8	- 0,0021	0,0048
75 < z ≤ 250 pc	99	0,3	21,2	- 0,0012	0,0010
▲ z ≤ 17 pc	113	- 1,2	18,5	0,0166	0,0077
17 < z ≤ 40 pc	116	0,6	18,2	0,0079	0,0045
40 < z ≤ 70 pc	113	2,5	17,5	0,0083	0,0047
70 < z ≤ 250 pc	112	- 1,2	21,4	- 0,0043	- 0,0002
Δ z ≤ 23 pc	152	- 0,8	18,1	0,0170	0,0073
23 < z ≤ 60 pc	151	1,9	17,6	0,0150	0,0060
60 < z ≤ 250 pc	151	- 0,6	20,9	0,0010	0,0022

La valeur 5 Km/s est la plus petite valeur acceptable pour construire un histogramme raisonnable mais le pas de 10 Km/s est déjà nettement trop grand pour que la formule (V) soit utilisable. En effet, la fonction $f(w)$, et surtout sa dérivée, varie très rapidement sur un intervalle de l'ordre de quelques Km/s. Ceci explique les différences observées entre les deux colonnes du tableau III : Les résultats obtenus avec un pas de 5 Km/s sont probablement plus précis.

Précision :

Soit n , le nombre total d'étoiles,

$$p_i = \frac{f(w_i)}{n} \quad \text{la proportion d'étoiles dont les vitesses}$$

w sont comprises entre w_i et w_{i+1} .

On a vu (voir II, 3) a)) que la variance de la loi de Gauss suivant laquelle p_i est distribué est donnée par :

$$\sigma_i^2 = \frac{p_i (1 - p_i)}{n}$$

$\langle w^{-2} \rangle$ s'exprime en fonction des p_i :

$$\langle w^{-2} \rangle = \frac{\sum_i \frac{1}{w_i} (p_{i-1} - p_i)}{\sum_i p_i (w_{i+1} - w_i)}$$

.../...

Ici, $w_{i+1} - w_i = c^{te} = c$

$$\sum_i p_i = 1 \text{ par hypothèse}$$

Donc $\langle w^{-2} \rangle = \frac{1}{c} \sum_i \frac{1}{w_i} (p_{i-1} - p_i) = \frac{A}{c}$

$$\Delta \langle w^{-2} \rangle = \frac{\Delta A}{c} = \frac{1,96}{c} \sigma_A$$

Calcul de σ_A :

$$A = \dots \frac{p_{i-1}}{w_i} - \frac{p_i}{w_i} + \frac{p_i}{w_{i+1}} - \frac{p_{i+1}}{w_{i+1}} \dots$$

$$= \sum_i p_i \left(\frac{1}{w_{i+1}} - \frac{1}{w_i} \right)$$

La formule générale donnant la variance d'une somme en fonction des variances de chaque terme : $\sigma_x^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2$ si $x = \sum_i a_i x_i$, les x_i étant indépendants, peut s'appliquer ici avec une bonne approximation quand le nombre des p_i est suffisant.

$$\sigma_A = \sum_i \sigma_i^2 \left(\frac{1}{w_{i+1}} - \frac{1}{w_i} \right)^2$$

.../...

Ceci ne tient pas compte de l'imprécision due à la formule elle-même, qui est probablement beaucoup plus faible (voir II, 1)). L'erreur relative est en moyenne de 70 %.

Les barres d'erreurs sont portées sur la figure 8. La dispersion des points montre que cette incertitude peut être considérée comme une base de calcul raisonnable pour l'évaluation de l'incertitude sur la densité totale au voisinage du soleil.

Il est possible d'éviter les difficultés rencontrées ci-dessus en construisant directement la courbe de fréquence $f(w)$, plutôt que l'histogramme, par dérivation de la courbe de distribution $F(w)$. Les courbes $F(w)$, $f(w)$, $\frac{df}{dw}$, $\frac{1}{w} \frac{df}{dw}$, pour un intervalle en z donné, sont représentées sur la figure 7. L'aire comprise entre la courbe $\frac{1}{w} \frac{df}{dw}$ et l'axe des abscisses donne directement le pseudo-moment.

Cette dérivation de $F(w)$ nécessite un lissage préalable de la courbe, primitivement "en escalier". On obtient ainsi une courbe de fréquence qui n'est altérée par aucun échantillonnage artificiel. Il reste évidemment le problème du lissage de l'échantillonnage naturel fourni par le catalogue d'étoiles. Nous avons utilisé un lissage à la main qui donne déjà des résultats intéressants (voir figure 8 : $\langle w^{-2} \rangle (z)$ et tableau IV).

.../...

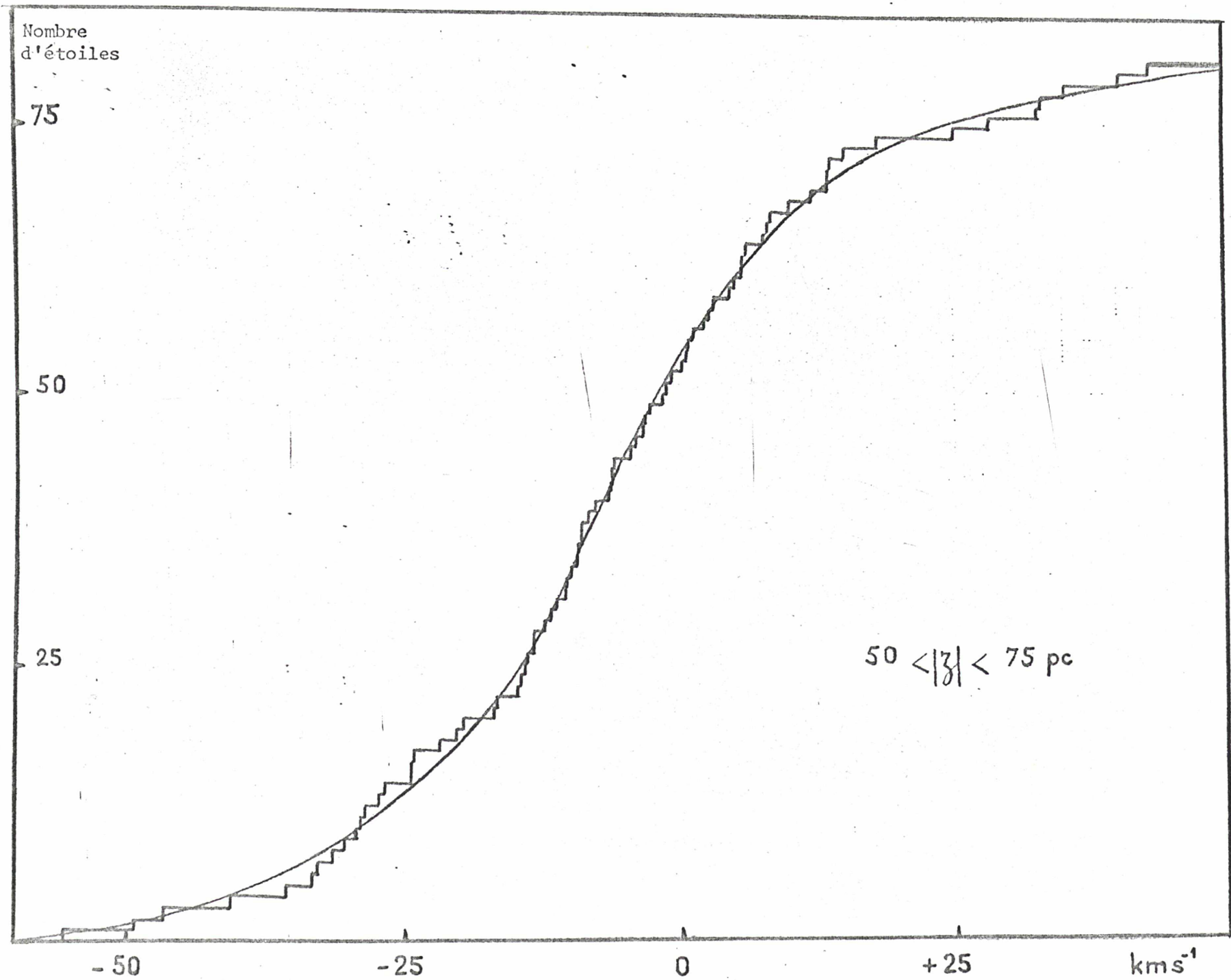
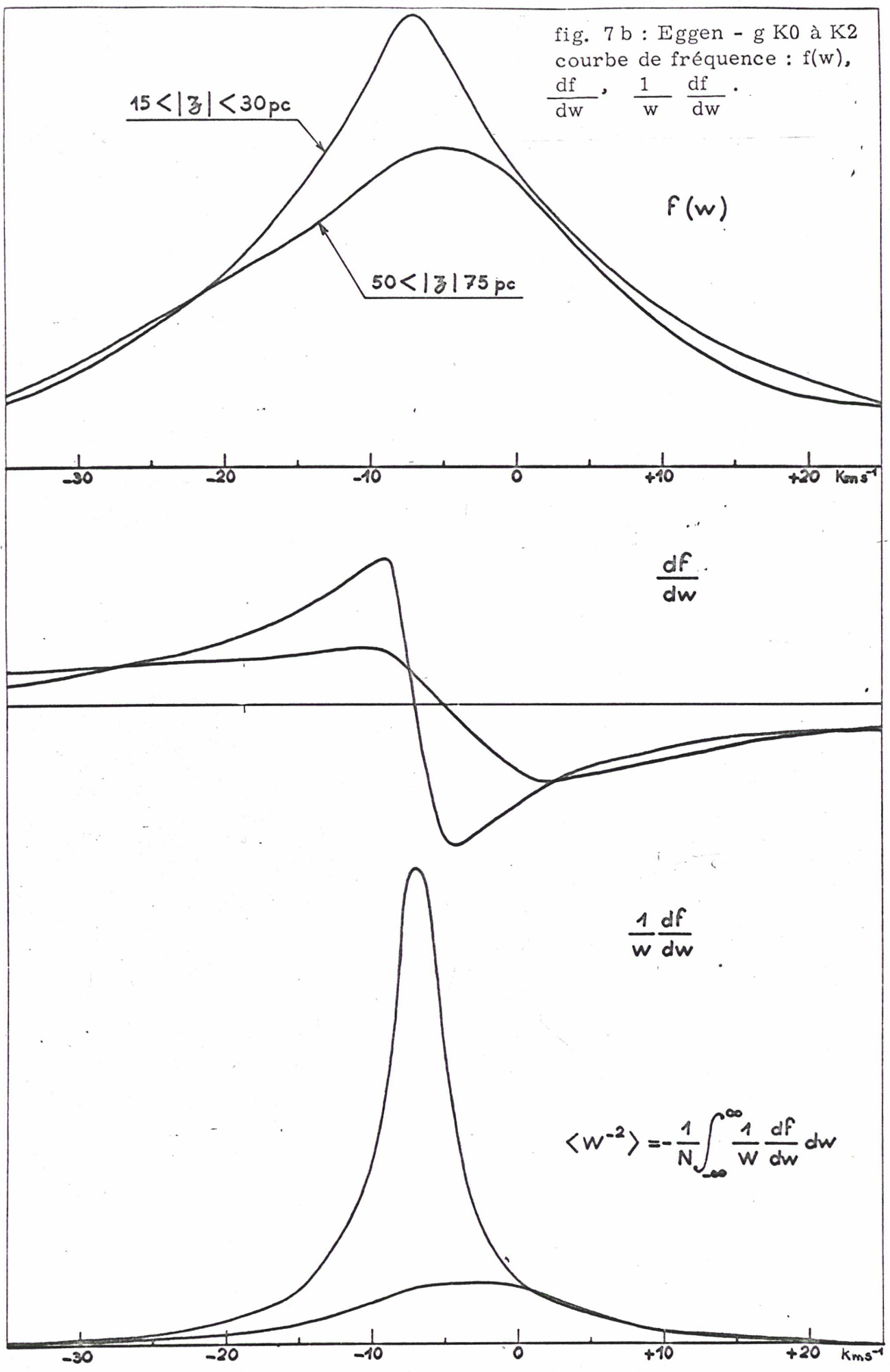


Fig. 7 a : Courbe cumulative de distribution des vitesses - EGGEN - g KO à K2.

fig. 7 b : Eggen - g K0 à K2
 courbe de fréquence : $f(w)$,
 $\frac{df}{dw}$, $\frac{1}{w} \frac{df}{dw}$.



$$\langle w^{-2} \rangle = -\frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w} \frac{df}{dw} dw$$

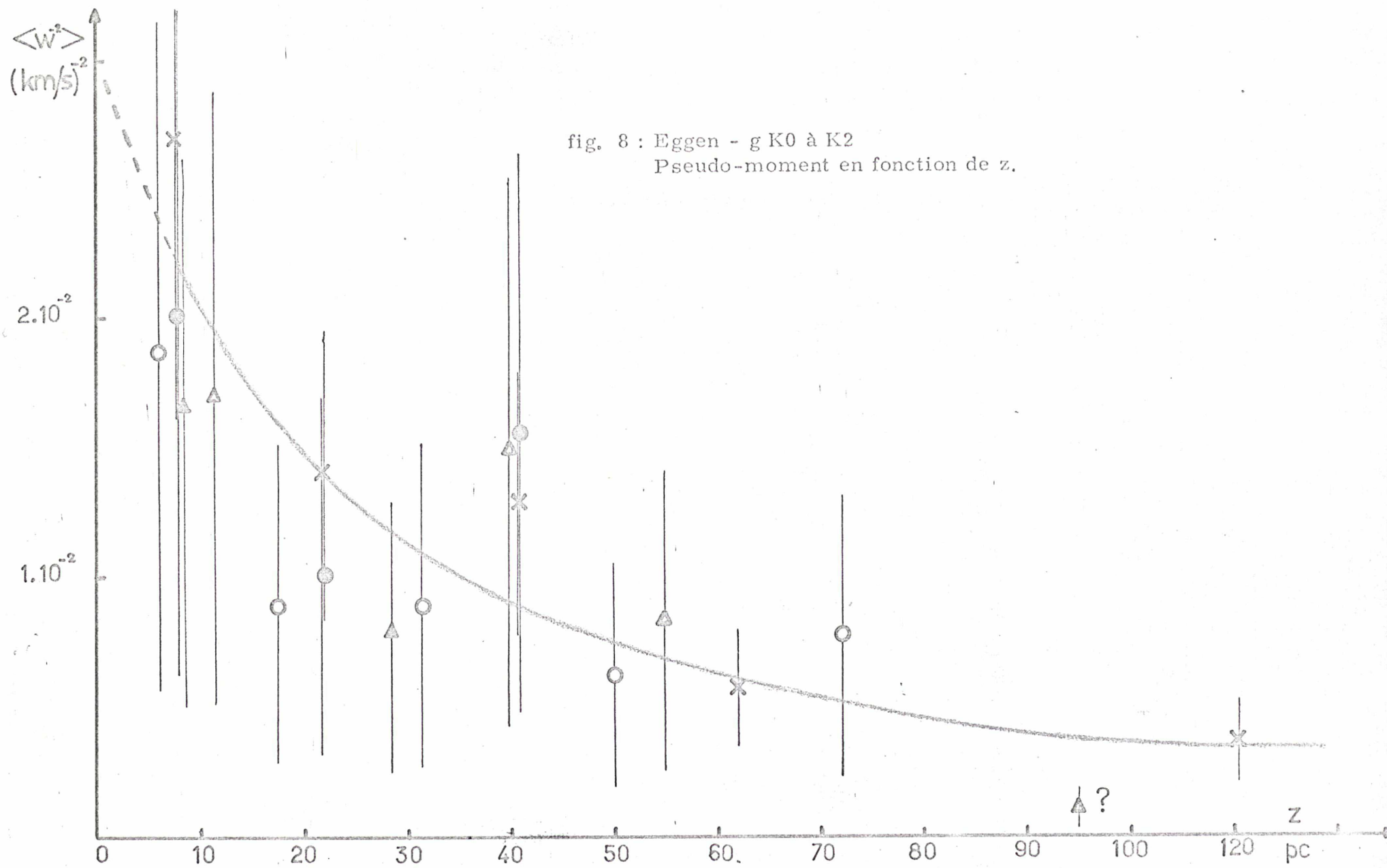


TABLEAU V

Conditions sur z	$\langle w^{-2} \rangle (z)$
$ z \leq 15$ pc	0,0270
$15 < z \leq 30$ pc	0,0140
$30 < z \leq 50$ pc	0,0128
$50 < z \leq 75$ pc	0,0057
$75 < z \leq 250$ pc	0,0036

$$\frac{\Delta \langle w^{-2} \rangle}{\langle w^{-2} \rangle} = 0,4$$

Il est possible d'améliorer ces résultats en ajustant une expression analytique à la courbe de distribution F(w) (moindres carrés sur une fonction du type :

$$\lambda \left(x \operatorname{Log} \frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} + 2 \left(b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{b} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) \right)$$

d) Calcul de Kz(z) pour z ≤ 110 pc et de ρ_e:

L'équation (IV) : $\frac{d \ln N}{dz} = \langle w^{-2} \rangle$. Kz permet de calculer Kz à partir des résultats obtenus ci-dessus. Voir Tableau V.

.../...

z	$\frac{d \ln N}{dz}$	$\langle w^{-2} \rangle$	Kz
(pc)	(pc ⁻¹)	(Km/s) ⁻²	10 ⁻⁹ cm/s ²
10	0,0026	0,0206	0,41
20	0,0052	0,0150	1,12
30	0,0078	0,0114	2,21
40	0,0104	0,0091	3,69
50	0,0130	0,0075	5,59
60	0,0156	0,0062	8,12
70	0,0182	0,0053	11,08
80	0,0208	0,0044	15,25
90	0,0234	0,0038	19,86
100	0,0260	0,0032	26,21
110	0,0286	0,0025	36,90

TABLEAU V

L'équation (VII) donne la densité au voisinage du soleil :

$$\rho_0 = -\frac{1}{4\pi G} \left[\frac{1}{\langle w^{-2} \rangle_0} \left(\frac{d^2 \text{Log} N}{dz^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial K_r}{\partial r} + \frac{K_r}{r} \right)_0 \right] = 0.15 M_\odot / \text{pc}^3$$

.../...

L'erreur relative sur ρ_0 est la somme des erreurs relatives sur $\left(\frac{d^2 \ln N}{dz^2}\right)_0$ et sur $\langle w^{-2} \rangle_0$:

$$\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} = 0,13 + 0,40 = 0,53$$

D'où :

$$\rho_0 = 0,15 \pm 0,08 \text{ } M_{\odot} / \text{pc}^3$$

- 5) Calcul de ρ_0 et Kz point par point. $z \leq 150 \text{ pc}$
Matériel : gKO à K2 (EGGEN) pour les vitesses
gKO (UPGREN) pour la densité

L'information, tirée des données d'EGGEN, sur la distribution de la densité en fonction de z est forcément partielle et même biaisée du fait du critère de sélection utilisé par l'auteur : les étoiles ont été choisies de telle sorte que l'erreur totale sur la vitesse spatiale résultant des erreurs sur les mouvements propres et les vitesses radiales soit inférieure à 5 Km/s. On a donc essayé d'utiliser simultanément les données de densité d'UPGREN et les données de vitesses d'EGGEN, bien que ceci entraîne nécessairement une erreur supplémentaire.

.../...

a) Calcul de $\frac{d \ln N}{dz}$ en fonction de z :

Le premier point de la courbe de densité d'UPGREN étant à 50 pc, il n'est pas question de calculer directement, par dérivation numérique, les valeurs de $\frac{d \ln N}{dz}$ pour des z compris entre 0 et 150 pc. La seule solution acceptable est donc d'approcher la courbe de densité par une expression analytique, qu'on supposera également valable pour $z \leq 100$ pc.

Les paramètres de quatre types de fonctions ont été calculés par moindres carrés, pour obtenir une représentation acceptable de la courbe observée :

$$\begin{aligned}
 N_1(z) &= c e^{-z^2/2\sigma^2} & c &= 0,92 & \sigma &= 136 \text{ pc} \\
 N_2(z) &= c \left[\alpha e^{-z^2/2\sigma_1^2} + (1-\alpha) e^{-z^2/2\sigma_2^2} \right] & c &= 1,23 & \alpha &= 0,54 & \sigma_1 &= 55 \text{ pc} & \sigma_2 &= 199 \\
 N_3(z) &= c / (1 + z^2/a^2) & c &= 1,12 & \sigma &= 121 \text{ pc} \\
 N_4(z) &= c \left(\frac{z}{z_0} + 1 \right)^{-(z/z_0 + 1)} & c &= 1,21 & z_0 &= 207 \text{ pc}
 \end{aligned}$$

Les meilleures représentations sont obtenues avec N_2 et N_3 .

.../...

b) Calcul de $Kz(z)$ pour $z \leq 150$ pc et de ρ_0 :

L'équation (4) permet de calculer $Kz(z)$. Les deux meilleurs modèles de densité sont utilisés successivement. Voir tableau VI.

z	$\langle w^{-2} \rangle$	$-\frac{d \ln N_2}{dz}$	$-(Kz)_2$	$-\frac{d \ln N_3}{dz}$	$-(Kz)_3$
pc	$(\text{Km/s})^{-2}$	pc^{-1}	cm/s^2	pc^{-1}	cm/s^2
	EGGEN	UPGREN		UPGREN	
15	1,75	2,81	0,52	2,02	0,37
25	1,30	4,57	1,13	3,28	0,81
50	0,75	8,05	3,46	5,83	2,51
62,5	0,60	9,07	4,88	6,74	3,62
75	0,48	9,50	6,38	7,40	4,97
87,5	0,39	9,35	7,73	7,85	6,49
100	0,32	8,73	8,00	8,12	8,19

TABLEAU VI

.../...

L'équation de POISSON permet de calculer la densité au voisinage du soleil :

$$\text{en utilisant } N_2(z) = c \left[\alpha e^{-z^2/2\sigma_1^2} + (1-\alpha) e^{-z^2/2\sigma_2^2} \right]$$

$$\text{On obtient : } \rho_0 = 0,14 M_{\odot}/\text{pc}^3$$

$$\text{en utilisant } N_3(z) = c / (1 + z^2/a^2)$$

$$\text{On obtient : } \rho_0 = 0,08 M_{\odot}/\text{pc}^3$$

Précision :

On a vu précédemment que l'erreur relative sur $\langle w^{-2} \rangle$ était de l'ordre de 40 %.

Vu la dispersion des magnitudes absolues, l'erreur relative sur $\frac{d\text{Log}N}{dz}$, calculé d'après les données d'UPGREN, est du même ordre.

$$\text{On a donc : } \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} = 0,8$$

D'où :

$$\begin{array}{l} \rho_{02} = 0,14 \pm 0,11 M_{\odot}/\text{pc}^3 \\ \rho_{03} = 0,08 \pm 0,07 M_{\odot}/\text{pc}^3 \end{array}$$

.../...

Les valeurs de $K_z(z)$ obtenues pour $z \geq 75$ pc ne paraissent pas réalistes. Ceci est dû au fait que, pour ces valeurs de z , $\langle w^{-2} \rangle$ est calculé à partir d'un nombre insuffisant d'étoiles. De plus, le résultat est certainement faussé par le critère de sélection de ces étoiles : l'erreur totale sur la vitesse spatiale ne devant pas dépasser 5 Km/s, EGGEN a utilisé, pour de grands z , des étoiles de vitesse supérieure à la moyenne. Ceci entraîne une sous-estimation du pseudo-moment, et par conséquent une sur-estimation de $K_z(z)$. Cette erreur devrait pouvoir être corrigée par l'utilisation d'un matériel plus complet.

6) Calcul de ρ_0 et de K_z point par point. $z \leq 1\ 250$ pc
Matériel : gKO (UPGREN)

+ résultats de HILL (1960) sur les dispersions de vitesse et les proportions, fonction de z , des "weak", "strong", étoiles à grandes vitesses parmi les gK.

a) Résultats de HILL (1960) :

Le travail de HILL est basé sur l'analyse des mouvements en z , dans le plan galactique, des étoiles de type K du matériel de Miss ROMAN (1952, 1954). Aux deux groupes déjà mentionnés ci-dessus (II, 3, a) : les "weak-line" et les "strong-line", HILL ajoute un groupe d'étoiles à grande vitesse (article de Miss ROMAN, 1954). Il obtient ainsi une meilleure représentation de la distribution de vitesse en z des géantes K.

Diverses hypothèses sur la proportion et la dispersion des vitesses en z de ce troisième groupe, et la comparaison avec la dispersion moyenne observée à 1 Kpc conduisent HILL à adopter les valeurs suivantes :

Groupe	Proportion pour z = 0	Dispersion
Strong-line	$P_{st} = 0,425$	$\sigma_{st} = 8,9$
Weak-line	$P_{wk} = 0,425$	$\sigma_{wk} = 14,9$
Grandes-vitesse	$P_{gv} = 0,150$	$\sigma_{gv} = 24,0$

TABLEAU VII

Les variations des proportions des différents groupes avec z sont représentées sur la figure 9.

On admet que chaque groupe a une distribution de vitesse en z gaussienne.

b) Calcul du pseudo-moment en fonction de z :

Chaque groupe ayant une distribution de vitesse en z gaussienne, le pseudo-moment est donné par la relation :

$$\langle W^2 \rangle (z) = \frac{P_{st}(z)}{\sigma_{st}^2} + \frac{P_{wk}(z)}{\sigma_{wk}^2} + \frac{P_{gv}(z)}{\sigma_{gv}^2}$$

.../...

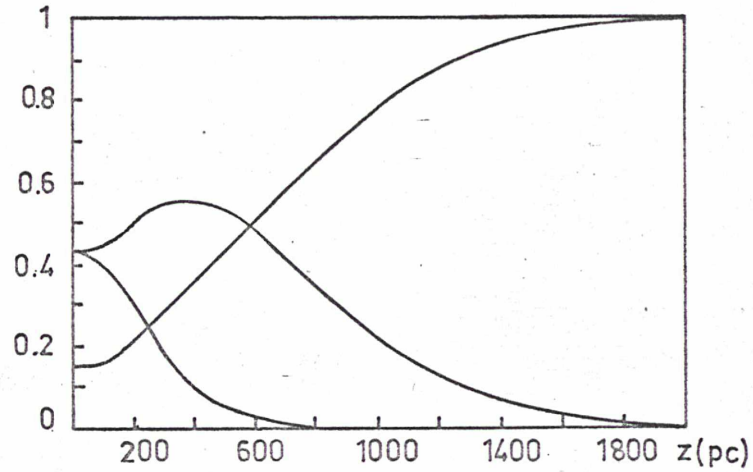


fig. 9 : Proportions des 3 composantes gaussiennes de la distribution des vitesses w des géantes K, calculées par Hill (1960).

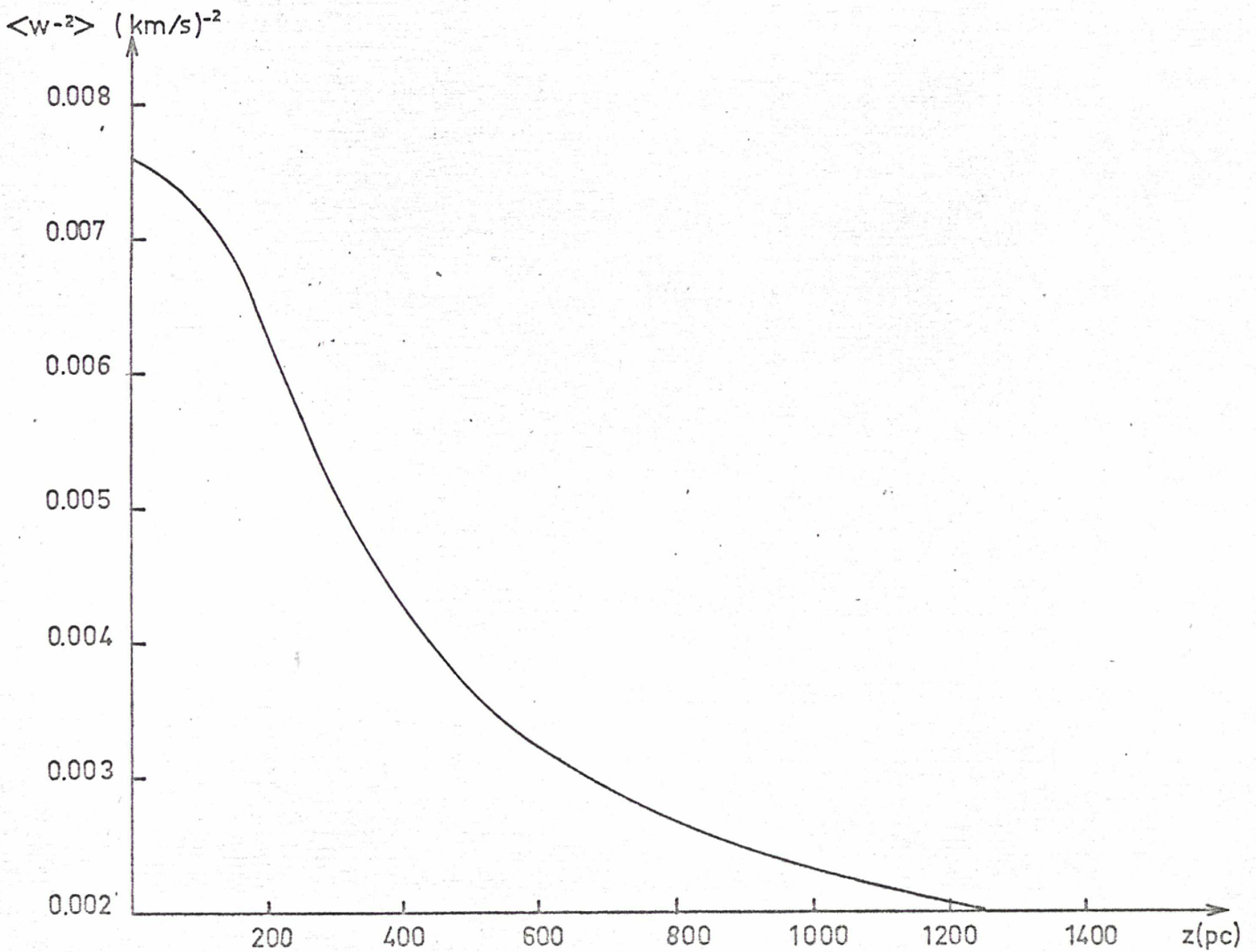


fig. 10 : $\langle w^{-2} \rangle(z)$ d'après les résultats de Hill (1960).

Les dispersions ne varient pas avec z.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs obtenues.

z (pc)	$\langle w^{-2} \rangle$ (Km/s) ⁻²	z (pc)	$\langle w^{-2} \rangle$ (Km/s) ⁻²
25	0,00752	320	0,00491
50	0,00746	400	0,00426
75	0,00734	500	0,00365
100	0,00723	630	0,00314
150	0,00682	800	0,00267
200	0,00629	1 000	0,00233
250	0,00566	1 250	0,00202

La courbe $\langle w^{-2} \rangle (z)$ est représentée sur la figure 10.

TABLEAU VIII

c) Calcul de la dérivée $\frac{d \ln N}{dz}$ en fonction de z avec le matériel d'UPGREN :

Pour éviter de faire une hypothèse sur la forme analytique de la fonction N(z), on utilise les formules de dérivation numérique sur trois points pour calculer $\frac{d \ln N}{dz}$:

.../...

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_k = a_k y_{k-1} - (a_k + b_k) y_k + b_k y_{k+1}$$

$$a_k = \frac{x_k - x_{k+1}}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})}$$

$$b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}$$

d) Calcul de $Kz(z)$ pour $z \leq 1\ 250$ pc et de ρ_0 :

L'équation (4) permet de calculer $Kz(z)$. Voir tableau IX et figure 11.

z (pc)	$\langle w^{-2} \rangle (z)$ (Km/s) ⁻²	$-\frac{d}{dz} \text{Log } N$ pc ⁻¹	$-Kz$ cm/s ²
100	0,00723	0,728 · 10 ⁻⁹	3,25 · 10 ⁻⁹
150	0,00682	0,725	3,43
200	0,00629	0,692	3,55
250	0,00566	0,638	3,64
320	0,00491	0,543	3,57
400	0,00426	0,430	3,26
500	0,00365	0,303	2,68
630	0,00314	0,217	2,23
800	0,00267	0,158	1,91
1 000	0,00233	0,134	1,86

TABLEAU IX

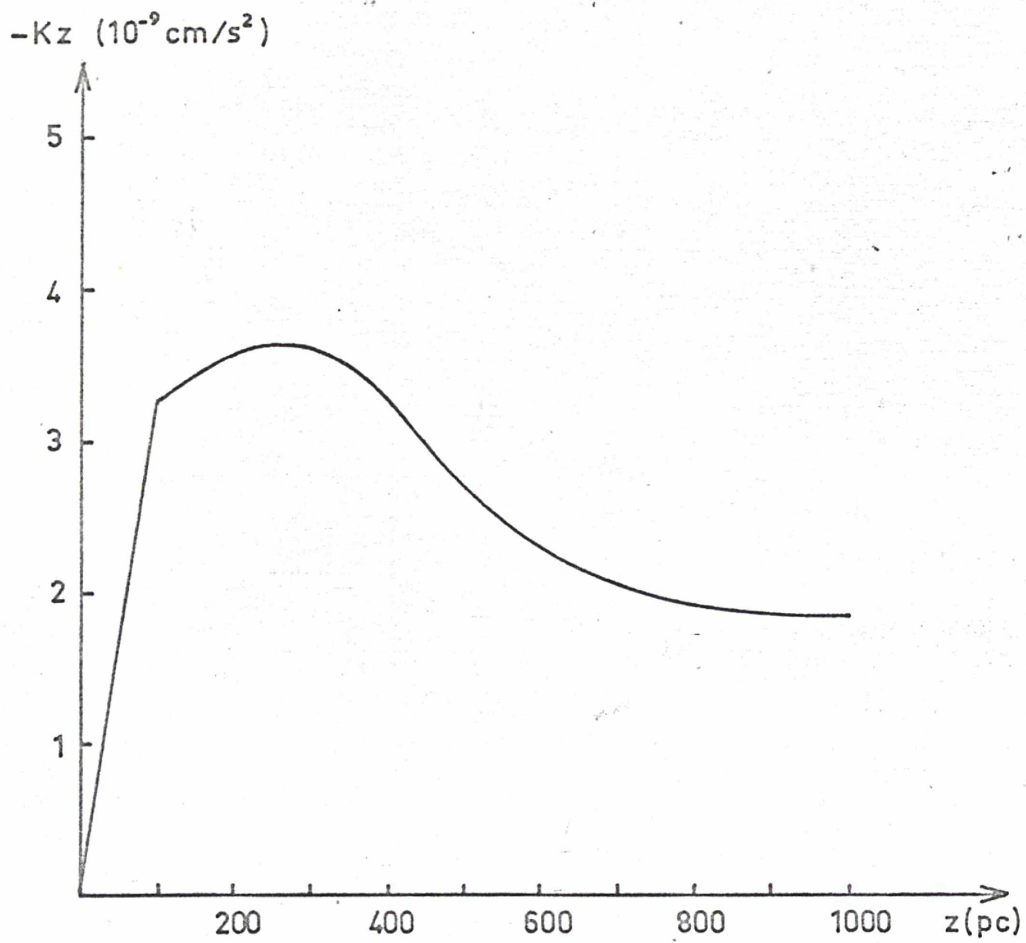


fig. 11 : Accélération $Kz(z)$ calculée à partir des données d'Ungren et de Hill.

L'équation de POISSON donne la densité au voisinage du soleil :

$$\rho_0 = 0,17 M_{\odot} / \text{pc}^3$$

Précision :

La seule erreur connue ici est l'erreur sur $\frac{d}{dz} \text{Log } N$: 40 %.

Le pseudo-moment est calculé à la suite de trop d'hypothèses pour qu'on puisse connaître l'erreur commise.

L'erreur minimum est donc : $(\Delta \rho_0)_{\min} = 0,07 M_{\odot} / \text{pc}^3$.

La courbe $Kz(z)$ obtenue ne paraît pas réaliste. Ici encore, il faudrait reprendre l'étude à l'aide d'un matériel plus complet et plus homogène.

7) Conclusion :

Les résultats obtenus par l'accélération $Kz(z)$ ne sont pas satisfaisants : ils sont incompatibles entre eux et ne vérifient pas l'équation de POISSON sous sa forme (1). Il est donc nécessaire de réexaminer d'une part les hypothèses qui ont permis de simplifier les équations fondamentales, d'autre part le matériel utilisé. Dans les deux cas, on se heurte au même problème :

.../...

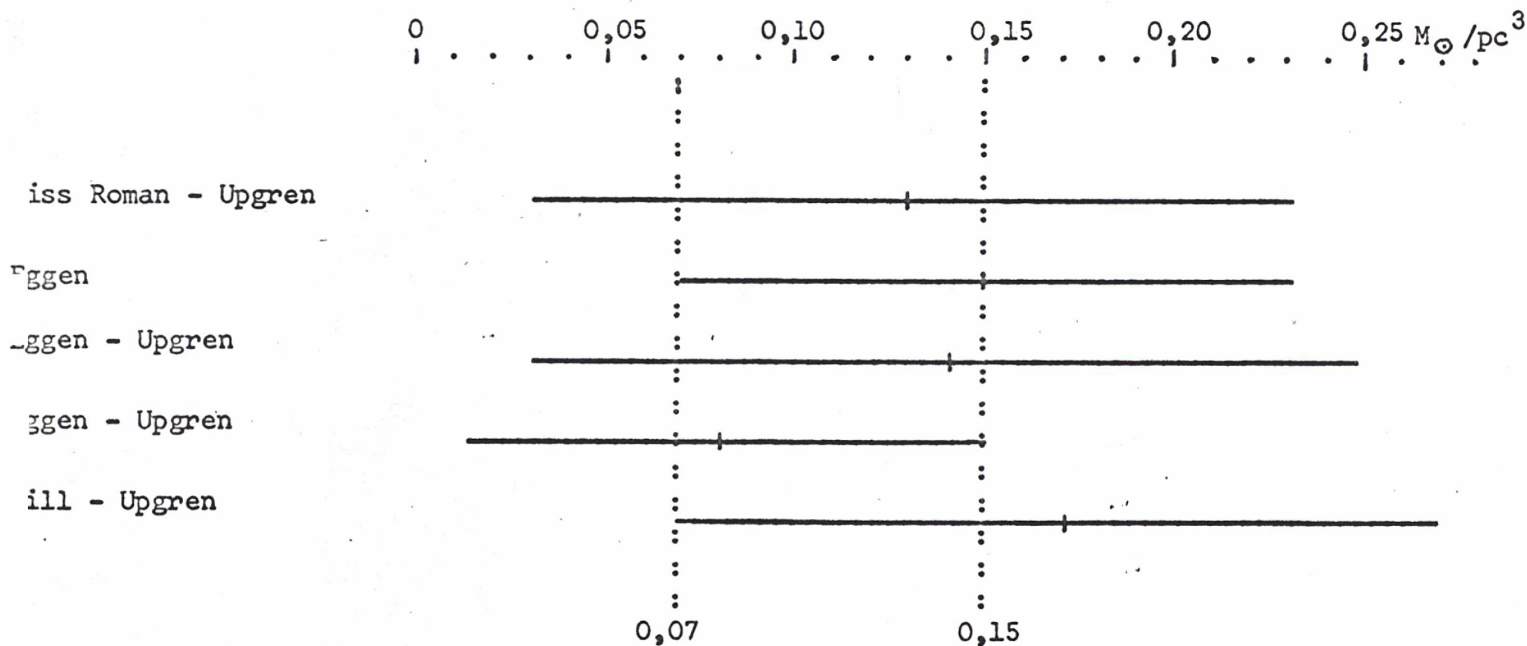
les données de vitesses sont à peine utilisables jusqu'à 100 pc, le matériel observé étant déjà incomplet à cette distance du plan galactique, et les données de densité, dont la précision est limitée par la dispersion naturelle des magnitudes absolues, ne sont guère valables avant 75 pc. L'utilisation simultanée de ces deux sortes de données nécessite donc une extrapolation qui entraîne des erreurs difficiles à estimer.

On ne peut conclure, dans l'état actuel des observations, à la validité ou à la non-validité des hypothèses de symétrie axiale et de système bien mélangé.

Un matériel plus complet, plus homogène et plus précis permettrait d'étudier ces hypothèses et de calculer $Kz(z)$ de façon plus correcte et plus précise, il permettrait aussi de réduire l'erreur commise dans le calcul de ρ . En effet, les résultats obtenus pour ρ sont d'un ordre de grandeur correct mais l'erreur ne permet pas de conclure à l'existence ou à la non-existence de matière "inconnue".

.../...

Le schéma suivant rassemble les résultats obtenus :



Les valeurs extrêmes sont donc 0,07 et 0,15 M_{\odot}/pc^3 .

Pour estimer la valeur centrale, on peut utiliser :

- soit le milieu de l'intervalle défini par les valeurs extrêmes :

$$\rho_1 = 0,11 M_{\odot}/pc^3$$

- soit la valeur moyenne :

$$\rho_2 = 0,134 M_{\odot}/pc^3$$

- soit la valeur médiane :

$$\rho_3 = 0,14 M_{\odot}/pc^3$$

La valeur adoptée est la moyenne des valeurs obtenues :

$$\rho_0 = 0,13 M_{\odot}/pc^3 \pm 0,02 M_{\odot}/pc^3$$

Ceci est compatible avec la valeur de OORT (1960) : 0,15 M_{\odot}/pc^3 adoptée par la suite.

.../...

III - CALCUL DE $K_z(z)$ PAR L'EQUATION DE POISSON ET DISCUSSION DES LOIS DE VITESSES ET DE DENSITE :

On supposera désormais que $K_z(z)$ vérifie l'équation de POISSON simplifiée par l'hypothèse de symétrie axiale :

$$(I) \quad \frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r} + \frac{\partial k_z}{\partial z} = -4\pi G\rho$$

Le terme $\left(\frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r}\right)$ étant positif, cette équation entraîne $\frac{\partial k_z}{\partial z} < 0$ ce qui signifie que tout maximum dans la courbe de $-K_z$ est exclu.

La densité ρ étant connue : loi théorique satisfaisant les données d'observation : ρ_0 , densité au voisinage du soleil et $z(0,1)$, distance à laquelle la densité est divisée par 10 (BLAAUW, 1965), on obtient $K_z(z)$ en intégrant l'équation (1). Diverses lois théoriques de densité seront essayées. Le potentiel et la loi de densité étant connus, on peut calculer la dispersion des vitesses σ_w par l'équation de l'hydrodynamique.

On constate que l'hypothèse : dispersion des vitesses en z constante est à écarter. La loi de densité semblant le mieux convenir est la loi exponentielle.

1) Calcul d'un potentiel vérifiant l'équation de POISSON simplifiée

a) Données de BLAAUW :

Au cours d'une étude sur les populations stellaires, BLAAUW (1965) rassemble les données de base actuellement disponibles sur la distribution spatiale et les mouvements des différents types d'objets actuellement observés.

De ce tableau nous ne retiendrons que cinq colonnes :

- le type d'objet,
- la densité dans le plan galactique au voisinage du soleil, en masses solaires par $1\ 000\ \text{pc}^3$,
- la distance $z(0,1)$ du plan galactique à laquelle la densité est réduite au dixième de ce qu'elle était dans ce plan,
- la distance moyenne au plan : $\langle |z| \rangle$,
- la dispersion des vitesses perpendiculaires au plan galactique : σ_w

La densité locale totale adoptée par BLAAUW est celle de OORT (1960) : $0,15\ M_{\odot}/\text{pc}^3$. Ceci entraîne que presque 43 % de la densité locale : $0,064\ M_{\odot}/\text{pc}^3$ n'est pas représenté dans la liste des objets observés. On admet généralement que cette "masse inconnue" a une distribution en z analogue à celle de la vieille population du disque ou de la population II intermédiaire (OORT, Galactic Structure, Ch 21).

Nous avons classé les objets observés suivant $z(0,1)$ croissant et les avons séparés en cinq groupes en nous inspirant de la Classification des populations stellaires de la Conférence du Vatican de 1957 (BLAAUW, Galactic Structure, Ch 20).

Les cinq groupes sont les suivants :

- 1 - extrême population I, indicateurs de bras,
- 2 - jeune population I,
- 3 - vieille population I,
- 4 - vieux disque et population II intermédiaire,
- 5 - halo : population II.

... / ...

Suivant ce qui a été dit plus haut, nous avons classé la majorité de la "matière inconnue" ($0,063 M_{\odot}/pc^3$) dans le quatrième groupe, réservant $0,001 M_{\odot}/pc^3$ pour le halo.

Cette répartition est confirmée, du moins en partie, par un récent article de WIEDERMAN (Zeitschrift für Astrophysik 67, 286, 1967) : il trouve, pour les naines blanches, qui se placent en effet dans le quatrième groupe, une densité de masse de $0,015$ à $0,030 M_{\odot}/pc^3$. Il suppose même, compte tenu de la faible luminosité de ces objets, qui sont donc difficiles à détecter, que les naines blanches pourraient constituer près de 50 % de la densité de masse des objets brillants au voisinage du soleil. Cela comblerait pratiquement totalement le "manque de densité".

Pour chaque groupe nous avons déterminé la densité locale totale, les valeurs moyennes de $z(0,1)$, $\langle |z| \rangle$ et σ_w .

Le tableau X donne le détail de la composition des groupes et les valeurs adoptées dans chaque cas.

.../...

T A B L E A U X

TABLEAU X

GROUPES	OBJETS	OBJETS				GROUPES			
		Densité	$z(0,1)$	$\langle z \rangle$	σ_w	Densité	$z(0,1)$	$\langle z \rangle$	σ_w
		$M_{\odot}/1000 pc^3$	pc	pc	Km/s	$M_{\odot}/1000 pc^3$	pc	pc	Km/s
1									
Extrême pop. I bras	O - B5	0,11	100	50	4	0,14	100	50	4
	Amas ouverts O - B6	0,03	120	50	6				
	Céphéïdes	$3 \cdot 10^{-4}$	140	70	5				
2									
Jeune pop. I	Amas ouverts B7 - F	0,05	170	80	6	26,75	270	120	8
	B8 - A5	1,7	200	70	9				
	Matière interstellaire	25	280	125					
3									
Vieille pop. I	F	2,5	400	130	14	6,71	500	160	17
	d G	3,5	550	180	20				
	g G 5 - 8	0,2	550	180	16				
	g K 0 - 5	0,5			17				
	g M	0,01			17				

.../...

4												
	d K	9	800	270	19	114	800	270	19			
	d M	29	800	270	19							
Vieux	RR Lyrae $\Delta S < 5$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	1 100		34							
disque	Variables à longue période											
et	P < 150 j. et > 250	}	10^{-3}	}	1 300				29			
pop. II	200 - 250											50
intermé-	150 - 200											61
diaire	Compagnons obscures	5										
	Naines blanches	8										
	Matière inconnue	63										

5												
	RR Lyrae $\Delta S \geq 5$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	5 000		91	2,5						
	Amas globulaires :	}	10^{-3}	}	120							
Halo	G0 - G5					6 000	2 300					
	F6 - F9					13 000	5 400					
	F2 - F6	20 000	10 000									
	Sous-naines	1,5										
	Matière inconnue	1										

	MASSE TOTALE	150,1				150,1						

b) Choix des lois de densité :

On admet généralement (voir BLAAUW, Galactic Structure, Ch 20) que la distribution de la densité perpendiculairement au plan galactique est comprise entre une gaussienne et une exponentielle. On essayera donc trois modèles :

- une gaussienne $\rho_1 = \rho_0 e^{-z^2/2\sigma^2}$ avec $\sigma^2 = \frac{z(0,1)^2}{2.3} \cdot \frac{1}{2}$

- une exponentielle $\rho_2 = \rho_0 e^{-z/a}$ avec $a = \frac{z(0,1)}{2.3}$

- une courbe intermédiaire $\rho_3 = \rho_0 e^{-\left(\frac{z}{z_0}+1\right)\log\left(\frac{z}{z_0}+1\right)}$ avec $z_0 = \frac{z(0,1)}{1.5}$

Le tableau XI donne les valeurs de ces différents paramètres pour les différents groupes définis ci-dessus.

(Sous-Groupe	: Densité : ρ_3	: $z(0,1)$: σ	: a	: z_0	: σ_w
(: M /1000 pc ³	: pc	: pc	: pc	: pc	: Km/s
(:	:	:	:	:	:
(Extrême I	: 0,14	: 100	: 47	: 43	: 67	: 4
(Jeune pop. I	: 26,75	: 270	: 126	: 117	: 180	: 8
(Vieille pop. I	: 6,71	: 500	: 233	: 217	: 333	: 17
(Pop. II intermédiaire	: 114	: 800	: 373	: 348	: 533	: 19
(Halo	: 2,5	:	:	:	:	:
(:	:	:	:	:	:

.../...

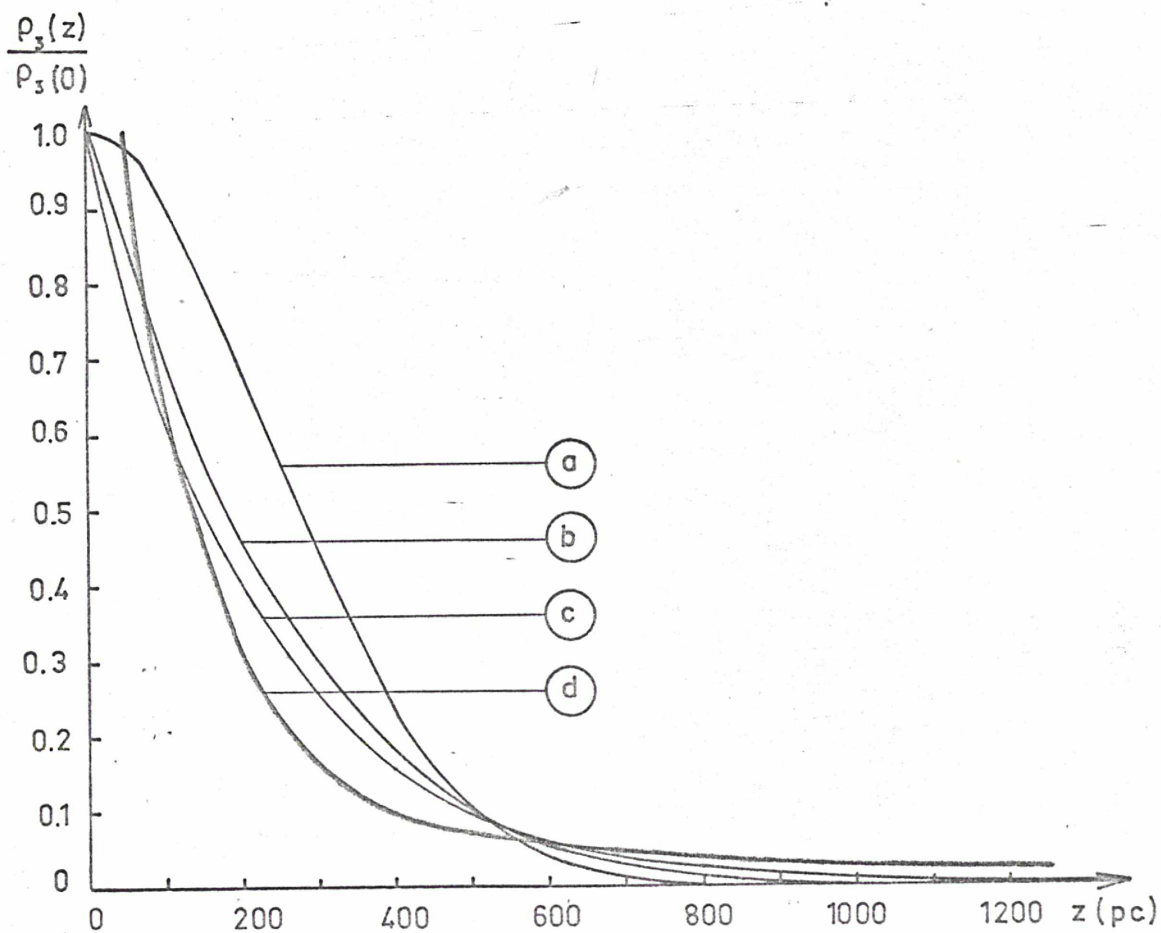


fig. 12 : Lois de densité du groupe 3.

a : gaussienne

b : loi intermédiaire

c : exponentielle

d : courbe expérimentale : Upgren.

Les trois courbes de densité obtenues dans le cas du groupe 3 (qui contient les gK) sont représentées sur la figure 12, ainsi que la courbe donnée par UPGREN pour les gK0-K2. On constate que la courbe qui se rapproche le plus de celle d'UPGREN est l'exponentielle.

c) Calcul des potentiels correspondant aux lois de densité proposées :

L'équation (I) donne l'expression de $K_z(z)$:

$$K_z(z) = - \int_0^z \left(\frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r} \right) dz - 4\pi G \int_0^z \rho(z) dz$$

Pour le terme $\frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r}$, nous utiliserons les valeurs calculées par OORT (1960) à partir du modèle de SCHMIDT (1956).

Le tableau XII donne les solutions trouvées pour $K_z(z)$ pour chacune des trois lois de densité définies ci-dessus :

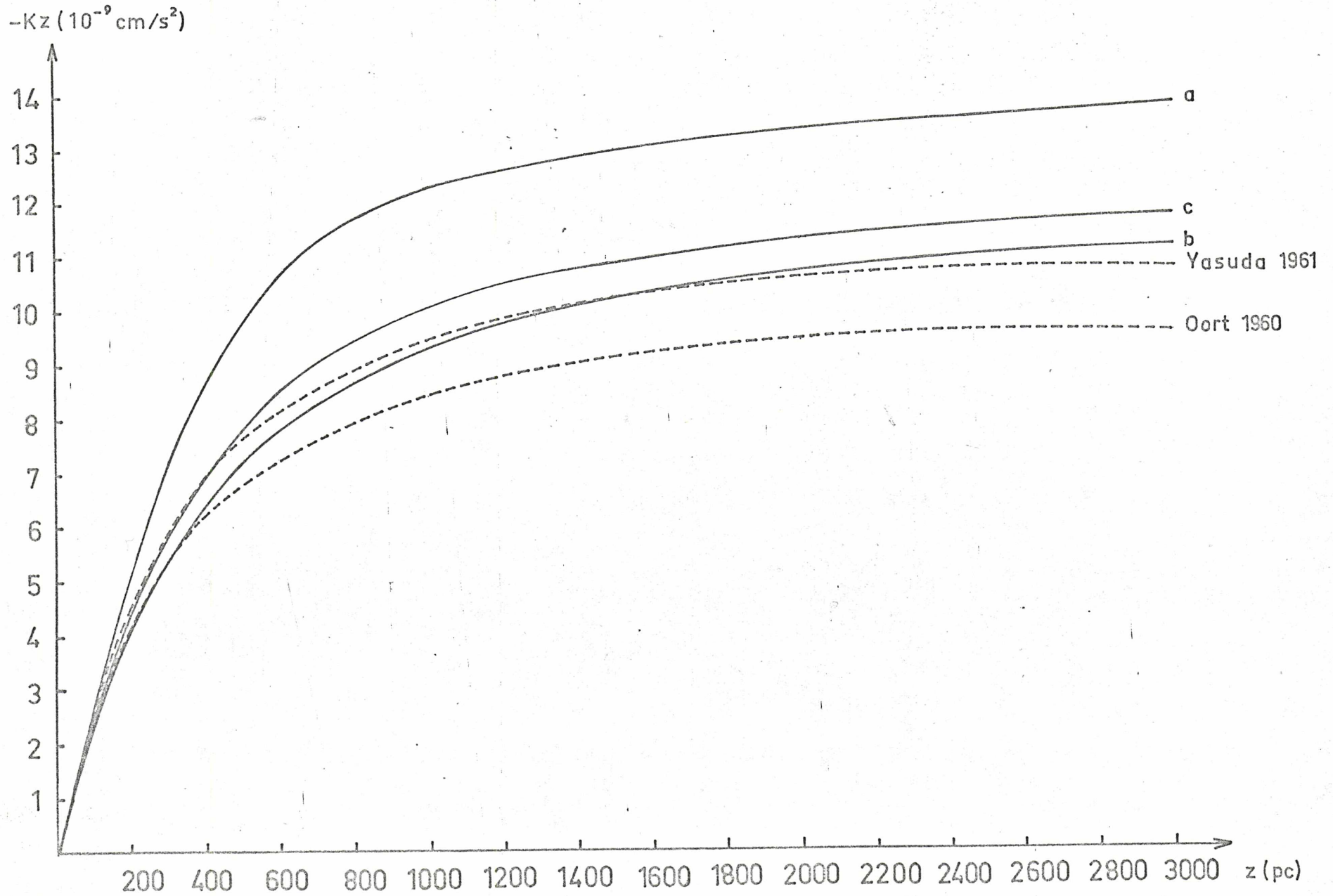
.../...

z	$\int_0^z \left(\frac{dk_r}{dr} + \frac{k_r}{r} \right) dz$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	$4\pi G \int_0^z \rho_1 dz$	$4\pi G \int_0^z \rho_2 dz$	$4\pi G \int_0^z \rho_3 dz$	$-Kz_1$	$-Kz_2$	$-Kz_3$
pc	10^{-9} cm/s^2	10^{-25} g/cm^3	10^{-25} g/cm^3	10^{-25} g/cm^3	10^{-9} cm/s^2	10^{-9} cm/s^2	10^{-9} cm/s^2	10^{-9} cm/s^2	10^{-9} cm/s^2	10^{-9} cm/s^2
0	0	102,07	102,07	102,07	0	0	0	0	0	0
50	0,09	99,85	83,36	89,20	1,30	1,19	1,23	1,39	1,28	1,32
100	0,18	93,93	70,48	77,31	2,54	2,18	2,30	2,72	2,36	2,48
200	0,37	77,17	50,44	57,64	4,74	3,71	3,97	5,11	4,08	4,34
300	0,55	60,89	36,98	42,97	6,50	4,82	5,24	7,05	5,37	5,79
400	0,72	46,53	27,58	32,04	7,87	5,64	6,18	8,59	6,36	6,90
600	1,05	23,18	15,92	17,62	9,62	6,72	7,43	10,67	7,77	8,48
800	1,34	9,52	9,61	9,62	10,42	7,36	8,11	11,76	8,70	9,45
1 000	1,58	3,85	6,13	5,44	10,73	7,75	8,50	12,31	9,33	10,08
1 500	2,00	1,73	2,75	2,17	11,02	8,27	8,89	13,02	10,27	10,89
2 000	2,16	1,70	1,95	1,75	11,24	8,56	9,15	13,40	10,72	11,31
3 000	2,19	1,70	1,71	1,70	11,67	9,01	9,59	13,86	11,20	11,87

TABLEAU XII

On constate que c'est la solution correspondant à une densité exponentielle qui se rapproche le plus des solutions de OORT (1960) et YASUDA (1961). Voir les courbes sur la figure 13.

fig. 13 : Accélération $Kz(z)$ -
 a : loi de densité gaussienne
 b : " " " exponentielle
 c : " " " intermédiaire.



d) Influence de la répartition de la "matière inconnue" sur le potentiel :

La loi de densité exponentielle paraissant être la plus satisfaisante nous avons utilisé celle-ci pour étudier l'influence de la répartition de la "matière inconnue" sur le potentiel.

Nous examinerons trois cas :

a) $0,063 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 4^e groupe : vieux disque et population II intermédiaire,

$0,001 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 5^e groupe : halo ;

b) $0,063 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 3^e groupe : vieille population I

$0,001 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 5^e groupe ;

c) Un cas extrême supposant qu'il y a 15 % de la "matière inconnue" dans le halo (OORT, Galactic Structure, Ch 21), le reste étant distribué par moitié dans les 3^e et 4^e groupes.

$0,028 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 3^e groupe

$0,027 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 4^e groupe

$0,009 M_{\odot} / \text{pc}^3$ dans le 5^e groupe

Le tableau XIII donne les solutions obtenues pour $Kz(z)$ dans ces trois cas.

.../...

z	- Kz(z)		
pc	cas a)	cas b)	cas c)
	10 ⁻⁹ cm/s ²		
0	0	0	0
50	1,28	1,26	1,27
100	2,36	2,28	2,34
200	4,08	3,84	4,04
300	5,37	4,94	5,32
400	6,36	5,75	6,31
600	7,77	6,86	7,80
800	8,70	7,58	8,88
1 000	9,33	9,09	9,71
1 500	10,27	8,88	11,26
2 000	10,72	9,29	12,39
3 000	11,20	9,77	14,26
:	:	:	:

Les courbes obtenues sont représentées sur la figure 14.

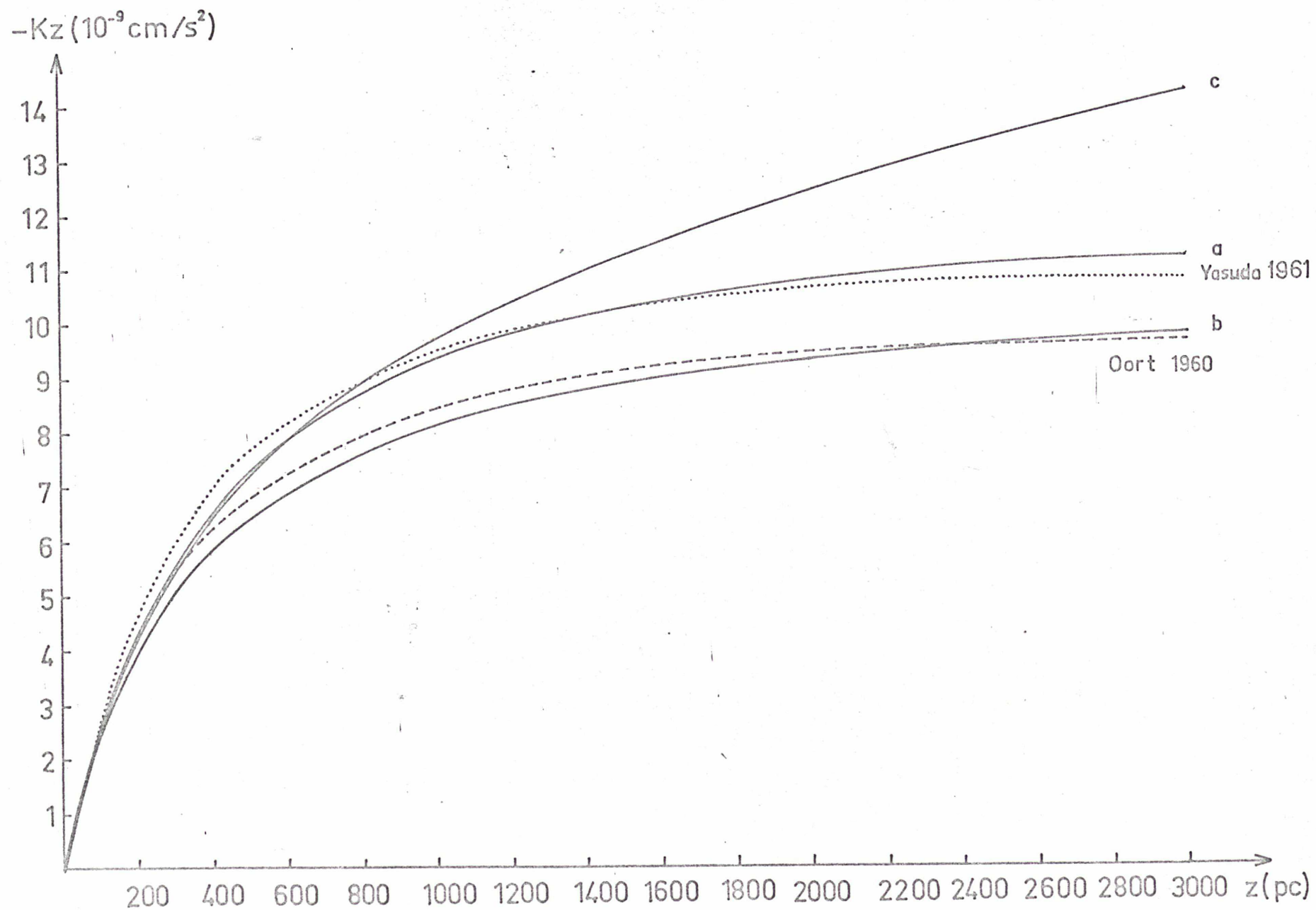
On constate qu'il y a assez peu de différence entre les deux premiers cas ; par contre le troisième se distingue nettement des deux autres pour des grandes distances du plan galactique, ce qui est normal puisque le halo y devient prépondérant.

TABLEAU XIII

Par la suite, nous utiliserons le premier cas : majorité de la "matière inconnue" dans le quatrième groupe, vieux disque et population II intermédiaire. C'est, en effet, celui qui paraît le mieux confirmé par les observations, du moins actuellement.

fig. 14 : Accélération $Kz(z)$

Influence de la répartition de la matière inconnue : voir texte pour les différents cas.



2) Calcul de la dispersion des vitesses en fonction de z pour le groupe 3 : vieille population I.

Nous avons vu précédemment que, pour le groupe 3 : vieille population I, la loi théorique représentant le mieux la courbe de densité expérimentale est une loi exponentielle : $\rho = \rho_0 \cdot e^{-z/a}$
avec : $\rho_0 = 6,71 M_{\odot} / 1\ 000\ pc^3$
 $a = 217\ pc$

Le potentiel et la loi de densité étant connus, on peut calculer la dispersion des vitesses par l'équation de l'hydrodynamique :

$$\frac{d}{dz} (N \overline{w^2}) = N \cdot Kz \quad \text{avec } N = \frac{\rho}{\rho_0}$$

En développant par rapport à $\sigma_w^2 = \overline{w^2}$, on obtient une équation différentielle du premier degré avec 2nd membre :

$$\frac{d\overline{w^2}}{dz} + \overline{w^2} \frac{d\text{Log}N}{dz} = Kz$$

.../...

La résolution numérique de cette équation donne les résultats suivants :

z	$\overline{w^2}$ calculé	$\overline{w^2}$ NAHON (Vr gG observé)	WILSON gK	$\overline{w^2}$ NAHON gG-K calculé	$\overline{w^2}$ HILL calculé
(pc)	(Km/s) ²	(Km/s) ²	(Km/s) ²	(Km/s) ²	(Km/s) ²
0	289		250	260	214
100	413	336	528	340	222
200	531	501	450	460	254
300	660	-	-	600	296
400	820	599	850	-	337

TABLEAU XIV

L'accord avec les valeurs calculées directement par NAHON à partir des étoiles du catalogue de WILSON de latitude $|b| > 55^\circ$ est satisfaisant.

.../...

3) Conclusion :

L'accord entre la courbe obtenue pour l'accélération $Kz(z)$ en utilisant une loi exponentielle pour représenter la densité et les résultats de OORT (1960) et surtout de YASUDA (1961) est tout à fait satisfaisant.

Cette accélération et la loi de densité exponentielle permettent de calculer la dispersion des vitesses, σ_w^2 , toujours pour les géantes K, en fonction de z . L'hypothèse de la constance de σ_w^2 paraît exclue pour ce groupe d'étoiles. Les résultats sont en bon accord avec les valeurs observées. (σ_w^2 de l'ordre de 800 (Km/s)^2 pour $z = 400 \text{ pc}$).

.../...

CONCLUSION :

L'introduction des "pseudo-moments" dans l'étude des mouvements perpendiculaires au plan galactique a permis d'obtenir un résultat satisfaisant, compte tenu de la précision du matériel utilisé, pour ρ_0 , densité totale au voisinage du soleil ($\rho_0 = 0,13 \pm 0,02 M_{\odot} / \text{pc}^3$).

Par contre, l'équation de l'hydrodynamique avec "pseudo-moments" ne permet pas d'obtenir un résultat acceptable pour l'accélération $Kz(z)$, du moins dans l'état actuel des observations. Il est préférable de calculer celle-ci en intégrant l'équation de POISSON et en utilisant pour ρ_0 la valeur obtenue au préalable par l'intermédiaire des valeurs du pseudo-moment et de la densité au voisinage de $z = 0$.

Un matériel plus complet, plus homogène, plus précis et observé en vue de l'étude des mouvements perpendiculaires au plan galactique permettrait d'étudier sérieusement les hypothèses fondamentales et d'utiliser de façon plus valable l'équation de l'hydrodynamique pour calculer l'accélération $Kz(z)$ et la densité totale.

.../...

Monsieur DELHAYE, Directeur de l'Observatoire de Paris, a dirigé l'ensemble de ce travail. Je tiens à le remercier particulièrement pour la patience avec laquelle il a encouragé mes recherches interrompues quelque temps par la naissance de ma fille.

Je remercie également Monsieur Louis MARTINET et tous mes camarades du service de Statistique Stellaire de l'Observatoire de Paris qui m'ont apporté une aide précieuse par leur sympathie, leurs remarques et aussi... leur participation aux calculs numériques sur machine de bureau et ordinateur.

B I B L I O G R A P H I E

- BLAAUW Stars and Stellar Systems, vol. 5 : Galactic structure, Ch. 20 (1965)
- BOK et BASINSKI Memoirs of the Mount Stromlo Observatory, 16 (1964)
- EELSALU Tartu, 33, 416 (1961)
- EGGEN ROB, 51 (1962)
- HILL BAN, 15, 1 (1960)
- JONES ROB, 52 (1962)
- KING AJ, 70, 296 (1965)
- LJUNGGREN et OJA Arkiv för Astronomi, 3, 501 (1965)
- LUYTEN MN RAS, 139, 221 (1967)
- NAHON BA, 21, 55 (1957)
C.R. Acad. Sc. Paris, 263, 888 (1966)
- OORT BAN, 6, 249 (1932)
BAN, 9, 185 (1941)
BAN, 15, 45 (1960)
Galactic Structure, Ch. 21 (1965)
- PERRY Thèse, Kitt Peak National Observatory (1965)
- ROMAN Ap. J., 112, 554 (1950)
Ap. J., 116, 112 (1952)
AJ, 59, 307 (1954)
- SCHMIDT BAN, 13, 15 (1956)
- STROTHERS et TECH MN RAS, 127, 287 (1964)
- UPGREN AJ, 67, 37 (1962)
- WIEDERMAN Zeitschrift für Astrophysick, 67, 286 (1967)
- WOOLLEY MN. RAS, 117, 198 (1957)
- WOOLLEY et STEWART MN RAS, 136, 329 (1967)
- YASUDA Annals of the Tokyo Astronomical Observatory, 7, 47 (1961)