



**HAL**  
open science

# Étude théorique de l'effet Hanle : traitement du cas de la raie D3 de l'hélium en vue de la détermination du champs magnétique des protubérances solaire

Véronique Bommier

► **To cite this version:**

Véronique Bommier. Étude théorique de l'effet Hanle : traitement du cas de la raie D3 de l'hélium en vue de la détermination du champs magnétique des protubérances solaire. Physique [physics]. Université Paris 6, 1977. Français. NNT : 1977PA060001 . tel-02147484

**HAL Id: tel-02147484**

**<https://hal.science/tel-02147484>**

Submitted on 4 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E présentée  
pour l'obtention  
du  
DIPLOME DE DOCTEUR DE 3e CYCLE  
à  
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE  
- Paris 6 -

Spécialité : PHYSIQUE ATOMIQUE  
Option : ASTROPHYSIQUE

par Véronique BOMMIER

Sujet de la thèse :

Etude théorique de l'effet Hanle ; traitement du cas de la raie  $D_3$  de l'Hélium en vue de la détermination du champ magnétique des protubérances solaires.

soutenue le 28 MARS 1977 devant la Commission composée de :

M. S. HAROCHE	Président
Mme S. SAHAL-BRECHOT	Examinateur
M. R.M. BONNET	"
M. J.P. DESCUBES	"
M. A. OMONT	"
M. H. VAN REGEMORTER	"
M. J.L. LEROY	Membre invité.



113)  
1777

T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME DE DOCTEUR DE 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris 6 -

Spécialité : PHYSIQUE ATOMIQUE

Option : ASTROPHYSIQUE

par Véronique BOMMIER

Sujet de la thèse :

Etude théorique de l'effet Hanle ; traitement du cas de la raie  $D_3$  de l'Hélium en vue de la détermination du champ magnétique des protubérances solaires.

soutenue le 28 MARS 1977 devant la Commission composée de :

M. S. HAROCHE	Président
Mme S. SAHAL-BRECHOT	Examineur
M. R.M. BONNET	"
M. J.P. DESCOUBES	"
M. A. OMONT	"
M. H. VAN REGEMORTER	"
M. J.L. LEROY	Membre invité.



A MES PARENTS

Ce travail a été effectué pendant l'année 1975-76 dans le "Groupe de recherches sur les processus atomiques et moléculaires de l'Astrophysique" du Département d'Astrophysique Fondamentale de l'Observatoire de Meudon. Je remercie Henri VAN REGEMORTER de m'y avoir accueillie.

Je suis profondément reconnaissante à Sylvie SAHAL-BRECHOT de m'avoir guidée tout au long de ce travail et de m'avoir fait profiter de son expérience de la recherche sans jamais ménager son temps.

Je suis très heureuse de remercier ici Jean-Louis LEROY qui m'a fait connaître l'Astronomie expérimentale en me faisant participer aux observations qu'il fait actuellement à l'Observatoire du Pic du Midi.

Les calculs numériques de cette thèse doivent beaucoup à Monique MALINOVSKY qui m'a donné son programme d'équilibre statistique et à VO KY LAN qui m'a donné son programme de calcul des coefficients de l'algèbre de Racah. Je les remercie vivement, ainsi que Mme PRUD'HOMME dont l'aide est si précieuse aux programmeurs débutants.

Je voudrais que tous les chercheurs du groupe sachent combien l'atmosphère sympathique qu'ils ont su créer a compté pour moi tout au long de ce travail.

Je remercie Sylvie BOUCHERIE qui s'est chargée de la frappe de cette thèse, avec rapidité et efficacité.

Je remercie enfin Messieurs A.OMONT, J.P. DESCOUBES, R.M. BONNET d'avoir bien voulu faire partie du jury de cette thèse et S. HAROCHE qui a bien voulu en être le président.

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I : L'EFFET HANLE ET LA DETERMINATION DES CHAMPS MAGNETIQUES DANS LES PROTUBERANCES SOLAIRES</u>	8
1. <u>INTRODUCTION</u>	9
2. <u>CHARACTERISTIC FEATURES OF THE HANLE EFFECT AND INTEREST OF THE METHOD</u>	9
2.1. Classical theory	
2.2. Interest of the method.	
3. <u>NON MAGNETIC DEPOLARIZATION EFFECTS</u>	11
3.1. Influence of jets of particles	
3.2. Influence of possible variation of brightness of the solar surface	
3.3. Integration along the line of sight	
3.4. Influence of optical thickness	
3.5. Influence of hyperfine structure	
3.6. Influence of collisions and photoionization	
3.7. Conclusion of section 3	
4. <u>QUANTUM THEORY OF THE HANLE EFFECT FOR HELIUM TRIPLET LINES</u>	14
5. <u>INTERPRETATION OF THE POLARIZATION DIAGRAM.</u>	17
5.1. Horizontal fields	
5.2. General case	
6. <u>UNCERTAINTIES ON THE DETERMINATION OF B AND <math>\theta</math></u>	19
6.1. Uncertainty in the field strength	
6.2. Uncertainty in $\theta$	
7. <u>CONCLUSION</u>	20
REFERENCES	22
<u>CHAPITRE II : FORMALISME DE LA DESCRIPTION DE L'ATOME ET DU RAYONNEMENT</u>	
II.0. <u>INTRODUCTION</u>	33
II.1. <u>MATRICE DENSITE D'UN SYSTEME PHYSIQUE. MATRICE DENSITE ATOMIQUE.</u>	34
II.2. <u>OPERATEURS TENSORIELS IRREDUCTIBLES</u>	36
II.2.1. Espace de Liouville	
II.2.1.1. Definition	
II.2.1.2. Propriétés	

II.2.2. Définition des opérateurs tensoriels irréductibles	
II.2.2.1. Rotation du système d'axes	
II.2.2.2. Définition	
II.2.3. Base des opérateurs tensoriels irréductibles	
II.2.4. Développement de la matrice densité atomique sur la base des opérateurs tensoriels irréductibles.	
II.3. <u>DESCRIPTION CLASSIQUE D'UN FAISCEAU LUMINEUX MONOCHROMATIQUE</u>	42
II.3.1. Matrice polarisation d'un faisceau lumineux	
II.3.1.1. Définition	
II.3.1.2. Propriétés de $\pi$	
II.3.1.3. Définition des directions principales de vibration	
II.3.2. Paramètres de Stokes et taux de polarisation du faisceau	
II.3.2.1. Définition et relation avec la matrice polarisation	
II.3.2.2. Signification physique et mesure des paramètres de Stokes.	
II.3.2.3. Relation entre les paramètres de Stokes d'un faisceau lumineux, son taux de polarisation linéaire et sa direction de polarisation	
II.3.2.4. Relation entre les paramètres de Stokes et le taux de polarisation circulaire.	
II.3.2.5. Définition du taux de polarisation " au sens des paramètres de Stokes."	
II.4. <u>DESCRIPTION CLASSIQUE ET QUANTIQUE D'UN RAYONNEMENT QUELCONQUE. MATRICE DENSITE DU RAYONNEMENT.</u>	51
II.4.1. Expression classique du champ électro-magnétique Développement en ondes planes et multipolaires	
II.4.1.1. Développement en ondes planes	
II.4.1.2. Développement en ondes multipolaires	
II.4.1.3. Matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique).	
II.4.2. Expression quantique du champ électro-magnétique	
II.4.3. Densité d'énergie du rayonnement. Cas d'un rayonnement en équilibre thermodynamique.	
II.4.4. Matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique) et matrice polarisation.	
II.4.4.1. Relation matrice densité - matrice polarisation dans l'approximation des grandes longueurs d'onde	
II.4.4.2. Développement de la matrice densité sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles.	
II.4.4.3. Exemples de calcul de la matrice densité d'un faisceau.	
II.4.4.4. Matrice densité du rayonnement émis dans une direction donnée à partir d'une source de rayonnement dipolaire électrique.	
II.5. <u>CONCLUSION</u>	67

CHAPITRE III : INTERACTION ATOME RAYONNEMENT

III.0 INTRODUCTION 68

III.1 EQUATION PILOTE DECRIVANT L'EVOLUTION D'UN PETIT SYSTEME A COUPLE A UN GRAND RESERVOIR R. 68

III.1.1. Notion de trace partielle

III.1.2. Equation pilote

III.1.2.1. Hypothèses

III.1.2.2. Expression de l'équation pilote

III.1.2.3. Cas particulier équations de l'équilibre statistique d'un système A dont les niveaux ne sont pas dégénérés.

III.2. INTERACTION D'UN ATOME AVEC UN RAYONNEMENT CONTENANT TOUTES SES FREQUENCES DE RESONANCES, EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE 75

III.2.1. Hypothèses concernant l'atome et le champ magnétique

III.2.2. Hypothèses concernant le rayonnement incident

III.2.3. Hamiltonien d'interaction atome-rayonnement

III.2.4. Equation d'évolution d'un élément  $\alpha_1 \alpha_1 J_1 J_1 \rho_{M_1 M'_1}$

III.2.5. Equation d'évolution d'un élément  $\alpha_1 J_1 k_1 \rho_{q_1}$

III.2.6. Remarques

III.2.7. Matrice densité des photons émis

III.2.8. Application à l'étude de l'effet Hanlé pour une transition  $J = 1 \rightarrow J = 0$  d'un atome.

CHAPITRE IV : APPLICATION AU CALCUL DES PARAMETRES DE STOKES DE LA RAIE D<sub>3</sub> DE L'HELIUM DES PROTUBERANCES SOLAIRES.

IV.0. INTRODUCTION 94

IV.1. ATOME D'HELIUM 94

IV.1.1. Effet Zeeman des niveaux  $3d^3 D$  et  $2p^3 P$

IV.1.2. Probabilités d'émission spontanée

IV.1.3. Probabilités de photoionisation et de recombinaison

IV.1.4. Sections efficaces de photoionisation.

IV.2. RAYONNEMENT SOLAIRE INCIDENT 109

IV.2.1. Intensité du rayonnement photosphérique

IV.2.2. Matrice densité du rayonnement solaire incident  
Facteurs de dilution dans le domaine optique.

IV.2.3. Assombrissement centre-bord.

IV.2.4. Calcul des probabilités de photoionisation et de recombinaison.

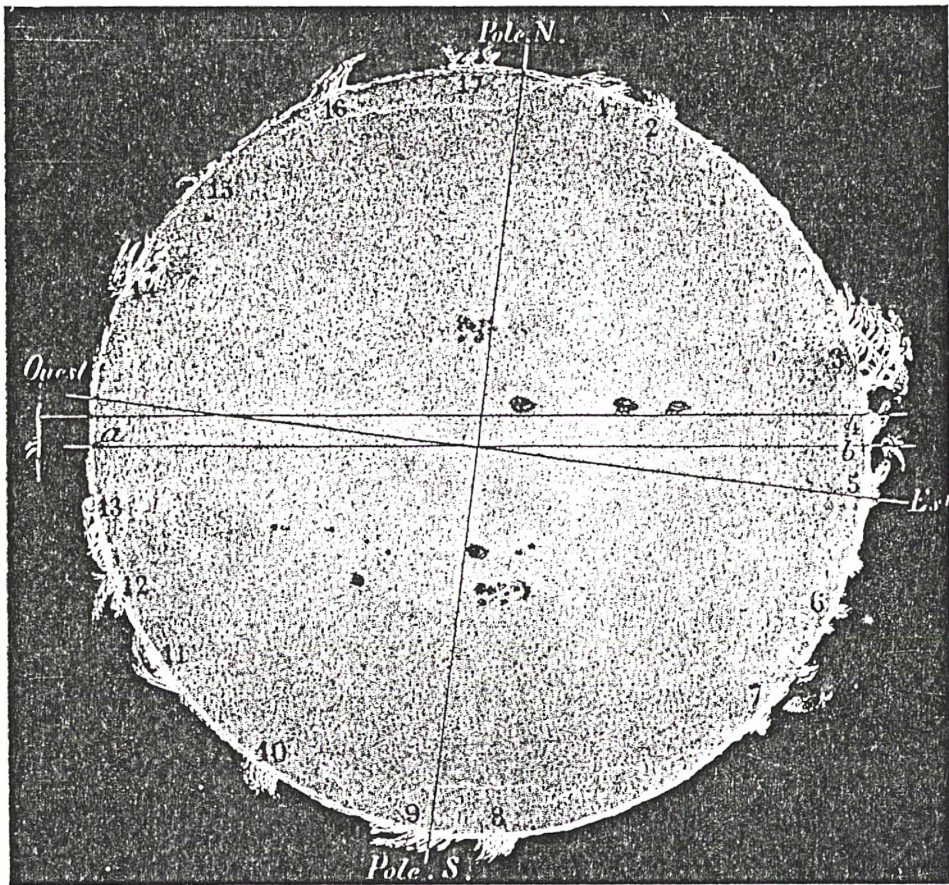


IV.3. <u>RESOLUTION DES EQUATIONS DE L'EQUILIBRE STATISTIQUE</u>	120
IV.3.1. Notations et repères utilisés.	
IV.3.2. Calculs et résultats	
IV.3.2.1. Taux (et direction) de polarisation linéaire en champ nul ou vertical	
IV.3.2.2. Précision du résultat et influence des paramètres $N_e$ et $T_e$ , du nombre de niveaux et du nombre de multipôles.	
IV.3.2.3. Taux (et direction) de polarisation linéaire en champ non nul.	
IV.3.2.4. Limite de validité, en champ magnétique, pour les résultats.	
IV.3.3. Application à la mesure du champ magnétique des protubérances.	
<u>APPENDICE A</u> <sub>II</sub> : Calcul des coefficients d'une matrice densité développée sur la base des opérateurs tensoriels irréductibles après une rotation des axes.	132
<u>APPENDICE A</u> <sub>III</sub> : Expression de l'équation pilote	135
<u>CONCLUSION</u>	139
<u>REFERENCES</u>	141

## INTRODUCTION

### Petit historique :

Les premiers écrits relatant l'observation de protubérances lors d'une éclipse datent du XII<sup>ème</sup> siècle. Elles furent ensuite oubliées, et Vassenius les redécouvrit lors de l'éclipse du 2 mai 1733, qui eut lieu en Suède. Les observateurs les décrivirent comme des "flammes rouges" qu'ils assimilèrent à des nuages de l'atmosphère lunaire ou même à des trous de la lune. Mais le phénomène fut oublié, et Bailey, Struve, Airy, Arago et d'autres astronomes furent très surpris de les observer lors de l'éclipse du 8 juillet 1842. L'éclipse de 1851 permit de mettre en évidence leur appartenance à l'atmosphère solaire. Cependant l'étude des protubérances ne put progresser que grâce à l'invention de la photographie (1860), puis du spectrographe (1868). A l'aide de ce dernier, on observa que, contrairement au spectre de l'atmosphère solaire (ou photosphère) qui est formé de raies en absorption-les raies de Fraunhofer-le spectre de la lumière émise par les protubérances est formée de raies en émission ; comme dans le cas des raies de Fraunhofer, on put identifier la plupart d'entre elles aux raies émises par des éléments connus sur la terre (hydrogène et métaux : Fe, Ca, Mg, Na, Mn, Ti...). L'une de ces raies, intense et voisine des raies  $D_1$  et  $D_2$  du sodium, et absente au spectre de l'atmosphère solaire, ne put être attribuée à aucun élément connu à l'époque : on lui donna le nom de  $D_3$  (à cause de sa position dans le spectre) et on l'attribua à un élément inconnu sur la terre auquel on donna le nom d'Hélium (du nom grec du soleil Helios). La constitution de ce spectre de raies d'émission permit d'observer les protubérances en dehors des éclipses (en élargissant la fente d'entrée du spectrographe) et d'en entreprendre une étude systématique (Janssen 1868) Huggins (1869). On put alors dresser des cartes telles que celle-ci (Secchi 1877) :



Les protubérances se présentent sous des aspects si bizarres et si capricieux qu'il est absolument impossible de les décrire avec quelque exactitude.

SECCHI, *Le Soleil*, 1877.

Enfin, l'invention du coronographe par Lyot (1936) permit d'observer directement les protubérances en reconstituant à l'intérieur de l'appareil les conditions physiques d'une éclipse (on occulte l'image du disque solaire par un disque de métal).

#### DESCRIPTION ET CLASSIFICATION DES PROTUBÉRANCES :

Dans l'état actuel de nos connaissances, le terme "protubérances" recouvre des objets très divers. Certaines se présentent comme de grandes plaques verticales dont l'épaisseur est de l'ordre de 6000 Km et dont la hauteur peut atteindre 50000 Km et la longueur 200000 km ; leur durée de

vie varie de quelques jours à plusieurs mois ; l'étude des largeurs des raies de leur spectre montre que la température y est environ 6000 K, que la vitesse moyenne d'agitation  $v$  des différentes parties qui les constituent est de 5 à 10 km s<sup>-1</sup> et que la densité électronique est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{10} \text{ e}^- \text{ cm}^{-3}$ . Ces protubérances semblent retomber sur le soleil avec une vitesse d'ensemble  $V$ , dirigée suivant la verticale et inférieure à  $v$  (trop grande cependant pour expliquer leur durée de vie). Ces protubérances sont appelées protubérances quiescentes. Les autres protubérances sont regroupées sous le nom de protubérances actives. Leur durée de vie est de quelques dizaines de minutes. Elles se présentent sous des aspects très divers, auxquels on a donné les noms de fontaine, jet (spray, surge), boucle (loop), pluie coronale (coronal rain) tombant de nuages coronaux (coronal clouds). Certaines se présentent comme des éruptions au cours desquelles la matière peut atteindre une vitesse supérieure à la vitesse d'échappement (618 km s<sup>-1</sup> à la surface du soleil). Dans d'autres, au contraire, la matière retombe dans la chromosphère le long de trajectoires courbes, avec une vitesse qui peut atteindre celle de la chute libre (130 - 160 km sec<sup>-1</sup>). L'étude des spectres de ces protubérances a montré qu'elles ne sont pas homogènes, la température pouvant atteindre dans certaines régions une valeur de 300.000 - 400.000 K, la vitesse d'agitation 30 à 50 km s<sup>-1</sup>, la densité électronique  $10^{11} \text{ e}^- \text{ cm}^{-3}$ .

#### DETERMINATION ANTERIEURE DU CHAMP MAGNETIQUE :

Le champ magnétique est l'une des principales causes du mouvement du plasma des protubérances. Pour faire un modèle magnétohydrodynamique de protubérance, on cherche à construire une structure de champs magnétiques dans laquelle la matière s'écoule, de façon à reproduire les phénomènes observés. Il est donc essentiel de mesurer le champ magnétique des protubérances, pour donner une plus grande vraisemblance à ces modèles. Dans un premier temps on a déterminé la composante longitudinale, en mesurant le taux de polarisation circulaire le long du profil d'une raie émise dans les protubérances, et en reliant ce taux de polarisation au champ magnétique par l'étude de l'effet Zeeman. L'appareil qui mesure ce taux de polarisation circulaire a été appelé magnétographe. L'étude de 135 protubérances quiescentes au magnétographe, à l'Observatoire de Climax a donné une valeur moyenne de la composante longitudinale du champ magnétique de 6,9G, et a montré que,

dans 50% des mesures, cette composante longitudinale est comprise entre 3 et 8 gauss (Tandberg-Hanssen, 1974). Cependant les autres composantes du champ magnétique restent encore à déterminer. C'est ce que peut permettre l'étude de l'effet Hanle de la raie  $D_3$ , comme nous allons le montrer dans ce travail.

#### MESURES FAITES ACTUELLEMENT A L'OBSERVATOIRE DU PIC DU MIDI :

L'effet Hanle (1925) est la dépolarisation et la rotation de la direction de la polarisation linéaire du rayonnement diffusé par un ensemble d'atomes soumis à un rayonnement directif (ou partiellement directif) sous l'effet d'un champ magnétique. Très schématiquement, le rayonnement continu provenant de la photosphère solaire est diffusé par les atomes d'hélium de la protubérance et conduit à l'émission de la raie  $D_3$ . Comme le montre la théorie classique de la diffusion d'un rayonnement partiellement directif par un atome (diffusion Rayleigh), en champ magnétique nul, la raie  $D_3$  doit être partiellement polarisée linéairement, et la direction du vecteur polarisation doit être dirigée selon la tangente au bord solaire. En fait les observations de Lyot (1932, 1935) reprises par Hyder (1965) ont montré que ce n'était pas le cas et c'est ce dernier, suivi par House (1970), qui suggéra d'attribuer cette rotation du vecteur polarisation de la raie  $D_3$  à l'effet Hanle. Dans l'idée que l'interprétation de la mesure du taux de polarisation linéaire et de l'angle de rotation de la direction de polarisation de la raie  $D_3$  allait permettre d'obtenir de nouvelles informations sur le champ magnétique des protubérances, J.L. Leroy a entrepris de mesurer ces quantités au coronographe de l'Observatoire du Pic du Midi : on mesure en effet deux paramètres au lieu d'un ; un autre avantage de ce genre d'observations apparaît immédiatement : les mesures au magnétographe relient la variation du taux de polarisation circulaire le long du profil à la composante longitudinale du champ magnétique ; pour interpréter l'effet Hanlé, il suffit de mesurer les deux paramètres de polarisation linéaire sur le profil intégré : ceci permet de travailler avec une résolution spatiale et temporelle plus grande, et d'accéder à des raies plus faibles. Un échantillon des résultats des mesures de Leroy est représenté sur les photos suivantes, extraites de Leroy et al. (1977), où, pour un point d'une protubérance, la direction de polarisation est représentée par un trait et le taux de polarisation par la longueur de ce trait :

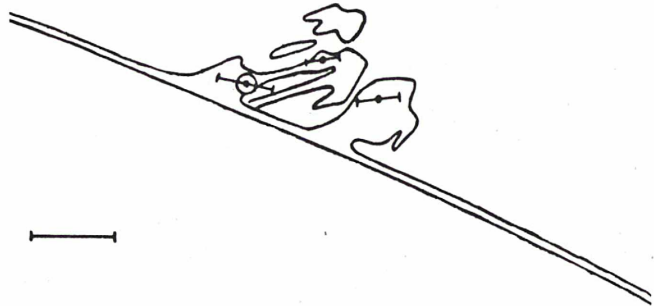
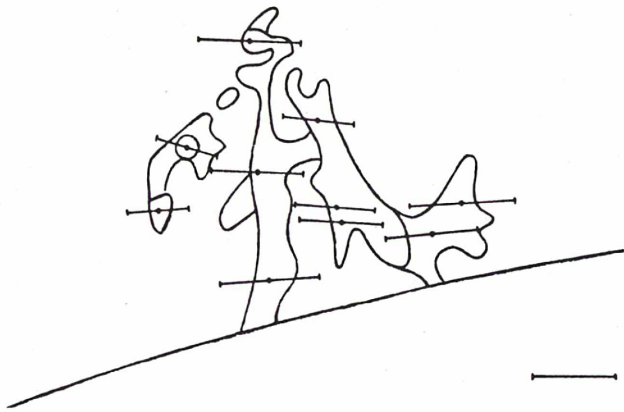
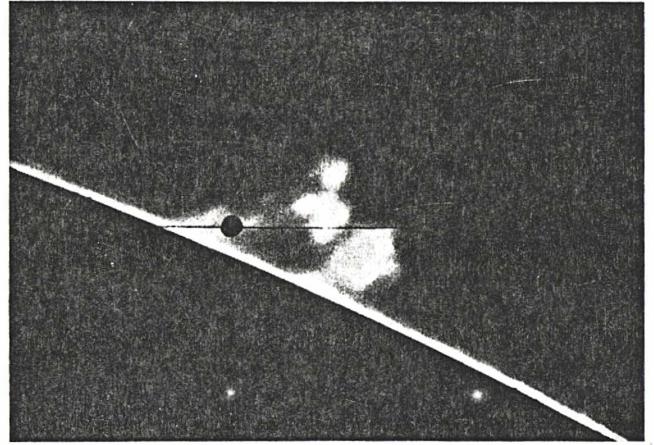
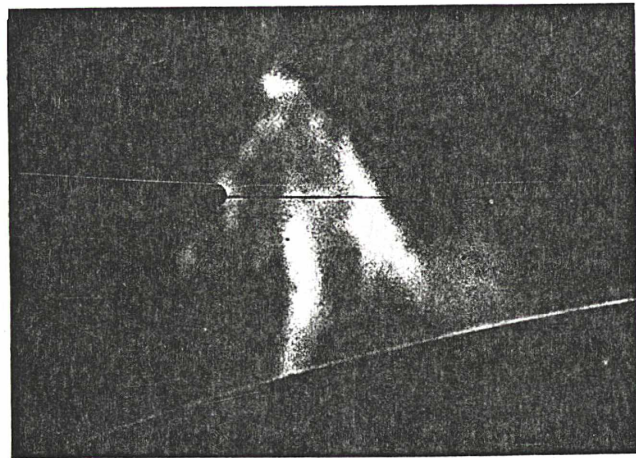


Fig. 1. The distribution of D<sub>3</sub> line polarization over the apparent surface of a quiescent prominence (19.12.1975). The bar in the lower right corner corresponds to a degree of polarization,  $p=0.020$  and the field aperture is 5" wide

Fig. 2. Same as on Figure 1 but for an active, loop, prominence (20.12.1974)

En revanche, l'interprétation des observations nécessite un calcul de physique atomique, ce qui est inutile pour l'interprétation des observations faites au magnétographe.

#### INTERPRETATION DE CES MESURES ET PLAN DE CETTE THESE.

Pour interpréter les précédentes mesures il faut donc calculer de façon théorique le taux de polarisation linéaire et la direction de polarisation de la raie D<sub>3</sub> en fonction du champ magnétique ; ceci est le but de notre travail. Ce taux de polarisation linéaire et cette direction de polarisation sont directement liés à la population, à l'orientation, et à l'alignement des niveaux  $3d^3D_{3,2,1}$  de l'Hélium des protubérances. Pour calculer ces coefficients (population, orientation, alignement), il faut d'une part avoir un modèle physique de la façon dont est formée la raie D<sub>3</sub> dans les protubérances, et d'autre part avoir un formalisme permettant de mettre en équations l'équilibre des atomes d'Hélium avec le rayonnement incident et

le champ magnétique; on peut alors calculer numériquement la population, l'orientation et l'alignement des niveaux  $3d^3D_{3,2,1}$ , de l'Hélium et obtenir les paramètres de polarisation cherchés en fonction du champ magnétique. Notre travail a consisté à trouver le modèle physique et le formalisme, et à mettre au point les programmes de calcul numériques correspondants. Le plan de ce mémoire est schématisé ci-dessous :

### CHAPITRE 1.

Il s'agit d'un article que nous avons soumis à "Astronomy and Astrophysics". Dans cet article, nous décrivons le modèle physique de formation des raies de l'Hélium dans les protubérances, simplification de celui donné par Heasley, Mihalas, et Poland (1973) :

- dans les conditions physiques des protubérances quiescentes, les niveaux  $3d^3D_{3,2,1}$  sont peuplés par photoionisation par le rayonnement EUV coronal à partir du niveau fondamental  $1s^2^1S_0$  suivie de recombinaisons radiatives et de cascades ; l'excitation radiative entre niveaux liés par le rayonnement partiellement directif en provenance de la photosphère s'y rajoute et crée l'alignement des niveaux.

Nous montrerons que dans le cas des protubérances quiescentes, le principal facteur de dépolarisation est le champ magnétique (effet Hanlé).

### CHAPITRE 2.

Ce chapitre est consacré au formalisme de description de l'atome et du rayonnement incident. En particulier nous y rappelons comment ceux-ci peuvent être décrits par des opérateurs densité, et comment on développe ces opérateurs densité sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles  $T_q^{(k)}$ , qui furent introduits par Fano (1957) et Omont (1965) dans l'étude de problèmes à symétrie sphérique ou axiale.

### CHAPITRE 3.

Dans ce chapitre, nous expliquons comment le formalisme de l'équation pilote développé par Cohen-Tannoudji dans son cours au Collège de France (1975-1976) nous a permis d'écrire les équations d'équilibre des coefficients de la matrice densité d'un atome soumis d'une part à un rayonnement contenant

plusieurs de ses fréquences de transition, et dont la matrice densité est quelconque, et d'autre part à un champ magnétique statique.

#### CHAPITRE 4.

Nous expliquons dans ce chapitre comment nous avons appliqué ce formalisme au cas de l'Hélium des protubérances solaires, et nous présentons les données que nous avons introduites dans le programme de calcul numérique que nous avons mis au point. Nous présentons ensuite les résultats obtenus. La manière dont ceux-ci doivent être utilisés est exposée à la fin de l'article (chapitre 1). Nous nous excusons d'avance auprès du lecteur qui devra alors s'y reporter.



CHAPITRE IL'EFFET HANLE ET LA DETERMINATION DES CHAMPS MAGNETIQUES  
DANS LES PROTUBERANCES SOLAIRES.

Ce chapitre a été rédigé sous la forme d'un article destiné à être publié en collaboration avec J.L. Leroy et S. Sahal-Bréchet ; il a été soumis à Astronomy and Astrophysics :

Summary : The object of this paper is to investigate whether the determination of magnetic fields based on the interpretation of the linear polarization modified by the Hanle effect of the He I  $D_3$  line in quiescent prominences can be accurate and safe enough. The interest of the method is at first pointed out. It is then shown that the observed depolarization and rotation of the vector polarization results only from magnetic effects. After that an account of the quantum theory used (a more detailed account (1) will be published separately) for the calculations is given. The interpretation of the attached theoretical polarization diagrams, their use for the determination of magnetic fields, the limitation of the theory and the accuracy of the results are finally discussed. From this it can be concluded that the present method is very promising, especially for the weak magnetic fields (1-15 gauss) which are typical of most quiescent prominences.

Key words : Quiescent prominences. polarization. Helium lines. Solar magnetic fields. Hanle effect.

(1) Il s'agit des chapitres II, III et IV de ce mémoire de thèse.

## 1. Introduction.-

In a previous paper (Leroy et al. 1976), measurements of the linear polarization of the  $D_3$  line ( $3^3D-2^3P$  of He I,  $5876 \text{ \AA}$ ) in prominences have been described. As mentioned in that paper, the observed polarization is believed to be due to resonance scattering of the incident anisotropic photospheric radiation modified by the local magnetic field : Hyder (1964), House (1970), and Tandberg-Hanssen (1974a) suggested that the interpretation of the decrease of the linear polarization degree and the angle of rotation of the direction of the vector polarization, which are the main features of the Hanle effect, would enable us to obtain new informations about the prominence magnetic field. However this requires a theoretical calculation of these quantities. In fact, the knowledge of the formation of He I lines in prominences has recently made decisive progresses (Heasley et al. 1974), as has that of the quantum theory of radiation and optical pumping during the ten past years. As a result, Bommier and Sahal Brechot (Bommier 1976, Bommier and Sahal-Brechot 1977) have calculated the two parameters of the linear polarization of the  $D_3$  line in quiescent prominences.

The object of this paper is to investigate whether such a method of magnetic fields determination can be accurate and safe enough for providing useful data about quiescent prominences.

## 2. Characteristic features of the Hanle effect and interest of the method.

### 2.1. Classical theory

The classical theory of the Hanle effect which is described in the book of Mitchell and Zemansky (1934) is sufficient to give a qualitative interpretation of the linear polarization of emission lines in prominences. Firstly, in zero-magnetic field, the classical theory of Rayleigh scattering tells us that the fluorescence light viewed along the line of sight  $Oy$  (cf. fig 1 a and 2) appears as linearly polarized along  $Ox$  (parallel to the limb) in the case of a directed incident unpolarized radiation beam propagating along  $Oz$ . In fact this geometry which can be carried out in laboratory experiments is not so simple in our case because in solar studies the radiative excitation is only partly directed : thus, the line is only partly polarized along  $Ox$ , with a linear polarization degree  $\eta_{\max}$  increasing with the height  $h$  above the solar limb; the asymptotic limit of  $\eta_{\max}$  is 100 % in the case of the normal Zeeman triplet which corresponds to the classical theory.

Secondly (fig 1 b and fig 2) the effect of a magnetic field on the classical dipole oscillator is equivalent to a precession of the polar axis at

the Larmor frequency  $\omega = \frac{e}{2m} B$

around the magnetic field direction. Since the excited state has a finite lifetime  $\tau$ , the result is a rotation of angle  $\varphi$  of the vector polarization and a decrease of the polarization degree,  $\mu < \mu_{\max}$  depending on the strength  $B$  and the direction of the magnetic field with respect to the scattering reference frame (angles  $\theta$  and  $\psi$ , see fig. 2).

However, for a quantitative interpretation, the quantum theory of radiation has to be introduced.

For instance the asymptotic limit of  $\mu_{\max}$  is less than 100 % for most of lines, depending on the atomic transition: the two-level complex atom is treated in Beckers (1974). The theory for the  $D_3$  line in prominences is briefly described in Section 4.

## 2.2. Interest of the method.

By using the above considerations, one can see that a vertical magnetic field relative to the Sun (i.e. along  $Oz$ , cf. fig. 2) does not alter the polarization since such a field has the same symmetry as the incident light. On the other hand, an horizontal magnetic field along  $Ox$ , which is called a transverse field, does not rotate the direction of polarization but decrease the polarization degree  $\mu$  below  $\mu_{\max}$ . Further an horizontal magnetic field along  $Oy$ , which is called a longitudinal field, both decreases the polarization degree and rotates the direction of the vector polarization. Thus one can infer that the observed parameters of the line polarization are mainly sensitive to magnetic fields which are horizontal with respect to the Sun. This is very suitable for our study, since the magnetic field in quiescent prominences is likely to be roughly horizontal. As the two parameters of the linear polarization are measured (degree and direction), one can hope to obtain two parameters of the magnetic field, this is sufficient for determining it completely (strength  $B$  and angle  $\theta$  with respect to the line of sight) if it is horizontal. But, in the general case one parameter of the field will be missing since the method is to some extent insensitive to vertical magnetic fields.

In any case our approach is a progress since previous magnetic field determinations based upon the Zeeman effect (circular polarization degree varying along the profile) are only able to give the longitudinal (along the line of sight) component (Tandberg Hanssen 1974 b). Moreover with the method based upon the Hanle effect one can use integrated profiles (House 1970), so that the spectral resolution is much less critical. It is then possible to

work with a shorter time constant and with a better spatial resolution, since more intensity is available. Another consequence is the possibility of observing fainter lines than in the case of Zeeman measurements. This last point is particularly important if one needs to study optically thin lines (section 3.3.)

The first problem to tackle is whether we can consider the observed depolarization and rotation of the vector polarization as resulting only from the Hanle effect.

### 3. Non magnetic depolarization effects.

#### 3.1. Influence of jets of particles.

Although they are not absolutely impossible, we shall not consider mechanisms which would produce a polarization larger than the maximum polarization allowed by the resonance scattering theory : we believe that the presence in the solar atmosphere of long-lived organized particles streams sufficient to modify completely the excitation of prominence atoms is highly improbable, especially in the vicinity of quiescent prominences.

#### 3.2. Influence of possible variation of brightness of the solar surface.

As already noted the variation  $\mu_{\max}(h)$  depends upon a geometric factor which fixes the directivity of the photospheric light for the prominence region which is under study; the computation is easy only if one can consider the solar disc as regularly limb-darkened. Thus, the observation of lines which correspond to strong and possibly inhomogeneous chromospheric emissions would lead to some inaccuracies. We must also take care of the fact that prominences have often noticeable radial velocities relative to the Sun : this can change the radiative excitation rate if the photospheric spectrum is not flat near the line studied. For these two reasons the helium lines, which are absent from the photospheric spectrum, are well suited for our study.

#### 3.3. Integration along the line of sight.

The geometrical thickness of a prominence along the line of sight is generally small; thus, the problem of line of sight integration is not a serious limitation in our study, while it is a major problem in coronal line polarization studies. On the other hand, the position of the prominence along the line of sight needs to be known. As a matter of fact the maximum polarization due to resonance scattering is very sensitive to the real height  $h$  of the prominence above the solar limb (cf. fig. 3 and also fig. 9 of Leroy et al 1976). For example, by using Van de Hulst (1950) dilution factors without limb darkening for simplification, the classical theory gives

i. case 1

$$p_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \gamma \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}$$

$$\text{with } \sin \gamma = \frac{R_0}{h + R_0}$$

ii. case 2

$$p_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \gamma' \cos \gamma'}{1 - \cos \gamma'} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{1 + \cos^2 \beta}$$

$$\text{with } \sin \gamma' = \sin \gamma \sin \beta$$

If the limb darkening is taken into account and for a line of sight tangent to the limb ( $h=0$ ), one obtains  $p_{\max} = 8\%$  in case 1,  $p_{\max} = 20\%$  in case 2 for  $\beta = 75^\circ$ . This is an extreme situation and the differences are smaller if one observes higher in the solar atmosphere. Nevertheless, one must take into account in the calculations the exact location of the prominence with respect to the plane of the sky. This is in fact a somewhat difficult point in our approach; the solution has been to identify prominences with the filaments on the synoptic maps of the chromosphere, in order to know as accurately as possible their location at the time of the limb observation.

#### 3.4. Influence of optical thickness.

The quantum theory of radiation leads to the density matrix characterizing the state of the photon emitted by one atom; this density matrix is directly related to the Stokes parameters which are additive if one observes through optically thin layers: the result is a simple integration along the line of sight. On the other hand, the situation is much more complicated in the optically thick case. Firstly, information on the central part of the prominence is lost, and secondly, the state of polarization is modified by multiple scattering (House and Cohen 1969, Stenflo 1976). This difficulty can be avoided by choosing lines which are not easy to saturate; this restricts the study to faint lines and thus requires the use of a coronagraph for the observations. We believe that a major part of the previous measurements of polarization in prominences which have violated this requirement will be extremely difficult to interpret, owing to the optical thickness of the lines studied.

In our case the optical thickness of the  $D_3$  line is small, which enables the interpretation through the optically thin layer approximations.

We have checked that, for a given height of observation, the average observed polarization does not depend on the intensity of the  $D_3$  emission. This indicates that we have little trouble with optical thickness and multiple scattering effects. On the other hand, by using the theory of formation of the lines in prominences as developed in Heasley et al's paper (1974), it is possible to compute a theoretical optical thickness for the triplet lines with a typical hydrogen density of  $n_H = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ , an electronic temperature of  $7000^\circ\text{K}$  and a geometrical slab thickness of 6000 km, one finds

$$\tau_{5876} = 4.4 \cdot 10^{-3}$$

and

$$\tau_{10830} = 4 \cdot 10^{-2}$$

which results are consistent with the observations.

Direct determination of  $\tau_{10830}$  by Tandberg Hanssen (1960, 1962) has led to the quite different value  $\tau_{10830} \simeq 3$  for bright prominences. But, even in this case,  $\tau_{5876} \simeq 0.3$  and is still compatible with the thin layer approximation.

### 3.5. Influence of hyperfine structure.

As mentioned above the maximum polarization due to resonance scattering depends on the line studied. From the instrumental point of view, it would be more interesting to choose a line which can reach a 100 % polarization degree, but, unfortunately, such lines are very faint in prominences spectra. Moreover lines with hyperfine structure are unfavourable for two reasons : they are less polarized and the interpretation of Hanle effect is more complex (Chamberlain, 1967). For this reason calcium and helium lines are to be preferred to those of hydrogen, sodium and magnesium in the prominence spectrum.

### 3.6. Influence of collisions and photoionization.

A very important point which much be discussed and verified is that the observed emission is controlled only by radiative processes : for instance in the corona, isotropic collisional excitation processes play an important role : the polarization degree can be substantially reduced and the interpretation is complicated by the fact that the electron density must be accurately known. Our choice of an helium triplet line is again favourable, as it has been recognized for a long time (Athay and Johnson 1960) that the relative behaviour of the different levels of the triplet series is that of

a pseudo-Boltzmann equilibrium in the radiation field of the photosphere. More recent and detailed calculations made by Heasley *et al.* (1974) have confirmed that the populations of the triplet levels are not influenced by collisions : assuming an electron temperature of 6000°K, a typical excitation (or deexcitation) collisional rate between two bound levels connected by a permitted radiative transition is of the order of  $10^{-6} N_e \text{ s}^{-1}$ , while a typical excitation by the photospheric radiation field lies between  $10^6 - 10^7 \text{ s}^{-1}$  and a typical deexcitation by spontaneous emission lies between  $10^7 - 10^8 \text{ s}^{-1}$  since the electron density  $N_e$  is smaller than  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$  in most quiescent prominences such collisions can be neglected; the same conclusion holds for depolarization by collisions (collisions between Zeeman states belonging to the same level) : such rates are about ten times smaller than excitation rates, owing to the shorter range of the electron (or proton) - atom interaction in the latter case. This conclusion is also valid for collisions between levels belonging to the same multiplet, since the interaction is of the same order of magnitude. Similarly, ionization by collisions is also negligible compared to photoionization (Heasley *et al.* 1974). Isotropic photoionization by the EUV solar radiation, followed by recombinations and cascades towards the  $2^3S'$  level, which in turn is excited by the anisotropic photospheric field towards the excited bound states, which emit the triplet lines, play the most important role in the formation of the triplet levels. Photoionization followed by recombinations towards these excited states is one cause of unpolarized emission which has been taken into account in our calculations but it is very weak. The major effect of this isotropic population of the  $2^3S$  level is to decrease its alignment and this is the principal reason why it cannot be neglected in a calculation of polarization.

### 3.7. Conclusion of Section 3.

We conclude that, for the particular case of the  $D_3$  helium lines, parasitic depolarizing processes can be neglected. Therefore the measured polarization must result only from resonance scattering and magnetic depolarization; this provides a good basis for the determination of magnetic fields in quiescent prominences.

### 4. Quantum theory of the Hanle effect for helium triplet lines.

Some indications about this part of the work have already been given (Bommier and Sahal-Br  chot, 1976). An extensive description of this theoretical work will be given in other papers (Bommier 1977, Bommier and

Sahal-Bréchet, 1977); thus we present here only a brief account of the problem and of its solution.

In a series of pioneering papers on the quantum theory of radiation, Fano (1949, 1954, 1957) showed the equivalence of the description of a polarized radiation beam by means of the classical Stokes parameters and by the components of the quantum density matrix for an incoherent flux of photons. After Fano, the theory has been developed through the works on optical pumping : in particular the density matrix of the fluorescence photon has been connected to that of the excited state of the radiating atom by Barat and Cohen-Tannoudji (1961 a,b); these authors obtained the density matrix of the excited state by coupling in a convenient way the density matrix of the incident photon and that of the ground state. They also took into account the effect of the magnetic field in their equations and thus the Zeeman and Hanle effects. In the standard basis  $|\alpha JM\rangle$  of the atom, the diagonal elements of the density matrix are the populations  $N(\alpha JM)$ , while the off-diagonal terms are the so-called coherences, which are important when the sublevels are mixed by the magnetic field ( $\omega \tau \simeq 1$ , see also House, 1970) : thus the calculations of the coherences and of the populations provide a quantitative interpretation of the Hanle effect. In fact, as suggested by Fano (1957) the convenient basis to be used is not the standard basis  $|\alpha JM\rangle$  of the Hilbert space, but that of the irreducible tensorial operators  $T_q^k$  of the Liouville space. This is due to the fact that the  $T_q^k$  transform under coordinate rotations like the spherical harmonics  $Y_\mu^\lambda$  and are thus suitable to the study of rotationally invariant processes. Omont (1965) showed the power of the method of expansion of the density matrix over this basis for the interpretation of polarization line problems. Subsequently Faroux (1969) has rewritten in his thesis the theory of optical pumping and obtained the results of Barat and Cohen-Tannoudji in the basis of the  $T_q^k$  for the two-level atom. In fact in astrophysical situations many levels are coupled and statistical equilibrium equations must be solved : thus we have generalized (Bommier 1976, Bommier and Sahal-Bréchet 1977) the preceding theory to that of a multilevel atom coupled to a continuum. This has enabled us to write a general program solving the statistical equilibrium equations leading to the multipole components of the density matrix  $\rho_q^k$



in the  $T_q^k$  basis in the optically thin case : the program also provides the intensity  $I$ , the linear polarization degree  $p$  and the angle of rotation  $\varphi$  as functions of  $h$ ,  $N_{\text{He}}$ ,  $N_e$ ,  $T_e$ ,  $B$  and the two angles  $\theta$  and  $\psi$  (see fig. 2); we have used it for the triplet lines of He I in prominences : Figure 4 shows that coherent superposition of sublevels for the  $D_3$  line occur in magnetic fields of interest. At the present time calculations have been restricted to magnetic fields smaller than 15 gauss, since, after that, crossing levels appear (cf. fig. 4) and thus new coherences  $JJ' \rho_q^k$  appear which have not yet been calculated.

As previously stated we have used the work of Heasley et al. (1974) for the processes of formation of He I lines; it can be inferred from this paper that for hydrogen densities smaller than  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  or about the  $\text{He}^+$  continuum is rather optically thin and collisions are negligible. The triplet lines being also optically thin, the triplets can be treated independently from the singlets : the levels are populated by photoionizations from the ground state and the  $2^3S$  levels, followed by recombinations and cascades. We have included the triplet levels up to  $n = 4$  and the first continuum of He. We have checked that the inclusion of the  $n = 5$  levels of He I, the excited states of He II and the He II continuum had a negligible effect on the  $n < 4$  levels populations. Anisotropic excitation between the bound levels by the incident photospheric radiation field is responsible from the alignment of the levels and thus from the line-polarization. We have used Van de Hulst (1950) dilution factors and the classical data on limb darkening (Allen, 1973). In the multipole expansion  $JJ' \rho_q^k$  of the density matrix, we have included  $k$ -pole terms up to  $k = 4$ ; we have checked that higher pole terms ( $k = 6, 8$ ) had a negligible effect on the alignment ( $k = 2$ ) and populations ( $k = 0$ ). In fact only even terms play a role, since the incident field is unpolarized. Alignment of the continuum is also negligible. As a first result the variation  $p_{\text{max}}(h)$ , where  $p_{\text{max}}$  is the maximum polarization degree computed in zero-magnetic field for different heights of observation  $h$  has been obtained and has already been shown (Leroy et al 1976) to be : **consistent** with observations. Secondly we have provided the complete set of curves which connect  $p$  and  $\varphi$  on one hand and  $B$ ,  $\theta$  and  $\psi$  on the other hand (Bommier, 1976, Bommier and Sahal-Br  chot 1977). Numerical results show that  $N_e$  and  $T_e$

have a negligible effect on  $\mu$  and  $\varphi$ . We have thus chosen to do our calculations for  $T_e = 6500$  °K and  $N_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Numerical results show also that the set of curves is nearly independent of altitude if, instead of using the variable  $\mu$  one chooses  $\mu/\mu_{\max}$ . This indicates that the influence of the continuum is very small for the calculation of the polarization parameters. On the other hand the coupling between all the bound levels is important and is responsible for the various undulations of the curves (fig. 5, 6) : the set of curves of House (1970) obtained for the normal Zeeman triplet does not present such undulations. More details of this will be described in our following papers. In the present one we are principally interested in the use of the diagrams of figures 5 and 6 which will be discussed now.

## 5. Interpretation of the polarization diagram.

### 5.1. Horizontal fields.

We are first considering the situation where  $\psi = 90^\circ$  which is a very probable situation for quiescent prominences. Then, starting from the observed quantities  $\mu$  and  $\varphi$  we want to determine  $H$  and  $\theta$  with the aid of figure 5. Taking into account the remarks of the end of the last sections, this diagram is sufficient to interpret all observations referring to horizontal magnetic fields. Owing to the important variation of  $\mu_{\max}$  with  $h$  (Leroy et al 1976, Bommier 1976), the major trouble at this stage of the work lies in the uncertainty on the true value of  $h$ , as underlined in Section 3.2.

As stated in the preceding section, the present calculations are limited to magnetic fields strengths smaller than 15 gauss. Our observations of quiescent prominences, which are displayed on figure 5 as points, show that this temporary threshold already allows extensive studies of the magnetic fields of quiescent prominences. We have not entered our observations of active prominences on this diagram, because the mechanism of formation of helium lines is then different : temperatures and densities being higher, collisions and radiative transfer have to be taken into account. On the other hand a hydrogen density of the order of  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  and a temperature of 6500°K, for which our calculations are valid, are quite representative of quiescent prominences.

An important feature of fig. 5 is that  $\mu/\mu_{\max}$  and  $\varphi$  have the same value for opposite values of  $\theta$ , the field strength

being the same. This means that there is an ambiguity in the direction of the vector field, pointing either towards the right or towards the left of the line of sight.

## 5.2. General case.

Figures 6a and 6b show what happens to the  $(p/p_{\text{max}}, \varphi)$  diagram for magnetic fields whose direction has the angle  $\Psi = 60^\circ$  and  $\psi = 30^\circ$  with the solar radius. For a given field strength, the magnetic depolarization begins to increase when  $\psi$  decreases (from  $90^\circ$ ); it is maximum for the Van Wleck angle ( $\psi = 54^\circ 7'$ ): this is expected since the polarization degree is zero in this case for strong magnetic fields. Below this value the magnetic depolarization decreases with decreasing  $\psi$ , which is also expected, since the Hanle effect disappears in vertical fields (preferential direction of the unpolarized incident light).

If  $\psi$  is not far from  $90^\circ$  one can still use the diagram of figure 5 but the field strength we shall derive in this case will be slightly overestimated.

If the field direction is far from the horizontal plane one can say nothing in general. A possible way to determine completely the magnetic field would be to observe simultaneously two spectral lines and we are currently considering the problem. However the location of observed points on figure 5 already show that in most cases they must correspond to roughly horizontal points since the sets of curves which correspond to small values of  $\psi$  do not provide enough depolarization.

The possible use of figure 5 for quiescent prominence studies implying that the field is nearly horizontal, would be certainly not valid active prominences. But, in this last case, we have another possibility. If we admit, taking into account the large ionization of prominence material (Tandberg-Hanssen, 1974 b) that the fast motions which are very frequently observed in active objects roughly give the projected direction of the field on the plane of the sky, then the polarization analysis made with diagrams such as those of figure 5 is sufficient to determine the two remaining parameters of the field (intensity and angle with the plane of the sky). As a matter of fact, our instrument (Ratier, 1974) which makes monochromatic images of the prominence at the same time as the polarization measurement is very well suited to this approach. However, our calculations have to be generalized for active prominences, by introducing radiative transfer and collisions and probably by solving non-steady state equations.

Concerning the angle of rotation  $\varphi$  of the vector polarization another difference appears between the diagrams of fig. 5 and fig. 6 : in the case of horizontal fields (fig. 5) the direction of the vector polarization is not modified in a transverse field ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), whereas field directions characterized by  $\theta$  and  $\pi - \theta$  angular values leads to opposite rotations : therefore the sign of  $\varphi$  is an indicator of the polarity of the magnetic field. In the general case of fig. 6 small rotations of the vector polarization occur even in purely transverse fields. Nevertheless the preceding conclusion remains valid : a positive value of  $\varphi$  implies that the magnetic field direction is pointed towards the observer and vice versa. One notices that this conclusion is inverse of that of Hyder (1965) and House (1970) and agrees with that of Hanle and Breit's previous work (Mitchell and Zemansky 1934) and with that of the theory of optical pumping (see Brossel 1964 for instance).

## 6. Uncertainty on the determination of $B$ and $\theta$

The most frequent situation being that of horizontal magnetic fields, we return to figure 5 and study the influence of instrumental inaccuracies on the determination of the field parameters.

### 6.1. Uncertainty in the field strength.

Random errors in our measurements (Ratier 1974) are due to the statistical fluctuations of the photoelectric polarized light signal, so that the uncertainty  $\Delta r$  on the measurement of  $r$  is proportional to the inverse of the square root of the  $D_3$  intensity. There is also an error coming from the uncertainty on the height determination. Finally, for a typical prominence ( $I = 2000 \cdot 10^{-6} I_{\odot}$ ,  $h = 0'75$ ) the uncertainty in  $r/r_{max}$  is about 0.05.

As appears on fig. 5 such an error in the ordinate leads to an error of  $\pm 4$  Gauss around  $B = 15$  Gauss and of  $\pm 0.3$  Gauss around

$B = 1$  Gauss. Therefore, by contrast with Zeeman measurements which have an uncertainty of 1 - 2 Gauss in all the range, our determination is more accurate for small magnetic fields, a very useful property for the study of quiescent prominences.

### 6.2. Uncertainty in $\theta$ .

It can be inferred (Ratier 1974) that for a given  $D_3$  intensity the uncertainty in  $\varphi$  is proportional to the inverse of  $r$ . But, at the same time, the triangular shape of the figure 5 diagram makes the determination of  $\theta$  more sensitive to an error in  $\varphi$  if  $r$  is large.

The uncertainty on the determination of  $\theta$  is roughly constant and of the order of  $\Delta\theta \simeq \mp 6^\circ$  (except for  $\theta = 0^\circ$  and  $\theta = 180^\circ$  where it is larger).

Finally, one can note that the uncertainties in  $B$  and  $\theta$  which we have quoted refer to individual measurements. As they result from random errors the real uncertainty is smaller when one averages different measurements in one prominence which is the case for the experimental average points which are given on figure 5. On the other hand, possible systematic errors are not cancelled by the averaging process and it may be that the observed points, which correspond to strongly positive values of  $\varphi$  and appear out of the computed diagram, suffer a small parasitic shift due to some inaccuracy into our zero setting of polarization direction.

### 7. Conclusion.

The results of this paper show that the present determination of magnetic fields in solar prominences by means of the Hanle effect is very promising. Firstly, we have shown that the  $D_3$  line linear polarization must result only from resonance scattering and magnetic depolarization effects, excluding various other depolarization effects. Secondly, the modern advances in the quantum theory of radiation associated with the recent progresses made on the mechanism of formation of He I lines in prominences has made possible such a calculation. Thirdly, our computed "polarization diagram" can be used for determining with some precision two parameters of the field, even allowing for inaccuracies in the measurements. On this point we think that the superiority of the Hanle method compared to that based on the Zeeman effect is clear for very weak fields.

Moreover, linear polarization measurements which are integrated along the profile can be made with a shorter time constant and with a better spatial resolution than Zeeman studies.

Finally only the Hanle method is able to give direct information about the field direction since the measurement of the transverse field is impossible with Zeeman circular polarization measurements.

Nevertheless there remains three difficulties in the present work which will be settled in the near future. Firstly the theoretical computation of the  $D_3$  line polarization is limited to a field strength smaller than 15 gauss, owing to level crossing effects which appear for more intense fields and have not yet been calculated. Secondly, radiative transfer and

collisions have not been taken into account and this limits our study to normal quiescent prominences. Thirdly we cannot determine the three parameters of the field, unless we were able to measure simultaneously the polarization in two different emission lines. While we are working on these difficulties, we believe that it is already possible to use our observational material and our calculations for a correct determination of the magnetic field of quiescent prominences, taking advantage of the following :

a) in most cases its strength is smaller than 15 gauss; b) its direction is nearly horizontal; c) the polarization computed diagram is quite insensitive to the  $\text{He}^+$  continuum influence (for which radiative transfer must be solved for hydrogen densities higher than  $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ).

As a preliminary example we give in figure 7 the repartition of  $B$  and  $\theta$  over the apparent surface of a quiescent prominence observed on December 19 1974 (an image and some of the linear polarization measurements for the same prominence has been published in Leroy et al. previous paper). Available measurements presently refer to more than 80 quiescent prominences and we shall describe in another paper results concerning the strength and direction of magnetic field in these formations.

#### Acknowledgments

The theoretical calculations have been performed partly at the Center of Calcul INAG of Meudon and partly at the C.E.C.A.M.- C.I.R.C.E at Orsay, and have been supported by the R.C.P. 373 "Protubérances Solaires" of the C.N.R.S. The authors are indebted to Dr. M. Malinovsky for useful comments during the writing of the manuscript, to Dr. M. Roberts for a critical reading and the english language of the manuscript, and to Dr. H. Van Regemorter who has impuled this cooperational work between theory and observations.

They would also like to express their gratitude to Dr. J.N. Heasley who has provided several additional informations on his work and has made available preprints before publication .

References

- Allen C.W. 1973, Astrophysical quantities, the Athlone Press, 3rd. ed.
- Athay R.G., Johnson H.R. 1960, Ap J. 131, 413
- Barrat J.P., Cohen Tannoudji C., 1961 a, J. Phys. Rad. 22, 22
- Barrat J.P., Cohen Tannoudji C., 1961 b, J. Phys. Rad. 22, 443
- Beckers J.M. 1974, Solar Physics, 37, 351.
- Bommier V. 1976, Thèse de 3<sup>o</sup> cycle, Paris
- Bommier V., Sahal-Bréchet S., 1976, I.A.U. Commission 14, in press
- Bommier V., Sahal-Bréchet S., 1977, to be published
- Brossel J., 1964, in Quantum Optics and electronics, Gordon and Breach editors  
New-York.
- Fano U. 1949, J.O.S.A., 39, 859
- Fano U. 1954, Phys. Rev. 93, 121
- Fano U. 1957, Rev. Mod. Phys., 29, 74
- Fano U., Racah G. 1959, Irreducible tensorial sets, Academic Press
- Faroux J.P., 1969, Thèse, Paris
- Heasley J.M., Mihalas D., Poland A.I., 1974, Ap.J., 192, 181
- House L.L. 1970, in Solar magnetic fields p. 130; edited by R. Howard.
- House L.L., Cohen L.C. 1969, Ap.J. 157, 261.
- Hyder C.L. 1964, Thesis, University of Colorado
- Hyder C.L. 1965, Ap.J. 141, 1374
- Leroy J.L., Ratier G., Bommier V., 1976, Astron.Astrophys., in press
- Mitchell A.C.G., Zemansky M.W. 1934, Resonance radiation and excited atoms,  
Cambridge University Press
- Omont A., 1965, J. Phys. Rad. 26, 26.
- Ratier G., 1975, Nouv. Rev. Opt., 6, 149
- Stenflo J.O., 1976, Astron.Astrophys., 46, 61
- Tandberg Hanssen E. 1960, Ap. Norv. 6, 206
- Tandberg Hanssen E. 1962, Ann. d'Astrophys. 25, 360
- Tandberg Hanssen E. 1974 a, Planets stars and satellites p.730 T.Gehrels editor  
The University of Arizona Press
- Tandberg Hanssen E. 1974 b, Solar Prominences, D. Reidel Publ. Comp.
- Van de Hulst H.C. 1950, Bull.Astr. Inst. Neth. 11, 135

Captions

- Fig. 1 The polarization due to resonance scattering as seen on the plane of the sky : a) without magnetic field the polarization is tangent to the solar limb and the polarization degree  $\rho/\rho_{\max}$  increases with height  $h$  . b) if there is magnetic depolarization the proportion of polarized light is reduced  $\rho < \rho_{\max}$  and the direction of polarization is turned by the angle  $\varphi$  .
- Fig. 2 Reference system used throughout this paper
- Fig. 3 Case 1 : the prominence P is observed in the plane of the solar limb at the height  $h$  . Case 2 : the prominence P' is observed at the same apparent height  $h$  , but, in fact, it is located behind the plane of the solar limb, its real height <sup>is</sup> larger and the scattering angle is  $\beta \neq \frac{\pi}{2}$
- Fig. 4 Energies of the Zeeman sublevels of the  $3d^3D$  term broadened by their natural width as a function of the magnetic field  $B$  . The zones where coherences are important are colored in grey. Level-crossing coherences occur for sublevels such as  $|M-M'| \leq 2$
- Fig. 5 The polarization diagram for the case of horizontal magnetic fields ( $\psi = \frac{\pi}{2}$ ) . The curves result from the computation of  $\rho/\rho_{\max}$  and  $\varphi$  for various values of  $B$  and  $\theta$  . Full lines correspond to constant values of  $\theta$  while dotted lines give the variation of  $\rho/\rho_{\max}$  as a function of  $\varphi$  for  $B$  constant and expressed in Gauss. The points refer to the average values of  $\rho/\rho_{\max}$  and  $\varphi$  observed on 82 different quiescent prominences. It is clearly seen that the intensity of magnetic field in quiescent prominences is in most cases between 1 and 15 Gauss which is exactly the range of intensities where the Hanle effect has a well visible influence.



Fig. 6a, 6b

Polarization diagrams for  $\psi = 60^\circ$  and  $\psi = 30^\circ$   
 These two sets of curves have been drawn for positive values  
 of  $\theta$  only. The corresponding sets of curves for negative  
 values of  $\theta$  can be obtained by means of an axial symmetry  
 around the ordinate axis centered on  $\varphi = 0$   
 (i.e.  $\varphi(\theta) \rightarrow -\varphi(\theta \pm \pi)$ ).

Fig. 7 The map of  $B$  and  $\theta$  for a quiescent prominence observed on  
 December 19, 1974. The corresponding image and some measurements  
 of the linear polarization have been published previously. It has  
 been interpreted through the diagram of Figure 5 which yields the  
 intensity and the direction of the magnetic field. The circle in  
 the lower right corner shows the spatial resolution (5") of the  
 measurements.

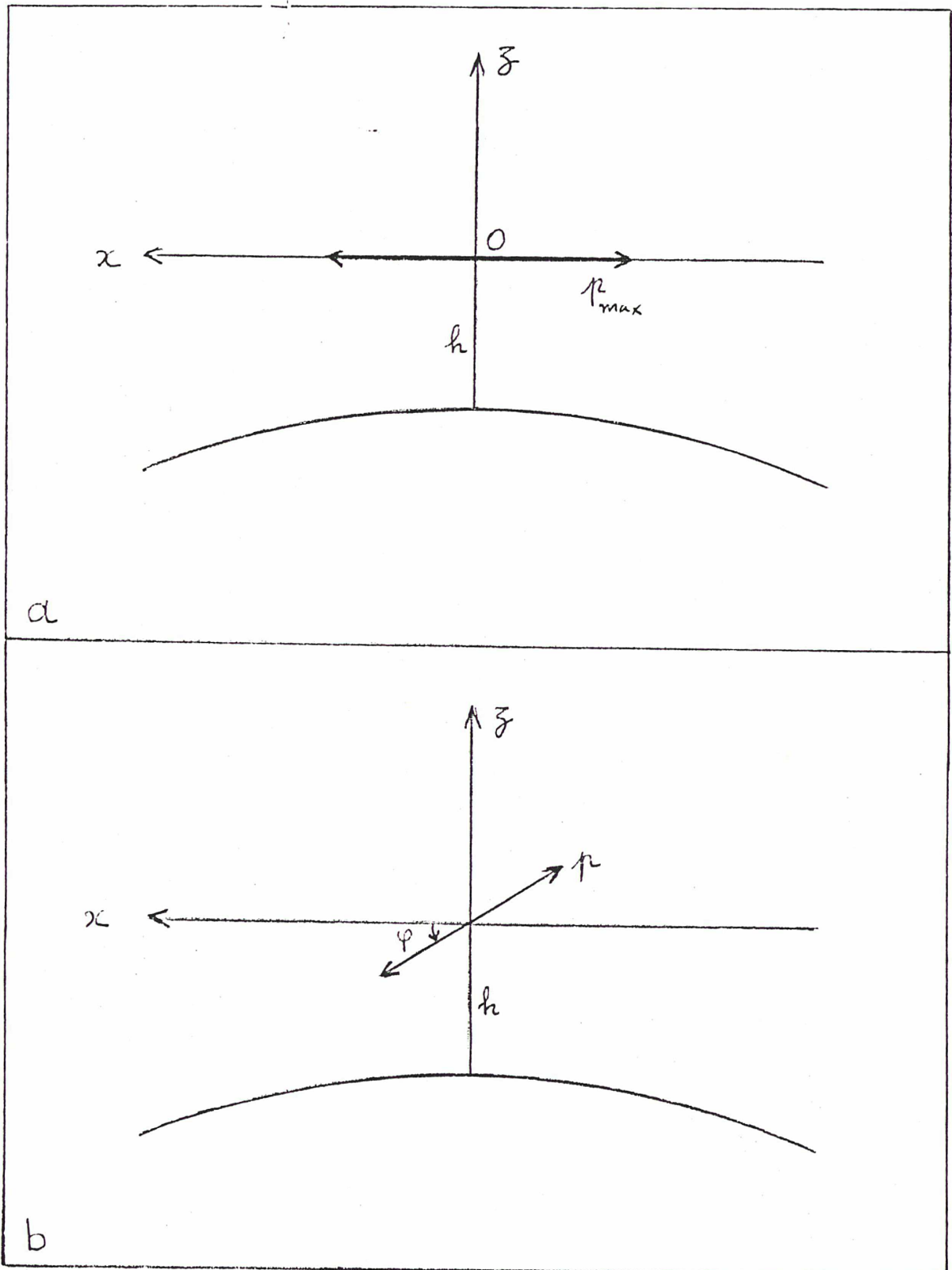


FIGURE 1.

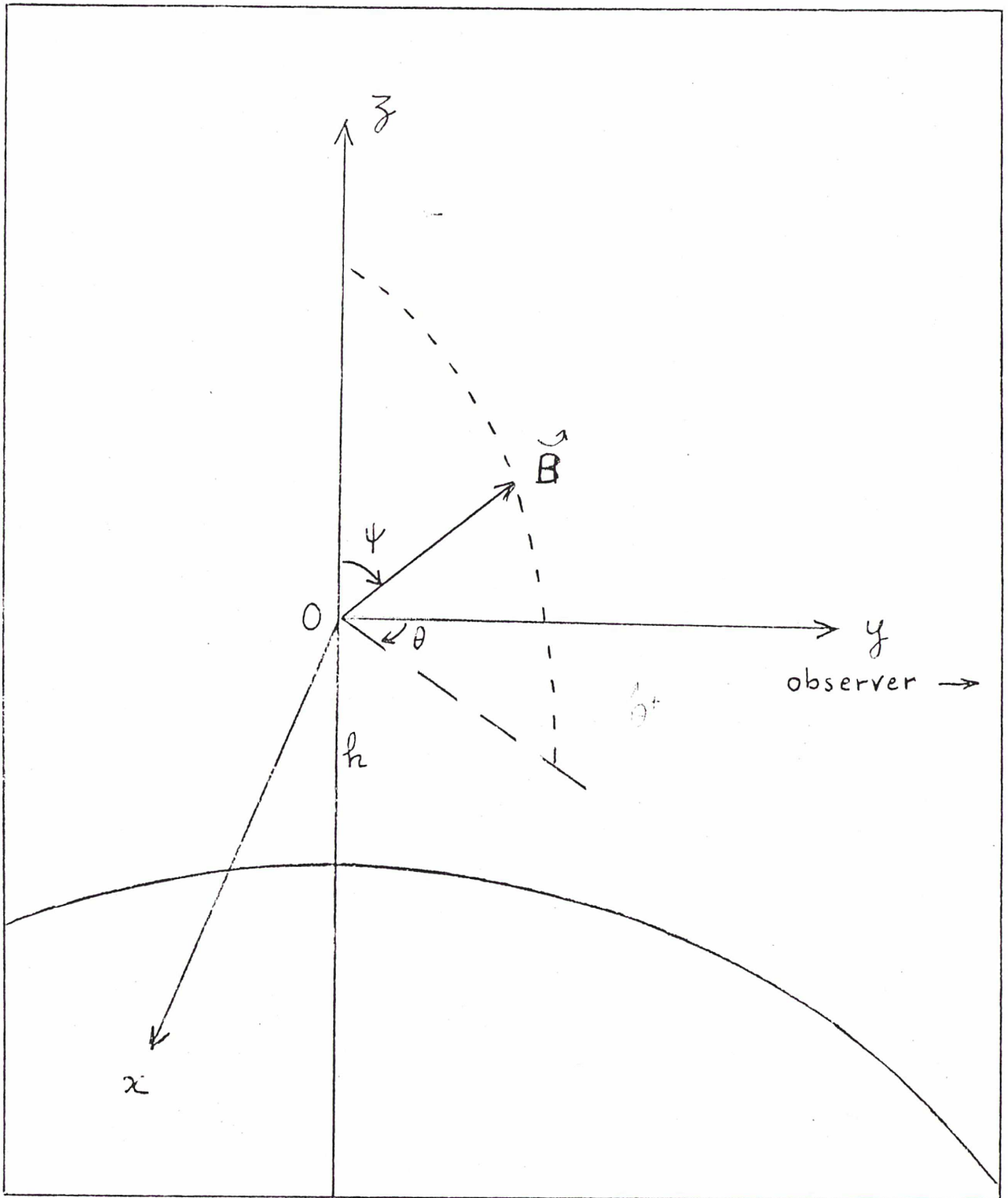


FIGURE 2.

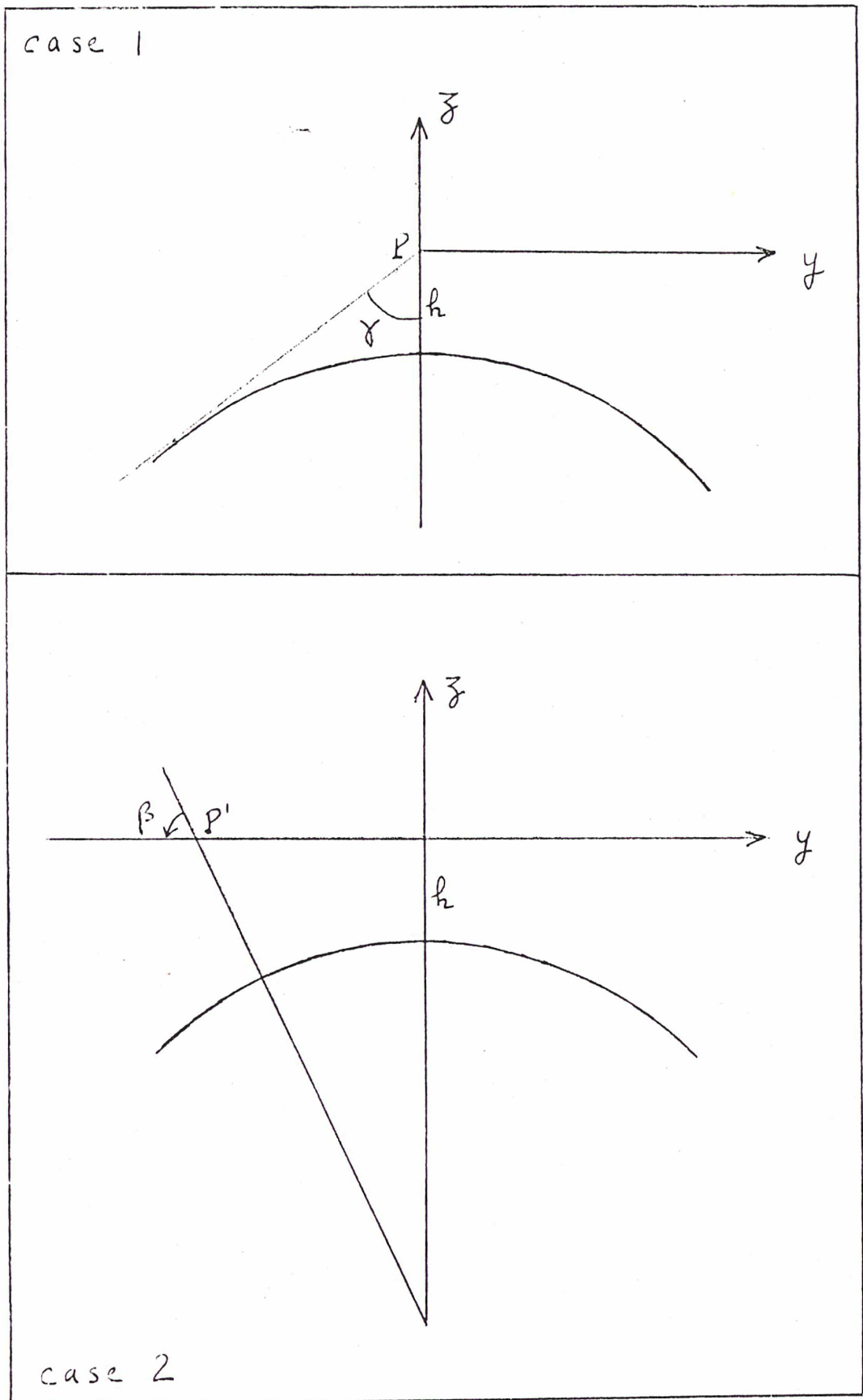


FIGURE 3.

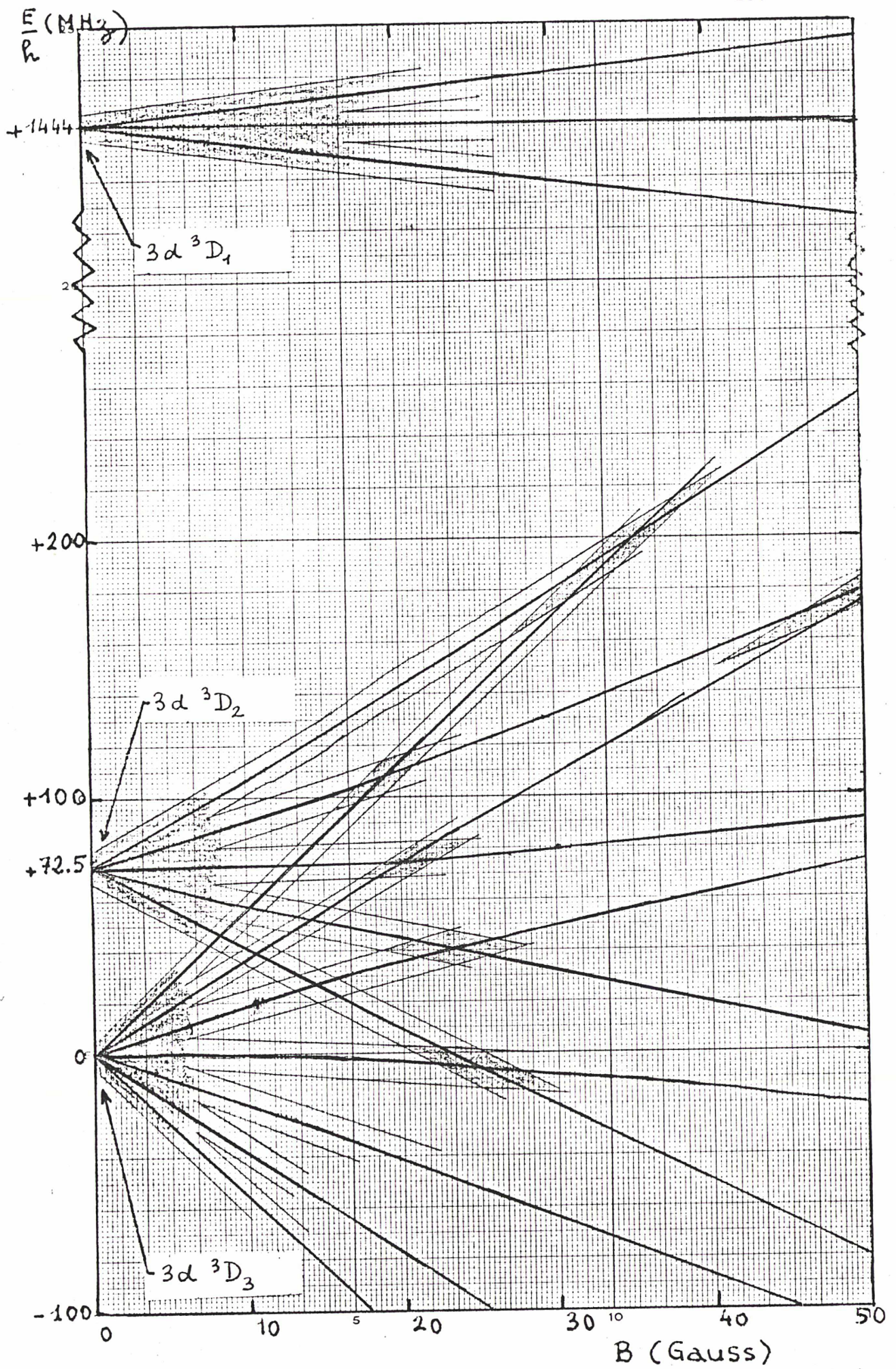
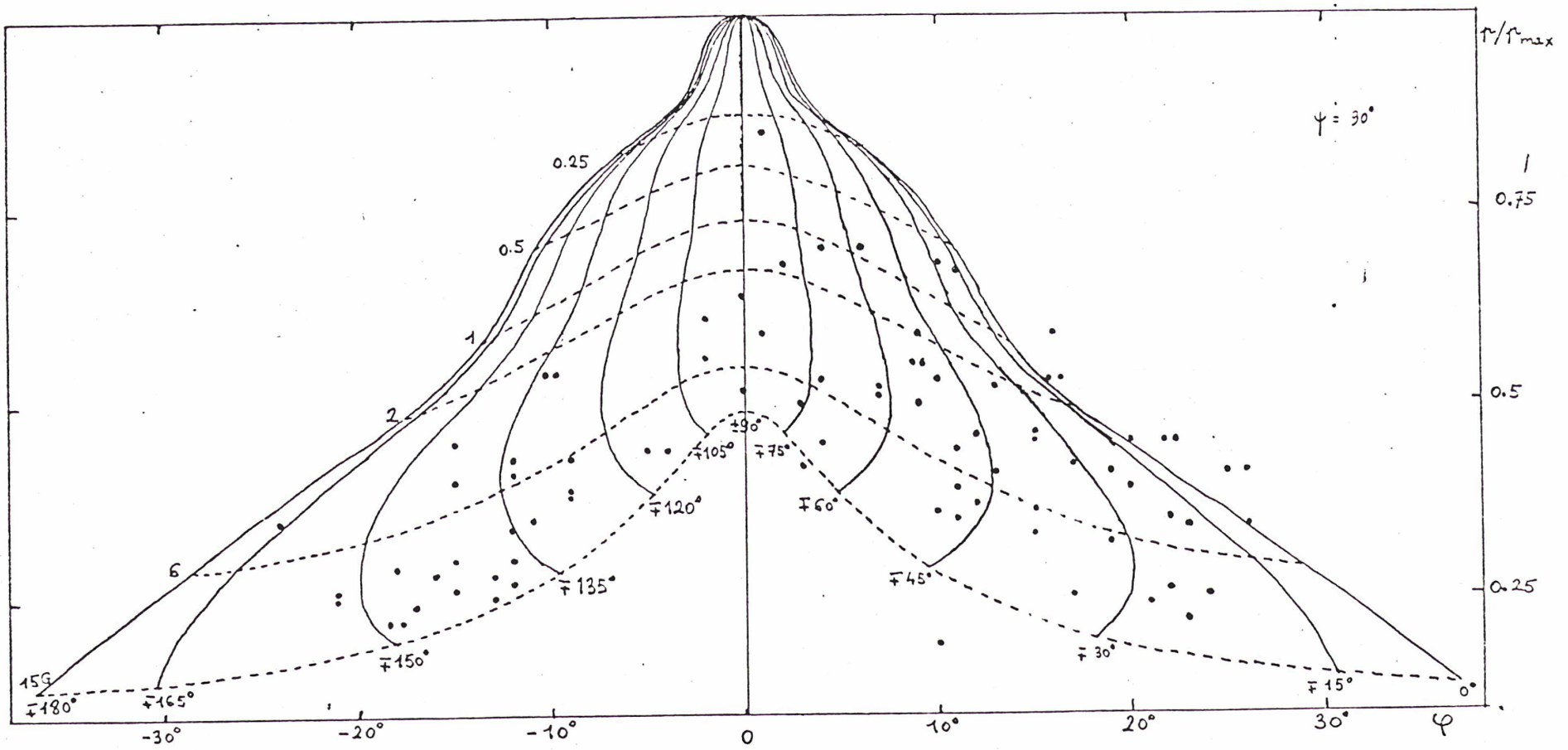


FIGURE 4.

FIGURE 5.



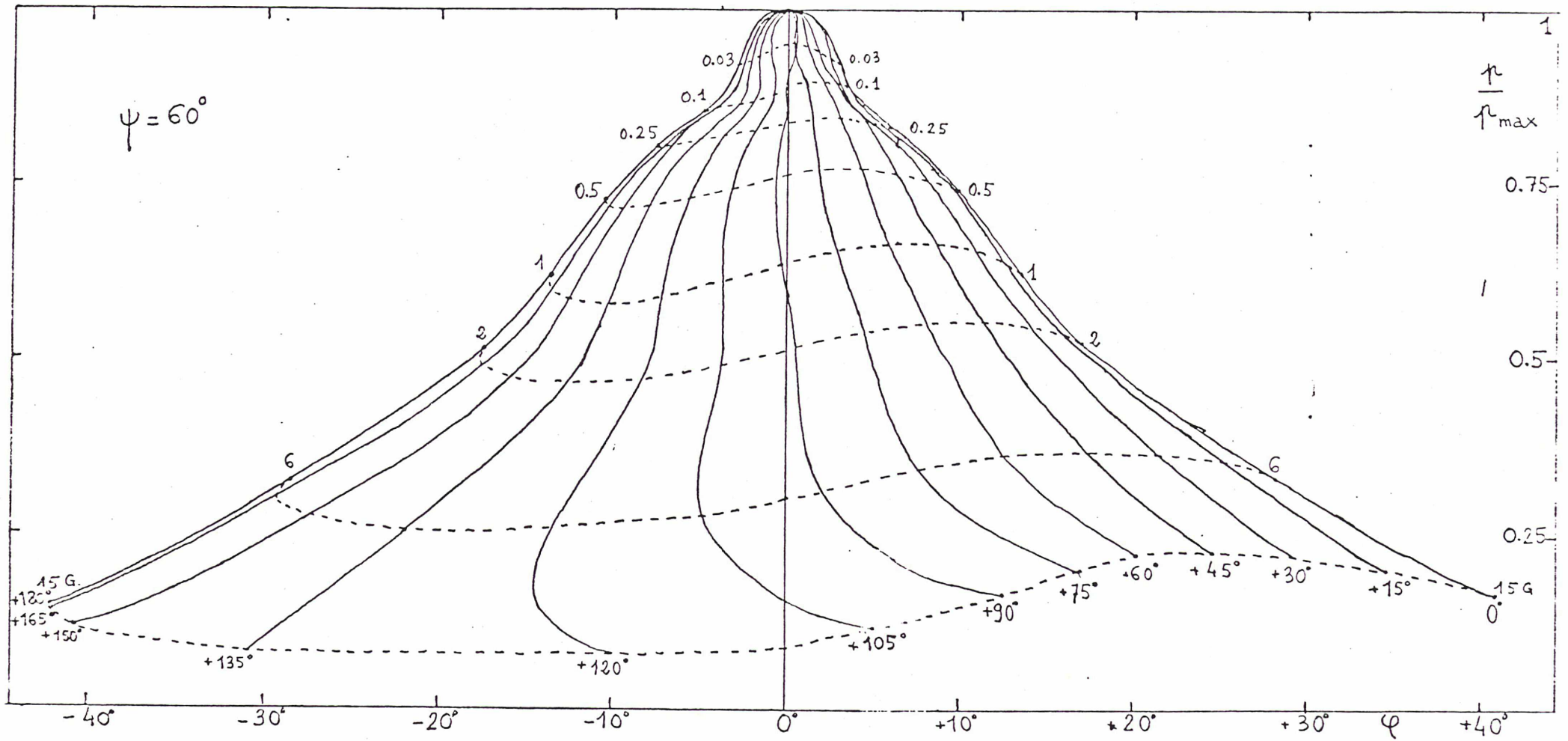
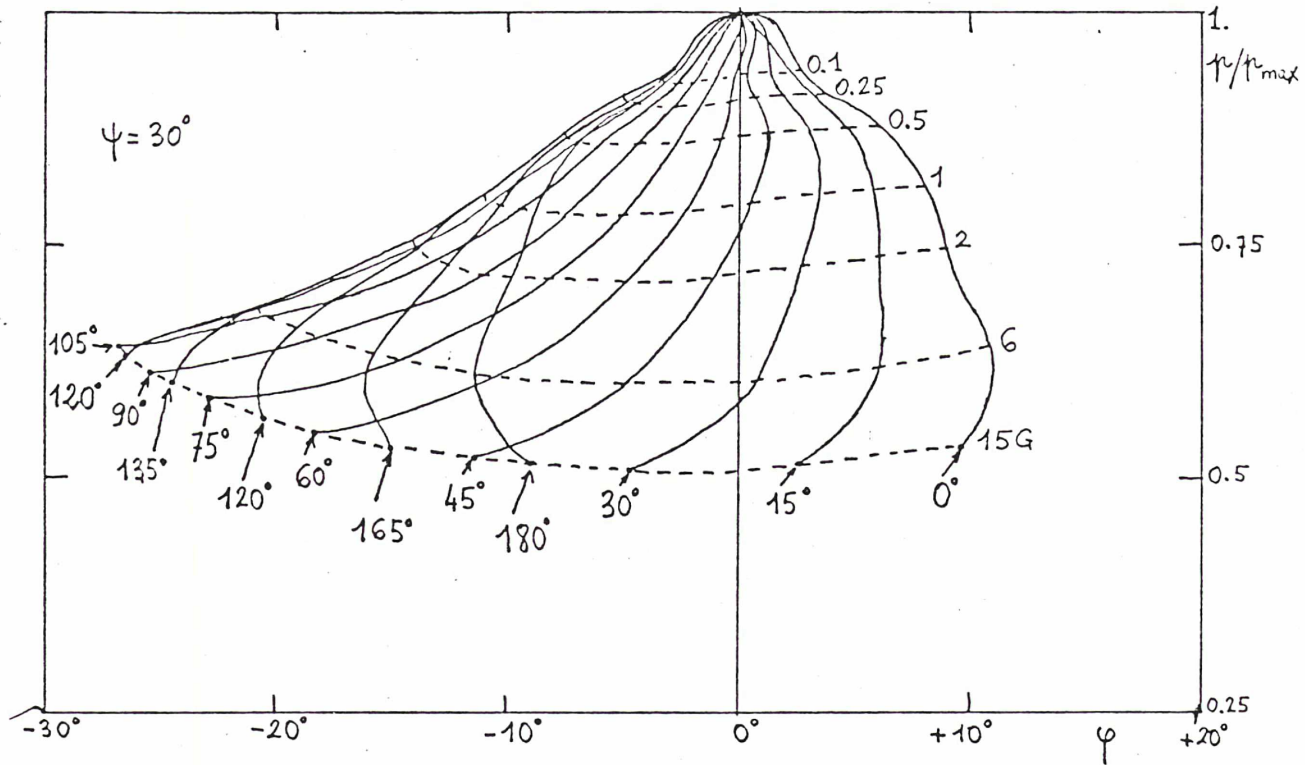


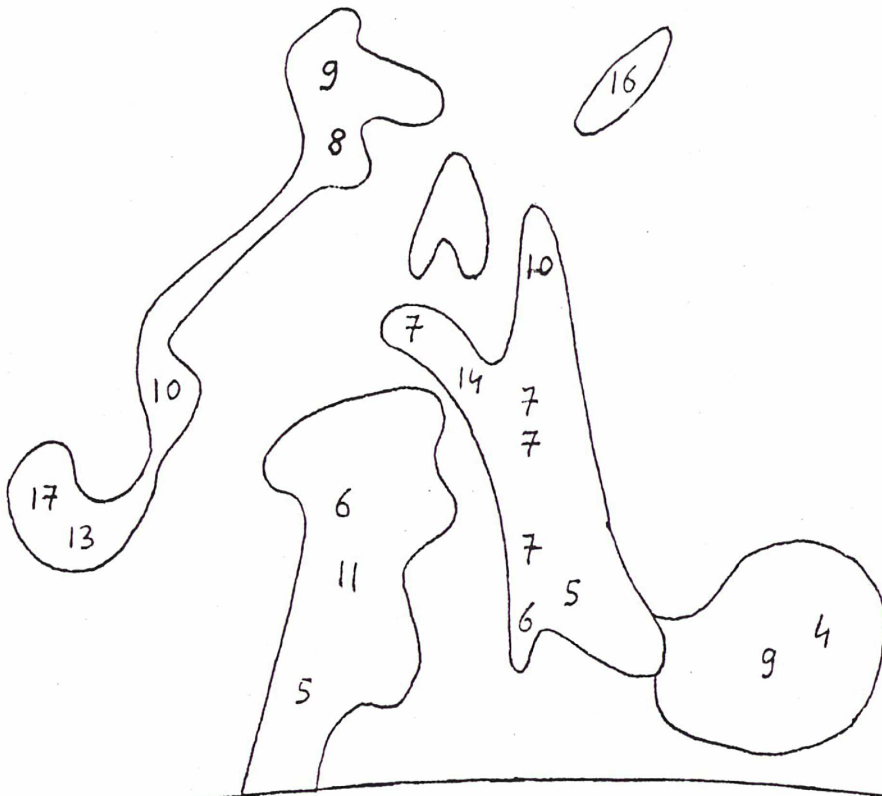
FIGURE 6a.

FIGURE 6b.

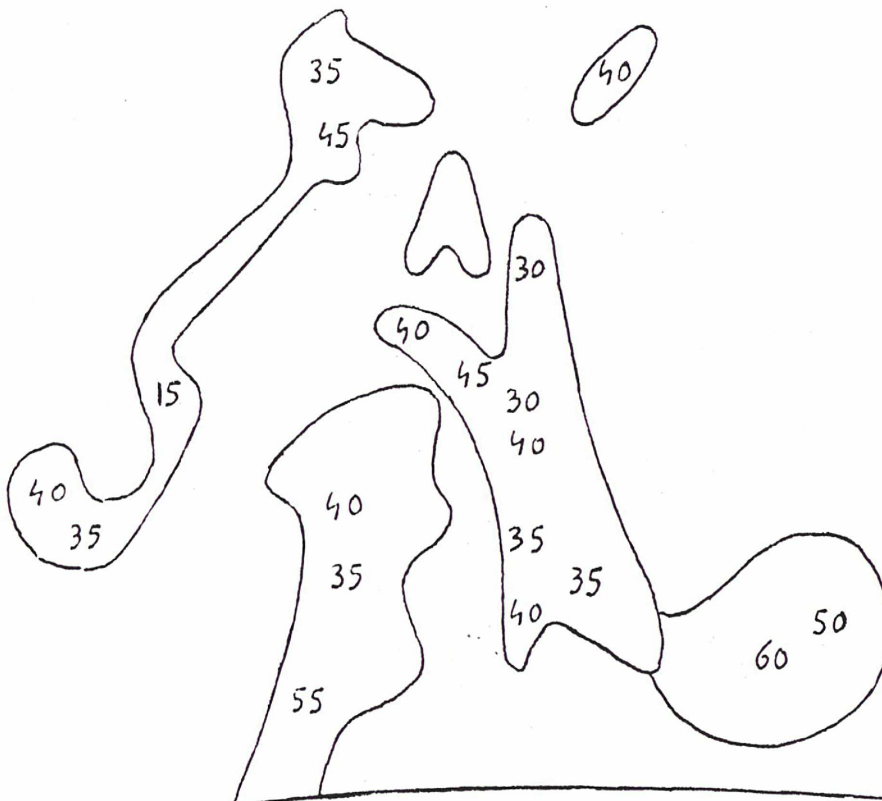




B (Gauss)



$\theta$  ( $^{\circ}$ )



5"

FIGURE 7.

## CHAPITRE II

### FORMALISME DE LA DESCRIPTION DE L'ATOME ET DU RAYONNEMENT

#### II-0. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la description classique et quantique d'un ensemble d'atomes et de photons.

Dans un premier paragraphe, nous commencerons par rappeler la définition de la matrice densité, qui permet de décrire l'état d'un système physique constitué d'un ensemble de sous-systèmes identiques tels que des atomes. Nous développerons ensuite la matrice densité atomique sur la base de l'espace de Liouville (espace des opérateurs linéaires agissant sur l'espace des états d'un atome) formée par les opérateurs tensoriels irréductibles  $T_q^{(k)}$ , qui ont été introduits par Fano (1957) et Omont (1965) et dont nous rappellerons la définition. Cette base est en effet particulièrement bien adaptée à la résolution de problèmes à symétrie sphérique ou axiale, ce qui est notre cas. Ceci nous amènera à la fin du second paragraphe.

Nous nous intéresserons ensuite à la description du rayonnement. Dans un troisième paragraphe, nous rappellerons brièvement les différents formalismes utilisés pour la description classique de l'état de polarisation d'un faisceau lumineux. Il s'agit : 1) de la matrice polarisation du faisceau, 2) des paramètres de Stokes (I, Q, U, V), 3) de l'ensemble des quatre grandeurs : intensité du faisceau, taux de polarisation linéaire et direction principale de vibration, taux de polarisation circulaire. Nous rappellerons de quelle manière on passe d'une description à l'autre. Ceci est destiné à être utilisé dans l'étude du rayonnement reçu par l'observateur : en effet, on mesure les grandeurs 3) mais on calcule facilement la matrice polarisation. Dans le quatrième paragraphe, nous nous intéresserons à un rayonnement quelconque (c'est à dire dont la direction du vecteur d'onde n'est plus fixée), ce qui sera pour nous le cas du rayonnement provenant de la photosphère solaire (non polarisé mais possédant une direction privilégiée) et du rayonnement émis par les atomes d'hélium lors de leur interaction avec ce rayonnement. Nous en donnerons une description classique et quantique et nous définirons sa matrice densité, et nous la relierons à la matrice polarisation du rayonnement dans deux cas simples : 1) le cas d'un rayonnement contenu dans une région de l'espace petite devant la longueur d'onde (approximation des grandes longueurs d'onde). Ce sera le cas du rayonnement solaire incident sur l'atome. 2) le cas d'un

rayonnement dipolaire électrique observé dans une direction donnée. C'est le cas du rayonnement émis par l'atome.

## II-1. MATRICE DENSITE D'UN SYSTEME PHYSIQUE - MATRICE DENSITE ATOMIQUE.

Nous allons rappeler brièvement ici comment on définit la matrice densité d'un système physique à partir de son vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$ , puis comment on définit la matrice densité d'un système physique formé d'un ensemble de sous-systèmes identiques. Le lecteur intéressé trouvera un exposé plus approfondi dans les ouvrages fondamentaux de Mécanique Quantique, ceux de Messiah (1961) ou Cohen-Tannoudji et al. (1973) par exemple.

- Nous considérons d'abord un système physique dont l'état est décrit par le vecteur d'état normé  $|\psi(t)\rangle$ , vecteur de l'espace des états  $\mathcal{E}$  du système, dont nous noterons  $\{|u_n\rangle\}$  une base orthonormée :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle.$$

On définit la matrice densité  $\rho$  du système par

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \sum_{m,n} c_n(t) c_m^*(t) |u_n\rangle\langle u_m| \quad (\text{II } 1)$$

dont la norme est

$$\text{Tr } \rho(t)$$

qui est égale à 1 si  $|\psi(t)\rangle$  est normé. On dit que  $|\psi(t)\rangle$  et  $\rho(t)$  caractérisent chacun l'état du système : d'une part, la valeur moyenne des résultats de mesures d'une observable quelconque  $A$  sur le système s'exprime en fonction de  $|\psi(t)\rangle$  ou  $\rho(t)$  :

$$\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \text{Tr } A \rho(t), \quad (\text{II } 2)$$

et, d'autre part la probabilité de trouver la valeur  $a$  (valeur propre de  $A$ ) dans la mesure de  $A$  n'est autre que la probabilité de trouver le système dans l'état  $|u_a\rangle$  (vecteur propre normé de  $A$  associé à  $a$ ), cette probabilité a pour expression (en fonction de  $|\psi\rangle$  ou de  $\rho$ )

$$p_A(t) = |\langle u_a | \psi(t) \rangle|^2 = \langle u_a | \rho | u_a \rangle \quad (\text{II } 3)$$

De plus, la connaissance de  $|\psi\rangle$  ou  $\rho$  à un instant donné permet de connaître l'état du système ( $|\psi\rangle$  ou  $\rho$ ) à un instant quelconque, grâce à l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle, \\ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &= [H, \rho(t)], \end{aligned} \quad (\text{II } 4)$$

$H$  étant le hamiltonien du système.

- Considérons maintenant un ensemble de  $n$  systèmes quantiques identiques (collection d'atomes, ensemble de photons). Nous noterons  $\rho_i(t)$  ( $i = 1, n$ ) la matrice densité de chacun des systèmes. Nous supposons que la mesure d'une observable  $A$  se fait sur l'ensemble des systèmes : c'est la moyenne des mesures qui seraient faites sur chaque système pris isolément. La valeur moyenne des résultats de la mesure de  $A$  est donc

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \text{Tr} A \rho_i(t) = \text{Tr} A \left( \frac{1}{n} \sum_i \rho_i(t) \right), \quad (\text{II } 5)$$

et la probabilité de trouver un des systèmes dans l'état normé  $|u_a\rangle$  est

$$P_a(t) = \frac{1}{n} \sum_i \langle u_a | \rho_i(t) | u_a \rangle = \langle u_a | \frac{1}{n} \sum_i \rho_i(t) | u_a \rangle.$$

L'état du système total (lorsqu'on ne s'intéresse qu'à des grandeurs globales) est donc caractérisé non par les matrices densités individuelles  $\rho_i(t)$ , mais par la matrice moyenne

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{n} \sum_i \rho_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i(t)}{\sum_{i=1}^n \text{Tr} \rho_i(t)} \quad (\text{II } 6)$$

qui est la matrice densité du système total, moyenne des matrices densité individuelles.

De plus, s'il n'y a pas d'interactions entre les systèmes individuels,  $\bar{\rho}$  obéit à l'équation de Schrödinger.

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(t) = [H, \bar{\rho}], \quad (\text{II } 7)$$

qui permet de connaître l'état du système total à un instant quelconque si on connaît son état à un instant donné. La matrice densité  $\bar{\rho}$  permet donc de décrire l'état de ce système (lorsqu'on ne s'intéresse qu'à des grandeurs globales), alors que, pour un tel système, on ne peut pas définir un vecteur d'état moyen.

Nous rappellerons maintenant les principales propriétés de la matrice densité, qui permettent de mieux comprendre la signification physique de ses différents termes.

.  $\bar{\rho}$  est hermitique (car les matrices densités individuelles le sont). En notant  $\bar{\rho}_{nm}$  les éléments de matrice de  $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \sum_{m,n} \bar{\rho}_{nm} |u_n\rangle \langle u_m|,$$

$$\bar{\rho}_{nm} = \bar{\rho}_{mn}^* \quad (\text{II } 8)$$

La norme de  $\bar{\rho}$  est donnée par sa trace. Cette norme est en général fixée à l'unité. Nous supposons donc que

$$\text{Tr } \bar{\rho} = 1$$

L'élément diagonal  $\bar{\rho}_{nn}$  est la probabilité de trouver un des systèmes dans l'état  $|u_n\rangle$  :

$$0 \leq \bar{\rho}_{nn} = \langle u_n | \bar{\rho} | u_n \rangle \leq 1 = \text{Tr } \bar{\rho}$$

C'est la "population" de l'état  $|u_n\rangle$ .

L'élément non-diagonal  $\bar{\rho}_{nm}$  est la cohérence entre les états  $|u_n\rangle$  et  $|u_m\rangle$  :

$$\bar{\rho}_{nm} = \langle u_n | \bar{\rho} | u_m \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \langle u_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | u_m \rangle .$$

En effet si les systèmes  $i$  se répartissent de façon incohérente entre les états  $|u_n\rangle$  et  $|u_m\rangle$ , la valeur moyenne du produit  $\langle u_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | u_m \rangle$  est nulle.

L'inégalité de Schwartz

$$\left| \frac{1}{n} \sum_i \langle u_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | u_m \rangle \right|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_i |\langle u_n | \psi_i \rangle|^2 \sum_j |\langle u_m | \psi_j \rangle|^2$$

permet d'écrire la relation entre éléments de matrice :

$$\bar{\rho}_{mn} \cdot \bar{\rho}_{nm} \leq \bar{\rho}_{nn} \cdot \bar{\rho}_{mm} . \quad (\text{II } 9)$$

Cette inégalité permet de montrer que, pour toute matrice densité :

$$\det \bar{\rho} \geq 0 . \quad (\text{II } 10)$$

## II-2. OPERATEURS TENSORIELS IRREDUCTIBLES

Dans notre problème, le système physique est un ensemble d'atomes. La matrice densité  $\rho$  de ce système est un élément d'un espace vectoriel : l'espace des opérateurs linéaires agissant sur l'espace des états d'un atome, ou espace de Liouville  $\mathcal{L}$ . Pour obtenir une expression mathématique du problème la plus simple possible, on doit développer  $\rho$  sur une base de  $\mathcal{L}$  qui tient compte des symétries de problème. Cette base est pour nous la base des opérateurs tensoriels irréductibles  $T_{\alpha \alpha' J J'}^{(k)}_q$ , dont l'idée a été donnée par Fano (1957) puis reprise par Omont (1965) dans l'étude de problèmes de pompage optique ; la loi de transformation de ces opérateurs dans une rotation des axes étant identique à la loi de transformation des harmoniques sphériques  $Y_m^l$ , cette base est particulièrement adaptée à l'étude de problèmes à symétrie sphérique ou axiale.

## II-2-1. Espace de Liouville

### II-2-1-1. Définition.

Considérons l'espace des états d'un système quantique.  $\mathcal{E}$  est un espace de Hilbert dont les vecteurs sont notés  $| \rangle$ . Soit  $\{ | u_n \rangle, n = 1, 2, \dots \}$  une base orthonormée de  $\mathcal{E}$ .

L'espace de Liouville  $\mathcal{L}$  associé à  $\mathcal{E}$  est, par définition, l'espace des opérateurs linéaires agissant sur  $\mathcal{E}$ .

Soit  $A$  un opérateur linéaire agissant sur  $\mathcal{E}$ .  $A$  est un élément de  $\mathcal{L}$  qu'on note  $| A \rangle\rangle$ .

### II-2-1-2. Propriétés

$\mathcal{L}$  est un espace vectoriel complexe (toute combinaison linéaire d'opérateurs linéaires étant un opérateur linéaire).

On définit un produit scalaire dans  $\mathcal{L}$  par

$$\langle\langle B | A \rangle\rangle = \text{Tr } B^+ A \quad (\text{II } 12)$$

$\text{Tr } B^+ A$  est bien le produit scalaire de deux opérateurs car

-  $\text{Tr } B^+ A$  est une forme linéaire par rapport à  $A$ , antilinéaire par rapport à  $B$ .

-  $\text{Tr } B^+ A$  est antisymétrique

$$\text{Tr } B^+ A = (\text{Tr } A^+ B)^*$$

-  $\text{Tr } B^+ A$  est une forme définie positive :

$$\text{Tr } A^+ A = \sum_{nm} |\langle u_n | A | u_m \rangle|^2 \geq 0$$

l'égalité impliquant  $A = 0$ .

Tout ensemble  $\{| U_i \rangle\rangle$  d'opérateurs agissant sur  $\mathcal{E}$  forme une base orthonormée de  $\mathcal{L}$  si

- les  $U_i$  sont normés et orthogonaux deux à deux :

$$\langle\langle U_i | U_j \rangle\rangle = \text{Tr } U_i^+ U_j = \delta_{ij}, \quad \forall i, \forall j.$$

- Tout vecteur  $| A \rangle\rangle$  de  $\mathcal{L}$  peut être décomposé sur ces opérateurs :

$$A = \sum_i a_i U_i$$

où

$$a_i = \langle\langle U_i | A \rangle\rangle = \text{Tr } U_i^+ A. \quad (\text{II } 13)$$

Un exemple de base de  $\mathcal{L}$  est l'ensemble des opérateurs dyadiques

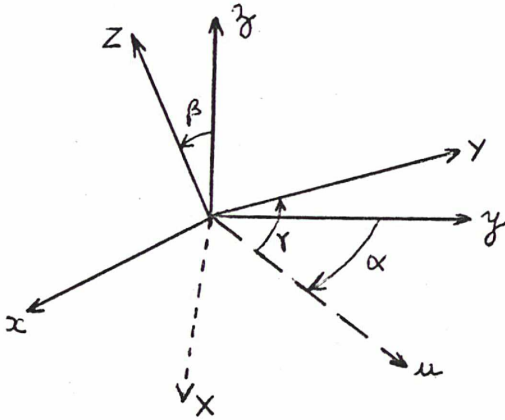
$$| u_{m,m} \rangle\rangle = | u_m \rangle \langle u_m |.$$

## II-2-2. Définition des opérateurs tensoriels irréductibles.

On suppose que le système physique considéré (atome ou photon) possède une base d'états propres communs à son hamiltonien  $H$ , au moment cinétique total  $J^2$  et à sa composante  $J_z$ . On note  $|\alpha JM\rangle$  ces états,  $\alpha$  étant l'ensemble des nombres quantiques autres que  $J$  et  $M$  définissant l'état.

### II-2-2-1. Rotation du système d'axes

Les opérateurs tensoriels irréductibles sont définis par leurs propriétés de transformation dans une rotation du repère spatial du système. Nous allons donc nous intéresser d'abord à cette rotation. L'étude complète se trouve dans le livre de Messiah "Mécanique quantique", (1961). Il s'agit d'une transformation du repère  $Oxyz$  par un produit de 3 rotations, dont les angles sont définis par Messiah (1961) (App C p. 918).



En notant  $\mathcal{R}(\Delta, \theta)$  une rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $\Delta$ , la rotation générale est

$$\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) = \mathcal{R}(Oz, \gamma) \circ \mathcal{R}(Ox', \beta) \circ \mathcal{R}(Oz, \alpha)$$

où

$$\begin{cases} \vec{Ox'} = \mathcal{R}(Oz, \alpha) \vec{Oy} \\ \vec{Oz} = \mathcal{R}(Ox', \beta) \vec{Oz'} \end{cases}$$

L'opérateur rotation  $\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma)$  est un opérateur unitaire faisant correspondre à chaque vecteur d'état  $|u\rangle$  ou à chaque observable  $U$  du système son transformé dans la rotation  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(|u\rangle) &= \mathcal{R}|u\rangle, \\ \mathcal{R}(U) &= \mathcal{R}U\mathcal{R}^\dagger = \mathcal{R}U\mathcal{R}^{-1}; \end{aligned} \quad (\text{II } 14)$$

les éléments de matrice de  $\mathcal{R}$  à l'intérieur d'un sous-espace de  $\mathcal{E}$ , de base  $\{|JM\rangle, J \text{ fixé}\}$  sont

$$R_{MM'}^{(J)}(\alpha\beta\gamma) = \langle JM | \mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) | JM' \rangle.$$

comme

$$\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_x} \quad (\text{II } 15)$$

On a

$$R_{MM'}^{(J)}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha M} r_{MM'}^{(J)}(\beta) e^{-i\gamma M'}$$

où

$$r_{MM'}^{(J)}(\beta) = R_{MM'}^{(J)}(0\beta 0)$$

(II 15bis)

On déduit des relations (II 15) et (II 15 bis)

des harmoniques sphériques dans une rotation des axes : si  $(\theta, \varphi)$  sont les angles polaires d'un vecteur unitaire  $\vec{u}$  dans le repère  $Oxy z$  et  $(\Theta, \Phi)$  sont les angles polaires de ce même vecteur  $\vec{u}$  dans le repère  $OXYZ$  :

$$Y_m^l(\Theta, \Phi) = \sum_{m'} Y_{m'}^l(\theta, \varphi) R_{m'm}^{(l)}(\alpha\beta\gamma) \quad (\text{II 16})$$

### II-2-2-2. Définition

Un opérateur tensoriel est un ensemble d'opérateurs de  $\mathcal{E}$  se transformant les uns dans les autres par rotation.

Un opérateur tensoriel  $\tilde{T}^{(k)}$  est irréductible si les  $(2k+1)$  opérateurs  $T_q^{(k)}$  ( $q = -k, \dots, k-1, k$ ) qui le constituent se transforment par rotation suivant la relation

$$R T_q^{(k)} R^{-1} = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} R_{q'q}^{(k)}(\alpha\beta\gamma) \quad (\text{II 17})$$

ou, ce qui constitue une définition équivalente, s'ils vérifient les relations de commutation :

$$\begin{cases} [J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)} T_{q\pm 1}^{(k)} \\ [J_z, T_q^{(k)}] = q T_q^{(k)} \end{cases} \quad (\text{II 18})$$

Les éléments de matrice d'un opérateur  $T_q^{(k)}$  peuvent être calculés à l'aide du théorème de Wigner-Eckart :

$$\langle \alpha J M | T_q^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \langle \alpha J || \tilde{T}^{(k)} || \alpha' J' \rangle, \quad (\text{II 19})$$

où  $\langle \alpha J || \tilde{T}^{(k)} || \alpha' J' \rangle$  est l'élément de matrice réduit, indépendant de  $q, M$  et  $M'$ .



-II-2-3. Base des opérateurs tensoriels irréductibles.

On définit les opérateurs tensoriels irréductibles  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$  par le choix de leurs éléments de matrice réduits :

- $\langle \alpha_1 J_1 || \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} || \alpha'_1 J'_1 \rangle = 0$  si  $(\alpha_1 J_1) \neq (\alpha J)$  ou  $(\alpha'_1 J'_1) \neq (\alpha' J')$  ;
- $\langle \alpha J || \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} || \alpha' J' \rangle$  est choisi réel et tel que  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$  soit normé :

$$\langle \langle \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} | \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} \rangle \rangle = 1,$$

ce qui implique  $\langle \alpha J || \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} || \alpha' J' \rangle = \sqrt{(2k+1)}$

On peut donc exprimer chaque opérateur  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$  :

$$\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} = \sum_{M M'} (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} |\alpha J M\rangle \langle \alpha' J' M'|. \quad (\text{II } 20)$$

Cet opérateur existe si  $|J - J'| \leq k \leq J + J'$ .

Ces opérateurs  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$  ne sont pas hermitiques

$$\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} + = (-1)^{J-J'-q} \alpha' \alpha J' J T_{-q}^{(k)}. \quad (\text{II } 21)$$

Ils forment une base de l'espace de Liouville  $\mathcal{L}$  car

1) ils sont normés et orthogonaux deux à deux

$$\langle \langle \alpha_1 \alpha'_1 J_1 J'_1 T_{q_1}^{(k_1)} | \alpha_2 \alpha'_2 J_2 J'_2 T_{q_2}^{(k_2)} \rangle \rangle = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha'_1 \alpha'_2} \delta_{J_1 J_2} \delta_{J'_1 J'_2} \delta_{k_1 k_2} \delta_{q_1 q_2}$$

2) tout vecteur  $| \rangle \rangle$  de  $\mathcal{L}$  peut être décomposé sur ces opérateurs car chaque opérateur dyadique  $|\alpha J M, \alpha' J' M' \rangle \rangle = |\alpha J M\rangle \langle \alpha' J' M'|$  peut l'être :

$$|\alpha J M\rangle \langle \alpha' J' M'| = \sum_{k q} (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}. \quad (\text{II } 22)$$

L'intérêt physique de cette base apparaît dès qu'on compare les relations (II 16) et (II 17) : ces opérateurs se transforment par rotation comme les harmoniques sphériques. Cette base est donc bien adaptée à l'étude de problèmes à symétrie sphérique (ou cylindrique) (Fano 1957).

On peut remarquer d'autre part que le théorème de Wigner-Eckart exprime que deux opérateurs tensoriels irréductibles de même rang sont proportionnels à l'intérieur d'un sous-espace  $(\alpha J, \alpha' J')$  de  $\mathcal{L}$  (sous-espace de base  $|\alpha J M, \alpha' J' M' \rangle \rangle = |\alpha J M\rangle \langle \alpha' J' M'|$  où  $(\alpha J)$  et  $(\alpha' J')$  sont fixés). Si ces opérateurs sont nuls dans l'espace restant, ils sont proportionnels dans tout l'espace. En particulier :

$$\alpha \alpha J J T_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \mathbb{1}_{(\alpha J)} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_M |\alpha J M\rangle \langle \alpha J M|,$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha \alpha' J J' T_0^{(1)} &\propto J_z (\alpha J) \\
 \alpha \alpha' J J' T_1^{(1)} &\propto -\frac{1}{\sqrt{2}} J_+ (\alpha J) \\
 \alpha \alpha' J J' T_{-1}^{(1)} &\propto +\frac{1}{\sqrt{2}} J_- (\alpha J)
 \end{aligned} \right\} \quad \text{(II 23)}$$

Avec le même facteur de proportionnalité,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}} J_+, J_z, +\frac{1}{\sqrt{2}} J_-)$  forment les composantes d'un opérateur tensoriel irréductible de rang 1.

$$\alpha \alpha' J J' T_0^{(2)} \propto (3 J_z^2 - J^2) (\alpha J)$$

L'indice  $(\alpha J)$  indique la restriction de l'opérateur au sous-espace de base  $\{ |\alpha J M, \alpha J M'\rangle \}$ , où  $\alpha$  et  $K J$  sont fixés }.

Pour simplifier, nous appellerons "opérateurs tensoriels irréductibles" les opérateurs  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$ , l'opérateur  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$  n'intervenant plus dans la suite de cet exposé. L'ensemble des opérateurs  $\alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}$  forment la "base des opérateurs tensoriels irréductibles".

#### II-2-4. Développement de la matrice densité atomique sur la base des opérateurs tensoriels irréductibles.

La matrice densité  $\rho$ , qui est un vecteur de  $\mathcal{L}$ , peut être décomposée sur la base des opérateurs dyadiques :

$$\rho = \sum_{\substack{\alpha J \alpha' J' \\ M M'}} \alpha \alpha' J J' \rho_{MM'} |\alpha J M\rangle \langle \alpha' J' M'|, \quad \text{(II 24)}$$

$$\text{où } \alpha \alpha' J J' \rho_{MM'} = \langle \alpha J M | \rho | \alpha' J' M' \rangle \quad \text{(II 25)}$$

ou sur la base des opérateurs tensoriels irréductibles

$$\rho = \sum_{\substack{\alpha J \alpha' J' \\ k q}} \alpha \alpha' J J' \rho_q^k \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)}, \quad \text{(II 26)}$$

$$\text{où } \alpha \alpha' J J' \rho_q^k = \ll \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} | \rho \gg = \langle \alpha \alpha' J J' T_q^{(k)} | \rho \rangle \quad \text{(II 27)}$$

les relations de passage d'une base à l'autre sont les suivantes :

$$\alpha \alpha' J J' \rho_q^k = \sum_{M M'} (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \alpha \alpha' J J' \rho_{MM'} \quad \text{(II 28)}$$

$$\alpha \alpha' J J' \rho_{MM'} = \sum_{k q} (-1)^{J-M} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \alpha \alpha' J J' \rho_q^k \quad \text{(II 29)}$$

D'après la relation (II 21), en base tensorielle irréductible, l'hérmiticité de  $\rho$  se traduit par la relation suivante :

$$\alpha \alpha' J J' \rho_q^k * = (-1)^{J-J'-q} \alpha' \alpha J' J \rho_{-q}^k ; \quad (\text{II 30})$$

les relations (II 23) permettent de donner une signification physique à certains coefficients  $\alpha \alpha' J J' \rho_q^k$  :

$$\alpha \alpha J J \rho_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_M \alpha \alpha J J \rho_{MM} \quad (\text{II 31})$$

$\alpha \alpha J J \rho_{MM}$  étant la population du sous-niveau Zeeman ( $\alpha JM$ ),  $\sqrt{2J+1} \alpha \alpha J J \rho_0^0$  est la population du niveau ( $\alpha J$ ).

$$\begin{aligned} \alpha \alpha J J \rho_0^1 &= \langle J_z \rangle_{(\alpha J)} , \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( - \alpha \alpha J J \rho_1^1 + \alpha \alpha J J \rho_{-1}^1 \right) &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \alpha \alpha J J \rho_1^1 = \langle J_x \rangle_{(\alpha J)} , \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \left( + \alpha \alpha J J \rho_1^1 + \alpha \alpha J J \rho_{-1}^1 \right) &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im} \alpha \alpha J J \rho_1^1 = \langle J_y \rangle_{(\alpha J)} . \end{aligned}$$

Les composantes  $\alpha \alpha J J \rho_q^1$  ( $q = -1, 0, +1$ ) permettent de décrire l'orientation moyenne du moment cinétique du système lorsqu'il se trouve dans l'état ( $\alpha J$ ) (lorsqu'il s'agit d'atomes paramagnétiques placés dans un champ magnétique, on obtient l'orientation moyenne de leur moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$ , qui est proportionnel à  $\vec{J}$ ). Les composantes  $\alpha \alpha J J \rho_q^1$  portent le nom de composantes d'orientation.

$$\alpha \alpha J J \rho_0^2 \propto \left( 3 \langle J_z^2 \rangle - \langle J^2 \rangle \right)_{(\alpha J)} = \left( 2 \langle J_z^2 \rangle - \langle J_x^2 \rangle - \langle J_y^2 \rangle \right)_{(\alpha J)} .$$

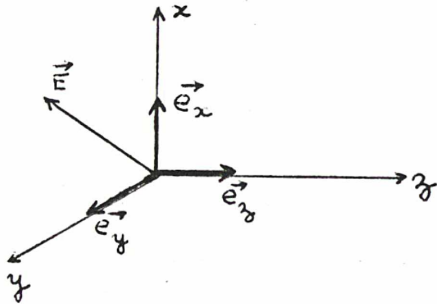
Les composantes  $\alpha \alpha J J \rho_q^2$ , qui permettent de décrire l'écart du moment cinétique à son orientation, le système étant dans l'état ( $\alpha J$ ) portent le nom de composantes d'alignement.

### II-3. DESCRIPTION CLASSIQUE D'UN FAISCEAU LUMINEUX MONOCHROMATIQUE.

Les grandeurs que l'on peut mesurer sur un faisceau lumineux peuvent être décrites par quatre coefficients.

Ces quatre coefficients peuvent être les coefficients de la matrice polarisation du faisceau, dont nous rappellerons la définition. Ces quatre coefficients peuvent être également l'ensemble des paramètres de Stokes (I, Q, U, V), celui/ <sup>dénommes/</sup> ou des quatre grandeurs intensité, taux de polarisation linéaire et direction principale de vibration, taux de polarisation circulaire. Nous allons montrer que ces trois descriptions sont équivalentes, en précisant les relations de passage de l'une à l'autre.

Nous considérons donc un faisceau monochromatique se propageant le long de l'axe Oz d'un repère orthonormé. Le champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde électromagnétique est perpendiculaire à Oz. C'est un vecteur du plan xOy:



Dans la suite de ce paragraphe, nous développerons  $\vec{E}$  sur deux bases du plan xOy:

- soit sur la base des vecteurs  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  du repère orthonormé choisi,
- soit sur la base des vecteurs  $(\vec{e}_+, \vec{e}_-)$  définis par

$$\begin{cases} \vec{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \\ \vec{e}_- = +\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - i \vec{e}_y) \end{cases} \quad (\text{II } 32)$$

et  $\vec{e}_0 = \vec{e}_z$

(Il faut noter qu'un champ électrique parallèle à  $\text{Re}(\vec{e}_+ e^{-i\omega t})$  (resp.  $\text{Re}(\vec{e}_- e^{i\omega t})$ ) est le champ électrique d'une onde se propageant dans le même sens que l'axe Oz, dont l'état de polarisation est circulaire gauche (resp. droit)).

### II-3-1. Matrice polarisation d'un faisceau lumineux

#### II-3-1-1. Définition

La matrice polarisation d'un faisceau lumineux est définie dans de nombreux ouvrages. Nous avons utilisé celui de Landau et Lifschitz "Théorie du champ" (1967).

Le champ électrique  $\vec{E}$  d'une onde électromagnétique de pulsation  $\omega$  peut être mis sous la forme

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \vec{C}^{(+)}(t) e^{-i\omega t} + \vec{C}^{(-)}(t) e^{i\omega t} \right], \quad (\text{II } 33)$$

où les vecteurs  $\vec{C}^{(+)}(t)$ ,  $\vec{C}^{(-)}(t)$  sont tels que les rapports  $\frac{C_y^{(+)}(t)}{C_x^{(+)}(t)}$ ,  $\frac{C_y^{(-)}(t)}{C_x^{(-)}(t)}$  sont

- constants si le faisceau est totalement polarisé,
- fonctions du temps, mais de variation lente devant les oscillations lumineuses  $e^{\pm i\omega t}$ , si le faisceau est partiellement polarisé.

$\vec{E}$  étant réel,  $\vec{E}^{(+)}(t)$  et  $\vec{E}^{(-)}(t)$  obéissent à la relation de conjugaison

$$\vec{E}^{(+)}(t) = \vec{E}^{(-)*}(t) \quad (\text{II } 34)$$

Les signaux mesurés par un détecteur lumineux placé sur le trajet du faisceau et précédé éventuellement d'un analyseur sont des valeurs moyennes sur le temps de combinaisons linéaires de produits  $\overline{E_i^{(+)}(t) E_j^{(-)}(t)}$  (où  $i, j = x, y$ ). L'état de polarisation du faisceau est donc entièrement décrit par la matrice polarisation  $\Pi$ , qui est définie par

$$\Pi = \begin{pmatrix} \overline{E_x^{(+)}(t) E_x^{(-)}(t)} & \overline{E_x^{(+)}(t) E_y^{(-)}(t)} \\ \overline{E_y^{(+)}(t) E_x^{(-)}(t)} & \overline{E_y^{(+)}(t) E_y^{(-)}(t)} \end{pmatrix}, \quad (\text{II } 35)$$

où  $\overline{\quad}$  indique une valeur moyenne sur un grand intervalle de temps. En utilisant la relation de conjugaison (II 34), on peut mettre  $\Pi$  sous la forme :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \overline{E_x^{(+)}(t) E_x^{(+)*}(t)} & \overline{E_x^{(+)}(t) E_y^{(+)*}(t)} \\ \overline{E_y^{(+)}(t) E_x^{(+)*}(t)} & \overline{E_y^{(+)}(t) E_y^{(+)*}(t)} \end{pmatrix}. \quad (\text{II } 36)$$

Dans l'espace vectoriel du plan  $xOy$ , de base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  on peut utiliser la notation de Dirac. On associe au faisceau le vecteur  $|\vec{E}^{(+)}(t)\rangle$ .  $\Pi$  s'écrit

$$\Pi = |\vec{E}^{(+)}(t)\rangle \langle \vec{E}^{(+)}(t)| = |\vec{E}(t)\rangle \langle \vec{E}(t)|.$$

Il s'agit d'une expression globale de  $\Pi$  ne faisant plus intervenir le repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  choisi dans un plan perpendiculaire à  $Oz$ .

Appliquons cette relation pour obtenir l'expression de  $\Pi$  dans la base des opérateurs  $|\vec{e}_p\rangle \langle \vec{e}_{p'}|$  (où  $\vec{e}_p$  et  $\vec{e}_{p'}$  sont l'un ou l'autre des vecteurs  $\vec{e}_+, \vec{e}_-$ ) :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \overline{E_+^{(+)}(t) E_+^{(+)*}(t)} & \overline{E_+^{(+)}(t) E_-^{(+)*}(t)} \\ \overline{E_-^{(+)}(t) E_+^{(+)*}(t)} & \overline{E_-^{(+)}(t) E_-^{(+)*}(t)} \end{pmatrix} \quad (\text{II } 37)$$

où  $E_{\pm}^{(+)}(t) = \langle \vec{e}_{\pm} | \vec{E}^{(+)}(t) \rangle = \vec{e}_{\pm}^* \cdot \vec{E}^{(+)}(t)$ .

D'une manière générale, nous noterons  $\Pi_{pp'}$  les éléments de  $\Pi$  :

$$\Pi_{pp'} = \langle \vec{e}_p | \Pi | \vec{e}_{p'} \rangle,$$

où  $p, p' = x, y$  ou  $+, -$  suivant la base choisie.

II-3-1-2. Propriétés de  $\Pi$ 

.  $\Pi$  est hermitique :  $\Pi^+ = \Pi$

.  $\text{Tr } \Pi$  est l'intensité du faisceau, que nous noterons  $I$  :

$$\text{Tr } \Pi = \int_{t_1}^{t_2} \xi_x^{(+)}(t) \xi_x^{(+)}(t)^* + \int_{t_1}^{t_2} \xi_y^{(+)}(t) \xi_y^{(+)}(t)^* dt = I \quad (\text{II } 38)$$

. L'inégalité de Schwartz

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \xi_x^{(+)}(t) \xi_y^{(+)}(t)^* dt \right|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} |\xi_x^{(+)}(t)|^2 dt \int_{t_1}^{t_2} |\xi_y^{(+)}(t)|^2 dt$$

conduit à la relation

$$\det \Pi \geq 0 \quad (\text{II } 39)$$

L'égalité a lieu si, et seulement si,  $\xi_y^{(+)}(t)$  est proportionnel à  $\xi_x^{(+)}(t)$ , le coefficient de proportionnalité étant indépendant du temps.

D'après ce que nous avons vu précédemment, le faisceau est alors totallement polarisé. L'égalité  $\det \Pi = 0$  est donc caractéristique des faisceaux totallement polarisés.

II-3-1-3. Définition des directions principales de vibration.

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $\Pi$ ,  $|\vec{e}_1\rangle$  et  $|\vec{e}_2\rangle$  les vecteurs propres normés associés.  $\Pi$  étant hermitique,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles,  $|\vec{e}_1\rangle$  et  $|\vec{e}_2\rangle$  orthogonaux. Les relations (II 38) et (II 39) permettent d'écrire que

$$\begin{cases} \det \Pi = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0 \\ \text{Tr } \Pi = \lambda_1 + \lambda_2 = I \end{cases},$$

ce qui implique, pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , que :

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq I.$$

L'expression de  $\Pi$ , à l'aide de la notation de Dirac, devient

$$\Pi = \lambda_1 |\vec{e}_1\rangle \langle \vec{e}_1| + \lambda_2 |\vec{e}_2\rangle \langle \vec{e}_2|. \quad (\text{II } 40)$$

Cette relation traduit le fait que, dans tous les cas,  $\Pi$  est une superposition de deux faisceaux incohérents, d'intensités respectives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , polarisés parallèlement aux vecteurs orthogonaux  $|\vec{e}_1\rangle$  et  $|\vec{e}_2\rangle$  respectivement. En effet, dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  les termes non diagonaux de  $\Pi$  sont nuls :

$$\langle \vec{e}_1 | \xi^{(+)}(t) \rangle \langle \xi^{(+)}(t) | \vec{e}_2 \rangle = 0$$

Les quantités  $\overline{\langle \vec{e}_1 | \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) \rangle}$  et  $\overline{\langle \vec{e}_2 | \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) \rangle}$  étant toujours nulles, l'égalité

$$\overline{\langle \vec{e}_1 | \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) \rangle \langle \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) | \vec{e}_2 \rangle} = \overline{\langle \vec{e}_1 | \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) \rangle} \cdot \overline{\langle \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) | \vec{e}_2 \rangle}$$

est vérifiée. Une telle égalité indique que les amplitudes  $\langle \vec{e}_1 | \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) \rangle$  et  $\langle \vec{e}_2 | \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(t) \rangle$  sont incohérentes, ce que nous avons affirmé plus haut. Les directions de  $|\vec{e}_1\rangle$  et  $|\vec{e}_2\rangle$  sont appelées directions principales de vibration du faisceau.

## II-3-2. Paramètres de Stokes et taux de polarisation du faisceau

### II-3-2-1. Définition et relation avec la matrice polarisation

M.J. Walker (1954) définit les paramètres de Stokes (1852) d'un faisceau lumineux monochromatique se propageant le long d'un axe  $\vec{Oz}$  : On note  $E_x$  et  $E_y$  les composantes instantanées réelles du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  du faisceau. Les paramètres de Stokes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \overline{(E_x^2(t) + E_y^2(t))} \\ Q = \overline{(E_x^2(t) - E_y^2(t))} \\ U = 2 \overline{E_x(t) E_y(t)} \\ V = 2 \overline{E_x(t) E_y(t + \frac{T}{4})} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{Diagramme illustrant le vecteur champ électrique } \vec{E} \text{ dans le plan } xy. \text{ Les composantes } E_x \text{ et } E_y \text{ sont indiquées. L'axe } z \text{ est perpendiculaire au plan } xy. \end{array} \quad \text{(II 41)}$$

représentant une valeur moyenne dans le temps prise sur un grand nombre de périodes lumineuses  $T$ .

En utilisant les notations du paragraphe précédent, on a à chaque instant

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \vec{\mathcal{E}}(t) e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{E}}^*(t) e^{i\omega t} \right]$$

Ce qui permet d'exprimer les paramètres de Stokes en fonction des composantes du vecteur  $\vec{\mathcal{E}}(t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \overline{\mathcal{E}_x(t) \mathcal{E}_x^*(t)} + \overline{\mathcal{E}_y(t) \mathcal{E}_y^*(t)} \\ Q = \overline{\mathcal{E}_x(t) \mathcal{E}_x^*(t)} - \overline{\mathcal{E}_y(t) \mathcal{E}_y^*(t)} \\ U = \overline{\mathcal{E}_x(t) \mathcal{E}_y^*(t)} + \overline{\mathcal{E}_x^*(t) \mathcal{E}_y(t)} \\ V = i \left[ \overline{\mathcal{E}_x(t) \mathcal{E}_y^*(t)} - \overline{\mathcal{E}_x^*(t) \mathcal{E}_y(t)} \right] \end{array} \right. \quad \text{(II 42)}$$

La relation paramètres de Stokes - éléments de la matrice polarisation apparait alors clairement :

$$\begin{cases} I = \Pi_{xx} + \Pi_{yy} \\ Q = \Pi_{xx} - \Pi_{yy} \\ U = \Pi_{xy} + \Pi_{yx} \\ V = i(\Pi_{xy} - \Pi_{yx}) \end{cases} \quad (\text{II } 43)$$

ou encore, en fonction des composantes  $\Pi_{pp}$ , où  $p, p' = -, +$

$$\begin{cases} I = \Pi_{++} + \Pi_{--} \\ Q = -(\Pi_{+-} + \Pi_{-+}) \\ U = -i(\Pi_{+-} - \Pi_{-+}) \\ V = \Pi_{++} - \Pi_{--} \end{cases} \quad (\text{II } 44)$$

Inversement, les relations (II 43) et (II 44) forment deux systèmes de Kramer qui permettent d'écrire la matrice polarisation en fonction des seuls paramètres de Stokes :

. dans la base  $(e_x, e_y)$

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (\text{II } 45)$$

. dans la base  $(e_+, e_-)$

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + V & -Q + iU \\ -Q - iU & I - V \end{pmatrix} \quad (\text{II } 46)$$

les paramètres de Stokes contiennent donc la totalité de l'"information" qu'on peut avoir sur l'état de polarisation d'un faisceau lumineux.

### II-3-2-2. Signification physique et mesure des paramètres de Stokes.

. Considérons le cas d'un faisceau totalement polarisé : notons  $I_x$  et  $I_y$  les intensités des composantes  $\xi_x$  et  $\xi_y$  et  $\delta$  leur différence de phase :

$$\frac{\xi_y}{|\xi_y|} = \frac{\xi_x}{|\xi_x|} e^{i\delta}$$

Les paramètres de Stokes de ce faisceau ont pour expression

$$\begin{cases} I = I_x + I_y \\ Q = I_x - I_y \\ U = 2 \sqrt{I_x I_y} \cos \delta \\ V = 2 \sqrt{I_x I_y} \sin \delta \end{cases}$$



Si le faisceau est polarisé linéairement :  $\delta = 0$  D'où  $V = 0$

Si le faisceau est polarisé circulairement  $I_x = I_y$  et  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  D'où  $U = Q = 0$   
 $V$  est donc appelé paramètre de polarisation circulaire,  $Q$  et  $U$  paramètres de polarisation rectiligne.

. Revenons au cas d'un faisceau de polarisation quelconque. Le premier paramètre de Stokes représente l'intensité du faisceau

$$I = \text{Tr } \Pi = \underline{\underline{E_x(t) E_x^*(t) + E_y(t) E_y^*(t)}} = \underline{\underline{\vec{E}(t)^* \cdot \vec{E}(t)}}$$

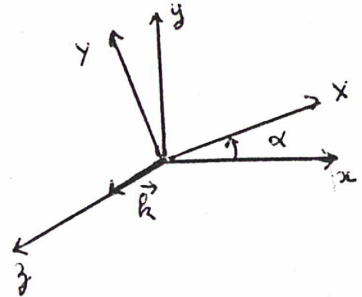
$I$  est une quantité "intrinsèque" du faisceau, elle ne dépend pas du choix des axes  $Ox$  et  $Oy$ .

Pour mettre en évidence d'autres quantités intrinsèques, nous allons étudier la transformation des autres paramètres de Stokes dans une rotation d'angle  $\alpha$  du repère  $xOy$  autour de l'axe  $Oz$ . On note  $XOY$  le nouveau repère,  $Q(\alpha)$ ,  $U(\alpha)$ ,  $V(\alpha)$  les paramètres de Stokes dans ce repère. Dans ce nouveau système d'axes, les composantes  $\underline{\underline{E_x(t)}}$  et  $\underline{\underline{E_y(t)}}$  de  $\underline{\underline{E}}$  sont :

$$\begin{cases} \underline{\underline{E_x(t)}} = \underline{\underline{E_x(t)}} \cos \alpha + \underline{\underline{E_y(t)}} \sin \alpha \\ \underline{\underline{E_y(t)}} = -\underline{\underline{E_x(t)}} \sin \alpha + \underline{\underline{E_y(t)}} \cos \alpha \end{cases}$$

L'expression de  $Q(\alpha)$ ,  $U(\alpha)$ ,  $V(\alpha)$  se déduit des relations (II 42)

$$\begin{cases} Q(\alpha) = Q \cos 2\alpha + U \sin 2\alpha \\ U(\alpha) = -Q \sin 2\alpha + U \cos 2\alpha \\ V(\alpha) = V \end{cases} \quad (\text{II 47})$$



Il apparait que :

.  $Q^2(\alpha) + U^2(\alpha) = Q^2 + U^2$ ,  $V(\alpha) = V$ . Ces quantités sont donc également des quantités "intrinsèques" ; elles ne dépendent pas du choix des axes  $Ox$  et  $Oy$  dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

.  $Q\left(\frac{\pi}{4}\right) = U$  : le paramètre de  $Q$  étant la différence des intensités transmises à travers un analyseur placé successivement parallèlement à  $Ox$  et  $Oy$ , le paramètre  $U$  peut être mesuré en plaçant l'analyseur successivement suivant la 1ère et la 2ème bissectrice des axes  $xOy$ . La définition du paramètre  $V$  montre qu'il est identique au nouveau paramètre  $U$  du faisceau après la traversée d'une lame  $1/4$  d'onde d'axe rapide parallèle à  $Oy$  : d'où une méthode possible de mesure du paramètre de polarisation circulaire.

Les paramètres de Stokes permettent une étude matricielle d'un faisceau lumineux : leur modification à la traversée de divers objets peut se traduire par des relations matricielles entre paramètres de Stokes du faisceau incident et paramètres de Stokes du faisceau sortant ; à chaque objet on peut associer une matrice de transformation, dont M.J. Walker (1954) a donné quelques exemples. Il en est de même de la matrice polarisation (Cohen-Tannoudji et al 1973).

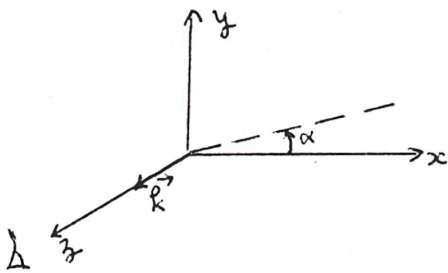
### II-3-2-3. Relation entre les paramètres de Stokes d'un faisceau lumineux, son taux de polarisation linéaire et sa direction de polarisation.

Si on mesure l'intensité reçue après avoir placé un polariseur sur le faisceau et qu'on fait tourner le polariseur cette intensité varie (en général) et passe par une valeur maximale  $I_{\max}$  et une valeur minimale  $I_{\min}$ . Le taux de polarisation linéaire du faisceau est la quantité

$$p_L = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

et sa direction de polarisation est la direction du polariseur pour laquelle  $I_{\max}$  est atteint. Dans le repère  $xOy$ , cette direction est repérée par l'angle  $\alpha_0$  (défini à  $\Pi$  près)

$p_L$  et  $\alpha_0$  s'expriment en fonction des paramètres de Stokes de polarisation linéaire mesurés dans le repère  $xOy$  :



En effet, lorsque le polariseur fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $Ox$ , l'intensité est, d'après (II 47)

$$I_x(\alpha) = \frac{1}{2} (Q \cos 2\alpha + U \sin 2\alpha + I)$$

En posant :

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + U^2}} \quad , \quad \sin 2\alpha_0 = \frac{U}{\sqrt{Q^2 + U^2}} \quad (\text{II 48})$$

On obtient :

$$I_x(\alpha) = \frac{1}{2} (\sqrt{Q^2 + U^2} \cos 2(\alpha - \alpha_0) + I)$$

Si on fait tourner le polariseur, on obtiendra la valeur maximale

$$I_{\max} = \frac{1}{2} (I + \sqrt{Q^2 + U^2})$$

pour  $\alpha = \alpha_0 + k\pi$  , et la valeur minimale

$$I_{\min} = \frac{1}{2} (I - \sqrt{Q^2 + U^2})$$

pour  $\alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2} + k\pi$  .

Le taux de polarisation linéaire du faisceau est donc

$$p_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I} \quad (\text{II } 4)$$

et la direction de polarisation est repérée par l'angle  $\alpha_0$  avec l'axe Ox.

Comme nous l'avons vu en II-3.-2-2,  $p_L$  est une quantité "intrinsèque" : il ne dépend pas du choix des axes Ox et Oy dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

Si le faisceau est totalement polarisé circulairement :  $U = Q = 0$ .

$I_{\max} = I_{\min}$  et  $p_L = 0$  :  $\alpha_0$  n'est pas défini.

#### II-3-2-4. Relation entre les paramètres de Stokes et le taux de polarisation circulaire.

On repère le champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(t)$  du faisceau à l'aide des vecteurs  $\vec{e}_+$  et  $\vec{e}_-$ , associés aux polarisations circulaires gauche et droite respectivement. On note  $I_+$  (resp  $I_-$ ) l'intensité de la composante circulaire droite (resp. gauche) du champ

$$I_- = |\langle \vec{e}_+ | \vec{\mathcal{E}}(t) \rangle|^2 = \overline{\mathcal{E}_+(t) \mathcal{E}_+(t)^*}$$

$$I_+ = |\langle \vec{e}_- | \vec{\mathcal{E}}(t) \rangle|^2 = \overline{\mathcal{E}_-(t) \mathcal{E}_-(t)^*}$$

$I_+$  et  $I_-$  peuvent être mesurés en faisant traverser au faisceau une lame  $1/4$  d'onde d'axe rapide parallèle à Oy et en mesurant, l'intensité transmise à travers un analyseur placé parallèlement à la 1ère et à la 2ème bissectrice des axes successivement.

Le taux de polarisation circulaire du faisceau est défini par

$$p_c = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-}$$

Il résulte de l'expression (II 44) des paramètres de Stokes que

$$p_c = - \frac{V}{I} \quad (\text{II } 50)$$

$p_c$  est également une quantité "intrinsèque", car comme nous l'avons vu en II-3-2-2.,  $I$  et  $V$  ne dépendent pas du choix des axes Ox et Oy dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

#### II-3-2-5. Définition du taux de polarisation "au sens des paramètres de Stokes"

Nous avons vu au paragraphe II-3-1-2. que la matrice polarisation d'un faisceau quelconque vérifie (II 39) :

$$\text{dét } \Pi \geq 0$$

L'égalité étant satisfaite si le faisceau est totalement polarisé.

D'après les relations (II 43) et (II 44), cette inégalité devient

$$Q^2 + U^2 + V^2 \leq I^2 \quad (\text{II 51})$$

pour les paramètres de Stokes .

Cette relation conduit à définir le taux de polarisation "au sens des paramètres de Stokes".

$$\tau_S = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} , \quad (\text{II 52})$$

qui n'est égal à 1 que si le faisceau est totalement polarisé.

$\tau_S$  s'exprime en fonction des taux de polarisation linéaire  $\tau_L$  et circulaire  $\tau_C$ .

$$\tau_S = \sqrt{\tau_L^2 + \tau_C^2} . \quad (\text{II 53})$$

Comme  $\tau_L$  et  $\tau_C$ ,  $\tau_S$  est une quantité "intrinsèque" du faisceau.

#### II-4. DESCRIPTION CLASSIQUE ET QUANTIQUE D'UN RAYONNEMENT QUELCONQUE - MATRICE DENSITE DU RAYONNEMENT.

Nous allons considérer un rayonnement quelconque (dont par exemple, la direction de propagation est quelconque). L'expression du champ électrique et du champ magnétique de ce rayonnement est donnée par leur développement classique, soit sur les ondes planes de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de vecteur polarisation  $\vec{e}_\lambda$  donné, soit sur les ondes multipolaires d'énergie  $\hbar c k_0$ , moment cinétique (J,M) de parité  $\Pi$  donnés. L'expression des grandeurs que l'on peut mesurer sur ce rayonnement, telles que l'énergie, l'impulsion ou le moment cinétique, permet de mettre en évidence une fonction d'onde du rayonnement à l'aide de laquelle on définit une matrice densité du rayonnement dans l'espace des états du moment cinétique. Nous passerons ensuite à la description quantique du rayonnement. L'expression des opérateurs quantiques se déduit simplement de l'expression des grandeurs classiques ; on utilisera le théorème ergodique.

Enfin nous montrerons l'équivalence entre la matrice densité et la matrice polarisation  $|\mathcal{E}^{(+)}(t)\rangle \langle \mathcal{E}^{+}(t)|$  du rayonnement dans deux cas :

1) le cas où on ne s'intéresse qu'au rayonnement régnant dans une région de l'espace petite devant la longueur d'onde.

2) le cas où on observe le rayonnement émis dans une direction donnée par une source de rayonnement dipolaire électrique (atome émettant par émission spontanée par exemple). Nous terminerons en donnant quelques exemples de matrices densités.

#### II-4-1. Expression classique du champ électromagnétique - Développement en ondes planes et multipolaires.

Très généralement, au point de coordonnées  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ , on peut représenter un champ électromagnétique par une superposition d'ondes se propageant dans le vide à la pulsation  $\omega$  et dans la direction définie par le vecteur d'onde  $\vec{k}$ . En l'absence de charges et de courants, l'expression du champ électrique est donnée par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{k} N(k) i\omega \left[ \vec{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - \vec{a}(\vec{k})^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (\text{II } 54)$$

et pour le champ magnétique

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{k} N(k) i \left[ \vec{k} \wedge \vec{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - \vec{k} \wedge \vec{a}(\vec{k})^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (\text{II } 55)$$

où  $N(k)$  est un facteur de normalisation donné par

$$N(k) = \frac{\hbar}{\sqrt{2 \epsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \quad (\text{II } 56)$$

$\epsilon_0$  est la permittivité du vide, et  $\vec{a}(\vec{k})$  un vecteur perpendiculaire à  $\vec{k}$ . Ce vecteur traduit l'état de l'onde : en effet l'énergie  $\mathcal{H}_R$  et l'impulsion  $\vec{P}$  de l'onde ont pour expression

$$\mathcal{H}_R = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} (E^2 + c^2 B^2) = \int d^3\vec{k} \hbar \omega [\vec{a}(\vec{k}) \cdot \vec{a}(\vec{k})^*], \quad (\text{II } 57)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int d^3\vec{r} \vec{E} \wedge \vec{B} = \int d^3\vec{k} \hbar \vec{k} [\vec{a}(\vec{k}) \cdot \vec{a}(\vec{k})^*] \quad (\text{II } 58)$$

$\mathcal{H}_R$  et  $\vec{P}$  apparaissent comme les valeurs moyennes des opérateurs  $\hbar\omega$  et  $\hbar\vec{k}$ ,  $\vec{a}(\vec{k})$  jouant le rôle d'une "fonction d'onde" du champ.

Le calcul du moment cinétique  $\vec{J}$  du champ, dont la définition est

$$\vec{J} = \int \vec{r} \wedge d\vec{P}$$

fait apparaître que

$$\vec{J} = \epsilon_0 \int d^3\vec{r} \vec{r} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \int d^3\vec{k} \vec{a}(\vec{k}) [\vec{L} + \vec{S}] \vec{a}(\vec{k}).$$

C'est à dire que  $\vec{J}$  est la valeur moyenne de l'opérateur  $\vec{L} + \vec{S}$ , où  $\vec{L} = \frac{\hbar}{c} \vec{k} \wedge \vec{\nabla}_k$  est l'opérateur moment angulaire (dans l'espace de  $\vec{k}$ ) et  $\vec{S}$  l'opérateur moment cinétique de spin d'une particule de spin 1, le photon, de fonction d'onde  $\vec{a}(\vec{k})$ .

Pour développer  $\vec{a}(\vec{k})$ , on dispose de deux bases : la base des ondes planes et la base des ondes multipolaires.

#### II-4-1-1. Développement en ondes planes

La fonction d'onde d'un photon d'impulsion  $\hbar\vec{k}_0$  et de polarisation  $\vec{e}_\lambda$  déterminée, telle que  $\vec{e}_\lambda \cdot \vec{k}_0 = 0$ , est :

$$\vec{a}(\vec{k}_0, \vec{e}_\lambda) = \vec{e}_\lambda \delta(\vec{k} - \vec{k}_0) \quad (\text{II 60})$$

le champ électromagnétique est alors

$$\begin{cases} \vec{E}_{\vec{k}_0, \lambda} = N(k_0) i \omega \left[ \vec{e}_\lambda e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} - \vec{e}_\lambda^* e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right], \\ \vec{B}_{\vec{k}_0, \lambda} = N(k_0) i \left[ \vec{k}_0 \wedge \vec{e}_\lambda e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} - \vec{k}_0 \wedge \vec{e}_\lambda^* e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right], \end{cases} \quad (\text{II 61})$$

ce qui est le champ électromagnétique d'une onde plane polarisée parallèlement à  $\vec{e}_\lambda$ .

La fonction d'onde d'un champ quelconque peut être développée sur la base des ondes planes

$$\vec{a}(\vec{k}) = \sum_\lambda \int d^3\vec{k}_0 a_{\vec{k}\lambda} \vec{e}_\lambda \delta(\vec{k}_0 - \vec{k}) = \sum_\lambda a_{\vec{k}\lambda} \vec{e}_\lambda, \quad (\text{II 62})$$

où  $\sum_\lambda$  représente la somme sur deux vecteurs polarisation perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à  $\vec{k}$  et  $a_{\vec{k}\lambda}$  le coefficient du développement de  $\vec{a}(\vec{k})$  sur l'onde plane  $(\vec{k}, \vec{e}_\lambda)$ .

Par suite, le champ électromagnétique associé à  $\vec{a}(\vec{k})$  a pour expression

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \int d^3\vec{k} a_{\vec{k}\lambda} \vec{E}_{\vec{k}\lambda}^{(+)}(\vec{r}, t) + \text{C.C.}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \int d^3\vec{k} a_{\vec{k}\lambda} \vec{B}_{\vec{k}\lambda}^{(+)}(\vec{r}, t) + \text{C.C.}, \end{cases} \quad (\text{II 63})$$

C.C. signifiant "complexe conjugué".

Son énergie et son impulsion sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R &= \int d^3\vec{k} \sum_\lambda \hbar \omega a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}, \\ \vec{P} &= \int d^3\vec{k} \sum_\lambda \hbar \vec{k} a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}. \end{aligned}$$

#### II-4-1-2. Développement en ondes multipolaires

Une autre base de fonctions est fournie par l'ensemble des fonctions propres communes à  $\mathcal{H}_R, J^2, J_z, \pi$  (opérateur parité).

$$\begin{cases} \vec{E}_{\vec{k}_0, \lambda} = \vec{E}_{\vec{k}_0, \lambda}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\vec{k}_0, \lambda}^{(-)}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}_{\vec{k}_0, \lambda} = \vec{B}_{\vec{k}_0, \lambda}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{B}_{\vec{k}_0, \lambda}^{(-)}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

$$\text{On note } \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}, \quad \vec{p} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Une base de fonctions propres communes à  $\vec{y}_J^2$  et  $\vec{y}_J$ , associées aux valeurs propres  $J(J+1)k^2$  et  $Mk$  est formée par les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_J^M(\vec{n}) = \vec{n} Y_J^M(\vec{n}) \quad \text{de parité } (-1)^J \end{array} \right. \quad (\text{II } 64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Z}_J^M(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} k \vec{\nabla}_k Y_J^M(\vec{n}) = -i \vec{n} \wedge \vec{X}_J^M(\vec{n}) \quad \text{de parité } (-1)^J \end{array} \right. \quad (\text{II } 65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X}_J^M(\vec{n}) = \frac{1}{i\sqrt{J(J+1)}} k \wedge \vec{\nabla}_k Y_J^M(\vec{n}) = -i \vec{n} \wedge \vec{Z}_J^M(\vec{n}) \quad \text{de parité } (-1)^{J+1} \end{array} \right. \quad (\text{II } 66)$$

Le vecteur  $\vec{N}_J^M(\vec{n})$  est parallèle à  $\vec{k}$ ; les vecteurs  $\vec{X}_J^M(\vec{n})$  et  $\vec{Z}_J^M(\vec{n})$  sont perpendiculaires à  $\vec{k}$ , et sont perpendiculaires entre eux. Ces trois vecteurs forment donc une base. La fonction d'onde à  $(\vec{k})$  étant un vecteur perpendiculaire à  $\vec{k}$ , elle n'aura aucune composante sur  $\vec{N}_J^M(\vec{n})$ . Par contre elle pourra avoir une composante sur  $\vec{X}_J^M(\vec{n})$  ou  $\vec{Z}_J^M(\vec{n})$ , c'est à dire qu'il y a deux sortes de fonctions de base :

La fonction d'onde d'un photon d'énergie  $k < k_0$ , de moment cinétique  $(J, M)$ , de parité  $(-1)^J$  est

$$\vec{a}_{k_0 J M e} = \frac{1}{k_0} \delta(k - k_0) \vec{Z}_J^M(\vec{n}). \quad (\text{II } 67)$$

Pour calculer le champ électromagnétique créé par ce photon, on utilise le résultat suivant

$$\int d\Omega_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{X}_J^M(\vec{n}) = 4\pi (i)^J j_J(kr) \vec{X}_J^M(\vec{e}), \quad (\text{II } 68)$$

$$\int d\Omega_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{Z}_J^M(\vec{n}) = \frac{4\pi}{2J+1} (i)^{J-1} \left\{ [(J+1) j_{J-1}(kr) - J j_{J+1}(kr)] \vec{Z}_J^M(\vec{e}) + \sqrt{J(J+1)} [j_{J-1}(kr) + j_{J+1}(kr)] \vec{N}_J^M(\vec{e}) \right\}, \quad (\text{II } 69)$$

où  $j_J(kr)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $J$ .

Le champ électromagnétique créé par le photon d'état  $\vec{a}_{k_0 J M e}$  est alors

$$\begin{aligned} \vec{E}_{k_0 J M e}(\vec{r}, t) &= N(k_0) c k_0^2 \frac{4\pi}{2J+1} (i)^J \left\{ [(J+1) j_{J-1}(k_0 r) - J j_{J+1}(k_0 r)] \vec{Z}_J^M(\vec{e}) + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{J(J+1)} [j_{J-1}(k_0 r) + j_{J+1}(k_0 r)] \vec{N}_J^M(\vec{e}) \right\} e^{-i\omega_0 t} + \text{C.C.} \\ &= \vec{E}_{k_0 J M e}^{(+)}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + \text{C.C.} \end{aligned} \quad (\text{II } 70)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{k_0 J M e}(\vec{r}, t) &= N(k_0) k_0^2 4\pi i^{J+2} j_J(k_0 r) \vec{X}_J^M(\vec{e}) e^{-i\omega_0 t} + \text{C.C.} \\ &= \vec{B}_{k_0 J M e}^{(+)}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + \text{C.C.} \end{aligned} \quad (\text{II } 71)$$

En un point voisin de l'origine, tel que  $k_0 r \ll 1$ , les fonctions de Bessel sont données par

$$j_\ell(x) \sim \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \quad (\text{II } 72)$$

alors

$$j_{J-1}(k_0 r) \gg j_J(k_0 r) \gg j_{J+1}(k_0 r) :$$

le champ magnétique est très petit devant le champ électrique : l'onde associée au photon de moment cinétique (J,M) et de parité  $(-1)^J$  est appelée une onde 2J polaire électrique.

. La fonction d'onde d'un photon d'énergie  $\hbar c k_0$ , de moment cinétique (J,M), de parité  $(-1)^{J+1}$ , est

$$\vec{a}_{k_0 J M m} = \frac{1}{k_0} \delta(k - k_0) \vec{X}_J^M(\vec{n}) \quad (\text{II } 73)$$

D'après la relation (II 66):

$$\vec{a}_{k_0 J M m} = -i \vec{n} \wedge \vec{a}_{k_0 J M e} \quad \text{et} \quad \vec{n} \wedge \vec{a}_{k_0 J M m} = i \vec{a}_{k_0 J M e}$$

Le champ électromagnétique de l'onde associée à ce photon possède la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{k_0 J M m}^{(+)}(\vec{r}) = -i c \vec{B}_{k_0 J M e}^{(+)}(\vec{r}), \\ \vec{B}_{k_0 J M m}^{(+)}(\vec{r}) = \frac{i}{c} \vec{E}_{k_0 J M e}^{(+)}(\vec{r}), \end{array} \right. \quad (\text{II } 74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{k_0 J M m}^{(+)}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{k_0 J M m}^{(+)}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + \vec{E}_{k_0 J M m}^{(+)*}(\vec{r}) e^{+i\omega_0 t}, \\ \vec{B}_{k_0 J M m}^{(+)}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{k_0 J M m}^{(+)}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + \vec{B}_{k_0 J M m}^{(+)*}(\vec{r}) e^{+i\omega_0 t}; \end{array} \right. \quad (\text{II } 75)$$

les rôles des champs électrique et magnétique étant inversés par rapport au cas de l'onde multipolaire électrique, l'onde associée à un photon de moment cinétique (J,M) et de parité  $(-1)^{J+1}$  est appelée 2J-polaire magnétique.

. La fonction d'onde  $\vec{a}(\vec{k})$  d'une onde quelconque peut être développée sur la base des ondes multipolaires :

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{k}) &= \sum_{J M} \int d k_0 \left[ a_{k_0 J M e} \frac{1}{k_0} \delta(k - k_0) \vec{Z}_J^M(\vec{n}) + a_{k_0 J M m} \frac{1}{k_0} \delta(k - k_0) \vec{X}_J^M(\vec{n}) \right] = \\ &= a_{k J M e} \frac{1}{k} \vec{Z}_J^M(\vec{n}) + a_{k J M m} \frac{1}{k} \vec{X}_J^M(\vec{n}). \end{aligned} \quad (\text{II } 76)$$



Alors le champ électromagnétique associé à cette fonction d'onde a pour expression

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int d\vec{k} \sum_{J, M} \left[ a_{\vec{k} J M e} \vec{E}_{\vec{k} J M e}^{(+)} e^{-i\omega_0 t} + a_{\vec{k} J M m} \vec{E}_{\vec{k} J M m}^{(+)} e^{-i\omega_0 t} \right] + C.C. \quad (\text{II } 77)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \int d\vec{k} \sum_{J, M} \left[ a_{\vec{k} J M e} \vec{B}_{\vec{k} J M e}^{(+)} e^{-i\omega_0 t} + a_{\vec{k} J M m} \vec{B}_{\vec{k} J M m}^{(+)} e^{-i\omega_0 t} \right] + C.C. \quad (\text{II } 78)$$

Son énergie et son moment cinétique sont

$$\mathcal{H}_R = \int d\vec{k} \sum_{J, M} \hbar \omega \left[ a_{\vec{k} J M e}^* a_{\vec{k} J M e} + a_{\vec{k} J M m}^* a_{\vec{k} J M m} \right] \quad (\text{II } 79)$$

$$\vec{J}^2 = \int d\vec{k} \sum_{J, M} \hbar^2 (J+1)J \left[ a_{\vec{k} J M e}^* a_{\vec{k} J M e} + a_{\vec{k} J M m}^* a_{\vec{k} J M m} \right] \quad (\text{II } 80)$$

$$\vec{J}_z = \int d\vec{k} \sum_{J, M} \hbar M \left[ a_{\vec{k} J M e}^* a_{\vec{k} J M e} + a_{\vec{k} J M m}^* a_{\vec{k} J M m} \right]. \quad (\text{II } 81)$$

Un cas particulier qui nous sera utile est celui du champ vu par un atome dont les dimensions sont très petites devant la longueur d'onde de l'onde.

$$k_0 r \ll 1$$

Alors, au premier ordre

$$j_0(k_0 r) = 1 \quad \text{et} \quad j_\ell(k_0 r) = 0 \quad \text{pour } \ell \neq 1$$

Le seul champ électrique important est celui de l'onde dipolaire électrique

$$\vec{E}_{\vec{k}_0 1 M e} = N(k_0) c k_0^2 i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \vec{e}_M e^{-i\omega t} + C.C. \quad (\text{II } 82)$$

Le champ électrique d'une onde quelconque est alors, au voisinage de l'origine :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int d\vec{k} N(k) c k^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sum_M \left[ i a_{\vec{k} 1 M e} \vec{e}_M e^{-i\omega t} - i a_{\vec{k} 1 M e}^* \vec{e}_M^* e^{i\omega t} \right] \quad (\text{II } 83)$$

#### II-4-1-3. Matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique)

En utilisant la notation de Dirac, on appelle

$$| \vec{a}(\vec{k}) \rangle \quad (\text{II } 84)$$

la fonction d'onde d'un champ électromagnétique

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} | \vec{k}_0, \vec{e}_\lambda \rangle \\ | \vec{k}_0, J, M, \pi \rangle \quad \text{où } \pi = e, m \end{array} \right. \quad (\text{II } 85)$$

les fonctions de base définies en (II 60), (II 67), (II 73) .

A partir du développement de  $|\vec{a}(\vec{k})\rangle$  en ondes multipolaires :

$$a_{k_0 1 M e} = \langle k_0 1 M e | \vec{a}(\vec{k}) \rangle = \int d^3\vec{k} \frac{1}{k_0} \delta(k - k_0) \vec{Z}_J^M(\vec{n})^* \cdot \vec{a}(\vec{k})$$

et

$$a_{k_0 1 M m} = \langle k_0 1 M m | \vec{a}(\vec{k}) \rangle = \int d^3\vec{k} \frac{1}{k_0} \delta(k - k_0) \vec{X}_J^M(\vec{n})^* \cdot \vec{a}(\vec{k}) \quad (\text{II } 86)$$

on définit une matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique) :

$$\varnothing \propto \sum_{\substack{J J' \\ M M' \\ \pi \pi'}} a_{k_0 J M \pi} a_{k_0 J' M' \pi'}^* |k_0 J M \pi\rangle \langle k_0 J' M' \pi'| \quad (\text{II } 87)$$

lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la partie dipolaire électrique de l'onde; on ne considère que la restriction de  $\varnothing$  au sous-espace ( $J=1, \Pi=e$ ). On note les éléments de matrice de  $\varnothing$  par :

$$\varnothing_{M M'} \propto \langle k_0 1 M e | \varnothing | k_0 1 M' e \rangle.$$

on a

$$\varnothing_{M M'} \propto a_{k_0 1 M e} a_{k_0 1 M' e}^*$$

Lorsque nous avons donné la forme de  $\vec{E}$ , nous avons supposé l'espace vide de charges et de champs. En fait, le champ électromagnétique est créé par une source, qui peut introduire une variation aléatoire de  $|\vec{a}(\vec{k})\rangle$  en fonction du temps, lente devant la période optique de l'onde. On observe alors la moyenne sur le temps des observables du champ : En particulier

$$\overline{\varnothing_{M M'}} \propto a_{k_0 1 M e} a_{k_0 1 M' e}^* \quad (\text{II } 88)$$

où  $\overline{\quad}$  indique une valeur moyenne sur le temps.  $\varnothing$  est définie à un facteur multiplicatif près : nous le fixons en choisissant de normaliser  $\varnothing$  à l'unité :

$$\text{Tr } \varnothing = 1$$

alors :

$$\varnothing_{M M'} = \frac{a_{k_0 1 M e} a_{k_0 1 M' e}^*}{\sum_M a_{k_0 1 M e} a_{k_0 1 M e}^*} \quad (\text{II } 89)$$

#### II-4-2. Expression quantique du champ électromagnétique

Ce qui précède fait apparaître le champ électromagnétique comme formé par des photons, particules de spin 1, ce qui est le point de vue quantique. Nous avons rappelé que l'état d'un photon peut être rapporté à deux sortes de bases.

- une base d'états d'impulsion  $\vec{k}, \vec{k}_0$  et de polarisation  $\vec{e}_\lambda$  bien définies ;

on les note  $(\vec{k}_0, \vec{e}_\lambda)$  ;

- une base d'états d'énergie  $\hbar c k_0$ , de moment cinétique (J,M) et de parité  $\Pi$  bien définis ; on les note  $(k_0 JM \Pi)$ .

Le système considéré est constitué par l'ensemble des photons ; ceux-ci étant des particules de spin 1, plusieurs photons peuvent se trouver dans le même état. L'espace des états du système total (espace de Fock) a donc pour base l'ensemble des kets complètement symétriques de la forme :

$$|n_i, n'_j, n''_k, \dots\rangle = |n_i\rangle \otimes |n'_j\rangle \otimes |n''_k\rangle \otimes \dots$$

Où  $|n_i\rangle$  est un état représentant  $n$  photons dans l'état  $i$ . Les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon sont définis par

$$\begin{cases} a_i^+ |n_i\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)_i\rangle \\ a_i |n_i\rangle = \sqrt{n} |(n-1)_i\rangle. \end{cases} \quad (\text{II } 90)$$

Un opérateur qui intervient souvent dans l'étude du rayonnement est l'opérateur "nombre de photons dans l'état  $i$ " qui est défini par

$$N_i = a_i^+ a_i \quad (\text{II } 91)$$

En effet

$$N_i |n_j\rangle = \delta_{ij} n |n_j\rangle$$

Pour la théorie quantique du champ, le champ électromagnétique, son énergie, son impulsion, son moment cinétique sont des opérateurs (indépendants du temps dans le point de vue de Schrödinger) agissant sur l'ensemble des photons. On obtient leur expression en remplaçant les coefficients  $a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^*$  (ou  $a_{\vec{k}JM\pi} a_{\vec{k}JM\pi}^*$ ) du développement classique par les opérateurs d'annihilation ou de création dans l'état correspondant, notés  $a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}\lambda}^+$  (ou  $a_{\vec{k}JM\pi}, a_{\vec{k}JM\pi}^+$ ). L'expression du champ électromagnétique développé en ondes planes est donc :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \sum_{\lambda} d^3\vec{k} N(k) i\omega \left[ a_{\vec{k}\lambda} \vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}\lambda}^+ \vec{e}_\lambda^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right], \quad (\text{II } 92)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \sum_{\lambda} d^3\vec{k} N(k) i \left[ a_{\vec{k}\lambda} \vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}\lambda}^+ \vec{k} \wedge \vec{e}_\lambda^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]. \quad (\text{II } 93)$$

Son hamiltonien est

$$H = \int \sum_{\lambda} d^3\vec{k} \frac{\hbar\omega}{2} (a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+). \quad (\text{II } 94)$$

Le champ électromagnétique développé en ondes multipolaires a pour expression

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{k} \sum_{JM\pi} \left[ a_{\vec{k}JM\pi} \vec{E}_{\vec{k}JM\pi}^{(+)} + a_{\vec{k}JM\pi}^+ \vec{E}_{\vec{k}JM\pi}^{(-)} \right] \quad (\text{II } 95)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{k} \sum_{JM\pi} \left[ a_{\vec{k}JM\pi} \vec{B}_{\vec{k}JM\pi}^{(+)} + a_{\vec{k}JM\pi}^+ \vec{B}_{\vec{k}JM\pi}^{(-)} \right] \quad (\text{II } 96)$$

Son hamiltonien est

$$\mathbf{H} = \int d\vec{k} \sum_{JM\pi} \frac{\hbar\omega}{2} \left[ a_{\vec{k}JM\pi}^+ a_{\vec{k}JM\pi} + a_{\vec{k}JM\pi} a_{\vec{k}JM\pi}^+ \right] \quad (\text{II } 97)$$

Dans la suite de cet exposé nous supposerons que la région de l'espace qui nous intéresse est de dimensions petites devant la longueur d'onde de l'onde, c'est-à-dire que nous supposerons  $k_0 r \ll 1$  (approximation dipolaire électrique). Nous avons vu que dans ce cas le champ électrique développé en ondes multipolaires se réduit à sa partie dipolaire électrique :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \sum_M d\vec{k} N(\vec{k}) c k^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} i \left[ a_{\vec{k}1M} \vec{e}_M - a_{\vec{k}1M}^+ \vec{e}_M^* \right]. \quad (\text{II } 98)$$

#### II-4-3. Densité d'énergie du rayonnement. Cas d'un rayonnement en équilibre thermodynamique.

La densité d'énergie est une grandeur qui intervient dans la probabilité d'absorption d'un photon par un atome. C'est pourquoi nous allons préciser ici les notations que nous utiliserons.

L'énergie du rayonnement par unité de volume ou densité d'énergie est

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle$$

où  $\langle \mathbf{H} \rangle$  est la valeur moyenne de l'opérateur  $\mathbf{H}$  sur l'ensemble des photons. La densité d'énergie du rayonnement par unité d'intervalle de fréquence est définie par

$$u_\nu = \frac{d \langle \mathbf{H} \rangle}{d\nu}.$$

En utilisant le développement du champ en ondes planes on obtient

$$u_\nu = \frac{8\pi \hbar \nu^3}{c^3} \left[ \frac{1}{2} \sum_\lambda \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \langle N_{\vec{k}\lambda} \rangle \right]. \quad (\text{II } 99)$$

$N_{\vec{k}\lambda}$  étant l'opérateur "nombre de photons dans l'état  $\vec{k}\lambda$ " défini en (II 91).

D'autre part, en utilisant le développement du champ en ondes multipolaires, dans l'approximation dipolaire électrique, on obtient :

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \left[ \frac{1}{3} \sum_M \langle N_{\vec{k}\lambda} \rangle \right] \quad (\text{II } 100)$$

En définissant un nombre moyen de photons de fréquence  $\nu$  par

$$\langle N_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{3} \sum_M \langle N_{\vec{k}\lambda} \rangle \quad (\text{II } 101)$$

la densité d'énergie du champ s'écrit

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \langle N_{\vec{k}} \rangle \quad (\text{II } 102)$$

$\langle N_{\vec{k}} \rangle$  est donc lié au nombre de photons dans les modes d'ondes planes par :

$$\langle N_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_\lambda \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \langle N_{\vec{k}\lambda} \rangle. \quad (\text{II } 103)$$

Cette relation est valable dans une région telle que  $k_0 r \ll 1$ .

Si le rayonnement est en équilibre thermodynamique à la température  $T$  la probabilité de trouver le système dans l'état  $|n_i\rangle$  du mode  $i$  est, d'après la mécanique statistique \*

$$p_i(n) = \frac{e^{-n h \omega_i / k_B T}}{\sum_n e^{-n h \omega_i / k_B T}} = e^{-n h \omega_i / k_B T} \left( 1 - e^{-h \omega_i / k_B T} \right). \quad (\text{II } 104)$$

car  $|n_i\rangle$  est un état propre du hamiltonien, d'énergie  $n h \omega_i$  ; le nombre moyen de photons dans l'état  $i$  est donc :

$$\langle N_i \rangle = \sum_n n p_i(n) = \frac{1}{e^{h \omega_i / k_B T} - 1}. \quad (\text{II } 105)$$

Tous les modes de même fréquence sont également peuplés, et on retrouve, d'après (II 99) ou (II 100), la loi de Planck de la densité d'énergie :

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h \omega / k_B T} - 1}$$

#### II-4-4. Matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique) et matrice polarisation.

Nous allons donner l'expression quantique (à l'aide d'opérateur) de la matrice densité du rayonnement. On l'obtient à partir de l'expression classique en utilisant le théorème ergodique : l'équivalent quantique de la moyenne sur le temps d'une grandeur est la valeur moyenne sur l'ensemble des

\* Ci-après la constante de Boltzmann est notée  $k_B$ , pour éviter de confondre avec le vecteur d'onde  $k$

photons de l'opérateur associé à cette grandeur. On obtient donc à partir de l'expression (II 89) la forme des coefficients de la matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique) de la partie dipolaire électrique de l'onde.

$$\phi_{MM'} = \frac{\langle a_{k1M'e}^+ a_{k1Me} \rangle}{\sum_M \langle a_{k1Me}^+ a_{k1Me} \rangle} \quad (\text{II } 106)$$

Ce qui peut encore s'écrire, à l'aide du nombre  $\langle N_k \rangle$  défini en (II 101)

$$3 \langle N_k \rangle \phi_{MM'} = \langle a_{k1M'e}^+ a_{k1Me} \rangle. \quad (\text{II } 107)$$

#### II-4-4-1. Relation matrice densité - matrice polarisation dans l'approximation des grandes longueurs d'onde.

Le théorème ergodique permet également d'obtenir l'expression quantitative de la matrice polarisation du rayonnement définie en (II 37) :

$$\Pi = \langle | \vec{E}^{(+)} \rangle \langle \vec{E}^{(+)} | \rangle$$

L'expression (II 98) de l'opérateur champ électrique développé en ondes multipolaires permet de montrer que, dans l'approximation des grandes longueurs d'onde ( $k_0 r \ll 1$ ) la matrice polarisation  $\Pi$  et la matrice densité  $\phi$  sont proportionnelles.

$$\Pi_{rr'} = \int d\nu \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \langle N_k \rangle \frac{1}{2\epsilon_0} \phi_{rr'}.$$

La matrice densité  $\phi$  étant normalisée à l'unité, on a donc

$$\phi = \frac{\Pi}{\text{Tr } \Pi}. \quad (\text{II } 108)$$

Pour calculer  $\phi$  ou  $\Pi$ , on peut utiliser le développement de  $E$  en ondes planes, lorsqu'on connaît la densité d'énergie dans chaque mode ( $\vec{k}, \lambda$ ) comme ce sera le cas pour le rayonnement solaire). La relation qui permet de calculer  $\phi$  lorsqu'on connaît cette densité d'énergie est alors

$$\phi_{rr'} \langle N_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \langle N_{\vec{k}\lambda} \rangle \langle \vec{e}_r | \vec{e}_{\lambda} \rangle \langle \vec{e}_{\lambda} | \vec{e}_{r'} \rangle. \quad (\text{II } 109)$$

II-4-4-2. Développement de la matrice densité sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles.

La matrice densité  $\phi$  représentant l'état du rayonnement dans l'espace des états d'un moment cinétique  $J = 1$ , elle peut être développée sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles  $11_T^{(k)Q}$  définis en (II 20), les coefficients  $\phi_Q^K$  étant liés aux coefficients  $\phi_{MM}$ , par les relations (II 28) et (II 29).

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{++} = \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_0^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0^1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \phi_0^2, \quad \phi_{+-} = \phi_{-+}^2, \quad \phi_{+0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{-1}^1 + \phi_{-1}^2) \\ \phi_{-+} = \phi_{-2}^2, \quad \phi_{--} = \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_0^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0^1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \phi_0^2, \quad \phi_{-0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{-1}^1 - \phi_{-1}^2) \\ \phi_{0+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{-1}^1 + \phi_{-1}^2), \quad \phi_{0-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\phi_{-1}^1 + \phi_{-1}^2), \quad \phi_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_0^0 - \frac{2}{\sqrt{6}} \phi_0^2 \end{array} \right. \quad (\text{II } 110)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_{++} + \phi_{--} + \phi_{00}), \quad \phi_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{0+} + \phi_{-0}), \quad \phi_{-1}^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{+0} + \phi_{-0}) \\ \phi_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{++} - \phi_{--}), \quad \phi_{-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{0+} - \phi_{-0}), \quad \phi_{-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{0-} - \phi_{+0}) \\ \phi_{-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\phi_{++} + \phi_{--} - 2\phi_{00}), \quad \phi_{-2}^2 = \phi_{-+}, \quad \phi_{-2}^2 = \phi_{+-} \end{array} \right. \quad (\text{II } 111)$$

II-4-4-3. Exemples de calcul de la matrice densité d'un faisceau

La relation (II 108) nous permet de calculer la matrice densité d'un faisceau, dans une région de dimensions petites devant la longueur d'onde.

On choisit l'axe Oz sur la direction de propagation du faisceau. La partie non nulle de la matrice polarisation du faisceau, définie en (II 37), est une matrice  $2 \times 2$ . Dans le cas d'un faisceau, on a donc :

$$\phi_{0+} = \phi_{0-} = \phi_{00} = 0$$

Ce qui implique

$$\phi_{+1}^1 = \phi_{+1}^2 = 0$$

et 
$$\phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0^0$$

Or la matrice densité du rayonnement étant normalisée à l'unité :  $\sqrt{3} \phi_0^0 = 1$

On a donc :

$$\phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

les coefficients de la matrice densité sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \phi_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{++} - \phi_{--}) \\ \phi_{\pm 1}^1 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \phi_{\pm 1}^2 = 0 \\ \phi_2^2 = \phi_{+-} \quad , \quad \phi_{-2}^2 = \phi_{-+} \end{array} \right.$$

Si le faisceau est un faisceau de lumière naturelle, il peut être représenté par une superposition incohérente de deux faisceaux d'égale intensité, dont les vecteurs polarisation sont perpendiculaires, d'après l'expression (II 40). Cette matrice polarisation est proportionnelle à la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans une base quelconque du plan (xOy). Dans la base ( $\vec{e}_+$ ,  $\vec{e}_-$ ), on a donc

$$\phi_{++} = \phi_{--} \quad \text{et} \quad \phi_{+-} = \phi_{-+} = 0$$

la matrice densité dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles est donc donnée par

$$\phi_{+2}^2 = 0 \quad \phi_0^1 = 0$$

Si le faisceau est totalement polarisé, il existe un vecteur  $\vec{e}_\lambda$  du plan (xOy), dont les coordonnées peuvent être complexes, qui est tel que la composante  $\vec{E}^{(E)}$  du champ électrique (II 33) soit parallèle à  $\vec{e}_\lambda$ . La matrice polarisation du faisceau est donc proportionnelle à la matrice  $|\vec{e}_\lambda\rangle\langle\vec{e}_\lambda|$ . Le vecteur polarisation  $\vec{e}_\lambda$  étant normé, la matrice densité de ce faisceau est donc, d'après (II 108)

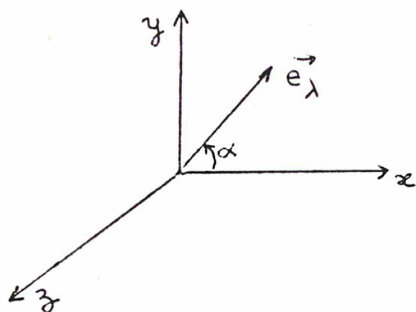
$$\phi = |\vec{e}_\lambda\rangle\langle\vec{e}_\lambda|$$

On note ( $\lambda_+$ ,  $\lambda_-$ ) les coordonnées de  $\vec{e}_\lambda$  dans la base ( $\vec{e}_+$ ,  $\vec{e}_-$ ): les coefficients de la matrice polarisation sont donc :

$$\left( \begin{array}{ll} \phi_{++} = \lambda_+ \lambda_+^* & \phi_{-+} = \lambda_- \lambda_+^* \\ \phi_{+-} = \lambda_+ \lambda_-^* & \phi_{--} = \lambda_- \lambda_-^* \end{array} \right)$$



Si le faisceau est polarisé rectilignement le vecteur  $\vec{e}_\lambda$  est un vecteur du plan  $xOy$ , dont les composantes dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  sont réelles. On le repère par l'angle  $\alpha$  qu'il fait avec  $Ox$ :



Alors

$$\begin{cases} \lambda_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \\ \lambda_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \end{cases}$$

et les coefficients de la matrice densité sont donc:

$$\phi_0^1 = 0, \quad \phi_2^2 = -\frac{1}{2} e^{-2i\alpha}, \quad \phi_{-2}^2 = -\frac{1}{2} e^{2i\alpha}$$

Si le faisceau est polarisé circulairement,  $\vec{e}_\lambda$  est soit le vecteur  $\vec{e}_+$ , soit le vecteur  $\vec{e}_-$ . On appelle  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , respectivement l'état de polarisation du faisceau. Pour l'état  $\sigma_\pm$ , les composantes de  $\vec{e}_\lambda$  sont :

$$\begin{cases} \lambda_\pm = 1 \\ \lambda_{\mp} = 0 \end{cases}$$

et les composantes de la matrice densité sont

$$\phi_0^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi_{\pm 2}^2 = 0$$

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant : (voir aussi la thèse de Faroux 1969)

Polarisation	Naturelle	circulaire		rectiligne $\alpha$
		$\sigma_+$	$\sigma_-$	
$\phi_0^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\phi_0^1$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\phi_0^2$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\phi_2^2$	0	0	0	$-\frac{1}{2} e^{-2i\alpha}$
$\phi_{-2}^2$	0	0	0	$-\frac{1}{2} e^{2i\alpha}$

(II 111 bis)

Si cette matrice densité doit être utilisée dans un calcul pour lequel l'axe de quantification est un axe OZ, différent de Oz, on passe des composantes de la matrice densité calculée dans le repère Oxyz aux composantes de la matrice densité dans le nouveau repère, à l'aide des relations de transformation de l'appendice A<sub>II</sub>.

II-4-4-4. Matrice polarisation du rayonnement émis dans une direction donnée à partir d'une source de rayonnement dipolaire électrique.

Dans les paragraphes précédents (II-4-4-1 et II-4-4-2) nous avons établi la proportionnalité entre la matrice polarisation et la matrice densité du rayonnement, pour une région de l'espace de dimensions petites devant la longueur d'onde. Un problème un peu différent que nous rencontrerons est celui de calculer les paramètres de Stokes (ou la matrice polarisation) du rayonnement émis dans une direction donnée par une source de rayonnement dipolaire électrique (rayonnement émis par un atome, qui émet dans toutes les directions).

La matrice densité de ce rayonnement, que nous noterons  $\psi$ , n'a d'éléments non nuls que dans sa partie dipolaire électrique. Nous supposons que  $\psi$  est normalisée à l'intensité totale du rayonnement  $\mathcal{J}$  :

$$\text{Tr } \psi = \mathcal{J} \quad (\text{II 112})$$

Nous choisissons comme axe de quantification du système la direction d'observation, en effectuant éventuellement une rotation des axes du système (dans laquelle les lois de transformation des opérateurs densité du système sont connues (Appendice A<sub>II</sub>)).

Les coefficients  $\psi_{MM'}$  de  $\psi$  sont liés à la fonction d'onde  $\vec{a}(\vec{k})$  du champ électromagnétique par la relation (II 87) :

$$\psi_{MM'} \propto \langle k_0, 1 M e | \vec{a}(\vec{k}) \rangle \langle \vec{a}(\vec{k}) | k_0, 1 M' e \rangle . \quad (\text{II 113})$$

D'autre part, l'expression (II63 bis) du champ électrique développé en ondes planes donne les coefficients  $\Pi_{pp'}$  de la matrice polarisation du rayonnement observé dans la direction  $\vec{Oz}$  :

$$\Pi_{pp'} \propto a_{\vec{k}_p} a_{\vec{k}_{p'}}^* \quad \text{où } \vec{k} \text{ est parallèle à Oz.}$$

C'est-à-dire en utilisant la notation de Dirac (II 85)

$$\Pi_{pp'} \propto \langle \vec{k}_0, \vec{e}_p | \vec{a}(\vec{k}) \rangle \langle \vec{a}(\vec{k}) | \vec{k}_0, \vec{e}_{p'} \rangle \quad \text{où } \vec{k}_0 \text{ est parallèle à Oz.}$$

$\psi$  et  $M$  sont donc liés par

$$\Pi_{rr'} = C \sum_{MM'} \langle \vec{k} \vec{e}_p | k 1 M e \rangle \psi_{MM'} \langle k 1 M' e | \vec{k} \vec{e}_{p'} \rangle, \quad (\text{II } 114)$$

où  $C$  est un facteur de proportionnalité.

Les expressions (II 60) et (II 67) des états  $|\vec{k} \vec{e}_p\rangle$  et  $|\vec{k} 1 M e\rangle$  permettent de calculer le produit scalaire  $\langle \vec{k} \vec{e}_p | k 1 M e \rangle$  lorsque  $\vec{k}$  est parallèle à  $Oz$  :

$$\langle \vec{k} \vec{e}_p | k 1 M e \rangle = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \delta_{M p} ; \quad (\text{II } 115)$$

les coefficients de la matrice polarisation  $\Pi$  sont donc

$$\Pi_{rr'} = C \frac{3}{8\pi} \psi_{rr'}.$$

Il reste à calculer le facteur de normalisation  $C$  introduit plus haut. Pour cela, on exprime que la somme des intensités observées dans toutes les directions ( $\vec{k}$ ) est égale à l'intensité totale du rayonnement émis  $\mathcal{I} = \text{Tr } \psi$  :

$$C \int [\Pi_{++}(\vec{k}) + \Pi_{--}(\vec{k})] d\Omega_{\vec{k}} = \text{Tr } \psi$$

où  $\Pi_{++}(\vec{k})$  est le coefficient  $\Pi_{++}$  de la matrice polarisation, l'axe de quantification étant la direction  $\vec{k}$ . Les coefficients sont liés aux coefficients  $\psi_{++}(\vec{k})$  de la matrice densité par la relation (II 114)

$$\text{Or } \int \psi_{++}(\vec{k}) d\Omega_{\vec{k}} = \int \psi_{--}(\vec{k}) d\Omega_{\vec{k}} = \int \psi_{00}(\vec{k}) d\Omega_{\vec{k}} = \frac{4\pi}{3} \text{Tr } \psi$$

le coefficient de normalisation  $C$  est donc égal à 1, et la relation (II 114) devient

$$\Pi_{rr'} = \frac{3}{8\pi} \psi_{rr'} \quad (\text{II } 116)$$

Utilisant la relation (II 44) reliant les paramètres de Stokes aux éléments de la matrice polarisation  $\Pi$ , on obtient les paramètres de Stokes que l'on peut mesurer dans la direction  $Oz$  :

$$\begin{cases} I = \frac{3}{8\pi} (\psi_{++} + \psi_{--}) \\ Q = -\frac{3}{8\pi} (\psi_{+-} + \psi_{-+}) \\ U = \frac{3}{8\pi} i(\psi_{-+} - \psi_{+-}) \\ V = \frac{3}{8\pi} (\psi_{++} - \psi_{--}). \end{cases} \quad (\text{II } 117)$$

Ou encore, en fonction des composantes de  $\psi$  dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{3}{8\pi} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_0^0 + \frac{2}{\sqrt{6}} \psi_0^2 \right) , \\ Q = -\frac{3}{8\pi} (\psi_2^2 + \psi_{-2}^2) = -\frac{3}{8\pi} 2 \operatorname{Re} \psi_2^2 , \\ U = \frac{3}{8\pi} i (\psi_{-2}^2 - \psi_2^2) = \frac{3}{8\pi} 2 \operatorname{Im} \psi_2^2 , \\ V = \frac{3}{8\pi} \sqrt{2} \psi_0^1 . \end{array} \right. \quad (\text{II } 118)$$

## II-5. CONCLUSION

L'étape suivante est de calculer les éléments de la matrice densité des photons réémis  $\psi$ , après interaction entre les photons incidents et l'atome diffuseur, ce qui fait l'objet du chapitre III.

## CHAPITRE III

### INTERACTION ATOME - RAYONNEMENT

#### III-0. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de calculer formellement les paramètres de Stokes du rayonnement réémis dans une direction donnée après interaction entre les photons incidents et un atome couplé à un champ magnétique statique.

Pour cela, nous reprendrons le formalisme théorique de l'interaction atome-rayonnement établi dans la thèse de C. Cohen-Tannoudji (1962), repris par J.P. Faroux (1969) dans sa thèse à l'aide des opérateurs tensoriels irréductibles. Nous nous baserons aussi sur le cours de C. Cohen-Tannoudji au Collège de France (1975-1976) concernant l'étude de l'évolution d'un petit système  $A$  (atome) couplé à un grand réservoir  $R$  (ensemble des photons) : cette évolution est décrite par l'équation pilote, dont nous donnerons l'expression dans un premier paragraphe. Dans un second paragraphe, nous appliquerons la théorie de l'équation pilote à l'interaction atome-rayonnement et, moyennant certaines hypothèses sur l'atome et sur le rayonnement, nous obtiendrons les équations d'évolution de la matrice densité de l'atome, couplé au rayonnement incident et au champ magnétique statique. Ces équations forment un système d'équations linéaires couplées, qui, dans le cas d'un état stationnaire, sont les équations de l'équilibre statistique. La résolution de ce système permet d'obtenir les composantes de la matrice densité atomique (à l'état stationnaire) dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles. Enfin, dans un troisième paragraphe, on reliera ces coefficients à ceux de la matrice densité du rayonnement réémis, ce qui permet de calculer les paramètres de Stokes du rayonnement recueilli dans une direction donnée.

#### III-1. EQUATION PILOTE DECRIVANT L'EVOLUTION D'UN PETIT SYSTEME A COUPLE A UN GRAND RESERVOIR R.

Nous allons avoir à étudier deux systèmes en interaction : un système  $A$  (ensemble d'atomes) et un "réservoir"  $R$  (ensemble de photons) mais nous ne chercherons à mesurer que des grandeurs physiques relatives au système  $A$ , en ignorant les grandeurs physiques relatives au système  $R$ . Pour cela, il n'est pas nécessaire de connaître la matrice densité  $\rho$  du système total  $A+R$ , mais seulement sa trace partielle par rapport à  $R$ ,  $\sigma_A$  dont nous allons rappeler la définition et qui a presque toutes les propriétés d'une matrice densité

du système A. Seules les propriétés d'évolution dans le temps sont différentes.

$\sigma_A$  présente un intérêt encore plus grand si on peut en écrire une équation d'évolution. Il serait alors possible d'étudier l'évolution du système A sans étudier l'évolution du système total A + R. Mais en général à cause du couplage entre A et R, l'évolution de  $\sigma_A(t)$  dépend de la matrice densité du système total  $\rho(t)$ . Cependant sous certaines hypothèses concernant les systèmes A et R et leur interaction, qui rendent possible les développements perturbatifs, on peut écrire une équation d'évolution approchée de  $\sigma_A$  ne faisant intervenir que  $\sigma_A(t)$  appelée équation pilote. Ces calculs ont fait l'objet du cours au Collège de France (1975-76) de C. Cohen-Tannoudji. Nous indiquerons l'expression de l'équation pilote telle que nous l'utiliserons, les étapes du calcul de celle-ci étant rappelées en appendice A.III.

### III-1-1. Notion de trace partielle.

Nous considérons deux systèmes A et R en interaction. On note

$|m\rangle$  une base orthonormée de l'espace des états  $\mathcal{E}_A$  de A

$|\alpha\rangle$  une base orthonormée de l'espace des états  $\mathcal{E}_R$  de R

$\rho$  la matrice densité du système total A + R

$H_A$  le hamiltonien des éléments de A isolés

$H_R$  le hamiltonien des éléments de R isolés

$V_{AR}$  le hamiltonien d'interaction de A et R

La trace partielle de  $\rho$  par rapport à R, qui est un opérateur agissant sur  $\mathcal{E}_A$ , que nous noterons

$$\sigma_A = \text{Tr}_R \rho$$

est défini par

$$\langle m | \sigma_A | n \rangle = \sum_{\alpha} \langle m \alpha | \rho | n \alpha \rangle \quad (\text{III } 1)$$

$\sigma_A$  possède toutes les propriétés indépendantes du temps d'une matrice densité du système A, telles que nous les avons indiquées en II-1 :

. La probabilité de trouver le système A dans un état  $|u\rangle$  quel que soit l'état du système R, est

$$p_u = \sum_{\alpha} \langle u \alpha | \rho | \alpha u \rangle = \langle u | \sigma_A | u \rangle$$

. La valeur moyenne des résultats des mesures d'une observable  $G_A$  du système A, qui ne fait pas intervenir le système R, est

$$\begin{aligned} G_A &= \sum_{m,n} \langle m | G_A | n \rangle \langle n\alpha | \rho | m\alpha \rangle, \\ &= \sum_{m,n} \langle m | G_A | n \rangle \langle m | \sigma_A | m \rangle, \\ &= \text{Tr}_A G_A \sigma_A. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma_A(t) = \text{Tr}_R \rho(t)$ , qui est plus "petite" que  $\rho(t)$ , suffit à décrire l'état de A à l'instant t, si on ne s'intéresse pas à l'état de R.

On définit de même  $\sigma_R$ , trace partielle de  $\rho$  par rapport à A

$$\langle \alpha | \sigma_R | \beta \rangle = \sum_n \langle n\alpha | \rho | n\beta \rangle$$

Remarquons que, en général,

$$\rho \neq \sigma_A \otimes \sigma_R,$$

c.ar, par l'opération de trace partielle, on "perd" les cohérences de type  $\langle m\alpha | \rho | n\beta \rangle$  où  $m \neq n$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

### III-1-2. Equation pilote

On note  $|i\rangle$  (resp.  $|\alpha\rangle$ ) une base d'états propres de  $H_A$  (resp.  $H_R$ ), d'énergie  $E_i$  (resp.  $E_\alpha$ ).

#### III-1-2-1. Hypothèses

On suppose que les systèmes A et R sont en interaction à partir d'un instant t pris pour origine :  $t = 0$ .

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées

$$(1) \cdot [\sigma_R(0), H_R] = 0 \quad (\text{III-2})$$

C'est-à-dire qu'on suppose que  $\sigma_R(0)$  est diagonale par blocs de même énergie dans une base d'états propres de  $H_R$ , ce qu'on peut également traduire

$$\text{par } \langle \alpha | \sigma_R(0) | \alpha' \rangle = 0 \quad \text{si } E_\alpha \neq E_{\alpha'}$$

Cette hypothèse est satisfaite dans le cas particulier d'un réservoir en équilibre thermodynamique :

$$\sigma_R = \frac{\exp(-H_R / k_B T)}{\text{Tr} \exp(-H_R / k_B T)}$$

$\sigma_R$  est alors complètement diagonale.

(2).  $V_{AR}$  est produit (ou somme de produits) d'un opérateur  $\tilde{A}$  agissant sur le système A et d'un opérateur  $\tilde{R}$  agissant sur le système R.

$$V = \tilde{A} \cdot \tilde{R} \quad (\text{ou } V_{AR} = \sum_p \tilde{A}_p \tilde{R}_p) \quad (\text{III } 3)$$

$$(3) \cdot \text{Tr}_R [V_{AR} \sigma_R(0)] = 0 \quad (\text{III } 4)$$

Ce qui s'écrit, en utilisant l'hypothèse précédente :

$$\langle m | \tilde{A} | n \rangle \langle \tilde{R} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } |m\rangle \text{ et } |n\rangle \quad (\text{III } 5)$$

Ceci signifie que l'énergie de A dans le potentiel moyen exercé par R sur A est nulle. Si ce potentiel moyen n'était pas nul il suffirait d'intégrer l'opérateur

$$\text{Tr}_R V_{AR} \sigma_R(0)$$

à  $H_A$  pour que l'hypothèse soit satisfaite.

(4) Le calcul de l'équation pilote fait intervenir la fonction

$$\tilde{g}(\omega) = \sum_{\alpha/\beta} \langle \alpha | \sigma_R(0) | \alpha \rangle | \langle \alpha | \tilde{R} | \beta \rangle |^2 \delta(\omega - \omega_{\alpha\beta})$$

qui est la densité spectrale des fréquences de la grandeur physique  $\tilde{R}$  du système R qui agit sur A. On note  $\frac{1}{\tau_c}$  la largeur de cette fonction.  $\tilde{g}(\omega)$  étant la transformée de Fourier d'une fonction  $g(\tau)$  qui apparaît comme une fonction de corrélation entre les systèmes A et R dans le calcul de l'équation pilote,  $\tau_c$  apparaît comme le temps de corrélation de la force exercée par R sur A. On suppose que  $\tau_c$  est suffisamment court pour qu'on puisse se limiter à considérer une seule interaction entre A et R pendant  $\tau_c$  (Approximation de couplage faible). Pour cela, il faut que la condition de validité du développement perturbatif

$$\frac{\sqrt{\langle V_{AR}^2 \rangle}}{\hbar} \tau_c \ll 1$$

soit remplie.

On note  $\Gamma$  un ordre de grandeur des coefficients de l'équation pilote:

$$\Gamma \simeq \frac{\langle V_{AR}^2 \rangle}{\hbar^2} \tau_c.$$

$\Gamma$  étant réel, il représente l'élargissement des niveaux de A dû au couplage



avec R. Le temps caractéristique d'évolution de A est donc  $\frac{1}{\Gamma}$ . On suppose

$$\frac{1}{\Gamma} \gg \tau_c ,$$

c'est à dire que, dans son référentiel propre, le système A évolue très peu pendant le temps de corrélation  $\tau_c$  (approximation de mémoire courte)

Les deux conditions précédentes sont satisfaites si

$$\frac{\langle V_{AR}^2 \rangle \tau_c^2}{\hbar^2} \ll 1 ,$$

c'est à dire si  $\Gamma \ll \frac{1}{\tau_c}$ .

(III 6)

(5) Une fréquence de Bohr du système A étant définie par

$$\omega = \frac{E_i - E_j}{\hbar} \quad \text{(III 7)}$$

on suppose que ces fréquences de Bohr se groupent en "paquets":

de façon que

(III 8)

$$\Gamma \ll \omega_{i_1 j_1} , \omega_{i_2 j_2} , \dots$$

Cette hypothèse permet de faire l'approximation séculaire qui consiste à

négliger dans l'évolution de l'élément de matrice  $\langle i | \sigma_A(t) | j \rangle$  les

cohérences  $\langle k | \sigma_A(t) | \ell \rangle$  pour lesquelles  $\omega_{k\ell}$  est très différent de  $\omega_{ij}$  (i.e.  $(E_k - E_\ell)$  très différent de  $(E_i - E_j)$ ); ceci est réalisé quand  $|\omega_{k\ell} - \omega_{ij}| \gg \Gamma$ .

### III-1-2-2. Expression de l'équation pilote

Nous notons les éléments de matrice de  $\sigma_A$

$$\sigma_{ij} = \langle i | \sigma_A | j \rangle$$

l'équation d'évolution de  $\sigma_{ij}(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_{ij}(t) &= -i \omega_{ij} \sigma_{ij}(t) + \sum_{k,l} \Gamma_{ij \leftarrow kl} \sigma_{kl}(t) - \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \\ E_k \approx E_i}} \left[ \left( \sum_m \Gamma_{mm \leftarrow ki} \right) + i \Delta_{ki} \right] \sigma_{kj}(t) - \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \sum_{\substack{l \\ E_l \approx E_j}} \left[ \left( \sum_m \Gamma_{mm \leftarrow jl} \right) - i \Delta_{jl} \right] \sigma_{il}(t). \end{aligned} \quad (\text{III } 9)$$

où

$$\begin{cases} \Gamma_{ij \leftarrow kl} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} \sum_{\beta} \langle \alpha | \sigma_R(0) | \alpha' \rangle \langle l\alpha' | V_{AR} | j\beta \rangle \langle i\beta | V_{AR} | k\alpha \rangle \delta(E_{i\beta} - E_{k\alpha}). \\ \Delta_{ki} = \frac{1}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} \sum_{\beta} \langle \alpha | \sigma_R(0) | \alpha' \rangle \langle i\alpha' | V_{AR} | m\beta \rangle \langle m\beta | V_{AR} | k\alpha \rangle \mathcal{P} \left( \frac{1}{E_{i\alpha} - E_{m\beta}} \right). \end{cases} \quad \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}$$

En introduisant l'hypothèse (2)

$$V_{AR} = \sum_p \tilde{A}_p \cdot \tilde{R}_p$$

dans l'expression de  $\Gamma_{ij \leftarrow kl}$  et en utilisant l'hypothèse (3) sur  $\sigma_R$ , on obtient une seconde expression de  $\Gamma_{ij \leftarrow kl}$

$$\Gamma_{ij \leftarrow kl} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{p,p'} \langle \tilde{R}_p \tilde{R}_{p'} \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_{ij}) \rangle \langle l | \tilde{A}_p | j \rangle \langle i | \tilde{A}_{p'} | k \rangle, \quad (\text{III } 12)$$

où  $\langle \tilde{R}_p \tilde{R}_{p'} \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_{ij}) \rangle$  est la valeur moyenne sur le système R des opérateurs  $\tilde{R}_p \tilde{R}_{p'}$  qui induisent des transitions dans le système R pour lesquelles la variation d'énergie est  $\hbar\omega_{ij}$ .

On peut donner aux différents termes de cette équation la signification physique suivante :

•  $\omega_{ij} = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$  est (à  $2\pi$  près) la fréquence d'évolution de la cohérence

$\sigma_{ij}$  en l'absence d'interaction.

\*  $\delta(\dots)$  est la fonction "  $\delta$  " de Dirac

$\mathcal{P}(f)$  est la partie principale de la fonction  $f$ .

•  $\Gamma_{ij \leftarrow k\ell}$  :

1) Dans le cas où  $i = j$  et  $k = \ell$  \* on étudie alors la contribution de la population de l'état  $|k\rangle$  à l'évolution de la population de l'état  $(i >)$  : le coefficient  $\Gamma_{ii \leftarrow kk}$  a pour expression

$$\Gamma_{ii \leftarrow kk} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} p(\alpha) |\langle k\alpha | V_{AR} | i\beta \rangle|^2 \delta(E_{i\beta} - E_{k\alpha}).$$

On reconnaît l'expression de la probabilité par unité de temps pour que le système total effectue une transition de l'état  $|i\alpha\rangle$  (pondéré par la probabilité  $p(\alpha)$  de trouver R dans l'état  $|\alpha\rangle$ ) vers l'état  $|k\beta\rangle$ , l'énergie totale étant conservée dans cette transition.  $\Gamma_{ii \leftarrow kk}$  étant réel, il introduit un élargissement du niveau  $|i\rangle$  sous l'effet du couplage avec  $|k\rangle$  par l'intermédiaire de R.

2) Le terme le plus général  $\Gamma_{ij \leftarrow k\ell}$  correspond à une transition d'une superposition linéaire des états  $|k\alpha\rangle$  et  $|\ell\alpha'\rangle$  vers une superposition linéaire des états  $|i\beta\rangle$  et  $|j\beta\rangle$ , l'énergie totale étant conservée dans la transition.

•  $\Delta_{ki}$  :

1) Dans le cas où  $k = i$  \* le coefficient  $\Delta_{ii}$  a pour expression

$$\Delta_{ii} = \frac{1}{\hbar} \sum_m \sum_{\alpha} \sum_{\beta} p(\alpha) |\langle i\alpha | V_{AR} | m\beta \rangle|^2 \mathcal{P}\left(\frac{1}{E_{i\alpha} - E_{m\beta}}\right):$$

on reconnaît pour  $\Delta_{ii}$  l'expression de la self énergie du niveau  $|i\rangle$  (qui introduit un déplacement de l'énergie  $E_i$  de ce niveau), dûe aux transitions "virtuelles" (dans lesquelles l'énergie totale n'est pas conservée) du niveau  $|i\alpha\rangle$ , pondéré par la probabilité  $p(\alpha)$  de trouver R dans l'état  $|\alpha\rangle$ , vers tous les niveaux  $|m\beta\rangle$ .

2) Le terme le plus général  $\Delta_{ki}$  est dû aux transitions virtuelles d'une superposition linéaire des états  $|i\alpha'\rangle$  et  $|k\alpha\rangle$  vers tous les états  $|m\beta\rangle$ .

III-1-2-3. Cas particulier : Equations de l'équilibre statistique d'un système A dont les niveaux d'énergie ne sont pas dégénérés.

On suppose que les états d'énergie de A sont non-dégénérés, et que la distance en énergie entre deux niveaux voisins est grande devant l'élargissement de ces niveaux sous l'effet du couplage avec R. Alors l'équation

\* et où la matrice densité  $\sigma_R(0)$  est diagonale :

$$p(\alpha) = \langle \alpha | \sigma_R(0) | \alpha \rangle$$

d'évolution de la population  $\sigma_{ii}(t)$  ne fait intervenir que les populations  $\sigma_{jj}(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ii}(t) = \sum_j \Gamma_{ii \leftarrow jj} \sigma_{jj}(t) - \left[ \sum_m \Gamma_{mm \leftarrow ii} \right] \sigma_{ii}(t) ;$$

en notant  $\Gamma_{i \leftarrow j} = \Gamma_{ii \leftarrow jj}$  la probabilité de transition par unité de temps du niveau  $|j\rangle$  vers le niveau  $|i\rangle$ , cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ii}(t) = \sum_{j \neq i} \Gamma_{i \leftarrow j} \sigma_{jj}(t) - \left[ \sum_{j \neq i} \Gamma_{i \leftarrow j} \right] \sigma_{ii}(t) . \quad (\text{III } 13)$$

Cette équation traduit le fait que la probabilité par unité de temps de trouver le système dans l'état  $|i\rangle$  est égale à la probabilité par unité de temps d'atteindre cet état à partir des autres états  $|j\rangle$ , diminuée de la probabilité de temps de le quitter (pour aller vers les autres états du système) l'équation  $\frac{d}{dt} \sigma_{ii}(t) = 0$  est bien l'équation d'équilibre statistique de la population  $\sigma_{ii}(t)$ , telle qu'on l'écrit lorsqu'on peut négliger les cohérences  $\sigma_{ij}$  entre les états  $|i\rangle$  et  $|j\rangle$  de A. C'est le système d'équations bien connu des astrophysiciens.

### III-2. INTERACTION D'UN ATOME AVEC UN RAYONNEMENT CONTENANT TOUTES SES FREQUENCES DE RESONANCE, EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE.

Nous allons établir, à l'aide de l'équation pilote les équations d'équilibre de coefficients de la matrice densité d'un atome soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  et éclairé par un rayonnement contenant toutes ses fréquences de résonance. L'ensemble de ces équations formant un système de Kramer, la résolution de ce système permet d'obtenir la valeur à l'équilibre de ces coefficients, et donc la matrice densité du rayonnement émis par l'atome, qui leur est directement liée.

Nous allons préciser d'abord les hypothèses que nous faisons sur l'atome d'une part, sur le rayonnement d'autre part.

#### III-2-1. Hypothèses concernant l'atome et le champ magnétique.

. Nous ne nous intéresserons qu'à des atomes sans structure hyperfine, et dont les états propres de l'énergie sont aussi états propres du moment cinétique total  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Ces états seront repérés par les nombres quantiques  $(\alpha, J, M_J)$ .

. Nous supposons que le champ magnétique est faible, c'est-à-dire que son interaction avec l'atome donne lieu à l'effet Zeeman : les niveaux d'énergie de l'atome sont fonctions linéaires de B :

$$E_{\alpha J M_J}(B) = E_{\alpha J M_J}(0) + g_J \mu_B B M_J, \quad (\text{III } 14)$$

où  $g_J$  est le rapport gyromagnétique du niveau

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (\text{III } 15)$$

et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr.

Nous noterons  $\omega_{\alpha J}$  la fréquence Zeeman :

$$\omega_{\alpha J} = \frac{g_J \mu_B B}{h}. \quad (\text{III } 16)$$

. Nous supposerons que la largeur naturelle  $\Gamma_{\alpha J}$  d'un niveau ( $\alpha J$ ) est petite devant la distance (en énergie) de ce niveau aux niveaux ( $\alpha J'$ ) voisins. Les fréquences de Bohr de l'atome  $\omega_{\alpha J, \alpha' J'}$  définies en (III 7) se groupent en "paquets", avec, autour de la fréquence nulle, toutes les fréquences Zeeman  $\omega_{\alpha J'}$ :

$$\begin{array}{c} \text{|||} \qquad \qquad \qquad \text{0} \qquad \qquad \qquad \text{|||} \\ \hline \omega_{\alpha' J', \alpha J} \qquad \qquad \omega_{\alpha J} \qquad \qquad \qquad \omega_{\alpha J, \alpha' J'} \end{array}$$

Les coefficients de l'équation pilote sont de l'ordre de la probabilité d'émission spontanée, et donc de la largeur naturelle pour chaque niveau d'énergie. Comme nous avons supposé

$$\Gamma_{\alpha J, \alpha' J'} \ll |\omega_{\alpha J, \alpha' J'}| \quad (\text{III } 17)$$

les cohérences (ou éléments de la matrice densité atomique) entre niveaux de nombre quantiques ( $\alpha J$ ) et ( $\alpha' J'$ ) différents seront négligeables dans les équations d'évolution des populations et des cohérences Zeeman (cohérences entre sous-niveaux Zeeman issus d'un même niveau ( $\alpha J$ )) lorsque les sous-niveaux Zeeman issus de ( $\alpha J$ ) et ( $\alpha' J'$ ) ne se croisent pas. Il s'agit de l'approximation séculaire, définie en III-1-2-1.

### III-2-2. Hypothèses concernant le rayonnement incident.

. Nous supposerons que le rayonnement incident est un rayonnement en équilibre thermodynamique, qui a éventuellement traversé un polariseur ou un filtre.

. Nous supposons que la densité d'énergie de ce rayonnement est constante le long du profil d'une raie d'émission de l'atome.

Les hypothèses (1) et (4) du paragraphe III-1-2-1 nécessaires à la validité de l'équation pilote sont ainsi satisfaites.

### III-2-3 Hamiltonien d'interaction atome-rayonnement.

Dans l'approximation dipolaire électrique, ce hamiltonien est

$$V_{AR} = - \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (\text{III } 18)$$

où  $\vec{E}$  est l'opérateur champ électrique de l'onde. La longueur d'onde des transitions considérées étant dans le domaine optique ou infrarouge est très grande devant les dimensions de l'atome (quelques Angström).  $\vec{E}$  est donné par l'expression (II 83), dans l'approximation dipolaire électrique.

$$\vec{E} = \int \sum_P dk N(k) c k^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} i \left[ a_{k1pe} \vec{e}_P - a_{k1pe}^+ \vec{e}_P^* \right],$$

$\vec{D}$  est l'opérateur moment dipolaire de l'atome :

$$\vec{D} = \sum_i e \vec{R}_i \quad (\text{III } 19)$$

où  $e$  est la charge d'un électron,  $\vec{R}_i$  l'opérateur position du  $i^e$  électron.

$\vec{D}$  peut être décomposé sur la base des vecteurs  $\vec{e}_P$  :

$$\vec{D} = \sum_P D_P \vec{e}_P \quad (\text{III } 20)$$

Les trois opérateurs  $\mathcal{D}_P^{(1)}$  définis par

$$\mathcal{D}_P^{(1)} = (-1)^P D_P \quad (\text{III } 21)$$

sont des opérateurs qui agissent sur les variables orbitales de l'atome et qui vérifient les relations de commutation :

$$\left\{ \begin{aligned} [L_z, \mathcal{D}_P^{(1)}] &= [J_z, \mathcal{D}_P^{(1)}] = P \mathcal{D}_P^{(1)} \\ [L_{\pm}, \mathcal{D}_P^{(1)}] &= [J_{\pm}, \mathcal{D}_P^{(1)}] = \sqrt{2 - P(P \pm 1)} \mathcal{D}_{P \pm 1}^{(1)} \end{aligned} \right. \quad (\text{III } 22)$$

Comme nous l'avons rappelé au paragraphe II -2-2-2., de telles relations de commutation montrent que les opérateurs  $\mathcal{D}_P^{(1)}$  sont les trois composantes d'un opérateur tensoriel irréductible de rang 1. On peut donc

calculer les éléments de matrice  $\langle \alpha J M | \mathbb{D}_p | \alpha' J' M' \rangle$  à l'aide du théorème de Wigner-Eckart (III 42) :

$$\langle \alpha J M | \mathbb{D}_p | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & 1 & J' \\ -M & -p & M' \end{pmatrix} (-1)^p \langle \alpha J || \mathbb{D} || \alpha' J' \rangle. \quad (\text{III } 23)$$

Le hamiltonien d'interaction  $V_{AR}$  est donc

$$V_{AR} = - \int_P \sum \alpha k N(k) c k^2 i \left[ a_{k1p'e} \mathbb{D}_{-p} (-1)^p - a_{k1p'e}^+ \mathbb{D}_p \right] \quad (\text{III } 24)$$

Cette expression nous montre que ce hamiltonien est une somme de produits d'un opérateur agissant sur le système R (rayonnement) et d'un opérateur agissant sur le système A (atome). De plus, la valeur moyenne sur le rayonnement de l'opérateur  $\vec{E}$  est nulle :

$$\langle \vec{E} \rangle_R = \vec{0}$$

Les hypothèses (2) et (3) nécessaires à la validité de l'équation pilote sont ainsi satisfaites.

#### III-2-4. Equation d'évolution d'un élément

$$\alpha_1 \alpha_1 J_1 J_1 \rho_{M_1 M_1'}$$

Dans tout ce qui suit nous notons  $\rho$  la matrice densité de l'atome, notée  $\sigma_A$  dans l'expression de l'équation pilote.

Les hypothèses faites au paragraphe III-3-2-1. étant satisfaites, l'évolution de l'élément de matrice  $\alpha_1 \alpha_1 J_1 J_1 \rho_{M_1 M_1'}$  est donnée par l'équation pilote (III 9) ( en prenant  $i = \alpha_1 J_1 M_1$  et  $j = \alpha_1 J_1 M_1'$  ). Dans cette équation seules interviennent les cohérences de la forme  $\alpha_2 \alpha_2 J_2 J_2 \rho_{M_2 M_2'}$  (cohérences Zeeman). Nous les noterons  $\alpha_2 J_2 \rho_{M_2 M_2'}$ . L'équation d'évolution de l'élément de matrice  $\alpha_1 J_1 \rho_{M_1 M_1'}$  est donc :

$$\frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \rho_{M_1 M_1'} = -i \omega_{\alpha_1 J_1} (M_1 - M_1') \alpha_1 J_1 \rho_{M_1 M_1'} + \sum_{\substack{\alpha_2 J_2 \\ M_2 M_2'}} \Gamma_{\alpha_1 J_1 M_1 M_1' \leftarrow \alpha_2 J_2 M_2 M_2'} \alpha_2 J_2 \rho_{M_2 M_2'} - \frac{1}{2} \sum_{M_1'} \left\{ \left[ \sum_{M_2} \Gamma_{\alpha_2 J_2 M_2 M_2 \leftarrow \alpha_1 J_1 M_1'' M_1} \right] \alpha_1 J_1 \rho_{M_1'' M_1'} + \left[ \sum_{M_2} \Gamma_{\alpha_2 J_2 M_2 M_2 \leftarrow \alpha_1 J_1 M_1' M_1''} \right] \alpha_1 J_1 \rho_{M_1 M_1''} \right\} \quad (\text{III } 2)$$

où  $\Gamma_{\alpha_1 J_1 M_1 M_1' \leftarrow \alpha_2 J_2 M_2 M_2'}$  est donné par l'expression (III 12)

et  $V_{AR}$  par (III 24):

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 M_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 M_2} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{8\pi \hbar \nu^3}{3c^3} \sum_{PP'} \left[ (-1)^{p'} \langle a_{k1p'e}^+ a_{k1p'e} \rangle \langle \alpha_2 J_2 M_2' | \mathbb{D}_{-p'} | \alpha_1 J_1 M_1' \rangle \langle \alpha_1 J_1 M_1 | \mathbb{D}_p | \alpha_2 J_2 M_2 \rangle + (-1)^p \langle a_{k1p'e}^+ a_{k1p'e} \rangle \langle \alpha_2 J_2 M_2' | \mathbb{D}_p | \alpha_1 J_1 M_1' \rangle \langle \alpha_1 J_1 M_1 | \mathbb{D}_{-p} | \alpha_2 J_2 M_2 \rangle \right], \quad (\text{III } 2)$$

où  $h\nu$  est l'énergie de la transition

Le premier terme de l'équation (III 25) est dû au couplage avec le champ magnétique, les termes suivants au couplage atome rayonnement:

Le terme  $(-1)^p \langle \alpha_{k_1 p' e}^+ \alpha_{k_1 p e} \rangle \langle \alpha_2 J_2 M_2' | D_{p'} | \alpha_1 J_1 M_1' \rangle \langle \alpha_1 J_1 M_1 | D_p | \alpha_2 J_2 M_2 \rangle$

correspond à l'absorption d'un photon lorsque l'atome passe du niveau d'énergie  $\alpha_2 J_2 M_2$  au niveau  $\alpha_1 J_1 M_1$ : ce terme ne peut être non nul que si  $E(\alpha_2 J_2 M_2) < E(\alpha_1 J_1 M_1)$ . Inversement, le terme

$(-1)^{p'} \langle \alpha_{k_1 p' e} \alpha_{k_1 p e}^+ \rangle \langle \alpha_2 J_2 M_2' | D_{-p'} | \alpha_1 J_1 M_1' \rangle \langle \alpha_1 J_1 M_1 | D_p | \alpha_2 J_2 M_2 \rangle$

correspond à l'émission d'un photon lorsque l'atome passe du niveau d'énergie  $(\alpha_2 J_2 M_2)$  au niveau  $(\alpha_1 J_1 M_1)$ . Ce terme ne pourra être non nul que si  $E(\alpha_2 J_2 M_2) > E(\alpha_1 J_1 M_1)$ . Nous étudierons donc séparément ces deux cas.

. Terme d'absorption (si  $E(\alpha_2 J_2 M_2) < E(\alpha_1 J_1 M_1)$ ):

Nous avons vu (II 107) que  $\langle \alpha_{k_1 p' e}^+ \alpha_{k_1 p e} \rangle = 3 \langle N_k \rangle \phi_{pp'}$

$\phi$  étant la matrice densité des photons incidents. D'après (II 102) la densité d'énergie du rayonnement à la fréquence  $\nu$  est donnée par

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \langle N_k \rangle ;$$

On obtient donc

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 M_1 M_1' \leftarrow \alpha_2 J_2 M_2 M_2'}^{abs} = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sum_{pp'} u_\nu \phi_{pp'} (-1)^{M_1 - M_1'} \begin{pmatrix} J_1 & 1 & J_2 \\ -M_1 & p & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & 1 & J_2 \\ -M_1' & p' & M_2' \end{pmatrix} |\langle \alpha_1 J_1 || D || \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \quad (III 27)$$

. Terme d'émission (si  $E(\alpha_2 J_2 M_2) > E(\alpha_1 J_1 M_1)$ ):

$$\text{Alors } \langle \alpha_{k_1 p' e} \alpha_{k_1 p e}^+ \rangle = \delta_{pp'} + 3 \langle N_k \rangle \phi_{pp'}$$

Le premier terme  $\delta_{pp'}$ , conduit à une probabilité d'émission indépendante du rayonnement incident ( $u_\nu \phi_{pp}$ ): c'est le terme d'émission spontanée.

Le second terme au contraire dépend du rayonnement incident et conduit à la probabilité d'émission induite.

On obtient (en inversant les indices  $p$  et  $p'$ ):

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 M_1 M_1' \leftarrow \alpha_2 J_2 M_2 M_2'}^{em} = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sum_{pp'} \left[ \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \delta_{pp'} + u_\nu \phi_{pp'} \right] \times \quad (III 28)$$

$$\cdot (-1)^{M_2 - M_2' + p + p'} \begin{pmatrix} J_1 & 1 & J_2 \\ -M_1 & -p' & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & 1 & J_2 \\ -M_1' & -p & M_2' \end{pmatrix} |\langle \alpha_1 J_1 || D || \alpha_2 J_2 \rangle|^2.$$



III-2-5. Equation d'évolution d'un élément

$$\alpha_1 J_1 \begin{matrix} k_1 \\ p_{q_1} \end{matrix}$$

Nous allons transformer le système d'équations ( III 25) en passant dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles. Pour cela on utilise les relations de passage (II 28) :

$$\frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \begin{matrix} k_1 \\ p_{q_1} \end{matrix} = \sum_{M_1 M'_1} (-1)^{J_1 - M_1} \sqrt{2k_1 + 1} \begin{pmatrix} J_1 & k_1 & J_1 \\ -M_1 & q_1 & M'_1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \begin{matrix} \\ p_{M_1 M'_1} \end{matrix}$$

Dans chaque équation  $\frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \begin{matrix} \\ p_{M_1 M'_1} \end{matrix}$ , on exprime les coefficients  $\alpha_2 J_2 \begin{matrix} \\ p_{M_2 M'_2} \end{matrix}$ ,  $\alpha_1 J_1 \begin{matrix} \\ p_{M''_1 M'_1} \end{matrix}$ ,  $\alpha_1 J_1 \begin{matrix} \\ p_{M_1 M''_1} \end{matrix}$  et  $\phi_{pp'}$  en fonction des coefficients  $\alpha_2 J_2 \begin{matrix} k_2 \\ p_{q_2} \end{matrix}$ ,  $\alpha_1 J_1 \begin{matrix} k_1 \\ p_{q_1} \end{matrix}$  et  $\phi_Q^k$  en utilisant les relations (II 29).

L'équation d'évolution de  $\alpha_1 J_1 \begin{matrix} k_1 \\ p_{q_1} \end{matrix}$  s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \begin{matrix} k_1 \\ p_{q_1} \end{matrix} = -i \omega_{J_1} q_1 \alpha_1 J_1 \begin{matrix} k_1 \\ p_{q_1} \end{matrix} + \sum_{\substack{\alpha_2 J_2 \\ k_2 q_2}} \Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2} \alpha_2 J_2 \begin{matrix} k_2 \\ p_{q_2} \end{matrix} \quad \text{(III 29)}$$

où 
$$- \sum_{k'_1 q'_1} \Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_1 J_1 k'_1 q'_1} \alpha_1 J_1 \begin{matrix} k'_1 \\ p_{q'_1} \end{matrix} .$$

Le couplage avec le champ magnétique est décrit par le premier terme de (III 29), le couplage atome-rayonnement par les termes suivants donnés par

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2} = \sum_{\substack{M_1 M'_1 \\ M_2 M'_2}} (-1)^{J_1 - M_1 + J_2 - M_2} \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)} \times \begin{pmatrix} J_1 & k_1 & J_1 \\ -M_1 & q_1 & M'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & k_2 & J_2 \\ -M_2 & q_2 & M'_2 \end{pmatrix} \Gamma_{\alpha_1 J_1 M_1 M'_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 M_2 M'_2} \quad \text{(III 30)}$$

et

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_1 J_1 k'_1 q'_1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{M_1 M'_1 M''_1 \\ \alpha_2 J_2 M_2}} (-1)^{2J_1 - M_1 - M''_1} \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)} \begin{pmatrix} J_1 & k_1 & J_1 \\ -M_1 & q_1 & M'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & k'_1 & J_1 \\ -M''_1 & q'_1 & M'_1 \end{pmatrix} \\ \cdot \Gamma_{\alpha_2 J_2 M_2 M_2 \leftarrow \alpha_1 J_1 M''_1 M'_1} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{M_1 M'_1 M''_1 \\ \alpha_2 J_2 M_2}} (-1)^{2J_1 - 2M_1} \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)} \times \begin{pmatrix} J_1 & k_1 & J_1 \\ -M_1 & q_1 & M'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & k'_1 & J_1 \\ -M_1 & q'_1 & M'_1 \end{pmatrix} \Gamma_{\alpha_2 J_2 M_2 M_2 \leftarrow \alpha_1 J_1 M_1 M''_1} \quad \text{(III 31)}$$

Nous allons maintenant réduire les termes de couplage ci-dessus :

i) terme  $\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2}$  : le niveau  $(\alpha_1 J_1)$  est l'état final de la transition.

ii) cas d'une absorption ( $E(\alpha_2 J_2) < E(\alpha_1 J_1)$ ), on obtient :

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2}^{\text{abs.}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} |\langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{D} \| \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)} \sum_{KQ} \sqrt{2K+1} \times$$

$$\cdot (-1)^{k_1 - q_1} \begin{pmatrix} K & k_1 & k_2 \\ Q & -q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & J_2 & J_1 \\ 1 & J_2 & J_1 \\ K & k_2 & k_1 \end{Bmatrix} \mu_\nu \phi_Q^K \quad (\text{III } 32)$$

i 2) cas d'une émission ( $E(\alpha_2 J_2) > E(\alpha_1 J_1)$ ), on obtient pour l'émission induite

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2}^{\text{ind}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} |\langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{D} \| \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)} \sum_{KQ} \sqrt{2K+1} \times$$

$$\cdot (-1)^{k_1 - q_1 + K} \begin{pmatrix} K & k_1 & k_2 \\ Q & -q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & J_2 & J_1 \\ 1 & J_2 & J_1 \\ K & k_2 & k_1 \end{Bmatrix} \mu_\nu \phi_Q^K,$$

et pour l'émission spontanée :

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2}^{\text{sp.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} |\langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{D} \| \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \delta_{k_1 k_2} \delta_{q_1 q_2} \times$$

$$\cdot (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \begin{Bmatrix} k_1 & J_1 & J_1 \\ 1 & J_2 & J_2 \end{Bmatrix}.$$

ii) terme  $\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_1 J_1 k'_1 q'_1}$  : le niveau ( $\alpha_1 J_1$ ) est alors l'état initial de toutes les transitions possibles :

ii 1) dans le cas des absorptions : on considère les niveaux ( $\alpha_2 J_2$ ) tels que  $E(\alpha_2 J_2) > E(\alpha_1 J_1)$

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_1 J_1 k'_1 q'_1}^{\text{abs}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sum_{\alpha_2 J_2 > \alpha_1 J_1} |\langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{D} \| \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \sqrt{(2k_1+1)(2k'_1+1)} \sum_{KQ} \sqrt{2K+1} \times$$

$$\cdot (-1)^{k_1 - q_1} \begin{pmatrix} K & k_1 & k'_1 \\ Q & -q_1 & q'_1 \end{pmatrix} (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \times$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} J_1 & J_1 & K \\ 1 & 1 & J_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k'_1 & K \\ J_1 & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1)^{k_1+k'_1+K} \right] \mu_\nu \phi_Q^K.$$

ii 2) dans le cas des émissions : on considère les niveaux  $\alpha_2 J_2$  tels que  $E(\alpha_2 J_2) < E(\alpha_1 J_1)$ . On obtient, pour les termes d'émission induite :

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_1 J_1 k'_1 q'_1}^{\text{ind}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sum_{\alpha_2 J_2 < \alpha_1 J_1} |\langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{D} \| \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \sqrt{(2k'_1+1)(2k_1+1)} \sum_{KQ} (-1)^K \sqrt{2K+1} \times$$

$$\cdot (-1)^{k_1 - q_1} \begin{pmatrix} K & k_1 & k'_1 \\ Q & -q_1 & q'_1 \end{pmatrix} (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \times$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} J_1 & J_1 & K \\ 1 & 1 & J_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k'_1 & K \\ J_1 & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1)^{k_1+k'_1+K} \right] \mu_\nu \phi_Q^K.$$

et pour les termes d'émission spontanée :

$$\Gamma_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1 \leftarrow \alpha_1 J_1 k'_1 q'_1}^{\text{sp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} |\langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{D} \| \alpha_2 J_2 \rangle|^2 \frac{1}{2J_1+1} \delta_{k_1 k'_1} \delta_{q_1 q'_1} \quad (\text{III } 37)$$

Pour exprimer ces termes en fonction de la probabilité d'émission spontanée  $A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2)$  ou  $A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1)$ , on utilise la relation entre le coefficient  $\alpha_{J_2}^{\alpha_1 J_1}$  et la population du niveau ( $\alpha J$ ) notée  $N(\alpha J)$  :

$$\alpha^J e_0^0 = \frac{N(\alpha J)}{\sqrt{2J+1}}$$

Alors

$$A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) = \sqrt{\frac{2J_1+1}{2J_2+1}} \int_{\alpha_1 J_1 00}^{\alpha_2 J_2 00} \text{SP}$$

Ce qui donne

$$A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega^3}{3c^3} \frac{1}{2J_2+1} |\langle \alpha_2 J_2 || \mathbb{D} || \alpha_1 J_1 \rangle|^2 \quad (\text{III } 38)$$

L'équation d'évolution du coefficient  $\alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1}$  s'écrit finalement :

$$\frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1} = -i\omega_{J_1} \alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1} - \sum_{(\alpha_2 J_2) \langle \alpha_1 J_1 \rangle} \alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1} A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2) -$$

$$\sum_{\substack{\alpha_2 J_2 \\ k_2 q_2}} \alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1} \frac{c^3 \mu_{\nu}}{8\pi h \nu^3} \phi_Q^k 3 \left[ (2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1) \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{k_1-q_1} \begin{pmatrix} k & k_1 & k_2 \\ Q & -q_1 & q_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\cdot (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \frac{1+(-1)^{k_1+k_2+k}}{2} \begin{Bmatrix} J_1 & J_1 & k \\ 1 & 1 & J_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ J_1 & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \times \begin{cases} (2J_2+1) A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) & \text{si } (\alpha_2 J_2) \langle (\alpha_1 J_1) \\ (2J_1+1) A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2) (-1)^k & \text{si } (\alpha_2 J_2) \langle (\alpha_1 J_1) \end{cases}$$

$$\cdot \sum_{(\alpha_2 J_2) \langle \alpha_1 J_1 \rangle} \alpha_2 J_2 \rho_{q_1}^{k_1} (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \begin{Bmatrix} k_1 & J_1 & J_1 \\ 1 & J_2 & J_2 \end{Bmatrix} (2J_2+1) A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) +$$

$$\sum_{\substack{\alpha_2 J_2 \\ k_2 q_2}} \alpha_2 J_2 \rho_{q_2}^{k_2} \frac{c^3 \mu_{\nu}}{8\pi h \nu^3} \phi_Q^k 3 \left[ (2k_1+1)(2k_2+1)(2k+1) \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{k_1-q_1} \begin{pmatrix} k & k_1 & k_2 \\ Q & -q_1 & q_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{cases} 1 & J_1 & J_2 \\ 1 & J_1 & J_2 \\ k & k_1 & k_2 \end{cases} \times \begin{cases} (2J_1+1) A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2) & \text{si } (\alpha_2 J_2) \langle (\alpha_1 J_1) \\ (2J_2+1) A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) (-1)^k & \text{si } (\alpha_2 J_2) \langle (\alpha_1 J_1) \end{cases} \quad (\text{III } 39)$$

Nous avons utilisé dans les calculs numériques que nous avons effectués l'équation d'évolution du terme  $\sqrt{2J_1+1} \alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1}$  car  $\sqrt{2J+1} \alpha_1 J_1 e_0^0$  est la population du niveau  $(\alpha_1 J_1)$ . En séparant partie réelle et partie imaginaire, ces équations d'évolution s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\text{Re}}{\text{Im}} (\sqrt{2J_1+1})^{\alpha_1 J_1} e_{q_1}^{k_1} =$$

$$+ \omega_J q_1 \frac{\text{Im}}{\text{Re}} (\sqrt{2J_1+1})^{\alpha_1 J_1} e_{q_1}^{k_1}$$

(III 40)

$$- \sum_{\alpha_2 J_2 < \alpha_1 J_1} \frac{\text{Re}}{\text{Im}} (\sqrt{2J_1+1})^{\alpha_1 J_1} e_{q_1}^{k_1} A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2)$$

$$- \sum_{\substack{\alpha_2 J_2 \\ k_1 q_1' K Q}} \left[ \frac{\text{Re}}{\text{Im}} (\sqrt{2J_1+1})^{\alpha_1 J_1} e_{q_1'}^{k_1'} \text{Re}(\sqrt{3} \phi_Q^K) - \frac{\text{Im}}{\text{Re}} (\sqrt{2J_1+1})^{\alpha_1 J_1} e_{q_1'}^{k_1'} \text{Im}(\sqrt{3} \phi_Q^K) \right]$$

$$\cdot \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \sqrt{3} (2J_1+1) \left[ (2k_1+1)(2k_1'+1)(2K+1) \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{k_1-q_1} \begin{pmatrix} K & k_1 & k_1' \\ Q & -q_1 & q_1' \end{pmatrix} \times$$

$$\cdot (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \frac{1+(-1)^{k_1+k_1'+K}}{2} \begin{Bmatrix} J_1 & J_1 & K \\ & 1 & J_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 & k_1' & K \\ J_1 & J_1 & J_1 \end{Bmatrix} \times \left\langle \begin{matrix} (-1)^K A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2) \\ \text{si}(\alpha_1 J_1 > \alpha_2 J_2) \\ \frac{2J_2+1}{2J_1+1} A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) \\ \text{si}(\alpha_1 J_1 < \alpha_2 J_2) \end{matrix} \right\rangle$$

$$+ \sum_{\alpha_2 J_2 > \alpha_1 J_1} \frac{\text{Re}}{\text{Im}} (\sqrt{2J_2+1})^{\alpha_2 J_2} e_{q_1}^{k_1} (-1)^{1+J_1+J_2+k_1} \begin{Bmatrix} k_1 & J_1 & J_1 \\ & 1 & J_2 \end{Bmatrix} \left[ (2J_1+1)(2J_2+1) \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\cdot A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1)$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha_2 J_2 \\ k_1 k_2 K Q}} \left[ \frac{\text{Re}}{\text{Im}} (\sqrt{2J_2+1})^{\alpha_2 J_2} e_{q_2}^{k_2} \text{Re}(\sqrt{3} \phi_Q^K) - \frac{\text{Im}}{\text{Re}} (\sqrt{2J_2+1})^{\alpha_2 J_2} e_{q_2}^{k_2} \text{Im}(\sqrt{3} \phi_Q^K) \right]$$

$$\cdot \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \sqrt{3} \left[ (2J_1+1)(2J_2+1)(2k_1+1)(2k_2+1)(2K+1) \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{k_1-q_1} \begin{pmatrix} K & k_1 & k_2 \\ Q & -q_1 & q_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\left\langle \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 1 & J_1 & J_2 \\ 1 & J_1 & J_2 \\ K & k_1 & k_2 \end{Bmatrix} \times \begin{cases} \frac{2J_1+1}{2J_2+1} A(\alpha_1 J_1 \rightarrow \alpha_2 J_2) \\ \text{si}(\alpha_1 J_1 > \alpha_2 J_2) \\ (-1)^K A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) \\ \text{si}(\alpha_1 J_1 < \alpha_2 J_2) \end{cases} \end{matrix} \right\rangle \cdot$$

A partir de ces équations très générales, on retrouve les équations établies par J.P. Faroux (thèse 1969), pour un "atome à deux niveaux", dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles, et dont le principe était contenu dans la thèse de C. Cohen-Tannoudji (1962), mais où les calculs étaient faits dans la base des opérateurs dyadiques. Cependant, nous avons explicité l'expression du facteur  $A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1)$  ce qui nous permettra de calculer

des probabilités de transition du type  $\int_{\alpha_1 \alpha_1 J_1 J_1' k_1 q_1} \leftarrow \alpha_2 \alpha_2 J_2 J_2' k_2 q_2$ .  
 C'est nécessaire lorsque des cohérences  $\alpha \alpha J J' k q$  ne peuvent plus être négligées, c'est à dire lorsque des sous-niveaux Zeeman issus de  $(\alpha J)$  et  $(\alpha J')$  se croisent (§ III-2-1). Ceci sera fait dans un travail ultérieur.

De plus, nous avons obtenu de façon symétrique l'équation d'évolution de l'état initial, puis de l'état final d'une transition, qu'elle se fasse par absorption ou émission induite.

### III-2-6. Remarques.

L'émission spontanée, à cause de son isotropie, ne peut transmettre à l'état final de la transition que les ordres tensoriels existant dans l'état initial, et elle ne peut pas modifier l'état de celui-ci, car les coefficients  $\int_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1}^{sp} \leftarrow \alpha_2 J_2 k_2 q_2$  et  $\int_{\alpha_1 J_1 k_1 q_1}^{sp} \leftarrow \alpha_1 J_1 k_1 q_1$  sont tels que  $\Delta k = \Delta q = 0$ .

Au contraire, l'anisotropie du rayonnement incident (qui implique qu'au moins l'un des coefficients  $\phi_Q^K$  avec  $K \neq 0$ , n'est pas nul) permet de modifier l'état du niveau initial de la transition par absorption ou émission induite et de créer dans l'état final des ordres tensoriels n'existant pas dans l'état initial.

Les équations d'évolution de tous les éléments de matrice  $\alpha_1 J_1 k_1 q_1$  de l'atome ne sont pas indépendantes : elles vérifient

$$\sum_{\alpha_1 J_1} \frac{d}{dt} \sqrt{2J_1+1} \alpha_1 J_1 \rho_0^0 = 0 \quad ; \quad (\text{III } 41)$$

Ce qui est une équation de conservation des populations (ou du nombre d'atomes). On en déduit donc que

$$\sum_{\alpha_1 J_1} \sqrt{2J_1+1} \alpha_1 J_1 \rho_0^0 = 1 = \text{Tr} \rho \quad , \quad (\text{III } 42)$$

la matrice densité de l'atome étant normalisée à l'unité.

Lorsqu'on étudie l'équilibre de l'atome soumis au rayonnement et au champ magnétique, l'ensemble des équations d'équilibre

$$\frac{d}{dt} \alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1} = 0 \quad \forall (\alpha_1 J_1 k_1 q_1)$$

forme un système homogène (système linéaire contenant le même nombre d'équations et d'inconnues  $\alpha_1 J_1 \rho_{q_1}^{k_1}$ , à second membre nul). A cause

de la relation (III 41), ces équations ne sont pas indépendantes : l'une d'elles peut être remplacée par la relation imposée (III 42) ; le système d'équations est alors un système de Kramer (à second membre non nul), dont la solution est unique et non nulle, et donne les coefficients de la matrice densité de l'atome en équilibre avec le rayonnement incident, en présence d'un champ magnétique.

De plus, l'égalité entré symboles 9-j :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & J_1 & J_2 \\ 1 & J_1 & J_2 \\ K & k_1 & k_2 \end{array} \right\} = (-1)^{K + k_1 + k_2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & J_1 & J_2 \\ 1 & J_1 & J_2 \\ K & k_1 & k_2 \end{array} \right\}$$

obtenue en échangeant les deux premières lignes du (9-j), implique que les termes de l'équation  $\frac{d}{dt} \alpha_{1 J_1} \rho_{q_1}^{k_1} = 0$ , où  $(\alpha_{1 J_1})$  est le niveau final de la transition, ne sont non nuls que si  $(k_1 + k_2 + K)$  est pair.

Il en est de même des termes pour lesquels  $(\alpha_{1 J_1})$  est le niveau initial de la transition, à cause du terme  $\frac{1}{2} (1 + (-1)^{k_1 + k_2 + K})$ . En particulier si le rayonnement incident n'a pas d'orientation ( $\phi_{+1}^1 = \phi_0^1 = 0$ ), les seuls coefficients qui interviennent dans l'équation d'évolution  $\frac{d}{dt} \alpha_{1 J_1} \rho_{q_1}^{k_1}$  sont des coefficients  $\alpha_{2 J_2} \rho_{q_2}^{k_2}$  tels que  $k_2 = k_1$  ou  $k_2 = k_1 \pm 2$ . Le système d'équations d'équilibre se sépare alors en deux sous-systèmes indépendants, l'un correspond aux valeurs de k paires, l'autre aux valeurs de k impaires. Ce dernier est alors un système de Kramer à second membre nul. Sa solution est nulle :

$$\alpha_{1 J_1} \rho_q^{2p+1} = 0 .$$

En conséquence, aucun des niveaux de l'atome n'est orienté. Ceux-ci sont seulement alignés.

III-2-7. Matrice densité des photons émis.

Il s'agit ici de relier cette matrice densité à celle des atomes émetteurs. Nous considérons les photons émis par l'atome dans une transition d'un sous-niveau d'un niveau ( $\alpha_2 J_2$ ) vers un sous-niveau du niveau ( $\alpha_1 J_1$ ), le détecteur ne séparant pas les différentes raies Zeeman de cette transition (ou même les différentes raies  $\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1$  du multiplet  $\alpha_1$  vers le multiplet  $\alpha_2$ ).

Ces photons sont dipolaires électriques (ils sont créés par l'action d'opérateurs  $a_{k\lambda p}^\dagger$  sur le vide de photons) : leur matrice densité (dans l'espace des états du moment cinétique) se réduit à une matrice densité dipolaire électrique.

Nous allons relier les coefficients de cette matrice densité (que nous noterons  $\psi$ ) aux coefficients de la matrice densité atomique  $\rho_{M_1 M_1}^{\alpha_1 J_1}$  ce qui montre comment l'observation du rayonnement émis permet d'obtenir des informations sur l'état de l'atome dans le niveau ( $\alpha_2 J_2$ ).

Nous supposons que la densité d'énergie  $\mu_\nu$  du rayonnement incident et la longueur d'onde de la transition sont tels que la probabilité d'émission induite est négligeable devant la probabilité d'émission spontanée : nous ne tiendrons pas compte des photons émis par émission induite.

La probabilité d'observer un photon d'état  $|p\rangle$  est, d'après l'équation d'évolution de la population  $\rho_{M_1 M_1}^{\alpha_1 J_1}$

$$\sum_{\substack{\alpha_1 J_1 \\ \alpha_2 J_2 \\ M_1 M_2 M_2'}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} \langle \alpha_1 J_1 M_1 | \mathbf{D}_p | \alpha_2 J_2 M_2 \rangle \rho_{M_2 M_2}^{\alpha_2 J_2} \langle \alpha_2 J_2 M_2' | \mathbf{D}_{-p} | \alpha_1 J_1 M_1 \rangle (-1)^{M_2'}$$

Cette probabilité est (à un facteur de normalisation près) l'élément diagonal  $\psi_{pp}$  de la matrice densité  $\psi$ . En utilisant la notation de Dirac dans l'espace de vecteurs de base  $|e_p\rangle$ , cette probabilité  $\psi_{pp}$  se note

$$\psi_{pp} = \langle e_p | \left[ \text{Tr}_{\text{at}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} |\mathbf{D}\rangle \rho \langle \mathbf{D}| \right] | e_p \rangle ,$$

où  $\text{Tr}_{\text{at}}$  est une trace par rapport aux variables atomiques.

La matrice densité des photons émis peut donc s'écrire

$$\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} \text{Tr}_{\text{at}} |D\rangle \rho \langle D|. \quad (\text{III } 43)$$

Un élément quelconque de  $\psi$  étant :

$$\psi_{pp'} = \sum_{\substack{\alpha_1 J_1 \\ \alpha_2 J_2}} (2J_2+1) A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) \sum_{\substack{M_1 M_2 \\ M'_2}} (-1)^{p+p'} \begin{pmatrix} J_1 & 1 & J_2 \\ -M_1 & -p & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & 1 & J_2 \\ -M_1 & -p' & M'_2 \end{pmatrix} \alpha_2 J_2 \rho_{M_2 M'_2}$$

on passe dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles en calculant le coefficient  $\psi_Q^K$  à l'aide de la relation (II 28) et en exprimant  $\alpha_2 J_2 \rho_{M_2 M'_2}$  en fonction des coefficients  $\alpha_2 J_2 \rho_{q_2}^k$  (relation (II 29)) :

$$\psi_Q^K = \sum_{\substack{\alpha_1 J_1 \\ \alpha_2 J_2}} (2J_2+1) A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) (-1)^{1+J_1+J_2+K} \begin{Bmatrix} K & J_2 & J_2 \\ J_1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \alpha_2 J_2 \rho_Q^K. \quad (\text{III } 44)$$

Selon cette expression, cette matrice densité est normalisée au nombre total de photons émis par unité de temps, dans la longueur d'onde considérée :

$$\text{Tr} \psi = \sqrt{3} \psi_0^0 = \sum_{\substack{\alpha_1 J_1 \\ \alpha_2 J_2}} A(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1) (\sqrt{2J_2+1} \alpha_2 J_2 \rho_0^0), \quad (\text{III } 45)$$

car  $\sqrt{2J_2+1} \alpha_2 J_2 \rho_0^0$  est la population du niveau  $(\alpha_2 J_2)$

On peut en déduire facilement l'expression de la matrice densité  $\psi$  normalisée à l'unité, ou à l'intensité totale du rayonnement émis.

L'expression (III 45) montre que les grandeurs tensorielles des photons émis sont proportionnelles aux grandeurs tensorielles de même ordre de l'état excité  $(\alpha_2 J_2)$  de la transition  $(\alpha_2 J_2 \rightarrow \alpha_1 J_1)$ . Elle donne d'autre part le coefficient de proportionnalité.

On peut remarquer que, le rayonnement ne transportant que des grandeurs tensorielles d'ordre  $K = 0, 1$  ou  $2$ , les grandeurs d'ordre supérieur de la matrice densité atomique ne peuvent pas être détectées par l'étude de la polarisation du rayonnement émis.



III-2-8. Application à l'étude de l'effet Hanlé pour une transition  
 $J = 1 \rightarrow J = 0$  d'un atome.

Dans le cas particulier du triplet Zeeman normal nous allons résoudre les équations de l'équilibre statistique qui forment alors un système d'équations particulièrement simple, et calculer la matrice densité du rayonnement émis. Nous appliquerons ce résultat au cas où le rayonnement incident est un rayonnement non polarisé, se propageant le long de OX, et où on observe le rayonnement émis dans la direction OZ, pour diverses orientations du champ magnétique par rapport à ce repère. On retrouvera l'effet Hanlé, qui est la diminution du taux de polarisation linéaire  $p$  et une rotation de la direction principale de vibration sous l'effet du champ magnétique (cf. Mitchell et Zemansky (1934)).

On suppose l'atome éclairé par un rayonnement dont nous noterons la densité d'énergie  $u_\nu$ , dont la longueur d'onde (du domaine optique) est celle d'une transition  $J = 1 \rightarrow J = 0$ . Nous noterons  $\rho$  la matrice densité de ce rayonnement, dans le repère OXYZ. Nous noterons  $A$  la probabilité d'émission spontanée du niveau  $J = 1$  vers le niveau  $J = 0$ ,  $\omega$  la fréquence de Larmor de l'atome dans le niveau  $J = 1$ ,  $f_\nu$  la fonction

$$f_\nu = \frac{u_\nu}{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}$$

Si  $u_\nu$  est fourni par une source en équilibre thermodynamique à la température  $T$  (II 108) :

$$f_\nu = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Dans tout ce qui suit nous supposons  $f_\nu \ll 1$  et nous négligerons l'émission induite devant l'émission spontanée. Les équations (III 39) de l'équilibre statistique, permettent de calculer les coefficients  $\rho_{pq}^{lk}$  de la matrice densité de l'atome en équilibre avec le rayonnement incident dans le repère OX'Y'Z' lié au champ magnétique.

$$3A f_\nu \rho_{00}^0 \rho_Q^k - A \rho_{11}^k - i q \omega \rho_{11}^k = 0 \quad (\text{III 47})$$

L'équation<sup>de</sup> conservation des populations (III 42) se traduit ici par :

$${}^{00}p_0^0 + \sqrt{3} {}^{11}p_0^0 = 1 \quad (\text{III } 48)$$

Or  ${}^{11}p_0^0$  est négligeable devant  ${}^{00}p_0^0$  puisque nous avons supposé  $f_\nu \ll 1$ . Les solutions des équations de l'équilibre statistique sont alors

$$\begin{cases} {}^{00}p_0^0 = 1 \\ {}^{11}p_q^R = \frac{3}{1 + iq \frac{\omega}{A}} f_\nu \phi_q^R \end{cases} \quad (\text{III } 49)$$

La matrice densité du rayonnement émis est donnée par (III 45) :

$$\psi_q^R = A {}^{11}p_q^R$$

c'est à dire

$$\psi_q^R = \frac{3}{1 + iq \frac{\omega}{A}} A f_\nu \phi_q^R. \quad (\text{III } 50)$$

1<sup>er</sup> Cas. Champ magnétique dirigé suivant OZ. Le repère OX'Y'Z' lié au champ magnétique est confondu avec le repère OXYZ lié au rayonnement reçu. Le rayonnement incident étant un rayonnement non polarisé dirigé suivant l'axe OX, sa matrice densité dans le repère OXYZ peut être calculée à l'aide du tableau (II 111) et des lois de transformation des opérateurs tensoriels irréductibles dans une rotation du système d'axes (Appendice AII) ; on obtient :

$$\phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi_0^2 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \phi_{\pm 2}^2 = +\frac{1}{4}, \quad \phi_q^1 = 0$$

La matrice densité du rayonnement émis est, dans le repère OXYZ :

$$\begin{cases} \psi_0^0 = A f_\nu \sqrt{3} \\ \psi_0^2 = -A f_\nu \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \psi_2^2 = A f_\nu \frac{3/4}{1 + \frac{2i\omega}{A}} \\ \psi_{-2}^2 = A f_\nu \frac{3/4}{1 - \frac{2i\omega}{A}} \end{cases}$$

Les paramètres de Stokes du rayonnement reçu sont

$$\begin{aligned} I &= \frac{g}{16\pi} A \\ Q &= -\frac{g}{16\pi} A \beta \nu \frac{1}{1 + (2\omega/A)^2} \\ U &= -\frac{g}{16\pi} A \beta \nu \frac{2\omega/A}{1 + (2\omega/A)^2} \\ V &= 0 \end{aligned}$$

Le taux de polarisation circulaire est nul (II 50). Le taux de polarisation linéaire  $p$  est (Cf II 49)

$$p = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega/A)^2}} \quad (\text{III 51})$$

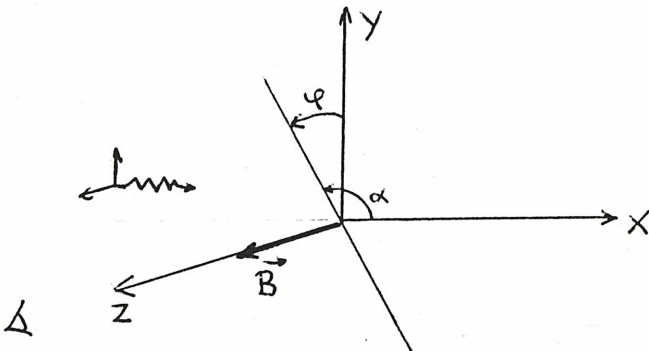
et la direction de polarisation linéaire est repérée par l'angle  $\alpha$  (formule II.48)

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega/A)^2}} \quad , \quad \sin 2\alpha = -\frac{2\omega/A}{\sqrt{1 + (2\omega/A)^2}} \quad (\text{III 52})$$

Si le champ magnétique est nul,  $\omega = 0$  alors  $p = 1$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ; le rayonnement observé est totalement polarisé parallèlement à OY. Si B n'est pas nul,  $p$  diminue lorsque B croît et il y a rotation de la direction de polarisation par rapport à la position en champ nul. Cette rotation est mesurée par l'angle  $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$  (Figure ci-dessous), qui est donné par

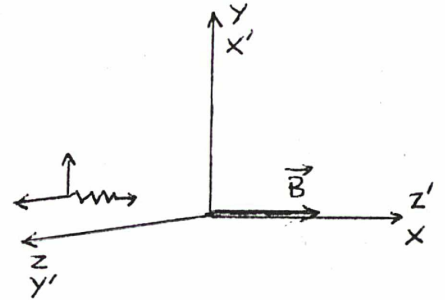
$$\text{tg } 2\varphi = 2\omega/A \quad , \quad \text{avec} \quad -\pi/4 \leq \varphi \leq +\pi/4$$

Cette expression, et celle donnant  $p$  ont été établies par Breit. Ce sont celles qu'on trouve dans le livre de Mitchell et Zemansky (1934), dans l'étude de l'effet Hanlé.



2ème Cas. Si le champ magnétique est parallèle à la direction du rayonnement incident OX, les coefficients de la matrice densité du rayonnement incident dans le repère OX'Y'Z' (figure ci-dessous) lié au champ magnétique sont (Cf II 111 bis)

$$\begin{aligned}\phi_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \phi_0^2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \phi_{\pm 1}^1 &= \phi_0^1 = \phi_{\pm 1}^2 = \phi_{\pm 2}^2 = 0\end{aligned}$$

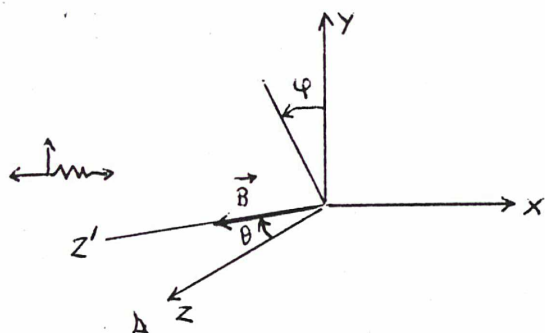


Les cohérences de la matrice densité du rayonnement sont nulles et par suite les coefficients  $\rho_{pq}^{lk}$  de la matrice densité de l'atome donnés par la formule (III 49) sont indépendants du champ magnétique :

$$\begin{aligned}\rho_0^{00} &= 1 \\ \rho_0^{11} &= A f_{\nu} \sqrt{3} \\ \rho_0^{22} &= A f_{\nu} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \rho_0^{1\pm 1} &= \rho_{\pm 1}^1 = \rho_{\pm 1}^2 = \rho_{\pm 2}^2 = 0\end{aligned} \tag{III 53}$$

On en déduit que les coefficients de la matrice densité du rayonnement émis dans le repère OXYZ et les paramètres de Stokes du rayonnement reçu sont ceux calculés en champ nul : quel que soit l'intensité du champ magnétique le taux de polarisation circulaire est nul, le taux de polarisation linéaire est 1. Le rayonnement reçu dans la direction OZ est totalement polarisée linéairement parallèlement à OY.

3e cas (cas général) Le cas d'une direction quelconque du champ magnétique est intermédiaire entre les deux cas étudiés ci-dessus : il y a dépolarisation du rayonnement observé et rotation de la direction de polarisation. Dans le cas où le champ magnétique est perpendiculaire à la direction du rayonnement incident on obtient des expressions analytiques simples. On note  $\theta$  l'angle entre le champ magnétique (axe OZ) et la direction d'observation (axe OZ') (voir figure page suivante). OZ' est dans le plan ZOY. Par la même méthode que précédemment, on obtient le taux de polarisation  $p$  et la rotation de la direction de polarisation.



$$p = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\omega}{A}\right)^2 + \frac{\sin^4 \theta}{4} \left(\frac{2\omega}{A}\right)^4}}{1 + \left(\frac{2\omega}{A}\right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\frac{2\omega}{A}\right)^2} \quad (\text{III } 54)$$

La direction de polarisation est repérée par l'angle  $\varphi$  par rapport à l'axe  $Oy$  (direction de polarisation en champ nul) (figure ci-contre) qui est

donné par l'expression suivante :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\cos \theta \frac{2\omega}{A}}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\frac{2\omega}{A}\right)^2} \quad (\text{III } 55)$$

avec  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

Dans le cas particulier où  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , il n'y a pas rotation de la direction de polarisation ( $\varphi = 0$ ). Cette direction de polarisation reste parallèle au champ magnétique.

Les courbes donnant  $p$  et  $\varphi$  en fonction du paramètre  $\Delta = \frac{2\omega}{A}$  (qui est proportionnel au champ magnétique) pour des valeurs de  $\theta$  fixées sont données sur la figure (III-11) de la page suivante / On retrouve les résultats de House (1970, fig. 7a), à condition de changer le sens de la rotation du vecteur polarisation : en effet, l'expression (III 54) montre que, pour  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , la rotation de la direction de polarisation a lieu dans le sens positif autour du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  (sens du courant magnétisant), ce qui est bien le sens donné par Mitchell et Zemansky (1934) et plus récemment par Brossel (1964). Nous estimons donc que les résultats de House (1970) ainsi que ceux de Hyder (1965) sont justes à condition de changer leur sens du champ magnétique.

L'étude du triplet Zeeman normal permet de schématiser la démarche qui sera la nôtre et les résultats que nous obtiendrons dans le cas de la raie  $D_3$  de l'Hélium des protubérances.

$$\Delta = \frac{2\omega}{A}$$

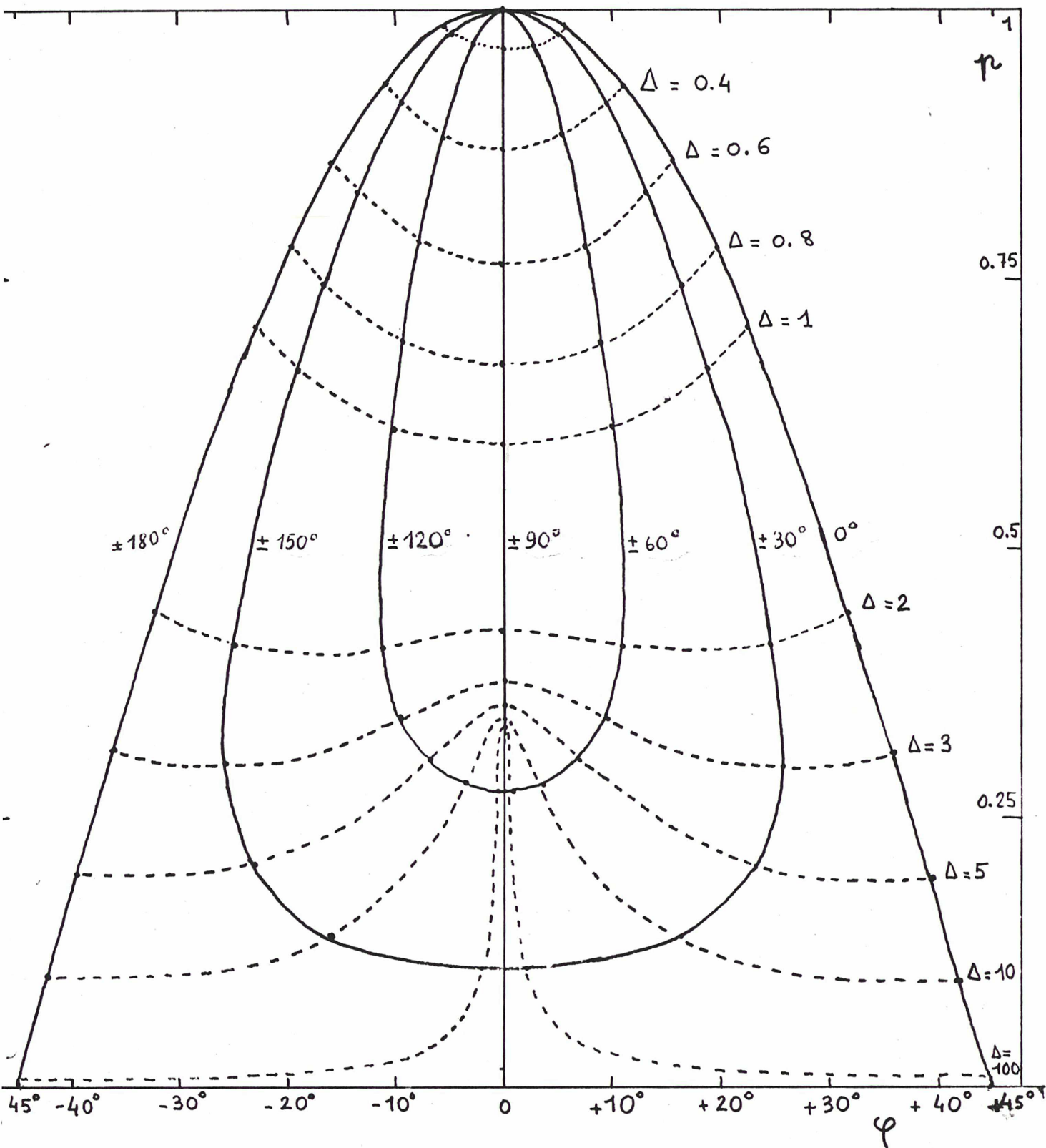


Figure III.1 : Triplet Zeeman normal.  
Taux de polarisation  $p$  et angle de rotation  $\varphi$  du vecteur polarisation

Le champ magnétique est dans le plan perpendiculaire au rayonnement incident. Les isogauss ( $\Delta$  constant) sont en pointillé, les isoangles  $\theta$  sont en traits pleins.

CHAPITRE IV

APPLICATION AU CALCUL DES PARAMETRES DE STOKES DE LA RAIE D<sub>3</sub>

DE L'HELIUM DES PROTUBERANCES SOLAIRES

IV-0. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons préciser les données que nous avons introduites dans le programme de résolution des équations (III 39) de l'équilibre statistique, qui nous permet de calculer les paramètres de Stokes de la raie D<sub>3</sub> de l'Hélium des protubérances solaires, en fonction des coordonnées champ magnétique. Les hypothèses physiques que nous avons faites sur la formation des raies de l'Hélium dans les protubérances solaires ont été discutées au chapitre I ; nous rappellerons seulement que, dans les conditions physiques des protubérances quiescentes, on peut négliger les collisions, la redistribution du rayonnement et le transfert radiatif pour les raies du système des triplets ; les niveaux triplets sont peuplés par photoionisation suivie de recombinaison et de cascades radiatives ; la photoexcitation entre niveaux liés par le rayonnement anisotrope issu de la photosphère s'y rajoute et crée l'alignement des niveaux, qui est responsable de la polarisation du rayonnement observé. A la fin de ce chapitre, nous présenterons les résultats de nos calculs ; nous discuterons leur précision et leurs conditions de validité.

IV-1. ATOME D'HELIUM

L'atome d'Hélium est un atome à deux électrons, dont le noyau contient deux protons et deux neutrons. Le moment cinétique nucléaire I est donc nul et cet atome n'a pas de structure hyperfine. Les états d'énergie de cet atome sont caractérisés par les nombres quantiques  $(n_1 l_1) (n_2 l_2)^{2S+1} L_J$  où  $(n_1 l_1)$  et  $(n_2 l_2)$  sont les nombres quantiques associés à chaque électron ; L, S, J sont respectivement les moments cinétiques orbital, de spin, total de l'ensemble des deux électrons. S et J sont donc entiers. L'ensemble des états ayant les mêmes nombres quantiques L et S forment un terme. Les énergies des termes intervenant dans nos calculs représentées par la fig (IV 1). Les valeurs de ces énergies sont données dans les tables de Moore (1949) et sont reproduites dans le tableau (IV.1) :

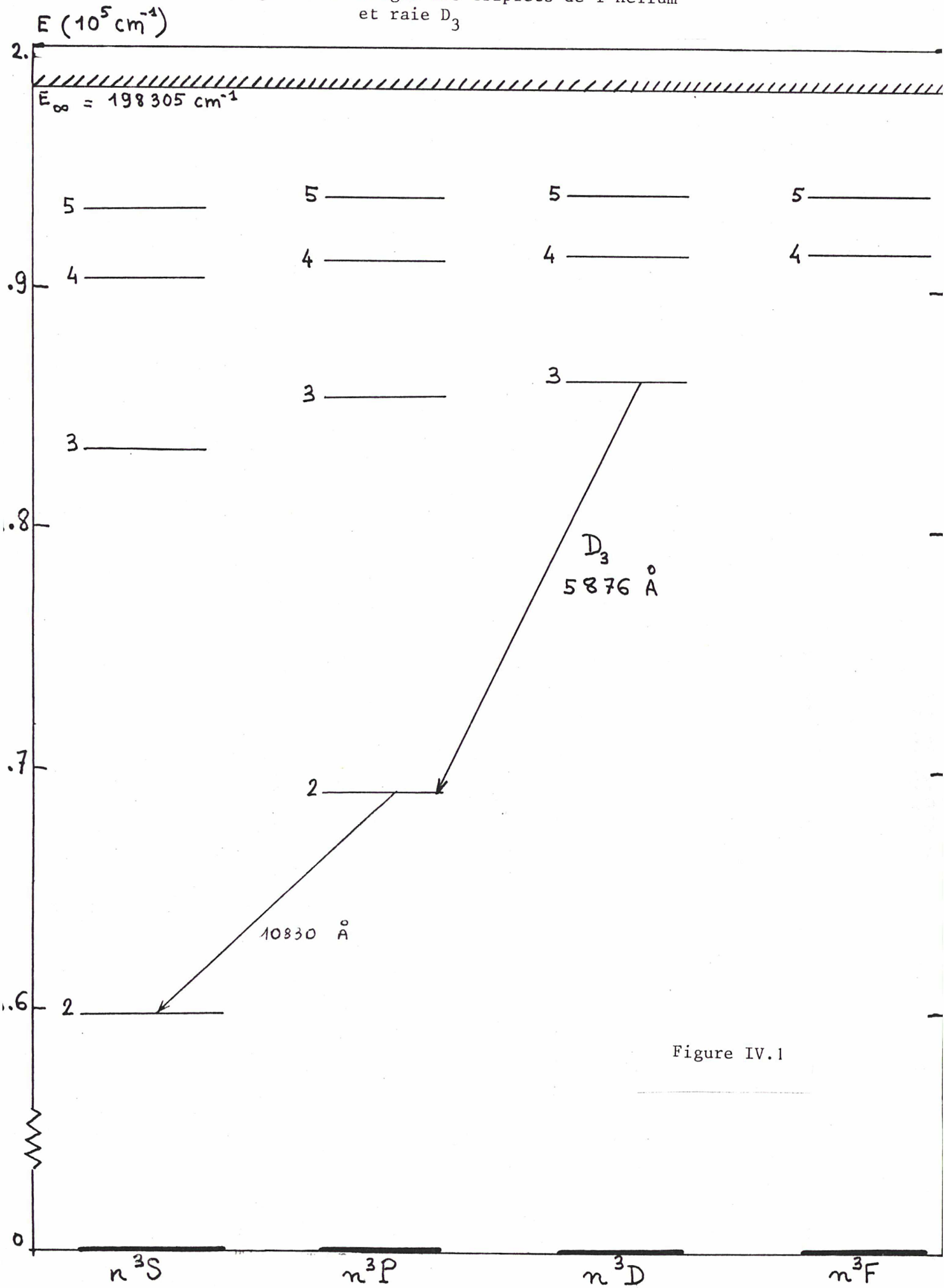


Figure IV.1



TABLEAU IV - 1

Energies des termes triplets de He I

Terme	Energie (cm <sup>-1</sup> )
2s <sup>3</sup> S	159856
2p <sup>3</sup> P	169087
3s <sup>3</sup> S	183237
3p <sup>3</sup> P	185565
3d <sup>3</sup> D	186102
4s <sup>3</sup> S	190298
4p <sup>3</sup> P	191217
4d <sup>3</sup> D	191445
4f <sup>3</sup> F	191452
5s <sup>3</sup> S	193347
5p <sup>3</sup> P	193801
5d <sup>3</sup> D	193917
5f <sup>3</sup> F	193921
∞	198305

La raie D<sub>3</sub> dont nous cherchons à calculer le taux de polarisation en présence de champ magnétique est en fait un ensemble de raies correspondant au multiplet 3d<sup>3</sup>D<sub>3,2,1</sub> → 2p<sup>3</sup>P<sub>2,1,0</sub>. On ne distingue pas les raies de structure fine car la résolution spectrale de l'instrument ne le permet pas.

IV-1-1. Effet Zeeman des niveaux 3d<sup>3</sup>D et 2p<sup>3</sup>P

Pour introduire le terme dû au champ magnétique B dans les équations (III 39) de l'équilibre statistique, nous devons vérifier si on peut utiliser ou non la théorie ordinaire de l'effet Zeeman, valable quand le champ magnétique est faible devant les différences d'énergie de structure fine :

$$\omega_{\alpha J} = \frac{g_{\alpha J} \mu_B}{\hbar} B, \quad (\text{IV } 1)$$

où  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr ( $\mu_B = \frac{q \hbar}{2m_e}$ , où  $q$  est le module de la charge de l'électron,  $m$  la masse de l'électron,  $\hbar$  la constante de Planck divisée par  $2\pi$ ),  $B$  le module du champ magnétique,  $g_{\alpha J}$  le rapport gyromagnétique du niveau ( $\alpha J$ ).

$$g_{\alpha J} = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (\text{IV } 2)$$

Nos calculs ont montré que les seuls niveaux qui interviennent de façon importante dans le calcul des paramètres de Stokes sont les niveaux  $2s^3S_1$ ,  $2p^3P_{2,1,0}$ ,  $3d^3D_{3,1,0}$ . Nous considérerons donc que la formule (IV.1) complétée par (IV.2) est suffisante pour les autres niveaux ; nous ne chercherons ses conditions de validité que pour les niveaux  $2p^3P_{2,1,0}$  et  $3d^3D_{3,2,1}$  (le terme  $2s^3S$  n'ayant pas de structure fine,  $\omega_{2s^3S_1}$  est bien donné par (IV.1)).

La structure fine du terme  $3d^3D$  a été mesurée par Kaul (1968) (a), Galleron-Julienne et Descoubes (1965) (b), et calculée par Araki (1937) (c). La structure fine du terme  $2p^3P$  a été mesurée par Schiff, Peckeris et Lifson (1965) (d). Ils ont obtenu les résultats suivants :

	mesurés	calculés
$\frac{E(3d^3D_1) - E(3d^3D_2)}{h}$	$1372,2 \pm 1,1 \text{ MHz}$ <sup>a</sup>	$1277 \text{ MHz}$ <sup>c</sup>
$\frac{E(3d^3D_2) - E(3d^3D_3)}{h}$	$72,5 \pm 1,0 \text{ MHz}$ <sup>b</sup>	$75 \text{ MHz}$ <sup>c</sup>
$\frac{E(2p^3P_1) - E(2p^3P_2)}{h}$	$29740 \text{ MHz}$ <sup>d</sup>	
$\frac{E(2p^3P_0) - E(2p^3P_1)}{h}$	$2391 \text{ MHz}$ <sup>d</sup>	

(IV 3)

Les rapports gyromagnétiques des niveaux  $3d^3D_{3,2,1}$  et  $2p^3P_{2,1,0}$  sont :

	$2p^3P$			$3d^3D$		
J	0	1	2	1	2	3
$g_J$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$

L'expression (IV 1) est due à un calcul perturbatif limité au 1er ordre. Elle n'est donc valable que si la variation d'énergie due au champ magnétique est faible devant la distance en énergie du niveau ( $\alpha$  LSJ) et aux niveaux ( $\alpha$  SLJ') voisins, c'est à dire si

$$\frac{1}{\hbar} g_J \mu_B B M_J \ll \frac{E(\alpha SLJ) - E(\alpha SLJ')}{\hbar} \quad (\text{IV } 3)$$

On peut mettre ceci sous la forme  $B \ll B_{\max}$ .

Pour les différents niveaux considérés,  $B_{\max}$  prend les valeurs ci-dessous :

	$2p^3P$			$3d^3D$		
J	0	1	2	1	2	3
$B_{\max}$ (Gauss)	540	540	540	240	13	13

(IV 4)

Le champ magnétique régnant dans les protubérances étant d'une dizaine de Gauss, les énergies des sous-niveaux Zeeman du terme  $2p^3P$  sont bien données par la formule (IV 1) dans le domaine de champ magnétique qui nous intéresse. Les états propres de l'énergie sont les états ( $2p \ 11 \ J M_J$ ). Ce n'est pas le cas pour les sous-niveaux Zeeman du terme  $3d^3D$ , pour lesquels un calcul plus précis est nécessaire.

Pour cela il faut diagonaliser le hamiltonien  $H_{\text{magn}}$  d'interaction de l'atome avec le champ magnétique, à l'intérieur du terme  $3d^3D$

$$H_{\text{magn}} = \mu_B B (L_z + 2 S_z), \quad (\text{IV } 5)$$

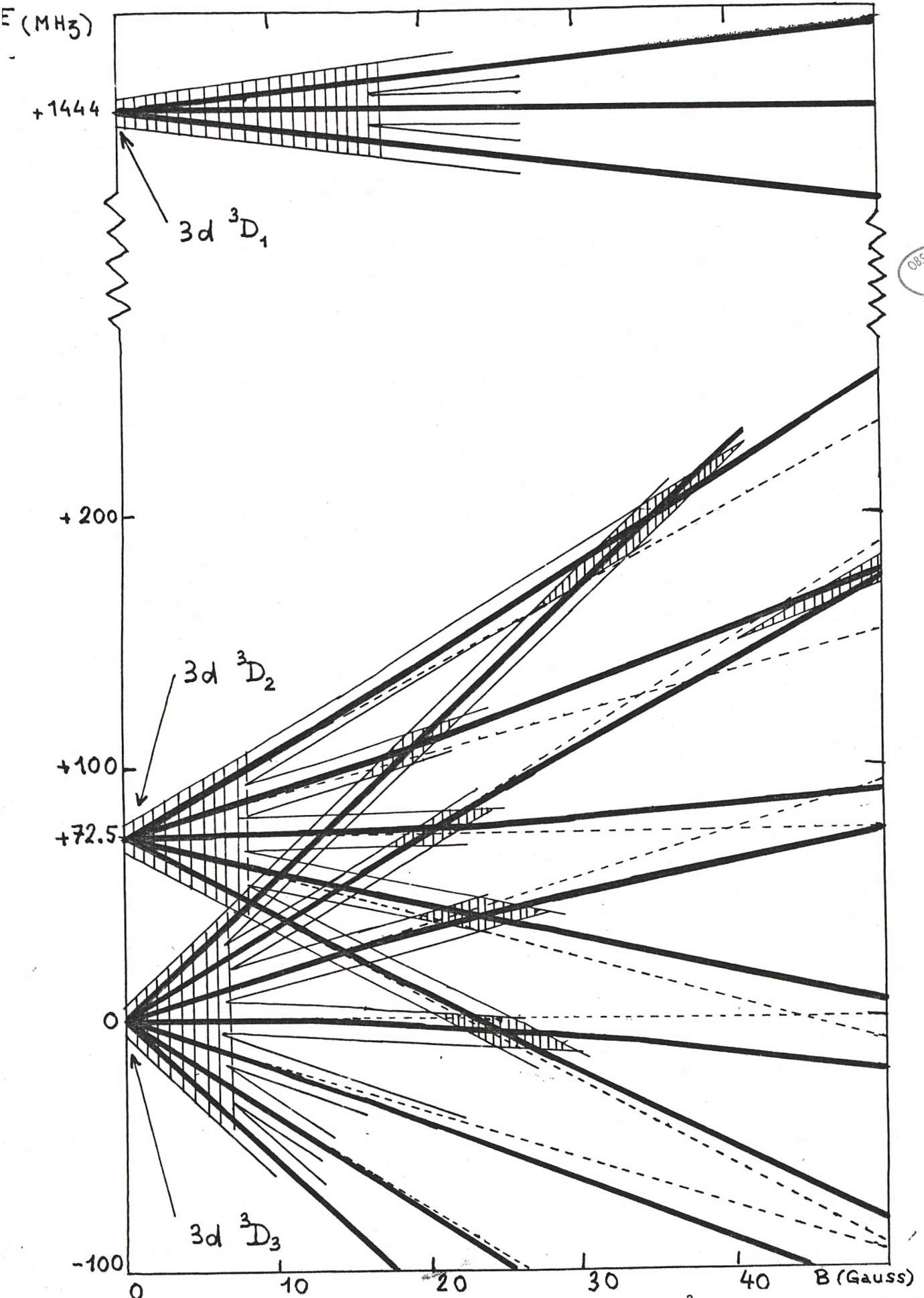


Figure IV.2 : Energies des états Zeeman du terme  $3d^3D$  en fonction du champ magnétique (en traits pleins). En pointillé, forme asymptotique linéaire valable en champ faible. Les niveaux sont élargis par leur largeur naturelle et la zone des cohérences est représentée par des hachures verticales.

où  $L_z$  et  $S_z$  sont les projections sur l'axe de quantification du moment angulaire total  $\vec{L}$  et du moment cinétique de spin total  $\vec{S}$ .

Les éléments de matrice de  $H_{\text{magn}}$  peuvent être calculés à l'aide du théorème de Wigner-Eckart :

$$\langle \alpha LS J' M_{J'} | J_z + S_z | \alpha LS J M_J \rangle = \delta_{M_J M_{J'}} \left[ M_J \delta_{J J'} + (-1)^{L+S+1-M_J} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M_J & 0 & M_J \end{pmatrix} \left[ (2J+1)(2J'+1) S(S+1)(2S+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} J & 1 & J' \\ S & L & S \end{Bmatrix} \right]. \quad (\text{IV } 6)$$

$H_{\text{magn}}$  ne couple que des sous-niveaux de même valeur de  $M_J$ , et tels que  $J' = J, J \pm 1$ . Pour diagonaliser la matrice représentant  $H_{\text{magn}}$  à l'intérieur du terme ( $\alpha LS$ ), il suffit donc de diagonaliser les sous matrices correspondant à une valeur de  $M_J$  donnée, et qui sont d'ordre 3 au maximum. En utilisant l'hypothèse (qu'on peut vérifier à posteriori) que, d'après le tableau (IV 3) les sous-niveaux Zeeman du niveau  $3d^3 D_1$  restent donnés par (IV 1) dans le domaine de champ magnétique qui nous intéresse, la diagonalisation est facilitée. Les niveaux d'énergie obtenus sont tracés sur la figure (IV 2).

L'erreur commise en utilisant pour les fréquences  $\omega_{\alpha J}$  l'expression (IV 1) est inférieure à 7 % si  $B$  est inférieur à 15 Gauss.

#### IV - 1-2 Probabilités d'émission spontanée.

Nous avons vu au chapitre III que la probabilité d'émission spontanée du niveau ( $\alpha' L' S' J'$ ) vers le niveau ( $\alpha LSJ$ ) est

$$A(\alpha' L' S' J' \rightarrow \alpha LSJ) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} \frac{1}{(2J'+1)} |\langle \alpha' L' S' J' || D || \alpha LSJ \rangle|^2 \quad (\text{IV } 7)$$

Or les probabilités de transition fournies par les tables sont les probabilités d'émission spontanée du terme ( $\alpha' L' S'$ ) vers le terme ( $\alpha LS$ ):  $A(\alpha' L' S' \rightarrow \alpha LS)$ . Pour passer de ces probabilités aux probabilités (IV 7), on utilise l'algèbre de Racah. Le calcul que l'on peut trouver dans le livre de Shore et Menzel (196 ) donne la relation entre éléments de matrice réduits :

$$\langle \alpha' L' S' J' || D || \alpha LSJ \rangle = \delta_{SS'} R_{\text{line}}(SLJ, S' L' J') \langle \alpha' L' || D || \alpha L \rangle, \quad (\text{IV } 8)$$

$$\text{où } R_{\text{line}}(SLJ, S' L' J') = \left[ (2J+1)(2J'+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} J & 1 & J' \\ L & S & L \end{Bmatrix} \quad (\text{IV } 9)$$

Cette relation provient du fait que l'opérateur moment dipolaire électrique  $D$  n'agit que sur les fonctions d'onde orbitales, et pas sur les fonctions d'onde de spin.

L'expression de la probabilité de transition  $A(\alpha'L'S'J' \rightarrow \alpha LSJ)$  est alors

$$A(\alpha'L'S'J', \alpha LSJ) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} \frac{1}{2J'+1} |R_{\text{line}}(SLJ, S'L'J')|^2 |\langle \alpha'L' || D || \alpha L \rangle|^2 \quad (\text{IV } 10)$$

La somme des probabilités de transition d'un niveau  $(\alpha'L'S'J')$  vers tous les niveaux  $(\alpha LSJ)$  d'un terme  $(\alpha LS)$  ne dépend pas de  $J'$  car

$$\sum_J (2J+1) \left\{ \begin{matrix} J & 1 & J' \\ L' & S & L \end{matrix} \right\}^2 = \frac{1}{2L'+1}$$

On peut donc considérer que cette somme représente la probabilité d'émission spontanée du terme  $(\alpha'L'S')$  vers le terme  $(\alpha LS)$ , c'est à dire que

$$A(\alpha'L'S' \rightarrow \alpha LS) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{4\omega^3}{3c^3} \sum_{SS'} \frac{1}{2L'+1} |\langle \alpha'L' || D || \alpha L \rangle|^2 \quad (\text{IV } 11)$$

Cette probabilité est liée à la probabilité  $A(\alpha'L'S'J' \rightarrow \alpha LSJ)$  par

$$A(\alpha' SL'J' \rightarrow \alpha SLJ) = \frac{2L'+1}{2J'+1} |R_{\text{line}}(SLJ, S'L'J')|^2 A(\alpha' SL' \rightarrow \alpha SL) \quad (\text{IV } 12)$$

A l'aide des facteurs  $R_{\text{line}}(L'S'J', LSJ)$  tabulés dans le livre de Shore et Menzel (1968) et des probabilités de transition  $A(\alpha'L'S' \rightarrow \alpha LS)$

des tables de Wiese et al (1966), nous avons calculé les probabilités de transition  $A(\alpha' SL'J' \rightarrow \alpha SLJ)$  et les avons regroupé dans le tableau IV.2 de la page suivante.

TABLEAU IV 2

transition $\alpha' L'S \rightarrow \alpha LS$	$A(\alpha' L'S \rightarrow \alpha LS)$ sec <sup>-1</sup>	J'	J	$(R_{line})^2$	$\frac{A(\alpha' J' \rightarrow \alpha J)}{A(\alpha' L'S \rightarrow \alpha LS)}$	$A(\alpha' J' \rightarrow \alpha J)$ sec <sup>-1</sup>
$2p \ ^3P \rightarrow 2s \ ^3S$	0.1022 E+08	2	1	1.66667	1.00000	0.1022 E+08
		1	1	1.00000	1.00000	0.1022 E+08
		0	1	0.33333	1.00000	0.1022 E+08
$3s \ ^3S \rightarrow 2p \ ^3P$	0.278 E + 08	1	2	1.66667	5/9	0.154 E +08
		1	1	1.00000	1/3	0.927 E + 07
		1	0	0.33333	1/9	0.309 E + 07
$3p \ ^3P \rightarrow 2s \ ^3S$	0.9478 E + 07	2	2	1.66667	1.00000	0.9478 E + 07
		1	1	1.00000	1.00000	0.9478 E + 07
		0	1	0.33333	1.00000	0.9478 E + 07
$3p \ ^3P \rightarrow 3s \ ^3S$	0.108 E + 07	2	2	1.66667	1.00000	0.108 E + 07
		1	1	1.00000	1.00000	0.108 E + 07
		0	1	0.33333	1.00000	0.108 E + 07
$3d \ ^3D \rightarrow 2p \ ^3P$	0.706 E + 08	3	2	1.40000	1.00000	0.706 E + 08
		2	2	0.25000	1/4	0.1765 E + 08
		2	1	0.75000	3/4	0.5295 E + 08
		1	2	0.01667	1/36	0.1961 E + 07
		1	1	0.25000	5/12	0.294 E + 08
		1	0	0.33333	5/9	0.392 E + 08
		3	2	1.40000	1.00000	0.128 E + 05
$3d \ ^3D \rightarrow 3p \ ^3P$	0.128 E +05	2	2	0.25000	1/4	0.320 E + 04
		2	1	0.75000	3/4	0.960 E + 04
		1	2	0.01667	1/36	0.356 E + 03
		1	1	0.25000	5/12	0.533 E + 04
		1	0	0.33333	5/9	0.7111 E + 04

transition $\alpha'L'S \rightarrow \alpha'LS$	$A(\alpha'L'S \rightarrow \alpha'LS)$ sec <sup>-1</sup>	J'	J	$(R_{line})^2$	$\frac{A(\alpha'J' \rightarrow \alpha J)}{A(\alpha'L'S \rightarrow \alpha'LS)}$	$A(\alpha'J' \rightarrow \alpha J)$
4s <sup>3</sup> S → 2p <sup>3</sup> P	0.106 E + 08	1	2	1.66667	5/9	0.589 E + 07
		1	1	1.00000	1/3	0.353 E + 07
		1	0	0.33333	1/9	0.118 E + 07
4s <sup>3</sup> S → 3p <sup>3</sup> P	0.652 E + 07	1	2	1.66667	5/9	0.362 E + 07
		1	1	1.00000	1/3	0.217 E + 07
		1	0	0.33333	1/9	0.724 E + 07
4p <sup>3</sup> P → 2s <sup>3</sup> S	0.505 E + 07	2	1	1.66667	1.00000	0.505 E + 07
		1	1	1.00000	1.00000	0.505 E + 07
		0	1	0.33333	1.00000	0.505 E + 07
4p <sup>3</sup> P → 3s <sup>3</sup> S	0.608 E + 06	2	1	1.66667	1.00000	0.608 E + 06
		1	1	1.00000	1.00000	0.608 E + 06
		0	1	0.33333	1.00000	0.608 E + 06
4p <sup>3</sup> P → 3d <sup>3</sup> D	0.597 E + 06	2	3	1.40000	21/25	0.5015 E + 06
		2	2	0.25000	3/20	0.895 E + 05
		2	1	0.016667	1/100	0.597 E + 04
		1	2	0.75000	3/4	0.448 E + 06
		1	1	0.25000	1/4	0.149 E + 06
		0	1	0.33333	1	0.597 E + 06
		0	1	0.33333	1	0.597 E + 06
4p <sup>3</sup> P → 4s <sup>3</sup> S	0.227 E + 06	2	1	1.66667	1.00000	0.227 E + 06
		1	1	1.00000	1.00000	0.227 E + 06
		0	1	0.33333	1.00000	0.227 E + 06
4d <sup>3</sup> D → 2p <sup>3</sup> P	0.251 E + 01	3	2	1.40000	1.00000	0.251 E + 08
		2	2	0.25000	1/4	0.6275 E + 07
		2	1	0.75000	3/4	0.1883 E + 08
		1	2	0.01667	1/36	0.697 E + 06
		1	1	0.25000	5/12	0.1046 E + 08
		1	0	0.33333	5/9	0.1394 E + 08
		1	0	0.33333	5/9	0.1394 E + 08
4d <sup>3</sup> D → 3p <sup>3</sup> P	0.668 E + 07	3	2	1.40000	1.00000	0.668 E + 07
		2	2	0.25000	1/4	0.167 E + 07
		2	1	0.75000	3/4	0.501 E + 07
		1	2	0.01667	1/36	0.186 E + 06
		1	1	0.25000	5/12	0.278 E + 07
		1	0	0.33333	5/9	0.371 E + 07
		1	0	0.33333	5/9	0.371 E + 07
4d <sup>3</sup> P → 4p <sup>3</sup> P	0.415 E + 04	3	2	1.40000	1.00000	0.415 E + 04
		2	2	0.25000	1/4	0.1038 E + 04
		2	1	0.75000	3/4	0.3112 E + 04
		1	2	0.01667	1/36	0.115 E + 03
		1	1	0.25000	5/12	0.173 E + 04
		1	0	0.33000	5/9	0.230 E + 04
		1	0	0.33000	5/9	0.230 E + 04



transition	$A(\alpha'L'S \rightarrow \alpha LS)$	J'	J	$R_{(line)}^2$	$\frac{A(\alpha'J' \rightarrow \alpha J)}{A(\alpha'L'S \rightarrow \alpha LS)}$	$A(\alpha'J' \rightarrow \alpha J)$
$4f \ ^3F \rightarrow 3d \ ^3D$	0.139 E + 08	4	3	1.28571	1.00000	0.139 E + 08
		3	3	0.11111	1/9	0.154 E + 07
		3	2	0.88889	8/9	0.1235 E + 08
		2	3	0.00317	0.00444	0.617 E + 05
		2	2	0.11111	7/45	0.216 E + 07
		2	1	0.60000	42/50	0.117 E + 08
$4f \ ^3F \rightarrow 4d \ ^3D$	0.815 E - 01	4	3	1.28571	1.00000	0.815 E - 01
		3	3	0.11111	1/9	0.906 E - 02
		3	2	0.88889	8/9	0.724 E - 01
		2	3	0.00317	0.00444	0.362 E - 03
		2	2	0.11111	7/45	0.1268 E - 01
		2	1	0.60000	42/50	0.685 E - 01

#### IV-1-3. Probabilités de photoionisation et de recombinaison.

Suivant le modèle donné par Heasley et al (1973) pour la formation de raies de l'Hélium dans les protubérances, nous tiendrons compte de la photoionisation et de la recombinaison radiative. Dans un premier temps nous rappellerons comment sont définies à partir de la section efficace de photoionisation  $\sigma_{\alpha J}(\nu)$ , les probabilités de photoionisation  $P(\alpha J)$  et de recombinaison  $R(\alpha J)$  à partir du niveau  $(\alpha J)$  ou en direction de ce niveau. Nous indiquerons ensuite comment nous les avons introduites dans le système d'équations de l'équilibre statistique.

Nous notons  $u_\nu$  la densité d'énergie (par intervalle de fréquence) du rayonnement incident,  $\sigma_{i,j}(\nu)$  la section efficace de photoionisation d'un niveau  $i$  de l'atome vers le niveau  $j$  de l'ion,  $N_{0,i}$  la population du niveau  $i$  de l'atome,  $N_{1,j}$  la population du niveau  $j$  de l'ion.

Le nombre de photoionisations pendant l'intervalle de temps  $dt$ , provoquées par un rayonnement de fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  est, pour un atome :

$$N_{0,i} \frac{c}{h\nu} \sigma_{i,j}(\nu) u_\nu d\nu dt = dN_{\text{phot}} \quad (\text{IV } 13)$$

Le nombre total de photoionisations pendant l'intervalle de temps  $dt$  est donc

$$N_{0,i} \left[ \int_{\nu_{ij}}^{\infty} \frac{c}{h\nu} \sigma_{ij}(\nu) u_\nu d\nu \right] dt$$

où  $\nu_{ij}$  est la fréquence seuil de photoionisation

$$\nu_{ij} = \frac{E_{1,j} - E_{0,i}}{h} \quad (\text{IV } 14)$$

La probabilité de photoionisation à partir du niveau  $i$  de l'atome vers le niveau  $j$  de l'ion est donnée par la formule suivante :

$$P_{i \rightarrow j} = \int_{\nu_{ij}}^{\infty} \frac{c}{h\nu} \sigma_{ij}(\nu) u_\nu d\nu \quad (\text{IV } 15)$$

Le calcul de la probabilité de recombinaison à partir de la probabilité de photoionisation est effectué dans le livre de Mihalas "Stellar Atmospheres" (1970). Nous en rappellerons brièvement les grandes lignes : on note  $N_e$  le nombre d'électrons par unité de volume ; le nombre de recombinaisons conduisant l'ion, dans l'état  $j$ , à l'atome dans l'état  $i$  par capture d'un électron de vitesse  $v$  comprise entre  $v$  et  $v + dv$ , dans l'intervalle de temps  $dt$ , s'écrit :

$$N_{1,j} N_e v f(v) \left[ F_{ij}(v) + u_\nu G_{ij}(v) \right] dv dt = dN_{rec.} \quad (\text{IV } 16)$$

où  $f(v)dv$  est la probabilité de trouver un électron de vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$  dans l'ensemble des électrons ;  $F_{ij}(v)$  est un terme traduisant la recombinaison spontanée ;  $u_\nu G_{ij}(v)$  est un terme traduisant la recombinaison induite par le rayonnement incident.

Pour calculer les coefficients  $F_{ij}(v)$  et  $G_{ij}(v)$  on suppose que l'atome, le rayonnement incident et les électrons sont en équilibre thermodynamique à la température  $T$ . La distribution de vitesse des électrons est alors une distribution de Maxwell :

$$f(v) dv = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp(-m v^2 / 2 k_B T) 4\pi v^2 dv \quad (\text{IV } 17)$$

où  $m$  est la masse d'un électron,  $k_B$  la constante de Boltzmann. La recombinaison induite est provoquée par un rayonnement de fréquence  $\nu$  telle que

$$h\nu = h\nu_{ij} + \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{IV } 18)$$

Ce qui conduit à

$$h d\nu = m v dv \quad (\text{IV } 19)$$

Ce rayonnement étant en équilibre thermodynamique, sa densité d'énergie est donnée par la loi de Boltzmann:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Enfin, le rapport des populations de l'atome et de l'ion en équilibre thermodynamique à la température T est donné par la loi de Saha

$$\frac{N_{1,j} N_e}{N_{0,i}} = \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{g_{1,j}}{g_{0,i}} e^{-\frac{h\nu_{ij}}{k_B T}} \quad (\text{IV } 20)$$

où  $g_{1,j}$  et  $g_{0,i}$  sont les dégénérescences des niveaux j et i respectivement.

Puisqu'il y a équilibre, le nombre de photoionisations est égal au nombre de recombinaisons dans l'intervalle de temps dt, pour un rayonnement de fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  :

$$dN_{\text{phot}} = dN_{\text{rec}}$$

On obtient, à l'aide des relations précédentes

$$\frac{g_{1,j}}{g_{0,i}} \frac{m^2 \nu^2 c^2}{h^2 \nu^2} \left[ F_{ij}(\nu) + e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \left[ -F_{ij}(\nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} G_{ij}(\nu) \right] \right] = \sigma_{ij}(\nu)$$

Cette relation étant vraie pour toute température, elle reste vraie si  $T \rightarrow 0$ , c'est à dire si  $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \rightarrow 0$ , alors on obtient :

$$F_{ij}(\nu) = \sigma_{ij}(\nu) \frac{g_{0,i}}{g_{1,j}} \frac{h^2 \nu^2}{m^2 \nu^2 c^2} \quad (\text{IV } 21)$$

$$G_{ij}(\nu) = \frac{F_{ij}(\nu)}{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}} \quad (\text{IV } 22)$$

Les relations liant  $F_{ij}(\nu)$  et  $G_{ij}(\nu)$  à  $\sigma_{ij}(\nu)$  restent vraies lorsqu'il n'y a pas équilibre thermodynamique. Le nombre de recombinaisons d'ions se trouvant dans le niveau j avec des atomes de vitesse comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , pour donner l'atome dans le niveau i, pendant l'intervalle de temps dt est donné par la formule suivante :

$$dN_{\text{rec}} = \frac{g_{0,i}}{g_{1,j}} \frac{h^2 \nu^2}{m^2 \nu c^2} f(\nu) \sigma_{ij}(\nu) \left[ 1 + \frac{u_\nu}{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}} \right] N_{1,j} N_e d\nu dt.$$

En supposant que la distribution des vitesses des électrons est une distribution de Maxwell, à la température électronique  $T_e$ , on définit une probabilité de recombinaison du niveau  $j$  de l'ion vers le niveau  $i$  de l'atome en sommant sur les vitesses des électrons incidents qui est donnée par :

$$R_{j \rightarrow i} = \left( \frac{1}{2\pi m k_B T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\nu_{ij}}^{\infty} \sigma_{ij}(\nu) \left( 1 + \frac{c^3 u_\nu}{8\pi h \nu^3} \right) \frac{4\pi h^3 \nu^2}{c^2} \exp\left(-\frac{h(\nu-\nu_{ij})}{k_B T_e}\right) d\nu \quad (\text{IV } 23)$$

En revanche  $u_\nu$  n'est plus donné par la formule de Planck, mais par la densité locale du rayonnement.

Dans le cas de l'Hélium des protubérances solaires, nous n'avons introduit dans les équations de l'équilibre statistique que l'état fondamental  $1s$  de l'ion  $\text{He}^+$  (Nous avons vérifié que les autres niveaux de l'ion jouent un rôle négligeable dans le calcul de la polarisation de la raie  $D_3$ ). En notant  $\sigma_{\alpha J}(\nu)$  la section efficace de photoionisation du niveau  $(\alpha J)$  de l'Hélium neutre par un rayonnement de fréquence  $\nu$ , l'ion  $\text{He}^+$  formé se trouvant dans l'état fondamental, nous avons défini une probabilité de photoionisation  $P(\alpha J)$  et de recombinaison  $R(\alpha J)$  par

$$P(\alpha J) = \int_{\nu_{\alpha J}}^{\infty} \frac{c}{h\nu} \sigma_{\alpha J}(\nu) u_\nu d\nu \quad (\text{IV } 24)$$

$$R(\alpha J) = \left( \frac{1}{2\pi m k_B T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\nu_{\alpha J}}^{\infty} \sigma_{\alpha J}(\nu) \left( 1 + \frac{c^3 u_\nu}{8\pi h \nu^3} \right) \frac{4\pi h^3 \nu^2}{c^2} \exp\left(-\frac{h(\nu-\nu_{\alpha J})}{k_B T_e}\right) d\nu \quad (\text{IV } 25)$$

où  $\nu_{\alpha J}$  est le seuil de photoionisation à partir du niveau  $(\alpha J)$ . Ces probabilités que nous avons définies ont un caractère isotrope comme l'émission spontanée : nous n'avons pas tenu compte de l'anisotropie du rayonnement incident. Nous avons supposé que nous pouvions la négliger dans un premier temps, et nous avons vérifié que la photoionisation et la recombinaison jouent un rôle très faible dans la polarisation de la raie  $D_3$ . Les probabilités s'introduisent de la même manière que l'émission spontanée dans les équations de l'équilibre statistique (III 39). Nous avons ajouté à l'équation d'évolution

$\frac{d}{dt} n_{\alpha J}^{\alpha} n_{q_1}^{\alpha} n_{k_1}^{\alpha}$  (III 39) un terme de photoionisation.

$$\left( \frac{d}{dt} n_{q_1}^{\alpha_1 J_1 k_1} \right)_{\text{phot}} = - P(\alpha_1 J_1) n_{q_1}^{\alpha_1 J_1 k_1} \quad (\text{IV } 26)$$

Nous n'avons pas tenu compte de l'orientation du niveau  $1s$  de  $\text{He}^+$ ; nous n'avons considéré que sa population, que nous noterons  $N_{\alpha_1 J_1}^{\text{ion}}$ . Nous avons donc ajouté, aux équations d'évolution des populations  $\frac{d}{dt} \rho_{\alpha_1 J_1}^{\text{ion}}$  un terme de recombinaison:

$$\left( \frac{d}{dt} \rho_{\alpha_1 J_1}^{\text{ion}} \right)_{\text{rec.}} = \frac{N_{\text{ion}} N_e}{\sqrt{2J_1+1}} \frac{2J_1+1}{2} R(\alpha J) \quad (\text{IV } 27)$$

En effet c'est le coefficient  $\sqrt{2J_1+1} \rho_{\alpha_1 J_1}^{\text{ion}}$  qui représente la population du niveau  $(\alpha_1, J_1)$ .

#### IV-1-4. Sectionsefficaces de photoionisation

Pour calculer les probabilités de photoionisation et de recombinaison nous avons tout d'abord besoin des sections efficaces de photoionisation  $\sigma_{\alpha J}(\nu)$ .

De même que la somme sur les niveaux inférieurs des probabilités de transition A  $(\alpha_1, L_1, S_1, J_1 \rightarrow \alpha_2, L_2, S_2, J_2)$

$$\frac{\Sigma}{J_2} A(\alpha_1, L_1, S_1, J_1 \rightarrow \alpha_2, L_2, S_2, J_2)$$

ne dépend pas de  $J_1$ , le calcul quantique de la section efficace de photoionisation  $\sigma_{\alpha \text{LSJ}}(\nu)$ , que nous ne développerons pas ici montre que cette section efficace est la même pour tous les niveaux (J) d'un terme ( $\alpha$  LS) donné. Il nous suffit donc de connaître les sections efficaces  $\sigma_{\alpha \text{LS}}(\nu)$ . Nous avons choisi d'utiliser les mêmes valeurs que Heasley et al (1973), afin de faire un travail numériquement comparable. Celui-ci nous a communiqué les valeurs utilisées dans leur programme, qui sont assez peu différentes des valeurs les plus récentes. Pour les niveaux  $1s$ ,  $2s$ ,  $3s$ ,  $2p$ ,  $3p$ , ces sections efficaces sont :

$$\sigma(1^1S) = 7.3 \text{ E-18 } \exp(1.373 - 2.311 \text{ E-16 } \nu) \quad \text{cm}^2 \quad (\text{IV } 28)$$

$$\sigma(2^3S) = \exp[-278.3 + Z(14.88 - 0.2311Z)] \quad \text{cm}^2, \quad Z = \log_m \nu, \quad (\text{IV } 29)$$

$$\sigma(2^3P) = 3.72 \text{ E } 26 / \nu^{2.9} + 1.15 \text{ E } 31 / \nu^{3.3} \quad \text{cm}^2 \quad (\text{IV } 30)$$

Pour les autres niveaux on néglige l'influence de l'électron restant dans l'état  $1s$ , et on utilise des sections efficaces hydrogénoïdes :

$$\sigma(n^3L) = 2.815 \text{ E-19 } \frac{q_{\text{II}}(n, \nu) / \nu^3}{n^5} \quad \text{cm}^2, \quad (\text{IV } 30)$$

où  $\nu$  est la fréquence du photon photoionisant et  $g_{II}(n, \nu)$  le facteur de Gaunt (pour une transition lié-libre), dont la valeur en fonction de l'énergie de l'électron émis a été tabulée par Karzas et Latter (1961).

Lorsque nous aurons donné la densité d'énergie  $u_\nu$  du rayonnement incident au point considéré dans la protubérance, nous indiquerons les résultats du calcul numérique des probabilités de photoionisation et de recombinaison.

#### IV - 2. RAYONNEMENT SOLAIRE INCIDENT

Il s'agit ici de calculer la matrice densité du rayonnement solaire incident en un point de la protubérance.

L'intensité de ce rayonnement est fournie par le modèle d'atmosphère solaire de Gingerich et al (1971), l'ensemble de ces données ayant été exploité par Heasley, Mihalas et Poland (1974).

L'anisotropie du rayonnement incident en un point M de la protubérance, et donc la matrice densité du rayonnement incident, s'expriment à l'aide des facteurs de dilution (Van de Hulst (1950) ). Enfin, comme l'intensité rayonnée par la photosphère n'est pas la même dans toutes les directions, il faut introduire dans les facteurs de dilution un terme d'assombrissement centre-bord (Van de Hulst (1950), Allen (1973) ).

Avec les données de Heasley, Mihalas et Poland (1973) nous pouvons également calculer les probabilités de photoionisation à partir d'un niveau ( $\alpha$  LSJ) de l'atome d'Hélium neutre, et les probabilités de recombinaison radiative de l'Hélium II vers un niveau ( $\alpha$  LSJ) de l'Hélium neutre. Nous indiquerons ici le résultat de ces calculs.

##### IV-2-1. Intensité du rayonnement photosphérique.

A partir des données de la Harvard Smithsonian Reference Atmosphere (Gingerich et al (1971) ), Heasley, Mihalas et Poland calculent l'intensité du rayonnement incident  $I_\nu^{(inc)}$  à la fréquence  $\nu$  (visible), en un point de la surface de la chromosphère, par la relation :

$$\bar{I}_\nu^{(inc.)} = \frac{1}{2} \left( \bar{I}_\nu^{(phot.)} + \bar{I}_\nu^{(chrom.)} \right) + \bar{I}_\nu^{(coronal)} \quad (IV 32)$$

où  $I_{\nu}^{(\text{phot})}$ ,  $I_{\nu}^{(\text{chrom})}$ ,  $I_{\nu}^{(\text{coronal})}$  sont les intensités du rayonnement à la fréquence  $\nu$ , à l'intérieur de la photosphère, de la chromosphère, de la couronne respectivement. Depuis un point de la surface de la chromosphère, la photosphère et la chromosphère sont vues sous l'angle solide  $2\pi$ , et la couronne est vue sous l'angle solide  $4\pi$ , ce qui explique les facteurs  $\frac{1}{2}$  et 1 de la relation (IV 32). On définit ensuite, pour chaque raie une température de rayonnement  $T_{\nu}$ , en supposant que le rayonnement reçu est celui d'un corps noir de température  $T$ , vu sous l'angle solide  $2\pi$  (ceci est justifié par le fait que, pour les fréquences de transition de l'Hélium neutre,  $I_{\nu}^{(\text{coronal})}$  est très faible devant  $I_{\nu}^{(\text{phot})}$  et  $I_{\nu}^{(\text{chrom})}$ ):

$$I_{\nu}^{(\text{inc.})} = \frac{1}{2} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T_{\nu}) - 1} \quad (\text{IV 33})$$

Cette relation permet de calculer  $T_{\nu}$ . On obtient le tableau suivant :

transition $\alpha L'S \rightarrow \alpha LS$	$\lambda$ Å	$I_{\nu}^{(\text{inc})}$ erg/cm <sup>2</sup>	$T_{\nu}$ °K
2p $^3P \rightarrow 2s$ $^3S$	10830	2.00E-05	6103
3s $^3S \rightarrow 2p$ $^3P$	7065	2.05E-05	6081
3p $^3P \rightarrow 2s$ $^3S$	3889	3.43E-06	5367
3p $^3P \rightarrow 3s$ $^3S$	42570	3.18E-06	5698
3d $^3D \rightarrow 2p$ $^3P$	5876	1.91E-05	6189
3d $^3D \rightarrow 3p$ $^3P$	205770	1.79E-07	5832
4s $^3S \rightarrow 2p$ $^3P$	4713	1.51E-05	6306
4s $^3S \rightarrow 3p$ $^3P$	21120	1.60E-05	8104
4p $^3P \rightarrow 2s$ $^3S$	3964	4.60E-06	5548
4p $^3P \rightarrow 3s$ $^3S$	12528	1.93E-05	6276
4p $^3P \rightarrow 3d$ $^3D$	19543	1.37E-05	6821
4d $^3D \rightarrow 2p$ $^3P$	4471	1.51E-05	6438
4d $^3D \rightarrow 3p$ $^3P$	17000	1.60E-05	6715
4f $^3F \rightarrow 3d$ $^3D$	18686	1.37E-05	6581

(IV 34)

Pour définir une température de rayonnement du soleil pour les radiations ultra violettes (et extrême-ultraviolettes) il faut tenir compte des raies ultra violettes intenses émises par H, He I, He II dans la photosphère et la chromosphère et par les autres éléments dans la couronne, dont l'intensité s'ajoute à l'intensité  $I_{\nu}$  (continuum) du continu photosphérique et chromosphérique. Heasley et al (1973) définissent donc la température de rayonnement  $T_{\nu}$  pour le rayonnement ultra violet par :

$$\frac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT_{\nu}) - 1} d\nu = \frac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_{\nu}^{(continuum)} d\nu + \frac{1}{2} \sum_{raies} E_{H, HeI, HeII} + \sum_{autres\ elements} E \quad (IV\ 35)$$

En utilisant les valeurs données par les satellites OSO-4 et OSO-6 et par Gingerich et al (1973), Heasley et al (1973) obtiennent le tableau suivant extrait de leur article :

TABLE 2b  
RADIATION TEMPERATURES FOR CONTINUUM POINTS

$\nu$	$T_r$ (° K)	Source	$\nu$	$T_r$ (° K)	Source
$2.632 \times 10^{16}$	23480	4	$9.180 \times 10^{14}$	6400	2
$2.193 \times 10^{16}$	22560	4	$8.761 \times 10^{14}$	6400	2
$1.755 \times 10^{16}$	21160	4	$8.760 \times 10^{14}$	6400	2
$1.535 \times 10^{16}$	20240	4	$8.225 \times 10^{14}$	6300	2
$1.316 \times 10^{16}$	18920	4	$8.224 \times 10^{14}$	6300	2
$1.315 \times 10^{16}$	18920	4	$8.147 \times 10^{14}$	6300	2
$1.075 \times 10^{16}$	16920	4	$8.146 \times 10^{14}$	6300	2
$8.352 \times 10^{15}$	13500	4	$7.240 \times 10^{14}$	6519	2
$7.151 \times 10^{15}$	11700	4	$6.333 \times 10^{14}$	6371	2
$5.949 \times 10^{15}$	9600	4	$5.426 \times 10^{14}$	6239	2
$5.948 \times 10^{15}$	9600	4	$4.519 \times 10^{14}$	6115	2
$5.062 \times 10^{15}$	8500	4	$4.518 \times 10^{14}$	6115	2
$4.176 \times 10^{15}$	7200	4	$4.031 \times 10^{14}$	6059	2
$3.733 \times 10^{15}$	6700	4	$4.030 \times 10^{14}$	6059	2
$3.290 \times 10^{15}$	6500	4	$3.821 \times 10^{14}$	6038	2
$3.289 \times 10^{15}$	5600	2	$3.820 \times 10^{14}$	6038	2
$2.376 \times 10^{15}$	4850	2	$3.656 \times 10^{14}$	6032	2
$1.462 \times 10^{15}$	4900	2	$3.655 \times 10^{14}$	6032	2
$1.461 \times 10^{15}$	4900	2	$2.856 \times 10^{14}$	6083	2
$1.153 \times 10^{15}$	5700	2	$2.056 \times 10^{14}$	6505	2
$1.152 \times 10^{15}$	5700	2	$2.055 \times 10^{14}$	6505	2
$9.603 \times 10^{14}$	6400	2	$1.686 \times 10^{14}$	6636	2
$9.602 \times 10^{14}$	6400	2	$1.316 \times 10^{14}$	6340	2

SOURCES.—(1) Milkey *et al.* 1973. (2) Gingerich *et al.* 1971 and Mankin, private communication. (3) G. Rottman 1973, private communication. (4) Figure 1 of this work. (5) As described in text.



La variation de  $T_{\nu}$  avec  $\lambda$  est représentée sur la figure suivante extraite de Heasley et al (1973) :

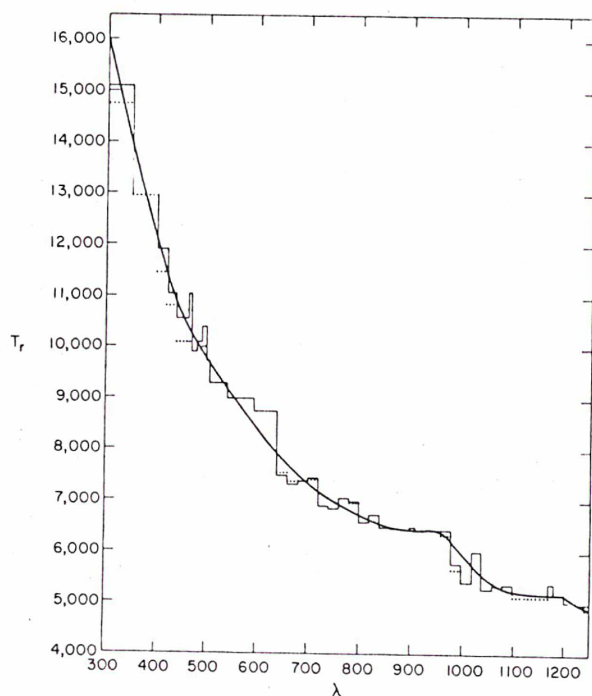


FIG. 1.—Radiation temperature (as defined in text) of incident radiation field as a function of wavelength. *Solid bars*: OSO-6 data; *dots*: OSO-4 data; *smooth curve*: adopted relation.

Ces données, sur l'intensité du rayonnement ultraviolet, nous permettront de calculer les probabilités de photoionisation pour chaque niveau de l'atome d'Hélium.

IV-2-2. Matrice densité du rayonnement solaire incident - Facteurs de dilution dans le domaine optique.

En un point M de la protubérance, le soleil est vu sous l'angle solide  $\Omega$ , qui porté par un cône de demi-angle au sommet  $\gamma$  défini par (fig IV 4) :

$$\sin \gamma = \frac{R_0}{R} \quad (\text{IV } 36)$$

où  $R_0$  est le rayon du soleil, R la distance du point M au centre du soleil.

On a donc :

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \gamma) \quad (\text{IV } 37)$$

Le rayonnement issu du soleil et passant par M est contenu dans ce cône. Pour chaque fréquence  $\nu$  de transition de l'hélium, nous considérons le soleil comme une source de rayonnement en équilibre thermodynamique à la température  $T_\nu$  : le nombre moyen de photons dont l'impulsion  $\vec{k}$  est contenue dans  $\Omega$  est, d'après (II 105)

$$\langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\nu/k_B T_\nu) - 1}$$

pour deux directions de polarisation  $\vec{e}_\lambda$  perpendiculaires, et perpendiculaires à  $\vec{k}$  : Nous supposons dans ce paragraphe que  $\langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle$  est indépendant de la direction de  $\vec{k}$ , c'est à dire que nous ne tenons pas compte pour l'instant des inhomogénéités ni de l'assombrissement centre bord. Le nombre moyen de photons d'énergie  $\hbar c k$ , au point M est d'après (II 103) :

$$\begin{aligned} \langle N_{\vec{k}} \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int_{\Omega} \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle \\ &= \frac{\Omega}{4\pi} \frac{1}{\exp(\hbar\nu/k_B T_\nu) - 1} \end{aligned} \quad (\text{IV } 38)$$

On définit le facteur de dilution W par :

$$W = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} (1 - \cos \gamma) \quad (\text{IV } 39)$$

La densité d'énergie du rayonnement à la fréquence  $\nu$  au point M est donc, d'après (II 102)

$$u_\nu = \frac{8\pi \hbar \nu^3}{c^3} \langle N_{\vec{k}} \rangle = W \frac{8\pi \hbar \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\nu/k_B T_\nu) - 1} \quad (\text{IV } 40)$$

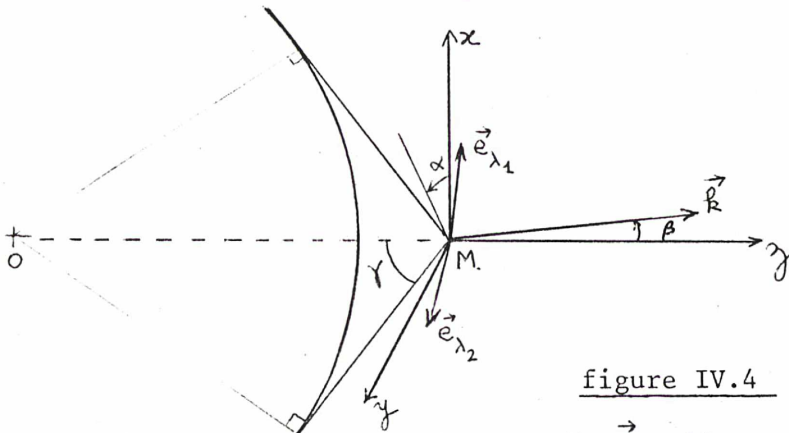
$W$  est le facteur de proportionnalité entre la densité d'énergie au point  $M$  et la densité d'énergie du corps noir.

Pour calculer la matrice polarisation du rayonnement au point  $M$  on utilise la relation (II 109)

$$\phi \langle N_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int_{\Omega} \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \langle N_{\vec{k}, \lambda} \rangle |e_{\lambda}^{\rightarrow}\rangle \langle e_{\lambda}^{\rightarrow}| \quad (\text{IV 41})$$

On fait la somme des matrices polarisation pour chaque état  $(\vec{k}, e_{\lambda}^{\rightarrow})$  du rayonnement incident.

Nous allons calculer  $\phi$  dans un repère dont l'axe  $Oz$  est la normale en  $M$  à la surface du soleil. On repère la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  par les angles  $\alpha$  et  $\beta$  (fig IV 4) :



$$\vec{k} \begin{cases} \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{cases}$$

figure IV.4

le rayonnement incident le long de  $\vec{k}$  n'étant pas polarisé, les deux vecteurs unitaires  $|e_{\lambda_1}^{\rightarrow}\rangle$  et  $|e_{\lambda_2}^{\rightarrow}\rangle$  peuvent être choisis quelconques dans un plan perpendiculaire à  $\vec{k}$  (ils doivent cependant être perpendiculaires entre eux). On choisit donc :

$$e_{\lambda_1}^{\rightarrow} \begin{cases} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{cases} \quad e_{\lambda_2}^{\rightarrow} \begin{cases} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{cases}$$

Ce qui donne pour la relation (IV 41) :

$$\phi W = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \int_{\Omega} \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \left[ |e_{\lambda_1}^{\rightarrow}\rangle \langle e_{\lambda_1}^{\rightarrow}| + |e_{\lambda_2}^{\rightarrow}\rangle \langle e_{\lambda_2}^{\rightarrow}| \right]$$

C'est à dire

$$\phi W = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{4\pi} \int_0^\gamma d\beta \int_0^{2\pi} d\alpha \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \beta - 1) & -\cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \beta - 1) & \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \sin \beta \cos \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix}$$

On peut alors mettre la matrice densité sous la forme :

$$\phi = \frac{1}{W} (W_i \phi_i + W_a \phi_a) \quad (\text{IV } 42)$$

$$\text{où } \begin{cases} W_i = \frac{1}{4} (\cos^2 \gamma - 1)^2 (\cos \gamma + 2) \\ W_a = \frac{1}{4} \cos \gamma \sin^2 \gamma \end{cases} \quad (\text{IV } 43)$$

$$\cdot \quad \begin{cases} W_i = \frac{1}{4} (\cos^2 \gamma - 1)^2 (\cos \gamma + 2) \\ W_a = \frac{1}{4} \cos \gamma \sin^2 \gamma \end{cases} \quad (\text{IV } 44)$$

$$\text{et } \phi_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \phi_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV } 45)$$

$W_i$  et  $W_a$  sont les facteurs de dilution isotrope et anisotrope respectivement et leur somme est  $W$ .

$$W_i + W_a = W \quad (\text{IV } 46)$$

La relation (IV 45) montre que  $\phi$  peut être considérée comme une superposition d'un rayonnement isotrope (dont la matrice polarisation est proportionnelle à la matrice identité) et d'un rayonnement se propageant le long du "rayon solaire" Oz, non polarisé (Cf : II.4.4.3), cette superposition étant pondérée par  $\frac{W_i}{W}$  et  $\frac{W_a}{W}$  (Cf. Charvin (1965)).

On peut alors calculer les composantes de la matrice  $\phi$  dans la base des opérateurs tensoriels irréductibles, à l'aide des résultats donnés en II.4.4.3 :

$$\phi_{a_0}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi_{a_0}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \phi_{a_0}^1 = \phi_{a_{\pm 1}}^1 = \phi_{a_{\pm 1}}^2 = \phi_{a_{\pm 2}}^2 = 0$$

$\phi_i$  étant diagonale :

$$\phi_{i_0}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi_{i_q}^k = 0 \quad \text{si } k \neq 0.$$

Alors

$$\phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{W_a}{W_a + W_i}, \quad \phi_0^1 = \phi_{\pm 1}^1 = \phi_{\pm 1}^2 = \phi_{\pm 2}^2 = 0$$

(IV 47)

A partir de ces composantes, on peut calculer les composantes de  $\phi$  dans un repère quelconque, à l'aide des lois de transformation des opérateurs tensoriels irréductibles dans une rotation (Appendice A<sub>II</sub>). En particulier, nous calculons ces coefficients dans un repère dont l'axe OZ est la direction du champ magnétique  $\vec{B}$ , repéré par l'angle  $\psi$  qu'il fait avec l'axe Oz, et dont l'axe OX appartient au plan (Oz, OZ) (les axes Ox et Oy, dont le choix était quelconque, ont été choisis de façon que Oy soit perpendiculaire à  $\vec{B}$ ); on passe ainsi de Oxyz à OXYZ par une rotation d'angle  $\psi$  autour de Oy (Fig IV 5) ):

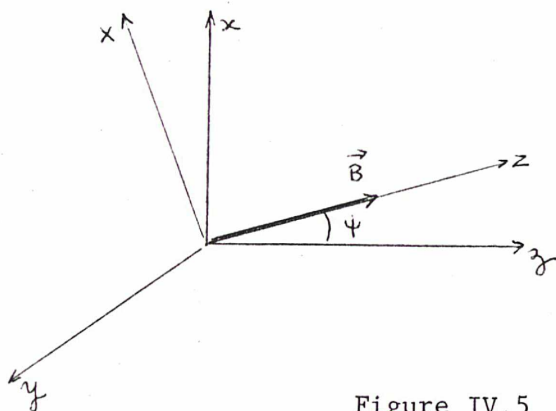


Figure IV.5

On obtient, dans le repère OXYZ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \phi_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} (3 \cos^2 \psi - 1) \frac{W_a}{W_i + W_a} \\ \phi_{\pm 1}^2 = \pm \frac{1}{2} \sin \psi \cos \psi \frac{W_a}{W_i + W_a} \\ \phi_{\pm 2}^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \psi \frac{W_a}{W_i + W_a} \\ \phi_0^1 = 0 \\ \phi_{\pm 1}^1 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV } 48)$$

C'est dans ce repère que nous résoudrons les équations de l'équilibre statistique (III 40), la densité d'énergie  $u_\nu$ , étant donnée par la relation (IV 40), et la matrice densité du rayonnement incident par le tableau ci-dessus.

IV-2-3. Assombrissement centre bord.

En fait, l'intensité émise par un point de la surface du soleil n'est pas la même dans toutes les directions. Pour un rayonnement dont le vecteur d'onde  $\vec{k}$  fait un angle  $i$  avec la normale à la surface du soleil au point où il est émis (fig (IV 6) ),

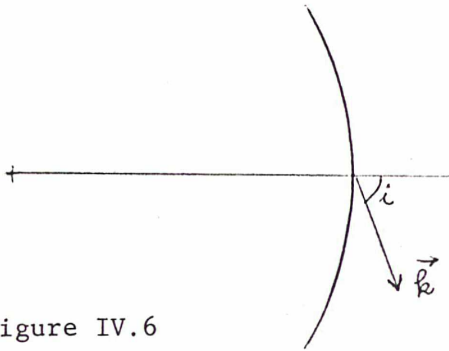


Figure IV.6

On peut en général représenter cette variation par la fonction :

$$\langle N_{\vec{k}\lambda} \rangle = \frac{1 - q(\lambda) + q(\lambda) \cos i}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{IV } 49)$$

où  $q(\lambda)$  est le facteur d'assombrissement centre bord et est une fonction empirique de la longueur d'onde. On peut

reprendre les calculs des facteurs de dilution - ce qu'a fait Van de Hulst (1950). On obtient :

$$W_i = \frac{1 - q(\lambda)}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \frac{1}{4} (2 + \cos \gamma) (1 - \cos \gamma)^2 + \frac{q(\lambda)}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \frac{3}{32} \left[ 2 + \cos^2 \gamma + \frac{\cos^2 \gamma (4 - \cos^2 \gamma)}{\sin \gamma} \text{Log} \left( \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \right) \right]. \quad (\text{IV } 50)$$

$$W_a = \frac{1 - q(\lambda)}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \frac{1}{4} \cos \gamma (1 - \cos^2 \gamma) + \frac{q(\lambda)}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \frac{1}{32} \left[ 3 \sin^2 \gamma - 1 + \frac{\cos^2 \gamma (1 + 3 \sin^2 \gamma)}{\sin \gamma} \text{Log} \left( \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \right) \right] \quad (\text{IV } 51)$$

$$W = \frac{1 - q(\lambda)}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \frac{1}{2} (1 - \cos \gamma) + \frac{q(\lambda)}{1 - \frac{1}{3} q(\lambda)} \left[ 1 - \frac{\cos^2 \gamma}{\sin \gamma} \text{Log} \left( \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \right) \right]. \quad (\text{IV } 52)$$

Les coefficients  $q(\lambda)$  ont été calculés par interpolation à partir des tables données par Allen (1973) :

transition $\alpha'L'S \rightarrow \alpha'LS$	$\lambda$ Å	$q(\lambda)$
$2p \ ^3P \rightarrow 2s \ ^3S$	10830	0.322
$3s \ ^3S \rightarrow 2p \ ^3P$	7065	0.467
$3p \ ^3P \rightarrow 2s \ ^3S$	3889	0.838
$3p \ ^3P \rightarrow 3s \ ^3S$	42570	0.130
$3d \ ^3D \rightarrow 2p \ ^3P$	5876	0.560
$3d \ ^3D \rightarrow 3p \ ^3P$	205770	-
$4s \ ^3S \rightarrow 2p \ ^3P$	4713	0.693
$4s \ ^3S \rightarrow 3p \ ^3P$	21120	0.205
$4p \ ^3P \rightarrow 2s \ ^3S$	3964	0.833
$4p \ ^3P \rightarrow 3s \ ^3S$	12528	0.288
$4p \ ^3P \rightarrow 3d \ ^3D$	19543	0.213
$4d \ ^3D \rightarrow 2p \ ^3P$	4471	0.735
$4d \ ^3D \rightarrow 3p \ ^3P$	17000	0.232
$4f \ ^3F \rightarrow 3d \ ^3D$	18686	0.219

( IV 53 )

IV-2-4. Calcul des probabilités de photoionisation et de recombinaison.

Nous avons déjà donné dans le paragraphe IV-2-1 la densité d'énergie du rayonnement en un point de la surface du soleil. Pour calculer la densité d'énergie du rayonnement photoionisant en un point d'une protubérance, nous devons analyser l'importance relative des différents termes de l'équation ( IV 35 ) qui définit la température de radiation  $T_r$ . Dans cette équation, les termes  $I_{\nu}^{(\text{continuum})}$  et  $E_{H, He, He^+}$  ont une origine photosphérique et chromosphérique. Le terme  $E_{\text{autres raies}}$  représente l'intensité des autres raies, qui sont formées dans la couronne solaire, et dont l'intensité devient grande lorsque la longueur d'onde est inférieure à 500 Å.

Pour une longueur d'onde inférieure à 500 Å, nous supposons que l'intensité de ces raies est prépondérante devant les autres intensités. Les protubérances étant situées dans la couronne solaire, la densité d'énergie du

rayonnement incident en un point d'une protubérance est celle d'un rayonnement isotrope\* :

$$\mu_{\nu} = \frac{1}{2} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T_{\nu}) - 1}$$

Pour une longueur d'onde nettement supérieure à 500 Å (voir plus loin), nous supposons au contraire que les termes importants de l'équation (IV 35) sont les termes d'origine photosphérique et chromosphérique. La densité d'énergie du rayonnement incident en un point de la protubérance est alors

$$\mu_{\nu} = W \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T_{\nu}) - 1}$$

où W est le facteur de dilution (IV 39) au point considéré dans la protubérance.

Nous avons alors calculé numériquement les intégrales (IV 24) et (IV 25) donnant les probabilités de photoionisation et de recombinaison, pour une température électronique de 6500 K, par les méthodes de calcul numérique d'intégrales, de Gauss (pour la photoionisation) et de Gauss-Laguerre (pour la recombinaison), qui sont décrites par Kopal, "Numerical Analysis" (1961). Il est apparu dans nos calculs que, mis à part le niveau  $1s$  dont la photoionisation est produite par un rayonnement de longueur d'onde inférieure à 500 Å, la photoionisation de l'atome d'Hélium se trouvant dans les autres niveaux est essentiellement produite par un rayonnement de longueur d'onde nettement supérieure à 500 Å. Nous avons donc défini pour tous les niveaux une probabilité de photoionisation et de recombinaison indépendante de la hauteur du point considéré :

$$P_0(\alpha LS) = P(\alpha LS) / W \quad (\text{IV } 54)$$

$$R_0^{\text{spont}}(\alpha LS) = R^{\text{spont}}(\alpha LS) / W \quad (\text{IV } 55)$$

$$R_0^{\text{ind}}(\alpha LS) = R^{\text{ind}}(\alpha LS) / W \quad (\text{IV } 56)$$

(où  $R^{\text{spont}}(\alpha LS)$  et  $R^{\text{ind}}(\alpha LS)$  sont les probabilités de recombinaison spontanée et induite respectivement vers le niveau  $(\alpha LS)$ , W étant le facteur de dilution au point considéré, que nous prenons égal à 1/2 lorsque le niveau  $\alpha J$  est le niveau  $1s$  :

\* N.B. Malgré l'isotropie de ce rayonnement,  $W = \frac{1}{2}$  à cause de la définition de  $T_{\nu}$  donné par (IV 35)



Nous avons obtenu les résultats suivants :

terme	$P_o (\alpha LS) \text{ sec}^{-1}$	$R_o^{\text{spont}} (\alpha LS) \text{ sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}$	$R_o^{\text{ind}} (\alpha LS) \text{ sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}$
1s <sup>1</sup> S	0.492 E - 02	0.391 E - 12	0.500 E - 25
2s <sup>3</sup> S	0.603 E + 03	0.750 E - 14	0.154 E - 18
2p <sup>3</sup> P	0.519 E + 05	0.182 E - 13	0.126 E - 16
3s <sup>3</sup> S	0.326 E + 06	0.416 E - 14	0.633 E - 16
3p <sup>3</sup> P	0.560 E + 06	0.434 E - 14	0.117 E - 15
3d <sup>3</sup> D	0.358 E + 06	0.248 E - 14	0.824 E - 16
4s <sup>3</sup> S	0.817 E + 06	0.204 E - 14	0.170 E - 15
4p <sup>3</sup> P	0.109 E + 07	0.209 E - 14	0.247 E - 15
4d <sup>3</sup> D	0.885 E + 06	0.155 E - 14	0.219 E - 15
4f <sup>3</sup> F	0.362 E + 06	0.612 E - 15	0.977 E - 16

(IV 5)

#### IV-3. RESOLUTION DES EQUATIONS DE L'EQUILIBRE STATISTIQUE.

Connaissant la matrice polarisation du rayonnement incident, sa densité d'énergie  $u_\nu$ , les probabilités de transition  $A(\alpha 'J' \rightarrow \alpha J)$ , et les probabilités de photoionisation et de recombinaison radiative, on peut calculer les coefficients de la matrice densité atomique à l'état stationnaire en résolvant le système d'équations couplées (III 40), dans lequel l'une des équations a été remplacée par la condition de normalisation (III 42). Une fois cette résolution effectuée, on peut calculer la matrice densité du rayonnement émis à la longueur d'onde 5876 Å de la raie  $D_3$ , à l'aide des équations (III 45), et en déduire les paramètres de Stokes du rayonnement observé (relations (II 118)), son taux de polarisation et sa direction de polarisation (relations (II 48) et (II 49)).

IV-3-1. Notations et repères utilisés

On note Oxyz un repère dont l'origine est au point considéré dans la protubérance, l'axe Oz est la verticale solaire, l'axe Oy perpendiculaire à Oz et au champ magnétique  $\vec{B}$ , orienté de telle façon que l'angle  $\psi = (\text{Oz}, \vec{B})$  soit positif.

On note OXYZ un repère dont l'axe OZ est porté par  $\vec{B}$ , et qui se déduit de Oxyz par une rotation d'angle  $\psi$  autour de Oy. C'est dans ce repère que nous avons calculé les coefficients de la matrice densité  $\phi$  du rayonnement incident (relations (IV 48)), et c'est dans ce repère que nous résolvons les équations de l'équilibre statistique. Nous obtenons alors les coefficients de la matrice densité  $\sigma$  du rayonnement réémis par les relations (III 45). On peut exprimer les coefficients  $a_{qk}^k$  de cette matrice densité dans le repère Oxyz, en fonction des coefficients  $\sigma_{qk}^k$  à l'aide des relations de passage de l'appendice A<sub>II</sub>.

$$a_0^0 = \sigma_0^0$$

$$a_0^1 = \sqrt{2} \sin \psi \sigma_1^1 - \cos \psi \sigma_0^1$$

$$\text{Re } a_1^1 = \cos \psi \text{Re } \sigma_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \psi \sigma_0^1$$

$$\text{Im } a_1^1 = \text{Im } \sigma_1^1$$

$$a_0^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \psi \text{Re } \sigma_2^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} 2 \sin \psi \cos \psi \text{Re } \sigma_1^2 + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) \sigma_0^2 \quad (\text{IV 58})$$

$$\text{Re } a_1^2 = \sin \psi \cos \psi \text{Re } \sigma_2^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \psi \cos \psi \sigma_0^2 + (2 \cos^2 \psi - 1) \text{Re } \sigma_1^2$$

$$\text{Im } a_1^2 = \sin \psi \text{Im } \sigma_2^2 + \cos \psi \text{Im } \sigma_1^2$$

$$\text{Re } a_2^2 = \frac{1 + \cos^2 \psi}{2} \text{Re } \sigma_2^2 - \sin \psi \cos \psi \text{Re } \sigma_1^2 + \sqrt{\frac{3}{8}} \sin^2 \psi \sigma_0^2$$

$$\text{Im } a_2^2 = \cos \psi \text{Im } \sigma_2^2 - \sin \psi \text{Im } \sigma_1^2$$

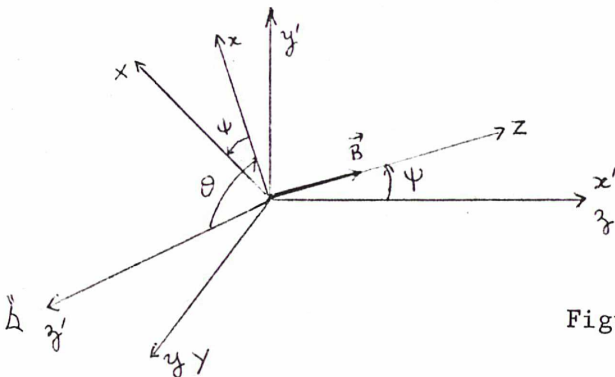


Figure IV.7

Pour calculer les paramètres de Stokes du rayonnement observé on doit calculer les coefficients  $\psi_q^k$  de la matrice densité dans un repère  $Ox'y'z'$  dont l'axe  $Oz'$  est dirigé vers l'observateur. On choisit l'axe  $Ox'$  de ce repère sur la normale à la surface du soleil. On repère  $Ox'y'z'$  par l'angle  $\theta = (Oz', Ox)$ . Les lois de transformation des opérateurs tensoriels irréductibles nous permettent de calculer les coefficients  $\psi_q^k$  en fonction des coefficients  $\alpha_q^k$ . On obtient donc les coefficients de la matrice densité dans le repère  $Ox'y'z'$  lié à l'observateur .

$$\begin{aligned}
 \psi_0^0 &= a_0^0 \\
 \psi_0^1 &= -\sqrt{2} \cos\theta \operatorname{Re} a_1^1 - \sqrt{2} \sin\theta \operatorname{Im} a_1^1 \\
 \psi_0^2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cos 2\theta \operatorname{Re} a_2^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin 2\theta \operatorname{Im} a_2^2 - \frac{1}{2} a_0^2 \\
 \operatorname{Re} \psi_2^2 &= \frac{1}{2} \cos 2\theta \operatorname{Re} a_2^2 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \operatorname{Im} a_2^2 + \sqrt{\frac{3}{8}} a_0^2 \\
 \operatorname{Im} \psi_2^2 &= \cos\theta \operatorname{Im} a_1^2 - \sin\theta \operatorname{Re} a_1^2
 \end{aligned}
 \tag{IV 59}$$

Ceci nous permet de connaître les paramètres de Stokes (relation (II 118) ) puis le taux de polarisation  $P$  et la direction de polarisation  $\varphi$  (II 48) et (II 49) en fonction du module  $B$  et des coordonnées  $\theta$  et  $\psi$  du champ magnétique (figure 2 de l'article), et de tracer les courbes donnant  $P$  et  $\varphi$  en fonction de  $B$ ,  $\theta$  et  $\psi$  (figures 5 et 6a,6b de l'article).

#### IV-3-2. Calculs et résultats.

Nous avons mis au point un programme de calcul numérique permettant de résoudre le système d'équations (III 40) à l'état stationnaire, et donc de calculer le taux de polarisation  $\rho$  et la direction de polarisation  $\varphi$  en fonction de  $B$ ,  $\theta$  et  $\psi$ , de la hauteur  $h = R - R_0$  du point observé dans la protubérance, pour une température électronique  $T_e$  et une densité électronique  $N_e$  donnée.

Le rayonnement incident n'ayant pas d'orientation (relations (IV 48) ), le système d'équations (III 49) se sépare en deux systèmes indépendants d'après ce que nous avons vu en III-2-6, un système ne faisant intervenir que des coefficients  $\alpha_q^k$  tels que  $k$  soit pair, et l'autre système ne faisant

intervenir que des coefficients  $\alpha_{\rho}^{J k}$  tels que  $k$  soit impair. Ce dernier système étant un système de Kramer à second membre nul, sa solution est nulle :

$$\alpha_{\rho}^{J 2p+1} = 0 \quad (\text{IV } 60)$$

Le rayonnement émis reflète l'état de l'atome dans l'état initial de la transition (relation (III 45)) ; il n'a donc pas d'orientation :

$$\sigma_{\rho}^1 = \alpha_{\rho}^1 = \psi_{\rho}^1 = 0 \quad (\text{IV } 61)$$

Le paramètre de Stokes de polarisation circulaire  $V$  du rayonnement émis est donc nul (relation (II 118)). L'état de polarisation du rayonnement émis est donc caractérisé uniquement par son taux de polarisation linéaire  $\rho$  et sa direction de polarisation linéaire  $\varphi$ .

#### IV-3-2-1. Taux (et direction) de polarisation linéaire en champ nul ou vertical.

Si  $B = 0$ , ou si  $\vec{B}$  est vertical ( $\psi = 0$ ), l'axe de quantification  $OZ$  est la verticale solaire. Dans le repère  $OXYZ$ , les seuls coefficients non nuls de la matrice densité  $\phi$  du rayonnement incident sont les coefficients  $\phi_{\rho}^0$  et  $\phi_{\rho}^2$ . L'équation d'évolution d'un terme  $\alpha_{\rho}^{J k}$  ne fait intervenir que des termes  $\alpha_{\rho}^{J' k'}$  tels que  $q' = q$  (à cause de la condition (III 44)  $q = q' + Q$ ). Le système d'équation (III 49) correspondant à  $k$  pair, se sépare donc en autant de sous-systèmes indépendants qu'il y a de valeurs de  $q$  possibles. Tous les sous-systèmes correspondant à une valeur de  $q$  non nulle sont des systèmes de Kramer à second membre nul ; leur solution est nulle :

$$\alpha_{\rho}^{J 2p} = 0 \quad \text{si } q \neq 0 \quad (\text{IV } 62)$$

Le sous-système défini par ( $k$  pair,  $q = 0$ ) du système (III 49) ne fait pas intervenir le module du champ magnétique. Les paramètres de Stokes du rayonnement émis sont donc indépendants du champ magnétique quand celui-ci est vertical. Ce sont donc les paramètres de Stokes du rayonnement émis en champ nul. Un simple raisonnement physique (Cf Chapitre I § 2.2) permet d'ailleurs de prévoir ce résultat.

L'état du rayonnement émis reflète l'état de l'atome dans l'état initial de la transition (relation (III 45)) : dans le repère  $OXYZ$ , les seuls coefficients non nuls de la matrice densité du rayonnement émis sont les coefficients  $\sigma_{\rho}^0$  et  $\sigma_{\rho}^2$ . Le repère  $OXYZ$  ayant pu être choisi tel que  $\theta = 0$ , il apparaît donc que :

$$\text{Im } \psi_{\rho}^2 = 0$$

et donc que le paramètre de Stokes U du rayonnement observé est nul. Les relations (II 48) qui permettent de calculer la direction de polarisation linéaire en fonction des paramètres de Stokes Q et U, montrent qu'alors cette direction de polarisation est l'axe Ox' (fig IV 7) si Q est positif, ou l'axe Oy' si Q est négatif. Le calcul numérique du coefficient  $\sigma_0^2$  conduisant à une valeur positive pour ce coefficient, on a donc

$$\operatorname{Re} \Psi_2^2 > 0$$

et donc

$$Q < 0$$

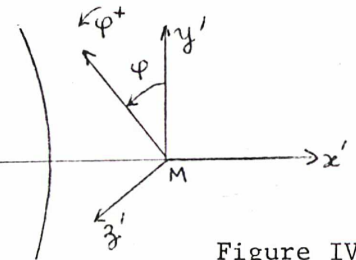


Figure IV.8

La direction de polarisation linéaire est donc l'axe Oy', que nous prendrons comme origine pour repérer la direction de polarisation (figure IV 8).

On a alors

$$\varphi = 0$$

Le calcul numérique nous donne le taux de polarisation  $\mu_{\max} = \frac{Q}{I}$  en fonction de la hauteur  $h = R - R_0$  du point observé,  $h$  étant exprimé en minutes d'arc ( $R_0 = 16.0$  minutes d'arc, 1 minute d'arc :  $4.35 \times 10^7$  m), pour une température électronique

$$T_e = 6500 \text{ K} ,$$

et une densité électronique

$$N_e = 10^{10} \text{ e}^- / \text{cm}^3 ;$$

la densité d'atomes d'Hélium est fixée à  $10^{-1} N_H$  ,

et  $N_e = 0.9 N_H$  ( Poland et al. 1971)

Les résultats sont reportés dans le tableau de la page suivante.

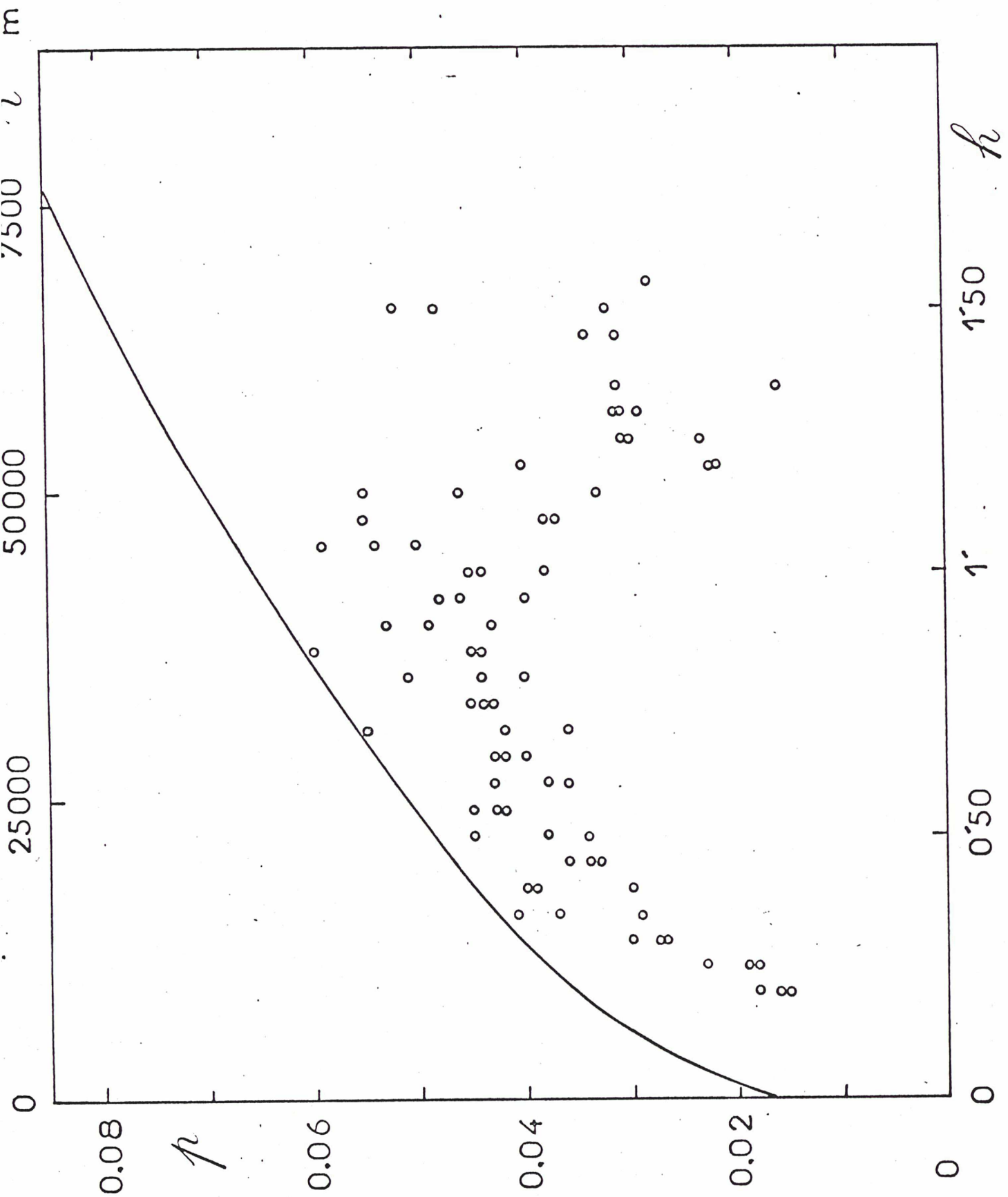


Figure IV 9. - Height variation of the observed maximum individual values of  $\rho$  as compared with the maximum polarization curve.

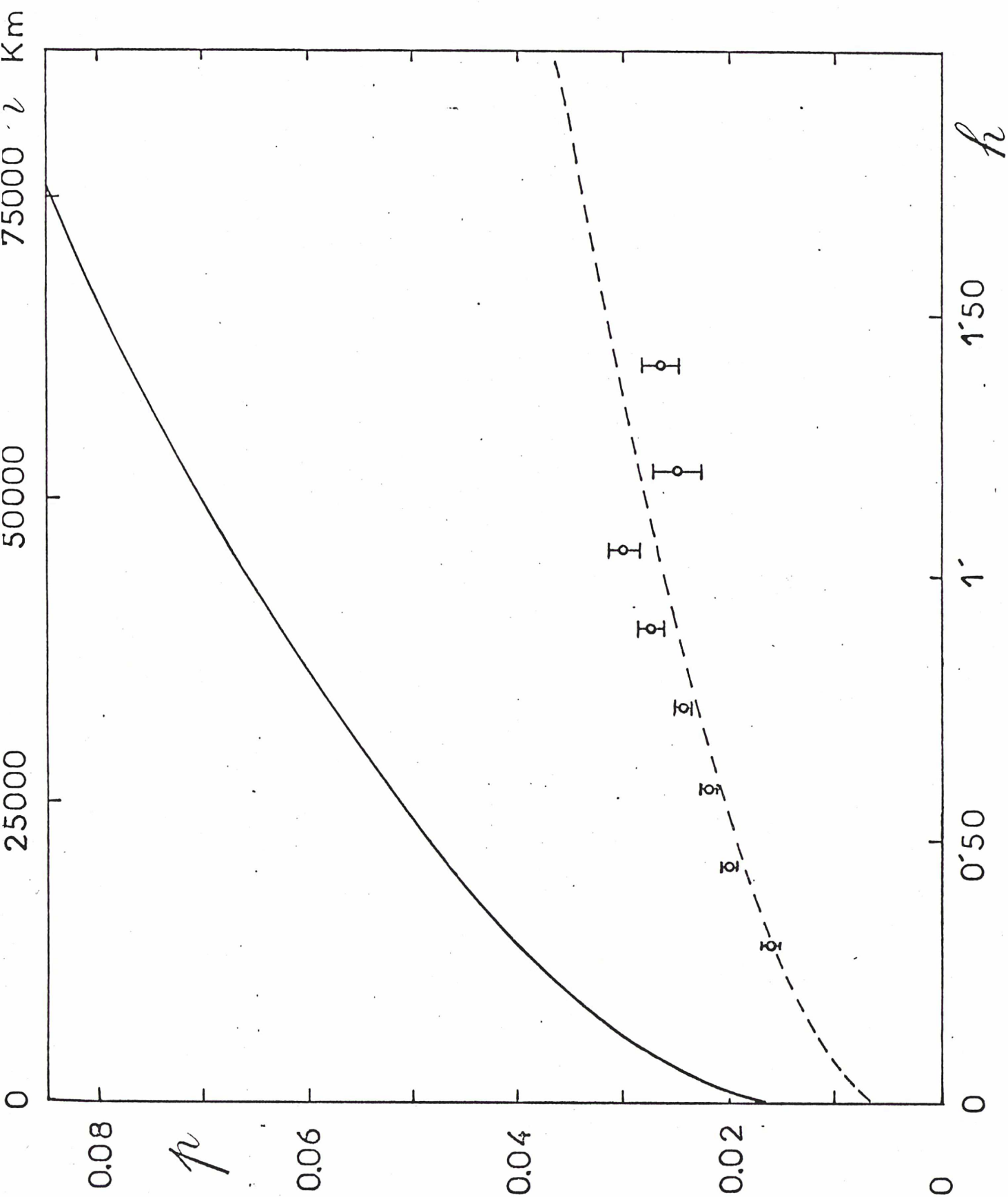


Figure IV 9bis.- Average height variation of the degree of polarization; the solid curve corresponds to the maximum theoretical polarization (pure resonance scattering); the dotted curve is the same with all ordinates divided by 2.5.

h minutes d'arc	$\rho_{\max}$ %
0.00	1.690
0.25	3.79
0.50	4.88
0.75	5.79
1.00	6.57
1.25	7.29
1.50	7.95
1.75	8.57
2.00	9.15
2.25	9.69
2.50	10.21
2.75	10.70
3.00	11.17

( IV 63)

Nous avons tracé la courbe donnant  $\rho_{\max}$  en fonction de h (fig IV 9). On a reporté sur la figure les valeurs observées du taux de polarisation. L'effet du champ magnétique étant un effet dépolarisant, il y a un bon accord entre la courbe théorique et les observations. Nous avons aussi reporté la courbe donnant la valeur moyenne des mesures pour chaque hauteur (fig IV 9 bis). Cette valeur moyenne n'étant pas très petite devant  $\rho_{\max}$ , cela confirme l'idée que la mesure du champ magnétique par étude de la dépolarisation de la raie  $D_3$  est possible dans les protubérances quiescentes (ce sont les seules qui ont été prises en compte dans ces résultats observationnels).

IV-3-2-2. Précision du résultat et influence des paramètres  $N_e$  et  $T_e$ , du nombre de niveaux et du nombre de multipoles.

Dans le système d'équations de l'équilibre statistique nous avons inclus le niveau fondamental  $1s^2 1S_0$ , les niveaux  $1snl^3 L_J$  ( $n = 2, 3, 4$ ) de He I et le niveau fondamental de He<sup>+</sup>  $1s^2 S_{1/2}$ .



Nous avons vérifié que l'introduction des niveaux  $n = 5$  de He I, des niveaux  $2s$  et  $2p$  de He<sup>+</sup> ainsi que l'ion He<sup>++</sup> dans le système d'équations de l'équilibre statistique ne modifie les populations des niveaux  $3d \ ^3D_{3,2,1}$ , et donc les paramètres de Stokes, que de 4 %, ce que nous pouvons négliger, compte tenu de la précision que nous avons sur les fréquences de Larmor (cf § IV 1.1.). Cette hypothèse a également été vérifiée par Heasley et al (1973). Ceci a confirmé l'hypothèse (vérifiée également par Heasley et al (1973)) que les états singlets autres que l'état fondamental  $1s \ ^1S$  peuvent être négligés pour le calcul des coefficients de la matrice densité pour les états triplets : en effet, puisque nous négligeons les collisions qui lient les états singlets aux états triplets (cf. Chapitre I), l'influence de ces états singlets sur la population et l'alignement des niveaux  $3d \ ^3D_{3,2,1}$  est comparable à l'influence des états  $n = 5$ , que nous avons négligés. Ceci nous permet de ne pas résoudre le problème du transfert radiatif, certaines transitions entre états singlets étant optiquement épaisses pour les conditions physiques régnant dans les protubérances ( cf Heasley et al (1973) ).

Nous avons vérifié d'autre part que l'influence des coefficients  $\alpha_{J_p q}^6$  et  $\alpha_{J_p q}^8$  sur les populations et l'alignement de tous les niveaux sont négligeables : en les omettant, on commet une erreur de 1 % sur ces coefficients de population et d'alignement.

Ceci nous permet de nous limiter aux coefficients  $\alpha_{J_p q}^4$  dans le système d'équations de l'équilibre statistique en champ non nul, et donc de diminuer le nombre de paramètres à calculer.

Nous avons ensuite étudié l'influence des paramètres  $N_e$  et  $T_e$  sur nos résultats : En calculant le taux de polarisation pour des températures électroniques de 6000 K, 7000 K, 8000K, nous n'avons obtenu qu'une variation de 1% du taux de polarisation. D'autre part, on peut montrer que le paramètre  $N_e$  s'élimine de notre système d'équations de l'équilibre statistique et n'intervient pas dans le calcul du taux de polarisation. En revanche pour une température électronique supérieure à 7000 K et une densité électronique supérieure à  $10^{11} \text{ e}^-/\text{cm}^3$ , le transfert radiatif ne doit plus être négligé (cf Heasley et al (1973) ) : par conséquent notre calcul n'est valable que pour des faibles densités (de l'ordre de 1 à  $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ).

IV-3-2-3. Taux (et direction) de polarisation en champ non nul.

Nous résolvons le système d'équations (III 49), pour lequel  $k$  est pair. L'étude précédente nous permet de ne considérer que les niveaux  $n = 1$  à  $4$  de l'Hélium neutre et le niveau  $1s$  de l'Hélium ionisé, et de ne prendre en compte que les termes  $\rho_{\alpha J}^k$  pour lesquels  $k = 0, 2, 4$ . Le système à résoudre est alors un système de 202 équations à 202 inconnues dont nous avons pu effectuer la résolution en 3 secondes sur l'ordinateur IBM 360 du CIRCE, grâce à un programme d'inversion de matrice (méthode LU) qui nous a été fourni par le centre de calcul de l'INAG.

Nous obtenons alors le taux de polarisation  $\rho$  et la direction de polarisation  $\varphi$  du rayonnement émis et nous pouvons tracer le réseau de courbes donnant  $\frac{\rho}{\rho_{\max}}$  et  $\varphi$  en fonction de  $B$  et  $\theta$ , pour les valeurs de  $\psi$  et  $h$  données (figures 5, 6a et 6b de l'article). Pour tracer ces courbes nous avons utilisé les relations de symétrie suivantes, déduites des relations (IV 59).

$$Q(\theta \pm \pi) = Q(\theta) \quad (\text{IV } 64)$$

$$U(\theta \pm \pi) = -U(\theta) \quad (\text{IV } 65)$$

c'est à dire

$$\rho(\theta \pm \pi) = \rho(\theta) \quad (\text{IV } 66)$$

$$\varphi(\theta \pm \pi) = -\varphi(\theta) \quad (\text{IV } 67)$$

Ces relations permettent de compléter par symétrie les courbes des figures 6a et 6b de l'article (Chapitre I).

On peut remarquer sur ces courbes deux ondulations. Ces ondulations traduisent la disparition de l'alignement des niveaux  $2s \ ^3S_1$  et  $2p \ ^3P_{2,1,0}$  successivement. En effet, ces alignements deviennent négligeables lorsque

$$\omega_{\alpha J} \gtrsim \Gamma_{\alpha J} \quad (\text{IV } 68)$$

où  $\omega_{\alpha J}$  est la fréquence de Larmor de l'atome dans le niveau  $\alpha J$  et  $\Gamma_{\alpha J}$  la largeur de ce niveau (§ III-2-1). Pour le niveau  $2s \ ^3S$ , qui est métastable, cette largeur est due aux absorptions et la destruction de l'alignement de ce niveau a lieu lorsque

$$B \gtrsim 0.038 \text{ Gauss} \quad (\text{IV } 69)$$

Pour les niveaux  $2p \ ^3P_{2,1,0}$  qui sont élargis principalement par leur largeur naturelle l'alignement est détruit lorsque

$$B \gtrsim 0.85 \text{ Gauss} \quad (\text{IV } 70)$$

$\mu$  et  $\varphi$  sont beaucoup moins sensibles à la destruction de l'alignement des autres niveaux ; en effet  $\mu$  et  $\varphi$  sont fonction de l'alignement des niveaux  $3d \ ^3D_{3,2,1}$ . Or le nombre d'absorptions  $2p \ ^3P_{2,1,0} \rightarrow 3d \ ^3D_{3,2,1}$  par seconde est grand devant le nombre d'absorptions ou d'émissions par seconde d'autres niveaux vers les niveaux  $3d \ ^3D_{3,2,1}$ . De même, le nombre d'absorptions  $2s \ ^3S_1 \rightarrow 2p \ ^3P_{3,2}$  par seconde est très supérieur au nombre d'émissions par seconde d'autres niveaux vers les niveaux  $2p \ ^3P_{2,1,0}$ . Ceci explique que l'alignement des niveaux  $3d \ ^3D_{3,2,1}$ , et donc  $\mu$  et  $\varphi$  qui lui sont liés, soit sensible surtout à l'alignement des niveaux  $2p \ ^3P_{2,1,0}$  qui lui-même est sensible à l'alignement du niveau  $2s \ ^3S_1$ .

#### IV-3-2-4 Limite de validité, en champ magnétique, pour les résultats.

Nous avons indiqué, au paragraphe IV-1-1, que la petite structure fine du niveau  $3d \ ^3D_{3,2,1}$  conduit à une limite de 15 Gauss pour la validité de la formule que nous avons employée pour calculer la fréquence de Larmor de ce niveau. De plus, pour des valeurs de B supérieures à 15 Gauss, il apparaît des croisements entre les sous-niveaux Zeeman issus des niveaux  $3d \ ^3D_2$  et  $3d \ ^3D_3$ , pour lesquels  $|\Delta m| = 2$  et  $|\Delta m| = 1$  (fig IV 2). Pour les valeurs du champ magnétique correspondant à ces croisements (les niveaux étant élargis de leur largeur naturelle), les cohérences  $\rho_q^{\alpha\alpha JJ' 2}$  correspondantes ne doivent plus être négligées dans les équations de l'équilibre statistique telles que nous les avons résolues (Cf III-2-1).

Pour des valeurs de B inférieures à 15 Gauss, il apparaît des croisements de sous-niveaux Zeeman pour lesquels  $|\Delta m| = 3$  et  $|\Delta m| = 4$ . Pour ces valeurs du champ magnétique, les cohérences  $\rho_q^{\alpha\alpha JJ' 4}$  sont des éléments correctifs dans le système d'équation de l'équilibre statistique. Nous supposons qu'il en est de même pour les cohérences  $\rho_q^{\alpha\alpha JJ' 4}$ , et nous n'en avons pas tenu compte. Cette hypothèse reste cependant à vérifier, ce qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

D'autres termes de l'Hélium ont une structure fine plus petite que celle du terme  $3d \ ^3D$  (en particulier celle du terme  $4d \ ^3D$ : cf. Galleron-Julien et Descourbes (1965)). Pour ces niveaux la limite de validité de la formule linéaire donnant la fréquence de Larmor, et l'apparition de croisements de sous-niveaux Zeeman ont lieu pour des valeurs de B inférieures à 15 Gauss. Cependant, nous avons indiqué au paragraphe précédent, que l'alignement et les autres cohérences de ces niveaux n'ont qu'un rôle correctif sur l'alignement des niveaux  $3d \ ^3D_{3,2,1}$  et donc  $\mu$  et  $\varphi$ . Une valeur approchée de ces cohérences est donc suffisante.

Compte-tenu de ce qui précède, nous considérons donc que les valeurs de  $\nu$  et  $\varphi$  que nous avons calculées ne sont valables que si B est inférieur à 15 Gauss.

#### IV-3-3. Application à la mesure du champ magnétique des protubérances.

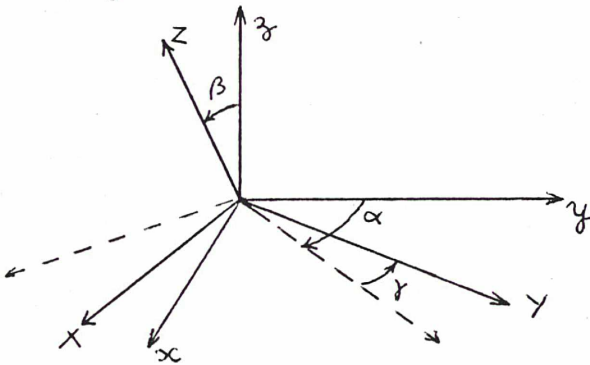
Ce point est discuté dans l'article (chapitre I § 5-2). Nous pouvons cependant rappeler que le réseau de courbes que nous avons calculé permet de déterminer les coordonnées  $(B, \theta)$  à condition de faire une hypothèse sur la coordonnée  $\psi$ . Il faudrait mesurer  $\nu$  et  $\varphi$  pour deux raies simultanément pour déterminer complètement le champ magnétique. Cette possibilité est actuellement à l'étude.

APPENDICE A<sub>II</sub>

---

CALCUL DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE DENSITE DEVELOPPEE  
SUR LA BASE DES OPERATEURS TENSORIELS IRREDUCTIBLES APRES  
UNE ROTATION DES AXES.

Comme nous l'avons vu au paragraphe II.2.2.1., un changement d'axes, qui permet de passer du repère Oxyz au repère OXYZ et défini par trois rotations d'angles  $\alpha \beta \gamma$  Messiah (1961) :



Soit  $T_q^{(k)}$  une base d'opérateurs tensoriels irréductibles associée à Oxyz, et  $V_q^{(k)}$  les opérateurs déduits de  $T_q^{(k)}$  par

$$V_q^{(k)} = \sum_{q'} e^{-i\alpha q'} n_{q'q}(\beta) e^{-i\gamma q} T_{q'}^{(k)}$$

D'après ce que nous avons vu en II.2.2., ils forment une base d'opérateurs tensoriels irréductibles associée à OXYZ.

Soit  $\Phi$  une matrice densité. Elle peut être développée sur la base  $T_q^{(k)}$ . On note alors  $^A \Phi_q^k$  ses coefficients :

$$\Phi = \sum_{kq} ^A \Phi_q^k T_q^{(k)}$$

Elle peut également être développée sur la base  $V_q^{(k)}$ . On note alors  $^N \Phi_q^k$  ses coefficients :

$$\Phi = \sum_{kq} ^N \Phi_q^k V_q^{(k)}$$

La relation de passage des coefficients  ${}^A \Phi_q^R$  (ancien repère) aux coefficients  ${}^N \Phi_q^R$  (nouveau repère) se déduit de la relation entre les opérateurs. Cette relation de passage s'écrit :

$${}^A \Phi_q^R = \sum_{q'} e^{-i\alpha q'} r_{qq'}(\beta) e^{-i\gamma q'} {}^N \Phi_q^R.$$

Les coefficients  $r_{qq'}(\beta)$  sont tabulés :

24 REPRESENTATIONS OF ROTATION GROUP II, § 2.4

TABLE I

Formulae for  $d_{mm'}^j(\beta)$  for  $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  and 2

$d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^1 = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{22}^2 = d_{-2-2}^2 = \cos^4\left(\frac{\beta}{2}\right)$
$d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^1 = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{21}^2 = -d_{12}^2 = -d_{-2-1}^2$ $= d_{-1-2}^2 = -\frac{1}{2} \sin \beta (1 + \cos \beta)$
$d_{11}^1 = d_{-1-1}^1 = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{20}^2 = d_{02}^2 = d_{-20}^2$ $= d_{0-2}^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \beta$
$d_{1-1}^1 = d_{-11}^1 = \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{2-1}^2 = d_{1-2}^2 = -d_{-21}^2$ $= -d_{-12}^2 = \frac{1}{2} \sin \beta (\cos \beta - 1)$
$d_{01}^1 = d_{-10}^1 = -d_{0-1}^1$ $= -d_{10}^1 = \sin \beta / \sqrt{2}$	$d_{2-2}^2 = d_{-22}^2 = \sin^4\left(\frac{\beta}{2}\right)$
$d_{00}^1 = \cos \beta$	$d_{11}^2 = d_{-1-1}^2$ $= \frac{1}{2} (2 \cos \beta - 1) (\cos \beta + 1)$
$d_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = d_{-\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{1-1}^2 = d_{-11}^2$ $= \frac{1}{2} (2 \cos \beta + 1) (1 - \cos \beta)$
$d_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = d_{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = -d_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= -d_{-\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= -\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{10}^2 = d_{0-1}^2 = -d_{01}^2$ $= -d_{-10}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$
$d_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = d_{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = d_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= d_{-\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$d_{00}^2 = \frac{1}{2} (3 \cos^3 \beta - 1)$
$d_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = -d_{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = -\sin^3\left(\frac{\beta}{2}\right)$	
$d_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = d_{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(3 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2\right)$	
$d_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = -d_{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(3 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2\right)$	

Dans cet ouvrage, nous n'avons utilisé ces relations de passage que pour des matrices dont les coefficients sont au plus d'ordre 2. Nous avons donc utilisé les relations de passage suivantes :

$$\left( \text{N.B.} \quad a_q^R = A \Phi_q^R, \quad \phi_q^R = N \underline{\Phi}_q^R \right)$$

$$a_0^0 = \phi_0^0.$$

$$a_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \left[ e^{-i\gamma} \phi_1^1 - e^{i\gamma} \phi_{-1}^1 \right] + \cos \beta \phi_0^1.$$

$$a_{\pm 1}^1 = \cos^2 \frac{\beta}{2} e^{\mp i(\alpha+\gamma)} \phi_{\pm 1}^1 + \sin^2 \frac{\beta}{2} e^{\mp i(\alpha-\gamma)} \phi_{\mp 1}^1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta e^{\mp i\alpha} \phi_0^1$$

$$a_0^2 = \sqrt{\frac{3}{8}} \sin^2 \beta \left[ e^{-2i\gamma} \phi_2^2 + e^{2i\gamma} \phi_{-2}^2 \right] + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta \left[ e^{-2i\gamma} \phi_1^2 - e^{i\gamma} \phi_{-1}^2 \right] \\ + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) \phi_0^2.$$

$$a_{\pm 1}^2 = \pm \frac{1}{2} \sin \beta (1 + \cos \beta) e^{\mp i(\alpha+2\gamma)} \phi_{\pm 2}^2 \pm \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta e^{\mp i(\alpha-2\gamma)} \phi_{\mp 1}^2 \\ + \frac{1}{2} (2 \cos \beta - 1) (\cos \beta + 1) e^{\mp i(\alpha+\gamma)} \phi_{\pm 1}^2 + \frac{1}{2} (2 \cos \beta + 1) (1 - \cos \beta) e^{\mp i(\alpha-\gamma)} \phi_{\mp 1}^2 \\ \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta e^{\mp i\alpha} \phi_0^2.$$

$$a_{\pm 2}^2 = \cos^4 \frac{\beta}{2} e^{\mp 2i(\alpha+\gamma)} \phi_{\pm 2}^2 + \sin^4 \frac{\beta}{2} e^{\mp 2i(\alpha-\gamma)} \phi_{\mp 2}^2 \\ \mp \frac{1}{2} \sin \beta (\cos \beta + 1) e^{\mp i(2\alpha+\gamma)} \phi_{\pm 1}^2 \\ \pm \frac{1}{2} \sin \beta (\cos \beta - 1) e^{\mp i(2\alpha-\gamma)} \phi_{\mp 1}^2 \\ + \sqrt{\frac{3}{8}} \sin^2 \beta e^{\mp 2i\alpha} \phi_0^2.$$

APPENDICE A  
III

EXPRESSION DE L'EQUATION PILOTE

L'expression de l'équation pilote donnée en (III9) (III10) (III11) n'est en fait pas exactement celle donnée par Cohen-Tannoudji (cours du Collège de France 1975-1976).

Nous allons montrer ici comment nous sommes passés de l'une à l'autre de ces expressions.

L'expression donnée par Cohen-Tannoudji est la suivante :

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ij}(t) = -i \omega_{ij} \sigma_{ij}(t) + \sum_{kl} R_{ijkl}(\omega) \sigma_{kl}(t)$$

$$\omega_{kl} \approx \omega_{ij} \approx \omega_0$$

où

$$R_{ijkl}(\omega_0) = \frac{1}{i\hbar} \langle\langle ij^+ | \mathbb{1}_R | L_{AR} \frac{1}{\hbar \omega_0 + i\varepsilon - L_0} L_{AR} | kl^+ \sigma_R(0) \rangle\rangle.$$

Dans cette expression,  $|ij^+\rangle\rangle$  est l'opérateur  $|i\rangle\langle j|$  de l'espace de Liouville; les opérateurs  $L_{AR}$  et  $L_0$  sont définis à partir des hamiltoniens  $V_{AR}$ , hamiltonien d'interaction, et  $H_0 = H_A + H_R$ , somme des hamiltoniens de chaque système A et R isolé par :

$$\frac{L_{AR}}{L_0} |ij^+ \alpha \beta^+ \rangle\rangle = \frac{V_{AR}}{H_0} |i\alpha\rangle\langle j\beta| - |i\alpha\rangle\langle j\beta| \frac{V_{AR}}{H_0} \quad (\text{A.1})$$

$\mathbb{1}_R$  est l'opérateur identité dans l'espace de Liouville associé au système R

$$\mathbb{1}_R = \sum_{\beta} |\beta\beta^+ \rangle\rangle.$$



$\omega_0$  est une fréquence, centre d'un "paquet de fréquences de Bohr" pour lequel on écrit l'équation pilote.

On peut représenter l'expression (A1) par un diagramme :

$$\oplus \begin{array}{c} i'\alpha' \\ | \\ \times \\ | \\ i\alpha \end{array} \begin{array}{c} j'\beta' \\ | \\ | \\ | \\ j\beta \end{array} \ominus \begin{array}{c} i'\alpha' \\ | \\ | \\ | \\ i\alpha \end{array} \begin{array}{c} j'\beta' \\ | \\ \times \\ | \\ j\beta \end{array} = \langle\langle i'j'^+ \alpha'\beta'^+ | L_{AR} | i\beta^+ j\beta^+ \rangle\rangle \quad (A.2)$$

où une barre verticale représente un état, sur lequel agit le hamiltonien  $H_{AR}$  indiqué par une croix.

L'opérateur  $\frac{1}{k\omega_0 + i\varepsilon - L_0}$  est un "propagateur" de l'état auquel il s'applique, qui tend vers

$$\mathcal{P} \frac{1}{k\omega_0 - L_0} - i\pi \delta(k\omega_0 - L_0) \quad (A.3)$$

quand  $\varepsilon$  tend vers 0. ( $\mathcal{P}$  est la fonction "partie principale",  $\delta$  est la fonction " $\delta$ " de Dirac).

Nous avons supposé que  $\sigma_R(0)$  est "diagonale par blocs" de même énergie :

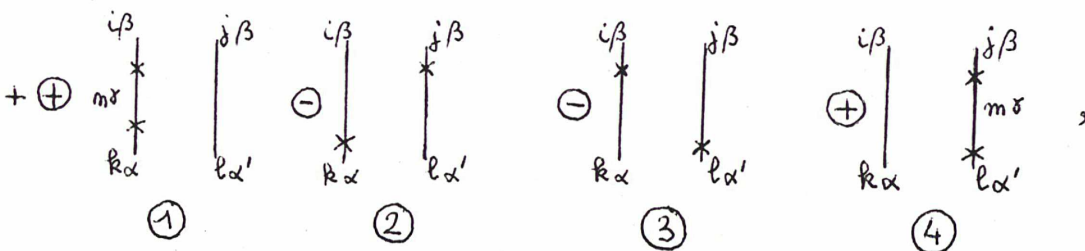
$$\sigma_R(0) = \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} P_{\alpha\alpha'} |\alpha\rangle\langle\alpha'| \quad (A.4)$$

$R_{ijkl}(\omega_0)$  s'écrit alors :

$$R_{ijkl}(\omega_0) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} \sum_{\beta} P_{\alpha\alpha'} \langle\langle ij^+ \beta\beta^+ | L_{AR} \frac{1}{k\omega_0 + i\varepsilon - L_0} L_{AR} | kl^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle \quad (A.5)$$

Et on peut exprimer par des diagrammes (A2) le coefficient :

$$\langle\langle ij^+ \beta\beta^+ | L_{AR} \frac{1}{k\omega_0 + i\varepsilon - L_0} L_{AR} | kl^+ \alpha\alpha^+ \rangle\rangle :$$



les deux opérateurs étant représentés chacun par une croix. On donne un numéro de 1 à 4 à chaque diagramme. On peut remarquer que les termes 1 et 4 ne sont non nuls que si  $l = j$  et  $\alpha' = \beta$  pour (1), et  $k=i$  et  $\alpha = \beta$  pour (2).  $R_{ijkl}(\omega_0)$  est donc la somme de 4 termes suivants associés aux quatre diagrammes :

$$\textcircled{1} \frac{1}{i\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} P_{\alpha\alpha'} \sum_{m\gamma} \langle i\alpha' | V_{AR} | m\gamma \rangle \langle m\gamma | V_{AR} | k\alpha \rangle \delta_{lj} \left[ \mathcal{P} \left( \frac{1}{E_{i\alpha} - E_{m\gamma}} \right) - i\pi \delta(E_{i\alpha} - E_{m\gamma}) \right].$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{i\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} P_{\alpha\alpha'} \sum_{m\gamma} \langle l\alpha' | V_{AR} | m\gamma \rangle \langle m\gamma | V_{AR} | j\alpha \rangle \delta_{ki} \left[ \mathcal{P} \left( \frac{1}{E_{m\gamma} - E_{j\alpha}} \right) - i\pi \delta(E_{m\gamma} - E_{j\alpha}) \right].$$

$$\textcircled{2} -\frac{1}{i\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} P_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta} \langle l\alpha' | V_{AR} | j\beta \rangle \langle i\beta | V_{AR} | k\alpha \rangle \left[ \mathcal{P} \left( \frac{1}{E_{l\alpha} - E_{j\beta}} \right) - i\pi \delta(E_{l\alpha} - E_{j\beta}) \right].$$

$$\textcircled{3} -\frac{1}{i\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} P_{\alpha\alpha'} \sum_{\beta} \langle l\alpha' | V_{AR} | j\beta \rangle \langle i\beta | V_{AR} | k\alpha \rangle \left[ \mathcal{P} \left( \frac{1}{E_{i\beta} - E_{k\alpha}} \right) - i\pi \delta(E_{i\beta} - E_{k\alpha}) \right].$$

On somme d'abord les termes (2) et (3) : l'hypothèse  $\omega_{ij} \cong \omega_{kl}$  implique  $E_{j\beta} - E_{l\alpha} \cong E_{i\beta} - E_{k\alpha}$ . Les "parties principales" s'annulent donc dans la sommation et on obtient :

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} = \Gamma_{ij \leftarrow kl} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ E_\alpha = E_{\alpha'}}} \sum_{\beta} P_{\alpha\alpha'} \langle l\alpha' | V_{AR} | j\beta \rangle \langle i\beta | V_{AR} | k\alpha \rangle \times \\ \cdot \delta(E_{i\beta} - E_{k\alpha}) :$$

c'est l'expression (III 10) du coefficient  $\Gamma_{ij \leftarrow kl}$ .

On somme ensuite (1) et (4). Les parties principales ne s'annulent plus dans la sommation, et on obtient, pour la partie réelle de (1) + (4).

$$\text{Re}(\textcircled{1} + \textcircled{4}) = -\frac{1}{2} \sum_m \Gamma_{mm \leftarrow ki} \delta_{lj} - \frac{1}{2} \sum_m \Gamma_{mm \leftarrow jl} \delta_{ki},$$

et pour la partie imaginaire de (1) + (4) :

$$\text{Im} ( \textcircled{1} + \textcircled{4} ) = -\frac{1}{2} ( \Delta_{ki} \Delta_{jl} - \Delta_{jl} \Delta_{ki} )$$

où

$$\Delta_{ki} = \frac{2}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha \alpha' \\ E_{\alpha} = E_{\alpha'}}} \sum_{\beta} \sum_{m} P_{\alpha \alpha'} \langle i \alpha' | V_{AR} | m \beta \rangle \langle m \beta | V_{AR} | k \alpha \rangle \mathcal{P} \left( \frac{1}{E_{i \alpha} - E_{m \beta}} \right).$$

Ce qui est l'expression (III 11) du chapitre III.

L'expression de l'équation pilote et alors l'expression (III 9).

### CONCLUSION

En conclusion de ce travail, on peut retenir deux points : d'une part les réseaux de courbes que nous avons calculés (fig.5, 6a et 6b de l'article) permettent de mesurer deux coordonnées du champ magnétique des protubérances quiescentes à condition de faire une hypothèse sur la troisième. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'on ne mesure que deux grandeurs : le taux de polarisation linéaire et la direction de polarisation linéaire de la raie  $D_3$ . Nos résultats peuvent être directement exploités lorsqu'on suppose que le champ magnétique des protubérances est horizontal ; cela paraît probable lorsqu'on compare les réseaux de courbes obtenus avec les résultats des observations. Mais il serait possible de déterminer complètement le champ magnétique en mesurant simultanément les paramètres de Stokes de la raie  $D_3$  et d'une autre raie émise dans les protubérances. Ce projet est actuellement à l'étude avec J.L. Leroy, à l'Observatoire du Pic du Midi, peut être pour la raie 7065 Å de l'hélium et avec P. Felenbok au site de Saint-Véran, pour la raie 10830 Å de l'Hélium et éventuellement pour d'autres. D'autre part, nos réseaux de courbes ne sont calculés que pour un champ magnétique inférieur à 15 gauss. Au delà de cette valeur, des croisements de sous-niveaux Zeeman des niveaux  $3d^3D_{3,2,1}$  apparaissent et les cohérences correspondantes de la matrice densité atomique ne doivent plus être négligées. Nous espérons pouvoir calculer l'influence de ces cohérences sur les courbes de l'effet Hanle dans un travail ultérieur, grâce au formalisme d'étude de l'interaction atome-rayonnement à l'aide de l'équation pilote, formalisme qui a été développé dans cette thèse.

Au delà de ces deux projets, bien d'autres domaines d'application de ces études de polarisation restent ouverts :

- l'interprétation de la polarisation de la raie  $H_\alpha$ , pour laquelle l'effet des croisements de niveaux sera à étudier de près, permettrait d'accéder aux champs magnétiques de protubérances quiescentes extrêmement faibles.

- la détermination des champs magnétiques des protubérances actives n'a pas encore été abordée du tout. Dans le cas de ces protubérances, le rôle dépolarisant des collisions ne pourra sans doute plus être négligé ; l'étude de la redistribution et du transfert du rayonnement devra être entreprise, de plus, l'hypothèse de l'état stationnaire ne peut pas toujours être faite

dans de telles protubérances.

- la méthode de mesure de champs magnétiques par l'étude de l'effet Hanle pourra peut-être être appliquée à d'autres champs magnétiques de la surface du soleil, où les conditions physiques (température, densité électronique) sont de mieux en mieux connues. Une telle application est actuellement à l'étude en collaboration avec M. Malinovsky (LPSP, Verrières le Buisson) pour la mesure des champs magnétiques de la zone de transition chromosphère couronne. L'effet Hanle dans les raies des queues de comètes permettrait de déterminer le champ magnétique en dehors du plan de l'écliptique. Ce domaine est encore peu exploré.

Le développement de grands instruments en astronomie permettra, dans l'avenir, de mieux connaître la réalité physique de l'univers (étoiles, galaxies, milieu interstellaire). Le "Stokes-mètre", tel que celui qui est mis au point par B. Fort, permettra de mesurer les paramètres de Stokes du rayonnement que nous recevrons et de recueillir des informations nouvelles. L'interprétation des observations passera par une étude approfondie des phénomènes physiques qui ont lieu, où la physique atomique a un rôle important à jouer, comme nous espérons l'avoir montré dans le cas de la polarisation de la raie  $D_3$  dans les protubérances solaires.

## REFERENCES

- ALLEN, C.W. 1973, *Astrophysical Quantities*, The Athlone Press, London, 3rd ed.,
- ARAKI, G. 1937, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 19, 128
- BREIT, G. 1925, *J.O.S.A.* 10, 439
- BROSSEL, J. 1964, *Pompage Optique*, in *Quantum Optics and Electronics*, Gordon and Breach, New York-London-Paris
- CHARVIN, P. 1965, *Ann. d'Astr.* 28, 877
- COHEN-TANNOUJJI, C. 1962, *Ann. Phys.* 7, 423 et 7, 469
- COHEN-TANNOUJJI, C., DIU, B., LALOE, F., 1973, *Mécanique Quantique*, ed. Hermann, Paris
- COHEN-TANNOUJJI, C. 1975-1976, *Cours du Collège de France*, Paris
- FANO, U. 1957, *Rev. Mod. Phys.* 29, 74
- FAROUX, J.P. 1969, *Thèse d'Etat*, Paris
- GALLERON-JULIENNE C. et DESCOUBES, J.P., 1965, *C.R.A.S.* 261, 916
- GINGERICH, O. NOYES, R.W., KALKOFEN, W. and CUNY, Y. 1971, *Solar Phys.* 18, 347
- HANLE, W. 1924, *Z. Phys.* 30, 93
- HEASLEY, J.N., MIHALAS, D. and POLAND, A.I. 1974, *Astrophys. J.* 192, 181
- HOUSE, L.L. 1970 a, in *Solar Magnetic fields* p.130 (Howard ed.)
- HOUSE, L.L. 1970b, *J.Q.S.R.T.* 10, 1171
- HUGGINS, W. 1869, *Proc. Roy. Soc. London* 17, 302
- HYDER, C.L. 1965, *Astrophys. J.* 141, 1374
- JANSSEN, P.J. 1868, *C.R.A.S.* 67, 838
- KARZAS, W.J. and LATTE, R. 1961, *Ap. J. Suppl.* 6, 167
- KAUL, R.D. 1968, *Letters to the Editor*, p.429

- KOPAL, Z. 1961, Numerical Analysis, Chapman and Hall, London
- LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. 1967, Tome II du Cours de Physique Théorique  
(théorie du champ) ed. Mir, Moscou
- LEROY, J.L., RATIER, G. et BOMMIER, V. 1977 Astron. Astrophys. 54, 811
- MIHALAS, D. 1970, Stellar Atmospheres, Freeman C<sup>o</sup>, San Francisco
- MITCHELL, A.C. and ZEMANSKY, M.W. 1934, Resonance Radiation and Excited  
Atoms, Cambridge University Press, New York
- MESSIAH, A. 1961, Mécanique Quantique, ed. Dunod, Paris
- MOORE, Ch., 1949, Atomic Energy Levels, NBS Circ. 467
- OMONT, A. 1965, J. Phys. Rad. 26, 26
- POLAND, A., SKUMANICH, A., ATHAY, R.G. and Tandberg Hanssen, E. 1971,  
Solar Phys. 18, 391
- SCHIFF, B., PEKERIS, C.L., et LIFSON, H. 1965, Phys. Rev. 137, 1672
- SECCHI, A. 1877, Le Soleil, Gauthiers Villars, Paris
- SHORE, B.W. et MENZEL D.H. 1968, Principles of Atomic Spectra, Wiley and  
Sons, New York London Sydney
- STOKES, G. 1852, Trans. Cambridge Phil. Soc. 9, 399
- TANDBERG HANSSSEN, E. 1974, Solar Prominences, Reidel Publ.
- VAN DE HULST, H.C. 1950, Bull. Astr. Inst. Neth. 11, 135
- WALKER, M.J. 1954, Ann. J. Phys. p.170
- WIESE, W.L., SMITH, M.W. and GLENNON, M.M. 1966, Atomic Transition  
Probabilities, Vol 1 (Washington, D.C. : U.S.  
Dept. of Commerce).

