



HAL
open science

Métriques extrémales et système de Strominger

Carl Tipler

► **To cite this version:**

Carl Tipler. Métriques extrémales et système de Strominger. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2019. tel-02140212

HAL Id: tel-02140212

<https://hal.science/tel-02140212>

Submitted on 27 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des recherches

Carl Tipler

« Métriques extrémales et système de Strominger »

Université de Bretagne Occidentale
Comue Université Bretagne Loire
École doctorale N°601
Mathématiques et Sciences et Technologies
De l'information et de la communication
Spécialité : Mathématiques fondamentales

Présentée et soutenue à Brest le 23 Mai 2019
Unité de recherche: LMBA, UMR 6205

Rapporteurs avant soutenance :

Claudio Arezzo
Sébastien Boucksom
Oscar Garcia-Prada

Professeur à l'ICTP
Directeur de recherche à l'École Polytechnique
Professeur à l'ICMAT

Composition du Jury :

Président :

Examineurs : Claudio Arezzo
Sébastien Boucksom
Gerd Dethloff
Johannes Huisman
Laurent Meersseman
Jean-Philippe Nicolas

Professeur à l'ICTP
Directeur de recherche à L'École Polytechnique
Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale
Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale
Professeur à l'Université d'Angers
Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale

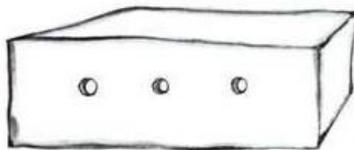
“ Et je lançai :

- Ça c’est la caisse. Le mouton que tu veux est dedans.

Mais je fus bien surpris de voir s’illuminer le visage de mon jeune juge :

- C’est tout à fait comme cela que je le voulais !”

Le petit Prince, Saint-Exupéry.



Remerciements

Je tiens à exprimer avant tout ma sincère gratitude envers les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à cette habilitation : tout particulièrement Claudio Arezzo, Sébastien Boucksom et Oscar García-Prada pour leur travail d'évaluation de ce mémoire, ainsi que Gerd Dethloff, Johannes Huisman, Laurent Meersseman et Jean-Philippe Nicolas.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Yann Rollin, pour m'avoir guidé lors de mes premiers pas de géomètre. Un grand merci également à Mario Garcia-Fernandez pour avoir partagé ses idées et m'avoir introduit au système de Strominger. Je remercie également chaleureusement Vestislav Apostolov, Alberto Della Vedova, Andrew Clarke, Roberto Rubio et Yuji Sano pour nos stimulants échanges mathématiques.

Mes travaux de recherche ont largement bénéficié de séjours, dans l'ordre chronologique, au sein du LMJL, du CIRGET, de l'ICMAT, de l'IMPA et du LMBA. Je tiens à remercier les membres de ces institutions, amis et collègues, qui ont favorisé par leur soutien la réalisation du travail présenté dans ce mémoire.

Je n'oublie pas mes parents, mes amis brestois et Céline, merci pour votre présence, bonne humeur et sourire.

Table des matières

Introduction	9
Travaux auxquels se rapporte ce texte	12
1 Métriques canoniques en géométrie kählérienne	15
1.1 Constructions de métriques extrémales par perturbations	16
1.1.1 Résolutions de singularités	16
1.1.2 Stabilité sous déformations complexes	17
1.2 Déformations et stabilité GIT	18
1.2.1 Intermède : la correspondance de Kempf-Ness	18
1.2.2 Déformations des métriques extrémales toriques	23
1.2.3 Géométrie sasakienne et stabilité	24
1.2.4 Équations couplées Kähler-Yang-Mills	24
1.3 K-énergie et quantification	25
1.3.1 Minima de la K-énergie modifiée	26
1.3.2 Borne inférieure et déformations complexes	29
1.3.3 Unicité dans une classe de Kähler	30
1.3.4 Métriques équilibrées et GIT	32
1.3.5 Tableau récapitulatif	33
1.4 Réduction symplectique et métriques canoniques	34
2 Système de Strominger et algébroides de Courant	36
2.1 Étude infinitésimale	37
2.2 Algébroides des cordes holomorphes	39
2.3 Métriques canoniques sur les algébroides des cordes	40
2.4 Perspectives	43
A Quelques notions de théorie de la déformation	45
B Algébroides de Courant	48
Bibliographie	51

Introduction

Ce texte de synthèse présente des travaux en géométrie hermitienne, à l'interface de la géométrie algébrique complexe, de l'analyse géométrique et de la physique mathématique. La recherche de *métriques canoniques* sur des objets holomorphes (variétés, fibrés, ...) est le fil conducteur de ces travaux. Un problème fondamental en géométrie complexe est celui de la classification des objets selon des familles caractérisées par certains invariants. Afin de construire des espaces de modules qui possèdent de bonnes propriétés, on est conduit à se restreindre à des familles d'objets qui possèdent des métriques spéciales, solutions d'équations issues de la physique.

Dans ce texte, on abordera deux axes de recherche :

Axe I) Métriques canoniques en géométrie kählérienne :

En géométrie kählérienne, on cherche à construire des espaces de modules de variétés polarisées. Dans ce contexte, la conjecture de Yau, Tian et Donaldson (YTD) [62, 58, 20] suggère de se restreindre aux variétés polarisées qui admettent une *métrique extrémale* au sens de Calabi [9] (voir Section 1). La recherche de ces métriques est un problème d'analyse globale intéressant et difficile, l'équation étant non-linéaire et d'ordre 4 sur la métrique de Kähler. Afin de tester la conjecture, il est nécessaire d'avoir des exemples variés de métriques extrémales. On présentera dans un premier temps dans la Section 1.1 des méthodes perturbatives de constructions de métriques extrémales qui reposent d'une part sur la *théorie du recollement*, d'autre part sur la *théorie de la déformation* (Annexe A). Les résultats obtenus sur les déformations complexes des variétés munies de métriques extrémales conduisent naturellement à tester localement la conjecture de YTD. Une version locale de cette conjecture est présentée dans la Section 1.2, et appliquée aux *variétés toriques*. Une autre approche du problème, suggérée par Donaldson, est celle de la *quantification*. La polarisation de la variété permet de plonger cette dernière dans des espaces projectifs complexes de dimension croissante (voir Section 1.3), et d'obtenir une approximation en dimension finie du problème. Les métriques dites *σ -équilibrées* fournissent une approximation des métriques extrémales tout en étant les zéros d'une *application moment* en dimension finie. Ces métriques σ -équilibrées minimisent alors une fonctionnelle et sont uniques dans une classe de Kähler donnée. Ces résultats passent alors aux métriques extrémales, qui minimisent la fonctionnelle de Mabuchi et sont uniques dans leur classe de Kähler. En lien avec la Section 1.2, on présentera également le comportement de la fonctionnelle de Mabuchi sous déformations complexes. Une interprétation GIT des résultats obtenus sera donnée. Enfin, dans la Section 1.4, on présentera des perspectives de recherche concernant les métriques extrémales et d'Hermite-Einstein.

Axe II) Système de Strominger et algébroides de Courant :

La résolution de la conjecture de Calabi par Yau implique qu'une variété de Kähler à fibré canonique trivial admet une famille de métriques Kähler-Ricci plates paramétrée par son cône de Kähler [63]. Afin d'étudier les espaces de modules de variétés complexes à fibré canonique trivial, on souhaite munir ses dernières de métriques canoniques et étendre le théorème de Yau aux variétés non kählériennes. Une suggestion de Yau [64] est de considérer des métriques solutions du système de Strominger (ou encore Hull-Strominger), motivé par la théorie des cordes [53]. Ce système couple une métrique *équilibrée* sur une variété complexe à fibré canonique trivial X à une métrique d'Hermite-Einstein sur un G fibré holomorphe $P \rightarrow X$. Le système d'équations qui en résulte offre un problème d'analyse globale difficile. Avant d'attaquer le problème par des méthodes d'analyse, on souhaite, comme pour la résolution de la conjecture de Calabi, fixer des structures holomorphes et métriques afin de réduire l'espace des paramètres considérés pour l'équation. On commencera alors par étudier la version linéarisée du problème. Ceci est l'objet de la Section 2.1, où l'on démontre l'ellipticité des équations contraintes par une condition de jauge adéquate. Dans cette étude infinitésimale, on note l'apparition d'un groupe de jauge qui décrit les symétries d'une *algébroïde de Courant* $Q \rightarrow X$, extension de l'algébroïde d'Atiyah associée à P (Annexe B). Dans la Section 2.2, on explique que toute solution du système de Strominger est portée sur une algébroïde de Courant particulière, à savoir une *algébroïde des cordes holomorphe*. Ces algébroides sont décrites et classifiées dans cette même section. En vue de la construction de l'espace des modules des solutions du système de Strominger, on développe également la théorie de déformations de ces algébroides à l'aide d'une algèbre de Lie différentielle graduée. On démontre ensuite que pour une algébroïde des cordes holomorphe Q fixée sur X , on peut introduire une notion de classe de métriques σ , appelée *classe d'Aeppli*, similaire à la notion de classe de Kähler. L'espace B_σ des métriques de σ sur Q , paramètres des équations du système de Strominger, est bien compris et permet une approche variationnelle du système, à l'aide de la fonctionnelle *dilaton* $M : B_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Par ailleurs, on obtient un résultat de stabilité des solutions sous déformations de Q et σ via une étude de la linéarisation des équations restreintes à B_σ . Enfin, dans la section 2.4, on présente les perspectives de recherche qu'offrent cette nouvelle approche au système de Strominger.

Travaux auxquels se rapporte ce texte

Axe 1 Métriques canoniques en géométrie kählérienne

[Ti3] C. Tipler, *Relative Chow stability and optimal weights*, ArXiv 1710.02536.

[STi2] Y. Sano et C. Tipler, *A moment map picture of relative balanced metrics on extremal Kähler manifolds*, ArXiv 1703.09458.

[STi] Y. Sano et C. Tipler, *Extremal metrics and lower bound of the modified K-energy*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 17 (2015), no.9, 2289–2310.

[TiV] C. Tipler et C. Van Coevering, *Deformations of constant scalar curvature Sasakian metrics and K-stability*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 22, 11566–11604.

[CTi] A. Clarke et C. Tipler, *Lower bounds on the modified K-energy and complex deformations*, Adv. Math. 252 (2014), 449–470.

[GFTi] M. Garcia-Fernandez et C. Tipler, *Deformations of complex structures and the coupled Kähler-Yang-Mills equations*, J. London Math. Soc. 89 (2014) 779-796.

[Ti2] C. Tipler, *A note on blow-ups of toric surfaces and CSC Kähler metrics*, Tohoku Math. J. (2) 66 (2014), no.1, 15–29.

[RoTi] Y. Rollin et C. Tipler, *Deformations of extremal toric manifolds*, J. Geom. Anal. 24 (2014), no 4, 1929–1958.

[RoSTi] Y. Rollin, S. Simanca et C. Tipler, *Deformation of extremal metrics, complex manifolds and the relative Futaki invariant*, Math. Z. 273 (2013), no. 1-2, 547–568.

[Ti1] C. Tipler, *Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*, Bull. Soc. Math. France 141, fascicule 3 (2013), 481–516.

[Ti0] C. Tipler, *Constructions de Métriques extrémales, résolutions de singularités et déformations complexes*, Thèse de doctorat, Nantes (2011).

Axe 2 Système de Strominger et algébroides de Courant

[GFRuTi2] M. Garcia-Fernandez, R. Rubio et C. Tipler, *Holomorphic string algebroids*, ArXiv 1807.10329.

[GFRuSTi] M. Garcia-Fernandez, R. Rubio, C. Shahbazi et C. Tipler, *Canonical metrics on holomorphic Courant algebroids*, ArXiv 1803.01873.

[RuTi] R. Rubio et C. Tipler, *The Lie group of automorphisms of a Courant algebroid and the moduli space of generalized metrics*, ArXiv 1612.03755.

[GFRuTi] M. Garcia-Fernandez, R. Rubio et C. Tipler, *Infinitesimal moduli for the Strominger system and Killing spinors in generalized geometry*, Math. Annalen, October 2017, Volume 369, Issue 1–2, pp 539–595.

Axe de recherche 1

Métriques canoniques en géométrie kählérienne

Une variété kählérienne compacte (X, ω) est une variété complexe compacte X munie d'une $(1, 1)$ -forme fermée et positive $\omega \in \Omega^{1,1}(X, \mathbb{R})$. Si $X = (M, J)$, où M est la variété différentielle sous-jacente et J désigne le tenseur de structure presque-complexe intégrable associé à la structure complexe de X , la positivité de ω est par définition l'existence d'une métrique hermitienne g sur (M, J) telle que $g(J \cdot, \cdot) = \omega$. On cherche alors à savoir s'il existe une meilleure métrique kählérienne représentant la classe de Kähler $\Omega = [\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$. Ce problème propose de généraliser le théorème d'uniformisation des surfaces en dimension supérieure. On note \mathcal{M}_Ω l'ensemble des métriques de Kähler sur X dont la classe de Kähler est Ω et suivant Calabi [9] on définit :

Définition 1.0.1. *Une métrique extrémale est un point critique de la fonctionnelle de Calabi :*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{M}_\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \int_M s_h^2 dvol_h \end{aligned} \quad (1.1)$$

où s_h désigne la courbure scalaire de h .

Ces métriques généralisent les métriques à courbure scalaire constante (cscK) et les métriques de Kähler-Einstein. L'unicité d'une métrique extrémale, si elle existe, a été démontrée par Berman et Berndtsson [5] (voir également [14]). L'existence n'est en revanche pas toujours assurée comme le montre des exemples de Levine [40]. Dans le cas *polarisé*, où la classe de Kähler est la première classe de Chern d'un fibré en droite ample L sur X , une conjecture formulée par Tian, Yau et Donaldson dans le cas Kähler-Einstein puis cscK, étendue au cas extrémal par Székelyhidi, est la suivante :

Conjecture 1.0.1 ([62, 58, 20, 54]). *Il existe une métrique cscK (respectivement extrémale) représentant $c_1(L)$ sur X si et seulement si (X, L) est K -stable (respectivement relativement K -stable).*

Cette conjecture est motivée par la correspondance de Kobayashi-Hitchin pour les fibrés et la K -stabilité est à comprendre au sens de la GIT (théorie géométrique des invariants, voir Section 1.2.1). Une telle correspondance entre variétés stables et métriques spéciales aurait des applications dans la construction des espaces de modules, algébriques ou métriques. Jusqu'à présent seul le sens direct de la conjecture a été démontré, et des exemples suggèrent que cette notion de stabilité ne soit pas suffisante pour prouver la réciproque [2]. Cependant, dans le cas Fano, c'est à dire $L = -K_X$ où K_X est le fibré canonique de X , le contrôle sur la courbure donné par l'équation de Kähler-Einstein permet une preuve de cette conjecture [13]. Le cas général semble encore hors de portée.

1.1 Constructions de métriques extrémales par perturbations

L'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle de Calabi \mathcal{C} est équivalente au fait que le champ de vecteur

$$V_g := \text{grad}_g(s_g) \quad (1.2)$$

soit un champ de vecteur holomorphe.

Définition 1.1.1. *Soit g une métrique de Kähler extrémale. On appelle JV_g le champ de vecteur extrémal.*

Le champ de vecteur extrémal est un champ de vecteur holomorphe et hamiltonien pour ω donc une symétrie de la structure de Kähler, et son potentiel hamiltonien est la courbure scalaire de g . Par ailleurs, les points critiques de la fonctionnelle de Calabi \mathcal{C} sont tous des minima locaux et donc une métrique g est extrémale si et seulement si

$$\bar{\partial}V_g = 0. \quad (1.3)$$

Ceci est une EDP non-linéaire d'ordre 4 sur la métrique pour laquelle il n'existe actuellement pas de méthode générale de résolution. Il est très difficile de savoir si une variété kählérienne donnée admet une métrique extrémale. Plusieurs méthodes d'approches sont utilisées pour comprendre ce problème du point de vue analytique, des méthodes de flots, de continuité, des approches variationnelles et enfin des méthodes perturbatives. Ces dernières forment l'objet d'étude principal du texte [Ti0], composé de deux parties indépendantes, et dont le but a été la construction de nouveaux exemples explicites de métriques extrémales afin d'étoffer un peu la théorie.

1.1.1 Résolutions de singularités

Dans [Ti0], on propose une adaptation dans le cadre orbifold d'un théorème d'Arezzo, Pacard et Singer [4] (voir aussi [56]). D'après ces derniers, si on éclate une variété extrémale en des points satisfaisant une certaine condition de stabilité, on peut munir la variété éclatée d'une métrique extrémale. Dans le cas de la résolution d'orbifolides, on obtient un résultat similaire pour les résolutions des singularités Hirzebruch-Jung. Ces singularités sont les quotients de \mathbb{C}^2 par l'action d'un sous-groupe cyclique fini de $U(2)$. Le théorème est alors le suivant :

Théorème 1.1.2 ([Ti0]). *Soit (X, ω) une surface orbifolde kählérienne munie d'une métrique extrémale. Si les singularités (A_i) de X sont isolées et du type Hirzebruch-Jung, alors on peut munir une résolution minimale de X d'une métrique extrémale.*

Plus précisément, si on pose $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution minimale, on obtient une famille de métriques extrémales sur \tilde{X} qui converge vers $\pi^{-1}(\omega)$ en topologie C^∞ sur tout compact en dehors des diviseurs exceptionnels de la résolution. Les volumes de ces diviseurs exceptionnels pour ces métriques convergent vers 0. Afin de démontrer ce résultat on utilise une méthode de recollement. On découpe la variété X en la réunion de boules orbifoldes B_i centrées en les singularités A_i et le complémentaire $X_r = X \setminus \cup_i B_i$ de ces boules. On munit X_r de la métrique extrémale ω et une résolution minimale Y_i des B_i d'une métrique ALE construite par Calderbank et Singer [10]. Il s'agit ensuite de recoller les Y_i à X_r afin d'obtenir la résolution. On utilise alors la méthode de perturbation développée par Arezzo, Pacard et Singer [4] afin de modifier les métriques considérées de telle sorte qu'elles restent extrémales et que leurs potentiels coïncident sur le bord pour assurer le recollement.

On obtient comme application de nouveaux exemples de métriques extrémales sur des éclatements de surfaces réglées. Une surface réglée est l'espace total d'une fibration $\mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$ où E

est un fibré holomorphe de rang deux sur une surface de Riemann Σ . La surface $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}$, où \mathbb{D} est le disque de Poincaré, est munie d'une métrique extrémale construite par Tønnesen-Friedman [59]. On considère des quotients de cette surface sous l'action d'une représentation du groupe fondamental orbifold d'une surface de Riemann orbifold hyperbolique. Cette action se fait par isométries sur la métrique de Tønnesen-Friedman et les quotients obtenus sont des orbisurfaces réglées. Le Théorème 1.1.2 s'applique et les résolutions minimales de ces surfaces admettent des métriques extrémales. L'utilisation de la classification de Kodaira des surfaces et de la géométrie torique permet d'identifier précisément les surfaces obtenues. On obtient alors une large famille de nouvelles métriques extrémales [Ti1].

1.1.2 Stabilité sous déformations complexes

Dans un travail en collaboration avec Yann Rollin et Santiago Simanca, on s'intéresse à la stabilité des métriques extrémales sous déformations complexes, via des méthodes analytiques. Soit (X, ω) une variété kählérienne avec $g = \omega(J\cdot, \cdot)$ extrémale.

Définition 1.1.3. *Une déformation complexe de X est une submersion holomorphe propre entre variétés complexes $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ telle que $\pi^{-1}(0)$ soit isomorphe à X pour un point $0 \in B$.*

D'après un résultat de Kodaira et Spencer, quitte à restreindre B , on peut supposer que les fibres de π sont toutes kählériennes et on aimerait savoir sous quelles conditions une fibre $\mathcal{X}_t := \pi^{-1}(t)$ admet une métrique extrémale. Le Brun et Simanca ont déjà obtenu un résultat concernant cette question dans le cas particulier des métriques à courbure scalaire constante [43].

Si l'on souhaite déformer la métrique g de manière lisse, l'équation (1.3) impose de préserver les automorphismes engendrés par V_g . Ceci suggère de se limiter aux déformations complexes de la variété qui préservent certaines symétries. On introduit alors un cadre équivariant de *déformations complexes relatives* intervenant naturellement dans les déformations des métriques extrémales. Une telle déformation est munie d'une action holomorphe d'un groupe G qui préserve les fibres. Dans ce cadre équivariant, suivant Gauduchon [29], on définit la courbure scalaire réduite s_g^G d'une métrique g comme étant la projection L^2 de la courbure scalaire s_g sur l'orthogonal des potentiels hamiltoniens de $\text{Lie}(G)$ de telle sorte qu'une métrique est extrémale avec son champ de vecteur extrémal dans $\text{Lie}(G)$ si et seulement si sa courbure scalaire réduite s_g^G est identiquement nulle. On introduit aussi l'invariant de Futaki relatif Fut_g^G qui généralise un invariant déjà connu dans le cas absolu [26] (équation (1.9)). On reviendra plus en détail sur ces notions dans la Section 1.2.1, mais notons déjà que si g est extrémale, on a l'équivalence $\text{Fut}_g^G = 0$ si et seulement si $s_g^G = 0$. On cherche alors à suivre le lieu des zéros de Fut_g^G lors de la déformation complexe et on dira que l'invariant de Futaki relatif est non-dégénéré si sa différentielle par rapport à la classe de Kähler est non-nulle. Un théorème de fonction implicite permet alors de démontrer :

Théorème 1.1.4 ([RoSTi]). *Soit (X, ω) une variété kählérienne munie d'une métrique extrémale g et soit $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ une déformation complexe relative à un groupe G . On suppose :*

- G est un sous-groupe compacte connexe du groupe des isométries de (X, ω)
- $s_g^G = 0$ (ou de manière équivalente $JV_g \in \text{Lie}(G)$)
- l'invariant de Futaki relatif Fut_g^G est non-dégénéré

Alors les fibres proches de X dans la déformation complexe admettent une métrique extrémale.

On exhibe ainsi des déformations de la variété de Mukai et Umemura qui admettent des métriques Kähler-Einstein, retrouvant un résultat du à Donaldson via une méthode différente [22].

1.2 Déformations et stabilité GIT

La Conjecture 1.0.1 propose de relier l'existence de métriques canoniques à une stabilité algébro-géométrique. Pour arriver à une telle correspondance, on peut commencer par étudier le problème local. Si une variété admet une métrique canonique, on souhaite relier l'existence d'une métrique canonique sur des petites déformations de cette variété à une stabilité algébrique locale. Cette méthode, proposée initialement par Donaldson [22], a été employée avec succès dans trois contextes différents décrits dans la suite (Sections 1.2.2, 1.2.3 et 1.2.4). On commencera par donner quelques rappels sur la correspondance de Kempf-Ness qui motive les résultats présentés.

1.2.1 Intermède : la correspondance de Kempf-Ness

On présente de manière succincte la correspondance de Kempf-Ness qui relie les quotients dans les catégories algébrique et symplectique. On présente ensuite le formalisme de Donaldson et Fujiki qui motive la conjecture YTD.

Quotient algébrique et stabilité

En géométrie algébrique, une façon de faire des quotients est via la théorie géométrique des invariants, ou GIT. Soit

$$\iota : Z \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

une variété projective et supposons qu'un groupe algébrique réductif

$$G \subset SL(n+1, \mathbb{C})$$

agisse sur Z , via son action sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. La variété Z est décrite par son anneau de fonctions

$$R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]/I(Z)$$

où $I(Z)$ est l'idéal annulateur de Z . L'action de G sur Z induit une action sur R , et le quotient GIT de Z par G est par définition la variété projective Y dont l'anneau de fonctions est R^G , invariants de R sous l'action de G . On obtient aussi par construction une application quotient

$$\pi : Z^{ss} \rightarrow Y$$

où $Z^{ss} \subset Z$ est l'ensemble des orbites dites *semi-stables*, formées par les points $x \in Z$ pour lesquels il existe un élément $f \in R^G \setminus \{0\}$ avec $f(x) \neq 0$. Le quotient GIT de Z par G est alors formé en ne considérant que les orbites semi-stables de Z . Ce quotient a de bonnes propriétés géométriques si l'on se restreint à l'ensemble des points *stables* $Z^s \subset Z^{ss}$. On pose $L = \iota^*\mathcal{O}(1)$ la polarisation induite par le plongement de Z . Un point $x \in Z$ est dit stable si son stabilisateur est fini, et si l'orbite d'un relevé $\tilde{x} \in L_x$ sous l'action de G est fermée. Ainsi, les orbites de Z^s sont séparées par R^G . Enfin, les points x pour lesquels l'orbite d'un élément $\tilde{x} \in L_x$ est fermée mais de stabilisateur de dimension positive sont appelés *polystables*.

En pratique, la stabilité est testée à l'aide du critère de Hilbert-Mumford. Ce dernier assure que l'orbite de $\tilde{x} \in L_x$ est fermée si et seulement si les \mathbb{C}^* -orbites de \tilde{x} sont fermées pour tous les sous groupes à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$. À chacun de ces sous groupes $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ on peut associer un poids $w_\lambda(x)$ qui décrit l'action de λ sur L_{x_0} , où $x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$. La positivité de ce poids caractérise la fermeture de la \mathbb{C}^* -orbite de \tilde{x} et ceci donne un critère numérique de stabilité. La version analytique de ce critère est donnée par la *fonctionnelle de Kempf-Ness*

$$t \mapsto \log \|\lambda(t) \cdot \tilde{x}\| \tag{1.4}$$

dont la stricte convexité est équivalente à $w_\lambda(x) > 0$.

Réduction symplectique

Si ω est une forme de Kähler sur Z qui représente la première classe de Chern de la polarisation L , et si K est une forme compacte de G qui agit par symplectomorphismes sur (Z, ω) , il est naturel de construire un quotient de (Z, ω) par K dans la catégorie symplectique. Supposons que l'action de K admette une *application moment*, c'est à dire une application équivariante

$$\mu : Z \rightarrow \text{Lie}(K)^*$$

qui vérifie :

$$\forall \xi \in \text{Lie}(K), d\mu(\xi) = \iota_{\hat{\xi}}\omega$$

où $\hat{\xi}$ désigne le champ de vecteur induit par ξ sur Z via l'action infinitésimale de K sur Z . Si 0 est une valeur régulière de μ , la réduction symplectique de Marsden et Weinstein est alors le quotient

$$\mu^{-1}(0)/K$$

et la restriction de ω à $\mu^{-1}(0)$ induit une structure symplectique sur ce quotient. Par un résultat de Kempf et Ness [36], le quotient GIT et la réduction symplectique de Marsden et Weinstein sont en correspondance. Plus précisément :

Théorème 1.2.1 ([36]). *Avec les notations qui précèdent, une G -orbite contient un zéro de l'application moment si et seulement si elle est formée de points polystables. Un tel zéro est alors unique, modulo l'action de K .*

Symétries

On termine cette discussion assez générale sur la réduction kählérienne par quelques précisions sur le rôle des symétries. La recherche d'un zéro de μ dans une G -orbite est un problème qui admet des obstructions géométriques. Supposons pour simplifier que G soit un tore complexe, et soit $x \in Z$. On pose $\text{Lie}(G)_x$ l'algèbre de Lie du stabilisateur de x dans G . On peut démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \chi_x : \text{Lie}(G)_x &\rightarrow \mathbb{C} \\ v &\mapsto \langle \mu(x), v \rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

ne dépend pas du point x choisi dans la G -orbite. On obtient un caractère χ_x qui doit s'annuler si $\mu^{-1}(0) \cap G \cdot x \neq \emptyset$. Le stabilisateur de x , que l'on interprète comme des symétries de ce point, forme une obstruction à la recherche de zéros de μ . Si l'on cherche à la place à minimiser $\|\mu\|^2$ sur une G -orbite, pour $\|\cdot\|$ une norme hermitienne Ad-invariante sur $\text{Lie}(G)$, on s'affranchit de cette obstruction. En effet, l'équation d'Euler-Lagrange pour ce nouveau problème est $\mu(x) \in \text{Lie}(G)_x$ et le stabilisateur facilite la recherche de solutions.

Conjecture YTD

L'interprétation par Donaldson [18] et Fujiki [34] de la courbure scalaire comme une application moment motive alors la conjecture YTD. Soit \mathcal{J}_ω l'espace des structures presque complexes intégrables compatibles avec une forme symplectique fixée ω sur une variété compacte X . Cet espace admet une structure de Kähler formelle $(\Omega_{\mathcal{J}}, J_{\mathcal{J}})$. Si l'on identifie, pour $J \in \mathcal{J}_\omega$, l'espace tangent $T_J \mathcal{J}_\omega$ à l'espace des endomorphismes $\dot{J} \in \text{End}(TX)$ qui anticommulent avec J et qui sont symétriques pour $g_J = \omega(\cdot, J\cdot)$, cette structure de Kähler est donnée par :

$$\forall (\dot{J}_1, \dot{J}_2) \in T_J \mathcal{J}_\omega, J_{\mathcal{J}} \dot{J}_1 := J \dot{J}_1 \text{ et } \Omega_{\mathcal{J}}(\dot{J}_1, \dot{J}_2) := \int_X \text{tr}(J_{\mathcal{J}} \dot{J}_1 \dot{J}_2) d\text{vol}_\omega. \quad (1.6)$$

Soit \mathcal{G} le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens de ω . Le groupe \mathcal{G} agit sur \mathcal{J}_ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{J}_\omega &\rightarrow \mathcal{J}_\omega \\ (\phi, J) &\mapsto d\phi \circ J \circ d\phi^{-1} \end{aligned}$$

avec une action hamiltonienne qui préserve la structure de Kähler $(\Omega_{\mathcal{J}}, J_{\mathcal{J}})$. Pour décrire son application moment, on rappelle que l'algèbre de Lie de \mathcal{G} est l'espace des fonctions lisses sur X modulo les constantes $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})/\mathbb{R}$, muni du crochet de Poisson. Elle peut être identifiée à son dual via le produit L^2 défini par ω :

$$(f, g) \mapsto \int_X fg \, d\text{vol}_\omega. \quad (1.7)$$

Sous cette identification, l'application moment $\mu_{\mathcal{J}}$ de l'action de \mathcal{G} sur $(\mathcal{J}_\omega, \Omega_{\mathcal{J}})$ n'est autre que la courbure scalaire :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{J}} : \mathcal{J}_\omega &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \\ J &\mapsto s_{g_J} - s_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

où s_{g_J} désigne la courbure scalaire de g_J et s_0 est la moyenne de s_{g_J} sur (X, ω) . Un autre fait remarquable est que malgré l'absence d'une complexification de \mathcal{G} , il est possible de donner un sens à l'orbite complexifiée de J , qui correspond à l'espace des métriques de Kähler dans la classe $[\omega]$ sur (X, J) . Les métriques cscK sont alors les zéros pour une application moment dans une \mathcal{G}^c -orbite et devraient donc correspondre, comme le suggère le Théorème 1.2.1, à des variétés stables en un sens GIT.

Dans le formalisme de Donaldson et Fujiki, on remarque également que la fonctionnelle de Calabi (1.1) est la norme L^2 de l'application moment $\mu_{\mathcal{J}}$. L'obstruction (1.5) introduite plus haut admet également un analogue pour les métriques cscK, appelé *invariant de Futaki* [26] que l'on notera $\text{Fut}_{[\omega]}$. Il est défini sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes et hamiltoniens pour ω , et ne dépend que de la classe $[\omega]$. Si V_ϕ est un champ de vecteur holomorphe hamiltonien pour ω , d'hamiltonien ϕ , l'invariant de Futaki est défini par

$$\text{Fut}_{[\omega]}(V_\phi) = \int_X (s_\omega - s_0) \phi \, d\text{vol}_\omega. \quad (1.9)$$

Son annulation est une condition nécessaire à l'existence d'une métrique cscK dans la classe $[\omega]$, et une métrique extrémale ω est cscK si et seulement si $\text{Fut}_{[\omega]} = 0$.

La correspondance de Kempf-Ness conduit à introduire la notion de *K-stabilité* pour les variétés. Pour cela, on considère un analogue des sous-groupes à un paramètre dans le critère numérique de Hilbert-Mumford. Soit donc (X, L) une variété de Kähler polarisée. Une *configuration test* pour (X, L) est la donnée d'une famille plate, normale et polarisée $p : (\mathcal{X}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{C}$ qui soit \mathbb{C}^* -équivariante par rapport à l'action standard de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C} et telle que $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1) := p^{-1}(1)$ soit isomorphe à (X, L) . Soit alors $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ une telle configuration test. L'action de \mathbb{C}^* sur la fibre centrale $(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0)$ induit une action sur les espaces de sections $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^k)$. On notera w_k le poids de cette action et d_k la dimension de $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^k)$. Le théorème de Riemann-Roch et sa version équivariante donnent un développement :

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2}).$$

L'invariant de Donaldson-Futaki de $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ peut être défini par

$$DF_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})} := F_1. \quad (1.10)$$

Cet invariant correspond au poids dans le critère numérique de Hilbert-Mumford.

Remarque 1.2.2. *Il existe une formule d'intersection qui permet de définir l'invariant de Futaki et généraliser la conjecture YTD au cadre non polarisé. C'est l'approche initialisée par Sjöström Dyrefelt et Dervan-Ross.*

On dira qu'une configuration test est triviale si elle est isomorphe au produit $(X, L) \times \mathbb{C}$ et que l'action de \mathbb{C}^* sur (X, L) est triviale. On a alors :

Définition 1.2.3 ([20]). *La paire (X, L) est K -stable si pour toute configuration test non-triviale $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, on a $DF_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})} > 0$.*

L'invariant de Futaki (1.9) d'un champ de vecteur hamiltonien V_ϕ est, à une constante multiplicative près, l'invariant de Donaldson-Futaki de la configuration test produit $(X, L) \times \mathbb{C}$ munie de l'action induite par le champ de vecteur V_ϕ . De plus, la K -stabilité apparaît comme une version asymptotique de la stabilité au sens de Chow de (X, L^k) (voir Section 1.3.4). Ces considérations sont de nouveaux indices pour supporter la Conjecture 1.0.1.

Enfin, les métriques extrémales admettent également une interprétation en terme d'application moment. De même, la conjecture YTD admet une version relative, introduite par Székelyhidi. Elle relève essentiellement d'une adaptation T -équivariante de la conjecture YTD, où T est un tore maximal de symétries de $\text{Aut}(X, L)$. On peut adapter les notions définies précédemment au cadre relatif. Par exemple, la courbure scalaire est remplacée par la *courbure scalaire réduite* s_ϕ^T , obtenue par projection L^2 de la courbure scalaire sur l'orthogonal des fonctions hamiltoniennes de champs de vecteurs engendrés par $\text{Lie}(T)$ (voir Section 1.3, équation (1.16) pour une définition précise). L'invariant de Futaki modifié $\text{Fut}_{[\omega]}^T$, est calculé pour tout champ de vecteur V_ϕ dans le centralisateur de T dans $\text{Aut}(X, L)$ et est défini par :

$$\text{Fut}_{[\omega]}(V_\phi) = \int_X (s_\omega^T) \phi \, d\text{vol}_\omega. \quad (1.11)$$

De manière générale, on dénotera avec un exposant T les versions relatives des objets considérés.

On résume les analogies de cette section dans le tableau suivant :

	Kempf-Ness	Conjecture YTD
Variété	(Z, ω)	$(\mathcal{J}_\omega, \Omega_{\mathcal{J}})$
Groupe de jauge	K	\mathcal{G}
Complexification	$G = K^c$	Orbites complexifiées
Application moment	μ	$s_{g_J} - s_0$
Stabilisateur	$\text{Lie}(G)_x$	$\text{Lie}(\text{Aut}_0(X, J))$
Obstruction	χ_x	$\text{Fut}_{[\omega]}$
Norme L^2 du moment	$\ \mu\ ^2$	$\int_X (s_{g_J} - s_0)^2 \text{dvol}_{g_J}$
Points critiques	$\mu(x) \in \text{Lie}(G)_x$	Métriques extrémales
Sous-groupes à 1 paramètre	$\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$	Configurations tests
Hilbert-Mumford	$\forall \lambda, w_\lambda(x) > 0$	$\forall (\mathcal{X}, \mathcal{L}), DF_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})} > 0?$
Fonctionnelle de Kempf-Ness	$t \mapsto \log \ \lambda(t) \cdot \tilde{x}\ $	K-énergie (cf Section 1.3)
Stabilité	Stabilité GIT	K -stabilité?

1.2.2 Déformations des métriques extrémales toriques

On rappelle que les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{T}_X)$ d'une variété complexe compacte X renseignent sur la théorie de déformation de X . En particulier, $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ caractérise les déformations infinitésimales de X et, dans des cas favorables, peut être vu comme un espace tangent à une famille semi-universelle de déformations de X [39]. L'espace $H^2(X, \mathcal{T}_X)$ donne des obstructions à l'intégration d'éléments de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ en déformations complexes. On renvoie à l'Annexe A pour un bref rappel sur la théorie des déformations.

Soit une variété kählérienne extrémale $(X, \omega) = (M, J, \omega)$. Dans un travail en collaboration avec Y. Rollin [RoTi], on montre qu'il existe une métrique extrémale sur une petite déformation $X' = (M, J')$ compatible avec ω si la déformation infinitésimale correspondante dans $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ est stable en un sens GIT. Ce travail est une extension du résultat correspondant au cas cscK traité par Székelyhidi [55]. On obtient ainsi un critère algébrique suffisant pour assurer l'existence d'une métrique extrémale lors d'une déformation complexe. On étudie par ailleurs ce critère algébrique sur les *variétés toriques*. Les variétés toriques sont des variétés de Kähler munies d'une action hamiltonienne effective d'un tore de dimension maximale. Leurs symétries permettent une description combinatoire de leur géométrie. Soit (X, ω) une telle variété et soit T^c le tore complexe associé. L'action de T^c sur X induit une représentation de T^c sur $H^1(X, \mathcal{T}_X)$. Cet espace admet alors une décomposition en somme directe de sous-espaces selon les poids p_X de l'action. Notre résultat principal est alors le suivant :

Théorème 1.2.4 ([RoTi]). *Soit (X, L) une variété torique lisse compacte polarisée munie d'une forme de Kähler à courbure scalaire constante ω . Soit K le groupe des isométries hamiltoniennes de (X, ω) . Si $K^{\mathbb{C}} = T^{\mathbb{C}}$ et si $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$, alors il existe une déformation complexe de X munie d'une métrique cscK si et seulement si il existe $(a_j)_{j=1..r} \in (\mathbb{N}^*)^r$ et $(n_j)_{j=1..r} \in p_X^r$ tels que $\sum_j a_j n_j = 0$.*

On démontre également un analogue de ce théorème dans le cas extrémal. Sous les hypothèses du théorème, il existe une famille *semi-universelle* de déformations complexes

$$\mathcal{X} \rightarrow B \subset H^1(X, \mathcal{T}_X)$$

de X et le résultat obtenu peut être précisé :

Théorème 1.2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2.4, une fibre \mathcal{X}_t de \mathcal{X} admet une métrique cscK si et seulement si l'orbite sous l'action de T^c de $t \in H^1(X, \mathcal{T}_X)$ est fermée.*

La preuve du Théorème 1.2.5 repose sur la construction d'une tranche à la Kuranishi [39] (voir Annexe A). Suivant [55], on montre qu'il existe une application holomorphe et T^c -équivariante

$$\Phi : U \rightarrow \mathcal{J}_\omega$$

d'un voisinage de U de 0 dans $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ vers un voisinage \mathcal{V} de $\Phi(0) = J$ dans \mathcal{J}_ω telle que la \mathcal{G} -orbite complexifiée de toute structure presque complexe J' proche de J intersecte l'image de Φ . L'image $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}_\omega$ de Φ induit une famille semi-universelle de déformations T -équivariantes de X . L'application courbure scalaire, vue comme application moment $\mu_{\mathcal{J}}$, se restreint à \mathcal{T} , ainsi que la forme symplectique $\Omega_{\mathcal{J}}$. On obtient par restrictions une application moment $\mu_{\mathcal{T}}$ pour l'action de T sur $(\mathcal{T}, \Omega_{\mathcal{T}})$. Par le théorème de Kempf-Ness, une orbite fermée sous l'action de T^c sur $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ donne un zéro de l'application moment μ_0 associée à la forme symplectique $(\Phi^* \Omega_{\mathcal{T}})_0$. On peut comparer μ_0 à $\Phi^* \mu_{\mathcal{T}}$, et un argument de perturbation permet alors d'annuler $\mu_{\mathcal{T}}$ dans une T^c -orbite. On obtient alors une métrique cscK sur la déformation de X correspondante. La réciproque du Théorème 1.2.5 repose sur un résultat de Stoppa [52], adapté au cadre équivariant,

à savoir que l'existence d'une métrique cscK sur X dans la classe $c_1(L)$ implique la K-stabilité de (X, L) . Si $t \in H^1(X, \mathcal{T}_X)$ a une T^c -orbite non fermée, on construit une famille à un paramètre de déformations pour \mathcal{X}_t qui dégénère en X , soit une configuration test. Ici, (X, L) admettant une métrique cscK, l'invariant de Donaldson-Futaki est l'invariant de Futaki classique qui s'annule. Ceci prouve que \mathcal{X}_t n'est pas K -polystable et n'admet donc pas de métrique cscK.

On obtient dans [RoTi] une version équivariante du Théorème 1.2.5 pour les métriques extrémales et le Théorème 1.2.4 est une description combinatoire du Théorème 1.2.5. Dans le cas des surfaces toriques, un critère simple permet de vérifier l'hypothèse $K^{\mathbb{C}} = T^{\mathbb{C}}$ et l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$ est toujours satisfaite. Avec la description de l'espace $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ faite par Iltent et Volmert [33], on peut appliquer les Théorèmes 1.2.5 et 1.2.4 afin d'expliciter de nouveaux exemples de métriques à courbure scalaire constante ainsi que des exemples de métriques extrémales rigides sur des surfaces complexes.

1.2.3 Géométrie sasakiennne et stabilité

Une variété riemannienne compacte (M, g) est une *variété sasakiennne* si le cône métrique $(C(M) = \mathbb{R}_{>0} \times M, \bar{g} = dr^2 + r^2g)$ est une variété de Kähler. L'intérêt pour la géométrie sasakiennne provient des travaux de ces quinze dernières années qui ont permis d'élaborer de très nombreux nouveaux exemples de variétés riemanniennes munies de métriques d'Einstein à courbure positive.

Une variété sasakiennne est essentiellement un analogue en dimension impaire de variété kählérienne. La notion de métrique sasakiennne extrémale a été introduite par Boyer, Galicki et Simanca [6] et il est naturel de proposer une conjecture analogue à la Conjecture 1.0.1 dans ce cadre. Székelyhidi et Collins ont défini une notion de K-stabilité pour les variétés sasakiennes [15] qui étend naturellement la notion connue dans le cas Kähler. Dans un travail de collaboration avec Craig Van Coevering [TiV], on démontre un analogue du Théorème 1.2.5 dans le cadre saskien. On obtient ainsi d'une part des résultats qui confirment la conjecture de Collins et Székelyhidi et d'autre part de nouveaux exemples de métriques sasakiennes extrémales.

1.2.4 Équations couplées Kähler-Yang-Mills

Les équations couplées Kähler-Yang-Mills (CKYM) ont été introduites dans [1] comme une nouvelle approche pour le problème des modules de triplets (E, X, L) , où E est un fibré holomorphe sur une variété kählérienne polarisée (X, L) . Les solutions (g, h) des équations

$$\begin{aligned} \Lambda_g F_h &= z, \\ s_g - \alpha \Lambda_g^2 \text{tr} F_h \wedge F_h &= c, \end{aligned} \tag{1.12}$$

données par une métrique de Kähler g sur X dans la classe $c_1(L)$ et une métrique hermitienne h sur E peuvent être vues comme des métriques canoniquement associées au triplet (E, X, L) . Ici, F_h est la courbure de la connexion de Chern de h et Λ_g dénote la contraction avec la forme de Kähler ω_g . Ces équations dépendent d'une constante de couplage α et les constantes c et z sont topologiques. Mathématiquement, ces équations généralisent de manière simultanée les équations de Yang-Mills sur E et l'équation des métriques à courbure scalaire constante sur X . Elles décrivent les zéros d'une application moment pour l'action hamiltonienne d'un groupe de jauge \mathcal{G} sur un espace de dimension infini \mathcal{P} . Si ω et h sont fixées, \mathcal{G} est une extension du groupe des symplectomorphismes hamiltoniens de la variété (X, ω) par des transformations de jauge de E et \mathcal{P} paramétrise ici les structures de fibré holomorphe et variété kählérienne sur les variétés lisses sous-jacentes à E et X .

Dans l'article [GTi], avec Mario Garcia-Fernandez, on étudie la théorie des déformations infinitésimales des solutions aux équations (1.12). Soit (ω, h) une solution des équations (1.12)

sur (E, X, L) . On construit tout d'abord une DGLA $(\mathcal{L}_\omega^\bullet, d_\omega, [\cdot, \cdot]_\omega)$ qui encode les déformations complexes de la paire (X, E) compatibles avec la polarisation L (voir Annexe A pour la définition de DGLA). On retrouve en particulier, par une méthode différente, le complexe de Huang [32]. Le complexe différentiel obtenu permet de construire une tranche à la Kuranishi qui paramétrise les petites déformations de (X, E) modulo l'action du groupe de jauge "complexifié" \mathcal{G}^c . Soit ensuite K le groupe des automorphismes holomorphes de E qui sont dans \mathcal{G} . Si K^c désigne la complexification de K , on construit une représentation

$$K^c \curvearrowright H^1(X, \mathcal{L}_\omega^\bullet). \quad (1.13)$$

On obtient alors :

Théorème 1.2.6 ([GTi]). *Chaque petite déformation (E', X', L') de (E, X, L) avec orbite fermée dans $H^1(X, \mathcal{L}_\omega^\bullet)$ sous l'action de K^c admet une solution aux équations (1.12).*

La preuve de ce résultat suit les idées développées pour démontrer le théorème 1.2.5. Il permet de déterminer de nouvelles solutions aux équations couplées (1.12) et d'étudier les déformations des solutions produites dans [35] par Keller et Tønnesen-Friedman.

1.3 K-énergie et quantification

En pratique, l'étude des métriques cscK (respectivement extrémale) est faite via la fonctionnelle K -énergie E (resp. K -énergie modifiée E^G) dont elles sont les points critiques. Ces fonctionnelles ont été introduites par Mabuchi [44] et par Chen-Tian [14] et ont l'avantage par rapport à la fonctionnelle de Calabi \mathcal{C} (cf équation (1.1)) d'être convexes le long des géodésiques sur les espaces \mathcal{P} (resp. \mathcal{P}^G) des potentiels de Kähler (respectivement potentiels de Kähler invariants) sur lesquels elles sont définies. Les propriétés de ces fonctionnelles, telle que la propriété, ou l'existence de borne inférieure, sont alors intimement liées à l'existence et l'unicité de métriques extrémales. Elles sont à interpréter comme la fonctionnelle de Kempf-Ness en GIT (équation (1.4)), et on conjecture que la propriété de ces fonctionnelles devrait être équivalente à la stabilité de la variété polarisée, tandis que l'existence d'une borne inférieure devrait correspondre à sa semi-stabilité. On rappelle maintenant leurs définitions.

Soit (X, L) une variété de Kähler polarisée et compacte, de métrique g . Soit $G \subset \text{Aut}_0(X, L)$ un sous-groupe compact. On suppose que g est G -invariante. Pour définir la K -énergie modifiée, on introduit l'espace des potentiels de Kähler :

$$\mathcal{P} := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \omega_\phi := \omega + i\partial\bar{\partial}\phi > 0\} \quad (1.14)$$

et le sous-espace $\mathcal{P}^G \subset \mathcal{P}$ formé des potentiels G -invariants. Pour tout élément $\phi \in \mathcal{P}^G$, on considère la métrique g_ϕ associée à ω_ϕ ainsi que l'espace des potentiels de Killing de G pour la métrique g_ϕ :

$$\mathcal{K}_\phi^G := \{\psi \in C_0^\infty(X, \mathbb{R}) \mid J \text{grad}_{g_\phi} \psi \in \text{Lie}(G)\}. \quad (1.15)$$

Ces potentiels engendrent des champs de Killing pour g_ϕ , et g_ϕ est extrémale G -invariante si et seulement si $s_{g_\phi} - s_0 \in \mathcal{K}_\phi^G$.

Définition 1.3.1. *On définit la courbure scalaire réduite par :*

$$s_\phi^G := s_{g_\phi} - \Pi_\phi^G s_{g_\phi} - s_0 \quad (1.16)$$

où s_0 est la moyenne de s_g sur X et Π_ϕ^G désigne la projection orthogonale sur \mathcal{K}_ϕ^G induite par le produit L^2 :

$$(\phi, \psi) \mapsto \int_X \phi \psi \, d\text{vol}_{g_\phi}. \quad (1.17)$$

La K -énergie modifiée E^G est alors définie par sa différentielle dE^G en $\phi \in \mathcal{P}^G$:

Définition 1.3.2. *On appelle K -énergie modifiée*

$$E^G : \mathcal{P}^G \rightarrow \mathbb{R}$$

l'unique primitive de la différentielle

$$dE_\phi^G(\psi) := - \int_X \psi s_\phi^G \, d\text{vol}_{g_\phi} \quad (1.18)$$

qui s'annule en ϕ .

On renvoie à [29] pour une preuve que cette différentielle est exacte et admet une primitive E^G sur l'espace contractile \mathcal{P}^G . On précise que la K -énergie correspond au cas $G = \{id\}$, tandis que la version modifiée de Chen et Tian correspond au cas où G est un compact maximal.

1.3.1 Minima de la K -énergie modifiée

Donaldson a démontré que si (X, L) est une variété de Kähler polarisée et sans automorphisme, alors une métrique à courbure scalaire constante est un minimum absolu de la K -énergie [21]. Ce résultat a été généralisé par Chen-Tian [14] au cas extrémal par des méthodes différentes. Dans un travail de collaboration avec Yuji Sano, on redémontre le résultat de Chen et Tian dans le cas polarisé en utilisant une méthode plus géométrique : la quantification.

Théorème 1.3.3 ([STi]). *Soit (X, L) une variété kählérienne polarisée munie d'une métrique extrémale g . Alors g est un minimum absolu de la K -énergie modifiée E^G pour tout $G \subset \text{Isom}(g)$ tel que $\text{Lie}(g)$ contienne le champ de vecteur extrémal JV_g .*

Quantification

On présente ici quelques idées du processus de quantification. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère $H^0(X, L^k)$ l'espace des sections holomorphes du fibré L^k . On pose

$$N_k = \dim(H^0(X, L^k)) \quad (1.19)$$

et on rappelle que L étant ample, N_k a une croissance polynomiale en k^n , où n est la dimension de X . L'idée centrale est que pour toute base $s = \{s_\alpha\}$ de $H^0(X, L^k)$, $k \gg 1$, on peut plonger X dans l'espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N_k-1}$ via :

$$\begin{aligned} \iota_s : X &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{N_k-1} \\ x &\mapsto [s_\alpha(x)]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Les métriques sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N_k-1}$ induisent par restriction et renormalisation des métriques de Kähler sur X dans la classe $c_1(L)$. Le jeu consiste alors à traduire les notions issues de la théorie des métriques extrémales en termes de métriques induites via les plongements ι_s . On note \mathcal{B}_k l'espace des métriques hermitiennes sur $H^0(X, L^{\otimes k})$. \mathcal{B}_k est un espace de dimension finie, sur lequel on va pouvoir utiliser les résultats généraux de réduction kählérienne et le théorème de Kempf-Ness (Section 1.2.1). Il s'agit de comprendre comment les espaces \mathcal{B}_k et les métriques canoniques sur ces derniers approchent l'espace \mathcal{P} et les métriques cscK où extrémales. On introduit alors les applications qui vont permettre de passer de \mathcal{B}_k à \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \text{Hilb}_k : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{B}_k \\ \text{FS}_k : \mathcal{B}_k &\rightarrow \mathcal{P} \end{aligned}$$

définies par :

$$\forall \phi \in \mathcal{P}, s \in H^0(X, L^{\otimes k}), \|s\|_{Hilb_k(\phi)}^2 = \int_X |s|^2 e^{-2k\phi} d\text{vol}_{g_\phi} \quad (1.21)$$

et

$$\forall H \in \mathcal{B}_k, FS_k(H) = \frac{1}{k} \log \left(\frac{1}{N_k} \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|^2 \right) \quad (1.22)$$

où $\{s_{\alpha}\}$ est une base orthonormale de $H^0(X, L^{\otimes k})$ par rapport à H . On remarque que $\omega_{FS_k(H)}$ est le tiré en arrière de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N_k-1}$ par $\iota_{\mathbb{S}}$. Pour tous $\phi \in \mathcal{P}$ et $k > 0$, soit $\{s_{\alpha}\}$ une base orthonormale de $H^0(X, L^k)$ par rapport à $Hilb_k(\phi)$. Le k^e noyau de Bergman est défini par :

$$\rho_k(\phi) = \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|_{h^k}^2. \quad (1.23)$$

D'après les travaux de Catlin, Ruan, Tian et Zelditch (voir [STi] pour les références précises), le noyau de Bergman admet un développement

$$\rho_k(\phi) = k^n + A_1(\phi)k^{n-1} + A_2(\phi)k^{n-2} + \dots \quad (1.24)$$

avec

$$A_1(\phi) = \frac{s_{\phi}}{2}$$

où s_{ϕ} est la courbure scalaire de ω_{ϕ} et tel que pour tout $(l, R) \in \mathbb{N}^2$, il existe une constante $C_{l,R}$ telle que

$$\|\rho_k(\phi) - \sum_{j \leq R} A_j k^{n-j}\|_{C^l} \leq k^{n-R}.$$

On en déduit [57] :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} FS_k \circ Hilb_k(\phi) = \phi$$

où la convergence est uniforme sur des parties bornées pour la norme $C^2(X, \mathbb{R})$ dans \mathcal{P} . Les espaces de métriques \mathcal{B}_k fournissent donc une approximation de dimension finie de \mathcal{P} . Les métriques qui vérifient

$$FS_k \circ Hilb_k(\phi) = \phi \quad (1.25)$$

où de manière équivalente $\rho_k(\phi)$ est constant sont appelées *métriques équilibrées*. On remarque que si la courbure scalaire s_{ϕ} de ω_{ϕ} est constante, le noyau de Bergman est constant à l'ordre k^{n-1} . D'après le travail de Donaldson [19], si X admet une métrique à courbure scalaire constante ω_{ϕ} dans la classe $c_1(L)$, et si $\text{Aut}(X, L)$ est discret, alors, pour $k \gg 1$, on peut perturber les métriques $\omega_{FS_k \circ Hilb_k(\phi)}$ en des métriques équilibrées ω_{ϕ_k} , et ces métriques convergent vers la métrique ω_{ϕ} de départ.

Métriques σ -équilibrées

Pour démontrer le Théorème 1.3.3, on utilise une adaptation de la notion de métrique équilibrée dans le cadre des métriques extrémales, en présence d'automorphismes. Les métriques extrémales sont les solutions auto-similaires du flot de Calabi sur \mathcal{P}^G :

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = s_{g_{\phi_t}} - s_0. \quad (1.26)$$

Par ailleurs, le développement du noyau de Bergman implique :

$$\frac{FS_k \circ Hilb_k(\phi) - \phi}{\frac{1}{k} - 0} = \frac{s_\phi - s_0}{2k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \quad (1.27)$$

et l'opérateur $FS_k \circ Hilb_k$ induit un système dynamique sur \mathcal{P} qui discrétise le flot de Calabi. L'idée de Yuji Sano est d'introduire des solutions auto-similaires du système dynamique induit par $FS_k \circ Hilb_k$ pour quantifier les métriques extrémales.

Définition 1.3.4. Soit σ_k un élément de $\text{Aut}(X, L^k)$. Soit $\phi \in \mathcal{P}$. Alors ϕ est σ_k -équilibrée si

$$\omega_{kFS_k \circ Hilb_k(\phi)} = \sigma_k(1)^* \omega_{k\phi} \quad (1.28)$$

On démontre que les métriques σ -équilibrées apparaissent comme une quantification des métriques extrémales :

Lemme 1.3.5. Avec les notations qui précèdent, si $\omega_k = FS_k(H_k)$ est une suite de métriques σ_k -équilibrées qui converge vers une métrique ω_∞ , et si les automorphismes infinitésimaux V_k associés aux σ_k convergent, alors ω_∞ est extrémale.

Esquisse de preuve du Théorème 1.3.3

Soit ω_ϕ une métrique extrémale sur X dans la classe $c_1(L)$. La technologie de Donaldson [19], adaptée à notre cas, permet d'introduire une fonctionnelle convexe Z_k^σ sur \mathcal{B}_k qui quantifie la K-énergie modifiée E^G , et dont les points critiques sont des métriques σ -équilibrées. Ceci nécessite un choix particulier de σ et dans [STi], on considère l'automorphisme engendré par le champ de vecteur extrémal. Plus précisément on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$V_k = -\frac{Jgrad_{g_\phi}(s_\phi)}{4k} \quad (1.29)$$

et on introduit σ_k le sous-groupe à un paramètre de $\text{Aut}(X)$ associé. On définit pour tout $\phi \in \mathcal{P}$ la fonction $\psi_{\sigma_k, \phi}$ par

$$\sigma_k(1)^* \omega_\phi = \omega_\phi + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \psi_{\sigma_k, \phi}, \quad (1.30)$$

que l'on normalise via

$$\int_X \exp(\psi_{\sigma_k, \phi}) dvol_\phi = \frac{N_k}{k^n}.$$

On définit ensuite la fonctionnelle d'Aubin modifiée I_k^σ sur \mathcal{P}^G à l'aide de sa différentielle :

$$\delta I_k^\sigma(\phi)(\delta\phi) = \int_X k \delta\phi \left(1 + \frac{\Delta\phi}{k}\right) e^{\psi_{\sigma_k, \phi}} k^n dvol_\phi. \quad (1.31)$$

La fonctionnelle \mathcal{L}_k^σ sur \mathcal{P}^G et son pendant Z_k^σ sur \mathcal{B}_k^G sont définies par :

$$\mathcal{L}_k^\sigma = \log \circ \det \circ Hilb_k + I_k^\sigma \quad (1.32)$$

et

$$Z_k^\sigma = I_k^\sigma \circ FS_k + \log \circ \det - k^n \log(k^n) \text{Vol}(X). \quad (1.33)$$

On a alors :

Proposition 1.3.6. Les métriques σ_k -équilibrées sont des points critiques pour \mathcal{L}_k^σ . De plus, si $H_k \in \mathcal{B}_k^G$ est telle que $FS_k(H_k)$ est σ_k -équilibrée, alors H_k minimise Z_k^σ .

On a également :

Lemme 1.3.7. *Les fonctionnelles $k^{-n} \mathcal{L}_k^\sigma$ convergent vers la K-énergie modifiée E^G :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-n} (\mathcal{L}_k^\sigma - E^G) = 0$$

On considère alors les métriques

$$\phi_k := FS_k \circ \text{Hilb}_k(\phi)$$

où ω_ϕ est la métrique extrémale de départ. Les métriques ϕ_k ne sont pas σ_k -équilibrées a priori. Cependant, le développement du noyau de Bergman (1.24) et le choix des σ_k (équation (1.29)) assurent que le défaut des métriques ω_{ϕ_k} à être équilibrées est un $\mathcal{O}(k^{-2})$. Les métriques $\text{Hilb}_k(\phi)$ sont donc des minima des fonctionnelles Z_k^σ à $\mathcal{O}(k^{-2})$ près. On contrôle par ailleurs l'écart

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-n} (\mathcal{L}_k^\sigma - Z_k^\sigma \circ \text{Hilb}_k) = 0$$

pour tout potentiel de \mathcal{P}^G . Avec le Lemme 1.3.7, on conclut alors le Théorème 1.3.3 par passage à la limite.

1.3.2 Borne inférieure et déformations complexes

La combinaison des travaux de Székelyhidi [55] et Chen [12] permet de démontrer que si une variété kählérienne polarisée (X, L) admet une métrique cscK, la fonctionnelle K-énergie reste bornée inférieurement sur des petites déformations complexes (X', L') . Ceci est une version analytique, pour la K-stabilité, du fait qu'en GIT les points proches d'un point stable sont semistables. Avec Andrew Clarke, on généralise ce résultat au cas extrémal, en prenant en compte les symétries :

Théorème 1.3.8 ([CTi]). *Soit (X, L) une variété de Kähler polarisée munie d'une métrique extrémale g . Soit (X', L') une petite déformation complexe de (X, L) qui préserve les automorphismes engendrés par V_g . Alors la K-énergie modifiée reste bornée inférieurement sur (X', L') .*

Le sens précis des déformations considérées est expliqué dans l'article [CTi]. On notera tout de même que l'hypothèse faite n'est pas restrictive dans la mesure où elle est une hypothèse nécessaire si l'on souhaite déformer de manière lisse une métrique extrémale le long d'une déformation complexe.

La preuve du Théorème 1.3.8 repose sur une inégalité de convexité pour la fonctionnelle K-énergie modifiée sur l'espace \mathcal{P}^G , inégalité obtenue par une méthode de quantification. On pose la fonctionnelle de Calabi modifiée, définie pour $\phi \in \mathcal{P}^G$:

$$\mathcal{C}^G(\phi) := \int_X (s_\phi^G)^2 d\text{vol}_{g_\phi} \quad (1.34)$$

où s_ϕ^G est la courbure scalaire réduite (1.16). On démontre dans [CTi] :

Proposition 1.3.9. *Pout tout $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{P}^G$:*

$$E^G(\phi_1) - E^G(\phi_0) \leq d(\phi_0, \phi_1) \sqrt{\mathcal{C}^G(\phi_1)}, \quad (1.35)$$

où la distance d est induite par le produit scalaire (1.17).

Cette convexité permet de comparer la K-énergie modifiée sur une petite déformation de X à la K-énergie initiale, et d'obtenir le résultat.

Comme application, on exhibe également dans l'article [CTi] des éclatements de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ en 4 points munis de polarisations qui n'admettent pas de métrique extrémale mais dont la K-énergie modifiée est bornée inférieurement. Ce sont les premiers exemples explicites de tels objets à ma connaissance.

1.3.3 Unicité dans une classe de Kähler

Dans l'article [STi2], on continue l'étude des métriques σ -équilibrées commencée dans [STi]. En particulier, on démontre :

Théorème 1.3.10 ([STi2]). *Soit ω une métrique extrémale sur (X, L) dans la classe $c_1(L)$ et soit T un tore maximal d'isométries de ω . Alors il existe une suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T^c et une suite de métriques σ_k -équilibrées $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ω .*

Ceci est une généralisation du travail de Donaldson [19] au cadre des variétés polarisées qui admettent des automorphismes continus. La démonstration repose sur trois étapes.

Esquisse de preuve du Théorème 1.3.10

Tout d'abord, on montre l'existence et l'unicité d'une suite d'automorphismes $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de T^c telle que, pour chaque k , si $FS_k(H_k)$ est σ -équilibrée alors nécessairement $\sigma = \sigma_k$. Ces automorphismes approchent la symétrie sur X engendrée par le champ de vecteur extrémal V_ω . Cette suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ou plus précisément les champs de vecteurs qui les engendrent, sont obtenus via l'annulation de caractères F^{σ_k} sur l'algèbre des champs de vecteurs holomorphes sur X . Ces caractères sont interprétés comme la quantification de l'invariant de Futaki modifié (1.11).

Ensuite, on démontre que les métriques σ_k -équilibrées sont les zéros d'une application moment en dimension finie. Cette application moment sera définie sur un espace de plongements que l'on décrit maintenant. Soit $V_k = H^0(X, L^k)$. L'action de T sur X induit une représentation

$$\rho_k : T^c \rightarrow SL(V_k)$$

et une action de T sur l'espace des formes hermitiennes \mathcal{B}_k . On définit \mathcal{B}_k^T comme l'espace des éléments T -invariants de \mathcal{B}_k . La représentation complexe ρ_k induit une décomposition selon les poids :

$$V_k = \bigoplus_{\chi \in w_k(T)} V_k(\chi)$$

On pose N_k^X la dimension de $V_k(\chi)$ et on introduit l'espace des bases adaptées à cette décomposition :

$$\mathcal{B}^T(V_k) := \left\{ (s_i^X)_{\chi \in w_k(T); i=1..N_k^X} \in (V_k)^{N_k} \mid \det(s_i^X) \neq 0 \text{ et } \forall (\chi, i), s_i^X \in V_k(\chi) \right\}$$

Pour tout k , on considère le centralisateur de T_k^c dans $\text{Aut}_0(X)$, que l'on dénote Aut_k^T . On introduit l'espace quotient :

$$Z^T(V_k) = \mathcal{B}^T(V_k) / (\mathbb{C}^* \times \text{Aut}_k^T), \quad (1.36)$$

où \mathbb{C}^* agit par multiplication diagonale. Cet espace paramétrise les plongements de X dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N_k-1}$ pour lesquels l'action de T est induite par la représentation ρ_k . On pose enfin

$$G_k^c = S(\Pi_\chi GL_{N_k^X}(\mathbb{C}))$$

qui est la complexification de

$$G_k := S(\Pi_\chi U(N_k^X)). \quad (1.37)$$

L'action à droite naturelle de G_k^c sur $\mathcal{B}^T(V_k)$ commute avec l'action à gauche de $\mathbb{C}^* \times \text{Aut}_k^T$ sur $\mathcal{B}^T(V_k)$ et induit alors une action sur $Z^T(V_k)$. On va munir $Z^T(V_k)$ d'une structure de Kähler telle que l'action de G_k sur $Z^T(V_k)$ soit par biholomorphismes hamiltoniens. Afin d'alléger l'écriture, on omet les indices k . L'espace $\mathcal{B}^T(V)$, en tant qu'espace de bases, admet une structure presque-complexe intégrable naturelle $J_{\mathcal{B}}$ qui descend sur le quotient $Z^T(V)$. Pour tout $s \in \mathcal{B}^T(V)$ on

associe un unique élément $H(\mathbf{s}) \in \mathcal{B}^T$ tel que \mathbf{s} soit orthonormale pour $H(\mathbf{s})$ et, par composition, on définit aussi :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{B}^T(V) &\rightarrow \mathcal{P}^T \\ \mathbf{s} &\mapsto FS(H(\mathbf{s})). \end{aligned}$$

On introduit alors la 2-forme suivante sur $\mathcal{B}^T(V)$:

$$\omega_{\mathcal{B}}(\mathbf{s}) := d \circ J_{\mathcal{B}} \circ d(I^\sigma \circ \phi(\mathbf{s})), \quad (1.38)$$

où I^σ est la fonctionnelle d'Aubin modifiée définie par l'équation (1.31). Dans [STi2], suivant [29], on démontre :

Proposition 1.3.11. *La forme $\omega_{\mathcal{B}}$ descend en une forme symplectique G -invariante sur $Z^T(V)$ qui munit $(Z^T(V), J_Z, \omega_Z)$ d'une structure de Kähler.*

Par ailleurs, l'action de G est hamiltonienne, d'application moment :

$$\begin{aligned} \mu^\sigma : \mathcal{B}^T(V) &\rightarrow \text{Lie}(G) \\ \mathbf{s} = \{s_j\} &\mapsto i\text{Hilb}(\phi(\mathbf{s}))_0(\sigma \cdot s_j, \sigma \cdot s_k) \end{aligned} \quad (1.39)$$

où l'indice 0 signifie la partie sans trace de l'endomorphisme. Enfin, on montre que pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{B}^T(V)$:

Proposition 1.3.12. *La métrique $\omega_{\phi(\mathbf{s})}$ est σ -équilibrée si et seulement si $\mu^\sigma(\mathbf{s}) = 0$.*

La troisième étape de la preuve suit les idées de Donaldson. On considère la métrique extrémale ω_ϕ et les éléments $H_k := \text{Hilb}_k(\phi) \in \mathcal{B}_k^T$. Les métriques H_k ne sont pas des zéros de μ^{σ_k} , mais le sont asymptotiquement. En effet, la condition pour être σ -équilibrée se traduit par

$$k^{-n} \rho_k(\phi') = \exp(\psi_{\sigma_k, \phi'}), \quad (1.40)$$

où l'on rappelle que $\psi_{\sigma_k, \phi'}$ est définie dans l'équation (1.30). La caractérisation des poids σ_k permet d'obtenir un développement asymptotique de $\exp(\psi_{\sigma_k, \phi'})$ similaire à celui du noyau de Bergman (1.24). Par ailleurs, pour ω_ϕ extrémale, on a

$$k^{-n} \rho_k(\phi) - \exp(\psi_{\sigma_k, \phi}) = \mathcal{O}(k^{-2}).$$

On contrôle alors la divergence de l'application moment μ^{σ_k} pour $k \gg 1$ et on montre que le flot de gradient de $\|\mu^{\sigma_k}\|^2$ converge vers un zéro de μ^{σ_k} , ce qui donne une métrique σ_k -équilibrée et conclut la preuve.

Corollaires

Les métriques σ_k -équilibrées étant les zéros d'une application moment, elles sont uniques modulo l'action de G_k . La convergence vers ω_ϕ implique alors le résultat suivant :

Théorème 1.3.13 ([STi2]). *Soit (X, L) une variété de Kähler polarisée munie d'une métrique extrémale g dans la classe $c_1(L)$. Alors g est unique, modulo les automorphismes de X , dans la classe de Kähler $c_1(L)$.*

On retrouve ainsi un résultat de Berman-Berndtsson [5] et Mabuchi [46]. Comme corollaire, on obtient que si ω est une métrique extrémale dans la classe $c_1(L_1 \otimes L_2)$ sur un produit $X_1 \times X_2$, alors ω est un produit de métriques extrémales $\omega_i \in c_1(L_i)$ sur X_i , $i \in \{1, 2\}$. Ce résultat était conjecturé dans [3] et démontré dans une moindre généralité.

1.3.4 Métriques équilibrées et GIT

Les métriques σ -équilibrées peuvent être interprétées comme les zéros d'une application moment [STi2]. Dans l'article [Ti3], l'interprétation GIT de ces métriques est donnée.

Forme de Chow

Soit (X, L) une variété de Kähler polarisée de dimension complexe n , et T^c un tore complexe maximal d'automorphismes de (X, L) . On pose

$$V := H^0(X, L).$$

Quitte à remplacer L par une puissance L^k assez grande, on obtient le plongement de Kodaira :

$$\begin{aligned} \iota : X &\rightarrow \mathbb{P}(V^*) \\ x &\mapsto [ev_x], \end{aligned}$$

où ev_x dénote l'évaluation en $x \in X$. On pose $\mathcal{B}(V)$ l'espace des bases de V . Pour toute base $\mathbf{s} = \{s_\alpha\} \in \mathcal{B}(V)$ on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{s}} : \mathbb{P}(V^*) &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N \\ [ev] &\mapsto [ev(s_\alpha)] \end{aligned} \quad (1.41)$$

et donc un plongement $f_{\mathbf{s}} := \Phi_{\mathbf{s}} \circ \iota$ de X dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$, où $N + 1 = \dim(V)$. Soit d le degré de $X_{\mathbf{s}}$ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$. On va décrire une paramétrisation des sous-variétés de dimension n et de degré d dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ (on se restreint à des sous-variétés lisses uniquement). On va pour cela remplacer $X_{\mathbf{s}}$ par une hypersurface dans un projectif de plus grande dimension. On définit un diviseur $D_{X_{\mathbf{s}}}$ dans $n + 1$ copies de l'espace projectif dual :

$$D_{X_{\mathbf{s}}} := \{(H_0, \dots, H_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{N*} \times \dots \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{N*} \mid H_0 \cap \dots \cap H_n \cap X_{\mathbf{s}} \neq \emptyset\}. \quad (1.42)$$

Si on pose

$$W := (\text{Sym}^d(\mathbb{C}^{N+1}))^{\otimes n+1}, \quad (1.43)$$

le diviseur $D_{X_{\mathbf{s}}}$ est le lieu d'annulation d'un élément $\widehat{\text{Chow}}(X_{\mathbf{s}})$ de W . Le point correspondant

$$\text{Chow}(X_{\mathbf{s}}) \in \mathbb{P}(W)$$

est appelé *point de Chow* de $X_{\mathbf{s}}$. Un fait remarquable est que $\text{Chow}(X_{\mathbf{s}})$ caractérise entièrement $X_{\mathbf{s}}$. On introduit alors :

$$\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{W}_{\mathbb{P}^N}(n, d) := \{Y \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N \mid \dim(Y) = n, \text{degre}(Y) = d\} \quad (1.44)$$

et on a une injection :

$$\begin{aligned} \text{Chow} : \mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{W}_{\mathbb{P}^N}(n, d) &\rightarrow \mathbb{P}(W) \\ (Y \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N) &\mapsto \text{Chow}(Y). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le schéma de Chow $\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{W}_N(n, d)$ est par définition :

$$\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{W}_N(n, d) := \text{Chow}(\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{W}_{\mathbb{P}^N}(n, d)).$$

L'action de $\text{SL}_{N+1}(\mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^{N+1} induit une action sur W et par définition la variété (X, L) est *Chow polystable* si l'orbite de $\widehat{\text{Chow}}(X_{\mathbf{s}})$ sous cette action est fermée dans W pour $\mathbf{s} \in \mathcal{B}(V)$. Zhang [65] et Wang [61] ont montré que l'existence d'une métrique équilibrée était équivalente à la stabilité au sens de Chow du point de Chow correspondant.

Plongements T -invariants

Dans [Ti3], on introduit le schéma de Chow équivariant $\mathcal{CHOW}_N(n, d)^T$, qui paramétrise les éléments de $\mathcal{CHOW}_N(n, d)$ qui possèdent T comme tore de symétries. On a une action naturelle du centralisateur G^c de T dans $SL(N + 1)$ sur $\mathcal{CHOW}_N(n, d)^T$. On démontre alors dans [Ti3] :

Proposition 1.3.14. *Soit $\sigma \in T^c$ tel que $F^\sigma = 0$. Soit $\mathbf{s} \in \mathcal{B}^T(V)$. La métrique $\omega_{\phi(\mathbf{s})}$ est σ -équilibrée si et seulement si la G^c -orbite de $\widehat{\text{Chow}}(X_{\mathbf{s}})$ est fermée.*

Le choix précis de σ de cette proposition implique que les métriques σ -équilibrées correspondent aux métriques équilibrées relativement à T étudiées par Mabuchi [45] et Apostolov-Huang [3]. Ce résultat est une généralisation directe de ceux de Zhang [65] et Wang [61].

1.3.5 Tableau récapitulatif

On termine la Section 1.3 avec le tableau récapitulatif suivant :

	Conjecture YTD relative	Quantification
Variété	\mathcal{J}_ω^T	$\mathcal{B}^T(V_k)/(\mathbb{C}^* \times \text{Aut}_k^T)$
Groupe de jauge	\mathcal{G}^T	$S(\Pi_X U(N_k^\chi))$
Complexification	Orbites complexifiées	$S(\Pi_X GL_{N_k^\chi}(\mathbb{C}))$
Application moment	$s_{g,J}^T$	μ^σ
Zéros du moment	Métriques extrémales	Métriques σ -équilibrées
Obstruction	$\text{Fut}_{[\omega]}^T$	F^σ
Fonctionnelle de Kempf-Ness	K-énergie modifiée	Z_k^σ
Stabilité	K -stabilité relative ?	Chow-stabilité relative

1.4 Réduction symplectique et métriques canoniques

Comme expliqué dans les Sections 1.1 et 1.2, l'existence de métriques extrémales sur une variété de Kähler X persiste si l'on procède à des petites perturbations de X , tel que des éclatements ou des déformations complexes, sous certaines hypothèses GIT sur la perturbation. On souhaiterait étendre ce genre de résultats à d'autres transformations géométriques de X . On s'intéressera en particulier aux quotients symplectiques de X par des groupes de symétries $G \subset \text{Aut}(X)$ convenablement choisis. Ce problème, dans le cas Kähler-Einstein, a déjà été étudié par Futaki [25], mais sans les technologies de stabilité développées plus tardivement. On note que l'étude proposée ici sera assez différente de celles déjà entreprises (existence de métriques extrémales après éclatements ou déformations complexes), dans la mesure où la transformation $X \rightarrow X/G$ est un changement important de la géométrie de X , et les méthodes perturbatives employées dans les Sections 1.1 et 1.2 ne peuvent pas s'appliquer. Afin de bien comprendre les techniques à mettre en oeuvre, on commencera par étudier le cas de la descente de fibrés d'Hermite-Einstein sous quotients symplectiques, problème plus simple à appréhender. On procède maintenant à une description plus détaillée de ce projet.

Les méthodes de GIT sont fondamentales pour attaquer les problèmes de modules, et peuvent être employées en particulier pour les modules de fibrés sur une variété donnée. Dans ce cas, la (semi)stabilité d'un fibré sous l'action d'un groupe de jauge est liée à son comportement lorsqu'il dégénère vers la fermeture de son orbite. Il convient alors de considérer la catégorie des faisceaux cohérents afin de définir la stabilité d'un fibré. La classe des faisceaux cohérents sur X est la plus petite famille de \mathcal{O}_X -modules qui contienne les faisceaux localement libres de rang fini sur \mathcal{O}_X (c'est à dire les fibrés holomorphes) et qui soit stable en prenant les noyaux et co-noyaux de morphismes de faisceaux. Soit maintenant $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe sur (X, L) une variété polarisée, avec $\omega \in c_1(L)$ une métrique de Kähler. On dit que E est stable (par rapport à la polarisation L) si pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F} \subset E$, avec $0 < \text{rang} \mathcal{F} < \text{rang} E$, on a

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(E),$$

où $\mu(\mathcal{F})$ est la pente de \mathcal{F} , définie par :

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{1}{\text{rang} \mathcal{F}} \int_X c_1(\mathcal{F}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (1.46)$$

Par la correspondance de Kobayashi-Hitchin [37], l'existence d'une métrique de Hermite-Einstein h sur E , c'est à dire telle que $F_h \wedge \omega^{n-1}$ soit un tenseur constant, est équivalente à la décomposition de E en somme directe de fibrés stables de même pentes.

Supposons maintenant qu'un groupe réductif G agisse algébriquement sur X , que E soit G -équivariant, et qu'il descende sur le quotient GIT Y , c'est à dire qu'il existe $E_Y \rightarrow Y$ un fibré holomorphe sur Y tel que $E|_{X^{ss}}$ soit le tiré en arrière de E_Y sous le quotient GIT $X^{ss} \rightarrow Y$ [50]. On souhaiterait déterminer si la stabilité de E est préservée par passage au quotient et si E_Y est lui-même stable. On s'attend à démontrer que si E est stable, E_Y doit satisfaire une condition de stabilité tordue par l'action de G . On devrait obtenir une équivalence de catégorie entre les fibrés stables G -équivariants sur X qui descendent au quotient et les fibrés sur Y qui satisfont cette condition de stabilité tordue par G . On réfère à [28, 49] pour des résultats qui vont dans ce sens. On utilisera des techniques de géométrie différentielle, dont l'application moment, afin de déterminer la pente tordue par G , et établir les résultats annoncés. Comme application, on étudiera les modules de fibrés stables équivariants sur les variétés toriques.

Axe de recherche 2

Systeme de Strominger et algébroides de Courant

Le système de Strominger est un système d'équations différentielles non-linéaires couplées. Introduit en 1986 par Strominger [53], il intervient en théorie des cordes. Son étude mathématique a été proposée par Yau [64], comme généralisation naturelle du problème de Calabi [63] aux variétés complexes non-nécessairement kählériennes [23]. Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est munie d'une forme bilinéaire symétrique ad-invariante c . Soit (X, Ω) une variété complexe de dimension n qui admet une $(n, 0)$ -forme holomorphe Ω partout non-nulle. Soit P un G -fibré holomorphe au-dessus de X . On considère, pour ω une métrique hermitienne sur X et h une réduction de P à un sous-groupe compact maximal K de G , le *système de Strominger* :

$$\begin{cases} d(\|\Omega\|_{\omega}\omega^{n-1}) = 0 \\ F_h \wedge \omega^{n-1} = 0 \\ i\partial\bar{\partial}\omega = c(F_h \wedge F_h) \end{cases} \quad (2.1)$$

où F_h est la forme de courbure de h . On remarque tout d'abord que le cas $G = \{Id\}$ se réduit au système

$$\begin{cases} d(\|\Omega\|_{\omega}\omega^{n-1}) = 0 \\ i\partial\bar{\partial}\omega = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

et on peut démontrer que les solutions de (2.2) sont des métriques de Calabi-Yau, c'est à dire Kähler et Ricci plates [GRTi], et donc des solutions du problème de Calabi. Notons ensuite les restrictions topologiques et holomorphes imposées par le système (2.1). La forme holomorphe Ω trivialise le fibré canonique de X , et on a donc $c_1(X) = 0$. La première équation de (2.1) stipule que $(X, (\|\Omega\|_{\omega})^{\frac{1}{n-1}}\omega)$ est *équilibrée* (on prendra garde ici à la terminologie de la littérature qui est malheureuse, les métriques équilibrées n'ont pas la même signification dans les Sections 2 et 1.3). Dans le contexte de cette Section 2, l'existence d'une métrique équilibrée η , c'est à dire d'une forme $\eta \in \Omega^{1,1}(X, \mathbb{R})$ qui vérifie

$$d(\eta^{n-1}) = 0 \text{ avec } \eta > 0 \quad (2.3)$$

est équivalente à une condition de positivité sur X exprimée en termes de courants [48], et généralise la condition d'être kählérienne. La seconde équation de (2.1) est l'équation d'Hermite-Einstein sur P . L'existence d'une solution à cette équation est équivalente au fait que P soit polystable par rapport à la métrique équilibrée sur X [41, 7]. Enfin, la dernière équation de (2.1), appelée *condition d'annulation de l'anomalie*, implique que la première classe de Pontryagin $p_1(P, c)$ de (P, c) s'annule en cohomologie de Bott-Chern [8, 51]. Les deux premières équations sont bien comprises et admettent des solutions dès que X et P satisfont les conditions de positivité (X équilibrée) et

algébriques (polystabilité de P) requises. La difficulté du système réside alors dans l'équation d'anomalie qui couple ω et h .

Remarque 2.0.1. *La formulation initiale du système de Strominger, ou Hull-Strominger, nécessite l'introduction d'une 3-variété complexe X munie d'une $(3, 0)$ -forme holomorphe Ω partout non nulle, et d'un fibré vectoriel holomorphe E au-dessus de X . Une solution du système de Strominger est alors un couple (g, h) de métriques hermitiennes sur X et E respectivement, telle que si R_g désigne la courbure de la connexion de Chern associée à (X, g) , F_h la courbure de la connexion de Chern associée à (E, h) , et ω la forme fondamentale associée à g , on ait*

$$\begin{cases} d(\|\Omega\|_{\omega}\omega^2) = 0 \\ F_h \wedge \omega^2 = 0 \\ i\partial\bar{\partial}\omega = \alpha(\text{Tr}(R_g \wedge R_g) - \text{Tr}(F_h \wedge F_h)) \end{cases} \quad (2.4)$$

où α est une constante topologique. Dans le cas $E = TX$, si ω est kählérienne et Ricci-plate, on obtient une solution en prenant h la métrique hermitienne sur TX induite par ω , et le système généralise donc la condition Kähler-Ricci plate. Dans ce texte, on s'intéressera au système plus général (2.1) qui présente essentiellement les mêmes caractéristiques analytiques et géométriques que (2.4).

Il est difficile de résoudre le système de Strominger ; les premiers exemples de solutions sont construits par Li-Yau [42] pour une solution sur une variété kählérienne obtenue par perturbation et Fu-Yau [24] pour une solution non-kählérienne construite en résolvant une équation de Monge-Ampère.

On souhaiterait un analogue du théorème de Calabi-Yau pour les solutions du système de Strominger. On rappelle que sur une variété de Kähler à première classe de Chern nulle, dans toute classe de Kähler, il existe une unique métrique Kähler-Ricci plate. La preuve de ce théorème nécessite tout d'abord de fixer une variété complexe X à première classe de Chern nulle, puis une classe de Kähler $[\omega]$ sur X . On restreint alors l'équation Kähler-Ricci plate à l'ensemble des métriques de Kähler dans $[\omega]$, qui est paramétré par un ensemble de fonctions ω -pluri-sous-harmoniques. On obtient alors une équation de Monge-Ampère qui peut être résolue à l'aide de méthodes analytiques, telles que la méthode de continuité via des estimées a priori. Afin d'obtenir un résultat similaire d'existence et d'unicité pour les solutions du système de Strominger, il faut identifier les structures holomorphes et métriques à fixer afin de restreindre l'espace des paramètres sur lesquels portent ces équations, avant de pouvoir attaquer le problème avec des outils d'analyse. Dans un travail de collaboration avec Mario Garcia-Fernandez, Roberto Rubio et Carlos Shahbazi [GRTi, GRuTi2, GRuSTi], on entreprend ce programme.

2.1 Étude infinitésimale

Comme pour les métriques extrémales, on commence par étudier le problème plus simple de déformation des solutions. On étudie alors en premier lieu la linéarisation du système de Strominger [GRTi]. On souhaitera en particulier tester la stabilité des solutions sous déformations complexes, ce qui nous conduit à reformuler les équations en termes de nouveaux paramètres pour pouvoir prendre en compte les variations de structures complexes sur P et X .

Soient \underline{P} le G -fibré lisse sous-jacent à P et \underline{X} la variété lisse sous-jacente à X . Soit $K \subset G$ une forme compacte de G , et on suppose donnée une réduction de \underline{P} au groupe K , que l'on note \underline{P}_K . On pose \mathcal{A} l'espace des connexions sur \underline{P}_K et $\Omega_0^n(\underline{X}, \mathbb{C})$ l'espace des n -formes Ω sur \underline{X} telles que $\ker(v \mapsto \iota_v \Omega)$ définisse une structure presque complexe J_Ω sur \underline{X} . On introduit l'espace des paramètres du système :

$$\mathcal{P} \subset \Omega_0^n(\underline{X}, \mathbb{C}) \times \mathcal{A} \times \Omega^2(\underline{X}, \mathbb{R}),$$

défini par

$$\mathcal{P} = \{(\Omega, \theta, \omega) \mid \omega \text{ est } J_\Omega - \text{compatible}\} \quad (2.5)$$

où pour $\Omega \in \Omega_0^n(\underline{X}, \mathbb{C})$, la compatibilité de ω signifie que (J_Ω, ω) induit une structure presque-hermitienne sur \underline{X} . La condition d'intégrabilité de la structure presque-complexe J_Ω sur X est

$$d\Omega = 0,$$

tandis que l'intégrabilité de l'opérateur de Dolbeault induit sur P par θ est

$$F_\theta^{0,2} = 0$$

où F_θ désigne la courbure de θ . Avec ces nouveaux paramètres, le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} d\Omega = 0 \\ F_\theta^{0,2} = 0 \\ d(\|\Omega\|_\omega \omega^{n-1}) = 0 \\ F_\theta \wedge \omega^{n-1} = 0 \\ i\partial\bar{\partial}\omega = c(F_\theta \wedge F_\theta). \end{cases} \quad (2.6)$$

On considère le groupe de jauge du système :

$$\mathcal{G} := \text{Aut}(\underline{P}_K)$$

qui agit sur \mathcal{P} par tirés en arrière en préservant les solutions de (2.6). À l'aide de la théorie des opérateurs elliptiques, un espace tangent virtuel à l'espace des modules des solutions de (2.6) est construit dans [GRTi]. Plus précisément, soit $s = (\Omega, \theta, \omega) \in \mathcal{P}$ une solution de (2.6). On note \mathbf{P}_s , resp. \mathbf{L}_s , l'action infinitésimale de \mathcal{G} en s , resp. la linéarisation de (2.6) en s . On munit les espaces de tenseurs considérés de produit L^2 à l'aide de métriques sur \underline{X} et $\text{ad } \underline{P}_K$. On peut alors introduire l'adjoint de \mathbf{P}_s . On démontre :

Proposition 2.1.1 ([GRTi]). *Le système d'équations suivant, d'inconnue $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_s\mathcal{P}$, est elliptique :*

$$\begin{cases} \mathbf{L}_s(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_s^*(\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ceci est en particulier un résultat annoncé par Li et Yau dans [42]. On remarque que l'énoncé présenté ici est un peu plus général que celui de [GRTi] qui se restreint au système (2.4), cependant sa preuve est analogue. On introduit l'espace de dimension finie

$$H^1(\mathbf{S}^*) := \frac{\ker \mathbf{L}_s}{\text{Im } \mathbf{P}_s} \quad (2.8)$$

que l'on interprète comme l'espace tangent à l'espace des modules des solutions de (2.6). On remarque que la linéarisation de l'équation d'anomalie est d -exacte, et induit une application

$$\delta : H^1(\mathbf{S}^*) \rightarrow H^3(X, \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

Motivés par la *quantification du flux* δ en théorie des cordes, on considère le noyau

$$H^1(\mathring{\mathbf{S}}^*) := \ker \delta.$$

On démontre que ce noyau peut être décrit comme la cohomologie d'un complexe elliptique

$$\mathring{\mathbf{S}}^0 \rightarrow \mathring{\mathbf{S}}^1 \rightarrow \mathring{\mathbf{S}}^2 \quad (2.10)$$

où $\mathring{\mathbf{S}}^0$, une extension de \mathbf{S}^0 , est l'algèbre de Lie d'un groupe d'automorphismes obtenu comme extension de \mathcal{G} . Ce groupe est celui des automorphismes d'une *algébroides de Courant* [16], qui peut être vue essentiellement comme une extension de \underline{P}_K . On renvoie à l'Annexe B et à [16, 30, GRTi] pour une description plus complète de ces objets. L'observation clé est que toute solution de l'équation d'anomalie, et donc en particulier du système de Strominger, définit une algébroides de Courant sur \underline{X} . L'annulation de l'anomalie est vue comme une condition d'intégrabilité, et motive l'introduction des algébroides de Courant holomorphes pour étudier le système de Strominger.

2.2 Algébroides des cordes holomorphes

Toute solution du système de Strominger induit en particulier une solution du système

$$\begin{cases} F_\theta^{0,2} = 0 \\ dH = c(F_\theta \wedge F_\theta) \end{cases} \quad (2.11)$$

d'inconnues $(\theta, H) \in \mathcal{A} \times \Omega^3(X, \mathbb{C})$ où l'on a posé $H = d^c \omega$. Ce dernier système définit une algébroïde des cordes holomorphe $Q \rightarrow X$ donnée par une extension holomorphe :

$$0 \rightarrow TX^* \rightarrow Q \rightarrow \text{ad } P \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

où $\text{ad } P$ est l'algébroïde de Lie d'Atiyah associée au G -fibré holomorphe $P \rightarrow X$ (voir Annexe B). On verra dans la section suivante que cette structure géométrique est la donnée complexe à fixer pour obtenir une bonne classe de métriques sur laquelle étudier le système de Strominger. On présente ici une classification et la théorie de déformations de ces structures.

Classification

Dans [GRuTi2], on introduit un faisceau en groupes complexes \mathcal{S} donné par une extension

$$1 \rightarrow \Omega_{cl}^{2,0} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_G \rightarrow 1 \quad (2.13)$$

où $\Omega_{cl}^{2,0}$ désigne le faisceau des $(2,0)$ -formes fermées sur X et \mathcal{O}_G le faisceau des fonctions holomorphes à valeur dans G . Sur un ouvert $U \subset X$, le groupe $\mathcal{S}(U)$ est le groupe des symétries d'un modèle standard d'algébroïde de Courant holomorphe obtenue par extension de l'algébroïde d'Atiyah associée à $U \times G \rightarrow U$. On démontre alors :

Théorème 2.2.1. *Les éléments du premier ensemble de cohomologie de Čech $\check{H}^1(X, \mathcal{S})$ sont en correspondance avec les classes d'isomorphismes d'algébroides des cordes holomorphes sur X .*

On note que les éléments de $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_G)$ classifient les G -fibrés principaux holomorphes sur X , et qu'on a une application d'oubli naturelle

$$\check{H}^1(X, \mathcal{S}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}_G). \quad (2.14)$$

L'image de cette application est l'ensemble des G -fibrés holomorphes dont la première classe de Pontryagin holomorphe [GRuTi2] s'annule, tandis que son noyau est isomorphe à l'espace

$$\check{H}^1(X, \Omega_{cl}^{2,0})$$

qui caractérise les algébroides de Courant holomorphes exactes sur X [30].

Afin de pouvoir manipuler ces algébroides, on obtient une classification de ces dernières en termes de formes différentielles globales sur X et P ([GRuSTi, Théorème 3.10]). On pourra alors parler de la classe d'une algébroïde des cordes holomorphes Q :

$$[Q] := [(\theta, H)] \in \check{H}^1(X, \mathcal{S}) \quad (2.15)$$

pour toute solution (θ, H) de (2.11) qui caractérise l'extension (2.12).

Déformations

On décrit également la théorie de déformation de ces objets (voir l'Annexe A pour des rappels de théorie de la déformation). Étant donné $Q \rightarrow X$ une algébroïde des cordes holomorphe sur X donnée par une extension (2.12), on note \mathfrak{Aut}_Q (respectivement \mathfrak{Aut}_P) le faisceau de symétries infinitésimales locales associé à $\text{Lie}(\text{Aut}(Q))$ (respectivement à $\text{Lie}(\text{Aut}(P))$). Ces faisceaux vont nous permettre d'obtenir une algèbre de Lie différentielle graduée qui décrira les déformations de Q . On a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \Omega_{cl}^{2,0} \rightarrow \mathfrak{Aut}_Q \rightarrow \mathfrak{Aut}_P \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

On utilise les résolutions acycliques :

$$0 \rightarrow \mathfrak{Aut}_P \rightarrow \Omega^{0,0}(\text{ad}(P)) \xrightarrow{\bar{\partial}^\theta} \Omega^{0,1}(\text{ad}(P)) \xrightarrow{\bar{\partial}^\theta} \dots \quad (2.17)$$

où l'opérateur $\bar{\partial}^\theta$ est induit par un opérateur de Dolbeault sur P associé à θ , ainsi que

$$0 \rightarrow \Omega_{cl}^{2,0} \rightarrow \Omega^{2,0} := \Omega^{\leq 0} \xrightarrow{d} \Omega^{3,0+2,1} := \Omega^{\leq 1} \xrightarrow{d} \dots \quad (2.18)$$

pour définir notre complexe :

$$\mathfrak{L}_Q^\bullet := \Omega^{0,\bullet}(\text{ad } P) \times \Omega^{\leq \bullet}$$

que l'on munit de la différentielle :

$$\begin{aligned} d_Q : \mathfrak{L}_Q^\bullet &\rightarrow \mathfrak{L}_Q^{\bullet+1} \\ (\alpha, b) &\mapsto (\bar{\partial}^\theta \alpha, db - 2c(\partial^\theta \alpha \wedge F_\theta)). \end{aligned}$$

Le complexe $(\mathfrak{L}_Q^\bullet, d_Q)$ est une extension d'algèbres différentielles graduées :

$$0 \rightarrow (\Omega^{\leq \bullet}, d) \rightarrow (\mathfrak{L}_Q^\bullet, d_Q) \rightarrow (\Omega^{0,\bullet}(\text{ad } P), \bar{\partial}^\theta) \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

De même, on peut définir un crochet par extension et on obtient une algèbre de Lie différentielle graduée notée

$$(\mathfrak{L}_Q^\bullet, d_Q, [\cdot, \cdot]_Q).$$

On démontre :

Théorème 2.2.2. *Les solutions de l'équation de Maurer-Cartan*

$$d_Q x + [x, x]_Q, \quad x \in \mathfrak{L}_Q^1 \quad (2.20)$$

sont en correspondance avec les algébroides des cordes holomorphes obtenus par déformation de Q .

Enfin, on applique la méthode de Kuranishi pour construire une tranche sous l'action d'un groupe de jauge adapté caractérisant les algébroides des cordes holomorphes proches de Q .

2.3 Métriques canoniques sur les algébroides des cordes

Soit Q une algébroïde des cordes sur X associée au G -fibré $P \rightarrow X$. On introduit dans [GRuSTi] les notions de métriques sur Q et de *classes d'Aeppli* pour Q qui généralisent celles de métriques et de classes de Kähler. On va définir ces objets et présenter les applications obtenues dans l'étude du système de Strominger.

Classes d'Aeppli

Les algébroïdes des cordes holomorphes associées aux solutions du système de Strominger sont particulières. En effet, si (Ω, θ, ω) est solution de (2.6), on a une algébroïde des cordes donnée par la solution $(\theta, d^c\omega)$ du système (2.11). En particulier, la forme

$$H = d^c\omega \in \Omega^3(X, \mathbb{C})$$

est d^c -exacte et provient d'une 2-forme positive, tandis que θ est la connexion de Chern d'une réduction de P à un sous-groupe compact maximal $K \subset G$. On introduit alors :

Définition 2.3.1. Une algébroïde de Bott-Chern est une algébroïde des cordes Q dont la classe dans $\check{H}^1(X, \mathcal{S})$ est représentée par $[(2i\partial\omega, \theta^h)]$ pour une $(1, 1)$ -forme réelle $\omega \in \Omega^{1,1}(X)$ et θ^h la connexion de Chern d'une réduction $h \in \Omega^0(P/K)$.

La terminologie provient du fait que l'équation

$$dd^c\omega = c(F_{g\theta^h} \wedge F_{g\theta^h}) = c(F_h \wedge F_h) \quad (2.21)$$

impose à $c(F_h \wedge F_h)$ d'être dd^c -exacte, et donc à la classe de Pontryagin $p_1(P, c)$ de s'annuler en cohomologie de Bott-Chern [51]. On peut alors définir une notion ad hoc de métrique hermitienne sur une algébroïde de Bott-Chern Q :

Définition 2.3.2. Une métrique hermitienne sur Q est une paire (ω, h) , où ω est une $(1, 1)$ -forme positive sur X , et $h \in \Omega^0(P/K)$ est une réduction de P telles que la classe de Q soit $[(2i\partial\omega, \theta^h)]$.

Une algébroïde admettant une telle métrique sera dite *positive*. On pose

$$B_Q := \{(\omega, h) \in \Omega^{1,1}(X) \times \Omega^0(P/K), [Q] = [(2i\partial\omega, \theta^h)]\}$$

et B_Q^+ l'ensemble des métriques sur Q . On va maintenant introduire une notion de *classe d'Aeppli* pour une algébroïde positive Q . On rappelle que le groupe d'Aeppli

$$H_A^{1,1}(X, \mathbb{R})$$

est le lieu réel du premier groupe de cohomologie d'Aeppli [51] :

$$H_A^{1,1}(X, \mathbb{C}) = \frac{\text{Ker}(dd^c : \Omega^{1,1}(X) \rightarrow \Omega^{2,2}(X))}{\text{Im}(\partial \oplus \bar{\partial} : \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X) \rightarrow \Omega^{1,1}(X))} \quad (2.22)$$

et que ce groupe est isomorphe à

$$H^{1,1}(X, \mathbb{R})$$

si X est une variété de Kähler. On cherche une quantité cohomologique associée à un espace de métriques dans B_Q^+ . Il s'agit essentiellement de contrôler la variation d'un représentant $c(F_h \wedge F_h)$ de la classe de Pontryagin $p_1(P, c)$ quand la métrique h varie. Suivant une idée de Donaldson [17], on introduit pour h et h_0 deux réductions de P , la quantité :

$$R(h, h_0) = \int_0^1 ic(u, F_{h_t}) dt \in \Omega^{1,1}(X) \quad (2.23)$$

où $h_t = e^{tu}h_0$, pour $u \in \Omega^0(i \text{ ad } P)$ et $h = e^u h_0$. Cette quantité vérifie :

$$dd^c R(h_1, h_0) = c(F_{h_1} \wedge F_{h_1}) - c(F_{h_0} \wedge F_{h_0}). \quad (2.24)$$

Si on fixe une métrique de référence (ω_0, h_0) sur Q , l'équation (2.24) assure que l'application suivante est bien définie :

$$\begin{aligned} Ap : B_Q &\rightarrow H_A^{1,1}(X) \\ (\omega, h) &\mapsto [\omega - \omega_0 - R(h, h_0)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

D'autre part, l'opérateur R vérifie une condition de cocyclicité (modulo $\text{Im}(\partial + \bar{\partial})$), ce qui implique que les lignes de niveau de Ap ne dépendent pas du choix de la métrique de référence (ω_0, h_0) dans B_Q . On a alors :

Définition 2.3.3. Une classe d'Aeppli sur Q est une ligne de niveau de Ap . On note Σ_Q l'ensemble de ces classes. On dira qu'une classe de Σ_Q est positive si elle est représentée par une métrique sur Q .

Enfin, étant donnée une classe d'Aeppli positive $\sigma := Ap(\omega_0, h_0)$ sur Q , on obtient une paramétrisation explicite des métriques qui représentent cette classe, à comparer au lemme $\partial\bar{\partial}$ en géométrie kählérienne :

Lemme 2.3.4. Une métrique (ω, h) est dans la classe $\sigma := Ap(\omega_0, h_0)$ si et seulement si il existe $\xi \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$ tel que

$$\omega = \omega_0 + R(h, h_0) + d\xi + Jd\xi. \quad (2.26)$$

On résume dans le tableau suivant les analogies avec les métriques sur les variétés de Calabi-Yau :

	Calabi-Yau	Strominger
Objet holomorphe	Variété X avec $c_1(X) = 0$	Variété X avec $c_1(X) = 0$ + Algébroïde des cordes Q
Métrique	$\omega \in \Omega_{>0}^{1,1}(X, \mathbb{R})$	$(\omega, h) \in B_Q^+$
Classe de métriques	Classe de Kähler $[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$	Classe d'Aeppli $[Ap(\omega, h)] \in H_A^{1,1}(X, \mathbb{R})$
Paramétrisation	Lemme $\partial\bar{\partial}$: $\omega = \omega_0 + i\partial\bar{\partial}\phi,$ $\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$	Lemme 2.3.4 : $\omega = \omega_0 + R(h, h_0) + (1 + J)d\xi,$ $(\xi, h) \in \Omega^1(X, \mathbb{R}) \times \Omega^0(P/K)$

Applications

On va pouvoir présenter les résultats obtenus à l'aide de la paramétrisation du Lemme 2.3.4. La donnée d'une métrique sur Q est équivalente à la donnée d'un couple $(\omega, h) \in B_Q^+$ tel que

$$i\partial\bar{\partial}\omega = c(F_h \wedge F_h).$$

Les représentants d'une classe d'Aeppli vérifient alors par définition l'équation d'anomalie. Le système de Strominger (2.1) devient, pour $(\omega, h) \in B_Q^+$,

$$\begin{cases} d(\|\Omega\|_\omega \omega^2) = 0 \\ F_h \wedge \omega^2 = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

On fixe alors un algébroïde de Bott-Chern positif Q et une classe d'Aeppli positive σ . On pose

$$B_\sigma := B_Q^+ \cap Ap^{-1}(\sigma)$$

l'espace des métriques dans σ . On introduit la *fonctionnelle dilaton* :

$$M : \begin{array}{ccc} B_\sigma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, h) & \mapsto & \int_X \|\Omega\|_\omega \frac{\omega^n}{n!}, \end{array} \quad (2.28)$$

Le Lemme 2.3.4 permet de calculer la première variation de $\|\Omega\|_\omega$ dans une classe d'Aeppli et on démontre :

Théorème 2.3.5. *Les points critiques de M sont les solutions de (2.27).*

Ceci permet la première approche variationnelle au système de Strominger. Par ailleurs, la fonctionnelle M est concave le long de certains chemins dans l'espace des métriques de la classe σ , que l'on souhaiterait interpréter comme des géodésiques. L'existence de suffisamment de telles géodésiques régulières impliquerait l'unicité d'une solution du système de Strominger au sein d'une classe σ , pour une algébroïde Q fixée.

On étudie également la linéarisation \mathcal{L}_σ du système (2.27) restreint à la classe de métriques B_σ en une solution donnée. On démontre que \mathcal{L}_σ est un opérateur de Fredholm d'indice nul. On a alors un résultat de stabilité sous déformations :

Théorème 2.3.6. *Supposons que (ω, h) soit une solution du système (2.27) sur Q , dans la classe σ . Si le noyau de \mathcal{L}_σ est nul, alors toute petite déformation de Q et σ admet une solution de (2.27).*

Ce résultat repose sur le théorème des fonctions implicites, et implique en particulier l'existence et l'unicité locale de solutions au système de Strominger pour toute classe d'Aeppli et algébroïde des cordes proches de σ et Q , si $\ker \mathcal{L}_\sigma = 0$. On l'applique pour construire de nouvelles solutions du système de Strominger au voisinage de toute solution kählérienne, pour laquelle on démontre que \mathcal{L}_σ est inversible.

2.4 Perspectives

L'article [GRuSTi] ouvre la voie à de nombreuses pistes de recherche sur le système de Strominger.

On souhaiterait tout d'abord appliquer le Théorème 2.3.6 à d'autres solutions explicites, en particulier non-Kähler (e.g. [24]). Idéalement, le noyau de \mathcal{L}_σ , la linéarisation des équations du système de Strominger, s'annule en ces solutions, et l'on obtiendrait ainsi localement une description de l'espace des modules des solutions autour de la solution de Fu et Yau. On pourra tester le compte de la dimension de cet espace des modules prédit dans [GRuSTi].

En second lieu, on cherchera à déterminer l'existence des géodésiques dans l'espace des métriques B_σ . Les solutions du système de Strominger étant des points critiques de la fonctionnelle dilaton M , et cette fonctionnelle étant concave le long des géodésiques, si tout couple de métrique peut être relié par une géodésique suffisamment régulière, on obtiendra l'unicité des solutions du système de Strominger dans une classe σ donnée.

Enfin, il serait intéressant de déterminer une borne supérieure de nature topologique pour la fonctionnelle dilaton M , et montrer que les solutions du système de Strominger maximisent cette fonctionnelle. Cette approche variationnelle nécessitera d'introduire des espaces fonctionnels adaptés aux métriques de σ et aux équations étudiées.

Annexe A

Quelques notions de théorie de la déformation

On revoit quelques principes généraux de la théorie de la déformation que l'on illustre avec l'exemple des déformations complexes d'une variété complexe X .

Généralités

Soit E une structure géométrique sur X (structure holomorphe, fibré holomorphe sur X , algèbre de Courant). Soit $\text{Aut}(E)$ le groupe des automorphismes de E , $\mathfrak{aut}(E)$ son algèbre de Lie, et \mathfrak{Aut}_E le faisceau d'algèbres de Lie associé sur X . Suivant Kodaira et Spencer [38], si le faisceau \mathfrak{Aut}_E est acyclique, la théorie de la déformation de E est décrite par la cohomologie de Čech de \mathfrak{Aut}_E . D'un point de vue calculatoire, une algèbre de Lie différentielle graduée (ou DGLA pour Differential Graded Lie Algebra) est plus utile pour décrire les déformations de E .

Définition A.0.1. Une algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{L}^\bullet, [\cdot, \cdot])$ sur \mathbb{C} est un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué $\mathfrak{L} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{L}^k$ avec une famille d'applications bilinéaires $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{L}^k \times \mathfrak{L}^l \rightarrow \mathfrak{L}^{k+l}$ telles que, pour tout $(x, y, z) \in \mathfrak{L}^k \times \mathfrak{L}^l \times \mathfrak{L}^m$,

i) Antisymétrie graduée : $[x, y] + (-1)^{kl}[y, x] = 0$.

ii) Identité de Jacobi : $(-1)^{km}[x, [y, z]] + (-1)^{lk}[y, [z, x]] + (-1)^{ml}[z, [x, y]] = 0$.

Une algèbre de Lie différentielle graduée $(\mathfrak{L}^\bullet, d, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{L}^\bullet, [\cdot, \cdot])$ munie d'une application \mathbb{C} -linéaire $d : \mathfrak{L}^\bullet \rightarrow \mathfrak{L}^{\bullet+1}$, appelée différentielle, et qui satisfait pour tout $(x, y) \in \mathfrak{L}^k \times \mathfrak{L}^l$:

iii) Différentielle : $d \circ d = 0$.

iv) Dérivation de degré 1 : $d[x, y] = [dx, y] + (-1)^k[x, dy]$.

À une DGLA on associe les espaces des :

- Symétries infinitésimales :

$$H^0(\mathfrak{L}^\bullet, d) := \ker(d : \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^1),$$

- Déformations infinitésimales :

$$H^1(\mathfrak{L}^\bullet, d) := \frac{\ker d : \mathfrak{L}^1 \rightarrow \mathfrak{L}^2}{\text{Im } d : \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^1}$$

- Obstructions :

$$H^2(\mathfrak{L}^\bullet, d) := \frac{\ker d : \mathfrak{L}^2 \rightarrow \mathfrak{L}^3}{\text{Im } d : \mathfrak{L}^1 \rightarrow \mathfrak{L}^2}.$$

On associe également une équation de déformation, ou équation de Maurer-Cartan :

Définition A.0.2. Soit une DGLA $(\mathcal{L}^\bullet, d, [\cdot, \cdot])$. L'équation de Maurer-Cartan associée est

$$dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0, \text{ pour } x \in \mathcal{L}^1. \quad (\text{A.1})$$

Les solutions de l'équation (A.1) correspondent à des déformations infinitésimales intégrables. L'espace $H^2(\mathcal{L}^\bullet, d)$ contient les obstructions à l'intégrabilité des éléments de $H^1(\mathcal{L}^\bullet, d)$.

Une telle DGLA peut être obtenue à l'aide d'une résolution acyclique du faisceau \mathfrak{Aut}_E [47] :

$$0 \rightarrow \mathfrak{Aut}_E \rightarrow \mathcal{L}_E^0 \xrightarrow{d} \mathcal{L}_E^1 \xrightarrow{d} \dots$$

Si cette résolution est elliptique (c'est à dire induit un complexe elliptique d'opérateurs différentiels sur les sections globales des \mathcal{L}_E^i), on peut dans certain cas construire une famille complète de petites déformations de E , en suivant Kuranishi [39].

Exemple : déformations d'une variété complexe

On considère l'exemple des déformations d'une variété complexe X . Le faisceau \mathfrak{Aut}_E est ici celui des champs de vecteurs holomorphes \mathcal{T}_X . Le complexe de Dolbeault fournit une résolution acyclique par les faisceaux des $(0, j)$ -formes à valeurs dans \mathcal{T}_X :

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow \Omega^{0,0}(TX^{1,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(TX^{1,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

où

$$TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = TX^{1,0} + TX^{0,1}$$

est la décomposition en sous-espaces propres de la structure presque complexe J sur X . La théorie de la déformation d'une variété complexe X est décrite à l'aide de la DGLA

$$(\Omega^{0,\bullet}(TX^{1,0}), \bar{\partial}, [\cdot, \cdot])$$

où le crochet $[\cdot, \cdot]$ étend naturellement le crochet sur les champs de vecteurs [38, 39]. On obtient les groupes de cohomologie :

$$H^i(X, \mathcal{T}_X) \simeq \frac{\ker \bar{\partial} : \Omega^{0,i}(TX^{1,0}) \rightarrow \Omega^{0,i+1}(TX^{1,0})}{\text{Im } \bar{\partial} : \Omega^{0,i-1}(TX^{1,0}) \rightarrow \Omega^{0,i}(TX^{1,0})}. \quad (\text{A.2})$$

L'espace $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ décrit les *déformations infinitésimales* des structures complexes sur X . L'espace $H^2(X, \mathcal{T}_X)$ décrit les *obstructions* à l'intégration des éléments de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ en des solutions de l'équation de Maurer-Cartan :

$$\bar{\partial}\gamma + \frac{1}{2}[\gamma, \gamma] = 0, \gamma \in \Omega^{0,1}(TX^{1,0}).$$

Une telle solution γ encode une structure presque-complexe intégrable sur X paramétrée par la distribution

$$TX_\gamma^{0,1} := \{V + \gamma(V), V \in TX^{0,1}\}.$$

Enfin, l'opérateur $\bar{\partial}$ induit un complexe elliptique sur les sections globales $(\Omega^{0,i}(TX^{1,0}), \bar{\partial})$. On peut alors décrire la construction de la tranche de Kuranishi [39]. Soit \mathcal{J} l'espace des structures presque-complexes intégrables sur X et soit \mathcal{G} la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes de X . Kuranishi a construit une application

$$\Phi \quad U \subset H^1(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow \mathcal{J} \quad (\text{A.3})$$

d'un voisinage U de 0 dans $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ vers un voisinage \mathcal{V} de la structure presque-complexe initiale J de X dans \mathcal{J} telle que $\Phi(0) = J$ et la \mathcal{G} -orbite de toute structure-presque complexe $J' \in \mathcal{V}$ intersecte $\Phi(U)$. On appelle l'image \mathcal{T} de Φ une *tranche* pour les petites déformations de X modulo l'action de \mathcal{G} . On note que \mathcal{T} paramétrise une famille analytique de déformations complexes de X :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}} := \{(t, (X, J_t)), t \in \mathcal{T}\} \rightarrow \mathcal{T}.$$

Par un résultat de Kuranishi, cette famille est *semi-universelle*, c'est à dire que pour tout autre famille analytique de déformations de X :

$$\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S} \text{ avec } \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(0_{\mathcal{S}}) \simeq X \text{ où } 0_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$$

il existe une application analytique $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ soit induite par Ψ :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \simeq \Psi^* \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$$

et telle que l'application tangente de Ψ en $0_{\mathcal{S}}$ soit uniquement déterminée. C'est cette construction que l'on adapte dans les articles [GTi, RoTi, TiV], voir Sections 1.2.2, 1.2.3 et 1.2.4.

Annexe B

Algébroides de Courant

On donne dans cette annexe quelques éléments sur les algébroides de Courant. Ces structures sont des extensions naturelles des *algébroides de Lie*, on commencera donc par donner la définition de ces dernières.

Algébroides de Lie

Soit X une variété lisse. La notion d'algébroïde de Lie étend naturellement celles de fibré tangent et d'algèbre de Lie.

Définition B.0.1. Une algébroïde de Lie $(L, [\cdot, \cdot], \pi)$ sur X est la donnée d'un fibré vectoriel $L \rightarrow X$, d'un morphisme de fibré $\pi : L \rightarrow TX$ appelée ancre et d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur l'espace des sections $\Gamma(X, L)$ tels que :

i) L'ancre est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est à dire :

$$\forall (V, W) \in \Gamma(X, L)^2, [V, W] = [\pi(V), \pi(W)],$$

ii) Le crochet vérifie l'identité de Leibniz :

$$\forall f \in C^\infty(X, \mathbb{R}), \forall (V, W) \in \Gamma(X, L)^2, [V, fW] = f[V, W] + (\pi(V) \cdot f)W.$$

L'exemple le plus simple d'algébroïde de Lie est le fibré tangent $(TX, \text{Identité}, [\cdot, \cdot])$ avec le crochet standard. On a également les exemples suivants :

- i) Les algèbres de Lie peuvent être vues comme des algébroides de Lie au dessus d'une variété réduite à un singleton, avec le crochet de Lie et l'ancre triviale.
- ii) Tout feuilletage provient d'une distribution intégrable $D \subset TX$ que l'on peut munir d'une structure d'algébroïde de Lie avec la restriction du crochet de champs de vecteur et pour l'ancre l'inclusion $D \hookrightarrow TX$.
- iii) On définit maintenant l'*algébroïde d'Atiyah*. Soit $\pi : P \rightarrow X$ un G -fibré principal. On a une suite exacte de fibrés vectoriels :

$$0 \rightarrow \text{ad}(P) \rightarrow TP/G \rightarrow TX \rightarrow 0 \tag{B.1}$$

où $\text{ad}(P)$ dénote le fibré adjoint de P et où les sections de TP/G correspondent aux champs de vecteurs G -invariants sur P . On peut munir TP/G d'une structure d'algébroïde de Lie avec le crochet sur les champs de vecteurs de P et l'ancre surjective $d\pi : TP/G \rightarrow TX$.

Algébroides de Courant

Le crochet de Courant est le crochet anti-symétrique défini sur $\Gamma(X, TX^* \oplus TX)$ par :

$$[V + \xi, W + \eta] = [V, W] + \mathcal{L}_V \eta - \mathcal{L}_W \xi - \frac{1}{2} d(\iota_V \eta - \iota_W \xi). \quad (\text{B.2})$$

Ce dernier a été introduit par Courant [16] comme extension naturelle du crochet des champs de vecteurs aux sections de $TX^* \oplus TX$. Il permet de décrire de nombreuses structures géométriques par des distributions $D \subset TX^* \oplus TX$ involutives, c'est à dire stables par crochet. On liste ici quelques exemples :

- i) Une structure symplectique sur X est donnée par une 2-forme fermée et non-dégénérée ω . La donnée de cette forme est équivalente à la donnée de

$$D_\omega := \{V + \iota_V \omega, V \in TX\} \subset TX^* \oplus TX$$

et la condition $d\omega = 0$ correspond à $[D_\omega, D_\omega] \subset D_\omega$.

- ii) Une distribution de rang constant $D \subset TX$ est équivalente à une distribution

$$D \oplus D^\perp \subset TX^* \oplus TX$$

où D^\perp est l'annulateur de D . L'intégrabilité de cette distribution est équivalente au fait que $D \oplus D^\perp$ soit involutive.

- iii) Si l'on considère l'extension du crochet à $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, l'intégrabilité d'une structure complexe J est équivalente au fait que la distribution

$$TX^{0,1} \oplus (TX^{0,1})^\perp$$

soit involutive.

Les exemples ci-dessus sont tous isotropes par rapport à la forme bilinéaire naturelle définie sur $TX^* \oplus TX$ par :

$$\forall (V + \xi, W + \eta) \in TX^* \oplus TX, \langle V + \xi, W + \eta \rangle = \frac{\eta(V) + \xi(W)}{2}. \quad (\text{B.3})$$

Par ailleurs, une distribution isotrope involutive $D \subset TX^* \oplus TX$ est munie d'une structure d'algébroïde de Lie par restriction du crochet de Courant [30]. Ceci motive l'introduction des algébroides de Courant qui généralisent le triplet $(TX^* \oplus TX, [\cdot, \cdot], \langle \cdot, \cdot \rangle)$:

Définition B.0.2. Une algébroïde de Courant sur X est un quadruplet $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot], \pi)$ où E est un fibré vectoriel sur X , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , $[\cdot, \cdot]$ est un crochet sur les sections de E et $\pi : E \rightarrow TX$ est un morphisme de fibrés tel que pour $e, e', e'' \in \Gamma(X, E)$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$:

$$(C1) : [e, [e', e'']] = [[e, e'], e''] + [e, [e', e'']],$$

$$(C2) : \pi([e, e']) = [\pi(e), \pi(e')],$$

$$(C3) : [e, \phi e'] = \pi(e)(\phi) e' + \phi [e, e'],$$

$$(C4) : \pi(e) \langle e', e'' \rangle = \langle [e, e'], e'' \rangle + \langle e', [e, e''] \rangle,$$

$$(C5) : [e, e'] + [e', e] = 2\pi^* d \langle e, e' \rangle.$$

Les axiomes vérifiés par une algébroïde de Courant sont vérifiés par $(TX^* \oplus TX, [\cdot, \cdot], \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On se restreint dans toute la suite aux algébroides de Courant *transitives*, pour lesquelles l'ancrage $\pi : E \rightarrow TX$ est surjective. Une telle algébroïde $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot], \pi)$ peut être vue comme une extension d'une algébroïde de Lie. En effet, soit

$$L := E / (\ker \pi)^\perp.$$

On peut montrer que le crochet de E se restreint à L et induit une structure d'algébroïde de Lie $(L, [\cdot, \cdot], \pi)$ ainsi qu'une suite exacte de fibrés :

$$0 \rightarrow TX^* \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0. \quad (\text{B.4})$$

On a également la suite exacte :

$$0 \rightarrow \ker \pi|_L \rightarrow L \rightarrow TX \rightarrow 0 \quad (\text{B.5})$$

et la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\ker \pi|_L$ induit une forme bilinéaire symétrique c . Réciproquement, si $(L, [\cdot, \cdot], \pi)$ est une algébroïde de Lie d'ancrage surjective munie d'une forme bilinéaire symétrique c sur $\ker \pi$, on peut définir sa première classe de Pontryagin $p_1(L, c)$. Bressler a démontré [8] qu'une extension de L de la forme (B.4) par une algébroïde de Courant existe si et seulement si la classe $p_1(L, c)$ s'annule.

Algébroïdes exactes et extensions d'Atiyah

Les cas particuliers qui nous intéressent dans ce texte sont les suivants :

- i) Algébroïdes exactes : une algébroïde de Courant $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot], \pi)$ est dite *exacte* si on a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow TX^* \rightarrow E \rightarrow TX \rightarrow 0.$$

Dans ce cas elle est isomorphe à $(TX^* \oplus TX, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot]_H, \pi)$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini par (B.3) et le crochet est une modification du crochet de Courant (B.2) :

$$[V + \xi, W + \eta]_H = [V + \xi, W + \eta] + \iota_{V,W}H$$

pour une 3-forme fermée $H \in \Omega^3(X, \mathbb{R})$. On peut démontrer que ces algébroïdes sont classifiées par $H^3(X, \mathbb{R})$.

- ii) Extensions des algébroïdes d'Atiyah : soit $P \rightarrow X$ un G -fibré principal, et supposons que $\text{Lie}(G)$ soit munie d'une forme bilinéaire symétrique Ad -invariante c . D'après Bressler, l'existence d'une extension de l'algébroïde d'Atiyah TP/G par une algébroïde de Courant $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot], \pi)$ de la forme :

$$0 \rightarrow TX^* \rightarrow E \rightarrow TP/G \rightarrow 0 \quad (\text{B.6})$$

est équivalente à l'annulation de la première classe de Pontryagin

$$0 = p_1(TP/G, c) \in H^4(X, \mathbb{R}).$$

Par la théorie de Chern-Weyl, la première classe de Pontryagin est représentée par

$$c(F_\theta \wedge F_\theta) \in \Omega^4(X, \mathbb{R})$$

où $F_\theta \in \Omega^2(X, \text{ad } P)$ est la courbure d'une connexion θ de $P \rightarrow X$. La condition d'annulation s'écrit alors

$$dH = c(F_\theta \wedge F_\theta) \quad (\text{B.7})$$

pour θ une connexion sur P et $H \in \Omega^3(X, \mathbb{R})$. La donnée d'un tel couple (θ, H) permet de décrire explicitement les extensions (B.6) et (B.5) ainsi que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $[\cdot, \cdot]$. On remarque enfin que l'équation (B.7) est l'équation d'anomalie du système de Strominger (2.1), si l'on pose $H = d^c\omega$. Toute solution du système de Strominger définit donc une algébroïde de Courant, extension d'une algébroïde d'Atiyah.

On peut également définir des algébroïdes dans la catégorie holomorphe. C'est précisément les extensions des algébroïdes d'Atiyah par des algébroïdes de Courant du type (B.6) dans la catégorie holomorphe qui sont étudiées dans la Section 2.2.

Bibliographie

- [CTi] A. Clarke et C. Tipler, *Lower bounds on the modified K-energy and complex deformations*, Adv. Math. 252 (2014), 449–470.
- [GRTi] M. Garcia Fernandez, R. Rubio et C. Tipler, *Infinitesimal moduli for the Strominger system and Killing spinors in generalized geometry*, à paraître dans Mathematische Annalen.
- [GRuTi2] M. Garcia Fernandez, R. Rubio et C. Tipler, *Holomorphic string algebroids*, preprint ArXiv 1807.10329.
- [GRuSTi] M. Garcia Fernandez, R. Rubio, C. Shahbazi et C. Tipler, *Canonical metrics on holomorphic Courant algebroids*, preprint ArXiv 1803.18073.
- [GTi] M. Garcia-Fernandez et C. Tipler, *Deformations of complex structures and the coupled Kähler-Yang-Mills equations*, J. London Math. Soc. 89 (2014) 779–796.
- [RoTi] Y. Rollin et C. Tipler, *Deformations of extremal toric manifolds*, J. Geom. Anal. 24 (2014), no. 4, 1929–1958.
- [RoSTi] Y. Rollin, S. Simanca et C. Tipler, *Deformation of extremal metrics, complex manifolds and the relative Futaki invariant*, Math. Z. 273 (2013), no. 1-2, 547–568.
- [RuTi] R. Rubio et C. Tipler, *The Lie group of automorphisms of a Courant algebroid and Moduli space of Generalized metrics*, preprint ArXiv 1612.03755.
- [STi] Y. Sano et C. Tipler, *Extremal metrics and lower bound of the modified K-energy*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 17 (2015), no. 9, 2289–2310.
- [STi2] Y. Sano et C. Tipler, *A moment map picture of relative balanced metrics on extremal Kähler manifolds*, preprint ArXiv 1703.09458.
- [Ti0] C. Tipler, *Constructions de métriques extrémales : résolutions de singularités, déformations complexes*, Thèse de doctorat, disponible sur TEL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00676452/>
- [Ti1] C. Tipler, *Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*, Bulletin de la SMF 141, fascicule 3 (2013), 481–516
- [Ti2] C. Tipler, *A note on blow-ups of toric surfaces and cscK metrics*, Tohoku Math. J. (2) Vol. 66, No. 1 (2014), 15–29.
- [Ti3] C. Tipler, *Relative Chow stability and optimal weights*, preprint ArXiv1710.02536.
- [TiV] C. Tipler, C. Van Coevering, *Deformations of constant scalar curvature Sasakian metrics and K-stability*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 22, 1156–11604.
- [1] L. Alvarez-Consul, M. Garcia-Fernandez, O. Garcia-Prada, *Coupled equations for Kähler metrics and Yang–Mills connections*, Geometry and Topology 17 (2013) 2731–2812
- [2] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon et C. W. Tønnesen-Friedman, *Extremal Kähler metrics on projective bundles over a curve*, Adv. Math. 227 (2011), 2385–2424.
- [3] V. Aspotolov, H. Huang, *A splitting theorem for extremal Kähler metrics*, J. Geom. Anal. 25 (2015), 149–170.

- [4] C. Arezzo, F. Pacard et M. Singer, *Extremal Metrics on blow ups*, Duke Math. J. Volume **157**, Number 1 (2011), 1–51.
- [5] R. Berman and B. Berndtsson, *Convexity of the K-energy on the space of Kähler metrics and uniqueness of extremal metrics*, J. Am. Math.Soc. vol. **30** Issue 4, p. 1165–1196
- [6] Charles P. Boyer, Krzysztof Galicki, and Santiago R. Simanca, *Canonical Sasakian metrics*, Comm. Math. Phys. **279** (2008), no. 3, 705–733.
- [7] N.P. Buchdahl, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces*, Math. Ann. **280** (1988) 625–684.
- [8] P. Bressler, *The first Pontryagin class*, Compos. Math., **143** (2007) 1127–1163.
- [9] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, "Seminar on Differential Geometry" (ed.S.-T. Yau), Princeton, 1982.
- [10] D. Calderbank et M. Singer, *Einstein metrics and complex singularities*, Invent. Math. **156** (2004), no2, 405–443.
- [11] X.X. Chen, *Space of Kähler metrics. III. On the lower bound of the Calabi energy and geodesic distance*, Invent. Math. 175 (2009), no. 3, 453–503.
- [12] X.X. Chen, *Space of Kähler metrics (IV) : On the lower bound of the K-energy*, preprint ArXiv :0809.4081
- [13] X.X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun., *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I-III*. J. Amer. Math. Soc. 28 (2015), 183–197, 198-234, 235–278.
- [14] X.X. Chen et G. Tian, *Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs* , Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **107** (2008), 1–107.
- [15] T. Collins and G. Székelyhidi, *K-Semistability for irregular Sasakian manifolds*, J. Differential Geom. 109 (2018), no. 1, 81–109
- [16] T. Courant, *Dirac manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990), 631–661.
- [17] S. Donaldson, *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. LMS 50 (1985) 1–26
- [18] S. K. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology*, In Atiyah and Iagolnitzer, editors, *Fields Medallists' Lectures*, 384–403. World Scientific, (1997).
- [19] S. K. Donaldson *Scalar curvature and projective embeddings. I.*, I. J. Differential Geom. **59**(2001), no.3, 479-522.
- [20] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002), 289-349.
- [21] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings. II.*, Q.J.Math. 56, no.3 (2005) 345–356.
- [22] S. K. Donaldson, *Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry*, Handbook of geometric analysis. No. **1**, (ALM) 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [23] J. Fu, J. Li and S.-T. Yau, *Constructing balanced metrics on some families of non-Kähler Calabi-Yau threefolds* ArXiv 0809.4748
- [24] J.-X. Fu and S.-T. Yau, *The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère*, J. Diff. Geom. **78** (2008) 369–428.
- [25] A. Futaki, *The Ricci curvature of symplectic quotients of Fano manifolds*, Tohoku Math. Journ. 39 (1987), 329–339.

- [26] A. Futaki et T. Mabuchi, *Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes*, Math. Ann. **301** (1995), no. 2, 199–210.
- [27] M. Garcia-Fernandez, *Coupled equations for Kähler metrics and Yang-Mills connections*, PhD Thesis. Instituto de Ciencias Matematicas (CSIC-UAM-UC3M-UCM), Madrid, 2009, arXiv :1102.0985
- [28] O. García-Prada, *Dimensional reductions of stable bundles, vortices and stable pairs*, Int Jour. of Math. 5 (1994), no. 1, 1–52.
- [29] P. Gauduchon, *Calabi’s extremal metrics : An elementary introduction*, book in preparation.
- [30] M. Gualtieri, *Generalized Complex Geometry*, Ann. Math. **174** (2011) 75–123 .
- [31] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math., 67 (1982) 515–538
- [32] L. Huang, *On joint moduli spaces*. Mat. Ann. **302** , 61-79 (1995).
- [33] N. Ilten et R. Vollmert, *Deformations of Rational T-Varieties*, J. Algebraic Geometry 21 (2012) pp. 473–493.
- [34] A. Fujiki, *Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics*, Sugaku Expo.5 (1992) 173–191
- [35] J. Keller and C. Tønnesen-Friedman, *Non trivial examples of coupled equations for Kähler metrics and Yang-Mills connections*, Cent. Eur. J. Math.10(5), 2012, 1673–1687
- [36] G. Kempf and L. Ness, *The length of vectors in representation spaces*, In K. Lonsted, editor, Algebraic Geometry, vol. 732 of Lecture Notes in Mathematics, pg. 233–244, Copenhagen, 1978, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [37] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Princeton University Press (1987).
- [38] K. Kodaira and D.C. Spencer *On deformations of complex analytic structures, I-II, III*, Annals of Math. 67 (1958), 328–466; 71 (1960), 43–76.
- [39] M. Kuranishi, *New proof for the existence of locally complete families of complex structures*, in ‘Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis 1964)’, Springer, Berlin, 1965, 142–154.
- [40] M. Levine, *A remark on extremal Kähler metrics*, J. Differential Geom. **21** (1985), 73–77.
- [41] J. Li and S.-T. Yau, *Hermitian-Yang-Mills connections on non-Kähler manifolds*, Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986) 560-573, Adv. Ser. Math. Phys., 1, World Sci. Publishing, Singapore (1987).
- [42] J. Li and S.-T. Yau, *The existence of supersymmetric string theory with torsion*, J. Diff. Geom. 70 (2005) 143–181
- [43] C. Le Brun et S. R. Simanca, *Extremal Kähler Metrics and Complex Deformation Theory*, Geom. Func. Analysis, **4** (1994), pp. 298–336.
- [44] T. Mabuchi, *K-energy maps integrating Futaki invariants*, Tohoku Math. J. vol. 38 (no.4), 1986, 575–593.
- [45] T. Mabuchi, *An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds I*, Invent. Math. **159** (2005), 225–243.
- [46] T. Mabuchi, *Asymptotic polybalanced kernels on extremal Kähler manifolds*, preprint ArXiv 1610.09632

- [47] E. Martinengo, *Higher brackets and moduli space of vector bundles*, Phd Thesis, Università degli studi di Roma La Sapienza
- [48] M. L. Michelsohn, *On the existence of special metrics in complex geometry*, Acta Math. **149** (1) (1982), 261–295.
- [49] I. Mundet i Riera, *Parabolic vector bundles and equivariant vector bundles*, Int. Jour. of Math. **13** (2002), no. 9, 907–957.
- [50] T. Nevins, *Descent of coherent sheaves and complexes to geometric invariant theory quotients*, Journal of Algebra (2008).
- [51] M. Schweitzer, *Autour de la cohomologie de Bott-Chern*, arXiv :0709.3528.
- [52] J. Stoppa, *K-stability of constant scalar curvature manifolds*, Adv. Math. **221** no 4 (2009) 1397–1408
- [53] A. Strominger, *Superstrings with torsion*, Nucl. Phys. B **274** (2) (1986) 253–284
- [54] G. Székelyhidi, *Extremal metrics and K-stability*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 76–84.
- [55] G. Székelyhidi, *The Kähler-Ricci flow and K-polystability*, Amer. J. Math. **132** (2010) 1077-1090.
- [56] G. Székelyhidi, *Blowing extremal Kähler manifolds II*, Invent. Math **200** (2015), no. 3, 925-977
- [57] G. Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geom. **32** (1990), 99-130.
- [58] G. Tian, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math. **137** (1997), 1-37.
- [59] C. W. Toennesen-Friedman, *Extremal Kähler metrics on Ruled Surfaces*, Institut for Matematik og Datalogi Odense Universitet, Preprint 1997, Nr. **36**, September 1997.
- [60] K. Uhlenbeck, S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian Yang-Mills-connections on stable bundles over Kähler manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 257–293
- [61] X. Wang, *Moment map, Futaki invariant and stability of projective manifolds*, Comm. Anal. geom. **12** (2004), 1009-1037.
- [62] S.-T. Yau, *Open problems in geometry*, Proc. Symposia Pure Math. **54** (1993), 1-28.
- [63] S.-T. Yau, *Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **74** (1977) 1798–1799.
- [64] S.-T. Yau, *Complex geometry : Its brief history and its future*, Science in China Series A Mathematics **48** (2005) 47–60.
- [65] S. Zhang, *Heights and reductions of semi-stable varieties*, Compositio Math. **104** (1996), 77-105.