



HAL
open science

EXPLORATION DES PROPRIÉTÉS DES HOMOGRAPHIES : APPLICATIONS EN SCIENCE DES DONNÉES ET EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Armand Armand

► **To cite this version:**

Armand Armand. EXPLORATION DES PROPRIÉTÉS DES HOMOGRAPHIES : APPLICATIONS EN SCIENCE DES DONNÉES ET EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES. Mathématiques [math]. Université de Toamasina (Madagascar), 2019. Français. NNT : . tel-02120375

HAL Id: tel-02120375

<https://hal.science/tel-02120375>

Submitted on 5 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE TOAMASINA

École Doctorale Thématique : « Science, Culture, Société et Développement »

Équipe d'accueil : Mathématiques, Informatique et Applications (MIA)

EXPLORATION DES PROPRIÉTÉS DES HOMOGRAPHIES :
APPLICATIONS EN SCIENCE DES DONNÉES
ET EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

THÈSE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT
EN SCIENCE DES DONNÉES

Présentée par ARMAND

Sous la direction de Professeur Titulaire TOTOHASINA André

Membres du jury :

JAORIZIKY	Professeur Titulaire	Université de Toamasina	Président
RAKOTOSON Jean Emile	Professeur	Université de Fianarantsoa	Rapporteur
RAVELONIRINA Hanitriniaina Sammy Grégoire	Professeur	Université d'Antananarivo	Rapporteur
RALAMBONDRAINNY Henri	Professeur Emérite	Université de La Réunion	Examineur
RAMANANTSOA Harrimann	Maître de conférences	I.S.T. d'Antsiranana	Examineur
FENO Daniel Rajaonasy	Maître de conférences	Université de Toamasina	Co-Directeur
TOTOHASINA André	Professeur Titulaire	Université d'Antsiranana	Directeur

Soutenue, le 25 Avril 2019



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE TOAMASINA

École Doctorale Thématique : « Science, Culture, Société et Développement »

Équipe d'accueil : Mathématiques, Informatique et Applications (MIA)

EXPLORATION DES PROPRIÉTÉS DES HOMOGRAPHIES :
APPLICATIONS EN SCIENCE DES DONNÉES
ET EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

THÈSE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT
EN SCIENCE DES DONNÉES

Présentée par ARMAND

Sous la direction de Professeur Titulaire TOTOHASINA André

Membres du jury :

JAORIZIKY	Professeur Titulaire	Université de Toamasina	Président
RAKOTOSON Jean Emile	Professeur	Université de Fianarantsoa	Rapporteur
RAVELONIRINA Hanitriniaina Sammy Grégoire	Professeur	Université d'Antananarivo	Rapporteur
RALAMBONDRAINNY Henri	Professeur Emérite	Université de La Réunion	Examineur
RAMANANTSOA Harrimann	Maître de conférences	I.S.T. d'Antsiranana	Examineur
FENO Daniel Rajaonasy	Maître de conférences	Université de Toamasina	Co-Directeur
TOTOHASINA André	Professeur Titulaire	Université d'Antsiranana	Directeur

Soutenue, le 25 Avril 2019

Remerciements

En premier lieu, je remercie Monsieur Jaoriziky, Professeur titulaire des Universités, Directeur de l'Ecole Doctorale Thématique : « Science, Culture, Société et Développement », Equipe d'accueil « Mathématiques, Informatique et Applications » sise à l'Université de Toamasina, pour son acceptation de ma candidature pour la période de fin 2016 à 2019.

Un grand merci est également adressé à mon Directeur de thèse, Totohasina André, Professeur titulaire des Universités, pour m'avoir proposé ce sujet, et m'avoir accompagné dans toutes les étapes de cette thèse. En effet, ledit travail de thèse est étroitement réalisé avec sa collaboration, ce qui m'a permis d'évoluer mes connaissances car la collaboration mentionnée a servi de guide fiable, menant ainsi à l'objectif souhaité sans trébucher. Qu'il trouve ici l'expression de mon plus grand respect et qu'il reçoive mes plus vifs remerciements.

Que Monsieur Feno Daniel Rajaonasy, Maître de conférences, trouve ici l'expression de mes remerciements les plus sincères d'avoir accepté d'être co-Directeur de cette thèse. Ses multitudes directives et son soutien moral permanent m'ont donné des inspirations afin que je puisse réaliser le présent travail jusqu'à la fin. Il m'a fourni satisfaction à tout moment.

Mes reconnaissances vont naturellement à l'endroit de Monsieur Rabe Tsirobaka, Maître de conférences, pour les échanges scientifiques et techniques que nous avons tenus. Pour tout le temps qu'il m'a consacré dans la rédaction et la correction de plusieurs points du travail, qu'il trouve ici mes vifs remerciements !

J'adresse particulièrement mes remerciements aux membres du Jury. Je remercie Ravelonirina Hanitriniaina Sammy Grégoire et Rakotoson Jean Emile, Professeurs des Universités, d'avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux. Je profite cette occasion pour leur adresser mes sincères respects et leur exprimer ma profonde gratitude pour leurs commentaires et jugements très pertinents et constructifs sur mon travail, tant sur le fond que sur la forme.

Je n'oublierais jamais les enseignants (mes collègues) et les personnels administratifs du Lycée Mixte Antsiranana qui m'ont donné beaucoup d'idées contribuant à la réussite de mes recherches. En effet, cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans lesdits soutiens.

Enfin, mes reconnaissances les plus sincères vont à l'endroit de mon épouse Tombo Rosele Litisia ma chère bien aimé ainsi qu'à l'ensemble de ma famille, plus particulièrement ma sœur Georgette, qui m'ont toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris. Il m'est impossible d'imaginer en être arrivé au stade actuel sans eux.

Table des matières

Contextes et Problématiques	viii
Résumé	x
Liste des Tableaux	x
Liste des Figures	xii
Notations et abréviations	xiii
Structure de la thèse	xvi
1 Introductions générales	1
1.1 Homographie	1
1.1.1 Signification de la homographie et sa position dans le programme scolaire	1
1.1.2 Problématiques	2
1.2 Fouille et Science de données	2
1.2.1 Fouille de données	2
1.2.2 Science de données : réflexion épistémologique	2
1.2.3 Différentes disciplines de la science des données	3
1.2.4 Objectifs	3
1.2.5 Domaines d'utilisation	4
1.2.6 Validation des qualités de données des règles d'association	4
1.2.7 Introduction de la normalisation d'une mesure	4
1.2.8 Problématiques	5
1.3 Didactique des mathématiques	5
1.3.1 Intégration des TIC dans l'enseignement (TICE)	5
1.4 Problématiques	6
Première partie : État de l'art autour des quelques propriétés mathématiques des homographies mises en jeux dans ce travail	7
2 État de l'art sur les homographies	8
2.1 Rappels et Définitions	8
2.1.1 Approche géométrique	8
2.1.2 Approche algébrique	8
2.1.3 Approche topologique et structure algébrique de l'ensemble des homographies (\mathcal{H}, o)	8

2.1.4	Dérivée et variation d'une fonction homographique	9
2.2	Quelques propriétés d'une fonction homographique	9
2.2.1	Forme canonique	9
2.2.2	Exemples de représentations graphiques des quelques homographies réelles	10
2.2.3	Droite projective et homographie	10
2.3	Homographie et Inversion géométrique plane	12
2.3.1	Comment construire un point inverse ?	13
2.3.2	Images de deux points par l'inversion plane	14
2.3.3	Figures inverses d'une même figure	15
2.3.4	Image d'un cercle	15
2.3.5	Image d'une droite par l'inversion	16
2.3.6	Interprétation algébrique de l'inversion à l'aide d'un complexe	17
2.4	Homographie h et cocyclicité	18
2.4.1	Equations des droites et des cercles	19
2.4.2	Inversion et birapport (support de deux rapports)	20
2.4.3	Interprétation géométrique de la homographie : $z \mapsto \frac{z-b}{z-a}$	21
2.5	Rappels et définitions d'angles au centre et inscrit	21
2.5.1	Angle au centre	21
2.5.2	Quelques théories des angles inscrits	22
2.6	Décompositions d'une rotation et d'une translation	22
2.6.1	Composition de translation par une rotation et son inverse	22
2.6.2	Recherche des éléments caractéristiques des <i>tor</i> et <i>rot</i>	24
2.6.3	Méthode	24
2.7	Expressions analytiques et complexe d'une symétrie orthogonale d'axe δ	25
2.8	Caractérisation d'une transformation complexe du type $z' = \omega_i \bar{z} + \lambda_i$ où $(\omega_i, \lambda_i) \in \mathbb{C}^2$	26
2.9	Lignes de niveaux de la homographie $h : z \mapsto \frac{z-b}{z-a}$	27
2.9.1	Recherche de l'ensemble des points M d'affixe z tel que le nombre réel $ \frac{z-b}{z-a} = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$	27
2.9.2	Recherche de l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\arg(\frac{z-b}{z-a}) = \theta[\pi]$ ou $\arg(\frac{z-b}{z-a}) = \theta[2\pi]$	28
2.10	Etude d'une suite récurrente homographique utilisant un point fixe d'une homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$	33
2.11	Homographies, conservation des angles et plan analytique	34
2.12	Transformations des objets géométriques classiques	36
2.12.1	Groupe hyperbolique	36
2.12.2	Homographies conservant le demi-plan de Poincaré	37
Deuxième Partie : État de l'art autour de l'Extraction de Connaissance à partir des Bases de Données Binaires		39
3	Quelques notions des ensembles ordonnés	40
3.1	Introduction partielle	40
3.2	Définitions et quelques exemples	40
3.2.1	Ensembles ordonnés	40

3.2.2	Treillis	42
3.3	Correspondances de Galois	44
3.3.1	Généralités	44
3.3.2	Correspondances de Galois associées à une relation binaire	45
3.4	Familles de Moore et Notions équivalentes	45
3.4.1	Généralités sur la notion de familles de Moore	45
3.4.2	Familles de Moore et Opérateurs de fermeture	47
3.4.3	Familles de Moore et système implicatif	48
3.5	Conclusion partielle	48
4	État de l'art sur les règles d'association	49
4.1	Introduction partielle	49
4.2	Extraction de connaissances à partir des données	49
4.2.1	Sélection	50
4.2.2	Prétraitement et transformation des variables	50
4.2.3	Fouille	51
4.2.4	Interprétation et évaluation des informations	51
4.3	Règles d'association	51
4.3.1	Présentation	51
4.3.2	Notations	52
4.4	Conclusion partielle	54
4.5	Introduction partielle de MPQ	54
4.5.1	Présentation des mesures d'intérêt	55
4.5.2	Liste non exhaustive des mesures d'intérêt	55
4.5.3	Dix premiers problèmes cruciaux	57
4.5.4	Conclusion partielle	58
5	Normalisation par homéomorphie affine	59
5.1	Introduction et notions partielles de normalisation de MPQ	59
5.2	Motivation et Définition	60
5.3	Propriété topologique de \mathbb{R} : intervalles homéomorphes et difféomorphes	60
5.4	Propriétés des mesures probabilistes de qualité normalisées	64
5.5	Processus et caractérisation de la normalisation	65
5.6	Exemples de normalisation de mesures de qualité	67
5.7	Représente les mesures M_{GK} normalisables.	68
5.7.1	Coefficients x_f et y_f des mesures M_{GK} normalisables	69
5.7.2	Coefficients x_d et y_d des mesures M_{GK} normalisables	70
5.8	Mesures normalisables à normalisées différentes de M_{GK}	71
5.9	Mesures non normalisables	71
5.10	Conclusion partielle	72
Troisième Partie : Applications des homographies en Didactique des mathématiques		73

6	Applications des homographies en Didactiques	74
6.1	Introduction partielle	74
6.2	Image d'un ensemble par une homographie $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$	75
6.2.1	Énoncé	75
6.2.2	Réponse	75
6.3	Application de lignes des niveaux de $ h $ et $\arg h$	75
6.3.1	Énoncé	76
6.3.2	Réponse	76
6.4	Applications des théories d'angle au centre et des angles interceptant le même arc	77
6.4.1	Énoncé	77
6.4.2	Réponse	78
6.4.3	Énoncé	80
6.4.4	Réponse	81
6.5	Étude d'une suite récurrente « problèmes directs d'homographies »	83
6.5.1	Suite récurrente linéaire : problème classique (du côté des élèves)	83
6.5.2	Suite récurrente homographique propre : problème classique (du côté des élèves)	83
6.5.3	Élaboration d'une suite géométrique auxiliaire	83
6.5.4	Convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$	84
6.5.5	Élaboration d'une suite arithmétique auxiliaire	84
6.5.6	Convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$	85
6.6	Problèmes inverses	85
6.6.1	Problèmes inverses d'une application affine	85
6.6.2	Problèmes inverses des homographies propres	86
6.6.3	Homographie complexe ou réelle h dont α est son unique point fixe	86
6.6.4	Homographie complexe ou réelle h à deux points fixes	87
6.7	Homographie et géométrie hyperbolique non euclidienne selon le modèle de Poincaré	88
6.7.1	Rappels et définitions	88
6.7.2	Définition du demi-plan et droites hyperboliques de Poincaré	90
6.8	Technique de construction d'une ellipse	90
6.8.1	Rappel et définition	90
6.8.2	Approche fonctionnelle	91
6.8.3	Descriptions des éléments caractéristiques de cette ellipse	91
6.8.4	Construction d'une ellipse dont le grand axe est situé sur l'axe des ordonnées	92
6.8.5	Construction d'une ellipse dont le grand axe est situé sur l'axe des abscisses	92
6.9	Problème inverse	93
6.10	Construction des polygones elliptiques	93
6.11	Études du cas où $b = 0$	94
6.12	Construction d'un cercle à l'aide de ses fonctions caractéristiques	96
6.12.1	Implication de cette approche à l'étude analytique de la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré	97

6.12.2	Transformation d'une trajectoire circulaire en une trajectoire rectiligne	98
6.12.3	Transformation d'une trajectoire rectiligne en une trajectoire circulaire	99
6.12.4	Droites hyperboliques selon le modèle de Poincaré	99
6.12.5	Fonction caractérisant le demi-cercle de Poincaré	100
6.12.6	Construction d'un triangle dans un demi-plan de Poincaré	101
6.12.7	Homographie et géométrie hyperbolique	102
6.12.8	Coordonnées des points A', B', C' image de A, B, C par h	102
6.12.9	Construction du triangle $A'B'C'$	103
6.12.10	Recherche de coordonnées des points A'', B'', C'' image de A, B, C par h^{-1}	103
6.12.11	Construction du triangle $A''B''C''$	103
6.13	Conclusion partielle	104
Quatrième Partie : Applications des homographies en Science des données		105
7	Homographie et règle d'association	106
7.1	Introduction partielle	106
7.2	Notations	107
7.3	Processus de normalisation par homographie propre	107
7.4	Application de ces quatre propositions.	111
7.5	Règle des opérations sur les mesures probabilistes de qualité normalisées	112
7.6	La homographie-normalisée de M_{GK}	115
7.7	Preuve des résultats évoqués à la section 7.4	116
7.8	Fonction de normalisation F_n	118
7.9	Résultats	119
7.10	Preuve des résultats évoqués dans le tableau 7.1	124
7.11	Plaidoyer à la normalisation d'une mesure d'intérêt	130
	7.11.1 Modélisation probabiliste	130
	7.11.2 Elaboration d'une base	130
	7.11.3 Variation de M_{GK} par rapport au support de conséquent	133
	7.11.4 Vision unificatrice ou comparaison des mesures	133
7.12	Conclusion partielle	134
Cinquième partie : Partie Didactique de la discipline		136
8	Partie didactique	137
8.1	Tâches des enseignants face aux apprenants	137
8.2	Repère méthodologique dans l'enseignement apprentissage	138
8.3	Enseignement de fonction homographique	139
	8.3.1 Classe de Seconde	139
	8.3.2 Classe de 1 ^{ère} et Terminale	139
8.4	Fouille des règles d'association	140
8.5	Traitement d'une suite homographique	141
8.6	Analyse des sujets de baccalauréat	141

8.7	Pertinence et faisabilité de l'enseignement de la géométrie hyperbolique plane dès le collège	141
8.7.1	Motivation	141
8.7.2	Enjeux de l'enseignement-apprentissage des géométries	142
8.7.3	Etude expérimentale	142
8.7.4	Analyse du résultat d'enquête	145
8.8	Recherche et méthode en didactique	146
8.8.1	Méthode	146
8.9	Niveau collège	146
8.9.1	Enfant de 11 à 12 ans : classe de 6 ^{ème}	146
8.9.2	Enfant de 12 à 13 ans : classe de 5 ^{ème}	147
8.9.3	Enfant de 13 à 14 ans : classe de 4 ^{ème}	147
8.9.4	Enfant de 14 à 15 ans : classe de 3 ^{ème}	148
8.10	Niveau Lycée	149
8.10.1	Elève de 15 à 16 ans : classe de seconde	149
8.10.2	Elève de 16 à 17 ans : classe de première	150
8.10.3	Elève de 17 à 18 ans : classe de terminale	150
8.10.4	Applications affines	150
8.10.5	Géométrie plane Isométrie affine	151
8.10.6	Similitudes planes	151
8.10.7	Géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré	151
8.11	Exercices d'application des homographies	151
8.11.1	Niveau Terminale	151
8.11.2	Niveau Universitaire (sujet d'étude)	152
9	Conclusions générales et Perspectives	160
9.1	Conclusions générales	160
9.1.1	Homographie	160
9.1.2	Etude de la géométrie selon le modèle de H. Poincaré	160
9.1.3	Fouille des règles d'association	161
9.1.4	Didactique	162
9.2	Perspectives	163
9.2.1	Homographie et Didactique	164
9.2.2	Science de données	164
A	Sujets de Baccalauréat Série A	II
B	Sujets de Baccalauréat Série D	V
C	Sujets de Baccalauréat Série C	XI
D	Réponses de quelques élèves	XVI
E	Figures géométriques hyperboliques fondamentales	XXII

Contextes et Problématiques

A- La homographie, transformation transformant une figure en une autre de la même forme, est riche en résultats qu'il conviendrait d'exploiter dans notre vie quotidienne. Son implication touche le domaine technologique. De plus, sur le plan de la recherche en didactique de mathématiques, la homographie est un outil d'étude d'une suite récurrente homographique et du calcul d'intégral d'une fonction fraction rationnelle. Cependant, le problème d'apprentissage reste un obstacle des élèves au niveau du Lycée et une fois à l'université. C'est pourquoi, nous essayons de traiter ou de donner quelques parties de son utilisation notamment sur l'étude de la convergence d'une suite récurrente homographique en terminale dans le cadre de problème inverse, l'étude de transformation d'un ensemble en géométrie.

B- Dans le contexte de la science des données, le problème de normalisation des mesures probabilistes de qualité, bien traité assez abondamment dans la littérature scientifique, reste encore un sujet non résolu. L'on sait l'existence de certaines mesures qui sont M_{GK} normalisables et ayant la normalisée différente de M_{GK} à l'aide d'un homéomorphisme affine. Parallèlement à cela, on note la présence des autres mesures de qualité qui n'ont pas encore pu être normalisées par aucun homéomorphisme affine, ni par aucun autre moyen. Or, leur normalisation s'avère visiblement nécessaire et utile pour aborder la résolution du problème visé qui est une tâche à remplir ou à explorer : absence de théorie unificatrice des mesures de qualité des règles d'association, absence des critères de choix objectifs de mesures de qualité devant un foisonnement des mesures de qualités proposées dans la littérature scientifique. Aussi, la problématique de recherche d'un homéomorphisme plus adéquat et englobant plus de mesures de qualité des règles d'association en science de données binaires reste encore à trouver. C'est justement l'objet principal de notre investigation en science des données.

C- Sur l'enseignement des géométries, vu les programmes scolaires dans le monde suivis en matière de géométrie, la géométrie est encore restreinte à l'aspect géométrie euclidienne. Le non apprentissage de la géométrie hyperbolique et la prégnance à la géométrie euclidienne conduisent les apprenants, et même les enseignants, vers l'ignorance des autres géométries. Or, dans la vie quotidienne, il existe plusieurs architectures d'images telles que la géométrie euclidienne ne suffit ni pour les construire, ni pour optimiser la créativité et l'éducation à l'esthétique qui sont des enjeux majeurs de l'enseignement des géométries. En d'autres termes, ce type de programme scolaire engendrerait une perception bornée ayant tendance à devenir indélébile face à des figures géométriques non euclidiennes mais fréquentes ! Ainsi, pour éviter la prégnance bloquante à la géométrie euclidienne, une question naturelle s'est alors posée : « ne serait-il pas opportun, en cette ère des nouvelles technologies, de lancer une réforme s'avérant pertinente et bien réalisable sur les mathématiques scolaires consistant à introduire dès le niveau collège la notion de géométrie hyperbolique plane par la visualisation et la construction des figures hyperboliques élémentaires d'abord, puis de façon analytique en investissant les homographies et anti-homographies complexes dans un demi-plan de Poincaré en terminale de lycée, en guise de renforcement ? » Voilà notre problématique en didactique.

« Exploration des propriétés des homographies : application à la normalisation des mesures de qualité des règles d'association »

ARMAND : Lycée Mixte Antsirana, +261 34 28 323 92, armandarmand9@hotmail.com

Résumé : Dans le contexte de science de données, en matière de la fouille de données binaires, et plus précisément pour une vision unificatrice des mesures probabilistes de qualité des règles d'association utilisant un homéomorphisme affine sur l'étude de la normalisation des mesures probabilistes de qualité qui présente encore certaines critiques, nous proposons ici une voie complémentaire de la normalisation basée sur un homéomorphisme homographique et une combinaison d'application affine et d'homographie propre. Il s'agit d'une extension naturelle de la normalisation des mesures de qualité qui a été effectuée déjà par André Totohasina. La recherche de la normalisation des mesures probabilistes de qualité des règles d'association a déjà abouti à beaucoup de résultats tangibles en vue de regrouper les différentes mesures existant dans la littérature. Nous voyons ceci une voie simple pour effectuer ladite normalisation à l'aide d'une nouvelle notion de fonction de normalisation comme outil efficace de résolution du problème de normalisation des mesures probabilistes de qualité sur l'étude des règles d'association en science de données ayant déjà leurs fonctions de normalisation. En marge de la science de données, il y est démontré utilement que la résolution des problèmes inverses d'homographies permet efficacement d'élaborer ses propres suites homographiques à volonté, et ce, avec deux ou trois degrés de liberté. Enfin, à partir du résultat d'une enquête diagnostique, face aux enjeux de l'enseignement-apprentissage des géométries, ce modeste travail tente de montrer la pertinence et la faisabilité de l'introduction précoce de la géométrie hyperbolique plane.

Mots clés : Homographie, géométrie non euclidienne, base des données, règle d'association, normalisation, mesures de qualité.

Abstract : In the context of the binary data mining, and more precisely for a unifying view of the probabilistic measures of quality of the association rules using a homeomorphism refined on the study of the normalization of probabilistic measurements of the qualities presenting Still some criticisms, we propose here another way of normalization based on a homographic homeomorphism and a combination of affine application and proper homography, extension of the normalization that has already carried out by André Totohasina. The search for the normalization of probabilistic of quality measures of the association rules has already yielded many tangible results in order to regroup the different measures existing in the literature. We see this as a simple way to carry out the said normalization using a new notion of normalization function as an efficient tool for solving the problem of normalization of the measures of interest having already their own normalization functions. Out of data science, it is shown that the resolution of the inverse problems of homographs allows us to develop these homographic sequences at will, with two or three degrees of freedom. Finally, based on the results of a diagnostic survey, in view of the challenges involved in the teaching and learning geometries, this modest work attempts to show the relevance and feasibility of the early introduction of plan hyperbolic geometry.

Key words : Homography, non-euclidean geometry, association rule, normalization, quality measures.

Directeur de thèse : Professeur titulaire TOTOHASINA André, +261 34 05 516 15, andre.totohasina@gmail.com

Liste des tableaux

2.1	Tableau mettant en jeu \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^-	38
4.1	Représentation binaire des données de « paniers » de clients	52
4.2	Tableau de contingence	54
4.3	Tableau de contingence $K_{XY'}$	55
4.4	MPQ	57
5.1	Mesures M_{GK} normalisables	69
5.2	Coefficients x_f et y_f des mesures M_{GK} normalisables	70
5.3	Coefficients x_d et y_d des mesures M_{GK} normalisables	71
5.4	Mesures normalisables à normalisées différentes de M_{GK}	71
5.5	Mesures non affines normalisables	72
7.1	Fonctions de normalisation des mesures d'intérêt	122
7.2	Exemples de la faiblesse du Support-Confiance	131
8.1	Tableau des mesures probabilistes de qualité des règles d'association.	159
A.1	Tableau donnant la répartition des 80 employés d'une entreprise en fonction de leurs salaires mensuels	II
A.2	Tableau des valeurs de x et $f(x)$	III
A.3	Tableau montrant le chiffre d'affaires, exprimé en millions de francs malagasy	IV
B.1	Tableau indiquant les variations du chiffre d'affaires y_i selon x_i	V
B.2	Tableau indiquant les variations des dépenses mensuelles	VIII
B.3	Les variations des quantités y_i d'essence consommées de certaines voitures suivant leurs puissances x_i pour une même distance	X
C.1	Tableau des valeurs x et $f(x)$	XIII

Liste des figures

2.1	Représentation graphique de fonctions homographiques	10
2.2	Inversion plane de centre O et de puissance k	12
2.3	Involution de l'inversion plane	12
2.4	Cercle de centre O et de rayon $\sqrt{ k }$	13
2.5	Construction d'un point inverse d'un autre : $OP^2 = OM.OM'$	13
2.6	Image des deux points par l'inversion	14
2.7	Figures inverses d'une même figure	15
2.8	Image d'une droite par l'inversion	16
2.9	Exemple de 5 points cocycliques	18
2.10	Angle au centre	22
2.11	Angles inscrits dans un cercle	22
2.12	Décomposition d'une rotation de centre O d'angle θ	23
2.13	Décomposition d'une translation de vecteur \vec{U} en deux symétries orthogonales d'axes parallèles	23
2.14	Symétrie orthogonale d'axe (δ)	25
2.15	Angle θ	28
2.16	Rotation d'angle π et d'angle 2π	29
2.17	Angle $\theta = \pi[\pi]$ et $\theta = 0[\pi]$	29
2.18	Angle $\theta = 0[2\pi]$ et $\theta = \pi[2\pi]$	29
2.19	Angle θ et $-\theta$	30
2.20	Angle $\theta + (-\theta) = 0[\pi]$	30
2.21	Ensemble $(\Gamma_{\pi/3})$ des points M tel que $\arg(\frac{z-1}{z+1}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$	32
2.22	Angle $\theta[2\pi]$	32
4.1	Etapes du processus de l'ECD	50
4.2	Notations utilisées pour une règle $X \rightarrow Y$	52
5.1	Distribution des valeurs de MPQ normalisée continue	63
6.1	Construction géométrique des ensembles $(\Delta_{2\pi}), (\Gamma_{\lambda'})$ et (Π_{π})	77
6.2	Carrés inscrits	78
6.3	Emplacement du point I	78
6.4	Angles interceptés l'arc \widehat{ID} de (Γ)	79
6.5	Angles interceptés l'arc \widehat{DI} de (Γ')	79
6.6	Perpendicularité de (ID) et (BF)	79
6.7	$S_{\Delta}(D) = I$	80
6.8	Triangle ABC	81
6.9	Composition d'une translation par une rotation	81

6.10	Composition de deux rotations	82
6.11	Existence d'une symétrie orthogonale	82
6.12	Représentation graphique de disque de Lobatchevski et de Poincaré	89
6.13	Exemples d'ellipses	90
6.14	Ellipse de centre $I(0, 2)$	92
6.15	Ellipse de centre $I(0, -1)$	93
6.16	Hexagone et triangles elliptiques	94
6.17	Ellipses centrées sur l'axe des abscisses	95
6.18	Demi-ellipses centrées sur l'axe des abscisses	96
6.19	Cercle de centre $I(-3, 2)$ et de rayon $r = 2$	96
6.20	Manant de Poincaré classique	97
6.21	Carré elliptique	98
6.22	Droites hyperboliques	100
6.23	Demi-cercle centré sur l'axe des abscisses x	100
6.24	Demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses x	101
6.25	Pentagone et les triangles hyperboliques	102
6.26	Triangle $A'B'C'$ image du triangle ABC par la homographie h	103
6.27	Triangle $A''B''C''$ image du triangle ABC par la homographie h^{-1}	104
7.1	Variation de la fonction de normalisation de Multiplicateur de côte	124
7.2	Interprétation géométrique de la fonction de normalisation de la mesure « Multiplicateur de côte »	125
7.3	Variation de M_{GK} en fonction de support de conséquent et confiance	133
8.1	Sujet de test	143
8.2	Résultat de l'enquête	143
8.3	Copie de test	144
8.4	Copie de test	145
8.5	Trois géométries existant dans la littérature	146
C.1	Triangle ABC	XI
D.1	Réponses de test	XVI
D.2	Réponses de test suite	XVII
D.3	Réponses de test suite	XVIII
D.4	Réponses de test suite	XIX
D.5	Réponses de test suite	XX
D.6	Réponses de test suite	XXI
E.1	Figures géométriques hyperboliques fondamentales 1	XXII
E.2	Figures géométriques hyperboliques fondamentales 2	XXIII
E.3	Figures géométriques hyperboliques fondamentales 3	XXIV
E.4	Figures géométriques hyperboliques fondamentales 4	XXV

Notations et abréviations

ACIA	Approche Concrète-Imagée-Abstraite.
A.F.C	Analyse Formelle de Concepts ;
APC	Approche Par Compétence ;
A.S.I	Analyse Statistique Implicative ;
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes ;
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup [-\infty ; \infty]$;
\mathcal{C}_i	Arcs de courbes différentiables de \mathcal{P} ;
$C(\mathcal{N})$	Ensemble des MPQ normalisées continues sur $[-1 ; 1]$;
<i>Conv</i>	Mesure Conviction ;
D_a	Demi-droites verticales d'origine située sur l'axe des x ;
$D_{(a,r)}$	Cercle centré sur l'axe des abscisses ;
$D_{(a,r)} / y \geq 0$	Demi-cercle centré en x représentant la droite hyperbolique ;
$dg(M)$	Vecteur directeur de la tangente au point $g(M)$;
D_h	Ensemble de définition de l'homographie h ;
D_m	Demi-plan de Poincaré ;
\mathbb{E}	Ensemble \mathbb{E} ;
E.C.D	Extraction de Connaissance à partir des Données ;
EI	Écart à l'Indépendance de Y sur X ;
\mathbb{E}_p	Partie de l'ensemble \mathbb{E} ;
<i>Ex - Cont</i>	Exemple Contre Exemple
\mathbb{F}	Ensemble \mathbb{F} ;
F_{an}	Fonction de normalisation de la mesure
$F_{(a,r)}$	Fonction caractéristique définissant un manant de Poincaré ;
$\mathcal{F}_{\mathbb{E}}$	Ensemble des parties de \mathbb{E} ;
$\mathcal{F}_{\mathbb{F}}$	Ensemble des parties de \mathbb{F} ;
F_{hn}	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$
\mathcal{F}_m	Famille de Moore ;
F_n	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$;
F_n^d	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ cas où X défavorise Y ;
F_n^f	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ cas où X favorise Y ;
F_{shnd}	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ qui est semi-homographique normalisable à droite ;

F_{shnd}^d	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ qui est semi-homographique normalisable à droite cas où X défavorise Y ;
F_{shnd}^f	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ qui est semi-homographique normalisable à droite cas où X favorise Y ;
F_{shng}	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ qui est semi-homographique normalisable à gauche ;
F_{shng}^d	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ qui est semi-homographique normalisable à gauche cas où X défavorise Y ;
F_{shng}^f	Fonction de normalisation de la mesure $\mu(X \rightarrow Y)$ qui est semi-homographique normalisable à gauche cas où X favorise Y ;
$F_{(a,b,r)}^{c+}$	Demi-cercle supérieur ;
$F_{(a,b,r)}^{c-}$	Demi-cercle inférieur ;
$F_{(\alpha,a,b,r)}^{e+}$	Demi-ellipse supérieure ;
$F_{(\alpha,a,b,r)}^{e-}$	Demi-ellipse inférieure ;
$GL_2(\mathbb{C})$	Groupe des matrices 2x2 inversibles à coefficients complexes ;
h	Fonction homographique ;
\mathcal{H}	Ensemble des homographies propres ;
\mathcal{H}^+	Ensemble des homographies propres à coefficients réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$;
\mathcal{H}^-	Ensemble des homographies propres à coefficients réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc = -1$;
I	Ensemble des attributs ou des variables ;
\mathcal{I}_m	Partie imaginaire du nombre complexe z ;
$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	Groupe des matrices 2x2 inversibles ;
M_{GK}	Mesure probabiliste de qualité de Guillaume-Khenchaff ;
M_{GKan}	M_{GK} affine normalisée ;
M_{GKhn}	M_{GK} homographique normalisée ;
$Odd - R$	Mesure Odd-Ratio
MPQ	Mesure Probabiliste de Qualité ;
$Mul - Cot$	La mesure Multiplicateur de Côte ;
MS	Méthode de Singapour ;
$M(z)$	Un point d'affixe $z = x + iy$;
$M'(z)$	Un point d'affixe $z' = x' + iy'$;
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels ;
\mathcal{N}	Ensemble des mesures probabilistes normalisées ;
n_T	Nombre d'enregistrements ou de transactions de la base ;
$n_{X'}$	Nombre de transactions satisfaisant le motif X ;
$n_{X'Y'}$	Le nombre de transactions satisfaisant à la fois X et Y ;
$n_{\overline{X'}}$	Nombre de transaction qui ne contient le motif X ;
\mathcal{P}	Plan euclidien ;
PC	Pédagogie Coopérative ;
PI	Pédagogie Institutionnelle ;
$PISA$	Program for International Student Assesment ;

PEX	Pédagogie Explicite ;
PPO	Pédagogie Par Objectif ;
$\mathcal{P}(T)$	Ensemble des parties de T ;
\mathbb{Q}	Ensemble des nombres rationnels ;
\mathcal{R}	Relation binaire ou relation d'ordre ;
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels ;
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup [-\infty ; \infty]$;
\mathcal{Re}	Partie réelle du nombre complexe z ;
T	Ensemble fini des entités ou des objets ;
TIC	Technologies de l'Information et de la Communication ;
T.ID	Transaction IDentifiée ;
\mathcal{T}_r	Treillis ;
T_X'	Ensemble des transactions qui contiennent le motif X ou encore tous les items $i_j (j \in 1, \dots, p)$, contenus dans le motif X ;
UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization ;
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Suite numérique de terme général U_n ;
$2D$	Dimension 2 ;
x	Valeur originale de $\mu(X \rightarrow Y)$ (i.e $x = \mu(X \rightarrow Y)$) ;
$x_d ; y_d$	Coefficients de normalisation de μ , dans le cas où X défavorise Y ;
$x_f ; y_f$	Coefficients de normalisation de μ , dans le cas où X favorise Y ;
x_{imp}	Valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'implication logique ;
x_{ind}	Valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'indépendance ;
x_{inc}	Valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'incompatibilité ;
X_r	Ensemble de partie non vide de \mathcal{T}_r ;
z	Un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont réels ;
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs ;
$\theta[\pi]$	Angle θ est congru à θ modulo π ;
$\theta[2\pi]$	Angle θ est congru à θ modulo 2π ;
μ	Mesure probabiliste de qualité (MPQ) ;
$\mu_{(a; r)}$	Mesure probabiliste de qualité normalisée discontinue ;
μ_{an}	Mesure probabiliste de qualité affine-normalisée de μ ;
μ_n^d	Mesure probabiliste de qualité normalisée continue cas où X défavorise Y ;
μ_n^f	Mesure probabiliste de qualité normalisée continue cas où X favorise Y ;
μ_{hn}	Mesure probabiliste de qualité homographique-normalisée de μ ;
μ_{imp}	Valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'implication logique ;
μ_{inc}	Valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'incompatibilité ;
μ_{ind}	Valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'indépendance ;
μ_n	Mesure probabiliste de qualité normalisée continue ;
μ_{shn}	Mesure probabiliste de qualité semi-homographique-normalisée de μ ;
μ_{shnd}	Mesure probabiliste de qualité semi-homographique-normalisé à droite de μ ;
μ_{shng}	Mesure probabiliste de qualité semi-homographique-normalisée à gauche de μ ;

Structure de la thèse

La contribution de cette thèse se divise en huit chapitres, à savoir :

Le premier chapitre expose l'introduction générale, dans laquelle se trouvent la présentation et l'indication plus pointillées précisant les problèmes, les objectifs, ceux qui l'ont motivé. Elle permet au lecteur non averti de comprendre pourquoi la présente recherche a été posée.

Le deuxième chapitre concerne l'état de l'art introduisant les homographies. Il expose des propriétés réelles ou complexes des homographies mises en jeux dans nos travaux.

Le troisième chapitre concerne les notions considérées utiles comme les fondement mathématiques de la notion de la fouille des règles d'association. Il s'agit d'un état de l'art introduisant sur les notions des bases des treillis, les familles de Moore et les correspondances de Galois.

Le quatrième chapitre est la suite du troisième chapitre introduisant l'état de l'art sur les règles d'association. Il concerne les notions de base considérées utiles dans le domaine d'extraction de connaissances. Il comprend un bref résumé des différentes étapes du processus d'ECD, l'état de l'art sur les notions des règles d'association, il s'agit des types de connaissances qui témoignent et/ou certifient l'accord sur quoi porte notre étude, la présentation des mesures d'intérêt existant actuellement dans la littérature de fouille des règles d'association.

Le cinquième chapitre est toujours la suite du quatrième chapitre présentant l'état de l'art sur les notions de la normalisation des mesures d'intérêt déjà vécues jusqu'aujourd'hui (normalisation de mesures de qualité selon André Totohasina) suivie de leur analyse, de leur critique afin de reformuler et/ou de compléter des certains points insuffisamment éclaircis sur ladite normalisation des mesures d'intérêt dans la fouille des règles d'association.

Le sixième et septième chapitres traitent la présentation plus pointue des quelques enjeux relatifs aux homographies en exploitant ses riches puissances sur l'étude de la géométrie non euclidienne selon le modèle de Poincaré et sur l'étude de normalisation de mesures de qualité ayant des situations infinies à l'une des situations de références. Il s'agit en effet d'une extension naturelle de normalisation de mesures de qualité déjà effectuée par André Totohasina en 2003. Le huitième chapitre présente la partie didactique de discipline, en particulier l'introduction de la pertinence et faisabilité de l'enseignement de la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré dès le collège. Il s'agit de faire preuve l'anticipation d'une réforme du programme scolaire visant l'introduction précoce de l'enseignement de la géométrie hyperbolique plane à travers les transformations homographiques complexes.

Le neuvième chapitre offre la conclusion générale et les perspectives. Il s'agit cette fois d'une récapitulation du cheminement de pensée et en particulier les conclusions intermédiaires décrites dans le développement. Puis, il énumère les propositions qu'à déduites l'auteur, constituant ainsi le terme de la démonstration. Enfin, nous ouvrons les pistes à continuer à propos de la recherche future à l'instar de la proposition des sujets de recherche.

Chapitre 1

Introductions générales

1.1 Homographie

« *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre* » (**Platon**)

« *Un bon enseignant des mathématiques du secondaire doit connaître l'existence d'au moins cinq géométries : l'elliptique, la sphérique, l'hyperbolique, l'euclydienne, l'affine et la projective* » (**B. E. Meserve & D. T. Meserve**)

1.1.1 Signification de la homographie et sa position dans le programme scolaire

Étymologiquement, le mot « *homographie* » vient de deux mots grecs « *homo* » qui signifie « *même* » et « *graphein* » qui veut dire « *écrire* » [FL88], [EMB99]. Ainsi, la homographie est un phénomène par lequel deux formes ont la même écriture [FL88], [EMB99], [Mal01].

En mathématiques, une homographie est une transformation ponctuelle qui lie deux figures telle qu'à tout point (resp. à toute droite) d'une de ces figures correspond un point, (resp. une droite) de l'autre figure [BM04], [MC02], en géométrie plane : c'est une transformation ponctuelle dans laquelle un point correspond à un autre point, une droite à une autre droite, un plan à un autre plan [EMB99], [Jac12], [Moa02], [YFdQ02], [YFdQ02] [MC02], [BM04].

En général, selon les programmes scolaires, quasiment dans le monde, qui se sont succédés, on doit enseigner la géométrie, et ce, exclusivement la géométrie euclidienne plane ou spatiale aux élèves de niveau collège et des classes de seconde, première et terminale scientifiques de lycée. Par ailleurs, aux niveaux des classes terminales scientifiques et technologiques industrielles, dans le contexte des nombres complexes, depuis les années 70, les programmes scolaires se sont contentés d'instruire l'enseignement des similitudes planes directes et indirectes, et les lignes des niveaux des homographies complexes h du type $h(z) = \frac{z-a}{z-b}$ [Moa02].

Sur le plan épistémologique, depuis le XIXème siècle, l'histoire des mathématiques atteste l'existence d'autres géométries à part l'euclydienne, entre autres, la géométrie hyperbolique de Lobachevsky, géométrie de Riemann [Sha90], [Sha91]. Le mathématicien Henri Poincaré était, entre autres, le pionnier de la modélisation de la géométrie hyperbolique analytique.

1.1.2 Problématiques

En vue de bien articuler les activités à entreprendre dans ce travail, le thème ici présent s'engage à prendre comme missions à « *montrer la richesse mathématique des homographies à travers diverses facettes et applications à partir d'une recherche bibliographique* ». Il s'agit de faire apparaître la démonstration de l'ensemble des matrices homographiques comme étant un groupe simple pour la multiplication, la bijection entre l'ensemble des homographies et les matrices carrées d'ordre 2 inversibles (ou régulières), les transformations des objets géométriques classiques, l'étude des homographies complexes en tant qu'applications conformes, la classification et étude des suites homographiques, l'étude des homographies en tant que courbes algébriques fractionnaires, paramétrages des homographies réelles, la clarification de la géométrie hyperbolique non euclidienne selon le modèle de Henri Poincaré.

1.2 Fouille et Science de données

1.2.1 Fouille de données

Depuis la naissance des ordinateurs, les savants ont déjà utilisé plusieurs systèmes dans le contexte de base de données. Le début des années 90 est alors marqué par l'émergence d'un nouveau domaine de recherche de base de données très populaire appelé « *Extraction des Connaissances à partir des Données (ECD)* », ou, plus couramment « *Fouille des Données* » consistant à exploiter et à transformer des informations généralisables en connaissances nouvelles valides et potentiellement utiles à partir des grandes bases de données [WFM91], [Cou05]. Les connaissances dérivées à partir des données représentent de véritables mines d'or pour les experts. Pour les découvrir, de nombreuses techniques ont été utilisées, parmi lesquelles figure la recherche des règles d'association qui a connu un fabuleux essor depuis le début des années 90. Un exemple très répandu introduit par Agrawal et al. en 1993 dans [AIS93] et en 2000 dans [Pas00a], les algorithmes de découverte des règles d'association.

1.2.2 Science de données : réflexion épistémologique

Le terme semble avoir été inventé par William Cleveland dans un article programmatique paru en 2001 intitulé « *Data Science : An Action Plan for Expanding the Technical Areas of the Field of Statistics* ». Cette discipline est issue de l'apparition et du développement des bases de données et de l'Internet et répond aussi à la complexité croissante et au volume en croissance exponentielle du nombre de données numériques disponibles dans le monde. Elle a reçu beaucoup d'attention dernièrement grâce à l'intérêt grandissant pour le « *Big Data* ». Cependant la data science ne se limite pas à l'étude de bases de données pouvant être qualifiées de « *Big Data* » [Bir67], [SHFM09], [SPJ⁺05], [Ben73] [RF14], [WS13].

Par ailleurs, l'essor de techniques d'apprentissage automatique (en anglais : machine learning) et d'intelligence artificielle ont également participé à la croissance de cette discipline et à son ouverture vers de nouveaux champs (passant par exemple de l'analyse statistique pure de données fortement structurées à l'analyse de données semi-structurées) pour notamment mettre « *en correspondance des bases de données et de données textuelles* » [RF14].

En termes généraux, la science des données est l'extraction de connaissance d'ensembles de données [Dha13]. Par la suite, cette science nouvelle a naturellement généré « l'émergence

d'une nouvelle filière de formation : data-scientistes [COX06], [HGB05].

Elle emploie pareillement des techniques et des théories tirées de plusieurs autres domaines plus larges des *mathématiques*, la statistique principalement, la théorie de l'information et la technologie de l'information, notamment le traitement de signal, des modèles probabilistes, l'apprentissage automatique, l'apprentissage statistique, la programmation informatique, l'ingénierie de données, la reconnaissance de formes et l'apprentissage, la visualisation, l'analytique prophétique, la modélisation d'incertitude, le stockage de données, la compression de données et le calcul à haute performance. Les méthodes qui s'adaptent aux données de masse sont particulièrement intéressantes dans la science des données, bien que la discipline ne soit généralement pas considérée comme limitée à ces données [COX06], [ABB⁺14].

1.2.3 Différentes disciplines de la science des données

La science des données (en anglais : data science) est une nouvelle discipline qui s'appuie sur des outils mathématiques, de statistiques, d'informatique. Cette science est principalement une « *science des données numériques* » et de visualisation des données [J.F98]. Elle est en plein développement, dans le monde universitaire ainsi que dans le secteur privé et le secteur public. En 91, Moore [Moo91] a défini la statistique comme la science des données (définition reprise par d'autres dont par exemple James T. M. Clave et al. en 1997 [McC97]) et U. Beck en 2001 [Bec01] oppose la science des données à la science de l'expérience, voyant une dissociation croissante entre ces deux types de science, que tendrait selon lui à encourager une société de la gestion du risque au sein d'une « civilisation du danger » [Bec01], [COX06].

1.2.4 Objectifs

Le premier objectif du « *data-scientiste* » est de produire des méthodes (automatisées, autant que possible) de tri et d'analyse de données de masse et de sources plus ou moins complexes ou disjointes de données, afin d'en extraire des informations utiles ou potentiellement utiles. Pour cela, le « scientifique des données » s'appuie sur la fouille de données, les statistiques, le traitement du signal, diverses méthodes de référencement, apprentissage automatique et la visualisation de données. Il s'intéresse donc à la classification, au nettoyage, à l'exploration, à l'analyse et à la protection de base de données plus ou moins inter-opérables.

- ★ Au sein du monde de la Recherche et des universités, cette science permet simplement de mieux produire, valoriser et mémoriser la connaissance (savoir et savoir-faire). A titre d'exemple, un projet « *Paris-Saclay Center for Data Science* » est porté par l'Université Paris-Saclay [B.14], [COX06], [Pat11], [PF12].
- ★ Au sein des entreprises privées ou nationales, le data scientist rend l'information plus facile à exploiter, protéger et à valoriser.
- ★ Au sein des collectivités territoriales et des agences gouvernementales ou de structures intergouvernementales, il s'agit de permettre une production et une utilisation plus efficiente des données et statistiques, au service d'outils de retour d'expérience, d'outils d'aide à la décision, d'évaluation et de production de bonnes pratiques en matière de gouvernance et de politiques publiques [DP12], [MW15], [ZM14].

En réponse à la complexité croissante de la science des données, des partenariats s'établissent entre collectivités, universités, grandes écoles et secteur privé, ce travail étant pris en charge en interne par un ou sous-traité par une entreprise spécialisée.

1.2.5 Domaines d'utilisation

Personne n'ignore l'importance nécessaire de la science de données dans la vie quotidienne, et ceci, dans plusieurs domaines. En effet, parmi les plus grands utilisateurs de la science des données figurent l' Aéronautique, l'Automobile, l' Agriculture, l'Assurance, la Banque, la finance, la science de la vie et de la terre (ex : la bio-écologie), la Distribution, l'Econométrie, l'économie, l'Énergie, l'industrie manufacturière, le Médias, la Météorologie, le Moteurs de recherche, le Services (industrie des services), la Santé publique (ex : épidémiologie, toxicologie, écotoxicologie...) les TIC, la télécommunications, le Tourisme, le Transport l'Urbanisme (smart cities, smartgrids), la Publicité, le commerce, l'Environnement, l'internet etc. [ABB⁺14].

1.2.6 Validation des qualités de données des règles d'association

Comme nous l'avons vu que la science de données occupe plusieurs secteurs de développement des futurs citoyens. Dans notre travail, nous nous restreignons sur la science de données basée sur le contexte de données binaires fondées sur l'étude des propriétés mathématiques des mesures de qualité des règles d'association. La recherche de qualité des connaissances dans les bases de données est un problème d'actualité pour les chercheurs travaillant dans le domaine de la fouille de données, en particulier dans la fouille des règles d'association. Les règles d'association sont des implications conditionnelles entre les attributs. Les mesures de qualité, comme leurs noms l'indiquent, servent à évaluer ou à valider les qualités des règles d'association. Aujourd'hui, la littérature révèle que leur nombre avoisinent une soixantaine [Gri13] et chacune a sa raison d'être. Les acteurs de la science de données ont publié plusieurs critères souhaités pour une bonne mesure de qualité des règles d'association, ce qui fait qu'on préfère d'avoir une mesure de qualité qui vérifie plusieurs critères d'appréciation parmi ceux proposées. Nous utiliserons cette mesure pour attraper les règles intéressantes dans des bases de données. Du fait qu'elles comptent actuellement presque soixantaine [Gri13], dans le souci de leur vision unificatrice, les data-scientistes s'en efforcent [SG07]. Effectivement, les études comparatives des mesures de qualité présentées dans [LT04], [NLZ99] ne regroupent que des petits nombres des mesures, c'est pour cette raison qu'on a introduit une approche analytique intelligente et appropriée à ce contexte dénommée normalisation permettant de regrouper la plupart des mesures de qualité proposées dans la littérature de la science de données binaires.

1.2.7 Introduction de la normalisation d'une mesure

Signalons que, dans ce domaine de mesures d'intérêt, les recherches effectuées ont déjà abouti à d'importants résultats. Comme l'on a déjà parlé, aujourd'hui, une soixantaine de mesures découvertes ; chacune de ces mesures a ses raisons d'être. Sur ce nombre élevé de mesures d'intérêt, les chercheurs s'efforcent à les caractériser plus pour mieux faciliter le choix des utilisateurs dans leurs activités de recherche, soit, en d'autres termes pour mieux les satisfaire. Face à ce nombre, les data-scientistes cherchent parallèlement à trouver des relations plus générales, [JHN00], [SG07] pouvant scinder partiellement ou entièrement ces diverses mesures d'intérêt, d'où l'introduction de la notion de « *normalisation des mesures de qualité* » dans le contexte de fouille des données en 2003 dans [Tot03]. Notons ici que cette normalisation de mesures d'intérêt entre justement dans le cadre de la présente thèse. La définition des mesures normalisées une fois acquise, l'auteur même a montré que la plupart des mesures d'intérêt, une fois normalisées (pour celles normalisables au sens de ses théories) tendent quasiment

vers une mesure appelée M_{GK} . De là, on a commencé à voir la possibilité de rapprochement de ces différentes mesures d'intérêt au moyen de la normalisation. En 2007, Daniel Rajaonasy Fenô a poursuivi les travaux effectués par André Totohasina dans [Tot03] et a obtenu des résultats analogues proches de ceux antérieurement trouvés par son prédécesseur, c'est-à-dire la majorité des mesures d'intérêt qu'il a normalisées convergent au sens de normalisation toutes vers M_{GK} . Notons que les deux chercheurs ci-dessus [Tot03], [Fen07], [Tot08] ont utilisé l'outil appelé « *homéomorphisme affine* » dans leurs normalisations, après quoi, ils ont publié les idées suivantes : les vingt mesures de qualité (*M_{GK} , Support, Confiance, Lift, Confiance-Centré, Facteur de Certitude, Laplace, ϕ -Coefficient, Piatetsky-Shapiro, Cosinus, Accuracy, Moindre Contradiction, Lovinger, Kappa, Indice d'implication, Spécificité et Fiabilité négative*) ont leurs normalisées égales à M_{GK} ; les cinq mesures de qualité (*Jaccard, Zhang, Q-Yule, Y-Yule, j-Mesure*) sont normalisées et s'avèrent différentes de M_{GK} ; les sept mesures de qualité (*Multiplicateur de côte, Sebag, Conviction, Odd-Ratio, Klosgen, Gain informelle et Taux d'Exemples Contre-Exemple*) ne sont pas normalisables par l'homéomorphisme affine susmentionné. Rappelons que toutes ces mesures sont rappelées au chapitre 4 sous-paragraphe 4.5.2 Tableau 4.4. Les résultats de leurs recherches ont permis de classer les mesures de qualité de règle d'association au moins en deux groupes dont celui des mesures associées à M_{GK} sont majoritaires [Tot03], [Fen07]. Ils figurent à la base dudit rapprochement et ralliement des différentes mesures de qualité pouvant faciliter le choix des utilisateurs.

1.2.8 Problématiques

Eu égard à la non normalisabilité des mesures susmentionnées, l'auteur de cette normalisation a posé une problématique « *quant à la transformation qui permettrait la normalisation des autres mesures dans un sens encore à préciser ([Tot08] page 65) ([Fen07] page 107)* ». Nous nous sommes intéressés à cette problématique. Ainsi, la recherche d'un homéomorphisme plus adéquat et englobant plus de mesures de qualité se pose. C'est justement l'objet principal de notre investigation en science de données. Ici, il s'agit d'une modélisation mathématique.

1.3 Didactique des mathématiques

Etant donnée la didactique des mathématiques est l'étude de processus de transmission et d'acquisition des différents contenus des sciences, et qui propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle se manifeste notamment à l'étude des méthodes et techniques d'enseignement, et la didactique d'une discipline est la science qui étudie les phénomènes de transmission de savoir ou apprentissage de la discipline par les apprenants. Elle est aussi une réflexion approfondie sur les différentes étapes d'acquisition et transmission de la discipline. Ce qui nécessite des énormes expérimentations avant d'aboutir à des résultats tangibles qui vont influencer la pédagogie de la discipline. A ce sujet, l'United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO) [UNE11] a déjà lancé le défi de son enseignement à l'échelle international et sa pratique est fortement consistant vue son envergure sur le monde de l'éducation [RBTR12].

1.3.1 Intégration des TIC dans l'enseignement (TICE)

L'introduction des Technologies de l'Information et de la Communication dans l'Enseignement (TICE), [Bra09] génère actuellement des problèmes de souci qui accapare l'esprit dans

le mode de l'éducation sur l'environnement structurel et événementiel qui sert au cadre éducatif, [RT14]. Les spécialistes se tourmentent surtout sur le désintérêt des apprenants face aux disciplines scientifiques, notamment les mathématiques. Par la suite, à Madagascar par exemple, les statistiques portant sur les candidats au baccalauréat se trouvant sur le site du ministère de l'Enseignement supérieur ont affirmé que le pourcentage des candidats inscrits dans la série scientifique n'est même pas excédé de 5.63% durant ces neuf dernières années et il est descendu à 3.31% pour les sessions 2017 et 2018. Vraisemblablement, la société ou même les parents et les enseignants encouragent les apprentissages pour quitter une telle démotivation. L'UNESCO, dirigée par le Professeur Michèle Artigue [UNE11], montre qu'il n'y a pas qu'à Madagascar qu'on se demande « *comment redynamiser l'enseignement des mathématiques ?* ». Selon ce rapport, quoique notre société et nos environnements caressent des liens étriqués avec la science et la technologie, ainsi, toutes matières sont quasiment confondues, les défis à dévoiler restent toujours dans le but de rendre un enseignement pertinent et de qualité. Le même rapport affirme que « *l'enseignement des mathématiques dans la scolarité de base est trop souvent encore un enseignement peu stimulant : dans lequel les pratiques expérimentales, les activités de modélisation sont rares* » et « *penser une éducation de qualité pour tous aujourd'hui ne peut se faire sans prendre en compte la dimension technologique* ». A ce sujet, les TICE, [ST08] peuvent être utilisées pour stimuler, et par la suite, améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. A ce effet, plusieurs chercheurs expriment clairement qu'ils sont des bons outils pour dégager rapidement des hypothèses difficiles à vérifier immédiatement dans la mesure où elles permettent de réduire les coûts des essais-erreurs [Emp08].

1.4 Problématiques

Parlons de cette didactique des mathématiques utilisant les TICE sur le contexte de l'enseignement des géométries, selon nos remarques au fil des années de nos activités pédagogiques, et ceci couvre quasiment plusieurs Pays, vu les programmes scolaires dans le monde suivis en matière de géométrie, la géométrie étant alors restreinte à l'aspect géométrie euclidienne. Le non apprentissage de la géométrie hyperbolique et la prégnance à la géométrie euclidienne conduisent les apprenants et même les enseignants vers l'ignorance des autres géométries. Or, dans la vie quotidienne, il existe plusieurs architectures d'images telles que la géométrie euclidienne ne suffit ni pour les construire, ni pour optimiser la créativité et l'éducation à l'esthétique qui sont des enjeux majeurs de l'enseignement des géométries. En d'autres termes, ce type de programme scolaire engendrerait une perception bornée ayant tendance à devenir indélébile face à des figures géométriques non euclidiennes mais fréquentes ! Il s'agit là d'une prégnance très persistante, voire bloquante, aux figures géométriques euclidiennes. Ainsi, pour éviter la prégnance bloquante à la géométrie euclidienne et ayant déjà les TICE, une question naturelle s'est alors posée en guise de renforcement du programme scolaire : « *ne serait-il pas opportun, en cette ère des nouvelles technologies, de lancer une réforme s'avérant pertinente et bien réalisable sur les mathématiques scolaires consistant à introduire dès le niveau collège la notion de géométrie hyperbolique plane par la visualisation et la construction des figures hyperboliques élémentaires d'abord, puis de façon analytique en investissant les homographies et anti-homographies complexes dans un demi-plan de Poincaré en terminale de lycée ?* ». C'est justement l'objet principal de notre investigation en didactique. A cet effet, on proposera une pertinence et faisabilité précoce de son enseignement dès le collège.

Première partie



État de l'art autour des quelques propriétés
mathématiques des homographies
mises en jeux dans ce travail

Chapitre 2

État de l'art sur les homographies

2.1 Rappels et Définitions

2.1.1 Approche géométrique

D'une façon générale, les homographies sont des transformations étudiées en géométrie projective. Elles s'obtiennent comme composée d'un nombre fini de projections centrales. Elles décrivent ce qui arrive aux positions observées de différents objets quand l'œil de l'observateur change de place. Les transformations projectives ne conservent pas toujours les distances, ni les angles mais conservent les propriétés d'incidence et le birapport - deux propriétés importantes en géométrie projective.

2.1.2 Approche algébrique

On trouve des transformations projectives sur des droites, dans des plans et dans l'espace. Par la suite, dans un corps commutatif \mathcal{K} (typiquement \mathbb{R} ou \mathbb{C}) une fonction homographique est une fonction de \mathcal{K} dans lui-même définie par : $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des éléments de \mathcal{K} et $ad \neq cb$. On interdit que $ad - bc$ soit nul car la fonction correspondante serait constante [SK52], [Fau92]. Il arrive que la condition « c non nul » soit ajoutée, car le cas $c = 0$ correspondrait aux fonctions affines ; on perd alors la structure de groupe de l'ensemble des fonctions homographiques munies de la composition d'application.

2.1.3 Approche topologique et structure algébrique de l'ensemble des homographies (\mathcal{H}, o)

Nous retiendrons alors qu'une fonction homographique est un homéomorphisme de : $\mathcal{K} \setminus \{\frac{c}{d}\} \rightarrow \mathcal{K}$. Cette fonction détermine une bijection de $\mathcal{K} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathcal{K} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ de bijection réciproque : $h^{-1}(x) = -\frac{dx-b}{cx-a}$ qui a le même déterminant ($ad - bc \neq 0$) par h . Rappelons au passage que h^{-1} est une homographie de même type que h et que la courbe représentative de h^{-1} est du même type que celle de h dans le cas de la homographie propre. De plus, les fonctions homographiques se composent comme des matrices en coordonnées homogènes, c'est-à-dire, si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $g(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$, alors $h(x) = f \circ g(x) = \frac{a''x+b''}{c''x+d''}$ où

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}.$$

Ceci montre qu'on a un morphisme surjectif de groupe multiplicatif simple entre le groupe des homographies (\mathcal{H}, \circ) et celui de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrices carrées d'ordre 2 aux coefficients dans \mathbb{C} inversible, telle que : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \times) \mapsto (\mathcal{H}, \circ) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (z \mapsto \frac{ax+b}{cx+d})$ est un isomorphisme.

Moralité 1. *Par la suite, il est donc clair que l'ensemble $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \times)$ des matrices carrées inversibles homographiques est un groupe simple pour la multiplication. Il en résulte par la bijection existant entre l'ensemble des homographies et celui de matrices carrées d'ordre 2 inversibles que l'ensemble des homographies (\mathcal{H}, \circ) est un groupe multiplicatif simple. Notons qu'un ensemble donné muni d'une loi de composition interne est appelé groupe multiplicatif simple si la loi associée à cet ensemble n'est pas commutative.*

2.1.4 Dérivée et variation d'une fonction homographique

Dans le cas de la homographie réelle ou complexe, sa dérivée est h telle que : $h'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$
 où $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, appelé aussi le déterminant de la homographie h . On en déduit que les variations d'une fonction homographique réelle sont telles que :

- ★ si $ad - bc$ est strictement positif, alors h est strictement croissante sur ses deux intervalles de définition ;
- ★ si $ad - bc$ est strictement négatif, alors h est strictement décroissante sur ses deux intervalles de définition.

On obtient ainsi deux classes des homographies propres selon le signe de son déterminant : la classe des homographies à déterminant négatif et la classe des homographies à déterminant positif.



Remarque 1. *Notons que l'ensemble des homographies constantes constitue la classe triviale des homographies.*

2.2 Quelques propriétés d'une fonction homographique

2.2.1 Forme canonique

Considérons une homographie h telle que $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Dans le cas où c est non nul, à une translation verticale près, la forme canonique (aussi appelée forme réduite) d'une fonction homographique s'écrit : $h(x) = \frac{\mathcal{A}}{x+\mathcal{B}} + \mathcal{G}$, où $\mathcal{A} = (bc - ad) / c^2$, $\mathcal{B} = d/c$ et $\mathcal{G} = a/c$. En effectuant un changement de repère dans un nouveau repère d'origine \mathcal{J} de coordonnées (β^*, γ^*) d'un point de $\overline{\mathbb{C}}$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty]$ l'expression de la fonction homographique devient $h(x) = \frac{\mathcal{A}}{x}$, ce qui correspond à la fonction inverse multiplier par le scalaire $\mathcal{A} = (bc - ad) / c^2$. Cette forme est également très chère pour trouver une primitive de cette fonction et donc pour résoudre une intégrale. En effet, originellement, la recherche de ses primitives n'est pas praticable. Il faut donc modifier h sous cette forme pour arriver au calcul de ses primitives.

Corollaire 1. *Toute fonction homographique à déterminant non nul peut ainsi se réduire à une fonction homographique de type $x \mapsto \frac{A}{x+B} + \mathcal{G}$ avec $A \neq 0$.*

2.2.2 Exemples de représentations graphiques des quelques homographies réelles

On considère ici $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. On parle alors de la homographie réelle. Soit $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Dans le cas où $c = 0$, c'est trivial. Mais, au cas où c est non nul, sa représentation graphique dans le cas réel est une hyperbole qui se déduit de l'hyperbole d'équation $y = \frac{A}{x}$ par une affinité d'axe (Ox) , de direction (Oy) , et de rapport \mathcal{A} suivie d'une translation de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix}$. Le graphe d'une fonction homographique est une hyperbole équilatère, qui admet pour asymptotes les deux droites d'équation respectives $x = \mathcal{B}$ et $y = \mathcal{G}$; le point S d'intersection de ses deux asymptotes est le centre de symétrie pour le graphe 2.1.

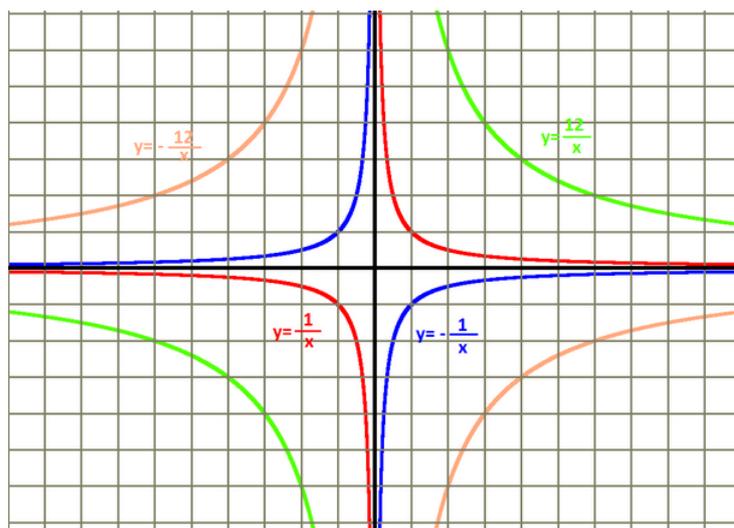


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de fonctions homographiques



Remarque 2. *On remarque qu'une représentation graphique d'une fonction homographique propre est toujours deux branches d'hyperbole et ces différentes représentations explicitent l'étude des fonctions homographiques en tant que courbes algébriques fractionnaires.*

2.2.3 Droite projective et homographie

Dans cette sous-section, on prend $\mathcal{K} = \mathbb{C}$. On parle cette fois de la homographies complexes. Considérons une fonction homographique complexe h définie par : $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des nombres complexes, tels que $ad - bc \neq 0$ sinon, h est alors une fonction constante [Rou97], [Stu97], [TK92]. Ainsi, on obtient bien sûr la même fonction en multipliant tous les coefficients par un même facteur non nul.



Définition 1. On rajoute à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes un point nommé ∞ , et l'on notera $\overline{\mathbb{C}}$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty]$. La notation $\overline{\mathbb{C}}$ sera appelée droite projective complexe, et notée $P_1(\mathbb{C})$. Soit h une homographie. On prolonge h à tout entier en posant :

$$h(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et comme pour $c \neq 0$, la fonction n'étant pas définie en $-\frac{d}{c}$, on la prolonge alors en ce point en posant $h(-\frac{d}{c}) = \infty$. On obtient une application qui renvoie l'infini en un nombre fini appelée application projective.

Théorème 1. Toute homographie réalise une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$.

Preuve : Soit $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie, prolongée dans $\overline{\mathbb{C}}$ de la manière précédemment décrite.

- ★ Le cas où $c = 0$ est trivial. En effet, h est alors une application affine, donc réalise une bijection de \mathbb{C} sur \mathbb{C} . Comme on la prolonge alors par $h(\infty) = \infty$, on obtient bien une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$.
- ★ On se place donc désormais dans le cas où $c \neq 0$. On a alors prolongé h en posant $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$. Tout élément de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ a bien sûr une image dans \mathbb{C} , c'est-à-dire que le point $\frac{a}{c}$ possède une et une seule image par h , qui est ∞ . De façon réciproque, un complexe $z \neq -\frac{d}{c}$ a pour image $\frac{a}{c}$ si et seulement si $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} &\Leftrightarrow c(az+b) = a(cz+d) \\ &\Leftrightarrow bc = ad. \end{aligned}$$

Or, on a justement précisé dans la définition d'une homographie que les complexes a , b , c et d vérifient $ad - bc \neq 0$. Donc, $\frac{a}{c}$ ne peut avoir d'antécédent dans \mathbb{C} , et donc possède un et un seul antécédent par h , qui est le point ∞ . Soit enfin Q un complexe différent de $\frac{a}{c}$. Un complexe $z \neq -\frac{d}{c}$ a pour image Q si et seulement si $\frac{az+b}{cz+d} = Q$.

$$\text{Or, } \frac{az+b}{cz+d} = Q \Leftrightarrow (a - Qc)z = Qd - b \tag{2.1}$$

Comme $Q \neq \frac{a}{c}$, on a également $a - Qc \neq 0$, et donc l'équation (2.1) admet une et une seule solution dans \mathbb{C} , qui est le complexe $\frac{Qd-b}{a-Qc}$. On vient de montrer ainsi que tout élément de $\overline{\mathbb{C}}$ admet un unique antécédent par h .

Théorème 2. Toute homographie différente de l'identité admet exactement 1 ou 2 points fixes dans $\overline{\mathbb{C}}$.

Preuve : Soit a , b , c et d des complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$ et h la homographie définie par : $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Si $c \neq 0$, l'équation $f(z) = z$ équivaut à $az + b = z(cz + d)$, c'est-à-dire à une équation polynomiale de degré 2, qui admet en général deux solutions conjuguées dans \mathbb{C} , une seule lorsque l'on a une racine double.

Sinon, si $c = 0$, alors ∞ est un point fixe de h : quitte à multiplier les nombres a , b et d par un même facteur, on peut supposer $d = 1$. L'équation $h(z) = z$ est donc de la forme $az + b = z$. Donc, soit h est l'identité, soit cette équation admet au plus une solution dans \mathbb{C} , et l'on a là encore, au bilan, un ou deux points fixes.

2.3 Homographie et Inversion géométrique plane

L'objet de ce paragraphe est de donner quelques propriétés élémentaires de l'inversion en utilisant des preuves géométriques [SCBL11].



Définition 2. Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien. Etant donné un point O de \mathcal{P} et un nombre réel non nul k , on appelle inversion de centre O et de puissance k notée $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$, l'application de $\mathcal{P} - \{O\}$ dans lui-même qui au point M de $\mathcal{P} - \{O\}$ fait correspondre le point M' tel que O, M, M' soient alignés et que $\overline{OM'} \cdot \overline{OM} = k$, où les distances OM et OM' sont orientées. Nous écrirons alors $M' = \mathcal{I}_{nv(O,k)}(M)$ [SCBL11].



FIGURE 2.2 – Inversion plane de centre O et de puissance k

En effet, $M' = \mathcal{I}_{nv(O,k)}(M)$ signifie qu'il existe un réel non nul k vérifiant $\overline{OM'} \cdot \overline{OM} = k$ et les points O, M, M' sont alignés [SCBL11].

Terminologie : Le point O est le pôle ou centre d'inversion, k est la puissance d'inversion, M et M' sont dits points inverses ou réciproques, et les distances OM et OM' sont appelées rayons vecteurs ou raisons réciproques.



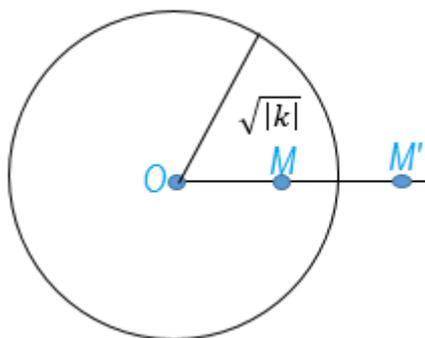
FIGURE 2.3 – Involution de l'inversion plane

Il est donc clair que toute inversion est involutive, et donc bijective, c'est-à-dire $\mathcal{I}_{nv(O,k)}(M) = M$ pour tout M de $\mathcal{P} - \{O\}$ (figure 2.3).

Comme propriété évidente, on a la proposition suivante [SCBL11].

Proposition 1. Soit \mathcal{I}_{nv} une inversion de puissance k . Si $k < 0$, l'inversion de puissance k et de centre O n'a aucun point fixe, et si $k > 0$, alors le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{|k|}$ est l'ensemble des points fixes de l'inversion de centre O et de puissance k (cf. 2.4). Pour la preuve analytique, voir le paragraphe 2.3.6, [SCBL11].

Signalons aussi que, pour un pôle et une puissance donnée k , tout point M du plan a un inverse unique puisqu'il n'existe qu'un seul point M' situé sur OM tel que $\overline{OM'} = \frac{k}{\overline{OM}}$. Si on trace le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{|k|}$, alors tout point à l'intérieur du cercle aura son inverse à l'extérieur et réciproquement. On peut dire que l'inversion rapproche ce qui est loin du pôle et éloigne ce qui en est proche. L'image du pôle est quant à elle rejetée à l'infini. De telles propriétés sont analogues à celles d'une homographie propre à quelque chose près.


 FIGURE 2.4 – Cercle de centre O et de rayon $\sqrt{|k|}$


Remarque 3. *En termes mécaniques et/ou technologiques :*

- ★ *Rapprocher ce qui est loin signifie « zoomer ce qui est loin » ;*
- ★ *Eloigner ce qui est proche signifie « dézoomer ce qui est proche ».*

2.3.1 Comment construire un point inverse ?

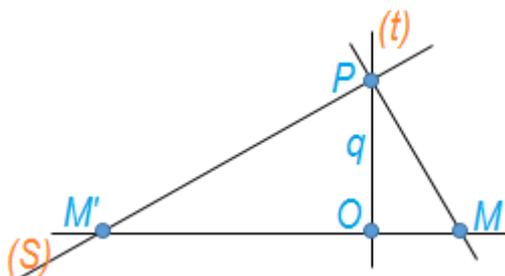
Soit $\mathcal{I}_v(O, k)$ une inversion de centre O et de puissance k .

Intéressons nous maintenant à la construction concrète de point M' à partir d'un point M fixé. Supposons que le point M' soit déjà construit afin d'analyser ses caractéristiques et d'imaginer une méthode pour l'obtenir. Si k est négatif, on peut écrire $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = -q_0^2$ (en prenant $q_0 = \sqrt{-k}$) [SCBL11].

Le fait que la puissance soit négative signifie simplement que M et M' sont de part et d'autre de O . On aura donc, en valeurs absolues, $|OM| |OM'| = q_0^2$. Cette formule rappelle fortement le théorème de la hauteur affirmant que, dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des segments qu'elle détermine sur celle-ci [SCBL11].

Cela signifie qu'en traçant le segment $[OP]$ perpendiculaire à $[M'M]$ et de longueur q , on obtient un triangle $M'MP$ rectangle en P .

On en conclut qu'une manière d'obtenir M' est de construire ce triangle rectangle, c'est-à-dire de tracer une perpendiculaire à $[OM]$, d'y placer un point P tel que $|PO| = q_0$, et enfin de trouver l'intersection de la perpendiculaire à $[PM]$ avec $[OM]$ (figure 2.5).


 FIGURE 2.5 – Construction d'un point inverse d'un autre : $OP^2 = OM \cdot OM'$



Algorithme 1. Voici un algorithme de construction de l'inverse d'un point M par $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$ pour $k < 0$.

1. M donné;
2. tracer $[OM]$;
3. tracer la demi-droite $[O, t)$ telle que $[O, t)$ est perpendiculaire au segment $[OM]$;
4. placer P sur la droite $[O, t)$ telle que $OP = q$;
5. tracer la droite (PS) telle que (PS) est perpendiculaire au segment $[MP]$;
6. prendre M' comme intersection de (OM) et (PS) .

Pour k positif, il suffit de faire la construction précédente avec k et de reporter la longueur $|OM'|$ de l'autre côté de O .

Pour k positif, il suffit de faire la construction précédente avec k et de reporter la longueur $|OM'|$ de l'autre côté de O .

2.3.2 Images de deux points par l'inversion plane

Prenons maintenant deux points A et B ainsi que leurs inverses respectifs A' et B' par $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$, par rapport à un même pôle O et une même puissance k . On peut alors démontrer que les points A, A', B et B' sont sur un même cercle. Nous détaillerons ici le cas où k est positif, mais la preuve est similaire pour k négatif.

Tout d'abord, on a : $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k$.

$$\text{Or, } \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}}.$$

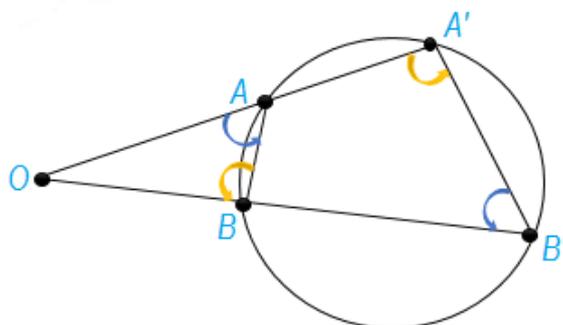


FIGURE 2.6 – Image des deux points par l'inversion

De cette égalité, et vu que $\widehat{A'OB'} = \widehat{BOA}$, on déduit que les triangles $A'OB'$ et BOA sont semblables. Donc $\widehat{OA'B'} = \widehat{OBA}$ et $\widehat{OB'A'} = \widehat{OAB}$. Les angles \widehat{OAB} et $\widehat{BAA'}$ étant supplémentaires, il en est de même pour $\widehat{OB'A'}$ et $\widehat{BAA'}$. Ceci prouve que les points A, A', B et B' sont cocycliques puisqu'un quadrilatère est cocyclique si et seulement si la somme de deux angles opposés vaut 180° (figure 2.6). D'où la proposition suivante.

Proposition 2. Pour tout couple de points A, B du plan d'inverses respectifs A', B' , les quatre points A, B, A', B' sont cocycliques.



Remarque 4. Derrière cette démonstration se cache en fait la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle. Nous ne détaillerons pas ce sujet, mais signalons juste que la puissance d'un point P par rapport à un cercle est le nombre égal au produit $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$, où M et N sont les intersections d'une droite quelconque passant par P et ce cercle (pourvu que celle-ci le coupe). Puisque ce produit ne dépend pas de la droite choisie, le fait que deux points et leurs inverses soient situés sur un même cercle contenant les deux points initiaux devient évident.

2.3.3 Figures inverses d'une même figure

On peut ensuite imaginer qu'au lieu d'être quelconque, le point M décrit une figure F donnée. Le point M' décrira alors une figure F' [SCBL11].

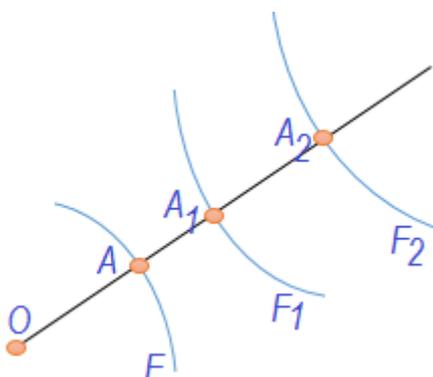


FIGURE 2.7 – Figures inverses d'une même figure

Les figures F et F' sont appelées figures inverses ou figures réciproques. Si F_1 et F_2 sont deux figures inverses d'une même figure F par rapport à un même pôle, avec des puissances k_1 et k_2 distinctes, alors elles sont homothétiques. En effet, considérons un point A de F et A_1 et A_2 les points inverses de A appartenant à F_1 et F_2 respectivement. On a : $\overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = k_1$ et $\overline{OA} \cdot \overline{OA_2} = k_2$. D'où, $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{k_1}{k_2}$. Les figures F_1 et F_2 sont donc homothétiques par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{k_1}{k_2}$.

2.3.4 Image d'un cercle

- ★ Si le cercle passe par le pôle alors, son inverse est une droite perpendiculaire au diamètre de celui-ci passant par le pôle, puisque l'inversion est une involution.
- ★ Si le cercle ne passe pas par le pôle alors « comment se place son inverse ? ».

Tout d'abord, si k est égal à la puissance de O par rapport au cercle, que nous noterons ρ_0 , l'inverse de chaque point M sera l'autre intersection de OM avec le cercle. Dans ce cas, l'image du cercle est donc le cercle lui-même. Supposons à présent que $k \neq \rho_0$. Nous avons démontré précédemment que les inverses d'une même figure selon un même pôle sont homothétiques. Cela nous permet d'affirmer que, comme l'inverse de C est un cercle pour $k = \rho_0$ et que l'image d'un cercle par une homothétie est toujours un cercle, l'inverse d'un cercle est un autre cercle lorsque $k \neq \rho_0$.

2.3.5 Image d'une droite par l'inversion

Demandons-nous maintenant quelle pourrait bien être l'image d'une droite ? Voyons en les deux cas possibles.

- ★ Si la droite passe par le pôle : chaque point de la droite a pour image un autre point de celle-ci. L'image d'une droite passant par le pôle est donc la droite elle-même.

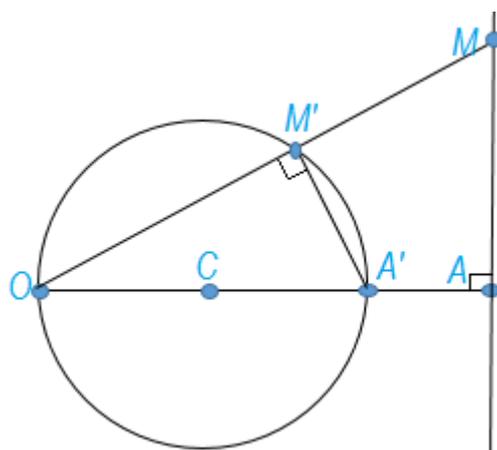


FIGURE 2.8 – Image d'une droite par l'inversion

- ★ Si la droite ne passe pas par le pôle : appelons cette droite (D) , A la projection orthogonale du pôle O sur (D) et A' son inverse. Prenons ensuite un point M quelconque de (D) . L'inverse de la droite (D) sera alors le lieu des points M' inverses de M lorsque celui-ci parcourt la droite.

De manière analogue à la démonstration précédente, les triangles $OM'A'$ et OAM sont semblables. Par conséquent, $\widehat{OM'A'} = \widehat{OAM} = 90^\circ$. Le point M' est donc situé sur le cercle de diamètre $[OA']$. On peut en déduire que le lieu des points M' est le cercle en question. L'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle est donc un cercle qui passe par le pôle et dont le centre est sur la perpendiculaire abaissée de O sur la droite.

En bref, l'image de M par une inversion de pôle O et de puissance k est la transformation du plan qui envoie M sur M' de sorte que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$, en valeurs algébriques. Cela nous confirme également que l'inversion rapproche ce qui est éloigné et éloigne ce qui est proche. Elle est également involutive, car l'image de M' est M .

En ce qui concerne les images de formes particulières : deux points et leurs images sont situés sur un même cercle. L'image d'une droite est la même droite si O appartient à celle-ci, sinon, il s'agit d'un cercle passant par O . L'image d'un cercle est une droite si O appartient au cercle, sinon, il s'agit d'un cercle. Ensuite, l'inversion ne conserve pas l'alignement, mais elle conserve l'angle entre les courbes.

Cela fait de l'inversion un outil très pratique dans la résolution de certains problèmes géométriques et en cartographie. En effet, on retrouve l'inversion derrière la projection stéréographique, qui permet de projeter la Terre sur une carte où les angles seront respectés, ce qui est très utile en navigation aussi.

Après avoir traité l'inversion de manière synthétique, on va la traiter de manière algébrique puis analytique. On a vu que toutes les propriétés démontrées précédemment étaient en-

core vraies et soulignons, par ailleurs, qu'effectuer l'analyse dans le plan complexe permet fortement de simplifier les calculs.

2.3.6 Interprétation algébrique de l'inversion à l'aide d'un complexe

Dans cette sous-section nous allons voir, en utilisant le nombre complexe, « comment interpréter algébriquement et géométriquement l'inversion de centre Ω et de puissance k dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) ? ».

Théorème 3. Soit $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$ une inversion de centre O et de puissance k d'un plan affine euclidien orienté \mathcal{P} . Si l'on munit \mathcal{P} d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) alors l'interprétation algébrique de $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$ est l'application φ de \mathbb{C}^* dans lui-même définie par $\varphi(z) = \frac{k}{\bar{z}}$.

Preuve. Soit M un point de \mathcal{P} , distinct de O , et M' son inverse. Les points O, M, M' sont alignés et on a $\overline{OM'} \cdot \overline{OM} = k$. Si z et z' sont les affixes de M et M' alors,

$$|z| |z'| = |k|$$

et

$$\arg \frac{z'}{z} = \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}')} = \arg k$$

(car, $\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}'}$ est l'angle nul si $k > 0$ et l'angle plat si $k < 0$). On a donc, $|z'| = \frac{|k|}{|z|} = \frac{|k|}{|\bar{z}|}$ et $\arg z' = \arg z + \arg k = -\arg \bar{z} + \arg k = \arg \frac{k}{\bar{z}}$. Finalement, $z' = \frac{k}{\bar{z}}$ représente l'expression algébrique de $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$. Par suite, l'expression analytique de $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$ est définie par :

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \mapsto M' \begin{vmatrix} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{vmatrix}$$

Proposition 3. L'expression algébrique de l'inversion $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$ nous prouve que si $k < 0$, une inversion de puissance k et de centre O n'a aucun point fixe, et si $k > 0$, alors le cercle de centre O et de rayon \sqrt{k} est l'ensemble des points fixes de l'inversion de centre O et de puissance k .

En effet :

$$\begin{aligned} z = \frac{k}{\bar{z}} &\Leftrightarrow z\bar{z} = k \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = k \\ &\Leftrightarrow OM^2 = k \\ &\Leftrightarrow OM = \sqrt{k}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Réciproquement, soit ψ_i l'application définie sur $\mathbb{C} - \{\omega\}$ par $\psi_i(z) = \omega + \frac{k}{z-\omega}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. L'interprétation géométrique de ψ_i est l'inversion de \mathcal{P} de puissance k et ayant pour centre le point image de nombre complexe ω .

Preuve. On vérifie que les points de \mathcal{P} d'affixes z et $\frac{k}{\bar{z}}$ sont bien inverses l'un de l'autre par l'inversion de centre O et de puissance k . L'application de \mathbb{C}^* dans lui-même, définie par : $\varphi(z) = \frac{k}{\bar{z}}$ est l'interprétation algébrique de l'inversion $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$.

Soit M d'affixe $z \neq \omega$ et M' d'affixe $z' = \psi_i(z) = \omega + \frac{k}{z-\omega}$. Considérons le point Ω d'affixe ω . On a : $|k| = |z - \omega| |z' - \omega| = \overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'}$ et

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \arg \left(\frac{k}{z - \omega} \frac{1}{z - \omega} \right) = \arg \frac{k}{|z - \omega|^2} = \arg k.$$

Les points Ω , M et M' sont donc alignés avec Ω entre M et M' si et seulement si $k < 0$. Cela entraîne que $k = \overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'}$ et M' se déduit de M dans l'inversion $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$ de centre Ω et de puissance k . On montre *reciproquement* que si un point $M \neq \Omega$ a pour affixe z alors $\mathcal{I}_{nv(O,k)}(M)$ a pour affixe $\psi_i(z)$. L'interprétation géométrique de ψ_i est donc l'inversion $\mathcal{I}_{nv(O,k)}$.

Corollaire 2. Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'application de $\mathcal{P} - \{O\}$ dans lui-même qui, au point d'affixe z , fait correspondre le point d'affixe $\frac{1}{z}$ est l'inversion de centre O et de puissance 1.

L'application de $\mathcal{P} - \{O\}$ dans lui-même qui, au point d'affixe z , fait correspondre le point d'affixe $\frac{1}{\bar{z}}$ est composée dans un ordre quelconque de l'inversion précédente et de la symétrie par rapport à la droite (O, \vec{i}) .



Remarque 5. Une preuve directe du corollaire précédent est très simple. Soit M et M' les points d'affixes $z \neq 0$ et $\frac{1}{z}$. On a $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = |z| \left| \frac{1}{z} \right| = 1$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}}) = \arg \frac{z}{\bar{z}} = 0$ donc M et M' sont sur la même demi-droite d'origine O et $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = 1$. Le point M' se déduit donc du point M dans l'inversion de centre O et de puissance 1. La réciproque est analogue. A l'aide du corollaire précédent on peut compléter l'interprétation géométrique de h .

2.4 Homographie h et cocyclicité



Définition 3. Des points sont cocycliques lorsqu'ils appartiennent à un même cercle.

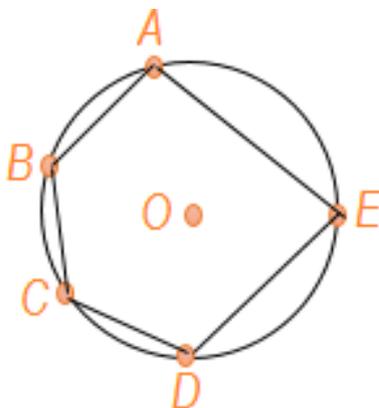


FIGURE 2.9 – Exemple de 5 points cocycliques

Corollaire 3.

1. Trois points non alignés sont toujours cocycliques ;
2. Les sommets d'un rectangle sont toujours cocycliques ;
3. Quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si leurs affixes complexes respectives vérifient que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \cdot \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}$ est réel. Les quatre points A, B, C, D du plan sont dits cocycliques lorsqu'il existe un réel k_c tel que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C} = k_c$.

2.4.1 Equations des droites et des cercles

Soient A et C deux nombres réels, $B \in \mathbb{C}$, A, B, C non tous nuls. Posons

$$\Gamma(A, B, C) = \{z \in \mathbb{C}^* / Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0\}.$$

On admet que $\Gamma(A, B, C)$:

- ★ si $A = 0$ et $C \neq 0$, $\Gamma(A, B, C)$ est une droite ne passant pas par l'origine ;
- ★ si $A = 0$ et $C = 0$, $\Gamma(A, B, C)$ est une droite passant par l'origine privée du point 0 ;
- ★ si $A \neq 0$ et $C \neq 0$, $\Gamma(A, B, C)$ est un cercle ne passant pas par l'origine ou l'ensemble vide ;
- ★ si $A \neq 0$ et $C = 0$, $\Gamma(A, B, C)$ est un cercle passant par l'origine privé du point 0.

De plus, pour tout cercle (éventuellement privé de O) et toute droite (éventuellement privée de O), il existe A, B, C trois points tels que ce cercle ou cette droite soit égal à $\Gamma(A, B, C)$.

En effet :

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par : $\varphi(z) = \frac{k}{z}$. Pour tout $z \neq 0$;

$$\begin{aligned} Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 &\Leftrightarrow \frac{k^2}{z\bar{z}}(Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C) = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2A + k\bar{B}\frac{k}{z} + kB\frac{k}{z} + C\frac{k^2}{z\bar{z}} = 0 \\ &\Leftrightarrow C\varphi(z)\overline{\varphi(z)} + k\bar{B}\varphi(z) + kB\overline{\varphi(z)} + k^2A = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\varphi(\Gamma(A, B, C))$ est $\Gamma(C, kB, k^2A)$; et donc l'image par $\mathcal{I}_{nv(O, k)}$ d'un élément de $\{\Gamma(A, B, C) / A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}\}$ est encore un élément de cet ensemble. Il est facile de préciser la nature de $\Gamma(C, kB, k^2A)$ en fonction de celle de $\Gamma(A, B, C)$.



Exemple 1. Si $A \neq 0$ et $C = 0$ alors $\Gamma(A, B, C)$ est un cercle passant par l'origine, privé du point O et centré au point $-\frac{B}{C}$. L'ensemble $\Gamma(C, kB, k^2A)$ est alors une droite ne passant pas par O et orthogonale à $-\frac{B}{C}$. On voit ici qu'un élément de \mathbb{C} peut être considéré, soit comme un point, soit comme un vecteur. L'interprétation géométrique de l'inversion (voir paragraphe 2.3) conduit à la proposition suivante.

Proposition 4. Soit $\mathcal{I}_{nv(O, k)}$ une inversion de centre O d'un plan affine euclidien \mathcal{P} .

1. **a** - Pour toute droite D passant par O , l'image de $D - \{O\}$ par $\mathcal{I}_{nv(O, k)}$ est $D - \{O\}$;
- b** - Pour tout cercle \mathcal{C} passant par O , l'image de $\mathcal{C} - \{O\}$ est une droite perpendiculaire à la droite joignant le centre du cercle à O ;
- c** - L'image par $\mathcal{I}_{nv(O, k)}$ d'un cercle ne passant pas par O est un cercle.

2. L'inversion $\mathcal{I}_{nv(O, k)}$ conserve l'alignement ou la cocyclicité des points de P distincts du pôle O .

2.4.2 Inversion et birapport (support de deux rapports)



Définition 4. On appelle birapport de quatre nombres complexes distincts z_1, z_2, z_3, z_4 le nombre complexe ρ_b défini par :

$$\rho_b(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}}{\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}}.$$



Remarque 6. Rappelons ces quelques propriétés du birapport :

1. $z_i - z_j$ est invariant par l'application $z \mapsto z + \beta$;
2. $\frac{z_i - z_k}{z_j - z_k}$ est invariant par l'application $z \mapsto \alpha z$, pour tout $\alpha \neq 0$;
3. $z_i \neq 0$ alors $\rho_b(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est invariant par l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$.

En effet,

$$\rho_b\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right) = \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_2 z_3} / \frac{z_4 - z_1}{z_2 z_4}}{\frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3} / \frac{z_4 - z_2}{z_2 z_4}} = \rho_b(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

En utilisant la décomposition de la homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ on a donc achevé la démonstration.

Proposition 5. La homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ conserve le birapport de quatre nombres complexes distincts.

Corollaire 4. La homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ conserve l'alignement ou la cocyclicité de quatre nombres complexes distincts.

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente, si on connaît la caractérisation de la cocyclicité ou de l'alignement à l'aide du birapport : quatre points distincts $M_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$ d'affixes z_i d'un plan affine euclidien sont cocycliques ou alignés, si et seulement si, $\rho_b(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.



Remarque 7. Une bijection h définie sur D_h de \mathbb{C} conserve le birapport, si et seulement si, c'est la restriction à D_h d'une fonction homographique. En utilisant la même démarche que pour la preuve de la proposition 5, on voit facilement qu'une fonction homographique conserve le birapport.

Réciproquement, si la homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ conserve le birapport, alors soit z, a, b, c quatre éléments distincts de D_h .

On a :

$$\rho_b(z, a, b, c) = \rho_b(h(z), h(a), h(b), h(c))$$

ou encore

$$\frac{z-b}{z-c} / \frac{a-b}{a-c} = \frac{h(z)-h(b)}{h(z)-h(c)} / \frac{h(a)-h(b)}{h(a)-h(c)}.$$

On a donc une égalité de la forme ci-dessous $A \frac{z-b}{z-c} = \frac{h(z)-h(b)}{h(z)-h(c)}$. En écrivant $\frac{h(z)-h(b)}{h(z)-h(c)} = 1 + \frac{h(c)-h(b)}{h(z)-h(c)}$, on a : $\frac{(A-1)z+c-bA}{z-c} = \frac{h(c)-h(b)}{h(z)-h(c)}$. Ce qui fait que $h(z) = (h(c) - h(b)) \frac{z-c}{(A-1)z+c-bA} + \frac{h(c)}{h(c)-h(b)}$. D'où la fonction homographique h est bien la restriction d'une fonction homographique.

2.4.3 Interprétation géométrique de la homographie : $z \mapsto \frac{z-b}{z-a}$

Pour $z \neq a$, on a la décomposition canonique suivante.

$$\begin{aligned} h(z) = \frac{z-b}{z-a} &= \frac{z+a-a-b}{z-a} \\ &= 1 + \frac{a-b}{z-a}. \end{aligned}$$

Introduisons les applications $h_j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} si $j \neq 2$ et de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* si $j = 2$. Si $j \neq 2$, alors h_j sont définies par : $h_1(z) = z - a, h_3(z) = (a - b)z, h_4(z) = 1 + z$ et pour $j = 2$ elle est définie par : $h_2(z) = \frac{1}{z}$. Il est clair que $h = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, et dans cette décomposition, seule l'interprétation géométrique de h_2 n'est pas connue. L'inversion, va nous permettre de donner la signification géométrique de h_2 . Le théorème 3 va fournir l'interprétation algébrique de l'inversion ainsi que l'interprétation géométrique de l'application qui, à un nombre complexe non nul, fait correspondre son inverse.

Corollaire 5. *L'interprétation géométrique de h est la composée de :*

- ★ la translation de vecteur \vec{V}_t d'affixe $-a$;
- ★ l'inversion de centre O et de puissance 1 ;
- ★ la symétrie par rapport à l'axe des réels ;
- ★ la similitude directe de centre O , de rapport $|a - b|$ et d'angle de mesure $\arg(a - b)$;
- ★ la translation de vecteur $\vec{u}(1, 0)$.

2.5 Rappels et définitions d'angles au centre et inscrit

2.5.1 Angle au centre

L'angle α inscrit dans un cercle est appelé angle au centre lorsque la distance entre son sommet et de deux points distincts de \mathcal{C} provoquant cet angle vaut le rayon du cercle.



Exemple 2. *Considérons un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon \mathcal{R}_c et tenons compte de deux points A, B deux à deux distincts de \mathcal{C} (cf. figure 2.10).*

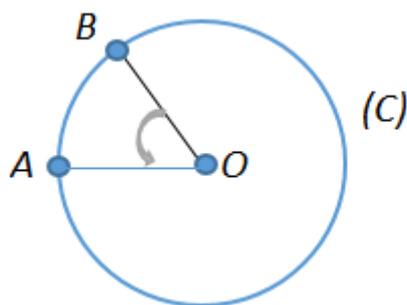


FIGURE 2.10 – Angle au centre



Ici, l'angle \widehat{AOB} est un angle au centre.

2.5.2 Quelques théories des angles inscrits

Considérons un cercle \mathcal{C} de centre O (par exemple) et de rayon \mathcal{R}_c et tenons compte de quatre points A, B, M et N deux à deux distincts de \mathcal{C} (cf. figure 2.11).

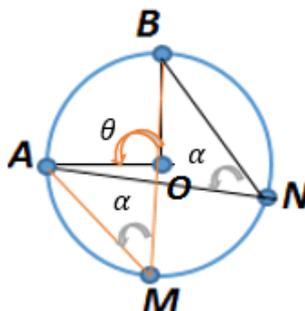


FIGURE 2.11 – Angles inscrits dans un cercle

Le théorème des angles inscrits affirme que des angles interceptant le même arc sont égaux et valent la moitié de l'angle au centre correspondant. Par suite, en tenant compte l'arc \widehat{BA} , nous avons en effet $\widehat{BMA} = \widehat{BNA} = \alpha = \frac{\theta}{2}[\pi]$. Ce résultat nous amène à dire que quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$.

2.6 Décompositions d'une rotation et d'une translation

On va voir dans cette section la décomposition d'une rotation et d'une translation en deux symétries orthogonales.

2.6.1 Composition de translation par une rotation et son inverse

Soient r une rotation de centre O (O peut être quelconque) et d'angle θ et t une translation de vecteurs \vec{U} . Au Lycée, les deux théorèmes 1 et 2 suivant sont admis.

Théorème 1. *Toute rotation de centre O et d'angle θ peut être considérée comme la composée de deux réflexions d'axes sécantes en O et l'une de ces réflexions pouvant être arbitrairement choisie.*

En effet, choisissons n'importe quelle droite (d) passant par O , et traçons la droite (d') , image de la droite (d) par la rotation de centre (O) et d'angle $\frac{\theta}{2}$. Alors d'après le théorème 1, rappelé dans pour prendre un bon départ, nous obtenons $r = S_{d'} \circ S_d$. On dit que l'on a décomposée r en produit de deux réflexion (cf. figure 2.12).

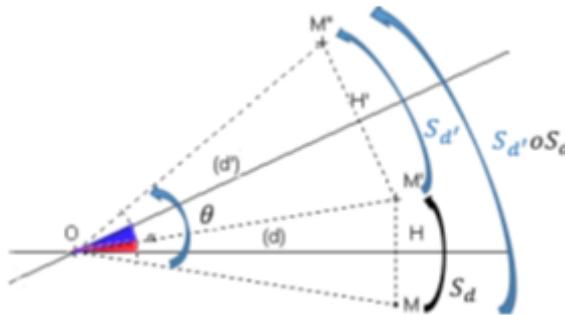


FIGURE 2.12 – Décomposition d'une rotation de centre O d'angle θ

Dans la figure (cf. 2.12) ci-dessus, les propriétés sur les bissectrices permettent de dire que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = 2(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) = 2\alpha = \theta$, $S_d(M) = M'$ et $S_{d'}(M') = M''$.

Théorème 2. *Toute translation t de vecteurs \vec{U} peut être considérée comme la composée de deux réflexions dont les axes sont orthogonaux à \vec{U} et l'une de ces réflexions pouvant être arbitrairement choisie.*

En effet, choisissons arbitrairement une droite (d) orthogonale à \vec{U} , et traçons la droite (d') , image de la droite (d) par la translation de vecteur $\frac{\vec{U}}{2}$. Alors d'après le théorème 2, rappelé dans pour prendre un bon départ, nous obtenons $t = S_{d'} \circ S_d$. On dit que l'on a décomposée t en produit de deux réflexion (cf. figure 2.13).

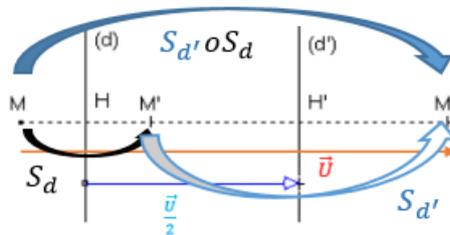


FIGURE 2.13 – Décomposition d'une translation de vecteur \vec{U} en deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Dans la figure (cf. 2.13) ci-dessus, les propriétés vectorielles des milieux permettent de dire que : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HH'} = \vec{U}$, $S_d(M) = M'$ et $S_{d'}(M') = M''$.

Terminologies

Nous avons vu sur les deux figures (cf. figure 2.12 et 2.13) que l'expression $r = S_{d'}oS_d$ signifie que la droite (d') est l'image de la droite (d) par r d'angle $\frac{\theta}{2}$ et (d) est l'image de la droite (d') par r d'angle $-\frac{\theta}{2}$. De plus, $t = S_{d'}oS_d$ signifie que la droite (d') est l'image de la droite (d) par la translation de vecteur $\frac{\vec{U}}{2}$ et (d) est l'image de (d') par la translation de vecteur $-\frac{\vec{U}}{2}$.

2.6.2 Recherche des éléments caractéristiques des *tor* et *rot*

Cette sous-section remet officiellement la méthode explicite pour caractériser deux transformations *tor* et *rot* en décomposant t par deux symétries orthogonales d'axes parallèles et r en deux symétries orthogonales d'axes sécants au centre de cette rotation du fait de la connaissance de la nature respective des deux transformations.

Soient r une rotation de centre O et d'angle θ et t une translation de vecteurs \vec{U} . En fait, les problèmes à résoudre se situent sur une même figure.

2.6.3 Méthode

★ Pour la composition d'une translation avec une rotation et vice versa

Ici, notre objectif est d'avoir $r = S_{d_1}oS_\Delta$ et $t = S_\DeltaoS_{d_2}$ telles que $rot = S_{d_1}oS_\DeltaoS_\DeltaoS_{d_2} = S_{d_1}oS_{d_2}$ où S_{d_1} et S_Δ sont deux symétries orthogonales d'axes (d_1) et (Δ) qui sont sécants en O , S_Δ et S_{d_2} sont deux symétries orthogonales d'axes (Δ) et (d_2) qui sont cette fois parallèles. Notons qu'ici, notre étude se préoccupe beaucoup sur la recherche de la droite (Δ) comme le premier choix. L'algorithme 2 va nous permettre de résoudre ce problème.



Algorithme 2.

1. La droite (Δ) engendrant la symétrie orthogonale S_Δ doit être une droite perpendiculaire au vecteur \vec{U} et passant par le centre de la rotation r .
2. La droite (d_1) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_1} doit être une droite image de (Δ) par une rotation r d'angle $\frac{\theta}{2}$.
3. La droite (d_2) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_2} doit être une droite image de (Δ) par une translation de vecteur $-\frac{\vec{U}}{2}$.

Et en conclusion, la transformation $rot = S_{d_1}oS_\DeltaoS_\DeltaoS_{d_2} = S_{d_1}oS_{d_2}$ est une rotation d'angle $2\text{mes}(\widehat{d_2d_1}) = \theta$ et de centre $(d_1) \cap (d_2)$.

★ Pour la composition de deux rotations

Soient r_1 et r_2 deux rotations de centres et d'angles différents. Notre objectif ici est d'avoir $r_1 = S_{d_1}oS_\Delta$ et $r_2 = S_\DeltaoS_{d_2}$ telles que $r_1or_2 = S_{d_1}oS_\DeltaoS_\DeltaoS_{d_2} = S_{d_1}oS_{d_2}$.

L'algorithme 3 donne le procédé de la résolution de ce type de problème.



Algorithme 3. 1. La droite (Δ) engendrant la symétrie orthogonale S_Δ doit être une droite passant par le centre de deux rotations.

2. La droite (d_1) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_1} doit être une droite image de (Δ) par une rotation r_1 d'angle $\frac{\theta}{2}$.

3. La droite (d_2) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_2} doit être une droite image de (Δ) par une rotation r_2 d'angle $-\frac{\theta}{2}$.

Et comme résultat, la transformation $r_1 \circ r_2 = S_{d_1} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ S_{d_2} = S_{d_1} \circ S_{d_2}$ est une rotation d'angle $\theta = 2\text{mes}(\widehat{d_2 d_1})$ et de centre $(d_1) \cap (d_2)$.

2.7 Expressions analytiques et complexe d'une symétrie orthogonale d'axe δ

Soient (δ) une droite telle que $(\delta) : ax + by + c = 0$ où $a + b \in \mathbb{R}^*$ de vecteur directeur $\vec{V}(-b, a)$ et S_δ la symétrie orthogonale d'axe δ (cf. figure 2.14). Sur cette figure, on a $S_\delta(M) = M'$.

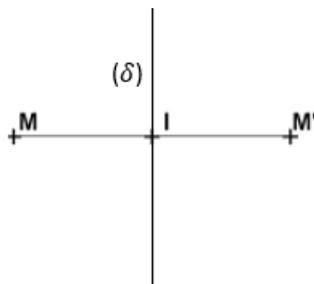


FIGURE 2.14 – Symétrie orthogonale d'axe (δ)

Comme I est le milieu du segment $[MM']$, il en résulte que $I\left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2}\right)$ et $I \in (\delta)$.

Le point $I \in (\delta)$ est équivalent à

$$a(x' + x) + b(y' + y) + 2c = 0 \quad (2.2)$$

De plus, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à \vec{V} . Cela signifie que $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$. Ce qui est équivalent à

$$(-b \ a) \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

En mettant en jeu les deux équations (2.2) et (2.3) nous avons l'expression analytique de S_δ définie sur (2.4) par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a^2 + b^2} [-(a^2 - b^2)x - 2aby - 2ac] \\ y' = \frac{1}{a^2 + b^2} [-2abx + (a^2 - b^2)y - 2bc] \end{cases} \quad (2.4)$$

Par ailleurs, l'expression (2.4) nous conduit d'avoir l'expression (2.5) appelée expression complexe de S_δ par :

$$z' = -\frac{1}{a^2 + b^2} [(a^2 - b^2 + 2iab)\bar{z} + 2ac + 2ibc] \quad (2.5)$$

$$\text{Soit } z' = \mathcal{A}_c \bar{z} + \mathcal{B}_c \quad \text{où } (\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c) \in \mathbb{C}^2 \quad (2.6)$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{R}e)(\mathcal{A}_c) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\ (\mathcal{I}m)(\mathcal{A}_c) = -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \\ (\mathcal{R}e)(\mathcal{B}_c) = -\frac{2ac}{a^2 + b^2} \\ (\mathcal{I}m)(\mathcal{B}_c) = -\frac{2bc}{a^2 + b^2} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Avec l'expression (2.7), nous pouvons chercher l'équation de (δ) définie par $(\delta) : ax + by + c = 0$ en connaissant l'expression complexe de S_δ définie sur (2.6).

2.8 Caractérisation d'une transformation complexe du type $z' = \omega_i \bar{z} + \lambda_i$ où $(\omega_i, \lambda_i) \in \mathbb{C}^2$

Dans un plan \mathcal{P} , toute application φ_i de \mathcal{P}^2 vers \mathcal{P}^2 définie par : $\overrightarrow{\omega_h M'} = k_h \overrightarrow{\omega_h M}$ ($k_h \in \mathbb{R}$ et, M' et M sont deux points de \mathcal{P} d'affixes respectives z' et z de \mathbb{C}) est la homothétie de centre ω_h et de rapport k_h . La forme complexe de φ_i est définie par $z' = k_h z + b$. Considérons S_δ la symétrie orthogonale d'axe δ d'expression complexe (2.5). L'application notée ψ_i de \mathcal{P} vers \mathcal{P} définie par : $\psi_i = \varphi_i \circ S_\delta$ est appelée similitude indirecte d'expression complexe $z' = \omega_i \bar{z} + \lambda_i$ avec $\omega_i(x_{\omega_i}, y_{\omega_i})$ et $\lambda_i(x_{\lambda_i}, y_{\lambda_i})$. Nous avons trois cas possibles pour caractériser l'application ψ_i et ces trois cas dépendent des valeurs possibles de $|\omega_i|$. Autrement dit,

★ si $|\omega_i| \neq 1$, alors ψ_i est une similitude indirecte et ayant trois éléments caractéristiques dont :

1. le centre \mathcal{G} est tel que $z_{\mathcal{G}} = \frac{\omega_i \bar{\lambda}_i + \lambda_i}{1 - \omega_i \bar{\omega}_i}$;
2. le rapport λ_k est tel que $\lambda_k = |\omega_i|$;
3. la symétrie orthogonale $S_{\mathcal{D}}$ où (\mathcal{D}) est la première droite globalement invariante définie par : $(\mathcal{D}) = \left\{ M(x, y) / \overrightarrow{\mathcal{G}M'} = |\omega_i| \overrightarrow{\mathcal{G}M} \right\}$.

Le 3^{ème} cas nous permet d'avoir $z' - z_{\mathcal{G}} = |\omega_i|(z - z_{\mathcal{G}}) \Leftrightarrow \omega_i \bar{z} + \lambda_i - z_{\mathcal{G}} = |\omega_i|(z - z_{\mathcal{G}})$.

$$\text{D'où, } \begin{cases} (x_{\omega_i} - |\omega_i|)x + y_{\omega_i}y - (1 - |\omega_i|)x_{\mathcal{G}} + x_{\lambda_i} = 0 \\ y_{\omega_i}x - (x_{\omega_i} + |\omega_i|)y - (1 - |\omega_i|)y_{\mathcal{G}} + y_{\lambda_i} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Notons que les coefficients $x_{\mathcal{G}}, x_{\lambda_i}, y_{\mathcal{G}}, y_{\lambda_i}, |\omega_i|, x_{\omega_i}, y_{\omega_i}$ structurant (2.8) doivent être vérifiés les proportionnalités (2.10) pour assurer l'équations (2.9) définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{D}) : (x_{\omega_i} - |\omega_i|)x + y_{\omega_i}y - (1 - |\omega_i|)x_{\mathcal{G}} + x_{\lambda_i} = 0 \\ \text{où} \\ (\mathcal{D}) : y_{\omega_i}x - (x_{\omega_i} + |\omega_i|)y - (1 - |\omega_i|)y_{\mathcal{G}} + y_{\lambda_i} = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\frac{x_{\omega_i} - |\omega_i|}{y_{\omega_i}} = \frac{y_{\omega_i}}{-(x_{\omega_i} + |\omega_i|)} = \frac{-(1 - |\omega_i|)x_G + x_{\lambda_i}}{-(1 - |\omega_i|)y_G + y_{\lambda_i}} \quad (2.10)$$



Remarque 8. Il existe également une deuxième droite globalement invariante de ψ_i notée (\mathcal{D}') qui est définie par : $\mathcal{D}' = \left\{ M(x, y) / \overrightarrow{\mathcal{GM}'} = -|\omega_i| \overrightarrow{\mathcal{GM}} \right\}$ qui peut trouver par deux méthodes différentes dont :

- (a) si (\mathcal{D}) n'est pas connue, alors on utilise le même principe de la recherche de (\mathcal{D}) mais juste on remplace cette fois $|\omega_i|$ par $-|\omega_i|$;
- (b) si (\mathcal{D}) est connue telle que $(\mathcal{D}) : y = m_i x + p_i$ et $(\mathcal{D}') : y = m'_i x + p'_i$, de plus, $\mathcal{G} \in (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')$, alors $m_i m'_i = -1$ et $p'_i = y_G - m_i x_G$.

★ si $|\omega_i| = 1$, alors ψ_i est un antidéplacement et on doit distinguer deux cas dont :

1. si $\omega_i \bar{\lambda}_i + \lambda_i = 0$, alors ψ_i n'a qu'un seul élément caractéristique qui est la symétrie orthogonale $S_{\mathcal{X}}$ d'axe (\mathcal{X}) . Dans ce cas ψ_i admet un point invariant \mathcal{S} d'affixe $z_{\mathcal{S}}$ et la droite (\mathcal{X}) n'est autre que la droite (\mathcal{D}) définies sur (2.9) en prenant cette fois $|\omega_i| = 1$ et l'expression (2.10) devient (2.11) définie par :

$$x_{\omega_i} - 1 = y_{\omega_i} ; y_{\omega_i} = -(x_{\omega_i} + 1) ; x_{\lambda_i} = y_{\lambda_i} \quad (2.11)$$

2. si $\omega_i \bar{\lambda}_i + \lambda_i \neq 0$, alors ψ_i est la composée d'une symétrie orthogonale $S_{\mathcal{J}}$ avec la translation $\mathcal{T}_{\bar{v}}$. Dans ce cas, ψ_i ayant deux éléments caractéristiques dont :

- ☆ la translation $\mathcal{T}_{\bar{v}}$ qui est telle que $z_{\mathcal{T}_{\bar{v}}} = \frac{1}{2} (\omega_i \bar{\lambda}_i + \lambda_i)$;
- ☆ la symétrie orthogonale $S_{\mathcal{J}}$ a d'expression $S_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}_{\bar{v}}^{-1} \circ \psi_i$ et on en tire (\mathcal{J}) en utilisant l'expression (2.7) du fait que $(\mathcal{J}) : ax + by + c$ ou en exploitant la recherche de l'ensemble des points invariants de $S_{\mathcal{J}}$.

2.9 Lignes de niveaux de la homographie $h : z \mapsto \frac{z-b}{z-a}$

Dans cette section, on garde constamment l'instruction $z \neq a$.

2.9.1 Recherche de l'ensemble des points M d'affixe z tel que le nombre réel $\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Nous allons étudier l'ensemble noté \mathcal{M}_{λ} défini par : $\mathcal{M}_{\lambda} = \left\{ \left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \lambda \right\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ des points M d'affixe z , où a et b sont respectivement les affixes des points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Il est évident que $\mathcal{M}_{\lambda} = \emptyset$ si $\lambda < 0$, $\mathcal{M}_0 = \{b\}$ et \mathcal{M}_1 est la médiatrice du segment $[AB]$. Il nous reste à examiner les cas où $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$.

Deux méthodes sont disponibles pour résoudre ce problème [AT19b], [AT19c].

● 1^{ère} Méthode

Partons de l'expression $\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \lambda$ nous avons :

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \lambda \Leftrightarrow |z-b| = \lambda |z-a| \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) est équivalente à l'équation (2.13) définie par :

$$(x - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 = \psi^2 \quad (2.13)$$

où, $\gamma = \frac{\lambda^2 x_A - x_B}{\lambda^2 - 1}$, $\beta = \frac{\lambda^2 y_A - y_B}{\lambda^2 - 1}$, $\psi = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2 - \phi}$, $\phi = \frac{1}{\lambda^2 - 1} [\lambda^2(x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2)]$.
D'où, d'après (2.13), si $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$, alors \mathcal{M}_λ est le cercle de centre $\omega_\lambda(\gamma, \beta)$ et de rayon ψ .

D'où, la proposition 6 suivante.

Proposition 6. On définit la homographie h par : $h(z) = \frac{z-b}{z-a}$ pour tous points A et B d'affixes respectives a et b . L'ensemble \mathcal{M}_λ tel que $\mathcal{M}_\lambda = \{z \neq a / \left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \lambda\}$ est :

- ★ $\mathcal{M}_\lambda = \phi$ si $\lambda < 0$;
- ★ $\mathcal{M}_0 = \{b\}$;
- ★ \mathcal{M}_1 est la médiatrice du segment $[AB]$;
- ★ Si $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$, alors \mathcal{M}_λ est le cercle de centre $\omega_\lambda(\gamma, \beta)$ et de rayon ψ .

● 2^{ème} Méthode

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \lambda &\Leftrightarrow |z-b| = \lambda |z-a| \\ &\Leftrightarrow BM = \lambda AM \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 AM^2 - BM^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (-\lambda \vec{GA} + \vec{GB} - \lambda \vec{MG} + \vec{MG})(\lambda \vec{LA} + \vec{LB} + \lambda \vec{ML} + \vec{ML}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{MG} \cdot \vec{ML} = 0. \end{aligned}$$

D'où la proposition 7 suivante.

Proposition 7. Si $\lambda > 1$ et $0 < \lambda < 1$, alors \mathcal{M}_λ est le cercle de diamètre $[GL]$ où G et L sont respectivement les barycentres des $\{(A, -\lambda); (B, 1)\}$ et $\{(A, \lambda); (B, 1)\}$.

2.9.2 Recherche de l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \theta[\pi]$ ou $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \theta[2\pi]$

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On note par $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$ l'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \theta[\pi]$ et $\mathcal{M}_{\theta[2\pi]}$ celui de $\theta[2\pi]$.
Si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts de \mathcal{P} et $M(x, y)$ est un point distinct de A et de B , alors l'angle (\vec{MA}, \vec{MB}) est défini tel que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \theta$ (cf. figure 2.15).

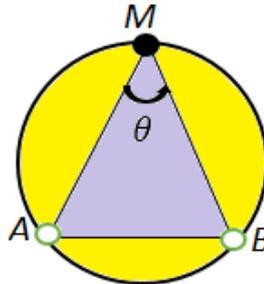


FIGURE 2.15 – Angle θ

En faisant revenir à l'esprit par un rapport d'analogie du terme « congruence » et « modulo », pour tous entiers relatifs \mathcal{X} , \mathcal{W} et \mathcal{Y} , l'entier \mathcal{X} est congru à \mathcal{W} modulo \mathcal{Y} ($\mathcal{X} \equiv \mathcal{W}[\mathcal{Y}]$) signifie qu'il existe un entier relatif \mathcal{U} tel que $\mathcal{X} = \mathcal{W} + \mathcal{U}\mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned} \text{Ce qui fait que : } \theta &\equiv \theta[\pi] &\Leftrightarrow \theta &= \theta + \mathcal{U}\pi \text{ où } \mathcal{U} \in \mathbb{Z} \\ \theta &\equiv \theta[2\pi] &\Leftrightarrow \theta &= \theta + 2\mathcal{U}\pi \text{ où } \mathcal{U} \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \theta &\equiv 0[\pi] &\Leftrightarrow \theta &= \{ \dots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots \} \\ \theta &\equiv 0[2\pi] &\Leftrightarrow \theta &= \{ \dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

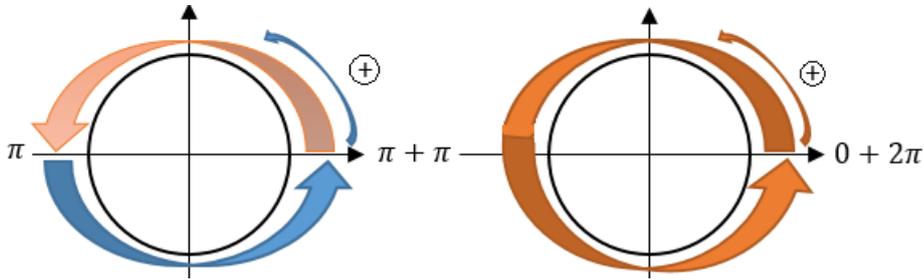


FIGURE 2.16 – Rotation d'angle π et d'angle 2π

Il est évident d'après (2.15) que $\theta[2\pi]$ est complètement inclus dans $\theta[\pi]$ ce qui veut dire que $\mathcal{M}_{\theta[2\pi]}$ est inclus dans $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$.

La théorie mathématique exprime clairement que $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta$.

Nous nous intéressons ici au cas où $\theta \in \mathbb{R} - \{0, \pi\}$, car ces deux cas extrêmes sont triviaux.

En effet,

- ★ si $\theta = 0[\pi]$, et si $\theta = \pi[\pi]$ alors le point M est soit en dehors des points A et B , soit entre eux. Ainsi, $\mathcal{M}_{0[\pi]}$ est équivalent à $\mathcal{M}_{\pi[\pi]}$ ceux qui sont la droite (AB) privée des points A et B (cf. figure 2.17).

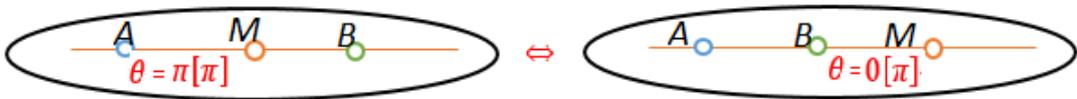


FIGURE 2.17 – Angle $\theta = \pi[\pi]$ et $\theta = 0[\pi]$

- ★ si $\theta = 0[2\pi]$, alors le point M est exclusivement hors des points A et B . De plus, $\theta = \pi[2\pi]$ signifie que M est uniquement situé entre les points A et B . Par suite, les ensembles $\mathcal{M}_{0[2\pi]}$ et $\mathcal{M}_{\pi[2\pi]}$ sont respectivement la droite (AB) privé du segment $[AB]$ et le segment $[AB]$ privé des points A et B (cf. figure 2.18).



FIGURE 2.18 – Angle $\theta = 0[2\pi]$ et $\theta = \pi[2\pi]$

● Examinons maintenant $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$ pour $\theta \in \mathbb{R} - \{0, \pi\}$

Notons que pour tout réel θ tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta$ on a :

$$\sin \theta = \frac{\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}{\|\overrightarrow{MA}\| \|\overrightarrow{MB}\|} \quad (2.16)$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{\|\overrightarrow{MA}\| \|\overrightarrow{MB}\|} \quad (2.17)$$

Comme si $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta$ (cf. figure 2.19), alors $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\theta$ (cf. figure 2.19).

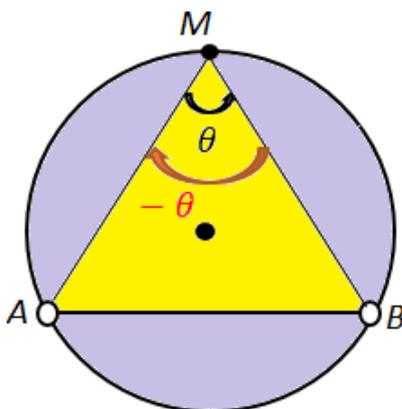


FIGURE 2.19 – Angle θ et $-\theta$

Par conséquent, en supposant que $BM > AM$ on a :

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (-\theta) = \theta + (-\theta) = 0[\pi]$ c'est le retour complet du point B au point A (cf. figure 2.20).

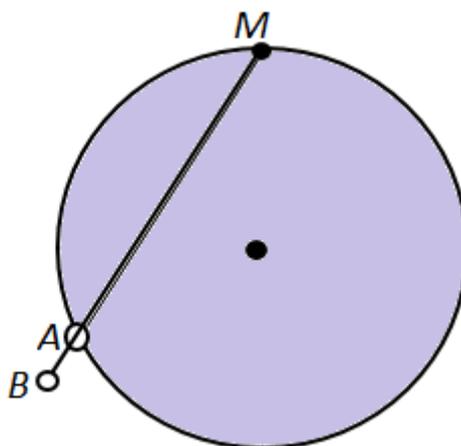


FIGURE 2.20 – Angle $\theta + (-\theta) = 0[\pi]$

Par la suite, en faisant intervenir les expressions (2.16) et (2.17) nous avons :

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (-\theta) &&= 0[\pi] \\
 &\Leftrightarrow \sin \left[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \theta \right] &&= 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos(\theta) \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \sin(\theta) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &&= 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sigma)^2 + (y - \eta)^2 &&= \varepsilon^2
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}[x_A + x_B + (y_A - y_B) \cot \theta] ; \\ \eta = \frac{1}{2}[y_A + y_B + (x_B - x_A) \cot \theta] ; \\ \varepsilon = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 - \xi} ; \\ \xi = x_A x_B + y_A y_B + [x_B y_A - x_A y_B] \cot \theta. \end{cases}$$

D'où, $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$ est le cercle de centre $\mathcal{W}_0(\sigma, \eta)$ et de rayon ε .

D'où, la proposition 8 suivante.

Proposition 8. On définit la homographie h par : $h(z) = \frac{z-b}{z-a}$ pour tous points A et B d'affixes respectives a et b . L'ensemble $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$ défini par : $\mathcal{M}_{\theta[\pi]} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta[\pi]$ des points M est le cercle de centre $\mathcal{W}_0(\sigma, \eta)$ et de rayon ε où

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}[x_A + x_B + (y_A - y_B) \cot \theta] ; \\ \eta = \frac{1}{2}[y_A + y_B + (x_B - x_A) \cot \theta] ; \\ \varepsilon = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 - \xi} ; \\ \xi = x_A x_B + y_A y_B + [x_B y_A - x_A y_B] \cot \theta. \end{cases}$$



Remarque 9. On peut remarquer que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$, alors $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$ est le cercle de diamètre AB privé des points A et B d'équation $(x - \sigma)^2 + (y - \eta)^2 = \varepsilon^2$ avec $\sigma = \frac{1}{2}[x_A + x_B]$; $\eta = \frac{1}{2}[y_A + y_B]$; $\varepsilon = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 - \xi}$; $\xi = x_A x_B + y_A y_B$.



Exemple 3. Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives -1 et 1 .

1. Déterminer l'ensemble $(\Gamma_{\pi/3})$ des points M du plan d'affixe z telle que $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}[\pi]$
2. Montrer que cet ensemble contient C d'affixe $i\sqrt{3}$ et que représente $(\Gamma_{\pi/3})$ pour le triangle ABC ?

1. L'ensemble $(\Gamma_{\pi/3})$ des points M tel que $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}[\pi]$.

Il est immédiat qu'en utilisant la proposition (8) $(\Gamma_{\pi/3})$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = (x - 0)^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{4}{3}$. Par suite, c'est un cercle de centre $I(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ et de rayon $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (cf. figure 2.21).

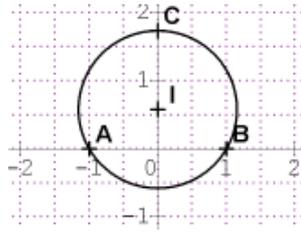


FIGURE 2.21 – Ensemble $(\Gamma_{\pi/3})$ des points M tel que $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{3}[\pi]$



2. L'ensemble $(\Gamma_{\pi/3})$ contient C d'affixe $i\sqrt{3}$ et le triangle ABC

Comme $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{3}$. Par la suite, notre problème ici revient à montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$ autrement dit, il s'agit de vérifier qu'il existe un réel q tel que le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = q(1 + i\sqrt{3})$. Donc, $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. D'où, (Γ) représente un cercle circonscrit le triangle équilatéral ABC .

- Examinons maintenant $\mathcal{M}_{\theta[2\pi]}$ pour $\theta \in \mathbb{R} - \{0, \pi\}$.

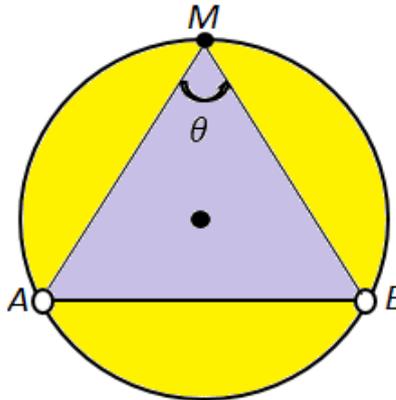


FIGURE 2.22 – Angle $\theta[2\pi]$

Comme le théorème de l'angle au centre exprime clairement que pour tous points A, B, M deux à deux distincts de cercle (\mathcal{C}) de centre I , on a : $\frac{1}{2}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[\pi]$ et le théorème de l'angle inscrit donne pour vrai sans laisser le doute possible que pour tous points A, B de cercle (\mathcal{C}) de centre I , et T un point de la tangente en A , on a : $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT})[\pi]$.

Par conséquent, l'ensemble des points M tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta[2\pi]$ où $\theta \in \mathbb{R} - \{0, \pi\}$ est l'un des deux arcs ouverts d'extrémité A et B du cercle \mathcal{C} d'équation $(x - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ définie dans la proposition 8 admettant pour tangente en A la droite (\mathcal{Y}_t) contenant T telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \theta[\pi]$. Le choix de l'orientation de cet arc dépend exclusivement du signe de θ . D'où la proposition 9 suivante.

Proposition 9. On définit la homographie h par : $h(z) = \frac{z-b}{z-a}$ pour tous points A et B d'affixes respectives a et b . L'ensemble $\mathcal{M}_{\theta[2\pi]}$ défini par : $\mathcal{M}_{\theta[2\pi]} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta[2\pi]$ des points M est l'arc du cercle d'équation $(x - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ tel que :

- ★ l'arc \widehat{BA} si $\theta > 0$;
- ★ l'arc \widehat{AB} si $\theta < 0$.

2.10 Etude d'une suite récurrente homographique utilisant un point fixe d'une homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$

Un nombre complexe $z \neq b$ est un point fixe de h si et seulement si $z = \frac{z-a}{z-b}$ ce qui est équivalent à $z^2 - (b+1)z + a = 0$. Donc, la fonction h possède un ou deux points fixes suivant que $\Delta = (b+1)^2 - 4a$ est nul ou non. On a ainsi deux cas suivants.

- ★ 1. Si $\Delta \neq 0$, alors la fonction h possède deux points fixes α_s et β_s conjuguée. Pour tout $z, z' \neq b$ et distincts des points fixes, le birapport $\rho_b(z, z', \alpha_s, \beta_s)$ est invariant par $h : \rho_b(z, z', \alpha_s, \beta_s) = \rho_b(h(z), h(z'), h(\alpha_s), h(\beta_s))$. Ce qui donne (après avoir noté que $h(\alpha_s) = \alpha_s$ et $h(\beta_s) = \beta_s$) :

$$\frac{h(z) - \alpha_s}{h(z) - \beta_s} \frac{z - \alpha_s}{z - \beta_s} = \frac{h(z') - \alpha_s}{h(z') - \beta_s} \frac{z' - \alpha_s}{z' - \beta_s}.$$

La fonction $z \mapsto \frac{h(z) - \alpha_s}{h(z) - \beta_s}$ est donc constante, de valeur $q \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\frac{h(z) - \alpha_s}{h(z) - \beta_s} = q \frac{z - \alpha_s}{z - \beta_s} \quad (2.18)$$

- ★ 2. Si $\Delta = 0$, alors la fonction h possède un seul point fixe : $\alpha_s = \frac{b+1}{2}$. On a $b \neq 1$ car sinon, $\Delta = 0$ implique $a = 1$. Un calcul facile montre que :

$$\frac{1}{h(z) - \alpha_s} = \frac{1}{z - \alpha_s} + \frac{2}{1 - b} \quad (2.19)$$

Les écritures de h sous les formes (2.18) et (2.19) sont en particulier utilisées pour étudier les suites récurrentes définies à partir de h , des suites homographiques.

Par exemple, supposons $\Delta \neq 0$. Soit x_p un nombre complexe et (x_n) la suite récurrente définie par son premier terme x_p et la relation $x_{n+1} = h(x_n)$. On doit alors imposer une condition à x_p pour que la suite soit bien définie : $x_p \neq b$ et $x_p \notin \{z \neq b / \text{il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } h^n(z) = b\}$. On peut aussi supposer $x_p \neq \alpha_s$ et $x_p \neq \beta_s$, car sinon, la suite est constante. En utilisant (2.18), on obtient l'égalité : $\frac{x_n - \alpha_s}{x_n - \beta_s} = q^n \frac{x_p - \alpha_s}{x_p - \beta_s}$. Ainsi, la suite de terme général $y_n = \frac{x_n - \alpha_s}{x_n - \beta_s}$ est donc une progression géométrique de raison q et de premier terme y_p défini par : $y_p = \frac{x_p - \alpha_s}{x_p - \beta_s}$. Dans le cas où le discriminant Δ est non nul, on a trois cas à distinguer :

- ★ si $|q| < 1$, alors la suite (y_n) converge vers 0. Comme $x_n = \frac{\beta_s y_n - \alpha_s}{y_n - 1}$, (x_n) converge vers α_s .
- ★ si $|q| > 1$, alors comme $\frac{x_n - \beta_s}{x_n - \alpha_s} = \left(\frac{1}{q}\right)^n \frac{x_p - \beta_s}{x_p - \alpha_s}$ et $\left|\frac{1}{q}\right| < 1$, la suite (x_n) converge vers β_s .
- ★ si $|q| = 1$, alors les termes de la suite (y_n) sont situés sur le cercle de centre O et de rayon $|y_p|$. Posons $q = e^{i\alpha_b}$. On a $y_n = y_p e^{in\alpha_b}$. D'où, deux possibilités sont à considérer à savoir :
 - ☆ si $\frac{\alpha_b}{\pi} = \frac{p_1}{p_2} \in \mathbb{Q}$, alors $2\alpha_b p_2 = 2\pi p_1$: la suite (y_n) est donc périodique. Il en est de même pour (x_n) qui est donc divergente.

☆ si $\frac{\alpha_b}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, alors les suites (y_n) et (x_n) ne sont pas périodiques et divergent.

En effet, $|y_{n+1} - y_n| = |e^{in\alpha_b}(e^{i\alpha_b} - 1)y_0| = |e^{i\alpha_b} - 1||y_0|$ ne tend pas vers 0 et, comme (y_n) est bornée, la suite (x_n) ne peut être tendue vers β_s .

Enfin, dans le cas où le déterminant $\Delta = 0$, on obtient pour la suite qui correspond à (y_n) une suite arithmétique et la suite (x_n) converge vers l'unique point fixe de la homographie h . Nous verrons dans le chapitre 6 paragraphe 6.5 des exemples d'applications et des extensions de tous ces résultats généraux.

2.11 Homographies, conservation des angles et plan analytique

La fonction homographique h est une forme particulière de fonctions homographiques. On appelle ainsi les fonctions $h_{a,b,c,d} : z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$ (si $ad-bc = 0$ et $c \neq 0$, alors $h_{a,b,c,d}$ est constante et vaut $\frac{a}{c}$) et les fonctions $h_{a,b,0,1} : z \in \mathbb{C} \mapsto az+b$, $a \neq 0$. Comme nous l'avons déjà annoncé au paragraphe 2.1 que les fonctions homographiques sont bijectives, la fonction réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique, mais pour que la fonction composée de deux fonctions homographiques soit encore une fonction homographique il faudra introduire le plan analytique. Si $c \neq 0$, on peut écrire $h_{a,b,c,d}(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \frac{1}{z+\frac{d}{c}}$ (c'est la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle homographique $\frac{az+b}{cz+d}$); ce qui montre que $h_{a,b,c,d}$ est composée de deux translations, d'une similitude directe, de la symétrie par rapport à l'axe réel et de l'inversion de centre O et de puissance 1.

La homographie \tilde{h} définie par $\tilde{h} : z \mapsto \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}$ est appelée l'anti-homographie.

Rappelons les deux points suivants :

- ★ les applications affines $z \mapsto az+b$ ont pour interprétations géométriques les similitudes planes directes et les similitudes planes directes conservant les angles orientés ;
- ★ les applications $z \mapsto a\bar{z}+b$ ont pour interprétations géométrique les similitudes plane indirectes (ou négatives) et ces similitudes indirectes transforment un angle orienté en son opposé.

Il n'est pas très difficile de montrer la réciproque de ces résultats.

D'où la proposition suivante où l'expression « conserve les angles » signifie conserve les angles orientés ou les changent en leurs opposés respectifs.

Proposition 10. *Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien. Les similitudes de \mathcal{P} conservent les angles et toute bijection affine de \mathcal{P} qui conserve les angles est une similitude.*

Considérons maintenant une bijection quelconque g (i.e. non nécessairement affine) de \mathcal{P} dans \mathcal{P} . Quel sens faut-il attribuer à l'expression « l'application g conserve les angles » sachant que l'image par g d'une droite n'est pas toujours une droite (penser à l'inversion) ? L'idée qui permet d'étendre la définition est que la conservation des angles est en fait la conservation de l'angle des tangentes. Plus précisément, soient C_1 et C_2 deux arcs de courbes différentiables de \mathcal{P} qui se coupent en un point M . Soit g une application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} de classe C^1 . Si $q_i : [0; 1] \mapsto \mathcal{P}$, $i = \{1, 2\}$ est une représentation paramétrique de C^i alors goq_i est une représentation paramétrique de l'arc $g(C_i)$.

De plus, si \vec{u}_i est un vecteur directeur de la tangente à C_i au point M , alors un vecteur

directeur de la tangente au point $g(M)$ est $dg(M)(\vec{u}_i)$. Cela conduit à une définition naturelle d'une transformation conservant les angles.



Définition 5. Toute transformation complexe qui conserve les angles est appelée application conforme.

Il résulte de cette définition que la transformation de Möbius (homographie complexe), est une application conforme.

Propriété 1. Les applications conformes de \mathcal{P} constituent un groupe qui est un sous-groupe du groupe des bijections de \mathcal{P} dans \mathcal{P} .

La proposition précédente entraîne que le groupe des applications conformes contient le groupe des similitudes. En fait, il ne contient rien d'autre que ce groupe de similitude planes.

Proposition 11. Le groupe des applications conformes d'un plan affine euclidien \mathcal{P} est le groupe des similitudes de \mathcal{P} . La preuve n'est pas très difficile. Elle utilise essentiellement le fait qu'une bijection holomorphe de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est de la forme $z \mapsto az + b$. L'exemple de l'inversion montre qu'il existe des transformations ponctuelles intéressantes qui ne sont pas définies en tout point d'un plan affine euclidien. Nous allons maintenant étudier la conservation des angles pour ce type de transformations ce qui permettra en particulier de montrer que la homographie h conserve les angles. L'application $\phi : z \mapsto \frac{1}{z}$ est, en tant qu'application de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans lui-même, l'application $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ i.e $(x, y) \mapsto (\phi_1(x), \phi_2(x))$. C'est une application de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et sa différentielle au point $(x, y) \neq (0,0)$ a pour matrice jacobienne par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^2 :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & \frac{-2xy}{x^2 + y^2} \\ \frac{-2xy}{x^2 + y^2} & \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la matrice d'une application linéaire composée de l'homothétie de rapport $\frac{1}{x^2+y^2}$ et d'une symétrie. L'application $d\phi_1(x, y)$ est donc, pour tout $(x, y) \neq (0,0)$, une similitude indirecte. L'application ϕ_1 conserve les angles, et plus précisément change les angles orientés en leurs opposés. En utilisant la décomposition de la homographie h au paragraphe 2.4.3, on a la proposition ci-dessus.

Proposition 12. Soit a, b deux nombres complexes.

Toute homographie $h : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ conserve les angles orientés.

Cette proposition ne contredit pas la proposition 11 car, h n'est pas définie sur \mathbb{C} tout entier. Pour généraliser la proposition 11 aux applications définies sur un ensemble de la forme $\mathbb{C} - \{z_0\}$, il est commode d'ajouter à \mathbb{C} un « point à l'infini » noté ∞ . On désigne l'ensemble ainsi obtenu par $\overline{\mathbb{C}}$, comme l'on a déjà vu au paragraphe 2.2.3 i.e $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \mathbb{R}$, et on peut montrer que $\overline{\mathbb{C}}$, muni d'une distance convenable, est homéomorphe à la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 de \mathbb{R}^3 . Cette sphère est appelée la sphère de Riemann et l'espace métrique $\overline{\mathbb{C}}$, le plan analytique. On étend partiellement les opérations de \mathbb{C} à $\overline{\mathbb{C}}$ en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \infty = \infty ; \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}} - \{0\}, z\infty = \infty \\ \frac{1}{0} = \infty ; \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

On peut prolonger toute fonction homographique en une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ en posant par :
 $h_{a,b,c,d}(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h_{a,b,c,d}(\infty) = \frac{a}{c}$.

De même, les fonctions anti-homographiques ont des prolongements bijectifs sur $\overline{\mathbb{C}}$. L'ensemble des fonctions homographiques ou anti-homographiques forment un sous-groupe du groupe des bijections de $\overline{\mathbb{C}}$. Ce sous-groupe est engendré par les applications $z \mapsto az+b$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \frac{1}{z}$. Si on ajoute à un plan affine euclidien \mathcal{P} un point à l'infini ω_0 alors on peut prolonger l'application qui fait correspondre à un nombre complexe son image, en associant ∞ et ω_0 (cette application dépend du choix d'un repère de \mathcal{P}).



Remarque 10. 1. Une application g qui conserve les angles ne transforme pas, en général, la tangente en un point M d'une courbe \mathcal{C} en la tangente au point $g(M)$ à la courbe $g(\mathcal{C})$. Par exemple, si D_1 et D_2 sont deux droites orthogonales concourantes en M et si I est une inversion de centre $O \neq M$ alors $\mathcal{I}_{nv(O,k)}(D_1)$ et $\mathcal{I}_{nv(O,k)}(D_2)$ sont deux cercles, privés du point O , qui ont des tangentes orthogonales au point $\mathcal{I}_{nv(O,k)}(M)$. Ces tangentes ne sont pas les inverses des tangentes en M (qui sont les droites D_i elles-mêmes).

2. La preuve de la conservation des angles par la homographie h n'est pas très longue. Il suffit de dire que h est composée d'applications affines qui conservent les angles et de l'application $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Cette dernière application, en tant qu'application de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dans lui-même, possède en chaque point une différentielle qui est une similitude vectorielle. Par cette similitude, la tangente en un point $\frac{1}{z_0}$ d'une courbe devient la tangente au point de l'image de la courbe par $z \mapsto \frac{1}{z}$.

3. Considérons les deux homographies $h_{a,b,c,d}$ et $h_{a',b',c',d'}$. Si on les considère comme des bijections définies sur $\overline{\mathbb{C}}$, alors on peut les composer et $h_{a',b',c',d'} \circ h_{a,b,c,d}(z) = \frac{(a'a+b'c)z+a'b+b'd}{(c'a+d'c)z+c'b+d'd} = \frac{a''z+b''}{c''z+d''}$, comme on l'avait déjà annoncé au paragraphe 2.1, on obtient encore une fonction homographique. En revanche, si on les considère comme des applications définies sur $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ et $\mathbb{C} - \{-\frac{d'}{c'}\}$, alors leur composition pose un problème si $\frac{a}{c} \neq \frac{d'}{c'}$, car l'image de $h_{a,b,c,d}$ est $\mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$. Ceci est l'une des motivations de l'introduction d'un point à l'infini.

2.12 Transformations des objets géométriques classiques

2.12.1 Groupe hyperbolique

Partons toujours d'une homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$.

Nous avons déjà dit que cette application définit une bijection de $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{C} - \{-\frac{a}{c}\}$. Pour éviter qu'il ne manque ainsi des points, on complète \mathbb{C} en $\overline{\mathbb{C}}$ en lui ajoutant, comme ci-dessus, un unique point à l'infini, et on prolonge h sur $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{a}{c}$ (cela correspond aux limites en ces points).

On considère aussi les anti-homographies : $\tilde{h}(z) = \frac{\tilde{a}\bar{z} + \tilde{b}}{\tilde{c}\bar{z} + \tilde{d}}$.

Proposition 13.

- (i) La composée de deux homographies est une homographie, l'identité est une homographie, et que la réciproque d'une homographie est une homographie.
- (ii) Une homographie transforme une droite (resp. un cercle) en une droite ou un cercle (on pourra décomposer h en produit de similitudes et de transformations du type $z \mapsto 1/z$).
- (iii) Une homographie distincte de l'identité admet au plus deux points fixes dans $\overline{\mathbb{C}}$.
- (iv) La composée d'une homographie et d'une anti-homographie est une anti-homographie, que celle de deux anti-homographies est une homographie.

Preuve

(i) Évident voir la remarque 10.3.

(ii) D'abord, à un facteur près, toute homographie du type $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ peut s'écrire sous forme $h(z) = \frac{z-\alpha_0}{z-\alpha_1}$ et d'après 2.4.3, cette expression est la composée des homographies h_4, h_2, h_3, h_1 définies par : $h_1(z) = z - \alpha_1, h_2(z) = \frac{1}{z}, h_3(z) = (\alpha_1 - \alpha_0)z, h_4(z) = 1 + z$. Comme $h = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$ et, dans cette décomposition, on connaît toutes les interprétations géométriques de h_4, h_2, h_3, h_1 .

En effet, l'application $h : z \mapsto \frac{z-\alpha_0}{z-\alpha_1}$ est la composée de la translation de vecteur $-\alpha_1$, l'inversion de centre O et de puissance 1, la symétrie par rapport à l'axe des réels, la similitude directe de centre O , de rapport $|\alpha_1 - \alpha_0|$ et d'angle de mesure $\arg(\alpha_1 - \alpha_0)$, la translation de vecteur 1.

Or, toutes ces transformations facteurs qui composent h , transforment une droite (resp. un cercle) en une droite en particulier la homographie propre $z \mapsto 1/z$. D'où (ii).

(iii) est déjà démontré au paragraphe 2.10.

$\tilde{h}(z) = \frac{\tilde{a}\bar{z} + \tilde{b}}{\tilde{c}\bar{z} + \tilde{d}}$ (iv) Considérons la homographie $h_{a,b,c,d}$ et l'anti-homographie $\tilde{h}_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{d},\tilde{c}}$.

Puisqu'il y a des bijections définies sur $\hat{\mathbb{C}}$, alors la composée de $\tilde{h}_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{d},\tilde{c}}$ et $h_{a,b,c,d}$ est

$$\tilde{h}_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{d},\tilde{c}} \circ h_{a,b,c,d}(z) = \frac{(\tilde{a} + \tilde{b})\bar{z} + \tilde{a}b + \tilde{b}d}{(\tilde{c}a + \tilde{d}c)\bar{z} + \tilde{c}b + \tilde{d}d} = \frac{a_0\bar{z} + b_0}{c_0\bar{z} + d_0}$$

où

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}.$$

On obtient en effet une anti-homographie.

2.12.2 Homographies conservant le demi-plan de Poincaré

On a déjà défini \mathcal{H} comme l'ensemble des homographies propres, on considère \mathcal{H}^+ l'ensemble des homographies aux coefficients a, b, c, d réels vérifiant $ad - bc = 1$ et l'ensemble \mathcal{H}^- des anti-homographies aux coefficients réels aussi mais, avec $ad - bc = -1$ tels que $\mathcal{H}^+ \subseteq \mathcal{H}, \mathcal{H}^- \subseteq \mathcal{H}$ et tous les deux sont de groupe multiplicatif simple.

Posons $\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$.

Proposition 14.

- (i) La composée de deux éléments de \mathcal{H}^+ est dans \mathcal{H}^+ .
- (ii) Pour tout h un élément de \mathcal{H}^\pm , on a $h(D_m) = D_m$ où D_m est le demi-plan défini par $D_m = \{x + iy/y \geq 0\}$ appelé demi-plan de Poincaré.

Preuve

(i) Évident, voir la preuve de proposition 13 (iv) en remplaçant \tilde{h} par h .
 En examinant les divers cas mettant en jeu \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- nous avons :

o	\mathcal{H}^+	\mathcal{H}^-
\mathcal{H}^+	\mathcal{H}^+	\mathcal{H}^-
\mathcal{H}^-	\mathcal{H}^-	\mathcal{H}^+

Tableau 2.1 – Tableau mettant en jeu \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^-

(ii) Soit h un élément de \mathcal{H} . Donc, il est claire que $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $\mathcal{I}_m(z) > 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Donc, } h(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\
 &= \frac{(ax + b + iay)(cx + d - icy)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
 &= \frac{(ax + b)(cx + d) - icyax - icyb + iaycx + iayd + acy^2}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
 &= \frac{(ax + b)(cx + d) + i(ad - bc)y + i(ac - ca)xy + acy^2}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
 &= \frac{[(ax + b)(cx + d) + acy^2] + iy}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
 &= \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + (cy)^2} + i \frac{y}{(cx + d)^2 + (cy)^2}.
 \end{aligned}$$

Finalement, sous l'hypothèse $ad - bc = 1$, $\mathcal{I}_m(h) = \frac{1}{(cx + d)^2 + (cy)^2}y = \alpha_2 y$ où $\alpha_2 \geq 0$.

Puisque $h(z) = z' = \frac{az + b}{cz + d}$, à l'instar de $y \geq 0$ dans D_m , il en résulte que si $ad - bc = 1$, alors $y' = \alpha y$ donc, $y' \geq 0$. D'où (ii).

Moralité 2. Les homographies s'avèrent en effet les transformations géométriques idéales pour travailler la géométrie selon le modèle de Poincaré.

Nous venons de présenter brièvement les notions de base des homographies mise en jeux dans notre travail. Dans ce contexte, la homographie est parmi les points à ne pas négliger vu son importance. A cet effet, elle est riche en résultats qu'il conviendrait d'exploiter dans notre vie quotidienne. Comme notre travail a également un rapport étroite sur l'étude de normalisation des mesures de qualité, c'est pourquoi, le chapitre suivant va nous livrer l'état de l'art à propos de la notion d'Extraction des Connaissances à partir des Données binaires.

Deuxième Partie



État de l'art autour
de l'Extraction de Connaissance
à partir des Bases de Données Binaires

Chapitre 3

Quelques notions des ensembles ordonnés

3.1 Introduction partielle

Dans ce chapitre, nous allons faire connaître de manière formelle les notions et/ou les définitions mise en jeux sur l'étude de contexte de base de données binaires à savoir par exemple le Treillis, des Familles de Moore (systèmes de fermeture) et des Correspondances de Galois. En effet, ils occupent très grande places (voire inséparable) avec les études de base de données binaires. Sur la réflexion épistémologique, sa notion est très ancienne qui trouve son origine vers la moitié de dix-neuvième siècle issue des travaux de Boole [Boo47], qui s'intitule *The Mathematical Analysis of Logic* et sa théorie a été longtemps négligée. L'année 1940 est marquée par l'émergence de ladite théorie évoluée par Öre dans [Ore44] et par BirKho dans la branche d'algèbre. Dès lors, elle est couvert dans plusieurs domaines de mathématiques pures et appliquées, en particulier dans la fouille des règles d'association consistant à trouver des liens causales entres les permises et les conséquents appelés motifs de contexte binaire. La structure de treillis s'avère engendre tout l'ensemble de tous les motifs d'une grande base de données binaires. La familles de Moore est connue depuis Armstrong [Arm74] s'expliquant un système d'implications entre des parties d'un ensemble donné. Birkho en 1940 a explicité l'importance des correspondances de Galois sur la théorie des ensembles ordonnés suscitant les structures des règles d'association de base de données binaires [Bir67], [Eve55], [WFM91].

3.2 Définitions et quelques exemples

Dans cette section nous allons voir quelques définitions suivies quelquefois des exemples.

3.2.1 Ensembles ordonnés



Définition 6. Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux ensembles.

- ★ Une relation binaire de \mathbb{E} vers \mathbb{F} , notée \mathcal{R} , est un sous-ensemble de $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$. On écrit $x\mathcal{R}y$ ou $(x, y) \in \mathcal{R}$ pour signifier que x est en relation avec y par \mathcal{R} . Dans le cas où \mathbb{E} vers \mathbb{F} , on dit que \mathcal{R} est une relation binaire sur \mathbb{E} .
- ★ Une relation binaire \mathcal{R} sur \mathbb{E} est dite relation d'ordre si elle vérifie la réflexivité la transitivité et l'antisymétrie. Autrement dit, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ on a :



Suite de la Définition 6.

- (i) $x\mathcal{R}x$;
 - (ii) $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ implique $x\mathcal{R}z$;
 - (iii) $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ implique $x = y$.
- ★ Un ensemble ordonné est un couple $(\mathbb{E}, \mathcal{R})$ où \mathbb{E} est un ensemble et \mathcal{R} une relation d'ordre définie sur \mathbb{E} . Souvent on note par « \leq » une relation d'ordre \mathcal{R} .
 - ★ Soient x et y de \mathbb{E} : x et y sont dits comparables, si et seulement si, ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$. Il s'en suit que si $x \leq y$ et $x \neq y$, on écrit $x < y$. Dans le cas contraire, x et y sont dits incomparable.
 - ★ On dit qu'une relation d'ordre \leq , est un ordre total, si pour tous x, y de \mathbb{E} , x et y sont comparables. Dans ce cas, (\mathbb{E}, \leq) est dit ensemble totalement ordonné.
 - ★ Une partie \mathbb{E}_p d'un ensemble ordonné \mathbb{E} est dit chaîne, si tous les éléments de \mathbb{E}_p sont comparables. Une partie \mathbb{E}_p de \mathbb{E} est dit anti-chaîne, si deux éléments distincts de \mathbb{E}_p ne sont jamais comparables.
 - ★ La longueur d'un ensemble ordonné est la taille maximale d'une chaîne moins un de cet ensemble. La largeur d'un ensemble ordonné est la taille maximale d'une anti-chaîne de cet ensemble [GD86], [JW95], [Fen07], [BB70] [TYS05].



Exemple 4. *Considérons l'ensemble $\mathbb{E} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et notons par $|$ la relation de divisibilité sur $\mathbb{E} : \forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, x|y \Leftrightarrow \exists q_i \in \mathbb{N}/y = q_i x$. Le couple $(\mathbb{E}, |)$ est un ensemble ordonné. Les ensembles : $\{1; 2; 4; 0\}$, $\{1; 2; 6; 0\}$, $\{1; 3; 6; 0\}$, $\{1; 3; 0\}$, $\{1; 5; 0\}$, $\{1; 0\}$ sont des chaînes de \mathbb{E} . La longueur de l'ensemble ordonné $(\mathbb{E}, |)$ (i.e. la taille maximale d'une chaîne de \mathbb{E} moins un) est égale à 3. Les ensembles : $\{2; 3; 5\}$; $\{4; 5; 6\}$ sont des anti-chaînes de \mathbb{E} . La largeur de l'ensemble ordonné $(\mathbb{E}, |)$ (i.e., la taille maximale d'une anti-chaîne de \mathbb{E}) est égale à 3 (extrait du [Fen07]).*



Remarque 11. *Soit \mathbb{E} un ensemble ordonné et fini. Lorsqu'une relation de couverture existe sur \mathbb{E} , l'ordre est représentable, à travers cette relation de couverture, par un graphe appelé diagramme de Hasse. Les éléments x et y sont respectivement représentés par des points p_x et p_y . La construction du diagramme de Hasse se base sur les deux principes suivants :*

- ★ si $x < y$ alors p_x est en dessous de p_y ;
- ★ p_x et p_y sont liés par un segment, si et seulement si $x < y$.



Définition 7. *Soient (\mathbb{E}, \leq) un ensemble ordonné et \mathbb{E}_p une partie de \mathbb{E} . La restriction de la relation d'ordre \leq , à l'ensemble \mathbb{E}_p , notée $\leq_{\mathbb{E}_p}$, est une relation d'ordre. On dit alors que $(\mathbb{E}_p, \leq_{\mathbb{E}_p})$ est un sous-ensemble ordonné de (\mathbb{E}, \leq) et on le notera aussi (\mathbb{E}_p, \leq) .*

Théorème 4 (Principe de dualité). *Etant donnée une proposition ϕ_p vraie dans tout ensemble ordonné, alors la proposition ϕ_p^d duale est aussi vraie dans tout ensemble ordonné.*



Définition 8. Soient (\mathbb{E}, \leq) un ensemble ordonné, \mathbb{E}_p une partie de \mathbb{E} et x un élément de \mathbb{E}_p . On dit que :

- ★ x est un élément maximal dans \mathbb{E}_p si pour tout $y \in \mathbb{E}_p$, $x \leq y$ implique $x = y$;
- ★ x est un élément minimal dans \mathbb{E}_p si pour tout $y \in \mathbb{E}_p$, $y \leq x$ implique $x = y$;
- ★ x est un élément maximal de \mathbb{E}_p si pour tout $y \in \mathbb{E}_p$, $y \leq x$ (dans ce cas, l'élément x est unique) ;
- ★ x est un élément minimal de \mathbb{E}_p si pour tout $y \in \mathbb{E}_p$, $x \leq y$ (dans ce cas, l'élément x est unique) ;
- ★ si \mathbb{E}_p est une partie non vide de \mathbb{E} , un élément x de \mathbb{E} est un majorant (resp. minorant) de \mathbb{E}_p si pour tout $a \in \mathbb{E}_p$, $a \leq x$ (resp. $x \leq a$). On notera par $\text{Maj}\mathbb{E}_p$ (resp. $\text{Min}\mathbb{E}_p$) l'ensemble des majorants (resp. minorants) de \mathbb{E}_p . On pose que $\text{Maj}\emptyset = \text{Min}\emptyset = \mathbb{E}$;
- ★ l'élément minimum de $\text{Maj}\mathbb{E}_p$ (s'il existe) est appelé la borne supérieure ou le supremum de \mathbb{E}_p et on le note $\vee\mathbb{E}_p$ ou $\text{sup}(\mathbb{E}_p)$. Dualement, l'élément maximum de $\text{Min}\mathbb{E}_p$ (s'il existe) est appelé la borne inférieure ou l'infimum de \mathbb{E}_p et on le note $\wedge\mathbb{E}_p$ ou $\text{inf}(\mathbb{E}_p)$;
- ★ une partie \mathbb{E}_p de \mathbb{E} est dite bornée, si elle admet à la fois une borne supérieure et une borne inférieure.

3.2.2 Treillis

Dans la littérature, deux définitions équivalentes de treillis sont présentes dont une concernant la relation d'ordre et l'autre algébrique. La définition 9 ci-dessous est la définition algébrique du treillis proposée dans [Ded00] [HYN11], [Bir67].



Définition 9. De façon algébrique, un treillis est un ensemble noté \mathcal{T}_r muni deux lois internes formellement notées « \vee et \wedge » vérifiant l'associativité la commutativité, l'idempotence et l'absorption.

C'est à dire pour tous $(x, y, z) \in \mathcal{T}_r^3$ on a :

- ★ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ et $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
- ★ $x \wedge y = y \wedge x$ et $x \vee y = y \vee x$;
- ★ $x \wedge x = x$ et $x \vee x = x$;
- ★ $x \wedge (y \wedge x) = x$ et $x \vee (y \vee x) = x$.

La définition suivante est celui de treillis concernant la relation d'ordre.



Définition 10. *Considérons l'ensemble \mathcal{T}_r .*

- ★ *On dit que \mathcal{T}_r est un inf-demi-treillis (resp. sup-demi-treillis) si pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{T}_r \times \mathcal{T}_r$ l'infimum $x \wedge y$ (resp. le supremum $x \vee y$) existe.*
- ★ *Un treillis est un ensemble ordonné qui est à la fois inf-demi-treillis et sup-demi-treillis.*

On voit que si (\mathcal{T}_r, \leq) est un treillis selon la définition 10, alors il est facile de vérifier que les deux opérations $\sup(x, y) = x \vee y$ et $\inf(x, y) = x \wedge y$ satisfont aux huit conditions de la définition 9 ; alors qu'au même moment, si $(\mathcal{T}_r, \vee, \wedge)$ est un treillis selon la définition 10, on peut montrer sans réfutation que la relation définie sur \mathcal{T}_r par $x \leq y$ si $x \wedge y = x$ (ou, équivalente à $x \vee y = y$) est une relation d'ordre sur \mathcal{T}_r , donc, l'ordre \leq ainsi définie vérifie les conditions de la définition 10. Ainsi, les deux définitions précédentes sont alors équivalentes.

Théorème 5. *Un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis) ayant un plus petit élément (resp. plus grand) est un treillis.*



Définition 11. ★ *On appelle sous-treillis de \mathcal{T}_r tout sous-ensemble non vide \mathcal{Q}_r de \mathcal{T}_r tel que pour tous a, b de \mathcal{Q}_r on a : $a \vee b$ et $a \wedge b$ appartiennent à \mathcal{Q}_r .*

- ★ *Un inf-demi-treillis (resp. sup-demi-treillis) \mathcal{T}_r est dit complet si pour toute partie non vide X_r de \mathcal{T}_r , l'infimum $\wedge X_r$ (resp. le supremum $\vee X_r$) existe. Un treillis \mathcal{T}_r est dit complet s'il est à la fois sup-demi-treillis complet et inf-demi-treillis complet. Tout treillis complet a un plus petit élément $\wedge \mathcal{T}_r$, noté $0_{\mathcal{T}_r}$, et un plus grand élément $\vee \mathcal{T}_r$, noté $1_{\mathcal{T}_r}$.*

Il est à noter que dans un treillis fini, on peut toujours définir une relation d'ouverture. Donc, tout treillis fini peut être représenté par un diagramme de Hasse.



Définition 12. ★ *Un élément x de \mathcal{T}_r est dit sup-réductible, s'il existe dans \mathcal{T}_r des éléments x_{r_1}, x_{r_2} tels que $x = x_{r_1} \vee x_{r_2}$ avec $x_{r_1} < x$ et $x_{r_2} < x$. Un élément x de \mathcal{T}_r ne possédant pas de décomposition de cette forme est dit sup-irréductible. On note $J_{r\mathcal{T}_r}$ (ou J_r s'il n'y a pas de confusion) l'ensemble des éléments sup-irréductibles d'un treillis \mathcal{T}_r .*

- ★ *Dualement, un élément x de \mathcal{T}_r est dit inf-réductible s'il existe x_{r_1}, x_{r_2} de \mathcal{T}_r tels que $x = x_{r_1} \wedge x_{r_2}$, avec $x_{r_1} > x$ et $x_{r_2} > x$. Un élément x de \mathcal{T}_r ne possédant pas de décomposition de cette forme est dit inf-irréductible. On note $M_{\mathcal{T}_r}$ l'ensemble des éléments inf-irréductibles d'un treillis \mathcal{T}_r .*

Proposition 15. *Soit \mathcal{T}_r un treillis fini.*

- ★ *Un élément $j_r \in \mathcal{T}_r$ est un sup-irréductible, si et seulement si j_r couvre un seul élément.*
- ★ *Un élément $m_r \in \mathcal{T}_r$ est inf-irréductible, si et seulement si m_r est couvert par un seul élément.*

Rappelons qu'on peut déduire de la Proposition 15 que dans un treillis fini (de cardinalité ≥ 2), on a toujours des éléments irréductibles, à savoir, les éléments couvrant le minimum appelés *atomes*, les éléments couverts par le maximum appelés *coatoms* d'un treillis fini. De plus, on peut obtenir une représentation condensée de treillis tout en conservant les informations contenues dans le treillis initial à partir des éléments irréductibles d'un treillis. La recherche de cette représentation concerne différents domaines informatiques parmi lesquels ceux mentionnés dans [Dom02] : classification conceptuelle, apprentissage, traitement d'image, etc., où leur taille potentiellement exponentielle devient problématique [Fen07].

3.3 Correspondances de Galois

Cette section concerne les correspondances de Galois. Elle joue un rôle important dans la théorie des ensembles ordonnés. Nous en présentons d'abord quelques généralités avant de voir le cas particulier de correspondance de Galois associée à une relation binaire.

3.3.1 Généralités



Définition 13. Soient (\mathbb{E}, \leq) , (\mathbb{E}', \leq) deux ensembles ordonnés et $f_g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ et $g_g : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ deux applications. Le couple d'applications (f_g, g_g) sera dit *correspondance de Galois* entre \mathbb{E} et \mathbb{E}' si les trois propriétés suivantes, qui sont appelées respectivement *antitonicité*, *antitonicité* et *extensivité*, sont vérifiées :

- ★ $\forall x, x' \in \mathbb{E}, x \leq x' \Rightarrow f_g(x) \geq f_g(x')$;
- ★ $\forall y, y' \in \mathbb{E}', y \leq y' \Rightarrow g_g(y) \geq g_g(y')$;
- ★ $\forall (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}', x \leq g_g \circ f_g(x)$ et $y \leq f_g \circ g_g(y)$.

Dans les ensembles ordonnés respectifs (\mathbb{E}, \leq) et (\mathbb{E}', \leq) , les applications composées $\gamma_f = f_g \circ g_g$ et $\gamma_g = g_g \circ f_g$ sont des opérateurs de fermeture. D'une manière récapitulative, un treillis est un ensemble ordonné dont tout couple d'éléments admet un infimum et un supremum. On parle alors de treillis de Galois lorsqu'on a affaire à deux treillis auxquels sont associés une correspondance de Galois. Le treillis de Galois peut être vu comme un regroupement conceptuel et hiérarchique d'objets, et interprété comme une représentation de toutes les implications entre les attributs.

Proposition 16. Soient (\mathbb{E}, \leq) , (\mathbb{E}', \leq) deux ensembles ordonnés, et que $f_g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ et $g_g : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ deux applications. Le couple (f_g, g_g) est une correspondance de Galois si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}'$, on a $x \leq g_g(y) \Leftrightarrow y \leq f_g(x)$.

Proposition 17. ★ Soit (f_g, g_g) une correspondance de Galois. On a les égalités suivantes : $f_g = f_g \circ g_g \circ f_g$ et $g_g = g_g \circ f_g \circ g_g$. Ainsi, une correspondance de Galois (f_g, g_g) sera dit *couple involutif*.

★ Soit (f_g, g_g) une correspondance de Galois entre deux ensembles \mathbb{E} et \mathbb{E}' . Notons $\phi_g = f_g \circ g_g$ et $\phi'_g = g_g \circ f_g$. Les applications ϕ_g et ϕ'_g sont des opérateurs de fermetures respectivement sur \mathbb{E} et \mathbb{E}' .

3.3.2 Correspondances de Galois associées à une relation binaire

Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux ensembles fini et \mathcal{R} une relation binaire de \mathbb{E} vers \mathbb{F} on note par $\mathcal{F}_{\mathbb{E}}$ l'ensemble des parties de \mathbb{E} et par $\mathcal{F}_{\mathbb{F}}$ celui de \mathbb{F} . Définissons deux fonctions $f_{\mathcal{R}}$ et $g_{\mathcal{R}}$ de la façon suivante.

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{R}} : \mathcal{F}_{\mathbb{E}} &\rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{F}} \\ \mathbb{E}_3 &\mapsto f_{\mathcal{R}}(\mathbb{E}_3) = \bigcap_{x \in \mathbb{E}_3} \{y \in \mathbb{F} : x\mathcal{R}y\} = \{y \in \mathbb{F} : \forall x \in \mathbb{E}_3 : x\mathcal{R}y\}. \\ g_{\mathcal{R}} : \mathcal{F}_{\mathbb{E}} &\rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{F}} \\ \mathbb{E}_4 &\mapsto g_{\mathcal{R}}(\mathbb{E}_4) = \bigcap_{y \in \mathbb{E}_4} \{x \in \mathbb{E} : x\mathcal{R}y\} = \{x \in \mathbb{E} : \forall y \in \mathbb{E}_4 : x\mathcal{R}y\}. \end{aligned}$$

Théorème 6. ★ *Le couple $(f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}})$ est une correspondance de Galois ;*

★ *Réciproquement, si (f_g, g_g) est une correspondance de Galois entre les ensembles $\mathcal{F}_{\mathbb{E}}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{F}}$, alors $\mathcal{R}(f_g, g_g) = \{(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F} : x \in g_g(\{y\})\} = \{(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F} : y \in f_g(\{x\})\}$ est une relation binaire de \mathbb{E} vers \mathbb{F} . Par ailleurs, nous avons les égalités suivantes $f_{\mathcal{R}(f_g, g_g)} = f_g$, $g_{\mathcal{R}(f_g, g_g)} = g_g$ et $\mathcal{R}(f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}}) = \mathcal{R}$.*



Remarque 12. *Notons que ce type de correspondance joue un rôle important en Analyse Formelle de Concepts (A.F.C.). Cette notion d'A.F.C. fournit un cadre théorique fondamental pour la fouille des règles d'association d'un contexte binaire. En A.F.C., l'ensemble \mathbb{E} désigne un ensemble fini d'entités et $\mathcal{F}_{\mathbb{F}}$ un ensemble fini d'attributs ou variables. En fait, nous avons la définition 14 suivante.*



Définition 14. ★ *Un contexte formel est un triplet $\mathbb{K} = (T, I, \mathcal{R})$ où T est ensemble fini d'entités ou d'objets, I un ensemble fini d'attributs ou de variables et \mathcal{R} une relation binaire de T vers I ;*

★ *Soit $(\mathbb{E}_4, \mathbb{E}_5) \in \mathcal{R}^2$. Le couple $(\mathbb{E}_4, \mathbb{E}_5)$ sera dit concept formel si \mathbb{E}_4 est un fermé de ϕ_r (i.e $\phi_r(\mathbb{E}_4) = \mathbb{E}_4$) et $\mathbb{E}_5 = f_{\mathcal{R}}(\mathbb{E}_4)$ où $\phi_r = g_{\mathcal{R}} \circ f_{\mathcal{R}}$.*

3.4 Familles de Moore et Notions équivalentes

Voyons dans cette section la notion de Familles de Moore et celle d'équivalentes.

La littérature atteste que les Familles de Moore, dénommées souvent « *Systèmes de Fermeture* », permettent d'obtenir qu'elles sont cryptomorphes à d'autres notions telles que : les Opérateurs de Fermeture, Systèmes implicatifs, etc. [Dom02], [DL04], [Arm74]. Cette section est consacrée aux études de correspondances réciproques entre la notion de Familles de Moore et Opérateurs de Fermetures, Familles de Moore et Systèmes Implicatifs.

3.4.1 Généralités sur la notion de familles de Moore



Définition 15. *Soit \mathbb{E} un ensemble. Une famille de Moore sur \mathbb{E} est une partie \mathcal{F}_m de l'ensemble des parties de \mathbb{E} vérifiant les deux conditions suivantes :*

 **Suite de la Définition 15.**

- (i) $\mathbb{E} \in \mathcal{F}_m$;
- (ii) $\mathbb{E}'_o \subseteq \mathcal{F}_m \Rightarrow \cap \mathbb{E}'_o \in \mathcal{F}_m$.
Si \mathcal{F}_m est un ensemble fini, donc \mathbb{E} l'est aussi, la condition (ii) peut être remplacée par la condition (iii) suivante :
- (iii) $\mathbb{E}_1 ; \mathbb{E}_2$ de \mathcal{F}_m impliquent $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 \in \mathcal{F}_m$. Les éléments de \mathcal{F}_m sont appelés les fermés de \mathcal{F}_m .

Dans toute la suite, nous travaillons dans des familles de Moore finies.



Exemple 5. ★ Soient \mathbb{E} un ensemble et $(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) \subseteq \mathcal{F}_m^2$. Alors, la famille $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)}$, de sous-ensembles de \mathbb{E} , définie par : $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)} = \{\mathbb{E}_3 \subseteq \mathbb{E} : \mathbb{E}_1 \not\subseteq \mathbb{E}_3 \text{ ou } \mathbb{E}_2 \subseteq \mathbb{E}_3\}$, est une famille de Moore. En particulier :

☆ pour $\mathbb{E}_1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_{m(\emptyset, \mathbb{E}_2)} = \{\mathbb{E}_3 \subseteq \mathbb{E}, \mathbb{E}_2 \subseteq \mathbb{E}_3\}$;

☆ pour $\mathbb{E}_2 = \{i\}$, $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \{i\})} = \{\mathbb{E}_3 \subseteq \mathbb{E} : \mathbb{E}_1 \not\subseteq \mathbb{E}_3 \text{ ou } i \in \mathbb{E}_3\}$ est noté $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, i)}$.

★ Soit $\mathbb{E} = \{a ; b ; c ; d ; e\}$.

Alors $\mathcal{F}_m = \{\emptyset ; a ; b ; d ; de ; bcd ; abcde\}$ est une famille de Moore sur l'ensemble \mathbb{E} . Ici, les ensembles finis sont notés comme des mots. Par exemple ae désigne la paire $\{a ; e\}$;



Remarque 13. Notons que $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)} = \mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_1)}$. En effet, si $\mathbb{E}_2 \subseteq \mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)}$ alors il est clair que $\mathbb{E}_2 \subseteq \mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_1)}$. Réciproquement, si $\mathbb{E}_2 \not\subseteq \mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)}$ i.e $\mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}_3$ et $\mathbb{E}_2 \not\subseteq \mathbb{E}_3$ alors $\mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}_3$ et $\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_1 \not\subseteq \mathbb{E}_3$ i.e $\mathbb{E}_3 \not\subseteq \mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_1)}$. Par ailleurs, d'après la définition de $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)}$ si \mathcal{F}_m est un fermé qui contient \mathbb{E}_1 alors \mathcal{F}_m contient aussi \mathbb{E}_2 , en d'autres termes \mathbb{E}_1 implique \mathbb{E}_2 . Ainsi, l'ensemble $\mathcal{F}_{m(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)}$ sera dit famille de Moore implicative.

Rappelons que l'ensemble $(\mathcal{F}_m, \cap, \cup)$ est un treillis. Comme \mathcal{F}_m est un sous ensemble de $\mathcal{F}_{\mathbb{E}}$ stable par intersection donc \mathcal{F}_m est un inf-demi-treillis. Par ailleurs, \mathcal{F}_m contient un plus grand élément qui est l'ensemble \mathbb{E} , donc la famille de Moore \mathcal{F}_m est un treillis, par application du Théorème 5. Ainsi, nous avons le résultat suivant.

Théorème 7. Soit \mathcal{F}_m une famille de Moore sur \mathbb{E} . L'ensemble ordonné $(\mathcal{F}_m, \subseteq)$ est un treillis, avec les supremum et infimum définie par :

$$\forall (\mathbb{E}_3, \mathbb{E}_4) \in \mathcal{F}_m^2, \mathbb{E}_3 \wedge \mathbb{E}_4 = \mathbb{E}_3 \cap \mathbb{E}, \mathbb{E}_3 \vee \mathbb{E}_4 = \cap \{\mathbb{F} \in \mathcal{F}_m : \mathbb{E}_3 \cup \mathbb{E}_4 \subseteq \mathbb{F}\} \text{ [Mon03].}$$

Réciproquement, tout treillis est isomorphe à un treillis des fermés d'une famille de Moore.

La réciproque du théorème ci-dessus est vraie. En fait, nous avons le théorème suivant.

Théorème 8. Tout treillis est isomorphe à un treillis des fermés d'une famille de Moore [Mon03].



Remarque 14. La notion duale de famille Moore est définie de la façon suivante. Une famille d'ensembles \mathbb{E}_d de parties \mathbb{E} sera dite duale de famille de Moore ou encore un système d'ouvertures, si elle vérifie les deux conditions ci-dessous :

- (i) $\emptyset \subseteq \mathbb{E}_d$;
- (ii) $(\mathbb{E}_{d_1}, \mathbb{E}_{d_2}) \subseteq \mathbb{E}_d^2 \Rightarrow \mathbb{E}_{d_1} \cup \mathbb{E}_{d_2} \subseteq \mathbb{E}_d$.

3.4.2 Familles de Moore et Opérateurs de fermeture



Définition 16. Soit \mathbb{E} un ensemble. Un opérateur de fermeture ou tout simplement fermeture sur \mathbb{E} est une application ϕ_m définie sur \mathcal{F}_m satisfaisant aux trois conditions suivantes :

- (i) $\forall (\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) \subseteq \mathbb{E}^2, \mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}_2 \Rightarrow \phi_m(\mathbb{E}_1) \subseteq \phi_m(\mathbb{E}_2)$ (isotonie) ;
- (ii) $\forall \mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}, \phi_m(\phi_m(\mathbb{E}_1)) = \phi_m(\mathbb{E}_1)$ (idempotence) ;
- (iii) $\forall \mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}, \mathbb{E}_1 \subseteq \phi_m(\mathbb{E}_1)$ (extensivité) ;
- (iv) une ouverture sur \mathbb{E} est une application ϕ_m définie sur \mathcal{F}_m qui est à la fois isotonie, idempotente et contractante (i.e., pour tout $\mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}$ $\phi_m(\mathbb{E}_1) = \mathbb{E}_1$).

Nous avons défini ci-dessus un opérateur de fermeture par trois axiomes (isotonie, idempotente et extensivité). Remarquons qu'il existe d'autres caractérisations des opérateurs de fermeture. Nous donnons ci-après trois de ces caractérisations.

Théorème 9 (Propriété d'indépendance de chemin). Soit ϕ_m une application extensive définie sur \mathcal{F}_m [Plo73].

$(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) \subseteq \mathbb{E}^2$. Alors, ϕ_m est une fermeture, si et seulement si, pour tous $(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) \subseteq \mathbb{E}^2$, $\phi_m(\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) = \phi_m(\phi_m(\mathbb{E}_1) \cup \phi_m(\mathbb{E}_2))$.



Définition 17. Soient \mathbb{E} un ensemble et \mathcal{F}_m une famille de Moore fini sur \mathbb{E} . Une partie \mathbb{E}'_p de \mathbb{E} est appelée ensemble quasi-fermé de \mathcal{F}_m , si $\mathbb{E}'_p \notin \mathcal{F}_m$ et $\mathcal{F}_m \cup \mathbb{E}'_p$ est une famille de Moore sur \mathbb{E} . Etant donné $\mathbb{F} \subset \mathcal{F}_m$, \mathbb{E}'_p est un ensemble \mathbb{F} -quasi-fermé de \mathcal{F}_m si \mathbb{E}'_p est quasi-fermé et $\phi_{m_{\mathcal{F}_m}}(\mathbb{E}'_p) = \mathbb{F}$.



Exemple 6. Soit $\mathbb{E} = \{a; b; c; d; e\}$. Nous avons vu, dans l'exemple 5, que la famille $\mathcal{F}_m = \{\emptyset; a; b; d; de; bcd; abcde\}$ est une famille de Moore sur l'ensemble \mathbb{E} . Alors $\{ab\}$ est quasi-fermé et $\phi_{m_{\mathcal{F}_m}}\{ab\} = \{abcde\}$. Par contre $\{ae\}$ n'est pas quasi-fermé, car $\{de\} \cap \{ae\} = \{e\} \notin \mathcal{F}_m \cup \{ae\}$.

Pour une famille de Moore \mathcal{F}_m sur un ensemble \mathbb{E} , tout ensemble \mathbb{E}_1 minimal de $\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_m$ est quasi-fermé (en effet $\mathbb{E}_1 \in \min(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_m)$ implique $(\mathbb{E}_2 \subset \mathbb{E}_1) \subset \mathcal{F}_m$ pour tout $\mathbb{E}_2 \subset \mathcal{F}_m$ tel que $\mathbb{E}_1 \not\subset \mathbb{E}_2$).

3.4.3 Familles de Moore et système implicatif

Au début de cette section, on a décrit que la notion de famille de Moore est équivalente à celle de systèmes implicatifs. Elles font une partie fondamentale sur l'étude de l'analyse de données, la base de données relationnelle et l'extraction de connaissances, ces qui intéressent principalement à trouver le dispositif d'implication permettant d'administrer toutes les implications entre les entités dans un contexte de base de données. Le présent paragraphe concerne les correspondances entre les notions de familles de Moore et systèmes implicatifs.



Définition 18. Soit \mathbb{E} un ensemble fini. Un système implicatif sur \mathbb{E} , noté \mathcal{S}_i , est une relation binaire définie sur $\mathcal{F}_{\mathbb{E}} : \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{F}_{\mathbb{E}}^2$. Si $(\mathbb{E}_4, \mathbb{E}_5) \in \mathcal{S}_i^2$ on écrit $\mathbb{E}_4 \rightarrow_{\mathcal{S}_i} \mathbb{E}_5$ ou tout simplement $\mathbb{E}_4 \rightarrow \mathbb{E}_5$ et on lit \mathbb{E}_4 implique \mathbb{E}_5 ou $\mathbb{E}_4 \rightarrow \mathbb{E}_5$ est une implication de \mathcal{S}_i .

Un système implicatif \mathcal{S}_i sur \mathbb{E} est dit complet s'il vérifie, pour tous $(\mathbb{E}_4, \mathbb{E}_5, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7) \subseteq \mathbb{E}^4$, les trois conditions suivantes :

- (i) $\mathbb{E}_4 \supseteq \mathbb{E}_5 \Rightarrow \mathbb{E}_4 \rightarrow \mathbb{E}_5$;
- (ii) $\mathbb{E}_4 \rightarrow \mathbb{E}_5$ et $\mathbb{E}_5 \rightarrow \mathbb{E}_6 \Rightarrow \mathbb{E}_4 \rightarrow \mathbb{E}_6$;
- (iii) $\mathbb{E}_4 \rightarrow \mathbb{E}_5$ et $\mathbb{E}_6 \rightarrow \mathbb{E}_7 \Rightarrow \mathbb{E}_4 \cup \mathbb{E}_6 \rightarrow \mathbb{E}_5 \cup \mathbb{E}_7$.



Définition 19. Soit \mathcal{S}_i un système implicatif défini sur un ensemble \mathbb{E} .

- ★ $\mathbb{E}_4 \rightarrow_{\mathcal{S}_i} \mathbb{E}_5$ est dite propre (resp. triviale) si $\mathbb{E}_4 \cap \mathbb{E}_5 = \emptyset$;
- ★ Soit $y \in \mathbb{E}$. Toute implication de la forme $\mathbb{E}_4 \rightarrow_{\mathcal{S}_i} \{y\}$ s'appelle implication élémentaire.

3.5 Conclusion partielle

Ce chapitre nous a permis de rappeler quelques notions fondamentales sur les treillis, la notion de Familles de Moore et ses notions équivalentes, les correspondances de Galois à partir desquelles sont obtenues des treillis particuliers appelés treillis de Galois. Nous les avons rappelé car, ces concepts servent un rôle très important dans le cadre de l'extraction des règles d'association dans un contexte transactionnel. Ainsi, la maîtrise de ces concepts rend très facile pour la compréhension des notions utilisées sur les règles d'association. Ce chapitre nous permettra également d'introduire le chapitre précédent concernant les notions de base d'Extraction de Connaissance à partir des Bases de Données binaires (ECD parfois notée E.C.B.D) qui est une discipline récente recoupant les domaines des bases de données, des statistiques, de l'intelligence artificielle et de l'interface homme/machine. Le défi de l'Extraction de Connaissances à partir des Données binaires consiste à exploiter automatiquement des informations généralisables en connaissances nouvelles sous le contrôle des experts des données. A cet effet, il est tôt de présenter des quelques théories ou même des présentations qui sont les résultats de l'extraction des règles d'association en science de données binaires.

Chapitre 4

État de l’art sur les règles d’association

4.1 Introduction partielle

La deuxième partie de notre travail s’inscrit dans le domaine de l’Extraction de Connaissance à partir de Données (ECD) appelée Knowledge Discovery in Databases (KDD) en anglais [Pas00b]. Dans ce contexte, nous explorons l’un des principaux problèmes, à savoir la recherche de règles d’association. Ce problème majeur en ECD permet, à partir de bases de données volumineuses, la génération d’un très grand nombre de règles difficilement exploitables par l’utilisateur [LBMLL10], [HYS05], [Rio05]. Il s’avère donc nécessaire de mettre en œuvre une étape supplémentaire de post-traitement pour aider l’utilisateur à réduire le nombre de règles découvertes. Ainsi, l’une des solutions envisagées est la proposition de mesures d’intérêt d’extraction de règles d’association [ST96], [McG05], [Kry98]. Notre objectif est alors de trouver un lien existant entre toutes les mesures selon deux points de vue théorique et expérimental dans le but de répondre aux besoins de l’utilisateur final, à savoir la sélection et la validation des règles pertinentes [GR09], [Gri13]. Ce chapitre est organisé de la manière suivante : nous commençons par définir brièvement le processus d’extraction de connaissances à partir des données. Nous présentons par la suite le domaine d’étude, les notations utilisées et les règles d’association. Puis, nous abordons l’étape d’extraction de règles d’association dans laquelle nous introduisons les algorithmes d’extraction des règles.

4.2 Extraction de connaissances à partir des données

Le domaine d’Extraction de Connaissances à partir des Données (ECD) est un domaine de recherche complexe et interactif introduit en 1991 lors du premier workshop KDD animé par Piatetsky-Shapiro, poussé par le secteur industriel et fondé sur l’analyse des données [PS91], [AIS93], les statistiques et l’apprentissage automatique, l’ECD a suscité l’intérêt de nombreux chercheurs [WFM91], [BA96], [FUM96], [KR96], [DHS01]. Plusieurs définitions de l’ECD ont été proposées dans la littérature. Frawley et al. [WFM91] les définissent comme « un processus non trivial consistant à extraire, à partir de l’ensemble des données, une information implicite, inconnue auparavant et potentiellement utile », « Knowledge discovery is the non trivial extraction of implicit, previously unknown, and potentially useful information from data ». Fayyad et al. [FUM96] le spécifient comme étant « un processus non trivial pour l’identification d’une connaissance valide, nouvelle, potentiellement utile et éventuellement compréhensible à partir des bases de données », « the non trivial process of identifying valid, novel, potentially useful, and ultimately comprehensible knowledge from databases ». C’est

pourquoi, l'ECD est de faire face à l'émergence de données volumineuses par la découverte de ces connaissances qui doivent être à la fois « pertinentes », « intéressantes » et « utiles ».

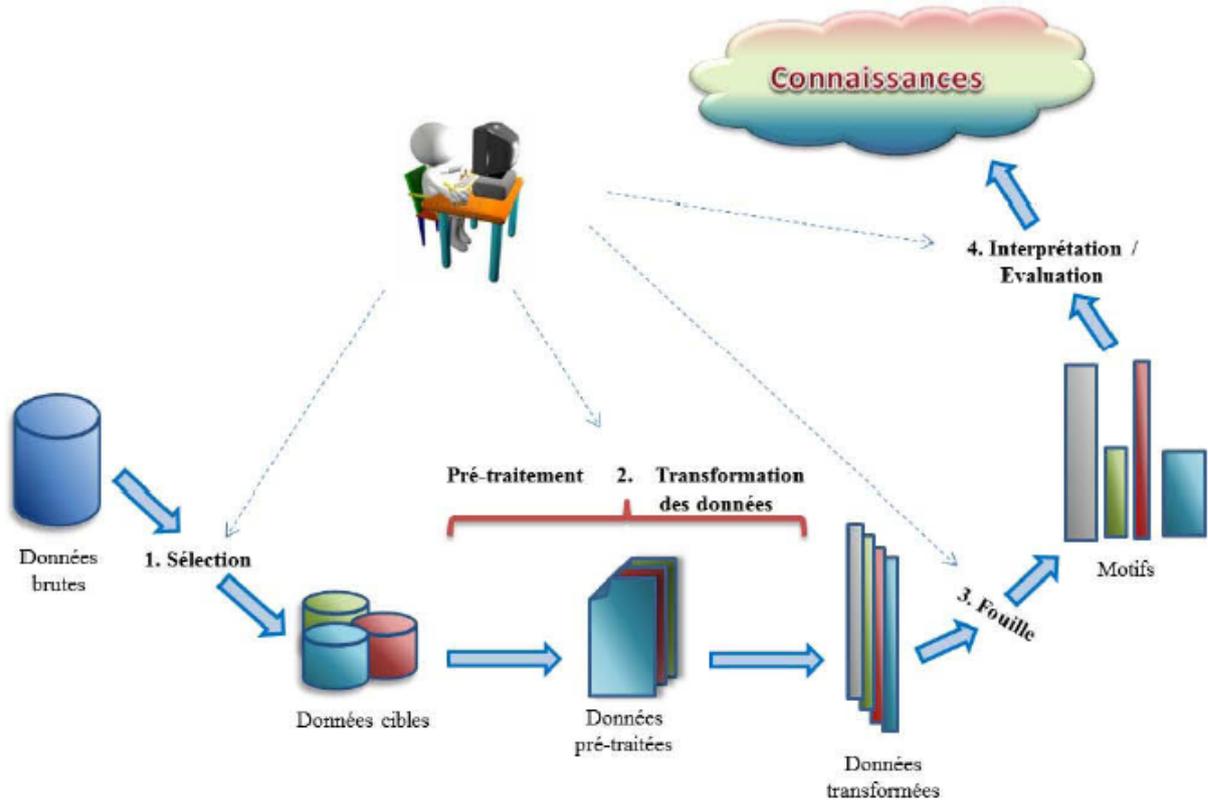


FIGURE 4.1 – Étapes du processus de l'ECD

Aussi, c'est un processus interactif et itératif avec lequel l'utilisateur interagit pour prendre les décisions adaptées à ses besoins. Le processus de l'ECD est constitué de quatre phases principales allant de la sélection et la préparation des données (pré-traitement) jusqu'à l'interprétation et l'évaluation des données (post-traitement), en passant par la phase de recherche d'informations (la fouille des données). Ces quatre phases sont illustrées dans la figure 4.1 et développées dans ce qui suit. Rappelons que cette figure est extraite de la thèse de Dhouha Grissa, [KMR⁺94], [RZC10], [Gri13].

4.2.1 Sélection

Cette première étape du processus consiste à garder parmi l'ensemble des données, qu'une sous-partie intéressante par rapport au problème. Ainsi, il s'agirait en effet d'identifier les informations adaptées aux besoins de l'utilisateur pour une application bien déterminée [Gri13].

4.2.2 Prétraitement et transformation des variables

Le rôle de cette deuxième étape du processus est de préparer les données précédemment sélectionnées, pour les adapter à l'étape de fouille. Un traitement informatique sera ainsi appliqué aux informations conservées. Il s'agit par la suite de présenter les données traitées

sous la forme imposée par la méthode de fouille retenue (algorithme d'extraction de connaissances). Ces données peuvent être présentées sous forme de variables binaires, discrètes ou continues selon la méthode retenue [Gri13].

4.2.3 Fouille

Une quantité importante d'informations peut être générée à partir des algorithmes d'extraction des données, dont la plupart sont inutiles ou redondantes. Pour pallier ce défaut, une dernière étape de post-traitement des connaissances découvertes s'avère indispensable pour transformer ces connaissances extraites en connaissances intéressantes et facilement exploitables par l'utilisateur. Il serait donc intéressant d'appliquer un filtrage automatique sur l'ensemble des informations extraites et de les ordonner afin de faciliter la prise de décision et l'interprétation des résultats révélés à l'utilisateur. Dans la littérature, il existe plusieurs moyens pour assister l'utilisateur dans son travail, comme l'utilisation de mesures d'intérêt qui permettraient d'évaluer la qualité des connaissances extraites [Gri13].

4.2.4 Interprétation et évaluation des informations

Une quantité importante d'information peut être générée à partir des algorithmes d'extraction des données, dont la plupart sont inutiles ou redondantes. Pour pallier ce défaut, une dernière étape de post-traitement des connaissances découvertes s'avère indispensable pour transformer ces connaissances extraites en connaissances intéressantes et facilement exploitables par l'utilisateur. Il serait donc intéressant d'appliquer un filtrage automatique sur l'ensemble des informations extraites et de les ordonner afin de faciliter la prise de décision et l'interprétation des résultats révélés à l'utilisateur. Dans la littérature, il existe plusieurs moyens pour assister l'utilisateur dans son travail, comme l'utilisation de mesures d'intérêt qui permettraient d'évaluer la qualité des connaissances extraites [Gri13].

4.3 Règles d'association

Dans cette section, nous allons intéresser à introduire les règles d'association ainsi que les notations utilisées qui visent à découvrir des tendances, a priori inconnues, au sein des données.

4.3.1 Présentation

Nous présentons un domaine de recherche assez mature en fouille de données [CR06], [TJY12] celui de l'extraction des règles d'association. Ce thème fut introduit par « Agrawal et al. » [AIS93], dans le but d'analyser les bases de données transactionnelles pour découvrir des habitudes d'achat des clients dans un supermarché, comme les articles qui sont souvent achetés ensemble. Connue sous le nom de panier du consommateur, ce problème est très courant en ECD et il a reçu beaucoup d'attention de la part des chercheurs [AIS93], [MKT97]. Il s'agit de découvrir parmi les ensembles des transactions (une transaction est constituée de l'ensemble des articles ou éléments achetés par un client), un ensemble de règles qui exprime une possibilité d'association entre différents articles. L'extraction des règles d'association est ainsi une technique visant à extraire des corrélations intéressantes des modèles fréquents ou

des associations entre les ensembles d'éléments dans les bases de données de transaction ou autres dépôts de données [KK06], [RZC10].

TID	Lait	Banane	Café	Pizza	Sucre
1	1	0	1	0	1
2	1	1	1	0	1
3	1	0	1	0	0
4	0	1	0	1	0
5	1	1	1	1	0

Tableau 4.1 – Représentation binaire des données de « paniers » de clients

On se situe dans le cadre d'une base de données binaire $D = (T, I, \mathcal{R})$, définie par un ensemble $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ de p attributs également appelés items et un ensemble $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{n_T}\}$ de n_T éléments, reliés par une relation binaire \mathcal{R} . Chaque transaction t_i désigne donc un sous-ensemble de I , ayant un identifiant TID (Transaction Identifiée). Un sous-ensemble de I est appelé itemset ou motif.

Le Tableau 4.1 illustre ce type de données en restituant un exemple de 5 paniers d'achats. Nous sommes donc en présence d'un ensemble T de 5 transactions, $\{t_1, t_2, \dots, t_5\}$, décrites par 5 items : $i_1 = \text{Lait}$, $i_2 = \text{Banane}$, $i_3 = \text{Café}$, $i_4 = \text{Pizza}$, $i_5 = \text{Sucre}$ où i_i sont des articles achetés par les clients. Le jeu de données du Tableau 4.1 sera utilisé, par la suite, pour décrire, en cas de besoin, les notions introduites tout au long de ce manuscrit. Dans ce qui suit, nous présentons les notations usuelles des règles d'association avant de les définir.

4.3.2 Notations

Nous nous plaçons toujours dans le cadre d'un contexte de fouille de données binaires $D = (T, I, \mathcal{R})$ [WFM91], [BA96], [FUM96], [KR96] [Gr13], où I est un ensemble fini non vide d'attributs ou de variables, T un ensemble fini d'entités ou d'objets, \mathcal{R} une relation binaire de T vers I et P la probabilité discrète uniforme sur l'espace probabilisable $(T, \mathcal{P}(T))$ [Tot08]. Parlons de cette probabilité, dans la suite, nous utilisons les notations illustrées sur la figure 4.2 relatives aux motifs X et Y de D qui sont explicitées juste tout de suite après.

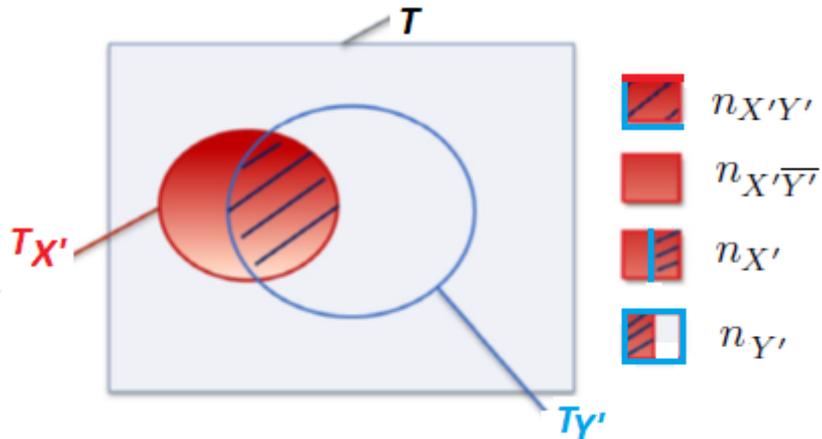


FIGURE 4.2 – Notations utilisées pour une règle $X \rightarrow Y$

En premier lieu, on définit l'événement X' par : $X' = \{t_i \in T / \forall i_i \in X ; t_i \mathcal{R} i_i\}$ i.e. l'ensemble de toutes les transactions contenant le motif X autrement dit le dual d'un motif X où $X \subseteq I$ et $X' \subseteq \mathcal{P}(T)$ [Tot03], [Tot08].

- ★ $n_T = |T|$ représente la taille de la base $n_T \neq 0$;
- ★ $n_{X'} = |T_{X'}|$ représente le nombre de transactions satisfaisant le motif X ;
- ★ $n_{X'Y'} = |T_{X' \cap Y'}|$ représente le nombre de transactions satisfaisant à la fois X et Y ;
- ★ $n_{\overline{X'}} = |T| - |T_{X'}|$, le nombre de transactions qui ne contiennent que le motif \overline{X} , où \overline{X} représente la négation de X ;
- ★ $\frac{n_{X'}}{n_T} = \frac{|T_{X'}|}{|T|}$ représente le support du motif X ;
- ★ $n_{X'\overline{Y'}} = |T_{X' \cap \overline{Y'}}|$ représente le nombre de transactions satisfaisant à la fois X et \overline{Y} .

Par ailleurs, pour plus de clarté, désormais, nous ne gardons plus les notations probabilistes usuelles et considérées chaque fois comme provisoires utilisées par plusieurs auteurs qui sont définies par : $P(X)$, $P(XY)$ et $P(X\overline{Y})$. En fait, cette notation est assez gênante en tant que P désigne la probabilité discrète uniforme sur l'espace probabilisable $(T, \mathcal{P}(T))$, alors que X indique un motif de I et $P(X)$ est telle que $P(X) = \frac{n_X}{n_T}$. Ainsi, par souci de cohérence avec le principe de dualité dans l'analyse des concepts formels, nous les caractérisons selon les propriétés de leurs extensions respectives X' et Y' en tant qu'événement de $\mathcal{P}(T)$.

De ce fait, dans toutes la suites, nous gardons également les notations $P(X' \cap Y')$ au lieu de $P(XY)$ ou $P(X \cup Y)$, $P(X')$ au lieu de $P(X)$ et $P(Y')$ pour celle de $P(X)$ [Tot08].

Ayant introduit ces différentes notations, nous pouvons définir une règle d'association.



Définition 20. Une règle d'association [AIS93] est un couple (X, Y) , noté $X \rightarrow Y$, où X et Y sont des motifs (ou conjonctions de variables binaires) disjoints. Nous avons donc les relations suivantes : $X \subseteq I$, $Y \subseteq I$ et $X' \cap Y' \neq \emptyset$.

Propriété 2. Soient X et Y deux motifs positifs. Dans le contexte de la fouille de données nous avons quatre types de règles d'association possibles obtenus à partir de X et de Y dont :

- ★ une règle dite positive de la forme : $X \rightarrow Y$ ou $Y \rightarrow X$;
- ★ une règle dite négative à droite de la forme : $Y \rightarrow \overline{X}$ ou $X \rightarrow \overline{Y}$;
- ★ une règle dite négative à gauche de la forme : $\overline{X} \rightarrow Y$ ou $\overline{Y} \rightarrow X$;
- ★ une règle dite bilatéralement négative de la forme : $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ ou $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ [Fen07].

Une règle d'association de type $X \rightarrow Y$ prend la forme « si condition alors résultat ». Elle comporte une partie prémisses (ou antécédent) composée d'un ensemble d'items X et une partie conclusion (ou conséquent) composée d'un ensemble d'items Y disjoint de X . Une telle règle permet de découvrir si les transactions qui vérifient le motif X ont tendance à vérifier également le motif Y . Un exemple de règle qui pourrait être extraite des données du tableau 4.1, est « Café \rightarrow Lait » [TS02], [LLC09],[Gri13], [LNH15], [BS16].

En outre [Gri13], une règle d'association est entièrement caractérisée par son tableau de contingence (cf. Tableau 4.2), qui est la base pour le calcul des mesures d'évaluation des règles d'association [HV18]. Les cellules du tableau de contingence sont liées par les deux relations ci-dessous, où $P(X' \cap Y')$ est alors exprimée comme le rapport $\frac{n_{X'Y'}}{n_{X'}}$.

- ★ $P(X') + P(\overline{X'}) = 1$.
- ★ $P(X' \cap Y') = P(Y') - P(\overline{X'} \cap Y') = P(X') - P(X' \cap \overline{Y'})$.

	Y'	\bar{Y}'	Profil colonne
X'	$P(X' \cap Y')$	$P(X' \cap \bar{Y}')$	$P(X')$
\bar{X}'	$P(\bar{X}' \cap Y')$	$P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')$	$P(\bar{X}')$
Profil ligne	$P(Y')$	$P(\bar{Y}')$	1

Tableau 4.2 – **Tableau de contingence**

Les règles d'association ont été utilisées avec succès dans une large variété de domaines d'application [Hue09], parmi lesquels le secteur médical pour la recherche par exemple de complications dues à des associations de médicaments [MMS91], [MJPS97], [GSM94], l'analyse d'images de données génomiques [Czy96], [OO98], [ORZm98], de données graphiques et statistiques [KK06], l'amélioration des services de télécommunications [KHT96], [MKT97], [KAS97], la fouille de textes [Kod99], [HY02]. Cette technique peut aussi être appliquée à tout autre secteur d'activité où il serait intéressant de découvrir des conjonctions d'articles ou services qui apparaissent fréquemment ensemble tels que les services bancaires.

4.4 Conclusion partielle

Nous venons de vous présenter brièvement sous la forme introductive ci-dessus les notions de « base de données » et de la « règle d'association ». Notons encore une fois que le domaine a fait et continue à faire objet de plusieurs recherches, et constitue le lieu privilégié du présent travail. Ce fait est confirmé par la littérature scientifique : le nombre élevé d'articles consacrés à l'Extraction de Connaissance à partir de Données (ECD) (en anglais Knowledge Discovery in Databases (KDD)) suffit de s'y convaincre. Son intérêt à l'humanité est donc considérable, ce qui démontre de façon indiscutable l'actualité du thème que nous avons choisi. Dans ce contexte, la normalisation des mesures d'intérêt figure parmi les points à ne pas négliger vu son importance ; à cet effet, il serait avantageux de dresser la subdivision suivante : premièrement, nous définissons la notion de « mesure d'intérêt » ou « mesure de qualité » et après, nous allons présenter où l'on est actuellement sur la mesure de qualité.

4.5 Introduction partielle de MPQ

Le chapitre précédent nous a offert la généralité des règles d'association. Notons ici que nous sommes encore sur le contexte de fouille de données. Après avoir défini la notion des règles d'association, nous allons maintenant discerner et analyser les Mesures Probabilistes de Qualité (MPQ) ou mesures d'intérêt. Les raisons en sont simples. En effet, selon [Fen07], [Tot08] les Mesures Probabilistes de Qualité ou mesures d'intérêt servent à évaluer, à classer les règles d'association d'un contexte de la fouille de données. En fait, la validité d'une règle d'association [Tot08] est évaluée à partir d'une (ou de plusieurs) mesure(s) de qualité des règles comme le montre sur la définition 21. Il existe plusieurs mesures de qualité dans la littérature. De là, il est clair que les notions des règle d'association et de mesure d'intérêt sont étroitement liées et donc quasi inséparables. Rappelons d'ailleurs qu'une partie du présent travail traite la Normalisation de mesures de qualité. Il est donc de droit et logique d'aborder ici la définition et l'analyse ce qu'on appelle mesures de qualité en science des données.



Définition 21. La validité d'une règle d'association [Tot08] est évaluée à partir d'une (ou de plusieurs) mesure(s) de qualité des règles. Nous donnons ci-dessous la définition d'une mesure de qualité des règles. Une mesure de qualité ou mesure d'intérêt des règles est une fonction μ de l'ensemble des règles d'association à valeurs dans \mathbb{R} , telle que pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, la valeur $\mu(X \rightarrow Y)$ dépend exclusivement des quatre paramètres dont : $n_T, P(X'), P(Y')$ et $P(X' \cap Y')$ [Tot08].

Notons ainsi que $\mu(X \rightarrow Y)$ est entièrement déterminée par le Tableau de contingence obtenu en croisant X' et Y' . L'application μ s'obtient ainsi via le tribut des parties $\mathcal{P}(T)$ de l'ensemble des objets T (i.e. par la composition faisant intervenir l'extension et une application réelle sur le Tableau de contingence correspondant) [Tot08]. Rappelons que le terme mesure ici n'est pas à prendre au sens de la théorie en analyse mathématique, mais mesure signifie ici un indice qui permet d'évaluer le degré de lien (orienté) entre deux motifs [Tot08], une telle mesure de qualité, dite une mesure probabiliste (probabiliste car, à priori on a pas de raison de préférence sur les objets de contenu tel ou tel item de I) de qualité (MPQ) à notre sens est une fonction qui est généralement déterminée par le Tableau de contingence obtenu en croisant les deux extensions en jeux, i.e. X' et Y' soit $K_{X'Y'}$ (cf. Tableau 4.3). Lorsque les effectifs marginaux $n_T, n_{X'}$ et $n_{Y'}$ sont fixés, la connaissance d'une valeur de la table de contingence, par exemple le nombre de contre-exemples d'une valeur $n_{X'\bar{Y}'}$, détermine les trois autres valeurs. Ainsi, les probabilités $P(X'), P(Y')$ et $P(X' \cap \bar{Y}')$ sont obtenues à l'aide des entrée de la table de contingence. Dans toute la suite de document il s'agit des MPQ.

$K_{X'Y'}$	Y'	\bar{Y}'	Profil ligne
X'	$n_{X'Y'}$	$n_{X'\bar{Y}'}$	$n_{X'}$
\bar{X}'	$n_{\bar{X}'Y'}$	$n_{\bar{X}'\bar{Y}'}$	$n_{\bar{X}'}$
Profil colonne	$n_{Y'}$	$n_{\bar{Y}'}$	n_T

Tableau 4.3 – Tableau de contingence $K_{X'Y'}$

4.5.1 Présentation des mesures d'intérêt

Il est écrit dans la littérature scientifique que, dans le contexte de fouille de données, le nombre de mesures de qualité existantes avoisine la soixantaine. Les recherches dans le domaine se poursuivent, ce qui fait que ce nombre ne cesse d'augmenter, et il est par conséquent encore tôt de pouvoir en dresser ici une liste exhaustive.

4.5.2 Liste non exhaustive des mesures d'intérêt

Rappelons que cette liste est extraite du [Gri13].

N°	Mesures	Expressions de $\mu(X \rightarrow Y)$
1	Dépendance causale	$\frac{3}{2} + 2P(X') - \frac{3}{2}P(Y') - \frac{3}{2}P(\bar{Y}'/X') - 2P(X'/\bar{Y}')$
2	Loevinger ou Satisfaction	$\frac{P(Y'/X')-P(Y')}{1-P(Y')}$
3	Fiabilité négative	$P(\bar{X}'/\bar{Y}')$
4	Force collective	$\frac{P(X' \cap Y') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(X')P(Y') + P(\bar{X}')P(\bar{Y}')} - \frac{1 - P(X')P(Y') + P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}{1 - P(X' \cap Y') - P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}$
5	Fukuda	$n_T(P(X' \cap Y') - \min_{\text{confiance}} P(X'))$
6	Indice d'implication de Gras	$\sqrt{n_T} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')}}$
7	Intérêt ou Lift	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$
8	Laplace	$\frac{n_{X'Y'}+1}{n_{X'}+2}$
9	Leverage	$\frac{P(Y'/X') - P(X')P(Y')}{P(X')P(Y')}$
10	$M_{GK}(X \rightarrow Y)$	$\begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases}$
11	Surprise	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \bar{Y}')}{P(Y')}$
12	Nouveauté	$P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')$
13	Pearl	$P(X') P(Y'/X') - P(Y') $
14	Piatetsky-Shapiro	$n_T(P(X' \cap Y') - P(X')P(Y'))$
15	Precision ou Support Causal	$P(X') + P(\bar{Y}') - 2P(X' \cap \bar{Y}')$
16	Rappel	$P(X'/Y')$
17	Risque relatif	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(Y'/\bar{X}'')}$
18	Spécificité	$P(\bar{Y}'/\bar{X}')$
19	Support	$P(X' \cap Y')$
20	Coefficient de corrélation	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}$
21	Cohen ou Kappa	$2 \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')P(\bar{Y}') + P(\bar{X}')P(Y')}$
22	Confiance ou précision	$P(Y'/X')$
23	Confiance causale	$1 - \frac{1}{2}P(\bar{Y}'/X') - \frac{1}{2}P(X'/\bar{Y}')$
24	Confiance centrée descriptive	$P(Y'/X') - P(Y')$
25	Confiance confirmée descriptive	$1 - 2P(\bar{Y}'/X')$
26	Confiance confirmée causale	$1 - \frac{3}{2}P(\bar{Y}'/X') - \frac{1}{2}P(X'/\bar{Y}')$
27	Confirmation causale	$P(X') + P(\bar{Y}') - 4P(X' \cap \bar{Y}')$
28	Confirmation descriptive	$P(X') - 2P(X' \cap \bar{Y}')$
29	Cosinus ou Ochiai	$\frac{P(X' \cap Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')}}$
30	Czekanowski-Dice ou F-mesure	$\frac{2P(X' \cap Y')}{P(X') + P(Y')}$
31	Dépendance	$ P(\bar{Y}') - P(Y'/X') $
32	Multiplicateur de côte	$\frac{P(X' \cap Y')P(Y')}{P(X' \cap \bar{Y}')P(Y')}$
33	Sebag	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X' \cap \bar{Y}')$
34	Conviction	$\frac{P(X')P(Y')}{P(X' \cap Y')}$
35	Odd-Ratio	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(\bar{X}' \cap Y')P(X' \cap \bar{Y}')}$
36	Gain-Informel	$\log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$

37	Exemple contre exemple	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X' \cap Y')}$
38	Kloggen	$\sqrt{P(X' \cap Y')(P(X'/Y') - P(Y'))}$
39	Gray et Orłowska	$\left(\left(\frac{P(Y'/X')}{P(Y')} \right)^k - 1 \right) (P(Y'/X')P(X'))^m$
40	Support à sens unique	$P(Y'/X') \log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$
41	Support à double sens	$P(X' \cap Y') \log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$
42	Couverture	$P(X')$
43	Prévalence	$P(Y')$
44	Jaccard	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X') + P(Y') - P(X' \cap Y')}$
45	Zhang	$\frac{P(X' \cap Y')}{\max(P(X' \cap Y')P(\bar{Y}'), P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y'))}$
46	Q de Yule	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}') - P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}') + P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}$
47	Y de Yule	$\frac{\sqrt{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} - \sqrt{P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}}{\sqrt{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} + \sqrt{P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}}}$
48	J-Mesure	$P(X' \cap Y') \log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')} + P(X' \cap \bar{Y}') \log \frac{P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X')P(\bar{Y}')}$

Tableau 4.4 – MPQ

Nous allons voir à juste titre quelques propriétés ou définitions associées à une Mesure Probabiliste de Qualité.



Définition 22. ★ Une mesure de qualité μ sera dite implicative si pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, on a : $(\bar{Y} \rightarrow \bar{X}) = (X \rightarrow Y)$ [Tot03].

★ Une mesure de qualité des règles d'association μ sera dite symétrique si pour toute règle d'association $(X \rightarrow Y)$ on a : $(X \rightarrow Y) = (Y \rightarrow X)$, elle sera dite parfaitement symétrique, si pour toute règles d'association $X \rightarrow Y$, on a : $(\bar{X} \rightarrow \bar{Y}) = (X \rightarrow Y)$ [Tot03].

★ Une mesure de qualité des règles d'association μ sera dite orientée, s'il existe au moins une règle d'association $(X \rightarrow Y)$ telle que : $(Y \rightarrow X) \neq (X \rightarrow Y)$.

4.5.3 Dix premiers problèmes cruciaux

Sur le domaine de la recherche en science de données, en 2009 dans [WK09], Qiang Yang et Xindong Wu annonçaient les dix principaux défis qui suivent :

- ★ développement d'une théorie unificatrice de l'exploration de données (Developing a Unifying Theory of Data Mining) ;
- ★ mise à l'échelle les données de haute dimension et les flux de données à haute vitesse (Scaling Up for High Dimensional Data and High Speed Data Streams) ;
- ★ connaissance des données des séquences d'extraction et des données des série temporelles (Mining Sequence Data and Time Series Data) ;
- ★ connaissance de complexe minier à partir de données complexes (Mining Complex Knowledge from Complex Data) ;

- ★ exploration de l'extraction de données dans un paramètre réseau (Data Mining in a Network Setting);
- ★ répartition des données sur l'exploration et l'extraction de données distribuées (Distributed Data Mining and Mining Multi-agent Data);
- ★ application de la fouille de données pour les problèmes biologiques et environnementaux (Data Mining for Biological and Environmental Problems);
- ★ application de la fouille de données sur les problèmes liés au processus (Data-Mining-Process Related Problems);
- ★ sécurisation, confier et intégrer des données (Security, Privacy and Data Integrity);
- ★ traitement de données non statiques, déséquilibrées et sensibles aux coûts (Dealing with Non-static, Unbalanced and Cost-sensitive Data).

Beaucoup de méthodes avec des mesures appropriées d'extraction de connaissances à partir des données de grande taille sont proposées dans la littérature pour tenter d'améliorer la qualité des règles d'association découvertes et d'en éviter la surabondance. Par ailleurs, sur le plan de la recherche sur le développement d'une théorie unificatrice de l'exploration de données (Developing a Unifying Theory of Data Mining) plus précisément sur une vision unificatrice des mesures probabilistes de qualités dans la littératures, André Totohasina a introduit une normalisation de ces mesures dans laquelle, elle est l'objet de l'une de ces études, tendant à dégager des relations fonctionnelles entre les différentes mesures d'intérêt.

4.5.4 Conclusion partielle

Comme cette liste d'exemples l'indique, la littérature atteste que sur la façon d'attribution d'un nom à une mesure de qualité, trois catégories se profitent : il y a les mesures qui portent le nom de l'auteur ou de groupe d'auteurs (telles : mesure de Lovinger, Laplace, Sebag, M_{GK} etc), puis celle dont le nom reflète les propriétés mathématiques effectives ou la sémantique intrinsèque de l'Indice (c'est le cas : Indice de l'implication (IndImp), mesure de similarité, coefficient de corrélation linéaire, etc.), et les mesures dont le nom exprime le souhait (pour ne pas dire marketing) de son auteur (comme Conviction, Confiance, Facteur de Certitude, etc.) [Tot08]. Cette diversité d'appellations d'un même concept au sein d'un même domaine témoigne la jeunesse de cette discipline de la fouille de données. Il y convient donc d'avoir une action d'harmonisation et d'unification devant ce foisonnement des mesures de qualité de règle d'association. Remarquons que la plupart de ces mesures de qualité de règle peuvent s'exprimer en fonction de la probabilité conditionnelle sachant la permise du conséquent dite confiance de la règle par Agrawal et al.[Tot08]. Alors que la probabilité conditionnelle sachant le conséquent de la prémisse mesure ce qui est appelée la complétude de la règle selon Freitas ou son rappel selon Azé et Kodratoff, c'est à dire l'importance du concept de probabilité conditionnelle pour ces types de mesure d'intérêt de règle d'association [Tot08]. Nous avons déjà dit, dans le souci de contribuer à une mise en place d'une théorie unificatrice vivement souhaitée dans la communauté de ladite science des données, face au foisonnement des mesures d'intérêt existant dans la littérature (une soixantaine!), André Totohasina a proposé le concept de mesure normalisée de la qualité des règles d'association sous cinq conditions, la procédure de normalisation d'une mesure non normalisée, mais normalisable, basée sur un homéomorphisme affine. Nous allons en effet voir ledit processus au chapitre 5.

Chapitre 5

Normalisation par homéomorphie affine

5.1 Introduction et notions partielles de normalisation de MPQ

Parlons maintenant de la normalisation de mesures, c'est-à-dire d'une partie intégrante de notre travail. Comme l'on peut le voir dans le Tableau 4.4 et lire dans la littérature sur la fouille de données [Gri13], on distingue déjà plusieurs mesures de qualité, toutes importantes. L'on n'ignore que les mesures de qualité servent à évaluer, à classifier les règles d'association d'un contexte de la fouille de données, et il n'est pas toujours facile de donner satisfaction aux utilisateurs dans leur choix de mesure lors du traitement des données.

Face au nombre susmentionné de mesures, les chercheurs poursuivent toujours leurs « recherches » des moyens permettant de mieux satisfaire les utilisateurs, ce qui fait que toutes les mesures en main seront mises à l'épreuve. En d'autres termes, plusieurs algorithmes des règles d'association sont disponibles dans la littérature. La mesure « confiance » et le « support » dans le domaine des travaux de recherche présentés aux utilisateurs ont montré leurs premières importances. Le temps passe, et les recherches ne cessent d'évoluer. Parallèlement à cela, et encore dans le contexte de fouille de données, les chercheurs ont obtenu plusieurs résultats dont les diverses définitions plus pertinentes et les propriétés. Il est apparu que les deux mesures reconnues alors importantes présentent de nombreuses critiques à savoir, d'abord, les algorithmes utilisés pour générer les règles d'association d'un contexte binaire engendrent un très grand nombre de règles qui sont très difficiles à gérer et dont beaucoup n'ont que peu d'intérêt. Ensuite la condition de Support qui est le moteur du processus d'extraction écarte les règles ayant un petit Support alors que certaines peuvent avoir une très forte Confiance et peuvent se présenter réel intérêt [Fen07].

Plusieurs chercheurs se sont déjà efforcés à trouver des moyens permettant de mettre en liaison toutes les mesures avec la mesure de confiance vu son importance. Comme cela a été déjà dit, ces derniers temps, beaucoup de critiques ont été portées sur le contexte de fouille de données pour diverses raisons. Par exemple, l'an 2000 Guillum-Khenchaff [Gui00] a fait sortir la mesure nommée M_{GK} qui, jusqu'à ce jour, est considérée pertinente selon la définition et les propriétés des mesures utilisées dans la fouille de données. Dans ces conditions, quelles solutions seront à adopter ? Les data-scientistes sont alors obligés à trouver des moyens menant au rapprochement de toutes les mesures connues vers la mesure M_{GK} . C'est dans ce sens qu'en 2003 André Totohasina [Tot03] est arrivé à mettre en évidence la voie de rapprochement de cette mesure au moyen de la « normalisation de mesures de qualité ». Certes ses recherches ont permis d'obtenir des résultats que l'on peut qualifier bons, car elles

ont ouvert voie au ralliement de la majorité des mesures. Daniel Rajaonasy Feno a poursuivi son travail et a pu attribuer des propriétés relatives à la normalisation. Pour cela, ils ont tous les deux utilisé l'homéomorphisme affine conformément à la démarche suivante.

5.2 Motivation et Définition

« Normer », « centrer » une mesure de qualité des règles sont des termes vaguement utilisés par les chercheurs travaillant dans le domaine de la fouille des règles d'association. Dans le double objectif de comparaison et d'une vision unificatrice des différentes mesures de qualités suite des travaux de André Totohasina dans [Tot03] et Daniel Rajaonasy Feno dans [Fen07] qui a poursuivi les travaux effectués par André Totohasina dans [Tot03], ils proposaient une « normalisation » [Tot08]. Elle est guidée par les propriétés des intervalles réels qui sont rappelés ci-dessous car, il est évident que ces mesures de qualités prennent leurs valeurs soit dans un intervalle borné, soit dans un intervalle ouvert non borné. Et dans les deux cas, l'intervalle peut contenir ou ne pas admettre des nombres réels négatifs et n'est pas mis en correspondance avec des situations de références plus ou moins intuitives telles l'incompatibilité, l'indépendance statistique, la nature de dépendance (positive ou négative) et l'implication logique [Tot08].

5.3 Propriété topologique de \mathbb{R} : intervalles homéomorphes et difféomorphes



Définition 23. ★ Deux intervalles réels sont dits de même nature, s'ils sont simultanément fermés bornés ou non bornés, semi-ouverts bornés ou non bornés, ou ouverts bornés ou non bornés [Tot08].

★ Un homéomorphisme (resp difféomorphisme) de \mathbb{R} est une application réelle continue (resp dérivable à dérivée continue) bijective dont la réciproque est également continue (resp dérivable à dérivée continue) [Tot08].

Théorème 10. Deux intervalles I et J sont homéomorphes (resp difféomorphes), si et seulement s'ils sont de même nature [Tot08].

Preuve

Notons que $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty]$.

C.N. Si $f : I \rightarrow J$ est homéomorphisme, alors des trois choses l'une :

- a - Si I est un segment $[ab]$ avec a, b sont deux réels, alors J ne peut être qu'un segment $[cd]$, car l'image d'un segment par une application continue est un segment, toute application continue sur un segment étant bornée et y atteignant ses bornes (Théorème de Bolzano-Weierstrass : « De toute suite bornée de \mathbb{R} on peut extraire une sous-suite convergente ») [Tot08].
- b - Si $I =]a ; b[$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors J ne peut être qu'un intervalle ouvert $]c ; d[$ avec $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ puisque l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert [Tot08].

c - Si $I =]a ; b]$ ou $I = [a ; b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors J ne peut être qu'un intervalle de cette nature, sinon on applique a) ou b) ou la fonction tangente hyperbolique $th : \mathbb{R} \rightarrow]-1 ; 1[$ composée avec une fonction simple, proposée ci-dessous :

Cas d'intervalle ouvert : on peut prendre $f = g_1 o th$ avec g_1 une fonction affine du type donnée ci - dessous pour I intervalle borné, $a + exp(x)$ ou $a - exp(x)$ selon que l'intervalle I soit de type $]-\infty ; b]$ ou $[a ; +\infty[$ [Tot08]

cas d'intervalles semi-ouverts : en considérant la partie de th à valeur dans l'intervalle $[0 ; 1[$ on peut prendre la fonction composée $g_2 o th$ ou $g_3 o th$ où g_2 et g_3 sont deux applications affines de type g définie ci-après sur $[0 ; 1[$ et à valeur dans \mathbb{R} , ou $a + x$ ou $a - x$ [Tot08].

C.S : Si I et J sont de même nature, il suffit d'exhiber et/ou produire un difféomorphisme dans chacun des cas :

Lorsque les extrémités a, b, c et d des intervalles I et J sont des réels, on peut choisir des restrictions de l'application affine $g : [a ; b] \rightarrow [c ; d]; x \mapsto \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$ et de noter que g est bien un C^∞ difféomorphisme de $[a ; b]$ sur $[c ; d]$. Si au moins l'une des bornes de I est infinie, il suffit d'utiliser la fonction exponentielle : expo : $\mathbb{R} \mapsto]0 ; +\infty[, x \mapsto e^x$ [Tot08].



Définition 24. Soient X et Y des motifs d'un contexte de la fouille de données $D = (T, I, \mathcal{R})$ et P la probabilité discrète uniforme sur l'espace probabilisable $(T, \mathcal{P}(T))$ [Tot03]. Comme, par souci de cohérence avec le principe de dualité dans l'analyse de concept formel, nous les avons déjà caractérisé, au paragraphe 4.3.2, par les propriétés de leurs extensions respectives X' et Y' en tant qu'événements de $\mathcal{P}(T)$.

- (i) X et Y sont incompatibles, si leurs extensions sont incompatibles, c'est-à-dire si $P(X' \cap Y') = 0$ c-à-d, $P(Y'/X') = 0$;
- (ii) X et Y sont négativement dépendants (ou X et Y se défavorisent mutuellement), $P(X'/Y') < P(X')$ (ce qui est équivalent à $P(Y'/X') < P(Y')$) ;
- (iii) X et Y sont positivement dépendants (ou X et Y se favorisent mutuellement), si $P(X'/Y') > P(X')$ (ce qui est équivalent à $P(Y'/X') > P(Y')$) ;
- (iv) X implique logiquement (totalement) Y si $X \subseteq Y$, soit $P(Y'/X') = 1$ [Tot08].

Aussi, les quantités $P(Y'/X') - P(Y')$ et $P(X'/Y') - P(X')$ mesurent l'écart à l'indépendance des deux motifs X et Y ceux qui sont respectivement notés $EI(X \rightarrow Y)$, $EI(Y \rightarrow X)$.

En général ces deux indicateurs de degré de dépendance statistique ne sont pas égaux, malgré la mutualité de l'attraction ou de répulsion selon que le lien est positif ou négatif.

Néanmoins les notions de dépendance positive et dépendance négative sont liées comme le montrent les lemmes ci-dessous [Tot08].

Lemme 1. Soient X et Y deux motifs.

1. Les trois conditions suivantes sont équivalentes : (i) X défavorise Y ; (ii) X favorise \bar{Y} et (iii) \bar{X} favorise Y [Tot08].
2. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes : (i) X favorise Y ; (ii) X défavorise \bar{Y} ; (iii) \bar{X} favorise \bar{Y} et \bar{X} défavorise Y [Tot08].

Notons que les deux quantités $P(Y'/X')$ et $P(X'/Y')$ sont fonctions croissantes du nombre d'exemples $|X' \cap Y'|$, les marginales $P(X')$ et $P(Y')$ demeurant constantes.

Par ailleurs, la littérature suggère déjà les cinq principes suivants [Tot08].

Les trois principes de Piatestsky-Shapiro disent qu'une mesure d'intérêt d'une règle d'association doit être nulle en cas d'indépendance statistique des prémisses et conséquences, fonction strictement croissante du nombre d'exemples, les autres paramètres étant fixés, et une fonction strictement décroissante du cardinal du dual de sa prémisse ou décroissante du cardinal du dual de son conséquent, les autres paramètres étant maintenus constants [PS91].

Un quatrième principe de Major et Mangano : une mesure d'intérêt d'une règle d'association doit être une fonction strictement croissante de sa couverture (i.e. le cardinal de l'intersection des deux extensions), une fois que sa confiance est gardée constante supérieure à une valeur minimale préalablement fixée [AJ93].

Le cinquième principe de Frettas [Fre99] qui corrige le caractère symétrique de l'indice de Piatestsky-Shapiro. Une mesure de qualité d'intérêt d'une règle d'association doit être non symétrique.

Eu égard aux objectifs mathématiques de normalisation et aux cinq principes mentionnés ci-dessus, André Totohasina a introduit la définition d'une mesure de qualité normalisée dans [Tot03] de la façon suivante.



Définition 25. Soient X et Y des motifs d'un contexte de la fouille de données binaires $D = (T, I, \mathcal{R})$, P la probabilité discrète uniforme sur l'espace probabilisable $(T, \mathcal{P}(T))$, T : l'ensemble des transactions de T vers I où I : l'ensemble des attributs appelé items ou motifs ; \mathcal{R} est la relation binaire de T vers I ; μ : une Mesure Probabiliste de Qualité et $X \rightarrow Y$: une règle d'association. Une mesure de qualité d'une règle d'association est dite normalisée, si elle vérifie les cinq conditions ci-dessous [Tot03].

- (i) $\mu(X \rightarrow Y) = -1$, si $P(Y'/X') = 0$ i.e. X' et Y' sont deux événements incompatibles : on dit que les deux motifs X et Y sont alors incompatibles ;
- (ii) $-1 < \mu(X \rightarrow Y) < 0$, si $0 < P(Y'/X') < P(Y')$ i.e. X' et Y' sont deux événements indépendants : on dit que les deux motifs X et Y sont alors négativement dépendants (en répulsion partielle) ;
- (iii) $\mu(X \rightarrow Y) = 0$, si $P(Y'/X') = P(Y')$ i.e. les deux événements X' et Y' sont indépendants : on dit que les deux motifs X et Y sont alors indépendants ;
- (iv) $0 < \mu(X \rightarrow Y) < 1$, si $0 \neq P(Y'/X') > P(Y')$, i.e. si X favorise Y ou les deux motifs X et Y s'attirent partiellement ;
- (v) $\mu(X \rightarrow Y) = 1$, si $P(Y'/X') = 1$ ou encore si $X' \subseteq Y'$: on dit que le motif X est alors incluse totalement dans Y .

Si bien qu'il est important de noter que, par essence même, une mesure normalisée possède la sémantique de lien orienté, qui peut s'interpréter en termes de taxonomie, implicite dans un syllogisme tel « Si X , alors, Y ». C'est un indice de quasi-implication ou de l'implication statistique, pour prendre la terminologie de l'analyse implicative de Gras [Tot08].

Rappelons au passage que la distribution des valeurs d'une mesure de qualité normalisée se représente schématiquement comme indiqué sur la figure 5.1 ci-dessous [Tot08].

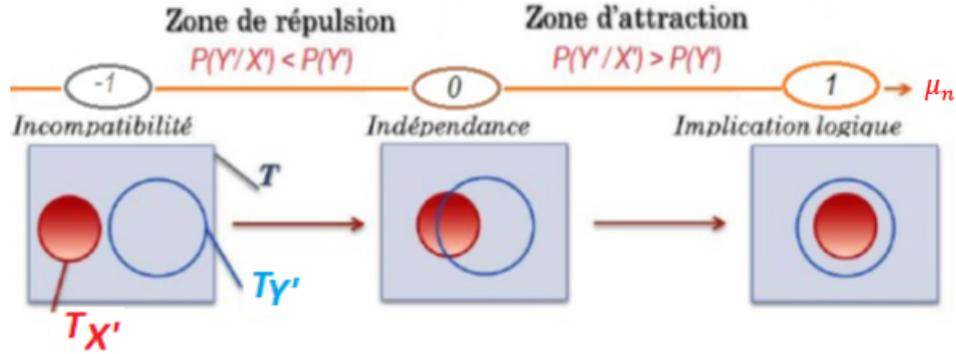


FIGURE 5.1 – Distribution des valeurs de MPQ normalisée continue

Avec la définition de la mesure normalisée, les échanges entre André Totohasina et Jean Diatta dans [Tot08] ont suggéré une fonction du type $\mu_{(a,r)}$ telle que :

$$\mu_{(a,r)}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} 1, & \text{si } X \text{ implique totalement } Y ; \\ a, & \text{si } X \text{ implique partiellement } Y ; \\ 0, & \text{si } P(Y'/X') = P(Y') ; \\ r, & \text{si } 0 \neq P(Y'/X') \leq P(Y') ; \\ -1, & \text{si } P(Y'/X') > P(Y') . \end{cases}$$

Avec $a \in]0 ; 1[$ et $r \in]-1 ; 0[$ est une mesure normalisée discontinue sur les intervalles $[0 ; 1]$ et $[-1 ; 0]$.



Exemple 7.

$$\mu_{(1/3, -2/5)}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} 1, & \text{si } X \text{ implique totalement } Y ; \\ 1/3, & \text{si } X \text{ implique partiellement } Y ; \\ 0, & \text{si } P(Y'/X') = P(Y') ; \\ -2/5, & \text{si } 0 \neq P(Y'/X') \leq P(Y') ; \\ -1, & \text{si } P(Y'/X') > P(Y') . \end{cases}$$

Par souci de cohérence avec les résultats statistiques de données, ils sont alors conduits à introduire une définition qui prend en compte la continuité sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Notons \mathcal{N} l'ensemble des mesures probabilistes normalisées.



Définition 26. On appelle mesure de qualité normalisée continue toute mesure de qualité normalisée de \mathcal{N} qui est fonction continue du nombre de contre-exemples (ou d'exemples) ou, ce qui revient au même, une fonction continue de probabilité conjointe des extensions de la prémisse et du conséquent d'une règle d'association, ou même la probabilité conditionnelle sachant la prémisse du conséquent, au marginales fixées [Tot08].



Exemple 8. Selon la définition évoquée ci-dessus, il est facile de montrer que la mesure M_{GK} définie par : $M_{GK}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} M_{GK}^f(X \rightarrow Y) \\ M_{GK}^d(X \rightarrow Y) \end{cases}$ où $M_{GK}^f(X \rightarrow Y) = \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')}$, si X favorise Y et $M_{GK}^d(X \rightarrow Y) = \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')}$, si X défavorise Y , est bien normalisée et continue.

5.4 Propriétés des mesures probabilistes de qualité normalisées

Dans la suite $C(\mathcal{N})$ désigne l'ensemble des mesures de qualité normalisées continues sur $[-1; 1]$. Alors, $C(\mathcal{N}) = \mathcal{N} - \{\mu_{(a, r)} \text{ tel que } a \in]0; 1[\text{ et } r \in]-1; 0[\}$.

Par souci de commodité, sauf mention expresse, nous considérons essentiellement les mesures normalisées continues [Tot08]. De plus, comme sa définition le sous-entend, avec la contrainte de la nullité en cas d'indépendance, avec l'intégrité du corps \mathbb{R} , on a la condition nécessaire suivante : une mesure μ de qualité normalisée continue doit s'exprimer en deux morceaux de la façon suivante.

Proposition 18. Si une mesure μ de qualité est normalisée qui est notée μ_n , alors :

$$\mu_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} F_f(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y'))EI(X \rightarrow Y), & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ F_d(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y'))EI(X \rightarrow Y), & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

F_f et F_d étant deux fonctions réelles strictement positives et inférieures ou égales à 1 [Tot08]. Maintenant, observons ce qui se passe aux deux autres situations de référence, le cas limite d'implication logique où μ_n doit prendre la valeur + 1, et son antipode, le cas d'incompatibilité où la mesure normalisée doit valoir -1. Alors, par la première contrainte, qui correspond au cas où $X' \subseteq Y'$, X favorise Y , nécessairement :

$\mu_n^f(X \rightarrow Y) = F_f(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y'))(1 - P(Y')) = 1$ en cas limite de règle logique, donc en cas d'attraction mutuelle il existe un facteur positif λ_f tel que :

$\lambda_f(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y')) = \frac{1}{1 - P(Y')}$ avec comme contrainte : en cas d'implication logique λ prend la valeur + 1.

En raisonnant de façon analogue, la contrainte du cas d'incompatibilité donne que :

$\mu_n^d(X' \rightarrow Y') = F_d(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y'))(-P(Y')) = -1$ en cas limite de l'incompatibilité, donc en cas de répulsion mutuelle entre la prémisse et le conséquent il existe un facteur positif λ_d tel que : $\lambda_d(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y')) = \frac{1}{P(Y')}$.

Donc, par continuité de chaque morceau de ladite mesure normalisée, μ_n^f (composante favorable) et μ_n^d (partie défavorable), nous aboutissons à la mesure normalisée définie explicitement par : pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, on a :

$$\mu_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \lambda_f(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y')) \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')} ; \\ \lambda_d(n_T, P(X'), P(Y'), P(X' \cap Y')) \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} . \end{cases}$$

λ_f et λ_d étant deux fonctions réelles à valeurs dans $]0; 1[$. Donc, il est facile à vérifier que M_{GK} est bien normalisée ; en fait M_{GK} correspond au cas simple et maximal où les coefficients sont égaux à 1 c'est-à-dire $\lambda_f = \lambda_d = \text{constatant} = 1$.

Ainsi, retenons que, malgré les cinq contraintes de normalisation, ce résultat fournit un moyen pour construire une mesure normalisée, aux facteurs λ_f et λ_d près. Ainsi, les mesures normalisées continues peuvent toutes s'exprimer en une transformée de M_{GK} et donc de la mesure pionner confiance [Tot08].

5.5 Processus et caractérisation de la normalisation

Nous nous restreignons ici à l'ensemble $C(\mathcal{N})$ des mesures de qualité normalisées continues. Par ailleurs, comme il existe une bijection affine (donc une fonction très simple) qui relie deux intervalles bornés de \mathbb{R} , notre première démarche de la normalisée d'une mesure va s'intéresser à la recherche d'une transformation affine ou affine par morceaux ou affine avec coefficients dynamiques [Tot08].

Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure de qualité soit normalisable. Pour faciliter l'interprétation d'une règle, la normalisation de μ consisterait à ramener ses valeurs à l'intervalle $[-1 ; 1]$ de telle sorte que la valeur 1 correspond à l'implication logique, l'intervalle $]0 ; 1[$ correspond à l'attraction entre la prémisse et conséquent, la valeur 0 correspond à l'indépendance statistique, la valeur -1 correspond à l'incompatibilité et l'intervalle $] - 1 ; 0[$ correspond au répulsion mutuelle entre la prémisse et le conséquent [Tot08]. Soit x_f (resp y_f) le coefficient de multiplication correspondant à l'implication logique (resp de centrage) de μ , dans le cas où X favorise Y . De façon similaire, posons x_d (resp y_d) le coefficient de multiplication (resp de centrage) dans le cas X défavorise Y . On a donc :

$$\mu_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_f \mu(X \rightarrow Y) + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y ; \\ x_d \mu(X \rightarrow Y) + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Ces quatre coefficients se déterminent par passage aux limites unilatérales dans des situations de référence (incompatibilité, indépendance et implication logique) du fait de la continuité de l'évolution dans les deux zones : attraction (dépendance positive) et répulsion (dépendance négative).

Posons $\mu_{imp}(X \rightarrow Y)$ la valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'implication logique, $\mu_{ind}(X \rightarrow Y)$ celle de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'indépendance et $\mu_{inc}(X \rightarrow Y)$ la valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'incompatibilité [Tot08]. Au cas où X favorise Y , on obtient :

$$\begin{cases} x_f \mu_{imp}(X \rightarrow Y) + y_f = 1, & \text{implication logique ;} \\ x_f \mu_{ind}(X \rightarrow Y) + y_f = 0, & \text{indépendance à droite.} \end{cases}$$

Au cas où X défavorise Y , on obtient :

$$\begin{cases} x_d \mu_{ind}(X \rightarrow Y) + y_d = 0, & \text{indépendance à gauche ;} \\ x_d \mu_{inc}(X \rightarrow Y) + y_d = -1, & \text{incompatibilité.} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire le système d'équations linéaire suivant.

$$\begin{cases} x_f \mu_{imp}(X \rightarrow Y) + y_f = 1 \\ x_f \mu_{ind}(X \rightarrow Y) + y_f = 0 \\ x_d \mu_{ind}(X \rightarrow Y) + y_d = 0 \\ x_d \mu_{inc}(X \rightarrow Y) + y_d = 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

L'écriture matricielle du système (5.1) est donnée par l'équation vectorielle (5.2) :

$$\begin{pmatrix} \mu_{imp}(X \rightarrow Y) & 1 & 0 & 0 \\ \mu_{ind}(X \rightarrow Y) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{ind}(X \rightarrow Y) & 1 \\ 0 & 0 & \mu_{inc}(X \rightarrow Y) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

On pose $M = \begin{pmatrix} \mu_{imp}(X \rightarrow Y) & 1 & 0 & 0 \\ \mu_{ind}(X \rightarrow Y) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{ind}(X \rightarrow Y) & 1 \\ 0 & 0 & \mu_{inc}(X \rightarrow Y) & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à ce système.

Pour que l'équation vectorielle (5.2) admette une solution unique, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice M soit fini et non nul. Ainsi, nous avons la caractérisation de mesures normalisables résultant de l'existence de solution de l'équation (5.2) [Tot08].

Théorème 11. *Une Mesure Probabiliste de Qualité μ est normalisable si et seulement si, pour toute règle $X \rightarrow Y$, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) les quantités $\mu_{imp}(X \rightarrow Y)$, $\mu_{ind}(X \rightarrow Y)$ et $\mu_{inc}(X \rightarrow Y)$ sont finies ;
- (ii) les inégalités suivantes sont vérifiées $\mu_{imp}(X \rightarrow Y) \neq \mu_{ind}(X \rightarrow Y) \neq \mu_{inc}(X \rightarrow Y)$.

Preuve

Le déterminant de la matrice M associée à l'équation (5.2) qui est égal à $(\mu_{imp}(X \rightarrow Y) - \mu_{ind}(X \rightarrow Y))(\mu_{ind}(X \rightarrow Y) - \mu_{inc}(X \rightarrow Y))$ est donc différent de zéro. D'où le théorème énoncé.

La proposition suivante établit l'expression des coefficients de la transformation pour une mesure de qualité normalisable (Totohasina et al, [DRA07]) [Tot08].

Proposition 19. *Soient μ_n une mesure de qualité normalisable et $X \rightarrow Y$ une règle d'association. Les coefficients de multiplication et de centrage sont donnés par les expressions ci-dessous [Tot08] :*

$$x_f = \frac{1}{\mu_{imp}(X \rightarrow Y) - \mu_{ind}(X \rightarrow Y)} ; \quad y_f = \frac{\mu_{ind}(X \rightarrow Y)}{\mu_{imp}(X \rightarrow Y) - \mu_{ind}(X \rightarrow Y)} ;$$

$$x_d = \frac{1}{\mu_{ind}(X \rightarrow Y) - \mu_{inc}(X \rightarrow Y)} ; \quad y_d = \frac{\mu_{ind}(X \rightarrow Y)}{\mu_{ind}(X \rightarrow Y) - \mu_{inc}(X \rightarrow Y)}.$$



Remarque 15. 1. Le système d'équations (5.1) ne peut pas avoir une infinité de solutions. En effet, si $\det M = 0$, pour assurer l'infinité de solution, il faut que le second membre du système soit nul. Ce qui n'est pas le cas.

- 2. Les règles d'association considérées sont des règles $X \rightarrow Y$ telles que $P(X') \neq 0$, $P(Y') \neq 0$, $P(X') \neq 1$ et $P(Y') \neq 1$. En effet, si $P(X') = 1$ donc les attributs qui constituent X sont présentés, donc le motif X ne porte aucune information nouvelle à l'utilisateur. Par ailleurs, si $P(X') = 0$, alors la présence simultanée des attributs qui composent X ne réalise aucune entité et le motif X ne porte en effet aucune information nouvelle à l'utilisateur [Tot08].

5.6 Exemples de normalisation de mesures de qualité

Pour illustrer les processus de normalisation des mesures de qualité, voici quelques détails de calcul de la normalisée associée à certaines mesures de qualité. Soit $X \rightarrow Y$ une règle d'association d'un contexte de la fouille de données [Fen07].

1. **Support** : $Supp(X \rightarrow Y) = P(X' \cap Y')$ qui est telle que : $Supp_{imp}(X \rightarrow Y) = P(X')$, $Supp_{ind}(X \rightarrow Y) = P(Y')P(X')$, et $Supp_{inc}(X \rightarrow Y) = 0$. Donc, on obtient :
 $détM = P^2(X')P(Y')P(\bar{Y}') \neq 0$.

$$\text{Donc, } x_f = \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}, \quad y_f = \frac{P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))} \quad x_d = \frac{1}{P(X')P(Y')} \text{ et } y_d = -1.$$

$$\text{D'où, } Supp_n = \begin{cases} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y ; \\ \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Finalement, on trouve $Supp_n = M_{GK}$.

2. **Confiance** : $Conf(X \rightarrow Y) = P(X'/Y')$ qui est telle que : $Conf_{imp}(X \rightarrow Y) = 1$, $Conf_{ind}(X \rightarrow Y) = P(Y')$ et $Conf_{inc}(X \rightarrow Y) = 0$.

$$\text{Enfin, } x_f = \frac{1}{(1-P(Y'))}, \quad y_f = -\frac{P(Y')}{(1-P(Y'))} \quad x_d = \frac{1}{P(Y')} \text{ et } y_d = -1.$$

$$\text{D'où, } Conf_n = \begin{cases} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y ; \\ \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Finalement, on trouve $Conf_n = M_{GK}$.

3. **Lift** : $lift(X \rightarrow Y) = \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$ qui est telle que : $lift_{imp}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{P(Y')}$, $lift_{ind}(X \rightarrow Y) = 1$ et $lift_{inc}(X \rightarrow Y) = 0$.

$$\text{Donc, } x_f = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}, \quad y_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}, \quad x_d = 1 \text{ et } x_d = -1.$$

$$\text{D'où, } Lift_n = \begin{cases} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y ; \\ \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Finalement, on trouve $Lift_n = M_{GK}$.

4. **Laplace** : $Lap(X \rightarrow Y) = \frac{n_T P(X' \cap Y') + 1}{n_T P(X') + 2}$ qui est telle que :

$$Lap_{imp}(X \rightarrow Y) = \frac{n_T P(X') + 1}{n_T P(X') + 2},$$

$$Lap_{ind}(X \rightarrow Y) = \frac{n_T P(X')P(Y') + 1}{n_T P(X') + 2} \text{ et } Lap_{inc}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{n_T P(X') + 2}$$

$$\text{Ainsi, } x_f = \frac{n_T P(X') + 2}{n_T P(X')(1-P(Y'))}, \quad y_f = -\frac{n_T P(X')P(Y') + 1}{n_T P(X')(1-P(Y'))}, \quad x_d = \frac{n_T P(X') + 2}{n_T P(X')P(Y')},$$

$$y_d = -\frac{n_T P(X')P(Y') + 1}{n_T P(X')P(Y')}.$$

$$\text{Par suite, } x_f = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}, \quad y_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}, \quad x_d = 1 \text{ et } y_d = -1.$$

$$\text{D'où, } Lap_n = \begin{cases} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y ; \\ \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Finalement, on trouve $Lap_n = M_{GK}$.

5. **ϕ -Coefficient** : $\phi(X \rightarrow Y) = \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}}$ qui est telle que :

$$\phi_{imp}(X \rightarrow Y) = \frac{P(X')(1-P(Y'))}{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}}, \quad \phi_{ind}(X \rightarrow Y) = 0, \text{ et}$$

$$\phi_{inc}(X \rightarrow Y) = -\frac{P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}} \\ \text{Donc, } x_f = \frac{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}{P(X')(1-P(Y'))}, \quad y_f = -\frac{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}{P(X')(1-P(Y'))} \text{ et} \\ x_d = \frac{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}{P(X')P(Y')} \text{ et } y_d = -\frac{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}{P(X')P(Y')}.$$

$$\text{D'où, } \phi - \text{Coe}f_n = \begin{cases} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y ; \\ \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y . \end{cases}$$

Finalement, on trouve $\phi - \text{Coe}f_n = M_{GK}$.

Cet exemple nous montre qu'on peut catégoriser les mesures en trois classes [Fen07] :

- (i) Mesures M_{GK} normalisables ;
- (ii) Mesures normalisables à normalisées différentes de M_{GK} ;
- (iii) Mesures non normalisables.

On peut voir dans le tableau ci-dessous les mesures probabilistes de qualité normalisables. Rappelons que tous les tableaux ci-dessous sont extraits de [Fen07].

5.7 Représente les mesures M_{GK} normalisables.

Les 19 mesures suivantes sont M_{GK} normalisables.

N°	Mesures	Expressions
1	Support	$P(X' \cap Y')$
2	Confiance	$P(Y'/X')$
3	M_{GK}	$\begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')} & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases}$
4	Rappel	$P(X'/Y')$
5	Lift	$\frac{P(Y'/X')}{P(Y')}$
6	Leverage	$P(Y'/X') - P(X')P(Y')$
7	Confiance centrée	$P(Y'/X') - P(Y')$
8	Facteur de certitude	$\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')}$
9	Laplace	$\frac{n_T P(X' \cap Y') + 1}{n_T P(Y') + 2}$
10	ϕ -Coefficient	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}}$
11	Piatetsky-Shapiro	$n_T(P(X' \cap Y') - P(X')P(Y'))$
12	Cosinus	$\frac{P(X' \cap Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')}}}$

13	Acuracy	$P(X' \cap Y') + P(\overline{X'} \cap \overline{Y'})$
14	Moindre contradiction	$\frac{P(X' \cap Y') + P(X' \cap \overline{Y'})}{P(Y')}$
15	Lovinger	$\frac{P(X'/Y') - P(Y')}{1 - P(Y')}$
16	Cohen ou Kappa	$2 \frac{P(X' \cap Y') + P(X')P(Y')}{P(Y') + P(Y') - 2P(X')P(Y')}$
17	Indice d'implication	$\frac{\sqrt{2} P(X' \cap \overline{Y'}) - P(X')P(\overline{Y'})}{\sqrt{P(X')P(\overline{Y'})}}$
18	Spécificité	$P(\overline{Y'} / \overline{X'})$
19	Fiabilité négative	$P(\overline{X'} / \overline{Y'})$

Tableau 5.1 – Mesures M_{GK} normalisables

Notons que toutes les mesures peuvent s'écrire sous forme de fonction affine par morceaux de la mesure de qualité M_{GK} , avec des coefficients variables ou dynamiques. Les coefficients de transformation dans le cas où prémisses favorise le conséquent sont donnés dans le tableau 5.2 et ces coefficients sont donnés dans le tableau 5.3 au cas où la prémisses défavorise le conséquent.

Tableau représente les coefficients x_f et les coefficients y_f des normalisations des mesures M_{GK} - normalisables.

5.7.1 Coefficients x_f et y_f des mesures M_{GK} normalisables

N°	Mesures	x_f	y_f
1	Support	$\frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}$	$-\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$
2	Confiance	$\frac{1}{1-P(Y')}$	$-\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$
3	M_{GK}	1	0
4	Rappel	$\frac{1}{1-P(Y')}$	$-\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$
5	Lift	$\frac{1}{1-P(Y')}$	$-\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$
6	Leverage	$\frac{1}{1-P(Y')}$	$\frac{P(X')P(Y') - P(Y')}{1-P(Y')}$
7	Confiance centrée	$\frac{1}{1-P(Y')}$	0
8	Facteur de certitude	1	1
9	Laplace	$\frac{n_T P(X') + 2}{n_T P(X')(1-P(Y'))}$	$-\frac{n_T P(X')P(Y') + 1}{n_T P(X')(1-P(Y'))}$
10	ϕ -Coefficient	$\frac{\sqrt{P(X')P(Y')P(\overline{X'})P(\overline{Y'})}}{P(X')(1-P(Y'))}$	0
11	Piatetsky-Shapiro	$\frac{1}{n_T P(X')(1-P(Y'))}$	0
12	Cosinus ou Ochiai	$\frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')(1-P(Y'))}$	$-\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$

13	Accuracy	$\frac{1}{2P(X')(1-P(Y'))}$	$\frac{P(X')P(\bar{Y}')+P(\bar{X})P(Y')-1}{2P(X')(1-P(Y'))}$
14	Moindre Contradiction	$\frac{P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}$	$-\frac{2P(X')P(Y')+P(X')}{2P(X')(1-P(Y'))}$
15	Lovinger	1	0
16	Cohen ou Kappa	$\frac{P(X')+P(Y')+2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}$	0
17	Indice d'implication	$-\frac{1}{\sqrt{nP(X')(1-P(Y'))}}$	0
18	Spécificité	$\frac{1-P(X')}{P(X')(1-P(Y'))}$	$-\frac{1-P(X')-P(Y')+P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}$
19	Fiabilité négative	$\frac{1}{P(Y')}$	$-\frac{1-P(X')-P(Y')+P(X')P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}$

Tableau 5.2 – Coefficients x_f et y_f des mesures M_{GK} normalisables

5.7.2 Coefficients x_d et y_d des mesures M_{GK} normalisables

N°	Mesures	x_d	y_d
1	Moindre Contradiction	$\frac{1}{2P(Y')}$	$-\frac{2P(Y')-1}{2P(Y')}$
2	Fiabilité négative	$\frac{1-P(Y')}{P(Y')P(Y')}$	$-\frac{1-P(X')-P(Y')+P(X')P(Y')}{P(Y')P(Y')}$
3	M_{GK}	1	0
4	Rappel	$\frac{1}{P(Y')}$	-1
5	Lift	1	-1
6	Leverage	$\frac{1}{P(Y')}$	$-P(\bar{X})$
7	Confiance centrée	$\frac{1}{P(Y')}$	0
8	Facteur de certitude	$\frac{1-P(Y')}{P(Y')}$	0
9	Laplace	$\frac{n_T P(X')+2}{n_T P(X')P(Y')}$	$-\frac{n_T P(X')+1}{n_T P(X')P(Y')}$
10	ϕ -Coefficient	$-\frac{n_T P(X')P(Y')+1}{P(X')P(Y')}$	0
11	Piatetsky-Shapiro	$\frac{1}{P(X')P(Y')}$	0
12	Cosinus ou Ochiai	$\frac{1}{\sqrt{P(X')P(Y')}}}$	-1
13	Accuracy	$\frac{1}{P(X')P(Y')}$	$\frac{1-P(X')P(\bar{Y}')+P(\bar{X}')P(Y')}{2P(X')P(Y')}$
14	Support	$\frac{1}{P(X')P(Y')}$	-1
15	Lovinger	$\frac{1-P(Y')}{2P(Y')}$	0
16	Cohen ou Kappa	$\frac{P(X')+P(Y')-2P(X')(Y')}{2P(Y')P(Y')}$	0
17	Indice d'implication	$\frac{\sqrt{P(X')(1-(Y'))}}{\sqrt{n_T P(Y')P(Y')}}}$	0

18	Spécificité	$\frac{1-P(Y')}{P(Y')P(Y')}$	$-\frac{1-P(X')-P(Y')+P(X')P(Y')}{P(Y')P(Y')}$
19	Confiance	$\frac{1}{P(Y')}$	-1

Tableau 5.3 – Coefficients x_d et y_d des mesures M_{GK} normalisables

5.8 Mesures normalisables à normalisées différentes de M_{GK}

Les mesures suivantes vérifient la condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure de qualité soit normalisable, mais leurs normalisées associées ne sont pas M_{GK} .

N°	Mesures	Expression
1	Jaccard	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X') + P(Y') - P(X' \cap Y')}$
2	Zhang	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\max(P(X' \cap Y')P(\bar{Y}'), P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y'))}$
3	Q de Yule	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}') - P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}') + P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}$
4	Y de Yule	$\frac{\sqrt{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} - \sqrt{P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}}{\sqrt{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} + \sqrt{P(X' \cap \bar{Y}')P(\bar{X}' \cap Y')}}}$
5	J-Mesure	$P(X' \cap Y') \log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')} + P(X' \cap \bar{Y}') \log \frac{P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X')P(\bar{Y}')}$

Tableau 5.4 – Mesures normalisables à normalisées différentes de M_{GK}

5.9 Mesures non normalisables

Les mesures suivantes ne sont pas normalisables à l'aide d'un homéomorphisme affine.

N°	Mesure de qualité	Expression de $\mu(X \rightarrow Y)$	Justification
1	Multiplicateur de côte	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')P(Y')}$	$\mu_{imp} = +\infty$
2	Dépendance pondérée	$\left(\left(\frac{P(Y'/X')}{P(X')} \right)^k - 1 \right) (P(X' \cap Y'))^m$	$\mu_{imp} = \mu_{inc}$
3	Conviction	$\frac{P(X')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')}$	$\mu_{imp} = +\infty$
4	Odd-Ratio	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(\bar{X}' \cap Y')P(X' \cap \bar{Y}')}$	$\mu_{imp} = +\infty$
5	Gain-Informel	$\log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$	$\mu_{imp} = +\infty$
6	Exemple contre exemple	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X' \cap Y')}$	$\mu_{inc} = -\infty$
7	Klogsen	$\sqrt{P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} (P(X'/Y') - P(Y'))$	$\mu_{inc} = \mu_{imp}$

8	Sebag	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X' \cap \bar{Y})}$	$\mu_{imp} = +\infty$
9	Support à sens unique	$P(Y'/X') \log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$	$\mu_{imp} = \mu_{inc}$
10	Support à double sens	$P(X' \cap Y') \log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$	$\mu_{imp} = \mu_{inc}$
11	Couverture	$P(X')$	$\mu_{imp} = \mu_{ind} = \mu_{inc}$
12	Prévalence	$P(Y')$	$\mu_{imp} = \mu_{ind} = \mu_{inc}$

Tableau 5.5 – Mesures non affines normalisables

5.10 Conclusion partielle

En bref, voilà donc les travaux des recherches déjà faits à propos des normalisations des mesures probabilistes de qualité. Rappelons que lesdits travaux ont été effectués par André Totohasina et Daniel Rajaonasy Feno dans [Tot03], [Fen07], [Tot08]. Ils ont traité le problème (normalisation) suivant les méthodes sus-indiquées. Dans leurs travaux respectifs, nous avons prouvé que l'objectif mathématique de la normalisation des mesures probabilistes de qualité est exactement de ramener les valeurs d'une mesure de qualité sur l'intervalle $[-1; 1]$ toute en reflétant les situations de référence telles que l'incompatibilité, la dépendance négative, l'indépendance, la dépendance positive et l'implication logique entre la prémisse et le conséquent d'une règle. Dans leurs travaux, nous avons vu également que toutes les normalisées des mesures obtenues sont comparables et quasiment convergent au sens de normalisation vers la mesure M_{GK} .

Effectivement, on peut dire que la mesure M_{GK} est une mesure de rapprochement. La normalisation est alors l'objet de l'une de ces études, tendant à dégager des relations fonctionnelles entre les différents mesures d'intérêt. En effet, dans leurs approches analytiques, nous avons montré qu'elle fait partie des moyens pour unifier ces différentes mesures de qualité qui est une poursuite des travaux présentés dans [Tot03]. De plus, leurs approches analytiques nous ont permis déjà de classifier les mesures de qualité proposées dans la littérature selon trois classes : les mesures de qualité M_{GK} -normalisables sur lesquelles contiennent la plupart des mesures de qualité qu'ils ont travaillées, les mesures de qualité normalisables dont leurs normalisées sont différentes de M_{GK} et les mesures de qualité non normalisables.

Bien qu'ils aient disposé d'une voie de normalisation des mesures, dans le contexte de fouille de données, le problème de normalisation des mesures probabilistes reste encore un sujet non résolu. Ainsi, nous voyons que, selon le contenu de leurs travaux, l'outil appelé homéomorphisme affine qu'ils ont utilisé présente tout de même une certaine faiblesse car il n'arrive pas à normaliser un nombre assez élevé de mesures. C'est pour cette raison que « le problème reste ouvert quant à la transformation qui permettrait la normalisation des autres mesures dans un sens encore à préciser » [Tot03], [Fen07], [Tot08]. Nous nous sommes intéressés à cette problématique, alors nous verrons dans le chapitre 7 de notre approche, une autre voie de normalisation que nos prédécesseurs.

Ainsi que se termine l'étude concernant l'état de l'art qui rencontre tous les informations de base mise en pratique dans nos travaux. A ce sujet, les parties suivantes introduisent l'exploitation des propriétés mathématiques en didactique de mathématiques et en science des données.

Troisième Partie



Présentation plus pointue
des riches puissances des homographies
faces aux études didactiques

Chapitre 6

Applications des homographies en Didactiques

6.1 Introduction partielle

Ce chapitre nous donne les applications de corollaire 2.4.3 (Cf. paragraphe 2.4.3) concernant l'interprétation géométrique de la homographie h et le mode de fonctionnement des algorithmes 2 et 3, des propositions 6, 7, 8 et 9 que nous avons proposés dans le chapitre 2 (Cf. paragraphe 2.6) et 2.9.2, permettant respectivement de construire des droites engendrant des symétries orthogonales composant deux rotations, ou de translation avec la rotation et de caractériser l'ensemble des points $\mathcal{M}_{\theta[\pi]}$ et $\mathcal{M}_{\theta[2\pi]}$ tel que $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \theta[\pi]$ et notamment sur la recherche de l'expression analytique et complexe d'une symétrie orthogonale.

De plus, nous proposons également ici la lisibilité de construction des problèmes variés basés sur une suite homographique à volonté selon que l'on puisse contrôler ou renforcer l'acquisition des suites arithmétiques ou géométriques eu égard aux propriétés des points fixes d'une homographie pour étudier des suites géométriques et arithmétiques en Première et en Terminale.

Aussi, grâce à la résolution des problèmes inverses d'homographie, nous montrerons l'existence d'une infinité d'homographies à un seul point fixe donné ou bien à deux points fixes donnés. Ce qui permet à tout enseignant d'élaborer efficacement ses propres suites homographiques de limite préalablement fixée à volonté, et ce, en une infinité de façons en disposant de deux ou trois degrés de liberté.

Par ailleurs, l'étude des géométries non-euclidiennes et des géométries dans les espaces à plus de trois dimensions n'aurait pas été concevable sans une approche analytique. De même, les techniques de la géométrie euclidienne analytique, en rendant possible la représentation graphique de nombres et d'expressions algébriques, ont apporté une meilleure compréhension du calcul infinitésimal, de la théorie des fonctions et d'autres problèmes mathématiques plus complexes. Ainsi, nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'étude de la géométrie elliptique dont la géométrie sphérique. A cet effet, nous recommandons ici une méthode de construction, manuellement ou à l'aide d'un ordinateur, des ellipses aboutissant aux études de la géométrie non euclidienne selon le modèle de Poincaré.

Ce chapitre nous informe également la caractérisation de la composée d'une ellipse avec une

droite et vice versa.

6.2 Image d'un ensemble par une homographie $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$



Exemple 9. Nous allons, à titre indicatif, utiliser la proposition 4 du chapitre 2.

6.2.1 Énoncé

Chercher l'image du cercle \mathcal{C} de centre $\frac{3i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ par la homographie $h : z \mapsto \frac{z-1}{z-i}$ qui n'est pas définie pour $z = i$.

6.2.2 Réponse

Il faut chercher plus précisément l'image de $\mathcal{C} - \{i\}$ qui est noté \mathcal{C}^* . On peut écrire $h(z) = 1 + \frac{i-1}{z-i}$ et donc l'application h est composée des applications : $z \mapsto z - i$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto (i-1)z$, $z \mapsto z + 1$. On connaît l'interprétation géométrique de chacune de ces cinq applications et les images successives de \mathcal{C}^* sont respectivement :

1. le cercle de centre $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé du point O ;
2. la droite $\mathcal{I}m(z) = i$ (l'image par l'inversion de centre O et de puissance 1 d'un cercle passant par O est une droite orthogonale à la droite joignant O au centre du cercle, c'est-à-dire ici l'axe imaginaire. Comme i est invariant par cette inversion, on obtient bien la droite $x = 0$) ;
3. la droite $\mathcal{I}m(z) = -i$;
4. la droite située à la distance $\sqrt{2}$ de O et orthogonale à la première bissectrice ($z \mapsto (i-1)z$ est la similitude directe de centre O , de rapport $|i-1| = \sqrt{2}$ et dont la mesure de l'angle est $\arg(i-1) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$). Cette droite a pour équation cartésienne $y = -(x-2)$;
5. la droite d'équation $y = -(x-3)$.

C'est cette dernière droite qui est donc l'image de \mathcal{C}^* par h .

Moralité 3. On voit sur cet exemple que la homographie h peut transformer des points cocycliques en des points alignés.

En cherchant par exemple l'image de la droite d'équation $\mathcal{I}m(z) = \frac{3i}{2}$, on voit que des points alignés peuvent avoir des images cocycliques : ce qui confirme le caractère non affine de l'inversion plane.

6.3 Application de lignes des niveaux de $|h|$ et $\arg h$



Exemple 10. Nous allons cette fois utiliser la proposition 2.9 du sous paragraphe 2.9.1 et les contenus du sous paragraphe 2.9.2 portant sur les lignes de niveau.

 Suite de l'Exemple 10.

6.3.1 Enoncé

Soit ψ_c une homographie définie par : $\psi_c(z) = \frac{z - 3i}{z + 4}$ et \mathcal{P} le plan euclidien muni d'un repère orthogonal directe $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.

- a - Interpréter géométriquement la homographie ψ_c
- b - M le point d'affixe z , préciser la nature de chacun des ensembles $(\Gamma_{\lambda'})$, $(\Delta_{2\pi})$ et (Π_π) définis respectivement par :

$$\begin{aligned}(\Gamma_{\lambda'}) &= \{M \in (\mathcal{P}) ; |\psi_c| = \lambda'/\lambda' \in \mathbb{R}\}; \\(\Delta_{2\pi}) &= \{M \in (\mathcal{P}) ; \arg \psi_c = \theta_c + 2\pi\mathbb{Z}\}; \\(\Pi_\pi) &= \{M \in (P) ; \arg \psi_c = \theta_c + \pi\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

- c - Construire, dans \mathcal{R} , $(\Delta_{2\pi})$, (Γ) et (Π_π) pour les deux cas $\lambda' = 1$ et $\theta_c = \frac{\pi}{2}$.

6.3.2 Réponse

- a - Interprétation géométrique de la homographie ψ_c .

Si on note par exemple A le point d'affixe $a = 3i$ et B celui d'affixe $b = -4$, alors on peut tirer immédiatement que : $|\psi_c| = \frac{AM}{BM}$ et $\arg \psi_c = \text{mes}(\widehat{B\vec{M}, A\vec{M}})$.

- b - M le point d'affixe z , précisons la nature de chacun ensemble des $(\Delta_{2\pi})$, $(\Gamma_{\lambda'})$ et (Π_π) définis respectivement par :

$$\begin{aligned}(\Gamma_{\lambda'}) &= \{M \in (\mathcal{P}) ; |\psi_c| = \lambda'/\lambda' \in \mathbb{R}\}; \\(\Pi_\pi) &= \{M \in (P) ; \arg \psi_c = \theta_c + \pi\mathbb{Z}\}; \\(\Delta_{2\pi}) &= \{M \in (\mathcal{P}) ; \arg \psi_c = \theta_c + 2\pi\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Pour $(\Gamma_{\lambda'})$, utilisons les contenus du sous paragraphe 2.9.1 nous avons :

- ★ si $\lambda' < 0$, alors $(\Gamma_{\lambda'}) = \emptyset$;
- ★ si $\lambda' = 0$, alors $(\Gamma_{\lambda'}) = \{A\}$;
- ★ si $\lambda' = 1$, alors $(\Gamma_{\lambda'})$ est la droite médiatrice du segment $[AB]$;
- ★ si $\lambda' > 0$ et $\lambda' \neq 1$, alors $(\Gamma_{\lambda'})$ est le cercle de diamètre $[GL]$, où G est le barycentre de $\{(A, 1), (B, \lambda')\}$ et L est le barycentre de $\{(A, 1), (B, -\lambda')\}$.

Pour (Π_π) , appliquons toujours les contenus du paragraphe 2.9.2 remarque 9 ; nous pouvons tirer que (Π_π) est le cercle d'équation réduite $(x + 2)^2 + (y - 3/2)^2 = (5/2)^2$ (cf. figure 6.4). Pour $(\Delta_{2\pi})$, en appliquant les contenus du paragraphe 2.9.2 ; nous pouvons tirer que : $(\Delta_{2\pi})$ est un arc ouvert du cercle de diamètre $[AB]$ d'extrémités A et B privé des points A et B d'équation $(x + 2)^2 + (y - 3/2)^2 = (5/2)^2$ (cf. figure 6.4), [AT19c].

- c - Construction dans \mathcal{P} , $(\Delta_{2\pi})$, $(\Gamma_{\lambda'})$ et (Π_π) pour les deux cas $k = 1$ et $\theta_c = \frac{\pi}{2}$.

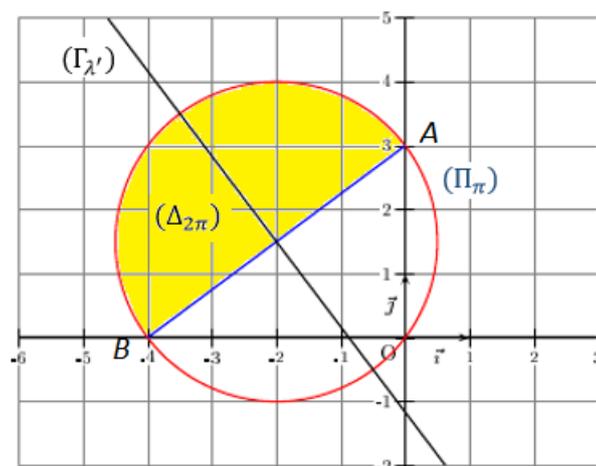


FIGURE 6.1 – Construction géométrique des ensembles $(\Delta_{2\pi})$, $(\Gamma_{\lambda'})$ et (Π_{π})

6.4 Applications des théories d'angle au centre et des angles interceptant le même arc

Cette section va nous livrer l'application de paragraphe 2.5.



Exemple 11. On va traiter l'extrait du BACC S 2007 à Madagascar.

6.4.1 Énoncé

Dans le plan orienté (\mathcal{P}) , on considère le carré $ABCD$ de centre O tel que $\text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$. Soit E le milieu du segment $[CD]$. On considère le carré $DEFG$ de centre O' où $\text{mes}(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}) = \frac{\pi}{2}$. On note respectivement (Γ) et (Γ') les cercles circonscrits aux carrés $ABCD$ et $DEFG$.

1. Faire une figure avec $AB = 4\text{cm}$.
 - ★ Soit \mathcal{S} la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B .
 - a - Déterminer le rapport et l'angle de \mathcal{S} .
 - b - Préciser l'image du point E par \mathcal{S} et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})$.
 - ★ On note I le point d'intersection des droites (AE) et (BF) .
 - a - Placer le point I sur la figure.
 - b - Montrer que le point I est l'intersection des cercles (Γ) et (Γ') .
 - c - En déduire que les droites (ID) et (BF) sont perpendiculaires.
 - ★ On considère la symétrie orthogonale S_{Δ} d'axe $\Delta = (OO')$. Montrer que $S_{\Delta}(D) = I$.

6.4.2 Réponse

1. Figure

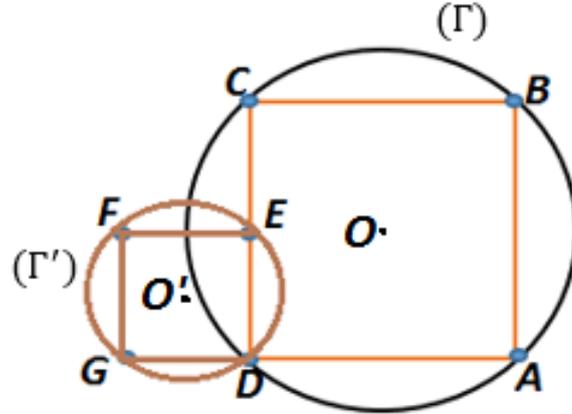


FIGURE 6.2 – Carrés inscrits

2. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B

a - Rapport et l'angle de S .

On note par θ cet angle et k celui de rapport.

Comme $\begin{cases} S(D) = D \\ S(A) = B \end{cases}$, la théorie de la similitude directe nous conduit d'en déduire que

$$\theta = \text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{4} \text{ et } k = \frac{BD}{AD} = \sqrt{2}.$$

b - L'image du point E par S et la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})$.

Comme $\text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}) = \text{mes}(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FD})$, donc $S(E) = F$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}) = \theta$.

3. On note I le point d'intersection des droites (AE) et (BF) .

a - Emplacement du point I .

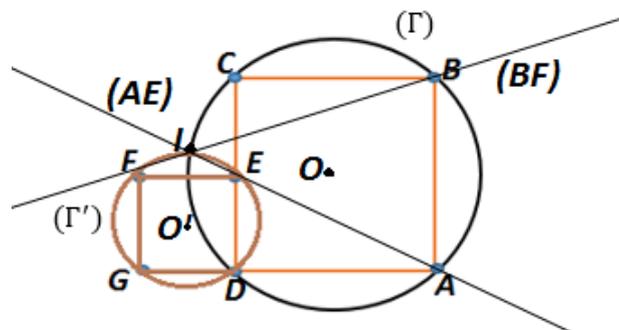


FIGURE 6.3 – Emplacement du point I

b - Le point I est l'intersection des cercles (Γ) et (Γ') .

Il s'agit de vérifier que I appartient à la fois (Γ) et à (Γ') .

Considérons alors l'arc \widehat{ID} de (Γ) (cf. figure 6.4).

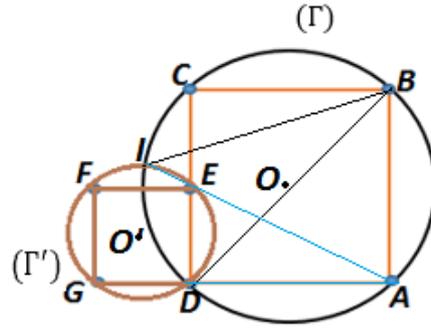


FIGURE 6.4 – Angles interceptés l'arc \widehat{ID} de (Γ)

Ici les angles \widehat{DBI} et \widehat{DAI} interceptent le même arc \widehat{ID} . Donc, ils sont égaux. Autrement dit, $\text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}) = \text{mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI})$ c'est à dire $I \in (\Gamma)$.

De plus, considérons cette fois l'arc \widehat{DI} de (Γ') (cf. figure 6.5).

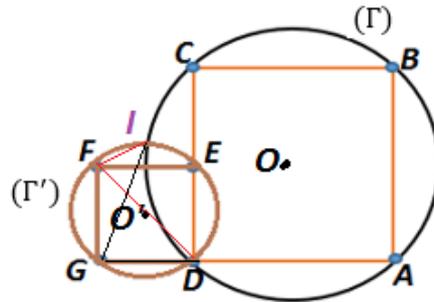


FIGURE 6.5 – Angles interceptés l'arc \widehat{DI} de (Γ')

Cette fois-ci les angles \widehat{IFD} et \widehat{IGD} interceptent le même arc \widehat{DI} de (Γ') . Ils sont alors égaux. Autrement dit, $\text{mes}(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GI}) = \text{mes}(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FI})$ c'est à dire $I \in (\Gamma')$. Puisque $I \in (\Gamma)$, $I \in (\Gamma')$ nous pouvons alors conclure que le point I est l'intersection de (Γ) et (Γ') .

c - Les droites (ID) et (BF) sont perpendiculaires.

Considérons l'arc \widehat{FD} de (Γ') (cf. figure 6.6), sachant que $\text{mes}(\overrightarrow{O'F}, \overrightarrow{O'D}) = \pi$.

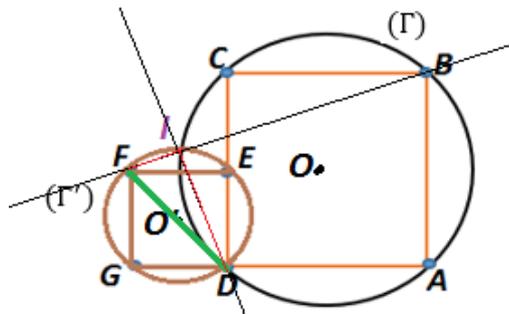


FIGURE 6.6 – Perpendicularité de (ID) et (BF)

Il est en effet clair que l'angle \widehat{IFD} intercepte l'arc \widehat{FD} du demi-cercle de diamètre $[DF]$ de (Γ') . Par la suite, $\text{mes}(\widehat{IF}, \widehat{ID}) = \frac{\pi}{2}$. D'où, on peut tirer immédiatement que les deux droites (ID) et (BF) sont perpendiculaire.

4. On considère la symétrie orthogonale S_{Δ} d'axe $\Delta = (OO')$. On a : $S_{\Delta}(D) = I$.
O va montrer que $S_{\Delta}(D) = I$

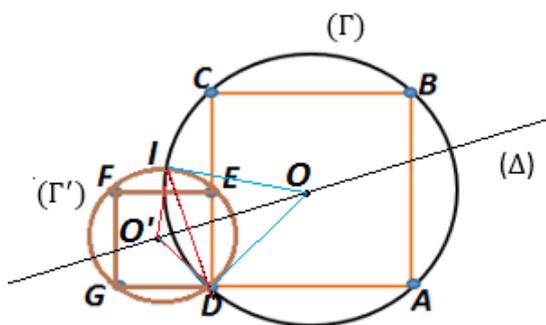


FIGURE 6.7 – $S_{\Delta}(D) = I$

Il s'agit de montrer que (Δ) est la médiatrice de $[ID]$.

- ★ Les points I et D appartiennent à (Γ) , donc $IO = OD = R$ où R est le rayon de (Γ) . Il s'ensuit alors que le triangle OID est isocèle en O . Cela nous confirme que O appartient à la médiatrice de base de IOD .
- ★ Les points I et D appartiennent à (Γ') , donc $IO' = O'D = r$ où r est le rayon de (Γ') . Il s'ensuit alors que le triangle $O'ID$ est isocèle en O' . Cela nous confirme que O' appartient à la médiatrice de base de $IO'D$.

Les points O et O' appartiennent tous les deux à la médiatrice de $[ID]$. On peut alors tirer que la droite (OO') est la médiatrice de $[ID]$. D'où $S_{\Delta}(D) = I$.

Moralité 4. Avec tous les acquis sur l'esquisse de construction en classe antérieure, on peut quand même résoudre beaucoup de problèmes en géométries du niveau de terminale S sans introduire les méthodes analytique et algébrique profondes.



Exemple 12. Application de décomposition des transformations, i.e on va utiliser les contenus du paragraphe 2.6. Plus précisément, il s'agit d'utiliser les algorithmes 2 et 3. Cet exemple est extrait du bac S 2000.

6.4.3 Enoncé

Dans un plan orienté \mathcal{P} , on considère le triangle direct ABC isocèle et rectangle en A . On note par :

- I le milieu du segment $[BC]$;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- t la translation de vecteur \overrightarrow{BC} ;
- $g = \text{tor}_B$ et $f = r_C \circ g$.

 **Suite de l'Exemple**

1. a - Caractériser g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales.
 b - Caractériser f en décomposant r_C et g en deux symétries orthogonales.
2. Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre A et passant par B . La demi-droite $[AI)$, d'origine A et contenant I , coupe (\mathcal{C}) au point B' . Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale d'axe (Δ) qui transforme B en B' . Déterminer alors l'axe de \mathcal{S} .

6.4.4 Réponse

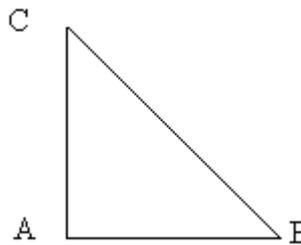


FIGURE 6.8 – Triangle ABC

1.a - Caractérisation de g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales

Notre objectif ici est d'avoir $t = S_{d_1}oS_{\Delta}$ et $r_B = S_{\Delta}oS_{d_2}$ telles que $g = tor_B = S_{d_1}oS_{\Delta}oS_{\Delta}oS_{d_2} = S_{d_1}oS_{d_2}$.

Par la suite, d'après l'algorithme 2 et 3 définis au paragraphe 2.6 nous avons :

1. la droite (Δ) engendrant la symétrie orthogonale S_{Δ} doit être une droite perpendiculaire au vecteur \overrightarrow{BC} et passant par le point B ;
2. la droite (d_1) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_1} est l'image de (Δ) par une translation de vecteur $\frac{\overrightarrow{BC}}{2}$;
3. la droite (d_2) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_2} est la droite image de (Δ) par une rotation r_B d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Notons que toutes ces droites sont représentées sur la figure 6.9.

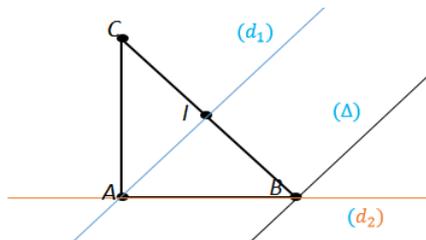


FIGURE 6.9 – Composition d'une translation par une rotation

Et finalement, la transformation $g = tor_B = S_{d_1}oS_{\Delta}oS_{\Delta}oS_{d_2} = S_{d_1}oS_{d_2}$ est une rotation d'angle $2\text{mes}(\widehat{d_2d_1}) = \frac{\pi}{2}$ et de centre $(d_1) \cap (d_2)$ qui est le point A .

b - Caractérisation de la transformation f en décomposant r_C et g en deux symétries orthogonales

Notre objectif ici est d'avoir $r_C = S_{d_1} \circ S_{\Delta}$ et $g = S_{\Delta} \circ S_{d_2}$ telles que $f = r_C \circ g = S_{d_1} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} \circ S_{d_2} = S_{d_1} \circ S_{d_2}$ en connaissant que $g = r_A$.

Par la suite, d'après l'algorithme ci-dessus nous avons :

1. la droite (Δ) engendrant la symétrie orthogonale S_{Δ} doit être une droite passant par les deux points centre de deux rotations dont (AC) ;
2. la droite (d_1) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_1} est la droite image de (Δ) par une rotation r_B d'angle $\frac{\pi}{4}$;
3. la droite (d_2) engendrant la symétrie orthogonale S_{d_2} est la droite image de (Δ) par une rotation r_B d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Notons que toutes ces droites sont représentées sur la figure 6.10.

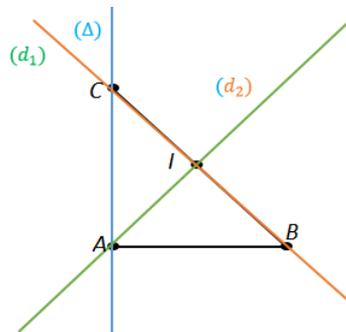


FIGURE 6.10 – Composition de deux rotations

Et finalement, la transformation $f = r_C \circ g = S_{d_1} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} \circ S_{d_2} = S_{d_1} \circ S_{d_2}$ est une rotation d'angle $2\text{mes}(\widehat{d_2 d_1}) = \pi$ et de centre $(d_1) \cap (d_2)$ qui est le point I .

Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre A et passant par B . La demi-droite $[AI)$, d'origine A et contenant I , coupe (\mathcal{C}) au point B' . Il existe une symétrie orthogonale d'axe (Δ) qui transforme B en B' . Les deux distances AB et AC sont égales. Le cercle (\mathcal{C}) est de diamètre $[BC]$. Or, I est le milieu de $[BC]$ et $B' \in (\mathcal{C})$. Cela veut dire que $[AB']$ est le diamètre du cercle (\mathcal{C}) . Autrement dit le quadrilatère $ABB'C$ est un carré et donc le triangle IBB' est isocèle en I de base $[BB']$. Il existe en effet une seule droite passant par I et médiatrice de $[BB']$ dont l'axe de \mathcal{S} .

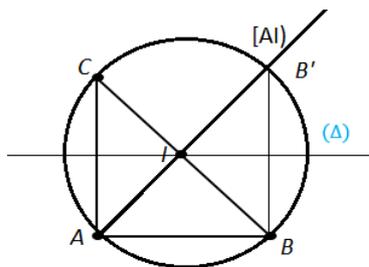


FIGURE 6.11 – Existence d'une symétrie orthogonale

6.5 Etude d'une suite récurrente « problèmes directs d'homographies »

Dans cette section, on va voir « *quels sont ce dont nous avons l'habitude quant à l'étude d'une suite récurrente notamment au niveau de Lycée ?* ».

6.5.1 Suite récurrente linéaire : problème classique (du côté des élèves)

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n : U_{n+1} = 3U_n - 5$.

- ★ Pour tout n , on pose $V_n = U_n - 5/2$.
 - a - Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.
 - b - Exprimer $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .
 - c - Calculer la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire celle de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6.5.2 Suite récurrente homographique propre : problème classique (du côté des élèves)

Nous voulons étudier la convergence d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exprimée par la relation de récurrence $U_{n+1} = h(U_n)$ à partir des situations des points fixes d'une homographie propre h préalablement donnés. Il s'agit d'utiliser le paragraphe 2.10.

Commençons par exposer une méthode classique pour l'étude de certaines suites récurrentes d'ordre 1. Si une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par une expression du type $U_{n+1} = h(U_n)$, où h une fonction homographique définie par : $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ sinon l'étude est triviale), alors de deux choses l'une :

- ★ soit la fonction h admet deux points fixes α_s et β_s , auquel cas on étudie la suite de terme général $V_n = \frac{U_n - \alpha_s}{U_n - \beta_s}$, et l'on s'aperçoit rapidement que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et on en tire après la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ★ sinon, h n'a qu'un seul point fixe α_s ou β_s , auquel cas on étudie la suite de terme général $V_n = \frac{1}{U_n - \alpha_s}$, qui est alors une suite arithmétique ; dans ce cas, on peut tirer immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha_s$.

6.5.3 Élaboration d'une suite géométrique auxiliaire

Si une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par une expression du type : $U_{n+1} = h(U_n)$ avec h une homographie de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ sinon l'étude est triviale), alors des deux choses l'une : soit la fonction h admet deux points fixes α_s et β_s , auquel cas on étudie la suite de terme général $V_n = \frac{U_n - \alpha_s}{U_n - \beta_s}$, et l'on s'aperçoit rapidement que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q' = \frac{a - c\alpha_s}{a - c\beta_s}$ et de premier terme V_p tel que $V_p = \frac{U_p - \alpha_s}{U_p - \beta_s}$ d'où, la proposition suivante [AT19a].

Proposition 20. *Etant donnée une homographie h ayant deux points fixes et on considère une suite homographique $U_{n+1} = h(U_n)$, alors on a les 4 cas possibles suivant les valeurs de la raison de la suite auxiliaire $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [AT19a] :*

- (i) si $|q'| > 1$, alors la suite U_n converge vers β_s ;
- (ii) si $|q'| < 1$, alors la suite U_n converge vers α ;
- (iii) si $|q'| = 1$, et le premier terme $V_p \neq 1$, alors la suite U_n converge vers $\pm \frac{\alpha_s - \beta_s V_p}{1 - V_p}$;
- (iv) sinon, alors la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Preuve

(i) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $U_{n+1} = h(U_n)$ telle qu'il existe deux réels non nuls α_s et β_s vérifiant les équations $h(\alpha_s) = \alpha_s$ et $h(\beta_s) = \beta_s$. Considérons une suite $V_n = \frac{U_n - \alpha_s}{U_n - \beta_s}$. Comme, nous l'avons déjà dit, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q' = \frac{a - c\alpha_s}{a - c\beta_s}$ et de premier terme V_p tel que $V_p = \frac{U_p - \alpha_s}{U_p - \beta_s}$. Nous pouvons en déduire que le terme général de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme V_p et de raison q' est définie par : $V_n = \frac{U_n - \alpha_s}{U_n - \beta_s} = (q')^{n-p} V_p = \left(\frac{a - c\alpha_s}{a - c\beta_s}\right)^{n-p} \frac{U_p - \alpha_s}{U_p - \beta_s}$. Nous pouvons en effet tirer que : si $|q'| > 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n - \alpha_s}{U_n - \beta_s} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a - c\alpha_s}{a - c\beta_s}\right)^{n-p} \frac{U_p - \alpha_s}{U_p - \beta_s} = \infty \tag{6.1}$$

Ce qui nous conduit d'en déduire que $U_n = \beta_s$. Il est en effet très facile de prouver que, (ii), (iii) et (iv) résulte de (6.1).



Exemple 13. Soit à étudier la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n : $U_{n+1} = \frac{U_n + 3}{2U_n}$. On commence par chercher les points fixes de la homographie $h : x \mapsto \frac{x+3}{2x}$. Ceux-ci sont les racines de l'équation $x + 3 = x(2x)$, c'est-à-dire -1 et $3/2$. On étudie donc la suite de terme général $\frac{U_n + 1}{U_n - 3/2}$ et appelons-la $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} - 3/2} = \frac{\frac{U_n + 3}{2U_n} + 1}{\frac{U_n + 3}{2U_n} - 3/2} \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{U_n + 1}{U_n - 3/2} \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right) V_n. \end{aligned}$$

Donc, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q' = -\frac{3}{2}$ et de premier terme $V_0 = -4$.

6.5.4 Convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Immédiatement, par la relation de récurrence, on peut tirer $\frac{U_n + 1}{U_n - 3/2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n \frac{U_0 + 1}{U_0 - 3/2}$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_n + 1}{U_n - 3/2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -4 \left(-\frac{3}{2}\right)^n \right| = +\infty$.
D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3/2$.

6.5.5 Élaboration d'une suite arithmétique auxiliaire

Comme nous l'avons déjà montré, si h n'a qu'un seul point fixe α_s , la suite de terme général $V_n = \frac{1}{U_n - \alpha_s}$ est alors une suite arithmétique de raison $r' = \frac{c}{a - \alpha_s c}$ et de premier terme

$V_p = \frac{1}{U_p - \alpha_s}$, dans ce cas, on peut tirer immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha_s$.



Exemple 14. On va étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n : U_{n+1} = \frac{10U_n - 25}{U_n}$. On commence par chercher les points fixes de la fonction de récurrence $f : z \mapsto \frac{10z - 25}{z}$. Ceux-ci sont les racines de l'équation $10x - 25 = x(x)$, c'est-à-dire 5. On étudie donc la suite auxiliaire de terme général $\frac{1}{U_n - 5}$ appelons-la V_n . On a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{U_{n+1} - 5} = \frac{1}{\frac{10U_n - 25}{U_n} - 5} \\ &= \left(\frac{1}{5}\right) \frac{U_n}{U_n - 5}. \\ \text{Donc, } V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{\frac{10U_n - 25}{U_n} - 5} - \frac{1}{U_n - 5} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

D'où, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{1}{4}$.

6.5.6 Convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Il est immédiat que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 5$. Cette méthode est certainement efficace et elle est mise à l'épreuve grâce à la recherche des points fixes de la fonction homographique qui permet de déterminer vers quoi la suite définie par récurrence peut tendre, si elle converge. Elle est aussi effectivement lieu attendu qu'avoir une application projective qui peut rendre l'infini à un nombre finie. En revanche, il est plus surprenant que cette méthode nous donne à coup sûr le comportement de la suite.

6.6 Problèmes inverses

Dans cette section, nous examinons les problèmes inverses des problèmes classiques ci-dessus ; autrement dit, on va voir « comment l'enseignant construire son propre sujet dans une salle de classe quant au problème de l'étude d'une suite élémentaire, toujours au niveaux de Lycée ? ». Il s'agit d'une extension naturelle des contenus du paragraphe 2.10.

6.6.1 Problèmes inverses d'une application affine

Du côté enseignant : « comment construire son propre sujet sur les suites linéaires ou arithmético-géométriques ? ». Il s'agit de trouver une application affine ayant un point fixe préalablement donné. Ce qui va servir à construire une suite arithmético-géométrique qu'il est d'usage d'enseigner aux élèves de terminales ou premières dans le cadre de l'étude des suites géométriques. D'où le théorème suivant.

Théorème 12. Recherche d'une infinité d'une application affine ayant un point fixe préalablement donné. Pour tout réel non nul α_s , il existe une infinité d'applications affines notées

h_{α_s} ayant α_s comme point fixe définies par : $h_{\alpha_s}(z) = az + b$ telle que $b = \alpha_s(1 - a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$ avec $|a| < 1$.

Corollaire 6. Pour tout réel α_s fixé, il existe une infinité de suites arithmético-géométriques qui convergent vers α_s . On dispose maintenant d'une méthode pour construire une suite arithmético-géométrique convergeant vers α_s à un degré de liberté.



Exemple 15. Construction d'une homographie ayant un point fixe $\alpha = 3$.

Soient deux réels $\alpha_s = 3$ et $a = \frac{1}{4}$. La suite arithmético-géométrique engendrée par $h_{\alpha_s a}$ définie par : $\begin{cases} U_0 \neq 3 \\ U_{n+1} = h_{\alpha_s a}(U_n) \end{cases}$ où, $h_{\alpha_s a}(z) = \frac{1}{4}z + \frac{9}{4}$ est telle que

$$\begin{cases} U_0 \neq 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{9}{4}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette suite arithmético-géométrique converge vers 3 comme souhaité.

6.6.2 Problèmes inverses des homographies propres

Cette fois ci, nous nous proposons de construire une suite homographique de limite préalablement fixée à volonté. Il s'agit ainsi d'un problème inverse d'homographie qui consiste à trouver :

- ★ soit une homographie complexe ou réelle h dont α_s est justement son unique point fixe ;
- ★ soit une homographie complexe ou réelle h à deux points fixes dont α_s .

Examinons les deux cas séparément.

6.6.3 Homographie complexe ou réelle h dont α est son unique point fixe

Théorème 13. Pour un réel non nul α_s fixé, il existe une infinité d'homographies notées h_{α_s} ayant α_s comme unique point fixe définies par : $h_{\alpha_s} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ telles que $b = -\alpha_s^2 c$, $a = 4\alpha_s c$, $d = 2\alpha_s c$, $\forall (\alpha_s, c) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Preuve

Soit h une homographie définie par : $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Nous avons une expression :

$$h_{\alpha_s c}(z) = \frac{4\alpha_s cz - \alpha_s^2 c}{cz + 2\alpha_s c}. \text{ Ainsi, } h_{\alpha_s c}(z) = z \text{ est équivalente à } 4\alpha_s cz - \alpha_s^2 c = cz^2 + 2\alpha_s cz.$$

Donc, en remplaçant z par α_s nous avons : $4\alpha_s^2 c - \alpha_s^2 c = c\alpha_s^2 + 2\alpha_s^2 c$ et on a : $3\alpha_s^2 c = 3\alpha_s^2 c$.

Unicité

Nous avons : $cz^2 - 2\alpha_s cz + \alpha_s^2 c = 0$. Nous constatons que le discriminant de la quantité

$cz^2 - 2\alpha_s cz + \alpha_s^2$ est $\Delta_s = 4\alpha_s^2 c^2 - 4\alpha_s^2 c^2 = 0$. D'où le théorème énoncé.



Remarque 16. On dispose ainsi de deux degrés de liberté sur les choix de α_s et c pour construire une suite homographique convergeant vers α_s et telle que la fonction homographique de récurrence admet α_s comme unique point fixe comme souhaité.

Corollaire 7. Il existe une infinité de suites homographiques $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers α_s . On dispose maintenant d'une méthode pour construire une suite homographique qui converge vers α_s de deux degrés de liberté.



Exemple 16. Soient deux réels $\alpha_s = 1$ et $c = 2$. La suite homographique engendrée par $h_{\alpha_s c}$ est définie par : $\begin{cases} U_0 \neq 1 \\ U_{n+1} = h_{\alpha_s c}(U_n) \end{cases}$ où $\alpha = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $a = 8$, $d = 4$. Donc, $\begin{cases} U_0 \neq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{8U_n - 2}{2U_n + 4} \end{cases}$. D'où, cette suite est définie par : $\begin{cases} U_0 \neq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2} \end{cases}$. On vérifie facilement que cette suite homographique converge vers 1 comme souhaité.

6.6.4 Homographie complexe ou réelle h à deux points fixes

Théorème 14. Pour deux réels α_s et β_s fixés, il existe une infinité d'homographies notées $h_{\alpha_s \beta_s}$, ayant α_s et β_s comme unique points fixes définies par : $h_{\alpha_s \beta_s} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ avec $b = -\alpha_s c \beta_s$, $a = 2(\alpha_s + \beta_s)c$, $d = (\alpha_s + \beta_s)c$, $\forall (\alpha, \beta_s, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$.

Preuve

Soit h une homographie définie par : $h : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$.

Nous avons une expression : $h_{\alpha_s c \beta_s}(z) = \frac{2(\alpha_s + \beta_s)cz - \alpha_s c \beta_s}{cz + (\alpha_s + \beta_s)c}$.

$$\begin{aligned} h_{\alpha_s c}(z) = z &\Leftrightarrow \frac{2(\alpha_s + \beta_s)cz - \alpha_s c \beta_s}{cz + (\alpha_s + \beta_s)c} = z \\ &\Leftrightarrow 2(\alpha_s + \beta_s)cz - \alpha_s c \beta_s = cz^2 + (\alpha_s + \beta_s)cz \end{aligned} \quad (6.2)$$

En remplaçant z par α_s dans l'égalité (6.2) on a : $2\alpha_s^2 c + \alpha_s c \beta_s = 2\alpha_s^2 c + \alpha_s c \beta_s$. De même, en le remplaçant par β_s nous avons $2c\beta_s^2 + \alpha_s c \beta_s = 2c\beta_s^2 + \alpha_s c \beta_s$. Donc, α_s et β_s sont deux solutions de l'équation $h_{\alpha_s c}(z) = z$. D'où le théorème énoncé.

Corollaire 8. Il existe une infinité de suites homographiques $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que les homographies correspondantes admettent deux points fixes préalablement donnés α_s et β_s . Comme pour le premier cas ci-dessus, on dispose ainsi d'une technique sûre pour construire une suite homographique ayant deux points fixes α_s et β_s disposant cette fois de trois degrés de liberté avec le choix de α_s , β_s et c .



Exemple 17. Soient trois réels $\alpha_s = 1$, $\beta_s = 2$ et $c = -3$. La suite homographique $h_{\alpha_s \beta_s c}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \neq \alpha_s \text{ et } U_0 \neq \beta_s \\ U_{n+1} = h_{\alpha_s \beta_s c}(U_n) \end{cases}, \text{ où } h_{\alpha_s \beta_s c}(z) = \frac{2(\alpha_s + \beta_s)cz - \alpha_s c \beta_s}{cz + (\alpha_s + \beta_s)c} \text{ telle que } \alpha_s = 1, c = -3,$$

$a = 18, d = -9, b = 6$ et $\beta_s = 2$.

D'où, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \notin \{1; 2\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3} \end{cases}$$

est une suite homographique dont la homographie correspondante a deux points fixes 1 et 2.

6.7 Homographie et géométrie hyperbolique non euclidienne selon le modèle de Poincaré

6.7.1 Rappels et définitions

a - Géométrie euclidienne

Il est bien connu que la géométrie dans le plan vue par Euclide repose principalement sur les 5 axiomes (aussi appelés postulats d'Euclide) suivants :

1. il existe toujours une droite qui passe par deux points du plan ;
2. tout segment peut être étendu suivant sa direction en une droite (infinie) ;
3. a partir d'un segment de droite, il existe un cercle dont le centre est un des points du segment et dont le rayon est la longueur du segment ;
4. tous les angles droits sont égaux entre eux ;
5. Etant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première.

b - Géométrie hyperbolique

En mathématiques, la géométrie hyperbolique (nommée parfois géométrie de Lobatchevski) est une géométrie non euclidienne vérifiant les quatre premiers postulats de la géométrie euclidienne mais non le cinquième. L'objectif de la quête d'un modèle est de satisfaire aux exigences suivantes :

1. avoir un plan qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien ;
2. avoir un plan qui ressemble à un plan et, en tous cas, qui soit de dimension 2, donc une surface ;
3. avoir des droites qui ressemblent à des droites, ou au moins qui soient des courbes, simples si possible ;
4. conserver les propriétés usuelles d'incidence c'est à dire :

- ★ par deux points distincts passe une droite et une seule ;
- ★ si A, B, C, D sont 4 points distincts tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes, alors les droites (AC) et (BD) sont sécantes ;
- ★ toute droite passe par au moins 3 points ;

pour le plan projectif, on peut les synthétiser ainsi :

- ★ par deux points distincts passe une droite et une seule ;
- ★ deux droites distinctes se coupent en un et un seul point ;
- ★ toute droite passe par au moins 3 points ;
- ★ il existe au moins 3 points non alignés.

5. Avoir une compatibilité entre les invariants des géométries (longueur, angle) et ceux du modèle (par sa structure euclidienne), donc avoir une représentation isométrique et/ou conforme, avec, notamment, des cercles qui ressemblent à des cercles ;
6. enfin, avoir une structure métrique sur le modèle telle que les droites apparaissent comme les géodésiques pour cette structure (les lignes de plus court chemin).

En fait, cette recherche de modèle est totalement désespérée si l'on ne réduit pas les exigences. Dans le cas de la géométrie elliptique, on ne peut avoir de modèle conforme qu'avec des arcs de cercles au lieu de droites. De plus, ces modèles ne seront pas vraiment des parties d'un espace euclidien (on devra toujours identifier des points). Cela tient au fait que le plan elliptique est un plan projectif (un plan n'est pas orientable donc ne se plonge pas comme une surface de \mathbb{R}^3). Cette-fois-ci le postulat euclidien des parallèles est remplacé par le postulat que « par un point extérieur à une droite passe plus d'une droite parallèle », on démontre qu'alors (Figure 6.12) il y a une infinité de droites parallèles. En géométrie hyperbolique, le théorème de Pythagore n'est plus valable et la somme des angles intérieurs d'un triangle n'est plus égale à 180° plus précisément, elle est toujours inférieure à cette valeur. Une droite est toujours définie comme la ligne de plus court chemin joignant deux points sur une surface. Lobatchevski, Klein et H. Poincaré ont créé des modèles de géométrie non euclidienne dans lesquelles on peut tracer une infinité de parallèles à une droite donnée et passant par un même point. On peut citer, en deux dimensions : le disque de Poincaré, le demi-plan de Poincaré [Jac12], [Sha90], [Sha91].

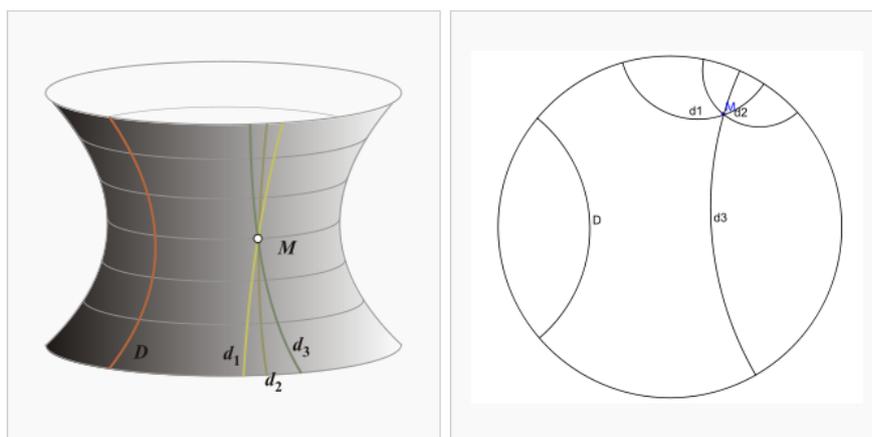


FIGURE 6.12 – Représentation graphique de disque de Lobatchevski et de Poincaré

Il existe en effet une infinité de droites qui, comme d_1 , d_2 et d_3 , passent par le point M et sont parallèles à la droite D (Figure 6.12).

6.7.2 Définition du demi-plan et droites hyperboliques de Poincaré

On considère la situation suivante, voisine de celle du demi-plan de Poincaré que nous verrons plus loin, mais plus simple. On se place dans \mathbb{R}^2 et le plan nouveau est le demi-plan supérieur : $D_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$. Les droites de D_m sont soit les demi-droites parallèles à l'axe des y contenues dans D_m (qu'on appellera les seigneurs parce qu'elles sont moins nombreuses), soit les demi-cercles d'origine un point de l'axe des x contenus dans D_m (les manants). Il est immédiat que les axiomes d'incidence et d'ordre d'Euclide-Hilbert sont exaucés. Le postulat des parallèles, lui, ne l'est pas. En effet, si D_m est un seigneur et A un point de D_m , alors il y a une unique parallèle à D_m passant par A , alors qu'au même moment, si D_m est un manant, il y en a une infinité c'est-à-dire toutes les demi-droites qui coupent D_m dans le demi-plan inférieur). Cela montre au passage que cette géométrie n'est pas homogène du côté des droites, ce qui suit à la disqualifier, eu égard à la géométrie euclidienne [BKO90].

6.8 Technique de construction d'une ellipse

Dans cette section, nous allons voir ou observer une technique de construction d'une ellipse. En effet, elle s'avère un outil de l'étude de la géométrie non euclidienne selon le modèle de Poincaré. De plus, elle est parmi des courbes les plus importantes en physique. En astronomie, les orbites de la Terre et des autres planètes autour du Soleil sont des ellipses. Elle est utilisée en ingénierie pour les arches de certains ponts et dans la conception d'engrenages pour certaines machines et même en architecture de construction monumentale en forme d'arc.

6.8.1 Rappel et définition



Définition 27. Une ellipse est une conique ayant la forme d'une courbe fermée, obtenue comme intersection d'un cône par un plan coupant une seule nappe de ce cône (figure 6.13).

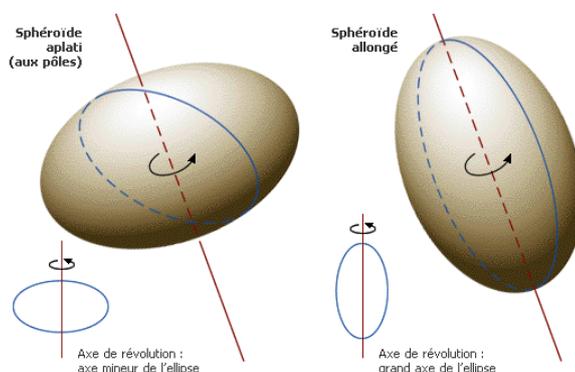


FIGURE 6.13 – Exemples d'ellipses

6.8.2 Approche fonctionnelle

Soit \mathcal{P} un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Il est bien connu que, pour tout couple $(q, r) \in (\mathbb{R}^*)^2$, l'équation réduite d'une ellipse y est définie par :

$$\left(\frac{x-a}{q}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1 \quad (6.3)$$

On note par (E) la représentation graphique de (6.3) sur \mathcal{P} .

Partons toujours de l'expression (6.3), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{(x-a)^2}{q^2} + \frac{(y-b)^2}{r^2} = 1 &\Leftrightarrow \frac{r^2}{q^2}(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (y-b)^2 = r^2 - \alpha_e^2(x-a)^2 \\ &\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - \alpha_e^2(x-a)^2} + b, \text{ avec } \alpha_e = \frac{r}{q}. \end{aligned}$$

Si on note par (\mathcal{C}_y^+) la représentation graphique de la fonction $x \mapsto y = +\sqrt{r^2 - \alpha_e^2(x-a)^2} + b$ et par (\mathcal{C}_y^-) celle de $x \mapsto y = -\sqrt{r^2 - \alpha_e^2(x-a)^2} + b$, alors $(E) = (\mathcal{C}_y^+) \cup (\mathcal{C}_y^-)$. La représentation graphique d'une ellipse dans le plan \mathcal{P} n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions, à une constante près, opposées $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e+}$ et $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e-}$ ainsi définies : $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e+}(x) = \sqrt{r^2 - (\alpha_e(x-a))^2} + b$ et $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e-}(x) = -\sqrt{r^2 - (\alpha_e(x-a))^2} + b$ où $(\alpha_e, a, b, r) \in \mathbb{R}^4$. Ces deux fonctions sont appelées fonctions caractéristiques d'une ellipse. Notons que les deux fonctions $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e+}$ et $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e-}$ caractérisant chacune une demi-ellipse, sont toutes définies et bien continues sur le même intervalle borné $\left[a - \frac{r}{\alpha_e}; a + \frac{r}{\alpha_e}\right]$.



Remarque 17. Cette approche pédagogique de la construction d'une ellipse aurait au moins l'avantage d'éviter une rupture cognitive chez des apprenants déjà bien habitués aux courbes représentatives des fonctions et la symétrie orthogonale, à une transformation verticale près, transformation géométrique déjà acquise dès fin de collège $\mathcal{C}_y^- = \mathcal{S}_{(y=b)}(\mathcal{C}_y^+)$ où $\mathcal{S}_{(y=b)}$ est la symétrie orthogonale d'axe, la droite d'équation $y = b$.

6.8.3 Descriptions des éléments caractéristiques de cette ellipse

Rappelons au passage que le centre de cette ellipse est toujours le point $I(a, b)$. Pour la visualisation de ses axes et de ses sommets, il faut examiner les valeurs du réel α_e . D'où la proposition suivante.

Proposition 21.

- (i) Si $|\alpha_e| = 1$, alors la réunion de deux courbes est un cercle de centre I et de rayon r ;
- (ii) Si $|\alpha_e| < 1$, alors la réunion de deux courbes représente une ellipse de grand axe l'axe des abscisses des sommets $S_1(a - \frac{r}{\alpha_e}, b)$, $S_2(a + \frac{r}{\alpha_e}, b)$ et $S_3(a, -r + b)$, $S_4(a, r + b)$;
- (iii) Si $|\alpha_e| > 1$ alors, la réunion de deux courbes représente une ellipse de grand axe l'axe des ordonnées des sommets $S_1(a - \frac{r}{\alpha_e}, b)$, $S_2(a + \frac{r}{\alpha_e}, b)$, $S_3(a, -r + b)$, $S_4(a, r + b)$.

6.8.4 Construction d'une ellipse dont le grand axe est situé sur l'axe des ordonnées

Pour comprendre la construction en question, partons d'un exemple. Signalons au passage que pour la visualisation des figures elliptiques utilisant les fonctions caractéristiques dans le plan \mathcal{P} , il est avantageé de combiner et/ou de coupler l'utilisation des logiciels « GeoGebra », « Derive5 », « Sine qua non », « Latex avec package PST+ », etc., en exploitant leur complémentarité.



Exemple 18. La représentation graphique de l'ellipse (E_1) des éléments caractéristiques $I(0, 2)$ et des sommets $S_1(-1, 2)$, $S_2(1, 2)$, $S_3(0, 0)$, $S_4(0, 4)$ n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions $F_{(4,0,2,2)}^{e+}$ et $F_{(4,0,2,2)}^{e-}$ définies par : $F_{(4,0,2,2)}^{e+}(x) = \sqrt{2^2 - (2x)^2} + 2$ et $F_{(4,0,2,2)}^{e-}(x) = -\sqrt{2^2 - (2x)^2} + 2$ (figure 6.14).

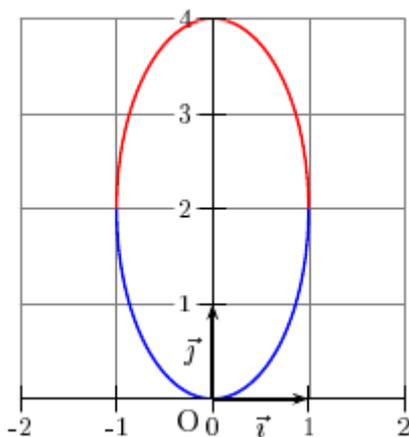


FIGURE 6.14 – Ellipse de centre $I(0, 2)$

6.8.5 Construction d'une ellipse dont le grand axe est situé sur l'axe des abscisses



Exemple 19. La représentation graphique de l'ellipse (E_2) des éléments caractéristiques $I(0, -1)$ et des sommets $S_1(-2, -1)$, $S_2(2, -1)$, $S_3(0, 0)$, $S_4(0, -2)$ n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions $F_{(1/2,0,-1,1)}^{e+}$ et $F_{(1/2,0,-1,1)}^{e-}$ définies par : $F_{(1/2,0,-1,1)}^{e+}(x) = \sqrt{1^2 - (\frac{x}{2})^2} - 1$ et $F_{(1/2,0,-1,1)}^{e-}(x) = -\sqrt{1^2 - (\frac{x}{2})^2} - 1$ (figure 6.15).

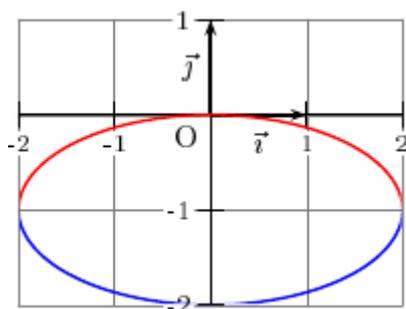


FIGURE 6.15 – Ellipse de centre $I(0, -1)$



Remarque 18. Face aux expressions de fonctions caractéristiques d'une ellipse, on peut trouver tous les points appartenant à cette ellipse.

6.9 Problème inverse

Etant donnés deux points $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ tels que $x_0 \neq x_1$, pour α_e et b fixés, « comment trouver une ellipse passant par les deux points sus-indiqués ? ». Ce qui va nous amener à chercher les réels a et r engendrant l'expression des fonctions caractéristiques de cette ellipse. A cet effet, nous introduisons le théorème suivant permettant de les trouver.

Théorème 15. Pour tous points $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ tels que $x_0 \neq x_1$, toute ellipse vérifiant l'expression $F_{(\alpha_e, a, b, r)}^{e\pm}(x) = \pm\sqrt{r^2 - (\alpha_e(x - a))^2} + b$, où $(\alpha_e, a, b, r) \in \mathbb{R}^4$, passant par ces points a pour éléments caractéristiques :

$$\begin{cases} b &= \zeta \\ \alpha_e &= \xi \\ a &= \frac{x_0^2 - x_1^2 + (y_0 - \zeta)^2 - (y_1 - \zeta)^2}{2\xi(x_0 - x_1)} \\ r &= \sqrt{(y_0 - \zeta)^2 + (\xi(x_0 - a))^2}. \end{cases}$$

Preuve : Il suffit de résoudre le système d'équations à deux inconnues (6.4) en fixant les réels ζ et ξ .

$$\begin{cases} (y_0 - \zeta)^2 &= r^2 - [\xi(x_0 - a)]^2 \\ (y_1 - \zeta)^2 &= r^2 - [\xi(x_1 - a)]^2 \end{cases} \quad (6.4)$$

D'où le théorème énoncé.

6.10 Construction des polygones elliptiques

Considérons les dix fonctions caractéristiques suivantes.

$$F_{(1/2, 2, 2, 2.6, 1)}^{e+}(x) = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}(x - 2)\right)^2} + 2.6, \quad \text{si } x \in [0; 4];$$

$$\begin{aligned}
 F_{(1/2, 2, 2.6, 1)}^{e-}(x) &= -\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}(x-2)\right)^2} + 2.6, & \text{si } x \in [0; 4]; \\
 F_{(2, 1/2, -1, 2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2} - 1, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\
 F_{(2, 1/2, -1, 2)}^{e-}(x) &= -\sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2} - 1, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\
 F_{(2, 2, -1, 2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - (2(x-2))^2} - 1, & \text{si } x \in [1; 3]; \\
 F_{(2, 2, -1, 2)}^{e-}(x) &= -\sqrt{2^2 - (2(x-2))^2} - 1, & \text{si } x \in [1; 3]; \\
 F_{(2, 7/2, -1, 2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)^2} - 1, & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right]; \\
 F_{(2, 7/2, -1, 2)}^{e-}(x) &= -\sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)^2} - 1, & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right]; \\
 F_{(1/2, 2, -1.5, 1)}^{e+}(x) &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}(x-2)\right)^2} - \frac{3}{2}, & \text{si } x \in [0; 4]; \\
 F_{(1/2, 2, -1.5, 1)}^{e-}(x) &= -\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}(x-2)\right)^2} - \frac{3}{2}, & \text{si } x \in [0; 4].
 \end{aligned}$$



La représentation graphique de chacune de ces dix fonctions sont les dix courbes ci-dessous représentant les triangles elliptiques et le pentagone elliptique où les points A, B, C, D, E, F, G, H engendrent l'hexagone elliptique $ABCDEF$, les triangles elliptiques BGC et DHE .

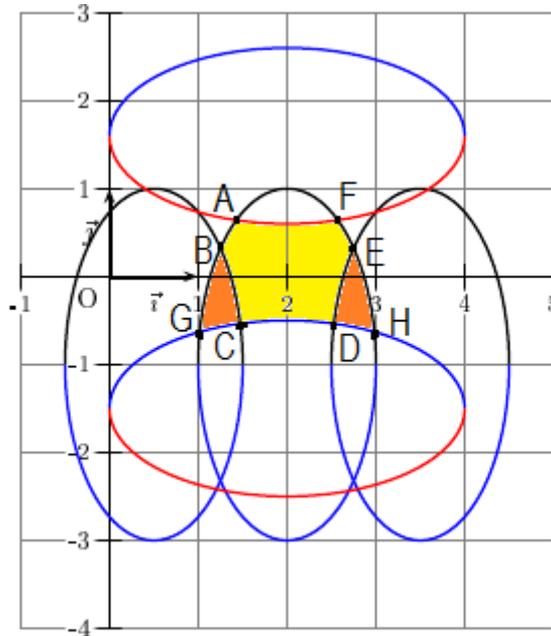


FIGURE 6.16 – Hexagone et triangles elliptiques

6.11 Études du cas où $b = 0$

Cette fois-ci, nous examinons spécifiquement le cas où $b = 0$. Par la suite, considérons les six fonctions caractéristiques exprimées respectivement d'une façon alternée en noire et en bleue dont leurs représentations graphiques sont respectivement données sur la figure 6.17.

$$\begin{aligned}
 F_{(2,1/2,0,2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2}, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\
 F_{(2,1/2,0,2)}^{e-}(x) &= -\sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2}, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\
 F_{(2,2,0,2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - (2(x - 2))^2}, & \text{si } x \in [1; 3]; \\
 F_{(2,2,0,2)}^{e-}(x) &= -\sqrt{2^2 - (2(x - 2))^2}, & \text{si } x \in [1; 3]; \\
 F_{(2,7/2,0,2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)^2}, & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right]; \\
 F_{(2,7/2,0,2)}^{e-}(x) &= -\sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)^2}, & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right];
 \end{aligned}$$



Exemple 20. La représentation graphique de chacune de ces six fonctions donne les six courbes ci-dessous (cf. 6.17).

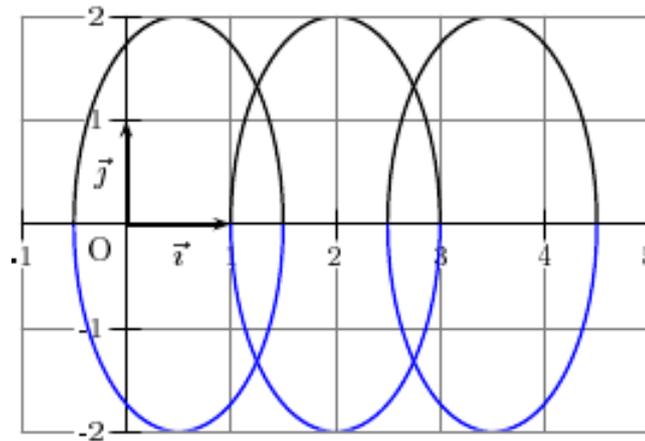


FIGURE 6.17 – Ellipses centrées sur l'axe des abscisses



De plus, considérons les quatre fonctions caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_{(2,1/2,0,2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2}, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\
 F_{(2,2,0,3)}^{e+}(x) &= \sqrt{3^2 - (2(x - 2))^2}, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]; \\
 F_{(2,3,0,3)}^{e+}(x) &= \sqrt{3^2 - (2(x - 3))^2}, & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]; \\
 F_{(2,4,0,2)}^{e+}(x) &= \sqrt{2^2 - (2(x - 4))^2}, & \text{si } x \in [3; 5].
 \end{aligned}$$

La représentation graphique de chacune de ces quatre fonctions sont respectivement les quatre courbes représentant des quatre demi-ellipses centrées sur l'axe des abscisses ci-dessous plus deux triangles elliptiques ABC et CDE engendrés par les quatre courbes.

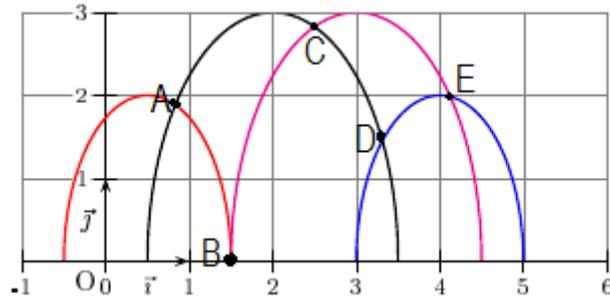


FIGURE 6.18 – Demi-ellipses centrées sur l'axe des abscisses

Moralité 5. Nous constatons que pour $b = 0$, alors $F_{(\alpha_e, a, 0, r)}^{e+}(x) = \sqrt{r^2 - (\alpha_e(x - a))^2}$ et $F_{(\alpha_e, a, 0, r)}^{e-}(x) = -\sqrt{r^2 - (\alpha_e(x - a))^2}$, où $(\alpha_e, a, 0, r) \in \mathbb{R}^4$, représentent respectivement chacune une demi-ellipse supérieure et inférieure centrées sur l'axe des abscisses (cf. figure 6.17). De plus, en enlevant la représentation graphique de la fonction $F_{(\alpha_e, a, 0, r)}^{e-}(x) = -\sqrt{r^2 - (\alpha_e(x - a))^2}$, on obtient tout l'ensemble de demi-ellipse supérieure centrée sur l'axe des abscisses (cf. figure 6.18). Cette configuration pourra être dénommée « une configuration étendue » de configuration existant dans la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré. Elle engendre la configuration définissant les droites hyperboliques sur ce modèle.

6.12 Construction d'un cercle à l'aide de ses fonctions caractéristiques

Comme nous l'avons déjà annoncé au paragraphe 6.8 proposition 6.8.3, la représentation graphique d'un cercle de centre $I(a, b)$ et de rayon r n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions $F_{(a, b, r)}^{c+}$ et $F_{(a, b, r)}^{c-}$ définies par : $F_{(a, b, r)}^{c+}(x) = \sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b$ et $F_{(a, b, r)}^{c-}(x) = -\sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b$. Ces deux fonctions sont appelées fonctions caractéristiques d'un cercle.



Exemple 21. La représentation graphique du cercle \mathcal{C} de centre $I(-3, 2)$ et de rayon $r = 4$ n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions $F_{(-3, 2, 2)}^{c+}$ et $F_{(-3, 2, 2)}^{c-}$ définies par : $F_{(-3, 2, 2)}^{c+}(x) = \sqrt{2^2 - (x + 3)^2} + 2$ et $F_{(-3, 2, 2)}^{c-}(x) = -\sqrt{2^2 - (x + 3)^2} + 2$ (figure 6.19).

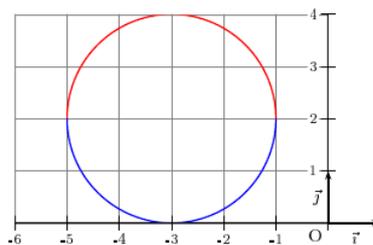


FIGURE 6.19 – Cercle de centre $I(-3, 2)$ et de rayon $r = 2$

6.12.1 Implication de cette approche à l'étude analytique de la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré

Notons que les deux fonctions $F_{(a,b,r)}^{c+}$ et $F_{(a,b,r)}^{c-}$ caractérisant un cercle de rayon r et de centre $I(a, b)$ sont toutes définies et bien continues sur le même intervalle borné $[a - r ; a + r]$. Par ailleurs, pour $b = 0$ et en enlevant la courbe de $F_{(a,b,r)}^{c-}$, on obtient les manants de Poincaré.



Exemple 22. Le manant de Poincaré suivant (cf. figure 6.20) est la représentation graphique de la fonction $F_{(0,4)}^{c+}(x) = \sqrt{4^2 - (x)^2}$.

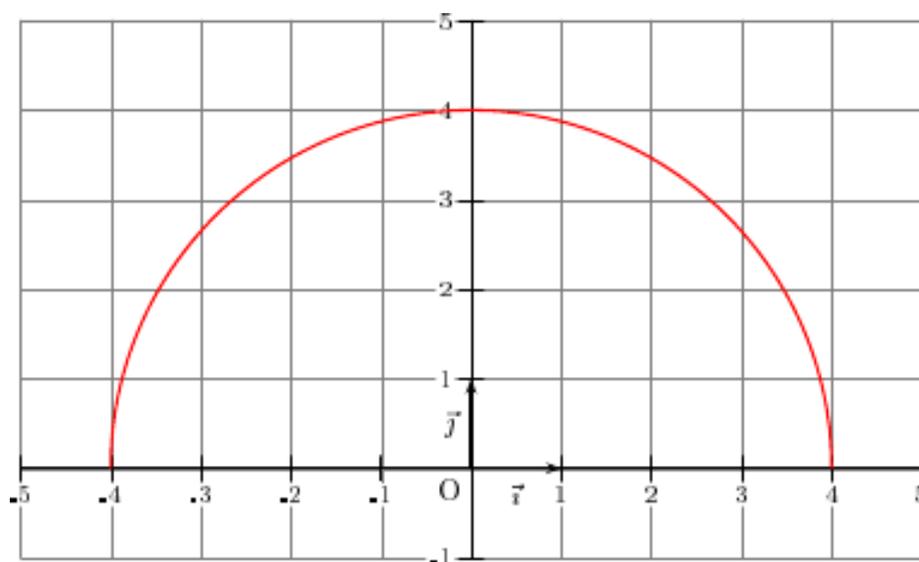


FIGURE 6.20 – Manant de Poincaré classique

On peut même tracer les différents polygones elliptiques à l'aide des fonctions caractéristiques définissant un cercle.



Exemple 23. Soient $F_{(0,4,2)}^{c-}$, $F_{(0,0,2)}^{c+}$, $F_{(4,4,2)}^{c-}$, $F_{(4,0,2)}^{c+}$ quatre fonctions définies par :

$$\begin{aligned} F_{(0,4,2)}^{c-}(x) &= -\sqrt{2^2 - x^2} + 4, & \text{si } x \in [0; 2]; \\ F_{(0,0,2)}^{c+}(x) &= \sqrt{2^2 - x^2}, & \text{si } x \in [0; 2]; \\ F_{(4,4,2)}^{c-}(x) &= -\sqrt{2^2 - (x - 4)^2} + 4, & \text{si } x \in [2; 4]; \\ F_{(4,0,2)}^{c+}(x) &= \sqrt{2^2 - (x - 4)^2}, & \text{si } x \in [2; 4]. \end{aligned}$$

La représentation graphique de chacune de ces quatre fonctions sont les quatre courbes ci-dessous représentant un carré elliptique (cf. figure 6.21).

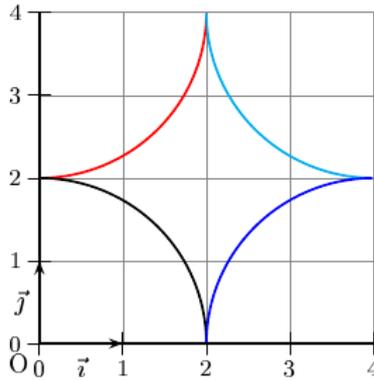


FIGURE 6.21 – Carré elliptique



Remarque 19. La possibilité de construire d'autres polygones hyperboliques se déduit naturellement de celui de carré hyperbolique.

6.12.2 Transformation d'une trajectoire circulaire en une trajectoire rectiligne

Il est bien connu qu'un mouvement est dit circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle. Alors qu'au même moment, qu'un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est une droite. Par la suite, la conversion d'une trajectoire circulaire en trajectoire rectiligne consiste à transformer les deux fonctions $F_{(a,b,r)}^{c+}$ et $F_{(a,b,r)}^{c-}$ en fonctions affines. Ce qui va servir à construire et/ou à chercher une transformation ($F_{c \rightarrow d}$ par exemple) qui peut rendre ces fonctions en fonction affine.

Soit $F_{(a,b,r)}^+$ une fonction définie sur l'intervalle borné $[a - r ; a + r]$ par :

$$F_{(a,b,r)}^{c+}(x) = \sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b.$$

D'abord, à une transformation près, cette fonction peut s'écrire $F_{(a,b,r)}^{c+}(x) = r\sqrt{1 - X^2} + b$ avec $X = \frac{x-a}{r}$. Rappelons au passage que si $-1 \leq X \leq 1$, alors $a - r \leq x \leq a + r$.

A cet effet, considérons maintenant une fonction $F_{c \rightarrow d}$ définie par : $F_{c \rightarrow d}(x) = \sqrt{1 - X^2}$. Notons que cette fonction représente une demi-ellipse.

Nous avons :

$$\begin{aligned} F_{(a,b,r)}^{c+} \circ F_{c \rightarrow d}(x) &= r\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - X^2}\right)^2} + b \\ &= rX + b \\ &= x + b - a \\ &= x + \lambda_e. \end{aligned}$$

Moralité 6. La fonction $F_{c \rightarrow d}$ ainsi définie est appelée fonction de conversion permettant de transformer les fonctions $F_{(a,b,r)}^{c+}$ et $F_{(a,b,r)}^{c-}$ caractérisant un cercle en fonction affine. En d'autres termes, si un corps homogène subit un mouvement circulaire tel que sa trajectoire est engendrée par un cercle de rayon r et de centre $I(a, b)$, alors son transformé rectiligne a pour trajectoire engendrée par la droite d'expression $x \mapsto x + \lambda_e$ où $\lambda_e = b - a$.

6.12.3 Transformation d'une trajectoire rectiligne en une trajectoire circulaire

Cette fois ci, partons de la fonction g_d définie par : $g_d(x) = \alpha_e x + \beta_e$. Par la suite, la conversion d'une trajectoire rectiligne à une trajectoire circulaire consiste à transformer la fonction g_d en fonction $F_{(a,b,r)}^{c+}$ ou $F_{(a,b,r)}^{c-}$. Il s'agit de construire et/ou de chercher une transformation ($F_{c \rightarrow d}$ par exemple) qui peut rendre cette fonction affine à une fonction $F_{(a,b,r)}^{c+}$ ou $F_{(a,b,r)}^{c-}$. A cet effet, considérons maintenant une fonction $F_{c \rightarrow d}$ définie par : $F_{d \rightarrow c}(x) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{\alpha_e}\right)^2} + b$. Cette fonction permet de transformer la fonction g_d en une cercle de rayon r et de centre $I(a, b)$ tel que $a = -\frac{\beta_e}{\alpha_e}$. Notons que cette fonction représente toujours une demi-ellipse.

En effet, $g_d(x) = \alpha_e x + \beta_e$ et $F_{d \rightarrow c}(x) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{\alpha_e}\right)^2} + b$ on a :

$$\begin{aligned} F_{d \rightarrow c} \circ g_d(x) &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{\alpha_e \left(x + \frac{\beta_e}{\alpha_e}\right)}{\alpha_e}\right)^2} + b \\ &= \sqrt{r^2 - \left(x + \frac{\beta_e}{\alpha_e}\right)^2} + b \\ &= \sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b \text{ où } a = -\frac{\beta_e}{\alpha_e}. \end{aligned}$$

Moralité 7. La fonction $F_{d \rightarrow c}$ ainsi définie est appelée fonction de conversion permettant de transformer une fonction affine à la fonction $F_{(a,b,r)}^{c+}$ ou $F_{(a,b,r)}^{c-}$. Autrement dit, si un corps homogène subit un mouvement rectiligne tel que sa trajectoire est une droite de la forme $x \mapsto \alpha_e x + \beta_e$, alors son transformé circulaire a pour trajectoire circulaire et cette trajectoire est engendrée par le cercle de rayon r et de centre $I(a, b)$ tel que $a = -\frac{\beta_e}{\alpha_e}$.

6.12.4 Droites hyperboliques selon le modèle de Poincaré

Comme nous l'avons déjà défini au sous paragraphe 6.7.2 ci-dessus que les droites hyperboliques sont les parties suivantes de D_m dont :

a - les demi-droites verticales d'origine située sur l'axe des x

Il s'agit de l'ensemble noté D_a défini par : $D_a = \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 / a : \text{constante et } y \geq 0\}$.

b - les demi-cercles sur le plan supérieur centrés sur l'axe des abscisses

Il s'agit de l'ensemble noté $D_{(a,r)}$ défini par : $D_{(a,r)} = \{(x, y) / (x - a)^2 + y^2 = r^2 \text{ et } y \geq 0\}$.



Exemple 24. L'ensemble $D_2 = \{(2, y) \in \mathbb{R}^2 / a : \text{constante et } y \geq 0\}$ et l'ensemble

$$D_3 = \{(3, y) \in \mathbb{R}^2 / a : \text{constante et } y \geq 0\}$$

sont représentés sur la figure 6.22.

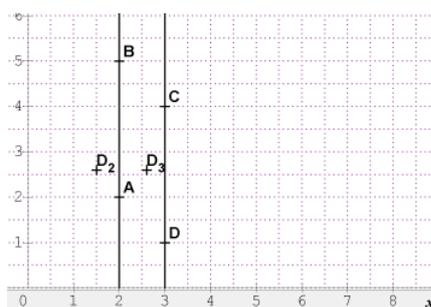


FIGURE 6.22 – Droites hyperboliques

6.12.5 Fonction caractérisant le demi-cercle de Poincaré



Définition 28. On considère un demi-cercle de centre $I(a, 0)$ et de rayon r centré sur l'axe des abscisses ou tout simplement l'ensemble noté $D_{(a,r)}$ défini par :

$$D_{(a,r)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a)^2 + y^2 = r^2 \text{ et } y \geq 0\}.$$

On appelle fonction caractéristique du demi-cercle définissant la droite hyperbolique de Poincaré la fonction continue et définie sur l'intervalle borné $[a - r ; a + r]$ qui peut tracer directement ledit demi-cercle et a pour expression : $F_{(a,r)}(x) = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$.

Il s'agit d'un cas particulier de la fonction $F_{(a,b,r)}^{c+}$ en prenant $b = 0$.



Exemple 25. L'ensemble $D_{(-2,3)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + 2)^2 + y^2 = 3^2, y \geq 0\}$ est représenté sur la figure 6.23. L'ensemble $D_{(-2,3)}$ n'est autre que la représentation graphique de la fonction $F_{(-2,3)}$ définie par :

$$F_{(-2,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x + 2)^2}.$$

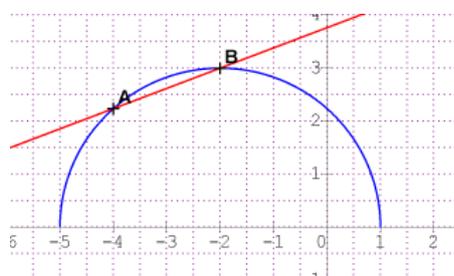


FIGURE 6.23 – Demi-cercle centré sur l'axe des abscisses x

Les deux droites (cf. figure 6.22 et 6.23) ont chacune de deux points tels qu'il n'y a qu'une seule droite qui passe en ces points. Cela prouve que la géométrie euclidienne est incluse dans la géométrie hyperbolique. Elle pourrait être la limite de la géométrie hyperbolique.

6.12.6 Construction d'un triangle dans un demi-plan de Poincaré

Pour construire ce triangle, tracer d'abord trois demi-cercle dans ce demi-plan.



Exemple 26. Soient quatre fonctions caractéristiques $F_{(-5,3)}$, $F_{(0,3)}$, $F_{(2,3)}$ et $F_{(4,3)}$ définies par : $F_{(-5,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x+5)^2}$; $F_{(0,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x)^2}$, $F_{(2,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x-2)^2}$; $F_{(4,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x-4)^2}$.

La représentation graphique de chacune de ces quatre fonctions sont les quatre demi-cercles ci-dessous (figure 6.24) et les points A , B , C sont tels que, $A(1, \sqrt{8})$, $B(2, \sqrt{5})$, $C(3, \sqrt{8})$. Nous voyons que ABC (figure 6.24) constitue un triangle, tel que la somme des trois angles qui constituent ce triangle est inférieure à 180° .

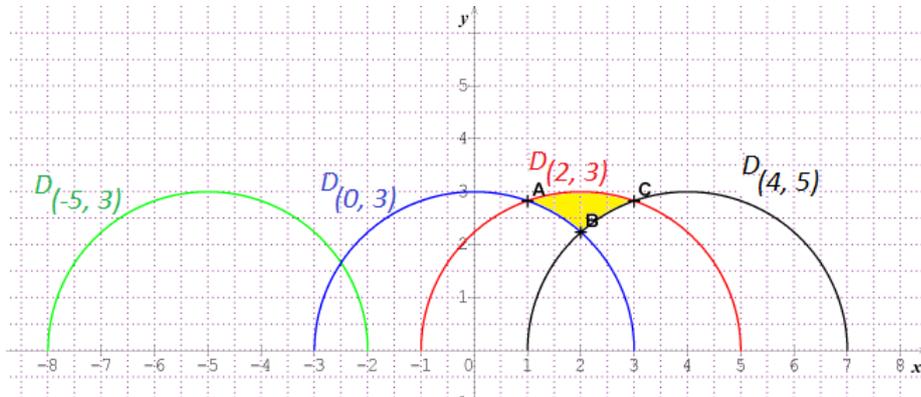


FIGURE 6.24 – Demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses x

De plus, les deux droites $D_{(2,3)}$ et $D_{(4,5)}$ sont parallèles à la droite $D_{(-5,3)}$. Or, le point C est un point en dehors de la droite $D_{(-5,3)}$, mais les deux droites $D_{(2,3)}$ et $D_{(4,5)}$ passent par ce point. Effectivement, ce résultat est en contredit avec le 5^{ème} postulat d'Euclide.



Remarque 20. La possibilité de construire d'autres polygones hyperboliques se déduit des constructions des triangles hyperboliques.



Exemple 27. Considérons les cinq fonctions caractéristiques suivantes :

$$F_{(-3,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x+3)^2} ;$$

$$F_{(0,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x)^2} ;$$

$$F_{(1,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x-1)^2} ;$$

$$F_{(1/2,1)}(x) = \sqrt{1^2 - (x-1/2)^2} ;$$

$$F_{(4,3)}(x) = \sqrt{3^2 - (x-4)^2} ;$$

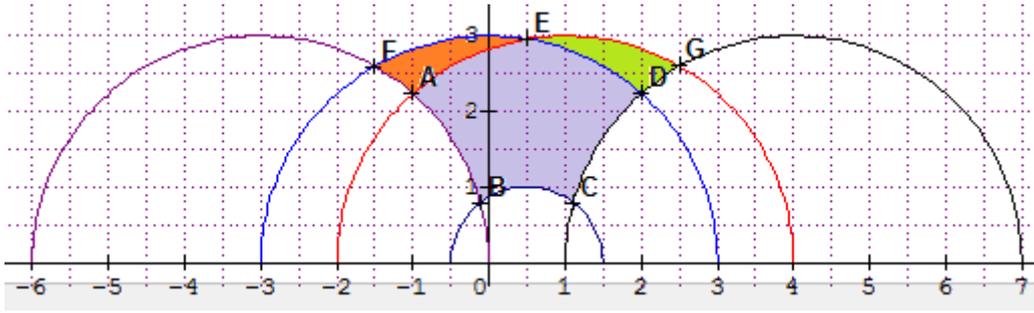


FIGURE 6.25 – Pentagone et les triangles hyperboliques

Face à l'expression de la fonction $F_{(a,r)}$ telle que $F_{(a,r)}(x) = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$ représentant la courbe de demi-cercle supérieur engendré par le cercle d'équation défini par : $D_{(a,r)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$, nous pouvons tirer un corollaire suivant.

Corollaire 9. *Pour tous points A et B tels que $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$, tout demi-cercle vérifiant l'expression $F_{(a,r)} = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$ passant en ces points où $x_0 \neq x_1$ a pour abscisse : $a = \frac{y_0^2 - y_1^2 - x_1^2 + x_0^2}{2(x_0 - x_1)}$ et de rayon $r = \sqrt{y_0^2 + (x_0 - a)^2}$ ou $r = \sqrt{y_1^2 + (x_1 - a)^2}$.*

Notons que ce corollaire résulte du théorème 15 en prenant $b = 0$ et $\alpha_e = 1$.

Lemme 2. *Dans le cas où $x_0 = x_1$ on obtient $D_a = \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 / a : \text{constante et } y \geq 0\}$ où D_a passe par les deux points, et $a = x_0 = x_1$.*

Cette fonction caractéristique nous permet également la possibilité ou l'occasion d'annoncer le théorème de parallélisme qui suit.

Théorème 16. *Deux droites $F_{(a_i, r_i)}$ et $F_{(a_j, r_j)}$ sont parallèles, si l'une aux moins des deux instructions suivantes sont satisfaites.*

- (i) soit $a_i = a_j$ et $r_i \neq r_j$;
- (ii) soit $r_i = r_j$ et $\{a_i + r_i < a_j - r_j$ si $a_i < a_j$ ou $a_j + r_j < a_i - r_i$ si $a_j < a_i\}$.

6.12.7 Homographie et géométrie hyperbolique

Comme nous l'avons déjà dit, au paragraphe 2.12 sous section 2.12.2 proposition 14 (ii), toute homographie de \mathcal{H}^+ conserve le demi-plan de Poincaré.

Considérons donc une homographie h définie par $h(z) = \frac{z+2}{z+3}$ et profitons la propriété ci-dessus pour trouver $h(ABC)$ du triangle défini sur la figure 6.24. Il est alors immédiat que $h(ABC) = A'B'C'$ un triangle situé sur le même plan.

6.12.8 Coordonnées des points A', B', C' image de A, B, C par h

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 6.8 sous paragraphe 6.8.4, pour la visualisation des figures hyperboliques dans le demi-plan de Poincaré, il est avantage de combiner et/ou de coupler l'utilisation des logiciels « GeoGebra », « Derive5 », « Sine qua non » en exploitant leur complémentarité.

En effet, les points A', B' et C' sont tels que $A'(\frac{5}{6}; \frac{\sqrt{2}}{12})$, $B'(\frac{5}{6}; \frac{\sqrt{5}}{30})$, $C'(\frac{19}{22}; \frac{\sqrt{2}}{22})$. Par la suite, l'image de triangle ABC tel que $A(1, \sqrt{8})$, $B(2, \sqrt{5})$, $C(3, \sqrt{5})$ par la homographie h est le triangle $A'B'C'$ tel que les points $A'(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{2}}{12})$, $B'(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{5}}{30})$, $C'(\frac{19}{22}, \frac{\sqrt{2}}{22})$ sont tous situés sur le même plan de Poincaré (figure 6.26).

6.12.9 Construction du triangle $A'B'C'$

On commence par trouver d'abord les fonctions caractéristiques de demi-cercles passant respectivement par les bipoints A' et B' , A' et C' , B' et C' . Or, les abscisses de point A' et B' sont égaux, par conséquent l'image de demi-cercle passant par les points A et B est la demi-droite passant par A' et B' sur l'axe supérieur d'équation $x = \frac{5}{6}$ et l'image de demi-cercle passant par A et C est le demi-cercle passant par les points A' et C' ayant pour fonction caractéristique $F_{A'C'}(\frac{11}{16}, \frac{3}{16})(x) = \sqrt{(\frac{3}{16})^2 - (x - \frac{11}{16})^2}$ et l'image de demi-cercle passant par B et C est le demi-cercle passant par les points B' et C' ayant pour fonction caractéristique $F_{B'C'}(\frac{33}{40}, \frac{3}{40})(x) = \sqrt{(\frac{3}{40})^2 - (x - \frac{33}{40})^2}$. D'où le triangle $A'B'C'$ est construit sur la figure 6.26.

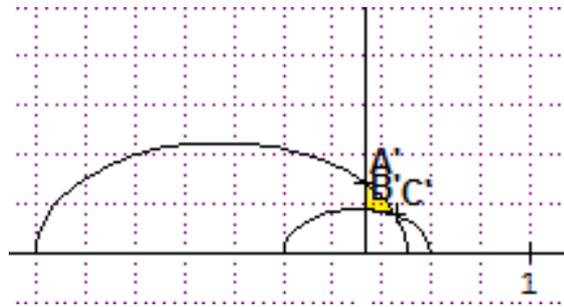


FIGURE 6.26 – Triangle $A'B'C'$ image du triangle ABC par la homographie h

La situation est assez gênante, car A', B', C' est presque illisible ici faute d'échelle. Ce résultat nous conduit à utiliser la homographie h^{-1} définie par : $h^{-1}(z) = \frac{-3z+2}{z-1}$ en admettant que h^{-1} a le même déterminant que h . Néanmoins, il est possible de palier ce problème comme indiqué ci-après.

6.12.10 Recherche de coordonnées des points A'', B'', C'' image de A, B, C par h^{-1}

Par suite, les points A'', B'' et C'' images des points A, B et C par h^{-1} sont tels que : $A''(-3, \frac{\sqrt{2}}{4}), B''(\frac{-19}{6}, \frac{\sqrt{5}}{6}), C''(\frac{-19}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6})$. Par la suite, les trois points A'', B'', C'' engendrant le triangle $A''B''C''$ image du triangle ABC par h^{-1} sont également tous situés sur le même plan de Poincaré (figure 6.27) tels que $A''(-3, \frac{\sqrt{2}}{4}), B''(-\frac{19}{6}, \frac{\sqrt{5}}{6}), C''(-\frac{19}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6})$.

6.12.11 Construction du triangle $A''B''C''$

On commence par trouver d'abord les fonctions caractéristiques de demi-cercle passant par A'' et B'' , A'' et C'' , B'' et C'' .

Or, les abscisses de point B'' et C'' sont égaux, par conséquent l'image de demi-cercle passant par les points A et B est la demi-droite passant par A'' et B'' sur l'axe supérieur d'équation $x = -\frac{19}{6}$, et l'image de demi-cercle passant par A et C est le demi-cercle passant par les deux points A'' et B'' ayant pour fonction caractéristique $F_{A''B''}(-\frac{25}{8}, \frac{3}{8})(x) = \sqrt{(\frac{3}{8})^2 - (x + \frac{25}{8})^2}$, et l'image de demi-cercle passant par B et C est le demi-cercle passant par les deux points B'' et C'' ayant pour fonction caractéristique $F_{B''C''}(-\frac{23}{8}, \frac{3}{8})(x) = \sqrt{(\frac{3}{8})^2 - (x + \frac{23}{8})^2}$. D'où le triangle $A''B''C''$ est construit sur la figure 6.27.

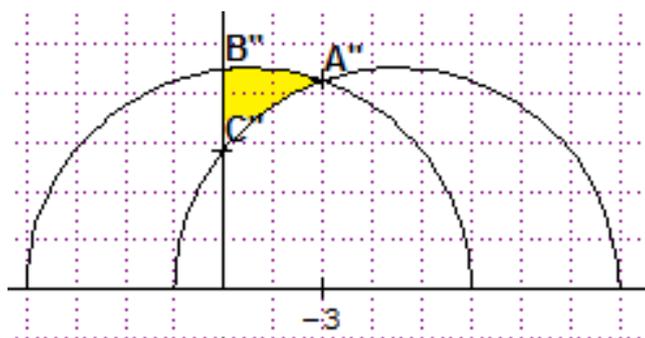


FIGURE 6.27 – Triangle $A''B''C''$ image du triangle ABC par la homographie h^{-1}

En effet, en comparant les résultats obtenus avec la homographie h et son inverse qui est de même type que celle-ci, on voit que l'image de h^{-1} (figure 6.27) est plus lisible que de celle donnée par h .

6.13 Conclusion partielle

Dans le souci d'éviter et/ou de prévenir des quelques facteurs bloquants des améliorations des enseignants à travers au transfert des connaissances vers les apprenants sur les études des géométries, nous pensons que cette approche pourra d'encourager et d'ouvrir les esprits des enseignants à l'enseignement des géométries au lieu de la seule géométrie euclidienne.

Aussi, il est loisible de construire des problèmes variés basés sur une suite homographique à volonté selon que l'on peut contrôler ou renforcer l'acquisition des suites arithmétiques ou géométriques eu égard aux propriétés des points fixes d'une homographie pour étudier des suites géométriques et arithmétiques en Première et en Terminale et bien d'autres.

Il nous permettant également de quitter l'habitude d'annoncer des théorèmes dans les livres de façon dissimulée et de quitter l'attribution aux apprenants des exercices de routines. Comme en pédagogie, on regroupe un ensemble des savoirs scientifiques et pratiques, et une compétence relationnelle qui peuvent être mobilisés en vue de concevoir et de mettre en œuvre une stratégie d'enseignement plus efficace.

En terme d'apprentissage des fonctions homographiques et des suites récurrentes homographiques en terminales scientifiques, nous avons vu que le programme scolaire ne sente nullement l'utilité de la considération desdites homographies. Par ailleurs, grâce à la résolution des problèmes inverses d'homographie, nous avons pu montrer l'existence d'une infinité d'homographies à un seul point fixe donné ou bien à deux points fixes donnés. Ce qui permet à tout enseignant d'élaborer efficacement ses propres suites homographiques de limite préalablement fixée à volonté, et ce, en une infinité de façons en disposant de deux ou trois degrés de liberté.

Enfin, cet approche nous a permis de trouver la conversion d'une trajectoire circulaire en trajectoire rectiligne et celle rectiligne en trajectoire circulaire utilisant la composition respective d'une ellipse par une ellipse et d'une ellipse par une droite via les deux ellipses $F_{c \rightarrow d}$ et celle de $F_{d \rightarrow c}$.

Voilà en bref nos approches concernant les applications des homographies en didactique des mathématiques. Nous allons en effet voir la quatrième partie concernant toujours l'applications des homographies, mais cette fois, en science des données.

Quatrième Partie



Présentation plus pointue
des riches puissances des homographies
faces aux étude de la science des donnés

Chapitre 7

Homographie et règle d'association

Dans ce Chapitre, nous allons voir « comment faire intervenir la homographie propre à travers aux études des règles d'association ? ».

7.1 Introduction partielle

Nous avons vu au chapitre 5 paragraphe 5.9 que dans le contexte de la fouille de données, le problème de normalisation des mesures probabilistes des qualités, bien traité assez abondamment dans la littérature scientifique, reste encore un domaine de recherche. L'on sait l'existence de certaines mesures qui sont M_{GK} normalisables et celles normalisables ayant la normalisée différente de M_{GK} à l'aide d'un homéomorphisme affine. Parallèlement à cela, on note la présence des autres mesures de qualité qui n'ont pas encore pu être normalisées par aucun homéomorphisme affine (voir le paragraphe 5.9), ni par aucun autre moyen. Or, leur normalisation s'avère visiblement nécessaire et utile. En effet, on peut encore affirmer qu'elle occupe la première place dans le rapprochement et le ralliement de plusieurs mesures qui existent dans le domaine des bases de données. Par conséquent, vu l'importance de la mesure M_{GK} (sans toutefois négliger l'importance des autres mesures) dans le contexte de base de données, nous pouvons dire que la normalisation est parmi, entre autres, les outils permettant de rendre convergentes (toutes) les mesures vers M_{GK} . Aussi, la problématique de recherche d'un homéomorphisme plus adéquat et englobant plus de mesures de qualité se pose. C'est justement l'objet principal de notre investigation en science des données. Sachant que cette fois-ci notre principal objectif mathématique est de « rendre fini l'infini ». Par la suite, nous considérons les mesures ayant la référence donnant l'infini parmi les trois conditions qui sont l'implication logique, l'indépendance et l'incompatibilité, nous utilisons cette fois la fonction homographique propre et sa combinaison avec l'homéomorphisme affine selon les situations. Alors, pour toute situation n'aboutissant pas à l'infini, il s'avère pertinent d'utiliser la théorie dans [Tot03] qui se base sur l'utilisation d'un homéomorphisme affine. Profitant du fait que les applications affines font partie de la grande famille des homographies et apparaissent comme des homographies dégénérées renvoyant l'infini à l'infini, nous allons valoriser tout l'ensemble des homographies non constantes. A cet effet, dans la présente théorie, on peut appliquer celle de [Tot03] et celle que nous venons de proposer, c'est-à-dire l'utilisation d'un homéomorphisme homographique selon le cas. Elle est ainsi une extension naturelle de l'approche de [Tot03]. Il s'agit d'utiliser les contenus du chapitre 2 paragraphe 2.2.3 définition 1 et paragraphe 2.11 proposition 12 conformément à la démarche suivante.

7.2 Notations

Par souci de commodité, notons par x la valeur de la Mesure Probabiliste de Qualité $\mu(X \rightarrow Y)$, x_{imp} la valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$, à l'implication logique, x_{ind} , à l'indépendance et x_{inc} , celle de l'incompatibilité, où $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ et m un réel arbitraire tel que $x + m \neq 0$.

7.3 Processus de normalisation par homographie propre

Soient μ_{hn} la homographie-normalisée de μ , μ_{shn} la semi-homographie-normalisée de μ , μ_{shnd} la semi-homographie-normalisée à droite de μ et μ_{shng} la semi-homographie-normalisée à gauche de μ . Comme annoncé dans [Tot03], le principal objectif mathématique de normalisation de mesure de qualité μ est de ramener ses valeurs dans $[-1; 1]$ sous les trois conditions que μ_n prenne la valeur -1 à l'incompatibilité, la valeur 0 à l'indépendance, la valeur 1 à l'implication logique afin de pouvoir comparer deux mesures normalisables. Rappelons toujours que si ces trois valeurs sont finies et deux à deux différentes, alors les travaux de recherche effectués par [Tot03] a déjà posé la démarche pour résoudre ce genre de problème (problème de normalisation de Mesure Probabiliste de Qualité), c'est-à-dire l'utilisation de son expression (7.1) de la normalisée μ_n de μ définie par :

$$\mu_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.1)$$

Où les quatre coefficients x_f , y_f , x_d et y_d , appelés coefficients de normalisation de μ , inconnus et ils se déterminent par passage aux limites unilatérales dans des situations de référence (incompatibilité, indépendance et implication logique) du fait de la continuité de l'évolution dans les deux zones : attraction (dépendance positive) et répulsion (dépendance négative) [Tot03], [Fen07], [Tot08]. Si une ou deux parmi les trois valeurs x_{imp} , x_{ind} et x_{inc} est infinie et dans le cas où nous avons deux valeurs infinies, il faut que x_{ind} soit exclu; ce qui nous conduit d'utiliser l'une parmi les trois expressions (7.2), (7.3) et (7.4) proposées suivantes pour trouver les quatre coefficients réels, x_f , y_f , x_d et y_d :

$$\mu_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\mu_{shng}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\mu_{hn}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.4)$$

Ces quatre coefficients se déterminent toujours par passage aux limites unilatérales dans des situations de référence (incompatibilité, indépendance et implication logique) du fait de la continuité de l'évolution dans les deux zones : attraction (dépendance positive) et répulsion (dépendance négative). Au cas où X favorise Y , x_{imp} peut être infini, $x_{ind} \neq x_{inc}$, $(x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^2$ et $x_{ind} \in \mathbb{R}^*$, alors on obtient le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{x_f}{x_{imp}} + y_f = 1, & \text{(implication logique)} \\ \frac{x_f}{x_{ind}} + y_f = 0, & \text{(indépendance à droite).} \end{cases}$$

Comme $(x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^2$ et $x_{ind} \in \mathbb{R}^*$, il suffit donc d'utiliser les théories dans [Tot03] pour la normalisation à gauche. Nous pouvons écrire le système de quatre équations non linéaires, à quatre inconnues suivant :

$$\begin{cases} \frac{x_f}{x_{imp}} + y_f = 1 \\ \frac{x_f}{x_{ind}} + y_f = 0 \\ x_d x_{ind} + y_d = 0 \\ x_d x_{inc} + y_d = -1 \end{cases} \quad (7.5)$$

Il nous suffit ici de prendre $m = 0$ et nous avons quatre équations à quatre inconnues, avec cette particularité que le coefficient x_{imp} peut être infini. D'où la proposition suivante :

Proposition 22.

- (i) Si $(x_{imp}, x_{ind}) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec x_{imp}, x_{ind} et x_{inc} sont deux à deux distincts, alors le système d'équations (7.5) admet quatre solutions réelles ;
- (ii) Si $x_{imp} = \infty$ et $x_{ind} \in \mathbb{R}^*$, alors le système d'équations (7.5) admet quatre solutions réelles telles que : $y_f = 1$, $x_f = -x_{ind}$, $x_d = \frac{1}{x_{ind} - x_{inc}}$ et $y_d = -x_d x_{ind}$;
- (iii) Sinon, ce système d'équations n'a pas de solution.

Preuve : (i) le système d'équations (7.5) est équivalent au système d'équations (7.6) :

$$\begin{cases} x_{imp} y_f + x_f = x_{imp} \\ x_{ind} y_f + x_f = 0 \\ x_d x_{ind} + y_d = 0 \\ x_d x_{inc} + y_d = -1 \end{cases} \quad (7.6)$$

Elle se ramène à un système d'équations linéaires. L'écriture matricielle de système d'équations (7.6) est donnée par l'équation vectorielle (7.7) :

$$\begin{pmatrix} x_{imp} & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_f \\ x_f \\ x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{imp} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Posons $M_1 = \begin{pmatrix} x_{imp} & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, nous devons avoir : $\det M_1 = (x_{imp} - x_{ind})(x_{ind} - x_{inc}) \neq 0$; d'où (i) ;

Pour (ii), il suffit de prendre $\lim_{x_{imp} \rightarrow \infty} \frac{x_f}{x_{imp}} = 0$;

Pour (iii), si $x_{ind} = \infty$, alors les deux dernières équations n'ont pas de sens.

Le système d'équations qui va suivre présente des caractéristiques communes au précédent avec cette différence que x_{inc} peut être infini, $x_{imp} \neq x_{ind}$ et $x_{ind} \in \mathbb{R}^*$. Ce qui donne le système d'équations (7.8) ci-dessous.

$$\begin{cases} x_f x_{imp} + y_f = 1 \\ x_f x_{ind} + y_f = 0 \\ \frac{x_d}{x_{ind}} + y_d = 0 \\ \frac{x_d}{x_{inc}} + y_d = -1 \end{cases} \quad (7.8)$$

D'où la proposition suivante.

Proposition 23.

- (i) Si $(x_{ind}, x_{inc}) \in (\mathbb{R}^*)^2$, avec x_{imp}, x_{ind} et x_{inc} sont deux à deux distincts, alors le système d'équations (7.8) admet quatre solutions réelles ;
- (ii) Si $x_{inc} = \infty$ et $x_{ind} \in \mathbb{R}^*$, alors le système d'équations (7.8) admet quatre solutions réelles telles que : $y_d = -1$, $x_d = x_{ind}$ et $x_f = \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}$, $y_f = -x_f x_{ind}$;
- (iii) Sinon, ce système d'équations n'a pas de solution.

Preuve : (i) le système d'équations (7.8) est équivalent au système d'équations (7.9) :

$$\begin{cases} x_f x_{imp} + y_f = 1 \\ x_f x_{ind} + y_f = 0 \\ y_d x_{ind} + x_d = 0 \\ y_d x_{inc} + x_d = -x_{inc} \end{cases} \quad (7.9)$$

Elle se ramène à un système d'équations linéaires. L'écriture matricielle du système d'équations (7.9) est donnée par l'équation vectorielle (7.10) ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x_{imp} & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ y_d \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -x_{inc} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Posons : $M_2 = \begin{pmatrix} x_{imp} & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, nous devons avoir $\det M_2 = (x_{imp} - x_{ind})(x_{ind} - x_{inc}) \neq 0$; d'où (i) ;

Pour (ii), il suffit de prendre $\lim_{x_{inc} \rightarrow \infty} \frac{x_d}{x_{inc}} = 0$;

Pour (iii), si $x_{ind} = \infty$, alors les deux dernières équations n'ont pas de sens.

Le système qui suit est analogue aux précédents, avec cette fois-ci $x_{ind} \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}^*$, notamment le cas où $x_{ind} = 0$; alors dans ce cas, m doit être non nul. Prenons par exemple $m = 1$.

$$\begin{cases} x_f x_{imp} + y_f = 1 \\ x_f x_{ind} + y_f = 0 \\ \frac{x_d}{x_{ind}+1} + y_d = 0 \\ \frac{x_d}{x_{inc}+1} + y_d = -1 \end{cases} \quad (7.11)$$

D'où la proposition suivante.

Proposition 24.

- (i) Si $(x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^2$, avec $x_{imp} \neq 0$, x_{imp}, x_{ind} et x_{inc} sont deux à deux distincts, alors le système d'équations (7.11) admet quatre solutions réelles ;
- (ii) Si $x_{inc} = \infty$, $x_{ind} \in \mathbb{R}$ et $x_{imp} \in \mathbb{R}^*$, alors le système d'équations (7.11) admet quatre solutions réelles telles que : $y_d = -1$, $x_d = x_{ind} + 1$ et $x_f = \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}$, $y_f = -x_f x_{ind}$;
- (iii) Sinon, ce système d'équations n'a pas de solution.

Preuve : (i) le système d'équations (7.11) est équivalent au système d'équations (7.12) :

$$\begin{cases} x_f x_{imp} + y_f & = & 1 \\ x_f x_{ind} + y_f & = & 0 \\ y_d(x_{ind} + 1) + x_d & = & 0 \\ y_d(x_{inc} + 1) + x_d & = & -x_{inc} - 1 \end{cases} \quad (7.12)$$

Elle se ramène à un système d'équations linéaires. L'écriture matricielle du système d'équations (7.12) est donnée par l'équation vectorielle (7.13) :

$$\begin{pmatrix} x_{imp} & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} + 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} + 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ y_d \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -x_{inc} - 1 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Posons $M_3 = \begin{pmatrix} x_{imp} + 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} + 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} + 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} + 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous devons avoir $\det M_3 = (x_{imp} - x_{ind})(x_{ind} - x_{inc}) \neq 0$; d'où (i)

Pour (ii), il suffit de prendre $\lim_{x_{inc} \rightarrow \infty} \frac{x_d}{x_{inc} + 1} = 0$;

Pour (iii), si $x_{ind} = \infty$, alors les deux dernières équations n'ont pas de sens.

La forme actuelle du système étudié à l'aspect du système d'équations (7.14) :

$$\begin{cases} \frac{x_f}{x_{imp} + m} + y_f & = & 1 \\ \frac{x_f}{x_{ind} + m} + y_f & = & 0 \\ \frac{x_d}{x_{ind} + m} + y_d & = & 0 \\ \frac{x_d}{x_{inc} + m} + y_d & = & -1 \end{cases} \quad (7.14)$$

Dans (7.14) x_{imp} et x_{inc} peuvent être infinis, x_{ind} est réel et $(x_{ind} + m) \in \mathbb{R}^*$.

Proposition 25.

- (i) Si $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^3$, avec x_{imp}, x_{ind} et x_{inc} sont deux à deux distincts, alors le système d'équations (7.14) admet quatre solutions réelles ;
- (ii) Si $x_{inc} = \infty$, $x_{ind} \in \mathbb{R}$ et si $x_{imp} = \infty$, alors le système d'équations (7.14) admet quatre solutions réelles telles que : $y_d = -1$, $x_d = (x_{ind} + m)$ et $x_f = 1$, $y_f = -(x_{ind} + m)$;
- (iii) Sinon, ce système équations n'a pas de solution.

Preuve : (i) le système d'équations (7.14) est équivalent au système d'équations (7.15) :

$$\begin{cases} y_f(x_{imp} + m) + x_f & = & (x_{imp} + m) \\ y_f(x_{ind} + m) + x_f & = & 0 \\ y_d(x_{ind} + m) + x_d & = & 0 \\ y_d(x_{inc} + m) + x_d & = & -(x_{inc} + m) \end{cases} \quad (7.15)$$

Elle se ramène donc à un système d'équations linéaires. L'écriture matricielle de système d'équations (7.15) est donnée par l'équation vectorielle (7.16) :

$$\begin{pmatrix} x_{imp} + m & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} + m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} + m & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} + m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_f \\ x_f \\ y_d \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{imp} + m \\ 0 \\ 0 \\ -(x_{inc} + m) \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

$$\text{Posons } M_4 = \begin{pmatrix} x_{imp} + m & 1 & 0 & 0 \\ x_{ind} + m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{ind} + m & 1 \\ 0 & 0 & x_{inc} + m & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, nous devons avoir toujours $\det M_4 = (x_{imp} - x_{ind})(x_{ind} - x_{inc}) \neq 0$;

Pour (ii), il suffit de prendre $\lim_{x_{inc} \rightarrow \infty} \frac{x_d}{x_{inc}} = 0$ et $\lim_{x_{imp} \rightarrow \infty} \frac{x_f}{x_{imp}} = 0$;

Pour (iii), si $x_{ind} = \infty$, alors toutes les équations n'ont pas de sens.



Remarque 21. Notons que les différentes matrices relatives aux quatre équations vectorielles (7.7), (7.10), (7.13) et (7.16) telles M_1, M_2, M_3, M_4 ont le même déterminant; ce qui nous permet de dire que toutes les mesures ayant la condition $x_{imp} \neq x_{ind} \neq x_{inc}$ et $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^3$ ont la même condition de normalisabilité.

7.4 Application de ces quatre propositions.

Rappelons que les définitions respectives des différentes mesures travaillées et aboutissant aux résultats ci-dessous se trouve dans le Tableau 4.4 plus précisément dans le Tableau 5.5. Les preuves de tous les résultats sont fournies dans la section 7.7.

1. La mesure « multiplicateur de côte normalisée » est :

$$(Mult - Cot)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$\text{Soit } (Mult - Cot)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{M_{GK}(X \rightarrow Y)}{P(Y'/X')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{M_{GK}(X \rightarrow Y)}{(1 - P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

2. La mesure « Sebag normalisée » est :

$$Sebag_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$\text{Soit } Sebag_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{M_{GK}(X \rightarrow Y)}{P(Y'/X')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{M_{GK}(X \rightarrow Y)}{(1 - P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

3. La mesure « Exemple-contre exemple normalisée » est :

$$(Ex - Cont)_{shng}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - 2P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$\text{Soit } Ex - Cont_{shng}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{M_{GK}(X \rightarrow Y)}{P(Y'/X')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{M_{GK}(X \rightarrow Y)}{(1 - 2P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

4. La mesure « Odd-Ratio normalisée » est :

$$\begin{aligned} \text{Odd}R_{shnd}(X \rightarrow Y) &= \begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y'/X')(1-P(X')-P(Y')+P(Y'/X')P(X'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{(1-P(Y'/X'))(P(Y')-P(Y'/X')P(X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases} \\ (\text{Odd} - \text{Ratio})_{shnd}(X \rightarrow Y) &= \begin{cases} \frac{(1-P(X'))M_{GK}(X \rightarrow Y)}{P(Y'/X')(1-P(X')-P(Y')+P(Y'/X')P(X))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y')M_{GK}(X \rightarrow Y)}{(1-P(Y'/X'))(P(Y')-P(Y'/X')P(X))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases} \end{aligned}$$

5. La mesure « Conviction normalisée » est :

$$\begin{aligned} \text{Conv}_{hn}(X \rightarrow Y) &= \begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{1-P(X')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases} \\ \text{Soit } \text{Conv}_{hn}(X \rightarrow Y) &= M_{GK}(X \rightarrow Y). \end{aligned}$$

6. La mesure « Gain Informel normalisée » est :

$$(\text{Gain} - \text{Inf})_{shng} = \begin{cases} \frac{\log P(Y')-\log P(Y'/X')}{\log P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ -\frac{\log P(Y'/X')-\log P(Y')}{\log P(Y'/X')-\log P(Y')+1}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

N.B : On remarque que la normalisée de Gain-Informel n'a aucune relation avec M_{GK} mais elle est bien continue.

7.5 Règle des opérations sur les mesures probabilistes de qualité normalisées

Introduisons dans cette section la définition des lois de composition suivante dans \mathcal{N} , parfois suivi quelques remarques, propositions, corollaire et même un exemple [Tot08].



Définition 29. ★ *addition* : $\forall \mu, \nu \in \mathcal{N}, \mu \oplus \nu = \frac{(\mu^f + \nu^f)}{2} + \frac{(\mu^d + \nu^d)}{2}$;

★ *addition barycentrique* :

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a\mu \oplus_B b\nu = \frac{(a\mu^f + b\nu^f)}{a+b} + \frac{(a\mu^d + b\nu^d)}{a+b} ;$$

★ *produit* : $\mu\mu' = 1_f\mu^f\mu'^f - 1_d\mu^d\mu'^d$;

★ *puissance* : $\forall \alpha, \beta > 1, \mu^\alpha = 1_f(\mu^f)^\alpha + 1_d(-1)^{\alpha-1}(\mu^d)^\alpha$;

$$\mu^{(\alpha, \beta)} = 1_f(\mu^f)^\alpha + 1_d(-1)^\gamma(\mu^d)^\beta \text{ avec } \gamma = 1 \text{ si } \beta \text{ est paire et } 0 \text{ sinon ;}$$

★ *sup et inf* : $\mu \vee \mu' = 1_f\mu^f \vee \mu'^f + 1_d\mu^d \vee \mu'^d$ et $\mu \wedge \mu' = 1_f\mu^f \wedge \mu'^f + 1_d\mu^d \wedge \mu'^d$.



Remarque 22. Remarquons d'abord que l'addition \oplus est bien un cas particulier de l'addition barycentrique \oplus_B ; qui rassure sur la cohérence de ces deux lois de composition.

Proposition 26. (i) \mathcal{N} est stable par combinaison linéaire convexe \oplus_B (ou addition barycentrique), par le produit, par élévation à une puissance entière par \vee et \wedge ces opérations étant commutatives. C'est donc un monoïde. De plus, on a :

$$|\mu^\alpha| < |\mu^{\alpha-1}| \text{ et } |\mu\mu'| < |\mu \wedge \mu'| ;$$

- (ii) \mathcal{N} est stable par enveloppe supérieure et par enveloppe inférieure, sous la forme : $\forall \mu, \nu \in \mathcal{N}$, $\max(\mu, \nu) = \max(\mu^f, \nu^f) 1_f + \max(\mu^d, \nu^d) 1_d \in \mathcal{N}$ et $\min(\mu, \nu) = \min(\mu^f, \nu^f) 1_f + \min(\mu^d, \nu^d) 1_d \in \mathcal{N}$;
- (iii) $\forall \mu \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mu^f)^n 1_f + (\mu^d)^{2m+1} 1_d \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$, et $\mu^n \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$, $\mu^{(n,m)} \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$;
- (iv) $\mathcal{C}(\mathcal{N})$ est stable par les opérations addition \oplus_B , produit \otimes , \wedge et \vee .

Preuve

Vérifions la stabilité de l'addition barycentrique dans (i), les autres étant immédiates. Soient X et Y deux motifs. $\left(\frac{\mu^f + \nu^f}{2}\right)(X \rightarrow Y) = \left(\frac{\mu^f}{2}\right)(X \rightarrow Y) + \left(\frac{\nu^f}{2}\right)(X \rightarrow Y) = 1$, si X implique logiquement Y , et zéro en cas d'indépendance. Or, $0 < (\mu^f(X \rightarrow Y), \nu^f(X \rightarrow Y)) < 1$ en cas d'attraction mutuelle, donc $0 < (\mu^f(X \rightarrow Y), \nu^f(X \rightarrow Y)) < 2$.

De même pour l'autre composante, $-2 < (\mu^f(X \rightarrow Y), \nu^f(X \rightarrow Y)) < 0$. Pour l'addition barycentrique, il suffit d'examiner le cas favorable des deux doubles inégalités : $0 < \left(\frac{a\mu^f}{a+b}(X \rightarrow Y), \frac{b\nu^f}{a+b}(X \rightarrow Y)\right) < \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$ résulte $0 < \left(\frac{a\mu^f}{a+b}(X \rightarrow Y) + \frac{b\nu^f}{a+b}(X \rightarrow Y)\right) < \frac{a+b}{a+b} = 1$. Ce qui démontre la stabilité de \mathcal{N} pour l'addition \oplus et pour l'addition normalisée \oplus_B . Les autres propriétés sont immédiates.

De cette proposition 26 affirmant la stabilité de $\mathcal{C}(\mathcal{N})$ pour cette dizaine d'opérations algébriques résulte naturellement la proposition 27 ci-dessous.

Proposition 27. *Il existe une infinité de mesures de qualité normalisées continues au sens de la définition de la présente approche.*



Exemple 28. *Considérons les deux mesures normalisées de la mesure Exemple-Contre Exemple (Ex-Cont) et M_{GK} définies par :*

$$(Ex - Cont)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - 2P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases}$$

et

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Pour l'addition, nous avons :

$$\begin{aligned} M_{GK} \oplus (E - Cont) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')} + \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))} \right) & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{1}{2} \left(\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} + \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - P(Y'/X'))} \right) & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')} + \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))} \right) & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{1}{2} \left(\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} + \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - 2P(Y'/X'))} \right) & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \end{aligned}$$

 **Suite de l'Exemple 28.**

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} \frac{P^2(Y'/X') - P(Y'/X')P(Y') + P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1-P(Y'))}, \\ \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{\frac{1}{2} \frac{(P(Y'/X') - P(Y'))(1 - 2P(Y'/X')) + P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - 2P(Y'/X'))} \\ \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{2(1-P(Y'))}{(1-P(Y'))} = 1 \text{ à l'implication logique} \\ = 0 \text{ aux deux indépendances} \\ \frac{1}{2} \frac{-2P(Y')}{P(Y')} = -1 \text{ à l'incompatibilité.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

De même pour la multiplication nous avons :

$$\begin{aligned}
 M_{GK} \otimes (E - Con) &= \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')} \times \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1 - P(Y'))} & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ -\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} \times \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1 - 2P(Y'/X'))} & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 \times 1 & = 1 \text{ à l'implication logique} \\ & = 0 \text{ aux deux indépendances} \\ -(-1 \times -1) & = -1 \text{ à l'incompatibilité.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Corollaire 10. Pour deux mesures normalisées μ et ν , les composantes de leur somme sont telles que : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $(a\mu \oplus_B b\nu)^f = \frac{a\mu^f + b\nu^f}{a+b} = \left(\frac{a\lambda_\mu + b\lambda_\nu}{a+b}\right) M_{GK}^f$ et $(a\mu \oplus_B b\nu)^d = \frac{a\mu^d + b\nu^d}{a+b} = \left(\frac{a\beta_\mu + b\beta_\nu}{a+b}\right) M_{GK}^d$. Reprenons les exemples de mesures normalisées continues Zhang et M_{GK} Leur " somme " est définie par :

$(Zhang \oplus M_{GK})(X \rightarrow Y) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-P(X)}\right) 1_f M_{GK}^f(X \rightarrow Y) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-P(X)}\right) 1_d M_{GK}^d(X \rightarrow Y)$. Tout ceci montre que la mesure M_{GK} occupe le rôle de " base " ou de " noyau " au sein de l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{N})$ des mesures normalisées continues : elle est vraisemblablement la mesure normalisée la " plus simple ".

Puisque, $n_{X'Y'} = n_{X'} - n_{X'\bar{Y}'}$ pour tous motifs X et Y , par rapport à la notion de contre-exemple qui signifie ici contradicteur d'implication, la proposition suivante est immédiate.



Remarque 23. On peut vérifier que l'opération combinaison linéaire convexe \oplus_B ne possède malheureusement pas une propriété régularisante d'une mesure de qualité normalisée discontinue. Cependant la stabilité de $\mathcal{C}(\mathcal{N})$ combinaison linéaire convexe fournit déjà un moyen intéressant pour construire une mesure normalisée continue, par exemple satisfaisant une propriété supplémentaire souhaitée. La propriété (iii) de cette proposition 6 fournit un autre moyen pour construire une mesure normalisée continue une fois que l'on en dispose une. Notons ici que le rapport $\frac{(\mu^f)^{n+1}}{(\mu^f)^n} = \mu^f$ étant positif et strictement inférieur à 1 ; ce qui fournit ainsi un autre moyen d'obtenir une mesure de qualité normalisée plus sélective : il suffit d'augmenter la puissance de la composante favorable μ^f en faisant attention au seuil préalablement fixé.

 **Suite de Remarque 23.**

Cependant il s'y pose un problème d'optimisation sur le « bon choix » de la puissance et du seuil, pour ne pas rater les règles intéressantes [Tot08].

7.6 La homographie-normalisée de M_{GK}

Par définition la mesure M_{GK} a pour expression :

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{ce qui est telle que : } x_{imp} = 1,$$

$x_{ind} = 0$ et $x_{inc} = -1$. En utilisant la proposition (25)(ii), on a : $x_f = -m(1+m)$, $y_f = 1+m$, $x_d = -m(m-1)$, $y_d = m-1$ et nous avons :

$$M_{GKhn}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} (m+1) \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X') + m - P(Y')(m+1)}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ (m-1) \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X') - P(Y') + P(Y')m}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

Donc, ici nécessairement m doit être différent de 1, -1 et 0.

N.B. : La situation est assez étrange car elle sort totalement du cadre de l'originale et, par conséquent n'a rien de semblable à ce qu'on a l'habitude de voir dans $M_{GKan}(X \rightarrow Y) = M_{GK}$. Toutefois, le résultat que l'on obtient vérifie les conditions exigées par la normalisation. Ce résultat nous justifie aussi, comme André Totohasina l'en avait déjà parlé via ses propres théories dans [Tot08] à la proposition 27, l'existence de l'infinités des mesures normalisées mais, cette fois-ci elles se présentent d'une autre manière. Il nous semble également justifier que si une mesure μ est normalisable selon la théorie de André Totohasina, elle est également homographique-normalisable. Mais tantôt une « affine normalisée » est pratiquement plus rentable par rapport à une « homographique-normalisée » selon la nature de la mesure à normaliser. En effet, en comparant les résultats obtenus de la normalisation tirée d'un homéomorphisme affine et d'un homéomorphisme homographique, on voit que la normalisée d'un homéomorphisme affine est plus nette, celle d'un homéomorphisme homographique présentant plusieurs « biais », mais par contre, cas de la mesure Conviction, on voit que son affine normalisé à droite et son homographie-normalisée à gauche c'est-à-dire son semi-homographie-normalisée à gauche n'est pas égal à M_{GK} seul son homographie-normalisé est égal à M_{GK} . Nous pouvons conjecturer que, si une mesure est normalisable par l'ancienne théorie, la normalisation par ladite théorie s'avère quasiment recommandée. Désormais, contrairement aux lois de l'ancienne théorie, il est vu et démontré qu'on peut normaliser la mesure, même si l'infini figure dans les trois situations de référence qui sont l'implication logique, l'indépendance et l'incompatibilité. Par conséquent, sans toutefois pressentir ce que vont donner les recherches futures, nous allons énoncer sous forme de théorème. Le théorème suivant complète dans sa partie (ii) celui énoncé dans [Fen07] (sous-paragraphe 6.3 page 90) et dans [Tot08] (sous-paragraphe 3.2 page 62).

Théorème 3. *Une Mesure Probabiliste de Qualité μ est homographique normalisable si, et seulement si, pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Les inégalités suivantes sont satisfaites $x_{imp} \neq x_{ind} \neq x_{inc}$, si $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^3$.*
- (ii) *Si $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \overline{\mathbb{R}}^3$, alors il faut que l'une quelconque des trois valeurs $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc})$ soit infinie ou deux sans x_{ind} d'entre elles sont également infinies et $x_{ind} + m \in \mathbb{R}^*$.*

Preuve : (i) $x_{imp} \neq x_{ind} \neq x_{inc}$ et si $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \mathbb{R}^3$, alors, le déterminant de la matrice M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) associée à toutes les équations vectorielles (7.7), (7.10), (7.13) et (7.16) est égal à $(x_{imp} - x_{ind})(x_{ind} - x_{inc})$ est donc différent de zéro ;

Pour (ii), si $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc}) \in \overline{\mathbb{R}}^3$, et une ou deux entre eux est infinie, il suffi en effet d'utiliser les propositions (22, 23, 24, 25)(ii) ci-dessus. D'où le théorème énoncé.

7.7 Preuve des résultats évoqués à la section 7.4

Cette fois-ci nous allons voir « pourquoi les résultats au section 7.4 ci-dessus marchent ? » Conformément aux notations prises à la fin de sous section 7.2 on a :

1. **La mesure « Multiplicateur de côte » est telle que :** $x = \frac{P(X' \cap Y')P(\overline{Y}')}{P(X' \cap \overline{Y}')P(Y')} = \frac{(1-P(Y'))P(Y'/X')}{(1-P(Y'/X'))P(Y')}$ qui est telle que : $x_{imp} = +\infty$, $x_{ind} = 1$ et $x_{inc} = 0$. Donc, en utilisant la proposition (22) (ii), nous avons : $y_f = 1$, $x_f = -x_{ind}$, $x_d = 1/(x_{ind} - x_{inc})$ et $y_d = -x_d x_{ind}$ c'est-à-dire $x_f = -1$, $x_d = 1$ et $y_d = -1$. En remplaçant x , x_f , y_f , x_d et y_d par leurs valeurs dans l'expression :

$$\mu_{shnd} = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{pour } m = 0 \quad \text{on a :}$$

$$(Mult - Cot)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{-1}{\frac{(1-P(Y'))P(Y'/X')}{(1-P(Y'/X'))P(Y')}} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{(1-P(Y'))P(Y'/X')}{(1-P(Y'/X'))P(Y')} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$D'où (Mult - Cot)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1-P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

2. **La mesure « Sebag » définie par :** $x = \frac{P(X' \cap Y')}{P(X' \cap \overline{Y}')} = \frac{P(Y'/X')}{(1-P(Y'/X'))}$ est telle que : $x_{imp} = +\infty$, $x_{ind} = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}$ et $x_{inc} = 0$. En utilisant la proposition (22) (ii) nous avons : $y_f = 1$, $x_f = -x_{ind} = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{1-P(Y')}{P(Y')}$ et $y_d = 1$. En remplaçant x , x_f , y_f , x_d et y_d par leurs valeurs dans l'expression :

$$\mu_{shnd} = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{pour } m = 0 \quad \text{on a :}$$

$$Sebag_{shnd} = (X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{\frac{P(Y')}{1-P(Y')}}{\frac{P(Y'/X')}{(1-P(Y'/X'))}} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{(1-P(Y'))}{P(Y')} \frac{P(Y'/X')}{(1-P(Y'/X'))} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$D'où Sebag_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')(1-P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

3. **La mesure « Exemple-contre exemple » cette fois :** $x = \frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \overline{Y}')}{P(X' \cap Y')} = 1 - \frac{P(X' \cap \overline{Y}')}{P(X' \cap Y')} = \frac{2P(Y'/X') - 1}{P(Y'/X')}$ ce qui est telle que : $x_{inc} = -\infty$, $x_{imp} = 1$ et $x_{ind} = \frac{2P(Y') - 1}{P(Y')}$. En utilisant la proposition (23) (ii) on a : $y_d = -1$, $x_d = \frac{2P(Y') - 1}{P(Y')}$, $x_f = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}$ et $y_d = \frac{2P(Y') - 1}{1-P(Y')}$.

En remplaçant x, x_f, y_f, x_d et y_d par leurs valeurs dans l'expression :

$$\mu_{shng} = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{pour } m = 0, \text{ on a :}$$

$$(Ex - Cont)_{shng}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')} \frac{2P(Y'/X')-1}{P(Y'/X')} - \frac{2P(Y')-1}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{2P(Y')-1}{\frac{P(Y')}{P(Y'/X')}} - \frac{2P(Y'/X')-1}{P(Y'/X')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$D' \text{ où } (Ex - Cont)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y'/X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y')(1-2P(Y'/X'))}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

4. **La mesure « Odd-Ratio » ici :** $x = \frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(\bar{X}' \cap Y')P(X' \cap \bar{Y}')} = \frac{P(Y'/X')(1-P(X')-P(Y')+P(Y'/X')P(X'))}{(P(Y')-P(Y'/X')P(X'))(1-P(Y'/X'))}$

qui est telle que : $x_{imp} = +\infty, x_{ind} = 1$ et $x_{inc} = 0$. En utilisant la proposition (22) (ii) nous avons : $x_f = -1, x_d = -1, y_f = 1$ et $y_d = 1$. En remplaçant x, x_f, y_f, x_d et y_d par leurs valeurs dans l'expression :

$$\mu_{shnd} = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{pour } m = 0 \text{ on a :}$$

$$(Odd - R)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{-1}{\frac{P(Y'/X')(1-P(X')-P(Y')+P(Y'/X')P(X'))}{(P(Y')-P(Y'/X')P(X'))(1-P(Y'/X'))}} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X')(1-P(X')-P(Y')+P(Y'/X')P(X'))}{(P(Y')-P(Y'/X')P(X'))(1-P(Y'/X'))} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$D' \text{ où } (Odd - R)_{shnd}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y'/X')(1-P(X')-P(Y')+P(Y'/X')P(X'))} & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{(1-P(Y'/X'))(P(Y')-P(Y'/X')P(X'))} & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

5. **La mesure « Conviction »** nous avons : $x = \frac{P(X')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')} = \frac{1-P(Y')}{(1-P(Y'/X'))}$ qui est telle

que : $x_{imp} = +\infty, x_{ind} = 1$ et $x_{inc} = 1 - P(Y')$. En utilisant la proposition (25) (ii) avec $m = 0$ on a : $x_f = -1, y_f = 1, x_d = -\frac{1-P(Y')}{P(Y')}$ et $y_d = \frac{1-P(Y')}{P(Y')}$. En remplaçant $x, x_f, y_f,$

x_d et y_d par leurs valeurs dans l'expression : $\mu_{hn} = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$

pour $m = 0$ on a :

$$Conv_{hn}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{-1}{1-P(Y')} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ -\frac{1-P(Y')}{P(Y')} \frac{1-P(Y')}{1-P(Y')} + \frac{1-P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$D' \text{ où } Conv_{hn}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{1-P(X')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

6. **La mesure « Gain Informel » est alors :** $x = \log \left(\frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')} \right) = \log \left(\frac{P(Y'/X')}{P(Y')} \right)$ ce

qui est telle que : $x_{inc} = -\infty, x_{imp} = -\log P(Y')$ et $x_{ind} = 0$. En utilisant la proposition (24) (ii) on a : $y_f = 0, x_f = -\frac{1}{\log P(Y')}, x_d = 1$ et $y_d = -1$. En remplaçant $x, x_f, y_f,$

x_d et y_d par leurs valeurs dans l'expression : $\mu_{shng} = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y; \end{cases}$

pour $m = 1$, on a :

$$(Gain - Inf)_{shng}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} -\frac{1}{\log P(Y')} \log \left(\frac{P(Y'/X')}{P(X')} \right) & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ \frac{1}{\log \left(\frac{P(Y'/X')}{P(X')} \right)} - 1 & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

$$\text{D'où } (Gain - Inf)_{shng} = \begin{cases} \frac{\log P(Y') - \log P(Y'/X')}{\log P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y; \\ -\frac{\log P(Y'/X') - \log P(Y')}{\log P(Y'/X') - \log P(Y') + 1}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

7.8 Fonction de normalisation F_n

La théorie et la pratique de la normalisation des mesures probabilistes de qualité [Tot03], (Totohasina et al. [DRA07]), [Fen07], [Tot08] figurent déjà dans la liste des outils permettant de résoudre les problèmes relevant du domaine de la fouille de données [AIS93]. Cela est dû au regroupement [Tot03], [TRD04], [TRD05], [Fen07], [SG12], [Gri13], [WZZ04] des différentes mesures existant dans la littérature. En ouvrant la voie à la possibilité de création des définitions des nouvelles notions dans le contexte de fouilles de données, peut-être, elle provoquera une nouvelle réflexion chez les chercheurs dans ce domaine. Il s'agit là de la fonction de normalisation. Qu'est-ce-qu'on entend par une fonction de normalisation ? Cette section va tenter d'y répondre.



Définition 30. On considère une mesure probabiliste d'intérêt μ .

On appelle fonction de normalisation de μ la fonction continue par morceaux qui peut normaliser directement la mesure μ et qui est donnée à l'expression (7.17) suivante :

$$F_n(x) = \begin{cases} F_n^f(x), & \text{si } X \text{ favorise } Y \quad \text{et } x \in]x_{ind}; x_{imp}[\\ F_n^d(x), & \text{si } X \text{ défavorise } Y \quad \text{et } x \in]x_{inc}; x_{ind}[\end{cases} \quad (7.17)$$

Elle peut prendre les valeurs particulières définies sur (7.18), (7.19), (7.20), (7.21) suivantes selon les cas :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.18)$$

$$F_{shnd}(x) = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.19)$$

$$F_{shng}(x) = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.20)$$

$$F_{hn}(x) = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad (7.21)$$

Où x = une valeur de μ ; x_{imp} = valeur de μ à l'implication logique; x_{ind} = valeur de μ à l'indépendance; x_{inc} = valeur de μ à l'incompatibilité; F_n^f = fonction de normalisation, si X favorise Y , c'est-à-dire cas où $P(Y'/X') > P(Y')$; F_n^d = fonction de normalisation, si X défavorise Y , c'est-à-dire cas où $P(Y'/X') < P(Y')$; F_{an} = fonction de normalisation de la mesure μ qui est affine-normalisable; F_{hn} = fonction de normalisation de la mesure μ qui est homographique-normalisable; F_{shnd} = fonction de normalisation de la mesure μ

qui est semi-homographique-normalisable à droite ; F_{shng} = fonction de normalisation de la mesure μ qui est semi-homographique-normalisable à gauche ; x_f, y_f, x_d et y_d : coefficients de normalisation de x ; m : un réel et $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty]$. La définition d'une fonction de normalisation est ainsi fixée selon les mesures. Notons que c'est une fonction comme toute autre : par rapport à la variable x , elle est une fonction numérique d'une variable réelle ; seulement, cette variable x est ici : $x = q_1(n, P(X'), P(Y'), P(Y' \cap X'))$.

Les quatre coefficients de normalisation de mesures probabilistes de qualité doivent obligatoirement vérifier les conditions suivantes : $x_f = q_2(n, P(X'), P(Y'))$, $y_f = q_3(n, P(X'), P(Y'))$, $x_d = q_4(n, P(X'), P(Y'))$ et $y_d = q_5(n, P(X'), P(Y'))$ où q_1, q_2, q_3, q_4 et q_5 sont des fonctions réelles.

Notons qu'il existe aussi un groupe de mesures ayant les mêmes coefficients de normalisation. La fonction de normalisation est également parmi les moyens qui permettent de donner une interprétation d'une normalisée de mesure après avoir fourni les valeurs respectives des coefficients de normalisation x_f, y_f, x_d et y_d , ou tout simplement les valeurs pour le support de X et le support de Y et aussi exprimant une opportunité de valeur à toutes les mesures normalisées. Conformément à ce que nous venons d'écrire, toute fonction de normalisation reflétant l'objectif visé dans une normalisation doit forcément avoir les propriétés suivantes.

Propriété 3 (Conditions nécessaires).

$P_1 : F_n^f$ est une fonction continue, strictement croissante et positive sur l'intervalle $]x_{ind} ; x_{imp}[$ et réalise une bijection de l'intervalle $]x_{ind} ; x_{imp}[$ sur $]0 ; 1[$ c'est-à-dire F_n^f doit avoir :

- ★ la limite 1 au point x_{imp} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{imp}} F_n^f(x) = 1$;
- ★ la limite 0 au point x_{ind} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{ind}} F_n^f(x) = 0$.

$P_2 : F_n^d$ est une fonction continue, strictement croissante et négative sur l'intervalle $]x_{inc} ; x_{ind}[$ et réalise une bijection de l'intervalle $]x_{inc} ; x_{ind}[$ sur $] -1 ; 0[$ c'est-à-dire F_n^d doit avoir :

- ★ la limite 0 au point x_{ind} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{ind}} F_n^d(x) = 0$;
- ★ la limite -1 au point x_{inc} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{inc}} F_n^d(x) = -1$.

En guise de récapitulation, nous avons :

$P_3 : F_n$ est une fonction continue au point x_{ind} et strictement croissante sur l'intervalle $]x_{inc} ; x_{imp}[$ et réalise une bijection de l'intervalle $]x_{inc} ; x_{imp}[$ sur $] -1 ; 1[$ c'est-à-dire F_n doit avoir :

- ★ la limite 1 au point x_{imp} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{imp}} F_n(x) = 1$;
- ★ la limite 0 au point x_{ind} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{ind}} F_n(x) = 0$ et $F_n(x_{ind}) = 0$;
- ★ la limite -1 au point x_{inc} , soit $\lim_{x \rightarrow x_{inc}} F_n(x) = -1$.

7.9 Résultats

Les quatre tableaux ci-dessous représentent les fonctions de normalisation des quelques mesures probabilistes de qualité. Ils sont tous nommés par tableau 7.1. Faute d'espace, et pour éviter la répétition, notons que : par rapport à la colonne de fonctions de normalisation, la 1^{ère} valeur correspondra au cas où X favorise Y , la 2^{ème} valeur celle du cas où X défavorise Y .

N°	Mesures μ	Expressions $\mu(X \rightarrow Y) = x$	Fonctions de normalisation
1	Multiplicateur de côte	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')P(Y')}$	$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 \\ x - 1 \end{cases}$
2	Exemple-contre exemple	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X' \cap Y')}$	$F_{shng}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')}x + \frac{1-2P(Y')}{1-P(Y')} \\ \frac{2P(Y')-1}{P(Y')} \frac{1}{x} - 1 \end{cases}$
3	Gain informel	$\log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$	$F_{shng}(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\log P(Y')}x \\ \frac{1}{x+1} - 1 \end{cases}$
4	Odd-Ratio	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(\bar{X}' \cap Y')P(X' \cap \bar{Y}')}$	$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 \\ x - 1 \end{cases}$
5	Conviction	$\frac{P(X')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')}$	$F_{hn}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 \\ -\frac{1-P(Y')}{P(Y')} \frac{1}{x} + \frac{1-P(Y')}{P(Y')} \end{cases}$
6	Sebag	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(\bar{Y}')}$	$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{P(Y')}{1-P(Y')} \frac{1}{x} + 1 \\ \frac{1-P(Y')}{P(Y')} x - 1 \end{cases}$
7	M_{GK}	$\begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1-P(Y')} \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} \end{cases}$	$F_{an}(x) = x$
8	Indice de Rucel et Rao	$P(X' \cap Y')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')} \\ \frac{1}{P(X')P(Y')}x - 1 \end{cases}$
9	Confiance ou précision	$P(Y'/X')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-P(Y')}x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')} \\ \frac{1}{P(Y')}x - 1 \end{cases}$
10	Rappel	$P(X'/Y')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')} \\ \frac{1}{P(X')}x - 1 \end{cases}$
11	Intérêt ou Lift	$\frac{P(Y'/X')}{P(Y')}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')}x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')} \\ x - 1 \end{cases}$
12	Leverage	$P(Y'/X') - P(X')P(Y')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')}x - \frac{P(Y')(P(X')-1)}{1-P(Y')} \\ \frac{1}{P(Y')}x - \frac{P(Y')(P(X')-1)}{P(Y')} \end{cases}$
13	Confiance Centrée	$P(Y'/X') - P(Y')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-P(Y')}x \\ \frac{1}{P(Y')}x \end{cases}$
14	Confiance Confirmée	$1 - 2P(\bar{Y}'/X')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-P(Y'))}x + \frac{1-2P(Y')}{2(1-P(Y'))} \\ \frac{1}{2P(Y')}x + \frac{1-2P(Y')}{2P(Y')} \end{cases}$
15	Facteur de certitude	$\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1-P(Y')}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1-P(X')}{P(Y')}x \end{cases}$
16	Platesky-Shapiro	$n_T(P(X' \cap Y') - P(X')P(Y'))$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n_T P(X')(1-P(Y'))}x \\ \frac{1}{n_T P(X')P(Y')}x \end{cases}$
17	Cosinus	$\frac{P(X' \cap Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')}}}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{P(X')}{1-P(Y')} \\ \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')P(Y')}x - 1 \end{cases}$

18	Loevinger	$1 - \frac{P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X')P(\bar{Y}')}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1-P(Y')}{P(Y')}x \end{cases}$
19	Cohen ou Kappa	$2 \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{P(X') + P(Y') - 2P(X')P(Y')}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(X') + P(Y') - 2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}x \\ \frac{P(X') + P(Y') - 2P(X')P(Y')}{2P(X')P(Y')}x \end{cases}$
20	Implication de Gras	$\sqrt{n} \frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')}}}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{\sqrt{n}P(X')(1-P(Y'))}x \\ \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{\sqrt{n}P(X')P(Y')}x \end{cases}$
21	Dépendance	$\left P(\bar{Y}') - P(\bar{Y}'/X') \right $	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-P(Y')}x \\ \frac{1}{P(Y')}x - 1 \end{cases}$
22	Nouveauté	$P(X'Y') - P(X')P(Y')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}x \\ \frac{1}{P(X')P(Y')}x \end{cases}$
23	Pearl	$P(X') P(Y'/X') - P(Y') $	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}x \\ -\frac{1}{P(X')P(Y')}x \end{cases}$

Pour les 14 mesures ci-dessous, faute d'espace à cause de la longueur des expressions des définitions, nous adaptons un tableau à deux colonnes.

24	Confiance Causale : $x = 1 - \frac{1}{2}P(\bar{Y}'/X') - \frac{1}{2}P(X'/\bar{Y}')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{2P(Y')}{(P(Y') + P(X'))(1-P(Y'))}x + \frac{P(X') - P^2(Y') - P(Y')P(X') - P(Y')}{(P(Y') + P(X'))(1-P(Y'))} \\ \frac{2P(Y')}{P^2(Y') + P(X')P(Y')}x - \frac{P(Y') + P^2(Y')P(X') - P(X')P(Y')}{P^2(Y') + P(X')P(Y')} \end{cases}$
25	Confirmation Causale : $x = P(X') + P(\bar{Y}') - 4P(X' \cap \bar{Y}')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4P(X')(P(Y')-1)}x - \frac{4P(X')P(Y') + P(X') + 1 - P(Y')}{4P(X')(P(Y')-1)} \\ -\frac{1}{4P(X')P(Y')}x - \frac{4P(X')P(Y') - P(X') - 1 + P(Y')}{4P(X')P(Y')} \end{cases}$
26	Confirmation Descriptive : $x = P(X') - 2P(X' \cap \bar{Y}')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{2P(X')P(Y') - P(X')}{2P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{1}{2P(X')P(Y')}x - \frac{2P(X')P(Y') - P(X')}{2P(X')P(Y')} \end{cases}$
27	Czekanowski-Dice ou F-mesure : $x = \frac{2P(X' \cap Y')}{P(X' \cap Y') + 1 - P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(X') + P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{P(X') + P(Y')}{2P(X')P(Y')}x - 1 \end{cases}$
28	Risque relatif : $x = \frac{P(X'/Y')}{P(X'/\bar{Y}')}$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y') - P(X')}{1-P(Y')}x - \frac{P(Y') - P(X')}{1-P(Y')} \\ x - 1 \end{cases}$
29	Support causal : $x = P(X' \cap Y') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')$	$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-P(Y'))}x - \frac{1-P(X') + P(Y')}{2(1-P(Y'))} \\ \frac{1}{2P(Y')}x - \frac{1-P(X') + P(Y')}{2P(Y')} \end{cases}$

30	<p style="text-align: center;">Fiabilité négative : $x = P(\bar{X}'/\bar{Y}')$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')}x - \frac{1-P(X')-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{1-P(Y')}{P(X')(Y')}x - \frac{1-P(X')-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')P(Y')} \end{cases}$
31	<p style="text-align: center;">Spécificité $P(\bar{Y}'/\bar{X}')$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1-P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{1-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{1-P(Y')}{P(X')(Y')}x - \frac{1-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')P(Y')} \end{cases}$
32	<p style="text-align: center;">Moindre contradiction : $x = \frac{P(X' \cap Y') - P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(Y')}$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}x + \frac{2P(X')P(Y') - P(X')}{2P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{1}{2P(Y')}x + \frac{2P(X') - 1}{2P(Y')} \end{cases}$
33	<p style="text-align: center;">Accuracy : $x = P(X' \cap Y') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2P(X')(1-P(Y'))}x + \frac{1-P(X')P(\bar{Y}') + P(X') - 1}{2P(X')P(Y')} \\ \frac{1}{P(X')P(Y')}x + \frac{1-P(X')P(\bar{Y}') + P(X') - 1}{2P(X')P(Y')} \end{cases}$
34	<p style="text-align: center;">Laplace : $x = \frac{n_{X'Y'} + 1}{n_{X'} + 2}$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{n_T P(X') + 2}{n_T P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{n_T P(X')P(Y') + 1}{n_T P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{n_T P(X') + 2}{n_T P(X')P(Y')}x - \frac{n_T P(X')P(Y') + 1}{n_T P(X')P(Y')} \end{cases}$
35	<p style="text-align: center;">Fukuda : $x = n_T(P(X' \cap Y') - \min_{confidence} P(X'))$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n_T P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{n_T P(X')P(Y') - \min_{confidence} P(X')}{n_T P(X')(1-P(Y'))} \\ \frac{1}{n_T P(X')P(Y')}x - \frac{n_T P(X')P(Y') - \min_{confidence} P(X')}{n_T P(X')P(Y')} \end{cases}$
36	<p style="text-align: center;">Force collective : $x = \frac{P(X' \cap Y') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(X')P(Y') + P(\bar{X}')P(\bar{Y}')} \cdot \frac{1 - P(X')P(Y') - P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}{1 - P(X')P(Y') + P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{imp} - x_{ind}}x - \frac{1}{x_{imp} - x_{ind}}x_{ind}, \text{ si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{x_{ind} - x_{inc}}x - \frac{1}{x_{ind} - x_{inc}}x_{ind}, \text{ si } x \in [x_{inc}; x_{ind}] \end{cases}$
37	<p style="text-align: center;">Dépendance causale estimée : $x = \frac{3}{2} + 2P(X') - \frac{3}{2}P(Y') - \frac{3}{2}P(\bar{Y}'/X') - 2P(X'/\bar{Y}')$</p> $F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{3P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{7P(X')P(Y') - 3P^2(Y') - 2P(X')}{3P(X')(1-P(Y'))}, \text{ si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{3P(X')}x - \frac{7P(X')P(Y') - 3P^2(Y') - 2P(X')}{3P(X')P(Y')}, \text{ si } x \in [x_{inc}; x_{ind}] \end{cases}$

Tableau 7.1 – Fonctions de normalisation des mesures d'intérêt

Les recherches effectuées sur les expressions des fonctions de normalisation de mesure nous prouvent que certaines mesures possèdent des fonctions de normalisation identiques ; ce qui nous mène à énoncer le théorème ci-dessous.

Théorème 17.

(i) - Toutes les mesures ayant la même situation de référence $(x_{imp}, x_{ind}, x_{inc})$ ont la même fonction de normalisation ;

(ii) - Toutes les mesures affines normalisables sont homographiques normalisables, mais la réciproque est fautive.

Preuve (i) : Voyons les quatre expressions possibles de F_n selon les cas.

1. μ est affine normalisable :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{avec } x_f = \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}, y_f = -\frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x_{ind},$$

$$x_d = \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}} \text{ et } y_d = -\frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x_{ind} \text{ donc nous avons :}$$

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x - \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x_{ind}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x - \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x_{ind}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

2. μ est semi-homographique normalisable à droite :

Cas où $x_{imp} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x_f}{x_{ind}+m} = 0$ on utilise l'expression :

$$F_{shnd}(x) = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ x_d x + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{avec } x_f = -(x_{ind} + m), y_f = 1, x_d =$$

$$\frac{1}{x_{ind}-x_{inc}} \text{ et } y_d = -\frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x_{ind} \text{ d'où :}$$

$$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{x_{ind}+m}{x+m} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x + \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x_{inc}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

3. μ est semi-homographique normalisable à gauche :

Cas où $x_{inc} = -\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x_f}{x_{inc}+m} = 0$. Cette fois on utilise l'expression :

$$F_{shng}(x) = \begin{cases} x_f x + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{telle que } x_f = \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}, y_f = -\frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x_{ind},$$

$$x_d = x_{ind}+m \text{ et } y_d = -1 \text{ donc, } F_{shnd}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x - \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x_{ind}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_{ind}+m}{x+m} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$$

4. μ est homographique normalisable :

Cas où $x_{inc} = -\infty, x_{imp} = +\infty$ et $x_{ind} \in \mathbb{R}^*$ c'est-à-dire

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x_f}{x_{inc}+m} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x_f}{x_{inc}+m} = 0$. Ici on utilise l'expression :

$$F_{hn}(x) = \begin{cases} \frac{x_f}{x+m} + y_f, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_d}{x+m} + y_d, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases} \quad \text{où } x_f = -(x_{ind}+m), y_f = 1, x_d = (x_{ind}+m)$$

et $y_d = -1$, on a : $F_{hn}(x) = \begin{cases} -\frac{x_{ind}+m}{x+m} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{x_{ind}+m}{x+m} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y. \end{cases}$

(ii) : - On voit que si $x \in \mathbb{R}$ et $(x+m) \in \mathbb{R}^*$, alors les quatre expressions de la fonction de normalisations sont bien définies donc, aucun problème de calcul des coefficients de normalisations.

On constate que si $x = \infty$, alors on peut toujours obtenir une application projective de $\overline{\mathbb{R}}$ dans \mathbb{R} pour les fonctions F_{shn} , F_{shnd} et F_{shng} par conséquent les quatre coefficients de normalisation sont toujours calculables, mais par contre, si $x = \infty$, alors on ne peut jamais obtenir une application projective sur l'intervalle $\overline{\mathbb{R}}$ dans \mathbb{R} pour la fonction F_{an} , il en résulte qu'on ne peut pas calculer lesdits coefficients. D'où le théorème énoncé.

7.10 Preuve des résultats évoqués dans le tableau 7.1

Cette fois-ci, nous allons voir en détail l'origine des résultats dans le tableau 7.1.

1. **Multiplicateur de côte ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.19) pour $m = 0$ avec $x_f = -1$, $y_f = 1$, $x_d = 1$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [1 ; +\infty[\\ x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [0 ; 1]. \end{cases}$$

Car cette mesure prend la valeur 0 à l'incompatibilité (x_{inc}), 1 celle de l'indépendance (x_{ind}) et $+\infty$ à l'implication logique (x_{imp}) ; alors il est facile de voir que cette fonction est continue par morceaux et, en particulier au point $x_{ind} = 1$.

Enfin, elle représente une fonction qui s'expose, toute opportunité des valeurs sont remplies aux conditions suffisantes et nécessaires pour les mesures normalisées et continues. Son tableau de variation est tel que :

x	0	1	$+\infty$
$F'_{shnd}(x)$	+		+
$F_{shnd}(x)$	-1	0	1
	Zone de répulsion		Zone d'attraction

FIGURE 7.1 – Variation de la fonction de normalisation de Multiplicateur de côte

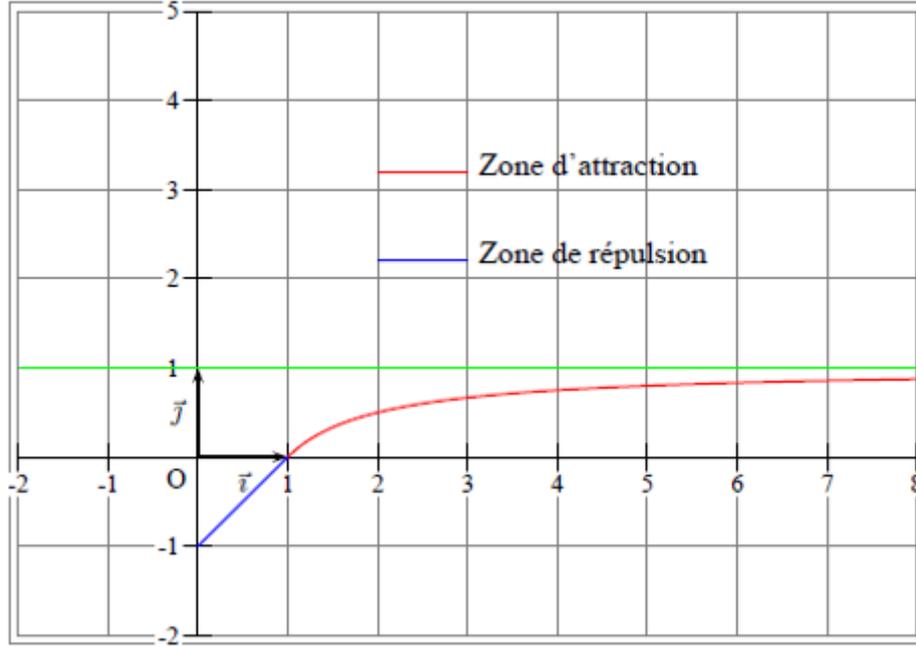


FIGURE 7.2 – Interprétation géométrique de la fonction de normalisation de la mesure « Multiplicateur de côte »

L'allure et le tableau de variation de F_n de la mesure Multiplicateur de Côte justifie que F_{shnd}^f est strictement croissante, positive et réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[0; 1]$, de même F_{shng}^d est strictement croissante, négative et réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[-1; 0]$. Ces résultats prouvent que F_{shnd} est strictement croissante et elle réalise une bijection sur $[0; +\infty[\rightarrow [-1; 1]$.

2. **Exemple-contre exemple ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.20) pour $m = 0$ avec $x_f = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $y_f = \frac{1-2P(Y')}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{2P(Y')-1}{P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{shng}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')}x + \frac{1-2P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in \left[\frac{2P(Y')-1}{P(Y')} ; 1 \right] \\ \frac{2P(Y')-1}{P(Y')} \frac{1}{x} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in \left] -\infty ; \frac{2P(Y')-1}{P(Y')} \right]. \end{cases}$$

3. **Gain informel ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.20) pour $m = 1$ avec $x_f = \frac{-1}{\log P(Y')}$, $y_f = 0$, $x_d = 1$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{shng}(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\log P(Y')}x, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [0; -\log P(Y')] \\ \frac{1}{x+1} - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in]-\infty; 0]. \end{cases}$$

4. **Odd-Ratio ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.19) pour $m = 0$ avec $x_f = -1$, $y_f = 1$, $x_d = 1$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [1; +\infty[\\ x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [0; 1]. \end{cases}$$

5. **Conviction ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.21) pour $m = 0$ avec $x_f = -1$, $y_f = 1$, $x_d = -\frac{1-P(Y')}{P(Y')}$ et $y_d = \frac{1-P(Y')}{P(Y')}$ on a :

$$F_{hn}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [1; +\infty[\\ -\frac{1-P(Y')}{P(Y')} \frac{1}{x} + \frac{1-P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [1-P(Y'); 1]. \end{cases}$$

6. **Sebag**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.19) pour $m = 0$ avec $x_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $y_f = 1$, $x_d = \frac{1-P(Y')}{P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{shnd}(x) = \begin{cases} -\frac{P(Y')}{1-P(Y')} \frac{1}{x} + 1, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in \left[\frac{P(Y')}{1-P(Y')} ; +\infty \right[\\ \frac{1-P(Y')}{P(Y')} x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in \left[1 - P(Y') ; \frac{P(Y')}{1-P(Y')} \right]. \end{cases}$$

7. M_{GK} ; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = 1$, $y_f = 0$, $x_d = 1$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = x \quad \text{avec} \quad x = \begin{cases} \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [0 ; 1] \\ \frac{P(Y'/X')-P(Y')}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [-1 ; 0]. \end{cases}$$

8. **Support**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{1}{P(X')P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))} x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [P(Y')P(Y') ; P(X')] \\ \frac{1}{P(X')P(Y')} x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [0 ; P(Y')P(Y')]. \end{cases}$$

9. **Confiance**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{1-P(Y')}$, $y_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{1}{P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-P(Y')} x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [P(Y') ; 1] \\ \frac{1}{P(Y')} x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [0 ; P(Y')]. \end{cases}$$

10. **Rappel**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{1}{P(X')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))} x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in \left[P(X') ; \frac{P(X')}{P(Y')} \right] \\ \frac{1}{P(X')} x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [0 ; P(X')] \end{cases}$$

11. **Lift**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $y_f = -\frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $x_d = 1$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')} x - \frac{P(Y')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in \left[1 - \frac{1}{P(Y')} \right] \\ x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [0 ; 1]. \end{cases}$$

12. **Leverage**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(Y')}{1-P(Y')}$, $y_f = -\frac{P(Y')(P(X')-1)}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{1}{P(Y')}$ et $y_d = -\frac{P(Y')(P(X')-1)}{P(Y')}$ on

$$a : F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{1-P(Y')} x - \frac{P(Y')(P(X')-1)}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{P(Y')} x - \frac{P(Y')(P(X')-1)}{P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

13. **Confiance Centrée**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{1-P(Y')}$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{1}{P(Y')}$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-P(Y')} x, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{P(Y')} x, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

14. **Confiance Confirmée descriptive**; sa fonction de normalisation est telle que : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{2(1-P(Y'))}$, $y_f = \frac{1-2P(Y')}{2P(Y')}$, $x_d = \frac{1}{2P(Y')}$ et $y_d = \frac{1-2P(Y')}{2P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-P(Y'))}x + \frac{1-2P(Y')}{2(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{2P(Y')}x + \frac{1-2P(Y')}{2P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

15. **Facteur de certitude ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = 1$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{1-P(X')}{P(Y')}$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1-P(X')}{P(Y')}x, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

16. **Laplace ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{nP(X')+2}{nP(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{nP(X')P(Y')+1}{nP(X')(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{nP(X')+2}{nP(X')P(Y')}$ et $y_d = -\frac{nP(X')P(Y')+1}{nP(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{nP(X')+2}{nP(X')(1-P(Y'))}x - \frac{nP(X')P(Y')+1}{nP(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{nP(X')+2}{nP(X')P(Y')}x - \frac{nP(X')P(Y')+1}{nP(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

17. **Piatesky-Shapiro ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{nP(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{1}{nP(X')P(Y')}$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{nP(X')(1-P(Y'))}x, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{nP(X')P(Y')}x, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

18. **Cosinus ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{P(X')}{1-P(Y')}$, $x_d = \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{P(X')}{1-P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{P(X')P(Y')}x - 1, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

19. **Accuracy ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{2P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = \frac{1-P(X')P(Y')+P(X')-1}{2P(X')P(Y')}$, $x_d = \frac{1}{P(X')P(Y')}$ et $y_d = \frac{1-P(X')P(Y')+P(X')-1}{2P(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2P(X')(1-P(Y'))}x + \frac{1-P(X')P(Y')+P(X')-1}{2P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{P(X')P(Y')}x + \frac{1-P(X')P(Y')+P(X')-1}{2P(X')P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

20. **Moindre contradiction ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = \frac{2P(X')P(Y')-P(X')}{2P(X')(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{1}{2P(Y')}$ et $y_d = \frac{2P(X')-1}{2P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}x + \frac{2P(X')P(Y')-P(X')}{2P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{2P(Y')}x + \frac{2P(X')-1}{2P(Y')}, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

21. **Lovinger ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = 1$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{1-P(Y')}{P(Y')}$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} x, & \text{si favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1-P(Y')}{P(Y')}x, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

22. **Cohen ou Kappa ; sa fonction de normalisation est telle que** : En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{2P(X')P(Y')}$

et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}x, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{2P(X')P(Y')}x, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

23. **Indice d'Implication de Gras; sa fonction de normalisation est telle que :**

En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{\sqrt{n}P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{\sqrt{n}P(X')P(Y')}x$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{\sqrt{n}P(X')(1-P(Y'))}x, & \text{si } X \text{ favorise } Y \text{ et } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{\sqrt{P(X')P(Y')}}{\sqrt{n}P(X')P(Y')}x, & \text{si } X \text{ défavorise } Y \text{ et } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

24. **Spécificité; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1-P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{1-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{1-P(Y')}{P(X')(Y')}$ et

$y_d = -\frac{1-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1-P(Y')}{P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{1-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1-P(Y')}{P(X')(Y')}x - \frac{1-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

25. **Fiabilité négative; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{P(X')}$, $y_f = -\frac{1-P(X')-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{1-P(Y')}{P(X')(Y')}$ et

$y_d = -\frac{1-P(X')-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')}x - \frac{1-P(X')-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1-P(Y')}{P(X')(Y')}x - \frac{1-P(X')-P(Y')+P(Y')P(X')}{P(X')P(Y')}, & \text{si } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

26. **Confiance Causale; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{2P(Y')}{(P(Y')+P(X'))(1-P(Y'))}$, $y_f = \frac{P(X')-P^2(Y')-P(Y')P(X')-P(Y')}{(P(Y')+P(X'))(1-P(Y'))}$,

$x_d = \frac{2P(Y')}{P^2(Y')+P(X')P(Y')}$ et $y_d = -\frac{P(X')-P^2(Y')-P(Y')P(X')-P(Y')}{P^2(Y')+P(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{2P(Y')}{(P(Y')+P(X'))(1-P(Y'))}x + \frac{P(X')-P^2(Y')-P(Y')P(X')-P(Y')}{(P(Y')+P(X'))(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{2P(Y')}{P^2(Y')+P(X')P(Y')}x - \frac{P(Y')+P^2(Y')P(X')-P(X')P(Y')}{P^2(Y')+P(X')P(Y')}, & \text{si } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

27. **Confirmation Causale; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{4P(X')((P(Y')-1))}$, $y_f = \frac{4P(X')P(Y')+P(X')+1-P(Y')}{4P(X')(P(Y')-1)}$,

$x_d = -\frac{1}{4P(X')(P(Y'))}$ et $y_d = -\frac{4P(X')P(Y')-P(X')-1+P(Y')}{4P(X')(P(Y'))}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4P(X')((P(Y')-1))}x - \frac{4P(X')P(Y')+P(X')+1-P(Y')}{4P(X')(P(Y')-1)}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ -\frac{1}{4P(X')(P(Y'))}x - \frac{4P(X')P(Y')-P(X')-1+P(Y')}{4P(X')(P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

28. **Confirmation Descriptive; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{2P(X')(1-(P(Y'))}$, $y_f = -\frac{2P(X')P(Y')-P(X')}{2P(X')(1-(P(Y'))}$, $x_d =$

$\frac{1}{2P(X')P(Y')}$ et $y_d = -\frac{2P(X')P(Y')-P(X')}{2P(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2P(X')(1-(P(Y'))}x - \frac{2P(X')P(Y')-P(X')}{2P(X')(1-(P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{2P(X')P(Y')}x - \frac{2P(X')P(Y')-P(X')}{2P(X')P(Y')}, & \text{si } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}$$

29. **Czekanowski-Dice ou F-mesure; sa fonction de normalisation est telle que :**

En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(X')+P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-(P(Y'))}$, $x_d = \frac{P(X')+P(Y')}{2P(X')P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(X')+P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{2P(X')P(Y')}{2P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{P(X')+P(Y')}{2P(X')P(Y')}x - 1, & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

30. **Dépendance ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{1-P(Y')}$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{1}{P(Y')}$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-P(Y')}x, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{P(Y')}x - 1, & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

31. **Dépendance Causale estimée ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(Y')}{3P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{7P(X')P(Y')-3P^2(Y')-2P(X')}{3P(X')(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{1}{3P(X')}$ et $y_d = -\frac{7P(X')P(Y')-3P^2(Y')-2P(X')}{3P(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')}{3P(X')(1-P(Y'))}x - \frac{7P(X')P(Y')-3P^2(Y')-2P(X')}{3P(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{3P(X')}x - \frac{7P(X')P(Y')-3P^2(Y')-2P(X')}{3P(X')P(Y')} & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

32. **Fukuda ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{nP(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{nP(X')P(Y')-\min_{confidence} P(X')}{nP(X')(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{1}{nP(X')P(Y')}$ et $y_d = \frac{nP(X')P(Y')-\min_{confidence} P(X')}{nP(X')P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{nP(X')(1-P(Y'))}x - \frac{nP(X')P(Y')-\min_{confidence} P(X')}{nP(X')(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{nP(X')P(Y')}x - \frac{nP(X')P(Y')-\min_{confidence} P(X')}{nP(X')P(Y')} & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

33. **Preciso ou Support causal ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{2(1-P(Y'))}$, $y_f = -\frac{1-P(X')+P(Y')}{2(1-P(Y'))}$, $x_d = \frac{1}{2P(Y')}$ et $y_d = -\frac{1-P(X')+P(Y')}{2P(Y')}$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-P(Y'))}x - \frac{1-P(X')+P(Y')}{2(1-P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{2P(Y')}x - \frac{1-P(X')+P(Y')}{2P(Y')} & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

34. **Risque relatif ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{P(Y')-P(X')}{1-P(Y')}$, $y_f = -\frac{P(Y')-P(X')}{1-P(Y')}$, $x_d = 1$ et $y_d = -1$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{P(Y')-P(X')}{1-P(Y')}x - \frac{P(Y')-P(X')}{1-P(Y')}, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ x - 1, & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

35. **Nouveauté ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (7.18) avec $x_f = \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = 0$, $x_d = \frac{1}{P(X')P(Y')}$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}x, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ \frac{1}{P(X')P(Y')}x, & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

36. **Pearl ; sa fonction de normalisation est telle que :** En utilisant l'expression (1) avec $x_f = \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}$, $y_f = 0$, $x_d = -\frac{1}{P(X')P(Y')}$ et $y_d = 0$ on a :

$$F_{an}(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(X')(1-P(Y'))}x, & \text{si } x \in [x_{ind} ; x_{imp}] \\ -\frac{1}{P(X')P(Y')}x, & \text{si } x \in [x_{inc} ; x_{ind}]. \end{cases}$$

37. **Force collective ; sa fonction de normalisation est telle que :**

$$x = \frac{P(X' \cap Y') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(X')P(Y') + P(\bar{X}')P(\bar{Y}')} \frac{1 - P(X')P(Y') - P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}{1 - P(X' \cap Y') - P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P(X')(2P(Y'/X')-1)}{1-P(X')-P(Y')+2P(X')P(Y')} \frac{P(X')+(2P(Y')-1)}{P(X')+P(Y')-P(X')(P(Y'/X')+P(Y'))} \text{ et nous avons :} \\
 x_{imp} &= \frac{P(X')}{1-P(X')-P(Y')+2P(X')P(Y')} \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{P(X')+P(Y')-P(X')(1+P(Y'))}, \\
 x_{ind} &= \frac{P(X')(2P(Y')-1)}{1-P(X')-P(Y')+2P(X')P(Y')} \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')} \text{ et} \\
 x_{inc} &= \frac{-P(X')}{1-P(X')-P(Y')+2P(X')P(Y')} \frac{P(X')+P(Y')-2P(X')P(Y')}{P(X')+P(Y')-P(X')P(Y')}. \\
 \text{De plus, } x_f &= \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}, y_f = -\frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x_{ind}, x_d = \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}} \text{ et } y_d = -\frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x_{ind} \text{ d'où} \\
 F_{an}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x - \frac{1}{x_{imp}-x_{ind}}x_{ind}, & \text{si } x \in [x_{ind}; x_{imp}] \\ \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x - \frac{1}{x_{ind}-x_{inc}}x_{ind}, & \text{si } x \in [x_{inc}; x_{ind}]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

7.11 Plaidoyer à la normalisation d'une mesure d'intérêt

Dans cette section, nous allons voir les importances de la considération de normalisation des mesures d'intérêt dans la fouille des règles d'association. C'est à dire on va répondre la question « à quoi sert exactement la normalisation d'une mesure d'intérêt sur la fouille de données ? ». André Totohasina comme le père de cette théorie a annoncé que, la pratique de ladite théorie est guidée par les propriétés des intervalles réels [Tot03]. Il est en effet clair que, fondamentalement dans le contexte de la base de données binaires, la normalisation d'une mesure se reflète étroitement à trois grandes parties, à savoir, modélisation probabiliste, élaboration d'une base de règle et une vision unificatrice ou une comparaison des mesures.

7.11.1 Modélisation probabiliste

Comme nous l'avons déjà annoncé au paragraphe 5.2, mathématiquement parlant, le principal objectif de normalisation de mesure de qualité μ est de ramener ses valeurs dans $[-1; 1]$ de telle sorte que la valeur 1 correspond à l'implication logique, l'intervalle $]0; 1[$ correspond à l'attraction mutuelle entre la prémisse et conséquent, la valeur 0 correspond à l'indépendance statistique, la valeur -1 correspond à l'incompatibilité et l'intervalle $]-1; 0[$ correspond à la répulsion mutuelle entre la prémisse et le conséquent. C'est à dire, trouver, autant que possible, une transformation qui réalise une bijection de l'intervalle $]x_{inc}; x_{imp}[$ sur $[-1; 1]$ où x_{imp} est la valeur de cette mesure à l'implication logique et x_{inc} celle à l'incompatibilité, du fait de la continuité de l'évolution dans les deux zones : attraction (dépendance positive) et répulsion (dépendance négative). Il est à préciser, par exemple, dans le cas de dépendance positive ou d'attraction mutuelle, entre X et Y , la force (intensité) de $X \rightarrow Y$ n'est pas nécessairement égale à celle de $Y \rightarrow X$, [Tot03], [ATF16], [AFT16], [ATF18], [ATF19].

7.11.2 Elaboration d'une base

Nous l'avons déjà expliqué la signification mathématique du qualificatif « *implicatif* ». Conformément au sens du même mot, nous avons également expliqué ce que l'on entend par « *mesure implicative* », ainsi que par « *non symétrique* ». Se pose alors la question qui suit : « quelle est la signification exacte de ces deux mots dans le domaine d'analyse statistique ? »

Implicatif : nous avons donné ci-dessus, au sens mathématique, la définition logique du terme « *implicatif* ». Mais, nous n'allons pas nous contenter de la seule définition logique et mathématique ; quand on passe dans le domaine de prise de décision statistique ou du

choix d'orientation, le mot « *implicatif* » aura la signification « *riche en décisions* ». Par conséquent, une mesure implicative est en effet une mesure riche en décisions statistiques, entre autres, elle justifie une interprétation en lien causal.

Non symétrique : en géométrie, le mot « *symétrique* » est la propriété de rester inchangé lors d'une transformation opérée par rapport à un point, à un axe ou à un plan par une simple permutation de position. Par la suite, une mesure non symétrique est en effet une mesure riche en comparaisons.



Exemple 29. La mesure confiance définie par : « $Conf(X \rightarrow Y) = P(Y'/X')$ » [AIS93], qui n'est autre que la probabilité conditionnelle sachant l'événement conditionné X' .

Elle indique la proportion d'entités vérifiant le conséquent parmi celles vérifiant la prémisse de la règle. Cette mesure est non symétrique et « non implicative ». Elle prend la valeur de référence 1/2 à l'équilibre. Elle n'est pas sensible à la taille de données : c'est donc une mesure descriptive. Elle prend ses valeurs sur l'intervalle [0 ; 1] [Fen07], [Gri13]. Bien qu'elle « indique la proportion d'entités vérifiant le conséquent parmi celles vérifiant la prémisse de la règle » elle n'est pas implicative ; elle n'est donc pas riche en décision. Par conséquent, l'utilisation exclusive des mesures de qualité Support et Confiance ne suffit pas pour garantir la qualité des règles détectées [Tot08]. En effet, comme le montre l'exemple dans le tableau 7.2 (a) et (b) [RT15], [Har16], [ReTD17].

	(a) Indépendance			(b) Répulsion			
	X'	\bar{X}'	Σ	U'	\bar{U}'	Σ	
Y'	560	240	800	V'	600	200	800
\bar{Y}'	140	60	200	\bar{V}'	180	20	200
Σ	700	300	1000	Σ	780	220	1000

Tableau 7.2 – Exemples de la faiblesse du Support-Confiance

En utilisant la mesures Support-Confiance relatives aux deux règles $X \rightarrow Y$ et $U \rightarrow V$, nous avons les valeurs ci-dessous :

(a) Pour la règle ($X \rightarrow Y$)	(b) Pour la règle ($U \rightarrow V$)
$Conf(X \rightarrow Y) = 0,8$;	$Conf(U \rightarrow V) = 0,76$;
$Supp(Y) = 0,8$;	$Supp(U) = 0,78$;
$Supp(X) = 0,7$;	$Supp(V) = 0,80$;
$P(Y'/X') = P(Y')$.	$P(V'/U') < P(V')$.

En prenant un $minSup$ et un $minConf$ égal à 0,7 et en utilisant le couple Support-Confiance, la règle ($X \rightarrow Y$) du premier contexte du tableau 7.2 (a) serait bien une règle valide. Pourtant, $P(Y'/X') = P(Y')$ veut dire que les deux motifs X et Y sont stochastiquement indépendants : donc, l'affirmation selon laquelle la présence du motif X influence celle du motif Y est erronée. Or, selon le couple Support-Confiance, elle est acceptable avec un niveau de confiance 70% ($minConf = 0,7$). Pareillement pour le deuxième contexte décrit dans le

tableau 7.2 (b), $\text{Conf}(X \rightarrow Y)$ et $\text{Supp}(X \rightarrow Y)$ dépassent respectivement le minConf et le minSupp . Donc, selon ce couple de mesures en question, la règle $(X \rightarrow Y)$ serait bien une règle valide. Autrement dit, Support et Confiance ont validé délibérément la règle $U \rightarrow V$, alors que $P(V'/U') < P(V')$ signifie les deux motifs U et V se défavorisent mutuellement, c'est-à-dire qu'il est logiquement plus intéressant d'étudier plutôt la règle $U \rightarrow \bar{V}$ que la règle $U \rightarrow V$. En un mot, le couple Support-Confiance s'avère non fiable pour une décision statistique pertinente [TF08]. L'analyse de cette faiblesse de ladite confiance s'avère une des raisons qui ont impulsé la création du nombre important de mesures dans la littérature. Toutes ces mesures sont en effet importantes, mais aucune d'elles ne remplit pratiquement les 21 propriétés souhaitables d'une mesure [Fen07], [Tot08], [Gui10], [Gri13]. Ce qui peut rendre difficile le choix que doivent faire les utilisateurs. Grâce à la normalisation, nous avons pu démontrer mathématiquement qu'il existe une mesure que l'on pourrait qualifier de « noyau », qui peut englober plusieurs mesures vues dans la littérature, et qui remplit pratiquement toutes les conditions suscitées.

En effectuant la normalisation de la mesure confiance [Tot03], [Fen07], [Tot08], nous avons constaté que sa normalisée est égale à M_{GK} , et a pour expression :

$$\star M_{GK}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} M_{GK}^f(X \rightarrow Y) & \text{où } M_{GK}^f(X \rightarrow Y) = \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')}, \text{ si } X \text{ favorise} \\ M_{GK}^d(X \rightarrow Y) & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases}$$

[Gui00], [Tot03], [WZZ04].

Notons que cette mesure a été découverte indépendamment par trois auteurs dans trois continents : par S. Guillaume en France dans sa thèse [Gui00], par A. Totohasina dans [Tot03], [TR05], [DJT07] à Madagascar lors de sa recherche sur la normalisation, à cette époque, il l'a nommé ION « Implication Orientée Normalisée » et par X. Wu, C. Zhang et S. Zhang en 2004 dans [WZZ04] aux USA sous le nom de CPIR « Conditional Probability, Incrementation, Ratio ». Elle vérifie les principes de Piatetsky-Shapiro, le principe de Freitas etc. En tout cas, ses riches et intéressantes propriétés mathématiques sont étudiées dans [TRD04], [TRD05]. Dans le domaine de normalisation des mesures, bien des mesures ayant des normalisées est égale à M_{GK} [ATF16], [AFT16]. Rappelons au passage que, notre mission ici, ne se contente pas de comparer les mesures confiances et M_{GK} en tant qu'elles sont différentes, comme nous l'avons vu dans [TF08], mais nous les comparons en tant que la mesure M_{GK} est la normalisée de la mesure confiance.

En effet, prenons l'exemple ci-dessus : nous avons

<p>(c) Pour la règle $(X \rightarrow Y)$</p> <p>$\text{Conf}(X \rightarrow Y) = 0,8 ;$ $\text{Supp}(Y) = 0,8 ;$ $\text{Supp}(X) = 0,7 ;$ $P(Y'/X') = P(Y') ;$ $M_{GK}(X \rightarrow Y) = 0.$</p>	<p>(d) Pour la règle $(U \rightarrow V)$</p> <p>$\text{Conf}(U \rightarrow V) = 0,76 ;$ $\text{Supp}(U) = 0,78 ;$ $\text{Supp}(V) = 0,80 ;$ $P(V'/U') < P(V') ;$ $M_{GK}(U \rightarrow V) = -0,05.$</p>
---	---

On voit que, pour le tableau 7.2 (a), la valeur de $M_{GK}(X \rightarrow Y) = 0$ ce qui est la définition de l'indépendance statistique de X et Y , d'où l'information nouvelle intéressante; nous constatons de même, pour le tableau 7.2 (b), $M_{GK}(U \rightarrow V) = -0,05$, ce qui correspond à la zone de répulsion et qui nous conduit en effet d'étudier la règle $U \rightarrow \bar{V}$.

7.11.3 Variation de M_{GK} par rapport au support de conséquent

Cette fois-ci on va voir « comment M_{GK} fait varier selon le support de conséquent ». Pour tous motifs X, Y supposons que la $\text{Conf}(X \rightarrow Y)$ est fixée à une valeur constante et étudions la variation de M_{GK} par rapport aux supports de conséquent [Har16] :

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = \frac{\text{Conf}(X \rightarrow Y) - \text{Supp}(Y)}{1 - \text{Supp}(Y)},$$

$$\frac{\partial M_{GK}(X \rightarrow Y)}{\partial \text{Supp}(Y)} = \frac{-1 + \text{Conf}(X \rightarrow Y)}{(1 - \text{Supp}(Y))^2} < 0.$$

On voit ici que la mesure M_{GK} est une fonction décroissante des supports de conséquents (Cf. Figure 7.3(b)). La figure 7.3(a) représente la composante positive et négative de la mesure M_{GK} en variant la valeur de support de conséquent et celle de la confiance sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

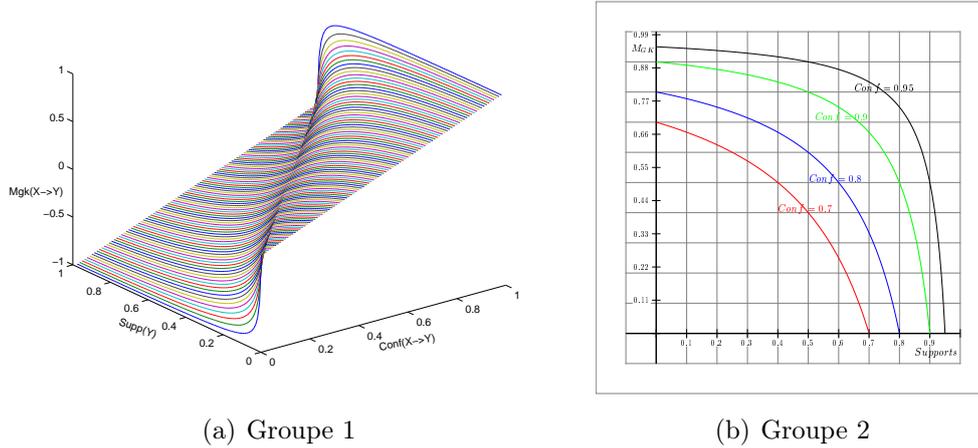


FIGURE 7.3 – Variation de M_{GK} en fonction de support de conséquent et confiance

La figure 7.3(b) est la partie positive de celle de 7.3(a) représentant le comportement de cette mesure par rapport aux règles de même Confiance et de support des conséquents comparables. Autrement dit, elle nous montrent que, pour une valeur fixée de $\text{conf}(X \rightarrow Y)$, le support de conséquent varie $]0 ; 1]$ et la mesure M_{GK} est une fonction homographique décroissante de ce support. Par la suite, assouvir de la mesure confiance pour examiner la qualité de règle $X \rightarrow Y$ pourrait conduire à une interprétation erronée. En effet, ayant une confiance élevée ne suffit pas garantir sur la qualité de la règle $X \rightarrow Y$ pertinente. Il faut donc tenir compte de l'écart de l'indépendance qui est défini par : $P(Y'/X') - P(Y')$. Car, pour toute valeur de la confiance, il peut être positif à l'attraction mutuelle, négatif à la répulsion entre deux motifs et nul celle de l'indépendance stochastique. Avec la mesure M_{GK} et sa valeur critique déterminée à partir de test de Khi-deux [TF08], on peut prononcer avec l'objectivité de qualité de lien implicatif entre les motif X et Y .

7.11.4 Vision unificatrice ou comparaison des mesures

Dans l'objectif de comparaison et d'une vision unificatrice des différentes mesures de qualités [Tot03], [Fen07] [Tot08], une « normalisation » est également parmi un outil de classer les

mesures en trois grandes catégories, à savoir les mesures normalisables subdivisées en deux sous-classes dont :

- ★ les M_{GK} normalisables : *Confiance, Confirmation causale, Confirmation descriptive, Cze-kanowski-D ou F-mesure, Dépendance, Dépendance causal estimé, Fukuda, Support causale, Risque relative, Nouveauté, Pearle, Conviction, M_{GK} , Support, Rappel, Lift, Lverage, Confiance centrée, Confiance confirmée descriptive, Facteur de certitude, Laplace, Piatetsky-Shapiro, Cosinus, Accuracy, Moindre contradiction, Lovingeur, Cohen ou Cappa, Indice d'implication de Gras, Spécificité, Fiabilité négative*. C'est à dire ces trente mesures se convergent uniformément au sens de normalisation vers une mesure M_{GK} , en d'autres termes, qu'elles deviennent uniques, comme disait Lavoisier « Rien ne se perd, rien ne se crée tout se transforme » ; d'où les mots « vision unificatrice » ou « comparaison » des mesures d'intérêt.
- ★ les mesures normalisables différentes de M_{GK} dont : *Confiance causale, Sebag, Odd-Ratio, Exemple-Contre-exemple, Gain informel, Multiplicateur de cote, Zhang, Q-Yule, J-mesure, Jaccard, Y-Yule*.
- ★ et finalement les mesures non normalisables ni par l'homéomorphisme affine ni par l'homéomorphisme homographique (*Klosgen, Dépendance pondérée, Support à sens unique, Support à double sens, Couverture, Prévalence*).

7.12 Conclusion partielle

Cette étude a permis, entre autres, de rendre normalisables un nombre non négligeable des mesures de qualité qui demeurent non affine-normalisable, grâce à l'utilisation des fonctions homographiques cette fois ; par exemple : *Sebag, Odd-Ratio, Exemple-Contre-exemple, Gain informel, Multiplicateur de cote et Conviction*. Cependant, nous avons montré que chaque mesure a cette fois sa propre situation par rapport aux trois références intuitives telles incompatibilité, indépendance et implication logique. Dans le cas présent, nous avons montré qu'on peut utiliser un homéomorphisme homographique, ou même un homéomorphisme homographique combiné à un homéomorphisme affine, quand l'infini figure comme coefficient de référence. Seulement, il faudra savoir jouer sur l'homéomorphisme homographique conformément à sa propriété et selon le besoin. Il est explicité dans notre travail qu'une seule situation quelconque est infinie ; de plus, on n'a pas encore passé à la situation d'indépendance stochastique : seule les fonctions homographiques du type $x \mapsto \mathcal{A}/x + m$, où $m = 0$ et $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^*$ suffisent pour résoudre le problème sur la normalisation. Une petite exception sera à noter sur la mesure Gain Informel, car elle est infinie à l'incompatibilité et zéro à l'indépendance stochastique. Par conséquent, on oblige d'introduire les deux fonctions $x_{inc} \mapsto \mathcal{A}/(x_{inc} + m)$ et $x_{ind} \mapsto \mathcal{A}/(x_{ind} + m)$ et $m \neq 0$; par exemple $m = 1$. Enfin, cette étude basée sur la normalisation par homographie, complémentairement à celle par application affine, ceci demeurant autour de M_{GK} avec ses deux composantes M_{GK}^f et M_{GK}^d à des facteurs multiplicatifs près. Ce qui renforce ainsi le caractère unificateur de M_{GK} par rapport à l'ensemble des mesures de qualité proposées dans la littérature. Elle a également montré que la normalisation de mesures probabilistes de qualité à l'aide d'un homéomorphisme homographique s'avère plus puissante que la normalisation par l'homéomorphisme affine initiée par André Totohasina. En effet, nous avons montré que toute mesure affine-normalisable se trouve homographique normalisable, alors que la réciproque est fautive. Par ailleurs, ce travail a explicité le processus de la normalisation par une fonction homographique et sa combinaison avec une fonction

affine en essayant de balayer les principales mesures présentes dans la littérature dans le souci d'une présentation plus facile à comprendre. La base de données possédant plusieurs branches, l'objet de la présente est la normalisation des mesures de qualité. On dit toujours, dans le contexte de la base de données, que l'étude sur les règles d'association connaît un développement important. S'y ajoute les mesures d'intérêt appelées encore mesures probabilistes de qualité qui occupent une place importante dans le contexte de fouille de données. Par la suite, la Mesure Probabiliste de Qualité et sa normalisation doivent se compléter. En effet, le nombre élevé de mesures d'intérêt de règle d'association, s'expliquant partiellement par l'absence d'une mesure parfaitement satisfaisante, a suscité et motivé beaucoup d'études sur ces mesures de qualité. A cet effet, cette étude a également montré que la normalisation est d'abord l'objet de l'une de ces études, tendant à dégager des relations fonctionnelles entre les différentes mesures d'intérêt. La recherche de la normalisation a constaté que la plupart des mesures d'intérêt, une fois normalisées pour celles normalisables tendent quasiment vers la mesure appelée M_{GK} . Par la suite, la découverte de la mesure M_{GK} qui est normée et centrée, non symétrique, via la normalisation de quelques mesures s'avère donner son rôle central par rapport aux nombres non négligeables existant dans la littérature des mesures probabilistes usuels pour apprécier la qualité des règles d'association avec dépendance orientée interprétable en terme d'implication statistique. On peut dire que cette mesure ayant un rôle comparable à celui de la loi normale centrée et réduite au sein des lois gaussiennes dans le champs des variables aléatoires. Elle permet également d'identifier si une règle est valide ou non, simplement par la connaissance de la valeur de sa mesure, même si celle-ci ne prend pas les valeurs constantes -1, 0, +1 respectivement aux états d'incompatibilité, d'indépendance, d'implication logique. Notre travail a montré aussi l'inconvénient de la mesure confiance face à la mesure M_{GK} sur l'élaboration des règles valides aux traitement des bases de données. Comme l'ont montré les recherches sur la normalisation des mesures probabilistes de qualité, réaliser l'opération de normalisation nécessite le passage par une théorie relativement complexe. On peut envisager plusieurs façons éventuelles pour effectuer son processus de normalisation. A notre avis, l'utilisation de la fonction de normalisation s'avère la plus simple, sans toutefois s'empêcher de faire savoir son origine.



Exemple 30. Normaliser la mesure Moindre Contradiction d'expression :

$$x = \frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \bar{Y}')}{P(Y')} = \frac{P(Y'/X') - (1 - P(Y'/X'))P(X')}{P(Y')}$$

sa fonction de normalisation ayant pour expression : $F_{an}(x) =$

$$\begin{cases} \frac{P(Y')}{2P(X')(1 - P(Y'))}x - \frac{2P(X')P(Y') - P(X')}{2P(X')(1 - P(Y'))}, & \text{si } x \in [x_2; x_{imp}] \\ \frac{P(Y')}{2P(Y')}x - \frac{2P(Y') - 1}{2P(Y')}, & \text{si } x \in [x_3; x_{ind}] \end{cases}$$

Réponse :

$$\text{Moin} - \text{Con}_{an} = \begin{cases} \frac{P(Y')}{2P(X')(1 - P(Y'))} \frac{P(Y'/X') - (1 - P(Y'/X'))P(X')}{P(Y')} - \frac{2P(X')P(Y') - P(X')}{2P(X')(1 - P(Y'))} \\ \frac{P(Y')}{2P(Y')} \frac{P(Y'/X') - (1 - P(Y'/X'))P(X')}{P(Y')} - \frac{2P(Y') - 1}{2P(Y')} \end{cases} \quad \text{Soit}$$

$(\text{Moin} - \text{Con})_{an} = M_{GK}$ et ainsi de suite. C'est-à-dire, réaliser la normalisation d'une mesure, il est bon d'établir d'abord sa fonction de normalisation et d'introduire immédiatement dans la fonction obtenue la valeur prédéterminée de x . L'on obtient la normalisée de la mesure considérée ce qu'on veut avoir ce qui est en général continue.

Quatrième partie



Partie Didactique de la discipline

Chapitre 8

Partie didactique

L'UNESCO [UNE04], [UNE11] se fixe l'objectif de l'éducation de qualité pour tous les jeunes, toutes matières confondues. Il donne une bonne instruction ou directive pour améliorer l'enseignement et apprentissage de mathématiques. Ainsi, le système éducatif de Madagascar est pratiquement en pleine phase de réforme en vue de l'amélioration de l'efficacité toutes matières confondues. L'enseignement des mathématiques, et bien d'autres, a pour but de développer chez les élèves un esprit de rigueur et d'objectivité de manière à le rendre apte à s'ouvrir et à agir sur le monde concret, complexe et diversifié. La mathématique est une matière à enseigner obligatoirement dès la classe de primaire jusqu'en terminale quelle que soit la série ou spécialité technique. C'est une matière de base incontournable dans la formation d'un futur citoyen et dans l'éducation. Au fil des années de nos travaux de l'enseignement des mathématiques, nous avons observé que l'apprentissage des disciplines appliquées pour résoudre les problèmes mathématiques pose encore des difficultés de compréhension. Chaque année scolaire, nous assurons le tutorat envers des stagiaires qui sont des étudiants de cinquième année de l'Ecole Normale pour l'Enseignement Technique (E.N.S.E.T.). Ce qui nous permis de collaborer avec des équipes, considérés comme experts, des Enseignants chercheurs chargées de suivi et d'encadrement des élèves-professeurs stagiaires. A chaque fin de séance d'observation du stagiaire, les 45 dernières minutes, chacun de trois ou quatre Enseignants-chercheurs recommandent des solutions pédagogiques en terme de critiques constructives ou approbation du comportement observé tantôt. Ces faits, nous poussent à analyser de façon plus approfondie les méthodes visant à améliorer l'apprentissage des mathématiques.

8.1 Tâches des enseignants face aux apprenants

★ Aider les apprenants.

L'un des devoirs les plus stricts du professeur est d'aider ses apprenants. Ce devoir n'est pas des plus faciles. Il demande du temps, de la pratique, du dévouement, et de bons principes [Pol65]. L'apprenant doit acquérir l'expérience la plus vaste possible du travail personnel. Mais s'il reste seul devant son problème, sans aucune aide, ou avec une aide insuffisante, il peut ne faire absolument aucun progrès. D'autre part, si le professeur l'aide trop, il ne lui reste plus rien à faire. Le professeur doit l'aider, ni trop ni trop peu, de façon à lui laisser une part raisonnable du travail. Si les moyens de l'apprenant sont limités, le professeur doit conserver au moins l'illusion qu'il fournit un travail personnel ; pour se faire, il doit l'aider de façon discrète, sans s'imposer à lui [Pol65], [Enr90]. Le mieux est d'aider l'apprenant d'une manière naturelle. Le professeur doit se mettre à sa place, examiner son cas particulier, es-

sayer de comprendre ce qui se passe dans son esprit, poser une question ou indiquer une étape du raisonnement qui aurait pu venir à l'esprit de l'apprenant lui-même. Question, recommandation, opération intellectuelle. En essayant d'aider l'apprenant de façon efficace et naturelle, mais sans s'imposer à lui, le professeur est amené sans cesse les mêmes questions, à indiquer sans cesse les mêmes étapes de raisonnement. Ainsi, dans d'innombrables problèmes, il nous faut poser la question : quelle est l'inconnue ? Nous pouvons varier le vocabulaire, poser la même question de façon différente : « que demande-t-on ? Que voulez-vous trouver ? Qu'êtes-vous supposé chercher ? » Le but de ces questions est d'obliger l'apprenant à concentrer son attention sur l'inconnue. Parfois on obtient le même résultat d'une manière plus naturelle en suggérant : Regarder bien l'inconnue. Question et suggestion visent au même but : elles tendent à provoquer la même opération intellectuelle. Rappelons au passage qu'un professeur doit avoir des styles de leadership paternaliste et démocratique.

8.2 Repère méthodologique dans l'enseignement apprentissage

Tout le monde n'ignore que la discipline mathématique est souvent jugée trop abstraite et par conséquent, s'écarte facilement d'une application pratique directe, pour éviter la tendance vers l'idée d'un rejet automatique [Pol65], [Enr90] essayer de faire l'éloge ou la publicité de la discipline qu'ils enseignent, par l'intermédiaire du récit des exploits heureux traversés par la discipline par exemple (il s'agit de savoir faire aimer sa matière).

Par ailleurs, jusqu'à maintenant, Singapour est le premier pays de référence du monde concernant à la réflexion de la résolution de ce problème. En effet, le rapport PISA de ces dernières années nous informe que les élèves évoluant dans le système éducatif de Singapour sont les meilleurs du monde en mathématiques au niveau primaire et collège. La méthode de Singapour sur l'enseignement de mathématiques s'avère ainsi efficace, sinon la plus efficace parmi les méthodes pédagogiques existant dans la littérature telles la PPO, la PEx, l'APC, etc.. Enfin, cette méthode de Singapour (MS) repose sur une approche pédagogique qualifiée d'Approche Concrète-Imagée-Abstraite (ACIA) évoluant en les trois étapes suivantes :

(i) 1^{ère} étape : **étape concrète**

Les élèves sont d'abord confrontés aux notions mathématiques par la manipulation d'objets avec prise d'initiative : il s'agit d'impliquer les apprenants dans leur apprentissage.

(ii) 2^{ème} étape : **étape imagée** Cette fois, les objets manipulés sont remplacés par des images qui les représentent. Maintenant, les élèves doivent verbaliser pour identifier et interpréter ces images appropriées ainsi que les invariants ; c'est une étape semi-concrète et semi-abstraite.

(iii) Enfin, 3^{ème} étape : **étape d'abstraction**

On introduit les symboles et le formalisme mathématique explicite. Ensuite, des exercices de renforcement devront contenir des problèmes d'habillages diversifiés dans des contextes.

A notre point de vue, la MS s'avère ainsi une approche pédagogique composite, c'est-à-dire une combinaison de l'APC et de la PEx, soit de l'APC suivie de la PEx et non le contraire. A l'instar de la formule $APC = PPO + \text{socioconstructivisme}$, nous symbolisons ceci par l'équation méthodologique : $MS = APC + PEx$, l'addition n'étant pas commutative ici. En

effet, l'appel à l'action de l'apprenant lui optimise l'envie d'apprendre et produit ainsi de l'apprentissage véritable. Un enseignement basé sur la résolution de situation problème et l'implication de l'apprenant a une grande chance d'amener l'élève à comprendre l'utilité des mathématiques et à aimer cette matière. L'enseignant de mathématiques devrait alors se vêtir de sa toge de leader pédagogique, eu égard à son groupe-classe : il doit déployer son leadership charismatique et son leadership transformationnel. Voilà notre ferme conviction sur cette noble mais difficile tâche d'enseignement des mathématiques.

8.3 Enseignement de fonction homographique

Si on se contente spécialement sur l'application d'une homographie dans notre vie quotidienne, alors nous avons déjà vu bien des domaines de l'utilisation. Face à ces domaines, il convient d'essayer de motiver beaucoup plus les apprenants envers la réflexion sur l'utilisation de ladite sphère.

Les élèves de collège ont normalement déjà entendu parler des notions d'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle telle que la fonction affine. Cette étude est fait de façon très naïve. Au lycée, on l'élargit par l'introduction de la notion d'étude des fonctions de références telles $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{a}{x}$, $E(x)$. En première, l'étude commencera à approfondir un peu plus des notions, à savoir par exemple l'ajout de toutes les fonctions associées aux fonctions de références vécues en seconde en respectant les arguments donnés par le programme scolaire. En terminale, on a plus des nouvelles choses sauf, l'introduction de fonction logarithme népérien et exponentielle népérienne. Par la suite, nous voudrions traiter cette fois les homographies du type $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ qui sont exactement parmi les fonctions de référence. D'où, la question se pose : « est-ce-qu'elle est vraiment une fonction de référence ? ».

8.3.1 Classe de Seconde

Comme nous l'avons déjà annoncé qu'en classe de seconde, on étudie déjà les homographies du type $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$. Son enseignement doit suivre les recommandations données par le Ministère selon le programme en vigueur en respectant les objectifs visés à cette fonction. Par suite, tous les enseignants de cette classe doivent être qualifiés pour rendre efficace lesdits objectifs aux élèves. On laisse cette partie puisque ce que nous intéresse ici c'est : « comment poursuivre les enseignements de ce chapitre eu égard à la visualisation de ce qu'ils ont déjà vécu en classe de seconde ? ». Autrement dit, « est-ce-que le fait qu'il est déjà fait en seconde facilite son enseignement en classe supérieur ? C'est-à-dire, est-ce-qu'elle est vraiment référence comme l nous avons déjà dit ? ».

8.3.2 Classe de 1^{ère} et Terminale

★ Définition de fonction associée

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Par définition, une fonction associée à f sont des fonctions g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 définies sur un intervalle I' de \mathbb{R} telle que : pour tous réels α^* , β^* et k on a : $g_1(x) = f(x - \alpha^*) + \beta^*$; $g_2(x) = -f(x)$, $g_3(x) = f(-x)$, $g_4(x) = |f(x)|$, $g_5(x) = kf(x - \alpha^*) + \beta^*$.

Selon le programme en vigueur, seulement les fonctions associées g_1, g_2, g_3, g_4 sont incorporées dans ce programme pour la classe première et la fonction g_5 est exclue.

En effet, partant de la homographie $h_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$, le déterminant de h_1 est égal à -1. Profitant la définition de la fonction associé ci-dessus nous avons : pour tous réels α^*, β^* on a :

$$\begin{aligned} g_1(x) = h_1(x - \alpha^*) + \beta^* &= \frac{1}{x - \alpha^*} + \beta^* \\ &= \frac{-\beta^*x - \alpha^*\beta^* + 1}{x - \alpha^*}. \end{aligned}$$

Nous constatons que le déterminant de g_1 est égal à $-\alpha^*\beta^* - 1 + \alpha^*\beta^* = -1 = \det(h_1)$.

De même pour $h_2 : x \mapsto \frac{-1}{x}$. Le déterminant de h_2 est égal à 1. Profitant la définition de la fonction associé ci-dessus nous avons : pour tous les réels α^*, β^* on a :

$$\begin{aligned} g_2(x) = h_2(x + \alpha^*) + \beta^* &= \frac{1}{x + \alpha^*} + \beta^* \\ &= \frac{\beta^*x + \alpha^*\beta^* + 1}{x + \alpha^*}. \end{aligned}$$

Nous constatons que le déterminant de g_2 est égal à $\alpha^*\beta^* + 1 - \alpha^*\beta^* = 1 = \det(h_2)$.

Moralité 8. *A partir de la homographie h définie par $x \mapsto \frac{1}{x}$, on peut obtenir les homographies à déterminants négatifs et celles à déterminants positifs.*

De façon réciproque : Partant d'une homographie h telle que $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Dans le cas où c est non nul, à une translation verticale près, cette fonction peut se réduire d'une fonction homographique de type : $h(x) = \frac{\alpha^*}{x + \beta^*} + \gamma^*$, où $\alpha^* = (bc - ad)/c^2$, $\beta^* = d/c$ et $\gamma^* = a/c$.

En effectuant un changement de repère dans un nouveau repère d'origine \mathcal{J} de coordonnées (β^*, γ^*) d'un point de \mathbb{C} l'ensemble $\mathbb{C} \cup \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty]$ (ensemble des applications projectives) l'expression de la fonction homographique devient $h(x) = \frac{\alpha^*}{x}$ ce qui correspond à la fonction inverse multiplier par le scalaire $\alpha^* = (bc - ad)/c^2$ et si $\alpha^* = 1$, alors obtient une fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Moralité 9. *A partir de la homographie de référence h définie par $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, on peut obtenir la homographie $h(x) = \frac{\alpha^*}{x}$ à déterminant négatif et celle à déterminant positif selon la valeur de α^* .*

Les opérations de h avec les fonctions g_2, g_3, g_4 sont triviales. Nous pensons que les questions ci-dessus sont bien répondues.

8.4 Fouille des règles d'association

Comme l'on a montré que les recherches sur la normalisation des mesures probabilistes de qualité, réaliser l'opération de normalisation nécessite le passage par une théorie relativement complexe.

On peut envisager plusieurs façons éventuelles pour effectuer son processus de normalisation.

Pour la notre, la homographie mise en jeux est soit $h_0(x) = ax + b$ soit $h_1(x) = \frac{\alpha^*}{x}$ à savoir que $\lim_{x \rightarrow \infty} h_1(x) = 0$.

8.5 Traitement d'une suite homographique

Cette fois-ci, il faut se baser aux notions de la recherche des points fixes. Cette méthode marche grâce à la relation existant entre droite projective et homographie.

8.6 Analyse des sujets de baccalauréat

Bien des sujets de Baccalauréat ont déjà passé devant mes yeux : en effet, leur nombre avoisine les 400. Pour témoigner ce fait, limitons-nous aux seuls huit sujets dont 3 sujets de Terminale A (Annexe A), 3 sujets de Terminale D (Annexe B) et 2 sujets de Terminale C (Annexe C).

On n'ignore que depuis la classe de seconde, on fait déjà l'étude de la homographie propre. En première, on l'étend vers les études de ses associées suivant le programme en vigueur. En plus, en première scientifique, on fait également l'étude de la fonction $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

Pour cette fonction, nous constatons que si $a = 0$, alors on obtient $f(x) = \frac{bx + c}{dx + e}$ qui est exactement l'expression de la homographie propre. Dommage, le programme ne poursuit pas ce processus.

En terminale, beaucoup de transformations sont déjà introduites à savoir : les similitudes directes, similitudes indirectes etc.. Mais, on ne voit jamais la homographie propre complexe qui représente une transformation géométriques intéressante. Ce constat est bien prouvé même au mode d'établissement du sujet de baccalauréat (voir annexes A, B, C).

En effet, comme on le voit sur les sujets du baccalauréat aux annexes A, B, C, le mode d'établissement de tous les sujets du baccalauréats suit ce même rythme tant dans l'Enseignement général que technique. Seulement, les ayant droits à la préparation des sujets de Baccalauréat, et du BEPC même, ne sentent nullement pas les enjeux de la homographie propre, vraisemblablement par négligence ou même par l'ignorance des enjeux des homographies.

A cet effet, nous nous proposerons d'instaurer une formation continue quant aux enseignements des homographies depuis les classes de collège jusqu'à l'Université. Autrement dit, le long trajet collège-Université doit se constituer pour former un bagage pédagogique solide et solidaire concernant les homographies et bien d'autres. La discontinuité dans la formation sera ainsi automatiquement éliminée car, dans ce cas, ladite formation est régie par une même pédagogie et une même didactique des disciplines.

8.7 Pertinence et faisabilité de l'enseignement de la géométrie hyperbolique plane dès le collège

8.7.1 Motivation

Avec les programmes scolaires successifs, tous les élèves de collège et de seconde, première et terminale scientifiques au lycée étudient la géométrie sous sa forme euclidienne seulement. Notons que l'enseignement de toutes les géométries dans ces classes sont alors effectuelles et/ou constructibles à partir du plan euclidien.

A ce sujet, en admettant que le demi-plan du Poincaré est le plan supérieur du plan euclidien et ayant acquis des connaissances en géométrie euclidienne pour les élèves au collège et au lycée, il n'y a aucune raison d'empêcher l'introduction de l'enseignement de la géométrie hyperbolique non euclidienne selon le modèle de Poincaré.

En effet, quant à la géométrie non euclidienne, nous nous pensons qu'il est bien possible et nécessaire d'introduire cette partie dès le collège, mais on se limitera jusqu'à l'esquisse de construction des figures géométriques élémentaires et fondamentales (voir par exemple les figures 6.22, 6.23, 6.25 pages 89, 90, 92 et annexe E) hyperboliques à l'aide des matériels de construction géométriques (compas, règle, etc.) [TA17].

8.7.2 Enjeux de l'enseignement-apprentissage des géométries

L'élève n'apprend qu'en agissant et donc en étant impliqué par la scénario d'enseignement-apprentissage. Contrairement à la conception béhavioriste, acquérir une connaissance n'est pas un processus d'empilement, mais plutôt le passage d'une phase d'équilibre à un nouvel équilibre par le biais d'une phase de déséquilibre de conflit sociocognitif provoqué par une contradiction entre pré-conceptions et la situation à la quelle on est confronté.

La pédagogie de la géométrie exclusivement euclidienne depuis la jeune enfance de 6ans jusqu'à l'adolescence engendre certainement une pré-conception de ne percevoir que les formes géométriques euclidiennes, pré-conception qui risque d'être difficile à effacer, voire indélébile, donc va s'ériger en un obstacle épistémologique, mais aussi un obstacle didactique envers l'apprentissage des géométries non euclidienne plus tard !

Se pose alors la question de savoir sur la géométrie : « comment créer une opportunité d'un déséquilibre instable face à cette prégnance durable et quasi exclusive à la géométrie euclidienne ? ».

Etymologiquement le terme « géométrie » vient des deux racines « géo » et « métrie » signifiant respectivement « terre (gaia en Grec) » et « mesure (metron en Grec) ».

Après ces quelques repères historiques sur la pédagogie et sur la géométrie et enjeux de son enseignement-apprentissage aux niveaux scolaires, nous présentons d'une façon très simplifiée et assez intuitive la géométrie hyperbolique analytique mise en relation avec les homographies complexes.

Ensuite, nous tenterons de monter la pertinence et la faisabilité de l'enseignement précoce de cette géométrie non euclidienne selon le modèle de Poincaré : cette réforme concerne le niveau collège et lycée.

8.7.3 Etude expérimentale

A titre indicatif, voici une question portant sur la reconnaissance et la dénomination des figures de la géométrie euclidienne et de celles hyperboliques que nous avons posées à 40 étudiants et à 10 enseignants chercheurs des mathématiques et des sciences physiques.

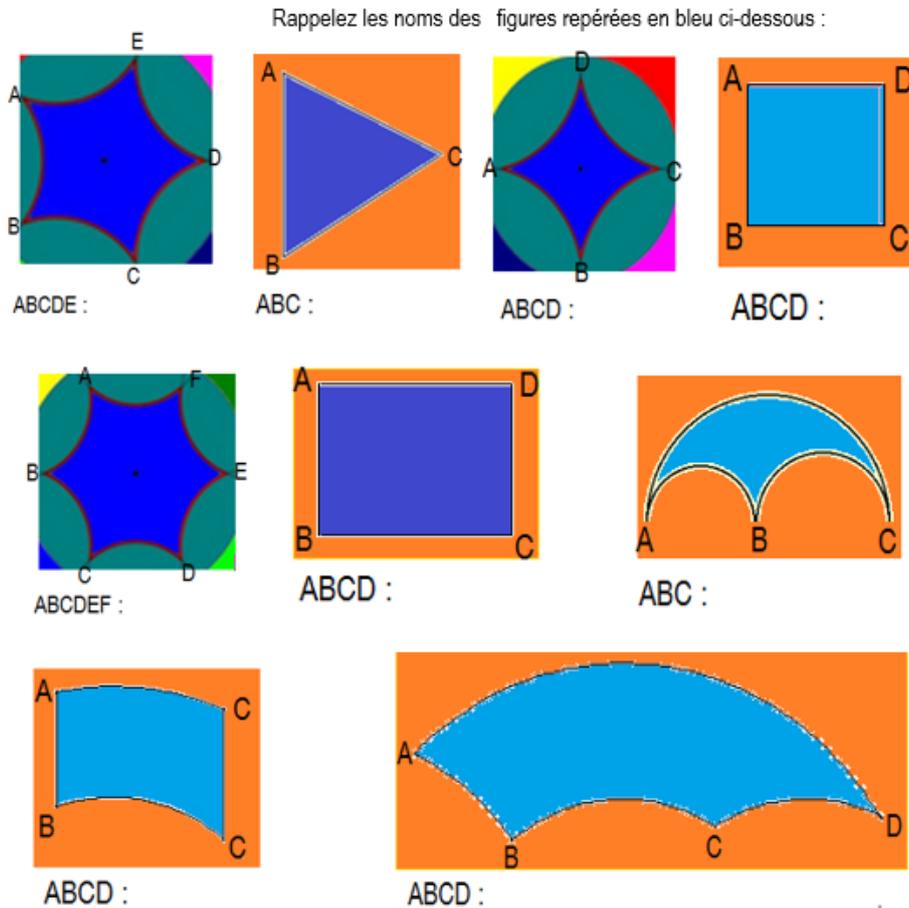


FIGURE 8.1 – Sujet de test

L'enquête a donné le résultat représenté par la figure 8.2.

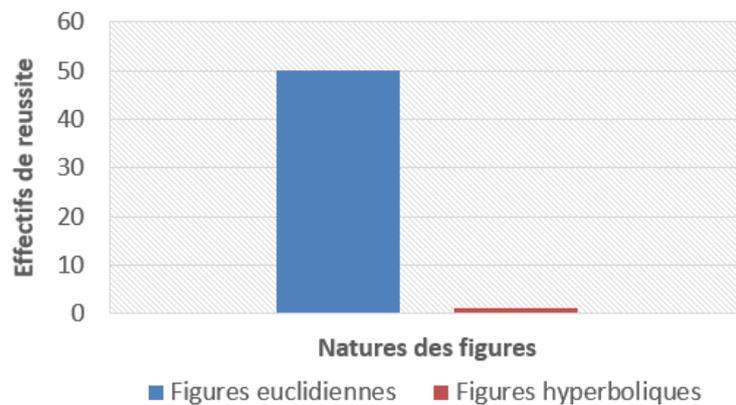


FIGURE 8.2 – Résultat de l'enquête

À l'issue de ce test, nous avons constaté que personne n'arrive pas à nommer correctement les figures relatives aux géométries hyperboliques, la plupart d'entre eux ne possèdent aucun mot pour les reconnaître. L'interprétation de ce fait est évidente, vu les programmes scolaires suivis. Voici quelques réponses témoins concernant le test en vigueur et les autres réponses à la question sont visibles à l'annexe D.

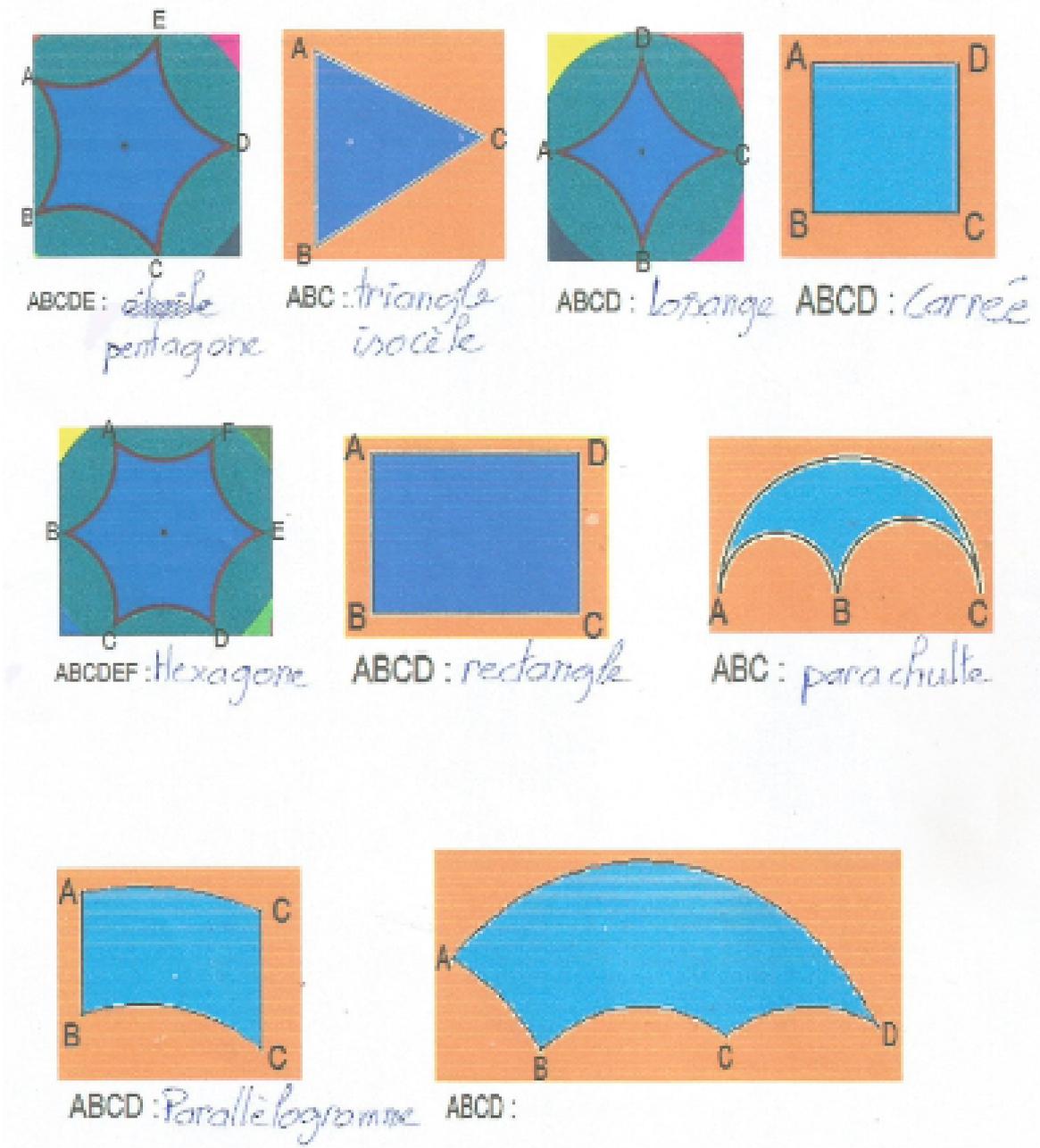


FIGURE 8.3 – Copie de test

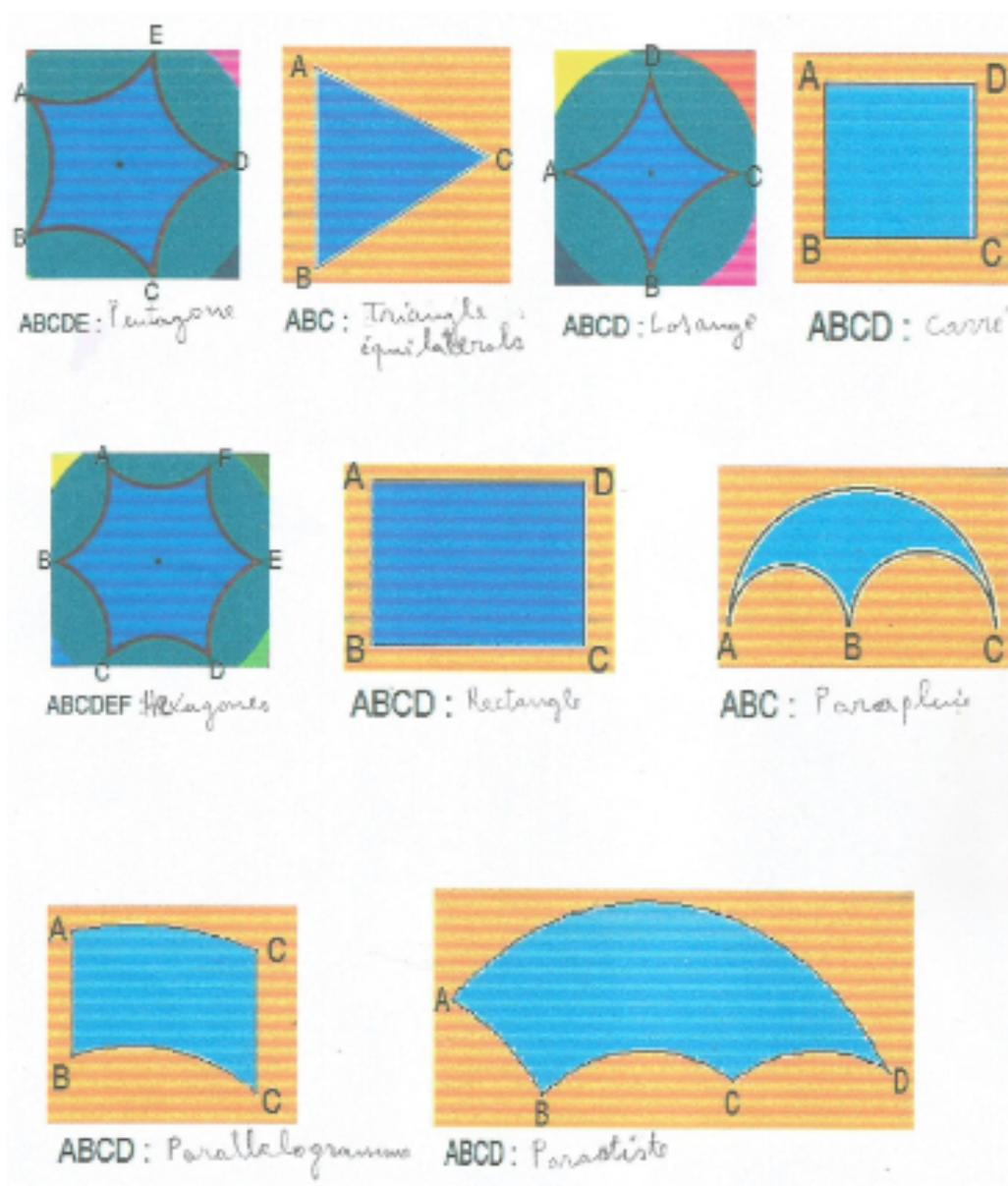


FIGURE 8.4 – Copie de test

8.7.4 Analyse du résultat d'enquête

Vraisemblablement, le non apprentissage de la géométrie hyperbolique et la prégnance à la géométrie euclidienne pourraient être la raison de cet échec. Or, dans la vie quotidienne, il existe plusieurs architectures d'images telles que la géométrie euclidienne ne suffit ni pour les construire, ni pour optimiser la créativité et l'éducation à l'esthétique qui sont des enjeux majeurs de l'enseignement des géométries : à titre indicatif, apprécions les polygones hyperboliques rappelées dans l'annexe E (notons que tous ces polygones sont extraits des Polygones hyperboliques réguliers et ses translatsés par Marcel Morales).

Tout ceci montre, partiellement certes, la pertinence de l'enseignement d'au moins une géométrie non euclidienne dès le collège et poursuivie et approfondie au Lycée.

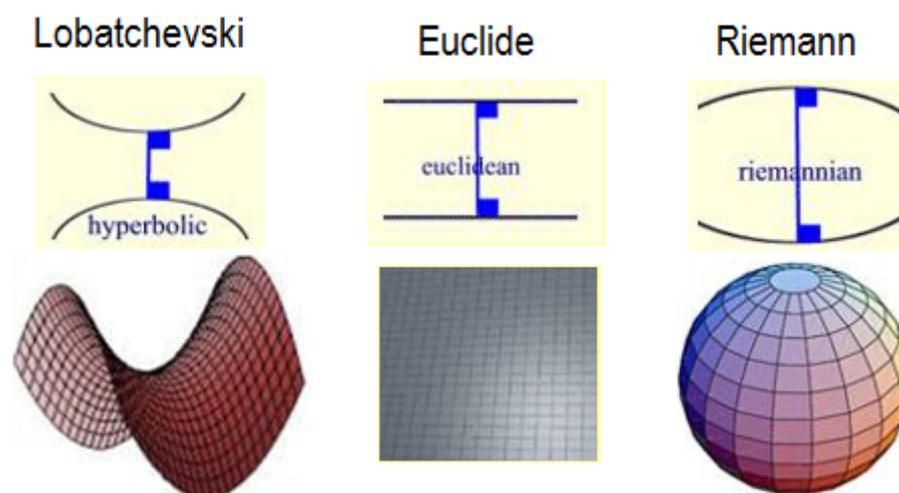


FIGURE 8.5 – Trois géométries existant dans la littérature

8.8 Recherche et méthode en didactique

8.8.1 Méthode

La didactique des mathématiques est communément perçue comme la réflexion approfondie sur le processus d'enseignement-apprentissage des concepts mathématiques précis, sur le processus de leur diffusion, et ainsi que sur les origines et remédiations des éventuels difficultés et obstacles d'apprentissage desdits concepts mathématiques. Pour entreprendre la recherche en didactique des mathématiques, il est loisible de fonctionner comme suit :

1. Proposer des tâches à un certain nombre n ($n \geq 50$) d'élèves/enseignants dont la réalisation peut mettre en œuvre plusieurs définitions des concepts en question ;
2. Interpréter ensuite les productions des élèves/enseignants pour savoir si certaines définitions et/ou appréhensions étaient ou non privilégiées par la population cible. Il s'agit aussi, par des confrontations de méthodes déployées par les élèves, de favoriser l'apprentissage par certains élèves des propriétés du concept par son utilisation.

8.9 Niveau collègue

8.9.1 Enfant de 11 à 12 ans : classe de 6^{ème}

Ils doivent être capable d'approfondir, de développer les connaissances acquises sur les droites à l'école Primaire et d'utiliser des propriétés et des définitions pour construire et/ou pour justifier. C'est-à-dire qu'il doit être capable de (d') :

- ★ nommer une droite (AB) , (xy) , (D) ;
- ★ reconnaître et placer des points alignés, des points non alignés ;
- ★ tracer la droite passant pour deux points distincts donnés ;
- ★ reconnaître et tracer des droites sécantes ;
- ★ connaître et utiliser les notations $(D) \perp (L)$, $(D) // (L)$;
- ★ reconnaître sur une figure codée deux droites perpendiculaires, deux droites parallèles ;

- ★ construire à l'aide de la règle et de l'équerre :
 - ☆ la droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné ;
 - ☆ la droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné ;
- ★ vérifier que deux droites sont perpendiculaires ;
- ★ justifier que deux droites sont parallèles ou qu'elles sont perpendiculaires en utilisant des définitions et/ou des propriétés.

Moralité 10. *Pour l'élève ayant acquis ces connaissances ci-dessus, on peut en effet introduire dans cette classe la notion de demi-plan de Poincaré suivi de la construction des droites hyperboliques.*

8.9.2 Enfant de 12 à 13 ans : classe de 5^{ème}

Principalement, l'élève de cette catégorie doit être capable d'utiliser la notion de distance pour caractériser un segment et un triangle, il doit également capable d'avoir une première notion de regionnement du plan. C'est à dire qu'il doit connaître quelques propriétés caractéristiques des triangles particuliers, reconnaître et construire des triangles particuliers.

Moralité 11. *Pour l'élève ayant acquis ces connaissances ci-dessus, on peut en effet introduire la géométrie hyperbolique dans cette classe mais on se limite jusqu'à la notion de tracé d'un demi-cercle centré sur l'axe x passant par deux points sur le demi-plan et à la construction de tous les éléments géométriques, triangle, parallélogramme etc. en connaissant que la somme des angles du triangle est inférieure à 180° .*

8.9.3 Enfant de 13 à 14 ans : classe de 4^{ème}

L'objectif général concernant qu'il doit être capable d'utiliser les symétries orthogonales et centrales pour justifier des propriétés de configurations et un programme de construction simple. C'est à dire qu'il doit être capable de savoir la propriété de la droite des milieux et des propriétés de droites particulières d'un triangle. Plus précisément, il doit être capable de (d')

- ★ énoncer la définition de la droite des milieux ;
- ★ énoncer les propriétés du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle :
 - ☆ longueur de segment ;
 - ☆ direction du support de ce segment ;
- ★ utiliser la propriété directe pour justifier que deux droites sont parallèles ;
- ★ utiliser la propriété réciproque pour justifier qu'un point est milieu d'un segment ;
- ★ construire l'orthocentre d'un triangle quelconque dont :
 - ☆ un des angles est obtus ;
 - ☆ les trois angles sont aigus ;
- ★ reconnaître l'orthocentre d'un triangle rectangle (il s'agit du sommet de l'angle droit) ;
- ★ construire le cercle inscrit dans un triangle donné ;
- ★ construire le centre de gravité d'un triangle ;

- ★ déterminer la position de centre de gravité.

Moralité 12. *Pour l'élève ayant acquis ces connaissances ci-dessus, on peut en effet introduire la géométrie hyperbolique dans cette classe mais on se limite jusqu'à l'introduction de notion de l'inversion ainsi, elle est faite suivant qu'il maîtrise déjà les techniques élémentaires pour l'étude des calculs vectoriels et il sait également de mettre en œuvre les techniques élémentaires pour l'étude vectorielle des situations rencontrées en géométrie.*

En un mot, l'enseignement de la géométrie hyperbolique non euclidienne au niveau du collège est limité jusqu'à l'esquisse des constructions des figures géométriques hyperboliques fondamentales et élémentaires sans entamer sur les études analytiques.

8.9.4 Enfant de 14 à 15 ans : classe de 3^{ème}

L'élève de cette classe doit principalement être capable de connaître les propriétés directes et réciproques de Thalès, et d'utiliser ces propriétés pour justifier et construire. C'est à dire qu'il doit connaître les propriétés directe et réciproque de Thalès et d'utiliser ces propriétés pour justifier et construire. Il doit aussi être capable de maîtriser et compléter les connaissances acquises dans les classes antérieures sur les symétries et les translations et d'utiliser, de manière plus performante, les symétries et les translations pour démontrer et pour construire et encore d'acquérir une première notion sur la composition des deux transformations. Autrement dit, il doit être capable de (d')

- ★ reconnaître une configuration de Thalès dans un triangle ;
- ★ énoncer correctement les propriétés directe et réciproque de Thalès ;
- ★ utiliser les propriétés de Thalès pour :
 - ☆ partager un segment dans rapport donné ;
 - ☆ construire la quatrième proportionnelle des nombres a , b , et c pris dans cet ordre ;
 - ☆ calculer les distances ;
 - ☆ justifier un parallélisme des droites.
- ★ construire un triangle semblable à un autre donné ;
- ★ reconnaître des triangles semblables sur une configuration donnée ;
- ★ justifier que deux triangles donnés sont semblables ;
- ★ résoudre des problèmes simples faisant intervenir des triangles semblables ;
- ★ reconnaître une configuration de Thalès dans le cas général
- ★ connaître quelques applications simples du théorème de Thalès dans le cas général.
- ★ reconnaître des symétries et des translations ;
- ★ utiliser les symétries et translations pour justifier :
 - ☆ une propriété d'une configuration ;
 - ☆ un programme de construction ;
- ★ Construire l'image d'un point, d'une figure simple par :
 - ☆ la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles, d'axes perpendiculaires ;

- ☆ la composée de deux symétries centrales ;
- ☆ la composée de deux translations.

★ justifier que :

- ☆ la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation ;
- ☆ la composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale ;
- ☆ la composée de deux symétries centrales est une translation ;
- ☆ la composée de deux translations est une translation.

Moralité 13. *Pour l'élève ayant acquis ces connaissances ci-dessus, on peut en effet introduire la géométrie hyperbolique dans cette classe. Mais, on se limite jusqu'à la mise en épreuve que la homographie est une transformation géométrique idéale pour travailler selon le modèle de Poincaré.*

8.10 Niveau Lycée

8.10.1 Elève de 15 à 16 ans : classe de seconde

L'élève doit être capable d'utiliser les outils mis en place pour résoudre de problèmes concernant des configurations. Il doit également être capable d'utiliser le produit scalaire pour démontrer des propriétés, pour calculer normes de vecteurs, des distances et des angles, pour résoudre des problèmes d'orthogonalité, pour déterminer certaines relations métriques dans le triangle rectangle puis dans un triangle quelconque, pour effectuer des calculs en géométrie analytique et de résoudre des problèmes concernant la position relative d'une droite et d'un cercle et celle de deux cercles. Plus précisément, il doit être capable d'(e)

- ★ effectuer des calculs de distances et d'angles à l'aide du produit scalaire et des relations métriques démontrées ;
- ★ démontrer des propriétés géométriques à l'aide du produit scalaire et des relations métriques démontrées ;
- ★ utiliser le produit scalaire pour :
 - ☆ résoudre des problèmes d'orthogonalité ;
 - ☆ effectuer des calculs en géométrie analytique ;
- ★ vérifier qu'un point appartient à un cercle ;
- ★ trouver l'équation d'un cercle connaissant :
 - ☆ son centre et son rayon ;
 - ☆ un diamètre.
- ★ Trouver le centre et le rayon d'un cercle connaissant son équation.

Moralité 14. *Pour l'élève ayant acquis ces connaissances ci-dessus, on peut en effet lui introduire la géométrie hyperbolique dans cette classe. Mais on se limite jusqu'à l'exploitation de la fonction inverse pour introduire des notions de l'inversion réelle et quelques propriétés de l'inversion de centre O et de puissance k et ses applications en géométrie hyperbolique.*

8.10.2 Elève de 16 à 17 ans : classe de première

L'élève doit être capable d'(e) :

- ★ définir et construire des barycentres de 2, 3, 4 points dans le plan ;
- ★ de chercher des lieux géométriques en utilisant le barycentre et le produit scalaire :
- ★ pour l'étude de la transformation du plan :
 - ☆ étudier une composée d'homothéties et de translation ainsi que d'homothétie et de rotation.

Il doit connaître la notion de similitude plane et ses premières propriétés et il doit également savoir utiliser certaines de ces transformations à la résolution de problèmes simples.

★ Géométrie plane (Vecteur du plan et géométrie analytique)

L'élève doit être capable de définir et construire le barycentre de 2, 3, 4 points du plan et il doit savoir chercher des lieux géométriques en utilisant le barycentre et le produit scalaire. Il doit également être capable d'effectuer des calculs analytiques sur la droite et sur le cercle ;

★ Transformation du plan

L'élève doit être capable de composer des transformations du plan et il doit également connaître certaines utilisations des transformations du plan. Il doit également être capable d'acquérir une première notion sur les isométries et les similitudes.

Moralité 15. *Pour l'élève ayant acquis de toutes connaissances ci-dessus, on peut en effet lui introduire la géométrie hyperbolique dans cette classe mais on se limite jusqu'à la mise en épreuve que la homographie est une transformation géométrique idéale pour travailler selon le modèle de Poincaré.*

8.10.3 Elève de 17 à 18 ans : classe de terminale

Tout élève en terminale scientifique est normalement déjà enseigné de transformations du plan telles, la translation, la rotation, la symétrie orthogonale et l'homothétie, plus précisément les similitudes directes et indirectes conformément aux objectifs générales suivants. Il doit être capable de connaître et utiliser certaines propriétés du barycentre de n points pondérés et déterminer des coordonnées du barycentre. Il doit également savoir utiliser le barycentre dans la résolution de problème de géométrie. Il doit aussi être capable d'étudier systématiquement les translations, rotations et symétries orthogonales dans le but de la classification de ces isométries et il doit savoir résoudre des problèmes de géométrie en utilisant ces transformations.

8.10.4 Applications affines

L'élève doit être capable de :

- ★ connaître ce qu'est une application affine ainsi que ses quelques propriétés et étudier sur des ensembles, des applications affines du plan ;
- ★ résoudre des problèmes en utilisant les expressions analytiques d'une application affine.

8.10.5 Géométrie plane Isométrie affine

L'élève doit être capable de (d') :

- ★ étudier systématiquement les translations, rotations et symétries orthogonales dans le but de la classification de ces isométries ;
- ★ résoudre des problèmes de géométrie en utilisant ces transformations.

8.10.6 Similitudes planes

L'élève doit être capable de :

- ★ connaître et utiliser les similitudes planes et faire le lien entre nombres complexes et similitudes.

8.10.7 Géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré

L'élève doit être capable d' :

- ★ introduire des homographies complexes et l'expression complexe de l'inversion ;
- ★ approfondir la puissance de la homographie sur la transformation géométrique selon le modèle de Poincaré ; en introduisant la fonction caractéristique déterminant le demi-cercle de Poincaré + Son utilisation sur la construction de l'image d'un demi-cercle passant par deux points à l'aide de trois logiciels indiqués au sous paragraphe 6.12.8.

En un mot, l'enseignement de la géométrie hyperbolique non euclidienne au niveau de Lycée peut déjà s'ouvrir sur les études analytiques.

8.11 Exercices d'application des homographies

Nous nous recommandons, si nécessaire, quelques exercices d'applications des homographies.

8.11.1 Niveau Terminale

Exercice 1. Homographies conservant le cercle unité

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. On note $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = 0 = ib; b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.

On introduit aussi les sous-ensembles de \mathbb{C} suivant : $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1 \text{ i.e } z = e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$
 $P = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$

Soit h la homographie définie par : $h(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

1. a - Montrer que pour tout $z \in U$ tel que $z \neq 1$, on a $h(z) \in i\mathbb{R}$.
 b - Montrer que pour tout $z \in D$, $h(z) \in P$.
2. a - Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.
 b - Pour quel(s) $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ d'inconnue $z \neq 1$ possède-t-elle une solution ?
 c - Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer sur la fonction h ?

3. Soit g la homographie définie par $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
 a - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(iz) \in U$.
 b - Montrer que pour tout $x \in P$, $g(z) \in D$.

Exercice 2. Suite de l'exercice 1 : homographie conservant U

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h la homographie définie par : $h = \frac{e^{i\theta}}{iz}$. Montrer que : pour tout $z \in U$ $h(z) \in U$.
2. Soit $\alpha^* \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^* \notin U$. Soient $\alpha^* \in \mathbb{R}$ et h la homographie définie par : $h(z) = \frac{e^{i\theta} z + \alpha^*}{\bar{\alpha}^* z + 1}$.
 a - Montrer que h est bien une homographie et h est définie (au moins) sur U ;
 b - Montrer que : pour tout $z \in U$, $h(z) \in U$.
3. Dans les trois questions suivantes, nous allons établir trois résultats techniques utiles pour la suite.
 a - Etablir que pour tout $(\alpha^*, \beta^*) \in \mathbb{C}^2$, on a : $|\alpha^* + \beta^*|^2 = |\alpha^*|^2 + |\beta^*|^2 + 2\text{Re}(\bar{\alpha}^* \beta^*)$;
 b - Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Etablir que $(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\text{Re}(be^{-i\theta}) = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$.
 c - Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| = |b|$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = be^{i\theta}$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Inversement, nous allons montrer que seules les homographies h précédentes (questions 2.1 et 2.2) sont telles que : $\forall z \in U, h(z) \in U$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$ et h définie par $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ une homographie définie sur U telle que : $\forall z \in U, h(z) \in U$.
 a - Etablir que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + |2\text{Re}(\bar{a}be^{i\theta})| = |c|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}(\bar{c}de^{-i\theta})$;
 b - En déduire les relations : $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$;
 c - Si $a = 0$: montrer que la homographie h est du type présenté en 2.1 ;
 d - Si $a \neq 0$: établir que $(|a|^2 + |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$;
 e - Observer que le cas $|a| = |c|$ est impossible à cause de la condition $ad - bc \neq 0$;
 f - Observer que le cas $|a| = |d|$ conduit à une homographie h du type présenté en 2.2.

8.11.2 Niveau Universitaire (sujet d'étude)

Exercice 3. *Le problème introduit le groupe des transformations de Möbius sur le plan complexe complété et fait établir quelques propriétés algébriques et géométriques simples. Les connaissances préalables nécessaires sont les suivantes : topologie élémentaire, calcul dans \mathbb{C} , groupes, homomorphismes, matrices, cercles et droites dans le plan complexe.*

Notations

a - \mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes. On emploie la notation habituelle pour le conjugué. $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r .

b - On étend le plan complexe \mathbb{C} en lui ajoutant un point, noté ∞ , et appelé le point à l'infini. On note $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Cet ensemble est muni d'une topologie naturelle : si $a \neq \infty$ les voisinages de a dans $\bar{\mathbb{C}}$ sont les mêmes que dans \mathbb{C} , autrement dit $V \in \mathcal{V}(a)$ s'il existe un disque ouvert de centre a contenu dans V . Si $a = \infty$ les voisinages de a sont les ensembles

contenant $\{z : |z| > R\}$ pour un certain $R \geq 0$. Muni de cette topologie $\overline{\mathbb{C}}$ est un espace topologique compact. On l'appelle le compactifié d'Alexandrof de \mathbb{C} . Il est homéomorphe à la sphère unité de \mathbb{R}^3 munie de sa topologie naturelle (induite par celle de \mathbb{R}^3). Pour cette raison on appelle souvent $\overline{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann. $\mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur $\overline{\mathbb{C}}$, $B(\overline{\mathbb{C}})$ sera l'ensemble des bijections de $\overline{\mathbb{C}}$.

$d - GL(2, \mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes.



Définition 31. À toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ on associe la fonction t_M définie sur $\overline{\mathbb{C}}$ par

$$t_M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (8.1)$$

avec la convention que si $c \neq 0$ alors $t_M(-d/c) = \infty$ et $t_M(\infty) = a/c$, tandis que si $c = 0$ alors $t_M(\infty) = \infty$.

1.1. Montrer que $t_M : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est continue.

Toute application de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ de la forme (8.1) s'appelle une transformation de Moebius ou encore une homographie. L'ensemble des homographies sera noté \mathcal{H} .

On remarquera que les translations ($z \rightarrow z + u$), les rotations ($z \rightarrow e^{i\theta}(z - c) + c$), les homothéties ($z \rightarrow \lambda(z - c) + c, \lambda \in \mathbb{R}$) sont toutes des homographies qui laissent fixe le point à l'infini.

Exercice 4. Groupe des homographies

On considère l'application $t : M \in GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow t_M \in \mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}})$.

2.1. Montrer que pour tout $(M, N) \in GL(2, \mathbb{C})$ on a $t_{MN} = t_M \circ t_N$.

2.2. Montrer que les homographies sont des homéomorphismes de $\overline{\mathbb{C}}$ que $[t_M]^{-1} = t_{M^{-1}}$.

2.3. Montrer que \mathcal{H} est un sous-groupe de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}})$.

2.4. Quel est le noyau de l'homomorphisme $t : M \in GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow t_M \in \mathcal{H}$? En déduire un isomorphisme entre \mathcal{H} et un groupe quotient de matrices.

Exercice 5. Décomposition

3.1. À partir de la relation algébrique $\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)}{c^2} \left(\frac{1}{z + d/c} \right)$ écrire une homographie comme une composée de 5 applications élémentaires.

3.2. Déduire du résultat précédent une décomposition des matrices 2×2 en un produit de matrices « simples ».

Exercice 6. Cercles généralisés

On appelle droite de $\overline{\mathbb{C}}$ toute droite (réelle) de \mathbb{C} à laquelle on rajoute le point à l'infini. C'est donc un ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C} : az + b\bar{z} = c\} \cup \{\infty\}$. On note \mathcal{C} l'ensemble formé de

tous les cercles de \mathbb{C} ($\subset \overline{\mathbb{C}}$) et toutes les droites de $\overline{\mathbb{C}}$. Un élément de cet ensemble s'appelle un cercle généralisé.

4.1. Montrer que toute homographie laisse \mathcal{C} (globalement) fixe, c'est-à-dire, si $h \in \mathcal{H}$ et γ est un cercle généralisé alors $h(\gamma)$ est aussi un cercle généralisé. (Indication : on pourra utiliser la décomposition trouvée dans la question précédente.)

Exercice 7. Points fixes

On rappelle qu'un point z est appelé point fixe d'une application f si $z \in D_f$ et $f(z) = z$.

5.1. Soit h une homographie. Montrer que h admet au moins un point fixe et si h possède plus de deux points fixes alors elle coïncide avec l'identité. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour que h admette exactement deux points fixes.

5.2. On dit que deux homographies h_1 et h_2 sont conjuguées s'il existe $s \in \mathcal{H}$ telle que $h_2 = s \circ h_1 \circ s^{-1}$. Dans ce cas, si z_1 et z_2 sont deux points fixes de h_1 , quels sont les points fixes de h_2 ?

Exercice 8. Homographie ayant deux points fixes

6.1. Déterminer l'ensemble des homographies qui admettent 0 et ∞ comme points fixes.

6.2. Montrer que toute homographie h qui admet deux points fixes est conjuguée à une homographie de la forme $z \rightarrow qz$ avec $q \in \mathbb{C}$. (Indications : lorsque les deux points fixes z_1 et z_2 sont finis, c'est-à-dire sont dans \mathbb{C} , on considérera la homographie $s(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$. Lorsque l'un des deux points, disons z_2 , est égal à ∞ on considérera $s(z) = z - z_1$.)

6.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{H}$ on définit la suite d'homographie $h^{[n]}$ par la relation de récurrence $h^{[1]} = h$ et $h^{[n+1]} = h \circ h^{[n]}$. Démontrer que si h est une homographie ayant deux points fixes finis z_1 et z_2 , alors il existe un nombre complexe non nul q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $h^{[n]}(z) = \frac{(z_1 - q^n z_2)z - (1 - q^n)z_1 z_2}{(1 - q^n)z - z_2 + q^n z_1}$.

Exercice 9. Homographie ayant un point fixe

7.1. En s'inspirant de la méthode du paragraphe précédent, montrer qu'une homographie qui a un point fixe unique est conjuguée à une translation.

7.2. Etant donné une homographie h ayant un point fixe unique, on définit $h^{[n]}$ comme dans le paragraphe précédent. Trouver l'expression de $h^{[n]}(z)$ et étudier $\lim_{x \rightarrow \infty} h^{[n]}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 10. Opération sur les triplets de points

8.1. Soit (z_1, z_2, z_3) et (z'_1, z'_2, z'_3) deux triplets de points deux à deux distincts dans \mathbb{C} . Montrer qu'il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_i) = z'_i$ pour $i = 1, 2, 3$ (Indication : on pourra par exemple considérer $r(z) = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_1)(z_2 - z_3)}$ et $s(z) = \frac{(z - z'_2)(z'_1 - z'_3)}{(z - z'_1)(z'_2 - z'_3)}$).

8.2. En déduire que, étant donné deux éléments γ_1 et γ_2 de \mathbb{C} il existe toujours une homographie h telle que $h(\gamma_1) = \gamma_2$.

Exercice 11. Birappaort

Le birapport ou produit croisé de quatre nombres complexes deux à deux distincts z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) est défini par la relation

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)} = \frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)/(z_1 - z_4)} \quad (8.2)$$

9.1. Vérifier que $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [z_2, z_1; z_4, z_3]$.

9.2. Montrer que le birapport est invariant par les homographies. En d'autres termes, si $h \in \mathcal{H}$ et (z_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) est un quadruplet de nombres complexes deux à deux distincts alors $[h(z_1), h(z_2); h(z_3), h(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4]$.

9.3. Soient (z_i) et (z'_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) deux quadruplets de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homographie (forcément unique) qui envoie z_i sur z'_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ est que $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [z'_1, z'_2; z'_3, z'_4]$.

9.4. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 se trouvent sur un cercle généralisé (i.e. soient cocycliques ou alignés) est que leur birapport $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ soit un nombre réel. Retrouver à partir de ce résultat une condition (classique) de cocyclicité exprimée en termes d'angles.

Exercice 12. Inversion et homographies

On dit que deux nombres complexes z_1 et z_2 sont inverses par rapport au cercle $\gamma^* = C(c, \rho)$ lorsque $(z_1 - c)(\overline{z_2} - \overline{c}) = \rho^2$. On étend naturellement la définition en disant que ∞ et c sont inverses par rapport à Γ . On remarquera aussi que tout point de Γ est inverse de lui-même. On dira en outre que z_1 et z_2 sont inverses par rapport à une droite D lorsque la symétrie (orthogonale) d'axe D envoie l'un sur l'autre. (Dans ce cas on convient que ∞ est inverse de lui-même.) Par conséquent nous pourrons librement parler de points inverses par rapport à un cercle généralisé quelconque.

10.1. Soit a et b deux nombres complexes distincts et μ un nombre réel positif. Montrer que l'ensemble γ défini par :

$$\gamma^* = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu \right\}$$

est un cercle généralisé et que γ est une droite si et seulement si $\mu = 1$. Vérifier que lorsque γ est un cercle alors a et b sont inverses par rapport à γ .

10.2. Réciproquement, montrer que si a et b sont deux nombres complexes distincts inverses l'un de l'autre par rapport à un cercle γ alors il existe un réel μ tel que $\gamma^* = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu \right\}$.

10.3. Soit $h \in \mathcal{H}$. Démontrer que si a et b sont deux éléments de \mathbb{C} inverses par rapport à un cercle généralisé alors $h(a)$ et $h(b)$ sont inverses par rapport à $h(\gamma)$.

Exercice 13. Homographies laissant le disque unité invariant

11.1. Soit Γ un cercle (ordinaire) du plan complexe et h une homographie. Montrer que h envoie l'intérieur de Γ sur l'intérieur de $h(\Gamma)$ ou sur l'extérieur de $h(\Gamma)$.

11.2. Soit $h(z) = (az + b)/(cz + d)$. Montrer que $h(C(0, 1)) = C(0, 1) \Leftrightarrow ((\overline{a}b + \overline{c}d) = 0$ et $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2)$.

11.3. Déterminer l'ensemble des homographies qui envoient le disque unité U_r sur $U_{r'}$ et qui laissent 0 invariant. (On utilise la notation $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$).

11.4. Dans cette partie, on recherche l'expression des homographies qui laissent invariant le disque unité. Si h est une homographie qui envoie $U = U_1$ sur lui-même alors l'origine a un antécédent α^* dans l'intérieur de U . Le cas où α^* est égal à l'origine est traité dans la question précédente. On suppose donc $0 < |\alpha^*| < 1$ et on appelle β^* l'inverse de α^* par rapport à $C(0, 1)$. On considère $s(z) = (z - \alpha^*) / (z - \beta^*)$. Déterminer $s(C(0, 1))$. En étudiant l'application hos^{-1} montrer que h est de la forme $h(z) = e^{i\alpha^*} (z - a) / (1 - \bar{a}z)$ où α^* est un nombre réel.

Exercice 14. Le groupe des homographies

On appelle droite complexe complétée l'espace projectif $P^1(\mathbb{C})$ des droites vectorielles de \mathbb{C}^2 , muni de la topologie quotient pour la surjection canonique

$$h : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow P^1(\mathbb{C})$$

$$z \mapsto h(z) = \text{droite}(0, z)$$

1. Montrez qu'une homographie se prolonge de manière naturelle en une bijection de $P^1(\mathbb{C})$ dans $P^1(\mathbb{C})$.

Dorénavant, par le terme d'homographie, on entendra une transformation $h : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ de la forme précédente.

2. Montrez que l'ensemble \mathcal{H} des homographies possède une structure naturelle de groupe et que ce groupe est engendré par les similitudes directes et l'application $z \mapsto 1/z$

3. À la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on associe la homographie $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Montrez que ceci définit un morphisme de groupes $(GL_2(\mathbb{C}), \times) \rightarrow (\mathcal{H}, \circ)$. Déterminez son image et son noyau.

Exercice 15. Étude des droites hyperboliques.

Soit : $D_m = \{x + iy \in \mathbb{C} / y > 0\}$ un demi-plan de Poincaré, D l'ensemble des droites hyperboliques dans ce plan et \mathcal{H} l'ensemble des homographies :

- ★ les demi-droites verticales d'origine située sur l'axe des x ;
- ★ les demi-cercles centrés sur l'axe des x .

On admet que les droites hyperboliques satisfont à l'axiome fondamental de la géométrie : par deux points distincts de D_m passe une droite hyperbolique et une seule. On appelle horizon ou bord de D_m , l'ensemble formé de la droite réelle \mathbb{R} et d'un unique point à l'infini, noté ∞ . On considérera, par convention, que les droites de \mathbb{C} passent par ∞ , mais pas les cercles.

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 + bc = 1$ et $c \geq 0$.

a - On note $\mathbb{C}_{a,b,c}$ l'ensemble des points $x + iy$ vérifiant les relations :

$$c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0 \text{ et } y > 0.$$

Montrer que $\mathbb{C}_{a,b,c}$ est une droite hyperbolique. Dans le cas où cette droite hyperbolique est un demi-cercle, on précisera son centre et son rayon.

b - Montrer que les droites hyperboliques de D_m sont toutes de la forme précédente.

2. Soient D et D' deux droites hyperboliques d'équations $c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0$ et $c'(x^2 + y^2) - 2a'x - b' = 0$ (avec les conditions de **1**). On pose $\varphi(D, D') = aa' + \frac{1}{2}(bc' + b'c)$. Montrer que D et D' ont un point commun dans D_m (resp. sur le bord de D_m) si et seulement si on a $|\varphi(D, D')| < 1$ (resp. $\varphi(D, D') = \pm 1$).

Exercice 16. Droites perpendiculaires

On dit que deux droites hyperboliques sont perpendiculaires, si elles se coupent en un point de D_m et si les tangentes aux deux « droites » en ce point sont perpendiculaires.

1. Montrer que, si ces droites hyperboliques sont des cercles, de centres O et ω et de rayons r et ρ , on a $O\omega^2 = r^2 + \rho^2$.

2. Soient D et Δ deux droites hyperboliques d'équations $c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0$ et $\gamma^*(x^2 + y^2) - 2\alpha^*x - \beta^* = 0$ avec $a^2 + bc = \alpha^{*2} + \beta^{*\gamma^*} = 1$.

Montrer que ces droites sont perpendiculaires si et seulement si on a $\varphi(D, \Delta) = 0$ ou encore $2a\alpha^* + b\gamma^* + c\beta^* = 0$.

3. Soient D, D' deux droites hyperboliques distinctes. Montrer que D et D' admettent une perpendiculaire commune si et seulement si elles n'ont pas de point commun ni dans \mathcal{H} , ni dans le bord de \mathcal{H} .

Exercice 17. Le groupe hyperbolique

★ Homographies

Les homographies de \mathbb{C} sont les applications $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$ (cette condition permet d'éviter que h ne soit constante). Une telle application définit une bijection de $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{C} - \{-\frac{a}{c}\}$ (au moins si \mathbb{C} est non nul ; on pourra calculer h^{-1} à titre d'exercice). Pour éviter qu'il ne manque ainsi des points, on complète \mathbb{C} en $\overline{\mathbb{C}}$ en lui ajoutant, comme ci-dessus, un (unique) point à l'infini et on prolonge h sur $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{a}{c}$ (cela correspond aux limites en ces points).

On considère aussi les anti-homographies : $\tilde{h}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$.

1. Montrer que la composée de deux homographies est une homographie, que l'identité est une homographie et que l'inverse d'une homographie est une homographie.

2. Montrer qu'une homographie transforme une droite (resp. un cercle) en une droite ou un cercle (on pourra décomposer \tilde{h} en produit de similitudes et de transformations du type $z \mapsto 1/z$).

3. Montrer qu'une homographie distincte de Id admet au plus deux points fixes dans $\overline{\mathbb{C}}$.

4. Montrer que le produit d'une homographie et d'une anti-homographie est une anti-homographie, que celui de deux anti-homographies est une homographie, etc.

★ Homographies conservant le demi-plan

On considère l'ensemble \mathcal{H}^+ des homographies à coefficients a, b, c, d réels vérifiant $ad - bc = 1$ et l'ensemble \mathcal{H}^- des anti-homographies à coefficients réels aussi, mais avec $ad - bc = -1$. On pose $\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{H}^+ est dans \mathcal{H}^+ . Etudier les divers cas mettant en jeu \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- .

2. Soit h un élément de \mathcal{H}^\pm . Montrer qu'on a $h(D_m) = D_m$.

★ Les involutions de \mathcal{H}^-

On s'intéresse aux involutions de \mathcal{H}^\pm , c'est-à-dire aux éléments qui vérifient $hoh = Id$.

1. a - Soit $\tilde{h}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ un élément de \mathcal{H}^- .

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) \tilde{h} est une involution ;
- (ii) \tilde{h} admet un point fixe dans D_m ;
- (iii) On a $a + d = 0$.

Montrer qu'on a alors la relation $a^2 + bc = 1$.

b - Montrer que l'ensemble des points fixes dans D_m d'une involution de \mathcal{H}^- est une droite hyperbolique.

c - Montrer, réciproquement, que si D est une droite hyperbolique, il existe une unique involution de \mathcal{H}^- qui admet D comme ensemble de points fixes. On la note S_D et on l'appelle symétrie d'axe D .

2. a - Soit D une droite hyperbolique et soit $h \in \mathcal{H}^\pm$. Montrer que hS_Dh^{-1} est un élément de \mathcal{H}^- , que c'est une involution et que ses points fixes sont exactement ceux de $h(D)$.

b - En déduire que tout élément $h \in \mathcal{H}^\pm$ transforme une droite hyperbolique en une droite hyperbolique.

3. a - Soient D, D' deux droites de D_m , distinctes et sécantes. Montrer que D et D' sont perpendiculaires si et seulement si on a $S_D \circ S_{D'} = S_{D'} \circ S_D$.

b - Montrer que les droites invariantes par D et distinctes de D sont les perpendiculaires à D .

Exercice 18. Homographies et fouille des règles d'association

On définit dans le tableau 8.1 quelques mesures probabilistes de qualité.

N°	Mesures	Expressions
1	Support	$P(X' \cap Y')$
2	Piatetsky-Shapiro	$n(P(X' \cap Y') - P(X')P(Y'))$
3	M_{GK}	$\begin{cases} \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{1 - P(Y')} & \text{si } X \text{ favorise } Y \\ \frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y')} & \text{si } X \text{ défavorise } Y \end{cases}$
4	Rappel	$\frac{P(X'/Y')}{P(Y'/X')}$
5	Lift	$\frac{P(Y'/X')}{P(Y')}$
6	Confiance centrée	$\frac{P(Y'/X') - P(Y')}{P(Y'/X') + P(Y')}$
7	Facteur de certitude	$\frac{1 - P(Y')}{nP(X' \cap Y') + 1}$
8	Laplace	$\frac{nP(Y') + 2}{nP(X' \cap Y') + 1}$
9	ϕ -Coefficient	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X')P(Y')}{\sqrt{P(X')P(Y')P(\bar{X}')P(\bar{Y}')}}}$
10	Confiance	$\frac{P(Y'/X')}{P(Y'/X') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}$
11	Acuracy	$\frac{P(X' \cap Y') + P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(X' \cap Y')P(\bar{Y}') + P(X' \cap \bar{Y}')P(Y')}$
12	Multiplicateur de côte	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')P(Y')}$
13	Conviction	$\frac{P(X')P(\bar{Y}')}{P(X' \cap \bar{Y}')}$
14	Odd-Ratio	$\frac{P(X' \cap Y')P(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{P(\bar{X}' \cap Y')P(X' \cap \bar{Y}')}$
15	Gain-Informel	$\log \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')P(Y')}$
16	Exemple contre exemple	$\frac{P(X' \cap Y') - P(X' \cap \bar{Y}')}{P(X' \cap Y')}$
17	Sebag	$\frac{P(X' \cap Y')}{P(X' \cap \bar{Y}')}$

Tableau 8.1 – Tableau des mesures probabilistes de qualité des règles d’association.

1. Trouver les conditions de normalisabilité de chacune des mesures.
 2. A l’aide des homographies de type $h_1(x) = ax + b$ ou $h_2(x) = \frac{a^*}{x}$, normaliser toutes les mesures en question.
 3. Pour la mesure M_{GK} comparer les résultats obtenus de l’utilisation de h_1 et celle de h_2 et commenter-les.
 4. Pour la mesure Conviction, comparer les résultats obtenus lors de l’utilisation de la combinaison de h_1 et h_2 et de h_2 seulement. Que peut-on conclure ?
- N.B. Dans toutes les questions, s’il le faut, on peut combiner h_1 et h_2 pour résoudre les problèmes.**

Chapitre 9

Conclusions générales et Perspectives

9.1 Conclusions générales

En guise de résumer tous nos travaux, nous allons dire quelques mots sur le domaine de recherches que nous avons effectuées. Il est à souligner qu'aucun travail de recherche ne peut s'avérer une tâche facile, et que tout travail de recherche possède généralement plusieurs objectifs à atteindre. Citons à titre d'exemples d'objectifs : développement durable de son pays (voire le monde entier) ; développement de l'intellect afin de pouvoir améliorer son bien-être, celui de sa famille et de la société dans laquelle on vit, etc. J'aimerais encore une fois redire qu'un travail entamé doit aboutir à des résultats marquant l'approbation ou positifs.

9.1.1 Homographie

Effectivement, nous avons vu une mise en pratique des fonctions homographiques. Et nous avons constaté que plusieurs domaines où les homographies ont montré son impotence. En effet, elles occupent beaucoup de groupes des sciences fondamentales, à savoir par exemple aux études sur l'effet de rapprochement et d'éloignement successif obtenu par la variation de la distance focale d'une caméra de cinéma, sur la réflexion théorique et/ou activité d'apprentissage de la géométrie hyperbolique selon le modèle de H. Poincaré, à travers des études sur la science de données plus précisément sur la règle d'association de base de données binaires et son implication envers l'étude de la convergence d'une suite récurrente homographique.

9.1.2 Etude de la géométrie selon le modèle de H. Poincaré

Par la même occasion, nous avons vu qu'à l'aide des fonctions caractéristiques déterminant la construction d'une ellipse, nous avons pu annoncer qu'elles sont, entre autres, des outils très commode pour effectuer les recherches quant aux propriétés mathématiques relatives à une ellipse. En effet, elles permettent de voir la voie d'une construction de manant de Poincaré du fait que la homographie conserve le demi-plan de H. Poincaré.

De même qu'elles nous ont conduit également de prouver qu'une ellipse est aussi symétrique par rapport à son grand axe, segment portant les deux foyers et limité à ses deux extrémités par la courbe. Elle est enfin symétrique par rapport à son petit axe, segment perpendiculaire au grand axe en son milieu dans un plan euclidien. Ainsi, à l'aide des études des extremums de ces deux fonctions, nous avons pu voire facilement les cinq points caractérisant d'une

ellipse à savoir ses quatre sommets et son centre.

Semblablement, ce modeste travail nous a trouvé la conversion d'une trajectoire circulaire en trajectoire rectiligne et celle de rectiligne en trajectoire circulaire via la composition respective d'un cercle et d'une droite par les ellipses des types $F_{c \rightarrow d}$ et celle de $F_{d \rightarrow c}$.

9.1.3 Fouille des règles d'association

Ce qui a été découvert et adopté par les anciens chercheurs a donné des fins utiles car toute mesure à situation infinie sur une quelconque de situation de référence (incompatibilité, indépendance, implication logique) comme « *Sebag, Odd-Ratio, Exemple-Contre-exemple, Gain informel, Multiplicateur de côte et Conviction* » qui n'est jusqu'alors normalisable, au sens des anciennes théories, elles demeurent normalisables selon les recherches ici présentées.

Le nouvel outil que nous avons utilisé pour résoudre ce problème est l'homéomorphisme homographique propre. La nouvelle arme a donné de résultat tangible. En effet, nous avons vu dans le présent travail les normalisées des mesures précitées qui n'étaient pas normalisables.

Toutefois, le résultat que l'on a obtenu vérifie également que la homographie normalisée de la mesure M_{GK} est sortie exclusivement du cadre de son originale n'a rien de semblable à ce qu'on a l'habitude de voir dans $M_{GK_{an}} = M_{GK}$, mais les conditions exigées par la normalisation est bien vérifiée, ce qui nous a justifié aussi l'existence de l'infinité des mesures normalisées ; il nous a semblé également justifier que si une mesure μ est normalisable selon la théorie de André Totohasina, elle est également homographique-normalisable. Mais tantôt une « affine normalisée » est pratiquement plus rentable par rapport à une « homographique-normalisée » selon la nature de la mesure à normaliser.

Par suite, en comparant les résultats obtenus de la normalisation tirée d'un homéomorphisme affine et d'un homéomorphisme homographique, on a vu que la normalisée d'un homéomorphisme affine est plus nette celle d'un homéomorphisme homographique présentant plusieurs « biais », mais par contre, cas de la mesure Conviction, on a vu que son affine normalisé à droite et son homographie-normalisée à gauche, c'est-à-dire son semi-homographie-normalisée à gauche n'est pas égal à M_{GK} seul son homographie-normalisé est égal à M_{GK} . Notons que nous avons effectuée la normalisation d'une mesure dans la mesure d'avoir une normalisée d'une mesure la plus proche M_{GK} possible.

En effet, jusqu'à ce jour elle est encore considérée pertinente selon ses propriétés mathématiques étudiées dans les travaux de Jean Diatta, Henri Ralambondrainy et André Totohasina. C'est pour cette raison que des chercheurs sont alors « obligés » de trouver des moyens menant au rapprochement de toutes les mesures connues vers la mesure M_{GK} .

Comme l'on a vu, la théorie et la pratique de la normalisation des mesures probabilistes de qualité figurent déjà dans la liste des outils permettant de résoudre les problèmes relevant du domaine de la fouille de données. Cela est fait dans le but de regrouper des différentes mesures existant dans la littérature. Le présent travail a également donné de la nouvelle définition de la fonction de normalisation permettant de faciliter ladite normalisation.

9.1.4 Didactique

A Madagascar, par exemple, les *Mathématiques* font partie des matières de base de l'enseignement dès la classe de primaire. Les enseignants qui exercent au primaire public malgache sont pour la plupart des enseignants FRAM et, à ce titre, n'ont pratiquement reçu de formation pédagogique. Les enquêtes menées auprès des élèves et des enseignants ont démontré une grande difficulté d'assimilation des savoirs académiques mobilisés par la matière *Mathématiques* de la part des élèves et un handicap majeur quant à la transmission des savoirs de la part des enseignants. Un des facteurs, sinon le principal, de ce blocage est le niveau académique des enseignants. Ils ne possèdent que des notions fragmentaires des savoirs qu'ils doivent enseigner. Ce module est conçu pour renforcer le niveau académique des enseignants du primaire sur la matière *Mathématiques*. Les enquêtes effectuées auprès des enseignants ont permis d'identifier les savoirs à renforcer dans ce module. Aussi, la structure Formation pédagogique n'arrive pas à satisfaire les besoins. Il y a certes les CRINFP (Centre Régional de l'Institut de Formation Pédagogique), mais ceux-ci sont uniquement destinés pour les Écoles primaires Publiques ou EPP et les Collèges d'Enseignement Général ou CEG. De plus, beaucoup de formateurs de ces centres n'ont pas suivi de formation pédagogique préalable; ce qui influe certainement à la qualité de formation données aux élèves. Nous voudrions en effet d'instaurer une formation continue depuis les classes maternelles jusqu'à l'Université. Autrement dit, le long trajet Classes maternelles-Université doit se constituer pour former un tout pédagogique solide et solidaire. La discontinuité dans la formation sera ainsi automatiquement éliminée, car, dans ce cas, ladite formation est régie par une même pédagogie et une même didactique des disciplines. Ce qui n'est pas le cas actuellement à Madagascar où l'on constate l'existence d'un fossé profond entre le Primaire et le Lycée d'un côté, et entre le Lycée et l'Université d'autre côté. Une pédagogie unique pourra alors s'épanouir et se développer librement, et l'éducation des apprenants dans une discipline quelconque, qu'elle soit littéraire ou scientifique, sera certainement plus fructueuse et donc meilleure! Un exemple concret qui mérite d'être suivi dans le meilleur délai se voit en France : l'existence des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) qui publient dans des revues les résultats des recherches sur l'enseignement des disciplines mathématiques depuis les Classes maternelles jusque dans les Établissements d'enseignement supérieur. L'Institut Universitaire de Formation des Maîtres ou IUFM au sein de la Francophonie est un autre exemple à citer et à copier : un organe unique qui assure la formation des enseignants de tout niveau. Nous, les quelques chercheurs qui consacrent leur vie au développement de la pédagogie, voudrions proposer la création d'un institut de recherches sur l'enseignement des disciplines scientifiques dans sa globalité, au lieu de se limiter aux seules disciplines mathématiques. Les enseignants des disciplines littéraires sont vivement invités de suivre le même chemin. Les recommandations formulées sous forme de projets ficelés seront à adresser aux décideurs du pays.

A ce sujet, les formations relèvent du domaine de l'Enseignement, de l'Éducation. Accaparer des compétences est une tâche très laborieuse. Si nous nous référons aux Collèges et aux Lycées, on y enseigne différentes disciplines, mais nous nous limitons spécialement à la discipline mathématique, plus précisément sur la recommandation de quelques théories que nous venons de proposer dans le présent travail. Nous y avons relaté des directives susceptibles de faciliter les activités des professeurs de Mathématiques face aux apprenants et d'introduire la réforme de programme scolaire permettant d'ajouter l'enseignement de la géométrie eu-

clidienne.

Par la suite, en terme d'apprentissage des fonctions homographiques et des suites récurrentes homographiques en terminales scientifiques, nous avons vu que le programme scolaire ne sent nullement pas la considération des dites homographies. De plus, grâce à la résolution des problèmes inverses d'homographie, les enseignants en avons besoins, nous avons montré l'existence d'une infinité d'homographies à un seul point fixe ou bien à deux points fixes. Ce qui permet d'élaborer efficacement sa propre suite homographique de limite fixée à volonté, et ce, en une infinité de façons disposant d'un ou deux ou trois degrés de liberté.

Par ailleurs, avec TICE, nous avons remarqué que la construction d'une ellipse via ses deux fonctions caractéristique est bien adaptable dès la classe de 1^{ère}, pour anticiper l'approfondissement de l'étude analytique d'une conique. Autant que, dans l'Education Pour Tous (EPT) et de la continuité du programme scolaire de mathématiques au niveau de lycée, nous avons constaté que cette approche défend les pertinence et faisabilité de l'introduction précoce des coniques propres dès la classe de 1^{ère} en empruntant une approche épistémologique. Une telle didactique de la géométrie engendrerait une pédagogie constructiviste débouchant sur une mise en place de véritables compétences multifonctionnelles.

A cet effet, pour anticiper l'enseignement de conique (ellipse), nous, les enseignants des mathématiques, avons le devoir de *veiller* rendre conscient tous les concepteurs du programme de lycée dans le mode d'introduire l'enseignement de la géométrie elliptique via l'utilisation des fonctions caractéristiques que nous sommes venus de proposer dans ce travail dès la classe de 1^{ère} en profitant du fait qu'elles engendrent l'enseignement de la géométries hyperbolique selon le modèle de Poincaré pour ajouter l'enseignement exclusif de la géométrie euclidienne. Pareillement, nous avons vu également que la considération des homographies propres complexes peut enrichir l'étude de transformation complexe au Lycée. C'est-à-dire que, au lieu de se contenter aux seules similitudes directes et indirectes, on pourrait étendre aux études des transformations homographiques en exploitant l'utilisation de fonction caractéristique représentant les droites hyperboliques. Cela, en effet, laisse à penser vers une réforme du programme scolaire visant l'introduction de la géométrie hyperbolique plane à travers les transformations homographiques complexes via l'utilisation des logiciels de constructions et de calculs numériques GeoGebra, Derive5, Sine qua non en exploitant leur complémentarité. Il s'agit pratiquement d'une application de nature à établir une étroite connexion des TICE. Par ailleurs, le présent travail nous a proposé que les homographies s'avèrent les transformations géométriques idéales pour travailler la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré, ainsi que sa faisabilité dans le programme scolaire de lycée ou collège. Cela pourrait en effet anticiper une réforme du programme scolaire visant l'introduction précoce de la géométrie hyperbolique plane à travers les transformations homographiques complexes, avec un souci de justice sociale et culturelle en matière d'éducation des générations futures.

9.2 Perspectives

Véritablement, la recherche est comme l'a répondu le « vieux philosophe » à question du « jeune philosophe » qui croit déjà tout savoir : « le fait réside en ce que le cercle de tes connaissances est petit, et le mien - énorme et donc, la zone de contacts de ce qui est connu avec ce qui reste à découvrir est beaucoup plus vaste ». Cette problématique touche tout un chacun intéressé au domaine de recherche, de plus, tout le monde sait qu'un spécialiste a la capacité de concevoir un objet technique, et peut embrasser plusieurs domaines. Mais les

compétences ne viennent pas toutes seules, elles nécessitent des formations préalables avant d'être réellement fructueuses, voilà la raison pourquoi nous posons les perspectives suivantes.

9.2.1 Homographie et Didactique

Pour éviter la prégnance bloquante à la géométrie euclidienne, nous, les enseignants des mathématiques, avons le devoir de

1. *veiller* rendre conscient tous les concepteurs du programme scolaire de collège et de lycée dans le monde sur la communauté des êtres humains d'introduire l'enseignement d'autres géométries, à savoir par exemple la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré pour ajouter l'enseignement exclusif de la géométrie euclidienne. Suivant qu'il soit opportun, en cette ère des nouvelles technologies, de
2. *lancer* une réforme s'avérant pertinente et bien réalisable sur les mathématiques scolaires consistant à l'introduction de cette géométrie par la visualisation et la construction et notamment sur l'illustration des figures hyperboliques élémentaires d'abord, puis de façon analytique en investissant les homographies et anti-homographies complexes dans un demi-plan de Poincaré. Ainsi, nous invitons donc tout responsable touché par ladite sphère de
3. *développer* dans divers autres domaines à savoir par exemple sur l'étude approfondie de la géométrie analytique hyperbolique et la théorie spéciale d'Albert Einstein sur la relativité via l'homographie.

9.2.2 Science de données

Bien que nous disposions de ces homéomorphismes homographiques propres et homéomorphismes affines pour normaliser les mesures, le trajet à franchir s'avère encore long. Effectivement, il existe encore un groupe de mesures qui résistent à l'utilisation de ces nouveaux outils, à savoir par exemple les mesures *Kloggen*, *Dépendance pondérée*, *Support à sens unique*, *Support à double sens*, *Couverture*, *Prévalence*, car elles ne remplissent pas les conditions de normalisabilité des mesures probabilistes de qualité adoptées dans les recherches sur la normalisation de ces mesures. Voilà la raison pourquoi nous posons ici cette problématique sur ce contexte

1. « *quant à la transformation qui permettrait la normalisation des dites mesures qui n'ont pas encore été normalisées dans un sens à préciser, il faudra encore la trouver* ». De plus, les normalisées des mesures que nous avons découvert dans ce travail sont théoriquement ou mathématiquement démontrées qu'elles sont meilleurs par rapport à son origine sur la validation des qualités des règles d'associations.
2. *Ces affirmations demeureront ou seront continuellement à démontrer sur la pratique directe dans plusieurs secteurs et/ou domaines avec lesquels la science de données pourra intervenir à la résolution des problèmes existants.* Par ailleurs, ce travail a informé la nouvelle notion de fonctions de normalisation de quelques mesures s'avérant, entre autres, plus simple pour effectuer la normalisation d'une mesure, ce qui fait que nous penserons cerner
3. « *l'apport de la considération de ces fonctions de normalisation dans l'élaboration des bases des règles dans la fouille de données binaires* ».

Références bibliographiques

- [ABB⁺14] S. Abiteboul, F. Bancilhon, F. Bourdoncle, S. Clemencon, C. De La Higuera, G. Saporta, and F. F. Soulié. L'émergence d'une nouvelle filière de formation datascientiste. 2014. [3](#), [4](#)
- [AFT16] Armand, Daniel Rajaonasy Feno, and A. Totohasina. Vers une théorie de fonction de normalisation des mesures d'intérêt. In : *AAFD & SFC Science des données. Défis mathématiques et algorithmiques*, pages 281–286, 2016. [130](#), [132](#)
- [AIS93] R. Agrawal, T. Imielinski, and A. N. Swami. Mining association rules between sets of items in large databases. In P. Buneman and S. Jajodia, editors, *Proc. of the ACM SIGMOD, International Conference on Management of Data*, volume 22, pages 207–216, Washington, DC, 1993. [2](#), [49](#), [51](#), [53](#), [118](#), [131](#)
- [AJ93] Major J. A. and Mangano J. Selecting among rules induced from a heurricane database. In : *KDD Workshop papers, Menlo Park California.*, pages 28–41, 1993. [62](#)
- [Arm74] W. W. Armstrong. Dependency structures of data base relationships. *Information Processing*, 74, pages 580–583, 1974. [40](#), [45](#)
- [AT19a] Armand and André Totohasina. Construction d'une suite récurrente homographique par problèmes inverses. *Revue Didaktika : Formation et enseignement/apprentissage : stratégie, méthode, outils, pratiques*, No 3 2019 :149–155, <http://madarevues.recherches.gov.mg>, 2019. [83](#)
- [AT19b] Armand and André Totohasina. Pertinence et faisabilité de l'introduction fonctionnelle de l'ellipse dès la classe de première. *Revue Didaktika : Formation et enseignement/apprentissage : stratégie, méthode, outils, pratiques*, No 3 2019 :120–136, <http://madarevues.recherches.gov.mg>, 2019. [27](#)
- [AT19c] Armand and André Totohasina. Une réflexion tirée du vécu sur l'enseignement des transformations ponctuelles en terminale S. *Revue Didaktika : Formation et enseignement/apprentissage : stratégie, méthode, outils, pratiques*, No 3 2019 :137–148, <http://madarevues.recherches.gov.mg>, 2019. [27](#), [76](#)
- [ATF16] Armand, A. Totohasina, and Daniel Rajaonasy Feno. Nouvelle vision unificatrice des mesures d'intérêt : une normalisation par homographie. In : *AAFD & SFC Science des données. Défis mathématiques et algorithmiques*, pages 287–292, 2016. [130](#), [132](#)

- [ATF18] Armand, A. Totohasina, and Daniel Rajaonasy Feno. Toward a theory of normalizing function of interestingness measure of binary association rules. *Hindawi : International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Volume 2018, Article ID 4814716, <https://doi.org/10.1155/2018/4814716>, 2018. 130
- [ATF19] Armand, A. Totohasina, and Daniel Rajaonasy Feno. An extension of Totohasina’s normalization theory of quality measures of association rules. *Hindawi : International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Volume 2019, Article ID 7829805, 7 pages <https://doi.org/10.1155/2019/7829805>, 2019. 130
- [B.14] Kégl B. La science des données pour les données de la science. In : *9th Journées Informatique de l’IN2P3-IRFU.*, 2014. 3
- [BA96] R.J. Brachman and T. Anand. The process of knowledge discovery in databases. In : *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 37–57, 1996. 49, 52
- [BB70] M. Barbut and B. Monjardet. *Ordre et classification*. Hachette, Paris,, 1970. 41
- [Bec01] U. Beck. La politique dans la société du risque. *volume : 17*, N° 30 :pages : 376–392, 2001. 3
- [Ben73] M. Benado. Ensembles ordonnés et fonctions monotones. *Rev. Fac. Ci. Univ. Lisboa*, 14 :165–194, 1973. 2
- [Bir67] G. Birkhoff. Lattice theory. *3rd edition, Coll. Publ., XXV. American Mathematical Society, Providence, RI*, 1967. 2, 40, 42
- [BKO90] Rudolph BKOUCHE. Quelques remarques sur l’enseignement de la géométrie. In *Repères – revue des Instituts de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques, Topiques éditions, France, n° 26*, number 1, pages 49–71, 1990. 90
- [BM04] S. Benhimane and E. Malis. Real-time image-based tracking of planes using efficient second-order minimization. In : *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots Systems, Sendai, Japan, October*, pages 176–186, 2004. 1
- [Boo47] G. Boole. The mathematical analysis of logic. *Cambridge*, 1847. 40
- [Bra09] Elayne De Moura Braga. *Enseignement apprentissage de la statistique, TICE et environnement numérique de travail*. PhD thesis, Université Lumière Lyon 2, 2009. 5
- [BS16] Niket Bhargava and Manoj Shukla. Survey of interestingness measures for association rules mining : Data mining, data science for business perspective. *iracst - international journal of computer science and information technology & security (ijcsits)*. ISSN : 2249-9555 Vol.6, No.2, 2016. 53
- [Cou05] Olivier Coutirier. *Contribution à la fouille de données : règles d’association et interactivité au sein d’un processus d’extraction de connaissances dans les données*. PhD thesis, Université d’Artois, 2005. 2

- [COX06] D.R. COX. *Principles of Statistical Inference*. Cambridge University Press, New York, ISBN-13 978-0-511-34950-8, 2006. [3](#)
- [CR06] A. Ceglar and J.F. Roddick. Association mining. *acm comput. surv.*, 38(2). page 10), 2006. [51](#)
- [Czy96] A. Czyzewski. Mining knowledge in noisy audio data. in *proc. of the 2nd acm intl. conf. on knowledge discovery and data mining, kdd 96*. pages 220–225. AAAI Press, 1996. [54](#)
- [Ded00] R. Dedekind. uber zelengungen von zahlen durch ihre grosten gemeinsamen teiler. *Gesammelte Werke*, pages 103–148, 1900. [42](#)
- [Dha13] Vasant Dhar. Data science and prediction. *In. Communications of the ACM, n° 12, décembre*, pages 64–73, 2013. [2](#)
- [DHS01] H. Mannila D. Hand and P. Smyth. Principles of data mining. mit press, cambridge, ma,. *In : Proc. of ASBBS, Las Vegas,*, page 8, 2001. [49](#)
- [DJT07] Ralambondrainy H. Diatta J. and A. Totohasina. Towards a unifying probabilistic implicative normalized quality measure for association rules, quality measures. *In Data Mining Series : Studies in Computational Intelligence*, 2007. [132](#)
- [DL04] F. Domenach and B. Leclerc. Closure systems, implicational systems, overhanging relations and the case of hierarchical classification. *Mathematical Social Sciences 47*, pages 349–366, 2004. [45](#)
- [Dom02] F. Domenach. *Structures latticielles, correspondances de Galois contraintes et classification symbolique*. PhD thesis, Université Paris 1 Panthéon-Sorbone, France, 2002. [44](#), [45](#)
- [DP12] Kord Davis and Doug Patterson. *Ethics of Big Data*. O’Reilly Media, Inc., 2012. [3](#)
- [DRA07] Jean Diatta, Henri Ralambondrainy, and Tohasina André. Towards a unifying probabilistics implicative normalised quality mesure for association rules. *In : Quality Mesures in Datta Mining*, pages 242–255, 2007. [66](#), [118](#)
- [EMB99] F. Chaumette E. Malis and S. Boudet. 2 1/2 d visual servoing. *In : IEEE Transaction on Robotics and Automation*, pages 234–246, 1999. [1](#)
- [Emp08] Fabien Emprin. Formation initiale et continue pour l’enseignement de mathématiques et les TICE : cadre d’analyse des formations et ingénieries didactiques. In *Actes du seminaire national de didactique de mathématiques, ARDM et IREM de Paris7*, 2008. [6](#)
- [Enr90] Stéphane Enrich. Sémentique et mathématique. In *Apprendre / Enseigner l’arithmétique simple*, editor, *Nathan*, pages 19–86, 1990. [137](#), [138](#)
- [Eve55] C. J. Everett. Closure operators and galois theory in lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55, pages 514–525, 1955. [40](#)

- [Fau92] O. Faugeras. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig? *Actes du European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure, Italie*, pages 563–578, 1992. 8
- [Fen07] Daniel Rajaonasy Fenô. *Mesure de qualité des règles d'association : normalisation et caractérisation des règles d'association des bases*. PhD thesis, Université de La Réunion spécialité : Mathématiques Informatique, 2007. 5, 41, 44, 53, 54, 59, 60, 67, 68, 72, 107, 115, 118, 131, 132, 133
- [FL88] O. Faugeras and F. Lustman. Motion and structure from motion in a piecewise planar environment. In : *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, pages 485–508, 1988. 1
- [Fre99] A. Freitas. On rule interestingness measures. *Knowledge-Based System*, volume 12 :309–315, 1999. 62
- [FUM96] Piatetsky-Shapiro G. et Smyth P. Fayyad U. M. Knowledge discovery and data mining : towards a unifying framework. In : *Proceedings of the second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining.*, pages 82–88, Potland, 1996. AI Magazine. 49, 52
- [GD86] J. L. Guigues and V. Duquenne. Famille non redondante d'implication informatives résultant d'un tableau de donnée binaires. *Mathématiques et Sciences humaines*, 95 :5–18, 1986. 41
- [GR09] Régis Gras and Jean-Claude Régnier. Fondements théoriques de l'analyse statistique implicative. *Revue des Nouvelles Technologies de l'Information, Analyse Statistique Implicative - Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*, RNTI-E-16 :17–130, 2009. 49
- [Gri13] D. Grissa. *Etude comportementale des mesures d'intérêt d'extraction de connaissance*. PhD thesis, Université Clérmont-Ferrand II, 2013. 4, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 59, 118, 131, 132
- [GSM94] G.Piatetsky-Shapiro and C.J. Matheus. The interestingness of deviations. in knowledge discovery and data mining workshop. In : *Proc. ofASBBS, Las Vegas*, pages 25–36. AAAI Press, 1994. 54
- [Gui00] S. Guillaume. *Traitement des données volumineuses. Mesures et algorithmes d'extraction des règles d'association et règles ordinales*. PhD thesis, Universté de Nantes, France, 2000. 59, 132
- [Gui10] S. Guillaume. Amélioration de mesure d'intrêt mgk. *Actes des XVIIèmes rencontres de la Société Francophone de Classification*, pages 41–45, 2010. 132
- [Har16] Ramanantsoa Harrimann. *Contributions à l'amélioration des générations des bases des règles d'association M_{GK} -valides et applications en didactique des mathématiques*. PhD thesis, Université D'Antananarivo École doctorale : Problématiques de l'Éducation et Didactiques des Disciplines, 2016. 131, 133

- [HGB05] X. H. Huynh, F. Guillet, and H. Briand. Arqat : An exploratory analysis tool for interestingness measures. In *Proc. of Applied Stochastic Models and Data Analysis*, pages 334–344, Brest, France, 2005. 3
- [Hue09] R.A. Huebner. Diversity-based interestingness measures for association rule mining. In : *Proc. of ASBBS, Las Vegas*, page 13, 2009. 54
- [HV18] Michael Hahsler and Kurt Hornik Vienna. New probabilistic interest measures for association rules. *University of Economics and Business Administration, Augasse 26, A-1090 Vienna, Austria. June 1, 2018.* 53
- [HY02] C. Hacène and T. Yannick. Fouille de textes par combinaison de règles d’association et d’indices statistiques. *1er Colloque International sur la Fouille de Textes CIFT 2002, Hammamet, Tunisie*, page (13), 2002. 54
- [HYN11] Tarek Hamrouni, Sadok Ben Yahia, and Engelbert Mephu Nguifo. Construction efficace du treillis des motifs fermés fréquents et extraction simultanée des bases génériques de règles. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, (195) :5–54, 2011. 42
- [HYS05] T. Hamrouni, S. B. Yahia, and Y. Slimani. Prince : Extraction optimisée des bases génériques de règles sans calcul de fermetures. In *23rd French Conference Informatique des Organisations et Systèmes d’Information et de Décision (INFORSID’05)*, pages 353–368, grenoble, France, May 2005. Presse Universitaire de Grenoble. 49
- [Jac12] Yvo Jacquier. La naissance de la géométrie : La géométrie avec les yeux des égyptiens. In : *REPERES– IREM. N° 87 avril*, number 1, pages 2–22, 2012. 1, 89
- [J.F98] Gossiaux J.F. L’ethnologie au bout du compte. *N° 30*, pages 153–163, 1998. 3
- [JHN00] U. Güntzer J. Hipp and G. Nakhaeizadeh. Algorithms for association rule mining a general survey and comparison. *New York, NY, USA, 2000. ACM.*, volume 2 :pages : 58–64, 2000. 4
- [JW95] M. F. Janowitz and R. Wille. On the classification of monotone equivariant cluster methods. In I. J. Cox, P. Hansen, and B. Jolesz, editors, *Partitioning data sets*, volume 19 of *DIMACS series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 117–141, Providence, R.I., 1995. American Mathematical Society. 41
- [KAS97] S. Manganaris K. Ali and R Srikant. Partial classification using association rules. In : *KDD*, pages 13–202, 1997. 54
- [KHT96] H. Mannila P. Ronkainen K. Hätönen, M. Klemettinen and H. Toivonen. Knowledge discovery from telecommunication network alarm databases. in icde. In : *Proc. of ASBBS, Las Vegas*, pages 115–122, 1996. 54
- [KK06] S. Kotsiantis and D. Kanellopoulos. Association rules mining : A recent overview. *gests international transactions on computer science and engineering.* pages 32, 71 and 82, 2006. 52, 54

- [KMR⁺94] M. Klemettinen, H. Mannila, P. Ronkainen, H. Toivonen, and A. I. Verkamo. Finding interesting rules from large sets of discovered association rules. In *Proc. of the 3rd CIKM Conference*, pages 401–407, November 1994. 50
- [Kod99] Y. Kodratoff. Quelques contraintes symboliques sur le numérique en ecd et ect. In *SFDS, pages 183 to 188, Grenoble, France*, pages 13–57, 1999. 54
- [KR96] M Kamber and R. Shinghal. proposed interestingness measure for characteristic rules. *Review, 20 (1), 2* :pages : 8–21, 1996. 49, 52
- [Kry98] Marzena Kryszkiewicz. Representative association rules. In *Research and Development in Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 198–209. Springer, 1998. 49
- [LBMLL10] Yannick Le Bras, Patrick Meyer, Philippe Lenca, and Stéphane Lallich. Mesure de la robustesse de règles d’association. *proceedings of the QDC*, 2010. 49
- [LLC09] Mei-Ling Shyu Lin Lin and Shu-Ching Chen. Association rule mining with a correlationbased interestingness measure for video semantic concept detection. *ISSN : 2249-9555 Vol.6, No.2, Mar-April*, Vol. x, No. x, xxxx 1., 2009. 53
- [LNH15] Bay Vo Loan Nguyen and Tzung-Pei Hong. An efficient algorithm for mining class-association rules with interestingness measures. *The International Arab Journal of Information Technology*, Vol. 12., No. 6A, 2015. 53
- [LT04] S. Lallich and O. Teytaud. Evaluation et validation de mesures d’intérêt des règles d’association. *RNTI-E-1, spécial :193-217*, 2004. 4
- [Mal01] E. Malis. Hybrid vision-based robot control robust to large calibration errors on both intrinsic and extrinsic camera parameters. In : *European Control Conference Porto, Portuga September*, pages 2898–2903, 2001. 1
- [MC02] E. Malis and F. Chaumette. Theoretical improvements in the stability analysis of a new class of model free visual servoing methods. In : *IEEE Transaction on Robotics and Automation April*, pages 176–186, 2002. 1
- [McC97] James T. et co. McClave. *Statistics* , prentice hall, new jersey. 1997. 3
- [McG05] K. McGarry. A survey of interestingness measures for knowledge discovery. *knowledge eng. Review, 20 (1)*, pages 39–61, 2005. 49
- [MJPS97] S. Mani M. J. Pazzani and W.R. Shankle. Comprehensible knowledge-discovery in data bases. inproc.of the 19th intl. conf. of the cognitive science society (cogsci97). pages 596– 601. Lawrence Erlbaum, August, 1997. 54
- [MKT97] H. Mannila M. Klemettinen and H. Toivonen. A data mining methodology and its application to semi-automatic knowledge acquisition. pages 670– 677, 1997. 51, 54
- [MMS91] M. Garg M. McLeach, P. Yao and T. Stirtzinger. Discovery of medical diagnostic information : An overview of methods and results. in g. piatetsky-shapiro and w. j. frawley, editors, *knowledge discovery in databases. A report on the ijcai-89 workshop. AI Magazine*, pages 477 –490, 1991. 54

- [Moa02] M. Moakher. Means and averaging in the group of rotations. In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, number 1, pages 1–16, 2002. 1
- [Mon03] B. Monjardet. The presence of lattice theory in discrete problems of mathematical social sciences. *Mathematical Social Sciences*, 46, pages 03–144, 2003. 46
- [Moo91] D. S Moore. Teaching statistics as a respectable subject. In : *Gordon, F. and S. Gordon (eds.), Statistics for the twenty-first century, Mathematical Association of America*, pages 14–25, 1991. 3
- [MW15] Nathan Marz and James Warren. *Big Data : Principles and best practices of scalable real-time data systems*. Manning Publications Co, 2015. 3
- [NLZ99] P. Flach N. Lavrac and B. Zupan. Rule evaluation measures : A unifying view. In : *G. Mineau and B. Ganter, editors, Ninth International workshop on Inductive Logic Programming*, volume : 1634 :174–185, 1999. 4
- [OO98] C. Ordonez and E. Omiecinski. Image mining : A new approach for data mining. technical. 1998. 54
- [Ore44] O Ore. Galois connections. *Transaction of the American Mathematical Society*, 55, pages 494–513, 1944. 40
- [ORZm98] Ze-N. Li S. Han SengChee O. R. Zaïane, J. Han and J. Chiang. Multimedia miner. A system prototype for multimedia data mining. In *Proc. ACM SIGMOD Intl. Conf. Management of Data*, page 13, 1998. 54
- [Pas00a] Nicolas Pasquier. *DATAMINING : Algorithmes d’extraction et de réduction des règles d’association dans les bases des données*. PhD thesis, Université Clermont-Ferrand II, 2000. 2
- [Pas00b] Nicolas Pasquier. Extraction de bases pour les règles d’association à partir des itemsets fermés fréquents. In *INFORSID’2000 Congress*, pages 56–77, Lyon, France, May 2000. Prix Jeune Chercheur de l’association INFORSID. 49
- [Pat11] DJ Patil. *Building Data Science Teams*. Mike Loukides in United States of America., 2011. 3
- [PF12] Foster Provost and Tom Fawcett. *Data Science for Business*. O’Reilly Media, Inc.,, 2012. 3
- [Plo73] C.R. Plott. Path independence, rationality and social choice. *Econometrica*, 41, 15 :1075–1091, 1973. 47
- [Pol65] G. Polya. Poser et résoudre un problème mathématique- physique- jeux- philosophie. dunod paris. 1965. 137, 138
- [PS91] G. Piattetsky-Shapiro. Knowledge discovery in real databases :. *A report on the ijcai-89 workshop. AI Magazine*, volume 11 :pages 2, 1991. 49, 62

- [RBTR12] Harrimann Ramanantsoa, Parfait Bemarisika, André Totohasina, and Licius Ramifidisoa. Enseignement de limite d'une fonction et TIC au niveau secondaire. In *Colloque international sur les TIC*, ENS Ampefiloha Antananarivo, 2012. 5
- [ReTD17] Hery Frédéric Rakotomalala, André Totohasina, and Jean Diatta. Extraction des règles d'associations M_{GK} -valides avec contribution de support. *Actes des 24 èmes rencontres de la Société Francophone de Classification SFC*, 2017. 131
- [RF14] Mathieu Roche. and Sophie Fortunato. Mise en correspondance debases de données et dedonnées textuelles. 2014. 2
- [Rio05] François Rioult. Fouille de données orientée motifs, méthodes et usages. In *exposé invité, journée de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, 2005. 49
- [Rou97] P.J. Rousseeuw. Introduction to positive-breakdown methods. *Handbook of Statistics*, 15 :101–121, 1997. 10
- [RT14] Harrimann Ramanantsoa and André Totohasina. Une stratégie d'intégration pédagogique des TIC dans l'enseignement des mathématiques à Madagascar : A strategy for integration of ICT in teaching mathematics in Madagascar. *Frantice.net*, (9), 2014. 6
- [RT15] Harrimann Ramanantsoa and André Totohasina. Note sur les bases des règles valides selon la mesure M_{GK} . In *XXII ème Rencontre de la société Francophone de Classification*, 2015. 131
- [RZC10] François Rioult, Bruno Zanuttini, and Bruno Crémilleux. Nonredundant generalized rules and their impact in classification. In *Advances in Intelligent Information Systems*, pages 3–25. Springer, 2010. 50, 52
- [SCBL11] Mélanie Sedda, Arnaud Cerckel, and Jules Wacquez Benjamin Legat. *L'inversion*. 2011. 12, 13, 15
- [SG07] Douha Grissa et Egelbert Mephi. N Sylvie Guium. Categorisation des mesures d'intérêt pour l'extraction des connaissances. In : Djamel A. Zighed et Gilles Venturrini, editor, *Revue des Nouvelles Technologies de L'Information*, pages 117–143, 2007. 4
- [SG12] Egelbert Mephi Nguifo Sylvie Guium, Douha Grissa. Categorisation des mesures d'intérêt pour l'extraction des connaissances. In : Djamel A. Zighed et Gilles Venturrini, editor, *Revue des Nouvelles Technologies de L'Information*, pages 117–143, 2012. 118
- [Sha90] Jaen Lus Shabert. Les géométries non euclidienne. In : *REPERES - IREM. N°01 octobre*, number 1, pages 69–91, 1990. 1, 89
- [Sha91] Jaen Lus Shabert. Les géométries non euclidienne. In : *REPERES - IREM. N°5 octobre*, number 1, pages 69–91, 1991. 1, 89

- [SHFM09] K. Shinozawa, N. Hagita, M. Furutani, and R. Matsuoka. *A Data Mining Method for Finding Hidden Relationship in Blood and Urine Examination Items for Health Check*. P. Perner (Ed.) : Industrial Conference on Data Mining, ICDM 2009, LNAI 5633, 2009. 2
- [SK52] J.G. Semple and G.T. Kneebone. Algebraic projective geometry. *Oxford Science Publication*, 1952. 8
- [SPJ⁺05] B. Serge, V. Philippé, P. Jacques, R. Gras, and O. Guilhaume. L'analyse implicative pour l'élaboration de référentiels comportementaux. *Troisièmes Rencontres Internationales, ASI*, 2005. 2
- [ST96] A. Silberschatz and A. Tuzhilin. What makes patterns interesting in knowledge discovery systems. *IEEE transactions on knowledge and data engineering*, 8 :(2–23), 1996. 49
- [ST08] Tchameni Ngamo Salomon and Karsenti Thierry. Intégration des TIC et typologie des usages : perception des directeurs et enseignants des grandes écoles secondaires du cameroun. In *Revue africaine des médias*, volume 16, pages 45–72, 2008. 6
- [Stu97] P. Sturm. *Vision 3D non calibrée : contributions à la reconstruction projective et étude des mouvements critiques pour l'auto-calibrage*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997. 10
- [TA17] André Totohasina and Armand. Pertinence, faisabilité d'enseignement précoce de la géométrie hyperbolique. In Saarbruck en Allemagne, editor, *La maison d'éditions universitaires européennes ISBN : 17978-3-330-87497-8*, 2017. 142
- [TF08] André Totohasina and Rajaonasy Feno, Daniel. De la qualité des règles d'association : étude comparative des mesures M_{GK} et confiance. In *CARI'2008*, pages 561–568, 2008. 132, 133
- [TJY12] Chiraz Trabelsi, Nader Jelassi, and Sadok Ben Yahia. Bgrt : une nouvelle base générique de règles d'association triadiques. *Document numérique*, 15(1) :101–124, 2012. 51
- [TK92] C. Tomasi and T. Kanade. Shape and motion from image streams under orthography a factorization method. *International Journal of Computer Vision*, 9 :137–154, 1992. 10
- [Tot03] André Totohasina. Normalisation de mesures probabilistes de la qualité des règles in : Proc. sfds'03. *XXXV ième Journées de statistiques*, pages 985–988, 2003. 4, 5, 53, 57, 59, 60, 61, 62, 72, 106, 107, 108, 118, 130, 132, 133
- [Tot08] André Totohasina. *Contribution à l'étude des mesures de qualité des règles d'associations : normalisation sous cinq contraintes et cas de M_{GK} : propriétés, bases composites des règles et extension en vue d'applications en statistique et en sciences physiques*. PhD thesis, Université, d'Antsiranana, Madagascar : Mathématiques Informatique, 2008. 5, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 72, 107, 112, 115, 118, 131, 132, 133

- [TR05] A. Totohasina and H. Ralambondrainy. Ion : A pertinent new measure for mining information from many types of data. In *Proceedings of the 1st IEEE International Conference on Signal- Image Technology and Internet-Based Systems, SITIS 2005*, pp. 202-207, Cameroon, December, 2005. 132
- [TRD04] André Totohasina, Henri Ralambondrainy, and Jean Diatta. Une vision unificatrice des mesures de la qualité des règles d'association booléennes et un algorithme efficace d'extraction des règles d'association implicative. In : *Proc. of CARI'04*, pages 511–518, Hammamet Tunisie, 2004. 118, 132
- [TRD05] André Totohasina, Henri Ralambondrainy, and Jean Diatta. Ion : a pertinent new measure for mining information from many types of data. In : *Proc. of TAIMA'05*, pages 375–380–207, Hammamet Tunisie, 2005. 118, 132
- [TS02] V Kumar Tan, P-N and J Srivastava. Selecting the right interestingness measure for association patterns. *ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery in databases (KDD'02).*, Edmonton, Canada : ACM SIGKDD, 2002. 53
- [TYS05] S Ben Tekaya, S Ben Yahia, and Y Slimani. Algorithme de construction d'un treillis des concepts formels et de détermination des générateurs minimaux. 2005. 41
- [UNE04] UNESCO. éducation de qualité pour tous les jeunes. réflexions et contributions. *issues de la 47 ème session de la conférence internationale de l'éducation.*, 2004. 137
- [UNE11] UNESCO. Les défis de l'enseignement de mathématiques dans l'éducation de base. 2011. 5, 6, 137
- [WFM91] G. Piatetsky-Shapiro W.J. Frawley and C.J. Matheus. Knowledge discovery in databases : An over view. in *knowledge discovery in databases*. pages 1–30, 1991. 2, 40, 49, 52
- [WK09] Xindong Wu and Vipin Kumar. The top ten algorithms in data mining. *University of Minnesota, Departement of Computer Science and Engineering Mneapoli, Minnesota, USA*, 2009. 57
- [WS13] John Wiley and Inc. Sons. *Big Data : Understanding How Data Powers Big Business*. Canada, ISBN : 978–1–118–73957–0, 2013. 2
- [WZZ04] X. Wu, C. Zhang, and S. Zhang. Efficient mining of both positive and negative association rules. *ACM Transactions on information Systems*, 3 :381–405, 2004. 118, 132
- [YFdQ02] W.E. Dixon Y. Fang, D.M. Dawson and M.S. de Queiroz. Homography-based visual servoing of wheeled mobile robots. In :*Proc. IEEE Conf. Decision and Control, pp, Las Vegas, NV, Dec*, pages 2866–2871, 2002. 1
- [ZM14] Nina Zumel and John Mount. *Practical Data Science with R*. Manning Publications Co, 2014. 3



Annexe

Liste des annexes



1. **Annexe A - BACC Série A « Sessions de 1999 et 2000 » ;**
 2. **Annexe B - BACC Série D « Sessions de 2000 et 2001 et 2002 » ;**
 3. **Annexe C - BACC Série C « Sessions de 2000 et 2001 » ;**
 4. **Annexe D - « Réponses de quelques élèves » ;**
 5. **Annexe E - « Figures géométriques hyperboliques fondamentales ».**
-

Annexe A

Sujets de Baccalauréat Série A

Session 1999 - MATHÉMATIQUES - SÉRIE A

EXERCICE I (4 points)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $U_0 = 2$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{5}{6}$ pour tout entier naturel n .

1. Calculer U_1 et U_2
2. Soit une deuxième suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = 3U_n + 5$, pour tout n de \mathbb{N}
 - a - Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0 .
 - b - Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n .
 - c - Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} U_n$.

EXERCICE II (4 points)

Le tableau suivant donne la répartition des 80 employés d'une entreprise en fonction de leur salaire mensuel (en milliers de francs malgaches FMG). Soit n un entier naturel non nul. Dans les calculs qui suivent, on utilisera les centres x_i des classes, où $1 \leq i \leq 6$.

Salaire	[50 ; 150[[150 ; 250[[250 ; 350[[350 ; 450[[450 ; 550[[550 ; 650[
Effectifs (n_i)	n	26	20	4	4	2

Tableau A.1 – Tableau donnant la répartition des 80 employés d'une entreprise en fonction de leurs salaires mensuels

1. Déterminer l'effectif n des employés ayant un salaire mensuel inférieur à 150.000-FMG. On prendra $n = 24$ dans tout ce qui suit.
2. Dans un repère orthogonal du plan, représenter le nuage de points M_i de coordonnées (x_i, n_i) où $1 \leq i \leq 6$. On prendra comme unités : $1cm$ sur l'axe des abscisses pour 100.000FMG, $1cm$ sur l'axe des ordonnées pour 5 employés.
3.
 - a - Calculer les fréquences relatives de ces six classes.
 - b - Calculer la moyenne des salaires, exprimée en francs, dans cette entreprise.

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -x + 1 -$

e^{-x} . On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. a - Déterminer la limite de f en ∞ .
b - Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) .
2. a - Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = -1 + e^{-x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f .
b - En déduire le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. a - Compléter le tableau des valeurs suivant : b - Ecrire l'équation de la tangente (\mathcal{T})

x	0	1	2	3	4
f(x)					

Tableau A.2 – Tableau des valeurs de x et $f(x)$

à (\mathcal{C}) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

c - Représenter graphiquement les droites (\mathcal{D}) , (\mathcal{T}) et la courbe (\mathcal{C}) dans \mathcal{P} .

4. Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = -\frac{x^2}{2} + x + e^x$.
a - Montrer que F est une primitive de f .
b - En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On donne : $e^{-1} = 0,36$; $e^{-2} = 0,13$; $e^{-3} = 0,05$.

Session 2000 - MATHEMATIQUES - SERIE A

EXERCICE I (4 points)

N.B. : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible. Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher dont 4 blanches et 4 noires.

1. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
a - Déterminer le nombre de tirages possibles.
b - Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches?
c - Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires?
2. On effectue 3 tirages successifs d'une boule, en remettant dans l'urne, avant chaque tirage, la boule précédemment tirée.
a - Quel est le nombre de tirages possibles?
b - Quelle est la probabilité de sortir ainsi 3 boules noires?
c - Quelle est la probabilité de sortir ainsi 1 blanche puis 2 noires?
3. On tire toutes les boules une à une sans remise.
a - Quel est le nombre de tirages possibles?
b - Quelle est la probabilité pour que les couleurs de toutes les boules tirées soient alternées?

Exercice 2 4 points

Le tableau suivant montre le chiffre d'affaires, exprimé en millions de francs malagasy, d'une entreprise au cours des six dernières années.

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1989
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires : y_i	120	132	147	164	181	201

Tableau A.3 – **Tableau montrant le chiffre d'affaires, exprimé en millions de francs malagasy**

1. Calculer la moyenne de la série (y_i) .
2. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$. (Sur l'axe des abscisses, 2 cm représente une année; sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 20 millions).
3. Soit G_1 le point moyen du sous-nuage obtenu par x_1, x_2 et x_3 ; G_2 le point moyen du sous-nuage obtenu par x_4, x_5 et x_6 .
 - a - Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 .
 - b - Tracer la droite (G_1G_2) . Que représente cette droite?
 - c - Donner l'équation de la droite (G_1G_2) .
 - d - En déduire une prévision du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2002.

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $] -4 ; 2[$ par : $f(x) = \ln(x + 4) - \ln(2 - x)$. On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Calculer les limites de f en -4 et en 2 . Interpréter graphiquement ces résultats.
2. a - Montrer que, pour tout $x \in] -4 ; 2[$, la fonction dérivée de f est : $f'(x) = \frac{6}{(2-x)(x+4)}$.
 b - Dresser le tableau de variation de f .
3. a - Déterminer le point d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.
 b - Ecrire l'équation de la tangente (\mathcal{T}) à (\mathcal{C}) au point $I(-1; 0)$.
 c - Montrer que le point $I(-1; 0)$ est un centre de symétrie pour (\mathcal{C}) .
4. Tracer (\mathcal{T}) et (\mathcal{C}) dans un même repère.
5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $] -4 ; 2[$ par : $F(x) = (x + 4) \ln(x + 4) - (x - 2) \ln(2 - x)$.
 a - Calculer la fonction dérivée F' de F .
 b - En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du domaine plan limité par (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
6. Soit g la fonction définie sur $] -4 ; 2[$ par : $g(x) = \ln \frac{2-x}{x+4}$.
 a - Montrer que, pour tout $x \in] -4 ; 2[$: $g(x) = -f(x)$.
 b - Tracer dans le même repère que (\mathcal{C}) la courbe représentative (Γ) de g .

Annexe B

Sujets de Baccalauréat Série D

Session 2000 - MATHEMATIQUES - SERIE D

Exercice 1 (5 points)

\mathcal{P} est un plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra $1cm$ pour unité graphique.

- a - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (6 - i)z + 11 - 3i = 0$.
b - Déterminer les nombres complexes z et z' tels que :

$$\begin{cases} 2z - z' = 6 - 5i \\ -z + z' = 3i \end{cases}$$

Dans tout ce qui suit, on note par A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 3 + i$, $b = 3 - 2i$, $c = 6 - 2i$ et $d = 6 + i$.

- a - Placer dans \mathcal{P} les quatre points A, B, C et D .
b - Démontrer que le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A , et le triangle (BCD) est isocèle et rectangle en C .
c - En déduire que les quatre points A, B, C et D se trouvent sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure précédente.
- Soit \mathcal{S} la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en C .
a - Préciser les éléments caractéristiques de \mathcal{S} .
b - Construire sur la figure précédente le transformé de $ABCD$ par \mathcal{S} .

Exercice 2 (5 points) N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près. Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i d'une entreprise selon les frais de publicité x_i (x_i et y_i sont exprimés en millions de francs malagasy) de 1992 à 1999.

On donne : $\sum_{i=1}^8 x_i = 24.40$; $\sum_{i=1}^8 y_i = 526$; $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 78.20$; $\sum_{i=1}^8 y_i^2 = 35048$; $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 1645.10$

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1987	1998	1999
x_i	2	2.3	2.6	2.9	3.2	3.5	3.8	4.1
y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

Tableau B.1 – Tableau indiquant les variations du chiffre d'affaires y_i selon x_i

1. a - Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$.
 Unité graphiques :
 - 2 cm représente 1 million de francs malagasy sur l'axe des abscisses.
 - 1 cm représente 10 millions de francs malagasy sur l'axe des ordonnées.
 b - Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.
2. a - Montrer que le coefficient de corrélation linéaire associé à cette série statistique est : $r = 0.98$.
 b - Interpréter ce résultat.
 c - Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression de y en x et tracer cette droite.
3. a - Montrer que x_1, x_2, \dots, x_8 constituent les 8 premiers termes d'une suite arithmétique (x_n) dont on précisera la raison.
 b - Donner une estimation du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2002.

Exercice 3 (5 points)

N.B. : Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : rouges, vertes et noires.

1. On suppose qu'il y ait 12 boules dans l'urne dont : 3 rouges, 4 noires et 5 vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
 - a - Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - b - Déterminer les probabilités des événements suivants :
 A : « Avoir 3 boules noires ».
 B : « Avoir 3 boules de même couleur ».
 C : « Avoir au moins deux boules noires ».
 D : « Avoir au plus deux boules rouges ».
2. On suppose qu'il y ait 25% de boules rouges dans l'urne. On appelle « gain » l'obtention d'une boule rouge lors d'un tirage d'une boule de l'urne. L'expérience consiste à tirer au hasard et successivement 4 boules de l'urne en remettant dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer une autre. Soit X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de gains.
 - a - Vérifier que l'univers image de X est 0, 1, 2, 3, 4.
 - b - Montrer que la probabilité d'avoir 3 gains est égale à.
 - c - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - d - Définir la fonction de répartition F de X .
 - e - Si n est le nombre de boules rouges, $3n - 7$ le nombre de boules vertes et $2n - 1$ le nombre de boules noires dans l'urne, calculer n .

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. On note par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = (-x + 2)e^x - 1$.
 - a - Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h).

- b - Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$.
Vérifier que α est compris entre $\frac{3}{2}$ et 2.
- c - En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$.
2. a - Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b - Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = 1$. (On admet que $e^x - x > 0$ sur $[0; +\infty[$).
3. a - Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
b - Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et donner le tableau de variation de f .
c - Tracer (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) dans un même repère. (On prendra $\alpha = 1,84$ et $f(\alpha) = 1,20$).
4. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \ln(e^x - x)$.
a - Calculer $F'(x)$.
b - On note par $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe $(x'Ox)$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que
- $$A(\alpha) = 4 \ln \left[\frac{(1 - \alpha)^2}{2 - \alpha} \right] \text{ cm}^2.$$

MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 2001

N.B. : Les quatre exercices sont obligatoires.

Exercice - 1 (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i$.

1. a - Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi où α est un réel que l'on déterminera.
b - Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - \alpha i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera.
c - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe (\mathcal{P}) muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 3 - 3i$ et $z_C = 2i$.
a - Placer les points A, B, C .
b - On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z .
c - En déduire la nature du triangle ABC .
3. On considère la transformation \mathcal{S} du plan (\mathcal{P}) dans (\mathcal{P}) , qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :
a - Donner l'expression complexe de \mathcal{S} .
b - Donner la nature et les éléments caractéristiques de \mathcal{S} .
c - Soit le cercle (\mathcal{C}) de centre $I(1; -1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$. Déterminer la nature et les éléments géométriques du transformé (\mathcal{C}') de (\mathcal{C}) par la transformation \mathcal{S} .

Exercice - 2 (5 points)

N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10-2 près.

Le tableau suivant indique les variations des dépenses mensuelles de la famille Rakoto lors

des 7 premiers mois de l'année 2000. (x_i désigne le rang du mois et y_i est exprimé en milliers de francs malagasy). On donne : $\sum_{i=1}^8 x_i = 28$; $\sum_{i=1}^8 y_i = 2.765$; $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 140$; $\sum_{i=1}^8 y_i^2 = 1.093.393$;

Mois	janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	juillet
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	375	387	385	393	400	410	415

Tableau B.2 – **Tableau indiquant les variations des dépenses mensuelles**

$$\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 11.241$$

1. a - Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.
 - Sur l'axe des abscisses, choisir 1 cm pour unité graphique.
 - Sur l'axe des ordonnées, placer 370 à l'origine puis choisir 1 cm pour représenter 10.000-francs.
 b - Calculer les coordonnées du point moyen G .
2. a - Calculer le coefficient de corrélation linéaire r .
 - b - Interpréter ce résultat.
3. Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression (\mathcal{D}) de y en x . Tracer cette droite.
4. En utilisant la droite (\mathcal{D}), donner une estimation des dépenses de la famille Rakoto pour le mois d'Octobre 2000.

Exercice - 3 (5 points)

Une urne contient 12 jetons indiscernables au toucher dont 6 jaunes, 3 verts et 3 rouges.

1. On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire définie de la façon suivante :
 - X prend la valeur 1 si les 3 jetons tirés sont de la même couleur.
 - X prend la valeur -2 si 2 et 2 seulement des 3 jetons tirés sont de la même couleur .
 - X prend la valeur 0 si les 3 jetons tirés sont de 3 couleurs deux à deux différentes.
 a - Déterminer la loi de probabilité X .
 b - Définir la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unités : $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 11cm$.
2. On répète 5 fois de suite et de façon indépendante l'épreuve qui consiste à tirer au hasard et simultanément 3 jetons. A chaque épreuve, on marque 1point si l'événement $(X = 1)$ est réalisé sinon on marque 0 point.
 Soit Y la variable aléatoire égale au total des points marqués à l'issue des 5 épreuves.
 - a Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y .
3. On enlève un jeton vert du contenu initial de l'urne. On tire au hasard et simultanément 2 jetons que l'on ne remet plus dans l'urne puis on tire de nouveau au hasard et

simultanément 2 jetons. Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons verts au deuxième tirage.

Exercice - 4 (5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2-x)e^x - 2x - 2$. On note par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1 cm.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1-x)e^x - 2$.
 - a - Etudier les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g).
 - b - En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. a - Etudier les variations de f en utilisant 1.b). b - Montrer que la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote à (\mathcal{C}) .
 - c - Etudier suivant les valeurs de x , la position relative de (\mathcal{C}) par rapport à (\mathcal{D}) .
 - d - Déduire de 1.a) que l'origine O est un point d'inflexion pour (\mathcal{C}) et donner l'équation de la tangente (\mathcal{T}) à (\mathcal{C}) au point O .
 - e - Construire (\mathcal{T}) , (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) .
3. Soit \mathcal{A} l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (\mathcal{D}) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A} .

MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 2002

N.B. : Les quatre exercices sont obligatoires.

Exercice - 1 (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$.

1. a - Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi où α est un réel que l'on déterminera.
 - b - Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - \alpha i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera.
 - c - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan complexe (\mathcal{P}) muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 3 + i$; $z_B = 2i$; $z_C = 2 - 2i$.
 - a - Placer les points A, B, C .
 - b - On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z .
 - c - En déduire la nature du triangle ABC . d - Calculer l'affixe du point E tel que $ABEC$ soit un carré.
 - e - Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Soit \mathcal{S} la similitude plane directe transformant A en C et laissant invariant le point B .
 - a - Déterminer l'expression complexe de \mathcal{S} et préciser ses éléments caractéristiques.
 - b - Déterminer et construire l'image par \mathcal{S} du quadrilatère $ABED$.

Exercice - 2 (5 points)

Le tableau suivant indique, pour une même distance, les variations des quantités y_i d'essence consommées de certaines voitures suivant leurs puissances x_i (x_i est exprimé en chevaux et y_i en litres). On donne : $\sum_{i=1}^8 x_i = 48$; $\sum_{i=1}^8 y_i = 192$; $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 324$; $\sum_{i=1}^8 y_i^2 = 5202$; $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 1287$

x_i	3	4	5	5	6	7	8	10
y_i	10	12	20	25	28	30	32	35

Tableau B.3 – Les variations des quantités y_i d'essence consommées de certaines voitures suivant leurs puissances x_i pour une même distance

1. a - Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.
 - 1 cm sur l'axe des abscisses représente 1 cheval.
 - 1 cm sur l'axe des ordonnées représente 5 litres.
 b - Calculer les coordonnées du point moyen G .
2. a - Calculer le coefficient de corrélation linéaire r .
 - b - Interpréter ce résultat.
3. a - Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression (\mathcal{D}) de y en x . Tracer cette droite. b - Donner une estimation de la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance de 12 chevaux.

Exercice - 3 (5 points)

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher dont :

- cinq jetons blancs numérotés : 2, 4, 6, 8, 10.
- cinq jetons noirs numérotés : 1, 3, 5, 7, 9.

L'épreuve E consiste à tirer au hasard et successivement trois jetons de l'urne sans remettre dans l'urne le jeton qui a été tiré.

1. a - Quel est le nombre de triplets que l'on peut obtenir ?
 - b - Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 A : « Les jetons tirés sont de même couleur ». B : « Les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression arithmétique de raison 2 ». C : « Les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression géométrique de raison 2 ».
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve, désigne le rang du premier jeton noir tiré. (On admet que ce rang est 0 s'il n'y a aucun jeton noir tiré).
 - a - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b - Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 11cm$
3. On répète 5 fois de suite et de manière indépendante l'épreuve E . A chaque épreuve, on marque 1 point si l'on tire un jeton noir au premier coup sinon on marque 0 point. Soit Y la variable aléatoire égale au total des points marqués à l'issue des 5 épreuves.
 - a - Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b - Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y .
 - c - Calculer la probabilité pour que l'on marque au moins 1 point à l'issue des 5 épreuves.

Exercice - 4 (5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x + 1)\ln|x|$. On note par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1 cm.

Annexe C

Sujets de Baccalauréat Série C

MATHEMATIQUES - Série C - SESSION 2000

Dans un plan orienté \mathcal{P} , on considère le triangle direct ABC isocèle et rectangle en A . (Voir figure C.1).

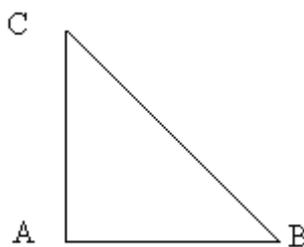


FIGURE C.1 – Triangle ABC

On note par :

- I le milieu du segment $[BC]$;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- t la translation de vecteur \overrightarrow{BC} ;
- $g = tor_B$ et $f = r_Cog$.

1. Méthode complexe :

\mathcal{P} étant muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- a - Déterminer z_A, z_B, z_C et z_I affixes respectives des points A, B, C et I .
- b - Donner l'expression complexe de f .
- c - Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .

2. Méthode géométrique :

- a - Caractériser g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales.
- b - Caractériser f en décomposant r_C et g en deux symétries orthogonales.

3. Soit \mathcal{S} la similitude plane indirecte de centre A et qui transforme B en I .

- a - Déterminer le rapport de \mathcal{S} .

b - Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre A et passant par B . La demi-droite $[AI]$, d'origine A et contenant I , coupe (\mathcal{C}) au point B' . Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale d'axe (Δ) qui transforme B en B' . Déterminer alors l'axe de \mathcal{S} .

Exercice 2 (4 points)

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont blanches dont une porte le numéro 0, une le numéro 1 et trois le numéro 2. Cinq boules sont noires dont quatre portent le numéro 2 et une le numéro 3.

1. On tire au hasard, simultanément trois boules du sac. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - A : « Toutes les boules sont blanches ».
 - B : « Les boules sont de couleurs différentes ».
 - C : « On obtient la boule numérotée 0 ».
 - D : « Les numéros des boules sont pairs ».
2. Dans cette partie, on enlève du sac la boule numérotée 0. L'épreuve est maintenant la suivante : du sac contenant les neuf boules restantes, on tire au hasard, successivement et avec remise deux boules. On note par a le numéro apparu sur la première boule, b le numéro apparu sur la deuxième et $d = PGCD(a, b)$ le plus grand commun diviseur de a et b .
 - a - Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par d est $D = 1, 2, 3$.
 - b - Pour tout $k \in D$, on désigne par E_k l'ensemble des couples (a, b) tels que $d = k$, c'est-à-dire : $E_k = (a, b) / PGCD(a, b) = k$. On note par p_k la probabilité de E_k . Montrer que $p_1 = 31/81$, puis déterminer p_2 et p_3 .
 - c - Calculer la probabilité de l'événement E : « l'équation $ax + by = 2$, d'inconnues (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ admet des solutions ».
 - d - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $3x + 2y = 2$.

Problème (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0; \\ f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x \in]0; 1[; \\ f(x) = \frac{x-1}{e^x - x - 1} & \text{si } x \in [1; +\infty[. \end{cases}$$

On note par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 5 cm.

Partie A

1. Soit g la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $g(x) = \ln x - \ln(1-x)$.
 - a - Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
 - b - En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.
 - c - Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = (2-x)e^x - 2$.
 - a - Montrer que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
 - b - Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]3/2; 2[$.

- c - En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$.
- d - Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$
3. a - Montrer que f est continue en 0 et en 1.
 b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$. Interpréter graphiquement ces résultats.
 c - Montrer que (\mathcal{C}) admet une asymptote horizontale que l'on précisera.
4. a - Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que $f(\alpha) = -1 + \frac{2}{\alpha}$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
 b - Tracer (\mathcal{C}) sur l'intervalle $[0; 3]$ en précisant les demi-tangentes en 0 et en 1.
On donne pour la construction :

x	0.5	1	$\alpha = 1.6$	2	3
f(x)	-0.69	0	0.25	0.22	0.12

Tableau C.1 – Tableau des valeurs x et $f(x)$.

Partie B

Soit $\alpha \in]3/2; 2[$, le réel déterminé dans la question 2.b. de la **partie A**.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$.
- a - Utiliser la monotonie de f sur $[1; \alpha]$ pour montrer que : $0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$.
 b - Etudier le sens de variation de la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $[1; +\infty[$. En déduire que pour tout $t \geq 1$: $e^t - t - 1 \geq e - 2$.
 c. Montrer alors que $0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1) - (e-2)}$.
 d. Montrer que la suite $I_n(\alpha)$ est convergente. Préciser sa limite.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$.
- a - En remarquant que $f(x) \geq -\ln 2$, pour tout $x \in]0; 1[$, montrer que : $a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$.
 b - Pour quelles valeurs de a et b , la dernière inégalité est-elle une égalité ?

MATHEMATIQUES - Série C - SESSION 2001

N.B. : Les deux exercices et le Problème sont obligatoires.

Exercice - 1 (04 points)

Dans le plan orienté (\mathcal{P}) , on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $AB = AC$ et $\text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, le plan (\mathcal{P}) est rapporté au repère orthonormé direct (A, \vec{AB}, \vec{AC}) .
- a - Déterminer les affixes respectives z_A, z_B, z_C des points A, B, C .
 b - Soit \mathcal{T} la transformation ponctuelle du plan (\mathcal{P}) vers (\mathcal{P}) qui à tout point M d'affixe

z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -z + 2i$. Caractériser géométriquement \mathcal{T} .

c - Donner l'expression complexe de la rotation \mathcal{R} de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d - On pose $f = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$. Donner l'expression complexe de f . En déduire la nature et les éléments géométriques de f .

e - On note I le centre de f ; donner la nature du quadrilatère $ABIC$. Justifier votre réponse.

Dans toute la suite, on utilisera une méthode géométrique. On pose $AB = AC = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

2. Soit \mathcal{S} la similitude plane directe de centre I qui transforme A en B . On note $C' = \mathcal{S}(C)$; $O' = \mathcal{S}(O)$ où O est le milieu du segment $[BC]$.

a - Donner le rapport et l'angle de \mathcal{S} .

b - Montrer que $C' \in [IA]$.

c - Donner l'image par \mathcal{S} du segment $[IA]$ et montrer que O' est le milieu du segment $[IB]$.

3. On considère le système de points pondérés $\{(A; -1), (B; 1), (C; 1)\}$.

a - Quel est le barycentre G de ce système ?

b - Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2.$$

Exercice - 2 (04 points)

1. On considère deux dés cubiques parfaitement équilibrés D_1 et D_2 tels que :

D_1 porte sur ses six faces les chiffres 1, 1, 2, 3, 3, 4.

D_2 porte sur ses six faces les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On lance simultanément ces deux dés. On note a le chiffre lu sur D_1 et b le chiffre lu sur D_2 .

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir un couple (a, b) tel que $a = b$ »

B : « obtenir un couple (a, b) de nombres impairs ».

2. On prend le dé D_2 dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

On lance une fois ce dé. A chaque entier n obtenu ($1 \leq n \leq 6$), on associe le couple d'entiers (a, b) tels que $a = 5n + 3$ et $b = 3n + 1$.

a - Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donner le couple (a, b) correspondant ainsi que leur plus grand commun diviseur $d(d = \text{PGCD}(a, b))$.

b - Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « a et b sont des nombres premiers ».

D : « a et b sont premiers entre eux ».

3. Résoudre l'équation $13x - 7y = 11$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction numérique f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_0(x) = e^{-x}$. On note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

PARTIE A.

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
2. Dans toute la suite de cette question, on distinguera les cas n pair et n impair.
 - a - Calculer la limite de $f_n(x)$ quand $x \rightarrow -\infty$.
 - b - Calculer $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n .
 - c - Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire les positions relatives de (C_{n+1}) et (C_n) .
3. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes indépendants de n dont on précisera les coordonnées.

PARTIE B.

1. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
 - a - Vérifier que la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = x^2e^{-x}$ est solution de (E) .
 - b - Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation $(E') : y'' + 2y' + y = 0$.
 - c - Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E) .
 - d - Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$ et exprimer f en fonction de f_0, f_1 et f_2 .
2. On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.
 - a - Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
 - b - Construire la courbe représentative (\mathcal{C}) de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unités $\|\vec{i}\| = 1cm; \|\vec{j}\| = 5cm$. On donne : $e^{-1} \approx 0,37; e^{-2} \approx 0,13$.

PARTIE C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f_n(t)dt$ (On rappelle que $0! = 1$).

1. a - Calculer $I_0(x), I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .
 b - Utiliser la question B 1.d. pour calculer l'aire \mathcal{A} du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe $(x'Ox)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. a - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
 b - En déduire $I_n(x)$ en fonction de n et x .
 c - Pour n fixé, calculer la limite de $I_n(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. a - On prend $x = 1$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq I_n(1) \leq \frac{1}{(n+1)!}$.
 b - En déduire la limite de $I_n(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
 c - Déduire de la question 2. b. l'expression de $I_n(1)$ en fonction de n .
 d - Utiliser les résultats précédents pour montrer que : $e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right]$.

Annexe D

Réponses de quelques élèves

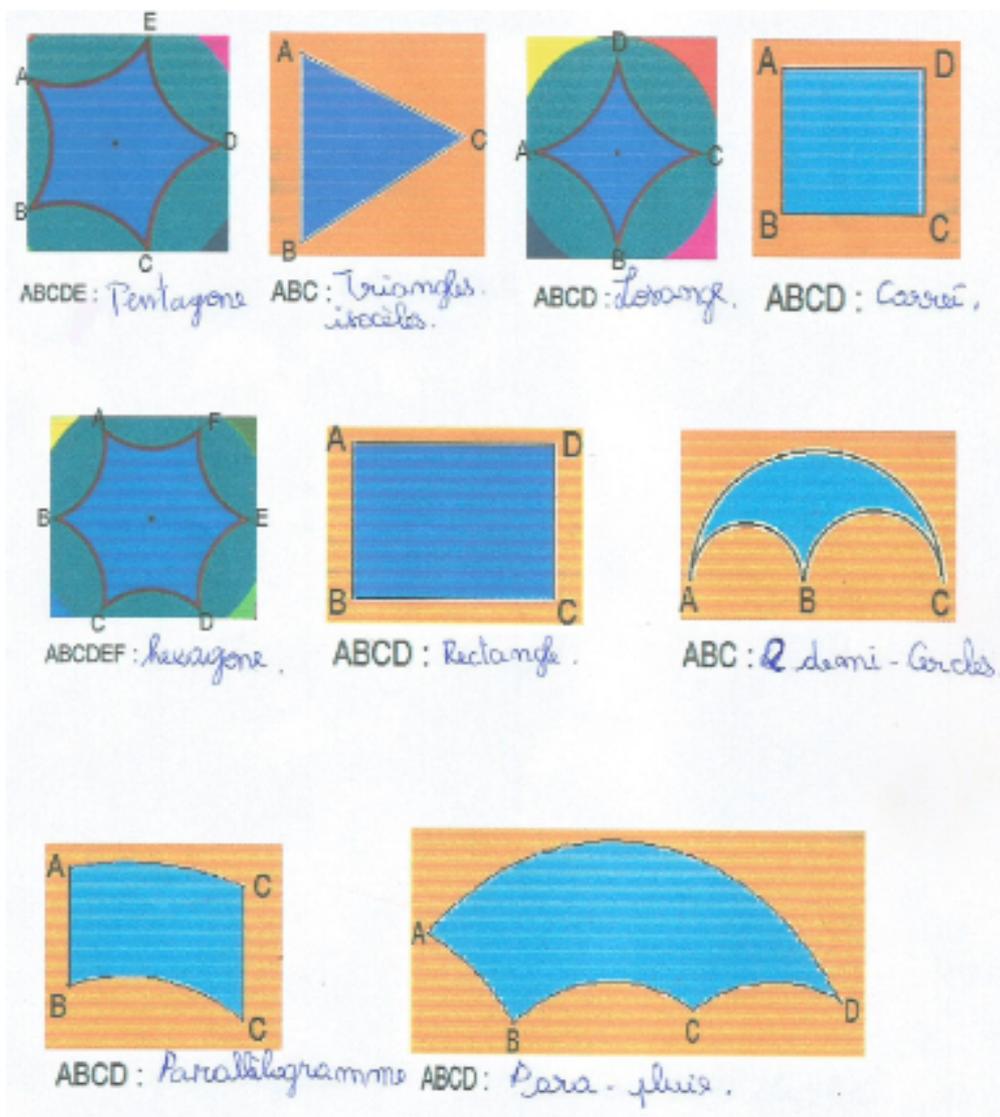


FIGURE D.1 – Réponses de test

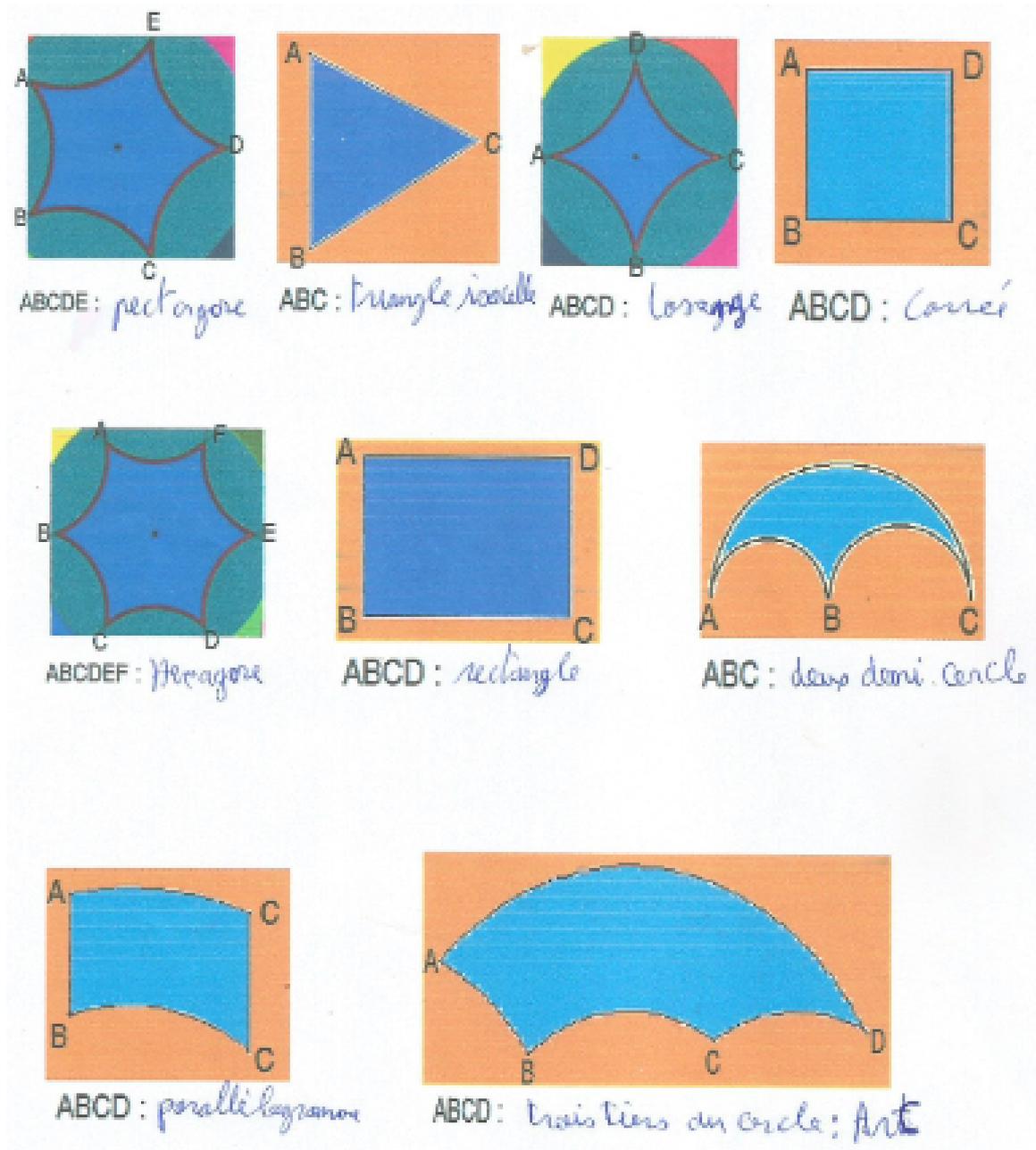


FIGURE D.2 – Réponses de test suite

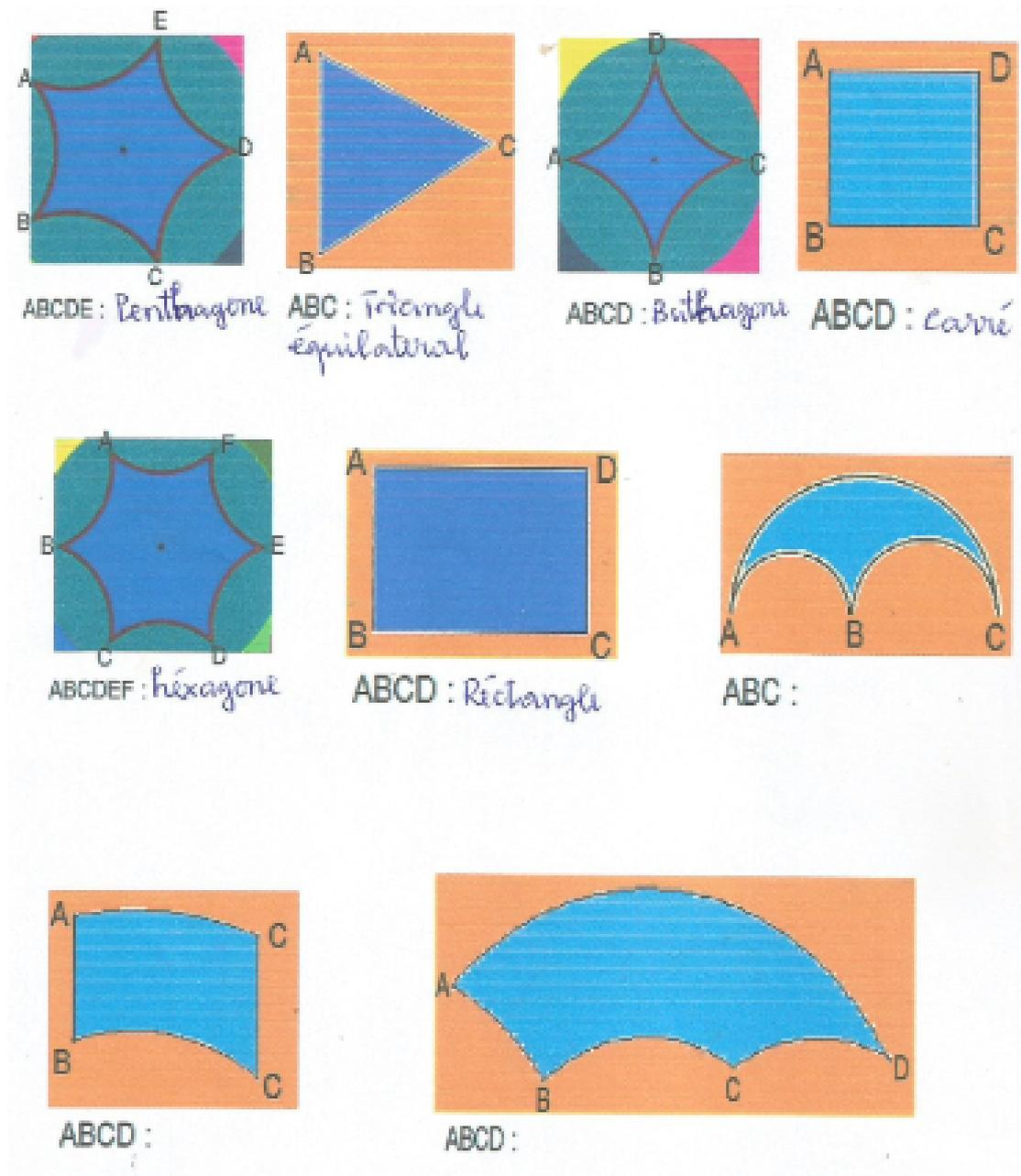


FIGURE D.3 – Réponses de test suite

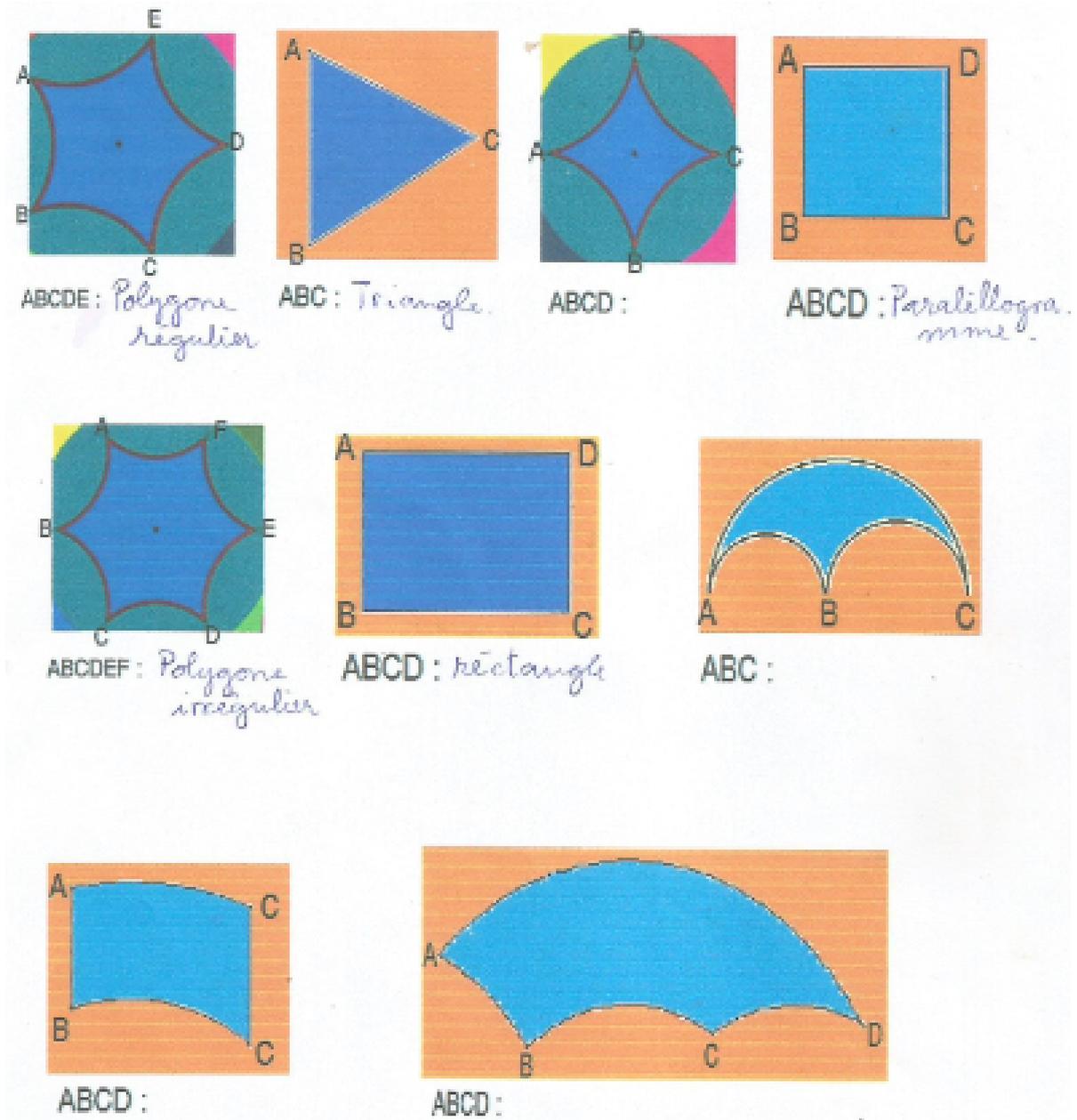


FIGURE D.4 – Réponses de test suite

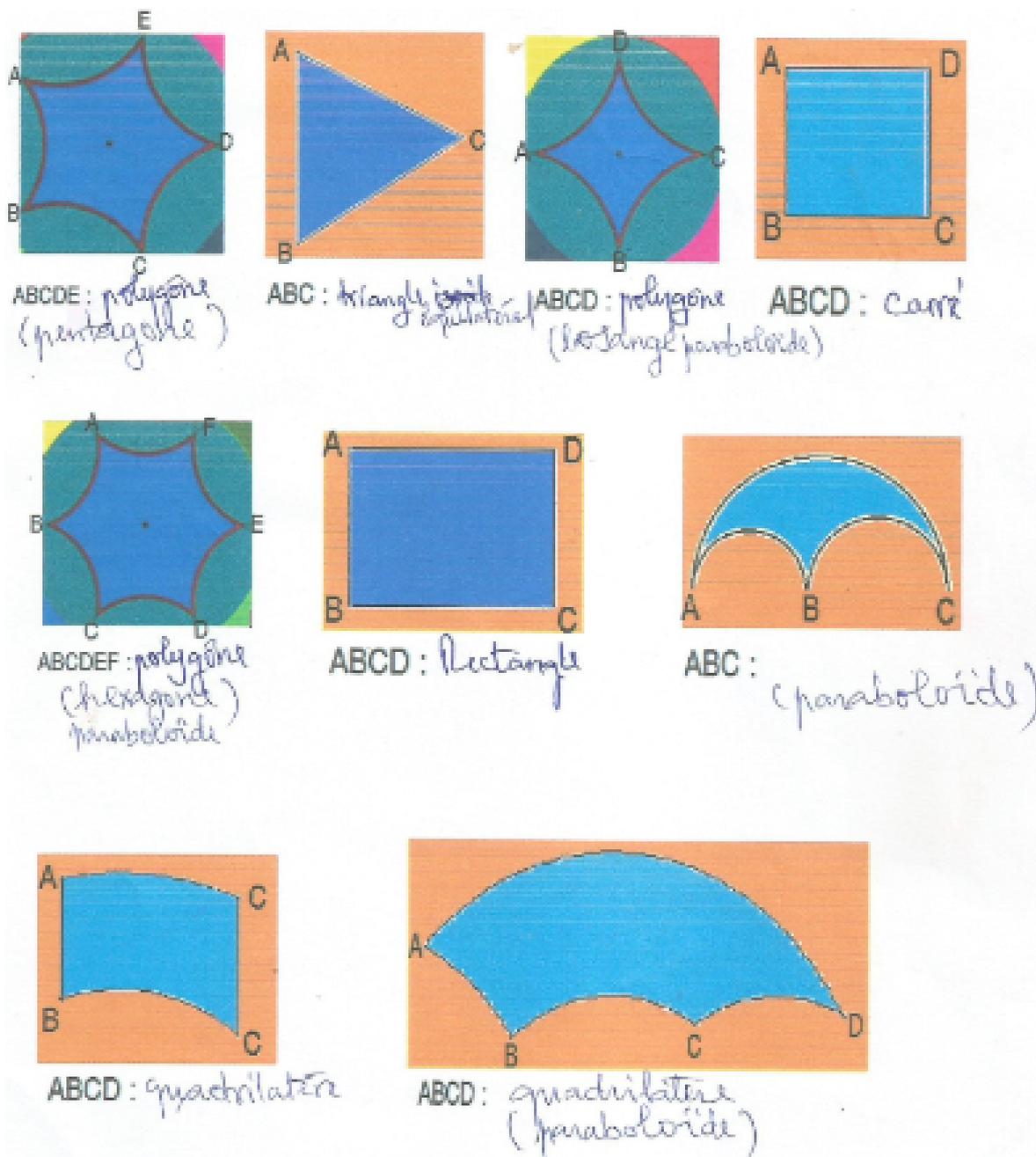


FIGURE D.5 – Réponses de test suite

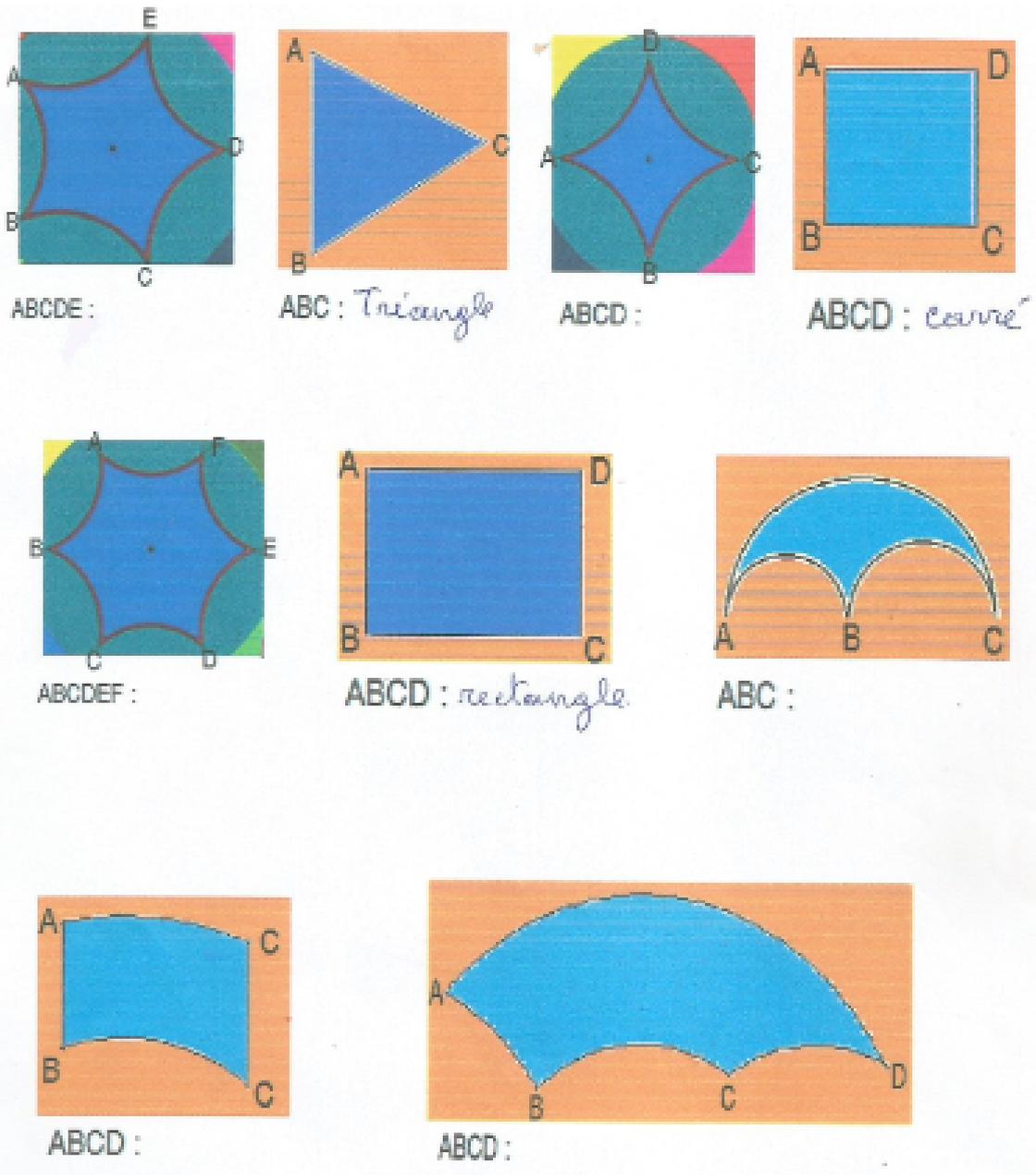


FIGURE D.6 – Réponses de test suite

Annexe E

Figures géométriques hyperboliques fondamentales

(Cf. <https://marcel-morales.com>)

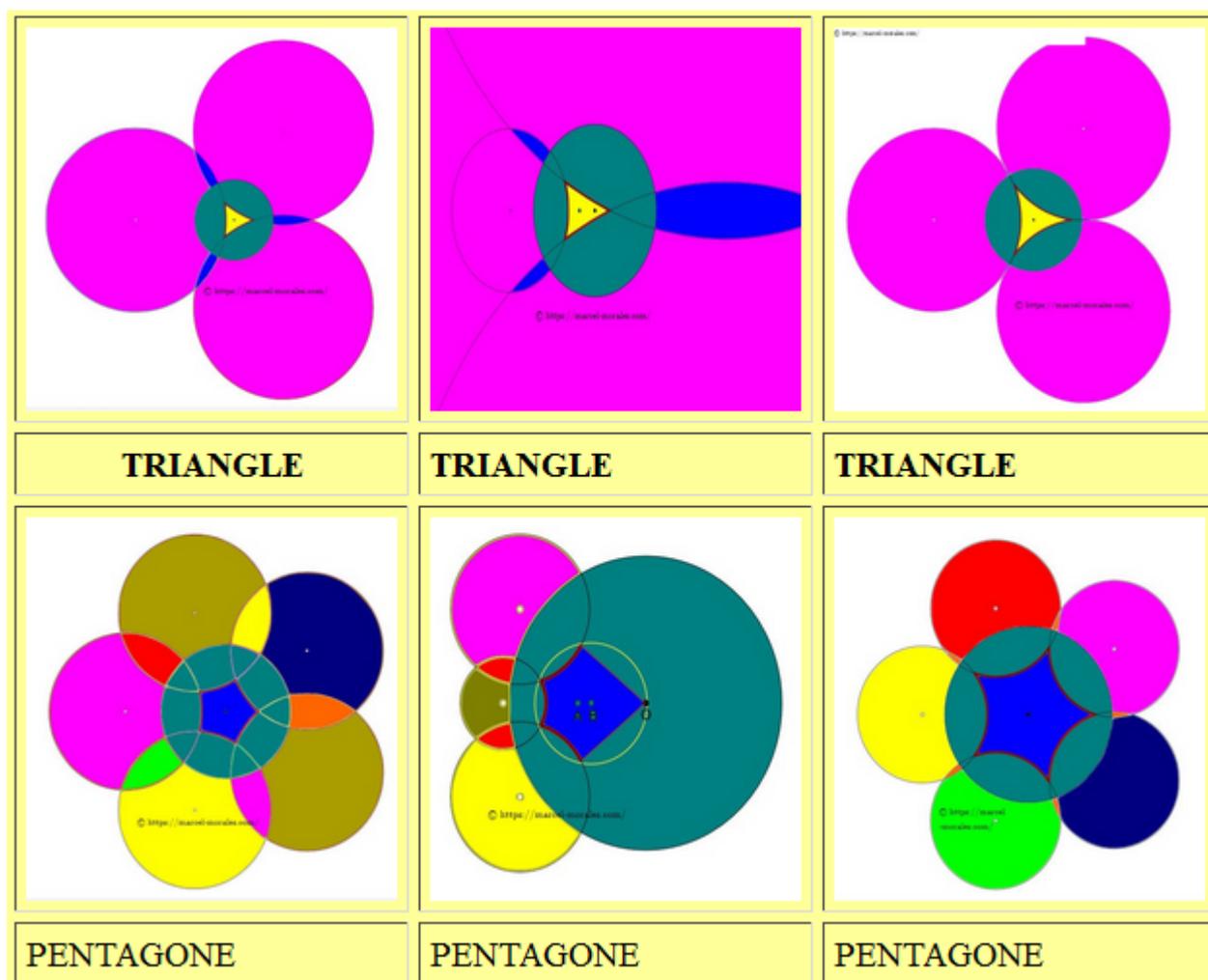


FIGURE E.1 – Figures géométriques hyperboliques fondamentales 1

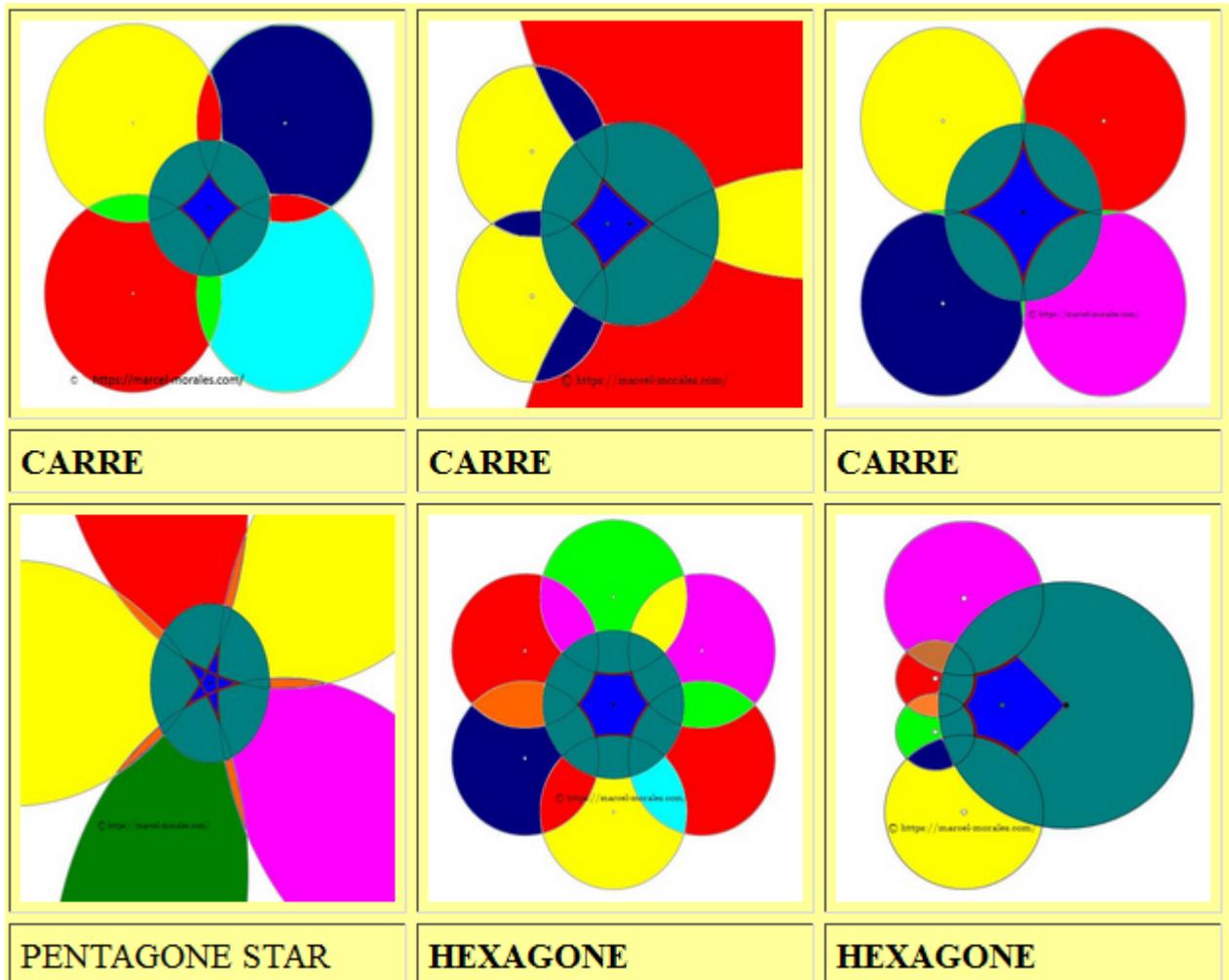


FIGURE E.2 – Figures géométriques hyperboliques fondamentales 2

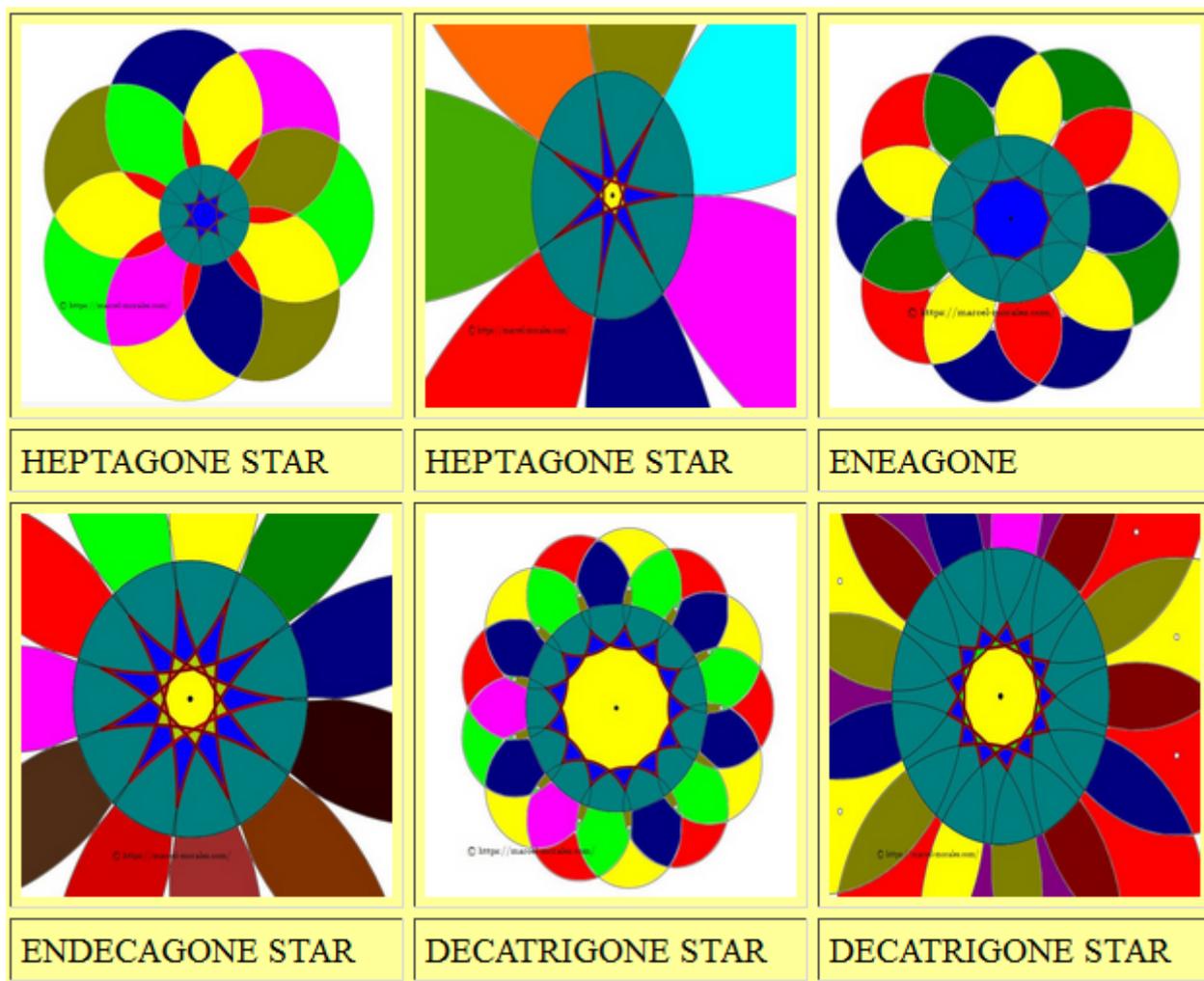


FIGURE E.3 – Figures géométriques hyperboliques fondamentales 3

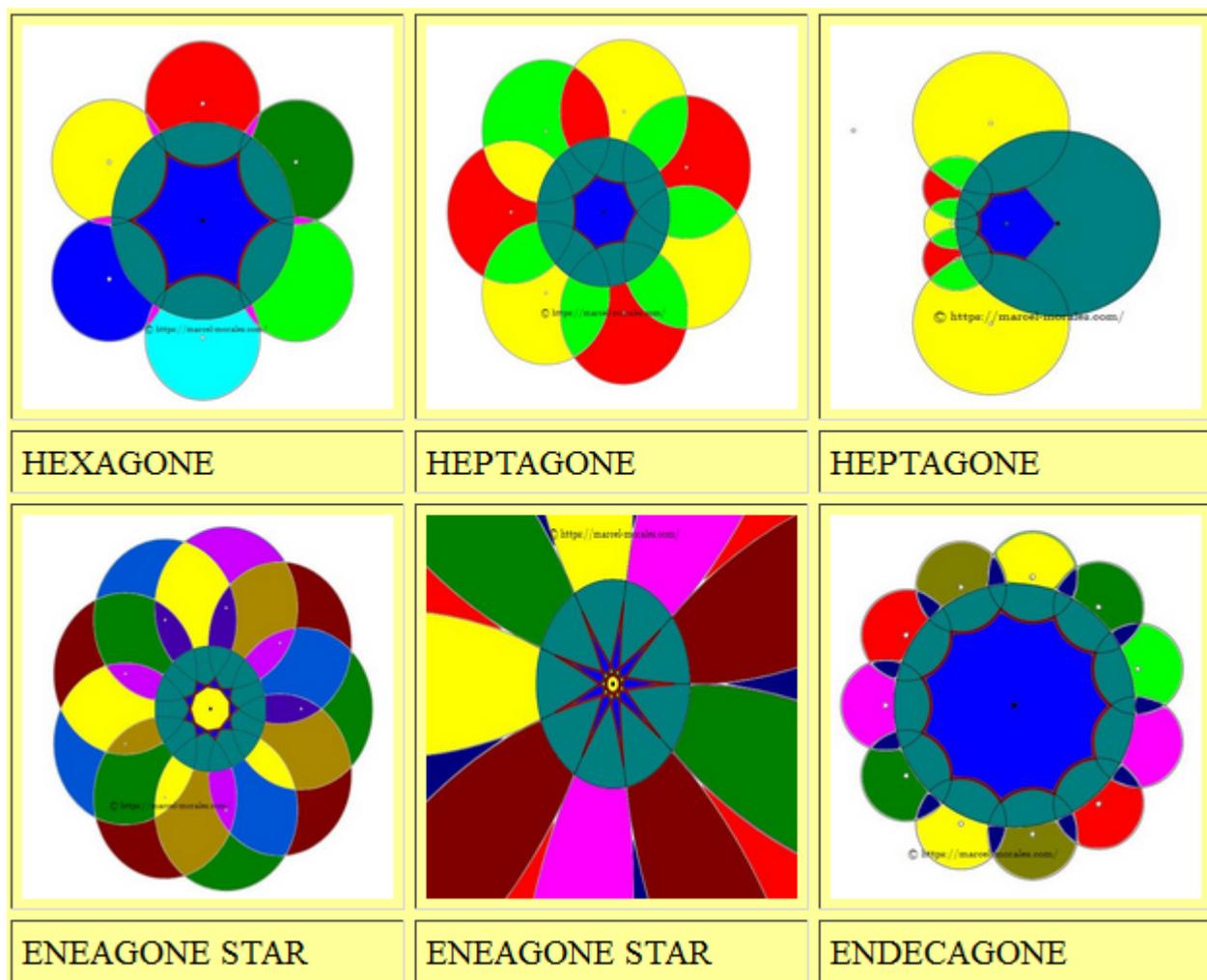


FIGURE E.4 – Figures géométriques hyperboliques fondamentales 4