



HAL
open science

Implémentation des algorithmes quantiques via l'électrodynamique quantique en cavité

Abdelhaq Chouikh

► **To cite this version:**

Abdelhaq Chouikh. Implémentation des algorithmes quantiques via l'électrodynamique quantique en cavité. Physique [physics]. UNIVERSITE HASSAN II-CASABLANCA, Faculté des sciences Ben M'sik, 2016. Français. NNT: . tel-02118943

HAL Id: tel-02118943

<https://hal.science/tel-02118943>

Submitted on 3 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ordre : 190/2016

Thèse de Doctorat

Présentée par :

M^r : Abdelhaq CHOUIKH

Discipline : Physique et Applications

Spécialité : Sciences et Technologies de l'Information

Sujet de la thèse :

Implémentation des algorithmes quantiques via l'électrodynamique quantique en cavité

Thèse présentée et soutenue Le 12 Novembre 2016 à 10h

Devant le jury composé de :

| | | |
|-------------------------|---|--------------------|
| Said OUASKIT | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Président |
| Aouatif DEZAIRI | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Rapporteur |
| Hamid EZ-ZAHRAOUY | Faculté des Sciences Rabat | Rapporteur |
| Noureddine BENAYAD | Faculté des Sciences Aïn Chock Casablanca | Rapporteur |
| Abdelrhani IDRISSE ADIB | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Examineur |
| Chakir HAMID | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Examineur |
| Mohamed ELHAFIDI | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Examineur |
| Saâd ELFASSI | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Examineur |
| Mohamed BENNAI | Faculté des Sciences Ben M'Sik Casablanca | Directeur de thèse |

Etablissement : Faculté des sciences Ben M'sik.

CEDoc : Sciences et Applications.

Nom du laboratoire : Laboratoire de Physique de Matière condensée(LPMC).



Dédicaces

Dédicaces

C'est avec toute l'ardeur de mes sentiments que je dédie ce modeste travail qui est le fruit de ma profonde reconnaissance :

A l'âme de mes parents et de mes grands parents

A Azizati Kaltoum , ma femme Saloua, mon fils Haytam, mes frères, mes sœurs et tous les membres de ma famille en reconnaissance de leurs encouragements.

A tous mes amis pour leur sympathie, leur humeur et leur solidarité envers moi.

Veillez, tous, accepter mes hautes salutations et considérations.

Que Dieu puisse vous protéger

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été menés au sein du laboratoire de physique de la matière condensée (LPMC) de la Faculté des Sciences de Ben Msick Casablanca.

La présente étude n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon cœur, en acceptant mes remerciements.

Mes vifs remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse, le professeur **Mohamed Bennai**, qui m'a accompagné tout au long de ma formation de thèse, qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris; merci infiniment Monsieur Mohamed Bennai.

Je voudrais remercier Monsieur **Said Ouaskit**, Professeur de l'enseignement supérieur à la faculté des sciences de Ben Msick, pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de thèse, ainsi que Monsieur **Hamid EZ-ZAHRAOUY**, Professeur de l'enseignement supérieur à la faculté des sciences de Rabat ; Madame **Aouatif DEZAIRI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la faculté des sciences de Ben Msick, Monsieur **Noureddine BENAYAD**, Professeur de l'enseignement supérieur à la faculté des Sciences Aïn Chock Casablanca, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse.

Je tiens également à remercier; Monsieur **Mohamed ELHAFIDI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la faculté des sciences de Ben Msick, Monsieur **Saâd Elfassi**, Professeur Habilité à la faculté des sciences de Ben Msick, Monsieur **Hamid Chakir**, Professeur de l'enseignement supérieur à la faculté des sciences de Ben Msick, Monsieur **Adib Idrissi**, Professeur de l'enseignement supérieur à

la faculté des sciences de Ben Msick, d'avoir donné leur accord pour participer au jury de soutenance.

Il y a une personne de très grande importance dans ma vie, qui m'accompagne et qui me soutient tout le temps par la force et l'énergie qui lui sont disponibles. Il s'agit de Saloua Hajbi, ma merveilleuse, splendide et vertueuse épouse, dont je ne pourrai mesurer l'apport dans l'accomplissement de cette thèse. Dans tout ce que j'ai pu souffrir et obtenir, elle a été l'autre moi. Je te remercie infiniment.

Heureusement que les membres de ma famille sont toujours là pour me changer les idées. Ils ont tous cru en moi et ouf ! maintenant j'y suis ! Alors merci à vous tous, Azizati Kaltoum, mes frères Abdelali, Mohamed, Abdellah et mes sœurs Rachida, Saadia, Bouchra et Fatima zahra; Abdelillah et Amin et tous mes neveux.

De plus, mes remerciements seraient incomplets, si je ne fais pas mention de mon enfant Haitam, qui a pu supporter mon éloignement et a pu continuer d'être sage en dépit de mon absence. Je t'adresse mes chaleureux remerciements

J'adresse toute ma gratitude à tous mes ami(e)s et à toutes les personnes qui m'ont aidé de loin ou de près dans la réalisation de ce travail. Je remercie surtout Taoufik Said et Karima Essammouni pour les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions et leurs contributions.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1 Généralités : Les bases de l'information quantique | 5 |
| 1.1 Le bit quantique (Qubit) | 5 |
| 1.1.1 Sphère de Bloch | 6 |
| 1.1.2 Les représentations $SU(2)$ et $O(3)$ | 7 |
| 1.2 Portes quantiques logiques | 9 |
| 1.2.1 Les portes quantiques à un seul qubit | 9 |
| 1.2.2 Les portes quantiques à plusieurs qubits | 11 |
| 1.3 Les algorithmes quantiques (algorithme de Grover) | 15 |
| 1.4 Conclusion | 20 |
| 2 Couplage lumière-matière en cavité QED | 22 |
| 2.1 Les états initiaux du champ de la cavité | 22 |
| 2.1.1 les états de Fock | 23 |
| 2.1.2 Les états cohérents | 23 |
| 2.1.3 Les états thermiques | 24 |
| 2.2 Modèle de Jaynes-Cummings | 27 |
| 2.2.1 Interaction d'un seul atome avec un seul mode de la cavité | 27 |
| 2.2.2 L'Hamiltonien en représentation d'interaction | 30 |
| 2.3 Conclusion | 33 |
| 3 Implémentation de la porte de phase à quatre qubits | 37 |
| 3.1 Etude théorique | 39 |
| 3.1.1 Hamiltonien de base | 39 |
| 3.1.2 Condition d'implémentation de la porte de phase | 42 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.1.3 | Implémentation de la porte de phase..... | 49 |
| 3.1.4 | Discussion..... | 51 |
| 3.1.5 | Fidélité..... | 52 |
| 3.2 | Conclusion..... | 53 |
| 4 | Implémentation de la porte iSWAP et de la porte de Fredkin | 55 |
| 4.1 | Porte iSWAP | 56 |
| 4.2 | Porte de Fredkin | 60 |
| 4.2.1 | Etat initial : $ \psi_0\rangle = 1, a, 10\rangle$ | 62 |
| 4.2.2 | Etat initial : $ \psi_0\rangle = 1, e, 01\rangle$ | 62 |
| 4.2.3 | Etat initial : $ \psi_0\rangle = 1, a, 01\rangle$ ou $ \psi_0\rangle = 1, e, 10\rangle$ | 63 |
| 4.3 | Conclusion et Discussion..... | 70 |
| 5 | Implémentation de N portes de phase quantique dans une cavité QED par considération de l'interaction dipôle-dipôle | 72 |
| 5.1 | La théorie de base de la porte NTCP..... | 73 |
| 5.1.1 | Opérateur d'évolution dans le cas $\varphi = \pi$ et $\delta < 0$ | 76 |
| 5.1.2 | Opérateur d'évolution dans le cas $\varphi = 0$ et $\delta > 0$ | 79 |
| 5.2 | Préparation de la porte NTCP..... | 81 |
| 5.3 | Discussion..... | 84 |
| 5.4 | Conclusion..... | 85 |
| 6 | Approche alternative pour la représentation de qubits atomiques | 89 |
| 6.1 | Suite universelle de portes logiques..... | 90 |
| 6.1.1 | Rotation autour de l'axe des x..... | 91 |
| 6.1.2 | Rotation autour de l'axe des z..... | 93 |
| 6.1.3 | Porte quantique à plusieurs qubits..... | 95 |
| 6.2 | Conclusion..... | 100 |
| | Conclusion générale | 104 |
| | Annexe | 107 |

LISTE DES ABREVIATIONS, DES SIGLES ET ACRONYMES

| | |
|-------|-----------------------------|
| QED | Quantum Electrodynamic |
| J.C | Modèle de Jaynes-cummings |
| RWA | Rotating Wave Approximation |
| DDI | Dipôle-Dipôle Interaction |
| ACI | Atom-Cavity Interaction |
| NTCP | N Two Controlled Phase |
| CNOT | Controlled Not |
| CCNOT | Controlled Controlled Not |
| NAND | Not And |
| DOF | Degree Of Freedom |
| NV | Nitrogen-Vacancy |

Introduction

L'électrodynamique quantique en cavité (ou cavité QED), a longtemps été un domaine très pratique pour l'étude de différents Phénomènes dans l'optique quantique [1]. Historiquement, cela a commencé quand Purcell a montré que les taux d'émission spontanée ont été améliorées dans une cavité [2, 3]. Les interactions entre des systèmes à l'intérieur d'une cavité à grand facteur de qualité peuvent dominer ceux de l'environnement, offrant un haut degré de cohérence [1]. Le couplage fort entre un atome à deux niveaux et un seul mode du champ électromagnétique est l'une des propriétés les plus importantes dans la cavité-QED : une telle propriété peut être très utile pour des applications dans le calcul quantique [4].

Les systèmes basés sur la cavité QED est le thème central de cette thèse. Dans les deux premiers chapitres, nous rappelons les notions de calcul quantique, puis nous présentons une brève introduction sur les portes quantiques logiques en mettant en surbrillance quelques portes quantiques importantes (porte de phase, SWAP, Fredkin...) et nous exposons le modèle standard de Jaynes-Cummings appliqué à un système constitué par un atome en interaction avec un photon dans la cavité QED. Le troisième chapitre contient une approche théorique pour implémenter directement une porte de phase à quatre qubits tandis que le quatrième chapitre sera réservé à l'implémentation de deux portes quantiques universelles (iSWAP et Fredkin) et qui sont très utiles dans plusieurs domaines de l'information quantique et du calcul quantique[5, 6]. Dans le cinquième chapitre, nous réalisons N portes de phase quantique (NTCP) dans la cavité QED en tenant compte de l'interaction dipôle-dipôle (atome-atome). Enfin le dernier chapitre de cette thèse sera consacré à un autre type de qubits logiques réalisés à l'aide de deux atomes à deux niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Ces qubits seront codés par

les états différents des deux atomes 1 et 2 (càd $|g_1e_2\rangle$ et $|e_1g_2\rangle$). Pour que ces qubits soit utiles, nous avons construit une suite universelle de portes logiques constituée par deux rotations autour des axes X et Z (portes quantiques à un seul qubit) et une porte quantique à deux qubits (CNOT).

Dans cette thèse, nous avons réalisé plusieurs portes logiques qui peuvent être utiles pour des applications en traitement de l'information quantique et qui vont permettre de réaliser physiquement les opérations nécessaires aux calculs sur les qubits.

REFERENCES

- 1 H. Mabuchi and A. C. Doherty. Cavity Quantum Electrodynamics : Coherence in Context. *Science*, 298(5597) :1372-1377, 2002.
- 2 H. Walther, B. T. H. Varcoe, B. G. Englert, and T. Becker. Cavity quantum electrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 69(5) :1325, 2006.
- 3 C. C. Gerry and P. L. Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- 4 S. J. van Enk, H. J. Kimble, and H. Mabuchi. Quantum Information Processing in Cavity-QED. *Quantum Information Processing*, 3(1-5) :75-90, 2004.
- 5 Michael L. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge, 2000.
- 6 S. M. Barnett. *Quantum information*. Oxford University Press, 2009.

Chapitre 1

Généralités : Les bases de l'information quantique

1.1 Le bit quantique (Qubit)

En informatique quantique un qubit (quantum + bit ; prononcé kiou-bite) est l'état quantique qui représente l'unité de stockage d'information quantique. Il se compose d'une superposition de deux états de base, par convention notés $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Un état qubit est constitué d'une superposition quantique linéaire de ces deux états. Une mémoire à qubits diffère significativement d'une mémoire classique par le fait qu'un bit ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, et une seule à la fois. Un qubit n'a pas cette restriction. On considère $|0\rangle$ et $|1\rangle$ comme vecteurs de base de calcul et sont définis par $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le qubit peut être dans une superposition de ces deux états : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Où $\alpha, \beta (\in \mathbb{C})$ sont les amplitudes de probabilité qui doivent satisfaire la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{1.1}$$

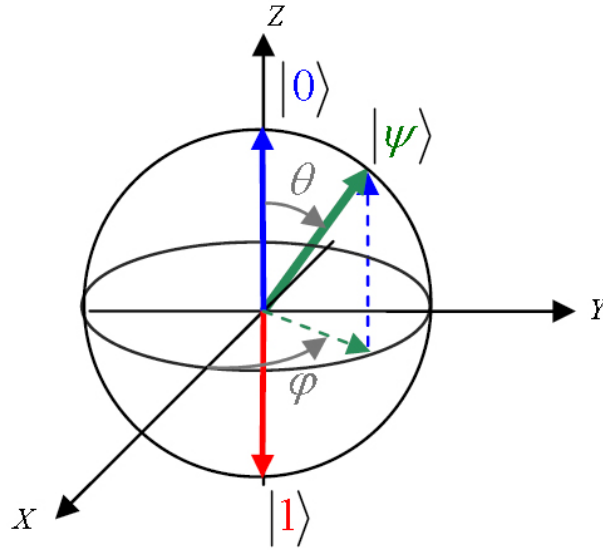


FIG. 1.1 – La sphère de Bloch

1.1.1 Sphère de Bloch

Il est toujours utile d'avoir une représentation graphique d'un concept abstrait. Pour pouvoir le faire, nous exprimons l'état d'un qubit en utilisant trois nombres réels θ , φ et γ :

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right) \quad (1.2)$$

avec $\alpha = e^{i\gamma} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\beta = e^{i\gamma} e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Puisque $|e^{i\gamma}| = |e^{i\varphi}| = 1$, il s'ensuit immédiatement : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Dans cette représentation $e^{i\gamma}$ est un facteur de phase global qui n'est pas un observable et ainsi il est généralement ignoré, donc on a :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (1.3)$$

Cette représentation nous permet de donner une interprétation géométrique intéressante. Un qubit $|\psi\rangle$ est un vecteur \vec{r} orienté de l'origine à un point sur une sphère à trois dimensions de rayon un, c'est ce qu'on appelle la sphère de Bloch [4] (voir Figure 1.1)

Dans cette représentation, θ est l'angle du vecteur \vec{r} avec l'axe z, et φ est l'angle de la projection du vecteur \vec{r} sur le plan (xy) avec l'axe des x, et comme nous l'avons expliqué γ n'a aucun effet observable.

1.1.2 Les représentations $SU(2)$ et $O(3)$

Pour comprendre l'interprétation géométrique d'un qubit, on considère un espace à 3 dimensions avec 3 vecteurs unitaires σ_x , σ_y et σ_z qui forment une base orthonormée. Dans la théorie de l'information quantique, on représente chaque élément de la base par une matrice carrée 2x2, et qui est hermitienne de trace nulle appartenant au groupe spécial $SU(2)$. On définit ensuite le produit symétrique (produit scalaire) comme :

$$\sigma_i \cdot \sigma_j \equiv \frac{1}{2} (\sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_j \cdot \sigma_i) \quad (1.4)$$

et le produit vectoriel par :

$$\sigma_i \times \sigma_j \equiv \frac{-i}{2} (\sigma_i \cdot \sigma_j - \sigma_j \cdot \sigma_i) \quad (1.5)$$

On note que la multiplication se trouvant dans la partie droite des équations 1.4 et 1.5 correspond à la multiplication entre deux matrices. Ainsi, une base orthonormée satisfait les conditions suivantes :

$$\sigma_i \cdot \sigma_j \equiv \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.6)$$

et

$$\sigma_i \times \sigma_j \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ \sigma_k, & \text{pour des indices cycliques} \end{cases} \quad (1.7)$$

La représentation matricielle fondamentale qui satisfait eq. 1.6 et eq. 1.7 est la base de Pauli : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi exprimer le qubit (eq.1.3) sous une forme vectorielle comme suit :

$$\vec{\psi} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (1.8)$$

TAB. 1.1 – Les différentes représentations du qubit

| Représentations | Qubit |
|---------------------------------|--|
| Espace de Hilbert | $ \psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) 0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) 1\rangle$ |
| Groupe orthogonal $O(3)$ | $\vec{\psi} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ |
| Groupe spécial linéaire $SU(2)$ | $M_\psi \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi} \sin\theta \\ e^{i\varphi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ |

qui est une représentation d'un qubit dans la sphère de Bloch où θ est l'angle d'élévation et φ est l'angle d'azimut. Dans cette représentation (Figure 1.1), le qubit est considéré comme un élément vectoriel du groupe orthogonal à 3 dimensions $O(3)$.

En définissant le vecteur de spin de Pauli (qui a des composantes sous forme de matrices) par $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, un qubit peut aussi être exprimé sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
M_\psi &\equiv \vec{\psi} \cdot \vec{\sigma} \\
&\equiv \sin\theta \cos\varphi \sigma_1 + \sin\theta \sin\varphi \sigma_2 + \cos\theta \sigma_3 \\
&\equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi} \sin\theta \\ e^{i\varphi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Dans cette représentation, un qubit est exprimé comme un élément du groupe $SU(2)$.

Dans l'information quantique, les matrices unitaires 2×2 sont considérées comme des portes quantiques à un seul qubit, mais ces matrices peuvent eux mêmes représenter des qubits. Le tableau 1.1 donne un résumé des trois représentations de qubits.

1.2 Portes quantiques logiques

Les opérations sur des qubits se font par application de portes logiques représentées par des opérateurs quantiques unitaires. Les états quantiques d'un système quantique s'écrivent sous forme d'une combinaison linéaire de ces qubits en remplissant la condition de normalisation. Après application d'une porte quantique sur un état, le nouvel état doit aussi satisfaire la même condition de normalisation. Il y a deux types de portes quantiques : les portes à un seul qubit et les portes à plusieurs qubits.

1.2.1 Les portes quantiques à un seul qubit

Les portes à un qubit sont des matrices unitaires qui agissent sur les vecteurs d'état de l'espace d'Hilbert C^2 . Certaines de ces matrices joueront un rôle particulièrement important.

Les matrices de Pauli et rotations :

Les matrices de Pauli sont des matrices carrées (2x2) qui sont souvent utilisées en information quantique. Elles peuvent être utilisées pour faire des transformations sur les états. Les matrices de Pauli sont hermitiques et unitaires. Les portes de Pauli sont très utiles puisqu'elles peuvent faire tourner des vecteurs. Par exemple la porte de Pauli X fait tourner un état représenté par un vecteur de la sphère de Bloch autour de l'axe \vec{x} d'un angle π radians. Elle est aussi l'équivalent quantique de la porte classique NOT : elle fait tourner $|0\rangle$ en $|1\rangle$ et vice versa. Elle est représentée par la matrice de Pauli $\sigma_x(X)$:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{X} \text{---}$$

La porte de Pauli Y fait tourner un vecteur autour de l'axe \vec{y} dans la sphère de Bloch d'un angle π radians : elle fait tourner $|0\rangle$ en $i|1\rangle$ et $|1\rangle$ en $-i|0\rangle$. Elle est

représentée par la matrice de Pauli $\sigma_y(Y)$:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{Y} \text{---}$$

La porte de Pauli Z fait tourner un vecteur autour de l'axe \vec{z} dans la sphère de Bloch d'un angle π radians : il ne fait pas changer l'état $|0\rangle$ et elle fait tourner l'état $|1\rangle$ en $-|1\rangle$. Elle est représentée par la matrice de Pauli $\sigma_z(Z)$:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{Z} \text{---}$$

D'une manière générale les portes quantiques logiques élémentaires agissant sur un seul qubit sont les rotations sur la sphère de Bloch. Une rotation finie d'un angle γ autour d'un vecteur donné \vec{n} sur la sphère de Bloch est donnée par :

$$\begin{aligned} R_{\vec{n}}(\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec : $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$. Donc les rotations autour des axes \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} d'un angle γ sont définies par :

$$\begin{aligned} R_{\vec{x}}(\gamma) &= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_x \\ R_{\vec{y}}(\gamma) &= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_y \\ R_{\vec{z}}(\gamma) &= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_z \end{aligned} \quad (1.11)$$

La porte quantique "phase-shift"

La porte "phase-shift" ne change pas l'état $|0\rangle$ mais change l'état $|1\rangle$ en $e^{i\varphi}|1\rangle$. Cette porte ne change pas la probabilité de mesure des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, Cependant elle change la phase de l'état $|1\rangle$. Elle est équivalente à tracer un cercle horizontale sur la sphère de Bloch d'un angle φ radian. Pour $\varphi = \pi$ on obtient la porte de Pauli Z. Cette porte est représentée par :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{\varphi} \text{---}$$

Un cas important est lorsque $\varphi = \frac{\pi}{4}$, qui est appelée la porte $\frac{\pi}{8}$ et qui est essentielle dans la réalisation de portes quantiques universelles. Sa représentation matricielle est :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{T} \text{---}$$

Porte de Hadamard

La porte de Hadamard est l'une des portes les plus importantes en informatique quantique. Elle transforme les états de base $|0\rangle$ en $\frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}}$ et $|1\rangle$ en $\frac{(|0\rangle-|1\rangle)}{\sqrt{2}}$. Pour ces deux états qui sont remarquables la probabilité de trouver les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ est la même. Géométriquement, cette porte représente une rotation de π autour de l'axe engendrée par le vecteur $\vec{n} = \frac{(\vec{x}+\vec{z})}{\sqrt{2}}$. \vec{x} et \vec{z} sont respectivement des vecteurs unitaires directeurs des axes x et z. Cette porte est représentée par :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{H} \text{---}$$

Porte de phase

La porte de phase est un élément important dans la construction d'une suite de portes quantiques universelles. Pour l'instant nous donnons seulement son circuit équivalent et sa représentation matricielle et nous verrons dans les prochains chapitres son importance et son utilité dans le calcul quantique.

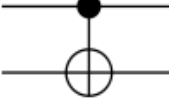
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{---} \boxed{S} \text{---}$$

1.2.2 Les portes quantiques à plusieurs qubits

La partie la plus importante de l'information quantique est d'effectuer des opérations sur des systèmes à plusieurs qubits. Dans ce chapitre nous allons présenter les portes CNOT, iSWAP, Fredkin et Toffoli en raison de leur importance dans la réalisation de plusieurs circuits quantiques.

Porte Controlled-NOT (CNOT)

L'entrée de cette porte contient deux qubits, l'un appelé qubit de contrôle et l'autre qubit cible. Elle réalise l'opération suivante : Si le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$, le qubit cible est renversé, autrement le qubit cible reste inchangé. Le circuit est la représentation matricielle de la porte CNOT sont représentés comme suit (La ligne en haut représente le qubit de contrôle tandis que la ligne en bas représente le qubit cible) :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$


Pour bien comprendre la porte CNOT, nous donnons sa table de vérité dans le tableau 1.2 :

TAB. 1.2 – Table de vérité de la porte CNOT (\oplus représente l'addition modulo 2)

| INPUT | | OUTPUT | |
|-------|---|--------|------------------|
| x | y | x | $y \oplus x$ |
| 0 | 0 | 0 | $0 \oplus 0 = 0$ |
| 0 | 1 | 0 | $1 \oplus 0 = 1$ |
| 1 | 0 | 1 | $0 \oplus 1 = 1$ |
| 1 | 1 | 1 | $1 \oplus 1 = 0$ |

Porte SWAP et iSWAP

La porte SWAP est une porte quantique qui réalise la permutation de deux qubits. Sa table de vérité est représentée dans le tableau 1.3. Le circuit et la représentation

matricielle de la porte SWAP sont représentés comme suit :

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ | \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}$$

TAB. 1.3 – Table de vérité de la porte SWAP

| INPUT | | OUTPUT | |
|-------|---|--------|------------------|
| x | y | x | $y \oplus x$ |
| 0 | 0 | 0 | $0 \oplus 0 = 0$ |
| 0 | 1 | 0 | $1 \oplus 0 = 1$ |
| 1 | 0 | 1 | $0 \oplus 1 = 1$ |
| 1 | 1 | 1 | $1 \oplus 1 = 0$ |

La table de vérité de la porte iSWAP est représentée dans le tableau 1.4.

TAB. 1.4 – Table de vérité de la porte iSWAP

| INPUT | OUTPUT |
|--------------|---------------|
| $ 00\rangle$ | $ 00\rangle$ |
| $ 01\rangle$ | $i 10\rangle$ |
| $ 10\rangle$ | $i 01\rangle$ |
| $ 11\rangle$ | $ 11\rangle$ |

De même son circuit et sa représentation matricielle sont représentés ainsi :

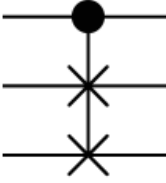
$$\text{iSWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{---} \boxtimes \text{---} \\ | \\ \text{---} \boxtimes \text{---} \end{array}$$

TAB. 1.5 – Table de vérité de la porte Fredkin

| INPUT | | | OUTPUT | | |
|-------|---|---|--------|----|----|
| x | y | z | x' | y' | z' |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Porte de Fredkin

La porte Fredkin (appelée aussi controlled SWAP gate) est une porte à trois qubits qui accomplit l'opération suivante : si le premier qubit qui est un qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$, alors les deux autres qubits sont permutés. Si le qubit de contrôle est dans l'état $|0\rangle$, l'état des qubits cibles reste inchangé. Nous donnons le circuit et la représentation matricielle de la porte de Fredkin :

$$\text{Fredkin} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


Sa table de vérité est représentée dans le tableau 1.5 :

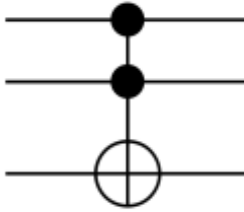
Porte de Toffoli

La porte de Toffoli (controlled CCNOT gate) est une porte à trois qubits avec deux qubits de contrôle et un qubit cible : si les deux qubits de contrôle valent $|1\rangle$, alors

TAB. 1.6 – Table de vérité de la porte de Toffoli

| INPUT | | | OUTPUT | | |
|-------|---|---|--------|----|----|
| x | y | z | x' | y' | z' |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

le qubit cible est changé; autrement le qubit cible reste tel quel. Nous donnons le circuit et la représentation matricielle de la porte de Toffoli (les deux lignes en haut représentent les qubits de contrôle, et la ligne en bas correspond au qubit cible) :

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$


Sa table de vérité est représentée dans le tableau 1.6 :

1.3 Les algorithmes quantiques (algorithme de Grover)

L'étude des algorithmes quantiques est parmi les domaines les plus intéressants dans toute la recherche scientifique d'aujourd'hui. Elle est basée sur le fait que les caractéristiques non classiques de la physique quantique peuvent être ingénieusement utilisées pour fournir d'immenses avantages au domaine de l'information et de la communication. Les sujets des algorithmes quantiques se concentrent sur l'étude et l'exploitation de ces nouveaux modes quantiques, qui mènent à un niveau de puissance de calcul très élevé et beaucoup de ses applications les plus importantes ont été développées par les chercheurs.

Un algorithme est une séquence d'opérations qui commande à l'ordinateur de faire une tâche spécifique, comme la résolution d'un certain problème. Deux caractéristiques de la théorie du calcul quantique jouent un rôle crucial dans la présentation de l'algorithme quantique :

- La réversibilité d'un circuit (L'opération est unitaire)
- parallélisme quantique (nombre d'opérations effectuées simultanément est 2^n , où n est le nombre de qubits)

Il existe plusieurs algorithmes quantiques, dont les plus célèbres sont l'algorithme de Shor[5] pour la factorisation et l'algorithme de Grover[1] pour la recherche d'information. Nous allons présenter en détail l'algorithme de Grover[2, 3, 4] du fait de son importance.

Cet algorithme permet de trouver de façon efficace un (ou plusieurs) élément(s) particuliers dans une base de données non structurée. La base de données comprend N éléments non triés, non liés, numérotés de 0 à $N-1$. L'objectif est de trouver dans cette liste l'élément (de numéro x_0) ayant une caractéristique particulière. Sur un ordinateur classique, dans une telle situation, il faut en moyenne $\frac{N}{2}$ tirages (exhaustifs) dans la liste pour trouver le bon élément. Nous allons voir qu'avec un algorithme quantique qui porte son nom, Lov Grover a montré qu'il suffisait d'environ \sqrt{N} tirages[1].

On prendra $N = 2^n$ de sorte que la représentation binaire du numéro x de chaque

élément fasse intervenir n bits. Tout d'abord, on se munit de deux registres. Le premier est de taille $\log N$ contenant x , le deuxième contient simplement un qubit q . On place le premier registre dans un état de superposition :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |x_i\rangle \quad (1.12)$$

On définit la fonction indicatrice de la solution :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est l'élément recherché } x_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (1.13)$$

L'algorithme de Grover consiste tout d'abord à construire un opérateur unitaire O appelé oracle, tel que :

$$O(|x\rangle |q\rangle) = |x\rangle |q \oplus f(x)\rangle \quad (1.14)$$

où \oplus représente l'opérateur NAND (ie. la somme modulo 2).

Mettons le deuxième registre dans l'état $|\psi_2\rangle = H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$. Donc :

$$\begin{aligned} O(|x\rangle |\psi_2\rangle) &= \frac{O(|x\rangle |0\rangle) - O(|x\rangle |1\rangle)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|x\rangle |f(x)\rangle - |x\rangle |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= (-1)^{f(x)} |x\rangle |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si on applique le même calcul à l'état $|\psi\rangle$, on obtient :

$$\begin{aligned} O(|\psi\rangle |\psi_2\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} O(|x\rangle |\psi_2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ainsi, on a différencié l'état recherché x_0 puisque c'est la seule coordonnée qui est négative. C'est important de noter que cette première étape de l'algorithme de Grover est nécessaire puisqu'elle permet d'isoler l'élément cherché des autres en lui affectant

un signe moins. L'état de sortie contient donc l'information recherchée. L'avantage de l'algorithme quantique par rapport à son analogue classique est que l'état d'entrée n'est pas un élément unique de la liste mais la superposition de tous les états de la base de calcul. Bien entendu, on n'a toujours pas accès à l'élément recherché puisque toutes les coordonnées de l'état de sortie ont même module. La suite de l'algorithme de Grover consiste à manipuler cet état pour accentuer l'amplitude de la coordonnée négative au détriments des coordonnées positives. On montrera qu'au bout de \sqrt{N} opérations, on a assez accentué la coordonnée cherchée pour que la probabilité de l'avoir dans une mesure soit excellente. On va maintenant définir cette deuxième porte.

Définissons d'abord l'opérateur S_ψ :

- soit S_0 l'opération qui change le signe de tous les états sauf l'état $|0\rangle$ (L'état $|0\rangle$ ici correspond à l'état $|0_1 0_2 \dots 0_n\rangle$) :

$$S_0 : \begin{cases} |0\rangle \longrightarrow |0\rangle \\ |x\rangle \longrightarrow -|x\rangle \quad \text{pour } |x\rangle \neq |0\rangle \end{cases} \quad (1.17)$$

Cet opérateur qui est unitaire peut s'écrire $S_0 = 2|0\rangle\langle 0| - I$

- On applique à droite et à gauche de cet opérateur la transformation de Hadamard H (càd qu'on fait agir l'opérateur H sur chaque qubit d'entrée et de sortie) :

$$S_\psi = H^{\otimes n} S_0 H^{\otimes n} \quad (1.18)$$

comme $H^{\otimes n} |0\rangle = |\psi\rangle$ et que $H^2 = I$ on en déduit $S_\psi = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$

La porte de Grover G consiste à appliquer successivement l'oracle O puis l'opérateur S_ψ :

$$G = S_\psi O \quad (1.19)$$

Pour bien comprendre l'action de cet opérateur nous utilisons une représentation géométrique simple. Soit les deux vecteurs orthogonaux $|x_0\rangle$ et $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{x \neq x_0} |x\rangle$. Dans la base orthonormée définie par ces deux vecteurs, le vecteur $|\psi\rangle$ est représenté

L'application de G , k fois, sur $|\psi\rangle$ donne :

$$G^k |\psi\rangle = \cos \left[(2k+1) \frac{\theta}{2} \right] |\alpha\rangle + \sin \left[(2k+1) \frac{\theta}{2} \right] |x_0\rangle$$

Nous cherchons k tel que $\cos \left[(2k+1) \frac{\theta}{2} \right] = 0$ soit $(2k+1) \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\pi}{2\theta} - \frac{1}{2} \\ &\simeq \frac{\pi}{2\theta} \\ &\simeq \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Nous remarquons que l'état final du système n'est pas exactement $|x_0\rangle$, et la probabilité d'obtenir un état autre que $|x_0\rangle$ est de l'ordre de $1/N$ ce qui représente le taux d'erreur.

1.4 Conclusion

Au cours de l'exécution d'un algorithme, l'état quantique de l'ensemble des qubits est manipulé et évolue unitairement entre des étapes de lecture de qubits. L'évolution s'obtient à l'aide d'un ensemble limité de portes logiques à un et à plusieurs qubits. D'où l'intérêt des portes logiques quantiques dans le domaine de l'implémentation des algorithmes quantiques. Cela nous a motivé à étudier l'implémentation de plusieurs portes logiques quantiques dans une cavité électrodynamique quantique (QED)

REFERENCES

- 1 L.K Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. Proc. 28th annual ACM Symposium on the Theory of computing (STOC), pages pp. 212–219, May 1996.
- 2 L.K Grover. From schrödinger’s equation to the quantum search algorithm. Trouvable sur arXiv, 2001.
- 3 C. Lavor, L.R.U Mansur, and R. Portugal. Grover’s algorithm : quantum database search. Trouvable sur arXiv, 2003.
- 4 Michael L. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum computation and quantum information. Cambridge, 2000.
- 5 P.W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. SIAM Review, 41(2) :pp. 303–332, Jun. 1999

Chapitre 2

Couplage lumière-matière en cavité QED

Pour comprendre l'interaction des modes quantifiés d'un champ électromagnétique avec un atome, on doit tout d'abord comprendre les propriétés des champs quantifiés elles mêmes. Nous allons commencer par décrire le simple cas d'un seul mode confiné dans une cavité et par la suite, nous allons généraliser cette étude au cas de plusieurs modes du champ dans la cavité.

2.1 Les états initiaux du champ de la cavité

Un état en mécanique quantique est complètement décrit par sa matrice densité ρ . La matrice densité peut être développée dans différentes bases $\{|\psi\rangle\}$, pour un ensemble discret d'états de base, par :

$$\rho = \sum_{i,j} D_{i,j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \quad (2.1)$$

L'élément de matrice $D_{i,j} = \langle \psi_i | \rho | \psi_j \rangle$ est une représentation de l'opérateur densité. Pour définir l'état initial des modes de la cavité, il existe trois représentations importantes : Les états de Fock, les états cohérents et les états thermiques. Dans cette thèse, nous allons considérer les états de Fock comme état initiaux étant donné

le petit nombre de photons mis en jeu dans le processus d'interaction entre les atomes et les modes de la cavité. Nous allons quand même décrire tous les trois états initiaux des modes de la cavité.

2.1.1 les états de Fock

Une cavité à grand facteur de qualité Q confine un mode du champ électromagnétique à la fréquence ω_c . Ce champ quantifié peut être décrit par l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique[1] :

$$\begin{aligned}\widehat{H}_c &= \hbar\omega_c \left(\widehat{a}^+ \widehat{a} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega_c \left(\widehat{N} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ici, nous avons introduit les opérateurs de création et d'annihilation \widehat{a}^+ et \widehat{a} . $\widehat{N} = \widehat{a}^+ \widehat{a}$ est l'opérateur associé au nombre de photons et dont les états propres sont représentés par les états du nombre de photons $|n\rangle$, connus aussi par les états de Fock. Les états $|n\rangle$ sont aussi des vecteurs propres de l'Hamiltonien \widehat{H}_c (eq.2.2). Les nouveaux opérateurs que nous avons introduit ici, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\widehat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \widehat{a}^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \widehat{N}|n\rangle &= n|n\rangle\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.1.2 Les états cohérents

Si nous considérons que le champ est initialement dans un état cohérent $|\alpha\rangle$ [2] qui est un état propre de l'opérateur d'annihilation \widehat{a} . $|\alpha\rangle$ satisfait la relation :

$$\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\tag{2.4}$$

L'état $|\alpha\rangle$ décrit un champ cohérent et peut être exprimé par :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.5)$$

avec le nombre moyen de photon donné par :

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (2.6)$$

La distribution du nombre de photons $P(n)$ dans un champ cohérent $|\alpha\rangle$ obéit à la distribution de Poisson :

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (2.7)$$

et l'opérateur champ électrique s'écrit :

$$\hat{E}(r) = \varepsilon_0(r) (\bar{\varepsilon} \hat{a} + \bar{\varepsilon}^* \hat{a}^+) \quad (2.8)$$

où $\bar{\varepsilon}$ représente son vecteur polarisation et $\varepsilon_0(r) = \varepsilon_0 f(r)$ étant son amplitude. $f(r)$ est une fonction décrivant le champ le long du mode dans la cavité et ε_0 est l'amplitude du champ électrique associé à un photon.

L'utilisation de l'Hamiltonien de l'équation 2.2 nous donne l'évolution d'un champ cohérent :

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_c t}{2}} |\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle \quad (2.9)$$

Nous remarquons que l'état reste cohérent, mais l'amplitude complexe tourne à la fréquence du champ ω_c .

2.1.3 Les états thermiques

Le champ électromagnétique confiné dans la cavité n'est pas un système totalement isolé. Son environnement qui représente un grand réservoir peut échanger de l'énergie avec le champ de la cavité. Ce champ se relaxe donc et atteint un état d'équilibre thermique. Dans un équilibre thermique du champ à la température T , le mode

à la fréquence ω_c a une distribution du nombre de photons donnée par la statistique de Bose-Einstein :

$$P_{th}(n) = \frac{1}{e^{\frac{n\hbar\omega_c}{k_B T}} - 1} \quad (2.10)$$

k_B est la constante de Boltzmann et \hbar est la constante de Planck. Le nombre de photons moyen s'écrit donc :

$$n_{th} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_c}{k_B T}} - 1} \quad (2.11)$$

L'équation principale régissant l'évolution du champ peut être exprimée sous la forme de Lindblad [3] :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho] + L_\rho \quad (2.12)$$

et

$$L_\rho = \sum_{\mu=+,-} \left(L_\mu \rho L_\mu^\dagger - \frac{1}{2} L_\mu^\dagger L_\mu \rho - \frac{1}{2} \rho L_\mu^\dagger L_\mu \right) \quad (2.13)$$

avec les deux opérateurs de saut L_+ et L_- qui décrivent respectivement le gain et la perte d'un photon :

$$\begin{aligned} L_+ &= \sqrt{K_+} \hat{a}^+ \\ L_- &= \sqrt{K_-} \hat{a} \end{aligned} \quad (2.14)$$

K_+ et K_- représentent respectivement le taux de gain et le taux de perte d'un photon. Le premier terme dans l'équation 2.12 correspond à l'évolution unitaire de l'hamiltonien H et qui peut être éliminé en passant à la représentation d'interaction par rapport à H . Dans cette représentation, le terme de relaxation reste inchangé. L'évolution du champ de l'instant t à l'instant $t + dt$ peut être écrite comme suit :

$$\rho(t + dt) = (1 + Ldt) \rho(t) \quad (2.15)$$

Les probabilités par unité de temps pour qu'un saut quantique puisse arriver sont données par :

$$\begin{aligned}
p^+ &= Tr(L_+^+ L_+ \rho) \\
&= K_+ Tr(\widehat{a} \widehat{a}^+ \rho) \\
&= K_+ (1 + \langle \widehat{N} \rangle)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

et

$$\begin{aligned}
p^- &= Tr(L_-^+ L_- \rho) \\
&= K_- Tr(\widehat{a}^+ \widehat{a} \rho) \\
&= K_- \langle \widehat{N} \rangle
\end{aligned} \tag{2.17}$$

A l'équilibre thermique, ces deux probabilités doivent être égales, ce qui implique que :

$$\frac{K_+}{K_-} = \frac{n_{th}}{n_{th} + 1} \tag{2.18}$$

On peut aussi introduire la notation K du taux de relaxation pour exprimer le taux de gain ou de perte d'un photon par :

$$\begin{aligned}
K_+ &= n_{th} K \\
K_- &= (1 + n_{th}) K
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Pour déterminer l'effet de la relaxation du champ sur $P(n)$, On substitue l'équation 2.19 dans l'équation 2.14, qui à son tour sera utilisée dans les équations 2.13 et 2.15. On obtient enfin l'équation du taux suivante :

$$\frac{dP(n)}{dt} = K(1 + n_{th})(n+1)P(n+1) - [K(1 + n_{th})n + Kn_{th}(n+1)]P(n) + Kn_{th}nP(n-1) \tag{2.20}$$

Ce qui permet aussi d'obtenir l'évolution du nombre moyen de photons $\left(\langle \widehat{N} \rangle = \sum_{n \geq 0} nP(n) \right)$:

$$\frac{d\langle\hat{N}\rangle}{dt} = -K \left(\langle\hat{N}\rangle - n_{th} \right) \quad (2.21)$$

On note que la durée de vie du mode de la cavité T_{cav} est liée au taux de relaxation K par :

$$T_{cav} = \frac{1}{K} \quad (2.22)$$

2.2 Modèle de Jaynes-Cummings

L'apparition du modèle de Jaynes-Cummings a permis une description complète de l'interaction entre matière et champ quantifié et les expériences ont montré après, que ce modèle est capable de donner une prédiction correcte aux résultats observés [6, 7, 8]. Récemment, ce modèle est devenu un bloc fondamental pour plusieurs applications dans le domaine de l'information quantique. Les prédictions théoriques sont liées essentiellement aux domaines : collapses et arrivals[9], désintrication atomique[10, 11], compression de champ[12], les mesures de la non-démolition[13], la reconstitution d'états[14], les états de Fock[15], la superposition des grandes amplitudes des états cohérents (schrödinger cats)[16] et la décohérence[17]. Ces prédictions ont été vérifiées expérimentalement[18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]

2.2.1 Interaction d'un seul atome avec un seul mode de la cavité

Nous allons calculer l'Hamiltonien correct décrivant la dynamique d'un atome unique interagissant avec un champ quantifié à l'intérieur d'une cavité. Nous considérons le cas le plus simple : un atome avec une seule transition atomique (càd à deux niveaux), en interaction avec un seul mode quantifié de la cavité.

L'Hamiltonien total décrivant un atome en interaction avec un champ électromagnétique s'écrit :

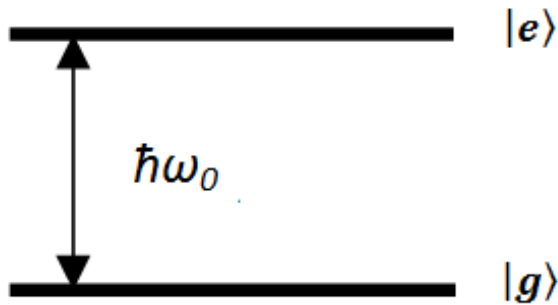


FIG. 2.1 – Atome à deux niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$.

$$H_{a-c} = \frac{1}{2m} \left[\hat{P} - q\hat{A}(r) \right]^2 + \hat{U}(r) + \hbar\omega \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hat{H}_{el} \quad (2.23)$$

où p , q , r et m représentent respectivement le moment, la charge, la position et la masse de l'atome. \hat{a}^+ et \hat{a} sont les opérateurs de création et d'annihilation du champ et \hat{H}_{el} est l'Hamiltonien décrivant les états électroniques de l'atome. L'opérateur associé au vecteur potentiel s'écrit :

$$\hat{A}(r) = \hat{A}_0 (\bar{\varepsilon}f(r)\hat{a} + \bar{\varepsilon}^*f^*(r)\hat{a}^+) \quad (2.24)$$

$f(r)$ nous donne le volume effectif du mode :

$$V = \int d^3r |f(r)|^2 \quad (2.25)$$

qui est lié à la constante A_0 par :

$$\hat{A}_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}} \quad (2.26)$$

Nous considérons seulement une seule transition atomique qui est couplée au seul mode de la cavité. Les états électroniques seront notés $|e\rangle$ (état excité) et $|g\rangle$ (état fondamental) (voir figure 2.1)

L'Hamiltonien électronique \hat{H}_{el} peut donc être écrit :

$$\widehat{H}_{el} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\widehat{\sigma}_z \quad (2.27)$$

où ω_0 est la fréquence de transition et $\widehat{\sigma}_z$ est l'opérateur de Pauli Z (déjà vu), tel que $\widehat{\sigma}_z |e\rangle = |e\rangle$ et $\widehat{\sigma}_z |g\rangle = -|g\rangle$ ($\widehat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$)

Si on néglige le terme en $\widehat{A}^2(r)$ qui est un terme agissant uniquement sur les variables de champ et qui modifie légèrement les états propres et les énergies, mais n'intervient pas dans le couplage entre l'atome et le rayonnement et en considérant le potentiel atomique externe nul ($U = 0$), L'Hamiltonien devient :

$$\widehat{H}_{at-c} = \widehat{H}_{at} + \widehat{H}_c + \widehat{H}_{int} \quad (2.28)$$

avec :

$$\widehat{H}_{at} = \frac{\widehat{P}^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\widehat{\sigma}_z \quad (2.29)$$

$$\widehat{H}_c = \hbar\omega \left(\widehat{a}^+\widehat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.30)$$

$$\widehat{H}_{int} = -\frac{q}{m}\widehat{A}_0 [(p \cdot \bar{\varepsilon})f(r)\widehat{a} + (p \cdot \bar{\varepsilon}^*)f^*(r)\widehat{a}^+] \quad (2.31)$$

Dans la représentation matricielle (avec les états atomiques de base), on trouve l'Hamiltonien d'interaction [4] comme suit :

$$\widehat{H}_{int} = g(r) (\widehat{a}^+\widehat{\sigma}^- + \widehat{a}\widehat{\sigma}^+) \quad (2.32)$$

où $\widehat{\sigma}^+$ et $\widehat{\sigma}^-$ sont souvent appelés opérateurs de montée et de descente de l'atome ($\widehat{\sigma}^+ = |e\rangle\langle g|$ et $\widehat{\sigma}^- = |g\rangle\langle e|$) et $g(r)$ s'écrit :

$$g(r) = -\frac{q}{m} \langle e| (p \cdot \bar{\varepsilon}) |g\rangle f(r) \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega\varepsilon_0 V}} \quad (2.33)$$

D'une part nous avons utilisé l'approximation dipolaire [26] en négligeant la variation du champ à l'échelle de la longueur atomique, d'autre part nous avons négligé les termes oscillants rapidement dans le calcul de l'équation 2.32. Cette dernière approximation est appelée approximation des ondes tournantes (rotating wave approximation) [5]. Nous avons aussi ajusté les phases des états $|e\rangle$ et $|g\rangle$ pour que $g(r)$ soit

réel. L'opérateur de l'énergie cinétique atomique (dans l'équation 2.29) a été lui aussi omis puisqu'il est valide seulement pour les grandes et moyennes températures et de même pour le terme constant $\frac{\hbar\omega}{2}$ de l'équation 2.30 qui représente l'énergie du vide du mode de la cavité. L'Hamiltonien total devient donc :

$$\widehat{H} = \hbar\omega\widehat{a}^+\widehat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\widehat{\sigma}_z + g(\widehat{a}^+\widehat{\sigma}^- + \widehat{a}\widehat{\sigma}^+) \quad (2.34)$$

et qui définit le modèle de Jaynes-Cummings (JC)

2.2.2 L'Hamiltonien en représentation d'interaction

Cet Hamiltonien (équation 2.34) qui correspond au cas simple d'un système à deux niveaux en interaction avec un seul mode quantifié de la cavité, couple seulement les états $|n, e\rangle$ et $|n+1, g\rangle$. (Ces états sont des états stationnaires du système sans couplage ($g(r) = 0$). Ils représentent l'atome dans l'état $|e\rangle$ (respectivement $|g\rangle$) en présence de n photons (respectivement $n+1$ photons). On décrit l'Hamiltonien (équation 2.34) dans la base formée par ces deux états $\{|n, e\rangle, |n+1, g\rangle\}$ ainsi :

$$H_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega_0\sqrt{n+1} \\ \Omega_0\sqrt{n+1} & \delta \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

avec Ω_0 est la fréquence de Rabi du vide ($\Omega_0 = 2g$) et $\delta = \omega - \omega_0$

Les valeurs propres de cet Hamiltonien sont :

$$\begin{aligned} E_{2n} &= \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega - \frac{\hbar\Omega_n(\delta)}{2} \\ E_{1n} &= \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega + \frac{\hbar\Omega_n(\delta)}{2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec :

$$\Omega_n(\delta) = \sqrt{\delta^2 + \Omega_0^2(n+1)} \quad (2.37)$$

$\Omega_n(\delta)$ s'appelle la fréquence de Rabi généralisée.

Les vecteurs propres correspondants sont :

$$\begin{aligned}
|2n\rangle &= \cos \theta_n |n, e\rangle - \sin \theta_n |n+1, g\rangle \\
|1n\rangle &= \sin \theta_n |n, e\rangle + \cos \theta_n |n+1, g\rangle
\end{aligned} \tag{2.38}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\cos \theta_n &= \frac{\Omega_n(\delta) - \delta}{\sqrt{(\Omega_n(\delta) - \delta)^2 + 4g^2(n+1)}} \\
\sin \theta_n &= \frac{2g\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{(\Omega_n(\delta) - \delta)^2 + 4g^2(n+1)}}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Ces vecteurs propres du système combiné $\{\text{atome} - \text{champ}\}$ sont appelés les états habillés (voir figure 2.2).

A la résonance ($\delta = 0$) les états habillés se réduisent ainsi :

$$\begin{aligned}
|2n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle - |n+1, g\rangle) \\
|1n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle + |n+1, g\rangle)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

avec les valeurs propres suivantes :

$$\begin{aligned}
E_{2n} &= \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \hbar g \sqrt{(n+1)} \\
E_{1n} &= \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \hbar g \sqrt{(n+1)}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Il est facile de voir que dans la représentation d'interaction (rotation à la fréquence $(n + \frac{1}{2}) \omega$), les coefficients $C_{1n}(t)$, $C_{2n}(t)$ d'un état arbitraire $|\psi(t)\rangle = C_{1n}(t) |1n\rangle + C_{2n}(t) |2n\rangle$ obéissent à :

$$\begin{pmatrix} C_{2n}(t) \\ C_{1n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(i\Omega_n(\delta)t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\Omega_n(\delta)t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2n}(0) \\ C_{1n}(0) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

A la résonance ($\delta = 0$), cela donne pour un état initialement dans l'état supérieur :

$$\begin{aligned} |C_{en}(t)|^2 &= \cos^2(g\sqrt{(n+1)}t) \\ |C_{g(n+1)}(t)|^2 &= \sin^2(g\sqrt{(n+1)}t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Même si $n=0$ (pas de photon), on a :

$$\begin{aligned} |C_{e0}(t)|^2 &= \cos^2(gt) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\Omega_0 t)) \\ |C_{g1}(t)|^2 &= \sin^2(gt) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega_0 t)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi, il existe un échange cohérent d'un quantum d'énergie entre l'atome et le mode du champ, que l'on appelle oscillation de Rabi du vide. Ce résultat est parfaitement différent à la décroissance exponentielle irréversible dans l'espace libre d'un atome excité. L'échange d'énergie périodique est en analogie avec deux pendules couplés.

L'équation du mouvement des deux états couplés $|n, e\rangle$ et $|n+1, g\rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{C}_{en} &= -i\frac{\delta}{2}C_{en} - ig\sqrt{(n+1)}C_{g(n+1)} \\ \dot{C}_{g(n+1)} &= i\frac{\delta}{2}C_{g(n+1)} - ig\sqrt{(n+1)}C_{en} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Les oscillations de Rabi du vide ont été observées expérimentalement [21].

2.3 Conclusion

On note que ce modèle à deux niveaux est non seulement réaliste physiquement, mais aussi traitable mathématiquement et l'équation de Schrödinger peut être résolue exactement. Dans les chapitres suivants qui sont basés sur une généralisation de ce modèle, nous allons introduire des systèmes d'atome à plusieurs niveaux en interaction avec une cavité à plusieurs modes. Les deux approximations dipolaire et

des ondes tournantes (RWA) seront prises en compte et le champ dans la cavité sera pris initialement dans un état de Fock.

Dans le troisième chapitre, nous allons implémenter une porte de phase quantique à 4 qubits à l'aide d'un système comprenant un atome à 5 niveaux en interaction avec 4 modes de la cavité. Nous allons procéder à une résolution directe de l'équation de Schrödinger puis à déterminer et discuter les conditions d'implémentation de la porte de phase. Dans le quatrième chapitre, nous allons considérer deux autres systèmes d'atome à plusieurs niveaux en interaction avec une cavité à plusieurs modes. Notre étude sera différente puisque nous allons utiliser le modèle de shore pour simplifier l'Hamiltonien du système et ainsi déterminer l'Hamiltonien effectif. Cela va nous permettre d'implémenter deux portes quantiques importantes : iSWAP et Fredkin gates. Le cinquième chapitre sera consacré à l'implémentation d'une porte de phase à plusieurs qubits (*NTCP*) dans la cavité QED en tenant compte de l'interaction dipôle-dipôle (atome-atome).

REFERENCES

- 1 C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. An Introduction to Quantum Electrodynamics. Wiley (1992).
- 2 R. J. Glauber. “Coherent and incoherent states of the radiation field”. Phys. Rev., 131, no 6, 2766 (Sep 1963).
- 3 S. Haroche and J. M. Raimond. Exploring the quantum. Oxford Graduate Texts (2006).
- 4 M. O. Scully and M. S. Zubairy, Quantum Optics, (Cambridge, 1997).
- 5 J. E. Bay eld, Quantum evolution, (John-Weily and Sons, 1999)
- 6 S. J. van Enk, H. J. Kimble, and H. Mabuchi. Quantum Information Processing in Cavity-QED. Quantum Information Processing, 3(1-5) :75{90, 2004.
- 7 B. W. Shore and P. L. Knight. The Jaynes-Cummings model. J. Mod. Opt., 40(7) :1195{1238, 1993.
- 8 J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. Rev. Mod. Phys., 73(3) :565{582, 2001.
- 9 J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon, Phys. Rev. Lett. 44, 1323 (1989).
- 10 J. Gea-Banacloche, Phys. Rev. Lett. 65, 3385 (1990). J. Gea-Banacloche, Phys. Rev. A 44, 5913 (1991).
- 11 S. J. D. Phoenix and P. L. Knight, Phys. Rev. A 44, 6023 (1991). S. J. D. Phoenix and P. L. Knight, Phys. Rev. Lett. 66, 2833 (1991).
- 12 P. Meystre and M. S. Zybairy, Phys. Lett. A 89, 390 (1982).
- 13 P. J. Bardro , E. Mayr, W. P. Schleich, Phys. Rev. A 51, 4963 (1995). M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond and N. Zugaray, Phys. Rev. Lett. 65, 976 (1990).
- 14 C. T. Bodendorf, G. Antesberger, M. S. Kim and H. Walther, Phys. Rev. A 57, 1371 (1997). M. S. Kim, G. Antesberger, C. T. Bodendorf and H. Walther, Phys. Rev. A 58, R65 (1998).
- 15 M. Franca Santos, E. Solano and R. L. de Matos Filho, Phys. Rev. Lett. 87, 093601 (2001).
- 16 J. M. Raimond and S. Haroche, Atoms and Cavities : The birth of a Schrödinger cat of the radiation field, in International Trends in Optics and Photonics, ed. T. Asakura (Springer Verlag, Heidelberg 1999), pp 40-53.
- 17 D. F. Walls and G. J. Milburn, Phys. Rev. A 31, 2403 (1985). G. S. Agarwal, M. O. Scully and H. Walther, Phys. Rev. Lett. 86, 4271 (2001).
- 18 G. Rempe and H. Walther, Phys. Rev. Lett. 58, 353 (1987).
- 19 A. Au eves, P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 91, 230405 (2003).

- 20 C.J. Hood, T.W. Lynn, A.C. Doherty, A.S. Parkins, and H.J. Kimble, *Science* 287, 1447 (2000).
- 21 M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* 76, 1800 (1996).
- 22 M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* 77, 4887 (1996).
- 23 G. Nogues, A. Raushenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, *Nature* 400, 239 (1999).
- 24 S. Brattke, B. T. H. Varcoe and S. Walther, *Opt. Express* 8, 131 (2001).
- 25 G. Rempe, F. Schmidt-Kaler and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* 64, 2783 (1990).
- 26 J. Larson, J. Salo, and S. Stenholm, *Phys. Rev. A* 72, 013814 (2005).

Chapitre 3

Implémentation de la porte de phase à quatre qubits

Il a été montré que, généralement, une porte de phase quantique à plusieurs qubits permet d'avoir des processus quantiques plus rapides et simplifie considérablement l'implémentation en comparaison à la méthode classique de décomposition des portes logiques[1]. Le plus important c'est qu'elle réduit la possibilité d'erreur en comparaison avec une série de portes logiques à un et à deux qubits. La porte de phase quantique joue un rôle dans la correction d'erreur quantique[2], dans l'implémentation de l'algorithme de recherche de Grover[3, 4] et dans la transformation de Fourier quantique[5]. Dans des travaux similaires au nôtre, on a implémenté deux portes de phases quantiques respectivement à deux qubits[6] et à trois qubits[7] basés sur l'électrodynamique quantique en cavité et où les qubits sont représentés par l'état des modes de la cavité.

Dans ce chapitre nous proposons une approche théorique pour l'implémentation directe d'une porte de phase quantique à quatre qubits en faisant passer un atome à cinq niveaux d'énergie en cascade à travers une cavité optique à quatre modes. Les quatre qubits sont représentés par les états des quatre photons de la cavité. La structure de niveau atomique correspondant est illustrée sur la figure 3.1(b). L'atome qui est initialement dans l'état fondamental $|e\rangle$, interagit avec quatre modes de la cavité de fréquences respectives $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 (voir figure 3.1(a)). Les fréquences des

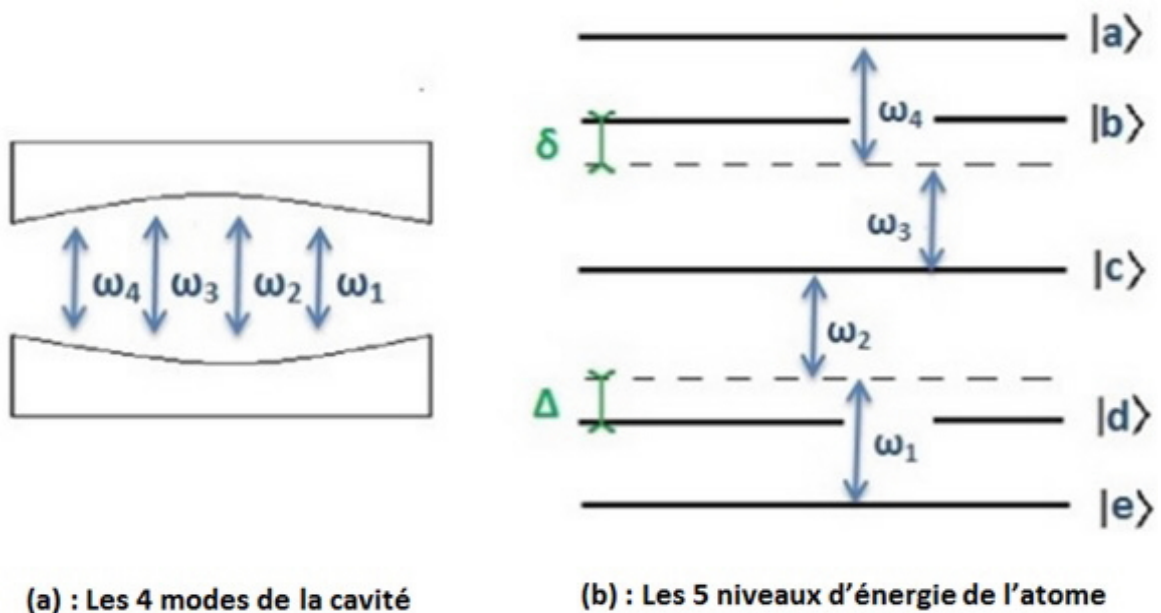


FIG. 3.1 – (a) : Les fréquences des quatre modes de la cavité. (b) : Illustration des différents désaccords entre les fréquences des modes de la cavité et ceux des transitions entre les cinq niveaux d'énergie de l'atome.

champs de la cavité ω_1 et ω_2 sont supposées en très grand désaccord respectivement par rapport aux transitions atomiques $|e\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ et $|d\rangle \leftrightarrow |c\rangle$. De même pour les modes ω_3 et ω_4 qui sont en très grand désaccord respectivement par rapport aux transitions atomiques $|c\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ et $|b\rangle \leftrightarrow |a\rangle$.

Si nous supposons qu'il y'a initialement un photon dans chaque mode de la cavité et en considérant l'état quantique de chaque mode représentant un qubit, alors les 2^4 états possibles des modes de la cavité sont : $\{|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\rangle\}$, où $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_3\rangle \otimes |\alpha_4\rangle$ et $|\alpha_i\rangle$ représente l'état de base $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ du qubit $|i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$ ou 4).

La transformation correspondante à une porte de phase quantique à quatre qubits de phase η est définie par :

$$Q_\eta |\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\rangle = \exp(i\eta\delta_{\alpha_1,1}\delta_{\alpha_2,1}\delta_{\alpha_3,1}\delta_{\alpha_4,1}) |\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\rangle \quad (3.1)$$

Puisque la porte de phase quantique n'introduit la phase η que lorsque tous les

qubits d'entrée sont dans l'état $|1\rangle$, nous pouvons aussi écrire Q_η comme suit :

$$\begin{aligned}
Q_\eta = & |0_1 0_2 0_3 0_4\rangle \langle 0_1 0_2 0_3 0_4| + |0_1 0_2 0_3 1_4\rangle \langle 0_1 0_2 0_3 1_4| + |0_1 0_2 1_3 0_4\rangle \langle 0_1 0_2 1_3 0_4| + |0_1 0_2 1_3 1_4\rangle \langle 0_1 0_2 1_3 1_4| \\
& + |0_1 1_2 0_3 0_4\rangle \langle 0_1 1_2 0_3 0_4| + |0_1 1_2 0_3 1_4\rangle \langle 0_1 1_2 0_3 1_4| + |0_1 1_2 1_3 0_4\rangle \langle 0_1 1_2 1_3 0_4| + |0_1 1_2 1_3 1_4\rangle \langle 0_1 1_2 1_3 1_4| \\
& + |1_1 0_2 0_3 0_4\rangle \langle 1_1 0_2 0_3 0_4| + |1_1 0_2 0_3 1_4\rangle \langle 1_1 0_2 0_3 1_4| + |1_1 0_2 1_3 0_4\rangle \langle 1_1 0_2 1_3 0_4| + |1_1 0_2 1_3 1_4\rangle \langle 1_1 0_2 1_3 1_4| \\
& + |1_1 1_2 0_3 0_4\rangle \langle 1_1 1_2 0_3 0_4| + |1_1 1_2 0_3 1_4\rangle \langle 1_1 1_2 0_3 1_4| + |1_1 1_2 1_3 0_4\rangle \langle 1_1 1_2 1_3 0_4| \\
& + \exp(i\eta) |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle \langle 1_1 1_2 1_3 1_4|
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Dans la suite, on prendra $\eta = \pi$

On remarque que les états suivants restent inchangés durant le passage de l'atome à travers la cavité :

- L'état $|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle$ puisqu'il n'y a pas de photon dans la cavité
- De même pour tous les états où il n'y a pas de photon de fréquence ω_1 dans la cavité (l'atome est initialement dans l'état fondamental $|e\rangle$). c.à.d les états $|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle$, $|0_1 0_2 0_3 1_4\rangle$, $|0_1 0_2 1_3 0_4\rangle$, $|0_1 0_2 1_3 1_4\rangle$, $|0_1 1_2 0_3 0_4\rangle$, $|0_1 1_2 0_3 1_4\rangle$, $|0_1 1_2 1_3 0_4\rangle$ et $|0_1 1_2 1_3 1_4\rangle$.

-C'est pareil pour les états $|1_1 0_2 0_3 0_4\rangle$, $|1_1 0_2 0_3 1_4\rangle$, $|1_1 0_2 1_3 0_4\rangle$ et $|1_1 0_2 1_3 1_4\rangle$ puisque la fréquence du mode ω_1 est en très grand désaccord avec la transition atomique $|e\rangle \leftrightarrow |d\rangle$.

Par la suite nous allons discuter la possibilité d'implémentation de cette porte de phase quantique à 4 qubits.

3.1 Etude théorique

3.1.1 Hamiltonien de base

L'Hamiltonien du système (atome+cavité) sera déterminé en considérant l'interaction entre un atome à 5 niveaux et une cavité optique à 4 modes (voir figure 3.1). L'approximation dipolaire ainsi que l'approximation des ondes tournantes nous donnent l'expression de l'Hamiltonien du système :

$$H = H_0 + H_1 \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} H_0 = & \hbar\omega_{ab} |a\rangle \langle a| + \hbar\omega_{bc} |b\rangle \langle b| + \hbar\omega_{cd} |c\rangle \langle c| + \hbar\omega_{de} |d\rangle \langle d| \\ & + \hbar\omega_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hbar\omega_2 \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \hbar\omega_3 \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 + \hbar\omega_4 \hat{a}_4^+ \hat{a}_4 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$H_1 = \hbar g_1 |d\rangle \langle e| \hat{a}_1 + \hbar g_2 |c\rangle \langle d| \hat{a}_2 + \hbar g_3 |b\rangle \langle c| \hat{a}_3 + \hbar g_4 |a\rangle \langle b| \hat{a}_4 + H.C$$

où \hat{a}_i et \hat{a}_i^+ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création du mode i de la cavité. g_i est la constante de couplage respectivement entre le mode i ($i=1, 2, 3$ et 4) et les transitions atomiques $|d\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, $|c\rangle \leftrightarrow |d\rangle$, $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ et $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$.

Dans la représentation d'interaction l'Hamiltonien peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} H_I = & \hbar g_1 |d\rangle \langle e| \hat{a}_1 e^{it\Delta} + \hbar g_2 |c\rangle \langle d| \hat{a}_2 e^{-it\Delta} \\ & + \hbar g_3 |b\rangle \langle c| \hat{a}_3 e^{-it\delta} + \hbar g_4 |a\rangle \langle b| \hat{a}_4 e^{it\delta} + H.C \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\omega_{de} - \omega_1 = -\Delta$, $\omega_{cd} - \omega_2 = \Delta$, $\omega_{bc} - \omega_3 = \delta$ et $\omega_{ab} - \omega_4 = -\delta$ (voir figure 3.1-b).

Généralement si nous supposons initialement n_i photons dans chaque mode i et l'atome est dans son état fondamental $|e\rangle$, l'état initial du système $\{atom + cavité\}$ est donné par :

$$|e, n_1, n_2, n_3, n_4\rangle = |e\rangle \otimes |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \quad (3.6)$$

Donc nous pouvons écrire l'état du système à l'instant t ainsi :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & C_e(t) |e, n_1, n_2, n_3, n_4\rangle + C_d(t) |d, n_1 - 1, n_2, n_3, n_4\rangle + C_c(t) |c, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3, n_4\rangle \\ & + C_b(t) |b, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4\rangle + C_a(t) |a, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 1\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans la représentation d'interaction, l'équation de Schrödinger ($i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\Psi(t)\rangle$) nous donne :

$$\begin{cases} i\hbar \dot{C}_e(t) = \hbar g_1 C_d(t) e^{-i\Delta t} \sqrt{n_1} \\ i\hbar \dot{C}_d(t) = \hbar g_1 C_e(t) e^{i\Delta t} \sqrt{n_1} + \hbar g_2 C_c(t) e^{i\Delta t} \sqrt{n_2} \\ i\hbar \dot{C}_c(t) = \hbar g_2 C_d(t) e^{-i\Delta t} \sqrt{n_2} + \hbar g_3 C_b(t) e^{i\delta t} \sqrt{n_3} \\ i\hbar \dot{C}_b(t) = \hbar g_3 C_c(t) e^{-i\delta t} \sqrt{n_3} + \hbar g_4 C_a(t) e^{-i\delta t} \sqrt{n_4} \\ i\hbar \dot{C}_a(t) = \hbar g_4 C_b(t) e^{i\delta t} \sqrt{n_4} \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour résoudre ce système il est utile de procéder à un changement de variable sur les amplitudes en posant : $Z_e = C_e$, $Z_d = C_d e^{-i\Delta t}$, $Z_c = C_c$, $Z_b = C_b e^{i\delta t}$, et $Z_a = C_a$. Le système devient alors :

$$\begin{cases} \dot{Z}_e = -ig_1 \sqrt{n_1} Z_d \\ \dot{Z}_d = -ig_1 \sqrt{n_1} Z_e - ig_2 \sqrt{n_2} Z_c - i\Delta Z_d \\ \dot{Z}_c = -ig_2 \sqrt{n_2} Z_d - ig_3 \sqrt{n_3} Z_b \\ \dot{Z}_b = -ig_3 \sqrt{n_3} Z_c - ig_4 \sqrt{n_4} Z_a + i\delta Z_b \\ \dot{Z}_a = -ig_4 \sqrt{n_4} Z_b \end{cases} \quad (3.9)$$

Si nous supposons qu'il n'y a pas de transition vers les niveaux $|b\rangle$ et $|d\rangle$ à cause d'un grand désaccord entre les fréquences des modes de la cavité et les fréquences des transitions vers les niveaux d'énergie $|b\rangle$ et $|d\rangle$ de l'atome. (i.e $\dot{Z}_b = 0$ et $\dot{Z}_d = 0$) donc le système devient :

$$\begin{cases} \dot{Z}_b = 0 \\ \dot{Z}_d = 0 \\ \dot{Z}_e = i \frac{g_1^2 n_1}{\Delta} Z_e + i \frac{g_1 g_2 \sqrt{n_1 n_2}}{\Delta} Z_c \\ \dot{Z}_c = i \frac{g_1 g_2 \sqrt{n_1 n_2}}{\Delta} Z_e + i \frac{g_2^2 n_2}{\Delta} Z_c - i \frac{g_3^2 n_3}{\delta} Z_c - i \frac{g_3 g_4 \sqrt{n_3 n_4}}{\delta} Z_a \\ \dot{Z}_a = -i \frac{g_3 g_4 \sqrt{n_3 n_4}}{\delta} Z_c - i \frac{g_4^2 n_4}{\delta} Z_a \end{cases} \quad (3.10)$$

que nous pouvons réécrire ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_b |b, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4\rangle = 0 \cdot |\Psi(t)\rangle \\ \dot{Z}_d |d, n_1 - 1, n_2, n_3, n_4\rangle = 0 \cdot |\Psi(t)\rangle \\ \dot{Z}_e |e, n_1, n_2, n_3, n_4\rangle = \left(i \frac{g_1^2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 |e\rangle \langle e| + i \frac{g_1 g_2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |e\rangle \langle c| \right) |\Psi(t)\rangle \\ \dot{Z}_c |c, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3, n_4\rangle = \left(i \frac{g_1 g_2}{\Delta} \hat{a}_1 \hat{a}_2 |c\rangle \langle e| + i \frac{g_2^2}{\Delta} \hat{a}_2 \hat{a}_2^+ |c\rangle \langle c| \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - i \frac{g_3^2}{\delta} \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 |c\rangle \langle c| - i \frac{g_3 g_4}{\delta} \hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ |c\rangle \langle a| \right) |\Psi(t)\rangle \\ \dot{Z}_a |a, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 1\rangle = \left(-i \frac{g_3 g_4}{\delta} \hat{a}_3 \hat{a}_4 |a\rangle \langle c| - i \frac{g_4^2}{\delta} \hat{a}_4 \hat{a}_4^+ |a\rangle \langle a| \right) |\Psi(t)\rangle \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Ces équations d'évolution correspondent à l'Hamiltonien suivant dans la représentation d'interaction :

$$H'_I = -\frac{\hbar g_1^2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 |e\rangle \langle e| - \frac{\hbar g_2^2}{\Delta} \hat{a}_2 \hat{a}_2^+ |c\rangle \langle c| + \frac{\hbar g_3^2}{\delta} \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 |c\rangle \langle c| + \frac{\hbar g_4^2}{\delta} \hat{a}_4 \hat{a}_4^+ |a\rangle \langle a| \quad (3.12)$$

$$- \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |e\rangle \langle c| - \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \hat{a}_1 \hat{a}_2 |c\rangle \langle e| + \frac{\hbar g_3 g_4}{\delta} \hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ |c\rangle \langle a| + \frac{\hbar g_3 g_4}{\delta} \hat{a}_3 \hat{a}_4 |a\rangle \langle c|$$

3.1.2 Condition d'implémentation de la porte de phase

Nous allons maintenant considérer l'état initial du système $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 1, 1, 0\rangle$ (càd que nous avons initialement un photon dans chacun des modes 1, 2 et 3 de la cavité et 0 photon dans le mode 4).

Donc l'Hamiltonien effectif de la représentation d'interaction devient :

$$H'_I = -\frac{\hbar g_1^2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 |e\rangle \langle e| - \frac{\hbar g_2^2}{\Delta} \hat{a}_2 \hat{a}_2^+ |c\rangle \langle c| + \frac{\hbar g_3^2}{\delta} \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 |c\rangle \langle c| \quad (3.13)$$

$$- \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |e\rangle \langle c| - \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \hat{a}_1 \hat{a}_2 |c\rangle \langle e|$$

Si nous assumons que $g_1 \gg g_2$ et $\frac{g_1^2}{\Delta} \gg \frac{g_3^2}{\delta}$ donc l'Hamiltonien approximatif dans la représentation d'interaction s'écrit :

$$H'_I \approx -\frac{\hbar g_1^2}{\Delta} \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 |e\rangle \langle e|$$

$$= -\frac{\hbar g_1^2}{\Delta} |e, 1, 1, 1, 0\rangle \langle e, 1, 1, 1, 0| \quad (3.14)$$

Si nous choisissons le temps d'interaction tel que $\tau = \frac{(2k+1)\Delta}{g_1^2}\pi$ (k est un entier arbitraire) et en utilisant l'équation de Schrödinger le système atome-cavité subit la transformation suivante :

$$|e, 1, 1, 1, 0\rangle \longrightarrow -|e, 1, 1, 1, 0\rangle \quad (3.15)$$

Ainsi la porte de phase quantique à 4 qubits est réalisée.

Pour obtenir les conditions plus précisément, nous allons résoudre l'équation de Schrödinger dans la représentation d'interaction pour trouver les amplitudes de probabilité pour tous les états initiaux possibles. Pour cela nous posons pour les désaccord normalisés $X_0 = \frac{\Delta}{g_1}$, $X_1 = \frac{\delta}{g_1}$, $X_2 = \frac{\Delta}{g_2}$, $X_3 = \frac{\delta}{g_3}$ et $X_4 = \frac{\delta}{g_4}$.

Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 0, 0, 0\rangle$

Nous utilisons la partie d'interaction dans l'Hamiltonien pour déterminer les états de base du système (atome+cavité) et qui sont $|e, 1, 0, 0, 0\rangle$ et $|d, 0, 0, 0, 0\rangle$. L'état possible à un instant t est la superposition des états $|e, 1, 0, 0, 0\rangle$ et $|d, 0, 0, 0, 0\rangle$. Donc $|\Psi(t)\rangle = C_e(t)|e, 1, 0, 0, 0\rangle + C_d(t)|d, 0, 0, 0, 0\rangle$ (i.e $Z_a = Z_b = Z_c = 0$)

Le système 3.9 devient :

$$\begin{cases} \dot{Z}_e = -ig_1 Z_d \\ \dot{Z}_d = -ig_1 Z_e - i\Delta Z_d \end{cases} \quad (3.16)$$

qui donne ($Z_e = C_e$) :

$$\ddot{C}_e(t) + i\Delta\dot{C}_e(t) + g_1^2 C_e(t) = 0 \quad (3.17)$$

En considérant pour l'état initial $C_e(t=0) = 1$ et $C_d(t=0) = 0$, la résolution de cette équation différentielle nous donne à l'instant $t = \tau$:

$$\begin{aligned} C_{e,1000}(\tau) &= \frac{1}{2} e^{-i(2k+1)X_0^2 \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{X_0}{2\sqrt{1 + \frac{X_0^2}{4}}} \right) e^{i\sqrt{1 + \frac{X_0^2}{4}}(2k+1)X_0\pi} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{X_0}{2\sqrt{1 + \frac{X_0^2}{4}}} \right) e^{-i\sqrt{1 + \frac{X_0^2}{4}}(2k+1)X_0\pi} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

On trouvera la même expression pour les états initiaux suivants : $|e, 1, 0, 0, 1\rangle$, $|e, 1, 0, 1, 0\rangle$ et $|e, 1, 0, 1, 1\rangle$.

Pour que $C_{e,1000}(\tau) = 1$, X_0 doit donc satisfaire les conditions suivantes (avec p et p' des entiers) :

$$\begin{cases} (2k+1)X_0 \left(\sqrt{1 + \frac{X_0^2}{4}} + \frac{X_0}{2} \right) \pi = 2p\pi \\ (2k+1)X_0 \left(\sqrt{1 + \frac{X_0^2}{4}} - \frac{X_0}{2} \right) \pi = 2p'\pi \end{cases} \quad (3.19)$$

ce qui donne :

$$(2k+1)(p-p') - 2pp' = 0 \quad (3.20)$$

et

$$X_0 = \sqrt{\frac{2(p-p')}{(2k+1)}} \quad (3.21)$$

Pour des valeurs fixes de k , p et p' vérifiant l'équation 3.20, nous pouvons donc déterminer la valeur de X_0 pour que $C_{e,1000}(\tau) = 1$.

Si nous prenons par exemple $p = (2k+1)k$ et $p' = k$, l'équation 3.20 est donc vérifiée et on aura :

$$X_0 = \frac{2k}{\sqrt{2k+1}} \quad (3.22)$$

Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 1, 0, 0\rangle$

De même l'état possible à un instant t est la superposition des états de base $|e, 1, 1, 0, 0\rangle$, $|d, 1, 0, 0, 0\rangle$ et $|c, 0, 0, 0, 0\rangle$. Donc en posant $|\Psi(t)\rangle = C_e(t)|e, 1, 1, 0, 0\rangle + C_d(t)|d, 1, 0, 0, 0\rangle + C_c(t)|c, 0, 0, 0, 0\rangle$, le système 3.10 correspondant à l'Hamiltonien effectif devient :

$$\begin{cases} \dot{Z}_e = i\frac{g_1^2}{\Delta} Z_e + i\frac{g_1 g_2}{\Delta} Z_c \\ \dot{Z}_c = i\frac{g_1 g_2}{\Delta} Z_e + i\frac{g_2^2}{\Delta} Z_c \end{cases} \quad (3.23)$$

En éliminant Z_c , nous trouvons l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Z}_e - i\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta}\right)\dot{Z}_e = 0 \quad (3.24)$$

En utilisant les conditions initiales $Z_e(t=0) = 1$ et $\dot{Z}_e(t=0) = i\frac{g_1^2}{\Delta}$, nous trouvons la solution suivante :

$$Z_e(t) = \frac{g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} + \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2} e^{i\frac{(g_1^2 + g_2^2)}{\Delta}t} \quad (3.25)$$

ce qui donne à l'instant $t = \tau$ ($Z_e = C_e$) :

$$C_{e,1100}(\tau) = \frac{X_0^2}{X_0^2 + X_2^2} + \frac{X_2^2}{X_0^2 + X_2^2} e^{i\frac{(X_0^2 + X_2^2)}{X_2^2}(2k+1)\pi} \quad (3.26)$$

On trouvera la même expression pour l'état initial suivant : $|e, 1, 1, 0, 1\rangle$

Pour que $C_{e,1100}(\tau) = 1$, X_0 et X_2 doivent donc satisfaire la condition suivante (avec n un entier) :

$$\frac{(X_0^2 + X_2^2)}{X_2^2} (2k + 1) \pi = 2n\pi \quad (3.27)$$

cela implique :

$$X_2^2 = \frac{2k + 1}{2(n - k) - 1} X_0^2 \quad (3.28)$$

En utilisant la condition sur X_0 correspondante à l'état initial $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 0, 0, 0\rangle$ ($p = (2k + 1)k$ et $p' = k$), On trouve pour X_2 :

$$\begin{aligned} X_2 &= \sqrt{\frac{2(p - p')}{2(n - k) - 1}} \\ &= \frac{2k}{\sqrt{2(n - k) - 1}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 1, 1, 0\rangle$

Si nous prenons initialement $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$ et $n_4 = 0$, donc l'état possible du système à un instant t s'écrit : $|\Psi(t)\rangle = C_e(t) |e, 1, 1, 1, 0\rangle + C_d(t) |d, 1, 1, 0, 0\rangle + C_c(t) |c, 1, 0, 0, 0\rangle + C_b(t) |b, 0, 0, 0, 0\rangle$

et le système 3.10 correspondant à l'Hamiltonien effectif devient :

$$\begin{cases} \dot{Z}_e = i\frac{g_1^2}{\Delta}Z_e + i\frac{g_1g_2}{\Delta}Z_c \\ \dot{Z}_c = i\frac{g_1g_2}{\Delta}Z_e + i\left(\frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right)Z_c \end{cases} \quad (3.30)$$

En éliminant Z_c , nous trouvons l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Z}_e - i\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right)\dot{Z}_e + \frac{g_1^2g_3^2}{\Delta\delta}Z_e = 0 \quad (3.31)$$

En utilisant les conditions initiales $Z_e(t=0) = 1$ et $\dot{Z}_e(t=0) = i\frac{g_1^2}{\Delta}$, nous trouvons la solution suivante :

$$\begin{aligned} Z_e(t) = & e^{\frac{i}{2}\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right)t} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{g_1^2g_3^2}{\Delta\delta} + \frac{1}{4}\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right)^2}t\right) + \frac{i}{2} \frac{\frac{g_1^2}{\Delta} - \frac{g_2^2}{\Delta} + \frac{g_3^2}{\delta}}{\sqrt{\frac{g_1^2g_3^2}{\Delta\delta} + \frac{1}{4}\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right)^2}} \right. \\ & \left. \times \sin\left(\sqrt{\frac{g_1^2g_3^2}{\Delta\delta} + \frac{1}{4}\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right)^2}t\right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

ce qui donne à l'instant $t = \tau$ ($Z_e = C_e$) :

$$\begin{aligned} C_{e,1110}(\tau) = & e^{i\left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0X_1}{X_3^2}\right)(2k+1)\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{4X_0X_1}{X_3^2} + \left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0X_1}{X_3^2}\right)^2}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ & \left. \frac{i\left(1 - \frac{X_0^2}{X_2^2} + \frac{X_0X_1}{X_3^2}\right)}{\sqrt{\frac{4X_0X_1}{X_3^2} + \left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0X_1}{X_3^2}\right)^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{4X_0X_1}{X_3^2} + \left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0X_1}{X_3^2}\right)^2}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Or, en utilisant la condition $g_1 \gg g_2$ que nous avons déjà évoquée pour réaliser une porte de phase (càd $X_0 \ll X_2$), nous pouvons simplifier l'expression de $C_{e,1110}(\tau)$ en considérant que $\frac{X_0^2}{X_2^2} \ll 1$.

nous avons donc :

$$\frac{1 - \frac{X_0^2}{X_2^2} + \frac{X_0X_1}{X_3^2}}{\sqrt{\frac{4X_0X_1}{X_3^2} + \left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0X_1}{X_3^2}\right)^2}} \simeq 1 \quad (3.34)$$

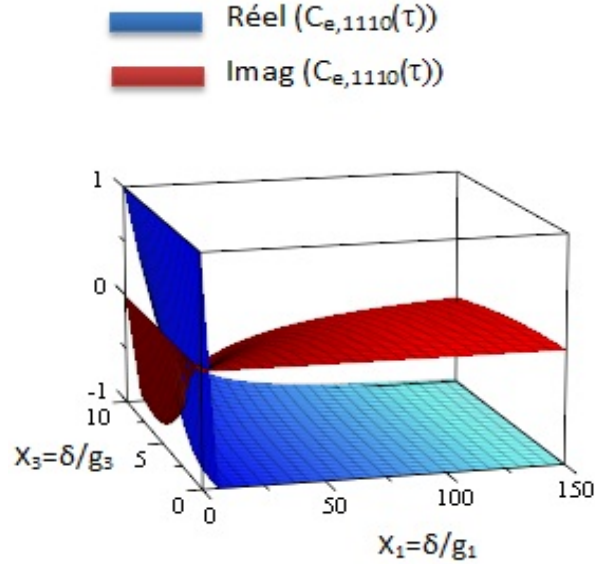


FIG. 3.2 – Courbe des parties réelle et imaginaire de l'amplitude $C_{e,1110}(\tau)$ à l'instant $t = \tau$ en fonction des paramètres $X_1 = \frac{\delta}{g_1}$ et $X_3 = \frac{\delta}{g_3}$. Nous prenons $k = 51$, $n = 52$, $X_0 \simeq 10.05$ et $X_2 = 102$.

ce qui donne la valeur approchée de $C_{e,1110}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 C_{e,1110}(\tau) &\simeq e^{i \left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0 X_1}{X_3^2} + \sqrt{\frac{4X_0 X_1}{X_3^2} + \left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0 X_1}{X_3^2} \right)^2} \right) (2k+1) \frac{\pi}{2}} \\
 &\simeq e^{i(2k+1)\pi} \\
 &\simeq -1
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Nous allons vérifier l'exactitude de ces approximations en traçant la variation de l'amplitude $C_{e,1110}(\tau)$ en fonction des paramètres X_1 et X_3 . X_0 et X_2 sont déterminés à partir des équations 3.22 et 3.29. Pour cela nous choisissons les valeurs suivantes pour l'entier k ($k = 51$) et pour l'entier n ($n = 52$) et qui seront adoptées dans ce qui suit. Nous obtiendrons donc $X_0 \simeq 10.05$ et $X_2 = 102$. La figure 3.2 visualise la courbe des parties réelle et imaginaire de l'amplitude $C_{e,1110}(\tau)$ à l'instant $t = \tau$ en fonction des paramètres X_1 et X_3 . Nous remarquons que pour des valeurs de $X_1 > 100$ et $X_3 \sim 10$, la partie réelle de $C_{e,1110}(\tau)$ tend vers -1 et la partie imaginaire tend vers 0

Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 1, 1, 1\rangle$

Nous procédons de la même façon que l'état initial $|\Psi_0\rangle = |e, 1, 1, 1, 0\rangle$ et nous considérons l'état général du système ($n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1$ et $n_4 = 1$) :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= C_e(t) |e, 1, 1, 1, 1\rangle + C_d(t) |d, 1, 1, 1, 0\rangle + C_c(t) |c, 1, 1, 0, 0\rangle \\ &\quad + C_b(t) |b, 1, 0, 0, 0\rangle + C_a(t) |a, 0, 0, 0, 0\rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

et le système 3.10 devient :

$$\begin{cases} \dot{Z}_e = i\frac{g_1^2}{\Delta} Z_e + i\frac{g_1 g_2}{\Delta} Z_c \\ \dot{Z}_c = i\frac{g_1 g_2}{\Delta} Z_e + i\left(\frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta}\right) Z_c - i\frac{g_3 g_4}{\delta} Z_a \\ \dot{Z}_a = -i\frac{g_3 g_4}{\delta} Z_c - i\frac{g_4^2}{\delta} Z_a \end{cases} \quad (3.37)$$

En éliminant Z_c et Z_a , nous trouvons l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Z}_e - i\left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta} - \frac{g_3^2}{\delta} - \frac{g_4^2}{\delta}\right)\dot{Z}_e + \left(\frac{g_1^2 g_3^2}{\Delta \delta} + \frac{g_1^2 g_4^2}{\Delta \delta} + \frac{g_2^2 g_4^2}{\Delta \delta}\right) Z_e = 0 \quad (3.38)$$

En résolvant cette équation et en introduisant les paramètres normalisés X_0, X_1, X_2, X_3 et X_4 , nous trouvons la solution suivante à l'instant $t = \tau$ ($Z_e = C_e$) :

$$\begin{aligned} C_{e,1111}(\tau) &= 1 + \frac{2i}{\sqrt{\left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} + \frac{X_0 X_1}{X_3^2} + \frac{X_0 X_1}{X_4^2}\right)^2 - \frac{4X_0^3 X_1}{X_2^2 X_3^2}}} e^{i\left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} - \frac{X_0 X_1}{X_3^2} - \frac{X_0 X_1}{X_4^2}\right)(2k+1)\frac{\pi}{2}} \\ &\quad \times \sin\left(\sqrt{\left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} + \frac{X_0 X_1}{X_3^2} + \frac{X_0 X_1}{X_4^2}\right)^2 - \frac{4X_0^3 X_1}{X_2^2 X_3^2}} (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

A partir de la condition d'implémentation qui a été déjà mentionnée $\frac{g_1^2}{\Delta} \gg \frac{g_3^2}{\delta}$, nous pourrions déduire la condition suivante $\frac{X_0 X_1}{X_3^2} \gg 1$ et puisque $\frac{X_0^2}{X_2^2} \ll 1$, nous obtiendrons $\frac{X_0 X_1}{X_3^2} \gg \frac{4X_0^3 X_1}{X_2^2 X_3^2}$, le terme sous la racine dans l'équation précédente sera porté par $\frac{X_0 X_1}{X_3^2} + \frac{X_0 X_1}{X_4^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} + \frac{X_0 X_1}{X_3^2} + \frac{X_0 X_1}{X_4^2}\right)^2 - \frac{4X_0^3 X_1}{X_2^2 X_3^2}} &\gg 1 \implies \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{X_0^2}{X_2^2} + \frac{X_0 X_1}{X_3^2} + \frac{X_0 X_1}{X_4^2}\right)^2 - \frac{4X_0^3 X_1}{X_2^2 X_3^2}}} \simeq 0 \\ &\implies C_{e,1111}(\tau) \simeq 1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

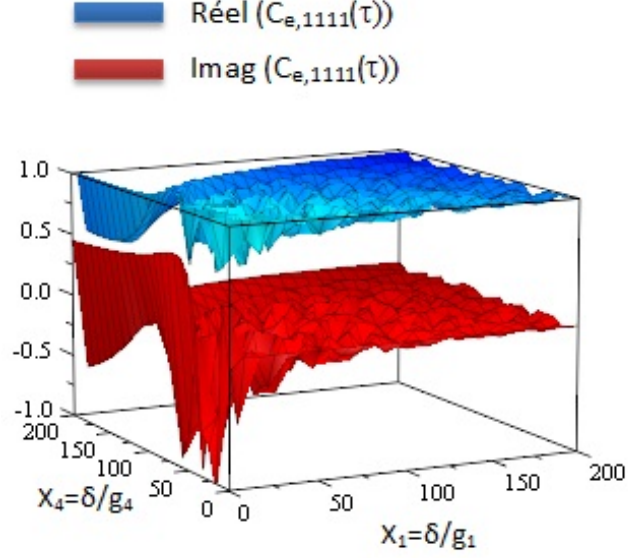


FIG. 3.3 – Courbe des parties réelle et imaginaire de l’amplitude $C_{e,1111}(\tau)$ à l’instant $t = \tau$ en fonction des paramètres $X_1 = \frac{\delta}{g_1}$ et $X_4 = \frac{\delta}{g_4}$. Nous prenons $k = 51$, $n = 52$, $X_0 \simeq 10.05$, $X_2 = 102$. et $X_3 = 10$.

Pour vérifier l’exactitude de ces approximations, nous traçons la courbe des parties réelle et imaginaire de l’amplitude $C_{e,1111}(\tau)$ à l’instant $t = \tau$ en fonction des paramètres X_1 et X_4 (voir figure 3.3). Nous remarquons que pour des paramètres normalisés analogues à ceux considérés dans le cas des autres états initiaux (càd $X_0 \simeq 10.05$, $X_2 = 102$, $X_1 > 100$ et $X_3 \sim 10$), la partie réelle de $C_{e,1111}(\tau)$ tend vers 1 et la partie imaginaire tend vers 0.

3.1.3 Implémentation de la porte de phase

Nous écrivons la transformation que nous avons achevé dans une représentation matricielle et dans la base des états possibles suivante $\{|0, 0, 0, 0\rangle, |0, 0, 0, 1\rangle, |0, 0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1, 1\rangle, |0, 1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0, 1\rangle, |0, 1, 1, 0\rangle, |0, 1, 1, 1\rangle, |1, 0, 0, 0\rangle, |1, 0, 0, 1\rangle, |1, 0, 1, 0\rangle, |1, 0, 1, 1\rangle, |1, 1, 0, 0\rangle, |1, 1, 0, 1\rangle, |1, 1, 1, 0\rangle, |1, 1, 1, 1\rangle\}$

$$U = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Cette matrice est équivalente à la porte de phase par application de l'opération à un seul qubit σ_x sur le 4^{ème} qubit. Nous rappelons que σ_x est la transformation NOT ayant la représentation matricielle $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Donc la porte de phase s'obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
Q_\pi &= (I_1 \otimes I_2 \otimes I_3 \otimes \sigma_{x,4}) \times U \times (I_1 \otimes I_2 \otimes I_3 \otimes \sigma_{x,4}) \\
&= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

I_1 , I_2 et I_3 sont les matrices unités correspondantes respectivement aux qubits 1, 2 et 3.

3.1.4 Discussion

Nous rassemblons toutes les conditions pour implémenter la porte de phase quantique à quatre qubits :

- Le temps d'interaction doit être ainsi : $\tau = \frac{(2k+1)\Delta}{g_1^2} \pi = \frac{(2k+1)X_0}{g_1} \pi$ (k est un entier arbitraire).
- $\Delta \gg g_1, g_2$ et $\delta \gg g_3, g_4$: ce qui implique que $X_0, X_2, X_3, X_4 \gg 1$
- $g_1 \gg g_2$: donc $X_0 \ll X_2$
- $\frac{g_1^2}{\Delta} \gg \frac{g_3^2}{\delta}$: qui donne $\frac{X_0 X_1}{X_3^2} \gg 1$

o $X_0 = \sqrt{\frac{2(p-p')}{(2k+1)}}$ et $X_2 = \sqrt{\frac{2(p-p')}{2(n-k)-1}}$ avec k, n, p et p' sont des nombres entiers arbitraires.

Nous notons aussi que X_0, X_1, X_2, X_3 et X_4 sont des paramètres normalisés et les valeurs qui vérifient les conditions d'implémentation de la porte de phase restent générales et ne correspondent à aucune valeur spécifique des constantes de couplage (g_1, g_2, g_3 et g_4) et des désaccords (Δ et δ).

Pour étudier la faisabilité expérimentale de cette proposition, considérons l'expérience sur les micro-ondes d'une cavité QED (voir réf [8]), où des atomes de Rydberg fortement excités (notamment ^{85}Rb) ont été utilisés pour interagir avec une cavité supraconductrice de facteur de qualité $Q = 4 \times 10^{10}$. La durée de vie du photon à l'intérieur de la cavité est de l'ordre $\tau_{ph} \sim 130 \text{ ms}$, et la constante de couplage est $g = 2\pi \times 50 \text{ kHz}$. Nous considérons les valeurs numériques utilisées dans notre proposition ($k = 51, X_0 = 10.5$). Donc un calcul direct montre que le temps nécessaire pour implémenter la porte de phase est $\tau \simeq 10.8 \text{ ms}$, temps beaucoup plus court que la durée de vie du photon dans la cavité τ_{ph} .

3.1.5 Fidélité

Cette analyse va nous permettre de réaliser parfaitement la porte de phase quantique, en calculant la fidélité qui est considérée comme un outil très utile pour caractériser la performance de cette opération comme une porte déterministe. Pour deux systèmes quantiques donnés par les matrices densités ρ_1 et ρ_2 , la fidélité $F(\rho_1, \rho_2)$ peut être définie par [9, 10] :

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right)^2$$

Dans notre cas, les deux fonctions d'onde $|\Psi(t)\rangle$ décrivant le système dans l'équation 3.7 et $|\Psi(0)\rangle = |e, 1, 1, 1, 0\rangle$ qui est l'état cible, sont toutes les deux dans des états purs ; Par conséquent, on peut définir $\rho_1 = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$ et $\rho_2 = |e, 1, 1, 1, 0\rangle \langle e, 1, 1, 1, 0|$. La fidélité devient :

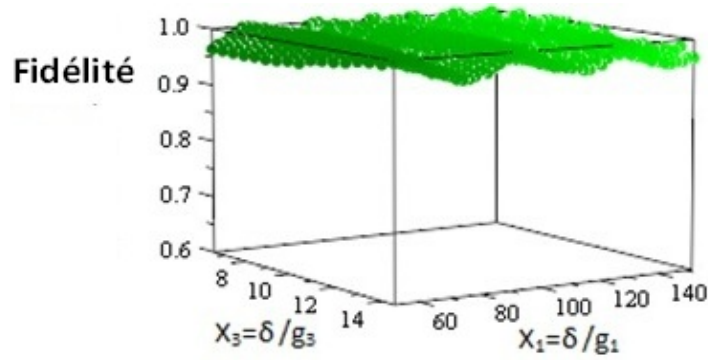


FIG. 3.4 – La courbe de la fidélité en fonction de $\frac{\delta}{g_1}$ et $\frac{\delta}{g_3}$

$$F(|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|, |e, 1, 1, 1, 0\rangle \langle e, 1, 1, 1, 0|) = |\langle e, 1, 1, 1, 0 | \Psi(t)\rangle|^2$$

Dans la figure 3.4, nous traçons la courbe de la fidélité en fonction de $\frac{\delta}{g_1}$ et $\frac{\delta}{g_3}$. Nous remarquons que les résultats sont très prometteurs et sont obtenus sur des intervalles larges de paramètres du système et la fidélité correspondante est toujours plus élevée ($F > 96\%$)

3.2 Conclusion

En conclusion, nous avons réalisé une porte de phase à 4 qubits qui va simplifier considérablement plusieurs problèmes de calcul quantique. Nous avons montré que le temps d'implémentation de cette porte est beaucoup plus petit que la durée de vie du photon dans la cavité QED. La fidélité de cette porte est très bonne et proche de 1, ce qui implique que les erreurs produites par les approximations faites sur l'Hamiltonien du système sont sans effets importants. Néanmoins, notre système exige que la cavité fonctionne dans le régime du couplage fort, ce qui nécessite généralement que les modes optiques soient confinés dans un petit volume de mode pour des périodes de temps assez grandes. Donc la cavité doit avoir un facteur de qualité Q extrêmement élevé.

REFERENCES

- 1 M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge, 1997).
- 2 J. Chiaverini, D. Leibfried, T. Schaetz, M. D. Barrett, R. B. Blakestad, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, R. Ozeri, and D. J. Wineland, *Nature London* 432, 602 2004 .
- 3 L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* 79, 325 1997.
- 4 M. S. Zubairy, A. B. Matsko, and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* 65, 043804 2002 .
- 5 M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Phys. Rev. A* 65, 052324 2002 .
- 6 M. S. Zubairy, M. Kim, and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* 68, 033820 (2003).
- 7 J. T. Chang, M. S. Zubairy *Physical Review A* 77 (1), 012329 (2008)
- 8 S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Ho , S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin. Ultrahigh finesse Fabry-Perot superconducting resonator. *Appl. Phys. Lett.*, 90 :164101, 2007.
- 9 S. M. Barnett. *Quantum information*. Oxford University Press, 2009.
- 10 R. Jozsa. Fidelity for Mixed Quantum States. *Journal of Modern Optics*, 41(12) :2315-2323, 1994.

Chapitre 4

Implémentation de la porte iSWAP et de la porte de Fredkin

Dans ce chapitre, nous proposons deux approches théoriques pour implémenter deux portes quantiques (porte iSWAP et porte Fredkin). Pour la porte iSWAP nous avons considéré deux types de qubits[3, 9, 10, 11], le premier qubit représenté par les deux niveaux d'un atome et le deuxième est représenté par les deux modes de la cavité qui forment tous les deux un dual-rail qubit[12, 13]. Ce dernier est encodé par la présence d'un seul photon dans l'un des deux modes de la cavité optique.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons achevé une porte de Fredkin. Nous considérons un atome à cinq niveaux interagissant avec une cavité ayant un grand facteur de qualité Q et contenant trois modes. Nous utilisons trois sortes de qubits. Un mode de la cavité représente le qubit de contrôle et les états atomiques $|a\rangle$ et $|e\rangle$ définissent le second qubit tandis que les deux autres modes de la cavité forment un troisième dual-rail qubit.

Une description théorique de l'implémentation des portes iSWAP et Fredkin est présenté dans ce travail en plus d'une analyse numérique pour tester la faisabilité de notre approche dans une cavité de grand facteur de qualité Q . On note aussi que nous avons utilisé une technique d'élimination adiabatique pour réduire la taille de l'espace de Hilbert dans lequel nous travaillons.

Dans le même cadre, différents auteurs ont réalisé les portes quantiques iSWAP

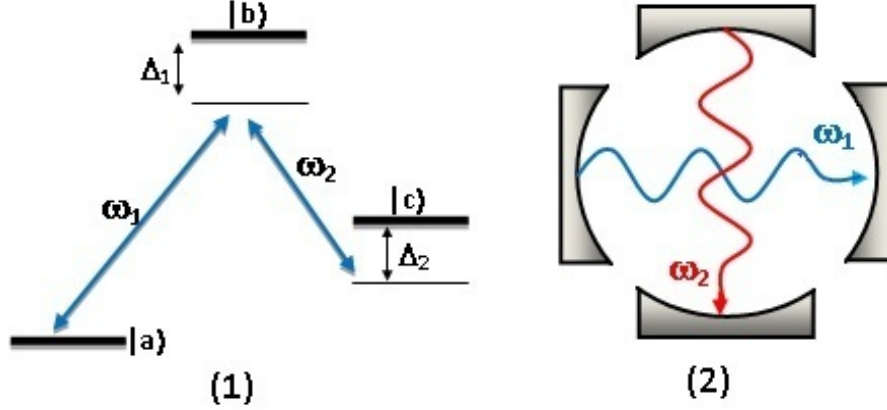


FIG. 4.1 – (1) : Atome, de configuration atomique en Λ , à trois niveaux ($|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$) en interaction avec deux modes d’une cavité optique ω_1 et ω_2 . (2) : Représentation de deux modes de la cavité dans le cas d’un qubit à double rail (dual-rail qubit)

et Fredkin en utilisant une cavité optique interagissant avec un atome à plusieurs niveaux. Nous citons comme exemple les références [4, 5, 6, 7] où une suite de portes universelles ont été étudiées.

4.1 Porte iSWAP

Nous considérons un système quantique constitué d’un atome à trois niveaux d’énergie ($|a\rangle$, $|b\rangle$ et $|c\rangle$) dans une configuration Λ , et interagissant avec deux modes d’une cavité à haut facteur de qualité Q (voir figure 4.1). Les états $|a\rangle$ et $|c\rangle$ couple $|b\rangle$ respectivement avec les modes 1 et 2 à travers l’interaction dipôle-champ quantifié.

En considérant l’approximation dipolaire et l’approximation des ondes tournantes (Rotating wave approximation), l’Hamiltonien général du système $\{\text{atome} + \text{cavité}\}$ peut être écrit comme suit ($\hbar = 1$) [14, 15] :

$$H = \sum_{\alpha=a,b,c} \omega_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| + \sum_{i=1}^2 \omega_i \hat{a}_i^{\dagger} \hat{a}_i + [g_1 \hat{a}_1^{\dagger} |a\rangle \langle b| + g_2 |b\rangle \langle c| \hat{a}_2 + H.C] \quad (4.1)$$

\hat{a}_1 et \hat{a}_2 représentent les opérateurs de bosons des deux modes de la cavité, g_1 et g_2

sont les constantes de couplage atome-champ et ω_α représente l'énergie du niveau $|\alpha\rangle$ de l'atome.

Nous assumons que la cavité qui est à deux modes contient initialement un seul photon. ce qui va nous permettre d'implémenter la porte quantique iSWAP en considérant deux types de qubits, un qubit atomique représenté par les deux états de l'atome $|a\rangle$ et $|c\rangle$ et les états des deux modes de la cavité forment le deuxième qubit appelé qubit à double voie "dual-rail qubit" et qui est un qubit logique. Si nous représentons l'état de la cavité par $|n_1 n_2\rangle$ avec n_i le nombre de photons dans le mode i de fréquence ω_i . En ne considérant que le cas où le nombre de photons dans un mode est soit 0 ou 1 alors le qubit à double rail est représenté par les deux états $|01\rangle$ et $|10\rangle$. $|01\rangle \equiv |0\rangle$ est le premier état du qubit correspondant à la présence d'une seule excitation dans le deuxième mode tandis que le deuxième état ($|10\rangle \equiv |1\rangle$) correspond à la présence d'une seule excitation dans le premier mode.

Nous notons aussi que l'atome qui est initialement dans l'état fondamental $|a\rangle$ restera complètement découplé de la cavité s'il n'y a pas de photons dans le mode 1 et il y'a un photon dans le mode 2 (i.e $|a\rangle |01\rangle$). De même pour l'état du système $|c\rangle |10\rangle$, l'atome qui est initialement dans l'état $|c\rangle$, restera toujours découplé de la cavité. La situation intéressante est lorsque l'état du système est soit dans l'état $|a\rangle |10\rangle$ ou $|c\rangle |01\rangle$. Nous allons analyser ces deux cas dans ce qui suit :

Dans le cas où l'état initial du système est soit $|a\rangle |10\rangle$ ou $|c\rangle |01\rangle$, l'interaction atome-champ détermine les états de base du système (*atome + cavité*) et qui sont : $\{|a\rangle |10\rangle, |b\rangle |00\rangle, |c\rangle |01\rangle\}$. Donc nous posons l'état du système à l'instant t $|\Psi(t)\rangle = \alpha_1 |a, 10\rangle + \alpha_2 |b, 00\rangle + \alpha_3 |c, 01\rangle$.

L'Hamiltonien H du système, en prenant l'état $|a, 10\rangle$ comme origine des énergies, s'écrit dans la représentation matricielle comme suit :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 \\ g_1 & \Delta_1 & g_2 \\ 0 & g_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

avec :

$$\Delta_1 = (\omega_b - \omega_a) - \omega_1$$

$$\Delta_2 = ((\omega_b - \omega_a) - \omega_1) - ((\omega_b - \omega_c) - \omega_2)$$

L'hypothèse $\Delta_1 \gg g_1, g_2$ et $\Delta_2 \simeq 0$, nous permettra d'utiliser la méthode de shore[8] pour déterminer l'Hamiltonien effectif. Pour cela nous définissons deux opérateurs de projection \mathbb{P} et \mathbb{Q} , pour séparer respectivement les états proches de la résonance et ceux loins de la résonance. Les états de base dans $|\Psi(t)\rangle$ peuvent donc être divisés en deux sous-systèmes $\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle$ et $\mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$ où \mathbb{P} et \mathbb{Q} agissent respectivement sur les deux sous-espaces $\{|a\rangle|10\rangle, |c\rangle|01\rangle\}$ et $\{|b\rangle|00\rangle\}$. L'Hamiltonien effectif à deux niveaux \hat{H}_{eff} peut donc être construit par (voir Annexe A1) :

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 - BA^{-1}B^+ \quad (4.3)$$

où $\hat{H}_0 = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P}$, $A = \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q}$. Ce qui nous donne en considérant l'état $|a\rangle|10\rangle$ comme origine des énergies :

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} 0 & g_{eff} \\ g_{eff} & \Delta_{eff} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

avec

$$g_{eff} = \frac{-g_1g_2}{\Delta_1} \quad (4.5)$$

et

$$\Delta_{eff} = \Delta_2 - \frac{g_2^2}{\Delta_1} + \frac{g_1^2}{\Delta_1} \quad (4.6)$$

Puisque $\Delta_1 \gg g_1, g_2$ et $\Delta_2 \simeq 0$ et dans le cas de la résonance $\Delta_{eff} = 0$ (i.e $\Delta_2 = \frac{g_2^2}{\Delta_1} - \frac{g_1^2}{\Delta_1}$), l'évolution temporelle du système pour les deux états initiaux $|a\rangle|10\rangle$ et $|c\rangle|01\rangle$ est donnée par :

$$\begin{aligned} |a\rangle|10\rangle &\longmapsto \cos(g_{eff}t) |a\rangle|10\rangle - i \sin(g_{eff}t) |c\rangle|01\rangle \\ |c\rangle|01\rangle &\longmapsto \cos(g_{eff}t) |c\rangle|01\rangle - i \sin(g_{eff}t) |a\rangle|10\rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

En choisissant un temps d'interaction convenable t tel que $|g_{eff}t| = \frac{\pi}{2}$, une porte iSWAP peut être réaliser et nous obtenons les transformations suivantes subies par les

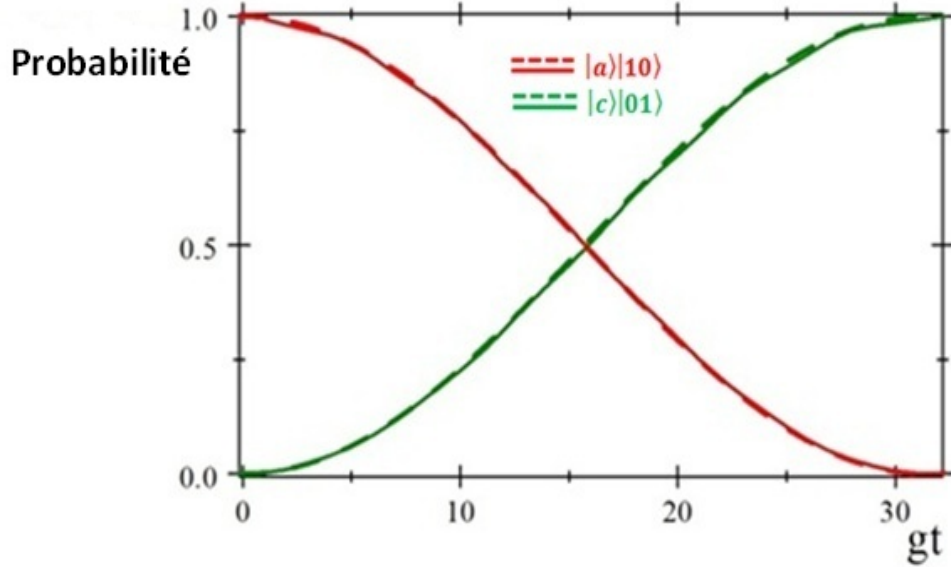


FIG. 4.2 – L'inversion de population entre les états $|a\rangle |10\rangle$ et $|c\rangle |01\rangle$ pour $g_1 = g_2 = g$ and $\Delta_1 = \Delta = 20g$.

états de base (comme mentionné ci-dessus, les deux autres états logiques du système $|a\rangle |01\rangle$ et $|c\rangle |10\rangle$ restent inchangés) :

$$\begin{aligned}
 |a\rangle |01\rangle &\longmapsto |a\rangle |01\rangle \\
 |a\rangle |10\rangle &\longmapsto i |c\rangle |01\rangle \\
 |c\rangle |01\rangle &\longmapsto i |a\rangle |10\rangle \\
 |c\rangle |10\rangle &\longmapsto |c\rangle |10\rangle
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nous traçons dans la figure 4.2 les amplitudes de probabilité des états $|a\rangle |10\rangle$ et $|c\rangle |01\rangle$ pour $g_1 = g_2 = g$ and $\Delta_1 = \Delta = 20g$. La condition de résonance (équation 4.6) permet de déterminer Δ_2 . Nous constatons qu'il y a un excellent accord entre un calcul numérique exact de la probabilité utilisant l'équation 4.2 (lignes continues) et un calcul analytique utilisant l'équation 4.7 (lignes en pointillé)

Pour tester l'effet des approximations faites en calculant l'Hamiltonien effectif du système, nous traçons la fidélité en fonction de $\frac{\Delta_1}{g}$ dans la figure 4.3. Nous remarquons qu'une bonne fidélité est obtenue pour $\frac{\Delta_1}{g} \geq 10$.

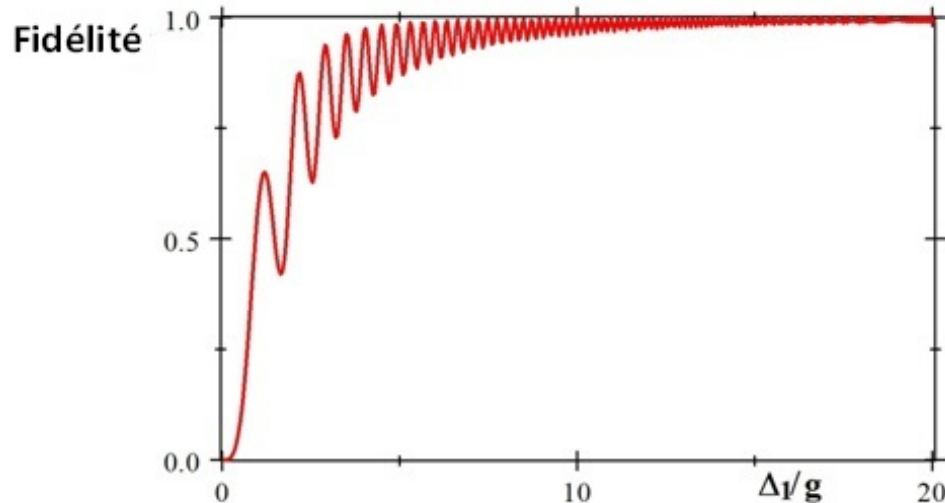


FIG. 4.3 – La fidélité en fonction de $\frac{\Delta_1}{g}$. Les constantes de couplage g_i sont définies dans la figure 4.2.

4.2 Porte de Fredkin :

La porte quantique Fredkin, appelée aussi controlled swap gate, est indispensable dans différents protocoles de l'information quantique. Pour construire une telle porte, nous avons considéré dans notre proposition, un atome à 5 niveaux dans une configuration double Lambda (voir figure 4.4(1)) en interaction avec une cavité à haut facteur de qualité Q et qui contient 3 modes de fréquences ω_1 , ω_2 et ω_3 (voir figure 4.4(2)). Nous supposons un mode répété de fréquence ω_1 et qui interagit avec les transitions $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ et $|d\rangle \leftrightarrow |e\rangle$. Nous avons aussi choisi le premier mode (ω_1) pour représenter le premier qubit qui constituera un qubit de contrôle dans notre système. Les états $|a\rangle$ et $|e\rangle$ représenteront le deuxième qubit et les modes 2 et 3 formeront un troisième qubit de type double-rail. Nous présentons dans la figure 4.4(2) la proposition du schéma expérimental dans lequel un atome à 5 niveaux traverse une cavité à 3 modes et interagit avec les photons présents.

Pour le système {atome + cavité}, l'état quantique du système peut donc être représenté par $|n_1, \alpha, n_2 n_3\rangle$ où :

- $|n_1\rangle$ est le qubit de contrôle : $|n_1\rangle \equiv |0\rangle$ ou $|1\rangle$.

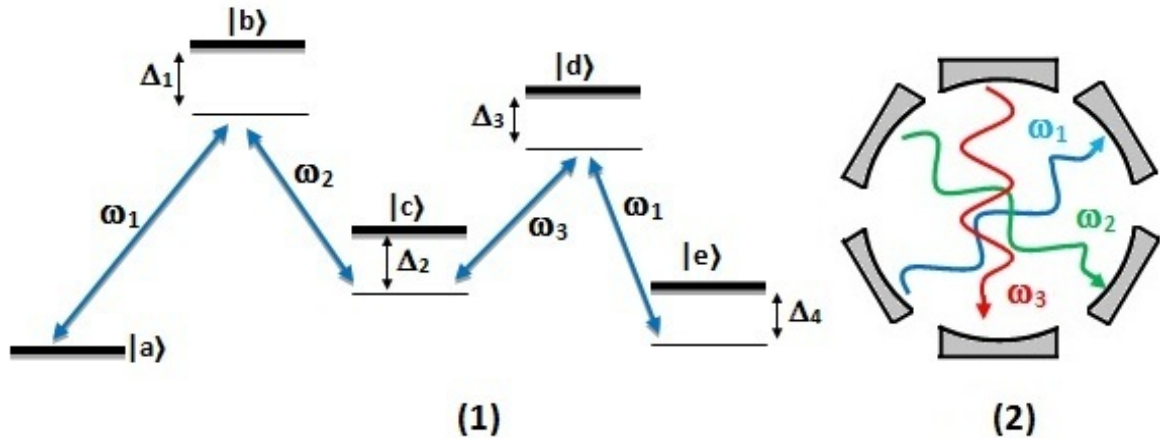


FIG. 4.4 – (1) : Représentation des différents désaccords entre les fréquences des modes de la cavité et les transitions atomiques entre les cinq niveaux d'énergie de l'atome ($|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$, $|d\rangle$ et $|e\rangle$). (2) : Disposition des trois modes de la cavité ω_1 , ω_2 et ω_3 .

- $|\alpha\rangle$ le deuxième qubit : $|\alpha\rangle \equiv |a\rangle$ ou $|e\rangle$.
- $|n_2 n_3\rangle$ le troisième qubit de type double rail : $|n_2 n_3\rangle \equiv |10\rangle$ ou $|01\rangle \equiv |0\rangle$ ou $|1\rangle$.

Dans l'approximation dipolaire et l'approximation des ondes tournantes, l'Hamiltonien du système s'écrit ($\hbar = 1$)[14, 15] :

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\alpha=a,b,c,d,e} \omega_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| + \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{a}_i^{\dagger} \hat{a}_i \\
 & + [g_1 \hat{a}_1^{\dagger} |a\rangle \langle b| + g_2 |b\rangle \langle c| \hat{a}_2 + g_3 \hat{a}_3^{\dagger} |c\rangle \langle d| + g_1 |d\rangle \langle e| \hat{a}_1 + H.C] \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

En considérant que, initialement, l'atome est soit dans l'état $|a\rangle$ ou $|e\rangle$ et qu'il interagit avec les trois modes de la cavité ω_1, ω_2 et ω_3 , les états initiaux possibles du système sont : ($|0, a, 10\rangle$, $|0, a, 01\rangle$, $|0, e, 10\rangle$, $|0, e, 01\rangle$, $|1, a, 10\rangle$, $|1, a, 01\rangle$, $|1, e, 10\rangle$, $|1, e, 01\rangle$). Premièrement, nous notons que l'atome restera complètement découplé de la cavité s'il n'y a pas de photon dans le mode 1 (càd pour les états $|0, a, 10\rangle$, $|0, a, 01\rangle$, $|0, e, 10\rangle$ ou $|0, e, 01\rangle$). Aussi nous aurons une importante source d'erreurs quand l'état initial du système est soit $|1, a, 10\rangle$ ou $|1, e, 01\rangle$. Dans les sous-sections 5.2.1 et 5.2.2, nous déterminons les solutions exactes pour ces deux cas et nous discuterons les effets de ces erreurs. La situation la plus intéressante est lorsque l'état initial du système

est soit $|1, a, 01\rangle$ ou $|1, e, 10\rangle$. nous allons analyser ces deux cas dans la sous-section 5.2.3.

4.2.1 Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |1, a, 10\rangle$:

Les seuls états permis pour le système atome-cavité sont donc $|1, a, 10\rangle$, $|0, b, 10\rangle$ et $|0, c, 20\rangle$. Dans la base des vecteurs d'état précédents (i.e $\{|1, a, 10\rangle, |0, b, 10\rangle, |0, c, 20\rangle\}$) et en prenant $|1, a, 10\rangle$ comme origine des énergies, l'Hamiltonien \hat{H} , s'écrit donc dans la représentation matricielle :

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 \\ g_1 & \Delta_1 & \sqrt{2}g_2 \\ 0 & \sqrt{2}g_2 & \Delta_2 - \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Et puisque Δ_1, Δ_2 sont grands, alors tous les états autres que $|1, a, 10\rangle$ engendrent le sous espace $\mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$. Ce qui implique que le système reste confiné dans l'état $|1, a, 10\rangle$.

4.2.2 Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |1, e, 01\rangle$:

Les seuls états permis pour le système atome-cavité sont donc $|1, e, 01\rangle$, $|0, d, 01\rangle$, $|0, c, 02\rangle$. Dans la base des vecteurs d'état précédents (i.e $\{|1, e, 01\rangle, |0, d, 01\rangle, |0, c, 02\rangle\}$) et en prenant $|1, e, 01\rangle$ comme origine des énergies, l'Hamiltonien \hat{H} , s'écrit donc dans la représentation matricielle :

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 \\ g_1 & \Delta_3 - \Delta_4 & \sqrt{2}g_3 \\ 0 & \sqrt{2}g_3 & \Delta_2 - \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Et puisque Δ_2, Δ_3 sont grands et $\Delta_4 \simeq 0$, alors tous les états autres que $|1, e, 01\rangle$ engendrent le sous espace $\mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$. Ce qui implique que le système reste aussi confiné dans son état initial $|1, e, 01\rangle$

4.2.3 Etat initial : $|\Psi_0\rangle = |1, a, 01\rangle$ ou $|1, e, 10\rangle$:

Pour un état initial du système égal à $|1, a, 01\rangle$ ou $|1, e, 10\rangle$, les seuls états permis sont $|1, a, 01\rangle$, $|0, b, 01\rangle$, $|0, c, 11\rangle$, $|0, d, 10\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$. Donc nous posons l'état du système à un instant t comme suit :

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t)|1, a, 01\rangle + C_2(t)|0, b, 01\rangle + C_3(t)|0, c, 11\rangle + C_4(t)|0, d, 10\rangle + C_5(t)|1, e, 10\rangle \quad (4.12)$$

Dans la base des vecteurs d'état précédents, (càd $|1, a, 01\rangle$, $|0, b, 01\rangle$, $|0, c, 11\rangle$, $|0, d, 10\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$), et en prenant $|1, a, 01\rangle$ comme origine des énergies, l'Hamiltonien \hat{H} , s'écrit donc dans la représentation matricielle :

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & \Delta_1 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \Delta_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \Delta_3 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & g_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

où les différents désaccords Δ_i ($i=1,2,3,4$) sont définis par :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\omega_b - \omega_a) - \omega_1 \\ \Delta_2 &= ((\omega_b - \omega_a) - \omega_1) - ((\omega_b - \omega_c) - \omega_2) \\ \Delta_3 &= ((\omega_b - \omega_a) - \omega_1) - ((\omega_b - \omega_c) - \omega_2) + ((\omega_d - \omega_c) - \omega_3) \\ \Delta_4 &= ((\omega_b - \omega_a) - \omega_1) - ((\omega_b - \omega_c) - \omega_2) + ((\omega_d - \omega_c) - \omega_3) - ((\omega_d - \omega_e) - \omega_1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Comportement à deux états effectifs :

Nous supposons les conditions de résonance du système suivantes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \gg g_1, g_2, g_3$ et $\Delta_4 \simeq 0$. Donc les états atomiques $|a\rangle$ et $|e\rangle$ sont supposés être en résonance avec les modes de la cavité, tandis que les autres états $|b\rangle$, $|c\rangle$ et $|d\rangle$ sont hors résonance. Ces conditions montrent que nous avons affaire à un système à deux niveaux

provenant de l'utilisation de la méthode de shore[8], et cela est dû à l'élimination adiabatique des états hors résonance.

Nous utilisons la même procédure citée dans la section 5.1 pour trouver l'Hamiltonien effectif. Nous définissons deux opérateurs de projection \mathbb{P} et \mathbb{Q} , pour sélectionner respectivement les états proches de la résonance et ceux loins de la résonance. Donc l'opérateur \mathbb{P} concerne les états $|1, a, 01\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$ et l'opérateur \mathbb{Q} concerne les états restants. En utilisant $\hat{H}_0 = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P}$, $A = \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q}$, Nous trouvons (voir Annexe A1) :

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 - BA^{-1}B^+ \quad (4.15)$$

Dans la représentation matricielle, nous pouvons donc écrire l'Hamiltonien effectif en prenant l'état $|1, a, 01\rangle$ comme origine des énergies :

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} 0 & g_{eff} \\ g_{eff} & \Delta_{eff} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

où :

$$g_{eff} = \frac{g_1^2 g_2 g_3}{\Delta_3 g_2^2 + \Delta_1 g_3^2 - \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \quad (4.17)$$

et

$$\Delta_{eff} = \Delta_4 + \frac{g_1^2 (g_3^2 - g_2^2) + g_1^2 \Delta_2 (\Delta_1 - \Delta_3)}{\Delta_3 g_2^2 + \Delta_1 g_3^2 - \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \quad (4.18)$$

En considérant les conditions $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \gg g_1, g_2, g_3$, Nous trouvons :

$$g_{eff} \simeq \frac{-g_1^2 g_2 g_3}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \quad (4.19)$$

et

$$\Delta_{eff} \simeq \Delta_4 - \frac{g_1^2}{\Delta_3} + \frac{g_1^2}{\Delta_1} \quad (4.20)$$

Dans le cas de la résonance $\Delta_{eff} = 0$ ($\Delta_4 = \frac{g_1^2}{\Delta_3} - \frac{g_1^2}{\Delta_1}$), l'évolution temporelle des états initiaux $|1, a, 01\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$, peut être facilement trouvée en résolvant l'équation de Schrödinger. Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned}
|1, a, 01\rangle &\longmapsto \cos(g_{eff}t) |1, a, 01\rangle - i \sin(g_{eff}t) e^{i\eta t} |1, e, 10\rangle \\
|1, e, 10\rangle &\longmapsto \cos(g_{eff}t) |1, e, 10\rangle - i \sin(g_{eff}t) e^{i\eta t} |1, a, 01\rangle
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Le facteur de phase ηt dans les équations précédentes peut être produit de plusieurs façons [4, 1, 3]. En posant $|g_{eff}t| = \frac{\pi}{2}$ et $\eta t = \frac{\pi}{2}$ La porte quantique de Fredkin peut être réalisée et les différentes transformations se résument ainsi :

$$\begin{aligned}
|0, a, 10\rangle &\longmapsto |0, a, 10\rangle \\
|0, a, 01\rangle &\longmapsto |0, a, 01\rangle \\
|0, e, 10\rangle &\longmapsto |0, e, 10\rangle \\
|0, e, 01\rangle &\longmapsto |0, e, 01\rangle \\
|1, a, 10\rangle &\longmapsto |1, a, 10\rangle \\
|1, a, 01\rangle &\longmapsto |1, e, 10\rangle \\
|1, e, 10\rangle &\longmapsto |1, a, 01\rangle \\
|1, e, 01\rangle &\longmapsto |1, e, 01\rangle
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Cette transformation peut être écrite dans la représentation matricielle suivante :

$$Fredkin = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Nous traçons dans la figure 4.5, les probabilités des états $|1, a, 01\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$ pour $g_1 = g_2 = g_3 = g$ et $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 20g$. La condition de résonance (équation 4.20)

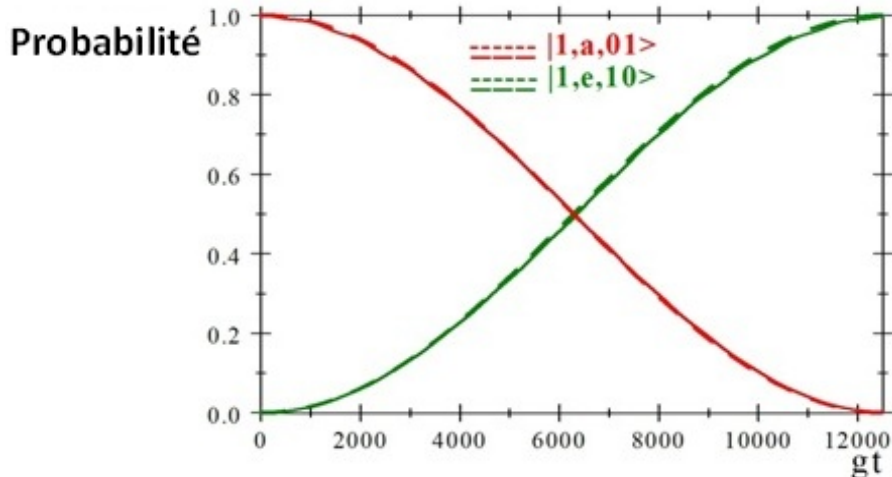


FIG. 4.5 – L'inversion de population entre les états $|1, a, 01\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$ pour $g_1 = g_2 = g_3 = g$ et $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 20g$.

permet de déterminer Δ_4 . Nous trouvons un excellent accord entre un calcul numérique exact utilisant l'équation 4.13 (les lignes continues) et un calcul analytique utilisant l'équation 4.21 (les lignes en pointillé).

Cependant le temps d'évolution de cette porte est très lent ($gt \simeq 12566$), donc nous allons améliorer ces résultats en assumant que l'état $|0, c, 11\rangle$ est en résonance parce qu'une excellente vitesse est obtenue en choisissant un niveau d'énergie intermédiaire qui soit en résonance[4].

Comportement à trois états effectifs :

En choisissant $\Delta_1, \Delta_3 \gg g_1, g_2, g_3$, $\Delta_4 \simeq 0$ et $\Delta_2 \simeq 0$ ($|0, c, 11\rangle$ est en résonance), nous pouvons obtenir un Hamiltonien effectif à trois niveaux[8]. Nous utilisons la même procédure décrite dans la section précédente pour trouver l'Hamiltonien effectif. Nous définissons deux opérateurs de projection \mathbb{P} et \mathbb{Q} , pour sélectionner respectivement les états proches de la résonance et ceux loins de la résonance. Donc \mathbb{P} correspond aux états ($|1, a, 01\rangle, |0, c, 11\rangle, |1, e, 10\rangle$) et \mathbb{Q} correspond aux autres états. En utilisant $\hat{H}_0 = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P}$, $A = \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q}$, Nous trouvons (voir Annexe A1) :

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 - BA^{-1}B^+ \quad (4.24)$$

Dans la représentation matricielle, nous pouvons donc écrire l'Hamiltonien effectif en prenant comme origine des énergies l'état $|1, a, 01\rangle$:

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} 0 & g_{1,eff} & 0 \\ g_{1,eff} & \Delta_{1,eff} & g_{2,eff} \\ 0 & g_{2,eff} & \Delta_{2,eff} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

où :

$$g_{1,eff} = \frac{g_1 g_2}{\Delta_1}, \quad (4.26)$$

$$g_{2,eff} = \frac{g_1 g_3}{\Delta_3} \quad (4.27)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_{1,eff} &= \Delta_2 + \frac{g_1^2}{\Delta_1} - \frac{g_2^2}{\Delta_1} - \frac{g_3^2}{\Delta_3}, \\ \Delta_{2,eff} &= \Delta_4 + \frac{g_1^2}{\Delta_1} - \frac{g_1^2}{\Delta_3} \end{aligned} \quad (4.28)$$

La première condition $\Delta_{1,eff}$ est appliquée pour mettre l'état intermédiaire du système en résonance tandis que la deuxième condition $\Delta_{2,eff}$ est la condition requise pour avoir une résonance à plusieurs photons entre les deux états désirés du système. Quand $\Delta_2 \gg -\frac{g_1^2}{\Delta_1} + \frac{g_2^2}{\Delta_1} + \frac{g_3^2}{\Delta_3}$, la condition de résonance $\Delta_{1,eff}$ est rompue et le système à trois états effectifs se réduit à un système à deux états effectifs.

En utilisant les conditions de résonance ($\Delta_{1,eff} = 0$ et $\Delta_{2,eff} = 0$), nous pouvons choisir Δ_2 et Δ_4 afin de counter le décalage de niveau (Level-shifting). Donc nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -\frac{g_1^2}{\Delta_1} + \frac{g_2^2}{\Delta_1} + \frac{g_3^2}{\Delta_3} \\ \Delta_4 &= -\frac{g_1^2}{\Delta_1} + \frac{g_1^2}{\Delta_3} \end{aligned}$$

Puisque $\Delta_1, \Delta_3 \gg g_1, g_2, g_3$, nous obtenons $\Delta_2 \simeq 0$ et $\Delta_4 \simeq 0$. Dans le cas de la résonance $\Delta_{1,eff} = 0$ et $\Delta_{2,eff} = 0$, l'évolution temporelle des états initiaux $|1, a, 01\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$, peut être calculée en utilisant l'équation de Schrödinger. Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned}
|1, a, 01\rangle &\longmapsto \left(\frac{g_{2,eff}^2}{\omega_0^2} + \frac{g_{1,eff}^2}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) \right) |1, a, 01\rangle - i \frac{g_{1,eff}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) |0, c, 11\rangle \\
&\quad + \frac{g_{1,eff} \cdot g_{2,eff}}{\omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - 1) e^{i\eta t} |1, e, 10\rangle \\
|1, e, 10\rangle &\longmapsto \frac{g_{1,eff} \cdot g_{2,eff}}{\omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - 1) e^{i\eta t} |1, a, 01\rangle - i \frac{g_{2,eff}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) |0, c, 11\rangle \\
&\quad + \left(\frac{g_{1,eff}^2}{\omega_0^2} + \frac{g_{2,eff}^2}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) \right) |1, e, 10\rangle
\end{aligned} \tag{4.29}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{g_{1,eff}^2 + g_{2,eff}^2}$

En posant $g_{1,eff} t = g_{2,eff} t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et $\eta t = \pi$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|1, a, 01\rangle &\longmapsto |1, e, 10\rangle \\
|1, e, 10\rangle &\longmapsto |1, a, 01\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi la porte quantique de Fredkin est réalisée.

Nous traçons dans la figure 4.6 les amplitudes de probabilité des états $|1, a, 01\rangle$, $|0, c, 11\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$ pour $g_1 = g_2 = g$ et $\Delta_1 = \Delta_3 = 20g$. Les conditions de résonance (équation 4.28) permettent de déterminer Δ_2 et Δ_4 . Nous constatons qu'il y a un excellent accord entre un calcul numérique exact utilisant l'équation 4.13 (lignes continues) et un calcul analytique utilisant l'équation 4.29 (lignes en pointillé). Nous traçons aussi la fidélité en fonction de $\frac{\Delta}{g}$ ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_3$) (voir figure 4.7). Nous remarquons qu'une bonne fidélité est obtenue pour $\frac{\Delta}{g} \geq 10$.

A noter aussi que l'évolution temporelle de notre système ayant un comportement à trois états effectifs ($gt \simeq 44, 2$) est bien meilleure comparée à celle ayant un comportement à deux états effectifs ($gt \simeq 12566$).

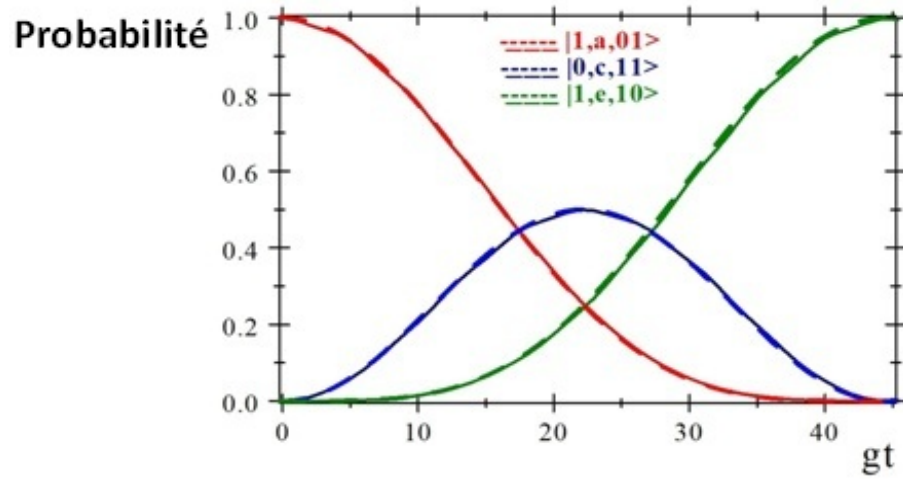


FIG. 4.6 – Population des états $|1, a, 01\rangle$, $|0, c, 11\rangle$ et $|1, e, 10\rangle$ pour $g_1 = g_2 = g$ et $\Delta_1 = \Delta_3 = 20g$.

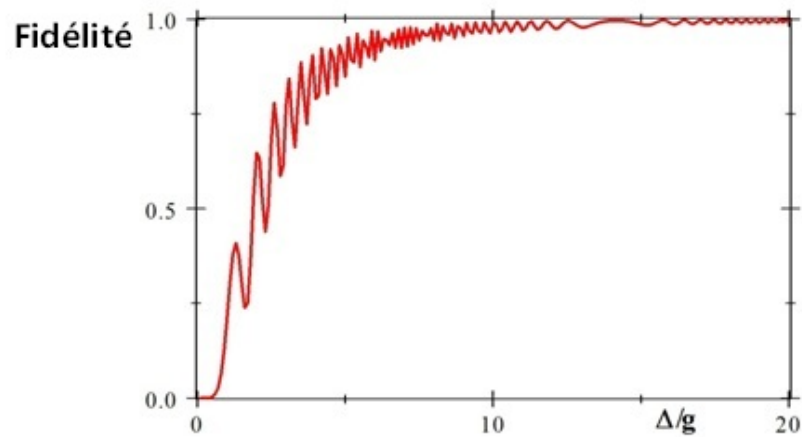


FIG. 4.7 – La fidélité en fonction de $\frac{\Delta}{g}$. Les constantes de couplage g_i sont définies dans la figure 4.6 et $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta$. Les conditions de résonance nous permettent de déterminer Δ_2 et Δ_4

4.3 Conclusion et Discussion

En conclusion, nous avons présenté deux approches pour réaliser deux portes quantiques (iSWAP et Fredkin). Nous avons utilisé la technique d'élimination adiabatique développée par Shore pour déterminer l'Hamiltonien effectif. Nous utilisons des interactions fortes entre atome et cavité pour assurer que notre système soit évolutif. On notera que, en général, le couplage fort est une condition essentielle pour la préparation des états quantiques mécaniques. Ainsi les résonances multiphotons périodiques dans une cavité seront donc possibles. Donc la condition $g \gg \Gamma, K$ doit être satisfaite (Γ et K représentent respectivement les taux de relaxation atomique et photonique). Actuellement, diverses cavités modernes avec un facteur de qualité Q élevé répondent à ces conditions[2, 16, 17].

Pour étudier la faisabilité expérimentale de ces propositions, nous considérons un atome de Rydberg avec un taux de relaxation atomique $\frac{\Gamma}{2\pi} = 500Hz$ et interagissant avec une cavité supraconductrice à haut facteur de qualité ($Q = 8 \times 10^8$). Le taux de relaxation photonique est environ $\frac{K}{2\pi} = 0,4Hz$ et la constante de couplage est $\frac{g}{2\pi} = 7KHz$. Les durées de vie τ_{int} des deux portes iSWAP et Fredkin doivent être plus petites que la durée de vie photonique (K^{-1}). Pour la porte iSWAP, nous trouvons $\tau_{int} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{g^2}$. En assumant $\Delta = 10g$ et $\frac{g}{2\pi} = 7KHz$, le temps d'interaction devient : $\tau_{int} = 0.35 \times 10^{-3}s$, qui est beaucoup plus petit que K^{-1} ($K^{-1} = 0.39s$). De même pour la porte Fredkin, nous avons $\tau_{int} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\Delta}{g^2}$. En assumant que $\Delta = 10g$ et $\frac{g}{2\pi} = 7KHz$, nous trouvons la valeur du temps d'interaction : $\tau_{int} = 5 \times 10^{-4}s$, qui est aussi beaucoup plus petite que K^{-1} .

REFERENCES

- 1 J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Reviews of Modern Physics* 73, 565 (2001).
- 2 H. Walther, B. T. H. Varcoe, B. G. Englert, and T. Becker. Cavity quantum electrodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 69(5) :1325, 2006
- 3 A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* 83, 5166 1999.
- 4 M. S. Everitt and B. M. Garraway, *Phys. Rev. A* 90, 012335 (2014)
- 5 N. Schuch and J. Siewert, *Physical Review A* 67, 032301 (2003).
- 6 M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- 7 M. S. Everitt and B. M. Garraway, in *Conference on Coherence and Quantum Optics*, OSA Technical Digest (CD) (Optical Society of America, 2007) pp. 456–457.
- 8 B. W. Shore, *Physical Review A* 24, 1413 (1981).
- 9 X.-M. Lin, Z.-W. Zhou, M.-Y. Ye, Y.-F. Xiao, and G.-C. Guo, *Physical Review A* 73, 012323 (2006).
- 10 A. Biswas and G. S. Agarwal, *Physical Review A* 69, 062306 (2004).
- 11 A. Joshi and M. Xiao, *Physical Review A* 74, 052318 (2006)
- 12 P. Kok, W. Munro, K. Nemoto, T. Ralph, J. Dowling, and G. J. Milburn, *Reviews of Modern Physics* 79, 135 (2007).
- 13 I. L. Chuang and Y. Yamamoto, *Physical Review A* 52, 3489 (1995).
- 14 E. Jaynes and F. Cummings, *Proc. IEEE* 51, 89 (1963)
- 15 R. J. Cook and B.W. Shore, *Phys. Rev. A* 20, 539 (1979)
- 16 S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Ho , S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin. Ultrahigh-*Q* Fabry-Perot superconducting resonator. *Appl. Phys. Lett.*, 90 :164101, 2007.
- 17 H. Lee, T. Chen, J. Li, K. Y. Yang, S. Jeon, O. Painter, and K. J. Vahala. Chemically etched ultrahigh-*Q* wedge-resonator on a silicon chip. *Nature Photonics*, 6 :369373, 2012

Chapitre 5

Implémentation de N portes de phase quantique dans une cavité QED par considération de l'interaction dipôle-dipôle

Dans ce chapitre on propose une méthode efficace pour réaliser la porte $NTCP$ [1] avec un qubit de contrôle contrôlant simultanément N qubits cibles. Ce travail se base sur l'interaction dipôle-dipôle (atome-atome) et l'interaction qubit-cavité dans une cavité QED en ajoutant un fort champ classique résonant. Dans ce système, le temps de fonctionnement de la porte $NTCP$ est indépendant du nombre N de qubits. Cette porte peut être réalisée en un temps beaucoup plus court que le temps de vie radiative et la durée de vie du photon dans la cavité. Enfin, une discussion sur la durée totale de fonctionnement de la porte proposée et sur le rôle de l'interaction DDI sera abordé.

Récemment, Yang et al. ont présenté un approche pour implémenter la porte de phase ($NTCP$ gate) dans une cavité. Dans ce système un qubit contrôle simultanément n qubits sélectionnés à partir de N qubits ($1 < n < N$) [1]. Dans la ref. [2], les auteurs ont proposé une méthode pour l'implémentation d'une porte à plusieurs

qubits. Ceci devient compliqué lorsque le nombre de qubits augmente. En outre, il est significatif pour réaliser des portes à plusieurs qubits directement [3, 4].

Pour l'instant, la porte NTCP a trouvé des applications dans la préparation des états intriqués [5, 6], de la correction des erreurs [7], de l'algorithme de recherche de Grover [8, 9], la transformée de Fourier quantique [10, 11], l'algorithme de Deutsch-Jozsa [12, 13], du codage quantique dense [14, 15], et enfin du clonage quantique [16, 17]

L'opérateur unitaire représentant ce type de porte à multi-qubits est donné par [18] :

$$U_p = \prod_{j=2}^{N+1} (I_j - 2 | -_1 \rangle | -_j \rangle \langle -_1 | \langle -_j |) \quad (5.1)$$

où l'indice 1 représente le qubit de commande 1, alors que j représente le qubit cible j et I_j est l'opérateur identité associé au pair de qubits $(1, j)$, donnée par $I_j = \sum_{rs} |r_1 s_j\rangle \langle r_1 s_j|$, avec $r, s \in \{+, -\}$. A partir de l'opérateur de l'équation. 5.1, on peut voir que l'opérateur U_p induit une phase flip (du signe $+$ au signe $-$) à l'état logique $| -_j \rangle$ de chaque qubit cible j lorsque le qubit de contrôle 1 est initialement dans l'état $| -_1 \rangle$; autrement rien ne se passe.

Dans ce qui suit, nous allons présenter un moyen pour réaliser la porte NTCP en tenant compte de l'interaction dipôle-dipôle. Nous allons calculer l'opérateur d'évolution pour chaque étape des trois étapes constitutives de la porte NTCP par l'utilisation du modèle de l'Hamiltonien de Jaynes-Cummings. L'opérateur d'évolution global va nous permettre d'implémenter la porte quantique NTCP. Nous allons également calculer le temps total d'implémentation de cette porte et nous allons le comparer avec celui de la référence [1].

5.1 La théorie de base de la porte NTCP

Considérons $(N + 1)$ qubits chacun ayant deux niveaux (état fondamental $|g\rangle$ et état excité $|e\rangle$), simultanément en interaction avec une cavité monomode, et assisté par un champ classique. Les N qubits sont très proches ce qui nous a mené à tenir compte de l'interaction qubit-qubit. L'Hamiltonien du système dans l'approximation

des ondes tournantes (Rotating wave approximation) (en supposant que $\hbar = 1$) [19, 20] est donné par :

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{j=1}^{N+1} [\omega_0 S_{z,j} + \omega_a a^+ a + \Omega (S_j^+ e^{-i(\omega t + \varphi)} + S_j^- e^{i(\omega t + \varphi)}) \\
&\quad + g(a^+ S_j^- + a S_j^+)] + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} S_i^+ S_j^-, \\
&= H_0 + H_1 + H_2 + H_3
\end{aligned} \tag{5.2}$$

avec

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N+1} \omega_0 S_{z,j} + \omega_a a^+ a, \tag{5.3}$$

$$H_1 = \Omega \sum_{j=1}^{N+1} (S_j^+ e^{-i(\omega t + \varphi)} + S_j^- e^{i(\omega t + \varphi)}), \tag{5.4}$$

$$H_2 = g \sum_{j=1}^{N+1} (a^+ S_j^- + a S_j^+), \tag{5.5}$$

$$H_3 = \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} S_i^+ S_j^-, \tag{5.6}$$

où φ est la phase initiale de l'impulsion, H_0 est l'Hamiltonien libre du système $\{(N+1) \text{ qubits} + \text{cavité}\}$, H_1 est l'Hamiltonien d'interaction entre les qubits et le champ classique, H_2 est l'Hamiltonien d'interaction entre les qubits et le mode de la cavité, et H_3 est l'Hamiltonien d'interaction entre les différents qubits. $S_{z,j}$, S_j^- et S_j^+ sont les opérateurs collectifs de l'ensemble des qubits $(1, 2, \dots, N+1)$, avec $S_{z,j} = \frac{1}{2}(|e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j|)$, $S_j^+ = |e_j\rangle\langle g_j|$ et $S_j^- = |g_j\rangle\langle e_j|$. $|e_j\rangle(|g_j\rangle)$ est l'état excité (état fondamental) du qubit j . $\omega_0, \omega_a, \omega$, sont respectivement la fréquence de transition atomique entre les niveaux $|g_j\rangle$ and $|e_j\rangle$, la fréquence du mode de la cavité, et la fréquence du champ classique. \hat{a}^+ et \hat{a} représentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation du mode de la cavité, g est la constante de couplage atome-champ quantifié, Ω est la fréquence de Rabi du champ classique et Γ est la force de couplage dipôle-dipôle. En supposant que $\omega_0 = \omega$, nous aurons l'expression suivante de l'Hamiltonien dans la représentation d'interaction[14, 21] :

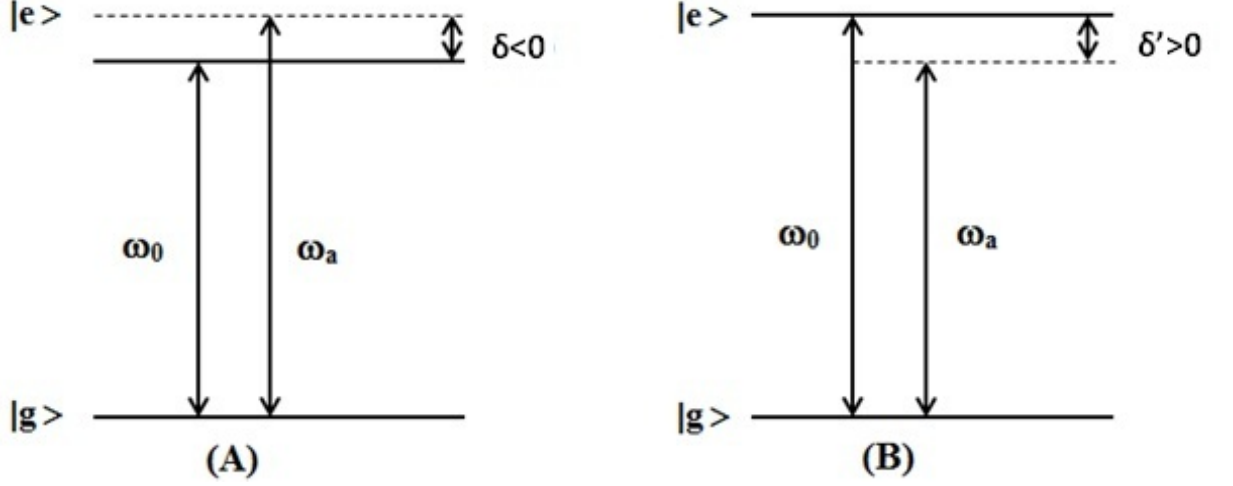


FIG. 5.1 – Représentation des différents désaccords $\delta = \omega_0 - \omega_a$. Dans (A), le désaccord est négatif ($\delta < 0$). Dans (B), le désaccord est positif ($\delta' > 0$).

$$H_I = \sum_{j=1}^{N+1} [g(e^{-i\delta t} a^+ S_j^- + e^{i\delta t} a S_j^+) + \Omega(e^{i\varphi} S_j^- + e^{-i\varphi} S_j^+)] + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} S_i^+ S_j^-, \quad (5.7)$$

$$= H_1 + H_{I1}, \quad (5.8)$$

avec

$$H_1 = \sum_{j=1}^{N+1} \Omega(e^{i\varphi} S_j^- + e^{-i\varphi} S_j^+), \quad (5.9)$$

$$H_{I1} = \sum_{j=1}^{N+1} [g(e^{-i\delta t} a^+ S_j^- + e^{i\delta t} a S_j^+)] + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} S_i^+ S_j^-, \quad (5.10)$$

où $\delta = \omega_0 - \omega_a$ est le désaccord entre la fréquence ω_0 de la transition atomique et la fréquence ω_a du mode de la cavité.

Dans ce travail nous allons considérer les deux cas particuliers suivants : ($\varphi = \pi$ et $\delta < 0$) et ($\varphi = 0$ et $\delta > 0$). Les deux opérateurs d'évolution correspondants à ces deux cas seront utilisés dans la section 6.2 pour réaliser la porte NTCP.

5.1.1 Opérateur d'évolution dans le cas où $\varphi = \pi$ et $\delta < 0$

Considérons maintenant les $(N + 1)$ qubits placés dans une cavité monomode, où le premier qubit est le qubit de contrôle et les autres N qubits sont les qubits cibles. Dans le cas où la phase du champ est $\varphi = \pi$ et le désaccord qui est négatif est $\delta = (\omega_0 - \omega_a) < 0$ [voir figure 5.1.B], l'Hamiltonien H_I devient :

$$\begin{aligned}
 H_I &= \sum_{j=1}^{N+1} [g(e^{-i\delta t} a^+ S_j^- + e^{i\delta t} a S_j^+) - \Omega(S_j^- + S_j^+)] \\
 &\quad + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} S_i^+ S_j^- \\
 &= H_1 + H_{I1}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

avec

$$H_1 = - \sum_{j=1}^{N+1} \Omega(S_j^+ + S_j^-), \tag{5.12}$$

$$H_{I1} = \sum_{j=1}^{N+1} [g(e^{-i\delta t} a^+ S_j^- + e^{i\delta t} a S_j^+)] + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} S_i^+ S_j^-, \tag{5.13}$$

On définit les éléments de la nouvelle base comme suit [3, 22, 23] ($|+_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_j\rangle + |e_j\rangle)$), $|-_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_j\rangle - |e_j\rangle)$. Donc H_I devient

$$\begin{aligned}
 H_I &= \sum_{j=1}^{N+1} g \left[e^{-i\delta t} a^+ (\sigma_{x,j} - \frac{1}{2}\sigma_j^+ + \frac{1}{2}\sigma_j^-) + e^{i\delta t} a (\sigma_{x,j} + \frac{1}{2}\sigma_j^+ - \frac{1}{2}\sigma_j^-) \right] \\
 &\quad + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} (\sigma_{x,i} + \frac{1}{2}\sigma_i^+ - \frac{1}{2}\sigma_i^-) (\sigma_{x,j} - \frac{1}{2}\sigma_j^+ + \frac{1}{2}\sigma_j^-) - 2\Omega \sum_{j=1}^{N+1} \sigma_{x,j}, \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
H_{I1} &= \sum_{j=1}^{N+1} g [e^{-i\delta t} a^+ (\sigma_{x,j} - \frac{1}{2}\sigma_j^+ + \frac{1}{2}\sigma_j^-) + e^{i\delta t} a (\sigma_{x,j} + \frac{1}{2}\sigma_j^+ - \frac{1}{2}\sigma_j^-)] \\
&\quad + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} (\sigma_{x,i} + \frac{1}{2}\sigma_i^+ - \frac{1}{2}\sigma_i^-) (\sigma_{x,j} - \frac{1}{2}\sigma_j^+ + \frac{1}{2}\sigma_j^-), \tag{5.15}
\end{aligned}$$

$$H_1 = -2\Omega S_x, \tag{5.16}$$

où $\sigma_{x,j} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)$, $\sigma_j^+ = |+\rangle\langle -|$, $\sigma_j^- = |-\rangle\langle +|$ et

$$S_x = \sum_{j=1}^{N+1} \sigma_{x,j}. \tag{5.17}$$

Nous considérons l'équation de Schrödinger

$$i \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H_I |\Psi(t)\rangle, \tag{5.18}$$

et en effectuant la transformation unitaire suivante

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\Psi'(t)\rangle, \tag{5.19}$$

nous obtenons

$$i \frac{d|\Psi'(t)\rangle}{dt} = H'_I |\Psi'(t)\rangle, \tag{5.20}$$

avec

$$H'_I = e^{iH_1 t} H_{I1} e^{-iH_1 t}, \tag{5.21}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
H'_I &= \sum_{j=1}^{N+1} g \left[a^+ e^{-i\delta t} (\sigma_{x,j} - \frac{1}{2}\sigma_j^+ e^{2i\Omega t} + \frac{1}{2}\sigma_j^- e^{-2i\Omega t}) + a e^{i\delta t} (\sigma_{x,j} + \frac{1}{2}\sigma_j^+ e^{2i\Omega t} - \frac{1}{2}\sigma_j^- e^{-2i\Omega t}) \right] \\
&\quad + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} (\sigma_{x,i} + \frac{1}{2}\sigma_i^+ e^{2i\Omega t} - \frac{1}{2}\sigma_i^- e^{-2i\Omega t}) (\sigma_{x,j} - \frac{1}{2}\sigma_j^+ e^{2i\Omega t} + \frac{1}{2}\sigma_j^- e^{-2i\Omega t}). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Dans un régime de couplage fort $2\Omega \gg \delta, g, \Gamma$ quand le temps d'évolution est $t = \tau = \frac{\pi}{2\delta}$, nous pouvons éliminer les termes oscillants rapidement. Donc l'Hamiltonien H'_I se réduit à [24, 25] :

$$H'_I = g(a^+ e^{i\delta t} + a e^{-i\delta t})S_x + \Gamma \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} \sigma_{xi} \sigma_{xj}. \quad (5.23)$$

L'opérateur d'évolution associé à l'Hamiltonien H'_I peut donc être écrit comme suit [26, 27] :

$$U'(t) = e^{-iA(t)S_x^2} e^{-iB(t)aS_x} e^{-iB^*(t)a^+S_x} e^{-iC(t)X}, \quad (X = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} \sigma_{xi} \sigma_{xj}). \quad (5.24)$$

En résolvant l'équation de Schrödinger suivante

$$i \frac{dU'(t)}{dt} = H'_I U'(t), \quad (5.25)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma dt' = \Gamma t, \\ B(t) &= g \int e^{i\delta t'} dt' = \frac{g}{i\delta} (e^{i\delta t} - 1), \\ A(t) &= ig \int_0^t B(t') e^{-i\delta t'} dt' = \frac{g^2}{\delta} \left[t + \frac{1}{i\delta} (e^{-i\delta t} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

En posant $t = \tau = -\frac{2\pi}{\delta}$, nous obtenons $B(t) = B^*(t) = 0$. Donc, l'opérateur d'évolution $U'(t)$ devient :

$$U'(\tau) = e^{i\lambda S_x^2 \tau} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} e^{-i\Gamma \sigma_{xi} \sigma_{xj} \tau}, \quad (5.27)$$

où $\lambda = \frac{-g^2}{\delta} > 0$, Donc, nous obtenons l'opérateur d'évolution du système :

$$\begin{aligned} U(\tau) &= e^{-iH_0 \tau} U'(\tau) \\ &= e^{2i\Omega \tau S_x} e^{i\lambda \tau S_x^2} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+1} e^{-i\Gamma \sigma_{z,i} \sigma_{z,j} \tau}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

L'opérateur d'évolution $U(\tau)$ sera utilisé dans la première étape de réalisation de la porte NTCP.

5.1.2 Opérateur d'évolution dans le cas où $\varphi = 0$ et $\delta > 0$

Nous considérons le cas d'un désaccord positif $\delta > 0$ et $\varphi = 0$, où la constante de couplage atome-cavité varie quand le désaccord δ varie. Nous supposons que le qubit 1 est découplé de la cavité et du champ classique. Pour cela, nous allons ajuster l'espacement entre niveaux du qubit 1 [1]. Nous remplaçons les notations Ω , δ , g et Γ par Ω' , δ' , g' et Γ' , respectivement, pour distinguer le cas $\varphi = 0$ et $\delta > 0$ du cas $\varphi = \pi$ et $\delta < 0$. Dans la suite, et pour simplifier les calculs, nous utiliserons les mêmes symboles ω_0 et ω_a [voir figure 5.1.A]. Donc, l'Hamiltonien H_I peut être écrit comme suit :

$$H'_I = \sum_{j=2}^{N+1} [g'(e^{-i\delta't} a^+ S_j^- + e^{i\delta't} a S_j^+) + \Omega'(S_j^- + S_j^+)] + \Gamma' \sum_{\substack{i,j=2 \\ i \neq j}}^{N+1} S_i^+ S_j^-, \quad (5.29)$$

Dans le cas $2\Omega' \gg g', \delta', \Gamma'$, et pour le temps d'évolution $t = \tau' = \frac{2\pi}{\delta'}$, l'Hamiltonien H'_{I1} devient :

$$H'_{I1} = g'(a^+ e^{i\delta't} + a e^{-i\delta't}) S'_x + \Gamma' \sum_{\substack{i,j=2 \\ i \neq j}}^{N+1} \sigma_{xi} \sigma_{xj}, \quad (5.30)$$

et

$$H'_1 = 2\Omega' S'_x, \quad (5.31)$$

donc l'opérateur d'évolution $U'(\tau')$ s'écrit :

$$U'(\tau') = e^{-2i\Omega'\tau' S'_x} e^{-i\lambda'\tau' S_x'^2} \prod_{\substack{i,j=2 \\ i \neq j}}^{N+1} e^{i\Gamma'\tau' \sigma_{z,i} \sigma_{z,j}}, \quad (5.32)$$

où $\lambda' = \frac{g'^2}{\delta'} > 0$, et $S'_x = \sum_{j=2}^{N+1} \sigma_{x,j}$, avec $\sigma_{x,j} = \frac{1}{2}(S_j^+ + S_j^-)$. L'opérateur d'évolution $U'(\tau')$ sera utilisé dans la seconde étape de réalisation de la porte NTCP.

Pour atteindre ce but, nous considérons que les qubits sont découplés de la cavité, et nous appliquons une pulsation résonante à chaque qubit. Nous supposons que la fréquence de Rabi de la pulsation appliquée au qubit 1 est Ω_1 et la fréquence de Rabi de la pulsation appliquée au qubits $(2, \dots, N+1)$ est Ω_r [voir figure 5.2]. Nous supposons aussi que la phase initiale pour chaque pulsation est $\varphi = 0$. Ainsi, dans la

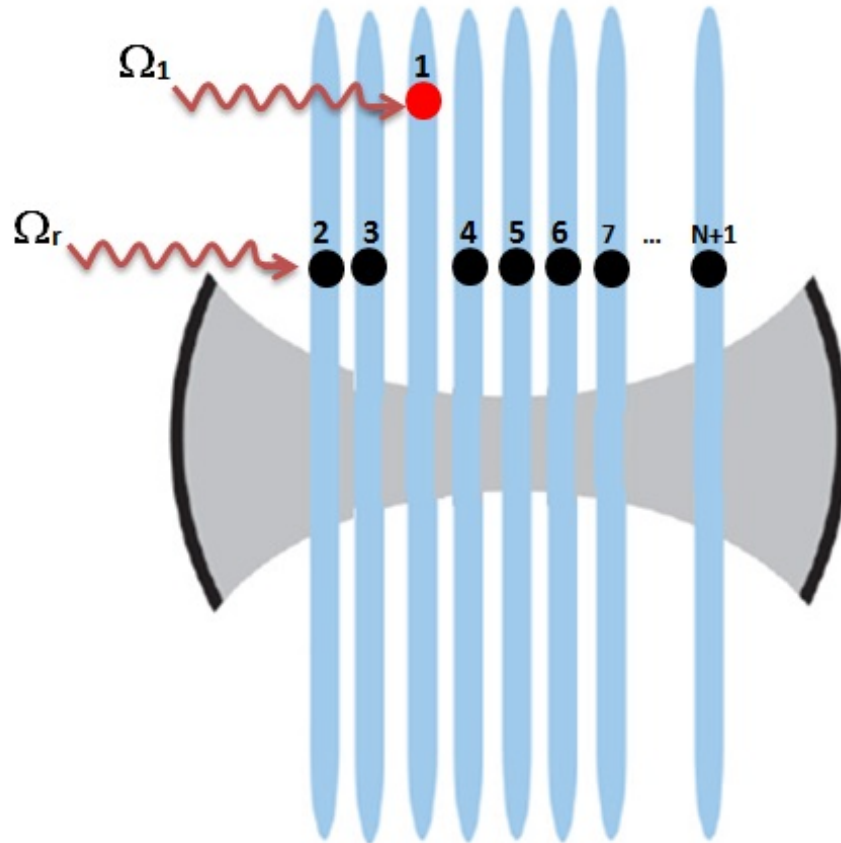


FIG. 5.2 – Le qubit de contrôle proposé (le point rouge), les N qubits cibles identiques (les points noirs), et la cavité.

représentation d'interaction, nous avons l'hamiltonien suivant du système de qubits et des pulsations :

$$H_{\Omega} = 2\Omega_1\sigma_{z,1} + 2\Omega_r S'_x. \quad (5.33)$$

L'opérateur d'évolution de l'Hamiltonien H_{Ω} pour le temps d'évolution $\tau = -\frac{2\pi}{\delta}$ est :

$$U_{\Omega}(\tau) = e^{-2i\Omega_1\tau\sigma_{z,1}} e^{-i2\Omega_r\tau S'_x}. \quad (5.34)$$

L'opérateur d'évolution $U_{\Omega}(\tau)$ trouvé ici, sera utilisé dans la section suivante pour réaliser la porte NTCP.

5.2 Préparation de la porte NTCP

Dans cette section, nous allons montrer comment la porte NTPC peut être réalisée à partir de l'utilisation des opérateurs d'évolution $U(\tau)$, $U'(\tau')$ et $U_\Omega(\tau)$. Nous considérons $N + 1$ qubits entrant dans une cavité QED. Les étapes des opérations de la réalisation de la porte NTCP avec les opérateurs d'évolution sont les suivantes :

Première étape : Avec un désaccord $\delta < 0$ [figure 5.3(A1) et (A2)], nous appliquons une impulsion résonnante (avec $\varphi = \pi$) sur chaque qubit. La fréquence de Rabi de l'impulsion est Ω . Ainsi, $U(\tau)$ est l'opérateur d'évolution du système de $N+1$ qubits, où le temps d'interaction est $\tau = -\frac{2\pi}{\delta}$.

Deuxième étape : Nous appliquons une impulsion résonnante ($\varphi = 0$) sur chacun des qubits numérotés $(2, 3, \dots, N + 1)$ avec un désaccord $\delta' > 0$. Nous ajustons les fréquences de transition des qubits numérotés $(2, 3, \dots, N + 1)$ [13], de telle sorte que le mode de cavité soit couplé aux qubits $(2, 3, \dots, N + 1)$ [voir figure 5.3(B2)]. La fréquence de Rabi de l'impulsion est maintenant Ω' et $U'(\tau')$ est l'opérateur d'évolution pour le système de qubits. En plus, nous ajustons la fréquence de transition du qubit 1 [13] pour le découpler du mode de la cavité, et nous appliquons les impulsions sur les qubits $(2, 3, \dots, N+1)$ [voir figure 5.3(B1)]. En outre, le temps d'interaction est $\tau' = \frac{2\pi}{\delta'}$.

Nous choisissons $\delta = -4g$ ($\delta' = 4g$). On note que δ satisfait la condition de l'équation $16g^2/\delta^2 = (2k + 1)$, où k est un entier. Ainsi, quand $k = 0$, δ prend la valeur $\delta = -4g$. Dans ce cas, le temps de l'opération sera le plus court. L'équation $16g^2/\delta^2 = (2k + 1)$ est la condition d'implémentation de la porte NTCP qui sera donnée plus bas. Donc, le temps total après ces deux étapes est :

$$\tau + \tau' = \frac{\pi}{g} \quad (5.35)$$

Nous supposons que $\Omega'\tau' = \Omega\tau$, $\lambda'\tau' = -\lambda\tau$, et $\Gamma'\tau' = \Gamma\tau$. Ces conditions peuvent être réalisées en ajustant δ et δ' (régler ω_0 et ω_a), Ω et Ω' (régler l'intensité de la

pulsation), Γ et Γ' . Donc $U(\tau + \tau_1)$ devient :

$$\begin{aligned} U(\tau + \tau') &= e^{2i\Omega\tau(S_x - S'_x)} e^{i\lambda\tau(S_x^2 - S'^2_x)} \prod_{j=2}^{N+1} e^{i\Gamma\tau\sigma_{z,1}\sigma_{z,j}} \\ &= e^{-2i\Omega\tau\sigma_{z,1}} e^{-2i\lambda\tau\sigma_{z,1}S'_x} \prod_{j=2}^{N+1} e^{i\Gamma\tau\sigma_{z,1}\sigma_{z,j}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

avec $S_x - S'_x = \sigma_{z,1}$, $S_x^2 - S'^2_x = I + 2\sigma_{z,1}S'_x$ (I est l'opérateur identité du qubit1) et $S'_x = \sum_{j=2}^{N+1} \sigma_{x,j}$, avec $\sigma_{x,j} = \frac{1}{2}(S_j^+ + S_j^-)$.

Troisième étape : Dans le cas où $\varphi = 0$, Nous appliquons une pulsation de fréquence de Rabi égale à Ω_1 au qubit 1 [voir figure 5.3(C_1)] et aussi nous appliquons des pulsations de même fréquence de Rabi Ω_r aux autres qubits (2, ..., $N + 1$) [voir figure 5.3(C_2)]. Donc, nous allons obtenir l'opérateur d'évolution temporelle $U_\Omega(\tau)$ avec τ est le temps d'évolution donné en haut.

Après cette opération en trois étapes, L'opérateur d'évolution temporelle total du système s'écrit :

$$\begin{aligned} U(2\tau + \tau') &= U_\Omega(\tau)U(\tau + \tau') \\ &= e^{-2i\sigma_{z,1}\tau(\Omega + \Omega_1)} e^{-2i\Omega_r S'_x \tau} \prod_{j=2}^{N+1} e^{-2i\sigma_{z,1}\sigma_{z,j}\tau(\lambda - \frac{\Gamma}{2})}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{\Gamma}{2} &= 4\lambda \\ \Omega_1 &= 2N\lambda - \Omega \\ \Omega_r &= 2\lambda \end{aligned} \quad (5.38)$$

que nous pouvons achever en ajustant les fréquences de Rabi Ω , Ω_1 et Ω_r . Donc l'opérateur d'évolution temporelle $U(2\tau + \tau')$ devient :

$$\begin{aligned} U(2\tau + \tau') &= \prod_{j=2}^{N+1} e^{-4i\lambda\tau(\sigma_{z,1} + \sigma_{z,j} + 2\sigma_{z,1}\sigma_{z,j})} \\ &= \prod_{j=2}^{N+1} U_P(1, j). \end{aligned} \quad (5.39)$$

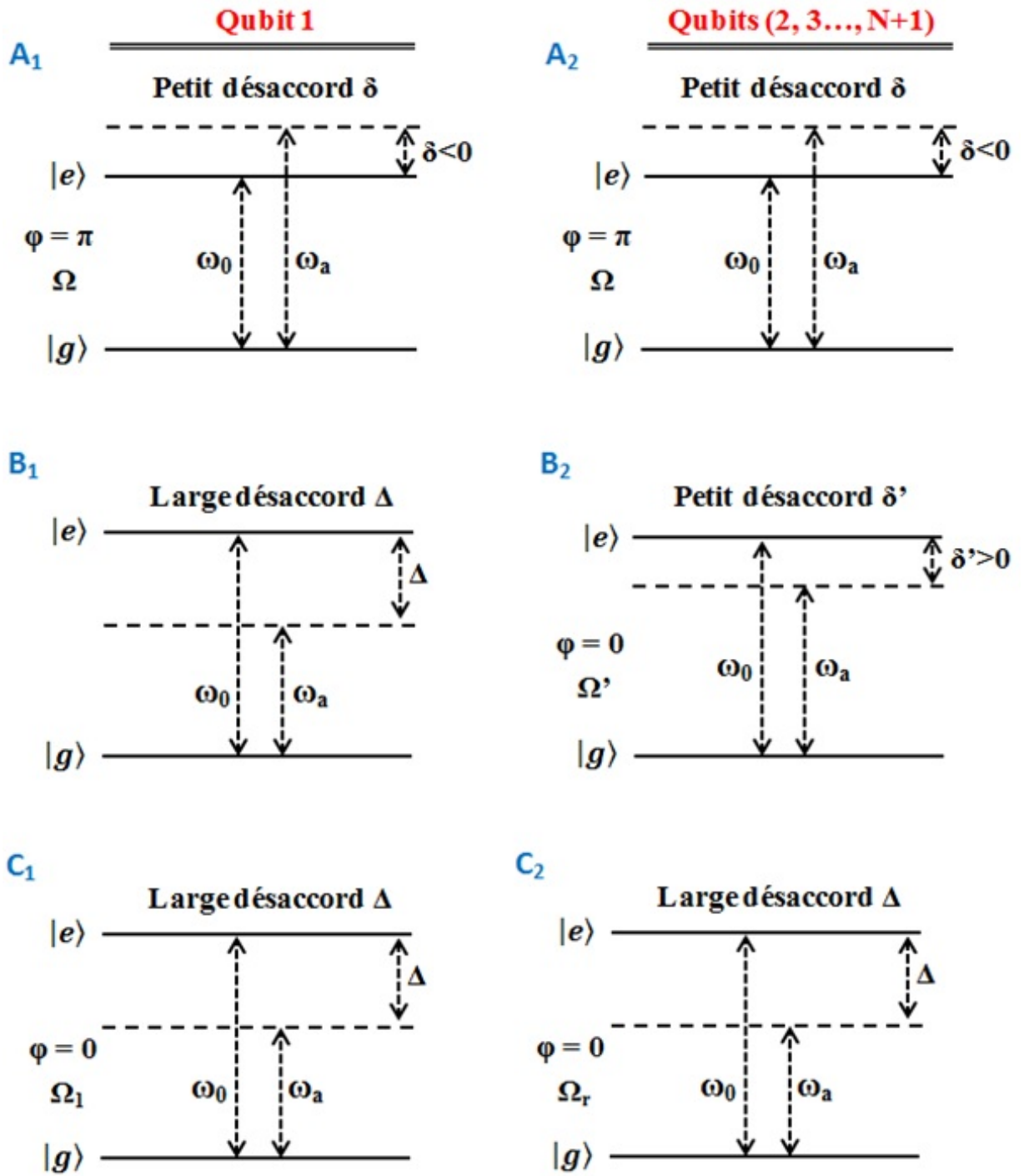


FIG. 5.3 – Représentation des trois étapes : la première étape (A_1 et A_2), la deuxième étape (B_1 et B_2), et la troisième étape (C_1 et C_2). Les figures (A_1), (B_1) et (C_1) correspondent au qubit 1, et les autres figures (A_2), (B_2) et (C_2) correspondent aux qubits (2, 3, ..., $N + 1$).

où $U_p(1, j) = e^{-4i\lambda\tau(\sigma_{z,1} + \sigma_{z,j} + 2\sigma_{z,1}\sigma_{z,j})}$. D'après l'opérateur d'évolution $U(2\tau + \tau')$ exprimé dans la base des états $|+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle + |e_1\rangle)$ et $|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle - |e_1\rangle)$ de l'opérateur de Pauli $\sigma_{x,1}$ du qubit 1 et des états $|+j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_j\rangle + |e_j\rangle)$ et $|-j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_j\rangle - |e_j\rangle)$ de l'opérateur de Pauli $\sigma_{x,j}$ des qubits $(2, 3, \dots, N + 1)$, nous pouvons obtenir les opérations d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned}
U_p|+1\rangle|+j\rangle &= e^{-8i\lambda\tau}|+1\rangle|+j\rangle, \\
U_p|+1\rangle|-j\rangle &= |+1\rangle|-j\rangle, \\
U_p|-1\rangle|+j\rangle &= |-1\rangle|+j\rangle, \\
U_p|-1\rangle|-j\rangle &= |-1\rangle|-j\rangle.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

où le terme $e^{i2\lambda\tau}$ a été omis. En choisissant $8\lambda\tau = (2k+1)\pi$, i.e. $16g^2/\delta^2 = (2k+1)$ (avec k étant un entier) , nous trouvons

$$\begin{aligned}
U_p|+1\rangle|+j\rangle &= -|+1\rangle|+j\rangle, \\
U_p|+1\rangle|-j\rangle &= |+1\rangle|-j\rangle, \\
U_p|-1\rangle|+j\rangle &= |-1\rangle|+j\rangle, \\
U_p|-1\rangle|-j\rangle &= |-1\rangle|-j\rangle.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Evidemment nous pouvons remarquer que nous avons réalisé une porte NTCP. Par conséquent une porte NTCP peut être réalisée après un processus de trois étapes..

5.3 Discussion

Maintenant, Nous donnons une brève discussion sur notre proposition. Nous considérons les nombres quantiques principaux 50 et 51 d'un atome de Rydberg, le temps de relaxation atomique est $T_r = 3.0 \times 10^{-2} s$ et la constante de couplage est $g = 2\pi \times 50$ kHz [1, 28], avec $-\delta = \delta' = 4g$ et $\Gamma = (2k+1)/\delta$ ($k = 0, 1, \dots, n$) [19, 29]. Le temps de l'opération totale $T_{op} = \tau + \tau' + \tau_a + 4\tau_m$ est indépendant du nombre de qubits cibles N , où τ_a est le temps typique nécessaire à l'ajustement de la fréquence du mode de la cavité pendant la deuxième étape, et τ_m est le temps typique nécessaire pour le

déplacement des atomes vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la cavité. Donc, le calcul direct montre que le temps nécessaire à l'implémentation de la porte NTCP (avec des qubits atomiques) est $T_{op} = 15\mu s$ (avec $\tau_a = \tau_m = 1\mu s$), qui est plus petit que T_r . Récemment, la durée de vie du photon dans la cavité a été mesurée expérimentalement $T_c = 1.0 \times 10^{-3}s$ [19, 29], et qui est plus grande que le temps de l'opération totale T_{op} .

De plus, pour implémenter une porte NTCP, nous devons contrôler d'une façon précise l'interaction dipôle-dipôle (DDI) entre les atomes. Dans les récentes années, l'interaction dipôle-dipôle a été bien étudiée surtout avec l'émergence de la diffusion collective [30], intrication de deux atomes artificiels à deux niveaux avec des transitions dégénérées de deux photons [31], ensembles de nanoparticules [32]. L'interaction DDI dépend des trois facteurs suivants : (i) la longueur de la cavité, (ii) les positions des atomes et (iii) la polarisation des dipôles. Afin d'obtenir la localisation serrée requise pour DDI, les atomes doivent être piégés et refroidis. De plus, l'énergie d'interaction dipolaire, des atomes piégés fermement, peut être beaucoup plus grande que le taux de diffusion des photons. Nous notons également que les atomes sont refroidis simultanément par un champ de refroidissement unidimensionnel [33, 34]. L'interaction DDI pourrait être utilisée pour le calcul quantique à l'aide d'un appareil expérimental qui est réalisable avec les technologies actuellement disponibles [33, 34]. Sur la base de la technologie ci-dessus, la force de couplage dipôle-dipôle entre les atomes peut être ajustée pour satisfaire à la condition $\Gamma = (2k + 1) / \delta$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

5.4 Conclusion

En conclusion, nous avons proposé une méthode simple pour réaliser la porte NTCP dans une cavité QED avec un seul mode en interaction avec $N + 1$ atomes. Nous avons tenu compte des interactions atome-atome (DDI) et atome-cavité (ACI). Dans notre système, nous avons appliqué un champ inhomogène pour distinguer entre les $N + 1$ qubits. Le système est insensible au champ thermique. En outre, le temps de fonctionnement de la porte est indépendant du nombre de qubits, et les définitions

de qubits sont identiques, ce qui facilite le travail. En plus, le temps d'implémentation peut être contrôlé en ajustant la fréquence entre les niveaux $|g_j\rangle$ et $|e_j\rangle$. Ainsi, l'opération correspondante à la porte *NTCP* est indépendante de l'état initial du mode de la cavité. Toutefois, nous avons présenté une méthode efficace pour obtenir une porte *NTCP* dans une cavité *QED*, nous avons calculé un opérateur d'évolution pour les trois étapes. L'avantage essentiel de cette méthode est que cette porte peut être réalisée dans un temps beaucoup plus court que le temps de relaxation atomique et la durée de vie du photon dans la cavité. Par conséquent, elle est simple et réalisable avec les techniques actuelles de la cavité *QED*.

REFERENCES

- 1 C. P. Yang, Y. X. Liu, and F. Nori. *Phys. Rev. A* 81, 062323 (2010).
- 2 C. P. Yang, S. B. Zheng, and F. Nori, *Phys. Rev. A* 82, 062326 (2010).
- 3 M. Waseem, M. Irfan, and S. Qamar. *Physica C* 477, 24 (2012).
- 4 C. P. Yang. *J. Phys. A : Math. Theor.* 45 205304 (2012).
- 5 R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* 81, 865 (2009).
- 6 A. Streltsov "Quantum Entanglement". SpringerBriefs in Physics (2015).
- 7 F. Gaitan, (CRC Press, Boca Raton, FL, USA) (2008).
- 8 L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* 79, 325 (1997).
- 9 T. G. Wong, 1502.04567 (2015).
- 10 M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Phys. Rev. A* 65, 052324 (2002).
- 11 A. F. Obada, H. A. Hessian, A. A. Mohamed, and A. H. Homid, *J. Opt. Soc. Am. B* 30, 1178 (2013).
- 12 S. B. Zheng, *Phys. Rev. A* 70, 034301 (2004).
- 13 A. Chen, *Opt. Express* 19, 2037 (2011).
- 14 L. Ye and G.C. Guo, *Phys. Rev. A* 71, 034304 (2005).
- 15 S. Qian, H. Juan, Y. Liu. *Chinese Phys. B* 23 060305 (2014).
- 16 S. L. Braunstein, V. Buzek, and M. Hillery, *Phys. Rev. A* 63, 052313 (2001).
- 17 M. Studziński, P. Ćwikliński, M. Horodecki, M. Mozrzyk, *Phys. Rev. A* 89, 052322 (2014).
- 18 Q. P. Su, M. Liu and C. P. Yang. *Prog. Theor. Exp. Phys.* 023J01 (2013).
- 19 H. F. Wang, S. Zhang, KH. Yeon, *J. Korean Phys. Soc.* 53, 3144 (2008).
- 20 H. Gao. *Int. J. Theor. Phys.* s10773-014-2304-5 (2014).
- 21 Z. Xiao-Juan, F. Mao-Fa, X. Hui, *Chinese Phys. Lett.* 26 110301 (2009).
- 22 D. Jonathan and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* 87, 127901 (2001).
- 23 C. Shuai, F. Mao-Fa, L. Jian-Bin, W. Xin-Wen, Z. Xiao-Juan, and L. Hai, *Chinese Phys. B* 18 898 (2009).
- 24 Z. J. Deng, M. Feng, and K. L. Gao, *Phys. Rev. A* 72, 034306 (2005).
- 25 G. L. Gao, G. C. Cai, S. S. Huang, L. Y. Tang, W. J. Gu, M. F. Wang, N. Q. Jiang. *Sci. China Phys.* 55(8), 1422–1426 (2012).
- 26 Y. D. Wang, P. Zhang, D. L. Zhou, and C. P. Sun, *Phys. Rev. B* 70, 224515 (2004).
- 27 J. Clarke, F. K. Wilhelm, *Nature* 453, 1031-1042 (2008).
- 28 S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* 87, 037902 (2001).

- 29 H. F. Wang, X. Q. Shao, Y. F. Zhao, S. Zhang, and K. H. Yeon, *J. Phys. B* 43, 065503 (2010).
- 30 J. Pellegrino, R. Bourgain, S. Jennewein, Y.R.P. Sortais, A. Browaeys, S.D. Jenkins and J. Ruostekoski, *Phys. Rev. Lett.* 113, 133602 (2014).
- 31 E. K. Bashkirov, M. S. Mastuygin, *Optics and Spectroscopy* pp. 630–634. (2014).
- 32 C. Haase and U. Nowak, *Phys. Rev. B* 85, 045435 (2012).
- 33 J. Guo, *Phys. Rev. A* 50, 2830(R) (1994).
- 34 S. D. Huber and H. P. Buchler, *Phys. Rev. Lett.* 108, 193006 (2012).

Chapitre 6

Approche alternative pour la représentation de qubits atomiques :

Normalement le traitement de l'information quantique dans une cavité QED utilise comme qubits soit des atomes soit des photons. Le problème de stockage et de manipulation des états atomiques et photoniques intriqués a récemment reçu beaucoup d'attention en vue des récentes propositions d'implémentation de portes logiques quantiques, tels que la polarisation des degrés de liberté (DOF) [1, 2, 3], la polarisation et les modes spatiaux DOFs (Le calcul quantique photonique hyper-parallèle) [4, 5, 6], la résonance magnétique nucléaire [7, 8, 9, 10], les boîtes quantiques [11, 12, 13, 14, 15], les centres colorés NV (Nitrogen-Vacancy) du diamant [16, 17, 18], les qubits supraconducteurs [19, 20], les résonateurs supraconducteurs (photons micro-ondes) [21, 22] et les systèmes quantiques hybrides[23, 24]. Les systèmes atomiques sont d'excellents mémoires quantiques très adaptés au calcul quantique à grande échelle. Par ailleurs, les photons sont robustes contre la décohérence et peuvent être facilement transmis sur de longues distances.

Dans ce travail, nous allons considérer des qubits atomiques et les photons seront utilisés pour manipuler les atomes. Comme déjà vu aux chapitres précédents, un seul atome, à deux niveaux, couplé à un seul mode de la cavité, représente l'un des

TAB. 6.1 – Un qubit est encodé au moyen de deux atomes à deux niveaux avec l'un se trouvant au niveau $|g\rangle$ et l'autre au niveau $|e\rangle$

| Etat des atomes | | qubit |
|------------------|-----------|-------------|
| $ g_1e_2\rangle$ | \mapsto | $ -\rangle$ |
| $ e_1g_2\rangle$ | \mapsto | $ +\rangle$ |

systèmes quantiques les plus simples. Chaque qubit peut être représenté comme une combinaison linéaire des deux états atomiques (l'état fondamental $|g\rangle$ et l'état excité $|e\rangle$). Nous allons adopter une représentation alternative des qubits. En considérant deux atomes 1 et 2 ayant respectivement les niveaux $|g_1\rangle, |e_1\rangle$ et $|g_2\rangle, |e_2\rangle$, nous allons encoder le qubit au moyen des deux atomes avec l'un se trouvant au niveau $|g\rangle$ et l'autre au niveau $|e\rangle$. Ainsi une pair d'atomes va encoder un seul qubit. Nous nous sommes inspiré l'idée de cette représentation des qubits photoniques à double voie (dual-rails qubits)[34, 35], qui sont encodés par la présence d'un seul photon dans seulement un des deux modes optiques d'une cavité.

Si nous prenons deux atomes 1 et 2 interagissant simultanément avec un seul mode de la cavité et en assumant que ces deux atomes sont initialement dans les états $|g_1e_2\rangle$ ou $|e_1g_2\rangle$ (voir figure 6.1), donc l'état $|g_1e_2\rangle$ encode le qubit $|-\rangle$ et l'état $|e_1g_2\rangle$ encode le qubit $|+\rangle$ (voir le tableau 6.1).

6.1 Suite universelle de portes logiques :

Pour construire une suite universelle de portes logiques, nous avons besoin d'une porte quantique multi-qubits et deux rotations dans la sphère de Bloch[25]. Dans cette représentation alternative de qubit, nous choisissons les rotations autour des axes x et z (portes à un seul qubit) et la porte quantique à deux qubits CNOT.

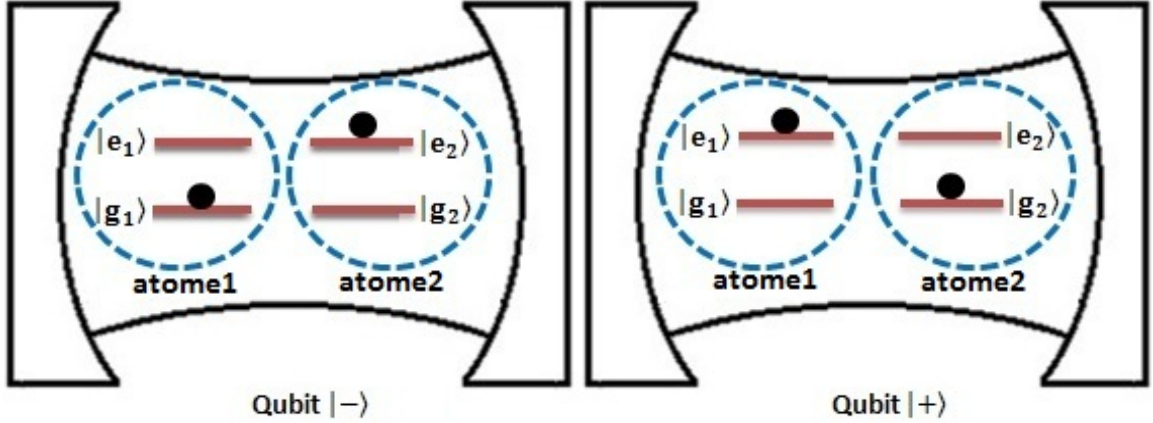


FIG. 6.1 – Représentation alternative de qubit au moyen de deux atomes dans une cavité avec l'un se trouvant au niveau $|g\rangle$ et l'autre au niveau $|e\rangle$ ($|g_1e_2\rangle \equiv |-\rangle$ et $|e_1g_2\rangle \equiv |+\rangle$).

6.1.1 Rotation autour de l'axe des x

Pour construire une rotation autour de l'axe des x, nous considérons deux atomes à deux niveaux numérotés 1 et 2, interagissant simultanément avec un seul mode d'une cavité QED ayant la fréquence ω_a et avec un champ classique de fréquence ω . Les deux atomes sont initialement dans les états $|g_1e_2\rangle$ ou $|e_1g_2\rangle$. Nous allons voir que la dépendance du nombre de photons n dans l'Hamiltonien effectif sera enlevée par l'assistance d'un champ classique fort.

En considérant l'approximation dipolaire et l'approximation des ondes tournantes (rotating wave approximation), l'Hamiltonien général H du système peut être écrit comme suit ($\hbar = 1$) [26, 27, 28] :

$$H = \omega_0 \sum_{j=1}^N S_{z,j} + \omega_a \hat{a}^+ \hat{a} + \sum_{j=1}^N [g (\hat{a}^+ S_j^- + \hat{a} S_j^+) + \Omega (S_j^+ e^{-i\omega t} + S_j^- e^{i\omega t})] \quad (6.1)$$

où N est le nombre d'atomes (ici $N = 2$). \hat{a}^+ et \hat{a} représentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation du mode de la cavité, g est la constante de couplage atome-champ, Ω est la fréquence de Rabi du champ classique, ω_0 est la fréquence de transition atomique et $S_{z,j} = \frac{1}{2} (|e_j\rangle \langle e_j| - |g_j\rangle \langle g_j|)$, $S_j^+ = |e_j\rangle \langle g_j|$, $S_j^- = |g_j\rangle \langle e_j|$.

En prenant $\omega_0 = \omega$ et $\delta = \omega_0 - \omega_a$, nous trouvons l'Hamiltonien suivant dans la représentation d'interaction [26, 27, 28] :

$$H_i = \sum_{j=1}^N [g (e^{-i\delta t} \hat{a}^+ S_j^- + e^{i\delta t} \hat{a} S_j^+) + \Omega (S_j^+ + S_j^-)] \quad (6.2)$$

et avec la condition $\Omega \gg \delta, g$ et $\delta \gg g$, nous obtenons l'opérateur d'évolution du système dans la représentation d'interaction :

$$U_I(t) = e^{-iH_0 t} e^{-iH_e t} \quad (6.3)$$

avec

$$H_0 = \Omega \sum_{j=1}^N (S_j^+ + S_j^-) \quad (6.4)$$

et

$$H_e = \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{j=1}^N (|e_j\rangle \langle e_j| + |g_j\rangle \langle g_j|) + \sum_{j,k=1, i \neq j}^N (S_j^+ S_k^+ + S_j^+ S_k^- + H.C) \right] \quad (6.5)$$

où $\lambda = \frac{g^2}{2\delta}$. Donc, l'évolution temporelle des états initiaux $|g_1 e_2\rangle$ et $|e_1 g_2\rangle$ ($N = 2$), peut être donnée par [26] :

$$\begin{aligned} |g_1 e_2\rangle &\longmapsto e^{-i\lambda t} \{ \cos(\lambda t) [(\cos(\Omega t) |g_1\rangle - i \sin(\Omega t) |e_1\rangle) (\cos(\Omega t) |e_2\rangle - i \sin(\Omega t) |g_2\rangle)] \\ &\quad - i \sin(\lambda t) [(\cos(\Omega t) |e_1\rangle - i \sin(\Omega t) |g_1\rangle) (\cos(\Omega t) |g_2\rangle - i \sin(\Omega t) |e_2\rangle)] \} \quad (6.6) \\ |e_1 g_2\rangle &\longmapsto e^{-i\lambda t} \{ \cos(\lambda t) [(\cos(\Omega t) |e_1\rangle - i \sin(\Omega t) |g_1\rangle) (\cos(\Omega t) |g_2\rangle - i \sin(\Omega t) |e_2\rangle)] \\ &\quad - i \sin(\lambda t) [(\cos(\Omega t) |g_1\rangle - i \sin(\Omega t) |e_1\rangle) (\cos(\Omega t) |e_2\rangle - i \sin(\Omega t) |g_2\rangle)] \} \end{aligned}$$

Le facteur de phase global $e^{-i\lambda t}$ est omis dans les équations suivantes. En utilisant la définition des qubits ($|g_1 e_2\rangle \equiv |-\rangle$ et $|e_1 g_2\rangle \equiv |+\rangle$) et en mettant $\Omega t = \pi$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} |-\rangle &\longmapsto \cos(\lambda t) |-\rangle - i \sin(\lambda t) |+\rangle \\ |+\rangle &\longmapsto \cos(\lambda t) |+\rangle - i \sin(\lambda t) |-\rangle \end{aligned} \quad (6.7)$$

de sorte que finalement l'opération de rotation X devient :

$$R_x(t) = \cos(\lambda t) I - i \sin(\lambda t) \sigma_x$$

σ_x est la porte de Pauli X et I la porte Identité.

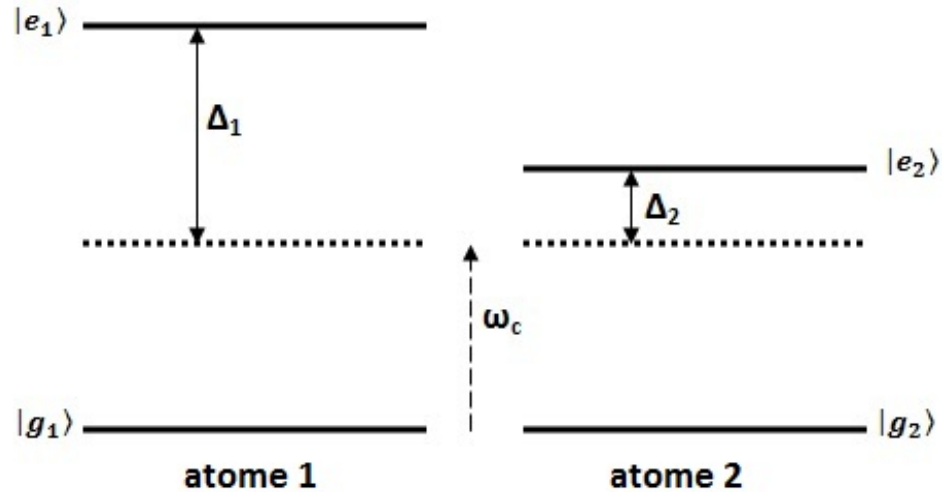


FIG. 6.2 – Représentation de deux atomes à deux niveaux avec un très grand désaccord Δ_1 entre la transition du premier atome et le mode de la cavité et un large désaccord Δ_2 entre la transition du deuxième atome et le mode de la cavité.

6.1.2 Rotation autour de l'axe des z

Nous adopterons la description suivante d'un système quantique pour réaliser la rotation autour d'un axe z (voir figure 6.2). On prend pour cela deux atomes différents (à deux niveaux) passant à travers une cavité et interagissant simultanément avec une cavité monomode. Nous considérons aussi un très grand désaccord entre la transition du premier atome et le mode de la cavité et un large désaccord entre la transition du deuxième atome et le mode de la cavité.

On sait que pour un large désaccord, un système formé d'un atome à deux niveaux interagissant avec une cavité monomode, reste dans son état initial et un décalage de phase peut être produit ainsi[29] :

$$\begin{aligned}
 |g, n\rangle &\longmapsto e^{i\Phi(n)} |g, n\rangle \\
 |e, n\rangle &\longmapsto e^{-i\Phi(n+1)} |e, n\rangle
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

avec $\Phi(n)$ exprimé comme suit [29] :

$$\Phi(n) = \frac{\Delta}{2\nu} \int_0^L dz \left[\sqrt{1 + n \left(\frac{g(z)}{\Delta/2} \right)^2} - 1 \right] \quad (6.9)$$

ν est la vitesse de l'atome passant à travers la cavité, L est la longueur de la cavité, n est le nombre de photons dans la cavité et $g(z)$ est la constante de couplage que nous supposons indépendante de z .

Tandis que, pour un très grand désaccord, le système reste dans son état initial à tout instant t . On peut dire que l'état du premier atome reste inchangé tandis que pour l'évolution du second atome, nous allons introduire un décalage de phase :

$$\begin{aligned} |g_1, e_2, 1\rangle &\longmapsto e^{-i\frac{2g_2^2}{\Delta_2}t} |g_1, e_2, 1\rangle \\ |e_1, g_2, 1\rangle &\longmapsto e^{i\frac{g_2^2}{\Delta_2}t} |e_1, g_2, 1\rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

que nous pouvons aussi écrire comme suit ($|g_1 e_2\rangle \equiv |-\rangle$ et $|e_1 g_2\rangle \equiv |+\rangle$) :

$$\begin{aligned} |-\rangle &\longmapsto e^{-i\frac{g_2^2}{2\Delta_2}t} e^{-i\frac{3g_2^2}{2\Delta_2}t} |-\rangle \\ |+\rangle &\longmapsto e^{-i\frac{g_2^2}{2\Delta_2}t} e^{i\frac{3g_2^2}{2\Delta_2}t} |+\rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

Finalement, nous obtenons l'opération de rotation z suivante (le facteur de phase globale $e^{-i\frac{g_2^2}{2\Delta_2}t}$ est omis) :

$$R_z(t) = \cos\left(\frac{3g_2^2}{2\Delta_2}t\right)I - i \sin\left(\frac{3g_2^2}{2\Delta_2}t\right)\sigma_z \quad (6.12)$$

σ_z est la porte de Pauli Z

6.1.3 Porte quantique à plusieurs qubits

En plus des deux portes à un qubit (Rotations autour des axes x et z), nous avons aussi besoin d'une porte à plusieurs qubits pour compléter la suite des portes universelles. La porte *CNOT*, qui est un candidat évident, peut être implémentée ainsi.

Nous considérons quatre atomes identiques à deux niveaux numérotés 1, 2, 3 et 4 et interagissant simultanément avec un seul mode de la cavité de fréquence ω_a et avec un champ classique de fréquence ω . Les quatre atomes sont initialement dans les états $|g_1e_2g_3e_4\rangle$, $|g_1e_2e_3g_4\rangle$, $|e_1g_2g_3e_4\rangle$ ou $|e_1g_2e_3g_4\rangle$. Il s'agit de la même situation que celle de la sous-section 6.5.1, mais avec 4 atomes au lieu de 2. Nous utilisons les équations (6.1 - 6.5) avec $N = 4$ pour trouver l'opérateur d'évolution de l'équation 6.3. Nous définissons $S_x = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (S_j^+ + S_j^-)$.

Donc les équations 6.4 et 6.5 deviennent :

$$H_0 = 2\Omega S_x \quad (6.13)$$

$$\text{et} \quad H_e = 2\lambda S_x^2 \quad (6.14)$$

et l'équation 6.3 donne la forme suivante de l'opérateur d'évolution :

$$U_I(t) = e^{-i2\Omega t S_x} e^{-i2\lambda t S_x^2} \quad (6.15)$$

avec $\lambda = \frac{g^2}{2\delta}$.

En considérant la représentation matricielle de S_x , nous pouvons développer l'opérateur d'évolution $U_I(t)$ dans le sous espace engendré par les états de base $\{|g_1g_2g_3g_4\rangle, |g_1g_2g_3e_4\rangle, |g_1g_2e_3g_4\rangle, |g_1g_2e_3e_4\rangle, |g_1e_2g_3g_4\rangle, |g_1e_2g_3e_4\rangle, |g_1e_2e_3g_4\rangle, |g_1e_2e_3e_4\rangle, |e_1g_2g_3g_4\rangle, |e_1g_2g_3e_4\rangle, |e_1g_2e_3g_4\rangle, |e_1g_2e_3e_4\rangle, |e_1e_2g_3g_4\rangle, |e_1e_2g_3e_4\rangle, |e_1e_2e_3g_4\rangle, |e_1e_2e_3e_4\rangle\}$ comme suit :

$$S'_x = \begin{bmatrix} 00 & 00 & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & 0\frac{1}{2} & 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 00 & 00 & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & \frac{1}{2}0 & \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} \\ 00 & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} \\ 00 & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 \\ 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & 00 & 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 & 00 & 0\frac{1}{2} \\ 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & 00 & \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} & 00 & \frac{1}{2}0 \\ 0\frac{1}{2} & 00 & 00 & 00 & \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} & 0\frac{1}{2} & 00 \\ \frac{1}{2}0 & 00 & 00 & 00 & 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 & \frac{1}{2}0 & 00 \\ 00 & 0\frac{1}{2} & 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 & 00 & 00 & 00 & 0\frac{1}{2} \\ 00 & \frac{1}{2}0 & \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} & 00 & 00 & 00 & \frac{1}{2}0 \\ 0\frac{1}{2} & 00 & \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} & 00 & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 \\ \frac{1}{2}0 & 00 & 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 & 00 & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 \\ 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & 00 \\ \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & 00 \\ \frac{1}{2}0 & 0\frac{1}{2} & 0\frac{1}{2} & 00 & 0\frac{1}{2} & 00 & 00 & 00 \\ 0\frac{1}{2} & \frac{1}{2}0 & \frac{1}{2}0 & 00 & \frac{1}{2}0 & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 01 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 10 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 01 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 10 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 01 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 10 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 & 01 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 01 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 10 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 01 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 10 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 01 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 10 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 01 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 10 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \end{bmatrix}$$

En utilisant la définition des qubits ($|g_1e_2\rangle \equiv |-_1\rangle$, $|e_1g_2\rangle \equiv |+_1\rangle$, $|g_3e_4\rangle \equiv |-_2\rangle$ and $|e_3g_4\rangle \equiv |+_2\rangle$), nous serons donc intéressés seulement par l'évolution temporelle des états initiaux $|g_1e_2g_3e_4\rangle$, $|g_1e_2e_3g_4\rangle$, $|e_1g_2g_3e_4\rangle$ et $|e_1g_2e_3g_4\rangle$. Nous représentons $U_I(t)$ dans le sous espace engendré par les états de base des derniers états $\{|-_{1-2}\rangle, |-_{1+2}\rangle, |_{+1-2}\rangle, |_{+1+2}\rangle\}$, nous trouvons donc :

$$U'_I(t) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha + \beta & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \gamma \\ \hline \frac{\alpha}{2} & \alpha + \beta & \gamma & \frac{\alpha}{2} \\ \hline \frac{\alpha}{2} & \gamma & \alpha + \beta & \frac{\alpha}{2} \\ \hline \gamma & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \alpha + \beta \\ \hline \end{array} \quad (6.17)$$

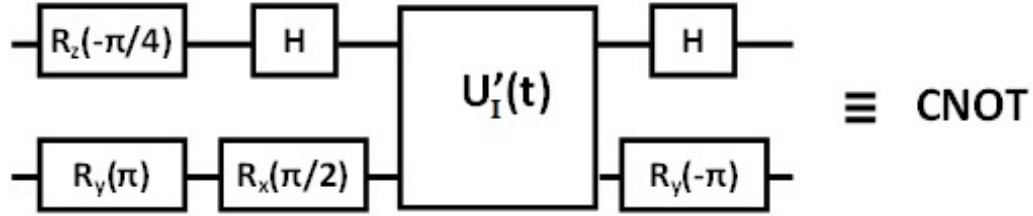


FIG. 6.3 – Représentation du circuit de la porte *CNOT*. *H* représente la transformation de Hadamard. $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ et $R_z(\theta)$ représentent respectivement une rotation d'un angle θ autour des axes x, y et z.

avec :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(e^{-i8\lambda t} \cos(4\Omega t) - 1)}{4} \\ \beta &= \frac{(4e^{-i2\lambda t} \cos(2\Omega t) - e^{-i8\lambda t} \cos(4\Omega t) + 5)}{8} \\ \gamma &= \frac{(-4e^{-i2\lambda t} \cos(2\Omega t) + e^{-i8\lambda t} \cos(4\Omega t) + 3)}{8}\end{aligned}$$

Si nous choisissons les conditions suivantes :

$$\lambda t = \frac{\pi}{4} \quad (6.18)$$

et

$$\Omega t = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (6.19)$$

nous pouvons trouver $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1+i}{2}$ et $\gamma = \frac{1-i}{2}$. Donc l'opérateur d'évolution $U'(t)$ devient :

$$U'_I(t) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{1+i}{2} & 0 & 0 & \frac{1-i}{2} \\ \hline 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \hline \frac{1-i}{2} & 0 & 0 & \frac{1+i}{2} \\ \hline \end{array} \quad (6.20)$$

Cette matrice est équivalente à la porte *CNOT* par application des opérations à un seul qubit (voir figure 6.3).

Donc nous pouvons réaliser une porte quantique *CNOT* à l'aide de la représentation des qubits logiques que nous avons proposé. Ceci est possible si nous choisissons

le temps d'interaction tel que $\lambda t = \frac{\pi}{4}$ et la fréquence de Rabi Ω doit convenablement satisfaire l'équation 6.19.

Discussion :

Pour étudier la faisabilité expérimentale de cette proposition, nous considérons des atomes de Rydberg interagissant avec une cavité à haut facteur de qualité. La durée de vie du mode de la cavité est égale à $T_{cav} = 10^{-3}s$ [32] et la constante de couplage atome-cavité est $g = 50 \times 2\pi KHz$ [32]. Ainsi, d'après la relation $\tau = \frac{\pi}{4\lambda} = \frac{\pi\delta}{2g^2}$, nous calculons le temps d'interaction (en fixant $\delta = 10g$) $\tau \simeq 5.10^{-5}s$. Nous remarquons que le temps d'interaction τ est beaucoup plus petit que la durée de vie du mode de la cavité, ce qui rend possible l'interaction entre l'atome et le mode de la cavité.

- **Calcul de la fidélité :** Pour trouver l'Hamiltonien effectif de l'équation 6.5 en assumant $\Omega \gg \delta, g$, nous avons négligé les termes suivants qui oscillent rapidement [27] :

$$\Delta H(t) = \sum_{j=1}^4 g \left[e^{-i\delta t} a^+ \left(\frac{1}{2} \sigma_j^+ e^{i\Omega t} - \frac{1}{2} \sigma_j^- e^{-i\Omega t} \right) + H.C \right] \quad (6.21)$$

Dans cette équation nous utilisons la base atomique $|+_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_j\rangle + |e_j\rangle)$ et $|-_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_j\rangle - |e_j\rangle)$ pour définir σ_j^+ et σ_j^- : $\sigma_j^+ = |+_j\rangle\langle -_j|$ et $\sigma_j^- = |-_j\rangle\langle +_j|$ (attention à ne pas confondre avec la notation des qubits que nous avons discuté dans ce chapitre). Ces termes sont responsables de l'effet stark sur les états $|g_j\rangle$ et $|e_j\rangle$ et qui pourrait réduire la fidélité de cette porte quantique. Nous allons calculer la dépendance de la fidélité en considérant ces erreurs. A cet effet nous transformons $\Delta H(t)$ comme suit :

$$\Delta H(t) = \sum_{j=1}^4 ig \left[\sin(\Omega t) S_z^j - \cos(\Omega t) S_y^j \right] a e^{i\delta t} + H.C \quad (6.22)$$

avec $S_z^j = \frac{1}{2}(|e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j|)$ et $S_y^j = \frac{1}{2i}(|e_j\rangle\langle g_j| - |g_j\rangle\langle e_j|)$. Pour les termes S_z^j , nous pouvons utiliser la technique de l'écho de spin pour éliminer les erreurs correspondants. Donc nous allons étudier uniquement les effets des termes S_y^j sur la réalisation de la porte CNOT. Pour cela, nous utilisons la méthode qui est décrite dans la référence [33] pour étudier leur effet.

Si nous passons à la représentation d'interaction, nous pouvons trouver le propagateur $U_I(t)$ des séries de Dyson :

$$U_I(t) = 1 - i \int_0^{t'} dt' \Delta H_I(t') - \int_0^{t'} \int_0^{t''} dt' dt'' \Delta H_I(t') \Delta H_I(t'') + \dots \quad (6.23)$$

où l'Hamiltonien d'interaction $\Delta H_I(t)$ est donné par : $\Delta H_I(t) = U^+(t) \Delta H(t) U(t)$. Nous pouvons considérer $U(t)$ comme une constante pendant l'opération d'intégration parce que $\Delta H(t)$ oscille plus rapidement que le propagateur. Donc nous trouvons :

$$U_I(t) = 1 - i \frac{2g}{\Omega} \sin(\Omega t) \sum_{j=1}^4 U^+(t) S_y^j U(t) - \frac{g^2}{\Omega^2} \sum_{j,k=1}^4 (1 - \cos(2\Omega t)) U^+(t) S_y^j S_y^k U(t) + \dots \quad (6.24)$$

Pour un temps d'interaction $\tau = \frac{\pi\delta}{2g^2}$ et pour un état initial égale à $|g_1 e_2 g_3 e_4\rangle$, $|g_1 e_2 e_3 g_4\rangle$, $|e_1 g_2 g_3 e_4\rangle$ ou $|e_1 g_2 e_3 g_4\rangle$, nous obtenons l'expression de la fidélité :

$$F \simeq 1 - \frac{2g^2}{\Omega^2} (1 - \cos(2\Omega\tau)) \quad (6.25)$$

Nous traçons la fidélité en fonction de $\frac{\Omega}{g}$ dans la figure 6.4. Nous trouvons qu'une bonne fidélité est obtenue pour $\frac{\Omega}{g} \geq 10$. Ceci est en bon accord avec l'approximation faite en négligeant les termes oscillants rapidement ($\Omega \gg \delta, g$).

A noter que l'estimation de la fidélité est faite dans la représentation d'interaction.

6.2 Conclusion

En résumé, nous avons montré que nous pouvons réaliser des portes quantiques dans la cavité quand les qubits sont encodés en tant que deux atomes de Rydberg circulaires avec un qui est dans l'état fondamental et l'autre dans l'état excité. Nous avons également vu que cette représentation de qubits peut réaliser une suite universelle de portes logiques. A cet effet, nous avons implémenté deux rotations (X et Z) sur la sphère de Bloch et une porte CNOT (Controlled NOT gate). Le système semble prometteur pour l'évolutivité et nous pensons que d'autres portes quantiques peuvent être obtenues en utilisant cette représentation de qubits.

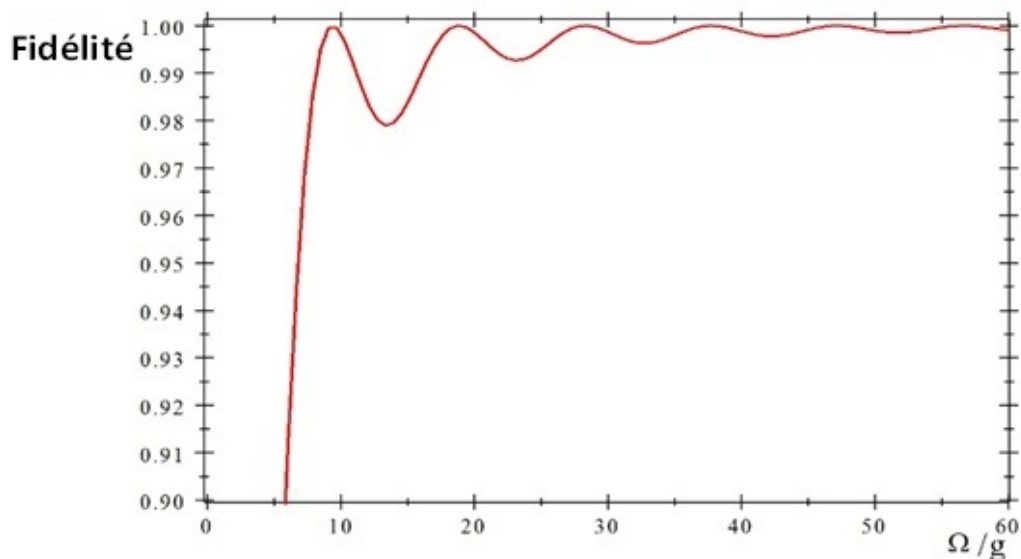


FIG. 6.4 – Courbe de fidélité en fonction de $\frac{\Omega}{g}$ pour l’implémentation de la porte *CNOT* ($\delta = 10g$). Ici nous considérons les erreurs qui proviennent du décalage de Stark (Stark Shifts).

REFERENCES

- 1 13 Benhelm, J., Kirchmair, G., Roos, C. F. & Blatt, R. Towards fault-tolerant quantum computing with trapped ions. *Nature Physics* 4, 463–466 (2008).
- 2 14 Zwanenburg, F. A., Dzurak, A. S., Morello, A., Simmons, M. Y., Hollenberg, L. C., Klimeck, G., Rogge, S., Coppersmith, S. N. & Eriksson, M. A. Silicon quantum electronics. *Rev. Mod. Phys.* 85, 961 (2013).
- 3 15 Itoh, K. M. & Watanabe, H. Isotope engineering of silicon and diamond for quantum computing and sensing applications. *MRS Communications* 4, 143–157 (2014).
- 4 16 Kane, B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer. *Nature* 393, 133–137 (1998).
- 5 17 Koiller, B., Hu, X. & Das Sarma, S. Exchange in siliconbased quantum computer architecture. *Phys. Rev. Lett.* 88, 027903 (2002).
- 6 18 Morello, A. et al. Single-shot readout of an electron spin in silicon. *Nature* 467, 687–691 (2010).
- 7 19 Pla, J. J., Tan, K. Y., Dehollain, J. P., Lim, W. H., Morton, J. J. L., Jamieson, D. N., Dzurak, A. S. & Morello, A. A single-atom electron spin qubit in silicon. *Nature* 489, 541–545 (2012).
- 8 20 Pla, J. J., Tan, K. Y., Dehollain, J. P., Lim, W. H., Morton, J. J. L., Zwanen-

- burg, F. A., Jamieson, D. N., Dzurak, A. S. & Morello, A. High-fidelity readout and control of a nuclear spin qubit in silicon. *Nature* 496, 334–338 (2013).
- 9 21 Laucht, A. et al. Electrically controlling single-spin qubits in a continuous microwave field. *Science Adv.* 1, e1500022 (2015).
- 10 22 Dehollain, J. P., Muhonen, J. T., Tan, K. Y., Saraiva, A., Jamieson, D. N., Dzurak, A. S. & Morello, A. Singlet readout and relaxation of singlet and triplet states in exchange-coupled ^{31}P electron spins in silicon. *Phys. Rev. Lett.* 112, 236801 (2014).
- 11 23 Gonzalez-Zalba, M. F., Saraiva, A., Calder´on, M. J., Heiss, D., Koiller, B. & Ferguson, A. J. An exchange-coupled donor molecule in silicon. *Nano letters* 14, 5672–5676 (2014).
- 12 24 Weber, B., Matthias, T. H., Mahapatra, S., Watson, T. F., Ryu, H., Rahman, R., L., H. C., Klimeck, G. & Simmons, M. Y. Spin blockade and exchange in coulomb-confined silicon double quantum dots. *Nature Nanotech.* 9, 430–435 (2014).
- 13 25 Kalra, R., Laucht, A., Hill, C. D. & Morello, A. Robust two-qubit gates for donors in silicon controlled by hyperfine interactions. *Phys. Rev. X* 4, 021044 (2014).
- 14 26 Pica, G., Lovett, B., Bhatt, R., Schenkel, T. & Lyon, S. Surface code architecture for donors and dots in silicon with imprecise and non-uniform qubit couplings. *arXiv :1506.04913* (2015).
- 15 27 Trifunovic, L., Pedrocchi, F. L. & Loss, D. Long-distance entanglement of spin qubits via ferromagnet. *Phys. Rev. X* 3, 041023 (2013).
- 16 28 O’Gorman, J., Nickerson, N. H., Ross, P., Morton, J. J. & Benjamin, S. C. A silicon-based surface code quantum computer. *arXiv :1406.5149* (2014).
- 17 29 Hollenberg, L. C. L., Greentree, A. D., Fowler, A. G. & Wellard, C. J. Two-dimensional architectures for donor-based quantum computing. *Phys. Rev. B* 74, 045311(2006).
- 18 30 Calder´on, M. J., Koiller, B., Hu, X. & Das Sarma, S. Quantum control of donor electrons at the Si-SiO₂ interface. *Phys. Rev. Lett.* 96, 096802 (2006).
- 19 31 Lansbergen, G. P., Rahman, R., Wellard, C. J., Woo, I., Caro, J., Collaert, N., Biesemans, S., Klimeck, G., Hollenberg, L. C. L. & Rogge, S. Gate-induced quantum confinement transition of a single dopant atom in a silicon finfet. *Nature Phys.* 4, 656–661 (2008).
- 20 32 Laird, E. A., Barthel, C., Rashba, E. I., Marcus, C. M., Hanson, M. P. & Gossard, A. C. Hyperfine-mediated gate driven electron spin resonance. *Phys. Rev. Lett.* 99, 246601 (2007).
- 21 33 Luo, Y., Yu, H. & Yao, W. Deterministic preparation of 9 Dicke states of donor nuclear spins in silicon by cooperative pumping. *Phys. Rev. B* 85, 155304 (2012).
- 22 34 Kim, D. et al. Microwave-driven coherent operation of a semiconductor quantum dot charge qubit. *Nature Nanotech.* 10, 243–247 (2015).

- 23 35 Klimeck, G. et al. Atomistic simulation of realistically sized nanodevices using NEMO 3-D – part i : Models and benchmarks. IEEE Transactions on Electron Devices 54, 2079–2089 (2007).
- 24 36 Blais, A., Huang, R.-S., Wallraff, A., Girvin, S. M. & Schoelkopf, R. J. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation. Phys. Rev. A 69, 062320 (2004).
- 25 M.A. Nielsen, I.L. Chuang "Quantum Computation and Quantum Information" Cambridge University Press, Cambridge (2000)
- 26 L. Ye and G.C. Guo, Phys. Rev. A 71, 034304 (2005)
- 27 S.B. Zheng, Phy. Rev. A 68, 035801 (2003).
- 28 S. B. Zheng, Phys. Rev. A 66, 060303 (R) (2002).
- 29 B. G. Englert, M. Lohr, O. Benson, B. Varcoe, M. Weidinger, and H. Walther. Entangled Atoms in Micromaser Physics. Fortschr. Phys., 46(6-8) :897{926, 1998
- 30 X. Q. Shao, L. Chen, S. Zhang, and Y. F. Zhao (2009), Swap gate and controlled swap gate based on a single resonant interaction with cavity quantum electrodynamics, Phys. Scr. 79, 065004.
- 31 Poyatos J F, Cirac J I and Zoller P 1997 Phys. Rev. Lett. 78 390
- 32 S. Osnaghi et al., Phys. Rev. Lett. 87, 037902 (2001).
- 33 A. Sørensen and K. Mølmer, Phys. Rev. A 62, 022311 (2000).
- 34 P. Kok, W. Munro, K. Nemoto, T. Ralph, J. Dowling, and G. J. Milburn, Reviews of Modern Physics 79, 135 (2007).
- 35 I. L. Chuang and Y. Yamamoto, Physical Review A 52, 3489 (1995).

Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons présenté plusieurs méthodes pour implémenter des portes quantiques logiques. Nous avons réalisé une porte de phase à 4 qubits qui va simplifier considérablement plusieurs problèmes de calcul quantique. Nous avons montré que le temps d'implémentation de cette porte est beaucoup plus petit que la durée de vie du photon dans la cavité QED. La fidélité de cette porte est très bonne et proche de 1, ce qui implique que les erreurs produites par les approximations faites sur l'Hamiltonien du système sont sans effets importants. Nous avons aussi implémenté deux portes quantiques (iSWAP et Frédkin) en utilisant la technique d'élimination adiabatique développée par Shore[1] pour déterminer l'Hamiltonien effectif. L'étude de la faisabilité expérimentale de ces deux portes a montré que les temps d'implémentation de ces deux portes sont beaucoup plus petits que la durée de vie du photon dans la cavité.

L'étude des effets de l'interaction atome-atome (DDI) a été l'objectif du chapitre 6 de cette thèse. Pour cela nous avons proposé une méthode simple pour réaliser la porte *NTCP* dans une cavité QED avec un seul mode en interaction avec $N + 1$ atomes. Le temps de fonctionnement de la porte est indépendant du nombre de qubits, et les définitions de qubits sont identiques, ce qui a facilité le travail. En plus, nous avons trouvé que l'opération correspondante à la porte *NTCP* est indépendante de l'état initial du mode de la cavité et que le temps d'implémentation de cette porte est plus court que le temps de relaxation atomique et la durée de vie du photon dans la cavité.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé un nouveau moyen pour achever les calculs quantiques avec des qubits atomiques dans une cavité QED. Nous avons montré que nous pouvons réaliser des portes quantiques dans la cavité quand les qubits sont encodés en tant que deux atomes de Rydberg circulaires l'un se trouvant dans l'état fondamental $|g\rangle$ et l'autre dans l'état excité $|e\rangle$. Nous avons également vu que

cette représentation de qubits peut réaliser une suite universelle de portes logiques. A cet effet, nous avons implementé deux rotations (X et Z) sur la sphère de Bloch et une porte $CNOT$ (Controlled NOT gate). Le système semble prometteur pour l'évolutivité et nous pensons que d'autres portes quantiques peuvent être obtenues en utilisant cette représentation de qubits.

On notera finalement que, dans l'ensemble, le couplage fort est une condition essentielle pour la préparation des états quantiques mécaniques. Ceci rend les résonances multiphotons périodiques dans une cavité possibles. Cependant, le couplage fort entre un atome à plusieurs niveaux et une cavité à plusieurs modes reste un défi expérimental. En fait, avec l'avancée remarquable en nanotechnologie, ce genre d'interaction pourrait être possible dans un avenir proche [2]. Il est rapporté dans la référence [3] que le transfert d'énergie entre deux nanoparticules individuelles fortement couplées à une cavité à mode de galerie (chuchoter-gallery modes) à haut facteur de qualité dans un résonateur de microsphère est expérimentalement atteint. Cette réalisation donne beaucoup d'espoir pour obtenir des expériences qui rendent possible une interaction entre une cavité à plusieurs modes en interaction avec un atome à plusieurs niveaux dans la limite du couplage fort.

REFERENCES

- 1 B. W. Shore, *Physical Review A* 24, 1413 (1981).
- 2 Chang, J.T., Zubairy, M.S. : Three-qubit phase gate based on cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A* 77(1), 012329 (2008)
- 3 Gotzinger, S., Menezes, L. de S., Mazzei, A., Kuhn, S., Sandoghdar, V., Benson, O. : Controlled Photon Transfer between Two Individual Nanoemitters via Shared High-Q Modes of a Microsphere Resonator. *Nano Lett.* 6(6), 11511154 (2006)

Annexe :

A1 - Calcul de l'Hamiltonien effectif par la méthode de Shore

D'une manière générale, l'évolution temporelle d'un système quantique décrit par un Hamiltonien H indépendant du temps dans l'approximation des ondes tournantes (rotating wave approximation) est régie par l'équation de Schrödinger ($\hbar = 1$) :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle \quad (6.26)$$

où $|\Psi(0)\rangle$ est l'état initial du système à l'instant $t = 0$. Alternativement, la dynamique d'un système peut être abordée par une transformation intégrale plutôt que la forme exponentielle précédente[1]. On réexprime la fonction d'onde $|\Psi(t)\rangle$ en termes de transformation de Laplace. Cette transformée montre que[2] :

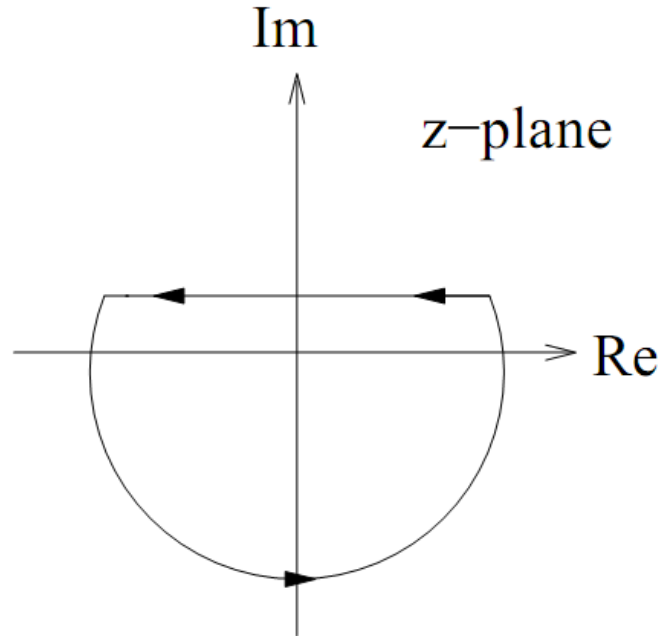
$$\mathcal{L}(|\Psi(t)\rangle) = \int_0^{\infty} |\Psi(t)\rangle e^{-pt} dt = \frac{1}{p\hat{I} + i\hat{H}} |\Psi(0)\rangle \quad (6.27)$$

En introduisant le changement de variable $p = -iz$, cela donne la transformée inverse de la place suivante[1] :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon-\infty} e^{-izt} \frac{1}{z\hat{I} - \hat{H}} dz |\Psi(0)\rangle \quad (6.28)$$

Cette transformée est équivalente à l'équation 6.26. Cette intégrale peut être résolue par le théorème des résidus[2] comme suit. Pour enfermer toutes les singularités de la transformation (tous les pôles sont situés sur l'axe de la partie réelle de z), le contour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de cette intégrale est constitué d'une ligne droite qui est décalé au-dessus de l'axe réel de z et se prolonge entre $-\infty$ et

$+\infty$, et enfin est fermé par un chemin semi-circulaire dans la moitié inférieure de l'axe imaginaire de z [1] (voir figure)



Le contour d'intégration de l'intégrale de l'équation 6.28

En supposant que :

$$f(z) = e^{-izt} \frac{1}{z\hat{I} - \hat{H}} = \frac{h(z)}{g(z)} \quad (6.29)$$

les résidus de $f(z)$ ($\text{Res}\{f(z)\}$) peuvent être donnés par :

$$\text{Res} \{f(z)\} \equiv \frac{h(\hat{H})}{\frac{d}{dz} \left(g(\hat{H}) \right)} = e^{-i\hat{H}t} \quad (6.30)$$

qui n'est autre que l'exponentielle de l'équation 6.26. L'opérateur $\hat{G}(z) = \frac{1}{(z\hat{I} - \hat{H})}$ dans l'équation 6.28 peut être considéré comme une fonction de Green pour $(z\hat{I} - \hat{H})$ [1]. Ce qui implique que :

$$(z\hat{I} - \hat{H}) \hat{G}(z) = 1 \quad (6.31)$$

Maintenant nous supposons que les états de base dans la superposition $|\Psi(t)\rangle$ peuvent être divisés en deux sous-systèmes engendrés par deux opérateurs de projec-

tion orthogonales \mathbb{P} et \mathbb{Q} [3] et qui possèdent les propriétés suivantes[4] : $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{P}$, $\mathbb{Q}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{P}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathbb{P} = 0$ et $\mathbb{P} + \mathbb{Q} = 1$. Par conséquent, on trouve que $|\Psi(t)\rangle = \mathbb{P}|\Psi(t)\rangle + \mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$. Ce qui implique que pour un système où $|\Psi(t)\rangle$ contenant m états possibles, le sous-espace \mathbb{P} -space peut inclure N états ($N \leq m$) tandis que le sous-espace \mathbb{Q} -space inclut $(m - N)$ états. Ce qui veut dire que l'Hamiltonien effectif à deux niveaux de la référence[4] est valable pour $m \geq N \geq 2$. Finalement, cela va nous permettre d'étendre cette théorie pour inclure plus de deux états dans le sous-espace \mathbb{P} -space.

Durant cette thèse nous assumons toujours que les états d'intérêt sont portés par l'opérateur \mathbb{P} . Donc, nous nous intéresserons seulement à l'évolution temporelle du sous-système $\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle$. En rappelant la transformation de l'équation 6.28, On obtient :

$$\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int dz e^{-izt} \mathbb{P}\hat{G}(z) |\Psi(0)\rangle \quad (6.32)$$

Afin de calculer $\mathbb{P}\hat{G}(z)$, on utilise l'algèbre traditionnelle pour effectuer des calculs sur les opérateurs qu'on développe dans l'annexe A2 . Cela a permis de déterminer l'expression de l'Hamiltonien effectif décrivant l'évolution du sous-système $\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle$:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 + \hat{B} \frac{1}{(z\hat{I} - \hat{A})} \hat{B}^+ \quad (6.33)$$

où $\hat{H}_0 = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P}$, $\hat{B} = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q}$ et $\hat{A} = \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q}$. En supposant que l'opérateur \hat{A} a des valeurs propres λ_k plus grandes que les valeurs propres z de l'Hamiltonien effectif \hat{H}_{eff} (càd dans la limite $|\lambda_k| \gg |z|$), on peut introduire l'approximation suivante[4] :

$$\frac{1}{(z\hat{I} - \hat{A})} \approx \frac{-1}{\hat{A}} \left(1 + \frac{z\hat{I}}{\hat{A}} \right) \approx \frac{-1}{\hat{A}} \quad (6.34)$$

pour calculer l'Hamiltonien effectif :

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 - \hat{B}\hat{A}^{-1}\hat{B}^+ \quad (6.35)$$

La condition que les valeurs propres de \hat{A} sont beaucoup plus grandes que les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif \hat{H}_{eff} peut être appliquée dans deux situations

différentes[4]. Premièrement, dans le cas des systèmes non résonants et à plusieurs photons. On range les états à un grand désaccord dans l'espace $\mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$ et les états en résonance où proche de la résonance dans l'espace $\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle$. Deuxièmement, dans un système complètement résonnant et avec l'espace $\mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$ contenant au moins deux états et les constantes de couplage liant les états dans l'espace $\mathbb{Q}|\Psi(t)\rangle$ doivent être beaucoup plus grandes que les forces de couplage dans le sous-système $\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle$. En général, des grands désaccords et des grandes constantes de couplage peuvent être utilisés ensemble pour réduire un grand système à des dimensions plus faibles.

A2 - Calcul de l'équation 6.33

On considère que l'espace $\mathbb{P}|\Psi(t)\rangle$ contient seulement les états en résonance où proche de la résonance. Afin de trouver $\mathbb{P}\hat{G}(z)$ de l'équation 6.32, on suit l'algèbre traditionnelle pour manipuler des opérateurs[5]. On utilise la propriété $\mathbb{P} + \mathbb{Q} = 1$ pour réécrire l'équation 6.31 comme suit :

$$\left(z\hat{I} - \hat{H}\right) (\mathbb{P} + \mathbb{Q}) \hat{G}(z) = \mathbb{P} + \mathbb{Q} \quad (6.36)$$

En multipliant les deux membres de cette équation par l'opérateur \mathbb{P} à droite, on trouve :

$$\mathbb{P} = \left(z\hat{I} - \hat{H}\right) \left[\mathbb{P}\hat{G}(z)\mathbb{P} + \mathbb{Q}\hat{G}(z)\mathbb{P}\right] \quad (6.37)$$

On multiplie cette dernière équation par \mathbb{Q} à droite pour trouver l'expression de $\mathbb{Q}\hat{G}(z)\mathbb{P}$:

$$\mathbb{Q}\hat{G}(z)\mathbb{P} = -\mathbb{Q} \left[\mathbb{Q} \left(z\hat{I} - \hat{H}\right) \mathbb{Q}\right]^{-1} \mathbb{Q} \left(z\hat{I} - \hat{H}\right) \mathbb{P}\hat{G}(z)\mathbb{P} \quad (6.38)$$

En substituant l'équation 6.38 dans l'équation 6.37, on trouve l'expression de $\mathbb{P}\hat{G}(z)\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\hat{G}(z)\mathbb{P} = \mathbb{P} \left(\mathbb{P} (z\hat{I} - \hat{H}) \mathbb{P} - \mathbb{P} (z\hat{I} - \hat{H}) \mathbb{Q} \left[\mathbb{Q} (z\hat{I} - \hat{H}) \mathbb{Q} \right]^{-1} \mathbb{Q} (z\hat{I} - \hat{H}) \mathbb{P} \right)^{-1} \mathbb{P} \quad (6.39)$$

Enfin, en laissant les opérateurs agir à l'intérieur des crochets on trouve :

$$\mathbb{P} (z\hat{I} - \hat{H})^{-1} = \mathbb{P} \left(z\hat{I} - \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P} - \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q} \left[z\hat{I} - \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q} \right]^{-1} \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{P} \right)^{-1} \quad (6.40)$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\hat{G}(z) &= \widehat{G}(z) = (z\hat{I} - \hat{H})^{-1} \\ &= \left(z\hat{I} - \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P} - \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q} \left[z\hat{I} - \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q} \right]^{-1} \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{P} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Le remplacement de $\hat{G}(z)$ par $\widehat{G}(z)$ dans l'intégrale de l'équation 6.32, montre que les singularités sont les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif \hat{H}_{eff} . Donc $\mathbb{P}\hat{G}(z) = \widehat{G}(z) = (z\hat{I} - \hat{H}_{eff})^{-1}$, avec $\hat{H}_{eff} = \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P} + \mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q} \left[z\hat{I} - \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q} \right]^{-1} \mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{P}$.

En utilisant la notation de la référence[4], On définit $\mathbb{P}\hat{H}\mathbb{P} = \hat{H}_0$, $\mathbb{P}\hat{H}\mathbb{Q} = \hat{B}$ et $\mathbb{Q}\hat{H}\mathbb{Q} = \hat{A}$, pour exprimer l'Hamiltonien effectif :

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 + \hat{B} \left[z\hat{I} - \hat{A} \right]^{-1} \hat{B}^+ \quad (6.42)$$

REFERENCES

- 1 M. L. Goldberger and K. M. Watson. Collision theory. John Wiley & Sons., 1964.
- 2 M. L. Boas. Mathematical Methods in the Physical Sciences. John Wiley & Sons., 2006.
- 3 A. Messiah. Quantum Mechanics. North-Holland, 1961.
- 4 B. W. Shore. Two-level behavior of coherent excitation of multilevel systems. Phys. Rev. A, 24(3) :1413-1418, 1981.
- 5 B. W. Shore. The theory of coherent atomic excitation, volume 2. John Wiley & Sons., 1990.

Implementation of Quantum Algorithms via Quantum Electrodynamics in Cavity

Author : Abdelhaq Chouikh

Thesis Supervisor : Mohamed Bennai

ABSTRACT

This thesis deals with the implementation of several logical quantum gates which can be useful for applications in quantum information processing and which will allow performing physically the operations necessary to calculations on qubits. We have at the beginning of this thesis, implemented a phase gate with four qubits. The qubits are represented by the state of the photons in the cavity which interacts with a five-level atom. The second part of this thesis is devoted to the physical realization of two universal quantum gates (iSWAP and Fredkin). We have used three types of qubits: photonic qubits, atomic qubits and dual-rail qubits. After that, We have studied how to realize a multi-qubit controlled-phase gate with one qubit simultaneously controlling N target qubits based on the dipole-dipole interaction (DDI) and the qubit-cavity interaction (ACI) in a cavity QED. Finally we have proposed an approach to achieve quantum computation with atomic qubits in a cavity QED. We have encoded a single qubit on a pair of atoms. The qubit is typically encoded by two two-levels atoms with one is in the ground state while the other in the excited state. This has allowed us to construct an universal set of gates including two rotations (X and Z) on the Bloch sphere of each single qubit and a Controlled NOT gate (CNOT). The experimental feasibility has also been studied by calculating the time and the fidelity of implementation of each quantum gate.

Mots clés : Information quantique, calcul quantique, qubits , électrodynamique quantique en cavité, Portes logiques quantiques.

Implémentation des algorithmes quantiques via l'électrodynamique quantique en cavité

Auteur : Abdelhaq Chouikh

Directeur de thèse : Mohamed Bennai

RESUME

Cette thèse porte sur l'implémentation de plusieurs portes quantiques logiques qui peuvent être utiles pour des applications en traitement de l'information quantique et qui vont permettre de réaliser physiquement les opérations nécessaires aux calculs sur les qubits. Nous avons au début de cette thèse, implémenté une porte de phase à 4 qubits. Les qubits sont représentés par l'état des photons dans la cavité qui est en interaction avec un atome à cinq niveaux. La seconde partie de cette thèse est consacrée à la réalisation physique de deux portes quantiques universelles (iSWAP et Fredkin). Nous avons utilisé trois types de qubits: qubits photoniques et atomiques et qubits double-voie (dual-rail qubits). Nous étudions ensuite comment implémenter une porte de phase quantique à plusieurs qubits (porte NTCP) avec un qubit de contrôle contrôlant simultanément N qubits cibles. Dans ce système (N atome à deux niveaux + un mode de la cavité) nous tenons compte de l'interaction dipôle-dipôle (atome-atome) en plus de l'interaction atome-cavité. Finalement nous présentons un nouveau moyen pour faire des calculs quantiques avec des qubits atomiques dans une cavité QED. Ces qubits logiques sont encodés en tant que deux atomes de Rydberg circulaires avec un qui est dans l'état fondamental et l'autre dans l'état excité. Cela nous a permis de construire une suite universelle de portes logiques (deux rotations X et Z sur la sphère de Bloch et une porte CNOT). La faisabilité expérimentale de toutes ces portes quantiques a aussi été étudiée en calculant le temps d'implémentation de chaque porte quantique ainsi que la fidélité associée au traitement quantique de tous les systèmes proposés dans cette thèse.

Mots clés : Information quantique, calcul quantique, qubits , électrodynamique quantique en cavité, Portes logiques quantiques.