



**HAL**  
open science

# Estimation de canal radio à évanouissement plat par filtre de Kalman à modèle autorégressif: application aux canaux véhiculaires et à relais mobiles

Ali Houssam El Hussein

## ► To cite this version:

Ali Houssam El Hussein. Estimation de canal radio à évanouissement plat par filtre de Kalman à modèle autorégressif: application aux canaux véhiculaires et à relais mobiles. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Lille, Sciences et Technologies, 2019. Français. NNT: . tel-02117553

**HAL Id: tel-02117553**

**<https://hal.science/tel-02117553>**

Submitted on 2 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LILLE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES

École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université de Lille : Sciences et technologies

**Spécialité : Traitement du signal et des images**

Préparée à l'Institut d'Électronique de Microélectronique et Nanotechnologie

Présentée et soutenue publiquement par :

**Ali EL HUSSEINI**

29 Mars 2019

**Estimation de canal radio à évanouissement plat par filtre de Kalman à modèle autorégressif : application aux canaux véhiculaires et à relais mobiles**

**Membres du Jury**

|                    |   |                    |
|--------------------|---|--------------------|
| Matthieu CRUSSIÈRE | Maître de conférence, HDR, IETR                 | Rapporteur         |
| Daniel ROVIRAS     | Professeur des universités, CNAM Paris          | Rapporteur         |
| Audrey GIREMUS     | Maître de conférence, IMS Bordeaux              | Examinatrice       |
| Kosai RAOOF        | Professeur des universités, Université Le Mans  | Examineur          |
| Laurent CLAVIER    | Professeur des universités, IMT Lille Douai     | Examineur          |
| Martine LIÉNARD    | Professeur des universités, Université de Lille | Examinatrice       |
| Laurent ROS        | Maître de conférence HDR, INP Grenoble          | Co-Encadrant       |
| Eric Pierre SIMON  | Maître de conférence HDR, Université de Lille   | Directeur de thèse |
| Yannis LEGUENNEC   | Maître de conférence HDR, INP Grenoble          | Invité             |



À ma famille,



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Mr Eric Pierre Simon, mon directeur de thèse qui m'a soutenu tout au long de mon travail, et à la direction avisée, fidèle et exigeante à laquelle cette thèse doit beaucoup. Je te suis profondément reconnaissant pour ce que tu as fait pour moi. Une chose est sûre : "je n'oublierai jamais".

Mes remerciements s'adressent également à Mr Laurent Ros, mon co-encadrant qui m'a formé et accompagné tout au long de cette expérience professionnelle avec beaucoup de patience et de pédagogie. Je lui manifeste ma grande admiration pour ses compétences, ses qualités humaines. Mes remerciements s'adressent encore pour sa famille pour les accueils généreux pendant nos visites à Grenoble.

Je remercie les membres de Jury, de l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie mes très chers parents, Houssam et Safia, qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je remercie très spécialement mes frères Wassim et Zein El Abidine qui ont toujours été là pour moi.

Aux laboratoires Telice à Villeneuve d'Ascq et GIPSA-Lab à Saint Martin d'Hères, l'ambiance qui règne est tout simplement exceptionnelle. Je tiens donc à remercier toutes les personnes grâce auxquelles ce fut un grand plaisir de venir travailler tous les matins.

Enfin, je remercie tous les amis(e) qui ont été à côté de moi pendant ces années . Je les remercie pour leur soutien inconditionnel et leur encouragement. Pour leur sincère amitié et confiance, et à qui je dois ma reconnaissance et mon attachement.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Table des sigles et acronymes  | xvii      |
| Table des notations  | xix       |
| Introduction générale  | 1         |
| <b>1 Contexte général</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 5         |
| 1.1.1 Organisation du chapitre . . . . .   | 6         |
| 1.2 Systèmes considérés de communications sans fils . . . . .  | 6         |
| 1.2.1 Communication Fixe-Mobile . . . . .  | 6         |
| 1.2.2 Communication Mobile -Mobile . . . . .   | 6         |
| 1.2.3 Communications coopératives . . . . .  | 7         |
| 1.3 Caractéristiques du canal de propagation . . . . .   | 11        |
| 1.4 Modèle de variations des paramètres du canal Fixe-Mobile . . . . .   | 13        |
| 1.4.1 Modèle déterministe . . . . .  | 14        |
| 1.4.2 Modèle aléatoire . . . . .   | 15        |
| 1.5 Classification des canaux . . . . .  | 17        |
| 1.6 Algorithmes d'estimation du canal . . . . .  | 20        |
| 1.6.1 Classement des méthodes d'estimation . . . . .   | 20        |
| 1.6.2 Méthodes d'estimation classiques du canal par blocs . . . . .  | 20        |
| 1.6.3 Estimation récursive . . . . .   | 21        |
| 1.7 Modèles d'états et leurs réglages . . . . .  | 24        |
| 1.7.1 Modèle à marche aléatoire . . . . .  | 25        |
| 1.7.2 Modèle autorégressif . . . . .   | 26        |
| 1.7.3 Le critère CM . . . . .  | 27        |
| 1.7.4 Le critère MAV . . . . .   | 28        |
| 1.8 Conclusion . . . . .   | 30        |
| <b>2 Algorithme basé sur le modèle autoregressif et le filtre de Kalman</b>                                      | <b>33</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .   | 34        |
| 2.1.1 Problème d'estimation du canal à variations lentes avec un filtre<br>AR( $p$ )-KF d'ordre faible . . . . . | 34        |
| 2.1.2 Techniques existantes, limitations et questions ouvertes . . . . .   | 35        |
| 2.1.3 Contributions du chapitre . . . . .  | 37        |
| 2.1.4 Organisation du chapitre . . . . .   | 37        |
| 2.2 Modèle discret équivalent de la transmission . . . . .   | 38        |



|  |   |            |
|--|---|------------|
| 2.3  | Modèle autoregressif et approximation du canal de transmission . . . . .                              | 38         |
| 2.3.1  | Le modèle AR(2) . . . . .   | 38         |
| 2.3.2  | Stabilité du Filtre AR(2) . . . . .   | 39         |
| 2.3.3  | Couple de valeurs du modèle AR(2) . . . . .   | 41         |
| 2.4  | Filtre de Kalman avec le modèle AR(2) . . . . .   | 44         |
| 2.5  | Filtre de Kalman en régime permanent . . . . .  | 45         |
| 2.5.1  | Une expression approchée pour $K_1$ . . . . .   | 46         |
| 2.6  | Analyse de l'erreur en régime asymptotique . . . . .  | 50         |
| 2.6.1  | Fonction de transfert $L(z)$ du filtre de Kalman AR(2) asymptotique . . . . .                         | 50         |
| 2.6.2  | Variance d'erreur en régime asymptotique . . . . .  | 52         |
| 2.6.3  | Optimisation selon le critère MAV . . . . .   | 55         |
| 2.6.4  | Comparaison avec les filtres de Kalman basés sur des modèles d'états<br>AR(1)-MAV et RW(2) . . . . .  | 57         |
| 2.7  | Simulations . . . . .   | 60         |
| 2.7.1  | Illustration des paramètres du système . . . . .  | 60         |
| 2.7.2  | Performance en erreur quadratique moyenne EQM . . . . .   | 64         |
| 2.7.3  | Performance en taux d'erreur binaire TEB . . . . .  | 67         |
| 2.8  | Conclusion . . . . .  | 68         |
| <b>3 Estimation du canal pour les réseaux mobiles à mobiles et à <math>N</math> relais mobiles</b> |   | <b>71</b>  |
| 3.1  | Introduction . . . . .  | 71         |
| 3.1.1  | Estimation du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles : méthode<br>et problème . . . . .          | 72         |
| 3.1.2  | Contributions de ce chapitre . . . . .  | 72         |
| 3.1.3  | Organisation du chapitre . . . . .  | 73         |
| 3.2  | Description générale du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles . . . . .                         | 73         |
| 3.2.1  | Canal Mobile-Mobile . . . . .   | 73         |
| 3.2.2  | Canal à $N$ relais mobiles . . . . .  | 74         |
| 3.2.3  | Autocorrélation temporelle . . . . .  | 77         |
| 3.2.4  | Densité spectrale de Puissance . . . . .  | 79         |
| 3.3  | Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et<br>à $N$ relais mobiles . . . . . | 83         |
| 3.3.1  | Résultats préliminaires . . . . .   | 84         |
| 3.3.2  | Analyse de l'erreur quadratique moyenne . . . . .   | 84         |
| 3.3.3  | Calcul des moments . . . . .  | 86         |
| 3.3.4  | Cas d'un canal F-M . . . . .  | 86         |
| 3.3.5  | Résultats de simulation . . . . .   | 88         |
| 3.4  | Conclusion . . . . .  | 94         |
| <b>Conclusion</b>  |   | <b>97</b>  |
| <b>A Liens entre les couples de paramètres du modèle AR(2) :</b>                                   |   |            |
| <b>Preuve de (2.28), (2.29) et (2.30)</b>  |   | <b>101</b> |
| A.1  | Preuve de (2.28) et (2.29) . . . . .  | 101        |
| A.2  | Preuve (2.30) . . . . .   | 102        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>B</b> | <b>Expression des composantes du gain de Kalman <math>K_1</math> et <math>K_2</math></b>                | <b>103</b> |
| B.1      | Démonstration $P'_{21} = P'_{12}$ . . . . .   | 103        |
| B.2      | Expression exacte de $P'_{11}$ , $K_1$ et $K_2$ . . . . .   | 104        |
| B.2.1    | Calcul du produit $\lambda_1\lambda_2$ . . . . .  | 105        |
| B.3      | Expression de $K_2$ . . . . .   | 106        |
| <b>C</b> | <b>Expression approchée de la variance du bruit d'état</b>  | <b>109</b> |
| C.1      | Preuve de l'hypothèse vii . . . . .   | 109        |
| C.2      | Approximation de $\sigma_u^2$ . . . . .   | 109        |
| <b>D</b> | <b>Approximation de <math>K_1</math> et <math>K_2</math></b>  | <b>111</b> |
| D.1      | Approximation de $K_1$ : Preuve de (2.42) . . . . .   | 111        |
| D.1.1    | Approximation de $a$ (B.14) . . . . .   | 111        |
| D.1.2    | Approximation de $b$ (B.15) . . . . .   | 111        |
| D.1.3    | Approximation de $d$ (B.21) . . . . .   | 112        |
| D.1.4    | Approximation de $\lambda_1\lambda_2$ (B.22) . . . . .  | 113        |
| D.1.5    | Approximation de $P'_{11}$ (B.12) . . . . .   | 113        |
| D.2      | Approximation de $K_2$ (B.26) : . . . . .   | 113        |
| <b>E</b> | <b>Fonction de transfert <math>L(z)</math></b>  | <b>115</b> |
| E.1      | Expression de $L(z)$ : preuve de (2.55) . . . . .   | 115        |
| E.2      | Vérification de $L(z)$ par simulation . . . . .   | 116        |
| E.3      | Expressions et approximations de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$ . . . . .                         | 116        |
| E.3.1    | Expressions de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$ . . . . .   | 116        |
| E.3.2    | Expressions approximatives de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$ . . . . .                            | 117        |
| <b>F</b> | <b>Approximation et calcul de <math> 1 - L(z) ^2</math></b>   | <b>119</b> |
| F.1      | Approximations de $A, B, C, D, E, F$ . . . . .  | 120        |
| <b>G</b> | <b>Calcul et approximation de <math>\sigma_{ew}^2</math> : Preuve de (2.60)</b>                         | <b>123</b> |
| <b>H</b> | <b>Figures des simulations de réglage sous-optimal du modèle AR(2) présenté dans [1]</b>                | <b>125</b> |
| <b>I</b> | <b>DSP du gain complexe du canal <math>\alpha</math> dans le cas de communications Mobile à Mobile.</b> | <b>127</b> |
| I.1      | DSP du gain complexe pour canal M-M. . . . .  | 127        |
| I.1.1    | Fonction elliptique complète de première espèce . . . . .   | 127        |
| I.2      | Argument de la DSP (I.1) . . . . .  | 128        |
| I.2.1    | Vérification du résultat par calcul : . . . . .   | 128        |
| I.2.2    | Autre expression de $Arg$ . . . . .   | 129        |
| I.3      | DSP avec fonction elliptique complète de première espèce de MATLAB et par calcul d'intégrale. . . . .   | 129        |
| <b>J</b> | <b>Calcul de <math>\mu_{(4)}^{M-M}</math></b>   | <b>133</b> |
| J.1      | Calcul de $\mu_{(4)}^{M-M}$ . . . . .   | 133        |
| J.1.1    | calcul de $int1$ . . . . .  | 134        |

Abstract

145

# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Communication coopératives à bases de relais <sup>1</sup> . . . . .   | 8  |
| 1.2  | Architecture série du réseau à relais multiples. . . . .  | 9  |
| 1.3  | Architecture parallèle du réseau à relais multiples. . . . .  | 9  |
| 1.4  | Architecture hybride du réseau à relais multiples. . . . .  | 10 |
| 1.5  | Illustrations simples de réseau véhiculaires coopératif [2]. . . . .  | 11 |
| 1.6  | Principaux phénomènes de propagation . . . . .  | 12 |
| 1.7  | Trajets multiples vers le terminal mobile en mouvement [3] . . . . .  | 14 |
| 1.8  | Spectre de Jakes . . . . .  | 17 |
| 1.9  | Classification des canaux de communication en 4 classes selon comment apparait le canal de propagation de Bande de cohérence $B_c$ et Temps de cohérence $T_c$ pour un système de communication de débit symbole $D_s = 1/T_s$ et bande $B_s$ [3] . . . . . | 19 |
| 1.10 | Fonctions d'autocorrélation du AR(1)-CM, AR(2)-CM et du vrai gain du canal pour $f_dT = 10^{-1}$ $f_dT = 10^{-3}$ . . . . .   | 29 |
| 1.11 | Comparaison des comportements du AR(1) et RW(1) avec un bruit blanc Gaussien à l'entrée. . . . .  | 29 |
| 1.12 | Performance de AR(1)-CM et AR(2)-CM par rapport à la borne de Cramer-Rao Bayésienne (BCRB) [4] . . . . .  | 30 |
| 2.1  | Performance en terme d'EQM de l' AR( $p$ )-CM+ $\epsilon$ avec $\epsilon$ réglé selon [5] pour $f_dT = 10^{-3}$ et RSB = 10 dB. . . . .   | 36 |
| 2.2  | Région de stabilité du modèle AR(2) pour les pôles réels et complexes. . . . .  | 41 |
| 2.3  | Exemples de DSP d'un AR(2) pour $f_dT = 10^{-3}$ avec $f_{AR(2)}T = \frac{f_dT}{\sqrt{2}}$ et différentes valeurs de $\delta = 1 - r$ . . . . .   | 43 |
| 2.4  | Schéma du filtre de Kalman. . . . .   | 44 |
| 2.5  | Variations des coefficients du gain de Kalman $K_1$ et $K_2$ pour $f_dT = 10^{-3}$ et RSB=10dB avec $a_1 = 1.99997532$ et $a_2 = -0.99999506$ . . . . .   | 47 |
| 2.6  | Comparaison entre la valeur de $P'_{22}$ et $P_{11}$ . . . . .  | 47 |
| 2.7  | Comparaison entre la valeur de $P'_{12}$ et $P'_{21}$ . . . . .   | 48 |
| 2.8  | Gain Asymptotique (simulation et théorie (équation (2.53))) pour filtre de Kalman basé sur un modèle AR(2) en fonction de RSB pour différents $f_dT$ . . . . .  | 50 |
| 2.9  | Schéma du $L(z)$ avec $\hat{\alpha}_{(k)}$ la sortie du filtre ayant $y_{(k)}$ comme l'observation à l'entrée . . . . .   | 51 |
| 2.10 | $ L(z) $ en fonction de RSB pour $f_dT = 10^{-3}$ , pour paramètres du modèle AR(2) fixés tel que $\sigma_u = 1.4 \times 10^{-5}$ . . . . .   | 52 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.11 | $ 1 - L(z) $ en fonction de RSB pour $f_d T = 10^{-3}$ , pour paramètres du modèle AR(2) fixés tel que $\sigma_u = 1.4 \times 10^{-5}$ , avec les mêmes valeurs de $K_1$ présentés dans la figure 2.10 pour chaque RSB. . . . .                                | 53 |
| 2.12 | Schéma de l'erreur d'estimation $\epsilon_{(k)}$ en sortie, avec $\alpha_{(k)}$ et $w_{(k)}$ respectivement à l'entrée des filtres de fonctions de transfert $1 - L(z)$ et $L(z)$ . . . .  | 54 |
| 2.13 | Variation de l'EQM en fonction de $\delta = 1 - r$ pour différentes valeurs de $f_{AR(2)} T$ pour RSB = 0 dB et 20 dB. . . . .   | 61 |
| 2.14 | Les fonctions d'autocorrélation du modèle AR(2) avec les critères CM et MAV et la fonction de Bessel pour $f_d T = 10^{-3}$ et $f_d T = 10^{-4}$ pour RSB = 0 dB et 20 dB. . . . .   | 62 |
| 2.15 | Spectres du modèles AR(2) avec le critère MAV pour différentes valeurs de $f_d T$ et RSB. . . . .  | 63 |
| 2.16 | $\delta_{(MAV)} = 1 - r_{(MAV)}$ (2.73) et $\zeta_{AR(2) MAV}$ (2.74) pour différentes valeurs de $f_d T$ et RSB. . . . .  | 64 |
| 2.17 | Comparaison des EQM asymptotique des filtres de Kalman pour le AR(2)-MAV proposé avec la littérature : AR(2)-CM [6, 7], AR(2)-CM+ $\epsilon$ [5], AR(2) [8, 9], A-LMS [10], W-LMS [11], en termes de RSB pour $f_d T = 10^{-3}$ et $f_d T = 10^{-4}$ . . . . . | 66 |
| 2.18 | Comparaison entre l'EQM asymptotique du AR(2)-MAV avec la littérature, AR(2) [8,9], A-LMS [10], W-LMS [11] pour différentes valeurs de $f_d T$ et RSB = 10 dB. . . . .   | 66 |
| 2.19 | Comparaison des performances des filtre de Kalman à modèles d'état AR(1)-MAV [12], AR(2)-MAV et AR( $p$ )-CM+ $\epsilon$ avec $\epsilon$ réglé selon [5] pour $f_d T = 10^{-3}$ et RSB = 10 dB. . . . .  | 67 |
| 2.20 | Comparaison entre le TEB, en fonction du RSB, du AR(2)-MAV avec AR(1)-MAV [12], A-LMS [10], W-LMS [11] pour $f_d T = 10^{-4}$ . . . . .  | 68 |
| 3.1  | Schéma d'un canal Mobile-Mobile ("Two-rings Model") . . . . .  | 74 |
| 3.2  | Schéma d'un canal à $N$ relais mobiles en série entre la source et la destination dans des conditions de diffusion isotrope. . . . .   | 75 |
| 3.3  | Fonction d'autocorrélation d'un canal Fixe-Mobile à différentes fréquences Doppler . . . . .   | 79 |
| 3.4  | Fonction d'autocorrélation d'un canal Mobile-Mobile à différentes fréquences Doppler . . . . .   | 79 |
| 3.5  | Autocorrélation pour différents nombre de relais . . . . .   | 80 |
| 3.6  | Densité spectrale de puissance dans le cas Mobile-Mobile pour différents rapports de $f_1 T$ et $f_2 T$ . . . . .  | 82 |
| 3.7  | Comparaison des EQM asymptotique pour le AR(2)-MAV avec AR(2)-CM et l'EQM théorique établie dans (3.26) pour différentes valeurs de $B_d T$ et RSB, avec trois relais AF mobiles. . . . .  | 89 |
| 3.8  | Comparaison des EQM asymptotique du AR(2)-MAV proposé avec AR(2)-CM et AR(1)-MAV [13] pour $B_d T = 10^{-4}$ et différentes valeurs de RSB pour des communications M-M. . . . .  | 90 |
| 3.9  | Comparaison des EQM asymptotique du AR(2)-MAV proposé en fonction de nombre de relais pour différents $B_d T$ pour des communications M-M. . . . .   | 90 |

## TABLE DES FIGURES

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.10 | Comparaison du TEB, en fonction du RSB, obtenus avec AR(2)-MAV et AR(2)-CM dans le cas d'un canal M-M ou à $N$ relais mobiles pour $B_dT = 10^{-3}$ .   | 92  |
| 3.11 | Comparaison du TEB, en fonction du RSB, obtenus avec AR(2)-MAV et AR(2)-CM pour un canal M-M, $B_dT = 10^{-3}$ et différents ordres de modulation PSK.  | 93  |
| 3.12 | DDP empirique (histogramme) du module carré de $\alpha$ , $\sigma_\alpha^2 = E\{ \alpha^2 \} = 1$ , dans le cas M-M et à $N$ relais mobiles pour $N = 1, 2$ et $3$ avec un pas égal à $0,1$ . | 94  |
| B.1  | Différence entre $P'_{11}$ obtenue par simulation et l'équation (B.12) en fonction du RSB pour $f_dT = 10^{-3}$ .   | 105 |
| E.1  | Comparaison entre $ L(z) $ théorique et $ L(z) $ obtenue par simulation.  | 116 |
| H.1  | Valeurs expérimentales et approximation linéaire de $a_2$ en fonction de $f_dT$ pour RSB=0, 20, et 40 dB.   | 125 |
| H.2  | Variations de l'EQM en fonction du RSB pour différentes contraintes imposées sur $a_2$ (de type $a_2 = -1 + \gamma f_dT$ ) pour $f_dT = 10^{-3}$ .  | 126 |
| H.3  | EQM du filtre de Kalman proposé AR(2)-MAV( $-1 + \frac{2}{3}f_dT$ ) en fonction du RSB pour $f_dT = 10^{-3}$ et comparaison avec le AR(1)-MAV [12] et AR(2)-CM + $\epsilon$ [5].              | 126 |
| I.1  | Argument de la fonction dans (I.3) pour $f_1T = 10^{-3}$ et $f_2T = 3 \times 10^{-3}$ .   | 128 |
| I.2  | Argument de la fonction dans (I.3) après modification pour $f_1T = 10^{-3}$ et $f_2T = 3 \times 10^{-3}$ .  | 130 |
| I.3  | DSP de GC pour $f_1T = 10^{-3}$ et $f_2T = 10^{-3}$ .   | 131 |
| I.4  | DSP de GC pour $f_1T = 10^{-3}$ et $f_2T = 3 \times 10^{-3}$ .  | 131 |



# Liste des tableaux

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Table de comparaison entre AR(2)-MAV, AR(1)-MAV [12] et RW(2) [14]. . | 59 |
|-----|---|----|





# Table des sigles et acronymes

|                           |   |
|---------------------------|---|
| <b>2D</b>                 | Mode de diffusion bidimensionnel                              |
| <b>A-D&amp;F</b>          | Adaptive Decode-and-Forward                                   |
| <b>A&amp;F</b>            | Amplify-and-Forward   |
| <b>AR</b>                 | Modèle AutoRegréssif  |
| <b>AR(<math>p</math>)</b> | Modèle AutoRegréssif d'ordre $p$                              |
| <b>AR(1)</b>              | Modèle AutoRegréssif du premier ordre                         |
| <b>AR(2)</b>              | Modèle AutoRegréssif de second ordre                          |
| <b>AWGN</b>               | Additive white Gaussian Noise (Bruit blanc additif Gaussien)  |
| <b>A-LMS</b>              | Adaptative Least mean square                                  |
| <b>BCRB</b>               | Bayesian Cramer Rao bounds (Bornes de Cramér Rao Bayésiennes) |
| <b>CM</b>                 | Correlation Matching critertion                               |
| <b>DSP</b>                | Densité spectrale de puissance                                |
| <b>DDP</b>                | Densité De Probabilité  |
| <b>EQM</b>                | Erreur Quadratique Moyenne                                    |
| <b>E&amp;F</b>            | Equalize-and-Forward  |
| <b>EGC</b>                | Equal Gain combining  |
| <b>FAC</b>                | Fonction d'autocorrélation                                    |
| <b>F-M</b>                | lien Fixe-Mobile  |
| <b>GC</b>                 | Gain complexe   |
| <b>KF</b>                 | Kalman Filter   |
| <b>LOS</b>                | Line Of Sight (Ligne de visée)                                |
| <b>LS</b>                 | Least Square  |
| <b>LMS</b>                | Least mean square (Algorithme de moindre carré moyen)         |
| <b>MIMO</b>               | Multiple Input Multiple Output                                |
| <b>MISO</b>               | Multiple Input Single Output                                  |
| <b>M-F</b>                | lien Mobile-Fixe  |
| <b>M-M</b>                | lien Mobile-Mobile  |
| <b>MAV</b>                | Minimum Asymptotic Variance criterion                         |
| <b>ML</b>                 | Maximum Likelihood  |

|              |   |
|--------------|---|
| <b>MAP</b>   | Maximum à posteriori                          |
| <b>MMSE</b>  | Minimum mean square error estimation          |
| <b>RSB</b>   | Rapport signal à bruit                        |
| <b>RW</b>    | Random Walk (modèle de marche aléatoire)      |
| <b>RW(1)</b> | Modèle de marche aléatoire du premier ordre   |
| <b>RW(2)</b> | Modèle de marche aléatoire du second ordre    |
| <b>RW(3)</b> | Modèle de marche aléatoire du troisième ordre |
| <b>TEB</b>   | Tau d'erreur binaire                          |
| <b>UMTS</b>  | Universal Mobile Telecommunications System    |
| <b>V2V</b>   | véhicule à véhicule                           |
| <b>W-LMS</b> | Wiener-Least mean square                      |

# Table des notations

## Opérateurs

|                |   |
|----------------|---|
| $\Re$          | Partie réelle d'un nombre complexe            |
| $\mathfrak{B}$ | Opération de translation en bande de base     |
| $\mathfrak{F}$ | Transformée de Fourier                        |
| $sgn$          | Fonction signe                                |
| $ln(.)$        | Fonction logarithme à base "e"                |
| $exp(.)$       | Fonction exponentielle                        |
| $J_0(.)$       | Fonction Bessel de première espèce, d'ordre 0 |
| $\mathcal{N}$  | Loi Normale                                   |
| $\mathcal{CN}$ | Loi Complexe Normale                          |
| $[2\pi]$       | Opérateur modulo $2\pi$                       |
| $(.)^*$        | Opérateur conjuguée                           |
| $(.)^\top$     | Opérateur transpose                           |
| $(.)^\dagger$  | Opérateur conjuguée transpose                 |
| $\Sigma$       | Opérateur addition                            |
| $\Pi$          | Opérateur produit                             |
| $\otimes$      | Opérateur produit de convolution              |
| $ (.) ^2$      | Opérateur module                              |
| $\mathbb{E}$   | Opérateur espérance                           |

## Symboles

|       |                          |
|-------|--------------------------|
| $f$   | Fréquence                |
| $f_p$ | Fréquence de la porteuse |

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| $c$                                  | célérité de la lumière  |
| $d$                                  | La distance entre deux points   |
| $\Delta l$                           | Différence de longueur entre deux chemins   |
| $\Delta t$                           | Temps nécessaire pour passer entre deux points  |
| $\Delta\phi$                         | Déphasage   |
| $f_d$                                | Fréquence Doppler   |
| $\delta_d$                           | Etalement Doppler   |
| $f_{d,max}$                          | Fréquence Doppler maximale  |
| $f_{d,min}$                          | Fréquence Doppler minimale  |
| $T_c$                                | Temps de cohérence  |
| $B_c$                                | Bande de cohérence  |
| $\tau_c$                             | Etalement du retard   |
| $\tau_l(t)$                          | Retard de transmission du trajet à l'instant $t$  |
| $L_t$                                | Nombre de trajets   |
| $\rho_l$                             | Atténuation de propagation du trajet $l$  |
| $\alpha$                             | Gain complexe   |
| $\theta_l$                           | Le déphasage dû au retard de propagation du trajet $l$  |
| $B_0$                                | La bande du système   |
| $v_m$                                | Vitesse du mobile   |
| $\sigma_\alpha, \sigma_{\alpha_l}^2$ | Variance de $\alpha$ (mono-trajet) et de $\alpha_l$ du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet)                   |
| $R_\alpha, R_{\alpha_l}$             | Fonction d'autocorrélation de $\alpha$ (mono-trajet) et de $\alpha_l$ du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet) |
| $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha_l}$   | Spectre Doppler de $\alpha$ (mono-trajet) et de $\alpha_l$ du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet)            |
| $J_0$                                | Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0  |
| $\epsilon$                           | Terme de régularisation à la diagonale de la matrice de corrélation   |
| $a_1, a_2$                           | Les paramètres de réglage du AR(2)  |
| $p$                                  | Ordre du modèle AR  |
| $f_{AR(2)}$                          | Fréquence de résonance du modèle AR(2)  |
| $r$                                  | Rayon du pôle   |
| $s_{(k)}$                            | Symbole transmis à l'instant $k$  |
| $v_{(k)}$                            | Bruit à l'instant $k$   |

## Table des notations

---

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $w_{(k)}$                  | Bruit Blanc additif complexe égalisé par $s_{(k)}$  |
| $\sigma_s^2$               | Variance des symboles $s$ centrés   |
| $\sigma_v^2$               | Variance du bruit $v$ centré  |
| $\sigma_w^2$               | Variance du bruit $w$ centré  |
| $\tilde{\alpha}$           | Approximation de $\alpha$ avec le modèle AR   |
| $u_{(k)}$                  | Bruit d'état Gaussien, centré   |
| $\sigma_u^2$               | Variance du bruit $u$   |
| $\sigma_\alpha^2$          | Variance du gain complexe centré  |
| $H(z)$                     | Fonction de transfert du filtre AR(2)   |
| $S(f)$                     | Densité spectrale du modèle AR(2)   |
| $z_1, z_2$                 | Pôles de la fonction de transfert du modèle AR(2)   |
| $\Delta$                   | Discriminant de l'équation du deuxième degré  |
| $T$                        | Durée symbole   |
| $\delta$                   | Désigne la différence entre l'unité et $r$  |
| $f_{n,AR(2)}T$             | La fréquence naturelle équivalente  |
| $\zeta_{AR(2)}$            | Le facteur d'amortissement  |
| $\omega_{AR(2)}$           | Pulsation de résonance  |
| $\omega_{n,AR(2)}$         | Pulsation naturelle du modèle AR(2)   |
| $\mathbf{v}$               | Vecteur d'autocorrélation   |
| $\mathbf{x}_{(k)}$         | Le vecteur d'état à l'instant $k$   |
| $\mathbf{M}_{(k)}$         | La matrice reliant l'état précédent $\mathbf{x}_{(k-1)}$ à l'état actuel $\mathbf{x}_{(k)}$ |
| $\mathbf{c}_{(k)}$         | La commande à l'instant $k$   |
| $\mathbf{B}_{(k)}$         | La matrice qui relie l'entrée de commande à l'état $\mathbf{x}$                             |
| $\mathbf{U}$               | La matrice de covariance du bruit d'état  |
| $\mathbf{y}_{(k)}$         | L'observation à l'instant $k$   |
| $\mathbf{s}$               | Le vecteur qui relie l'état $\mathbf{x}$ à l'observation $y$                                |
| $\mathbf{w}_{(k)}$         | Le vecteur du bruit d'observation   |
| $\mathbf{R}_{(k)}$         | La matrice de covariance du bruit d'observation   |
| $\mathbf{K}_{(k)}$         | Le gain du filtre de Kalman à l'itération $k$   |
| $\hat{\mathbf{P}}_{(k k)}$ | La matrice de covariance de l'erreur de prédiction corrigée, à l'itération $k$ .            |
| $\hat{\mathbf{X}}_{(k k)}$ | Le vecteur d'état estimé après correction, à l'itération $k$                                |

|  |   |
|--|---|
| $\mathbf{P}_{(k+1 k)}$                         | La matrice de covariance de l'erreur prédite à un pas |
| $\mathbf{X}_{(k+1 k)}$                         | Le vecteur d'état prédit à un pas                     |
| $\mathbf{M}$                                   | est la matrice de transition d'état                   |
| $\mathbf{H}(k)$                                | La matrice d'observation                              |
| $\mathbf{y}(k)$                                | Le vecteur d'observation à l'instant k                |
| $\mathbf{I}$                                   | La matrice d'identité                                 |
| $L(z)$   | Fonction de transfert du Filtre de Kalman             |
| $\omega_{n,L(z)}T$                             | Pulsation propre normalisée de $L(z)$                 |
| $\zeta_{L(z)}$                                 | Facteur d'amortissement du filtre $L(z)$              |
| $\epsilon(z)$                                  | Erreur d'estimation                                   |
| $\sigma_{\epsilon_w}^2$                        | Variance d'erreur statique                            |
| $\sigma_{\epsilon_\alpha}^2$                   | Variance d'erreur dynamique                           |
| $\sigma_\epsilon^2$                            | Variance de l'erreur d'estimation                     |
| $\sigma_{u(\text{MAV})}^2$                     | Variance optimal du bruit d'état                      |
| $\sigma_{\epsilon(\text{AR}(2)-\text{MAV})}^2$ | Erreur quadratique moyenne minimale théorique         |
| $r_{(\text{MAV})}$                             | Rayon du pôle optimal                                 |
| $\zeta_{\text{AR}(2) (\text{MAV})}$            | Facteur d'amortissement optimal du processus AR(2)    |
| $\mathbf{H}_f$                                 | Matrice de méthode de contrôle optimale               |
| $\mathbf{v}_i$                                 | Vecteur propre d'indice $i$                           |
| $\mathbf{W}$                                   | Matrice des vecteurs propres                          |
| $\lambda_i$                                    | Valeur propre d'indice $i$                            |
| $\text{Pol}_{1,2}$                             | Polynôme caractéristique d'indice 1 et 2              |
| $B_l$  | Bande équivalente de bruit                            |
| $G(s)$   | Fonction de transfert de second ordre                 |
| $\omega_n$                                     | Pulsation propre du filtre $G(s)$                     |
| $BNW$  | Bande passante de bruit équivalente                   |
| $Arg$  | Argument de la fonction elliptique                    |
| $\mathbf{I}$                                   | Matrice identité                                      |
| $R_i$  | Relai numéro "i"                                      |
| $R_0$  | Relai numéro "0" ou encore source de transmission     |
| $R_{N+1}$                                      | Relai numéro "N+1" ou encore destination              |

## Table des notations

---

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $S$                       | Source de transmission (émetteur)                             |
| $D$                       | Destination (récepteur final)                                 |
| $v_i$                     | Vitesse du relai numéro "i"                                   |
| $v_0$                     | Vitesse de la source  |
| $v_{N+1}$                 | Vitesse de la destination                                     |
| $v_S$                     | Vitesse de la source  |
| $v_D$                     | Vitesse de la destination                                     |
| $r_{(k)}^{(i)}$           | Signal sortant du relai numéro "i" à l'instant "kT"           |
| $r^{(i)}$                 | Signal sortant du relai numéro "i"                            |
| $r_{(k)}^{(0)}$           | Signal émis de la source de transmission à l'instant "kT"     |
| $r_{(k)}^{(N+1)}$         | Signal reçu à la destination à l'instant "kT"                 |
| $A^{(i)}$                 | Facteur d'amplification au relai "i"                          |
| $A^{(N+1)}$               | Facteur d'amplification à la destination ( $A^{(N+1)} = 1$ )  |
| $f_i$                     | Fréquence Doppler du relai numéro "i"                         |
| $f_0$                     | Fréquence Doppler de la source                                |
| $f_S$                     | Fréquence Doppler de la source                                |
| $f_{N+1}$                 | Fréquence Doppler de la destination                           |
| $f_D$                     | Fréquence Doppler de la destination                           |
| $f_p$                     | Fréquence porteuse  |
| $f_{eq}$                  | Fréquence Doppler équivalente                                 |
| $f_{max}$                 | Fréquence maximale de $\Gamma_\alpha(f)$                      |
| $\alpha_k^{(i)}$          | Gain du lien "i" à l'instant "kT"                             |
| $\alpha$                  | Gain du canal total   |
| $\sigma_{\alpha^{(i)}}^2$ | Variance du gain du lien "i"                                  |
| $\sigma_\alpha^2$         | Variance du gain total $\alpha$                               |
| $w_{(k)}^{(i)}$           | Bruit additionné au relai numéro "i" à l'instant "kT"         |
| $w_{(k)}^{(N+1)}$         | Bruit additionné à la destination à l'instant "kT"            |
| $\sigma_{w^{(i)}}^2$      | Variance du bruit ajouté au relai "i"                         |
| $\sigma_{w^{(N+1)}}^2$    | Variance du bruit ajouté à la destination                     |
| $\sigma_w^2$              | Variance du bruit total                                       |
| $R^{F-M}$                 | Fonction d'autocorrélation dans le cas d'un canal Fixe-Mobile |



|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $R^{\text{M-M}}$               | Fonction d'autocorrélation dans le cas d'un canal Mobile-Mobile  |
| $R^{\text{relais}}$            | Fonction d'autocorrélation dans le cas d'un canal à $N$ relais mobiles                                     |
| $\Gamma^{\text{F-M}}$          | Densité spectrale de puissance pour le cas d'un canal Fixe-Mobile  |
| $\Gamma^{\text{M-M}}$          | Densité spectrale de puissance pour le cas d'un canal Mobile-Mobile  |
| $\Gamma^{\text{relais}}$       | Densité spectrale de puissance pour le cas d'un canal Mobile-Mobile  |
| $\mu_{(n)}$                    | Moment d'ordre $n$   |
| $\tilde{\mu}_{(n)}$            | Moment d'ordre $n$ normalisé par rapport à la variance du gain complexe du lien                            |
| $\mu_{(n)}^{\text{F-M}}$       | Moment d'ordre $n$ dans le cas d'un canal Fixe-Mobile  |
| $\mu_{(n)}^{\text{M-M}}$       | Moment d'ordre $n$ dans le cas d'un canal Mobile-Mobile  |
| $\mu_{(n)}^{\text{relais}}$    | Moment d'ordre $n$ dans le cas d'un canal à $N$ relais mobiles   |
| $K_{(n)}^{\text{relais}}$      | Cumulant d'ordre $n$ dans le cas d'un canal à $N$ relais mobiles   |
| $K_{(n)}^{\text{F-M}}$         | Cumulant d'ordre $n$ dans le cas d'un canal Fixe-Mobile  |
| $\tilde{K}_{(n)}^{\text{F-M}}$ | Cumulant d'ordre $n$ par rapport à la variance du gain complexe du lien dans le cas d'un canal Fixe-Mobile |
| $B_d$                          | Étalement Doppler  |
| $\mathbb{Z}^+$                 | ensemble des entiers positifs  |
| $N$                            | Nombre de relais   |
| $k$                            | Indice temporel  |
| $i$                            | Indice du relai (dans la plupart du temps)   |
| $T$                            | Temps symbole (période d'échantillonnage)  |
| $t$                            | temps  |

# Introduction générale

Dans les systèmes de communication sans fil, la transmission se fait à travers un canal dit "radio-mobile". Cela signifie qu'il y a une transmission radio fréquence de l'information entre deux terminaux fixes ou mobiles en présence de différents obstacles, qui sont donc le siège d'un phénomène de propagation multi-trajets. En cas de mobilité, les conditions de propagation varient. C'est là qu'apparaît le problème de maintien d'une communication fiable, dont dérivent les problèmes d'estimation de canal, de synchronisation (estimation du délai de propagation et du déphasage), et d'égalisation (annulation de l'effet du canal). Les techniques de traitement du signal jouent un rôle extrêmement important pour surmonter ces problèmes. Notons que les variations de phase du canal complexe équivalent en bande de base sont généralement beaucoup plus "rapides" que les variations du délai et donc le problème le plus crucial est celui de l'estimation de la phase ou du gain complexe (incluant module et phase du canal) qui sera le principal sujet de recherche dans cette thèse.

Dans cette thèse on s'intéresse à l'estimation d'un canal Fixe-Mobile (canal de Rayleigh à spectre de Jakes) et d'un canal Mobile-Mobile avec d'éventuels relais d'amplification et de retransmission (relais *Amplify and Forward*) avec un filtre de Kalman basé sur un modèle autoregressif comme modèle d'état. Nous donnons dans la suite de l'introduction un aperçu du contenu du mémoire, de la problématique traitée, et des principales contributions.

Pour bien comprendre les enjeux de la thèse, nous allons dans un premier temps (chapitre 1) présenter les systèmes de communications considérés, les caractéristiques de propagation, ainsi que le modèle du canal et ses caractéristiques statistiques telles que la distribution de son enveloppe complexe, sa fonction d'autocorrélation et sa Densité Spectrale de Puissance, afin de les prendre en compte ultérieurement. Nous présenterons aussi un bref état de l'art sur l'estimation de canal, pour rapidement se concentrer sur les méthodes basées sur le filtre de Kalman.

Il est courant d'utiliser le filtre de Kalman basé sur un modèle autoregressif d'ordre  $p$ ,  $AR(p)$  pour approcher la dynamique du vrai canal. Dans cette thèse on s'intéressera essentiellement à l'ordre  $p = 2$  ( $AR(2)$ ), étant donné que le cas  $p = 1$  a déjà été bien traité dans [13], mais ceci laisse la place à des améliorations de performance possibles.

Dans la plupart des cas, les coefficients des modèles autoregressifs sont choisis en se basant sur la coïncidence entre la fonction d'autocorrélations du vrai processus se propageant dans le canal (ce sera ce processus que l'on utilisera pour simuler le canal) et celle du processus AR approché adopté pour l'algorithme d'estimation. Ce critère est appelé

critère de coïncidence de corrélation (CM pour *correlation matching* en anglais) [5–7, 15] et la solution est obtenue en résolvant les équations de Yule-Walker [16]. Cette approche, combinée à d'autres choix de conception, a été largement utilisée dans la littérature. La méthode d'estimation résultante paraît complètement efficace dans le cas de variations (relativement) rapides du canal à l'échelle d'une période symbole. Mais cette méthode de la littérature, bien que largement utilisée, ne semble pas forcément la meilleure dans le cas pourtant le plus usuel où les variations du canal sont lentes à modérées à l'échelle du temps symbole (canal fortement corrélé entre deux symboles consécutifs).

Dans cette thèse, on traite donc ce problème d'estimation de canal radio-mobile à évanouissements lents pour le cas d'un lien Fixe-Mobile et Mobile-Mobile avec d'éventuels relais mobiles, en utilisant le filtre de Kalman basé sur le modèle AR(2).

Le chapitre 2 s'intéressera au cas d'un lien Fixe-Mobile (canal de Rayleigh à spectre de Jakes). On suggérera de remplacer le critère CM de la littérature par un nouveau critère, MAV (*Minimum Asymptotic Variance*), qui se base sur la minimisation de la variance asymptotique de l'erreur d'estimation. Pour ce faire, on étudiera le filtre de Kalman en régime asymptotique, qui est équivalent à un filtre à coefficients constants qui dépendent des 2 composantes du gain de Kalman. Nous proposerons des expressions approchées relativement simples de ces composantes (obtenues en manipulant les équations dites de Ricatti) ainsi que d'autres paramètres du système, comme le facteur d'amortissement et la bande équivalente de bruit de la fonction de transfert du filtre de Kalman asymptotique.

L'étude nous permettra d'établir les expressions des paramètres optimaux du modèle AR(2) en fonction de l'état du canal (fréquence Doppler et rapport signal sur bruit), ce qui s'avère fort utile pour régler le modèle en pratique.

Le chapitre 3 présentera les caractéristiques d'un canal Mobile-Mobile ou à  $N$  relais mobiles entre la source et la destination, puis s'intéressera à l'estimation de ce canaux. Comme nous l'avons fait pour le simple lien Fixe-Mobile, la dynamique du gain global (succession de tous les liens) sera approchée par un modèle autorégressif AR(2), et nous chercherons à nouveau à optimiser les paramètres du modèle AR(2) pour minimiser la variance d'estimation asymptotique du filtrage de Kalman (critère MAV). Les expressions analytiques pour le réglage et les performances optimales du AR(2) seront établies. Nous verrons qu'elles ne dépendent que des deuxième et quatrième moments du spectre Doppler du canal global. En utilisant des propriétés sur les moments et les cumulants, ces moments globaux seront exprimés à partir des moments des liens élémentaires qui constituent le canal global, et qui eux sont connus (pour des spectre Doppler de Jakes). En conséquence, nous fournirons des performances d'estimation de canal et une formule de réglage du filtre de Kalman AR(2) en termes de statut de la source, de la destination et des relais mobiles  $N$  (étalement Doppler et rapport signal sur bruit).

Les contributions de cette thèse tiennent premièrement en la dérivation des expressions analytiques approchées de l'erreur quadratique moyenne et du réglage optimal du modèle AR(2) sous le critère MAV, pour les cas Fixe-Mobile, Mobile-Mobile, et à  $N$  relais mobiles. Deuxièmement, de nouvelles interprétations concernant la densité spectrale de

---

puissance (DSP) du processus optimal AR(2) sont également fournies dans le cas d'un canal Fixe-Mobile. Plus précisément, l'expression analytique du facteur d'amortissement du modèle AR(2) optimal a permis d'éclairer la forme de la DSP. De plus, des interprétations concernant les fonctions d'autocorrélation sont également fournies.

Finalement, une comparaison complète des performances des algorithmes proposés avec les algorithmes couramment utilisés dans la littérature pour le suivi de canaux à évanouissements plats variant dans le temps est fournie. Le réglage proposé (critère MAV) pour le filtre de Kalman avec modèle AR(2) surpasse ceux issus de la littérature.

## Liste des publications

Ci-dessous la liste des publications liées à ce travail de thèse :

### Publications dans des journaux :

- A.H. El Hussein, E.P. Simon, L. Ros, "Second-order autoregressive model-based Kalman filter for the estimation of a slow fading channel described by the Clarke model : Optimal tuning and interpretation", **Elsevier Digital Signal Processing**.
- A.H. El Hussein, L. Ros, E.P. Simon, "Kalman filter based channel estimation for mobile to mobile and relay networks", **IEEE Signal Processing Letters**.

### Communications dans des conférences :

- A.H. El Hussein, E. P. Simon and L. Ros, "Optimization of the second order autoregressive model AR(2) for Rayleigh-Jakes flat fading channel estimation with Kalman filter," 2017 22nd International Conference on Digital Signal Processing (DSP), London, Royaume Uni.
- A.H. El Hussein, E.P. Simon, L. Ros, "Optimisation du modèle autoregressif AR(2) pour l'estimation d'un canal radio-mobile de Rayleigh-Jakes à évanouissement plat", Gretsri 2017, Juan Les pins, France.
- A.H. El Hussein, L. Ros, E.P. Simon, "Filtre de Kalman pour l'estimation des canaux Mobile-Mobile et à relais mobiles ", à soumettre à la conférence Gretsri 2019, Lille, France.



# Chapitre 1

## Contexte général

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1.1      | Organisation du chapitre  | 6         |
| <b>1.2</b> | <b>Systèmes considérés de communications sans fils</b>          | <b>6</b>  |
| 1.2.1      | Communication Fixe-Mobile                                       | 6         |
| 1.2.2      | Communication Mobile-Mobile                                     | 6         |
| 1.2.3      | Communications coopératives                                     | 7         |
| <b>1.3</b> | <b>Caractéristiques du canal de propagation</b>                 | <b>11</b> |
| <b>1.4</b> | <b>Modèle de variations des paramètres du canal Fixe-Mobile</b> | <b>13</b> |
| 1.4.1      | Modèle déterministe   | 14        |
| 1.4.2      | Modèle aléatoire  | 15        |
| <b>1.5</b> | <b>Classification des canaux</b>                                | <b>17</b> |
| <b>1.6</b> | <b>Algorithmes d'estimation du canal</b>                        | <b>20</b> |
| 1.6.1      | Classement des méthodes d'estimation                            | 20        |
| 1.6.2      | Méthodes d'estimation classiques du canal par blocs             | 20        |
| 1.6.3      | Estimation récursive  | 21        |
| <b>1.7</b> | <b>Modèles d'états et leurs réglages</b>                        | <b>24</b> |
| 1.7.1      | Modèle à marche aléatoire                                       | 25        |
| 1.7.2      | Modèle autorégressif  | 26        |
| 1.7.3      | Le critère CM   | 27        |
| 1.7.4      | Le critère MAV  | 28        |
| <b>1.8</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>30</b> |

---

## 1.1 Introduction

Le terme de communication sans fil a été introduit au 19<sup>ème</sup> siècle et la technologie de communication sans fil s'est développée au cours des années suivantes. C'est l'un des moyens les plus importants de transmission d'informations d'un périphérique à un autre. Grâce à cette technologie, les informations peuvent être transmises par voie aérienne sans câbles, fils ou autres conducteurs électroniques, en utilisant des ondes électromagnétiques.

Les systèmes de communication sans fil ont gagné une énorme popularité par rapport aux systèmes câblés, principalement parce qu'ils sont beaucoup moins coûteux à mettre en œuvre. Par ailleurs, dans des endroits où l'environnement entrave le déploiement du câble, la connexion radio reste le seul moyen de communication. En revanche, il est plus difficile pour un système d'ingénierie de maintenir une communication fiable sur les canaux sans fil (transmission en radio-fréquence). Le phénomène de propagation multi-trajet entraîne le plus souvent des situations hostiles et imprévisibles avec le moindre petit changement dans l'environnement.

C'est là qu'apparaît le problème de maintien d'une communication fiable, dont dérivent les problèmes d'estimation du gain complexe du canal (le thème de cette thèse), de synchronisation et d'égalisation. Les techniques de traitement du signal jouent un rôle important pour surmonter ces problèmes. Dans ce chapitre on présente une vue générale sur ces problèmes et les méthodes utilisées pour les résoudre.

### 1.1.1 Organisation du chapitre

Ce chapitre sera divisé en plusieurs parties. Dans un premier temps, on présente les systèmes de communications sans fils considérés dans cette thèse. Ensuite, les caractéristiques du canal de propagation seront présentées dans la section 1.3. Puis dans la section 1.4, on présente le modèle de variation du canal Fixe-Mobile. L'évanouissement par trajets-multiples ou à court terme sera présenté dans la section 1.5. ainsi que les algorithmes d'estimation du canal, puis les modèles d'états utilisés et leurs réglages, respectivement dans les sections 1.6 et 1.7, avant de finir par une conclusion.

## 1.2 Systèmes considérés de communications sans fils

Plusieurs types de systèmes de communications sans fils peuvent être considérés selon la mobilité des entités du système. Dans cette section, on présente les systèmes des communications étudiés dans cette thèse.

### 1.2.1 Communication Fixe-Mobile

Les communications Fixe-Mobile (F-M) sont par exemple les communications cellulaires, où une liaison radio entre le téléphone mobile (M) et une antenne fixe (F) généralement installée sur un pylône ou un bâtiment.

Les communications F-M suivent le principe général de la téléphonie : relier deux utilisateurs distants en passant par l'équipement réseau d'un opérateur chargé de gérer le service.

### 1.2.2 Communication Mobile -Mobile

Dans le cas des systèmes de communication mobile à mobile (M-M), toutes les entités sont en mouvement. Le récepteur et le transmetteur sont en général équipés d'antennes de basses élévations et sont entourés par des diffuseurs locaux.

Les communications M-M sont par exemple les communications véhiculaires. Dans les communications de véhicule à véhicule (V2V), l'émetteur et le récepteur sont à la même

hauteur et dans des environnements similaires. Comme pour tout autre système de communication, le développement de système de communication M-M nécessite la connaissance des caractéristiques du canal de propagation. Les propriétés des canaux M-M sont différentes de celles des canaux F-M. Dans les systèmes M-M, la source et la destination sont mobiles et se déplacent avec leur diffuseurs. Ceci signifie que le canal M-M est très dynamique et les fluctuations sont beaucoup plus rapides.

Dans le cas où une liaison directe n'est pas possible entre les deux entités mobiles, une communication coopérative peut maintenir la liaison entre les terminaux mobiles. Dans la section suivante on présente une vue générale sur les communications coopératives.

### 1.2.3 Communications coopératives

#### 1.2.3.1 Motivation pour les communications coopératives

La demande incessante de données dans les réseaux sans fil a révélé certaines contraintes de communication. En effet, les liens sans fil ont toujours présenté une limite en largeur de bande plus faible que celle des liens filaires. Les nouvelles technologies comme les systèmes multi-antennes MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output* en anglais) augmentent la largeur de bande grâce au multiplexage spatial, et améliorent la fiabilité (et la portée) du lien sans-fil en exploitant le codage spatio-temporel et la directivité des antennes (*beam-forming* en anglais). Mais, toutes ces améliorations sont réalisées au prix de plusieurs composantes radio-fréquences à l'émetteur et au récepteur. De plus, la taille des équipements mobiles peut limiter le nombre d'antennes à déployer. Même si la technologie MIMO est faisable, d'autres contraintes concernant l'allocation des bandes de fréquences aux usagers sont rencontrées dues à des raisons historiques et de régulation. Avec cette limitation, les bandes de fréquences libres présentent beaucoup d'interférences à cause du grand nombre d'usagers. Afin de résoudre ces problèmes, la notion de coopération entre les usagers est introduite dans les réseaux sans-fil.

Dans une communication coopérative, plusieurs nœuds relais (R) opèrent conjointement avec le nœud source (S) afin de transmettre les informations à la destination. Les techniques de coopération profitent de la propriété de diffusion des signaux sans-fil. Le fait que le signal d'une source vers une destination puisse être écouté par les nœuds voisins permet à ces derniers de traiter le signal écouté et le transmettre vers la destination.

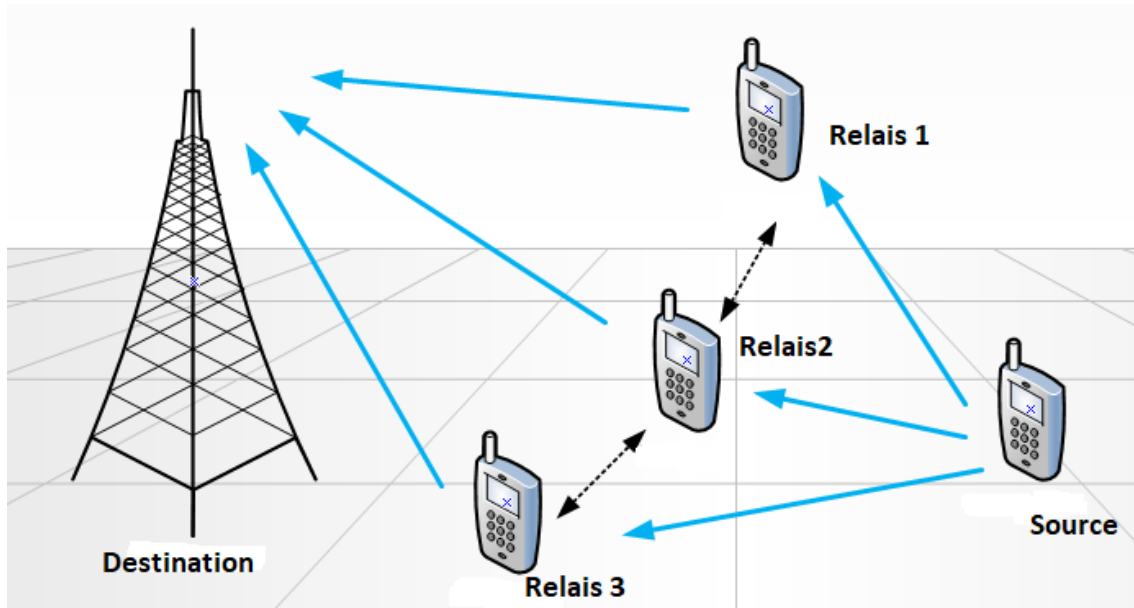
Par conséquent, la communication coopérative est apparue comme une nouvelle dimension de la diversité pour imiter les stratégies conçues pour de multiples antennes, puisqu'un appareil mobile sans fil peut ne pas être en mesure de prendre en charge plusieurs antennes d'émission en raison de la taille, du coût ou de limitations matérielles. En exploitant la nature du canal de propagation, la communication coopérative permet aux entités à une seule antenne de partager leurs antennes pour former un réseau d'antennes virtuelles et offrir des améliorations significatives en termes de performances. Ceci entraîne une augmentation de la puissance du signal et de sa qualité par rapport à une simple communication.

En résumé, dans les communications coopératives, le signal envoyé par la source arrive à la destination par divers chemins via des nœuds relais. Plusieurs types de relais existent, ces types seront présentés dans la section suivante.

---

1. Cette figure est inspirée de [17]



FIGURE 1.1 – Communication coopératives à bases de relais<sup>1</sup>

### 1.2.3.2 Types de relais

#### 1. Amplify and forward (A&F)

Les relais A&F sont la classe la plus simple des communications coopératives. Dans cette technique, la source envoie des informations à la destination en utilisant un relais qui capture une partie de la transmission de la source, l'amplifie et retransmet sans autre traitement [18].

Un des inconvénients du relais A&F en particulier à des faibles rapports signaux à bruit (RSB) est que le bruit est amplifié avec le signal utile.

#### 2. Decode and forward (D&F)

Les relais D&F décodent et recodent le signal reçu, puis le transmettent à la destination [19]. Ils suppriment le bruit en décodant les signaux reçus, puis en régénérant et en recodant le signal à transmettre à la destination.

Un des inconvénients de ce type est la propagation d'erreur qui peut survenir si le relais détecte/décodé incorrectement un message et transmet cette information incorrecte à la destination.

#### 3. Adaptive Decode and forward (A-D&F)

Le relais A-D&F transmet le signal à la destination uniquement s'il est capable de décoder le signal correctement. Le choix correct peut être vérifié en utilisant un contrôle de détection d'erreur ou un seuil de rapport signal à bruit (RSB) [20].

Un cas particulier est celui où le relais détecte le signal mais ne le décode pas. Dans ce cas, le schéma est appelé détecter et transférer (*detect-and-forward*).

### 4. Equalize and forward (E&F)

Le relais E&F égalise le canal entre la source et le relais avec les informations de canal précises pour éliminer l'accumulation de la distorsion par trajets multiples entre les nœuds source et relais, ce qui ne peut être réalisé par le relais A&F traditionnel.

Les relais A&F sont les relais considérés dans cette thèse.

#### 1.2.3.3 Architecture des réseaux coopératifs

Plusieurs topologies et configurations de réseaux existent. Parmi ces configurations, la plus simple est celle constituée d'une station source (mobile ou non), une destination (mobile ou non) et un relais (mobile ou non). Un réseau de relais coopératif peut avoir les architectures suivantes [21] :

- Architecture série : dans une architecture en série du relais coopératif, les relais de réseau sont connectés en série les uns aux autres comme présenté dans la figure 1.2.

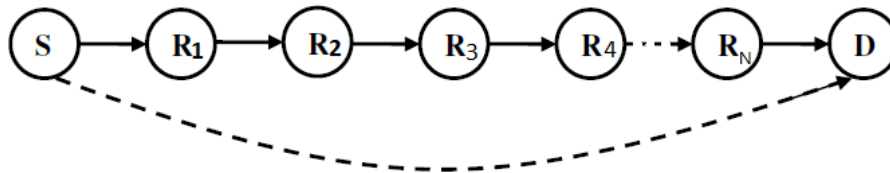


FIGURE 1.2 – Architecture série du réseau à relais multiples.

- Architecture parallèle : le réseau de relais coopératif à architecture parallèle se compose de chemins de relais parallèles comme dans la figure 1.3.

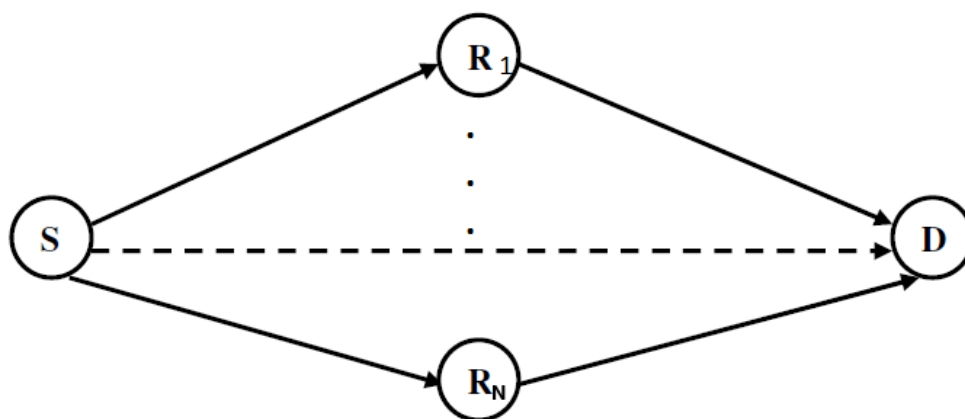


FIGURE 1.3 – Architecture parallèle du réseau à relais multiples.

- Architecture hybride : dans cette architecture, le réseau de relais coopératif se compose de chemins de relais série et parallèle, comme présenté dans la figure 1.4.

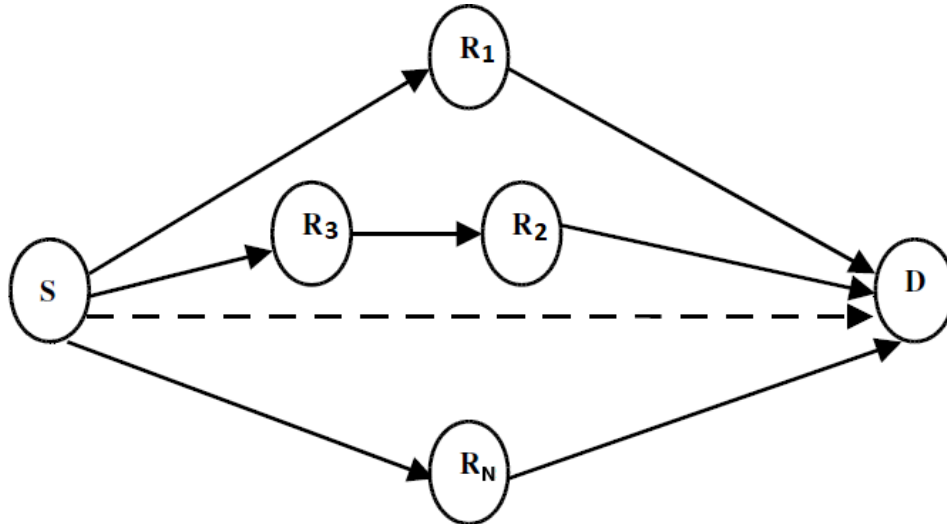


FIGURE 1.4 – Architecture hybride du réseau à relais multiples.

#### 1.2.3.4 Application des communications coopératives aux communications véhiculaires

À l'instar d'autres réseaux sans fil, la communication coopérative dans les communications véhiculaires a également été mise à profit pour offrir diverses améliorations comme l'efficacité spectrale, la fiabilité accrue de la transmission et le délai de transmission réduit [22]. Le réseau véhiculaire coopératif permet aux véhicules voisins de coopérer les uns avec les autres en partageant des informations sur différentes couches du réseau, de manière à disposer de plusieurs alternatives de transmission pour une communication robuste. Les véhicules peuvent coopérer entre eux directement ou via une infrastructure routière.

Le nœud relais peut fonctionner dans différents modes de transmission, tels que l'amplification et la retransmission (A&F), le décodage et le transfert (D&F), etc...

La figure 1.5 montre une illustration simple du réseau véhiculaire coopératif où la coopération est effectuée de différentes manières. Par exemple, un véhicule peut fournir une assistance à d'autres véhicules en cas d'échec des transmissions, comme illustré à la figure 1.5-(a). De même, un véhicule peut aider une station de base à relayer ses paquets à d'autres véhicules, qui sont hors de la portée de transmission de la station de base (Figure 1.5-(b)).

Les systèmes de communications que nous avons considérés utilisent des ondes radio-électriques avec émetteurs ou/et récepteurs mobiles, en présence de relais dans certains cas. Les perturbations du canal de communication de tels systèmes peuvent être dues à plusieurs phénomènes. Afin de restituer au mieux l'information numérique, une connaissance des caractéristiques et des propriétés du canal doit être assurée. Dans la section suivante on présente les caractéristiques du canal de propagation.

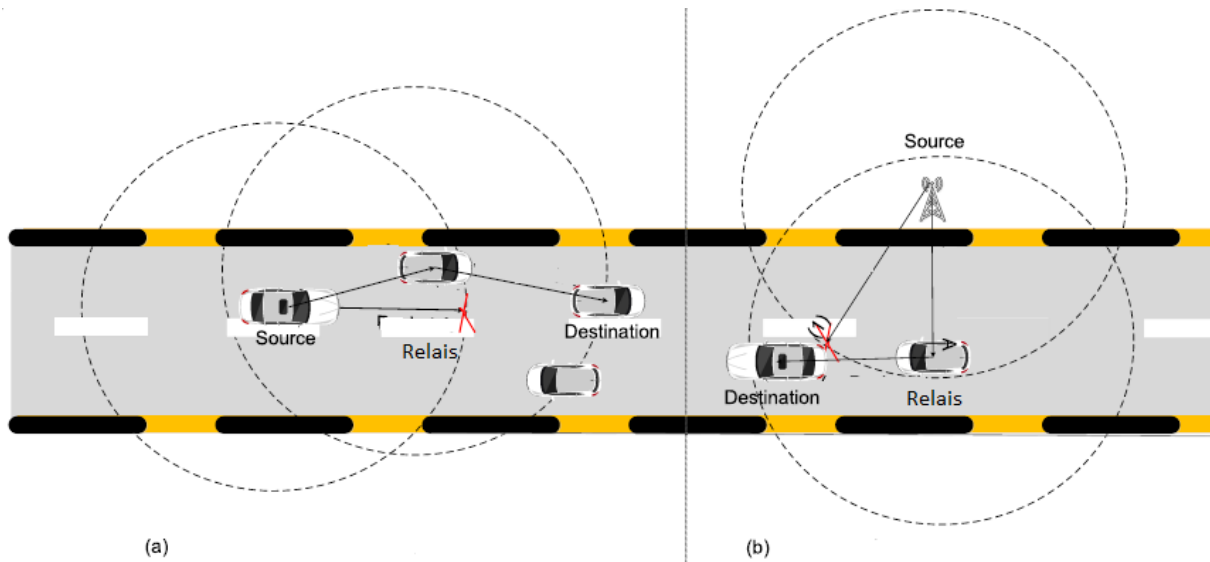


FIGURE 1.5 – Illustrations simples de réseau véhiculaires coopératif [2].

### 1.3 Caractéristiques du canal de propagation

Dans un environnement réel, les ondes électromagnétiques se propagent en empruntant plusieurs trajets de propagation. Le signal obtenu au niveau de l'antenne réceptrice correspond à une re-combinaison de ces ondes qui subissent différents effets suivant la nature de l'interaction entre l'onde et l'élément de l'environnement. Dans un canal de propagation avec une visibilité directe, appelé LOS (*Line Of Sight* en anglais), l'onde se propage en ligne droite. Une condition LOS n'est pas toujours vérifiée dans un environnement réel : plusieurs phénomènes de propagation tels que la réflexion ou la diffraction peuvent apparaître et interviennent dans la qualité de réception. La figure 1.6 illustre les principaux phénomènes de propagation radio qui peuvent intervenir :

- La réfraction : la réfraction est observée quand une onde traverse un mur, une cloison, etc .... L'onde qui traverse ces obstacles subit un affaiblissement de puissance et est déviée dans une autre direction. La plupart des modèles de propagation radio mobile ne tiennent pas compte des absorptions dues aux corps humains et aux arbres. Ces effets deviennent importants dans le cas de la propagation des ondes millimétriques.

- La transmission : si le milieu où intervient la réflexion n'est pas totalement radio opaque, une partie de l'onde incidente traverse le matériau selon un mécanisme de transmission. Pour la plupart des matériaux de construction présents dans les environnements intérieurs, l'onde transmise subit alors un affaiblissement qui peut être important. On peut noter que pour un matériau donné, l'affaiblissement et la direction du signal transmis dépendent de la longueur d'onde, en raison de la variation de la permittivité diélectrique du matériau. Enfin, dans un élément de type cloison, des réflexions multiples peuvent se produire à l'intérieur de la cloison.

- La diffraction : ce phénomène a lieu lorsqu'une onde rencontre une surface ou une arête de dimensions grandes par rapport à la longueur d'onde ou sur des obstacles dont

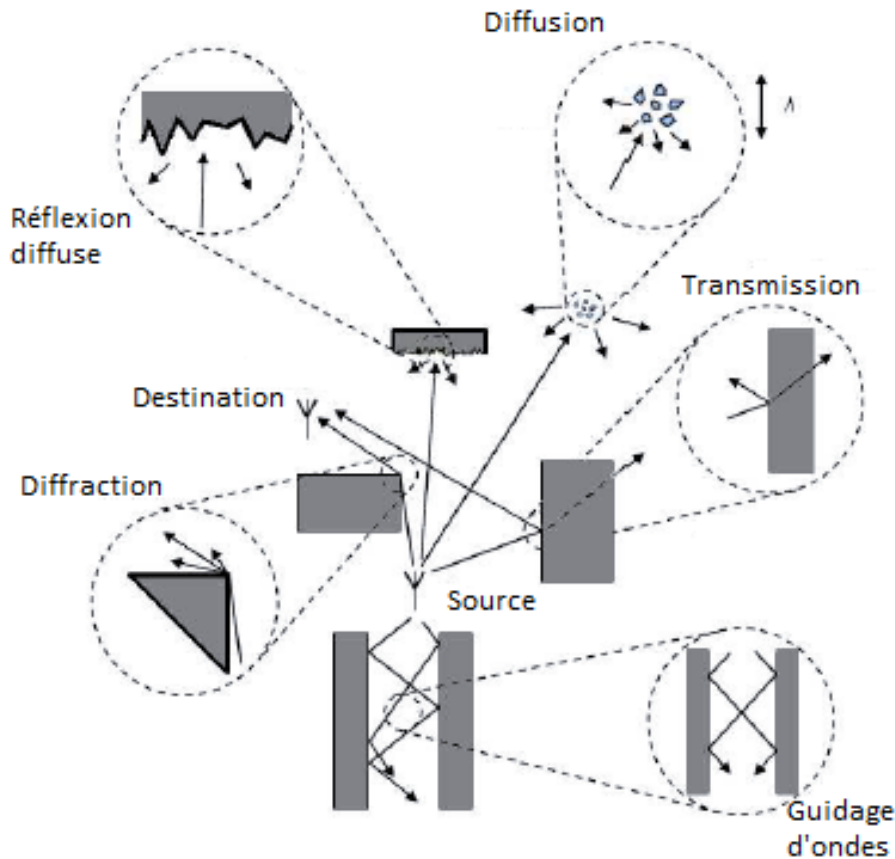


FIGURE 1.6 – Principaux phénomènes de propagation

certaines dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde. L'onde ne sera pas entièrement arrêtée par cet obstacle, mais une partie de son énergie électromagnétique contournera l'obstacle. Il y a changement de direction de la propagation. La diffraction apparaît lorsque la liaison entre l'émetteur et le récepteur est gênée par une surface qui a des parties anguleuses. L'énergie transmise par ces sources permet au signal de se propager dans les zones d'ombre, expliquant ainsi que les ondes radio arrivent au niveau du récepteur en l'absence de visibilité directe ou de l'intervention d'autres types d'interaction.

- La diffusion : la diffusion a lieu quand une onde se propage vers des surfaces de dimensions du même ordre de grandeur ou plus petites que la longueur d'onde, ou avec des irrégularités plus petites que la longueur d'onde. Chaque irrégularité va créer une onde diffractée. Dans ce cas, l'onde est re-distribuée dans toutes les directions avec différentes atténuations. Nous pouvons par exemple trouver ce phénomène de propagation des ondes en présence d'arbres placés au milieu du trajet de transmission.

- Les effets des ondes guidées : l'effet de guidage apparaît dans un couloir et dans un tunnel par exemple. Dans cette situation, les ondes se propagent suivant la direction du guide. Les réflexions successives sur deux obstacles parallèles provoquent un déplacement global des ondes électromagnétiques selon la direction de guidage. La structure métallique d'un véhicule et le sol peuvent également constituer un guide d'onde comme nous le verrons

par la suite.

Le signal transmis subit les pertes de propagation dues à la distance, les atténuations induites par les obstacles qu'il trouve sur son parcours et les évanouissements suscités par l'existence de trajets multiples. De ce fait, le signal reçu est une combinaison de plusieurs trajets dont les amplitudes, les déphasages, les décalages Doppler et les retards diffèrent.

Les différentes formes de propagation ont été présentées ainsi que les signaux arrivant au récepteur depuis l'émetteur via divers trajets. Donc des interférences multiples peuvent être présentes causant des évanouissements sur plusieurs trajets. D'une manière générale, le phénomène qui se traduit par une variation de la puissance instantanée du signal mesurée à la réception, en fonction du temps ou de la distance qui sépare l'émetteur du récepteur, est connu sous le nom d'évanouissement (*fading* en anglais).

D'après cette définition, on peut classer les évanouissements des canaux radio mobile en deux catégories, qui peuvent se cumuler selon l'échelle de distance (ou de temps) d'observation en deux catégories : « évanouissement à long terme » et « évanouissement à court terme ». L'évanouissement à long terme se manifeste lorsque le déplacement (ou variation de distance) entre l'émetteur et le récepteur est important devant la longueur d'onde. Il est généralement causé par l'obstruction des ondes par les obstacles (immeubles, forêts, collines, etc.) ou à la forme du terrain. En pratique, cet évanouissement est modélisé d'après des équations qui déterminent « l'affaiblissement de parcours » (*path-loss*). Statistiquement, de nombreuses études le caractérisent comme une variable aléatoire de loi log-normale qui vient apporter une certaine incertitude à l'atténuation. L'évanouissement à court terme se réfère à l'évolution spectaculaire de l'amplitude et de la phase du signal sur une courte période de temps, ou un déplacement inférieur ou de l'ordre de la longueur d'onde. Cette variation rapide est due aux trajets multiples générés par les divers réflecteurs et diffuseurs de la liaison, comme nous l'avons décrit précédemment. Le moindre mouvement du mobile engendrera de très fortes fluctuations d'amplitude de l'enveloppe du signal reçu. Statistiquement, ces fluctuations d'enveloppe à court terme sont généralement caractérisées par une loi de Rayleigh ou de Rice. La première correspond généralement au milieu urbain, quand il n'y a pas une ligne visuelle directe (NLOS pour *Non line-of-sight* en anglais), tandis que la seconde correspond au milieu rural, quand il y a une ligne visuelle directe (LOS). Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux évanouissements à court terme dus aux trajets multiples, car ce sont les plus problématiques pour l'estimation du canal. La section suivante présente les modèles de variation des paramètres du canal.

## 1.4 Modèle de variations des paramètres du canal Fixe-Mobile

En raison des dispersions et des réflexions sur les obstacles du milieu de propagation, le signal reçu  $r(t)$  est formé par une superposition de versions retardées et atténuées du signal émis  $s(t)$ . Le signal reçu en bande de base (équivalent complexe) s'écrit donc :

$$r(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) s(t - \tau_l(t)) + n(t)$$

—  $L_t$  est le nombre de trajets.

- $\tau_l(t)$  est le retard de propagation associé au  $l$ -ème trajet.
- $\alpha_l(t) = |\alpha_l(t)| \cdot e^{j\phi_l(t)}$  est l'amplitude ou gain complexe associé au  $l$ -ème trajet avec  $\phi_l(t)$  est la phase du trajet  $l$ .
- $n(t)$  bruit à la réception.

Le modèle du canal est donc représenté comme un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) évolutif au cours du temps. Notons que si le récepteur est fixe, les paramètres du canal  $\{\alpha_l(t), \tau_l(t)\}$  sont invariants dans le temps. Le modèle du canal en bande de base décrit le caractère statique du canal. Lorsque le terminal mobile se déplace, le modèle du canal devient un filtre évolutif  $h(t, \tau)$  avec les paramètres du canal physique qui varient en fonction du temps. Par conséquent le modèle de canal s'écrit :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)) \quad (1.1)$$

### 1.4.1 Modèle déterministe

Dans ce modèle, un mouvement uniforme du terminal mobile est supposé, avec une vitesse constante  $v_m$  sur la durée du symbole, en associant un angle d'arrivée  $\theta_l$  par rapport à la direction du déplacement pour chaque trajet. Ce modèle n'est pas suffisant pour décrire complètement la réalité d'une transmission en radio-mobile mais présente surtout l'avantage de donner les ordres de grandeur de variation des paramètres et pour appréhender les phénomènes. Utiliser le modèle de déplacement uniforme du mobile comme modèle

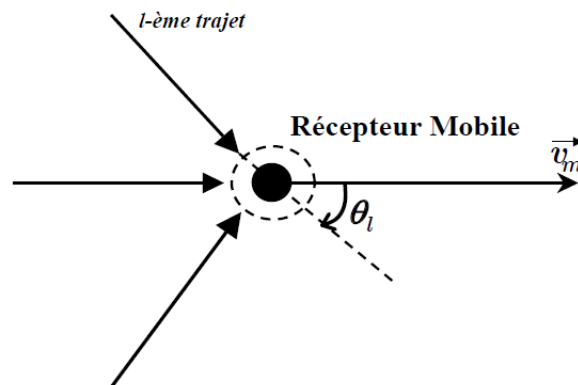


FIGURE 1.7 – Trajets multiples vers le terminal mobile en mouvement [3]

d'évolution permet de décrire les variations des paramètres de retard et de phase mais ne tient pas compte des variations de l'atténuation d'espace du trajet en champ lointain. Ces variations sont considérées comme négligeables tant que la durée d'étude du mouvement est courte, soit de l'ordre d'une durée symbole. Pour ce modèle et pour quelques longueur d'ondes  $\lambda$  le retard de propagation relatif au  $l$ -ème trajet varie linéairement en fonction du temps comme :

$$\tau_l(t) = \tau_l(0) + \Delta_l \times t, \quad (1.2)$$

avec  $\Delta_l = \frac{v_m}{c} \cos(\theta_l) \in [-v_m/c, +v_m/c]$ , où  $c$  est la célérité de la lumière et  $\theta_l$  angle d'arrivée du trajet  $l$  orienté relativement à  $\vec{v}_m$ .

## 1.4 Modèle de variations des paramètres du canal Fixe-Mobile

La variation linéaire du retard entraîne un déphasage linéaire de la phase :

$$\phi_l(t) = \phi_l(0) - 2\pi f_d \cos(\theta_l)t \quad (1.3)$$

avec  $f_d = \frac{v_m f_p}{c}$  la fréquence Doppler maximale.

Les ordres de grandeurs de la phase et du retard sont donnés dans l'exemple suivant. Considérant un seul trajet arrivant au mobile (une onde plane) avec un éloignement uniforme du mobile. A titre d'exemple dans le système UMTS [23] où  $f_p = 2$  GHz, pour  $v_m = 500$  km/h on a  $f_d < 926$  Hz et  $\Delta_l = +4,6 \cdot 10^{-7}$  avec la bande  $B = 5$  MHz ( $1/B = 200$  ns). Durant  $T = 1$  ms on a une transmission de 250 symboles dans un déplacement  $d < \lambda = 15$  cm, un délai  $\tau_l$  quasi-constant vis-à-vis de  $(1/B)$  avec  $\delta\tau_l < 0.46$  ns et une phase à variation linéaire non négligeable  $\delta\phi_l < 334^\circ$ .

Pour une émission de plusieurs centaines de symboles sur laquelle est réalisée l'estimation de canal, les retards des trajets pourront toujours être considérés comme fixes vis-à-vis de la durée symbole. En revanche, compte tenu de la fréquence porteuse élevée, un déplacement infime pourra entraîner des variations non négligeables de phase, et par conséquent des variations non négligeables du GC. De ce fait, pour l'estimation du canal, il faudra donc réaliser une première estimation des retards au début de la communication, mais il ne sera pas forcément nécessaire de prévoir une mise à jour de cette estimation. Par contre, un suivi des GCs du canal devra être mis en place. Le modèle dynamique de la réponse impulsionnelle du canal au cours du temps en bande de base devient ainsi avec les  $\tau_l$  fixes :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l) \quad (1.4)$$

### 1.4.2 Modèle aléatoire

La modélisation la plus classique du canal est de considérer que sa réponse impulsionnelle est stationnaire au sens large et que les diffuseurs sont non corrélés . Ce modèle a été introduit par [24].

#### 1.4.2.1 Loi de distribution des amplitudes complexes

Afin d'obtenir la loi des coefficients  $\alpha_l(t)$  associée au trajet  $l$  , il est nécessaire d'introduire la notion de cluster (groupe de micro-trajets) associé à un retard  $\tau_l$  . En effet, la zone de réception du terminal mobile comprend souvent des diffuseurs proches transformant un trajet donné en un groupe de micro-trajets ayant des différences de marche très faibles et donc quasiment le même retard  $\tau_l$  mais avec des différences de phases quelconques. Ainsi, le coefficient de chaque trajet  $l$  correspond à la superposition de tous les coefficients des micro-trajets du cluster  $l$  [25] :

$$\alpha_l(t) = \rho_l(t) \cdot e^{j\phi_l(t)} = \sum_n \rho_{l,n} e^{j\phi_{l,n}(t)} \quad (1.5)$$

où  $\rho_{l,n}$  et  $\phi_{l,n}$  sont respectivement le module et la phase du  $n$ ième micro-trajet du cluster  $l$  ( $\alpha_l(t)$ ).

Lorsqu'un trajet  $l$  correspond à une multitude de micro-trajets incohérents, la densité de probabilité du coefficient correspondant  $\alpha_l(t) = \rho_l(t) \cdot e^{j\phi_l(t)}$  est gaussienne complexe en application du théorème de la limite centrale. on déduit de [26] que :



- les parties réelles et imaginaires de  $\alpha_l(t)$  sont des variables gaussiennes non corrélées de variance  $\sigma_{\alpha_l}^2$ .
- le module de  $\rho_l$  des coefficients suit la loi de Rayleigh :

$$p(\rho_l) = \begin{cases} \frac{\rho_l^2}{\sigma_{\alpha_l}^2} e^{-\frac{\rho_l^2}{\sigma_{\alpha_l}^2}} & \text{pour } \rho_l \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

- la phase  $\phi_l(t)$  des coefficients est uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$ .
- la puissance instantanée du trajet  $l$ ,  $\rho_l^2 = |\alpha_l|^2$  suit une loi du Chi2 à 2 degrés de liberté, qui est équivalente à la loi exponentielle. On a donc une forte probabilité que la puissance instantanée du trajet ait une valeur proche de 0, d'où le phénomène de "fading".

Lorsque la liaison directe est disponible, l'enveloppe du signal reçu en réponse à une porteuse non modulée suit une loi de Rice au lieu d'une loi de Rayleigh. Cette situation correspond généralement au milieu rural, alors que l'absence de trajet direct est la situation la plus courante dans les milieux urbains.

#### 1.4.2.2 Spectre Doppler associé à chaque trajet

Le caractère dynamique de chaque trajet est mesuré par sa fonction d'autocorrélation temporelle :

$$R_{\alpha_l}(\Delta t) = E\{\alpha_l(t)\alpha_l^*(t - \Delta t)\} \quad (1.7)$$

Un spectre Doppler est associé à chaque trajet, et est lié à la fonction d'autocorrélation à travers la transformée de Fourier :

$$\Gamma_{\alpha_l}(f) = \mathfrak{F}\mathfrak{F}\{R_{\alpha_l}(\Delta t)\} \quad (1.8)$$

Dans un environnement isotrope, les micro-trajets proviennent de toutes les directions avec une équi-probabilité : l'angle  $\theta$  a une distribution uniforme sur  $[0, 2\pi]$ , avec  $p(\theta) = 1/2\pi$ . Il s'en suit, après calcul [27], que la fonction d'autocorrélation est :

$$R_{\alpha_l}(\Delta t) = \sigma_{\alpha_l}^2 J_0(2\pi f_d \Delta t) \quad (1.9)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. Le spectre Doppler de  $\alpha$  exprimé en bande de base s'écrit alors [28] :

$$\Gamma_{\alpha_l}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha_l}^2}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} & \text{si } |f| < f_d \\ 0 & \text{si } |f| \geq f_d \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce spectre Doppler est appelé spectre de "Jakes", ou spectre de "Clarke-Jakes", ou encore spectre en "U", en raison de sa forme donnée par la figure 1.8.

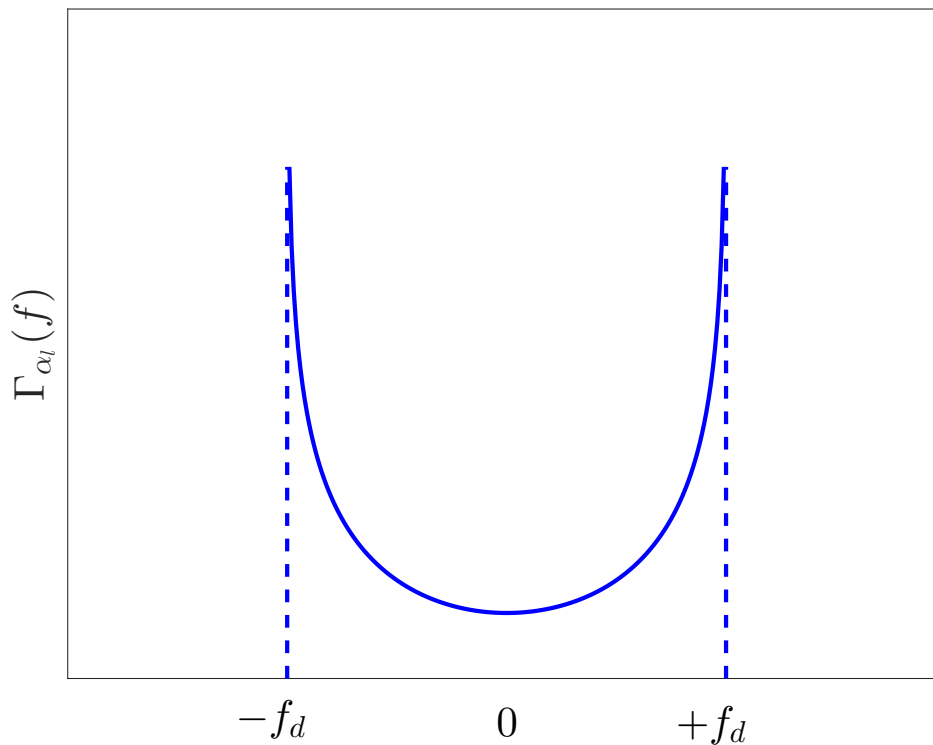


FIGURE 1.8 – Spectre de Jakes

## 1.5 Classification des canaux

Dans cette section, nous présentons une classification classique des canaux de communications en fonction des paramètres du canal et des paramètres du système de communication. Les paramètres du système de communication sont la bande passante et la période symbole, et les paramètres du canal sont l'étalement des retards et l'étalement Doppler. L'étalement des retards correspond à la différence de temps entre le premier signal d'arrivée et le dernier. La bande de cohérence mesure le support de corrélation fréquentielle des amplitudes du canal, et est définie comme l'inverse de l'étalement des retards :

$$B_c = \frac{1}{\tau_c} \quad (1.11)$$

Le temps de cohérence mesure le support de corrélation temporelle des amplitudes du canal (ou constante de temps d'évolution du canal) et est défini comme l'inverse de l'étalement Doppler  $\delta_d$  :

$$T_c = 1/\delta_d \quad (1.12)$$

Dans le canal à trajet multiples, l'étalement du retard provoque la sélectivité en fréquence (sélectif ou plat) du canal de communication, et l'étalement Doppler provoque la variation temporelle (lente ou rapide) du canal de communication. La classification des

canaux de communication selon les relations entre paramètres physiques du canal et les paramètres du système de communication est illustrée dans la Figure 1.9.

### 1) Canal plat en fréquence

Ce type d'évanouissement se produit lorsque la bande passante du signal transmis est très inférieure à la bande de cohérence du canal. De manière équivalente pour un système travaillant à bande minimale vis à vis du critère de Nyquist ( $B_s = 1/T_s$ ), si la durée symbole du signal  $T_s$  est plus grande que l'étalement des retards, le canal est dit plat en fréquences. Donc, nous pouvons dire que le canal plat en fréquences se produit si :

$$B_s \ll B_c \quad (1.13)$$

où  $B_s$  est la bande du signal.

Et cette condition peut aussi être exprimée en temps :

$$T_s \gg \tau_c \quad (1.14)$$

avec  $\tau_c$  l'étalement des retards. Et dans un tel cas, le canal a un gain constant en fréquence et un déphasage linéaire.

### 2) Canal sélectif en fréquence

Le canal sélectif en fréquence se produit lorsque la bande du signal est supérieure à la bande de cohérence du canal. De manière équivalente pour un système travaillant à bande minimale vis à vis du critère de Nyquist ( $B_s = 1/T_s$ ), la durée du symbole du signal est inférieure à l'étalement du retard,

$$B_s > B_c \quad (1.15)$$

ou,

$$T_s < \tau_c \quad (1.16)$$

Dans ce cas, les signaux transmis arrivent au récepteur en tant que des signaux retardés et des copies atténuées. Un tel canal produit des interférences entre symboles.

### 3) Canal à variation rapide

Dans le canal à variation rapide, la réponse impulsionnelle du canal (RIC) change rapidement pendant la durée du symbole. L'étalement Doppler provoque un décalage fréquentielles des signaux. Par conséquent, un canal à variations rapides se produit si,

$$T_s > T_c \quad (1.17)$$

ou,

$$B_s < \delta_d \quad (1.18)$$

où  $\delta_d$  est l'étalement Doppler. La variation rapide du canal de communication peut se produire lorsque le débit de donnée est faible ou/et que l'étalement Doppler est important.

### 4) Canal à variation lente

Dans le canal à évanouissement lent ou à variation lente, la RIC change très lentement. Nous pouvons considérer un canal à évanouissement lent dans lequel la RIC est presque constante sur au moins un durée symbole si,

$$T_s \ll T_c \quad (1.19)$$

## 1.5 Classification des canaux

avec  $T_c$  le temps de cohérence du canal, ou,

$$B_s \gg \delta_d \quad (1.20)$$

nous observons que les canaux à variations rapide ou lente dépendent de la vitesse des récepteurs.

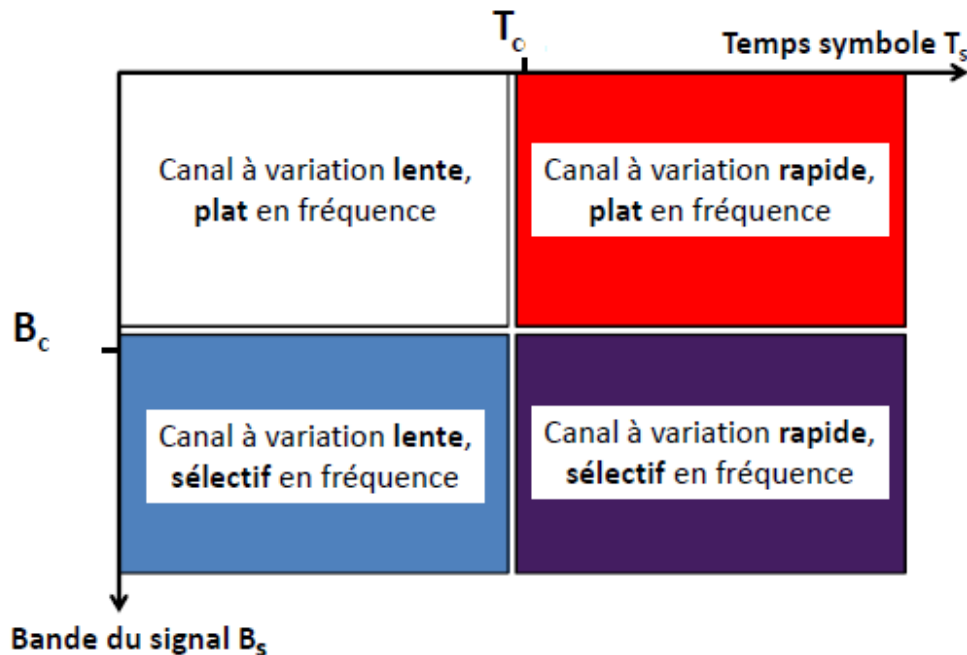


FIGURE 1.9 – Classification des canaux de communication en 4 classes selon comment apparaît le canal de propagation de Bande de cohérence  $B_c$  et Temps de cohérence  $T_c$  pour un système de communication de débit symbole  $D_s = 1/T_s$  et bande  $B_s$  [3]

Dans cette thèse nous traitons le canal à variation lente et plat en fréquence (canal mono-trajet), ce qui correspond à la zone blanche de la figure. De plus, nous considérerons un modèle discret, c'est-à-dire après échantillonnage à la réception. Le signal reçu devient donc :

$$r(k) = \alpha(k)s(k) + v(k) \quad (1.21)$$

où  $k$  est l'indice temporel. La notation  $r(k)$  signifie l'évaluation de  $r(t)$  à l'instant  $kT_s$ .  $s(k)$  est le symbole transmis et  $v(k)$  un bruit blanc additif Gaussien. Ce modèle de canal plat, en apparence très simple, représente malgré tout un réel défi concernant l'estimation de son gain complexe (GC)  $\alpha(k)$ , comme nous le verrons par la suite. De plus, les résultats obtenus avec ce modèle trouvent une application directe dans d'autres contextes plus proches des standards existants, comme la modulation multiporteuse OFDM qui consiste à juxtaposer en fréquence un grand nombre de communications bandes étroites, pour lesquelles le canal est également considéré comme plat [29]. Ils peuvent aussi servir de brique élémentaire, ou de base, pour étendre l'étude du réglage du filtre de Kalman à des modèles quelconques beaucoup plus complets (avec forme d'onde spécifique, possibilité de multi-trajets, multi-antennes, ...). En effet, bon nombre de problèmes soulevés dans cette thèse à partir du

modèle simple se posent aussi avec des modèles plus complets. Nous allons maintenant présenter des méthodes générales d'estimation qui pourraient s'appliquer à l'estimation de ce GC variant dans le temps. Nous commencerons par présenter des méthodes d'estimation par blocs, puis les méthodes d'estimation en ligne qui s'avèrent moins complexes. Parmi ces dernières figure le filtre de Kalman, que nous mettrons en œuvre dans les chapitres suivants.

## 1.6 Algorithmes d'estimation du canal

### 1.6.1 Classement des méthodes d'estimation

Les méthodes d'estimation de canal sont généralement classées en aveugle, semi-aveugle ou canal assisté par des pilotes.

L'estimation aveugle [30] du canal est réalisée en utilisant les statistiques des données reçues. En raison de la faible vitesse de convergence, les estimations aveugles nécessitent souvent que le canal soit constant pour une certaine durée, par conséquent, cette méthode ne convient pas pour les applications de mobilité.

L'estimation semi-aveugle [31] consiste à utiliser des symboles pilotes ou des séquences d'entraînement connus par l'émetteur et le récepteur. La littérature contient aujourd'hui un grand nombre d'articles portant sur les techniques semi-aveugle. Les symboles pilotes ou les séquences permettent d'obtenir une estimation du canal précise. En plus l'utilisation des pilotes permet d'obtenir par interpolation une estimation du canal sur l'ensemble des symboles transmis. Cette technique a été introduite pour des systèmes mono-porteuse par [32] puis analysée par [33]. Dans cette thèse, nous utilisons l'approche à base de pilotes. Dans ces approches, deux grandes familles d'estimateurs existent : les estimateurs blocs et les estimateurs en ligne. Nous présentons maintenant ces deux types d'estimateurs.

### 1.6.2 Méthodes d'estimation classiques du canal par blocs

On suppose donc que le canal est estimé à l'aide d'une séquence d'entraînement connue. Dans l'approche par bloc, nous considérons une séquence reçue de taille  $K$ , et nous formons le vecteur  $\mathbf{r} = [r_{(0)}, r_{(1)}, \dots, r_{(K-1)}]^T$ . Soit  $\mathbf{S}$  la matrice diagonale  $K \times K$  correspondant aux pilotes utilisés pour la séquence, soit  $\boldsymbol{\alpha}$  le vecteur contenant les GCs à ces  $K$  instants. Donc le modèle d'observation pour cette section est :

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v} \quad (1.22)$$

Nous supposons dans la suite que la matrice de corrélation de  $\boldsymbol{\alpha}$  est connue, et nous présentons les deux grandes méthodes d'estimation blocs Bayésiennes que sont l'estimateur maximum a posteriori et l'estimateur à erreur quadratique minimum (*MMSE* en anglais). Ces méthodes sont dites bayésiennes car elles considèrent que le paramètre à estimer est une variable aléatoire et que des informations a priori sur ce paramètres sont disponibles.

#### 1.6.2.1 Maximum à posteriori

Dans le cas de l'estimation de canal avec le maximum à posteriori (MAP) [34], nous exploitons des informations a priori sur le canal en supposant maintenant que les GCs

## 1.6 Algorithmes d'estimation du canal

---

sont des variables aléatoires, et non plus déterministes comme c'est le cas pour le ML (*Maximum Likelihood* en anglais) [35] ou le LS (*Least square* en anglais) [35]. Nous avons :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}} = \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\operatorname{argmax}} p(\boldsymbol{\alpha}/\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

En utilisant les propriétés de probabilité conditionnelle, l'estimation MAP peut être exprimée comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}} = \frac{p(\mathbf{r}/\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\alpha})}{p(\mathbf{r})} \quad (1.24)$$

Le terme dans le dénominateur peut être supprimé, de sorte que l'estimation du MAP équivaut à maximiser  $p(\mathbf{r}/\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\alpha})$ . Ceci est similaire au critère de ML, sauf que la connaissance statistique a priori du coefficient de canal, représenté par  $p(\boldsymbol{\alpha})$ , doit être prise en considération. Ainsi, la solution MAP dépend à la fois de la distribution de probabilité du bruit et la distribution de probabilité des coefficients de canal. Comme indiqué avant, les GC peuvent être modélisés comme des variables aléatoires Gaussienne complexes centrées. En supposant que le bruit et le GC sont indépendants, la solution MAP devient [34] :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{S}^H(\mathbf{S}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{v}})^{-1}\mathbf{r} \quad (1.25)$$

avec  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}$  la matrice de covariance de  $\boldsymbol{\alpha}$ .

### 1.6.2.2 Erreur quadratique moyenne minimum (MMSE)

Une autre approche d'estimation de canal est l'estimateur qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MMSE pour *minimum mean square error* en anglais). Comme le MAP, il traite les coefficients de canal comme des variables aléatoires. L'estimation MMSE du canal est définie comme suit [34] :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MMSE}} = \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\operatorname{argmin}} [E\{(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^H(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})\}] \quad (1.26)$$

En supposant que  $\boldsymbol{\alpha}$  est centré et de covariance  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}$ , l'équation (1.26) peut être simplifiée comme suit [36] :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{S}^H(\mathbf{S}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{v}})^{-1}\mathbf{r} \quad (1.27)$$

En observant les équations (1.25) et (1.27), on constate que le MMSE est équivalent au MAP en supposant que les GCs du canal sont Gaussiens. Comme le MAP, l'approche MMSE nécessite une information préalable.

### 1.6.3 Estimation récursive

Les méthodes d'estimation bloc présentées dans la section précédente présentent l'inconvénient d'avoir une complexité élevée, car elles impliquent l'inversion de matrice de la taille du bloc considéré. Une approche moins complexe consiste à réaliser une estimation récursive. Nous présentons ici les algorithmes classiques d'estimation récursives.

### 1.6.3.1 Algorithme LMS

L'algorithme des moindres carrés (LMS pour *Least Mean squares* en anglais) est l'une des approches les plus simples pour suivre et estimer le canal. L'algorithme LMS est basé sur le gradient stochastique et est donné par [37]. Ces algorithmes sont basés sur la minimisation du critère d'erreur quadratique moyenne (EQM). Une approche de gradient stochastique conduit aux équations d'erreur d'estimation et de mise à jour de l'estimation :

$$e(k) = r(k) - s(k)\hat{\alpha}(k) \quad (1.28)$$

$$\hat{\alpha}(k) = \hat{\alpha}(k-1) + \mu e(k) \quad (1.29)$$

avec  $\mu$  la valeur du pas. La vitesse de convergence des algorithmes de la famille du gradient dépend de plusieurs facteurs. Elle dépend de la forme de la courbe d'erreur quadratique moyenne. En effet, plus la forme du paraboloïde de l'EQM est aplatie moins la convergence des algorithmes du gradient est rapide. L'aplatissement de la courbe d'erreur quadratique moyenne dépend directement de l'étalement des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée. La convergence est optimale dans le cas où les valeurs propres sont identiques. Le gradient pointe alors directement en direction du minimum de la courbe de l'EQM. Par contre, plus le rapport de la valeur propre maximale à la valeur propre minimale est grand, moins la convergence est bonne. Ainsi, la vitesse de convergence de ces algorithmes dépend directement des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation, donc des caractéristiques du signal d'entrée. Elle est optimale seulement pour un signal d'entrée blanc. C'est peut être la seule limitation de l'algorithme LMS lorsque le signal d'entrée possède une grande dynamique spectrale [38].

Dans [39] le LMS est utilisé pour l'estimation du gain du canal, ensuite une étude du filtre est faite afin d'obtenir une expression analytique du pas  $\mu$  en fonction des paramètres du système (la fréquence Doppler et le niveau de bruit).

Les auteurs de [8, 11, 40] utilisent le LMS avec le filtre de Kalman [41] afin d'estimer le gain de canal d'une manière efficace et moins complexe que les algorithmes classiques.

### 1.6.3.2 Algorithme RLS

Les filtres des moindres carrés récursifs (RLS pour *Recursive Least Squares* en anglais) [35] peuvent être utilisés pour suivre les statistiques variables dans le temps des systèmes à forte mobilité. Les filtres basés sur le RLS utilisent trois étapes itératives de base : initialisation des paramètres de filtrage, calcul des erreurs d'estimation, et mise à jour des coefficients du filtre. Par rapport à l'algorithme des moindres carrés (LMS), le RLS offre un taux de convergence supérieur, en particulier pour les signaux d'entrée corrélés. Bien sûr, il y a un prix à payer pour cet avantage, qui est une augmentation de la complexité.

### 1.6.3.3 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman (KF pour *Kalman Filter* en anglais) est un filtre à réponse impulsionnelle infinie qui estime les états d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. L'état est le paramètre variant dans le temps que l'on cherche à estimer, soit le GC  $\alpha(k)$  pour notre étude. La différence avec les méthodes précédentes est qu'il faut disposer d'un modèle d'évolution pour l'état à estimer, appelé modèle

## 1.6 Algorithmes d'estimation du canal

---

d'état. Nous reparlerons de ces modèles dans les sections suivantes. Cependant, nous pouvons déjà préciser qu'il n'existe pas de modélisation linéaire pour un GC qui a un spectre de Jakes. Par conséquent il faudra toujours avoir à l'esprit que le modèle d'état linéaire est une approximation du vrai GC. De plus, nous pouvons souligner qu'un grand nombre d'études supposent que le paramètre à estimer suit exactement le modèle d'état, ce qui est rarement le cas en pratique et est donc source d'erreur. Nos analyses dans les chapitres suivant tiendront donc compte de ce point important. Dans la suite, pour bien différencier le vrai GC de son approximation linéaire, nous noterons  $\tilde{\alpha}_{(k)}$  le modèle d'état.

Le problème d'estimation optimale est celui de l'obtention récursive d'une estimée des états à partir des observations  $r_{(k)}$ . On peut considérer trois cas différents :

- Filtrage : on veut estimer l'état à l'instant  $k$  à partir des observations jusqu'à cet instant.
- Lissage : on veut estimer l'état à l'instant  $k$  à partir d'observations passées et futures.
- Prédiction : on veut prédire l'état à l'instant  $k + C$ , avec  $C > 0$  à partir des observations jusqu'à l'instant  $k$ .

Le cas le plus simple, est celui des systèmes linéaires Gaussiens, qui est notre cas.

On entend par système "linéaire Gaussien" le système d'équations d'état et d'observation pour un canal qui serait approximé par un processus linéaire, et quand le bruit d'observation est un bruit blanc Gaussien. Les équations d'observation et d'évolution d'état sont linéaires vis à vis de l'état, et les bruits du système et de mesure, sont des bruits blancs additifs et Gaussiens (AWGN), d'où la dénomination "linéaire Gaussien".

Dans ce cas, le KF donne la solution optimale pour estimer les états d'une manière récursive : prédiction des états et correction à partir de la dernière observation obtenue [42]. Le KF va être utilisé dans la suite pour notre problème d'estimation *on-line*.

### — Équations générales du filtre de Kalman

Les équations d'état et d'observation du filtre de Kalman sont respectivement :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{(k)} &= \mathbf{M}\tilde{\alpha}_{(k-1)} + \mathbf{B}_{(k)}\mathbf{c}_{(k)} + \mathbf{u}_{(k)} \\ r_{(k)} &= \mathbf{s}^T \tilde{\alpha}_{(k)} + v_{(k)}\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u}_{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{U})$  et  $v_{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ .

- $\tilde{\alpha}_{(k)}$  est le vecteur d'état à l'instant  $k$ . Il dépend du modèle d'état sélectionné. Il comprend des versions courantes et retardées de l'état  $\tilde{\alpha}_{(k)}$ .
- $\mathbf{M}$  est la matrice reliant l'état précédent  $\tilde{\alpha}_{(k-1)}$  à l'état actuel  $\tilde{\alpha}_{(k)}$ .
- $\mathbf{c}_{(k)}$  est la commande.



- $\mathbf{B}_{(k)}$  est la matrice qui relie l'entrée de commande à l'état  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}$ .
- $\mathbf{U}$  est la matrice de covariance du bruit d'état.
- $r_{(k)}$  représente l'observation à l'instant  $k$ .
- $\mathbf{s}$  est le vecteur qui relie l'état  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  à l'observation  $r$ .
- $v_{(k)}$  représente le bruit d'observation.
- $\sigma_v^2$  est la variance du bruit d'observation.

Dans notre étude, nous n'avons pas de commande ( $\mathbf{c}_{(k)} = 0$ ).

Le système des équations récursives du gain et de l'erreur d'estimation, ainsi que de l'estimée sont données par [43] :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{(k)} &= \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{s} [\mathbf{s}^T \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{s} + \mathbf{R}_{(k)}]^{-1} \\
 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k)} &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{(k)} \mathbf{s}^T] \mathbf{P}_{(k|k-1)} \\
 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)} &= \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} + \mathbf{K}_{(k)} [r_{(k)} - \mathbf{s}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}] \\
 \mathbf{P}_{(k+1|k)} &= \mathbf{M} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k)} \mathbf{M}^T + \mathbf{U} \\
 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k+1|k)} &= \mathbf{M} [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{(k)} \mathbf{s}^T] \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} + \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

avec :

- $\mathbf{K}_{(k)}$  le gain du filtre de Kalman à l'itération  $k$ .
- $\hat{\mathbf{P}}_{(k|k)}$  la matrice de covariance de l'erreur de prédiction corrigée, à l'itération  $k$ .
- $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}$  le vecteur d'état estimé après correction, à l'itération  $k$ .
- $\mathbf{P}_{(k+1|k)}$  la matrice de covariance de l'erreur prédite à un pas.
- $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k+1|k)}$  le vecteur d'état prédit à un pas.
- $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité.

Nous présentons dans la section suivante les deux modèles d'états principaux utilisés dans la littérature.

## 1.7 Modèles d'états et leurs réglages

Il existe différents types de modèles d'états. Citons par exemple le modèle à marche aléatoire (RW pour *random walk* en anglais) appelé aussi modèle Brownien, qui est un

modèle couramment utilisé dans la littérature pour l'estimation de phase et le décalage des fréquences [44, 45]. Cependant, récemment, les modèles RW ont été également appliqués à l'estimation des GCs d'un canal dans le cadre d'une thèse précédente réalisée au laboratoire [46]. Le travail de la thèse [46] a consisté à optimiser les paramètres du modèle pour ce nouveau contexte. Les résultats obtenus ont montré que ces modèles fonctionnaient bien également pour les GCs car ils ont permis d'obtenir des performances d'estimation proches de la borne de Cramer-Rao avec un réglage de type minimisation de la variance asymptotique, que l'on détaillera à la fin de cette section. Cependant, dans la littérature, les GCs sont en général plutôt estimés avec un autre type de modèle qui est le modèle autorégressif (AR), qui présente l'avantage d'être stationnaire contrairement au RW.

Nous présentons ci-dessous les deux modèles RW et AR, puis nous présentons les critères pour régler les paramètres de ces modèles.

### 1.7.1 Modèle à marche aléatoire

Le modèle de marche aléatoire (ou *Random Walk* en anglais, RW) est un modèle mathématique d'un système possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires. Ces pas aléatoires sont décorrélés les uns des autres. Cette dernière propriété, fondamentale, est appelée caractère markovien du processus, du nom du mathématicien Markov. On peut considérer le modèle de marche aléatoire de base, noté RW(1), ou des version intégrées RW( $p$ ) d'ordre  $p > 1$ .

Une modélisation du problème d'estimation du gain de canal  $\alpha$  avec une équation d'état est obtenue. Les équations d'états pour les modèles à marche aléatoires d'ordre  $p = 1, 2$  sont présentées dans la suite.

#### 1.7.1.1 RW(1)

Le modèle RW d'ordre 1, le RW(1), a été utilisé comme modèle d'état du filtre de Kalman dans les travaux de [39]. Le modèle d'état du RW(1) est :

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = \tilde{\alpha}_{(k-1)} + u_{(k)} \quad (1.31)$$

avec  $\tilde{\alpha}_{(k)}$  le processus RW(1) et  $u_{(k)}$  le bruit d'état additif complexe Gaussien de variance  $\sigma_u^2$ .

A noter qu'en régime asymptotique le filtre de Kalman muni du modèle RW(1) correspond au LMS [39].

#### 1.7.1.2 RW(2)

Le modèle RW d'ordre 2, le RW(2), a été présenté dans les travaux de [14] comme modèle d'état du filtre de Kalman pour estimer le GC du canal. Dans les équations suivantes on présente le modèle d'état du RW(2) :

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = \tilde{\alpha}_{(k-1)} + \delta_{(k-1)} \quad (1.32)$$

$$\delta_{(k)} = \delta_{(k-1)} + u_{(k)} \quad (1.33)$$

avec  $\tilde{\alpha}_{(k)}$  le processus RW(2),  $u_{(k)}$  le bruit d'état additif complexe Gaussien de variance  $\sigma_u^2$ .

L'équation (1.32) peut être vue comme l'approximation discrète de l'expansion en série de Taylor d'un signal continu. Dans un tel modèle d'approximation, le processus  $\tilde{\alpha}_{(k)}$  est mis à jour à chaque période symbole d'un incrément de  $\delta_{(k-1)}$ , avec  $\delta_{(k)}$  modélisant de manière approchée la dérivée d'ordre 1 du signal continu.

### 1.7.1.3 Lien entre Kalman basé sur modèle RW et PLL

Le modèle RW a permis de faire le lien entre une boucle à verrouillage de phase (PLL en anglais) et un filtre de Kalman asymptotique basé sur un modèle RW d'ordre 2 et 3 d'abord dans le cas de l'estimation de phase [47, 48] puis de gain complexe [46]. L'intérêt de la PLL par rapport au filtre de Kalman est sa faible complexité.

En effet dans une PLL, les coefficients sont fixes alors que pour le filtre de Kalman les coefficients sont à recalculer à chaque temps symbole. L'inconvénient de la PLL est une convergence plus lente.

La PLL et le KF asymptotique ont inspiré aux auteurs de [46, 49–52] une structure de boucle nommée RW-CATL (pour *random-walk complex amplitude tracking loop* en anglais).

La RW-CATL a été dérivée à la fois pour un contexte de canal mono-trajet modulation mono-porteuse, et pour le cas multi-trajets multi-porteuses dans [3, 46, 51, 53]. Cette extension consiste à prévoir un signal d'erreur vectoriel en entrée de la boucle, calculé avec le critère LS. Puis une boucle RW-CATL est appliquée à chaque trajet.

## 1.7.2 Modèle autorégressif

Un processus autorégressif est un modèle de régression pour séries temporelles dans lequel la série est, comme pour le modèle RW, exprimée par ses valeurs passées plutôt que par d'autres variables.

Le modèle autoregressif d'ordre  $p$   $\tilde{\alpha}_{(k)}$  est :

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = \sum_{i=1}^p a_i \cdot \tilde{\alpha}_{(k-i)} + u_{(k)}, \quad (1.34)$$

où  $u_{(k)}$  est le bruit d'état du modèle autoregressif, gaussien, complexe, et centré de variance  $\sigma_u^2$  et  $a_i$ , avec  $i \in \{1 \dots p\}$ , les coefficients du modèle AR( $p$ ) calculés en utilisant les équations de Yule-Walker [16].

Remarquons que le modèle RW est un processus de série temporelle non stationnaire avec notamment une variance qui augmente avec le temps tandis que les AR sont stationnaires. La Figure 1.11 compare les sorties des filtres AR(1) et RW(1) ayant comme entrées un bruit blanc centré additif Gaussien de variance égale à 1. On peut constater que la sortie du RW varie de manière aléatoire sans aucune tendance à revenir à un point particulier. La moyenne du processus RW change de manière variée dans le temps et se caractérise par une tendance stochastique. Tandis que la moyenne du processus AR reste autour de zéro. De plus, le fait d'utiliser un modèle d'état stationnaire donne accès à son spectre ou à sa variance, qu'il sera alors possible de manipuler et de comparer à ceux du "vrai" modèle du CG supposé stationnaire, comme le modèle de Rayleigh à spectre de Jakes

## 1.7 Modèles d'états et leurs réglages

---

pour le canal Fixe-Mobile (F-M).

L'équation d'état du KF avec le modèle AR( $p$ ) s'écrit :

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = \mathbf{M}\tilde{\alpha}_{(k-1)} + \mathbf{u}_{(k)} \quad (1.35)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

et

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = [\tilde{\alpha}_{(k)} \tilde{\alpha}_{(k-1)} \tilde{\alpha}_{(k-2)} \dots \tilde{\alpha}_{(k-p+1)}]^T, \quad \mathbf{u}_{(k)} = [u_{(k)}, 0 \dots 0]^T \quad (1.37)$$

Notons que le réglage du modèle AR( $p$ ) se fait réellement par  $p$  paramètres  $a_1, \dots, a_p$  ( $\sigma_u^2$  est lié à ces paramètres) alors que le modèle RW( $p$ ) n'a en réalité qu'un seul degré de liberté accessible au réglage, qui est la variance du bruit d'état  $\sigma_u^2$ . Dans la littérature plusieurs méthodes existent pour le réglage de ces paramètres. Pour le modèle autorégressif qui est l'objet de cette thèse, la méthode la plus couramment utilisée est une méthode basée sur l'adéquation des corrélations entre le vrai processus  $\alpha_{(k)}$  et son processus approché  $\tilde{\alpha}_{(k)}$  [5, 6], noté *Correlation matching* (CM). Il existe également une deuxième méthode qui consiste à appliquer une minimisation de variance asymptotique (MAV) [12, 14, 39, 54]. Ces deux critères sont présentés dans la suite.

### 1.7.3 Le critère CM

Pour le modèle autorégressif, le choix standard de la littérature des coefficients  $a_i$  est soumis aux deux conditions suivantes :

La première condition est que les coefficients  $a_i$  vérifient les équations de Yule-Walker [16]. La deuxième condition est d'imposer que la fonction d'autocorrélation du processus AR( $p$ ) coïncide avec la fonction d'autocorrélation du vrai processus, soit :

$$R_{\tilde{\alpha}}[m] = R_{\alpha}[m],$$

pour  $m \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\}$ .

Ceci se traduit mathématiquement par  $\mathbf{R}_{\alpha}\mathbf{a} = \mathbf{r}$  :

$$\mathbf{R}_{\alpha} = \mathbf{R}_{\tilde{\alpha}} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{\tilde{\alpha}}[0] & R_{\tilde{\alpha}}[-1] & \dots & \dots & R_{\tilde{\alpha}}[-(p-1)] \\ R_{\tilde{\alpha}}[1] & R_{\tilde{\alpha}}[0] & \dots & \dots & R_{\tilde{\alpha}}[-(p-2)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{\tilde{\alpha}}[p-1] & R_{\tilde{\alpha}}[p-2] & \dots & \dots & R_{\tilde{\alpha}}[0] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ \dots \ a_p]^T$$

$$\mathbf{r} = [R_{\tilde{\alpha}}[1] \ R_{\tilde{\alpha}}[2] \ \dots \ \dots \ R_{\tilde{\alpha}}[p]]^T = [R_{\alpha}[1] \ R_{\alpha}[2] \ \dots \ \dots \ R_{\alpha}[p]]^T$$

D'où la solution :

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \quad (1.38)$$

Et par la suite

$$\sigma_u^2 = R_{\hat{\alpha}}[0] - \sum_{k=1}^p a_k R_{\hat{\alpha}}[k] \quad (1.39)$$

Il est important de noter qu'en terme de complexité, il vaut mieux ne pas prendre des modèles autorégressif d'ordres élevés, pour la raison d'inversion de matrice. Cela évitera aussi d'avoir trop de coefficients à contrôler. La littérature considère en général les ordres 1 et 2.

A titre d'exemple, on présente dans la figure 1.10, la fonction d'autocorrélation du vrai gain de canal, c'est-à-dire la fonction de Bessel d'ordre 0, montrée pour les fréquences Doppler normalisées  $f_d T = 10^{-1}$  et  $f_d T = 10^{-3}$ , ainsi que les fonctions d'autocorrélation du modèle AR d'ordre  $p = 1$  et 2, dont les paramètres sont réglés avec le critère CM.

Il est constaté que la modélisation AR pour les ordres 1 et 2 convient mieux pour des valeurs de  $f_d T$  relativement grandes ( $f_d T \geq 10^{-2}$ , figure 1.10a).

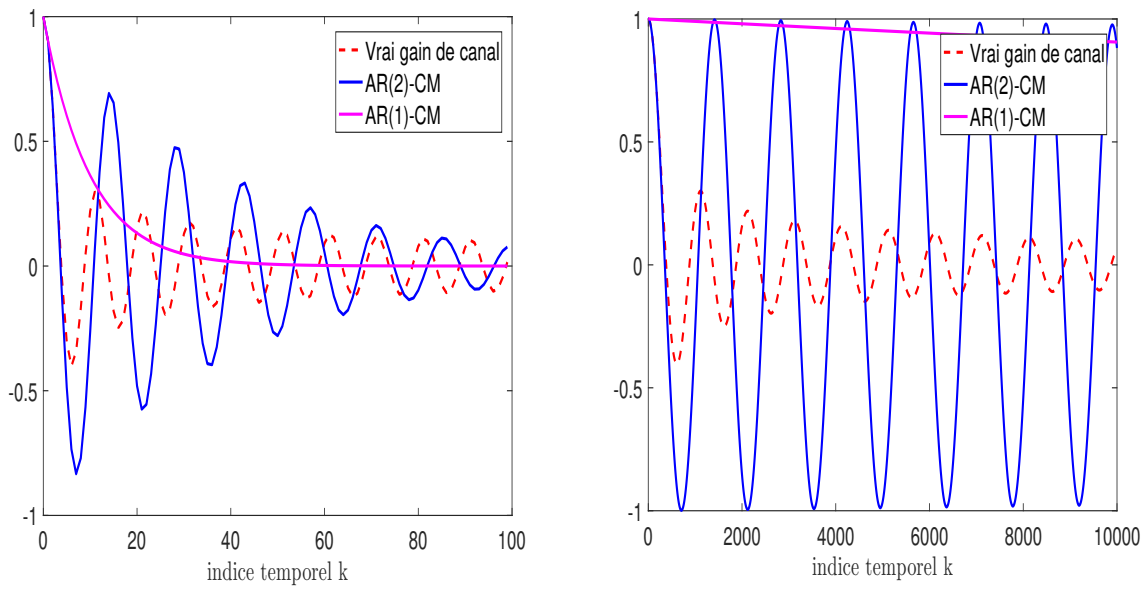
En effet, à faibles fréquences Doppler ( $f_d T < 10^{-2}$ , figure 1.10b), on remarque que la fonction d'autocorrélation du processus AR(1) paraît constante, et que la fonction d'autocorrélation du processus AR(2) varie avec beaucoup plus d'amplitude que la vraie fonction d'autocorrélation du GC. Par conséquent le choix du critère CM ne semble pas adéquat dans le cas de faibles fréquences Doppler, contrairement à la situation de hautes  $f_d T$ , où le choix CM est plus convaincant. Cette observation a été confirmée et expliquée théoriquement dans [12, 13].

Une autre manière d'illustrer ce constat est de montrer les performances d'estimation du KF, muni du modèle AR réglé avec le critère CM, en fonction de  $f_d T$ . La figure 1.12 affiche ainsi les performances d'estimation (en terme d'erreur quadratique moyenne EQM) du KF muni d'un modèle AR(1) et AR(2) où les paramètres sont réglés avec le CM (noté AR(1)-CM et AR(2)-CM) en comparaison avec la borne de Cramer-Rao Bayésienne. Cette figure montre aussi que pour des faibles valeurs de  $f_d T < 10^{-2}$ , les performances sont décevantes, d'où la nécessité de régler les paramètres avec un autre critère que le CM dans ce cas. Une autre alternative que le CM est la minimisation de la variance asymptotique (MAV), présentée dans la section suivante.

#### 1.7.4 Le critère MAV

Le critère de minimisation de la variance asymptotique (MAV) consiste à minimiser la variance asymptotique de l'erreur résultant de l'estimation du GC à partir du filtre du Kalman. Cette méthode a été proposée dans plusieurs travaux de la littérature pour améliorer les performances du CM à faible mobilité [55]. Ainsi [12] a proposé d'utiliser ce choix en se basant sur le modèle AR(1) comme modèle d'état pour le filtre de Kalman. Les performances obtenues dépassent largement celles de l'AR(1)-CM. Notons que l'article [12] établit une formule analytique approchée de l'erreur quadratique moyenne (EQM) pour un scénario où la fréquence Doppler et le rapport signal sur bruit (RSB) sont donnés, ainsi que le réglage optimal (au sens du critère MAV) du paramètre du modèle AR(1) en

## 1.7 Modèles d'états et leurs réglages



(a)  $f_d T = 10^{-1}$

(b)  $f_d T = 10^{-3}$

FIGURE 1.10 – Fonctions d'autocorrélation du AR(1)-CM, AR(2)-CM et du vrai gain du canal pour  $f_d T = 10^{-1}$   $f_d T = 10^{-3}$ .

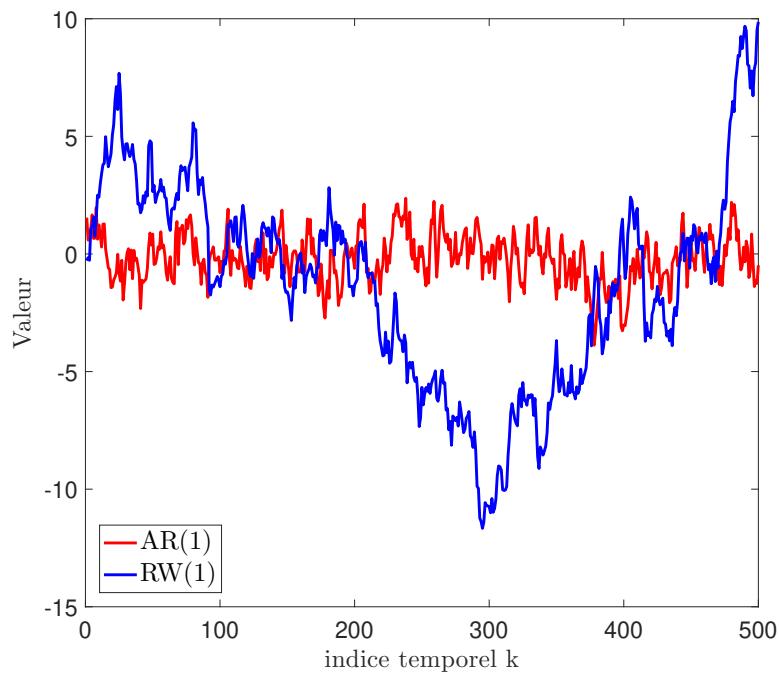


FIGURE 1.11 – Comparaison des comportements du AR(1) et RW(1) avec un bruit blanc Gaussien à l'entrée.

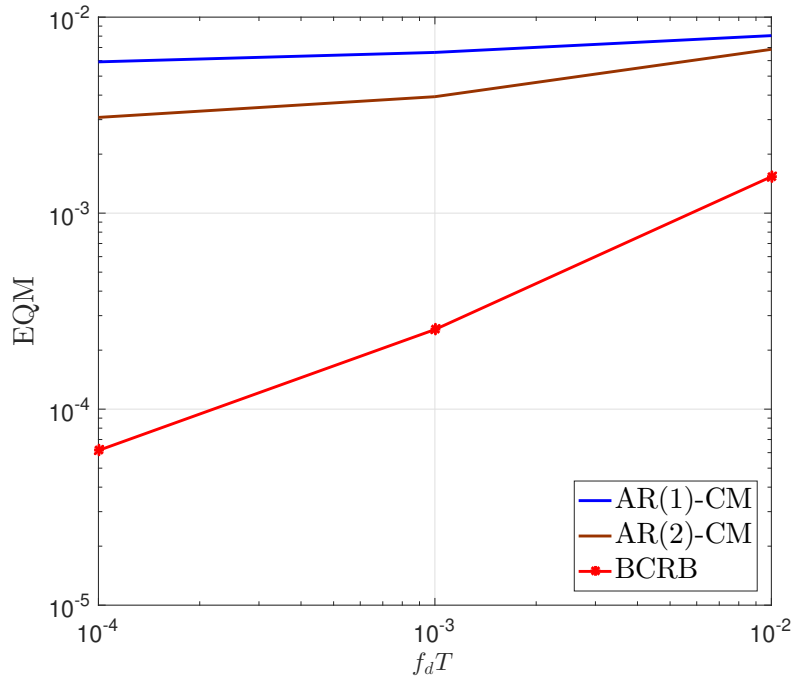


FIGURE 1.12 – Performance de AR(1)-CM et AR(2)-CM par rapport à la borne de Cramer-Rao Bayésienne (BCRB) [4] .

fonction des paramètres du canal (fréquence Doppler et RSB). Récemment, il a été montré analytiquement que les performances en terme d'EQM du filtre de Kalman, toujours avec le critère MAV, peuvent être encore améliorées en passant d'un modèle AR(1) à un modèle RW d'ordre plus élevé : 2 et 3 [14, 54]. De la même manière que [12], les auteurs de [14, 54] ont donné des formules analytiques de l'EQM, ainsi que le réglage optimal des paramètres des modèles RW en fonction des paramètres du canal. Dans le cadre de ces études sur le RW avec le critère MAV, c'est surtout le passage de l'ordre 1 à l'ordre 2 qui a montré une grande amélioration des performances. Le gain était beaucoup plus marginal en passant à l'ordre 3. D'après ces derniers résultats sur le RW, nous voulions savoir si un tel gain pouvait aussi être obtenu avec les modèles AR, qui présentent comme nous l'avons vu l'avantage d'être stationnaire. Or l'étude théorique pour le réglage de l'AR avec le critère MAV a été menée dans la littérature uniquement pour l'ordre 1, ce qui a motivé notre travail pour l'ordre 2, présenté dans le chapitre suivant.

## 1.8 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons d'abord présenté les différents systèmes de communications. Ensuite les caractéristiques du canal de propagation ont été présentées, ainsi que les évanouissements par trajets multiples et le modèle de variations des paramètres du canal Fixe-Mobile. Les grandes classes d'algorithmes d'estimation du canal ont été présentés à la fin de ce chapitre, en particulier les algorithmes récursifs, et le filtre de Kalman qui est un filtre adaptatif dont les coefficients évoluent au cours du temps. Rappelons que dans cette thèse on s'intéresse au canal à variations lentes (à l'échelle du temps

## 1.8 Conclusion

---

symbole) et à évanouissements plats, et on ne se préoccupe pas de la forme d'onde. Le modèle considéré est donc simple, mais l'étude approfondie d'estimation menée dans cette thèse pourra servir de référence ou de base pour l'estimation de canal avec des modèles plus complets, ou même être directement applicable dans certains cas, comme dans le cas d'une forme d'onde OFDM et d'un canal multi-trajet. La conception d'un filtre de Kalman nécessite le choix d'un modèle d'état récursif pour modéliser la dynamique du vrai modèle de canal. Se pose alors aussi le problème de réglage des paramètres du modèle d'état.

Vu l'avantage que présente le modèle AR par rapport au modèle RW (stationnarité), vu les résultats obtenues par [14, 54] concernant le passage à un ordre plus élevé du modèle d'état du filtre de Kalman et vu notre observation dans les figures 1.10 et 1.12, lorsqu'on est à basses fréquences, on propose de faire l'estimation du canal avec un filtre de Kalman basé sur le modèle AR(2) dont les paramètres sont réglés avec le critère de la Minimisation de la Variance Asymptotique de l'erreur quadratique moyenne (MAV).

Une optimisation et une étude de performance en régime asymptotique seront présentées dans les chapitres suivants.





# Chapitre 2

## Algorithme basé sur le modèle autoregressif et le filtre de Kalman

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>34</b> |
| 2.1.1      | Problème d'estimation du canal à variations lentes avec un filtre AR( $p$ )-KF d'ordre faible | 34        |
| 2.1.2      | Techniques existantes, limitations et questions ouvertes                                      | 35        |
| 2.1.3      | Contributions du chapitre   | 37        |
| 2.1.4      | Organisation du chapitre  | 37        |
| <b>2.2</b> | <b>Modèle discret équivalent de la transmission</b>   | <b>38</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Modèle autoregressif et approximation du canal de transmission</b>                         | <b>38</b> |
| 2.3.1      | Le modèle AR(2)   | 38        |
| 2.3.2      | Stabilité du Filtre AR(2)   | 39        |
| 2.3.3      | Couple de valeurs du modèle AR(2)   | 41        |
| <b>2.4</b> | <b>Filtre de Kalman avec le modèle AR(2)</b>  | <b>44</b> |
| <b>2.5</b> | <b>Filtre de Kalman en régime permanent</b>   | <b>45</b> |
| 2.5.1      | Une expression approchée pour $K_1$   | 46        |
| <b>2.6</b> | <b>Analyse de l'erreur en régime asymptotique</b>   | <b>50</b> |
| 2.6.1      | Fonction de transfert $L(z)$ du filtre de Kalman AR(2) asymptotique                           | 50        |
| 2.6.2      | Variance d'erreur en régime asymptotique  | 52        |
| 2.6.3      | Optimisation selon le critère MAV   | 55        |
| 2.6.4      | Comparaison avec les filtres de Kalman basés sur des modèles d'états AR(1)-MAV et RW(2)       | 57        |
| <b>2.7</b> | <b>Simulations</b>  | <b>60</b> |
| 2.7.1      | Illustration des paramètres du système  | 60        |
| 2.7.2      | Performance en erreur quadratique moyenne EQM   | 64        |
| 2.7.3      | Performance en taux d'erreur binaire TEB  | 67        |
| <b>2.8</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>68</b> |

---

## 2.1 Introduction

L'estimation du canal fixe-mobile est une tâche fondamentale du terminal mobile, et de nombreuses recherches ont été menées sur ce sujet [6, 8, 13–15, 56], etc. Une bonne estimation de canal est en effet généralement nécessaire pour avoir par la suite une bonne communication sans fil. Une approche courante dans la littérature de l'estimation de canal consiste à utiliser le filtre de Kalman (KF) [8, 57–59], dont la conception nécessite la sélection d'un modèle d'état récursif linéaire pour modéliser la dynamique du paramètre à suivre. Le modèle exact du gain complexe du canal (GC) (c'est à dire le modèle de Rayleigh à spectre de Jakes dans ce chapitre) ne peut généralement pas se représenter de manière exacte sous la forme d'un modèle d'état récursif linéaire, et ce dernier n'est donc qu'une approximation du vrai modèle. Ainsi, le modèle approché doit être bien choisi, et bien réglé afin de limiter toute dégradation dans l'estimation. Un modèle d'état conventionnel est le modèle autorégressif d'ordre  $p$  (AR( $p$ )) [5, 60]. C'est le modèle le plus souvent adopté dans la littérature de l'estimation de canal [56, 60–63]. L'auteur de [63] a démontré qu'un modèle autorégressif d'ordre faible peut être suffisant pour modéliser la dynamique du GC de Rayleigh. La démonstration est basée sur le principe de l'information mutuelle entre les symboles. L'auteur de [12] a proposé le choix du modèle autoregressif d'ordre 1 AR(1). D'autres auteurs comme [6, 8] proposent d'utiliser le modèle autoregressif du second ordre. Par contre, dans la plupart des cas, les coefficients des modèles autoregressifs sont choisis en se basant sur la coïncidence entre la fonction d'autocorrélation du vrai processus se propageant dans le canal (utilisé pour simuler le canal) et celle du processus AR approché adopté pour l'algorithme d'estimation. Ce critère est appelé critère de coïncidence de corrélation (CM pour *correlation matching* en anglais) [5–7, 15] et la solution est obtenue en résolvant les équations de Yule-Walker [16]. Cependant, l'estimation de canal par filtre de Kalman basé sur un modèle AR d'ordre faible et réglé par critère CM pose un certain nombre de problèmes qui vont être pointés et résolus dans ce chapitre.

### 2.1.1 Problème d'estimation du canal à variations lentes avec un filtre AR( $p$ )-KF d'ordre faible

Dans le contexte très spécifique de variation rapide du canal ( $f_d T \geq 10^{-2}$ , c'est à dire  $T \geq 10^{-2} \times T_c$ , où  $T_c = 1/f_d$  est le temps de cohérence), tels que dans les trains à grande vitesse, les auteurs de [64, 65] ont utilisé avec succès le filtre de Kalman basé sur le modèle AR(1), avec des paramètres réglés selon le critère CM. Les résultats de simulations montrent en effet de bonnes performances dans de tels scénarios en termes d'EQM, proches des bornes minimales atteignables.

Dans le contexte le plus courant de variation de canal lente à modérée ( $f_d T \leq 10^{-2}$ ), l'utilisation du filtre de Kalman avec AR d'ordre faible ( $p = 1$  ou  $2$ ) réglé par critère CM, a aussi été souvent considéré dans les dernières décennies pour l'estimation de canaux dont le modèle exact est le modèle de Clarke (ou Rayleigh à spectre de Jakes) [7, 15, 66, 67]. Cependant, ces travaux ne comparent pas les performances des erreurs quadratiques moyennes (EQM) à des bornes théoriques de performances, telles que la Borne de Cramer-Rao Bayésienne (BCRB). Abeida et al. [68] font cette comparaison et notent une performance très éloignée, en terme d'EQM, de la BCRB modifiée (voir [68]-Fig. 3, avec  $f_d T = 7, 38 \cdot 10^{-4}$ ,  $p = 1$ ), en faisant valoir qu'il est connu que la CRB n'est pas précise dans la région de

## 2.1 Introduction

---

faible rapport signal à bruit (RSB). Mais la véritable explication de cet écart a été apportée par Barbieri et al. [55] en 2009, puis de manière analytique par Ghandour-Haidar et al. [12] en 2012 : avec le critère CM de faible ordre  $p$ , le KF n'est en fait pas assez rapide pour suivre la dynamique du gain de canal à variations lentes, car l'EQM demeure approximativement constante lorsque la fréquence Doppler diminue, alors qu'elle devrait diminuer (le canal est théoriquement plus facile à estimer pour un plus faible Doppler). En conclusion, les performances d'estimation avec un AR( $p$ )-KF d'ordre faible ajusté avec le critère CM sont décevantes dans le cas d'un canal à variations lentes, cas qui est le plus souvent rencontré en pratique, et des solutions doivent être trouvées. Il est à noter que malgré ces alertes pointées depuis 2009 et 2012, de nombreux auteurs continuent à utiliser le filtre de Kalman AR ( $p = 1$  ou  $2$ ) réglé par le critère CM pour estimer des canaux de Clarke à variation lente [69–74]. Il est ainsi important de continuer à communiquer sur les performances décevantes obtenues (par rapport aux bornes minimales) et sur la préconisation de méthodes alternatives.

### 2.1.2 Techniques existantes, limitations et questions ouvertes

Pour palier la déficience observée précédemment, il est proposé dans [5] et [75] de corriger le critère CM en ajoutant un très petit terme de régularisation  $\epsilon$  sur la diagonale de la matrice de corrélation, afin d'améliorer son conditionnement. Cette correction améliore considérablement les performances, mais le paramètre  $\epsilon$  n'est défini que par simulation et des ordres élevés de modèle AR sont toujours nécessaires pour se rapprocher de la BCRB, comme le montre la Figure 2.1, où les performances en terme d'EQM du AR( $p$ )-CM +  $\epsilon$  sont présentées. Ainsi, le choix de l'ordre ainsi que le réglage des paramètres du modèle sont critiques et un compromis doit être trouvé entre la complexité numérique et la performance. Le cas  $p = 1$  a été entièrement résolu au cours de la dernière décennie dans [12, 55], mais il reste une marge d'amélioration possible pour se rapprocher de la BCRB. Tan & Beaulieu avaient d'ailleurs pointé en 2000 [76] qu'un modèle de Markov d'ordre 1 n'était pas suffisant pour vraiment bien capter la dynamique d'un canal radio-mobile (modèle de Clarke) pour des applications nécessitant d'exploiter un grand nombre d'échantillons consécutifs comme c'est le cas pour l'estimation d'un canal lent. Leur travail, basé sur l'analyse de la corrélation, venait ainsi tempérer un peu les conclusions d'une publication antérieure énormément citée de 1996 [77], qui justifiait l'usage de modèle de Markov d'ordre 1, en se basant sur l'information mutuelle. Le compromis raisonnable  $p = 2$  tout en prenant en compte un réglage autre que le CM a suscité une grande attention dans la littérature, mais sans solution analytique satisfaisante, comme rappelé ci-dessous.

Le modèle AR(2) a une paire de paramètres à régler : les coefficients  $\{a_1, a_2\}$  ou de manière équivalente la fréquence de résonance et le rayon du pôle  $\{f_{\text{AR}(2)}, r\}$ . Les auteurs de [56] fournissent un réglage analytique pour le premier paramètre  $f_{\text{AR}(2)}$ , tandis que le second paramètre  $r$  est réglé au moyen de simulations intensives avec une grille de recherche. De même, [8, 9, 78] utilisent le même réglage pour  $f_{\text{AR}(2)}$  et déduisent d'expérimentations des formules analytiques de  $r$  (déduites d'abaques) en fonction de la fréquence Doppler mais sans considération du rapport signal bruit (RSB). Dans [55],  $\{a_1, a_2\}$  dépend d'un ensemble de coefficients qui doivent être évalués, en mode *Off-line*, à l'aide de tables de recherche à partir des résultats de simulation pour une plage de valeurs du RSB. Par conséquent, ces solutions au réglage du modèle AR(2) ne fonctionnent bien que dans

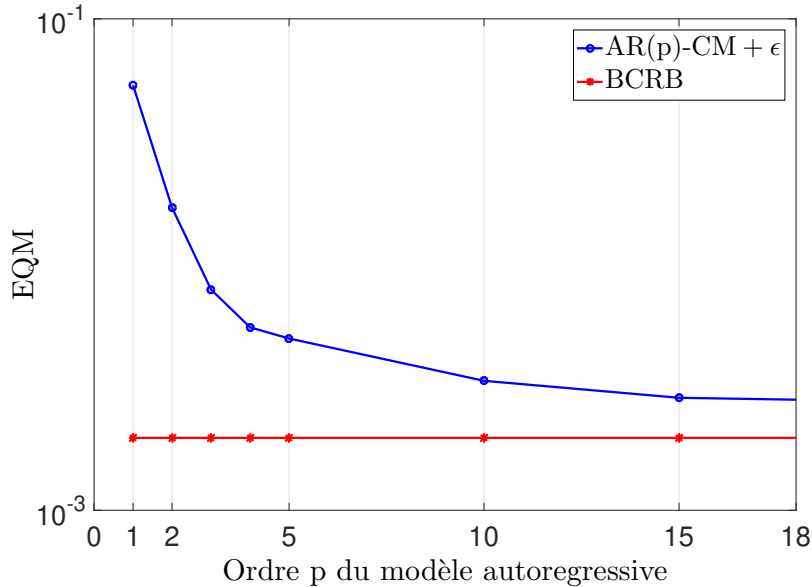


FIGURE 2.1 – Performance en terme d’EQM de l’ AR( $p$ )-CM+ $\epsilon$  avec  $\epsilon$  réglé selon [5] pour  $f_d T = 10^{-3}$  et RSB = 10 dB.

le contexte spécifique pour lequel elles ont été ajustées.

Par ailleurs, un modèle alternatif au modèle AR, le modèle de marche aléatoire d’ordre  $p$ , RW( $p$ ), réglé par un critère de variance asymptotique minimale (MAV, pour *Minimum of Asymptotic Variance* en anglais), a été récemment envisagé pour l’estimation du canal [58]. Les modèles RW(1) et RW(2) étaient déjà très utilisés avec le filtre de Kalman, mais pour l’estimation de la phase, c’est à dire d’un paramètre réel modulo  $2\pi$ , contrairement au GC du canal qui est un paramètre complexe. Le modèle RW( $p$ ) est aussi un modèle de Gauss-Markov, mais contrairement au modèle AR( $p$ ), le modèle RW( $p$ ) n’est pas stationnaire, avec une variance qui grandit à l’infini avec le nombre d’itérations. Des solutions analytiques pour l’adaptation du modèle RW( $p$ ) ont été établies pour les ordres  $p = 1$  [39],  $p = 2$  [14] et  $p = 3$  [54]. Nous pouvons conclure de ces études et de la thèse de Huaqiang Shu [46] que la performance en EQM obtenue avec un modèle RW( $p$ )-KF est proche de la BCRB à partir de  $p = 2$ .

Les questions qui se posent maintenant sont les suivantes : est-il également théoriquement possible d’obtenir des performances proches de la BCRB avec le modèle AR(2)? Les performances sont-elles équivalentes ou meilleures que celles obtenues avec le modèle d’ordre 2 voisin RW(2)? En plus d’être des questions ouvertes qui méritent de meilleures réponses que celles que l’on trouve jusqu’à présent dans la littérature, cela permettrait de travailler avec un modèle stationnaire contrairement au modèle RW(2). Les réponses à ces questions seront données dans ce chapitre.

### 2.1.3 Contributions du chapitre

En résumé, les contributions sont les suivantes :

- Optimisation du modèle AR(2) avec le KF sous le critère MAV. Des expressions pour le réglage optimal des paramètres sont fournies en fonction de l'état du canal (fréquence Doppler et RSB), ce qui les rend utilisables dans la pratique, dans la mesure où on peut estimer l'état du canal. De plus, l'expression de l'EQM optimale en fonction de l'état du canal est fournie, ce qui est utile pour prédire les performances d'estimation du canal. Pour ce faire, les équations de Riccati du KF asymptotique sont résolues en ayant recours à une méthode basée sur des valeurs propres communément utilisée dans le contrôle linéaire optimal [79].
- De nouvelles interprétations concernant la densité spectrale de puissance (DSP) du processus optimal AR(2) sont également fournies. Plus précisément, l'expression analytique du facteur d'amortissement a permis d'éclairer la forme de la DSP. Contrairement à la problématique de modélisation paramétrique classique, dans laquelle l'objectif est d'adapter la densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus AR pour qu'elle soit la plus proche possible de la DSP du vrai modèle, ce n'est pas nécessairement le cas dans notre problématique d'estimation. Nous démontrons cela particulièrement pour les cas de canaux de fréquences Doppler relativement haute (mais toujours inférieure ou égale à  $f_d T = 10^{-2}$ ) ou/et de faible RSB pour lesquelles les DSP du modèle approché s'éloignent des vrais DSP. De plus, des interprétations concernant les fonctions d'autocorrélation sont également fournies.
- Une comparaison complète des performances des algorithmes proposés avec les algorithmes couramment utilisés dans la littérature pour le suivi de canaux à évanouissements plats variant dans le temps est fournie. Cette comparaison est menée, soit à partir de formules analytiques, soit à partir de simulations numériques. Les algorithmes considérés sont les filtres de Kalman basés sur le modèle AR( $p$ ) réglés par critère CM [6, 7, 15] ou critère amélioré [8, 9, 12], ou basé sur le modèle RW(2) [14], mais aussi les algorithmes des moindres carrés (LMS) ou plutôt leur version intégrée [10, 11] pour avoir le même ordre de modèle  $p = 2$  que l'algorithme proposé.

### 2.1.4 Organisation du chapitre

Ce chapitre sera divisé en plusieurs parties. Dans la première partie, on présente le modèle d'approximation du canal par un modèle d'état AR(2). Ensuite, le filtre de Kalman basé sur le modèle AR(2) et le filtre du Kalman en régime asymptotique (ou permanent) seront présentés et étudiés. Cette étude sera utile dans le processus d'optimisation. L'expression de l'EQM en régime permanent et son optimisation sont données dans la section qui suit. Les expressions analytiques des paramètres du modèle AR(2) et une expression de l'EQM minimale seront établies. La validation des résultats sera montrée par des simulations avant de finir par une conclusion.

## 2.2 Modèle discret équivalent de la transmission

On considère l'estimation d'un canal de Rayleigh mono-trajet (on suppose que  $\alpha = \alpha_l$ ) variant lentement dans le temps avec une fréquence Doppler normalisée  $f_d T \ll 1$ . On considère le modèle discret équivalent de la transmission avec une modulation numérique mono-porteuse :

$$r(k) = \alpha(k) \cdot s(k) + v(k), \quad (2.1)$$

où  $k$  est l'indice du temps discret,  $\alpha(k) = \alpha(kT)$  est la version échantillonnée à la période du symbole  $T$  du gain complexe GC,  $s(k) = a(k) + jb(k)$  (avec  $a(k)$ ,  $b(k)$  des réels) est le symbole transmis modulé en phase (M-PSK). Les symboles transmis sont supposés centrés et stationnaires avec une variance normalisée :  $E \{|s(k)|^2 = \sigma_s^2 = 1\}$ , le bruit du canal  $v(k)$  est de type bruit blanc Gaussien additif complexe circulaire, il est centré avec une variance  $\sigma_v^2$ , le GC du canal  $\alpha(k)$  est Gaussien complexe circulaire, centré de variance  $\sigma_\alpha^2$ . Notons que ce modèle peut s'appliquer sur un système plus avancé, comme par exemple un système avec modulation OFDM, où  $\alpha$  représenterait alors le gain du canal à estimer sur une sous-porteuse [80],  $s(k)$  pourrait être un symbole pilote connu du récepteur.

Dans notre cas on suppose que  $s(k)$  pourrait être un symbole pilote connu dédié à l'estimation du canal (en mode *Data-Aided*). Dans ce cas on divise l'équation (2.1) par  $s(k)$  et on obtient l'équation ci-dessous qui sera le modèle retenu pour mener l'étude théorique de ce chapitre :

$$y(k) = \frac{r(k)}{s(k)} = \alpha(k) + w(k), \quad (2.2)$$

avec  $w(k) = \frac{v(k)}{s(k)}$  bruit blanc additif gaussien complexe circulaire de variance  $\sigma_w^2$ .

Dans ce contexte, nous abordons le problème d'estimation "en ligne" de  $\alpha(k)$ . La performance de l'estimateur  $\hat{\alpha}(k)$  sera analysée et évaluée. L'estimateur utilisé est le filtre de Kalman avec le modèle AR(2) comme modèle d'état et d'approximation du canal de transmission.

## 2.3 Modèle autoregressif et approximation du canal de transmission

Yule [81] a introduit dans la littérature les modèles autorégressifs. Un modèle autorégressif est un filtre tout-pôle (composé uniquement de pôles) au travers duquel passe un bruit blanc. On détermine les coefficients de ce filtre de telle sorte que le signal à sa sortie soit proche du signal à modéliser.

### 2.3.1 Le modèle AR(2)

Dans notre cas on veut approcher le canal de Jakes par un modèle autoregressif AR(2) de la forme :

$$\tilde{\alpha}(k) = a_1 \tilde{\alpha}(k-1) + a_2 \tilde{\alpha}(k-2) + u(k), \quad (2.3)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  sont les paramètres du modèle AR(2) à régler et  $u(k)$  est le bruit d'état Gaussien complexe circulaire, centré, de variance  $\sigma_u^2$ .

Les coefficients sont calculés en utilisant les équations de Yule-Walker [16] pour minimiser

## 2.3 Modèle autoregressif et approximation du canal de transmission

la variance du bruit d'état du modèle.

De manière classique, on impose que  $\tilde{\alpha}_{(k)}$  ait la même puissance que  $\alpha_{(k)}$ , soit  $E|\tilde{\alpha}_{(k)}|^2 = E|\alpha_{(k)}|^2 = \sigma_\alpha^2$ . Le système d'équations de Yule-Walker pour un système Autorégressif d'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} R_{\tilde{\alpha}}[0] & R_{\tilde{\alpha}}[-1] \\ R_{\tilde{\alpha}}[1] & R_{\tilde{\alpha}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\tilde{\alpha}}[1] \\ R_{\tilde{\alpha}}[2] \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

avec  $R_{\tilde{\alpha}}[-1] = R_{\tilde{\alpha}}[1]$  et :

$$R_{\tilde{\alpha}}[0] = \sigma_\alpha^2 \quad (2.5)$$

$$R_{\tilde{\alpha}}[1] = \frac{a_1 R_{\tilde{\alpha}}[0]}{1 - a_2} \quad (2.6)$$

$$R_{\tilde{\alpha}}[2] = a_1 R_{\tilde{\alpha}}[1] + a_2 R_{\tilde{\alpha}}[0] \quad (2.7)$$

La solution de ce système est alors :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{R_{\tilde{\alpha}}[1] \cdot [R_{\tilde{\alpha}}[0] - R_{\tilde{\alpha}}[2]]}{R_{\tilde{\alpha}}^2[0] - R_{\tilde{\alpha}}^2[1]} \\ a_2 = \frac{R_{\tilde{\alpha}}[0] \cdot R_{\tilde{\alpha}}[2] - R_{\tilde{\alpha}}^2[1]}{R_{\tilde{\alpha}}^2[0] - R_{\tilde{\alpha}}^2[1]} \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans ce cas la variance du bruit d'état du modèle AR(2)  $\sigma_u^2$  s'exprime par :

$$\sigma_u^2 = R_{\tilde{\alpha}}[0] - a_1 R_{\tilde{\alpha}}[1] - a_2 R_{\tilde{\alpha}}[2]. \quad (2.9)$$

En injectant les équations (2.5), (2.6) et (2.7) dans (2.9), une autre expression de la variance d'état  $\sigma_u^2$  est obtenue en fonction de  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\sigma_u^2 = \sigma_\alpha^2 \frac{(1 + a_2)(1 - a_1 - a_2)(1 + a_1 - a_2)}{(1 - a_2)}. \quad (2.10)$$

Cette expression sera utilisée ultérieurement dans les expressions du système et pour faire des approximations.

Une fois que les paramètres du modèle AR(2)  $a_1, a_2$  (et par conséquent  $\sigma_u^2$ ) sont fixés, la densité spectrale du modèle AR(2) peut être calculée par [82] :

$$S(f) = \sigma_u^2 |H(z)|^2, \quad (2.11)$$

où  $H(z)$  est la fonction de transfert du filtre AR(2) et  $z = e^{j2\pi f}$ . L'expression de  $H(z)$  sera fournie dans la section qui suit.

La figure 2.3 présente le spectre du modèle AR(2) pour différentes valeurs de  $r$ .

### 2.3.2 Stabilité du Filtre AR(2)

Dans cette section la stabilité du filtre AR(2) est discutée. Pour ce faire, on calcule la fonction de transfert du filtre AR(2) afin d'en déduire ses pôles, car ce sont eux qui conditionnent la stabilité du filtre AR(2).



Pour établir l'expression de la fonction de transfert du AR(2), la transformée en  $z$  de l'équation (2.3) doit être évaluée :

$$\tilde{\alpha}(z) = a_1\tilde{\alpha}(z)z^{-1} + a_2\tilde{\alpha}(z)z^{-2} + u(z) \quad (2.12)$$

La fonction de transfert du filtre AR(2) est :

$$H(z) = \frac{u(z)}{\tilde{\alpha}(z)} = \frac{1}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}} \quad (2.13)$$

Pour que le filtre  $H(z)$  soit stable, il faut que ses pôles (zéros du dénominateur) soient à l'intérieur du cercle unité. En multipliant l'expression de  $H(z)$  dans (2.13) par  $z^2$ , l'expression suivante est déduite :

$$z^2 - a_1z - a_2 \quad (2.14)$$

Il faut donc que les zéros  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (2.14) soient à l'intérieur du cercle unité [82]. En égalant l'équation (2.14) à zéro, on trouve :

$$z_1 = \frac{a_1 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.15)$$

$$z_2 = \frac{a_1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.16)$$

avec  $\Delta = a_1^2 + 4a_2$ .

Comme déjà mentionné, les conditions de stabilité du filtre AR(2) sont :  $|z_1| < 1$  et  $|z_2| < 1$ . En multipliant  $z_1$  par  $z_2$  et en calculant le module du résultat, on trouve :

$$|z_1 \cdot z_2| = |a_2| < 1 \quad (2.17)$$

De plus, en calculant le module de la somme de  $z_1$  et  $z_2$ , on trouve :

$$|z_1 + z_2| = |a_1| < 2 \quad (2.18)$$

Des équations (2.17) et (2.18), on déduit les conditions du choix des paramètres  $a_1$  et  $a_2$  du modèle AR(2) :

$$-2 < a_1 < 2 \quad (2.19)$$

$$-1 < a_2 < 1 \quad (2.20)$$

De plus, en discutant suivant la valeur de  $\Delta = a_1^2 + 4a_2$  des équations (2.15) et (2.16) :

— Si  $\Delta = a_1^2 + 4a_2 = 0$ , il existe un et un seul pôle,  $z_1 = z_2 = \frac{a_1}{2}$ . Or, pour assurer la stabilité il faut que  $|z_{1,2}| < 1$ . Nous avons donc besoin d'avoir  $|a_1| < 2$  et  $a_2 > -1$ .

— Si  $\Delta = a_1^2 + 4a_2 > 0$ . Dans ce cas on a des pôles dans  $\mathbb{R}$ , et :

$$-1 < \frac{1}{2} \left( a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2} \right) < 1. \quad (2.21)$$

Cette équation signifie, de manière équivalente, que  $a_1 + a_2 < 1$  et  $a_2 - a_1 < 1$ .

## 2.3 Modèle autoregressif et approximation du canal de transmission

- Si  $\Delta = a_1^2 + 4a_2 < 0$ . Dans ce cas on a des pôles dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Le module carré d'un nombre complexe est le carré du réel plus le carré de la partie imaginaire. Par conséquent,  $|z_{1,2}| = -a_2 < 1$ . Dans ce cas on déduit que  $a_2 > -1$ .

D'après ce qui précède, AR(2) est stable si, et seulement si [83] :

$$\begin{cases} -2 < a_1 < 2 \\ -1 < a_2 < 1 \\ a_1 + a_2 < 1 \\ a_2 - a_1 < 1 \end{cases}$$

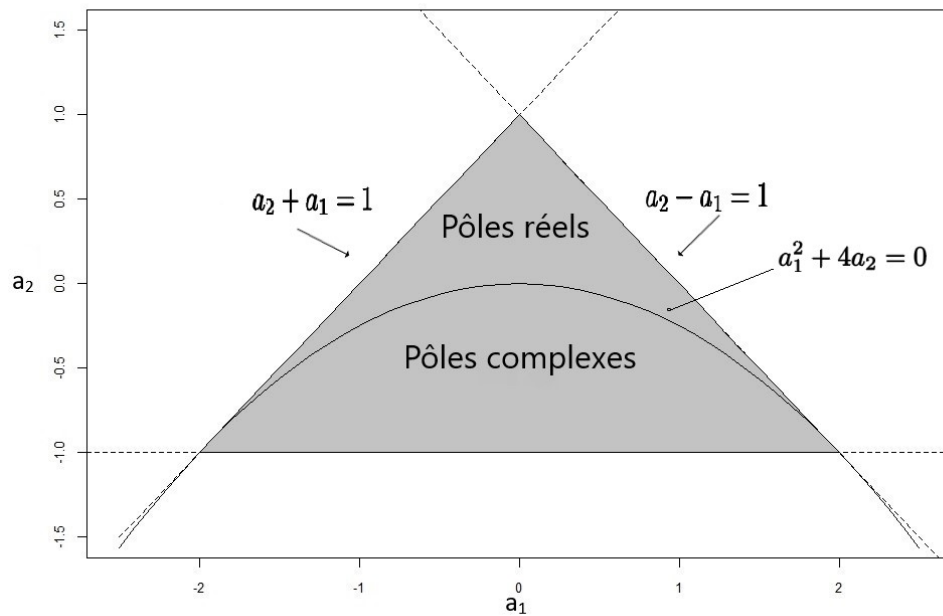


FIGURE 2.2 – Région de stabilité du modèle AR(2) pour les pôles réels et complexes.

### 2.3.3 Couple de valeurs du modèle AR(2)

Jusqu'à présent, une seule paire de paramètres  $\{a_1, a_2\}$  a été présentée. Dans la suite, deux paires équivalentes de paramètres seront également considérées. Le réglage optimal sera étudié avec la deuxième paire, tandis que la troisième sera utilisée à des fins d'interprétation.

#### 2.3.3.1 Paramètres $\{f_{\text{AR}(2)}T, r\}$ :

Pour concevoir un filtre passe-bas  $H(z)$  ayant des pics similaires à ceux du spectre de Jakes, il est nécessaire de placer un ensemble de pôles conjugués complexes dans le plan des  $z$  [8, 35, 56] :

$$z_1 = r \cdot e^{-j2\pi f_{\text{AR}(2)}T} \quad (2.22)$$

$$z_2 = r \cdot e^{+j2\pi f_{\text{AR}(2)}T}, \quad (2.23)$$

avec  $r \in [0, 1[$  le rayon du pôle à l'intérieur du cercle unité et  $f_{\text{AR}(2)}T \in [0, 1[$  la fréquence normalisée de résonance du modèle AR(2).

La fonction de transfert, en (2.13), du filtre AR(2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1 - (z_1 + z_2)z^{-1} + z_1 z_2 z^{-2}} \\ &= \frac{1}{1 - 2r \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}T)z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En comparant les équations (2.24) et (2.13), on trouve :

$$a_1 = 2r \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}T) \quad (2.25)$$

$$a_2 = -r^2. \quad (2.26)$$

Comme déjà mentionné, le modèle AR(2) nous sert à approcher le processus à spectre de Jakes. Afin d'obtenir 2 pics de résonance à symétrie paire comme dans le spectre de Jakes, on doit d'abord choisir  $r$  proche de 1. Définissons maintenant  $\delta = 1 - r$ . Ceci conduit à l'hypothèse  $0 < \delta \ll 1$ , qui sera exploitée pour obtenir des expressions approchées simples. Ensuite, étant donné que la fréquence de résonance  $f_{\text{AR}(2)}T$  doit être autour de  $f_d T$ , on a nécessairement  $f_{\text{AR}(2)}T \ll 1$  étant donné que  $f_d T \ll 1$ . De plus, pour positionner le pic autour de la fréquence Doppler normalisée  $f_d T$ , la fréquence de résonance  $f_{\text{AR}(2)}T$  doit être proche de  $f_d T$ . Au départ,  $f_{\text{AR}(2)}T$  a été fixée dans la littérature à  $f_d T$  [8]. Mais ensuite, [9] a démontré que le meilleur choix pour l'estimation avec le filtre de Kalman est de prendre :

$$f_{\text{AR}(2)}T = \frac{1}{\sqrt{2}} f_d T. \quad (2.27)$$

La compensation par le facteur  $\sqrt{2}$  a été démontrée dans [56]. L'hypothèse (2.27) est adoptée a priori dans ce chapitre et sera en outre vérifiée par des simulations (Fig. 2.13). Cependant, dans [9, 56], aucune expression n'est donnée pour le réglage de  $r$ . Le réglage optimal de  $r$  est le sujet des sections suivantes. Pour terminer cette sous-section, un exemple de DSP du processus AR(2)  $S(f) = \sigma_u^2 |H(e^{j2\pi f T})|^2$  est donné sur la Fig. 2.3 pour quatre valeurs différentes de  $\delta$ , illustrant ainsi le comportement annoncé entre la valeur de  $\delta$  et la hauteur des pics (d'autant plus élevée que  $\delta \ll 1$ ).

### 2.3.3.2 Paramètres $\{f_{n,\text{AR}(2)}T, \zeta_{\text{AR}(2)}\}$

Enfin, la fréquence naturelle équivalente  $f_{n,\text{AR}(2)}T$  et le facteur d'amortissement  $\zeta_{\text{AR}(2)}$  du filtre passe-bas du second ordre à temps discret  $H(z)$  pourraient également être étudiées. Ces paramètres physiques sont en effet ceux qui font référence pour paramétrer les filtres du second ordre, dans le cas de systèmes à temps continu (filtres analogiques) [84, 85]. Il serait donc intéressant de pouvoir définir (au moins approximativement) de tels paramètres pour le cas de nos filtres AR(2) à temps discrets. Définissons des notations qui seront utilisées dans les sections suivantes :  $\omega_{\text{AR}(2)} = 2\pi f_{\text{AR}(2)}$  et  $\omega_{n,\text{AR}(2)} = 2\pi f_{n,\text{AR}(2)}$ . Même si nous allons effectuer le réglage du processus AR(2) avec la paire  $\{f_{\text{AR}(2)}T, r\}$ ,

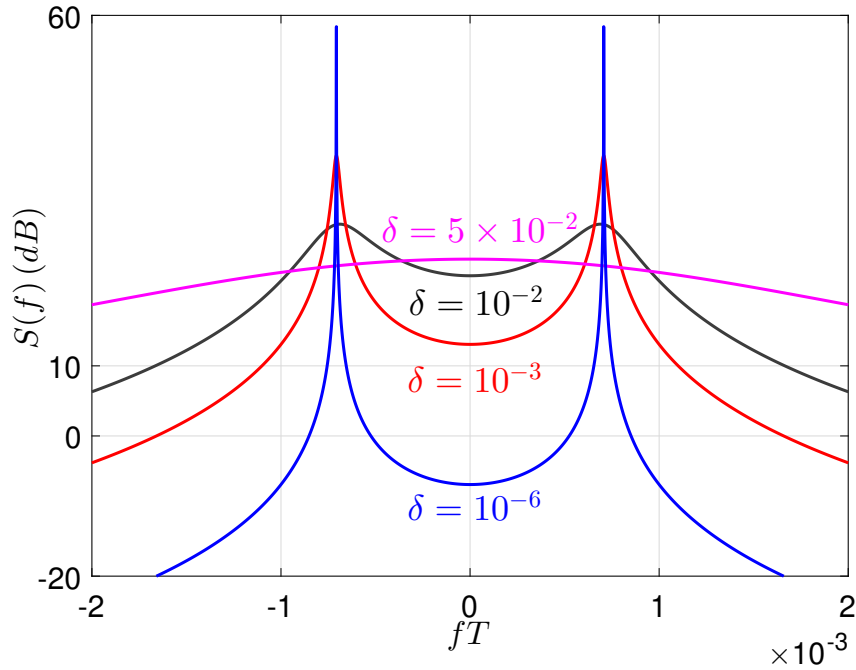


FIGURE 2.3 – Exemples de DSP d'un AR(2) pour  $f_d T = 10^{-3}$  avec  $f_{AR(2)} T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$  et différentes valeurs de  $\delta = 1 - r$ .

cette troisième paire de paramètres positifs  $\{f_{n,AR(2)} T, \zeta_{AR(2)}\}$  présente un intérêt en raison de sa signification physique et nous y ferons référence à des fins d'interprétation. Il est notamment connu que la hauteur des pics de la DSP des systèmes du second ordre est inversement proportionnelle à  $\zeta_{AR(2)}$ , en fait tout comme  $\delta$ . Il est donc légitime de s'interroger sur le lien entre les paramètres  $\zeta_{AR(2)}$  et  $\delta$ , et plus généralement entre les 2 couples de paramètres. Ceci est résolu dans A.1 où nous avons pu prouver les relations suivantes entre  $\{f_{n,AR(2)} T, \zeta_{AR(2)}\}$  et  $\{f_{AR(2)} T, r\}$  :

$$f_{n,AR(2)} T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(2\pi f_{AR(2)} T)^2 + \ln(r)^2} \quad (2.28)$$

$$\zeta_{AR(2)} = \frac{-\ln(r)}{2\pi f_{n,AR(2)} T} \quad (2.29)$$

$$\simeq \frac{\delta}{\omega_{AR(2)}}. \quad (2.30)$$

La transition triviale de (2.29) à (2.30) avec  $0 < \delta \ll 1$  est détaillée dans A.2.

Avec cette formule, nous montrons comme attendu que le coefficient  $\delta$  du processus AR(2) est proportionnel au facteur d'amortissement du système du second ordre équivalent, mais également qu'il est proportionnel à la fréquence de résonance. Notons, comme déjà indiqué, qu'il faut pour observer des pics de résonance dans le spectre que le facteur d'amortissement soit tel que  $0 < \zeta_{AR(2)} \ll 1$ .

Par suite, la formule  $f_{n,AR(2)} T = \frac{f_{AR(2)} T}{\sqrt{1 - \zeta_{AR(2)}^2}}$ , obtenue à partir de (A.6), devient

$$f_{n,AR(2)} T \simeq f_{AR(2)} T. \quad (2.31)$$

Par conséquent, la fréquence de résonance du processus AR(2) et la fréquence propre du système de second ordre équivalent ont quasiment la même valeur sous les hypothèses considérées dans ce travail, et pourront être confondues.

## 2.4 Filtre de Kalman avec le modèle AR(2)

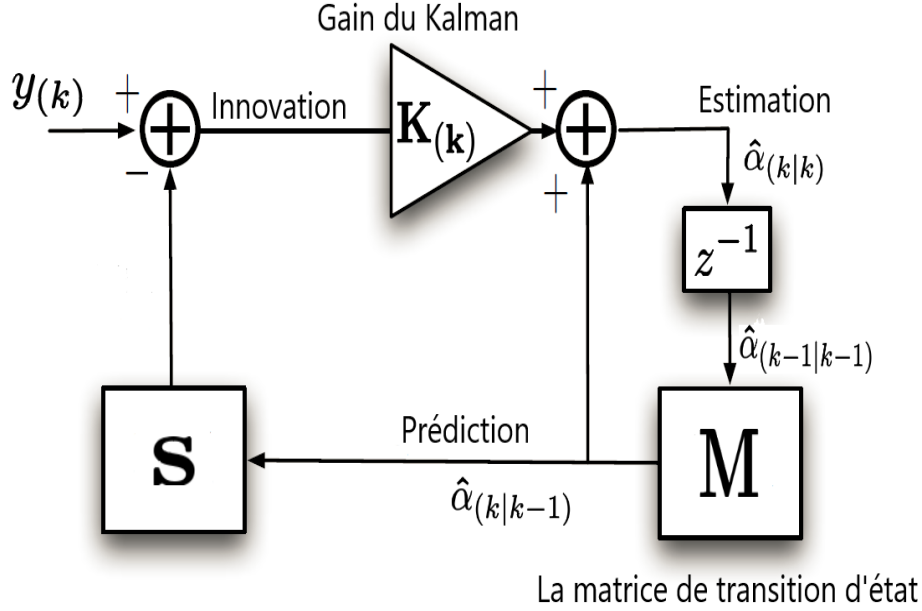


FIGURE 2.4 – Schéma du filtre de Kalman.

Dans cette partie on présente le filtre du Kalman avec le modèle AR(2). Dans ce cas, la matrice de covariance du vecteur du bruit d'état  $\mathbf{u}(k)$  est  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , et la matrice de transition d'état  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ( $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{M}$  ont été déjà présentés dans la Section 1.6.3.3). L'équation d'observation est :

$$y(k) = \alpha(k) + w(k) \quad (2.32)$$

et l'équation d'état s'écrit :

$$\tilde{\alpha}(k) = \mathbf{M}\tilde{\alpha}(k-1) + \mathbf{u}(k) \quad (2.33)$$

On définit maintenant le vecteur de prédiction  $\hat{\alpha}_{(k|k-1)} = [\hat{\alpha}_{(k|k-1)}, \hat{\alpha}_{(k-1|k-1)}]^T$  et le vecteur d'estimation  $\hat{\alpha}_{(k|k)} = [\hat{\alpha}_{(k|k)}, \hat{\alpha}_{(k-1|k)}]^T$ , avec  $\hat{\alpha}_{(k|j)}$  étant l'estimation du GC à l'instant  $k$  étant donné l'observation à l'instant  $j$ .

En regardant la formulation des équations (2.32) et (2.33), les deux étapes du filtre sont :  
**Prédiction :**

$$\hat{\alpha}_{(k|k-1)} = \mathbf{M}\hat{\alpha}_{(k-1|k-1)} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(k-1|k-1)}\mathbf{M}^H + \mathbf{U} \quad (2.35)$$

## 2.5 Filtre de Kalman en régime permanent

---

### Mise à Jour :

$$\mathbf{K}_{(k)} = \frac{\mathbf{P}_{(k|k-1)}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^T\mathbf{P}_{(k|k-1)}\mathbf{s} + \sigma_w^2} \quad (2.36)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} + \mathbf{K}_{(k)}(y_{(k)} - \mathbf{s}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}) \quad (2.37)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k)} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{K}_{(k)}\mathbf{s}^T)\mathbf{P}_{(k|k-1)}, \quad (2.38)$$

avec  $\mathbf{K}_{(k)} = \begin{bmatrix} K_{1(k)} \\ K_{2(k)} \end{bmatrix}$  la matrice du gain de Kalman,  $\mathbf{I}_2$  la matrice d'identité de taille  $2 \times 2$  et  $\mathbf{P}_{(k|k)}$  et  $\mathbf{P}_{(k|k-1)}$  sont les matrices de covariance de l'erreur à postérieur et à priori, de taille  $2 \times 2$ .

Le schéma bloc du filtre de Kalman sous forme d'un système bouclé avec prédiction / mise à jour est illustré sur la figure 2.4 .

Dans la suite on étudie le filtre de Kalman en régime permanent (asymptotique) afin de pouvoir résoudre ensuite le critère d'optimisation.

## 2.5 Filtre de Kalman en régime permanent

Dans cette section on présente les équations du Kalman en régime asymptotique. On considère le système linéaire des deux équations (2.32) et (2.33). Il est observable et contrôlable, et donc un régime asymptotique est atteint, c'est à dire que pour un nombre d'itérations  $k$  suffisamment élevé, le filtre de Kalman converge vers un filtre à coefficients constants, étant donné que la matrice de Gain de Kalman n'évolue plus. Cela est illustré sur la figure 2.5 qui montre l'évolution des coefficients du gain de Kalman au cours des itérations, et leur convergence. La structure et la fonction de transfert du filtre de Kalman asymptotique seront présentées dans la section 2.6. Mais d'abord, nous allons chercher à trouver les expressions analytiques des coefficients du Gain de Kalman asymptotique.

En régime asymptotique on peut considérer :

$$\mathbf{K}_{(k)} = \mathbf{K}_{(k+1)} = \mathbf{K}_{\infty} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k)} = \mathbf{P}_{(k+1|k+1)} = \mathbf{P}_{\infty} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k-1)} = \mathbf{P}_{(k+1|k)} = \mathbf{P}'_{\infty} = \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

On verra dans les sections suivantes que les expressions analytiques de  $K_1$  et  $K_2$  en fonction des paramètres  $a_1, a_2, \sigma_u^2$  du modèle AR(2) et de la variance du bruit d'observation  $\sigma_w^2$  sont requises pour obtenir l'expression du rayon du pôle  $r$ . Tout d'abord, nous allons concentrer notre étude sur  $K_1$ , puis  $K_2$  sera déduit de  $K_1$ . Pour trouver  $K_1$ , nous devons résoudre les équations de Kalman, (2.35), (2.36) et (2.38) en régime permanent ( $k \rightarrow \infty$ ),

qui sont appelées équations de Riccati :

$$K_1 = \frac{P'_{11}}{P'_{11} + \sigma_w^2} \quad (2.42)$$

$$K_2 = \frac{P'_{21}}{P'_{11} + \sigma_w^2} \quad (2.43)$$

$$P_{11} = (1 - K_1)P'_{11} \quad (2.44)$$

$$P_{12} = (1 - K_1)P'_{12} \quad (2.45)$$

$$P_{21} = (-K_2)P'_{11} + P'_{21} \quad (2.46)$$

$$P_{22} = (-K_2)P'_{21} + P'_{22} \quad (2.47)$$

$$P'_{11} = a_1^2 P_{11} + a_1 a_2 P_{12} + a_1 a_2 P_{21} + a_2^2 P_{22} + \sigma_u^2 \quad (2.48)$$

$$P'_{12} = a_1 P_{11} + a_2 P_{21} \quad (2.49)$$

$$P'_{21} = a_1 P_{11} + a_2 P_{12} \quad (2.50)$$

$$P'_{22} = P_{11} \quad (2.51)$$

A partir de l'équation (2.51) on peut directement déduire que  $P'_{22} = P_{11}$ , ce qui est validé par simulation dans la figure 2.6. De même on démontre dans l'Annexe B.1 que  $P'_{12} = P'_{21}$  et  $P_{12} = P_{21}$ . La validation par simulation du résultat obtenu dans l'Annexe B.1 est montrée dans la figure 2.7. Finalement, on voit à partir de (2.42) qu'il suffit de trouver  $P'_{11}$  pour déduire  $K_1$ . La solution exacte pour  $P'_{11}$  est donnée dans B.2 et pour  $K_2$  dans B.3.

Les expressions des coefficients de Gain de Kalman trouvées coïncident bien avec les valeurs des paramètres asymptotiques mesurées en simulation (aux erreurs machines près comprises entre  $10^{-12}$  et  $10^{-16}$  comme vu en annexes) mais cette contribution est laissée en annexe car non exploitée directement dans la suite de ce travail. Nous allons au contraire présenter ici les expressions approchées utiles pour notre étude, et la démarche pour les trouver.

### 2.5.1 Une expression approchée pour $K_1$

La solution exacte de  $K_1$  établie précédemment est très complexe. Elle n'est pas directement exploitable pour obtenir une solution analytique à la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation  $\sigma_e^2$  pour arriver au réglage optimal des paramètres du modèle AR(2) du filtre de Kalman. Mais en se restreignant aux hypothèses de travail, des approximations valides peuvent être faites et exploitées pour résoudre de manière approchée le problème d'optimisation du modèle AR(2). C'est ce que nous allons aborder maintenant, en commençant par lister les hypothèses de travail.

## 2.5 Filtre de Kalman en régime permanent

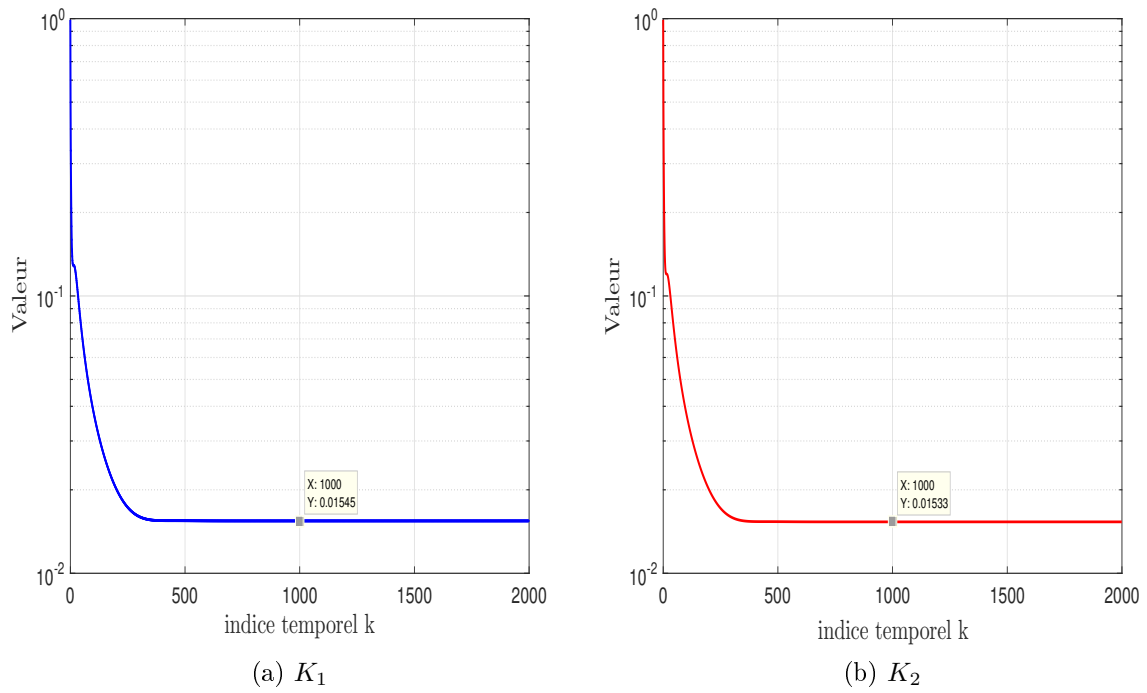


FIGURE 2.5 – Variations des coefficients du gain de Kalman  $K_1$  et  $K_2$  pour  $f_d T = 10^{-3}$  et RSB=10dB avec  $a_1 = 1.99997532$  et  $a_2 = -0.99999506$ .

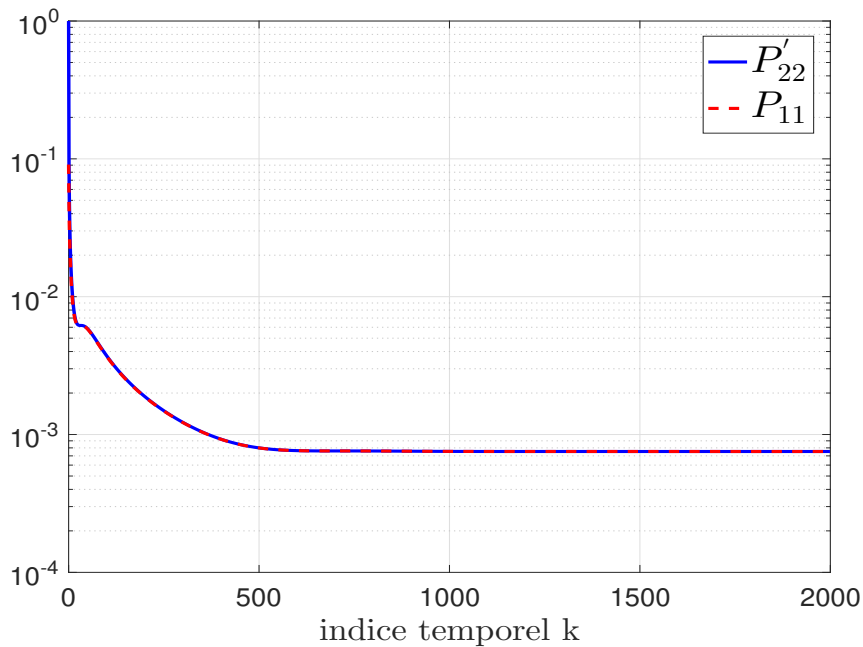


FIGURE 2.6 – Comparaison entre la valeur de  $P'_{22}$  et  $P_{11}$ .



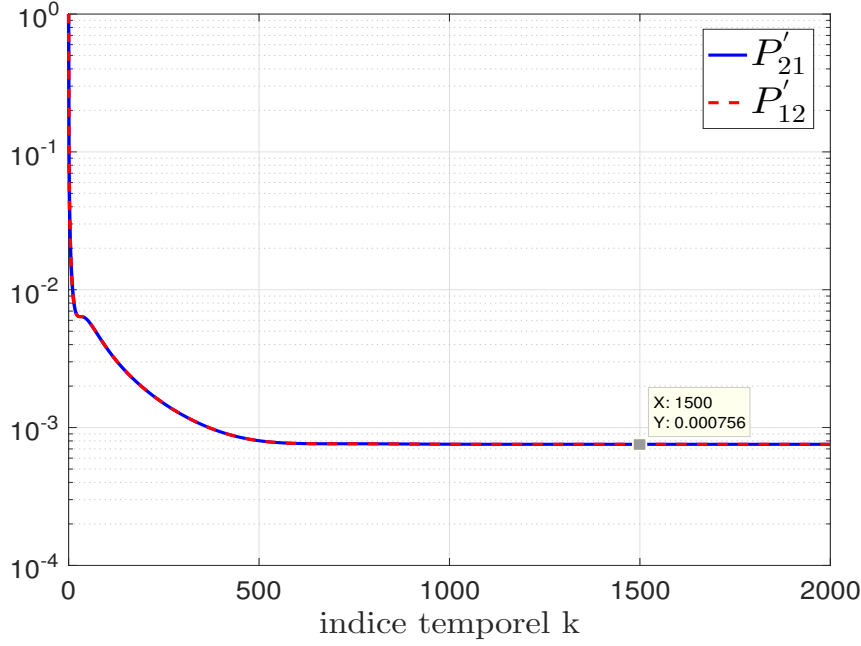


FIGURE 2.7 – Comparaison entre la valeur de  $P'_{12}$  et  $P'_{21}$ .

### 2.5.1.1 Hypothèses utilisées pour l'approximation :

- i  $f_d T \ll 1$  donc  $f_{AR(2)} T \ll 1$ , c'est à dire, canal à variations lentes à l'échelle du temps symbole (en pratique on cherche à avoir  $f_d T \leq 10^{-2}$ ).
- ii  $\sigma_w \leq \sigma_\alpha$ , i.e., le rapport signal à bruit (RSB) de la transmission est supérieur ou égal à 1. D'après notre modèle,  $RSB = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_w^2}$ .
- iii  $\delta \ll 1$ , avec  $\delta = 1 - r > 0$ , afin d'obtenir la présence d'une paire de pics symétriques dans le spectre comme discuté précédemment.
- iv  $\zeta_{AR(2)} \ll 1$ , toujours afin d'obtenir la présence de pics.
- v  $\sigma_u \ll \sigma_w$ , i.e., le bruit de processus est faible par rapport au bruit de mesure, comme c'est le cas dans de nombreuses applications [86].
- vi  $(2\pi f_{AR(2)} T)^2 \ll \frac{\sigma_u}{\sigma_w}$ ; on verra par la suite, à la fin de cette section (à travers (2.53), aussi (2.60)), que cela signifie que le filtre de Kalman est suffisamment rapide par rapport à la dynamique d'évolution des gains complexes.

Les hypothèses i, ii, iii et iv donnent la relation suivante (Annexe C.1) :

$$\text{vii } \delta^2 \ll \frac{\sigma_u}{\sigma_w}.$$

Nous verrons à posteriori en fin de section que l'ensemble des ces hypothèses permet bien d'obtenir des solutions approchées de bonne précision dans les plages de RSB et de  $f_d T$  visées.

### 2.5.1.2 Expression de $\sigma_u^2$

En utilisant les hypothèses i et iii, l'expression exacte (2.10) de  $\sigma_u^2$  peut être approchée en fonction de  $r$  et  $f_{AR(2)} T$ , comme établi facilement dans l'Annexe C.2 :

## 2.5 Filtre de Kalman en régime permanent

---

$$\sigma_u^2 \simeq 4\sigma_\alpha^2 r(1-r)(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2, \quad (2.52)$$

où  $\omega_{\text{AR}(2)}T = 2\pi f_{\text{AR}(2)}T$ .

Il est à noter que  $r$  est la seule variable dans (2.52), étant donné que  $\omega_{\text{AR}(2)}T$  est fixé en utilisant (2.27).

Dans un but de simplicité, l'optimisation sera effectuée par rapport à  $\sigma_u^2$  (ou un paramètre directement lié à  $\sigma_u^2$ ) au lieu de  $r$ , et les résultats seront alors exprimés en termes de  $r$  en utilisant (2.52).

### 2.5.1.3 Formule de $K_1$

En se basant sur les hypothèses i-v, on démontre dans l'Annexe D.1 que l'expression exacte de  $K_1$  (2.42) peut être approximée par (2.53), et par (2.54) en utilisant (2.52) :

$$K_1 \simeq \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}} \quad (2.53)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{4\sigma_\alpha r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{\frac{1}{2}}\omega_{\text{AR}(2)}T}{\sigma_w}}. \quad (2.54)$$

Avant d'interpréter ces expressions, notons que de l'équation (2.53) et l'hypothèse v on peut déduire :

viii  $K_1 \ll 1$

et de l'hypothèse vi et vii on peut déduire respectivement que :

ix  $K_1 \gg \delta$

x  $K_1 \gg f_{\text{AR}(2)}T$ .

Ces nouvelles implications sur  $K_1$  signifient que le gain de Kalman est choisi à valeur relativement faible (selon viii) étant donné l'hypothèse de canal à variations lente i, mais suffisamment importante (selon ix et x) pour pouvoir suivre l'évolution du canal.

L'équation (2.53) montre comment, à niveau de bruit d'observation fixé, on peut imposer une augmentation de la valeur du gain de Kalman  $K_1$  par un réglage augmenté de  $\sigma_u$ . A contrario, pour un réglage fixé des paramètres du filtre de Kalman AR(2) et donc de  $\sigma_u$ , cette équation montre comment le gain de Kalman  $K_1$  va automatiquement diminuer (respectivement augmenter) si le niveau de bruit d'observation augmente (respectivement diminuer) pour s'adapter et chercher le meilleur compromis vitesse / précision.

Pour valider l'expression (2.53), on compare le gain asymptotique théorique obtenu dans (2.53) et le gain obtenu par simulation. La figure 2.8 montre que les résultats théoriques et les résultats obtenus par simulation sont quasiment les mêmes pour différents  $f_dT$  et pour différents RSB.

Seule l'expression approchée de  $K_1$  sera utile dans la suite, mais nous avons montré également en Annexe D.2 que la deuxième composante  $K_2$  avait une valeur très proche de la première composante, ce que l'on peut d'ailleurs constater sur la figure 2.5.

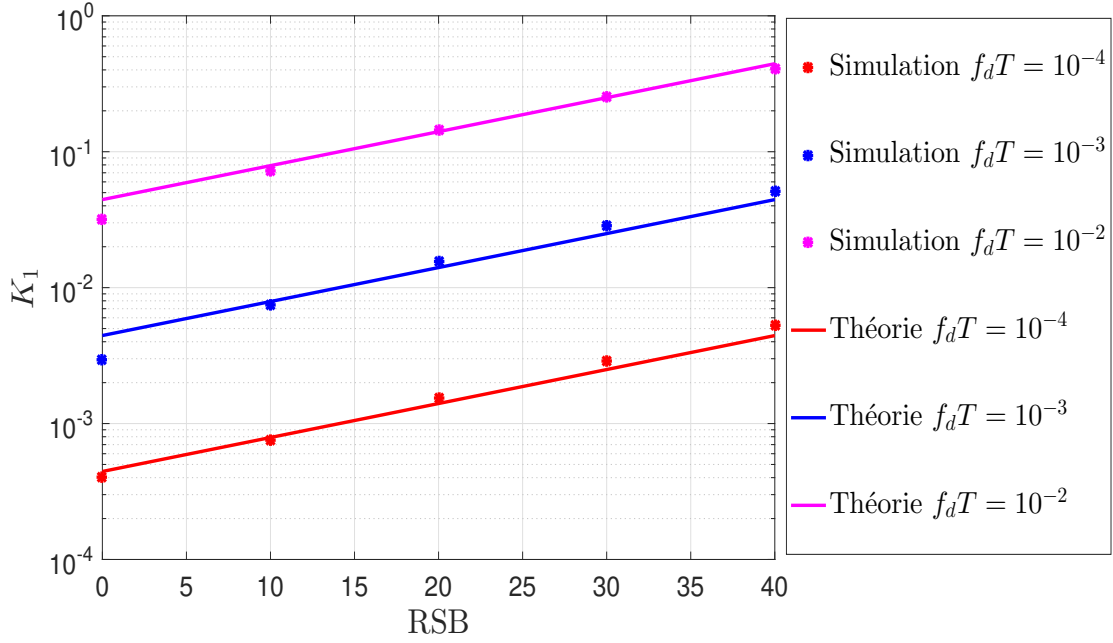


FIGURE 2.8 – Gain Asymptotique (simulation et théorie (équation (2.53))) pour filtre de Kalman basé sur un modèle AR(2) en fonction de RSB pour différents  $f_d T$ .

## 2.6 Analyse de l'erreur en régime asymptotique

Après avoir exprimé le gain de Kalman asymptotique, on va chercher maintenant à optimiser les paramètres du modèle AR(2) afin de minimiser la variance d'estimation asymptotique (critère MAV). Pour cela, il apparaît opportun d'analyser théoriquement les différentes composantes de cette erreur. On va chercher à séparer l'erreur en deux parties : l'une provenant de la dynamique du modèle, et l'autre du bruit d'observation. Chacune de ces contributions dépend des paramètres du modèle AR(2) par l'intermédiaire de la fonction du transfert du filtre de Kalman asymptotique. Nous allons ainsi d'abord commencer par exprimer et interpréter cette fonction de transfert, en fonction des différents paramètres en présence.

### 2.6.1 Fonction de transfert $L(z)$ du filtre de Kalman AR(2) asymptotique

On définit  $\hat{\alpha}(z)$ ,  $\alpha(z)$ ,  $y(z)$ ,  $w(z)$  comme les transformées en  $z$  de  $\hat{\alpha}_{(k|k)}$ ,  $\alpha_{(k)}$ ,  $y_{(k)}$  et  $w_{(k)}$ , respectivement.  $L(z)$  est la fonction de transfert du filtre qui a pour sortie  $\hat{\alpha}(z)$  avec l'observation  $y(z)$  à l'entrée, comme schématisé sur la figure 2.9. En régime asymptotique, la solution est donnée par le système d'équations (2.34) et (2.37) du KF (voir E.1) :

$$L(z) = \frac{K_1 + a_2 K_2 z^{-1}}{1 + z^{-1}(a_2 K_2 - a_1(1 - K_1)) - a_2(1 - K_1)z^{-2}}, \quad (2.55)$$

La fonction de transfert  $L(z)$  dépend ainsi :

## 2.6 Analyse de l'erreur en régime asymptotique

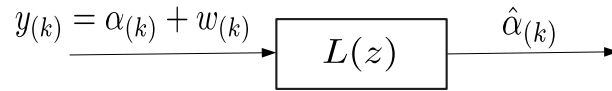


FIGURE 2.9 – Schéma du  $L(z)$  avec  $\hat{\alpha}(k)$  la sortie du filtre ayant  $y(k)$  comme l'observation à l'entrée .

- des paramètres directs du modèle AR(2)  $\{a_1, a_2\}$  ou de manière équivalente  $\{r, f_{\text{AR}(2)}\}$  selon l'équation (2.25),
- du paramètre induit  $K_1$ , qui peut être relié aux paramètres directs précédents et au niveau de bruit d'observation via l'équation (2.53) ou (2.54))
- du paramètre induit  $K_2$  qui peut être remplacé de manière exacte en fonction des paramètres directs  $\{a_1, a_2\}$  et de  $K_1$  via l'équation (2.43).

Après quelques manipulations et simplifications reposant sur les hypothèses de travail, nous sommes parvenus en annexe E.3 à une formule approchée de  $L(z)$  sous forme similaire à celle d'un système de second ordre analogique [85], et ne dépendant plus que du paramètre induit  $K_1$ . Nous avons ainsi établi par similitude aux systèmes du second-ordre analogique que notre filtre passe-bas discret  $L(z)$  a :

- une pulsation propre normalisée  $\omega_{n,L(z)}T \simeq \frac{K_1}{\sqrt{2}}$
- un facteur d'amortissement  $\zeta_{L(z)} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Il sera aussi utile dans notre étude de caractériser la largeur de bande du filtre  $L(z)$ , et plus particulièrement sa bande équivalente de bruit normalisée, définie par  $BNW = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |L(e^{2i\pi fT})|^2 df$ . Nous avons mené son calcul exact en annexe G en appliquant la méthode présentée dans [87]. On donne ici son expression simplifiée (établie dans la même annexe) grâce aux hypothèses i, ii, iii et viii :

$$BNW = \frac{3K_1}{4} \quad (2.56)$$

Ainsi,  $\frac{3K_1}{4}$  est la largeur de bande équivalente de bruit normalisée en boucle fermée du filtre de Kalman AR(2) en régime asymptotique,  $L(z)$ . La largeur de bande de  $L(z)$  a donc une valeur proche de  $K_1$ .

Notons que cela renforce bien à posteriori le sens des hypothèses viii, x (ainsi que v, vi étant donné que  $\sigma_u/\sigma_w \approx 2K_1^2$ ) qui reviennent à imposer une largeur de bande normalisée suffisante par rapport à la fréquence Doppler normalisée  $f_dT$  mais très faible devant 1 (car système très suréchantillonné étant donné  $f_dT \ll 1$ ).

Les figures 2.10 et 2.11 montrent les variations de  $|L(z)|$  et  $|1 - L(z)|$  du filtre de Kalman asymptotique à paramètres directs  $\{a_1, a_2\}$  fixés (et ainsi  $\sigma_u$  aussi fixé selon (2.10)), en fonction de la fréquence normalisée  $fT$  pour  $f_dT = 10^{-3}$  et différentes valeurs de RSB =  $\sigma_\alpha^2/\sigma_w^2$ . On observe sur ces figures que les courbes varient en fonction du RSB pour une même fréquence Doppler. On peut être surpris que la forme de  $L(z)$  dépende directement du RSB, avec une largeur de bande qui croît avec le RSB, alors que les

paramètres directs du filtre ne sont pas modifiés. Cela est en fait complètement conforme à nos développements théoriques, puisque lorsque le niveau de bruit d'observation  $\sigma_w^2$  varie, le paramètre induit  $K_1 = \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}}$  (et donc la largeur de bande) varie en sens inverse, du moins à paramètre  $\sigma_u$  (écart type du bruit d'état du filtre) fixé.

A contrario, pour un RSB fixé, on peut aussi faire varier la largeur de bande de  $L(z)$  via  $K_1$  en jouant sur le réglage de  $\sigma_u$ , c'est à dire en changeant les paramètres directs du modèle AR(2).

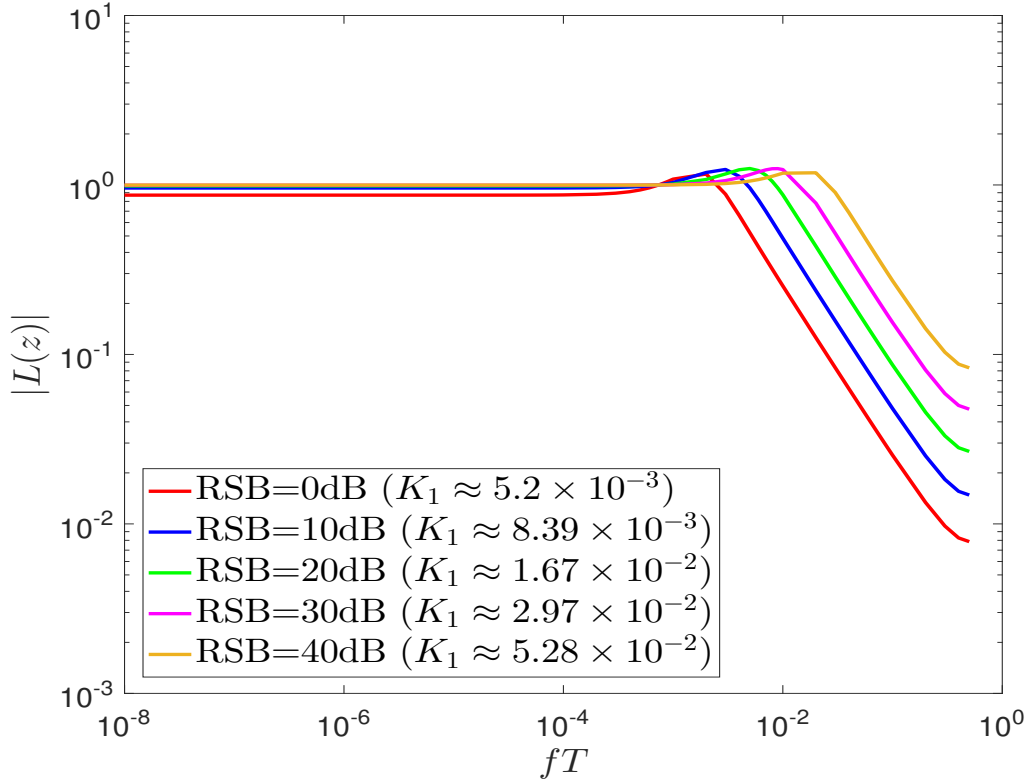


FIGURE 2.10 –  $|L(z)|$  en fonction de RSB pour  $f_d T = 10^{-3}$ , pour paramètres du modèle AR(2) fixés tel que  $\sigma_u = 1.4 \times 10^{-5}$ .

### 2.6.2 Variance d'erreur en régime asymptotique

A partir des équations de filtrage, nous avons  $\hat{\alpha}(z) = L(z)(\alpha(z) + w(z))$  et l'erreur d'estimation  $\epsilon(z)$  est :

$$\epsilon(z) = \alpha(z) - \hat{\alpha}(z) = (1 - L(z))\alpha(z) - L(z)w(z). \quad (2.57)$$

Comme illustré sur la figure 2.12, l'erreur globale  $\epsilon$  peut être décomposée en 2 contributions additives indépendantes, une erreur statique  $\epsilon_w$  qui dépend des propriétés du bruit d'observation  $w$  (essentiellement sa variance pour un bruit discret supposé blanc), et une erreur dynamique  $\epsilon_\alpha$  qui dépend des propriétés du gain complexe à estimer  $\alpha$ , en particulier sa variance et sa dynamique (son spectre). Avant même de mener les calculs,

## 2.6 Analyse de l'erreur en régime asymptotique

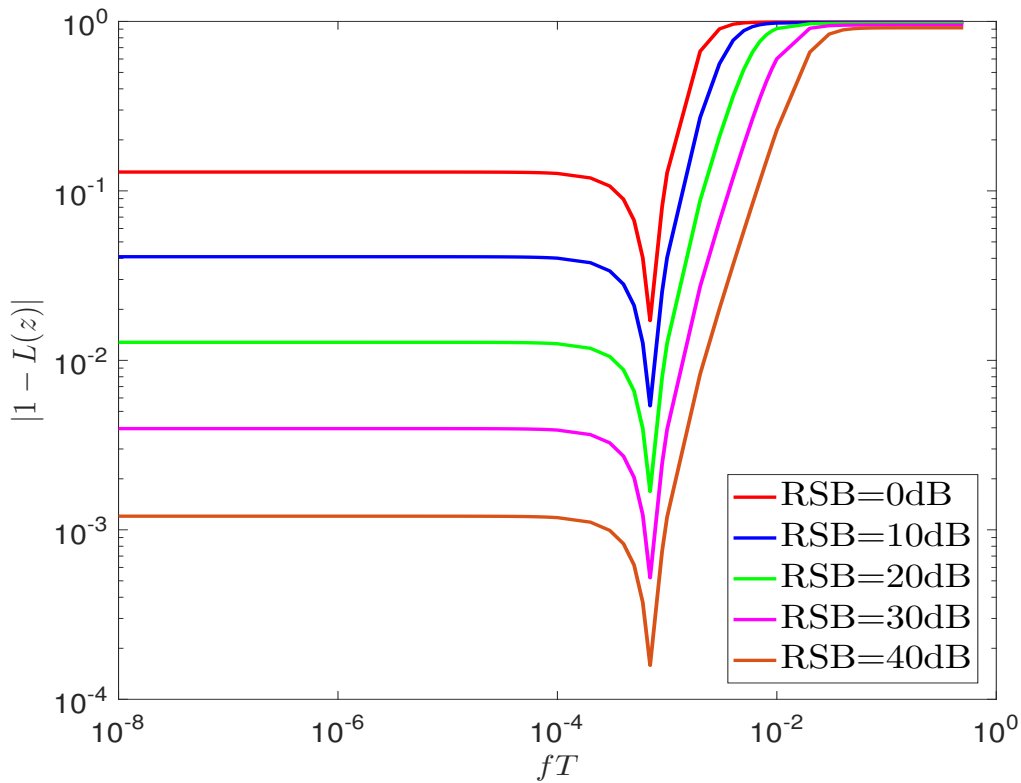


FIGURE 2.11 –  $|1 - L(z)|$  en fonction de RSB pour  $f_d T = 10^{-3}$ , pour paramètres du modèle AR(2) fixés tel que  $\sigma_u = 1.4 \times 10^{-5}$ , avec les mêmes valeurs de  $K_1$  présentés dans la figure 2.10 pour chaque RSB.

on comprend qu'un compromis devra être trouvé sur le réglage des paramètres du filtre passe-bas  $L(z)$  et en particulier de sa bande passante (ou sa pulsation propre, de l'ordre de  $K_1$ ) : la bande du filtre  $L(z)$  devra être suffisamment large pour assurer le suivi de  $\alpha$  (dont le spectre est de largeur  $f_d T$ ) afin de limiter l'erreur dynamique, mais suffisamment restreinte afin de ne pas intégrer trop de bruit additif et réduire ainsi l'erreur statique.

Nous allons maintenant quantifier tout cela avec des formules.

Il faut ainsi exprimer la puissance de l'erreur de  $\epsilon$  (2.57), qui peut être divisée en deux contributions additives :

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_{\epsilon w}^2 + \sigma_{\epsilon \alpha}^2. \quad (2.58)$$

- La variance d'erreur statique  $\sigma_{\epsilon w}^2$  due au bruit additif  $w_{(k)}$  filtré par le filtre passe-bas  $L(z)$  est :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_w^2 T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |L(e^{2i\pi f T})|^2 df. \quad (2.59)$$

L'intégrale ci-dessus fait directement intervenir la bande équivalente de bruit BNW de  $L(z)$ , étant donné que le bruit d'observation est supposé blanc dans la bande d'échantillonnage  $1/T$ , de DSP  $\sigma_w^2.T$ . En utilisant l'expression approchée (2.56) de BNW, on en

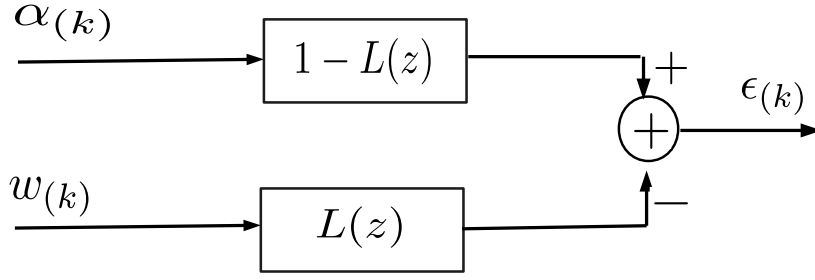


FIGURE 2.12 – Schéma de l'erreur d'estimation  $\epsilon(k)$  en sortie, avec  $\alpha(k)$  et  $w(k)$  respectivement à l'entrée des filtres de fonctions de transfert  $1 - L(z)$  et  $L(z)$ .

déduit :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 \simeq \sigma_w^2 \frac{3K_1}{4}. \quad (2.60)$$

L'équation (2.60) montre que la variance d'erreur statique est directement proportionnelle à  $K_1$ , image de la largeur de bande du filtre de Kalman asymptotique. Elle est aussi naturellement proportionnelle à la variance du bruit d'observation d'entrée,  $\sigma_{\epsilon w}^2$ .

• La variance d'erreur dynamique  $\sigma_{\epsilon \alpha}^2$  est due aux variations de  $\alpha(k)$  filtrées par le filtre passe-haut  $1 - L(z)$  :

$$\sigma_{\epsilon \alpha}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-f_d}^{+f_d} |1 - L(e^{2i\pi fT})|^2 \Gamma_\alpha(f) df. \quad (2.61)$$

Pour obtenir le résultat de l'intégration dans (2.61), le terme  $|1 - L(e^{2i\pi fT})|^2$  doit être calculé dans la bande de fréquences  $[-f_d, f_d]$ . Donc, on substitue d'abord (2.55) pour  $L$  et on développe le calcul, en supposant de basses fréquences normalisées, ce qui conduit à  $z = e^{2i\pi fT} \simeq 1 + i2\pi fT$ . Le détail des calculs est fourni dans l'Annexe F. L'expression obtenue n'est pas directement exploitable et nécessite d'autres approximations. Comme les valeurs dominantes du spectre de Jakes sont situées à proximité de  $\{-f_d, f_d\}$ , nous fournissons une approximation valide dans cette bande de fréquences. Nous utilisons les hypothèses i - viii de la section 2.5.1.1 et le fait qu'il est déduit de viii que  $K_1^4 \ll K_1^3 \ll K_1^2 \ll K_1 \ll 1$ , et de i et iii que  $f_d T^4 \ll f_d T^3 \ll f_d T^2 \ll f_d T \ll 1$ .

Après quelques manipulations, nous trouvons  $|1 - L(e^{2i\pi fT})|^2 \simeq \frac{(2\pi fT)^4}{K_1^4}$  pour  $f$  dans le voisinage de  $f_d$  (les détails du calcul peuvent être trouvés dans l'Annexe F). Le filtre  $1 - L(z)$  présente ainsi au voisinage de  $f_d T$  approximativement une pente en  $f^2$  et une atténuation en  $1/K_1^2$ , comme on peut le vérifier sur la figure 2.11. L'intégration est ensuite calculée à partir de  $\Gamma_\alpha(f)$  définie dans l'équation (1.10) par changement de variables, en remplaçant  $(f/f_d)$  par  $\cos(\theta)$  :

$$\sigma_{\epsilon \alpha}^2 \simeq \int_{-f_d}^{+f_d} \frac{(2\pi fT)^4}{K_1^4} \Gamma_\alpha(f) df = \sigma_\alpha^2 \frac{6\pi^4 (f_d T)^4}{K_1^4}. \quad (2.62)$$

Comme attendu, contrairement à l'erreur statique, la variance d'erreur dynamique décroît avec  $K_1$  (et donc la largeur de bande de  $L(z)$ ) et dépend de  $f_d T$  (de manière croissante).

## 2.6 Analyse de l'erreur en régime asymptotique

Au total, on a l'EQM globale  $\sigma_\epsilon^2$  en fonction de  $K_1$  et  $f_d T$  :

$$\sigma_\epsilon^2 \simeq \sigma_w^2 \frac{3K_1}{4} + \sigma_\alpha^2 \frac{6\pi^4 (f_d T)^4}{K_1^4}, \quad (2.63)$$

où  $K_1$  dépend du réglage du modèle AR(2) via  $\sigma_u$  et de l'observation via  $\sigma_w$  (voir l'équation (2.53)).

### 2.6.3 Optimisation selon le critère MAV

Nous allons maintenant chercher à minimiser la variance d'erreur asymptotique  $\sigma_\epsilon^2$ , en optimisant le réglage des paramètres directs du modèle. Nous allons procéder en deux étapes. D'abord, nous cherchons le  $\sigma_u^2$  optimal, noté  $\sigma_{u(\text{MAV})}^2$ , qui minimise  $\sigma_\epsilon^2$ . Ensuite, nous déduisons de  $\sigma_{u(\text{MAV})}^2$  l'expression du paramètre direct  $r$  optimal, noté  $r_{(\text{MAV})}$ .

Ainsi, en injectant (2.53) dans (2.63), en le différenciant par rapport à  $\sigma_u^2$ , et en égalisant la dérivée à zéro, on obtient la variance optimale du bruit d'état :

$$\sigma_{u(\text{MAV})}^2 = 4\pi^{\frac{16}{5}} (\sigma_\alpha^2 (f_d T)^4 \sqrt{\sigma_w})^{\frac{4}{5}} \quad (2.64)$$

et l'EQM minimale théorique :

$$\sigma_{\epsilon(\text{AR}(2)\text{-MAV})}^2 = \frac{15}{8} \pi^{\frac{4}{5}} (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{5}} (f_d T \sigma_w^2)^{\frac{4}{5}}. \quad (2.65)$$

La dérivation des deux équations précédentes était l'un des objectifs du chapitre, donnant un réglage optimal et l'expression de l'EQM minimale du filtre de Kalman AR(2).

Avec un filtre de Kalman AR(2) réglé par critère MAV, on constate que la variance d'erreur d'estimation est proportionnelle à la puissance (4/5) du produit fréquence Doppler normalisée  $\times$  variance du bruit d'observation. Notamment par exemple, pour un système qui deviendrait 10 fois plus rapide ou 10 fois plus bruité en entrée, la dégradation observée devrait théoriquement être la même, de l'ordre de  $10^{4/5}$  c'est à dire marquée par un recul de 8 dB. Nous interpréterons davantage la formule de performance (2.65) dans la suite.

**Avant d'aborder le réglage optimal**, on présente une méthode **empirique sous-optimale** du réglage des paramètres  $\{a_1, a_2\}$  du modèle AR(2). Nous avons initialement proposé cette méthode dans [1] et nous allons brièvement l'évoquer ici et en annexe H. Elle consiste à trouver l'expression de  $a_1$  en fonction de  $a_2$  et  $\sigma_u^2$ . L'expression de  $\sigma_u^2$  (Eq. (2.10)) a été approchée de la manière suivante en fonction de  $a_1, a_2$  :

$$\sigma_u^2 \simeq 2\sigma_\alpha^2 (1 + a_2)(1 - a_1 - a_2), \quad (2.66)$$

en supposant que  $1 - a_2 \simeq 2$ ,  $1 + a_1 - a_2 \simeq 4$ ,  $1 + a_2 \ll 1$  et  $1 - a_1 - a_2 \ll 1$ .

En remplaçant (2.64) dans (2.66), on trouve une expression de  $a_1$  en fonction de  $a_2, f_d T$  et  $\sigma_w$  :

$$a_1 = -\frac{a_2^2 + 2\pi^{\frac{16}{5}} ((f_d T)^4 \sqrt{\sigma_w})^{\frac{4}{5}} (\sigma_\alpha^2)^{-\frac{1}{5}} - 1}{a_2 + 1} \quad (2.67)$$

L'équation (2.67) permet de régler  $a_1$  en fonction de  $a_2$  et simplifie ainsi la recherche (à 1 dimension au lieu de 2) des paramètres sous-optimaux : l'EQM asymptotique est mesurée



par simulation "Monte-Carlo" pour une grille de valeurs de  $a_2$ , et on relève la valeur de  $a_2$  correspondant à l'EQM minimale. La figure H.1 dans l'annexe H montre les résultats de simulations de  $a_2$  en fonction de  $f_d T$  pour différents RSB. Sur les courbes, on voit qu'il y a approximativement des relations affines du type  $a_2 = -1 + \gamma f_d T$ , qui dépendent du RSB. La figure H.2 dans l'annexe H montre que  $\gamma = 2/3$  (optimal pour RSB = 20 dB) est un bon compromis. On imposera donc :

$$a_2 = -1 + \frac{2}{3} f_d T \quad (2.68)$$

La figure H.3 dans l'annexe H montre les simulations Monte-Carlo effectuées afin d'évaluer les performances de la méthode proposée, en comparaison avec le AR(1)-MAV [12] et le AR(2)-CM +  $\epsilon$  [5]. On remarque que le AR(2)-KF avec le réglage sous-optimal des paramètres surpasse le AR(1)-MAV et le AR(2)-CM +  $\epsilon$ .

La démarche (dite sous-optimale) présentée dans ce paragraphe permet à priori un réglage convenable et stable des valeurs de  $(a_1, a_2)$ . Mais nous n'avons pas souhaité en rester là car d'une part les formules proposées pour  $a_2$  (et donc pour  $r = \sqrt{-a_2} \approx 1 - (1/3)f_d T$ ) reposent sur une adéquation empirique à la fréquence Doppler et non sur un développement théorique. De plus les couples  $(a_1, a_2)$  obtenus amènent à des valeurs de  $f_{AR(2)}$  qui évoluent avec le RSB alors que selon la littérature (et nos vérifications en section simulation)  $f_{AR(2)}$  peut être fixée pour une fréquence Doppler donnée à  $f_{AR(2)} = f_d/\sqrt{2}$ .

Dans la suite de ce travail, nous ne considérerons pas cette proposition initiale mais seulement notre proposition finale de réglage dit "optimal" de  $r$ , qui va être présentée dans le paragraphe suivant. Les performances (cf annexe H) demeurent néanmoins très proches.

**Concernant le réglage optimal**, l'équation (2.64) impose toujours la valeur du bruit d'état  $\sigma_u^2$ , qui dépend uniquement des paramètres directs  $(a_1, a_2)$  ou  $(r, f_{AR(2)})$  via (2.10). Mais la multitude de valeurs possibles de couple(s) de paramètres directs qui satisfont  $\sigma_{u(MAV)}^2$  via (2.10) ne conviennent pas forcément. En effet, on rappelle que le développement théorique a été menée sous de nombreuses hypothèses restrictives qu'il faut continuer à respecter. Notamment le choix direct du couple  $(a_1, a_2)$  nécessite de nombreuses précautions afin de satisfaire les conditions de stabilité et le reste des hypothèses (conditions a priori satisfaites pour le réglage sous-optimal du paragraphe précédent).

Beaucoup moins de précautions doivent être prises si on raisonne avec les paramètres physiques, comme le rayon  $r$  des pôles du modèle AR(2) ou bien encore le facteur d'amortissement du modèle AR(2)  $\zeta_{AR(2)}$ , d'autant que le paramètre physique complémentaire  $(f_{AR(2)} T$  ou  $f_{n,AR(2)} T)$  a été fixé autour de  $f_d/\sqrt{2}$  pour nos développements, cf section A.2).

### 2.6.3.1 Les expressions optimales de $r$ et $\zeta_{AR(2)}$

Nous cherchons donc ici à calculer l'expression du  $r$  optimal, ou de manière équivalente, du facteur d'amortissement  $\zeta$  optimal, les deux étant reliés par  $\zeta_{AR(2)} \simeq \frac{1-r}{\omega_{AR(2)}}$  selon (2.30)).

## 2.6 Analyse de l'erreur en régime asymptotique

En utilisant l'expression de  $\sigma_u^2$  définie dans l'équation (2.52) :

$$\frac{\sigma_u^2}{4\sigma_\alpha^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2} \simeq (1-r)r. \quad (2.69)$$

Or  $r$  est une solution de l'équation du second degré de la forme :

$$r^2 - r + \frac{\sigma_u^2}{4\sigma_\alpha^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2} \simeq 0. \quad (2.70)$$

En résolvant l'équation on trouve :

$$r \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\alpha^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}}. \quad (2.71)$$

Dû au fait que  $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_\alpha^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2} \simeq 4(1-r)r \ll 1$  (Eq. (2.69)), on a :

$$r \simeq 1 - \frac{\sigma_u^2}{4\sigma_\alpha^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}. \quad (2.72)$$

L'équation (2.72) est toujours valide sous les hypothèses (2.5.1.1).

Dans le cas particulier du critère MAV, on peut calculer le rayon optimal  $r_{(\text{MAV})}$  à partir du bruit d'état optimal  $\sigma_{u(\text{MAV})}^2$  (2.64) :

$$\begin{aligned} r_{(\text{MAV})} &= 1 - \frac{\sigma_{u(\text{MAV})}^2}{4\sigma_\alpha^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2} \\ &= 1 - \frac{\pi^{\frac{6}{5}}(f_d T)^{\frac{6}{5}} \left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_\alpha^2}\right)^{\frac{1}{5}}}{2}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

où  $\omega_{\text{AR}(2)}T = 2\pi f_{\text{AR}(2)}T$ , et  $f_{\text{AR}(2)}T$  est fixé en utilisant le choix optimal déjà défini dans l'équation (2.27). Ayant  $r_{(\text{MAV})}$ , une expression du facteur d'amortissement du processus AR(2)  $\zeta_{\text{AR}(2)(\text{MAV})}$  peut être déduite (Eq. (2.30)) :

$$\zeta_{\text{AR}(2)(\text{MAV})} \simeq \frac{1 - r_{(\text{MAV})}}{\omega_{\text{AR}(2)}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \pi f_d T \frac{\sigma_w^2}{\sigma_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (2.74)$$

L'équation ci-dessus donne une idée de la forme de la DSP du processus AR(2) optimal. Comme mentionné précédemment, la hauteur du pic est inversement proportionnelle à  $\zeta_{\text{AR}(2)}$ . Ainsi, (2.74) signifie que la hauteur du pic sera d'autant plus élevée que le RSB est grand ou/et que  $f_d T$  est faible. Ceci sera illustré dans la section des simulations.

### 2.6.4 Comparaison avec les filtres de Kalman basés sur des modèles d'états AR(1)-MAV et RW(2)

Le tableau 2.1 fournit une présentation claire des différences et des points communs entre le filtre de Kalman qui vient d'être optimisé, noté AR(2)-MAV, et deux filtres de Kalman de la littérature : Le filtre de Kalman basé sur un modèle d'état AR(1) réglé

par critère MAV, noté AR(1)-MAV et le filtre de Kalman basé sur un modèle d'état de marche aléatoire du second ordre réglé par le même critère MAV, noté RW(2).

Le filtre de Kalman basé sur un modèle d'état AR(1) réglé par critère MAV a été obtenu dans [12], toujours en supposant que le vrai modèle de canal est le modèle de Rayleigh à spectre de Jakes. L'EQM théorique d'estimation du filtre de Kalman AR(1)-MAV a été calculée comme suit :

$$\sigma_{\epsilon(\text{AR}(1)\text{-MAV})}^2 \simeq \frac{3}{2} \cdot \pi^{\frac{2}{3}} (\sigma_{\alpha}^2)^{\frac{1}{3}} (f_d T \sigma_w^2)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.75)$$

On retrouve une performance qui dépend du produit fréquence Doppler normalisée  $\times$  variance du bruit d'observation, mais cette fois avec une puissance (2/3), au lieu de (4/5) dans le cas du modèle AR(1)-MAV.

En comparant (2.65) et (2.75), on a pour les plages de travail de RSB et  $f_d T$  considérées :

$$\sigma_{\epsilon(\text{AR}(2)\text{-MAV})}^2 < \sigma_{\epsilon(\text{AR}(1)\text{-MAV})}^2. \quad (2.76)$$

Nous vérifierons dans la section des simulations que le AR(2)-MAV surpasse bien le AR(1)-MAV, ce qui confirme la comparaison théorique ci-dessus.

Par contre, la performance en variance d'estimation asymptotique du modèle AR(2) stationnaire sous critère MAV est très proche de celle obtenue avec un modèle non stationnaire, le modèle de marche aléatoire de second ordre (RW(2)) [14] sous le même critère MAV :

$$\frac{\sigma_{\epsilon(\text{RW}(2)\text{-MAV})}^2}{\sigma_{\epsilon(\text{AR}(2)\text{-MAV})}^2} = 2^{\frac{2}{5}} \quad (2.77)$$

Il est à noter que l'expression générale de la fonction de transfert du Kalman asymptotique  $L(z)$  obtenue en (2.55) pour le AR(2)-MAV est très différente de celle obtenue en [14] pour le RW(2), dû à la différence entre les deux systèmes de second ordre à temps discret (voir 2ème et 7ème lignes du tableau 2.1). Concernant le gain de Kalman, la première composante  $K_1$  est liée de la même manière au bruit d'état et au bruit d'observation par la relation  $K_1 \approx \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}}$ . Par contre, la première et la deuxième composantes du gain de Kalman du modèle AR(2) sont presque égales ( $K_2 \simeq K_1$ , voir D.2), alors que ce n'est pas du tout le cas pour le modèle RW(2) où la deuxième composante est négligeable vis à vis de la première ( $K_2 \simeq \frac{K_1^2}{2}$  [14]).

Malgré ces différences, les facteurs d'amortissement des deux KF ont la même valeur  $\zeta_{L(z)} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ce qui signifie que les formes des fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel,  $L(e^{j2\pi f T})$ , sont très proches pour les deux filtres AR(2)-KF et RW(2)-KF, dans l'hypothèse d'un canal à variations lentes. De plus, dans les deux cas, la fréquence propre normalisée (de même que la largeur de bande) de la fonction de transfert  $L(z)$  est liée à la première composante du gain de Kalman par la même relation  $\omega_{n,L(z)} T \approx K_1 / \sqrt{2}$ .

En conclusion, notre travail a permis de montrer que, similairement au modèle d'état non stationnaire RW(2), le modèle d'état stationnaire AR(2)-MAV permet de concevoir

| Modèle                          | AR(1)-MAV   | AR(2)-MAV   | RW(2)   |
|---------------------------------|---|---|---|
| Équation à temps discret        | $\tilde{\alpha}^{(k)} = a\tilde{\alpha}^{(k-1)} + u^{(k)}$<br>$a = \sqrt{1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\alpha^2}}$ | $\tilde{\alpha}^{(k)} = a_1\tilde{\alpha}^{(k-1)} + a_2\tilde{\alpha}^{(k-2)} + u^{(k)}$<br>$a_1 = 2r \cos(\omega_{AR(2)}T)$ $a_2 = -r^2$ | $\tilde{\alpha}^{(k)} = \tilde{\alpha}^{(k-1)} + e^{(k-1)}$<br>$e^{(k)} = e^{(k-1)} + u^{(k)}$              |
| Gain à $f = 0$ , $H(1)$         | $\frac{1}{1-a}$   | $\frac{1}{1-a_1-a_2}$   | $+\infty$   |
| Réglage optimal $\sigma_u^2$    | $4 \left( (\pi f_d T)^4 \frac{\sigma_w^2}{\sigma_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{3}}$                                 | $4\pi^{\frac{16}{5}} (\sigma_\alpha^2 (f_d T)^4 \sqrt{\sigma_w})^{\frac{4}{5}}$   | $4^{\frac{9}{5}} \pi^{\frac{16}{5}} (\sigma_\alpha^2 (f_d T)^4 \sqrt{\sigma_w})^{\frac{4}{5}}$              |
| $\omega_{AR(2)}T$               | -   | $2\pi \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$   | -   |
| $r$                             | -   | $1 - \frac{\sigma_u}{4\sigma_\alpha^2 (\omega_{AR(2)}T)^2}$   | -   |
| Fonction de transfert $L(z)$    | $\frac{K_1}{1-a(1-K_1)z^{-1}}$  | $\frac{K_1+a_2K_2z^{-1}}{1+z^{-1}(a_2K_2-a_1(1-K_1))-a_2(1-K_1)z^{-2}}$   | $\frac{K_1-K_2(1-z^{-1})+K_2}{(1-z^{-1})^2 + \frac{K_2}{1-K_1}(1-z^{-1}) + \frac{K_2}{1-K_1}}$              |
| $K_1$                           | $\frac{\sigma_u}{\sigma_w}$   | $\sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}}$   | $\sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}}$   |
| $K_2$                           | -   | $\simeq K_1$  | $\simeq \frac{K_1}{2}$  |
| $\omega_{n,L(z)}T$              | -   | $\frac{K_1}{\sqrt{2}}$  | $\frac{K_1}{\sqrt{2}}$  |
| $\zeta_{L(z)}$                  | -   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |
| Performance $\sigma_\epsilon^2$ | $\frac{3}{2} \cdot \pi^{\frac{2}{3}} (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{3}} (f_d T \sigma_w^2)^{\frac{2}{3}}$            | $\frac{15}{8} \pi^{\frac{4}{5}} (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{5}} (f_d T \sigma_w^2)^{\frac{4}{5}}$   | $\frac{15}{8} (\sqrt{2}\pi)^{\frac{4}{5}} (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{5}} (f_d T \sigma_w^2)^{\frac{4}{5}}$ |
| $\sigma_{\epsilon w}^2$         | $\frac{\sqrt{(1-a^2)\sigma_w^2}}{2}$  | $\sigma_w^2 \frac{3K_1}{4}$   | $\sigma_w^2 \frac{3\sqrt{2}K_2}{4}$   |
| $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$     | $\sigma_\alpha^2 \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_w^2}{1-a^2}$   | $\sigma_\alpha^2 \frac{6\pi^4 (f_d T)^4}{K_1^4}$  | $\frac{3}{8} \sigma_\alpha^2 \frac{(2\pi f_d T)^4}{K_2^2}$  |

TABLE 2.1 – Table de comparaison entre AR(2)-MAV, AR(1)-MAV [12] et RW(2) [14].

un filtre de Kalman asymptotique qui se comporte comme un système passe-bas du second ordre de même facteur d'amortissement  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de largeur de bande de l'ordre de  $K_1$  réglable à partir de la variance du bruit d'état  $\sigma_u$ . Il est ainsi logique d'obtenir des performances d'estimation voisines dans les deux cas AR(2)-MAV et RW(2). Dans ces deux cas, on a un système du second ordre, mais avec finalement un seul vrai degré de liberté (largeur de bande), du moins dans nos hypothèses de travail. Quoi qu'il en soit, l'intérêt du second ordre par rapport au premier ordre est démontré théoriquement, car il permet une variance d'estimation plus faible, qui de plus se réduit de manière plus marquée (pente 4/5 au lieu de 2/3) lorsque les perturbations (fréquence Doppler ou variance de bruit) diminuent.

## 2.7 Simulations

### 2.7.1 Illustration des paramètres du système

L'objectif de cette section est d'illustrer et d'interpréter les valeurs des paramètres optimaux du système pour un état de canal donné ( $f_d T$  et RSB) que nous venons d'établir, et de les comparer avec d'autres choix possibles de la littérature. Les fonctions d'autocorrélation ainsi que les DSP des processus AR(2) sont illustrées et discutées. Une comparaison des EQM obtenues par des simulations Monte Carlo pour différentes valeurs de  $f_{\text{AR}(2)} T$  est d'abord présentée dans la figure 2.13, pour vérifier la pertinence du réglage de  $f_{\text{AR}(2)} T$  issu de la littérature et que nous avons conservé, et l'importance du critère MAV.

#### 2.7.1.1 EQM pour différentes valeurs de $f_{\text{AR}(2)} T$

La Figure 2.13 montre l'impact du paramètre  $f_{\text{AR}(2)} T$  sur l'EQM asymptotique. Afin d'illustrer le choix de  $f_{\text{AR}(2)} T$  dans l'équation (2.27), des simulations de Monte Carlo ont été réalisées pour  $f_{\text{AR}(2)} T = \{\frac{f_d T}{2}, \frac{f_d T}{\sqrt{2}}, f_d T\}$  pour différents RSB et  $f_d T$ . Ces simulations confirment les travaux de [9] et [56], affirmant que  $f_{\text{AR}(2)} T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$  est le choix optimal en termes d'EQM. On observe également sur ces courbes, ce qui avait motivé une grande partie de notre travail, que les performances obtenues avec le modèle AR(2)-CM, c'est à dire réglé par critère de corrélation, sont très mauvaises comparées à celles de l'AR(2)-MAV, même si  $f_{\text{AR}(2)} T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$ .

On comprend, grâce à ces figures, que le critère CM amène à choisir un rayon  $r$  pour les pôles du modèle AR(2) beaucoup trop élevé et proche de 1 (c'est à dire une valeur de  $\delta = 1 - r$  beaucoup trop faible) par rapport à la valeur que nous avons établie, qui est optimale en terme de variance d'estimation. On rappelle qu'une valeur de  $r$  très proche de 1 correspond à des hauteurs de pics très élevées dans la DSP du processus AR(2), similairement à ceux présents dans le spectre de Jakes (DSP du vrai modèle).

#### 2.7.1.2 Fonction d'autocorrélation du modèle AR(2)

Dans cette partie, les équations Yule-Walker [16] sont utilisées pour obtenir la fonction d'autocorrélation du modèle AR(2) :

$$R_{\hat{\alpha}}[k] = a_1 R_{\hat{\alpha}}[k - 1] + a_2 R_{\hat{\alpha}}[k - 2]. \quad (2.78)$$

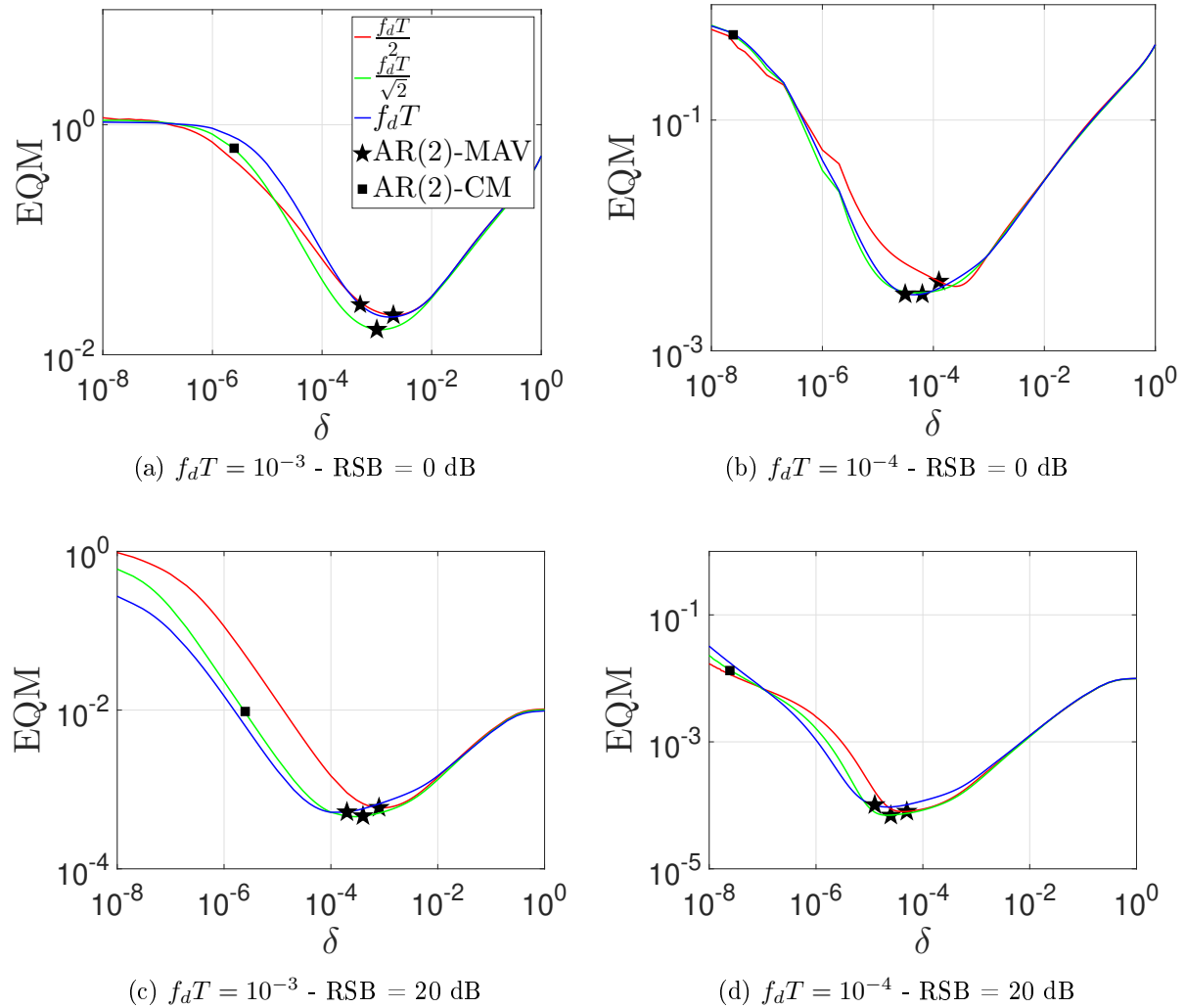


FIGURE 2.13 – Variation de l’EQM en fonction de  $\delta = 1 - r$  pour différentes valeurs de  $f_{AR(2)}T$  pour RSB = 0 dB et 20 dB.

Figure 2.14 montre les fonctions d’autocorrélation de différents processus AR(2) : le AR(2)-MAV avec  $f_{AR(2)}T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$  et  $f_{AR(2)}T = f_d T$ , et l’ AR(2)-CM. Pour comparaison, la fonction d’autocorrélation du vrai modèle de canal, qui est la fonction de Bessel, est également montrée. On observe que la fonction d’autocorrélation de l’AR(2)-MAV avec  $f_{AR(2)}T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$  semble plus proche (en terme de distance euclidienne) de la vraie fonction d’autocorrélation que les autres. On aurait pu s’attendre à ce que ce soit le critère CM, qui signifie "coïncidence de corrélation" qui amène la fonction de corrélation la plus proche de celle du vrai modèle. En fait ce serait bien le cas pour un ordre  $p$  du modèle AR( $p$ ) beaucoup plus élevé que  $p = 2$  considéré ici. On rappelle en effet que le critère CM d’ordre  $p$  impose seulement que les  $p$  **premiers termes** strictement positifs (c’est à dire aux indices temporels  $i = 1, \dots, p$ ) de la fonction d’autocorrélation du modèle AR( $p$ ) **coïncident** avec ceux de la fonction d’autocorrélation exacte (ou les  $p + 1$  premiers si on compte l’indice nul, étant donné que les puissances  $E|\alpha|^2$  et  $E|\tilde{\alpha}|^2$  coïncident).

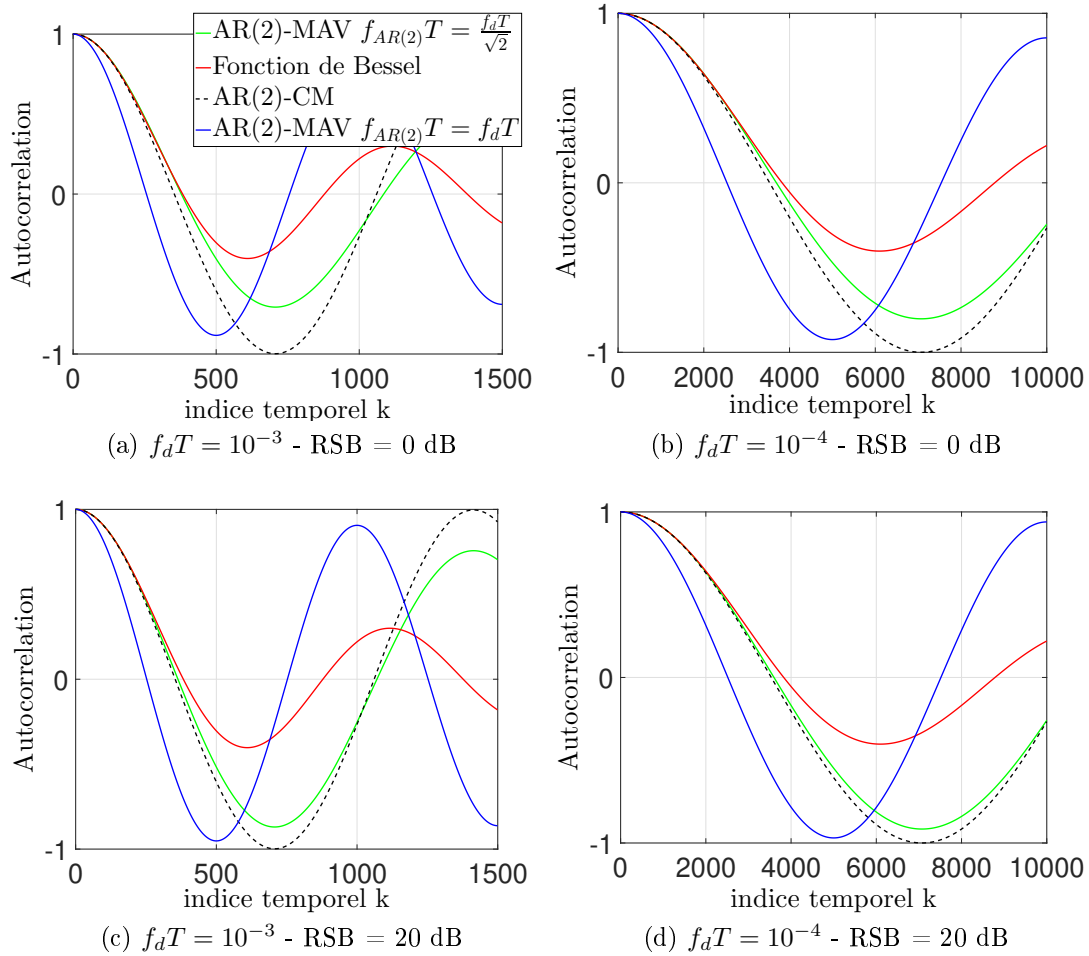


FIGURE 2.14 – Les fonctions d’autocorrélation du modèle AR(2) avec les critères CM et MAV et la fonction de Bessel pour  $f_d T = 10^{-3}$  et  $f_d T = 10^{-4}$  pour RSB = 0 dB et 20 dB.

### 2.7.1.3 DSP du modèle AR(2) optimal

La Figure 2.15 montre les densités spectrales de puissance (DSP) du processus AR(2) optimal AR(2)–MAV (réglé avec  $r_{\text{MAV}}$  et  $f_{\text{AR}(2)}T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$ ) pour différentes valeurs de RSB et  $f_d T$ . On peut voir que le niveau des pics dépend du RSB et de  $f_d T$ . Plus précisément, la valeur la plus élevée du pic est obtenue pour la fréquence la plus basse  $f_d T = 10^{-4}$  et le RSB le plus élevé = 20 dB, ce qui est cohérent avec l’équation (2.74). De plus, il est intéressant de comparer ces niveaux avec ceux obtenus avec l’AR(2)–CM. En fait, l’exemple de la DSP donnée dans la figure 2.3 ( $\delta = 10^{-6}$ ) a été obtenu avec le critère CM. La DSP pour le critère CM montre une hauteur de pic d’environ 60 dB au dessus de la valeur à 0 Hz, et ceci est indépendant du RSB. En effet, le réglage de  $a_1$  et  $a_2$  sous le critère CM ne dépend pas du RSB. Cette valeur de 60 dB doit être comparée à celle obtenue pour le critère MAV, qui n’est d’environ que de 12 dB pour RSB = 0 dB et  $f_d T = 10^{-3}$ , et d’une trentaine de dB dans le pire des cas présenté, RSB = 20 dB et  $f_d T = 10^{-4}$ .

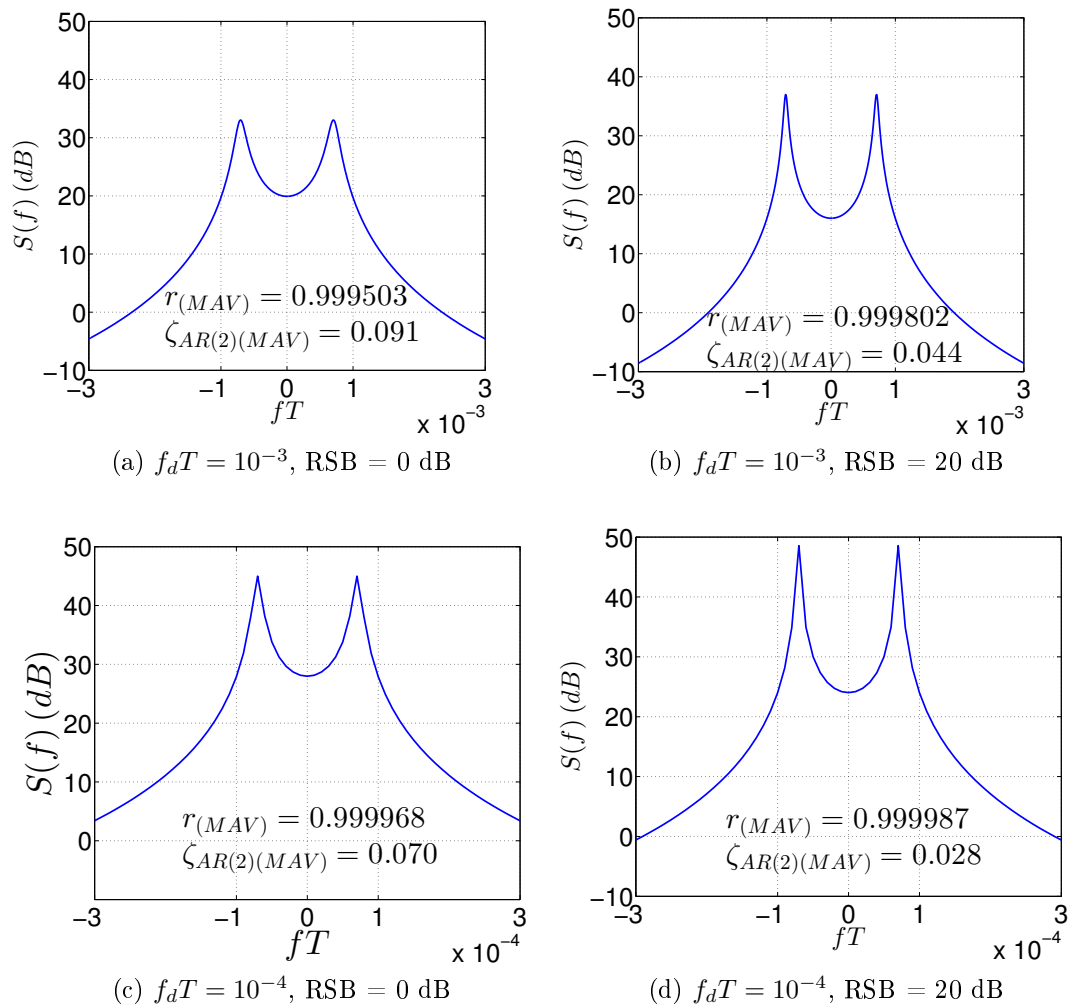


FIGURE 2.15 – Spectres du modèles AR(2) avec le critère MAV pour différentes valeurs de  $f_d T$  et RSB.

#### 2.7.1.4 Évolution des paramètres optimaux avec l'état du canal

Dans cette partie, l'évolution du facteur d'amortissement  $\zeta_{AR(2)(MAV)}$  et du facteur  $\delta_{(MAV)} = 1 - r_{(MAV)}$  du processus AR(2) en fonction de l'état du canal ( $f_d T$  et RSB) est discutée. Les deux paramètres sont tracés en fonction de  $f_d T$  pour les trois valeurs de RSB = 0, 20, 40 dB dans la figure 2.16. On peut voir que  $\delta_{(MAV)} = 1 - r_{(MAV)}$  augmente proportionnellement à la puissance  $\frac{6}{5}$ -ème de  $f_d T$ , et diminue proportionnellement à la puissance  $\frac{1}{5}$ -ème du RSB, ce qui est en accord avec (2.73). De la même manière, nous pouvons voir que  $\zeta_{AR(2)(MAV)}$  augmente proportionnellement à la puissance  $\frac{1}{5}$ -ème du produit  $\frac{f_d T}{SNR}$ , conformément à la théorie que nous avons développé (2.74). Comme déjà mentionné dans la section précédente, la densité spectrale de puissance évolue avec l'état du canal et cette évolution peut être quantifiée par celle de  $\zeta_{AR(2)(MAV)}$ , qui influence directement le niveau des pics de  $H(z)$ . La valeur maximale de  $\zeta_{AR(2)(MAV)}$ , d'environ 0.1, est obtenue pour un RSB minimum de 0 dB et une  $f_d T$  maximum de  $10^{-2}$ , ce qui est cohérent avec le fait observé précédemment que la hauteur des pics est la plus faible pour



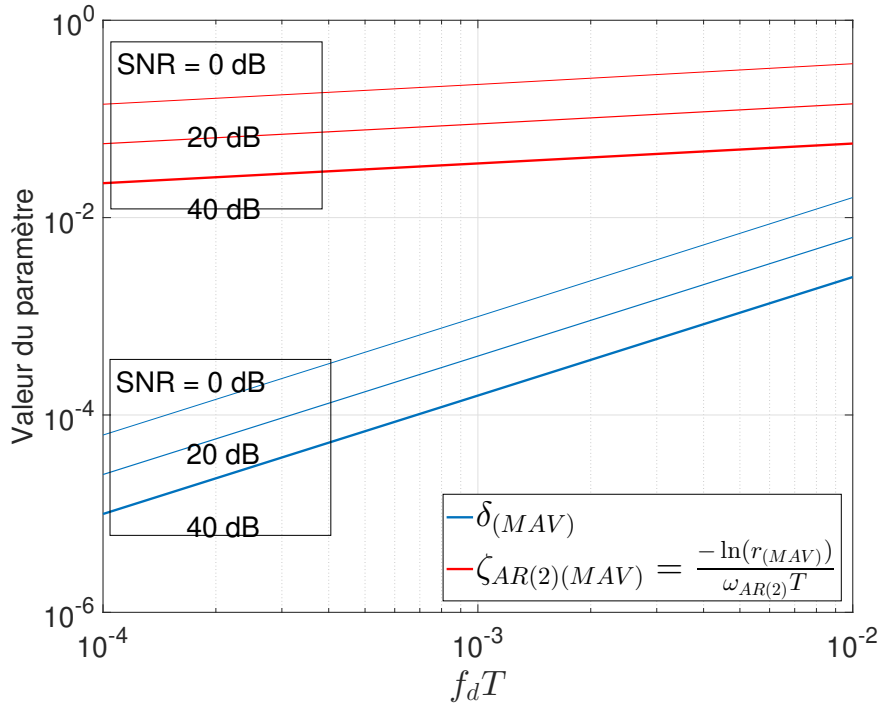


FIGURE 2.16 –  $\delta_{(MAV)} = 1 - r_{(MAV)}$  (2.73) et  $\zeta_{AR(2)_{MAV}}$  (2.74) pour différentes valeurs de  $f_d T$  et RSB.

RSB minimum et  $f_d T$  maximum. Même dans le pire des scénarios, le modèle autoregressif du second ordre est donc très sous-amorti (facteur d'amortissement faible devant 1).

## 2.7.2 Performance en erreur quadratique moyenne EQM

La figure 2.17 trace l'EQM asymptotique des estimations du KF où le modèle AR(2) est ajusté avec le critère MAV proposé (AR(2)-MAV). A titre de comparaison, les KF basés sur les modèles AR(2) suivants de la littérature sont considérés : les AR(2)-CM [6, 7, 15] ainsi que les AR(2)-CM améliorés avec  $\epsilon$  [5], l'AR(2) de [8, 9] où  $r$  est ajusté en fonction des résultats expérimentaux comme suit :  $r = 0.999 - 0.1 \times 2\pi f_d T$  et  $f_{AR(2)} T = \frac{f_d T}{\sqrt{2}}$ . A noter que le réglage de  $r$  ne dépend pas ici du RSB.

Par ailleurs, étant donné que l'algorithme des moindres carrés (LMS) (ou les versions intégrées) donne des performances en régime asymptotique similaires à celles d'un filtre de Kalman (avec des modèles d'état à marche aléatoire [11] [10]) le AR(2)-MAV KF est comparé à un ensemble d'algorithmes adaptatifs LMS :

1. L'algorithme de Wiener least mean square (WLMS) proposé par [11]. Dans ce modèle, le processus AR(2) est utilisé pour la prédiction du GC suivant.
2. L'algorithme adaptatif LMS (A-LMS) proposé par [10], où un modèle de marche aléatoire de second ordre est utilisé.

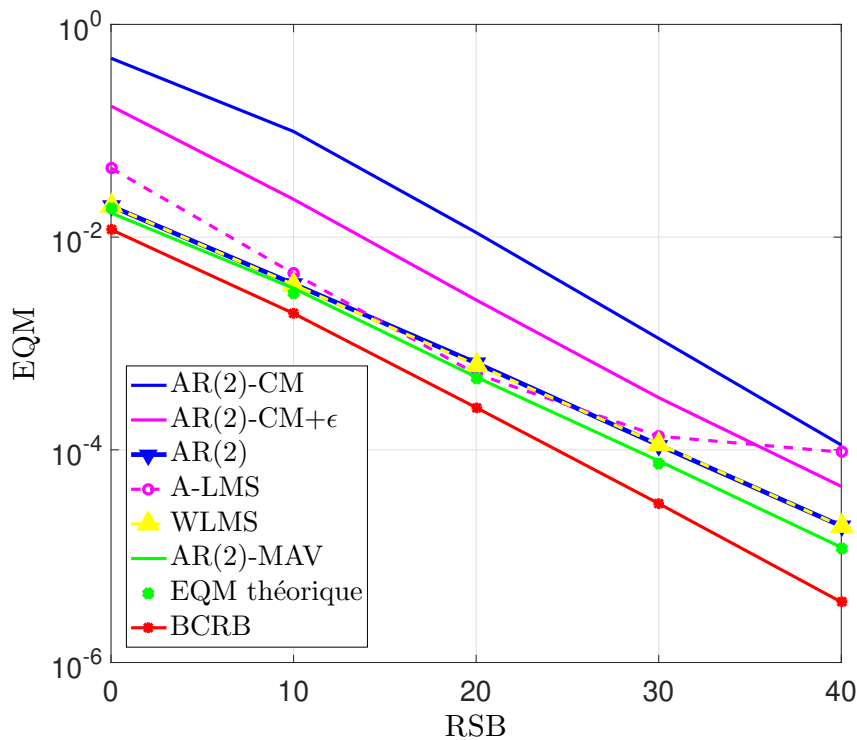
La BCRB "en ligne" est aussi tracé [80].

## 2.7 Simulations

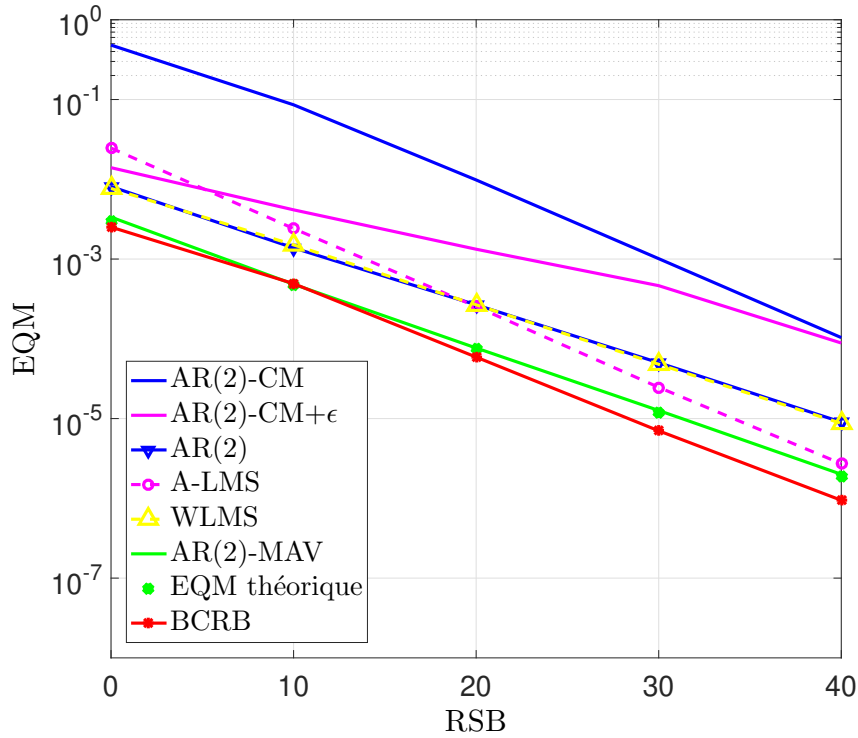
Premièrement, on peut vérifier que l'EQM obtenue par simulation Monte-Carlo est très proche de la valeur  $\sigma_{\epsilon(\text{AR}(2)\text{-MAV})}^2$  obtenue par l'équation (2.65), validant ainsi notre analyse théorique.

Ensuite, on voit dans la figure 2.17 que le filtre de Kalman basé sur le modèle AR(2)-MAV surpasse les autres algorithmes de la littérature. La figure 2.18 montre l'EQM du W-LMS, A-LMS, AR(2) [9] et AR(2)-MAV en fonction de  $f_d T$  pour SNR = 10 dB. L'EQM obtenu avec l'AR(2)-MAV reste proche de la BCRB ce qui n'est pas le cas des autres algorithmes surtout pour  $f_d T = 10^{-4}$ . Ce résultat montre que l'AR(2)-MAV réglé à partir de nos formules analytiques peut être utilisé jusqu'à  $f_d T = 10^{-2}$ , c'est à dire pour des fréquences Doppler normalisées modérées, compatibles avec la plupart des systèmes de téléphonie opérationnels.

En guise de conclusion concernant les performances en EQM, la figure 2.19 montre l'EQM des estimations du KF en fonction de l'ordre  $p$  du modèle AR pour le critère CM [6, 7, 15] et le critère MAV. Conformément à notre analyse théorique (2.76), la figure montre que l'AR(2)-MAV surpasse le AR(1)-MAV, et permet de se rapprocher de manière significative de la borne minimale BCRB. Les simulations montrent aussi que l'EQM de l'AR(2)-MAV est équivalente à celle de de l'AR(15)-CM qui est beaucoup plus complexe. Ces 2 constatations confortent à posteriori l'intérêt de notre étude d'optimisation du modèle d'ordre 2.



(a)  $f_d T = 10^{-3}$



(b)  $f_dT = 10^{-4}$

FIGURE 2.17 – Comparaison des EQM asymptotique des filtres de Kalman pour le AR(2)-MAV proposé avec la littérature : AR(2)-CM [6, 7], AR(2)-CM+ $\epsilon$  [5], AR(2) [8, 9], A-LMS [10], W-LMS [11], en termes de RSB pour  $f_dT = 10^{-3}$  et  $f_dT = 10^{-4}$ .

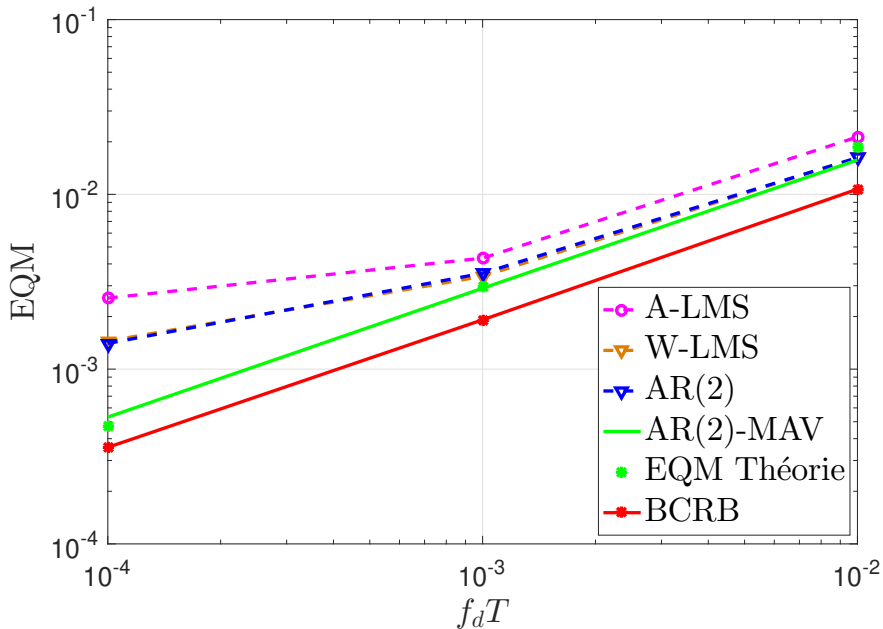


FIGURE 2.18 – Comparaison entre l'EQM asymptotique du AR(2)-MAV avec la littérature, AR(2) [8, 9], A-LMS [10], W-LMS [11] pour différentes valeurs de  $f_dT$  et RSB = 10 dB.

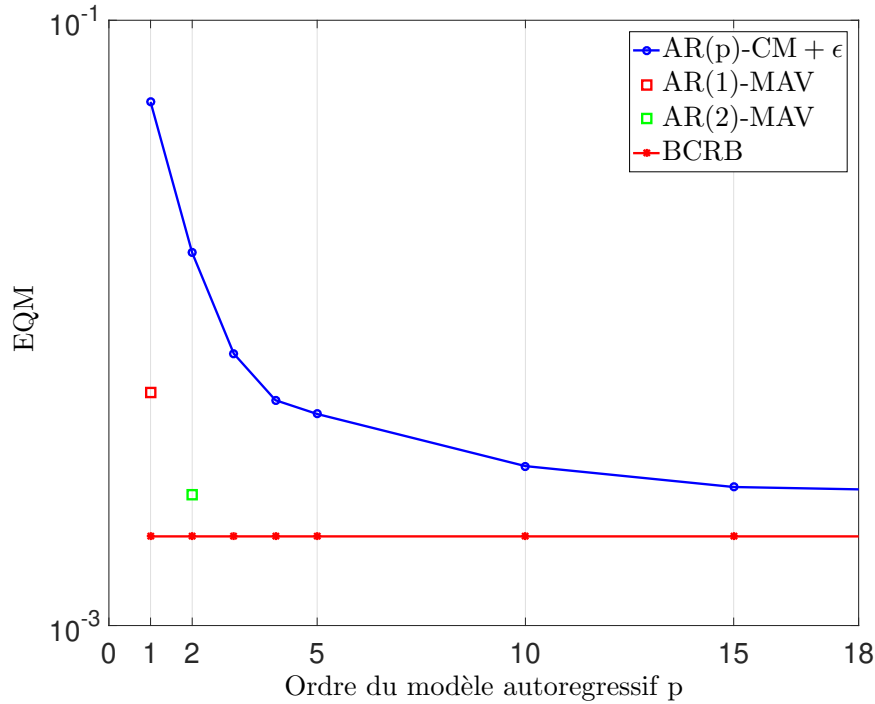


FIGURE 2.19 – Comparaison des performances des filtre de Kalman à modèles d'état AR(1)-MAV [12], AR(2)-MAV et AR( $p$ )-CM+ $\epsilon$  avec  $\epsilon$  réglé selon [5] pour  $f_d T = 10^{-3}$  et RSB = 10 dB.

### 2.7.3 Performance en taux d'erreur binaire TEB

Une simulation de TEB est effectuée afin d'évaluer l'impact de l'estimation de canal par filtre de Kalman basé sur un modèle AR(2)-MAV sur la qualité de la communication. Les symboles transmis sont modulés à 4 états de phase, en QPSK (*Quadrature Phase-Shift Keying* en anglais). La trame de données est composée de 20 symboles pilotes suivis par 200 symboles inconnus. Dans ce contexte, l'estimation de canal est en mode semi-aveugle (utilise alternativement les pilotes et les décisions). Dans ce cas, l'équation (2.37) du filtre de Kalman est modifiée en remplaçant  $y(k)$  par  $y(k) \times \hat{s}_{(k|k-1)}^*$ , avec  $\hat{s}_{(k|k-1)} = s(k)$  si  $s(k)$  est un symbole pilote ou

$$\hat{s}_{(k|k-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{sgn} \left\{ \text{Re}(y(k) \times \hat{\alpha}_{(k|k-1)}^*) \right\} + i \times \text{sgn} \left\{ \text{Im}(y(k) \times \hat{\alpha}_{(k|k-1)}^*) \right\} \right)$$

si  $s(k)$  est un symbole inconnu. Dans ce cas,  $\hat{s}_{(k|k-1)}$  représente la décision a priori, et la décision finale sera :

$$\hat{s}_{(k|k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{sgn} \left\{ \text{Re}(y(k) \times \hat{\alpha}_{(k|k)}^*) \right\} + i \times \text{sgn} \left\{ \text{Im}(y(k) \times \hat{\alpha}_{(k|k)}^*) \right\} \right)$$

. L'opération  $\times \hat{\alpha}$  permet de compenser la phase du canal (lorsque  $\hat{\alpha}$  est une bonne estimation) avant de prendre la décision (le module n'est pas informatif en modulation de phase)

La figure 2.20 montre que le TEB obtenu avec le modèle AR(2)-MAV est le plus proche du TEB obtenu avec une connaissance parfaite du canal dans toute la plage de RSB, tandis

que les TEB des autres estimateurs s'éloignent de cette courbe. On remarque aussi que l'estimateur de Kalman classique basée sur le modèle AR(1) conduit à une performance très dégradée du TEB.

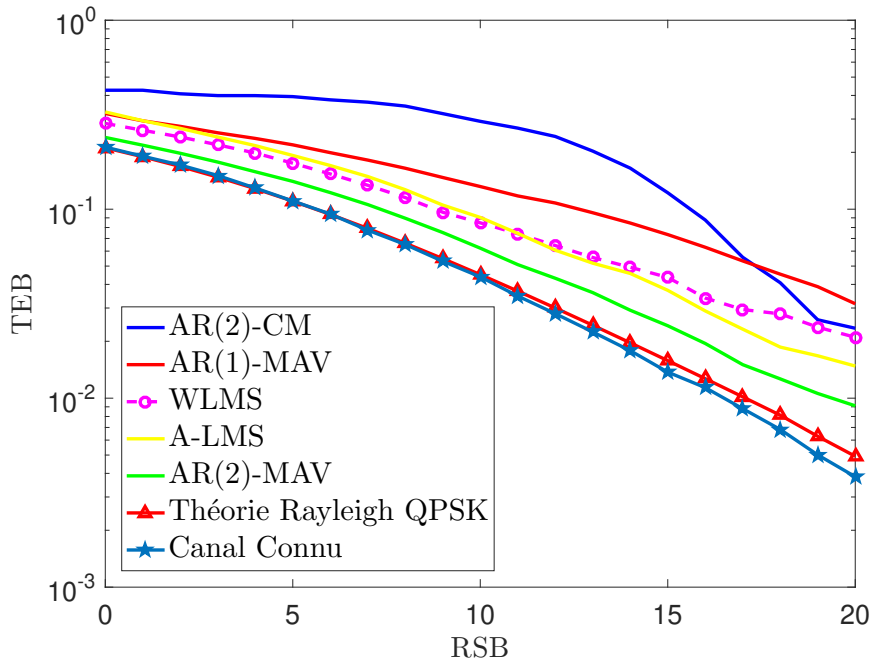


FIGURE 2.20 – Comparaison entre le TEB, en fonction du RSB, du AR(2)-MAV avec AR(1)-MAV [12], A-LMS [10], W-LMS [11] pour  $f_d T = 10^{-4}$ .

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre on a traité le problème d'estimation d'un canal à évanouissement plat de Rayleigh à spectre de Jakes en présence d'un bruit blanc additif Gaussien. Le modèle autorégressif d'ordre  $p$  a été présenté ainsi que le filtre de Kalman. Après avoir motivé notre choix du modèle AR(2), notre étude a démarré par la description du modèle AR(2) et des différents couples possible de paramètres qui permettent de le régler directement, et par la description des équations du filtre de Kalman reposant sur ce modèle.

On s'est ensuite focalisé sur l'étude du filtre de Kalman en régime asymptotique, qui revient à un filtre à coefficients constants, qui dépendent des 2 composantes du gain de Kalman en régime asymptotique. Afin d'étudier les performances de ce filtre, il est nécessaire d'établir les expressions des 2 composantes du gain de Kalman, ce qui nécessite de manipuler les équations dites de Riccati. Nous avons pu formuler la résolution de ces équations, mais nous avons surtout proposé ensuite des expressions approchés relativement simples et compatibles avec nos hypothèses de travail (canal à variation lentes avec Doppler normalisé  $f_d T \ll 1$ ,  $RSB > 1$ , ...) de ces composantes ainsi que d'autres paramètres du système, comme le facteur d'amortissement et la bande équivalente de bruit de la fonction de transfert du filtre de Kalman asymptotique.

## 2.8 Conclusion

---

Ces paramètres ont été utilisés dans la suite pour faire l'optimisation du système. L'erreur d'estimation a été analysée et minimisée afin d'obtenir des expressions analytiques des paramètres du modèle AR(2) en fonction de l'état du canal ( $f_d T$  et RSB).

Les fonctions d'autocorrélations et les spectres du modèle AR(2) ont été présentés. Plus précisément, l'expression analytique du facteur d'amortissement a permis d'éclairer la forme de la DSP du processus AR(2) réglé de manière optimale.

Des simulations ainsi que des comparaisons avec la littérature ont été faites. Les résultats des simulations montrent que le réglage optimal proposé pour régler le filtre de Kalman basé sur le filtre AR(2) surpasse les réglages de la littérature qui sont basés sur des résultats expérimentaux ou des grilles. Une comparaison complète des performances des algorithmes proposés avec d'autres algorithmes couramment utilisés dans la littérature pour le suivi de canaux à évanouissements plats variant a été menée, et confirme l'intérêt de nos propositions. Les algorithmes considérés sont les filtres de Kalman basés sur le modèle AR( $p$ ) réglés par critère CM [6, 7, 15] ou critère amélioré [8, 9, 12], ou basé sur le modèle RW(2) [14], mais aussi les algorithmes des moindres carrés (LMS) ou plutôt leur version intégrée [10, 11] pour avoir le même ordre de modèle  $p = 2$  que l'algorithme proposé.

Concernant le modèle de marche aléatoire d'ordre 2 RW(2) (non stationnaire), il est remarqué que le modèle AR(2) (stationnaire) donnent des performances quasiment identiques en terme d'EQM. Nous avons pu justifier cela par le fait que les fonctions de transfert des deux KF AR(2) et RW(2) ont des facteurs d'amortissement quasiment identiques (égaux à  $\sqrt{2}/2$ ) et que leurs fréquence propres normalisées se règlent de manière identique à partir de la variance du bruit d'état (liée identiquement à la première composante du gain de Kalman).

Ce résultat n'était pas du tout immédiat car l'expression en fonction des composantes du gain de Kalman ( $K_1, K_2$ ) de la fonction de transfert du Kalman asymptotique obtenue pour le AR(2)-MAV est très différente de celle obtenue en [14] pour le RW(2). Il s'explique indirectement par le fait que la deuxième composante ( $K_2$ ) du gain de Kalman du modèle AR(2) est presque égale à la première composante ( $K_1$ ), alors qu'elle était inférieure pour le modèle RW(2), comme nous l'avons démontré.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis et en révision pour le journal Elsevier Digital signal processing en ce qui concerne la méthode optimale, ainsi que deux conférences nationale et internationale : DSP(2017-Londres, Royaume Uni) et Grets(2017-Juan les pins, France) qui traitent de la méthode sous-optimale.

Dans ce chapitre on a utilisé et optimisé le modèle AR(2) avec le filtre de Kalman dans le cas d'un canal Rayleigh à spectre de Jakes (lien fixe-mobile). Dans le chapitre suivant on va étudier le modèle AR(2) avec le filtre de Kalman dans le cas d'un lien mobile-mobile et dans le cas plus général d'un lien où la source mobile communique via  $N$  relais mobiles vers une destination mobile.



# Chapitre 3

## Estimation du canal pour les réseaux mobiles à mobiles et à $N$ relais mobiles

### Sommaire

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>3.1 Introduction</b>  | <b>71</b> |
| 3.1.1 Estimation du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles : méthode et problème                          | 72        |
| 3.1.2 Contributions de ce chapitre   | 72        |
| 3.1.3 Organisation du chapitre   | 73        |
| <b>3.2 Description générale du canal Mobile-Mobile et à <math>N</math> relais mobiles</b>                      | <b>73</b> |
| 3.2.1 Canal Mobile-Mobile  | 73        |
| 3.2.2 Canal à $N$ relais mobiles   | 74        |
| 3.2.3 Autocorrélation temporelle   | 77        |
| 3.2.4 Densité spectrale de Puissance   | 79        |
| <b>3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à <math>N</math> relais mobiles</b> | <b>83</b> |
| 3.3.1 Résultats préliminaires  | 84        |
| 3.3.2 Analyse de l'erreur quadratique moyenne  | 84        |
| 3.3.3 Calcul des moments   | 86        |
| 3.3.4 Cas d'un canal F-M   | 86        |
| 3.3.5 Résultats de simulation  | 88        |
| <b>3.4 Conclusion</b>  | <b>94</b> |

---

### 3.1 Introduction

L'étude des communications sans fil de mobile à mobile (M-M) avec d'éventuels relais d'amplification et de retransmission (relais *Amplify and Forward* AF) a fait l'objet d'une attention considérable. La raison en est que ce type de communication permet le développement de nouvelles applications, en particulier pour les systèmes de véhicule à véhicule et les réseaux coopératifs, dans lesquels une liaison de communication directe entre stations mobiles est souvent maintenue sans l'intervention de stations de base fixes et très



élevées. Les applications concernent donc des systèmes de véhicules routiers intelligents pour le contrôle automatisé du trafic sur les autoroutes, la diffusion de contenu audio et multimédia à large bande aux utilisateurs mobiles, ainsi que des opérations de secours d'urgence qui sont actuellement à l'étude.

Comme nous le constatons, la communication de M-M ou à  $N$  relais mobiles deviendra probablement plus courante dans les futurs systèmes de communication. Étant un domaine de recherche relativement nouveau, il pose de nombreux problèmes de recherche intéressants. La première et peut-être la plus importante tâche à accomplir lors de la conception d'un système de communication sans fil est de comprendre la nature du canal sans fil et les propriétés statistiques impliquées dans la communication entre deux extrémités du lien. Le deuxième sera l'estimation adéquate du canal M-M et à  $N$  relais mobiles.

### 3.1.1 Estimation du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles : méthode et problème

Dans ce chapitre nous nous basons sur la méthode d'estimation présentée dans le Chapitre 2.

Cette méthode consiste à utiliser le filtre de Kalman (KF) qui est couramment utilisé pour suivre les gains complexes (CG) variant dans le temps de ces canaux. La conception du KF nécessite une représentation récursive linéaire (modèle d'état) du paramètre à observer. Le modèle d'état le plus utilisé, en particulier pour les problèmes d'estimation de canal, est le modèle autorégressif d'ordre  $p$ ,  $AR(p)$ , où les paramètres sont ajustés en faisant correspondre l'autocorrélation du canal réel à celle du processus AR. Ce critère, présenté dans le chapitre 1, est connu sous le nom de corrélation (CM) [5, 88–92]. Le critère CM est simple à mettre en œuvre et convient bien aux canaux à évanouissements rapides.

Cependant, pour les scénarios à évanouissements lents (fréquence Doppler normalisée inférieure à  $10^{-2}$ ), valide pour les communications habituelles entre véhicules, l'utilisation du critère CM donne des résultats médiocres par rapport au critère de la variance asymptotique minimale (MAV), comme indiqué dans [13, 88, 93] pour l'AR avec  $p = 1$  et dans les chapitres précédents. Nous allons ainsi dans ce chapitre étendre notre travail du chapitre précédent, ainsi que le travail de la thèse [13] qui avait été mené pour un canal multi-bond mais restreint au modèle  $AR(1)$ .

### 3.1.2 Contributions de ce chapitre

- Présentation du canal pour les communications Mobile-Mobile et à  $N$  relais mobiles. Les gains complexes (GC), les fonctions d'autocorrélations et les densités spectrales de puissances sont présentés dans les deux cas.
- Fournir pour les canaux M-M et les canaux à  $N$  relais mobiles, des expressions analytiques des paramètres du KF basées sur un  $AR(2)$  réglé selon le critère MAV, ainsi que les expressions de performance asymptotique du KF. Pour cela, ces expressions sont tout d'abord établies en fonction des moments du spectre Doppler du canal global (ensemble des bonds successifs), et les expressions de ces moments ont pu être établies grâce à l'exploitation des propriétés des cumulants du produit

## 3.2 Description générale du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles

---

de convolution de fonctions de densité élémentaires.

- Comparaison des performances avec des algorithmes couramment utilisés dans le suivi de canaux Mobile-Mobile ou à  $N$  relais mobiles (AR(1)-MAV [88], AR(2)-CM [94]), à partir de formules théoriques ou de simulations numériques.

### 3.1.3 Organisation du chapitre

Ce chapitre sera divisé en plusieurs parties. Dans la première partie, une description générale du canal Mobile-Mobile et à  $N$  relais mobiles, dont le gain complexe (GC), les fonctions d'autocorrélations ainsi que les densités spectrales de puissance sont présentés. Ensuite dans la Section 3.3.2, des expressions analytiques des paramètres du filtre KF basé sur le AR(2) sont données en fonction des moments du spectre du GC. Ces moments sont ensuite calculés dans la Section 3.3.3. La validation des résultats sera montrée par des simulations dans la Section 3.3.5 avant de finir par une conclusion.

## 3.2 Description générale du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles

Dans cette section deux types de canaux sont traités. Le premier est un canal Mobile-Mobile où la source  $S$  et la destination  $D$  sont mobiles et aucun relai n'est présent entre  $S$  et  $D$ . Le deuxième est un canal à  $N$  relais mobiles entre  $S$  et  $D$ , également mobiles. Pour chacun de ces canaux nous présentons le modèle d'observation discret. Les variances du GC et du bruit d'observation dans les deux cas seront calculées. Ensuite les fonctions d'autocorrélations ainsi que la densité spectrale de puissance seront présentées.

### 3.2.1 Canal Mobile-Mobile

La Figure 3.1 présente le système de transmissions Mobile-Mobile avec une source mobile  $S$  de vitesse  $v_S$  et une destination mobile  $D$  de vitesse  $v_D$  (*Two-rings model* en anglais). Dans les systèmes de communication Mobile à Mobile (M-M), l'émetteur et le récepteur se déplacent avec une certaine vitesse, qui est généralement supposée constante sur une période  $T$ .

Dans des conditions de diffusion isotrope autour de la source et de la destination, le signal transmis subit une réflexion, diffusion, dispersion, et diffraction lors de la rencontre des obstacles, à la fois à l'émission et à la réception, contrairement au cas F-M classique du chapitre précédent. On peut montrer que le lien Mobile à Mobile (M-M) est similaire à la succession de 2 liens fictifs, dits élémentaires ou partiels, de Mobile à Fixe (M-F) et de Fixe à Mobile (F-M) [95] (voir aussi la thèse [13]), avec des fréquences Doppler pour chacun des liens qui se déduisent respectivement des vitesses de la source et de la destination.

#### 3.2.1.1 Signal discret

D'après [95] le gain complexe total du lien M-M est égal au produit des GCs des liens partiels M-F et F-M. Soit  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$  avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les GCs circulaires Gaussiens centrés

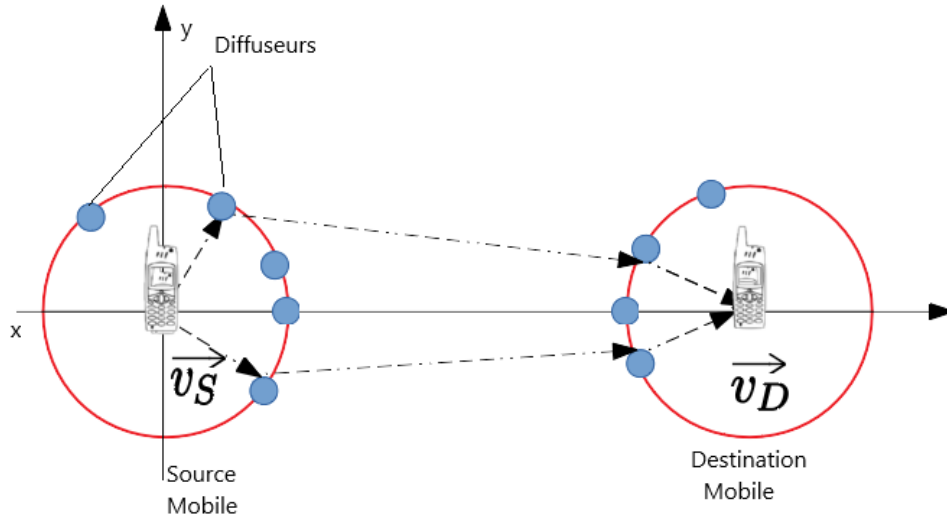


FIGURE 3.1 – Schéma d'un canal Mobile-Mobile ("Two-rings Model")

pour les liens fictifs M-F et F-M respectivement, et tels que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont indépendants. Le signal  $y$  reçu par la destination mobile D à l'instant  $k$  est alors <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} y(k) &= \alpha_{1,(k)} \times \alpha_{2,(k)} + w(k) \\ &= \alpha(k) + w(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$  à l'instant  $k$ .

$w(k)$  est le bruit d'observation additif gaussien au niveau de la destination du lien de variance  $\sigma_w^2 = \mathbb{E}\{|w|^2\}$ .

### 3.2.1.2 Variances de $\alpha$ et du bruit d'observation $w$

Les liens partiels étant supposés indépendants, les gains  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  le sont également, et on aura une variance globale  $\sigma_\alpha^2 = \mathbb{E}\{|\alpha|^2\}$ <sup>2</sup> du processus centré  $\alpha$ , donnée par :

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_{\alpha_1}^2 \sigma_{\alpha_2}^2, \quad (3.2)$$

avec  $\sigma_{\alpha_1}^2$  et  $\sigma_{\alpha_2}^2$  les variances des GC des liens M-F et F-M respectivement.

Dans la section suivante nous présentons de la même façon le cas d'un canal à  $N$  relais mobiles entre la source et la destination.

## 3.2.2 Canal à $N$ relais mobiles

Le système de transmission à  $N$  relais mobiles est illustré dans la Figure 3.2. Dans ce système le cas d'une transmission à  $N$  relais dans des conditions de diffusion isotropes

1. Ce modèle suppose que les symboles sont normalisés et connus (ou décidés). Ce modèle est simple, mais il peut être appliqué à différents contextes (plus complexes), tels que les systèmes multi-porteuses assistés par pilote dans des canaux sélectifs en fréquence.

2.  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance

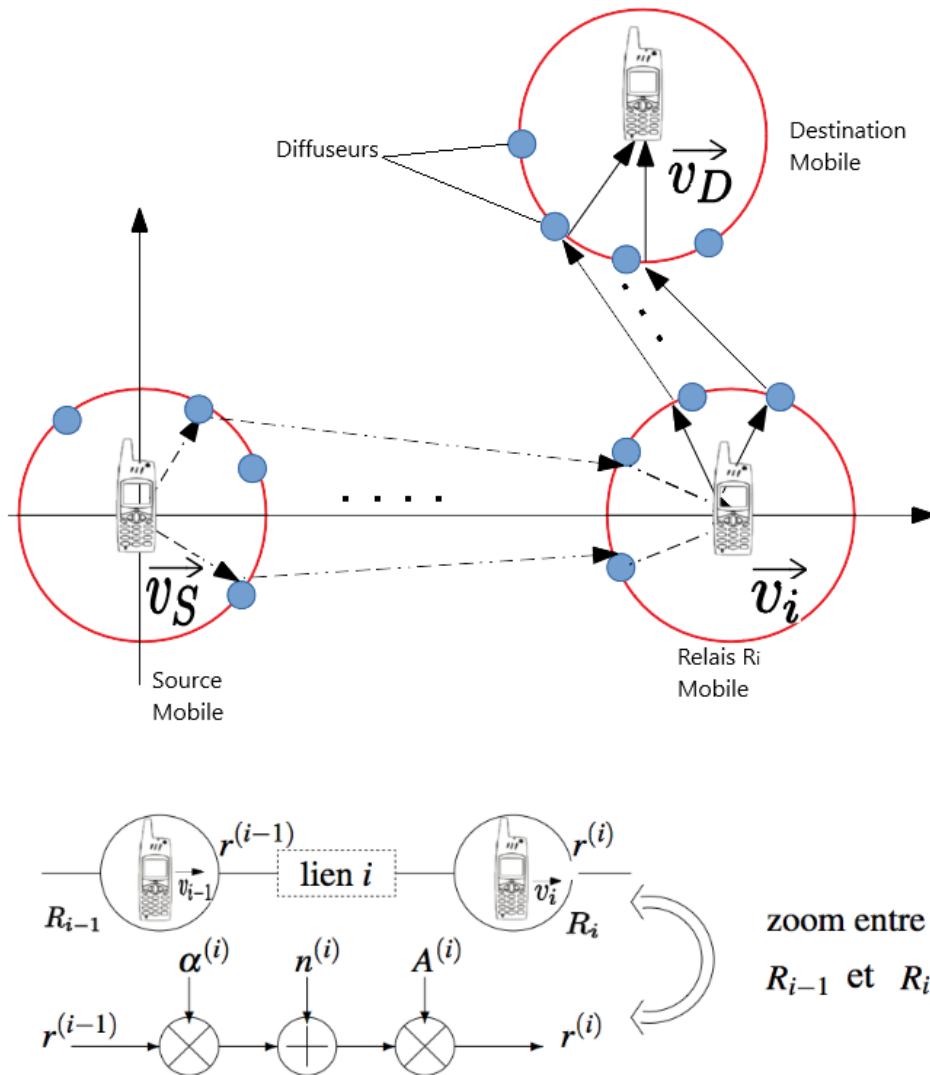


FIGURE 3.2 – Schéma d’un canal à  $N$  relais mobiles en série entre la source et la destination dans des conditions de diffusion isotrope.

autour de la source, les  $N$  relais mobiles et la destination, est présenté avec  $N + 1$  liens ou bonds, c’est-à-dire que l’on dispose d’une source, de  $N$  relais, et d’une destination. Les relais sont notés  $R_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , avec chacun une vitesse  $v_i$ .

Pour simplifier les notations, nous étendons l’indice  $i$  de 0 à  $N + 1$ . Ainsi, on désigne par  $R_0$  la source  $S$  de vitesse  $v_0 = v_S$ , et par  $R_{N+1}$  la destination  $D$  de vitesse  $v_{N+1} = v_D$ .

La fréquence  $f_i = \frac{v_i}{c} f_p$  est la fréquence Doppler du relais  $i$ , et  $f_S = \frac{v_S}{c} f_p$  et  $f_D = \frac{v_D}{c} f_p$  sont respectivement les fréquences Doppler à la source et la destination, avec  $f_p$  la fréquence de la porteuse supposée la même sur tous les liens et  $c$  est la célérité de la lumière.

On définit  $\alpha_{(k)}^{(i)}$  le gain du lien  $i$  reliant  $R_{i-1}$  à  $R_i$  à l’instant  $t = kT$  où  $k \in \mathbb{Z}^+$  est l’indice temporel.

Pour un lien  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N + 1$ ) donné et un indice temporel  $k \in \mathbb{Z}^+$  donné, le gain  $\alpha_{(k)}^{(i)}$  est une variable aléatoire circulaire complexe Gaussienne et centrée, de variance  $(\sigma_\alpha^{(i)})^2$ .

Le premier lien est le lien entre la source  $S$  et le relais  $R_1$ , le dernier lien est le lien entre le relais  $R_N$  et la destination  $D$ .

Sur les relais ainsi qu'au niveau de la destination, un bruit vient s'ajouter et on le note  $w_{(k)}^{(i)}$  s'il s'ajoute à  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , et  $w_{(k)}^{(N+1)}$  s'il s'ajoute à la destination  $D$ . C'est un bruit blanc additif circulaire complexe Gaussien et centré, de variance  $(\sigma_w^{(i)})^2$ .

Les relais étant des relais *Amplify-and-Forward*,  $A^{(i)}$  est le facteur d'amplification du relais  $R_i$ , fixe en fonction du temps, pour  $i = 1, 2, \dots, N$ . On suppose que  $A^{(N+1)} = 1$  au niveau de la destination.

On travaille à partir de l'équivalent complexe en bande de base des signaux.

### 3.2.2.1 Signal discret

Le signal discret  $r_{(k)}^{(i-1)}$  désigne l'entrée du lien  $i$  (voir Figure 3.2). Ce signal est alors multiplié par le gain  $\alpha_{(k)}^{(i)}$  du lien  $i$ . Un bruit  $w_{(k)}^{(i)}$  s'ajoute, et le signal est amplifié par le gain  $A^{(i)}$  pour devenir  $r_{(k)}^{(i)}$ , qui sera transmis par le lien  $i + 1$ .

Pour simplifier l'écriture, l'indice temporel  $k$  est omis. On écrit donc  $r^{(i)}$  au lieu de  $r_{(k)}^{(i)}$ ,  $\alpha^{(i)}$  au lieu de  $\alpha_{(k)}^{(i)}$  et  $w^{(i)}$  au lieu de  $w_{(k)}^{(i)}$ .  $r^{(i)}$  est alors :

$$r^{(i)} = A^{(i)}[\alpha^{(i)}r^{(i-1)} + w^{(i)}]$$

Ce processus sera répété à chaque relais. On simplifie l'écriture en  $s$  et  $y$ , et on aura :

$$y = \alpha^{(N+1)} [A^{(N)} (\alpha^{(N)} \dots [A^{(i)} (\alpha^{(i)} \dots [A^{(2)} (\alpha^{(2)} [A^{(1)} (\alpha^{(1)} + w^{(1)})] + w^{(2)})] + \dots + w^{(i)})] + \dots w^{(N)}] + w^{(N+1)}$$

Soit alors finalement, le modèle d'observation à partir duquel nous allons travailler dans la thèse pour établir les algorithmes<sup>3</sup> :

$$y = \alpha + w \tag{3.3}$$

avec  $\alpha = \prod_{i=1}^{N+1} A^{(i)} \alpha^{(i)} = \left( \prod_{i=1}^N A^{(i)} \right) \left( \prod_{i=1}^{N+1} \alpha^{(i)} \right)$  et  $w = w^{(N+1)} + \sum_{i=1}^N \left[ w^{(i)} \left( \prod_{j=i}^N A^{(j)} \right) \times \left( \prod_{j=i+1}^{N+1} \alpha^{(j)} \right) \right]$  la variable aléatoire modélisant le bruit global.

---

3. Ce modèle suppose que les symboles sont normalisés et connus (ou décidés). Vue que ce modèle est simple, il peut être appliqué à différents contextes (plus complexes), tels que les systèmes multi-porteuses assistés par pilote dans des canaux sélectifs en fréquence.

## 3.2 Description générale du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles

### 3.2.2.2 Variances de $\alpha$ et du bruit d'observation $w$

Pour des liens indépendants, les gains  $\alpha^{(i)}$  le sont, et nous aurons une variance globale  $\sigma_\alpha^2 = \mathbb{E}\{|\alpha|^2\}$  du processus centré  $\alpha$ , donnée par :

$$\sigma_\alpha^2 = \left( \prod_{i=1}^N [A^{(i)}]^2 \right) \left( \prod_{i=1}^{N+1} [\sigma_\alpha^{(i)2}] \right) \quad (3.4)$$

Le bruit  $w$  est de moyenne nulle ( $\mathbb{E}(w) = 0$ ). La variance du bruit global  $\sigma_w^2 = \mathbb{E}\{|w|^2\}$  est évaluée grâce à l'indépendance entre les bruits  $w^{(i)}$ , l'indépendance entre les gains  $\alpha^{(j)}$ , et l'indépendance entre  $w^{(i)}$  et  $\alpha^{(j)}$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\sigma_w^2 = \sigma_w^{(N+1)2} + \sum_{i=1}^N \left[ \sigma_w^{(i)2} \left( \prod_{j=i}^N [A^{(j)}]^2 \right) \left( \prod_{j=i+1}^{N+1} [\sigma_\alpha^{(j)2}] \right) \right] \quad (3.5)$$

Pour les  $N$  relais mobiles entre la source mobile et la destination mobile et en supposant toujours des conditions de diffusion isotrope à chaque étape (permettant la décomposition de chaque lien M-M en deux liens fictifs partiels M-F et F-M comme dans la section précédente), le lien global S-D est équivalent à S-F, F- $R_1$ ,  $R_1$ -F, ..., F- $R_i$ ,  $R_i$ -F, ..., F-D, avec  $i \in [1, N]$ .

Dans ce cas, le GC du lien  $i$ ,  $\alpha^{(i)}$ , lien entre  $R_{i-1}$  et  $R_i$ , est égal au produit des GCs des liens partiels ( $R_{i-1}$ -F et F- $R_i$ )  $\alpha_1^{(i)} \cdot \alpha_2^{(i)}$ .

Pour le premier lien entre  $R_0$  et  $R_1$ , c'est à dire entre S et  $R_1$ ,  $\alpha_1^{(1)}$  est le GC du lien S-F est égal à  $\alpha^S$ . De même pour le lien  $N + 1$ , lien entre  $R_N$  et D,  $\alpha_2^{(N+1)}$  est le GC du lien F-D est égal à  $\alpha^D$ .

### 3.2.3 Autocorrélation temporelle

Dans cette section nous présentons la fonction d'autocorrélation temporelle du GC dans les cas d'un canal Mobile-Mobile et à  $N$  relais mobiles. Mais pour commencer, rappelons le cas simple du canal F-M qui nous servira de référence pour exprimer les autocorrélations des autres canaux.

#### 3.2.3.1 Canal de Rayleigh ou F-M

La fonction d'autocorrélation  $R[m]$  du GC stationnaire  $\alpha_{(k)}$  est défini pour un décalage  $m$  par :

$$R^{\text{F-M}}[m] = E\{\alpha_{(k)} \cdot \alpha_{(k-m)}^*\} = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_x T m), \quad (3.6)$$

avec  $J_0(\cdot)$  la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0 et  $f_x$  la fréquence Doppler du mobile.

### 3.2.3.2 Canal Mobile-Mobile

Comme déjà mentionné, le lien Mobile-Mobile (M-M) est similaire à la succession de liens élémentaires de Mobile à Fixe (M-F) et de Fixe à Mobile (F-M) [95]. Grâce à l'indépendance des gains des liens, la fonction d'autocorrélation temporelle continue est [95] :

$$R^{M-M}[m] = E\{\alpha_{(k)} \cdot \alpha_{(k-m)}^*\} = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_1 T m) J_0(2\pi f_2 T m), \quad (3.7)$$

avec  $f_1, f_2$  les fréquences Doppler de la source mobile et de la destination mobile respectivement.

### 3.2.3.3 Canal à $N$ relais mobiles

Ayant les  $N$  relais mobiles entre la source mobile et la destination mobile, le lien global S-D est comme précédemment vu équivalent à : S-F, F-R<sub>1</sub>, R<sub>1</sub>-F, ..., F-R <sub>$i$</sub> , R <sub>$i$</sub> -F, ..., F-D, avec  $i \in [1, N]$ . Le GC global peut alors s'écrire :

$$\alpha = \left( \prod_{i=1}^N A^{(i)} \right) \left( \prod_{i=1}^{N+1} \alpha^{(i)} \right) = \left( \prod_{i=1}^N A^{(i)} \right) \left( \prod_{i=1}^{N+1} \alpha_1^{(i)} \alpha_2^{(i)} \right) = \left( \prod_{i=1}^N A^{(i)} \right) \alpha^{(S)} \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} \dots \alpha_1^{(N+1)} \alpha^{(D)} \quad (3.8)$$

Étant donné que les GCs des liens partiels F-R <sub>$i$</sub>  et R <sub>$i$</sub> -F,  $\alpha_2^{(i)}$  et  $\alpha_1^{(i+1)}$  respectivement, sont indépendants et leur fonctions d'autocorrélations sont égaux du fait qu'on a la même vitesse du relai  $R_i$  et la même fréquence Doppler  $f_i$  alors nous obtenons :

$$R^{\text{relais}}[m] = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_S T m) \prod_{i=1}^N [J_0(2\pi f_i T m)]^2 J_0(2\pi f_D T m) \quad (3.9)$$

Les figures suivantes illustrent ces différentes fonctions d'autocorrélation. Dans les courbes de la figure 3.3, pour un lien Fixe-Mobile, on voit que le nombre d'oscillations est plus grand à hautes fréquences. La corrélation est plus haute à faible fréquence Doppler. Ceci est normal car le canal varie plus lentement à faible fréquence Doppler.

Pour un lien Mobile-Mobile, en variant les vitesses des deux extrémités, mais en gardant la même étalement Doppler normalisée  $B_D T = \sqrt{\frac{(f_S T)^2 + (f_D T)^2}{2}}$  (l'étalement Doppler normalisé sera présenté dans l'équation (3.17)), la fonction d'autocorrélation est presque la même pour les points les plus significatifs (par exemple les 100 premiers points pour  $B_D T = 10^{-3}$  dans la figure 3.4). Ceci sera expliqué dans les sections qui suivent où une relation entre la fonction d'autocorrélation et  $B_D T$  sera établie.

Dans les figures 3.5, les fonctions d'autocorrélation normalisées par rapport à  $\sigma_\alpha^2$  sont présentées lorsque la source, la destination et tous les relais sont mobiles. On a supposé ici qu'ils ont tous la même fréquence Doppler normalisée  $f_i T = 5 \cdot 10^{-4}$  et on va observer l'impact du nombre de relais. Pour cela, nous considérons un, deux puis trois relais. On voit que dans les 3 cas les oscillations diminuent rapidement et tendent vers zéro. La convergence vers zéro est plus rapide avec un nombre croissant de relais.

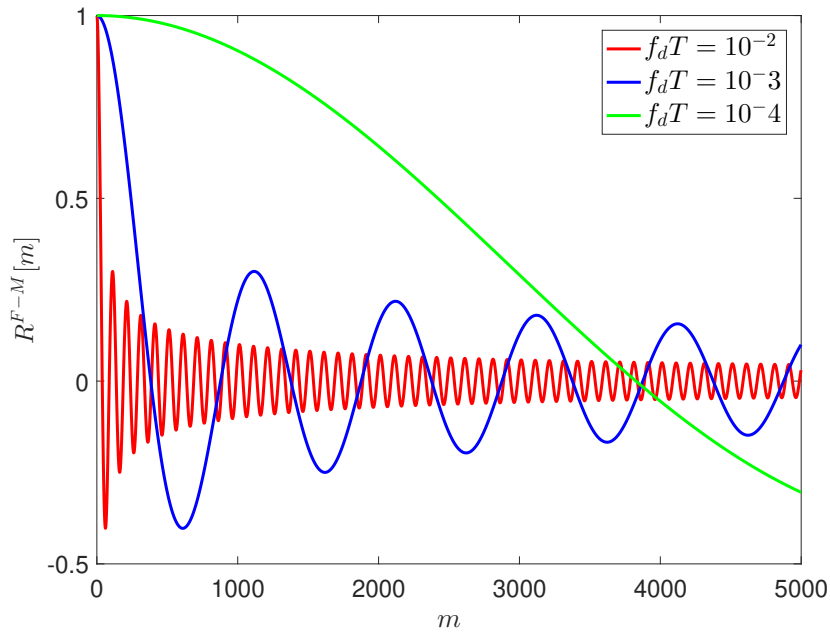


FIGURE 3.3 – Fonction d'autocorrélation d'un canal Fixe-Mobile à différentes fréquences Doppler

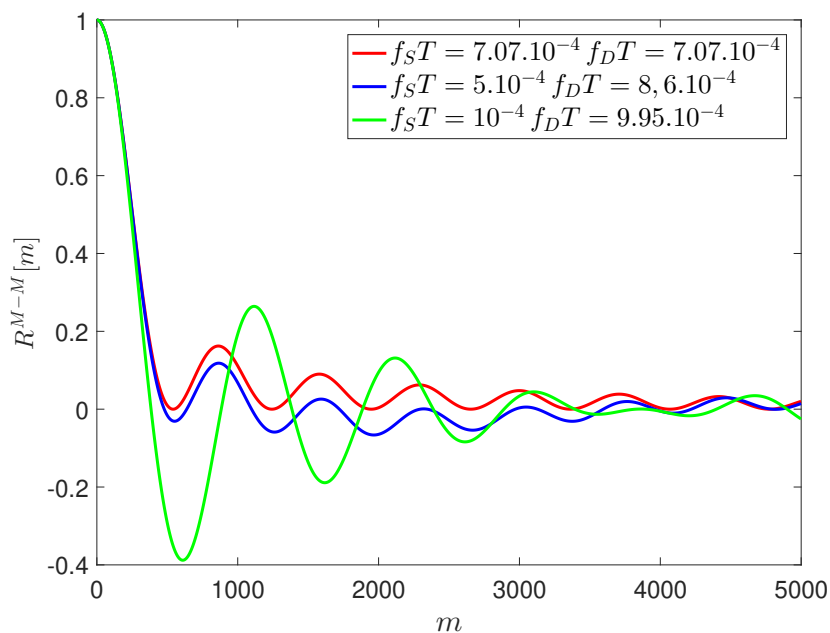
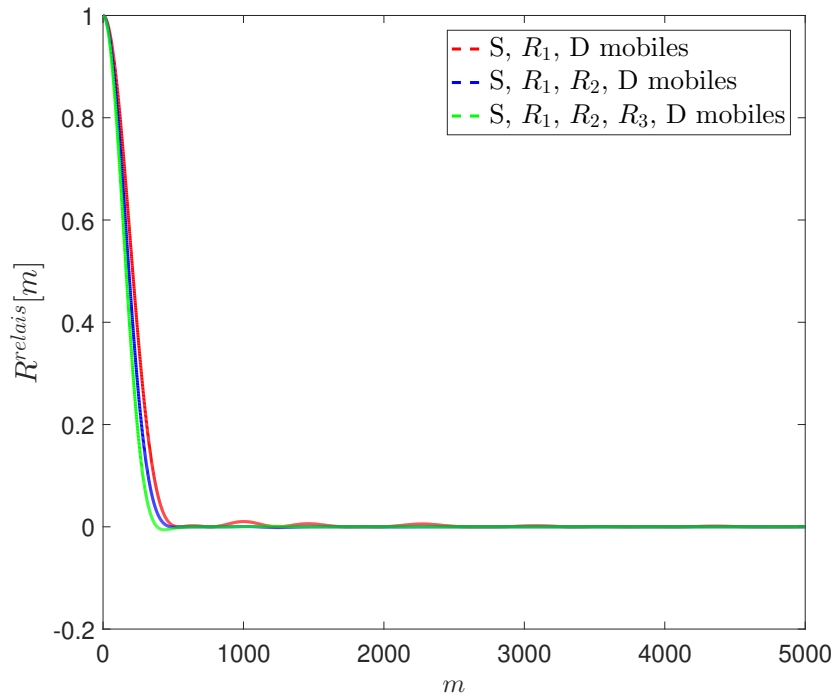


FIGURE 3.4 – Fonction d'autocorrélation d'un canal Mobile-Mobile à différentes fréquences Doppler

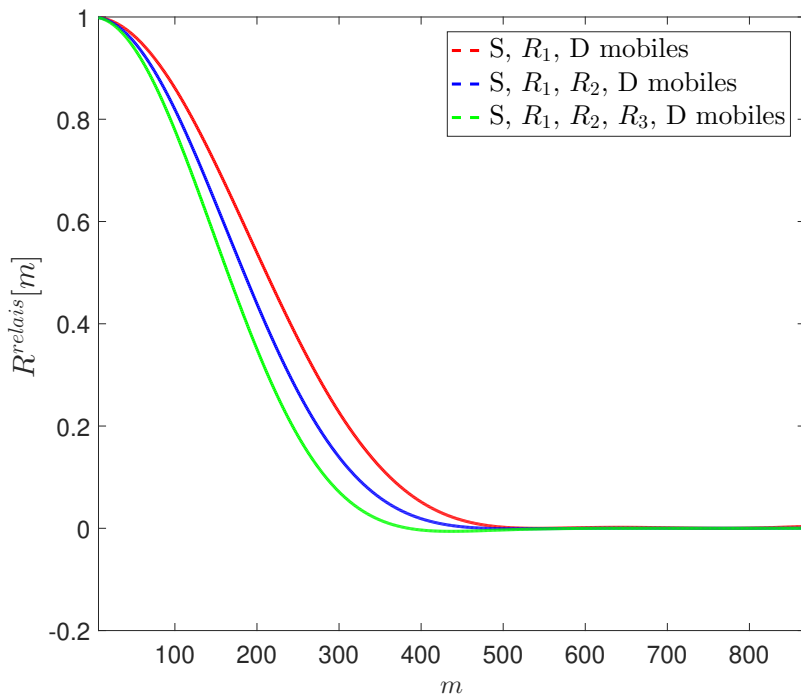
#### 3.2.4 Densité spectrale de Puissance

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) de  $\alpha$ , notée  $\Gamma(f)$ , caractérise les propriétés dynamiques du processus  $\alpha$  supposé stationnaire au sens large. Elle est calculée par la





(a) Autocorrélation temporelle  $f_S T = f_D T = f_i T = 5 \times 10^{-4}$



(b) zoom sur l'autocorrélation pour 1,2, et 3 elais mobiles

FIGURE 3.5 – Autocorrélation pour différents nombre de relais

## 3.2 Description générale du canal Mobile-Mobile et à $N$ relais mobiles

transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

### 3.2.4.1 DSP d'un lien F-M

La densité spectrale de puissance est donnée dans le cas de diffusion 2D dit spectre de Jakes dans la figure 3.6, obtenue en appliquant la transformée de Fourier sur (3.6) :

$$\Gamma^{\text{F-M}}(f) = \sigma_\alpha^2 \tilde{\Gamma}_{f_x}^{\text{F-M}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_x \sqrt{1 - (\frac{f}{f_x})^2}} & \text{si } |f| < f_x \\ 0 & \text{si } |f| > f_x \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $\tilde{\Gamma}(f) = \frac{\Gamma(f)}{\sigma_\alpha^2}$  une version normalisée de la DSP.

### 3.2.4.2 DSP d'un lien Mobile-Mobile

Dans le cas d'un lien Mobile-Mobile (équivalent à M-F-M), on a  $R^{\text{M-M}}[m] = \sigma_\alpha^2 \times J_0(2\pi f_1 T m) J_0(2\pi f_2 T m)$ , alors

$$\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \sigma_\alpha^2 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(f) \otimes \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f) \quad (3.11)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi^2 \sqrt{f_1 f_2}} K \left( \sqrt{\frac{(f_1 + f_2)^2 - f^2}{4 f_1 f_2}} \right) & \text{si } |f| < f_1 + f_2 \\ 0 & \text{si } |f| > f_1 + f_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $\Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(f)$ ,  $\Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f)$  sont les spectre élémentaires de Jakes, valable pour un lien entre une extrémité fixe et une autre mobile à la fréquence  $f_1$  et  $f_2$  respectivement et  $\otimes$  est le signe du produit de convolution.

$K(\cdot)$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce [96].

L'expression ci-dessus est présentée dans les travaux de [95] et plusieurs autres articles [88, 97]. Nous pensons cependant que cette formule n'est pas valable sur toute la plage de fréquences utiles pour représenter les spectres, comme ceux de la figure 3.6 par exemple. Il y a en effet des plages de fréquences  $f$  pour lesquelles l'argument de la fonction  $K(\cdot)$  sort du domaine de définition de la fonction, comme montré dans l'Annexe I. Nous présentons dans l'Annexe I une étude concernant l'expression de la DSP où nous proposons une expression corrigée qui permet d'obtenir à priori la bonne forme de la DSP (telle qu'elle peut être obtenue en numérique par produit de convolution des 2 spectres élémentaires). Cette expression a été trouvée en corrigeant intuitivement l'argument de la fonction elliptique  $K$  à l'aide d'une étude de signe, mais elle n'a pas pu être démontrée théoriquement à partir de la Transformée ( $\mathfrak{F}$ ) d'un produit de fonctions de Bessel. L'expression de la DSP proposée est :

$$\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi^2 \sqrt{f_2 f_1}} K \left( \sqrt{1 - \left| \frac{(f_1 - f_2)^2 - f^2}{4 f_1 f_2} \right|} \right) & \text{si } |f| < f_1 + f_2. \\ 0 & \text{si } |f| > f_1 + f_2. \end{cases} \quad (3.13)$$

La figure 3.6 montre la densité spectrale de puissance normalisée pour un lien Mobile-Mobile obtenue par la formule corrigée proposée (3.13). Cette densité est minimale à la fréquence Doppler totale (somme des deux fréquences Doppler pour les deux extrémités

mobiles) et maximale à la fréquence correspondant à la différence des fréquences Doppler de la source et de la destination. Le spectre présenté dans le cas où  $f_1T$  est différent de  $f_2T$  ressemble plus ou moins au spectre de Jakes présenté dans le Chapitre 1 (spectre borné avec 2 pics et un minimum à zéro), mais le support se prolonge au delà des 2 pics.

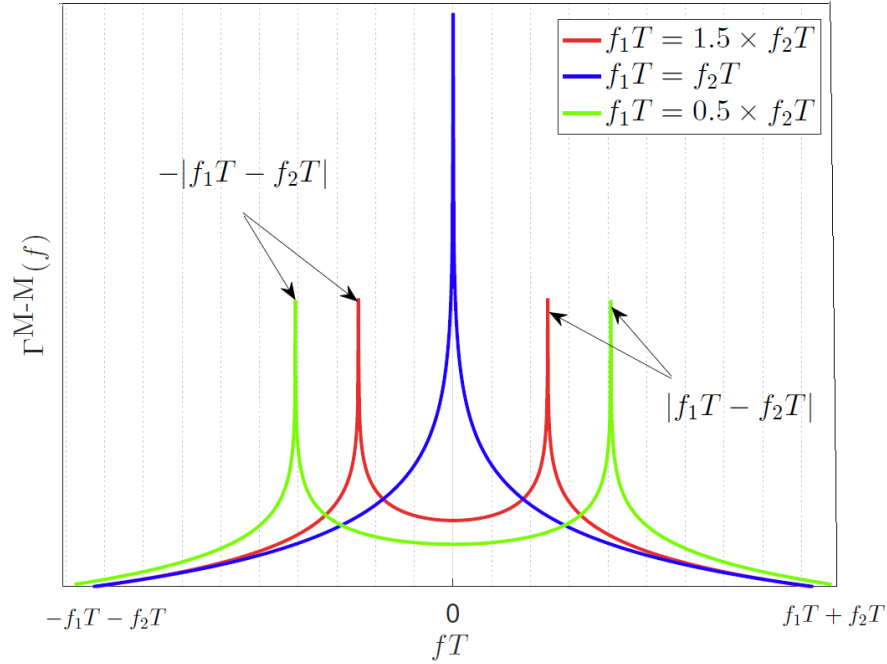


FIGURE 3.6 – Densité spectrale de puissance dans le cas Mobile-Mobile pour différents rapports de  $f_1T$  et  $f_2T$ .

### 3.2.4.3 Densité spectrale de puissance pour un canal à "N" relais mobiles

Dans le cas de  $N$  relais mobiles, obtenir une expression analytique de la DSP comme dans l'équation controversée (3.12) n'est pas simple.

Nous devons nous contenter d'exprimer la DSP comme des produits de convolution des spectres élémentaires, sans pouvoir calculer de manière explicite le résultat de ces produits de convolution. Cependant, notre but n'est pas d'obtenir une expression analytique de la DSP, mais de faire l'optimisation des coefficients du modèle AR. Nous verrons dans la suite que nous pourrions quand même mener à bien cette optimisation à partir de l'expression de la DSP sous forme de produits de convolution.

Nous rappelons donc que la transformée de Fourier d'un produit de fonctions dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine des fréquences. En appliquant la transformée de Fourier sur (3.9), on obtient :

$$\Gamma^{\text{relais}}(f) = \sigma_\alpha^2 \tilde{\Gamma}_{f_s}^{\text{F-M}}(f) \otimes \bigotimes_{i=1}^N \tilde{\Gamma}_{f_i}^{\text{F-M}}(f) \otimes \bigotimes_{i=1}^N \tilde{\Gamma}_{f_i}^{\text{F-M}}(f) \otimes \tilde{\Gamma}_{f_D}^{\text{F-M}}(f), \quad (3.14)$$

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles

avec  $f_S$ ,  $f_i$  et  $f_D$  les fréquences Doppler de S, du relais  $R_i$  et de la destination  $D$  respectivement.

De plus, pour réaliser l'optimisation nous aurons besoin de connaître le support de cette DSP.

#### 3.2.4.4 Support de la densité spectrale de puissance

Le calcul du support de la densité spectrale de puissance est utile dans plusieurs cas. On cite le cas où l'on introduit cette densité spectrale de puissance dans une intégrale, comme on verra dans le chapitre suivant. Nous verrons comment la connaissance du support peut aider à limiter les bornes de cette intégrale, et à en simplifier le calcul.

Mais avant de rentrer dans le cas général, il vaut mieux commencer par un cas simple. Soit la fonction  $g(x) = g_1(x) \otimes g_2(x)$  où les deux fonctions  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$  ont comme supports  $[-x_1; +x_1]$  et  $[-x_2; +x_2]$  respectivement. Alors le support de  $g(x)$  est  $[-x_1 - x_2; +x_1 + x_2]$

La démonstration est très rapide. En fait, la formule du produit de convolution donne  $g(x) = g_1(x) \otimes g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)g_2(x-u)du$ . Cette intégrale est non nulle lorsque  $-x_1 \leq u \leq +x_1$  et  $-x_2 \leq x-u \leq +x_2$ . Donc  $-x_1 - x_2 \leq u - x_2 \leq x \leq u + x_2 \leq +x_1 + x_2$

Soit maintenant  $g(x) = \bigotimes_{i=1}^{N+1} g_i(x)$  où  $g_i(x)$  a comme support  $[-x_i; +x_i]$ . Alors on peut

déduire rapidement que le support de  $g(x)$  est  $[-\sum_{i=1}^{N+1} x_i; +\sum_{i=1}^{N+1} x_i]$ .

Appliquons ceci sur la densité spectrale de puissance dans le cas de  $N$  relais. Sachant que, et comme vu dans les figures 3.6, la densité spectrale de puissance du gain du lien  $i$  a comme support  $[-f_i - f_{i-1}; f_i + f_{i-1}]$ , alors, le support de  $\Gamma(f) = \bigotimes_{i=1}^{N+1} \Gamma_{f_i}$  est  $[-f_{max}; +f_{max}]$ , avec

$$f_{max} = \sum_{i=1}^{N+1} (f_i + f_{i-1}) = f_S + 2 \sum_{i=1}^N f_i + f_D \quad (3.15)$$

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles

Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent pour le simple lien F-M, la dynamique du gain global (succession de tous les liens) est approchée par un modèle auto-régressif AR(2), et nous allons dans cette section optimiser les paramètres de ce modèle AR(2) pour minimiser la variance d'estimation asymptotique du filtrage de Kalman (critère MAV).

### 3.3.1 Résultats préliminaires

Rappelons que le paramètre à estimer  $\alpha$  est un processus stationnaire à bande étroite complexe circulaire de moyenne nulle avec une variance  $\sigma_\alpha^2$ , une densité spectrale de puissance (DSP)  $\Gamma(f)$  et une fréquence Doppler maximale  $f_{\max}$ .

Les moments d'ordre  $n$  de  $\Gamma(f)$  joueront un rôle important dans la performance de l'estimation. Pour une DSP  $\Gamma(f)$  quelconque, ils sont notés  $\mu_{(n)}$ , et sont définis par :

$$\mu_{(n)} = (2\pi T)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f^n \Gamma(f) df, \quad (3.16)$$

où  $\tilde{\mu}_{(n)} = \frac{\mu_{(n)}}{\sigma_\alpha^2}$  désigne la version normalisée.

L'étalement Doppler  $B_d$  est définie comme la racine carrée du moment normalisé du second ordre de  $\Gamma(f)$  [97, Eq. (16)] :

$$B_d = \frac{1}{2\pi T} \sqrt{\tilde{\mu}_{(2)}} \quad (3.17)$$

Notons que  $B_d$  ne représente pas l'étalement monolatéral au sens du support strict (sinon on aurait  $f_{\max}$  défini en (3.15)) mais au sens de la valeur quadratique moyenne (ou rms, pour *root mean square*). Il s'en suit par exemple que la valeur de  $B_d$  pour le cas particulier du canal F-M du chapitre précédent n'est pas  $f_{\max} = f_d$  mais  $f_d/\sqrt{2}$ , comme nous le vérifierons dans la section 3.3.4, équation (3.30). Dans ce chapitre le paramètre  $\alpha$  est estimé par le filtre de Kalman avec le modèle AR(2) comme modèle d'état. L'approche du Chapitre 2 qui était limitée au spectre de Jakes, correspondant au canal F-M, est étendue à un spectre Doppler à bande limitée général  $\Gamma(f)$ , éventuellement avec relais. Cela a été fait en réécrivant les résultats en fonction du quatrième moment  $\mu_{(4)}$ . Les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent (présentées dans la Section 2.5.1.1) sont considérées, et résumées comme suit : variation lente du canal ( $f_{\max}T \ll 1$ ,  $f_{\text{AR}(2)}T \ll 1$ ), RSB supérieur à 1 ( $\sigma_\alpha \geq \sigma_w$ ),  $r$  proche de 1, plage de vitesse du KF suffisamment lente pour filtrer le bruit de mesure mais suffisamment rapide pour suivre le processus d'évanouissement ( $(2\pi f_{\text{AR}(2)}T)^2 \ll \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \ll 1$ ).

Rappelons que sous ces hypothèses, nous avons obtenu l'expression suivante pour  $r$  (voir aussi 2.72) :

$$r \simeq 1 - \frac{\sigma_u^2}{4\sigma_\alpha^2(2\pi f_{\text{AR}(2)}T)^2}. \quad (3.18)$$

Cette expression montre que pour un  $f_{\text{AR}(2)}$  donné, le KF peut être réglé à partir de  $\sigma_u$  au lieu de  $r$ , comme cela sera fait. On fixera pour toute la suite  $f_{\text{AR}(2)}$  à  $B_d$  (3.17) :

$$f_{\text{AR}(2)}T = B_dT = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\tilde{\mu}_{(2)}} \quad (3.19)$$

Ce choix, qui nous paraît naturel, généralise celui du chapitre précédent. En effet pour le cas particulier du canal F-M, il correspond bien au choix optimal de la littérature  $f_{\text{AR}(2)} = f_d/\sqrt{2}$  (Cf (3.30)) que nous avons adopté.

### 3.3.2 Analyse de l'erreur quadratique moyenne

Pour calculer l'erreur quadratique moyenne (EQM) asymptotique, nous exploiterons les résultats du chapitre précédent obtenus pour le cas d'un canal F-M. Nous considérons

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles

toujours un système en régime permanent, après la convergence du filtre KF vers un filtre invariant dans le temps. Ce filtre reçoit l'observation  $y$  en entrée et donne l'estimation du GC  $\hat{\alpha}$  en sortie. Sa fonction de transfert  $L(z)$  est la même que celle donnée dans (2.55) dans le Chapitre 2 :

$$L(z) = \frac{K_1 + a_2 K_2 z^{-1}}{1 + z^{-1}(a_2 K_2 - a_1(1 - K_1)) - a_2(1 - K_1)z^{-2}}, \quad (3.20)$$

avec les gains de Kalman en régime asymptotique  $K_1$  et  $K_2$  donnés dans les équations (2.53) et (2.43).

A noter qu'on a les mêmes expressions de  $K_1$  et  $K_2$  données dans le chapitre 2, ce qui est dû au fait que l'on traite le cas d'un spectre borné, avec  $f_{\text{AR}(2)}T \ll 1$  et  $\delta \ll 1$ .

L'EQM, définie par  $\sigma_\epsilon^2 = E\{|\alpha_{(k)} - \hat{\alpha}_{(k|k)}|^2\}$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , peut être décomposée comme suit :

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_{\epsilon w}^2 + \sigma_{\epsilon \alpha}^2 \quad (3.21)$$

- La variance d'erreur statique  $\sigma_{\epsilon w}^2$  est due au bruit additif  $w_{(k)}$  filtré par le filtre passe-bas  $L(z)$ . Cette expression a déjà été établie dans le Chapitre 2 par l'équation (2.59) :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_w^2 T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |L(e^{2i\pi f T})|^2 df \simeq \sigma_w^2 \frac{3K_1}{4}. \quad (3.22)$$

- La variance d'erreur dynamique  $\sigma_{\epsilon \alpha}^2$  est due aux variations de  $\alpha_{(k)}$  filtrées par le filtre passe-haut  $1 - L(z)$ . De (2.61) on a :

$$\sigma_{\epsilon \alpha}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-f_{\text{max}}}^{+f_{\text{max}}} |1 - L(e^{2i\pi f T})|^2 \Gamma(f) df \simeq \int_{-f_{\text{max}}}^{+f_{\text{max}}} \frac{(2\pi f T)^4}{K_1^4} \Gamma(f) df. \quad (3.23)$$

Pour pouvoir traiter le cas de spectres généraux, mais toujours bornés, nous allons réécrire la variance d'erreur en fonction du moment d'ordre 4, ce qui donne :

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_w^2 \frac{3K_1}{4} + \frac{\mu(4)}{K_1^4} \quad (3.24)$$

avec  $K_1$  en fonction de  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$  (voir équation (2.53)).

On peut maintenant minimiser  $\sigma_\epsilon^2$  afin d'avoir une expression de  $\sigma_u^2$  optimale.

Tout d'abord, nous dérivons (3.24) par rapport à  $\sigma_u^2$ , après avoir substitué  $K_1$  par son expression dans (2.53), et en égalisant le résultat à zéro, ce qui donne :

$$\sigma_{u(\text{MAV})}^2 = \left( \frac{8}{9} \mu(4) \sigma_w \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (3.25)$$

et ensuite l'expression de l'EQM minimale est donnée par :

$$\sigma_{\epsilon(\text{MAV})}^2 = \frac{5}{4} \left( \frac{8}{9} \sqrt{\mu(4)} (\sigma_w^2)^2 \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (3.26)$$

D'après (3.25), (3.18) et (3.19), nous concluons que, pour un niveau de bruit d'observation donné  $\sigma_w^2$ , le réglage de l'AR(2)-KF ne dépend que du moment d'ordre quatre  $\mu_{(4)}$  et du deuxième moment normalisé  $\tilde{\mu}_{(2)} = (2\pi B_d)^2$  du canal global. Les fréquences Doppler des liens individuels ne vont donc influencer les performances que de manière indirecte via ces 2 moments globaux. Avec ce réglage, l'EQM minimale (3.26) dépend uniquement de  $\mu_{(4)}$ . Pour obtenir un réglage et des performances optimales du KF, les objectifs de la section suivante sont alors d'évaluer  $\mu_{(2)}$  et  $\mu_{(4)}$ . Nous rappellerons d'abord les résultats pour le canal Fixe-Mobile (modèle Jakes Doppler) utilisé comme référence, puis nous établirons de nouvelles expressions de  $\mu_{(2)}$  et  $\mu_{(4)}$  dans le cas des canaux plus complexes (Mobile-Mobile et à  $N$  relais mobiles), en fonction des fréquences Doppler des différents liens.

### 3.3.3 Calcul des moments

Dans cette section nous donnons les expressions des moments d'ordre 2 et 4 de  $\Gamma(f)$  dans le cas des canaux F-M, M-M ou à  $N$  relais mobiles.

### 3.3.4 Cas d'un canal F-M

Dans les équations (3.6) et (3.10), nous avons présenté la fonction d'autocorrélation dans le cas F-M, qui est la fonction de Bessel d'ordre 0.

Pour calculer les moments on a recours à la propriété des moments. Les moments  $\mu_{(n)}$  du spectre de  $\Gamma(f)$  du GC défini dans (3.16) peuvent être obtenus par :

$$\mu_{(n)} = (j)^{-n} R^{(n)}(0), \quad (3.27)$$

avec  $R(t)$  la fonction d'autocorrélation à temps continu du GC et  $R^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} R(t) \right|_{t=0}$ .

Les deuxième et quatrième moments du spectre Doppler de Jakes dans (3.10) sont ensuite calculés en dérivant (3.6) en utilisant (3.27), et la fréquence de AR(2)  $f_{\text{AR}(2)}T$  est déduite de (3.19) :

$$\mu_{(2)}^{\text{F-M}} = \sigma_\alpha^2 \cdot \tilde{\mu}_{(2),f_x}^{\text{F-M}} = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^2 (2\pi f_x T)^2 \quad (3.28)$$

$$\mu_{(4)}^{\text{F-M}} = \sigma_\alpha^2 \cdot \tilde{\mu}_{(4),f_x}^{\text{F-M}} = \frac{3}{8} \sigma_\alpha^2 (2\pi f_x T)^4 \quad (3.29)$$

$$f_{\text{AR}(2)}T = B_d T = \frac{f_x T}{\sqrt{2}} \quad (3.30)$$

Comme déjà mentionné le réglage de  $f_{\text{AR}(2)}T$  (3.30) qui découle directement de  $\mu_{(2)}$  coïncide avec celui adopté au chapitre précédent (formule (2.27)). L'ajustement de  $r$  par la formule (3.18) dépend directement de  $f_{\text{AR}(2)}$  (donc de  $\mu_{(2)}$ ) mais aussi de la variance de bruit  $\sigma_u^2$  (donc de  $\mu_{(4)}$  via (3.25)), ce qui permet aussi de retrouver le réglage de  $r$  du chapitre précédent (2.73).

Concernant les performances en EQM, il suffit d'injecter les expressions des moments (3.28) et (3.29) dans la formule générale (3.26) pour retrouver la formule d'EQM minimale théorique du canal de Rayleigh F-M établie au chapitre précédent (formule (2.65)) :

$$\sigma_{\epsilon(\text{MAV})}^2 = \frac{15}{8} \pi^{\frac{4}{5}} (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{5}} (f_d T \sigma_w^2)^{\frac{4}{5}}. \quad (3.31)$$

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles

#### 3.3.4.1 Cas d'un canal Mobile-Mobile

En dérivant la fonction d'autocorrélation dans (3.7) et en appliquant la méthode dans (3.27), les deuxième et quatrième moments de  $\Gamma(f)$  dans le cas M-M ont été donnés dans [98] :

$$\mu_{(2)}^{\text{M-M}} = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^2 (2\pi T)^2 (f_1^2 + f_2^2) \quad (3.32)$$

$$\mu_{(4)}^{\text{M-M}} = \frac{3}{8} \sigma_\alpha^2 (2\pi T)^4 (f_1^4 + f_2^4 + 4f_1^2 f_2^2) \quad (3.33)$$

Il est intéressant de noter qu'une deuxième méthode existe pour calculer les moments. Cette méthode se base sur le fait que :  $\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \sigma_\alpha^2 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(f) \otimes \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f)$ . Les détails du calcul sont donnés dans l'Annexe J.

Selon (3.32) et (3.19), la fréquence de résonance normalisée du processus AR(2),  $f_{\text{AR}(2)}T$ , doit être réglée comme suit :

$$f_{\text{AR}(2)}T = B_d T = \sqrt{\frac{(f_1 T)^2 + (f_2 T)^2}{2}} \quad (3.34)$$

Les vitesses de la source et de la destination influent ainsi de manière symétrique sur le réglage et les performances du Kalman AR(2).

#### 3.3.4.2 Cas d'un canal à $N$ relais mobiles

Dans la section précédente, les moments  $\mu_{(4)}$  et  $\mu_{(2)}$  ont été calculés en dérivant la fonction d'autocorrélation et en l'évaluant à  $t = 0$  ou en calculant le produit de convolution des spectres. Hélas, ces méthodes ne permettent pas d'obtenir une expression analytique en présence de  $N$  relais du fait de la complexité des calculs. Nous suggérons alors d'utiliser une autre approche basée sur la propriété suivante<sup>4</sup> :

*Si une fonction de densité est la convolution de fonctions de densité élémentaires, le cumulants de cette fonction est la somme des cumulants de chaque fonction élémentaire.*

En appliquant cette propriété à la PSD du GC dans (3.14), nous pouvons en conclure que le  $n$ ème cumulants  $K_{(n)}$  du GC de  $\alpha$  est la somme des cumulants des CG de chaque lien partiel entre la source et la destination, soit :

$$K_{(n)}^{\text{relais}} = \sigma_\alpha^2 \left( \tilde{K}_{(n),f_S}^{\text{F-M}} + 2 \sum_{i=1}^N \tilde{K}_{(n),f_i}^{\text{F-M}} + \tilde{K}_{(n),f_D}^{\text{F-M}} \right), \quad (3.35)$$

où  $\tilde{K}_{(n),f_S}^{\text{F-M}}$ ,  $\tilde{K}_{(n),f_i}^{\text{F-M}}$  and  $\tilde{K}_{(n),f_D}^{\text{F-M}}$  sont les cumulants normalisés d'ordre  $n$  pour les PSD de tous les liens partiels entre S et D.

---

4. Cette propriété correspond au résultat bien connu de la théorie des probabilités : la fonction de densité de probabilité (DDP) de la somme de  $N$  variables aléatoires indépendantes est égale à la convolution des  $N$  DDP élémentaires, et le cumulants de cette DDP est égal à la somme des cumulants des  $N$  DDP élémentaires. En particulier la variance (c'est à dire le cumulants d'ordre 2) de la somme de variables aléatoires indépendantes égale la somme des variances élémentaires.



Sachant que [99] :

$$K_{(4)} = \mu_{(4)} - 3\mu_{(2)}^2, \quad \text{et} \quad K_{(2)} = \mu_{(2)},$$

et que le GC est centré ( $\mu_{(1)} = 0$ ), le moment d'ordre 2 du canal à  $N$  relais mobiles est obtenu à partir de (3.35) pour  $n = 2$  :

$$\mu_{(2)}^{\text{relais}} = \sigma_\alpha^2 \left( \tilde{\mu}_{(2),f_S}^{\text{F-M}} + 2 \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_{(2),f_i}^{\text{F-M}} + \tilde{\mu}_{(2),f_D}^{\text{F-M}} \right). \quad (3.36)$$

Et le moment d'ordre 4 du canal à relais est obtenu en remplaçant les expressions des cumulants des deux côtés de l'équation dans (3.35) :

$$\begin{aligned} \mu_{(4)}^{\text{relais}} = \sigma_\alpha^2 & \left( \tilde{\mu}_{(4),f_S}^{\text{F-M}} + \tilde{\mu}_{(4),f_D}^{\text{F-M}} + 2 \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_{(4),f_i}^{\text{F-M}} \right. \\ & + 3 \left( \left( \tilde{\mu}_{(2),f_S}^{\text{F-M}} + \tilde{\mu}_{(2),f_D}^{\text{F-M}} + 2 \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_{(2),f_i}^{\text{F-M}} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. - (\tilde{\mu}_{(2),f_S}^{\text{F-M}})^2 - (\tilde{\mu}_{(2),f_D}^{\text{F-M}})^2 - 2 \sum_{i=1}^N (\tilde{\mu}_{(2),f_i}^{\text{F-M}})^2 \right) \right), \quad (3.37) \end{aligned}$$

Les moments dans l'équation (3.37) sont donnés par (3.28) et (3.29).

Il est intéressant de noter que le résultat M-M (3.33) de la section précédente peut être extrait de la formule plus générale (3.37) en supprimant les  $N$  relais.

$B_d$  est toujours déduit de (3.17) et (3.36), ce qui permet de fixer  $f_{\text{AR}(2)}T$  à :

$$f_{\text{AR}(2)}T = B_dT = \sqrt{\frac{(f_S T)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (f_i T)^2 + (f_D T)^2}{2}}. \quad (3.38)$$

### 3.3.5 Résultats de simulation

#### 3.3.5.1 Performance en terme d'EQM

Dans cette section, les simulations de Monte-Carlo pour les communications M-M et les communications à relais mobiles sont considérées. Les canaux sont estimés avec un AR(2)-KF réglé avec le critère MAV. À des fins de comparaison, des simulations avec AR(2)-KF où les paramètres sont réglés avec le critère CM, choix de la littérature, sont également présentées.

La figure 3.7 trace l'EQM asymptotique correspondante pour  $B_dT \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$  et pour différentes valeurs de RSB dans le cas d'un canal à  $N$  relais mobiles, avec  $N = 3$  relais. Premièrement, les valeurs théoriques de l'EQM avec le critère MAV (3.25) correspondent bien aux simulations pour toute la plage habituelle de RSB comprise entre 0 et 20 dB, ce qui valide notre approche.

Les performances d'EQM sous le critère MAV sont largement supérieures à celles obtenues sous le critère CM, en particulier pour  $B_dT \leq 10^{-3}$ .

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles

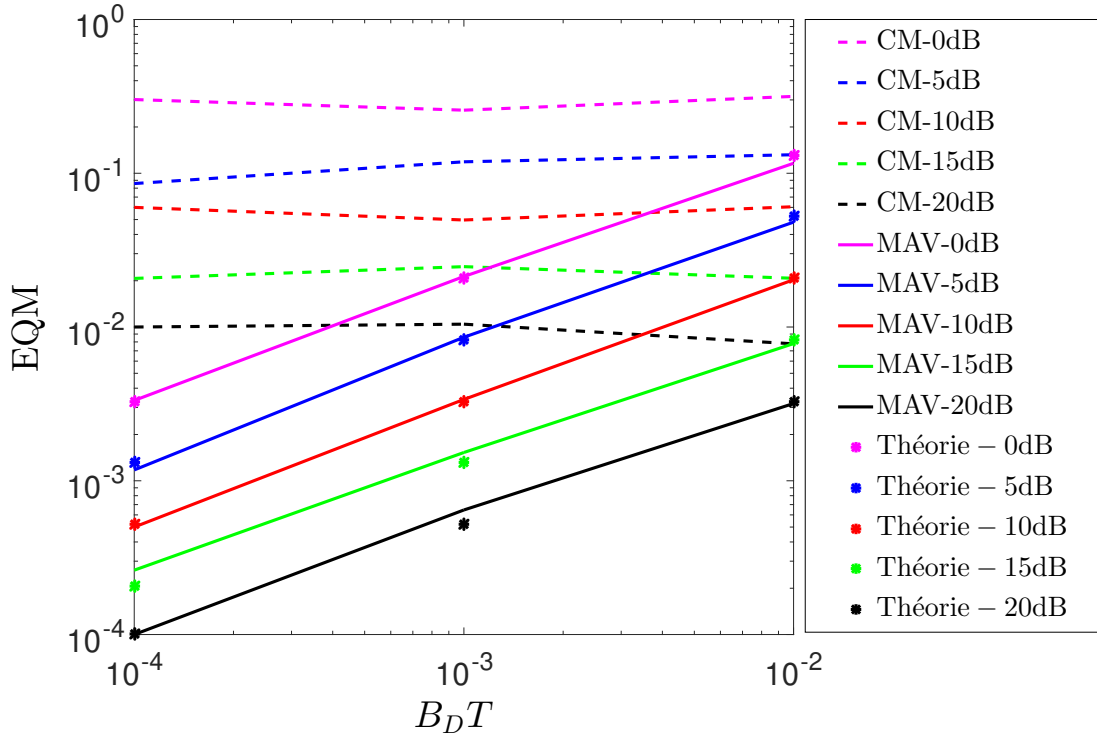


FIGURE 3.7 – Comparaison des EQM asymptotique pour le AR(2)-MAV avec AR(2)-CM et l'EQM théorique établie dans (3.26) pour différentes valeurs de  $B_d T$  et RSB, avec trois relais AF mobiles.

La figure 3.8 compare les performances du AR(2)-MAV à celles du AR(1)-MAV de la littérature [13] et du AR(2)-CM dans le cas des communications M-M, pour  $B_d T = 10^{-4}$  et différentes valeurs de RSB. On voit que le KF avec AR(2)-MAV est plus performant que le KF avec AR (1)-MAV et AR(2)-CM, d'où l'avantage d'utiliser une modélisation du second ordre appropriée au lieu d'un modèle du premier ordre.

La figure 3.9 montre les performances du KF avec AR(2)-MAV pour différentes valeurs de  $B_d T$  en fonction du nombre de relais pour un RSB de 10 dB. On voit que pour une valeur constante de  $B_d T$ , les performances en terme d'EQM restent quasiment constantes pour différents nombres de relais  $N \in [0, 4]$ . Ceci montre que c'est la valeur de  $B_d T$  qui joue un rôle fondamental dans l'évaluation du canal quelque soit le nombre de relais et les valeurs des fréquences Doppler élémentaires. C'est un résultat remarquable et qui confirme notre étude théorique.

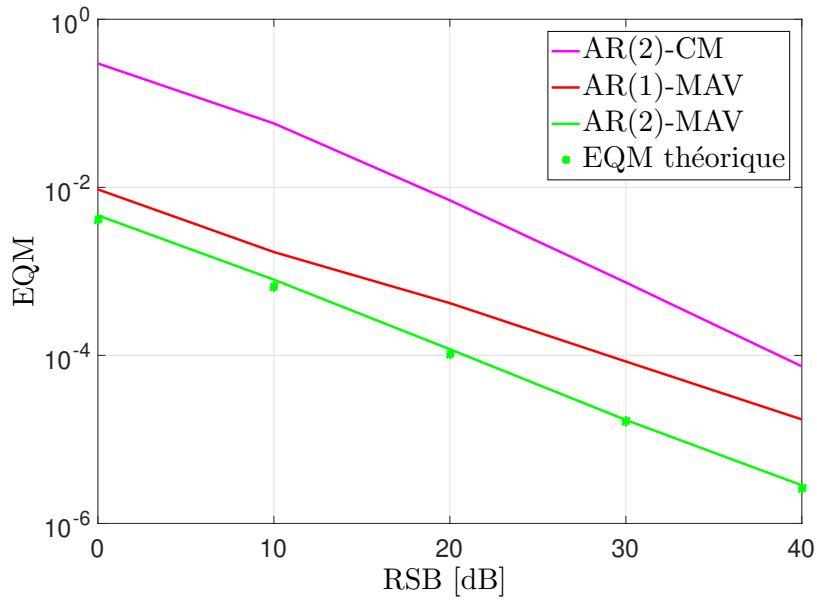


FIGURE 3.8 – Comparaison des EQM asymptotique du AR(2)-MAV proposé avec AR(2)-CM et AR(1)-MAV [13] pour  $B_dT = 10^{-4}$  et différentes valeurs de RSB pour des communications M-M.

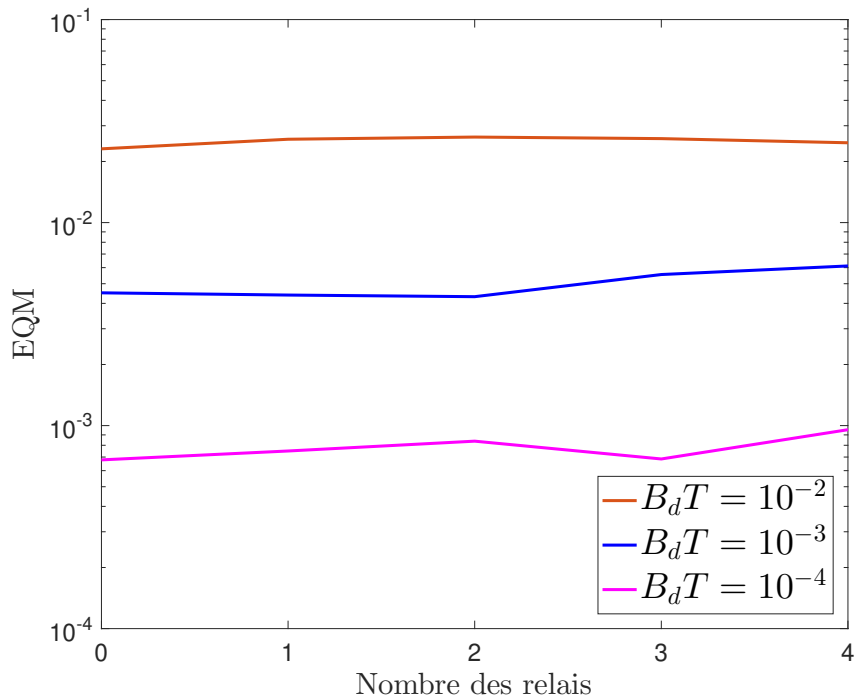


FIGURE 3.9 – Comparaison des EQM asymptotique du AR(2)-MAV proposé en fonction de nombre de relais pour différents  $B_dT$  pour des communications M-M.

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles

#### 3.3.5.2 Performance en terme de TEB

Une simulation de TEB est effectuée afin d'évaluer l'impact de l'estimateur AR(2)-MAV sur la qualité de la communication M-M et à  $N$  relais mobiles pour  $N = 1$  et  $N = 2$  et différentes valeurs de  $B_d T$ . Les symboles transmis sont modulés en QPSK. La trame de données est composée de 20 symboles pilotes suivi par 200 symboles inconnus. Dans ce contexte, l'estimation de canal est en mode semi-aveugle. Dans ce cas, l'équation (2.37) du filtre de Kalman est modifié en remplaçant  $y_{(k)}$  par  $y_{(k)} \times \hat{s}_{(k|k-1)}^*$ , avec  $\hat{s}_{(k|k-1)} = s_{(k)}$  si  $s_{(k)}$  est un symbole pilote ou

$$\hat{s}_{(k|k-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{sgn} \left\{ \text{Re}(y_{(k)} \times \hat{\alpha}_{(k|k-1)}^*) \right\} + i \times \text{sgn} \left\{ \text{Im}(y_{(k)} \times \hat{\alpha}_{(k|k-1)}^*) \right\} \right)$$

si  $s_{(k)}$  est un symbole inconnu. Dans ce cas,  $\hat{s}_{(k|k-1)}$  représente la décision a priori, et la décision finale sera :

$$\hat{s}_{(k|k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{sgn} \left\{ \text{Re}(y_{(k)} \times \hat{\alpha}_{(k|k)}^*) \right\} + i \times \text{sgn} \left\{ \text{Im}(y_{(k)} \times \hat{\alpha}_{(k|k)}^*) \right\} \right)$$

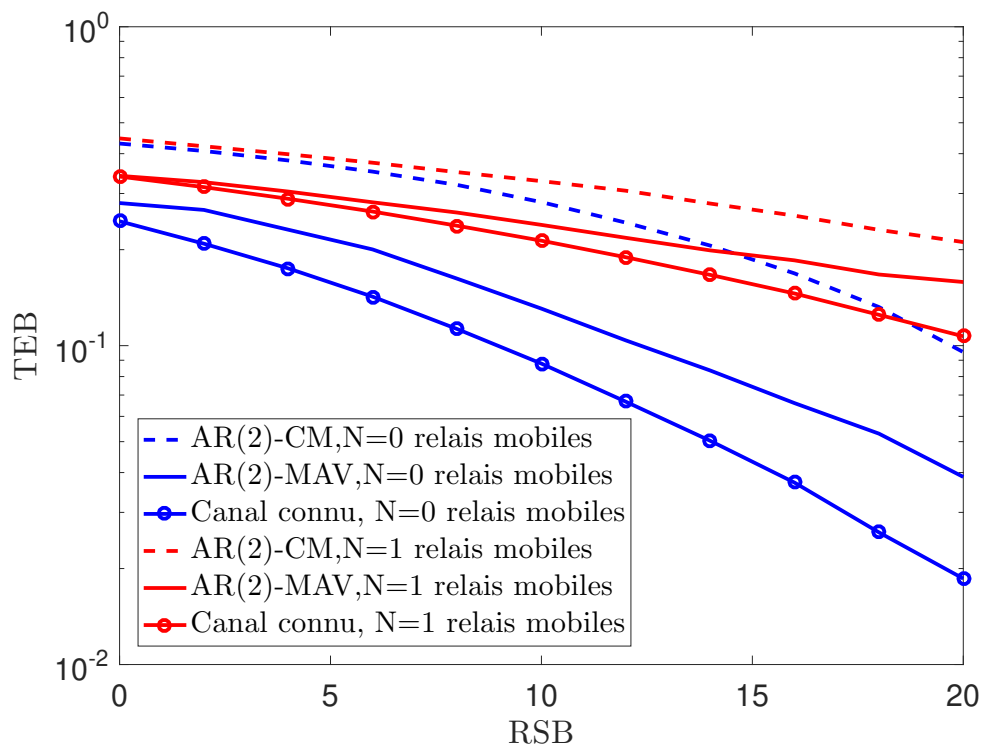
La figure (3.10a) montre que le TEB du AR(2)-MAV donne des performances proches de celles obtenues lorsque le canal est connu pour le cas M-M (0 relais mobiles) et  $N = 1$  relais mobiles. Les performances en TEB obtenues avec le AR(2)-MAV sont nettement meilleures que celles obtenues avec AR(2)-CM. On note aussi que les performances en TEB se dégradent nettement lorsque l'on passe de 0 à 1 relais, et ceci même si le canal est connu. Ceci s'explique par le fait que la distribution de probabilité de la puissance instantanée du canal  $|\alpha|^2$  se concentre davantage autour de zéro en présence de relais, et le phénomène est encore accentué si le nombre de relais augmente (voir figure 3.12). Autrement dit le phénomène d'évanouissement est d'autant plus fort que le nombre de relais augmente.

Ceci se comprend étant donné que le gain global  $\alpha$  est le produit de variable gaussiennes centrées indépendantes, et la probabilité d'avoir une valeur proche de zéro augmente avec le nombre de ces variables. Notons que dans le cas sans relais (F-M),  $|\alpha|^2$  suit la loi exponentielle (ou Chi2 à 2 degrés de liberté),  $|\alpha|$  suit la loi de Rayleigh, et les performances en TEB avec canal connus sont celles d'un canal de Rayleigh de référence.

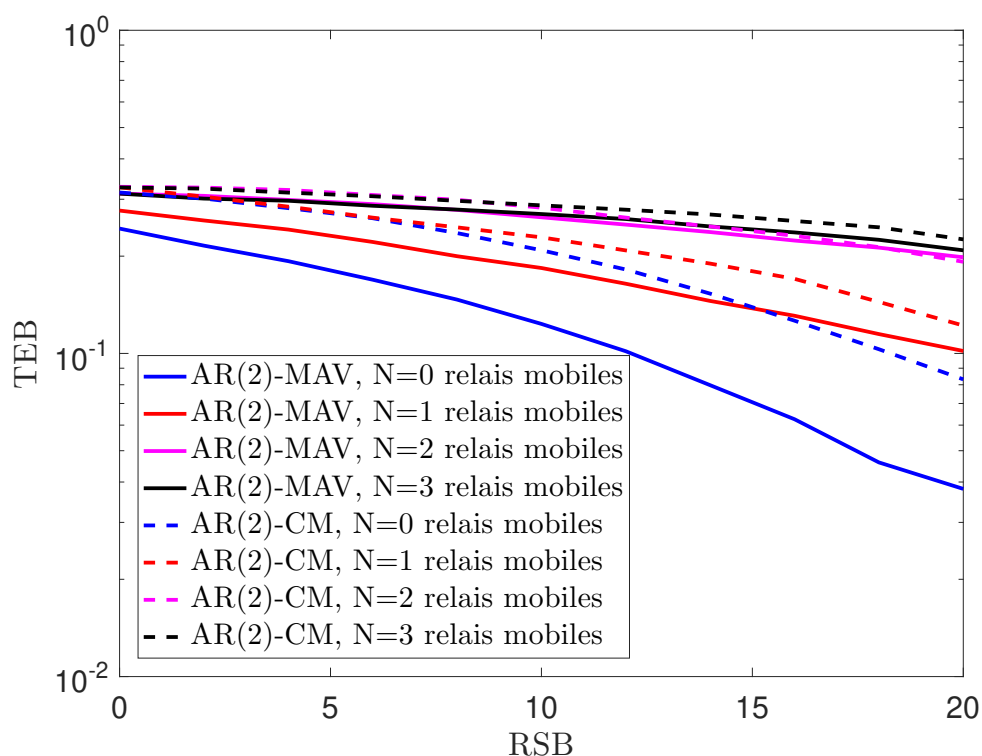
La figure 3.10b montre l'évolution avec le nombre de relais. Comme attendu et expliqué précédemment, les TEB se dégradent lorsqu'on augmente le nombres de relais, en raison de l'accentuation du phénomène d'évanouissement.

On vérifie encore que les performances en TEB obtenues avec le AR(2)-CM sont nettement inférieures à celles obtenues avec le AR(2)-MAV, et qu'elles sont globalement très mauvaises.

En plus la figure (3.11) montre que le TEB du AR(2)-MAV, dans le cas d'un canal M-M, donne des performances proches de celles obtenues lorsque le canal est connu dans le cas où l'ordre de modulation PSK est inférieure ou égale à 8. Les performances en TEB obtenues avec le AR(2)-MAV sont nettement meilleures que celles obtenues avec AR(2)-CM. On note aussi que les performances en TEB se dégradent nettement lorsque l'on passe à un ordre de modulation élevé, et ceci même si le canal est connu.



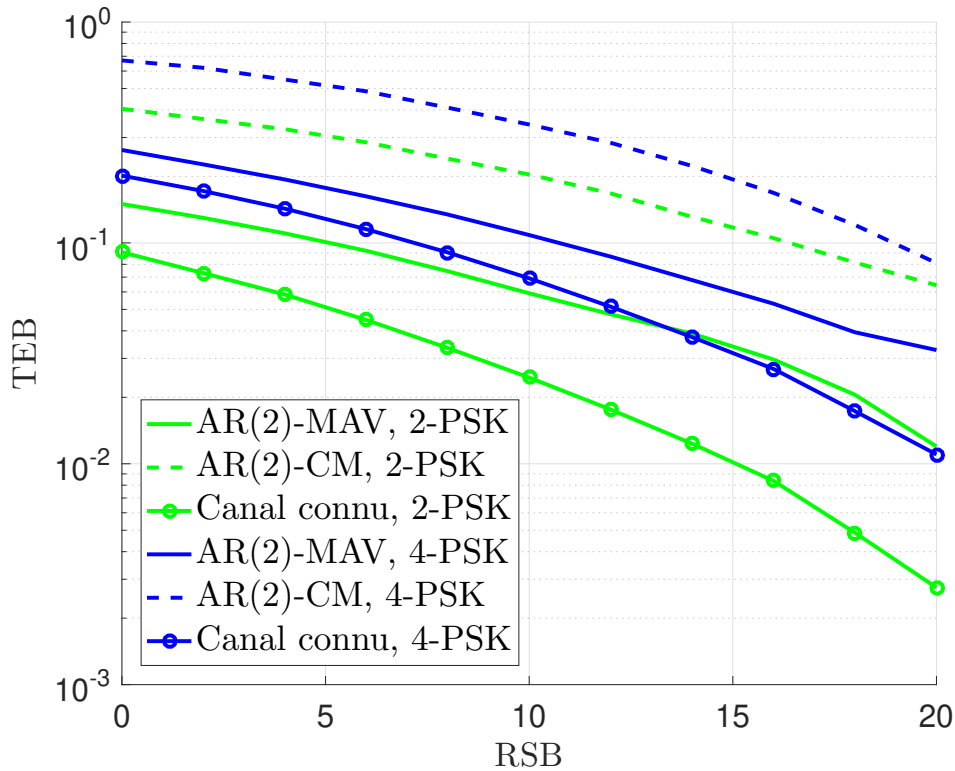
(a)  $N=0$  et 1 relais mobiles avec canaux connus



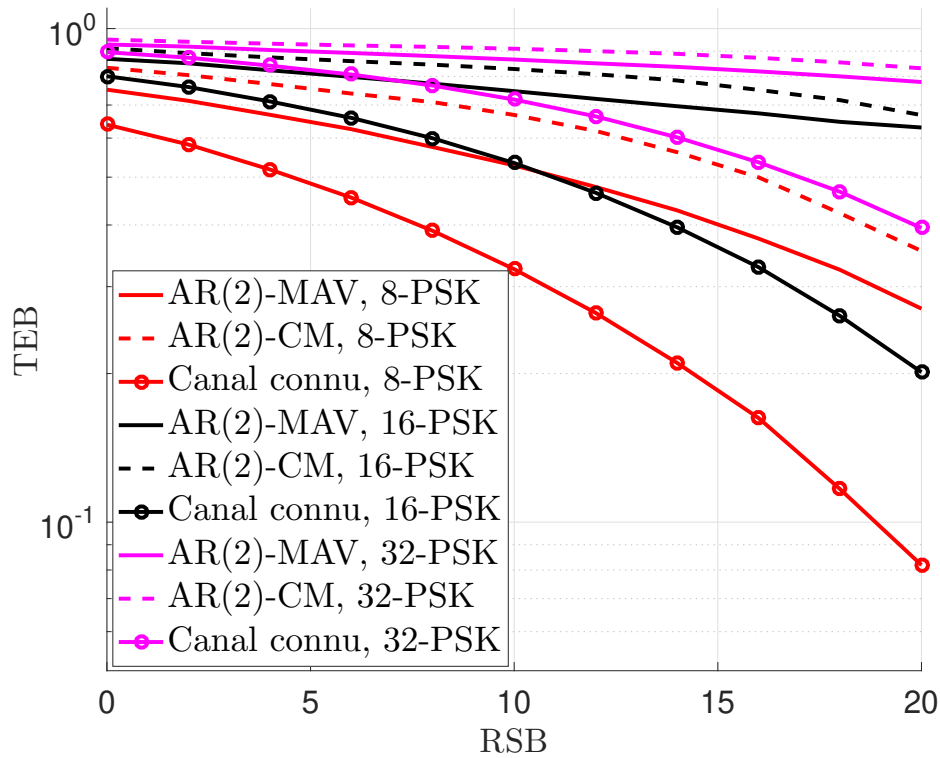
(b)  $N = 0, 1, 2$  et  $3$  relais mobiles

FIGURE 3.10 – Comparaison du TEB, en fonction du RSB, obtenus avec AR(2)-MAV et AR(2)-CM dans le cas d'un canal M-M ou à  $N$  relais mobiles pour  $B_d T = 10^{-3}$ .

### 3.3 Optimisation du modèle AR(2) dans le cas d'une communication M-M et à $N$ relais mobiles



(a) modulation 2-PSK et 4-PSK avec canaux connus



(b) modulation 8, 16, 32-PSK avec canaux connus

FIGURE 3.11 – Comparaison du TEB, en fonction du RSB, obtenus avec AR(2)-MAV et AR(2)-CM pour un canal M-M,  $B_d T = 10^{-3}$  et différents ordres de modulation PSK.

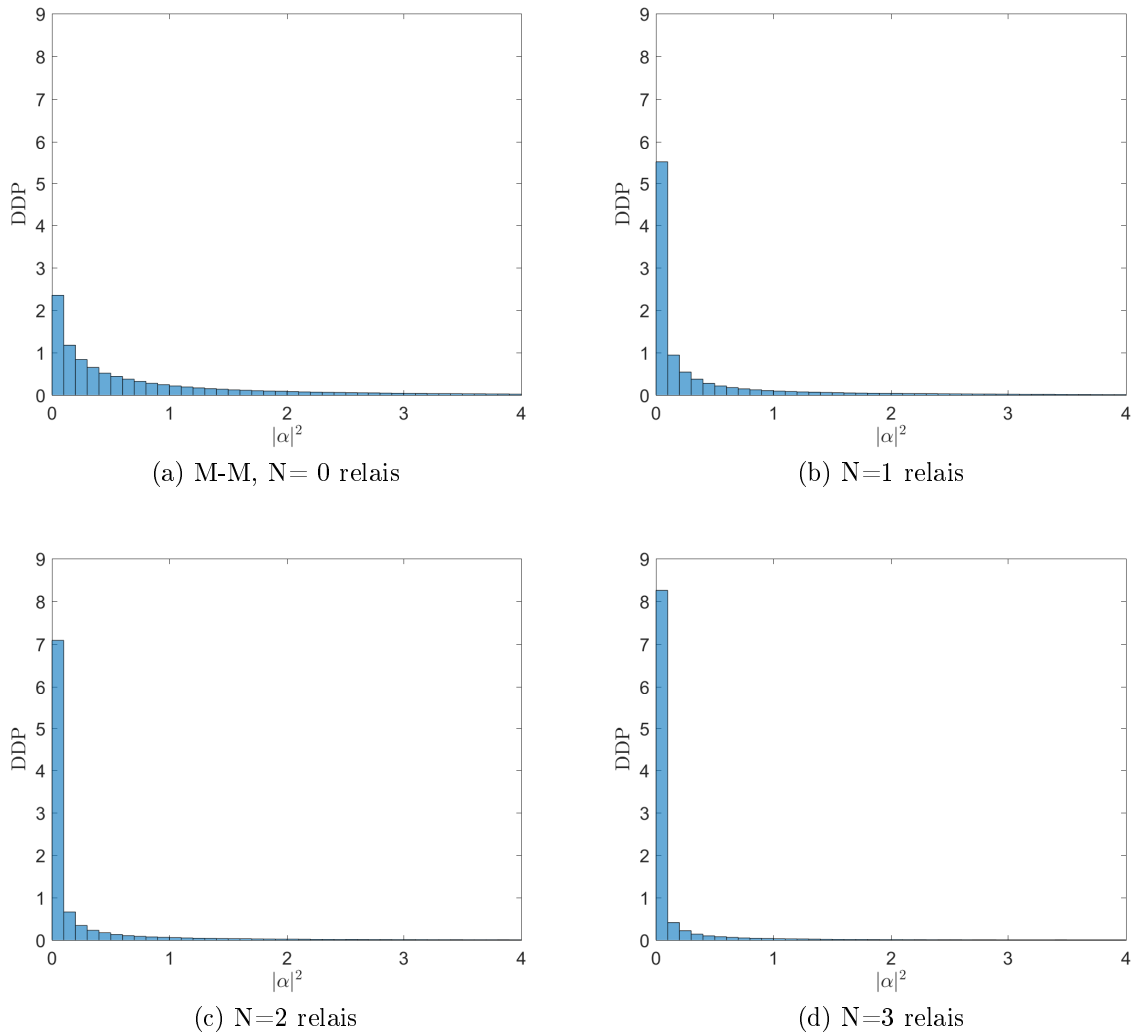


FIGURE 3.12 – DDP empirique (histogramme) du module carré de  $\alpha$ ,  $\sigma_\alpha^2 = E\{|\alpha^2|\} = 1$ , dans le cas M-M et à  $N$  relais mobiles pour  $N = 1, 2$  et  $3$  avec un pas égal à  $0,1$ .

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à donner les caractéristiques statistiques d'un canal Mobile-Mobile ou à  $N$  relais mobiles *amplify and forward* (AF) entre la source et la destination pour les modes de diffusion  $2D$ .

On a commencé par une description générale en donnant l'expression du gain de canal total et du bruit total en fonction des gains, facteurs d'amplification et bruits élémentaires. Ensuite, on a donné les formes des fonctions d'autocorrélation du gain dans le cas d'un canal Mobile-Mobile ou à  $N$  relais mobiles. De plus, les Densités Spectrales de Puissance (DSP) du gain total du canal pour les différents canaux ont été données.

Par la suite, le problème de l'estimation d'un canal radio mobile comprenant des canaux à  $N$  relais mobiles possibles dans un environnement de diffusion  $2D$  isotrope a été

### 3.4 Conclusion

---

abordé, en supposant l'utilisation d'un filtre de Kalman (KF) basé sur un modèle autorégressif de second ordre. Premièrement, les expressions analytiques pour le réglage et les performances optimales du AR(2) ont été établies. De plus, nous avons montré qu'ils ne dépendent que des deuxième et quatrième moments du spectre Doppler du canal global. Deuxièmement, en utilisant les propriétés de moment et de cumulants, ces moments globaux ont été exprimés à partir des moments élémentaires des liens Doppler partiels de Jakes connus. En conséquence, nous fournissons des performances d'estimation de canal et une formule de réglage du filtre de Kalman AR(2) en termes de statut de la source, de la destination et des relais mobiles  $N$  (étalement Doppler et RSB). Les résultats de la simulation montrent que l'approche AR-MAV(2) proposée surpasse les approches de la littérature basée sur le critère CM ou les modèles AR(1). Un résultat remarquable est que les performances d'estimation de canal ne dépendent pas directement du nombre de relais mais seulement du RSB et de l'étalement Doppler global. Malheureusement il n'en est pas de même pour les performances de la communication en Taux d'erreur binaire qui elles se dégradent avec le nombre de relais, à cause de l'accentuation du phénomène d'évanouissements de la puissance instantanée du canal. Pour remédier à ce problème, des techniques de diversité pourraient être envisagées, mais cela sort du cadre de notre étude.





# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Cette thèse traite de l'estimation d'un canal de Rayleigh à évanouissements plats avec le modèle de Jakes dans le cas d'un lien fixe-mobile (F-M), mobile-mobile (M-M) ou à  $N$  relais mobiles. Une méthode courante consiste à utiliser un filtre de Kalman (KF) basé sur un modèle autorégressif d'ordre  $p$  (AR( $p$ )). Les paramètres du modèle AR peuvent être simplement ajustés à l'aide du critère de corrélation (CM) de la littérature. Cependant, l'inconvénient majeur de cette méthode est que des ordres très élevés sont nécessaires pour approcher la borne de Cramer-Rao Bayésienne. Le choix de  $p$  ainsi que le réglage des paramètres du modèle sont donc critiques et un compromis doit être trouvé entre la complexité numérique et les performances. Le compromis raisonnable  $p = 2$ , a suscité beaucoup d'attention dans la littérature. Cependant, les méthodes proposées pour ajuster les paramètres du modèle reposent soit sur une analyse approfondie de la recherche sur grille, soit sur des résultats expérimentaux, ce qui limite leur applicabilité. Dans cette thèse, nous avons apporté des contributions sur le réglage du filtre de Kalman AR( $p$ ) pour l'estimation canal radio selon différents modèles, F-M (Modèle de Clarke), M-M, et canal à relais mobiles multi-bonds. Dans tous les cas, nous avons proposé d'utiliser un critère de minimisation de la variance asymptotique (MAV), pour lequel une formule analytique générale a été dérivée pour le réglage optimal du modèle et une autre pour l'erreur quadratique moyenne d'estimation. Cela permet de mieux comprendre le comportement du KF par rapport à l'état du canal (fréquence Doppler et rapport signal sur bruit). Nous rappelons dans la suite le contenu des différents chapitres en insistant sur les contributions.

Dans le Chapitre 1, une présentation de l'état de l'art a été faite. Nous avons présenté les différents systèmes de communications. Ensuite les caractéristiques du canal de propagation ont été présentées, ainsi que les évanouissements par trajets multiples et le modèle de variations des paramètres du canal F-M. Les algorithmes d'estimation du canal ont été présentés à la fin de ce chapitre.

Ensuite dans le Chapitre 2, nous avons traité le problème d'estimation d'un canal à évanouissement plat de Rayleigh à spectre de Jakes en présence d'un bruit blanc additif Gaussien. Le modèle autorégressif d'ordre  $p$  a été présenté ainsi que le filtre de Kalman. Après avoir motivé notre choix du modèle AR(2), notre étude a démarré par la description du modèle AR(2) et des différents couples possible de paramètres qui permettent de le régler directement, et par la description des équations du filtre de Kalman reposant sur ce modèle. Ensuite nous avons étudié le filtre du Kalman en régime asymptotique. Il revient alors à un filtre à coefficients constants, qui dépendent des 2 composantes du gain de

Kalman en régime asymptotique. Des expressions simples approchés du gain de Kalman ont été établies en fonction des paramètres (la variance du bruit d'état  $\sigma_u^2$  et du bruit d'observation  $\sigma_w^2$ ), ainsi que d'autres paramètres du système, comme le facteur d'amortissement et la bande équivalente de bruit de la fonction de transfert du filtre de Kalman asymptotique. Ces paramètres ont été utilisés pour faire l'optimisation du système.

Les fonctions d'autocorrélations et les spectres du modèle AR(2) ont été présentés. Plus précisément, l'expression analytique du facteur d'amortissement a permis d'éclairer la forme de la densité spectrale de puissance moyenne (DSP) du processus AR(2) réglé de manière optimale.

Des simulations et des comparaisons avec la littérature ont été réalisées montrant que le réglage proposé (selon le critère de minimisation de la variance asymptotique, MAV) pour le filtre AR(2) surpasse nettement le réglage classique par coïncidence de corrélation (critère CM), et également les autres réglages de la littérature basés sur des résultats expérimentaux ou des grilles pour chercher les paramètres. Les performances d'estimation du filtre de Kalman AR(2) ainsi réglé (critère MAV) sont très satisfaisantes, proche des bornes de Cramer-Rao Bayésienne, et bien améliorées par rapport à celles du filtre AR d'ordre 1, qui avait été préalablement optimisé dans la littérature. Cela confirme que l'ordre 2 est un bon choix, une fois le modèle AR correctement réglé. Le réglage classique CM nécessitait par contre un ordre beaucoup plus élevé (de l'ordre de 15) pour atteindre des performances équivalentes dans le cas d'un canal à variations lentes à modérées, correspondant typiquement à des applications véhiculaires.

Dans le Chapitre 3, nous avons traité l'estimation de canal dans les communications M-M, comprenant éventuellement des relais mobiles, en supposant un environnement de diffusion bidimensionnel. Nous avons conservé un modèle autorégressif de second ordre (AR(2)) avec le filtre de Kalman pour estimer le gain de canal global. L'utilisation d'une minimisation du critère de variance asymptotique a permis à nouveau une forte amélioration de la performance d'estimation. Nous avons montré que les expressions analytiques pour le réglage optimal des paramètres du modèle AR(2) et les performances en erreur quadratique moyenne ne dépendaient, pour un niveau de bruit donné, que des deuxième et quatrième moments du spectre Doppler du canal global. Comme les formules analytiques de ces moments n'étaient pas données dans la littérature, nous les avons dérivées en exploitant une propriété sur les moments d'un produit de convolution des fonctions de densité, après décomposition du canal global en cascade de canaux de densité spectrale de puissance Doppler de Jakes. Par conséquent, l'ensemble des formules fournies sont utiles pour la conception des filtres de Kalman AR(2) et la prédiction de leur performances.

## Perspectives

L'étude ne s'arrête pas là. Fort de ces résultats, nous pouvons envisager de nombreuses perspectives à ce travail :

**OFDM** : *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*, en anglais, est une technique largement utilisée aujourd'hui, elle a été retenue pour les normes de télécommunications sans fil (WiFi, WiMAX, LTE etc.), télécommunications filaires (ADSL,

---

VDSL, Homeplu, etc.), radiodiffusion (DAB, T-DMB, etc.) et télédiffusion (DVB-T, DVB-H, etc.). Cette technique est classiquement utilisée dans les systèmes où le canal de propagation est fortement sélectif en fréquence. En effet, les informations peuvent être réparties sur l'ensemble du spectre. Le modèle présenté dans la thèse était simple, mais il est aussi fondamental, et est à la base des diverses études plus complexes d'estimation de canal qui pourront être envisagées avec la forme d'onde OFDM. Soit en considérant que l'amplitude complexe à estimer est directement celle du gain du canal à la fréquence de la sous-porteuse considérée, soit en considérant que c'est l'amplitude d'un trajet particulier. Dans ce deuxième cas on peut étendre facilement le modèle de la thèse pour réaliser l'estimation vectorielle de  $L$  trajets indépendants, comme réalisé dans [29, 49].

**MIMO :** Actuellement, la plupart des standards de communications reposent sur deux technologies clés : l'OFDM et le MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*). Ces techniques sont aujourd'hui implémentées dans les standards de la 4G. La première possibilité d'approfondir nos travaux est donc d'étendre les études vers le scénario MIMO ou MIMO-OFDM. A priori ça ne devrait pas trop poser de problème, d'autant plus qu'en MIMO (et encore plus en Massive MIMO), les canaux entre antennes Émission / Réception sont souvent considérés à évanouissements plats.

**Canal de Rice :** Cette étude peut être étendue aussi pour étudier le cas d'un canal réel qui n'aurait bien sûr pas exactement les caractéristiques du modèle de Rayleigh à spectre de Jakes . Il serait intéressant d'étudier l'approximation avec d'autres distributions, comme par exemple la distribution de Rice qui a été traitée dans la littérature pour le cas d'un lien ou plus.

**Spectres 3D et Gaussiens :** Dans cette thèse, l'étude s'est concentrée sur le canal de Rayleigh à spectre de Jakes (2D). Il serait intéressant d'étendre nos travaux pour des spectres Doppler ayant d'autres formes, comme les spectres Gaussiens et 3D [13].

**Fréquence Doppler et rapport signal à bruit (RSB) :** Aussi on peut se poser la question des traitements supplémentaires à faire si la fréquence Doppler n'est pas connue à la réception. Des méthodes d'estimation de fréquence Doppler ou directement du paramètre du modèle autorégressif doivent être proposées. De plus, on peut chercher une méthode d'amélioration indépendante du RSB qui, lui aussi, n'est pas toujours connu ou bien estimé. Des méthodes auto-adaptatives telle que celle présentée dans [39] pour le cas spécifique d'un modèle d'état à marche aléatoire RW(1) pourraient être étudiées.

**Borne de référence dans le cas d'un canal M-M ou à  $N$  relais mobiles :** On pourrait aussi chercher à mieux comparer notre algorithme avec les Bornes de Cramer Rao. Ces bornes de comparaison ont été utilisées dans cette thèse pour le cas d'un seul lien Fixe-Mobile car la distribution du gain et du bruit existe analytiquement dans ce cas. On pourrait exploiter les expressions des distributions sous formes d'intégrales multiples pour essayer d'établir les bornes sur les performances

d'estimation pour le cas Mobile-Mobile, ou les cas plusieurs liens, ce qui constitue un travail difficile et à l'aboutissement incertain.

# Annexe A

## Liens entre les couples de paramètres du modèle AR(2) : Preuve de (2.28), (2.29) et (2.30)

### A.1 Preuve de (2.28) et (2.29)

Le modèle AR(2) (2.3) est une équation de différence stochastique. Pour établir la connexion entre les deux paires de paramètres  $\{f_{\text{AR}(2)}T, r\}$  et  $\{f_{n,\text{AR}(2)}T, \zeta_{\text{AR}(2)}\}$ , il est plus pratique de considérer la version déterministe du modèle AR (2) donnée en absence de bruit d'état ( $\sigma_u^2 = 0$ ), ce qui génère un cycle de cosinus amorti. L'expression de ce cycle peut être obtenue par récursivité en utilisant  $a_1$  et  $a_2$  définis déjà dans (2.25). La  $k$ -ème itération de cette récursion est :

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = c \cdot r^k \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}kT), \quad (\text{A.1})$$

avec  $c$  est l'amplitude du cycle généré par les valeurs initiales de  $\tilde{\alpha}_{(0)}$  et  $\tilde{\alpha}_{(-1)}$ . En effet, (A.1) peut être prouvé de manière récursive. Supposons que ceci est vrai pour la  $k$ -ème itération, la  $k + 1$ -ème itération est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{(k+1)} &= a_1 \tilde{\alpha}_{(k)} + a_2 \tilde{\alpha}_{(k-1)} \\ &= 2cr^{k+1} \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}T) \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}kT) - cr^{k+1} \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}(k-1)T) \\ &= cr^{k+1} \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}(k+1)T). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ceci termine le processus récursif puisque (A.1) est également vrai pour l'itération initiale  $k = 1$ .

D'autre part, les paramètres  $f_{n,\text{AR}(2)}T$  et  $\zeta_{\text{AR}(2)}$  sont les paramètres physiques du filtre de second ordre en temps continu. Dans le contexte de la théorie des vibrations de base [100] à temps continu, la solution générale de l'équation différentielle ordinaire du second ordre classique est de la forme :

$$\tilde{\alpha}(t) = c \cdot e^{-\zeta_{\text{AR}(2)}2\pi f_{n,\text{AR}(2)}t} \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}t), \quad (\text{A.3})$$

où  $t$  est un temps continu. En échantillonnant l'équation ci-dessus avec une période  $T$  :

$$\tilde{\alpha}_{(k)} = c \cdot e^{-\zeta_{\text{AR}(2)}2\pi f_{n,\text{AR}(2)}kT} \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)}kT). \quad (\text{A.4})$$

En comparant (A.1) et (A.4) on a

$$e^{-\zeta_{\text{AR}(2)} 2\pi f_{n,\text{AR}(2)} T} = r \tag{A.5}$$

De l'équation A.5 on obtient l'équation (2.29).  
Ensuite de [100] on a :

$$(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2 = (1 - \zeta_{\text{AR}(2)}^2) (2\pi f_{n,\text{AR}(2)} T)^2. \tag{A.6}$$

Injectant l'expression de  $\zeta_{\text{AR}(2)}$  de l'équation (2.29) dans l'équation (A.6) on obtient l'équation (2.28).

## A.2 Preuve (2.30)

En remplaçant  $r$  par  $1 - \delta$  dans (2.29) et en supposons que  $\ln(1 - \delta) \simeq -\delta$ ,  $\delta \ll 1$ , on a :  $\zeta_{\text{AR}(2)} \simeq \frac{\delta}{\omega_{n,\text{AR}(2)} T}$ . Ensuite, en utilisant (2.31) on a

$$\zeta_{\text{AR}(2)} \simeq \frac{\delta}{\omega_{\text{AR}(2)} T}. \tag{A.7}$$

L'application de (A.7) à  $\delta = \delta_{(\text{MAV})}$  donne (2.74).

# Annexe B

## Expression des composantes du gain de Kalman $K_1$ et $K_2$

### B.1 Démonstration $P'_{21} = P'_{12}$

Une équation algébrique de Riccati [101] est un type d'équation non linéaire apparaissant dans le contexte de problèmes de contrôle optimal à horizon infini à temps continu ou à temps discret. Une équation algébrique typique de Riccati est similaire à l'équation suivante ( l'équation de Riccati algébrique à temps discret (DARE en anglais)) :

$$\mathbf{M}\mathbf{P}'\mathbf{M}^T - \mathbf{P}' - \mathbf{M}^T\mathbf{P}'\mathbf{s}(\mathbf{s}^T\mathbf{P}'\mathbf{s} + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{s}^T\mathbf{P}'\mathbf{M}^T + \mathbf{U} = 0 \quad (\text{B.1})$$

La résolution de l'équation (B.1) donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -P'_{11} + a_1^2 P'_{11} + a_2^2 P'_{22} + a_1 a_2 P'_{12} + a_1 a_2 P'_{21} - a_1^2 \frac{P_{11}'^2}{P'_{11} + \sigma_w^2} \\ - a_2^2 \frac{P'_{12} P'_{21}}{P'_{11} + \sigma_w^2} - a_1 a_2 \frac{P'_{11} P'_{12}}{(P'_{11} + \sigma_w^2)} - a_1 a_2 \frac{P'_{11} P'_{21}}{(P'_{11} + \sigma_w^2)} + \sigma_u^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$P'_{11} - P'_{22} - \frac{P_{11}'^2}{P'_{11} + \sigma_w^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$a_1 P'_{11} \left(1 - \frac{P'_{11}}{P'_{11} + \sigma_w^2}\right) - P'_{21} + a_2 P'_{12} \left(1 - \frac{P'_{11}}{P'_{11} + \sigma_w^2}\right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$a_1 P'_{11} \left(1 - \frac{P'_{11}}{P'_{11} + \sigma_w^2}\right) - P'_{12} + a_2 P'_{21} \left(1 - \frac{P'_{11}}{P'_{11} + \sigma_w^2}\right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Ces équations sont vérifiées en utilisant la fonction DARE (*discrete-time algebraic Riccati equation* en anglais) de Matlab.

On remarque que les équations (B.4) et (B.5) forment un système d'équations à deux inconnues  $P'_{12}$  et  $P'_{21}$ . Par la résolution de ce système on trouve que  $P'_{21} = P'_{12}$ , par suite  $P_{21} = P_{12}$  d'après les équations (2.50) et (2.49).



## B.2 Expression exacte de $P'_{11}$ , $K_1$ et $K_2$

Le contrôle linéaire optimal avec des critères de performance quadratiques est largement utilisé. Une solution algébrique non récursive pour les gains optimaux est présentée dans [79]. Cette méthode peut être utilisée dans notre cas pour la détermination du filtre de Kalman en régime permanent. Cette solution permet la détermination des gains et des matrices de covariance à l'état stationnaire directement sans itération.

Dans [79], il est montré que la solution du système d'équation du filtre (2.35) et (2.38) est obtenue en trouvant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante de taille  $4 \times 4$  :

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \Phi^{-T} & \Phi^{-T} \mathbf{R}_f^\dagger \\ \mathbf{Q}_f^* \Phi^{-T} & \Phi + \mathbf{Q}_f^* \Phi^{-T} \mathbf{R}_f^\dagger \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

avec  $\Phi^{-T} = \mathbf{M}^{-T}$ ,  $\mathbf{R}_f^\dagger = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T}{\sigma_w^2}$ , et  $\mathbf{Q}_f^* = \frac{\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{s}}{\sigma_u^2}$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{s}$  sont déjà définis..

Dans [79] il est montré aussi que si  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $\mathbf{H}_f$ , alors  $1/\lambda_i$  est aussi une valeur propre, et le problème est réduit à deux valeurs propres au lieu de quatre valeurs propres. Donc l'étape suivante sera de trouver les vecteurs propres en considérant que  $\lambda_i$  est une valeur propre associée au vecteur propre  $v_i$ .

Si  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $\mathbf{H}_f$ , le vecteur propre correspondant peut être trouvé comme :

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \lambda_i \\ \sigma_w^2 (a_2 \lambda_i (\lambda_i + a_1/a_2) - 1) \\ (\sigma_w^2 (a_2 \lambda_i (\lambda_i + a_1/a_2) - 1)) / \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

La solution en régime asymptotique  $\mathbf{P}'_\infty$ , donné par [79] :

$$\mathbf{P}'_\infty = \mathbf{W}_{21} \mathbf{W}_{11}^{-1}, \quad (\text{B.8})$$

où  $\mathbf{W}_{21}$  et  $\mathbf{W}_{11}$  sont définis comme suit :

Soit  $\mathbf{W}$  la matrice de taille  $4 \times 4$  formée à partir des vecteurs propres  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}'_1$  et  $\mathbf{v}'_2$  et leurs valeurs propres correspondantes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $1/\lambda_1$  et  $1/\lambda_2$  :

$$\mathbf{W} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

avec  $\mathbf{W}_{11}$ ,  $\mathbf{W}_{12}$ ,  $\mathbf{W}_{21}$  et  $\mathbf{W}_{22}$  des matrices de taille  $2 \times 2$

$$\mathbf{w}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_2 \lambda_1 & a_2 \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{w}_{21} = \begin{bmatrix} x & y \\ x/\lambda_1 & y/\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

où  $x = \sigma_w^2 (a_2 \lambda_1 (\lambda_1 + \frac{a_1}{a_2}) - 1)$  et  $y = \sigma_w^2 (a_2 \lambda_2 (\lambda_2 + \frac{a_1}{a_2}) - 1)$ .

En utilisant cette méthode, on déduit le résultat de  $\mathbf{P}'_\infty$  où on peut extraire  $P'_{11}$  :

## B.2 Expression exacte de $P'_{11}$ , $K_1$ et $K_2$

$$P'_{11} = -\sigma_w^2(1 + a_2\lambda_1\lambda_2). \quad (\text{B.12})$$

La figure B.1 valide le résultat obtenu dans l'équation (B.12). Elle montre la différence entre la valeur obtenue par simulation de  $P'_{11}$  et la valeur obtenue de l'équation (B.12) en échelle logarithmique. On remarque que la différence entre la simulation et la théorie est de l'ordre de  $10^{-12}$  jusqu'à  $10^{-16}$  (précision de la machine) pour différentes valeurs de RSB. Donc on peut valider la formule en régime asymptotique.

D'après l'équation (B.12) il reste donc à calculer le produit  $\lambda_1\lambda_2$  pour trouver une ex-

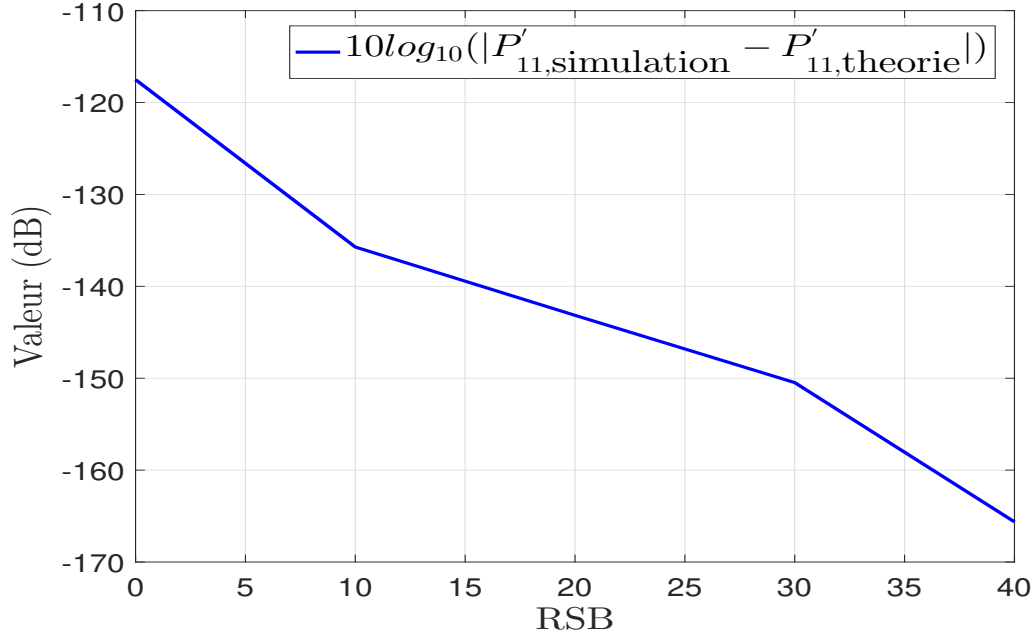


FIGURE B.1 – Différence entre  $P'_{11}$  obtenue par simulation et l'équation (B.12) en fonction du RSB pour  $f_dT = 10^{-3}$ .

pression analytique de  $P'_{11}$ .

La méthode proposée dans [102] est basée sur le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{H}_f$ .

### B.2.1 Calcul du produit $\lambda_1\lambda_2$

Une expression pour le polynôme caractéristique  $\text{Pol}_1$  est évaluée en calculant le déterminant de la matrice  $|\mathbf{H}_f - \lambda\mathbf{I}|$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité de taille  $4 \times 4$ . Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$\text{Pol}_1 = \lambda^4 - a\lambda^3 + (b + 2)\lambda^2 - a\lambda + 1, \quad (\text{B.13})$$

avec :

$$a = \frac{a_1 a_2 - a_1}{a_2} \quad (\text{B.14})$$

$$b = -\frac{a_1^2 + a_2^2 + \sigma_u^2/\sigma_w^2 + 1}{a_2} - 2. \quad (\text{B.15})$$

De plus, du fait que l'inverse d'une valeur propre est aussi une valeur propre, une autre expression pour le polynôme caractéristique est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Pol}_2 &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - 1/\lambda_1)(\lambda - 1/\lambda_2) \\
 &= \lambda^4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)\lambda^3 + \\
 &\quad ((\lambda_1 + 1/\lambda_1)(\lambda_2 + 1/\lambda_2) + 2)\lambda^2 \\
 &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2 + 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)\lambda + 1.
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

En identifiant (B.16) and (B.13) on obtient :

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 + 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2. \tag{B.17}$$

$$b = (\lambda_1 + 1/\lambda_1)(\lambda_2 + 1/\lambda_2). \tag{B.18}$$

L'équation (B.17) peut être écrite de la forme suivante :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + 1}. \tag{B.19}$$

Nous avons donc une relation entre la somme et le produit des valeurs propres. Développant maintenant le produit en (B.18) et en utilisant (B.19), on a :

$$b = \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{a^2}{\lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + 2} - 2. \tag{B.20}$$

On définit  $d = \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ . L'équation (B.20) est une équation de second ordre en  $d$  avec solution :

$$d = \frac{1}{2}(b + \sqrt{(b+4)^2 - 4a^2}). \tag{B.21}$$

De plus,  $d = \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$  est une équation de second ordre dans  $\lambda_1 \lambda_2$ , pour solution :

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2}(d + \sqrt{d^2 - 4}), \tag{B.22}$$

avec  $d$  donné dans l'équation (B.21),  $b$  dans l'équation (B.15), et  $a$  dans (B.14).

En résumé, les expressions exactes de  $K_1$  et  $K_2$  sont données par les équations (2.42) et (2.43) où  $P'_{11}$  est donné par l'équation (B.12) et  $\lambda_1 \lambda_2$  dans l'équation (B.22).

### B.3 Expression de $K_2$

Dans cette annexe, l'expression de  $K_2$  est calculée. On a démontré dans l'Annexe B.1 que  $P_{12} = P_{21}$  et  $P'_{12} = P'_{21}$ . avec  $P_{12}$  et  $P_{21}$  sont les éléments de la matrice de covariance d'erreur a posteriori définie dans (2.45) et (2.46) et  $P'_{12}$  et  $P'_{21}$  sont les éléments de la matrice de covariance d'erreur prédite définie dans (2.49) et (2.46).

### B.3 Expression de $K_2$

---

En comparant les expressions de  $P_{12}$  et  $P_{21}$  dans (2.45) et (2.46) on a,  $(1-K_1)P'_{12}+K_2P'_{11} = P'_{12}$ , qui donne :

$$P'_{12} = \frac{K_2 P'_{11}}{K_1}. \quad (\text{B.23})$$

En intégrant les équations (2.45) et (2.44) dans l'équation (B.23), on aura :

$$P_{12} = \frac{K_2 P_{11}}{K_1}. \quad (\text{B.24})$$

Une autre expression de  $P_{12}$  peut être déduite en intégrant l'équation (2.49) dans l'équation (2.45), et en supposons toujours que  $P_{12} = P_{21}$  :

$$P_{12} = \frac{a_1(1-K_1)P_{11}}{1-a_2+a_2K_1}. \quad (\text{B.25})$$

En comparant les équations (B.24) et (B.25), on déduit l'expression exacte de  $K_2$  en terme de  $K_1$ ,  $a_1$  et  $a_2$  :

$$K_2 = \frac{a_1(1-K_1)K_1}{1-a_2+a_2K_1}. \quad (\text{B.26})$$



# Annexe C

## Expression approchée de la variance du bruit d'état

### C.1 Preuve de l'hypothèse vii

Comme indiqué précédemment,  $\zeta_{\text{AR}(2)}$  doit être  $\ll 1$  pour avoir une pic. Dans ce cas, à partir de l'équation (A.7),

$$\begin{aligned}\delta &\ll \omega_{\text{AR}(2)}T \\ \delta^2 &\ll \delta\omega_{\text{AR}(2)}T\end{aligned}\tag{C.1}$$

et comme  $2\sqrt{1-\delta} > 1$  en raison de iii,

$$\delta^2 \ll 2\delta\sqrt{1-\delta}\omega_{\text{AR}(2)}T.$$

En utilisant l'hypothèse iii on aura  $\delta^2 \ll \delta \ll \sqrt{\delta}$ , ce qui donne :

$$\delta^2 \ll 2\sqrt{\delta(1-\delta)}\omega_{\text{AR}(2)}T.$$

Ensuite, en combinant l'hypothèse ii et l'équation (2.52) (qui est obtenue à partir des hypothèses i et iii comme expliqué en détail dans la section 2.5.1.2) donne l'hypothèse vii, c'est à dire  $\delta^2 \ll \frac{\sigma_u}{\sigma_w}$ .

### C.2 Approximation de $\sigma_u^2$

Dans cette section, une approximation de  $\sigma_u^2$  est établie. Replaçant  $r$  par  $1-\delta$  dans l'équation (2.25) de  $a_2$  donne

$$a_2 = -(1-\delta)^2 \simeq -(1-2\delta+\delta^2) \simeq -(1-2\delta).\tag{C.2}$$

En supposant que  $\delta^2 \ll \delta$  (dédit de l'hypothèse iii), on a :

$$1+a_2 \simeq 2\delta\tag{C.3}$$

$$1-a_2 \simeq (1-\delta).\tag{C.4}$$

En injectant les équations ci-dessus dans l'expression de  $\sigma_u^2$  déjà définie dans (2.10),

$$\begin{aligned}
 \sigma_u^2 &\simeq \sigma_\alpha^2 \frac{2\delta}{2(1-\delta)} (2(1-\delta) - 2(1-\delta) \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)) \\
 &\times (2(1-\delta) + 2(1-\delta) \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)) \\
 &\simeq 4\sigma_\alpha^2 \delta (1-\delta) (1 - \cos(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2). \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

Or  $\cos(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2 \simeq \left(1 - \frac{(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2}{2}\right)^2 \simeq 1 - (2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2$  car  $(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^4 \ll (2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2 \ll 1$ , et ainsi (C.5) donne :

$$\sigma_u^2 \simeq 4\sigma_\alpha^2 r (1-r) (2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2, \tag{C.6}$$

qui est équivalent à (2.52).

# Annexe D

## Approximation de $K_1$ et $K_2$

### D.1 Approximation de $K_1$ : Preuve de (2.42)

Le but de cette section est de trouver des expressions approximatives pour les équations (B.14), (B.15), (B.21), et (B.22) donnés dans la section B.2 afin d'obtenir l'expression approximative (2.53) pour  $K_1$ . L'approche que nous suivons est de travailler avec le couple de paramètres  $\{f_{\text{AR}(2)}T, r = 1 - \delta\}$  au lieu de  $\{a_1, a_2\}$  pour exploiter les hypothèses de la section 2.5.1.1.

#### D.1.1 Approximation de $a$ (B.14)

En utilisant (2.25) et  $r = 1 - \delta$  on a

$$a = \frac{2 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)(1 + (1 - \delta)^2)}{(1 - \delta)}.$$

On peut déduire de i et iii que  $\frac{1}{1 - \delta} \simeq 1 + \delta + \delta^2$  et  $\delta^3 \ll \delta^2 \ll \delta \ll 1$ , donc

$$\begin{aligned} a &\simeq 2 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)(2 - 2\delta + \delta^2)(1 + \delta + \delta^2) \\ &\simeq 2 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)(2 + \delta^2 - \delta^3 + \delta^4) \\ &\simeq 2 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)(2 + \delta^2). \end{aligned} \tag{D.1}$$

#### D.1.2 Approximation de $b$ (B.15)

$$\begin{aligned} b &= \frac{-a_1^2}{a_2} - a_2 - \frac{1}{a_2} - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2 a_2} - 2 \\ &= \frac{-4r^2 \cos^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)}{-r^2} + r^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2 r^2} - 2 \\ &\simeq 4 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + (1 - \delta)^2 + \frac{\sigma_u^2 + \sigma_w^2}{\sigma_w^2 (1 - \delta)^2} - 2. \end{aligned} \tag{D.2}$$



De iii on peut utiliser le fait que  $\frac{1}{(1-\delta)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\delta^n \simeq 1 + 2\delta + 3\delta^2$ , ce qui donne

$$b \simeq 4 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + \frac{\sigma_u^2(1 + 2\delta + 3\delta^2)}{\sigma_w^2} + 4\delta^2. \quad (\text{D.3})$$

De nouveau, on utilise l'hypothèse iii, résultant en  $\frac{3\sigma_u^2\delta^2}{\sigma_w^2} \ll \frac{2\sigma_u^2\delta}{\sigma_w^2} \ll \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}$ , et l'hypothèse v pour déduire

$$b \simeq 4 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 4\delta^2. \quad (\text{D.4})$$

### D.1.3 Approximation de $d$ (B.21)

On utilise la notation  $\mu = (b + 4)^2 - 4a^2$ . De l'hypothèse i, on a  $\cos(\omega_{\text{AR}(2)}T) \simeq 1 - \frac{(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}{2}$ . En utilisant l'hypothèse (D.1) et (D.4) avec les approximations précédentes :

$$\mu \simeq \left(4 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 4\delta^2 + 4\right)^2 - 16 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2(2 + \delta^2)^2. \quad (\text{D.5})$$

Cependant, en utilisant l'identité trigonométrique à de l'angle double et l'hypothèse i, nous avons :

$$\cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 = \frac{1 + \cos(2\omega_{\text{AR}(2)}T)}{2} \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{(2\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}{2}\right)\right) \simeq 1 - (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2, \text{ et donc}$$

$$\begin{aligned} \mu &\simeq 16(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + \left(16\delta^4 + 32\delta^2 - 8\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}\right) (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\ &+ \frac{\sigma_u^4}{\sigma_w^4} + 16\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 8\delta^2\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Les hypothèses i, iii et v donnent  $(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \ll (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \ll 1$ ,  $\delta^4 \ll \delta^2 \ll \delta \ll 1$  et  $\frac{\sigma_u^4}{\sigma_w^4} \ll \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} \ll 1$ , respectivement. Ainsi,  $\mu$  peut être approximé  $\mu \simeq 16\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}$ . De cette équation on peut écrire :

$$\begin{aligned} d &\simeq \frac{1}{2} \left(4 \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 4\delta^2 + \sqrt{\mu}\right) \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(4(1 - (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2) + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 4\delta^2 + 4\frac{\sigma_u}{\sigma_w}\right). \end{aligned}$$

En utilisant v, vi, et vii, on déduit que

$$d \simeq 2 + 2\frac{\sigma_u}{\sigma_w}. \quad (\text{D.7})$$

## D.2 Approximation de $K_2$ (B.26) :

### D.1.4 Approximation de $\lambda_1\lambda_2$ (B.22)

En remplaçant l'équation (D.7) dans l'équation (B.22) on a :

$$\lambda_1\lambda_2 \simeq 1 + \frac{\sigma_u}{\sigma_w} + \frac{1}{2} \sqrt{4 + 8\frac{\sigma_u}{\sigma_w} + 4\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}} - 4.$$

L'hypothèse v résulte en  $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} \ll \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \ll \sqrt{\frac{\sigma_u}{\sigma_w}}$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &\simeq 1 + \frac{\sigma_u}{\sigma_w} + \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}} \\ \lambda_1\lambda_2 &\simeq 1 + \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}}. \end{aligned} \tag{D.8}$$

### D.1.5 Approximation de $P'_{11}$ (B.12)

En remplaçant l'équation (D.8) dans (B.12) on a :

$$P'_{11} \simeq -\sigma_w^2 \left( 1 - (1 - \delta)^2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}} \right) \right).$$

En utilisant  $\delta^2 \ll \delta \ll 1$  de l'hypothèse iii ainsi que vii on obtient :

$$P'_{11} \simeq \sigma_w^2 \sqrt{\frac{2\sigma_u}{\sigma_w}}. \tag{D.9}$$

#### D.1.5.1 Approximation de $K_1$ (2.42)

D'abord, nous avons  $P'_{11} \ll \sigma_w^2$ , qui, à son tour, en utilisant l'équation (2.42) no donne  $K_1 \simeq \frac{P'_{11}}{\sigma_w^2}$ . De l'équation précédente et l'équation (D.9), nous obtenons (2.53).

## D.2 Approximation de $K_2$ (B.26) :

Le but de cette section est de trouver une expression approximative de l'expression (B.26) de  $K_2$  établie dans la section B.3, mais en la simplifiant pour qu'elle ne dépende plus que de  $K_1$ . L'approximation utilisée dans cette section est basée sur le couple de paramètre  $\{f_{\text{AR}(2)}T, r = 1 - \delta\}$  au lieu de  $\{a_1, a_2\}$ . En utilisant (2.25) et  $r = 1 - \delta$  dans (B.26) on obtient

$$K_2 = \frac{2(1 - \delta) \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T)(1 - K_1)K_1}{1 + (1 - \delta)^2 - (1 - \delta)^2 K_1} \tag{D.10}$$

De l'hypothèse i, on a  $\cos(\omega_{\text{AR}(2)}T) \simeq 1 - \frac{(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}{2}$ . L'expression (D.10) devient

$$K_2 \simeq \frac{2(1 - \delta) \left( 1 - \frac{(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}{2} \right) (1 - K_1) K_1}{1 + (1 - \delta)^2 - (1 - \delta)^2 K_1} \tag{D.11}$$

Les hypothèses i, iii et viii donnent  $(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \ll (\omega_{\text{AR}(2)}T) \ll 1$ ,  $\delta^2 \ll \delta \ll 1$  et  $K_1^2 \ll K_1 \ll 1$ , respectivement. Ainsi, (D.11) peut être approché comme

$$K_2 \simeq K_1 \tag{D.12}$$

# Annexe E

## Fonction de transfert $L(z)$

### E.1 Expression de $L(z)$ : preuve de (2.55)

Les équations (2.34) et (2.37) du filtre de Kalman, en régime asymptotique donnent :

$$\hat{\alpha}_{(k|k-1)} = a_1 \hat{\alpha}_{(k-1|k-1)} + a_2 \hat{\alpha}_{(k-2|k-1)} \quad (\text{E.1})$$

$$\hat{\alpha}_{(k|k)} = \hat{\alpha}_{(k|k-1)} + K_1(y_{(k)} - \hat{\alpha}_{(k|k-1)}) \quad (\text{E.2})$$

$$\hat{\alpha}_{(k-1|k)} = \hat{\alpha}_{(k-1|k-1)} + K_2(y_{(k)} - \hat{\alpha}_{(k|k-1)}). \quad (\text{E.3})$$

Nous définissons le signal d'erreur comme la différence entre l'observation et la prédiction :

$$v_{\epsilon(k)} = y_{(k)} - \hat{\alpha}_{(k|k-1)}. \quad (\text{E.4})$$

En substituant les équations (E.1) et (E.3) dans (E.2) on aura :

$$\hat{\alpha}_{(k|k)} = a_1 \hat{\alpha}_{(k-1|k-1)} + a_2 (\hat{\alpha}_{(k-2|k-2)} + K_2 v_{\epsilon(k-1)}) + K_1 v_{\epsilon(k)}.$$

Puis, en appliquant la transformé en  $z$

$$\hat{\alpha}(z)[1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}] = [a_2 K_2 z^{-1} + K_1] v_{\epsilon}(z). \quad (\text{E.5})$$

En utilisant  $\hat{\alpha}_{(k|k-1)} = \hat{\alpha}_{(k|k)} - K_1 v_{\epsilon(k)}$  de l'équation (E.2) dans l'équation (E.4) on a :

$$v_{\epsilon(k)} = y_{(k)} - \hat{\alpha}_{(k|k)} + K_1 v_{\epsilon(k)}. \quad (\text{E.6})$$

En appliquant la transformé en  $z$ , on a

$$v_{\epsilon}(z) = \frac{y(z) - \hat{\alpha}(z)}{1 - K_1}. \quad (\text{E.7})$$

En substituant (E.7) dans (E.5), nous pouvons trouver une expression de la fonction de transfert  $L(z) = \frac{\hat{\alpha}(z)}{y(z)}$ , qui donne l'équation (2.55).

## E.2 Vérification de $L(z)$ par simulation

On applique à l'entrée du filtre un signal de la forme  $e^{(j2\pi fTK)}$ , où  $k$  est l'indice temporel, avec  $fT$  la fréquence normalisé qui varie de 0 jusqu'à 0.5. On récupère la sortie et on calcule le module de la sortie obtenue. La figure E.1 compare entre le module de l'expression de  $L(z)$  trouvée dans l'équation (2.55) et la simulation. La simulation valide l'équation (2.55).

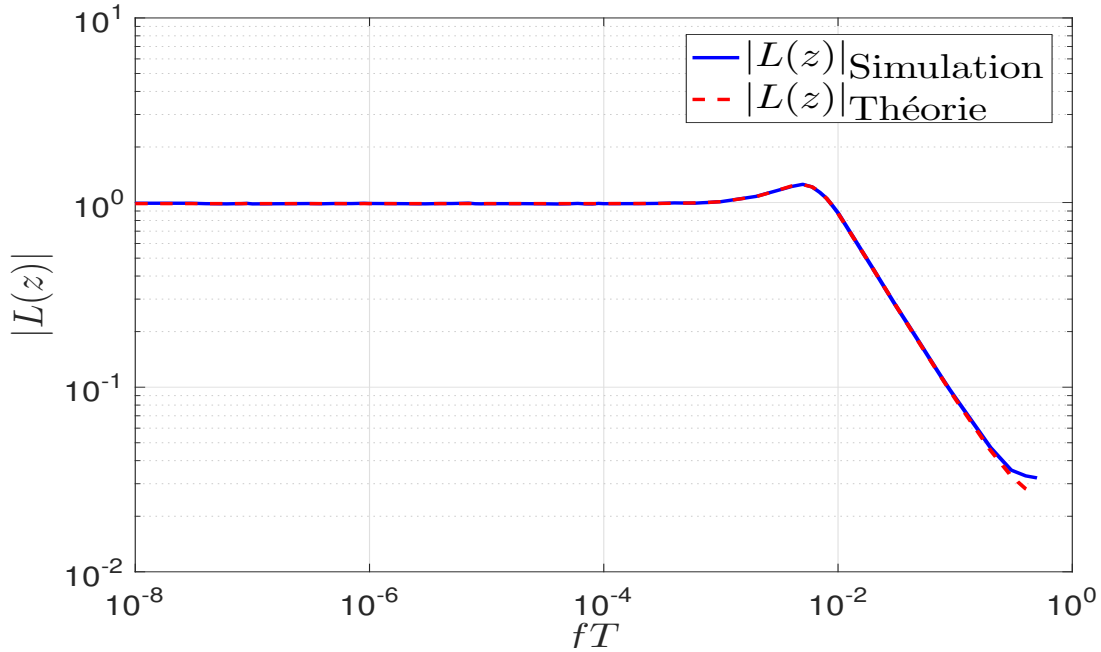


FIGURE E.1 – Comparaison entre  $|L(z)|$  théorique et  $|L(z)|$  obtenue par simulation.

## E.3 Expressions et approximations de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$

Le but de cette annexe est de donner les approximations et les expressions de la fréquence propre normalisé  $\omega_{n,L(z)}T$  et du facteur d'amortissement  $\zeta_{L(z)}$  de la fonction de transfert du KF donnée en équation (2.55).

### E.3.1 Expressions de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$

La fonction de transfert de systèmes du second ordre à temps continu en fonction de la fréquence propre et du facteur d'amortissement est [85] :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{E.8})$$

### E.3 Expressions et approximations de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$

En utilisant  $z = e^{j2\pi fT}$ , donc  $z^{-1} \simeq 1 - j2\pi fT$  pour  $fT \ll 1$ , dans (2.55), et en comparant l'expression obtenue avec la fonction de transfert dans (E.8), on obtient :

$$(\omega_{n,L(z)}T)^2 = \frac{K_1(a_1 + a_2) + K_2a_2 + 1 - a_1 - a_2}{-a_2(1 - K_1)} \quad (\text{E.9})$$

$$(2\zeta_{L(z)}\omega_{n,L(z)}T) = \frac{K_1(-a_1 - 2a_2) - a_2K_2 + a_1 + 2a_2}{-a_2(1 - K_1)} \quad (\text{E.10})$$

A partir des équations (E.9) et (E.10), les expressions de  $(\omega_{n,L(z)}T)$  et  $\zeta_{L(z)}$  sont déduites en terme de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $K_1$  et  $K_2$ . Mais le but est d'obtenir des expressions approximatives de  $(\omega_{n,L(z)}T)$  et  $\zeta_{L(z)}$  encore plus simplifiées, c'est à dire fonction de moins de paramètres ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  sont liés).

#### E.3.2 Expressions approximatives de $\omega_{n,L(z)}T$ et $\zeta_{L(z)}$

Dans cette section des expressions approximatives de  $(\omega_{n,L(z)}T)$  et  $\zeta_{L(z)}$  sont donnés. Les approximations utilisées dans cette section sont basées sur le couple de paramètre  $\{f_{\text{AR}(2)}T, r = 1 - \delta\}$  au lieu de  $\{a_1, a_2\}$ . En utilisant (2.25) et  $r = 1 - \delta$  dans (E.9) et (E.10) on a :

$$(\omega_{L(z)}T)^2 \simeq \frac{K_1(2(1 - \delta) \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T) - (1 - \delta^2)) - K_2(1 - \delta)^2 + 1 - 2(1 - \delta) \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T) + (1 - \delta)^2}{(1 - \delta)^2(1 - K_1)} \quad (\text{E.11})$$

$$(2\zeta_{L(z)}\omega_{L(z)}T) \simeq \frac{(1 - \delta)^2K_2 + 2(1 - \delta) \cos(\omega_{\text{AR}(2)}T) \times (1 - K_1) - 2(1 - \delta)^2(1 - K_1)}{(1 - \delta)^2(1 - K_1)} \quad (\text{E.12})$$

##### E.3.2.1 Expression approximative de $\omega_{L(z)}T$

En remplaçant  $K_2$  (Eq.(B.26)) par son expression dans (E.11) et en se référant aux hypothèses i, iii et viii qui conduisent respectivement à  $\cos(\omega_{\text{AR}(2)}T) \simeq 1 - \frac{(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2}{2}$ ,  $(f_{\text{AR}(2)}T)^2 \ll f_{\text{AR}(2)}T \ll 1$ ,  $\delta^2 \ll \delta \ll 1$  et  $K_1^2 \ll K_1 \ll 1$ , on a

$$(\omega_{n,L(z)}T)^2 \simeq K_1 - \frac{K_1(1 - \delta - K_1)}{1 - \delta - \frac{K_1}{2}}. \quad (\text{E.13})$$

comme  $K_1 \ll 1$  et  $\delta \ll K_1$ , de viii et ix respectivement, nous avons

$$(\omega_{n,L(z)}T)^2 \simeq \frac{K_1^2}{2}. \quad (\text{E.14})$$

Dans ce cas

$$\omega_{n,L(z)}T \simeq \frac{K_1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{E.15})$$

### E.3.2.2 Expression approximative de $\zeta_{L(z)}$

Dans cette section, nous fournissons une expression approximative de  $\zeta_{L(z)}$ . En plus de toutes les hypothèses utilisées dans la section précédente, nous utilisons l'approximation  $K_2 \simeq K_1$  (voir (D.10)), (E.12) on a,

$$(2\zeta_{L(z)}\omega_{n,L(z)}T) \simeq \frac{-2K_1(\delta - (\omega_{AR(2)}T)^2) + (1 - 2\delta)K_2 + 2(\delta - (\omega_{AR(2)}T)^2)}{1 - 2\delta - K_1} \quad (\text{E.16})$$

$$\simeq \frac{K_2}{(1 - K_1)} \quad (\text{E.17})$$

$$\simeq K_1. \quad (\text{E.18})$$

En utilisant les équations (E.15) et (E.18),

$$\zeta_{L(z)} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{E.19})$$

# Annexe F

## Approximation et calcul de $|1 - L(z)|^2$

Dans cette section, on calcule l'expression de  $|1 - L(z)|^2$  en fonction des paramètres du filtre de Kalman,  $\delta = 1 - r$ ,  $\omega_{\text{AR}(2)}T = 2\pi f_{\text{AR}(2)}T$ ,  $fT$  et  $K_1$ . La seule hypothèse qui est utilisée ici est liée au fait que de faibles fréquences normalisées  $fT \ll 1$  sont considérées, ce qui conduit à  $z = e^{2i\pi fT} \simeq 1 + i2\pi fT$ . Pour calculer le module carré de  $(1 - L(z))$ , on multiplie  $1 - L(z)$  par son conjugué  $(1 - L(z))^*$ , ce qui donne

$$|1 - L(e^{2i\pi fT})|^2 \simeq \frac{A(fT)^4 + B(fT)^2 + C}{D(fT)^4 + E(fT)^2 + F} \quad (\text{F.1})$$

avec  $A, B, C, D, E, F$  définis comme des fonctions de  $\delta, \omega_{\text{AR}(2)}T$  et  $K_1$  comme suit :

$$A = 64\pi^4\delta^2K_1^4 - 256\pi^4\delta^2K_1^3 + 384\pi^4\delta^2K_1^2 - 256\pi^4\delta^2K_1 + 64\pi^4\delta^2 - 64\pi^4\delta K_1^4 + 320\pi^4\delta K_1^3 - 576\pi^4\delta K_1^2 + 448\pi^4\delta K_1 - 128\pi^4\delta + 16\pi^4K_1^4 - 96\pi^4K_1^3 + 208\pi^4K_1^2 - 192\pi^4K_1 + 16\pi^4 \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} B = & 16\pi^2\delta^4K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 64\pi^2\delta^4K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\pi^2\delta^4K_1^4 - 64\pi^2\delta^4K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & + 256\pi^2\delta^4K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 256\pi^2\delta^4K_1^3 + 96\pi^2\delta^4K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 384\pi^2\delta^4K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\ & + 384\pi^2\delta^4K_1^2 - 64\pi^2\delta^4K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 256\pi^2\delta^4K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 256\pi^2\delta^4K_1 + 16\pi^2\delta^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & - 64\pi^2\delta^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\pi^2\delta^4 - 48\pi^2\delta^3K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 160\pi^2\delta^3K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 64\pi^2\delta^3K_1^4 \\ & + 208\pi^2\delta^3K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 704\pi^2\delta^3K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 320\pi^2\delta^3K_1^3 - 336\pi^2\delta^3K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & + 1152\pi^2\delta^3K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 576\pi^2\delta^3K_1^2 + 240\pi^2\delta^3K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 832\pi^2\delta^3K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 448\pi^2\delta^3K_1 \\ & - 64\pi^2\delta^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 224\pi^2\delta^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 128\pi^2\delta^3 + 52\pi^2\delta^2K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 144\pi^2\delta^2K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\ & + 16\pi^2\delta^2K_1^4 - 248\pi^2\delta^2K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 704\pi^2\delta^2K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 96\pi^2\delta^2K_1^3 + 436\pi^2\delta^2K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & - 1264\pi^2\delta^2K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 208\pi^2\delta^2K_1^2 - 336\pi^2\delta^2K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 992\pi^2\delta^2K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\ & - 192\pi^2\delta^2K_1 + 96\pi^2\delta^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 288\pi^2\delta^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\pi^2\delta^2 - 24\pi^2\delta K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & + 56\pi^2\delta K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 128\pi^2\delta K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 304\pi^2\delta K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 248\pi^2\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & + 600\pi^2\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 208\pi^2\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 512\pi^2\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 64\pi^2\delta(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\ & + 160\pi^2\delta(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 4\pi^2K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 8\pi^2K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 24\pi^2K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 48\pi^2K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\ & + 52\pi^2K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 104\pi^2K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 48\pi^2K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 96\pi^2K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 16\pi^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$



$$\begin{aligned}
 C = & +4\delta^4 K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 16\delta^4 K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 24\delta^4 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 16\delta^4 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & +4\delta^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 12\delta^3 K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 52\delta^3 K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 84\delta^3 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 60\delta^3 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & - 16\delta^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 13\delta^2 K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 62\delta^2 K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 109\delta^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 84\delta^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & + 24\delta^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 6\delta K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 32\delta K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 62\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 52\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & - 16\delta(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + K_1^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 6K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 13K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 12K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

$$D = 64\pi^4\delta^2 K_1^2 - 128\pi^4\delta^2 K_1 + 64\pi^4\delta^2 - 64\pi^4\delta K_1^2 + 192\pi^4\delta K_1 - 128\pi^4\delta + 16\pi^4 K_1^2 - 64\pi^4 K_1 + 32\pi^4 \tag{F.5}$$

$$\begin{aligned}
 E = & 16\pi^2\delta^4 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 64\pi^2\delta^4 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\pi^2\delta^4 K_1^2 - 32\pi^2\delta^4 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & + 128\pi^2\delta^4 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 128\pi^2\delta^4 K_1 + 16\pi^2\delta^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 64\pi^2\delta^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\pi^2\delta^4 \\
 & - 64\pi^2\delta^3 K_1^3 - 64\pi^2\delta^3 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 224\pi^2\delta^3 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 128\pi^2\delta^3 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & - 448\pi^2\delta^3 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 192\pi^2\delta^3 K_1 - 64\pi^2\delta^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 224\pi^2\delta^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 128\pi^2\delta^3 + 96\pi^2\delta^2 K_1^3 \\
 & + 96\pi^2\delta^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 304\pi^2\delta^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 96\pi^2\delta^2 K_1^2 - 192\pi^2\delta^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \\
 & + 592\pi^2\delta^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 64\pi^2\delta^2 K_1 + 96\pi^2\delta^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 288\pi^2\delta^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\pi^2\delta^2 - 48\pi^2\delta K_1^3 \\
 & - 64\pi^2\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 192\pi^2\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 48\pi^2\delta K_1^2 + 128\pi^2\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 352\pi^2\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\
 & - 64\pi^2\delta(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 160\pi^2\delta(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 8\pi^2 K_1^3 + 16\pi^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 48\pi^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\
 & - 32\pi^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 80\pi^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 16\pi^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 32\pi^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2
 \end{aligned} \tag{F.6}$$

$$\begin{aligned}
 F = & 16\delta^4 K_1^4 - 16\delta^4 K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 32\delta^4 K_1^3 + 4\delta^4 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 32\delta^4 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 16\delta^4 K_1^2 \\
 & - 8\delta^4 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 16\delta^4 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 4\delta^4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 32\delta^3 K_1^4 + 48\delta^3 K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 64\delta^3 K_1^3 \\
 & - 16\delta^3 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 96\delta^3 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 32\delta^3 K_1^2 + 32\delta^3 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 48\delta^3 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\
 & - 16\delta^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 24\delta^2 K_1^4 - 52\delta^2 K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 40\delta^2 K_1^3 + 24\delta^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 100\delta^2 K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \\
 & + 16\delta^2 K_1^2 - 48\delta^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 48\delta^2 K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 24\delta^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 8\delta K_1^4 + 24\delta K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 8\delta K_1^3 \\
 & - 16\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 - 40\delta K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 32\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 16\delta K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 16\delta(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + K_1^4 \\
 & - 4K_1^3(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 + 4K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 4K_1^2(\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 - 8K_1(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 + 4(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4
 \end{aligned} \tag{F.7}$$

## F.1 Approximations de $A, B, C, D, E, F$

L'expression pour  $|1 - L(z)|^2$  donnée dans la section précédente est valide pour tout processus complexe scalaire  $\alpha_{(k)}$  à suivre, du moment que seules les basses fréquences normalisées sont en jeu, c'est à dire que le processus est largement sur-échantillonné, ou encore qu'il évolue lentement d'un échantillon à l'autre. Maintenant, afin d'obtenir une expression simplifiée, nous restreignons le champ d'application en considérant les hypothèses faites dans la section 2.5.1.1, c'est-à-dire les hypothèses (i), (ii), (iii), (v), (vi), (vii), (viii), (ix) et (x) dans 2.5.1.1. En particulier, nous utilisons le fait que (i) conduit à  $(\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \ll (\omega_{\text{AR}(2)}T)^3 \ll (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \ll (\omega_{\text{AR}(2)}T) \ll 1$ , (iii) conduit à

## F.1 Approximations de $A, B, C, D, E, F$

---

$\delta^4 \ll \delta^3 \ll \delta^2 \ll \delta \ll 1$ , (viii) conduit à  $K_1^4 \ll K_1^3 \ll K_1^2 \ll K_1 \ll 1$ , et (x) conduit à  $f_{\text{AR}(2)}T \ll K_1$ . Cela donne :

$$A \simeq -192\pi^4 K_1 + 16\pi^4 \quad (\text{F.8})$$

$$B \simeq 16\pi^2 (\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \quad (\text{F.9})$$

$$C \simeq -12K_1 (\omega_{\text{AR}(2)}T)^4 \quad (\text{F.10})$$

$$D \simeq -64\pi^4 K_1 + 32\pi^4 \quad (\text{F.11})$$

$$E \simeq -32\pi^2 (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2 \quad (\text{F.12})$$

$$F \simeq K_1^4 \quad (\text{F.13})$$

En injectant les équations (2.36)-(F.13) dans l'équation (F.1), on obtient l'expression suivante :

$$|1 - L(e^{2i\pi fT})|^2 \simeq \frac{(-192\pi^4 K_1 + 16\pi^4)(fT)^4 + (16\pi^2 (\omega_{\text{AR}(2)}T)^4)(fT)^2 - 12K_1 (\omega_{\text{AR}(2)}T)^4}{(-64\pi^4 K_1 + 32\pi^4)(fT)^4 + (-32\pi^2 (\omega_{\text{AR}(2)}T)^2)(fT)^2 + K_1^4}. \quad (\text{F.14})$$

Nous donnons maintenant une approximation de l'expression précédente pour  $fT$  proche de  $f_{\text{AR}(2)}T \ll 1$ , qui est dans le cas de nombreux spectres la bande de fréquence pour laquelle les valeurs de la densité spectrale de puissance de  $\alpha_{(k)}$  dominant. C'est typiquement le cas pour le spectre Doppler de Jakes par exemple. En utilisant les hypothèses (i), (viii) et (x) dans 2.5.1.1 et en supposant que  $(fT)^4 \ll (fT)^2 \ll fT \leq f_{\text{AR}(2)}T \ll 1$ , l'approximation suivante de  $|1 - L(z)|^2$  est finalement obtenue sous forme :

$$|1 - L(e^{2i\pi fT})|^2 \simeq \frac{16\pi^4 (fT)^4}{K_1^4}. \quad (\text{F.15})$$



## Annexe G

### Calcul et approximation de $\sigma_{\epsilon w}^2$ : Preuve de (2.60)

Dans cette annexe, le but est de calculer puis d'approcher les expressions de la variance d'erreur statique  $\sigma_{\epsilon w}^2$  en fonction de la variance de bruit d'observation  $\sigma_w^2$ , qui peut être réécrite depuis (2.59) :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 = \sigma_w^2 \times BNW, \quad (\text{G.1})$$

où  $BNW$  est la bande passante de bruit équivalente normalisée du système, définie par

$$BNW = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |L(e^{2i\pi fT})|^2 df. \quad (\text{G.2})$$

Une expression exacte de  $BNW$  peut être obtenue en utilisant la méthode présentée dans [87]. Il peut être évaluée analytiquement en résolvant un système d'équations sous forme de matrice. Les éléments de cette matrice sont les coefficients du numérateur et du dénominateur de l'intégrande  $L(z)$ . Maintenant  $L(z)$  peut être écrit sous la forme ci-dessous :

$$L(z) = \frac{B_0 z^2 + B_1 z + B_2}{A_0 z^2 + A_1 z + A_2}, \quad (\text{G.3})$$

où  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = a_2 K_2 - a_1(1 - K_1)$ ,  $A_2 = -a_2(1 - K_1)$ ,  $B_0 = K_1$ ,  $B_1 = K_2 a_2$ , et  $B_2 = 0$ , et l'équation matricielle correspondante est :

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_0 + A_2 & A_1 \\ A_2 & 0 & A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_0 BNW \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 \\ 2(B_0 B_1 + B_1 B_2) \\ 2B_0 B_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.4})$$

avec  $M_1$  et  $M_2$  sont évalués en fonction de  $BNW$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  et  $B_2$ . En remplaçant  $K_2$  par son expression déjà défini dans l'équation (2.43), le résultat du calcul de (G.4) conduit à l'expression suivante exacte fonction de  $K_1$ ,  $a_1$  et  $a_2$ ,

$$BNW = \frac{AK_1^5 + BK_1^4 + CK_1^3 + DK_1^2}{EK_1^5 + FK_1^4 + GK_1^3 + HK_1^2 + IK_1 + J}, \quad (\text{G.5})$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= a_1^2 a_2^3 + a_2^3 \\
 B &= -3a_1^2 a_2^3 - a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_2 - 3a_2^3 + 3a_2^2 \\
 C &= 3a_1^2 a_2^3 + 2a_1^2 a_2^2 - 4a_1^2 a_2 + 3a_2^3 - 6a_2^2 + 3a_2 \\
 D &= -a_1^2 a_2^3 - a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_2 - a_2^3 + 3a_2^2 - 3a_2 + 1 \\
 E &= -a_2^5 \\
 F &= 5a_2^5 - 3a_2^4 \\
 G &= a_1^2 a_2^3 - 2a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2 - 10a_2^5 + 12a_2^4 - 2a_2^3 \\
 H &= -3a_1^2 a_2^3 + 5a_1^2 a_2^2 - a_1^2 a_2 - a_1^2 + 10a_2^5 - 18a_2^4 + 6a_2^3 \\
 &\quad + 2a_2^2 \\
 I &= 3a_1^2 a_2^3 - 4a_1^2 a_2^2 - a_1^2 a_2 + 2a_1^2 - 5a_2^5 + 12a_2^4 - 6a_2^3 \\
 &\quad - 4a_2^2 + 3a_2 \\
 J &= -a_1^2 a_2^3 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2 - a_1^2 + a_2^5 - 3a_2^4 + 2a_2^2 + 2a_2^3 \\
 &\quad - 3a_2 + 1.
 \end{aligned}$$

Les expressions exactes ci-dessus sont approximées en utilisant les hypothèses i, ii, iii, iv, v, viii définies dans la section 2.5.1.1 et les expressions de  $a_1$  et  $a_2$  formulés en (2.25). En plus, il est supposé que  $\cos(2\pi f_{\text{AR}(2)} T) \simeq 1 - \frac{(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2}{2}$  et  $(1 - \delta)^n \simeq 1 - n\delta$ , donc :

$$A \simeq 32\delta - 12(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2 \quad (\text{G.6})$$

$$B \simeq 6 - 22\delta \quad (\text{G.7})$$

$$C \simeq 32\delta - 12(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2 \quad (\text{G.8})$$

$$D \simeq 8(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2 \quad (\text{G.9})$$

$$E \simeq -1 + 10\delta \quad (\text{G.10})$$

$$F \simeq -8 + 74\delta \quad (\text{G.11})$$

$$G \simeq -112\delta + 8 \quad (\text{G.12})$$

$$H \simeq 48\delta \quad (\text{G.13})$$

$$I \simeq 64\delta^2 \quad (\text{G.14})$$

$$J \simeq 32\delta(2\pi f_{\text{AR}(2)} T)^2. \quad (\text{G.15})$$

Les approximations ci-dessus permettent d'avoir une expression de  $BNW$  en fonction du couple de paramètres AR (2)  $f_{\text{AR}(2)} T, r = 1 - \delta$ . En remplaçant chaque terme par son approximation dans (G.5) et en utilisant les hypothèses précédentes :

$$\begin{aligned}
 BNW &\simeq \frac{6K_1^4 + 32\delta K_1}{8K_1^3 + 48\delta K_1^2} \\
 &\simeq \frac{6K_1^3(K_1 + \frac{32}{6}\delta)}{8K_1^2(K_1 + 6\delta)} \\
 &\simeq \frac{3}{4}K_1, \quad (\text{G.16})
 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $\frac{K_1 + \frac{32}{6}\delta}{K_1 + 6\delta} \simeq 1$ , qui peut être supposé de v.

## Annexe H

### Figures des simulations de réglage sous-optimal du modèle AR(2) présenté dans [1]

Dans cette annexe on présente les figures de simulations pour le réglage sous-optimal du modèle AR(2).

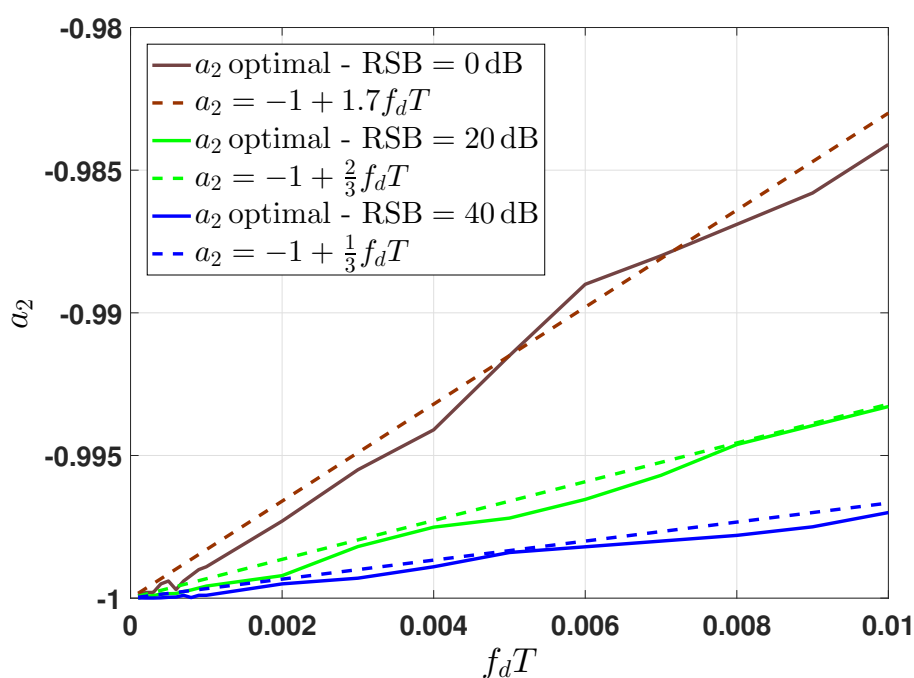


FIGURE H.1 – Valeurs expérimentales et approximation linéaire de  $a_2$  en fonction de  $f_d T$  pour RSB=0, 20, et 40 dB.

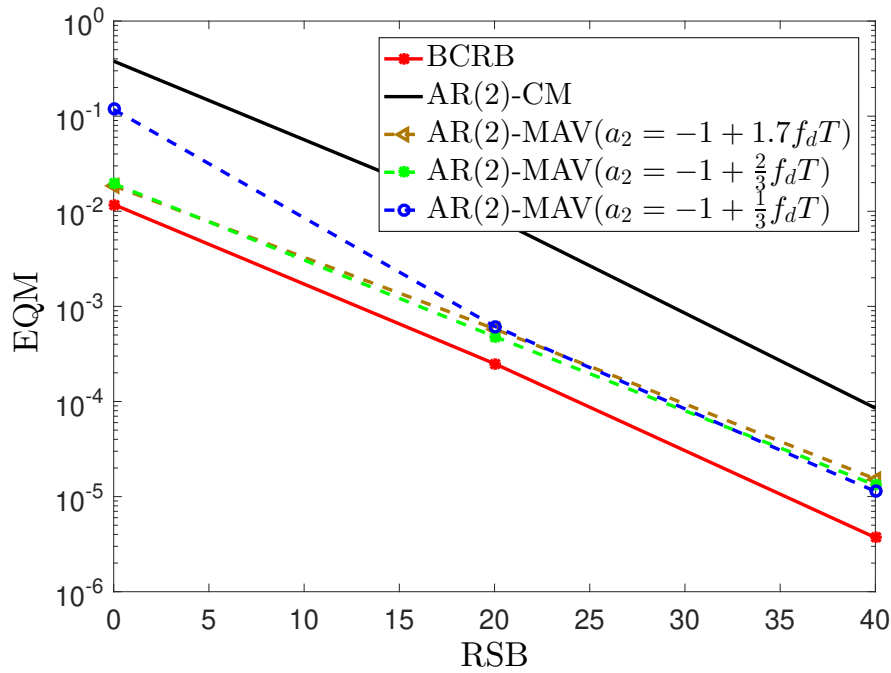


FIGURE H.2 – Variations de l'EQM en fonction du RSB pour différentes contraintes imposées sur  $a_2$  (de type  $a_2 = -1 + \gamma f_d T$ ) pour  $f_d T = 10^{-3}$ .

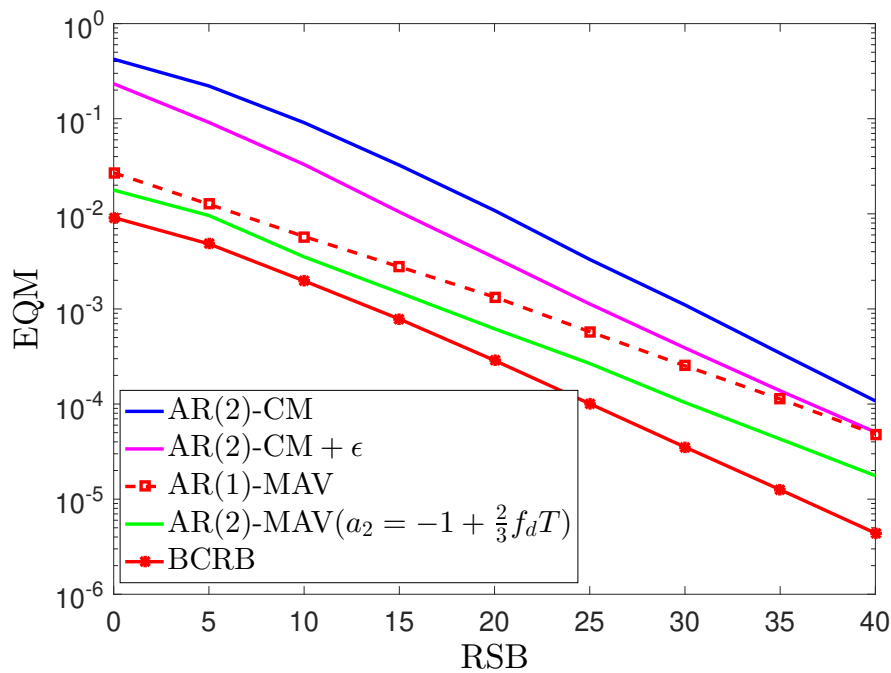


FIGURE H.3 – EQM du filtre de Kalman proposé AR(2)-MAV( $-1 + \frac{2}{3} f_d T$ ) en fonction du RSB pour  $f_d T = 10^{-3}$  et comparaison avec le AR(1)-MAV [12] et AR(2)-CM +  $\epsilon$  [5].

# Annexe I

## DSP du gain complexe du canal $\alpha$ dans le cas de communications Mobile à Mobile.

Dans cette annexe on essaie de calculer la densité spectrale de puissance du gain du canal (GC) dans le cas du canal mobile-mobile. Premièrement on vérifie les conditions qui nous amènent à obtenir la forme attendue de la DSP. Finalement on propose quelques modifications à l'équation de la DSP trouvée dans la littérature qui s'avère ne pas être correcte sur certaines plages de fréquences.

### I.1 DSP du gain complexe pour canal M-M.

D'après [95] et de nombreux articles et thèses qui le reprennent, la DSP est :

$$\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi^2 \sqrt{f_2 f_1}} K \left( \sqrt{\frac{(f_1 + f_2)^2 - f^2}{4f_1 f_2}} \right) & \text{si } |f| < f_1 + f_2. \\ 0 & \text{si } |f| > f_1 + f_2. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

avec  $K$  la fonction elliptique complète de première espèce [96]. ce résultat est obtenu à partir de la TF du produit des fonction de Bessel tabulé dans [96, Eq. 6.612 page 696]. La DSP est encore donnée par la fonction de Legendre de second espèce  $Q_{-1/2}$  [96] :

$$\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi^2 \sqrt{f_2 f_1}} Q_{-1/2} \left( \frac{f_1^2 + f_2^2 - f^2}{2f_1 f_2} \right) & \text{si } |f| < f_1 + f_2. \\ 0 & \text{si } |f| > f_1 + f_2. \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Le passage de (I.1) à (I.2) se fait par la relation suivante :  $Q_{-1/2}(x) = K \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right)$ .

#### I.1.1 Fonction elliptique complète de première espèce

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-k^2 t^2)(1-t^2)}} dt, \quad (\text{I.3})$$



avec  $0 < k^2 < 1$ .

Donc l'argument de la fonction elliptique sous la racine dans (I.1) doit être inférieure à 1 (et positif ce qui est le cas dans les conditions citées dans (I.1)).

## I.2 Argument de la DSP (I.1)

Soit  $Arg = \frac{(f_1T + f_2T)^2 - f^2}{4f_1Tf_2T}$  sous la racine carrée qui sert d'argument à la fonction elliptique complète de première espèce utilisé dans l'équation (I.1). On remarque d'après

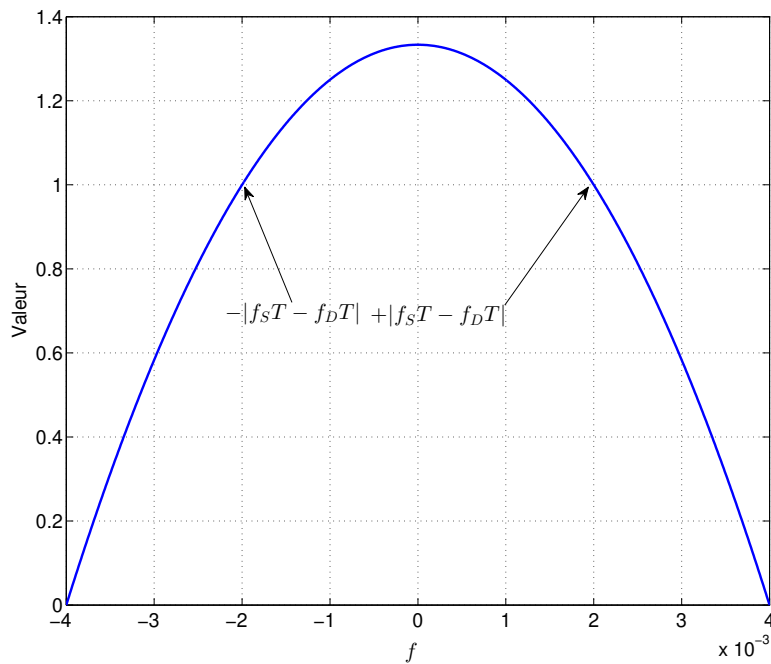


FIGURE I.1 – Argument de la fonction dans (I.3) pour  $f_1T = 10^{-3}$  et  $f_2T = 3 \times 10^{-3}$ .

la figure I.1 que l'argument dépasse la valeur de 1 lorsque  $f < |f_2T - f_1T|$  ce qui pose problème : **la formule de la DSP donnée dans tous les articles est donc fautive pour  $|f| < |f_1T - f_2T|$**  étant donné que la fonction elliptique complète du première espèce n'est pas défini pour un argument supérieur à 1.

### I.2.1 Vérification du résultat par calcul :

$$\begin{aligned}
 Arg &= \frac{(f_1T + f_2T)^2 - f^2}{4f_1Tf_2T} < 1 \\
 (f_1T + f_2T)^2 - f^2 - 4f_1Tf_2T &< 0 \\
 (f_1T - f_2T)^2 - f^2 &< 0 \\
 (f_1T - f_2T)^2 &< f^2
 \end{aligned}$$

### I.3 DSP avec fonction elliptique complète de première espèce de MATLAB et par calcul d'intégrale.

---

Donc pour  $fT > |f_2T - f_1T|$  on a  $Arg < 1$ , et  $Arg > 1$  sinon.

#### I.2.2 Autre expression de $Arg$

$$\begin{aligned}
 Arg &= \frac{(f_1T + f_2T)^2 - f^2}{4f_1Tf_2T} \\
 &= \frac{f_1T^2 + f_2T^2 + 2f_1Tf_2T - f^2}{4f_1Tf_2T} \\
 &= \frac{f_1T^2 + f_2T^2 + 4f_1Tf_2T - 2f_1Tf_2T - f^2}{4f_1Tf_2T} \\
 &= 1 + \left( \frac{(f_1T - f_2T)^2 - f^2}{4f_1Tf_2T} \right) \tag{I.4}
 \end{aligned}$$

Dans le cas de  $|fT| > |f_2T - f_1T|$  on a bien  $Arg < 1$ . Dans le cas contraire pour  $|fT| \leq |f_2T - f_1T|$  On a  $Arg \geq 1$ . Par contre si on remplace l'addition dans l'équation (I.4) par une soustraction, le nouvel argument noté  $Arg^*$  vérifiera bien  $Arg^* \leq 1$  (on peut aussi arriver à ce résultat en faisant l'étude du signe de l'équation du second degré du numérateur de  $Arg$ ). Dans ce cas l'expression de  $Arg^*$  sera :

$$Arg^* = \begin{cases} 1 + \left( \frac{(f_1T - f_2T)^2 - fT^2}{4f_1Tf_2T} \right) & \text{si } fT > |f_2T - f_1T| \\ 1 - \left( \frac{(f_1T - f_2T)^2 - fT^2}{4f_1Tf_2T} \right) & \text{si } fT \leq |f_2T - f_1T| \end{cases} \tag{I.5}$$

Globalement on peut écrire :

$$Arg = \begin{cases} 1 - \left| \frac{(f_1T - f_2T)^2 - f^2}{4f_1Tf_2T} \right| & \text{si } |fT| \leq f_2T + f_1T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{I.6}$$

La Figure I.2 représente l'équation (I.6) On remarque que  $Arg \leq 1$  pour tout  $fT \leq f_2T + f_1T$ . Nous avons l'intuition, bien que non prouvé, que le changement proposé est le changement nécessaire pour rendre la formule de la DSP valable, car elle permet en tout cas d'avoir la forme attendue de la DSP, comme nous allons le vérifier dans la suite.

La formule proposés pour la DSP du canal M-M est ainsi finalement :

$$\Gamma^{M-M}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi^2 \sqrt{f_2T f_1T}} K \left( \sqrt{1 - \left| \frac{(f_1T - f_2T)^2 - f^2}{4f_1Tf_2T} \right|} \right) & \text{si } |fT| < f_1T + f_2T. \\ 0 & \text{si } |fT| > f_1T + f_2T. \end{cases} \tag{I.7}$$

### I.3 DSP avec fonction elliptique complète de première espèce de MATLAB et par calcul d'intégrale.

Dans cette section on présente la DSP du GC (Équation (I.7)) en utilisant la fonction elliptique complète de première espèce de MATLAB et le calcul d'intégrale de MATLAB

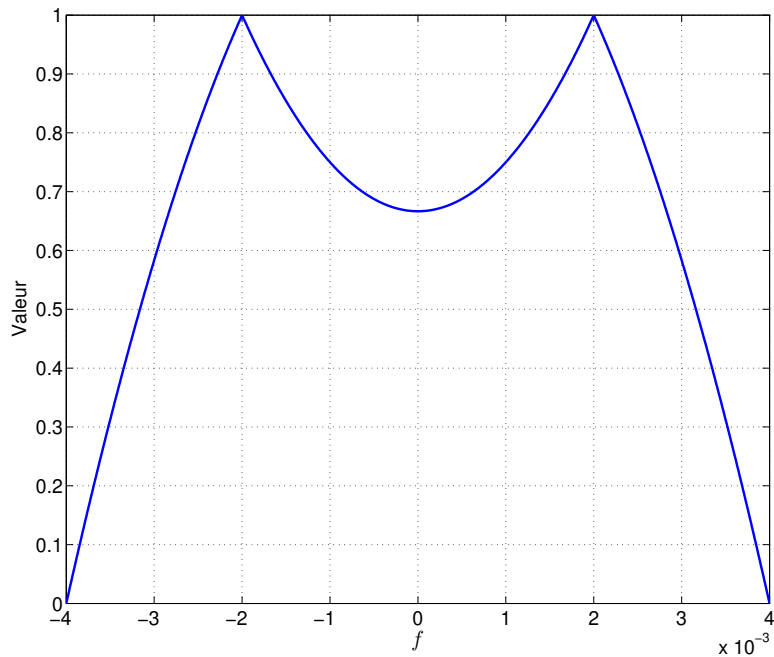


FIGURE I.2 – Argument de la fonction dans (I.3) après modification pour  $f_1T = 10^{-3}$  et  $f_2T = 3 \times 10^{-3}$  .

en se basant sur (I.3) lorsque  $f_1T \neq f_2T$  et lorsque  $f_1T = f_2T$ .

On vérifie d'abord que les 2 procédés de calcul amènent au même spectre. On observe ensuite qu'on a bien les pics aux fréquences attendues telles qu'on pourrait les obtenir par convolution de deux spectres de Jakes comme le montrent les figures I.3 et I.4 (les fréquences attendues des pics sont positionnées en  $|f_1T - f_2T|$ , Cf figure 3.6 ).

### I.3 DSP avec fonction elliptique complète de première espèce de MATLAB et par calcul d'intégrale.

---

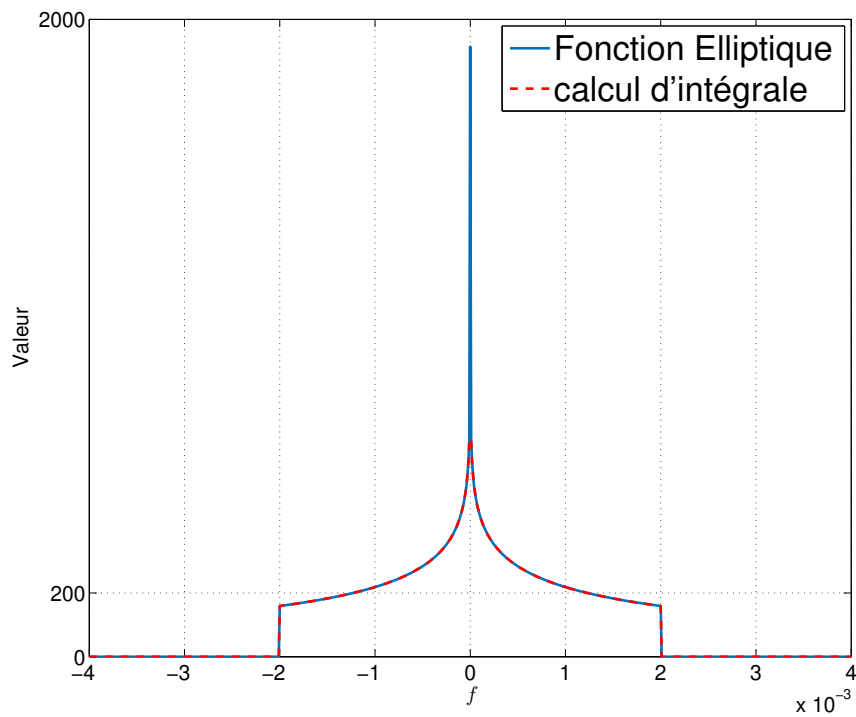


FIGURE I.3 – DSP de GC pour  $f_1T = 10^{-3}$  et  $f_2T = 10^{-3}$  .

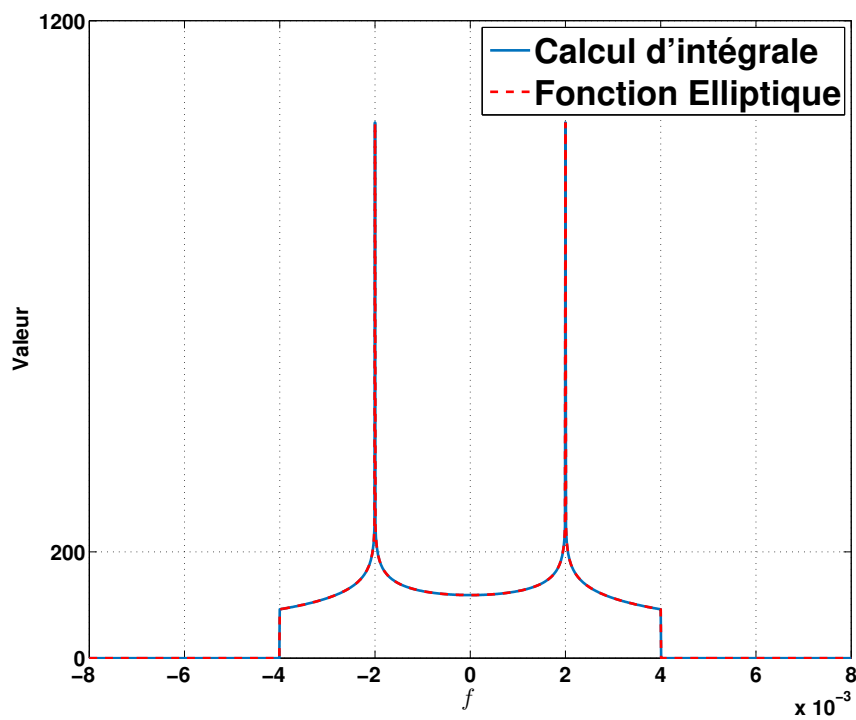


FIGURE I.4 – DSP de GC pour  $f_1T = 10^{-3}$  et  $f_2T = 3 \times 10^{-3}$  .



# Annexe J

## Calcul de $\mu_{(4)}^{\text{M-M}}$

On a démontré dans la section 3.2.4.2 que  $\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \sigma_\alpha^2 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(f) \otimes \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f)$ . Dans cette section on calcule le moment d'ordre 4,  $\mu_{(4)}^{\text{M-M}}$ , de  $\Gamma^{\text{M-M}}(f)$  en se basant sur la convolution des deux DSP de GC des liens  $F - M$ .

On a :

$$\Gamma^{\text{M-M}}(f) = \sigma_\alpha^2 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(f) \otimes \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f) \quad (\text{J.1})$$

$$= \sigma_\alpha^2 \frac{1}{\pi f_1 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}} \otimes \frac{1}{\pi f_2 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_2}\right)^2}} \quad (\text{J.2})$$

avec  $\otimes$  désigne le produit de convolution.

### J.1 Calcul de $\mu_{(4)}^{\text{M-M}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{(4)}^{\text{M-M}} &= \frac{\mu_{(4)}}{\sigma_\alpha^2} = \int_{-fmax}^{+fmax} (2\pi fT)^4 \Gamma^{\text{M-M}}(f) df \\ &= \int_{-fmax}^{+fmax} (2\pi fT)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} (\Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f - \tau) d\tau) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi T)^4 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \int_{-fmax}^{+fmax} (f)^4 \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f - \tau) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi T)^4 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \int_{-f_2+\tau}^{+f_2+\tau} (f)^4 \Gamma_{f_2}^{\text{F-M}}(f - \tau) df \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

Soit  $f = f_2 \cos(u) + \tau$ , donc  $df = -\sin(u) f_2 du$ . En remplaçant chaque terme par son expression dans (J.3) et en changeant les bornes de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi T)^4 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \int_{\pi}^0 \frac{(f_2 \cos(u) + \tau)^4 (-\sin(u) f_2)}{\pi f_2 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_2}\right)^2}} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi T)^4 \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \int_0^{\pi} (f_2 \cos(u) + \tau)^4 du \\
 &= \frac{(2\pi T)^4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \underbrace{\int_0^{\pi} (f_2^4 \cos^4(u) + 4f_2^3 \cos^3(u)\tau + 6f_2^2 \cos^2(u)\tau^2 + 4f_2 \cos(u)\tau^3 + \tau^4) du}_{int1}
 \end{aligned} \tag{J.4}$$

### J.1.1 calcul de *int1*

$$\begin{aligned}
 int1 &= \int_0^{\pi} (f_2^4 \cos^4(u) + 4f_2^3 \cos^3(u)\tau + 6f_2^2 \cos^2(u)\tau^2 + 4f_2 \cos(u)\tau^3 + \tau^4) du \\
 &= \int_0^{\pi} \left( f_2^4 \frac{1}{8} (\cos(4u) + 4 \cos(2u) + 3) + 4f_2^3 \frac{1}{4} (\cos(3u) + 3 \cos(u))\tau + 6f_2^2 \frac{1}{2} (\cos(2u) + 1)\tau^2 \right. \\
 &\quad \left. + 4f_2 \cos(u)\tau^3 + \tau^4 \right) du \\
 &= \pi \left( \frac{3}{8} f_2^4 + 3\tau^2 f_2^2 + \tau^4 \right)
 \end{aligned} \tag{J.5}$$

En injectant (J.5) dans (J.4) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}_{(4)}^{\text{M-M}} &= (2\pi T)^4 \int_{-f_1}^{+f_1} \left( \frac{3}{8} f_2^4 + 3\tau^2 f_2^2 + \tau^4 \right) \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \\
 &= (2\pi T)^4 \left( \frac{3}{8} f_2^4 + \int_{-f_1}^{+f_1} (3\tau^2 f_2^2 + \tau^4) \Gamma_{f_1}^{\text{F-M}}(\tau) d\tau \right) \\
 &= (2\pi T)^4 \left( \frac{3}{8} f_2^4 + \int_{-f_1}^{+f_1} (3\tau^2 f_2^2 + \tau^4) \frac{1}{\pi \sqrt{f_1^2 - \tau^2}} d\tau \right)
 \end{aligned} \tag{J.6}$$

Soit  $\tau = f_1 \cos(u) \Rightarrow d\tau = -\sin(u) f_1 du$ . En remplaçant  $\tau$  et  $d\tau$  par leurs expressions

## J.1 Calcul de $\mu_{(4)}^{\text{M-M}}$

---

dans (J.6) et en changeant les bornes de l'intégrale :

$$\begin{aligned} &= (2\pi T)^4 \left( \frac{3}{8} f_2^4 + 3f_2^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_1^2 \cos^2(u) du + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_1^4 \cos^4(u) du \right) \\ &= (2\pi T)^4 \left( \frac{3}{8} f_2^4 + 3f_2^2 f_1^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(2u) + 1) du + \frac{1}{\pi} f_1^4 \int_0^\pi \frac{1}{8} (\cos(4u) + 4 \cos(2u) + 3) du \right) \\ &= (2\pi T)^4 \left( \frac{3}{8} f_2^4 + \frac{3}{8} f_1^4 + \frac{3}{2} f_2^2 f_1^2 \right) \end{aligned} \tag{J.7}$$

On déduit l'expression de  $\mu_{(4)}^{\text{M-M}}$  :

$$\mu_{(4)}^{\text{M-M}} = \frac{3}{8} \sigma_\alpha^2 (2\pi T)^4 (f_2^4 + f_1^4 + 4f_2^2 f_1^2) \tag{J.8}$$





# Bibliographie

- [1] Ali Houssam El Hussein, Eric Pierre Simon, and Laurent Ros. Optimization of the second order autoregressive model AR(2) for Rayleigh-Jakes flat fading channel estimation with Kalman filter. In *Digital Signal Processing*, London, United Kingdom, August 2017. IEEE.
- [2] E. Ahmed and H. Gharavi. Cooperative vehicular networking : A survey. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19(3) :996–1014, March 2018.
- [3] Laurent Ros. *Traitement du signal pour les communications numériques au travers de canaux radio-mobiles*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Grenoble, Ecole doctorale EEATS, spécialité Signal, Image, Parole et Télécommunications, March 2016.
- [4] Hussein Hijazi and Laurent Ros. Bayesian Cramer–Rao bounds for complex gain parameters estimation of slowly varying Rayleigh channel in OFDM systems. *Elsevier Signal Processing*, 89(1) :111 – 115, 2009.
- [5] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(4) :1650–1662, July 2005.
- [6] P. Sharma and K. Chandra. Prediction of State Transitions in Rayleigh Fading Channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(2) :416–425, March 2007.
- [7] Christos Kominakis, Christina Fragouli, Ali H Sayed, and Richard D Wesel. Multi-input multi-output fading channel tracking and equalization using kalman estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(5) :1065–1076, 2002.
- [8] L. Lindbom. Simplified Kalman estimation of fading mobile radio channels : high performance at LMS computational load. In *IEEE International Conference on Acoust. Speech Signal Process.*, volume 3, pages 352–355 vol.3, April 1993.
- [9] L. Lindbom, A. Ahlen, M. Sternad, and M. Falkenstrom. Tracking of time-varying mobile radio channels. II. A case study. *IEEE Transactions on Communications*, 50(1) :156–167, Jan 2002.
- [10] S. Gazor. Prediction in LMS-type adaptive algorithms for smoothly time varying environments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(6) :1735–1739, Jun 1999.
- [11] L. Lindbom, M. Sternad, and A. Ahlen. Tracking of time-varying mobile radio channels .1. The Wiener LMS algorithm. *IEEE Transactions on Communications*, 49(12) :2207–2217, Dec 2001.
- [12] Soukayna Ghandour-Haidar, Laurent Ros, and Jean-Marc Brossier. On the use of first-order autoregressive modeling for Rayleigh flat fading channel estimation with Kalman filter. *Signal Processing*, 92, 2012.

- 
- [13] Soukayna Ghandour-Haidar. *Estimation de canal à évanouissements plats dans les transmissions sans fils à relais multibonds*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2014.
- [14] L. Ros and E. P. Simon. Second-order modeling for Rayleigh flat fading channel estimation with Kalman Filter. In *2011 17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, pages 1–6, July 2011.
- [15] T. Y. Al-Naffouri and A. Paulraj. A forward-backward Kalman for the estimation of time-variant channels in OFDM. In *IEEE 6th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2005.*, pages 670–674, June 2005.
- [16] Gidon Eshel. The yule walker equations for the AR coefficients . *Internet resource, vol. 2, p. 68-73.*, 2003.
- [17] Cooperative communications. *Share and Learn Together*, Nov 2016.
- [18] Trung Quang Duong, Le-Nam Hoang, and Vo Nguyen Quoc Bao. On the performance of two-way amplify-and-forward relay networks. *IEICE transactions on communications*, 92(12) :3957–3959, 2009.
- [19] Majid Nasiri Khormuji and Erik G Larsson. Cooperative transmission based on decode-and-forward relaying with partial repetition coding. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 8(4) :1716–1725, 2009.
- [20] S. S. Ikki and M. H. Ahmed. Performance analysis of adaptive decode-and-forward cooperative diversity networks with best-relay selection. *IEEE Transactions on Communications*, 58(1) :68–72, January 2010.
- [21] Y. Kim and H. Liu. Infrastructure relay transmission with cooperative mimo. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 57(4) :2180–2188, July 2008.
- [22] X. Ge, H. Cheng, G. Mao, Y. Yang, and S. Tu. Vehicular communications for 5g cooperative small-cell networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 65(10) :7882–7894, Oct 2016.
- [23] Juha Korhonen. *Introduction to 3G Mobile Communications*. Artech House, Inc., Norwood, MA, USA, 2nd edition, 2003.
- [24] P. Bello. Characterization of randomly time-variant linear channels. *IEEE Transactions on Communications Systems*, 11(4) :360–393, December 1963.
- [25] Laurent Ros. *Réception multi-capteur pour un terminal radio-mobile dans un système d'accès multiple à répartition par codes : application au mode TDD de l'UMTS*. Theses, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, December 2001.
- [26] J.G. Proakis. *Digital Communications*. Electrical engineering series. McGraw-Hill, 2001.
- [27] R. H Clarke. A statistical theory of mobile radio reception. *Bell Labs Technical Journal*, (1968).
- [28] *Table of Integrals, Series, and Products, Fifth Edition*. Academic Press, 5th edition, January 1994.
- [29] H. Shu, L. Ros, and E. P. Simon. Simplified Random-Walk-Model-Based Kalman Filter for Slow to Moderate Fading Channel Estimation in OFDM Systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 62, Aug 2014.

- [30] Jitendra K Tugnait and Weilin Luo. Linear prediction error method for blind identification of periodically time-varying channels. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(12) :3070–3082, 2002.
- [31] M. Khalighi and J. J. Boutros. Semi-blind channel estimation using the em algorithm in iterative mimo app detectors. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 5(11) :3165–3173, November 2006.
- [32] Michael L Moher and John H Lodge. TCMP-A modulation and coding strategy for Rician fading channels. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 7(9) :1347–1355, 1989.
- [33] James K Cavers. An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels (mobile radio). *IEEE transactions on vehicular technology*, 40(4) :686–693, 1991.
- [34] Heung-No Lee and G. J. Pottie. Fast adaptive equalization/diversity combining for time-varying dispersive channels. *IEEE Transactions on Communications*, 46(9) :1146–1162, Sept 1998.
- [35] S.M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Practical Algorithm Development*. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice-Hall PTR, 2013.
- [36] Hüseyin Arslan and Gregory E Bottomley. Channel estimation in narrowband wireless communication systems. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 1(2) :201–219, 2001.
- [37] Wei Jian, Chongxiu Yu, Jianxin Wang, Jianguo Yu, and Lin Wang. OFDM adaptive digital predistortion method combines RLS and LMS algorithm. In *2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, pages 3900–3903, May 2009.
- [38] Alexander D. Poularikas. *Adaptive Filtering : Fundamentals of Least Mean Squares with MATLAB*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1st edition, 2014.
- [39] R. Gerzaguët, L. Ros, J. Brossier, S. Ghandour-Haidar, and F. Belveze. Self-adaptive stochastic Rayleigh flat fading channel estimation. In *2013 18th International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, pages 1–6, July 2013.
- [40] A. Ahlen, L. Lindbom, and M. Sternad. Channel tracking with WLMS algorithms : high performance at LMS computational load. In *VTC2000-Spring. 2000 IEEE 51st Vehicular Technology Conference Proceedings (Cat. No.00CH37026)*, volume 1, pages 16–20 vol.1, May 2000.
- [41] Saeed V Vaseghi. Wiener filters. In *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*, pages 140–163. Springer, 1996.
- [42] Jordi Vilà Valls. *Estimation dynamique non-linéaire de canaux de transmission pour récepteurs satellites mobiles*. Theses, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, March 2010.
- [43] BDO Anderson and JB Moore. *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- [44] A. R. Nayak, J. R. Barry, G. Feyh, and S. W. McLaughlin. Timing Recovery With Frequency Offset and Random Walk : Cramér-Rao Bound and a Phase-Locked Loop Postprocessor. *IEEE Transactions on Communications*, 54(11) :2004–2013, Nov 2006.

- [45] Nabil R Yousef and Ali H Sayed. Ability of adaptive filters to track carrier offsets and channel nonstationarities. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(7) :1533–1544, 2002.
- [46] Huaqiang Shu. *Algorithmes de poursuite pour l'estimation de canal radio-mobile et performances asymptotiques : applications pour les systèmes OFDM*. Theses, Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, November 2013.
- [47] Grabt S Christiansen. Modeling of PRML timing loop as a Kalman filter. In *Global Telecommunications Conference, 1994. GLOBECOM'94. Communications : The Global Bridge., IEEE*, volume 2, pages 1157–1161. IEEE.
- [48] Ara Patapoutian. On phase-locked loops and Kalman filters. *IEEE Transactions on Communications*, 47(5) :670–672, 1999.
- [49] Laurent Ros, Hussein Hijazi, and Eric Pierre Simon. Complex Amplitudes Tracking Loop for multipath channel estimation in OFDM systems over slow to moderate fading. *Signal Processing*, 97(April) :134–145, April 2014.
- [50] L. Ros, H. Hijazi, and E. P. Simon. Paths complex gain tracking algorithms for OFDM receiver in slowly-varying channels. In *2010 4th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP)*, pages 1–6, March 2010.
- [51] Huaqiang Shu, Eric Pierre Simon, and Laurent Ros. On the use of tracking loops for low-complexity multi-path channel estimation in OFDM systems. *Signal Processing*, 117 :174–187, 2015.
- [52] T. Hwang, C. Yang, G. Wu, S. Li, and G. Y. Li. OFDM and Its Wireless Applications : A Survey. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(4) :1673–1694, May 2009.
- [53] Eric Pierre Simon. *Estimation de canal et Synchronisation pour les systèmes OFDM en présence de mobilité*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Lille, June 2015.
- [54] H. Shu, E. P. Simon, and L. Ros. Third-Order Kalman Filter : Tuning and Steady-State Performance. *IEEE Signal Process Lett.*, 20, 2013.
- [55] A. Barbieri, A. Piemontese, and G. Colavolpe. On the ARMA approximation for fading channels described by the Clarke model with applications to Kalman-based receivers. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 8(2) :535–540, Feb 2009.
- [56] Hsin-Yu Wu and A. Duel-Hallen. On the performance of coherent and noncoherent multiuser detectors for mobile radio CDMA channels. In *ICUPC*, volume 1, pages 76–80 vol.1, Sep 1996.
- [57] G. Rajender, T. Anilkumar, and K. S. Rao. Estimation and performance — Kalman based approach : A review. In *2016 International Conference on Communication and Signal Processing (ICCSP)*, pages 1145–1151, April 2016.
- [58] Min Huang, Xiang Chen, Limin Xiao, Shidong Zhou, and Jing Wang. Kalman-filter-based channel estimation for orthogonal frequency-division multiplexing systems in time-varying channels. *IET communications*, 1(4) :795–801, 2007.
- [59] S. Locubiche-Serra, G. Seco-Granados, and J. A. Lopez-Salcedo. Closed-Form Approximation for the Convergence Time of  $n$ -th-Order Kalman Filters. *IEEE Signal Processing Letters*, 25(10) :1505–1509, Oct 2018.

- [60] M. Baruah, A. Misra, and K. K. Sarma. AR-model of faded MIMO set-up optimized for ITU channels. In *2015 2nd International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN)*, pages 242–247, Feb 2015.
- [61] B. Chen, Q. Cui, F. Yang, and J. Xu. A novel channel estimation method based on Kalman filter compressed sensing for time-varying OFDM system. In *2014 Sixth International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP)*, pages 1–5, Oct 2014.
- [62] S. Kirthiga and M. Jayakumar. AutoRegressive Channel Modeling and Estimation Using Kalman Filter for Downlink LTE Systems. In *Proceedings of the 1st Amrita ACM-W Celebration on Women in Computing in India, A2CWIC '10*, pages 45 :1–45 :5, New York, NY, USA, 2010. ACM.
- [63] Hong Shen Wang and Pao-Chi Chang. On verifying the first-order Markovian assumption for a Rayleigh fading channel model. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 45(2) :353–357, May 1996.
- [64] E. P. Simon, L. Ros, H. Hijazi, and M. Ghogho. Joint Carrier Frequency Offset and Channel Estimation for OFDM Systems via the EM Algorithm in the Presence of Very High Mobility. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(2) :754–765, Feb 2012.
- [65] H. Hijazi and L. Ros. Joint data QR-detection and Kalman estimation for OFDM time-varying Rayleigh channel complex gains. *IEEE Transactions on Communications*, 58(1) :170–178, January 2010.
- [66] P. Banelli, R. C. Cannizzaro, and L. Rugini. Data-Aided Kalman Tracking for Channel Estimation in Doppler-Affected OFDM Systems. In *2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP '07*, volume 3, pages III–133–III–136, April 2007.
- [67] Wei Chen and Ruifeng Zhang. Kalman-filter channel estimator for OFDM systems in time and frequency-selective fading environment. In *2004 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 4, pages iv–377–iv–380 vol.4, May 2004.
- [68] H. Abeida, J. . Brossier, L. Ros, and J. Vila-Valls. An EM Algorithm for Path Delay and Complex Gain Estimation of Slowly Varying Fading Channel for CPM Signals. In *GLOBECOM 2009 - 2009 IEEE Global Telecommunications Conference*, pages 1–6, Nov 2009.
- [69] R. Prasad, C. R. Murthy, and B. D. Rao. Joint Approximately Sparse Channel Estimation and Data Detection in OFDM Systems Using Sparse Bayesian Learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(14) :3591–3603, July 2014.
- [70] V. Gutta, K. K. T. Anand, T. S. V. S. Movva, B. R. Korivi, S. Killamsetty, and S. Padmanabhan. Low complexity channel estimation using fuzzy Kalman Filter for fast time varying MIMO-OFDM systems. In *2015 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, pages 1771–1774, Aug 2015.
- [71] A. Jamoos and M. Hussein. Estimation of UFMC Time-Varying Fading Channel Using Adaptive Filters. In *2018 International Conference on Promising Electronic Technologies (ICPET)*, pages 43–48, Oct 2018.

- [72] Syed Muslim Shah, Raza Samar, and Muhammad Asif Zahoor Raja. Fractional-order algorithms for tracking Rayleigh fading channels. *Nonlinear Dynamics*, 92(3) :1243–1259, 2018.
- [73] Olusegun P Awe. *Machine learning algorithms for cognitive radio wireless networks*. PhD thesis, © Olusegun Peter Awe, 2015.
- [74] Rikke Apelfröjd, Wolfgang Zirwas, and Mikael Sternad. Joint Reference Signal Design and Kalman/Wiener Channel Estimation for FDD Massive MIMO, 04 2018.
- [75] W. Hassasneh, A. Jamoos, E. Grivel, and H. A. Nour. Estimation of MC-DS-CDMA Fading Channels Based on Kalman Filtering with High Order Autoregressive Models. In *2006 Proceedings of the First Mobile Computing and Wireless Communication International Conference*, pages 145–149, Sept 2006.
- [76] Christopher C Tan and Norman C Beaulieu. On first-order Markov modeling for the Rayleigh fading channel. *IEEE Transactions on Communications*, 48(12) :2032–2040, 2000.
- [77] Hong Shen Wang and Pao-Chi Chang. On verifying the first-order Markovian assumption for a Rayleigh fading channel model. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 45(2) :353–357, 1996.
- [78] B. C. Banister and J. R. Zeidler. Tracking performance of the RLS algorithm applied to an antenna array in a realistic fading environment. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(5) :1037–1050, May 2002.
- [79] D. Vaughan. A nonrecursive algebraic solution for the discrete Riccati equation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 15(5), Oct 1970.
- [80] Hussein Hijazi and Laurent Ros. Bayesian Cramer-Rao Bounds for Complex Gain Parameters Estimation of Slowly Varying Rayleigh Channel in OFDM Systems. *Signal Processing*, 89(1), January 2009.
- [81] George Udny Yule. On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer’s Sunspot Numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 226 :267–298, 1927.
- [82] Steven M Kay. *Modern spectral estimation : theory and application*. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1988. Includes bibliographies and index.
- [83] William Wu-Shyong Wei. *Time series analysis*. Addison-Wesley publ, 1994.
- [84] Farid Golnaraghi and BC Kuo. Automatic control systems. *Complex Variables*, 2 :1–1, 2010.
- [85] Se-Kyo Chung. A phase tracking system for three phase utility interface inverters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 15(3) :431–438, May 2000.
- [86] Harry L. Van Trees and Kristine L. Bell. *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [87] R.Winkelstein. Closed form evaluation of symmetric Two-sided Complex integrals. *communications Systems Research Section*, July and August 1981.
- [88] S. Ghandour-Haidar, L. Ros, and J. M. Brossier. 3-D Mobile-to-Mobile channel tracking with first-order autoregressive model-based Kalman filter. In *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*, Dec 2013.

- [89] X. Zhou, T. A. Lamahewa, and P. Sadeghi. Kalman filter-based channel estimation for amplify and forward relay communications. In *2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 1498–1502, Nov 2009.
- [90] X. Shen, Y. Liao, X. Dai, M. Zhao, K. Liu, and D. Wang. Joint channel estimation and decoding design for 5G-enabled V2V channel. *China Communications*, 15(7) :39–46, July 2018.
- [91] Panagiota Lioliou, Daniel Svensson, and Mats Viberg. Channel tracking for AF MIMO relaying systems. In *Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2012 IEEE*, pages 1–5. IEEE, 2012.
- [92] K. J. Kim, R. A. Iltis, and H. V. Poor. Frequency Offset and Channel Estimation in Cooperative Relay Networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(7) :3142–3155, Sep. 2011.
- [93] S. Ghandour-Haidar, L. Ros, and J. Brossier. Improving the tuning of first-order autoregressive model for the estimation of amplify and forward relay channel. In *2012 19th International Conference on Telecommunications (ICT)*, pages 1–6, April 2012.
- [94] Xiangyun Zhou, Tharaka A Lamahewa, and Parastoo Sadeghi. Kalman filter-based channel estimation for amplify and forward relay communications. In *Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on*, pages 1498–1502. IEEE, 2009.
- [95] Abdulkader S Akki and FRED Haber. A statistical model of mobile-to-mobile land communication channel. *IEEE transactions on vehicular technology*, 35(1) :2–7, 1986.
- [96] I S Gradshteyn, I M Ryzhik, Daniel Zwillinger, and Victor Moll. *Table of integrals, series, and products ; 8th ed.* Academic Press, Amsterdam, Sep 2014.
- [97] Wiem Dahech, Matthias Pätzold, Carlos Gutierrez, and Neji Youssef. A non-stationary mobile-to-mobile channel model allowing for velocity and trajectory variations of the mobile stations. PP :1–1, 01 2017.
- [98] A. S. Akki. Statistical properties of mobile-to-mobile land communication channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 43(4) :826–831, Nov 1994.
- [99] Jean-Louis Lacoume, Pierre-Olivier Amblard, and Pierre Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal.* Masson, 1997.
- [100] Ralph E Blake. Basic vibration theory. *Shock and vibration handbook*, 1 :2–8, 1961.
- [101] A.J. Rojas. On the Discrete-Time Algebraic Riccati Equation and Its Solution in Closed-Form. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :162 – 167, 2011. 18th IFAC World Congress.
- [102] B. Ekstrand. Analytical Steady State Solution for a Kalman Tracking Filter. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, AES-19(6), 1983.





---

**Résumé** — L'estimation de canal est une tâche cruciale du récepteur radio dans les systèmes de communication sans fil, en particulier en cas de mobilité où les paramètres du canal varient avec le temps en raison de l'effet Doppler. Dans cette thèse, nous considérons des variations de canal lentes à modérées, typiques des applications véhiculaires, et en particulier les deux types de canaux suivant : canaux Fixe-Mobiles (F-M) et canaux Mobiles-Mobiles (M-M), avec dans ce dernier cas la présence éventuelle de relais mobiles permettant d'amplifier et re-émettre le signal (*Amplify and Forward*). Nous avons démarré notre étude avec le canal F-M, qui servira de base pour traiter le canal M-M.

Pour le cas d'un canal F-M, modélisé par le modèle de Rayleigh à spectre de Jakes, une approche courante pour estimer le canal consiste à utiliser un filtre de Kalman (KF) basé sur un modèle autorégressif d'ordre  $p$  (AR( $p$ )). La méthode conventionnelle pour régler les paramètres du modèle AR( $p$ ) est basée sur le critère de corrélation (CM). Cependant, l'inconvénient majeur de cette méthode est que des ordres très élevés ( $p > 15$ ) sont nécessaires pour approcher la borne de Cramer-Rao Bayésienne. Le choix de  $p$  ainsi que le réglage des paramètres du modèle sont donc critiques et un compromis doit être trouvé entre la complexité numérique et la performance. Le compromis raisonnable qui a suscité beaucoup d'attention est de prendre  $p = 2$ . Le CM n'étant pas performant pour  $p = 2$ , d'autres méthodes de réglage ont été proposées dans la littérature, mais celle-ci reposent principalement sur des résultats expérimentaux ou des recherches exhaustives, ce qui limite leur application. Pour régler le modèle, nous proposons d'utiliser un critère de minimisation de la variance asymptotique (MAV) de l'erreur d'estimation en sortie du filtre de Kalman. Une formule générale de réglage a été dérivée en fonction de l'état du canal (fréquence Doppler et rapport signal sur bruit), qui peut s'avérer très utile en pratique. De plus, nous avons également dérivé une formule analytique pour l'erreur quadratique moyenne, ce qui permet de mieux comprendre le comportement du KF.

Ensuite, nous avons traité le canal M-M avec présence éventuelle de relais, en suivant la même approche. Les expressions analytiques pour le réglage optimal des paramètres du modèle AR(2) et les performances en erreur quadratique moyenne ont d'abord été établies en fonction des deuxièmes et quatrièmes moments du spectre Doppler du canal global. Les formules analytiques de ces moments ont été dérivées en exploitant la propriété de convolution des fonctions de densité, après décomposition du canal global en cascade de canaux élémentaires à spectre de Jakes. Avec ces approches, les résultats de simulations pour les différents canaux montrent un gain considérable en terme d'erreur quadratique moyenne d'estimation, comparé à la littérature.

**Mots clés** : Estimation de canal, Filtre de Kalman, Modèle autorégressif, Mode de diffusion, Communication Mobile-Mobile, évanouissement plat, spectre de Jakes.

---



---

**Abstract** — Channel estimation is a crucial task of the radio receiver in wireless communication systems, especially in the case of mobility where the channel parameters vary over time due to the Doppler effect. In this thesis, we consider slow to moderate channel variations, typical of vehicular applications, and in particular the following two types of channels : fixed-mobile (F-M) channels and mobile-mobile (M-M) channels, with in the latter case the possible presence of mobile relays (Amplify and Forward). We started our study with the F-M channel, which will serve as a basis for investigating the M-M channel.

For the case of an F-M channel, modeled by Rayleigh model described by the Jakes spectrum, a common approach to estimating the channel is to use a Kalman filter (KF) based on an autoregressive model of order  $p$  (AR( $p$ )). The conventional method for setting AR( $p$ ) model parameters is based on the correlation matching criterion (CM). However, the major disadvantage of this method is that very high orders ( $p > 15$ ) are needed to approach the Bayesian Cramer-Rao Bound. The choice of  $p$  as well as the adjustment of the parameters of the model are therefore critical and a compromise must be found between the numerical complexity and the performance. The reasonable compromise that has attracted a lot of attention is to take  $p = 2$ . Since the CM is not efficient for  $p = 2$ , other methods of tuning have been proposed in the literature, but these are mainly based on experimental results or exhaustive searches, which limits their application.

To adjust the model, we propose to use a criterion of minimization of the asymptotic variance (MAV) of the estimation error at the output of the Kalman filter. A general tuning formula has been derived based on the state of the channel (Doppler frequency and signal-to-noise ratio), which can be very useful in practice. In addition, we also derived an analytic formula for the mean squared error, which allows a better understanding of KF behavior.

Then we treated the M-M channel with the possible presence of mobile relays, following the same approach. The analytical expressions for the optimal adjustment of the AR(2) model parameters and the mean squared error performance were first set according to the second and fourth moments of the Doppler spectrum of the global channel. The analytical formulas of these moments were derived by exploiting the convolution property of the density functions, after decomposing the cascading global channel of Jakes spectrum elementary channels. With these approaches, the results of simulations for the different channels show a considerable gain in terms of mean squared error performance estimation, compared to the literature.

**Keywords** : Channel estimation, Kalman Filter, Autoregressive model, Mobile-to-Mobile communication, Flat fading, Jakes' spectrum, Rayleigh channel.

---



