



**HAL**  
open science

## De l'expérimentation à l'étude dynamique et énergétique de mouvements humains

Olivier Coussi

► **To cite this version:**

Olivier Coussi. De l'expérimentation à l'étude dynamique et énergétique de mouvements humains. Automatique / Robotique. Université de Poitiers, 1997. Français. NNT: . tel-02113880

**HAL Id: tel-02113880**

**<https://hal.science/tel-02113880>**

Submitted on 29 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 1997

# THÈSE

Pour l'obtention du Grade de  
Docteur de l'Université de POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)  
(Diplôme National - Arrêté du 30 mars 1992)

ECOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGENIEUR

SPÉCIALITÉ : Mécanique

Présentée par :

Olivier COUSSI

Boursier de la Région Poitou-Charentes

~~~~~

**De l'observation cinématique à l'étude dynamique  
et énergétique de mouvements humains.**

~~~~~

Directeur de thèse :

Guy BESSONNET

~~~~~

Soutenue le 26 Septembre 1997  
devant la Commission d'Examen

~~~~~

## JURY

<i>Président :</i>	J.P. LALLEMAND	Professeur, Université de Poitiers
<i>Rapporteurs :</i>	P. ALLARD	Professeur, Université de Montréal
	J. DIMNET	Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1
	B. ESPIAU	Directeur de Recherche, INRIA Rhône-Alpes
<i>Examineurs :</i>	G. BESSONNET	Professeur, Université de Poitiers
	A. JUNQUA	Professeur, Université de Poitiers
	B. LANDJERIT	Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille



*« Vivre intensément  
compense tout effort et presque  
tout sacrifice. Vivre à moitié a  
toujours été l'attribut et le châ-  
timent des médiocres. »*

Rolo Diez  
*Une dalle dans  
la vallée de la mort*



## Avant-propos

Ce travail a été mené au sein de l'équipe « Mécanismes et Robotique » du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Université de Poitiers (UMR 6610 CNRS). Je remercie M. le Professeur J. Frène, précédent directeur du Laboratoire, de m'avoir accueilli en 1993 ainsi que le directeur actuel, M. le Professeur J.P. Lallemand, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Durant ces cinq années passées dans ce laboratoire, j'ai bénéficié des conseils et du suivi de mon directeur de thèse, M. le Professeur G. Bessonnet. Il a su me donner la liberté suffisante pour que ce travail puisse voir le jour tout en veillant attentivement à ce que je ne parte pas dans des voies trop obscures. Je lui suis redevable de m'avoir apporté sa rigueur scientifique ainsi que sa compétence. Je l'en remercie.

P. Allard, Professeur à l'Université de Montréal, m'a accueilli au sein de son équipe, en septembre 1994, afin que je puisse bénéficier de son expérience dans le domaine de l'analyse des mouvements humains. C'est donc très justement qu'il trouve sa place dans ce jury en tant que rapporteur. Outre ses précieux conseils, j'ai pu apprécier à sa juste valeur l'accueil québécois qu'il m'a offert. Je lui dois certainement ma passion pour ce pays, quelques rencontres, mon initiation au golf, mais aussi la découverte des vins de la Loire au cours d'une soirée très ...

Je suis très reconnaissant à B. Espiau, Directeur de Recherche à l'INRIA Rhône-Alpes d'avoir accepté d'être rapporteur de mon travail. Le fait de l'avoir cotoyé à de nombreuses reprises durant ces années de recherche, dans le cadre du projet BIP, m'a été très bénéfique. Je garderai toujours en mémoire l'image exemplaire d'un scientifique passionné et passionnant ne posant aucune barrière entre de jeunes chercheurs et lui-même.

Je remercie aussi J. Dimnet, Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon, d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteur de ce mémoire ainsi que B. Landjerit, Professeur

à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, d'avoir accepté de juger ce travail.

A. Junqua, Professeur à l'université de Poitiers, a été à l'origine de mon parcours universitaire en me permettant de bénéficier d'une convention d'athlète de haut-niveau. Il m'a ainsi donné la possibilité de concilier sport et études. Des nombreuses discussions que nous avons eues, il m'a transmis son enthousiasme pour la recherche et a, sans aucun doute, été le déclencheur de l'ensemble de mon travail. Le fait qu'il accepte de faire partie de ce jury me touche profondément. Qu'il trouve dans ces quelques lignes l'expression de la gratitude et du profond respect que j'ai pour lui. J'espère qu'il gardera un souvenir aussi agréable de mon passage à ses cotés ...

Rédiger une thèse est un acte, certes solitaire, qui bénéficie du soutien scientifique et humain de nombreuses personnes. J'aimerais ici avoir une pensée pour ceux qui par leur aide ont permis l'aboutissement de ce travail et plus particulièrement : P. Lacouture, E. Dedieu, J. Duboy, MONSIEUR J. Derouet (d'une disponibilité si compétente et désintéressée), B. Blanchard, S. Zeghloul, M. Ayrault-Roger, F. Brémand, A. Riquet, L. Frossard, F. Danès, G. Martin, P. Vulliez et A.D. Jutard-Malinge. Merci à jiji Boutet et N. Orgeret d'avoir assuré la reprographie de ce mémoire.

F. Durand m'a offert une chance extraordinaire, il y a maintenant 10 ans, en m'acceptant au CPEF Canoë-Kayak de Poitiers et en me permettant de vivre des moments autant formidables qu'inoubliables dans ce milieu sportif. Il sait combien je l'estime.

J'ai une pensée pour tous mes « collègues » du CERAM de L'École Nationale des Ponts et Chaussées de Marne-La-Vallée avec qui j'ai découvert les joies pratiques de la méthode des éléments finis appliquée aux structures en matériaux composites dans le cadre du projet ARMADA 96 : A. Ehrlacher, P. Tamagny, J.F. Caron et G. Foret.

Enfin je pense à mes amis de tous les instants avec qui je passe des moments tout en couleurs : Anne-Do et Philou, « Peter », Colo et Virgie, BA, Gérald et Valou, Nat et Dany, Stéphane, Tam's, Jean-Yves, Régis, petite Nat, Jean-Jacques, Soph, Dupneu dit « le nase », Ben, Nestor, Pat, « La cigogne », les copains de Briançon, mes cheum's du Québec (Nadine, Richard, Nicole, Hansko, Kathy, Emilie, Caroline, Véronique, Jean-François, François<sup>2</sup>) ...

Je ne terminerai pas cette longue liste sans avoir cité ceux qui m'ont toujours soutenu dans mes différentes démarches depuis 27 ans : mes parents et ma famille. Cette thèse leur est dédiée.

... et puis un soir, à Poitiers, un chanteur a dit : « *Il y a un poète de chez nous qui disait : « Essayons d'être heureux, ne serait ce que pour montrer l'exemple ! », c'est pas si c...* ». Il a bien raison<sup>1</sup>.

---

1. Le poète, c'était Jacques Prévert.

# Notations générales

Remarques :

1. Il a été fait le choix de définir ici les notations générales utilisées dans ce mémoire.
2. Sauf indication contraire, les matrices sont notées en lettre majuscules grasses (ex : matrice **O**) et les vecteurs sont notés en lettre minuscules grasses (ex : vecteur **o**).
3. Au début de chaque chapitre, on présentera une table de notations et abréviations spécifiques. Sauf indication contraire, toute notation non redéfinie reste valable pour la suite du mémoire.

## Notations mathématiques générales

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel des vecteurs à composantes réelles de dimension $n$
$\mathbb{Z}$	Corps des entiers relatifs
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$L^2(\mathbb{R})$	Espace des fonctions de carré intégrable
$\triangleq$	Egal par définition

$\exists$	Symbole pour « il existe »
$\delta_{ij}$	Symbole de Kroenecker ( $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ )
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
$\oplus$	Somme orthogonale directe d'espaces vectoriels
$\cup_i^j$	Opérateur d'union de $i$ à $j$
$\sum_i^j$	Opérateur de sommation de $i$ à $j$
$\prod_i^j$	Opérateur de multiplication de $i$ à $j$
$t$	Variable de temps
$\tau$	Variable de temps réduit sur $[-1, 1]$
$\hat{f}$	Transformée de Fourier de $f$
$\bar{h}$	Conjugué complexe de $h$
$\mathbf{n}$	Normale d'une surface
$\text{sign}(\cdot)$	Fonction qui rend le signe de $(\cdot)$
$\max(\cdot, \cdot)$	Fonction qui donne le maximum des deux valeurs
sev	Sous-espace vectoriel

### Calcul matriciel et vectoriel

$\text{grad}(\cdot)$	Opérateur gradient (scalaire)
$\mathbf{grad}(\cdot)$	Opérateur gradient (vecteur)
$(\cdot) \wedge (\cdot)$	Produit vectoriel de deux vecteurs
$\ (\cdot)\ $	Norme euclidienne d'un vecteur
$\text{Trace}(\cdot)$	Trace d'une matrice (somme des éléments diagonaux)
$\det(\cdot)$	Déterminant d'une matrice carrée
$\mathbf{O}^T$	Matrice transposée de la matrice $\mathbf{O}$
$\mathbf{O}^{-1}$	Matrice inverse de la matrice $\mathbf{O}$
$\tilde{\mathbf{O}}$	Matrice de prémultiplication vectorielle par $\mathbf{o}$
$\mathbf{O}^+$	Matrice pseudo-inverse de la matrice $\mathbf{O}$
$\mathbf{I}$	Matrice identité
$\text{cond}(\cdot)$	Nombre de conditionnement d'une matrice pour une norme matricielle

# Introduction

Depuis la fin du siècle dernier, de nombreux chercheurs ont essayé d'étudier les mécanismes qui régissent la locomotion et les mouvements humains en général. Ceux-ci nous semblent particulièrement efficaces, mais posent cependant de nombreux problèmes lorsqu'on essaye d'approfondir la compréhension de l'ensemble des phénomènes sous-jacents à leur complexité naturelle. En particulier, l'étude des gestes sportifs, qui évoquent pour tous l'idée de mouvement par excellence, mouvement en général exercé avec puissance et vivacité, appelle une connaissance des mécanismes mis en jeu. A ce propos, notons d'ores et déjà que pour atteindre la pleine efficacité du geste, l'effort fourni peut se situer au voisinage des capacités physiologiques maximales, les efforts transmis pouvant atteindre des limites allant jusqu'aux seuils de lésion musculaire, ligamentaire ou osseuse. Une première remarque s'impose alors :

*Une détermination systématique et précise de ces efforts ne saurait être dissociée d'une connaissance réelle et approfondie du mouvement, de ses causes et de ses effets.*

Certes, Marey et Demeny [1], les deux précurseurs de ce type d'étude, ne disposaient pas des connaissances tant théoriques que pratiques qui leur auraient permis de réaliser une étude qualitative comme l'ont fait depuis de nombreux auteurs. Cependant leur démarche apparaît comme la plus novatrice, tant leur imagination les a conduit à un niveau de connaissance impressionnant. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces travaux par la suite.

Ainsi, ces deux auteurs ont sans doute posé les bases de ce que l'on appelle aujourd'hui la Biomécanique ou de ce que certains auteurs préfèrent appeler la « Mécanique Humaine » [2].

Les domaines d'application de cette discipline scientifique sont donc principalement liés aux domaines des sciences du vivant : chirurgie orthopédique, ergonomie, analyse de la performance sportive...

A ce propos, notons que l'ensemble du travail présenté dans ce mémoire s'appuie sur une collaboration pour les aspects expérimentaux avec l'équipe *Matériels et Matériaux à usage sportif* du Laboratoire de Métallurgie Physique (UMR 6611 CNRS) de l'Université de Poitiers.

Il nous a semblé propice, dans un travail s'inscrivant par ailleurs dans le groupe de recherche pluridisciplinaire sur le sport du CNRS (GDR CNRS 1094 Sport), de reconsidérer un certain nombre d'idées pérennisées en ce qui concerne l'analyse du mouvement humain autour d'un projet commun dont la problématique générale porte sur l':

### **Analyse de la dynamique interne des gestes sportifs**

Notons enfin, que si l'on peut trouver un champ d'application de ce travail autour de l'analyse énergétique d'un mouvement humain, les aspects liés à la dépense physiologique (consommation maximale d'oxygène, perte thermique, ...) ne seront pas évoqués dans ce travail qui peut être vue comme un préambule à ce type d'étude.

Aussi, nous présentons dans ce mémoire les principaux résultats acquis lors de notre travail en tenant compte du fait que les mouvements humains obéissent naturellement aux lois de la mécanique et plus particulièrement à celles de la dynamique des systèmes multi-corps. Celles-ci décrivent la manière dont se conjuguent les efforts articulaires, les inerties segmentaires, la gravité et les efforts d'appui pour engendrer le mouvement observé. Les méthodes de calcul qui sont présentées reposent sur la mise en oeuvre de ces lois, afin de procéder à une analyse quantitative du phénomène physique qu'est le mouvement, en termes d'énergie dépensée et d'efforts délivrés. Nous proposons deux approches distinctes pour aboutir à deux bilans se recouvrant partiellement : une analyse globale fondée sur l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique et une analyse locale qui met en oeuvre les lois classiques de la dynamique.

L'objectif central de notre travail est donc de développer une méthodologie associant acquisition de données sur le mouvement et modélisation dynamique, pour aboutir à la détermination de toutes les composantes d'efforts articulaires, qu'il s'agisse :

- d'une part, de l'effort actionneur musculo-tendineux qui génère et contrôle le mouvement ;
- d'autre part, des composantes d'efforts passifs intersegmentaires qui ne travaillent pas, mais que l'articulation et les segments qu'elles rattachent doivent avoir la capacité de supporter, en torsion et flexion notamment.

Outre cette introduction et la conclusion, ce mémoire est composé de quatre chapitres et sept annexes.

- Dans le premier chapitre, après une étude non exhaustive des aspects bibliographiques relatifs à l'analyse expérimentale des mouvements humains, des précurseurs jusqu'à nos jours, nous introduisons les outils et les prérequis nécessaires à l'étude de quelques mouvements. Nous verrons ainsi que les problèmes liés au traitement des données expérimentales conduisent obligatoirement à une étude comparative des différentes techniques utilisées. Nous introduisons alors la technique d'analyse multi-résolution par transformation en ondelettes (les bases théoriques de la transformation ondelette faisant l'objet de l'annexe A). Initialement conçue pour le domaine de la compression de données, cette technique nous a semblé apporter une vision aussi bien nouvelle que séduisante dans le traitement et le filtrage des signaux rencontrés, tout en présentant des performances intéressantes.
- Dans le deuxième chapitre, nous mettons en place les aspects théoriques de la résolution du problème dynamique inverse lors de la réalisation d'un geste. Nous proposons de plus quelques remarques sur la dynamique des systèmes à boucles cinématiques fermées et présentons une méthodologie générale d'analyse dynamique des mouvements en mettant en place les moyens expérimentaux de validation des résultats obtenus. Nous donnons aussi quelques définitions relatives aux calculs énergétiques (au sens mécanique du terme).
- Le troisième chapitre est consacré à la présentation de résultats pour différents types de mouvements que nous qualifierons de mouvements de référence : la flexion-extension, la marche et le pédalage. Les développements spécifiques à chaque application seront présentés, notamment en ce qui concerne les protocoles expérimentaux, ainsi que les démarches et les différentes étapes concernant la résolution pratique. Nous abordons les problèmes de sensibilité du modèle dynamique à des perturbations sur les données d'entrées.
- Dans le quatrième chapitre, nous appliquons les principes de l'optimisation dynamique de robots manipulateurs à la simulation de mouvements optimaux au sens de l'énergie pour la flexion-extension. La durée de cycle est spécifiée dans le processus d'optimisation. Nous comparons alors les mouvements réels obtenus dans le précédent chapitre et ceux simulés, afin d'étudier les critères d'optimalité lors de la réalisation de mouvements humains.

Dans la conclusion nous synthétisons les résultats acquis au cours de cette étude pour déboucher sur un ensemble de perspectives que ce travail pourrait susciter.

# Chapitre I

## Etude expérimentale du mouvement : acquisition et traitement des données

*Nous présentons dans ce chapitre les outils expérimentaux de l'analyse du mouvement humain. Pour le traitement des données cinématiques, nous introduisons les techniques d'analyse multi-résolution au travers d'une étude comparative entre différentes méthodes de lissage et filtrage.*

*Un petit pas pour l'homme, mais un grand pas pour l'humanité.*

*Neil Armstrong, Satellite Lune, 20 Juillet 1969.*

## Notations et abréviations

$\Gamma$	Vecteur des couples actionneurs articulaires
$M$	Marqueurs anatomiques
DLT	Abréviation pour <i>Direct Linear Transformation</i>
$L_i$	Coefficients de reconstruction 3-D de la DLT
$f_s$	Fréquence d'échantillonnage d'un signal
$f_c$	Fréquence de coupure d'un filtre passe-bande
Res	Résidu
$\mu_{ij}$	Constante pour les ajustements par lissage
$G_j(t)$	Fonction de lissage
$B_i(x)$	Fonction spline
$T(\tau)$	Polynôme de Chebychev
$\phi(t)$	Fonction ondelette d'échelle (ou Père)
$h_k$	Coefficient d'ondelette d'échelle
$\psi(t)$	Fonction ondelette mère
$g_k$	Coefficient d'ondelette mère
$V_j$	Espace de tendance en analyse multi-résolution
$W_j$	Espace de détail en analyse multi-résolution
$m_0(\omega)$	Filtre passe-bas en analyse multi-résolution
$m_1(\omega)$	Filtre passe haut en analyse multi-résolution
$\alpha_{jk}$	Coefficient de décomposition ondelette en tendance
$\beta_{jk}$	Coefficient de décomposition ondelette en détail
$P_0$	Centre de pression d'un contact unilatéral et plan
LED	Abréviation désignant une diode electro-luminescente
GCV	Abréviation pour <i>Generalized Cross Validatory</i>
EMG	Abréviation pour Electromyographie
(SVD)	Abréviation pour <i>Singular Value Decomposition</i>
(FT)	Abréviation pour la Transformation de Fourier
(FFT)	Abréviation pour la Transformation de Fourier Rapide
(WT)	Abréviation pour la Transformation Ondelette

- (CWT) Abréviation pour la Transformation Ondelette Continue
- (DWT) Abréviation pour la Transformation Ondelette Discrète

## **I.1 Introduction**

Lorsque l'on se propose d'étudier un mouvement humain, et donc sa « dynamique », de nombreux problèmes viennent s'ajouter à ceux que l'on rencontre traditionnellement en mécanique. Certains ne sont pas spécifiques à la nature du problème traité. Citons par exemple le nécessaire mais difficile choix d'un modèle représentatif, la constitution d'une base de données à l'aide d'un dispositif expérimental et aussi le traitement de ces mêmes données. Par contre, dès que l'on aborde le domaine du vivant, de nombreuses contraintes, inhérentes à cette discipline, rendent un peu plus complexes toutes les opérations de traitement. Les protocoles expérimentaux spécifiques à ce type d'étude deviennent par la même occasion plus difficiles à mettre en place et sont souvent la source d'incertitudes.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'analyse et à l'étude bibliographique des systèmes expérimentaux d'analyse du mouvement humain, préambule indispensable à notre recherche et base de la description de notre propre protocole expérimental.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la présentation et à la mise en place de techniques de traitement des données issues des dispositifs expérimentaux. Nous introduisons alors les concepts liés à l'analyse multi-résolution que nous validons sur des données issues de la littérature.

Avant de décrire en conclusion de ce chapitre notre propre approche, nous étudions les différentes possibilités concernant l'identification des paramètres anthropométriques nécessaires à la construction des grandeurs physiques que nous utilisons dans les calculs ultérieurs.

## **I.2 Les techniques expérimentales d'analyse du mouvement**

### **I.2.1 Un aspect historique marquant**

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction générale, l'oeuvre la plus marquante concernant l'étude des mouvements humains est historiquement celle des français Jules Marey, le physiologiste, et George Demeny [1], l'ingénieur. Ces deux auteurs sont les précurseurs de « l'explication mécanique » de nombreux mouvements athlétiques : marche, course, saut, lancer. Ils ont été les premiers à appliquer la démarche des sciences physiques à l'analyse du mouvement et ont imaginé les principaux moyens techniques appropriés à l'étude des mouvements athlétiques.

Ils ont ainsi réalisé les premières inscriptions chronophotographiques du mouvement

des sportifs à l'aide de deux techniques : la chronophotographie sur plaque fixe, puis sur plaque ou pellicule mobile.

Marey et Demenÿ ont également proposé dès la fin du siècle dernier une première plate-forme de force (figure I.1) qui permettait une mesure tout à fait correcte des efforts d'appuis lors d'un contact pied/sol. La figure I.2 montre l'évolution des efforts normaux dans différentes allures.

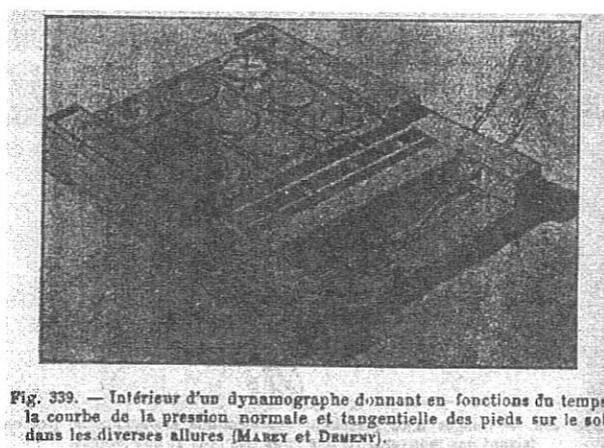


Fig. 339. — Intérieur d'un dynamographe donnant en fonctions du temps la courbe de la pression normale et tangentielle des pieds sur le sol dans les diverses allures (MAREY et DEMENÿ).

FIGURE I.1 - La première plate-forme de force

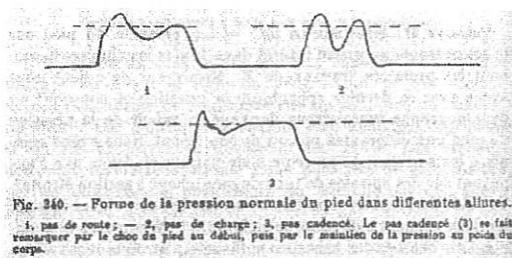


Fig. 340. — Forme de la pression normale du pied dans différentes allures. 1, pas de route; — 2, pas de charge; 3, pas cadencé. Le pas cadencé (3) se fait remarquer par le choc de pied au début, puis par le maintien de la pression au poids du corps.

FIGURE I.2 - Evolution de l'effort normal

Ils ont ainsi été les premiers à étudier le phénomène d'impulsion de la force de réaction au sol subie par un athlète. Cependant, n'abordant pas le concept de système articulé, les interprétations fournies étaient erronées, comme l'ont constaté et corrigé Duboy et al. [3], tout en remarquant la justesse de l'approche de Marey et Demenÿ concernant la notion de quantité de mouvement.

Enfin, ils avaient compris la nécessité d'une étude simultanée de la cinématique et de la dynamique des mouvements.

La figure I.3 illustre bien cette remarque. On y voit un kinogramme (représentation et décomposition filaire d'un mouvement) associée à une courbe dynamométrique d'un pas de marche.

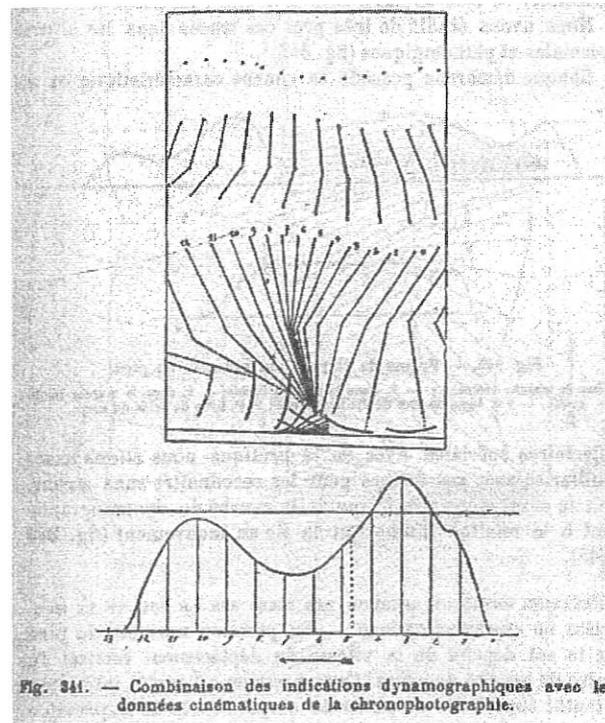


FIGURE I.3 - Etude cinématographique et dynamique d'un pas de marche

Pour conclure cette brève évocation du travail de Marey et Demenÿ, soulignons que l'étape importante franchie dans l'histoire de la Biomécanique par ces deux auteurs a permis un passage de l'empirisme à la méthode scientifique [3]. Les concepts fondamentaux, tel que la notion de centre de gravité et de quantité de mouvement, pourtant définis plus de 200 ans avant Marey-Demenÿ, ont pu être étudiés sur la « machine humaine ». Le concept d'impulsion d'une force a vu le jour.

### I.2.2 Analyse dynamographique

Suivant la démarche introduite par les deux précurseurs français Marey et Demenÿ, nous utilisons l'outil plate-forme de force pour l'étude dynamique des mouvements humains. Nous donnons, dans les chapitres 2 et 3 quelques indications adaptées à la problématique à traiter concernant l'utilisation pratique de cet outil. Nous présentons dans ce paragraphe les caractéristiques technologiques d'une plate-forme de force. On peut retrouver

certaines des informations qui vont être développées par la suite dans [4] pour le cas d'une application à l'étude des gestes sportifs.

Une plate-forme de force est constituée d'un cadre métallique, châssis de base, sur lequel sont montés, sous précontraintes élevées, des capteurs de force piézorésistifs triaxiaux. Une plaque supérieure rigide de contact vient surmonter le châssis de base.

Les signaux délivrés par celle-ci sont donc représentatifs des 6 composantes du tenseur des forces de contact pied/plate-forme. Les constructeurs de certaines plate-formes ont choisi de prendre en considération :

- les trois composantes de la résultante des actions de contact pied/sol ;
- les deux coordonnées du centre de pression ;
- le moment suivant la normale au centre de pression.

L'objet de ce paragraphe est de présenter l'équivalence de formulation entre ces deux groupes de grandeurs.

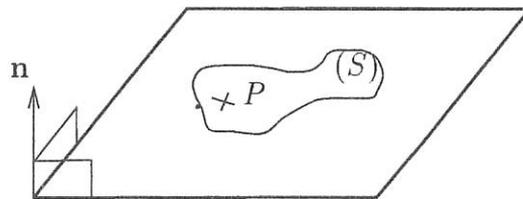


FIGURE I.4 - *Contact unilatéral et plan*

Lors du passage du sujet testé sur une plate-forme, le contact est unilatéral et plan (figure I.4). On peut alors décomposer le tenseur des efforts de contact. En effet, la densité surfacique de ces efforts s'écrit pour tout point  $P \in (S)$  :

$$\sigma(P) = \nu(P)\mathbf{n} + \tau(P) \quad (\text{I.1})$$

avec :

$$\nu(P) \geq 0 \text{ et } \tau(P) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.2})$$

La première expression traduit la condition d'unilatéralité du contact.

Ce champ de force surfacique engendre un tenseur dont la résultante se décompose en la somme de deux intégrales :

$$\mathbf{R} = \left( \int_{P \in S} \nu(P) dS \right) \cdot \mathbf{n} + \int_{P \in S} \tau(P) dS \quad (\text{I.3})$$

qui aboutit à la décomposition :

$$\mathbf{R} = N\mathbf{n} + \mathbf{T} \quad (\text{I.4})$$

avec  $N \geq 0$  et  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Le premier terme est une force de pression et le deuxième une force d'adhérence.

Le moment en un point quelconque Q admet une décomposition similaire en deux intégrales :

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}) = \left( \int_{P \in S} \nu(\mathbf{P}) \mathbf{QP} dS \right) \wedge \mathbf{n} + \int_{P \in S} \mathbf{QP} \wedge \boldsymbol{\tau}(\mathbf{P}) dS \quad (\text{I.5})$$

où le premier terme est le moment en Q des efforts de pression, orthogonal à  $\mathbf{n}$ , et le deuxième est le moment en Q des efforts d'adhérence, porté par  $\mathbf{n}$ .

Le torseur des efforts de contact est ainsi décomposé en la somme d'un torseur d'efforts de pression et d'un torseur d'efforts d'adhérence.

Le premier est un glisseur (invariant scalaire nul et résultante non nulle) dont l'axe est orthogonal à la surface d'appui. Son moment est nul sur cet axe et en particulier au point d'intersection avec la plate-forme. En ce point particulier, qu'il est convenu d'appeler centre de pression, noté dans la suite  $P_0$  (point en lequel le moment des efforts de pression est nul, ou encore, point en lequel le moment des efforts de contact est normal à la plate-forme), le moment des efforts de contact est donc représenté par le moment des efforts d'adhérence qui est porté par la normale, soit :

$$\mathbf{M}(P_0) = M_0 \mathbf{n} \quad (\text{I.6})$$

Sans préjuger du type de matériel utilisé pour l'acquisition dynamographique, nous présentons maintenant la méthodologie pratique de calcul des composantes du torseur de contact à partir de la mesure.

Si l'on dispose de  $k$  capteurs tri-dimensionnels de coordonnées  $\mathbf{p}_i = (u^i, v^i, w^i)^T$ , dans le repère  $\mathcal{R}_p$  lié à la plate-forme, et donnant le vecteur  $\mathbf{F}^i = (F_x^i, F_y^i, F_z^i)^T$  de composantes des efforts de contact, alors le torseur des efforts d'appui exprimé au centre de la plate-forme a pour expression :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}^i \iff \begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^k F_x^i \\ R_y = \sum_{i=1}^k F_y^i \\ R_z = \sum_{i=1}^k F_z^i \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^k \mathbf{M}^i \iff \begin{cases} M_x = \sum_{i=1}^k (v^i F_z^i - w^i F_y^i) \\ M_y = \sum_{i=1}^k (w^i F_x^i - u^i F_z^i) \\ M_z = \sum_{i=1}^k (u^i F_y^i - v^i F_x^i) \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on préfère donner l'expression des coordonnées du centre de pression et du moment d'adhérence en ce point. Si on admet que  $P_0$  a pour coordonnées  $\mathbf{p} = (a, b, c)^T$  dans  $\mathcal{R}_p$  et si on utilise la relation :

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}) = M_0 \mathbf{n} + \mathbf{O}P_0 \wedge \mathbf{R} \quad (\text{I.9})$$

alors, comme la cote  $c$  du centre de pression est connue, il suffit de résoudre un système de 3 équations aux 3 inconnues  $a$ ,  $b$  et  $M_0$ . La solution s'écrit simplement :

$$\begin{cases} a &= \frac{cR_x - M_y}{R_z} \\ b &= \frac{M_x + cR_y}{R_z} \\ M_0 &= M_z + bR_x - aR_y \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Pour conclure avec cette courte présentation sur cet outil, rappelons que celui-ci permet d'obtenir une information sur la résultante « externe » des efforts appliqués. En outre, Lacouture [4] puis Mouhaid [5] ont montré l'importance d'un bon réglage des plateformes de force afin d'éviter des dérives sur le signal enregistré.

### I.2.3 Analyse cinématique

Nous avons rappelé au travers d'un exemple historique, que l'étude complète du mouvement humain, de sa dynamique en particulier, nécessite l'acquisition préalable des données cinématiques de ce même mouvement. Bien évidemment, les techniques et dispositifs permettant de réaliser cette opération sont en perpétuelle évolution ; surtout depuis l'avènement de l'outil informatique avec les puissances de calcul et les facilités d'acquisition qu'il fournit. Nous présentons ci-après les systèmes existants les plus performants.

En fait, l'idée qui s'impose naturellement pour acquérir de manière précise la cinématique d'un mouvement est de faire appel aux techniques de la radiologie. Celles-ci permettent de rendre compte de façon très précise les mouvements internes des os. Tison [6] utilise cette technique au début des années 80 afin de réaliser une étude expérimentale et une modélisation des déplacements du radius et du cubitus au cours du mouvement de supination. Pour ce faire, il allie la théorie sur les déplacements finis des solides à la technique photogrammétrique. Cependant la radiologie est une technique trop agressive pour en faire un outil d'utilisation systématique. De plus, cette technique est limitée à l'étude de configurations statiques et présente donc peu d'intérêt pour des études où la connaissance de la cinématique du mouvement est primordiale.

Une autre possibilité consiste à utiliser des accéléromètres [7] qui enregistrent les accélérations dans une direction. Le principal problème de cette technique provient du nombre

important d'accéléromètres qu'il faudrait utiliser dans le cas d'une analyse 3-D du mouvement, et donc du coût prohibitif. On verra dans le prochain chapitre une utilisation pratique de cette technique pour la validation d'un protocole expérimental.

Certains auteurs [8, 9] ont tenté d'utiliser des goniomètres qui enregistrent en temps réel la position angulaire entre les segments. Généralement, ce sont des appareils encombrants n'offrant pas toute la précision nécessaire aux études à réaliser. De plus, leur complexité et les contraintes sous-jacentes à leurs installations rendent l'utilisation de ce type d'appareillage difficile, surtout dans le cas de l'analyse de mouvements articulaires à plusieurs degrés de mobilité.

Ainsi, depuis quelques années, se sont développés des dispositifs opto-électroniques, basés sur le principe de l'acquisition (en temps réel ou non) de la position de marqueurs actifs ou passifs répartis en des points anatomiques précis du corps. Grâce à la connaissance de la position de ces marqueurs, on peut reconstruire assez facilement un modèle représentatif du sujet testé. Notons que deux écoles s'affrontent : celle qui utilise des marqueurs actifs (le plus souvent des LED) et celle qui préfère des marqueurs passifs (des petites sphères recouvertes de Scotch-Lite). Chacune des deux méthodes possédant ses avantages et ses inconvénients, il ne nous est pas possible d'indiquer un choix préférentiel.

Les systèmes d'acquisition du mouvement les plus courants peuvent être classés en trois principaux groupes :

1. Les systèmes utilisant des marqueurs actifs : SELSPOT (Selspot AB, Molndal, Sweden) et OPTOTRACK (Northern Digital Inc, USA). Ce dernier est aussi utilisé en robotique dans le domaine de la calibration des robots. Ces systèmes présentent l'inconvénient de perturber le sujet lors de l'expérimentation et le nombre de fils d'alimentation présents empêche de réaliser des mouvements trop complexes sur des distances importantes.
2. Les systèmes utilisant des marqueurs passifs que l'on peut rediviser en deux sous-groupes :
  - (a) Les systèmes qui identifient les trajectoires planes puis reconstruisent les coordonnées 3-D par identification entre les plans de chaque caméra : ELITE (Bioengineering Tech. and Systems, Milan, Italy) [10], SAGA3 (Université de Valenciennes et du Haut-Cambresis, France) [11, 12].
  - (b) Les systèmes qui calculent directement les coordonnées spatiales de chaque marqueur : VICONVX (Oxford Metrix Ltd, Oxford, UK) et MOTION ANALYSIS (Motion Analysis Corp., Santa Rosa, USA), ARIEL (Ariel Dynamics Inc.). La

figure I.5 montre le système du Laboratoire d'Etude du Mouvement de l'Hôpital Sainte-Justine pour Enfants de Montréal (on peut voir 4 caméras parmi les 8 nécessaires pour l'acquisition bilatérale et simultanée du mouvement).



FIGURE I.5 - *Système d'acquisition du mouvement de Montréal*

3. Les systèmes morphologiques : le plus souvent, ce sont des systèmes à l'état de recherche en laboratoire [13, 14]. Ils utilisent des techniques de traitement d'images et de morphologie, avec des connaissances a priori sur le type de mouvement et l'anatomie, et calculent alors les trajectoires 3-D des centres articulaires. Ils peuvent être actif ou passif.

Pour les deux premiers types de système, la méthode la plus utilisée pour reconstruire la position spatiale de chaque marqueur est la DLT (*Direct Linear Transformation*) [15, 16]. Cette méthode nécessite au préalable l'acquisition vidéo d'un objet dit « de calibrage » sur lequel sont placés des marqueurs en positions connues. L'objet de calibrage servira donc à l'étalonnage de la DLT. La précision de cette reconstruction est liée à la qualité du matériel utilisé (résolution des caméras, méthodes de détermination de la position du centre des marqueurs, correction de la distorsion de l'image, ...).

La figure I.6 représente l'objet de calibrage utilisé dans le laboratoire de Montréal (fils suspendus munis de marqueurs réfléchissants et étalonnés avec précision).

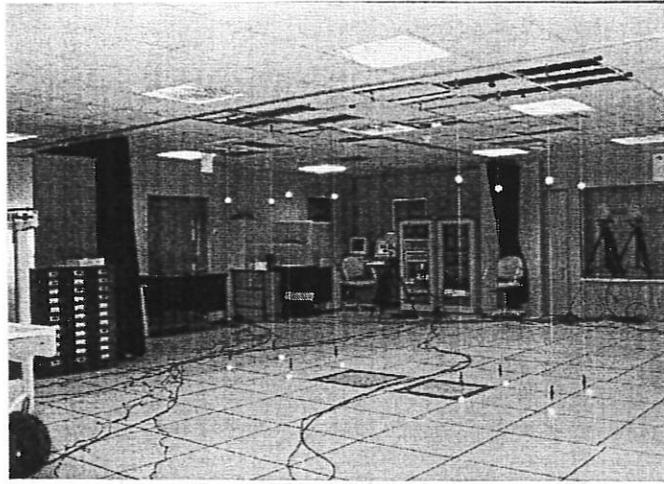


FIGURE I.6 - Etalonnage d'un système d'analyse du mouvement

#### I.2.4 Principe de la reconstruction 3-D par la DLT

La méthode de la DLT permet d'identifier le positionnement des sources vidéographiques par l'intermédiaire de 11 coefficients  $L_i$  qui définissent la transformation linéaire entre les coordonnées d'un objet dans l'espace 3-D et celles de ses images 2-D dans le plan image de chaque caméra. Initiée par Abdel-Aziz [15], reprise par Marzan [16] et améliorée par Hatze [17], cette méthode est incontestablement la technique de reconstruction 3-D la plus utilisée. Notons aussi la généralisation de cette technique à la détermination des paramètres cinématiques spatiaux des différents segments par Miller [18].

Pour ce faire, il faut mettre en oeuvre une procédure dite de « calibration » utilisant des points de contrôle positionnés précisément dans l'espace de travail. Il suffit de deux caméras qui voient en même temps le même objet pour effectuer la transformation. Cette technique repose sur les deux relations suivantes :

$$x + \delta x + \Delta x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \quad (\text{I.11})$$

$$y + \delta y + \Delta y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \quad (\text{I.12})$$

où :

- $X, Y, Z$  sont les coordonnées cartésiennes (connues) du marqueur  $M$  dans l'espace du laboratoire ;
- $x, y$  sont les coordonnées 2-D, dans le plan image de la caméra, du marqueur  $M$  ;

- $\delta x, \delta y$  sont les coefficients de distorsion ;
- $\Delta x, \Delta y$  sont les erreurs aléatoires du point image ;
- $L_i, i = 1, \dots, 11$  sont les 11 paramètres DLT.

Le problème étant de déterminer les coefficients  $L_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ), il faut donc, d'après les équations (I.11, I.12) au moins 6 marqueurs distincts pour effectuer cette identification. En effet, pour déterminer ces 11 coefficients, il faut au moins 11 équations. 6 marqueurs de coordonnées distinctes fourniront donc 12 équations. La résolution du système ainsi formé donnera donc les valeurs numériques des coefficients  $L_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ) par la méthode des moindres carrés.

Certains auteurs [19] ont montré que la précision dans la détermination des 11 paramètres est meilleure si on augmente le nombre de marqueurs (il faut alors résoudre le système d'équations au sens des moindres carrés). San-Marcellino [20] a montré que pour le système MOTION ANALYSIS, la précision de reconstruction est de l'ordre de 1 mm lorsqu'un marqueur a un mouvement à l'intérieur du volume défini par l'objet de calibration et de l'ordre de 2 à 3 mm (voire 7 à 9 mm) lorsque le mouvement est à l'extérieur de ce volume. Cette remarque est confirmée par Wood [21]. De plus, Frossard [22] a montré que pour le système MOTION ANALYSIS de Montréal la précision absolue (RMS) de la reconstruction est de 2,5 mm sur l'axe médiolatéral (la profondeur) et de 1,5 mm sur les axes antéropostérieur et vertical. L'erreur relative déterminée à partir de la position de deux points de repère connus est moins d'un millimètre. Cela met bien en évidence les imprécisions supplémentaires de reconstruction pour la 3<sup>e</sup> dimension. Woltring [23] a émis quelques réserves sur de telles procédures de calibration et propose une nouvelle approche en utilisant un objet de calibrage « plan » disposé dans plusieurs configurations.

## I.3 Le traitement des données cinématiques

### I.3.1 Position du problème

Rappelons l'objet principal de notre étude : l'analyse dynamique et énergétique des mouvements humains. Sur un plan théorique, cela correspond à la résolution du problème dynamique inverse et à la mise en oeuvre d'un modèle dynamique de la structure polyarticulée que constitue le corps humain, modèle de la forme :

$$\Gamma = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \quad (\text{I.13})$$

où :

- $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)^T$  est le vecteur des couples actionneurs ;

- $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  est le vecteur des paramètres articulaires ;
- $n$  est le nombre de degrés de mobilité du modèle représentatif du mouvement réalisé ;
- $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  sont respectivement les vecteurs des vitesses et des accélérations articulaires.

Il est donc nécessaire de construire ces grandeurs cinématiques  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  à partir des données expérimentales que sont les coordonnées cartésiennes  $(x_k, y_k, z_k)$  de l'ensemble des marqueurs  $M_k(t)$  disposés aux points anatomiques adéquats.

Le vecteur des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}(t)$  est donc de la forme :

$$\mathbf{q}(t) = g(M_1(t), M_2(t), \dots, M_m(t)) \quad (\text{I.14})$$

où  $m$  est le nombre de marqueurs disposés sur le corps du sujet testé. Nous n'indiquons pas ici la description de la procédure pour obtenir l'évolution temporelle de ces paramètres ; technique spécifique à chaque geste et donc à chaque modèle étudié.

De plus, il est nécessaire de dériver deux fois par rapport au temps les paramètres articulaires  $q_i(t)$ . On peut donc s'attendre à ce que le bruit inhérent à la mesure vienne perturber cette double opération mathématique. La qualité de l'approximation des données bruitées et donc des dérivées conditionneront une réponse « correcte » du modèle dynamique, modèle fonction de ces dérivées successives. Généralement les bruits de mesure sont de trois types :

- bruit de numérisation par le système de traitement d'images ;
- bruit de reconstruction 3-D par la technique de la DLT ;
- bruit dû au mouvement relatif du marqueur sur la peau lors de l'exécution du mouvement.

Un moyen d'éviter ces problèmes est de réduire l'évolution temporelle des paramètres articulaires à une expression mathématique, telle que polynômes ou autres [24]. Cependant on ne peut pas être certain de rendre compte de la réalité du mouvement réalisé et il devient alors indispensable de réaliser une opération de filtrage et/ou de lissage sur les données bruitées. De nombreux auteurs se sont interrogés sur la pertinence de différentes méthodes, sans pour autant pouvoir affirmer la supériorité de l'une sur les autres. Il devient alors très difficile de choisir parmi l'ensemble des méthodes proposées celle qui donnera de bons résultats pour chaque séquence de mouvement analysée.

On remarquera enfin que le fait de réduire la description de la cinématique du mouvement à  $n$  paramètres articulaires  $q_i(t)$  diminue considérablement le nombre d'opérations de traitement des données expérimentales (par exemple dans le cas 2-D pour la marche  $n = 7$ , alors qu'il faudrait  $m = 16$  coordonnées cartésiennes).

### I.3.2 Etat de l'art

Dans le domaine du traitement des signaux en biomécanique du mouvement, Winter est l'un des premiers à s'être intéressé à ce problème. Dès le début des années 70 [25], il propose une analyse en fréquence des signaux issus d'un système vidéo et repère que pour un pourcentage très élevé, ceux-ci ont des composantes de fréquence situées jusqu'au 8<sup>e</sup> harmonique au maximum. Il met en place une méthode de filtrage basée sur l'utilisation d'un filtre de Butterworth (filtre à réponse impulsionnelle infinie) avec une fréquence de coupure du filtre à 6 Hz. Il compare alors les dérivées successives du signal avec et sans opération de filtrage et constate le bon comportement du filtre introduit. Notons aussi que pour éviter le déphasage du signal dû au filtre de Butterworth, il effectue un double passage du filtre avant et arrière.

Pezzack [26] poursuit dans la même direction et propose un signal test. Il compare l'utilisation d'un filtre de Butterworth et d'un lissage par polynômes de Chebychev avec les données accélérométriques enregistrées relatives au signal test. Il note la bonne correspondance des résultats par filtre de Butterworth avec l'enregistrement analogique de l'accélération. Ce signal test servira désormais de signal de référence pour la majorité des études liées à la mise en oeuvre de techniques de lissage ou filtrage de signaux dans le domaine de la biomécanique. La figure I.7 montre l'évolution de ce signal.

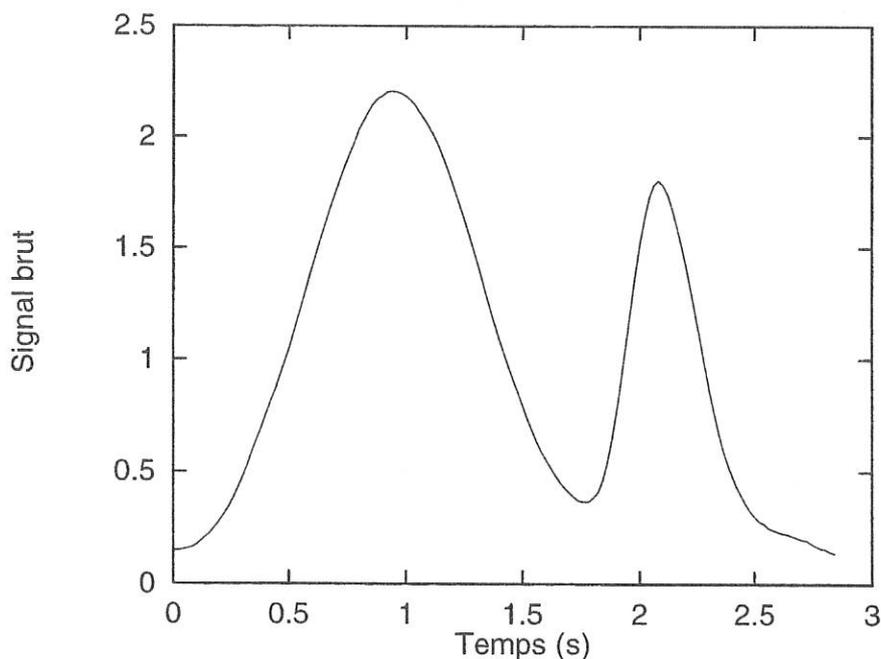


FIGURE I.7 - *Le signal de Pezzack*

Nous présentons maintenant succinctement le filtre de Butterworth. Celui-ci fait partie de la catégorie des filtres récurrents, appelés aussi filtres à réponse impulsionnelle infinie. La forme générale d'un tel filtre est donnée par la relation ci-dessous où  $q_i^s$  est le paramètre traité par le filtre :

$$q_i^s(t_k) = \sum_{j=0}^m a_j q_i(t_{k-j}) - \sum_{j=1}^{m'} b_j q_i^s(t_{k-j}) \quad (\text{I.15})$$

L'intérêt particulier de ce filtrage réside dans la réalisation d'un double passage du filtre en avant et en arrière afin d'éliminer les déphasages temporels du signal résultant. En effet, pour un filtre du second ordre, il y a un déphasage de  $90^\circ$  entre la sortie et l'entrée, ce qui amène une distorsion de phase. Pour annuler ce retard de phase, les données filtrées une première fois sont à nouveau filtrées en remontant le temps. La fréquence de coupure du filtrage « à rebours » est la même fréquence multipliée par le coefficient 0,802.

En fait, la forme du filtre d'ordre 4 utilisé est :

$$q_i^s(t_k) = a_0 q_i(t_k) + a_1 q_i(t_{k-1}) + a_2 q_i(t_{k-2}) + b_1 q_i^s(t_{k-1}) + b_2 q_i^s(t_{k-2}) \quad (\text{I.16})$$

et les coefficients  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$  sont calculés comme suit :

- $\omega_c = \tan \frac{\pi f_c}{f_s}$  avec  $f_s$ , fréquence d'échantillonnage et  $f_c$  fréquence de coupure ;
- $K_1 = \sqrt{2}\omega_c, K_2 = \omega_c^2$  ;
- $a_0 = a_2 = \frac{K_2}{1+K_2+K_1}, a_1 = 2a_0$  ;
- $K_3 = \frac{2a_0}{K_2}$  ;
- $b_1 = -2a_0 + K_3$  et  $b_2 = 1 - 2a_0 - K_3$ .

On se rend bien compte de l'importance du choix de la fréquence de coupure qui détermine la « qualité » du filtre.

Lanshammar [27, 28] utilise le signal de Pezzack dès le début des années 80 pour proposer une méthode d'évaluation des techniques de dérivation dans l'analyse des données cinématiques des mouvements humains. Il introduit l'utilisation d'un lissage au sens des moindres carrés par polynômes de degrés différents et propose d'ajouter un bruit sur le signal de Pezzack, afin de mesurer la qualité des opérations de filtrage/lissage, puis de dérivation. En effet, il trouve que les données de référence de Pezzack sont « trop bonnes » pour pouvoir évaluer correctement des différences sensibles entre les méthodes.

Parallèlement à ce travail, Vaughan [29] compare un filtre digital à un lissage par des splines d'ordre 3 et 5 pour le traitement et la détermination de l'accélération d'une

balle tombant en chute libre dans l'atmosphère; l'accélération de cette balle devant être bien sûr égale à celle due à la pesanteur. Il indique alors que la meilleure solution pour traiter un signal est certainement l'utilisation d'un lissage par des splines d'ordre 5. Il remarque aussi que la mise en oeuvre d'un filtre digital nécessite l'augmentation du signal aux extrémités afin d'éviter les effets de bord.

Peu après, l'avancée la plus notoire dans ce domaine a été l'introduction par Woltring [30, 31] d'une méthode de lissage par des fonctions B-Splines optimisées couplée à un critère de sélection du paramètre de lissage  $p^1$  basé sur l'utilisation d'un principe de régularisation.

Woltring propose de traiter les courbes expérimentales comme des combinaisons linéaires de fonctions B-Splines de degré 3, 5, 7. Une telle démarche repose, d'une part, sur l'introduction d'une base de B-splines ( $\mathbf{B}_j(x) : j = 1, \dots, n$ ) conduisant à utiliser des combinaisons linéaires du type :

$$s_p(x) = \sum_{i=1}^n c_{pi} B_i(x) \quad (\text{I.17})$$

et d'autre part, sur la minimisation du critère :

$$C_p = \sum_{i=1}^n w_i \{y_i - s_p(x_i)\}^2 + p \int_{-\infty}^{+\infty} |s_p^{(m)}(x)|^2 dx \quad (\text{I.18})$$

Si on introduit les notations :

- $\mathbf{W} = \text{diag}(w_i)$ , matrice diagonale de pondération ;
- $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ , vecteur de données bruitées ;
- $\mathbf{c}_p = (c_{p1}, \dots, c_{pn})^T$ , vecteur de coefficients de spline ;
- $\mathbf{s}_p = (s_p(x_1), \dots, s_p(x_n))^T$ , vecteur spline aux points considérés.

Cette approche revient à résoudre pour un  $p$  donné le système :

$$(\mathbf{B} + p\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E})\mathbf{c}_p = \mathbf{y} \quad (\text{I.19})$$

où  $\mathbf{B}$  est une matrice carrée  $[n, n]$  de largeur de bande  $2m - 1$  d'éléments  $b_{ij} = \mathbf{B}_j(x_i)$  et  $\mathbf{E}$  est une matrice carrée  $[n, n]$  de largeur de bande  $2m + 1$  dont les éléments sont des fonctions des contraintes de dérivation de (I.18).

---

1. si  $p = 0$  on effectue une interpolation, si  $p \rightarrow \infty$  on effectue un lissage polynomial de degré  $m$  au sens des moindres carrés

L'apport de Woltring réside dans l'utilisation d'un critère de lissage appelé *GCV*. Ce principe repose sur la minimisation de la fonction :

$$V_p \triangleq \frac{R_p}{Q_p^2} \quad (\text{I.20})$$

où l'erreur résiduelle  $R_p$  est de la forme :

$$R_p \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i [y_i - s_p(x_i)]^2 \simeq \sigma^2 \quad (\text{I.21})$$

De plus :

$$Q_p \triangleq \frac{1}{n} \text{Trace}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_p) \quad (\text{I.22})$$

où la matrice d'influence  $\mathbf{A}_p$  a pour définition :

$$\mathbf{A}_p \triangleq \frac{\partial \mathbf{s}_p}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{B}(\mathbf{B} + p\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E})^{-1} \quad (\text{I.23})$$

Woltring démontre dans [31] que  $V_p$  est minimum quand :

$$V_p \cong T_p + \sigma^2 \quad (\text{I.24})$$

ce qui revient finalement à :

$$\hat{T}_p = \frac{1}{2} \frac{R_p(1 - Q_p)}{Q_p^2} \quad (\text{I.25})$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{2} \frac{R_p(1 + Q_p)}{Q_p^2} \quad (\text{I.26})$$

Woltring a démontré l'équivalence de cette méthode avec l'utilisation d'un filtre passe-bas du second ordre de type Butterworth. L'avantage d'utiliser les B-Splines est bien entendu de pouvoir réaliser une opération de dérivation exacte car on connaît a priori la formulation analytique du signal lissé. Cette démarche a été complétée par la suite par Dohrmann [32] qui apporte une meilleure sélection du paramètre de lissage en utilisant la programmation dynamique.

Dans la poursuite de la mise en oeuvre de filtres à réponse impulsionnelle infinie ou finie (FIR ou FII), Barr [33] propose une analyse systématique du calcul de tels filtres pour des applications dans le domaine biomédical telles que l'EMG.

Winter met alors en place une méthode de sélection automatique de la fréquence de coupure du filtre de Butterworth par analyse résiduelle [34]. On calcule :

$$\text{Res} = f(f_c) \quad (\text{I.27})$$

avec  $N$  comme nombre d'échantillons du signal dans la formulation :

$$\text{Res} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (q_i - q_i^s)^2} \quad (\text{I.28})$$

On repère ensuite l'intersection de la partie linéaire de cette évolution avec l'axe des ordonnées, que l'on projette sur la courbe. La fréquence associée à ce résidu est la fréquence de coupure  $f_c$ . La figure I.8 représente la courbe des résidus en fonction de la fréquence de coupure pour le signal de Pezzack.

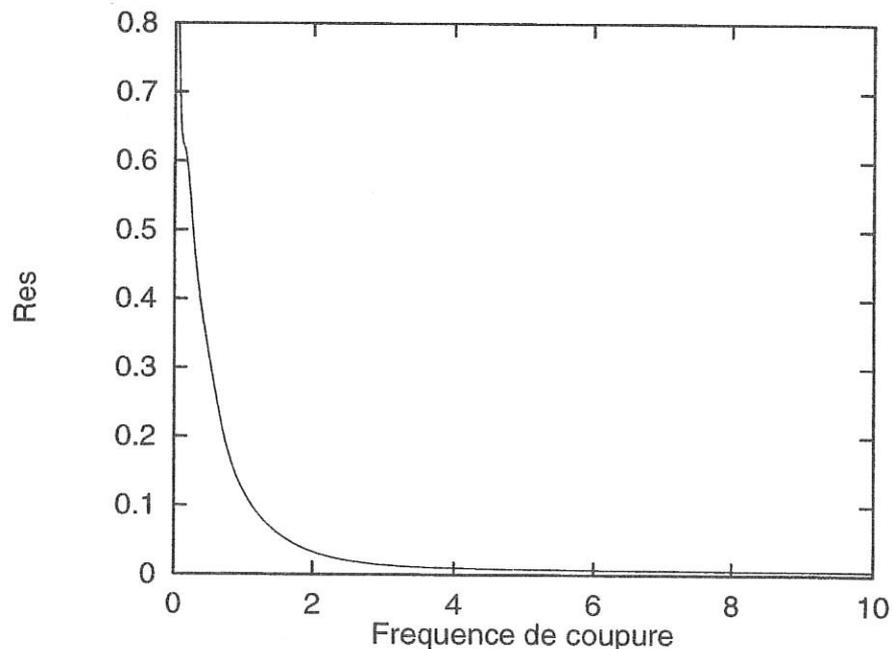


FIGURE I.8 - Courbe des résidus pour le signal de Pezzack

Par la suite Fioretti [35] utilise un filtre de Kalman pour le filtrage et la dérivation des signaux.

Allard [36] propose une comparaison entre les différentes techniques de lissage et de filtrage de données biomécaniques et remarque que les séries de Fourier, ainsi que le filtre de Butterworth, semblent se comporter de meilleure façon que d'autres techniques, telles que les polynômes d'ordre multiple.

D'Amico [37] introduit un filtre à réponse impulsionnelle infinie à base de Transformée de Fourier Rapide et obtient directement les dérivées successives par une opération mathématique dans l'espace fréquentiel (ceci est d'ailleurs la meilleure façon de calculer des dérivées lorsqu'on dispose de données tabulées). Il propose ensuite de comparer

cette technique avec les méthodes évoquées précédemment [38] et montre la supériorité de son algorithme LAMBDA par rapport aux autres. Corradini [39] fait par la suite le même travail de comparaison entre différents filtres et propose de standardiser l'évaluation des techniques de différentiation des signaux.

Plus récemment, et toujours sur la base d'un travail de comparaison de différentes techniques, Mottet [40] utilise une version modifiée du filtre médian avec des coefficients de poids, en trouvant un avantage dans la mise en oeuvre rapide et simple de ce type de filtre pour sa capacité à éliminer immédiatement les points aberrants.

Nous avons utilisé dans un premier temps un lissage par B-Splines [24] puis par polynômes de Chebychev [41]. La philosophie du lissage est assez différente de celle du filtrage. Dans le cas du lissage, on désire exprimer les données expérimentales sous la forme de combinaisons linéaires de fonctions  $G_j(t)$  connues :

$$q_i^s(t_k) = \sum_{j=1}^m \mu_{ij} G_j(t_k) \quad (\text{I.29})$$

avec :

$$\begin{aligned} k &= 1, \dots, N \\ i &= 1, \dots, n \\ j &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

et où  $t_k$  est le  $k$  ème intervalle de temps de mesure, et les  $\mu_{ij}$  sont des coefficients constants à calculer.

On exprime alors les fonctions  $G_j(t)$  comme des polynômes de Chebychev. Ceux-ci prennent la forme suivante, pour  $\tau \in [-1, 1]$  :

$$\begin{cases} T_0(\tau) &= 0 \\ T_1(\tau) &= \tau \\ T_{n+1}(\tau) &= 2\tau T_n(\tau) - T_{n-1}(\tau) \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

On peut démontrer facilement que les polynômes de Chebychev donnent les meilleurs points d'interpolation au sens des moindres carrés. On rappelle que ces polynômes forment une base orthogonale dans  $L^2(\mathbb{R})$  pour l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Nous avons vu précédemment que les  $\mu_{ij}$  sont des paramètres à calculer de manière à ajuster les  $q_i^s(t)$  aux  $q_i(t)$  en résolvant le système linéaire sur-déterminé suivant :

$$\begin{bmatrix} T_1(t_1) & \dots & T_m(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1(t_N) & \dots & T_m(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{i1} \\ \vdots \\ \mu_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i(t_1) \\ \vdots \\ q_i(t_N) \end{bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . Ce système peut se réécrire sous la forme matricielle simplifiée suivante :

$$\mathbf{A}_{i[N,m]} \mathbf{X}_{i[m]} = \mathbf{q}_{i[N]} \quad (\text{I.32})$$

Dans ce cas, on choisit de résoudre le système linéaire au sens des moindres carrés par une méthode de *Décomposition en Valeurs Singulières*, appelée *SVD*, et dont on peut trouver facilement un code source dans des bibliothèques de programmes scientifiques telles que *EISPACK*<sup>2</sup> ou *LAPACK*<sup>3</sup>. On notera que cette méthode est une technique indirecte de résolution au sens des moindres carrés. Elle est présentée plus en détail dans l'annexe B.

Ainsi, en introduisant la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose  $\mathbf{A}^+$  de  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A}_i^+ = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \quad (\text{I.33})$$

on en vient naturellement à s'intéresser à la solution :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}_i^+ \mathbf{q}_i \quad (\text{I.34})$$

puis à une solution de degré 5 de la forme :

$$q_i^s(\tau_k) = \sum_{j=1}^6 \mu_{ij} T_j(\tau_k) \quad (\text{I.35})$$

avec :

$$\tau_k = 1 - 2 \frac{t_N - t_k}{t_N - t_1} \quad (\text{I.36})$$

Les vitesses et les accélérations sont obtenues directement par dérivation analytique des fonctions de Chebychev en conservant le bon opérateur de dérivation.

Ce type de lissage provoque des effets de bord non négligeables qui peuvent se révéler catastrophiques quand on injecte les paramètres cinématiques dans le modèle dynamique inverse [41]. L'utilisation systématique de cette méthode est donc quasi-impossible.

Aussi, nous avons introduit l'analyse multi-résolution et la transformation ondelette pour le filtrage des données en biomécanique [42]. La section suivante est consacrée à la présentation des motivations de cette approche et à la mise en place des différentes notions liées à ce type de transformation.

---

2. <http://netlib2.cs.utk.edu/eispack/>

3. <http://netlib2.cs.utk.edu/lapack/>

### I.3.3 Une technique nouvelle en analyse du mouvement : la décomposition en ondelettes

#### I.3.3.a Motivations

Puisqu'il est nécessaire de dériver deux fois les données cinématiques du mouvement pour calculer les efforts intersegmentaires, nous devons mettre en oeuvre une technique dans laquelle les caractéristiques du signal expérimental sont conservées. Cependant, comme les techniques de récupération des coordonnées cartésiennes de la position des marqueurs anatomiques introduisent du bruit, des techniques de filtrage ou lissage de ces données doivent être nécessairement mises en oeuvre afin d'éviter de rencontrer des problèmes lors de l'opération de dérivation numérique.

Classiquement, l'utilisation de la transformée de Fourier (TF) :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{I.37})$$

donne une mesure des irrégularités de  $f(t)$ . Notre but est bien sûr de chercher à analyser des phénomènes transitoires de durée brève ou des signaux dont le comportement local est très variable d'une région à l'autre. La (TF) donne une représentation intermédiaire entre une représentation temporelle et une représentation fréquentielle. Le principal problème de la (TF) est qu'elle n'est pas capable de localiser les irrégularités d'un signal puisqu'elle est définie par une intégrale couvrant la totalité du domaine temporel. Par ailleurs, cette technique est limitée aux signaux stationnaires et périodiques, signaux que nous n'avons aucune raison objective de rencontrer dans notre cas. Certaines alternatives ont été proposées, telles que la Transformée de Fourier Glissante qui permet de localiser une irrégularité mais avec une fenêtre de taille fixe.

La transformée Ondelette (WT) peut être alors considérée comme une alternative à la (FT) car elle s'est révélée d'une grande utilité pour l'analyse d'une classe de fonctions pour lesquelles une représentation sinusoidale n'est pas adéquate. La (WT) permet de synthétiser des signaux en termes de dilatations et de translations d'une fonction génératrice appelée ondelette. Une expansion ondelette permet d'analyser des phénomènes brefs et/ou de transitions et/ou des variables avec des changements locaux. Ces deux derniers points sont dans les limites de l'analyse de Fourier. Notons enfin que l'idée de l'analyse en ondelettes est de décomposer un signal, une fonction, sur une base de fonctions d'un sous-espace ayant des propriétés bien déterminées. En particulier, on cherche à analyser un signal en localisant dans le temps les irrégularités de celui-ci (*i.e.* les variations brusques ou hautes fréquences). On trouvera dans l'annexe A les notions mathématiques nécessaires à la compréhension de la transformation ondelette et que l'on peut retrouver

dans [42].

Enfin, notons que le choix de l'ondelette a une forte influence sur l'analyse que l'on peut en tirer. Chaque type d'ondelette peut privilégier la mise en évidence d'un (ou des) aspect(s) particulier(s) du signal : des variations de la périodicité, des discontinuités ponctuelles ou encore des maxima d'amplitude ou de pente, etc ...

Historiquement la première ondelette est celle de Morlet, qui correspond à la localisation d'une fonction complexe de sinus avec une enveloppe gaussienne. L'ondelette « anti-symétrique » a la spécificité d'extraire les gradients locaux du signal alors que l'ondelette « chapeau mexicain » (dérivée seconde de la courbe gaussienne) permet de repérer et de mesurer l'amplitude des extréma locaux du signal en fonction du temps.

### I.3.3.b Exemple simple de filtrage

Afin d'illustrer l'application au filtrage de la décomposition en ondelettes, nous nous proposons d'utiliser un signal discret  $f$  à 8 points et de le traiter avec l'ondelette de Haar représentée sur la figure I.9 (qui est aussi l'ondelette de Daubechie pour  $M = 1$ ).

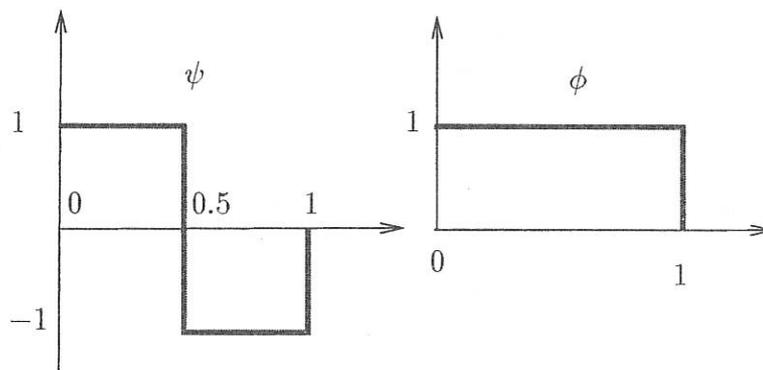


FIGURE I.9 - Représentation de l'ondelette de Haar

Cette ondelette est de la forme :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

Les coefficients  $h_k$  et  $g_k$  introduits dans l'annexe A sont réels et égaux à :

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{I.40})$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{I.41})$$

$$g_0 = h_1 \quad (\text{I.42})$$

$$g_1 = -h_0 \quad (\text{I.43})$$

L'opération de filtrage apparaît sur la figure I.10. Conformément à l'annexe A, la décomposition du signal initial est obtenue directement à l'aide des équations (A.21) et (A.22), alors que la reconstruction est obtenue par l'application de la relation (A.23).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, seules les valeurs numériques des coefficients des sous-espaces de tendance  $V_0$  et de détail  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$  ont besoin d'être stockées afin de filtrer les données. Pour effectuer cette opération, les coefficients de détail inférieurs à 0,1 sont remplacés par 0. On peut ainsi comparer le signal initial et le signal filtré. Dans la deuxième partie du signal filtré, il n'y a pas de différence avec le signal initial, alors que dans la première partie le nouveau signal est toujours égal à 1.

Trois remarques importantes peuvent être faites :

1. Comme cette ondelette est définie par deux coefficients, elle agit comme un processus de moyenne entre deux valeurs. En conséquence, aucun effet de bord n'est à craindre.
2. Quand le détail est mis à 0, la part correspondante dans le signal reconstruit est constante. Cette ondelette est donc particulièrement bien adaptée au filtrage de signaux constants ou en échelon. Toutefois, si chaque coefficient de détail est mis à 0, le signal est alors entièrement changé. Nous devons donc être vigilant dans le choix du critère de lissage.
3. Pour effectuer une opération de lissage pour n'importe quel signal, il vaudrait mieux utiliser une ondelette avec un nombre plus important de coefficients. Mais dès lors, les effets de bord deviennent significatifs.

On peut ainsi se rendre compte des difficultés qui existent pour effectuer une opération de filtrage correcte. Cela dépend du signal, de l'ondelette, du nombre de décompositions, du critère de sélection des valeurs limites du détail ...

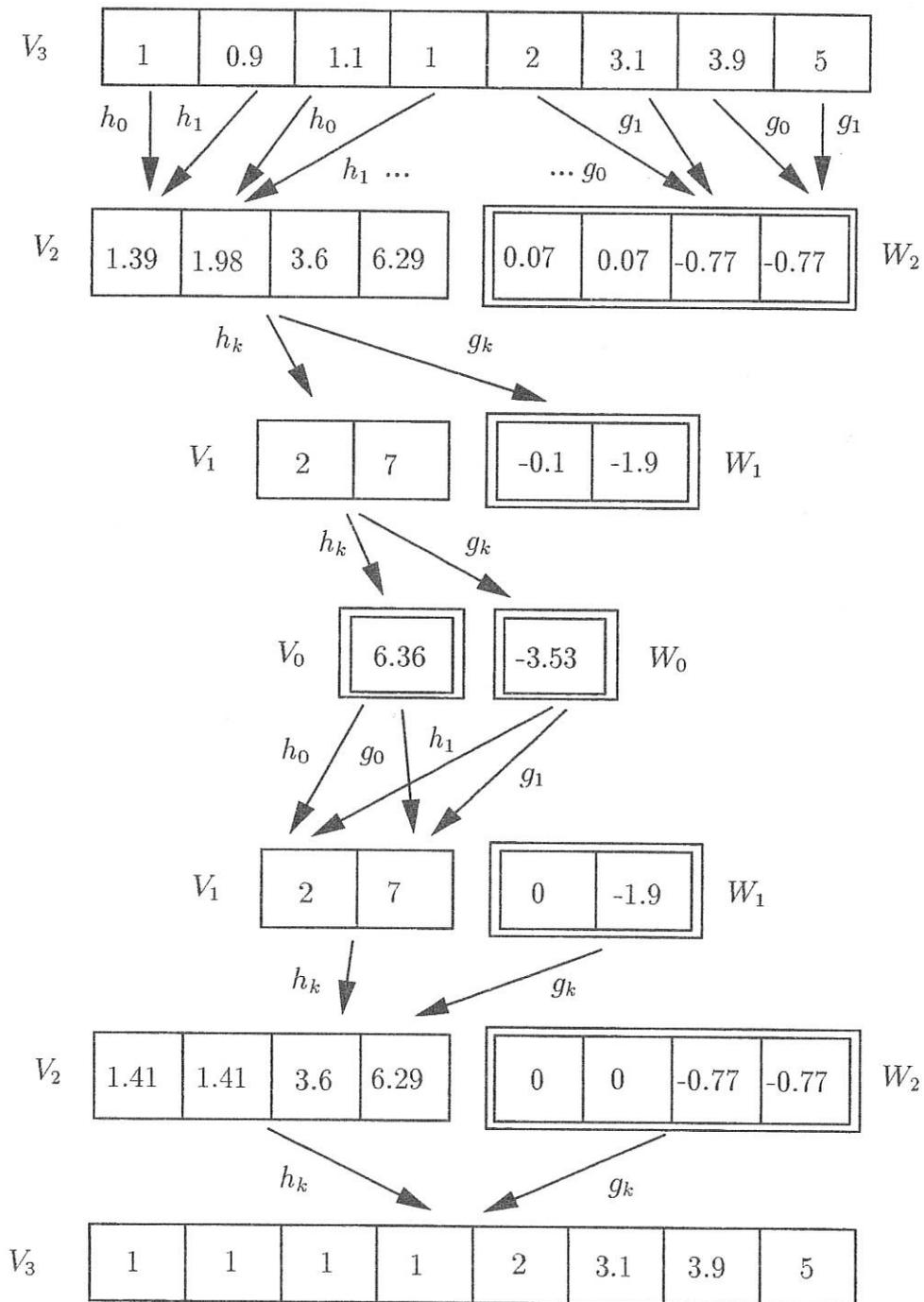


FIGURE I.10 - Filtrage ondelette d'un signal 8 points

Sur l'ensemble des familles d'ondelettes, l'une des plus puissantes est la famille des ondelettes de Daubechie. Dans le paragraphe suivant, nous avons utilisé l'ondelette de Daubechie à 10 coefficients.

### I.3.3.c Résultats avec les données de Pezzack

Notre propos est de comparer les résultats pour les vitesses (figure I.11) et les accélérations (figure I.13) de [26] obtenues par filtrage par transformée ondelettes à ceux obtenus par les deux méthodes de la biomécanique les plus couramment utilisées introduites précédemment : le filtre de Butterworth [34] et les splines optimisées sous critère GCV de Woltring [31]. La fréquence de coupure du filtre de Butterworth est obtenue par analyse résiduelle et vaut 5.54 Hz. Pour comparaison, mais aussi confirmation de l'utilité s'il en était besoin, des approches présentées, nous montrons sur les figures I.12 et I.14 les résultats que l'on obtient par une dérivation directe des données brutes respectivement pour la vitesse et pour l'accélération.

La méthode de filtrage de la décomposition ondelette est celle de la *meilleure base*, décrite dans l'annexe A. On filtre le signal, la vitesse et l'accélération car l'opération de dérivation amplifie le bruit. L'idée est de filtrer cette amplification avec la transformée ondelette discrète et d'effectuer une comparaison avec les deux techniques précédentes. On utilise le logiciel XWPL [43] pour effectuer les opérations de décomposition/recomposition en bases d'ondelettes.

Les dérivées successives sont obtenues soit par dérivation analytique lorsque la forme mathématique exacte du signal est connue soit par différence finie.

En règle générale, les signaux sont toujours définis sur un intervalle de temps limité. Cela induit naturellement des effets de bord dans les opérations de lissage ou filtrage. Ce problème n'est pas nouveau et vient d'être récemment souligné par Hinrichs [44]. Ce dernier évalue les différences sur les valeurs des accélérations aux extrémités du signal test de Pezzack modifié par Lanshammar pour conclure à la supériorité des filtres de degré 5. Une question se pose alors : que se passe-t-il aux bords du signal quand les filtres viennent agir sur des échantillons qui n'existent pas ?

Trois solutions se présentent :

1. On comble les échantillons par des 0.
2. On périodise le signal.
3. On symétrise le signal aux extrémités par rapport aux bords respectifs, ce qui introduit des discontinuités.

Généralement on utilise la solution n° 2, mais celle-ci ne nous satisfait pas dans le sens où en périodisant le signal on retombe sur les limites de l'analyse de Fourier. Il semble plus judicieux, comme l'a proposé [45], d'augmenter le nombre d'échantillons du signal en affectant comme valeurs à ces échantillons les valeurs du signal aux extrémités.

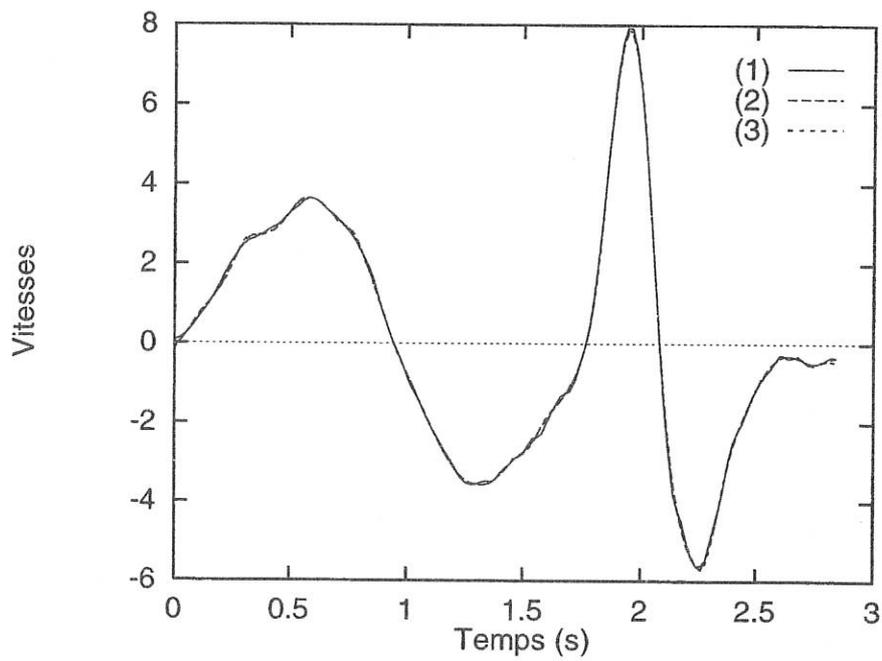


FIGURE I.11 - Vitesses : (1)Ondulette, (2)Butterworth, (3)GCV

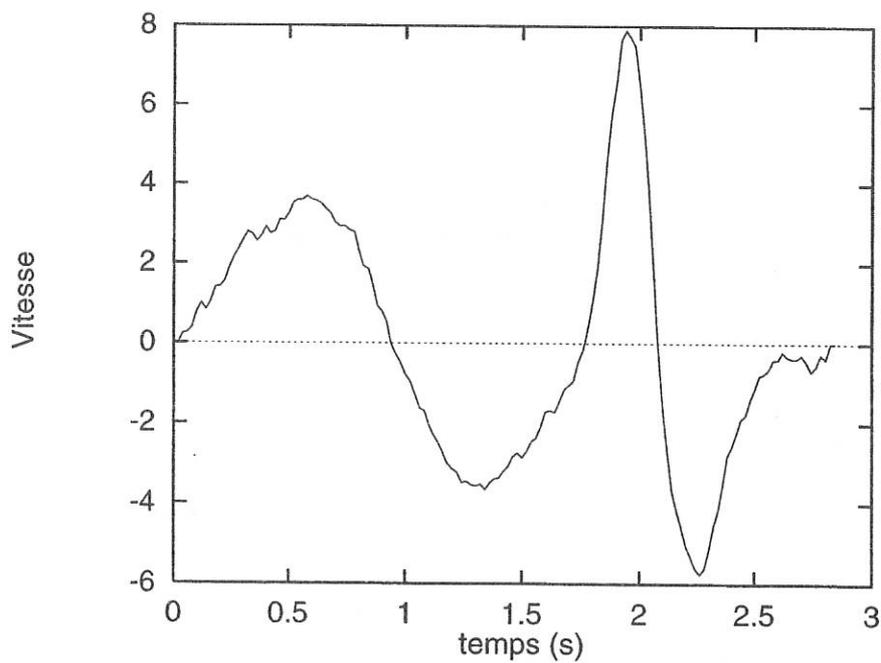


FIGURE I.12 - Résultats « bruts » pour la vitesse

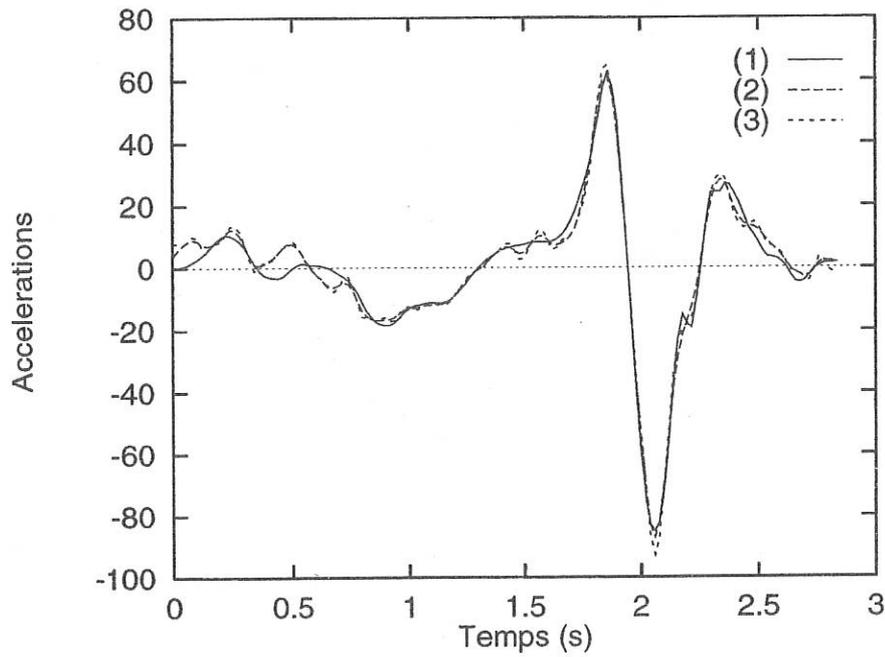


FIGURE I.13 - Accélérations : (1)Ondelette, (2)Butterworth, (3)GCV

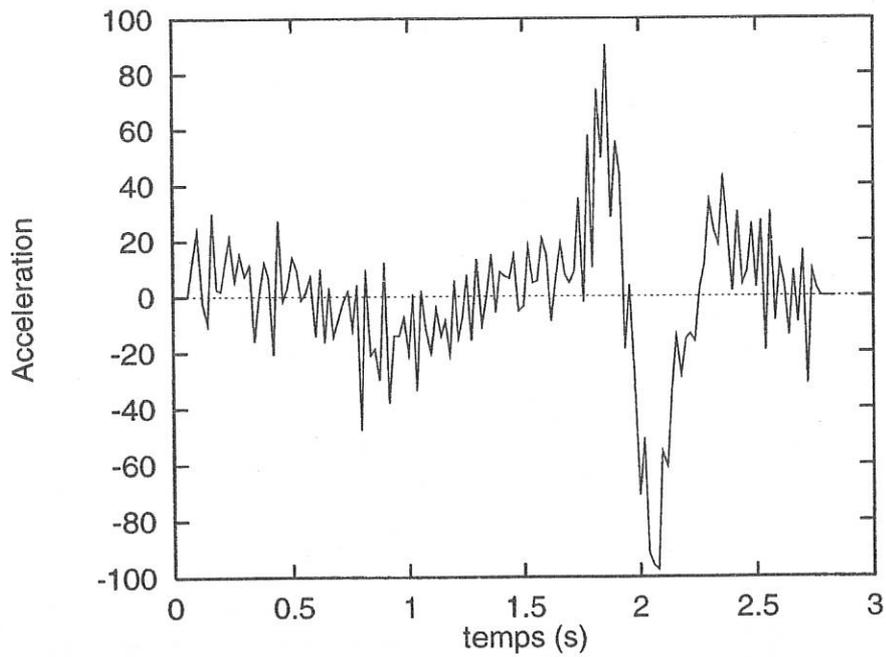


FIGURE I.14 - Résultats « bruts » pour l'accélération

La transformation ondelette donne de bons résultats pour l'accélération en comparaison

avec les deux autres techniques. Néanmoins, il semble que l'accélération soit plus « lisse » avec le filtrage ondelette. D'autre part, il n'y a que peu de différence pour la vitesse entre les trois méthodes. Aussi, nous avons montré l'intérêt et la puissance d'une telle méthode qui filtre les données de Pezzack avec une meilleure précision que les autres. Par son potentiel important, la décomposition ondelette pourrait être une technique intéressante pour le traitement de beaucoup de données biomécaniques. Mais pour un signal donné, l'opération de filtrage demande de faire plusieurs choix : la famille d'ondelettes (Daubechie, Coiflet, ...), le nombre de niveaux de décomposition, la valeur seuil pour les coefficients de détail (sous-espaces  $W_i$ ). Notons à ce propos l'existence d'une bonne bibliographie à ce sujet dans [46].

Regardons aussi sur la figure I.15 la très bonne correspondance entre l'accélération enregistrée par accélérométrie et celle calculée par la technique à base de transformée ondelette<sup>4</sup>.

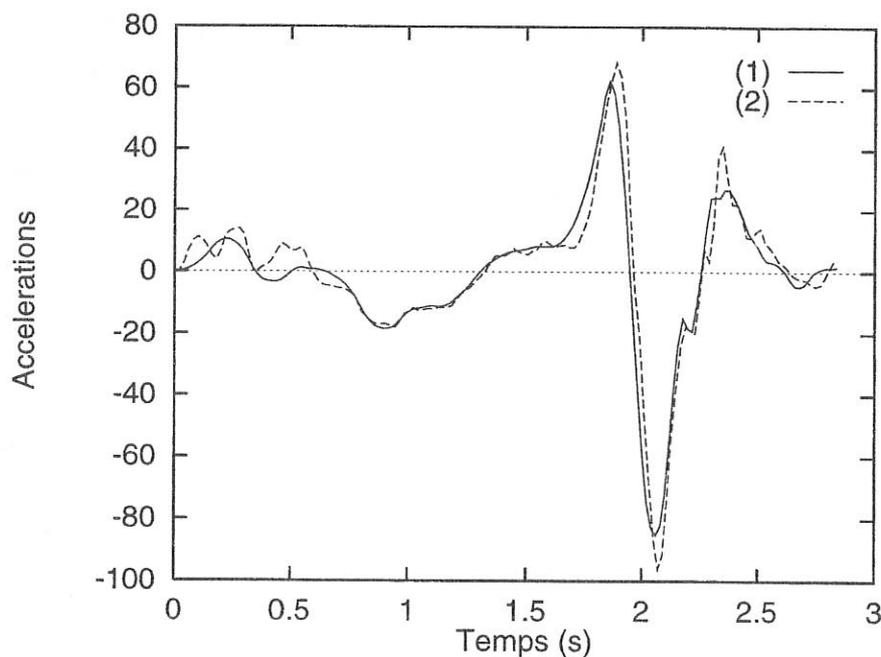


FIGURE I.15 - Comparaison entre accélération calculée (1) et mesurée (2)

4. Le signal de la mesure accélérométrique est fourni dans un tableau dans [44] et provient d'un relevé digitalisé.

## I.4 Les données anthropométriques

Naturellement, il est nécessaire de pouvoir disposer de données anthropométriques sur le sujet dont on désire analyser un mouvement. Il apparaît évident que si pour différentes longueurs segmentaires et le poids ou la masse de l'individu cela ne pose pas de problèmes, il n'en est pas de même pour les masses et les inerties des différents segments corporels.

Plusieurs chercheurs ont proposé des solutions. Si historiquement les premiers à avoir donné des précisions sur ce sujet ont été Dempster et Clauser, dont on peut retrouver une synthèse des travaux dans [34], Jensen [47] est celui qui apporte une méthode d'évaluation des masses et des inerties plus évoluée que la dissection de cadavres humains : la photogrammétrie. Hatze [48] propose par la suite une technique basée sur la mesure de 242 références anatomiques et a obtenu de bons résultats. Zatsiorsky [49] propose ensuite des équations de régression pour le calcul des grandeurs anthropométriques à partir d'une série de mesures par rayon X sur une cinquantaine de sujets (hommes et femmes). Pour pallier les problèmes liés à la détermination de la densité du corps humain, ainsi qu'à la géométrie d'un segment, Suarez [50] propose également une technique à base de rayon X. Il teste la validité de sa méthode en comparant les valeurs calculées par son modèle à celles mesurées sur un porc disséqué. Martin [51] utilise une technique basée sur l'exploitation d'images obtenues par résonance magnétique. Il applique sa méthode à la détermination des constantes d'inertie de segments corporels de babouins.

Une approche différente des précédentes est celle adoptée par Vaughan [52]. Il détermine les différents paramètres du corps humain par une technique d'optimisation basée sur le principe de l'algorithme du gradient projeté. Partant du constat que lorsque la chaîne cinématique modélisant le corps humain est en boucle ouverte, les efforts appliqués au corps distal sont nuls, il ajuste ces paramètres en minimisant une fonction objective, dont les termes sont des fonctions du vecteur formé par l'ensemble des paramètres à déterminer. L'inconvénient majeur de cette technique est qu'elle combine à la fois une analyse dynamique du geste et une détermination des paramètres anthropométriques. L'incertitude sur la détermination de la cinématique du mouvement se mêle alors à la procédure d'optimisation. Cette approche vient d'ailleurs d'être reprise par Kingma [53] qui identifie les paramètres segmentaires inertiels par une technique similaire en résolvant le problème sous-déterminé provenant de la mise en forme du problème.

Comme les données communément admises dans le domaine de la biomécanique sont celles de Chandler et Clauser, quelques auteurs ont alors proposé de réaliser des corrections sur ces valeurs en introduisant des équations de régression [54, 55, 56].

Enfin, en France, Gaignebet [57] propose un système expérimental basé sur les oscillations d'un pendule de torsion afin de mesurer les constantes d'inertie des différentes

parties du corps humain.

## I.5 Conclusion : un protocole expérimental

Nous venons donc de présenter dans ce chapitre les principes généraux de l'analyse expérimentale des mouvements humains.

En guise de conclusion, nous pouvons maintenant décrire le protocole expérimental d'analyse du mouvement humain que nous avons adopté pour l'ensemble de nos expériences. Les modifications spécifiques à l'analyse de tel ou tel mouvement seront décrites au fur et à mesure de leur introduction dans le chapitre 3.

Comme l'indique la figure I.16, on place des marqueurs passifs sur le corps du sujet testé, en des points anatomiques précis.

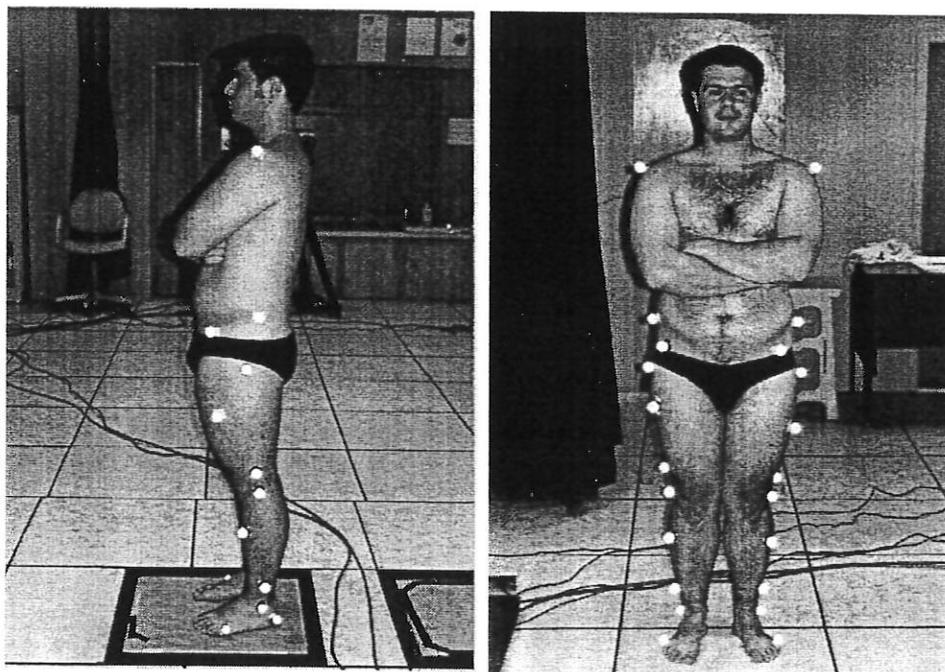


FIGURE I.16 - *Sujet avec marqueurs*

Dans le tableau I.1 nous définissons la position des 12 marqueurs disposés de chaque côté de l'individu.

Dans un premier temps, on effectue la calibration de l'espace d'évolution du sujet pour que le système reconstruise au mieux les coordonnées 3-D des marqueurs lors du mouvement. Pour information, notons que nous avons utilisé les systèmes MOTION ANALYSIS

Marqueur	Position	Segment
1	5 <sup>e</sup> métatarse (chaussure)	Pied
2	talon (chaussure)	
3	malléole externe	
4	tibia, au dessus de la malléole	Jambe
5	milieu du tibia	
6	condyle du fémur	
7	cuisse, au dessus du condyle	Cuisse
8	milieu du fémur	
9	grand trochanter	
10	A.S.I.S.	Tronc
11	crête illiaque	
12	tête humérale	

TABLEAU I.1 - Numéros et emplacements des marqueurs anatomiques

et SAGA3, et que ces derniers disposent d'objets de calibration propres. La technique de reconstruction est la DLT pour ces deux systèmes.

Les paramètres morphologiques nécessaires pour le calcul des caractéristiques anthropométriques sont mesurés au début de l'expérience. Les autres données anthropométriques sont calculées à partir des tables de Winter [34].

Les traitements relatifs à la construction des paramètres articulaires et à leur traitement mathématique sont réalisés « hors-ligne » et hors systèmes d'acquisition. Les calculs concernant les aspects dynamiques et énergétiques sont également effectués indépendamment des solutions proposées par les systèmes. Leur présentation fera l'objet du prochain chapitre.

Simultanément à l'acquisition cinématique, on enregistre les composantes du torseur des forces de contact avec le sol dans le cas d'une étude d'un mouvement où il y a une liaison directe avec le sol (marche, flexion-extension).

Rappelons enfin brièvement que l'analyse multi-résolution introduite dans la deuxième partie de ce chapitre a permis de mettre en évidence que l'analyse ondelette d'un signal entraîne moins de fluctuations locales des accélérations et une réduction sensible des pics d'accélération.

## Chapitre II

# Détermination des efforts de liaison. Coûts énergétiques.

*Nous présentons dans ce chapitre le formalisme retenu pour l'étude dynamique et énergétique des mouvements humains. Nous rendons compte des problèmes posés lorsque les chaînes cinématiques sont de type boucles fermées.*

*Prenez un athlète dont la spécialité est le plongeon aquatique. A partir du moment où il a quitté le plongeur, il aura beau penser très fort, il ne remontera jamais. C'est la loi de l'attraction universelle. C'est la chute qu'il est important d'étudier, ses causes, ses effets, pas le reste !!!*

*Alain Junqua  
CREPS de Boivre  
Décembre 1987*

## Notations

$n$	Nombre de corps de la structure articulée
$\mathcal{S}_i$	Solide $i$
$S_i$	Section distale $S_i = \cup_{k=i}^n \mathcal{S}_k$ et $S_n = \mathcal{S}_n$ , $S_1 = \mathcal{S}$
$G_i$	Centre de gravité du solide $\mathcal{S}_i$
$O_i$	Origine du repère associé à la liaison liée au solide $\mathcal{S}_i$
$m_i$	Masse du solide $\mathcal{S}_i$
$M$	Masse totale du système articulé: $M = \sum_{i=1}^n m_i$
$\mathcal{R}_i$	Repère attaché au solide $\mathcal{S}_i$
$\sigma_i$	Opérateur Booléen de la liaison en $O_i$
$\mathbf{T}_i^j$	Matrice de transformation homogène de $\mathcal{R}_i$ à $\mathcal{R}_j$
$\mathbf{R}_i^j$	Matrice de rotation de $\mathcal{R}_i$ à $\mathcal{R}_j$
$\mathbf{L}_i^j$	Vecteur de translation de $\mathcal{R}_i$ à $\mathcal{R}_j$
$(O_i, \mathbf{z}_i)$	Axe de l'articulation entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_{i-1}$
$(O_i, \mathbf{x}_i), (O_i, \mathbf{y}_i)$	Autres axes associés au repère $\mathcal{R}_i$
$\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i$	Paramètres de Denavit-Hartenberg
$\mathbf{q}$	Vecteur des coordonnées généralisées
$q_i$	Paramètre de mouvement de $\mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i-1}$
$\dot{\mathbf{q}}$	Vecteur des vitesses généralisées
$\dot{q}_i$	$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$
$\ddot{\mathbf{q}}$	Vecteur des accélérations généralisées
$\ddot{q}_i$	$\ddot{q}_i = \frac{d^2q_i}{dt^2}$
$\boldsymbol{\omega}_i^j$	Taux de rotation de $\mathcal{S}_i/\mathcal{S}_j$
$\boldsymbol{\omega}_i$	Taux de rotation absolu de $\mathcal{S}_i$ ( $\equiv \boldsymbol{\omega}_i^0$ )
$\mathbf{V}_{O_i}$	Vecteur vitesse de $O_i$ observé dans $\mathcal{R}_0$

$\mathbf{V}_{G_i}$	Vecteur Vitesse de $G_i$ dans $\mathcal{R}_0$
$\gamma_{O_i}$	Vecteur accélération de $O_i$ dans $\mathcal{R}_0$
$\gamma_{G_i}$	Vecteur accélération de $G_i$ dans $\mathcal{R}_0$
$\mathcal{T}_i^e$	Torseur des efforts extérieurs appliqués à $S_i$
$\mathcal{T}_i^S$	Torseur des efforts extérieurs à $S$ agissant sur $S_i$
$\mathbf{F}_i^S, \mathbf{M}_i^S$	Éléments de réduction en $O_i$ de $\mathcal{T}_i^S$
$\mathcal{T}_i^g$	Torseur des efforts de gravité agissant sur $S_i$
$\mathbf{F}_i^g, \mathbf{M}_i^g$	Éléments de réduction en $O_i$ de $\mathcal{T}_i^g$
$\mathcal{T}_{0,n}$	Torseur des efforts exercés par l'environnement fixe sur $\mathcal{S}_n$
$\mathbf{F}_{0,n}, \mathbf{M}_{0,n}$	Éléments de réduction en $O_n$ de $\mathcal{T}_{0,n}$
$\mathcal{T}_{j,i}$	Torseur des efforts exercés par $\mathcal{S}_j$ sur $\mathcal{S}_i$ comprenant les efforts de liaison, les efforts actionneurs et les efforts dissipatifs
$\mathbf{F}_{j,i}, \mathbf{M}_{j,i}$	Éléments de réduction en $O_i$ de $\mathcal{T}_{j,i}$
$\mathcal{D}_i$	Torseur dynamique galiléen de $S_i$
$\mathcal{A}_i$	Résultante dynamique galiléenne de $S_i$
$\delta_i$	Moment dynamique galiléen en $O_i$ de $S_i$
$\mathcal{I}_i$	Tenseur d'inertie en $O_i$ du solide $\mathcal{S}_i$
$\mathcal{I}_{G_i}$	Tenseur d'inertie en $G_i$ du solide $\mathcal{S}_i$
$\mathbf{g}$	Vecteur accélération de la pesanteur
$\mathbf{A}(\mathbf{q})$	Matrice de masse
$\mathbf{r}_i$	Coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{S}_i$ dans $\mathcal{R}_i$
$P_i$	Puissance délivrée à l'articulation entre les corps $\mathcal{S}_{i-1}$ et $\mathcal{S}_i$
$P_i^{pos}$	Puissance motrice positive
$W^{(1)}$	Travail global des forces internes par le théorème de l'énergie
$W^{(2)}$	Travail global des forces internes par les puissances articulaires
$W^{(3)}$	Somme des travaux articulaires absolus
$W^{(4)}$	Travail moteur positif

## II.1 Position du problème

La détermination des efforts intérieurs telle qu'annoncée dans l'introduction de ce mémoire repose sur la démarche suivante :

*L'effet observable qu'est le mouvement étant correctement décrit, par l'application des lois de la dynamique en reconstruire la cause, c'est-à-dire les efforts actionneurs articulaires, mais aussi les effets cachés inaccessibles à la mesure, que sont les efforts de liaison qui assurent la cohésion de l'articulation.*

Dans son principe, cette démarche est celle du *Problème Dynamique Inverse* (PDI) : le mouvement d'un système mécanique étant imposé, déterminer les efforts mis en jeu au moyen d'un modèle dynamique du système. La méthode à développer se fonde, d'une part, sur une description cinématique précise du mouvement observé et, d'autre part, sur la formulation d'un modèle dynamique du corps humain prenant en compte tout ou partie de ses mobilités.

Nous rendons compte dans un premier temps des résultats fournis dans la bibliographie à propos de l'étude dynamique des mouvements humains.

En ce qui concerne l'aspect modélisation, le problème à résoudre n'est pas aussi simple qu'il y paraît. En effet, dans ses fonctions motrices (locomotion, préhension, ...) la dynamique du corps humain est celle d'un système mécanique polyarticulé commandé, à structure de chaînes cinématiques arborescentes, ouverte ou fermée, à nombre élevé de degrés de liberté. L'étude des systèmes manipulateurs de la robotique a contribué largement, bien qu'encore partiellement, au développement de techniques de formulations explicites de modèles dynamiques complexes. L'usage courant en robotique est de paramétrer la structure articulée à l'aide d'un jeu de paramètres que nous introduisons dans la seconde partie de ce chapitre.

L'aboutissement dans le domaine de la modélisation dynamique peut suivre plusieurs voies, dont l'une est liée à la mise au point de formulations à structure récurrente, traitées symboliquement par des logiciels de calcul formel. Ceci fait l'objet de la troisième partie de ce chapitre.

La méthode que nous proposons doit aussi pouvoir fonctionner lorsque la chaîne cinématique représentative du geste étudié est de type boucle fermée : la marche dans la phase de double support ou bien encore le pédalage. Nous proposons dans la quatrième partie de ce chapitre quelques réflexions sur les problèmes posés par l'étude dynamique de tels mouvements.

Le modèle dynamique obtenu doit naturellement être complété par les données anthropométriques, telles que la longueur des segments mobiles articulés, leur masse et

leurs constantes d'inertie caractéristiques.

La détermination conjointe des efforts actionneurs et des paramètres de vitesses articulaires permet de dresser un bilan énergétique en terme de travail mécanique fourni par chaque groupe musculaire actionneur, bilan qui échappe à toute modélisation non locale. Le bilan global qui en ressort doit naturellement être en accord avec le calcul que permet de réaliser une application judicieuse du théorème de l'énergie cinétique. Ce développement fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre. Le but de cette évaluation est, à terme, d'établir une relation objective entre l'énergie mécanique d'origine musculaire et l'énergie musculaire d'origine métabolique mesurée par des techniques de physiologie de l'effort.

## II.2 Revue bibliographique

L'étude dynamique des mouvements humains peut être abordée selon deux points de vue : celui de la simulation ou bien celui, qui nous intéresse le plus, de la détermination des efforts actionneurs. Bien entendu, le sujet n'est pas nouveau et l'on peut trouver une littérature dense et de qualité sur ce domaine de recherche. Cependant, tout est loin d'être clair sur les méthodes de résolution adoptées et nous allons, au travers d'une étude bibliographique que nous souhaitons aussi complète que possible, essayer de dégager quelques éléments de réflexion. Ceci nous permettra par la suite d'apporter quelques compléments et ainsi de justifier la mise en forme pratique développée dans les paragraphes qui suivent celui-ci.

Un des premiers auteurs à s'être intéressé à la détermination des couples actionneurs et des forces de réaction est Daher [58] au milieu des années 70. Utilisant les données cinématiques de la littérature, il propose une méthode utilisant les équations de Newton-Euler formulées sur la base d'un paramétrage en coordonnées absolues.

Aleshinsky [59] propose d'étudier le corps humain comme un système polyarticulé composé de 15 solides rigides reliés entre eux par des liaisons sphériques. Il introduit des équations où les données cinématiques sont exprimées à l'aide de polynômes qu'il dérive ensuite facilement. Il applique cette technique pour l'analyse de la course sur le plat.

Onyshko et Winter [60] proposent de résoudre le problème dynamique direct dans un cycle de marche en modélisant le corps humain par 7 segments et 6 articulations, en ne prenant pas en compte de contraintes sur les trajectoires et en distinguant 4 phases dans le cycle de marche. Ils utilisent le formalisme de Lagrange en coordonnées absolues et ajustent les couples actionneurs articulaires d'entrée du système différentiel afin d'obtenir une allure générale correcte.

Plus tard, Hardt [61] remarque que l'utilisation du formalisme de Lagrange n'est pas appropriée pour le calcul des efforts de liaison et propose un modèle à 5 corps pour l'analyse dynamique en 3-D de la marche. Il étudie un cycle complet et est le premier à souligner qu'il n'y a pas forcément besoin d'une plate-forme de force pour ce calcul. Il postule l'existence d'une relation linéaire entre la répartition des forces de réaction au sol des pieds en appui sur le sol durant la phase bipodale. Il construit ainsi un programme permettant le calcul pour un pas complet de marche.

Patriarco [62] s'intéresse au calcul des forces musculaires dans un cycle de marche en résolvant la redondance des actions musculaires par transformation du problème en la minimisation d'un critère accompagné de contraintes. Ces dernières sont en fait les équations de la dynamique des solides interconnectés associées à des contraintes cinématiques.

A la même époque, Ramey [63] propose un modèle 3-D afin de simuler des mouvements humains. Ce modèle utilise les angles d'Euler et l'auteur s'intéresse au calcul du moment cinétique lors de la simulation d'un saut en longueur.

Hyman [64] simule la marche humaine à l'aide d'un modèle très simple ressemblant à un compas et obtient une bonne similitude entre la force de réaction au sol du mouvement résultant et celle d'un mouvement réel.

Marshall [65] propose une modélisation selon le formalisme de Newton-Euler pour la simulation de système articulé à  $n$  corps en chaîne cinématique ouverte. Il élimine les forces de liaison et se ramène à un système linéaire d'équations à résoudre où le vecteur des inconnues représente les accélérations de chaque corps. Une procédure d'intégration permet alors de calculer les vitesses et positions respectives de chaque corps en fonction du temps. Il applique cette technique à la simulation du balancé d'une jambe et d'un saut en longueur de pied ferme. Il étudie aussi l'effet de perturbations sur les couples actionneurs à l'entrée du système (ces couples étant donnés par tâtonnement!).

Mansour [66] va plus loin en proposant une simulation de la phase de double support en utilisant les équations de Kane à la fois pour un modèle plan et pour un modèle 3-D.

A la même époque, Pandy et Berme [67, 68] proposent une méthode de simulation de la marche dans le plan tout en introduisant un formalisme utilisable dans le cas 3-D. Ils appliquent ainsi la technique de Walker et Orin pour les phases unipodale et bipodale de la marche. Dans cette deuxième phase, ils éliminent les forces de réaction au sol, qui sont des inconnues du problème, et rajoutent des contraintes cinématiques afin d'exprimer le modèle dynamique en termes de systèmes non-redondants. Dans la phase unipodale, leur modèle plan à 5 corps et 5 degrés de mobilité apparaît sous deux formes : une première où le pivotement autour de l'orteil est possible et une deuxième où la « flexion-extension » de la jambe support est simulée par une liaison prismatique de type « ressort-amortisseur ». Les

couples articulaires fournis pour intégrer le système différentiel relèvent de tâtonnement et on constate que la longueur de pas simulée est plus courte que la longueur de pas équivalente observée expérimentalement.

Apkarian [69] a mis au point une modélisation des membres inférieurs sous la forme d'un modèle 3-D de chaque jambe représentée par 4 solides rigides interconnectés entre eux par des liaisons sphériques. Chaque jambe possède donc 12 degrés de mobilité. 9 marqueurs sont nécessaires pour construire la cinématique des liaisons équivalentes à la cheville, au genou et à la hanche. L'acquisition expérimentale du mouvement est réalisée à l'aide du système VICON et les évolutions des paramètres angulaires sont ajustées sous la forme de cubique. La force de réaction au sol mesurée par plate-forme de force sert de donnée d'entrée au modèle dynamique qui n'est pas décrit dans l'article. L'auteur présente alors des résultats sur la cinématique et sur la dynamique.

Au début des années 90, Cappozzo [70] présente une bonne revue des problèmes liés à l'analyse 3-D de la marche humaine en soulignant les difficultés liées à la localisation précise des centres articulaires lors du mouvement.

Ladin et Wu [71] étudient la dynamique des mouvements en associant une mesure cinématographique à une mesure accélérométrique afin de calibrer les accélérations dans le but d'affiner le calcul des forces de liaison et des couples actionneurs. Ils valident cette association par l'analyse du mouvement d'un pendule inversé, instrumenté en capteurs d'efforts.

Bobbert [72] reprend ensuite les idées de Hardt pour calculer la composante verticale de la force de réaction au sol à partir des données de position pour un mouvement de course. Il obtient une bonne corrélation entre la force calculée et la force mesurée par la plate-forme de force.

Par la suite Hof [73], se rendant compte de lacunes concernant les modalités de mise en forme des équations pour les calculs de dynamique inverse, propose une méthode récursive de calcul des forces et des moments de liaison. Par ailleurs, il propose également une interprétation et un calcul effectif des coordonnées du centre de pression.

Vaughan [74] publie un ouvrage dans lequel il décrit un protocole général d'analyse du mouvement humain et fournit en parallèle un logiciel d'analyse dynamique de la marche. Celui-ci permet le calcul des forces et des moments aux articulations dans un mouvement de marche pour toutes les phases. Cependant, il nécessite la mise en oeuvre de deux plate-formes de force afin d'injecter les données dynamographiques ainsi recueillies dans le modèle dynamique.

Laassel [75] analyse la marche normale selon deux approches. La première, multidimensionnelle, au sens de la statistique, permet de montrer l'existence de trois classes de

marcheur. La seconde, qui consiste en une analyse biomécanique, met en oeuvre un modèle 3-D permettant d'estimer les efforts aux articulations en partant du torseur de contact du pied sur le sol. Barbier [76] poursuit ce travail et s'attache à décrire une installation dédiée à l'analyse, la simulation et l'optimisation des mouvements.

A Lyon, au sein de l'équipe du Professeur Dimnet, Cheze [77] met au point le procédé de « solidification » de marqueurs externes disposés sur la peau afin de reconstituer la cinématique interne des os et de pouvoir ensuite injecter ces données cinématiques 3-D dans les équations de la dynamique selon le formalisme de Newton-Euler. La résolution du problème dynamique inverse utilise aussi comme données d'entrée les mesures de la plate-forme de force. Gignoux [78] poursuit ce travail pour l'étude 3-D des sollicitations mécaniques d'une hanche en mouvement. Dans les deux cas, il est nécessaire d'effectuer au préalable des clichés radiologiques afin de déterminer les relations qui existent entre les déplacements des marqueurs externes et les déplacements des structures osseuses lors des mouvements. San-Marcellino [20] propose de résoudre le problème dynamique inverse pour des mouvements des membres supérieurs par le formalisme de Uicker. Il s'attache à mettre en évidence la contribution des différents termes inertiels, centrifuges et de Coriolis dans la détermination des efforts actionneurs articulaires. Tous les travaux de ces auteurs s'inspirent en grande partie des remarques que l'on peut trouver dans [79]. Dans cet article, les auteurs proposent d'utiliser les techniques issues de la robotique pour l'étude des mouvements humains en introduisant le paramétrage de Denavit-Hartenberg [80].

Kromer [81] détermine les forces musculaires lors d'un cycle de marche à partir de données de Pedotti [82]. Cet auteur utilise un paramétrage local qui lui est propre et met en oeuvre une formulation récursive des lois de Newton-Euler. Puis, pour résoudre le problème redondant de la détermination des forces musculaires, il met en oeuvre deux techniques classiques dans le domaine de l'optimisation : la méthode du simplex dans le cas de la minimisation de l'activité musculaire globale et la méthode du gradient conjugué associée à la méthode des pénalités extérieures dans le cas de la minimisation de la fonctionnelle « énergie totale ». Par la suite, l'auteur aborde le problème de la simulation de la marche à partir de deux approches : la première utilise le formalisme de Lagrange pour la dynamique de corps rigides et la seconde est une approche éléments finis par mécanismes plans flexibles. Ces travaux se rapprochent fortement de ceux menés par Davy [83] et qui portent sur l'introduction d'une technique d'optimisation dynamique pour le calcul des forces musculaires dans la phase de balancement de la marche.

Loizeau [84] a une approche similaire mais appliquée à l'étude d'un cas clinique : celui du comportement dynamique d'une hanche appareillée d'une prothèse totale. Après acquisition des données cinématiques de la phase d'appui de la marche pour 5 sujets et

détermination des efforts intersegmentaires par analyse dynamique inverse, il calcule les forces musculaires en résolvant le système hyperstatique formé par les équations d'équilibre dynamique et des contraintes dues aux muscles à l'aide de la méthode d'optimisation du simplex non linéaire. Il montre que le critère d'optimisation (minimiser la contrainte musculaire ou l'amplitude de la résultante articulaire) joue très peu dans les résultats.

Dans le cadre du projet « Space Foot »<sup>1</sup> Prince [85] étudie la marche et la course lente du point de vue dynamique (analyse des couples articulaires) et énergétique (puissances articulaires) par comparaison entre des sujets sains et des sujets équipés du pied prothétique. Il montre que ce type d'appareillage donne des résultats comparables sur les points de vues étudiés mais nécessite des modifications pour des applications concernant des activités sportives. Dans le même esprit, Allard [86, 87] étudie le comportement mécanique de ce pied artificiel par éléments finis avec des conditions aux limites fournies par l'analyse dynamique du pas de marche d'un sujet amputé et équipé tour à tour du « Space Foot » et d'un pied prothétique conventionnel. Enfin, il étudie sur 19 sujets « témoins » [88] les moments, puissances et énergies mécaniques en 3-D à chaque articulation. Les acquisitions cinématiques du mouvement sont bilatérales et simultanées. Il montre que le travail total positif est similaire pour chaque jambe et que la jambe droite développe une part importante de travail total négatif par rapport à la jambe gauche.

Morecki [89] fait une très bonne synthèse des modèles utilisés dans la littérature concernant la modélisation biomécanique de la marche humaine. Il souligne l'énorme complexité de la modélisation et la nécessaire réduction du modèle à un nombre inférieur de degrés de liberté par rapport à la réalité, conduisant à un modèle s'éloignant de façon conséquente de la réalité, mais utilisable dans la pratique.

Koopman [8] relève le problème de la détermination des efforts articulaires dans la marche lorsque les deux pieds sont en contact avec le sol. Il propose une méthode alliant dynamique inverse et optimisation sur la base de données angulaires mesurées par des goniomètres.

Soucieux de vérifier la validité des calculs concernant les moments articulaires, Chao [90] a récemment mis en oeuvre une mesure dynamométrique directe sur une jambe et a pu comparer ainsi un calcul de dynamique inverse avec la mesure pour un mouvement simple de flexion de la jambe.

Nigg [91] développe une méthode à base de 4 accéléromètres triaxiaux pour résoudre le problème dynamique inverse en 3-D pour la marche et la course, afin de déterminer le chargement de la hanche dans ces mouvements. Cependant, comme il ne s'intéresse qu'au mouvement d'une seule jambe, il sous-estime les forces engendrées d'environ 20 pour cent.

---

1. Conception et développement d'un pied prothétique à restitution d'énergie

Il remarque l'intérêt de l'utilisation des accéléromètres pour une analyse en temps réel des mouvements.

Enfin, Winter [92] s'interroge sur la pertinence d'une étude 3-D du mouvement de marche par une étude dynamique et énergétique sur 9 sujets sains. En conclusion de son étude, il évoque le fait que pour des sujets dont les oscillations frontales ne sont pas conséquentes, l'analyse dans le plan sagittal est suffisante. Par contre, l'analyse 3-D est obligatoire pour des sujets qui ont des mouvements dans le plan frontal plus importants.

Comme nous l'avons déjà mentionné, Vaughan a été l'un des premiers à s'intéresser aux chaînes cinématiques fermées en proposant une classification des principaux mouvements rencontrés classiquement [93]. Il introduit ensuite une méthode de résolution des problèmes à chaînes cinématiques fermées par l'introduction d'un critère à minimiser (en l'occurrence les efforts actionneurs) soumis à des contraintes de type inégalité.

En ce qui concerne l'analyse du mouvement de pédalage, Gregor [94] instrumente dans le milieu des années 80 les pédales d'un vélo afin de mesurer la composante normale de la force qu'exerce le pied sur la pédale. Il mesure d'autre part l'angle formé par la pédale avec l'axe de la pédale. Il s'intéresse au couple transmis par le genou durant la propulsion, couple calculé en utilisant le formalisme de Newton-Euler.

Ericson s'attache plus particulièrement aux aspects physiologiques des exercices sur ergomètre en calculant dans un premier temps les forces articulaires tibiofémorales [95], puis la puissance musculaire et le travail pour différentes charges et vitesses [96]. Wells [97] avait également proposé des calculs similaires en s'attachant à déterminer les contributions concentriques et excentriques durant le mouvement de pédalage correspondant aux différentes contractions et extensions des groupes musculaires.

Van Ingen Schenau [98, 99] travaille lui aussi sur le mouvement de pédalage en calculant et interprétant la puissance mécanique durant l'exercice sur ergomètre et en s'intéressant au contrôle des forces et des positions de mouvements contraints pour des systèmes polyarticulés.

Le travail le plus conséquent sur le pédalage est certainement celui de Hull. Depuis le milieu des années 80, il a publié de nombreux articles sur ce sujet en introduisant dans un premier temps un modèle plan à 5 segments avec une équation de fermeture et 2 contraintes [100]. A partir de ce modèle, il étudie tout d'abord l'influence de la vitesse de rotation sur le calcul des moments intersegmentaires pour une puissance constante [101]. Par la suite, il propose de comparer les forces de réaction à la pédale calculées par optimisation (minimisation de deux fonctions de coût différentes) avec celles mesurées [102]. En conclusion de ce travail, il annonce que le mouvement de pédalage optimum est un compromis entre la minimisation en effort et la minimisation en intensité musculaire. Il

reprend ce travail plus en détail dans [103] pour présenter l'influence des différents groupes musculaires dans le pédalage. Ensuite, il étudie l'influence de 5 variables indépendantes dans la réalisation d'un mouvement de pédalage [104] (hauteur et angle du cadre de la selle, dimension du pédalier, distance entre cheville et points d'appui sur la pédale, vitesse de pédalage). En utilisant une méthode d'optimisation multivariable, il obtient un système « optimal » pour ces paramètres correspondant à une morphologie donnée. Puis, il détermine les profils des vitesses qui maintiennent l'énergie constante dans chaque jambe [105]. Il analyse ensuite la part des contributions de la « gravité » et « musculaire » dans le pédalage [106] pour aboutir à une étude plus complète sur l'énergie mécanique musculaire et le travail interne pendant le pédalage [107]. Enfin, il introduit des concepts d'optimisation dynamique afin de déterminer un dimensionnement optimal du pédalier. Plus récemment, Hull [108] conçoit une pédale instrumentée permettant de faire l'acquisition du torseur complet des efforts sous la pédale lors du mouvement de pédalage.

Enfin Fregly, dans un article récent [109], introduit une approche basée sur un modèle à 3 degrés de liberté afin de déterminer les aspects coordination intermusculaire lors des mouvements de pédalage.

## II.3 Paramétrage d'une structure articulée

La description géométrique suivante est désormais très classique dans les équipes de recherche spécialisée dans l'étude de la dynamique des structures articulées. Cependant, afin de faciliter la compréhension du formalisme développé par la suite, il nous a semblé opportun de l'évoquer ici brièvement.

### II.3.1 Matrice de transformation homogène

Introduisons la matrice  $[4 \times 4]$ , matrice de transformation homogène, définie par :

$$\mathbf{T}_i^j = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_i^j & \mathbf{L}_i^j \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{II.1})$$

qui permet d'exprimer dans un repère  $\mathfrak{R}_i$  les coordonnées de tout point lié à un repère  $\mathfrak{R}_j$  à l'aide d'une seule transformation qui combine la rotation et la translation entre ces deux repères :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{T}_i^j \mathbf{X}_j \quad (\text{II.2})$$

Cette matrice admet les propriétés :

- $\det \mathbf{T}_i^j = 1$  ;

$$- (\mathbf{T}_i^j)^{-1} = \mathbf{T}_j^i = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_j^i & \mathbf{L}_j^i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{R}_i^j)^T & -\mathbf{R}_i^j \mathbf{L}_i^j \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

- $\mathbf{T}_0^i = \prod_{j=1}^i \mathbf{T}_{j-1}^j$  est la matrice de transformation homogène de  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}_n$  ( $j-1$  antécédent à  $j$  dans la chaîne cinématique).

### II.3.2 Paramétrage de Denavit-Hartenberg

Soit une chaîne cinématique simple composée de  $n$  solides  $\mathcal{S}_i$  telle que représentée sur la figure II.1.

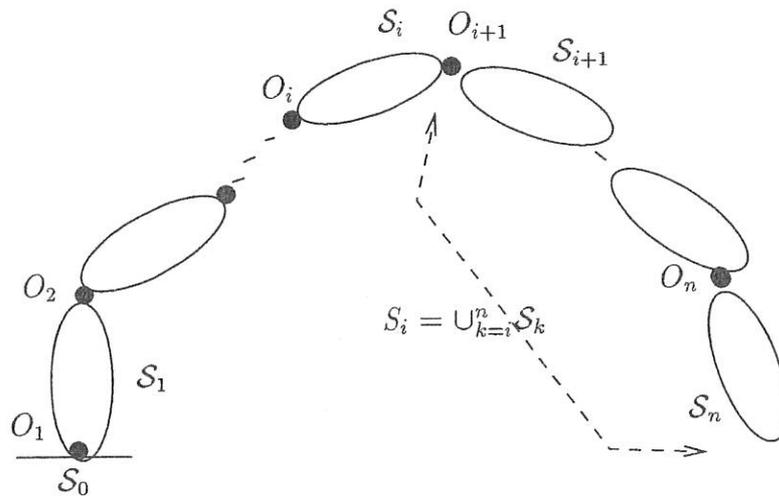


FIGURE II.1 - Chaîne simple ouverte

Il est intéressant de rechercher un paramétrage des liaisons de la chaîne cinématique tel que les matrices de passage aient toutes la même forme littérale dans le but de faciliter les modélisations cinématiques et dynamiques du système mécanique. Introduite par Denavit et Hartenberg [80] en 1955, puis modifiée par Khalil et Kleinfinger [110] dans le milieu des années 80, voici la définition d'un jeu de 4 paramètres, dits de Denavit-Hartenberg, qui remplissent parfaitement cette fonction.

Au solide  $\mathcal{S}_i$  est attaché le repère  $\mathcal{R}_i = (O_i; \mathbf{x}_i; \mathbf{y}_i; \mathbf{z}_i)$  tel que :

- $(O_i; \mathbf{z}_i)$  soit l'axe de la liaison de  $\mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i-1}$  ;
- $(O_i; \mathbf{x}_i)$  soit la perpendiculaire commune entre  $(O_i; \mathbf{z}_i)$  et  $(O_{i+1}; \mathbf{z}_{i+1})$  ;
- $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i \wedge \mathbf{x}_i$ .

Cette construction est représentée sur la figure II.2.

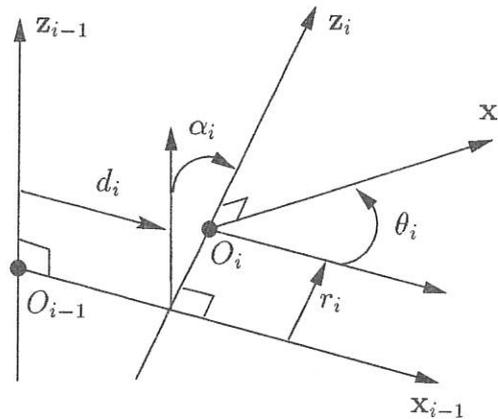


FIGURE II.2 - Paramétrage de Denavit-Hartenberg

On définit ensuite deux groupes de paramètres :

- 2 paramètres constants de localisation de l'axe articulaire  $(O_i; \mathbf{z}_i)$  dans le solide  $\mathcal{S}_{i-1}$  :
  - $\alpha_i$ , angle  $(\mathbf{z}_{i-1}; \mathbf{z}_i)$  orienté par  $\mathbf{x}_{i-1}$  ;
  - $d_i$ , distance entre  $(O_{i-1}; \mathbf{z}_{i-1})$  et  $(O_i; \mathbf{z}_i)$  mesurée suivant  $\mathbf{x}_{i-1}$ .
- 2 paramètres, dont l'un est constant et l'autre paramètre le mouvement (rotation ou translation) de  $\mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i-1}$  :
  - $\theta_i$ , angle  $(\mathbf{x}_{i-1}; \mathbf{x}_i)$  orienté par  $\mathbf{z}_i$  ;
  - $r_i$ , distance entre  $(O_{i-1}; \mathbf{x}_{i-1})$  et  $(O_i; \mathbf{x}_i)$  mesurée suivant  $\mathbf{z}_i$ .

Cela revient à effectuer 4 transformations successives pour passer de  $\mathcal{R}_{i-1}$  à  $\mathcal{R}_i$ .

Introduisons la variable booléenne  $\sigma_i$  définie par :

- $\sigma_i = 0$  si la liaison est rotoïde ;
- $\sigma_i = 1$  si la liaison est prismatique.

On peut alors représenter le paramètre articulaire  $q_i$  de la liaison entre  $\mathcal{S}_{i-1}$  et  $\mathcal{S}_i$  par :

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \quad (\text{II.3})$$

La matrice de transformation homogène, qui résulte de la combinaison des transformations élémentaires précédentes s'écrit alors :

$$\mathbf{T}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & d_i \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -r_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & r_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Cette expression est utile pour le calcul des coordonnées cartésiennes d'un point et pour la mise en place des récurrences matricielles qui seront formulées à partir des récurrences vectorielles définies dans le paragraphe suivant.

## II.4 Problème dynamique inverse

### II.4.1 Introduction

Résoudre le problème dynamique inverse revient à considérer le modèle dynamique de la structure articulée sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \quad (\text{II.5})$$

où les grandeurs cinématiques  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  sont supposées connues et  $\mathbf{\Gamma}$  est à trouver. Ces données sont acquises et traitées selon les procédures décrites dans le chapitre précédent.

Bien entendu le modèle dynamique doit être complété par les données anthropométriques qui déterminent les dimensionnements géométriques et massiques à l'aide des tables décrites dans le chapitre 1.

La combinaison de ces deux types d'entrées introduites dans les équations du mouvement permet donc de rendre compte de la cinétique du geste étudié. Il en résulte le calcul des efforts appliqués représentés par  $\mathbf{\Gamma}$ .

Nous avons vu que beaucoup d'auteurs ont remarqué que le formalisme de Lagrange était inapproprié pour la résolution de ce type de problème. En effet, dans sa forme courante ce formalisme élimine les efforts de liaison. On pourrait faire apparaître ceux-ci mais au prix d'un coût calculatoire élevé, voire prohibitif. Le formalisme de Newton-Euler est tout à fait approprié pour ce type de calcul. Dans ce qui suit, nous allons présenter une méthode qui permet de former une double récurrence sur la cinématique puis la cinétique du système pour le calcul des efforts de liaison.

## II.4.2 Formalisme de Newton-Euler : méthode de Luh, Walker et Paul

La méthode que nous présentons ici a été développée à l'origine par Luh, Walker et Paul [111]. Rappelons qu'elle s'applique aux systèmes à structure de chaîne cinématique simple ouverte. Elle est aussi présentée dans [112]. Son principe général repose sur une double récurrence croissante et décroissante. On construit une récurrence avant (croissante), de la base vers l'extrémité de la chaîne articulaire, pour ce qui est lié à la cinématique du système et une récurrence arrière (décroissante) pour le calcul des couples actionneurs et des efforts de liaison. Puisque le type de liaison que nous aurons à traiter est toujours de type rotoïde, nous aurons pour tout indice  $i$ ,  $\sigma_i = 0$ , donc  $q_i = \theta_i$ .

### II.4.2.a Cinématique

Le but est ici de calculer par récurrence croissante l'ensemble des grandeurs cinématiques. Les vitesses s'expriment par traduction du théorème de composition des vitesses pour chaque corps solide :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_i^{i+1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} = \dot{q}_i \mathbf{z}_i + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \\ \mathbf{V}_{O_i} &= \mathbf{V}_{O_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \wedge \mathbf{O}_{i-1} \mathbf{O}_i \\ \mathbf{V}_{G_i} &= \mathbf{V}_{O_i} + \boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

En dérivant par rapport au temps les expressions précédentes, on obtient les récurrences intrinsèques sur les accélérations :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \dot{q}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \wedge \mathbf{z}_i + \ddot{q}_i \mathbf{z}_i \\ \boldsymbol{\gamma}_{O_i} &= \boldsymbol{\gamma}_{O_{i-1}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \wedge \mathbf{O}_{i-1} \mathbf{O}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{O}_{i-1} \mathbf{O}_i) \\ \boldsymbol{\gamma}_{G_i} &= \boldsymbol{\gamma}_{O_i} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \wedge \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

### II.4.2.b Dynamique

Dans cette partie, nous formulons les équations de la dynamique qui déterminent tous les efforts de liaison.

Décomposons le torseur  $\mathcal{T}_i^e$  des efforts extérieurs appliqués à la section distale  $S_i$  sous la forme :

$$\mathcal{T}_i^e = \mathcal{T}_i^S + \mathcal{T}_{i-1,i} \quad (\text{II.8})$$

où le torseur  $\mathcal{T}_i^S$  des efforts extérieurs à  $S$  agissant sur  $S_i$  s'écrit comme la somme des torseurs  $\mathcal{T}_i^g$  des efforts de gravité agissant sur  $S_i$  et du torseur  $\mathcal{T}_{0,n}$  des efforts exercés par

l'environnement fixe sur  $\mathcal{S}_n$  :

$$\mathcal{T}_i^S = \mathcal{T}_i^g + \mathcal{T}_{0,n} \quad (\text{II.9})$$

Le but de la mise en équations est la détermination de toutes les composantes du torseur  $\mathcal{T}_{i-1,i}$  des efforts exercés par  $\mathcal{S}_{i-1}$  sur  $\mathcal{S}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Formons maintenant les équations de la dynamique au sens de Newton-Euler : « théorèmes généraux » du principe fondamental de la dynamique. Le principe de la méthode repose sur la démarche suivante : la détermination des  $\mathcal{T}_{i-1,i}$  est obtenue par l'application du principe fondamental de la dynamique aux  $\mathcal{S}_i$  successivement pour  $i$  décroissant de  $n$  à 1, soit :

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{T}_i^e, \quad i = n, \dots, 1 \quad (\text{II.10})$$

où  $\mathcal{D}_i$  est le torseur dynamique galiléen de  $\mathcal{S}_i$ .

Compte-tenu de la représentation donnée au torseur des efforts extérieurs, cette équation torsorielle se décompose sous la forme des 2 équations vectorielles (équation de la résultante dynamique et équation du moment dynamique en  $O_i$ ) :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i - \mathbf{F}_i^S &= \mathbf{F}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\delta}_i - \mathbf{M}_i^S &= \mathbf{M}_{i-1,i} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Les inconnues à déterminer sont les composantes des seconds membres. Le calcul des premiers membres est à réaliser par récurrence décroissante sur  $i$ , c'est-à-dire sur les éléments de réduction des torseurs dynamiques et des torseurs d'efforts extérieurs. Compte-tenu des expressions respectives des torseur  $\mathcal{T}_i^g$  et  $\mathcal{T}_{0,n}$  on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i^S &= \mathbf{F}_i^g + \mathbf{F}_{0,n} \\ \mathbf{M}_i^S &= \mathbf{M}_i^g + \mathbf{M}_{0,n} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Les équations de la récurrence rétrograde à construire reposent sur la décomposition :

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{i+1} \quad (\text{II.13})$$

Nous pouvons maintenant décrire la récurrence sur les  $\mathbf{F}_{i-1,i}$  et  $\mathbf{M}_{i-1,i}$ .

Explicitons auparavant les récurrences sur les quantités d'accélération qui résultent de (II.13). D'une part :

$$\mathcal{A}_i = m_i \gamma_{G_i} + \mathcal{A}_{i+1} \quad (\text{II.14})$$

et d'autre part :

$$\mathbf{F}_i^g = m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_{i+1}^g \quad (\text{II.15})$$

La combinaison de (II.11) et (II.12) pour les résultantes donne pour les indices  $i$  et  $i - 1$  :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i - \mathbf{F}_i^g - \mathbf{F}_{0,n} & = \mathbf{F}_{i-1,i} \\ \mathcal{A}_{i+1} - \mathbf{F}_{i+1}^g - \mathbf{F}_{0,n} & = \mathbf{F}_{i,i+1} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

La soustraction membre à membre de ces deux dernières relations et la prise en compte des relations (II.14) et (II.15) conduisent à la récurrence pour  $i = n - 1, \dots, 1$  :

$$\mathbf{F}_{i-1,i} = \mathbf{F}_{i,i+1} + m_i(\gamma_{G_i} - \mathbf{g}) \quad (\text{II.17})$$

qui se trouve initialisée pour  $i = n$  par :

$$\mathbf{F}_{n-1,n} = m_n(\gamma_{G_n} - \mathbf{g}) + \mathbf{F}_{0,n} \quad (\text{II.18})$$

De la même façon que précédemment la combinaison de (II.11) et (II.12) pour les moments donne :

$$\begin{cases} \delta_i - \mathbf{M}_i^g - \mathbf{M}_{0,n} & = \mathbf{M}_{i-1,i} \\ \delta_{i+1} - \mathbf{M}_{i+1}^g - \mathbf{M}_{0,n} & = \mathbf{M}_{i,i+1} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Partant de la décomposition résultant de (II.13) :

$$\delta_i = \delta_{S_i} + \delta_{i+1}(O_i) \quad (\text{II.20})$$

où :

$$\delta_{S_i} = \mathcal{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\mathcal{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) + m_i \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i \wedge \gamma_{O_i} \quad (\text{II.21})$$

et :

$$\delta_{i+1}(O_i) = \delta_{i+1} + \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1} \wedge \mathcal{A}_{i+1} \quad (\text{II.22})$$

De manière analogue, on a en ce qui concerne le moment en  $O_i$  des efforts de pesanteur :

$$\mathbf{M}_i^g = \mathbf{M}_{S_i}^g + \mathbf{M}_{i+1}^g(\mathbf{O}_i) \quad (\text{II.23})$$

Il en résulte la récurrence entre  $\mathbf{M}_i^g$  et  $\mathbf{M}_{i+1}^g$  :

$$\mathbf{M}_i^g = \mathbf{M}_{S_i}^g + \mathbf{M}_{i+1}^g + \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1} \wedge \mathbf{F}_{i+1}^g \quad (\text{II.24})$$

Il en ressort donc par soustraction membre à membre des relations de (II.19) la formule de récurrence sur  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  :

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \mathbf{M}_{i,i+1} + \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1} \wedge (\mathcal{A}_{i+1} - \mathbf{F}_{i+1}^g) + \delta_{S_i} - \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i \wedge m_i \mathbf{g} \quad (\text{II.25})$$

En définitive, la récurrence sur  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  peut s'écrire pour  $i = n - 1, \dots, 1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i-1,i} = & \mathbf{M}_{i,i+1} + \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1} \wedge (\mathbf{F}_{i,i+1} + \mathbf{F}_{0,n}) \\ & + \mathcal{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\mathcal{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) + m_i \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i \wedge (\boldsymbol{\gamma}_{O_i} - \mathbf{g}) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Elle est initialisée pour  $i = n$ , par :

$$\mathbf{M}_{n-1,n} = \mathcal{I}_n \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \boldsymbol{\omega}_n \wedge (\mathcal{I}_n \boldsymbol{\omega}_n) + m_n \mathbf{O}_n \mathbf{G}_n \wedge (\boldsymbol{\gamma}_{O_n} - \mathbf{g}) - \mathbf{M}_{0,n} \quad (\text{II.27})$$

### II.4.3 Formulation des modèles dynamiques par code de calcul symbolique

Nous venons de présenter une formulation naturelle des modèles dynamiques de systèmes articulés à chaînes ouvertes simples. On se rend bien compte de la difficulté qu'il y aurait à expliciter « à la main » de telles écritures lorsque le nombre de degrés de liberté d'une chaîne articulée est élevé. De plus, même si ces relations sont très faciles à programmer, le nombre d'opérations qui résulterait de l'utilisation directe de cet algorithme poserait des difficultés pour la mise en oeuvre dans le cas de la programmation en-ligne des manipulateurs. En effet, dans beaucoup de cas on peut réduire considérablement le nombre d'opérations à effectuer si on est capable de détecter « à l'avance » les opérations inutiles. Aussi, afin d'optimiser le nombre d'opérations à effectuer et de faciliter ces opérations fastidieuses, des codes de calcul formel ont été mis au point et rendent ainsi plus facile la génération des modèles dynamiques. Quel que soit l'outil utilisé, il faut passer des formulations vectorielles (intrinsèques) (II.17),(II.18) et (II.26),(II.27) à leurs formulations en termes de composantes sur une base locale judicieusement choisie. Cette mise en forme est explicitée plus en détail dans l'annexe D de ce mémoire. Nous avons utilisé en ce qui nous concerne le logiciel SYMORO (SYstem for MOdeling RObots) développé par W. Khalil à l'Ecole Centrale de Nantes [113, 112]. Un exemple de fichier fourni par ce logiciel est présenté dans l'annexe C.

## II.5 Dynamique des systèmes à chaînes cinématiques fermées

Les relations que nous venons de mettre en place permettent d'établir aisément les modèles dynamiques de structures polyarticulées à chaînes ouvertes soumises à un effort extérieur donné. Dans le cas où la chaîne est fermée, il se pose d'autres problèmes que nous nous proposons d'étudier maintenant. Nous effectuons ainsi une analyse de la résolution

des systèmes à boucles cinématiques fermées pour ensuite appliquer les conclusions à la résolution des modèles dynamiques pour l'étude de la marche (humaine et mécanique), et pour le mouvement de pédalage. Rappelons que l'objectif de cette partie du mémoire est de calculer les efforts de liaison intersegmentaires dans un système articulé en chaîne fermée.

### II.5.1 Introduction

La marche humaine présente 2 phases principales selon que l'on se trouve en simple ou double appui. Dans la deuxième phase, la chaîne cinématique est bouclée. Dès lors vient se poser le problème suivant : *Comment peut-on envisager d'actionner le système pour restituer un mouvement observé ?*

En d'autres termes, comment résoudre le problème dynamique inverse lorsque le système est sous-déterminé : le nombre de composantes à déterminer est supérieur au nombre d'équations fournies par le modèle dynamique (sa dynamique est sous-déterminée par sa cinématique).

En fait, il existe de nombreuses méthodes pour analyser ce problème. Seulement, leur utilisation peut paraître compliquée ou parfois peu adaptée au cas étudié.

Dans un premier temps, et sur la base de l'étude du traditionnel *mécanisme à 4 barres*, nous analysons systématiquement les solutions possibles, puis nous procédons à une approche analogue pour le cas de la marche. Enfin, nous présentons une méthode générale de résolution du PDI pour la marche en utilisant des plate-formes de force et en nous intéressant à leurs modes d'utilisation.

### II.5.2 Position du problème

Considérons une chaîne cinématique simple, fermée, composée de  $n$  solides  $\mathcal{S}_i$  telle que représentée sur la figure II.3.

Cette chaîne simple fermée comporte  $n$  corps et  $n + 1$  liaisons. L'application des lois de la dynamique fournit  $6n$  équations indépendantes pour la détermination de  $6n + 6$  composantes d'efforts de liaison. Il y a donc 6 inconnues arbitraires à déterminer.

Les  $6n$  équations (II.17),(II.18) et (II.26),(II.27) établissent autant de relations indépendantes entre les composantes d'efforts de liaison. Celles-ci sont, d'une part, les  $6n$  composantes des  $\mathbf{F}_{i-1,i}$  et  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  ( $i = n, \dots, 1$ ) figurant dans les premiers membres des relations précédentes, et, d'autre part, les 6 composantes contenues dans  $\mathbf{F}_{0,n}$  et  $\mathbf{M}_{0,n}$  intervenant dans les seconds membres de (II.18) et (II.27).

Il faut donc lever l'indétermination sur 6 inconnues arbitraires, soit en les spécifiant,

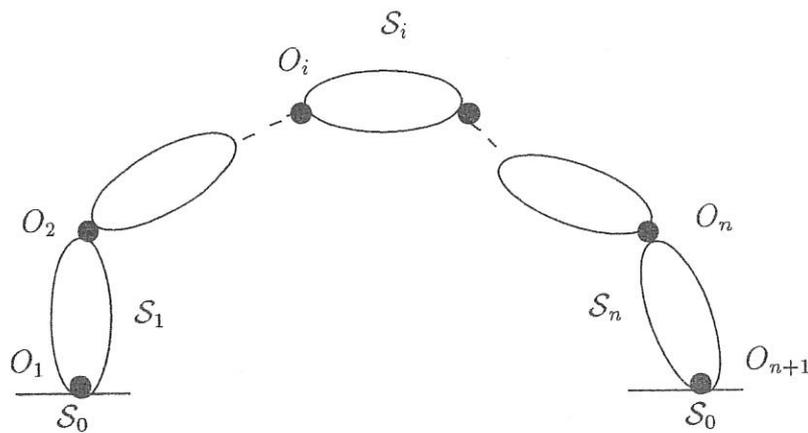


FIGURE II.3 - Chaîne simple fermée

soit en introduisant 6 contraintes ou relations supplémentaires combinant les  $6n + 6$  composantes à déterminer.

On peut penser que l'ensemble des choix possibles pour la résolution peut se situer entre ces deux cas types entièrement compatibles avec des mouvements identiques :

- absence d'efforts actifs sur certaines des liaisons (couples actionneurs nuls) ;
- modalités ou lois de contact de la chaîne avec son support  $S_0$ , précisées sous la forme de relations données entre les composantes des torseurs d'efforts de liaison aux 2 extrémités de la chaîne.

On peut aussi considérer qu'il y a 6 composantes d'efforts actionneurs articulaires à spécifier.

L'objet du paragraphe suivant est de donner quelques exemples de solutions pour le cas simple du mécanisme à 4 barres dans un premier temps, puis d'examiner les solutions envisageables pour le cas de la marche.

### II.5.3 Exemples

Dans le cas d'un système plan comportant une chaîne fermée, le bilan des équations s'établit à  $3n$  équations indépendantes pour  $3n + 3$  composantes d'efforts de liaison à déterminer.

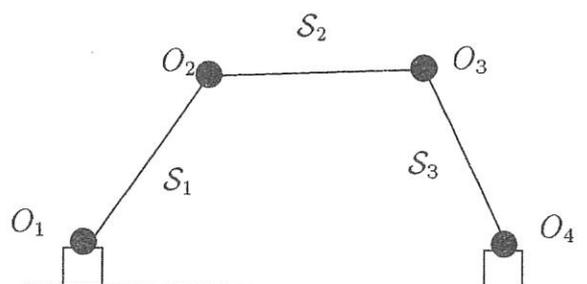


FIGURE II.4 - Mécanismes à 4 barres plan

### II.5.3.a Mécanismes à 4 barres

Dans le système plan à 4 barres de la figure II.4, 3 composantes d'efforts de liaison (en  $O_1, \dots, O_4$ ) sont non définies par les équations de la dynamique. Il y a donc lieu d'introduire 3 relations supplémentaires aptes à définir le comportement des liaisons en termes d'efforts à transmettre.

Introduisons les notations détaillées en termes de composantes :

$$\mathbf{F}_{i-1,i} = X_i \mathbf{x}_i + Y_i \mathbf{y}_i \quad (\text{II.28})$$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \Gamma_i \mathbf{z}_0 \quad (\text{II.29})$$

D'une manière générale, la levée de l'indetermination sur les composantes arbitraires peut se faire par l'introduction de 3 relations indépendantes postulées directement sur les  $X_i, Y_i, \Gamma_i$  pour  $i = 1, \dots, 4$ .

On peut, comme mentionné précédemment, prendre comme hypothèse qu'il n'y a pas d'efforts actifs sur 3 des liaisons en  $O_1, O_2, O_3, O_4$ , ce qui se traduit par une condition du type :

$$\Gamma_{i_1} = \Gamma_{i_2} = \Gamma_{i_3} = 0 \quad (\text{II.30})$$

qui traduit le fait qu'une seule des liaisons est active, ce qui est une condition suffisante pour animer le mécanisme, hors de ses configurations singulières.

On peut considérer aussi les conditions du type :

$$X_i = Y_i = \Gamma_i = 0 \quad (\text{II.31})$$

pour un indice  $i$  quelconque. La satisfaction de ces trois conditions définit une liaison fictive à l'articulation  $i$  : la liaison géométrique est effective, alors qu'il n'y a pas de liaison sthénique à proprement parler puisqu'il n'y a pas de transmission d'effort intersegmentaire (cf figure II.5).

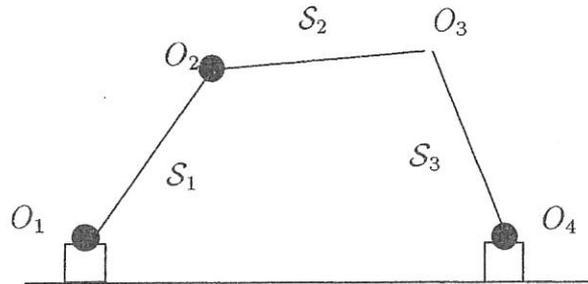


FIGURE II.5 - Mécanismes à 4 barres plan avec une liaison fictive

On peut aussi imposer les lois de contact de la chaîne avec son support  $\mathcal{S}_0$ , sous la forme de relations données entre les composantes des 2 torseurs d'efforts de liaison en  $O_1$  et  $O_4$ :

$$\lambda_1 \mathbf{F}_{0,1} + \mu_1 \mathbf{F}_{0,3} = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$\lambda_2 \mathbf{M}_{0,1} + \mu_2 \mathbf{M}_{0,3}(\mathbf{O}_4) = 0 \quad (\text{II.33})$$

On pourrait aussi :

- introduire trois relations indépendantes, a priori quelconques, entre les 6 composantes  $X_1, Y_1, \Gamma_1, X_4, Y_4, \Gamma_4$ .
- introduire trois relations indépendantes entre toutes les composantes d'efforts de liaison intérieurs ou extérieurs.

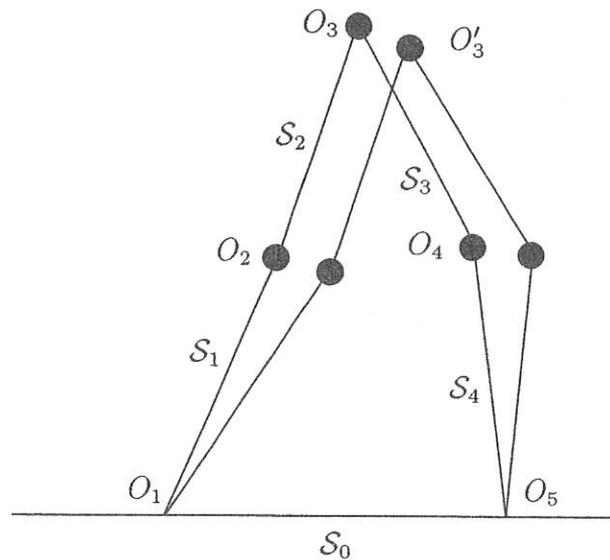
Toutes ces données complémentaires sont compatibles avec des mouvements identiques.

Enfin, un dernier choix possible qui peut présenter le plus grand intérêt est la recherche de couples articulaires optimisés au sens d'un critère à définir. On pourra voir un exemple d'application pratique de cette possibilité dans l'étude du chapitre suivant concernant le mouvement de pédalage.

### II.5.3.b Système marcheur sans pieds

Dans ce système réduit à 4 corps, les liaisons avec le sol, ponctuelles et unilatérales, ne transmettent pas de moments. Il y a donc 13 composantes d'efforts de liaison à déterminer à l'aide de 12 équations de la dynamique.

Il y a donc 1 composante arbitraire à déterminer, qu'il s'agisse d'une composante d'appui, d'une composante d'effort interne actif ou passif. L'introduction d'une donnée manquante peut donc se faire selon un large choix. Par exemple, on peut imposer qu'un

FIGURE II.6 - *Système marcheur sans pieds*

effort actionneur interne soit nul. On peut aussi introduire une corrélation entre les 4 composantes d'appui ou encore imposer que l'une d'elles demeure nulle au cours du transfert.

On peut aussi souligner le fait que l'un quelconque des 3 couples actionneurs peut être nul.

Il faut remarquer que le mouvement du système en appui double est incompatible avec des contacts sans frottement sur un sol parfaitement glissant car dans ce cas ce sont 2 composantes d'effort de contact tangentiel qui sont nulles. De sous-déterminé, le système d'équations devient sur-déterminé.

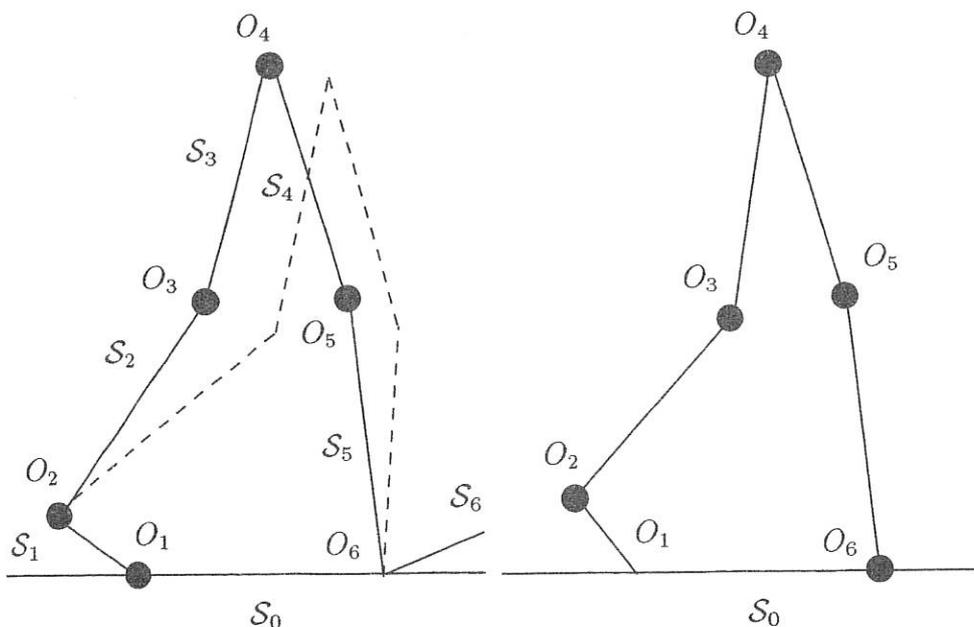
### II.5.3.c Système marcheur avec pieds

Dans un premier temps nous rappelons quelques notions essentielles sur la marche. Les références que nous avons utilisées sont [114, 115].

En se référant à la figure II.7 on identifie deux phases distinctes composées elles mêmes de deux sous-phases au cours de chaque pas :

1. *La phase de simple support*: dans cette phase, un pied est en contact avec le sol, l'autre jambe est libre et effectue un mouvement de balancement de l'avant vers l'arrière. Ainsi on peut modéliser le mouvement à l'aide d'une chaîne cinématique ouverte. Il existe deux sous-phases dans cette phase dite pendulaire :
  - (a) la première durant laquelle le pied support repose totalement sur le sol ;

- (b) la seconde au cours de laquelle le talon du pied support décolle, celui-ci reposant sur l'avant-pied au niveau du 5<sup>ème</sup> métatarse.
2. *La phase de double-appui*: dans cette phase les deux pieds sont en contact avec le sol. Il y a donc un transfert du poids du corps d'un pied sur l'autre. On peut modéliser le mouvement résultant à l'aide d'une chaîne cinématique fermée. Il existe deux sous-phases dans cette phase dite bipodale :
- (a) la première durant laquelle le talon du pied de la jambe qui était pendulaire entre en contact avec le sol ;
- (b) la seconde au cours de laquelle le pied de la jambe balancée s'applatit complètement sur le sol, le pied initialement « porteur » continuant à se redresser pour finalement décoller.

FIGURE II.7 - *Système marcheur avec pieds*

On peut décomposer la partie boucle fermée du cycle en deux sous-phases A et B comme le montre la figure II.7. Une première phase A dans laquelle le marcheur peut être modélisé par un système à 5 corps avec une liaison pivot en  $O_1$  (3 composantes d'efforts d'appui) et un appui simple en  $O_6$  (2 composantes d'efforts d'appui). Etudions dans un premier temps la phase A. Les équations de la dynamique fournissent 15 équations pour 17 composantes d'efforts de liaison.

Il y a donc lieu d'introduire 2 relations complémentaires traduisant des conditions de contact, ou encore d'introduire une relation liant les efforts de contact et une relation liant les couples actionneurs articulaires.

Dans la phase B, il y a 18 composantes d'efforts de liaison et de contact au sol devant satisfaire 15 équations. Il y a donc 3 nouvelles conditions à formuler sur les efforts de contact et/ou sur les efforts actionneurs.

Une solution réaliste possible aux deux problèmes posés dans les phases A et B est la détermination de 3 composantes d'efforts de contact par plate-forme de force, ce qui conduit, au travers des équations de la dynamique, à la détermination unique de tous les efforts articulaires internes.

Pour le cas de l'utilisation de deux plates-formes de force, celles-ci vont fournir les 6 composantes d'appui (en bidimensionnel). Il est suffisant d'en rentrer 3 dans le modèle. Celui-ci, s'il est pertinent, doit restituer les 3 autres telles que mesurées.

#### II.5.4 Modes d'utilisation des données d'une plate-forme de force

Nous avons proposé une famille d'équations vectorielles qui établit une récurrence décroissante entre les torseurs d'efforts exercés par  $\mathcal{S}_{i+1}$  sur  $\mathcal{S}_i$  et par  $\mathcal{S}_i$  sur  $\mathcal{S}_{i-1}$ . Dans ce qui suit, cette récurrence est amorcée sur le segment distal  $\mathcal{S}_n$  et s'achève sur le segment proximal  $\mathcal{S}_1$  en appui sur  $\mathcal{S}_0$ .

Explicitons plus en détail l'utilisation de cette récurrence pour le cas des chaînes simples ouvertes. L'extrémité libre étant  $\mathcal{S}_n$ , la récurrence précédente est initialisée par  $\mathbf{F}_{0,n} = 0$  et  $\mathbf{M}_{0,n} = 0$ , qui sont les forces qu'exerce l'environnement sur le segment distal. Elle s'achève, pour  $i = 1$ , par la détermination de l'élément de réduction en  $O'$  des efforts exercés par le pied  $\mathcal{S}_1$  sur la plate-forme  $\mathcal{S}'_0$ ,  $O'$  pouvant être le centre de pression du pied  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}'_0$ :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{0,1} \equiv \mathbf{F}(\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}'_0) \\ \mathbf{M}_{0,1} \equiv \mathbf{M}(O_1, \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}'_0) \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Ce résultat doit être en concordance avec les mesures d'efforts réalisées par la plate-forme de force dont l'utilisation peut être conçue ici comme instrument de vérification expérimentale de la pertinence des données introduites et des résultats qui s'en déduisent. C'est ce que nous verrons à propos de l'étude du mouvement de flexion-extension et de la phase de simple support de la marche.

Dans la phase en double appui, le modèle dynamique doit être complété par des conditions de contact de manière à aboutir à une détermination unique des efforts intersegmentaires. Les données fournies par une seule plate-forme, par exemple  $\mathcal{S}''_0$  située sous  $\mathcal{S}_n$

sont alors suffisantes pour déterminer tous les efforts articulaires. En effet, la récurrence se trouve initialisée par les efforts mesurés par  $\mathcal{S}_0''$  :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{0,n} \equiv \mathbf{F}(\mathcal{S}_0'' \rightarrow \mathcal{S}_n) \\ \mathbf{M}_{0,n} \equiv \mathbf{M}(O_n, \mathcal{S}_0'' \rightarrow \mathcal{S}_n) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Les  $\mathbf{F}_{i-1,i}$ ,  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  sont alors déterminés de proche en proche de manière unique par les équations de la dynamique pour aboutir à la détermination de  $\mathbf{F}_{0,1}$ ,  $\mathbf{M}_{0,1}$ .

De l'argumentation qui précède, il ressort que l'analyse d'un pas complet de la marche requiert la mise en oeuvre d'une seule plate-forme de forces et cela dans la seule phase bipodale. Néanmoins, il faut souligner que l'introduction d'une plate-forme en phase unipodale ou d'une seconde plate-forme en phase bipodale est certainement un instrument de contrôle expérimental, indispensable, de la qualité des résultats obtenus. Précisons que cette approche directe de l'étude de la marche par plate-formes de forces s'oppose d'une certaine manière, en ce qui concerne la phase bipodale, à la méthode proposée par Vaughan [116]. En effet celui-ci détermine les efforts actionneurs sans informations extérieures, par l'introduction d'un critère optimisant qui permet de sélectionner les efforts minimaux. A la différence de cette démarche, qui présente son intérêt propre, la méthode présentée recèle en elle-même les éléments de sa propre validation.

### II.5.5 Autre méthode de résolution

Bien entendu, d'autres méthodes de résolution des problèmes des chaînes fermées sont possibles. Citons entre autres :

- l'approche différentielle introduite dans [112] et qui propose de décomposer le vecteur des variables articulaires en un vecteur de variables actives et un vecteur de variables passives. Les équations sont obtenues en introduisant des multiplicateurs dans les équations de Lagrange et en les éliminant par une approche différentielle basée sur l'analyse de la structure des équations de contraintes ;
- la transformation du problème sous-déterminé en la minimisation du vecteur formé par les composantes d'efforts de liaison et des couples actionneurs sous les contraintes fournies par les équations du modèle dynamique. Ce problème est alors résolu par la technique de la Pseudo-Inverse (développée plus en détail dans l'annexe B).

## II.6 Etude énergétique

### II.6.1 Introduction

Les physiologistes, les médecins du sport et les entraîneurs sont confrontés à l'optimisation de la machine humaine pour réaliser une tâche corporelle donnée. La manière la plus simple de décrire le comportement énergétique global d'un tel système est d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique afin de faire apparaître les travaux cumulés des forces internes du système [2]. La connaissance du rendement correspondant au transfert de l'énergie métabolique vers l'énergie mécanique permet de remonter à un calcul de l'énergie métabolique. Cette dernière détermination fait actuellement des progrès et on peut y accéder par des méthodes de type physiologie de l'effort, assez bien maîtrisées. Rendre compte des travaux globaux cumulés des forces internes nous est apparu de ce fait un préalable pour l'analyse de gestes aussi naturels que ceux étudiés par la suite.

### II.6.2 Quelques aspects bibliographiques

Winter, encore une fois, a été l'un des premiers à aborder les problèmes liés aux calculs énergétiques selon des procédés prenant en compte la nature « multi-corps » des modèles représentatifs du corps humain en mouvement.

Dans un premier temps [117], il propose un calcul direct de l'énergie dépensée par chaque segment lors d'un cycle de marche et analyse leurs contributions individuelles. Il montre la part mineure de l'énergie cinétique de rotation pour les corps autres que les jambes. Il affirme entre autres que le tronc se comporte comme un système conservatif avec échange complet entre énergie cinétique et potentielle. Il propose ensuite [118] une nouvelle définition du travail mécanique fourni dans un mouvement humain. Il fait ainsi apparaître un travail mécanique total prenant en compte à la fois les termes négatifs et positifs de variation d'énergie car ils « coûtent » en énergie métabolique. Il propose ainsi la définition du rendement suivant :

$$\eta = \frac{\text{travail interne} + \text{travail externe}}{\text{coût métabolique}} \quad (\text{II.36})$$

L'auteur montre dans cette étude les erreurs causées par la seule prise en compte du travail externe, par exemple à l'aide d'un ergomètre adapté au mouvement étudié. Au début des années 80, Winter [119] propose une analyse de la génération, absorption et transfert de l'énergie mécanique pendant la marche. Il conclut cette approche en montrant que la proportion d'énergie entre les articulations et les muscles par rapport à la proportion d'énergie générée et absorbée est comparable. Le transfert d'énergie articulaire joue donc un rôle prépondérant dans les variations d'énergie des corps segmentaires

pendant la marche. Il reprend et synthétise ces deux dernières approches dans [120] afin d'étudier l'énergie mécanique dépensée lors de la marche avec des charges. Il insiste sur la supériorité et la pertinence, en terme de compréhension du phénomène, d'un calcul de l'énergie mécanique dépensée par rapport à l'énergie métabolique pour l'analyse de tels mouvements. Enfin, il applique [121] l'ensemble des techniques développées pour l'étude des couples actionneurs et de la puissance mécanique à la course.

Mansour [122] est le premier à proposer un modèle tri-dimensionnel à structure articulée pour l'analyse énergétique de la marche normale et pathologique. Son modèle comporte 12 segments. Il observe que pour des sujets normaux il y a un fort échange entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Les différences d'échanges pour des sujets avec des pathologies dépendent de la nature de celles-ci et ne se retrouvent donc pas d'un sujet à l'autre.

Burdett [123] a comparé la consommation d'énergie métabolique et le travail mécanique pour la marche normale. Pour le calcul du travail mécanique il intègre les forces de réaction au sol mesurées par 4 plates-formes de force afin de déterminer le travail mécanique du centre de masse de la structure articulée. Puis à l'aide d'analyses vidéo il calcule les contributions de chaque segment durant le cycle de marche. L'énergie métabolique est déterminée par la mesure du volume d'air respiré durant le mouvement. Il montre alors des corrélations entre les travaux mécaniques et la consommation d'énergie métabolique à l'aide de relations linéaires entre ces deux types de grandeur.

Iida [124] propose une analyse cinétique basée sur l'étude énergétique pour le centre de masse durant la marche normale et pathologique. Il effectue cette analyse pour 50 sujets sains et 47 sujets ayant une pathologie de leur allure de marche. Il suggère que la réduction de l'analyse de travail mécanique dépensé à la seule étude de celui dépensé par le centre de masse du corps est suffisant pour des applications cliniques.

Pour mémoire citons les articles de Cavanagh [125] et Caldwell [126] qui donnent une excellente revue bibliographique et des réflexions sur les problèmes d'estimation de l'énergie dépensée durant un mouvement.

### II.6.3 Méthode globale de calcul du travail des efforts intérieurs

Nous rendons compte ici de l'approche proposée par Duboy, Lacouture et Junqua [2] pour les gestes sportifs. Ils considèrent l'athlète comme un système articulé plan de masse totale  $M$ , composé de 14 segments rigides de centre de gravité  $G_i$ , de masse  $m_i$ , de moment d'inertie  $I_i$  (exprimé en  $G_i$ ), reliés entre eux par des liaisons de type rotoïde supposées parfaites. On note  $\mathcal{R}$  le repère galiléen fixe lié au laboratoire,  $\mathcal{R}^*$  un repère mobile en translation dans le précédent et ayant pour origine le centre de gravité  $G$  du

système (repère de Koenig).

L'expression de l'énergie cinétique totale du système articulé à un instant  $t$  est alors pour un modèle bidimensionnel [2] :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{14} I_i \omega_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{14} m_i V_{G_i/\mathfrak{R}^*}^2 + \frac{1}{2} M V_{G/\mathfrak{R}}^2 \quad (\text{II.37})$$

où  $\omega_i$  est le taux de rotation absolue du segment  $\mathcal{S}_i$ . L'équation de l'énergie cinétique met en corrélation la puissance des efforts internes avec l'énergie mécanique totale du système (appui fixe et forces données dérivant d'un potentiel) :

$$P_{F_{int}} = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) \quad (\text{II.38})$$

Le travail cumulé des actionneurs musculaires, c'est-à-dire la sommation au cours du mouvement des puissances absolues délivrées, est exprimé sous la forme :

$$W_{F_{int}} = \int_0^T \left| \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{14} I_i \omega_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{14} m_i V_{G_i/\mathfrak{R}^*}^2 + \frac{1}{2} M V_{G/\mathfrak{R}}^2 + Mgz_G \right) \right| dt \quad (\text{II.39})$$

Mouahid [5] et Leplanquais [127] ont utilisé cette formulation du travail des forces internes pour différents gestes : les sauts pour le premier, la marche et la course pour le second.

Mouahid a donc étudié la détente et a fait le constat d'erreurs présentes dans la littérature à propos du calcul du travail des forces internes à partir des données d'une plate-forme de force. Il introduit la notion de travail des forces internes cumulées.

Dans le cas de la marche ou de la course sur tapis roulant, Leplanquais [127] reconsidère le problème. Il introduit un repère  $\mathfrak{R}_1$  lié au tapis roulant qui est animé d'une vitesse constante  $v$  et redéfinit le calcul du travail des efforts internes pour aboutir à l'expression :

$$W_{F_{int}} = \int_0^T \left| \frac{d}{dt} [E_c + M(gz_G + v \vec{V}_{G/\mathfrak{R}} \cdot \vec{y})] \right| dt \quad (\text{II.40})$$

où  $z_G$  est la côte du centre de gravité et  $\vec{y}$  est l'axe attaché au tapis roulant.

On remarquera ici que dériver globalement la somme puis intégrer la valeur absolue minimise les erreurs.

Cependant, on ne peut pas avec cette méthode individualiser la contribution de chacune des articulations dans la dépense énergétique que l'on ne peut estimer que « globalement » avec ce type de calcul.

Aissaoui [128] a présenté une extension en 3-D du calcul global du travail des forces intérieures en décrivant l'orientation d'un corps dans l'espace à l'aide des quaternions et

d'un vecteur des coordonnées généralisées formé des positions absolues de chacun des corps et du quaternion correspondant. Il écrit ainsi l'énergie cinétique aisément et applique cette technique pour la détermination du travail des forces internes pour un sujet témoin. Il montre qu'il existe des portions dans le cycle de marche où le système articulé représentatif du corps humain se comporte comme un système conservatif.

De la même façon que dans le travail précédemment présenté, on peut exprimer l'énergie cinétique du système articulé par la relation :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{II.41})$$

où  $\dot{\mathbf{q}}$  est le vecteur des vitesses généralisées et  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  est la matrice de masse du système. Celle-ci est obtenue à l'aide de technique de calcul formel et du logiciel SYMORO [113]. On trouvera dans l'annexe C un exemple de fichier de calcul des éléments de la matrice d'inertie pour un modèle à 7 degrés de mobilité représentant un marcheur.

L'expression de l'énergie potentielle est :

$$E_p = Mgy_G = \mathbf{g} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{T}_0^i \mathbf{r}_i \quad (\text{II.42})$$

où  $\mathbf{T}_0^i$  est la matrice de transformation homogène du repère  $\mathfrak{R}_0$  au repère  $\mathfrak{R}_i$ ,  $y_G$  est la cote du centre de gravité du système et  $\mathbf{r}_i$  est la position du centre de gravité dans le repère  $\mathfrak{R}_i$ .

Il vient donc finalement :

$$W^{(1)} = \int_0^T \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{T}_0^i \mathbf{r}_i \right| dt \quad (\text{II.43})$$

#### II.6.4 Puissances locales et bilans énergétiques

La puissance développée par chacune des articulations de la structure articulée est définie par la relation :

$$P_i = \Gamma_i \dot{q}_i \quad (\text{II.44})$$

En intégrant sur la durée du cycle la somme de ces puissances, on obtient le travail des forces internes :

$$W^{(2)} = \int_0^T \left| \sum_{i=1}^n P_i \right| dt \quad (\text{II.45})$$

Cette dernière expression est à comparer avec la relation II.43 et donne un calcul global du travail des efforts internes. Il existe cependant un moyen d'individualiser la contribution de chaque articulation.

On définit alors la somme des travaux absolus par :

$$W^{(3)} = \int_0^T \sum_{i=1}^n |P_i| dt \quad (\text{II.46})$$

qui donne la consommation d'énergie totale lors du mouvement sans compensation d'une articulation sur l'autre. Dans cette formulation, on peut individualiser la contribution de chacune des articulations à la différence de la méthode précédente qui ne le permet pas. La comparaison des résultats obtenus par analyse globale et analyse locale constitue un élément de vérification supplémentaire de la validité des opérations effectuées.

Enfin, On peut aussi calculer le travail moteur positif par la relation :

$$W^{(4)} = \int_0^T \sum_{i=1}^n P_i^{pos} dt \quad (\text{II.47})$$

où  $P_i^{pos}$  est la puissance motrice positive pour chaque articulation définie par :

$$P_i^{pos} = \max(0, P_i) \quad (\text{II.48})$$

## II.7 Conclusion

Nous avons introduit et développé dans ce chapitre les techniques de calcul qui vont être appliquées dans le chapitre suivant pour l'étude de trois mouvements de références : la flexion-extension, la marche dans le plan sagittal et le pédalage. Nous avons mis l'accent sur les difficultés à résoudre le problème dynamique inverse lorsque les chaînes cinématiques étaient de type boucle fermée. Enfin, d'un point de vue énergétique (au sens mécanique du terme), nous avons introduit 4 bilans distincts du travail mécanique dont la connaissance nous semble souhaitable à des degrés divers pour compléter l'étude d'un mouvement humain.



## Chapitre III

# Etude de trois mouvements de référence

*Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats pour l'analyse dynamique et énergétique des mouvements humains concernant trois mouvements de références : la flexion-extension, la marche dans le plan sagittal et le pédalage.*

*J'aimerais que vous saisissiez la signification profonde de ce qui, autrement, ne serait qu'un banal jeu hydraulique. De Caus savait bien que si l'on prend un vase, qu'on le remplit d'eau et qu'on ferme son ouverture, même si ensuite on fore un trou sur le fond, l'eau ne sort pas. Mais si on fait aussi un trou vers le haut, l'eau coule ou jaillit en bas.*

- *N'est ce pas une évidence ? demandais-je. Dans le second cas l'air entre par le haut et pousse l'eau en bas.*
- *Explication scientifique typique, où l'on prend la cause pour l'effet, ou vice versa. Vous ne devez pas vous demander pourquoi l'eau sort dans le second cas. Vous devez vous demander pourquoi elle se refuse à sortir dans le premier.*
- *Et pourquoi elle se refuse ? demanda, anxieux, Garamond.*
- *Parce que si elle sortait, il resterait du vide. Nequaquam vacui, c'était un principe rose-croix, que la science moderne a oublié.*

*Umberto Eco  
Le pendule de Foucault*

*Afin de concentrer la lecture de ce chapitre sur les résultats relatifs à l'étude dynamique et énergétique de mouvements, l'ensemble des figures de données cinématiques relatives aux mouvements étudiés sont regroupées dans l'annexe D. Il en est de même pour les caractéristiques anthropométriques des différents modèles que l'on peut retrouver dans l'annexe E.*

### III.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en place un certain nombre d'outils. D'une part, ceux-ci nous permettent de réaliser et traiter correctement une acquisition des données cinématiques que sont les positions cartésiennes des marqueurs anatomiques disposés sur le corps du sujet testé. D'autre part, on peut modéliser la cinématique et la dynamique du mouvement.

Le propos de ce chapitre, qui constitue le coeur de notre mémoire, est d'appliquer les principes précédemment décrits à trois mouvements que nous qualifierons de mouvements de référence : le mouvement simple de flexion-extension [129], la marche dans le plan sagittal [41, 130, 131, 132] et le mouvement de pédalage [133]. Les exemples se présentent donc dans un sens croissant de complexité cinématique : une chaîne simple ouverte à 4 degrés de mobilité, une chaîne simple ouverte puis fermée à 7 degrés de mobilité et enfin une chaîne à 2 boucles fermées, 9 degrés de mobilité et 3 degrés de liberté.

Remarquons tout de suite, à l'aide des développements du chapitre précédent, que pour l'analyse dynamique des deux mouvements ayant un corps en contact direct avec le sol, la flexion-extension et la marche, une utilisation spécifique des plate-formes de force a été proposée. Celle-ci permet d'apporter des éléments de vérifications expérimentales de la pertinence des modèles dynamique, cinématique et anthropométrique introduits.

En ce qui concerne l'étude du mouvement de pédalage, le processus d'optimisation choisi pour l'obtention d'une solution optimale dans la résolution du problème sous-déterminé est celui de la minimisation du vecteur formé par les inconnues du problème. Dans ce cas, nous mettons en oeuvre la méthode de Lagrange qui fournit les équations formant un système linéaire dont les inconnues dans le cas de la résolution du problème dynamique inverse sont les couples actionneurs et les forces de liaison pieds/pédales.

### III.2 Un mouvement simple : la flexion-extension

Lorsque l'on veut mettre en oeuvre une technique nouvelle de calcul, il faut pouvoir évaluer de façon précise ses performances. D'autant plus lorsque celle-ci est dépendante

de données expérimentales que l'on a traité au préalable. Dès lors, la mise en oeuvre d'un modèle simple dont on peut penser qu'il rend bien compte de la réalité est une étape incontournable. Ainsi, nous proposons d'étudier dans un premier temps le mouvement de flexion-extension, mouvement plan par excellence. On met en oeuvre les techniques expérimentales présentées dans le premier chapitre.

### III.2.1 Cinématique du mouvement de flexion-extension

Lors de l'acquisition cinématique du mouvement, la consigne à respecter pour le sujet testé était de rester les bras croisés sur la poitrine et d'effectuer une flexion-extension en gardant au maximum les pieds à plat et donc sans décoller les talons du sol. Le modèle choisi pour représenter ce mouvement est le modèle plan à 4 corps de la figure III.1 : le tronc  $\mathcal{S}_4$  (comprenant les bras et la tête), les cuisses  $\mathcal{S}_3$ , les jambes  $\mathcal{S}_2$  et les pieds  $\mathcal{S}_1$ . Ces trois derniers corps ont chacun comme masse la masse unitaire multipliée par deux. Les caractéristiques anthropométriques du sujet testé sont donnés dans le tableau E.1.

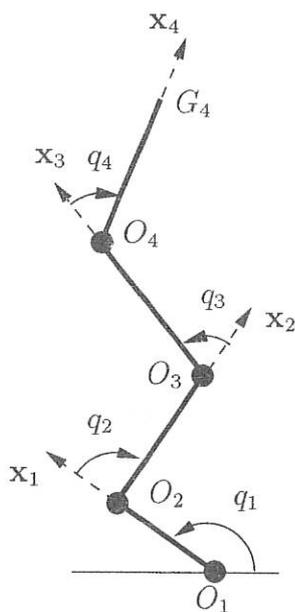


FIGURE III.1 - *Modèle cinématique pour la flexion-extension*

Les courbes de la figure D.1 représentent l'évolution de ces paramètres articulaires en fonction du temps en données brutes et en données filtrées par ondelettes et celles de la figure D.2 l'évolution des vitesses et accélérations articulaires. On peut remarquer que le paramètre  $q_1$  est considéré ici comme un paramètre de contrôle : s'il reste constant au

cours du mouvement alors la consigne énoncée précédemment est respectée et la séquence est considérée comme bonne (les pieds restent bien à plat au cours du mouvement).  $q_1$  est constant durant tout le mouvement : les pieds restent à plat durant le mouvement, la vitesse et l'accélération articulaire associées au mouvement du pied sont donc nulles.

### III.2.2 Efforts de liaison

Sur la figure III.2, nous comparons le module de la force de réaction au sol mesurée par la plate-forme de force avec sa valeur calculée par dynamique inverse à l'aide des relations (II.17), (II.18), (II.26) et (II.27) du chapitre 2.

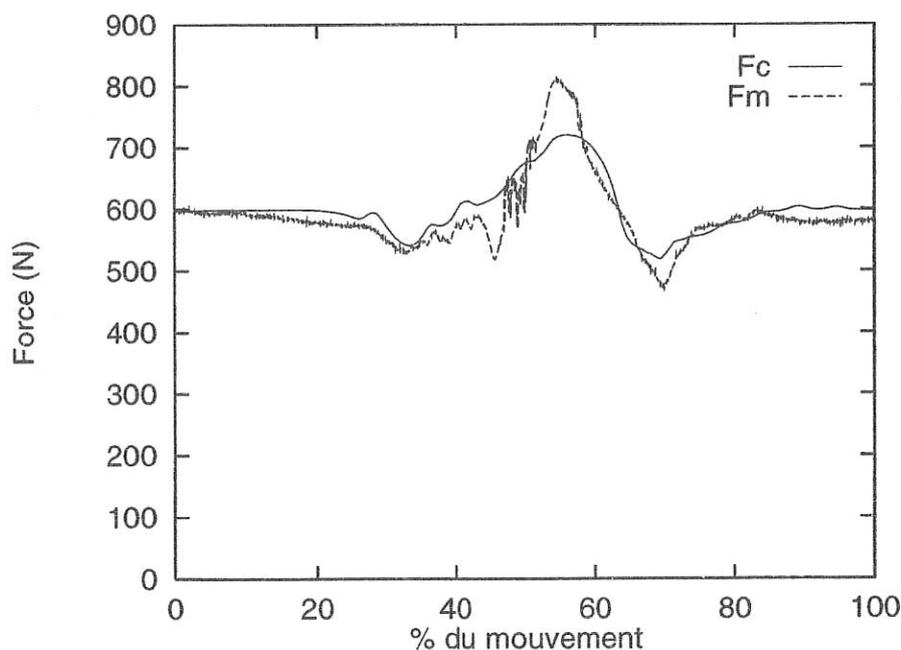


FIGURE III.2 - Comparaison entre force de réaction au sol calculée  $F_c$  et mesurée  $F_m$  pour le mouvement de flexion-extension

On constate une bonne correspondance entre le calcul et la mesure. Une différence apparaît au niveau de l'amplitude des « pics » de force. Cette différence est certainement due à la fréquence d'échantillonnage des données cinématiques (50 Hz). Le calcul dynamique s'effectue sur la base de cette même fréquence, alors que l'acquisition du signal de force est réalisée à une fréquence de 1000 Hz. La sensibilité de la mesure est de ce fait nettement supérieure à celle du calcul. On remarque tout de même que le modèle retranscrit bien les phases « d'allègement » du corps au début et à la fin du mouvement.

Puisque la mesure et le calcul donnent des résultats similaires, on peut penser que le modèle introduit est représentatif du sujet testé et donc que les résultats concernant les couples actionneurs sont représentatifs du mouvement réalisé.

Sur la figure III.3, nous présentons les résultats obtenus pour le calcul des couples actionneurs articulaires.

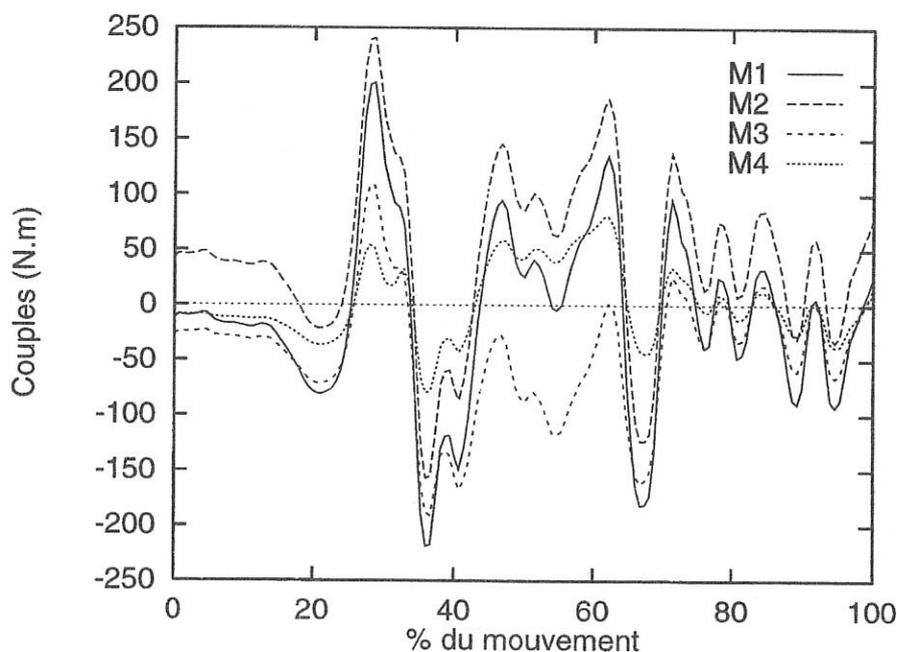


FIGURE III.3 - *Couples actionneurs articulaires pour le mouvement de flexion-extension*

Le couple observé au niveau de l'axe métatarsien n'est pas un couple actif puisque le pied reste à plat durant le mouvement. Il correspond simplement au transport du moment des efforts de liaison à la cheville sur l'axe métatarsien. Il suit donc le couple à la cheville avec une évolution parallèle.

On peut noter de plus que, conformément à la loi de mouvement représentée sur la figure D.1, 20 % du début et de la fin du mouvement correspondent à une attitude stabilisée du sujet à la différence près, entre les deux plages, que pour la fin du mouvement le sujet cherche à se stabiliser et donc on peut observer des oscillations sur les couples actionneurs.

### III.2.3 Bilan énergétique

Nous appliquons ici les formulations du paragraphe II.6 du chapitre 2 concernant l'évaluation énergétique d'un mouvement. On présente ici deux bilans se recouvrant par-

tiellement.

### III.2.3.a Travail des efforts internes évalués sur la base des puissances articulaires

A partir des résultats fournis par dynamique inverse, on peut calculer les puissances articulaires délivrées à l'aide de la relation (II.44). Sur la figure III.4, nous présentons les résultats obtenus pour le calcul de celles-ci lors du mouvement de flexion-extension étudié. Remarquons que les puissances s'annulent en même temps au moment où la flexion est maximum, c'est-à-dire à l'instant où s'annulent les vitesses articulaires (que l'on peut retrouver sur la figure ??), simultanément comme on peut le constater.

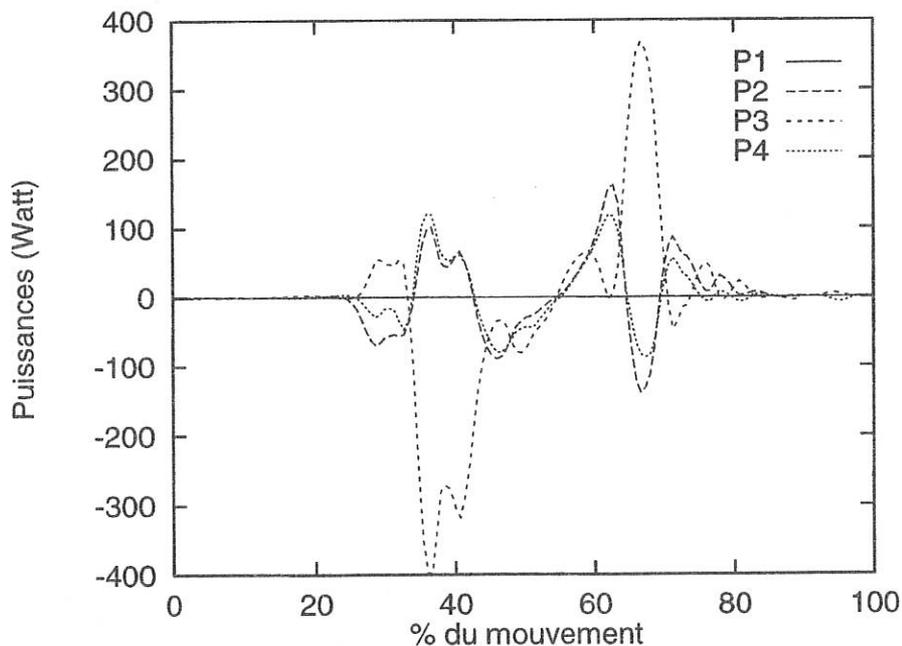


FIGURE III.4- Evolution des puissances articulaires  $P_i$  au cours du mouvement de flexion-extension

On observe deux pics de puissance au niveau du genou. Cette articulation est la plus sollicitée en vitesse et en puissance. On peut observer que les pics des couples se produisant à vitesse modérée ne coïncident pas avec les pics de puissance.

Puisque l'on dispose des puissances articulaires délivrées lors du mouvement, on peut à l'aide des relations (II.45), (II.46) et (II.47) effectuer un bilan énergétique basé sur l'évaluation de celles-ci. Ces relations permettent de calculer respectivement, le travail

des forces internes  $W^{(2)}$ , le travail moteur absolu  $W^{(3)}$  et le travail moteur positif  $W^{(4)}$ . Sur la figure III.5, nous avons représenté l'évolution de ces travaux.

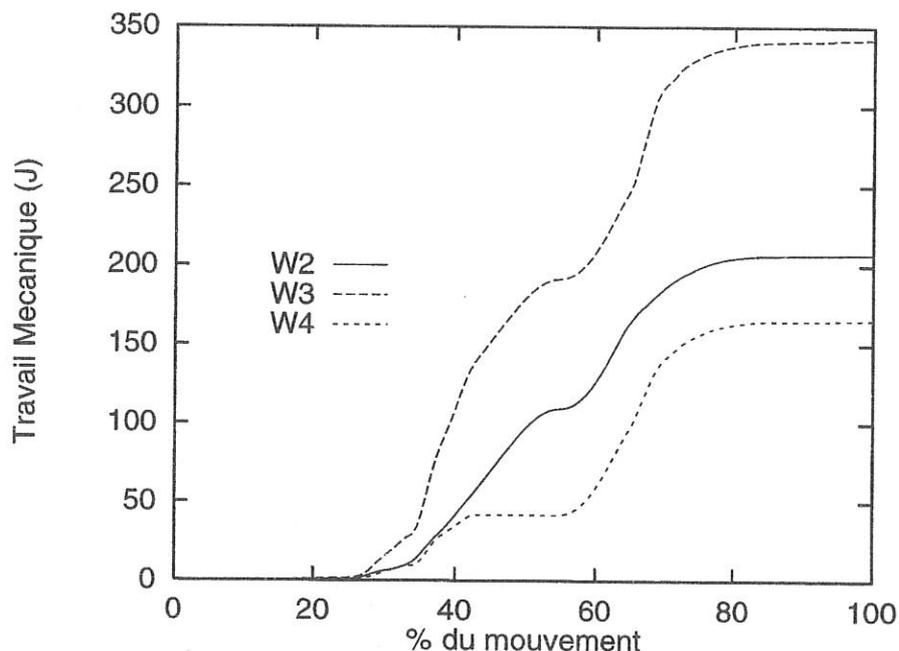


FIGURE III.5 - Evolution du travail des efforts internes  $W^{(2)}$ , du travail total absolu  $W^{(3)}$  et du travail moteur positif  $W^{(4)}$

On peut noter qu'en ce qui concerne le travail moteur positif  $W^{(4)}$ , il augmente principalement au début de la phase de flexion et tout au long de la phase d'extension. Le « plateau » que l'on peut observer dans la portion [40%-60%] du cycle correspond donc à une phase où la puissance délivrée est une puissance négative donc principalement résistante au mouvement.

On obtient un résultat logique concernant l'évolution des travaux  $W^{(2)}$  et  $W^{(3)}$  : le bilan final du second est supérieur à celui du premier. Ce qui montre que le second sous-estime la consommation énergétique réelle.

### III.2.3.b Travail des efforts internes calculé par application du théorème de l'énergie mécanique

Le deuxième bilan énergétique que nous pouvons effectuer est celui réalisé sur la base de l'application du théorème de l'énergie mécanique comme décrit dans le chapitre 2. La relation (II.43) qui permet de calculer le travail des efforts internes  $W^{(1)}$  nécessite le calcul préalable de l'énergie cinétique (figure III.6) et de l'énergie potentielle (figure III.7).

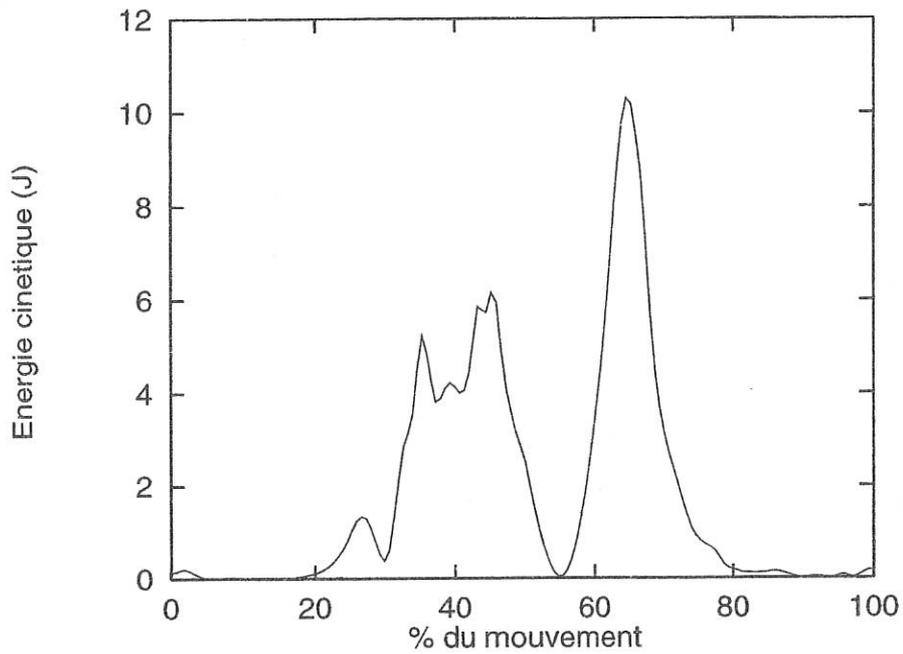


FIGURE III.6 - Evolution de l'énergie cinétique

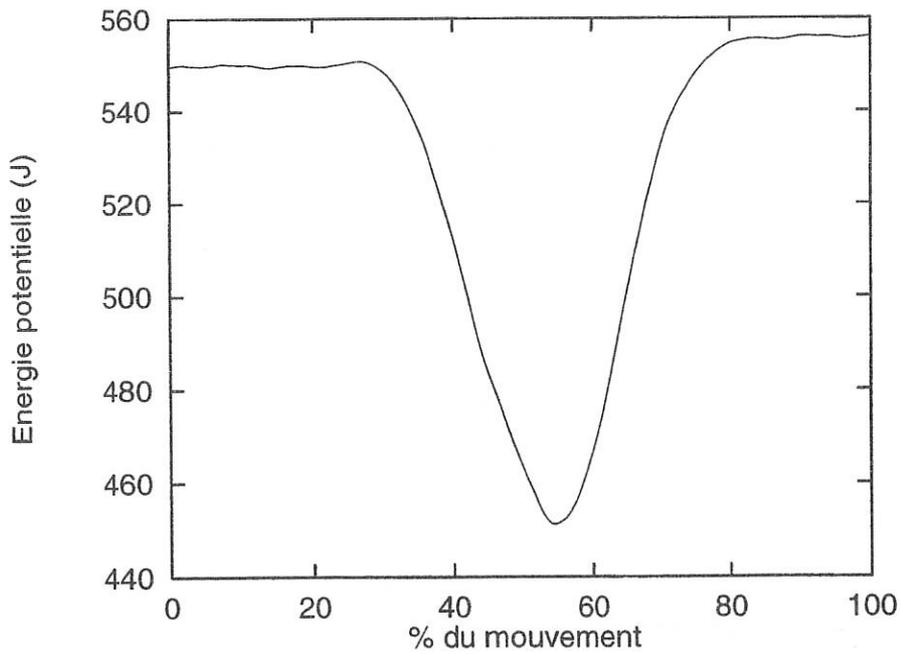


FIGURE III.7 - Evolution de l'énergie potentielle

Au cours de l'évolution du mouvement, l'énergie cinétique présente deux maximums.

Le plus important se situe à mi-parcours de la phase de remontée (extension). L'énergie potentielle présente bien un creux correspondant à l'instant de flexion maximale, atteinte à environ 55% du cycle complet.

Sur la figure III.8 nous avons représenté l'évolution du travail des efforts internes au sens du théorème de l'énergie  $W^{(1)}$ . Cette évolution est à comparer avec celle de  $W^{(2)}$ , obtenue au sens des puissances locales déterminées par dynamique inverse. Le premier bilan repose donc sur une analyse dynamique globale alors que le second repose sur une analyse dynamique locale. Malgré cette différence d'approche, on observe une coïncidence très satisfaisante entre ces évaluations d'un même bilan ainsi qu'une consommation finale d'énergie très voisine (212 Joules pour  $W^{(1)}$  contre 207 Joules pour  $W^{(2)}$ ).

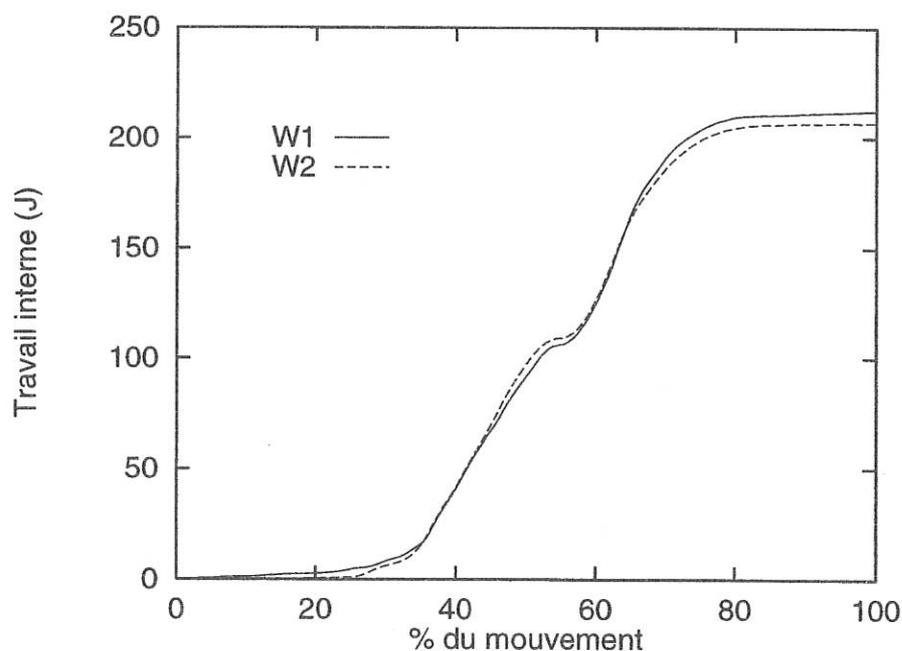


FIGURE III.8 - Travail des efforts internes pour le mouvement de flexion-extension :  $W^1$  et  $W^2$

Nous avons donc montré que pour le mouvement de flexion-extension étudié, les deux formulations dynamiques, l'une locale (dynamique inverse) et l'autre globale (théorème de l'énergie), bien que nécessitant des traitements différents, débouchent sur des bilans comparables. Cette coïncidence n'est pas évidente a priori car dans le cas global on utilise seulement les dérivées premières alors que dans le second cas s'introduisent les dérivées secondes des variables articulaires pour le calcul des couples actionneurs nécessaires au calcul des puissances articulaires. On sait que la détermination de ces accélérations est

imprécise car résultant d'une double opération de dérivation sur des données expérimentales

Puisque nous avons obtenu une bonne correspondance entre ces deux approches, nous reprenons ce mouvement dans le chapitre 4 afin de comparer les bilans sthéniques et énergétiques de mouvements équivalents obtenus par une technique de simulation basée sur la théorie de la commande optimale.

### III.3 La marche dans le plan sagittal

La marche est le moyen de locomotion terrestre le plus naturel. Elle est « simple » et efficace à la fois et l'intérêt de l'étudier en terme qualitatif et quantitatif est incontestable. Nous avons vu au paragraphe II.5.3.c que la marche est une succession de phases distinctes. Un cycle de marche est composé de deux pas qui se suivent alternativement du côté droit et du côté gauche.

Le modèle que nous avons décidé d'utiliser est plan à 7 corps tel que représenté sur la figure III.9.

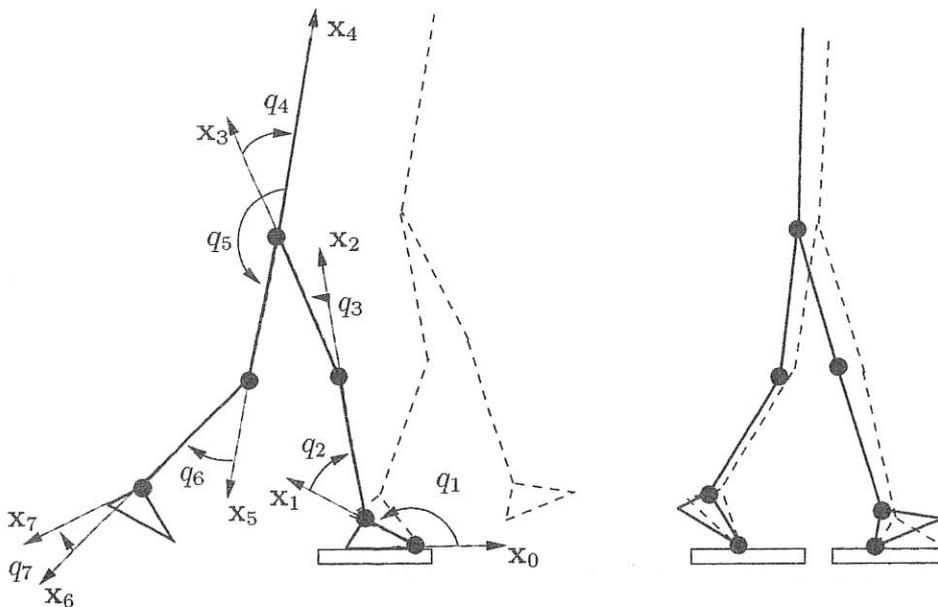


FIGURE III.9 - Modèle plan à 7 corps

On se rend donc bien compte de la complexité sous-jacente pour la modélisation d'un pas de marche et pour le calcul des efforts intersegmentaires et des couples actionneurs.

Par rapport au mouvement de flexion-extension précédemment étudié, la marche est un mouvement cyclique. L'étude d'un cycle de marche demande un paramétrage pour le pas « gauche » et un paramétrage pour le pas « droit ». Il est nécessaire de construire un processus permettant d'augmenter le signal aux bords respectifs par rapport au pas de marche précédent et suivant afin d'éviter les effets de bords lors du processus de filtrage. Ceci est fait à l'aide de considérations géométriques simples non détaillées dans ce mémoire.

### III.3.1 Un premier ensemble de résultats concernant les efforts de liaison et les couples actionneurs

Les résultats que nous allons présenter dans ce paragraphe concernent les données cinématiques des figures D.3 et D.4 qui représentent respectivement les paramètres articulaires et leurs dérivées (vitesses et accélérations). On notera que dans le cas présent, c'est une procédure de lissage par polynômes de Chebychev qui a permis d'obtenir les vitesses et accélérations. Les données proviennent d'une acquisition bilatérale et simultanée, à une fréquence de 90 Hz, des positions 3-D des marqueurs anatomiques ; acquisition obtenue dans le cadre de notre collaboration avec le LEM de Montréal.

Nous présentons dans le tableau E.2 de l'annexe E les caractéristiques anthropométriques du sujet testé.

Nous avons représenté sur les figures III.10 les modules des forces de liaison pour un pas complet de marche.

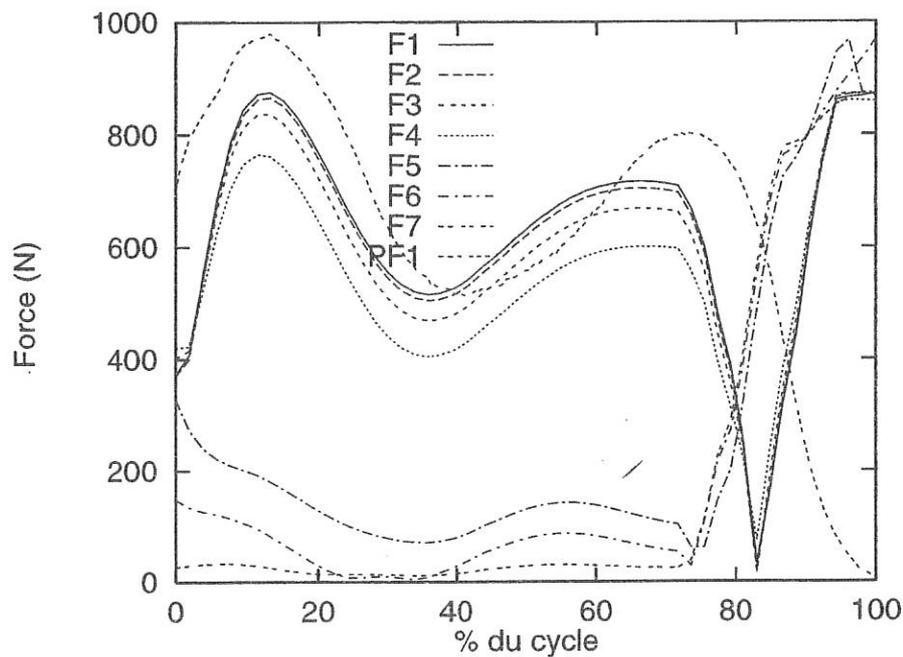
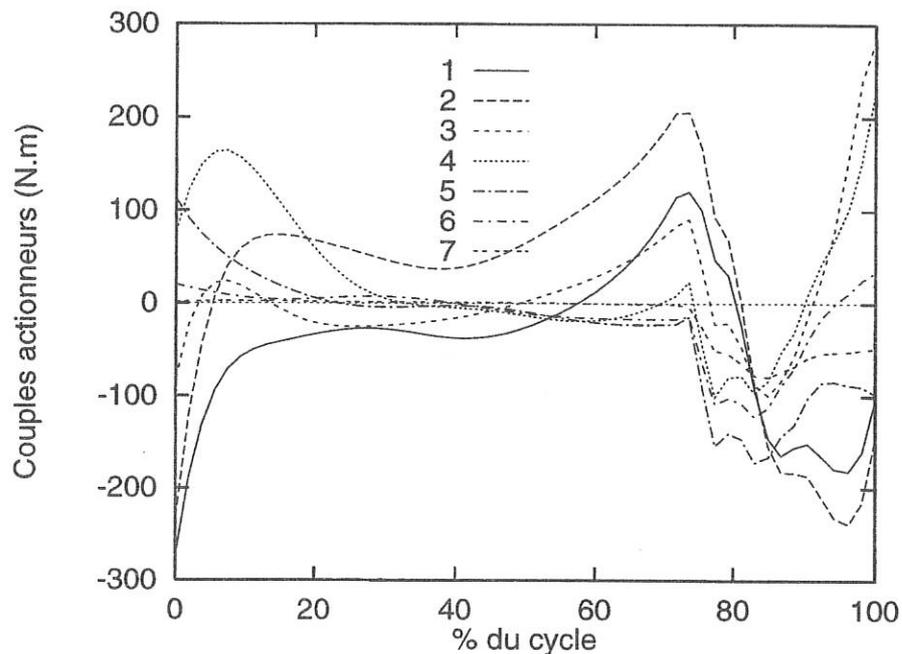


FIGURE III.10 - Modules des forces de liaisons comparés à la force de réaction au sol mesurée par PF1 pour le sujet 1

comparons sur cette figure les courbes PF1 et F1 qui représente respectivement le module de la force de réaction au sol mesurée et le module de la force de liaison pied/sol calculée à l'aide du modèle. On peut constater que celui-ci se comporte bien dans la première phase du cycle. La correspondance entre la force de réaction au sol mesurée et calculée est plutôt bonne (corrélation avec une marge d'erreur de 10 à 20 %), bien que le modèle ait tendance à sous-évaluer celle-ci. Par contre dans une deuxième partie, correspondant en grande partie à la phase de double appui, le modèle ne rend plus du tout compte de la réalité pour la jambe en appui au sol. Les forces de liaisons augmentent brusquement. Ce comportement est principalement dû aux valeurs des accélérations et vitesses aux extrémités du cycle. Dans le cas présent les données sont lissées à l'aide de la technique des polynômes de Chebychev décrite au chapitre 1. Comme on lisse les données avec des polynômes de degré 5, chaque accélération articulaire est donc représentée par un polynôme de degré 3 qui introduit un nombre insuffisant d'extrémums sur l'intervalle considéré.

Sur la figure III.11 nous avons représenté les couples actionneurs pour un pas complet.

FIGURE III.11 - *Couples actionneurs pour le sujet 1*

Nous avons décidé d'étudier d'autres données et ainsi mettre en évidence un phénomène intéressant en ce qui concerne la sensibilité aux données cinématiques. En effet, il semble que le modèle soit très sensible à des perturbations sur les données cinématiques et une étude de sensibilité devient nécessaire afin d'indiquer les limites de validité de tels résultats. Nous allons réaliser cette étude de sensibilité du modèle dynamique aux données cinématiques au travers de deux paramétrages de la structure articulée.

### III.3.2 Sensibilité du modèle dynamique au paramétrage du système

#### III.3.2.a Principe de l'étude

Nous avons remarqué dans l'exemple précédent une sensibilité des résultats aux données cinématiques. Nous allons essayer dans le présent paragraphe de mettre en évidence ce phénomène avec des données issues d'une acquisition bilatérale d'un pas de marche à une fréquence de 50 Hz à l'aide d'un système SAGA3. Les données anthropométriques sont celles du tableau E.3 de l'annexe E.

On s'intéresse ici à l'influence du paramétrage de la structure articulée sur les résultats concernant les couples actionneurs. On va donc, pour le paramétrage relatif précédemment

utilisé et un paramétrage articulaire absolu, résoudre le problème dynamique inverse, pour la phase unipodale du pas de marche, pour trois jeux de données cinématiques qui diffèrent l'une de l'autre par leur type de filtrage.

Nous filtrons ainsi des données d'un pas de marche complet à l'aide :

1. du filtre de butterworth en augmentant les signaux de 5 points (figures D.5 et D.6) et 10 points (figures D.7 et D.8) de mesure aux extrémités. Ces données seront désignées par la suite respectivement comme étant de TYPE 1 et de TYPE 2.
2. d'une transformée ondelette (figures D.9 et D.10). Ces données seront désignées par la suite comme étant de TYPE 3.

D'autre part, il paraît intéressant de vérifier l'influence de la forme du modèle dynamique.

Aussi nous effectuons les mêmes calculs que précédemment mais en utilisant la formulation de Lagrange pour le calcul des couples actionneurs.

Les équations de Lagrange peuvent s'explicitier sous la forme générale suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}) \quad (\text{III.1})$$

où  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  est la matrice de masse relative à l'énergie cinétique du système dans le paramétrage  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g})$  est un vecteur comprenant les termes de Coriolis, centrifuges et des forces de gravité et  $\mathbf{\Gamma}$  est le vecteur des couples actionneurs articulaires.

### III.3.2.b Etude réalisée sur la base d'un modèle à paramétrage relatif

Les figures III.12, III.13 et III.14 représentent respectivement les couples actionneurs obtenus pour les données filtrées selon les procédures de TYPE 1, TYPE 2 et TYPE 3. On constate une dispersion complète des résultats en fonction du filtrage.

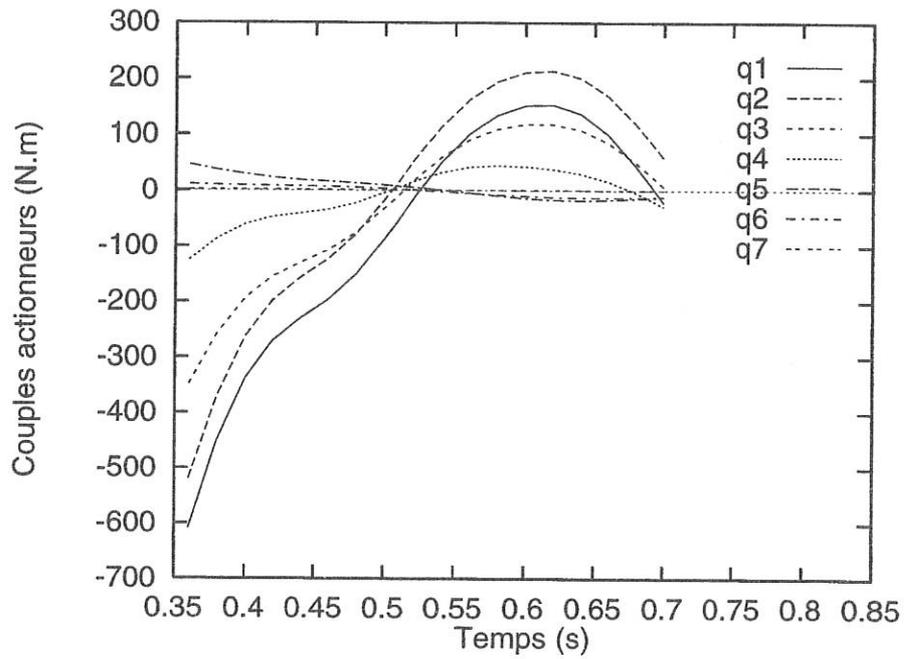


FIGURE III.12 - *Couples actionneurs en paramétrage relatif pour un filtrage de TYPE 1*

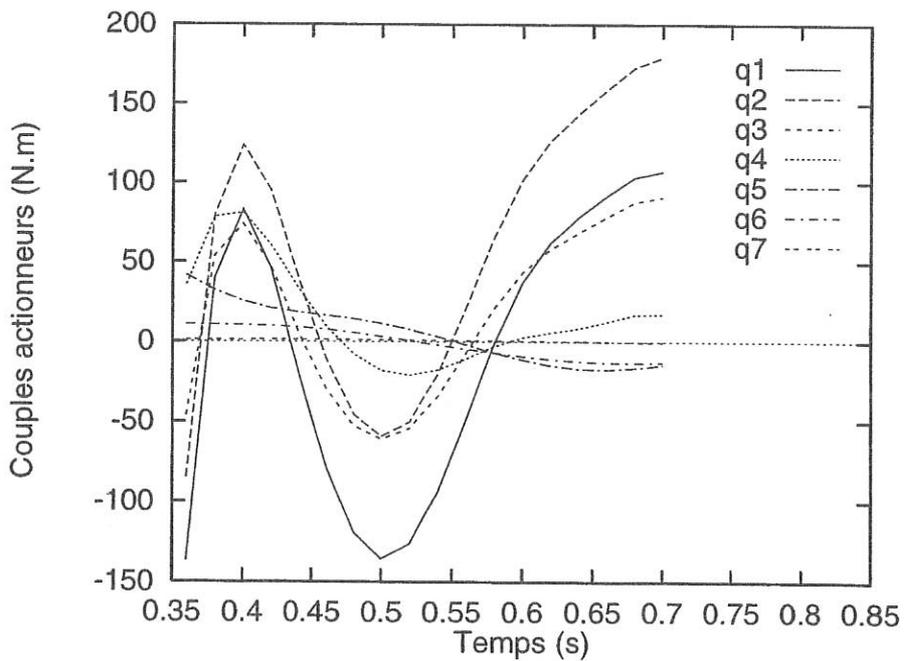


FIGURE III.13 - *Couples actionneurs en paramétrage relatif pour un filtrage de TYPE 2*

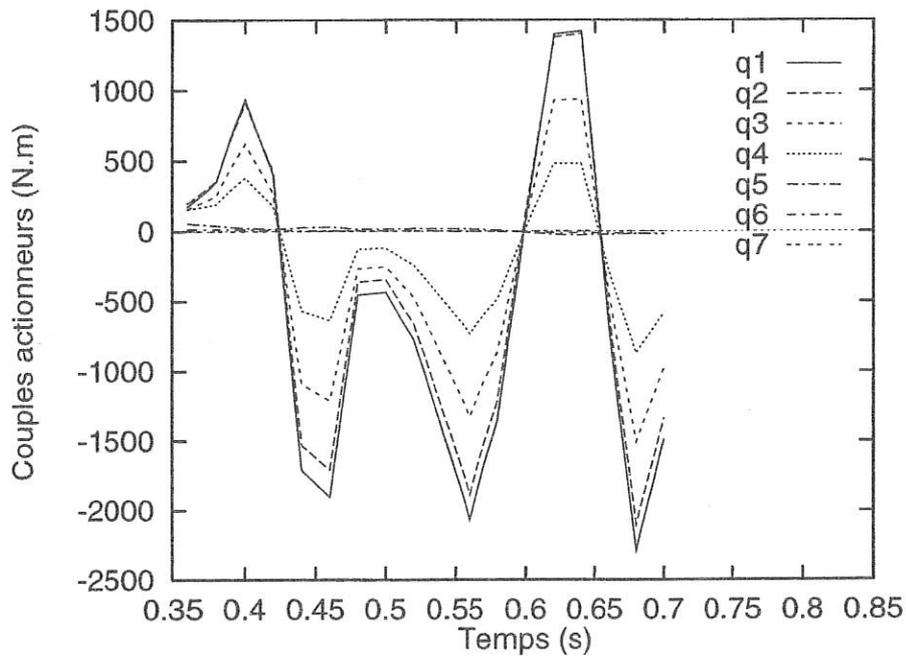


FIGURE III.14 - Couples actionneurs en paramétrage relatif pour un filtrage de TYPE 3

Il est intéressant de regarder à l'aide de la formulation de Lagrange des couples actionneurs quel est le terme qui est le plus sensible à une perturbation sur les données cinématiques. En effet, la formulation de Lagrange regroupe explicitement d'une part les termes en dérivées secondes des  $q_i$  et d'autre part les termes en dérivées premières.

Les résultats des figures III.15, III.16 et III.17 représentent la contribution des termes en  $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ .

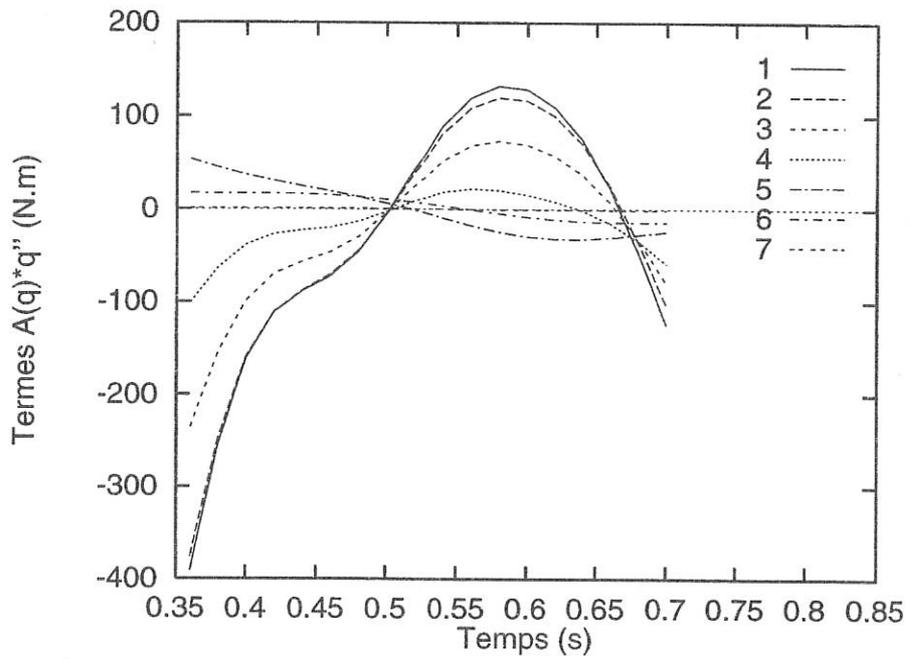


FIGURE III.15 - Composantes  $(A(q)\ddot{q})_i$  pour un filtrage de TYPE 1

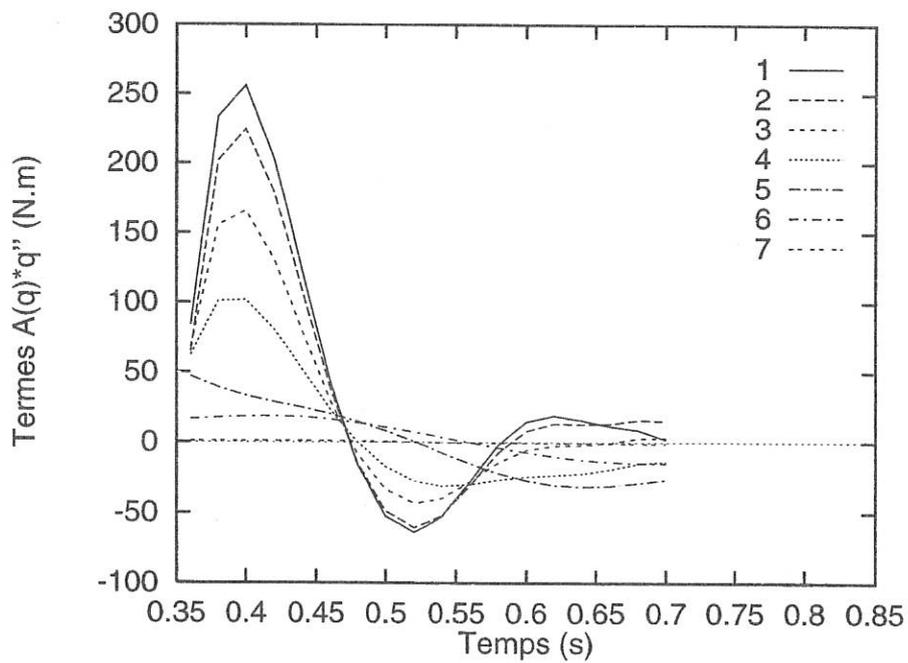


FIGURE III.16 - Composantes  $(A(q)\ddot{q})_i$  pour un filtrage de TYPE 2

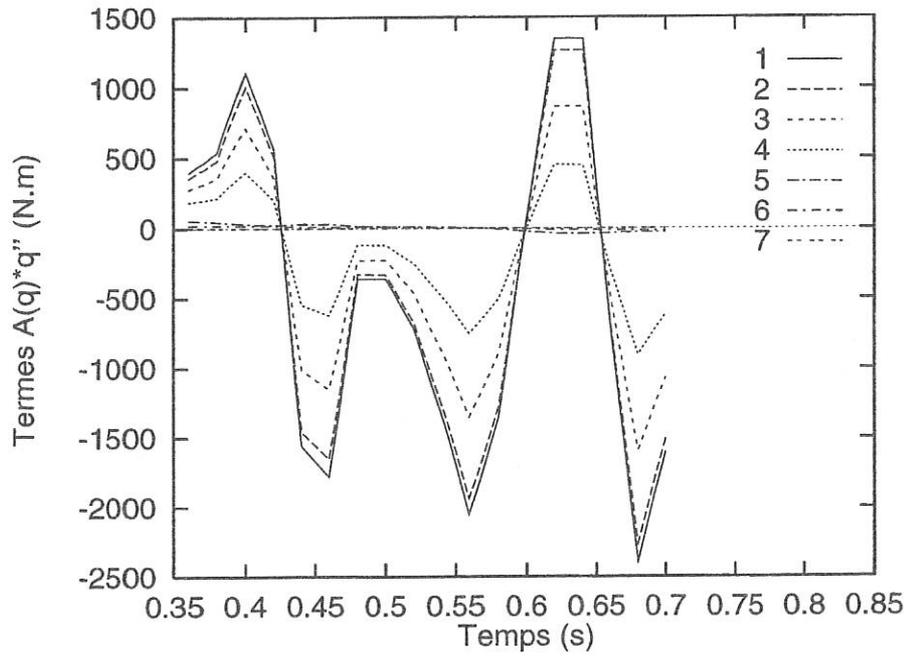


FIGURE III.17 - Composantes  $(A(q)\ddot{q})_i$  pour un filtrage de TYPE 3

On trouve sur les figures III.18, III.19 et III.20 la représentation des termes en  $B(q, \dot{q}, g)$ .

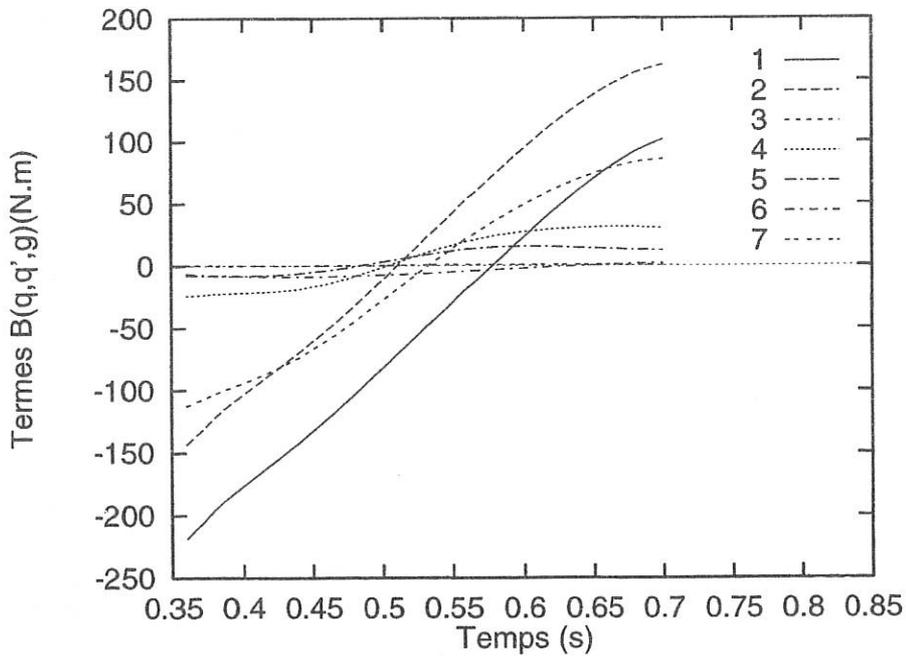


FIGURE III.18 - Composantes  $B_i(q, \dot{q}, g), i = 1, \dots, 7$  pour un filtrage de TYPE 1

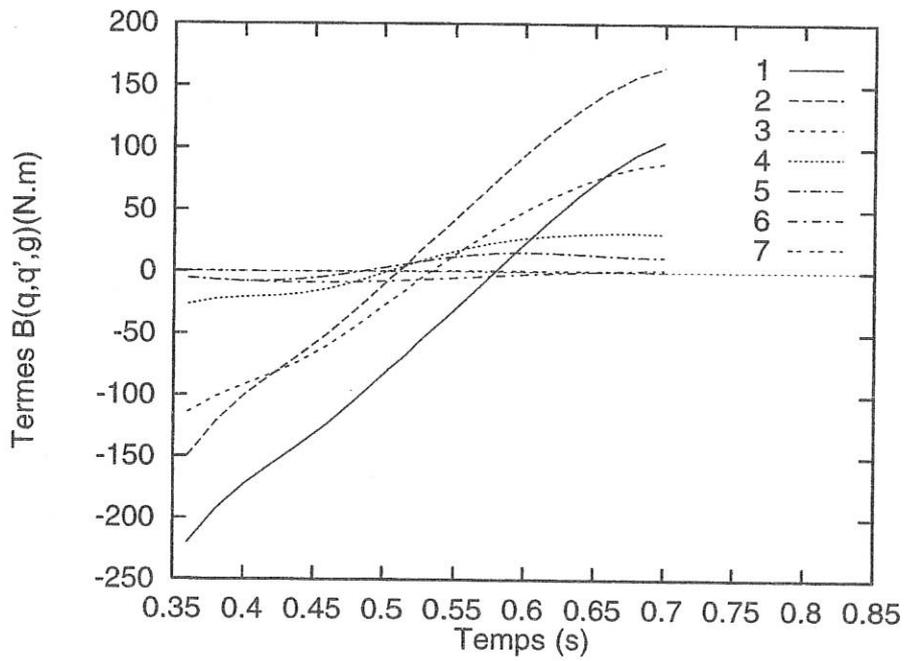


FIGURE III.19 - Composantes  $B_i(q, \dot{q}, g), i = 1, \dots, 7$  pour un filtrage de TYPE 2

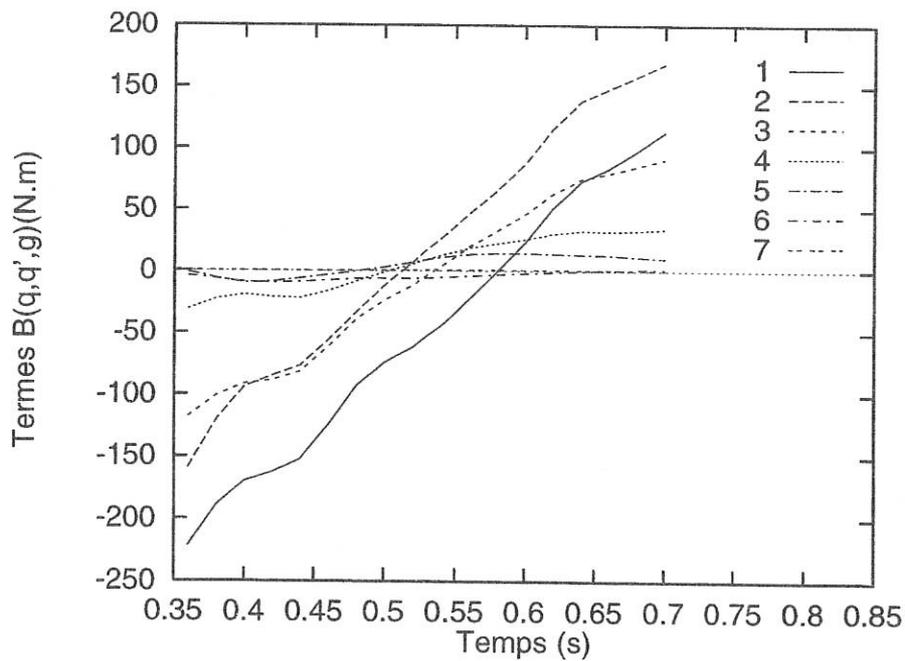


FIGURE III.20 - Composantes  $B_i(q, \dot{q}, g), i = 1, \dots, 7$  pour un filtrage de TYPE 3

De l'ensemble de ces résultats, on peut noter une bonne correspondance entre les

composantes  $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g})$  pour les différents types de solutions (TYPE1, TYPE 2 et TYPE 3). Ces composantes regroupent les termes d'inertie de Coriolis, centrifuge et les termes de gravité.

Par contre, les termes d'inertie impliquant les accélérations et la matrice de masse conduisent à des résultats suggérant d'étudier le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  dans le paramétrage relatif utilisé. En effet, il n'existe aucune corrélation entre les résultats concernant les composantes  $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ ; celles-ci évoluent de manière différentes en fonction du type de filtrage. Par contre on peut observer que la hiérarchie entre les articulations est conservée pour chaque type de traitement.

A ce stade il est aussi intéressant d'étudier le conditionnement de la matrice de masse du système. Cette matrice intervient de façon explicite dans la formulation de Lagrange. On donne une définition du nombre de conditionnement d'une matrice [134, 135]:

**Définition :** Soit une norme matricielle  $\|\cdot\|$ ; le conditionnement d'une matrice régulière  $\mathbf{A}$ , associée à cette norme, est le nombre :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Par ailleurs, on notera :

$$\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

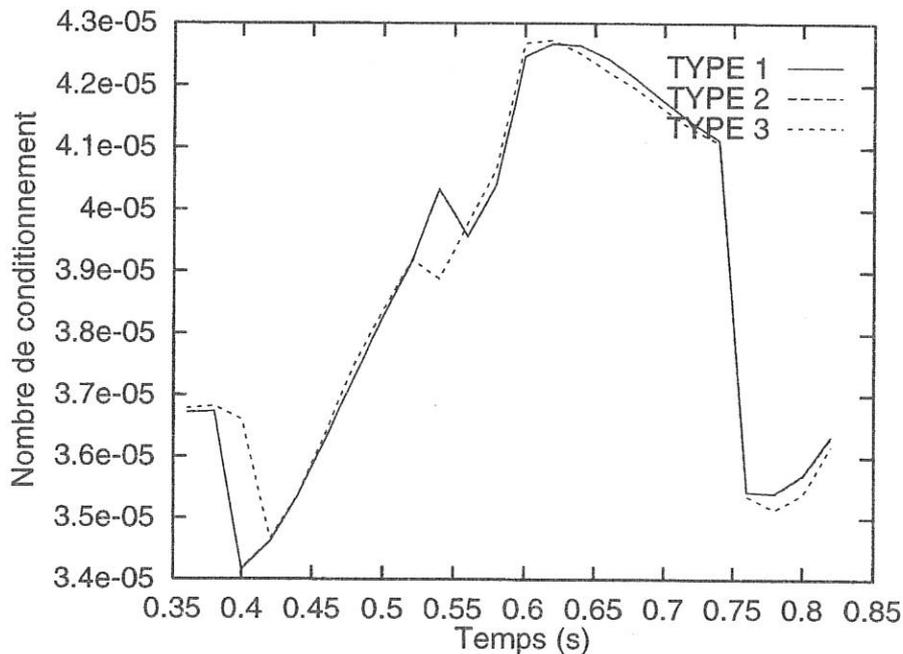
où  $\lambda_{max}$  et  $\lambda_{min}$  sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de  $\mathbf{A}$ .

On dira alors qu'une matrice est « bien conditionnée », si son nombre de conditionnement est voisin de 1. Le calcul est effectué à l'aide de la routine de calcul DGECO de la librairie LINPACK<sup>1</sup>.

Nous présentons sur la figure III.21 le conditionnement de la matrice de masse  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  pour chaque pas de temps de la phase ouverte du cycle de marche.

---

1. Cette routine fournit une estimation du nombre de conditionnement réciproque  $\text{cond}^{-1}(\mathbf{A})$  d'une matrice pour un système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Une perturbation relative de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  de la taille de  $\epsilon$ , causera une perturbation relative de  $\mathbf{x}$  de la taille  $\frac{\epsilon}{\text{cond}^{-1}(\mathbf{A})}$ . En d'autres termes, plus le nombre  $\text{cond}^{-1}(\mathbf{A})$  est faible et plus la matrice  $\mathbf{A}$  a de chances d'être singulière.

FIGURE III.21 - Nombre de conditionnement de la matrice  $A(q)$ 

On constate que le nombre de conditionnement de la matrice de masse est en moyenne très faible. On peut noter que la variation de valeurs entre chaque point de calcul est comprise entre  $3,4 \cdot 10^{-5}$  et  $4,3 \cdot 10^{-5}$ . Ce mauvais conditionnement peut expliquer pourquoi les calculs sur les couples actionneurs sont très instables. Il est alors intéressant de savoir si ce mauvais conditionnement peut être amélioré par un changement du paramétrage du système mécanique articulé. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

### III.3.2.c Etude réalisée sur la base d'un modèle dynamique à paramétrage absolu

Nous allons donc calculer les couples actionneurs pour les mêmes données cinématiques que précédemment mais pour le paramétrage représenté par la figure III.22.

On peut écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$P_i = Q_i, i = 1, \dots, 7 \quad (\text{III.2})$$

où l'accélération généralisée  $P_i$  est donnée par la formulation :

$$P_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (\text{III.3})$$

avec :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{III.4})$$

La matrice de masse symétrique  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  s'explique en coordonnées absolues sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_{11} & K_{12}C_{21} & K_{13}C_{31} & K_{14}C_{41} & K_{15}C_{51} & K_{16}C_{61} & K_{17}C_{71} \\ & A_{22} & K_{23}C_{32} & K_{24}C_{42} & K_{25}C_{52} & K_{26}C_{62} & K_{27}C_{72} \\ & & A_{33} & K_{34}C_{43} & K_{35}C_{53} & K_{36}C_{63} & K_{37}C_{73} \\ & & & A_{44} & K_{45}C_{54} & K_{46}C_{64} & 0 \\ & & & & A_{55} & K_{56}C_{65} & 0 \\ & & \text{Sym.} & & & A_{66} & 0 \\ & & & & & & A_{77} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

avec la notation  $C_{ij} = \cos(q_i - q_j)$  et où les  $K_{ij}$  sont des constantes données en annexe F.

On désigne par  $\Gamma_{ij}$ , le couple en  $O_i$  exercé par le segment  $\mathcal{S}_i$  sur le segment  $\mathcal{S}_j$  :

$$\Gamma_{ij} = \mathbf{M}(O_i, \mathcal{S}_i \rightarrow \mathcal{S}_j) \cdot \mathbf{z}_0 \quad (\text{III.6})$$

On introduit la fonction de force  $U$  de la pesanteur :

$$U = -g \sum_{i=j}^k V_i \cos q_i \quad (\text{III.7})$$

où les  $V_i$  sont des constantes données en annexe F.

Les forces généralisées  $Q_i$  admettent compte-tenu de (III.6) et (III.7) la formulation suivante :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Gamma_{01} - \Gamma_{12} - gV_1 \cos q_1 \\ Q_2 &= \Gamma_{12} - \Gamma_{23} - gV_2 \cos q_2 \\ Q_3 &= \Gamma_{23} - \Gamma_{37} - gV_3 \cos q_3 \\ Q_7 &= \Gamma_{37} - \Gamma_{74} - gV_7 \cos q_7 \\ Q_4 &= \Gamma_{74} - \Gamma_{45} - gV_4 \cos q_4 \\ Q_5 &= \Gamma_{45} - \Gamma_{56} - gV_5 \cos q_5 \\ Q_6 &= \Gamma_{56} - gV_6 \cos q_6 \end{aligned}$$

Alors le calcul des couples articulaires de l'extrémité de la chaîne cinématique vers la base s'effectue à l'aide des relations successives suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{56} &= P_6 + gV_6 \cos q_6 \\ \Gamma_{45} &= \Gamma_{56} + P_5 + gV_5 \cos q_5 \\ \Gamma_{74} &= \Gamma_{45} + P_4 + gV_4 \cos q_4 \\ \Gamma_{37} &= \Gamma_{74} + P_7 + gV_7 \cos q_7 \\ \Gamma_{23} &= \Gamma_{37} + P_3 + gV_3 \cos q_3 \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{23} + P_2 + gV_2 \cos q_2 \\ \Gamma_{01} &= \Gamma_{12} + P_1 + gV_1 \cos q_1 \end{aligned}$$

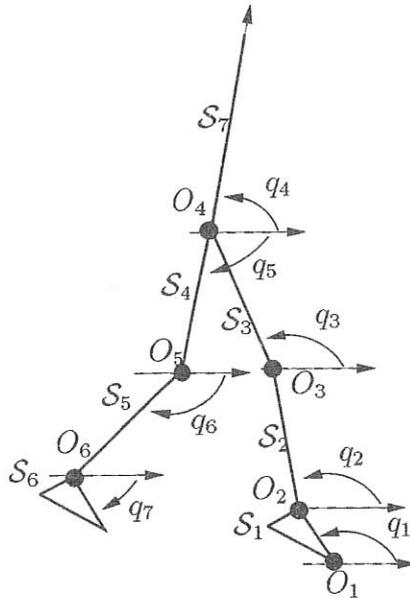


FIGURE III.22 - Modèle plan à 7 corps en coordonnées absolues

En transformant les paramètres articulaires relatifs en paramètres articulaires absolus à l'aide de formulations simples, on peut calculer les couples actionneurs articulaires en utilisant la formulation de Lagrange. Les résultats de ces calculs apparaissent sur les figures III.23, III.24 et III.25.

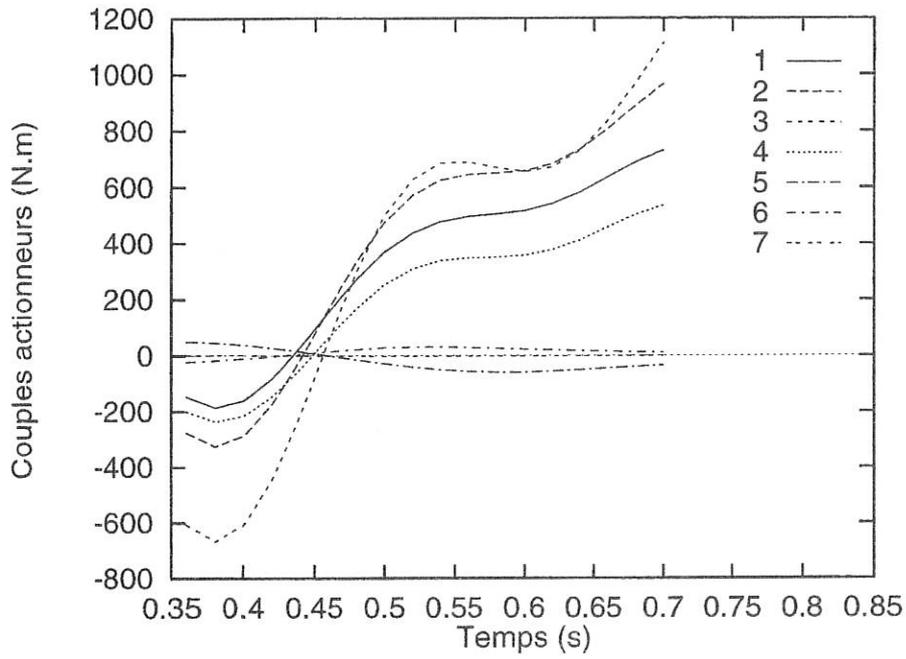


FIGURE III.23 - *Couples actionneurs pour un paramétrage absolu et un filtrage de TYPE 1*

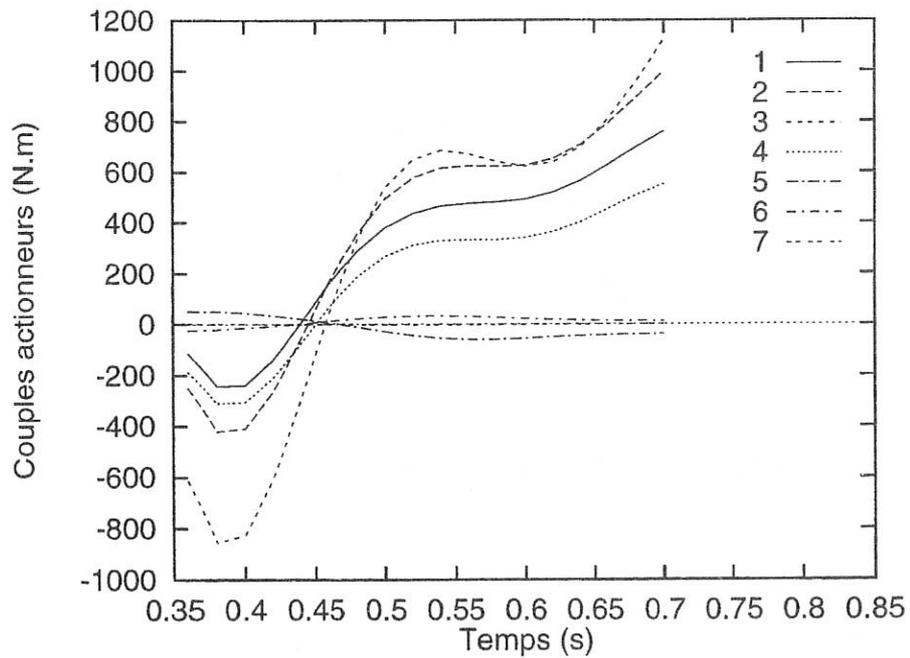


FIGURE III.24 - *Couples actionneurs pour un paramétrage absolu et un filtrage de TYPE 2*

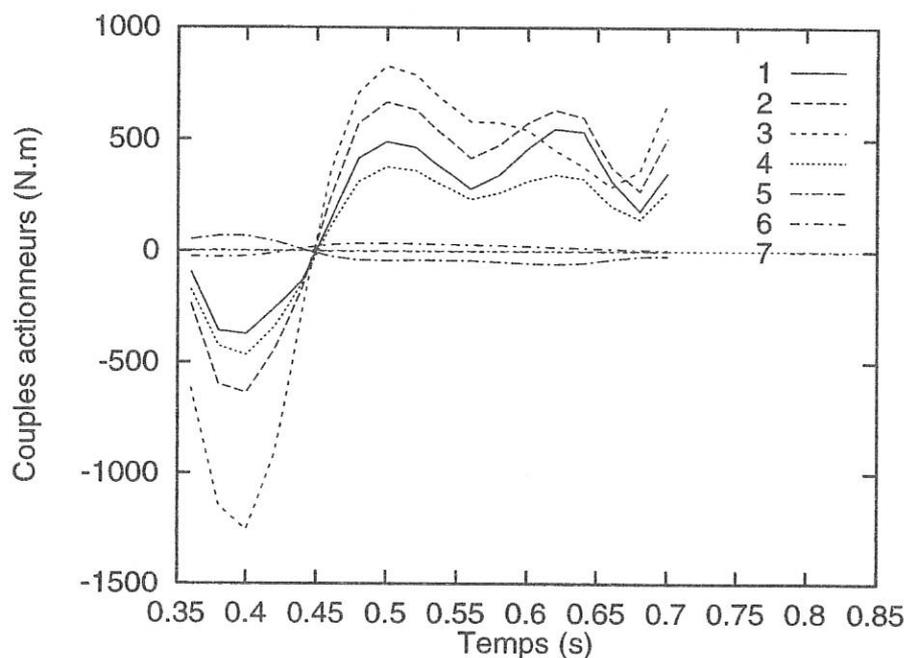
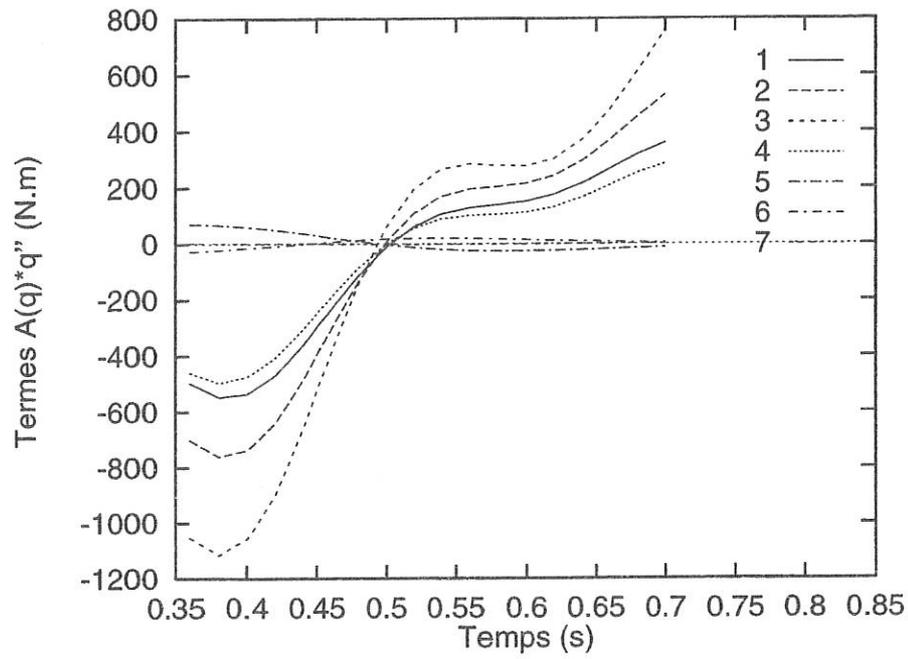
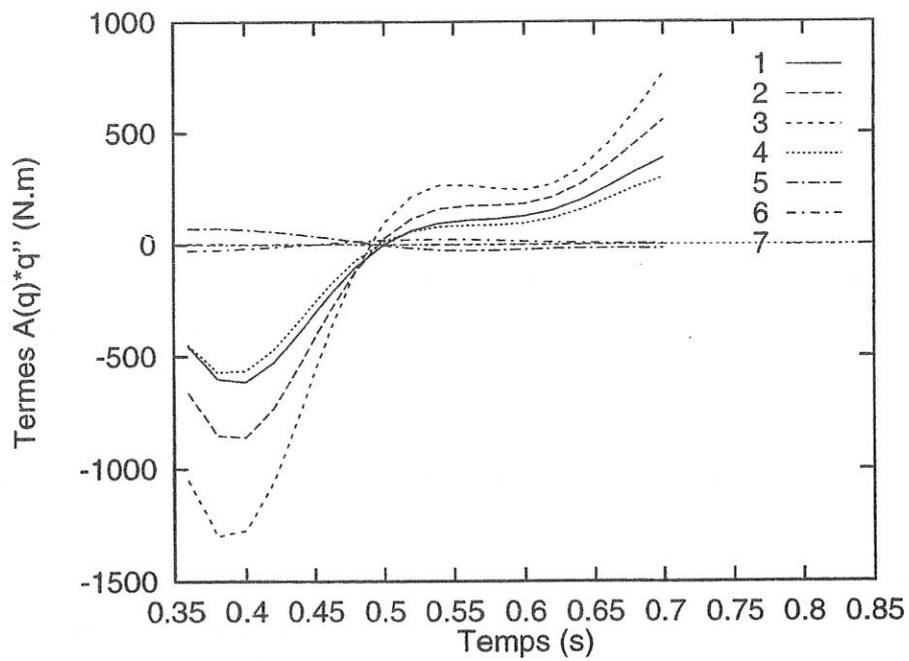


FIGURE III.25 - *Couples actionneurs pour un paramétrage absolu et un filtrage de TYPE 3*

Les résultats obtenus tendent à montrer que le calcul de dynamique inverse sur la base d'un paramétrage absolu donne des allures de couples actionneurs articulaires assez voisines d'un type de filtrage à l'autre. Dans le cas des filtrages de TYPE 1 et 2, elles ne diffèrent que par leurs extrêmes. Pour le filtrage de TYPE 3, l'allure générale est conservée mais les valeurs extrémales sont supérieures à celles obtenues pour les autres types de filtrage. De plus on observe une différence sensible sur la partie finale des courbes.

De la même manière que pour le paramétrage relatif on peut évaluer les contributions à la valeur des couples actionneurs, d'une part des termes d'inertie liés aux accélérations et d'autre part des termes d'inertie centrifuges et de Coriolis, et des termes de gravité.

Ceci est fait sur les figures III.15, III.16 et III.17 pour le terme en  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ .

FIGURE III.26 - Composantes  $(A(q)\ddot{q})_i$  pour un filtrage de TYPE 1FIGURE III.27 - Composantes  $(A(q)\ddot{q})_i$  pour un filtrage de TYPE 2

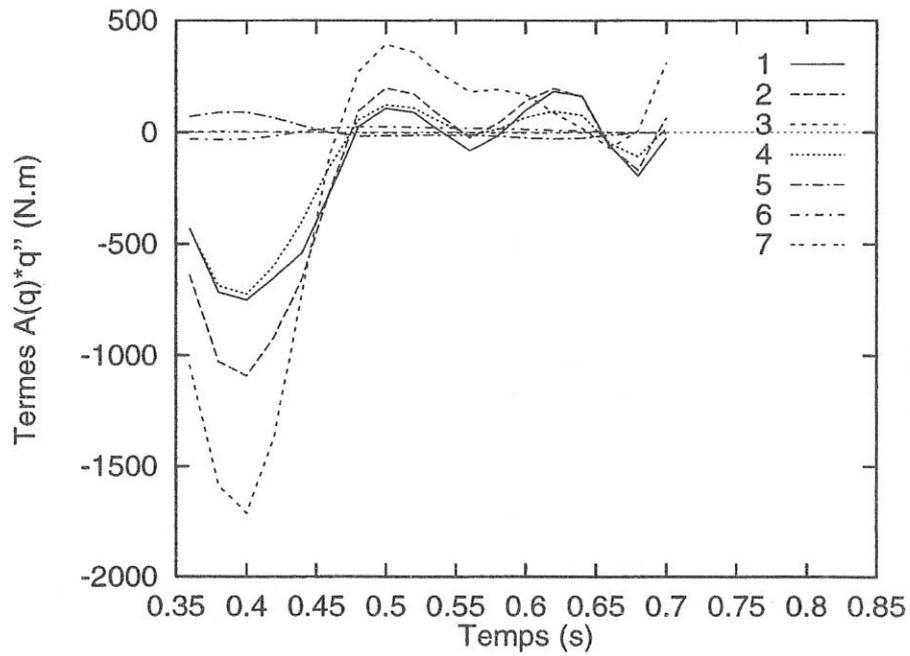


FIGURE III.28 - Composantes  $(A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$  pour un filtrage de TYPE 3

On observe effectivement quelques différences concernant les composantes  $(A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ . Cependant celles-ci sont moins marquées que dans le cas d'un paramétrage relatif et on constate une meilleure cohérence d'ensemble sur ces résultats.

On trouve sur les figures III.29, III.30 et III.31 la représentation des termes en  $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g})$ .

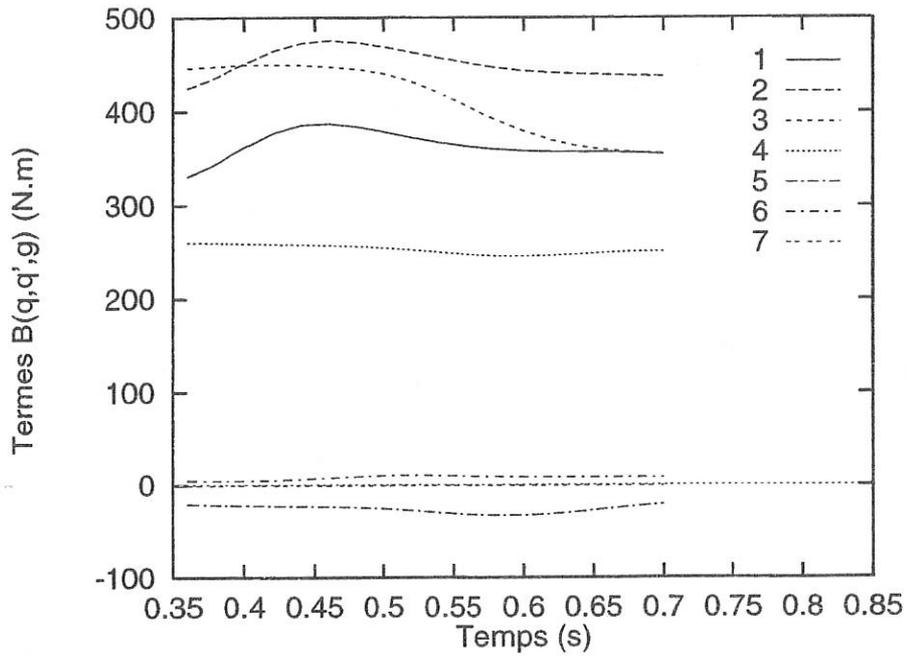


FIGURE III.29 - Composantes  $B_i(q, \dot{q}, g), i = 1, \dots, 7$  pour un filtrage de TYPE 1

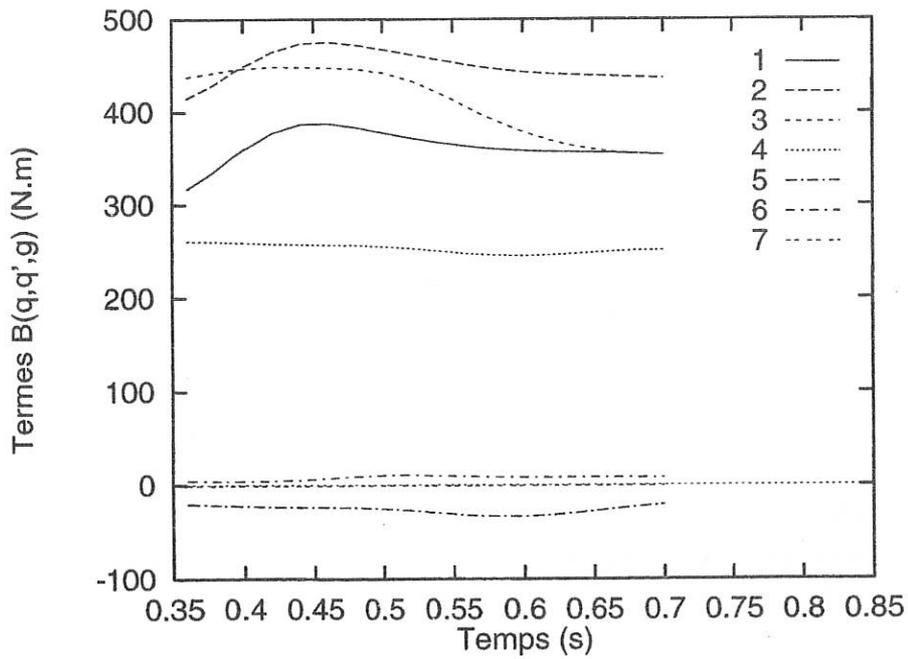


FIGURE III.30 - Composantes  $B_i(q, \dot{q}, g), i = 1, \dots, 7$  pour un filtrage de TYPE 2

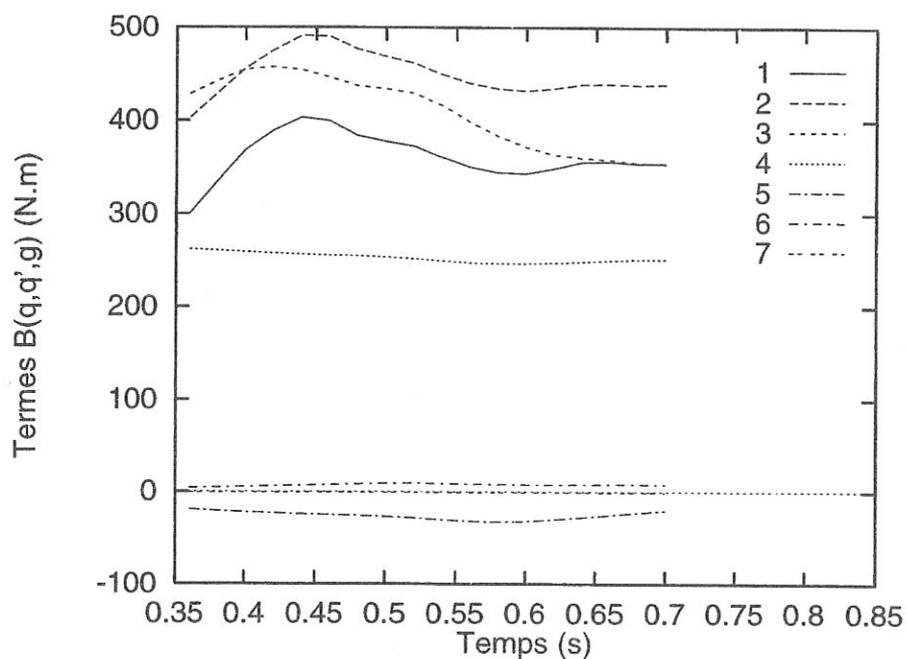


FIGURE III.31 - Composantes  $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g})$ ,  $i = 1, \dots, 7$  pour un filtrage de TYPE 3

Dans le cas du paramétrage absolu on note encore une très bonne concordance entre les composantes en  $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g})$  pour les différents types de filtrage. On peut alors avancer la conclusion que le paramétrage absolu semble moins « destructeur » sur le calcul des couples actionneurs que le paramétrage relatif. Cependant, on peut observer sur la figure III.32 que le nombre de conditionnement est très faible. On gagne tout de même un facteur 10 dans le conditionnement de la matrice de masse lorsqu'on passe d'un paramétrage relatif à un paramétrage absolu.

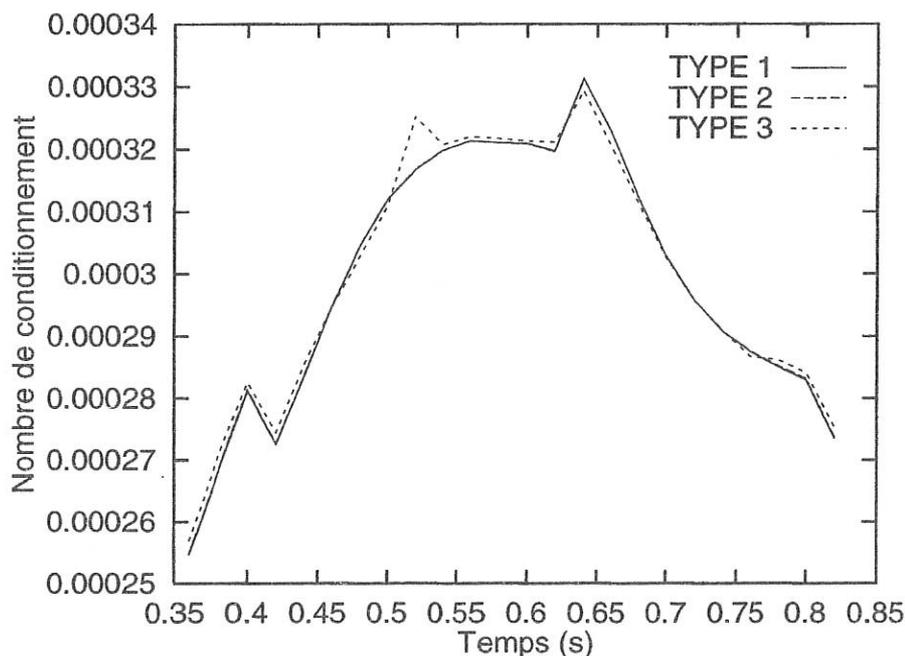


FIGURE III.32 - Nombre de conditionnement de la matrice  $A(q)$  en coordonnées absolues

En conclusion de cette étude de sensibilité, nous voudrions insister sur le fait que nous avons mis en évidence un comportement très sensible des termes dus aux quantités d'accélération, et surtout dans le cas d'un paramétrage relatif. Ce comportement est imputable au mauvais conditionnement de la matrice de masse du système mécanique. Dans ces conditions il nous paraît difficile de dresser des conclusions relativement à la résolution du problème dynamique inverse pour la marche. Soulignons le fait que nous avons pour ambition, comme dans le cas du mouvement de flexion-extension, de calculer les forces de liaison intersegmentaires et les couples actionneurs articulaires à l'aide d'un seul modèle et sans apport des données dynamiques fournies par une plate-forme de force; instrument considéré ici comme moyen expérimental de contrôle de la qualité des résultats obtenus. On peut remarquer à ce titre que la structure même des équations de la dynamique, amènerait le même comportement dans le cas où on initialiserait le processus de résolution du problème dynamique inverse avec les données fournies par la plate-forme de forces. Au terme de ces considérations, il n'est pas possible de dresser un bilan énergétique avec les résultats acquis et ainsi de comparer les approches à partir du bilan local et du théorème de l'énergie.

Le prochain paragraphe est consacré au traitement du problème de pédalage.

## III.4 Le pédalage sur ergocycle

### III.4.1 Introduction

Le mouvement de pédalage, d'une pratique courante, présente l'avantage de pouvoir être considéré comme un « cas d'école » car d'une part c'est un système à boucle cinématique fermée et d'autre part il peut être considéré comme plan par la nature même du système mécanique d'entraînement de la roue. L'étude dynamique du mouvement de pédalage présente une difficulté qui est liée au fait que la chaîne cinématique comporte 2 boucles fermées. L'étude dynamique du système pose donc un problème d'indétermination des efforts transmis. Notre proposition est d'étudier un mouvement de pédalage sur un ergomètre instrumenté en couple sur l'axe du pédalier. Le problème posé dans la suite est de déterminer une solution de norme minimale pour les couples actionneurs articulaires et les efforts de contact aux pédales (inconnus) parmi l'infinité de solutions admissibles. Pour le pédalage, on se trouve dans le cas d'une chaîne cinématique fermée à 7 corps et 9 articulations telle que représentée sur la figure III.33.

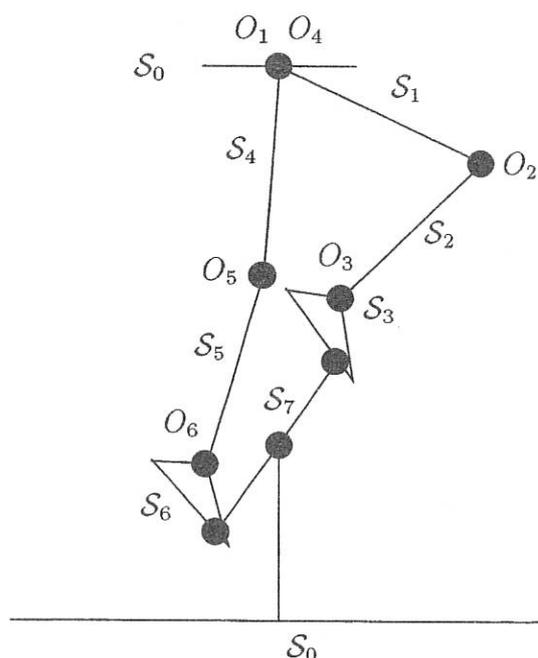


FIGURE III.33 - Schématisation du mouvement de pédalage

### III.4.2 Saisie du mouvement et modèle cinématique

Le protocole expérimental repose sur l'utilisation du système SAGA3 [12]. Le sujet testé effectue l'exercice de pédalage sur un ergocycle. Celui-ci a été modifié dans le cadre du travail de Hambli [136] effectué au Laboratoire de Métallurgie Physique de l'université de Poitiers : simultanément à l'acquisition des données cinématiques du mouvement, un capteur de couple mesure le couple  $\Gamma$  transmis au pédalier.

Des pastilles réfléchissantes, fixées en des points anatomiques précis, permettent d'enregistrer leur mouvement. Le nombre de marqueurs est de 5 par côté : 3 pour chaque pied (talon, cheville, 5<sup>ème</sup> métatarses), 1 pour le genou, 1 pour la hanche. Les trajectoires de ces marqueurs sont enregistrées à une fréquence de 50 Hz. Le modèle cinématique choisi est un système plan à 7 corps comme l'indique la figure III.34 : les cuisses ( $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_4$ ), les jambes ( $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_5$ ), les pieds ( $\mathcal{S}_3$  et  $\mathcal{S}_6$ ) et le pédalier ( $\mathcal{S}_7$ ). Elle comporte de plus 9 articulations et présente 2 boucles.

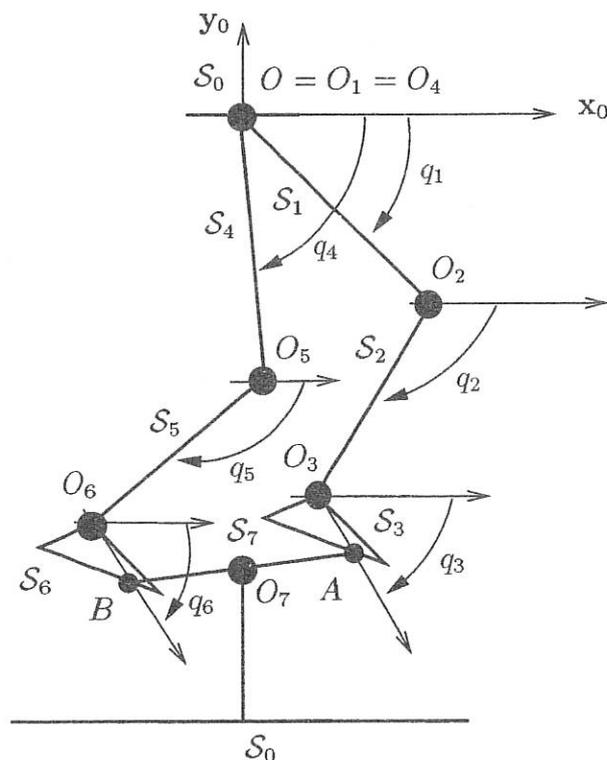


FIGURE III.34 - Pédalage : paramétrage absolu d'un modèle plan

La masse  $m_i$ , la position  $a_i$  du centre de gravité  $G_i$  et le moment d'inertie  $I_i$  par rapport à  $O_i$  de chaque corps  $\mathcal{S}_i$  sont issus des tables anthropométriques de Winter [34] et sont donnés dans le tableau E.4 de l'annexe E.

Les paramètres articulaires absolus  $q_i$  qui décrivent le mouvement du système articulé sont construits sur la base des coordonnées cartésiennes des marqueurs (ces coordonnées ont été obtenues dans le cadre du travail de Leclerc [137] et sont filtrées par la technique à base de transformée en ondelettes décrite dans le chapitre 1). Les évolutions de ces paramètres articulaires apparaissent sur la figure D.11 et les vitesses et articulations sur la figure D.12.

### III.4.3 Principe de résolution

Dans le cas présent, on a une configuration avec deux boucles fermées. Il nous a semblé judicieux de traiter globalement le problème en proposant de regarder l'ensemble des jambes en mouvement. Dans l'approche que nous proposons, la liaison entre le pied et la pédale est modélisée par un torseur de contact dont le moment par rapport à l'axe de la pédale est nul. L'idée est alors d'écrire les équations de Lagrange du mouvement de chaque jambe et du pédalier, ce qui donne 7 relations. On obtient alors un système de 7 équations à 10 inconnues (6 couples actionneurs et 4 composantes de forces de réactions aux pédales) qu'il nous suffira de résoudre par une technique appropriée. Remarquons ici que le fait d'utiliser le formalisme de Lagrange, permet l'élimination des forces de liaisons articulaires et donc de réduire la taille du vecteur des inconnues.

Le but de l'étude est la détermination de couples actionneurs articulaires  $\Gamma_i$  et d'efforts d'interaction pieds/pédales (de composantes normales  $N_d, N_g$  et radiales  $T_d, T_g$ ) pouvant être associés au mouvement observé. S'agissant d'un problème de dynamique inverse, les boucles cinématiques peuvent être traitées comme des chaînes ouvertes à paramètres  $q_i$  indépendants : la formulation de conditions de fermeture est en effet sans objet puisque ces conditions sont satisfaites *de facto* par les  $q_i$  relevés expérimentalement. Les boucles étant « ouvertes » en  $A$  et  $B$ , centres de rotation des pédales qui ne transmettent pas de moment aux manivelles, il est possible de procéder à la mise en équations du mouvement de chaque sous-système  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_6, \mathcal{S}_7$  à paramètres  $q_i$  indépendants. Il est commode d'introduire un lagrangien  $L$  du système tel que

$$L = E_c - E_p - \Gamma q_7 \quad (\text{III.8})$$

où  $\Gamma$  est le couple délivré au pédalier, mesuré et donc donné.

Aux paramètres  $q_i$  réunis dans  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_7)^T$  sont alors associées les équations de Lagrange :

$$P_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \triangleq \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, 7 \quad (\text{III.9})$$

où les forces généralisées  $Q_i$  sont dues aux couples actionneurs  $\Gamma_i$  et aux efforts d'interaction pieds/pédales réunis dans le vecteur :

$$\mathbf{x} = \left[ \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \Gamma_4 \quad \Gamma_5 \quad \Gamma_6 \quad T_d \quad N_d \quad T_g \quad N_g \right]^T \quad (\text{III.10})$$

La dépendance linéaire des  $Q_i$  par rapport à  $\mathbf{x}$  permet de regrouper les équations (III.9) sous la forme du système matriciel :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (\text{III.11})$$

où  $\mathbf{b} = (P_1, \dots, P_7)^T$  et les composantes de ce vecteur sont détaillées dans l'annexe G.

Avec les notations  $S7i = \sin(q_7 - q_i)$ ,  $C7i = \cos(q_7 - q_i)$ ,  $r_i$ , longueur segmentaire d'origine  $O_i$ , la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  s'explique sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1 S71 & r_1 C71 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -r_2 S72 & r_2 C72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -r_3 S73 & r_3 C73 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -r_4 S74 & r_4 C74 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -r_5 S75 & r_5 C75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -r_6 S76 & r_6 C76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_7 & 0 & r_7 \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

écriture qui fait apparaître immédiatement qu'elle est de rang plein. On dispose ainsi d'un système sous-déterminé de 7 équations indépendantes à 10 inconnues.

Le choix proposé repose sur la recherche d'une solution de norme minimale. Le problème est ainsi reconsidéré sous la forme du programme quadratique avec contraintes égalités :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \\ g(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

classiquement converti sous la forme du système (cf. annexe B):

$$\begin{cases} \mathbf{grad} f + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Lambda} = 0 \text{ avec } G_{ik} = \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \\ g(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

qui comporte autant d'équations que d'inconnues, soit 10 composantes  $x_i$  et 7 multiplicateurs  $\lambda_k$  réunis dans  $\boldsymbol{\Lambda}$ . La linéarité de  $\mathbf{x} \rightarrow g(\mathbf{x})$  permet d'écrire la solution en  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (\text{III.15})$$

où

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (\text{III.16})$$

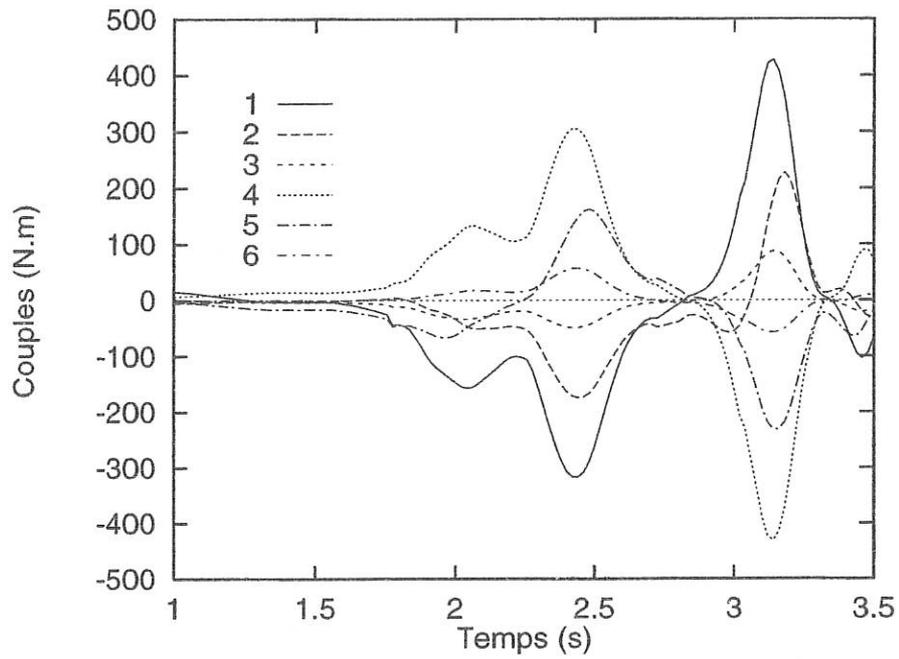
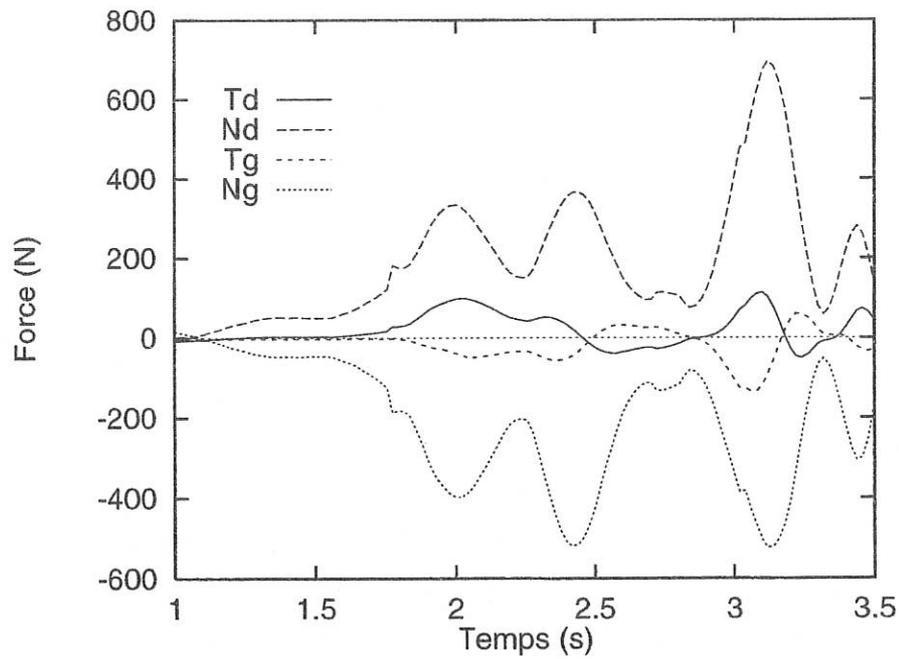
est la matrice pseudo-inverse à droite de  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  satisfaisant la relation

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{1} \quad (\text{III.17})$$

En suivant les remarques de l'annexe B concernant la résolution numérique d'un tel problème sous-déterminé, et bien qu'il y ait peu de chance que la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  soit mal conditionnée, la résolution numérique est réalisée en effectuant une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ .

#### III.4.4 Résultats pour les couples actionneurs et les forces d'interactions pieds/pédales par Pseudo-Inverse

Les résultats présentés sur les figures III.35 et III.36 concernent la phase transitoire correspondant au premier tour de pédalier (à l'instant initial  $q_7 = -12^\circ$ ). L'allure de la solution sélectionnée par la procédure d'optimisation appelle quelques remarques. Observons tout d'abord que l'absence de changement de signe des composantes normales  $N_d$  et  $N_g$  est simplement due au paramétrage et au mode de projection des forces d'interaction pieds-pédales. On remarquera de plus que les jambes tirent sur les pédales autant qu'elles poussent, ce qui est dû au fait que les liaisons pieds-pédales sont implicitement supposées bilatérales et qu'en outre aucune hypothèse n'a été formulée concernant un sens privilégié d'action des couples actionneurs. Enfin, les composantes radiales  $T_g$  et  $T_d$ , qui ne travaillent pas, se trouvent naturellement réduites à des valeurs faibles sans quoi la restitution du couple utile  $\Gamma$  mesuré exigerait des surcroits d'efforts articulaires importants et inutiles pour retrouver des niveaux de valeurs suffisants pour  $N_d$  et  $N_g$ .

FIGURE III.35 - *Couples actionneurs obtenus par Pseudo-Inverse*FIGURE III.36 - *Forces de liaison pieds/pédales obtenues par Pseudo-Inverse*

Cependant, il peut être intéressant de privilégier certaines composantes lors du pro-

cessus de minimisation et en tenant compte de considérations physiques directement liées à la nature du mouvement. En effet, on peut considérer que lors du mouvement de pédalage, en fonction de la configuration du pédalier, seulement une jambe produit « l'effort ». Ce problème peut être aisément traité en introduisant des pondérations dans le critère à minimiser. Ceci fait l'objet du prochain paragraphe.

### III.4.5 Résultats pour une optimisation privilégiant le sens d'action de certaines composantes

#### III.4.5.a Principe

Si l'on introduit des pondérations dans le critère minimisé, alors le problème à résoudre peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x} \\ g(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

où  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_{10})$  est une matrice de pondération : plus le terme  $w_i$  est grand et plus la composante du vecteur des inconnues qui lui est associée sera minimisée par rapport aux autres.

En réalisant la même conversion du problème que dans le paragraphe précédent on obtient une solution de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\mathbf{b} \quad (\text{III.19})$$

où

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (\text{III.20})$$

est l'inverse généralisée à droite de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  qui satisfait donc

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{1} \quad (\text{III.21})$$

Nous avons vu précédemment que le problème (III.13) peut être aisément complété pour imposer un sens d'action privilégié à l'articulation hanche-cuisse en le transformant vers le problème (III.18). Cette transformation suppose de définir des valeurs numériques pour les coefficients de pondération. Le choix de ces coefficients, quoique arbitraire, ne doit pas être déconnecté d'une certaine réalité physique. Aussi il semble intéressant de les définir de la sorte :

$$\begin{cases} w_1 = w \ (w = 1 \rightarrow \infty) \text{ et } w_4 = 1 \text{ si } \dot{q}_1 < 0 \\ w_4 = w \ (w = 1 \rightarrow \infty) \text{ et } w_1 = 1 \text{ si } \dot{q}_4 < 0 \\ w_i = 1 \ i \neq 1, i \neq 4 \end{cases}$$

Ainsi, lorsque la jambe droite propulse on minimise le couple actionneur à la hanche gauche et vice et versa. On va donc résoudre le problème pour différentes valeurs de  $w_1$  et  $w_4$ . On s'attend naturellement à obtenir une solution où l'évolution des couples actionneurs sera de type impulsionnel pour des valeurs élevées de ces coefficients. Dès lors, les couples actionneurs actifs peuvent prendre des valeurs très importantes et dépasser des valeurs ayant un sens pour les capacités humaines. De plus, on peut arriver à des résultats où les amplitudes des efforts radiaux dépassent les amplitudes des efforts normaux. Une manière de déterminer un bon compromis pour les valeurs de  $w_1$  et  $w_4$  est d'incrémenter leurs valeurs progressivement et de déterminer à chaque pas la valeur du travail des forces internes  $W^{(2)}$  et de l'intégrale quadratique des efforts moteurs sur le cycle  $J$ , intégrale dont l'expression est rappelée dans le paragraphe suivant.

#### III.4.5.b Evolution de $J$ et de $W^{(2)}$ en fonction de $w$

L'intégrale  $J$  est de la forme :

$$J = \int_0^T \Gamma^T \Gamma dt \quad (\text{III.22})$$

Nous avons représenté sur les figures III.37 et III.38 l'évolution des deux bilans. On remarque que plus le coefficient de pondération augmente et plus le travail des forces internes augmente. Parallèlement l'intégrale  $J$  passe par un minimum pour augmenter de façon quasi linéaire. Ces deux résultats sont tout à fait cohérents et font apparaître que plus on cherche à maximiser le couple actionneur sur la jambe propulsive plus le travail des forces internes associé est important.

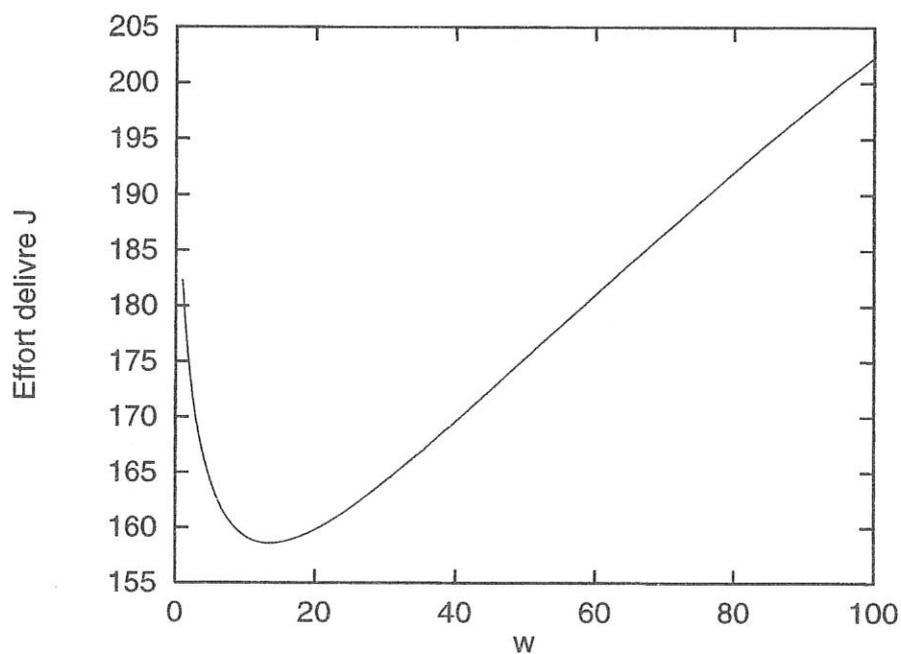


FIGURE III.37 - Evolution de  $J$  en fonction du coefficient de pondération  $w$

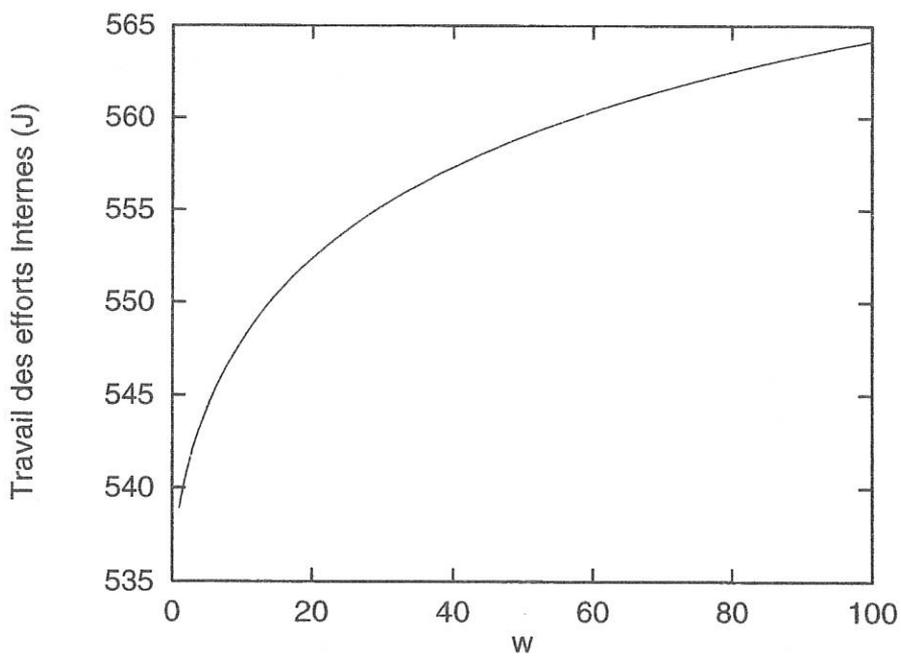


FIGURE III.38 - Evolution de  $W^{(2)}$  en fonction du coefficient de pondération  $w$

Dans les deux paragraphes suivants, nous présentons des résultats sur les couples

actionneurs articulaires et les forces de liaison pieds/pédales pour des valeurs différentes du coefficient  $w$ . Notons enfin que la valeur  $w = 1$  correspond à la solution obtenue par la Pseudo-Inverse.

### III.4.5.c Couples actionneurs et forces d'interactions pieds/pédales pour $w = 7$

Nous avons recherché dans l'ensemble des solutions pour différentes valeurs de  $w$ , celle où l'amplitude des efforts radiaux n'est pas supérieur à celle des efforts normaux. Ces résultats sont présentés sur les figures III.39 et III.40. Ils ne diffèrent pas dans la forme des résultats acquis pour une optimisation libre, mais se caractérisent par des intensités plus importantes pour les couples actionneurs articulaires. Pour les forces de liaisons pieds/pédales, on peut constater que seules les forces tangentielles (ou radiales) augmentent en intensité.

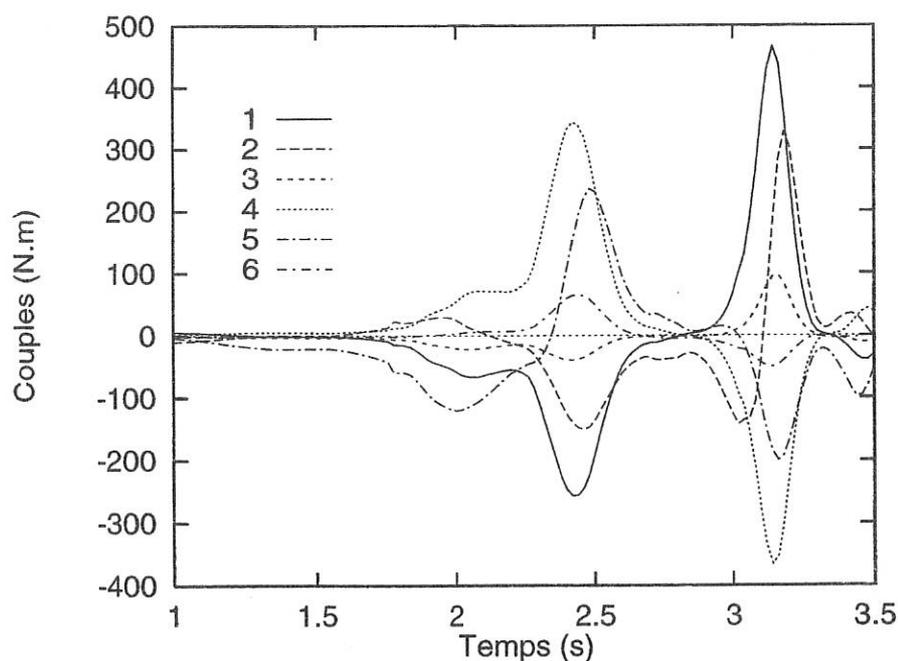


FIGURE III.39 - *Couples actionneurs obtenus par Inverse Généralisée pour  $w = 7$*

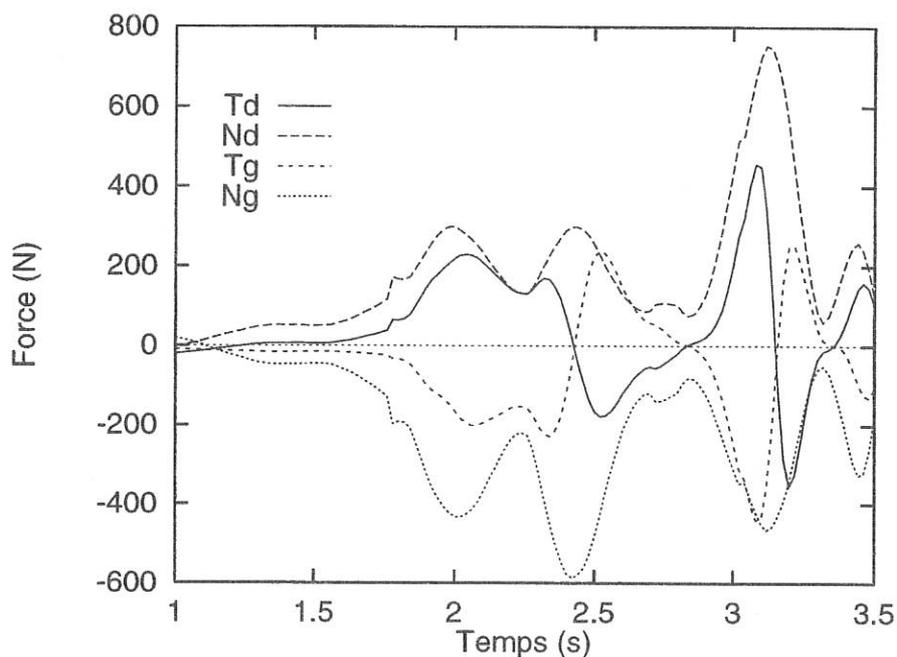


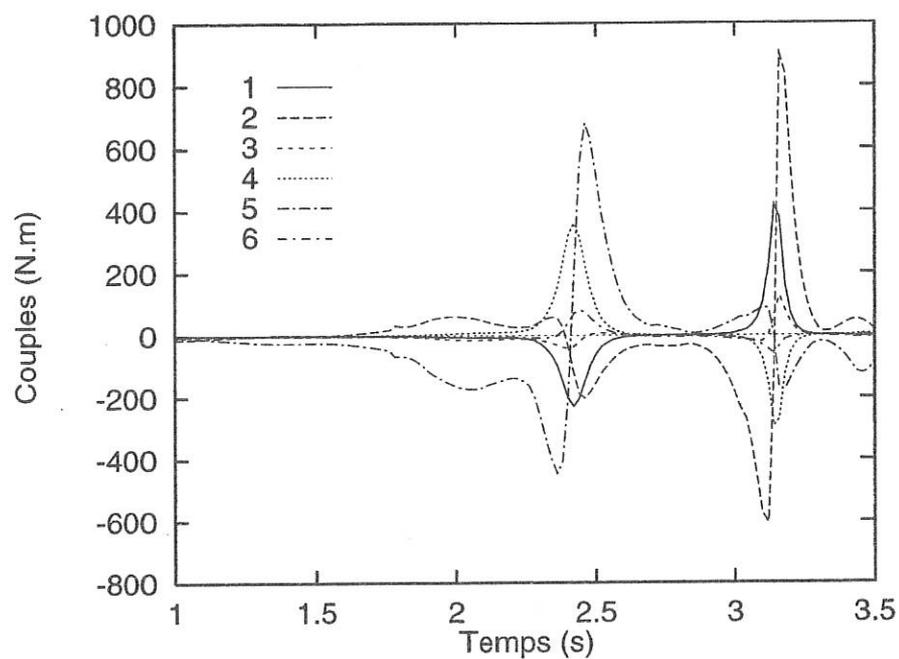
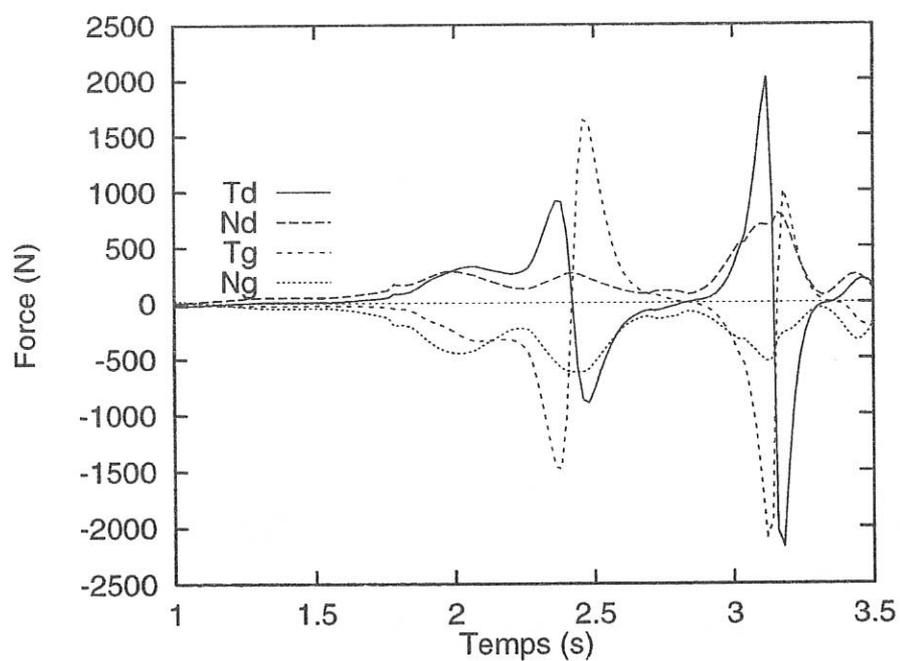
FIGURE III.40 - Forces de liaison pieds/pédale obtenues par Inverse Généralisée pour  $w = 7$

#### III.4.5.d Couples actionneurs et forces d'interactions pieds/pédales pour $w = 100$

Dans les figures III.39 et III.40 on présente les résultats obtenus par Inverse Généralisée pour un coefficient de pondération  $w = 100$ .

Comme nous l'avions annoncé au début de ce paragraphe on constate bien que les couples actionneurs aux genoux ont une allure de type impulsif avec des valeurs assez fortes en comparaison aux résultats obtenus pour une solution sans pondérations et pour la solution  $w = 7$ . Les forces tangentielles de liaison pieds/pédales ont des valeurs très importantes et sont supérieures aux forces normales.

Il est maintenant intéressant de dresser un bilan énergétique à partir de ces résultats, bilan où seulement les valeurs des couples actionneurs articulaires seront utiles.

FIGURE III.41 - *Couples actionneurs obtenus par Inverse Généralisée pour  $w = 100$* FIGURE III.42 - *Forces de liaison pieds/pédale obtenues par Inverse Généralisée pour  $w = 100$*

### III.4.6 Bilans énergétiques

Comme nous l'avons réalisé pour le mouvement de flexion-extension, il est intéressant d'examiner l'évolution du travail des efforts internes  $W^{(2)}$  au cours du mouvement. Nous présentons sur les figures III.43, III.44 et III.45 les évolutions de  $W^{(2)}$ , du travail total absolu  $W^{(3)}$  et du travail du couple au pédalier  $W^{(5)}$  pour un calcul à l'aide d'une optimisation libre et d'une optimisation privilégiant le sens d'action de certaines composantes. Rappelons enfin que ces travaux sont calculés à l'aide des couples articulaires obtenus précédemment.

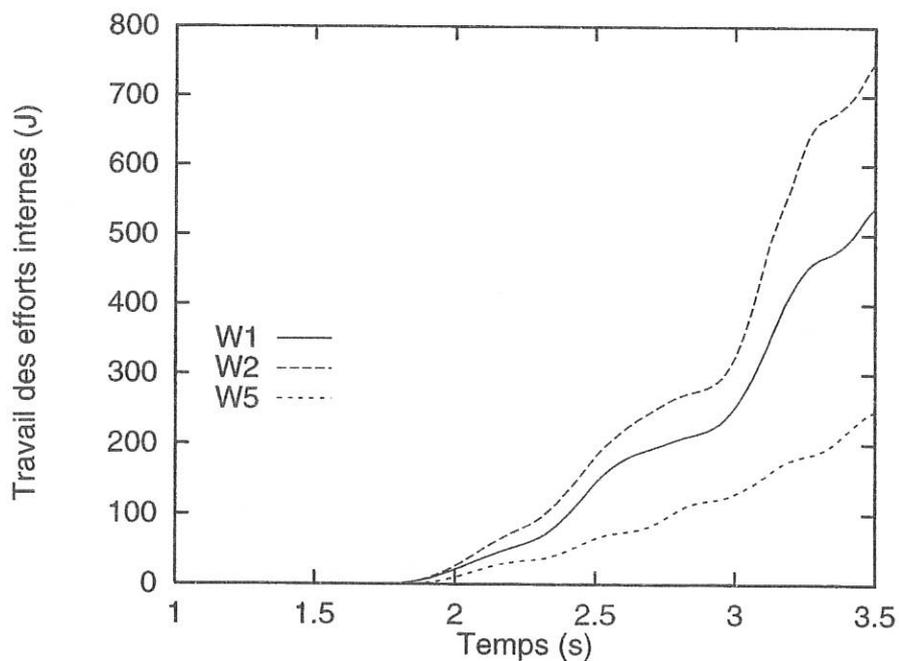
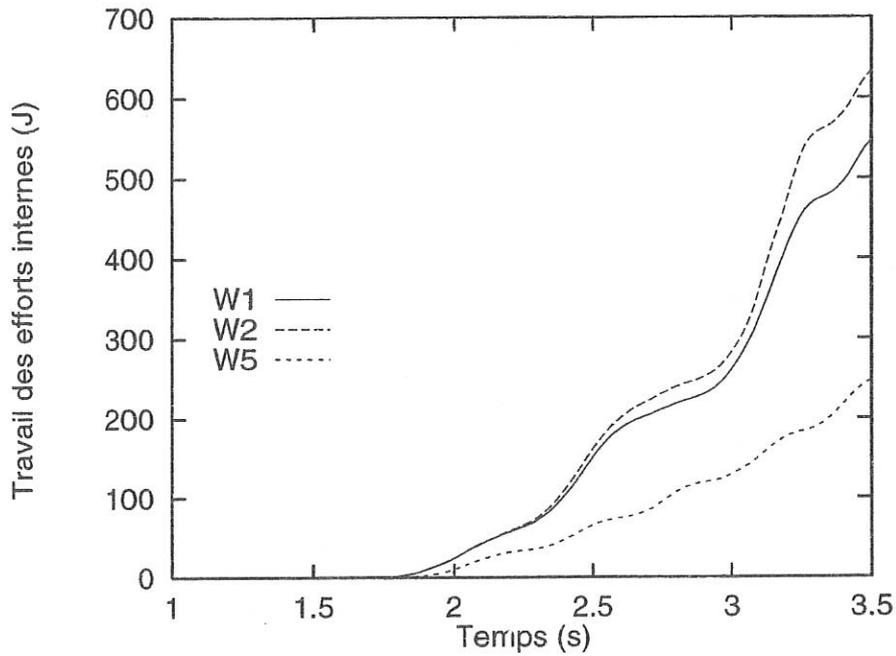
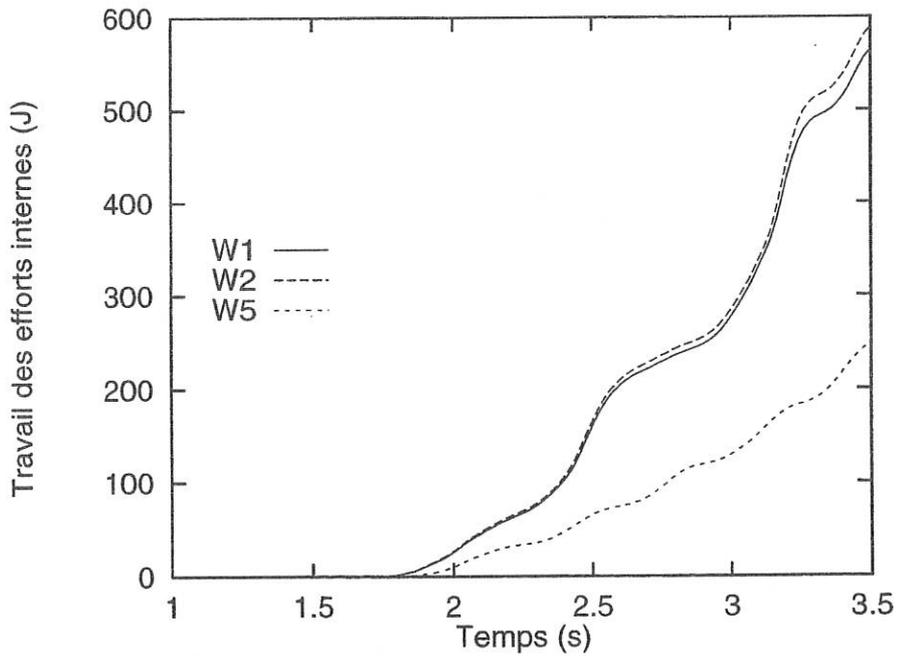


FIGURE III.43 - *Travaux locaux dans une solution obtenue par Pseudo-Inverse*

FIGURE III.44 - *Travaux locaux obtenus par Inverse Généralisée pour  $w = 7$* FIGURE III.45 - *Travaux locaux obtenus par Inverse Généralisée pour  $w = 100$* 

On observe alors que la dépense énergétique nécessaire pour fournir le travail méca-

nique calculé à partir de la mesure du couple  $\Gamma$  transmis au pédalier est de 2,5 à 3 fois plus importante. Ceci nous donne une idée du rendement mécanique de la machine humaine pour un tel mouvement.

Comme nous avons montré sur la figure III.37, que le bilan sthénique représenté par  $J$  présentait un minimum, il est aussi intéressant d'observer comment évolue au cours du mouvement cette intégrale et de comparer cette évolution pour les 3 résultats obtenus comme le montre la figure III.46.

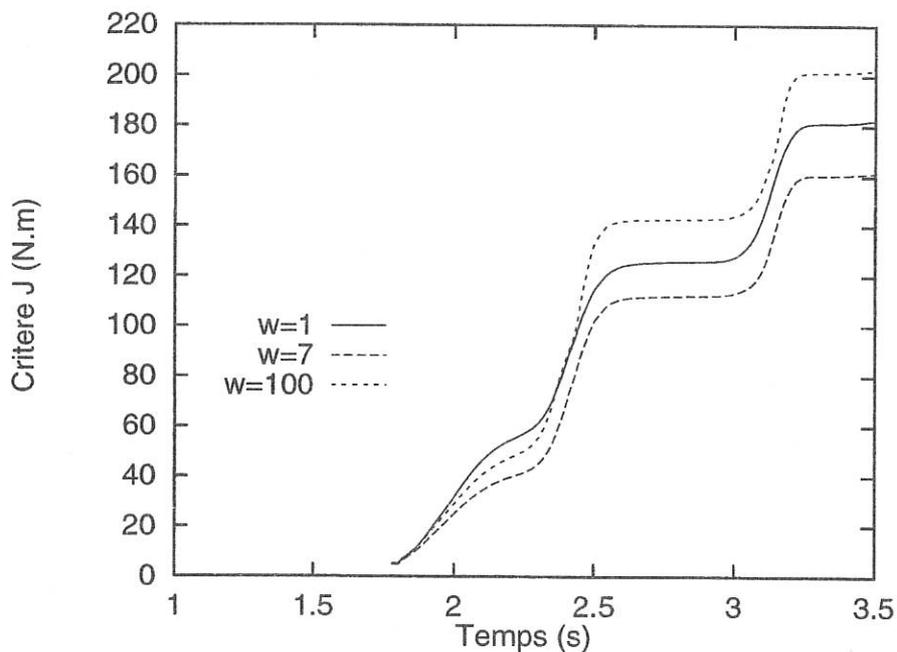


FIGURE III.46 - Evolution de  $J$  pour différents modes d'optimisation

### III.5 Discussion

Nous venons de présenter dans ce chapitre quelques résultats concernant l'étude dynamique et énergétique de trois mouvements types : la flexion-extension, la marche et le pédalage.

Les 3 études présentées reposent sur la résolution du problème dynamique inverse. Deux aspects d'un tel problème sont fondamentaux pour la qualité des résultats :

- l'acquisition précise de la cinématique du mouvement ;
- être en mesure de fournir un modèle géométrique et inertiel représentatif du sujet étudié, dans le mouvement observé.

La fréquence d'échantillonnage et le mode de filtrage des données sont déterminants de la qualité des variables cinématiques à injecter dans le modèle dynamique.

Nous avons dans un premier temps validé la méthode de calcul proposée dans le chapitre 2 de ce mémoire sur un mouvement plan, la flexion-extension, dont le modèle cinématique comporte 4 degrés de mobilité mais dont 3 seulement sont actifs.

Les études énergétiques conduites en parallèle sur ce mouvement sont en excellente coïncidence, ce qui semble montrer que, dans un cas simple, l'analyse dynamique locale conduit à des résultats réalistes. Cependant la dépense énergétique totale du système mécanique est donnée par le travail moteur absolu tel que défini par la relation (II.46), sans quoi on pourrait sous-évaluer le coût énergétique d'un mouvement.

En ce qui concerne la marche dans le plan sagittal, ce problème n'est pas résolu de façon satisfaisante. Nous avons mis en évidence le problème du mauvais conditionnement de la matrice de masse du système mécanique. Ainsi nous avons étudié la sensibilité du modèle dynamique construit sur la base de la technique récursive développée au chapitre 2 de ce mémoire.

On peut incriminer la structure de l'algorithme à double récurrence présenté dans le chapitre 2 de ce mémoire. Celui-ci amplifie les incertitudes sur la détermination des vitesses et des accélérations et les propage dans la récurrence retour sur les grandeurs cinétiques, résultantes dynamiques et moments dynamiques.

Comme le conditionnement est lié à la nature même du problème traité, et que de plus il est quasi indépendant du paramétrage de la structure articulée, il est difficile de fournir des conclusions définitives sur une procédure de calcul des efforts de liaison sans utiliser les données d'une plate-forme de force. Cependant les résultats obtenus sur la base d'un paramétrage absolu semblent indiquer que l'on pourrait aboutir à des résultats acceptables en affinant les prises de données à l'aide d'un échantillonnage à fréquence plus élevée et de filtrages plus fins.

Le pédalage est un exemple de résolution de problème de dynamique inverse, pour le cas de chaîne cinématique fermée, qui débouche sur un problème de sous-détermination des efforts actionneurs articulaires. La méthode introduite offre le moyen d'extraire parmi toutes les solutions dynamiquement admissibles une famille de solutions obéissant à des pondérations en effort dont le choix est très simple à réaliser dans la technique proposée. Il est bien évident qu'il serait très intéressant de pouvoir disposer d'une mesure des forces de liaison pieds/pédales afin de pouvoir comparer, comme dans le cas d'une mesure par plate-forme de forces, les résultats du calcul à cette mesure. Un dernier point qu'il est important de souligner à propos de cette étude, est que nous n'avons réalisé les procédures d'optimisation qu'avec des pondérations sur les couples actionneurs. Il pourrait être

intéressant d'étudier le cas où l'on introduirait des pondérations sur les forces de liaison pieds/pédales et ainsi traduire le fait que ces liaisons sont unilatérales, tout du moins dans le cas étudié qui diffère d'une pratique sportive de spécialiste.



## Chapitre IV

# Optimisation dynamique d'un mouvement de flexion-extension

*Nous présentons dans ce chapitre les outils de l'optimisation dynamique de mouvements. Les conditions nécessaires d'optimalité sont fournies par l'application du Principe du Maximum de Pontriaguine. Nous appliquons cette technique à la simulation du mouvement de flexion-extension. Nous comparons les mouvements ainsi optimisés au mouvement réel.*

*On me demande de chercher la vérité, mais pas de la trouver.*

*Denis Diderot*

## Notations

$L$	Lagrangien
$H$	Hamiltonien
$A_{ij}, B_{ij}$	Coefficients d'inerties des équations de Lagrange du système mécanique
$V$	Potentiel du champ de pesanteur
$p$	Vecteur des moments conjugués en formulation hamiltonienne
$T$	Durée de transfert entre configurations initiale et finale
$x$	Vecteur des variables d'état
$u$	Vecteur des variables de commande
$x^0$	Etat initial
$x^T$	Etat final
$u^{max}$	Vecteur des commandes maximales admissibles
$J$	Critère de performance à minimiser
$w$	Vecteur des variables adjointes
$Sat(\cdot)$	Fonction de saturation
$J^*$	Critère de performance pénalisé
$r$	Facteur de pénalité
$g(x(t))$	Contrainte de phase
$G$	Fonction de pénalité

## IV.1 Introduction

Si l'on veut comprendre au mieux la « machine humaine », améliorer un mouvement ou bien encore en reproduire un autre, la recherche d'un critère optimisant devient nécessaire. Dans l'étude bibliographique qui constitue la suite de ce paragraphe, nous revenons sur les remarques faites par Marshall [138] et qui vont dans le sens d'une identification d'un critère.

Nous touchons à un problème de planification optimale devant répondre à la fois à une notion de performance, telle que la minimisation d'un critère, mais aussi à la prise en compte de contraintes liées soit aux caractéristiques mécaniques du système articulé, soit à la nature même du mouvement à simuler.

Le but de ce chapitre est de rechercher une adéquation entre un mouvement optimisé et le mouvement réel. Remarquons aussi qu'il trouve sa source dans le rêve, jamais atteint, de l'optimisation de la performance sportive ou bien encore de la compréhension du geste parfait, rarement réalisé, mais garant d'une performance inégalée.

Cependant, rechercher le ou les critères qui sont minimisés lors de la réalisation d'un mouvement humain pourrait constituer un sujet de recherche à part entière. Notre propos sera d'étudier un mouvement simple, la flexion-extension, afin de mettre en évidence la possibilité d'une simulation de ce mouvement selon une technique classique de planification de mouvement en robotique par optimisation dynamique sous un critère de moindre efforts délivrés. On peut retrouver ce travail dans [139].

Nous utiliserons pour ce faire les résultats acquis par Bessonnet [140] et qui concernaient la planification de trajectoire optimale en robotique au sens dynamique. La mise en place des bases théoriques de la procédure d'optimisation dynamique fait l'objet de la troisième partie de ce chapitre. Nous formulerons ainsi le modèle dynamique de la structure articulée en variables de phase hamiltoniennes. Ce formalisme permet de fournir une équation d'état dont la structure est bien adaptée à l'application du principe du maximum de Pontriaguine (PMP). En effet, l'utilisation de ce principe nécessite que les équations de la dynamique soient écrites sous la forme d'un système différentiel résolu par rapport aux dérivées temporelles des variables de phase.

La comparaison du mouvement simulé avec un mouvement réel (étudié sur le strict plan de la dynamique inverse dans le chapitre précédent) doit donc permettre de dégager un certain nombre de points intéressants et ainsi d'apporter quelques éléments de comparaison avec des résultats d'études réalisées par ailleurs. Ceci fait l'objet des deux dernières parties de ce chapitre.

## IV.2 Bibliographie

Prenons en considération en premier lieu le travail effectué par Marshall [138] à la fin des années 80. Il se propose de comparer les mouvements résultants de la simulation de la phase de balancement de la marche pour différents critères. Il garde à l'esprit qu'un mouvement humain, tel que celui de la marche, devrait normalement obéir à un « indice global de performance » décrit par un paramètre mécanique. Il met en place une procédure de simulation utilisant une méthode de contrôle optimal non-linéaire et introduit 7 critères de performance reposant sur la minimisation de l'intégrale calculée sur la durée du cycle :

1. des moments articulaires absolus ;
2. de l'énergie mécanique totale (énergie potentielle + énergie cinétique) ;
3. de la somme des valeurs absolues des accélérations segmentaires ;
4. de l'accélération linéaire des épaules, accélération représentative de celle de la tête ;
5. des valeurs absolues des puissances articulaire ;
6. du même critère que le précédent mais en tenant compte d'un travail concentrique ou excentrique ;
7. de la somme des puissances articulaires.

L'auteur compare les mouvements simulés suivant ces critères avec un mouvement réel dont l'acquisition a été faite au préalable. En conclusion, il affirme que les 3 premiers critères semblent être ceux qui donnent les résultats comparables les meilleurs.

L'étude qui semble avoir suscité le plus grand intérêt en ce qui concerne la simulation de la marche humaine est sans conteste celle réalisée par Chow et Jacobson [141] dans le début des années 70 avec un modèle à 5 corps. L'approche de ces deux auteurs est basée sur la division du cycle de marche en plusieurs sous-phases avec des contraintes dynamiques appropriées à chaque phase tout en minimisant un critère de performance formé par la somme quadratique pondérée des efforts actionneurs. Les équations de la dynamique sont obtenues par la mise en oeuvre du formalisme de Lagrange. Les auteurs ont prescrits la trajectoire de la hanche pour le cycle entier et celle de la cheville pour la phase de balancement.

Ils ont été suivis dans leur démarche par Chao [142]. Celui-ci tente de valider ses calculs de dynamique inverse en calculant les couples actionneurs et les forces intersegmentaires qui minimisent la différence entre les paramètres cinématiques calculés et mesurés.

Une approche intéressante est aussi celle de Townsend [143, 144] qui propose dans un premier temps un modèle permettant le calcul de la consommation d'énergie lors de la marche humaine puis applique ensuite une méthode de programmation optimale pour déterminer les effets de la modélisation et du critère d'optimisation dans la synthèse de la locomotion bipède. Il inscrit son travail dans un contexte de dimensionnement de prothèses ou de machines « qui marchent ».

Ayoub [145] essaye de déterminer des trajectoires optimales pour des mouvements concernant les segments supérieurs du corps humain : les bras. Il met en oeuvre un processus de minimisation d'une fonction coût soumise à des contraintes de trois types : contraintes physiques limitant les amplitudes angulaires, contraintes de tâche pour s'assurer que le point terminal est atteint et contraintes sthéniques sur le modèle afin de ne pas dépasser des valeurs trop importantes. Il utilise la programmation dynamique pour résoudre ce problème et montre quelques résultats intéressants.

Ghosh [146] s'intéresse aux applications sportives de l'optimisation de mouvement. Il simule et compare avec une trajectoire réelle, le mouvement d'un gymnaste effectuant en un temps minimum un tour complet autour de la barre. Il utilise une méthode de gradient projeté pour minimiser le temps à l'aide d'un système soumis à des contraintes. Il met alors l'accent sur les difficultés numériques pour la résolution du problème.

L'une des plus grosses contributions à l'optimisation de mouvement humain est celle de Hatze [147]. Il traite le problème d'optimisation en appliquant le principe du Maximum de Pontriaguine. Il inclut dans son modèle des lois de comportement des différents muscles. Il compare aussi le mouvement ainsi optimisé avec un mouvement réel. Il étudie les changements dans les « patterns » de marche lorsque par exemple le sujet est fatigué. L'application pratique d'un travail peut se situer dans l'optimisation des excitations électromyographiques pour la réhabilitation de la marche de patients paralysés.

Hunt [148] propose une méthode de simulation optimale de mouvements de marche d'un bipède simplifié en présence de perturbations importantes. Il utilise un modèle linéarisé des équations du mouvement et une sorte de méthode de découplage où le travail principal consiste à obtenir des gains de contrôle adéquats.

Un peu plus tard, les travaux de Yen et Nagurka [149] ont porté sur la détermination des conditions aux limites et de la durée de transfert entre deux configurations pour un pas de marche en minimisant la consommation d'énergie. Ils spécifient la trajectoire des articulations en termes de polynômes et de séries de Fourier.

Bourassa [150] a défini un modèle mathématique de locomotion humaine basé sur la programmation optimale et la minimisation de l'intégrale quadratique des efforts musculaires. Il étudie trois sous-phases caractéristiques de la marche humaine (posture, déploie-

ment et balancement) en introduisant un jeu de contraintes appropriées et en utilisant le formalisme de Lagrange. Le mouvement de la hanche est prescrit et le mouvement du tronc peut être couplé et traité séparément.

Pandy [151], conscient de la difficulté à résoudre les problèmes de commande optimale par transformation en un problème à valeurs aux limites en deux points et résolution par une méthode de gradient, propose d'utiliser une méthode d'optimisation paramétrique. Cette méthode affecte à des valeurs nodales « l'histoire » du contrôle et un algorithme de programmation optimale peut aisément résoudre le problème d'optimisation. Il applique cette technique au saut en hauteur en introduisant d'autre part un modèle de muscle dans les équations de la dynamique.

Toujours avec le même souci d'éviter des calculs lourds Chou [152] propose une approche différente en introduisant la théorie de Bellman pour la prédiction de la cinématique et de la dynamique de la marche à partir de l'étude de la trajectoire optimale de la jambe pendulaire. En fait il cherche cette trajectoire dans un espace cartésien réduit obtenu expérimentalement et teste selon une grille discrète la valeur de son critère qui est l'intégrale sur la durée du cycle de la puissance fournie. Il compare alors les résultats obtenus par sa simulation avec ceux qui découlent d'une expérimentation sur 6 sujets sains et affirme que la marche humaine semble être efficiente du point de vue de l'énergie.

Zefran [153] étudie selon une approche variationnelle le contrôle optimal de systèmes soumis à des contraintes unilatérales. Puis, il introduit un critère basé sur la minimisation de l'intégrale de la somme quadratique des dérivées des couples actionneurs [154]. Il compare alors les résultats entre un mouvement humain et un mouvement simulé pour la coopération entre deux robots. L'idée de s'inspirer de ce que fait l'homme pour générer une trajectoire de robot est présente.

Enfin, une application pratique et intéressante de l'approche par commande optimale de la simulation de mouvement est celle développée par Popovic [155] concernant le contrôle optimal pour une prothèse de genou à deux degrés de liberté. Dans ce travail, l'auteur ne se contente pas de simuler un mouvement optimal, mais il applique sa méthode dans la pratique en l'implémentant sur une commande temps réel.

De cette brève présentation bibliographique, il apparaît que les auteurs ont trouvé des difficultés dans l'identification de critères optimisants pour les mouvements humains. La mise en oeuvre pratique de simulation de mouvements optimaux semble poser des problèmes numériques conséquents. Aussi, il nous a semblé propice d'appliquer des techniques couramment utilisées au LMS pour la planification de trajectoire de robots manipulateurs en tenant compte de la dynamique des systèmes. La présentation de cette technique adaptée à notre cas particulier fait l'objet du paragraphe suivant. Cependant, en préambule

de cette présentation nous évoquons maintenant brièvement quelques aspects liés à la planification de trajectoire dans le domaine de la robotique.

Notons dans un premier temps que la durée de transfert est le plus souvent une inconnue du problème, déterminée par le processus d'optimisation. L'optimisation dynamique de mouvements de robots manipulateurs peut être réalisée sur la base de trajectoires prescrites [156]. Dès lors la complexité du problème est moins importante et concerne la recherche de solutions à durée minimale. Lorsque la trajectoire est inconnue et donc déterminée par le processus d'optimisation lui-même la complexité du problème est alors plus importante. Les travaux les plus récents concernent la minimisation d'un critère de performance mixte associant durée de transfert et valeur moyenne quadratique pondérée des efforts actionneurs [157, 158, 153]. D'autres critères de performance peuvent être envisagés : limitations des efforts de liaisons [159, 160, 161], valeur moyenne quadratique des puissances des actionneurs [159], énergie, ...

D'un point de vue procédé d'optimisation, citons les méthodes les plus courantes : programmation mathématique, calcul des variations [153] et principe du maximum de Pontriaguine [157, 140, 158]. Pour cette dernière méthode, particulièrement efficace d'un point de vue numérique, l'initialisation est effectuée en injectant une solution obtenue par le traitement d'un problème non-contraint à durée fixée [157]. Ensuite un algorithme de tir à matrice de transition, ou bien une méthode de différences finies, permet l'obtention d'une solution optimale.

## IV.3 Modèle dynamique

Dans cette partie, nous présentons succinctement la mise en forme des équations du mouvement sous forme hamiltonienne.

### IV.3.1 Formalisme lagrangien

Avec les notations déjà introduites dans les chapitres précédents, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i \quad (\text{IV.1})$$

Dans cette expression, il n'a pas été tenu compte d'efforts dissipatifs.

Ces équations s'explicitent sous la forme :

$$A_{ij} \ddot{q}_j + B_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \Gamma_i \quad (\text{IV.2})$$

où  $V$  définit le potentiel du champ de pesanteur. Les coefficients  $B_{i,jk}$  ont pour expression:

$$B_{i,jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (\text{IV.3})$$

Les  $A_{ij}$  et les  $B_{i,jk}$  sont les coefficients d'inertie du système dans le paramétrage introduit. Ils dépendent de ce paramétrage.

On pose alors :

$$q_{n+i} = \dot{q}_i \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathbf{v} = (q_{n+1}, \dots, q_{2n})^T \quad (\text{IV.5})$$

Cette notation permet alors de réduire le système du second ordre en un système du premier ordre résolu par rapport aux dérivées :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})(-\mathbf{V}_{,\mathbf{q}}(\mathbf{q}) + \mathbf{\Gamma}) \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

qui est l'équation d'état du système.

### IV.3.2 Formulation hamiltonienne

On introduit les moments conjugués :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{IV.7})$$

et l'hamiltonien  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{IV.8})$$

Ces deux formulations amènent aux résultats :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Si on injecte ces résultats dans les équations de Lagrange, on obtient la formulation hamiltonienne des équations du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \Gamma_i \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

D'autre part, l'hamiltonien  $H$  prend la forme<sup>1</sup>:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^{-1}) \mathbf{p} + \mathbf{V} \quad (\text{IV.11})$$

Il en résulte l'écriture matricielle des équations du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{2} \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^{-1})_{, \mathbf{q}} \mathbf{p} - \mathbf{V}_{, \mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma} \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

où  $(\mathbf{A}^{-1})_{, \mathbf{q}}$  et  $\mathbf{V}_{, \mathbf{q}}$  désigne les gradients respectifs de  $\mathbf{A}^{-1}$  et  $\mathbf{V}$  par rapport à  $\mathbf{q}$ .

Posons :

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^n A_{ij}^{-1}(\mathbf{q}) p_j \\ \mathbf{F} &= (F_1, \dots, F_n)^T \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

En rappelant que :

$$(\mathbf{A}^{-1})_{, i} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{, i} \mathbf{A}^{-1}$$

le système (IV.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{p}_i = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{A}_{, i} \mathbf{F} - V_{, i} + \Gamma_i \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

On remarque que le calcul de  $(\mathbf{A}^{-1})_{, \mathbf{q}}$  n'est plus nécessaire.

Posons pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$\begin{cases} x_i = q_i \\ x_{n+i} = p_i \\ u_i = \Gamma_i \\ G_i(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ G_{n+i} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{A}_{, i} \mathbf{F} - V_{, i} \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

Dans la dernière égalité on a posé identiquement :

$$F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Posons aussi :

-  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})^T$ , vecteur des variables d'états (variables de phase hamiltoniennes) ;

---

1. On a utilisé ici le fait que l'on peut mettre l'énergie cinétique du système sous la forme :

$$2E_c = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i$$

Alors on exprime les  $q_i$  en fonction des  $p_i$  par la relation :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}$$

- $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ , vecteur des commandes (efforts actionneurs) ;
- $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_{2n})^T$ .

On écrit alors les équations du premier ordre sous la forme générique du système de dimension  $2n$  :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \equiv \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{IV.16})$$

dont la structure est typique d'une équation d'état gouvernant l'évolution d'un système mécanique commandé, dans lequel  $\mathbf{G}$  est une fonction non linéaire en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{B}$  est la matrice de dimension  $[2n, n]$  :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

En termes de composantes IV.16 prend la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(\mathbf{x})p \\ \dot{x}_{n+i} = \frac{1}{2}F_i^T(\mathbf{x})A_{,i}(\mathbf{x})F_i(\mathbf{x}) - V_{,i}(\mathbf{x}) + u_i \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

### IV.3.3 Quelques remarques

On peut déjà dire qu'en formulation hamiltonienne un avantage important réside dans le fait que les couples actionneurs  $\Gamma$  sont dégagés du facteur  $\mathbf{A}^{-1}$  dans le système résolu par rapport aux dérivées. D'autre part, on montre que dans cette formulation le coût numérique est moins élevé que dans la formulation lagrangienne (moins d'opérations arithmétiques à effectuer). Le comportement plus continu des variables canoniques assure une meilleure stabilité algorithmique dans les traitements numériques (leurs variations sont plus régulières). En effet, les moments conjugués, paramètres de vitesse, ont un comportement numérique plus régulier que les paramètres articulaires  $\dot{q}_i$ . Les algorithmes numériques sont dès lors plus stable en comparaison avec une formulation lagrangienne des équations du mouvement.

## IV.4 Formulation du problème d'optimisation

Nous formulons dans cette partie le problème d'optimisation dynamique à l'aide du Principe du Maximum de Pontriaguine comme on peut le retrouver de manière plus générale et plus complète dans [140].

### IV.4.1 Formulation du problème

Le problème que nous avons à résoudre est de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{IV.19})$$

avec les conditions aux limites sur les positions et vitesses articulaires :

$$x_i(0) = q_i^0 \text{ et } x_i(T) = q_i^T \quad (\text{IV.20})$$

$$x_{n+i}(0) = p_i^0 \text{ et } x_{n+i}(T) = p_i^T \quad (\text{IV.21})$$

De plus les couples actionneurs sont soumis aux contraintes sur leurs valeurs admissibles :

$$|u_i(t)| \leq u_i^{max} \quad (\text{IV.22})$$

Le critère de performance est de la forme :

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T L(\mathbf{u}(t)) dt \quad (\text{IV.23})$$

On s'intéresse à la minimisation de ce critère où le lagrangien  $L$  est la somme quadratique des couples actionneurs réduits :

$$L = \left(\frac{u_1}{u_1^{max}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_n^{max}}\right)^2 \quad (\text{IV.24})$$

### IV.4.2 Condition nécessaire d'optimalité énoncée par le Principe du maximum de Pontriaguine

Le problème de transfert optimal tel qu'il est défini par l'équation d'état (IV.19), les conditions aux limites (IV.20) et (IV.21) ainsi que le critère de performance (IV.23) est typique des problèmes posés en théorie de la commande optimale. Transformons maintenant ce problème en appliquant le principe du maximum de Pontriaguine [162]. Pour cela, introduisons les variables adjointes  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}$  et la fonction de Pontriaguine  $H$  :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{IV.25})$$

Le principe du maximum de Pontriaguine énonce les conditions nécessaires d'optimalité suivantes [162] pour que  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  soit un processus optimal :

1. Il existe une fonction vectorielle  $\mathbf{w}(t)$  solution du système adjoint :

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = -\left(\frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t))}{\partial t}\right)^T \text{ pour } t \in [0, T] \quad (\text{IV.26})$$

2. La commande optimale  $\mathbf{u}(t)$  satisfait à la condition du maximum de l'hamiltonien :

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)) = \max_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, \mathbf{w}(t)) \quad (\text{IV.27})$$

où  $\mathcal{U}$  est le domaine des commandes admissibles défini par les inégalités (IV.22).

Comme dans [140], une expression explicite de la commande  $\mathbf{u}$  est déduite de (IV.27) :

$$u_i(t) = \text{Sat}[(u_i^{\max})^2 w_{n+i}(t)] \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{IV.28})$$

où  $\text{Sat}$  est la fonction de saturation définie par :

$$\text{Si } |\mathbf{x}| < \mathbf{x}^{\max}, \text{ Sat}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ sinon } \text{Sat}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\max} \text{sign}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.29})$$

En substituant l'expression (IV.28) de  $\mathbf{u}$  dans l'équation d'état (IV.19) et dans le système adjoint (IV.26), les fonctions vectorielles inconnues  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{w}$  apparaissent comme solutions du système différentiel de dimension  $4n$  :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \dot{\mathbf{w}} = \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

qui doit satisfaire les conditions aux limites (IV.20) et (IV.21).

## IV.5 Traitements numériques

Avant de procéder à la résolution du problème aux limites précédent, il faut obtenir une trajectoire initiale satisfaisant les conditions d'optimalité. Ceci est effectué par le couplage d'une méthode de gradient du premier ordre et d'une méthode de tir. Dans un premier temps, on obtient une trajectoire à temps fixé par la méthode du gradient du premier ordre en résolvant un problème de Cauchy associé [163]. Puis dans un second temps on effectue un processus d'optimisation à l'aide d'une méthode de tir à matrice de transition qui permet d'améliorer la précision de la solution initiale. Les algorithmes sont développés en détail dans [140].

## IV.6 Etude du mouvement de flexion-extension

### IV.6.1 Introduction

Nous allons dans la suite de ce chapitre présenter des résultats concernant des éléments de comparaison entre un mouvement optimisé et un mouvement observé.

Nous avons donc préféré valider cette approche sur un cas simple, la flexion-extension, dont on peut modéliser la structure géométrique et cinématique par un système articulé plan à 3 degrés de liberté. L'hypothèse de départ, vérifiée dans le chapitre précédent, est bien sûr que le pied est parfaitement à plat durant tout le mouvement.

D'autre part, comme le mouvement a déjà été observé, on en connaît la durée, ce qui simplifie aussi le processus d'optimisation qui ne cherchera alors qu'à optimiser la répartition des efforts articulaires durant le mouvement de flexion-extension.

Enfin, nous concluons cette étude par la comparaison des bilans énergétiques relatifs à chaque mouvement (observé et simulés).

## IV.6.2 Le modèle utilisé

La formulation du modèle dynamique en variables hamiltoniennes n'est pas très complexe mais débouche sur des formulations lourdes dans le cas des procédés d'optimisation à cause des conditions d'optimalité dérivées. Nous utilisons un code de calcul symbolique spécifique HESMINA<sup>2</sup> [164] qui permet de former le système différentiel à résoudre, système à incorporer dans le programme de résolution numérique. Ensuite nous utilisons un solveur numérique adapté d'un solveur existant et qui permet de résoudre le système différentiel avec conditions aux limites en 2 points (IV.30) auquel a été ramené la formulation du problème d'optimisation.

Le modèle utilisé est similaire à celui utilisé au chapitre 3 mais réduit à trois corps : les deux jambes  $\mathcal{S}_1$ , les deux cuisses  $\mathcal{S}_2$  et le HAT (tronc+bras+tête)  $\mathcal{S}_3$ . Ce modèle est représenté sur la figure IV.1.

---

2. HESsien de la Matrice d'INertie A, écrit dans le langage MATHEMATICA

Corps	$d_i$ (m)	$m_i$ (kg)	$I_i$ (kg.m <sup>2</sup> )	$m_i.r_i$ (kg.m)
1	0	5,42	0,424	1,3096
2	0,4026	17,3	0,934	3,2267
3	0,4195	36,47	8,39	11,6412

TABLEAU IV.1 - Caractéristiques du sujet

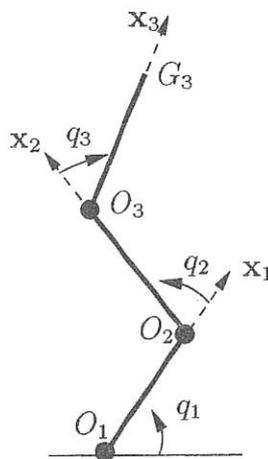


FIGURE IV.1 - Modèle cinématique

Les paramètres anthropométriques sont issus des tables de Winter [34] et sont réunis dans le tableau IV.1.

### IV.6.3 Etude du mouvement de flexion-extension observé

Comme dans le chapitre précédent le modèle utilisé pour l'étude du mouvement de flexion-extension était un modèle à 4 degrés de mobilité, nous reprenons la démarche introduite et présentons ci-après les paramètres et vitesses articulaires du mouvement réalisé par le sujet testé (figures IV.2 et IV.3).

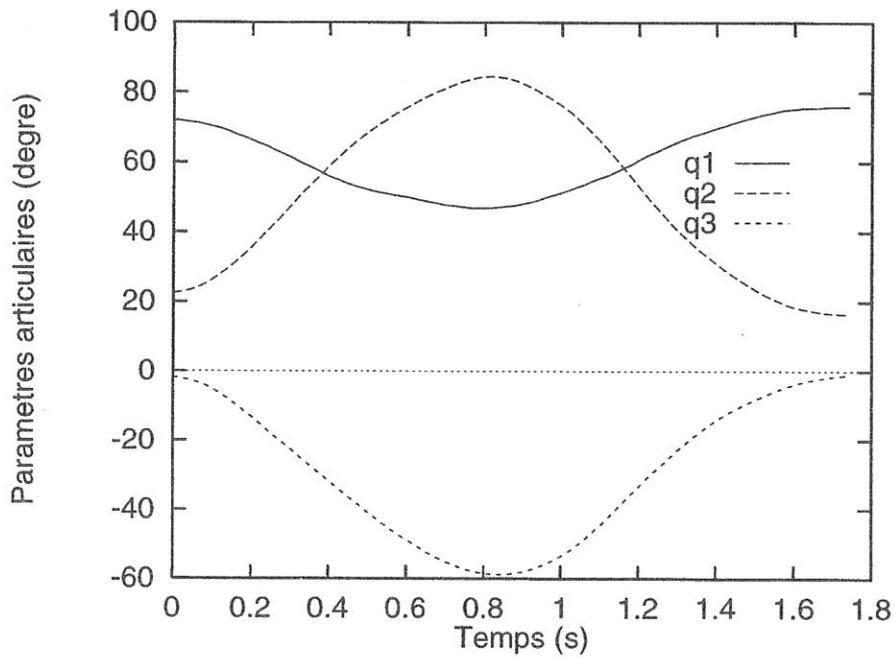


FIGURE IV.2 - Paramètres articulaires du mouvement observé

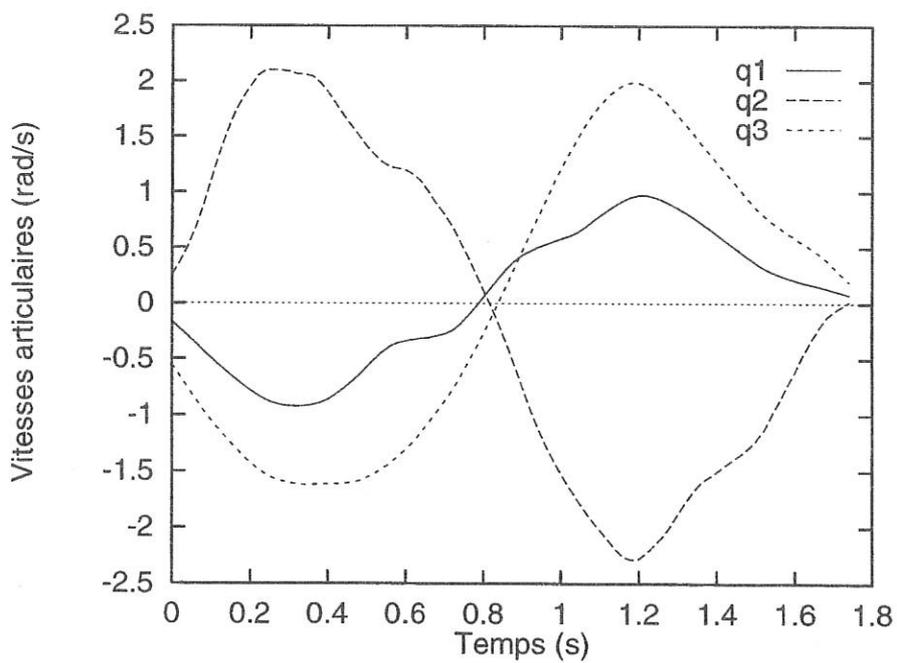
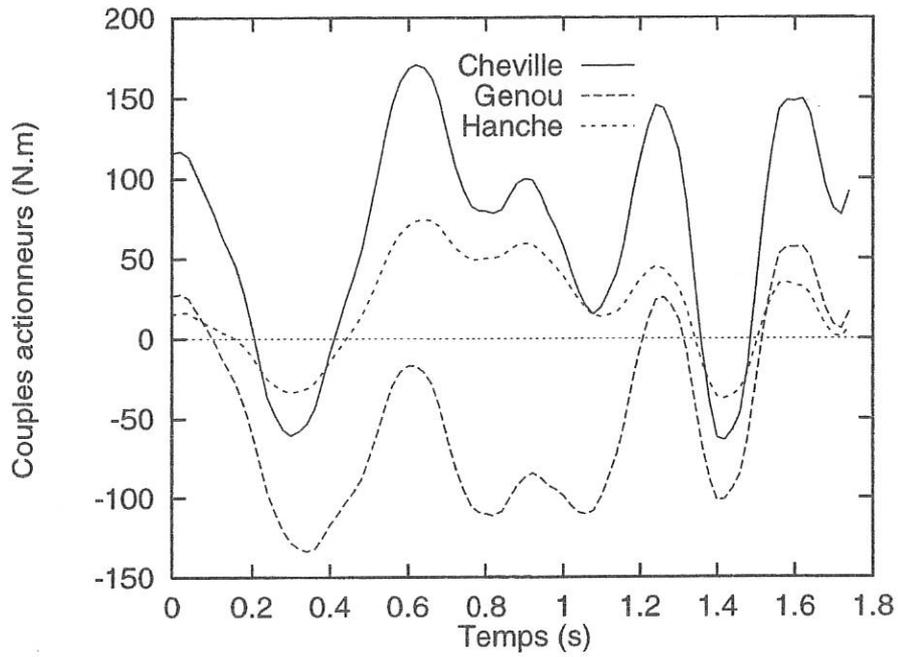
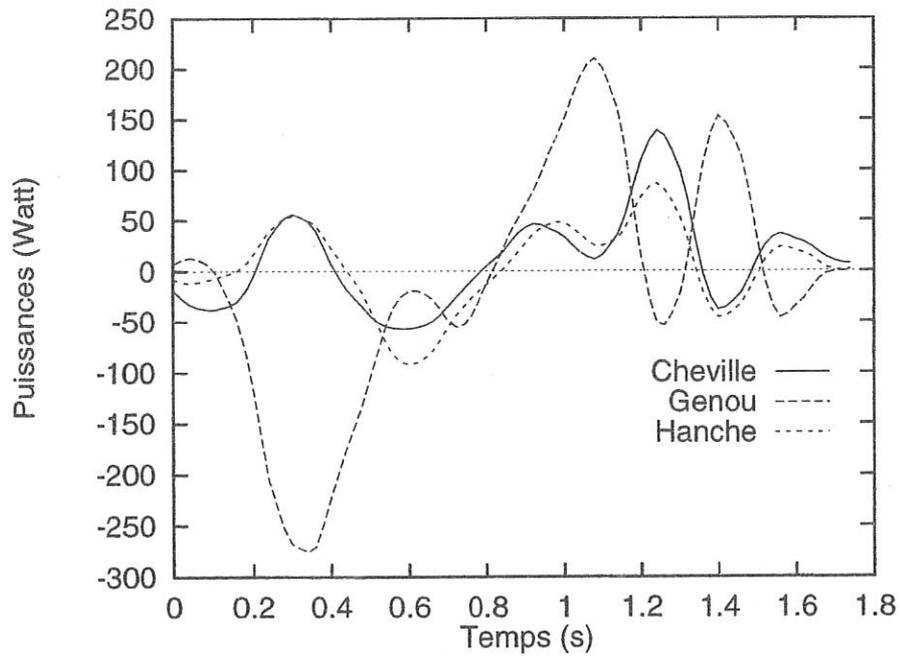


FIGURE IV.3 - Vitesses articulaires du mouvement observé

FIGURE IV.4 - *Couples actionneurs du mouvement observé*FIGURE IV.5 - *Puissances délivrées lors du mouvement observé*

Les couples actionneurs réels calculés à l'aide de la modélisation dynamique introduite

dans le chapitre 2 de ce mémoire ainsi que les puissances articulaires sont représentés sur les figures IV.4 et IV.5.

#### IV.6.4 Optimisation d'un mouvement de flexion-extension

Dans un premier temps nous présentons sur les figure IV.6 et IV.7 les résultats obtenus pour un processus d'optimisation à temps fixé. Nous présentons les évolutions des paramètres articulaires ainsi que des vitesses.

On peut remarquer que le mouvement optimisé ainsi obtenu est assez différent du mouvement réel. On observe que pour le mouvement réel, le mouvement de la jambe, représenté par le paramètre  $q_1$ , est croissant dès le debut de la flexion. Or dans le mouvement optimisé il est décroissant puis croissant, comme si le processus d'optimisation conduisait à donner un « élan » à la structure articulée. On retrouve ce phénomène lors de la phase terminale de l'extension.

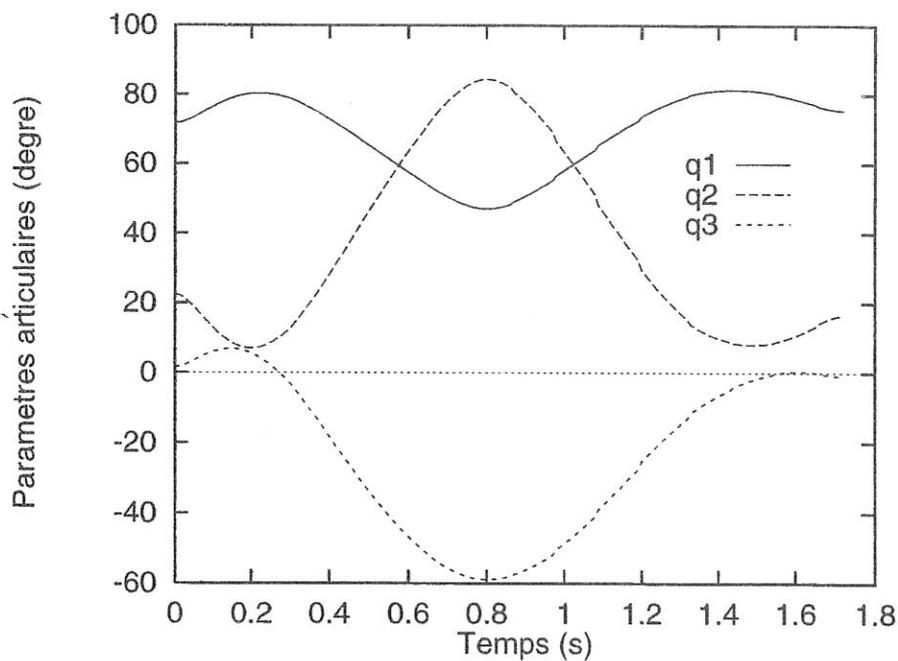


FIGURE IV.6 - Paramètres articulaires du mouvement optimisé

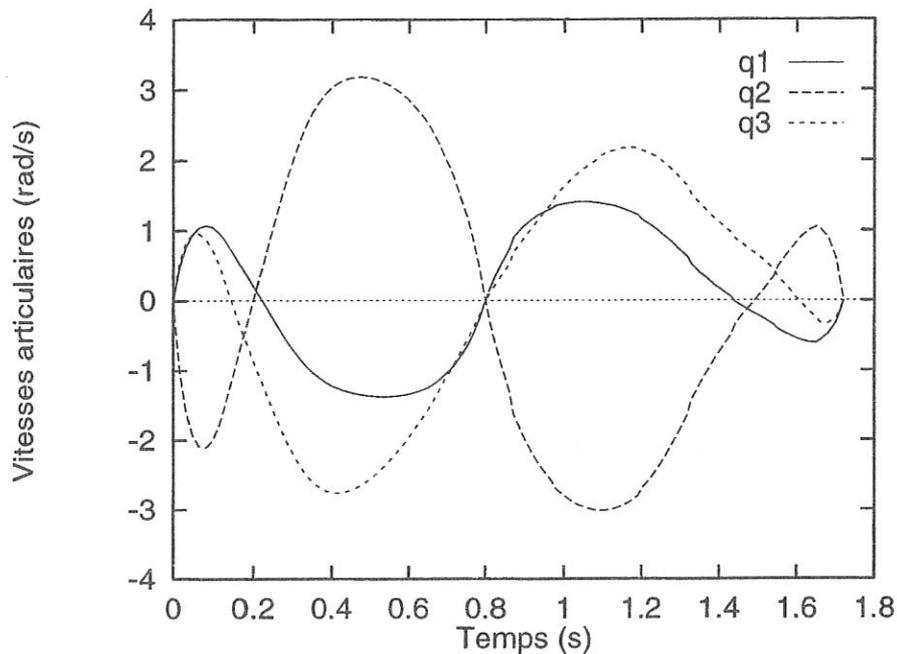


FIGURE IV.7 - Vitesses articulaires du mouvement optimisé

Observons maintenant le comportement dynamique traduit par l'évolution des couples actionneurs et des puissances articulaires représentés sur les figures IV.8 et IV.9.

Du point de vue de la dynamique, on observe que l'évolution des couples actionneurs est assez différente de celle du mouvement réalisé par le sujet. Les « pics » d'amplitude sont nettement inférieurs au cas réel ; le mouvement est plus lisse en ce qui concerne sa dynamique.

Les puissances articulaires sont du même ordre de grandeur que pour le mouvement observé car les vitesses articulaires sont plus importantes.

Le mouvement optimal ne correspond donc pas à la tâche en terme cinématique, il faut donc rajouter des contraintes qui empêchent les phénomènes précédents.

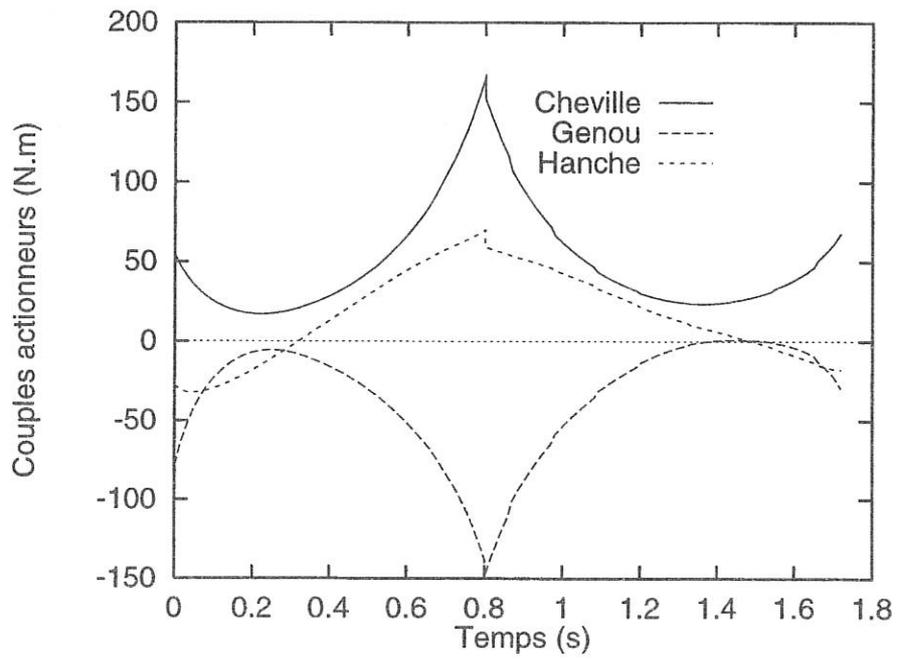


FIGURE IV.8 - *Couples actionneurs du mouvement optimisé*

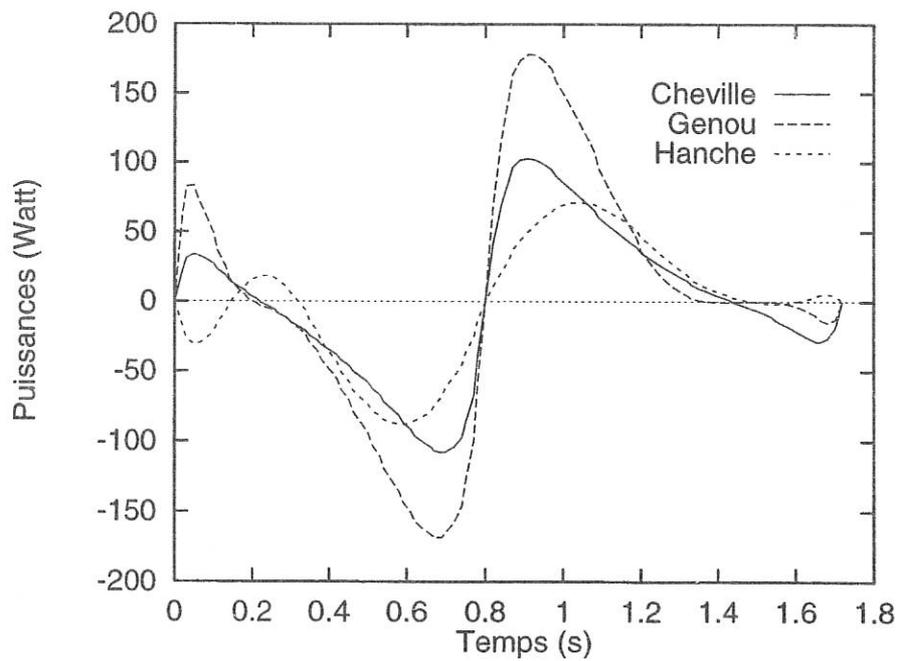


FIGURE IV.9 - *Puissance délivrées lors du mouvement optimisé*

### IV.6.5 Optimisation dynamique du mouvement de flexion-extension soumis à des contraintes

Comme nous venons de le constater l'adjonction de contraintes sur les paramètres articulaires est donc nécessaire si l'on veut se rapprocher d'un mouvement aussi « anthropomorphe » que possible. Cela se traduit donc par le traitement de contraintes-inégalités par une méthode de pénalités extérieures, reposant sur la minimisation du dépassement des contraintes, comme l'a proposé Bessonnet [165]. Cette méthode évite d'avoir à initialiser la solution du processus d'optimisation à l'aide d'une solution vérifiant les contraintes, comme c'est le cas pour les méthodes de pénalités intérieures.

De façon à obtenir un mouvement se rapprochant au mieux du mouvement observé, nous avons introduit une contrainte sur les variables de phases limitant le mouvement de  $q_1$ . Cette contrainte est définie par l'inégalité :

$$g(\mathbf{x}(t)) \equiv x_1(t) - x_1^0 \leq 0 \quad (\text{IV.31})$$

Le problème d'optimisation contraint peut alors être transformé en un problème non-contraint en utilisant une méthode de pénalité extérieure. Définissons alors le critère pénalisé :

$$J^*(\mathbf{u}(t)) = \int_0^T [L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + rG(\mathbf{x}(t))] dt \quad (\text{IV.32})$$

où  $r$  est un multiplicateur de pénalité et  $G$  est une fonction de pénalité dépendant de l'état  $\mathbf{x}$  à travers la contrainte de phase  $g$ , fonction de la forme :

$$G(\mathbf{x}) = \sum_k [\max_{t \in [0, T]} (0, g(\mathbf{x}(t)))]^2 \quad (\text{IV.33})$$

Donc  $J^*$  minimise les valeurs positives de la contrainte quand celle-ci est transgressée.

Dans cette partie du travail, nous avons utilisé la routine NAG D02RAF afin de résoudre le système différentiel en deux points. Cette routine met en oeuvre une méthode de différences fines.

Sur les figures IV.10 et IV.11 nous avons représenté les mêmes évolutions que pour le cas décrit plus haut, pour une trajectoire optimale obtenue en rajoutant des contraintes qui évite que le mouvement de flexion-extension ne dépasse les bornes extrémales spécifiées. On note alors une assez bonne correspondance entre le mouvement réel et le mouvement

optimisé. Les vitesses articulaires sont là encore plus importantes que dans le cas du mouvement observé.

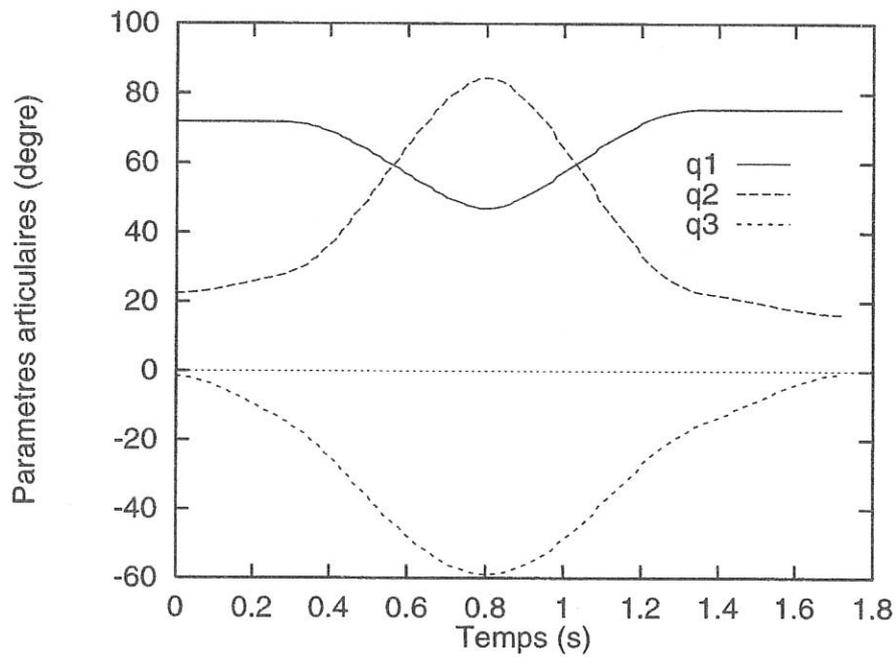


FIGURE IV.10 - Paramètres articulaires du mouvement optimisé soumis à des contraintes

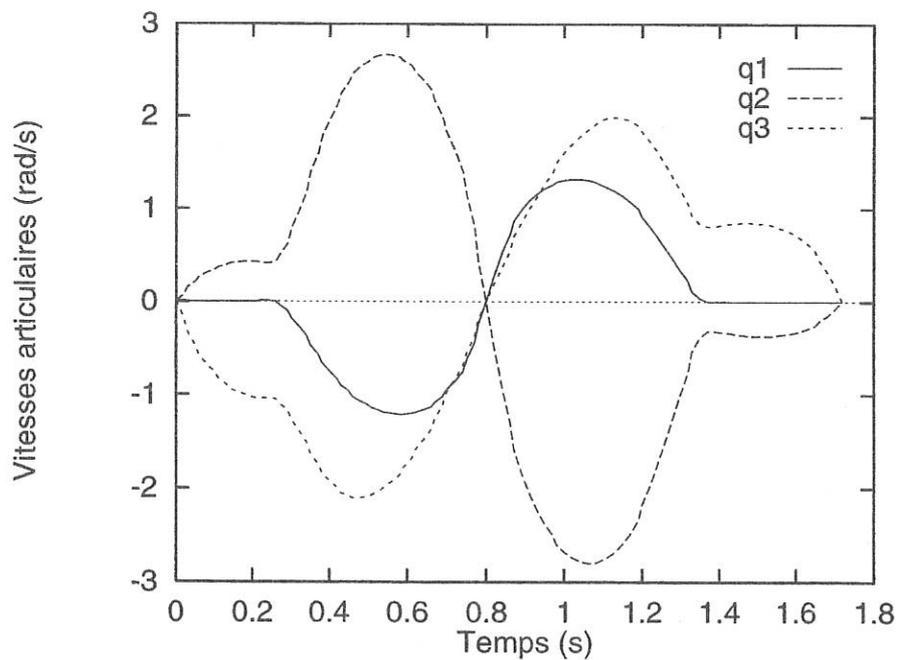


FIGURE IV.11 - Vitesses articulaires du mouvement optimisé soumis à des contraintes

De la même manière que précédemment, observons l'évolution sur les figures IV.12 et IV.13 des couples actionneurs articulaires lorsqu'on rajoute les contraintes sur les variables articulaires.

On constate une différence sensible sur les couples actionneurs avec les résultats pour un mouvement libre et pour le mouvement réel. On peut noter ici que le sujet semblait contracté lors de la réalisation du mouvement de flexion-extension. Il paraît alors normal que les couples actionneurs du mouvement réel oscillent beaucoup alors que ceux obtenus pour les mouvements optimisés soient lisses.

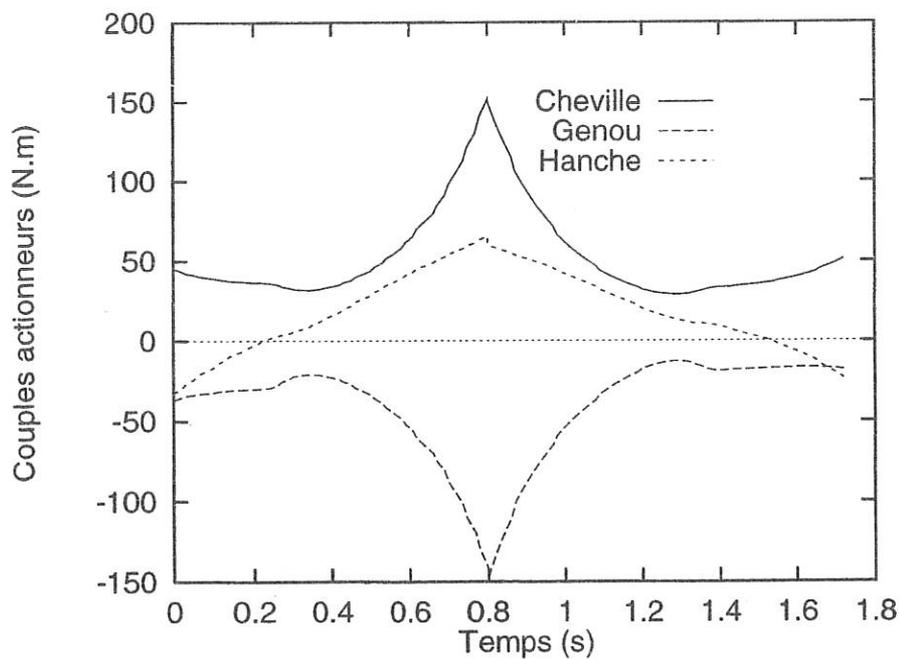
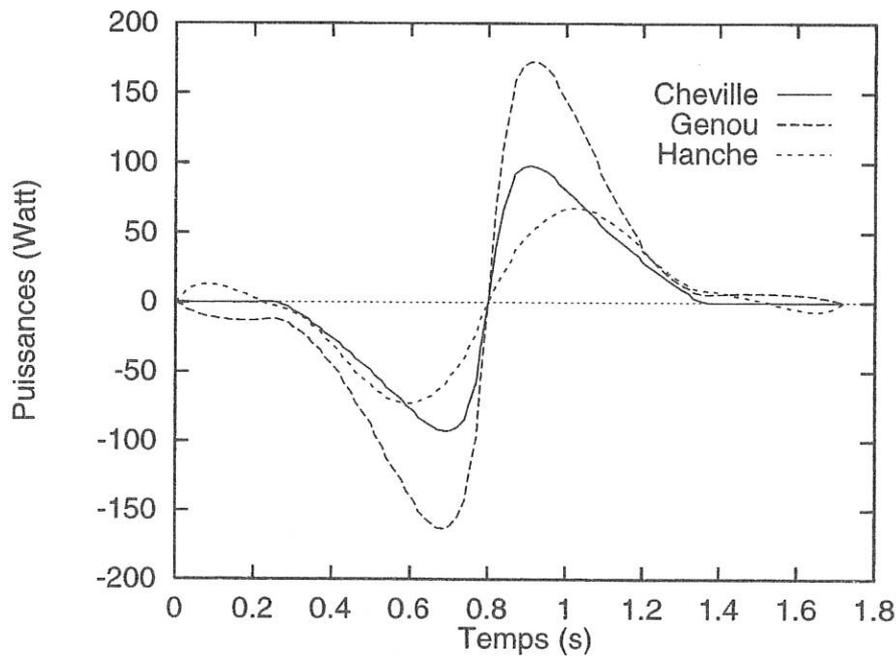


FIGURE IV.12 - Couples actionneurs du mouvement optimal contraint

FIGURE IV.13 - *Couples actionneurs lors du mouvement optimal contraint*

Cependant, même si les mouvements semblent avoir des similitudes, il paraît intéressant de les comparer en termes énergétiques. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

#### IV.6.6 Bilans énergétiques

Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent pour l'étude du mouvement de flexion-extension, nous allons maintenant comparer pour les différents résultats l'évolution du travail des forces internes ainsi que l'évolution du critère minimisé lors du mouvement.

Dans un premier temps, observons sur la figure IV.14 les différences très faibles entre les résultats fournis par la commande optimale et le mouvement réellement effectué. Les mouvements optimaux sont moins coûteux du point de vue des efforts délivrés. On pouvait s'attendre à un tel résultat dans la mesure où le processus d'optimisation cherche justement à minimiser ce critère et où il n'y a pas de raison objective de penser que la « machine humaine » obéisse strictement à un tel critère. On observe de plus une différence sensible dans la forme générale du critère minimisé en fonction du temps. Les mouvements optimisés présentent des points d'inflexion lorsque l'on se situe dans la configuration de flexion totale alors que le mouvement réel ne présente pas cette particularité. La somme quadratique des efforts délivrés augmente continûment sans faire apparaître spécifiquement cette phase.

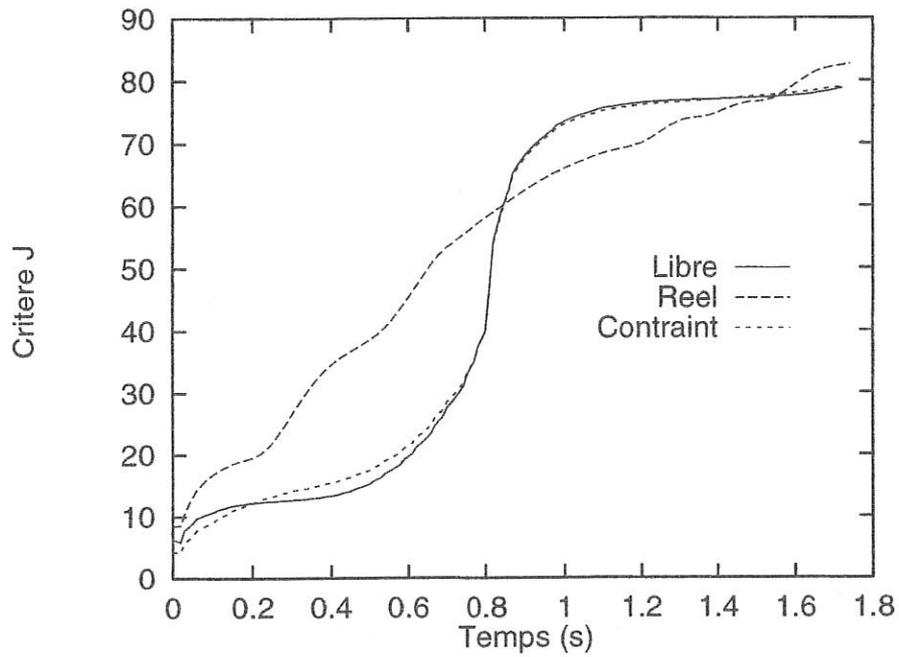


FIGURE IV.14 - Evolution du critère  $J$  : mouvements optimisés contraint et non contraint, mouvement réel

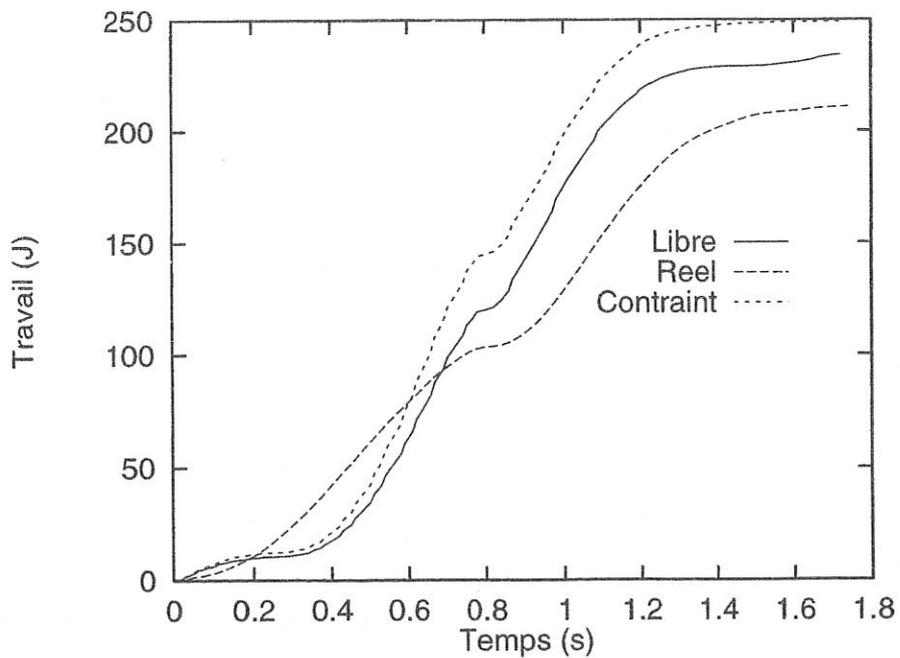


FIGURE IV.15 - Evolution des travaux mécaniques

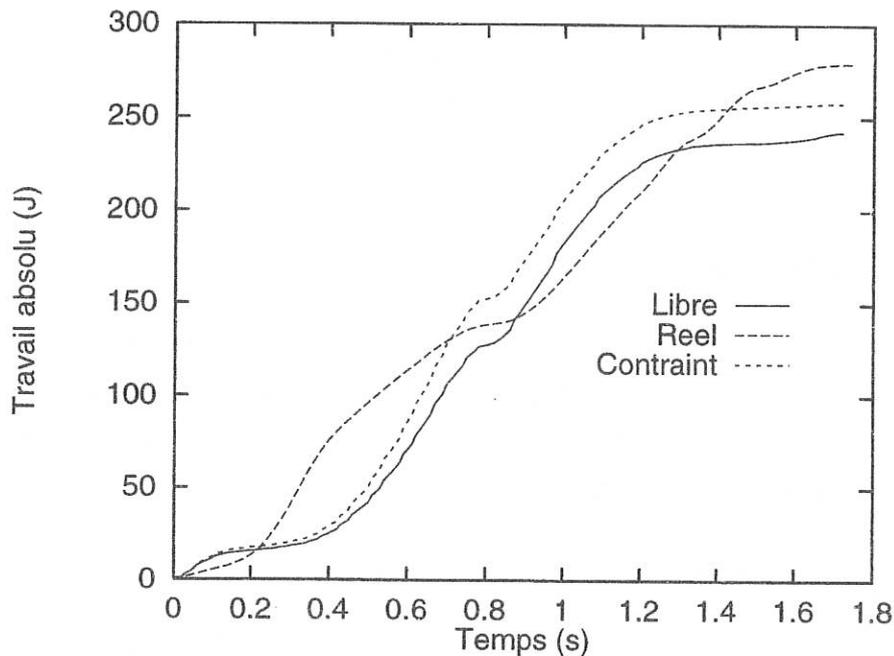


FIGURE IV.16 - Evolution des travaux mécaniques

Regardons ensuite l'évolution du travail des forces internes sur les figures IV.15 et IV.16. Contrairement à ce que nous venons de voir précédemment, le mouvement réel a un bilan du travail des forces internes inférieur à celui des mouvements optimisés. Même si les amplitudes pour les couples actionneurs sont supérieures dans le cas réel par rapport aux mouvements optimisés, le mouvement observé semble avoir une dynamique propre qui est moins coûteuse en terme d'énergie.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, il est nécessaire de faire apparaître le travail total absolu pour ce mouvement. Ce résultat représente le travail mécanique réellement fourni par les actionneurs sans compensation entre les articulations. Dans ce cas, les mouvements optimisés sont moins coûteux en terme d'énergie que le mouvement observé. Les ordres de grandeur sont similaires entre les mouvements simulés et le mouvement réel et l'allure générale de la courbe d'évolution de ce travail au cours du mouvement est respectée dans tous les cas. Il est intéressant de noter que si la différence est faible pour le travail total absolu, cela est principalement dû au fait que les ordres de grandeur des puissances articulaires sont identiques entre mouvements simulés et mouvements observés. Ceci s'explique par des vitesses articulaires plus importantes dans le cas des mouvements simulés. Ces vitesses engendrent donc des puissances comparables à celles du mouvement observé plus coûteux en terme de niveau de couples actionneurs articulaires mais plus faible en terme d'amplitudes de vitesses articulaires.

Remarquons enfin que le mouvement contraint est plus « coûteux » en terme énergétique que celui obtenu dans un premier temps et qui n'avait pas de contrainte cinématique. Ce phénomène paraît normal car la solution optimale au sens du critère est celle du mouvement optimisé sans contrainte.

## IV.7 Remarques

On peut proposer des critères différents de celui que nous avons utilisé et ainsi réaliser une étude dans le même état d'esprit que celle de Marshall [138] évoquée dans la revue bibliographique de ce chapitre. Parmi les critères possibles citons le critère mixte effort-travail à temps fixé où le lagrangien est de la forme :

$$L_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\mu \xi_i u_i^2 + (1 - \mu) \zeta_i u_i^2 (\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1})^2] \quad (\text{IV.34})$$

Le premier terme de l'expression dans le crochet représente l'effort articulaire quadratique et le second la puissance articulaire quadratique. L'intérêt ici est de passer d'un critère quadratique en effort à un critère quadratique en puissance en choisissant un facteur de pondération  $\mu$  et en le faisant tendre vers 0.

## IV.8 Discussion

Nous venons de présenter une première approche pour aborder la compréhension des mouvements humains sur le plan de l'optimisation de mouvement. Nous avons comparé un mouvement réel et des mouvements optimaux obtenus sur le principe de la minimisation d'un critère quadratique. Nous avons montré que les mouvements obtenus par le procédé d'optimisation ne correspondaient pas au mouvement effectué par le sujet testé. Il apparaît nettement que le mouvement réel n'est pas réalisé selon le critère de moindres efforts délivrés. D'autre part la comparaison des travaux des forces internes a mis en évidence le fait que les mouvements optimisés sont meilleurs, au sens de l'énergie, que le mouvement observé.

Une conclusion partielle de ce travail est donc de dire que pour le mouvement donné, on ne peut identifier un critère de moindres efforts délivrés s'ajustant au mieux à la dynamique et à la cinématique du geste réel. Il faudrait donc creuser la voie d'autres critères pour essayer d'identifier un critère d'optimisation qui entre en jeu dans la fabrication du geste.

Il est cependant difficile de dresser des conclusions pour une étude réalisée sur un seul test expérimental et un seul critère de performance. Elle demande donc à être complétée

d'abord en multipliant les tests expérimentaux sur plusieurs sujets et pour un même sujet pour des mouvements allant de très relaxé au plus contraint. Ces mouvements devraient être comparé entre eux pour dégager des tendances différentes dans le bilan en effort et le bilan énergétique. Il faudrait également tester sur chacun de ces mouvements des critères d'optimisation variés, les uns privilégiant le bilan sthénique et les autres la dépense énergétique. A partir de l'étude comparée de la cinématique et des bilans sthéniques, énergétiques des mouvements observés et des mouvements optimisés, il faudra alors identifier parmi les mouvements optimisés et donc parmi les critères introduits celui qui se rapproche au mieux de l'un des mouvements observés. Ce travail préliminaire constitue donc l'amorce d'une étude plus complète qui dépasse le cadre de cette thèse.

En ce qui concerne les procédés d'optimisation mis en jeu, on peut remarquer que si le Principe du Maximum de Pontryaguine est maîtrisé pour la planification de trajectoire de robots manipulateurs dont les caractéristiques technologiques sont connus, il en va tout à fait autrement pour le cas de simulation de mouvement humain où l'incertitude sur la détermination de ces caractéristiques est grande. D'autre part plus le nombre de degrés de mobilité du système mécanique équivalent est important et plus les difficultés d'ordre numérique (convergence et stabilité des algorithmes) vont surgir. Enfin les problèmes évoqués dans le chapitre précédent concernant le mauvais conditionnement des matrices de masses relatives à l'énergie cinétique du système articulé vont devenir prépondérant puisque il est nécessaire dans les programmes d'optimisation d'inverser cette matrice.

On pourrait d'autres part appliquer des techniques de réduction de la complexité du modèle dynamique en spécifiant partiellement des trajectoires de certains membres pour des systèmes à nombre élevé de degrés de mobilité en se référant à des comportements réels. On pourra avantageusement consulter [166] à ce propos.



## Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'études qui porte sur la compréhension des mouvements humains et des gestes sportifs.

Nous avons présenté différentes approches pour l'étude de mouvements humains tels que la flexion-extension, la marche où le pédalage.

Les résultats présentés dans ce mémoire constitue une contribution :

- au traitement des données cinématiques ;
- à l'analyse dynamique de systèmes mécaniques articulées : résolution du problème dynamique inverse et optimisation dynamique de mouvement simple ;
- au calcul de la dépense énergétique mécanique par méthode locale.

Dans le premier chapitre nous avons étudié les procédés d'acquisition de données cinématiques et dynamographiques de mouvements humains. Notre attention a particulièrement porté sur les techniques de traitement des données cinématiques. Nous avons introduit une technique nouvelle dans le domaine de la biomécanique : l'analyse multirésolution par transformée ondelettes d'un signal. Nous avons comparé, sur un signal test fourni par la littérature, les techniques courantes (filtre de Butterworth et Splines optimisées) avec ce nouveau procédé. Il est alors apparu que la transformée ondelettes donnait des résultats comparables à ceux des autres techniques, mais avec l'assurance de tenir compte des spécificités du signal et en levant des ambiguïtés ou difficultés tel que le choix de la fréquence de coupure d'un filtre digital. Nous sommes tout de même conscient que ceci ne concerne qu'un aspect des problèmes liés à l'acquisition de la cinématique d'un mouvement. Des améliorations sensibles des résultats obtenus avec les techniques employées verraient le jour si la précision des systèmes d'acquisition ainsi que leur fréquence d'échantillonnage augmentaient.

Dans le deuxième chapitre, sur la base d'une étude bibliographique importante, nous nous sommes attaché à détailler les formulations permettant la résolution du problème dynamique inverse en nous démarquant sensiblement des techniques mises en oeuvre classiquement dans le domaine de la biomécanique. En effet la technique retenue pour le calcul des efforts de liaison et des couples actionneurs articulaires ne nécessitent pas la mesure du torseur de contact pied/sol par une plate-forme de force pour le cas d'un appui unique. Ces procédés mettent en oeuvre une formulation récurrente des équations du mouvement d'un système de corps rigides. Nous avons alors proposé un mode d'utilisation des données des plates-formes de force pour l'étude de la phase pendulaire et bipodale de la marche. Remarquons que dans tous les cas, chaîne ouverte ou fermée, la méthode de résolution proposée permet une vérification expérimentale des résultats obtenus. Nous avons ensuite repris les travaux de Junqua et al. concernant le calcul du travail des forces internes pour l'adapter à notre modélisation du problème.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié, par ordre croissant de difficultés, trois mouvements de référence : la flexion-extension, la marche et le pédalage. Le but de l'étude du premier mouvement était de valider sur un système simple à 4 degrés de mobilité les approches développées dans les précédents chapitres aussi bien du point de vue de la cinématique que de la dynamique et de l'énergétique. Nous avons alors montré une bonne correspondance entre les forces mesurées et les forces calculées. Les calculs énergétiques par méthode globale et locale se révèlent très proches avec un écart de l'ordre de deux pour cent sur la valeur finale.

Fort de ce bon résultat nous nous sommes attaché à appliquer la même procédure au cas de la marche dans le plan sagittal. Nous avons alors mis en évidence le fait que la matrice de masse du système mécanique à 7 degrés de mobilité représentant le « marcheur » était très mal conditionnée. L'intérêt de ce résultat est de montrer une très grande sensibilité du modèle dynamique à des perturbations sur les données cinématiques. Le degré de validité des résultats obtenus pour le calcul des couples actionneurs est très variable. De plus nous avons montré que ce phénomène dépendait du type de paramétrage utilisé.

Pour conclure avec ce type d'étude, nous avons étudié le mouvement de pédalage en proposant une solution optimale pour la détermination des couples actionneurs et des forces de liaison aux pédales. Le mode de sélection des couples actionneurs dans le mouvement de pédalage donne une famille de solutions admissibles très large.

Enfin dans le quatrième chapitre, nous avons appliqué les techniques développées au laboratoire dans le cadre de la planification optimale de trajectoire de robots manipulateurs à la simulation de mouvement. Le but visé était de simuler de façon optimale un mouvement humain et de comparer cette simulation à un mouvement réel du même type.

L'idée sous-jacente est bien entendu d'essayer d'identifier le critère optimisant (s'il existe) de la tâche étudiée. Nous avons alors étudié le mouvement de flexion-extension et avons montré qu'il était nécessaire de rajouter des contraintes cinématiques dans le processus d'optimisation pour obtenir un mouvement compatible avec la tâche réalisée. D'autre part, le mouvement ainsi simulé s'avère moins coûteux en énergie que le mouvement réel.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont nombreuses et peuvent déborder du cadre de la « mécanique humaine » sans pour autant en être complètement déconnecté.

Du point de vue du traitement des données cinématiques et plus particulièrement du filtrage, il serait intéressant, voire impératif, de trouver un critère, ou un ensemble de critères pour des traitements systématiques. D'autre part, on pourrait s'intéresser au travail développé par [167] concernant l'utilisation de réseaux d'ondelettes, notions initialement proposée par Zhang [168].

Sur le plan de l'analyse des mouvements humains il faut donc maintenant systématiser les études proposées à un grand nombre de cas, pathologiques ou non.

L'étude du comportement dynamique et de la dépense énergétique d'un athlète soulevant des charges et réalisant une flexion-extension est une suite logique à l'étude du mouvement de flexion-extension tel que nous l'avons envisagé. Elle peut s'associer à une étude comparable à celle de la simulation du même mouvement par utilisation d'une technique d'optimisation dynamique.

Pour la marche sagittale, on dispose d'un modèle à l'aide duquel on peut envisager d'affiner les tests réalisés et les étendre à la phase de double appui en contrôlant les résultats avec la plate-forme de force. Nous insistons sur le fait qu'il est nécessaire d'augmenter les fréquences d'échantillonnage des systèmes d'acquisition sans pour autant diminuer la résolution spatiale.

Pour la marche et le pédalage il nous paraît important de réaliser une étude similaire à celle de Leplankais [127] qui concerne le calcul du travail des forces internes pour différentes allures de marche et de course. La contribution serait alors une identification systématique des domaines de variation des couples actionneurs, doublée d'une vérification du calcul du travail des forces internes.

Le choix optimal de solutions d'un problème sous-déterminé pourrait être couplé pour le pédalage à une mesure d'efforts aux pédales pour voir quel type de pondérations permettraient de se rapprocher au mieux des exercices de pédalage observés et ainsi mettre en évidence des styles de pédalage. On pourrait l'utiliser dans d'autres exercices où on décrit une cinématique à boucles fermées : marche, travail aux agrès en gymnastique (barre fixe, anneaux, ...) par exemple.

Pour les aspects simulation à partir du Principe du Maximum de Pontriaguine, l'étude

de la marche dans le plan sagittal durant la phase unipodale pourrait aussi être envisagé. Cependant les problèmes liés au mauvais conditionnement de la matrice de masse du système fourniraient des difficultés d'ordre numérique très conséquentes. La simulation de la phase bipodale de la marche avec cette même technique devrait néanmoins poser des problèmes nouveaux à résoudre.

Sur un plan médical, l'utilisation des calculs des intensités des forces de liaison intersegmentaires ainsi que des couples actionneurs articulaires pourrait être d'une grande utilité dans le cas d'analyse clinique de pathologie de la marche, mais aussi pour le dimensionnement de prothèses. A ce niveau, il nous semblerait judicieux de compléter le modèle dynamique par des lois de comportement des muscles. Dans le cas de la résolution du problème dynamique inverse, des forces musculaires pourraient être calculées en mettant en oeuvre des procédés d'optimisation similaires à ceux que nous avons utilisés dans le cas du mouvement de pédalage.

# Annexe A

## Transformation en ondelettes

*Nous présentons dans cette annexe les principales notions mathématiques liées à la transformation ondelettes pour des signaux 1-D. Les notations et abréviations sont celles définies au chapitre 1.*

### A.1 Introduction

D'une façon très générale, on peut dire qu'une transformation en ondelette permet une analyse simultanée temps/fréquence d'un signal donné, ce qui permet de détecter et d'analyser des phénomènes brefs et/ou de courte durée. Cette transformation donne, sur une plage de temps donnée, des indications sur les fréquences présentes et leur niveau de présence. En comparaison, l'analyse de Fourier permet une très haute précision dans le domaine spectral mais la localisation dans l'espace temporel est perdue. Les ondelettes présentent un compromis : ce que l'on aura gagné en résolution dans le domaine temporel, on le perdra dans le domaine spectral et inversement. Toute transformée ondelettes permet une correspondance entre l'espace physique et l'espace spectral. Deux types d'approches sont alors possibles : continues et discrètes. Pour les ondelettes continues, les descriptions dans l'espace spectral sont plus fines que celles obtenues avec les ondelettes discrètes, qui par leur aspect dichotomique, diminuent cette résolution spectrale. Par contre, le temps de calcul pour la transformée continue est plus important. Comme les bases de projection ne sont pas orthogonales, il est nécessaire d'introduire par la suite une procédure d'orthogonalisation. La conséquence directe est une redondance de la description dans le domaine temps/fréquence du signal transformé en ondelettes continues ( $N^2$  informations contre  $N$  pour des ondelettes orthogonales, si  $N$  est le nombre d'échantillon du signal à analyser). Les paragraphes suivants présentent les principes d'une décomposition en ondelettes dans le cas des ondelettes orthogonales à support compact.

## A.2 Transformation ondelettes

Introduite par S. Mallat [169, 170], la transformée ondelettes (WT) est un outil puissant pour l'analyse des signaux; elle prend deux formes: continue (CWT) et discrète (DWT). Bien entendu, la (DWT) est celle communément utilisée pour des cas pratiques. De manière très schématique, on peut dire que la (CWT) est analogue à la (FT) dans laquelle le terme exponentiel  $e^{i\omega}$  a été remplacé par une fonction connue  $w$  à différentes échelles. Ainsi on écrit la (CWT):

$$\mathcal{W}(a, b) = \langle f, w_{ab} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)w_{ab}(t)dt \quad (\text{A.1})$$

L'inverse de la (CWT) est alors donné par la relation :

$$f(t) = \frac{1}{C_w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(a, b)w_{ab}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (\text{A.2})$$

si :

$$C_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{w}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (\text{A.3})$$

Cette dernière relation est la condition d'admissibilité qui implique que  $\hat{w}(0) = 0$  et que  $w(\omega)$  doit être localisée autour de  $\omega = 0$  (support compact). La famille de fonctions analysantes est donnée par les translatées et les dilatées de  $w \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$w_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} w\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{A.4})$$

avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . L'avantage de cette transformation est de donner une information sur les singularités, ainsi que sur leur localisation en fonction du temps.

Puisque dans les cas pratiques nous avons des données discrètes, on réduit  $a$  et  $b$  à une grille discrète avec un pas de dilatation fixé  $a_0 > 1$  et un pas de translation  $b \neq 0$ . Généralement, ces deux paramètres sont de la forme :

$$a = a_0^j \quad (\text{A.5})$$

$$b = kb_0 a_0^j \quad (\text{A.6})$$

avec  $j, k \in \mathbb{Z}^2$ .  $j$  devient le paramètre d'échelle et  $k$  est le paramètre de translation. D'autre part, on utilise généralement  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$  de sorte que les  $w_{jk}$  forment une base orthonormale avec la propriété :

$$\langle w_{jk}, w_{jl} \rangle = \delta_{kl} \quad (\text{A.7})$$

## A.3 Ondelettes orthogonales et analyse multirésolution

Introduisons maintenant la propriété principale de la fonction d'échelle  $\phi$ . Cette fonction respecte l'équation de dilatation :

$$\phi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k) \quad (\text{A.8})$$

avec  $V_j = \text{Span}(\phi_{jk}; (j, k) \in \mathbb{Z}^2)$  et est normée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1 \iff \hat{\phi}(0) = 1 \quad (\text{A.9})$$

Ainsi on peut définir :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad (\text{A.10})$$

Dans l'espace de Fourier, on peut introduire une fonction  $2\pi$ -périodique de  $L_2([0, 2\pi])$  définie à partir de :

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A.11})$$

et ayant pour expression :

$$m_0(\omega) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega} \quad (\text{A.12})$$

Donc,  $m_0$  est typiquement un filtre passe-bas car  $m_0(0) = 1$  et  $m_0(\pi) = 0$ .

Finalement on peut aussi montrer [171] les propriétés :

- $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$  ;
- $\sum_k (-1)^k h_k = 0$  ;
- $\sum_k h_k = \sqrt{2}$ .

Introduisons maintenant une nouvelle fonction  $\psi$  correspondant à une ondelette  $\phi$  à partir d'une séquence de coefficients complexes  $g_k$ , telle que :

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k) \quad (\text{A.13})$$

où  $g_k = (-1)^{k+1} \bar{h}_{1-k}$ .

On écrit alors une base orthonormale de  $L_2(\mathbb{R})$  :

$$\psi_{jk} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad (\text{A.14})$$

avec  $W_j = \text{Span}(\psi_{jk}; (j, k) \in \mathbb{Z}^2)$ .

La régularité de l'ondelette est donnée par la condition de premiers moments nuls pour  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, M - 1$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)t^l dt = 0 \quad (\text{A.15})$$

Avec la Transformation de Fourier :

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

$m_1$  est un filtre passe-haut de la forme :

$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\omega} \quad (\text{A.17})$$

et une condition de la relation (A.3) est :

$$\sum_k g_k = 0 \quad (\text{A.18})$$

Dès lors, le produit scalaire de la (DWT) devient  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$  ce qui donne des agrandissements sur la fonction  $f$ . Ainsi, un coefficient  $j$  important permet de regarder la fonction  $f$  avec des détails précis. Dans ce type d'analyse, on regarde donc les détails en premier ; plus on décompose et moins on regarde à petite échelle. C'est un télescope inversé !

Ceci implique tout simplement qu'une singularité très localisée de la fonction  $f$  n'affectera qu'une petite partie des coefficients de sa projection sur une base d'ondelettes. C'est la principale différence par rapport à la Transformée de Fourier : une singularité localisée de  $f$  aurait affectée l'ensemble de la représentation de Fourier.

Avec les définitions introduites, on peut construire deux sous-espaces qui ont les propriétés suivantes :

- $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  ;
- $V_{j_0} = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \cdots \oplus W_{j_0}$ .

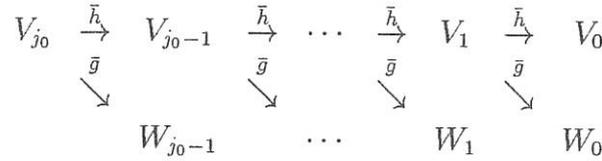
La représentation graphique de la figure A.1 présente la technique de projection et de décomposition de la transformée en ondelettes.

## A.4 Application au filtrage

Avec les notations et définitions introduites précédemment, on peut donner un algorithme simple pour effectuer une (DWT). Si :

$$\alpha_{jk} = \langle f, \phi_{jk} \rangle \quad (\text{A.19})$$

$$\beta_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle \quad (\text{A.20})$$

FIGURE A.1 - Représentation graphique des sous-espaces  $V_i$  et  $W_i$ 

sont les coefficients d'ondelettes à chaque décomposition, alors ils deviennent :

$$\alpha_{jk} = \sum_l \bar{h}_{l-2k} \alpha_{j+1,l} \quad (\text{A.21})$$

$$\beta_{jk} = \sum_l \bar{g}_{l-2k} \alpha_{j+1,l} \quad (\text{A.22})$$

et représentent les coefficients de tendance et de détail. Les deux dernières équations sont utilisées pour calculer récursivement d'une échelle « fine » à « grossière » la décomposition orthogonale en ondelettes.

Pour une fonction  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in V_{j_0}$ , on peut écrire la formule de recomposition :

$$f = \sum_k \alpha_{0k} \phi_{0k} + \sum_{j,k} \beta_{jk} \psi_{jk} \quad (\text{A.23})$$

Si  $f$  est formée de données bruitées ( $f_i, i = 1, \dots, N$ ) et si l'on veut rendre plus lisse cette fonction par l'opération de reconstruction, alors un grand nombre de coefficients  $\beta_{jk}$  sont négligeables. Ceci démontre l'application de filtrage de la (DWT). Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  représentent la projection de la fonction  $f(t)$  sur les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  et peuvent être interprétés comme la corrélation de  $f(t)$  avec  $\phi_{jk}$ . Finalement, si le signal contient des composantes significatives de  $\phi_{jk}$ , alors les  $\alpha_{jk}$  correspondants dans les séries de décomposition seront importants.

Pour la reconstruction, on peut utiliser différentes méthodes. Citons les principales utilisées :

- nombre au-dessus d'un seuil ;
- concentration en norme ;
- entropie ;
- logarithme de l'énergie.

D'autre part, certains auteurs [172, 173, 43] mettent en oeuvre d'autres techniques dérivées des précédentes :

- meilleure base ;

- meilleur niveau ;
- base d'ondelettes.

## A.5 Ondelette de Daubechie

On cherche  $m_0$  de la forme :

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^M \mathcal{L}(\omega) \quad (\text{A.24})$$

où  $\mathcal{L}$  est un polynôme trigonométrique aussi court que possible. Daubechie [174, 175] obtient les coefficients ( $h_k$ ) en écrivant  $m_0$  comme un polynôme en  $e^{i\omega}$ . Les valeurs numériques des coefficients ( $h_k$ ) sont définies dans [175]. Dans le tableau A.1, nous avons repris les valeurs pour  $M = 5$  et  $M = 6$ . La figure A.2 donne une représentation graphique des ondelettes de Daubechie  $\phi$  et  $\psi$  pour  $M = 5$  (10 coefficients  $h_k$ ).

Type	Coefficients	Type	Coefficients
$M = 5$	0,1601024	$M = 6$	0,11154074
	0,60382927		0,49462389
	0,72430853		0,75113391
	0,13842815		0,31525035
	-0,24229489		-0,22626469
	-0,03224487		-0,12976687
	0,077571494		0,097501606
	-0,0062414902		0,027522866
	-0,012580752		-0,031582039
	0,0033357253		0,0005538422
	0,0047772575		
	-0,0010773011		

TABLEAU A.1 - Coefficients d'ondelette de Daubechie

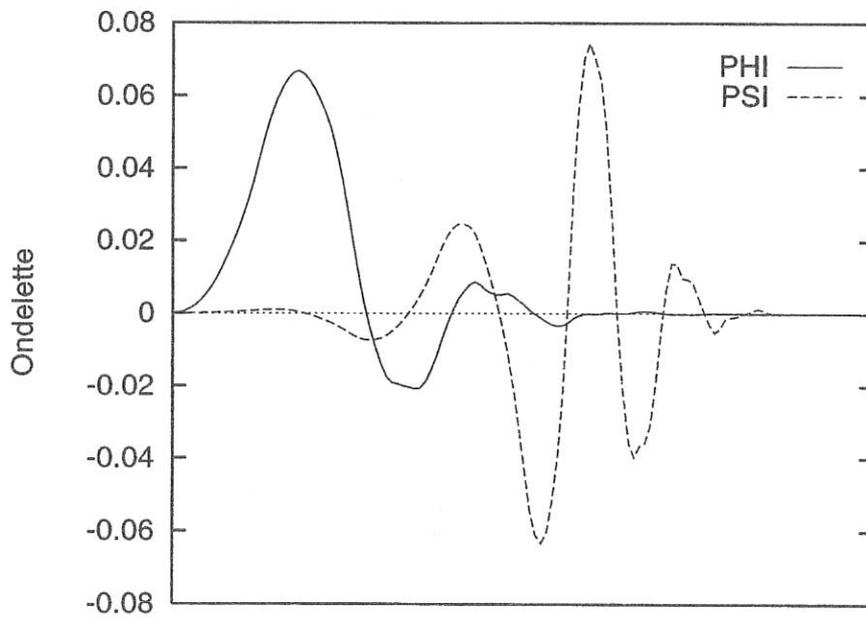


FIGURE A.2 - Ondelette de Daubechie  $\phi$  et  $\psi$  à une échelle donnée



## Annexe B

# Notions sur la Pseudo-Inverse

### B.1 Problème préliminaire

Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \\ g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m; n < m \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Ecrivons :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \equiv \text{grad} f \cdot d\mathbf{x} = 0 \rightarrow \text{grad} f \in (d\mathbf{x})^\perp \quad (\text{B.2})$$

$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_k} dx_k \equiv \text{grad} g_i \cdot d\mathbf{x} = 0 \rightarrow d\mathbf{x} \in (\text{sev grad} g_i)^\perp \quad (\text{B.3})$$

Ceci implique :

$$\text{grad} f \in (\text{sev grad} g_i)^{\perp\perp} \equiv \text{sev grad} g_i \quad (\text{B.4})$$

Il existe donc une combinaison linéaire du gradient des  $g_i$ , égale au gradient de  $f$  :

$$\exists \Lambda_i \in \mathbb{R}^n, \text{grad} f + \sum_{i=1}^m \Lambda_i \text{grad} g_i = 0 \quad (\text{B.5})$$

Si on pose :

$$G_{ik} = \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \quad (\text{B.6})$$

il en résulte le système à résoudre à  $n + m$  inconnues  $x_k$  et  $\Lambda_i$  :

$$\begin{cases} \text{grad} f + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Lambda} = 0 \\ g(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

## B.2 Application à la résolution des systèmes

Soit à résoudre un système sous-déterminé :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{B.8})$$

avec  $\dim(\mathbf{A}) = [n \times m]$ ,  $\dim(\mathbf{x}) = [m \times 1]$ ,  $\dim(\mathbf{b}) = [n \times 1]$  et  $n < m$ .

Transformons ce problème en celui-ci :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \equiv \min f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Dès lors, le système avec multiplicateurs peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Lambda} = 0 \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Si on multiplie la première équation par  $\mathbf{A}$ , on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{Ax} = -\mathbf{AA}^T \boldsymbol{\Lambda} \quad (\text{B.11})$$

puis il vient :

$$\mathbf{AA}^T \boldsymbol{\Lambda} = -\mathbf{b} \quad (\text{B.12})$$

où  $\mathbf{AA}^T$  est une matrice carrée  $[n \times n]$ , symétrique, inversible lorsque  $\mathbf{A}$  est de rang plein, dans ce cas :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{B.13})$$

On appelle matrice Pseudo-Inverse (ou matrice de Moore-Penrose) la matrice

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \quad (\text{B.14})$$

qui satisfait la relation  $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{1}$ .

**Remarque :** Nous venons de présenter la construction de la matrice Pseudo-Inverse dite à droite pour les systèmes sous-déterminés, mais il existe aussi une matrice Pseudo-Inverse à gauche de la forme :

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (\text{B.15})$$

qui intervient dans la résolution de problèmes sur-déterminés

## B.3 Résolution numérique du problème

On se place dans cette section dans le cadre de la résolution de la matrice Pseudo-Inverse à gauche. Un raisonnement analogue peut être tenu pour l'autre cas.

Même si la matrice  $\mathbf{AA}^T$  est généralement inversible, il arrive que dans certains cas cette opération ne puisse être réalisée numériquement, soit parce que la matrice est singulière, soit parce qu'elle est mal conditionnée. La méthode de calcul de la matrice Pseudo-Inverse  $\mathbf{A}^+$  par décomposition en valeurs singulières (SVD) permet de contourner ce problème. Cette méthode étend l'idée de la décomposition spectrale d'une matrice aux matrices non carrées et est souvent utilisée dans les applications.

On montre [176] que l'on peut décomposer la matrice  $\mathbf{A}$  sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (\text{B.16})$$

où  $\mathbf{U}$  ( $[m \times m]$ ) et  $\mathbf{V}$  ( $[n \times n]$ ) sont des matrices unitaires, composées respectivement en vecteur colonne des vecteurs propres normés de  $\mathbf{AA}^T$  et  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ .  $\mathbf{\Sigma}$  est la matrice diagonale  $[m \times n]$ , appelée matrice des valeurs singulières dont les valeurs sur la diagonale sont  $\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$ , où les  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, \min(m, n)$ ) sont les valeurs propres de  $\mathbf{AA}^T$ . La matrice Pseudo-Inverse de  $\mathbf{A}$  est alors :

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T \quad (\text{B.17})$$

où  $\mathbf{\Sigma}^+$ , la Pseudo-Inverse de  $\mathbf{\Sigma}$ , est une matrice diagonale ( $[n \times m]$ ) avec les valeurs  $\sigma_{ii}^+ = \frac{1}{\sigma_{ii}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$  sur la diagonale, à condition que  $\sigma_{ii} \neq 0$ . Partout ailleurs on a des valeurs nulles. Finalement on obtient :

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T\mathbf{b} \quad (\text{B.18})$$

D'un point de vue général, on utilise la (SVD) pour filtrer le bruit (erreur d'arrondi) et stabiliser les calculs instables. La (SVD) compense la propagation d'erreur due au bruit et aux erreurs d'arrondi ainsi que le fait que les solutions puissent être sur-déterminées ou sous-déterminées. Dans un problème d'approximation par la méthode des moindres carrés, il arrive souvent qu'il n'y ait pas assez de certitude expérimentale pour caractériser des fonctions de bases certaines et la matrice des moindres carrés qui en résulte est sous-déterminée. La (SVD) signale cette déficience en ayant des valeurs singulières correspondantes petites. L'utilisateur a alors la possibilité de mettre à 0 les valeurs petites.



## Annexe C

# Réurrences matricielles pour le formalisme de Newton-Euler

*Nous présentons dans cette annexe les réurrences matricielles qui permettent le calcul effectif des efforts intersegmentaires. Nous y associons un exemple de fichier de résultats concernant le modèle dynamique pour une structure articulée à 4 degrés de mobilité. Enfin, nous donnons un exemple de fichier de résultats concernant la matrice de masse d'un système articulé à 7 degrés de mobilité.*

### C.1 Notations

$B_i$	Bases orthonormale de $\mathbb{R}^3$ associée à $\mathcal{R}_i$
$\Omega_i$	matrice colonne des composantes de $\omega_i$ sur $B_i$
$\dot{\Omega}_i$	matrice colonne des composantes de $\dot{\omega}_i$ sur $B_i$
$\text{GRAV}_i$	Matrice colonne des composantes de $\mathbf{g}$ dans le repère $\mathcal{R}_i$
$\Gamma_i$	Matrice colonne des composantes de $(\gamma_{O_i} - \mathbf{g})$ dans le repère $\mathcal{R}_i$
$L_i$	$L_i \equiv \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1}$ sur $B_i$
$\Gamma_{G_i}$	Accélération de $G_i$ sur $B_i$
$\Delta_i$	$\Delta_i \equiv \mathbf{O}_i \mathbf{G}_{i+1}$ sur $B_i$
$M_i$	Vecteur des premiers moments de $\mathcal{S}_i$
$\tilde{\Omega}_i$	matrice sur $B_i$ de prémultiplication vectorielle par $\omega_i$

- X** Par définition  $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$
- Z** Par définition  $\mathbf{Z} = (0, 0, 1)^T$
- L<sub>i</sub>** Matrice de  $\mathcal{L}_i$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$
- F<sub>i</sub>** Matrice colonne des composantes de  $\mathbf{F}_{i-1,i}$  dans le repère lié à  $\mathcal{S}_i$
- M<sub>i</sub>** Matrice colonne des composantes de  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  dans le repère lié à  $\mathcal{S}_i$

## C.2 Récurrences matricielles pour la cinématique

Il convient tout d'abord de donner les formulations pour les expressions précalculées.

-

$$\mathbf{L}_{i-1} = (d_i, -r_i \sin \alpha_i, r_i \cos \alpha_i)^T \quad (\text{C.1})$$

- Si  $\boldsymbol{\Omega}_i = (u_i, v_i, w_i)^T$  et  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_i = (\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i)^T$  alors<sup>1</sup> :

$$\ddot{\boldsymbol{\Omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i^2 = \begin{pmatrix} -v_i - w_i^2 & -w_i^2 + u_i v_i & \dot{v}_i + u_i w_i \\ \dot{w}_i + u_i v_i & -u_i^2 - w_i^2 & -\dot{u}_i + v_i w_i \\ -\dot{v}_i + u_i w_i & \dot{u}_i + v_i w_i & -u_i^2 - v_i^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

et pour  $i = 1$  :

$$\ddot{\boldsymbol{\Omega}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_1^2 = \begin{pmatrix} -\ddot{q}_1^2 & -\ddot{q}_1 & 0 \\ \ddot{q}_1 & -\dot{q}_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

- Pour les premiers moments on a aussi des constantes précalculées :

$$\mathbf{M}_i = m_i \boldsymbol{\Delta}_i \quad (\text{C.4})$$

On peut maintenant donner la récurrence matricielle pour le calcul des accélérations pour  $i = 2, \dots, n$  :

---

1. Si  $\mathbf{o} = (u, v, w)^T$  alors  $\tilde{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i &= \mathbf{R}_i^{i-1} \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \\ \boldsymbol{\Omega}_i &= \mathbf{U}_i + \dot{q}_i \mathbf{Z} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_i &= \mathbf{R}_i^{i-1} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{i-1} + \dot{q}_i \tilde{\mathbf{U}}_i \mathbf{Z} + \ddot{q}_i \mathbf{Z} \\ \boldsymbol{\Gamma}_i &= \mathbf{R}_i^{i-1} (\boldsymbol{\Gamma}_{i-1} + \mathbf{W}_{i-1} \mathbf{L}_{i-1}) \\ \mathbf{W}_i &= \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i^2 \\ \boldsymbol{\Gamma}_{G_i} &= \boldsymbol{\Gamma}_i + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\Delta}_i \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

qui est initialisée pour  $i = 1$  par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_1 &= \dot{q}_1 \mathbf{Z} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 &= \ddot{q}_1 \mathbf{Z} \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 &= \mathbf{R}_1^0 \mathbf{GRAV}_0 \\ \mathbf{W}_1 &= \ddot{q}_1 \tilde{\mathbf{Z}} + \dot{q}_1^2 \tilde{\mathbf{Z}}^2 \\ \boldsymbol{\Gamma}_{G_1} &= \boldsymbol{\Gamma}_1 + \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

On remarque que la gravité est introduite explicitement dans le terme qui initialise la récurrence croissante et se répercute dans les autres relations qui restent formellement inchangées.

### C.3 Récurrences matricielles pour la dynamique

La récurrence arrière relative à la dynamique du système devient compte-tenu des notations introduites pour  $i = n - 1, \dots, 1$ :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_i^* &= \mathbf{R}_i^{i+1} \mathbb{F}_{i+1} \\ \mathbb{F}_i &= \mathbb{F}_i^* + m_i \boldsymbol{\Gamma}_{G_i} \\ \mathbb{M}_i &= \mathbf{R}_i^{i+1} \mathbb{M}_{i+1} + \tilde{\mathbf{L}}_i \mathbb{R}_i^* + \mathbb{I}_i \dot{\boldsymbol{\Omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i \mathbb{I}_i \boldsymbol{\Omega}_i + \tilde{\mathbf{M}}_i \boldsymbol{\Gamma}_i \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

qui est initialisée par :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_n &= m_n \boldsymbol{\Gamma}_{G_n} \\ \mathbb{M}_n &= \mathbb{I}_n \dot{\boldsymbol{\Omega}}_n + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n \mathbb{I}_n \boldsymbol{\Omega}_n + \tilde{\mathbf{M}}_n \boldsymbol{\Gamma}_n \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

On peut remarquer que les composantes de  $\mathbb{F}_i$  et  $\mathbb{M}_i$  sont les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_i$  des efforts de liaison à la  $i$  e articulation représentés par  $\mathbb{F}_{i-1,i}$  et  $\mathbb{M}_{i-1,i}$  dans les récurrences vectorielles du chapitre 2.



3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0

Vitesses et accélérations articulaires:

no :	1	2	3	4
QP :	QP1	QP2	QP3	QP4
QDP:	QDP1	QDP2	QDP3	QDP4

Pesanteur: G1=0                    G2=G2                    G3=0

Equations:

W31	=QP1
W32	=QP1+QP2
W33	=W32+QP3
W34	=W33+QP4
WP31	=QDP1
WP32	=QDP1+QDP2
WP33	=WP32+QDP3
WP34	=WP33+QDP4
DV331	=-QP1*QP1
DV332	=-W32*W32
DV333	=-W33*W33
DV334	=-W34*W34
VP11	=-S1*G2
VP21	=-C1*G2
VSP12	=VP11+DV331*d2
VSP22	=VP21+QDP1*d2
VP12	=+C2*VSP12+S2*VSP22
VP22	=-S2*VSP12+C2*VSP22
VSP13	=VP12+DV332*d3
VSP23	=VP22+WP32*d3
VP13	=+C3*VSP13+S3*VSP23
VP23	=-S3*VSP13+C3*VSP23
VSP14	=VP13+DV333*d4
VSP24	=VP23+WP33*d4
VP14	=+C4*VSP14+S4*VSP24
VP24	=-S4*VSP14+C4*VSP24
F11	=+MA1*VP11+DV331*MX1-QDP1*MY1
F21	=+MA1*VP21+QDP1*MX1+DV331*MY1

F12 =+MA2\*VP12+DV332\*MX2-WP32\*MY2  
 F22 =+MA2\*VP22+WP32\*MX2+DV332\*MY2  
 F13 =+MA3\*VP13+DV333\*MX3-WP33\*MY3  
 F23 =+MA3\*VP23+WP33\*MX3+DV333\*MY3  
 F14 =+MA4\*VP14+DV334\*MX4-WP34\*MY4  
 F24 =+MA4\*VP24+WP34\*MX4+DV334\*MY4  
 PIS11 =ZZ1  
 PIS21 =-ZZ1  
 NO31 =+QDP1\*ZZ1  
 PIS12 =ZZ2  
 PIS22 =-ZZ2  
 NO32 =+WP32\*ZZ2  
 PIS13 =ZZ3  
 PIS23 =-ZZ3  
 NO33 =+WP33\*ZZ3  
 PIS14 =ZZ4  
 PIS24 =-ZZ4  
 NO34 =+WP34\*ZZ4  
 E14 =F14  
 E24 =F24  
 SDJ14 =+C4\*F14-S4\*F24  
 SDJ24 =+S4\*F14+C4\*F24  
 E13 =F13+SDJ14  
 E23 =F23+SDJ24  
 SDJ13 =+C3\*E13-S3\*E23  
 SDJ23 =+S3\*E13+C3\*E23  
 E12 =F12+SDJ13  
 E22 =F22+SDJ23  
 SDJ12 =+C2\*E12-S2\*E22  
 SDJ22 =+S2\*E12+C2\*E22  
 E11 =F11+SDJ12  
 E21 =F21+SDJ22  
 N14 =-MZ4\*VP24  
 N24 =+MZ4\*VP14  
 N34 =NO34+MX4\*VP24-MY4\*VP14  
 N13 =+C4\*N14-S4\*N24-MZ3\*VP23  
 N23 =+S4\*N14+C4\*N24+MZ3\*VP13  
 N33 =NO33+N34+d4\*SDJ24+MX3\*VP23-MY3\*VP13  
 N12 =+C3\*N13-S3\*N23-MZ2\*VP22

```

N22      =+S3*N13+C3*N23+MZ2*VP12
N32      =NO32+N33+d3*SDJ23+MX2*VP22-MY2*VP12
N11      =+C2*N12-S2*N22-MZ1*VP21
N21      =+S2*N12+C2*N22+MZ1*VP11
N31      =NO31+N32+d2*SDJ22+MX1*VP21-MY1*VP11
GAM1     =N31
GAM2     =N32
GAM3     =N33
GAM4     =N34
*        =*
*****
* Nombre total de multiplications: 95      *
* Nombre total d'additions      : 72      *
*****

```

## C.5 Exemple de fichier de matrice d'inertie

Dombre et Khalil [112] ont remarqué que le calcul de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  était moins coûteux par une méthode lagrangienne. Cependant on peut utiliser les formulations développées précédemment pour calculer les éléments de cette matrice. Effectivement, la  $i^e$  colonne de  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  est égale à  $\mathbf{\Gamma}$  si :

$$\dot{\mathbf{q}} = 0, \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{e}_i \quad (\text{C.9})$$

où  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur  $[n \times 1]$  dont tous les éléments sont nuls sauf la  $i^e$  composante qui est égale à 1.

FICHIER RESULTAT : 7ddl.MTB

=====

Fichier des parametres geometriques: 7ddl.GEO

Nombre de corps: 7 . Nombre de reperes: 7 . Type de chaine: 0

Rep.	Sigma	Alpha	D	Theta	R
1	0	0	0	1	0
2	0	0	d2	2	0

3	0	0	d3	3	0
4	0	0	d4	4	0
5	0	0	0	5	0
6	0	0	d6	6	0
7	0	0	d7	7	0

Fichier des masses et des premiers moments: 7ddl.MAS

Corps no	Masse	mx	my	mz
1	MA1	MX1	MY1	0
2	MA2	MX2	MY2	0
3	MA3	MX3	MY3	0
4	MA4	MX4	MY4	0
5	MA5	MX5	MY5	0
6	MA6	MX6	MY6	0
7	MA7	MX7	MY7	0

Fichier des inerties des corps et des actionneurs: 7ddl.INE

Corps no	XX	XY	XZ	YY	YZ	ZZ	Ia
1	0	0	0	0	0	ZZ1	0
2	0	0	0	0	0	ZZ2	0
3	0	0	0	0	0	ZZ3	0
4	0	0	0	0	0	ZZ4	0
5	0	0	0	0	0	ZZ5	0
6	0	0	0	0	0	ZZ6	0
7	0	0	0	0	0	ZZ7	0

Equations:

AJ337 =ZZ7  
 AJA337 =ZZ7  
 AS17 =+C7\*MX7-S7\*MY7  
 AS27 =+S7\*MX7+C7\*MY7  
 PAS217 =+d7\*AS27  
 PAS227 =-d7\*AS17  
 PAS337 =-d7\*AS17  
 XP26 =-PAS217  
 XP46 =-PAS227-PAS227+d7\*d7\*MA7

XP66 =ZZ6+ZZ7-PAS337-PAS337+d7\*d7\*MA7  
XP76 =MX6+AS17+d7\*MA7  
XP86 =MY6+AS27  
XP106 =MA7+MA6  
AJ116 =+S6\*PAS217  
AJ126 =-C6\*PAS217-S6\*XP46  
AJ216 =-C6\*PAS217  
AJ226 =-S6\*PAS217+C6\*XP46  
AJ336 =XP66  
AJA116 =+AJ116\*C6-AJ126\*S6  
AJA216 =+AJ216\*C6-AJ226\*S6  
AJA226 =+AJ216\*S6+AJ226\*C6  
AJA336 =XP66  
AS16 =+C6\*XP76-S6\*XP86  
AS26 =+S6\*XP76+C6\*XP86  
PAS216 =+d6\*AS26  
PAS226 =-d6\*AS16  
PAS336 =-d6\*AS16  
XP15 =AJA116  
XP25 =AJA216-PAS216  
XP45 =AJA226-PAS226-PAS226+d6\*d6\*XP106  
XP65 =ZZ5+XP66-PAS336-PAS336+d6\*d6\*XP106  
XP75 =MX5+AS16+d6\*XP106  
XP85 =MY5+AS26  
XP105 =XP106+MA5  
AJ115 =+C5\*AJA116-S5\*XP25  
AJ125 =+C5\*XP25-S5\*XP45  
AJ215 =+S5\*AJA116+C5\*XP25  
AJ225 =+S5\*XP25+C5\*XP45  
AJ335 =XP65  
AJA115 =+AJ115\*C5-AJ125\*S5  
AJA215 =+AJ215\*C5-AJ225\*S5  
AJA225 =+AJ215\*S5+AJ225\*C5  
AJA335 =XP65  
AS15 =+C5\*XP75-S5\*XP85  
AS25 =+S5\*XP75+C5\*XP85  
XP14 =AJA115  
XP24 =AJA215  
XP44 =AJA225

XP64 =ZZ4+XP65  
 XP74 =MX4+AS15  
 XP84 =MY4+AS25  
 XP104 =XP105+MA4  
 AJ114 =+C4\*AJA115-S4\*AJA215  
 AJ124 =+C4\*AJA215-S4\*AJA225  
 AJ214 =+S4\*AJA115+C4\*AJA215  
 AJ224 =+S4\*AJA215+C4\*AJA225  
 AJ334 =XP64  
 AJA114 =+AJ114\*C4-AJ124\*S4  
 AJA214 =+AJ214\*C4-AJ224\*S4  
 AJA224 =+AJ214\*S4+AJ224\*C4  
 AJA334 =XP64  
 AS14 =+C4\*XP74-S4\*XP84  
 AS24 =+S4\*XP74+C4\*XP84  
 PAS214 =+d4\*AS24  
 PAS224 =-d4\*AS14  
 PAS334 =-d4\*AS14  
 XP13 =AJA114  
 XP23 =AJA214-PAS214  
 XP43 =AJA224-PAS224-PAS224+d4\*d4\*XP104  
 XP63 =ZZ3+XP64-PAS334-PAS334+d4\*d4\*XP104  
 XP73 =MX3+AS14+d4\*XP104  
 XP83 =MY3+AS24  
 XP103 =XP104+MA3  
 AJ113 =+C3\*AJA114-S3\*XP23  
 AJ123 =+C3\*XP23-S3\*XP43  
 AJ213 =+S3\*AJA114+C3\*XP23  
 AJ223 =+S3\*XP23+C3\*XP43  
 AJ333 =XP63  
 AJA113 =+AJ113\*C3-AJ123\*S3  
 AJA213 =+AJ213\*C3-AJ223\*S3  
 AJA223 =+AJ213\*S3+AJ223\*C3  
 AJA333 =XP63  
 AS13 =+C3\*XP73-S3\*XP83  
 AS23 =+S3\*XP73+C3\*XP83  
 PAS213 =+d3\*AS23  
 PAS223 =-d3\*AS13  
 PAS333 =-d3\*AS13

XP12 =AJA113  
 XP22 =AJA213-PAS213  
 XP42 =AJA223-PAS223-PAS223+d3\*d3\*XP103  
 XP62 =ZZ2+XP63-PAS333-PAS333+d3\*d3\*XP103  
 XP72 =MX2+AS13+d3\*XP103  
 XP82 =MY2+AS23  
 XP102 =XP103+MA2  
 AJ112 =+C2\*AJA113-S2\*XP22  
 AJ122 =+C2\*XP22-S2\*XP42  
 AJ212 =+S2\*AJA113+C2\*XP22  
 AJ222 =+S2\*XP22+C2\*XP42  
 AJ332 =XP62  
 AJA112 =+AJ112\*C2-AJ122\*S2  
 AJA212 =+AJ212\*C2-AJ222\*S2  
 AJA222 =+AJ212\*S2+AJ222\*C2  
 AJA332 =XP62  
 AS12 =+C2\*XP72-S2\*XP82  
 AS22 =+S2\*XP72+C2\*XP82  
 PAS212 =+d2\*AS22  
 PAS222 =-d2\*AS12  
 PAS332 =-d2\*AS12  
 XP11 =AJA112  
 XP21 =AJA212-PAS212  
 XP41 =AJA222-PAS222-PAS222+d2\*d2\*XP102  
 XP61 =ZZ1+XP62-PAS332-PAS332+d2\*d2\*XP102  
 XP71 =MX1+AS12+d2\*XP102  
 XP81 =MY1+AS22  
 XP101 =XP102+MA1  
 EG17 =-MY7  
 EG27 =MX7  
 NG37 =ZZ7  
 EG16 =-C7\*MY7-S7\*MX7  
 EG26 =-S7\*MY7+C7\*MX7  
 NG36 =ZZ7+d7\*EG26  
 EG15 =+C6\*EG16-S6\*EG26  
 EG25 =+S6\*EG16+C6\*EG26  
 NG35 =NG36+d6\*EG25  
 EG14 =+C5\*EG15-S5\*EG25  
 EG24 =+S5\*EG15+C5\*EG25

NG34 =NG35  
 EG13 =+C4\*EG14-S4\*EG24  
 EG23 =+S4\*EG14+C4\*EG24  
 NG33 =NG35+d4\*EG23  
 EG12 =+C3\*EG13-S3\*EG23  
 EG22 =+S3\*EG13+C3\*EG23  
 NG32 =NG33+d3\*EG22  
 EG11 =+C2\*EG12-S2\*EG22  
 EG21 =+S2\*EG12+C2\*EG22  
 NG31 =NG32+d2\*EG21  
 AM77 =ZZ7  
 AM76 =NG36  
 AM75 =NG35  
 AM74 =NG35  
 AM73 =NG33  
 AM72 =NG32  
 AM71 =NG31  
 EF16 =-XP86  
 EF26 =XP76  
 NF36 =XP66  
 EF15 =-C6\*XP86-S6\*XP76  
 EF25 =-S6\*XP86+C6\*XP76  
 NF35 =XP66+d6\*EF25  
 EF14 =+C5\*EF15-S5\*EF25  
 EF24 =+S5\*EF15+C5\*EF25  
 NF34 =NF35  
 EF13 =+C4\*EF14-S4\*EF24  
 EF23 =+S4\*EF14+C4\*EF24  
 NF33 =NF35+d4\*EF23  
 EF12 =+C3\*EF13-S3\*EF23  
 EF22 =+S3\*EF13+C3\*EF23  
 NF32 =NF33+d3\*EF22  
 EF11 =+C2\*EF12-S2\*EF22  
 EF21 =+S2\*EF12+C2\*EF22  
 NF31 =NF32+d2\*EF21  
 AM66 =XP66  
 AM65 =NF35  
 AM64 =NF35  
 AM63 =NF33

```
AM62    =NF32
AM61    =NF31
EE15    =-XP85
EE25    =XP75
NE35    =XP65
EE14    =-C5*XP85-S5*XP75
EE24    =-S5*XP85+C5*XP75
NE34    =XP65
EE13    =+C4*EE14-S4*EE24
EE23    =+S4*EE14+C4*EE24
NE33    =XP65+d4*EE23
EE12    =+C3*EE13-S3*EE23
EE22    =+S3*EE13+C3*EE23
NE32    =NE33+d3*EE22
EE11    =+C2*EE12-S2*EE22
EE21    =+S2*EE12+C2*EE22
NE31    =NE32+d2*EE21
AM55    =XP65
AM54    =XP65
AM53    =NE33
AM52    =NE32
AM51    =NE31
ED14    =-XP84
ED24    =XP74
ND34    =XP64
ED13    =-C4*XP84-S4*XP74
ED23    =-S4*XP84+C4*XP74
ND33    =XP64+d4*ED23
ED12    =+C3*ED13-S3*ED23
ED22    =+S3*ED13+C3*ED23
ND32    =ND33+d3*ED22
ED11    =+C2*ED12-S2*ED22
ED21    =+S2*ED12+C2*ED22
ND31    =ND32+d2*ED21
AM44    =XP64
AM43    =ND33
AM42    =ND32
AM41    =ND31
EC13    =-XP83
```

```

EC23   =XP73
NC33   =XP63
EC12   =-C3*XP83-S3*XP73
EC22   =-S3*XP83+C3*XP73
NC32   =XP63+d3*EC22
EC11   =+C2*EC12-S2*EC22
EC21   =+S2*EC12+C2*EC22
NC31   =NC32+d2*EC21
AM33   =XP63
AM32   =NC32
AM31   =NC31
EB12   =-XP82
EB22   =XP72
NB32   =XP62
EB11   =-C2*XP82-S2*XP72
EB21   =-S2*XP82+C2*XP72
NB31   =XP62+d2*EB21
AM22   =XP62
AM21   =NB31
EA11   =-XP81
EA21   =XP71
NA31   =XP61
AM11   =XP61
*      ==

```

```

*****
*  Nombre total de multiplications: 234   *
*  Nombre total d'additions      : 167   *
*****

```

## Annexe D

# Les données cinématiques pour les mouvements étudiés

*Nous présentons dans cette annexe les résultats de l'acquisition et du traitement des données cinématiques pour les trois mouvements de références étudiés dans le chapitre 3: la flexion-extension, la marche dans le plan sagittal et le pédalage. On trouve dans le tableau D.1 un récapitulatif de l'ensemble des courbes de résultats*

Mouvement étudié	Références de la figure	Type	Traitement
Flexion-extension	D.1(a)	Angles bruts	Ondelettes
	D.1(b)	Angles filtrés	
	D.2(a)	Vitesses articulaires	
	D.2(b)	Accélérations articulaires	
Marche	D.3(a)	Angles bruts	Chebychev
	D.3(b)	Angles filtrés	
	D.4(a)	Vitesses articulaires	
	D.4(b)	Accélérations articulaires	
	D.5(a)	Angles bruts	Butterworth
	D.5(b)	Angles filtrés	
	D.6(a)	Vitesses articulaires	Butterworth
	D.6(b)	Accélérations articulaires	Butterworth
	D.7(a)	Angles bruts	Butterworth
	D.7(b)	Angles filtrés	
	D.8(a)	Vitesses articulaires	Butterworth
	D.8(b)	Accélérations articulaires	Butterworth
	D.9(a)	Angles bruts	Ondelettes
	D.9(b)	Angles filtrés	
	D.10(a)	Vitesses articulaires	
	D.10(b)	Accélérations articulaires	
Pédalage	D.11(a)	Angles bruts	Ondelettes
	D.11(b)	Angles filtrés	
	D.12(a)	Vitesses articulaires	
	D.12(b)	Accélérations articulaires	

TABLEAU D.1 - Synthèse des différents résultats de données cinématiques

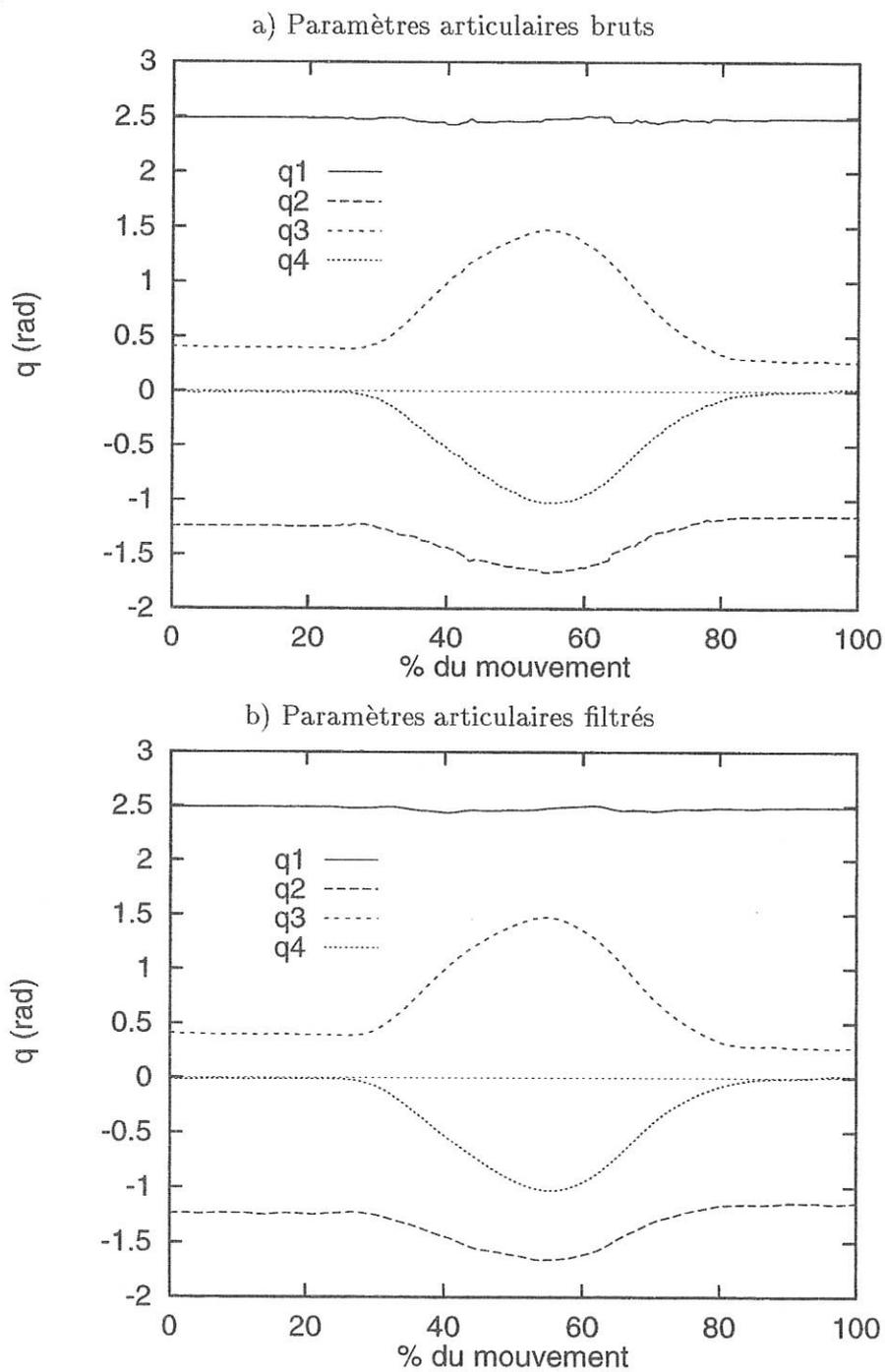


FIGURE D.1 - Paramètres articulaires du mouvement de flexion-extension

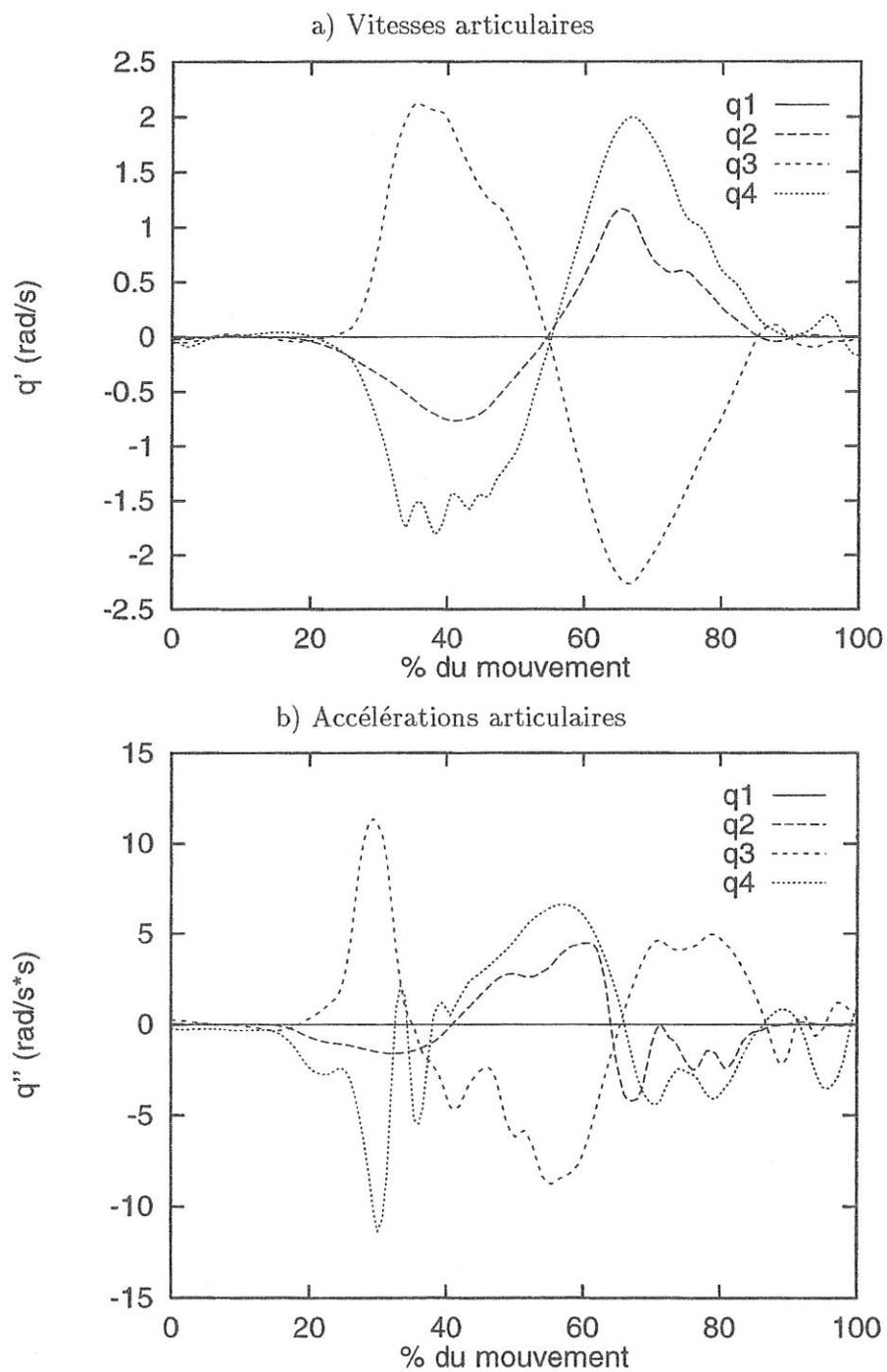


FIGURE D.2 - Evolutions cinématiques du mouvement de flexion-extension

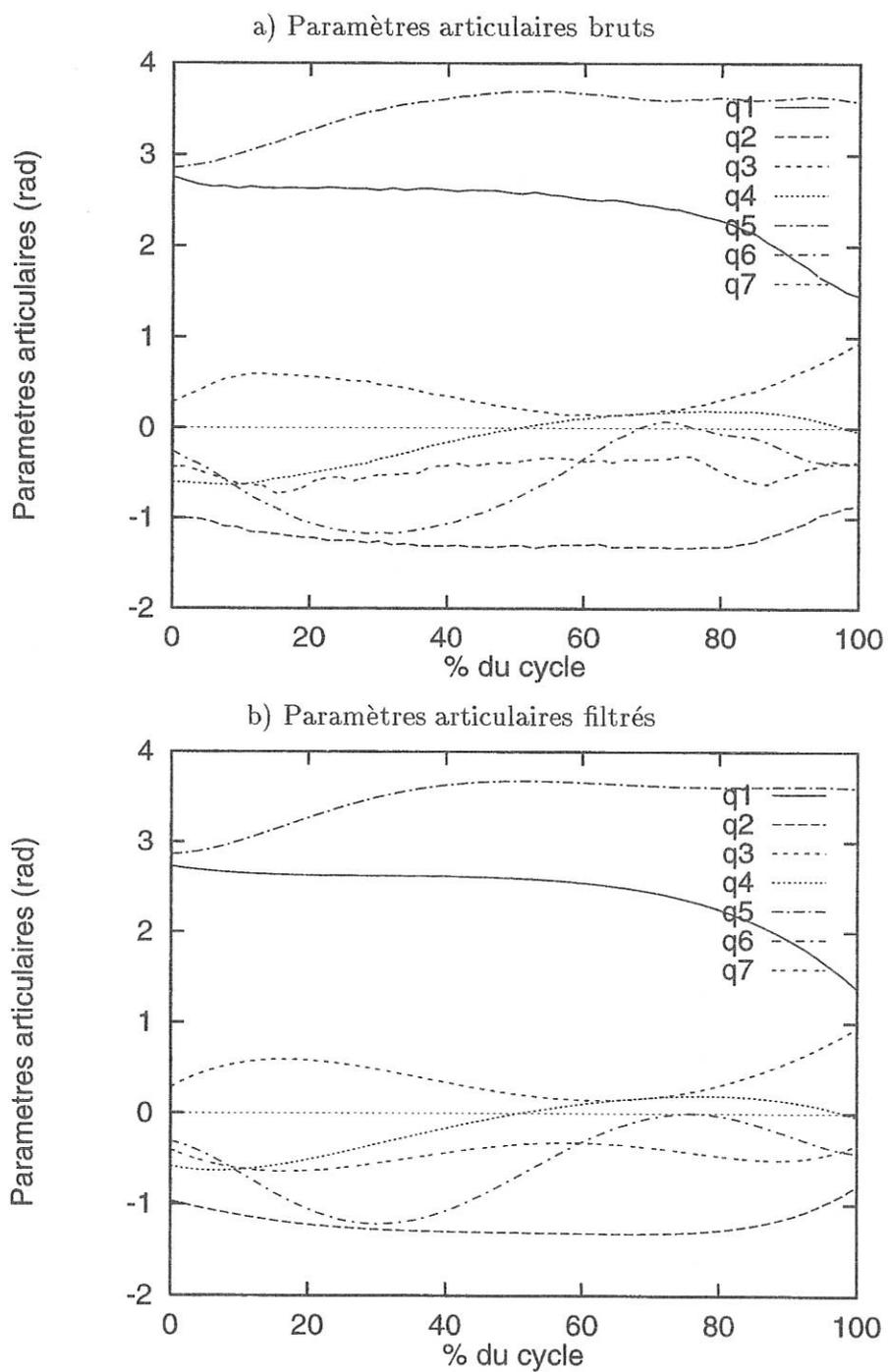


FIGURE D.3 - Paramètres articulaires du mouvement de marche

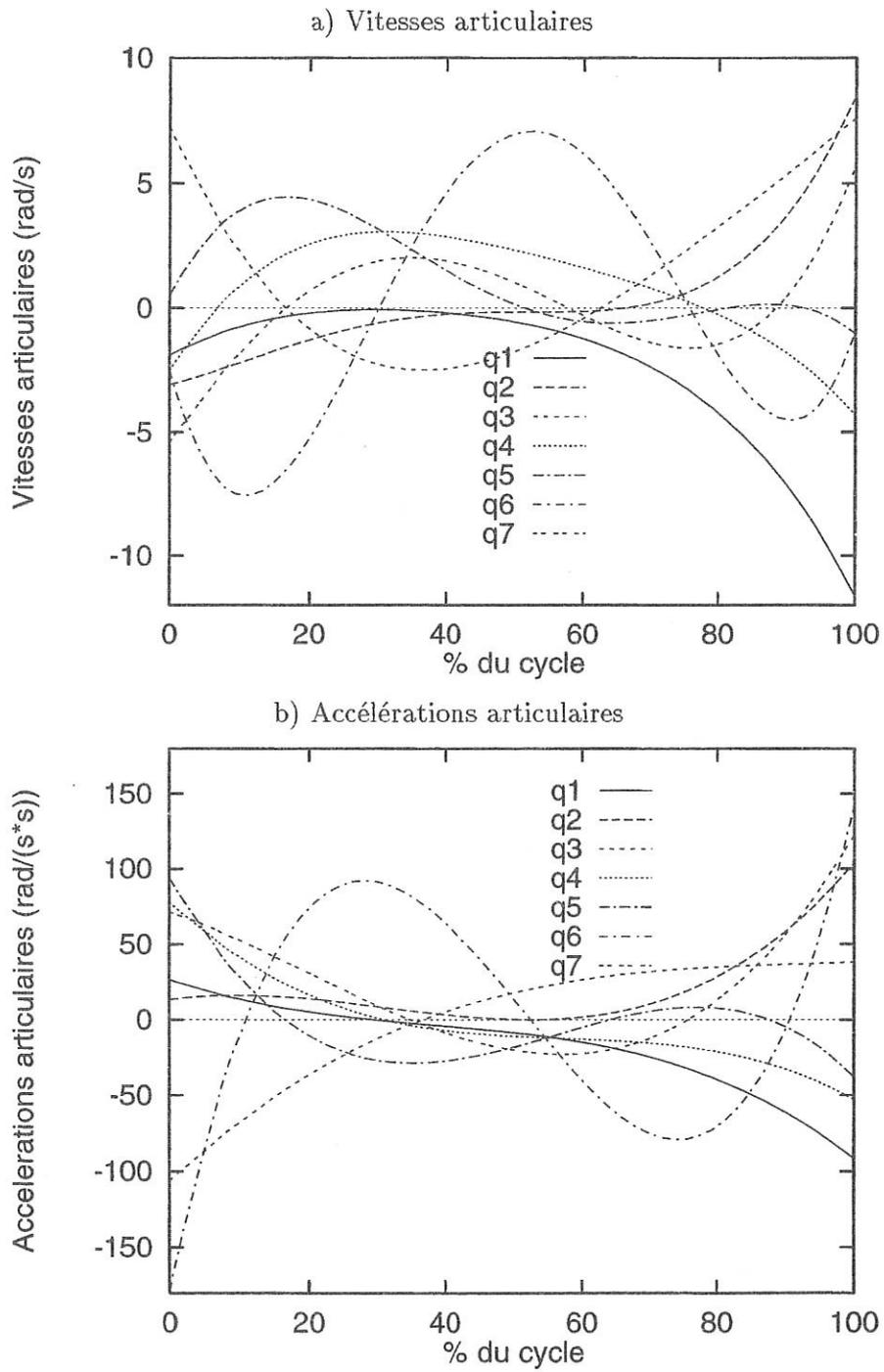


FIGURE D.4 - Evolutions cinématiques du mouvement de marche

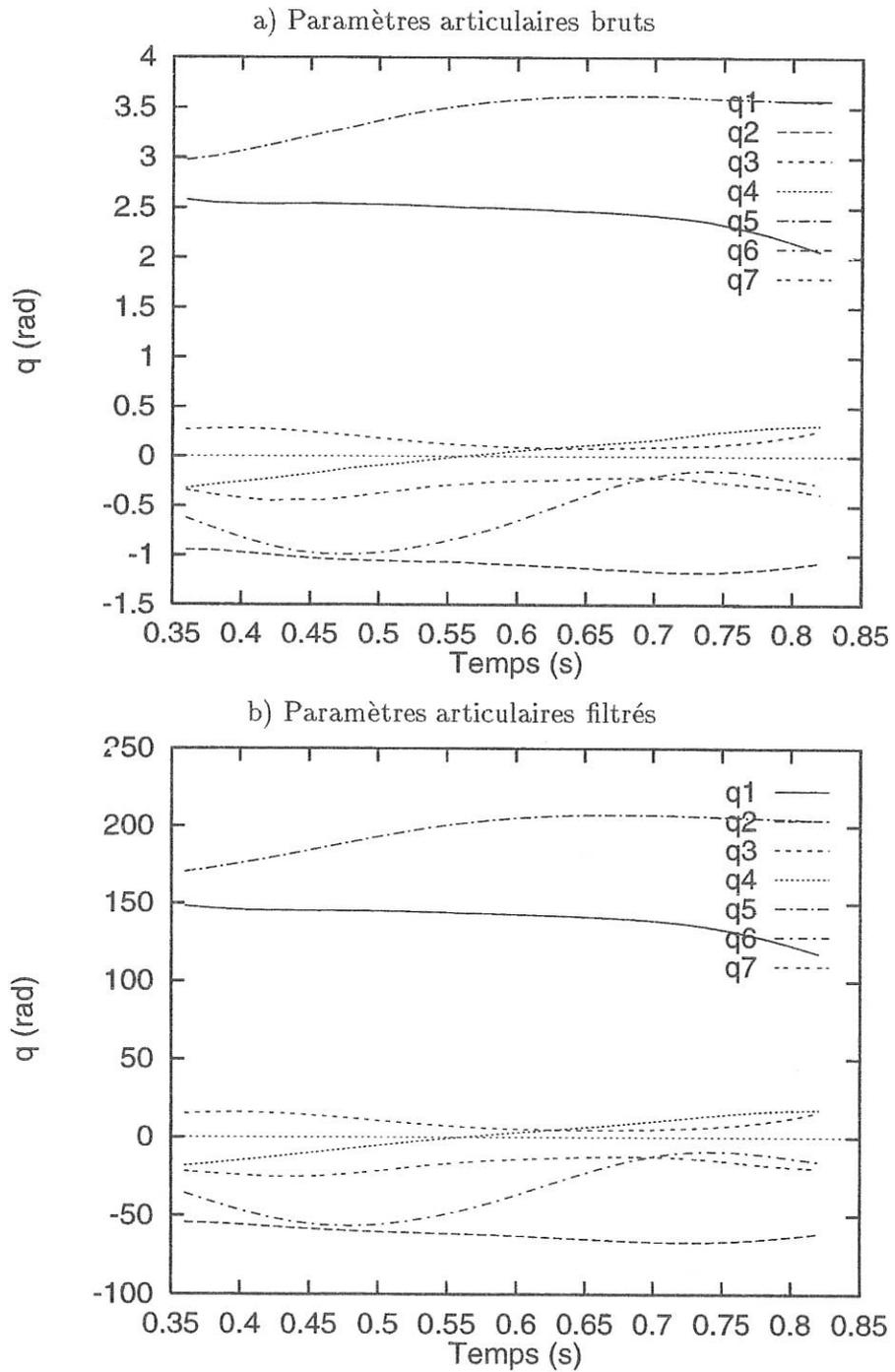


FIGURE D.5 - Paramètres articulaires du mouvement de marche TYPE 1

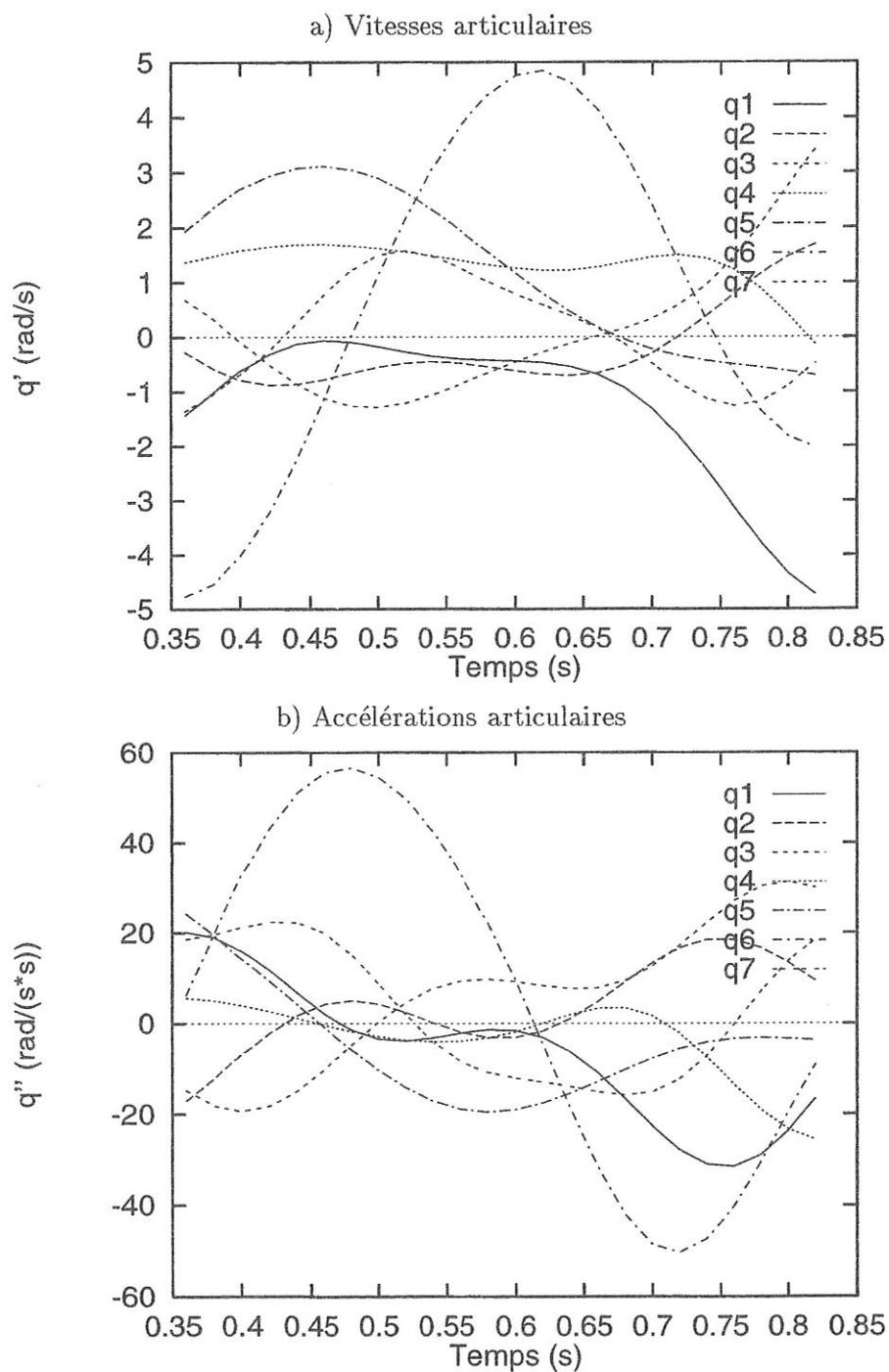


FIGURE D.6 - Evolutions cinématiques du mouvement de marche TYPE 1

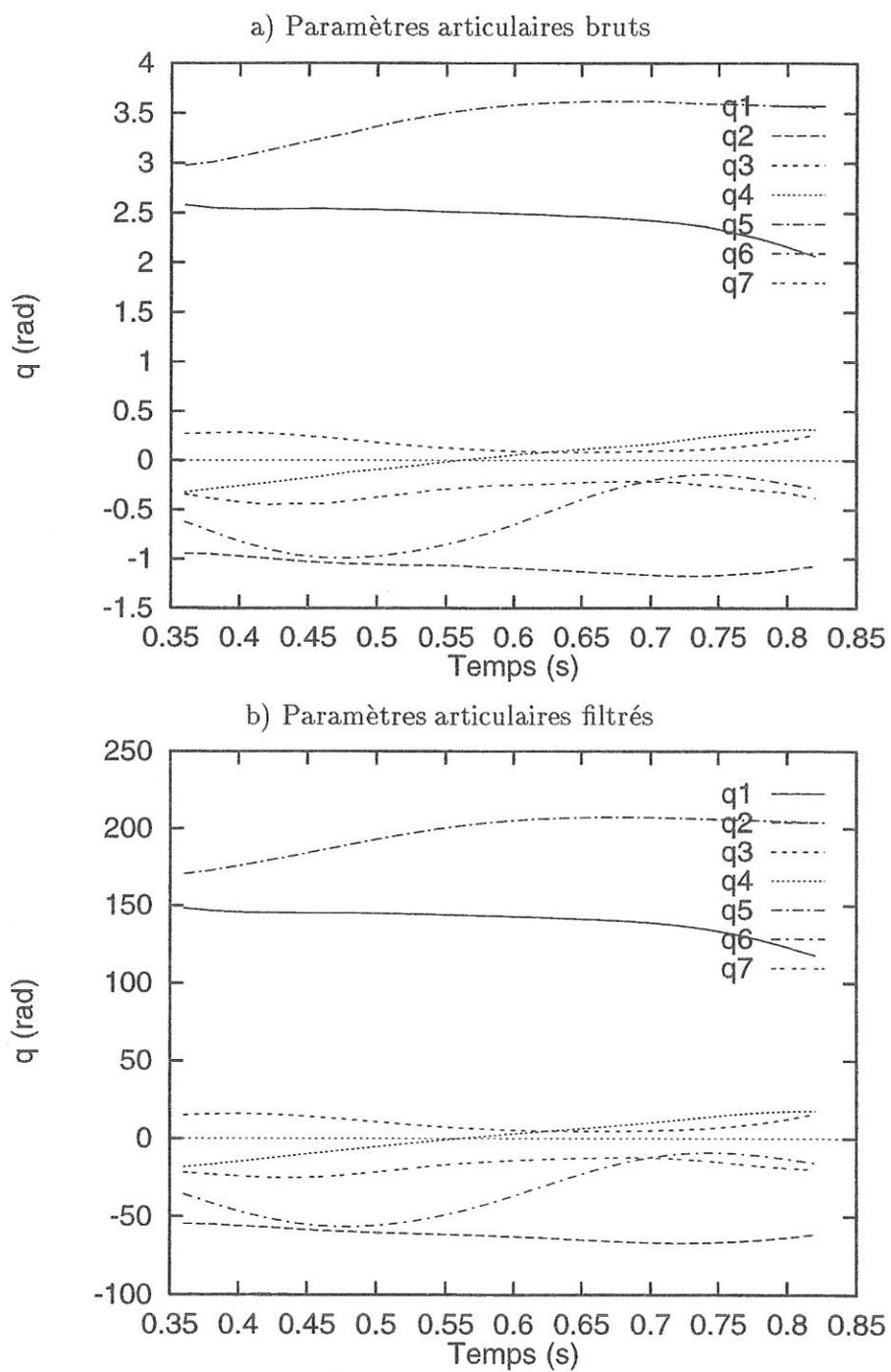


FIGURE D.7 - Paramètres articulaires du mouvement de marche TYPE 2

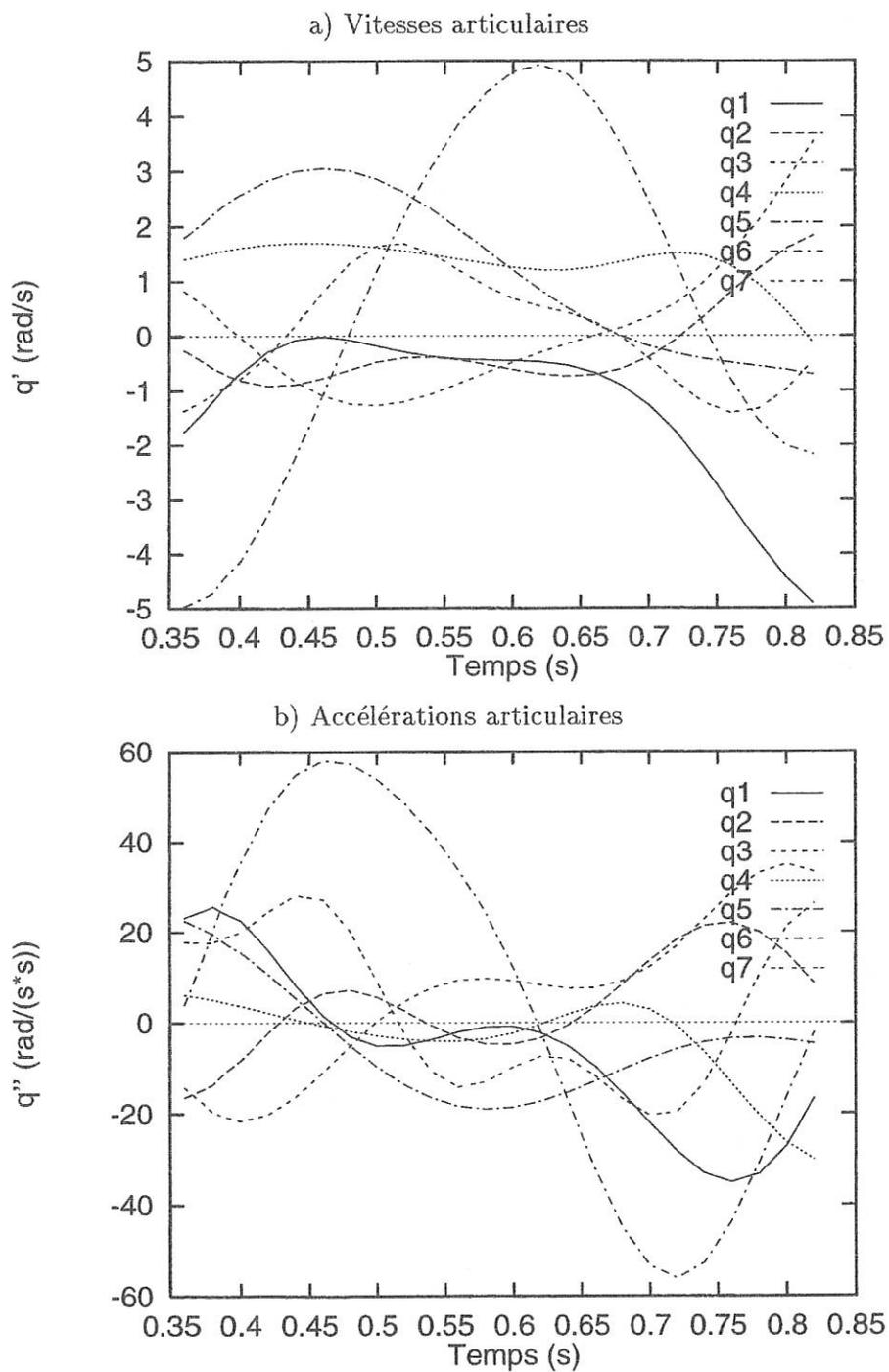


FIGURE D.8 - Evolutions cinématiques du mouvement de marche TYPE 2

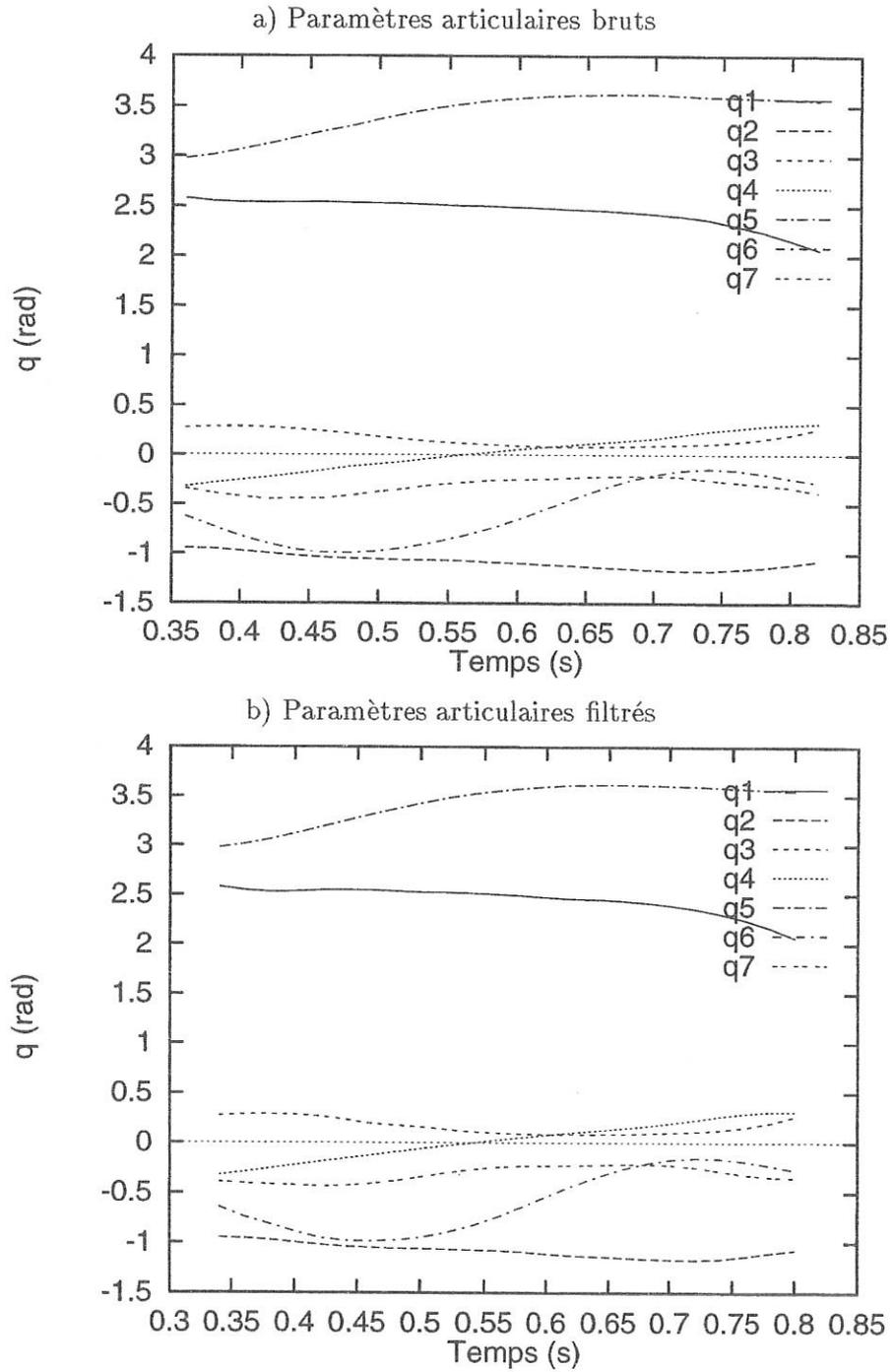


FIGURE D.9 - Paramètres articulaires du mouvement de marche TYPE 3

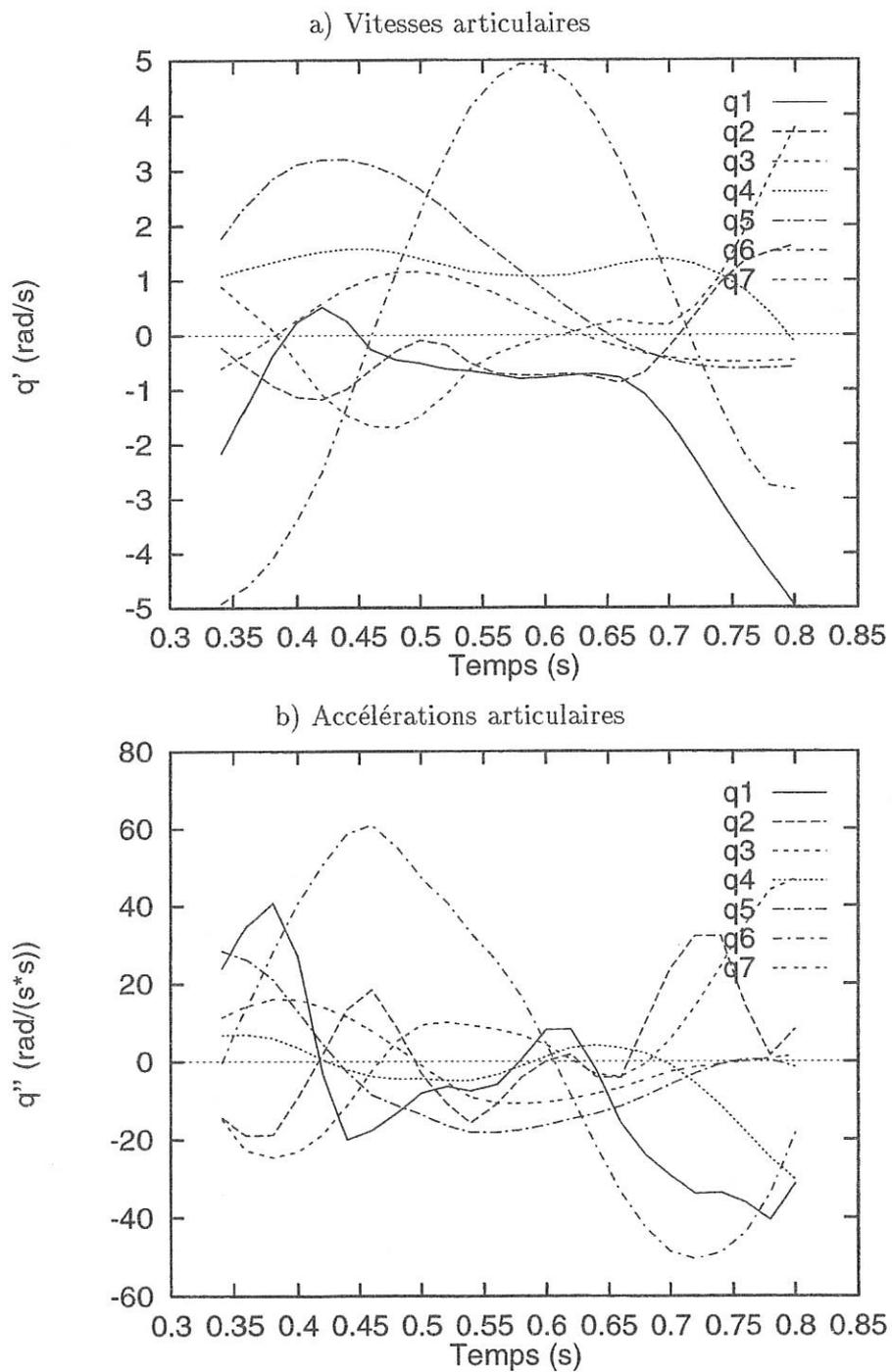


FIGURE D.10 - Evolutions cinématiques du mouvement de marche TYPE 3

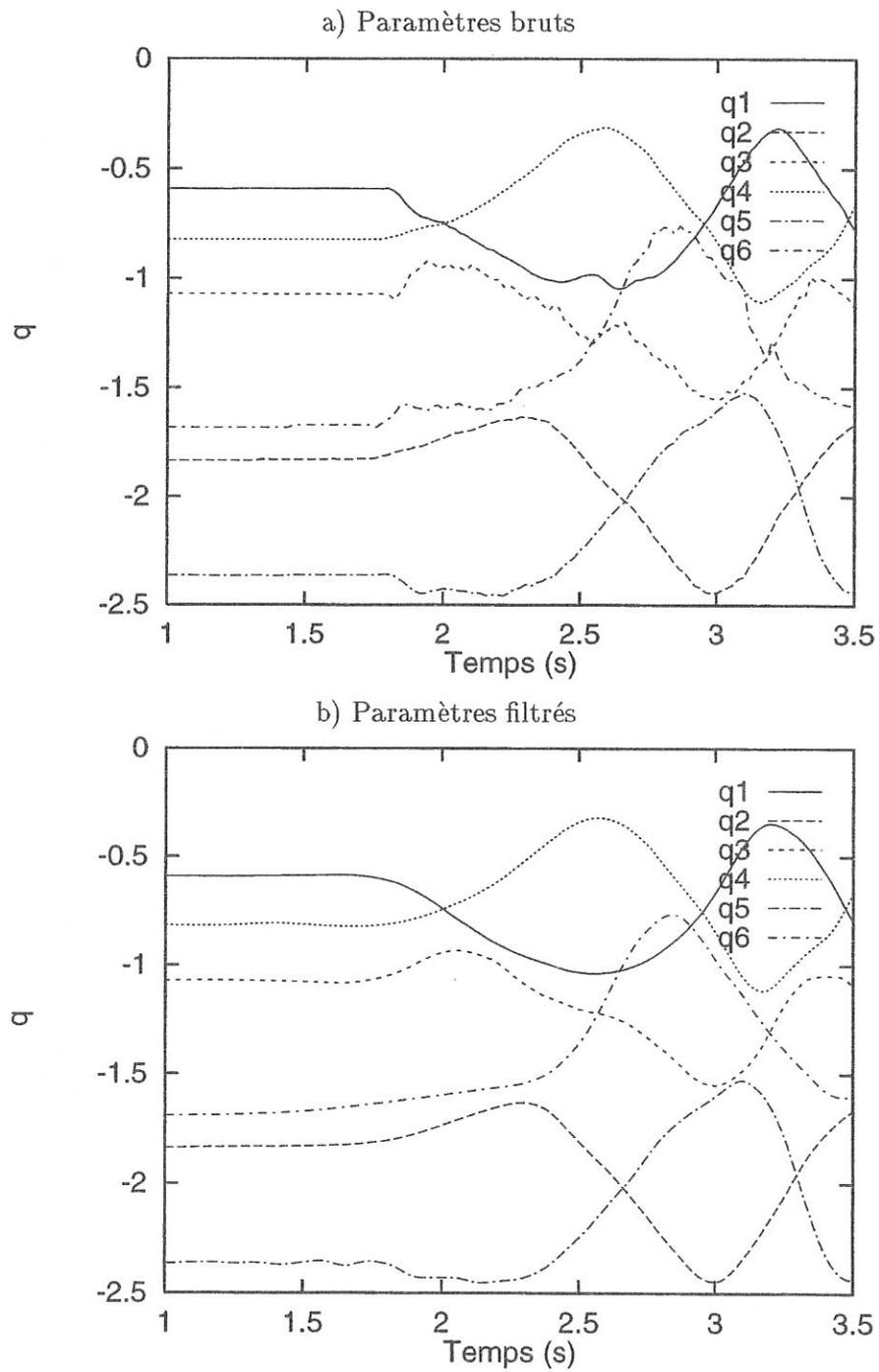


FIGURE D.11 - Paramètres articulaires pour le mouvement de pédalage

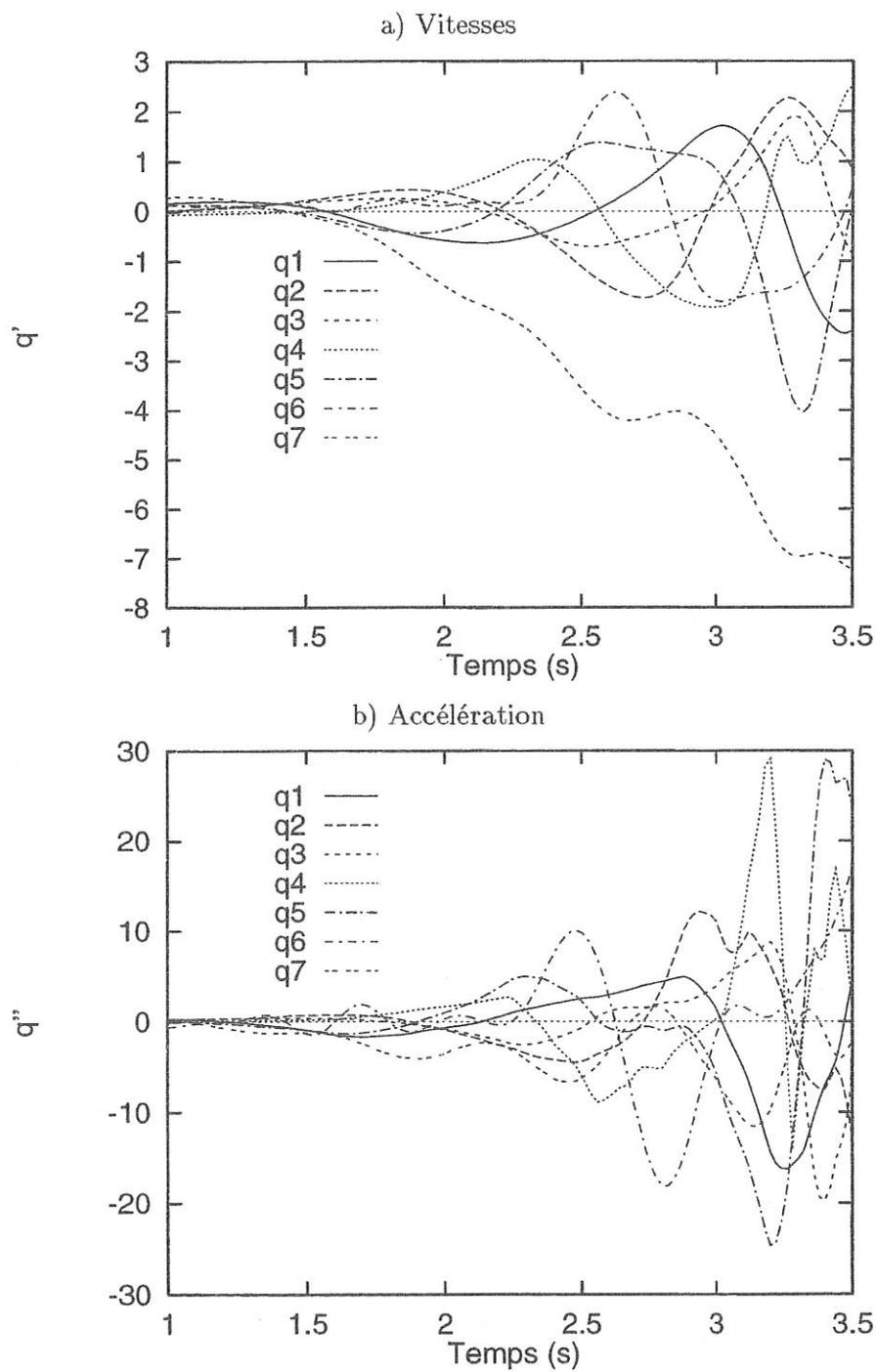


FIGURE D.12 - Evolutions cinématiques pour le mouvement de pédalage

## Annexe E

# Les données anthropométriques pour les mouvements étudiés

*Dans cette annexe sont fournies les tables des caractéristiques anthropométriques pour les modèles étudiés dans le chapitre 3 de ce mémoire*

Corps	$d_i$ (m)	$m_i$ (kg)	$I_i$ (kgm <sup>2</sup> )	$m_i r_i$ (kgm)
1	0	1,808	0,0582	0,1067
2	0,118	5,42	0,424	1,3096
3	0,4026	17,3	0,934	3,2267
4	0,4195	36,47	8,39	11,6412

TABLEAU E.1 - *Caractéristiques du sujet pour le mouvement de flexion-extension*

Corps	$m_i$ kg	$d_i$ m	$m_i r_i$ kg.m	$I_i$ kgm <sup>2</sup>
$S_1$	1,0875	0	0,091	0,0145
$S_2$	3,4875	0,1674	0,7939	0,2324
$S_3$	7,5	0,4015	1,5981	0,4516
$S_4$	50,85	0,3758	28,9672	16,2389
$S_5$	7,5	0	1,2204	0,3089
$S_6$	3,4875	0,3752	0,6063	0,1567
$S_7$	1,0875	0,4066	0,0455	0,0145

TABLEAU E.2 - Caractéristiques anthropométriques du sujet 1 pour l'étude de la marche

Corps	$m_i$ kg	$d_i$ m	$m_i r_i$ kg.m	$I_i$ kgm <sup>2</sup>
$S_1$	1,058	0	0,0738	0,0098
$S_2$	3,394	0,1393	0,7596	0,2186
$S_3$	7,30	0,3917	1,7182	0,5364
$S_4$	49,494	0,4151	28,6781	16,3524
$S_5$	7,3	0	1,3122	0,3668
$S_6$	3,394	0,4208	0,5801	0,1474
$S_7$	1,058	0,3961	0,0491	0,0098

TABLEAU E.3 - Caractéristiques anthropométriques du sujet 2 pour l'étude de la marche

Corps	$m_i$	$r_i$	$a_i$	$I_i$
Cuisses $S_1$ et $S_4$	5,2	0,445	0,171	0,467
Jambes $S_2$ et $S_5$	2,42	0,367	0,171	0,212
Pieds $S_3$ et $S_6$	0,754	0,134	0,065	0,0291
Pédalier $S_7$	30	0,166		12,5

TABLEAU E.4 - Caractéristiques anthropométriques du pédaleur

## Annexe F

# Expression des termes constants dans le modèle dynamique de la marche en paramétrage absolu

*Dans cette annexe sont fournies les expressions des constantes qui interviennent dans le modèle dynamique inverse en paramétrage absolu selon la méthode de Lagrange pour le système marcheur.*

$$M_{56} = M_5 + M_6$$

$$M_{4567} = M_{56} + M_4 + M_7$$

$$M_{34567} = M_{4567} + M_3$$

$$M_{234567} = M_{34567} + M_2$$

$$V_1 = M_1(r_1 - a_1) + M_{234567}r_1$$

$$V_2 = M_2a_2 + M_{34567}r_2$$

$$V_3 = M_3a_3 + M_{4567}r_3$$

$$V_4 = M_4a_4 + M_{56}r_4$$

$$V_5 = M_5a_5 + M_6r_5$$

$$V_6 = M_6a_1$$

$$V_7 = M_7a_7$$

$$K_{12} = r_1(M_2 a_2 + M_{34567} r_2)$$

$$E_{13} = M_3 a_3 + M_{4567} r_3$$

$$K_{13} = r_1 E_{13}$$

$$K_{23} = r_2 E_{13}$$

$$E_{14} = M_4 a_4 + M_{56} r_4$$

$$K_{14} = r_1 E_{14}$$

$$K_{24} = r_2 E_{14}$$

$$K_{34} = r_3 E_{14}$$

$$E_{15} = M_5 a_5 + M_6 r_5$$

$$K_{15} = r_1 E_{15}$$

$$K_{25} = r_2 E_{15}$$

$$K_{35} = r_3 E_{15}$$

$$K_{45} = r_4 E_{15}$$

$$E_{16} = M_6 a_6$$

$$F_{16} = M_6 b_6$$

$$E_{17} = M_7 a_7$$

$$A_{11} = I_1 + M_{234567} r_1^2$$

$$A_{22} = I_2 + M_{34567} r_2^2$$

$$A_{33} = I_3 + M_{4567} r_3^2$$

$$A_{44} = I_4 + M_{56} r_4^2$$

$$A_{55} = I_5 + M_6 r_5^2$$

$$A_{66} = I_6$$

$$A_{77} = I_7$$

$$K_{16} = r_1 E_{16}$$

$$K_{26} = r_2 E_{16}$$

$$K_{36} = r_3 E_{16}$$

$$K_{46} = r_4 E_{16}$$

$$K_{56} = r_5 E_{16}$$

$$K_{17} = r_1 E_{17}$$

$$K_{27} = r_2 E_{17}$$

$$K_{37} = r_3 E_{17}$$

## Annexe G

# Mise en équations du mouvement de pédalage

*Nous présentons dans cette annexe la mise en forme explicite des équations de la dynamique pour le mouvement de pédalage étudié dans le chapitre 3 de ce mémoire.*

### G.1 Notations spécifiques à cette annexe

$G_7O_4 = r\mathbf{x}_7$	Position du contact pédale
$O_iO_{i+1} = r_i\mathbf{x}_i$	Position des articulations
$O_iG_{i+1} = a_i\mathbf{x}_i$	Position du centre de masse
$q_i = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$	Paramètres articulaires absolus
$\mathcal{I}_i$	Inertie du solide $\mathcal{S}_i$ par rapport à $O_i$
$\mathcal{I}$	Inertie du pédalier par rapport à $G_7$
$m_i$	Masse du solide $\mathcal{S}_i$
$\mathbf{V}_i$	Vitesse de $O_i$
$C_{ij} = \cos(q_i - q_j)$	Notation sur les cosinus
$S_{ij} = \sin(q_i - q_j)$	Notation sur les sinus
$Ec_i$	Energie cinétique de la chaîne $i$
$Ec^j$	Energie cinétique du corps $j$
$P_i$	Quantité d'accélération généralisée relative
$Q_i$	Force généralisée relative au paramètre $q_i$
$F_{37}$	Forces pieds-pédales de la jambe droite
$F_{67}$	Forces pieds-pédales de la jambe gauche
$\Gamma$	Couple actionneur sur l'axe du pédalier

## G.2 Introduction

Nous considérons le système articulé représenté sur la figure III.34 du chapitre 3. Contrairement à la technique développée au chapitre 2 nous procédons à la mise en équation de la dynamique du système articulé à l'aide des équations de Lagrange.

Effectuons dans un premier temps quelques remarques concernant les forces exercées par les pieds sur les pédales :  $\mathbf{F}_{37}$  et  $\mathbf{F}_{67}$ .

En dynamique inverse, les chaînes fermées peuvent être considérées comme des chaînes ouvertes, et les paramètres correspondants comme indépendants (les conditions de fermeture sont de fait implicitement satisfaites par les  $q_i$  relevés expérimentalement).  $-\mathbf{F}_{37}$  peut être ainsi considérée comme une force extérieure agissant sur la jambe  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ . Sa puissance virtuelle s'exprime alors comme :

$$\mathcal{P}^*(-\mathbf{F}_{37}) = -\mathbf{F}_{37} \cdot \mathbf{V}^*(A/S_0) \quad (\text{G.1})$$

où  $\mathbf{V}^*(A)$  provient de  $\mathbf{V}_A(q_1, q_2, q_3)$  (et non de  $\mathbf{V}_A(q_7)$ ).

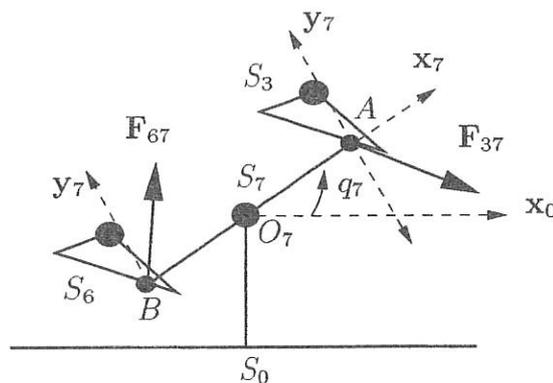


FIGURE G.1 - Représentation des forces de liaison aux pédales

Si on adopte la représentation de la figure G.1 pour  $\mathbf{F}_{37}$  et  $\mathbf{F}_{67}$ , on a :

$$\mathbf{F}(\mathcal{S}_3 \rightarrow \mathcal{S}_7) = T_{37}\mathbf{x}_7 - N_{37}\mathbf{y}_7$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{S}_6 \rightarrow \mathcal{S}_7) = T_{67}\mathbf{x}_7 - N_{67}\mathbf{y}_7$$

On peut alors faire les deux remarques suivantes :

- $N_{37} > 0$ ,  $N_{67} > 0$  lorsque le pied appuie, composante négative lorsqu'il tire ;
- $T_{37} > 0$ ,  $T_{67} > 0$  pour des composantes radiales agissant en traction (en compression sinon).

## G.3 Energie cinétique

### G.3.1 Forme de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'une chaîne s'écrit :

$$Ec_j = \sum_{i=1}^n Ec^i$$

avec

$$Ec^i = \frac{1}{2}m_i \mathbf{V}_i^2 + m_i \mathbf{V}_i \cdot (\omega_i \wedge a_i \cdot \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{q}_i^2$$

### G.3.2 Cinématique

Dans un premier temps il faut déterminer les vitesses des centres articulaires dans le repère absolu :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= r_1 \dot{q}_1 \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{V}_3 &= r_1 \dot{q}_1 \mathbf{y}_1 + r_2 \dot{q}_2 \mathbf{y}_2 \end{aligned}$$

### G.3.3 Expression pour les deux jambes

D'où l'expression de l'énergie cinétique pour chaque chaîne articulée à 3 corps représentant chaque jambe :

$$\begin{aligned} Ec_1 &= \frac{1}{2} K_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} K_{12} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_3 \dot{q}_3^2 + K_{14} C_{21} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + K_{15} C_{31} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + K_{16} C_{32} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ Ec_2 &= \frac{1}{2} K_{21} \dot{q}_4^2 + \frac{1}{2} K_{22} \dot{q}_5^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_6 \dot{q}_6^2 + K_{24} C_{54} \dot{q}_4 \dot{q}_5 + K_{25} C_{64} \dot{q}_4 \dot{q}_6 + K_{26} C_{65} \dot{q}_5 \dot{q}_6 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \mathcal{I}_1 + m_2 r_1^2 + m_3 r_1^2 \\ K_{12} &= \mathcal{I}_2 + m_3 r_2^2 \\ K_{14} &= m_2 r_1 a_2 + m_3 r_1 r_2 \\ K_{15} &= m_3 r_1 a_3 \\ K_{16} &= m_3 r_2 a_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 K_{21} &= \mathcal{I}_4 + m_5 r_4^2 + m_6 r_4^2 \\
 K_{22} &= \mathcal{I}_5 + m_6 r_5^2 \\
 K_{24} &= m_5 r_4 a_5 + m_6 r_4 r_5 \\
 K_{25} &= m_6 r_4 a_6 \\
 K_{26} &= m_6 r_5 a_6
 \end{aligned}$$

## G.4 Travaux virtuels des efforts appliqués

### G.4.1 Couples articulaires

Le travail virtuel des couples articulaires est donné par la relation :

$$W_1^* = (\Gamma_1 - \Gamma_2)\delta q_1 + (\Gamma_2 - \Gamma_3)\delta q_2 + \Gamma_3\delta q_3$$

### G.4.2 Pesanteur

Considérons la fonction de force  $U$  définie par :

$$U = -g \sum_{i=j}^k m_i y_{G_i}$$

pour  $j = 1, 2$  et  $k = 3$  ou  $k = 6$ . Après détermination des coordonnées des centres de gravité des différents corps il vient la forme finale suivante :

$$U = -g \sum_{i=j}^k V_i \cos q_i$$

avec :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= g(m_1 a_1 + m_2 r_1 + m_3 r_1) \\
 V_2 &= g(m_2 a_3 + m_3 r_2) \\
 V_3 &= g m_3 a_3 \\
 V_4 &= g(m_4 a_4 + m_5 r_4 + m_6 r_4) \\
 V_5 &= g(m_5 a_6 + m_6 r_5) \\
 V_6 &= g m_6 a_6
 \end{aligned}$$

Ecrivons alors le travail virtuel des forces de pesanteur :

$$W_2^* = \delta U$$

d'où finalement :

$$W_2^* = - \sum_{i=j}^k V_i \cos q_i \delta q_i$$

### G.4.3 Force d'appui du pied sur la pédale

Ecrivons dans un premier temps l'expression de cette force d'appui dans le repère lié au pédalier :

$$\mathbf{F}_{73} = T_{73}\mathbf{x}_7 + N_{73}\mathbf{y}_7$$

et

$$\mathbf{F}_{76} = T_{76}\mathbf{x}_7 + N_{76}\mathbf{y}_7$$

Ecrivons le travail virtuel de ces forces d'appui :

$$W^3 = \mathbf{F}_{73} \delta \mathbf{O}\mathbf{O}_4$$

et

$$W^4 = \mathbf{F}_{76} \delta \mathbf{O}\mathbf{O}_8$$

Ecrivons maintenant la vitesses de  $O_4$  et  $O_8$  :

$$\mathbf{V}_4 = r_1 \dot{q}_1 \mathbf{y}_1 + r_2 \dot{q}_2 \mathbf{y}_2 + r_3 \dot{q}_3 \mathbf{y}_3$$

et

$$\mathbf{V}_8 = r_4 \dot{q}_4 \mathbf{y}_4 + r_5 \dot{q}_5 \mathbf{y}_5 + r_6 \dot{q}_6 \mathbf{y}_6$$

Donc il vient :

$$W^3 = r_1 (\mathbf{F}_{73} \cdot \mathbf{y}_1) \delta q_1 + r_2 (\mathbf{F}_{73} \cdot \mathbf{y}_2) \delta q_2 + r_3 (\mathbf{F}_{73} \cdot \mathbf{y}_3) \delta q_3$$

A ce niveau il faut introduire les relations suivantes concernant la projection de  $\mathbf{x}_7$  et  $\mathbf{y}_7$  sur  $\mathbf{y}_i$  :

$$\mathbf{x}_7 \cdot \mathbf{y}_i = S7i$$

$$\mathbf{y}_7 \cdot \mathbf{y}_i = C7i$$

Il vient alors

$$W_3^* = r_1 (T_{73}S71 + N_{73}C71) \delta q_1 + r_2 (T_{73}S72 + N_{73}C72) \delta q_2 + r_3 (T_{73}S73 + N_{73}C73) \delta q_3$$

et

$$W_4^* = r_4 (T_{76}S74 + N_{76}C74) \delta q_4 + r_5 (T_{76}S75 + N_{76}C75) \delta q_5 + r_6 (T_{76}S76 + N_{76}C76) \delta q_6$$

## G.5 Efforts généralisés

Les travaux virtuels étant écrits il devient facile de donner les relations concernant les efforts généralisés :

$$Q_1 = \Gamma_1 - \Gamma_2 - V_1 \cos q_1 + r_1(T_{73}S71 + N_{73}C71)$$

$$Q_2 = \Gamma_2 - \Gamma_3 - V_2 \cos q_2 + r_2(T_{73}S72 + N_{73}C72)$$

$$Q_3 = \Gamma_3 - V_3 \cos q_3 + r_3(T_{73}S73 + N_{73}C73)$$

$$Q_4 = \Gamma_4 - \Gamma_5 - V_4 \cos q_4 + r_4(T_{76}S74 + N_{76}C74)$$

$$Q_5 = \Gamma_5 - \Gamma_6 - V_5 \cos q_5 + r_5(T_{76}S75 + N_{76}C75)$$

$$Q_6 = \Gamma_6 - V_6 \cos q_6 + r_6(T_{76}S76 + N_{76}C76)$$

## G.6 Equations de Lagrange

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$P_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i$$

### G.6.1 Mise en oeuvre pour le premier paramètre articulaire

Le premier terme s'écrit :

$$\frac{\partial E_{c1}}{\partial \dot{q}_1} = K_{11}\dot{q}_1 + K_{14}C21\dot{q}_2 + K_{15}C31\dot{q}_3$$

ensuite il faut le dériver par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{c1}}{\partial \dot{q}_1} \right) = K_{11}\ddot{q}_1 + K_{14}C21\ddot{q}_2 + K_{15}C31\ddot{q}_3 - K_{14}S21(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)\dot{q}_2 - K_{15}S31(\dot{q}_3 - \dot{q}_1)\dot{q}_3$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\frac{\partial E_{c1}}{\partial q_1} = K_{14}S21\dot{q}_1\dot{q}_2 + K_{15}S31\dot{q}_1\dot{q}_3$$

D'où finalement :

$$K_{11}\ddot{q}_1 + K_{14}C21\ddot{q}_2 + K_{15}C31\ddot{q}_3 - K_{14}S21\dot{q}_2^2 - K_{15}S31\dot{q}_3^2 = Q_1$$

### G.6.2 Quantités d'accélération généralisées

$$\begin{aligned}
 P_1 &= K_{11}\ddot{q}_1 + K_{14}C_{21}\ddot{q}_2 + K_{15}C_{31}\ddot{q}_3 - K_{14}S_{21}\dot{q}_2^2 - K_{15}S_{31}\dot{q}_3^2 \\
 P_2 &= K_{12}\ddot{q}_2 + K_{14}C_{21}\ddot{q}_1 + K_{16}C_{32}\ddot{q}_3 + K_{14}S_{21}\dot{q}_1^2 - K_{16}S_{32}\dot{q}_3^2 \\
 P_3 &= I_3\ddot{q}_3 + K_{15}C_{31}\ddot{q}_1 + K_{16}C_{32}\ddot{q}_2 + K_{15}S_{31}\dot{q}_1^2 + K_{16}S_{32}\dot{q}_2^2 \\
 P_4 &= K_{21}\ddot{q}_4 + K_{24}C_{54}\ddot{q}_5 + K_{25}C_{64}\ddot{q}_6 - K_{24}S_{54}\dot{q}_5^2 - K_{25}S_{64}\dot{q}_6^2 \\
 P_5 &= K_{22}\ddot{q}_5 + K_{24}C_{54}\ddot{q}_4 + K_{26}C_{65}\ddot{q}_6 + K_{24}S_{54}\dot{q}_4^2 - K_{26}S_{65}\dot{q}_6^2 \\
 P_6 &= I_6\ddot{q}_6 + K_{25}C_{64}\ddot{q}_4 + K_{26}C_{65}\ddot{q}_5 + K_{25}S_{64}\dot{q}_4^2 + K_{26}S_{65}\dot{q}_5^2 \\
 P_7 &= \Gamma - I\ddot{q}_7
 \end{aligned}$$

## G.7 Mise en forme du système final

Finalement on peut écrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned}
 b_1 &\equiv P_1 + V_1 \cos q_1 = \Gamma_1 - \Gamma_2 + r_1(T_{73}S_{71} + N_{73}C_{71}) \\
 b_2 &\equiv P_2 + V_2 \cos q_2 = \Gamma_2 - \Gamma_3 + r_2(T_{73}S_{72} + N_{73}C_{72}) \\
 b_3 &\equiv P_3 + V_3 \cos q_3 = \Gamma_3 + r_3(T_{73}S_{73} + N_{73}C_{73}) \\
 b_4 &\equiv P_4 + V_4 \cos q_4 = \Gamma_4 - \Gamma_5 + r_4(T_{76}S_{74} + N_{76}C_{74}) \\
 b_5 &\equiv P_5 + V_5 \cos q_5 = \Gamma_5 - \Gamma_6 + r_5(T_{76}S_{75} + N_{76}C_{75}) \\
 b_6 &\equiv P_6 + V_6 \cos q_6 = \Gamma_6 + r_6(T_{76}S_{76} + N_{76}C_{76}) \\
 b_7 &\equiv \Gamma - I\ddot{q}_7 = rN_{73} - RN_{76}
 \end{aligned}$$

On peut mettre l'ensemble de ces équations sous la forme générale suivante :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1S_{71} & r_1C_{71} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -r_2S_{72} & r_2C_{72} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -r_3S_{73} & r_3C_{73} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -r_4S_{74} & r_4C_{74} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -r_5S_{75} & r_5C_{75} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -r_6S_{76} & r_6C_{76} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & -r
 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = \left[ \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \quad \Gamma_4 \quad \Gamma_5 \quad \Gamma_6 \quad T_{73} \quad N_{73} \quad T_{76} \quad N_{76} \right]^T$$



## Bibliographie

- [1] G. DEMENÿ. *Mécanismes et éducation des mouvements*. Edition Revue EPS, 1993, réédition de l'oeuvre originale de 1910.
- [2] J. DUBOY P. LACOUTURE A. JUNQUA. *Mécanique humaine : éléments d'une analyse des gestes sportifs en deux dimensions*. Edition Revue EPS, Paris, 1994.
- [3] J. DUBOY A. JUNQUA P. LACOUTURE. L'introduction des concepts de la mécanique dans l'analyse des gestes athlétiques. la contribution de deux précurseurs : E.j. marey et g. demenÿ. *Science et motricité*, 18:35-44, 1992.
- [4] P. LACOUTURE A. JUNQUA. Plate-forme de forces et analyse du geste sportif. *Science et motricité*, 15:41-51, 1991.
- [5] A. MOUAHID. *Analyse dynamique et cinématique des sauts verticaux; aspects théoriques et difficultés de la mesure*. PhD thesis, Université de Poitiers, Décembre 1992.
- [6] B. TISON. *Application de la radiologie et de la mécanique à l'étude des mouvements articulaires*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, Février 1981.
- [7] G. CURRIE D. RAFFERTY G. DUNCAN F. BELL A.L. EVANS. Measurement of gait by accelerometer and walkway : a comparison study. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 30:669-670, November 1992.
- [8] B. KOOPMAN H.J. GROOTENBOER H.J. DEJONGH. An inverse dynamics model for the analysis, reconstruction and prediction of bipedal walking. *Journal of Biomechanics*, 28(11):1369-1376, 1995.
- [9] E.Y. CHAO. Justification of triaxial goniometer for the measurement of body movements. *Journal of Biomechanics*, 13:989-1006, 1980.
- [10] N.A. BORGHESE M. Di RIENZO G. FERRIGNO A. PEDOTTI. Elite: a goal oriented vision system for moving objects detection. *Robotica*, 9:275-282, 1991.
- [11] P. CLOUP. *Manuel d'utilisation de SAGA3*. Valenciennes, France, 1996.
- [12] P. CLOUP. *Etude et réalisation d'un système d'analyse gestuelle en trois dimensions par traitement d'images en temps réel*. PhD thesis, Université de Valenciennes, Avril 1989.

- [13] Y. LUO F. J. PERALES LOPEZ J.J. LILLANUEVA PIPAON. An automatic roto-scopy system for human motion based on a biomechanic graphical model. *Computers and Graphics*, 6(4):355-362, 1992.
- [14] J. WANG. *Analyse et suivi de mouvements 3D articulés : application à l'étude du mouvement humain*. PhD thesis, Université de Rennes I, Octobre 1992.
- [15] Y.I. ABDEL-AZIZ H.M. KARARA. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry. In *ASP Symposium on Close-range Photogrammetry, Falls Church, Va.* American Society of Photogrammetry, 1971.
- [16] G.T. MARZAN. *Rational Design for close-range photogrammetry*. PhD thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1975. Xerox University Microfilms.
- [17] H. HATZE. Hight-precision 3-d photogrammetric calibration and object-space reconstruction using a modified dlt approach. *Journal of Biomechanics*, 21(7):533-538, 1988.
- [18] N.R. MILLER R. SHAPIRO T.M. McLAUGHLIN. A technique for obtaining spatial kinematic parameters od segments of biomechanical systems from cinematographic data. *Journal of Biomechanics*, 13:535-547, 1980.
- [19] R. SHAPIRO. Direct linear transformation method for three-dimensional cinematography. *Research Quaterly*, (49):197-205, 1978.
- [20] R. SAN-MARCELINO. *Modélisation du membre supérieur en situation dynamique, mettant en oeuvre des techniques de la robotique, par l'exploitation de données externes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, 1996.
- [21] G.A. WOOD R.N. MARSHALL. The accuracy of the dlt extrapolation in three-dimensional film analysis. *Journal of Biomechanics*, 19:781-785, 1986.
- [22] L. FROSSARD. Principes généraux de la collecte et de l'extraction des résultats en 3 dimensions. un exemple: les évaluations dans le cadre du projet "space foot". Master's thesis, Université de Poitiers, Juin 1994.
- [23] H.J. WOLTRING. Planar control in multi-camera calibration for 3-d gait studies. *Journal of Biomechanics*, 13:39-48, 1980.
- [24] O. COUSSI. Mise en oeuvre du traitement de l'image et d'un logiciel de calcul formel pour l'analyse dynamique en 2-d de la marche humaine. Master's thesis, Université de Poitiers, DEA de Mécanique, 1993.
- [25] D.A. WINTER H. G. SIDWALL D.A. HOBSON. Measurement and reduction of noise in kinematics of locomotion. *Journal of Biomechanics*, 7:157-159, 1974.
- [26] J.C. PEZZACK. An assesment of derivative determining techniques used for motion analysis. *Journal of Biomechanics*, 10:377-382, 1977.

- [27] H. LANSHAMMAR. On practical evaluation of differentiation techniques for human gait analysis. *Journal of Biomechanics*, 15(2):99–105, 1982.
- [28] H. LANSHAMMAR. On precision limits for derivatives numerically calculated from noisy data. *Journal of Biomechanics*, 15(6):459–470, 1982.
- [29] C.L. VAUGHAN. Smoothing and differentiation of displacement-time: an application of splines and digital filtering. *International Journal of Bio-Medical Computing*, 13:375–386, 1982.
- [30] H.J. WOLTRING. On optimal smoothing and derivative estimation from noisy displacement data in biomechanics. *Human Movement Science*, 4:229–245, 1985.
- [31] H.J. WOLTRING. A fortran package for generalized, cross-validatorspline smoothing and differentiation. *Adv. Eng. Software*, 8(2):104–113, 1986.
- [32] C.R. DOHRMANN H.R. BUSBY D.M. TRUJILLO. Smoothing noisy data using dynamic programming and generalized cross-validation. *Transactions of the ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, 110:37–41, 1988.
- [33] R.E. BARR E.K.Y. CHAN. Design and implementation of digital filters for biomedical signal processing. *J. Electrophysiol. Techn.*, 13:73–93, 1986.
- [34] D.A. WINTER. *Biomechanics and motor control of human movement*. Wiley Intersciences, 1990. Second edition.
- [35] S. FIORETTI L. JETTO. Accurate derivative estimation from noisy data: a state-space approach. *Int. J. Systems Sci.*, 20(1):33–53, 1989.
- [36] P. ALLARD J.P. BLANCHI G. GAUTIER R. AISSAOUI. Techniques de lissage et de filtrage de données biomécaniques. *Science et Sports*, 5:27–38, 1990.
- [37] M. D'AMICO G. FERRIGNO. Technique for the evaluation of derivatives from noisy biomechanical displacement data using a model-based bandwidth-selection procedure. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 28:407–415, September 1990.
- [38] M. D'AMICO G. FERRIGNO. Comparison between the more recent techniques for smoothing and derivative assesment in biomechanics. *Med. and Biol. Eng. and Comp.*, 30:193–204, 1992.
- [39] M.L. CORRADINI S. FIORETTI T. LEO. Numerical differentiation in movement analysis: how to standardise the evaluation of techniques. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 31:187–197, March 1993.
- [40] D. MOTTE B.G. BARDY S. ATHENES. A note on data smoothing for movement analysis: the relevance of a non linear method. *Journal of Motot Behavior*, 26(1):51–55, 1994.

- [41] O. COUSSI G. BESSONNET L. FROSSARD P. ALLARD. A solution of the inverse dynamic problem for a 2-d human walking biped : single and double support phases. In *IX World Congress on Theory of Machines and Mecanism, Milan, Italy*, pages 3:2287-2291. IFToMM, 1995.
- [42] O. COUSSI F. BREMAND G. BESSONNET. Wavelet transform and biomechanical data filtering. In *4th International Symposium on 3-D Analysis of Human Movement, Grenoble*, 1996.
- [43] F. MAJID R.R. COIFMAN M.V. WICKERHAUSER. *The Xwpl system Reference Manual*. Yale University Mathematics Department and FMA&H, USA, December 1993.
- [44] P.F. VINT R. HINRICHS. Endpoint error in smoothing and differentiating raw kinematic data : an evaluation of four popular methods. *Journal of Biomechanics*, 29(12):1637-1642, 1996.
- [45] N. BODIN. Transformation en ondelettes - application au filtrage de signaux. Master's thesis, DEA de Mécanique, Université de Poitiers, 1995.
- [46] B. DELYON. Ondelettes orthogonales et biorthogonales. 1985, INRIA, IRISA Rennes, Septembre 1993.
- [47] R.K. JENSEN. Estimation of the biomechanical properties of three body types using a photogrammetric method. *Journal of Biomechanics*, 11:349-358, 1978.
- [48] H. HATZE. A mathematical model for the computational determination of parameter values of anthropomorphic segments. *Journal of Biomechanics*, 13:833-843, 1980.
- [49] V. ZATSIORSKY V. SELUYANOV. The mass and inertia characteristics of the main segments of the human body. *Biomechanics*, VIII:1152-1159, July 1981.
- [50] H.K. HUANG F.R. SUAREZ. Evaluation of cross-sectionnal geometry and mass density distributions of humans and laboratoty animals using computerized tomography. *Journal of Biomechanics*, 16(10):821-832, 1983.
- [51] P.E. MARTIN M. MUNGIOLE M.W. MARZKE J. LONGHILL. The use of magnetic resonance imaging for measuring segment inertial properties. *Journal of Biomechanics*, 22(4):367-376, 1989.
- [52] C.L. VAUGHAN J.G. ANDREWS J.G. HAY. Selection of body segment parameters by optimization methods. *Transactions of the ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, 104:38-44, 1982.
- [53] I. KINGMA H.M. TOUSSAINT M.P. DE LOOZE J.H. VAN DIEEN. Segment inertial parameter evaluation in two anthropometric model by application of a dynamic linked segment model. *Journal of Biomechanics*, 29(5):693-704, 1996.

- [54] R.N. HINRICHS. Regression equations to predict segmental moments of inertia from anthropometric measurements: an extension of the data of chandler et al. (1975). *Journal of Biomechanics*, 18(8):621–624, 1985.
- [55] M.R. YEADON M. MORLOCK. The appropriate use of regression equations for the estimation of segmental inertia parameters. *Journal of Biomechanics*, 22(6/7):683–689, 1989.
- [56] R.N. HINRICHS. Adjustements to the segment center of mass proportions of clausner et al. (1969). *Journal of Biomechanics*, 23(9):949–951, 1990.
- [57] E. GAIGNEBET. Mesure des constantes d'inertie des différentes parties du corps humain. In *Actes du symposium Sport et Technologies Nouvelles Lyon*, pages 255–259. Secrétariat d'état auprès du premier ministre chargé de la jeunesse et des sports, 1988.
- [58] A.B. THORNTON-TRUMP R. DAHER. The prediction of reaction forces from gait data. *Journal of Biomechanics*, 8:15–19, 1975.
- [59] S.Y. ALESHINSKY V.M. ZATSIORSKY. Human locomotion in space analysed biomechanically through a multi-link chain model. *Journal of Biomechanics*, 11:101–108, 1978.
- [60] S. ONYSHKO D.A. WINTER. A mathematical model for the dynamics of human locomotion. *Journal of Biomechanics*, 13:361–368, 1980.
- [61] D.E. HARDT R.W. MANN. A five body-three dynamic analysis of walking. *Journal of Biomechanics*, 13:455–457, 1980.
- [62] A.G. PATRIARCO R.W. MANN S.R. SIMON J.M. MANSOUR. An evaluation of the approaches of optimization models in the prediction of muscle forces during human gait. *Journal of Biomechanics*, 14(8):513–525, 1981.
- [63] M.R. RAMEY A.T. YANG. A simulation procedure for the human motion studies. *Journal of Biomechanics*, 14(4):203–213, 1981.
- [64] S. SIEGLER R. SELIKTAR W. HYMAN. Simulation of human gait with the aid of a simple mechanical model. *Journal of Biomechanics*, 15(6):415–425, 1982.
- [65] R.N. MARSHALL R.K. JENSEN G.A. WOOD. A general newtonian simulation of an n-segment open chain model. *Journal of Biomechanics*, 18(5):359–367, 1985.
- [66] M.S. JU J.M. MANSOUR. Simulation of the double limb support phase of human gait. *Transactions of the ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, 110:223–229, August 1988.
- [67] M.G. PANDY N. BERME. A numerical method for simulating the dynamics of human walking. *Journal of Biomechanics*, 21(12):1043–1051, 1988.

- [68] M.G. PANDY N. BERME. Synthesis of human walking: a planar model for single support. *Journal of Biomechanics*, 21(12):1053-1060, 1988.
- [69] J. APKARIAN S. NAUMANN B. CAIRNS. A three-dimensional kinematic and dynamic model of the lower limb. *Journal of Biomechanics*, 22(2):143-155, 1989.
- [70] A. CAPPOZZO. Three-dimensional analysis of human walking: experimental methods and associated artifacts. *Human Movement Science*, 10:589-602, 1991.
- [71] Z. LADIN G. WU. Combining position and acceleration measurements for joint force estimation. *Journal of Biomechanics*, 24(12):1173-1187, 1991.
- [72] H.C. SCHAMHARDT B.M. NIGG M.F. BOBBERT. Calculation of vertical ground reaction force estimates during running from positional data. *Journal of Biomechanics*, 24(12):1095-1105, 1991.
- [73] AT L. HOF. An explicit expression for the moment in multibody systems. *Journal of Biomechanics*, 25(10):1209-1211, 1992.
- [74] C.L. VAUGHAN B.L. DAVIS J.C. O'CONNOR. *Dynamics of human gait*. Human Kinetic publishers, 1992.
- [75] E.M. LAASSEL. *Analyse et modélisation multidimensionnelles de la marche humaine*. PhD thesis, Université de Valenciennes, Octobre 1992.
- [76] F. BARBIER. *Modélisation biomécanique du corps humain et analyse de la marche normale et pathologique - Application à la rééducation*. PhD thesis, Université de Valenciennes, Juin 1994.
- [77] L. CHEZE. *Contribution à l'étude cinématique et dynamique in vivo de structures osseuses humaines par l'exploitation de données externes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, Mars 1993.
- [78] P. GIGNOUX. *Etude tridimensionnelle des sollicitations mécaniques d'une hanche en mouvement*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, Janvier 1994.
- [79] L. CHEZE J. DIMNET. *Cahier de Biomécanique III - Modèles et modélisation en Biomécanique*, chapter La robotique et l'étude des mouvements humains. INRS - Société de Biomécanique, Mars 1991.
- [80] J. DENAVIT R.S. HARTENBERG. A kinematic notation for lower pair mechanism based on matrices. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 22:215-221, 1955.
- [81] V. KROMER. *Analyse des forces musculaires au cours de la marche. Approche en corps rigide et simulation en mécanismes plans flexibles par éléments finis*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Mai 1993.
- [82] A. PEDOTTI V.V. KRISHNAN L. STARK. Optimization of muscle-force sequencing in human locomotion. *Mathematical Biosciences*, 38:57-76, 1978.

- [83] D.T. DAVY M.L. AUDU. A dynamic optimization technique for predicting muscle forces in the swing phase of gait. *Journal of Biomechanics*, 20(2):187–201, 1987.
- [84] J. LOIZEAU B. LANDJERIT P. ALLARD M. DUHAIME. Comportement dynamique de la hanche appareillée d'une prothèse totale: efforts exercés sur l'implant fémoral. *Science et motricité*, 27:31–41, 1995.
- [85] F. PRINCE P. ALLARD B.J. McFADYEN R. AISSAOUI. Comparison of gait between young adults fitted with the space foot and nondisabled persons. *Arch. Phys. Med. Rehabil.*, 74:1369–1376, 1993.
- [86] P. ALLARD F. TRUDEAU F. PRINCE J. DANSEREAU H. LABELLE M. DUHAIME. Modelling and gait evaluation of asymmetrical-keel foot prosthesis. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 33:2–7, 1995.
- [87] A. JUNQUA P. ALLARD R. AISSAOUI O. COUSSI. La marche humaine: aspects motivateurs et psychomécaniques. *Journal de psychodynamique expérimentale*, 69:1–1, 2020.
- [88] P. ALLARD R. LACHANCE R. AISSAOUI M. DUHAIME. Simultaneous bilateral 3-d able-bodied gait. *Human Movement Science*, 15:327–346, 1996.
- [89] A. MORECKI. Biomechanical modelling of human walking. In *IX World Congress on Theory of Machines and Mecanism, Milano*, pages 3:2400–2404. IFToMM, 1995.
- [90] K.A. AN E.Y.S. CHAO K.R. KAUFMAN. A comparison of intersegmental joint dynamics to isokinetic dynamometer measurements. *Journal of Biomechanics*, 28(10):1243–1256, 1995.
- [91] A.J. VAN DEN BOGERT L. READ B.M. NIGG. A method for inverse dynamic analysis using accelerometry. *Journal of Biomechanics*, 29(7):949–954, 1996.
- [92] J.J. ENG D.A. WINTER. Kinetic analysis of the lower limbs during walking: what information can be gained form a three-dimensional model? *Journal of Biomechanics*, 28(6):753–758, 1995.
- [93] C.L. VAUGHAN J.G. HAY J.G. ANDREW. Closed loop problems in biomechanics. part i - a classification system. *Journal of Biomechanics*, 15(3):197–200, 1982.
- [94] R.J. GREGOR P.R. CAVANAGH M. LAFORTUNE. Knee flexor moments during propulsion in cycling - a creative solution to lombard's paradox. *Journal of Biomechanics*, 18(5):307–316, 1985.
- [95] M.O. ERICSON R. NISSEL. Tibiofemoral joint forces during ergometer cycling. *The american journal of sports medicine*, 14(4):285–290, 1986.
- [96] M.O. ERICSON. Mechanical muscular power output and work during ergometer cycling at different work loads and speeds. *Eur. J. Appl. Physiol.*, 57:382–387, 1988.

- [97] R. WELLS M. MORISSEY R. HUGHSON. Internal work and physiological responses during concentric and eccentric cycle ergometry. *Eur. J. Appl. Physiol.*, 55:295-301, 1986.
- [98] G.J. VAN INGEN SCHENAU W.W.L.M. VAN WOENSEL P.J.M. BOOTS R.W. SNACKERS G. DE GROOT. Determination and interpretation of mechanical power in human movement: application to ergometer cycling. *Eur. J. Appl. Physiol.*, 61:11-19, 1990.
- [99] G.J. VAN INGEN SCHENAU P.J.M. BOOTS G. DE GROOT R.W. SNACKERS W.W.L.M. VAN WOENSEL. The constrained control of force and position in multi-joint movements. *Eur. J. Appl. Physiol.*, 61:11-19, 1990.
- [100] M.L. HULL M. JORGE. A method for biomechanical analysis of bicycle pedalling. *Journal of Biomechanics*, 18(9):631-644, 1985.
- [101] R. REDFIELD M.L. HULL. On the relation between joint moments and pedalling rates at constant power in bicycling. *Journal of Biomechanics*, 19(4):317-329, 1986.
- [102] R. REDFIELD M.L. HULL. Prediction of pedal forces in bicycling using optimization methods. *Journal of Biomechanics*, 19(4):523-540, 1986.
- [103] M.L. HULL H.K. GONZALES R. REDFIELD. Optimization of pedalling rate in cycling using a muscle stress-based objective function. *International journal of sport biomechanics*, 4:1-20, 1988.
- [104] H.K. GONZALES M.L. HULL. Multivariable optimization of cycling biomechanics. *Journal of Biomechanics*, 22(11/12):1151-1161, 1989.
- [105] M.L. HULL S. KAUTZ A. BEARD. An angular velocity profile in cycling derived from mechanical energy analysis. *Journal of Biomechanics*, 24(7):557-586, 1991.
- [106] S. KAUTZ M.L. HULL. A theoretical basis for interpreting the force applied to the pedal in cycling. *Journal of Biomechanics*, 26(2):155-165, 1993.
- [107] S. KAUTZ M.L. HULL R.R. NEPTUNE. A comparison of muscular mechanical energy expenditure and internal work in cycling. *Journal of Biomechanics*, 27(12):1459-1467, 1994.
- [108] T. BOYD M.L. HULL D. WOOTTEN. An improved accuracy six-load component pedal dynamometer for cycling. *Journal of Biomechanics*, 29(8):1105-1110, 1996.
- [109] B.J. FREGLY F.E. ZAJAC. A state-space analysis of mechanical energy generation, absorption, and transfer during pedalling. *Journal of Biomechanics*, 29(1):81-90, 1996.
- [110] W. KHALIL J.F. KLEINFINGER. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Conf. on Robotics and Automation*, pages 1174-1180, San-Francisco, 1986. IEEE.

- [111] J.Y.S. LUH M.W. WALKER R.C.P. PAUL. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *Transactions of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and control*, 102(2):69-76, 1980.
- [112] E. DOMBRE W. KHALIL. *Modélisation et commande des robots*. Hermès, 1988.
- [113] W. KHALIL. *SYMORO Software*. ECN Nantes, France, ecn nantes edition, 1988.
- [114] P. SCHERRER. *Précis de physiologie du travail*, chapter La locomotion. Masson, 1980.
- [115] J. WAGNER C. CARLIER. *Cahier d'enseignement de la SOFCOT*, chapter Bio-mécanique de la marche. Expansion scientifique française.
- [116] C.L. VAUGHAN J.G. HAY J.G. ANDREWS. Closed loop problems in biomechanics. part ii - an optimization approach. *Journal of Biomechanics*, 15(3):201-210, 1982.
- [117] D.A. WINTER A.O. QUANBURY G.D. REIMER. Analysis of instantaneous energy of normal gait. *Journal of Biomechanics*, 9:253-257, 1976.
- [118] D.A. WINTER. A new definition of mechanical work done in human movement. *Journal of Applied Physiology: Respiratory, Environmental and exercise Physiology*, 46:79-83, 1979.
- [119] D. GORDON E. ROBERTSON D.A. WINTER. Mechanical energy generation, absorption and transfer amongst segments during walking. *Journal of Biomechanics*, 13:845-854, 1980.
- [120] M.R. PIERRYNOWSKI R.W. NORMAN D.A. WINTER. Mechanical energy analyses of the human during load carriage on a treadmill. *Ergonomics*, 24(1):1-14, 1981.
- [121] D.A. WINTER. Moments of force and mechanical power in jogging. *Journal of Biomechanics*, 16(1):91-97, 1983.
- [122] J.M. MANSOUR M.D. LESH M.D. NOWAK S.R. SIMON. A three dimensional multi-segmental analysis of the energetics of normal and pathological gait. *Journal of Biomechanics*, 15(1):51-59, 1982.
- [123] R.G. BURDETT G.S. SKRINAR S.R. SIMON. Comparison of mechanical work and metabolic energy consumption during normal gait. *Journal of Orthopaedic Research*, 1:63-72, 1987.
- [124] H. IIDA T. YAMAMURO. Kinetic analysis of the center of gravity of the human body in normal and pathological gaits. *Journal of Biomechanics*, 20(10):987-995, 1987.
- [125] G.J. VAN INGEN SCHENAU P.R. CAVANAGH. Power equations in endurance sports. *Journal of Biomechanics*, 23(9):865-881, 1990.

- [126] G.E. CALDWELL L.W. FORRESTER. Estimates of mechanical work and energy transfers: demonstration of a rigid body power model of the recovery leg in gait. *Medicine and Science in Sport and Exercise*, 24(12):1396–1412, 1992.
- [127] F. LEPLANQUAIS. *Contribution à l'analyse mécanique des allures de la locomotion humaine. Caractérisation de tâches corporelles diverses à l'aide des travaux des efforts internes*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1995.
- [128] R. AISSAOUI P. ALLARD A. JUNQUA L. FROSSARD M. DUHAIME. Internal work estimation in three-dimensional gait analysis. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 34:467–471, 1997.
- [129] O. COUSSI P. LACOUTURE G. BESSONNET. Comparaison de deux méthodes de calcul du travail des forces internes pour la flexion-extension. In *16<sup>e</sup> Congrès Canadien de Mécanique Appliquée, Québec, Canada*, 1997.
- [130] O. COUSSI G. BESSONNET. Modes d'utilisation des données d'une plate-forme de force pour le calcul des efforts articulaires pendant la marche. In *XIX Congrès de la Société de Biomécanique, Clermond-Ferrand*, page C31, 1994.
- [131] O. COUSSI G. BESSONNET J.P. LALLEMAND. De l'expérimentation au calcul des couples moteurs pour le bipède humain plan. In *Journées Locomotion du pôle SARTA du GR Automatique du CNRS, Fontenay-aux-roses*, 1993.
- [132] G. BESSONNET O. COUSSI A. JUNQUA P. LACOUTURE F. LEPLANQUAIS. Analyse de la dynamique interne des gestes sportifs. In *Colloque Recherche et Sport du CNRS, Nantes*, 1996.
- [133] O. COUSSI A. RIQUET P. LACOUTURE G. BESSONNET. Une détermination optimale des couples des couples actionneurs dans le mouvement de pédalage. In *13<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique, Poitiers*, 1997.
- [134] P. LASCAUD R. THEODOR. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. 1: Méthodes directes*. MASSON, 1993.
- [135] G. STRANG. *Linear algebra and its applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1986.
- [136] M. HAMBLI. *Contribution à une analyse mécanique de la mesure des capacités physiques des individus: cas des épreuves sur ergocycle*. Thèse de doctorat STAPS, Université de Poitiers, Avril 1997.
- [137] A. LECLERC. Les épreuves force-vitesse sur ergocycle revisitées théoriquement; contribution à la mise au point d'un protocole expérimental basé sur le suivi des travaux des forces internes. Master's thesis, Université de Poitiers, DEA STAPS, 1996.
- [138] R.N. MARSHALL G.A. WOOD L.S. JENNINGS. Performance objectives in human movement: a review and application to the stance phase of normal walking. *Human Movement Science*, 8:571–594, 1989.

- [139] O. COUSSI F. DANES G. BESSONNET. Dynamic simulation of human flexion-extension movement using optimal control theory. In *3rd International Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomechanical Engineering, Barcelona, Spain, 1997*.
- [140] G. BESSONNET. *Optimisation dynamique des mouvements point à points de robots manipulateurs*. PhD thesis, Université de Poitiers, Février 1992.
- [141] C.K. CHOW D.H. JACOBSON. Studies of human locomotion via optimal programming. *Mathematical Biosciences*, 10:239–306, 1971.
- [142] E.Y. CHAO K. RIM. Application of optimization principles in determining the applied moments in human joints during gait. *Journal of Biomechanics*, 6:497–510, 1973.
- [143] M.A. TOWNSEND A. SEIREG. The synthesis of bipedal locomotion. *Journal of Biomechanics*, 5:71–83, 1972.
- [144] M.A. TOWNSEND A. SEIREG. Effect of model complexity and gait criteria on the synthesis of bipedal locomotion.
- [145] M.A. AYOUB M.M. AYOUB A.G. WALVEKAR. A biomechanical model for the upper extremity using optimization techniques. *Human Factors*, 16(6):585–594, 1974.
- [146] T.K. GHOSH W.H. BOYKIN. Analytic determination of an optimal human motion. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 19(2):327–346, 1976.
- [147] H. HATZE. The complete optimization of a human motion. *Mathematical Biosciences*, 28:99–135, 1976.
- [148] J.L. HUNT V. LATHAM. Control of biped locomotion. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 16:250–255, 1978.
- [149] V. YEN and L. NAGURKA. Suboptimal trajectory planning of a five-link human locomotion model. In *ASME Winter Annual Meeting on Biomechanics of Normal and Prosthetic gait, Boston*, pages 17–22. ASME, 1987.
- [150] P. BOURASSA Y. MOREL B. MARCOS. Human locomotion via optimal programming. *Biomechanics*, 5a(IX-A):673–677, 1985.
- [151] M.G. PANDY F.C. ANDERSON D.G. HULL. A parameter optimization approach for the optimal control of large-scale musculoskeletal systems. *Transactions of the ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, 114:450–460, November 1992.
- [152] L.S. CHOU S.M. SONG L.F. DRAGANICH. Predicting the kinematics and kinetics of gait based on the optimum trajectory of the swing limb. *Journal of Biomechanics*, 4:377–385, 1995.

- [153] M. ZEFRAN V. KUMAR. Optimal control of systems with unilateral constraints. pages 2695–2700. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995.
- [154] M. ZEFRAN V. KUMAR J. DESAI E. HENIS. Two-arm manipulation : What can we learn by studying humans. In *Proc. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS'95*, pages 70–75. IEEE, 1995.
- [155] M.N. OGUZTORELI R.B. STEIN D. POPOVIC. Optimal control for an above-knee prosthesis with two degrees of freedom. *Journal of Biomechanics*, 28(1):89–98, 1995.
- [156] M. RENAUD J.Y. FOURQUET. Time-optimal motions of robot manipulators including dynamics. *Robotics Review*, 2:225–259, 1992.
- [157] G. BESSONNET J.P. LALLEMAND. Optimal trajectories of robots arms minimizing constrained actuators and traveling time. In *International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 112–117, Cincinnati, USA, May 1990. IEEE.
- [158] Y. CHEN A.A. DESROCHERS. A proof of the structure of the minimum time control law of robotic manipulators using hamiltonian formulation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3):388–393, 1990.
- [159] G. BESSONNET J.P. LALLEMAND. Optimal motions of robot manipulators with bounded actuator powers. In *Eight World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, volume 2, pages 413–416, Pragues, 1991. IFToMM.
- [160] G. BESSONNET J.P. LALLEMAND. Planning of optimal free paths of robotic manipulators with bounds on dynamic forces. In *International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 270–275, Atlanta, USA, May 1993. IEEE.
- [161] A. BENHIMA. *Contribution à l'optimisation dynamique de mouvements de robots-manipulateurs avec génération automatique des équations du problème optimal*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1988.
- [162] L. PONTRYAGIN V. BOLTJANSKY A. GAMKRELIDZE E. MISHCHENKO. *The Mathematical Theory of Optimal Process*. Wiley Interscience, 1962.
- [163] A.E. BRYSON Y.C HO. *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing Corporation, 1969.
- [164] P. SARDAIN. *HESMINA : logiciel de calcul formel pour l'optimisation dynamique*. Laboratoire de Mécanique des Solides UMR CNRS 6610, Université de Poitiers, 1996.
- [165] G. BESSONNET A.D. JUTARD. Optimal free path planning of robot arms submitted to phase constraints. In *Third International Conference on Robotics and Manufacturing*, pages 51–56, Cancun, Mexico, June 14-16 1995. IASTED.

- [166] A.D. JUTARD-MALINGE. *Optimisation dynamique de mouvements de robots manipulateurs aux évolutions partiellement spécifiées et à état final contraint*. PhD thesis, Université de Poitiers, Novembre 1996.
- [167] F.X. ESPIAU. Modélisation de la marche humaine par réseaux d'ondelettes. Technical report, INRIA Rhône-Alpes, 1996.
- [168] Q. ZHANG. Regressor selection and wavelet network construction. Technical Report 1967, INRIA, Rennes, April 1993.
- [169] S.G. MALLAT. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [170] S.G. MALLAT. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L_2(\mathbb{R})$ . *Transaction Am. Math. Soc.*, 315:69–87, 1989.
- [171] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs*. 1990.
- [172] M. BOURGES-SEVENIER. Réalisation d'une bibliothèque c de fonctions ondelettes. 2362, INRIA, IRISA Rennes, Septembre 1994.
- [173] M. BOURGES-SEVENIER. *WaveLib 1.2 User's Guide*. IRISA, Rennes, inria edition, 1994.
- [174] I. DAUBECHIE. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40:909–996, 1988.
- [175] I. DAUBECHIE. Ten lectures on wavelets. In *CBMS-NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics*. SIAM, Capital City Press, Montpelier, Vermont, 1992.
- [176] J.P. KEENER. *Principles of applied Mathematics, Transformation and approximation*. Addison-Webley Publishing Compagny, Redwood City California, 1988.



## Liste des figures

I.1	La première plate-forme de force . . . . .	17
I.2	Evolution de l'effort normal . . . . .	17
I.3	Etude cinématographique et dynamique d'un pas de marche . . . . .	18
I.4	Contact unilatéral et plan . . . . .	19
I.5	Système d'acquisition du mouvement de Montréal . . . . .	23
I.6	Etalonnage d'un système d'analyse du mouvement . . . . .	24
I.7	Le signal de Pezzack . . . . .	27
I.8	Courbe des résidus pour le signal de Pezzack . . . . .	31
I.9	Représentation de l'ondelette de Haar . . . . .	35
I.10	Filtrage ondelette d'un signal 8 points . . . . .	37
I.11	Vitesses : (1)Ondelette, (2)Butterworth, (3)GCV . . . . .	39
I.12	Résultats « bruts » pour la vitesse . . . . .	39
I.13	Accélérations : (1)Ondelette, (2)Butterworth, (3)GCV . . . . .	40
I.14	Résultats « bruts » pour l'accélération . . . . .	40
I.15	Comparaison entre accélération calculée (1) et mesurée (2) . . . . .	41
I.16	Sujet avec marqueurs . . . . .	43
II.1	Chaîne simple ouverte . . . . .	56
II.2	Paramétrage de Denavit-Hartenberg . . . . .	57
II.3	Chaîne simple fermée . . . . .	64
II.4	Mécanismes à 4 barres plan . . . . .	65
II.5	Mécanismes à 4 barres plan avec une liaison fictive . . . . .	66
II.6	Système marcheur sans pieds . . . . .	67
II.7	Système marcheur avec pieds . . . . .	68
III.1	Modèle cinématique pour la flexion-extension . . . . .	79
III.2	Comparaison entre force de réaction au sol calculée $F_c$ et mesurée $F_m$ pour le mouvement de flexion-extension . . . . .	80
III.3	Couples actionneurs articulaires pour le mouvement de flexion-extension	81

III.4	Evolution des puissances articulaires $P_i$ au cours du mouvement de flexion-extension . . . . .	82
III.5	Evolution du travail des efforts internes $W^{(2)}$ , du travail total absolu $W^{(3)}$ et du travail moteur positif $W^{(4)}$ . . . . .	83
III.6	Evolution de l'énergie cinétique . . . . .	84
III.7	Evolution de l'énergie potentielle . . . . .	84
III.8	Travail des efforts internes pour le mouvement de flexion-extension : $W^1$ et $W^2$ . . . . .	85
III.9	Modèle plan à 7 corps . . . . .	86
III.10	Modules des forces de liaisons comparés à la force de réaction au sol mesurée par $PF1$ pour le sujet 1 . . . . .	88
III.11	Couples actionneurs pour le sujet 1 . . . . .	89
III.12	Couples actionneurs en paramétrage relatif pour un filtrage de TYPE 1 . . . . .	91
III.13	Couples actionneurs en paramétrage relatif pour un filtrage de TYPE 2 . . . . .	91
III.14	Couples actionneurs en paramétrage relatif pour un filtrage de TYPE 3 . . . . .	92
III.15	Composantes $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ pour un filtrage de TYPE 1 . . . . .	93
III.16	Composantes $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ pour un filtrage de TYPE 2 . . . . .	93
III.17	Composantes $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ pour un filtrage de TYPE 3 . . . . .	94
III.18	Composantes $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}), i = 1, \dots, 7$ pour un filtrage de TYPE 1 . . . . .	94
III.19	Composantes $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}), i = 1, \dots, 7$ pour un filtrage de TYPE 2 . . . . .	95
III.20	Composantes $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}), i = 1, \dots, 7$ pour un filtrage de TYPE 3 . . . . .	95
III.21	Nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ . . . . .	97
III.22	Modèle plan à 7 corps en coordonnées absolues . . . . .	99
III.23	Couples actionneurs pour un paramétrage absolu et un filtrage de TYPE 1100 . . . . .	
III.24	Couples actionneurs pour un paramétrage absolu et un filtrage de TYPE 2100 . . . . .	
III.25	Couples actionneurs pour un paramétrage absolu et un filtrage de TYPE 3101 . . . . .	
III.26	Composantes $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ pour un filtrage de TYPE 1 . . . . .	102
III.27	Composantes $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ pour un filtrage de TYPE 2 . . . . .	102
III.28	Composantes $(\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}})_i$ pour un filtrage de TYPE 3 . . . . .	103
III.29	Composantes $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}), i = 1, \dots, 7$ pour un filtrage de TYPE 1 . . . . .	104
III.30	Composantes $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}), i = 1, \dots, 7$ pour un filtrage de TYPE 2 . . . . .	104
III.31	Composantes $B_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}), i = 1, \dots, 7$ pour un filtrage de TYPE 3 . . . . .	105
III.32	Nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ en coordonnées absolues . . . . .	106
III.33	Schématisation du mouvement de pédalage . . . . .	107
III.34	Pédalage : paramétrage absolu d'un modèle plan . . . . .	108
III.35	Couples actionneurs obtenus par Pseudo-Inverse . . . . .	112

III.36	Forces de liaison pieds/pédales obtenues par Pseudo-Inverse . . . . .	112
III.37	Evolution de $J$ en fonction du coefficient de pondération $w$ . . . . .	115
III.38	Evolution de $W^{(2)}$ en fonction du coefficient de pondération $w$ . . . . .	115
III.39	Couples actionneurs obtenus par Inverse Généralisée pour $w = 7$ . . . . .	116
III.40	Forces de liaison pieds/pédale obtenues par Inverse Généralisée pour $w = 7117$	
III.41	Couples actionneurs obtenus par Inverse Généralisée pour $w = 100$ . . . . .	118
III.42	Forces de liaison pieds/pédale obtenues par Inverse Généralisée pour $w =$ 100 . . . . .	118
III.43	Travaux locaux dans une solution obtenue par Pseudo-Inverse . . . . .	119
III.44	Travaux locaux obtenus par Inverse Généralisée pour $w = 7$ . . . . .	120
III.45	Travaux locaux obtenus par Inverse Généralisée pour $w = 100$ . . . . .	120
III.46	Evolution de $J$ pour différents modes d'optimisation . . . . .	121
IV.1	Modèle cinématique . . . . .	138
IV.2	Paramètres articulaires du mouvement observé . . . . .	139
IV.3	Vitesses articulaires du mouvement observé . . . . .	139
IV.4	Couples actionneurs du mouvement observé . . . . .	140
IV.5	Puissances délivrées lors du mouvement observé . . . . .	140
IV.6	Paramètres articulaires du mouvement optimisé . . . . .	141
IV.7	Vitesses articulaires du mouvement optimisé . . . . .	142
IV.8	Couples actionneurs du mouvement optimisé . . . . .	143
IV.9	Puissance délivrées lors du mouvement optimisé . . . . .	143
IV.10	Paramètres articulaires du mouvement optimisé soumis à des contraintes	145
IV.11	Vitesses articulaires du mouvement optimisé soumis à des contraintes . .	145
IV.12	Couples actionneurs du mouvement optimal contraint . . . . .	146
IV.13	Couples actionneurs lors du mouvement optimal contraint . . . . .	147
IV.14	Evolution du critère $J$ : mouvements optimisés contraint et non contraint, mouvement réel . . . . .	148
IV.15	Evolution des travaux mécaniques . . . . .	148
IV.16	Evolution des travaux mécaniques . . . . .	149
A.1	Représentation graphique des sous-espaces $V_i$ et $W_i$ . . . . .	161
A.2	Ondelette de Daubechie $\phi$ et $\psi$ à une échelle donnée . . . . .	163
D.1	Paramètres articulaires du mouvement de flexion-extension . . . . .	185
D.2	Evolutions cinématiques du mouvement de flexion-extension . . . . .	186
D.3	Paramètres articulaires du mouvement de marche . . . . .	187
D.4	Evolutions cinématiques du mouvement de marche . . . . .	188

D.5	Paramètres articulaires du mouvement de marche TYPE 1 . . . . .	189
D.6	Evolutions cinématiques du mouvement de marche TYPE 1 . . . . .	190
D.7	Paramètres articulaires du mouvement de marche TYPE 2 . . . . .	191
D.8	Evolutions cinématiques du mouvement de marche TYPE 2 . . . . .	192
D.9	Paramètres articulaires du mouvement de marche TYPE 3 . . . . .	193
D.10	Evolutions cinématiques du mouvement de marche TYPE 3 . . . . .	194
D.11	Paramètres articulaires pour le mouvement de pédalage . . . . .	195
D.12	Evolutions cinématiques pour le mouvement de pédalage . . . . .	196
G.1	Représentation des forces de liaison aux pédales . . . . .	202

## Liste des tableaux

I.1	Numéros et emplacements des marqueurs anatomiques . . . . .	44
IV.1	Caractéristiques du sujet . . . . .	138
A.1	Coefficients d'ondelette de Daubechie . . . . .	162
D.1	Synthèse des différents résultats de données cinématiques . . . . .	184
E.1	Caractéristiques du sujet pour le mouvement de flexion-extension . . . . .	197
E.2	Caractéristiques anthropométriques du sujet 1 pour l'étude de la marche	198
E.3	Caractéristiques anthropométriques du sujet 2 pour l'étude de la marche	198
E.4	Caractéristiques anthropométriques du pédaleur . . . . .	198



# Table des matières

Avant-propos	5
Notations générales	7
Introduction	9
<b>I Etude expérimentale du mouvement : acquisition et traitement des données</b>	<b>13</b>
I.1 Introduction	16
I.2 Les techniques expérimentales d'analyse du mouvement	16
I.2.1 Un aspect historique marquant	16
I.2.2 Analyse dynamographique	18
I.2.3 Analyse cinématique	21
I.2.4 Principe de la reconstruction 3-D par la DLT	24
I.3 Le traitement des données cinématiques	25
I.3.1 Position du problème	25
I.3.2 Etat de l'art	27
I.3.3 Une technique nouvelle en analyse du mouvement : la décomposition en ondelettes	34
I.3.3.a Motivations	34
I.3.3.b Exemple simple de filtrage	35
I.3.3.c Résultats avec les données de Pezzack	38
I.4 Les données anthropométriques	42
I.5 Conclusion : un protocole expérimental	43
<b>II Détermination des efforts de liaison. Coûts énergétiques.</b>	<b>45</b>
II.1 Position du problème	48
II.2 Revue bibliographique	49
II.3 Paramétrage d'une structure articulée	55

II.3.1	Matrice de transformation homogène . . . . .	55
II.3.2	Paramétrage de Denavit-Hartenberg . . . . .	56
II.4	Problème dynamique inverse . . . . .	58
II.4.1	Introduction . . . . .	58
II.4.2	Formalisme de Newton-Euler : méthode de Luh, Walker et Paul . . .	59
II.4.2.a	Cinématique . . . . .	59
II.4.2.b	Dynamique . . . . .	59
II.4.3	Formulation des modèles dynamiques par code de calcul symbolique	62
II.5	Dynamique des systèmes à chaînes cinématiques fermées . . . . .	62
II.5.1	Introduction . . . . .	63
II.5.2	Position du problème . . . . .	63
II.5.3	Exemples . . . . .	64
II.5.3.a	Mécanismes à 4 barres . . . . .	65
II.5.3.b	Système marcheur sans pieds . . . . .	66
II.5.3.c	Système marcheur avec pieds . . . . .	67
II.5.4	Modes d'utilisation des données d'une plate-forme de force . . . . .	69
II.5.5	Autre méthode de résolution . . . . .	70
II.6	Etude énergétique . . . . .	71
II.6.1	Introduction . . . . .	71
II.6.2	Quelques aspects bibliographiques . . . . .	71
II.6.3	Méthode globale de calcul du travail des efforts intérieurs . . . . .	72
II.6.4	Puissances locales et bilans énergétiques . . . . .	74
II.7	Conclusion . . . . .	75
<b>III</b>	<b>Etude de trois mouvements de référence</b>	<b>77</b>
III.1	Introduction . . . . .	78
III.2	Un mouvement simple : la flexion-extension . . . . .	78
III.2.1	Cinématique du mouvement de flexion-extension . . . . .	79
III.2.2	Efforts de liaison . . . . .	80
III.2.3	Bilan énergétique . . . . .	81
III.2.3.a	Travail des efforts internes évalués sur la base des puissances articulaires . . . . .	82
III.2.3.b	Travail des efforts internes calculé par application du théorème de l'énergie mécanique . . . . .	83
III.3	La marche dans le plan sagittal . . . . .	86
III.3.1	Un premier ensemble de résultats concernant les efforts de liaison et les couples actionneurs . . . . .	87

III.3.2	Sensibilité du modèle dynamique au paramétrage du système . . . .	89
III.3.2.a	Principe de l'étude . . . . .	89
III.3.2.b	Etude réalisée sur la base d'un modèle à paramétrage relatif	90
III.3.2.c	Etude réalisée sur la base d'un modèle dynamique à paramétrage absolu . . . . .	97
III.4	Le pédalage sur ergocycle . . . . .	107
III.4.1	Introduction . . . . .	107
III.4.2	Saisie du mouvement et modèle cinématique . . . . .	108
III.4.3	Principe de résolution . . . . .	109
III.4.4	Résultats pour les couples actionneurs et les forces d'interactions pieds/pédales par Pseudo-Inverse . . . . .	111
III.4.5	Résultats pour une optimisation privilégiant le sens d'action de certaines composantes . . . . .	113
III.4.5.a	Principe . . . . .	113
III.4.5.b	Evolution de $J$ et de $W^{(2)}$ en fonction de $w$ . . . . .	114
III.4.5.c	Couples actionneurs et forces d'interactions pieds/pédales pour $w = 7$ . . . . .	116
III.4.5.d	Couples actionneurs et forces d'interactions pieds/pédales pour $w = 100$ . . . . .	117
III.4.6	Bilans énergétiques . . . . .	119
III.5	Discussion . . . . .	121
<b>IV</b>	<b>Optimisation dynamique d'un mouvement de flexion-extension</b>	<b>125</b>
IV.1	Introduction . . . . .	127
IV.2	Bibliographie . . . . .	128
IV.3	Modèle dynamique . . . . .	131
IV.3.1	Formalisme lagrangien . . . . .	131
IV.3.2	Formulation hamiltonienne . . . . .	132
IV.3.3	Quelques remarques . . . . .	134
IV.4	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	134
IV.4.1	Formulation du problème . . . . .	135
IV.4.2	Condition nécessaire d'optimalité énoncée par le Principe du maximum de Pontriaguine . . . . .	135
IV.5	Traitements numériques . . . . .	136
IV.6	Etude du mouvement de flexion-extension . . . . .	136

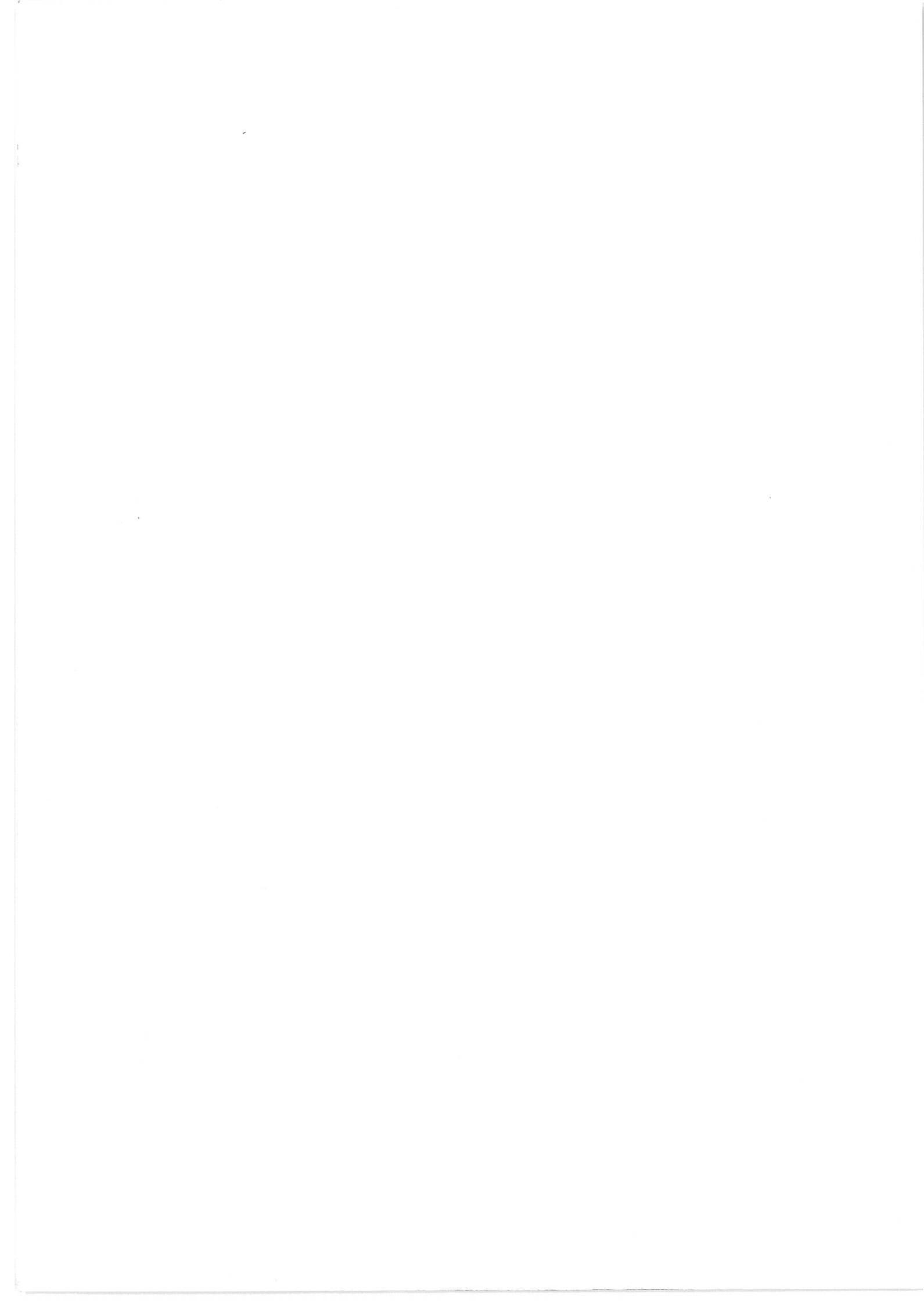
IV.6.1	Introduction . . . . .	136
IV.6.2	Le modèle utilisé . . . . .	137
IV.6.3	Etude du mouvement de flexion-extension observé . . . . .	138
IV.6.4	Optimisation d'un mouvement de flexion-extension . . . . .	141
IV.6.5	Optimisation dynamique du mouvement de flexion-extension soumis à des contraintes . . . . .	144
IV.6.6	Bilans énergétiques . . . . .	147
IV.7	Remarques . . . . .	150
IV.8	Discussion . . . . .	150
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Transformation en ondelettes</b>	<b>157</b>
A.1	Introduction . . . . .	157
A.2	Transformation ondelettes . . . . .	158
A.3	Ondelettes orthogonales et analyse multirésolution . . . . .	159
A.4	Application au filtrage . . . . .	160
A.5	Ondelette de Daubechie . . . . .	162
<b>B</b>	<b>Notions sur la Pseudo-Inverse</b>	<b>165</b>
B.1	Problème préliminaire . . . . .	165
B.2	Application à la résolution des systèmes . . . . .	166
B.3	Résolution numérique du problème . . . . .	167
<b>C</b>	<b>Réurrences matricielles pour le formalisme de Newton-Euler</b>	<b>169</b>
C.1	Notations . . . . .	169
C.2	Réurrences matricielles pour la cinématique . . . . .	170
C.3	Réurrences matricielles pour la dynamique . . . . .	171
C.4	Exemple de fichier SYMORO : la flexion-extension . . . . .	172
C.5	Exemple de fichier de matrice d'inertie . . . . .	175
<b>D</b>	<b>Les données cinématiques pour les mouvements étudiés</b>	<b>183</b>
<b>E</b>	<b>Les données anthropométriques pour les mouvements étudiés</b>	<b>197</b>
<b>F</b>	<b>Expression des termes constants dans le modèle dynamique de la marche en paramétrage absolu</b>	<b>199</b>

<b>G</b>	<b>Mise en équations du mouvement de pédalage</b>	<b>201</b>
G.1	Notations spécifiques à cette annexe . . . . .	201
G.2	Introduction . . . . .	202
G.3	Energie cinétique . . . . .	203
G.3.1	Forme de l'énergie cinétique . . . . .	203
G.3.2	Cinématique . . . . .	203
G.3.3	Expression pour les deux jambes . . . . .	203
G.4	Travaux virtuels des efforts appliqués . . . . .	204
G.4.1	Couples articulaires . . . . .	204
G.4.2	Pesanteur . . . . .	204
G.4.3	Force d'appui du pied sur la pédale . . . . .	205
G.5	Efforts généralisés . . . . .	206
G.6	Equations de Lagrange . . . . .	206
G.6.1	Mise en oeuvre pour le premier paramètre articulaire . . . . .	206
G.6.2	Quantités d'accélérations généralisées . . . . .	207
G.7	Mise en forme du système final . . . . .	207



*« Nul ne peut s'emparer de la foudre dans le ciel, et nul ne peut s'approprier le bonheur de l'autre au moment de l'abandon. »*

Luis Sepúlveda  
*Le vieux qui lisait  
des romans d'amour*



## RÉSUMÉ

Une méthodologie générale d'analyse dynamique des mouvements associant acquisition de données sur le mouvement et modélisation dynamique est développée pour aboutir à la détermination de toutes les composantes d'efforts articulaires lors de mouvements humains. Les mouvements étudiés obéissent naturellement aux lois de la dynamique des systèmes multicorps. Celles-ci décrivent la manière dont se conjuguent les efforts articulaires, les inerties segmentaires, la gravité et les efforts d'appui pour engendrer le mouvement observé. Les méthodes de calcul qui sont présentées reposent sur la mise en oeuvre de ces lois, afin de procéder à une analyse quantitative du phénomène physique qu'est le mouvement, en termes d'énergie dépensée et d'efforts délivrés. Deux approches distinctes sont proposées pour aboutir à deux bilans se recouvrant partiellement : une analyse globale fondée sur l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique et une analyse locale qui met en oeuvre les lois classiques de la dynamique. La technique d'analyse multi-résolution par transformation en ondelettes est introduite pour le traitement et le filtrage des données cinématiques du mouvement, acquises par des systèmes opto-électroniques. Trois mouvements de référence sont analysés : la flexion-extension, la marche dans le plan sagittal et le pédalage. La démarche mise en place contient les moyens expérimentaux de validation des résultats obtenus. Les principes de la théorie de la commande optimale sont utilisés pour la simulation de mouvements optimaux au sens d'un critère pour un mouvement de flexion-extension dont la durée est spécifiée. Les mouvements optimaux simulés sont comparés au mouvement réel afin d'étudier les critères d'optimalité lors de la réalisation de mouvements humains.

## ABSTRACT

A general methodology for dynamic analysis of human movements is developed. It associates kinematic data processing and dynamic modelling to obtain all intersegmental force components during human movement. The studied movements naturally fulfill mechanical laws and particularly those of polyarticulated systems. These laws describe the way articular forces, inertial properties of segments, gravity and ground reaction forces combine together to produce the observed movements. The presented methods are based upon these laws to proceed to quantitative analysis of the movement in term of energy consumption and actuating torques. Two different approaches are presented to obtain two similar results : a global approach based upon kinetic energy theorem and a local approach using classical dynamic laws. Multi-resolution analysis of a signal with wavelet transform is introduced for the processing and filtering of kinematic data. These ones are recorded by optoelectronic systems. Three reference movements are analysed : flexion-extension, 2-D walking and cycling. The proposed method allows experimental validation of computed results. Optimal control theory is used to simulate optimal flexion-extension movement by minimizing a criterion with specified travel time. The simulated optimal movements are compared to the real one in order to study the performance criterions during human movement.

