



**HAL**  
open science

## **Contribution à la modélisation et la commande des dirigeables gros porteurs non-conventionnels**

Mahmoud Khamlia

► **To cite this version:**

Mahmoud Khamlia. Contribution à la modélisation et la commande des dirigeables gros porteurs non-conventionnels. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paris Saclay; Université d'Evry-Val-d'Essonne; Ecole Polytechnique de Tunis, 2018. Français. ⟨NNT : 2018SACLE023⟩. ⟨tel-02095871⟩

**HAL Id: tel-02095871**

**<https://hal.science/tel-02095871v1>**

Submitted on 10 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Contribution à la modélisation et la commande des dirigeables gros porteurs non-conventionnels

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay et de L'Ecole Polytechnique de Tunis  
préparée à L'Université d'Evry-Val d'Essonne

École doctorale n° 579: sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)  
Spécialité de doctorat: Mécanique des solides

Thèse présentée et soutenue à Evry, le 10/07/2018, par

**Mahmoud Khamlia**

Composition du Jury :

Said MAMMAR Professeur, Université d'Evry-Val-d'Essonne (IBISC)	Président
Hélène PIET-LAHANIER Professeur adjoint, ONERA DTIS	Rapporteur
Mohamed Ali HAMMAMI Professeur, Faculté des Sciences de Sfax	Rapporteur
Sébastien BRIOT Chargé de Recherche au CNRS	Examineur
Nicolas AUFFRAY Maître de conférences, Université Paris Est Marne-la-Vallée, (MSME)	Examineur
Abichou AZGAL Professeur, Ecole polytechnique de Tunis, (LIM)	Directeur de thèse
Jean LERBET Professeur, Université d'Evry-Val-d'Essonne, (IBISC)	Directeur de thèse
Naoufel AZOUZ Maître de conférences, Université d'Evry-Val-d'Essonne, (IBISC)	Co-Directeur de thèse



Université d'Evry Paris-saclay

Sciences Mécaniques et Energétiques, MATériaux et  
Géosciences

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques Appliquées : Mécanique et  
Automatique

présentée par

**Mahmoud KHAMLIA**

---

**Contribution à la modélisation et la commande des  
Dirigeables Gros Porteurs non-conventionnels**

---

Soutenue le 10 juillet 2018 devant le jury composé de :

Mme. Hélène PIET-LAHANIER	Conseiller scientifique à ONERA DTIS	rapporteur
M. Mohamed Ali HAMMAMI	Professeur à Faculté des Sciences de Sfax	rapporteur
M. Said MAMMAR	Professeur à Université d'Evry Paris-saclay	examineur
M. Sébastien BRIOT	Chargé de Recherche au CNRS	examineur
M. Nicolas AUFFRAY	Maitre de conférence à Marne-la-Vallée	examineur
M. Azgal ABICHOU	Professeur à Ecole Polytechnique de la Tunisie	directeur
M. Jean LERBET	Professeur à Université d'Evry Paris-saclay	directeur
M. Naoufel AZOUZ	Maitre de conférence Université d'Evry Paris-saclay	co-directeur



# Résumé

Les dirigeables gros porteurs (DGP) ont un potentiel énorme de développement et pourront très rapidement prendre une part non-négligeable dans le transport de fret de par le monde. Cependant certains problèmes liés notamment à leur sensibilité aux vents doivent être résolus. En vue d'aboutir à une bonne fiabilisation de l'engin et de ses missions, il est indispensable d'automatiser le plus possible le fonctionnement du dirigeable.

Le présent travail s'inscrit dans ce contexte et porte principalement sur la modélisation et la commande des DGP non-conventionnels. Nous présentons dans un premier temps les équations mathématiques qui décrivent l'équation du mouvement d'un DGP non-conventionnel. Dans ce cadre nous avons établi un modèle dynamique d'un dirigeable avec charge intégrée et un autre avec charge suspendue par un câble flexible pour traiter le comportement du système dans la phase de chargement ou de déchargement notamment lors d'une accélération brusque du dirigeable sous l'impact d'une rafale de vent. Les équations mathématiques du modèle avec charge intégrée découlent du formalisme de Kirchoff. Ce même formalisme a été utilisé pour élaborer le modèle du dirigeable avec charge suspendue dans les quasi-coordonnées en s'appuyant sur une cinématique non-linéaire d'ordre deux. Nous avons considéré l'hypothèse de flexibilité et d'allongement du câble dans l'objectif d'obtenir un modèle assez précis.

---

En se basant sur les deux modèles établis nous avons élaboré des lois de contrôle à base modèle et sans modèle afin de contourner les impacts du vent et les oscillations de la charge. Pour minimiser la dérive du dirigeable dans des conditions météorologiques défavorables nous proposons d'utiliser le concept de contrôle par anticipation en exploitant les informations données par la technologie LIDAR (mesure l'intensité et la direction du vent à distance). Nous avons utilisé la méthode de linéarisation entrée-sortie et les techniques des commandes prédictives non-linéaires NCPCG, que nous avons enrichis par des termes d'anticipation afin de construire un vecteur commande par feedforward.

Pour contourner les oscillations dangereuses de la charge nous nous sommes appuyés sur la méthode classique de la commande par dynamique inverse et la commande novatrice sans modèle. Une étape indispensable afin de pouvoir appliquer ces contrôleurs est d'étudier le comportement de la dynamique des zéros. Pour le modèle du dirigeable avec charge suspendue nous avons montré que la dynamique des zéros est donnée par l'état de la flexibilité du câble et les conditions de sa stabilité asymptotique ont été établies.

Nous avons également établi un vecteur contrôle réduit à partir d'un modèle simplifié que nous avons construit en nous basant sur certaines hypothèses. Ce contrôleur réduit stabilise le modèle global du dirigeable en atténuant les oscillations et les vibrations du câble.

Le vecteur commande sans modèle est obtenu en considérant une modélisation ultra-locale du modèle du dirigeable avec charge suspendue sur un laps de temps. Le but est d'anticiper les effets d'une perturbation exogène, de stabiliser le dirigeable, d'atténuer les oscillations de la charge et de stabiliser la dynamique des zéros.

Le contrôleur sans modèle s'est avéré plus performant que le contrôleur à base modèle et sa robustesse est prouvée même dans des conditions météorologiques défavorables (fortes rafales de vent).

Pour aller jusqu'au bout dans la boucle de contrôle nous avons transformé ces commandes

---

virtuelles issues de la théorie de commande en termes de forces et moments des actionneurs du dirigeable. Nous avons pour cela dû résoudre le problème d'allocation de contrôle. Ce problème est décrit par un système fortement non-linéaire, rectangulaire et avec des contraintes physiques imposées par les actionneurs du dirigeable. Pour ce faire, nous avons mis en place un algorithme analytique original simple à mettre en œuvre. Les équations qui le pilotent sont basées sur des relations algébriques déterminées en utilisant des arguments énergétiques. Des simulations numériques ont prouvé l'efficacité de l'algorithme établi.



# Abstract

Large Capacity airships (LCA) have huge potential for development and will soon be able to take a significant share of freight transport around the world. However, some problems related to their sensitivity to winds must be solved. In order to achieve a good reliability of the craft and its missions, it is essential to automate as much as possible the operation of the airship.

The present work fits into this context and focuses on the modeling and control of non-conventional LCA.

We first present the mathematical equations that describe the equation of motion of a non-conventional LCA. In this context we have established a dynamic model of an airship with integrated load and a model of a dirigible with load suspended by a flexible cable to treat the behavior of the system in the loading or unloading phase, especially during a sudden acceleration of the airship under the impact of a gust of wind. The mathematical equations of the integrated load model derive from Kirchoff's formalism. This same formalism was used to develop the model of the airship with load suspended in the quasi-coordinates by relying on a nonlinear kinematics of order two. We considered the hypothesis of flexibility and elongation of the cable in order to obtain a fairly accurate model.

Based on the two established models we developed model-based and model-free control laws

---

to control wind impacts and load oscillations.

To minimize the drift of the airship in adverse weather conditions we propose to use the concept of anticipatory control by exploiting the information given by the LIDAR technology (measure of the intensity and direction of the wind at a distance). We used the input-output linearization method and NCPCG non-linear predictive control techniques, which we enriched with anticipation terms to build a vector control by feedforward.

To minimize the dangerous oscillations of the load we relied on the classical method of the control by inverse dynamics and the innovative model-free control. An essential step in order to apply these controllers is to study the behavior of the zeros dynamics. For the model of the airship with suspended load we have shown that the zeros dynamics is given by the state of cable flexibility and the conditions of its asymptotic stability have been established.

We also established a reduced control vector from a simplified model that we built based on certain assumptions. This reduced controller stabilizes the overall model of the airship by attenuating the oscillations and vibrations of the cable. The model-free control vector is obtained by considering over a period of time an ultra-local modeling of the model of the airship with load suspended in order to anticipate the effects of an exogenous disturbance, stabilize the airship, attenuate the oscillations of the load and stabilize the dynamics of zeros.

The model-free controller proved to be more efficient than the model-based controller and its robustness is proven even under adverse metrological conditions (strong gusts of wind). To go all the way in the control loop, we transformed these virtual commands from the control theory in terms of thrust and orientation of the airship actuators. For this we had to solve the control allocation problem. A problem described by a strongly non-linear, rectangular system with physical constraints imposed by the airship actuators. To do this, we

---

have implemented an original analytical algorithm that is simple to implement. The equations that drive it are based on algebraic relations determined using energetic arguments. Numerical simulations have proven the effectiveness of the established algorithm.



# Remerciements

Ce manuscrit est le résultat des travaux d'une thèse de doctorat en Mathématiques Appliquées : en mécanique et en automatique de l'université Paris-Saclay préparée à l'université d'Evry et à l'École Polytechnique de Tunisie.

Je tiens à exprimer d'abord ma reconnaissance aux Professeurs Jean LERBET et Azgal ABICHOU, directeurs de ma thèse pour leur soutien scientifique ainsi que la confiance qu'ils m'ont témoigné tout au long de ce travail de recherche.

Mes sincères remerciements à Madame Hélène PIET-LAHANIER Professeur adjoint à l'Onera DTIS, et Monsieur Mohammed-Ali HAMMAMI Professeur à la Faculté des Sciences de Sfax, d'avoir pris le temps de juger ce travail et de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur Said MAMMAR Professeur à l'Université d'Evry et président des membres du jury, Monsieur Sébastien Briot Chargé de recherches au CNRS et Monsieur Nicolas AUFRAY Maître de conférence à L'université Paris Est Marne-la-Vallée pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.

La satisfaction et le regret de voir cette période de thèse s'achever sont à partager avec mon co-encadrant de thèse Monsieur Naoufel AZOUZ maître de conférence à l'Université d'Evry, que je remercie chaleureusement pour ses directives scientifiques, pédagogiques et

---

même personnelles pour lesquelles je lui suis hautement redevable.

Je remercie Monsieur Dalil ICHALAL pour les nombreuses discussions scientifiques que nous avons eues.

Je remercie très chaleureusement ma famille, tous mes amis du laboratoire IBISC, pour leur aide, et tous les services qu'ils ont pu me rendre durant cette thèse.

Je ne terminerai pas mes remerciements sans avoir une pensée sympathique pour toutes les personnes qui m'ont soutenu, ne serait-ce qu'avec un sourire sincère.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>17</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>21</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>21</b>
1.1 Introduction . . . . .	21
1.2 Etat de l'art . . . . .	26
1.2.1 DGP : Avantages, inconvénients et compétitivité . . . . .	27
1.2.2 Projet des DGP . . . . .	33
1.2.3 Modélisation du dirigeable . . . . .	38
1.2.4 Algorithmes de contrôle . . . . .	42
<b>I Modélisation d'un DGP</b>	<b>51</b>
<b>2 Modélisation des dirigeables gros porteurs</b>	<b>53</b>
2.1 Introduction . . . . .	54
2.2 Modélisation d'un dirigeable avec charge intégrée . . . . .	56
2.2.1 Etude cinématique . . . . .	57

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.2.2	Etude dynamique et aérodynamique . . . . .	62
2.3	Modélisation du dirigeable avec charge suspendue . . . . .	72
2.3.1	Modélisation en 2D . . . . .	73
2.3.2	Modèle dynamique . . . . .	83
2.3.3	Modèle 3D pour un DGP . . . . .	92
2.3.4	Energie potentielle et fonction de Rayleigh . . . . .	97
2.4	Conclusion . . . . .	99
<b>II</b>	<b>Commande d'un DGP avec charge intégrée</b>	<b>101</b>
<b>3</b>	<b>Commande et allocation de contrôle d'un dirigeable gros porteur avec charge intégrée</b>	<b>103</b>
3.1	Introduction . . . . .	104
3.2	Actionneurs du dirigeable MC500 . . . . .	105
3.3	Stabilisation du dirigeable MC500 . . . . .	108
3.3.1	Vecteur commande . . . . .	108
3.3.2	Architecture de contrôle par backstepping . . . . .	112
3.3.3	Simulations numériques . . . . .	116
3.4	Allocation de contrôle . . . . .	119
3.4.1	Méthode analytique . . . . .	119
3.4.2	Simulations numériques . . . . .	126
3.4.3	Méthode du Gradient déterministe . . . . .	128
3.5	Simulation numérique . . . . .	133
3.6	Conclusion . . . . .	141

<b>4</b>	<b>Commande par anticipation d'un DGP avec charge intégrée</b>	<b>143</b>
4.1	Introduction . . . . .	144
4.2	Conception de la commande par la méthode de linéarisation entrée-sortie . .	146
4.2.1	Outils Mathématiques . . . . .	147
4.3	Conception du vecteur commande feedforward . . . . .	151
4.3.1	Simulations numériques . . . . .	161
4.4	Commande Prédictive Non linéaire à temps continu pour un dirigeable . . .	168
4.4.1	Principe du commande prédictive . . . . .	168
4.4.2	Architecture de commande . . . . .	170
4.5	Simulations numériques . . . . .	177
4.5.1	NCGPC sans feedforward : méthode analytique (NCGPCMA) . . . .	177
4.5.2	NCGPC avec feedforward : methode analytique (NCGPCFFMA) . .	178
4.6	Conclusion . . . . .	185
<b>III</b>	<b>Commande d'un DGP avec charge suspendue</b>	<b>187</b>
<b>5</b>	<b>Commande d'un DGP avec charge suspendue par un câble flexible</b>	<b>189</b>
5.1	Introduction . . . . .	190
5.2	Modèle réduit et dynamique des zéros . . . . .	192
5.2.1	Modèle réduit . . . . .	193
5.2.2	Dynamique des zéros du modèle global et réduit . . . . .	198
5.3	Commande par dynamique inverse . . . . .	205
5.3.1	Simulations numériques et discussions . . . . .	207
5.4	Commande sans Modèle . . . . .	219
5.4.1	Principe et aperçu théorique . . . . .	219

## TABLE DES MATIÈRES

---

5.4.2	Les techniques d'estimation algébrique . . . . .	222
5.4.3	Commande sans modèle pour un dirigeable grue . . . . .	227
5.5	Simulations Numériques et discussions . . . . .	230
5.5.1	Scénario 1 : CSM dans des conditions idéaux . . . . .	230
5.5.2	Scénario 2 : CSM en présence d'une rafale de vent . . . . .	234
5.6	Conclusion . . . . .	237
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>239</b>
6.1	Contribution à la modélisation : . . . . .	240
6.2	Contribution à la commande des DGP : . . . . .	241
6.3	Perspectives : . . . . .	246
	<b>Bibliographie</b>	<b>255</b>

# Table des figures

1.1	Publicité par un dirigeable : élections présidentielles . . . . .	27
1.2	Missions des DGP . . . . .	28
1.3	Crasch dirigeable airlander10 . . . . .	29
1.4	Incendie du Hindenburg 6 Mai 1937 . . . . .	30
1.5	Projets LCA60 : mission . . . . .	34
2.1	Dirigeable MC500 . . . . .	56
2.2	Rotation suivant l'angle de lacet . . . . .	58
2.3	Rotation suivant l'angle de tangage . . . . .	58
2.4	Rotation suivant l'angle de roulis . . . . .	59
2.5	Rotor de dirigeable MC500 . . . . .	66
2.6	Dynamique du dirigeable <i>MC500</i> : schéma de block réalisé par simmechanics	70
2.7	DGP avec charge suspendue par un câble . . . . .	74
2.8	la liaison cardan . . . . .	75
3.1	Angles de pivotements . . . . .	105
3.2	Schéma bloc d'un actionneur du MC500 . . . . .	106
3.3	Convergence des positions $x$ , $y$ et $z$ . . . . .	117

TABLE DES FIGURES

---

3.4	Convergence des angles d'Euler . . . . .	117
3.5	Commandes virtuelles $\alpha_i$ . . . . .	118
3.6	Architecture de contrôle . . . . .	118
3.7	Norme des forces en utilisant la méthode de la pseudo-inverse . . . . .	122
3.8	Algorithme d'allocation de contrôle : méthode analytique . . . . .	125
3.9	Valeurs des Forces $F_i$ . . . . .	126
3.10	Valeurs des angles $\beta_i$ . . . . .	127
3.11	Valeurs des angles $\gamma_i$ . . . . .	128
3.12	Convergence des positions $x$ , $y$ et $z$ . . . . .	133
3.13	Convergence des angles d'Euler . . . . .	134
3.14	valeurs des forces $F_i$ . . . . .	134
3.15	Valeurs des angles $\beta_i$ . . . . .	135
3.16	Valeurs des angles $\gamma_i$ . . . . .	135
3.17	Valeurs des force : optimisation avec contrainte . . . . .	138
3.18	Valeurs des angles d'Euler . . . . .	139
3.19	Position du dirigeable suivant $x$ , $y$ , $z$ . . . . .	139
3.20	Valeurs des angles $\gamma_i$ . . . . .	140
3.21	Valeurs des angles $\beta_i$ . . . . .	140
4.1	Méthode de linéarisation entrée sortie avec anticipation . . . . .	151
4.2	Convergence des commandes virtuelles : méthode LES . . . . .	161
4.3	Stabilisation des degrés de liberté du dirigeable avec la LES . . . . .	162
4.4	Valeurs des normes forces $F_i$ avec la LES . . . . .	163
4.5	Convergence des angles $\beta$ et $\gamma$ avec la LES . . . . .	164
4.6	Dérive du dirigeable avec LESFF : vent constant . . . . .	165

TABLE DES FIGURES

---

4.7	Valeurs des angles $\beta$ et Forces $F$ avec la LESFF en présence d'une perturbation constante . . . . .	166
4.8	Dérive du dirigeable avec LESFF : vent sinusoïdale . . . . .	167
4.9	Convergence des degrés de libertés du dirigeable avec la NCGPC . . . . .	178
4.10	Valeurs des commandes "virtuels" avec la NCGPC . . . . .	179
4.11	Valeurs des angles $\beta$ et $\gamma$ des actionneurs avec la NCGPCMA . . . . .	180
4.12	Norme des forces des actionneurs avec la NCGPCMA . . . . .	181
4.13	Valeurs des angles $\beta$ et $\gamma$ des actionneurs avec la NCGPCMA . . . . .	182
4.14	Norme des forces des actionneurs avec la NCGPCFFMA . . . . .	183
4.15	Valeurs des angles $\beta$ et $\gamma$ des actionneurs avec la NCGPCFFMA . . . . .	184
5.1	Position du dirigeable : modèle réduit et global . . . . .	197
5.2	Angle d'oscillation : modèle réduit et global . . . . .	197
5.3	Déformation : modèle réduit et global . . . . .	198
5.4	Portrait de phase : $\kappa_e = 0$ . . . . .	204
5.5	Portrait de phase : $\kappa_e = 0.1$ . . . . .	204
5.6	Position suivant $x$ . . . . .	208
5.7	Angle d'oscillation . . . . .	209
5.8	La déformation du câble . . . . .	209
5.9	Position pour $\kappa_e=0$ . . . . .	210
5.10	Convergence de l'angle d'oscillation pour $\kappa_e=0$ . . . . .	211
5.11	Etat interne pour $\kappa_e=0$ . . . . .	211
5.12	Déplacement de $x$ en présence d'une perturbation du vent( $10^5 N$ ) . . . . .	212
5.13	Angle d'oscillation en présence d'une perturbation du vent( $10^5 N$ ) . . . . .	212
5.14	Déformation en présence d'une perturbation du vent( $10^5 N$ ) . . . . .	213

TABLE DES FIGURES

---

5.15	Position de $x$ en utilisant uniquement les actionneurs du dirigeable . . . . .	214
5.16	Position $\theta_s$ utilisant uniquement les actionneurs du dirigeable . . . . .	214
5.17	Déformation $\theta_s$ utilisant uniquement les actionneurs du dirigeable . . . . .	215
5.18	Valeurs des déplacements . . . . .	220
5.19	Convergence du déplacement avec CSM . . . . .	231
5.20	Convergence de l'angle d'oscillation avec CSM . . . . .	231
5.21	Convergence de la déformation avec CSM . . . . .	232
5.22	Convergence du déplacement en utilisant la CSM pour $\kappa_e = 0$ . . . . .	233
5.23	Convergence de l'angle d'oscillation en utilisant CSM pour $\kappa_e = 0$ . . . . .	233
5.24	Convergence de la déformation en utilisant la CSM pour $\kappa_e = 0$ . . . . .	234
5.25	Convergence du déplacement en utilisant la CSM en présence d'une rafale de vent . . . . .	235
5.26	Convergence de l'angle d'oscillation avec CSM pour en présence d'une rafale de vent . . . . .	235
5.27	Convergence de la déformation en utilisant CSM pour en présence d'une rafale de vent . . . . .	236

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>26</b>
1.2.1	DGP : Avantages, inconvénients et compétitivité	27
1.2.2	Projet des DGP	33
1.2.3	Modélisation du dirigeable	38
1.2.4	Algorithmes de contrôle	42

---

### 1.1 Introduction

La recherche et le développement liés aux engins aériens autonomes ont connu un grand essor au cours de ces dernières années. Motivés par les avancées technologiques dans les domaines des matériaux, et des systèmes embarqués, ainsi que des avancées théoriques dans l'aérodynamique et les lois de contrôle, les scientifiques se sont penchés sur la conception d'engins volants innovants permettant de réaliser des missions complexes avec efficacité et

## 1.1. INTRODUCTION

---

à faible coût. Les engins aériens autonomes sont devenus des moyens pertinents pour des applications aussi bien militaires que civiles. Leur principal rôle est de réaliser des missions difficiles ou exténuantes pour l'être humain, où pouvant être carrément dangereuses pour la sécurité des pilotes.

Parmi les engins aériens, nous nous intéresserons ici au dirigeable, le pionnier.

Le dirigeable a connu un âge d'or entre 1900 et 1937 où il avait la part du lion dans le transport aérien de passagers et de marchandises. Mais le fameux incendie du dirigeable Hindenburg en 1937, et la progression fulgurante des avions ont poussé le dirigeable vers une longue hibernation.

Cependant les effets écologiques du transport aérien, le cout élevé des hydrocarbures et les émissions de gaz à effet de serre ont poussé vers un changement de stratégie dans le transport. Ces éléments ne sont d'ailleurs pas spécifiques au transport aérien mais touchent aussi les transports terrestres et maritimes. Les pays industrialisés sont touchés de plein fouet par ce phénomène, caractérisé par la pollution de l'air, par la nuisance sonore et par l'encombrement des routes.

L'idée a alors ressurgi lors de ces deux dernières décades pour redonner vie au dirigeable comme moyen alternatif de transport des charges lourdes. Grâce aux avancées de l'aérodynamique et des souffleries, il est possible d'envisager des formes diverses pour les dirigeables. Des formes originales ont alors été proposées. Elles présenteraient de bonnes qualités aérodynamiques tout en permettant la présence de surfaces relativement planes utiles pour l'exploitation de l'énergie solaire. Ceci donne naissance à une nouvelle génération de dirigeable non-conventionnels.

Plusieurs projets de dirigeables gros-porteurs (DGP) ont ainsi vu le jour, le volume de ces engins pouvant aller jusqu'à  $500.000m^3$ . Ces dirigeables voleront avec une énergie propre, développerons une capacité d'emport dépassant tous les autres engins volants, et de surcroit

## 1.1. INTRODUCTION

---

ne nécessiteront pas la présence d'une infrastructure particulière pour le chargement et le déchargement tout comme pour l'atterrissage et le décollage.

Ces engins pourront donc intéresser un très grand nombre de pays. Outre les pays industrialisés, ces engins intéresseront les pays ayant des zones et des régions difficiles d'accès que les dirigeables pourront désenclaver.

Cependant, et afin de pouvoir exploiter le formidable potentiel des dirigeables, certains défis techniques doivent être surmontés.

Si les grandes surfaces (et volumes) de ces dirigeables sont un atout pour la récupération de l'énergie solaire, elles représentent aussi un grand inconvénient car elles confèrent au dirigeable une grande sensibilité au vent. Cette sensibilité devient critique lors des phases de chargement et de déchargement, qui se fait en altitude pour ce type d'engins. Il est important de pouvoir contrôler le dirigeable pendant ces phases afin d'éviter de grandes oscillations de la charge suspendue. Le challenge serait donc de développer un pilotage automatique spécifique qui sera d'un grand apport pour stabiliser ces engins notamment lors ces phases de chargement et de déchargement.

Notre objectif à travers cette thèse est de contribuer à la modélisation et commande de ces dirigeables gros-porteurs et particulièrement leur stabilisation dans la phase la plus critique de chargement et de déchargement.

Dans le premier chapitre nous ferons une étude bibliographique sur l'état de l'art en matière de modélisation et de la commande d'engins volants en général et de dirigeables en particulier.

Dans le second chapitre nous présentons un modèle dynamique complet d'un dirigeable

## 1.1. INTRODUCTION

---

gros-porteur non-conventionnel ayant une forme d'aile volante. Les modèles du dirigeable avec charge en soute et avec charge suspendue par un câble seront développés. Lors de la mise en équation mathématique du modèle de DGP-grue, nous avons visé le plus large niveau de généralité en tenant compte de la flexibilité et de l'allongement du câble, caractéristiques qui ne peuvent être négligées pour ce type de chargement lourd afin d'obtenir un modèle dynamique le plus proche possible de la réalité.

Au troisième chapitre, un algorithme analytique d'allocation de contrôle fondé sur des arguments énergétiques est établi. L'algorithme analytique que nous présentons permet de clarifier le problème de connexion entre les propulseurs du DGP (actionneurs réels) et un vecteur commande déterminé à partir de la théorie du contrôle. Pour notre modèle d'application le problème d'allocation de contrôle est un problème d'optimisation non-linéaire rectangulaire avec contraintes imposées par les actionneurs du dirigeable (force et angle de pivotement des actionneurs bornées), dont la résolution a été un défi pour nous.

Une étude comparative a été effectuée avec deux autres algorithmes purement numériques basés sur les techniques d'optimisation quadratique avec ou sans contrainte, et ce dans le but de prouver la puissance de notre algorithme. Les différents algorithmes ont été comparés au moyen de simulations numériques au regard de leur réponse à un vecteur commande développé à partir du linéarisé-tangent et la méthode de backstepping.

Dans le chapitre 4 nous nous sommes donnés pour objectif de stabiliser le dirigeable avec charge intégrée en incluant un caractère anticipatif à la commande.

En effet, et sachant que le vent est le principal ennemi du dirigeable notamment dans les phases de chargement ou de déchargement, il a été prévu de munir le dirigeable par des LIDARs. Cette technologie à base de laser permet de prévoir la vitesse et la direction du

vent qui impactera l'engin volant. On pourrait de ce fait établir une commande feedforward afin d'anticiper l'effet du vent et de minimiser la dérive du dirigeable et donc sa remise en position qui sont des manœuvres énergivores.

Pour ce faire nous avons élaboré deux techniques. Dans un premier temps nous nous sommes inspirés de la méthode bien connue de linéarisation entrée-sortie (qu'on notera LES) à laquelle on a adjoint des termes d'anticipation afin de mettre en place un vecteur commande anticipateur. Cependant et dans le cas où l'information donnée par le LIDAR diffère sensiblement de l'impact du vent subi par le dirigeable, cette technique montre certaines limites. Afin de proposer une commande plus robuste, nous avons revisité la commande prédictive non-linéaire appelée commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC) que nous avons enrichi par des termes d'anticipation.

La capacité de ses deux algorithmes pour stabiliser le dirigeable en présence d'une perturbation mesurée a été évaluée par des simulations numériques.

Le dernier chapitre sera dédié à la stabilisation du dirigeable avec charge suspendue par un câble flexible dont le modèle a été établi dans le chapitre 2. Nous discuterons deux types de contrôleurs.

Le premier contrôleur s'appuie sur la méthode de la dynamique inverse. Cette méthode est relativement simple à implémenter mais elle est cependant sensible à la perturbation extérieure en raison de sa dépendance aux paramètres du modèle. De ce fait la commande ne sera efficace que dans de bonnes conditions météorologiques.

Le deuxième contrôleur s'appuie sur les techniques de commande sans modèle (CSM). Avec cette loi de contrôle, les paramètres du modèle seront estimés au fur et à mesure en construisant le contrôleur sur chaque laps de temps. Par conséquent, la CSM nous permet de passer outre certains modèles empreints d'hypothèses simplificatrices comme pour le cas du dirigeable-grue sujet de notre étude.

Il a aussi été prouvé que la CSM comble certaines des limitations que rencontrent les commandes à base modèle, à savoir la sensibilité à l'incertitude paramétrique, les perturbations exogènes... Elle se présente ainsi comme une bonne candidate pour le pilotage automatique d'un dirigeable en présence d'une rafale de vent.

Les deux méthodes pré-citées sont applicables pour les systèmes à minimum de phases, systèmes qui ont une dynamique interne asymptotiquement stable. La déformation du câble représentera la dynamique interne de notre système. L'étude de son comportement sera présentée et les conditions de sa stabilité seront établies.

Des simulations numériques seront présentées pour visualiser le comportement de la dynamique interne et pour montrer l'efficacité des contrôleurs construits et pour stabiliser le dirigeable et atténuer les oscillations de la charge.

## 1.2 Etat de l'art

Quand j'ai abordé le thème de recherche sur la modélisation et la commande des drones, particulièrement sur les dirigeables gros porteurs autonomes, la question qui a marqué mon esprit tout au long de ma thèse est :

**Le retour du dirigeable est-il un rêve nostalgique, un fantasme ou bien une réalité concrète ?**

Connaitre la cause de sa disparition, les principaux avantages et inconvénients pour ce vieux concept permettront de répondre à cette question afin que nous proposons quelques solutions à certaines problématiques qui pourront participer au retour promoteur de cet engin volant.

### 1.2.1 DGP : Avantages, inconvénients et compétitivité

- **Pourquoi ce nouveau regard au concept du dirigeable que plusieurs considèrent comme dépassé ?**

Le dirigeable est un engin aérien qui a une importance grandissante dans l'industrie aérospatiale. Ces engins sont un vecteur idéal pour de très nombreuses applications. Ils sont appréciables de par leurs relatives faibles consommations énergétiques et leur adaptation aux contraintes environnementales. Ces aérostats ont été principalement utilisés lors de ces 80 dernières années pour des actions commerciales mettant en valeur des affiches publicitaires (voir figure : 1.1), ou pour prendre des photographies aériennes [OKL<sup>+</sup>06]. On peut également les utiliser dans des applications militaires telles que l'observation et la surveillance [CD05, Dor05, KJHE06].



FIGURE 1.1 – Publicité par un dirigeable : élections présidentielles

Actuellement, il y a un regain d'intérêt pour l'utilisation du Dirigeable Gros Porteur (DGP) pour le transport des charges lourdes ou de grandes dimensions indivisibles [Pop04]. Le DGP constituera un nouveau service et une révolution de la logistique de fret dans l'industrie moderne (voir figure (1.2)).

## 1.2. ETAT DE L'ART

---

De nouveaux DGP équipés par les technologies avancées de l'aérospatiale, permettront le

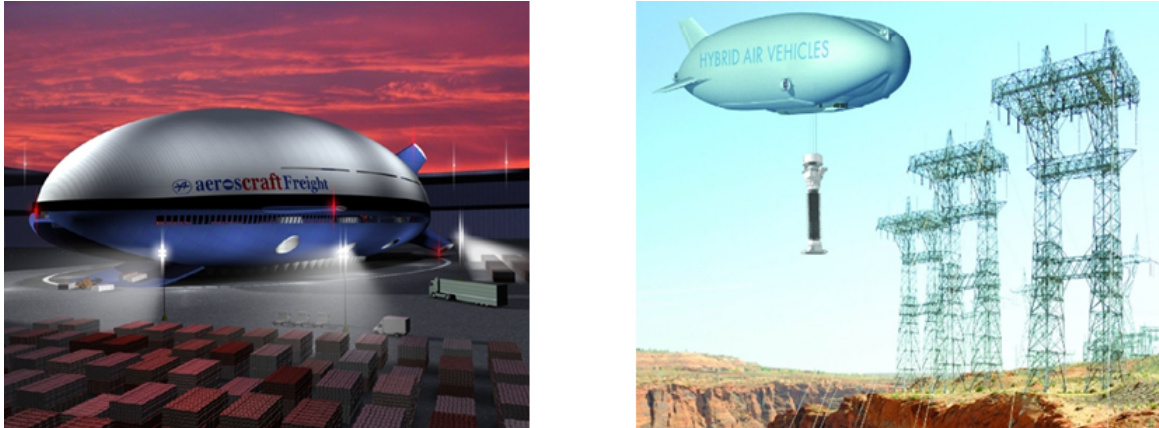


FIGURE 1.2 – Missions des DGP

transport d'un seul trait de charges lourdes sans avoir besoin d'infrastructures spécifiques. Ces dirigeables séduisent les pays ayant des zones enclavées et où la mise en place d'infrastructures routières ou ferroviaires s'avèrerait coûteuses en termes de construction et d'entretien. Ces dirigeables représenteraient dans ce cas-là une solution optimale.

Les DGP sont également, capables d'offrir un service utile au transport maritime. En effet, ils peuvent offrir aux ports un moyen de chargement et déchargement rapide du fret du bateau et la distribution des produits du port directement à la destination de commercialisation, participant ainsi à l'allègement des norias de camions et au désencombrement des installations portuaires.

Ces baleines volantes sont aussi susceptibles de jouer un rôle impressionnant dans le volet "sécurité civile". En effet, de par des missions de surveillance, les DGP peuvent jouer le rôle d'un bombardier d'eau, intervenant ainsi dans la lutte contre les incendies de forêt.

Dans des situations de catastrophe naturelle, l'intervention humaine est souvent lente et périlleuse, or ces situations de crises tragiques appellent souvent à des réponses urgentes.

Quand les modes d'acheminement des secours par voie terrestre ou aérienne sont non adéquats, dangereux ou impraticables, le dirigeable deviendrait le vecteur idéal pour le transport humanitaire d'urgence.

Soulignant, que les dirigeables de petits volumes (semi-rigides ou souples) sont en concurrence avec les aérodynes (hélicoptère et avion) et même les drones multi rotors ou à voilure fixe pour les marchés de niche (surveillance, photographie aérienne, publicité..). Ces dirigeables existent et volent mais ne sont pas nombreux dans notre ciel.

La tendance est d'ouvrir de nouveaux axes d'exploitation pour lesquels le dirigeable pourrait concurrencer les plus lourds que l'air, divers moyens de transports maritimes et terrestres, voire même des satellites [Sch07, LKY06].

### — Quels sont les inconvénients des dirigeables DGP ?

Pour transformer le rêve d'un retour du dirigeable en une réalité, il y a quelques défis à surmonter. En témoigne le crash qu'a subi le dirigeable Airlander10 lors du deuxième essai de vol en août 2016.

Parmi les principaux inconvénients du dirigeable on peut citer :



FIGURE 1.3 – Crasch dirigeable airlander10

- **Gaz porteur :**

L'incendie de Hindenburg en 1937 (voir (1.4)) a imprégné les esprits et a choqué l'opinion publique mondiale. Cet accident dramatique a été la cause principale de la quasi-absence du dirigeable de nos cieux. L'inflammabilité de l'hydrogène est la cause principale de cet incendie. Le gaz porteur hydrogène est très inflammable surtout lorsqu'il est mélangé avec l'oxygène. Ce qui a poussé les constructeurs à le remplacer par l'hélium pour assurer un grande partie de la portance de l'engin. Des recherches sont en cours pour trouver une alternative à l'hélium.

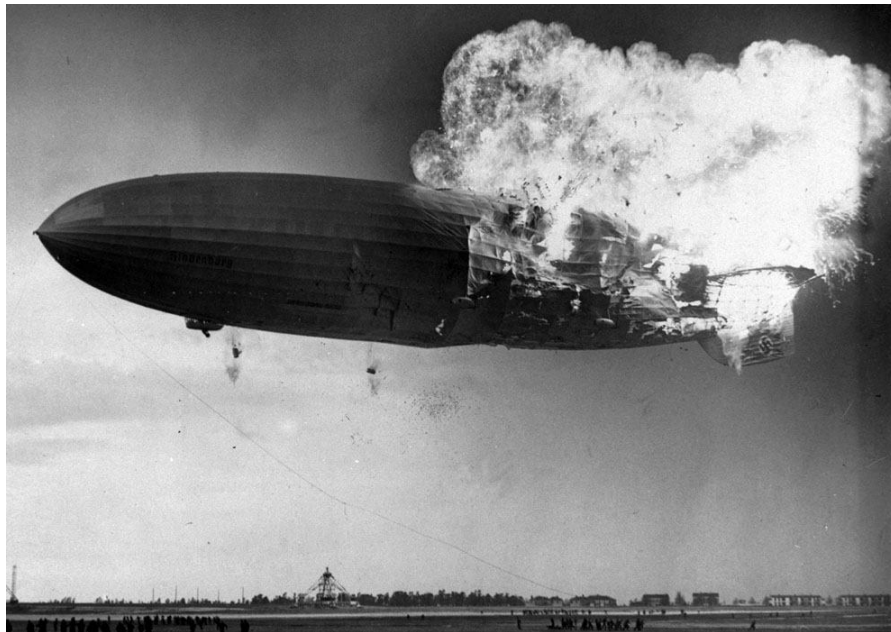


FIGURE 1.4 – Incendie du Hindenburg 6 Mai 1937

- **Le Volume :**

Pour transporter  $1kg$  de charge utile il faut  $1m^3$  d'hélium ainsi, pour transporter des dizaines de tonnes il faut des milliers de  $m^3$ . Par conséquent, la dimension de ce ballon sera énorme. Ce qui rend le dirigeable un engin encombrant, et sensible aux conditions climatiques (vent,givre...).

- **Conditions météorologiques :**

Le choix de la structure permet de dépasser certains problèmes liés aux conditions atmosphériques telles que la neige ou le givre. De nouvelles structures donnèrent naissance à une nouvelle génération de dirigeables avec des formes de carène originales comme par exemple la forme multi-lobes. Ces nouvelles formes tranchent avec la forme classique ellipsoïdale.

Le volume énorme du dirigeable lui confère une forte vulnérabilité au vent (surtout latéral). Cette vulnérabilité se traduit par :

- **Lors du chargement ou déchargement** : Le mouvement acrobatique que peut générer une rafale de vent rend cette phase la plus critique. Il faut empêcher le dirigeable de faire de grands bonds pendant l'exécution de cette opération.
  - **Pendant le vol** : la dérive due au vent sera importante et doit être régulièrement corrigée.
  - **En vol stationnaire** : comme envisagé par certains projets (les dirigeables stratosphériques de communication), le dirigeable n'est pas apte à assurer cette opération sans une correction régulière même pour un vent régulier faible, et de direction constante
- **Le DGP est-il compétitif par rapport à d'autres moyens de transport ?**

Pour transporter des marchandises, la logistique de transport implique des chaînes de transports variées. Cela rallonge le temps de livraison, engendre des retards et peut causer des

## 1.2. ETAT DE L'ART

---

ruptures lors du transfert des charges. L'avantage offert par les DGP est la transmission directe des charges à leur destinations principales. Même si la vitesse du dirigeable n'est pas élevée, le temps de livraison reste cependant concurrentiel par rapport à celui de l'ensemble d'un maillon logistique. Le fait de minimiser le nombre de segments d'une chaîne de transports augmente la compétitivité du DGP par rapport aux autres moyens de transport. Le DGP est aussi caractérisé par le chargement et déchargement en vol stationnaire, c'est un point commun partagé avec l'hélicoptère qui le distingue d'autres moyens de transport. Cette particularité lui permet le transfert des charges de grandes masses et de grandes dimensions sans avoir besoin de les démonter.

D'autre part, les dirigeables n'ont pas besoin d'une infrastructure spécifique pour charger et décharger les charges encombrantes. Cet avantage découle d'une part du chargement et déchargement en vol stationnaire, et d'autre part de sa capacité d'atterrir et de décoller verticalement (VTOL). L'atterrissage et le décollage vertical augmente les champs d'opérations des DGP dans des zones sinistrées ou dépourvues d'infrastructures.

Le transport de charges encombrantes représente un atout essentiel des DGP. Si l'énorme volume de ces derniers est souvent interprété comme un inconvénient, il permet néanmoins de donner aux DGP une capacité de transport en soute supérieure à celles des avions et des hélicoptères.

Le mode de transport sous élingue représente une alternative et répond aux besoins des industriels pour transporter les charges volumineuses. Les industriels hésitent à fabriquer des produits qui dépassent les dimensions de transports standards (la hauteur d'un tunnel, la largeur des routes, les dimensions des conteneurs, etc) et se résignent à la solutions de démontage et montage des pièces.

Actuellement, le transport de charge indivisible est un véritable problème. Seul l'hélicoptère cargo est apte à surmonter ce problème par le transport aérien sous élingues, mais à des

coûts prohibitifs et avec une capacité de charge utile souvent limitée. Le DGP offrirait une solution viable pour l'emport de ce type de marchandise.

Concernant la compétitivité du DGP par rapport aux moyens de transport maritime et routiers, le dirigeable gros porteurs est plus séduisant par le fait qu'il est un moyen économique et écologique. Ses capacités de transport sont plus élevées et la durée de transport est souvent plus courte.

### 1.2.2 Projet des DGP

Pour valider le concept du DGP des projets sont en cours de développement. Ils se sont focalisés sur des capacités variant de 10 à 50 tonnes afin d'étendre ultérieurement le concept pour les autres paliers de charges utiles (jusqu'à 500 tonnes). Ces projets visent à surmonter les faiblesses de cet engin volant pour obtenir un produit qui assure ses missions en tout sécurité.

Nous nous intéressons ici au DGP *MC500* conçu par le groupe de recherche DIRISOFT. C'est un dirigeable futuriste équipé par les nouvelles technologies embarquées tel que la technologie de mesure du vent LIDAR, une forme deltoïde originale qui ressemble à une aile volante, un système de propulsion original à hélices contrarotatives (orientables selon deux axes). Le *MC500* sera notre support pour la validation des résultats établis.

La société française FLYING WHALES s'est positionnée sur ce créneau à travers le projet *LCA60T* et désire mettre en œuvre son dirigeable en 2020. Le *LCA60T* est un aéronef rigide, qui a la capacité de transporter environ 60 tonnes en soute (75m de long, 8m de haut et 8m de large) et sous élingues pour les charges utiles volumineuses. Il est apte à atterrir et décoller verticalement et à assurer le chargement et le déchargement en vol stationnaire. Le marché principal ciblé par cet engin est le transport de grumes pour le compte de l'Office National des Forêts. D'autres marchés sont aussi visés, tel que le transport de

## 1.2. ETAT DE L'ART

---

pales d'éoliennes, de maisons préfabriquées, ou encore de conteneurs.



FIGURE 1.5 – Projets LCA60 : mission

Ci-joint un tableau résumant quelques projets de DGP et leurs caractéristiques.

## 1.2. ETAT DE L'ART

---

### Autres projets de dirigeables

---

Dirigeable	Projet	Pays	Categorie	Charge Utile (t.)	Rayon d'action (km)	Vitesse (km/h)
	RosAeros Systems – AU30	Russie	Blimp décollage vertical (exploitation)	1.5	1600	Moy: 90
	Luftschifftechnik GmbH – LZ NT 70	Allemagne	Blimp décollage vertical (exploitation)	1.9	900	Max: 125
	Cargolifter - CL160	Allemagne	DGP, décollage vertical (Abandonné)	160	10000	Moy: 90
	SkyCat20	Grande bretagne	DGP, classique ou décollage vertical (Abandonné)	20	4000	Max: 120
	SkyCat 222			220	6000	
	AAT – First 1A	France	DGP, ou décollage vertical (Abandonné)	250	9000	Moy: 160
	Aeroscraft – AEROS ML 866	USA	DGP, décollage vertical (Prototype)	400	5000	Max: 266

## 1.2. ETAT DE L'ART

### Projets de dirigeables : Caractéristiques techniques

Dirigeable	Projet	Structure et enveloppe	Energie - propulsion	Commandes et contrôle	Sustentation
	RosAeros Systems – AU30	Souple	<b>2 moteurs à piston</b>	<b>ND</b>	Hélium
	Luftschifftechnik GmbH – LZ NT 70	Semi-rigide	<b>3 moteurs à hélice</b>	<b>« Fly-bywire »</b>	Hélium
	Cargolifter - CL160	Semi-rigide construit autour d'une poutre centrale	<b>8 moteurs (type hélicoptère) de General Electric</b>	<b>ND</b>	Hélium
	ATG – Projet de SkyCat-20 et SkyCat 220	2 dirigeables rigides assemblés l'un à l'autre	<b>ND</b>	<b>ND</b>	Hélium
	AAT – First 1A	Rigide Brevet de laçage dynamique des enveloppes d'hélium	<b>6 turbines de 6500 CV</b>	<b>ND</b>	Hélium
	Aeroscraft – AEROS ML 866	Rigide	<b>6 turbo propulseurs</b>	<b>ND</b>	14 million de m <sup>3</sup> d'hélium

Dans ces différents projets plusieurs systèmes de propulsion sont envisagés. Le système de propulsion est important pour :

- Donner au dirigeable une grande autonomie et faciliter sa manœuvrabilité.
- Maximiser les champs d'opération de l'aéronef afin de réaliser des missions complexes.
- Minimiser l'impact environnemental et permettre d'exploiter l'engin dans des conditions météorologiques dégradées.

Plusieurs types de moteurs sont utilisés pour propulser les dirigeables. Les moteurs électriques adoptés sont silencieux et propres, ce qui représente un avantage par rapport aux moteurs thermiques. Cependant, se pose la question de l'apport en énergie électrique de ces moteurs. Dans les nouvelles conceptions, et en particulier pour le dirigeable Mc500 qu'on traite comme exemple dans cette étude, ces moteurs seront alimentés par de l'énergie solaire et par des piles à combustible. En effet, la surface importante et relativement plate de l'enveloppe permet d'insérer des cellules photovoltaïques. En cas d'absence de soleil, les piles à combustible ont pour rôle de fournir l'énergie électrique de substitution.

Une innovation importante pour cette nouvelle génération de dirigeables est l'utilisation de la motorisation dite "à poussée vectorielle", c'est-à-dire que la poussée produite par un moteur est orientable selon un ou deux axes. Cette poussée vectorielle permet de limiter le nombre de moteurs, tout en permettant une bonne manœuvrabilité.

Nous remarquons aussi pour les différents projets cités que les systèmes de contrôle et commande ne sont pas mis en évidence.

Une bonne propulsion combinée avec un système de pilotage automatique sont les clés pour améliorer les performances de cet engin, pour obtenir un système fiable et compétitif par rapport aux autres moyens de transport.

Notre but à travers le travail de recherche que nous présentons est de contribuer à l'autom-

tisation du fonctionnement du DGP afin de donner des pistes qui pourront être exploitées dans la pratique pour définir le système de pilotage automatique adéquat pour propulser le dirigeable en toute sécurité.

Une étape préliminaire vers le pilotage automatique est de décrire le processus du dirigeable avec des équations mathématiques précises. Ces équations serviront de support pour élaborer des lois de commande.

Dans la revue de littérature que nous présenterons, nous avons visé deux principales parties : la modélisation des dirigeables et la méthode de contrôle linéaire et non linéaire qui assurent la stabilisation ou bien la poursuite d'une trajectoire.

### 1.2.3 Modélisation du dirigeable

La forme classique des dirigeables est ellipsoïdale. La géométrie du dirigeable affecte fortement le rapport volume-surface et la traînée aérodynamique. Le premier point est important puisque la flottabilité est principalement affectée par le volume (et le poids du dirigeable est proportionnel à la surface de l'enveloppe), tandis que la traînée est fortement liée à la puissance nécessaire pour garantir une vitesse définie.

La forme ellipsoïdale classique est décrite comme la meilleure solution pour garantir un très bon rapport volume-poids et une faible traînée [KG99]. Cependant, cette forme de la carène a une très faible surface disponible pour installer des panneaux solaires, ce qui limite l'utilisation de l'énergie solaire et ne permet pas d'exploiter la grande surface du dirigeable. Du fait de cette limite, et dans l'objectif d'utiliser les énergies renouvelables, des nouvelles formes innovantes ont été récemment proposées donnant naissance à des dirigeables non-conventionnels. Plusieurs formes ont été évaluées [CN13], afin d'obtenir de grandes surfaces planes, une faible traînée et un bon rapport volume-poids.

La modélisation de la catégorie conventionnelle (forme ellipsoïdale) a été largement étudiée.

Un aperçu détaillé de la littérature est disponible dans [LNS11].

La plupart des travaux se basent sur l'hypothèse de la rigidité du carène et la méthode de Newton-Euler pour déterminer des modèles dynamiques pour le dirigeable. Citons à titre d'exemple [BH00, HB03, KG99]. L'hypothèse de rigidité des carènes devient assez forte si on traite des dirigeables avec des volumes énormes.

Dans [BAA08, Ben09] un modèle dynamique incluant la flexibilité de la carène est établi. Une extension de la méthode eulérienne de corps rigide combinée avec l'analyse modale sont les techniques utilisées pour tenir compte du couplage inertiel entre le mouvement du dirigeable et la déformation.

Khoury et al [KG99] mettent l'accent sur la conception des dirigeables, la dynamique, le contrôle, la propulsion et le pilotage. Les auteurs n'abordent cependant pas beaucoup les nouvelles techniques de modélisation, comme les méthodes CFD pour analyser l'aérodynamique des dirigeables, l'interaction fluide-structure, l'incorporation de turbulences atmosphériques et leurs effets sur la dynamique de l'engin.

Liao et Pasternak [LP09] ont publié une revue de littérature sur les conceptions des carènes non conventionnelles et l'analyse structurelle des dirigeables. Cependant, leur examen est axé sur les conceptions et les matériaux des dirigeables, mais comporte peu d'information sur les caractéristiques de la dynamique et le phénomène de masses ajoutées pour ces dirigeables non-conventionnels.

Le phénomène de masses ajoutées est lié au fait que l'accélération d'un corps affecte le champ de fluide dans lesquels il est immergé, et augmente par conséquent l'énergie cinétique du fluide. Bien que, les termes de masses ajoutées sont généralement négligés pour les avions du fait que la masse du fluide déplacé est très inférieure à la masse de l'avion ; ces termes fournissent cependant des effets critiques dans les équations de mouvement de sous-marins, navires et dirigeables.

Dans la référence [AU06] le problème des masses ajoutées pour une nouvelle forme a été introduit pour un dirigeable hybride ; alors que [CN13] ont suggéré le calcul d'une forme ellipsoïdale équivalente, qui se rapproche de la forme non-conventionnelle réelle.

Le récent article [TCM14] présente une méthode pour calculer la matrice complète de masses ajoutées pour des corps de formes arbitraires. Les auteurs utilisent une méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis de frontière (Boundary Element Method). Ils présentent également quelques exemples de formes de dirigeables non-conventionnels et fournissent des données sur leurs contributions en masses ajoutées. De plus, la méthode proposée permet de trouver le meilleur compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats, en définissant la taille du maillage.

Les références [Cha14, CALA12] présentent un modèle mathématique pour le DGP *MC500* en incluant le phénomène de masses ajoutées. Pour élaborer leurs modèles, les auteurs proposent une méthode analytique en utilisant la théorie d'écoulement potentiel (potential flow theory). Les termes de masses ajoutées sont issus de l'équation de lamé dans les coordonnées sphéro-conales jugées comme les coordonnées adéquates pour la forme multilobes du *MC500* (nous reviendrons sur cette modélisation avec plus de détail dans le chapitre suivant).

Dans [AABA17] la phase de chargement et déchargement a été abordée, Les auteurs ont envisagé de transporter les charges en utilisant un robot parallèle à câble. Le modèle du système dirigeable, robot parallèle à câble et charge est établie en utilisant l'approche de Newton-Euler. Dans ce travail, les auteurs ont considéré les câbles comme des liens sans masse. Cependant et pour pouvoir tenir compte du chargement de charges lourdes il est important de rajouter l'hypothèse de flexibilité des câbles. Comme on le présentera dans la suite, les câbles présentent une dynamique interne due à leur flexibilité. Cette dynamique peut influencer la manœuvrabilité de l'engin surtout en présence d'une force du vent.

Les sujets de recherche concernant le mode de transport des charges sous élingue en utilisant d'autres plates-formes aériennes sont plus avancés. Plusieurs travaux ont été réalisés par exemple pour utiliser les quadrirotors comme un moyen de transport des charges suspendue. Nous citons par exemple les travaux [PBSF15, FPC<sup>+</sup>13, KFJ15, DLB14, RdA16]. Dans la référence [DLB14] le modèle du quadrirotor avec sa charge est obtenu en considérant le câble comme une chaîne connectée d'un ensemble de segments rigides. Dans les autres articles moyennant des hypothèses simplificatrices, le modèle d'une pendule  $3D$  est adopté pour la mise en équation du mouvement d'une charge suspendue par un câble. Le câble est assimilé à un corps rigide sans masse et la charge est considérée comme une masse concentrée à l'extrémité du câble.

Dans le présent travail nous présenterons une configuration originale pour transporter une charge au moyen d'un dirigeable. Nous proposons d'utiliser un enrouleur motorisé avec une liaison cardan (qui pourra être sphérique). L'intérêt de placer cet enrouleur s'articule sur deux idées :

La première s'adresse pour le mode de transport des charges intégrées, l'enrouleur pourra servir pour charger (monter les charges pour une fixation sous le dirigeable) et décharger les marchandises. C'est un point important qui permet le chargement ou déchargement en altitude. Le dirigeable n'aura pas besoin d'atterrir pour livrer les charges.

La deuxième, vise la dynamique rapide du câble et l'oscillation de la charge qui peut affecter le mouvement du dirigeable. L'actionneur (cardan placé à la sortie de l'enrouleur) aura pour mission d'atténuer les oscillations de la charge afin de minimiser son impact sur le mouvement du dirigeable.

La modélisation du câble dans cette configuration sera assimilée à une poutre d'Euler-Bernoulli flexible. Une cinématique d'ordre deux sera considérée afin de tenir compte de la flexibilité et de l'allongement du câble, hypothèses qui sont souvent négligées dans la

majorité des travaux.

Sortir du cadre théorique des corps indéformables et se rapprocher des conditions réelles du vol d'un dirigeable gros porteur était l'objectif visé dans notre travail.

Le modèle d'une poutre d'Euler-Bernoulli tournant dans le plan vertical est décrit dans [Pie01] avec différentes méthodes. La méthode de Newton-Euler, les équations de Lagrange, le principe de Jourdain...sont utilisés pour déterminer les équations du mouvement de la poutre dans les coordonnées généralisées. Le modèle obtenu est piloté par des EDP couplées avec des EDO. Les techniques de l'analyse modale sont utilisées pour obtenir un système discrétisé gouverné par des EDO. Un modèle qui sera plus attrayant pour la construction des lois de contrôle.

Nous nous sommes inspirés de ce travail pour modéliser le câble en utilisant les équations de Kirchhoff (une formulation équivalente aux équations de Lagrange) dans les quasi-coordonnées. L'équation hybride d'un corps flexible dans les quasi-coordonnées est traitée dans les références [Mei91, MS95]

Une fois les équations qui décrivent le mouvement de dirigeable gros porteur établies et la modélisation achevée, nous pouvons déterminer le contrôleur.

Nous nous intéresserons à la phase critique de chargement et de déchargement. Les lois de contrôle que nous établirons sont dédiées pour stabiliser le dirigeable pendant la durée de cette phase.

Nous discuterons deux types de contrôle : le contrôle à base modèle et le contrôle sans modèle.

### 1.2.4 Algorithmes de contrôle

Il existe de nombreuses références étudiant le contrôle des dirigeables conventionnels. Certaines d'entre elles utilisent des algorithmes de contrôle linéaire.

Dans [dPBG<sup>+</sup>99, dPCFA01] les auteurs ont développé une commande PID pour contrôler le dirigeable AURORA. Dans [dPBG<sup>+</sup>99] trois PID SISO sont utilisés pour contrôler la vitesse, l'altitude et l'orientation. Dans [dPCFA01] les gains de PID ont été optimisés par la minimisation de la norme  $H_2$  et  $H_\infty$  en boucle fermée afin d'effectuer le suivi de trajectoire. L'auteur [KJHE06] discute deux autres approches pour commander le dirigeable AURORA. Après la linéarisation du modèle non-linéaire du dirigeable, il a utilisé la méthode SLC (sequential loop closure controller) et la méthode LQR (linear-quadratic-regulator). Une étude comparative entre les deux méthodes en utilisant des simulations numériques sous matlab simulink a été effectuée pour les différents mouvements de rotation et translation du dirigeable.

Les techniques de linéarisation sont utilisées pour linéariser le modèle au voisinage d'un point d'opération. Les performances du contrôleur linéaire reste satisfaisante autour de ce point et il sera difficile de l'utiliser pour d'autres points de fonctionnement. L'utilisation des commandes linéaires pour commander le mouvement du dirigeable est loin de la nature physique du système, qui est un système non linéaire. L'application de la commande linéaire nécessite des bonnes qualités de robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques et des perturbations extérieures surtout pour les dirigeables qui sont sensibles aux rafales de vent. En raison des limitations de la commande linéaire et la non-linéarité des équations de mouvement du dirigeable, les algorithmes de contrôle non-linéaires fournissent une méthode prometteuse pour stabiliser et contrôler le mouvement des dirigeables.

Dans les travaux [WS06, LKB05, PLTB03] les auteurs utilisent la méthode populaire de linéarisation entrée- sortie pour contrôler le dirigeable. L'idée de cette méthode s'articule sur l'utilisation d'une loi de contrôle linéarisant pour transformer la dynamique non-linéaire de l'engin en un système linéaire équivalent qui sera contrôlé par les techniques de commande linéaire. La méthode de linéarisation entrée-sortie permet de générer une relation

différentielle entre une nouvelle entrée (commande) et la sortie. Par conséquent le système non-linéaire se décompose en deux parties : l'une externe (entrée-sortie), l'autre interne (non mesurée).

La relation de l'entrée et la sortie dans la partie externe est linéaire et découplée ce qui permet de déterminer facilement l'entrée pour que la sortie suive une consigne bien déterminée.

La question se pose alors sur le comportement de la partie interne du système. Pour répondre à cette question l'étude de la dynamique des zéros (on revient sur sa définition dans le chapitre 3) est nécessaire. Les systèmes possédant une dynamique des zéros stable sont appelés à minimum de phase, et les systèmes qui possèdent une dynamique des zéros instable sont appelés à non minimum de phase. La méthode de linéarisation entrée sortie s'appliquera pour les systèmes à minimum phase.

On peut trouver en aéronautique des systèmes qui ont une dynamique des zéros instable. Citons à titre d'exemple le système d'un hélicoptère drone. Pour contourner cette hypothèse restrictive et afin d'appliquer la méthode de linéarisation entrée-sortie pour commander le système à déphasage non minimal de l'hélicoptère, les auteurs [HSM92] proposent de construire un système réduit à minimum de phase. tout en négligeant les termes de la dynamique du tangage (respectivement du roulis) et la dynamique longitudinale (resp latérale). A partir de cette linéarisation approximative une loi de commande de l'hélicoptère est établie et donne un comportement stable à la dynamique interne.

Notre modèle du dirigeable avec charge intégrée n'admet pas de dynamique des zéros, cependant le modèle avec charge suspendue admet une dynamique des zéros due à la flexibilité du câble. Nous avons utilisé un coefficient d'amortissement pour lui donner un comportement asymptotiquement stable. De plus le système complexe est sous-actionné (la déformation est contrôlée indirectement par les actionneurs du dirigeable et l'actionneur de la liaison

cardan).

On pourra trouver d'autres systèmes sous-actionnés similaires dans la littérature citons par exemple la bille sur rail [HSM92], le pendudot [SB95], le pendule inversé sur un chariot [PMC12]. Un système sous-actionné admet plus de degrés de liberté que d'actionneurs. Il est caractérisé par la présence d'une dynamique interne. Le contrôle des systèmes sous-actionnés est un défi pour l'automaticien.

La linéarisation partielle établie par Spong [Spo96] figure parmi les solutions intéressante pour contrôler ces systèmes. Spong a prouvé que les systèmes sous-actionnés sont partiellement linéarisable en utilisant un bouclage statique.

La méthode de linéarisation entrée-sortie peut être enrichie par un terme de pré-compensation qui permet d'annuler l'effet d'une perturbation extérieure mesurée. La loi de commande se comportera comme une commande anticipatrice. Ce genre de contrôleur (commandes feed-forward) sera très utile pour les dirigeables. Nous le proposerons comme solution pour contourner les effets significatifs des rafales de vent. A notre connaissance, la commandes par anticipation n'ont pas été abordés dans des travaux de recherche pour minimiser la dérive des dirigeables provoquée par les rafales de vent. Ce contrôleur, pour qu'il puisse être appliqué, nécessite la connaissance de l'intensité et de la direction de la force du vent. Les dirigeables de nouvelle génération seront équipés par la nouvelle technologie LIDAR comme par exemple notre modèle d'étude le *MC500*. Cette nouvelle technologie permettra d'appliquer les commandes par anticipation.

Light Detection And Ranging (LIDAR), est un radar laser. C'est un moyen optique actif de mesure à distance. Son principe est similaire au radar, la différence réside dans l'onde utilisée (Le LIDAR utilise des ondes optiques quand le radar utilise des ondes radios). L'avantage du LIDAR par rapport au radar réside dans sa qualité de résolution spatiale qui est supérieure à celle donnée par le radar. Ceci revient à l'utilisation d'une longueur d'onde

plus courte. Un autre avantage d'utiliser des ondes optiques par rapport aux ondes radio est leur capacité d'interagir avec des objets petits tel que les particules dans l'atmosphère et les molécules de gaz. D'où la possibilité de l'utilisation de LIDAR pour caractériser les paramètres de l'atmosphère.

L'usage du LIDAR atmosphérique embarqué dans l'aéronautique et plus particulièrement pour le dirigeable a une importance majeure. L'instrument de télédétection laser autorise la mesure anticipée des vitesses du vent à différentes distances. L'objectif étant de donner l'alerte en cas de détection de variations du vent autour du dirigeable. Grâce à ces informations données par le LIDAR on pourra utiliser de nouveaux concepts de contrôle pour le dirigeable telle que la commande par anticipation.

On trouve dans [Cez08] une étude de faisabilité du LIDAR atmosphérique pour la mesure de la vitesse de l'air, de sa densité et de sa température. Il décrit les différentes applications de LIDAR atmosphérique dans l'aéronautique.

Une présentation de la conception et du test en vol d'un capteur LIDAR est abordée dans [RSPR10]. Le LIDAR utilisé vise à mesurer à distance la vitesse du vent devant l'aéronef pour le contrôle automatique des phénomènes de turbulence en vol. Le capteur a été installé dans un banc d'essai de l'avion A340 – 300 pour les essais en vol. Les mesures en vol ont prouvé que le LIDAR utilisé est capable de détecter la vitesse du vent jusqu'à 13000m d'altitude dans différentes conditions météorologiques : dans l'air calme, la pluie, les nuages.

Plusieurs types de moteurs sont utilisés pour propulser les dirigeables. Les moteurs électriques adoptés sont silencieux et propres, ce qui représente un avantage par rapport aux moteurs thermiques. Cependant, se pose la question de l'apport en énergie électrique de ces moteurs. Dans les nouvelles conceptions, et en particulier pour le dirigeable Mc500 qu'on traite comme exemple dans cette étude, ces moteurs seront alimentés par de l'énergie solaire et par des piles à combustible. En effet, la surface importante et relativement plate

de l'enveloppe permet d'insérer des cellules photovoltaïques. En cas d'absence de soleil, les piles à combustible ont pour rôle de fournir l'énergie électrique de substitution.

Une innovation importante pour cette nouvelle génération de dirigeables est l'utilisation de la motorisation dite "à poussée vectorielle", c'est-à-dire que la poussée produite par un moteur est orientable selon un ou deux axes. Cette poussée vectorielle permet de limiter le nombre de moteurs, tout en permettant une bonne manœuvrabilité.

La commande à horizon fuyant ou encore la commande prédictive est une méthode de contrôle à base modèle dans laquelle la commande est déterminée en résolvant un problème d'optimisation sur un horizon fini. La première commande est évaluée puis à nouveau le problème d'optimisation est résolu. La commande prédictive prévoit le comportement futur d'un système et s'appuie sur la connaissance de son modèle. Cette méthode a été utilisée pour commander les modèles industriels à dynamique lente. Elle a été appliquée aux systèmes non-linéaires comme aux systèmes linéaires, les systèmes à minimum de phase et aux à non minimum de phase. Elle peut également impliquer des contraintes physiques sur les entrées de commande, les sorties et les états.

Cette technique pourra être adaptée pour commander le dirigeable puisque il est caractérisé par une dynamique lente et ses actionneurs imposent des contraintes à respecter.

L'élaboration d'un vecteur de commande prédictive pour un dirigeable est un sujet actif ces dernières années et a été le sujet de plusieurs travaux récemment publiés. Nous citons par exemple [ZYDL17, FSM<sup>+</sup>06, YXZ<sup>+</sup>17]. Dans [ZYDL17] un vecteur de commande prédictive est élaboré pour le suivi de trajectoire pour un dirigeable stratosphérique. Sous l'hypothèse que le mouvement du dirigeable s'effectue dans le plan latéral, une linéarisation des équations dynamique par la méthode des petites perturbations a été effectuée. Les techniques de commandes prédictives linéaires discrètes sont appliquées sur le système linéaire résultant

pour déterminer le vecteur commande en présence d'une force de vent.

Dans le même sens les auteurs [FSM<sup>+</sup>06] ont utilisé un modèle linéaire simplifié et la commande prédictive linéaire discrète pour donner une autonomie au dirigeable. Ils ont utilisé les capacités de commande prédictive pour respecter les contraintes d'entrée dues aux saturations des actionneurs et aux limitations de sortie. Les contrôleurs MPC sont déterminés hors-ligne en tant que lois de retour d'état affines par morceaux en tenant compte des incertitudes paramétriques afin de stabiliser le dirigeable.

Dans le travail présent nous utilisons les techniques de commande prédictive non-linéaires continues (NCGPC). La NCGPC sera appliquée à l'intégralité du modèle d'un DGP non-conventionnel (modèle non-linéaire) en présence d'une force de vent qui sera mesurée par LIDAR. Le vecteur contrôle issue de cette méthode est un vecteur commande optimal par anticipation.

D'autres méthodologies de contrôle à base modèle ont été appliquées sur le dirigeable, à titre d'exemple les techniques puissantes du Backstepping [AMDP06, AMdP09, BA05, RP08] ou le contrôle basé sur la théorie de Lyapunov utilisé dans [ZWDYGZL08].

Ces méthodes académiques permettent de déterminer des vecteurs contrôles "virtuels". C'est à dire, ce ne sont pas les actionneurs "réels" qui vont assurer la manœuvrabilité des dirigeables. Par conséquent une étape importante pour compléter le boucle de contrôle est d'étudier le problème d'allocation de contrôle. En d'autres termes établir les relations qui lient les actionneurs "réels" et ces commandes "virtuelles" déterminées par la théorie du contrôle.

La recherche d'un système de propulsion puissant et efficace pour contourner les effets du vent amène à un système d'actionnement complexe. Pour le dirigeable *MC500* les actionneurs "réels" responsable de son mouvement sont les angles des pivotements des rotors qui sont orientés selon deux axes et les forces produites par ces rotors. Ces actionneurs sont

limités par des contraintes physiques à respecter en résolvant un problème d'allocation de contrôle envisagé. Les angles d'orientation et la force produite par les rotors sont bornés. Les actionneurs du *MC500* sont au nombre de 12 (8 angles de rotation et 4 forces) cependant les commandes virtuelles sont au nombre de 6. La connexion entre les commandes "virtuelles" et les actionneurs "réels" est décrite par un système fortement non-linéaire rectangulaire.

La majorité des travaux cités qui traite du contrôle des dirigeables s'arrêtent à l'étape de construction d'une commande virtuelles.

La complexité de ce problème est un défi énorme. Généralement l'allocation de contrôle est traitée d'une manière numérique. Dans ce contexte on cite la méthode pseudo-inverse utilisée pour résoudre le problème d'allocation de contrôle sans contrainte [MNT07]. La méthode d'optimisation quadratique linéaire avec contrainte est utilisée dans [ZLZ15, CCDW15, ZLZ16] pour minimiser l'erreur pondérée entre l'entrée des commandes virtuelles et les actionneurs réel afin de résoudre le problème d'allocation de contrôle en respectant les contraintes imposés par les actionneurs.

Ces méthodes utilisent une programmation numérique pour trouver le minimum d'une fonction coût quadratique. Cependant la question se pose sur l'applicabilité de ses algorithmes en temps réels en présence d'une perturbation extérieure. En effet, en présence d'une force de vent on peut dépasser la marge de robustesse des commandes virtuelles, ainsi la fonction objective à minimiser peut ne pas admettre un minimum et on aura un risque d'instabilité du dirigeable.

Dans cette thèse nous n'avons pas éludé le problème d'allocation de contrôle et on a établi un algorithme original basé sur des équations algébriques déterminées d'une manière analytique selon des arguments énergétiques. Ce nouvel algorithme permettra de piloter le dirigeable même dans des mauvaises conditions météorologiques. Une étude comparative

avec les algorithmes numériques quadratiques est présentée dans le chapitre 3.

Dans le cadre du transport des charges avec un câble flexible nous avons proposé d'utiliser les techniques de commande sans modèle. Dans le but d'assurer la stabilité du dirigeable et de réduire l'oscillation de la charges. Les commandes CSM ne sont pas abordées dans des travaux de recherche concernant le contrôle des dirigeables. Ce nouveau concept de contrôle que nous proposons pourra être un bon candidat pour le pilotage automatiques des dirigeables. Ceci est dû à sa simplicité de mise en œuvre (c'est un PID intelligent), sa robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques (on n'a pas besoin de connaître les équations de mouvement de dirigeable) et la possibilité de l'utiliser comme une commande par anticipation.

Le principe de la CSM est introduit par Fliess [FJ08]. IL repose sur l'utilisation d'une modélisation ultra-locale sur chaque laps de temps pour décrire le modèle d'un processus physique. Les différents paramètres du modèle seront estimés à partir de l'entrée et la sortie du système. Ces estimées seront déterminées par des techniques d'estimation algébrique. Plusieurs travaux ont été développés autour de l'idée de la CSM, à titre d'exemple [AHJ<sup>+</sup>17, DMJF<sup>+</sup>13, MdNF<sup>+</sup>18, DNFJ<sup>+</sup>10]. Dans [DNFJ<sup>+</sup>10] les auteurs ont établi une corrélation entre la commande classique PID et la commande sans modèle, où il ont montré les principaux points de rapprochement entre ces deux méthodes, d'où le nom donnée à la CSM intelligent PID (iPID).

Première partie

Modélisation d'un DGP



# Chapitre 2

## Modélisation des dirigeables gros porteurs

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>54</b>
<b>2.2</b>	<b>Modélisation d'un dirigeable avec charge intégrée</b>	<b>56</b>
2.2.1	Etude cinématique	57
2.2.1.1	Transformation des vitesses linéaires	60
2.2.1.2	Transformation des vitesses angulaires	60
2.2.1.3	Equation de la cinématique	61
2.2.2	Etude dynamique et aérodynamique	62
2.2.2.1	Matrice de masse	62
2.2.2.2	Forces et moments appliqués sur le dirigeable	64
2.2.2.3	Modèle dynamique	69
2.2.2.4	Modèle complet du dirigeable MC500	71
<b>2.3</b>	<b>Modélisation du dirigeable avec charge suspendue</b>	<b>72</b>

## 2.1. INTRODUCTION

---

2.3.1	Modélisation en 2D . . . . .	73
2.3.1.1	Préliminaire . . . . .	73
2.3.1.2	Quelques définitions . . . . .	77
2.3.1.3	Énergie cinétique . . . . .	80
2.3.1.4	Energie potentielle . . . . .	82
2.3.1.5	Fonction de dissipation de Rayleigh . . . . .	83
2.3.2	Modèle dynamique . . . . .	83
2.3.2.1	Discrétisation de l'énergie cinétique . . . . .	85
2.3.2.2	Discrétisation de l'énergie potentielle . . . . .	86
2.3.2.3	Discrétisation de la fonction de Rayleigh . . . . .	87
2.3.2.4	Forces et couples appliqués . . . . .	88
2.3.3	Modèle 3D pour un DGP . . . . .	92
2.3.3.1	Energie cinétique . . . . .	94
2.3.4	Energie potentielle et fonction de Rayleigh . . . . .	97
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>99</b>

---

## 2.1 Introduction

Les dirigeables gros porteurs ont un potentiel énorme de développement et pourront très rapidement prendre une part non-négligeable du transport de fret de par le monde. Cependant certains problèmes liés notamment à leur sensibilité aux vents doivent être résolus. En vue d'aboutir à une bonne fiabilisation de l'engin et de ses missions, il est nécessaire d'automatiser le plus possible le fonctionnement du dirigeable. Ceci commence par l'élaboration d'un modèle mathématique précis. Un tel modèle nous permettra d'établir des algorithmes de contrôle, dans le but notamment de stabiliser l'aérostat pendant la phase critique de chargement et déchargement des marchandises, et réduire l'oscillation de la

## 2.1. INTRODUCTION

---

charge pendant cette phase critique, oscillation qui pourrait être préjudiciable à l'ensemble du système en raison de la masse importante des charges soulevées.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la modélisation d'un dirigeable gros porteur en forme d'aile volante. Cette forme non conventionnelle (voir figure 2.1) a de bonnes qualités aérodynamiques. Ses nombreuses surfaces quasi-planes peuvent être recouvertes de cellules photovoltaïques en vue de générer une énergie électrique complémentaire permettant ainsi de minimiser la consommation énergétique.

Dans la première partie de ce chapitre nous présentons les caractéristiques du dirigeable *MC500* et les travaux déjà réalisés le concernant, notamment le modèle développé par chaabani et al [CALA12, ACLA12]. Dans cette étude le phénomène de masses ajoutées a été pris en considération au moyen d'un raisonnement analytique basé sur la théorie du flux de potentiel de vitesses. Les auteurs ont considéré que le potentiel de vitesse de l'air obéit à l'équation de Laplace et la carène a été assimilée à un cône de section elliptique. L'utilisation des coordonnées sphéro-conales a été rendue indispensable. La matrice des masses ajoutées a été ainsi déterminée en résolvant des équations de Lamé. Le modèle mathématique ainsi défini est donc bien adapté pour décrire le mouvement du dirigeable en phase de croisière, c'est-à-dire quand les charges sont en soute.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation du dirigeable pendant la phase de chargement et de déchargement où la charge est suspendue par un câble. Le câble est flexible et sa déformation est non-négligeable. Pour la modélisation du système, nous avons fait appel à des techniques basées sur l'approche de Kirchoff dans les quasi-coordonnées. Le câble est considéré comme une poutre d'Euler-Bernoulli. Les équations du mouvement sont données par des EDPs et des EDOs. Par conséquent le système dirigeable-câble-charge est piloté par des équations aux EDPs et des EDOs. On utilisera une analyse modale pour définir la déformation. Cette technique nous permet de séparer l'espace et le

temps et de décrire la déformation par un nombre fini de modes. Nous obtenons ainsi, un modèle dynamique d'ordre fini composé par des équations différentielles ordinaires.

### 2.2 Modélisation d'un dirigeable avec charge intégrée

Dans ce travail nous nous sommes intéressés aux dirigeables gros porteurs et plus particulièrement au *MC500* qui sera le modèle de nos applications.

L'aérostat *MC500* est un projet majeur de l'association Française DIRISOFT. La nouvelle forme de ce dirigeable et la motorisation électrique fonctionnant grâce à des piles à combustibles et à des cellules photovoltaïques représentent les principales nouveautés de cet engin volant. Le *MC500* est un dirigeable hybride équipé par 4 rotors à hélices contra-

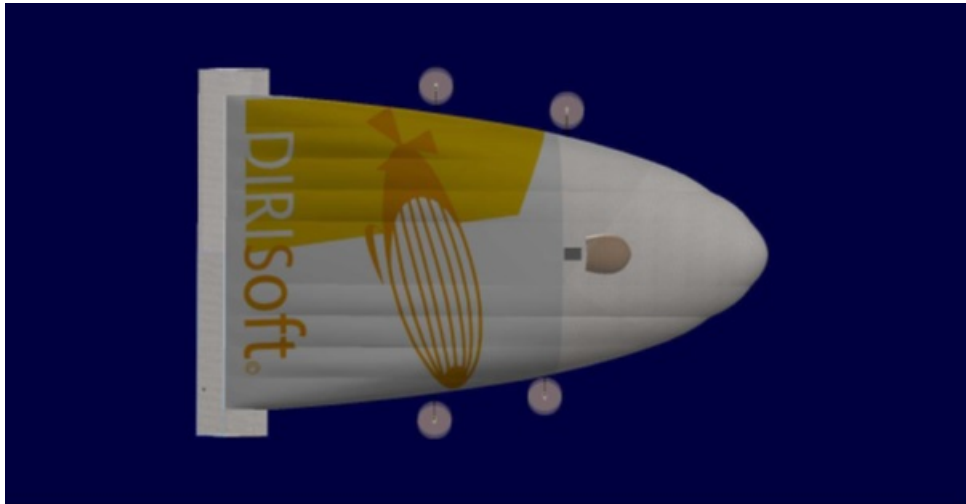


FIGURE 2.1 – Dirigeable MC500

rotatives. Son système de propulsion est conçu pour remédier à l'effet du vent. L'énergie nécessaire pour alimenter les moteurs d'un dirigeable serait une énergie mixte(énergie photovoltaïque/pile à combustible). En effet, la surface importante des dirigeables peut être

couverte de cellules photovoltaïques. L'énergie électrique récupérée par ces panneaux sera utilisée pour fournir l'énergie aux moteurs de propulsion et aux moteurs auxiliaires. Lors des phases de non-enseillement, une pile à combustible fournira l'énergie nécessaire.

### 2.2.1 Etude cinématique

Pour décrire le mouvement du dirigeable on utilise deux repères. Un repère  $R_0 = (O, X_0, Y_0, Z_0)$  lié à la terre. L'autre repère est un repère mobile, son origine est le centre de gravité  $G$  du dirigeable. Ce repère noté  $R_m = (O, X_m, Y_m, Z_m)$  dont les axes sont liés à la géométrie de l'appareil, sont choisis de la manière suivante :

- $X_m$  l'axe longitudinal.
- $Y_m$  l'axe transversal.
- $Z_m$  l'axe normal à  $(X_m, Y_m)$

Dans le référentiel inertiel  $R_0$ , les coordonnées généralisées servant à définir la position et l'orientation du dirigeable sont :  $x, y, z, \phi, \theta, \psi$ . Les angles  $\psi$  l'azimut (roll),  $\theta$  tangage (pitch) et  $\phi$  la gîte (yaw) sont nommés angles d'Euler. Ils sont sélectionnés de sorte que la transformation du repère local  $R_m$  au repère inertiel  $R_0$  soit de la forme :

$$J_1 = J_1(\eta_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_\psi} \underbrace{\begin{pmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}}_{H_\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{pmatrix}}_{H_\phi} \quad (2.1)$$

avec  $H_\psi, H_\theta$  et  $H_\phi$  sont des matrices de passages des bases suivantes (voir figure (2.2), (2.3), (2.4)) :

$$B(X_0, Y_0, Z_0) \xrightarrow{H_\psi} B(X_1, Y_1, Z_0) \xrightarrow{H_\theta} B(X_m, Y_1, Z_1) \xrightarrow{H_\phi} B(X_m, Y_m, Z_m)$$

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

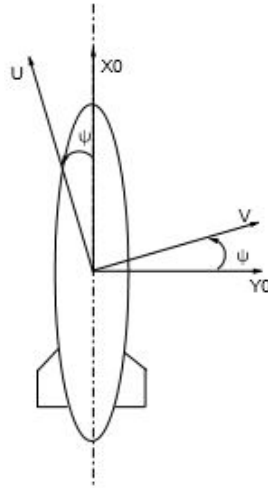


FIGURE 2.2 – Rotation suivant l'angle de lacet

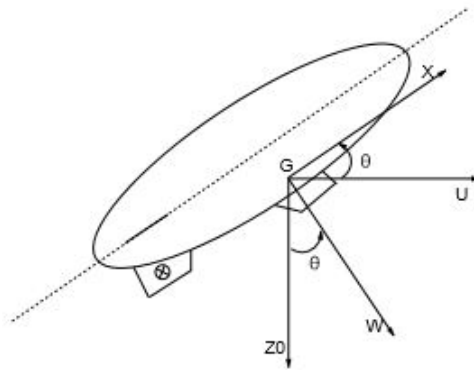


FIGURE 2.3 – Rotation suivant l'angle de tangage

où  $B(X_0, Y_0, Z_0)$  est la base du référentiel  $R_0$ ,  $B(X_m, Y_m, Z_m)$  base du repère local  $R_m$ .  
 $B(X_1, Y_1, Z_0)$  et  $B(X_m, Y_1, Z_1)$  sont les bases intermédiaires et  $X_1, Y_1, Z_1$  des vecteurs qui complètent les bases. La matrice de rotation entre le référentiel  $R_m$  et le référentiel  $R_0$  est

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

donnée par :

$$J_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & s_\theta s_\phi c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\theta c_\phi c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\theta s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\theta c_\phi s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

avec  $\eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^t$  : vecteur colonne d'orientation du repère mobile exprimé dans le repère fixe  $R_0$  donné par les angles d'Euler.

Nous pouvons aussi adapter d'autres paramétrisations pour décrire le mouvement du di-

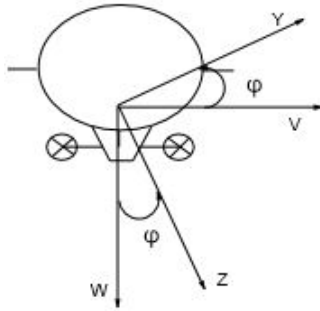


FIGURE 2.4 – Rotation suivant l'angle de roulis

rigible telle que la paramétrisation par les quaternions. La représentation d'Euler, reste plus intuitive que celle des quaternions. En effet, la transformation d'Euler a également l'avantage de minimiser les impacts des singularités dans la matrice de transformation des vitesses angulaires. Elle ne sera singulière qu'à l'angle de tangage  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Cette configuration ne se présente pas pour le dirigeable. En effet, grâce aux phénomènes aérostatiques, aérodynamique et à la propulsion, il est impossible pour un dirigeable d'avoir un angle de tangage de  $\frac{\pi}{2}$ .

### 2.2.1.1 Transformation des vitesses linéaires

En utilisant la matrice de changement de base  $J_1(\eta_2)$  donnée par l'expression (3.3), la relation entre les composantes de la vitesse linéaire  $\eta_1$  par rapport à  $R_0$  exprimée dans le repère inertiel  $R_0$  et celle de la vitesse linéaire  $\nu_1$  par rapport à  $R_0$  exprimée dans le repère local du dirigeable, peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\dot{\eta}_1 = J_1(\eta_2)\nu_1 \quad (2.3)$$

Où :

- $\eta_1 = [x, y, z]^t$  le vecteur position du centre de gravité du dirigeable par rapport à  $R_0$  dont les composantes sont exprimées dans le repère terrestre  $R_0$ .
- $\nu_1 = [u, v, w]^t$  le vecteur vitesse de translation du centre de gravité du dirigeable par rapport à  $R_0$  dont les composantes sont exprimées dans le repère local  $R_m$ .

### 2.2.1.2 Transformation des vitesses angulaires

On désigne par :

- $\nu_2 = [p, q, r]^t$  le vecteur vitesse du dirigeable dans le repère local  $R_m$
- $J_2(\eta_2)$  la matrice de passage reliant les composantes des vitesses de rotation dans le repère global à celles relatives au repère local.

La deuxième relation de la cinématique est donnée par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}}_{\dot{\eta}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_\theta s_\phi & t_\theta c_\phi \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{pmatrix}}_{J_2(\eta_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}_{\nu_2} \quad (2.4)$$

Les termes de la matrice  $J_2(\eta_2)$  confirment que les positions singulières sont données par  $\cos(\theta) = 0 (\theta \equiv \frac{\pi}{2}[n\pi], n \in \mathcal{N})$ .

### 2.2.1.3 Equation de la cinématique

A l'aide des équations (3.3) et (2.4), la cinématique du dirigeable peut s'exprimer par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\eta}} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & 0 \\ 0 & J_2(\eta_2) \end{pmatrix}}_{J(\eta_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}}_{\nu} \quad (2.5)$$

L'équation de la cinématique s'écrit finalement sous forme développée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = c_\psi c_\theta u + (-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta)v + (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta)w \\ \dot{y} = s_\psi c_\theta u + (c_\psi c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi)v + (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi)w \\ \dot{z} = -s_\theta u + c_\theta s_\phi v + c_\theta c_\phi w \\ \dot{\phi} = p + t_\theta s_\phi q + t_\theta c_\phi r \\ \dot{\theta} = c_\phi q - s_\phi r \\ \dot{\psi} = \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Nous avons présenté ici une étude cinématique qui consiste à décrire le mouvement du dirigeable à partir des mouvements de translations et de rotations suivant le paramétrage Eulérien. Par la suite, nous exposons une étude dynamique du dirigeable basée sur les équations de Kirchoff en incluant le phénomène des masses ajoutées.

## 2.2.2 Etude dynamique et aérodynamique

### 2.2.2.1 Matrice de masse

Le phénomène des masses ajoutées est bien connu pour les dirigeables. Lorsqu'un dirigeable se déplace dans un fluide incompressible, l'énergie cinétique du fluide déplacé produit un effet équivalent à une augmentation importante de la masse et des moments d'inertie du dirigeable.

L'équation de l'énergie cinétique d'un corps immergé dans un fluide a été développée par Lamb [Lam45]. Il a montré que l'expression de l'énergie cinétique peut s'écrire comme une fonction quadratique de la vitesse de translation et de rotation comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \nu^t (M_b + M_a) \nu$$

avec  $M_b$  est la matrice de masse du dirigeable donné par :

$$M_b = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Où  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  sont les moments d'inerties et ont pour expressions :

$$I_{xx} = \sum m_i (z_i^2 + y_i^2); \quad I_{yy} = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2); \quad I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum m_i x_i z_i$$

et  $M_a$  est la matrice des masses ajoutées. Elle a pour expression dans le cas du *MC500*[CALA12]

$$M_a = M_{a,carène} + M_{a,gouverne} \tag{2.7}$$

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

$$M_a = \begin{pmatrix} M_{ac11} + M_{ag11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{ac22} + M_{ag22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{ac33} + M_{ag33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{ac44} + M_{ag44} & 0 & M_{ac46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{ac55} + M_{ag55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{ac46} & 0 & M_{ac66} + M_{ag66} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le calcul de la matrice des masses ajoutées le plus documenté est celui des aérostats de forme ellipsoïdale classique[Lam45]. L'analyse de ce phénomène pour les formes non conventionnelles est souvent effectuée par des méthodes approximatives telles que la méthode géométrique[Bre82, Mun24] et les méthodes numériques[BF05, EOSKD04]. Pour le dirigeable MC500, on s'est appuyée sur une étude analytique de détermination des masses ajoutées [CALA12, ACLA12] elle utilise la théorie des écoulements de potentiel de vitesse. La matrice de masse est calculée en résolvant les équations de Laplace dans les coordonnées sphéro-conales. Ces coordonnées sont adaptées à la forme de la carène qui est considérée comme un cône-elliptique.

La forme générale de la matrice de masse est donnée par :

$$M_T = \begin{pmatrix} M_{TT} & 0 \\ 0 & M_{RR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & M_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{46} & 0 & M_{66} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Pour déterminer l'équation dynamique du dirigeable, on peut utiliser la méthode Lagrangienne [Sha13] ou la description par les équations de Kirchoff. Cette dernière méthode est une reformulation de la description Eulerienne et Lagrangienne. Elle est adaptée pour modéliser le dirigeable MC500.

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

Cette formulation combine en effet les équations de Lagrange avec l'utilisation des variables eulériennes et se présente ainsi [Fos94] :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \nu_1} \right) + \nu_2 \times \frac{\partial T}{\partial \nu_1} = \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \nu_2} \right) + \nu_2 \times \frac{\partial T}{\partial \nu_2} + \nu_1 \times \frac{\partial T}{\partial \nu_1} = \tau_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

L'application de cette théorie au mouvement du dirigeable nous permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} M_{TT} & 0 \\ 0 & M_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 - \nu_2 \times M_{TT} \nu_1 \\ \tau_2 - \nu_2 \times M_{RR} \nu_2 - \nu_1 \times M_{TT} \nu_1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Où  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  sont respectivement les forces et les moments appliqués sur le dirigeable. Nous les présenterons dans la section suivante.

### 2.2.2.2 Forces et moments appliqués sur le dirigeable

Une des caractéristiques des dirigeables est la poussée d'Archimède. Un engin volant qui baigne dans un fluide au repos et traversant sa surface libre, subit une force verticale, opposée au poids du volume de fluide déplacé. Ce principe explique la flottabilité des bateaux, ainsi que l'équilibre aérostatique des dirigeables et montgolfières. La force de poussée d'Archimède croît avec le volume et non avec la surface ce qui explique la grande taille des dirigeables. A titre d'indication  $1m^3$  hélium contenu dans le dirigeable permet de suspendre 1kg de charge grâce à la poussée d'Archimède. Il est donc possible de construire des dirigeables ayant une capacité d'emport considérable.

Pour un dirigeable la poussée d'Archimède est donnée par :

$$B_u = \rho_f V g$$

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

où  $V$ ,  $\rho_f$ ,  $g$  sont respectivement le volume de la carène, la densité de l'air et de la gravité.

La force due au poids et à la poussée d'Archimède aura pour expression :

$$F_{wB} = (mg - B_u)J_1^t(\eta_2)e_z = (mg - B_u) \begin{pmatrix} -s_\theta \\ c_\theta s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Le moment induit par la force d'Archimède :

$$M_{wB} = B_u J_1^t(\eta_2) e_z \times BG = -B_u z_G \begin{pmatrix} c_\theta s_\phi \\ s_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

avec :

$$BG = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -z_G \end{pmatrix}^t$$

La portance du dirigeable est assurée par le gaz d'hélium. C'est la raison pour laquelle la motorisation des dirigeables est moins puissante comparée à la motorisation des aérodynes. Une motorisation adéquate est cependant nécessaire pour contrer les effets du vent et permettre au dirigeable de voler à des vitesses pouvant atteindre  $150\text{km/h}$ . Elle permet également, au dirigeable d'atterrir dans des zones dépourvues d'infrastructure et difficiles d'accès. La motorisation générera dans ce cas là des mouvements verticaux.

La majorité des dirigeables sont propulsés par des moteurs à hélice. Certains d'entre eux sont thermiques et d'autres sont propulsés à l'aide de moteurs électriques.

En ce qui concerne le *MC500*, il est équipé par quatre rotors qui fonctionnent grâce à une motorisation électrique. Chaque rotor a deux hélices parallèles contrarotatives. La conception des rotors a été prévue d'une part pour éviter tout couple aérodynamique, et d'autre part pour que le dirigeable puisse se stabiliser rapidement et s'opposer à une rafale de vent pré-détectée. Les rotors du *MC500* peuvent pivoter dans deux sens :

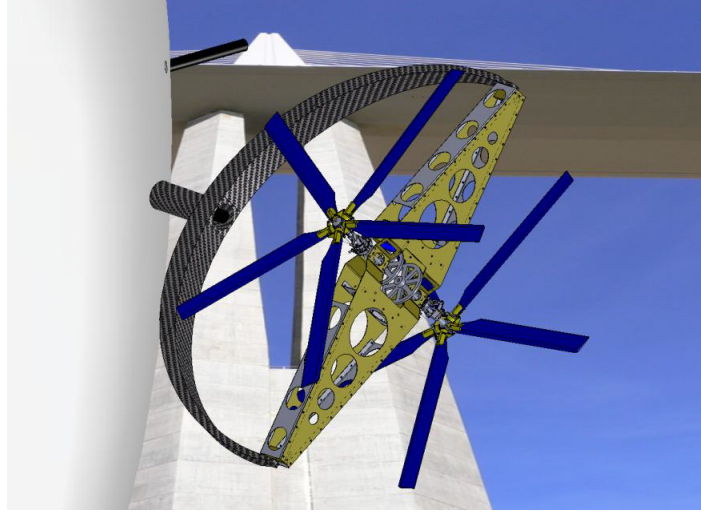


FIGURE 2.5 – Rotor de dirigeable MC500

- Une rotation d'inclinaison d'angle  $\beta_i$  autour de l'axe  $Y_m$ . ( $-180 < \beta_i < 180$ )
- Une rotation azmutale  $\gamma_i$  ( $-30 < \gamma_i < 30$ ) autour d'un axe  $Z_{iR}$  normal à l'axe  $Y_m$

L'axe  $X_{iR}$  complète le repère associé au rotor. On notera par  $P_i$  la position du rotor  $i$  et  $J_i$  est la matrice de rotation entre repère  $R_m$  et le repère  $(P_i, X_{iR}, Y_m, Z_{iR})$ . le matrice  $J_i$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} c_{\gamma_i} c_{\beta_i} & -s_{\gamma_i} c_{\beta_i} & s_{\beta_i} \\ s_{\beta_i} & c_{\beta_i} & 0 \\ -c_{\gamma_i} s_{\beta_i} & s_{\gamma_i} s_{\beta_i} & c_{\beta_i} \end{pmatrix}$$

Les  $P_i$  sont les points d'application des forces  $F_i$ . Ils sont définis par :

$$P_1 = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ c \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a \\ -b_1 \\ c \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} a \\ b_3 \\ c \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} a \\ -b_3 \\ c \end{pmatrix}$$

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

Chaque moteur  $i$  produit une force  $F_i$  donnée par :

$$F_i = J_i \| F_i \| e_{X_m}$$

Avec  $e_{X_m}$  est un vecteur unitaire porté par l'axe  $X_m$

Le moment induit par ces forces dans le centre de gravité  $G$  :

$$M_i = F_i \times P_i G$$

Les forces produites par chaque moteur sont données par :

$$F_i = \| F_i \| \begin{pmatrix} s_{\gamma_i} c_{\beta_i} \\ s_{\gamma_i} \\ -c_{\gamma_i} s_{\beta_i} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Les moments induits par ces forces :

$$M_i = F_i \times P_i G \quad (2.15)$$

En utilisant les coordonnées des points  $P_i$  on pourra évaluer le moment induit par chaque force et on aura :

$$P_1 = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 = - \| F_1 \| \begin{pmatrix} c s_{\gamma_1} + b_1 c_{\gamma_1} s_{\beta_1} \\ -c c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - a c_{\gamma_1} s_{\beta_1} \\ b_1 c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - a s_{\gamma_1} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} a \\ -b_1 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 = - \| F_2 \| \begin{pmatrix} c s_{\gamma_2} + b_1 c_{\gamma_2} s_{\beta_2} \\ -c c_{\gamma_2} c_{\beta_2} - a c_{\gamma_2} s_{\beta_2} \\ b_1 c_{\gamma_2} c_{\beta_2} - a s_{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} a \\ b_3 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow M_3 = - \| F_3 \| \begin{pmatrix} c s_{\gamma_3} + b_3 c_{\gamma_3} s_{\beta_3} \\ -c c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - a c_{\gamma_3} s_{\beta_3} \\ b_3 c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - a s_{\gamma_3} \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} a \\ -b_3 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow M_4 = - \| F_4 \| \begin{pmatrix} cs_{\gamma_4} + b_3c_{\gamma_4}s_{\beta_4} \\ -cc_{\gamma_4}c_{\beta_4} - ac_{\gamma_4}s_{\beta_4} \\ b_3c_{\gamma_4}c_{\beta_4} - as_{\gamma_4} \end{pmatrix}$$

Les Forces et les moments appliqués au dirigeable hors gravité et poussée d'archimède sont respectivement :

$$\tau_{F_1} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} \\ \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} \\ -\sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} s_{\beta_i} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\tau_{F_2} = - \begin{pmatrix} c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + \\ b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4}) \\ -c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} + a(\| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4} + \| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \\ \| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) \\ b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} c_{\beta_2}) + b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} c_{\beta_4}) + \\ a(\| F_4 \| s_{\gamma_4} + \| F_3 \| s_{\gamma_3} - \| F_1 \| s_{\gamma_1} - \| F_2 \| s_{\gamma_2}) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Les expressions des forces  $\tau_1$  et des moments  $\tau_2$  appliqués sur le dirigeable sont :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} - (mg - B_u).s_{\theta} \\ \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + (mg - B_u).s_{\phi}.c_{\theta} \\ -\sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} s_{\beta_i} + (mg - B_u).c_{\phi}c_{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\tau_2 = - \begin{pmatrix} c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + \\ b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4}) + B_u z_B s_{\phi} c_{\theta} \\ -c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} + a(\| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4} + \| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \\ \| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + B_u z_B s_{\theta} \\ b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} c_{\beta_2}) + \\ b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} c_{\beta_4}) + \\ a(\| F_4 \| s_{\gamma_4} + \| F_3 \| s_{\gamma_3} - \| F_1 \| s_{\gamma_1} - \| F_2 \| s_{\gamma_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Une fois l'énergie cinétique du dirigeable déterminée et les forces appliquées définies, on pourra établir le modèle dynamique ainsi que le modèle global du dirigeable.

### 2.2.2.3 Modèle dynamique

Les équations qui pilotent le modèle dynamique sont déduits des équations (2.10) – (2.19). Nous pouvons ainsi écrire le modèle dynamique sous la forme compacte suivante :

$$M_T \dot{\nu} = \tau + Q_e$$

avec :

$$M_T = \begin{pmatrix} M_{TT} & 0 \\ 0 & M_{RR} \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$Q_e = \begin{pmatrix} \tau_1 - \nu_2 \times M_{TT} \nu_1 \\ \tau_2 - \nu_2 \times M_{RR} \nu_2 - \nu_1 \times M_{TT} \nu_1 \end{pmatrix} = [Q_1, \dots, Q_6]^t$$

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

ou encore sous forme développée ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_{11}\dot{u} = \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} - (mg - B_u)s_{\theta} - M_{33}qw + M_{22}rv \\
 M_{22}\dot{v} = \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + (mg - B_u)s_{\phi}c_{\theta} - M_{33}pw - M_{22}ru \\
 M_{33}\dot{w} = -\sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} s_{\beta_i} + (mg - B_u)c_{\phi}c_{\theta} + M_{11}uq - M_{22}vp \\
 M_{44}\dot{p} + M_{46}\dot{r} = c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + \\
 \quad b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4}) + B_u z_B s_{\phi} c_{\theta} - M_{46}pq + (M_{55} - M_{66})qr \\
 M_{55}\dot{q} = -c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} + a(\| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4} + \| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \\
 \quad \| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + B_u z_B s_{\theta} - M_{46}p^2 + (M_{66} - M_{44})pr - M_{46}r^2 \\
 M_{46}\dot{p} + M_{66}\dot{r} = b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} c_{\beta_2}) + b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} c_{\beta_4}) + \\
 \quad a(\| F_4 \| s_{\gamma_4} + \| F_3 \| s_{\gamma_3} - \| F_1 \| s_{\gamma_1} - \| F_2 \| s_{\gamma_2}) + (M_{44} - M_{55})pq + M_{46}qr
 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Le Modèle dynamique du dirigeable MC500 se traduit par le schéma fonctionnel (2.6)

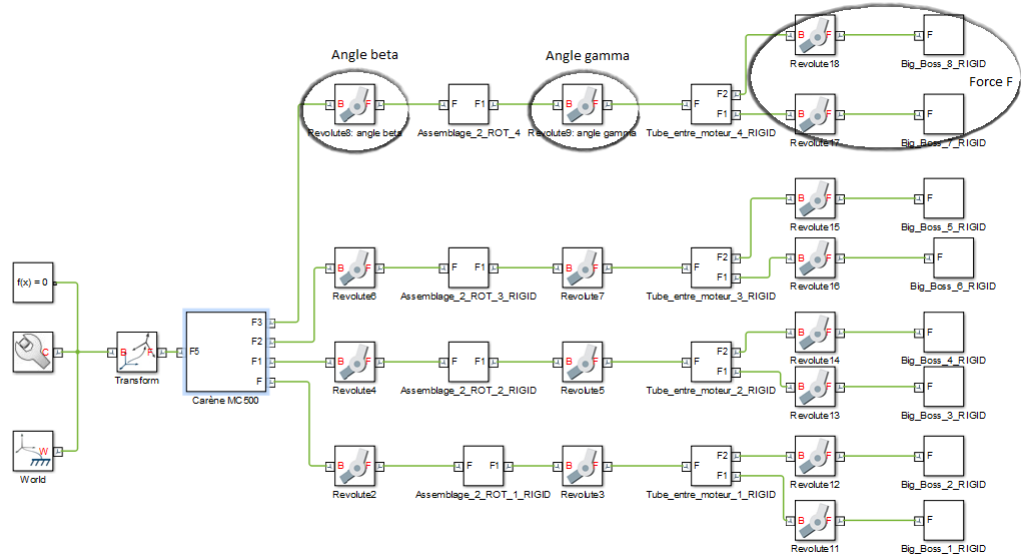


FIGURE 2.6 – Dynamique du dirigeable *MC500* : schéma de block réalisé par simmechanics

donné par le logiciel Simmechanics qui établit une passerelle entre le logiciel CAO solidworks

## 2.2. MODÉLISATION D'UN DIRIGEABLE AVEC CHARGE INTÉGRÉE

---

et matlab simulink et schématise les différents composants et articulation mécaniques du dirigeable

Nous combinerons les équations de la cinématique et les équations de la dynamique pour obtenir le modèle d'état complet du dirigeable.

### 2.2.2.4 Modèle complet du dirigeable MC500

En synthétisant les relations précédentes, le modèle mathématique du *MC500* sera donné sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = J(\eta_2)\nu \\ M_T \dot{\nu} = \tau + Q_e \end{cases} \quad (2.21)$$

ou encore sous forme développée :

$$\begin{cases} \dot{x} = c_\psi c_\theta u + (-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta)v + (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta)w \\ \dot{y} = s_\psi c_\theta u + (c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta)v + (-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta)w \\ \dot{z} = -s_\theta u + s_\phi c_\theta v + c_\phi c_\theta w \\ \dot{\phi} = p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\ \dot{\theta} = c_\phi q - s_\phi r \\ \dot{\psi} = \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \\ M_{11} \dot{u} = \alpha_1 + Q_1 \\ M_{22} \dot{v} = \alpha_2 + Q_2 \\ M_{33} \dot{w} = \alpha_3 + Q_3 \\ (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{p} = M_{46}\alpha_6 + M_{46}Q_6 - M_{66}\alpha_4 - M_{66}Q_4 \\ M_{55} \dot{q} = \alpha_5 + Q_5 \\ (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{r} = M_{46}\alpha_4 - M_{44}\alpha_6 + M_{46}Q_4 - M_{44}Q_6 \end{cases} \quad (2.22)$$

—  $X = [x, y, z, \phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q, r]^t$  : l'état du système.

## 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

- Les paramètres  $\alpha_i$  : les composantes des vecteurs forces et moments.
- $Q_e = [Q_1, \dots, Q_6]^t$  : les termes non-linéaires qui représentent les termes gyroscopiques.

Le modèle établi ci-dessus servira pour appliquer les algorithmes de contrôle, afin de stabiliser l'engin au voisinage d'un point d'équilibre ou bien pour suivre une trajectoire bien définie. Ce modèle décrit les équations de mouvement d'un dirigeable gros porteur pour transporter des charges volumineuses en soute. Une des particularités de cette classe de dirigeables, c'est la possibilité de charger et décharger les marchandises en altitude. Ceci minimisera encore la logistique nécessaire. Cependant cette phase doit être analysée avec beaucoup de précision en raison de sa complexité et de sa criticité.

Dans la section suivante nous établirons les équations de mouvement d'un dirigeable avec charge suspendue par un câble flexible.

### 2.3 Modélisation du dirigeable avec charge suspendue

Lors des phases de chargement et de déchargement, le dirigeable peut être considéré comme une grue volante. Le mouvement du dirigeable et les forces de perturbation telles que le vent créent une oscillation de la charge. Cette oscillation peut-être dangereuse et influerait négativement sur la manœuvrabilité du dirigeable (particulièrement lorsqu'il souève des charges lourdes). Réduire le balancement de la charge nous permettrait d'accroître la rapidité et la sécurité de la manœuvre et d'améliorer le contrôle du dirigeable.

Le dirigeable est caractérisé par une dynamique lente ce qui rend la commande du câble par les actionneurs du dirigeable difficile. Nous proposons d'intégrer alors un actionneur à la sortie de l'enrouleur du câble représenté par une liaison cardan motorisée et qui aura pour mission de contrôler la dynamique rapide du câble.

l'élaboration d'un modèle mathématique précis décrivant les équations du mouvement du

## 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

système dirigeable charge suspendue sera donc nécessaire dans une première étape.

Les modélisations d'autres types de plateformes aériennes avec charges sous élingue ont été bien étudiées et référencées, notamment en ce qui concerne les hélicoptères [LS65, ORA06] et les quadrotors [PBSF15, RdA16]. Dans ces derniers travaux la modélisation est effectuée sous l'hypothèse que le câble est rigide et sans masse. Cette hypothèse est forte pour un dirigeable-grue en raison du poids de la charge transportée.

Pour une étude plus précise du phénomène, nous développons dans ce qui suit un modèle de dirigeable-grue au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement. Nous tiendrons compte de la flexibilité du câble qui sera assimilé à une poutre d'Euler-Bernoulli. Nous adopterons une cinématique non linéaire ainsi que la théorie de Kirchoff dans les quasi-coordonnées afin d'élaborer les équations dynamiques du système multi-corps flexible.

### 2.3.1 Modélisation en 2D

Dans un but méthodologique de clarification du problème nous présenterons dans cette section le cas d'une oscillation de la charge et d'une déformation du câble qui se fait dans un plan vertical donné, incluant l'axe  $z_2$ . Ce phénomène représente le cas le plus fréquent de sollicitation extérieure due au vent. Les résultats obtenus seront généralisés dans la section suivante dans une modélisation en  $3D$ .

#### 2.3.1.1 Préliminaire

La figure 2.7 montre le système à modéliser. Il est constitué par un dirigeable transportant une charge au moyen d'un câble flexible. Nous supposons que le dirigeable en phase de chargement ou déchargement est soumis à une rafale de vent orientée suivant l'axe  $(OX_m)$ . Dans cette configuration le dirigeable se déplace en mouvement de translation. Ce déplacement génère un angle de balancement de la charge noté  $\theta_s$ . Le câble se comporte comme

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

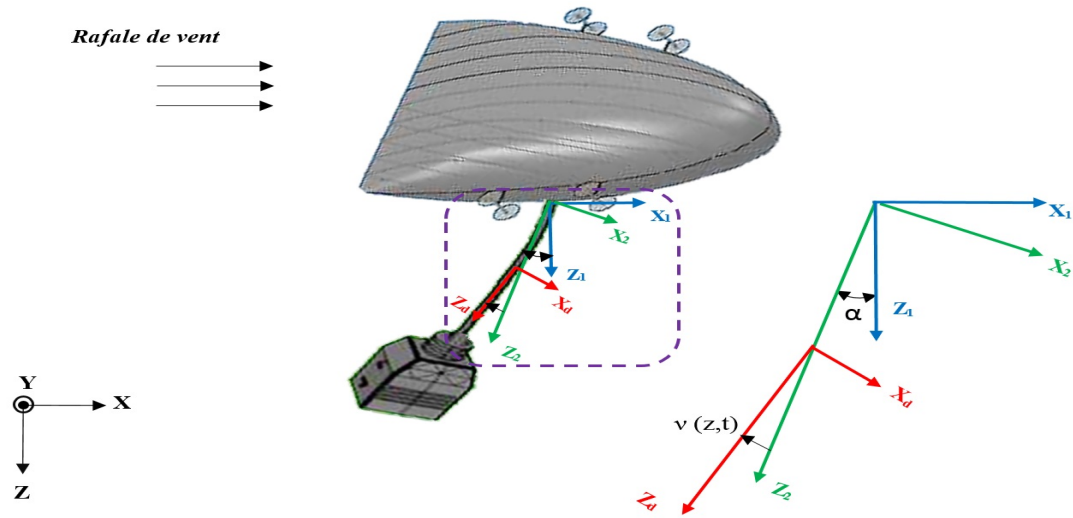


FIGURE 2.7 – DGP avec charge suspendue par un câble

une poutre flexible de longueur  $L$ , de masse par unité de longueur  $\rho$  et de rigidité  $EI_{y_2}$ , où  $E$  est le module de Young et  $I_{y_2}$  le moment quadratique selon  $y_2$ . La déformation du câble est notée  $\sigma$ . La masse de la charge est  $M_s$ , son inertie  $I_s$  et la distance entre son centre de masse et l'extrémité du câble est  $r_s$ .

Pour monter et descendre la charge nous utilisons un enrouleur placé à proximité du centre de gravité du dirigeable. Une liaison cardan suit immédiatement la sortie du câble de l'enrouleur (voir figure 2.8). Le choix de cette liaison a pour objectif de contrôler le câble par un seul actionneur dans deux plans de vol : Longitudinal(étudié dans cette section) et transversal. Le cardan sera piloté par un moteur électrique qui a pour inertie  $I_m$  et de coefficient de frottement  $k_m$ .

Lors de cette modélisation quelques hypothèses seront adoptées :

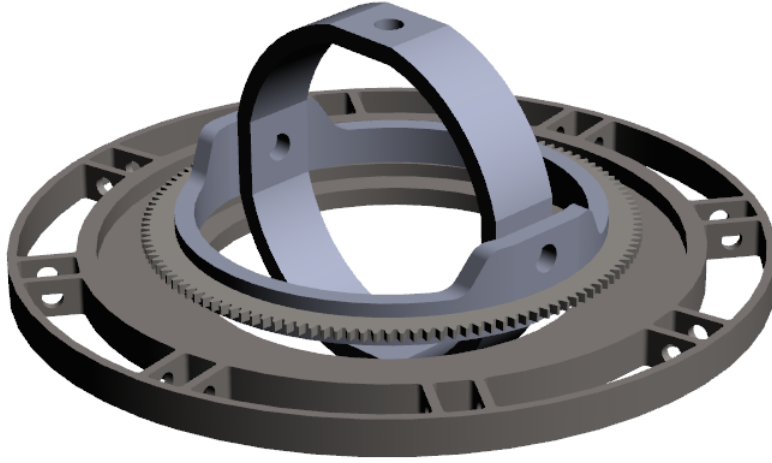


FIGURE 2.8 – la liaison cardan

1. Le câble est modélisé comme une poutre d'Euler-Bernoulli, c'est à dire :
  - L'inertie de rotation d'un élément est négligée.
  - Le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligé.
2. Les déformations du câble sont supposées suffisamment petites pour pouvoir adopter l'hypothèse des petites perturbations.
3. L'actionneur qui pilote le cardan sera supposé dans le centre du gravité du dirigeable.

Pour décrire le mouvement du système multi-corps flexible : dirigeable , câble flexible et charge suspendue, nous définissons les repères suivants :

- $R_0(X, Y, Z)$  : Un repère lié à la terre.
- $R_1(G, X_m, Y_m, Z_m)$  : Un repère lié au centre de gravité du dirigeable.
- $R_2(G, X_2, Y_2, Z_2)$  : Un repère lié au câble en rotation d'un angle  $\theta_s$  par rapport à  $R_1$
- $R_3(P_s, X_3, Y_3, Z_3)$  : Un repère à l'extrémité du câble pour décrire le mouvement de la charge.

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

- $R_d(P_d, X_d, Y_d, Z_d)$  : Un repère attaché à une section quelconque du câble situé à une distance  $z_2$  de l'axe  $Z_2$ . Pour  $z_2 = 0$  l'axe  $X_d$  est superposé avec l'axe  $X_3$  et avec l'axe  $Z_3$  pour  $z_2 = L$ .

Pour des raisons de simplicité d'écriture des équations, nous allons utiliser dans la suite les notations suivantes :

$\sigma(z_2, t) = \sigma$ ,  $\sigma_{z_2} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_2}$ ,  $\sigma_{z_2 z_2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z_2^2}$ ,  $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$  sont respectivement la déformation et ses dérivées à un point d'abscisse  $z_2$  du câble

$\sigma(L, t) = \sigma_L$ ,  $\sigma_{z_2, L} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z_2}\right)_{z_2=L}$ ,  $\sigma_{z_2 z_2, L} = \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z_2^2}\right)_{z_2=L}$  sont respectivement la déformation, sa première et seconde dérivée partielle à l'extrémité du câble.

Nous nous plaçons ici dans le cadre des grands déplacements avec petites déformations. Dans la littérature, les chercheurs utilisent souvent une cinématique d'ordre 1 pour modéliser une poutre flexible. La modélisation est effectuée sous réserve que la position d'un point le long d'une poutre est indépendante de l'allongement de la poutre selon son axe neutre, ceci permet de négliger des termes non linéaires, et ce dans l'objectif de réduire la complexité des équations obtenues.

Les termes non linéaires négligés sont des termes d'ordre 2, ils sont appelés raidissements géométriques (geometric stiffening terms)[KRB87] et ils représentent l'allongement de la poutre. Les termes de raidissement sont importants lorsque le câble flexible est soumis à des vitesses et des accélérations élevées. Pour le dirigeable-grue, les termes de raidissement ne sont pas négligeables, car d'une part les rafales de vent ont des effets considérables sur le dirigeable et peuvent créer des accélérations élevées, et d'autre part les grandes vitesses et accélérations angulaires de la liaison cardan peuvent aussi générer des déformations importantes du câble, ce qui nous sortirait du cadre des hypothèses simplificatrices.

Pour les différentes raisons citées, nous ne pourrions pas adopter une cinématique linéaire d'ordre 1 pour modéliser le dirigeable-grue.

Dans ce qui suit nous allons présenter une cinématique non linéaire d'ordre deux afin de tenir compte de la flexibilité et de l'allongement du câble. Nous développons les expressions des énergies cinétiques et potentielles à l'ordre deux.

### 2.3.1.2 Quelques définitions

Dans ce paragraphe, nous introduisons les grandeurs physiques nécessaires pour décrire le mouvement du dirigeable-grue. Nous introduisons les vecteurs positions du système considéré et les matrices de passage entre les différents repères.

Le dirigeable est en mouvement de translation suivant l'axe  $(GX_m)$ , par conséquent la position du centre de gravité du dirigeable dans le repère  $R_1$  est donnée par :

$$OG = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le repère  $R_2$  est en mouvement de rotation d'un angle  $\theta_s$  par rapport au repère  $R_1$ . La matrice de passage du repère  $R_1$  vers le repère  $R_2$  est :

$$H_{\theta_s} = \begin{pmatrix} c_{\theta_s} & 0 & -s_{\theta_s} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\theta_s} & 0 & c_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Un câble de longueur initiale  $L$  s'allonge sous l'effet des charges. Le terme qui décrit l'allongement est un terme d'ordre deux en fonction de la déformation. Il est donné par :

$$\frac{1}{2} \int_0^{z_2} \sigma_s^2(s, t) ds \quad (2.24)$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

Ainsi, la position d'un élément  $P_d$  du câble dans le repère  $R_2$  est égale à :

$$GP_d = \begin{pmatrix} \sigma(z_2, t) \\ 0 \\ z_2 - \frac{1}{2} \int_0^{z_2} \sigma_s^2(s, t) ds \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$\sigma(z_2, t)$  : la déformation du câble à la position  $z_2$  à l'instant  $t$ . La matrice de passage de  $R_d$  par rapport à  $R_2$  est [Pie01] :

$$R_{d/2} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sigma_{z_2}^2 & 0 & -\sigma_{z_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{z_2} & 0 & 1 - \frac{1}{2}\sigma_{z_2}^2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

D'autre part, la position de centre de masse de la charge dans  $R_2$  est donnée par :

$$GP_s = GP_1 + \tilde{R}_{d/2} P_1 P_s = \begin{pmatrix} \sigma_L \\ 0 \\ L - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma^2 dz_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sigma_{z_2,L}^2 & 0 & -\sigma_{z_2,L} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{z_2,L} & 0 & 1 - \frac{1}{2}\sigma_{z_2,L}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_s \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$GP_s = \begin{pmatrix} \sigma_L - r_s \sigma_{z_2,L} \\ 0 \\ L + r_s - \frac{1}{2} r_s \sigma_{z_2,L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Où  $P_1$  est un point à l'extrémité du câble.

$\tilde{R}_{d/2}$  est une matrice de rotation obtenue à partir de  $R_{d/2}$  en remplaçant  $z_2$  par  $L$ . Le vecteur gravité s'exprime dans le repère  $R_2$  par :

$$g_1 = H_{\theta_s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_{\theta_s} g \\ 0 \\ c_{\theta_s} g \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

**Remarque 1** 1. Les termes d'ordres deux qui correspondent à l'allongement du câble ne seraient pas pris en compte si on aurait fait l'hypothèse d'une cinématique d'ordre un.

2. Les matrices de rotation  $R_{d/2}$  et  $\tilde{R}_{d/2}$  sont des matrices orthogonales.

3. Dans le cas où la masse de la charge est concentrée dans l'extrémité du câble nous aurions  $r_s = 0$

La définition du vecteur position et la définition des angles de rotation d'un repère à un autre nous permet d'évaluer les vitesses linéaires et angulaires. La vitesse angulaire de  $R_2$  par rapport à  $R_0$  sera :

$$\Omega_2 = q_1 Y_m \quad (2.30)$$

Tandis que la vitesse angulaire de  $R_d$  par rapport à  $R_2$  sera :

$$\Omega_{d/2} = \dot{\sigma}_{z_2} Y_2 \quad (2.31)$$

qu'on pourrait exprimer dans  $R_1$  par :

$$\Omega_{d/1} = (q_1 + \dot{\sigma}_{z_2}) Y_m$$

La vitesse linéaire du câble par rapport à  $R_0$  est :

$$v_{d_{R_0}} = \frac{dOG}{dt} + H_{\theta_s} \frac{dGP_d}{dt} + \Omega_2 \times H_{\theta_s} GP_d \quad (2.32)$$

En utilisant la matrice de passage  $H_{\theta_s}$  nous pouvons écrire cette vitesse dans le référentiel  $R_2$  comme suit :

$$v_{d_{R_2}} = H_{\theta_s}^t \frac{dOG}{dt} + \frac{dGP_d}{dt} + \Omega_2 \times GP_d \quad (2.33)$$

ainsi on a :

$$v_{d_{R_2}} = \begin{pmatrix} uc_{\theta_s} + \dot{\sigma} + z_2 q_1 - \frac{1}{2} q_1 \int_0^{z_2} \sigma_s^2 ds \\ 0 \\ -us_{\theta_s} - \sigma q_1 - \int_0^{z_2} \sigma_s \dot{\sigma}_s ds \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

La vitesse linéaire de la charge est calculée de la même manière que la vitesse linéaire du câble. Elle sera, exprimée dans  $R_2$  par :

$$v_{s|R_2} = H_{\theta_s}^t \frac{dOG}{dt} + \frac{dGP_s}{dt} + \Omega_2 \times GP_s \quad (2.35)$$

$$v_{s|R_2} = \begin{pmatrix} uc_{\theta_s} + \dot{\sigma}_L + \dot{\sigma}_{z_2,L} r_s + q_1(L + r_s - \frac{1}{2} r_s \sigma_{z_2,L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2) \\ 0 \\ us_{\theta_s} - r_s \dot{\sigma}_{z_2,L} \sigma_{z_2,L} - q_1(\sigma_L - r_s \sigma_{z_2,L}) - \int_0^L \sigma_{z_2} \dot{\sigma}_{z_2} dz_2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Afin d'appliquer les équations quasi-lagrangienne (2.54) nous avons besoin de déterminer le lagrangien du système multi-corps flexible :

$$\mathcal{L} = T - V + R_a$$

Où  $T$  est l'énergie cinétique totale du système,  $V$  son énergie potentielle et  $R_a$  est la fonction de dissipation de Rayleigh que l'on calculera dans les paragraphes suivants :

### 2.3.1.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des différents éléments : dirigeable, câble, charge et enrouleur. Elle s'écrit ainsi :

$$T = T_D + T_s + T_m + \int_0^L T_c \quad (2.37)$$

Avec  $T_D$  l'énergie cinétique du dirigeable donnée par :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D u^2$$

$T_m$  L'énergie cinétique du moteur du cardan :

$$T_m = \frac{1}{2} I_m q_1^2$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

et  $T_c$  est l'énergie cinétique d'un élément du câble :

$$T_c = \frac{1}{2} \rho v_d^t v_d dz_2$$

D'où l'énergie cinétique de tout le câble :

$$\begin{aligned} \int_0^L T_c &= \frac{1}{2} \rho [Lu^2 + \int_0^L \dot{\sigma}^2 dz_2 + \frac{L^3}{3} q_1^2 + 2uc_{\theta_s} \int_0^L \dot{\sigma} dz_2 + L^2 u q_1 c_{\theta_s} - u q_1 c_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \sigma_{z_2}^2 ds dz_2 \\ &+ 2q_1 \int_0^L z_2 \dot{\sigma} dz_2 - q_1^2 \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \sigma_{z_2}^2 ds dz_2 + q_1^2 \int_0^L \sigma^2 dz_2 + 2u q_1 s_{\theta_s} \int_0^L \sigma dz_2 \\ &+ 2us_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \sigma_{z_2} \dot{\sigma}_{z_2} ds dz_2 + O(3)] \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'énergie cinétique de la charge est donnée par :

$$T_s = \frac{1}{2} I_s (q_1 + \dot{\sigma}_L)^2 + \frac{1}{2} M_s v_s^t v_s \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{2} I_s (q_1^2 + \dot{\sigma}_{z_2,L}^2 + 2q_1 \dot{\sigma}_{z_2,L}) + \frac{1}{2} M_s [u^2 + \dot{\sigma}_L^2 + \dot{\sigma}_{z_2,L}^2 r_s^2 + (L + r_s)^2 q_1^2 + 2u \dot{\sigma}_L c_{\theta_s} \\ &+ 2r_s u \dot{\sigma}_{z_2,L} c_{\theta_s} + 2u q_1 c_{\theta_s} (L + r_s) - r_s u q_1 c_{\theta_s} \sigma_{z_2,L}^2 - u q_1 c_{\theta_s} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2 + 2r_s \dot{\sigma}_L \dot{\sigma}_{z_2,L} \\ &+ 2q_1 \dot{\sigma}_L (L + r_s) + 2r_s (L + r_s) q_1 \dot{\sigma}_{z_2,L} + q_1^2 \sigma_L^2 + r_s^2 q_1^2 \sigma_{z_2,L}^2 - 2us_{\theta_s} \int_0^L \sigma_{z_2} \dot{\sigma}_{z_2} dz_2 \\ &- 2r_s us_{\theta_s} \dot{\sigma}_{z_2,L} \sigma_{z_2,L} - 2u q_1 s_{\theta_s} \sigma_L + 2r_s u q_1 s_{\theta_s} \sigma_{z_2,L} + O(3)] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Comme nous avons utilisé une cinématique d'ordre deux, le modèle sera plus précis au second ordre en termes de déformation et de sa première dérivée temporelle. Par conséquent, tous les termes en  $\sigma$  ou  $\dot{\sigma}$ , ou leurs dérivées spatiales, doivent être linéarisés dans les équations de mouvement qui en résultent. En développant les équations de l'énergie cinétique du câble et du solide, il suffit de garder les expressions de la position et de la vitesse exactes au second ordre. Toutes les autres quantités peuvent être linéarisées. Le linéarisé de l'énergie

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

cinétique totale du système d'ordre 2 aura pour expression :

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}[(\rho L + M_s + M_D)u^2 + (I_s + I_m + M_s(L + r_s)^2 + \rho \frac{L^3}{3})q_1^2 + (M_s\sigma_L^2 + r_s^2 M_s\sigma_{z_2,L}^2 \\
& + \rho \int_0^L \sigma^2 dz_2 - \rho \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \sigma_s^2 ds dz_2)q_1^2 + (2\rho \int_0^L \dot{\sigma} dz_2 + 2M_s\dot{\sigma}_L + 2M_s r_s \dot{\sigma}_{z_2,L})c_{\theta_s} u \\
& + (-2M_s r_s \dot{\sigma}_{z_2,L} \sigma_{z_2,L} - 2M_s \int_0^L \sigma_{z_2} \dot{\sigma}_{z_2} dz_2 + 2\rho \int_0^L \int_0^{z_2} \sigma_s \dot{\sigma}_s ds dz_2) s_{\theta_s} u \\
& + (2\rho \int_0^L z_2 \dot{\sigma} dz_2 + 2I_s \dot{\sigma}_{z_2,L} + 2M_s(L + r_s)\dot{\sigma}_L + 2M_s r_s(L + r_s)\dot{\sigma}_{z_2,L})q_1 \\
& + ((L^2\rho + 2M_s(L + r_s) - M_s r_s \sigma_{z_2,L}^2 - M_s \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2 - \rho \int_0^L \int_0^{z_2} \sigma_s^2 ds dz_2)c_{\theta_s} \\
& + (2\rho \int_0^L \sigma dz_2 - 2M_s\sigma_L + 2M_s r_s \sigma_{z_2})s_{\theta_s})uq_1 + \rho \int_0^L \dot{\sigma}^2 dz_2 + I_s \dot{\sigma}_{z_2,L}^2 \\
& + M_s(\dot{\sigma}_L^2 + \dot{\sigma}_{z_2,L}^2 r_s^2 + 2r_s \dot{\sigma}_L \dot{\sigma}_{z_2,L}) + O(3)] \tag{2.41}
\end{aligned}$$

#### 2.3.1.4 Energie potentielle

L'énergie potentielle du système est donnée par :

$$V = \int_0^L V_c + V_s \tag{2.42}$$

Avec  $V_c$  l'énergie potentielle d'un élément du câble :

$$\begin{aligned}
V_c = & \frac{1}{2}EI_{y_2}\sigma_{z_2 z_2}^2 dz_2 - \rho g^t GP_d dz_2 \\
= & \frac{1}{2}EI_{y_2}\sigma_{z_2 z_2}^2 dz_2 + g\rho\sigma s_{\theta_s} dz_2 - g\rho c_{\theta_s}(z_2 - \frac{1}{2} \int_0^{z_2} \sigma_s^2 ds) dz_2 \tag{2.43}
\end{aligned}$$

et  $V_s$  est l'énergie potentielle de la charge :

$$\begin{aligned}
V_s = & -M_s g^t GP_s \\
= & M_s g s_{\theta_s} (\sigma_L - r_s \sigma_{z_2,L}) - M_s g c_{\theta_s} (L + r_s - \frac{1}{2} r_s \sigma_{z_2,L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2) \tag{2.44}
\end{aligned}$$

### 2.3.1.5 Fonction de dissipation de Rayleigh

Un câble flexible mis en mouvement de vibration autour de sa position d'équilibre finit par revenir à sa position d'équilibre naturel et les vibrations s'atténuent au cours du temps. Ceci prouve l'existence d'un phénomène d'amortissement dû à l'amortissement interne des matériaux.

L'amortissement provenant du câble et du cardan peut être modélisé par la fonction de dissipation de Rayleigh suivante :

$$R_a = \frac{1}{2}\kappa_m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_e EI_{y2} \int_0^L \dot{\sigma}_{z_2 z_2}^2 dz_2 \quad (2.45)$$

$\kappa_e$  est l'amortissement interne du câble.  $\kappa_m$  est l'amortissement du cardan qui sera négligé dans la suite.

### 2.3.2 Modèle dynamique

Comme mentionné précédemment, la modélisation d'un câble flexible qui porte une charge est similaire à la modélisation d'une poutre d'Euler-Bernoulli tournant dans un plan vertical. L'équation dynamique de la poutre est décrite par des équations aux dérivées partielles *EDP* et des *EDO* (équations dérivées ordinaires). On peut conclure que le modèle dynamique du dirigeable-grue est un système continu à paramètres distribués piloté par des *EDP* et *EDO* avec des conditions aux limites. De plus le modèle résultant est d'ordre infini. Dans le but de contrôler ce système, un modèle d'état discret spatialement et d'ordre fini est préférable.

Deux méthodes sont largement utilisées dans la littérature pour discrétiser la déformation à savoir la méthode des éléments finis *MEF* et la méthode d'analyse modale. Dans la méthode des éléments finis, la déformation est représentée par des fonctions de formes par morceaux. Le câble est alors divisé en un nombre fini d'intervalles et un polynôme de degré

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

réduit est utilisé pour chaque intervalle.

Pour notre étude nous avons utilisé l'analyse modale pour discrétiser la déformation totale du système. Dans ce moyen de discrétisation, la déformation est représentée par une somme pondérée de fonctions de formes. En d'autres termes, la méthode consiste en l'approximation de la solution par une série finie de fonctions supposées multipliées par des coefficients indéterminés.

La déformation s'écrira sous la forme :

$$\sigma(z_2, t) = \sum_1^N \omega_i \delta_i = \omega^t \delta \quad (2.46)$$

avec  $N$  le nombre de modes retenus dans la série.

$\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]^t$  : est le vecteur des fonctions de formes. Ce vecteur représente la configuration générale du câble.

$\delta = [\delta_1, \dots, \delta_N]^t$  : est le vecteur des coordonnées généralisées relatives aux modes flexibles.

Ce vecteur désigne la nature du mouvement réalisé par le câble.

### 2.3.2.1 Discrétisation de l'énergie cinétique

En remplaçant l'expression de la déformation (2.46) dans l'équation (2.41), on déduit l'énergie cinétique totale discrétisée :

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2}[(\rho L + M_s + M_D)u^2 + (I_s + I_m + M_s(L + r_s)^2 + \rho \frac{L^3}{3})q_1^2 \\
 & + \delta^t(M_s \omega_L \omega_L^t + r_s^2 M_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t + \rho \int_0^L \omega \omega^t dz_2 - \rho \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \omega_s \omega_s^t ds dz_2) \delta q_1^2 \\
 & + (2\rho \int_0^L \omega^t dz_2 + 2M_s \omega_L^t + 2M_s r_s \omega_{z_2, L}^t) \dot{\delta} c_{\theta_s} u \\
 & + \delta^t(-2M_s r_s \omega'_L \omega_{z_2, L}^t - 2M_s \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t dz_2 + 2\rho \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_s \omega_s^t ds dz_2) s_{\theta_s} u \dot{\delta} \\
 & + (2I_s \omega_{z_2, L}^t + 2M_s(L + r_s) \omega_L^t + 2M_s r_s(L + r_s) \omega_{z_2, L}^t + 2\rho \int_0^L z_2 \omega^t dz_2) \dot{\delta} q_1 \\
 & + ((L^2 \rho + 2M_s(L + r_s) + \delta^t(-\rho \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_s \omega_s^t ds dz_2 - M_s r_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t \\
 & - M_s \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t ds) \delta) c_{\theta_s} + (2\rho \int_0^L \omega^t dz_2 - 2M_s \omega_L^t + 2M_s r_s \omega_{z_2, L}^t) \delta s_{\theta_s}) u q_1 \\
 & + \dot{\delta}^t(\rho \int_0^L \omega \omega^t dz_2 + I_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t + M_s(\omega_L \omega_L^t + \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t r_s^2 + 2r_s \omega_L \omega_{z_2, L}^t) \delta)]
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour alléger l'écriture de l'énergie cinétique nous utiliserons les notations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \rho L + M_s + M_D \\
 A_2 &= I_s + I_m + M_s(L + r_s)^2 + \rho \frac{L^3}{3} \\
 A_3 &= -\rho \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t ds dz_2 + \rho \int_0^L \omega \omega^t dz_2 + M_s \omega_L \omega_L^t + r_s^2 M_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t \\
 A_4 &= 2\rho \int_0^L \omega^t dz_2 + 2M_s \omega_L^t + 2M_s r_s \omega_{z_2, L}^t \\
 A_5 &= 2\rho \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t ds dz_2 - 2M_s \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t dz_2 - 2M_s r_s \omega'_L \omega_{z_2, L}^t
 \end{aligned}$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

$$A_6 = 2\rho \int_0^L z_2 \omega^t dz_2 + 2I_s \omega_{z_2,L}^t + 2M_s(L + r_s) \omega_L^t + 2M_s r_s(L + r_s) \omega_{z_2,L}^t$$

$$A_7 = L^2 \rho + 2M_s(L + r_s)$$

$$A_8 = -\rho \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t ds dz_2 - M_s r_s \omega_{z_2,L} \omega_{z_2,L}^t - M_s \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t dz_2$$

$$A_9 = 2\rho \int_0^L \omega^t dz_2 - 2M_s \omega_L^t + 2M_s r_s \omega_{z_2,L}^t$$

$$A_{10} = \rho \int_0^L \omega \omega^t dz_2 + I_s \omega_{z_2,L} \omega_{z_2,L}^t + M_s (\omega_L \omega_L^t + \omega_{z_2,L} \omega_{z_2,L}^t r_s^2 + 2r_s \omega_L \omega_{z_2,L}^t)$$

L'énergie cinétique s'écrira alors :

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} [A_1 u^2 + (A_2 + \delta^t A_3 \delta) q_1^2 + (A_4 c_{\theta_s} + \delta^t A_5 s_{\theta_s}) u \dot{\delta} \\ & + A_6 \dot{q}_1 + (A_7 + \delta^t A_8 \delta c_{\theta_s} + A_9 \delta s_{\theta_s}) u q_1 + \delta^t A_{10} \dot{\delta}] \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou sous la forme quadratique suivante :

$$T = \begin{pmatrix} u & q_1 & \dot{\delta} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} u & q_1 & \dot{\delta} \end{pmatrix}^t$$

avec  $M$  la matrice de masse, qui est une matrice définie positive :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{1}{2}(A_7 + \delta^t A_8 \delta c_{\theta_s} + A_9 \delta s_{\theta_s}) & \frac{1}{2}(A_4 c_{\theta_s} + \delta^t A_5 s_{\theta_s}) \\ \frac{1}{2}(A_7 + \delta^t A_8 \delta c_{\theta_s} + A_9 \delta s_{\theta_s})^t & A_2 + \delta^t A_3 \delta & \frac{1}{2} A_6 \\ \frac{1}{2}(A_4 c_{\theta_s} + \delta^t A_5 s_{\theta_s})^t & \frac{1}{2} A_6^t & A_{10} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

#### 2.3.2.2 Discrétisation de l'énergie potentielle

Similairement à ce qui a été développé pour l'énergie cinétique, nous allons exprimer l'énergie potentielle en fonction des nouvelles variables  $w$  et  $\delta$ .

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

Les équations (2.46) et (2.42) nous donnent :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\delta^t EI_{y_2} \int_0^L \omega_{z_2 z_2} \omega_{z_2 z_2}^t dz_2 \delta + g\rho \int_0^L \omega^t dz_2 \delta s_{\theta_s} - g\rho c_{\theta_s} \left( \frac{L^2}{2} - \delta^t \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_s \omega_s^t ds dz_2 \delta \right) \\
&\quad + M_s g s_{\theta_s} (\omega_L^t \delta - r_s \omega_{z_2, L}^t \delta) - M_s g c_{\theta_s} (L + r_s - \delta^t \frac{1}{2} r_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t \delta - \delta^t \frac{1}{2} \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t ds \delta) \\
&= \frac{1}{2}\delta^t EI_{y_2} \int_0^L \omega_{z_2 z_2} \omega_{z_2 z_2}^t dz_2 \delta + \left( -\rho \frac{L^2}{2} - (L + r_s) M_s \right) g c_{\theta_s} + \frac{1}{2}\delta^t \left( \rho \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_s \omega_s^t ds dz_2 \right. \\
&\quad \left. + M_s \left( \frac{1}{2} r_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t + \frac{1}{2} \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t dz_2 \right) \right) \delta g c_{\theta_s} + g s_{\theta_s} \left( \rho \int_0^L \omega^t dz_2 + M_s (\omega_L^t - r_s \omega_{z_2, L}^t) \right) \delta
\end{aligned} \tag{2.50}$$

En utilisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
K_{ff} &= EI_{y_2} \int_0^L \omega_{z_2 z_2} \omega_{z_2 z_2}^t dz_2 \\
G_{rr} &= \left( -\rho \frac{L^2}{2} - (L + r_s) M_s \right) g \\
G_{rf} &= \left( \rho \int_0^L \int_0^{z_2} \omega_s \omega_s^t ds dz_2 + M_s \left( \frac{1}{2} r_s \omega_{z_2, L} \omega_{z_2, L}^t + \frac{1}{2} \int_0^L \omega_{z_2} \omega_{z_2}^t dz_2 \right) \right) g \\
G_{ff} &= \left( \rho \int_0^L \omega^t dz_2 + M_s (\omega_L^t - r_s \omega_{z_2, L}^t) \right) g
\end{aligned}$$

L'énergie potentielle discrétisée du système s'écrira finalement sous la forme :

$$V = \frac{1}{2}\delta^t K_{ff} \delta + G_{rr} c_{\theta_s} + \frac{1}{2}\delta^t G_{rf} \delta c_{\theta_s} + s_{\theta_s} G_{ff} \delta \tag{2.51}$$

#### 2.3.2.3 Discrétisation de la fonction de Rayleigh

La discrétisation de la fonction de Rayleigh donne :

$$R_a = \frac{1}{2}\kappa_m q^2 + \frac{1}{2}\delta^t \kappa_e EI_{y_2} \int_0^L \omega_{z_2 z_2} \omega_{z_2 z_2}^t dz_2 \delta \tag{2.52}$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

Elle s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$R_a = \begin{pmatrix} u & q_1 & \dot{\delta}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_m & 0 \\ 0 & 0 & B_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q_1 \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

où

$$B_{ff} = k_e K_{ff}$$

Nous avons ainsi préparé le terrain pour établir les équations du mouvement. Il s'agit maintenant d'intégrer les expressions discrétisées des énergies et de la fonction de Rayleigh dans les équations quasi-lagrangiennes.

#### 2.3.2.4 Forces et couples appliqués

Pour contrôler l'angle de balancement de  $\theta_s$  la charge, nous pouvons agir sur le déplacement  $x$  du dirigeable. En d'autres termes, on utilisera les actionneurs du dirigeable pour assurer la stabilisation de  $\theta_s$  et réduire implicitement les vibrations de la déformation  $\delta$ . En réalité, cette solution n'est pas réaliste étant donné la dynamique lente du dirigeable comparée à celle très rapide du câble.

En d'autres termes, laisser la charge se balancer jusqu'à la stabilisation du dirigeable pourrait avoir des conséquences graves sur la stabilité de l'ensemble surtout en présence d'une rafale de vent.

Pour ces raisons, nous avons proposé de placer à la sortie de l'enrouleur une liaison cardan motorisée, permettant de tourner selon deux axes. Ce nouvel actionneur a pour rôle d'assurer le contrôle de l'angle d'oscillation  $\theta_s$ . L'utilisation d'une telle configuration est un point innovant dans le présent travail.

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

L'ensemble des forces appliquées sur le dirigeable-grue correspondra donc au couple  $F_2$  généré par le moteur du cardan sur le câble et aux propulseurs du dirigeable  $F_1$ . Le vecteur des forces extérieures est donné par :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque 2** La force  $F_1$  sera déterminée à partir des équations (2.18), (2.18) en prenant  $\gamma_i = 0$  et  $\beta_i = \frac{\pi}{2}$  pour obtenir un mouvement de translation du dirigeable suivant l'axe  $X_1$ .

Pour la mise en équation du modèle du dirigeable avec charge suspendue nous utilisons les équations quasi-lagrangienne [Fos94, Mei91, MS95]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} \right) + \nu_2 \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} - J_1^t(\nu_2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} = \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2} \right) + \nu_2 \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2} + \nu_1 \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} - J_1^t(\nu_2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2} = \tau_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} + \frac{\partial R_a}{\partial \delta} = F \end{cases} \quad (2.54)$$

avec  $\mathcal{L}$  le lagrangien du système.

Ces relations représentent une généralisation de l'équation de Kirchoff afin de tenir compte de la gravité et la déformation d'un corps déformable. Il est important de noter qu'une équation supplémentaire à l'équation (2.10) a été ajoutée en raison du fait que le comportement élastique d'un corps déformable introduit un nouveau degré de liberté dans la modélisation.

Nous aboutissons aux équations du mouvement du dirigeable-grue qui s'écrivent dans les

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

quasi-coordonnées ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = A_1\dot{u} + \frac{1}{2}(A_4c_{\theta_s} + \delta^t A_5s_{\theta_s})\ddot{\delta} + \frac{1}{2}(A_7 + \delta^t A_8\delta c_{\theta_s} + A_9\delta s_{\theta_s})\dot{q}_1 + \frac{1}{2}(-A_4q_1s_{\theta_s} \\ \quad + \delta^t A_5q_1c_{\theta_s} + \dot{\delta}^t A_5s_{\theta_s})\dot{\delta} + \frac{1}{2}(-\delta^t A_8\delta q_1s_{\theta_s} + 2\delta^t A_8\dot{\delta}c_{\theta_s} + A_9\delta q_1c_{\theta_s} + A_9\dot{\delta}s_{\theta_s})q_1 \\ F_2 = (A_2 + \delta^t A_3\delta)\dot{q}_1 + \frac{1}{2}A_6\ddot{\delta} + \frac{1}{2}(A_7 + \delta^t A_8\delta c_{\theta_s} + A_9\delta s_{\theta_s})\dot{u} + 2\delta^t A_3\dot{\delta}q_1 \\ \quad + \frac{1}{2}(-\delta^t A_8\delta q_1s_{\theta_s} + 2\delta^t A_8\dot{\delta}c_{\theta_s} + A_9\delta q_1c_{\theta_s} + A_9\dot{\delta}s_{\theta_s})u - \frac{1}{2}(-A_4s_{\theta_s} + \delta^t A_5c_{\theta_s})u\dot{\delta} \\ \quad - \frac{1}{2}(-\delta^t A_8\delta s_{\theta_s} + A_9\delta c_{\theta_s})uq_1 - G_{rr}s_{\theta_s} - \frac{1}{2}\delta^t G_{rf}\delta s_{\theta_s} + c_{\theta_s}G_{ff}\delta \\ 0 = \frac{1}{2}(A_4c_{\theta_s} + \delta^t \frac{1}{2}A_5s_{\theta_s})^t\dot{u} + \frac{1}{2}A_6^t\dot{q}_1 + A_{10}\ddot{\delta} + \frac{1}{2}(-A_4q_1s_{\theta_s} + \delta^t A_5q_1c_{\theta_s} + \dot{\delta}^t A_5s_{\theta_s})^t u \\ \quad - A_3\delta q_1^2 - \frac{1}{2}A_5s_{\theta_s}u\dot{\delta} - \frac{1}{2}(2A_8\delta c_{\theta_s} + A_9s_{\theta_s})uq_1 + K_{ff}\delta + G_{rf}\delta c_{\theta_s} + s_{\theta_s}G_{ff} + B_{ff}\dot{\delta} \end{array} \right.$$

La dynamique du système s'écrit sous la forme compacte suivante en terme de coordonnées généralisées  $X_1 = [x, \theta_s, \delta]^t$

$$M(X_1)\ddot{X}_1 + B\dot{X}_1 + KX_1 + G(X_1) + C(X_1, \dot{X}_1) = U \quad (2.55)$$

Avec :

- $U = [F_1, F_2, 0]^t$  : le vecteur contrôle,
- $M(X_1)$  : la matrice de masse définie par l'équation (2.49)
- $B$  : la matrice d'amortissement :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_m & 0 \\ 0 & 0 & B_{ff} \end{pmatrix}$$

- $K$  : la matrice de rigidité :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ff} \end{pmatrix}$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

—  $G(X_1)$  est le vecteur des forces dues à la gravité :

$$G(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{rr} - \frac{1}{2}\delta^t G_{rf} \delta & G_{ff} \\ 0 & G_{ff}^t & G_{rf} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_{\theta_s} \\ c_{\theta_s} \delta \end{pmatrix}$$

—  $C(X_1, \dot{X}_1)$  le vecteur des forces de Coriolis et centrifuges :

$$C(X_1, \dot{X}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-A_4 q s_{\theta_s} + \delta^t A_5 q c_{\theta_s} + \dot{\delta}^t A_5 s_{\theta_s}) \dot{\delta} + \frac{1}{2}(-\delta^t A_8 \delta q s_{\theta_s} + 2\delta^t A_8 \dot{\delta} c_{\theta_s} + A_9 \delta q c_{\theta_s} + A_9 \dot{\delta} s_{\theta_s}) q \\ 2\delta^t A_3 \dot{\delta} q + \frac{1}{2}(-\delta^t A_8 \delta q s_{\theta_s} + 2\delta^t A_8 \dot{\delta} c_{\theta_s} + A_9 \delta q c_{\theta_s} + A_9 \dot{\delta} s_{\theta_s}) u - \frac{1}{2}(-A_4 s_{\theta_s} + \delta^t A_5 c_{\theta_s}) u \dot{\delta} - \frac{1}{2}(-\delta^t A_8 \delta s_{\theta_s} + A_9 \delta c_{\theta_s}) u q \\ \frac{1}{2}(-A_4 q s_{\theta_s} + \delta^t A_5 q c_{\theta_s} + \dot{\delta}^t A_5 s_{\theta_s})^t u - A_3 \delta q^2 - \frac{1}{2} A_5 s_{\theta_s} u \dot{\delta} - \frac{1}{2} (2A_8 \delta c_{\theta_s} + A_9 s_{\theta_s}) u q \end{pmatrix}$$

On note :  $X_1 = [x, \theta_s, \delta]^t = [x_1, x_2, x_3]^t, X_2 = [u, q_1, \dot{\delta}]^t = [x_4, x_5, x_6]^t$

En utilisant l'équation (2.55) et les notations ci-dessus nous déduisons le modèle dynamique du système, qui s'écrit sous la forme compacte d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{N+2 \times N+2} & I_{N+2 \times N+2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{R^{N+2}} \\ -M^{-1}(C + G) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{R^{N+2}} \\ M^{-1}U \end{bmatrix}$$

En utilisant les notations suivantes :

$$M^{-1} = (\bar{M}_{ij})_{1 \leq i, j \leq N+2}, C = C_i, G = G_i$$

Le modèle d'état sous sa forme développée s'écrit de la manière suivante (en prenant un seul

mode (N=1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = \bar{M}_{11}u_1 + \bar{M}_{12}u_2 - \bar{M}_{13}B_{ff}x_6 - \bar{M}_{13}K_{ff}x_3 - \bar{M}_{11}(C_1 + G_1) \\ \quad - \bar{M}_{12}(C_2 + G_2) - \bar{M}_{13}(C_3 + G_3) \\ \dot{x}_5 = \bar{M}_{21}u_1 + \bar{M}_{22}u_2 - \bar{M}_{23}B_{ff}x_6 - \bar{M}_{23}K_{ff}x_3 - \bar{M}_{12}(C_1 + G_1) \\ \quad - \bar{M}_{22}(C_2 + G_2) - \bar{M}_{23}(C_3 + G_3) \\ \dot{x}_6 = \bar{M}_{31}u_1 + \bar{M}_{32}u_2 - \bar{M}_{33}B_{ff}x_6 - \bar{M}_{33}K_{ff}x_3 - \bar{M}_{13}(C_1 + G_1) \\ \quad - \bar{M}_{23}(C_2 + G_2) - \bar{M}_{33}(C_3 + G_3) \end{array} \right.$$

En observant le modèle établi nous constatons que ce modèle est constitué d'une dynamique rigide et d'une dynamique flexible, qu'on pourra distinguer facilement. Les deux premières équations décrivent la dynamique rigide et les dernières équations décrivent la dynamique flexible. Ces équations sont couplées et interagissent entre elles d'une manière non-linéaire. Nous constatons aussi, que la présence du contrôle  $u_1$  du déplacement  $x$  et le contrôle de l'oscillation  $u_2$ , influent indirectement sur la dynamique flexible qui représente la dynamique interne du système. Cette action peut avoir des conséquences indésirables et peut mener à une instabilité du système global.

Dans ce qui suit on se propose de généraliser les résultats développés dans la section précédente en vue de considérer des mouvements très diverses du dirigeable lors de la phase de chargement ou de déchargement.

### 2.3.3 Modèle 3D pour un DGP

Dans ce paragraphe, nous incluons les différents degrés de liberté du dirigeable et nous considérons que le mouvement de la charge est décrit par deux angles de rotation  $\theta_s$  et  $\phi_s$ .

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

Le repère  $R_2$  qui est lié au câble sera en mouvement de rotation suivant deux angles. D'abord, suivant un angle  $\theta_s$  (une rotation dans le plan XZ) ensuite suivant un angle  $\phi_s$  (une rotation dans le plan YZ) par rapport au repère inertiel de telle sorte que la matrice de passage du repère  $R_2$  au repère inertiel  $R_0$  sera définie par :

$$J_3(\eta_2) = \begin{pmatrix} c_{\theta_s} & s_{\theta_s} s_{\phi_s} & s_{\theta_s} c_{\phi_s} \\ 0 & c_{\phi_s} & -s_{\phi_s} \\ -s_{\theta_s} & s_{\phi_s} c_{\theta_s} & c_{\theta_s} c_{\phi_s} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Les différentes expressions des vitesses seront exprimées dans le repère  $R_2$  en termes de quasi-coordonnées  $u, v, w, p, q, r, u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1$  qui représentent :

$\nu_1 = [u, v, w]^t$  et  $\nu_1^s = [u_1, v_1, w_1]^t$  sont respectivement les vitesses linéaires du centre de gravité du dirigeable et de la charge.

$\nu_2 = [p, q, r]^t$  et  $\nu_2^s = [p_1, q_1, r_1]^t$  sont les vitesses angulaires du centre de gravité du dirigeable et de la charge.

Similairement à ce qui a été fait dans la modélisation en  $2D$  nous définissons les vitesses d'un élément du câble, et la charge afin d'évaluer l'énergie du système.

La vitesse linéaire du câble par rapport à  $R_0$  exprimée dans le repère référentiel  $R_2$  sera :

$$v_{d|R_2} = J_3^t(\nu_2^s) \frac{dOG}{dt} + \frac{dGP_d}{dt} + \Omega_2 \times GP_d \quad (2.57)$$

avec :  $\Omega_2$  la vitesse angulaire de  $R_2$  par rapport à  $R_0$ . Elle a pour expression :

$$\Omega_2 = \nu_2 + \nu_2^s \quad (2.58)$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

La relation (2.57) donne :

$$v_{d_{R_2}} = \begin{pmatrix} c_{\theta_s} u - s_{\theta_s} w + \dot{\sigma} + (q + q_1)(z_2 - \frac{1}{2} \int_0^{z_2} \sigma_s^2 ds) \\ s_{\theta_s} s_{\phi_s} u + c_{\phi_s} v + s_{\phi_s} c_{\theta_s} w + r\sigma - (p + p_1)(z_2 - \frac{1}{2} \int_0^{z_2} \sigma_s^2 ds) \\ s_{\theta_s} c_{\phi_s} u - s_{\phi_s} v + c_{\theta_s} c_{\phi_s} w - \int_0^{z_2} \dot{\sigma}_s \sigma_s ds + (q + q_1)\sigma_s \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

La vitesse linéaire de la charge sera donnée par l'expression :

$$v_{s_{R_2}} = J_3^t \frac{dOG}{dt} + \frac{dGP_s}{dt} + \Omega_2 \times GP_s$$

$$J_3^t \frac{dOG}{dt} = \begin{pmatrix} c_{\theta_s} u - s_{\theta_s} w + \dot{\sigma}_L - r_s \dot{\sigma}_{z_2,L} \\ s_{\theta_s} s_{\phi_s} u + c_{\phi_s} v + s_{\phi_s} c_{\theta_s} w \\ s_{\theta_s} c_{\phi_s} u - s_{\phi_s} v + c_{\theta_s} c_{\phi_s} w - r_s \sigma_{z_2,L} \dot{\sigma}_{z_2,L} - \int_0^L \sigma_{z_2} \dot{\sigma}_{z_2} dz_2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_2 \times GP_s = \begin{pmatrix} (q + q_1)(L + r_s - \frac{1}{2} r_s \sigma_{z_2,L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2) \\ -(p + p_1)(L + r_s - \frac{1}{2} r_s \sigma_{z_2,L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2) + r(\sigma_L - r_s \sigma_{z_2,L}) \\ -(q + q_1)(\sigma_L - r_s \sigma_{z_2,L}) \end{pmatrix}$$

#### 2.3.3.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique du système total est donnée par :

$$T = T_D + T_c + T_s + T_m \quad (2.60)$$

L'énergie cinétique produite par la liaison cardan sera :

$$T_m = I_m \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

ou encore :

$$T_m = X_1^t \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times N} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times N} \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & M_m & 0_{2 \times N} \\ 0_{N \times 3} & 0_{N \times 3} & 0_{N \times 2} & 0_{N \times N} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}^m} X_1 \quad (2.62)$$

Où :

$$M_m = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

$X_1 = [u, v, w, p, q, r, p_1, q_1, \delta]^t = [\nu_1, \nu_2, \nu_2^s, \delta]^t$  : est un vecteur composé par les quasi-coordonnées et la vitesse de déformation.

$T_D$  : l'énergie cinétique du dirigeable à l'ordre 2 est donnée par :

$$T_D = X_1^t \underbrace{\begin{pmatrix} M_{tt} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times N} \\ 0_{3 \times 3} & M_{rr} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times N} \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times N} \\ 0_{N \times 3} & 0_{N \times 3} & 0_{N \times 2} & 0_{N \times N} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}^D} X_1$$

L'énergie cinétique du câble s'écrit sous une forme quadratique comme suit :

$$T_c = \frac{1}{2} \rho X_1^t \tilde{M}^c X_1 \quad (2.63)$$

$\tilde{M}^c$  est une matrice symétrique qui s'écrira ainsi :

$$\tilde{M}^c = \tilde{M}_{sup}^c + (\tilde{M}_{sup}^c)^t$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

avec :  $\tilde{M}_{sup}^c$  est une matrice triangulaire supérieure :

$$\tilde{M}^c = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11}^c & 0 & 0 & \tilde{M}_{14}^c & \tilde{M}_{15}^c & \tilde{M}_{16}^c & \tilde{M}_{17}^c & \tilde{M}_{18}^c & \tilde{M}_{19}^c \\ & \tilde{M}_{22}^c & 0 & \tilde{M}_{24}^c & 0 & \tilde{M}_{26}^c & \tilde{M}_{27}^c & 0 & \tilde{M}_{29}^c \\ & & \tilde{M}_{33}^c & \tilde{M}_{34}^c & \tilde{M}_{35}^c & \tilde{M}_{36}^c & \tilde{M}_{37}^c & \tilde{M}_{38}^c & \tilde{M}_{39}^c \\ & & & \tilde{M}_{44}^c & 0 & \tilde{M}_{46}^c & \tilde{M}_{47}^c & 0 & 0 \\ & & & & \tilde{M}_{55}^c & 0 & 0 & \tilde{M}_{58}^c & \tilde{M}_{59}^c \\ & & 0 & & & \tilde{M}_{66}^c & \tilde{M}_{67}^c & 0 & 0 \\ & & & & & & \tilde{M}_{77}^c & 0 & 0 \\ & & & & & & & \tilde{M}_{88}^c & \tilde{M}_{89}^c \\ & & & & & & & & \tilde{M}_{99}^c \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons la formule ci-dessous pour évaluer l'énergie cinétique de la charge :

$$T_c = \frac{1}{2} M_s v_s^t v_s + \frac{1}{2} \Omega_c^t I^s \Omega_c \quad (2.64)$$

La vitesse angulaire d'un élément du câble par rapport à  $R_0$  s'écrira :

$$\Omega_3 = \nu_2^s + \Omega_{d/2} = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 + \dot{\sigma}_{z_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Ainsi  $\Omega_c$  est la vitesse angulaire de la charge obtenue à partir de celle  $\Omega_3$  en remplaçant  $z_2$  par L.

et  $I^s$  est la matrice d'inertie formée par les moments d'inerties  $I_{xx}^s$ ,  $I_{yy}^s$ ,  $I_{zz}^s$  et  $I_{xz}^s = I_{zx}^s$ , elle est donnée par :

$$I^s = \begin{pmatrix} I_{xx}^s & 0 & I_{xz}^s \\ 0 & I_{yy}^s & 0 \\ I_{zx}^s & 0 & I_{zz}^s \end{pmatrix}$$

## 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

L'énergie cinétique discrétisée à l'ordre 2 de la charge peut s'écrire sous une forme quadratique de la manière suivante :

$$T_c = \frac{M_s}{2} X_1^t \tilde{M}^s X_1$$

$\tilde{M}^s$  est une matrice symétrique qui s'écrit ainsi :

$\tilde{M}^s = \tilde{M}_{sup}^s + (\tilde{M}_{sup}^s)^t$  où la matrice  $\tilde{M}_{sup}^s$  s'écrit :

$$\tilde{M}_{sup}^s = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11}^s & 0 & 0 & \tilde{M}_{14}^s & \tilde{M}_{15}^s & \tilde{M}_{16}^s & \tilde{M}_{17}^s & \tilde{M}_{18}^s & \tilde{M}_{19}^s \\ & \tilde{M}_{22}^s & 0 & \tilde{M}_{24}^s & \tilde{M}_{25}^s & \tilde{M}_{26}^s & \tilde{M}_{27}^s & \tilde{M}_{28}^s & \tilde{M}_{29}^s \\ & & \tilde{M}_{33}^s & \tilde{M}_{34}^s & \tilde{M}_{35}^s & \tilde{M}_{36}^s & \tilde{M}_{37}^s & \tilde{M}_{38}^s & \tilde{M}_{39}^s \\ & & & \tilde{M}_{44}^s & \tilde{M}_{45}^s & \tilde{M}_{46}^s & 0 & \tilde{M}_{48}^s & 0 \\ & & & & \tilde{M}_{55}^s & 0 & \tilde{M}_{57}^s & \tilde{M}_{58}^s & \tilde{M}_{59}^s \\ & & 0 & & & \tilde{M}_{66}^s & \tilde{M}_{67}^s & \tilde{M}_{68}^s & \tilde{M}_{69}^s \\ & & & & & & \tilde{M}_{77}^s & 0 & 0 \\ & & & & & & & \tilde{M}_{88}^s & \tilde{M}_{89}^s \\ & & & & & & & & \tilde{M}_{99}^s \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique discrétisée totale du système s'écrit finalement ainsi :

$$T = \frac{1}{2} X_1^t M X_1 \quad (2.66)$$

avec :

$$M = \tilde{M}^m + \tilde{M}^D + \tilde{M}^c + \tilde{M}^s$$

Les composantes des matrices de masses sont définies dans l'annexe 1

### 2.3.4 Energie potentielle et fonction de Rayleigh

L'énergie potentielle du système est donnée par :

$$V = \int_0^L V_c + V_s \quad (2.67)$$

### 2.3. MODÉLISATION DU DIRIGEABLE AVEC CHARGE SUSPENDUE

---

Avec  $V_c$  l'énergie potentielle d'un élément du câble :

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{2}EI_{y_2}\sigma_{z_2z_2}^2 dz_2 - \rho g^t GP_d dz_2 \\ &= \frac{1}{2}EI_{y_2}\sigma_{z_2z_2}^2 dz_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

et  $V_s$  est l'énergie potentielle de la charge :

$$\begin{aligned} V_s &= -M_s g^t GP_s \\ &= M_s g s_{\theta_s} (\sigma_L - r_s \sigma_{z_2,L}) - M_s g c_{\theta_s} (L + r_s - \frac{1}{2} r_s \sigma_{z_2,L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{z_2}^2 dz_2) \end{aligned} \quad (2.69)$$

On aura finalement :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \delta^t EI_{y_2} \int_0^L \omega_{z_2z_2} \omega_{z_2z_2}^t dz_2 \delta + \left( - \left( \frac{M_s g r_s}{2} (s_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) + c_{\theta_s} s_{\phi_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} c_{\theta}) \right) \right) \delta^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} \delta \\ &\quad + \left( - \left( \frac{M_s g}{2} (s_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) + c_{\theta_s} s_{\phi_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) - c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} c_{\theta}) \right) \right) \delta^t \int_0^L \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} dz_2 \delta \\ &\quad + (M_s g r_s (c_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) - s_{\phi_s} s_{\theta_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) + c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} s_{\theta_s})) \omega_{z_2,L} \delta \\ &\quad + (-M_s g (c_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) - s_{\phi_s} s_{\theta_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) + c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} s_{\theta_s})) \omega_L \delta \\ &\quad + \left( - \left( \frac{g \rho}{2} (s_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) + c_{\theta_s} s_{\phi_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) - c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} c_{\theta}) \right) \right) \int_0^L \int_0^{z_2} \omega ds dz_2 \delta \\ &\quad + (-g \rho (c_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) - s_{\phi_s} s_{\theta_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) + c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} s_{\theta_s})) \int_0^L \omega \delta dz_2 \\ &\quad + \frac{g \rho L^2}{2} (s_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) + c_{\theta_s} s_{\phi_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) - c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} c_{\theta}) \\ &\quad + M_s g (L + r_s) (s_{\theta_s} (s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta}) + c_{\theta_s} s_{\phi_s} (c_{\psi} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} s_{\theta}) - c_{\phi} c_{\phi_s} c_{\theta_s} c_{\theta}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

La discrétisation de la fonction de dissipation de Rayleigh sera :

$$R_a = \frac{1}{2} \kappa_e EI_{y_2} \int_0^L \dot{\sigma}_{z_2z_2}^2 dz_2 \quad (2.71)$$

On définit le Lagrangien  $L = T - V + R_a$  du système et on fait appel aux équations de Kirchoff en termes de quasi-coordonnées :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} \right) + \nu_2 \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} - J_1^t(\nu_2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} &= \tau_1 \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2} \right) + \nu_2 \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2} + \nu_1 \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_1} - J_2^t(\nu_2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2} &= \tau_2 \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2^s} \right) + \nu_2^s \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2^s} - J_2^t(\nu_2^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu_2^s} &= \tau_2' \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} + \frac{\partial R_a}{\partial \delta} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

On obtient l'équation compacte qui décrit la partie dynamique du système :

$$M\dot{X}_1 + BX_1 + KX_2 + C + G = F$$

avec :

- $X_1 = [u, v, w, p, q, r, p_1, q_1, \delta]^t$  : vecteur formé par les quasi-coordonnées et la déformation.
- $X_2 = [0, 0, 0, \phi, \theta, \psi, \phi_s, \theta_s, \delta]^t$
- $M_{N+8, N+8}$  : la matrice de masse.
- $B_{N+8, N+8}$  : matrice d'amortissement.
- $K_{N+8, N+8}$  : matrice de raideur.
- $C_{N+8, 1}$  : vecteur des forces de Coriolis et centrifuge.
- $G_{N+8, 1}$  : vecteur de gravité.
- $F = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, 0]^t$  les forces et leurs moments appliqués sur le dirigeable et le couple produit par la liaison cardan. Ils seront exprimés dans le repère  $R_2$ .

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre concerne la modélisation des dirigeables gros porteurs. Le développement d'un modèle mathématique précis est une étape importante dans l'étude des dirigeables. La première partie présente un modèle dynamique d'un dirigeable non conventionnel avec

## 2.4. CONCLUSION

---

charge intégrée.

Dans la deuxième partie nous avons mis l'accent sur la modélisation d'un dirigeable avec charge suspendue par un câble flexible. C'est notre première Contribution. Nous avons essayé de nous rapprocher des conditions réelles du vol d'un dirigeable gros porteur. Ceci s'est manifesté dans la prise en compte des masses ajoutées, de l'allongement et de la flexibilité du câble. Ces éléments sont souvent absents dans la majorité des travaux réalisés sur d'autres plates formes aériennes telles que les hélicoptères et les quadrirotors. Le modèle a été établi au moyen du formalisme de Kirchoff dans les quasi-coordonnées couplé à une synthèse modale. Nous avons considéré dans un premier temps des oscillations et déformations planes, pour les généraliser par la suite à un mouvement quelconque du dirigeable générant des oscillations suivant plusieurs directions. Un modèle d'état complet a donc pu être établi.

Les deux modèles du dirigeable avec charge intégrée et avec charge suspendue par un câble flexible serviront de base pour les chapitres suivants pour contrôler le dirigeable et maîtriser certains phénomènes indésirables tels que les oscillations de la charge.

Deuxième partie

Commande d'un DGP avec charge  
intégrée



## Chapitre 3

# Commande et allocation de contrôle d'un dirigeable gros porteur avec charge intégrée

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>104</b>
<b>3.2</b>	<b>Actionneurs du dirigeable MC500</b>	<b>105</b>
<b>3.3</b>	<b>Stabilisation du dirigeable MC500</b>	<b>108</b>
3.3.1	Vecteur commande	108
3.3.2	Architecture de contrôle par backstepping	112
3.3.3	Simulations numériques	116
<b>3.4</b>	<b>Allocation de contrôle</b>	<b>119</b>
3.4.1	Méthode analytique	119
3.4.2	Simulations numériques	126
3.4.3	Méthode du Gradient déterministe	128

**3.5 Simulation numérique . . . . . 133**

**3.6 Conclusion . . . . . 141**

---

## 3.1 Introduction

A la différence des aérodynes, les dirigeables ne nécessitent pas une motorisation puissante pour assurer leur portance. Cependant les organes de propulsion sont nécessaires, et d'une part pour diriger et manœuvrer ces aérostats, d'autre part pour leur permettre de lutter contre l'effet du vent.

Des actionneurs adéquats sont aussi utiles pour minimiser le nombre d'équipiers au sol lors des phases d'atterrissages ou décollages. L'objectif étant de rendre ces engins volants plus autonomes.

Notre objectif est de donner une grande part d'autonomie au dirigeable afin qu'il puisse assurer ses missions en toute sécurité.

Dans ce chapitre on s'intéressera à élaborer un vecteur commande qui assure la stabilisation du dirigeable avec charge intégrée au voisinage d'un point de chargement et de déchargement(phase la plus critique pour le dirigeable). On s'appuiera pour cela sur les techniques de commandes linéaires et le Backstepping. Ensuite nous mettons l'accent sur le problème de connexion entre ce vecteur commande "virtuel" et les actionneurs "réels" d'un dirigeable gros porteur. En effet l'étude du problème d'allocation de contrôle est indispensable pour compléter la boucle de contrôle. Dans notre cas le problème de connexion envisagé est un problème d'optimisation non linéaire avec contrainte. La résolution de ce problème d'optimisation était notre défi dans ce chapitre. Pour atteindre cet objectif, nous avons établi un algorithme décrivant la relation entre les composantes de, la commande(au nombre de 6) et les actionneurs(les forces et les angles de pivotements des moteurs, au nombre de 12). Cet

### 3.2. ACTIONNEURS DU DIRIGEABLE MC500

---

l'algorithme est basé sur une méthode analytique qui tient compte de certaines hypothèses énergétiques tout en respectant les capacités des moteurs et la marge de rotation des angles de pivotements des rotors.

Afin de pouvoir valider notre méthode analytique approchée, nous la comparons avec deux autres méthodes numériques basées sur l'optimisation quadratique sans contrainte ou avec contrainte.

Nous validerons l'efficacité des algorithmes proposés par des simulations numériques.

Nous commencerons ce chapitre par la description des actionneurs du dirigeable et les limitations physiques à respecter lors de la résolution de problème d'allocation de contrôle.

### 3.2 Actionneurs du dirigeable MC500

Le dirigeable *MC500* a un système de propulsion original, représenté par un quadrirotor avec rotors orientables selon deux directions. Les forces de propulsion et leurs moments dépendent du type du système de propulsion installé sur le dirigeable, ainsi que de l'emplacement et le nombre de propulseurs.

Le dirigeable *MC500* est équipé de 4 propulseurs (voir figure 3.1) électriques alimentés

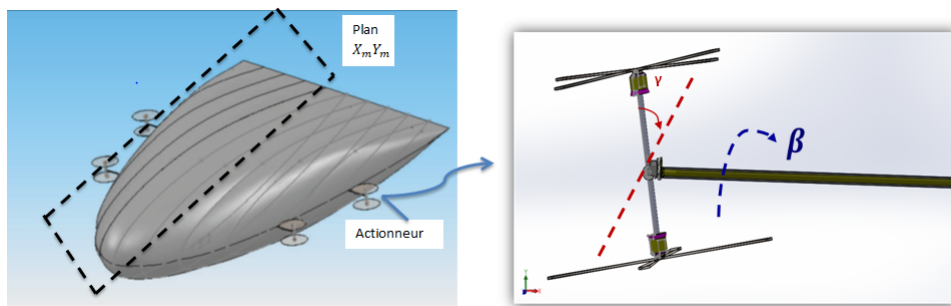


FIGURE 3.1 – Angles de pivotements

par des piles à combustibles. Les moteurs sont installés dans le plan  $X_m Y_m$  de l'engin. Ils

### 3.2. ACTIONNEURS DU DIRIGEABLE MC500

sont symétriques deux à deux par rapport au plan  $X_m Z_m$ . Chaque propulseur produit une force  $F_i$  dont la valeur maximale est de  $400N$ .

Les hélices peuvent pivoter suivant deux angles :

- Une rotation d'inclinaison d'angle  $\beta_i$ , avec  $-180 < \beta_i < 180(deg)$
- Une rotation azimutale  $\gamma_i$ , avec  $-30 < \gamma_i < 30(deg)$

Le schéma fonctionnel d'un actionneur du dirigeable *MC500* est donné par la figure (3.2)

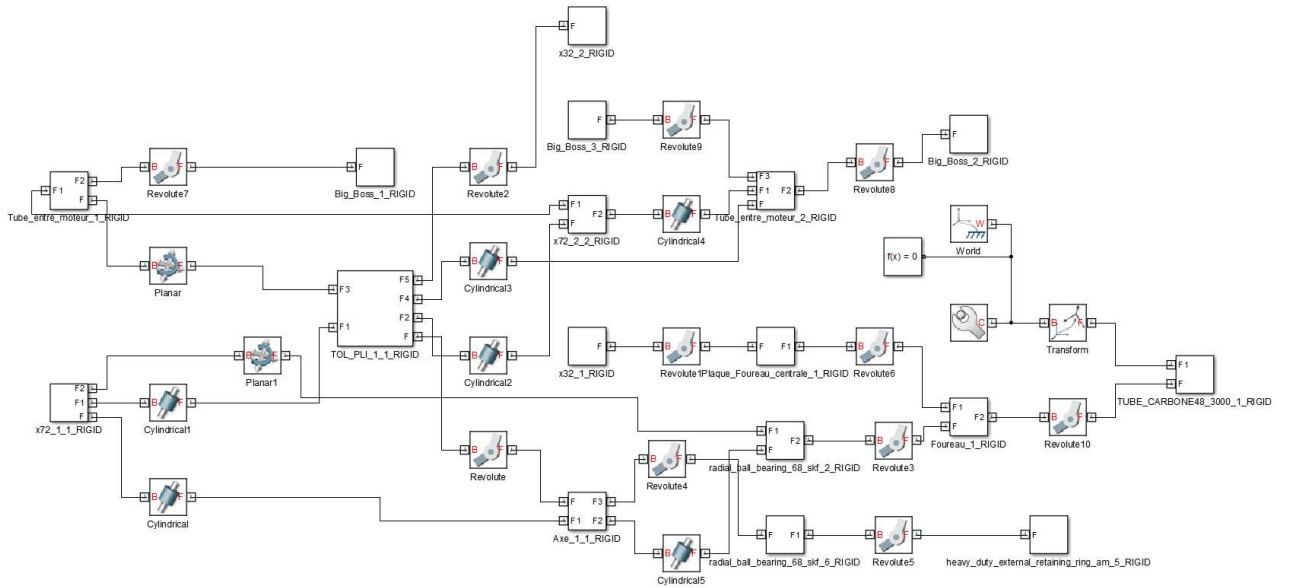


FIGURE 3.2 – Schéma bloc d'un actionneur du MC500

Rappelons les expressions obtenues au chapitre 2 des forces (voir équation (2.16)) et des moments appliqués au dirigeable (équation : (2.17)) :

$$\tau_{F_1} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} \\ \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} \\ -\sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} s_{\beta_i} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\tau_{F_2} = - \left( \begin{array}{l} c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + \\ \quad b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4}) \\ -c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} + a(\| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4} + \| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \\ \quad \| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) \\ b_1(\| F_1 \| c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} c_{\beta_2}) + b_3(\| F_3 \| c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} c_{\beta_4}) + \\ \quad a(\| F_4 \| s_{\gamma_4} + \| F_3 \| s_{\gamma_3} - \| F_1 \| s_{\gamma_1} - \| F_2 \| s_{\gamma_2}) \end{array} \right) \quad (3.2)$$

Les forces  $F_i$  ainsi que les angles d'orientations  $\gamma_i$  et  $\beta_i$  représentent les actionneurs "réels" du dirigeable.

La prise en compte de la gravité et de la poussé d'Archimède se fera directement au niveau des commandes virtuelles  $\alpha_i$  comme suit :

$\alpha_i$	Valeurs
$\alpha_1$	$\tau_{F_1}(1) - (mg - B_u) \cdot s_\theta$
$\alpha_2$	$\tau_{F_1}(2) + (mg - B_u) \cdot s_\phi \cdot c_\theta$
$\alpha_3$	$\tau_{F_1}(3) + (mg - B_u) \cdot c_\phi c_\theta$
$\alpha_4$	$\tau_{F_2}(1) + B_u z_B s_\phi c_\theta$
$\alpha_5$	$\tau_{F_2}(2) + B_u z_B s_\theta$
$\alpha_6$	$\tau_{F_2}(3)$

Ces commandes virtuelles contrôlent les six degrés de liberté du dirigeable dans l'espace (trois translations et trois rotations). Elles seront déterminées à partir des lois de contrôle. Les approches de contrôle permettent la conception d'une commande virtuelle qui assure la stabilisation du dirigeable ou le suivi d'une trajectoire prédéfinie. Cependant ces commandes

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

contrôlent indirectement le dirigeable, ce qui nous laisse poser les questions suivantes :

- Comment peut-on piloter le dirigeable à partir de ces commandes virtuelles ?
- Quelles sont les valeurs des forces  $F_i$  et les valeurs des angles  $\gamma_i$  et  $\beta_i$  à appliquer au dirigeable pour qu'il puisse se stabiliser ou suivre une trajectoire bien définie ?

Pour répondre à ces questions nous expliciterons dans un premier temps la conception de la commande virtuelle du dirigeable.

## 3.3 Stabilisation du dirigeable MC500

### 3.3.1 Vecteur commande

Nous nous sommes fixés pour objectif dans cette section la stabilisation asymptotique du dirigeable *MC500* au voisinage d'un état désiré qu'on notera :  $X_d = [x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d]$  (par exemple point de chargement et de déchargement)

Nous considérerons la nouvelle sortie  $\xi_i = Y(i) - X_d(i)$ . Elle représente l'erreur entre le signal désiré et la sortie du système :  $Y = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]$ .

Par conséquent, faire converger la sortie vers la référence équivaut à converger l'erreur vers zéro.

Le système d'erreur associé au modèle du dirigeable avec charge intégrée, défini dans le

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

chapitre 2 est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{\xi}_1 = c_\psi c_\theta u + (-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta)v + (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta)w \\
 \dot{\xi}_2 = s_\psi c_\theta u + (c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta)v + (-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta)w \\
 \dot{\xi}_3 = -s_\theta u + s_\phi c_\theta v + c_\phi c_\theta w \\
 \dot{\xi}_4 = p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\
 \dot{\xi}_5 = c_\phi q - s_\phi r \\
 \dot{\xi}_6 = \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \\
 M_{11}\dot{u} = \alpha_1 + Q_1 \\
 M_{22}\dot{v} = \alpha_2 + Q_2 \\
 M_{33}\dot{w} = \alpha_3 + Q_3 \\
 (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{p} = M_{46}\alpha_6 + M_{46}Q_6 - M_{66}\alpha_4 - M_{66}Q_4 \\
 M_{55}\dot{q} = \alpha_5 + Q_5 \\
 (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{r} = M_{46}\alpha_4 - M_{44}\alpha_6 + M_{46}Q_4 - M_{44}Q_6
 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La conception de la commande des dirigeables autonomes est une tâche délicate vue que la dynamique du système est fortement non linéaire et pleinement couplée. Afin de réduire la complexité du modèle (3.3) nous proposons d'utiliser la méthode du linéarisé-tangent et la technique du backstepping pour construire la commande stabilisante.

**Définition 1** Soit le système dynamique suivant :  $\dot{X} = f(X, U)$ .  $X$  étant l'état du système et  $U$  le vecteur contrôle.

On appelle système linéarisé-tangent au voisinage d'un point  $(X_e, U_e)$  le système linéaire :

$$\dot{X} = AX + BU$$

où  $(X_e, U_e)$  est un point d'équilibre du système qui vérifie :  $f(X_e, U_e) = 0$ ,

$$A = \frac{\partial f}{\partial X}(X_e) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial U}(U_e)$$

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

En appliquant la définition précédente au voisinage du point d'équilibre  $0_{R^6}$  nous obtenons le linéarisé-tangent associé au système d'erreur (3.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = u \\ \dot{\xi}_2 = v \\ \dot{\xi}_3 = w \\ \dot{\xi}_4 = p \\ \dot{\xi}_5 = q \\ \dot{\xi}_6 = r \\ M_{11}\dot{u} = \alpha_1 \\ M_{22}\dot{v} = \alpha_2 \\ M_{33}\dot{w} = \alpha_3 \\ (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{p} = M_{46}\alpha_6 - M_{66}\alpha_4 \\ M_{55}\dot{q} = \alpha_5 \\ (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{r} = M_{46}\alpha_4 - M_{44}\alpha_6 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Afin d'élaborer le vecteur commande on étudie la commandabilité du système (3.4), c'est à dire : peut-on trouver une commande permettant de passer d'un état à un autre ?

La caractérisation algébrique due à Kalman [Cor99] permet d'étudier la commandabilité des systèmes linéaires stationnaires. Le critère de Kalman se traduit par le théorème ci-dessous :

**Théorème 1** *Le système linéaire :*

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3.5)$$

*est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité :*

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

*est de rang  $n = \dim X$*

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

Afin d'appliquer le théorème de Kalman, nous écrivons le système (3.4) sous la forme matricielle :

$$\dot{X} = AX + BU$$

sachant que :

$X = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, u, v, w, p, q, r]^t$  : l'état du système

$U = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]^t$  : commande du système.

$A$  : une matrice carrée de taille  $12 \times 12$   $B$  : une matrice carrée de taille  $12 \times 6$ .

On définit et on calcule le rang de la matrice de Kalman  $C$  qui est donnée par :

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{11}B]$$

Après calculs, on trouve que ce rang est égal au nombre de variables d'états ( $n = 12$ ). On déduit d'après le critère de Kalman que le modèle d'étude (3.4) est commandable à l'aide d'un retour d'état continue stationnaire.

La construction des lois de contrôle pour un système linéaire est largement étudiée dans la littérature, et les lois de contrôle stabilisant un système linéaire sont nombreuses. Citons à titre d'exemple la commande PID, la méthode de placement de pôles,... La technique récente du backstepping est aussi utilisée pour assurer la stabilité d'un système linéaire ou non-linéaire.

Le backstepping est un algorithme récursif basé sur le principe de stabilité de Lyapounov. La théorie de backstepping consiste à transformer le processus du système à contrôler en sous-systèmes en cascade d'une manière itérative. A chaque pas de l'algorithme une loi de contrôle virtuelle assure la stabilité du système vers son état d'équilibre. Cette loi de contrôle est déterminée en utilisant une fonction de Lyapounov appropriée. La méthode de backstepping a connu un grand succès et a été utilisée dans de nombreuses applications et dans des domaines variés. Cette théorie a été notamment appliquée pour commander un ré-

acteur d'avion[KPPK95], un moteur électrique[ACT98],[HDQ96] et un moteur diesel[JK00].

Dans [Fio10],[FSBD09] elle a été appliquée à un modèle d'avion hypersonique.

Dans ce qui suit nous adoptons cette technique pour assurer la stabilité d'un dirigeable avec charge intégrée au voisinage d'un point de chargement et de déchargement.

#### 3.3.2 Architecture de contrôle par backstepping

L'algorithme de backstepping pilote une classe de systèmes admettant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1; x_2) \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (3.6)$$

où l'état est  $x = (x_1; x_2) \in R^{n_1} \times R^m = IR^n$  et le contrôle  $u \in R^m$ .

La méthode de backstepping se traduit par le théorème suivant :

**Théorème 2** *Soit  $f_1$  de classe  $C^1$ , le système contrôlé :*

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1; v)$$

*est globalement asymptotiquement stable par des lois de commande stationnaires de classe  $C^1$ , où  $x_1 \in R^{n_1}$  et le contrôle  $v \in R^m$ . Alors, le système contrôlé (8) est globalement asymptotiquement stable par des lois de commande continues stationnaires.*

En examinant le système (3.3) nous constatons que le vecteur commande est déterminé en stabilisant les deux sous-systèmes suivants :

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

Le premier sous-système s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = u \\ \dot{\xi}_2 = v \\ \dot{\xi}_3 = w \\ \dot{\xi}_5 = q \\ \dot{u} = \frac{\alpha_1}{M_{11}} = \alpha'_1 \\ \dot{v} = \frac{\alpha_2}{M_{22}} = \alpha'_2 \\ \dot{w} = \frac{\alpha_3}{M_{33}} = \alpha'_3 \\ \dot{q} = \frac{\alpha_5}{M_{55}} = \alpha'_5 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

et le deuxième sous-système est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_4 = p \\ \dot{\xi}_6 = r \\ \dot{p} = \frac{M_{46}\alpha_6 - M_{66}\alpha_4}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}} = c_1\alpha_6 - c_2\alpha_4 \\ \dot{r} = \frac{M_{46}\alpha_4 - M_{44}\alpha_6}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}} = c_1\alpha_4 - c_3\alpha_6 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Le système (3.7) est en cascade, on peut donc appliquer directement la méthode du backstepping. On obtient le système réduit en prenant, les  $\alpha''_i$  comme des commandes virtuelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \alpha''_1 \\ \dot{\xi}_2 = \alpha''_2 \\ \dot{\xi}_3 = \alpha''_3 \\ \dot{\xi}_5 = \alpha''_5 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Avec :  $\alpha'_1 = -k_1(u - \alpha''_1)$ ,  $\alpha'_2 = -k_2(v - \alpha''_2)$ ,  $\alpha'_3 = -k_3(w - \alpha''_3)$ ,  $\alpha'_5 = -k_5(q - \alpha''_5)$  et  $(k_i)_{0 \leq i \leq 6}$  sont des gains positifs.

Nous avons choisi les commandes virtuelles de la manière suivante :

$$\alpha''_i = -k'_i \xi_i; \quad i \in \{1, 2, 3, 5\}$$

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

Ce choix garantit la convergence asymptotique vers l'état désiré.

Afin d'assurer la stabilité du système (3.8), nous procédons de la manière suivante :

Nous appliquons dans un premier temps le changement de variables :

$$p_1 = c_3 p + c_1 r$$

,

$$r_1 = c_1 p + c_2 r$$

Ceci permet d'obtenir un système équivalent à (3.8) qui s'exprime par :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_4 = \frac{c_2}{-c_1^2 + c_2 c_3} p_1 - \frac{c_2}{-c_1^2 + c_2 c_3} r_1 = A_1 p_1 - A_2 r_1 \\ \dot{\xi}_6 = \frac{-c_1}{-c_1^2 + c_2 c_3} p_1 + \frac{c_3}{-c_1^2 + c_2 c_3} r_1 = -A_2 p_1 + A_3 r_1 \\ p_1 = (c_1^2 - c_2 c_3) \alpha_4 = \alpha'_4 \\ \dot{r} = (c_1^2 - c_2 c_3) \alpha_6 = \alpha'_6 \end{cases} \quad (3.10)$$

On fait appel à la technique de backstepping. En prenant  $\alpha''_4$  et  $\alpha''_6$  comme des commandes virtuelles, on aura :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_4 = A_1 \alpha''_4 - A_2 \alpha''_6 \\ \dot{\xi}_6 = -A_2 \alpha''_4 + A_3 \alpha''_6 \end{cases} \quad (3.11)$$

avec :  $\alpha'_4 = -k_4(\xi_4 - \alpha''_4)$  et  $\alpha'_6 = -k_6(\xi_6 - \alpha''_6)$

En considérant le changement de variables suivant :

$$\dot{\xi}_{41} = A_3 \dot{\xi}_4 + A_2 \dot{\xi}_6$$

$$\dot{\xi}_{61} = A_2 \dot{\xi}_4 + A_1 \dot{\xi}_6$$

Le système précédent s'écrira :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{41} = (A_3 A_1 - A_2^2) \alpha''_4 \\ \dot{\xi}_{61} = (A_3 A_2 - A_1^2) \alpha''_6 \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

Pour assurer la stabilisation des sorties  $\dot{\xi}_{i1}$  et  $\dot{\xi}_{i2}$ , les commandes virtuelles  $\alpha_i''$ ,  $i \in \{4, 6\}$  sont données par :  $\alpha_i'' = -k_{i1}\xi_{i1}$

Nous avons mentionné que ces choix de commandes virtuelles garantissent la convergence des sorties vers les états désirés. Ce résultat pourra être prouvé par le théorème de Lyapounov :

**Définition 2** Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ .

Une fonction différentiable  $V$  de  $R^n$  dans  $R$  est appelée fonction de Lyapunov si elle satisfait :

1.  $V(0) = 0$
2.  $V(x) > 0 \quad \forall x \in R^n \setminus \{0\}$
3.  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n$

**Théorème 3** Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ . S'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$ , alors l'origine  $x = 0$  est stable. Si de plus  $\dot{V}(x) < 0$  dans  $R^n \setminus \{0\}$ , alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

**Preuve 1** On considère les deux fonctions de Lyapounov candidates suivantes :

$V_1 = \frac{1}{2}\xi_i^2$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 5\}$  et  $V_2 = \frac{1}{2}\xi_{j1}^2$ ,  $j \in \{4, 6\}$  sont définies positives et on a :

$\dot{V}_1 = -k'_i\xi_i^2 < 0$  et  $\dot{V}_2 = -k'_j\xi_{j1}^2 < 0$  sont définies négatives.

Alors d'après le théorème du backstepping les états  $\xi_i$  sont asymptotiquement stables.

Nous avons ainsi montré le résultat suivant :

**Théorème 4** On considère le vecteur commande suivant :

$$\alpha_1 = -M_{11}k_1(u + k'_1\xi_1).$$

$$\alpha_2 = -M_{22}k_2(v + k'_2\xi_2).$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= -M_{33}k_3(w + k'_3\xi_3). \\ \alpha_4 &= \frac{-k_4}{c_1^2 - c_2c_3}(\xi_4 + k'_4(A_3p + A_2r)) \\ \alpha_5 &= -M_{55}k_1(q + k_5\xi_5). \\ \alpha_6 &= \frac{-k_6}{c_1^2 - c_2c_3}(\xi_6 + k'_6(A_2p + A_1r))\end{aligned}$$

avec un bon choix de  $k_i$  et  $k'_i$  le dirigeable MC500 est asymptotiquement stable au voisinage de l'état désiré  $(x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d)$

#### 3.3.3 Simulations numériques

La performance du vecteur commande linéaire établi est testée sur le modèle complet du dirigeable (Modèle non linéaire), dans le but de stabiliser le dirigeable au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement. Dans ce test nous supposons que le dirigeable est déplacé de son point d'équilibre  $X_d = 0_{R^6}$  vers l'état  $X = [1, 2, 3, 0.2, 0.1, 0.1]$  sous l'effet d'une force issue d'une rafale de vent.

Les différentes valeurs utilisées dans la simulation numérique sont :  $M_{11} = 607$ ,  $M_{22} = 655$ ,  $M_{33} = 715$ ,  $M_{44} = 11023$ ,  $M_{55} = 11231$ ,  $M_{66} = 19341$ ,  $M_{46} = 203$ ,  $a = 2.5$ ,  $b_1 = 5.4$ ,  $b_3 = 6.4$ ,  $c = 2$

Les simulations numériques effectuées montrent la capacité de ce vecteur commande à stabiliser le dirigeable au voisinage de son point d'équilibre.

Dans la figure 3.3 nous observons que les déplacements du dirigeable suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  convergent asymptotiquement vers 0. Le dirigeable atteint son état initial rapidement.

De même les angles d'Euler qui décrivent la rotation du dirigeable se stabilisent asymptotiquement vers les états désirés au bout de 4s (voir figure 3.4).

Le vecteur commande a réussi à réaliser sa mission avec un temps de convergence rapide. Cependant nous remarquons que pendant la phase transitoire les commandes virtuelles  $\alpha_i$

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

---

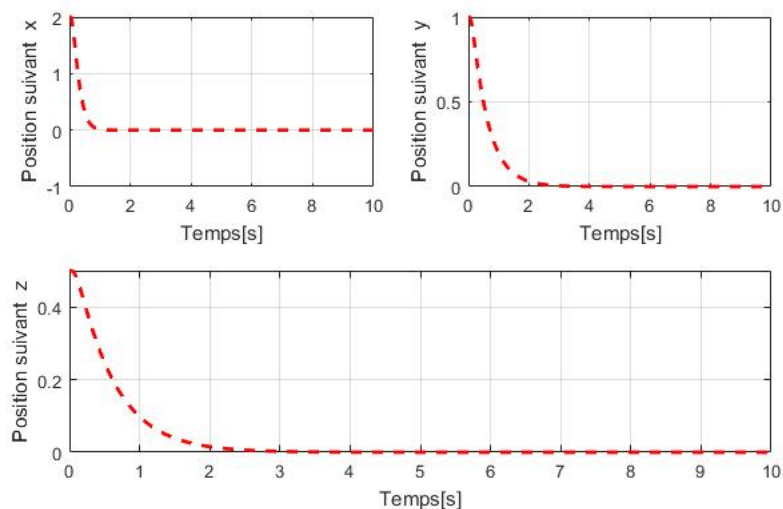


FIGURE 3.3 – Convergence des positions  $x$ ,  $y$  et  $z$

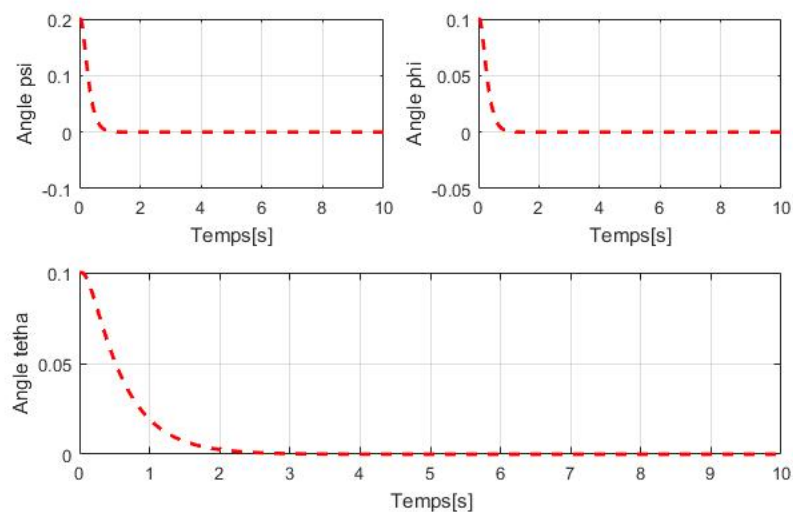


FIGURE 3.4 – Convergence des angles d'Euler

atteignent des valeurs élevées afin de converger asymptotiquement vers 0 (voir figure (3.5)).

Ces valeurs peuvent causer un dépassement des contraintes physiques des actionneurs.

### 3.3. STABILISATION DU DIRIGEABLE MC500

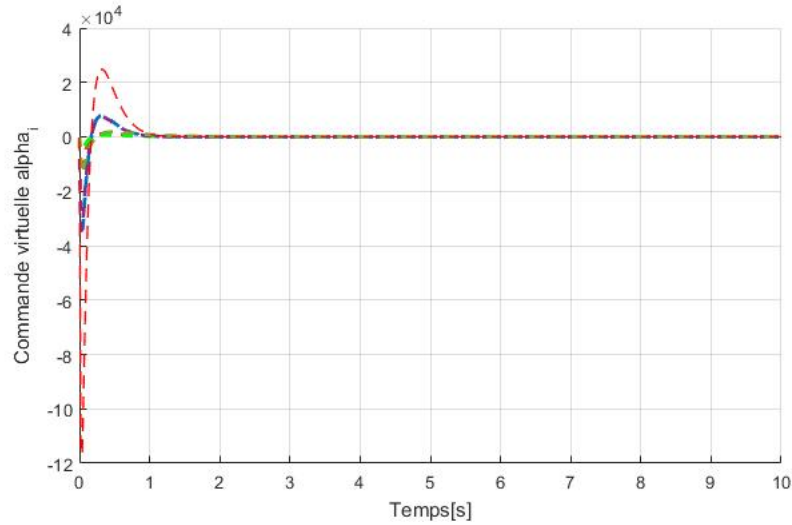


FIGURE 3.5 – Commandes virtuelles  $\alpha_i$

Dans cette étape nous avons construit un vecteur commande qui assure la stabilité du diri-

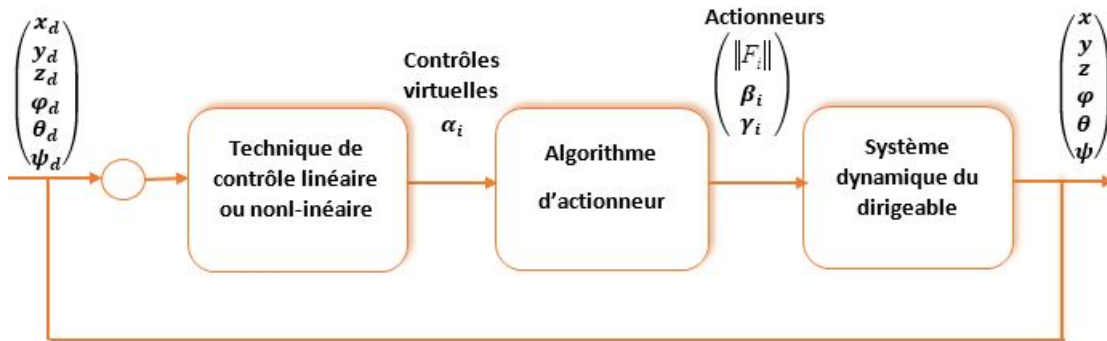


FIGURE 3.6 – Architecture de contrôle

geable. Cependant pour aller jusqu'au bout de la boucle de contrôle (voir figure 3.5), il faut traduire les forces et les moments donnés par le vecteur commande  $\alpha_i$  en valeurs de poussée  $(F_i)_{1 \leq i \leq 4}$  et en valeurs d'angle d'inclinaison  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$  et  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4}$ . Il s'agit de résoudre le

problème de connexion entre les commandes obtenues et les actionneurs du dirigeable.

## 3.4 Allocation de contrôle

### 3.4.1 Méthode analytique

La relation entre les  $\alpha_i$  d'un coté et les forces de propulsion  $F_i$  et les angles d'inclinaison  $\gamma_i$  et  $\beta_i$  de l'autre est décrite par les équations (3.1) et (3.2). Elles se traduisent par le système non-linéaire rectangulaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} - (mg - B_u) \cdot s_{\theta} = \alpha_1 \\ \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + (mg - B_u) \cdot s_{\phi} \cdot c_{\theta} = \alpha_2 \\ - \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} s_{\beta_i} + (mg - B_u) \cdot c_{\phi} c_{\theta} = \alpha_3 \\ c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| s_{\gamma_i} + b_1 (\| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + b_3 (\| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4}) + \\ B_u z_B s_{\phi} c_{\theta} = -\alpha_4 \\ -c \sum_{k=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} + a (\| F_4 \| c_{\gamma_4} s_{\beta_4} + \| F_3 \| c_{\gamma_3} s_{\beta_3} - \| F_1 \| c_{\gamma_1} s_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} s_{\beta_2}) + \\ B_u z_B s_{\theta} = -\alpha_5 \\ b_1 (\| F_1 \| c_{\gamma_1} c_{\beta_1} - \| F_2 \| c_{\gamma_2} c_{\beta_2}) + b_3 (\| F_3 \| c_{\gamma_3} c_{\beta_3} - \| F_4 \| c_{\gamma_4} c_{\beta_4}) + a (\| F_4 \| s_{\gamma_4} + \\ \| F_3 \| s_{\gamma_3} - \| F_1 \| s_{\gamma_1} - \| F_2 \| s_{\gamma_2}) = -\alpha_6 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Les degrés de liberté du dirigeable MC500 sont au nombre de 12 et les commandes "virtuelles" au nombre de 6. Par conséquent le problème d'optimisation non-linéaire admet une infinité de solutions. Le défi pour nous serait de résoudre ce système et de choisir la solution qui respecte les capacités des moteurs.

Pour ce faire, nous avons transformé le système (3.13) en un système linéaire rectangulaire moyennant un changement de coordonnées et on a essayé d'obtenir la solution par la mé-

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

thode de la pseudo-inverse. Cette méthode a montré ses limites. Les solutions proposées par cette méthode sont souvent aberrantes, comme on le verra dans les exemples. Nous avons donc décidé d'établir une méthode analytique moyennant certaines approximations que l'on présentera plus loin dans ce paragraphe.

Dans un premier temps nous avons proposé ce changement de variables :

$$f_i = \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i} \quad (3.14)$$

$$g_i = \| F_i \| s_{\gamma_i} \quad (3.15)$$

$$h_i = \| F_i \| c_{\gamma_i} s_{\beta_i} \quad (3.16)$$

Les  $f_i$ ,  $g_i$  et  $h_i$  peuvent représenter respectivement les composantes verticales, latérales et axiales des poussées du rotors ; ces nouvelles variables seront très utiles pour la résolution du problème d'allocation de contrôle. La détermination de ces nouvelles grandeurs  $f_i$ ,  $g_i$  et  $h_i$  nous permettra de résoudre le problème de connexion et déduire les expressions des actionneurs. En effet, à partir des équations (3.14), (3.15) et (3.16) nous pouvons déduire les valeurs des actionneurs du dirigeable. Ils sont décrits par les relations suivantes :

$$\| F_i \| = \sqrt{h_i^2 + g_i^2 + f_i^2} \quad (3.17)$$

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{h_i}{f_i}\right) \quad (3.18)$$

$$\gamma_i = \arctan\left(\frac{g_i}{c_{\beta_i} f_i}\right) \quad (3.19)$$

L'utilité d'introduire ces nouvelles coordonnées est de transformer le système non-linéaire (3.13) en un système linéaire équivalent. Par conséquent le problème d'optimisation non-linéaire devient un problème d'optimisation linéaire. Ainsi en introduisant les nouvelles

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

coordonnées dans le système (3.13) nous obtenons le système linéaire rectangulaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^4 f_i = \alpha_1 + (mg - B_u).s_\theta = \alpha'_1 \\ \sum_{k=1}^4 g_i = \alpha_2 - (mg - B_u).s_\phi.c_\theta = \alpha'_2 \\ \sum_{k=1}^4 h_i = \alpha_3 - (mg - B_u).c_\phi.c_\theta = \alpha'_3 \\ c \sum_{k=1}^4 g_i + b_1(h_1 - h_2) + b_3(h_3 - h_4) = -\alpha_4 - B_u z_B s_\phi c_\theta = \alpha'_4 \\ -c \sum_{k=1}^4 f_i + a(h_3 + h_4 - h_1 - h_2) = -\alpha_5 - B_u z_B s_\theta = \alpha'_5 \\ b_1(f_1 - f_2) + b_3(f_3 - f_4) + a(g_4 + g_3 - g_1 - g_2) = -\alpha_6 = \alpha'_6 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Pour atteindre notre objectif, il faudrait donc résoudre ce dernier système. Après quelques manipulations algébriques la résolution du système (3.20) revient à la résolution de des deux sous-systèmes ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^4 f_i = \alpha'_1 \\ \sum_{k=1}^4 g_i = \alpha'_2 \\ b_1(f_1 - f_2) + b_3(f_3 - f_4) + a(g_4 + g_3 - g_1 - g_2) = \alpha'_6 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^4 h_i = \alpha'_3 \\ b_1(h_1 - h_2) + b_3(h_3 - h_4) = \alpha'_4 - c\alpha'_2 \\ a(h_3 + h_4 - h_1 - h_2) = c\alpha'_1 + \alpha'_5 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Ces deux sous-systèmes s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0_{3 \times 4} \\ 0_{3 \times 8} & B \end{pmatrix} . U = \alpha' \quad (3.23)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & -b_1 & b_3 & -b_3 & -a & -a & a & a \end{pmatrix}$$

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & -b_1 & b_3 & -b_3 \\ -a & -a & a & a \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $U$  est composé des nouveaux paramètres à déterminer :

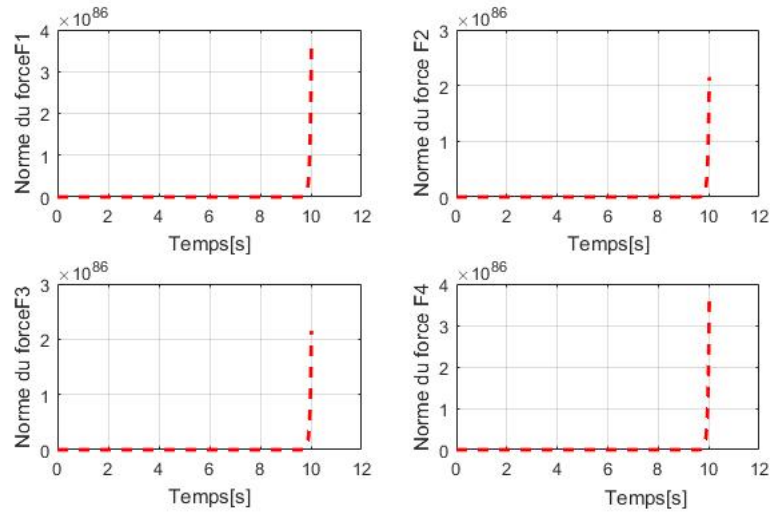


FIGURE 3.7 – Norme des forces en utilisant la méthode de la pseudo-inverse

$$U = [f_1, \dots, f_4, g_1, \dots, g_4, h_1, \dots, h_4]^t$$

Le vecteur commande  $\alpha'$  est composé par les vecteurs de commande virtuelle :

$$\alpha' = [\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_6, \alpha'_3, \alpha'_4 - c\alpha'_2, \alpha'_5 + c\alpha'_1]^t$$

La première intuition, pour trouver le vecteur  $U$  en fonction des commandes  $\alpha'$  était d'utiliser la méthode de la pseudo-inverse pour inverser la matrice rectangulaire  $C$ . On a alors :

$$U = C^+ \alpha'$$

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

La solution obtenue par la méthode de la pseudo-inverse donne soit des résultats qui n'assurent pas la stabilité du dirigeable, soit des valeurs qui ne sont pas compatibles avec les capacités des rotors. Ceci a été vérifié par des simulations numériques. La figure 3.7 présente les valeurs des forces des moteurs et montre que les normes des forces données par la méthode de la pseudo inverse sont très élevées. Par conséquent il y a un risque de saturation des actionneurs du dirigeable sans arriver à stabiliser ce dernier.

Le défi pour nous est de résoudre les deux systèmes en question tout en respectant les capacités des moteurs du dirigeable.

Nous présenterons donc une méthode analytique de résolution directe du problème d'allocation de contrôle.

#### **Résolution analytique du système (3.22)**

En combinant la première et la troisième équation du système on obtient :

$$h_3 + h_4 = \frac{\alpha'_3}{2} + \frac{c\alpha'_1 + \alpha'_5}{2a}$$

Une infinité de combinaisons sont possibles pour déterminer  $h_3$  et  $h_4$  en fonction des commandes virtuelles  $\alpha'_i$ . Nous avons choisi d'égaliser les valeurs des  $h_3$  et  $h_4$ . On a alors :

$$h_3 = h_4 = \frac{\alpha'_3}{4} + \frac{c\alpha'_1 + \alpha'_5}{4a}$$

Nous estimons que le choix retenu est le plus approprié pour donner des valeurs de forces compatibles avec les actionneurs du dirigeable.

On substitue  $h_3$  et  $h_4$  par leurs valeurs dans le système (3.22) et on obtient :

$$h_1 = \frac{\alpha'_4 - c\alpha'_2}{2b_1} + \frac{\alpha'_3}{2} - 2h_3$$

et

$$h_2 = \alpha'_4 - h_1 - 2h_3$$

**Résolution analytique du système (3.21)**

Après avoir multiplié la deuxième équation par  $a$  on l'additionne avec la troisième équation du système (3.21), on déduit ceci :

$$b_1(f_1 - f_2) + b_3(f_3 - f_4) + 2a(g_4 + g_3) = \alpha'_6 + a\alpha'_2 \quad (3.24)$$

Par identification nous avons considéré ces deux nouvelles conditions :

$$\begin{cases} b_1(f_1 - f_2) + b_3(f_3 - f_4) = \alpha'_6 \\ 2(g_4 + g_3) = \alpha'_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous sommes face à une deuxième situation de choix. Les variables  $g_i$  représentent les poussées latérales des rotors. Nous avons fait le choix de les prendre égales. Finalement, et pour équilibrer les effets des actionneurs dans le mouvement de lacet, nous avons égalisé les quantités en termes des poussés verticales  $f_i$ . On aura alors :

$$\begin{cases} b_1(f_1 - f_2) = b_3(f_3 - f_4) = \frac{\alpha'_6}{2} \\ g_4 = g_3 = \frac{\alpha'_2}{4} \end{cases} \quad (3.26)$$

Ces choix permettent d'achever la résolution du système (3.21) et donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} g_1 = g_2 = \frac{\alpha'_2}{4} \\ f_2 = f_4 = \frac{\alpha'_1}{4} - \left(\frac{1}{8b_1} + \frac{1}{8b_3}\right)\alpha'_6 \\ f_1 = \frac{\alpha'_6}{2b_1} + f_2 \\ f_3 = \frac{\alpha'_6}{2b_3} + f_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

La philosophie des choix proposés repose sur des considérations énergétiques. En effet, pour la stabilisation de cet engin volant à quatre moteurs à hélices, il existe un nombre infini de solutions. La solution la plus économique serait celle qui équilibre les forces sur les quatre moteurs. C'est pour cela que nous avons imposé ces conditions pour être plus proches de

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

la configuration d'équilibrage des moteurs à chaque fois que les conditions de fonctionnement et de stabilisation le permettent. Soulignons que dans cette stratégie de choix nous avons essayé d'équilibrer les composantes des forces sans avoir imposé des poussées égales pour les quatre moteurs (voir les expressions des  $f_i$  et  $g_i$  et  $h_i$ ). L'originalité de ce travail

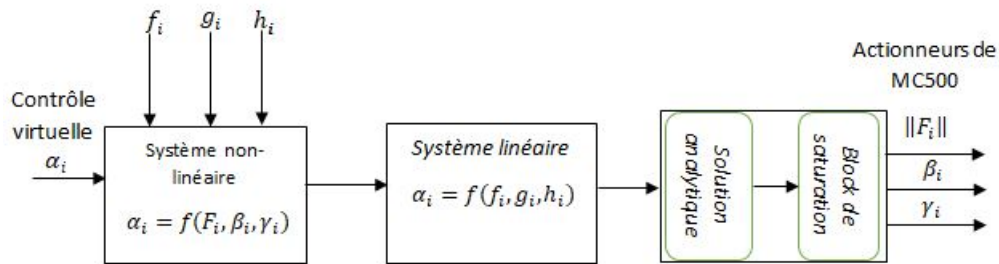


FIGURE 3.8 – Algorithme d'allocation de contrôle : méthode analytique

est la détermination d'un algorithme qui met en évidence le problème de connexion entre les actionneurs et les commandes "virtuelles" et qui assurent la stabilisation du dirigeable avec charge intégrée. Dans la phase de stabilisation, la stratégie des choix suivie permet de respecter les capacités des moteurs. Cependant pour la phase transitoire (avant la stabilisation) on a un risque de dépassement des contraintes. Le dépassement est dû aux grandes valeurs que prennent les commandes virtuelles. Pour contourner ce problème, nous proposons de faire fonctionner les moteurs avec leurs forces maximales de saturation pendant la phase transitoire. Ceci revient à appliquer un limiteur des valeurs des forces et des angles d'inclinaison qui se traduit par un bloc de saturation.

Le schéma fonctionnel de l'algorithme proposé est décrit dans la figure 3.8.

Afin de valider la méthode proposée, nous réalisons des simulations numériques à travers le programme Matlab.

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

#### 3.4.2 Simulations numériques

Le test que nous présentons utilise les mêmes données que les simulations précédentes mais cette fois-ci nous commandons le dirigeable en utilisant les actionneurs réels pilotés par l'algorithme analytique d'allocation de contrôle.

Nous voyons clairement sur les figures 3.9, 3.10 et 3.11 que le dirigeable se stabilise au

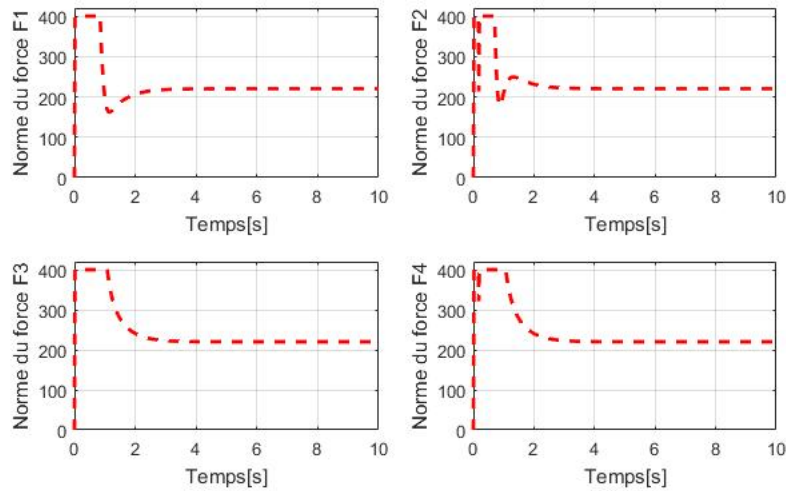


FIGURE 3.9 – Valeurs des Forces  $F_i$

voisinage de son point d'équilibre en appliquant des forces et des angles d'inclinaison équirépartis sur les quatre rotors. Les valeurs des forces et des angles sont compatibles avec les capacités des moteurs du dirigeable *MC500*.

Les résultats des simulations reflètent que la stratégie suivie lors de la résolution analytique des systèmes est efficace pour stabiliser le dirigeable en économisant son énergie globale.

Les coupures des graphes des forces (voir figure 3.9) s'explique par le présence du bloc de saturation. Ce bloc de saturation permet de respecter les contraintes physiques des actionneurs pendant la phase transitoire. La présence de ce bloc n'a pas influencé la stabilité de

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

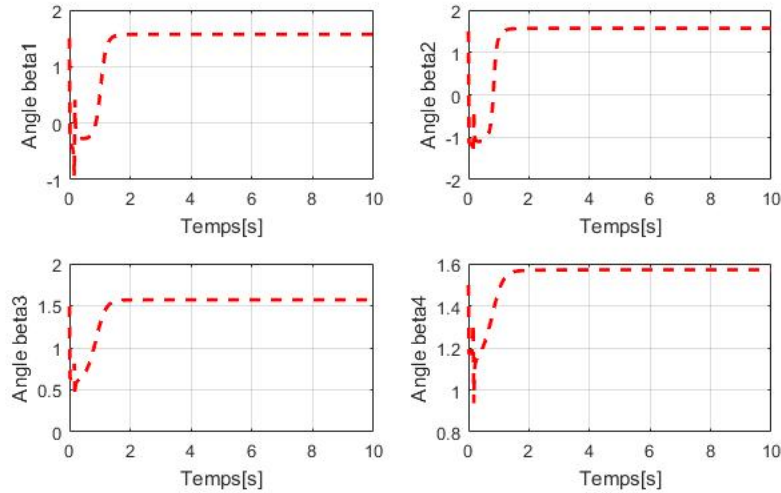


FIGURE 3.10 – Valeurs des angles  $\beta_i$

dirigeable.

L'algorithme d'allocation de contrôle a une importance majeure dans le processus de stabilisation du dirigeable. C'est un maillon essentiel dans la chaîne du contrôle.

Les résultats obtenus sont prometteurs et confirment l'efficacité de l'algorithme proposé pour résoudre le problème de connexion entre les commandes "réelles" et "virtuelles". Cet algorithme est d'une part simple à mettre en œuvre et n'est pas coûteux en temps de calcul et de complexité algorithmique puisqu'il est piloté par des équations algébriques. Et d'autre part, il nous permet de passer du "virtuel vers le réel" en traduisant les valeurs d'un contrôle issues des lois de contrôle en terme de forces et de moments de propulsion tout en respectant les limitations physiques imposées par les actionneurs.

Afin de valider l'algorithme développé par une méthode analytique avec certaines hypothèses, nous le comparons avec une autre alternative numérique. On utilisera la méthode du gradient déterministe.

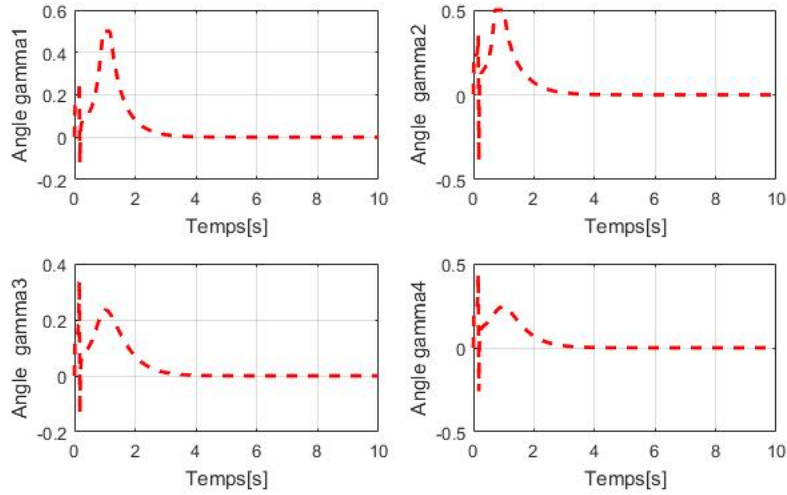


FIGURE 3.11 – Valeurs des angles  $\gamma_i$

#### 3.4.3 Méthode du Gradient déterministe

La méthode de gradient déterministe est un algorithme itératif basé sur la minimisation d'une fonction coût  $J(U_1)$ . Le principe de l'algorithme est de générer une séquence de vecteurs  $U_{1,k}, k \geq 1$  à partir d'une valeur initiale  $U_{1,0}$  de telle manière que la valeur coût de la fonction  $J(U_1)$  décroît à chaque itération :

$$J(U_{1,k+1}) < J(U_{1,k})$$

Pour la méthode du gradient déterministe le vecteur  $U_{1,k}$  est actualisé de la manière suivante :

$$U_{1,k+1} = U_{1,k} - \mu \frac{1}{2} \frac{\partial J(U_1)}{U_1} \quad (3.28)$$

Où  $k$  dénote l'itération,  $\mu$  est une constante positive (pas d'adaptation).

Pour résoudre le système linéaire (3.20), nous proposons d'utiliser la fonction coût  $J$  définie

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

par :

$$J = \sum_{i=1}^6 (\alpha'_i - \tau_i)^2 \quad (3.29)$$

La fonction quadratique  $J$  pénalise l'erreur  $e_i = \alpha'_i - \tau_i$  entre les composantes du vecteur contrôle, le vecteur force  $\tau_{F_1}$  et les moments  $\tau_{F_2}$ .

On remarque que lorsque la fonction coût  $J$  est minimale  $e_i$  tend vers 0 (c est a dire  $\alpha'_i$  tend  $\tau_i$ ). Par conséquent les paramètres intermédiaires  $f_i$ ,  $g_i$  et  $h_i$  sont les composantes du vecteur qui minimise la fonction quadratique  $J$ .

En utilisant la relation matricielle (3.23) la fonction  $J$  s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \sum_{i=1}^6 (\alpha'_i - C_i U_1)^2 \quad (3.30)$$

avec  $C_i$  est la  $i$  ème ligne de la matrice  $C$ . Le gradient de la fonction  $J$  est donné par :

$$\nabla J = -2 \sum_{i=1}^6 C_i^t (\alpha'_i - C_i U_1) \quad (3.31)$$

On introduit l'expression du gradient dans l'équation (3.31) nous obtenons le vecteur qui minimise la fonction  $J$ . Il est donné par :

$$U_{1,k+1} = U_{1,k} + \mu \sum_{i=1}^6 C_i^t (\alpha'_i - C_i U_{1,k}) \quad (3.32)$$

Afin de mettre en œuvre l'algorithme proposé, il est nécessaire d'étudier la convergence de celui-ci. L'étude de la convergence de l'algorithme du gradient à pas fixe pour résoudre le problème d'allocation de contrôle, revient à étudier la suite des itérés  $U_{1,k+1}$ . L'hypothèse de la convergence de l'algorithme est donnée par le résultat suivant :

**Proposition :**

L'algorithme numérique d'allocation de contrôle converge si :

$$0 < \mu < \frac{2M_2}{M_1^2} \quad (3.33)$$

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

avec  $M_1 = \max(\lambda_i)$  et  $M_2 = \min(\lambda_i)$  où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $C_1 = 2 \sum_1^6 C_i^t C_i$

**Preuve 2** *L'algorithme d'allocation de contrôle proposé converge si la suite  $U_{1,k+1}$  converge vers le minimum de la fonction quadratique définie par l'équation (3.29) Cette dernière équation pourra être réécrite ainsi :*

$$J(U_1) = \| \alpha' - CU_1 \|_2^2 \quad (3.34)$$

*C'est une fonction coercive et strictement convexe alors le minimum de la fonction (3.29) existe. On peut remarquer que le gradient de la fonction quadratique définie par l'équation vérifie les deux propriétés suivantes :*

- $\nabla J$  est une fonction  $M_1$  lipschitzienne.
- $\langle \nabla J(U) - \nabla J(V), U - V \rangle \geq M_2 \| U - V \|^2$

en effet on a :

$$\begin{aligned} \| \nabla J(U) - \nabla J(V) \| &= \| 2 \sum_1^6 C_i^t C_i (U - V) \| \\ \langle \nabla J(U) - \nabla J(V), U - V \rangle &= \langle 2 \sum_1^6 C_i^t C_i (U - V), U - V \rangle \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $C_1$  est une matrice symétrique définie positive nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| 2 \sum_1^6 C_i^t C_i (U - V) \| &\leq \max(\lambda_i) \| U - V \| \\ \langle 2 \sum_1^6 C_i^t C_i (U - V), U - V \rangle &\geq \min(\lambda_i) \| U - V \|^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons déduire que la fonction  $\nabla J$  est  $M_1$  lipschitzienne et  $M_2$  convexe.

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

*Sous les hypothèses précédentes la méthode de gradient à pas fixe peut être interprétée comme la recherche d'un point fixe de la fonction suivante :*

$$G(x) = x - \mu \nabla J(x)$$

*La fonction  $G$  est une fonction contractante. En effet :*

$$\|G(U) - G(V)\| = \|U - V\|^2 - 2\mu \langle \nabla J(U) - \nabla J(V), U - V \rangle + \|\nabla J(U) - \nabla J(V)\|^2 \leq \rho^2(\mu) \|U - V\|^2 \quad (3.35)$$

$$\text{Avec : } \rho^2 = 1 - 2\mu M_1 + \mu^2 M_2^2$$

*Sous la condition  $0 < \mu < \frac{2M_2}{M_1^2}$ , on aura  $0 < \rho^2(\mu) < 1$ .*

*Soit  $U_1$  le minimum de la fonction  $J$ .  $U_1$  représente aussi un point fixe pour la fonction  $G$ . Comme  $G$  est une contraction la suite  $U_{1,k}$  vérifie la relation :*

$$\|U_{1,k+1} - U_1\| < \rho(\mu) \|U_{1,k} - U_1\|$$

*D'après l'inégalité précédente nous pouvons déduire que la suite  $U_{1,k}$  converge vers le minimum  $U_1$ .*

Pour cette méthode numérique on pourra avoir un dépassement des contraintes pendant la phase transitoire. Dans ce cas on utilisera le bloc de saturation. Les étapes pour obtenir la solution numérique sont détaillées dans l'algorithme suivant :

### 3.4. ALLOCATION DE CONTRÔLE

---

Algorithme : allocation de contrôle : méthode de gradient

---

Etape 1 : Initialisation  $k = 0$

choisir  $f_{i,0}, g_{i,0}, h_{i,0}, \mu$  et  $\epsilon$  ( $i=1,2,3,4$ )

Etape 2 : Itération k

$$\begin{pmatrix} f_{1,k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{4,k+1} \\ g_{1,k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{4,k+1} \\ h_{1,k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{4,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{4,k} \\ g_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{4,k} \\ h_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{4,k} \end{pmatrix} + \mu \sum_{i=1}^6 C_i^t (\alpha'_i - C_i) \begin{pmatrix} f_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{4,k} \\ g_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{4,k} \\ h_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{4,k} \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Critère d'arrêt

$$\| [f_{1,k+1}, \dots, f_{4,k+1}, g_{1,k+1}, \dots, g_{4,k+1}, h_{1,k+1}, \dots, h_{4,k+1}]^t - [f_{1,k}, \dots, f_{4,k}, g_{1,k}, \dots, g_{4,k}, h_{1,k}, \dots, h_{4,k}]^t \| < \epsilon$$

Etape 4 : Block de saturation

$$\text{if } \| F_i \| = \sqrt{f_i^2 + g_i^2 + h_i^2} > 400, \quad |\gamma_i| > \frac{1}{2}$$

$$\| F_i \| = 400, \quad \gamma_i = \frac{\text{signe}(\gamma_i)}{2}$$

$$\text{else } \| F_i \| = \sqrt{f_i^2 + g_i^2 + h_i^2}, \quad \gamma_i = \arctan\left(\frac{g_i}{c_{\beta_i} f_i}\right)$$


---

L'algorithme décrit ci-dessous sera validé par des simulations numériques. Dans ces simulations nous avons considéré le même scénario que nous avons effectué pour valider la

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

méthode analytique.

### 3.5 Simulation numérique

Pour ces simulations les valeurs du pas d'adaptation  $\mu$  et la précision sur l'erreur  $\epsilon$  sont :  $\mu = 10^{-2}$  et  $\epsilon = 10^{-3}$

Les figures 3.12 et 3.13 montrent que le dirigeable se stabilise et revient à son état initial

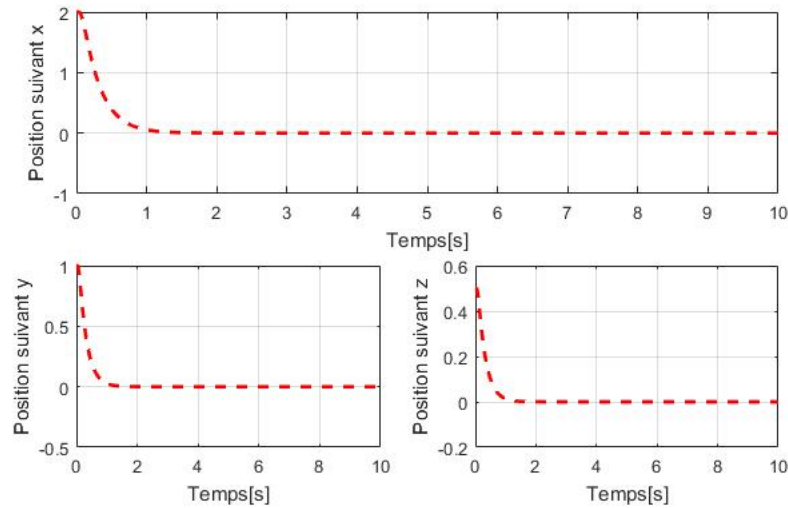


FIGURE 3.12 – Convergence des positions  $x$ ,  $y$  et  $z$

$X_d = 0_{R^6}$ . Ce qui prouve l'efficacité de la méthode du gradient à pas fixe pour la résolution du problème d'allocation de contrôle.

La méthode numérique donne des résultats analogues à ceux donnés par la méthode analytique que nous avons développé précédemment. Le temps de convergence de l'algorithme du gradient a été rapide (2s, le même que pour algorithme analytique). En terme de valeurs numériques pour la stabilisation du dirigeable, nous avons obtenu les mêmes valeurs données par la méthode analytique :  $\| F_i \| = 220N$ ,  $\beta_i = \frac{\pi}{2}rad$  et  $\gamma_i = 0rad$  (Voir figure 3.14, 3.15

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

et 3.16) Il faut noter que pour cette méthode, les forces et les angles finaux obtenus pour

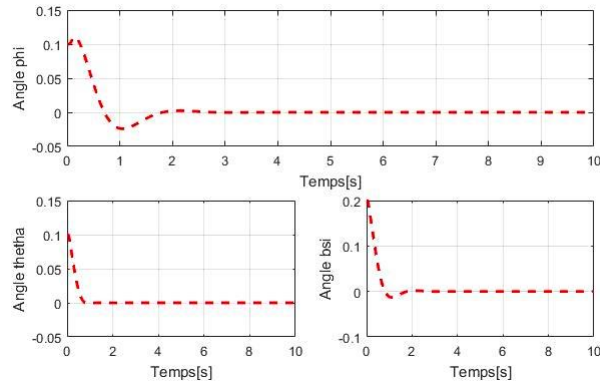


FIGURE 3.13 – Convergence des angles d’Euler

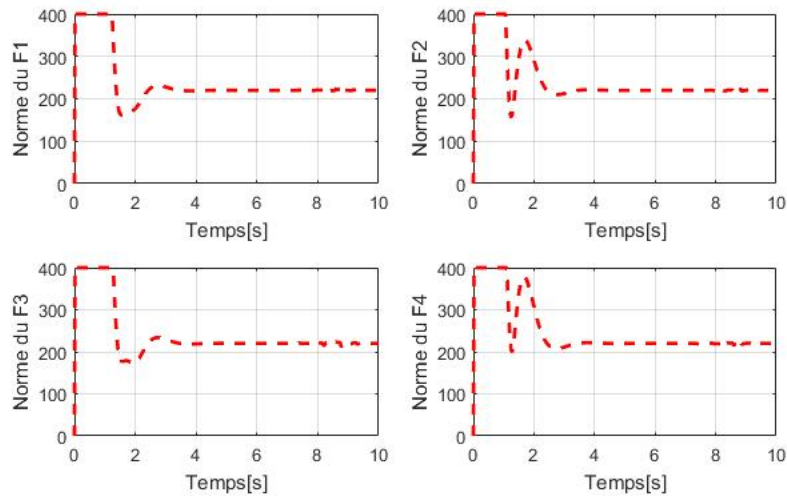


FIGURE 3.14 – valeurs des forces  $F_i$

stabiliser le dirigeable sont équi-répartis sur les moteurs. Il faut noter aussi, que nous avons combiné la méthode de gradient avec le bloc de saturation pour respecter les contraintes physiques pendant la courte durée de la phase transitoire. La combinaison considérée n’a

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

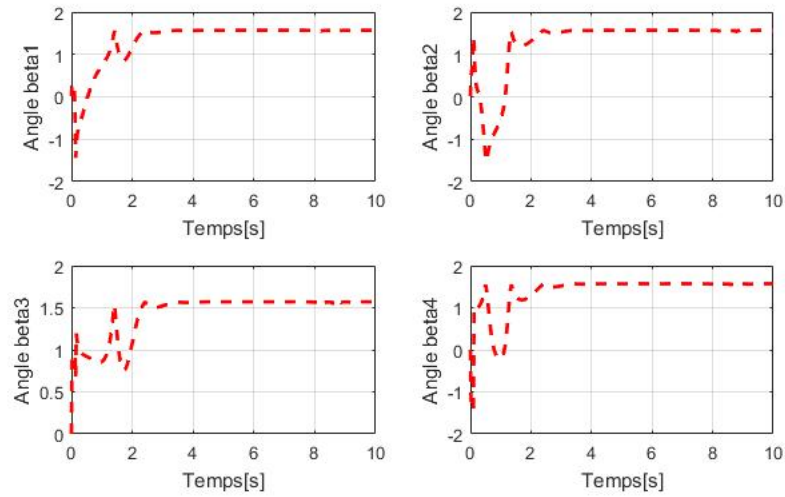


FIGURE 3.15 – Valeurs des angles  $\beta_i$

pas influé sur la stabilisation du dirigeable. La méthode numérique du Gradient à pas fixe

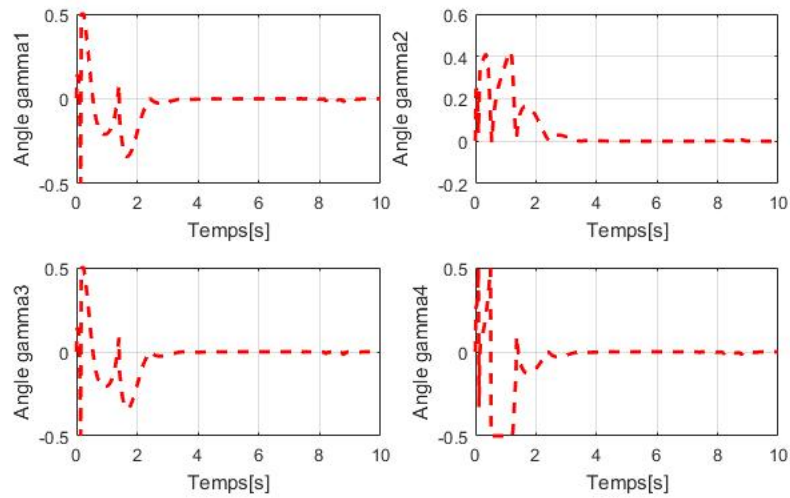


FIGURE 3.16 – Valeurs des angles  $\gamma_i$

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

pour la résolution du problème de connexion en question confirme les résultats obtenus par la méthode analytique. Ce qui nous permet d'affirmer que la stratégie suivie (dans la section précédente) est efficace en terme de convergence vers l'état désiré, et en terme d'économie énergétique du dirigeable.

Dans les sections précédentes, nous avons surmonté le problème de dépassement de contrainte par l'insertion d'un bloc de saturation.

D'autres pistes pourraient être envisagées pour contourner le problème lié à la limitation des actionneurs. Une première piste serait d'utiliser la technique de commande par saturation. En d'autres termes au lieu de saturer les actionneurs réels (comme nous avons fait), on peut saturer les commandes virtuelles pour qu'elles prennent des valeurs raisonnables et ne causent pas un dépassement de contrainte. Les commandes par saturation (commandes bornées) sont abordées dans le travail de Teel[Tee92], qui a fourni un formalisme pour analyser le comportement des systèmes de contrôle avec des saturations. Cette approche a été utilisée dans[AM08] pour assurer le suivi de trajectoire du dirigeable AURORA afin de tenir compte des limites de saturation des rotors dans la conception de contrôle.

De notre côté, nous avons décidé d'explorer les techniques d'optimisation quadratique avec contraintes. Il s'agit de résoudre le système (3.23) en optimisant une fonction coût quadratique qui obéit aux contraintes physiques des actionneurs. La fonction coût qui sera utilisée lors de la minimisation quadratique est donnée par l'équation (3.30). Pour définir les contraintes imposées par les actionneurs nous avons majoré et minoré les composantes du vecteur forces et les composantes du vecteur moments (équation (3.1)) en utilisant des inégalités triangulaires. Afin de clarifier la démarche, prenons par exemple la première composante du vecteur forces que nous avons écrit en fonction des nouvelles coordonnées. Nous

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

aurons :

$$|\sum_{i=1}^4 f_i| = |\sum_{i=1}^4 \| F_i \| c_{\gamma_i} c_{\beta_i}| \leq \sum_{i=1}^4 \max(\| F_i \|)$$

Nous procédons de la même manière pour les autres composantes des forces et moments.

Nous pouvons écrire les contraintes des actionneurs sous forme de contraintes d'inégalité par la relation matricielle suivante :

$$A_{CI}U_1 \leq B \quad (3.36)$$

avec la matrice  $A_{CI}$  est donnée par :

Lighe i de la matrice $A_{CI_i}$	Valeurs
$A_{CI_1}$	(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
$A_{CI_2}$	(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
$A_{CI_3}$	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)
$A_{CI_4}$	(0, 0, 0, 0, c, c, c, c, b <sub>1</sub> , -b <sub>1</sub> , b <sub>3</sub> , -b <sub>3</sub> )
$A_{CI_5}$	(-c, -c, -c, -c, 0, 0, 0, 0, -a, -a, a, a)
$A_{CI_6}$	(b <sub>1</sub> , -b <sub>1</sub> , b <sub>3</sub> , -b <sub>3</sub> , -a, -a, a, a, 0, 0, 0, 0)

Les composantes du vecteur  $B$  sont :

composante i de $B$	Valeurs
$B_1 = B_2 = B_3$	$\sum_{i=1}^4 \max(\  F_i \ )$
$B_4 =$	$c \sum_{i=1}^4 \max(\  F_i \ ) + 2(b_1 + b_3)\max(\  F_1 \ )$
$B_5$	$c \sum_{i=1}^4 \max(\  F_i \ ) + 4a\max(\  F_1 \ )$
$B_6$	$(2(b_1 + b_3) + 4a)\max(\  F_1 \ )$

Résoudre le système (3.23) en tenant compte de l'équation (3.36) revient à résoudre le problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\min_{A_{CI}U_1 \leq B} J = \sum_{i=1}^6 (\alpha'_i - C_i U_1)^2$$

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

Le vecteur des nouvelles variables  $U_1$  sera déterminé en utilisant l'algorithme Réflectif de Newton (interior-reflective Newton). L'algorithme Réflectif de Newton a été étudié dans [CL96]. L'implémentation de l'algorithme sera réalisé en utilisant la fonction prédéfinie dans le toolbox d'optimisation de matlab : quadprog.

Nous gardons le même test effectué dans les simulations précédentes. Les résultats sont résumés dans les figures suivantes :

Nous remarquons que le dirigeable se stabilise avec les mêmes valeurs des actionneurs  $\beta_i, \gamma_i$

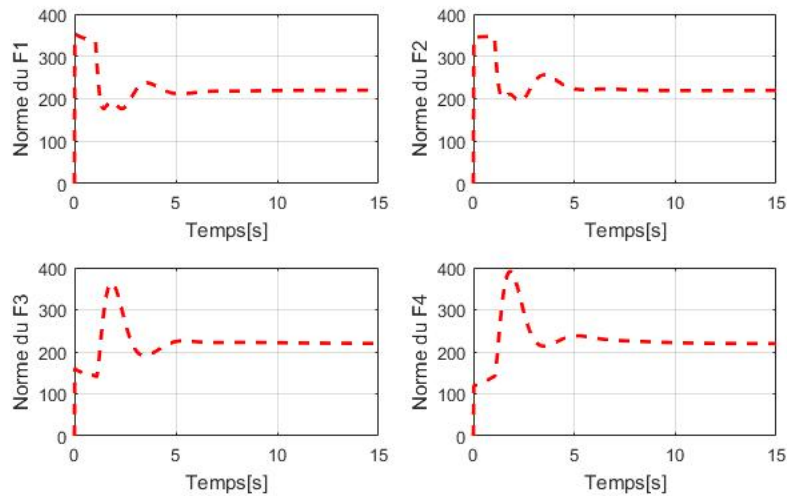


FIGURE 3.17 – Valeurs des force : optimisation avec contrainte

et  $F_i$  qui sont obtenues par la méthode analytique. Cette méthode d'optimisation quadratique avec contrainte aboutit aux même résultats que notre méthode analytique approchée. Les valeurs obtenues pour les différents actionneurs sont optimales et minimisent les normes de  $F_i$ , donc minimisent l'énergie dépensée.

Dans les figures des forces et angles  $\gamma_i$  nous constatons qu'il y a des coupures dans les courbes. Ces coupures sont dues aux contraintes imposées en résolvant le problème d'allo-

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

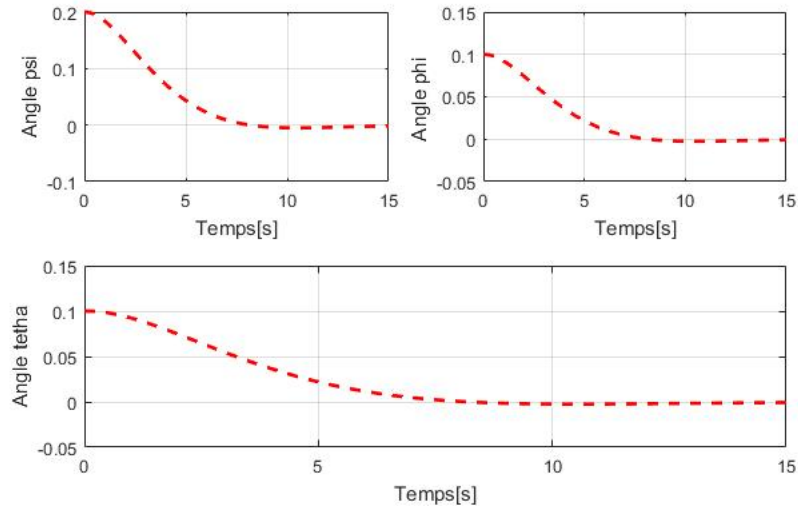


FIGURE 3.18 – Valeurs des angles d'Euler

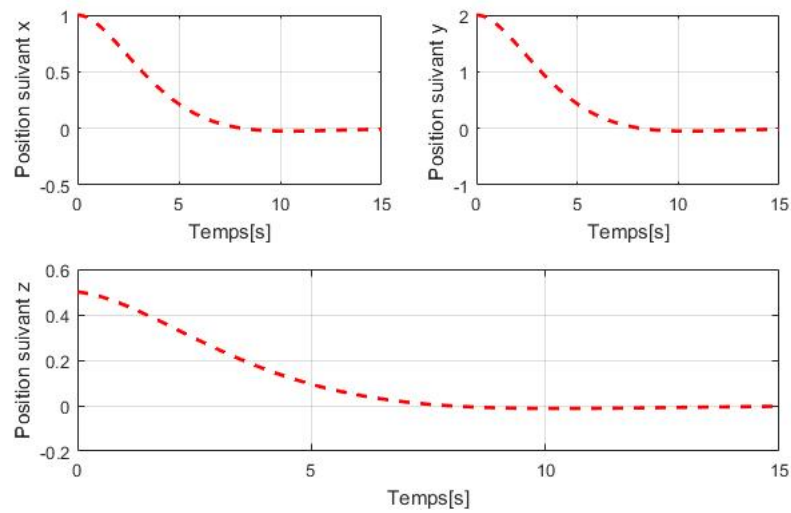


FIGURE 3.19 – Position du dirigeable suivant x, y, z

cation envisagée. Ces coupures sont similaires à celles de la méthode analytique et de la méthode du gradient déterministe.

### 3.5. SIMULATION NUMÉRIQUE

---

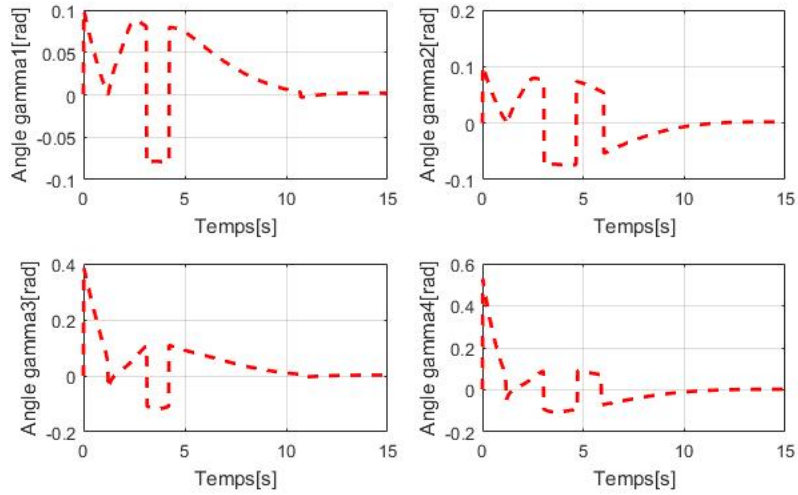


FIGURE 3.20 – Valeurs des angles  $\gamma_i$

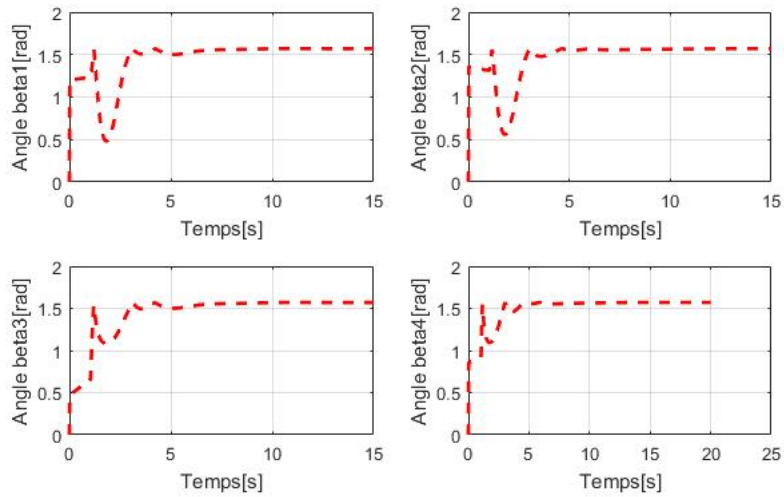


FIGURE 3.21 – Valeurs des angles  $\beta_i$

Le temps de convergence vers les états désirés pour la méthode d'optimisation avec contrainte est de 10s qui est relativement lent par rapport au temps de convergence de l'algorithme

analytique(4s). Notons que les dirigeables sont sensibles aux conditions météorologiques, pour cette raison la réponse des actionneurs doit être la plus rapide possible. En admettant le critère de convergence des algorithmes comme critère de comparaison, nous pouvons affirmer que la méthode analytique est meilleure que l'algorithme d'optimisation quadratique. De plus la résolution du problème d'allocation par la méthode d'optimisation avec contrainte ne pourra se faire en temps réel, vu le temps de calcul nécessaire pour chaque itération. A l'inverse, la méthode analytique proposée s'appuie sur des équations algébriques. Son temps de résolution est très rapide, et l'implémentation pour le calcul en temps réel est possible.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi un algorithme basé sur une méthode analytique pour résoudre le problème d'allocation de contrôle. L'algorithme proposé est piloté par des équations algébriques obtenues d'une manière analytique en se basant sur des propositions justifiées par des arguments énergétiques. Ensuite nous avons proposé une alternative numérique. Nous avons utilisé la méthode du gradient déterministe pour confirmer les résultats obtenus par la méthode analytique. Pour ces deux algorithmes il y a eu un dépassement transitoire des contraintes physiques imposées par les actionneurs du dirigeable. Pour cela nous avons appliqué un bloc de saturation pour respecter ces limitations. Pour tester l'influence du bloc de saturation sur la stabilisation du dirigeable nous avons appliqué les techniques d'optimisation quadratique. Cette dernière confirme une autre fois les solutions obtenues par les deux autres méthodes. Ces algorithmes ont été testés en utilisant un vecteur commande linéaire que nous avons développé pour stabiliser le dirigeable avec charge intégrée durant sa mission critique de chargement et de déchargement. Ce vecteur commande été construit par la méthode du linéarisé-tangent et la méthode du backstepping.

### 3.6. CONCLUSION

---

Les résultats obtenus par la méthode analytique sont similaires à ceux obtenus par les méthodes d'optimisation numériques mais avec un temps de calcul très inférieur. Ceci prouve la pertinence de notre stratégie de construction de cet algorithme analytique d'allocation de contrôle. Cet algorithme se caractérise aussi par sa simplicité et la facilité de mise en œuvre. Finalement, il sera utile de valider ces algorithmes d'allocations sur d'autres types de vecteurs commande et les tester en présence d'une perturbation extérieure aléatoire tel que les rafales de vent.

Les perturbations dues au vent sont le premier ennemi pour le dirigeable. Afin de faire face à ce défi, nous proposons dans le prochain chapitre d'utiliser la commande par feedforward. La construction et la validation de l'algorithme analytique en utilisant ce nouveau concept de contrôle sera l'objectif du chapitre 4.

# Chapitre 4

## Commande par anticipation d'un DGP avec charge intégrée

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>144</b>
<b>4.2</b>	<b>Conception de la commande par la méthode de linéarisation entrée-sortie</b>	<b>146</b>
4.2.1	Outils Mathématiques	147
<b>4.3</b>	<b>Conception du vecteur commande feedforward</b>	<b>151</b>
4.3.1	Simulations numériques	161
4.3.1.1	LES sans feedforward(LES) : Méthode analytique(LESMA) et gradient(LESMG)	161
4.3.1.2	LES avec feedforward(LESFF) : Méthode analytique(LESFFMA) et gradient(LESFFMG)	165
<b>4.4</b>	<b>Commande Prédicative Non linéaire à temps continu pour un dirigeable</b>	<b>168</b>

## 4.1. INTRODUCTION

---

4.4.1	Principe du commande prédictive . . . . .	168
4.4.2	Architecture de commande . . . . .	170
<b>4.5</b>	<b>Simulations numériques . . . . .</b>	<b>177</b>
4.5.1	NCGPC sans feedforward : méthode analytique (NCGPCMA) . .	177
4.5.2	NCGPC avec feedforward : methode analytique (NCGPCFFMA) .	178
<b>4.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>185</b>

---

## 4.1 Introduction

La sensibilité des dirigeables par rapport aux conditions météorologiques et plus précisément aux rafale de vent fait partie des verrous scientifique à faire lever. Cette sensibilité est due à leurs très grandes surfaces exposées au vent, ce qui rend difficile la manipulation d'un DGP au cours de la phase critique de chargement et de déchargement en présence d'une rafale de vent.

Afin de faire face à ce problème, nous proposons dans ce chapitre d'anticiper l'effet d'une perturbation exogène en utilisant le concept de commande par feedforward. L'utilisation de ce nouveau concept de contrôle pour un dirigeable nécessite la mesure préalable des forces qui peuvent l'impacter.

Le dirigeable non-conventionnel *MC500* sera équipé par la nouvelle technologie LIDAR. C'est un instrument de mesure qui peut fournir des informations sur la force du vent ce qui autorise l'utilisation des commandes par anticipation pour le dirigeable.

Dans la première partie de ce chapitre nous construirons un vecteur commande capable d'atténuer l'impact des perturbations du vent avant qu'elles aient un effet notable sur le dirigeable. Ceci dans le but de minimiser la dérive de l'engin volant, qui peut s'évaluer en centaines de mètres sans cette action corrective, et qui nécessiterait une grande dépense

d'énergie pour repositionner le dirigeable. La conception du vecteur commande par anticipation sera basée sur la méthode de linéarisation entrée-sortie.

Cette méthode est destinée aux systèmes affines en regard au contrôle. Elle est basée sur des outils de la géométrie différentielle. Le vecteur commande issu de cette méthode a deux principaux objectifs. Le premier est de transformer le système non-linéaire du dirigeable en un système linéaire sans linéariser les termes gyroscopiques du modèle du dirigeable ce qui nous permet d'élargir les champs de fonctionnement de cet engin volant. Le deuxième objectif est d'anticiper l'effet d'une force mesurable au voisinage d'un point de chargement et de déchargement afin de minimiser son impact.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons testé une autre alternative pour la stabilisation du dirigeable face à une rafale de vent. Nous avons établi un vecteur commande par anticipation optimale en utilisant les techniques de commande prédictive. Nous nous sommes appuyés sur la commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu (NCGPC).

Cette commande est proche de la méthode de linéarisation entrée-sortie. Elle partage avec elle certains aspects à savoir la notion de degrés relatifs et les outils de la géométrie différentielle. La différence entre les deux vecteurs commandes est que le contrôleur issu de la NCGPC est plus robuste et optimal. Le caractère d'optimalité permet d'économiser l'énergie globale du dirigeable. De plus cette méthode est destinée pour les systèmes complexes et lents qui sont les principales caractéristiques du modèle du dirigeable gros porteur.

Finalement, nous testons les performances des vecteurs commandes virtuels proposés à travers des simulations numériques. Dans ces simulations le dirigeable sera commandé par l'algorithme d'allocation de contrôle analytique et celle du Gradient déterministe définis au chapitre précédent. Notre but est de répondre à la question suivante :

Notre méthode analytique est-elle compatible avec un vecteur contrôle virtuel non-linéaire ?

## 4.2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR LA MÉTHODE DE LINÉARISATION ENTRÉE-SORTIE

---

Est-elle capable de garder les mêmes qualités et performances démontrées lors de l'utilisation d'un vecteur commande linéaire ?

### 4.2 Conception de la commande par la méthode de linéarisation entrée-sortie

Le modèle du dirigeable avec charge intégrée est non-linéaire et pleinement couplé. Dans le chapitre précédent nous avons linéarisé les termes non-linéaires. Le vecteur commande obtenu sera uniquement valable au voisinage d'un point de chargement et déchargement et il sera difficile d'élargir son fonctionnement à d'autres missions.

Soulignons, que ce vecteur commande linéaire est valable en présence de faibles perturbations. Les performances de ce vecteur commande se dégradent en présence d'une force importante du vent et peuvent causer une instabilité du dirigeable. Ces limitations nous ont incité à l'étude de lois de commandes non-linéaires, et plus précisément on utilisera la méthode de linéarisation entrée sortie et les techniques de commandes prédictives non-linéaire .

La méthode de linéarisation entrée-sortie permet de linéariser le système sans recours à la méthode du linéarisé-tangent (une linéarisation exacte). Ceci, peut être réalisé par l'application d'un difféomorphisme et d'une loi de contrôle de telle sorte que le système résultant sera linéaire et découplé. Cette méthode qui repose sur la théorie de la géométrie différentielle, a été étudiée dans plusieurs travaux : [Isi13, SR72, HSM83, Hir79]. Malgré le formalisme mathématique puissant de linéarisation, cette méthode demeure sensible aux perturbations extérieures qui peuvent affecter le système de manière brusque.

Pour surmonter ce problème, plusieurs chercheurs ont proposé des solutions pour contrôler le processus en présence d'une perturbation mesurée [Cla82, Hir81, IKGGM81]. Dans ces

## 4.2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR LA MÉTHODE DE LINÉARISATION ENTRÉE-SORTIE

---

travaux, l'annulation de l'effet d'une perturbation mesurée est traitée comme un problème de découplage entre la sortie du système à contrôler et la perturbation mesurée. Le vecteur contrôle issu de la méthode de linéarisation entrée-sortie sera combiné avec un terme de pré-compensation (feedforward) pour anticiper l'effet d'une perturbation exogène.

Dans [DK89] les conditions du découplage entre la perturbation et la sortie d'un système non-linéaire sont présentées. Ces conditions sont basées sur la notion de degré relatif. Ainsi, l'effet, sur le système à contrôler d'une perturbation mesurée est caractérisé par la comparaison du degré relatif de sortie par rapport à la perturbation d'un côté et par rapport à la commande de l'autre.

La notion de degré relatif et les outils mathématiques qui nous permettent de comprendre le principe de la méthode de linéarisation d'entrée- sortie en présence d'une perturbation mesurée seront abordés dans la section suivante.

### 4.2.1 Outils Mathématiques

La méthode de linéarisation entrée-sortie par anticipation pilote une classe de systèmes non linéaires *SISO* et *MIMO* affines en regard du contrôle  $u$ . La classe des systèmes *MIMO* est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{j=0}^m g_j(x)u + \sum_{k=1}^m p_k d_k \\ y(x) = h(x) = [h_1, \dots, h_m]^t \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec  $x = [x_1, \dots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état du système,  $u = [u_1, \dots, u_m]^t \in \mathbb{R}^m$  étant le vecteur contrôle,  $y = [y_1, \dots, y_m]^t \in \mathbb{R}^m$  la sortie du système.  $f$ ,  $g_i$ ,  $p_i$  sont des champs de vecteurs lisses et  $h_i \in \mathbb{R}^m$  est une fonction lisse.  $d_i$  est une perturbation mesurée par LIDAR.

Pour comprendre les étapes de construction du vecteur commande, les définitions ci-dessous sont utiles.

## 4.2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR LA MÉTHODE DE LINÉARISATION ENTRÉE-SORTIE

---

### Définition 3 *Dérivée de Lie*

Soit  $h$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs réelles et le champ de vecteurs  $f = [f_1, \dots, f_2]^t$  dans  $\mathbb{R}^n$  la dérivée de lie de  $h$  le long de  $f$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  est la nouvelle fonction donnée par :

$$L_f h(x) = \nabla h \cdot f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x).$$

Pour un ordre quelconque, on a :

$$L_f^i h(x) = L_f L_f^{i-1} h(x)$$

et

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

De plus, si  $g$  est un autre champ de vecteurs alors la fonction scalaire  $L_g L_f h$  est donnée par :

$$L_g L_f h(x) = \nabla(L_f h) \cdot g$$

La dérivée de lie est utilisée pour calculer le vecteur degré relatif du système (4.1). Le vecteur degré relatif joue un rôle fondamental dans la méthode de linéarisation entrée-sortie, sa définition est donnée ci-dessous :

### Définition 4 *Vecteur degré relatif*

Le système non-linéaire (4.1) a un vecteur degré relatif  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$  en un point  $x_0$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \forall 1 \leq j, i \leq m, k < r_i - 1$
2. La matrice de découplage  $m \times m$

$$D(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix}$$

## 4.2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR LA MÉTHODE DE LINÉARISATION ENTRÉE-SORTIE

---

*est inversible au point  $x_0$ .*

Le degré relatif de la sortie  $y_j$  par rapport à la commande  $u$ ,  $r_j$  peut être interprété comme le plus petit entier, du nombre de dérivées nécessaires pour que la sortie dépende de l'une des composantes du vecteur commande  $u$ .

Le degré relatif du système (4.1),  $r = \sum_{j=0}^m r_j$  est souvent inférieur ou égal à l'ordre du système  $n$ . Si le degré relatif total est égal à l'ordre du système, on est en présence d'une linéarisation au sens des entrées-états. Cependant dans le cas où le degré relatif total est strictement inférieur à l'ordre du système, la linéarisation est dite linéarisation au sens des entrées-sorties. Dans le cas où  $r < n$  nous pouvons conclure que le système admet une dynamique interne qu'on l'appelle dynamique des zéros[Isi13].

### **Définition 5** *Dynamique des zéros*

*La dynamique des zéros d'un système non-linéaire est la dynamique interne du système qui est obtenue quand toutes les sorties ainsi que toutes leurs dérivées sont nulles[Isi13]. Les systèmes non-linéaires admettant une dynamique des zéros instables, sont appelés "systèmes à déphasage non-minimal" et ceux qui ont une dynamique interne stable sont nommés "systèmes à déphasage minimal".*

Dans le cas où la dynamique des zéros existe il faut s'assurer de sa stabilité afin d'appliquer la méthode de linéarisation entrée-sortie.

Dans le but de caractériser l'influence de la perturbation sur le système, on définit le degré relatif de la sortie par rapport à la perturbation.

### **Définition 6** *Degré relatif par rapport à la perturbation $\rho_{ij}$*

*Le degré relatif de la sortie  $y_j$  par rapport à la perturbation  $d_k$ ,  $\rho_{jk}$  est défini comme le plus petit entier tel que[Isi13],[DK89] :*

$$L_{p_k} L_f^{\rho_{jk}-1} h_j(x) \neq 0$$

## 4.2. CONCEPTION DE LA COMMANDE PAR LA MÉTHODE DE LINÉARISATION ENTRÉE-SORTIE

---

On peut l'interpréter aussi, comme le plus petit entier du nombre de dérivées nécessaires pour que la sortie dépende explicitement de la perturbation.

La caractérisation de l'influence de la perturbation sur le système est déterminée par la comparaison du degré relatif de la sortie  $y_j$  par rapport à la commande  $U$  et à celle par rapport à la perturbation  $d_k$ .

Trois situations se présentent pour chaque sortie [DK89] :

- $\rho_{jk} > r_j$  : Dans ce cas la sortie  $y_j$  est affectée indirectement par la perturbation. En d'autres termes une rétroaction suffira pour éliminer l'effet des perturbations sur la sortie.
- $\rho_{jk} = r_j$  : Les perturbations ont des effets indésirables sur la sortie. Ainsi un "feed-forward/feedback" statique sera nécessaire pour éliminer l'effet des perturbations sur la sortie.
- $\rho_{jk} < r_j$  : La perturbation affecte la sortie, on utilisera une loi de contrôle dynamique "feedforward/feedback" pour atténuer ces effets sur  $y_j$ .

Pour le dirigeable, la commande par anticipation pourra être une solution appréciable pour minimiser l'effet d'une force d'une rafale du vent pré-détectée par la technologie de mesure LIDAR.

Le schéma du contrôle proposé utilisant la méthode de linéarisation entrée-sortie par anticipation est décrit par la figure (4.1).

Les étapes de construction du vecteur commande anticipatif sont résumées ci-dessous :

- Rechercher le degré relatif du système et caractériser l'influence des perturbations sur chaque sortie.
- Appliquer un changement de coordonnées par difféomorphisme pour obtenir un nouveau système non linéaire.

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

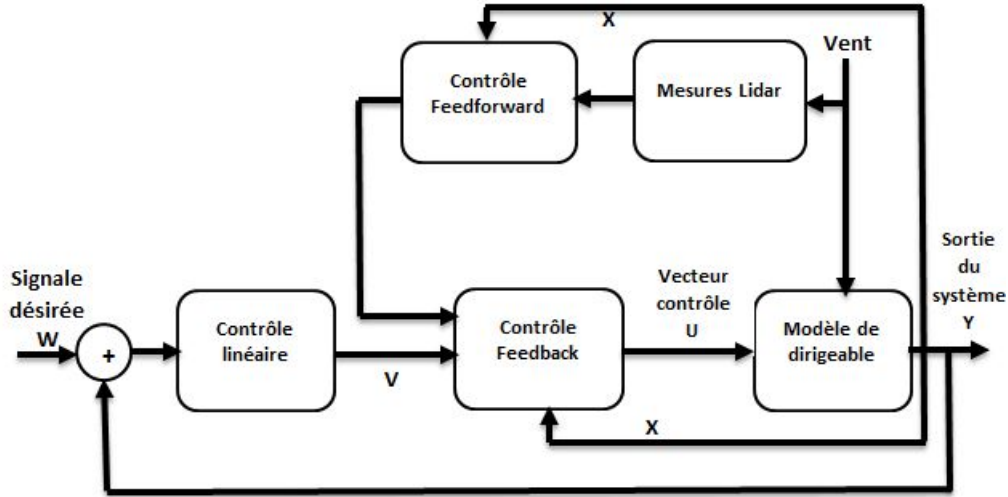


FIGURE 4.1 – Méthode de linéarisation entrée sortie avec anticipation

- Appliquer la loi de commande au nouveau système non linéaire, résultant du changement de coordonnées pour obtenir un système linéaire.
- Stabiliser le système linéaire résultant par la méthode du contrôle linéaire.

Nous suivrons ces étapes pour construire un vecteur commande feedforward.

### 4.3 Conception du vecteur commande feedforward

La méthode académique de linéarisation entrée-sortie repose sur la connaissance précise de modèle du dirigeable. Le modèle du dirigeable avec charge intégrée est donné dans le chapitre 1. Nous apportons quelques modifications sur ce modèle en incluant une force du vent mesurée par LIDAR ainsi que le moment induit par cette force.

Nous supposons que la résultante de la force du vent est appliquée à un point donné  $W$ . La

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

résultante de cette forces du vent au point G exprimé dans le repère  $R_m$ , est donnée par :

$$F_{Wd} = \begin{pmatrix} F_{v_1} \\ F_{v_2} \\ F_{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Le moment induit par cette force s'écrit :

$$M_{Wd} = F_{Wd} \times WG = \begin{pmatrix} \tau_{v_1} \\ \tau_{v_3} \\ \tau_{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix}$$

Le modèle du dirigeable avec charge intégrée en présence d'une force du vent sera donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = c_\psi c_\theta u + (-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta)v + (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta)w \\ \dot{y} = s_\psi c_\theta u + (c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta)v + (-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta)w \\ \dot{z} = -s_\theta u + s_\phi c_\theta v + c_\phi c_\theta w \\ \dot{\phi} = p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\ \dot{\theta} = c_\phi q - s_\phi r \\ \dot{\psi} = \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \\ M_{11}\dot{u} = \alpha_1 + Q_1 + d_1 \\ M_{22}\dot{v} = \alpha_2 + Q_2 + d_2 \\ M_{33}\dot{w} = \alpha_3 + Q_3 + d_3 \\ (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{p} = M_{46}\alpha_6 + M_{46}Q_6 - M_{66}\alpha_4 - M_{66}Q_4 + d_4 \\ M_{55}\dot{q} = \alpha_5 + Q_5 + d_5 \\ (M_{46}^2 - M_{66}M_{44})\dot{r} = M_{46}\alpha_4 - M_{44}\alpha_6 + M_{46}Q_4 - M_{44}Q_6 + d_6 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

On notera :

—  $X = [x, y, z, \phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q, r]^t$  : l'état du système.

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

—  $U = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]^t$  : le vecteur contrôle.

—  $Q_e = [Q_1, \dots, Q_6]^t$  : le vecteur des termes non-linéaires.

Sans perte de généralité et dans l'objectif de simplifier les calculs et la longueur des équations, nous supposons que le dirigeable en phase de chargement et de déchargement est affecté par une force de vent latéral unidirectionnelle (suivant l'axe  $X_m$ ). Par conséquent on aura  $d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 0$ .

Le modèle mathématique du dirigeable *MC500* (4.2) est un système affine au regard du contrôle  $U$ . Nous pouvons l'écrire similairement au système (4.1) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)U + p_1 d_1 \\ y(x) = h(x) = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^t \end{cases} \quad (4.3)$$

avec :

$$p_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{M_{11}}, 0, 0, 0, 0, 0]^t$$

$f(X) = (f_1 \ . \ . \ . \ f_{12})^t$  et  $g = (g_1 \ . \ . \ . \ g_6)$  sachant que :

$g_i$	Valeurs
$g_1$	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{M_{11}}, 0, 0, 0, 0, 0]^t$
$g_2$	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{M_{22}}, 0, 0, 0, 0]^t$
$g_3$	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{M_{33}}, 0, 0, 0]^t$
$g_4$	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{-M_{66}}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}}, 0, \frac{M_{46}}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}}]^t$
$g_5$	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{M_{55}}, 0]^t$
$g_6$	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{M_{46}}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}}, \frac{-M_{44}}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}}]^t$

#### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

$f_i$	Valeurs
$f_1$	$c_\psi c_\theta u + (-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta)v + (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta)w$
$f_2$	$s_\psi c_\theta u + (c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta)v + (-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta)w$
$f_3$	$-s_\theta u + s_\phi c_\theta v + c_\phi c_\theta w$
$f_4$	$p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r$
$f_5$	$c_\phi q - s_\phi r$
$f_6$	$\frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r$
$f_7$	$\frac{Q_1}{M_{11}}$
$f_8$	$\frac{Q_2}{M_{22}}$
$f_9$	$\frac{Q_3}{M_{33}}$
$f_{10}$	$\frac{M_{46}Q_6 - M_{66}Q_4}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}}$
$f_{11}$	$\frac{Q_5}{M_{55}}$
$f_{12}$	$\frac{M_{46}Q_4 - M_{44}Q_6}{M_{46}^2 - M_{66}M_{44}}$

Dans l'objectif d'assurer la stabilisation du dirigeable au voisinage d'un point de chargement et déchargement  $\omega_i$  et d'anticiper l'effet de la perturbation du vent, on appliquera une linéarisation d'entrée-sortie par retour d'état sur le modèle du dirigeable. La méthode de linéarisation entrée-sortie assurera le découplage entre les sorties et la perturbation. Dans ce cas les sorties doivent être d'une part la position  $x, y, z$  et d'autre part les angles d'orientations  $\psi, \theta$  et  $\phi$ .

Pour stabiliser le dirigeable il faut faire converger la sortie vers l'état désiré. En d'autres termes, converger l'erreur  $e_j = y_j - \omega_j$  vers 0.

La première étape dans la construction consiste à calculer le degré relatif  $r$  du système (4.3) et le degré relatif de chaque sortie  $\rho_{j1}$  par rapport la perturbation .

Pour déterminer le degré relatif  $(r_j)_{1 \leq j \leq 6}$  correspondant à la sortie  $e_j$  on dérive la sortie,

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

jusqu'à faire apparaître au moins une entrée, en utilisant l'expression :

$$e_j^{(r_j)} = L_f^{r_j} h_j + \sum_{i=1}^6 L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j U_i + L_{p_1} L_f^{r_j-1} h_j d_1 \quad (4.4)$$

La dérivée première pour la sortie  $e_1$  est :

$$\dot{e}_1 = L_f h_1 = f_1 \quad (4.5)$$

La dérivée de  $e_1$  ne dépend pas du contrôle  $U_i$  on la dérive une deuxième fois.

$$\ddot{e}_1 = L_f^2 h_1 + L_{g_1} L_f h_1 U_1 + L_{g_2} L_f h_1 U_2 + L_{g_3} L_f h_1 U_3 + L_{p_1} L_f h_1 d_1 \quad (4.6)$$

Avec :

$$L_f^2 h_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \phi} f_4 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} f_5 + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} f_6 + \frac{\partial f_1}{\partial u} f_7 + \frac{\partial f_1}{\partial v} f_8 + \frac{\partial f_1}{\partial w} f_9 \quad (4.7)$$

$$L_{g_1} L_f h_1 = \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} \quad (4.8)$$

$$L_{g_2} (L_f h_1) = \frac{-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta}{M_{22}} \quad (4.9)$$

$$L_{g_3} L_f h_1 = \frac{s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta}{M_{33}} \quad (4.10)$$

$$L_{p_1} L_f h_1 = \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} \quad (4.11)$$

Nous remarquons que dans la dérivée seconde de la sortie  $e_1$  apparaît les composantes de  $U$  et la perturbation  $d_1$ . Le processus de dérivation s'arrêtera ainsi et nous pouvons conclure que le degré relatif de la sortie  $e_1$  par rapport à la commande est égal à,  $r_1 = 2$  et le degré relatif de la sortie  $e_1$  par rapport à la perturbation est  $\rho_{11} = 2$ .

Les degrés relatifs de  $e_1$  par rapport à la perturbation et celle par rapport à la sortie sont égaux. Dans ce cas la perturbation a des effets sur le déplacement suivant  $x$  ce qui nécessite un terme de pré-compensation pour anticiper ces effets afin de stabiliser le dirigeable.

Pour les autres sorties, nous procédons de la même manière pour calculer les degrés relatifs.

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

Nous calculons la première et la deuxième dérivée des sorties  $(e_j)_{2 \leq j \leq 6}$ . On aura (voir les détails de calcul dans l'annexe) :

$$\ddot{e}_2 = L_f^2 h_2 + L_{g_1} L_f h_2 U_1 + L_{g_2} L_f h_2 U_2 + L_{g_3} L_f h_2 U_3 + L_{p_1} L_f h_2 d_1 \quad (4.12)$$

$$\ddot{e}_3 = L_f^2 h_3 + L_{g_1} L_f h_3 U_1 + L_{g_2} L_f h_3 U_2 + L_{g_3} L_f h_3 U_3 + L_{p_1} L_f h_3 d_1 \quad (4.13)$$

$$\ddot{e}_4 = L_f^2 h_4 + L_{g_4} L_f h_4 U_4 + L_{g_5} L_f h_4 U_5 + L_{g_6} L_f h_4 U_6 \quad (4.14)$$

$$\ddot{e}_5 = L_f^2 h_5 + L_{g_4} L_f h_5 U_4 + L_{g_5} L_f h_5 U_5 + L_{g_6} L_f h_5 U_6 \quad (4.15)$$

$$\ddot{e}_6 = L_f^2 h_6 + L_{g_4} L_f h_6 U_4 + L_{g_5} L_f h_6 U_5 + L_{g_6} L_f h_6 U_6 \quad (4.16)$$

Les premières résultats immédiats qui découlent des calculs précédents sont :

- Le degré relatif de chaque sortie  $e_j$  par rapport à l'entrée  $U$  est  $r_j = 2$ .
- La perturbation a un impact sur le déplacement suivant  $y$  et  $z$  ( $\rho_{21} = \rho_{31} = r_2 = r_3$ ).  
Cependant la perturbation n'a pas d'impact sur les angles d'Euler ( $\rho_{j1} > r_j, j=4,5,6$ ).
- Le degré relatif total du système du dirigeable est  $r = 12$ . Ainsi la dynamique des zéros est vide.

Nous introduisons la matrice de découplage  $D$  suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} & \frac{-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta}{M_{22}} & \frac{s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta}{M_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_\psi c_\theta}{M_{11}} & \frac{c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta}{M_{22}} & \frac{-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta}{M_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-s_\theta}{M_{11}} & \frac{s_\phi c_\theta}{M_{22}} & \frac{c_\phi c_\theta}{M_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M_{46}^2 - M_{66} M_{44}} & \frac{s_\phi t_\theta}{M_{55}} & \frac{c_\phi t_\theta}{M_{46}^2 - M_{66} M_{44}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_\phi}{M_{55}} & \frac{-s_\phi}{M_{46}^2 - M_{66} M_{44}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_\phi}{M_{55} c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta (M_{46}^2 - M_{66} M_{44})} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

La matrice de découplage  $D$  est toujours inversible (Nous avons vérifié ce résultat en utilisant le logiciel de calcul Maple). Son inverse est donnée par :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta M_{11} & c_\theta s_\psi M_{11} & -s_\theta M_{11} \\ -M_{22}(-c_\psi s_\phi s_\theta + s_\psi c_\phi) & M_{22}(c_\phi c_\psi + s_\psi s_\phi s_\theta) & s_\phi c_\theta M_{22} \\ (s_\theta c_\phi c_\psi + s_\psi s_\phi) M_{33} & (-s_\phi c_\theta + s_\psi c_\phi s_\theta) M_{33} & c_\theta c_\phi M_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} M_{44} & M_{46} s_\phi & M_{44} s_\theta - M_{46} c_\theta c_\phi \\ M_{55} c_\phi & 0 & -s_\phi c_\theta M_{55} \\ M_{46} & M_{66} s_\phi & M_{46} s_\theta - M_{66} c_\theta c_\phi \end{pmatrix}$$

Le degré relatif du modèle dynamique du dirigeable  $MC500$  est  $r = 12$ , et il est bien défini (car la matrice de découplage est inversible). On peut donc stabiliser le dirigeable par la méthode de linéarisation entrée-sortie. En d'autres termes, nous pouvons déterminer un difféomorphisme  $\Phi$  et un retour d'état  $U$  transformant le système initial du dirigeable (4.3) en un système linéaire équivalent découplé.

Le difféomorphisme  $\Phi$  qui nous permet d'obtenir un nouveau système non linéaire est donné

#### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

par [Isi13] :

$$\Phi = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_1^3 \\ z_2^3 \\ z_1^4 \\ z_2^4 \\ z_1^5 \\ z_2^5 \\ z_1^6 \\ z_2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ c_\psi c_\theta u + (-s_\psi c_\phi + c_\psi s_\phi s_\theta)v + (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta)w \\ y \\ s_\psi c_\theta u + (c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta)v + (-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta)w \\ z \\ -s_\theta u + s_\phi c_\theta v + c_\phi c_\theta w \\ \phi \\ p + s_\phi t_\theta q + c_\phi t_\theta r \\ \theta \\ c_\phi q - s_\phi r \\ \psi \\ \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \end{pmatrix}$$

Dans les nouvelles coordonnées, le système (4.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \dot{z}_2^1 \\ \dot{z}_1^2 \\ \dot{z}_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{z}_1^6 \\ \dot{z}_2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f h_1(x) - \dot{\omega}_1 \\ L_f^2 h_1(x) - \ddot{\omega}_1 + L_{g_1} L_f^2 h_1 \alpha_1 + L_{g_2} L_f^2 h_1 \alpha_2 + L_{g_3} L_f^2 h_1 \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_f h_6(x) - \dot{\omega}_6 \\ L_f^2 h_6(x) - \ddot{\omega}_6 + L_{g_4} L_f^2 h_6 \alpha_4 + L_{g_5} L_f^2 h_6 \alpha_5 + L_{g_6} L_f^2 h_6 \alpha_6 \end{pmatrix}$$

La particularité de ce nouveau système non-linéaire est que la composante  $\dot{z}_{r_i}^i$  dépend explicitement des composantes du vecteur contrôle  $U$ . Ce qui facilite la détermination d'une

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

loi de commande linéarisante. En effet, en regroupant les équations contenant le vecteur de contrôle  $U$ . Nous aurons l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_2^1 \\ \dot{z}_2^2 \\ \dot{z}_2^3 \\ \dot{z}_2^4 \\ \dot{z}_2^5 \\ \dot{z}_2^6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_f^2 h_1 - \ddot{\omega}_1 \\ L_f^2 h_2 - \ddot{\omega}_2 \\ L_f^2 h_3 - \ddot{\omega}_3 \\ L_f^2 h_4 - \ddot{\omega}_4 \\ L_f^2 h_5 - \ddot{\omega}_5 \\ L_f^2 h_6 - \ddot{\omega}_6 \end{pmatrix}}_{\xi} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} \\ \frac{s_\psi c_\theta}{M_{11}} \\ \frac{-s_\theta}{M_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_P d_1 + D \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}}_U \quad (4.18)$$

La loi de commande qui assure le découplage entre la commande, la sortie et la perturbation qui affectent le dirigeable s'écrit ainsi :

$$U = D^{-1}(v - P d_1 - \xi) \quad (4.19)$$

Avec  $v$  le nouveau vecteur contrôle. Notons que la linéarisation ne serait possible que si la matrice de découplage  $D$  est inversible. En remplaçant (5.7) dans (4.18), le système équivalent devient linéaire et totalement découplé, de la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_2^1 \\ \dot{z}_2^2 \\ \dot{z}_2^3 \\ \dot{z}_2^4 \\ \dot{z}_2^5 \\ \dot{z}_2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

Finalement, on obtient les 6 sous-systèmes linéaires découplés :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = v_i \\ e_i = z_1^i \end{cases} \quad (4.20)$$

Les nouvelles entrées  $v_i$  seront conçues pour assurer la stabilité du dirigeable au voisinage d'un point de chargement et déchargement. Pour atteindre cet objectif nous procédons par la méthode de placement de pôles. D'une manière générale, pour un problème de suivi de trajectoire les expressions de  $v_i$  sont :

$$v_i = \omega_i^{(r_i)} + \beta_{r_i-1} (y_i^{(r_i-1)} - w_i^{(r_i-1)}) + \dots + \beta_1 (y_i - w_i)$$

Les trajectoires de référence dans notre cas sont des échelons. Nous avons alors  $\ddot{w}_i = \dot{w}_i = 0$  et comme le degré relatif associé à chaque sortie est 2, les nouvelles commandes  $v_i$  destinées pour stabiliser le système linéaire résultant (4.20) auront pour valeurs :

$$v_i = \beta_1^i \dot{y}_i + \beta_2^i (y_i - w_i) \quad (4.21)$$

Le problème de stabilisation envisagé est assuré si nous choisissons les gains  $\beta_1^i$  et  $\beta_2^i$  de façon à ce que le polynôme :

$$s^2 + \beta_1^i s + \beta_2^i = 0$$

soit un polynôme d'Hurwitz. Nous avons choisi d'imposer les pôles suivants  $[-10, -4]$ . Les valeurs des gains de la commande linéaire sont :  $\beta_1^i = 40$  et  $\beta_2^i = 14$ . Ces gains sont utilisés dans les simulations numériques pour évaluer les performances du contrôleur proposé.

Finalement, en remplaçant l'expression de  $v$  dans l'équation (5.7) nous obtenons l'expression de la commande  $U$ , linéarisante, stabilisante et anticipatrice.

### 4.3.1 Simulations numériques

#### 4.3.1.1 LES sans feedforward(LES) : Méthode analytique(LESMA) et gradient(LESMG)

Dans un premier temps on vérifie l'efficacité du vecteur contrôle dans des conditions idéales c'est-à-dire : la vitesse du vent est nulle. Par conséquent le terme de pré-compensation sera nul et le vecteur commande virtuelle se comporte comme un retour d'état.

Dans ce scénario on désire stabiliser le dirigeable au voisinage d'un état désiré  $\omega = 0_{R^6}$  à partir d'une position initiale  $Y = [10, 8, 5, 0.3, 0.2, 0.1]$ .

On voit clairement sur les figures (4.3) que le dirigeable se stabilise rapidement. Les po-

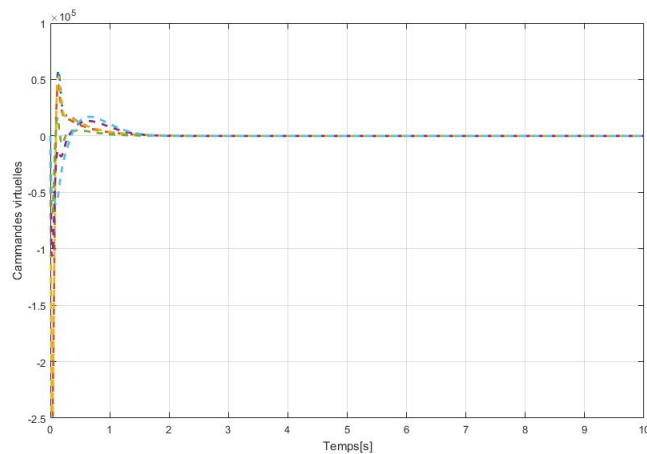


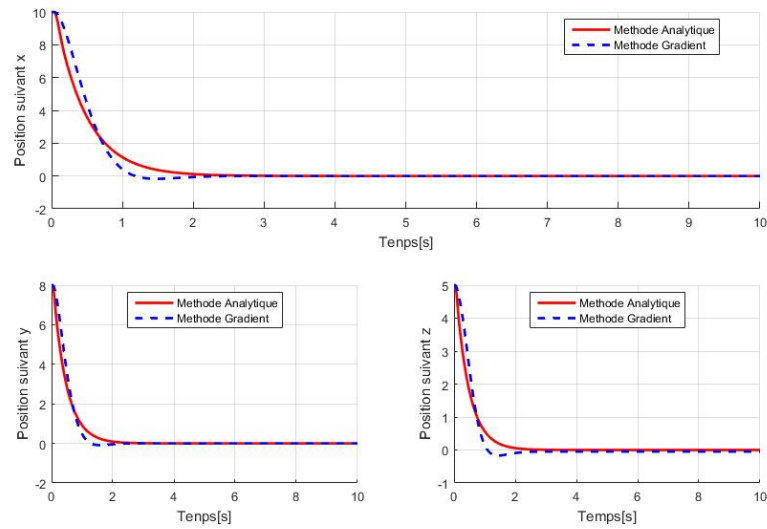
FIGURE 4.2 – Convergence des commandes virtuelles : méthode LES

sitions  $x, y, z$  et les angles d'Euler  $\phi, \theta, \psi$  convergent asymptotiquement vers 0. C'est le comportement attendu par l'application du vecteur contrôle.

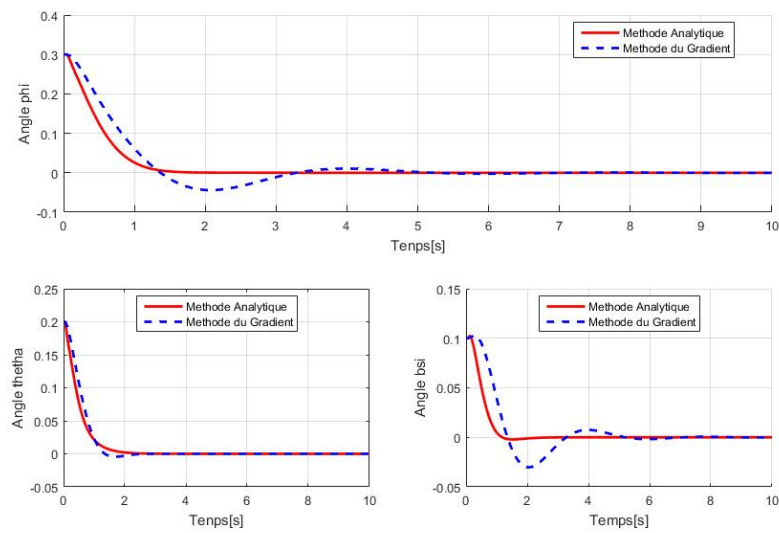
Nous avons commandé le dirigeable en utilisant les algorithmes d'allocations du contrôle analytique et celle du gradient déterministe définis au chapitre précédent, dans le but

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---



(a) Convergence des positions :  $x, y, z$  avec la LES



(b) Convergence des angles d'Euler avec LES

FIGURE 4.3 – Stabilisation des degrés de liberté du dirigeable avec la LES

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

d'évaluer les performances des algorithmes d'allocation de contrôle en utilisant un vecteur commande virtuel non-linéaire.

Malgré les valeurs élevées données par les commandes virtuelles dans la phase transitoire (voir figure (4.2)), la méthode analytique arrive à stabiliser le dirigeable en un temps très court et prouve une autre fois son efficacité.

On notera, qu'après la stabilisation du dirigeable, la poussée est équitablement répartie

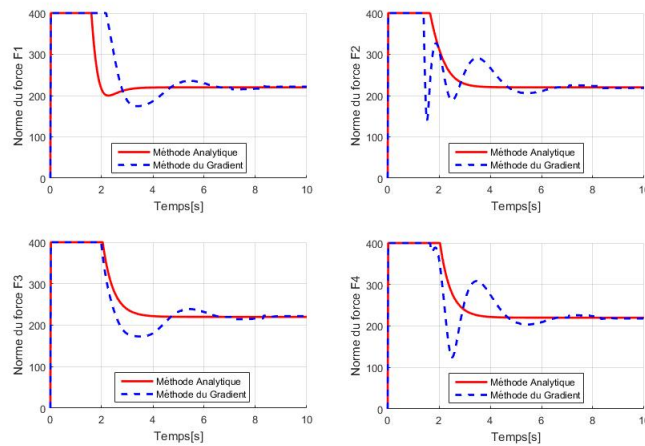
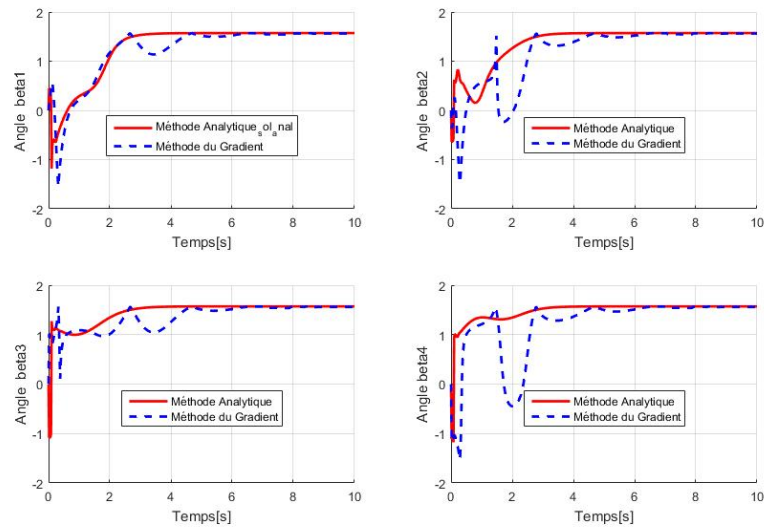


FIGURE 4.4 – Valeurs des normes forces  $F_i$  avec la LES

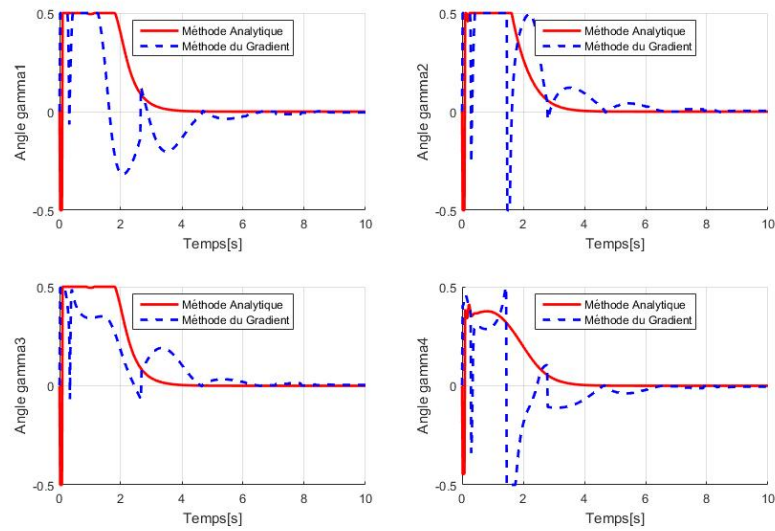
sur les quatre rotors (voir figure (4.4)), les angles d'oscillation  $\gamma_i$  deviennent égaux à zéro ((4.5(b))) et les angles d'inclinaison  $\beta_i$  sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$  ((4.5(a))). Ceci caractérise la position de stabilité stationnaire optimale, et met en évidence l'intérêt de la méthodologie analytique d'allocation de contrôle pour stabiliser le DGP avec charge intégrée en produisant le minimum d'effort.

La méthode du gradient donne des résultats similaires à ceux obtenus par la méthode analytique. Néanmoins, le temps de convergence de l'algorithme analytique est dans ce cas aussi plus court que celui de la méthode du gradient.

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD



(a) Valeurs des angles  $\beta_i$  avec la LES



(b) Valeurs des angles  $\gamma_i$  avec la LES

FIGURE 4.5 – Convergence des angles  $\beta$  et  $\gamma$  avec la LES

#### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

##### 4.3.1.2 LES avec feedforward(LESFF) : Méthode analytique(LESFFMA) et gradient(LESFFMG)

Dans ce qui suit nous considérons le scénario du dirigeable en vol stationnaire, par exemple en phase de chargement ou de déchargement. Nous supposons qu'il s'est déplacé avec une accélération due à une rafale de vent pré-détectée par un LIDAR.

Nous appliquons le contrôle combiné "feedforward/feedback" pour atténuer l'effet de cette

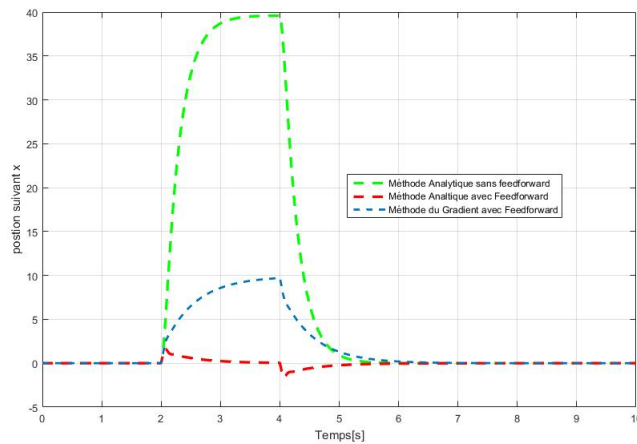


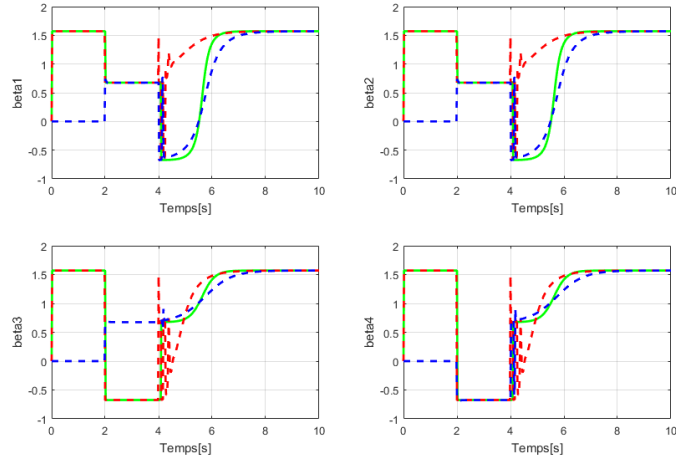
FIGURE 4.6 – Dérive du dirigeable avec LESFF : vent constant

rafale de vent et pour pouvoir ainsi économiser l'énergie du dirigeable.

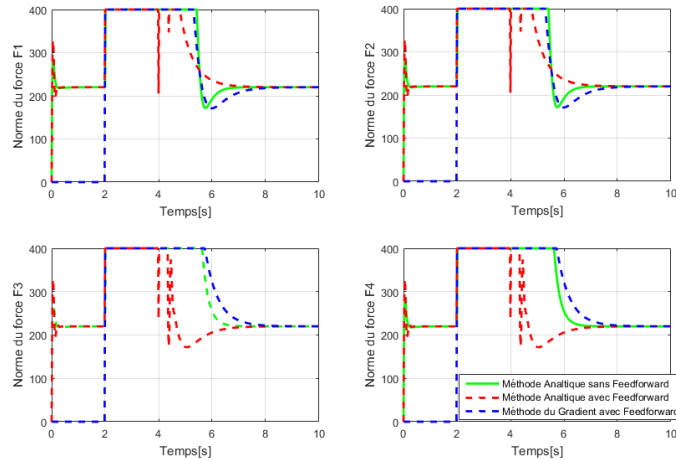
Le vent est supposé arriver le long de l'axe des  $X_m$  et produire une force échelon de  $10^4 N$  entre  $t=2s$  et  $t=4s$ .

On peut voir sur la figure (4.6) que le dirigeable a fait un grand déplacement par rapport à sa position d'équilibre d'environ  $40m$  dans le cas où il est contrôlé uniquement par un contrôle par retour d'état(Feedback). Cependant, avec l'application du contrôle "feedfor-

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD



(a) valeur des angles  $\beta_i$  : vent constant



(b) valeur des forces  $F_i$  : vent constant

FIGURE 4.7 – Valeurs des angles  $\beta$  et Forces  $F$  avec la LESFF en présence d’une perturbation constante

ward/feedback” précédemment développé, il est bien démontré la réduction de ce déplacement, notamment dans le cas de l’utilisation de l’algorithme analytique d’allocation de

### 4.3. CONCEPTION DU VECTEUR COMMANDE FEEDFORWARD

---

contrôle.

Dans les figures (4.7), on constate que la stabilisation du dirigeable s'est traduite par la stabilisation des actionneurs grâce à l'algorithmes d'allocations de contrôle établie. La stabilisation a convergé vers une configuration présentant un minimum énergétique(intensités des actionneurs égales). On remarque néanmoins une phase transitoire (entre 2s et 4s) correspond à la période d'application de la force exogène.

Pour rendre l'expérience plus réaliste et démontrer la robustesse de notre algorithme, nous avons développé notre contrôle sur la base d'une rafale de vent d'amplitude constante, alors que pour la force appliquée au dirigeable, nous avons permis une variation sinusoïdale de l'intensité du vent. Dans ce scénario la perturbation sera :

$$d_1 = 10^4 + 10^3 \cos(10t)$$

Malgré la différence relativement importante entre cette force appliquée et la force sur

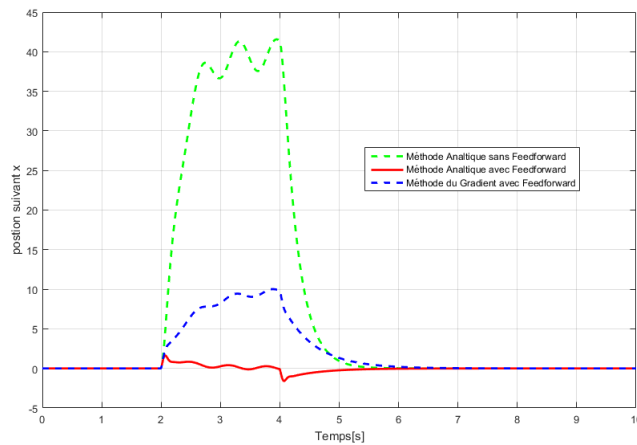


FIGURE 4.8 – Dérive du dirigeable avec LESFF : vent sinusoïdale

laquelle le contrôle "feedforward/feedback" s'était basé, nous notons que notre algorithme

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

analytique avec feedforward réussit à minimiser les effets du vent sur le dirigeable par rapport à un simple contrôle par rétroaction (voir figure (4.8)).

Dans la section suivante nous discuterons une autre approche optimale pour remédier à l'effet d'une perturbation mesurée qui affecte le dirigeable. Nous utilisons les techniques de commande prédictive en présence d'une perturbation mesurée. Cette technique est capable de contrôler les systèmes qui se caractérisent par une dynamique lente comme c'est le cas pour le dirigeable. Comme son nom l'indique cette commande permet de prédire le comportement futur d'un processus. Ceci nous permettrait d'économiser l'énergie globale du dirigeable en lui évitant des écarts très importants par rapport à sa position d'équilibre.

### 4.4 Commande Prédictive Non linéaire à temps continu pour un dirigeable

#### 4.4.1 Principe du commande prédictive

Le principe de la commande prédictive (Model Predictive Control MPC) est d'utiliser le modèle de processus à contrôler (linéaire ou non-linéaire) pour prédire le comportement futur du système afin de le commander tout en respectant certaines contraintes. Il s'agit de déterminer à chaque période d'échantillonnage une commande optimale qui minimise une fonction coût bien déterminée sur un horizon de prédiction. La première composante de la commande est appliquée au système. Dans l'itération qui suit, l'horizon de prédiction glisse d'un pas et on répète ainsi la procédure d'optimisation.

La commande prédictive fait partie des méthodes de contrôle avancées appliquées dans le domaine industriel et dans le domaine académique. La première application industrielle a

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

été réalisée dans le secteur de la pétrochimie grâce aux travaux de Richalet et al [RRTP78]. La commande MPHC (Model Predictive Heuristic Control) a été développée pour contrôler les systèmes pétrochimiques qui sont caractérisés par une dynamique lente.

Plusieurs autres commandes prédictives ont connu un succès dans l'industrie. Citons à titre d'exemple la DMC(Dynamic Matrix Control) qui a été appliquée sur une unité de cracking catalytique [CR80]. La MPC également, utilisée dans d'autres secteurs à savoir l'aérospatial, l'industrie du papier et la pétrochimie, [GPM89] et [QB03].

Dans le domaine académique plusieurs commandes prédictives ont été développées [Pet84], [Yds84], [DKVdVD88],[CMT87]. Ces algorithmes de contrôle pilotent des systèmes linéaires discrets. D'autres algorithmes sont dédiés pour commander les systèmes à temps continu. Citons l'algorithme CGPC( Continuous-time Generalized Predictive Control) qui a été proposé par Gawthrop[Gaw87].

Généralement, la mise en équation(modélisation) d'un processus mène à des systèmes non-linéaires. Ceci a incité les chercheurs et les industriels à étendre le concept de la commande prédictive linéaire pour traiter des systèmes non-linéaires plus complexes. La commande prédictive non linéaire(NMPC) a été appliquée dans plusieurs secteurs industriels. Parmi les plus connues on citera, Predictive functional control, Nonlinear control et Nonlinear MPC package qui sont des commandes prédictives non linéaires utilisées respectivement par les entreprises Adersa, Pavilion Technologies et Aspen Tec(voir [QB03] pour plus de détails).

La NCGPC (Nonlinear Continuous-time Generalized Predictive Control) est une approche académique introduite par Siller-Alcalá en 1998 [SA98]. C'est une méthode analytique basée sur les séries de Taylor. la NCGPC est proche de la méthode de linéarisation entrée-sortie. Elle fait appel à des techniques de la géométrie différentielle. La méthode de NCGPC permet de résoudre le problème du suivi de trajectoire sans faire de discrétisation.

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

La loi de contrôle est établie en minimisant une fonction coût quadratique et s'appuie sur l'erreur de prédiction entre la sortie et la référence. La prédiction de la sortie et la référence est réalisée à partir du développement en séries de Taylor jusqu'à un ordre bien déterminé. Pour la NCGPC l'ordre de prédiction correspond au degré relatif de la sortie par rapport à la commande. [CBG03] ont prouvé que la stabilité en boucle fermée pour la NCGPC est obtenue avec un changement de coordonnées adéquat et un horizon de prédiction fini. De plus, ils ont montré que pour un horizon de prédiction fixé, le système bouclé est instable si son degré relatif est strictement supérieur à 4.

Nous avons adopté cette dernière technique pour la stabilisation du dirigeable.

##### 4.4.2 Architecture de commande

L'algorithme de contrôle NCGPC pilote une classe de systèmes affines par rapport au contrôle. L'utilisation de cette méthode nécessite la vérification de quelques hypothèses :

- Hypothèse 1 : La dynamique des zéros existe et est asymptotiquement stable.
- Hypothèse 2 : Tous les états sont mesurables.
- Hypothèse 3 : le processus a un degré relatif bien défini.
- Hypothèse 4 : les sorties et les signaux de référence sont suffisamment continument différentiables par rapport au temps.

Comme il a été mentionné, le modèle mathématique du dirigeable *MC500* est affine, le degré relatif est bien défini et sa dynamique des zéros est vide, ce qui rend possible l'application de la commande mentionnée pour suivre une trajectoire prédéfinie ou bien pour stabiliser le dirigeable au voisinage d'un point de chargement et ou déchargement.

L'élaboration du vecteur contrôle prédictif moyennant la NCGPC se fait par la minimisation d'une fonction objective quadratique fondée sur l'erreur de prédiction. Cette erreur

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

correspond à l'écart entre les prédictions du signal de référence et les sorties. Ces prédictions sont déterminées par le développement en séries de Taylor jusqu'au degré relatif des sorties  $r_j$

##### L'erreur de prédiction $\hat{e}_i$

$\hat{e}_i$  est la prédiction de l'erreur  $e_i(t) = y_i(t) - \omega_i(t)$  définie par :

$$\hat{e}_i(t + \epsilon) = \hat{y}_i(t + \epsilon) - \hat{\omega}_i(t + \epsilon) \quad (4.22)$$

où  $t$  l'instant actuel,  $t + \epsilon$  l'instant de prédiction,  $\hat{y}_i$  et  $\hat{\omega}_i$  sont respectivement la prédiction de  $y_i$  et  $\omega_i$ . Ces prédictions sont également définies par le développement de Taylor comme suit :

$$\hat{y}_i(t + \epsilon) = y_i(t) + \epsilon \dot{y}_i(t) + \frac{\epsilon^2}{2} \ddot{y}_i(t) \quad (4.23)$$

$$\hat{\omega}_i(t + \epsilon) = \omega_i(t) + \epsilon \dot{\omega}_i(t) + \frac{\epsilon^2}{2} \ddot{\omega}_i(t) \quad (4.24)$$

soit  $\Lambda_i$  le vecteur ligne suivant :

$$\Lambda_i = \left( 1 \quad \epsilon \quad \frac{\epsilon^2}{2} \right) \quad (4.25)$$

et  $E_i$  le vecteur colonne donné par :

$$E_i = \begin{pmatrix} e_i & \dot{e}_i & \ddot{e}_i \end{pmatrix}^t \quad (4.26)$$

En utilisant les équations (4.25), (4.26) L'erreur de prédiction (4.22) peut s'écrire sous une forme matricielle ainsi :

$$\hat{e}_i(t + \epsilon) = \Lambda_i E_i \quad (4.27)$$

Dans le cas SISO le critère quadratique à minimiser pour obtenir la loi de commande est défini par :

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^{T_i} \hat{e}_i^2(t + \epsilon) d\epsilon \quad (4.28)$$

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

avec  $T_i$  l'horizon de prédiction.

Pour le système du dirigeable avec charge intégrée (système MIMO) le critère quadratique sera la somme des fonctions quadratiques associées à chaque sortie. Elle sera donnée par :

$$J = \sum_{i=1}^6 J_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \int_0^{T_i} \hat{e}_i^2(t + \epsilon) d\epsilon \quad (4.29)$$

En remplaçant l'équation (4.27) dans celle de  $J$  on aura :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 E_i^t \Pi(T_i) E_i \quad (4.30)$$

avec :

$$\Pi(T_i) = \int_0^{T_i} \Lambda_i^t \Lambda_i d\epsilon = \begin{pmatrix} T_i & \frac{T_i^2}{2} & \frac{T_i^3}{3} \\ \frac{T_i^2}{2} & \frac{T_i^3}{3} & \frac{T_i^4}{8} \\ \frac{T_i^3}{6} & \frac{T_i^4}{8} & \frac{T_i^5}{20} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Le vecteur de contrôle  $U$  sera le minimum de la fonction  $J$ . Il satisfait à la condition nécessaire donnée par :

$$\frac{\partial J}{\partial U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial E_i}{\partial U} \right)^t \Pi(T_i) E_i = 0_{6 \times 1} \quad (4.32)$$

Similairement à ce que a été vu dans la méthode de linéarisation entrée-sortie les dérivées de  $e_i$  peuvent s'exprimer en fonction des dérivées de Lie. Ces dérivées sont données par l'équation (4.4).

Le vecteur  $E_i$  sera donné par la relation ci-dessous :

$$E_i = \begin{pmatrix} h_i - \omega_i \\ L_f h_i \\ L_f^2 h_i + \sum_{j=1}^6 L_{g_j} L_f h_i U_j + \sum_{j=1}^6 L_{p_j} L_f h_i d_j \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

ou encore :

$$E_i = \begin{pmatrix} h_i - \omega_i \\ L_f h_i \\ L_f^2 h_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=1}^6 L_{p_j} L_f h_i d_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=1}^6 L_{g_j} L_f h_i U_j \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Or on a :

$$\frac{\partial E_i}{\partial U} = \left( \frac{\partial E_i}{\partial U_1} \quad \frac{\partial E_i}{\partial U_2} \quad \frac{\partial E_i}{\partial U_3} \quad \frac{\partial E_i}{\partial U_4} \quad \frac{\partial E_i}{\partial U_5} \quad \frac{\partial E_i}{\partial U_6} \right) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{g_1} L_f h_i & L_{g_2} L_f h_i & L_{g_3} L_f h_i & L_{g_4} L_f h_i & L_{g_5} L_f h_i & L_{g_6} L_f h_i \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

En substituant les équations (4.36) et (4.31) dans la dérivée de  $J$  par rapport à  $U$  (équation (4.32)) et après quelques manipulations algébriques, nous aurons :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f h_i \\ L_{g_2} L_f h_i \\ L_{g_3} L_f h_i \\ L_{g_4} L_f h_i \\ L_{g_5} L_f h_i \\ L_{g_6} L_f h_i \end{pmatrix} \Pi_i^3 E_i = 0_{6 \times 1} \quad (4.37)$$

avec  $\Pi_i^3$  la dernière ligne de la matrice  $\Pi_i$ . Elle est donnée par :

$$\Pi_i^3 = \left( \frac{T_i^3}{6} \quad \frac{T_i^4}{8} \quad \frac{T_i^5}{20} \right)$$

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

L'équation (4.37) peut se réécrire par une relation matricielle comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_1^t & 0 \\ 0 & \Gamma_2^t \end{pmatrix}}_{D^t} \begin{pmatrix} \Pi_1^3 E_1 \\ \Pi_2^3 E_2 \\ \Pi_3^3 E_3 \\ \Pi_4^3 E_4 \\ \Pi_5^3 E_5 \\ \Pi_6^3 E_6 \end{pmatrix} = 0_{6 \times 1} \quad (4.38)$$

avec  $D$  la matrice de découplage dont l'expression est définie par (4.17). Sa transposée est inversible , et on aura alors :

$$\begin{pmatrix} \Pi_1^3 & & & & & 0 \\ & \Pi_2^3 & & & & \\ & & \Pi_3^3 & & & \\ & & & \Pi_4^3 & & \\ & & & & \Pi_5^3 & \\ 0 & & & & & \Pi_6^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

Pour déterminer le vecteur de contrôle  $U$ , nous remplaçons les  $E_i$  par leurs valeurs dans l'équation ci-dessous et nous séparons les termes qui contiennent les composantes de  $U$ .

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIVE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

Nous obtiendrons ainsi :

$$\begin{pmatrix} \frac{T_1^5}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_2^5}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_3^5}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T_4^5}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T_5^5}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T_6^5}{20} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Pi_1^3 & & & & & 0 \\ & \Pi_2^3 & & & & \\ & & \Pi_3^3 & & & \\ & & & \Pi_4^3 & & \\ & & & & \Pi_5^3 & \\ 0 & & & & & \Pi_6^3 \end{pmatrix} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 - \omega_1 \\ L_f h_1 \\ L_f^2 h_1 \\ h_2 - \omega_2 \\ L_f h_2 \\ L_f^2 h_2 \\ h_3 - \omega_3 \\ L_f h_3 \\ L_f^2 h_3 \\ h_4 - \omega_4 \\ L_f h_4 \\ L_f^2 h_4 \\ h_5 - \omega_5 \\ L_f h_5 \\ L_f^2 h_5 \\ h_6 - \omega_6 \\ L_f h_6 \\ L_f^2 h_6 \end{pmatrix}}_{\xi} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c_\psi c_\theta}{M_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{P}} \right) \quad (4.40)$$

A partir de l'équation (4.40) on peut finalement déduire la relation qui donne le vecteur  $U$ .

#### 4.4. COMMANDE PRÉDICTIONNELLE NON LINÉAIRE À TEMPS CONTINU POUR UN DIRIGEABLE

---

On aura ainsi :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = -D^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{20}{T_1^5} \Pi_1^3 & & & & & 0 \\ & \frac{20}{T_2^5} \Pi_2^3 & & & & \\ & & \frac{20}{T_3^5} \Pi_3^3 & & & \\ & & & \frac{20}{T_4^5} \Pi_4^3 & & \\ & & & & \frac{20}{T_5^5} \Pi_5^3 & \\ 0 & & & & & \frac{20}{T_6^5} \Pi_6^3 \end{pmatrix}}_K (\tilde{\xi} + \tilde{P}) \quad (4.41)$$

On peut l'écrire sous la forme compacte suivante :

$$U = -D^{-1} K (\tilde{\xi} + \tilde{P}) \quad (4.42)$$

avec :

- $D$  est la matrice de découplage.
- $K$  est la matrice des gains est donnée par :

$$\begin{pmatrix} K_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & K_6 \end{pmatrix}$$

où

$$K_i = \frac{20}{T_i^5} \Pi_i^3$$

- $\tilde{\xi} + \tilde{P}$  la somme des termes non linéaires et les termes de pré-compensations

La commande  $U$  donné par la NCGPC est une loi de contrôle linéarisante, optimale et anticipatrice. La performance du contrôle  $U$  sera évaluée par des simulations numériques.

### 4.5 Simulations numériques

#### 4.5.1 NCGPC sans feedforward : méthode analytique (NCGPCMA)

Nous présentons ici des tests numériques similaires à ceux effectués pour la méthode de linéarisation entrée-sortie. Nous commençons par un cas idéal, c'est-à-dire où la perturbation est nulle. Les résultats obtenus sont résumés dans les figures ci-dessous.

Nous pouvons observer (voir figure (4.9(a)) et (4.11(b)) ) que la convergence vers les états désirés est respectée. Le dirigeable se stabilise au voisinage du point de chargement ou de déchargement d'une manière rapide.

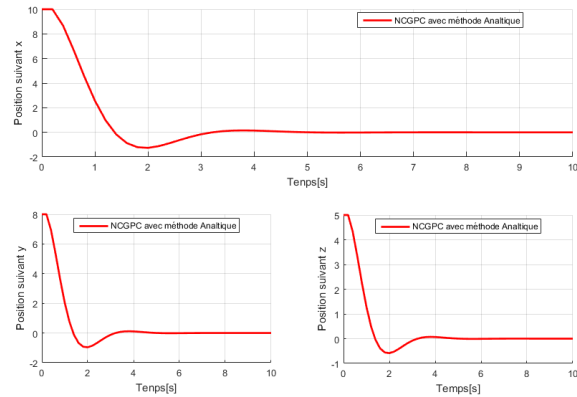
Dans la phase transitoire les commandes virtuelles par la NCGPC prennent des valeurs moins élevées comparées à celles obtenues par la LES. Ceci s'explique par l'utilisation des gains optimaux. D'une part, ces gains optimaux permettent d'économiser encore plus l'énergie globale du dirigeable. D'autre part, en présence du vent, la valeur de la dérive du dirigeable sera moindre que celle donnée par la LES comme en le verra le voir dans la suite.

L'algorithme d'allocation de contrôle analytique montre sa compatibilité avec la loi de commande prédictive issue de la NCGPC. Le dirigeable est stabilisé autour de son point d'équilibre optimal en un temps très court. On a obtenu les mêmes valeurs des angles  $\beta$ ,  $\gamma$  et des forces  $F$  donnés par les autres lois de contrôle (LES et commande linéaire dans le chapitre précédent).

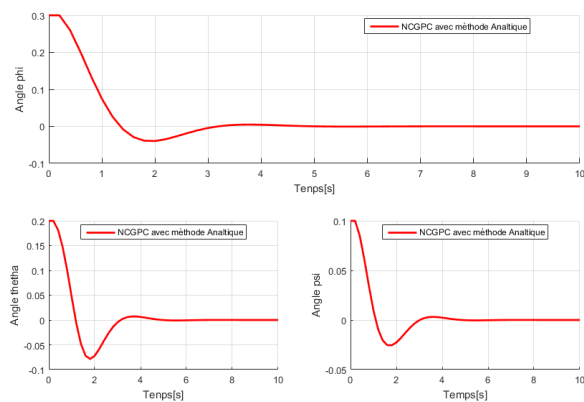
Cependant nous remarquons que le temps de convergence des actionneurs "réels" donné par la méthode NCGPC (6s) est relativement élevé comparé au temps de convergence donné par la méthode de LES (4s). A notre avis c'est un résultat logique et plus réaliste que celui donné par la méthode LES, du fait que la dynamique du dirigeable est lente.

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

---



(a) Position suivant les axes  $x, y, z$



(b) Angles d'Euler avec la NCGPC

FIGURE 4.9 – Convergence des degrés de liberté du dirigeable avec la NCGPC

### 4.5.2 NCGPC avec feedforward : méthode analytique (NCGPCFFMA)

Nous considérons maintenant, une force de vent latéral  $d_1$  suivant l'axe  $X_m$  de valeur  $10^4 N$  appliquée sur le dirigeable.

Nous appliquons la loi de contrôle prédictive NCGPC par anticipation pour atténuer l'effet de la perturbation exogène.

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

---

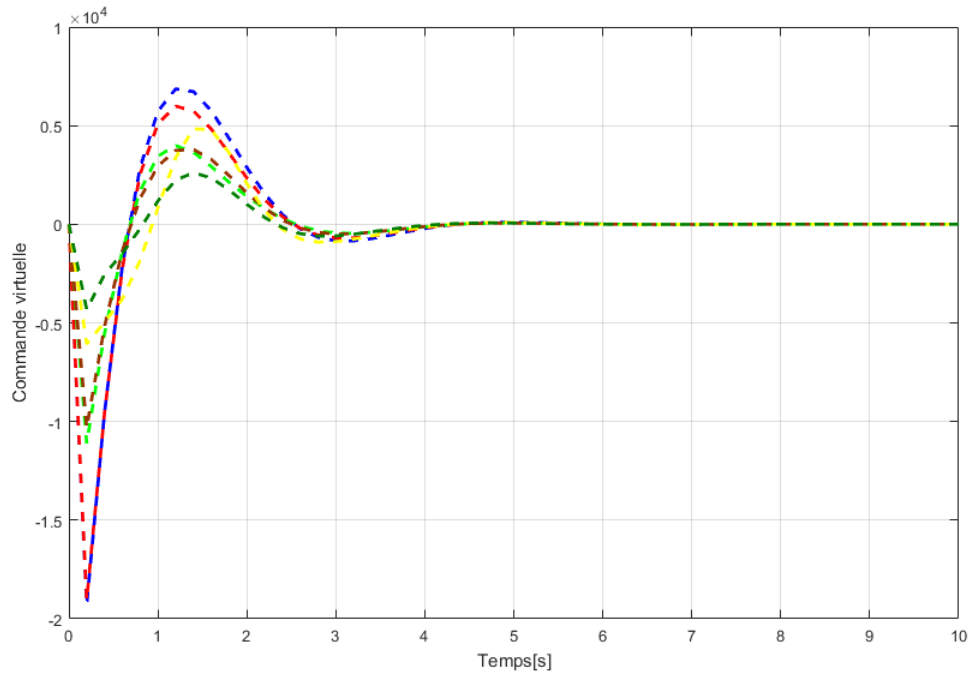


FIGURE 4.10 – Valeurs des commandes "virtuels" avec la NCGPC

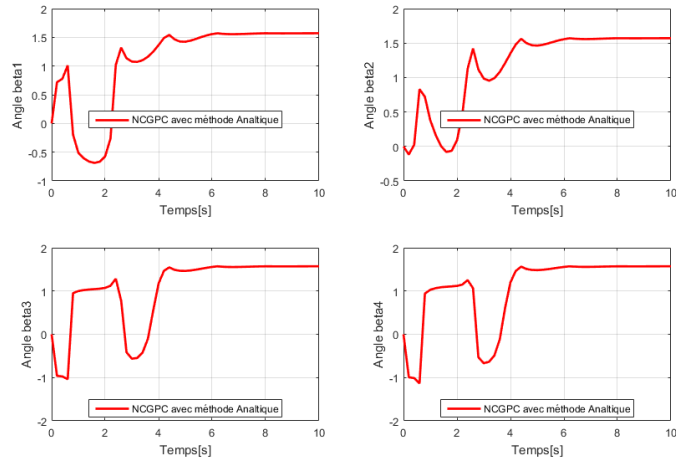
Les résultats obtenus, sont résumés par les figures (4.14), (4.15),

Les positions et les angles d'Euler convergent (voir figure (4.13(a)), (4.13(b))) asymptotiquement vers zéro. La figure (4.13) montre que le vecteur commande a annulé l'effet de la perturbation. Ainsi la force du vent n'a en fait aucune influence sur le dirigeable. Ceci est dû au caractère anticipateur de la NCGPCMA.

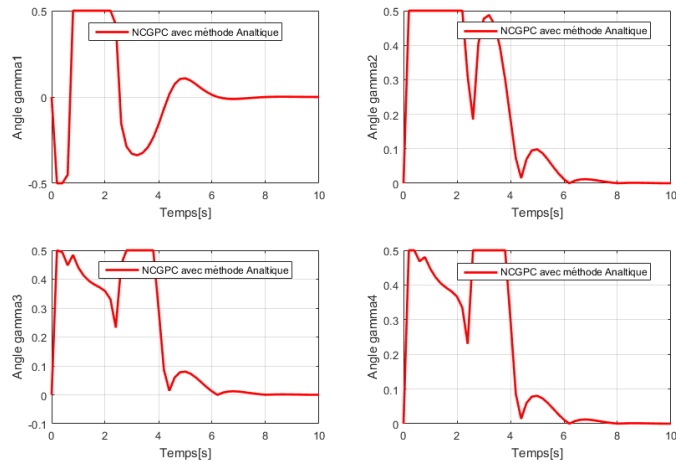
La NCGPCMA (sans feedforward) a stabilisé le dirigeable après un déplacement d'environ 18m. Ce qui prouve l'utilité des termes de pré-compensation et montre que les commandes par anticipation seront des candidates potentielles pour le pilotage automatique des dirigeables.

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

---



(a) Valeurs des angles  $\beta_i$  des actionneurs avec la NCGPCMA



(b) Valeurs des angles  $\gamma_i$  des actionneurs avec la NCGPCMA

FIGURE 4.11 – Valeurs des angles  $\beta$  et  $\gamma$  des actionneurs avec la NCGPCMA

Finalement il faut souligner qu'en présence d'une perturbation mesurée la configuration de stabilisation optimale n'a pas changé en combinant la méthode d'allocation de contrôle

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

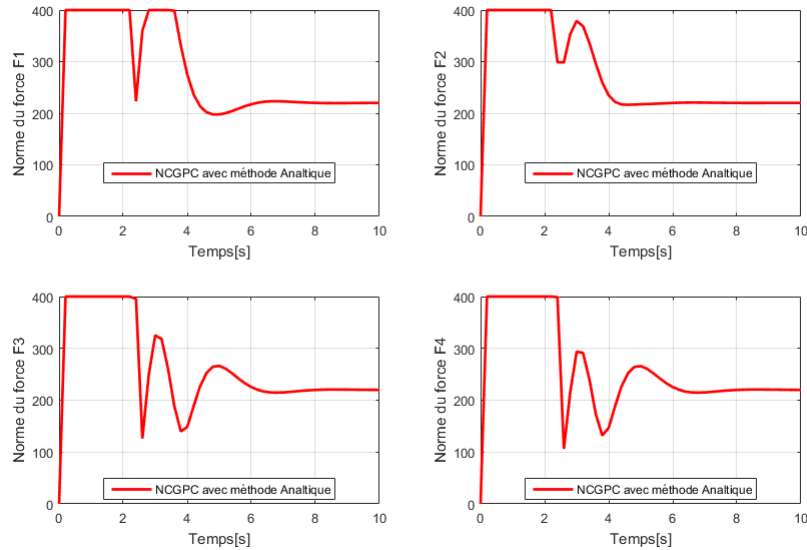


FIGURE 4.12 – Norme des forces des actionneurs avec la NCGPCMA

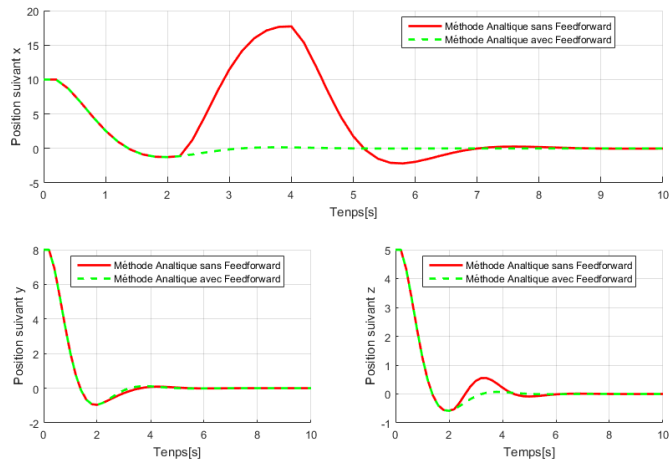
et la commande virtuelle donnée par le NCGPC avec et sans feedforward.

Nous résumons les résultats des simulations numériques pour la méthode de linéarisation entrée-sortie (LES) et celle de la NCGPC dans le but de comparer ces deux méthodes.

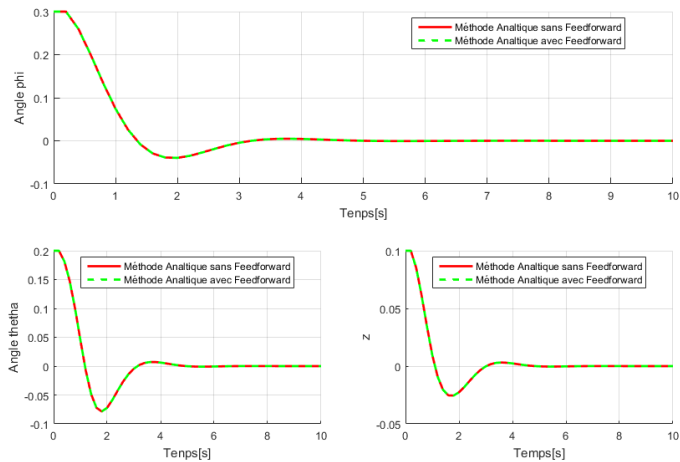
Algorithme	Temps de convergence des sorties	Dérive	Commandes virtuelles
LESMA	3s	-	$10^5 N$
NCGPCMA	3s	-	$10^4 N$
LESFFMA	3s	40m	$10^5 N$
NCGPCFFMA	3s	18m	$10^4 N$

La loi de contrôle donnée par la NCGPC s'avère assez proche de celle de la LES. La différence réside dans le choix des gains. Ces gains sont déterminés d'une manière analytique, optimale pour la NCGPC. Ce critère d'optimalité bascule notre choix du côté de la

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES



(a) Position suivant les axes  $x,y,z$  en présence d'une force du vent :  
NCGPCFF



(b) Convergence des angles d'Euler en présence d'une force du vent :  
NCGPCFF

FIGURE 4.13 – Valeurs des angles  $\beta$  et  $\gamma$  des actionneurs avec la NCGPCMA

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

---

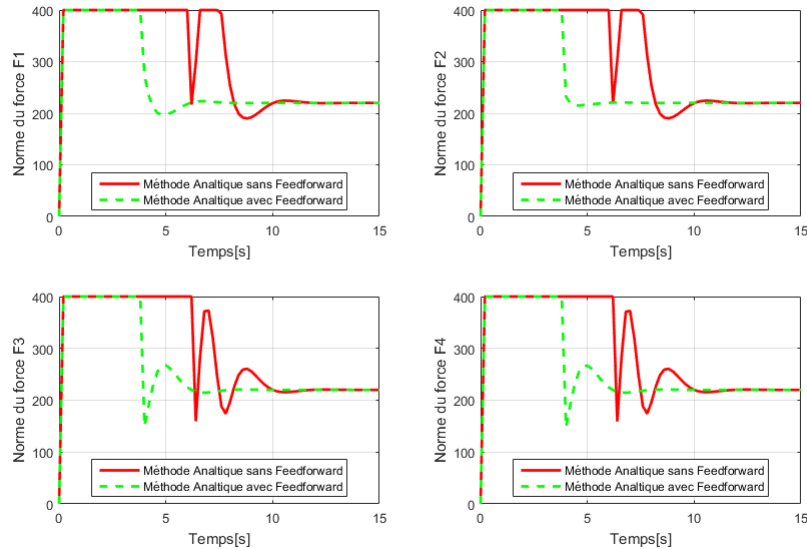


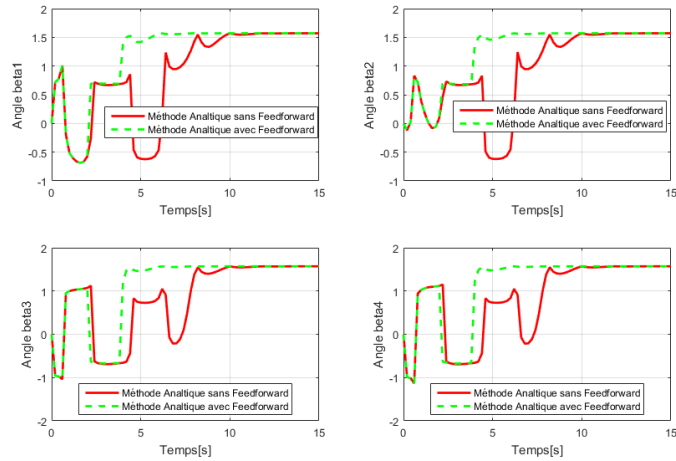
FIGURE 4.14 – Norme des forces des actionneurs avec la NCGPCFFMA

NCGPC.

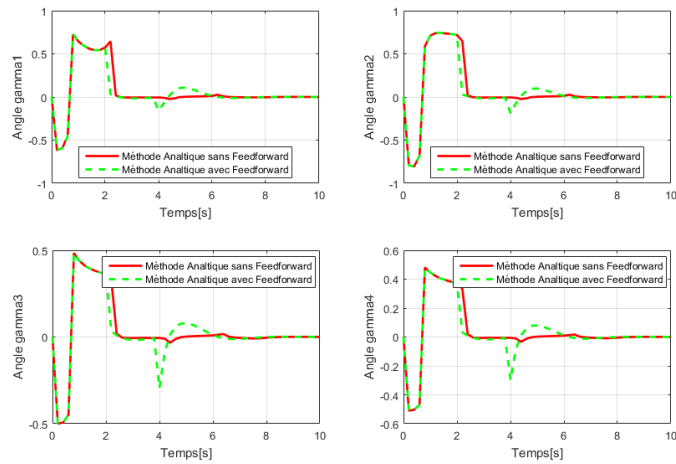
Mise à part cette propriété importante d'optimalité qui permet d'économiser l'énergie globale du dirigeable, les différentes valeurs obtenues dans les simulations numériques montrent la supériorité du contrôleur NCGPC. En effet, les valeurs des commandes virtuelles dans la phase transitoire, le déplacement du dirigeable(en absence du feedforward) , les temps de convergence sont tous inférieurs à ceux donnés par la méthode de linéarisation entrée sortie.

Finalement, nous pouvons affirmer que le duo NCGPC et l'algorithme d'allocation du contrôle analytique (NCGPCMA) sont plus adaptés pour piloter le dirigeable automatiquement.

## 4.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES



(a) Angle  $\beta_i$  par la NCGPCFFMA



(b) Angle  $\gamma_i$  par la NCGPCFFMA

FIGURE 4.15 – Valeurs des angles  $\beta$  et  $\gamma$  des actionneurs avec la NCGPCFFMA

### 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une solution pour résoudre un problème majeur pour les dirigeables gros-porteurs. Nous avons proposé d'utiliser les commandes par anticipation pour atténuer l'effet d'une rafale de vent latéral avant qu'elle ait un impact important sur le dirigeable. De ce fait, le pilotage automatique du dirigeable moyennant l'utilisation des commandes par anticipation lui permettrait une bonne manœuvrabilité et une stabilité optimale dans des conditions météorologiques dégradées.

Nous avons élaboré deux vecteurs commandes d'anticipation. Le premier est basé sur la méthode de linéarisation entrée-sortie combinée avec des termes de pré-compensation. Nous avons prouvé son efficacité par des simulations numériques.

Bien que le formalisme mathématique de linéarisation issu de cette méthode soit puissant, la question se pose sur sa robustesse. Ce qui nous a poussé à utiliser une deuxième technique plus robuste de commande prédictive plus précisément, la loi de contrôle NCGPC.

Mise à part, le caractère de la robustesse, ce vecteur commande est optimal et permet d'anticiper l'effet d'une perturbation mesurable telle que la rafale du vent. L'optimalité de ce vecteur contrôle et la prédiction du comportement futur du dirigeable lui permet de manière substantielle d'économiser son énergie globale.

Une autre motivation pour utiliser les techniques de la commande prédictive est leur capacité de traiter les systèmes complexes, lents avec contraintes sur la sortie ou bien sur l'entrée, qui sont les principales caractéristiques de modèle du dirigeable.

Un autre enjeu de ce chapitre a été de tester l'efficacité de l'algorithme analytique en utilisant des lois de contrôles virtuels non-linéaires. L'algorithme d'allocation de contrôle analytique développé précédemment, s'est bien adapté avec la commande non-linéaire avec anticipation. Ce duo a montré sa capacité pour annuler les effets d'une perturbation mesu-

#### 4.6. CONCLUSION

---

table.

Troisième partie

Commande d'un DGP avec charge  
suspendue



# Chapitre 5

## Commande d'un DGP avec charge suspendue par un câble flexible

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>190</b>
<b>5.2</b>	<b>Modèle réduit et dynamique des zéros</b>	<b>192</b>
5.2.1	Modèle réduit	193
5.2.2	Dynamique des zéros du modèle global et réduit	198
<b>5.3</b>	<b>Commande par dynamique inverse</b>	<b>205</b>
5.3.1	Simulations numériques et discussions	207
<b>5.4</b>	<b>Commande sans Modèle</b>	<b>219</b>
5.4.1	Principe et aperçu théorique	219
5.4.2	Les techniques d'estimation algébrique	222
5.4.2.1	Outils Mathématiques	223
5.4.2.2	Dérivateur algébrique	224
5.4.2.3	Exemples estimation de la dérivée première	226

## 5.1. INTRODUCTION

---

5.4.3	Commande sans modèle pour un dirigeable grue . . . . .	227
<b>5.5</b>	<b>Simulations Numériques et discussions . . . . .</b>	<b>230</b>
5.5.1	Scénario 1 : CSM dans des conditions idéaux . . . . .	230
5.5.2	Scénario 2 : CSM en présence d'une rafale de vent . . . . .	234
<b>5.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>237</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons relevé certains défis pour les DGP avec charge intégrée telle que la manipulation de ses derniers en présence d'une perturbation mesurée. Un autre enjeu qui mérite d'être résolu est l'oscillation de la charge pendant la phase de chargement ou de déchargement ou éventuellement pendant le transfert des charges sur des courtes distances.

En effet, la charge suspendue se comporte comme un pendule en réponse au mouvement du dirigeable ou sous l'effet d'une force de perturbation comme le vent. Notons aussi que les oscillations de la charge sont extrêmement dangereuses et peuvent affecter la stabilité du dirigeable. En fait, des accidents peuvent être provoqués par un violent mouvement de la charge suspendue et le dirigeable devient particulièrement difficile à contrôler lorsqu'il transporte des charges lourdes.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la stabilisation et l'atténuation des oscillations de la charge du modèle du dirigeable. Nous sommes en présence d'un système complexe sous-actionné qui admet une dynamique des zéros (une dynamique interne de la déformation). L'étude de la dynamique interne est indispensable afin de contrôler le dirigeable. Nous avons utilisé la méthode numérique inventée par Henri Poincaré pour analyser et visualiser le comportement de la dynamique des zéros.

## 5.1. INTRODUCTION

---

Nous nous sommes décidés à étudier deux types de contrôleurs. Le premier contrôleur est plutôt classique. Il est connu sous le nom de commande par dynamique inverse. Il repose sur la connaissance précise du modèle et exige la stabilité de la dynamique des zéros pour pouvoir être appliqué.

La connaissance de la totalité des paramètres du modèle rend difficile à mettre en œuvre ce contrôleur et le rend sensible face aux incertitudes de modélisation et aux perturbations extérieures qui peuvent affecter le dirigeable. Pour cela nous avons construit un modèle "réduit" qui sera la base en vue d'établir un vecteur contrôleur relativement simple et pourra être implémentable dans la pratique.

Certains paramètres inertiels du système du dirigeable peuvent être connus avec une certaine imprécision. Ainsi, les performances d'un vecteur contrôle à base d'un modèle perd ses qualités et ses performances lorsqu'on dépasse la marge de la robustesse. Il est donc impératif de développer des commandes capables de tenir compte de pareilles incertitudes et pouvant tenir compte des perturbations exogènes qui pourront affecter notre système.

Dans ce contexte un deuxième contrôleur plus novateur est établi. Il ne se base plus sur la connaissance exacte du modèle et est connu sous le nom évocateur de commande sans modèle (CSM).

La CSM est simple à mettre en œuvre et évite de chercher les équations mathématiques qui pilotent le système. Elle repose sur des modèles "ultra-locaux" valables sur un court laps de temps, s'appuyant sur un minimum de paramètres. D'où sa nouvelle popularité dans le domaine industriel.

## 5.2 Modèle réduit et dynamique des zéros

Nous rappelons que le modèle dynamique d'un DGP avec charge suspendue introduit dans le chapitre 2, est donné par la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{N+2 \times N+2} & I_{N+2 \times N+2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{R^{N+2}} \\ -M^{-1}(C+G) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{R^{N+2}} \\ M^{-1}U \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

avec :

- $X = [x, \theta_s, \delta, \dot{x}, \dot{\theta}_s, \dot{\delta}]^t = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^t$  : l'état du système ( $\dim X = N+2$ ).
- $U = [u_1, u_2]^t$  : le vecteur contrôle du système, composé par l'actionneur  $u_1$  du dirigeable qui contrôle le déplacement  $x$  et l'actionneur de l'enrouleur  $u_2$  qui contrôle l'angle d'oscillation  $\theta_s$ .

Le modèle du dirigeable avec charge suspendue est un système non linéaire pleinement couplé à  $N+2$  états complexes. L'utilisation du modèle sous sa forme précédente nous ramène à des commandes complexes qui ne pourraient pas être implémentées dans la pratique et qui exigent une consommation énergétique élevée.

Les  $N$  derniers états représentent la déformation du câble et décrivent l'état interne du système. Ils sont impactés indirectement par les commandes  $u_1$  et  $u_2$ . Cet impact peut amener à des phénomènes indésirables tels que l'instabilité du système du dirigeable-grue. En d'autres termes la dynamique des zéros pourra être instable et notre système pourra être un système à non minimum de phase ce qui rend le contrôle du modèle établi comme une tâche délicate.

L'étude du comportement de la dynamique interne est une phase nécessaire avant de construire le vecteur commande. Ceci revient à étudier la dynamique des zéros du système (5.1). Cependant cette étude paraît difficile vue la complexité du modèle en question. Afin de remédier à la complexité du modèle nous allons considérer un modèle réduit et

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

simplifié. Ce modèle réduit servira de support pour l'analyse du comportement de la dynamique des zéros et de la construction d'un vecteur contrôle relativement simple.

Comme on le verra dans la section suivante, les simplifications que nous apporterons sur le modèle préservent les caractéristiques et le comportement général du modèle global.

### 5.2.1 Modèle réduit

Le modèle mathématique discrétisé du dirigeable avec une charge suspendue par un câble flexible a été établi en s'appuyant sur les techniques d'analyse modale. Nous avons retenu  $N$  modes pour obtenir un modèle mathématique d'ordre fini gouverné par des EDOs. Nous rappelons que la déformation considérée s'écrit :

$$\sigma(z, t) = \sum_1^N \omega_i \delta_i = \omega^t \delta \quad (5.2)$$

Sans perte de généralité nous allons utiliser une base polynomiale pour décrire le vecteur fonctions forme  $\omega_i$  :

$$\omega^t = \left[ \left( \frac{z^2}{L} \right)^2, \dots, \left( \frac{z^2}{L} \right)^N \right] \quad (5.3)$$

et nous retiendrons un seul mode ( $N=1$ ), par conséquent la déformation sera définie par :

$$\sigma = \left( \frac{z^2}{L} \right)^2 \delta \quad (5.4)$$

La réduction de nombre de mode  $N$  nous permet de réduire la dimension du modèle d'état du dirigeable-grue défini par le système (5.1)

Une deuxième simplification est effectuée sur la matrice de masse  $M$  et le vecteur de Coriolis  $C$ .

Nous remarquons que la matrice de masse  $M$  peut s'écrire comme une somme de deux matrices, une matrice  $M_1$  qu'on appellera matrice principale et d'une matrice  $\delta M$  qu'on nommera matrice complémentaire :

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & \frac{A_7}{2} & \frac{A_4 c_{\theta_s}}{2} \\ \frac{A_7}{2} & A_2 & \frac{A_6}{2} \\ \frac{A_4 c_{\theta_s}}{2} & \frac{A_6}{2} & A_{10} \end{pmatrix}}_{M_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\delta A_8 \delta c_{\theta_s} + A_9 \delta s_{\theta_s}) & \frac{1}{2}(\delta A_5 s_{\theta_s}) \\ \frac{1}{2}(\delta A_8 \delta c_{\theta_s} + A_9 \delta s_{\theta_s}) & \delta A_3 \delta & 0 \\ \frac{1}{2}(\delta A_5 s_{\theta_s}) & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\delta M} \quad (5.5)$$

$$M = M_1 + \delta M$$

$\delta M$  est composée de termes petits comparés à ceux de la matrice principale. Ces termes seront considérés dans cette approximation comme des erreurs de modélisation. Ces erreurs de modélisation seront négligés dans la suite et par conséquent nous pouvons considérer que la matrice de masse est équivalente à la matrice  $M_1$  soit :  $M \simeq M_1$

Le nouveau vecteur de Coriolis sera déterminé en utilisant la formule suivante :

$$C(X, \dot{X}) = \dot{M}_1 \dot{X} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} [\dot{X}^t M_1 \dot{X}] \quad (5.6)$$

où encore :

$$C(X, \dot{X}) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} A_4 \dot{\theta}_s s_{\theta_s} \dot{\delta} \\ \frac{1}{2} A_4 s_{\theta_s} \dot{x} \dot{\delta} \\ -\frac{1}{2} A_4 \dot{\theta}_s s_{\theta_s} \dot{x} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Pour le vecteur de gravité nous avons gardé la même expression :

$$G(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{rr} - \frac{1}{2} \delta^t G_{rf} \delta & G_{ff} \\ 0 & G_{ff}^t & G_{rf} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_{\theta_s} \\ c_{\theta_s} \delta \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

En tenant compte de ces approximations le modèle d'état réduit du dirigeable pourra s'écrire ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = \bar{M}_{11}u_1 + \bar{M}_{12}u_2 - \bar{M}_{13}B_{ff}x_6 - \bar{M}_{13}K_{ff}x_3 - \bar{M}_{11}C_1 \\ \quad - \bar{M}_{12}(C_2 + G_2) - \bar{M}_{13}(C_3 + G_3) \\ \dot{x}_5 = \bar{M}_{21}u_1 + \bar{M}_{22}u_2 - \bar{M}_{23}B_{ff}x_6 - \bar{M}_{23}K_{ff}x_3 - \bar{M}_{12}C_1 \\ \quad - \bar{M}_{22}(C_2 + G_2) - \bar{M}_{23}(C_3 + G_3) \\ \dot{x}_6 = \bar{M}_{13}u_1 + \bar{M}_{32}u_2 - \bar{M}_{33}B_{ff}x_6 - \bar{M}_{33}K_{ff}x_3 - \bar{M}_{13}C_1 \\ \quad - \bar{M}_{23}(C_2 + G_2) - \bar{M}_{33}(C_3 + G_3) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Il s'agit d'un modèle réduit (diminution du nombre de degré de liberté) mais aussi approché (approximations en négligeant certains termes).

Les nouvelles valeurs  $C_i$  et les termes  $G_i$  sont définis dans les équations (5.7) et (5.8).

Les termes  $\bar{M}_{ij}$  sont les composantes de l'inverse de matrice  $M_1$ . Ils sont définis dans le

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

tableau ci-dessous :

Paramètres	Valeurs
$\bar{M}_{11}$	$\frac{(A_6^2 - 4A_2A_{10})}{(A_1A_6^2 + A_7^2A_{10} - 4A_1A_2A_{10} + A_2A_4^2c_{\theta_s}^2 - A_4A_6A_7c_{\theta_s})}$
$\bar{M}_{12}$	$\frac{(2A_7A_{10} - A_4A_6c_{\theta_s})}{(A_1A_6^2 + A_7^2A_{10} - 4A_1A_2A_{10} + A_2A_4^2c_{\theta_s}^2 - A_4A_6A_7c_{\theta_s})}$
$\bar{M}_{13}$	$\frac{-(A_6A_7 - 2A_2A_4c_{\theta_s})}{(A_1A_6^2 + A_7^2A_{10} - 4A_1A_2A_{10} + A_2A_4^2c_{\theta_s}^2 - A_4A_6A_7c_{\theta_s})}$
$\bar{M}_{22}$	$\frac{A_4^2c_{\theta_s}^2 - 4A_1A_{10}}{(A_1A_6^2 + A_7^2A_{10} - 4A_1A_2A_{10} + A_2A_4^2c_{\theta_s}^2 - A_4A_6A_7c_{\theta_s})}$
$\bar{M}_{23}$	$\frac{(2A_1A_6 - A_4A_7c_{\theta_s})}{(A_1A_6^2 + A_7^2A_{10} - 4A_1A_2A_{10} + A_2A_4^2c_{\theta_s}^2 - A_4A_6A_7c_{\theta_s})}$
$\bar{M}_{33}$	$\frac{(A_7^2 - 4A_1A_2)}{(A_1A_6^2 + A_7^2A_{10} - 4A_1A_2A_{10} + A_2A_4^2c_{\theta_s}^2 - A_4A_6A_7c_{\theta_s})}$

Pour donner une légitimité à ces approximations nous avons fait quelques simulations numériques. Dans ces simulations nous avons excité le dirigeable par une accélération suivant son axe  $x_1$  de valeur  $6ms^{-1}$ .

Le comportement du modèle simplifié et du modèle global sont présentés dans les figures : (5.1), (5.2) et (5.3).

En observant ces graphes nous pouvons remarquer que le comportement des deux modèles est le même avec une légère différence dans l'angle d'oscillation et la déformation due à la flexibilité du câble. Les simplifications que nous avons apportées sur le modèle global n'ont pas changé son comportement et préservent les propriétés générales de notre modèle initial,

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

à savoir la symétrie et la positivité de la matrice de masse.

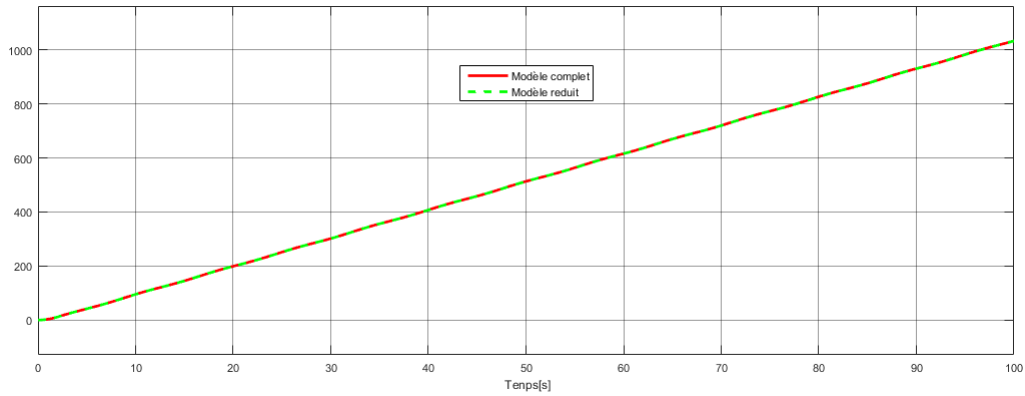


FIGURE 5.1 – Position du dirigeable : modèle réduit et global

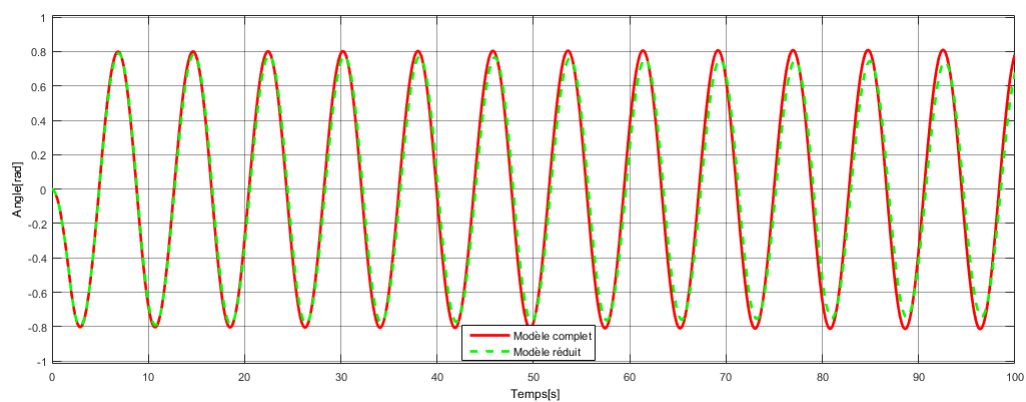


FIGURE 5.2 – Angle d'oscillation : modèle réduit et global

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

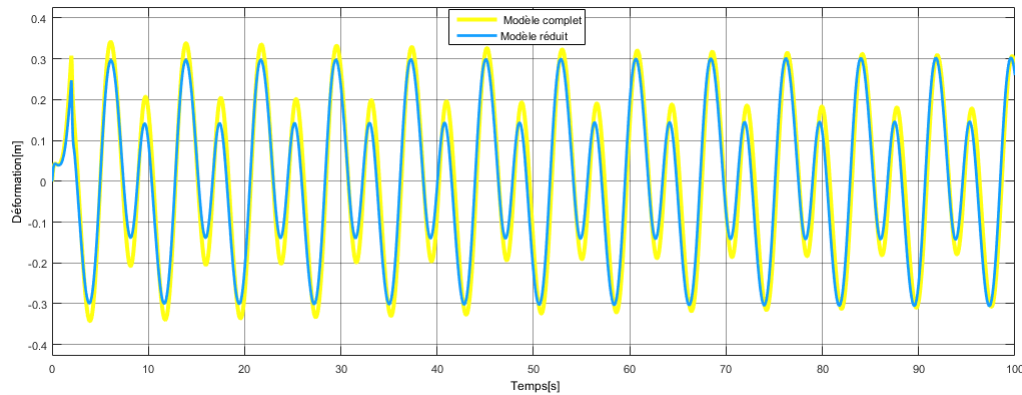


FIGURE 5.3 – Déformation : modèle réduit et global

Dans un premier temps nous avons fixé comme objectif de stabiliser le dirigeable en utilisant la méthode de contrôle par dynamique inverse. L'utilisation de ce contrôleur est possible si la dynamique des zéros (si elle existe) est asymptotiquement stable.

Dans ce qui suit nous étudierons l'existante et nous déterminerons l'expression explicite de la dynamique des zéros afin de montrer qu'il est asymptotiquement stable.

### 5.2.2 Dynamique des zéros du modèle global et réduit

L'existence de la dynamique des zéros est caractérisée par le calcul du degré relatif associé aux variables qu'on pourra contrôler (le déplacement  $x$  et l'angle de balancement  $\theta_s$ ). Le degré relatif de chaque sortie est obtenu en calculant leurs dérivées de Lie successives jusqu'à l'apparition de l'un des vecteurs contrôles dans les dérivées. Ainsi, le degré relatif de chaque sortie vaut 2. Par conséquent le degré relatif du modèle réduit (5.9) (respectivement pour le système global) est 4, ce qui est inférieur au nombre d'états  $n$  ( $n=6$ ). Nous déduisons que la dynamique interne des deux systèmes existe et est de dimension 2.

Pour déterminer l'expression analytique de la dynamique des zéros des deux modèles, nous

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

avons réécrit dans un premier temps le modèle d'état en cascade. Pour ce faire nous avons procédé de la manière suivante :

Nous avons considéré les équations du mouvement que nous avons établi lors de la modélisation 2D. Nous rappelons qu'ils sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = M_{11}\ddot{x} + M_{13}\ddot{\delta} + M_{12}\ddot{\theta}_s + C_1 \\ u_2 = M_{22}\ddot{\theta}_s + M_{23}\ddot{\delta} + M_{12}\ddot{x} + C_2 + G_2 \\ 0 = M_{13}\ddot{x} + M_{23}\ddot{\theta}_s + M_{33}\ddot{\delta} + C_3 + K_{ff}\delta + G_3 + B_{ff}\dot{\delta} \end{cases} \quad (5.10)$$

La valeur de  $\ddot{\delta}$  est déduite à partir de la dernière équation du système précédent :

$$\ddot{\delta} = -\frac{M_{13}\ddot{x} + M_{23}\ddot{\theta}_s + C_3 + K_{ff}\delta + G_3 + B_{ff}\dot{\delta}}{M_{33}} \quad (5.11)$$

On peut l'écrire aussi de la manière suivante :

$$\ddot{\delta} = \begin{pmatrix} -\frac{M_{13}}{M_{33}} & -\frac{M_{23}}{M_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_s \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{C_3 + K_{ff}\delta + G_3 + B_{ff}\dot{\delta}}{M_{33}}}_{Q_1} \quad (5.12)$$

On la remplace dans la première et la deuxième équation ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} - \frac{M_{13}^2}{M_{33}} & M_{12} - \frac{M_{13}M_{23}}{M_{33}} \\ M_{12} - \frac{M_{13}M_{23}}{M_{33}} & M_{22} - \frac{M_{23}^2}{M_{33}} \end{pmatrix}}_{M_2} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_s \end{pmatrix} = M_2^{-1}u - M_2^{-1}h \quad (5.13)$$

avec

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

$$M_2 = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{M_{13}^2}{M_{33}} & M_{12} - \frac{M_{13}M_{23}}{M_{33}} \\ M_{12} - \frac{M_{13}M_{23}}{M_{33}} & M_{22} - \frac{M_{23}^2}{M_{33}} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - \frac{M_{13}}{M_{33}}(C_3 + K_{ff}\delta + G_3 + B_{ff}\dot{\delta}) \\ C_2 + G_2 - \frac{M_{32}}{M_{33}}(C_3 + K_{ff}\delta + G_3 + B_{ff}\dot{\delta}) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

On reporte l'équation (5.13) dans l'équation (5.12) on Obtient :

$$\ddot{\delta} = \begin{pmatrix} -\frac{M_{13}}{M_{33}} & -\frac{M_{23}}{M_{33}} \end{pmatrix} (M_2^{-1}u - M_2^{-1}h) - Q_1 \quad (5.16)$$

Les équations de mouvement sont représentées par un système en cascade piloté par les équations (5.13) et (5.16). Ce système s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = M_2^{-1}u - M_2^{-1}h \\ \ddot{\delta} = \begin{pmatrix} -\frac{M_{13}}{M_{33}} & -\frac{M_{23}}{M_{33}} \end{pmatrix} \ddot{X}_1 - Q_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

La dynamique des zéros du dirigeable avec charge suspendue est obtenue en annulant les valeurs des sorties  $x$ ,  $\theta_s$  ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans le système(5.17). Ainsi nous pouvons déduire l'expression la dynamique des zéros. Elle se traduit par l'équation différentielle suivante ( $x_6 = \dot{\delta}$ ,  $x_3 = \delta$ ) :

$$\ddot{\delta} = -b_1\dot{\delta} - b_2\delta \quad (5.18)$$

avec :

$$b_1 = \frac{B_{ff}}{A_{10}} ; b_2 = \frac{K_{ff}+G_{rf}}{A_{10}}$$

La représentation matricielle de l'équation précédente est :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

L'analyse de la nature du point d'équilibre est relativement simple pour un système linéaire en dimension deux (L'état  $\in \mathcal{R}^2$ ). Il se ramène à un problème algébrique aux valeurs propres. La nature du point d'équilibre est déterminée en calculant le spectre de la matrice qui représente le système linéaire. Ce spectre s'écrit en fonction de la trace et du déterminant.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (5.18) est donnée par :

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0 \quad (5.20)$$

La signe du discriminant  $\Delta = (tr(A))^2 - 4det(A)$  permet de caractériser la nature des valeurs propres.

Trois cas se présentent :

— 1<sup>er</sup> cas :  $\Delta = 0$

La matrice  $A$  admet une valeur propre double. Si  $det(A) > 0$  et  $tr(A) < 0$  le point d'équilibre est un nœud dégénéré stable, et si la trace est positive on a un nœud dégénéré instable.

— 2<sup>eme</sup> cas :  $\Delta > 0$

La matrice admet deux valeurs propres réelles distinctes et on a :

—  $det(A) > 0$  les deux valeurs propres sont de signes opposés, le point d'équilibre est un point selle ;

—  $det(A) > 0$  et  $tr(A) > 0$  : les valeurs propres sont positives, le point d'équilibre est un nœud instable ;

—  $det(A) > 0$  et  $tr(A) < 0$  : les valeurs propres sont négatives, le point d'équilibre est un nœud stable.

— 3<sup>me</sup> cas :  $\Delta < 0$

On a deux valeurs propres complexes et on a :

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

- $\det(A) > 0$  et  $\operatorname{tr}(A) < 0$  le point d'équilibre est un foyer stable ;
- $\det(A) < 0$  et  $\operatorname{tr}(A) > 0$  : le point d'équilibre est un foyer instable ;
- $\det(A) < 0$  et  $\operatorname{tr}(A) = 0$  : le point d'équilibre est un centre.

Le rappel théorique précédent nous permet de conclure que la dynamique interne du dirigeable avec charge suspendue est asymptotiquement stable si la trace de la matrice  $A$  est négative ( $-b_1 < 0$ ) et son déterminant est positif ( $b_2 > 0$ ), ou bien d'une manière équivalente on peut dire que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à parties réelles négatives. Nous avons calculé les valeurs de  $b_1$  et de  $b_2$  ainsi que les valeurs propres de  $A$  pour différentes valeurs de coefficient de frottement  $\kappa_e$ . Nous avons obtenu les résultats suivants :

$\kappa_e$	0	0.1	0.01
$b_1$	0	1.7	0.1775
$b_2$	17.8	17.8	17.8
$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$	4.2i	-0.8 + 4.1i	-0.0888 + 4.2190i

On observant le tableau ci-dessus nous constatons que si le coefficient d'amortissement est nul la dynamique interne est à la limite de la stabilité. Pour les deux autres valeurs du coefficient de frottement la dynamique interne est asymptotiquement stable.

Les conditions de stabilisation de la dynamique des zéros établies précédemment peuvent se traduire en termes des coefficients d'amortissements  $\kappa_e$ .

Prenons par exemple le cas où  $\Delta = 0$ .

En remplaçant  $\operatorname{tr}(A)$  et  $\det(A)$  respectivement par leurs valeurs  $b_1$  et  $-b_2$  dans l'équation (5.20) on obtient :

$$b_1^2 = -4b_2$$

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

En utilisant les expressions  $b_1$  et  $b_2$  nous obtenons le coefficient de frottement suivant :

$$\kappa_e = \frac{2\sqrt{A_{10}(K_{ff} + G_{rf})}}{K_{ff}}$$

Nous confirmerons le résultat obtenu en traçant le portrait de phase de la dynamique de zéros. L'équation différentielle(5.18) peut se mettre sous la forme d'une EDO du premier ordre(5.19). Toute trajectoire (solution) de l'équation (5.19) munie d'une condition initiale peut se représenter par une courbe dans l'espace des degrés de libertés  $(\delta, \dot{\delta})$  qu'on appelle espace de phase.

La théorie du plan de phase a été développée par Henri Poincaré [Poi81, Poi82, Poi86, Poi86]. C'est une méthode qualitative permettant d'analyser les systèmes de dimension deux. Cette méthode peut s'étendre aux systèmes de dimension supérieure, néanmoins la représentation graphique du portrait de phase se limite à l'ordre trois.

Dans les figures (5.4) et (5.5) nous représentons le portrait de phase de la dynamique interne pour  $\kappa_e = 0$  et  $\kappa_e = 0.1$ .

Dans le cas où le coefficient d'amortissement est nul les solutions de l'équation différentielle sont périodiques donc elles sont stables mais pas asymptotiquement stables.

Pour  $\kappa_e = 0.1$ , Nous constatons que lorsqu'on écarte les trajectoires de l'origine en lui imposant des conditions initiales, elles reviennent au point d'équilibre (à l'origine). Ainsi les solutions de l'équation différentielle convergent vers 0 et la dynamique des zéros a un comportement asymptotiquement stable.

Nous pouvons conclure que le comportement de la dynamique des zéros du dirigeable avec charge suspendue dépend des matériaux du câble plus précisément il dépend du coefficient d'amortissement. Pour cette raison nous avons tenu compte de l'amortissement du câble lors de l'élaboration du modèle mathématique du dirigeable-grue.

## 5.2. MODÈLE RÉDUIT ET DYNAMIQUE DES ZÉROS

---

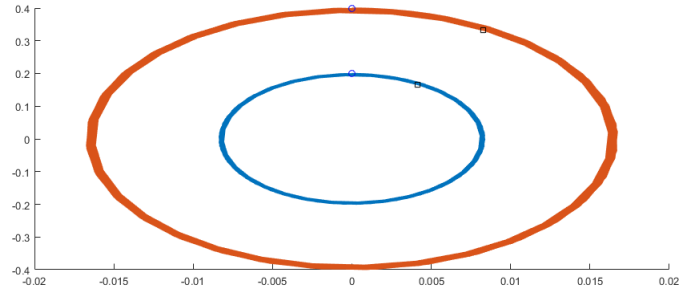


FIGURE 5.4 – Portrait de phase :  $\kappa_e = 0$ .

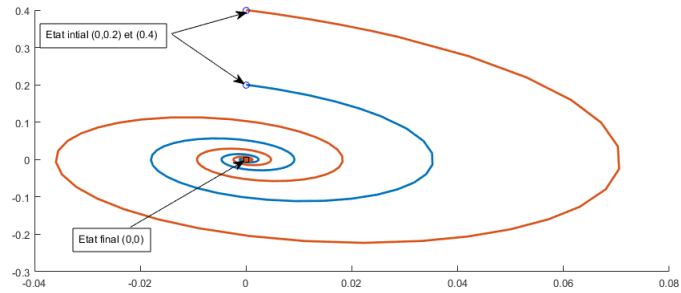


FIGURE 5.5 – Portrait de phase :  $\kappa_e = 0.1$

### Remarque 3 *Dynamique des zéros du modèle réduit*

*La détermination de la dynamique des zéros pour le modèle réduit se fait par la même démarche effectuée pour déterminer la dynamique des zéros du modèle global. Il suffit de changer l'expression de la matrice de masse  $M$  et du vecteur de Coriolis  $C$  par la matrice principale  $M_1$  et par le vecteur de Coriolis associé à cette matrice. Nous obtenons la même expression de la dynamique des zéros ainsi que le même comportement.*

Après s'être assuré de la stabilité de dynamique interne du dirigeable avec charge suspendue, on s'est fixé comme objectif de stabiliser le dirigeable au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement en utilisant le contrôleur par dynamique inverse qui est

basé sur l'hypothèse de la stabilité asymptotique de la dynamique interne du système.

### 5.3 Commande par dynamique inverse

Dans cette section nous appliquerons les techniques de commande non-linéaires pour la stabilisation de modèle "réduit" du dirigeable-grue au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement.

Considérons à nouveau les équations du mouvement qui pilotent le déplacement  $x$ , et l'angle de balancement de la charge  $\theta_s$  définis dans le système (5.17). Elle sont données par la forme matricielle compacte suivante :

$$\ddot{X}_1 = M_2^{-1}u - M_2^{-1}h \quad (5.21)$$

où :

- $X_1 = [x, \theta_s]^t$  : le vecteur d'état.
- $U = [u_1, u_2]^t$  le vecteur contrôle.
- $M_2$  une matrice inversible, ses éléments sont constitués par les éléments de la matrice principale  $M_1$ . La matrice  $M_2$  est donnée par l'équation (5.14).
- $h$  : est un vecteur qui contient les termes de Coriolis et de gravité, son expression est définie par (5.15).

L'idée principale de la commande par dynamique inverse est de trouver une loi de contrôle par retour d'état non-linéaire

$$U = f(X_1, \dot{X}_1, \delta, \dot{\delta})$$

Lorsqu'elle est substituée en (5.21), elle conduit à un système linéaire en boucle fermée.

Dans le cas du modèle du dirigeable-grue, on voit que si on choisit le contrôle  $U$  selon l'équation :

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

$$U = M_2 V + M_2^{-1} h \quad (5.22)$$

le système (5.21) se réduit à la relation :

$$\ddot{X}_1 = V \quad (5.23)$$

Le terme  $V$  représente une nouvelle entrée pour le système (5.9) qui doit encore être choisie. La loi de commande (5.22) est nommée contrôle par dynamique inverse et présente une particularité remarquable, à savoir que le "nouveau" système (5.23) est linéaire et découplé. Cela signifie que chaque entrée  $(v_i)_{1 \leq i \leq 2}$  peut être conçue pour contrôler une équation différentielle linéaire. De plus, en supposant que  $v_i$  soit en fonction des composantes de  $X_1$  et de ses dérivées, alors  $v_i$  affectera le mouvement de  $x$  indépendamment du mouvement de  $\theta_s$ .

Le vecteur  $V$  peut maintenant être conçu pour commander le système à double intégrateur découplé (5.23).

Nous avons choisi de définir  $V$  de cette manière :

$$V = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Le vecteur d'erreur  $e$  représente l'écart entre l'état  $X_1$  et l'état désiré  $X_d = [x_d, \theta_{sd}]^t$ . Stabiliser le système du dirigeable-grue vers l'état désiré revient à converger le signal d'er-

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

reur vers 0.

Le vecteur d'erreur  $e$  en boucle fermée satisfait l'équation suivante :

$$\ddot{e} = Ke \tag{5.25}$$

Avec  $K$  la matrice des gains. Elle est composée par des gains positifs  $(k_i)_{1 \leq i \leq 4}$ . Ces gains sont sélectionnés de telle sorte que le discriminant de l'équation caractéristique relative à l'équation différentielle (5.25) soit positif. Nous pouvons déduire, ainsi la stabilité exponentielle des signaux d'erreur.

En remplaçant l'expression de  $V$  dans celle de  $U$  nous obtenons le vecteur non linéaire qui assure la stabilité du modèle réduit du dirigeable-grue.

Ce vecteur contrôle "réduit"  $U$  sera appliqué sur le modèle global du dirigeable. Ces performances seront testées en utilisant des simulations numériques.

#### 5.3.1 Simulations numériques et discussions

Le vecteur commande  $U$  sera appliqué pour stabiliser le dirigeable *MC500* avec charge suspendue par un câble lors d'une mission de chargement ou de déchargement.

Nous supposons que le dirigeable soumis à une force du vent unidirectionnelle se déplacera horizontalement (suivant l'axe  $X$ ) de  $10m$  et générera un angle de balancement de  $-0.2rad$ .

La question qui se pose :

La loi de contrôle "réduit" établie est-elle capable de ramener le dirigeable à sa position initiale  $x_d = 0$  ? est-elle capable de maintenir le câble dans sa position verticale  $\theta_{sd} = 0$  en supprimant les vibrations du câble ?

Les différents paramètres caractérisant le dirigeable, le câble et la charge sont donnés ci-

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

dessous :

Paramètres	Valeurs
Masse du dirigeable $M_d$	500kg
Masse de la charge $M_s$	100kg
Masse linéique $\rho$	2.45kg/m
Rayon de la charge $r_s$	0.5m
$I_s$	$2M_s r_s^2 / 5 \text{kg.m}^2$
$I_{y_2}$	$10^{-4}$
Module de young E	$210^8 \text{Pa}$
Valeur d'amortissement $k_e$	0.1

Pour implémenter le vecteur contrôle  $U$ , les valeurs des gains utilisées sont les suivantes :

$$k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 2, k_4 = 3$$

Le vecteur contrôle  $U$  est appliqué au modèle réduit qu'on a construit en utilisant quelques simplifications. Il est également appliqué au modèle global du dirigeable avec charge suspendue. Les résultats des simulations sont représentés dans les figures suivantes :

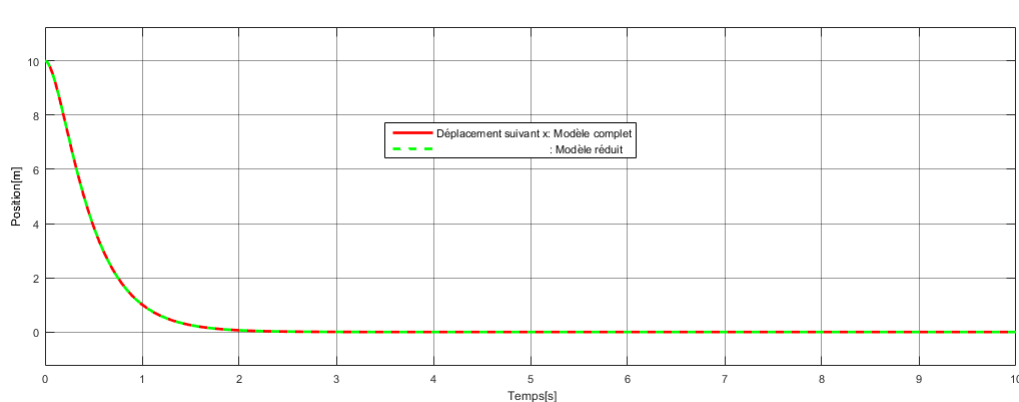


FIGURE 5.6 – Position suivant  $x$

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

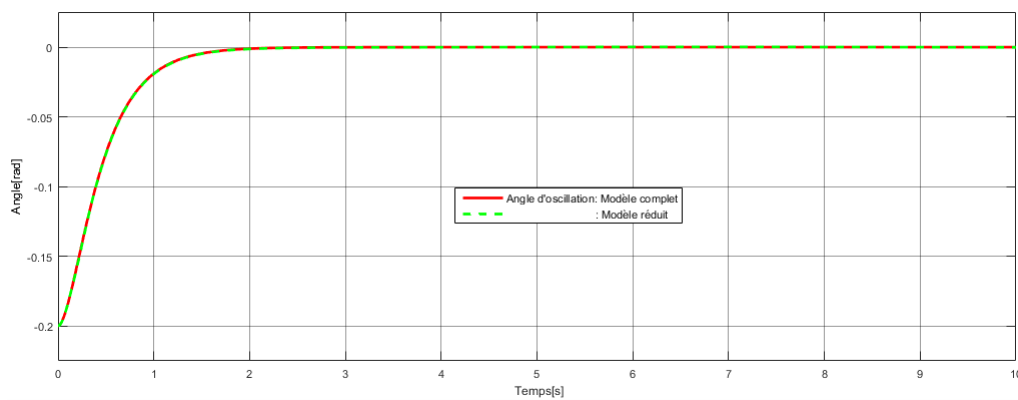


FIGURE 5.7 – Angle d'oscillation

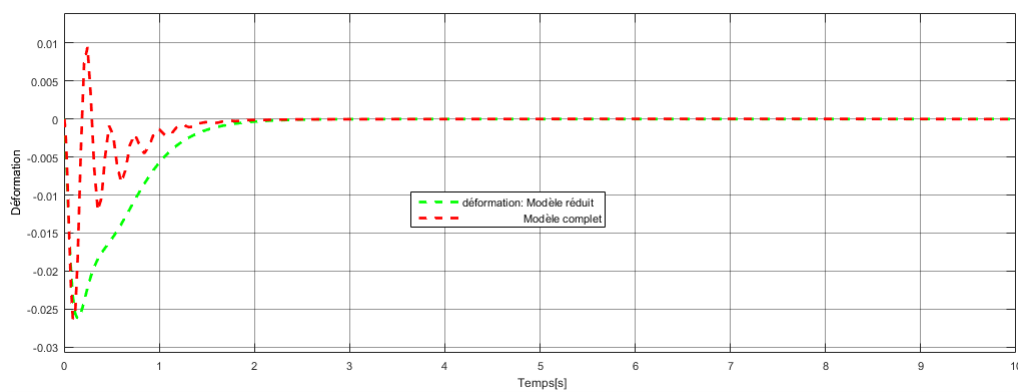


FIGURE 5.8 – La déformation du câble

La figure (5.6) montre la convergence du déplacement  $x$  vers l'état désiré  $x_d = 0$ .

Le vecteur contrôle réussi à stabiliser asymptotiquement les deux modèles : le modèle réduit et le modèle complet. La convergence vers l'état désiré était rapide (au moins de trois secondes).

Les figures (5.7) et (5.8) témoignent aussi l'efficacité du vecteur contrôle non linéaire établi.

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

Celui-ci est capable d'atténuer l'angle de balancement de la charge et les vibrations du câble pour les deux modèles avec un temps de convergence court.

Dans la suite, les simulations sont effectuées en utilisant le modèle complet du dirigeable avec le contrôleur "réduit".

Comme on a prévu, l'introduction du coefficient d'amortissement  $\kappa_e$  du câble permet de donner une stabilité à la dynamique des zéros. Pour affirmer ce résultat et montrer l'importance de tenir compte de la stabilité de dynamique des zéros, on a effectué des simulations numériques en annulant le coefficient d'amortissement.

Les résultats sont donnés dans les figures ci-dessous :

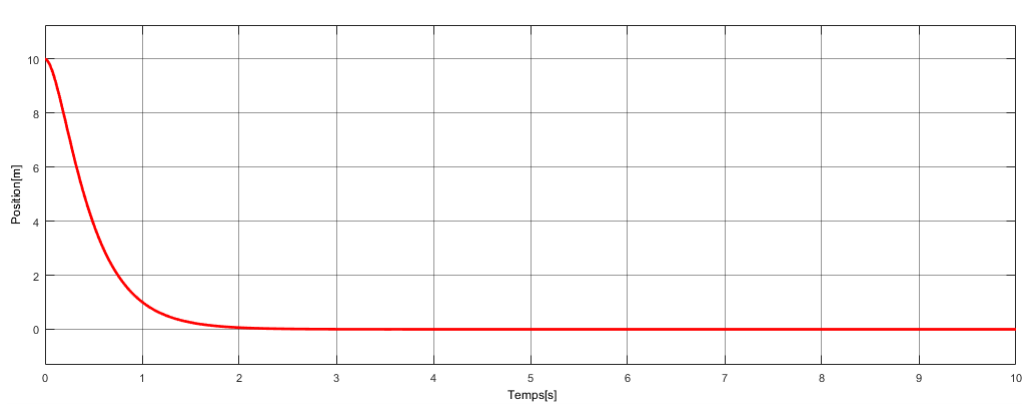


FIGURE 5.9 – Position pour  $\kappa_e=0$

La position du dirigeable converge asymptotiquement vers zéro (voir figure : (5.9)). Il en est de même pour l'angle d'oscillation (avec une légère vibration : voir figure 5.10 ). Cependant le contrôleur n'arrive pas à stabiliser la déformation. Les vibrations sont en moyenne de 0.04 (voir figure : (5.11)).

Cependant, ces vibrations peuvent être importantes si le dirigeable est soumis à une perturbation extérieure de grande amplitudes. Ces vibrations peuvent influencer la stabilité

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

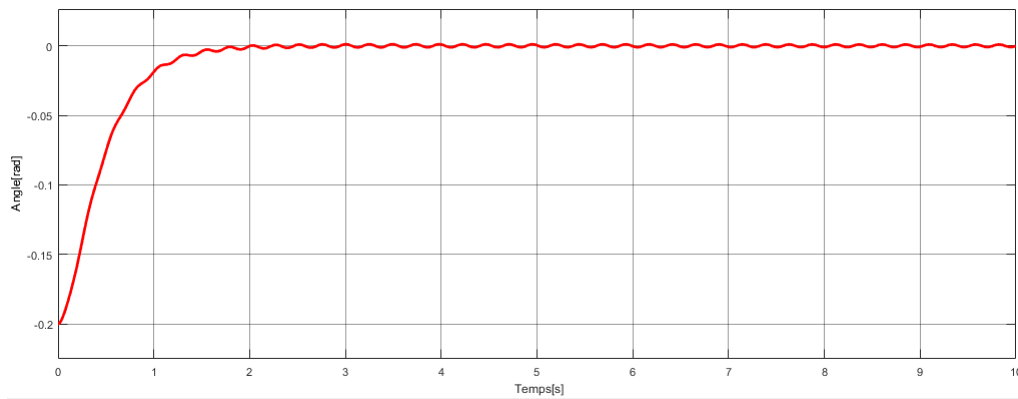


FIGURE 5.10 – Convergence de l’angle d’oscillation pour  $\kappa_e=0$

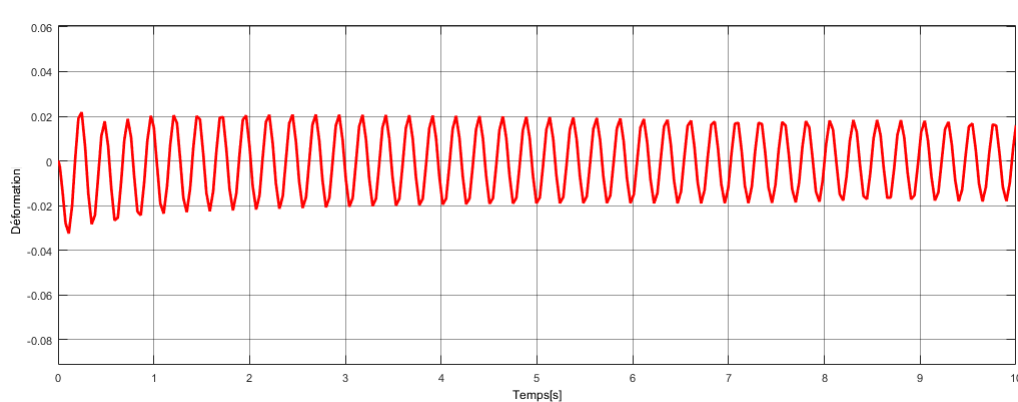


FIGURE 5.11 – Etat interne pour  $\kappa_e=0$

du dirigeable.

Cette affirmation sera validée par des simulations numériques. On va comparer la réponse des équations de mouvement du dirigeable en présence d’une perturbation du vent importante pour deux coefficients d’amortissements :  $\kappa_e = 0$  et  $\kappa_e = 0.1$

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

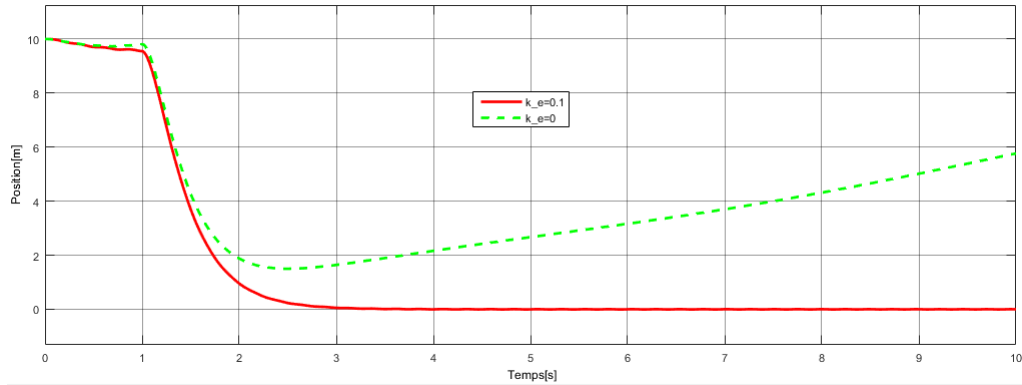


FIGURE 5.12 – Déplacement de  $x$  en présence d’une perturbation du vent( $10^5 N$ )

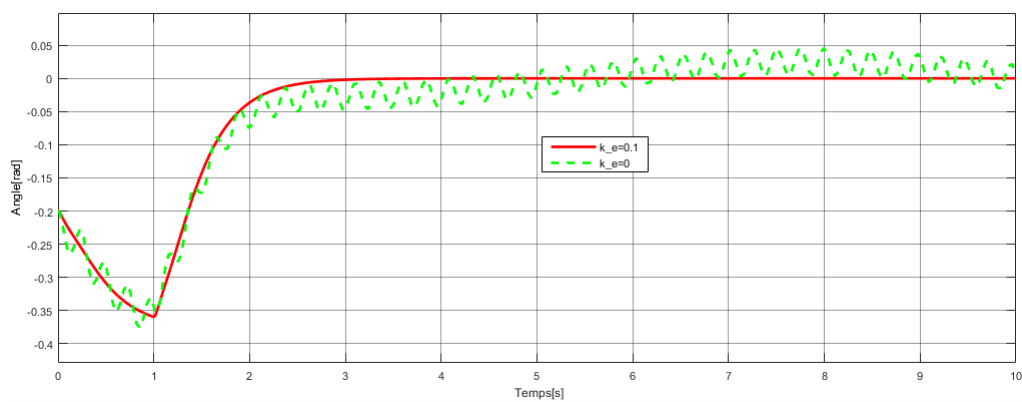


FIGURE 5.13 – Angle d’oscillation en présence d’une perturbation du vent( $10^5 N$ )

Nous voyons sur la figure (5.12) que le déplacement du dirigeable  $x$  converge asymptotiquement vers zéros avec un coefficient d’amortissement non nul. Cette stabilité est perdu quand la dynamique interne de la déformation montre des vibrations importantes ( $k_e = 0$ ). Compte à l’angle  $\theta_s$ , les vibrations légères qu’elle a montrées avec un coefficient d’amortissement nul et une perturbation extérieure nulle (voir figure (5.10)), deviennent importantes pour un coefficient d’amortissement nul en présence d’une force de vent (voir figure (5.13)).

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

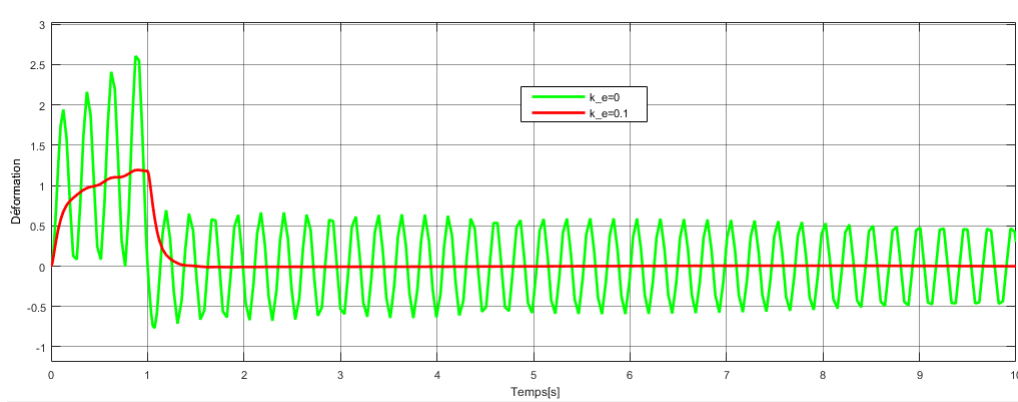


FIGURE 5.14 – Déformation en présence d’une perturbation du vent( $10^5 N$ )

La stabilité est donc également perdue.

Ces instabilités des déplacements linéaire et angulaire  $x$  et  $\theta_s$  est due à l’instabilité du dynamique interne, qui est la dynamique de la flexibilité du câble. D’ailleurs, en observant la figure (5.14) on remarque que la flexibilité du câble prend des valeurs relativement élevées entre 0s et 1s, la période où on a appliqué la force du vent et elle reste vibrer au cours du temps. Cependant, la flexibilité du câble converge asymptotiquement vers zéros avec un coefficient d’amortissement non nul.

Ses simulations prouvent l’importance de stabiliser la dynamique interne du dirigeable avec charge suspendue.

Dans le dernier test que nous présenterons, nous utiliserons les actionneurs du dirigeable pour contrôler les différentes sorties de notre système. En d’autres termes on supposera que nous n’avons pas placé un actionneur pour stabiliser l’angle de balancement et la déformation ou bien on supposera que l’actionneur cardan est en défaillance, c’est-à-dire que l’actionneur du cardan produit un couple nul. Dans ce cas l’angle d’oscillation représente une dynamique de zéros supplémentaire pour le système.

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

Dans ce test on suppose que le dirigeable fait un mouvement de translation pour atteindre  $10m$  à partir d'un état initial  $X_0 = [0, 0, 0]^t$ . Le comportement des différentes sorties est illustré dans les figures suivantes (5.15),(5.16),(5.17) :

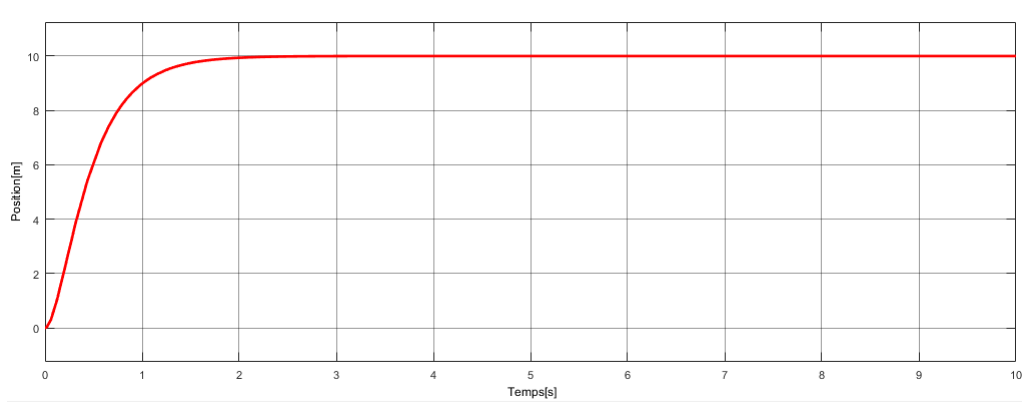


FIGURE 5.15 – Position de  $x$  en utilisant uniquement les actionneurs du dirigeable

On observe que le contrôleur arrive à amener le dirigeable à la position désirée avec un

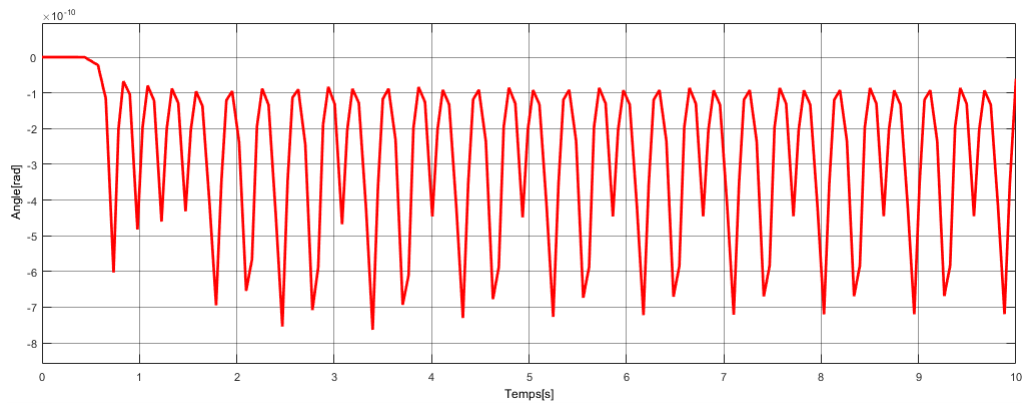


FIGURE 5.16 – Position  $\theta_s$  utilisant uniquement les actionneurs du dirigeable

angle d'oscillation et une déformation pratiquement nuls. Le câble oscille avec un angle de

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

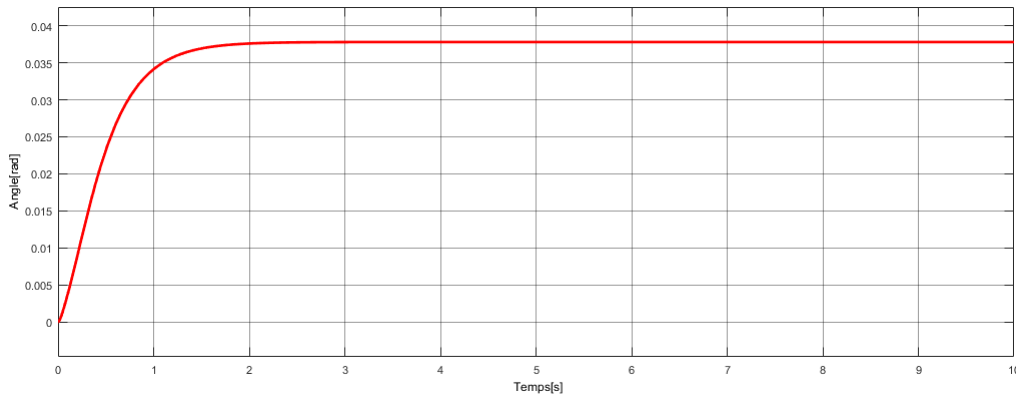


FIGURE 5.17 – Déformation  $\theta_s$  utilisant uniquement les actionneurs du dirigeable

$10^{-8}rad$  et montre une déformation d'ordre de  $10^{-6}$ .

Ces faibles amplitudes seront importantes en présence d'une force d'un rafale de vent (voir 5.17). Ainsi, ces dynamiques des zéros auront une influence sur la stabilité du dirigeable et aboutirons à des amplitudes importantes. Ce qui prouve l'intérêt de l'actionneur avec liaison cardan que nous avons ajouté.

En résumé, les simulations introduites montrent que le vecteur contrôle "réduit" permet de stabiliser le modèle global du dirigeable-grue. Les simplifications que nous avons apportées sur le modèle ont donné un vecteur plus simple à implémenter dans la pratique.

Les résultats obtenus sont prometteurs en termes de stabilisation du déplacement  $x$ , de la minimisation d'oscillation de la charge et des vibrations du câble. Cependant la méthode académique utilisée se base sur la connaissance exacte des paramètres inertiels du système et la mesure instantanée des paramètres du vecteur d'état. Cette méthode conduit à des lois de contrôle complexes et difficiles à exploiter dans la pratique. Pour contourner cette

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

première limitation nous avons construit un vecteur contrôle "réduit" relativement simple après quelques simplifications effectuées sur le modèle global.

La deuxième limitation est la mesure des différents paramètres telle que : la position du dirigeable et la mesure de l'angle de balancement de la charge. Nous pourrions remédier à cette problématique en utilisant des capteurs tels que les accéléromètres. L'intégration des mesures fournies par ces derniers permet de positionner le dirigeable et d'obtenir la valeur du déplacement  $x$ . On peut aussi utiliser un GPS 3D qui pourra pallier aux erreurs d'intégration des accéléromètres et donner des positions plus précises. Les vibrations issues des rotations des actionneurs du dirigeable engendrent des erreurs de mesure fournies par les capteurs. Ce qui rend le vecteur commande moins robuste. L'étude de la robustesse de ce vecteur commande est indispensable vis à vis des incertitudes paramétriques et des forces extérieures qui peuvent affecter le dirigeable telle que les rafales de vent.

Pour donner plus de robustesse à notre loi de contrôle et tenir compte des incertitudes des paramètres du modèle, nous pouvons considérer la loi de contrôle de cette manière [ASADA, H.etE.SLOTINE, 1986] :

$$U = \hat{M}_2 V + M_2^{-1} \hat{h} \quad (5.26)$$

$\hat{M}_2, \hat{h}$  sont les valeurs nominales de  $M_2$  et  $h$ .

A partir des équations (5.21) et (5.26) on aura :

$$\ddot{X}_1 = M_2^{-1} \hat{M}_2 V + M_2^{-1} \underbrace{(\hat{h} - h)}_{\Delta h} \quad (5.27)$$

Elle s'exprime aussi par :

$$\ddot{X}_1 = V + \underbrace{(M_2^{-1} \hat{M}_2 - I)}_E V + M_2^{-1} (\hat{h} - h) \quad (5.28)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_T$

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

La commande  $V$  doit être modifiée pour compenser les erreurs d'incertitudes tout en stabilisant le système. Pour ce faire nous proposons d'utiliser la méthode qui se basera sur la méthode de Lyapunov [LEITMANN, G., 1981]

Nous décrivons brièvement les étapes de cette méthode. Nous commencerons au préalable par émettre certaines hypothèses à respecter :

- Hypothèse 1 : Les accélérations désirées  $\ddot{x}_d$  et  $\ddot{\theta}_{sd}$  sont finies autrement dit :

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \begin{pmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{\theta}_{sd} \end{pmatrix} \right\| < \mu$$

- Hypothèse 2 : L'erreur de l'estimation est petite, c'est à dire :

$$\| E \| = \| M_2^{-1} \hat{M}_2 - I \| < \alpha$$

Cette hypothèse est la plus délicate et nécessite l'estimation de la matrice  $M_2$ . Notons que la matrice  $M_2$  est symétrique et définie positive. On a donc le résultat suivant :

$$\lambda_{min} \leq \| M_2 \| \leq \lambda_{max}$$

avec  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$  les valeurs propres de la matrice  $M_2$

En prenant  $\hat{M}_2 = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} I$ . On pourra montrer que :

$$\| E \| \leq \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \alpha < 1$$

- Hypothèse 3 : L'erreur de l'estimation du terme  $\Delta h = \hat{h} - h$  est bornée par une fonction connue et bornée en temps  $\Theta(e, t)$  en d'autres termes :

$$\| \Delta h \| < \Theta(e, t)$$

La détermination de  $V$  s'effectuera en 4 étapes :

### 5.3. COMMANDE PAR DYNAMIQUE INVERSE

---

— Etape 1 : Dans un premier temps on définira le système d'erreur associé :

$$\dot{e} = Ae + B(V + T - \ddot{X}_1^d) \quad (5.29)$$

avec : 
$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_1^d \\ \dot{X}_1 - \dot{X}_1^d \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

Une fois écrit le modèle du système d'erreur, nous choisissons le vecteur  $V$  de la manière suivante :

$$V = \dot{X}_1^d - \underbrace{\begin{pmatrix} \text{diag}(k_1, k_2) & 0 \\ 0 & \text{diag}(k_1, k_2) \end{pmatrix}}_K e + \Delta V$$

Nous avons ajouté le terme  $\Delta V$  à l'entrée  $V$  pour compenser l'effet de l'incertitude  $T$ . Dans une situation idéale où  $T = 0$ , nous aurions  $\Delta V = 0$ , la loi de contrôle se réduit au cas de la commande linéarisante par dynamique inverse sans effet de l'incertitude.

Nous aurons alors :

$$\dot{e} = \bar{A}e + B(\Delta V + \bar{T}) \quad (5.30)$$

où

$$\bar{A} = A - K$$

$$\bar{T} = E\Delta V + E(\dot{X}_1^d - Ke) + M_2\Delta h$$

— Etape 2 : On définit une fonction  $\rho(e, t)$  qui satisfait à :

$$\|\Delta V\| < \rho(e, t) \text{ et } \|\Delta \bar{T}\| < \rho(e, t)$$

A partir de l'expression de  $\bar{T}$  et des hypothèses 1 – 3 on aura :

$$\rho(e, t) = \frac{1}{1 - \alpha} (\alpha\mu - \|K\| \|e\| + \lambda_{max}\Theta(e, t))$$

## 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

- Etape 3 : On choisit une matrice  $P$  symétrique et définie positive, solution de l'équation :

$$\bar{A}^t P + P \bar{A} + I = 0$$

- Etape 4 : on peut choisir la commande  $\Delta V$  de cette manière :

$$\Delta V = \begin{cases} -\rho(e, t) \frac{B^t P e}{\|B^t P e\|} & \text{si } \|B^t P e\| \neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Le terme  $\Delta V$  donne plus de robustesse à la loi de contrôle, déterminé par la méthode de la dynamique inverse. Cependant la qualité du vecteur commande se dégrade quand il atteint sa marge de robustesse et quand le système est soumis à des perturbations extérieures aléatoires qui dépassent les capacités du contrôleur robuste.

La méthode de la dynamique inverse (même en rajoutant de la robustesse) pourra être appliquée pour stabiliser le dirigeable dans des conditions météorologiques favorables et sera difficile à appliquer en présence d'un rafale de vent.

Pour cela nous proposerons dans la section suivante une technique de commande qui traite le système à commander comme une boîte noire et qui ne nécessite pas la connaissance de la totalité du modèle. On parle de la technique de commande "sans modèle".

Dans ce qui suit nous expliquons le principe de cette commande et nous l'appliquons pour stabiliser le dirigeable au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement.

## 5.4 Commande sans Modèle

### 5.4.1 Principe et aperçu théorique

Généralement les lois de commande sont développées se basant sur la connaissance des équations mathématiques du modèle à contrôler. L'application de ces lois de contrôle est

#### 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

difficile dans la pratique. Ces algorithmes de contrôle demandent la connaissance précise du modèle alors que dans l'étape de modélisation on fait souvent des hypothèses simplificatrices. De ce fait le modèle issu n'est jamais complet. Pour ces différentes raisons la commande sans modèle ou à modèle restreint trouve une marge d'application importante. La loi de commande issue de la théorie de commande sans modèle offre une marge de robustesse par rapport aux perturbations extérieures qui affectent le processus à contrôler et tient compte des incertitudes paramétriques et des erreurs de modélisation.

Le principe général de la commande sans Modèle est décrit dans la figure 5.18.

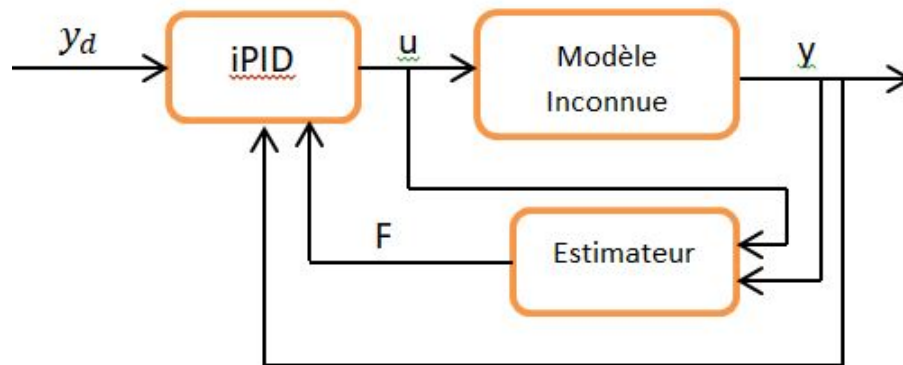


FIGURE 5.18 – Valeurs des déplacements

La notion de commande sans modèle a été introduite par Fliess dans [FJ08]. L'idée principale de cette commande est d'utiliser une modélisation locale pour décrire les équations entrée/sortie du processus à contrôler. Le modèle ultra-local obtenu permet d'estimer les différents paramètres d'un système complexe sur un petit laps de temps.

Nous présentons la théorie de la commande sans modèle pour un système avec une seule entrée et une seule sortie(SISO) qui pourra être généralisée pour un système multi-entrées multi-sorties(MIMO).

#### 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

Le modèle mathématique issu d'une description physique qui décrit un système à contrôler, supposé inconnu (linéaire ou non-linéaire) se traduit dans la théorie de commande sans modèle par l'équation différentielle :

$$E(y, \dot{y}, \dots, \dot{y}^\nu, u, d) = 0 \quad (5.31)$$

Cette dernière équation est substituée par un modèle ultra-local valable au cours d'un laps de temps :

$$y^{(n)} = F + \alpha u \quad (5.32)$$

où

- $y^{(n)}$  est la dérivée de  $y$  à l'ordre  $n \geq 1$ .
- $\alpha$  est un paramètre fixé par l'utilisateur de telle sorte que les valeurs numériques de  $y^{(n)}$  et  $\alpha u$  aient la même grandeur.
- $F$  est une fonction qui englobe les autres informations supposées inconnues pour le système  $y$  compris les erreurs de la modélisation et les signaux exogènes qui peuvent affecter le système à contrôler. Cette fonction sera estimée à partir de la connaissance de  $u$  et  $y$

**Remarque 4** *L'entier de dérivation  $n$  sera fixé par l'utilisateur.  $n$  n'est pas nécessairement égal à  $\nu$  défini dans l'équation (5.31) en se référant à [FJ13], l'ordre de dérivation  $n$  sera choisi lors de l'application de la commande sans modèle. Il sera égal 1 ou bien 2*

L'idée intéressante dans la commande sans modèle se résume dans le regroupement des différents paramètres du modèle dans la fonction  $F$  qui sera estimée en utilisant des dérivés algébriques sur un petit laps de temps. Ce qui explique le nom de cette commande :

## 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

"Commande sans modèle". L'utilisation du modèle ultra-local nous explique que la connaissance d'un modèle mathématique exact n'est pas nécessaire.

La valeur numérique de  $F$  sera déterminée de manière à éviter toute boucle algébrique. Ceci se réalise en appliquant un retard à l'entrée du système, elle sera donnée par :

$$F = [y^{(n)}]_e - \alpha u \quad (5.33)$$

Fliess et al [JMF08] proposent d'utiliser un contrôle intelligent en boucle fermée qu'ils nomment Proportionnelle Intégrale-Dérivé intelligent (iPID) et qui s'écrit ainsi :

$$u = \frac{1}{\alpha} (-F + y_d^{(n)} - K_p e - K_d \dot{e} - K_I \int e) \quad (5.34)$$

où  $y_d$  est la trajectoire désirée obtenue par le concept de platitude [FLMR92],

$e = y - y_d$  le signal d'erreur et les  $K$  sont les gains de réglage.

### 5.4.2 Les techniques d'estimation algébrique

L'estimation des dérivées d'un signal a attiré l'attention des scientifiques dans nombreux domaines tel que l'automatique, le traitement de signal... Les méthodes d'estimation peuvent être classées en deux catégories : "une méthode modèle" et "une méthode signal". La première est la technique d'observateur introduite par Luenberger [Lue71] et elle se base sur la connaissance des équations du processus. La deuxième est une alternative de la méthode modèle, elle estime les dérivées successives d'un signal sans la connaissance des équations mathématiques du modèle. Cette méthode connue sous le nom de différenciateur algébrique [FSR03, SRF04, LGJLC05], repose sur le développement en séries de Taylor tronquées à un ordre bien déterminé. La transformée de Laplace permet d'écrire l'équation obtenue dans le domaine opérationnel. Ensuite, des dérivations opérationnelles et des manipulations algébriques convenables permettent de passer au domaine temporel et de déduire

## 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

les coefficients du développement de Taylor, en particulier les dérivées du signal.

Dans le paragraphe suivant les outils mathématiques nécessaires pour comprendre la technique d'estimation algébrique seront présentés.

### 5.4.2.1 Outils Mathématiques

On considère un signal analytique  $f : R \rightarrow R$  infiniment différentiable.

Le développement en séries de Taylor de la fonction  $f$  au voisinage d'un point  $a$  est donné par :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(a) \frac{(t-a)^i}{i!} \quad (5.35)$$

La transformée de Laplace d'une fonction  $f$  est donnée par :

$$L[f] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (5.36)$$

La transformée de Laplace de la dérivée  $n^{im}$  du signal  $f$  s'écrit :

$$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} \quad (5.37)$$

La multiplication de  $F(p)$  par  $p^\alpha$  ( $\alpha \in N$ ) correspond à une suite d'intégrales dans le domaine temporel, et on a :

$$L^{-1}[p^{-\alpha} F(p)] = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^\alpha \quad (5.38)$$

On peut l'exprimer par la convolution de l'intégrale de cette manière :

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^\alpha = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \alpha \geq 1 \quad (5.39)$$

Dans le cas où  $F(p)$  est une constante  $c$ , on a alors :

$$L^{-1}[p^{-\alpha} c] = c \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \quad (5.40)$$

## 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

Nous rappelons que la dérivée par rapport à  $p$  est conforme à la multiplication par  $-t$  dans le domaine temporel. Pour un ordre  $n$  quelconque, ceci se traduit par le résultat suivant :

$$L^{-1}\left[\frac{d^n F(p)}{dp^n}\right] = (1)^n t^n f(t), n \geq 0 \quad (5.41)$$

Des équations (5.38), (5.39) et (5.40) on déduit le résultat suivant :

$$L^{-1}\left[p^{-\alpha} \frac{d^n F(p)}{dp^n}\right] = \frac{(-1)^n}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^n f(\tau), \alpha \geq 1, n \geq 0 \quad (5.42)$$

Nous avons ainsi défini le cadre mathématique qui nous permet d'introduire la méthode d'estimation des dérivées par l'approche algébrique.

### 5.4.2.2 Dérivateur algébrique

Les résultats introduits dans cette section font référence aux travaux [CDNFM09, MJF09, MJF07, VDNFM08]

Soit  $y(t) : R^+ \rightarrow R$  une fonction de classe  $C^\infty$  dont on désire estimer les dérivées successives. L'idée principale des estimateurs algébriques consiste à estimer le coefficient  $y^{(n)}(0)$  du développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N_1$  de  $y(t)$ .

Commençons par réécrire le développement en séries de Taylor (5.35) pour  $a = 0$  tronqué à l'ordre  $N_1$  :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N_1} y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!} \quad (5.43)$$

Dans le but d'isoler la dérivée cible, des manipulations algébriques sur l'équation ci-dessus sont effectuées afin d'annuler les termes où  $i \neq N_1$ . A l'aide de la transformée de Laplace appliquée à l'équation (5.43) et l'équation (5.40) nous avons :

$$Y(p) = \sum_{i=0}^{N_1} \frac{y^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \quad (5.44)$$

#### 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

On remarque que chaque dérivée de l'équation (5.44) est divisée par des puissances de  $p$ . Ce qui implique que des multiplications par des exposants  $p$  et des dérivations par rapport à  $p$  permettent d'écrire la dérivée cible uniquement en fonction de  $y(t)$ . Pour atteindre ce résultat on multiplie l'équation (5.44) par  $p^{N+1}$  et on applique l'opérateur différentiel linéaire [MJF09] suivant :

$$\Pi_k^{N_1, n} = \frac{d^{n+k}}{dp^{n+k}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{d^{N_1-n}}{dp^{N_1-n}}, k \in N \quad (5.45)$$

On obtient le résultat suivant :

$$\Pi_k^{N_1, n}(p^{N+1}Y(p)) = \frac{(-1)^{n+k}(N_1 - n)!(n + k)!}{p^{n+k+1}} y^{(n)}(0) \quad (5.46)$$

En multipliant l'équation précédente par  $p^{-\nu}$  ( $\nu = N_1 + 1 + \mu, \mu > 0$ ) et en passant au domaine temporel pour une fenêtre de taille  $T$ , On obtient :

$$L^{-1}[p^{-\nu} \Pi_k^{N_1, n}(p^{N+1}Y(p))] = \frac{(-1)^{n+k}(N_1 - n)!(n + k)!T^{\nu+n+k}}{(\nu + n + k)!} y^{(n)}(0) \quad (5.47)$$

Par application des équations (5.38) et (5.39) de l'outil mathématique on obtient l'estimateur suivant :

$$y_{N_1}^{(n)}(0, k, \nu) = \frac{(-1)^{n+k}(\nu + n + k)!}{(n + k)!(N_1 - n)!T^{\nu+n+k}} \int_0^T \Pi(\tau_1) y(\tau_1) d(\tau_1) \quad (5.48)$$

où

$$\Pi(\tau) = \sum_{i=0}^{N_1-n} C_i^{N_1-n} \frac{(N_1 + 1)!}{(n + i + 1)!} \sum_{j=0}^{N_1+k} C_j^{n+k} \frac{(n + 1)!}{j - k + 1} \frac{(T - \tau)^{\nu+k-j-2} (-\tau)^{i+j}}{(\nu + k - j - 2)!} \quad (5.49)$$

L'estimateur (5.48) permet d'estimer la dérivée  $n^{ime} y_{N_1}^{(n)}(0, k, \nu)$  en 0 paramétrée par  $\nu$  et  $k$  dont l'expression a été calculée par le développement tronqué de Taylor à l'ordre  $N_1$ .

Ce dérivateur algébrique est utile pour calculer l'estimée de  $F$  pour mettre en œuvre la

## 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

commande sans modèle. L'implémentation de cet estimateur nécessite à approcher la valeur de l'intégrale en utilisant les méthodes d'analyse numérique telle que la méthode de Simpson, Trapèze...

### 5.4.2.3 Exemples estimation de la dérivée première

On approxime le signal analytique  $y$  par le polynôme de Taylor tronqué à l'ordre 1, il peut être exprimé par :

$$y(t) = a_0 + a_1 t \quad (5.50)$$

$a_0$  et  $a_1$  représentent l'estimateur du signal et sa dérivée. En appliquant les opérations de calculs opérationnelles, on obtient :

$$Y(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} \quad (5.51)$$

On cherche à estimer  $a_1$ , pour cela on va éliminer le paramètre  $a_0$ . En d'autres termes, ceci revient à multiplier l'équation (5.51) par  $p$  puis on dérive par rapport à  $p$ . On obtient :

$$Y(p) + p \frac{dY(p)}{dp} = -\frac{a_1}{p^2} \quad (5.52)$$

On multiplie (5.52) par  $p^{-2}$  pour obtenir des intégrales lorsque on revient au domaine temporel :

$$p^{-2}Y(p) + p^{-1} \frac{dY(p)}{dp} = -p^{-4}a_1 \quad (5.53)$$

Ainsi en revenant au domaine temporel l'estimation de la première dérivée sera :

$$\hat{y} = \frac{6}{T^3} \int_0^T (T - 2t)y(T)$$

Rappelons que les dirigeables ont une forte prise au vent et la tâche de la modélisation est complexe, de plus le modèle obtenu est non linéaire, pleinement couplé ce qui rend l'élaboration d'un contrôleur à base d'un modèle difficile. La commande sans modèle pourra être

une solution efficace pour stabiliser le dirigeable pendant la phase critique de chargement et déchargement en présence d'un rafale de vent. Le vecteur commande pour la stabilisation du dirigeable avec charge suspendue sera détaillé dans la section suivante :

### 5.4.3 Commande sans modèle pour un dirigeable grue

Dans cette section nous supposons que le modèle du dirigeable est inconnu. Les informations qui sont disponibles sont :

- Un actionneur du dirigeable  $u_1$  qui pilote le déplacement  $x$ .
- Un deuxième actionneur  $u_2$  qui contrôle l'angle de balancement  $\theta_s$ .

Le principe de la commande sans modèle nous permet d'utiliser une modélisation locale, en associant à l'équation (5.21) le modèle ultra-local suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = F_1 + \alpha_1 u_1 \\ \ddot{\theta}_s = F_2 + \alpha_2 u_2 \end{cases} \quad (5.54)$$

Les  $F_1$  et  $F_2$  dans notre modèle représentent :

$$F_1 = \bar{M}_{11}^2 u_2 - \bar{M}_{11}^2 h_1 - \bar{M}_{12}^2 h_2 + F_{1exo}$$

$$F_2 = \bar{M}_{12}^2 u_1 - \bar{M}_{12}^2 h_1 - \bar{M}_{22}^2 h_2 + F_{2exo}$$

avec :  $\bar{M}_{ij}^2$  sont les composantes de l'inverse de la matrice  $M_2$ .  $h_1$  et  $h_2$  les composantes du vecteur  $h$  (voir équation (5.21)), il contiennent les termes gyroscopiques et inertiels.

Les grandeurs  $F_1$  et  $F_2$  englobent non seulement les informations supposées inconnues du modèle mais également les perturbations exogènes  $F_{exo}$  qui peuvent affecter le dirigeable. Ils seront estimés sur un court laps du temps. D'où la robustesse et le caractère d'anticipation intrinsèque qui sont offerts par cette loi de commande.

#### 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

Conformément à la première version de la commande sans modèle les estimées de  $F_1$  et  $F_2$  à l'itération  $k$ , s'écrivent en fonction de l'estimée de  $\ddot{x}$  et  $\ddot{\theta}_s$  à l'itération  $k$  et des estimées des commandes  $u_1$  et  $u_2$  à l'itération  $k - 1$ . Elles sont données par :

$$\begin{cases} F_{1est} = [\ddot{x}]_e - \alpha_1 u_1 \\ F_{2est} = [\ddot{\theta}_s]_e - \alpha_2 u_2 \end{cases} \quad (5.55)$$

Les estimées  $[\ddot{x}]_e$  et  $[\ddot{\theta}_s]_e$  sont obtenues par les estimateurs algébriques cités dans la section précédente.

Dans l'article de Fliess et al [FJ13] une autre méthode pour estimer la fonction  $F$  (définie dans l'équation (5.33)) est établie. Nous avons adopté cette dernière méthode pour calculer l'estimation de  $F$ .

Dans ce qui suit nous décrivons les principales étapes pour déterminer l'estimée de  $F$  afin de déduire les estimées  $F_{1est}$  et  $F_{2est}$ .

En prenant  $n = 1$  dans l'équation (5.33), cette dernière est donnée dans le domaine opérationnel par :

$$pY(p) = \frac{\Theta}{p} + \alpha U + y(0) \quad (5.56)$$

avec  $\Theta$  une constante. Dans l'objectif de se débarrasser de la condition initiale  $y(0)$  on dérive l'équation (5.56) par rapport à  $p$ , on obtient :

$$Y(p) + p \frac{dY(p)}{dp} = -\frac{\Theta}{p^2} + \alpha \frac{dU}{dp} \quad (5.57)$$

En multipliant l'équation (5.56) par  $s^{-2}$  et en utilisant la relation (5.39) pour revenir au domaine temporel, on obtient l'estimée  $F_{est}$  de la fonction  $F$  qui s'écrit :

$$F_{est}(t) = -\frac{6}{\tau^3} \int_{t-\tau}^t [(\tau - 2\varsigma)y(\varsigma) + \alpha\varsigma(\tau - \varsigma)u(\varsigma)]d\varsigma \quad (5.58)$$

#### 5.4. COMMANDE SANS MODÈLE

---

En procédant de la même manière, nous pouvons déterminer l'estimée de  $F$  pour  $n = 2$  [DMJF<sup>+</sup>13, MDNF<sup>+</sup>17]

$$F_{est}(t) = -\frac{60}{\tau^5} \int_{t-\tau}^t (\tau^2 + 6\zeta^2 - 6\tau\zeta)y(\zeta)d\zeta - \frac{30\alpha}{\tau^5} \int_{t-\tau}^t \zeta(\tau - \zeta)^2 \zeta^2 u(\zeta)d\zeta \quad (5.59)$$

avec  $\tau$  une constante positive petite.

Nous pouvons ainsi déduire les expressions des estimées  $F_{1est}$  et  $F_{2est}$  des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  qui seront données par :

$$\begin{cases} F_{1est}(t) = -\frac{60}{\tau^5} \int_{t-\tau}^t (\tau^2 + 6\zeta^2 - 6\tau\zeta)x(\zeta)d\zeta - \frac{30\alpha}{\tau^5} \int_{t-\tau}^t \zeta(\tau - \zeta)^2 \zeta^2 u_1(\zeta)d\zeta \\ F_{2est}(t) = -\frac{60}{\tau^5} \int_{t-\tau}^t (\tau^2 + 6\zeta^2 - 6\tau\zeta)\theta_s(\zeta)d\zeta - \frac{30\alpha}{\tau^5} \int_{t-\tau}^t \zeta(\tau - \zeta)^2 \zeta^2 u_2(\zeta)d\zeta \end{cases} \quad (5.60)$$

Les valeurs approchées de  $F_{1est}$  et  $F_{2est}$  seront déterminées en utilisant la méthode d'analyse numérique du Trapèze.

En substituant les valeurs de  $F_{1est}$  et  $F_{2est}$  dans le système (5.60) nous déduisons les valeurs des actionneurs  $u_1$  et  $u_2$ , qui seront données par :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\alpha_1} (-F_{1est} + \ddot{x}_d - k_1 e_1 - k_2 \dot{e}_1 - k_3 \int e_1) \\ u_2 &= \frac{1}{\alpha_2} (-F_{2est} + \ddot{\theta}_{sd} - k_4 e_2 - k_5 \dot{e}_2 - k_6 \int e_2) \end{aligned}$$

**Remarque 5** Nous avons considéré  $u_2$  et  $u_1$  comme des perturbations exogènes qui impactent respectivement les sorties  $\ddot{x}$  et  $\ddot{\theta}_s$ . Pour cela nous avons adopté la représentation ultra-locale définie par (5.54). Ainsi nous pourrions aussi adopter le modèle ci-dessous comme un modèle ultra-local pour le dirigeable-grue :

$$\begin{pmatrix} \dot{\ddot{x}} \\ \dot{\ddot{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

Nous avons ainsi établi un vecteur commande qui assure la stabilisation du déplacement  $x$  et l'angle d'oscillation  $\theta_s$  par la théorie de la commande sans modèle. Ce résultat peut se généraliser facilement en incluant les autres degrés de liberté du dirigeable tels que les déplacements suivants  $y$  et  $z$  et les rotations suivants les angles d'Euler  $\phi, \theta$  et  $\psi$ .

Nous présentons dans ce qui suit des simulations numériques pour valider les performances du vecteur contrôle proposé.

### 5.5 Simulations Numériques et discussions

#### 5.5.1 Scénario 1 : CSM dans des conditions idéaux

Les premiers tests sont effectués dans le cas idéal, c'est à dire nous considérons que le dirigeable n'est pas soumis à une rafale de vent. Nous supposons que le modèle obtenu dans le chapitre 1 est exact et qu'il n'y a pas d'incertitudes paramétriques.

Les différentes valeurs utilisées dans les simulations numériques sont résumées dans le tableau suivant :

Paramètres	Valeurs
$\alpha_1$	300
$\alpha_2$	100
$k_1$	4
$k_2$	3
$k_4$	2
$k_5$	3

La commande sans modèle arrive à ramener le dirigeable à sa position d'équilibre après qu'il se soit déplacé de  $10m$  (voir figure (5.19)). Elle réussit aussi à éliminer l'oscillation de la charge et maintient le câble dans sa position verticale(voir figure (5.20)). Nous consta-

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

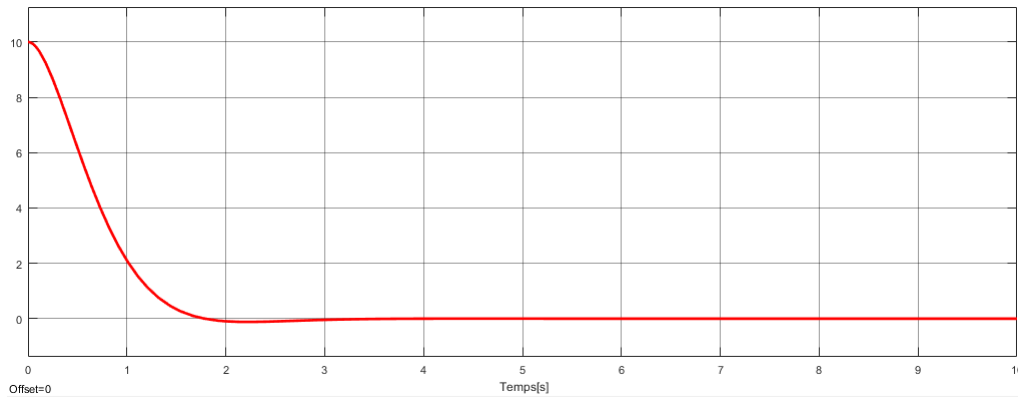


FIGURE 5.19 – Convergence du déplacement avec CSM

tons également, que la commande sans modèle arrive à atténuer les vibrations du câble en stabilisant la variable de déformation  $\delta$  à 0 (voir figure (5.21)).

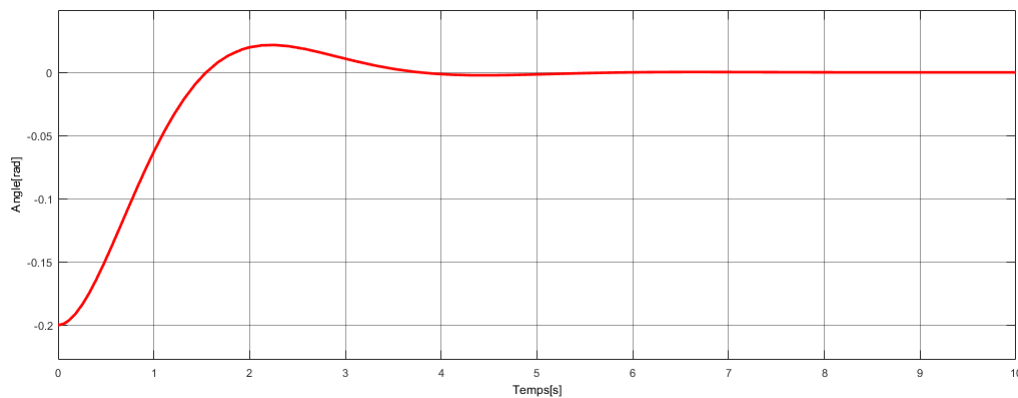


FIGURE 5.20 – Convergence de l'angle d'oscillation avec CSM

La stabilisation des différentes grandeurs était rapide. Le déplacement  $x$  converge asymptotiquement vers 0 pour un temps qui ne dépasse pas les 4s, l'angle et la déformation

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

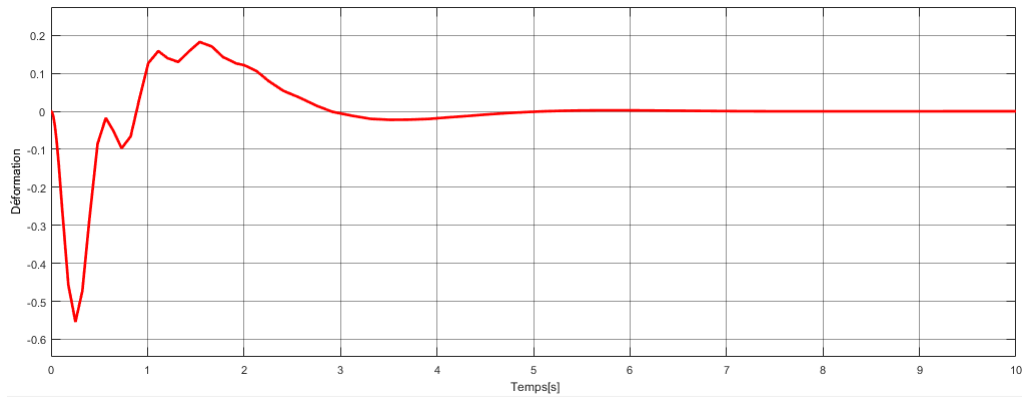


FIGURE 5.21 – Convergence de la déformation avec CSM

convergent vers zéros au bout de 4s.

Les résultats donnés par la loi de contrôle à base du modèle et la commande sans modèle sont proches dans des conditions idéales en terme de temps de convergence et de la stabilisation des sorties vers l'état désiré. On pourra ainsi utiliser les deux lois de contrôle pour stabiliser le dirigeable au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement dans un cas idéal, en absence d'une perturbation exogène.

Comme mentionné le coefficient d'amortissement permet de donner un comportement asymptotiquement stable au modèle interne. Dans l'objectif de tester la CSM pour un système qui a une dynamique stable, nous avons appliqué cette dernière en annulant le coefficient d'amortissement. Nous avons obtenu les résultats suivants :

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

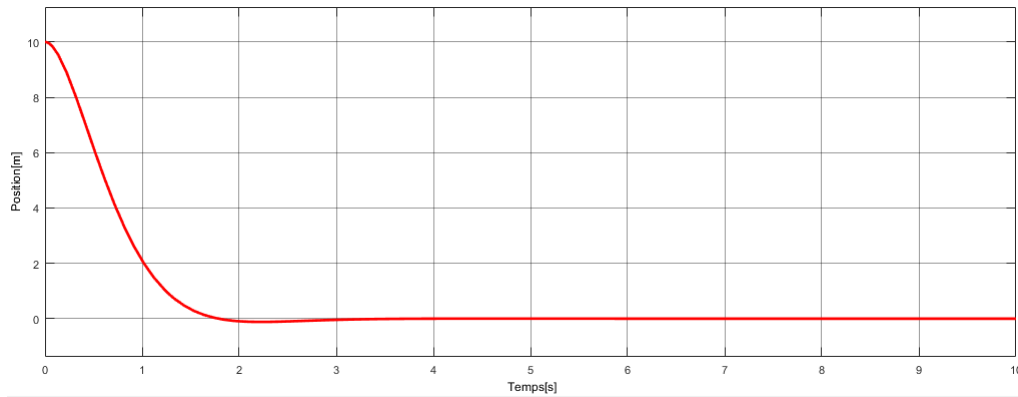


FIGURE 5.22 – Convergence du déplacement en utilisant la CSM pour  $\kappa_e = 0$

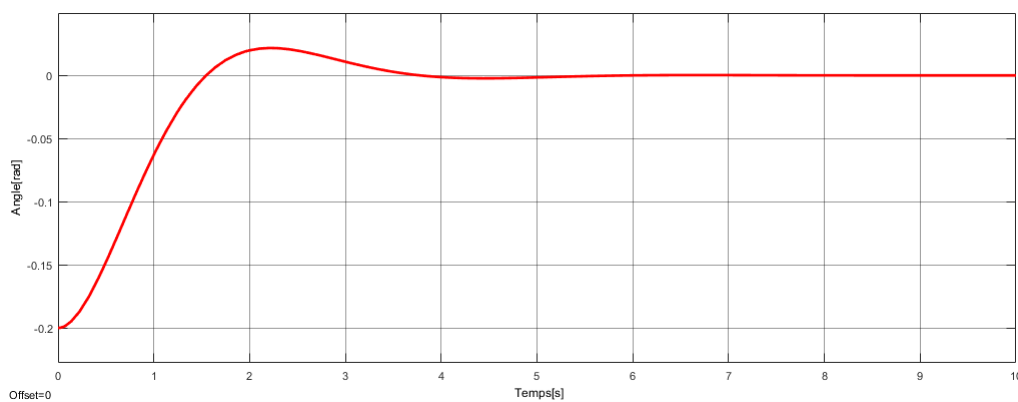


FIGURE 5.23 – Convergence de l'angle d'oscillation en utilisant CSM pour  $\kappa_e = 0$

Les simulations montrent que les états actionnés convergent asymptotiquement vers 0 avec un temps court (voir figure (5.22) et (5.23)). Cependant, nous remarquons que l'amplitude de la dynamique interne décroît au court du temps. La convergence aura lieu tardivement

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

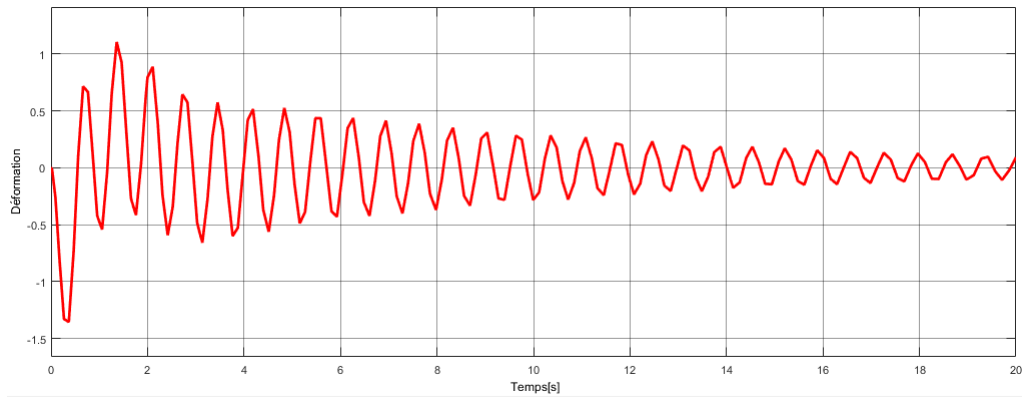


FIGURE 5.24 – Convergence de la déformation en utilisant la CSM pour  $\kappa_e = 0$

par rapport à l'état contrôlé (plus de 20s)(voir figure (5.24)) . Ce dernier résultat est meilleur que celui donné par la commande à base du modèle (Commande par dynamique inverse) pour un coefficient d'amortissement nul. En effet, même si la déformation a mis un temps long pour converger vers zéro en utilisant la loi de contrôle sans modèle il n'en demeure pas moins que c'est meilleur que le résultat obtenu par la commande avec modèle où les oscillations due à la déformation n'ont pu être annulées.

### 5.5.2 Scénario 2 : CSM en présence d'une rafale de vent

Nous supposons que le dirigeable est soumis à une rafale du vent suivant l'axe  $X_m$  qui vaut  $F_{vent} = 1000N$  entre  $0s$  et  $2s$  secondes. Nous avons supposé que cette force permet de déplacer le dirigeable de  $20m$  suivant l'axe  $X_m$  en créant un angle de balancement de  $-0.6rad$  et une déformation de valeur  $0.4$ .

Les résultats pertinents obtenus sont donnés dans les figures ci-dessous :

Le comportement des sorties est le même que dans le cas idéal (voir figure (5.25),(5.26) et (5.27)). C'est comme si on n'avait appliqué aucune force. La commande sans modèle

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

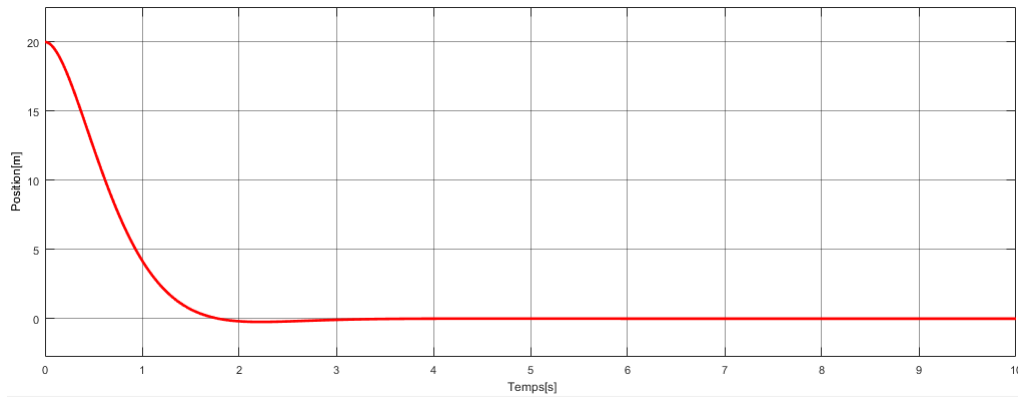


FIGURE 5.25 – Convergence du déplacement en utilisant la CSM en présence d’une rafale de vent

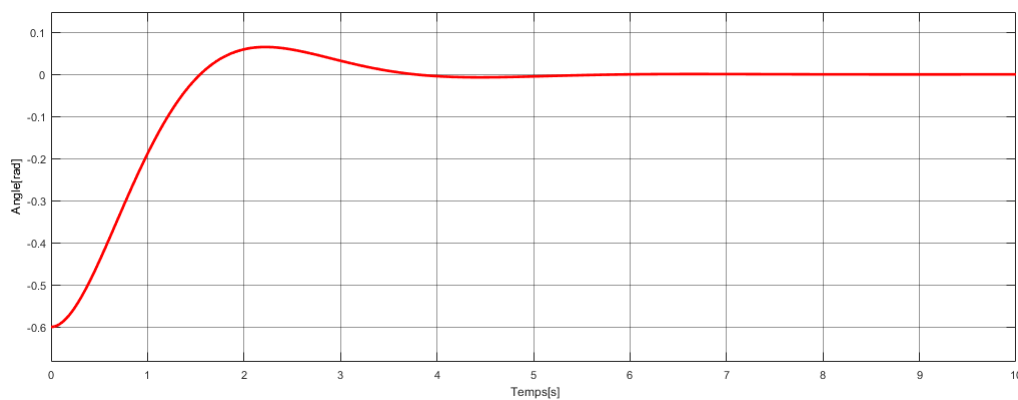


FIGURE 5.26 – Convergence de l’angle d’oscillation avec CSM pour en présence d’une rafale de vent

garantit une convergence asymptotique rapide en présence d’une rafale de vent. On a fait varier cette force et la convergence est à chaque fois assurée.

La commande sans modèle se comporte comme une commande anticipatrice sans avoir ajouter un terme de pré-compensation. Ce terme est rajouté dans la littérature souvent

## 5.5. SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

---

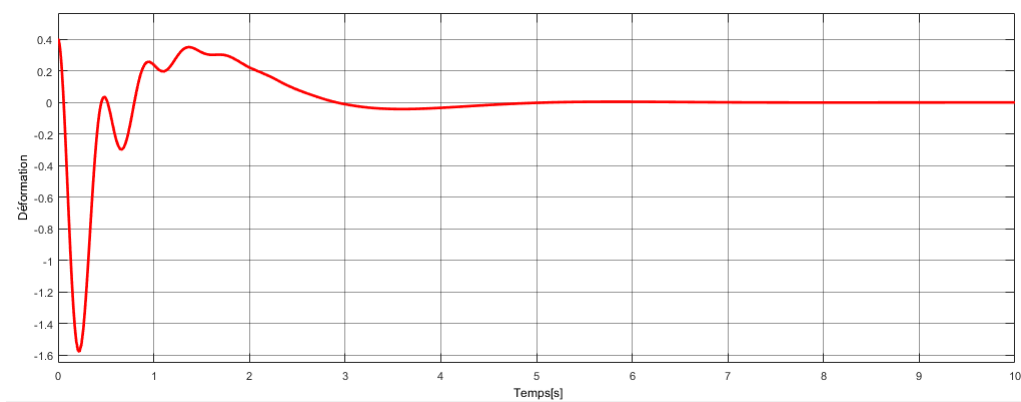


FIGURE 5.27 – Convergence de la déformation en utilisant CSM pour en présence d'une rafale de vent

pour donner un caractère d'anticipation lors de l'utilisation d'une commande à base modèle. Cependant le fait de considérer un modèle ultra-local sur un laps de temps (principe de la CSM) pour estimer les différents paramètres du modèle ainsi que les perturbations donne des résultats formidables en termes d'anticipation d'une perturbation extérieure qui peut impacter le dirigeable.

Le Modèle  $2D$  établi dans le chapitre 2 a joué le rôle d'un support pour construire un vecteur commande "réduit" qui assure la stabilisation du dirigeable et atténue les oscillations de la charge. Nous l'avons également l'utilisé comme un support pour valider les performances de la CSM. Nous avons étudié ce modèle  $2D$  pour le dirigeable-grue et nous gardons dans notre esprit la stabilisation du modèle  $3D$ . En effet les simplifications que nous avons apportées sur le modèle  $2D$  et qui ont amené à une loi de contrôle relativement simple seront utiles lors de l'étude du modèle  $3D$  vue la complexité des équations qui le pilotent. Avec l'idée proposée d'obtention d'un modèle "réduit" nous aurons plus de lisibi-

## 5.6. CONCLUSION

---

lité afin de construire un vecteur commande à base modèle qui assure la stabilisation du modèle complet du dirigeable grue en 3D.

Finalement, à notre avis l'utilisation des techniques des commandes qui traitent le modèle comme une boîte noire telle que la commande sans modèle sera la solution la plus pertinente pour traiter un modèle pleinement couplé sous-actionné comme le modèle du dirigeable en 3D.

Une étude rigoureuse du modèle 3D du dirigeable basée sur les techniques que nous avons utilisées dans le modèle 2D représentera la suite logique de notre analyse et sera entamée dans un travail ultérieur.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux vecteurs contrôle pour maîtriser le phénomène d'oscillation de la charge et atténuer les vibrations de la flexibilité du câble afin de stabiliser les différentes sorties du système dirigeable avec charge suspendue par un câble flexible au voisinage d'un point de chargement ou de déchargement.

Nous avons montré que l'étude de la dynamique interne du système et l'étude de sa stabilité est une étape essentielle lors de la construction d'un vecteur commande. Par conséquent considérer un câble rigide dans l'étape de la modélisation n'est pas réaliste. Ainsi, nous estimons que l'hypothèse de rigidité du câble de levage est une hypothèse qui atteint ses limites et pourrait amener à des systèmes instables et difficiles à contrôler dans la pratique en témoigne le modèle de dirigeable avec charge suspendue.

Dans ce contexte nous avons montré la stabilité de la dynamique interne de notre système et nous avons visualisé et analysé son comportement en utilisant la méthode de Poincaré.

## 5.6. CONCLUSION

---

Ensuite, dans l'objectif de réduire la complexité du modèle en question nous avons construit un modèle "simplifié". Le modèle simplifié a été le support pour la construction d'un vecteur commande à base modèle. Nous avons utilisé une méthode par dynamique inverse pour établir un vecteur commande "réduit" afin de stabiliser le modèle global (sans simplification). Cette méthode souffre de la sensibilité aux incertitudes paramétriques et aux perturbations extérieures. Elle sera valable pour stabiliser le dirigeable dans des conditions météorologiques favorables. Une manière de contourner cette limitation a été d'utiliser les techniques de commande robuste mais ceci n'a été pas suffisant pour atténuer les effets d'une rafale de vent sur le dirigeable. En effet, la présence d'une force de vent peut amener à un dépassement de la marge de robustesse de ce vecteur commande. Pour cela nous avons proposé un vecteur contrôle qui ne se base pas sur la connaissance des paramètres du modèle. Nous avons utilisé les techniques de commande sans modèle.

La CSM a montré une supériorité par rapport à la commande par dynamique inverse en présence d'une force extérieure sur le système dirigeable-grue. Elle s'est comportée comme un vecteur commande par anticipation et a permis d'annuler les effets du vent. Les résultats obtenus par cette commande sont pertinents.

Nous pensons que c'est la méthode qui pourra être la plus appropriée pour le pilotage automatique du dirigeable.

## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

L'activité de recherche que nous avons présentée dans ce travail a porté dans un premier temps sur la détermination des équations mathématiques qui décrivent le mouvement d'un dirigeable gros porteur, et notamment l'étude du couplage inertiel entre les petits mouvements du dirigeable avec l'oscillation de la charge suspendue en phase de chargement ou déchargement, manœuvre qui rappelons-le se fait en altitude.

Dans un second temps, nous nous sommes basés sur les modèles établis d'un dirigeable avec charge intégrée et celui avec charge suspendue pour l'élaboration de vecteurs commandes à base du modèle et d'un vecteur commande sans modèle. En raison de la grande sensibilité au vent de ces gros dirigeables, ces commandes ont été établies afin de conférer à l'engin volant une bonne autonomie dans le but de le stabiliser et d'annuler les oscillations de la charge suspendue lors de mauvaises conditions météorologiques.

Au cours de ma thèse nous avons proposé des solutions à certaines problématiques, qui pourront être utiles au développement des dirigeables gros porteurs non-conventionnels.

Ces solutions représentent notre contribution, et peuvent être résumées ainsi :

### 6.1 Contribution à la modélisation :

Nous avons établi un modèle mathématique pour décrire le mouvement d'un dirigeable gros porteur. Dans un premier temps nous avons développé le modèle du dirigeable non-conventionnel MC500 avec charge intégrée au moyen du formalisme de Kirchoff en tenant compte du phénomène des masses ajoutées.

Ensuite, l'accent a été mis sur la phase critique de chargement ou de déchargement où la charge est suspendue par un câble modélisé comme une poutre d'Euler-Bernoulli. La charge a été considérée comme étant en grands déplacements et petites déformations. Cette phase représente le cas de figure le plus redouté pour ces dirigeables, surtout lors d'une accélération brusque de l'engin volant à la suite d'une rafale de vent provoquant une oscillation déstabilisante de la charge suspendue sous l'effet du couplage inertiel.

En raison du poids important de la charge suspendue, il nous était indispensable de tenir compte de la flexibilité et de l'allongement du câble de suspension. Ces deux caractéristiques engendrent une dynamique interne pour le système qui peut influencer la stabilité du dirigeable.

Le modèle du système multi-corps flexible a été obtenu en appliquant le formalisme de Kirchoff dans les quasi-coordonnées, en utilisant une cinématique non linéaire d'ordre deux, en y associant une synthèse modale. Ceci a permis d'obtenir un système type EDO dont la forme est bien adaptée pour la commande.

Dans un cadre méthodologique, nous avons traité dans un premier temps un problème 2D en considérant un déplacement horizontal du dirigeable, et un mouvement d'oscillation de la charge suspendue dans un plan vertical. Ce modèle a ensuite été généralisé pour le mouvement du dirigeable en 3D en incluant les différents degrés de liberté du dirigeable et en considérant deux plans d'oscillation de la charge.

## 6.2. CONTRIBUTION À LA COMMANDE DES DGP :

---

Nous avons également proposé un système de suspension original représenté par un enrouleur avec liaison cardan. Cette liaison a pour objectif, en plus de procéder à la charge et à la décharge, de contrôler la dynamique rapide du câble.

Les modèles présentés dans la première partie de ce manuscrit ont été le support pour l'élaboration de lois de commandes de stabilisation du dirigeable.

### 6.2 Contribution à la commande des DGP :

Afin d'améliorer les performances du dirigeable et de le fiabiliser, nous nous sommes focalisés dans la deuxième partie de ce travail sur la stabilisation du dirigeable avec charge intégrée et avec charge suspendue lors de sa mission la plus critique de chargement et de déchargement. Nous avons essayé de résoudre des problématiques majeures pour le dirigeable pendant la durée de cette mission.

Pour ce faire, nous avons proposé des vecteurs contrôles à base du modèle et d'autres sans modèle qui pourront aider les constructeurs à développer un système de pilotage automatique pour cet engin volant.

Des nouveaux concepts de contrôle ont été établis. Ces vecteurs de contrôle n'ont, à notre connaissance, jamais été abordés dans la littérature en ce qui concerne les DGP.

#### — Face aux conditions météorologiques :

Nous avons établi deux vecteurs commandes, le premier est basé sur la théorie de linéarisation entrées-sortie et le deuxième, au nom de NCGPC, s'appuie sur la théorie des commandes prédictives non linéaires. Ces deux vecteurs ont été enrichis par des termes de pré-compensation pour anticiper l'effet d'une perturbation du vent dont la mesure est fournie avec une certaine incertitude par la nouvelle technologie LIDAR.

## 6.2. CONTRIBUTION À LA COMMANDE DES DGP :

---

Pour la méthode de linéarisation entrée-sortie nous avons appliqué un vecteur contrôle non-linéaire dans le but de transformer le modèle d'état du dirigeable avec charge intégrée en un modèle linéaire équivalent dans un nouveau système de coordonnées. Moyennant l'application de la méthode de placement de pôles nous avons stabilisé asymptotiquement le nouveau système linéaire. En nous appuyant sur les techniques de la géométrie différentielle telle que les dérivées de Lie et la notion de degrés relatifs nous avons élaboré un vecteur commande par anticipation. Ces techniques ont été également utilisées pour la conception d'une loi de contrôle non linéaire optimale prédictive dans le cadre de la NCGPC. Ce vecteur contrôle prédictif est obtenu en minimisant une fonction coût quadratique en terme de l'erreur de prédiction entre les sorties (états à contrôler) et leur référence (états désirés). La prédiction de l'erreur est obtenue par le développement en série de Taylor jusqu'au degré relatif de la sortie par rapport à la commande de la différence entre la sortie et la référence.

Les impacts d'une perturbation mesurée sur le dirigeable sont obtenus en comparant le degré relatif de chaque sortie par rapport à la perturbation mesurée et le degré relatif de la sortie par rapport à la commande. Cette comparaison nous permet de déduire les termes de pré-compensation qui assurent l'anticipation de l'effet d'une rafale du vent.

Les résultats obtenus sont satisfaisants, nous avons réussi à minimiser la dérive du dirigeable sous l'effet d'une rafale de vent et nous avons prouvé la robustesse de notre commande. L'algorithme de contrôle prédictif NCGPC a montré une supériorité par rapport à la méthode de linéarisation entrée-sortie en termes de minimisation de la dérive ce qui se traduirait par une économie très importante dans l'énergie à fournir par l'engin pour se repositionner.

En fait, les commandes prédictives disposent de caractéristiques plus adaptées aux

## 6.2. CONTRIBUTION À LA COMMANDE DES DGP :

---

particularités des DGP notamment l'optimalité du vecteur contrôle, sa capacité de traiter les dynamiques lentes des systèmes non linéaires complexes et de tenir compte des contraintes imposées par les actionneurs (contraintes sur l'entrée). Ceci nous a permis d'obtenir des résultats de stabilisation plus probants. La NCGPC s'avère ainsi plus adaptée pour le pilotage automatique des DGP.

### — Face à l'oscillation de la charge :

Dans cette partie nous nous sommes attelés à la stabilisation d'un dirigeable gros porteur avec charge suspendue par un câble flexible. Nos contributions concernaient la maîtrise du phénomène indésirable de l'oscillation de la charge et la stabilisation de la dynamique interne du câble.

Le modèle du DGP avec charge suspendue par un câble flexible établi en première partie comporte un certain nombre de degrés de liberté à savoir le mouvement du dirigeable, les angles de balancement de la charge et les déformations dues à la flexibilité du câble. Ceci amène à un système sous-actionné qui admet une dynamique interne représentée par la flexibilité du câble. La stabilisation de ce modèle en atténuant l'oscillation dangereuse de la charge et les vibrations du câble tout en garantissant une stabilité à la dynamique des zéros était un grand défi à relever.

Dans un premier temps, en utilisant la méthode qualitative et quantitative de Poincaré, nous avons étudié le comportement de la dynamique des zéros qui représente dans notre cas la flexibilité du câble. Nous avons déterminé l'équation mathématique qui la représente et les conditions de sa stabilité. Nous avons montré que la stabilité dépend du matériau du câble et plus précisément de son coefficient d'amortissement interne. Nous avons également montré l'utilité de donner un comportement asymptotiquement stable à la dynamique des zéros afin de pouvoir utiliser les algorithmes

de contrôle.

Dans un second temps, pour atténuer les oscillations de la charge nous avons proposé deux vecteurs de contrôle à base du modèle puis sans modèle.

La première concerne la méthode de la dynamique inverse qui est intimement liée aux paramètres du modèle. La loi de contrôle issue de cette méthode est complexe et difficile à mettre en œuvre pour du temps réel. Pour cela nous avons apporté quelques simplifications sur le modèle global afin de construire une commande plus simple qui pourra être implémentée dans la pratique. Nous avons décomposé la matrice de masse globale du système du dirigeable avec charge, en une somme d'une matrice principale formée par des termes "rigides" et une matrice complémentaire formée par des termes fonction de la déformation. Ces derniers ont été considérés comme des erreurs de modélisation. Ces simplifications nous ont conduit à un modèle réduit qui préserve les caractéristiques du modèle complet et qui sera la base pour la construction d'un vecteur contrôle réduit.

Cependant le vecteur contrôle établi par la méthode de la dynamique inverse s'est avéré insuffisant car il n'est performant que dans des conditions météorologiques favorables. Ses performances se dégradent lorsqu'on dépasse la marge de sa robustesse surtout en présence d'une rafale de vent. Ceci nous a poussé à proposer une autre technique de commande plus robuste.

Nous avons eu recours aux techniques de commande « boîte noire », plus précisément les commandes sans modèle (CSM). La CSM ne se base pas sur la connaissance des paramètres de modèle du dirigeable avec charge suspendue. Elle se base sur une modélisation locale (modèle ultra-local) et estime les paramètres du modèle ainsi que les perturbations extérieures au fur et à mesure sur chaque laps de temps. Les estimées des paramètres sont déterminées en utilisant des estimateurs algébriques.

## 6.2. CONTRIBUTION À LA COMMANDE DES DGP :

---

Le caractère d'anticipation intrinsèque de la commande sans modèle nous a permis de remédier aux impacts du vent pour un DGP avec charge suspendue. De plus elle nous a permis de passer outre la complexité de la modélisation qui de toute façon comportait un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Les développements mathématiques réalisés pour appliquer la technique de la CMS à notre système ont permis d'aboutir à des résultats de stabilisation très intéressants et à un algorithme simple et facile à implémenter. La CMS se présente ainsi comme une bonne candidate pour le pilotage automatique d'un DGP avec charge suspendue en phase de chargement et de déchargement.

### — **Problème d'allocation de contrôle :**

Les contrôleurs donnés par la théorie de contrôle ne sont pas suffisants pour piloter les dirigeables automatiquement. Ceci ne représente qu'une étape intermédiaire. Il faudrait par conséquent aller jusqu'au bout de la boucle de commande et étudier le problème d'allocation de contrôle. Cette étape n'était pas simple dans notre cas et sa résolution a représenté un défi, vue la complexité et la redondance du système de propulsion des dirigeables non-conventionnels, ce qui amène à un système rectangulaire mal-conditionné à résoudre.

Pour ce faire, nous avons établi un algorithme analytique original et simple à mettre en œuvre, basé sur des équations algébriques, justifiées par des arguments énergétiques. Un algorithme qui donne une configuration de stabilité optimale tout en économisant l'énergie globale du dirigeable. L'algorithme analytique développé a montré sa supériorité par rapport à des méthodes numériques basées sur l'optimisation quadratique. Cette supériorité s'est manifestée dans le temps de réponse des actionneurs, qui a été plus rapide avec notre algorithme analytique, et par le temps CPU utilisé. Les

### 6.3. PERSPECTIVES :

---

tests concernaient des applications utilisant les différentes commandes préalablement établies.

Finalement, nous estimons que les résultats obtenus par ce présent travail de recherche ont permis de résoudre un certain nombre de problèmes qui freinaient jusqu'à présent le développement des DGP, et nous espérons que ces résultats pourront contribuer à l'effort d'une communauté scientifique de plus en plus large qui promeut le retour du dirigeable dans nos cieux et dans la chaîne logistique mondiale.

Les thèmes abordés ouvrent des portes de recherche qui seront une suite logique à notre travail.

### **6.3 Perspectives :**

1. La modélisation effectuée en 2D sera un support pour donner une autre alternative pour maîtriser l'oscillation de la charge. En d'autres termes au lieu de considérer une liaison tournante (liaison cardan) on pourra considérer une liaison glissière (prismatique).

Plus précisément le modèle sera assimilé à un chariot soulevant une charge au moyen d'un câble flexible et sera couplé avec le modèle du dirigeable, offrant ainsi une autre solution pour atténuer l'oscillation de la charge.

Dans ce cas le contrôle du déplacement et des accélérations du chariot permettrait de donner un comportement stable à la dynamique interne du modèle tout en stabilisant le système. Les deux dynamiques internes seront dans ce cas l'angle d'oscillation de la charge et la déformation. Cette autre alternative mérite d'être étudiée et une comparaison entre des deux techniques sera utile afin de choisir le système de suspension

### 6.3. PERSPECTIVES :

---

- la plus adéquat pour le dirigeable.
2. Dans notre étude nous avons utilisé l'analyse modale pour obtenir un système d'état gouverné par des EDO. Nous pouvons aussi considérer la représentation par des EDP couplé avec des EDO pour décrire l'équation du mouvement d'un dirigeable avec charge suspendue par un câble flexible. Une étude comparative entre les réponses du système au regard de ces deux représentations serait intéressante afin de caractériser les influences des termes négligés en considérant une cinématique d'ordre 2.
  3. Utiliser les techniques de commandes des EDP pour assurer la stabilisation de système à paramètres distribués (EDO et EDP) du DGP avec charge suspendue.
  4. Etendre les techniques des commandes prédictives et par anticipation utilisées pour la conception d'un vecteur commande pour le modèle du dirigeable avec charge intégrée afin d'assurer la stabilisation du dirigeable avec charge suspendue.
  5. Pour notre algorithme analytique, il y a des points non abordés dans ce travail qui méritent d'être étudiés : la réponse de l'algorithme par rapport au temps de retard, et sa réponse pour le suivi d'une trajectoire prédéfinie.
  6. Utiliser les idées abordées pour la stabilisation du modèle du dirigeable en 2D tel que le contrôle réduit et les commandes sans modèle pour le suivi de trajectoire.

### 6.3. PERSPECTIVES :

---

# Annexe 1 : Paramètres de la matrice de masse pour le modèle 3D

— Matrice  $\tilde{M}^c$  :

L'énergie cinétique du câble s'écrit sous une forme quadratique comme suit :

$$T_c = \frac{1}{2} \rho X_1^t \tilde{M}^c X_1 \quad (6.1)$$

$\tilde{M}^c$  est une matrice symétrique qui s'écrira ainsi :

$$\tilde{M}^c = \tilde{M}_{sup}^c + (\tilde{M}_{sup}^c)^t$$

avec :  $\tilde{M}_{sup}^c$  est une matrice triangulaire supérieure, ses composantes sont données

par :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11}^c &= L \\ \tilde{M}_{14}^c &= -L^2 s_{\phi_s} s_{\theta_s} + s_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta d s d z \\ \tilde{M}_{15}^c &= L^2 c_{\phi_s} - c_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta d s d z \\ \tilde{M}_{16}^c &= 2s_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \omega \delta d z \\ \tilde{M}_{17}^c &= -L^2 s_{\phi_s} s_{\theta_s} + s_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta d s d z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{18}^c &= L^2 c_{\phi_s} - c_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{19}^c &= 2c_{\theta_s} \int_0^L \omega dz - 2c_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \\ \tilde{M}_{22}^c &= L \\ \tilde{M}_{24}^c &= -c_{\phi_s} L^2 + c_{\phi_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{26}^c &= 2c_{\phi_s} \int_0^L \omega \delta dz \\ \tilde{M}_{27}^c &= -c_{\phi_s} L^2 + c_{\phi_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{29}^c &= 2s_{\phi_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s ds dz \\ \tilde{M}_{34}^c &= -L^2 c_{\phi_s} s_{\phi_s} + c_{\theta_s} s_{\phi_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{35}^c &= -L^2 s_{\theta_s} + s_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{36}^c &= 2c_{\theta_s} s_{\phi_s} \int_0^L \omega \delta dz \\ \tilde{M}_{37}^c &= -L^2 c_{\phi_s} s_{\phi_s} + c_{\theta_s} s_{\phi_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{38}^c &= -L^2 s_{\theta_s} + s_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{39}^c &= -2s_{\theta_s} \int_0^L \omega dz - 2c_{\phi_s} c_{\theta_s} \int_0^L \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s ds dz \\ \tilde{M}_{44}^c &= \frac{L^3}{3} - \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \\ \tilde{M}_{46}^c &= -2 \int_0^L z_2 \omega \delta dz \\ \tilde{M}_{47}^c &= 2 \frac{L^3}{3} - 2 \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz \end{aligned}$$

### 6.3. PERSPECTIVES :

---

$$\tilde{M}_{55}^c = \frac{L^3}{3} - \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz_2$$

$$\tilde{M}_{58} = 2 \frac{L^3}{3} - 2 \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz_2$$

$$\tilde{M}_{59}^c = 2 \int_0^L z_2 \omega dz_2$$

$$\tilde{M}_{66}^c = \frac{L^3}{3} - r^2 \int_0^L \delta^t \omega^t \omega \delta dz_2$$

$$\tilde{M}_{67}^c = -2 \int_0^L z_2 \omega \delta dz_2$$

$$\tilde{M}_{77}^c = \frac{L^3}{3} - \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz_2$$

$$\tilde{M}_{88}^c = \frac{L^3}{3} - \int_0^L z_2 \int_0^{z_2} \delta^t \omega_s^t \omega_s \delta ds dz_2$$

$$\tilde{M}_{89}^c = 2 \int_0^L z_2 \omega dz_2$$

$$\tilde{M}_{99}^c = \delta^t \int_0^L \omega^t \omega dz_2$$

— **Matrice  $\tilde{M}^s$  :**

L'énergie cinétique discrétisée à l'ordre 2 de la charge peut s'écrire sous une forme quadratique de la manière suivante :

$$T_c = \frac{M_s}{2} X_1^t \tilde{M}^s X_1$$

$\tilde{M}^s$  est une matrice symétrique qui s'écrit ainsi :

$$\tilde{M}^s = \tilde{M}_{sup}^s + (\tilde{M}_{sup}^s)^t$$

où la matrice  $\tilde{M}_{sup}^s$  est une matrice triangulaire supérieure. Ses composantes sont données par :

6.3. PERSPECTIVES :

---

$$\tilde{M}_{11}^s = 1$$

$$\tilde{M}_{14}^s = -2r_s s_{\phi_s} s_{\theta_s} - 2L s_{\phi_s} s_{\theta_s} + s_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s s_{\phi_s} s_{\theta_s} \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta$$

$$\tilde{M}_{15}^s = -2\omega_L \delta c_{\phi_s} s_{\theta_s} + 2r_s c_{\theta_s} - c_{\theta_s} \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 - r_s c_{\theta_s} \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta + 2r_s c_{\phi_s} s_{\theta_s} \omega_{z_2, L} \delta + 2L c_{\theta_s}$$

$$\tilde{M}_{16}^s = -2r_s s_{\phi_s} s_{\theta_s} \omega_{z_2, L} \delta$$

$$\tilde{M}_{17}^s = -2r_s s_{\phi_s} s_{\theta_s} - 2L s_{\phi_s} s_{\theta_s} + s_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s s_{\phi_s} s_{\theta_s} \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta$$

$$\tilde{M}_{18}^s = -2\omega_L \delta c_{\phi_s} s_{\theta_s} + 2r_s c_{\theta_s} - c_{\theta_s} \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 - r_s c_{\theta_s} \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta + 2r_s c_{\phi_s} s_{\theta_s} \omega_{z_2, L} \delta + 2L c_{\theta_s}$$

$$\tilde{M}_{19}^s = -2\omega_{z_2, L} r_s c_{\theta_s} + 2c_{\theta_s} \omega_L - 2c_{\phi_s} s_{\theta_s} \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} dz_2$$

$$\tilde{M}_{22}^s = 1$$

$$\tilde{M}_{24}^s = c_{\phi_s} \left( \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta - 2L - 2r_s \right)$$

$$\tilde{M}_{25}^s = 2(\omega_L \delta - r_s \omega_{z_2, L} \delta) s_{\phi_s}$$

$$\tilde{M}_{26}^s = 2(-r_s \omega_{z_2, L} \delta + \omega_L \delta) c_{\phi_s}$$

$$\tilde{M}_{27}^s = \left( \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta - 2L - 2r_s \right) c_{\phi_s}$$

$$\tilde{M}_{28}^s = 2(\omega_L \delta - r_s \omega_{z_2, L} \delta) s_{\phi_s}$$

### 6.3. PERSPECTIVES :

---

$$M_{29} = 2 \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} dz_2 s_{\phi_s}$$

$$\tilde{M}_{33}^s = 1$$

$$\tilde{M}_{34}^s = (-2r_s - 2L + \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta) c_{\theta_s} s_{\phi_s}$$

$$\tilde{M}_{35}^s = 2(-\omega_L \delta + r_s \omega_{z_2, L} \delta) c_{\phi_s} c_{\theta_s} + (-r_s + 2 \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta - 2L) s_{\theta_s}$$

$$\tilde{M}_{36}^s = +2(\omega_L \delta c_{\theta_s} s_{\phi_s} - r_s \omega_{z_2, L} \delta)$$

$$\tilde{M}_{37}^s = (-2r_s - 2L + 2 \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta) c_{\theta_s} s_{\phi_s}$$

$$\tilde{M}_{38}^s = 2(-\omega_L \delta + r_s \omega_{z_2, L} \delta) c_{\phi_s} c_{\theta_s} + (-2r_s + \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta - 2L) s_{\theta_s}$$

$$\tilde{M}_{39}^s = 2\omega_{z_2, L} - 2r_s s_{\theta_s} \omega_L - 2c_{\phi_s} c_{\theta_s} \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} dz_2$$

$$\tilde{M}_{44}^s = L^2 + r_s^2 - Lr_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta + 2Lr_s - L \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 - r_s^2 \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta - r_s \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2$$

$$\tilde{M}_{46}^s = 2r_s^2 \omega_{z_2, L} \delta - 2L\omega_L \delta - 2r_s \omega_L \delta + 2Lr_s \omega_{z_2, L} \delta$$

$$\tilde{M}_{48}^s = 4Lr_s - 2r_s \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 - 2L \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 - 2Lr_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta - 2r_s^2 \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta + 2(r_s^2 + L^2)$$

$$\tilde{M}_{55}^s = L^2 - Lr_s \delta^t \omega_{z_2, L}^t \omega_{z_2, L} \delta + 2Lr_s - (L + r_s) \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s^2 - 2r_s \omega_L \delta \omega_{z_2, L} \delta + \delta^t \omega_L^t \omega_L \delta$$

6.3. PERSPECTIVES :

---

$$\tilde{M}_{57}^s = -2L \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2$$

$$\tilde{M}_{58}^s = +2Lr_s - 2r_s \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 - 2Lr_s \delta^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} \delta - 4r_s \omega_L \delta \omega_{z_2,L} \delta + 2r_s^2 + 2\delta^t \omega_L^t \omega_L \delta + 2L^2$$

$$\tilde{M}_{59}^s = -2\omega_{z_2,L} r_s^2 - 2\omega_{z_2,L} r_s + 2r_s \omega_L + 2L\omega_L$$

$$\tilde{M}_{66}^s = +(r_s^2 \delta^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} \delta - 2r_s \omega_L \delta \omega_{z_2,L} \delta + \delta^t \omega_L^t \omega_L \delta) r^2$$

$$\tilde{M}_{67}^s = 2Lr_s \omega_{z_2,L} \delta + 2r_s^2 \omega_{z_2,L} \delta - 2L\omega_L \delta - 2r_s \omega_L \delta$$

$$\tilde{M}_{77}^s = L^2 - Lr_s \delta^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} \delta + 2Lr_s - \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 L - r_s^2 \delta^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} \delta + r_s^2 - \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 r_s$$

$$\tilde{M}_{88}^s = L^2 - Lr_s \delta^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} \delta + 2Lr_s - (L+r_s) \int_0^L \delta^t \omega_{z_2}^t \omega_{z_2} \delta dz_2 + r_s^2 - 2r_s \omega_L \delta \omega_{z_2,L} \delta + \delta^t \omega_L^t \omega_L \delta$$

$$\tilde{M}_{89}^s = -2\omega_{z_2,L} r_s^2 - 2\omega_{z_2,L} Lq r_s + 2r_s \omega_L + 2L\omega_L$$

$$\tilde{M}_{99}^s = -2\omega_{z_2,L} \dot{\delta} \omega_L r_s + \dot{\delta}^t \omega_L^t \omega_L + \dot{\delta}^t \omega_{z_2,L}^t \omega_{z_2,L} r_s^2$$

# Bibliographie

- [AABA17] Fida Ben Abdallah, Naoufel Azouz, Lotfi Beji, and Azgal Abichou. Modeling and stabilization of a cable-driven parallel platform suspended by an airship. In *11th International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo 2017)*, 2017.
- [ACLA12] Naoufel Azouz, Said Chaabani, Jean Lerbet, and Azgal Abichou. Computation of the added masses of an unconventional airship. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 2012.
- [ACT98] Muthana T Alrifai, Joe H Chow, and David A Torrey. A backstepping nonlinear control approach to switched reluctance motors. In *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 4, pages 4652–4657. IEEE, 1998.
- [AHJ<sup>+</sup>17] Hassane Abouaïssa, Ola Alhaj Hasan, Cédric Join, Michel Fliess, and Didier Defer. Energy saving for building heating via a simple and efficient model-free control design : First steps with computer simulations. *arXiv preprint arXiv :1708.03800*, 2017.
- [AM08] Jose Raul Azinheira and Alexandra Moutinho. Hover control of an uav with backstepping design including input saturations. *IEEE Transactions*

## BIBLIOGRAPHIE

---

- on Control Systems Technology*, 16(3) :517–526, 2008.
- [AMDP06] José Raul Azinheira, Alexandra Moutinho, and Ely Carneiro De Paiva. Airship hover stabilization using a backstepping control approach. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 29(4) :903–914, 2006.
- [AMdP09] José Raul Azinheira, Alexandra Moutinho, and Ely Carneiro de Paiva. A backstepping controller for path-tracking of an underactuated autonomous airship. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(4) :418–441, 2009.
- [AU06] Christopher Atkinson and Robert Urso. Modeling of apparent mass effects for the real-time simulation of a hybrid airship. In *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*, page 6619, 2006.
- [BA05] Lotfi Beji\* and Azgal Abichou. Tracking control of trim trajectories of a blimp for ascent and descent flight manoeuvres. *International Journal of Control*, 78(10) :706–719, 2005.
- [BAA08] S Bennaceur, A Abichou, and N Azouz. Modelling and control of flexible airship. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1019, pages 397–407. AIP, 2008.
- [Ben09] Selima Bennaceur. *Modélisation et commande d’engins volants flexibles*. PhD thesis, Université d’Evry-Val d’Essonne, 2009.
- [BF05] N Bessert and Octavian Frederich. Nonlinear airship aeroelasticity. *Journal of fluids and structures*, 21(8) :731–742, 2005.
- [BH00] Yasmina Bestaoui and Tarek Hamel. Dynamic modeling of small autonomous blimps. In *6th intern. conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Miedzyzdroje*. Citeseer, 2000.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Bre82] CE Brennen. A review of added mass and fluid inertial forces. Technical report, BRENNEN (CE) SIERRA MADRE CA, 1982.
- [CALA12] Saïd Chaabani, Naoufel Azouz, Jean Lerbet, and Azgal Abichou. Modelling of an unconventional airship. In *ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, pages 661–668. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [CBG03] Wen-Hua Chen, Donald J Ballance, and Peter J Gawthrop. Optimal control of nonlinear systems : a predictive control approach. *Automatica*, 39(4) :633–641, 2003.
- [CCDW15] Liu Cui, Li Chen, Dengping Duan, and Yubin Wen. Design of composite control system based on mpc for unmanned airship. In *Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), 2015 IEEE*, pages 722–728. IEEE, 2015.
- [CD05] Anthony Colozza and James L Dolce. High-altitude, long-endurance airships for coastal surveillance. *NASA Technical Report, NASA/TM-2005-213427*, 2005.
- [CDNFM09] Francisco de Asís García Collado, Brigitte D’Andréa-Novel, Michel Fliess, and Hugues Mounier. Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques. In *XXIIe Colloque GRETSI*, 2009.
- [Cez08] Nicolas Cezard. *Etude de faisabilité d’un lidar Rayleigh-Mie pour des mesures à courte portée de la vitesse de l’air, de sa température et de sa densité*. PhD thesis, Palaiseau, Ecole polytechnique, 2008.
- [Cha14] Saïd Chaâbani. *Dynamique non-linéaire d’un dirigeable flexible*. PhD thesis, École Polytechnique, 2014.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [CL96] Thomas F Coleman and Yuying Li. A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal on Optimization*, 6(4) :1040–1058, 1996.
- [Cla82] Daniel Claude. Decoupling of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 1(4) :242–248, 1982.
- [CMT87] David W Clarke, Coorous Mohtadi, and PS Tuffs. Generalized predictive control—part i. the basic algorithm. *Automatica*, 23(2) :137–148, 1987.
- [CN13] Grant E Carichner and Leland M Nicolai. *Fundamentals of Aircraft and Airship Design : Volume 2-Airship Design and Case Studies*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013.
- [Cor99] Jean-Michel Coron. Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires. *Journées X-UPS*, 1999.
- [CR80] Charles R Cutler and Brian L Ramaker. Dynamic matrix control?? a computer control algorithm. In *joint automatic control conference*, number 17, page 72, 1980.
- [DK89] Prodromos Daoutidis and Costas Kravaris. Synthesis of feedforward/state feedback controllers for nonlinear processes. *AIChE Journal*, 35(10) :1602–1616, 1989.
- [DKVdVD88] Robin MC De Keyser, Ph GA Van de Velde, and FAG Dumortier. A comparative study of self-adaptive long-range predictive control methods. *Automatica*, 24(2) :149–163, 1988.
- [DLB14] Shicong Dai, Taeyoung Lee, and Dennis S Bernstein. Adaptive control of a quadrotor uav transporting a cable-suspended load with unknown mass.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- In *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, pages 6149–6154. IEEE, 2014.
- [DMJF<sup>+</sup>13] Jérôme De Miras, Cédric Join, Michel Fliess, Samer Riachy, and Stéphane Bonnet. Active magnetic bearing : A new step for model-free control. In *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 7449–7454. IEEE, 2013.
- [DNFJ<sup>+</sup>10] Brigitte D’Andréa-Novel, Michel Fliess, Cédric Join, Hugues Mounier, and Bruno Steux. A mathematical explanation via “intelligent” pid controllers of the strange ubiquity of pids. In *Control & Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on*, pages 395–400. IEEE, 2010.
- [Dor05] GE Dorrington. Development of an airship for tropical rain forest canopy exploration. *The Aeronautical Journal*, 109(1098) :361–372, 2005.
- [dPBG<sup>+</sup>99] Ely C de Paiva, Samuel S Bueno, Sergio BV Gomes, Josue JG Ramos, and Marcel Bergerman. A control system development environment for aurora’s semi-autonomous robotic airship. In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2328–2335. IEEE, 1999.
- [dPCFA01] EC de Paiva, JRH Carvalho, PAV Ferreira, and JR Azinheira. An h<sub>2</sub>/h pid heading controller for aurora-i semiautonomous robotic airship. 14th aiaa lighter-than-air systems technology conference. *Akron, OH*, 2001.
- [EOSKD04] Kamal El Omari, Eric Schall, Bruno Koobus, and Alain Dervieux. Inviscid flow calculation around flexible airship. In *Mathematical Symposium Garcia De GalDeano*, volume 31, pages 535–544, 2004.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Fio10] Lisa Fiorentini. *Nonlinear adaptive controller design for air-breathing hypersonic vehicles*. PhD thesis, The Ohio State University, 2010.
- [FJ08] Michel Fliess and Cédric Join. Commande sans modèle et commande à modèle restreint. *e-STA Sciences et Technologies de l'Automatique*, 5(4) :1–23, 2008.
- [FJ13] Michel Fliess and Cédric Join. Model-free control. *International Journal of Control*, 86(12) :2228–2252, 2013.
- [FLMR92] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *CR Acad. Sci. Paris*, pages 619–624, 1992.
- [Fos94] Thor I Fossen. *Guidance and control of ocean vehicles*. John Wiley & Sons Inc, 1994.
- [FPC<sup>+</sup>13] Aleksandra Faust, Ivana Palunko, Patricio Cruz, Rafael Fierro, and Lydia Tapia. Learning swing-free trajectories for uavs with a suspended load. In *Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on*, pages 4902–4909. IEEE, 2013.
- [FSBD09] Lisa Fiorentini, Andrea Serrani, Michael A Bolender, and David B Doman. Nonlinear robust adaptive control of flexible air-breathing hypersonic vehicles. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 32(2) :402–417, 2009.
- [FSM<sup>+</sup>06] Hiroaki Fukushima, Ryosuke Saito, Fumitoshi Matsuno, Yasushi Hada, Kuniaki Kawabata, and Hajime Asama. Model predictive control of an autonomous blimp with input and output constraints. In *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control*

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2006 IEEE*, pages 2184–2189. IEEE, 2006.
- [FSR03] Michel Fliess and Hebertt Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :151–168, 2003.
- [Gaw87] PJ Gawthrop. Continuous-time self-tuning control—a unified approach. In *Adaptive Systems in Control and Signal Processing 1986*, pages 19–24. Elsevier, 1987.
- [GPM89] Carlos E Garcia, David M Prett, and Manfred Morari. Model predictive control : theory and practice—a survey. *Automatica*, 25(3) :335–348, 1989.
- [HB03] S Hima and Y Bestaoui. Time-optimal path planning for lateral navigation of an autonomous airship. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Austin (TX), USA*, 2003.
- [HDQ96] Jun Hu, Darren M Dawson, and Yi Qian. Position tracking control for robot manipulators driven by induction motors without flux measurements. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(3) :419–438, 1996.
- [Hir79] R Hirschorn. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6) :855–865, 1979.
- [Hir81] RM Hirschorn. (a,b)-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 19(1) :1–19, 1981.
- [HSM83] L Hunt, Renjeng Su, and George Meyer. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 28(1) :24–31, 1983.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [HSM92] John Hauser, Shankar Sastry, and George Meyer. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems : Application to v/stol aircraft. *Automatica*, 28(4) :665–679, 1992.
- [IKGGM81] Alberto Isidori, Arthur Krener, Claudio Gori-Giorgi, and Salvatore Monaco. Nonlinear decoupling via feedback : a differential geometric approach. *IEEE transactions on automatic control*, 26(2) :331–345, 1981.
- [Isi13] Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [JK00] Mrdjan Jankovic and Ilya Kolmanovsky. Constructive lyapunov control design for turbocharged diesel engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2) :288–299, 2000.
- [JMF08] Cédric Join, John Masse, and Michel Fliess. Etude préliminaire d’une commande sans modèle pour papillon de moteur..... a model-free control for an engine throttle : a preliminary study. *Journal européen des systemes automatisés (JESA)*, 42(2-3) :337–354, 2008.
- [KFJ15] Kristian Klausen, Thor I Fossen, and Tor Arne Johansen. Nonlinear control of a multicopter uav with suspended load. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2015 International Conference on*, pages 176–184. IEEE, 2015.
- [KG99] Gabriel A Khoury and J David Gillett. *Airship technology*, cambridge aerospace series 10, 1999.
- [KJHE06] Eric Kulczycki, Sanjay Joshi, Ron Hess, and Alberto Elfes. Towards controller design for autonomous airships using slc and lqr methods. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, page 6778, 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [KPPK95] M Krstic, JM Protz, JD Paduano, and PV Kokotovic. Backstepping designs for jet engine stall and surge control. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 3, pages 3049–3055. IEEE, 1995.
- [KRB87] TR Kane, R Ryan, and AK Banerjee. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10(2) :139–151, 1987.
- [Lam45] H Lamb. On the motion of solids through a liquid. hydrodynamics, 1945.
- [LGJLC05] Thomas Lewiner, João D Gomes Jr, Hélio Lopes, and Marcos Craizer. Curvature and torsion estimators based on parametric curve fitting. *Computers & Graphics*, 29(5) :641–655, 2005.
- [LKB05] Sang-Jong Lee, Dong-Min Kim, and Hyo-Choong Bang. Feedback linearization controller for semi station keeping of the unmanned airship. In *AIAA 5th ATIO and 16th Lighter-Than-Air Sys Tech. and Balloon Systems Conferences*, page 7343, 2005.
- [LKY06] Yung-Gyo Lee, Dong-Min Kim, and Chan-Hong Yeom. Development of korean high altitude platform systems. *International Journal of Wireless Information Networks*, 13(1) :31–42, 2006.
- [LNS11] Yuwen Li, Meyer Nahon, and Inna Sharf. Airship dynamics modeling : A literature review. *Progress in Aerospace Sciences*, 47(3) :217–239, 2011.
- [LP09] Lin Liao and Igor Pasternak. A review of airship structural research and development. *Progress in Aerospace Sciences*, 45(4-5) :83–96, 2009.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [LS65] Louis R Lucassen and Fred J Sterk. Dynamic stability analysis of a hovering helicopter with a sling load. *Journal of the American Helicopter Society*, 10(2) :6–12, 1965.
- [Lue71] David Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6) :596–602, 1971.
- [MDNF<sup>+</sup>17] Lghani Menhour, Brigitte D’Andréa-Novel, Michel Fliess, Dominique Gruyer, and Hugues Mounier. An efficient model-free setting for longitudinal and lateral vehicle control : Validation through the interconnected pro-sivic/rtm maps prototyping platform. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2017.
- [MdNF<sup>+</sup>18] Lghani Menhour, Brigitte d’Andréa Novel, Michel Fliess, Dominique Gruyer, and Hugues Mounier. An efficient model-free setting for longitudinal and lateral vehicle control : Validation through the interconnected pro-sivic/rtm maps prototyping platform. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19(2) :461–475, 2018.
- [Mei91] Leonard Meirovitch. Hybrid state equations of motion for flexible bodies in terms of quasi-coordinates. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(5) :1008–1013, 1991.
- [MJF07] Mamadou Mboup, Cédric Join, and Michel Fliess. A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control. In *Control & Automation, 2007. MED’07. Mediterranean Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2007.
- [MJF09] Mamadou Mboup, Cédric Join, and Michel Fliess. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical algorithms*,

## BIBLIOGRAPHIE

---

- 50(4) :439–467, 2009.
- [MNT07] Shoji Maekawa, Masaaki Nakadate, and Atsushi Takegaki. Structures of the low altitude stationary flight test vehicle. *Journal of aircraft*, 44(2) :662–666, 2007.
- [MS95] L Meirovitch and T Stemple. Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasicordinates. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(4) :678–688, 1995.
- [Mun24] Max M Munk. Some tables of the factor of apparent additional mass. 1924.
- [OKL+06] Seungyong Oh, Sungchul Kang, Kyungjoon Lee, Sangchul Ahn, and Euntai Kim. Flying display : Autonomous blimp with real-time visual tracking and image projection. In *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 131–136. IEEE, 2006.
- [ORA06] So-Ryeok Oh, Ji-Chul Ryu, and Sunil K Agrawal. Dynamics and control of a helicopter carrying a payload using a cable-suspended robot. *Journal of Mechanical Design*, 128(5) :1113–1121, 2006.
- [PBSF15] Igor Henrique Beloti Pizetta, Alexandre Santos Brandão, and Mário Sarcinelli-Filho. Modelling and control of a quadrotor carrying a suspended load. In *Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS), 2015 Workshop on*, pages 249–257. IEEE, 2015.
- [Pet84] Václav Peterka. Predictor-based self-tuning control. *Automatica*, 20(1) :39–50, 1984.
- [Pie01] J Piedboeuf. Six methods to model a flexible beam rotating in the vertical plane. In *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2832–2839. IEEE, 2001.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [PLTB03] Chang-Su Park, Hyunjae Lee, Min-Jea Tahk, and Hyochoong Bang. Airship control using neural network augmented model inversion. In *Control Applications, 2003. CCA 2003. Proceedings of 2003 IEEE Conference on*, volume 1, pages 558–563. IEEE, 2003.
- [PMC12] Manuel F Pérez Polo, Manuel Pérez Molina, and Javier Gil Chica. Swing-up and positioning control of an inverted wheeled cart pendulum system with chaotic balancing motions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(6) :655–665, 2012.
- [Poi81] Henri Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7 :375–422, 1881.
- [Poi82] Henri Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (ii). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8 :251–296, 1882.
- [Poi86] Henri Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles (iv). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2 :151–218, 1886.
- [Pop04] Chris Pope. The big lift. *Professional Engineering*, 17(8), 2004.
- [QB03] S Joe Qin and Thomas A Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control engineering practice*, 11(7) :733–764, 2003.
- [RdA16] Guilherme V Raffo and Marcelino M de Almeida. Nonlinear robust control of a quadrotor uav for load transportation with swing improvement. In *American Control Conference (ACC), 2016*, pages 3156–3162. IEEE, 2016.
- [RP08] Filoktimon Repoulas and Evangelos Papadopoulos. Robotic airship trajectory tracking control using a backstepping methodology. In *Robotics*

## BIBLIOGRAPHIE

---

- and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, pages 188–193. IEEE, 2008.
- [RRTP78] Jacques Richalet, A Rault, JL Testud, and J Papon. Model predictive heuristic control. *Automatica (Journal of IFAC)*, 14(5) :413–428, 1978.
- [RSPR10] Guillermo Jenaro Rabadan, Nikolaus P Schmitt, Thomas Pistner, and Wolfgang Rehm. Airborne lidar for automatic feedforward control of turbulent in-flight phenomena. *Journal of Aircraft*, 47(2) :392–403, 2010.
- [SA98] Irma Irasema Siller-Alcalá. *Nonlinear continuous-time generalised predictive control*. PhD thesis, University of Glasgow, 1998.
- [SB95] Mark W Spong and Daniel J Block. The pendubot : A mechatronic system for control research and education. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 1, pages 555–556. IEEE, 1995.
- [Sch07] David K Schmidt. Modeling and near-space stationkeeping control of a large high-altitude airship. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 30(2) :540–547, 2007.
- [Sha13] Ahmed A Shabana. *Dynamics of multibody systems*. Cambridge university press, 2013.
- [Spo96] Mark W Spong. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1) :2828–2832, 1996.
- [SR72] Sahjendra Narain Singh and Wilson J Rugh. Decoupling in a class of nonlinear systems by state variable feedback. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 94(4) :323–329, 1972.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [SRF04] H Sira-Ramirez and M Fliess. On the output feedback control of a synchronous generator. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 4, pages 4459–4464. IEEE, 2004.
- [TCM14] Marco Tuveri, Alessandro Ceruti, and Pier Marzocca. Added masses computation for unconventional airships and aerostats through geometric shape evaluation and meshing. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 15(3) :241–257, 2014.
- [Tee92] Andrew R Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & control letters*, 18(3) :165–171, 1992.
- [VDNFM08] Jorge Villagra, Brigitte D’Andréa-Novel, Michel Fliess, and Hugues Mounier. Synthèse algébrique d’estimateurs de vitesses longitudinale et latérale d’une automobile. *e-STA Sciences et Technologies de l’Automatique*, 5(3) :12–27, 2008.
- [WS06] Xiao-liang Wang and Xue-xiong Shan. Airship attitude tracking system. *Applied Mathematics and Mechanics*, 27(7) :919–926, 2006.
- [Yds84] BE Ydstie. Extended horizon adaptive control. *IFAC Proceedings Volumes*, 17(2) :911–915, 1984.
- [YXZ<sup>+</sup>17] Shuaixian Yu, Guijia Xu, Kewei Zhong, Saixian Ye, and Wenwen Zhu. Direct-adaptive fuzzy predictive control for path following of stratospheric airship. In *Control And Decision Conference (CCDC), 2017 29th Chinese*, pages 5658–5664. IEEE, 2017.
- [ZLZ15] Ming Zhu, Lisha Liu, and Zewei Zheng. Dynamic control allocation for a stratospheric airship with redundant control systems. In *Control and*

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese*, pages 2716–2723. IEEE, 2015.
- [ZLZ16] Zewei Zheng, Lisha Liu, and Ming Zhu. Integrated guidance and control path following and dynamic control allocation for a stratospheric airship with redundant control systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 230(10) :1813–1826, 2016.
- [ZWDYGZL08] Yan ZHANG, QU Wei-Dong, XI Yu-Geng, and CAI Zi-Li. Adaptive stabilization and trajectory tracking of airship with neutral buoyancy. *Acta Automatica Sinica*, 34(11) :1437–1441, 2008.
- [ZYDL17] Jiashi Zhang, Xixiang Yang, Xiaolong Deng, and Huijing Lin. Trajectory control method of stratospheric airships based on model predictive control in wind field. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, page 0954410017735128, 2017.

**Titre :** Contribution à la modélisation et la commande des dirigeables gros porteurs non-conventionnels

**Mots clés :** Modélisation du dirigeable, contrôle et commande, allocation de control, Contrôle prédictive, optimisation non linéaire, anticipation

**Résumé :** Les dirigeables gros porteurs (DGP) ont un potentiel énorme de développement et pourront très rapidement prendre une part non-négligeable dans le transport de fret de par le monde. Cependant certains problèmes liés notamment à leur sensibilité aux vents doivent être résolus. En vue d'aboutir à une bonne fiabilisation de l'engin et de ses missions, il est indispensable d'automatiser le plus possible le fonctionnement du dirigeable.

Le présent travail s'inscrit dans ce contexte et porte principalement sur la modélisation et la commande des DGP non-conventionnels. Nous présentons les équations mathématiques qui décrivent l'équation du mouvement d'un DGP non-conventionnel. Le formalisme de Kirchhoff a été utilisé pour élaborer le modèle du dirigeable avec charge suspendue dans les quasi-cordonnées en s'appuyant sur une cinématique non-linéaire d'ordre deux. Nous avons considéré l'hypothèse de flexibilité et d'allongement du câble dans l'objectif d'obtenir un modèle assez précis.

Pour minimiser la dérive du dirigeable dans des conditions météorologiques défavorables nous proposons d'utiliser le concept de contrôle par anticipation en exploitant les informations données par la technologie LIDAR. Nous avons utilisé la méthode de linéarisation entrée-sortie et les techniques des commandes prédictives non-linéaires NCPCG, que nous avons enrichis par des termes d'anticipation afin de construire un vecteur commande par feedforward.

Pour contourner les oscillations dangereuses de la charge nous nous sommes appuyés sur la méthode classique de la commande par dynamique inverse et la commande novatrice sans modèle(CSM). Une étape indispensable afin de pouvoir appliquer ces contrôleurs est d'étudier le comportement de la dynamique des zéros. Pour le modèle du dirigeable avec charge suspendue nous avons montré que la dynamique des zéros est donnée par l'état de la flexibilité du câble et les conditions de sa stabilité asymptotique ont été établies.

**Title :** Contribution to modeling and control of unconventional large capacity airship

**Keywords :** airship, modeling airship, control, feedforward, allocation control, predictive control

**Abstract :** Large airships (DGP) have huge potential for development and will soon be able to take a significant share of freight transport around the world. However, some problems related to their sensitivity to winds must be solved. In order to achieve a good reliability of the craft and its missions, it is essential to automate as much as possible the operation of the airship.

The present work fits into this context and focuses on the modeling and control of non-conventional DGP. We present the mathematical equations that describe the equation of motion of a non-conventional DGP. Kirchhoff's formalism was used to elaborate the model of the airship with load suspended in the quasi-coordinates by relying on a nonlinear kinematics of order two. We considered the hypothesis of flexibility and elongation of the cable in order to obtain a fairly accurate model.

To minimize the drift of the airship in adverse weather conditions we propose to use the concept of anticipatory control by exploiting the information given by the LIDAR technology. We used the input-output linearization method and NCPCG non-linear predictive control techniques, which we enriched with anticipation terms to build a vector control by feedforward.

To circumvent the dangerous oscillations of the load we relied on the classical method of the control by inverse dynamics and the innovative command without model (CSM). An essential step in order to apply these controllers is to study the behavior of the zeros dynamics. For the model of the airship with suspended load we have shown that the zeros dynamics is given by the state of cable flexibility and the conditions of its asymptotic stability have been established.