



HAL
open science

Contribution à l'étude de la stabilité du problème planétaire des trois-corps

Philippe Robutel

► **To cite this version:**

Philippe Robutel. Contribution à l'étude de la stabilité du problème planétaire des trois-corps. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1993. Français. <NNT : >. <tel-02095456>

HAL Id: tel-02095456

<https://hal.science/tel-02095456v1>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Thèse de Doctorat
en
Astronomie fondamentale, Mécanique céleste et Géodésie

présentée par :

Philippe Robutel
à
l'Observatoire de Paris

(0113)
ROB

sujet :

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE
DU PROBLEME PLANETAIRE DES TROIS CORPS

Rapporteurs :

*Giovanni Gallavotti
Scott Tremaine*



Soutenue le 9 Décembre 1993, devant le jury composé de :

*Jean Chapront
Alain Chenciner
Claude Froeschlé
Jacques Laskar
Carles Simo*

*Président du jury
Examineur
Examineur
Directeur de Thèse
Examineur*

Thèse de Doctorat
en
Astronomie fondamentale, Mécanique céleste et Géodésie

présentée par :

Philippe Robutel
à
l'Observatoire de Paris

sujet :

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA STABILITE
DU PROBLEME PLANETAIRE DES TROIS CORPS

Rapporteurs :

Giovanni Gallavotti
Scott Tremaine



Soutenue le 9 Décembre 1993, devant le jury composé de :

Jean Chapront
Alain Chenciner
Claude Froeschlé
Jacques Laskar
Carles Simo

Président du jury
Examineur
Examineur
Directeur de Thèse
Examineur

REMERCIEMENTS

Je tiens vivement à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Jacques Laskar qui a su me guider et m'orienter à travers les méandres de la mécanique céleste. Sa patience et son attention, qui m'ont soutenu tout au long du parcours, m'ont permis de venir à bout des obstacles rencontrés.

Je remercie sincèrement Monsieur Jean Chapront pour avoir bien voulu présider le jury de cette thèse, ainsi que Messieurs Alain Chenciner, Claude Froeschlé, Jacques Laskar et Carles Simo pour avoir accepté d'y participer en tant que membres, et plus spécialement Messieurs Giovanni Gallavotti et Scott Tremaine qui m'ont fait l'honneur d'être mes rapporteurs.

Au cours de ce travail effectué au Bureau des Longitudes, en compagnie de ces membres à qui j'exprime toute ma gratitude pour le chaleureux accueil qu'ils m'ont réservé, j'ai eu à de nombreuses reprises l'occasion d'échanger des points de vue et de recevoir l'aide et les conseils précieux d'Alain Chenciner, d'Alain Albouy, de Pierre-Vincent Koseleff et de Frédéric Joutel, je leur en sais gré.

Laurent Niederman, avec qui je partage complicité et amitié depuis le début de nos études, m'a permis d'utiliser ces formules donnant le rayon d'analyticité de certaines fonctions (sans avoir à verser de droits d'auteur) et m'a aidé dans leurs applications.

Les étudiants du B.D.L. ainsi que Christian Ruatti ont su eux aussi me ramener sur le droit chemin (pavé de cafés, de sourires, de joie et de petites bières).

Je ne peux oublier de mentionner mes parents qui m'ont soutenu moralement (et bien souvent financièrement), leur aide m'a été très précieuse.

Je voudrai enfin tirer mon chapeau à La Crevette, qui a tenu par modestie à conserver l'anonymat, pour toutes les souffrances qu'elle a endurée et ne veut plus subir.

J'aimerais adresser un clin d'oeil à l'Uranoscope (Association d'Astronomie Populaire de la Brie) qui, il y a de cela dix ans, a contribué au développement de ma passion pour l'astronomie.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	2
I. DEVELOPPEMENT DU HAMILTONIEN SECULAIRE ET REDUCTION DU MOMENT CINETIQUE.	
I.1) Hamiltonien en référentiel héliocentrique	5
I.2) Réduction du moment cinétique	
I.2.1) Référentiel lié au plan invariant	8
I.2.2) Mise en œuvre de la réduction	10
I.3) Développement de la fonction perturbatrice	12
I.4) Calcul du hamiltonien séculaire	
I.4.1) Position du problème	14
I.4.2) Méthode de Lindstedt-Poincaré	14
I.5) Composition des séries intervenant dans le calcul de la fonction perturbatrice et implantation des calculs sur TRIP.	
I.5.1) Présentation et notation utilisées	18
I.5.2) Construction des séries de base.	19
I.5.3) Construction du hamiltonien.	22
I.5.4) Utilisation du paramètre D_2	24
I.6) Transformation des conditions initiales	
I.6.1) Expression des positions et vitesses dans le repère initial	25
I.6.2) Définition du nouveau repère.	25
I.6.3) Calcul des nouvelles variables osculatrices	26
I.6.4) Conditions initiales du couple Jupiter-Saturne.	26
II. ETUDE ANALYTIQUE DE LA STABILITE DU PROBLEME PLANETAIRE DES TROIS CORPS	
II.1) Présentation	28
II.2) Quelques points théoriques et résultats mathématiques	
II.2.1) Intégrabilité du problème à deux planètes	28
II.2.2) existence de tores et d'orbites particuliers	29
II.3) Etude du problème linéaire et réduction du hamiltonien quadratique	
II.3.1) Etude du problème linéaire	30

II.3.2) Diagonalisation en base symplectique	
II.3.2.1) Présentation	37
II.3.2.2) Réduction dans le cas général	37
II.3.2.3) Application au hamiltonien séculaire	39
II.3.3) Quelques considérations sur l'espace des phases associé au hamiltonien quadratique	45
II.4) Existence de tores invariants de dimension maximale dans le problème planétaire des trois corps	
II.4.1) K.A.M. et les théories des perturbations classiques.	49
II.4.2) Le Théorème d'Arnold et son application au problème plan des trois corps	
II.4.2.1) Énoncé du théorème et quelques commentaires.	56
II.4.2.2) Application du théorème par Arnold.	59
II.4.2.3) Généralisations possibles du résultat.	60
II.4.3) Généralisation du résultat d'Arnold au problème spatial.	
II.4.3.1) Énoncé du résultat	61
II.4.3.2) Difficultés rencontrées	61
II.4.3.3) Domaine de définition du problème	62
II.4.3.4) Réduction de la partie séculaire à une forme normale	64
II.4.3.5) Vérification de la condition de non-dégénérescence	67
II.4.3.6) Estimation du reste.	70
III. ETUDE NUMERIQUE DES PROBLEMES SECULAIRES DU TYPE JUPITER-SATURNE.	
III.1) Position du problème et présentation des outils numériques.	
III.1.1) Motivations de l'étude.	76
III.1.2) La méthode d'analyse en fréquence.	77
III.2) Solutions quasi-périodiques pour les conditions initiales réelles de Jupiter-Saturne.	
III.2.1) Solution quasi-périodique d'ordre un des masses.	81
III.2.2) Solution quasi-périodique d'ordre deux des masses.	83
III.3) Etude globale de l'espace des phases.	
III.3.1) Aspect escompté de l'espace des phases.	87
III.3.2) Survol des espaces séculaires d'ordre une et deux.	89
III.3.3) Exploration de l'espace des phases à l'aide de l'analyse en fréquence.	
III.3.3.1) Stratégie de l'étude.	94
III.3.3.2) Analyse du problème séculaire d'ordre un.	95
III.3.3.3) Comparaison des fréquences à celles déduites d'une normalisation.	96
III.3.3.4) Stabilité du problème séculaire d'ordre un.	97
III.3.3.5) Etude de l'espace séculaire d'ordre deux.	100
III.4) Influence des résonances séculaires sur la stabilité d'un problème du type Jupiter-Saturne.	
III.4.1) Principe de l'étude.	102
III.4.2) La résonance (2:-5) en moyen mouvement.	102

III.4.3) Evolution des coefficients du hamiltonien.	108
III.4.4) Aspect global des cinq espaces des phases.	108
III.4.5) Etude du problème séculaire pour $\alpha = 0.5439$.	112
III.4.6) Stabilité globale des problèmes séculaires.	117
CONCLUSION	118
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	120
ANNEXES	
Annexe I : Table des notations	123
Annexe II : Présentation du programme TRIP	126
Annexe III : Expression du hamiltonien séculaire	133
Annexe III : Présentation des articles	137

INTRODUCTION

Au XVII^e siècle, Newton écrivait : *Un destin aveugle ne pouvait jamais faire mouvoir ainsi toutes les planètes, à quelques inégalités près à peine remarquables, qui peuvent provenir de l'action mutuelle des planètes et des comètes, et qui probablement deviendront plus grandes par une longue suite de temps, jusqu'à ce qu'enfin ce système ait besoin d'être remis en ordre par son auteur*". Cette citation retrace la conception du mouvement des planètes qu'avait ce savant : l'attraction mutuelle des corps compromet, selon lui, la stabilité du système solaire. Cette dernière ne peut exister sans l'intervention du Divin.

Un siècle plus tard, comme le rappelle J.Laskar dans un essai sur l'histoire de la stabilité du système solaire [La92a], Laplace apporta une réponse rigoureuse à ce problème. Utilisant les nouveaux outils de la mécanique analytique développée parallèlement par Lagrange, il établit un théorème de stabilité du système solaire. Il montra que les demi-grands axes des planètes ne subissent (à l'ordre un des masses des planètes) que de petites variations périodiques. Puis étant conscient que ce résultat ne pouvait suffire à établir la stabilité d'un système planétaire, il entreprit l'étude de la variation des inclinaisons et des excentricités. Pour accomplir cette tâche, Laplace fut amené à linéariser les équations du mouvement et ainsi à étudier un système différentiel linéaire à coefficients constants. A l'aide d'un argument de conservation du moment cinétique, il démontra que les solutions de ce système sont quasi-périodiques. Ceci fournit ainsi le premier modèle stable déduit de la Loi de Newton: modèle dit de Laplace-Lagrange dans lequel les planètes se déplacent sur des orbites keplériennes dont les éléments osculateurs (demi-grands axes mis à part) sont animés de mouvements quasi-périodiques à très longues périodes.

Le Verrier quant à lui reprit les calculs de Laplace en développant les interactions mutuelles des planètes à un ordre plus élevé des excentricités et inclinaisons planétaires [LeV]. Il posa ainsi le problème de l'influence des termes non-linéaires dans les questions de stabilité. Il souleva ensuite le problème fondamental des résonances séculaires et de leurs effets sur l'intérieur de la ceinture d'astéroïdes.

La question des termes non-linéaires et surtout celle de la convergence des séries destinées à construire les solutions des équations du mouvement planétaire furent développées par Poincaré qui conclut à la divergence de ces mêmes séries [Po1892]. Le théorème de stabilité de Laplace ne devenait donc plus valable que sur un temps fini. De plus, Poincaré mit en valeur l'infinie complexité des mouvements planétaires en montrant la non-intégrabilité du problème des trois corps [Po1892].

Plus récemment, entre 1956 et 1964 de nouveaux résultats portant sur la nature géométrique des solutions de certains systèmes dynamiques furent établis par les mathématiciens Kolmogorov [Ko], Arnold [Ar63a] et Moser [Mo].

Ils démontrèrent que pour de très faibles perturbations de certains systèmes hamiltoniens intégrables, il existe un ensemble de mesure strictement positive de conditions initiales conduisant à des solutions quasi-périodiques évoluant sur un tore invariant par le flot du

système associé, la mesure du complémentaire de cet ensemble tendant vers zéro avec la taille de la perturbation. Arnold présenta en 1963 [Ar63b] la première application de cette théorie à un problème planétaire. Ce résultat apporta une caution supplémentaire à la vision d'un système solaire stable.

Nekhoroshev, en 1979, abonda dans le même sens. En abandonnant l'idée de décrire la géométrie des trajectoires, il établit que sous certaines conditions, les variables d'action d'un système hamiltonien quasi-intégrable ne pouvaient s'échapper d'un petit voisinage de leurs conditions initiales, ce sur un temps fini mais exponentiellement long [Ne]. Un tel théorème appliqué au système solaire semblait pouvoir offrir des résultats prometteurs. Mais, comme pour la théorie KAM, les seuils de validités de tels théorèmes étaient bien trop faibles pour être directement adaptés à notre système solaire.

Cette vision d'un système solaire stable fut gravement altérée par les résultats numériques obtenus au cours de ces cinq dernières années.

En 1988, grâce à une intégration numérique du système solaire extérieur (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton) menée au MIT, G.Sussman et J.Wisdom ont mis en évidence le mouvement chaotique de Pluton [SuWi88]. L'année suivante, par intégration numérique du système séculaire associé aux huit planètes principales du système solaire sur 200 Millions d'années, J.Laskar établit la nature chaotique du mouvement des planètes intérieures [La89a]. Cette étude lui permit de montrer que certaines résonances séculaires étaient à la naissance de ces phénomènes chaotiques. Des intégrations numériques entreprises ultérieurement par Quinn, Tremaine et Duncan [QuTrDu], puis par Sussman et Wisdom [SuWi92] à l'aide de schémas symplectiques confirmèrent ces résultats.

Mais ces expériences numériques ne nous dévoilent que localement l'évolution d'un système planétaire. Seul un petit voisinage de la solution issue des conditions initiales de notre système solaire peut être exploré. Il serait pourtant fondamental d'obtenir une vision globale d'un tel système et en particulier, d'être capable de déterminer, en ayant pour seule donnée les conditions initiales de chacune des planètes considérées, la nature régulière ou chaotique des solutions qui en sont issues. Et dans la deuxième situation, il serait souhaitable de savoir au bout de combien de temps se manifesteraient les premières traces de chaos. Mais, le système solaire ne comportant pas moins de 24 degrés de liberté, un tel projet paraît pour le moins irréaliste. Il semble donc judicieux de se limiter dans un premier temps à un système planétaire plus réduit. Le problème planétaire des trois corps, que l'on peut ramener à quatre degrés de liberté, paraît être un terrain propice à une compréhension globale de sa dynamique. Dans le cadre de ce problème, nous tenterons aussi d'évaluer l'influence des résonances séculaires sur un tel système, ces résonances étant à l'origine des phénomènes chaotiques au sein des planètes intérieures.

La question de la stabilité d'un système à deux planètes sera abordée de deux manières fondamentalement différentes. Dans un premier temps, nous tenterons de généraliser le résultat obtenu par Arnold en 1963 afin de montrer l'existence de trajectoires quasi-périodiques dans le problème planétaire des trois corps. Nous devons bien entendu nous limiter aux systèmes dont les planètes ont de très faibles excentricités et de très petites masses en comparaison de celle du corps central. Ce résultat ne pouvant s'appliquer directement à un système planétaire réaliste, nous aborderons dans un deuxième temps, sous

l'angle numérique, l'étude globale du problème séculaire des systèmes du type Jupiter-Saturne-Soleil, problème important pour l'étude de la stabilité du système solaire. Ces deux corps, formant l'essentiel de la masse planétaire du système solaire, conditionnent la marche des autres planètes. Dans ces conditions, une forte irrégularité dans leurs mouvements entraînerait sans doute une grande instabilité de l'ensemble du système.

Avant d'aborder ces questions, qu'elles soient traitées sous l'angle théorique ou numérique, il est nécessaire d'effectuer un important travail de mise en forme des équations du mouvement, nous nous inspirerons pour cela des méthodes développées par J.Laskar depuis 1988.

Tout d'abord nous devons obtenir un système de coordonnées prenant en compte l'invariance du centre de masse et du moment cinétique, puis développer dans ces variables le hamiltonien de manière totalement analytique. Enfin, on doit calculer (toujours de manière analytique) un développement du hamiltonien séculaire d'ordre deux des masses. Tous les résultats et méthodes de calcul ont été regroupés dans le chapitre premier.

On trouvera dans le chapitre deux, après un bref rappel des résultats mathématiques concernant l'intégrabilité des problèmes planétaires et l'existence d'orbites remarquables, une présentation des théories des perturbations et plus particulièrement de la théorie KAM. Ces considérations sont suivies par une étude de l'espace des phases associée à la partie quadratique du hamiltonien séculaire d'ordre un des masses. Ensuite, nous aborderons la généralisation du résultat d'Arnold portant sur l'application de la théorie KAM au problème plan des trois corps. Ce résultat, ayant été établi pour le problème plan et dans la situation asymptotique dans laquelle le rapport des demi-grands axes des planètes tend vers zéro, est étendu au problème spatial indépendamment des valeurs des demi-grands axes planétaires. Cette étude nous fournit une description globale de la dynamique rencontrée dans la majeure partie de l'espace des phases.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude numérique du problème séculaire du couple Jupiter-Saturne. On y compare la structure et la régularité du problème d'ordre un et d'ordre deux des masses. Puis nous étudions l'influence des résonances séculaires sur la dynamique du problème d'ordre deux. Nous obtenons ainsi un résultat sur la stabilité globale du problème séculaire.

On trouvera enfin, dans la dernière annexe, les résultats d'un travail auquel j'ai collaboré, portant sur le comportement à long terme des obliquités des planètes.

CHAPITRE I

DEVELOPPEMENT DU HAMILTONIEN SECULAIRE ET REDUCTION DU MOMENT CINETIQUE

Ce chapitre utilise largement les méthodes et le formalisme développé par J.Laskar depuis 1988 pour l'élaboration d'une théorie de perturbation planétaire [La89b] [La89c] [La92b] [La92c].

I.1) Hamiltonien en référentiel héliocentrique

Avant d'écrire les équations du mouvement planétaire, il est nécessaire de se fixer un système de référence. Un référentiel barycentrique galiléen, ne permet pas forcément une écriture simple du problème.

En 1896, Poincaré présenta un nouveau système de coordonnées canoniques dans lequel le soleil était choisi pour origine [Po07],[La89b]. Peut-être parce qu'avec ces coordonnées, les moments (conjugués des variables position) n'étaient pas tangents aux trajectoires planétaires, le système héliocentrique canonique de Poincaré ne fut, semble-t-il, jamais utilisé par les astronomes et retomba dans l'oubli.

C'est au cours des séminaires du groupe de travail sur la lecture des "Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", que J.Laskar préconisa l'emploi de ce référentiel pour l'étude des mouvements planétaires [La89b].

Ce dernier a en effet l'avantage, tout en conservant une écriture concise et élégante (tenant compte de la symétrie du problème), de permettre la réduction effective du centre de masse et de fournir une expression exacte de la fonction perturbatrice contrairement aux coordonnées de Jacobi qui conduisent à un développement en puissance des masses planétaires [Po1892].

C'est ce système de coordonnées que nous choisirons pour le calcul et le développement du hamiltonien du problème planétaire des trois corps.

Dans un premier temps, retraçons brièvement les grandes lignes du calcul du hamiltonien suivant la méthode développée par J.Laskar [La92b] dans le cadre du problème planétaire des $n + 1$ corps.

Considérons un système composé de deux planètes et d'un soleil (corps de masse dominante). Notons $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ les positions barycentriques respectives du soleil et des deux planètes, m_0, m_1, m_2 leurs masses et $\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2$ leurs quantités de mouvement.

Le système de coordonnées héliocentriques canoniques $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tilde{\mathbf{r}}_0, \tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2)$ est simplement

fourni par les expressions :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{cases}$$

Le vecteur $\tilde{\mathbf{r}}_0$ étant la quantité de mouvement total du système, on impose $\tilde{\mathbf{r}}_0 = 0$, ce qui effectue de manière pratique la réduction du centre de masse.

De l'expression barycentrique du hamiltonien :

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^2 \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_j\|^2}{m_0} - \mathcal{G} \sum_{0 \leq i < j < 2} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|}$$

on déduit l'expression en coordonnées héliocentriques canoniques suivante :

$$F = F_0 + F_1$$

avec

$$F_0 = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{m_j + m_0}{m_j m_0} \|\tilde{\mathbf{r}}_j\|^2 - \mathcal{G} \frac{m_0 m_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right)$$

et

$$F_1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\Delta}$$

où Δ représente la distance mutuelle (distance séparant les deux planètes) $\Delta = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$.

La partie non perturbée F_0 est somme de deux problèmes de Kepler, chacun d'eux correspondant au mouvement d'une planète de masse $\beta_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j}$ en orbite autour d'un

corps fixe de masse $\mu_j = \mathcal{G}(m_0 + m_j)$. La perturbation F_1 est d'ordre un des masses et n'a pas, comme nous l'avons signalé, de terme d'ordre supérieur.

Pour chacune des deux ellipses keplériennes associées au problème non perturbé, nous utiliserons les notations suivantes (cf figure I.1) : les a_j représenteront les demi-grands axes, e_j les excentricités, i_j les inclinaisons, ω_j les arguments des périhélie, Ω_j les longitudes des nœuds ascendants, et enfin v_j les anomalies vraies auxquelles sont associées les anomalies moyennes l_j .

Pour chacune des deux ellipses keplériennes associées au problème non perturbé, nous utiliserons les notations suivantes (cf figure I.1) : les a_j représenteront les demi-grands axes, e_j les excentricités, i_j les inclinaisons, ω_j les arguments des périhélie, Ω_j les longitudes des nœuds ascendants, et enfin v_j les anomalies vraies auxquelles sont associées les anomalies moyennes l_j .

Pour chacune des deux ellipses keplériennes associées au problème non perturbé, nous utiliserons les notations suivantes (cf figure I.1) : les a_j représenteront les demi-grands axes, e_j les excentricités, i_j les inclinaisons, ω_j les arguments des périhélie, Ω_j les longitudes des nœuds ascendants, et enfin v_j les anomalies vraies auxquelles sont associées les anomalies moyennes l_j .

Pour chacune des deux ellipses keplériennes associées au problème non perturbé, nous utiliserons les notations suivantes (cf figure I.1) : les a_j représenteront les demi-grands axes, e_j les excentricités, i_j les inclinaisons, ω_j les arguments des périhélie, Ω_j les longitudes des nœuds ascendants, et enfin v_j les anomalies vraies auxquelles sont associées les anomalies moyennes l_j .

Si nous notons :

$$\Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j} : \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{a_1}{a_2} < 1$$

le hamiltonien s'écrit alors $F_0 + F_1$ avec :

$$F_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{\Lambda_1^2} + \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{\Lambda_2^2} \right) \quad (I.1.1)$$

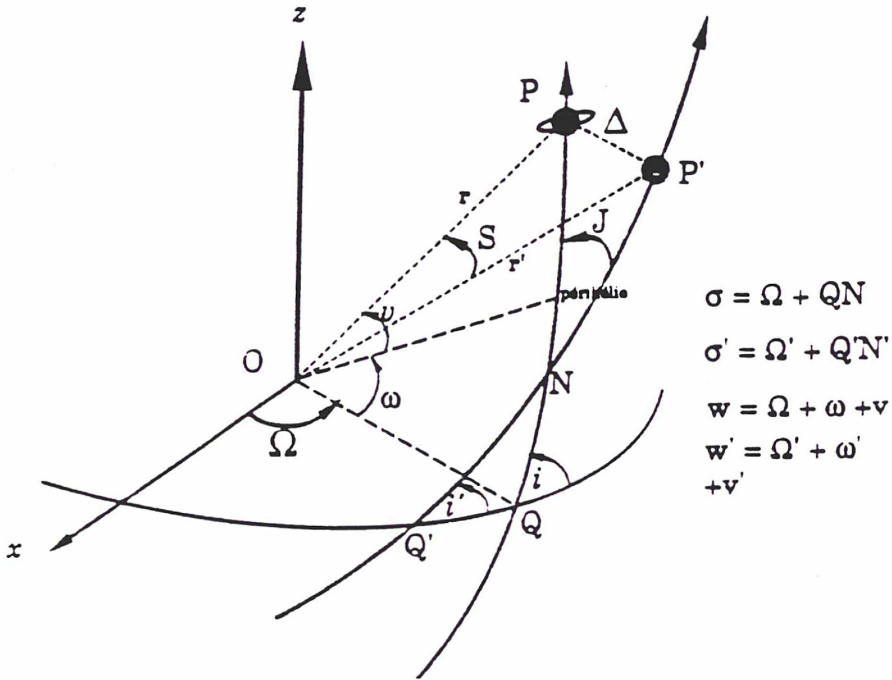
et

$$F_1 = \frac{\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2^2 m_2}{\Lambda_2^2 m_0} \left(-\frac{a_2}{\Delta} + \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) \left(1 + \frac{m_2}{m_0}\right) \right)^{-1/2} \frac{F_c}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (I.1.2)$$

où F_c est la partie complémentaire sans dimension qui sera explicitée au paragraphe (I.2.2).

Figure I.1 : Définition des éléments osculateurs.

Les éléments associés à la planète P sont respectivement le noeud ascendant Ω , l'argument du périhélie ω , l'anomalie vraie v et i l'inclinaison. J représente l'inclinaison mutuelle.



I.2) Réduction du moment cinétique

I.2.1) Référentiel lié au plan invariant

L'usage du référentiel héliocentrique nous a permis d'effectuer la réduction du centre de masse, nous ramenant ainsi à l'étude du mouvement de deux planètes autour d'un astre fixe (problème comportant six degrés de liberté). Il convient maintenant de tenir compte de l'invariance du moment cinétique.

On trouve dans Poincaré [Po1892], un système de variables qui, en tenant compte de cette invariance, réduit de deux le nombre total de degrés de liberté du problème (les possibilités de simplification offertes par l'invariance du moment cinétique étaient déjà connues de Laplace). Retraçons brièvement la manière de construire des variables adaptées à cette réduction. Remarquons tout d'abord que l'intersection des plans osculateurs des deux planètes est assujettie à rester en permanence dans le plan invariant perpendiculaire à la direction du moment cinétique total (fait que nous ne tarderons pas à démontrer). Cette constatation va nous permettre de nous affranchir aussi bien de la longitude des nœuds que des inclinaisons planétaires. La réduction, dite réduction de Jacobi, consiste à se placer dans un référentiel tournant avec la ligne des nœuds commune aux deux corps. On conçoit donc que cette réduction n'est pas possible dans le cas plan. Pourtant, une fois le problème réduit, annuler le paramètre correspondant aux inclinaisons revient à étudier le problème plan en axes tournants avec une fréquence dont la partie à longue période n'est autre que le mode propre des longitudes des nœuds du problème séculaire (cette fréquence ne dépend que du rapport des demi-grands axes α). Notons aussi que cette réduction n'a plus de sens si l'un des corps est de masse nulle puisque le moment cinétique total est réduit à celui du corps primaire (nous reviendrons sur ce problème au chapitre II).

En utilisant les variables héliocentriques et leurs conjuguées, le moment cinétique total s'écrit simplement :

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_1 \wedge \tilde{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \tilde{\mathbf{r}}_2 .$$

Dans le repère lié au plan invariant (plan perpendiculaire au moment cinétique \mathbf{C}), les deux premières coordonnées du vecteur sont nulles alors que la dernière est réduite à sa norme C .

Si nous utilisons les variables canoniques de Delaunay définies dans le repère lié au plan invariant par :

$$\begin{aligned} L_j &= \sqrt{\mu_j a_j} & l_j &= M_j \\ G_j &= L_j \sqrt{1 - e_j^2} & g_j &= \omega_j \\ \Theta_j &= G_j \cos i_j & \theta_j &= \Omega_j \end{aligned}$$

le moment cinétique total s'écrit :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta_1 G_1 \sin i_1 \sin \theta_1 + \beta_2 G_2 \sin i_2 \sin \theta_2 \\ -\beta_1 G_1 \sin i_1 \cos \theta_1 - \beta_2 G_2 \sin i_2 \cos \theta_2 \\ \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} .$$

Cette équation conduit alors au système :

$$\beta_1 G_1 \sin \theta_1 - \beta_2 G_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (I.2.1.1)$$

$$\beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 = C \quad (I.2.1.2)$$

$$\theta_1 + \pi = \theta_2 . \quad (I.2.1.3)$$

On vérifie ainsi que les lignes des nœuds des deux corps sont confondues.

Afin d'achever la démonstration, il nous suffit d'introduire les nouvelles variables :

$$\psi_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (= \theta_1 + \frac{\pi}{2})$$

$$\psi_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (= -\frac{\pi}{2})$$

$$\Psi_1 = \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2 \quad (= C)$$

$$\Psi_2 = \beta_1 \Theta_1 - \beta_2 \Theta_2 .$$

Ce qui permet d'exprimer la partie du système hamiltonien mettant en jeu les inclinaisons sous la forme :

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial F}{\partial \Psi_1} = \frac{\partial F}{\partial C} = (\dot{\theta}) \quad (I.2.1.4)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\partial F}{\partial \Psi_2} = 0 \quad (I.2.1.5)$$

$$\dot{\Psi}_1 = - \frac{\partial F}{\partial \psi_1} = 0 \quad (I.2.1.6)$$

$$\dot{\Psi}_2 = - \frac{\partial F}{\partial \psi_2}$$

La relation (I.2.1.5) nous montre que le hamiltonien ne dépend des inclinaisons qu'uniquement par le biais de Ψ_1 , c'est à dire du moment cinétique. La relation (I.2.1.6) nous prouve que F ne dépend des longitudes des nœuds que par leurs différences. Bien que le système puisse être rendu indépendant des inclinaisons, aucune information n'est perdue, puisque la vitesse de précession commune des deux plans osculateurs nous est fournie par la relation (I.2.1.4) et qu'une combinaison des relations (I.2.1.1) et (I.2.1.2) nous permet de remonter aux inclinaisons sous la forme :

$$\begin{cases} \beta_1 \Theta_1 &= \frac{C}{2} + \frac{\beta_1^2 G_1^2}{2C} - \frac{\beta_2^2 G_2^2}{2C} \\ \beta_2 \Theta_2 &= \frac{C}{2} - \frac{\beta_1^2 G_1^2}{2C} + \frac{\beta_2^2 G_2^2}{2C} . \end{cases}$$

I.2.2) Mise en œuvre de la réduction

Nous venons de voir qu'il était possible de réduire de deux le nombre de degrés de liberté du problème. Il s'agit maintenant d'éliminer effectivement les inclinaisons et les longitudes du nœud.

Les deux seules parties de la fonction perturbatrice contenant les inclinaisons et les nœuds sont la partie complémentaire

$$T_1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0} = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) \left(1 + \frac{m_2}{m_0}\right) \right)^{-1/2} \frac{F_c}{\sqrt{\alpha}}$$

où F_c est égale à la partie complémentaire T_1 multipliée par la constantes

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}}{\mathcal{G}m_1m_2} \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) \left(1 + \frac{m_2}{m_0}\right) \right)^{1/2}$$

et celle contenant la distance mutuelle :

$$\frac{a_2}{\Delta} = \frac{a_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos S}}$$

Dans la seconde formule, seule la partie $\cos S = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1r_2}$ contient l'inclinaison.

Si nous utilisons les variables osculatrices, les vecteurs \mathbf{r}_j et $\tilde{\mathbf{r}}_j$ ont pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j &= r_j \mathcal{R}_3(\Omega_j) \mathcal{R}_1(i_j) \mathcal{R}_3(\omega_j) \begin{pmatrix} \cos v_j \\ \sin v_j \\ 0 \end{pmatrix} = r_j \mathcal{R}_3(\Omega_j) \mathcal{R}_1(i_j) \hat{U}_j \\ \tilde{\mathbf{r}}_j &= \frac{\beta_j}{n_j a_j} \mathcal{R}_3(\Omega_j) \mathcal{R}_1(i_j) \mathcal{R}_3(\omega_j) \begin{pmatrix} -\sin v_j \\ e_j + \cos v_j \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\beta_j}{n_j a_j} \mathcal{R}_3(\Omega_j) \mathcal{R}_1(i_j) \hat{V}_j \\ \text{avec } \hat{U}_j &= \mathcal{R}_3(\omega_j) \begin{pmatrix} \cos v_j \\ \sin v_j \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{V}_j = \mathcal{R}_3(\omega_j) \begin{pmatrix} -\sin v_j \\ e_j + \cos v_j \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où n_j et v_j sont respectivement les moyens mouvements et les anomalies vraies. Dans cette formule, $\mathcal{R}_1(\theta)$ et $\mathcal{R}_3(\theta)$ représentent les rotations d'angle θ par rapport aux axes des x et des z dont les matrices s'écrivent :

$$\mathcal{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En tenant compte du fait que les périhéliees sont opposés, $\cos S$ s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\cos S &= \left(\mathcal{R}_3(\Omega_1) \mathcal{R}_1(i_1) \hat{U}_1 \right) \cdot \left(\mathcal{R}_3(\Omega_2) \mathcal{R}_1(i_2) \hat{U}_2 \right) \\
&= \left(\mathcal{R}_3(\pi) \mathcal{R}_1(i_1) \hat{U}_1 \right) \cdot \left(\mathcal{R}_1(i_2) \hat{U}_2 \right) \\
&= -\cos(v_1 + \omega_1) \cos(v_2 + \omega_2) - \sin(v_1 + \omega_1) \sin(v_2 + \omega_2) \cos(i_1 + i_2)
\end{aligned}$$

utiliser l'inclinaison mutuelle J , qui est ici simplement égale à la somme des inclinaisons planétaires, et poser : $C_J^2 = 1 - \cos J = O(J^2)$ et $w_j = v_j + \omega_j$. L'expression du cosinus de S devient simplement :

$$\cos S = -\cos(w_1 - w_2) + (\cos(w_1 - w_2) - \cos(w_1 + w_2)) C_J^2 / 2 .$$

En ce qui concerne la partie complémentaire, en posant :

$$Z_j = \frac{i}{\sqrt{1 - e_j^2}} (e_j \exp(i\omega_j) + \exp(i(v_j + \omega_j))) ,$$

on obtient par un calcul analogue au précédent l'expression suivante :

$$T_1 = -\frac{\beta_1 n_1 a_1 \beta_2 n_2 a_2}{2m_0} (Z_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 Z_2 - \frac{(Z_1 - \bar{Z}_1)(Z_2 - \bar{Z}_2)}{2} (\cos J - 1)) . \quad (I.2.2.1)$$

Procédons maintenant à l'élimination de l'inclinaison mutuelle des expressions T_1 et $\cos S$. Calculons l'expression du moment cinétique à l'aide de l'inclinaison mutuelle. La dernière composante de \mathbf{C} nous donne :

$$\begin{aligned}
C^2 &= \beta_1^2 G_1^2 \cos^2 i_1 + \beta_2^2 G_2^2 \cos^2 i_2 \\
&= \beta_1^2 G_1^2 + \beta_2^2 G_2^2 + 2\beta_1 \beta_2 G_1 G_2 \cos(i_1 + i_2) \\
&\quad - (\beta_1 G_1 \sin i_1 - \beta_2 G_2 \sin i_2)^2 .
\end{aligned}$$

Mais, comme $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, la dernière ligne n'est autre que le carré de la deuxième composante du vecteur moment cinétique : celle-ci est donc nulle. On a finalement l'expression suivante :

$$C^2 = \beta_1^2 G_1^2 + \beta_2^2 G_2^2 + 2\beta_1 \beta_2 G_1 G_2 \cos J$$

d' où

$$C_J^2 = \frac{(\beta_1 G_1 + \beta_2 G_2)^2 - C^2}{2\beta_1 \beta_2 G_1 G_2} . \quad (I.2.2.2)$$

Après ces quelques transformations, notre problème planétaire des trois corps se trouve réduit à un système hamiltonien à quatre degrés de liberté dépendant d'un paramètre qui n'est autre que la norme du moment cinétique C .

Jusqu'ici, nous avons utilisé les variables canoniques de Delaunay $(l_j, g_j, \theta_j, L_j, G_j, \Theta_j)$, mais celles-ci ont l'inconvénient d'être dégénérées pour des inclinaisons et excentricités nulles. Comme les mouvements planétaires sont toujours proche de cette configuration, nous sommes conduits à utiliser les variables de Poincaré qui ont, contrairement aux

précédentes, l'avantage d'y être régulières. Les nœuds et inclinaisons étant éliminés de notre problème, nous utiliserons les variables complexes de Poincaré : $(\lambda_j, x_j, \Lambda_j, -i\bar{x}_j)$ définies par :

$$\begin{cases} \lambda_j = l_j + \omega_j \\ \Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j} \\ x_j = \sqrt{\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \exp(i\omega_j) \end{cases}$$

Notons que lors du calcul effectif du développement de la fonction perturbatrice, ce ne sont pas exactement ces variables que nous utiliserons. En effet, il est préférable d'introduire les variables (non-canoniques) X_j définies par : $X_j = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_j}} x_j$ pour au moins deux raisons. Tout d'abord, les X_j sont des grandeurs sans dimension. Ensuite, elles ont l'avantage d'être équivalentes aux excentricités e_j quand ces dernières tendent vers zéro (on vérifie que les x_j sont pour leur part équivalentes aux quantités $\sqrt{\frac{\Lambda_j}{2}} e_j$).

I.3) Développement de la fonction perturbatrice

Nous venons de voir de quelle manière il était possible de réduire le problème planétaire des trois corps en utilisant l'invariance du moment cinétique. Mais, ainsi posé, le hamiltonien est une expression dépendant implicitement des variables de Poincaré, et n'est pas directement exploitable. Nous sommes donc conduits, afin d'obtenir une dépendance explicite, à développer la fonction perturbatrice du problème planétaire sous forme d'une série de Fourier dont les arguments sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des longitudes moyennes et dont les coefficients sont des séries entières des variables de Poincaré (x_j, \bar{x}_j) et de C_J . Cette expression n'a de sens que pour de faibles excentricités et inclinaisons mutuelles, mais ceci ne nous limitera pas puisque c'est dans ce cadre que se situent les problèmes étudiés aux chapitres II et III.

Nous suivrons la méthode développée par J.Laskar [La92b] qui sera modifiée afin de prendre en compte l'invariance du moment cinétique.

La partie non perturbée du hamiltonien (somme de deux problèmes de Kepler) étant déjà exprimée à l'aide de variables de Poincaré (formule I.1.1), il nous suffit de travailler sur la perturbation (I.1.2). La partie principale sera décomposée de la manière suivante :

$$\frac{a_2}{\Delta} = \frac{a_2}{r_2} (A + V)^{-1/2} \quad (I.3.1)$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= 1 + 2\alpha \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \alpha^2 \\
V &= 2\alpha V_1 + \alpha^2 V_2 \\
V_1 &= \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\rho}{\alpha} \cos S \\
V_2 &= \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 - 1 \\
\rho &= \frac{r_1}{r_2} .
\end{aligned}$$

Afin de poursuivre le calcul, il convient d'exprimer les quantités V_1 et V_2 en fonction des éléments osculateurs, puis des variables de Poincaré. On vérifie ainsi que V_2 est d'ordre un en les variables x_j , et que V_1 est d'ordre un en x_j et C_j^2 . Sachant que les puissances de A se développent en série de Fourier à l'aide des coefficients de Laplace $b_s^{(j)}(\alpha)$ sous la forme :

$$A^{-s} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_s^{(j)}(\alpha) \exp(j(\lambda_1 - \lambda_2))$$

le développement en série de Taylor de

$$\frac{a_2}{r_2} (A + V)^{-1/2} ,$$

nous livre une expression de la partie principale de la fonction perturbatrice à l'ordre voulu des excentricités et inclinaisons. D'une manière semblable, un développement en variables osculatrices de la formule (I.2.2.1) nous donne l'expression de la partie complémentaire. De nombreux détails sur la forme des séries et la manière de les construire seront donnés au paragraphe I.4.3.

Ce calcul achevé, il est alors temps de se débarrasser de l'inclinaison mutuelle en la remplaçant par une expression dépendante de la norme du moment cinétique et des excentricités.

Exprimons d'abord l'inclinaison mutuelle en fonction des quantités X_j et C . En remplaçant dans la formule (I.2.2.2) $\beta_j G_j$ par $\Lambda_j - \frac{|X_j|^2}{2}$, on obtient

$$C_j^2 = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 - C^2 - (\Lambda_1 |X_1|^2/2 + \Lambda_2 |X_2|^2/2) + (\Lambda_1 |X_1|^2/2 + \Lambda_2 |X_2|^2/2)^2}{2\Lambda_1 \Lambda_2 (1 - |X_1|^2/2)(1 - |X_2|^2/2)} .$$

On déduit de cette relation que le paramètre

$$D_2 = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 - C^2}{\Lambda_1 \Lambda_2}$$

est d'ordre deux en les excentricités et inclinaisons.

D_2 étant une petite quantité, nous pouvons enfin éliminer C_J^2 du hamiltonien en la remplaçant par le développement en série de Taylor de :

$$C_J^2 = \frac{D_2 - (1 + k^{-1})(k|X_1|^2 + |X_2|^2) + k^{-1}/4(k|X_1|^2 + |X_2|^2)^2}{2(1 - |X_1|^2/2)(1 - |X_2|^2/2)} \quad (I.3.2)$$

dans lequel

$$k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\alpha} = h\sqrt{\alpha}.$$

Signalons que la présence d'une singularité en $k = h\sqrt{\alpha} = 0$ dans l'expression (I.3.2) crée quelques difficultés. Ceci confirme que la réduction du moment cinétique perd son sens dans le cas du problème restreint. En revanche, si l'on remarque que dans la formule (I.3.1) la variable d'inclinaison n'intervient que par le biais de αC_J^2 , on élimine toute singularité en $\alpha = 0$ en utilisant le paramètre $\sqrt{\alpha} D_2$.

Une fois ces calculs achevés, on obtient une expression polynômiale de la fonction perturbatrice au degré voulu des excentricités et inclinaisons.

I.4) Calcul du hamiltonien séculaire

I.4.1) Position du problème

La dégénérescence du problème planétaire (les fréquences non perturbées correspondant à l'évolution des nœuds et des périhélie sont nulles, contrairement aux moyen-mouvements), nous contraint à distinguer deux types d'angle dont l'évolution est de nature différente : les longitudes moyennes qui sont à variation rapide (la période étant de l'ordre d'une dizaine d'années pour Jupiter et Saturne), et les longitudes des nœuds et des périhélie qui sont à variation lente (période de l'ordre de 50 000 ans pour ces mêmes planètes).

La théorie classique des perturbations nous indique alors que sur un intervalle de temps long mais fini, les orbites osculatrices des planètes subissent d'importantes déformations (variations des excentricités et inclinaisons, ainsi que précessions des orbites) à longues périodes auxquelles s'ajoutent des petites oscillations à courtes périodes. Il convient donc, pour étudier l'évolution à long terme d'un système planétaire, d'éliminer les faibles variations rapides pour se concentrer uniquement sur les variations lentes dites séculaires.

Pour ce faire, il existe deux grands types de méthode. Celle de Lindstedt-Poincaré [Po1892], qui construit une transformation canonique de manière implicite, et celle de Lie [LiLi] qui au contraire fournit explicitement la transformation normalisant le hamiltonien. La première méthode, si nous nous limitons à une normalisation d'ordre un ou deux, demande moins de calculs que la seconde. De plus, n'étant pas intéressés par la transformation, mais uniquement par le hamiltonien séculaire résultant, nous ne serons pas confrontés à la difficulté qui consiste à résoudre les équations implicites définissant le changement de variables canoniques.

C'est donc la méthode de Lindstedt-Poincaré que nous emploierons afin de mener à bien nos calculs.

Nous aurons besoin dans le chapitre II du hamiltonien séculaire d'ordre un des masses développé au degré quatre des variables X_j . Pour le chapitre III, nous devons disposer d'un hamiltonien offrant une bonne modélisation de l'évolution séculaire du couple Jupiter-Saturne.

La méthode de Lindstedt-Poincaré fut utilisée par J.Laskar pour une étude de la stabilité du système solaire. La comparaison de la solution du système séculaire aux éphémérides [La86] et aux intégrations numériques directes à long terme [QuTrDu] montrent qu'un hamiltonien séculaire calculé à l'ordre deux des masses et au degré six des excentricités et inclinaisons nous permet d'obtenir une très bonne approximation.

I.4.2) Méthode de Lindstedt-Poincaré

Rappelons brièvement le principe de cette méthode de normalisation (pour plus de détails, on pourra se référer à [Po1892], [Ch] et [La92c]). Si nous notons $(\lambda, \Lambda, x, \bar{x})$ les variables canoniques de Poincaré : $(\lambda_j, \Lambda_j, x_j, \bar{x}_j)$, le hamiltonien du problème des trois corps s'écrit

$$F(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}) = F_0(\Lambda) + F_1(\lambda, \Lambda, x, \bar{x})$$

où F_1 est une perturbation d'ordre un des masses planétaires.

La méthode de Lindstedt-Poincaré consiste alors à construire un nouveau système de variables conjuguées $(\lambda_s, \Lambda_s, x_s, \bar{x}_s)$ voisines de $(\lambda, \Lambda, x, \bar{x})$ (puisque les masses planétaires sont faibles), pour lesquelles le hamiltonien se réduit à la forme :

$$F_s(\lambda_s, \Lambda_s, x_s, \bar{x}_s) = F_{s0}(\Lambda_s, x_s, \bar{x}_s) + F_{s1}(\lambda_s, x_s, \bar{x}_s) + F_{s2}(\Lambda_s, x_s, \bar{x}_s) + R(\lambda_s, \Lambda_s, x_s, \bar{x}_s)$$

où les $F_{s,j}$ sont d'ordre j du rapport des masses et R d'ordre 3. Le reste R sera négligé car il est suffisamment petit pour ne pas influencer (au moins qualitativement) la nature du mouvement.

La transformation est définie de manière implicite par les équations :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\partial S}{\partial \lambda} & x &= \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} \\ \lambda_s &= \frac{\partial S}{\partial \Lambda_s} & \bar{x}_s &= \frac{\partial S}{\partial x_s} \end{aligned}$$

où la fonction génératrice S est de la forme :

$$S(\lambda, \Lambda_s, \bar{x}, x_s) = \lambda \cdot \Lambda_s + \bar{x} \cdot x_s + S_1(\lambda, \Lambda_s, \bar{x}, x_s) + S_2(\lambda, \Lambda_s, \bar{x}, x_s)$$

avec S_j d'ordre j du rapport des masses et où les applications $\frac{\partial S}{\partial \Lambda_s}$, $\frac{\partial S}{\partial x_s}$, et $\frac{\partial S}{\partial \bar{x}}$ sont 2π périodiques en λ .

Par développement de Taylor des deux membres de l'égalité

$$F(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}) = F_s(\lambda_s, \Lambda_s, x_s, \bar{x}_s)$$

au voisinage de $(\lambda, \Lambda_s, \bar{x}, x_s)$ et identification des termes de même ordre du rapport des masses, on obtient les relations suivantes:

$$F_0(\Lambda_s) = F_{s0}(\Lambda_s, x, x_s) \quad (I.4.2.1)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} + F_1 = F_{s1} \quad (I.4.2.2)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda^2} \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial x_s} = F_{s2} \quad (I.4.2.3)$$

De l'égalité (I.4.2.1) on déduit l'identité des deux parties d'ordre zéro.

Comme $\frac{\partial S_1}{\partial \lambda}$ doit être périodique et F_{s1} indépendant de λ , la relation (I.4.2.2) nous conduit à décomposer F_1 en partie moyenne et en partie purement périodique :

$$F_1 = \langle F_1 \rangle_\lambda + \{F_1\}_\lambda$$

où

$$\langle F_1 \rangle_\lambda = \int_{T^2} F_1 d\lambda$$

et

$$\{F_1\}_\lambda = F_1 - \langle F_1 \rangle_\lambda \quad .$$

La partie d'ordre un du hamiltonien séculaire est alors simplement la moyenne du hamiltonien initial et la partie S_1 de la fonction génératrice est donnée par l'équation suivante:

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} + \{F_1\}_\lambda = 0 \quad ,$$

qui s'intègre aisément.

En effet, la série de Fourier de S_1 ,

$$S_1(\lambda, \Lambda_s, \bar{x}, x_s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}} s_k(\Lambda_s, \bar{x}, x_s) e^{ik \cdot \lambda}$$

est uniquement déterminée par celle de F_1 :

$$F_1(\lambda, \Lambda, \bar{x}, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}} f_k(\Lambda, \bar{x}, x) e^{ik \cdot \lambda}$$

par les identités :

$$s_k = \frac{f_k}{ik \cdot \omega_0} \quad (I.4.2.4)$$

où ω_0 est le vecteur de fréquence du hamiltonien non perturbé, soit $\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}$.

Pour obtenir la partie d'ordre deux du nouveau hamiltonien, il suffit de prendre la moyenne du premier membre de (I.4.2.3).

Comme

$$\left\langle \frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial x_s} \right\rangle_\lambda = \frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \left\langle \frac{\partial S_1}{\partial x_s} \right\rangle_\lambda = 0$$

le calcul se réduit à :

$$F_{s2} = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda^2} \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \bar{x}} \right\rangle_\lambda.$$

Enfin S_2 s'obtient par résolution de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \lambda} = & - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda^2} \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right) \right\}_\lambda - \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right\}_\lambda \\ & - \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \bar{x}} \right\}_\lambda + \frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial x_s} \end{aligned}$$

équation qui s'intègre comme la précédente une fois F_{1s} et S_1 connus.

Mais, comme nous l'avons dit plus tôt, n'étant pas intéressé par la fonction génératrice, nous ne calculerons pas S_2 .

La partie d'ordre deux du hamiltonien séculaire ne sera utilisée qu'au chapitre III, pour l'étude de l'effet des résonances séculaires. Cette étude étant qualitative, elle ne demande pas une grande précision. Pourtant, une partie du hamiltonien d'ordre deux jouera ici un rôle fondamental : pour un système planétaire semblable à celui formé par Jupiter et Saturne, les demi-grands axes sont tels que le système est proche de la résonance en moyen mouvement (2 : 5), le diviseur $d_{2,5} = 2n_1 - 5n_2$ ainsi que tous ses multiples sont donc petits et influent certainement de manière importante sur la dynamique du problème séculaire. Nous porterons notre attention sur l'effet du terme $d_{2,5}$ en gardant présent à l'esprit qu'il ne s'agit là que d'un cas particulier. Pour un problème à deux planètes dans le quelle les demi-grands axes seraient différents de ceux du couple Jupiter-Saturne, d'autre diviseurs influenceraient la dynamique.

Apportons maintenant quelques précisions sur la position du petit diviseur. Comme nous venons de le voir, c'est par le biais de la fonction génératrice S_1 qu'interviennent les petits diviseurs d_{25} . Puisque nous ne nous intéressons qu'au terme comportant le diviseur $2n_1 - 5n_2$, cette fonction s'écrit :

$$\sum_{n,m} C_{n,m} (x^n + \bar{x}^n) D_2^m \frac{\cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2)}{2n_1 - 5n_2}$$

où nous avons noté x^n pour $x_1^{n_1} \bar{x}_1^{\bar{n}_1} x_2^{n_2} \bar{x}_2^{\bar{n}_2}$. Les relations de d'Alembert [La89b] obligent chacun des monômes de la forme $x^n C_j^{2m}$ et donc $x^n D_2^m$ à être de degré impair supérieur

à trois. D'après la relation (1.4.2.3), si μ est le rapport des masses planétaires à la masse solaire, les termes $\frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \bar{x}}$, et $\frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial x_s}$ sont d'ordre $\frac{\mu^2}{d_{2,5}}$, alors que le terme

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_1^2} \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_2^2} \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda_2} \right)^2$$

est lui d'ordre $\left(\frac{\mu}{d_{25}} \right)^2$.

Comme les monômes de la fonction génératrice sont de degré impair et supérieur à trois, on vérifie aisément que les petits diviseurs se trouvent en facteur des expressions suivantes

$\{x^6, D^2 x^4, D^4 x^2, D^6\}$	Pour le degré 6 de $\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \bar{x}}$ et $\frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial x_s}$
$\{x^4, D^2 x^2, D^4\}$	Pour le degré 4 de $\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \bar{x}}$ et $\frac{\partial F_{s1}}{\partial \bar{x}_s} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial x_s}$
$\{x^6, D^2 x^4, D^4 x^2\}$	Pour le degré 6 de $\frac{\partial F_1}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}$
$\{x^6, D^2 x^4, D^4 x^2\}$	Pour le degré 6 de $\frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_j^2} \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda_j} \right)^2$.

On constate ainsi l'importance de la partie du hamiltonien d'ordre deux, puisqu'elle contient les petits diviseurs. Et, plus particulièrement l'importance des monômes contenant le carré du petit diviseur. On conçoit alors, que même pour une étude qualitative, il soit impossible de négliger les termes de degrés six (en excentricité) de la partie du hamiltonien d'ordre deux des masses.

I.5) Composition des séries intervenant dans le calcul de la fonction perturbatrice et implantation des calculs sur TRIP.

I.5.1) Présentation et notation utilisées

Nous allons dans cette partie nous intéresser de plus près à la forme des séries permettant de construire le hamiltonien d'ordre un. Nous n'aborderons pas le calcul du Hamiltonien d'ordre deux des masses qui ne pose aucune difficulté majeure. Sa construction suit de très près l'exposé du paragraphe I.4. Le seul problème rencontré réside en la taille des séries mises en cause : l'expression finale de la partie séculaire d'ordre deux des masses avoisine les 26 000 termes.

Commençons par une brève présentation du manipulateur algébrique TRIP sur lequel ont été conduits tous les calculs [La89c]. Ce dernier a été spécialement élaboré par J.Laskar, pour être utilisé en mécanique céleste. Il travaille sur des polynômes pouvant posséder un grand nombre de variables, et est adapté aux développements des fonctions perturbatrices et à d'autres calculs du même type.

Décrivons quelques unes des principales capacités du logiciel :

-Les troncatures sur le degré des variables : elles permettent, dans le calcul du produit de deux polynômes, d'éliminer les termes de degré supérieur à un entier donné, sans pour autant les calculer. Il est possible d'utiliser simultanément différentes troncatures.

-Choix du monôme : toujours dans un produit, il est possible de ne calculer que le coefficient d'un monôme choisi (très utile pour n'obtenir que les termes séculaires).

-Enfin, la possibilité d'opérer des substitutions d'une variable par une série (on utilise cette procédure pour introduire les variables de Poincaré dans la fonction perturbatrice). La procédure est très utile, mais assez longue, comparée à l'exécution des autres procédures du logiciel.

-La dernière version (qui n'est pas encore tout à fait au point) offre la possibilité d'utiliser des tableaux de séries et de variables. Cette nouveauté s'avère être très utile et permet en particulier l'écriture de routines générales des calculs itératifs liés à la normalisation.

Pour ce faire une idée de la manière dont on peut utiliser ce logiciel, on trouvera dans l'annexe I un programme utilisant la dernière version de TRIP et fournissant un développement en puissances des excentricités et inclinaisons du hamiltonien séculaire d'ordre un des masses.

Dans les développements qui suivent, nous adopterons les notations suivantes : les (X_j, \bar{X}_j) seront toujours les variables de Poincaré (non-canoniques) et $C_J^2 = 1 - \cos J$ la variable contenant l'inclinaison mutuelle. Les longitudes moyennes seront représentées sous la forme $L_j = \exp(i\lambda_j)$, et le rapport des demi-grands axes par α .

Les polynômes manipulés au cours de nos calculs seront combinaisons linéaires de monômes de la forme :

$$\alpha^l X_1^{p_1} \bar{X}_1^{\bar{p}_1} X_2^{p_2} \bar{X}_2^{\bar{p}_2} C_J^{2r} L_1^{q_1} L_2^{q_2}$$

où $l, p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2, r$ sont des entiers naturels et q_1, q_2 des entiers relatifs. Pour alléger les expressions, on notera :

$$X^p = X_1^{p_1} \bar{X}_1^{\bar{p}_1} X_2^{p_2} \bar{X}_2^{\bar{p}_2} \text{ et } |p| = p_1 + \bar{p}_1 + p_2 + \bar{p}_2.$$

Enfin, pour un monôme donné, nous parlerons indépendamment de l'harmonique $L_1^{q_1} L_2^{q_2}$ ou de l'inégalité (q_1, q_2) .

I.5.2) Construction des séries de base.

Pour effectuer le calcul du hamiltonien, nous suivrons la construction présentée aux paragraphes I.2.2 et I.2.3 . Cette méthode consiste à construire des séries de deux types totalement différents : les $U_j = \frac{a_2}{r_2} V^j$ et les A^{-s} .

Les U_j sont des polynômes des huit variables $(X_1, \bar{X}_1, X_2, \bar{X}_2, C_J, L_1, L_2, \alpha)$ et de degré total en $(X_1, \bar{X}_1, X_2, \bar{X}_2, C_J)$ inférieur ou égal à n . Ces séries, qui peuvent comporter un très grand nombre de termes, sont à la base de tous les calculs. En effet, elles seront utilisées sous leur forme originelle quelque soit le type de hamiltonien cherché (ordre un, ordre deux ou plus, ou inégalité particulière). Elles peuvent donc, après obtention, être sauvegardées puis réutilisées ultérieurement.

En revanche, les A^{-s} qui ne dépendent à priori que des trois variables (L_1, L_2, α) , possèdent un développement en série de Fourier infini, et peuvent être représentées de nombreuses manières différentes. Ces représentations seront étudiées au paragraphe suivant.

La première étape de la construction de U_j consiste à développer suivant les puissances des excentricités, les fonctions élémentaires intervenant dans le problème de Kepler et d'y introduire les variables de Poincaré. Les quantités $\Theta_j = \exp(i(v_j - M_j))$, $\frac{r_j}{a_j}$ et $\frac{a_j}{r_j}$, développées de manière classique à l'aide des fonctions de Bessel [Kov][BrCl] (le développement des quantités fondamentales du problème de Kepler est une faculté élémentaire de TRIP), prennent ici la forme polynomiale suivante :

$$\sum_{0 \leq |p| \leq n} T_{p,j} X_j^{p_j} \bar{X}_j^{\bar{p}_j} L_j^{\bar{p}_j - p_j}$$

relation dans laquelle $T_{p,j}$ est un coefficient rationnel.

On construit ensuite la quantité $V = \alpha V_1 + \alpha^2 V_2$ dans laquelle on introduit deux nouvelles variables α et C_J . On vérifie alors que la série V_1 est somme de trois type de monômes :

$$\begin{aligned} V_1 = & \sum_{0 \leq |p| \leq n-2} P_{p,\delta} X_p C_J^2 L_1^{\bar{p}_1 - p_1 + \delta(1)} L_2^{\bar{p}_2 - p_2 + \delta(1)} + \sum_{0 \leq |p| \leq n-2} Q_{p,\delta} X_p C_J^2 L_1^{\bar{p}_1 - p_1 + \delta(1)} L_2^{\bar{p}_2 - p_2 - \delta(1)} \\ & + \sum_{0 \leq |p| \leq n} R_{p,\delta} X_p L_1^{\bar{p}_1 - p_1} L_2^{\bar{p}_2 - p_2} \end{aligned} \quad (I.5.1)$$

où les $P_{p,\delta}$, $Q_{p,\delta}$, $R_{p,\delta}$ sont des coefficients numériques rationnels et où le nombre $\delta(q)$ représente n'importe quel entier de même parité que q et compris entre $-q$ et q .

L'expression de V_2 indépendante de l'inclinaison mutuelle est d'expression plus simple, il s'agit de :

$$V_2 = \sum_{p \in I_n} S_p X_p L_1^{\bar{p}_1 - p_1} L_2^{\bar{p}_2 - p_2}$$

où l'ensemble I_1 est défini par :

$$I_1 = \{p \in N^4 / 0 < |p| \leq n\} \setminus \{p \in N^4 / p_1 = \bar{p}_1 \geq 3\}.$$

Il est alors très simple de calculer le nombre de monômes composant la série V jusqu'au degré total n en variables de Poincaré et inclinaison C_J . Le nombre de termes s'écrit :

$$\#_n V = 3 \binom{4}{n+4} + 4 \binom{2}{n+2} - \sum_{p=3}^{[n/2]} \binom{2}{n-2p+2} - 3 \text{ avec } \binom{b}{a} = \frac{a!}{b!(a-b)!}. \quad (I.5.2)$$

V ainsi calculé, il reste à construire ses puissances, et plus précisément les quantités $U_j = \frac{a_2}{r_2} V_j$ pour j compris entre 0 et n (en effet, on déduit de (I.5.1) que V est d'ordre un en les variables de Poincaré, ainsi tous les monômes de V^n sont de degré n). En remarquant que la multiplication de V^j par $\frac{a_2}{r_2}$ n'altère en rien la nature des monômes (seuls leurs coefficients numériques sont modifiés), on déduit alors les expressions :

$$U_j = \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=j} \sum_{p \in I_{j_3, j_4}^j} \sum_{\delta(j_2), \delta(j_3), \delta(j_4)} M_{j_k} \alpha^{j+j_1} X^p C_J^{2(j_3+j_4)} L_1^{q_1} L_2^{q_2} \quad (I.5.3)$$

avec

$$I_{j_3, j_4}^j = \begin{cases} \{p \in N^4 / j - (j_3 + j_4) \leq |p| \leq n - 2(j_3 + j_4)\} \\ \quad \text{si } j_3 + j_4 \leq \text{Min}(n - j, [n/2]) \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

$$q_1 = \bar{p}_1 - p_1 + \delta(j_2) + \delta(j_3) + \delta(j_4)$$

$$q_2 = \bar{p}_2 - p_2 - \delta(j_2) + \delta(j_3) - \delta(j_4)$$

$$M_{j_k} \in Q.$$

La formule (I.5.3) nous permet de déterminer chacun des monômes composant les séries V^j et U_j tout en offrant d'autres possibilités que nous allons exploiter.

Tout d'abord, il nous est possible au moins numériquement, de calculer le nombre de termes que comportent les séries V^j et U_j . Plus précisément, le nombre de termes ainsi calculé est bien le nombre de termes que contient une série V^j . En revanche, quelques simplifications intervenant lors de la multiplication de $\frac{a_2}{r_2}$ par V^j , ce nombre majore légèrement le nombre de monômes à coefficients non nuls des séries U_j .

Dans le tableau suivant, est regroupé le nombre de termes des séries U_j et V_j dans lesquelles les monômes de degré supérieur ou égal à n ont été négligés.

Tableau I.1 : Nombre de termes des séries U_j et V_j .

On trouve en première colonne le degré total n auquel est calculé la série, en deuxième colonne l'indice j des séries. Enfin, les deux dernières colonnes regroupent le nombre de termes (compté à partir des séries effectivement calculées) des U_j et V_j .

n	j	$\#_n U_j$	$\#_n V_j$
1	1	12	12
2	1	42	46
2	2	60	60
3	1	108	122
3	2	220	224
3	3	200	200
4	1	233	267
4	2	543	549
4	3	750	752
4	4	525	525
5	1	449	515
5	2	1133	1137
5	3	1804	1806
5	4	1997	1999
5	5	1176	1176
6	1	792	906
6	2	2102	2102
6	3	3615	3621
6	4	4855	4855
6	5	4580	4580
6	6	2352	2352

On déduit aussi de (I.5.5) deux relations importantes : on ne peut trouver en facteur d'un terme $L_1^{q_1} L_2^{q_2}$ qu'un polynôme de degré au moins égal à $|q_1 + q_2|$. De plus, le degré total de chacun des monômes facteurs de $L_1^{q_1} L_2^{q_2}$ est de même parité que $q_1 + q_2$.

I.5.3) Construction du hamiltonien.

Une fois calculées les séries U_j , l'obtention du hamiltonien se fait simplement par addition, de $j = 0$ à $j = n$, des produits

$$U_j A^{-(j+1/2)} \text{ avec } A^{-s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)}(\alpha) L_1^k L_2^{-k}.$$

Le développement du hamiltonien en série de Fourier possède donc un nombre infini de termes. Notons d'ores et déjà que toutes les harmoniques $L_1^{q_1} L_2^{q_2}$ ne sont pas présente dans le hamiltonien. Nous avons en effet remarqué que les U_j ne contiennent que les termes

$L_1^{q_1} L_2^{q_2}$ pour lesquels $|q_1 + q_2| \leq n$, il en est donc de même pour le développement du hamiltonien.

On voit que même à un ordre donné des inclinaisons et excentricités, le développement en série de Fourier du hamiltonien possède une infinité de termes.

En revanche dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à une harmonique donnée (par exemple $L_1^0 L_2^0$ pour la partie séculaire, ou $L_1^2 L_2^{-5}$ pour le calcul du hamiltonien séculaire d'ordre deux adapté au couple Jupiter-Saturne), la situation se simplifie notablement. La formule (I.4.3) nous permet de déterminer toutes les harmoniques contenues dans les séries U_j pour n fixé. Ces harmoniques sont de la forme $L_1^{q_1} L_2^{q_2}$ où les couples (q_1, q_2) vérifient :

Si $j < n$: $(k, -k - n + p)$ avec $(k, p) \in \{-(n + j), \dots, 0\} \times \{0, \dots, 2\text{Min}(k + j + n, n)\}$

Si $j = n$: $(k, -k - n + 2p)$ avec $(k, p) \in \{-2n, \dots, 0\} \times \{0, \dots, \text{Min}(k + 2n, n)\}$

auxquels on doit ajouter les couples opposés. On en déduit immédiatement que si l'on s'intéresse uniquement au coefficient d'une harmonique donnée du hamiltonien, seul un nombre fini de termes du développement en série de Fourier des A^{-s} apporte une contribution non-nulle. Ceci évite tout problème de représentation puisque toutes les séries intervenant dans les calculs sont finies.

Plaçons nous dorénavant dans le cas particulier du calcul du hamiltonien séculaire (voir annexe I). Dans cette situation, les relations précédentes nous montrent que les séries (infinies) $A^{-(j+1/2)}$ peuvent être remplacées par les polynômes

$$\sum_{|k| \leq n/2 + j} b_{j+1/2}^{(k)}(\alpha) L_1^k L_2^{-k}. \quad (I.5.4)$$

L'emploi de cette formule permet d'obtenir une expression exacte du hamiltonien séculaire (cette expression étant évidemment limitée au degré n des excentricités et inclinaisons). Tant que les coefficients de Laplace sont conservés de manière analytique, l'expression du hamiltonien séculaire reste exacte quelque soit la valeur du rapport des demi-grands axes α tel que $0 \leq \alpha < 1$. Mais ceci pose un problème évident d'encombrement : à l'aide de cette formulation, on doit utiliser $3 \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients de Laplace, ce qui conduit à des séries

dépendant d'un très grand nombre de variables (68 pour le problème séculaire d'ordre un). Afin de rendre exploitables de telles séries, il est nécessaire de réduire notablement le nombre de variables intervenant dans leurs expressions. Cette tâche peut être accomplie en utilisant les relations de récurrences classiques liant entre eux les coefficients de Laplace. En effet, les relations :

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{j-1}{j-s}(\alpha + \alpha^{-1})b_s^{(j-1)}(\alpha) - \frac{j+s-2}{j-s}b_s^{(j-2)}(\alpha) \quad (I.5.5)$$

$$b_{s+1}^{(j)}(\alpha) = \frac{(j+s)(1 + \alpha^2)b_s^{(j)}(\alpha) - 2(j-s+1)\alpha b_s^{(j+1)}(\alpha)}{s(1 - \alpha^2)} \quad (I.5.6)$$

permettent d'écrire tous les coefficients sous la forme

$$b_s^{(j)}(\alpha) = P_s^{(j)}(\alpha, \alpha^{-1}, \frac{1}{1-\alpha^2})b_{s_0}^{(0)}(\alpha) + Q_s^{(j)}(\alpha, \alpha^{-1}, \frac{1}{1-\alpha^2})b_{s_0}^{(1)}(\alpha)$$

où les $P_s^{(j)}$ et $Q_s^{(j)}$ sont des polynômes et s_0 est choisi arbitrairement.

On peut fixer $s_0 = 0$, mais les expressions les plus concises sont obtenues pour $s_0 = \frac{2[n/2] + 1}{2}$. C'est en effet pour cette valeur que le pôle $\alpha^2 = 1$ est d'ordre de multiplicité zéro. Ainsi, par simplification, les expressions des coefficients de Laplace ne contiennent plus la quantité $(1 - \alpha^2)^{-1}$ [La92b]. Le tableau suivant permet, au moins jusqu'au degré six, de vérifier ce qui précède.

Tableau I.2 : Nombre de termes du hamiltonien séculaire d'ordre un des masses.

Afin de comparer le nombre de termes que comporte le hamiltonien séculaire d'ordre un des masses développé au degré six des excentricités et de l'inclinaison mutuelle, ce dernier a été exprimé à l'aide des coefficients de Laplace $b_0^{(s)}(\alpha)$ et $b_1^{(s)}(\alpha)$ pour $s = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$. On retrouve dans le tableau suivant le nombre de monômes d'un degré donné pour chaque valeur de s .

s	0	2	4	6
7/2	7	29	102	254
5/2	5	19	62	-
3/2	3	9	-	-
1/2	1	-	-	-

I.5.4) Utilisation du paramètre D_2

Afin d'obtenir un système de variables canoniques effectuant la réduction du moment cinétique, nous avons en I.3 exprimé la nécessité de l'emploi du "petit paramètre" D_2 . Il paraît naturel d'introduire ce paramètre à l'aide de la formule (I.3.2) dès la construction de V . Mais, cette opération conduit à remplacer la variable C_J par une expression dépendant de (k, k^{-1}, D_2) ce qui augmente notablement le nombre de termes de la série V et par conséquent des U_j (leurs tailles sont plus que doublées).

C'est pour cette raison que la substitution de C_J^2 par (I.3.2) ne doit se faire qu'une fois le hamiltonien final obtenu (cf annexe I). On pourra comparer les deux expressions du hamiltonien séculaire d'ordre un (l'une en fonction de C_J^2 , l'autre en fonction de D_2 , dans l'annexe II.

I.6) Transformation des conditions initiales

Nous venons d'obtenir un développement du hamiltonien séculaire exprimé à l'aide de coordonnées liées au plan invariant (perpendiculaire à la direction du moment cinétique). Il

est maintenant utile de construire la transformation permettant d'exprimer les coordonnées de ce nouveau référentiel en fonction de celles liées à un référentiel arbitraire. Cette transformation est fondamentale si l'on veut obtenir des conditions initiales de Jupiter et Saturne dans le système de coordonnées (lié au plan invariant) dans lequel seront menées les intégrations numériques tout au long du chapitre III.

Pour un jeu de conditions initiales, nous devons calculer les coordonnées du vecteur \mathbf{C} dans le repère d'origine, ce qui nous fournira la position du plan invariant. Les excentricités et les demi-grands axes n'étant pas modifiés par un tel changement de repère, nous ne calculons que les nouveaux arguments des périhélie et les nouvelles inclinaisons. Comme nous ne nous intéressons qu'aux orbites osculatrices et pas à la position des planètes sur ces dernières, il nous suffit de calculer, dans la première base, les coordonnées des vecteurs position et vitesse de chaque corps au périhélie, puis d'effectuer un simple changement de base pour en déduire enfin les nouveaux éléments osculateurs.

I.6.1) Expression des positions et vitesses dans le repère initial

Notons (x, y, z) les coordonnées, dans un repère arbitraire, d'un corps fictif en mouvement keplerien se trouvant au périhélie de l'ellipse osculatrice définie par les paramètres $(a, e, i, \varpi, \Omega)$. Si nous utilisons les notations classiques suivantes :

$$\begin{aligned} k &= e \cos \varpi & q &= \sin(i/2) \cos \Omega \\ h &= e \sin \varpi & p &= \sin(i/2) \sin \Omega \end{aligned}$$

les coordonnées du point sont données par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a(e^{-1} - 1)\mathcal{R} \begin{pmatrix} k \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

et sa vitesse par

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = na \frac{e^{-1} + 1}{\sqrt{1 - e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -h \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$$

où \mathcal{R} est la matrice de rotation suivante :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 - 2p^2 & 2pq & 2p \cos(i/2) \\ 2pq & 1 - 2q^2 & -2q \cos(i/2) \\ -2p \cos(i/2) & 2q \cos(i/2) & 1 - 2(p^2 + q^2) \end{pmatrix}.$$

I.6.2) Définition du nouveau repère.

Le troisième vecteur de la nouvelle base nous est directement fourni par le moment cinétique sous la forme :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{C}}{C} = \frac{\mathbf{C}_1}{C} + \frac{\mathbf{C}_2}{C}$$

où, comme nous l'avons vu au paragraphe I.2.1,

$$\mathbf{C}_j = \beta_j n_j a_j^2 \sqrt{1 - e_j^2} \begin{pmatrix} 2p_j \cos(i_j/2) \\ -2q_j \cos(i_j/2) \\ 1 - 2(p_j^2 + q_j^2) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur \mathbf{e}_1 , vecteur unitaire de l'intersection des plans orthogonaux aux vecteurs \mathbf{C}_j se laisse aisément calculer par :

$$\mathbf{e}_1 = \pm \frac{\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2}{\|\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2\|}$$

au choix de l'orientation près. Nous fixerons cette dernière tel que $\tilde{\theta}_1 = 0$, ce qui s'écrit aussi : $(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) > 0$ (dans ce paragraphe, le caractère $\tilde{}$ désigne les variables définies par rapport au plan invariant). Le deuxième vecteur de base sera évidemment défini par la relation $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$.

I.6.3) Calcul des nouvelles variables osculatrices

Le système de référence lié au plan invariant étant entièrement déterminé, les nouveaux éléments osculateurs sont donnés, pour chacun des corps, par les relations :

$$\cos \tilde{i}_j = \frac{(\mathbf{u}_j \wedge \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{u}_j \wedge \mathbf{v}_j\|}$$

qui déterminent un unique \tilde{i}_j dans $[0, \pi]$, et :

$$\sin \tilde{\omega}_j = \frac{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{e}_3}{\sin \tilde{i}_j \|\mathbf{u}_j\|} \quad \cos \tilde{\omega}_j = \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{e}_3}{\sin \tilde{i}_j \|\mathbf{v}_j\|}.$$

I.6.4) Conditions initiales du couple Jupiter-Saturne.

On choisit comme conditions initiales les éléments moyens de Jupiter et de Saturne de la date J2000 dans un système de référence héliocentrique lié à l'écliptique J2000 [Br].

Pour les raisons suivantes ces éléments ne sont pas parfaitement adaptés à notre problème : tout d'abord il s'agit d'éléments moyens alors que les formules développées plus haut utilisent les éléments osculateurs kepleriens. Ensuite, ils ont été calculés en tenant compte de l'ensemble des planètes du système solaire. Mais la source d'erreur la plus importante vint du fait que notre référentiel n'est pas celui dans lequel ont été calculées les conditions initiales choisies. Il existe en effet, entre les éléments elliptiques issus d'un référentiel héliocentrique classique et ceux calculés dans un système de référence héliocentrique canonique une différence d'ordre un des masses.

Mais cela ne porte pas à conséquence puisque que notre optique n'est pas d'obtenir une éphéméride du mouvement de Jupiter et de Saturne, mais d'étudier de manière qualitative la dynamique globale d'un problème proche du système Jupiter-Saturne.

Le tableau suivant regroupe ces données : pour chaque planète sont indiquées les valeurs des demi-grands axes moyens, des variables k , h , q , p , des excentricités moyennes, des longitudes des périhélie, des inclinaisons moyennes par rapport à l'écliptique et de la longitude des nœuds ascendants.

Tableau I.3 : *Eléments moyens des planètes Jupiter et Saturne liés à l'écliptique J2000.*

variables	Jupiter	Saturne
a (U.A.)	5.202603191	9.554909596
k	0.046985721	-0.002960036
h	0.012003857	0.055429643
p	0.011183772	0.019891473
q	-0.02065611	-0.008717474
e	0.048494851	0.055508622
ϖ (deg.)	14.33130924	93.05678728
i (deg.)	1.303269666	2.488878099
Ω (deg.)	100.4644406	113.6655237

Ces éléments osculateurs moyens sont ensuite transformés par le procédé décrit précédemment. Les excentricités, inclinaisons et demi-grands axes restent inchangés, ils ne figurent pas dans le tableau suivant. On y trouve les inclinaisons, les longitudes des nœuds, les arguments des périhélie et enfin les parties réelles et imaginaires des variables X_j définies par $X_j = \sqrt{(2/\Lambda_j)}x_j$ qui ont le double avantage d'être sans dimension et d'être équivalentes à $e_j \exp(i\omega_j)$ quand les excentricités tendent vers zéro.

Tableau I.4 : *Eléments moyens des planètes Jupiter et Saturne dans le référentiel lié au plan invariant du couple planétaire.*

variables	Jupiter	Saturne
i (deg.)	0.362206428	0.8935972117
ω (deg.)	66.96273017	325.6817441
$Re(X)$	0.018983066	0.04586329
$Im(X)$	0.044640543	-0.031307233

CHAPITRE II

ETUDE ANALYTIQUE DE LA STABILITE DU PROBLEME PLANETAIRE DES TROIS CORPS

II.1) Présentation

Ce chapitre est exclusivement consacré à la présentation de résultats analytiques et théoriques. Le paragraphe II.2 regroupe quelques points mathématiques concernant les problèmes séculaires et complets des trois corps. Puis, après quelques considérations de nature géométrique sur le problème séculaire linéarisé, nous aborderons au paragraphe II.3 la réduction des formes quadratiques en base symplectique, opération essentielle aussi bien à la réduction du hamiltonien séculaire sous forme normale qu'à l'étude numérique du problème présentée au chapitre III. Enfin, en se basant sur les expressions formelles obtenues au premier chapitre, nous présenterons au paragraphe II.4, après une rapide revue des problèmes de convergence des séries de la théorie des perturbations, un travail algébrique permettant d'appliquer la théorie K.A.M. au problème planétaire spatial des trois corps, étendant ainsi un résultat obtenu par Arnold en 1963 [Ar63b].

II.2) Quelques points théoriques et résultats mathématiques.

II.2.1) Intégrabilité des problèmes à deux planètes.

Le problème des trois corps possède, dans sa plus grande généralité, neuf degrés de liberté. Il se réduit simplement à six degrés si l'on tient compte de son invariance par translation (réduction du centre de masse) : nous avons vu au chapitre I que l'utilisation du système de coordonnées héliocentriques permettait de fixer le corps de plus grande masse, nous conduisant ainsi à ne plus étudier que le mouvement des deux planètes.

Décrivons dans un premier temps le problème plan : il s'agit d'un problème à quatre degrés de liberté dans lequel les variables (non-canoniques) peuvent être les demi-grands axes a_j et les longitudes des planètes l_j , les excentricités e_j et les arguments des périhélie ω_j . Il est préférable d'utiliser des variables canoniques, par exemple celles de Delaunay $(l_j, g_j, \beta_j L_j, \beta_j G_j)$. L'invariance par rotation (équivalente à la conservation du moment cinétique) contraint le hamiltonien du problème plan à ne dépendre des périhélie que par le biais de la différence de leurs arguments. Compte tenu de cette spécificité, l'emploi du système de coordonnées canoniques $(l_j, \gamma, L_j, \Gamma)$ avec $\gamma = g_1 - g_2$ et $\Gamma = \beta_1 G_1$, réduit le problème à trois degrés de liberté (cette démarche est clairement décrite par Poincaré dans [Po1892]).

Si les deux planètes ne sont pas dans une configuration de résonance en moyen-mouvement

(situation dans laquelle le rapport des fréquences de révolution n'est pas un nombre rationnel), les angles l_j évoluent rapidement par rapport à l'angle γ , on peut alors s'intéresser à l'étude du problème séculaire plan. Le problème séculaire plan qui ne dépend plus que des deux variables (γ, Γ) est alors intégrable par quadrature.

Il n'en est sans doute pas de même pour le problème séculaire spatial.

En effet, le problème spatial non moyennisé possède encore après réduction du moment cinétique (présentée au paragraphe I.2) quatre degrés de liberté provenant d'une part des angles de position des planètes sur leurs orbites et des demi-grands axes correspondant aux quatre variables rapides (l_j, L_j) , et d'autre part des excentricités et positions des lignes des apsides des ellipses osculatrices associées aux quatre variables lentes (x_j, \bar{x}_j) .

Après moyennisation sur les angles rapides l_j , le problème séculaire se réduit à un système hamiltonien à deux degrés de liberté, il n'y a donc aucune raison de penser que ce dernier soit intégrable.

En revanche, si les inclinaisons sont faibles (ce qui est le cas dans notre étude), le problème séculaire spatial peut être considéré comme une perturbation du problème séculaire plan qui, comme nous venons de voir, est intégrable.

Nous sommes alors en droit d'espérer que, bien que n'étant pas intégrable, le problème spatial aura encore un comportement "raisonnable", et que les régions chaotiques et instables contenues dans son espace des phases seront assez petites pour ne pas trop déstabiliser l'ensemble des orbites. Bien que d'approche difficile, le point de vue qui consiste à considérer le problème spatial comme perturbation du problème plan peut être très intéressant. En effet, en référentiel tournant (avec la ligne des nœuds), le problème perturbé ne diffère de sa partie intégrable que par le biais de l'inclinaison mutuelle et de la différence des longitudes des nœuds. De ce fait, la construction de formes normales peut être assez simple. Mais, toute la difficulté réside dans la construction des solutions du problème non-perturbé et surtout dans l'expression des éléments osculateurs en fonction de variables angle-action de la partie intégrable. Cela nous oblige à abandonner cette idée pour adopter une vision plus classique.

II.2.2) Existence d'orbites et de tores particuliers.

La structure locale de l'espace des phases du problème planétaire des trois corps a été étudiée en détail au cours des années soixante. De nombreux résultats, obtenus à l'aide de méthodes de perturbation, se sont concentrés autour de l'existence de tores invariants et d'orbites périodiques (Alain Chenciner en présente une revue dans [Ch]). Il est donc utile, afin d'avoir une idée précise des particularités du problème que nous allons étudier, de replacer ces résultats théoriques dans l'espace des phases du problème réduit des trois corps. Rappelons que ce problème possède quatre degrés de liberté et que le référentiel choisi pour effectuer la réduction est en rotation avec la ligne des nœuds.

Notre espace doit contenir, au moins pour de très faibles inclinaisons et masses planétaires et si le rapport des demi-grands axes tend vers zéro, les tores T^4 recouverts d'orbites quasi-périodiques associées aux mouvements quasi-circulaires plans dont l'existence a été établie par Arnold [Ar63b] (nous reviendrons dans ce chapitre sur leur existence). Notons que ces tores ne peuvent être rencontrés que si le paramètre D_2 est suffisamment faible pour permettre à l'inclinaison de s'annuler (nous reviendrons sur ce fait au paragraphe II.3.3).

Nous devons ensuite nous attendre à rencontrer des tores de dimension non-maximale. Jeffry et Moser [JeMo] ont établi en 1966, dans le cas de faibles masses et rapport des demi-grands axes, l'existence d'orbites quasi-périodiques à trois fréquences rationnellement indépendantes coïncidant avec les mouvements elliptiques inclinés dont les lignes des abscides sont confondues. Ces trajectoires conduisent à deux familles de tores T^3 dont l'une supporte des orbites à périhélie opposés et l'autre à périhélie alignés. L'intersection de ces deux familles donne naissance aux tores de dimension deux partitionnés en orbites pour lesquelles les deux planètes ont un mouvement circulaire. On peut encore, pour achever cette description, se tourner vers le cas limite où les deux familles précédentes rencontrent de manière asymptotique les mouvements plans. On est alors en présence des mouvements elliptiques plans à périhélie alignés ou opposés dont l'existence fut établie par Lieberman en 1970 [Liw]. De plus, nous montrerons au paragraphe II.4 comment on peut vérifier par application de la théorie K.A.M. que l'espace contient un autre type de tore de dimension maximale : il s'agit de tores de dimension quatre recouverts d'orbites quasi-périodiques associées aux mouvements presque circulaires inclinés.

Rappelons que la description précédente est valable pour le problème complet (quatre degrés de liberté). En revanche, très peu de résultats théoriques ont été établis dans le cadre du problème séculaire. C'est pourtant ce dernier qui nous intéressera au cours du chapitre III.

On peut penser, bien que cela ne soit pas encore établi, que les objets décrits dans l'espace complet survivent à la moyennisation en étant réduits de deux dimensions. Les tores de dimension maximale seront de dimension deux. Ces tores de dimension non-maximale sont forcément ici des orbites périodiques. Il apparaît donc raisonnable de penser que l'on puisse rencontrer les orbites périodiques des mouvements inclinés de périhélie opposés ou alignés. Au chapitre III, nous mettrons en évidence à l'aide de méthodes numériques la trajectoire des mouvements séculaires inclinés des périhélie opposés.

Signalons pour terminer que le problème séculaire possède une famille de points fixes paramétrée par la norme du moment cinétique. Ces derniers correspondent bien entendu à des mouvements circulaires inclinés ou non. Mais ces points fixes seront en dehors des surfaces d'énergie choisies au cours des études numériques du paragraphe III.

II.3) Etude du problème linéaire et réduction du hamiltonien quadratique.

II.3.1) Etude du problème linéaire

Nous allons ici entreprendre une étude qualitative du problème séculaire. Cette étude générale, basée sur les expressions quadratiques du hamiltonien et du moment cinétique, restera significative pour de faibles excentricités et inclinaisons. Remarquons que le moment cinétique sous sa forme initiale (exprimé par exemple en variables de Poincaré) est encore intégrale première du hamiltonien séculaire. En effet, en notant $\{f, g\}$ le crochet de Poisson de deux applications f et g , on vérifie immédiatement que l'assertion $\{H_1, C\} = 0$ entraîne que $\{\bar{H}_1, C\} = 0$; d'où l'invariance du moment cinétique par le flot du hamiltonien séculaire d'ordre un. Afin d'avoir directement accès à l'inclinaison, nous n'utiliserons pas la réduction du moment cinétique, mais conserverons plutôt nos deux

intégrales indépendantes. Etant intéressé, dans cette partie, par la topologie de l'espace et non par la dynamique du problème, nous nous permettrons d'utiliser des variables et des transformations non-canoniques. Nous perdrons ainsi toute information sur l'évolution des corps dans l'espace, mais garderons les contraintes apportées par la conservation de l'énergie et du moment cinétique. Précisons encore que si la masse d'une des planètes devient trop faible devant l'autre, l'étude suivante perd tout son sens puisque la conservation du moment cinétique ne contraint plus le petit corps.

En variables non-canoniques de Poincaré, le carré de la norme du moment cinétique s'écrit (de manière exacte) :

$$C^2 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_1|X_1|^2 + \Lambda_2|X_2|^2) - 2\Lambda_1\Lambda_2C_J^2,$$

alors que la partie quadratique du hamiltonien d'ordre un prend la forme suivante :

$$H_1^{(2)} = p_1(|X_1|^2 + |X_2|^2) + p_2(X_1\bar{X}_2 + \bar{X}_1X_2) - 2p_1C_J^2$$

où les coefficients p_1 et p_2 dépendent des demi-grands axes par le biais des coefficients de Laplace (cf chapitre I) de la manière suivante :

$$p_1 = \frac{\alpha}{8}b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\alpha}{8}b_{3/2}^{(2)}(\alpha).$$

En posant $k = \Lambda_1/\Lambda_2 = h\sqrt{\alpha}$ et $C_1^{(2)} = (C^2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2)/(\Lambda_1\Lambda_2)$, notre problème se ramène à l'étude du système :

$$H_1^{(2)} = p_1(|X_1|^2 + |X_2|^2) + p_2(X_1\bar{X}_2 + \bar{X}_1X_2) - 2p_1C_J^2 \quad (II.3.1.1)$$

$$C_1^{(2)} = (1+k)|X_1|^2 + (1+k^{-1})|X_2|^2 + 2C_J^2. \quad (II.3.1.2)$$

Dans R^5 rapporté aux coordonnées $(Re(X_1), Im(X_1), Re(X_2), Im(X_2), C_J^2)$, l'espace séculaire est alors l'intersection de deux quadriques dont une est un ellipsoïde. L'espace en question est donc une surface bornée de dimension trois.

Pour éclairer ce propos, il convient de réduire simultanément les deux formes quadratiques $H_1^{(2)}$ et $C_1^{(2)}$.

En effet, il existe un angle θ dépendant de α pour lequel la transformation :

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{C}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+k} \cos \theta & \sqrt{1+k^{-1}} \sin \theta & 0 \\ -\sqrt{1+k} \sin \theta & \sqrt{1+k^{-1}} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ C_J \end{pmatrix} \quad (II.3.1.3)$$

réduit le système (II.3.1.1) + (II.3.1.2) à :

$$H_1^{(2)} = \lambda_1|\tilde{X}_1|^2 + \lambda_2|\tilde{X}_2|^2 - p_1\tilde{C}_J^2 \quad (II.3.1.4)$$

$$C_1^{(2)} = |\tilde{X}_1|^2 + |\tilde{X}_2|^2 + \tilde{C}_J^2. \quad (II.3.1.5)$$

Les λ_j sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - p_1\lambda + (p_1^2 - p_2^2)/(2 + k + k^{-1}) = 0$$

c'est à dire :

$$\lambda_1 = \frac{p_1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{p_1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec

$$\Delta = \frac{(k + k^{-1} - 2)p_1^2 + 4p_2^2}{k + k^{-1} + 2}$$

comme $p_2(\alpha) \leq p_1(\alpha)$ (ceci découle du fait que $b_{3/2}^{(2)}(\alpha) < b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$), on déduit que :

$\sqrt{\Delta} \leq p_1$ d'où les inégalités :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < p_1.$$

Comme la quantité $\lambda_1 - \frac{p_1}{1+k}$ est toujours négative, l'angle θ défini par les relations :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{p_2^2}{2+k+k^{-1}} + (\lambda_1 - \frac{p_1}{1+k})^2} \cos \theta = \frac{p_2}{\sqrt{2+k+k^{-1}}} \\ \sqrt{\frac{p_2^2}{2+k+k^{-1}} + (\lambda_1 - \frac{p_1}{1+k})^2} \sin \theta = \frac{p_1}{1+k} - \lambda_1 \end{cases}$$

reste dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, quelques soient α et k dont il dépend.

Par l'emploi des nouvelles coordonnées $(|\tilde{X}_1|, |\tilde{X}_2|, |\tilde{C}_J|)$ notre problème est réduit à l'étude de l'intersection dans R^3 d'une sphère et d'un hyperboloïde (à une nappe si $H_1^{(2)}$ est négatif, à deux dans le cas contraire). Il s'agit bien d'une surface bornée dont nous allons explorer les limites.

Intéressons-nous maintenant aux contraintes apportées par le système provenant des équations (II.3.1.4) et (II.3.1.5).

Pour plus de simplicité, nous utiliserons pour $|\tilde{X}_1|^2$, $|\tilde{X}_2|^2$, \tilde{C}_J^2 les notations x , y , z .

Le système se réduit donc à :

$$\begin{cases} x = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_2 C_1^{(2)} + (p_1 + \lambda_2)z}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ y = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_1 C_1^{(2)} + (p_1 + \lambda_1)z}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

On en déduit, à condition que la quantité $\lambda_2 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}$ soit positive (ce qui est vérifié dès que les constantes $H_1^{(2)}$ et $C_1^{(2)}$ proviennent d'un problème réel), que la variable z vérifie

la relation

$$\frac{\lambda_1 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}}{p_1 + \lambda_1} \leq z \leq \frac{\lambda_2 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}}{p_1 + \lambda_2} .$$

Deux cas se présentent alors :

ou $\lambda_1 C_1^{(2)} - H_1^{(2)} > 0$, auquel cas les valeurs maximales et minimales des variables x, y, z sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{\text{Max}} = \frac{\lambda_2 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}}{p_1 + \lambda_2} \\ z_{\text{Min}} = \frac{\lambda_1 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}}{p_1 + \lambda_1} > 0 \\ x_{\text{Max}} = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_2 C_1^{(2)} + (p_1 + \lambda_2) z_{\text{Min}}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ x_{\text{Min}} = 0 \\ y_{\text{Max}} = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_1 C_1^{(2)} + (p_1 + \lambda_1) z_{\text{Max}}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ y_{\text{Min}} = 0 , \end{array} \right.$$

ou $\lambda_1 C_1^{(2)} - H_1^{(2)} \leq 0$ et dans ce cas, les bornes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{\text{Max}} = \frac{\lambda_2 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}}{p_1 + \lambda_2} \\ z_{\text{Min}} = 0 \\ x_{\text{Max}} = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_2 C_1^{(2)}}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0 \\ x_{\text{Min}} = 0 \\ y_{\text{Max}} = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_1 C_1^{(2)} + (p_1 + \lambda_1) z_{\text{Max}}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ y_{\text{Min}} = \frac{H_1^{(2)} - \lambda_1 C_1^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_1} \geq 0 . \end{array} \right.$$

Dans le premier cas, l'inclinaison mutuelle ne peut jamais s'annuler contrairement à la deuxième situation où l'inclinaison, la variable x et éventuellement y (dans le cas très particulier de l'annulation de $\lambda_1 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}$) peuvent être égales à zéro.

Notons que l'annulation des variables x et y correspond à un phénomène physique important.

En effet, par la transformation (II.3.1.3), on obtient

$$x = 0 \implies \begin{cases} \sqrt{1+k}X_1 = & -\sin\theta\tilde{X}_2 \\ \sqrt{1+k^{-1}}X_2 = & \cos\theta\tilde{X}_2 \end{cases}$$

ce qui correspond, comme $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont positifs, à la situation où les périhélie sont alignés.

Et inversement, si $y = 0$, on a :

$$y = 0 \implies \begin{cases} \sqrt{1+k}X_1 = & \cos\theta\tilde{X}_2 \\ \sqrt{1+k^{-1}}X_2 = & \sin\theta\tilde{X}_2 \end{cases}$$

ce qui entraîne l'opposition des périhélie.

Appliquons maintenant les résultats précédents à l'approximation quadratique du problème Jupiter-Saturne.

En utilisant les conditions initiales du paragraphe I.6.4, nous nous trouvons, pour l'approximation linéaire séculaire d'ordre un, dans la deuxième des situations présentées au dessus (le tableau II.1 permet de le vérifier).

Tableau II.1 : Quantités définissant les surfaces d'énergie (II.3.1.4) et de moment cinétique (II.3.1.5).

Les équations en question étant homogènes, ces quantités sont sans unité.

$C_1^{(2)}$	0.01283
$H_1^{(2)}$	0.0010396
λ_1	0.05422
λ_2	0.16308
p_1	0.21730
p_2	0.14206
$\lambda_1 C_1^{(2)} - H_1^{(2)}$	-0.000344

On constate, sur la figure II.1.a que la variable \tilde{X}_2 ne peut s'annuler. Cela nous permet d'ores et déjà d'affirmer que, s'il existe une des orbites particulières présentées au paragraphe II.2.2, il ne peut s'agir que de celle dont les périhélie sont opposés et qu'en aucun cas l'orbite des périhélie alignés n'appartient à notre espace séculaire.

La transformation inverse de (II.3.1.3) nous permet de retrouver les éléments osculateurs séculaires (linéaires). En particulier, comme $e_j = |X_j| + O(e_j^3)$, les excentricités se déduisent des quantités réduites \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 par la formule :

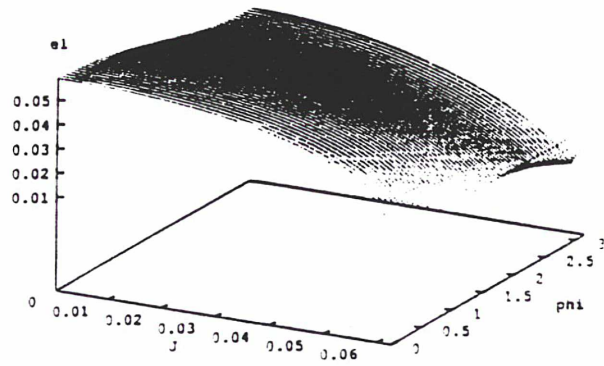
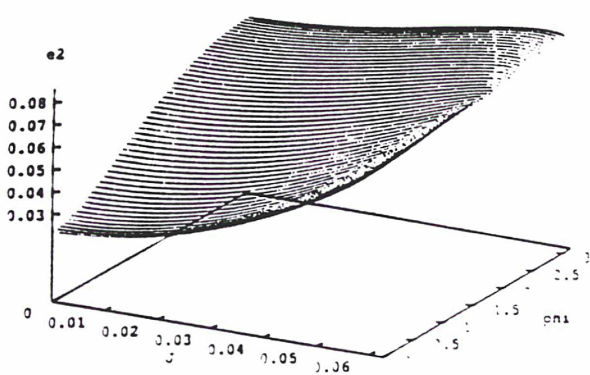
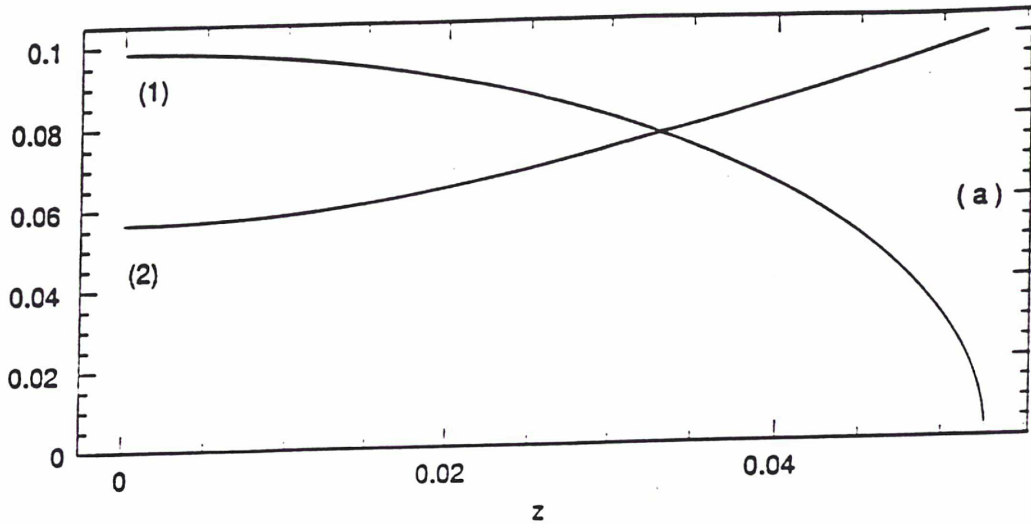
$$\begin{cases} (1+k)|X_1|^2 = \cos^2 \theta |\tilde{X}_1|^2 + \sin^2 \theta |\tilde{X}_2|^2 - \sin 2\theta |\tilde{X}_1| |\tilde{X}_2| \cos \varphi \\ (1+k^{-1})|X_2|^2 = \sin^2 \theta |\tilde{X}_1|^2 + \cos^2 \theta |\tilde{X}_2|^2 + \sin 2\theta |\tilde{X}_1| |\tilde{X}_2| \cos \varphi \\ |\tilde{X}_1| |\tilde{X}_2| \cos \varphi = \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 . \end{cases}$$

On en déduit l'expression du maximum des excentricités séculaires sous la forme :

$$\begin{cases} \sqrt{1+k} e_1 = \text{Max}(\cos \theta |\tilde{X}_1| + \sin \theta |\tilde{X}_2|) \\ \sqrt{1+k^{-1}} e_2 = \text{Max}(\sin \theta |\tilde{X}_1| + \cos \theta |\tilde{X}_2|) \end{cases}$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 vérifiant les relations (II.3.1.4) et (II.3.1.5).

Un calcul rapide de ce maximum nous montre que : $\text{Max}(e_1) = 0.059$ et $\text{Max}(e_2) = 0.086$. Il sera intéressant de comparer ces quantités à celles fournies par des approximations d'ordre supérieur.



Figures II.1 : Excentricités linéaires séculaires propres et linéaires séculaire pour $\alpha = 0.54543$.

Figure II.1.a : Représentation paramétrique de l'intersection des surfaces d'énergie (II.3.1.4) et de moment cinétique (II.3.1.5). $|\tilde{X}_1|$ et $|\tilde{X}_2|$ (courbes 1 et 2) en fonction de la variable $z = \sqrt{2}(1 - \cos J)$. Contrairement à \tilde{X}_1 , la variable \tilde{X}_2 ne s'annule pas. Ceci interdit à l'orbite des périhélie alignés de faire partie de l'espace.

Figure II.1.b : Excentricité linéaire séculaire de Jupiter e_1 en fonction de l'inclinaison mutuelle J et de l'angle φ défini par : $|\tilde{X}_1||\tilde{X}_2|\cos\varphi = \tilde{X}_1\tilde{X}_2 + \tilde{X}_1\tilde{X}_2$.

Figure II.1.c : Excentricité linéaire séculaire de Saturne e_2 en fonction de l'inclinaison mutuelle J et de l'angle φ défini ci-dessus.

Sur les figures *II.1.b-c*, sont représentées les excentricités séculaires linéaires de Jupiter et de Saturne en fonction de l'inclinaison mutuelle et de l'angle φ . On vérifie que les excentricités restent toujours très faibles, ce qui montre l'importance de la contrainte imposée au système par la conservation du moment cinétique dans le cas où les masses des deux planètes sont comparables.

II.3.2) Diagonalisation en base symplectique

II.3.2.1) Présentation

Exprimé dans les variables séculaires de Poincaré (cf chapitre I), le hamiltonien séculaire, qu'il soit d'ordre un ou deux des masses, peut être considéré comme somme de polynômes homogènes de degré total pair. La partie de degré deux (fournissant l'approximation linéaire) est donc une forme quadratique des plus générales.

Il est utile, et pour certains travaux nécessaire, de réduire cette forme quadratique en somme de carrés, et ce, dans une base symplectique, afin de préserver la nature hamiltonienne du système.

Cette première réduction sera fondamentale pour ce qui suit, puisqu'elle constitue la première étape de la transformation de Birkhoff. Elle nous permettra aussi de définir au paragraphe III.3 des surfaces de section, et de simplifier la visualisation de l'espace des phases.

Précisons maintenant quelques notations.

Dans ce paragraphe, nous allons considérer un hamiltonien quadratique de la forme $H(x) = b(x, x)$ où x est un vecteur de \mathbb{R}^{2n} et b une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ (b peut être aussi bien définie négative, dans ce cas on se rapportera à la situation précédente en considérant $-b$). Si x et y sont des vecteurs de \mathbb{R}^{2n} , nous noterons x_j et y_j leurs coordonnées pour j allant de 1 à $2n$. Après s'être fixé une base canonique de \mathbb{R}^{2n} , notons ω la forme bilinéaire antisymétrique dont la matrice est donnée dans cette base par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice de l'application identique de \mathbb{R}^n .

Nous allons montrer qu'un tel hamiltonien est réductible sous forme de somme de carrés dans une base symplectique, puis nous appliquerons ce résultat à la partie quadratique du hamiltonien séculaire du problème planétaire des trois corps.

II.3.2.2) Réduction dans le cas général

Le paragraphe présent s'inspire largement d'ouvrages traitant des formes quadratiques, et tout particulièrement de celui de R.Deheuvels [De].

La forme bilinéaire b étant définie positive, il existe une base de \mathbb{R}^{2n} dans laquelle elle se réduit au produit scalaire usuel :

$$b(x, y) = \sum_{1 \leq j, k \leq 2n} x_j y_k = \langle x, y \rangle .$$

Notons alors

$$\tilde{J}_n = {}^t P J_n P$$

la matrice de la forme ω dans la nouvelle base et P sa matrice de passage.

Il reste alors à montrer que l'on peut trouver une base dans laquelle b est encore réduite et où la matrice de ω est de nouveau égale à J_n .

On montre aisément qu'il existe un opérateur linéaire antisymétrique u (${}^t u = -u$) tel que

$$\omega(x, y) = \langle x, uy \rangle ,$$

u étant un opérateur normal, il est diagonalisable en base orthonormale pour le produit scalaire hermitien du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^{2n} (complexifié de \mathbb{R}^{2n}). De plus, u étant antisymétrique réel, ses valeurs propres sont imaginaires pures et deux à deux conjuguées. Il existe ainsi une famille orthonormée de vecteurs, $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_n)$ de \mathbb{C}^{2n} et des réels α_j vérifiant :

$$u(\Gamma_j) = i\alpha_j \Gamma_j \quad u(\bar{\Gamma}_j) = -i\alpha_j \bar{\Gamma}_j \quad \text{avec} \quad \alpha_j > 0.$$

Si e_j et f_j sont respectivement les parties réelles et imaginaires des Γ_j , on déduit de la formule précédente les relations :

$$u(e_j) = -\alpha_j f_j \quad \text{et} \quad u(f_j) = \alpha_j e_j .$$

qui décomposent l'espace euclidien \mathbb{R}^{2n} en somme directe orthogonale de n plans engendrés par les couples de vecteurs (e_j, f_j) .

Il suffit alors pour conclure, de choisir la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n)$ définie par :

$$\epsilon_j = \sqrt{\frac{2}{\alpha_j}} e_j \quad \text{et} \quad \epsilon'_j = \sqrt{\frac{2}{\alpha_j}} f_j.$$

En effet, dans cette dernière base, la forme symplectique et le hamiltonien s'écrivent :

$$\omega(x, y) = \sum_{j=1}^n (x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j) \quad \text{et} \quad H(x) = b(x, x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{-1} (x_j^2 + x_{j+n}^2)$$

ce qui achève la démonstration.

Cette méthode de réduction se déroule donc en deux étapes : réduction de la forme bilinéaire b au produit scalaire usuel, puis recherche des vecteurs propres d'un opérateur antisymétrique.

Il existe des méthodes de diagonalisation plus directes, mais aussi plus restrictives. Nous allons ici reprendre en substance celle présentée dans [Gi]. Considérons toujours le même hamiltonien quadratique H , défini par la matrice symétrique B , et supposons de plus que la matrice $A = J_n B$ a toutes ses valeurs propres distinctes et non-nulles. Ces propriétés font de A une matrice diagonalisable et inversible. De plus, les égalités suivantes :

$$\text{Det}(J_n B - \lambda I) = \text{Det}(B J_n + \lambda I) = \text{Det}(J_n B J_n^2 + \lambda J_n^2) = \text{Det}(J_n B + \lambda I)$$

montrent que le polynôme caractéristique de A est pair, ce qui impose aux valeurs propres d'être deux à deux opposées.

En notant a l'opérateur associé à la matrice A , on vérifie aisément les relations :

$$\omega(x, ay) + \omega(ax, y) = 0 \quad (II.3.2.2.1)$$

$$b(x, y) = -\omega(x, ay) . \quad (II.3.2.2.2)$$

Si $\pm\lambda_j$ sont les valeurs propres de A , et Γ_j^+ et Γ_j^- les vecteurs propres associés, on déduit de la relation (II.3.2.2.1) que les plans $P_j = \text{Vect}(\Gamma_j^+, \Gamma_j^-)$ décomposent l'espace en somme directe orthogonale (il s'agit de l'orthogonalité pour la forme ω). A une constante multiplicative près, la base de diagonalisation est symplectique, il est donc évident que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures. En effet, s'il en était autrement, le système serait hyperbolique. Mais comme le hamiltonien est une forme bilinéaire définie positive, le système ne peut être qu'elliptique. Comme par une transformation symplectique un point fixe ne peut changer de nature, les valeurs propres sont bien imaginaires pures.

Il ne nous reste plus qu'à multiplier les parties réelles et imaginaires de Γ_j^+ pour en faire une base symplectique. La relation (II.3.2.2.2) nous montre alors que dans cette base, la forme bilinéaire b est réduite en somme de carrés.

Appliquons maintenant cette méthode au problème planétaire.

II.3.2.3) Application au hamiltonien séculaire

Avant de se lancer dans la réduction de la partie quadratique, précisons quelles sont les indéterminées du polynôme constituant le hamiltonien. Dans le premier chapitre consacré au calcul du hamiltonien séculaire, quand nous parlions de degré, il s'agissait du degré de polynôme des cinq variables $(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, D)$ (où D représente la racine carrée de D_2) dont les coefficients dépendaient des paramètres h et α . Cette manière de regrouper les variables nous a permis d'obtenir un développement de la fonction perturbatrice à un degré fixé des excentricités et inclinaisons (expression que nous avons utilisé pour le calcul du hamiltonien d'ordre deux, et que nous utiliserons au chapitre III). Maintenant, la situation est toute autre : la dynamique du problème séculaire réduit est en effet décrite uniquement par les quatre variables $(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Ceci nous conduit, en particulier pour l'application du théorème d'Arnold, à considérer le hamiltonien séculaire comme un polynôme de quatre variables dont les coefficients dépendent aussi de D .

Exprimée dans les variables canoniques $(x_j, -i\bar{x}_j)$ la partie quadratique prend la forme suivante :

$$H_2 = -\frac{\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2^2}{\Lambda_2^2} \frac{m_2}{m_0} \frac{2}{\Lambda_1} [\gamma_1 x_1 \bar{x}_1 + \gamma_2 x_2 \bar{x}_2 + \gamma_3 (x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2) \\ \gamma_4 (x_1^2 + \bar{x}_1^2) + \gamma_5 (x_2^2 + \bar{x}_2^2) + \gamma_6 (x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2)]$$

où les coefficients γ_j , qui dépendent analytiquement des paramètres Λ_j et D_2 , s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\alpha}{8}(2+k)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) + O(D_2) & \gamma_2 &= \frac{\alpha}{8}(2k+1)b_{3/2}^{(1)}(\alpha) + O(D_2) \\
\gamma_3 &= \frac{\alpha}{8}\sqrt{k}b_{3/2}^{(2)}(\alpha) + O(D_2) & \gamma_4 &= O(D_2) \\
\gamma_5 &= O(D_2) & \gamma_6 &= O(D_2) .
\end{aligned}$$

Dans le but de réduire cette forme quadratique, il est préférable d'utiliser des variables canoniques réelles qui fourniront une expression plus simple et plus symétrique de la matrice A du système hamiltonien associé.

A l'aide des variables (a_j, b_j) définies par la relation $x_j = (a_j - ib_j)/\sqrt{2}$, H_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{2c}{\Lambda_1} [(\gamma_1/2 + \gamma_4)a_1^2 + (\gamma_6 + \gamma_3)a_1a_2 + (\gamma_2/2 + \gamma_5)a_2^2 \\
&\quad + (\gamma_1/2 - \gamma_4)b_1^2 + (\gamma_3 - \gamma_6)b_1b_2 + (\gamma_2/2 - \gamma_5)b_2^2] \\
&= \frac{2c}{\Lambda_1} [u_1a_1^2 + 2u_3a_1a_2 + u_2a_2^2 + v_1b_1^2 + 2v_3b_1b_2 + v_2b_2^2]
\end{aligned}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\frac{\Lambda_1}{2c} \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_3 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

avec $c = -\frac{\mu_1\mu_2\beta_1\beta_2^2}{\Lambda_2^2} \frac{m_2}{m_0}$.

La matrice A du système linéaire hamiltonien correspondant est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_3 & v_2 \\ -u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ -u_3 & -u_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est donné par l'expression :

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + (u_1v_1 + 2u_3v_3 + u_2v_2)\lambda^2 + (u_1u_2 - u_3^2)(v_1v_2 - v_3^2).$$

Ses racines sont des quantités imaginaires pures : $\pm i\lambda_1$ et $\pm i\lambda_2$ avec

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} [1 + W_j(D_2)] = \lambda_j^{(0)} \left[1 + W_j^{(1)} D_2 + W_j^{(2)} D_2^2 \right] \quad (II.3.2.3.1)$$

où les $\lambda_j^{(0)}$ et $W_j^{(k)}$ sont définis par les relations :

$$\lambda_1^{(0)}(\alpha) = \frac{\alpha}{32} \left[3(1 + h\sqrt{\alpha})b_{3/2}^{(1)}(\alpha) - \sqrt{\Delta^{(0)}} \right] \quad (II.3.2.3.2)$$

$$\lambda_2^{(0)}(\alpha) = \frac{\alpha}{32} \left[3(1 + h\sqrt{\alpha})b_{3/2}^{(1)}(\alpha) + \sqrt{\Delta^{(0)}} \right] \quad (II.3.2.3.3)$$

$$\Delta^{(0)} = (1 - h\sqrt{\alpha})^2 (b_{3/2}^{(1)}(\alpha))^2 + 4h\sqrt{\alpha} (b_{3/2}^{(2)}(\alpha))^2$$

$$W_j^{(1)} = \left[Q_{j,1}^{(1)} + Q_{j,2}^{(1)} \Delta^{(0)-1/2} \right] \lambda_j^{(0)-1}$$

$$W_j^{(2)} = \left[Q_{j,1}^{(2)} + Q_{j,2}^{(2)} \Delta^{(0)-1/2} + Q_{j,3}^{(2)} \Delta^{(0)-3/2} \right] \lambda_j^{(0)-1} .$$

Dans les expressions ci-dessus, les $Q_{j,l}^{(k)}$ sont des polynômes dépendant des cinq variables $(h, h^{-1}, \sqrt{\alpha}, b_{5/2}^{(0)}(\alpha), b_{5/2}^{(1)}(\alpha))$.

Comme $b_{3/2}^{(2)}(\alpha) \leq b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$, on vérifie aisément que :

$$1 < \frac{\lambda_2^{(0)}(\alpha, h)}{\lambda_1^{(0)}(\alpha, h)} < 2 \quad \forall \alpha \in]0; 1[\quad \forall h . \quad (II.3.2.3.4)$$

Cette relation s'étend par continuité aux λ_j pour de petites valeurs de D_2 . Il est alors important de savoir dans quelle limite cette extension reste valable. En effet, grâce à cette dernière, le problème échappe aux résonances séculaires d'ordre inférieur à six.

Pour cela, nous avons étudié le rapport des fréquences

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\alpha, h, D_2).$$

Deux problèmes se sont posés, l'un numérique et l'autre plutôt pratique. Le premier provient de la singularité des coefficients de Laplace au voisinage de $\alpha = 1$. Plus précisément, au voisinage de 1, on a les relations suivantes [Po07]

$$b_s^{(k)}(\alpha) = \begin{cases} 0(\log(1 - \alpha)) & \text{si } s = \frac{1}{2} \\ 0((1 - \alpha)^{1-2s}) & \text{sinon} \end{cases}$$

afin d'éviter les problèmes numériques dus à la présence de cette singularité, il est important que α ne soit pas trop proche de cette valeur critique.

La deuxième difficulté est simplement due au fait que nous ne disposons pas d'une expression exacte des valeurs propres, mais seulement d'un développement limité à un ordre donné en D_2 . Il nous faut donc estimer l'erreur commise en confondant les valeurs propres et leur développement. Ces estimations ainsi que celles portant sur les coefficients de la forme normale que nous construirons aux chapitres suivants, sont regroupées dans

le paragraphe II.4.3.6 . Nous montrerons que la relation II.3.2.3.4 qui préserve le système des résonances séculaires d'ordre faible reste valable au moins sur le domaine :

$$(\alpha, h, D_2) \in [10^{-7}, 0.8] \times [10^{-2}, 10^2] \times [0, 10^{-2}].$$

On retrouve sur les figures II.2, l'évolution du rapport des fréquences en fonction de α pour quelques valeurs de h et de D_2 .

Sur chacun des graphiques (correspondant à un h particulier), on trouve trois courbes associées respectivement à $D_2 = 0$, $D_2 = 0.001$, $D_2 = 0.01$, chacune d'elles vérifiant :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} |_{D_2=0.01} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |_{D_2=0.001} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |_{D_2=0} .$$

Ces relations semblent montrer que le rapport des fréquences est une fonction décroissante de D_2 . Nous n'avons pas vérifié cette assertion, mais seulement le fait que :

$$\forall (\alpha, h) \in [10^{-7}, 0.8] \times [10^{-2}, 10^2], \frac{d}{dD_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) |_{D_2=0} < 0,$$

ce qui atteste de la décroissance du rapport des fréquences au moins pour D_2 petit.

Notons sur la figure la singularité naissante pour α tendant vers zéro et h étant grand.

Si $D_2 = 0$, cette dernière n'est atteinte que pour $\alpha = 0$ et $h = +\infty$. En effet, dans ce cas, nous disposons d'une expression simple des valeurs propres donnée par les relations (II.3.2.3.2) et (II.3.2.3.3). On déduit de ces dernières que le rapport des fréquences (pour $D_2 = 0$) ne peut être égal à 1 que si $\Delta^{(0)} = 0$, ce qui n'est possible que si α est lui-même nul.

De plus, si nous notons $R(h, \alpha)$ le rapport des fréquences, pour h fixé, on a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} R(h, \alpha) = 2$; de même pour α fixé non-nul, $\lim_{h \rightarrow \infty} R(h, \alpha) = 2$. En revanche, on vérifie aisément que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} R(1/\sqrt{\alpha}, \alpha) = 1$. On comprend ainsi l'évolution du minimum sur les figures II.2.d, e, et f.

La méthode de diagonalisation présentée plus haut nous fournit les vecteurs propres associés aux valeurs propres imaginaires pures de la matrice A , par les expressions :

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} v_3(u_3 v_3 - \lambda_j^2) - v_1 v_2 u_3 \\ u_1(v_1 v_2 - v_3^2) - v_2 \lambda_j^2 \\ -i \lambda_j (u_1 v_3 + v_2 u_3) \\ i \lambda_j (u_1 v_1 + u_3 v_3 - \lambda_j^2) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$e_j = \begin{pmatrix} v_3(u_3 v_3 - \lambda_j^2) - v_1 v_2 u_3 \\ u_1(v_1 v_2 - v_3^2) - v_2 \lambda_j^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_j (u_1 v_3 + v_2 u_3) \\ \lambda_j (u_1 v_1 + u_3 v_3 - \lambda_j^2) \end{pmatrix} .$$

Si nous posons :

$$w_j = \sqrt{|\omega(e_j, f_j)|},$$

la matrice de passage P est donnée par l'expression :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{e_1}{w_1} & \frac{e_2}{w_2} & \frac{f_1}{w_1} & \frac{f_2}{w_2} \\ \frac{e_1}{w_1} & \frac{e_2}{w_2} & \frac{f_1}{w_1} & \frac{f_2}{w_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0_2 \\ 0_2 & P_2 \end{pmatrix}$$

où 0_2 est la matrice 2×2 identiquement nulle et les P_j des matrices 2×2 à coefficients réels.

La matrice P définit un nouveau système de coordonnées par :

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0_2 \\ 0_2 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_j \\ \tilde{b}_j \end{pmatrix}.$$

Notons que si $D_2 = 0$, le problème que pose la diagonalisation en base symplectique se simplifie notablement : la matrice A du système devient antisymétrique et la matrice de passage P est alors une rotation de R^4 vérifiant : $P_1 = P_2 \in O^+(R^2)$.

Le hamiltonien exprimé à l'aide des nouvelles coordonnées se réduit alors à :

$$\tilde{H}_2 = \frac{2c}{\Lambda_1} [\lambda_1(\tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2) + \lambda_2(\tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2)] . \quad (II.3.2.3.5)$$

Il peut être préférable de revenir à des variables canoniques complexes du type $\tilde{x}_j = (\tilde{a}_j - i\tilde{b}_j)/\sqrt{2}$ qui nous conduisent à la forme :

$$\tilde{H}_2 = \frac{4c}{\Lambda_1} [\lambda_1|\tilde{x}_1|^2 + \lambda_2|\tilde{x}_2|^2] . \quad (II.3.2.3.6)$$

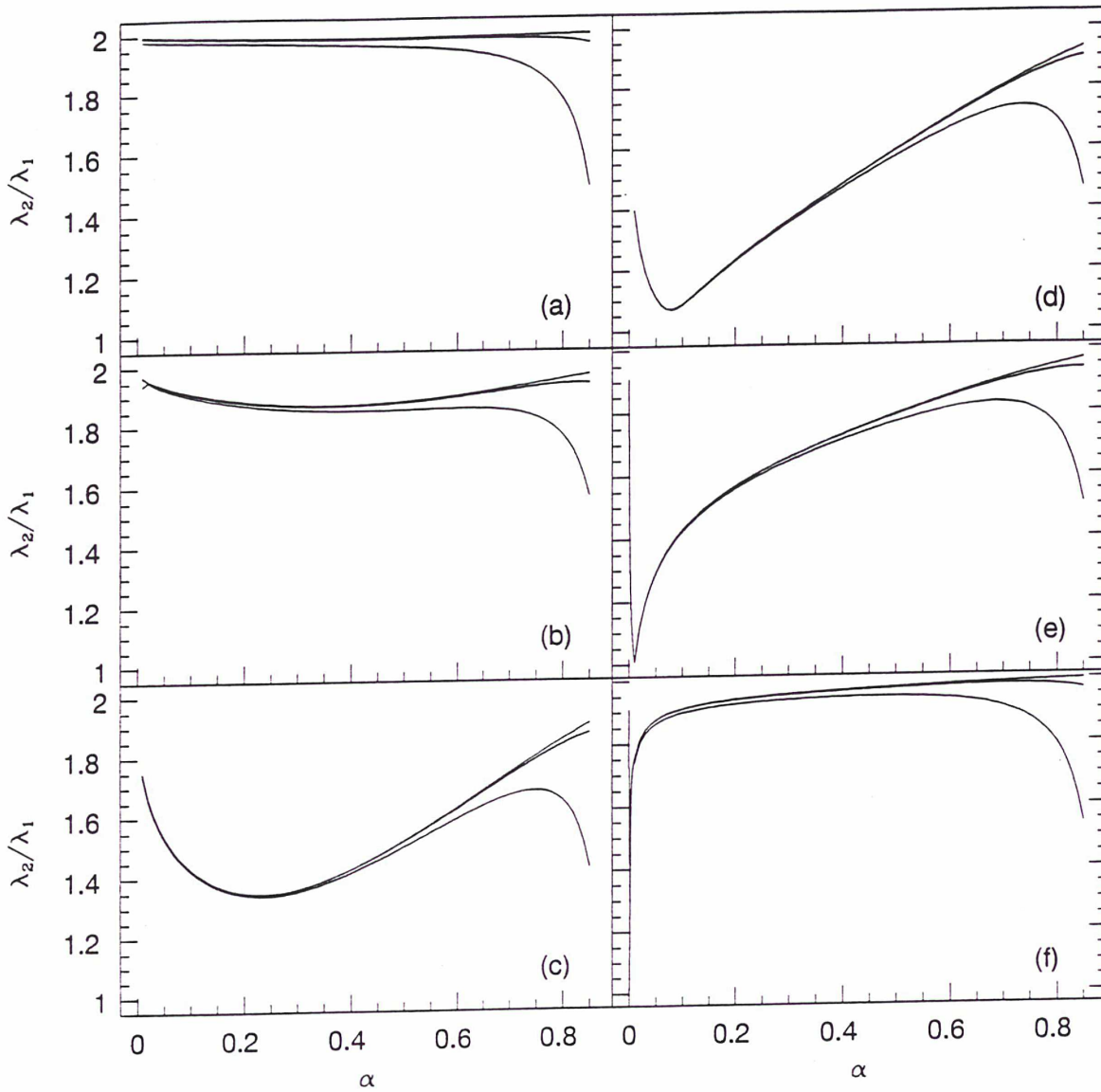
En pratique, on préférera utiliser des variables non canoniques qui ont l'avantage d'être sans dimension, il s'agit des variables (A_j, B_j) définies par : $a_j = \sqrt{\Lambda_j}A_j$ et $b_j = \sqrt{\Lambda_j}B_j$. On définit de la même manière les variables $(\tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$. Dans ces conditions, le changement de coordonnées précédant exprimé en variables non canoniques s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2}/\sqrt{k} & 0 & 0 \\ P_{2,1}\sqrt{k} & P_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{3,3} & P_{3,4}/\sqrt{k} \\ 0 & 0 & P_{4,3}\sqrt{k} & P_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}.$$

transformation que nous noterons sous la forme plus synthétique :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} . \quad (II.3.2.3.7)$$

Figures II.2



Figures II.2 : Rapport des fréquences linéaires (valeurs propres du hamiltonien quadratique \tilde{H}_2) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ en fonction de α et pour différentes valeurs de D_2 et de h .

Sur chacune des six figures, la courbe du haut correspond à $D_2 = 0$, celle du milieu à $D_2 = .001$ et la dernière à $D_2 = 0.01$. Pour chaque figure (de (a) à (f)), les trois courbes sont tracées pour des valeurs du rapport des masses h respectivement égales à 0.01, 0.1, 1, 3.34, 10, 100 (la valeur 3.34 étant approximativement égale à celle du rapport des masses du couple Jupiter Saturne).

II.3.3) Quelques considérations sur l'espace des phases associé au hamiltonien quadratique.

Nous venons de voir qu'il existait des variables avec lesquelles la partie quadratique du hamiltonien séculaire se réduisait à une somme de carrés. Comme les valeurs propres λ_j sont de même signe, une variété d'énergie, qu'elle soit étudiée à l'aide des variables canoniques \tilde{a}_j, \tilde{b}_j , ou des variables sans dimension \tilde{A}_j, \tilde{B}_j , doit être un ellipsoïde de dimension trois dans R^4 . Nous allons voir que dans certains cas la situation est un peu plus complexe. Nous savons que la transformation linéaire réduisant le hamiltonien est, à condition de négliger les termes en D_2 , une rotation de R^4 . On déduit alors de la relation I.3.2 qu'en nous limitant aux quantités d'ordre supérieur à deux, l'inclinaison s'écrit :

$$C_J^2 = D_2 - \frac{k+1}{\Lambda_1}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2) = D_2 - \frac{k+1}{\Lambda_1}(\tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2).$$

En utilisant la relation (II.3.2.3.5), on obtient finalement :

$$C_J^2 = D_2 - \frac{(k+1)\tilde{H}_2}{2c\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) \frac{k+1}{\Lambda_1}(\tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2).$$

Il suffit alors que la quantité $D_2 - \frac{(k+1)\tilde{H}_2}{2c\lambda_1}$ soit négative (ce qui est possible dès que D_2 est suffisamment petit) pour que $\tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2$ ne puisse plus s'annuler, interdisant ainsi à la quantité $a_1^2 + b_1^2$ d'atteindre son maximum. On retrouve ici le phénomène décrit en II.3 : suivant les valeurs de l'énergie et du moment cinétique, l'inclinaison mutuelle peut ou non s'annuler.

Dans la situation où l'inclinaison peut s'annuler (cela se produit dans l'espace des phases associé à l'énergie et au moment cinétique de Jupiter et Saturne) une partie de l'espace des phases (de l'ellipsoïde si on se limite au hamiltonien quadratique) n'a pas de sens physique puisque dans cette région l'inclinaison mutuelle devient imaginaire pure. Bien que ce phénomène puisse sembler étrange, il s'explique simplement par le fait que la formule (I.3.2) utilisée lors de la réduction du moment cinétique ne prend pas en compte la contrainte $C_J^2 \geq 0$. A condition d'en être informé, cet "oubli" n'engendre aucun problème supplémentaire. Finalement, selon que l'inclinaison mutuelle s'annule ou non, l'espace des phases correspondant au hamiltonien \tilde{H}_2 est soit un ellipsoïde de dimension trois, soit une portion d'ellipsoïde limitée par le tore défini par le système d'équation :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 &= R_1^2 \\ \tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2 &= R_2^2 \\ D_2 - \frac{k+1}{\Lambda_1}(R_1^2 + R_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Pour achever ce paragraphe, présentons une visualisation de l'espace des phases du problème linéaire qui nous sera utile au chapitre III. Le problème étant intégrable, l'espace est

réunion de tores invariants de dimension deux d'équation :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 &= R_1^2 \\ \tilde{a}_2^2 + \tilde{b}_2^2 &= R_2^2 \quad (II.3.3.1)\end{aligned}$$

où R_1 et R_2 sont liés par la relation : $\tilde{H}_2 = \frac{2c}{\Lambda_1}(\lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 R_2^2)$. Chacun d'eux est partitionné en orbites quasi-périodiques de même vecteur fréquence $(4c\lambda_1, 4c\lambda_2)$ (périodique si le rapport λ_1/λ_2 est rationnel).

Nous choisissons alors de représenter la projection de ces quantités sur l'hyperplan d'équation $\tilde{b}_2 = 0$ rapporté au système de coordonnées $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{a}_2)$. Dans ces conditions, notre ellipsoïde de dimension quatre représentant l'espace des phases se projette en l'ellipsoïde plein de dimension trois ayant pour équation :

$$\frac{2c}{\Lambda_1}(\lambda_1 \tilde{a}_1^2 + \lambda_1 \tilde{b}_1^2 + \lambda_2 \tilde{a}_2^2) \leq \tilde{H}_2 .$$

Chacun des tores feuilletant l'espace des phases se projette alors en un cylindre d'équation

$$\tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 = R_1^2 \quad , \quad |\tilde{a}_2| \leq R_2 .$$

On retrouve alors les deux situations opposées : ou bien, l'inclinaison ne peut s'annuler (Figure II.3.a), et dans ce cas R_1 et R_2 peuvent atteindre la valeur zéro. La projection du tore (II.3.3.1) dégénère alors pour $R_2 = 0$ en un cercle représentant l'orbite des périhélie alignés (notée \mathcal{P}_a), et pour $R_1 = 0$ en le segment représentant l'orbite des périhélie opposés (notée \mathcal{P}_o).

Ou bien l'inclinaison mutuelle s'annule (Figure II.3.b), R_1 peut encore être égal à zéro et l'on retrouve l'orbite \mathcal{P}_o . Mais R_2 ne s'annule plus et l'orbite \mathcal{P}_a ne fait plus partie de l'espace des phases. Par contre, quand R_1 atteint son maximum et R_2 son minimum (non nul), le tore associé à ces deux quantités (qui se projette en un cylindre) correspond aux tores supportant les mouvements plan (nous le noterons \mathcal{T}_l). Notre projection de l'espace des phases est donc limitée au volume d'équation :

$$\begin{aligned}\frac{2c}{\Lambda_1}(\lambda_1 \tilde{a}_1^2 + \lambda_1 \tilde{b}_1^2 + \lambda_2 \tilde{a}_2^2) &\leq \tilde{H}_2 \\ \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 &\leq R_{1,M}^2\end{aligned}$$

où $R_{1,M}$ est la valeur prise par R_1 quand R_2 s'annule.

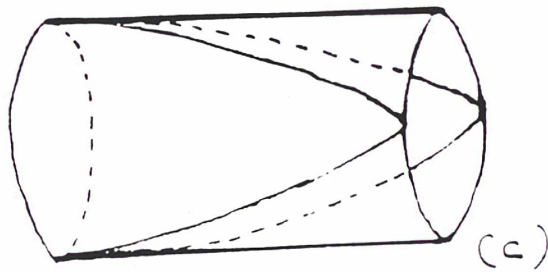
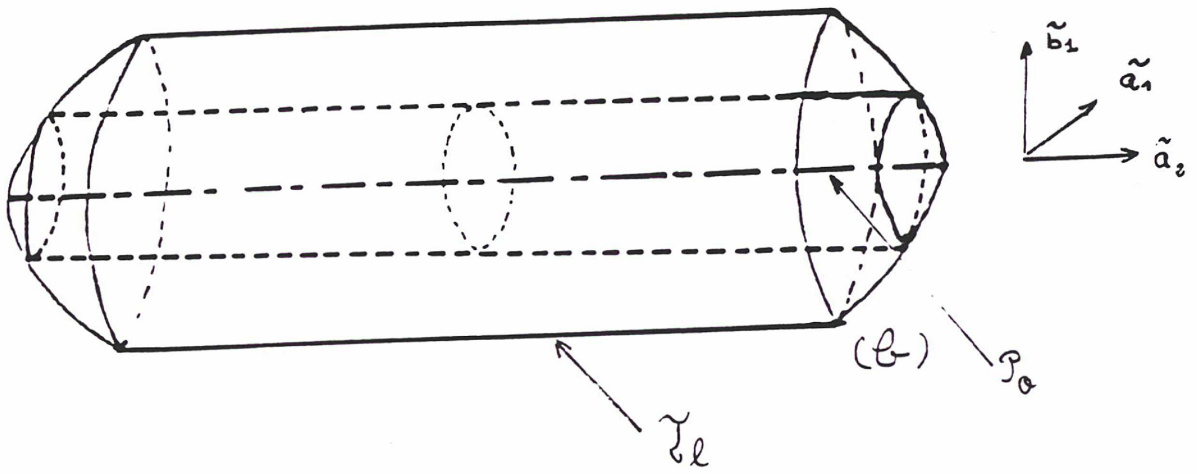
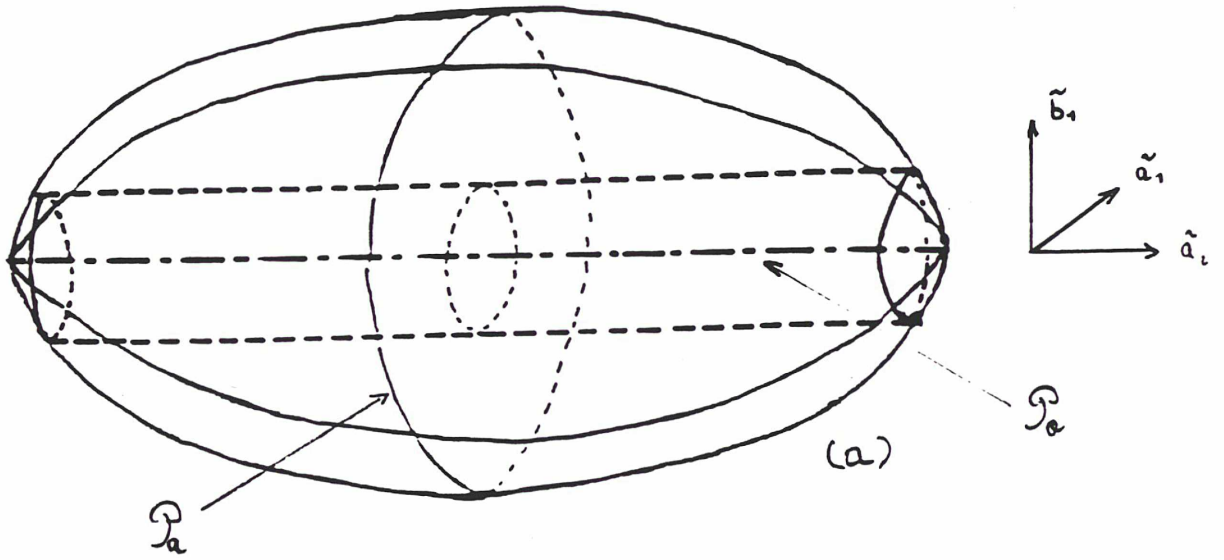
Figures II.3 : Une représentation de la projection sur R^3 de l'approximation quadratique de l'espace séculaire. R^3 est rapporté au système de coordonnées $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{a}_2)$.

Figure II.3.a : L'espace est un ellipsoïde, l'inclinaison mutuelle peut éventuellement être égale à zéro. L'intérieur de cet ellipsoïde est réunion de tores invariants dont les projections sont représentées par le cylindre en pointillé. On retrouve les tores dégénérés de dimension un associés aux orbites des périhélie opposés \mathcal{P}_o et alignés \mathcal{P}_a . \mathcal{P}_o est représentée par un segment et \mathcal{P}_a par un cercle.

Figure II.3.b : l'inclinaison mutuelle peut être nulle, l'ellipsoïde est alors tronqué par le tore limite \mathcal{T}_1) associé aux mouvements plan. On retrouve encore l'orbite des périhélie opposés \mathcal{P}_o .

Figures II.3.c : Représentation de la projection d'une orbite quasi-périodique sur un des tore feuilletant l'espace des phases.

FIGURES II.3



II.4) Existence de tores de dimension maximale dans le problème planétaire des trois corps.

II.4.1) K.A.M. et les théories des perturbations classiques.

Avant de présenter la théorie K.A.M. et son usage en mécanique céleste, attardons-nous quelque peu sur les méthodes plus classiques de la théorie des perturbations. Pour plus de détails sur ces théories, il est enrichissant de consulter les références [Po1892], [Ar63b] et [Ar88].

Envisageons tout d'abord la situation idéale du problème intégrable.

Supposons un problème possédant n degrés de liberté dont les équations du mouvement dérivent du hamiltonien $H(I, \varphi)$ avec $(I, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times T^n$. Ce hamiltonien étant intégrable, il existe un système de variables canoniques (J, ψ) , appelées variables angle-action, vérifiant la relation :

$$H(I, \varphi) = K(J) \quad \text{où } K \text{ est le nouveau hamiltonien.}$$

L'espace des phases est alors réunion de tores invariants par le flot (que nous noterons T_{J_0}) d'équation $J = J_0$. On distingue alors deux types de tore. Si les composantes du vecteur

fréquence $\omega(J_0) = \frac{\partial H}{\partial J}(J_0)$ associé à T_{J_0} sont commensurables ($\exists k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ tel que :

$k \cdot \omega(J_0) = 0$), le tore sera dit résonant. Dans le cas contraire, il sera non-résonant. Chaque tore non-résonant est partitionné en orbites quasi-périodiques denses, les tores résonants sont pour leur part feuilletés en tores invariants de dimension inférieure. Excepté dans les cas tel que l'oscillateur harmonique dont le hamiltonien est fourni par : $H(J) = \omega \cdot J$, les fréquences dépendent des actions (et donc du tore considéré). Cette dépendance, appelée non-dégénérescence, sera un ingrédient fondamental des théories K.A.M.

Il existe plusieurs types de non-dégénérescence, nous utiliserons celui qui correspond à l'inversibilité de l'application fréquence, qui se traduit par la simple condition

$$\text{Det} \left(\frac{\partial \omega}{\partial J} \right) \neq 0. \quad (\text{II.4.1.1})$$

Cette condition permet de résoudre au moins localement l'équation : $\omega(J) = \omega_0$.

Pour un problème intégrable, en cas de non-dégénérescence, les tores non-résonants forment une partie dense (dans l'espace des phases) de mesure pleine, alors que les tores résonants forment un ensemble de mesure nulle mais dense lui aussi.

Bien qu'il n'existe que peu de systèmes hamiltoniens intégrables, la situation n'est pas sans issue quand le problème étudié ne diffère d'un problème intégrable que d'une petite quantité.

En effet, si ε est un "petit paramètre" représentant la taille de la perturbation, on peut écrire le hamiltonien H sous la forme :

$$H(I, \varphi; \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi; \varepsilon)$$

que l'on développe éventuellement en série de Taylor de la variable ε , ce qui conduit à

$$H(I, \varphi; \varepsilon) = H_0(I) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H^{(k)}(I, \varphi).$$

Le hamiltonien H_0 étant intégrable, on choisit évidemment les variables (φ, I) comme variables angle-action de la partie non-perturbée.

Si H_0 ne possède pas de dégénérescence propre, c'est à dire si les composantes du vecteur fréquence ne sont pas liées par des relations de commensurabilité indépendante de I ($\exists I$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}^n, k \cdot I \neq 0$), les méthodes dites de Lindstedt permettent de rejeter la dépendance angulaire dans un reste d'ordre ε^{p+1} , fournissant ainsi une approximation intégrable du hamiltonien sous la forme :

$$K^{(p)}(J^{(p)}; \varepsilon^{(p)}) = H_0(J^{(p)}) + \sum_{k=1}^p \varepsilon^k K_k(J^{(p)}) = H(I, \varphi; \varepsilon) - \varepsilon^{p+1} R(J^{(p)}, \psi^{(p)})$$

où $(J^{(p)}, \psi^{(p)})$ sont les nouvelles variables canoniques fournies par la méthode.

Cette méthode permet d'intégrer approximativement le système en fournissant des variables angle-action approchées. A condition de contrôler la norme du reste R , on vérifie à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que la variation de $J^{(p)}$ est de l'ordre de $\varepsilon^{p+1}T$ sur un intervalle de temps $[0, T]$.

Bien que très efficace pour résoudre un problème à un ordre fixé du petit paramètre (et sur un temps fini), cette méthode se heurte à un inconvénient majeur que l'on ne peut contourner car il découle de la nature géométrique du problème perturbé : la transformation

$$(I, \varphi) \longmapsto (J^{(p)}, \psi^{(p)})$$

définie par la fonction génératrice

$$S(J^{(p)}, \varphi) = J^{(p)} \cdot \varphi + \sum_{k=1}^p \varepsilon^{(k)} S_k(J^{(p)}, \varphi)$$

n'est convergente que dans des régions de l'espace des phases où la fréquence $\omega_0(J^{(p)})$ est suffisamment non-résonante. Plus précisément, la fonction génératrice S_k est définie par l'équation (dite homologique) :

$$\omega_0(J^{(p)}) \cdot \frac{\partial S_k}{\partial \varphi}(J^{(p)}, \varphi) = G_k(J^{(p)}, \varphi) = \sum_{q \in \mathbb{Z}_*^n} a_q^{(k)} \exp(iq \cdot \varphi) \quad (II.4.1.2)$$

où les coefficients $a_q^{(k)}$ sont fonctions des coefficients de Fourier des $H^{(l)}$ pour l allant de 1 à k .

De cette équation, on déduit l'expression formelle du développement en série de Fourier de la fonction génératrice S_k par la formule :

$$S_k(J^{(p)}, \varphi) = \sum_{q \in \mathbb{Z}_*^n} \frac{a_q^{(k)} \exp(iq \cdot \varphi)}{iq \cdot \omega_0(J^{(p)})}. \quad (II.4.1.3)$$

Cette série n'est en effet convergente que sous des hypothèses très particulières :

si les fonctions $H^{(k)}$ sont analytiques (pour $\varphi \in C^n$ avec $|Im\varphi_j| < \delta$), les coefficients de $a_q^{(k)}$ décroissent plus vite que toute puissance de $|q|$ ($|q| = |q_1| + \dots + |q_n|$). On vérifie dès lors que si le vecteur fréquence $\omega_0(J^{(p)})$ vérifie la condition diophantienne :

$$\forall q \in Z_*^n \quad |q \cdot \omega_0(J^{(p)})| \geq \frac{K}{|q|^\nu}, \quad (II.4.1.4)$$

la série converge.

Notons que si $\nu > n - 1$, pour presque toutes les fréquences il existe une constante K telle que la condition diophantienne est vérifiée. En revanche, bien que de mesure nulle, l'ensemble des fréquences ne vérifiant aucune condition diophantienne est dense dans l'ensemble des fréquences. Il en résulte (si $\frac{\partial \omega_0}{\partial I}$ est inversible) qu'en faisant varier continûment le vecteur $J^{(k)}$, on passe sans cesse de l'ensemble de convergence à l'ensemble de divergence de la série de Lindstedt. Ce phénomène avait déjà été pressenti par Poincaré [Po1892].

La méthode de Lindstedt permet donc, dans l'ensemble de convergence, de rejeter les termes rendant le hamiltonien non-intégrable dans un reste d'ordre ε^{p+1} où p est un entier arbitraire. Rien n'empêche, tout au moins formellement, de poursuivre indéfiniment les itérations de manière à obtenir n intégrales premières $J^{(\infty)}$. Mais ce processus n'est malheureusement pas convergent, l'effet des petits diviseurs surpasse la décroissance polynomiale du petit paramètre ε interdisant de ce fait la convergence des séries.

Il fallut attendre 1954 pour que Kolmogorov [Ko] résolve ce problème majeur.

Des démonstrations plus élaborées furent proposées au début des années 60 par Arnold [Ar63a] dans le cadre des systèmes hamiltoniens et Moser [Mo] pour les applications symplectiques.

Le principe de la démonstration est le suivant (on en trouve une démonstration plus actuelle dans [Be]) : étant donné le hamiltonien

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi; \varepsilon)$$

défini sur une partie de $R^n \times T^n$, on cherche une transformation canonique

$$\mathcal{T}^{(1)} : (I, \varphi) \longmapsto (I^{(1)}, \varphi^{(1)})$$

définie par la fonction génératrice :

$$S^{(1)}(I^{(1)}, \varphi) = I^{(1)} \cdot \varphi + \varepsilon S_1^{(1)}(I^{(1)}, \varphi)$$

tel que le nouveau hamiltonien $H^{(1)}$ vérifie:

$$H^{(1)}(I^{(1)}, \varphi^{(1)}) = H_0^{(1)}(I^{(1)}; \varepsilon) + \varepsilon^2 H_1^{(1)}(I^{(1)}, \varphi^{(1)}; \varepsilon).$$

Par itération de la méthode, le hamiltonien transformé par la fonction

$$\mathcal{T}_{(n)} = \mathcal{T}^{(n)} \circ \dots \circ \mathcal{T}^{(1)}$$

s'écrit :

$$H^{(n)}(I^{(n)}, \varphi^{(n)}) = H_0^{(n)}(I^{(n)}; \varepsilon) + \varepsilon^{2^n} H_1^{(n)}(I^{(n)}, \varphi^{(n)}; \varepsilon)$$

avec $\|H_1^{(n)}\| < M_n$. Comme dans la méthode de Lindstedt, à cause de l'existence des petits diviseurs (nous verrons plus bas de quelle manière ils interviennent) la suite des majorants M_n est croissante ; mais cette fois-ci, la décroissance rapide suffit à rendre convergente la suite ε^{2^n} . Ainsi, la transformation $\mathcal{T}_{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{(n)}$ reste définie pour un certain domaine de l'espace des phases (dont la mesure du complémentaire tend vers zéro avec la taille de la perturbation ε).

La construction de cette méthode demande, comme dans la méthode de Lindstedt, de résoudre à chaque étape l'équation homologique (du type (II.4.1.2)) fournissant la fonction génératrice de la transformation canonique. Cette équation pouvant se résoudre d'au moins deux manières, il est intéressant de s'y attarder quelques instants.

Chacune des transformations $\mathcal{T}^{(n)}$ vérifiant les mêmes propriétés, il suffit d'étudier le principe de construction de la première.

Par application de la formule de Taylor aux deux membres de l'égalité :

$$H(I, \varphi) = H^{(1)}(I^{(1)}, \varphi^{(1)})$$

on obtient l'équation suivante :

$$H_0^{(1)}(I^{(1)}; \varepsilon) + \varepsilon^2 H_1^{(1)}(I^{(1)}, \varphi^{(1)}; \varepsilon) = H_0(I^{(1)}) + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial I}(I^{(1)}) \cdot \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi) + \varepsilon H_1(I^{(1)}, \varphi; 0) + R(\varepsilon)$$

où $R(\varepsilon)$ est une quantité d'ordre $O(\varepsilon^2)$ égale à :

$$R(\varepsilon) = H_0(I^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi)) - H_0(I^{(1)}) - \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial I}(I^{(1)}) \cdot \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi) + \varepsilon H_1(I^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi), \varphi; \varepsilon) - \varepsilon H_1(I^{(1)}, \varphi; 0).$$

L'équation à résoudre est donc :

$$H_0^{(1)}(I^{(1)}; \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial I}(I^{(1)}) \cdot \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi) + \varepsilon H_1(I^{(1)}, \varphi; 0). \quad (II.4.1.5)$$

Kolmogorov propose de procéder comme suit :

si I^* est tel que la fréquence $\frac{\partial H_0}{\partial I}(I^*)$ vérifie une condition diophantienne de la forme

(II.4.1.4), on remplace dans l'expression de $H_0^{(1)}(I^{(1)}; \varepsilon)$ la quantité $\frac{\partial H_0}{\partial I}(I^{(1)})$ par $\frac{\partial H_0}{\partial I}(I^*)$

ce qui revient, si on restreint la transformation $\mathcal{T}^{(n)}$ à un domaine de taille ε autour de I^* ($\|I^{(1)} - I^*\| < \varepsilon$) à rejeter le terme

$$\varepsilon \left(\frac{\partial H_0}{\partial I}(I^{(1)}) - \frac{\partial H_0}{\partial I}(I^*) \right) \cdot \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi)$$

dans $R(\varepsilon)$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation homologique :

$$\frac{\partial H_0}{\partial I}(I^*) \cdot \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi) + \left\{ H_1(I^{(1)}, \varphi; 0) \right\}_\varphi = 0.$$

En itérant ce principe, on garde un parfait contrôle des petits diviseurs. En contre-partie, chacune des transformations n'est définie qu'à l'intérieur d'un voisinage de taille ε de l'action I^* . Comme nous le verrons plus bas, ceci pose un problème majeur pour la construction de tores dans un problème possédant des dégénérescences propres. Ainsi, Arnold propose une autre manière de résoudre l'équation (II.4.1.5) qui fonctionne aussi dans le cas non-dégénéré où nous nous trouvons.

On ne se place plus dans un voisinage d'une action I^* permettant de contrôler les diviseurs, mais en revanche, on n'élimine qu'un nombre fini d'harmoniques du développement en série de Fourier de H_1 .

Il s'agit de résoudre l'équation

$$\frac{\partial H_0}{\partial I}(I^{(1)}) \cdot \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \varphi}(I^{(1)}, \varphi) + \left\{ H_{1,N}(I^{(1)}, \varphi; 0) \right\}_\varphi = 0$$

tel que : $\{H_1\}_\varphi = \{H_{1,N}\}_\varphi + R_{1,N}$ avec $\|R_{1,N}\| < \varepsilon^2$.

Cette méthode a l'avantage de permettre aux transformations $\mathcal{T}^{(n)}$ d'être définies sur tout l'espace sauf dans un voisinage d'un nombre fini de surfaces résonantes.

Pour appliquer le théorème de Kolmogorov, ou un de ceux qui en découle, le hamiltonien initial doit évidemment vérifier de nombreuses hypothèses, et tout particulièrement une condition de non dégénérescence (II.4.1.1). On conclut alors que sous certaines "bonnes hypothèses", étant donné une fréquence diophantienne ω_0 , pour une perturbation suffisamment faible du problème intégrable, il existe un tore invariant par le flot du problème perturbé partitionné en orbites quasi-périodiques de fréquence ω_0 .

On peut généraliser un tel résultat à tout l'espace des phases de la manière suivante :

si le système non-perturbé est non-dégénéré (au sens (II.4.1.1)), pour une perturbation suffisamment petite, la plupart des tores invariants non-résonants ne sont pas détruits mais faiblement déformés et recouverts d'orbites quasi-périodiques denses. Les tores invariants emplissent la majeure partie de l'espace (au sens de la mesure), tandis que la mesure du complémentaire de leur réunion est d'ordre $O(\sqrt{\varepsilon})$ et tend ainsi vers zéro avec la taille de la perturbation. Ce théorème et ceux qui s'y rattachent fournissent un résultat sur la stabilité des trajectoires. En effet, la plupart des conditions initiales conduisent à des

trajectoires quasi-périodiques qui sont assujetties à évoluer éternellement sur le même tore invariant. En revanche, si une condition initiale est choisie sur l'ensemble où les tores ne peuvent persister, on ne peut présager de son comportement. Pour ce type de trajectoires, il convient de mettre à part les systèmes ne possédant que deux degrés de liberté. En effet, dans une surface d'énergie (de dimension trois dans cette situation), chaque tore invariant (de dimension deux) sépare l'espace en deux parties disjointes. Ainsi, en vertu des résultats précédents, toute trajectoire "chaotique" est assujettie à évoluer dans le domaine limité par deux tores successifs. Elle reste alors confinée dans un petit volume.

Dans le cas plus général où le nombre de degré de liberté est au moins égal à trois, les tores ne séparent plus l'espace, si bien que les régions vides d'ensembles invariants sont connectées. On obtient donc le schéma suivant : sur les tores invariants (la majeure partie de l'espace si la perturbation est assez petite), toutes les trajectoires sont quasi-périodiques. En revanche, sur le complémentaire de leur réunion, les orbites ne sont certainement pas quasi-périodiques et peuvent, dans certains cas, ce glisser entre les tores invariants pour connecter des points éloignés. Ce phénomène appelé diffusion d'Arnold reste actuellement à l'état de conjecture, mais quelques démonstrations de son existence ont été établies dans des cas particuliers.

Citons l'exemple d'Arnold [Ar64] où le hamiltonien est spécifiquement construit pour laisser apparaître des trajectoires de diffusion, celui établi par R.Martinez et C.Simo dans le cadre du problème plan des trois corps [MaSi], celui de Z.Xia dans le problème restreint elliptique [Xi] et aussi l'exemple de la rotation d'une planète en mouvement elliptique présenté par G.Gallavotti [Ga]. D'autres exemples traités numériquement par J.Laskar ont permis de visualiser ce phénomène [La93] (cette liste n'étant pas exhaustive).

Ces théorèmes de conservation de tores invariants sous de faibles perturbations furent appliqués dans de nombreux problèmes. En mécanique céleste, ils furent utilisés de manière fructueuse pour prouver la stabilité des points de Lagrange L_4 et L_5 dans le problème restreint circulaire plan. Léontovich [Le] montre que si le rapport des masses μ des deux corps pesants appartient à l'intervalle $I = [0; \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{9}\sqrt{69})[$, on peut pour presque tout μ dans I appliquer la théorie KAM au voisinage des points d'équilibre L_4 et L_5 et démontrer ainsi leur stabilité. Ce résultat est ensuite généralisé par Deprit [Dep] qui étend sa validité à l'intervalle I privé de trois valeurs : $\mu_2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{45}\sqrt{1883})$, $\mu_3 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{15}\sqrt{213})$ pour lesquelles le problème entre en résonance (1:2) et (1:3), et $\mu_c \simeq 0.010904$ où le calcul des termes de degré quatre ne suffit pas à conclure. Par le calcul du développement du hamiltonien à l'ordre six au voisinage des points elliptiques L_4 et L_5 , Meyer et Schmidt ont pu établir la stabilité de l'équilibre pour $\mu = \mu_c$ [MeSc].

Les problèmes de résonances "spin-orbit" furent eux aussi abordés sous l'angle de la théorie KAM. En 1990, A.Celletti montra, à l'aide d'un modèle relativement simple, la stabilité des orbites périodiques associées à certaines résonances spin-orbit (p:q) par confinement entre deux tores de KAM [Ce90a][Ce90b]. Ces résultats purent être appliqués à des problèmes tout à fait réalistes comme la résonance (1:1) Terre-Lune et (3:2) Mercure-Soleil.

Malheureusement, le théorème de conservation de tores invariants énoncé par Kolmogorov ainsi que ses variantes ne pouvaient pas s'appliquer au problème planétaire, ce dernier comportant une dégénérescence propre (coexistence de fréquences lentes et de fréquences

rapides) n'étant pas prise en compte dans la preuve.

C'est au prix d'une démonstration extrêmement longue et technique, qu'en 1963 Arnold présente une généralisation du théorème de Kolmogorov applicable aux hamiltoniens possédant des dégénérescences propres [Ar63b].

Retraçons brièvement les difficultés rencontrées. Supposons tout d'abord disposer d'un hamiltonien de la forme suivante :

$$H(I, \varphi) = H_{0,0}(I_0) + \varepsilon H_{0,1}(I) + \varepsilon^2 H_1(I, \varphi; \varepsilon) \quad (II.4.1.6)$$

défini sur $R^n \times T^n$ avec $n = n_0 + n_1$. Le système de variables canoniques se décompose en $(I, \varphi) = (I_0, I_1, \varphi_0, \varphi_1)$, les indices 1 correspondant aux variables dégénérées. Dans le cas du problème planétaire, les angles rapides sont les longitudes moyennes des corps, alors que les angles à variation lentes sont les longitudes des périhélie et des nœuds ascendants. Le hamiltonien $H_{0,0}$ est celui associé à la somme de problèmes de Kepler non couplés, Pour la partie d'ordre un $\varepsilon H_{0,1}(I)$, nous montrerons plus tard qu'il s'agit d'une partie du hamiltonien séculaire d'ordre un.

La partie $H_0 = H_{0,0} + \varepsilon H_{0,1}$ étant intégrable, on est alors tenté d'appliquer un processus de convergence quadratique présenté plus haut, afin de normaliser le hamiltonien et de construire ainsi les tores invariants escomptés. Mais l'existence de dégénérescences propres rend le schéma itératif beaucoup plus délicat à appliquer. En effet, les petits diviseurs intervenant au cours de la résolution de l'équation homologique s'écrivent :

$$k \cdot \omega_0 = k_0 \cdot \omega_{0,0} + \varepsilon k_1 \cdot \omega_{0,1}$$

$$\text{avec } k = (k_0, k_1) \in Z^n, \omega_{0,0} = \frac{\partial H_{0,0}}{\partial I_0} \text{ et } \omega_{0,1} = \frac{\partial H_{0,1}}{\partial I_1}.$$

Dès que $k_0 = 0$, les diviseurs sont d'ordre $O(\varepsilon)$ ce qui, en augmentant à chaque itération la taille du reste, diminue la vitesse de convergence de la normalisation.

La difficulté suivante vient du fait que le hamiltonien n'est pas en général sous la forme (II.4.1.6) (la partie d'ordre $O(\varepsilon)$ n'est pas exprimée à l'aide de variables action-angle). La transformation d'un hamiltonien de sa forme initiale :

$$H(I, \varphi) = H_0(I_0) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + \varepsilon^2 H_2(I, \varphi; \varepsilon)$$

à la forme (II.4.1.6) passe par deux étapes successives. Tout d'abord, il convient à l'aide d'une transformation canonique de rejeter les termes d'ordre un comportant les harmoniques de φ_0 dans la partie d'ordre deux (il n'y a qu'un nombre fini de termes à éliminer). Cette opération nous conduit au hamiltonien :

$$H(I, \varphi) = H_0(I_0) + \varepsilon \dot{H}_1(I, \varphi_1) + \varepsilon^2 H_2(I, \varphi; \varepsilon).$$

Mais ici, nous sommes confrontés à un nouveau problème : si $H_1(I, \varphi_1)$ n'est pas intégrable (situation ne se produisant que si $n_1 > 1$) il peut devenir impossible de ramener le hamiltonien à la forme (II.4.1.6).

Pour contourner cette difficulté, Arnold se limite aux cas où $H_1(I, \varphi_1)$ est, sinon intégrable, du moins voisin d'un hamiltonien intégrable (ce qui est le cas du problème planétaire). Plus précisément, les variables dégénérées I_1, φ_1 sont remplacées par des variables cartésiennes $(p_1, q_1) \in \mathbb{R}^{2n_1}$, et on fait l'hypothèse que $(p_1, q_1) = (0, 0)$ est un point fixe elliptique du système défini par le hamiltonien $H_1(I_0, p_1, q_1)$, dans lequel les actions rapides I_0 sont considérées comme paramètres. On peut enfin, dans un petit voisinage de l'origine, développer H_1 en série entière des variables (p_1, q_1) puis par une transformation de Birkhoff (opération que nous ferons explicitement au paragraphe II.4.3.3), réduire les premiers termes de H_1 à une forme normale et rejeter le reste dans les termes d'ordre $O(\varepsilon^2)$.

Ces quelques transformations canoniques permettent de réduire le hamiltonien initial sous la forme intégrable:

$$H(I_0, \varphi_0, p_1, q_1) = H_{0,0}(I_0) + \varepsilon H_{0,1}(I_0, p_1, q_1) + \varepsilon^2 H_2(I_0, \varphi_0, p_1, q_1; \varepsilon) \quad (II.4.1.7)$$

avec

$$H_{0,1}(I_0, p_1, q_1) = \sum_{k=2}^m \sum_{r_1 + \dots + r_{n_1} = k} \alpha_{r_1, \dots, r_{n_1}}^{(k)}(I_0) \prod_{j=1}^{n_1} (p_{1,j}^2 + q_{1,j}^2)^{r_j} \quad (II.4.1.8)$$

où m est un entier arbitraire fixé par Arnold à 3.

En choisissant (II.4.1.8) comme partie non-perturbée, il est alors possible d'appliquer la méthode de convergence quadratique décrite plus haut, bien que sous cette forme il apparaisse une difficulté supplémentaire : la dégénérescence limite (on trouvera une explication de celle-ci dans [Ch]). Ce nouveau phénomène impose de choisir des variables (p_1, q_1) qui ne soient pas trop petites devant la taille de la perturbation (condition que l'on retrouve dans l'hypothèse (A.4) du théorème fondamental d'Arnold sous la forme $0 < \mu < \varepsilon^4$). Ces hypothèses sont rappelées au paragraphe suivant).

On comprend donc l'ampleur de la difficulté de la démonstration : à chaque itération de la méthode de convergence quadratique (compliquée par l'existence de petits diviseurs de taille $O(\varepsilon)$) il faut renormaliser la nouvelle partie non-perturbée à l'aide de transformations de Birkhoff tout en s'assurant que les variables dégénérées soient en même temps petites (afin que le reste de la transformation de Birkhoff puisse être rejeté dans la perturbation) et extérieur à un voisinage de l'origine (pour éviter la dégénérescence limite). Il faut aussi estimer la taille de chaque transformation canonique afin d'être en mesure de démontrer la convergence du processus itératif.

II.4.2) Le Théorème d'Arnold et son application au problème plan des trois corps

II.4.2.1) Énoncé du théorème et quelques commentaires.

Présentons maintenant l'énoncé du théorème fondamental sous sa forme originelle extraite de [Ar63b], suivi de quelques remarques.

Théorème fondamental d'Arnold

Hypothèses

Let us consider a function H , a domain G_0 and positive numbers ρ, R, C . We suppose that the following four conditions are fulfilled:

1) The function $H(p, q)$ (where $p = p_0, p_1; q = q_0, q_1; p_0$ is a vector of dimension n_0 and p_1 is a vector of dimension n_1 , where $n_0 + n_1 = n; q_0$ are angular variables, $H(p_0, p_1, q_0 + 2\pi, q_1) = H(p_0, p_1, q_0, q_1)$) is analytic in the domain $F: P_0 \in G_0, |\text{Im } q_0| \leq \rho, |x_1| \leq R$ ($x_1 = p_1, q_1$) and depends on the parameter $\mu, 0 < \mu \leq \mu_0$.

2) H is of the form

$$H = H_0(\rho_0) + \mu H_1(p, q) + (\mu^2) H_2(p, q), \quad (\text{A.1})$$

where

$$H_1(p, q) = \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \tilde{H}_1(p_0, q_0, p_1, q_1), \quad \int \tilde{H}_1 dq_0 = 0, \quad (\text{A.2})$$

with

$$\overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) = \overline{\overline{H}}_1(p_0, \tau) + \tilde{\tilde{H}}_1(p_0, p_1, q_1) \quad (\text{A.3})$$

and

$$\overline{\overline{H}}_1(p_0, \tau) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{n_1} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k=1}^{n_1} \lambda_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k, \quad (\text{A.4})$$

where $\lambda_0, \lambda_i, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ and λ_{ijk} are functions of p_0 and

$$2\tau_i = p_{\hat{n}_0+i}^2 + q_{\hat{n}_0+i}^2 \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (\text{A.5})$$

3) In F the following inequalities are satisfied (for a certain $C \geq 1$):

$$|(\mu^2) H_2| \leq \mu^2 C, \quad (\text{A.6})$$

$$|\tilde{H}_1| \leq C, |H_1| \leq C, \quad \overline{\overline{H}}_1 \leq C, \quad (\text{A.7})$$

$$|\tilde{\tilde{H}}_1| \leq C |x_1|^2. \quad (\text{A.8})$$

4) In G_0

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2} \right| \neq 0. \quad (\text{A.9})$$

$$\det |\lambda_{ij}(p_0)| \neq 0. \quad (\text{A.10})$$

Conclusion

On the assumptions 1) - 4), for any $\kappa > 0$ it is possible to find $\varepsilon(\kappa; H_0, \overline{H}_1, G_0; \rho, R, C; \mu_0) > 0$ such that, when $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ and $0 < \mu < \varepsilon^4$, then:

I. The domain $\text{Re } F_\varepsilon$:

$$p_0 \in \text{Re } G_0, \quad |\text{Im } q_0| = 0, \quad 0 < \tau_i < \varepsilon,$$

consists of two sets F_ε and f_ε , of which one, F_ε , is invariant with respect to the canonical equations with Hamiltonian (4.1.1) and the other, f_ε , is small:

$$\text{mes } f_\varepsilon < \kappa \text{ mes } F_\varepsilon. \quad (\text{A.11})$$

II. F_ε consists of invariant n -dimensional analytic tori T_ω given by the parametric equations

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= p_{0\omega} + f_{0\omega}(Q), & q_0 &= Q_0 + g_{0\omega}(Q), \\ p_1 &= \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1\omega}(Q))} \cos [Q_1 + g_{1\omega}(Q)], \\ q_1 &= \sqrt{2(\tau_\omega - f_{1\omega}(Q))} \sin [Q_1 + g_{1\omega}(Q)], \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.12})$$

where $Q = Q_0, Q_1$ are angular parameters and $p_{0\omega}$ and τ_ω are constants depending on the number of the torus ω .

III. The invariant tori T_ω differ little from the tori

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{0\omega} = \text{const.}, & \tau &= \tau_\omega = \text{const.} \\ |f_{i\omega}(Q)| &< \kappa\varepsilon, & |g_{i\omega}(Q)| &< \kappa\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

IV. The motion determined by the Hamiltonian (4.1.1) on the torus T_ω is conditionally periodic with n frequencies ω :

$$\dot{Q}_0 = \omega_0, \quad \dot{Q}_1 = \omega_1, \quad \left(\text{where } \omega_0 = \frac{\partial H_\lambda}{\partial p_{0\omega}}, \quad \omega_1 = \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \tau_\omega} \right). \quad (\text{A.14})$$

The fundamental theorem is proved in §§9-14 on the basis of an inductive process given by the following theorem.

Présentons maintenant quelques remarques qui nous seront utiles lors de l'application du théorème fondamental.

Notons tout d'abord que d'après le point 1) de l'hypothèse, le hamiltonien considéré doit être analytique sur un domaine complexe. En particulier, les variables rapides (p_0, q_0) sont éléments de C^{2n_0} .

Dans la démonstration d'Arnold, l'estimation du reste après élimination des angles rapides étant basée essentiellement sur la formule de Cauchy, cette condition est indispensable. Il existe d'autres démonstrations de la conservation de tores invariants utilisant une hypothèse plus faible dans laquelle le hamiltonien est une application C^∞ , mais elles n'ont été établies que dans le cas de problèmes ne possédant pas de dégénérescence propre.

Il est ensuite important de prêter attention à la forme de H_1 : d'après (A.1), la partie d'ordre μ contient encore les angles rapides q_0 . L'élimination des angles rapides à laquelle il est fait allusion à la fin du paragraphe précédant est intégrée dans la démonstration d'Arnold. Le seul travail à réaliser afin de vérifier l'hypothèse du point 2) consiste en la réduction de la partie séculaire d'ordre un à la forme normale (A.4).

Notons aussi que la partie non-perturbée, qui est au centre de la démonstration, se réduit à la forme

$$H^{(0)}(p_0, \tau) = h_0(p_0) + \mu \bar{H}_1(p_0, \tau)$$

avec les conditions classiques de non-dégénérescence (A.9) et (A.10). Ceci implique que les tores fournis par le théorème doivent être voisins de ceux du problème non-perturbé d'équation : $p_0 = Cte, \tau = Cte$. Nous étudierons la signification de ces équations dans le cas du problème planétaire.

Enfin, la conclusion du théorème nous montre que, pour une perturbation inférieure à un seuil μ_0 , la majeure partie de l'espace est emplie de tores invariants de dimension maximale ($n = n_0 + n_1$) recouverts d'orbites quasi-périodiques. Rappelons encore que la réunion de ces surfaces invariantes forme un ensemble totalement discontinu du type ensemble de Cantor, et que la mesure de son complémentaire tend vers zéro avec le paramètre perturbatif μ . Malheureusement, le seuil μ_0 n'apparaît pas explicitement dans l'énoncé. Il est malgré tout possible, comme l'a fait Hénon [Hé66] en se plongeant dans les détails de la démonstration, d'obtenir une borne supérieure du seuil μ_0 . Pour Hénon, μ_0 est inférieur à 10^{-333} et on peut estimer que la quantité ε vérifiant : $0 < \tau < \varepsilon$ ne peut être beaucoup plus grande que 10^{-80} . Mais il est certainement possible d'améliorer ces faibles seuils. En effet Arnold écrit lui-même avec ironie que ses estimations sont loin d'être optimales, et que le lecteur peut améliorer de lui-même le résultat. Jusqu'ici, aucun lecteur n'a eu suffisamment d'humour pour mener à bien une telle opération. Dans le cas du problème planétaire, il serait sans doute plus judicieux d'améliorer les seuils uniquement pour un problème complet. En utilisant les spécificités du hamiltonien, on devrait aboutir à de bien meilleurs résultats.

II.4.2.2) Application du théorème par Arnold.

Dans l'article dont est extrait le théorème, Arnold en fait une application au problème planétaire, dans le cas du plan des deux planètes.

Il construit tout d'abord le hamiltonien séculaire en partant des développements établis par Le Verrier [LeV], qu'il simplifie notablement en ne conservant que le premier terme

d'un développement asymptotique pour α (rapport des demi-grands axes) voisin de zéro. Puis, à l'aide de transformations de Birkhoff, il réduit le hamiltonien (jusqu'au degré six des excentricités) à une forme normale. Cette expression n'est évidemment valable qu'à l'extérieur d'un nombre fini de régions de l'espace des phases dans lesquelles les demi-grands axes sont tels que les fréquences séculaires soient commensurables (ces relations de résonance rendant impossible la normalisation de Birkhoff).

Finalement, il obtient le hamiltonien (A.4) du théorème fondamental, pour lequel l'expression des coefficients τ_i et $\tau_{i,j}$ en fonction de α se limitent au premier terme du développement asymptotique pour α voisin de zéro. Ceci fournit alors immédiatement une expression asymptotique du déterminant (A.10). Par un argument d'analyticité, Arnold déduit la non-nullité du déterminant (A.10) pour α dans l'intervalle $]0, \alpha_0[$ (privé éventuellement d'un ensemble discret) où α_0 est la plus petite valeur du rapport des demi-grands axes pour laquelle on rencontre une des résonances citée plus haut. Mais, comme les fréquences séculaires dépendent des masses planétaires, la condition de non-dégénérescence (A.10) ne peut être vérifiée pour toutes les valeurs des masses que dans la situation asymptotique où α tend vers zéro (pour un rapport des masses planétaires donné, on peut obtenir un énoncé plus précis).

D'après la remarque faite au paragraphe précédent, le hamiltonien non-perturbé est proche de :

$$H_0(p_0) + \mu \sum_{i:1,2} u_i(p_0)(p_{1,i}^2 + q_{1,i}^2)$$

où $p_0 = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ et les $p_{1,i}$ et $q_{1,i}$ sont les variables de Poincaré du problème de Kepler plan. Le mouvement associé à ce hamiltonien intégrable est dit de Laplace-Lagrange, il s'agit d'un mouvement pour lequel les périhélies (et les lignes des nœuds pour le problème spatial) sont animés d'un lent mouvement de précession.

L'application du théorème fondamental fournit le résultat pouvant s'énoncer de la manière suivante : pour des masses et des excentricités planétaires suffisamment petites et quand le rapport des demi-grands axes tend vers zéro, pour la plupart des conditions initiales, le mouvement réel est quasi-périodique et proche du mouvement de Laplace-Lagrange.

II.4.2.3) Généralisations possibles du résultat.

A la fin de son article, Arnold envisage d'étendre le résultat suivant deux directions différentes. Tout d'abord, vers une généralisation au problème (plan) des n -corps, mais la taille et l'extrême complexité des expressions alors mises en jeu rendent extrêmement délicate toute vérification de l'hypothèse de non-dégénérescence essentielle à l'application du théorème fondamental pour n arbitraire. Ensuite, Arnold suggère d'étendre le résultat au problème spatial des trois corps. Il envisage la situation de la manière suivante : la réduction du moment cinétique permettant de considérer le problème spatial comme une perturbation du problème plan dont les fréquences séculaires sont non-dégénérées, il doit en être de même pour celle du problème spatial si la perturbation est suffisamment petite. Cette idée appelle trois remarques.

La première est qu'en réalité, la situation est un peu plus compliquée : le problème spatial peut en effet être envisagé comme perturbation du problème plan, mais ce dernier doit être écrit dans un référentiel tournant avec la ligne des nœuds commune. Il faut donc

entièrement recalculer les fréquences, ces dernières n'ayant plus la même expression que dans la démonstration d'Arnold.

Deuxièmement, si nous calculons la torsion du problème plan en référentiel tournant à l'aide d'un développement asymptotique en α , nous ne pourrions pas nous affranchir de la condition α très faible. Il sera donc impossible de généraliser le résultat à presque toutes les valeurs des demi-grands axes.

La dernière remarque porte sur la nature même du résultat. Nous avons noté au paragraphe précédent l'importance du hamiltonien non-perturbé ainsi que de son point fixe (ou plutôt du point fixe du hamiltonien séculaire) dans la construction des tores invariants. Pour être plus précis, nous devrions parler de l'unique point fixe du problème séculaire dans l'ouvert sur lequel nous travaillons. En effet, nous avons vu au paragraphe II.2.2 que le problème séculaire possédait plusieurs points fixes, mais que la réduction de Jacobi ne pouvait se faire explicitement que dans un ouvert du complémentaire des mouvements plan. Ainsi, seul le point fixe associé aux mouvements circulaires inclinés fait partie du domaine considéré.

Le point fixe du hamiltonien séculaire a pour coordonnées : $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$ (voir la formule (II.3.2.3.6)) ; on en déduit que $x_1 = x_2 = 0$ et on obtient par (I.3.1) la relation $C_J^2 = \frac{D_2}{2}$ (le

paramètre D_2 est défini au paragraphe I.3). Ce point fixe est donc associé aux mouvements circulaires à inclinaisons non-nulles (tant que D_2 est différent de zéro). Les tores obtenus dans le cadre du problème réduit correspondront ainsi aux mouvements quasi-circulaires inclinés. En revanche, si l'on tentait d'appliquer le théorème fondamental au problème spatial des trois corps sans opérer la réduction du moment cinétique (ce qui paraît être beaucoup plus difficile), les tores obtenus (si les hypothèses du théorème sont vérifiées) seraient voisins de ceux supportant les mouvements circulaires plans.

II.4.3) Généralisation du résultat d'Arnold au problème spatial.

II.4.3.1) Énoncé du résultat

Comme il a été annoncé ci-dessus, nous allons dans la suite de ce chapitre présenter une généralisation du résultat d'Arnold au problème spatial des deux planètes. L'énoncé du résultat est le suivant.

Étant donné un problème planétaire à trois corps, si les masses et les excentricités planétaires sont suffisamment petites, si l'inclinaison mutuelle des planètes est inférieure à un degré et le rapport de leurs demi-grands axes inférieur à une quantité α_M (pour les raisons exposées en II.3.2.3 nous imposerons $\alpha_M = 0.8$), alors la plupart des conditions initiales conduisent à des mouvements quasi-périodiques portés par des tores invariants proches de ceux du mouvement non-perturbé (ici, mouvement de Laplace-Lagrange), et ce sur un temps infini. Ajoutons que la mesure du complémentaire de l'ensemble contenant les trajectoires quasi-périodiques tend vers zéro avec les masses planétaires.

II.4.3.2) Difficultés rencontrées

Les remarques achevant le paragraphe précédent peuvent nous guider lors de la généralisation du résultat. La réduction du moment cinétique devrait nous fournir des tores supportant des mouvements inclinés, l'inclinaison pouvant aller de zéro pour $D_2 = 0$ jusqu'à une valeur

maximale correspondant au plus grand D_2 pour laquelle les hypothèses du théorème sont encore vérifiées. Nous porterons une attention particulière à l'évaluation de cette inclinaison maximale.

Il serait aussi intéressant d'obtenir un résultat valide pour n'importe quelle valeur des demi-grands axes. Nous verrons dans quelle limite ceci est possible.

Etudions maintenant la marche à suivre afin d'appliquer le théorème. Dans un premier temps, il s'agira de choisir un domaine d'application du théorème qui consistera en un ensemble de non-collision. Ce choix imposera des contraintes sur les demi-grands axes. Il conviendra ensuite, et ce sera le travail le plus délicat, de réduire le hamiltonien à la forme (A.1) du théorème fondamental, sous les hypothèses (A.2), (A.3) et (A.4). Comme sous cette forme les conditions (A.6) à (A.9) seront immédiatement satisfaites, il ne nous restera plus qu'à vérifier (A.10) garantissant la non-nullité de la torsion. C'est bien ici que réside la difficulté du problème : en effet, dans le cas spatial, la fonction perturbatrice est beaucoup plus complexe que dans le cas plan. Même avec l'aide de la réduction du moment cinétique qui diminue le nombre de variables et donc la taille des expressions formelles, la manipulation de telles expressions reste délicate. Tous les calculs qui consisteront en l'obtention de la partie séculaire jusqu'au degré six, à la réduction de cette expression à une forme normale et enfin au calcul de la torsion, seront menés de manière totalement exacte. Ne voulant pas, pour les raisons énoncées plus haut, développer en série de α , nous serons conduits à conserver dans nos expressions les quantités α , $b_{5/2}^{(0)}(\alpha)$ et $b_{5/2}^{(1)}(\alpha)$, ce qui augmentera leur taille d'une manière impressionnante.

Une fois obtenue l'expression du déterminant, il ne "restera plus" qu'à vérifier sa non-nullité (condition (A.10) du théorème fondamental). En raison de la taille et de la complexité de l'expression, cette vérification sera faite ici de manière numérique, mais une démonstration plus rigoureuse, basée sur des encadrements fins, ne devrait pas poser de difficulté majeure. Pour que notre résultat ait un sens, il faudra enfin estimer la taille de la partie du déterminant que nous avons négligé en confondant ce dernier avec son développement limité en puissance de D_2 . Cette dernière opération sera menée de pair avec le calcul de la valeur maximale de l'inclinaison mutuelle pour laquelle la condition (A.10) reste valable.

II.4.3.3) Domaine de définition du problème

Il nous faut, dans un premier temps, définir un domaine sur lequel le hamiltonien du problème planétaire des 3 corps est analytique pour les variables canoniques $(\Lambda_j, \lambda_j, a_j, b_j)$. Les remarques faites en II.4.2.1 nous ont montré que ces variables devaient être étendues à un domaine complexe. Le domaine est défini de la manière suivante : il s'agit de l'ensemble des $(\Lambda_j, \lambda_j, a_j, b_j) \in C^8$ tel que le complexifié du hamiltonien (ici l'inverse de la distance mutuelle) soit une fonction holomorphe. Il suffit, plus simplement, que la distance mutuelle complexifiée ne possède pas de zéro sur le domaine considéré (notons que la distance mutuelle, qui correspond exactement à la distance entre les deux planètes considérées si les variables sont réelles, n'a plus rien à voir avec la distance de deux points de C^3). Dans le cas où les excentricités peuvent être grandes (de l'ordre de quelques centièmes), la construction d'un tel domaine est extrêmement délicate. Dans une telle situation, on pourra utiliser le domaine complexe de non-collision construit par L. Niederman [Ni] dans le

cadre du problème planétaire des $n + 1$ corps (nous reviendrons plus tard sur ces résultats). En ce qui nous concerne, la situation est beaucoup plus simple. En effet, nous savons à l'avance que les excentricités entrant en jeu sont très faibles, et que même si les seuils d'application du théorème d'Arnold sont améliorés, ils n'atteindront jamais les chiffres cités plus haut. Il suffira donc pour éviter la collision, dans le domaine réel ou complexe, que le rapport des demi-grands axes (réels) soit suffisamment éloigné de 1 (la relation assurant la non-collision s'écrit simplement $a_1(1 + e_1) < a_2(1 - e_2)$). Mais ce problème ne pourra se poser puisque d'une part, pour les raisons exposées en II.3.2.3, les valeurs de α doivent toujours être inférieures à $\alpha_M = 0.8$. Et d'autre part, les excentricités seront très faibles. Il nous suffit, pour cette étude, de contraindre les demi-grands axes à rester bornés. Si nous nous donnons quatre constantes : $0 < b_1 < B_1 < b_2 < B_2$ tel que

$$b_1 < a_1 < B_1 \quad \text{et} \quad b_2 < a_2 < B_2. \quad (II.4.3.3.1)$$

Le rapport des demi-grands axes est alors borné par :

$$0 < \frac{b_1}{B_2} < \alpha < \frac{B_1}{b_2} < 1. \quad (II.4.3.3.2).$$

Etudions maintenant le comportement du paramètre D_2 sur un domaine où les demi-grands axes vérifient (II.4.3.3.1) et où les excentricités sont très faibles. Au paragraphe (I.3), nous avons entrevu le fait que D_2 pouvait devenir infini quand α tend vers zéro. Nous contrebalancerons ici cette croissance par la petitesse des excentricités. En effet, la formule (I.3.1) nous fournit pour D_2 l'expression :

$$\begin{aligned} D_2 = & h\sqrt{\alpha}(|X_1|^2 - |X_1|^4/4) \\ & + (|X_1|^2 + |X_2|^2 - |X_1|^2|X_2|^2/2 + 2(1 - |X_1|^2/2)(1 - |X_2|^2/2)C_J^2) \\ & + h^{-1}\sqrt{\alpha}^{-1}(|X_2|^2 - |X_2|^4/4) . \end{aligned}$$

Comme le rapport des demi-grands axes est borné par la relation (II.4.3.3.2), on vérifie aisément que sous l'hypothèse :

$$\text{Max}(h|X_1|^2, |X_1|^2, |X_2|^2, \frac{1}{h}\sqrt{\frac{B_2}{b_1}}|X_2|^2) < \epsilon . \quad (II.4.3.3.3)$$

D_2 vérifie la relation :

$$D_2 = O(\epsilon) + (2 + O(\epsilon))C_J^2 . \quad (II.4.3.3.4)$$

Cette relation montre que pour des excentricités très faibles (situation dans laquelle nous nous trouvons), seule l'inclinaison mutuelle influe de manière significative sur la valeur du paramètre D_2 . Cette relation nous permettra par la suite d'estimer les valeurs des inclinaisons pour lesquelles les hypothèses du théorème fondamental sont vérifiées et ce, indépendamment des masses et des demi-grands axes planétaires (nous verrons que la situation est malgré tout un peu plus compliquée).

II.4.3.4) Réduction de la partie séculaire à une forme normale

Nous sommes maintenant arrivés à la partie la plus délicate de ce chapitre. Il s'agit de la transformation de la partie séculaire du hamiltonien sous la forme normale (A.4) afin de vérifier la relation de non-dégénérescence (A.10).

Comme nous l'avons vu au chapitre I, exprimé en variables héliocentriques canoniques de Poincaré $(\lambda_1, \lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_2, x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ (que l'on préférera noter de manière vectorielle par $(\lambda, \Lambda, x, \bar{x})$) dans le référentiel tournant lié au plan invariable du couple planétaire, le hamiltonien complet du problème planétaire des trois corps s'écrit :

$$H(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}) = H_0(\Lambda) + \mu H_1(\lambda, \Lambda, x, \bar{x}) = H_0(\Lambda) + \mu \bar{H}_1(\Lambda, x, \bar{x}) + \mu \tilde{H}_1(\lambda, \Lambda, x, \bar{x})$$

où \bar{H}_1 est la partie séculaire, et \tilde{H}_1 la partie purement périodique en λ .

Mais même en développant la partie séculaire en polynôme des variables x_j, \bar{x}_j , il n'y a aucune raison que nous obtenions une expression réduite sous forme normale, c'est-à-dire ne dépendant que des quantités $|\bar{x}_j|$.

Au contraire, \bar{H}_1 est un polynôme de quatre variables des plus généraux (les coefficients de ce polynôme dépendent évidemment des Λ).

Il convient donc, afin d'obtenir un hamiltonien vérifiant les conditions (A.2) et (A.3), de construire une transformation canonique réduisant sous forme normale la partie séculaire (jusqu'au degré six).

Si nous notons $(\theta, \Theta, y, \bar{y})$ ces nouvelles variables, la transformation canonique pourra être définie par la fonction génératrice S de la forme :

$$S(\lambda, \Theta, \bar{x}, y) = \lambda \cdot \Theta + S_{\text{sec}}(\bar{x}, y; \Theta)$$

où S_{sec} est la fonction génératrice de la transformation (ayant $\Theta = \Lambda$ comme paramètre), réduisant le hamiltonien séculaire sous forme normale. On vérifie aisément que le terme $\lambda \cdot \Theta$ conserve la partie séculaire.

Passons maintenant à la réduction. La première opération consiste à diagonaliser la partie quadratique de \bar{H}_1 afin d'être en mesure de résoudre l'équation homologique intervenant dans les transformations de Birkhoff.

La méthode de diagonalisation en base symplectique utilisée ici a déjà été présentée au paragraphe II.3.2.3. En passant en variables canoniques réelles par une relation vectorielle de la forme : $\sqrt{2}x = a - ib$, la matrice de passage est composée des deux matrices 2×2 P_1 et P_2 qui définissent les nouvelles coordonnées réelles \tilde{a}, \tilde{b} par : $a = P_1 \tilde{a}$ et $b = P_2 \tilde{b}$.

On retourne alors aux coordonnées complexes par la transformation :

$$x = \frac{1}{2} ((P_1 + P_2)\tilde{x} + (P_1 - P_2)\tilde{\bar{x}}) . \quad (II.4.3.4.1)$$

Comme les termes d'ordre $0(D_2^3)$ ont été négligés dans le calcul des coefficients du hamiltonien, nous devons (pour que les expressions gardent leur sens) développer à l'ordre deux en D_2 chacun des coefficients de la transformation linéaire (II.4.3.4.1). Ce qui permet d'écrire les matrices P_j sous la forme

$$P_j(D_2) = P_j^{(0)} + D_2 P_j^{(1)} + D_2^2 P_j^{(2)} .$$

Il faut, afin d'exprimer le reste du hamiltonien (termes de degré 4 et 6 en x) à l'aide des variables \tilde{x} et $\bar{\tilde{x}}$, utiliser la relation (II.4.3.4.1) et sa conjuguée pour achever la substitution. Cette opération introduit une nouvelle difficulté. En effet, les coefficients de la matrice de passage s'expriment bien en fonction de α , h et D_2 , mais à l'aide d'expressions compliquées comportant des fractions rationnelles et des racines carrées. Etant dans l'impossibilité d'utiliser ce type d'expression sur le manipulateur TRIP (ce dernier travaillant essentiellement des polynômes), nous sommes dans l'obligation d'introduire ces coefficients en tant que variables supplémentaires, augmentant ainsi de manière critique la taille des séries considérées. Notons que l'utilisation d'un manipulateur général, capable de traiter les fractions rationnelles, ne simplifierait pas nécessairement la tâche. Les expressions écrites explicitement sont en effet beaucoup plus lourdes que celles usant de variables supplémentaires, et rendent ainsi extrêmement difficile la tâche du manipulateur. Pour chaque matrice $P_j^{(k)}$, il convient d'introduire quatre variables supplémentaires. En faisant brutalement la transformation considérée plus haut, le nouveau hamiltonien dépend alors de 36 variables : les 24 nouvelles et les 9 anciennes. La situation risque bien vite de devenir inextricable. Heureusement, il est possible de réduire grandement le nombre de terme. Tout d'abord, comme nous l'avons vus au paragraphe II.3.2.3, pour $D_2 = 0$, les coefficients de la forme quadratique (ordre 2 du hamiltonien séculaire) vérifient : $u_j = v_j$ pour $j = 1, 2, 3$. On en déduit immédiatement que $P_k^{(0)} = R \in O^+(R^2)$. De plus, la transformation (destinée à diagonaliser la forme quadratique) étant symplectique, les matrices $P_j(D_2)$ sont liées par la relation :

$${}^t P_1(D_2) P_2(D_2) = I_2.$$

On en déduit par identification des termes d'égal degré en D_2 les formules :

$$\begin{aligned} {}^t P_1^{(0)} P_2^{(0)} &= I_2 \\ {}^t P_1^{(0)} P_2^{(1)} + {}^t P_1^{(1)} P_2^{(0)} &= 0_2 \\ {}^t P_1^{(0)} P_2^{(2)} + {}^t P_1^{(1)} P_2^{(1)} + {}^t P_1^{(2)} P_2^{(0)} &= 0_2. \end{aligned}$$

La première relation est vérifiée puisque les $P_j^{(0)}$ sont égales à la même matrice de rotation R et on déduit des deux autres les égalités :

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &= -R {}^t P_1^{(1)} R \\ P_2^{(2)} &= R({}^t P_1^{(1)} R {}^t P_1^{(1)}) - {}^t P_1^{(2)} \end{aligned}$$

relations nous permettant de n'utiliser que les 10 coefficients de la matrice P_1 (2 pour R et 8 pour $P_1^{(1)}$ et $P_1^{(2)}$); ceci nous conduit à un hamiltonien polynomial en $\tilde{x}_j, \bar{\tilde{x}}_j$ dont chacun des coefficients dépend d'au plus 15 variables.

Revenons à notre normalisation. Après application de la transformation formelle présentée ci-dessus, le hamiltonien prend la forme :

$$\frac{2c}{\Lambda_1} \left[\tilde{\lambda}_1 |\tilde{x}_1|^2 + \tilde{\lambda}_2 |\tilde{x}_2|^2 \right] + \tilde{H}_4(\tilde{x}_j, \tilde{x}_j, \Lambda_j, D_2) + \tilde{H}_6(\tilde{x}_j, \tilde{x}_j, \Lambda_j, D_2) \quad (II.4.3.4.3)$$

où les $\tilde{\lambda}_j$ sont les valeurs propres λ_j définies par la relation (II.3.2.3.1) (le "tilde" servant à éviter la confusion entre les valeurs propres et les longitudes moyennes), et où les \tilde{H}_j sont des polynômes homogènes de degré j en $(\tilde{x}_j, \tilde{x}_j)$, dont les coefficients sont développés en polynôme de degré deux de la variable D_2 . Toutes ces expressions dépendent des Λ_j , et bien entendu des coefficients de la matrice de passage évoqués plus haut.

Une fois le hamiltonien écrit sous la forme (II.4.3.4.2), il ne nous reste plus qu'à le réduire à la forme normale utilisée dans l'énoncé d'Arnold. Mais, comme pour vérifier la non-dégénérescence de l'application "fréquences séculaires" (A.10), il nous suffit de travailler sur la forme normale de degré quatre, nous nous limiterons à une seule transformation de Birkhoff, et nous nous contenterons de montrer qu'il est possible de pousser la réduction jusqu'au degré six.

La transformation de Birkhoff consiste dans notre cas, à construire une suite de transformation canonique opérant sur les polynômes homogènes de même degré, destinée à éliminer les monômes n'étant pas de la forme $x_1^{k_1} \bar{x}_1^{k_1} x_2^{k_2} \bar{x}_2^{k_2}$.

Si nous écrivons $S = S_2 + S_4 + S_6$ la fonction génératrice cherchée où S_2 engendre l'identité et S_k est un polynôme homogène de degré k , l'équation homologique prend la simple forme

$$\sum_{j=1,2} \omega_j \left(\bar{x}_j \frac{\partial S_{2k}}{\partial \bar{x}_j} - x_j \frac{\partial S_{2k}}{\partial x_j} \right) = \Phi_{2k}$$

où les ω_j sont les fréquences linéaires et Φ_{2k} la somme des monômes à éliminer. On reconnaît ici l'équation homologique rencontrée dans toute théorie de perturbation. Sa résolution fait apparaître des dénominateurs étant susceptibles de s'annuler. Il faut donc, soit s'assurer de la non-nullité des diviseurs, soit soustraire à l'espace des phases un voisinage des régions résonantes. Mais, pour réduire le hamiltonien sous forme normale au degré six, seuls interviennent les dénominateurs de la forme : $k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2$ où le couple (k_1, k_2) vérifie les relations :

$$|k_1| + |k_2| \in \{4; 6\} \quad \text{et} \quad k_1 \equiv k_2[2] .$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe II.3.2.3, le rapport des fréquences est strictement compris entre 1 et 2 (au moins pour D_2 inférieur à 0.01), ce qui interdit l'annulation des dénominateurs intervenant dans les transformations de Birkhoff. Il est donc possible sans modifier le domaine de définition de réduire le hamiltonien séculaire à une forme normale jusqu'au degré six. Notre forme normale est définie sur le domaine initial (de non-collision), ce que nous n'aurions pu affirmer si nous avions utilisé un développement asymptotique en α . Ajoutons que, dans le cas traité par Arnold (problème plan en repère fixe), les fréquences linéaires (valeurs propres de la partie linéaire du système) ne vérifient aucune relation du type (II.3.2.3.4), mais seulement l'inégalité $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$, relation ne permettant pas de s'affranchir des résonances séculaires, même d'ordre faible.

Revenons au hamiltonien séculaire. Après réduction, ce dernier s'écrit :

$$\tilde{H}_1 = c \left[\frac{2}{\Lambda_1} (\tilde{\lambda}_1 \tau_1 + \tilde{\lambda}_2 \tau_2) + \left(\frac{2}{\Lambda_1} \right)^2 \sum_{p,q=1,2} \lambda_{p,q} \tau_p \tau_q + \left(\frac{2}{\Lambda_1} \right)^4 \sum_{p,q,r=1,2} \lambda_{p,q,r} \tau_p \tau_q \tau_r \right] \quad (II.4.3.4.2)$$

avec $\tau_j = |\tilde{x}_j|^2$ et $c = -\frac{\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2^2 m_2}{\Lambda_2^2 m_0}$ (cf paragraphe II.3.2.3). Notez que les variables τ_j s'expriment en unité de demi-grand axe. Il est alors plus pratique, comme nous l'avons vu au chapitre I, d'utiliser des variables sans dimension qui apparaissent naturellement au cours de la construction du hamiltonien. Ces variables sont définies par $T_j = \frac{2}{\Lambda_1} k^{j-1} \tau_j = |\tilde{X}_j|^2$, expression dans laquelle les variables $|\tilde{X}_j|$ ont été définies dans ce chapitre. Rappelons que k (défini au chapitre I) est égal à : $k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = h\sqrt{\alpha}$. A l'aide des T_j , le hamiltonien prend la forme :

$$\tilde{H}_1 = c \left[\left(\hat{\lambda}_1 T_1 + \hat{\lambda}_2 T_2 \right) + \sum_{p,q=1,2} \hat{\lambda}_{p,q} T_p T_q + \sum_{p,q,r=1,2} \hat{\lambda}_{p,q,r} T_p T_q T_r \right]. \quad (II.4.3.4.4)$$

On vérifie alors immédiatement les relations :

$$\hat{\lambda}_p = \tilde{\lambda}_p k^{1-p}, \quad \hat{\lambda}_{p,q} = \lambda_{p,q} k^{1-p} k^{1-q}, \quad \hat{\lambda}_{p,q,r} = \lambda_{p,q,r} k^{1-p} k^{1-q} k^{1-r}. \quad (II.4.3.4.5)$$

II.4.3.5) Vérification de la condition de non-dégénérescence

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la condition de non-dégénérescence de l'application $\tau \mapsto \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \tau}$. Cette condition équivaut à montrer que le déterminant $Det = \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21}$ n'est pas identiquement nul (condition A.10). Pour les raisons explicitées plus haut, il est préférable de travailler sur l'expression du déterminant fonction des $\hat{\lambda}_{p,q}$. On vérifie alors immédiatement, en vertu des relations II.4.3.4.5, que la non-nullité de l'expression $\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21}$ est équivalente à celle de $\hat{\lambda}_{11} \hat{\lambda}_{22} - \hat{\lambda}_{12} \hat{\lambda}_{21}$.

A cause des développements en puissance de D_2 nécessaires à l'obtention des coefficients du hamiltonien séculaire, nous ne sommes pas en possession de l'expression exacte du déterminant. En effet, ce dernier prend la forme :

$$Det(\alpha, h, D_2) = Det_3(\alpha, h, D_2) + R^{(3)}(\alpha, h, D_2) \quad (II.4.3.5.1)$$

où seule la partie

$$Det_3(\alpha, h, D_2) = \delta_0(\alpha, h) + \delta_1(\alpha, h) D_2 + \delta_2(\alpha, h) D_2^2 \quad (II.4.3.5.2)$$

a pu être obtenue.

Ainsi, nous allons dans un premier temps étudier le comportement de trois coefficients δ_j . Chacun des δ_j possède une expression polynomiale de quelques dizaines de milliers de termes dépendant des variable h , $\sqrt{\alpha}$, des coefficients de Laplace et de ceux des matrices $P_k^{(0)}$ à $P_k^{(j)}$.

L'étude des δ_j a été limitée au rectangle $(\alpha, h) \in [10^{-6}; 0.8] \times [10^{-2}; 10^2]$ pour les raisons suivantes. Tout d'abord, le rapport des masses planétaires h ne peut être ni trop grand ni trop petit de manière à ne pas aboutir à une situation voisine de celle du problème restreint (la réduction du moment cinétique y perdrait tout son sens). Pour des raisons de divergence de coefficients de Laplace, la borne supérieure de α a du être fixée à 0.8. Enfin, comme δ_0 varie exponentiellement avec α , nous avons choisi une représentation logarithmique de ce coefficient. Mais ce dernier s'annulant pour $\alpha = 0$, il convenait de rester suffisamment éloigné de cette valeur.

Les figures II.4.a et II.4.b présentent deux vues différentes des valeurs que prend le coefficient $\delta_0(\alpha, h)$ sur le rectangle $(\alpha, h) \in [10^{-6}; 0.8] \times [10^{-2}; 10^2]$. On vérifie ainsi que le coefficient δ_0 ne s'annule jamais sur le domaine considéré, ce qui permet de s'assurer de la validité de la condition de non-dégénérescence (A.10) pour $D_2 = 0$, et de prolonger ce résultat par continuité à de petites valeurs de D_2 .

Pour obtenir un résultat quantitatif sur les valeurs de D_2 pour lesquelles (A.10) est vérifiée, il nous faut obtenir une estimation de la taille des termes négligés au cours du calcul du déterminant. Pour des valeurs de D_2 suffisamment petites, plus le développement de Taylor du déterminant est poussé à un ordre élevé, plus le reste est petit. C'est pour cette raison que l'on approxime le déterminant par son développement II.4.3.5.1. Il aurait certainement été préférable d'obtenir un développement plus précis, mais les calculs conduisant aux expressions de δ_n pour $n \geq 3$ deviendraient beaucoup trop lourds.

Nous vérifions sur les figures II.4.c-d et II.4.e-f que les coefficients δ_1 et δ_2 ne sont pas trop grands devant δ_0 et surtout, qu'ils sont strictement positifs.

Nous aboutissons ainsi à une situation dans laquelle le déterminant Det_3 est strictement positif et croissant avec D_2 . On espère, de ce fait, obtenir des résultats satisfaisants en ce qui concerne l'évolution du déterminant non tronqué Det . En effet, pour de faibles valeurs de D_2 , ce dernier reste encore strictement positif, et nous pourrons faire croître le paramètre D_2 tout en conservant la condition escomptée tant que le module du reste $R^{(2)}$ ne dépassera pas la valeur de Det_3 .

C'est donc ces estimations que nous allons mener maintenant.

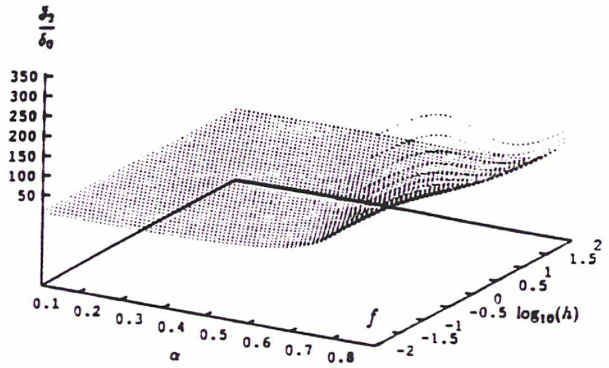
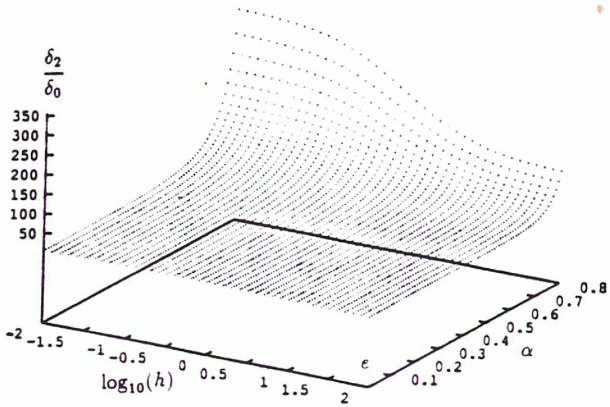
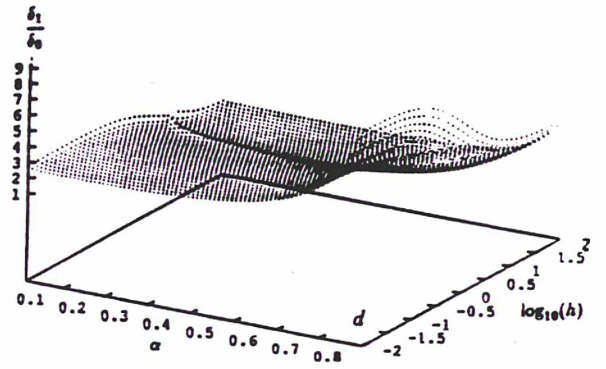
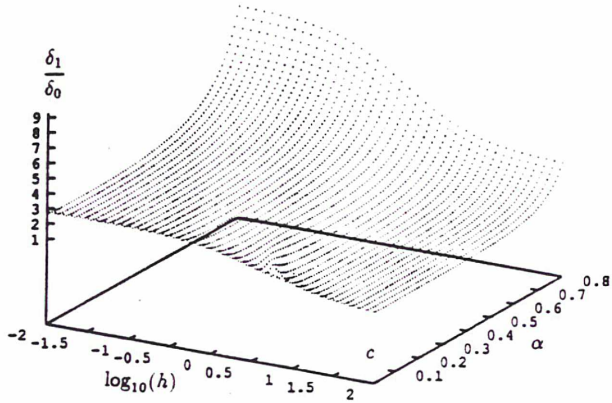
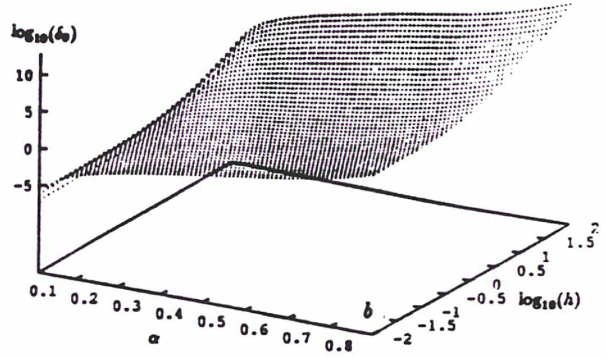
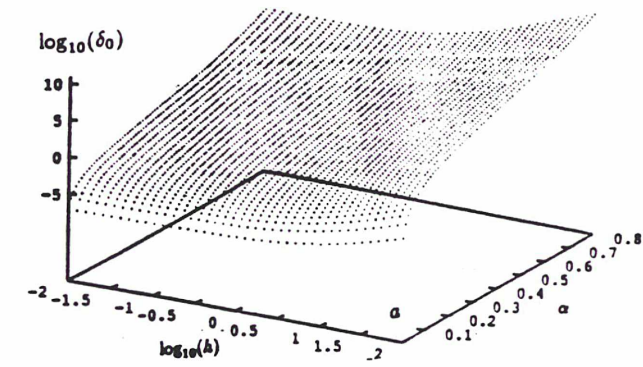
Figures II.4 : Variation des coefficients $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ définis par $Det_3 = \delta_0 + \delta_1 D_2 + \delta_2 D_2^2$ sur le rectangle $[10^{-6}, 0.8] \times [10^{-2}, 10^2]$.

II.4.a-b : $\log_{10} \delta_0$ en fonction de α et $\log_{10} h$.

II.4.c-d : $\frac{\delta_1}{\delta_0}$ en fonction de α et $\log_{10} h$.

II.4.e-f : $\frac{\delta_2}{\delta_0}$ en fonction de α et $\log_{10} h$.

figure II.4



II.4.3.6) Estimation du reste.

L'estimation de l'erreur commise en négligeant les termes D_2^k (où k est strictement supérieur à deux) dans l'expression du déterminant, objet de la condition (A.10), s'avère être une opération délicate.

Décrivons les principales difficultés : tout d'abord, le déterminant en cause n'est obtenu qu'à la suite d'une longue chaîne de calculs algébriques (développement du hamiltonien séculaire, diagonalisation de sa partie quadratique, réduction à une forme normale et enfin calcul du déterminant), chaîne à l'intérieur de laquelle l'évolution du reste doit être suivie à la trace. Ensuite, et c'est là l'opération la plus délicate, il faut estimer l'erreur commise sur chacun des coefficients du hamiltonien séculaire.

Commençons par la résolution du premier problème. La fonction perturbatrice, ou plus précisément la partie séculaire de la quantité $\frac{a_2}{\Delta}$, se développe sous la forme :

$$f(z, A, B) = \sum_{p,q} E_{p,q}(z) A^p B^q \quad (II.4.3.6.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = D_2 \\ (p, q) = (p_1, p_2, q_1, q_2) \in N^4 \\ A^p B^q = A_1^{p_1} B_1^{q_1} A_2^{p_2} B_2^{q_2} \\ A_j = \text{Re}(X_j) \\ B_j = -\text{Im}(X_j) . \end{array} \right.$$

Dans cette expression, nous ne disposons pas des coefficients $E_{p,q}(z)$ mais seulement de leur développement de Taylor à l'ordre $n - 1$ en z (nos calculs ont été menés avec $n = 3$). On peut donc écrire que :

$$E_{p,q}(z) = E_{p,q}^{(n)}(z) + \delta E_{p,q}^{(n)}(z) = E_{p,q}^{(n)}(z) + O(z^n)$$

où les $\delta E_{p,q}^{(n)}(z)$ sont à estimer.

Supposons avoir réalisé cette tâche (ce qui sera fait en fin de paragraphe). Il s'agit alors d'étudier la manière dont l'erreur se propage aux termes du hamiltonien après diagonalisation de sa partie quadratique. Ainsi, nous devons transformer le hamiltonien (II.4.3.6.1) à l'aide du changement de variable linéaire (II.3.2.3.7) que l'on notera :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(E_{p,q}(z), z) & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2(E_{p,q}(z), z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} .$$

En pratique, nous ne pouvons calculer $\mathcal{P}_j(E_{p,q}(z), z)$ mais seulement $\mathcal{P}_j^{(n)}(E_{p,q}^{(n)}(z), z)$ développement à l'ordre $n - 1$ en z de la matrice $\mathcal{P}_j(E_{p,q}^{(n)}(z), z)$. L'évaluation de l'erreur s'effectue alors en deux étapes successives. Possédant tout d'abord les expressions algébriques des matrices \mathcal{P}_j , nous majorons chaque coefficient de $\mathcal{P}_j(E_{p,q}) - \mathcal{P}_j(E_{p,q}^{(n)})$ à l'aide d'une formule des accroissements finis. Disposant ensuite de l'expression algébrique de $\mathcal{P}^{(n)}$, nous calculons numériquement pour chaque valeur de h, α et z , les coefficients de

$\mathcal{P}_j(E_{p,q}^{(n)}) - \mathcal{P}_j^{(n)}(E_{p,q}^{(n)})$ (cette estimation numérique fournit de bien meilleurs résultats qu'une application de la formule des accroissements finis).

Ces deux étapes nous livrent l'évolution de chacun des coefficients des matrices $\delta\mathcal{P}_j^{(n)}$ vérifiant :

$$\mathcal{P}_j(E_{p,q}(z), z) = \mathcal{P}_j^{(n)}(E_{p,q}^{(n)}(z), z) + \delta\mathcal{P}_j^{(n)}(z).$$

De la même manière, connaissant l'erreur commise sur les coefficients de la partie quadratique du hamiltonien, il nous est possible de calculer celle faite sur les fréquences et aussi sur leur rapport.

Après diagonalisation, nous pouvons écrire le nouveau hamiltonien \tilde{H} sous la forme :

$$\tilde{H} = \sum_{p,q} (\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z) + \delta\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z)) \tilde{A}^p \tilde{B}^q$$

où les $\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z)$ sont calculées effectivement et les $\delta\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z)$ à majorer. Pour cela, il est très simple (grâce à un manipulateur algébrique) d'exprimer les $\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z)$ et $\delta\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z)$ en fonction des quantités définies précédemment. Nous sommes ainsi conduits aux formules :

$$\begin{cases} \tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z) = g_{p,q}(E_{r,s}^{(n)}, P_j^{(n)}, z) \\ \delta\tilde{E}_{p,q}^{(n)}(z) = h_{p,q}(E_{r,s}^{(n)}, \delta E_{r,s}^{(n)}, P_j^{(n)}, \delta P_j^{(n)}, z) \end{cases}$$

où $g_{p,q}$ (respectivement $h_{p,q}$) sont des polynômes homogènes de degré $|p| + |q|$ en les coefficients des matrices $\mathcal{P}_j^{(n)}$ (respectivement $\mathcal{P}_j^{(n)}$ et $\delta\mathcal{P}_j^{(n)}$), dépendant linéairement des $E_{p,q}^{(n)}$ (respectivement $E_{p,q}^{(n)}$ et $\delta E_{p,q}^{(n)}$). On peut ainsi obtenir aisément une estimation des restes $\delta\tilde{E}_{p,q}^{(n)}$.

On vérifie alors que la forme normale recherchée s'écrit en fonction des variables complexes \tilde{X}_j :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & \frac{1}{8} (3\tilde{E}_{4,0,0,0}^{(n)} + 3\tilde{E}_{0,0,4,0}^{(n)} + \tilde{E}_{2,0,2,0}^{(n)} + 3\delta\tilde{E}_{4,0,0,0}^{(n)} + 3\delta\tilde{E}_{0,0,4,0}^{(n)} + \delta\tilde{E}_{2,0,2,0}^{(n)}) |\tilde{X}_1|^4 \\ & + \frac{1}{8} (3\tilde{E}_{0,4,0,0}^{(n)} + 3\tilde{E}_{0,0,0,4}^{(n)} + \tilde{E}_{0,2,0,2}^{(n)} + 3\delta\tilde{E}_{0,4,0,0}^{(n)} + 3\delta\tilde{E}_{0,0,0,4}^{(n)} + \delta\tilde{E}_{0,2,0,2}^{(n)}) |\tilde{X}_2|^4 \\ & + \frac{1}{4} (\tilde{E}_{2,2,0,0}^{(n)} + \tilde{E}_{0,0,2,2}^{(n)} + \tilde{E}_{2,0,0,2}^{(n)} + \tilde{E}_{0,2,2,0}^{(n)} \\ & + \delta\tilde{E}_{2,2,0,0}^{(n)} + \delta\tilde{E}_{0,0,2,2}^{(n)} + \delta\tilde{E}_{2,0,0,2}^{(n)} + \delta\tilde{E}_{0,2,2,0}^{(n)}) |\tilde{X}_1|^2 |\tilde{X}_2|^2 \\ = & (\hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} + \delta\hat{\lambda}_{1,1}^{(n)}) |\tilde{X}_1|^4 + (\hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} + \delta\hat{\lambda}_{2,2}^{(n)}) |\tilde{X}_2|^4 \\ & + (\hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} + \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} + \delta\hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} + \delta\hat{\lambda}_{2,1}^{(n)}) |\tilde{X}_1|^2 |\tilde{X}_2|^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} = \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} = \frac{1}{2}(\tilde{E}_{2,2,0,0}^{(n)} + \tilde{E}_{0,0,2,2}^{(n)} + \tilde{E}_{2,0,0,2}^{(n)} + \tilde{E}_{0,2,2,0}^{(n)}) \\ \delta \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} = \delta \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} = \frac{1}{2}(\delta \tilde{E}_{2,2,0,0}^{(n)} + \delta \tilde{E}_{0,0,2,2}^{(n)} + \delta \tilde{E}_{2,0,0,2}^{(n)} + \delta \tilde{E}_{0,2,2,0}^{(n)}). \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à former le déterminant associé à la condition (A.10), c'est à dire :

$$Det = \begin{vmatrix} \hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} + \delta \hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} & \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} + \delta \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} \\ \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} + \delta \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} & \hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} + \delta \hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} \end{vmatrix} = Det_n + R^{(n)}$$

avec

$$Det_n = \begin{vmatrix} \hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} & \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} \\ \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} & \hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} \end{vmatrix}$$

et

$$R^{(n)} = \begin{vmatrix} \hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} & \delta \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} \\ \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} & \delta \hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta \hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} & \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} \\ \delta \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} & \hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta \hat{\lambda}_{1,1}^{(n)} & \delta \hat{\lambda}_{2,1}^{(n)} \\ \delta \hat{\lambda}_{1,2}^{(n)} & \delta \hat{\lambda}_{2,2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Si, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent pour $n = 3$, le déterminant Det_n est strictement positif, il en sera de même pour Det tant que $|R^{(n)}|$ sera inférieur à Det_n . C'est donc seulement à cette condition que l'hypothèse (A.10) du théorème fondamental sera vérifiée.

Revenons maintenant à l'étape la plus délicate : l'estimation des $\delta E_{p,q}^{(n)}$.

Au cours de ce travail, nous serons amenés à utiliser les inégalités de Cauchy et pour cela, à travailler sur des domaines complexes. Pour alléger les notations, une application de R^k et son prolongement analytique à un domaine de C^k seront désignés par le même symbole. Définissons, avant d'entamer les calculs, quelques domaines sur lesquels nous serons amenés à prolonger certaines applications.

Si z_0 et ρ_z sont deux réels strictement positifs, nous noterons $\mathcal{F}(z_0, \rho_z)$ l'ensemble défini par :

$$\mathcal{F}(z_0, \rho_z) = \{z^* \in C/z^* = z_1 + \rho_z e^{i\theta}; z_1 \in [0, z_0]; \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Si ρ est lui aussi un réel strictement positif, $\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho)$ désignera l'ensemble :

$$\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho) = \{(z^*, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in C^5/z^* \in \mathcal{F}(z_0, \rho_z); |\eta_j| < \rho \}.$$

Ces domaines ainsi définis, nous allons pouvoir estimer $\delta E_{p,q}^{(n)}$ à l'aide du prolongement de $\frac{a_2}{\Delta}$ sur $\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho)$. Tout d'abord, par une simple application de l'inégalité des accroissements finis, nous obtenons :

$$|\delta E_{p,q}^{(n)}(z)| = |E_{p,q}(z) - E_{p,q}^{(n)}(z)| < \frac{|z|^n}{n!} \sup_{|z'| \leq z} \left| \frac{d^n}{dz^n} E_{p,q}(z') \right|.$$

L'application de l'inégalité de Cauchy à $\frac{d^n}{dz^n} E_{p,q}(z')$ nous montre que :

$$|\delta E_{p,q}^{(n)}(z)| = |E_{p,q}(z) - E_{p,q}^{(n)}(z)| < \frac{|z|^n}{\rho_z^n} \text{Sup}_{\mathcal{F}(z_0, \rho_z)} |E_{p,q}(z^*)|.$$

Mais si f est analytique sur $\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho)$, une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy entraîne :

$$|E_{p,q}^{(n)}(z)| < \rho^{-(|p|+|q|)} \text{Sup}_{\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho)} |f(z^*, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) - a_2 C|$$

où C est une constante arbitraire que l'on déterminera plus tard.

On déduit des deux relations précédentes :

$$|\delta E_{p,q}^{(n)}(z)| < \rho^{-(|p|+|q|)} \frac{|z_0|^n}{\rho_z^n} \text{Sup}_{\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho)} |f(z^*, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) - a_2 C|.$$

Cette dernière formule exprime une majoration de l'erreur $\delta E_{p,q}^{(n)}(z)$ en fonction de la borne supérieure de la partie séculaire de la distance mutuelle sur $\mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho)$, mais il est préférable d'utiliser la véritable distance mutuelle (non moyennée). Nous égalons alors la constante C à la valeur maximale de l'inverse de la distance mutuelle quand les excentricités et inclinaisons sont nulles (ceci améliore notablement les estimations). Nous obtenons enfin la formule :

$$|\delta E_{p,q}^{(n)}(z)| < \rho^{-(|p|+|q|)} \frac{|z_0|^n}{\rho_z^n} \text{Sup}_{\lambda \in T^2} \text{Sup}_{\mathcal{F}(z_0, \rho_z)} |f(z^*, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) - \frac{1}{1 - \alpha^2}|. \quad (II.4.3.6.2)$$

Pour achever les calculs, il suffit de majorer l'inverse de la distance mutuelle sur le domaine

$$(\lambda_1, \lambda_2, z^*, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in T^2 \times \mathcal{F}(z_0, \rho_z, \rho).$$

Ce type de majoration a déjà été effectué par L.Niederman [38] dans le but d'appliquer le théorème de Nekhorochev au problème planétaire des n corps. Mais ces élégantes estimations, valables dans un cas général, ne tiennent pas compte de la réduction du moment cinétique. De ce fait, les variables que nous utilisons ne sont pas les mêmes que celles intervenant dans le travail de L.Niederman. La procédure suivante permet de s'y référer tout de même. La majoration de la distance mutuelle ne dépendant que de considérations géométriques, on peut choisir librement le système de coordonnées. Ce dernier sera défini de manière à ce que l'inclinaison du premier corps reste toujours nulle, ainsi celle du deuxième corps sera égale à la valeur de l'inclinaison mutuelle. Ceci permet de se ramener aux éléments osculateurs classiques. Ensuite, sachant que l'application du théorème fondamental d'Arnold n'est possible que pour d'infimes excentricités, nous pouvons, sans entacher la validité du résultat, les supposer nulles. Dans cette situation, la variable $z = D_2$ se confond avec la quantité $2C_J^2 = 2(1 - \cos J)$, ce qui lie de manière simple z à l'inclinaison. Notons qu'une petite difficulté survient après complexification des

variables de Poincaré : les excentricités deviennent des quantités complexes non-nulles ; mais cela n'entraîne qu'une petite modification des expressions établies par L.Niederman.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le reste $R^{(3)}$. Les rapports des masses h et des demi-grands axes α étant fixés, les rayons d'analyticité ρ_z et ρ ainsi que l'inclinaison mutuelle J nous donne accès au maximum de l'inverse de la distance mutuelle et donc, par la formule (II.4.3.6.2), à la borne supérieure du reste $R^{(3)}$. Pour achever ce travail, il reste à trouver, pour chaque valeur du couple (α, h) , le plus grand z pour lequel la contrainte $Det_3 - |R^{(3)}| > 0$ reste vérifiée.

On réalise cette opération de la manière suivante. On fixe la valeur de z , puis on cherche le couple (ρ_z, ρ) qui minimise le reste $|R^{(3)}|$ tout en s'assurant que $Det_3 - |R^{(3)}| > 0$ est toujours vérifiée. On réitère ensuite le processus avec une valeur de z supérieure à la précédente. La recherche du minimum de $|R^{(3)}|$ a pu être réalisée de manière numérique grâce à une méthode d'optimisation dite "downhill simplex method" [39]. Une borne inférieure de la valeur maximale de l'inclinaison pour laquelle l'application du théorème d'Arnold est possible est représentée en fonction de α et h sur la figure II.5. Cette inclinaison oscille entre 0.35 et 1.2 degrés, ce qui semble satisfaisant. Notons que ces seuils peuvent certainement être améliorés en travaillant directement sur les coefficients du développement du hamiltonien séculaire, tout en évitant l'utilisation de la formule de Cauchy. Ceci suppose l'existence de relations de récurrence liant les différents coefficients de la fonction perturbatrice, mais celles-ci n'ont pas encore été établies.

Figure II.5.

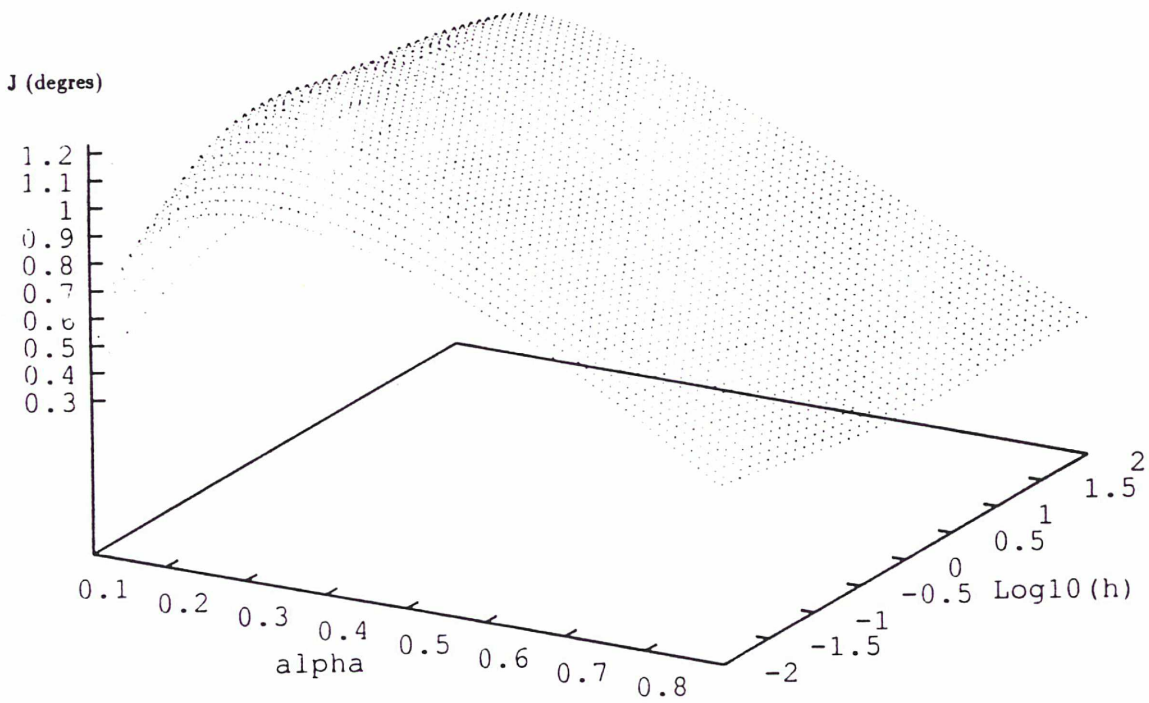


Figure II.5 : Borne inférieure de l'inclinaison mutuelle maximale pour laquelle les hypothèses du théorème d'Arnold sont vérifiées (non-dégénérescence de l'application fréquence). L'inclinaison mutuelle J est représentée en fonction de α et h sur le rectangle $[10^{-6}, 0.8] \times [10^{-2}, 10^2]$.

CHAPITRE III.

ETUDE NUMERIQUE DES PROBLEMES SECULAIRES DU TYPE JUPITER-SATURNE.

III.1) Position du problème et présentation des outils numériques.

III.1.1) Motivations de l'étude.

Nous venons d'obtenir, grâce à la théorie KAM, un résultat assurant la stabilité de la plupart des trajectoires du problème planétaire des trois corps. Mais peut-on appliquer ce type de résultat à un système planétaire réaliste ? Nous savons que pour les théorèmes de type KAM, les seuils d'application portant sur la taille de la perturbation (il s'agit ici du rapport des masses planétaires à celle du soleil) sont infimes. Mais ils seront certainement améliorés dans l'avenir. Pourtant, au regard des récentes simulations numériques modélisant des évolutions planétaires, il semble que le comportement d'un "système solaire", qu'il comporte neuf planètes ou beaucoup moins, ne soit pas redevable de la théorie KAM. Les intégrations du système solaire menées par J.Laskar [La90], ont permis de montrer que les planètes telluriques suivaient des trajectoires fortement chaotiques alors que le mouvement des planètes géantes restait pratiquement régulier. Le système formé des planètes telluriques évolue ainsi dans une large zone chaotique de l'espace des phases, de laquelle les tores de K.A.M. sont certainement absents. En revanche, l'apparente régularité du sous système formé des planètes géantes semble en faire un meilleur candidat à la recherche de tores invariants. Mais d'autres études, en particulier celle de Quinlan [Qu], ont montré que des conditions initiales permettant de conserver la cohésion d'un système formé de nos quatre planètes géantes sont peu fréquentes. Les résonances en moyen-mouvement (et certaines fois séculaires) entraînent des rencontres proches qui déstabilisent totalement l'ensemble du système.

En revanche, pour un système ne comportant que deux planètes, nous pouvons nous attendre, en dehors des régions de résonances en moyen-mouvement (nous reviendrons sur l'effet de ces dernières), à observer un comportement beaucoup plus régulier. Plus particulièrement, quand les masses des deux planètes sont comparables et si l'inclinaison mutuelle est assez faible (de l'ordre de quelques degrés), le moment cinétique doit jouer un rôle fondamental en contraignant fortement les excentricités, contrôlant ainsi leur évolution.

Ainsi, ayant grâce à l'étude conduite au chapitre précédent une bonne vision de la topologie ainsi que de la dynamique du problème planétaire spatial des trois corps (au moins pour de faibles masses planétaires), nous allons procéder à une étude numérique de problèmes plus réalistes. Nous nous intéresserons à la nature des solutions séculaires d'ordre un et deux du

couple Jupiter-Saturne, puis à l'exploration globale des espaces les contenant. Pour achever ce travail, nous étudierons l'influence de la proximité de la résonance en moyen-mouvement (2:-5) sur le comportement du problème séculaire. En effet, Quinlan [Qu] au cours d'une étude du problème Soleil-Jupiter-Saturne, montre que dans la zone de libration de cette résonance, les solutions du problème planétaire sont fortement chaotiques et ce en un temps court (l'exposant de Liapounov des trajectoires est de l'ordre de $1/100000 \text{ ans}^{-1}$). Il paraît donc utile d'étudier le comportement du problème séculaire à l'approche des séparatrices de la résonance (2:-5).

III.1.2) La méthode d'analyse en fréquence.

La méthode d'analyse en fréquence fut introduite par J.Laskar pour l'étude de la stabilité du système solaire [La90]. Elle s'applique plus généralement à l'étude de la dynamique d'un système autonome.

A la base, elle fournit une approximation quasi-périodique d'une fonction à valeur complexe. On peut donc l'utiliser pour représenter de manière précise et concise certaines fonctions suffisamment régulières.

Mais cette méthode est beaucoup plus puissante : elle permet en pratique de clarifier la structure de l'espace des phases de certains systèmes différentiels en y délimitant les régions régulières (où les trajectoires sont quasi-périodiques) et les régions chaotiques. De plus, elle nous aide à comprendre la nature de ce chaos.

Présentons très brièvement les fondements de la méthode. Pour plus d'informations, on pourra se rapporter à [La90] et [LaFrCe].

Si l'on se donne une fonction quasi-périodique définie sur l'intervalle : $[0, T]$ à valeur complexe, sous la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{\nu_k t} ,$$

la méthode nous fournit l'approximation suivante de f :

$$f' = \sum_{k=1}^N a'_n e^{\nu'_k t} .$$

Une nouvelle analyse en fréquence, de f' cette fois-ci, nous conduit à la nouvelle approximation :

$$f'' = \sum_{k=1}^N a''_n e^{\nu''_k t}$$

qui nous permet d'estimer la précision de la détermination des amplitudes (par le calcul des quantités $|a' - a''|$) et celle des fréquences (par le calcul des quantités $|\nu' - \nu''|$). Si les coefficients a_k décroissent rapidement, la précision de la détermination des fréquences est excellente.

Etudions maintenant le comportement de la méthode dans le cas d'un système hamiltonien intégrable.

Supposons que $(I, \varphi) \in R^n \times T^n$ soit un système de variables angle-action associé au hamiltonien intégrable $H(I)$.

Les trajectoires ont pour équation :

$$I(t) = I^0, \quad \varphi(t) = \omega(I^0)t + \varphi_0; \quad \omega(I^0) = \frac{\partial H}{\partial I}(I^0) \in \mathbb{R}^n .$$

Si maintenant $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ est un autre système de variables canoniques, la solution peut s'exprimer dans ces variables sous la forme :

$$p_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p_{j,k}(I^0) e^{ik \cdot \varphi}$$

$$q_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} q_{j,k}(I^0) e^{ik \cdot \varphi} .$$

Si le système est intégré numériquement dans les variables (p, q) et si nous reconstruisons les solutions par analyse en fréquence, nous obtenons (par exemple pour p_j) l'expression :

$$p_j(t) = \sum_{l=1}^N \alpha_{j,l} e^{i(\nu_l t + \psi_l)} .$$

Ainsi, pour chaque argument $(\nu_l t + \psi_l)$, il existe $k_l \in \mathbb{Z}^n$ tel que

$$\nu_l t + \psi_l = k_l \cdot \varphi .$$

Ceci nous montre la facilité avec laquelle la méthode nous permet d'accéder aux propriétés intrinsèques du système étudié : quelque soit le système de coordonnées canoniques employé, l'analyse en fréquence nous fournit directement le vecteur fréquence ω associé au tore invariant sur lequel évolue l'orbite quasi-périodique. Notons aussi que si le système considéré est non dégénéré (au sens de (II.4.1.1)), il est possible d'accéder aux variables d'action paramétrant les tores invariants.

Remarquons aussi que si le nombre de degré de liberté est élevé, il n'est pas toujours aisé de résoudre les équations $\nu_l = k_l \cdot \omega$ qui fournissent le vecteur fréquence ω (équations dans lesquelles k_l et ω sont inconnus). En revanche, la situation se simplifie notablement si nous travaillons au voisinage d'un point d'équilibre elliptique où, comme c'est le cas dans le problème planétaire sous la forme étudiée (cf chapitre II), notre hamiltonien est proche de celui d'oscillateurs harmoniques non couplés. H s'écrit donc :

$$H(p, q) = \sum_j \omega_j (p_j^2 + q_j^2) + H_1(p, q)$$

où

$$|H_1(p, q)| = o(\| (p, q) \|^2)$$

pour p_j et q_j suffisamment petits.

Dans ce cas, les solutions s'écrivent

$$p_j(t) = \alpha_j e^{i(\omega_j t + \varphi_j^0)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p_{j,k} e^{ik \cdot \varphi} \quad \text{avec} \quad |p_{j,k}| = o(\alpha_j) .$$

On en déduit que dans la décomposition quasi-périodique fournie par l'analyse en fréquence, la fréquence fondamentale est simplement l'argument du terme ayant la plus grande amplitude.

Si maintenant le hamiltonien est quasi-intégrable et est exprimé à l'aide des variables action-angle du problème non-perturbé, situation à laquelle nous nous sommes rapportés au chapitre II, on peut espérer rencontrer des orbites ne différant que de peu des orbites quasi-périodiques.

En tout cas, l'approximation obtenue par analyse en fréquence sur l'intervalle de temps $[0, T]$, s'écrit :

$$p_j(t) = \sum_{l=1}^N \alpha_l e^{i(\nu_l t + \psi_l)} .$$

Mais comment savoir si la solution réelle est bien quasi-périodique (ou au moins très proche d'une telle solution) ?

Tout d'abord, il convient de regarder la précision avec laquelle les fréquences (en particulier celles de plus grandes amplitudes) sont déterminées. Si cette détermination est mauvaise, ou bien la solution n'est pas quasi-périodique, ou bien nous sommes en présence d'un phénomène que nous décrirons plus tard dans le cas du pendule. En revanche, si les fréquences fondamentales sont bien définies, il convient de vérifier que les autres fréquences sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers. Dans le cas contraire, la solution n'est pas de nature quasi-périodique. Si ces conditions sont réalisées, l'étude de la décroissance de l'amplitude des termes obtenus apporte une information complémentaire. En effet, plus la suite décroît rapidement, plus les variables dans lesquelles le problème est étudié sont proches des variables du type action-angle.

Mais il existe une méthode systématique permettant de juger de la nature des trajectoires occupant la région de l'espace des phases étudiée. Il s'agit d'observer l'évolution des fréquences fondamentales déterminées sur deux intervalles de temps successifs $I_1 = [0, T]$ et $I_2 = [T, 2T]$.

Si ces deux fréquences ne diffèrent que d'une quantité inférieure à la précision de la détermination (et à condition que cette précision soit suffisamment bonne), on peut affirmer que le mouvement est bien quasi-périodique (tout au moins beaucoup plus long que T). Dans le cas contraire, la mesure de la différence des fréquences permet de juger de la nature chaotique de la trajectoire considérée et même de fournir une borne supérieure au taux de diffusion.

Cette méthode a été utilisée avec succès à l'étude de l'application standard [La93][LaFrCe] de l'accélérateur de particules [DuLa] et de l'évolution à long terme de l'obliquité des planètes telluriques [LaJoRo][LaRo]. C'est évidemment cette méthode que nous appliquerons dans la suite de ce chapitre.

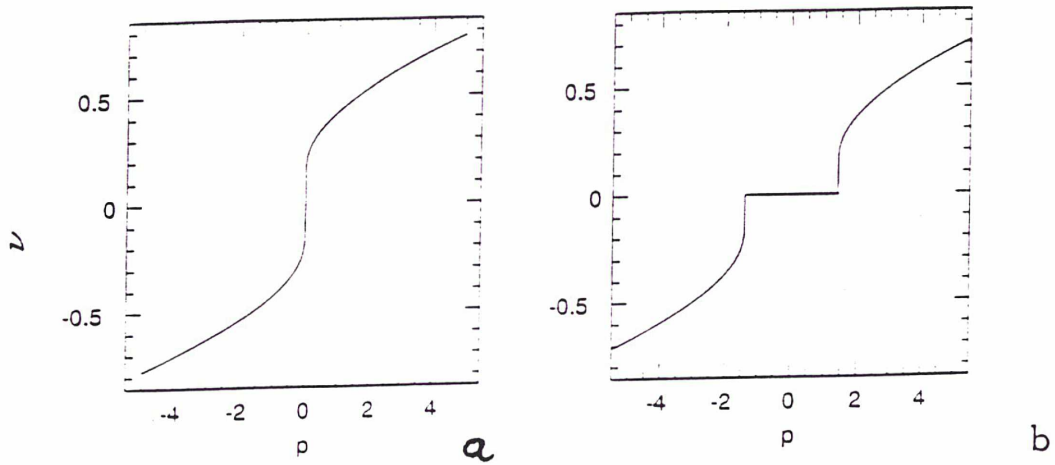
Avant d'achever ce paragraphe, montrons rapidement ce que donne l'application au pendule simple [La93]. Nous retrouverons une situation voisine de cette dernière au voisinage des résonances séculaires (paragraphe III.4).

Rappelons que le hamiltonien du pendule s'écrit

$$H(p, \theta) = p^2 - \cos(\theta)$$

et que le système associé possède un point fixe elliptique en $(p, \theta) = (0, 0)$ et un point fixe hyperbolique pour $(p, \theta) = (0, \pi)$.

On trouve sur les figures III.1.a et III.1.b (extraites de [La93]) l'évolution de la fréquence fondamentale du mouvement en fonction de p pour $\theta = \pi$ et $\theta = 0$. Il est important de remarquer la présence du palier III.1.b correspondant à la zone de libration de l'angle θ et surtout les singularités bordant ce palier sur la figure III.1.b et en $p = 0$ sur III.1.a . Ces dernières sont associées à la rencontre de la séparatrice du pendule.



Figures III.1 : Courbes de fréquence du pendule simple.

Le hamiltonien du problème étant donné par : $H(p, \theta) = p^2 - \cos \theta$, on trouvera la fréquence fondamentale de libration (en ordonnée) en fonction de la variable p (en abscisse)

III.1.a : au voisinage de la singularité hyperbolique ($\theta = \pi$)

III.1.b : au voisinage de la singularité elliptique ($\theta = 0$).

III.2) Solutions quasi-périodiques pour les conditions initiales réelles de Jupiter-Saturne.

III.2.1) Solution quasi-périodique d'ordre un des masses.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la nature quasi-périodique des solutions du problème séculaire Jupiter-Saturne traité à l'ordre un des masses.

Dans un premier temps, nous intégrons numériquement le système différentiel associé au hamiltonien séculaire d'ordre un, dont la partie linéaire est diagonale. La période d'intégration est d'environ $67 \cdot 10^6$ ans, durée au cours de laquelle l'argument de \tilde{X}_1 a fait plus de mille six cents révolutions (et à peu près le double pour celui de \tilde{X}_2).

Les conditions initiales de l'intégration sont celles du tableau I.2 transformées par l'inverse de la matrice de passage (II.3.2.3.7), cette dernière étant calculée à partir du hamiltonien quadratique d'ordre un des masses. Elles sont regroupées dans le tableau suivant :

\tilde{A}_1	\tilde{B}_1	\tilde{A}_2	\tilde{B}_2
0.00382112	-0.04867854	0.05478465	-0.00356394

Nous avons précisé au chapitre I que les conditions initiales I.2 n'étaient pas exactement les conditions réelles de Jupiter et Saturne, mais cela n'a que peu d'importance puisque nous montrerons au paragraphe III.3 que la région de l'espace des phases voisine de la région dans laquelle évolue le couple Jupiter-Saturne est particulièrement stable (ce résultat est toujours valable pour le problème d'ordre deux). De ce fait, même si les fréquences fondamentales sont légèrement modifiées, la nature des solutions n'en est pas altérée.

La méthode d'analyse en fréquence appliquée aux solutions de l'intégration nous fournit les approximations quasi-périodiques de la forme :

$$\tilde{X}_j = \tilde{A}_j - i\tilde{B}_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k^{(j)} e^{i(\nu_k^{(j)} t + \varphi_k^{(j)})}.$$

Les valeurs des amplitudes, des fréquences et des phases sont regroupées dans les tableaux III.1 et III.2. On y a ajouté un indice permettant de juger de la nature quasi-périodique de la solution, il s'agit des quantités $\delta\nu_k^{(j)}$ définies par :

$$\delta\nu_k^{(j)} = \text{Min}_{|p|+|q|\leq n} \left| \nu_k^{(j)} - p\nu_1^{(1)} - q\nu_1^{(2)} \right|.$$

L'entier n étant arbitraire, nous l'avons fixé à $n = 20$, jugeant qu'une relation de commensurabilité pour laquelle $|p| + |q| > 20$ n'avait pas de signification pour notre problème. Les entiers p et q pour lesquels le minimum est atteint seront notés $p_k^{(j)}$ et $q_k^{(j)}$.

Conformément à ce que nous venons de présenter au paragraphe précédant, les fréquences fondamentales sont données par :

$\nu_1^{(1)} = -29.7738075$ "/an pour \tilde{X}_1 et $\nu_1^{(2)} = -48.76837170$ "/an pour \tilde{X}_2 . La précision interne de leur détermination est ici excellente : environ 10^{-10} "/an pour $\nu_1^{(1)}$ et environ 10^{-11} "/an pour $\nu_2^{(1)}$.

Tableau III.1 : Solution quasi-périodique de la variable \tilde{X}_1 correspondant au mouvement séculaire d'ordre un des masses de Jupiter.

$\nu_k^{(1)}$	$\alpha_k^{(1)}$	$\varphi_k^{(1)}$	$p_k^{(1)}$	$q_k^{(1)}$	$\delta\nu_k^{(1)}$
-29.7738075	.048933839	69.1414	1	0	.000000000
48.76837175	.000229188	23.3658	0	-1	.000000047
29.77380760	.000174806	290.8596	-1	0	.000000051
-48.76837170	.000163525	336.6342	0	1	.000000000
-108.31598695	.000087467	294.9165	2	1	.000000151
-10.77924339	.000068261	341.6469	2	-1	.000000001
-127.31055119	.000049457	202.4097	1	2	.000000236
67.76293601	.000049062	115.8714	1	-2	.000000153
-89.32142283	.000041327	27.4234	3	0	.000000189
-67.76293585	.000012155	64.1285	-1	2	.000000009
127.31648273	.000000318	157.7460	-1	-2	.005931779
108.32083561	.000000296	64.8208	-2	-1	.004848813
-186.86071830	.000000197	165.6922	3	2	.002552246
-205.85491398	.000000145	72.6234	2	3	.002183775
146.31395778	.000000112	254.2762	0	-3	.008842670

Tableau III.2 : Solution quasi-périodique de la variable \tilde{X}_2 correspondant au mouvement séculaire d'ordre un des masses de Saturne.

$\nu_k^{(2)}$	$\alpha_k^{(2)}$	$\varphi_k^{(2)}$	$p_k^{(2)}$	$q_k^{(2)}$	$\delta\nu_k^{(2)}$
-48.76837170	.054607604	336.6347	0	1	.000000000
29.77380758	.000408235	290.8596	-1	0	.000000031
48.76837172	.000406690	23.3658	0	-1	.000000020
-29.77380755	.000222454	249.1403	1	0	.000000001
-127.31055123	.000097508	202.4097	1	2	.000000274
-146.30511534	.000055013	109.9031	0	3	.000000234
-108.31598742	.000045974	294.9166	2	1	.000000624
10.77924361	.000046114	198.3530	-2	1	.000000215
-10.77924340	.000027456	161.6469	2	-1	.000000005
-67.76293587	.000016218	244.1285	-1	2	.000000008
127.31206601	.000000951	157.2714	-1	-2	.001515056
108.31884534	.000000798	64.6272	-2	-1	.002858537
-205.85433647	.000000218	71.4353	2	3	.001606261
146.30603226	.000000370	249.8867	0	-3	.000917148
89.32903106	.000000189	334.1628	-3	0	.007608419
-224.85052739	.000000162	342.3203	1	4	.003233034

Nous retrouvons dans ces tableaux tous les arguments permettant de conclure que la solution du mouvement séculaire de Jupiter et de Saturne est extrêmement proche de celle d'un mouvement de nature quasi-périodique : l'excellente qualité de la détermination des fréquences fondamentales, et le fait que toutes les fréquences déterminées dans ces solutions sont combinaisons linéaires des deux fondamentales.

En effet, bien qu'étant non-nulles, les quantités $\delta\nu_k$ restent toujours faibles, excepté pour les termes de plus petite amplitude. Cette dégradation subite de la précision de la détermination des fréquences est peut-être due à la proximité d'un terme résonant n'apparaissant qu'avec une très faible amplitude.

Il faut aussi remarquer la forte prédominance de l'amplitude des termes comportant les fréquences fondamentales. Ces dernières sont en effet de cent à deux cents fois plus grandes que celles des termes suivants. Ce fait, auquel on doit ajouter la décroissance rapide de l'ensemble des amplitudes des solutions, vient confirmer celui que nos variables sont parfaitement adaptées au problème.

III.2.2) Solution quasi-périodique d'ordre deux des masses.

De la même manière qu'au paragraphe précédant, sont regroupées dans cette section les solutions fournies par analyse en fréquence du système différentiel déduit du hamiltonien d'ordre deux des masses. L'intégration a été faite sur une durée d'environ 67 millions d'années, avec des conditions initiales obtenues de la même manière qu'à l'ordre un des masses, mais où cette fois-ci la matrice de passage (II.3.2.3.7) a été calculée à l'aide du hamiltonien quadratique d'ordre deux (rappelons que les coefficients de la matrice de passage dépendent de l'ordre des masses auquel ils ont été calculés). Ces conditions initiales sont regroupées dans le tableau suivant.

\tilde{A}_1	\tilde{B}_1	\tilde{A}_2	\tilde{B}_2
0.00386936	-0.04867994	0.05518036	-0.00343321

Les solutions de l'analyse en fréquence des solutions d'ordre deux sont regroupées dans les tableaux III.3 et III.4 où les fréquences fondamentales, dont la détermination a été obtenue avec une précision interne d'environ $5 \cdot 10^{-11}$, sont données par : $\nu_1^{(1)} = -29.90731222''/an$ et $\nu_1^{(2)} = -56.63120785''/an$. On constate la forte modification de la fréquence fondamentale (particulièrement marquée pour $\nu_1^{(2)}$) au cours du passage de l'ordre un à l'ordre deux des masses. Modification due pour sa plus grande part à l'effet des petits diviseurs intervenant au degré six des excentricités.

Un rapide coup d'œil aux tableaux III.3 et III.4 suffit pour se convaincre de la nature presque quasi-périodique du mouvement. On a toujours cette prédominance du terme comportant la fréquence fondamentale (en particulier dans la solution de \tilde{X}_1), puis la décroissance des amplitudes en fonction de l'ordre de la fréquence $|p_k^{(j)}| + |q_k^{(j)}|$. Mises à part deux fréquences dans le cas de Jupiter et une pour Saturne (petit tiret en quatrième

et cinquième colonne), toutes les harmoniques sont parfaitement reconnues, ce qui montre que les solutions sont très proches de celles d'un mouvement quasi-périodique.

Il est intéressant de noter la présence d'une petite fréquence, en l'occurrence $-3.1834''/an$, qui correspond d'après les tableaux à l'harmonique (2:-1). Nous verrons plus loin, que dans d'autres régions de l'espace des phases, cette fréquence s'annule pour conduire à une résonance séculaire.

Pour nous convaincre un peu plus de la stabilité du problème en son état actuel, nous avons étudié la variation des fréquences fondamentales de chacune des deux planètes sur 30 tranches consécutives de 20 millions d'années chacune.

Les résultats sont éloquentes : sur les 600 millions d'années d'intégration, la fréquence fondamentale de Jupiter n'a pas varié de plus de $6 \cdot 10^{-10}''/an$, et la variation de la fréquence fondamentale de Saturne n'a pas dépassé les $5 \cdot 10^{-9}''/an$. La précision de la détermination des fréquences étant, dans ce cas, de l'ordre de $10^{-11}''/an$, ces résultats sont donc compatibles et montrent une fois encore que les solutions sont très proches de fonctions quasi-périodiques.

Nous pouvons comparer ces taux de variation des fréquences fondamentales à ceux obtenus par J.Laskar au cours de son étude du chaos dans le système solaire [La90]. Ces variations sont de l'ordre de $10^{-6}''/an$ pour Jupiter et $10^{-5}''/an$ pour Saturne sur une période de 200 millions d'années. Ajoutons que pour les planètes intérieures, sur la même durée, les fréquences varient cette fois-ci d'environ $0.2''/an$. Les taux de variations que nous avons déterminé étant notablement plus faibles que ceux cités ci-dessus, et en ajoutant que les variations de fréquences ainsi déterminées fournissent une borne supérieure de la diffusion des orbites [DuLa], nous pouvons affirmer que les trajectoires du couple de planètes considéré sont extrêmement proches de celles d'un mouvement quasi-périodique et ce sur une période de l'âge du système solaire. Notons que cette affirmation ne sera parfaitement établie qu'après avoir étudié l'espace des phases dans son ensemble. En effet, il est possible que la trajectoire que nous venons d'étudier sur un intervalle de temps donné se trouve à proximité d'une région chaotique. Dans ces conditions, il se peut que sur un temps très long, la trajectoire entre dans cette zone, modifiant alors totalement la nature du mouvement.

Nous allons montrer dans les paragraphes suivant qu'une telle situation ne peut se présenter dans le problème considéré.

Tableau III.3 : Solution quasi-périodique de la variable \tilde{X}_1 correspondant au mouvement séculaire d'ordre deux des masses de Jupiter.

$\nu_k^{(1)}$	$\alpha_k^{(1)}$	$\varphi_k^{(1)}$	$p_k^{(1)}$	$q_k^{(1)}$	$\delta\nu_k^{(1)}$
-29.90731222	.049069967	67.8210	1	0	.000000000
-56.63120785	.000792599	145.0827	0	1	.000000000
29.90731222	.000199543	292.1794	-1	0	.000000002
56.63120783	.000167592	34.9174	0	-1	.000000017
-143.16972790	.000150574	177.9862	1	2	.000000013
83.35510346	.000147446	137.6547	1	-2	.000000016
-3.18341659	.000073992	350.5590	2	-1	.000000002
-116.44583227	.000061235	280.7235	2	1	.000000017
-83.35510340	.000063613	222.3452	-1	2	.000000081
-89.72193666	.000051745	23.4641	3	0	.000000004
-169.89362373	.000020479	255.2486	0	3	.000000181
110.07899925	.000018580	60.3949	2	-3	.000000140
23.54047905	.000003103	273.2982	3	-2	.000000006
-110.07899911	.000002443	299.6048	-2	3	.000000004
-196.61751813	.000001828	332.5081	-1	4	.000001049
3.18341668	.000001502	9.4409	-2	1	.000000089
136.80289374	.000001393	343.1347	3	-4	.000001000
143.16972793	.000000832	182.1339	-1	-2	.000000012
-256.43214323	.000000639	288.2629	1	4	.000000381
-202.98435247	.000000595	133.5843	3	2	.000000117
-229.70824800	.000000512	30.8896	2	3	.000000017
-62.99804108	.000000459	306.3677	4	-1	.000000056
116.44583229	.000000381	79.2764	-2	-1	.000000001
169.89362358	.000000447	284.7516	0	-3	.000000032
89.72193989	.000000193	336.5302	-3	0	.000003239
-176.26045658	.000000191	236.3667	4	1	.000000142
-283.15603930	.000000178	5.4144	0	5	.000000054
196.61751687	.000000172	27.4359	1	-4	.000002310
-223.34141481	.000000139	49.7707	-2	5	.000000002
50.26437466	.000000145	195.9725	4	-3	.000000012
163.52679430	.000000090	265.6001	4	-5	.000003924
-23.54047891	.000000102	86.7016	-3	2	.000000134
-136.80289477	.000000087	16.6989	-3	4	.000000031
-149.53656106	.000000081	339.0385	5	0	.000000032
223.34141491	.000000054	310.5489	2	-5	.000000102
-309.87993534	.000000027	82.3982	-1	6	.000000466
-36.27414561	.000000031	228.6736	5	-2	.000000219
-250.06531159	.000000009	127.0934	-3	6	.000001146
250.06530919	.000000008	232.9126	3	-6	.000001249
76.98826897	.000000007	118.4477	5	-4	.000001338
190.25068664	.000000005	188.4573	5	-6	.000000640
312.07176145	.000000005	243.4855	-	-	-
256.43214102	.000000004	71.7427	-1	-4	.000002598
-163.52679067	.000000003	94.3929	-4	5	.000000300
285.34786716	.000000003	140.9325	-	-	-

Tableau III.4 : Solution quasi-périodique de la variable \tilde{X}_2 correspondant au mouvement séculaire d'ordre deux des masses de Saturne.

$\nu_k^{(2)}$	$\alpha_k^{(2)}$	$\varphi_k^{(2)}$	$p_k^{(2)}$	$q_k^{(2)}$	$\delta\nu_k^{(2)}$
-56.63120785	.054122746	325.0826	0	1	.000000000
-29.90731222	.004112124	67.8210	1	0	.000000000
-83.35510348	.002155738	42.3443	-1	2	.000000000
56.63120785	.000894768	34.9173	0	-1	.000000003
29.90731221	.000369816	292.1794	-1	0	.000000008
-169.89362349	.000159286	75.2482	0	3	.000000062
-110.07899905	.000095073	119.6047	-2	3	.000000065
-3.18341665	.000082937	350.5591	2	-1	.000000064
-143.16972777	.000080897	177.9860	1	2	.000000146
-116.44583232	.000062111	280.7236	2	1	.000000032
3.18341661	.000053006	189.4410	-2	1	.000000018
83.35510357	.000034489	317.6545	1	-2	.000000087
-196.61751942	.000026808	152.5104	-1	4	.000000242
-136.80289473	.000004319	196.8675	-3	4	.000000015
-89.72193660	.000003823	23.4640	3	0	.000000060
-223.34141366	.000002618	229.7684	-2	5	.000001151
-23.54047898	.000002573	266.7017	-3	2	.000000066
169.89362333	.000002538	284.7522	0	-3	.000000220
143.16972794	.000002187	182.1339	-1	-2	.000000026
116.44583234	.000001465	79.2763	-2	-1	.000000054
110.07899714	.000000883	240.3991	2	-3	.000001971
-283.15603921	.000000666	185.4142	0	5	.000000037
-229.70824797	.000000693	30.8895	2	3	.000000015
-256.43214357	.000000605	288.2638	1	4	.000000050
196.61751903	.000000444	207.4310	1	-4	.000000153
89.72193665	.000000390	336.5359	-3	0	.000000002
-202.98435248	.000000261	133.5843	3	2	.000000126
-163.52679044	.000000209	274.3926	-4	5	.000000063
-309.87993489	.000000211	262.6738	-1	6	.000000010
-250.06531095	.000000207	307.0921	-3	6	.000000509
-50.26437454	.000000133	344.0272	-4	3	.000000133
23.54047900	.000000131	93.2982	3	-2	.000000045
-176.26045694	.000000104	236.3675	4	1	.000000216
-62.99804086	.000000103	306.3672	4	-1	.000000168
223.34141500	.000000043	130.5486	2	-5	.000000194
291.71470022	.000000034	339.7629	-	-	-
50.26437443	.000000029	15.9732	4	-3	.000000244
62.99804094	.000000023	233.6326	-4	1	.000000082
-276.78920596	.000000015	24.6251	-4	7	.000000110
256.43214369	.000000013	71.7354	-1	-4	.000000072
229.70824596	.000000014	329.4144	-2	-3	.000002019
-190.25068565	.000000011	351.5411	-5	6	.000000357
283.15603828	.000000009	174.2748	0	-5	.000000965
202.98435088	.000000008	226.4200	-3	-2	.000001477

III.3) Etude globale de l'espace des phases.

III.3.1) Aspect escompté de l'espace des phases.

A l'aide des variables canoniques réelles $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ définies en II.3.2.3, nous avons montré que le hamiltonien, qu'il soit calculé à l'ordre un ou deux des masses, se développe sous la forme :

$$\tilde{H}(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) = \tilde{H}_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) + \tilde{H}_4(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) + \tilde{H}_6(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$$

où \tilde{H}_k est un polynôme homogène de degré k en $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$. Comme les variables $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ sont petites (de la taille des excentricités), le hamiltonien \tilde{H} peut être considéré comme somme d'une partie intégrable \tilde{H}_2 , et d'une perturbation $\tilde{H}_4 + \tilde{H}_6$.

Nous avons étudié en II.3.3 la surface d'énergie correspondant au problème non perturbé. Rappelons que dans la situation correspondant aux conditions initiales du couple Jupiter-Saturne, l'espace (du hamiltonien quadratique) est une portion d'ellipsoïde de dimension quatre limitée par le tore des mouvements plan et que toutes les orbites sont quasi-périodiques de même fréquence. Profitons de ce rappel pour donner les valeurs numériques des fréquences du problème non-perturbé ayant pour hamiltonien la fonction \tilde{H}_2 .

Au paragraphe II.3.2.3 nous avons exprimé ces dernières sous la forme :

$$\nu_j = \frac{2c}{\Lambda_1} \lambda_j = \frac{2c}{\Lambda_1} \lambda_j^{(0)} [1 + W_j(D_2)].$$

Un calcul rapide montre que le coefficient c s'écrit à l'aide de quantités dont les valeurs numériques sont facilement accessibles. Il s'agit de l'expression :

$$c = -n_1 \frac{m_2}{m_0} \alpha \Lambda_1$$

où n_1 représente le moyen-mouvement de la planète intérieure.

Dans la situation actuelle de Jupiter et Saturne, la constante c est égale à :

$$\frac{c}{\Lambda_1} = -17.033537 \text{ ''/ans}.$$

Nous pouvons alors déduire les modes propres de Jupiter et Saturne, calculés à l'ordre un des masses (on a vu au paragraphe I.4 que les modes propres calculés à l'ordre deux des masses sont légèrement différents de ceux de l'ordre un, ils figurent en dernière ligne du tableau III.5 à titre de comparaison, tout comme les fréquences fondamentales associées aux problèmes d'ordre un et deux des masses calculés au degré six des excentricités). Les valeurs des fréquences pour deux valeurs distinctes du paramètre D_2 sont regroupées dans le tableau III.5, où $D_2 = 0.012962$ est la valeur du paramètre pour le couple Jupiter-Saturne.

Tableau III.5 : valeurs des fréquences fondamentales du problème Jupiter-Saturne à l'ordre un et deux des masses.

On trouve en première colonne le degré en excentricité et inclinaison auquel a été calculé le hamiltonien fournissant les fréquences. Il s'agit pour les trois premières du hamiltonien quadratique, les fréquences sont donc les valeurs propres du système linéaire associé. La deuxième colonne indique l'ordre des masses auquel a été calculé le hamiltonien. Les deux derniers couples de fréquences sont donc ceux calculés au paragraphe précédant pour les conditions initiales de Jupiter et de Saturne. Les autres fréquences ne dépendent que du rapport des demi-grands axes α et du paramètre D_2 .

degré	ordre	D_2	ν_1 ("/an)	ν_2 ("/an)
2	1	0	-29.1497	-47.8268
2	2	0	-29.1497	-47.8268
2	1	0.012962	-28.1837	-45.2483
2	2	"	-28.1573	-45.4655
6	1	"	-29.7738	-48.7684
6	2	"	-29.9073	-56.6312

Il serait intéressant de comparer ces fréquences à celles calculées dans le problème non-réduit, en particulier avec les résultats qu'a présenté L.Duriez lors de sa thèse [Du]. Mais cela est difficile car les référentiels dans lesquels les équations ont été écrites sont différents. Nous étant placés dans un système de coordonnées en rotation avec la ligne commune des noeuds ascendants des planètes, nous avons obtenu les fréquences séculaires des arguments des périhélie et pas celles des longitudes des périhélie (notées fréquemment g_5 et g_6), comme l'a fait Duriez. Ne disposant pas de la fréquence séculaire du noeud (notée s_5), nous ne sommes pas en mesure d'établir la comparaison. L'idéal serait de faire une intégration numérique du système réduit afin d'en déterminer des fréquences fondamentales comparables à celles que nous avons obtenu. Nous pourrions alors ajuster les conditions initiales (en particulier les demi-grands axes) de manière à ce que le système séculaire fournisse les valeurs exactes des fréquences séculaires de Jupiter et de Saturne. Mais, rappelons le, là n'est pas le but de notre étude, qui reste avant tout qualitative.

Considérons maintenant le problème perturbé. Si la perturbation est relativement faible, ce qui est le cas en ce qui nous concerne puisque les excentricités sont petites, on peut s'attendre à ce que l'espace des phases soit voisin de l'ellipsoïde du problème non-perturbé mais légèrement déformé par les termes de degrés quatre et six. De même, si les schémas K.A.M. peuvent s'appliquer ici, on retrouvera certainement la majorité des tores du problème non-perturbé mais évidemment déformés. Ces tores seront alors recouverts de trajectoires quasi-périodiques dont les fréquences dépendront du tore considéré. Le problème sera donc non-dégénéré (au sens de la condition (II.4.1.1)), contrairement au problème non-perturbé.

D'autres tores se trouvant en des lieux de résonances séculaires seront détruits, laissant place à des régions chaotiques limitées par les tores invariants ayant persisté (s'ils en restent). Notons pour terminer que contrairement au cas du hamiltonien quadratique, le problème perturbé est non-dégénéré : au sens où les fréquences des orbites quasi-périodiques recouvrant les tores ayant subsisté ne sont plus les mêmes dans tout l'espace. Nous verrons plus tard qu'il existe une bijection entre la plupart des régions de l'espace des phases et l'ensemble des vecteurs fréquence accessibles.

III.3.2) Survol des espaces séculaires d'ordre un et deux.

Afin de nous faire une première idée de la structure de l'espace des phases ainsi que de la nature des trajectoires qu'il contient, nous allons étudier, pour les problèmes d'ordre un et deux des masses, les retours successifs des trajectoires sur une surface donnée.

Le problème étudié ne possédant que deux degrés de liberté, la surface de section sera de dimension deux, ce qui permettra de visualiser les résultats.

Il convient donc de définir une surface qui sera transverse aux trajectoires du problème. Pour cela, nous allons nous aider du problème non-perturbé.

Les variables canoniques ayant été choisies de telle manière que le hamiltonien quadratique (problème non-perturbé) soit sous forme diagonale, la surface d'équation $\tilde{b}_2 = 0$ (où $\tilde{B}_2 = 0$ en variables non-canoniques sans dimension) est évidemment transverse aux trajectoires du problème linéaire. Les images de l'application de premier retour seront (pour le problème non-perturbé) supportées par des cercles concentriques correspondant à la trace des tores de dimension deux sur la surface.

Dans le cas du problème troublé, on peut supposer que les trajectoires sont encore transverses à la surface des sections choisies (ceci est vrai si la perturbation est assez faible). Nous choisirons alors de tracer les retours successifs des trajectoires sélectionnées sur le plan de coordonnées : $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$.

Afin d'obtenir les itérés de l'application de premier retour, nous procéderons de la manière suivante : étant donné un point initial de l'espace des phases se trouvant sur la surface, nous intégrerons numériquement sa trajectoire à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta 8-(7) jusqu'à franchir la surface pour la première fois (il faut se fixer un sens pour la traversée de la surface). On se trouvera alors en possession de deux points de part et d'autre de la surface de section. Nous intégrerons alors, suivant la méthode de Hénon [Hé82], le système avec un nouveau paramétrage (décrit plus loin) jusqu'à se trouver sur la surface. Cela évitera une interpolation ou une méthode du type dichotomie.

En effet, les équations du mouvement que nous intégrons sont sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{a}_j}{dt} &= f_j(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) \\ \frac{d\tilde{b}_j}{dt} &= g_j(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) .\end{aligned}$$

A condition que $g_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ soit non nul dans un voisinage de la surface de section, nous pouvons transformer le système autonome précédant en un système non autonome où le

rôle du temps est joué par la variable \tilde{b}_2 . Il est alors aisé d'intégrer les nouvelles équations jusqu'à la surface définie par $\tilde{b}_2 = 0$.

Le nouveau système s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{a}_1}{d\tilde{b}_2} &= \frac{f_1(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)}{g_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)} \\ \frac{d\tilde{b}_1}{d\tilde{b}_2} &= \frac{g_1(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)}{g_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)} \\ \frac{d\tilde{a}_2}{d\tilde{b}_2} &= \frac{f_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)}{g_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)}.\end{aligned}$$

Justifions maintenant la validité de cette écriture : dans ce problème, le second membre g_2 s'écrit :

$$g_2(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j) = - \left(\frac{4c\lambda_2}{\Lambda_1} \tilde{a}_2 + \frac{\partial H_4}{\partial \tilde{a}_2} + \frac{\partial H_4}{\partial \tilde{a}_2} \right).$$

Comme \tilde{a}_2 ne peut être égal à zéro (s'il l'était, comme $\tilde{b}_2 = 0$, il en serait de même pour \tilde{x}_2 , nous verrons au paragraphe suivant que cela est impossible), g_2 n'est pas nul (tant que les excentricités restent faibles). Cela nous assure à la fois la validité du changement de paramètre du système différentiel ainsi que la transversalité de la surface de section ($\tilde{b}_2 = 0$).

Appliquons maintenant la méthode décrite ci-dessus aux espaces séculaires d'ordre un et deux associés aux conditions initiales de Jupiter et de Saturne.

Tout d'abord, on fixe la valeur de l'énergie. La première valeur, notée $h_1^{(0)}$, est égale à l'image des conditions initiales du couple Jupiter-Saturne (paragraphe I.6.4) par le hamiltonien séculaire d'ordre un des masses, et la seconde notée $h_2^{(0)}$ est l'image des mêmes conditions initiales par le hamiltonien séculaire d'ordre 2. On se place ensuite dans les variables $(\tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$ qui réduisent la partie quadratique du hamiltonien d'ordre un ou d'ordre deux à celui d'oscillateurs harmoniques indépendants (évidemment, le système de coordonnées est différent dans chacun des deux cas). Dans chacune des deux situations, la surface est donnée par l'intersection de la variété d'énergie et de l'hyperplan d'équation $\tilde{B}_2 = 0$.

Les itérés de l'application de premier retour sur le plan de coordonnées $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$, calculés à l'aide de la méthode présentée en III.1.2.2, sont tracés sur la figure III.2 pour l'ordre un des masses et III.3 pour l'ordre deux. Pour chaque orbite, le point initial a pour composantes $(\tilde{A}_1, 0, \tilde{A}_2, 0)$ (ces conditions initiales sont représentées sur la figure III.4.c et III.6.c). Chaque orbite comporte entre 559 et 565 points, chacun des retours successifs sur la surface de section est séparé d'une période d'environ 25 500 ans. La durée totale d'intégration est d'environ 15 millions d'années par orbite.

Sur les figures de section, on constate l'alternance entre orbites discrètes et orbites denses, les premières étant l'intersection de trajectoires périodiques avec la surface de section alors que les secondes sont l'intersection d'orbites quasi-périodiques avec la surface. Ce

phénomène met en évidence la persistance, au moins pendant le temps de l'intégration, des tores invariants supportant les orbites quasi-périodiques ne laissant aucune place à une éventuelle région chaotique. L'application de premier retour semble identique, au moins pour les mille premières itérations, à une rotation dont l'angle varie de manière monotone avec la distance au centre. En ce qui concerne le centre de rotation, il est évidemment confondu avec le point fixe de l'application qui, contrairement à ce qu'il paraît sur les figures, n'est pas à l'origine des coordonnées mais légèrement décalé en :

$$(2.12687 \cdot 10^{-4}, 0, 8.16179 \cdot 10^{-2}, 0) \text{ pour l'ordre un}$$

et en

$$(-2.32357 \cdot 10^{-3}, 0, 7.64984 \cdot 10^{-2}, 0) \text{ pour l'ordre deux.}$$

Ce point fixe n'est autre que l'intersection de l'orbite périodique des périhélie opposés et de la surface de section, orbite à laquelle nous avons fait allusion au paragraphe II.2.1. On retrouve ainsi cette orbite particulière, légèrement déformée par rapport au problème linéaire par l'adjonction des termes non quadratiques.

Remarquons enfin que mis à part le décalage du "centre de rotation" plus important pour l'ordre deux des masses (l'orbite des périhélie opposés est plus fortement déformée), l'ajout des termes d'ordre deux des masses ainsi que des petits diviseurs associés ne semble pas perturber notablement la régularité des trajectoires du système séculaire.

Nous allons voir qu'une étude plus précise, basée sur l'analyse en fréquence, permettra de mettre en évidence des phénomènes n'apparaissant pas sur les surfaces de section.

Figure III.2

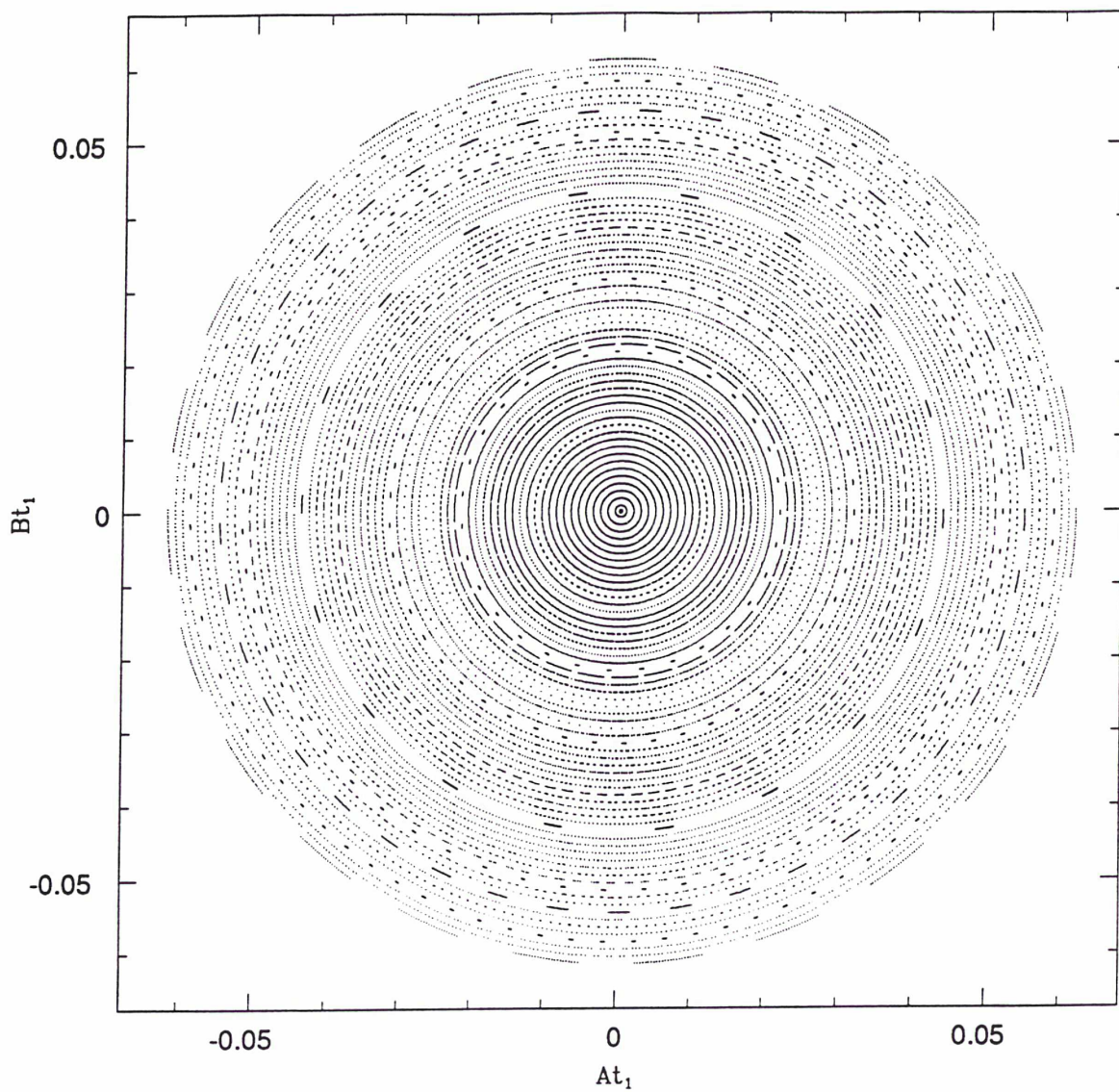


Figure III.2 : Surface de section du problème d'ordre un.
La surface correspond à l'intersection de l'hyperplan d'équation $\tilde{B}_2 = 0$ avec la surface d'énergie, le plan étant rapporté au système de coordonnées $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$.

Figure III.3

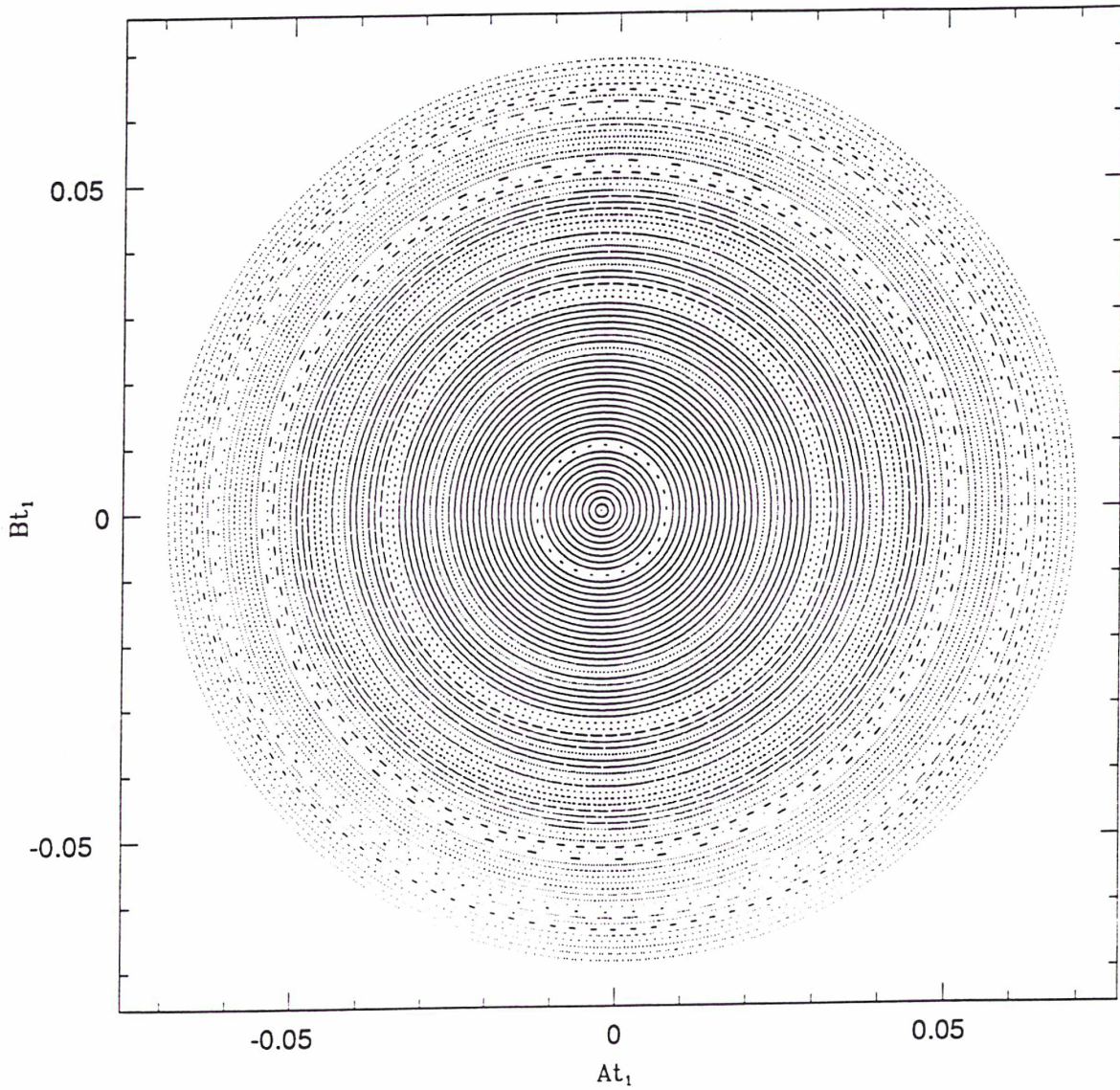


Figure III.3 : Surface de section du problème d'ordre deux.
La surface correspond à l'intersection de l'hyperplan d'équation $\tilde{B}_2 = 0$ avec la surface d'énergie, le plan étant rapporté au système de coordonnées $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$.

III.3.3) Exploration de l'espace des phases à l'aide de l'analyse en fréquence.

III.3.3.1) Stratégie de l'étude.

Nous allons maintenant utiliser l'analyse en fréquence pour étudier la structure de l'espace des phases. Cette étude fournira des résultats beaucoup plus fins que l'emploi de surfaces de section.

On vérifie aisément que la courbe paramétrée par \tilde{A}_1 de la manière suivante $(\tilde{A}_1, 0, \tilde{A}_2(\tilde{A}_1), 0)$ où les \tilde{A}_j sont liés par l'énergie, est transverse à tous les tores de dimension deux de l'espace du problème défini par le hamiltonien quadratique \tilde{H}_2 . Elle s'appuie sur l'orbite des périhélie opposés et prend fin sur le tore limite des mouvements plan.

On peut supposer qu'après une faible déformation de l'espace des phases du problème perturbé (causée par les termes \tilde{H}_4 et \tilde{H}_6), la courbe précédente est toujours transverse aux tores ayant résisté à la perturbation, sauf peut-être dans un voisinage de l'orbite des périhélie opposés. En effet, dans l'espace perturbé, notre courbe n'a plus aucune raison de rencontrer l'orbite des périhélie opposés. De ce fait, elle n'a certainement plus d'intersection avec les tores voisins de cette orbite. Mais cela n'a aucune importance puisque, comme nous le verrons plus tard, la méthode décrite ne peut s'appliquer dans ce voisinage.

Dans le reste de l'espace, la stratégie proposée consiste à choisir sur la courbe un certain nombre de points servant de conditions initiales à une intégration numérique. Chaque trajectoire ainsi obtenue est étudiée par analyse en fréquence afin de déterminer sa nature (quasi-périodique ou non).

Plus précisément, pour chacune des conditions initiales, nous ne retiendrons de l'analyse en fréquence des solutions \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 que les deux fréquences fondamentales ainsi que la précision de leur détermination.

Mais cette opération n'est pas réalisable à proximité de notre orbite périodique. La raison en est la suivante.

Supposons que dans cette région il existe des tores invariants sur lesquels la dynamique est donnée (dans des variables adaptées) par les équations :

$$\begin{cases} I_j = I_j^{(0)} \\ \varphi_j = \omega_j(I^{(0)})t + \varphi_j^{(0)} \end{cases}$$

nos solutions s'écriront alors :

$$\tilde{X}_j = \sqrt{I_j} e^{-i\varphi_j} + \sum \alpha_{p_1, q_1, p_2, q_2} \sqrt{I_1}^{(p_1+q_1)} \sqrt{I_2}^{(p_2+q_2)} e^{i[(q_1-p_1)\varphi_1 + (q_2-p_2)\varphi_2]},$$

la sommation étant étendue sur l'ensemble des quadruplets d'entiers positifs (p_1, p_2, q_1, q_2) vérifiant $|p_1| + |p_2| + |q_1| + |q_2| \geq 2$.

On comprend ainsi que, si la quantité I_2 est très petite devant I_1 (ce qui arrive au voisinage de notre orbite périodique), la fréquence fondamentale ω_2 n'apparaît dans la série qu'avec une amplitude très faible (d'amplitude nulle sur l'orbite périodique). Il est donc difficile, voire impossible, de déterminer cette deuxième fréquence fondamentale.

Pour illustrer ce propos, les tableaux III.6 et III.7 présentent la décomposition quasi-périodique d'une trajectoire voisine de l'orbite des périhélie opposés.

Tableau III.6 : Solution quasi-périodique de la variable \tilde{X}_1 pour une orbite proche de celle des périhélie opposés dans le problème d'ordre deux des masses.

$\nu_k^{(2)}$	$\alpha_k^{(2)}$	$\varphi_k^{(2)}$	$p_k^{(2)}$	$q_k^{(2)}$	$\delta\nu_k^{(2)}$
-69.23845706	.076060380	320.3293	1	0	.000000000
69.23845706	.000947314	39.6707	-1	0	.000000000
-207.71537117	.000502727	60.9879	3	0	.000000001
207.71537117	.000013384	299.0121	-3	0	.000000000
282.12624543	.000006785	161.6464	-2	-1	.000000005
-282.12624543	.000000150	198.3536	2	1	.000000009
143.64933133	.000000089	262.3059	0	-1	.000000000
-143.64933171	.000000002	97.3655	0	1	.000000382
5.17241683	.000000001	2.6345	2	-1	.000000383

Tableau III.7 : Solution quasi-périodique de la variable \tilde{X}_2 pour une orbite proche de celle des périhélie opposés dans le problème d'ordre deux des masses.

$\nu_k^{(2)}$	$\alpha_k^{(2)}$	$\varphi_k^{(2)}$	$p_k^{(2)}$	$q_k^{(2)}$	$\delta\nu_k^{(2)}$
-69.23845706	.002446981	140.3293	1	0	.000000000
69.23845706	.000114202	39.6707	-1	0	.000000000
-207.71537117	.000010502	240.9879	3	0	.000000004
207.71537117	.000001122	299.0131	-3	0	.000000000
282.12624543	.000000192	341.6464	-2	-1	.000000005
-282.12624550	.000000013	198.4600	2	1	.000000065
143.64933171	.000000002	82.6345	0	-1	.000000382
-143.64933171	.000000000	97.3655	0	1	.000000382

Disposant alors des fréquences fondamentales $\nu_1^{(1)}$ et $\nu_1^{(2)}$ calculées sur une période de temps variant entre 60 et 80 millions d'années suivant le problème, nous pouvons procéder à l'étude de la nature des trajectoires comme nous l'avons exposé au paragraphe III.1.2 . Nous n'étudierons pas directement les fréquences fondamentales, mais plutôt leur rapport

$R = \frac{\nu_1^{(2)}}{\nu_1^{(1)}}$, ce qui équivaut à étudier le nombre de rotation de l'application de premier

retour sur la surface de coordonnées $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$. Ainsi, nous pourrions étudier l'évolution de la torsion (évolution du rapport R en fonction de \tilde{A}_1) et celle de la différence du rapport des fréquences calculées sur deux intervalles de temps successifs.

III.3.3.2) Analyse du problème séculaire d'ordre un.

Nous appliquons ici la méthode présentée ci-dessus afin de décrire la variété d'énergie du problème séculaire d'ordre un de Jupiter et de Saturne. Les résultats de cette étude sont

regroupés sur les figures *III.4*. Pour chacune des trois figures, 650 trajectoires ont été intégrées avec comme conditions initiales celles représentées sur la courbe *III.4.c*. Sur la figure *III.4.a*, on constate la parfaite monotonie de la torsion (notons que celle-ci est croissante dans le problème d'ordre un des masses, il en ira différemment pour l'ordre deux). Cette monotonie nous indique la persistance des tores invariants, ou plutôt l'absence de la trace de leur destruction aux endroits où ont été choisies les conditions initiales (en vertu du critère de destruction des tores énoncé dans [LaFrCe]). Mais il se peut qu'entre deux de nos conditions initiales les tores soient détruits et que nous soyons passés au travers. Pour lever définitivement ce doute, intéressons-nous à la variation des fréquences au cours du temps. Sur la figure *III.4.b* est représentée la variation de R sur deux tranches de 67 millions d'années (ou plutôt le logarithme décimal de cette variation) en fonction de \tilde{A}_1 en trait plein, et le logarithme décimal de la précision de la détermination du rapport des fréquences (représenté par des points). Il n'est pas utile de commenter longuement ce graphique, il suffit de remarquer que la dérive des fréquences est approximativement de l'ordre de grandeur de la précision de la détermination pour conclure que les variations du rapport des fréquences n'ont rien de significatif. La précision étant excellente, on peut immédiatement conclure à la parfaite stabilité du problème. Pour confirmer cette évidence, le rapport des fréquences a été calculé, pour cent conditions initiales, sur trente tranches de 67 millions d'années (par condition initiale), et sur cette durée, le taux de variation du rapport R est toujours resté strictement inférieur à 10^{-10} en 67 millions d'années.

III.3.3.3) Comparaison des fréquences à celles déduites d'une normalisation.

Etant donné l'apparente nature quasi-périodique des solutions du système séculaire d'ordre un, on peut se demander si l'approximation des fréquences fondamentales par la normalisation du hamiltonien ne fournirait pas des résultats satisfaisants.

Cette comparaison n'étant faite qu'à titre indicatif, nous ne travaillerons que sur le hamiltonien tronqué au degré quatre. La normalisation du hamiltonien au degré six demanderait de longs calculs qu'il n'est pas nécessaire d'entreprendre.

A l'aide des variables complexes de Poincaré, le hamiltonien s'écrit :

$$\tilde{H}(\tilde{x}_j, \bar{\tilde{x}}_j) = \lambda'_1 |\tilde{x}_1|^2 + \lambda'_2 |\tilde{x}_2|^2 + \tilde{H}_4(\tilde{x}_j, \bar{\tilde{x}}_j)$$

où $\lambda'_j = \frac{4c}{\Lambda_1} \lambda_j$ (cf paragraphe II.3.2.3).

Si on ne retient que les termes polynomiaux en $|\tilde{x}_j|$, le hamiltonien s'écrit alors :

$$\tilde{H}(\tilde{x}_j, \bar{\tilde{x}}_j) = \lambda'_1 |\tilde{x}_1|^2 + \lambda'_2 |\tilde{x}_2|^2 + \lambda_{1,1} |\tilde{x}_1|^4 + \lambda_{1,2} |\tilde{x}_1|^2 |\tilde{x}_2|^2 + \lambda_{2,2} |\tilde{x}_2|^4 .$$

On en déduit les fréquences par la simple relation :

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{\tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{\tilde{x}}_1} = \lambda_1 + 2\lambda_{1,1} |\tilde{x}_1|^2 + \lambda_{1,2} |\tilde{x}_2|^2 \quad (III.3.2.1.1)$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{\tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{\tilde{x}}_2} = \lambda_2 + \lambda_{1,2} |\tilde{x}_1|^2 + 2\lambda_{2,2} |\tilde{x}_2|^2 . \quad (III.3.2.1.2)$$

Il ne s'agit évidemment ici que d'une normalisation au premier ordre (\tilde{H}_4 joue le rôle de la perturbation). Il serait préférable de normaliser le hamiltonien jusqu'aux termes de degré six, mais dans ce cas, nous serions obligés de calculer la fonction génératrice définissant la transformation qui normalise \tilde{H}_4 afin de la réinjecter dans le processus de réduction. Comme cette opération nous demanderait d'importants calculs, nous n'en tiendrons pas compte.

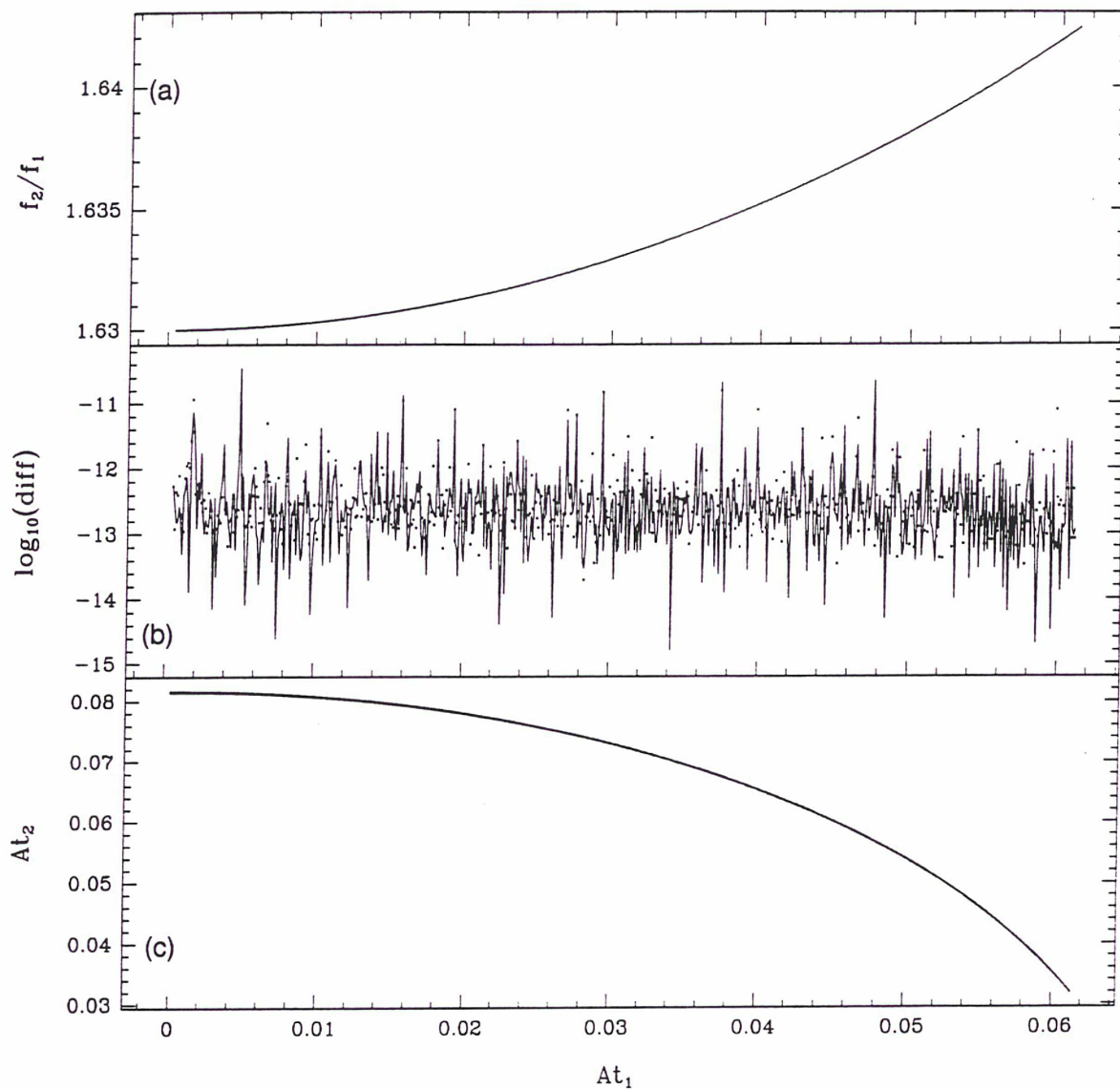
Il ne reste plus qu'à comparer les fondamentales $\nu_1^{(1)}$ issues de l'analyse en fréquence à celles déduites de la forme normale. Cette comparaison est faite sur la courbe décrite au paragraphe précédant, représentative de la totalité de l'espace des phases. Les résultats sont reproduits sur les figures III.5. On trouve en première colonne les fréquences fondamentales de Jupiter puis de Saturne en fonction de la variable \tilde{A}_1 , et en deuxième colonne, les différences des $\nu_1^{(j)} - \bar{\omega}_j$ comptées en seconde d'arc par an.

On constate l'excellente coïncidence des deux méthodes de calcul des fréquences (ces dernières sont identiques au centième de seconde d'arc près), ce qui montre la très rapide convergence de la forme normale. Ceci nous fournit un argument supplémentaire pour nous convaincre de la parfaite régularité du problème séculaire d'ordre un. Dans cette étude, rien ne permet de le distinguer d'un problème intégrable.

III.3.3.4) Stabilité du problème séculaire d'ordre un.

Les trois paragraphes précédants nous ont conduit à conclure à la stabilité du problème séculaire d'ordre un des masses. Quelqu'ait été la méthode utilisée, il nous a été impossible d'y découvrir la moindre trace de chaos ou de non-intégrabilité. Mais cela n'est pas vraiment étonnant : en effet, les coefficients des termes de degré six du hamiltonien étant raisonnablement petits, leur effet (même à long terme) reste pratiquement négligeable ; quant aux termes de degré quatre, ils arrivent tout juste à faire varier les fréquences fondamentales. De plus, la faible variation de ces fréquences dans tout l'espace des phases contraint le rapport R à rester confiné dans le petit intervalle $[1.63; 1.6424]$, interdisant ainsi au système d'entrer dans des régions de résonance séculaire d'ordre faible (les nombres rationnels contenus dans cet intervalle et ayant le plus petit dénominateur sont $18/11$ et $49/30$!). Sachant que les zones chaotiques se forment au voisinage des résonances et que leurs tailles dépendent de l'ordre de ces dernières, il n'y a rien d'étonnant à ce que les régions d'instabilité soient trop petites pour être détectées.

Figures III.4



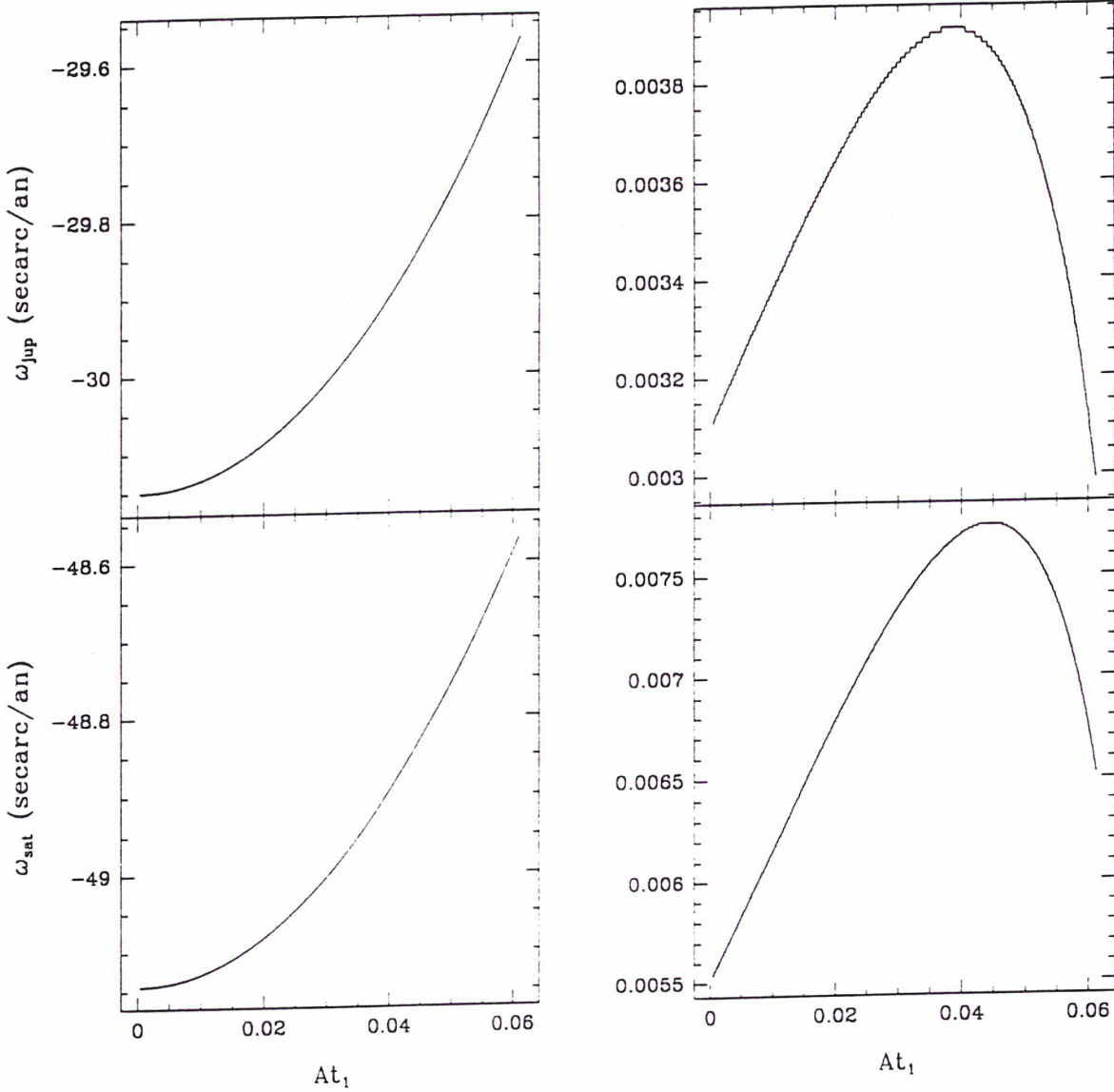
Figures III.4 : Analyse en fréquence de l'espace séculaire d'ordre un.

III.4.a : Rapport des fréquences fondamentales f_2/f_1 (chacune étant déterminée sur un intervalle de temps d'environ 67 millions d'années) en fonction de \tilde{A}_1 .

III.4.b : Taux de diffusion représenté par la quantité $\log_{10}(f_2^{(0)}/f_1^{(0)} - f_2^{(1)}/f_1^{(1)})$ en fonction de \tilde{A}_1 . Les $f_j^{(0)}$ et $f_j^{(1)}$ sont calculés sur intervalles de temps successifs. Les points représentent la précision de la détermination du rapport des fréquences.

III.4.c : Courbe de conditions initiales choisies pour l'analyse de l'espace. $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 0$.

Figures III.5



Figures III.5 : Comparaison des fréquences à celles déduites d'une forme normale.
 III.5.a-b : Fréquences fondamentales (en seconde d'arc par an) de Jupiter (a) et Saturne (b) déduites de l'analyse en fréquence du problème d'ordre un.
 III.5.c-d : Différence entre les fréquences fondamentales calculées par analyse en fréquence et celles issues d'une forme normale. L'unité est toujours la seconde d'arc par siècle.

III.3.3.5) Etude de l'espace séculaire d'ordre deux.

Appliquons la méthode précédante à l'étude détaillée de l'espace des phases du problème séculaire d'ordre deux des masses.

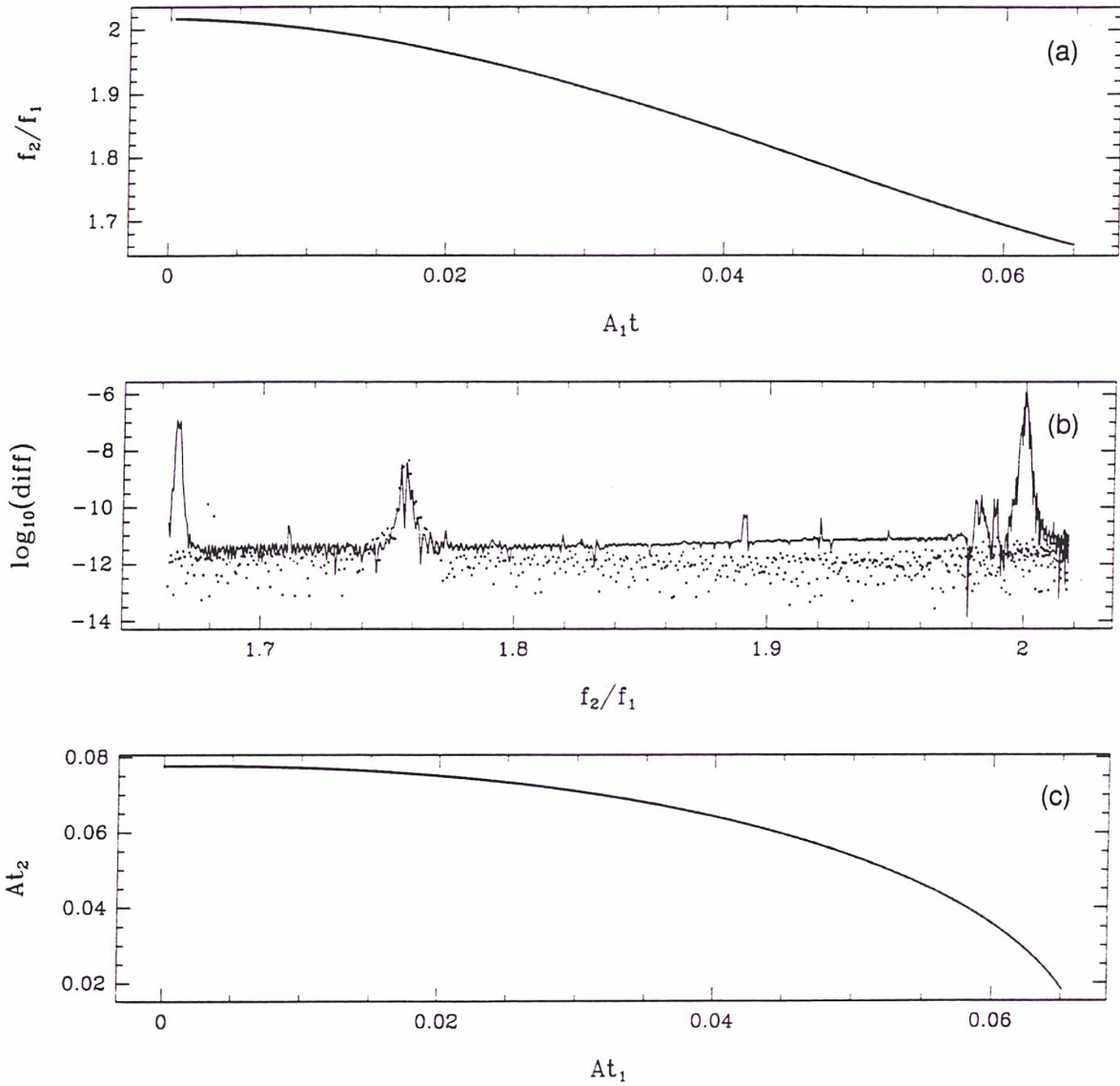
La figure III.6.a représente la torsion ($R = f_2/f_1$ en fonction de \tilde{A}_1) du problème d'ordre deux pour $\alpha = 0.53543$. La torsion est ici une application monotone et continue d'une très grande régularité, ce qui signifie apparemment que chacun des points choisis pour notre étude se trouve sur un tore invariant. Mais, avant de passer à l'étude des deux figures suivantes (qui nous apporteront des informations supplémentaires sur la structure de l'espace des phases), il est intéressant de comparer la torsion d'ordre deux III.6.a à celle d'ordre un III.4.a.

Le fait marquant, mis à par la régularité de ces deux courbes, réside dans le fait que l'une est croissante tandis que l'autre est décroissante. L'ajout des termes d'ordre deux des masses a entre autre effet d'inverser le sens de variation des fréquences.

Si nous faisons décroître la valeur des masses planétaires, la torsion d'ordre un va prendre petit à petit le pas sur le terme d'ordre deux, et il existera une valeur du rapport des demi-grands axes α pour laquelle la torsion s'annulera. Mais en aucun cas, on ne peut affirmer qu'il existe une valeur des masses pour laquelle la torsion s'annule indépendamment de α . On doit se limiter à la déduction suivante : il existe un intervalle dans lequel à chaque valeur du rapport des masses comprise dans cet intervalle correspond une valeur de α pour laquelle la torsion s'annule.

La figure II.6.b nous montre que dans la majeure partie de l'espace, la variation des fréquences fondamentales est comprise entre 10^{-11} et 10^{-12} "/an par million d'années, ce qui est encore une quantité négligeable (notons que cette quantité est significative puisque la précision, représentée par des points sur la figure, reste meilleure que le taux de diffusion). Seulement trois petites régions semblent subir quelques agitations : la première correspond à la résonance (5:3), la suivante (qui est la plus petite) correspond à la résonance (7:4) et enfin la dernière, qui semble plus significative, est située autour de $R = 2$. Mais il ne s'agit pas ici d'une résonance (2:1) car le hamiltonien séculaire ne comporte que des termes de degré pair (en les variables \tilde{X}_j). Il doit donc s'agir plutôt d'une résonance séculaire du type (4:2), ce qui explique sa faible influence. Nous reviendrons sur l'importance de ces résonances au cours du paragraphe suivant.

Figures III.6



Figures III.6 : Analyse en fréquence de l'espace séculaire d'ordre deux.

III.6.a : Rapport des fréquences fondamentales f_2/f_1 (chacune étant déterminée sur un intervalle de temps d'environ 67 millions d'années) en fonction de \tilde{A}_1 .

III.6.b : Taux de diffusion représenté par la quantité $\log_{10}(f_2^{(0)}/f_1^{(0)} - f_2^{(1)}/f_1^{(1)})$ en fonction de \tilde{A}_1 . Les $f_j^{(0)}$ et $f_j^{(1)}$ sont calculés sur intervalles de temps successifs. Les points représentent la précision de la détermination du rapport des fréquences. On trouve en abscisse le rapport des fréquences f_2/f_1 .

III.6.c : Courbe de conditions initiales choisies pour l'analyse de l'espace. $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 0$.

III.4) Influence de la proximité de la résonance en moyen mouvement (2:-5) sur la stabilité d'un problème du type Jupiter-Saturne.

III.4.1) Principe de l'étude.

Jusqu'à présent, nous avons étudié la dynamique du problème séculaire associé au couple Jupiter-Saturne. Nous en avons déduit la stabilité du couple planétaire sur une durée de l'ordre de l'âge du système solaire. Un tel résultat peut certainement être étendu, en dehors de régions de résonance en moyen-mouvement, au problème complet (contenant l'évolution des longitudes des planètes ainsi que les variations à courtes périodes de leurs éléments osculateurs). Si en revanche nous modifions de quelques centièmes la valeur moyenne des demi-grands axes de Jupiter ou de Saturne afin de faire entrer le couple en résonance en moyen-mouvement (2:-5), nous sommes alors confrontés à des phénomènes chaotiques qui apparaissent sur une échelle de temps très courtes [Qu].

Nous allons dans ce qui suit étudier la situation intermédiaire. En d'autres termes, nous nous intéresserons au comportement du problème séculaire, quand les demi-grands axes sont modifiés de manière à rapprocher le couple planétaire de la résonance (2:-5). L'idée étant qu'en s'approchant de cette région, les petits diviseurs intervenant dans les séries séculaires d'ordre deux des masses diminueront, faisant ainsi augmenter l'importance de la partie du hamiltonien comportant les termes de degré six. On peut alors s'attendre à voir augmenter le nombre de résonances séculaires ainsi que leur importance (nous avons rencontré ce phénomène en comparant les problèmes séculaires d'ordre un et deux). Ainsi, nous tenterons par cette étude de savoir si les résonances séculaires peuvent avoir assez d'influence pour altérer la stabilité du problème, ou si seules les résonances en moyen-mouvement ont ce privilège.

Avant d'entamer cette étude, nous devons faire quelques calculs préalables. Tout d'abord, localiser assez précisément la région de libration de l'argument résonant $\theta_1 = 2\lambda_1 - 5\lambda_2$. Ensuite, positionner le couple Jupiter-Saturne par rapport à cette région. Enfin, étudier de quelle manière on peut s'approcher de la zone incriminée tout en restant à l'extérieur, car à l'intérieur, le problème séculaire perd tout son sens.

III.4.2) La résonance (2:-5) en moyen mouvement.

Afin d'étudier la région de libration de la résonance (2:-5), nous allons isoler, dans le développement en série de Fourier de la distance mutuelle, les harmoniques de l'angle $\theta_1 = 2\lambda_1 - 5\lambda_2$. Puis, nous utiliserons le hamiltonien du pendule simple en tant que modèle de base de la résonance [LiLi].

Le hamiltonien du problème à deux planètes se développe en série de Fourier de la manière suivante :

$$F(\Lambda_j, x_j, \bar{x}_j; D_2) = F_0(\Lambda_j) + \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} F_{k,l}(\Lambda_j, x_j, \bar{x}_j; D_2) \exp(i(k\lambda_1 + l\lambda_2)).$$

Le hamiltonien non perturbé F_0 étant la somme de deux problèmes de Kepler, il s'écrit :

$$F_0(\Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{\Lambda_1^2} + \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{\Lambda_2^2} \right)$$

et $F_{k,l}$ est le coefficient d'indice (k,l) du développement en série de Fourier de la fonction

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2^2}{\Lambda_2^2} \frac{m_2}{m_0} \left(-\frac{a_2}{\Delta} + \sqrt{\frac{\beta_1 \beta_2}{m_1 m_2} \frac{F_c}{\sqrt{\alpha}}} \right) .$$

Plutôt que d'étudier la résonance (2:-5), intéressons-nous à une résonance $(p:-q)$ quelconque (p et q sont évidemment deux entiers positifs premiers entre eux). Cette résonance survient pour des valeurs des demi-grands axes vérifiant la relation :

$$p \frac{\partial F_0(\Lambda_1^r)}{\partial \Lambda_1} = q \frac{\partial F_0(\Lambda_2^r)}{\partial \Lambda_2} \text{ c'est-à-dire } \left(\frac{\Lambda_1^r}{\Lambda_2^r} \right)^3 = \frac{p}{q} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^3$$

ce qui nous conduit à définir une valeur résonante du rapport des demi-grands axes α par

$$\alpha_r = \left(\frac{p}{q} \right)^{2/3} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/3} .$$

Nous devons alors, par le biais de la transformation canonique suivante :

$$(\Lambda_j, \lambda_j, x_j, \bar{x}_j) \longmapsto (I_j, \theta_j, x_j, \bar{x}_j)$$

définie par les relations linéaires :

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ -q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

où r et s sont des entiers vérifiant : $ps + rq = 1$,

isoler l'argument critique $\theta_1 = p\lambda_1 - q\lambda_2$.

Dans les nouvelles variables, le hamiltonien F s'écrit :

$$\begin{aligned} G(I_j, \theta_j, x_j, \bar{x}_j) &= G_0(I_j) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_{k,0}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \exp(ik\theta_1) \\ &+ \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*} G_{k,l}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \exp(i(k\theta_1 + l\theta_2)) \end{aligned}$$

$$\text{avec : } G_{k,l} = F_{kp+lr, ls-kq} .$$

Mais comme

$$\frac{\partial G_0}{\partial I_1}(I_1^r, I_2^r) = 0 ,$$

la fréquence associée à l'angle θ_2 est grande devant celle des trois angles ω_1 , ω_2 et θ_1 , cela nous permet par une méthode de moyennisation sur θ_2 de réduire le problème à trois degrés de liberté.

Par le processus de normalisation de Lindstedt limité à l'ordre un, on élimine l'angle θ_2 pour obtenir le nouveau hamiltonien \tilde{G} vérifiant :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(I_j, \theta_1, x_j, \bar{x}_j) &= G_0(I_j) + G_{0,0}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \\ &+ \sum_{k \in Z^*} G_{k,0}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \exp(ik\theta_1).\end{aligned}$$

Le problème ainsi redéfini n'approxime raisonnablement l'évolution "moyenne" de l'ancien que dans la mesure où les quantités (I_1, I_2) restent voisines de leurs valeurs résonantes (I_1^r, I_2^r) .

Nous allons maintenant procéder à une dernière simplification du hamiltonien. Si nous posons $\epsilon = \text{Max}(e_1, e_2, 1 - \cos J)$, les relations de d'Alembert nous conduisent aux estimations suivantes : $|G_{k,0}| = O(\epsilon^k |p-q|)$, ce qui nous permet de négliger (au moins dans la situation de Jupiter et Saturne où les excentricités et inclinaisons sont faibles, et la quantité $|p-q|$ égale à trois) les termes $G_{k,0}$ pour $k \leq 2$. Cette dernière simplification nous conduit au hamiltonien H :

$$\begin{aligned}H(I_j, \theta_1, x_j, \bar{x}_j) &= G_0(I_j) + G_{0,0}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \\ &+ G_{1,0}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \exp(i\theta_1) + G_{-1,0}(I_j, x_j, \bar{x}_j) \exp(-i\theta_1).\end{aligned}$$

I_2 étant une intégrale première du mouvement, nous la fixons à sa valeur résonante I_2^r , et comme I_1 doit être peu éloignée de I_1^r notre dernière opération consiste à poser : $I_1 = I_1^r + I$, et à développer H en I en négligeant les termes de degrés supérieurs à deux. Comme $\frac{\partial G_0}{\partial I_1}(I_1^r, I_2^r) = 0$, l'expression finale du hamiltonien sera la suivante :

$$\begin{aligned}K(\theta_1, I, x_j, \bar{x}_j) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_0}{\partial I_1^2}(I_j^r) I^2 + G_{0,0}(I_j^r, x_j, \bar{x}_j) \\ &+ G_{1,0}(I_j^r, x_j, \bar{x}_j) \exp(i\theta_1) + G_{-1,0}(I_j^r, x_j, \bar{x}_j) \exp(-i\theta_1).\end{aligned}$$

On peut encore écrire le hamiltonien sous la forme :

$$\begin{aligned}K(\theta_1, I, x_j, \bar{x}_j) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_0}{\partial I_1^2}(I_j^r) I^2 + G_{0,0}(I_j^r, x_j, \bar{x}_j) \\ &+ 2A_{p,-q}(x_j, \bar{x}_j) \cos(\theta_1 + \varphi_{p,-q}(x_j, \bar{x}_j)).\end{aligned}$$

Comme nous remarquons, après quelques calculs numériques, que la variation de l'amplitude $A_{p,-q}$ ne dépend que très faiblement de l'argument des variables x_j , nous pouvons considérer qu'approximer le problème défini par le hamiltonien K comme celui d'un pendule dont l'amplitude dépendrait du module des x_j , est tout à fait raisonnable. Le problème ainsi reconsidéré nous fournit de manière presque immédiate la localisation de la zone de libration de l'argument θ_1 .

Pour ce faire, nous avons estimé l'écart maximal entre les séparatrices du pendule pour chaque valeur des modules des quantités x_j , que nous avons transcrit en valeur de demi-grand axe. Ce calcul nous a fourni enfin, pour chaque valeur de $|x_j|$, une approximation

de l'intervalle dans lequel doit se trouver le rapport des demi-grands axes α pour que l'argument critique θ_1 soit en libration. Plus précisément, comme nous pouvons nous affranchir de la longitude des périhélie, les séparatrices (surfaces enserrant la région de libration) sont représentées par des surfaces de l'espace $(\alpha, |x_1|, |x_2|)$ d'équation : $\alpha = S(|x_1|, |x_2|)$. Mais pour le moment, calculons l'équation des séparatrices dans l'espace rapporté aux coordonnées $(I, \theta_1, |x_1|, |x_2|)$.

On vérifie aisément que cette équation est amenée par la relation :

$$I_s = \pm \sqrt{\frac{2|A_{p,-q}(x_j, \bar{x}_j)|}{\left| \frac{\partial^2 G_0(I_j^r)}{\partial I_1^2} \right|}} \cos(\theta_1 + \varphi(x_j, \bar{x}_j)) .$$

Avant de poursuivre les calculs, posons :

$$A_{p,-q} = \frac{Gm_1m_2}{a_2} = \frac{\mu_1\mu_2\beta_1\beta_2^2}{\Lambda_2^2} \frac{m_2}{m_0} B_{p,-q} .$$

$B_{p,-q}$ est alors une grandeur scalaire correspondant à l'amplitude du terme résonant. Quelques calculs montrent alors que l'équation de la séparatrice peut s'écrire :

$$I_s = \pm U_{p,-q} \cos \psi_{p,-q}$$

avec $\psi_{p,-q} = \theta_1 + \varphi(x_j, \bar{x}_j)$ et

$$U_{p,-q} = 2\Lambda_2^r \sqrt{\frac{2\mu_1}{3\mu_2}} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \sqrt{\frac{|B_{p,-q}|}{\left(\frac{p}{\alpha^r}\right)^2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} q^2}} .$$

On peut enfin calculer les valeurs α_s prises par α sur la séparatrice. Il s'agit de :

$$\alpha_s = \alpha^r \left(\frac{1 + p \frac{I_s}{\Lambda_1^r}}{1 - q \frac{I_s}{\Lambda_2^r}} \right)^2 ,$$

qui nous livre les bornes maximales et minimales de l'intervalle contenant α^r dans lequel l'angle critique $\theta_1 = p\lambda_1 - q\lambda_2$ est en libration par les formules :

$$\alpha_{\text{Max}} = \alpha^r \left(\frac{1 + ph\sqrt{\alpha^r} U_{p,-q}}{1 - qU_{p,-q}} \right)^2 \quad (\text{III.4.2.1})$$

$$\alpha_{\text{Min}} = \alpha^r \left(\frac{1 - ph\sqrt{\alpha^r} U_{p,-q}}{1 + qU_{p,-q}} \right)^2 , \quad (\text{III.4.2.2})$$

dans lesquelles h est égal à : $\frac{\beta_1 \mu_1}{\beta_2 \mu_2}$.

Ces deux formules nous permettent de représenter, en fonction des excentricités planétaires, les valeurs de α pour lesquelles l'argument critique entre en libration.

Revenons maintenant à notre étude concernant la résonance (2:-5). Les formules (*III.4.2.21*) et (*III.4.2.2*), nous permettent d'écrire les équations des surfaces séparatrices sous la forme

$$\begin{cases} \alpha_{\text{Max}} = f(e_1, e_2) \\ \alpha_{\text{Min}} = g(e_1, e_2), \end{cases}$$

surfaces n'ayant qu'un point commun de coordonnées $(\alpha_r, 0, 0)$, avec $\alpha_r = 0.543$.

Les projections de ces deux surfaces sur le plan d'équation $e_1 = 0$ sont représentées sur la figure *III.6.a* par la région grisée.

Si la projection d'un point de coordonnées (α, e_1, e_2) se situe à l'intérieur de cette région, l'angle θ_1 associé est alors en libration (nous sommes au coeur de la résonance). Si, au contraire, elle se trouve à l'extérieur, l'angle θ_1 est en circulation (région pour laquelle le problème séculaire reste valable). Il reste le cas où la projection appartient à la zone grisée. Dans ce cas, on ne peut pas déduire de la figure la nature du mouvement de l'angle critique. Pour lever cette ambiguïté, il faut directement comparer les coordonnées du point en question à celles des séparatrices.

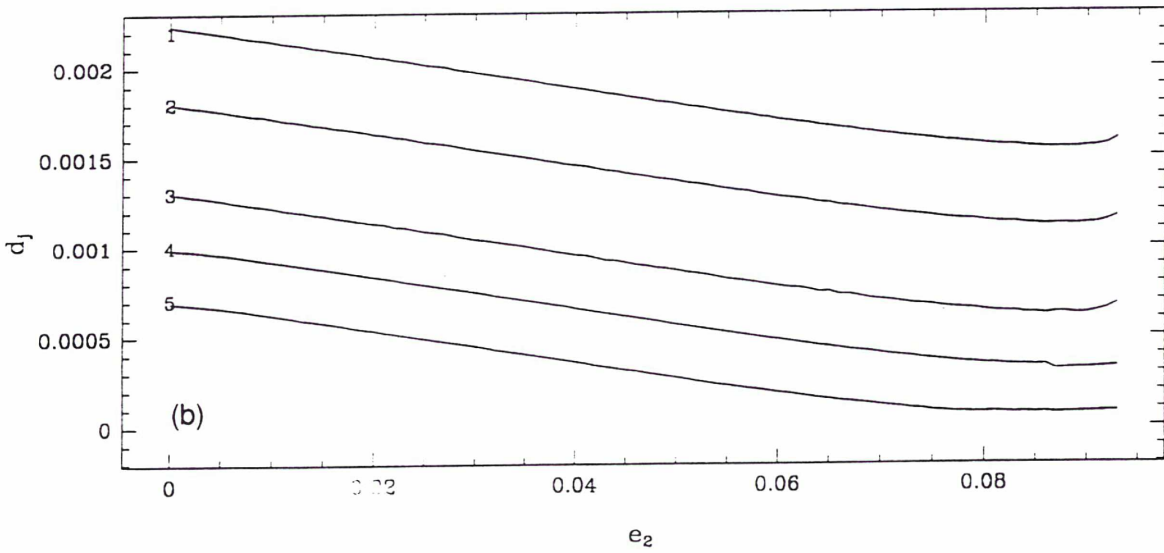
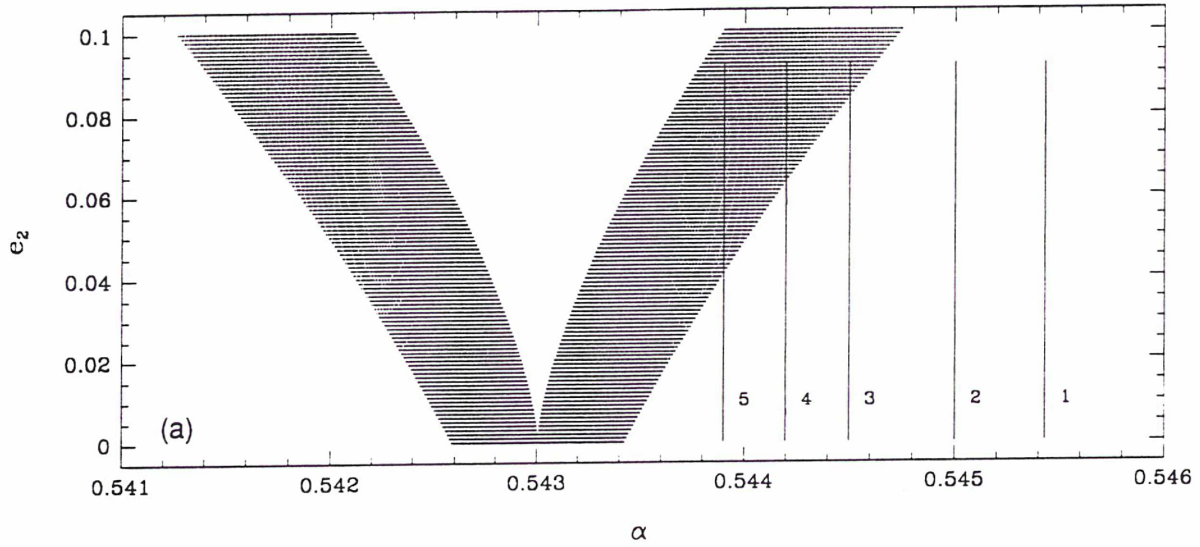
En plus de la région de libration, on trouve sur la figure *III.7.a* cinq segments verticaux. Ces derniers correspondent à la projection de la courbe sur laquelle évolueraient les éléments osculateurs (α, e_1, e_2) du couple Jupiter-Saturne liés par la conservation du moment cinétique pour α fixe. La courbe la plus à droite ($\alpha = 0.54543$) est associée à la configuration réelle du couple planétaire. Les quatre autres ont été choisies arbitrairement afin d'étudier la réaction du problème séculaire à l'approche de la résonance.

La figure *III.7.a* nous permet de vérifier qu'avec ces conditions initiales réelles (segment de droite), le couple Jupiter-Saturne reste à l'extérieur de la résonance. Il en est de même pour la deuxième valeur du rapport des demi-grands axes $\alpha = 0.545$. En revanche, les trois courbes suivantes rencontrant la surface grisée, il est impossible de les positionner par rapport aux séparatrices.

C'est pourquoi nous avons tracé sur la figure *III.7.b*, la distance euclidienne séparant chaque point de la courbe de moment cinétique constant à la région de libration. Cette distance (notée d_j) est représentée pour chacune des cinq valeurs de α en fonction de l'excentricité e_2 paramétrant les courbes de moment cinétique constant.

On peut ainsi vérifier que chacune des courbes est toujours à l'extérieur de la région de libration, ce qui justifie l'utilisation du hamiltonien séculaire.

Figures III.7



Figures III.7 : Région de libration de la résonance en moyen-mouvement (2:-5).

III.7.a : Projection de cette région sur le plan de coordonnées (α, e_2) .

III.7.b : Distance euclidienne séparant les courbes dont la projection est représentée par les segments 1 à 5 sur la figure III.7.a, et la surface séparatrice de la région de libration.

III.4.3) Evolution des coefficients du hamiltonien.

Avant d'étudier la dynamique séculaire des cinq problèmes ainsi définis, intéressons-nous à l'évolution des termes du hamiltonien séculaire sous l'effet de la diminution de la valeur des petits diviseurs due à la variation des demi-grands axes. Le tableau III.8 regroupe pour chaque valeur de α (première colonne) la valeur du diviseur $d_{2,5}$ défini par la relation

$$d_{2,5} = 2 - 5 \frac{n_1}{n_2} = 2 - 5 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \alpha^{-3/2}.$$

Les colonnes suivantes regroupent les normes des monômes homogènes de degré deux, quatre et six constituant le hamiltonien. La norme choisie est simplement la somme de la valeur absolue des coefficients de tous les monômes homogènes du degré donné.

Comme nous l'avions prédit au paragraphe I.4.2, les coefficients des termes quadratiques ne subissent qu'une faible variation, ils sont modifiés d'au plus six centièmes, et ceux de degré quatre n'ont pas doublé. En revanche, l'effet du carré du petit diviseur se fait fortement ressentir au degré six où la norme augmente d'un facteur sept pour une variation de α ne dépassant pas $3 \text{ } ^0/_{00}$.

Tableau III.8 : Valeurs du petit diviseur et de la norme des polynômes homogènes du hamiltonien en fonction de α .

α	$d_{2,5}$	Degré 2	Degré 4	Degré 6
0.54543	0.013416	46.59	2253	590489
0.54500	0.011035	46.31	2360	864873
0.54450	0.008268	46.07	2516	1511048
0.54420	0.006609	46.05	2790	2310087
0.54390	0.004950	46.03	3747	3923615

III.4.4) Aspect global des cinq espaces des phases.

Comme nous l'avons fait pour le couple Jupiter-Saturne dans ses conditions réelles ($\alpha = 0.54543$), nous devons calculer les nouvelles valeurs du paramètre D_2 qui dépend de α et de l'énergie (ou plutôt des cinq valeurs des hamiltoniens séculaires). Ces quantités seront calculées à l'aide des conditions initiales regroupées dans le tableau III.9. Elles sont définies de la même manière qu'au paragraphe III.2.1 comme images des conditions initiales du tableau I.2 par l'inverse de la transformation linéaire (II.3.2.3.7) (cette transformation étant différente pour chaque valeur de α).

Tableau III.9 : Conditions initiales fixant la valeur de l'énergie pour chacun des cinq espaces séculaires étudiés.

α	\tilde{A}_1	\tilde{B}_1	\tilde{A}_2	\tilde{B}_2
0.54543	0.00386936	0.04867994	0.05518036	0.00343321
0.54500	0.00393914	0.04867147	0.05532566	0.00326274
0.54450	0.00408273	0.04866397	0.05556773	0.00292664
0.54420	0.00425049	0.04866214	0.05578088	0.00254737
0.54390	0.00458168	0.04866366	0.05608502	0.00181785

On calcule ensuite, pour chacune des cinq énergies fixées, la trace de la variété d'énergie sur le plan d'équation $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 0$. Ces courbes serviront de base à l'analyse de l'espace séculaire.

Les courbes en question, représentées sur la figure III.8.a, sont encore semblables à des arcs d'ellipse, la diminution des petits diviseurs ne paraît donc pas avoir notablement déformé l'espace des phases. On aurait pourtant pu s'attendre à ce que, en se rapprochant de la résonance (2:-5), les excentricités subissent de plus importantes variations, en particulier être plus grandes. Mais il n'en est rien.

En effet, on constate, d'après le tableau III.10 où sont représentées pour chaque valeur de α les excentricités séculaires maximales de Jupiter et de Saturne, que ces dernières restent faibles et que la petite augmentation de celle de Jupiter est contrebalancée par la diminution de celle de Saturne. Les contraintes imposées par la conservation du moment cinétique et de l'énergie restent donc toujours aussi fortes.

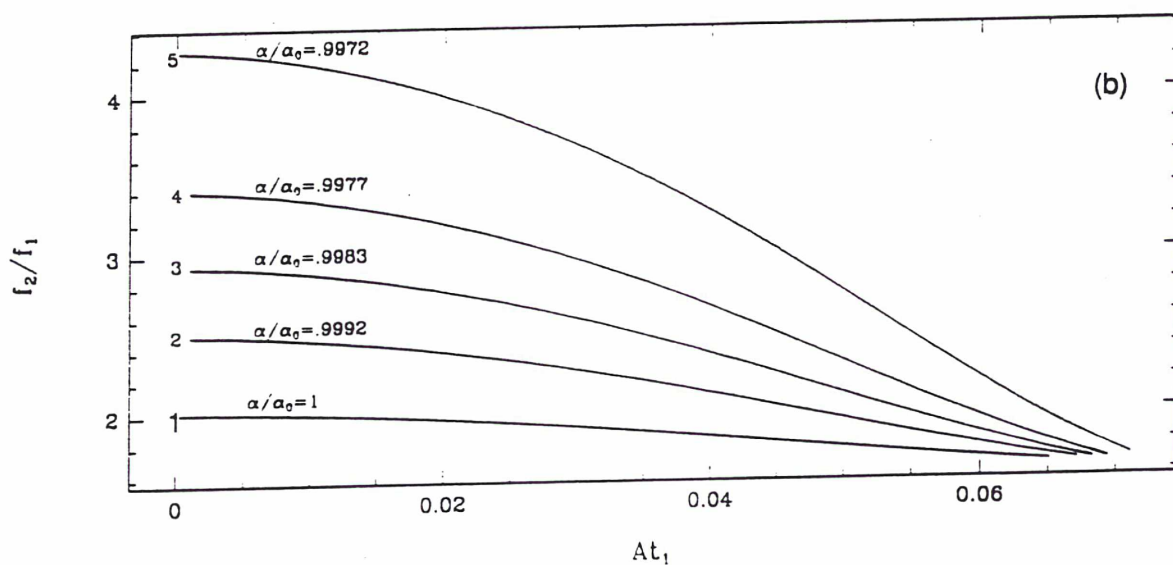
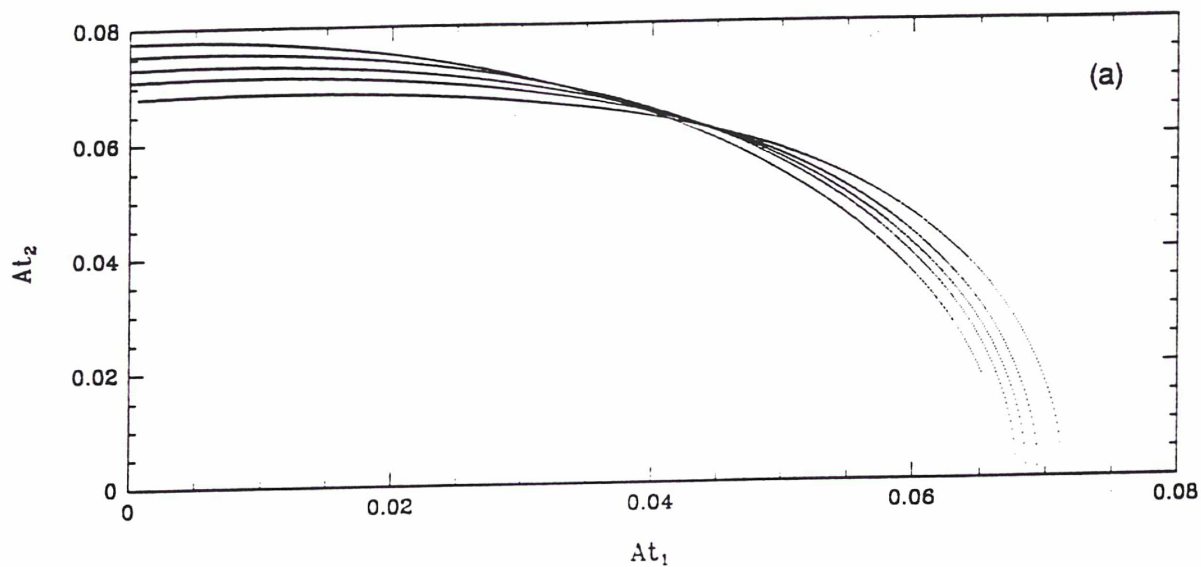
Tableau III.10 : Excentricités séculaires maximales de Jupiter et Saturne accessibles pour chaque valeur de α .

α	e1 Max	e2 Max
0.54543	0.0636	0.0851
0.54500	0.0647	0.0856
0.54450	0.0654	0.0853
0.54420	0.0663	0.0849
0.54390	0.0680	0.0846

Suivant la stratégie élaborée au paragraphe III.3.3.1, environ 600 points ont été choisis sur chacune des courbes de la figure IV.9 afin de calculer la torsion ainsi que sa variation au cours du temps. Les cinq torsions sont reproduites sur la figure III.8.b, celle portant le numéro 1 est évidemment la même que sur la figure III.6.c. Ces courbes d'aspect très régulier semblent être encore monotones, ce qui tendrait à prouver la conservation

de la plupart des tores invariants. Leur sens de variation est le même dans les cinq cas (contrairement à ce qu'il advient lorsque l'on passe de la torsion d'ordre un à celle d'ordre deux), seule la pente évolue. Comme nous l'avions pressenti plutôt, la pente augmente avec la diminution du petit diviseur. Ce phénomène entraîne alors l'élargissement de l'intervalle dans lequel la torsion prend ses valeurs, ce qui permet au système de rencontrer un plus grand nombre de résonances séculaires d'ordre faible. En contre-partie, il est probable que la taille des régions de libration associées à ces résonances soit plus faible puisque plus la torsion est grande, plus une petite variation des actions suffit à éloigner le système de la résonance. Mais, malgré l'augmentation de la pente de la torsion, peu de résonances d'ordre faible sont accessibles. Ainsi, la résonance (2:-1) qui, comme on l'a vu provient de monômes de degré six de la forme $\tilde{X}_1^4 \bar{X}_2^2$, est accessible pour les cinq valeurs de l'énergie, mais n'a qu'un effet insignifiant. La résonance (3:-1) est elle aussi atteinte pour les courbes quatre et cinq, nous y reviendrons. Enfin, la résonance (4:-1) qui (parce que le hamiltonien ne comporte que des monômes de degré pair) n'est pas d'ordre cinq mais plutôt dix, n'est atteinte que sur la surface d'énergie correspondant à $\alpha = 0.5439$. Remarquons que la courbe cinq possède, contrairement aux quatre premières, une très légère déformation (qui sera l'objet de l'étude du paragraphe suivant) à l'endroit précis de la rencontre de la résonance (3:-1). Une étude semblable à celle présentée au paragraphe III.3.3.5 a été menée pour les trois valeurs de α associées aux courbes 2,3 et 4 de la figure III.8.b. Les résultats, qu'il n'est pas utile de détailler, sont sans surprise. Le taux de diffusion (variation du rapport des fréquences en fonction du temps) reste toujours inférieur à 10^{-10} en 67 millions d'années, excepté dans un très petit voisinage des résonances (3:-1) et (2:-1) où il est proche de 10^{-6} pour la même durée. La situation est semblable à celle de Jupiter-Saturne pour leurs conditions réelles, et la conclusion est bien sûr la même.

Figures III.8



Figures III.8 : Exploration des cinq espaces séculaires.
 III.8.a : Les cinq courbes de conditions initiales. \tilde{A}_2 en fonction de \tilde{A}_1 avec $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 0$.
 III.8.b : Courbes de torsion pour les cinq valeurs de α .

III.4.5) Etude du problème séculaire pour $\alpha = 0.5439$.

Pour achever cette étude, attardons-nous sur le dernier espace séculaire proposé. Il s'agit de celui pour lequel le problème Jupiter-Saturne est le plus proche de la séparatrice de la résonance en moyen-mouvement (2:-5). Malgré cette proximité, la torsion (présentée sur la figure II.8.b, courbe 5) semble toujours très régulière, sauf peut-être pour

$\frac{f_2}{f_1} = 3$. La figure III.9a, sur laquelle on trouve un agrandissement de la courbe 5 citée ci-dessus, met en évidence une discontinuité au passage de la résonance séculaire (1:-3). Cette discontinuité est certainement la marque de la destruction de tores invariants voisins de la zone de résonance, voire même de la présence de phénomènes chaotiques. Quoique il en soit, à la vue de la régularité de la torsion, on peut d'ores et déjà conclure que si des phénomènes chaotiques existent au sein de l'espace des phases, ils ne peuvent être que de faibles ampleurs et surtout très localisés. Pour aller plus loin, intéressons-nous à la figure III.9.b.

Cette dernière représente le taux de diffusion en fonction du rapport des fréquences fondamentales. Il s'agit plus précisément du logarithme de la différence du rapport des fréquences fondamentales calculé sur deux tranches consécutives de 67 millions d'années. Comme à l'habitude, le logarithme décimal de la précision de la détermination des fréquences est représenté par des points. Ce graphique indique que la majeure partie de l'espace des phases est encore peuplée de régions où la dynamique est quasi-périodique (la diffusion est de l'ordre de 10^{-10} avec quelques brèves excursions aux alentours de 10^{-8}). Notons que cette diffusion correspond à des variations des fréquences fondamentales n'excédant pas $2 \cdot 10^{-10}$ /an par million d'années à $2 \cdot 10^{-8}$ /an par million d'années). Seules quatre régions se détachent : celles correspondant aux résonances (2:-1), (11:-3) et (4:-1) et surtout la région voisine de la résonance (3:-1). Les trois premières régions, assez étroites, ont un taux de diffusion qui ne dépasse jamais 10^{-6} en 67 millions d'années. De plus, la précision étant du même ordre de grandeur, ce taux n'est pas significatif. Cette dernière remarque nous pousse à conclure que l'étendue de la diffusion en ces lieux est sans doute due à l'erreur interne de la méthode. Nous ne sommes donc pas forcément en présence de chaos. Ces trois régions ont chacune subi une étude approfondie (nous allons la détailler plus bas) qui n'a fait que confirmer la présence de points fixes, ou plutôt le franchissement des séparatrices associées, sans apporter d'autre information. On peut donc conclure que ces régions de résonances sont, une fois de plus, de taille totalement négligeable et qu'elles n'ont aucun effet sur la dynamique du problème. En revanche, le cas de la résonance (3:-1) paraît beaucoup plus intéressant. En effet, le taux de diffusion atteint ici $10^{-2.5}$ en 67 millions d'années (ce qui engendre une variation des fréquences fondamentales ne dépassant pas 1" en 300 millions d'années) et garde toute sa signification puisque la précision, bien qu'étant mauvaise, reste encore inférieure à la variation des fréquences. Ce phénomène, mis en parallèle avec la singularité que montrait la courbe 5 de la figure IV.4 est, sinon la trace d'un comportement chaotique, du moins l'indice d'une destruction de tores. Nous allons ainsi consacrer la dernière partie de cet exposé à l'étude détaillée du voisinage de la résonance séculaire (3:-1).

Débutons cette étude par une section de Poincaré. La figure III.10.a représente un détail de l'intersection des trajectoires avec la surface d'équation $\tilde{B}_2 = 0$. Il s'agit de 50 orbites

de l'application de premier retour pour lesquelles les points initiaux ont été choisis voisins de $\tilde{A}_1 = 0.045$ et avec $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_1 = \tilde{B}_2 = 0$. Cette figure met en évidence l'existence de trois îles de libration ainsi que les trois points hyperboliques associés (sur la figure, lieux où s'accumulent les orbites).

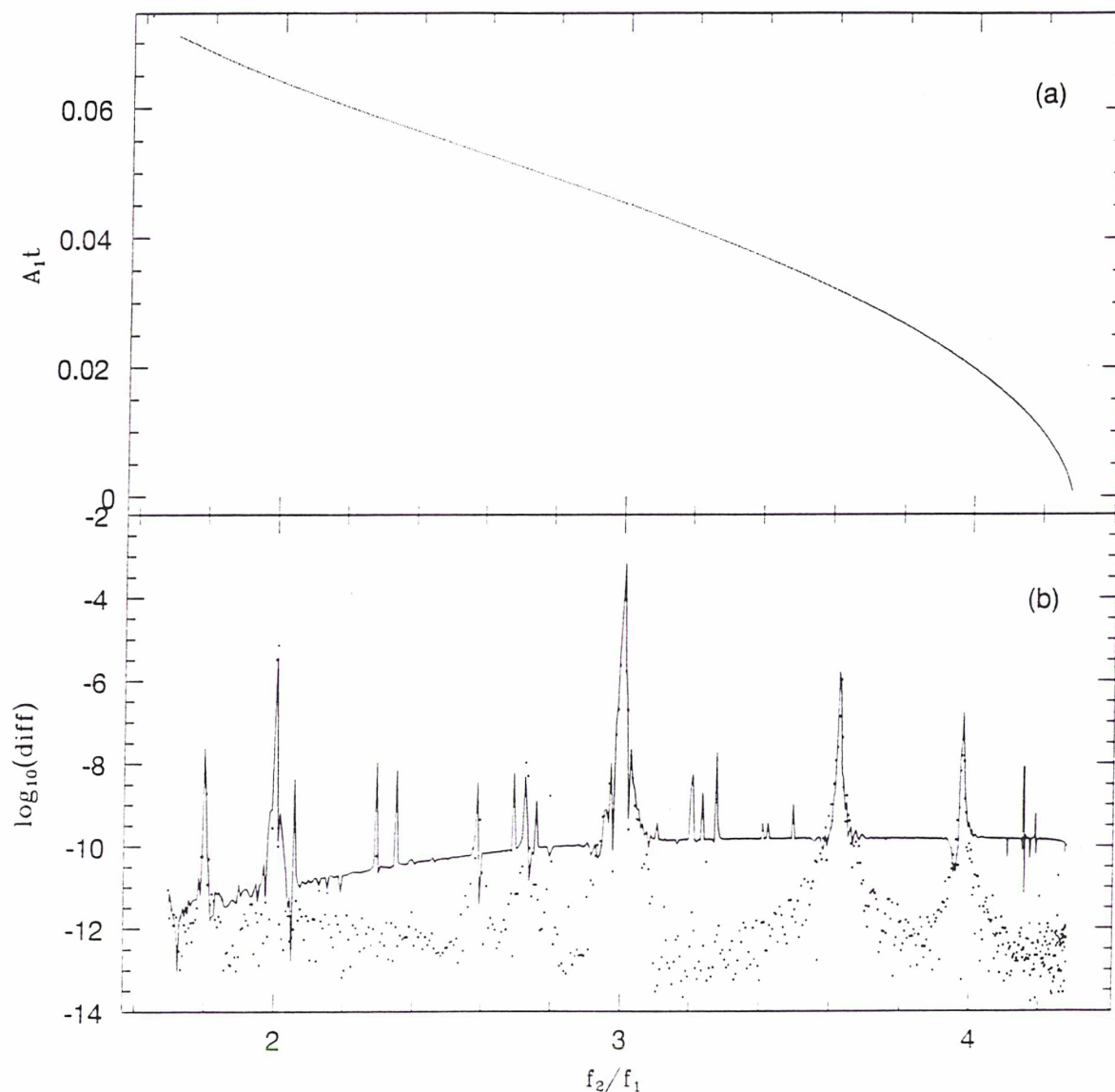
Les figures *III.10.b* et *III.10.c* montrent un agrandissement de ces deux types de point d'équilibre (traces des orbites périodiques résonantes sur la surface de section). Notons toujours la totale régularité des trajectoires, en particulier des séparatrices (figure *III.10.c*) qui n'ont pas l'air de s'entrelacer. Mais cette étude ne pouvant donner que des résultats qualitatifs, nous allons une nouvelle fois recourir à l'emploi de l'analyse en fréquence. La figure *III.11.a* montre l'analyse fine de la singularité de la courbe *III.9.a*. Cette courbe a la forme typique du passage du point hyperbolique du pendule simple (cf paragraphe III.1.2 et figure *III.1.a*).

Le comportement du système est ici plus complexe que celui du pendule simple, on retrouve bien la discontinuité, marquée par une droite presque verticale au passage du point hyperbolique, mais en avant et en arrière de ce point, la torsion n'est pas monotone. Quoiqu'il en soit, cette analyse ne nous fournit aucune trace de chaos. Une région chaotique existe certainement au voisinage du point hyperbolique (marqué par la singularité de la figure *III.11.a*), mais en comparant notre courbe de fréquence à celles construites par J.Laskar pour le standard mapping [LaFrCe], il semble claire qu'aucune de nos conditions initiales ne se trouvent dans cette zone chaotique.

La figure *III.11.b*, correspondant aux résultats d'une étude semblable centrée sur le point elliptique, va nous donner une information supplémentaire sur cette zone. On reconnaît sur ce graphique le palier typique de la rencontre de la région de libration. Notons que sur les bords de cette île, la courbe de fréquence possède plusieurs discontinuités dont l'interprétation est très délicate. Peut-être sont-elles dues à la présence de résonances secondaires ? Malgré cette difficulté, la présence marquée de l'île de libration va nous permettre d'accéder à une information importante. D'après une estimation de Chirikov [Chi], si la largeur de l'île de libration est Δ , dans notre cas, $\Delta = 2.2 \cdot 10^{-4}$, la taille de la région chaotique au voisinage du point hyperbolique (due à l'entrelacement des séparatrices) est d'ordre $\exp(-1/\sqrt{\Delta})$, ce qui correspond dans notre situation à une largeur d'environ 10^{-30} . Une si faible taille rend impossible le discernement d'une telle région par quelque méthode que ce soit. En revanche, l'analyse de la régularité de l'application fréquence nous a permis de mettre en évidence sa présence probable.

Revenons brièvement sur les résonances (2:-4) et (1:-4). Pour ces dernières, l'étude des surfaces de section n'a rien montré, même les îles de libration sont restées invisibles. L'analyse en fréquence fine de ces régions n'a pas permis, elle non plus, de discerner le palier de libration, ce dernier devant être très inférieur à 10^{-4} , distance séparant deux conditions initiales successives.

Figures III.9

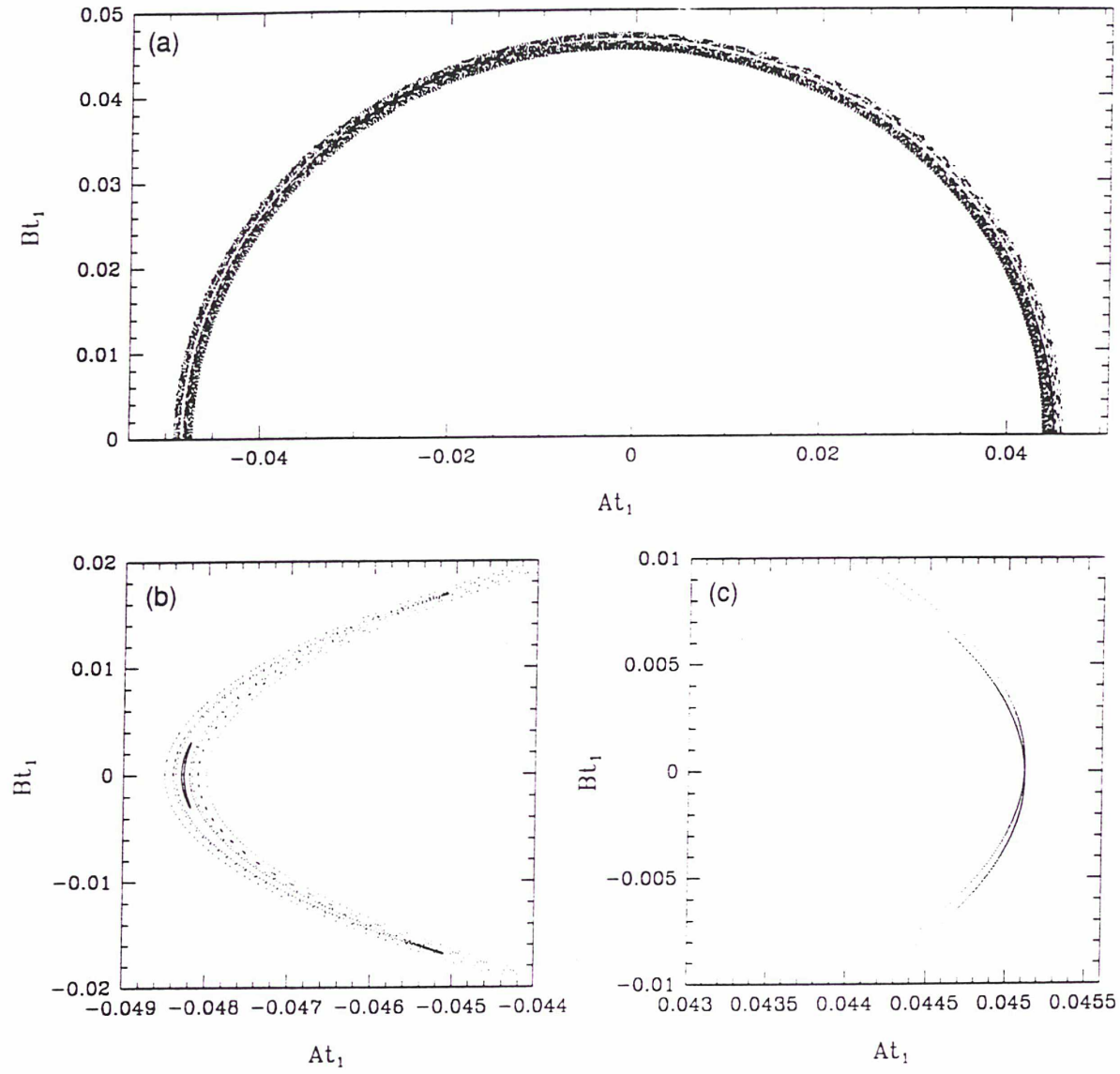


Figures III.9 : Espace séculaire d'ordre deux pour $\alpha = 0.5439$

III.9.a : \tilde{A}_1 en fonction du rapport des fréquences fondamentales. Il s'agit de la courbe 5 de la figure III.8.a (où abscisses et ordonnées ont été inversés), mais la dilatation de l'échelle du rapport des fréquences met ici en évidence la discontinuité pour $f_2/f_1 = 3$.

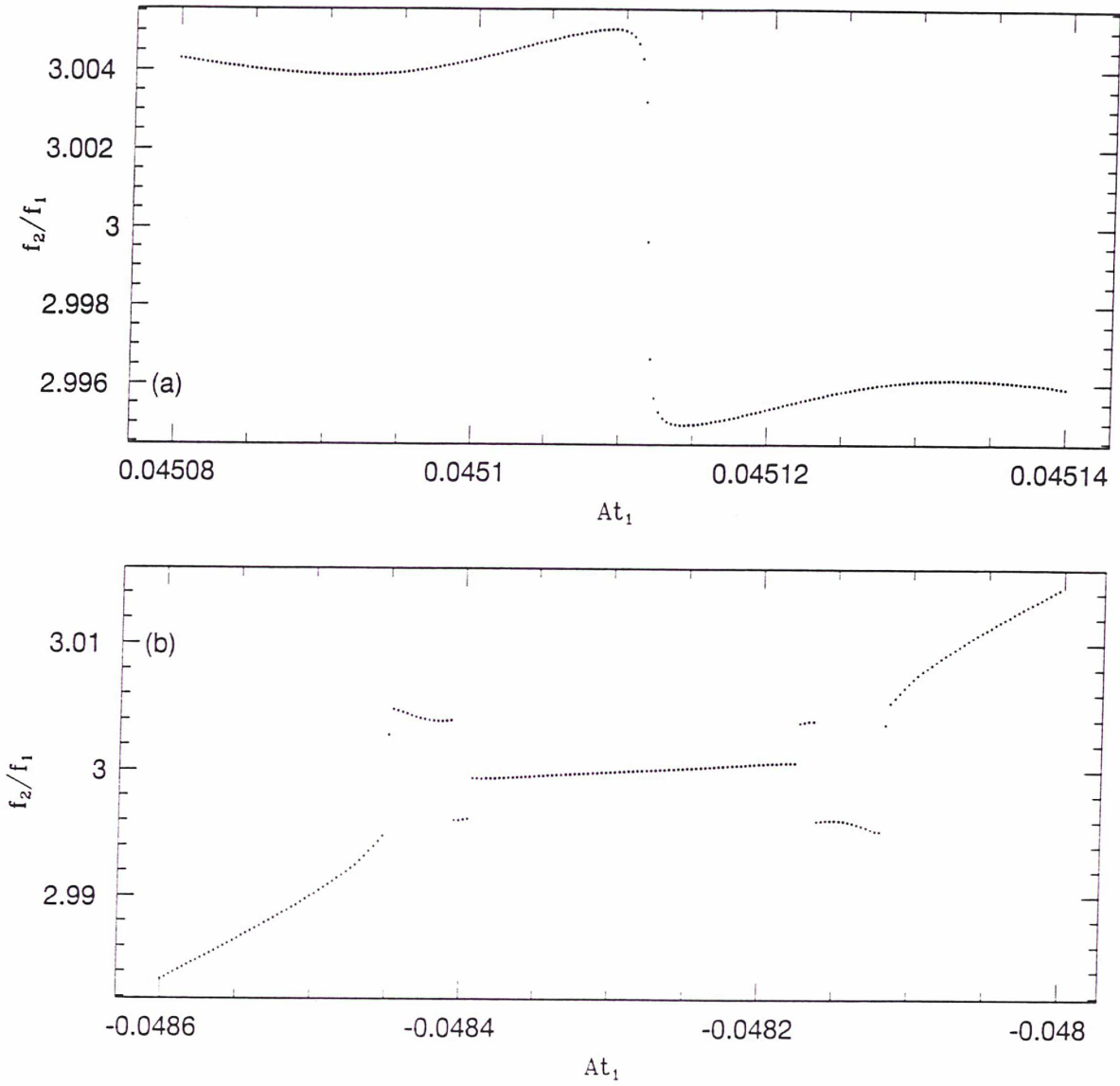
III.9.b : Diffusion en fonction du rapport des fréquences. On constate le très faible taux de diffusion excepté au voisinage de $f_2/f_1 = 2, 3, 11/3, 4$.

Figures III.10



Figures III.10 : Surface de section au voisinage de la résonance séculaire (3:-1).
 III.10.a : On remarque les zones vides correspondant aux régions de libérations.
 III.10.b : Détail de la section au voisinage du point elliptique.
 III.10.c : Détail de la section au voisinage du point hyperbolique.

Figures III.11



Figures III.11 : Aspect de la torsion au voisinage de la résonance (3:-1).

III.11.a : Discontinuité à la rencontre du point hyperbolique.

III.11.b : Rencontre de l'île de libration.

III.4.6) Stabilité globale des problèmes séculaires.

Les études que nous venons de mener nous montrent que, sur une durée de cent millions d'années, les problèmes séculaires considérés sont parfaitement stables et ce, indépendamment de la proximité de la résonance en moyen-mouvement (2:-5). Le seul effet marquant mis à jour par cette dernière étude est l'augmentation de la torsion avec la diminution de la distance à la résonance précédente qui accroît le nombre de résonances séculaires accessibles. Malgré la présence de ces dernières, aucun phénomène chaotique n'a pu être mis en évidence.

Il semble qu'un très grand nombre de tores invariants du problème non perturbé soit conservé dans le problème séculaire troublé. En effet, les analyses en fréquence ont mis en évidence la présence quasi-permanente de trajectoires toujours très proches de celles rencontrées pour un mouvement quasi-périodique, sauf peut-être au voisinage des résonances séculaires d'ordre faible ((1:-2), (1:-3) et (1:-4)). Mais ces régions où peuvent naître des phénomènes chaotiques sont totalement isolées les unes des autres. Ainsi, en l'absence de leur recouvrement, on ne peut rencontrer dans le pire des cas qu'un chaos modéré et surtout localisé (confiné par les tores invariants). Toutes ces raisons font que le résultat de stabilité que nous venons d'obtenir sur une durée d'environ cent millions d'années, peut sans doute être prolongé à des périodes de plusieurs milliards d'années.

CONCLUSION

Grâce à l'utilisation du manipulateur algébrique TRIP, et en employant le formalisme héliocentrique canonique et les méthodes de développement de la fonction perturbatrice planétaire élaborées par J.Laskar, nous avons pu obtenir les expressions nécessaires à l'application de la théorie KAM dans le problème planétaire spatial des trois-corps.

Ces expressions ont été calculées de manière totalement analytique, et sont valables pour toute valeur du rapport des demi-grands axes planétaires. Ainsi, nous avons pu généraliser le résultat d'Arnold portant sur le problème plan des deux planètes et montrer que la plupart des conditions initiales du problème planétaire spatial des trois corps conduisent à des trajectoires quasi-périodiques, à condition que les masses et excentricités planétaires soient extrêmement faibles et que l'inclinaison mutuelle soit inférieure à une valeur J_0 . Une estimation numérique des termes négligés lors de la construction de la forme normale nécessaire à l'obtention du résultat a permis de montrer qu'une borne inférieure de J_0 était égale à un degré. Notons que si les seuils de validité du théorème fondamental d'Arnold dont découle cette application étaient améliorés, ce résultat de stabilité serait encore valable sans modification.

Les estimations d'Arnold n'étant pas optimales, il y a bon espoir de voir ces seuils augmenter. On sait par exemple que Moser établit en 1962 l'existence de tores invariants (dans un problème non-dégénéré) pour des valeurs du paramètre perturbateur pouvant atteindre 10^{-48} [Hé66]. De même A. Celletti réussit à confiner certaines orbites périodiques entre deux tores ne se détruisant pas avant que la taille de la perturbation n'atteigne 10^{-3} dans le meilleur des cas. D'un autre point de vue, les résultats du type Nekhoroshev semblent eux aussi pouvoir porter leurs fruits. Mais pour un système planétaire (problème contenant une dégénérescence propre) seules les actions rapides (associées aux demi-grands axes) peuvent être confinées sur un temps exponentiellement long. Dans sa thèse, L. Niederman [Ni] montre que l'on peut effectivement appliquer le théorème de Nekhoroshev au problème planétaire des n -corps. De plus, par une application directe d'un théorème de Nekhoroshev au hamiltonien du problème planétaire des trois corps, il réussit à borner les variations des demi-grands axes planétaires sur un temps de l'ordre de l'âge du système solaire, pour des masses avoisinant 10^{-12} fois celle du corps primaire.

En ajoutant à ces résultats la très grande régularité du problème séculaire associé au couple Jupiter-Saturne, fait que nous avons établi à l'aide de l'analyse en fréquence, il semble qu'il soit possible, par la construction d'une forme normale à un degré suffisamment élevé et en estimant la taille de chaque transformation nécessaire à sa construction, d'obtenir une démonstration parfaitement rigoureuse de la stabilité de certains problèmes à deux planètes réalistes sur une durée sinon infinie, au moins équivalente à celle de l'âge du système solaire.

On peut espérer pouvoir obtenir un résultat de la sorte pour un problème comportant quatre planètes, le système formé de nos quatre planètes géantes étant très stable. En revanche, cela est sûrement impossible pour le système solaire complet dont les planètes

telluriques se comportent de manière chaotique [La90].

Le mouvement chaotique des planètes intérieures est du essentiellement à la présence de résonances séculaires. Il était donc important de comprendre, en étudiant le modèle simplifié du problème à deux planètes, si de telles instabilités pouvaient apparaître dans le système séculaire. Plus particulièrement, il convenait de savoir si pour un système proche d'une résonance en moyen-mouvement, une déstabilisation provenant de phénomènes séculaires pouvait se manifester avant celle due à la résonance orbitale [Qu].

L'étude menée au chapitre III a permis de répondre au moins partiellement à cette interrogation. En appliquant la méthode d'analyse en fréquence au système séculaire associé au couple Jupiter-Saturne (système voisin de la résonance en moyen-mouvement (2 :-5)), nous avons pu obtenir une description globale sa dynamique. Nous avons ainsi montré que contrairement à la situation rencontrée dans le système solaire intérieur, les résonances séculaires n'ont pas d'effet déstabilisateur. Les régions de libration associées aux résonances principales sont en effet isolées et séparées par des tores invariants, il ne peut donc pas se produire de phénomène de recouvrement des résonances (générateur de phénomènes chaotiques de grande ampleur). On comprend alors, que si des mouvements chaotiques existent au voisinage des surfaces séparatrices associées aux résonances, ils ne peuvent être que de faible ampleur et très localisés. Cette description de l'espace des phases nous a donc permis de conclure à la stabilité du problème étudié sur une durée voisine de celle de l'âge du système solaire.

Les conclusions précédentes restent certainement valables pour des systèmes séculaires construit suffisamment loin des zones de résonances orbitales principales. Dans ces conditions, si on peut établir la stabilité à court terme du problème complet, elle reste alors valable à long terme.

On comprend ainsi l'importance de l'étude de la répartition des résonances en moyen-mouvement dans l'espace des phases, et surtout de leur recouvrement. Il semble que, pour les valeurs des masses de Jupiter et Saturne, ce recouvrement n'occupe qu'un faible volume de l'espace des phases. En revanche, en faisant augmenter les masses des planètes, les résonances orbitales risquent de se chevaucher dans une grande partie de l'espace. Une telle situation engendrera des instabilités à court terme. Il est sans doute possible de fournir ainsi des bornes supérieures aux masses planétaires conduisant à un système stable.

Références bibliographiques

- [Ar63a] Arnold V.: 1963, "Proof of Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonien", *Rus. Math. Surv.* **volume 18, N6**, 9-36
- [Ar63b] Arnold V.: 1963, "Small denominators", *Rus. Math. Surv.* **volume 18, N6**, 85-192
- [Ar64] Arnold V.: 1964, "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom.", *Sov. Math. Dokl.* **5**, 581-585
- [Ar88] Arnold V.: 1988, "Encyclopaedia of Mathematical Sciences : Dynamical Systems", *Springer-Verlag* . **Vol 3**
- [Be] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.: 1984, "A proof of Kolmogorov's theorem on invariant tori using canonical transformations defined by Lie method.", *Il Nuovo Cimento.* **79B,N2**, 201-223
- [Br] Bretagnon P.: 1982, "Théorie de mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSSOP82", *Astron. Astrophys.* **114** 278-288
- [BrCl] Brouwer D., Clemence G.: 1961, "Methods of celestial mechanics", *Academic Press*.
- [Ce90a] Celletti A.: 1990, "Analysis of resonances in the spin-orbit problem in Celestial Mechanics : The synchronous resonance (Part I)", *Journal of Applied Mathematics and Physics.* **41**, 175-204
- [Ce90b] Celletti A.: 1990, "Analysis of resonances in the spin-orbit problem in Celestial Mechanics : Higher ordre resonances and some numerical experiments (Part II)", *Journal of Applied Mathematics and Physics.* **41**, 453-478
- [Ch] Chenciner A.: 1989, "Séries de Lindstedt", *Notes scientifiques et techniques du B.D.L.* . **S028**
- [Chi] Chirikov B.V.: 1979, "A universal instability of many dimensional oscillator systems", *Phys. Rep.* **52**, 263
- [De] Deheuvels R.: 1981, "Formes quadratiques et groupes classiques" *P.U.F.*
- [Dep] Deprit A., Deprit-Bartholomé A.: 1967, "Stability of the triangular Lagrangian points", *Astr. J.* **72**, 173-179
- [DuLa] Dumas H.S., Laskar J.: 1993, "Global dynamics and long time stability in Hamiltonian systems via frequency analysis", *Phys. Rev. Let.* **70**, 2975-2979
- [Du] Duriez L.: 1979, "Approche d'une théorie générale planétaire en variables elliptiques héliocentriques", *Thèse, Lille*
- [Ga] Gallavotti G.: 1993, "Drift and diffusion in the phase space. An application to celestial mechanics", *Preprint*
- [Gi] Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L., Simo C.: 1989, "Effective stability for a hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem", *Journal of Diff. Equa.* **77**, 167-198
- [Hé66] Hénon M.: 1966, "Exploration numérique du problème restreint", *Bulletin Astronomique.* 3^e série, Tome 1
- [Hé82] Hénon M.: 1982, "On the numerical computation of Poincaré maps", *Physica D.* **5**, 412-414
- [JeMo] Jefferys, W.H; Moser J.: 1966, "Quasi-Periodic Solutions for the three-Boby Problem", *Astrom. J.*

- [Ko] Kolmogorov A.N.: 1954, "The conservation of conditionally periodic motion with a small variation in the hamiltonian", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. **98**, 527-530
- [Kov] Kovalevsky J.: 1963, "Introduction à la mécanique celeste", *Armand Colin*
- [La86] Laskar J.: 1986, "Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory", *Astron. Astrophys.* **157** 59-70
- [La89a] Laskar J.: 1989, "A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system", *Nature*. **338**, 237-238
- [La89b] Laskar J.: 1989, "Système de variables et éléments", *Les méthodes modernes de la mécanique celeste*. D. Benest, C. Froeschele (eds). *Frontières*. **C36** 63-87
- [La89c] Laskar J.: 1989, "Manipulation des séries", *Les méthodes modernes de la mécanique celeste*. D. Benest, C. Froeschele (eds). *Frontières*. **C36** 89-107
- [La90] Laskar J.: 1990, "The chaotic motion of the solar system : a numerical estimate of the size of the chaotic zones", *Icarus*. **88**, 266-291
- [La92a] Laskar J.: 1992, "La stabilité du système solaire", *Chaos et déterminisme*. A. Dahan Dalmedico, J.L. Chabert, K. Chemla (eds). *Seuil*. **S80** 170-211
- [La92b] Laskar J.: 1992, "Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system", *Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems*. A. Roy (ed), *Kluwer Publ.* **B272**,
- [La92c] Laskar J.: 1992, "A few points on the stability of the solar system", *Chaos, Resonance and Collective Phenomena in the Solar System*. S. Ferraz-Mello (ed.). **Symposium 152 of the I.A.U.**, 1-16
- [La93] Laskar J.: 1993, "Frequency Analysis for Multi-Dimensional Systems. Global Dynamics and Diffusion", *Physica D*. **67**, 257-281
- [LaFrCe] Laskar J; Froeschlé C and Celletti A.: 1992, "The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping", *Physica D*. **56**, 253-269
- [LaJoRo] Laskar J., Joutel F. Robutel Ph.: 1992, "The Moon : a climat regulator for the Earth", *Nature*. **361**, 615-617
- [LaRo] Laskar J., Robutel Ph.: 1992, "The chaotic obliquity of the planets", *Nature*. **361**, 608-612
- [Le] Leontovitch A. M.: 1962, "On the stability of Lagrange's periodic solutions of the restricted three-body problem", *Soviet Math.* **3**, 425-429
- [LeV] Le Verrier: 1855, "", *Ann. Obs. Paris*. **Tome I**,
- [LiLi] Lichtenberg A.J., Lieberman M.A.: 1983, "Regular and stochastic motion", *Springer Verlag*.
- [Li] Lieberman, B.B.: 1971, "Existence of quasi-periodic solutions to the three-body problem", *Celestial Mechanics*. **3**, 408-426
- [MaSi] Martinez R., Simo C.: 1992, "A note on the existence of heteroclinic orbits in the planar three-body problem", *Preprint*
- [MeSc] Meyer K.R., Schmidt D.S.: 1986, "The stability of the Lagrange triangular point and the theorem of Arnold", *J. Diff. Eq.* **62**, 222-236
- [Mo] Moser J.: 1962, "On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* **K1**, 1-20

- [Ne] Nekhoroshev N.: 1979, "Exponential estimate of the stability time of near-integrable hamiltonian system II", *Trudy. Sem. Petrovs.* **5** 5-50
- [Ni] Niederman L.: 1993, "Résonances et stabilité dans le problème planétaire", *Thèse, Paris VI*
- [Po1892] Poincaré, H.: 1892, "Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tomes I à III", *Gauthier-Villars. Réédition Blanchard*
- [Po07] Poincaré, H.: 1907, "Leçons de mécanique céleste", *Gauthier Villars.*
- [Qu] Quinlan, G.: 1992, "Numerical experiments on the motion of the outer planets", *Chaos, Resonance and Collective Phenomena in the Solar System. S.Ferraz-Mello (ed.). Symposium 152 of the I.A.U.*, 25-32
- [QuTrDu] Quinn T., Tremaine S., Duncan M.: 1991, "A three million year integration of the Earth's orbit", *Astron. J.* **101**, 2287-2305
- [SuWi88] Sussman G.J., Wisdom J. : 1988, "Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic", *Science.* **241** 433-437
- [SuWi92] Sussman G.J., Wisdom J.: 1992, "", *Science.* **257**, 56-62
- [Xi] Xia Z.: 1993, "Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem", *Journal of Diff. Equa.* **Vol5, Nb2**, 219-240

ANNEXE I
TABLE DES NOTATIONS

On retrouvera dans ce qui suit la plupart des notations utilisées dans les pages précédentes. Le numéro de la page où la notation est utilisée pour la première fois est rapporté en première colonne. On trouve ensuite le symbole ou la notation, et en troisième colonne un éventuel commentaire.

5	m_0, m_1, m_2	: masses du Soleil et des deux planètes, m_1 pour la planète intérieure
6	$\beta_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j}$: masses réduites utilisées dans le problème de Kepler
6	$\mu_j = \mathcal{G}(m_0 + m_j)$: où \mathcal{G} est la constante de la gravitation universelle
13	$h = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$	
59	μ	: petit paramètre perturbateur de l'ordre du rapport des masses planétaires à celle du Soleil
5	$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$: vecteurs position barycentrique du Soleil et des planètes
5	$\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2$: moments conjugués des variables ci-dessus
5	$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$: variables de positions héliocentriques
5	$\tilde{\mathbf{r}}_0, \tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2$: moments conjugués des variables ci-dessus
10	r_1, r_2	: distances héliocentriques
6	$\Delta = \ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\ $: distance mutuelle
10	$\cos S = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2}$	
6	F, F_0, F_1	: hamiltonien en variables héliocentriques, partie d'ordre 0 et 1 des masses
10	T_1	: partie complémentaire du hamiltonien en variables héliocentriques
10	F_c	: partie complémentaire normalisée (sans unité)
6	$a, e, i, M, v, \omega, \Omega$: éléments osculateurs : demi-grand axe, excentricité, inclinaison, anomalie moyenne, anomalie vraie, argument du périhélie, argument du nœud ascendant. On ajoutera un indice pour différencier la planète intérieure (indice 1) et extérieure (indice 2)
6	$\alpha = \frac{a_1}{a_2}$: rapport des demi-grands axes
24	$k_j = e \cos(\omega_j + \Omega_j)$	
24	$h_j = e \sin(\omega_j + \Omega_j)$	
24	$q_j = \sin(i_j/2) \cos \Omega_j$	
24	$p_j = \sin(i_j/2) \sin \Omega_j$	
8	$L_j, G_j, \Theta_j, l_j, g_j, \theta_j$: variables canoniques de Delaunay
8	$L_j = \sqrt{\mu_j a_j}$	
8	$G_j = L_j \sqrt{1 - e_j^2}$	
8	$\Theta_j = G_j \cos i_j$	
8	$l_j = M_j$	
8	$g_j = \omega_j$	
8	$\theta_j = \Omega_j$	
8	$\mathbf{C} = \mathbf{r}_1 \wedge \tilde{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \tilde{\mathbf{r}}_2$: moment cinétique
9	$C = \ \mathbf{C}\ $	
10	J	: inclinaison mutuelle
10	$C_j^2 = 1 - \cos J$	

6	$(\lambda_j, \Lambda_j, x_j, -i\bar{x}_j)$: variables canoniques complexes de Poincaré
6	$\lambda_j = l_j + \omega_j$: longitude moyenne
6	$\Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j}$	
11	$x_j = \sqrt{\beta_j (L_j - G_j)} e^{i\omega_j}$	
11	$X_j = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_j}} x_j$	
11	n_j	: moyen-mouvement de la j^e planète
11	$\rho = \frac{r_1}{r_2}$	
12	$V_1 = \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\rho}{\alpha} \cos S$	
12	$V_2 = \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 - 1$	
12	$V = 2\alpha V_1 + \alpha^2 V_2$	
19	$U_j = \frac{a_2}{r_2} V^j$	
12	$A = 1 + 2\alpha \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \alpha^2$	
12	$b_s^{(k)}(\alpha)$: coefficients de Laplace
13	$k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = h\sqrt{\alpha}$	
13	$D_2 = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 - C^2}{\Lambda_1 \Lambda_2}$	
14	$F_s, x_s \dots$: quantités séculaires utilisées lors de l'application de la méthode de Lindstedt-Poincaré
15	S, S_1, S_2	fonctions génératrices de la méthode précédente
16	$\omega_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}$: vecteur fréquence du hamiltonien non-perturbé
20	$L_j = \exp(i\lambda_j)$	
20	$\delta(q)$: entier compris entre $-q$ et q de la parité de q
31	$H_1^{(2)}$: partie quadratique du hamiltonien d'ordre 1
31	$C_1^{(2)}$: partie quadratique du moment cinétique
31	p_1, p_2	: coefficients de $H_1^{(2)}$
31	λ_1, λ_2	: valeurs propres de la matrice symétrique réelle associée à la forme quadratique définie par la partie de degré 2 du hamiltonien d'ordre 1 ou 2 des masses. La confusion avec les longitudes moyennes est impossible
37	J_n	: matrice définissant la forme symplectique standard sur R^{2n}
38	Γ_j	: vecteurs propres complexes de la matrice du système linéaire
40	(a_1, b_1, a_2, b_2)	: variables canoniques réelles du système séculaire
40	$a_j = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\tilde{x}_j)$	
40	$b_1 = -\sqrt{2} \operatorname{Im}(\tilde{x}_j)$	
40	γ_j	: coefficients de la forme quadratique définie par le hamiltonien de degré 2 en variables canoniques complexes
40	u_j, v_j	: coefficients de la forme quadratique définie par le hamiltonien de degré 2 en variables canoniques réelles
40	$c = -\frac{\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2^2}{\Lambda_2^2} \frac{m_2}{m_0}$	
40	$\lambda_j^{(0)}$: valeurs propres pour $D_2 = 0$
43	$(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2)$: variables canoniques diagonalisant la forme quadratique réelle
43	$(\tilde{x}_j, \tilde{\bar{x}}_j)$: variables canoniques diagonalisant la forme quadratique complexe

43	$\tilde{A}_j = \frac{\tilde{a}_j}{\sqrt{\Lambda_j}}$	
43	$\tilde{B}_j = \frac{\tilde{b}_j}{\sqrt{\Lambda_j}}$	
43	$\tilde{X}_j = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_j}} \tilde{x}_j$	
46	$\mathcal{P}_o, \mathcal{P}_a, \mathcal{T}_l$: orbite des périhélie opposés, alignés, et tore limite des mouvements plans
64	$P_j^{(k)}$: élément de la matrice de passage diagonalisant le hamiltonien quadratique
65	\tilde{H}_j	: Partie de degré j du hamiltonien en variables \tilde{x}_j
66	$\tau_j = \tilde{x}_j ^2$:
67	$T_j = \tilde{X}_j ^2$:
81	$\nu_j^{(k)}, \alpha_j^{(k)}, \varphi_j^{(k)}$: fréquences, amplitudes et phases des composantes de la solution quasi-périodique fournie par analyse en fréquence
81	$\delta\nu_k^{(j)} = \text{Min}_{ p + q \leq n} \left \nu_k^{(j)} - p\nu_1^{(1)} - q\nu_1^{(2)} \right $:
81	$p_k^{(j)}, q_k^{(j)}$: valeurs de p et de q pour lesquelles le minimum ci-dessus est atteint
96	$\bar{\omega}_j$: fréquences séculaires déduites d'une forme normale

ANNEXE II

PRESENTATION DU PROGRAMME TRIP CALCULANT LA PARTIE SECLAIRE D'ORDRE UN DU HAMILTONIEN.

Le programme suivant a pour objet le calcul du développement du hamiltonien séculaire d'ordre un des masses de manière totalement analytique. Ce calcul à été présenté dans tous ses détails au chapitre I. L'utilisation des coefficients de Laplace en rend l'expression exacte (pour un degré fixé des excentricités et inclinaisons) pour toute valeur de α comprise entre zéro et un.

Dans ce qui suit, nous avons adopté les notations :

$$X = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_1}} x_1 = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_1^2}} \exp(i\omega_1)$$

$$Xp = \sqrt{\frac{2}{\Lambda_2}} x_1 = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_2^2}} \exp(i\omega_2)$$

$$Xb = \bar{X}, \quad Xpb = \bar{X}_2, \quad alp = \alpha$$

$$L = \exp(i\lambda_1) \quad Lp = \exp(i\lambda_2) \quad \text{et} \quad PHI = LL_p = \exp i(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Décrivons brièvement les différentes procédures utilisées dans ce programme (cf programme page suivante) :

-init : nX est ici le degré total maximal (en excentricité et inclinaison) auquel on calcule le hamiltonien. Le hamiltonien séculaire ne possédant que des termes de degré pair, si nX est impair on le remplace par nX-1. La suite de ce sous-programme est consacré à la création des troncatures et des tableaux de séries et de variables. Toute déclaration étant globale, ces tableaux et troncatures seront connus dans toute la suite de l'exécution.

-chgpoinc et **chgpoincp** : effectuent, dans la série "nom", la substitution des éléments osculateurs par les variables de Poincaré.

-CosS, calc_ro et **calc_V** : sont destinés à construire la série V. Le point de départ de cette construction est le développement des quantités r/a , a/r , $\sin(v)$ et $\cos(v)$, en puissance des excentricités planétaires. Il s'agit d'une fonction élémentaire de TRIP.

-calc_U : calcul des séries U_j . Comme on ne s'intéresse ici qu'au hamiltonien séculaire, nous utilisons la troncature "tsec" ayant pour objet de ne conserver que les inégalités $(p, -p)$, ce qui réduit notablement la taille des séries et par la même la place mémoire utilisée.

-Lapbase : a pour objet d'exprimer les $b_s^{(0)}(\alpha)$ et $b_{s_1}^{(0)}(\alpha)$ de $s = s_0$ à s_1 en fonction de $b_{s_1}^{(0)}(\alpha)$, $b_{s_1}^{(1)}(\alpha)$, α et $A_2 = (1 - \alpha^2)^{-1}$

-coefLap : expression de tous les coefficients de Laplace utilisés dans la procédure suivante en fonction de $b_{s_1}^{(0)}(\alpha)$ et $b_{s_1}^{(1)}(\alpha)$ avec $s_1 = nX + 1/2$.

-**Laplace** : développement des A^{-s} . Afin de réduire au maximum le nombre de calculs, on calcule différemment ces séries pour $s \geq nX + 1/2$ et pour $s < nX + 1/2$. Dans le premier cas, on utilise la formule (I.5.4) où les coefficients de Laplace ont déjà été exprimés en fonction de $b_{s_1}^{(0)}(\alpha)$ et $b_{s_1}^{(1)}(\alpha)$. Dans le deuxième cas, on applique simplement la relation : $A^{-(s-1)} = (1 + \alpha PHI)(1 + \alpha PHI^{-1})A^{-s}$.

-**ham** : calcul de la partie séculaire du hamiltonien, on utilise la troncature "tsesec" permettant de n'obtenir que les termes $L_1^0 L_2^0$.

-**simplifham** : l'expression du hamiltonien calculé par "ham" contient encore la variable A_2 . Mais, comme nous l'avons vu en I.5.3, le choix des deux coefficients de Laplace utilisés est tel qu'il doit apparaître une simplification de la série "ham". Cette procédure a pour objet d'effectuer cette simplification et d'éliminer ainsi la variable A_2 .

-**introD** : substitution de l'inclinaison mutuelle par une expression faisant intervenir le paramètre D_2 .

Programme "hamsectrip"

```

/*
Calcul de la partie séculaire du hamiltonien
en effectuant la réduction du moment cinétique.
Développement au degré total nX des variables
X,Xb,Xp,Xpb,CJ .
*/

macro init
/* Initialisation des troncatures,
constantes et tableaux. */
{
/* nX doit ici être pair */
t=pi*nX$
if (cos(t)<=-1) then {nX=nX-1;} fi;
/* le test == ne fonctionne pas ! */

t1=((X,Xb),nX);
tp1=((Xp,Xpb),nX);
t2=(e,nX+1);
t3=((X,Xp,Xb,Xpb),nX);
tsec=(L,0);
tsecsec=(PHI,0);
t4=((X,Xp,Xb,Xpb,CJ),nX);
tD=((X,Xp,Xb,Xpb,D),nX);
k0=nX/2$
sm=2*nX+1$
kmax=3*nX/2$

dim A[0:nX];
dim b[1:sm,0:kmax];
dimvar bb[1:sm,0:kmax];
tabvar(bb);
dim U[0:nX];
};

macro chgpoinc[nom]
/* Passage des éléments osculateurs
aux variables de Poincaré. */
{
usetronc(t1);
aux=Bin(XX,0.5,nX)$
aux=subst(aux,XX,-X*Xb/4)$
z=aux*X $
zb=aux*Xb $
poinc=substpov(nom,OM,1,z**e**-1,1)$
poinc=substpov(poinc,OM,-1,zb**e**-1,1)$
poinc=substpov(poinc,e,2,z*zb,0)$
efftronc;
};

macro chgpoincp[nom]
{
usetronc(tp1);
aux=Bin(X,0.5,nX)$
aux=subst(aux,X,-Xp*Xpb/4)$
zp=aux*Xp $
zpb=aux*Xpb $
poincp=substpov(nom,OMp,1,zp*ep**-1,1)$
poincp=substpov(poincp,OMp,-1,zpb*ep**-1,1)$
poincp=substpov(poincp,ep,2,zp*zpb,0)$
efftronc;
};

```

macro CosS

```

{
/* Développement de
CosS en fonction des variables
de Poincaré et de l'inclinaison
mutuelle. */
L=expi(1,1,0)$
Lp=expi(lp,1,0)$
varconj((X,Xb),(Xp,Xpb));

Sinv(nX+1);
Cosv(nX+1);
TE=( _Cosv+i* Sinv)/XS
TE=subst(TE,X,L*OM**-1)$
%chgpoinc[TE]$
TE=poinc$
TEb=conj(TE)$
TEp=substvar(TE,(X,Xp),(Xb,Xpb),(L,Lp))$
TEpb=conj(TEp)$
usetronc(t4);
c1=(TE*TEpb*L*Lp**-1 +TEb*TEp*L**-1*Lp)/2$
c2=(TE*TEp*L*Lp+TEb*TEpb*L**-1*Lp**-1)/2 $
CosS=0-c1+Cj**2*(c1-c2)/2 $
efftronc;
};

```

macro calc_ro

/ Calcul de $ro=(a/r)*(r'/a')$ en variables de Poincaré
au degré : nX */*

```

{
usetronc(t2);
RsA(nX+1);
AsR(nX+1);
rSa=subst(_RsA,X,L*OM**-1)$
aSrp=subst(_AsR,X,Lp*OMp**-1)$
aSrp=substvar(aSrp,(e,ep))$
%chgpoincp[aSrp]$
aSrp=poincp$
%chgpoinc[rSa]$
rSa=poinc$
U[0]=aSrp$
efftrmon;
usetronc(t3);
ro = rSa*aSrp$
};

```

macro calc_V

```

{
usetronc(t4);
CosLLp = (L*Lp**-1 + L**-1*Lp)/2 $
V = -2*alp*(CosLLp + ro * CosS) +alp**2*(ro**2 - 1) $
};

```

```

macro calc_UT
{
  usetronc(t4);
  for n=0 to (nX-1)
  {
    U[n+1]=V*U[n]$
    usetrmon(tsec);
    U[n]=<subst(U[n],Lp,L*PHI**-1),1>$
    efftrmon;
  };
  /* on ne garde que les inégalités du type
  (p,-p)
  */
  usetrmon(tsec);
  U[nX]=<subst(U[nX],Lp,L*PHI**-1),1>$
  efftrmon;
  efftrmon;
};

```

```

macro Lapbase[s0,s1]
/* Expression des coefficients de Laplace
  b[s0/2,0] et b[s0/2,1]
  en fonction des
  b[s1/2,0] et b[s1/2,1]

```

```

  A2=(1-alp**2)**-1
*/
{
  b[s1,0]=bb[s1,0];
  b[s1,1]=bb[s1,1];
  pm=(s0-s1)/2-1;
  for p=0 to pm
  {
    s=s1+2*p;
    b[s+2,0]=2*A2**2/s*(s/2*(1+alp**2)*b[s,0]+(s-2)*alp*b[s,1])$
    b[s+2,1]=2*A2**2/s*(s*alp*b[s,0]+(s/2-1)*(1+alp**2)*b[s,1])$
  };
};

```

```

macro coefLap

```

```

{
  /* Expression de tous les
  coefficients de Laplace
  utilisés en fonction des
  b[s1/2,0] et b[s1/2,1] avec
  s1=(2*nX+1)/2 */
  for nk=k0 to nX
  {
    s=2*nk+1$
    for p=0 to k0+nk-2
    {
      b[s,p+2]=((p+1)*(alp+alp**-1)
      *b[s,p+1]-(p+s/2)*b[s,p])/(p-s/2+2);
    };
  };
};

```

macro Laplace

```

/* Développement des expressions
A-(s/2) en série de Fourier */
for nk=k0 to nX
{
s=2*nk+1;
A[nk]=1/2*b[s,0]$

for p=1 to k0+nk
{
A[nk]=A[nk]+(-1)^p*b[s,p]*(PHI^p+PHI^(-p))/2$
};
};
for nk=1 to k0
{
p=k0-nk$
A[p]=(1+alp*PHI)*(1+alp*PHI**-1)*A[p+1]$
};
};

```

macro ham

```

/* Construction de la partie
séculaire. */

```

```

{
usetrmon(tsecsec);
HAM=0$
coef=1$
for nk=0 to nX
{
HAM=HAM+<U[nk],A[nk]*coef>$
coef=-((2*nk+1)/(2*nk+2))*coef$
};
efftrmon;
};

```

macro simplifham

```

{
q=puismin(HAM,alp)$
if (q<0) then { HAM=alp**(-q)*HAMS} fi;
HAM=substpov(HAM,alp,2,1-A2**-1,0)$
HAM=substpov(HAM,A2,-1,1-alp**2,1)$
if (q<0) then { HAM=alp**q*HAMS} fi;
};

```

macro introD

```

/*Substitution de l'inclinaison mutuelle par son
expression en fonction des variables de Poincaré
et du paramètre D2 */

```

```

{
usetronc(tD);
T=k*X*Xb + Xp*Xpb$
CJ2=0.5*( D**2 - (1+k**-1)*T + 0.25*k**-1*T**2 ) $
aux=Bin(XX,-1,nX)$
aux=subst(aux,XX,-X*Xb/2);
CJ2=CJ2*aux$
aux=substvar(aux,(X,Xp),(Xb,Xpb))$
CJ2=CJ2*aux$
HAM=substpov(HAM,CJ,2,CJ2,1)$
HAM=substpov(HAM,D,2,D2,1)*1$
efftrmon;
};

```

```

macro main
{
  X+Xb+Xp+Xpb+CJ+D2+alp;
  _affc=7;
  _affdist=2;
  /* Troncature au degré total 4 */
  nX=4;
  %init;
  %Lapbase[2*nX+1,nX+1];
  %coefLap;
  %Laplace;
  %CosS;
  %calc_ro;
  %calc_V;
  %calc_UT;
  %ham;
  %simplifham;
  %introD;
};

%main;

```

ANNEXE III EXPRESSION DU HAMILTONIEN SECULAIRE

La partie complémentaire F_c ne comportant aucun terme séculaire, seule la distance mutuelle contribue au hamiltonien séculaire d'ordre un des masses. Ce dernier s'écrit alors :

$$F_1 = -\frac{\mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2^2 m_2 a_2}{\Lambda_2^2 m_1 \Delta},$$

où Δ représente la distance mutuelle, a_j les demi-grands axes et α leur rapport. Les masses sont notées m_1 et m_2 , et si $\mu_j = \mathcal{G}(m_0 + m_j)$ et $\beta_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j}$ on définit $\Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j}$.

Les deux expressions suivantes donnent une formulation polynomiale du hamiltonien séculaire d'ordre un des masses à l'aide, dans un premier temps des variables $(X_1, \bar{X}_1, X_2, \bar{X}_2, C_J)$ avec $X_j = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - e_j^2}} \exp(i\omega_j)$ et $C_J^2 = 1 - \cos J$ (e_j et ω_j sont les excentricités et les arguments des périhélie et J l'inclinaison mutuelle). Le hamiltonien est ensuite exprimé à l'aide de $(X_1, \bar{X}_1, X_2, \bar{X}_2, D)$ où $D^2 = D_2 = ((\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 - C^2)/(\Lambda_1 \Lambda_2)$, C étant la norme du moment cinétique total.

I. Hamiltonien séculaire d'ordre un des masses en fonction de C_J

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{\Delta} = & C_1 - \frac{C_2}{2}(\bar{X}_1 X_2 + X_1 \bar{X}_2) \\ & + \frac{C_3}{2}(X_1 \bar{X}_1 + X_2 \bar{X}_2 - 2C_J^2) - \frac{C_5}{4}(\bar{X}_1 X_2^2 \bar{X}_2 + X_1 X_2 \bar{X}_2^2) \\ & - \frac{C_6}{4}(X_1 \bar{X}_1^2 X_2 + X_1^2 \bar{X}_1 \bar{X}_2) - \frac{C_7}{2}(\bar{X}_1 X_2 + X_1 \bar{X}_2)C_J^2 \\ & + \frac{C_8}{2}(\bar{X}_1 \bar{X}_2 + X_1 X_2)C_J^2 + \frac{C_9}{2}(X_2^2 + \bar{X}_2^2)C_J^2 \\ & + \frac{C_{10}}{4}(X_1^2 \bar{X}_2^2 + \bar{X}_1^2 X_2^2) + \frac{C_{13}}{4}X_1^2 \bar{X}_1^2 \\ & + C_{14}C_J^4 + \frac{C_{16}}{4}X_2^2 \bar{X}_2^2 + \frac{C_{17}}{2}(X_1^2 + \bar{X}_1^2)C_J^2 \\ & + \frac{C_{18}}{4}(X_1 \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_2 - 2(X_1 \bar{X}_1 + X_2 \bar{X}_2)C_J^2) \end{aligned}$$

Où les C_k sont définis à l'aide des coefficients de Laplace par :

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}$$

$$C_2(\alpha) = \frac{3}{4}\alpha b_{3/2}^{(0)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2\right)b_{3/2}^{(1)} = -\frac{\alpha}{4}b_{3/2}^{(2)}$$

$$C_3(\alpha) = \frac{\alpha}{4}b_{3/2}^{(1)}$$

$$C_5(\alpha) = \left(-\frac{15}{16}\alpha + \frac{15}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{8} - \frac{9}{16}\alpha^2 - \frac{3}{8}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_6(\alpha) = \left(\frac{15}{16}\alpha - \frac{15}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{8} - \frac{9}{16}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_7(\alpha) = \left(\frac{15}{8}\alpha + \frac{15}{8}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha^4\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_8(\alpha) = \frac{9}{16}\alpha^2 b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_9(\alpha) = -\frac{15}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{3}{16}\alpha + \frac{9}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_{10}(\alpha) = \frac{45}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{9}{16}\alpha - \frac{9}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_{13}(\alpha) = \frac{9}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{16}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_{14}(\alpha) = \frac{21}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(-\frac{3}{16}\alpha - \frac{3}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_{17}(\alpha) = -\frac{15}{32}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)} + \left(\frac{9}{16}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^3\right)b_{5/2}^{(1)}$$

$$C_{18}(\alpha) = \frac{9}{8}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}$$

II. Hamiltonien séculaire d'ordre un des masses en fonction de D_2

$$\frac{a_2}{\Delta} = H_0 + D_2 H_2 + D_2^2 H_4$$

avec :

$$H_0 = E_1 + E_2 X_1 \bar{X}_1 + E_3 X_2 \bar{X}_2 + E_4 (\bar{X}_1 X_2 + X_1 \bar{X}_2)$$

$$H_2 = E_5 + E_6 D_2 + E_7 (X_1 \bar{X}_2 + \bar{X}_1 X_2) + E_8 X_1 \bar{X}_1 + E_9 X_2 \bar{X}_2 \\ + E_{10} (X_1^2 + \bar{X}_1^2) + E_{11} (X_2^2 + \bar{X}_2^2) + E_{12} (X_1 X_2 + \bar{X}_1 \bar{X}_2)$$

et

$$H_4 = E_{13} (X_1^3 \bar{X}_1 + X_1 \bar{X}_1^3) + E_{14} (X_1 \bar{X}_1 \bar{X}_2^2 + X_1 \bar{X}_1 X_2^2) \\ + E_{15} (X_1^2 X_2 \bar{X}_2 + \bar{X}_1^2 X_2 \bar{X}_2) + E_{16} (X_2 \bar{X}_2^3 + X_2^3 \bar{X}_2) \\ + E_{17} (X_1^2 \bar{X}_1 X_2 + X_1 \bar{X}_1^2 \bar{X}_2) + E_{18} (\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_2^2 + X_1 X_2^2 \bar{X}_2) \\ + E_{19} (X_1 \bar{X}_1^2 X_2 + X_1^2 \bar{X}_1 \bar{X}_2) + E_{20} (\bar{X}_1 X_2^2 \bar{X}_2 + X_1 X_2 \bar{X}_2^2) + E_{21} X_1 \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_2 \\ + E_{22} X_1^2 \bar{X}_1^2 + E_{23} (\bar{X}_1^2 X_2^2 + X_1^2 \bar{X}_2^2) + E_{24} X_2^2 \bar{X}_2^2$$

où les coefficients E_i sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} E_1(k) &= C_1 & E_2(k) &= \frac{C_3}{2}(2+k) \\ E_3(k) &= E_2(k^{-1}) & E_4(k) &= -\frac{C_2}{2} \\ E_5(k) &= -\frac{C_3}{2} & E_6(k) &= \frac{C_{14}}{4} \\ E_7(k) &= -\frac{C_7}{4} & E_9(k) &= E_8(k^{-1}) \\ E_{10}(k) &= \frac{C_{17}}{4} & E_{11}(k) &= \frac{C_9}{4} \\ E_{12}(k) &= \frac{C_8}{4} & E_{13}(k) &= -\frac{C_{17}}{4}(1+k) \\ E_{14}(k) &= -\frac{C_9}{4}(1+k) & E_{15}(k) &= E_{13}(k^{-1}) \\ E_{16}(k) &= E_{14}(k^{-1}) & E_{17}(k) &= -\frac{C_8}{4}(1+k) - \frac{C_6}{4} \\ E_{18}(k) &= -\frac{C_8}{4}(1+k^{-1}) & E_{19}(k) &= \frac{C_7}{4}(1+k) \\ E_{20}(k) &= \frac{C_7}{4}(1+k^{-1}) - \frac{C_5}{4} & E_{23}(k) &= \frac{C_{10}}{4} \end{aligned}$$

$$E_8(k) = -\frac{C_{18}}{4} - \frac{C_{14}}{2}(1+k) - \frac{C_{13}}{4}$$

$$E_{21}(k) = \frac{C_{18}}{4}C_{18}(k^{-1} + 3 + k) + \frac{C_{14}}{2}(k^{-1} + 2 + k) + \frac{C_3}{4}(k^{-1} + 1 + k)$$

$$E_{22}(k) = \frac{C_{18}}{4}(1+k) + \frac{C_{14}}{4}(1+k)^2 + \frac{C_{13}}{4} + \frac{C_3}{8}(2+k)$$

$$E_{24}(k) = \frac{C_{18}}{4}(k^{-1} + 1) + \frac{C_{16}}{4} + \frac{C_{14}}{4}(k^{-1} + 1)^2 + \frac{C_3}{8}(2 + k^{-1})$$

$$\text{et } k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\alpha}$$

ANNEXE IV

Ce dernier paragraphe regroupe différents articles écrits au cours de cette thèse.

Les deux premiers paru dans *Celestial Mechanics* sont des résumés étendus effectués lors de la présentation de différentes parties de mon travail.

La majeure partie du chapitre II de cette thèse a été présentée au cours du :

"*Alexander Von Humbolt Colloquium for Celestial Mechanics*, 30 mars-4 avril 1992, Ramsau, Autriche", et a donné lieu au premier article présenté.

Le second a été présenté au :

"*Interactions Between Physics and Dynamics of Solar System Bodies*, 21-28 Juin 1992, Pléneuf-Val-André, France", et résume une partie du chapitre III.

Les deux derniers, à l'élaboration desquels j'ai participé, portent sur l'étude de l'évolution à long terme des obliquités des planètes. Ces travaux montrèrent que l'axe de rotation des planètes telluriques a été ou est encore actuellement animé de forts mouvements chaotiques. Mercure et Venus, actuellement stabilisées par les effets de marée solaire ont probablement traversé dans leurs passés une large zone chaotique. La Terre est aujourd'hui stabilisée par la Lune, mais en l'absence de cette dernière, l'obliquité pourrait aller de 0 à 85 degrés. Enfin, Mars évolue encore dans une grande région chaotique. En revanche, l'obliquité des planètes géantes se comporte et s'est sans doute toujours comportée de manière extrêmement régulière, ce qui sous-entend que leurs obliquités peuvent être considérées comme primordiales.

Ce travail illustre l'importance que peut avoir la compréhension de la dynamique globale d'un système physique. Une telle étude nous permet en effet de prévoir les différents scénarios d'évolution en fonction de chaque condition initiale.

Dans cette étude de l'obliquité des planètes, l'analyse en fréquence a permis une description fine de ce système comportant 1 + 15 degrés de liberté.

En revanche, le cas du mouvement planétaire semble plus difficile, car ici, tous les degrés de liberté sont couplés. Mais c'est vers une telle compréhension de la dynamique que nous espérons nous diriger.

THE STABILITY OF THE PLANETARY THREE-BODY PROBLEM : INFLUENCE OF THE SECULAR RESONANCES

PHILIPPE ROBUTEL

*Astronomie et Systèmes Dynamiques, Bureau des Longitudes,
77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France*

Key words: Planetary Theory - K.A.M. Theory - Resonances - Stability - Frequency Analysis

At first sight, K.A.M. theory seems to be very useful for obtaining results of global stability in planetary problems. In fact, it describes the topology of nondegenerate quasi-integrable elliptical problems and provides result of stability for all time. In 1963 Arnold (Arnold, 1963) demonstrates a theorem of conservation of invariant tori in degenerated problems, that he apply to the planar planetary three-body problem to prove its stability. This result of stability was extended in 1992 to the spatial case (Robutel, 1992). But the proof of these results is only valid for very small values of the planetary masses, eccentricities and inclinations, which are largely inferior to these met in our solar system. In order to overcome this difficulty, we are going to use Laskar's numerical method of frequency analysis (Laskar, 1992a) which enable us to have a global vision of the secular phase space for two planets in the neighbouring conditions of those of Jupiter and Saturn. The study of such a problem, which is more realistic than those based upon the K.A.M. theory, will lead us to give results of stability available in finite but very long time.

To compute the hamiltonian of the problem, we chose canonical heliocentric formalism (Laskar, 1992b) which enable us to make the reduction of the center of mass. This reduction leads to the study of the motion of two planets around a fixed sun. As the angular momentum is a constant of the motion, we can eliminate both the longitude of the ascending nodes and the inclination. These two consecutive reduction lead to a more simple problem with only four degrees of freedom.

In order to compute the secular hamiltonian, we expand it in Taylor series up to order six in Poincaré variables. Then, the Lindstedt-Poincaré normalization methode is applied up to order two in the planetary masses, due to the existence of small denominators because of the vicinity of the (2:-5) mean motion resonance. This provides us with a quasi-integrable hamiltonian system with two degrees of freedom. A last transformation consists in the diagonalization of the quadratic part of the secular hamiltonian. We finally obtain the following expression of the hamiltonian :

$$H(x, \bar{x}; \alpha) = \nu_1(\alpha)|x_1|^2 + \nu_2(\alpha)|x_2|^2 + H_4(x, \bar{x}; \alpha) + H_6(x, \bar{x}; \alpha)$$

where α is the ratio of the semi-major axis, x_j and \bar{x}_j are the images of the mean Poincaré canonical variables by the previous linear map, H_j are homogeneous polynomials of degree j in (x, \bar{x}) which coefficients depend on α , and the purely

imaginary quantities ν_j are the two eigenfrequencies of the linearized secular problem.

Because of the denominators, the quantities H_4 and especially, H_6 tend to infinity when α reaches the value α_c which corresponds to the separatrix of the (2:-5) mean motion resonance. This reflects the fact that the process of normalization is not convergent in the libration area of the $2\lambda_1 - 5\lambda_2$ argument. On the contrary, if the system stays in the circulation area, the secular hamiltonian of order two provides a good approximation of the real average motion. Thus, if α stays in the interval defined by its actual value α_a and a maximal value α_m lower than α_c , the quantities H_4 and H_6 increase as α approaches α_m , which increases the width of the chaotic areas existing in the neighbourhood of the secular resonances.

For these reasons, several phase spaces have been studied for different values of the parameter α , from the actual value of α to its maximal one α_m .

The frequency analysis reveals that all the trajectories appear as really regular, at least over a time span of 40 Mya, except perhaps for $\alpha = \alpha_m$ in the neighbourhood of the (1:-3) secular resonance where the method of frequency analysis indicates the destruction of tori. Indeed, the phase space contains here the alternation of hyperbolic points and very small islands of libration around elliptic points. But the width of these islands is so small (lower than 10^{-4}) that the expected chaotic region neighbouring hyperbolic points is of negligible size, and then has no significant dynamical effect.

Therefore, even if the K.A.M. theory is not directly applicable to this problem, its stability is insecure for very long time spans in almost all the phase space. Then, we can conclude that, the secular resonances are not generators of instability in the secular problem of two planets like Jupiter and Saturn.

References

- Arnold, V.: 1963, 'Small denominators', *Rus. Math. Surv.* **18**, 85-118.
 Laskar, J.: 1992a, 'Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system', *Long-term dynamic behaviour of natural and artificial N-body systems* A.Roy (ed), Kluwer Publ. 93-114.
 Laskar, J. 1992b, 'Frequency Analysis for Multi-Dimensional Systems. Global Dynamics and Diffusion', *submitted to Physica D*.
 Robutel, P.: 1992, In preparation.

AN APPLICATION OF KAM THEORY TO THE PLANETARY THREE BODY PROBLEM

PHILIPPE ROBUTEL

*Bureau des Longitudes, Equipe Astronomie et Systemes Dynamiques,
77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France*

In 1963 Arnold proved a theorem of conservation of invariant tori, in degenerate quasi-integrable hamiltonian systems (Arnold, 1963). Then, he applied this theorem to the planetary problem ; he used Leverier's tables and asymptotic expansions of the perturbative function in the semi-major axes. He obtained a result of stability in the planar problem of two planets, in the asymptotic case, when the ratio of the semi-major axes goes to zero. In Arnold's paper, a statement is made about the general case, but the computation does not appear in the paper.

Following the general framework of the proof, I propose, thanks to a new planetary analytical expansion in canonical heliocentric variables, to demonstrate the stability of the two planets spatial problem, for all values of the semi-major axes and for a set of large measure of initial conditions with small inclinations, eccentricities, and planetary mass. In order to obtain this result, we must apply Arnold's theorem, which is briefly summarized as follows :

Let H be an analytical hamiltonian function depending on the canonical variables $(q, p) = (q_0, q_1, p_0, p_1)$ in a domain of $T^{n_0} \times R^{n_1} \times R^{n_0} \times R^{n_1}$ and μ a small parameter (in our problem the ratio of planet's mass over sun's mass). In these coordinates, H is of the following form :

$$H = H_0(p_0) + \mu H_1(q, p) = H_0(p_0) + \mu \tilde{H}_1(q_1, p_0, p_1) + \mu \tilde{H}_1(q, p)$$

where \tilde{H}_1 is the short period part, that is $\int \tilde{H}_1(q, p) dq_0 = 0$, and the secular part of order one \tilde{H}_1 is a normal form of degree six in (q_1, p_1) (that is a polynomial of third degree in $\tau_j = p_{1j}^2 + q_{1j}^2$), plus a remainder.

Many other conditions must be fulfilled, but the only one which is not immediately satisfied is that the application "secular frequency" $\tau \mapsto \partial \tilde{H}_1 / \partial \tau$ must be a diffeomorphism in a neighbourhood of zero.

The conclusion of this theorem can be summarized by the existence, in a domain of the phase space which corresponds to a small neighbourhood of zero for secular variables (eccentricities and inclinations in our problem), of a set of large measure consisting of invariant n -dimensional analytic tori filled with quasi-periodic orbits.

To apply this theorem, we must first get an expression of the secular part of the hamiltonian, and then reduce it to a normal form up to order six (in inclinations and eccentricities).

In canonical heliocentric variables (Laskar, 1992), the hamiltonian of the planetary problem takes a simple form, and allows us to make the reduction of the center of mass. With the framework developed by J.Laskar, it is possible to obtain

an expansion, in compact form, of the main part of the perturbative function valid for all values of the semi-major axes (only two Laplace coefficients : $b_{7/2}^{(0)}$ and $b_{7/2}^{(1)}$, are necessary).

Then, we can reduce our problem. Indeed, if we use osculating variables defined with respect to the invariable plane (perpendicular to the angular momentum), it is possible to eliminate both inclinations and longitudes of ascending nodes. Obviously the modulus of the angular momentum C must be kept as a parameter. Rather than C , it is better to use the small parameter D_2 , namely the difference between the square of the angular momentum in a planar circular motion and the square of the actual value of the angular momentum (this quantity tends to zero with the square of eccentricities and inclinations). In this way, we obtain a four degrees of freedom problem, with the small parameter D_2 which includes the inclinations.

Expanded in Poincare variables, the secular part of the hamiltonian is the sum of homogeneous polynomials of even degrees which coefficients depending on the semi-major axis ratio and the angular momentum.

The last transformation we must perform, in the process of reducing the secular part to a normal form, is a Birkhoff transformation. But, above everything else, it is essential to diagonalize the quadratic part. The knowledge of the eigenvectors of the linear part of the hamiltonian system, provides us with a symplectic base in which the unperturbed hamiltonian is the sum of two harmonic oscillators of eigen frequencies ω_1 and ω_2 . Because we manage to get explicit formulas for these two frequencies, it is easy to show that, at least for $D_2 \leq 0.01$ (Jupiter-Saturn case), the following inequality is satisfied : $1 < \omega_2(\alpha, D_2)/\omega_1(\alpha, D_2) < 2$ for every value of the ratio of semi-major axes α . This relation excludes low order secular resonances, and enables us to perform a Birkhoff transformation up to order six (the first secular resonance occurs at degree eight).

Up to this point, it is interesting to make a few remarks : If we are far from mean motion's resonances, the secular problem of order one provides us with a good approximation of the average motion. This problem has only two degrees of freedom, thus any invariant torus divides the space phase into separate regions. If we can show the existence of K.A.M. tori, we will obtain stability for an infinite time. Here, the normalization we have done, only provides us with stability of the secular system for a long, but finite, time.

Now, our last task is to check the main condition. After Birkhoff's normalization, the secular part takes the form :

$$\tilde{H} = \omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \sum_{i,j=1,2} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k=1,2} \lambda_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k$$

with $\tau_j = |x_j|^2$ where (x_i, \bar{x}_j) still denote the new canonical variables.

The condition of no degeneracy for the secular frequencies becomes :

$$Det(\alpha, D_2) = \lambda_{11}(\alpha, D_2) \cdot \lambda_{22}(\alpha, D_2) - \lambda_{12}(\alpha, D_2) \cdot \lambda_{21}(\alpha, D_2) \neq 0$$

This function, expanded to first degree in D_2 , is a formal series of 20000 terms and depends of 13 variables. This expression was obtained using the algebraic manipulator TRIP, developed at the Bureau des Longitudes (Laskar, 1989). Because of this great number of terms, the only way to check the condition is a numerical estimation. This computation shows that, for $D_2 = 0$ and for every value of α , this function is greater than zero. We also proved that, for a fixed α , this quantity is increasing with D_2 , which finished the proof. This brief proof provides us with a result of stability in the general planetary spatial three body problem. Indeed, for small values of planetary mass, inclinations and eccentricities, almost all initial conditions (or a set of large measure) belongs to a four dimensional invariant torus filled with quasi-periodic orbits which are thus stable over infinite time.

References

- Arnold, V.: 1963, "Small denominators", *Rus. Math. Surv.*, **18**.
Laskar, J.: 1989, "Manipulation des series", *Modern methods in celestial mechanics*, D.Benest, C.Froeschlé (eds), Editions Frontieres.
Laskar, J.: 1992, "Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system", *Long-term dynamic behaviour of natural and artificial N-body systems*, A.Roy (ed), Kluwer A.P.
Poincaré, H.: 1893, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 1, Gauthier-Villars

Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon

J. Laskar, F. Joutel & P. Robutel

Astronomie et Systèmes Dynamiques, Bureau des Longitudes,
77 Avenue Denfert-Rochereau, F75014 Paris, France

ACCORDING to Milankovitch theory^{1,2}, the ice ages are related to variations of insolation in northern latitudes resulting from changes in the Earth's orbital and orientation parameters (precession, eccentricity and obliquity). Here we investigate the stability of the Earth's orientation for all possible values of the initial obliquity, by integrating the equations of precession of the Earth. We find a large chaotic zone which extends from 60° to 90° in obliquity. In its present state, the Earth avoids this chaotic zone and its obliquity is essentially stable, exhibiting only small variations of $\pm 1.3^\circ$ around the mean value of 23.3°. But if the Moon were not present, the torque exerted on the Earth would be smaller, and the chaotic zone would then extend from nearly 0° up to about 85°. Thus, had the planet not acquired the Moon, large variations in obliquity resulting from its chaotic behaviour might have driven dramatic changes in climate. In this sense one might consider the Moon to act as a potential climate regulator for the Earth.

Ward³ suggested that, in the absence of the Moon and on the basis of its present spin rate, the Earth might have exhibited quasiperiodic variations of about $\pm 10^\circ$ in obliquity. But he also suggested that without the Moon, the Earth would have had a faster spin rate, leading to greater rotational flattening which would have compensated for the lack of a lunar torque and reduced the obliquity variations to their present value. This conclusion requires that the primordial rotation period rate of the Earth should be less than 8 h. We find that for a slower primordial spin, and over a wide range of initial values, the obliquity variations will be chaotic, with variations much larger than predicted by Ward.

Our model and method of analysis are described in Boxes 1 and 2. We investigate the dynamics of the Earth's obliquity ϵ ($= \cos^{-1} X$ in Box 1) by integrating the equations of precession (1) and (2) over 18 Myr for all values of the initial obliquity ϵ_0 , in steps of 0.1°, from 0° to 170°. The perturbation effect of the Solar System is taken into account by using the secular La90 solution for the Earth⁴. We used the frequency analysis method⁴⁻⁶ for the analysis of the obliquity and precession (Box 2). Briefly, this method consists of defining for each orbit a frequency vector by a refined Fourier analysis over a finite time span. The regularity of the orbits can then be analysed very precisely by studying the regularity of the frequency application which links the action-like variable (ϵ) to the frequencies. In Fig. 2a, the precession frequency p_t is plotted against the initial obliquity ϵ_0 , for a fixed value of the initial precession angle ψ_0 . From $\epsilon_0 = 0$ to $\epsilon_0 = 60^\circ$, the frequency curve is very regular, and reflects the regular behaviour of the solution. A large chaotic zone then extends from 60° to 90°. For higher values of obliquity, the precession frequency becomes negative: the effects of possible resonances are much smaller, and the motion is again very regular. In Fig. 2b, for each integration, the minimum, maximum and mean values of the obliquity reached during the 18 Myr of the integration are given. If, for example, the obliquity goes to 60°, then in a few million years it can reach 90°, because of the planetary secular perturbations alone.

In earlier calculations⁷, we suppressed the Moon, keeping the present values for the Earth's parameters. Because the torque exerted on the Earth is reduced ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$), the precession frequency goes down to $\sim 15.6'' \text{ yr}^{-1}$, which is close to the value of the leading frequencies of $A(t) + iB(t)$ but with the opposite sign (Box 2). As predicted by Ward³, this led to large variations of the obliquity (from 15° to 32° in 1 Myr).

BOX 1 Equations of precession

The general precession in longitude, ψ , and the obliquity at a given time, ϵ , are determined by the motions of the equatorial and ecliptic pole. The precession equations are written in terms of the action variable $X = \cos \epsilon$ and the associated angle variable ψ . Let us denote two new variables by $p = \sin(i^*/2) \sin(\Omega)$, $q = \sin(i^*/2) \cos(\Omega)$ where i^* is the inclination of the Earth with respect to a fixed ecliptic, and Ω the longitude of the node. The equations of precession^{7,8,9} can be written

$$\frac{d\psi}{dt} = T(X, t) - \frac{X}{\sqrt{1-X^2}} (A(t) \sin \psi + B(t) \cos \psi) \quad (1)$$

$$\frac{dX}{dt} = -\sqrt{1-X^2} (B(t) \sin \psi + A(t) \cos \psi) \quad (2)$$

with

$$T(X, t) = c_1 X + c_2 (2X^2 - 1) / (1 - X^2) + c_3 (6X^2 - 1) + c_4 S_0 X - 2C(t) - p_g$$

and

$$A(t) = 2(q + p(qp - pq)) \sqrt{1 - p^2 - q^2} \\ B(t) = 2(p - q(qp - pq)) \sqrt{1 - p^2 - q^2} \\ C(t) = (qp - pq)$$

The coefficients c_1 to c_4 and the geodetic precession p_g depend on the orbital parameters of the Moon and the Sun ($c_1 = 37.526603'' \text{ yr}^{-1}$, $c_2 = -0.001565'' \text{ yr}^{-1}$, $c_3 = 0.000083'' \text{ yr}^{-1}$, $c_4 = 34.818618'' \text{ yr}^{-1}$, $p_g = 0.019188'' \text{ yr}^{-1}$). We also have $S_0 = \frac{1}{2}(1 - e^2)^{-3/2} - 0.522 \times 10^{-6}$, where e is the eccentricity of the Earth¹⁰. The initial conditions for the Earth are $\psi(t=0) = 50.290966'' \text{ yr}^{-1}$, $\epsilon(t=0) = 23^\circ 26' 21.448''$. These equations can be associated with the hamiltonian depending on time

$$H(X, \psi, t) = \mathcal{F}(X, t) + \sqrt{1-X^2} (A(t) \sin \psi + B(t) \cos \psi) \quad (3)$$

where

$$\mathcal{F}(X, t) = \frac{1}{2}(c_1 + S_0 c_4) X^2 - c_2 X \sqrt{1-X^2} + c_3 (2X^2 - 1) - (2C(t) + p_g) X$$

To understand the dynamics of this hamiltonian, its small terms ($c_2, c_3, p_g, C(t)$) can be neglected, although they will be taken into account during the numerical computations. We shall also neglect the eccentricity of the Earth and the Moon, as well as the inclination of the Moon. In this case, $c_1 = (C - A)/C \times 3n_0^2 m_w / 2\nu$, $S_0 = \frac{1}{2}$, $c_4 = (C - A)/C \times 3n_0^2 M_0 / \nu$, where ν is the angular velocity of the Earth, $(C - A)/C$ its dynamical ellipticity (which is proportional to ν^2), n_w and m_w , the mean motion and mass of the Moon, and n_0 and M_0 the same quantities for the Sun. The hamiltonian then reduces to

$$H(X, \psi, t) = \frac{1}{2} \alpha X^2 + \sqrt{1-X^2} (A(t) \sin \psi + B(t) \cos \psi) \quad (4)$$

with $\alpha = c_1 + S_0 c_4$. The expression $A(t) + iB(t)$ (as well as the eccentricity e of the orbit of the Earth) will be given by the La90 solution of Laskar⁴.

Here we look at the possible dynamics of the very early Earth, on the hypothesis that the Moon was not present at the time. If so, because of tidal dissipation, the rotation of the Earth would have been faster, as shown by geological records⁹ which give $\nu = 1.22 \nu_p$ for -2.5 Gyr (where ν_p is the present rotation velocity of the Earth). We analysed the obliquity variations for this rate of rotation (Fig. 3). In this case, the chaotic region becomes very large, extending from 0° to about 80°. Even if the initial obliquity is small, it can exceed 50° in a few million years. Furthermore, the frequency analysis shows the possibility of diffusion up to about 80°, although this diffusion may be slow.

For a higher rotation speed of $\nu = 1.6 \nu_p$, which may have existed at -4.5 Gyr, a large resonant zone appears, corresponding to the node secular mean rate of Jupiter and Saturn ($s_6 = -26.3302'' \text{ yr}^{-1}$) (Fig. 4). For zero initial obliquity, we find variations of $\sim 10^\circ$, but as soon as the initial obliquity reaches 4° , the motion can enter the chaotic zone surrounding the resonant island, and show variations of more than 30° in a few million years, with the possibility of further diffusion up to more than 85° .

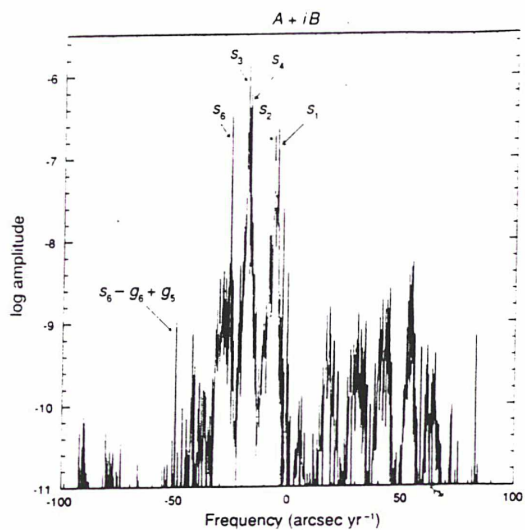


FIG. 1 Fourier spectrum of $A(t) + iB(t)$ over 17 Myr. The main secular frequencies of the Solar System can be identified, as well as the small isolated term $s_6 - g_6 + g_5$.

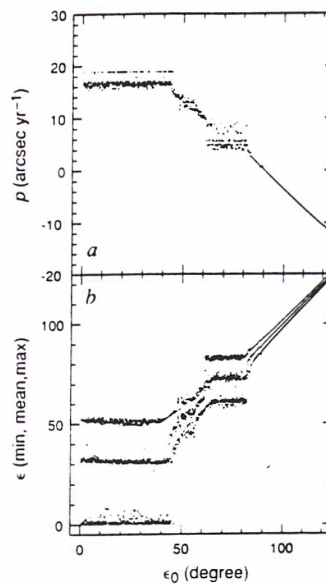


FIG. 3 Without the Moon, the chaotic zone revealed by the frequency analysis over 18 Myr (a) extends from 0° to $\sim 85^\circ$ for a rotation velocity of the Earth $\nu = 1.22 \nu_0$. b, Maximum, mean and minimum obliquity reached during 18 Myr.

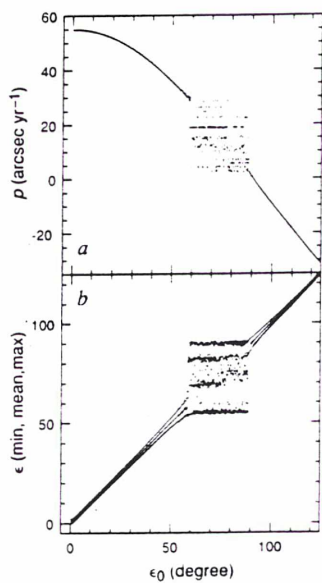


FIG. 2 Frequency analysis over 18 Myr of the precession of the Earth under lunar and solar torque for all values of the initial obliquity (ϵ_0). a, A large chaotic zone exists from about 60° to 90° . b, Maximum, mean and minimum obliquity reached during 18 Myr.

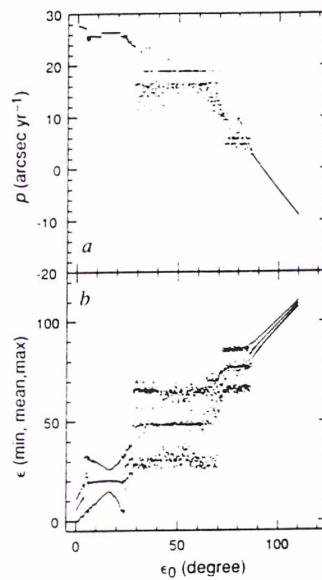


FIG. 4 For $\nu = 1.6 \nu_0$, the large chaotic zone extends from nearly 0° to $\sim 85^\circ$. a, In the region of low obliquity, there exists a large island corresponding to resonances with the secular frequency $s_6 = -26.3302 \text{ arcsec yr}^{-1}$ of the node of Jupiter and Saturn. This region is also visible in (b).



BOX 2 Analysis of resonances

The solution of the orbital motion of the Earth being chaotic^{4,11-14}, a quasiperiodic approximation of $A(t) + iB(t)$ in equation (4), is not well suited for obtaining accurate solutions over a few million years, but will be useful for a qualitative understanding of the behaviour of the solution. In the Fourier spectrum of $A(t) + iB(t)$ (Fig. 1) we can observe peaks which are identified as the main planetary secular frequencies in inclination. Around each of these, several secondary peaks appear, which largely reflect the non-regular behaviour of the solution. A frequency analysis⁴⁻⁶ of $A(t) + iB(t)$ can be done in order to find a quasiperiodic approximation of this function over a few million years of the form

$$A(t) + iB(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{i(\nu_k t + \phi_k)}$$

With this approximation, the hamiltonian now reads

$$H = \frac{1}{2} \alpha X^2 + \sqrt{1 - X^2} \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin(\nu_k t + \psi + \phi_k) \quad (5)$$

which is the hamiltonian of an oscillator of frequency αX perturbed by a quasiperiodic external oscillation with several frequencies ν_k . Resonance will occur when $\psi = \alpha X = \alpha \cos \varepsilon$ is equal to the opposite ($-\nu_k$) of one of the frequencies ν_k .

The value for the mean precession speed of the Earth over 18 Myr is $\rho_e = 50.4712'' \text{ yr}^{-1}$. This value is very close to the opposite of a small term due to the perturbations of Jupiter and Saturn $s_6 - s_6 + s_5 = -50.3021'' \text{ yr}^{-1}$. The passage through resonance could occur during an ice age, and could lead to an increase of 0.5° in the obliquity variations⁷. Nevertheless, the Earth is far from the main planetary resonances, the closest being $s_6 = -26.3302'' \text{ yr}^{-1}$. With the current value of α , we estimate that this resonance is reached for an obliquity of about 60° .

Thus, we find that even if the initial obliquity of the Earth was very small, resonances or chaotic behaviour could have raised it to 50° in a few million years, with mean value 20° - 30° . If the Moon was then captured, the precession frequency would have increased suddenly, and the motion would have become regular. The value of the obliquity would be frozen to its current value and thereafter suffer only small oscillations, until tidal dissipation⁸ ultimately drives the Earth into the large chaotic zone.

It can thus be claimed that the Moon is a climate regulator for the Earth. If it were not present, or if it were much smaller, for many values of the Earth primordial spin rate, the obliquity of the Earth would be chaotic with very large variations, reaching more than 50° in a few million years and even, in the long term, more than 85° . This would probably have drastically changed the climate on the Earth. \square

Received 21 September 1992; accepted 18 January 1993

- 1 Imbrie, J. *Icarus* **50**, 408-422 (1982).
- 2 Berger, A., Imbrie, J., Hays, J., Kukla, G. & Saltzman, B. (eds) *Milankovitch and Climate* (Reidel, Dordrecht, 1984).
- 3 Ward, W. R. *Icarus* **50**, 444-448 (1982).
- 4 Laskar, J. *Icarus* **88**, 266-291 (1990).
- 5 Laskar, J., Froeschne, C. & Celletti, A. *Physica D* **56**, 253-269 (1992).
- 6 Laskar, J. *Physica D* (in the press).
- 7 Laskar, J., Joutel, F. & Boudin, F. *Astr. Astrophys.* (in the press).
- 8 Williams, G. E. *J. Phys. Earth* **38**, 475-491 (1990).
- 9 Kinoshita, H. *Celest. Mech.* **15**, 277-326 (1977).
- 10 Laskar, J. *Astr. Astrophys.* **157**, 59-70 (1986).
- 11 Laskar, J. *Nature* **338**, 237-238 (1989).
- 12 Laskar, J. in *Chaos, Resonance and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System* (ed. Ferraz-Mello, S.) 1-16 (Kluwer, Dordrecht, 1992).
- 13 Laskar, J., Quinn, T. & Tremaine, S. *Icarus* **95**, 148 (1992).
- 14 Sussman, G. & Wisdom, J. *Science* **257**, 56-62 (1992).

The chaotic obliquity of the planets

J. Laskar & P. Robutel

Astronomie et Systèmes Dynamiques, Bureau des Longitudes, 77 Avenue Denfert-Rochereau, F-75014 Paris, France

Numerical study of the global stability of the spin-axis orientation (obliquity) of the planets against secular orbital perturbations shows that all of the terrestrial planets could have experienced large, chaotic variations in obliquity at some time in the past. The obliquity of Mars is still in a large chaotic region, ranging from 0° to 60°. Mercury and Venus have been stabilized by tidal dissipation, and the Earth may have been stabilized by capture of the Moon. None of the obliquities of the terrestrial planets can therefore be considered as primordial.

THE problem of the origin of the obliquities of the planets (that is, the orientation of their spin axis) is important, because if the obliquities are primordial, they could provide some dynamical constraints on the formation of the Solar System¹⁻⁴. We have investigated how long-term perturbations by other planets affect the obliquities and precession rates of all major planets of the Solar System, and demonstrate that none of the inner planets (Mercury, Venus, the Earth and Mars) can be considered to have primordial obliquities. Any of these planets could have started with nearly zero obliquity, in a prograde state, and the chaotic behaviour of their obliquity could have driven them to their current value. If their primordial spin rate was high enough, Mercury and Venus could have undergone large and chaotic changes of obliquity from 0° to ~90°, before dissipative effects ultimately drove them to their current obliquity. The present obliquity of the Earth may have been reached during a chaotic state before the capture of the Moon⁵. The obliquity of Mars is chaotic at present, with possible variations from 0° to ~60°. The obliquities of the outer planets are stable, but may have gone through a similar process in an earlier stage of the Solar System's formation.

Methods

If the motion of the Solar System were quasiperiodic, the motion of precession could be modelled by equations (3) and (5) in Box 1. One can then use the argument of resonance overlap⁶ to suggest whether the motion of precession will become chaotic, or will stay regular. This can be done for the outer planets, but to obtain more accurate results, we integrated directly the full equations of precession (equations (3) and (4)), and did a frequency analysis (Box 2) of the precession solution. As the dynamical ellipticity $(C - A)/C$ is proportional to ν^2 , the pre-

cession constant α is proportional to the spin rate of the planet ν . For a given value of α , we numerically integrated the precession equations, for all values of the initial obliquity, in steps of 0.1°. These integrations use the orbital solution La90 (ref. 8) as an input and are, in general, done over 18 Myr with a step size of ~200 yr. We then used frequency analysis to obtain a frequency curve whose regularity tells us about the regularity of the precession and obliquity. We also recorded the maximum and minimum value reached by the obliquity during these integrations (Figs 3, 4).

The primordial spin rates of Mercury, Venus and the Earth are not known precisely, so for these planets, we did the above analysis for a wide range of α to obtain a general view of how the obliquity changed with time (Fig. 5). In Fig. 5, regular motion is represented by small dots, while the chaotic zones are larger black points. The chaotic zones would be even larger if we took into account the chaotic diffusion of the orbital solution over timescales of a billion years⁹.

Past and present obliquities

Mercury. Mercury's present spin is very low, and apparently trapped in a (2:3) spin-orbit resonance. Most probably, the

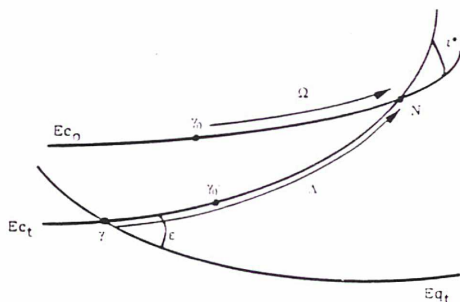


FIG. 1 Fundamental planes for the definition of precession. Eq_t and Ec_t are the mean equator and ecliptic at time t . Ec_0 is the fixed ecliptic at Julian date 2000, with equinox γ_0 . The general precession in longitude ψ is defined by $\psi = \lambda - \omega$. γ_0 is defined by $\gamma_0 N = \gamma_0 N = i^*$; i^* is the inclination.

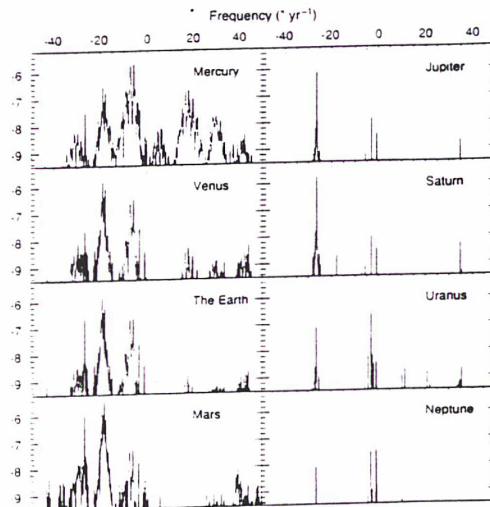


FIG. 2 Fourier spectrum (with Hanning filter) of the planetary forcing term in inclination $A(t) + iB(t)$. The logarithm of the amplitude of the Fourier coefficients is plotted against the frequency (yr^{-1}).

primordial spin rate of Mercury was much higher and was slowed down by solar tides. Extrapolating the apparent correlation of angular momentum with mass⁹, the primordial rotation period of Mercury is found to be 19 h (ref. 10), indicating a precession frequency of $\sim 127^\circ \text{ yr}^{-1}$. Tidal dissipation and core-mantle interactions will cause this frequency to decrease^{11,12,32}. For a rotation period smaller than 100 h, there still exists some regular motion for small obliquities, but when the spin rate of the planet decreases, for $\alpha \approx 20^\circ \text{ yr}^{-1}$, the obliquity enters a very large chaotic zone, extending from 0° to $\sim 100^\circ$ (Figs 3, 5a). During this period, and until tidal dissipation ultimately drives Mercury into its present state, the orientation of Mercury undergoes very large and chaotic changes from 0° to 100° within a few million years. For example, for $\alpha = 10^\circ \text{ yr}^{-1}$ (Fig. 3), the obliquity varies from 0 to more than 90° within a few million years for any value of the initial obliquity within this range.

Provided its primordial rotation period was smaller than 300 h (Fig. 5), Mercury must therefore have suffered large-scale chaotic behaviour during its history. At some point its orientation must have been very different from at present (with the pole facing the Sun) and this could have left some traces on the planet.

Venus. The orientation of the pole of Venus (178°) is one of the puzzling features of the Solar System^{1,13,14}. Dissipative effects of core-mantle interactions and atmospheric tides can account for some change in spin orientation, but apparently only from 90° to the present value^{13,14}. It is thus generally assumed that the retrograde rotation of Venus is primordial, which is one of the arguments supporting the stochastic accretion mechanism for the terrestrial planets¹⁴.

As for Mercury, we investigated the global dynamics of the precession and obliquity of Venus using frequency analysis. According to Goldreich¹⁰, the primordial rotation period of Venus was ~ 13 h, which gives a precession constant of 31° yr^{-1} . We started our investigation with a frequency constant of 40° yr^{-1} , which reveals a regular behaviour for small obliquities, and then a large chaotic region from 50° to 90° . Tidal dissipation due to the Sun will decrease the planet's rotation speed, and consequently its precession constant. When the precession constant reaches 20° yr^{-1} , corresponding to a period of ~ 20 h, the chaotic zone extends from 0° to nearly 90° (Fig. 3). In Fig. 3, we can see several well defined chaotic zones, but the frequency analysis shows that no invariant surface bounds the motion, so the orbits can diffuse in a few million years from 0° to nearly 90° . As the precession frequency continues to decrease, the shape

BOX 1 Precession and obliquity

Let $A = B < C$ be the principal moments of inertia of a planet. We assume that the axis of rotation of the planet is also its axis of maximum momentum of inertia C . The spin angular momentum is $\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{H}}$, with $\hat{\mathbf{H}}$ a unit vector, and $H = Km\mathcal{A}^2\nu = C\nu$, where K is a coefficient depending on the internal structure of the planet ($K = 2/5$ for an homogeneous sphere), \mathcal{A} its equatorial radius, m its mass, and ν its spin rate. Let $\hat{\mathbf{i}}$ be the unit vector in the direction of the Sun, and r the distance to the Sun. The torque exerted by the Sun, limited to first order in \mathcal{A}/r , is

$$\mathbf{L} = \frac{3GM}{r^3} \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{I} \hat{\mathbf{i}} \quad (1)$$

where \mathbf{I} is the matrix of inertia^{23,24}, G the gravitational constant, and M the solar mass. The precession motion of the planet is given by $d\mathbf{H}/dt = \mathbf{L}$. By averaging over the time (and thus over the mean anomaly), we obtain the equations of precession; that is, the secular motion of the spin axis of the planet

$$\frac{d\hat{\mathbf{H}}}{dt} = \alpha(1 - e^2)^{-3/2} (\hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) \hat{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{Z}} \quad (2)$$

where $\hat{\mathbf{Z}}$ is the unit vector in the direction of orbital angular momentum, e the eccentricity, and where

$$\alpha = \frac{3GM}{2a^3\nu} \frac{C - A}{C}$$

with a the semi-major axis of the planet, will be called the precession constant. Let E_{c0} be the orbital plane at the origin of time with equinox γ_0 , E_{ct} the orbital plane at time t with equinox γ (Fig. 1), and N the intersection of E_{c0} and E_{ct} . The precession in longitude is $\psi = \Lambda - \Omega$, where $\Omega = \gamma_0 N$ is the longitude of the node, and $\Lambda = \gamma N$. We also let γ_0 be the point on E_{ct} such that $\gamma_0 N = \Omega$. The coordinates of $\hat{\mathbf{H}}$ in the reference frame E_{ct} with origin γ_0 are $(\sin \psi \sin \epsilon, \cos \psi \sin \epsilon, \cos \epsilon)$, where ϵ is the obliquity (the angle between the Equator (E_{ct}) and orbital plane (E_{c0})) at time t . After some calculus, and using the action variable $X = \cos \epsilon$ and the notations $p = \sin(i^*/2) \sin(\Omega)$, $q = \sin(i^*/2) \cos(\Omega)$ where i^* is the inclination of E_{ct} with respect to E_{c0} , we obtain the equations of precession

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial X}; \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi} \quad (3)$$

which are related to the hamiltonian

$$\mathcal{X}(X, \psi, t) = \frac{\alpha}{2} (1 - e(t)^2)^{3/2} X^2 + \sqrt{1 - X^2} (A(t) \sin \psi + B(t) \cos \psi) \quad (4)$$

with

$$A(t) = 2(q + p(qp - pq)) / \sqrt{1 - p^2 - q^2}$$

$$B(t) = 2(p - q(qp - pq)) / \sqrt{1 - p^2 - q^2}$$

$$C(t) = (qp - pq)$$

The expression $A(t) + iB(t)$ and the eccentricity $e(t)$ describe the orbital motion of the planet and will be given by the La90 solution of Laskar⁸. As the orbital motion of the planets, and especially of the inner planets, is chaotic^{8,18,25-27}, a quasiperiodic approximation of $A(t) + iB(t)$ is not well suited for obtaining an accurate solution over a few million years. This is reflected in the filtered Fourier spectrum of $A(t) + iB(t)$ for the inner planets (Fig. 2) where only the main peaks can be identified as combinations of the planetary secular fundamental frequencies. A quasiperiodic approximation of $A(t) + iB(t)$ of the form

$$A(t) + iB(t) \approx \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{i(\nu_k t + \phi_k)}$$

can still be used when looking at the outer planets or, more important, for a qualitative understanding of the behaviour of the solution. With this approximation, the hamiltonian reads

$$H = \frac{\alpha}{2} (1 - e(t)^2)^{-3/2} X^2 + \sqrt{1 - X^2} \times \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin(\nu_k t + \psi + \phi_k) \quad (5)$$

which is the hamiltonian of an oscillator of frequency αX , perturbed by a quasiperiodic external oscillation with several frequencies ν_k . Resonance will occur when $\psi = \alpha X = \alpha \cos \epsilon$ is equal to the opposite ($-\nu_k$) of one of the frequencies ν_k . When limited to a single periodic term, and with $e(t) = Cte$, this hamiltonian is integrable and is often referred to as Colombo's top²⁸. Its equilibrium points are then called Cassini states²⁹. But in the present case, $e(t)$ and $A(t) + iB(t)$ take into account the secular perturbations of the whole Solar System, modelled as a system with 15 degrees of freedom, and this hamiltonian has $1 + 15$ degrees of freedom. Its solutions evolve in a phase space of dimension $2 + 30$ (2 accounts for the ψ, X variables). In fact, the orbital solution La90 is not coupled with the precession variables, and will thus never change. The hamiltonian is thus considered to depend on time, but in a nonperiodic way. Traditional tools, such as the Poincaré surface of sections, cannot be used for the analysis of its dynamics, and we will rely on Laskar's method of frequency analysis^{8,30,31} (Box 2).

of the chaotic region changes (Fig. 5). If the obliquity of Venus reaches $\sim 90^\circ$, it could become stabilized around that value and evade the chaotic zone. Dissipative effects could then, as the planet rotation continues to slow down, drive the spin axis towards its present value of 178° . Therefore the retrograde rotation of Venus may not be primordial. If the orientation underwent large-scale chaotic behaviour during its history, the pole of Venus could have faced the Sun for extended periods, possibly causing strong changes in the climate and atmospheric circulation.

Mars. The analysis for Mars is more direct, as its rotation speed can be considered as primordial. Mars is far from the Sun and has no large satellite whose tidal interactions could have slowed

it much. Ward¹⁵ showed that the planetary secular perturbations cause the obliquity of Mars, unlike that of the Earth, to suffer large variations of $\pm 10^\circ$ around its mean value 25° . The precession constant of Mars^{16,17} ($8.26'' \text{ yr}^{-1}$) is close to some secular frequencies of the planet, and the question of resonance has been raised several times^{15,17}. Without knowledge of the precise initial conditions, no definite conclusion has been drawn.

Here we investigate the problem in a different manner, by looking at its global dynamics. First we did the frequency analysis of the obliquity of Mars over 45 Myr. We found a large chaotic zone ranging from $\sim 0^\circ$ to 60° . In Fig. 4a and b, the motion looks regular for small values of the initial obliquity. But the motion of the inner planets is chaotic^{8,18}, and the phases of the planetary secular terms are lost after ~ 100 Myr. We can thus study the problem independently of the phases. The results in Fig. 4c, d were calculated with a small change of the initial

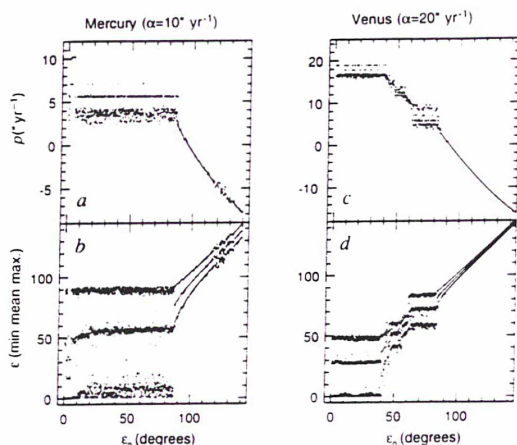


FIG. 3 Frequency analysis of the obliquity over 18 Myr for Mercury (a, b) with $\alpha = 10'' \text{ yr}^{-1}$ (rotation period ~ 255 h) and Venus (c, d) with $\alpha = 20'' \text{ yr}^{-1}$ (rotation period ~ 20 h). The precession frequency is plotted against the initial obliquity. The regularity of the frequency curve shows the regularity of the motion. For Mercury, the chaotic zone extends from 0° to 100° , and from 0° to nearly 90° for Venus. The maximum, mean and minimum values of the obliquity reached over 18 Myr are shown in b and d.

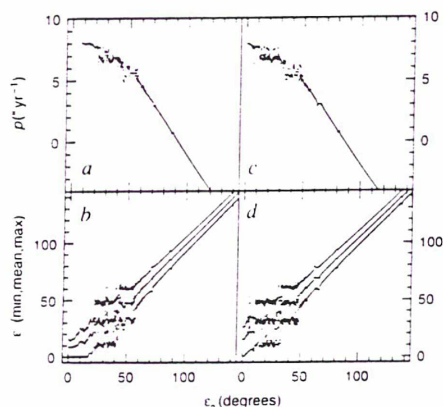


FIG. 4 Frequency analysis of the obliquity of Mars over 45 Myr. In a and b, the planetary solution is used with the present initial conditions. A large chaotic zone is visible, ranging from 0° to 60° . When the phase of the planetary solution is shifted by about -3 Myr, this large chaotic zone is even more visible (c, d). The maximum, mean and minimum values of the obliquity reached over 45 Myr are shown in b and d.

BOX 2 Frequency analysis

The numerical analysis of the fundamental frequencies follows the method of ref. 8. In that case, frequency analysis showed that for the inner planets (Mercury to Mars) the chaotic zone is relatively large, whereas for the outer planets (Jupiter to Neptune) this zone is much smaller. More generally, the method outlined here can be applied to study the stability of the solutions of a conservative dynamical system, and is based on a refined numerical search for a quasiperiodic approximation of its solutions over a finite time span^{8,30,31}. If $f(t)$ is a function with values in the complex domain obtained numerically over a finite time span $[-T, T]$, the frequency analysis algorithm will consist of a search for a quasiperiodic approximation for $f(t)$ with a finite number of periodic terms of the form

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{i\sigma_k t}$$

The frequencies σ_k and complex amplitudes a_k are found by iteration. To determine the first frequency σ_1 , one searches for the maximum amplitude of $\phi(\sigma) = \langle f(t), e^{i\sigma t} \rangle$, where the scalar product of two functions $\langle f(t), g(t) \rangle$ is defined by

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)g(t)\chi(t) dt$$

and where $\chi(t)$ is a weighting function, that is, a positive function with $1/2T \int_{-T}^T \chi(t) dt = 1$, and g the complex conjugate of f . Once the first periodic term $e^{i\sigma_1 t}$ is found, its complex amplitude a_1 is obtained by orthogonal projection, and the process is started again on the remaining part of the function $f_1(t) = f(t) - a_1 e^{i\sigma_1 t}$. A second analysis is made to estimate the precision of the determination. In the case of an integrable hamiltonian system with n degrees of freedom, the frequency analysis of the solutions will give their quasiperiodic expansion and in particular will determine the vector $(\nu_i)_{i=1, n}$ of the fundamental frequencies of the system.

If an orbit is not regular (not quasiperiodic), in case of nearly integrable systems, the frequency analysis gives a quasiperiodic approximation to the solution which holds only locally in time. In other words, it will give us a frequency vector $(\nu_i(t))$, for each value of t obtained by applying the frequency analysis algorithm over the time span $[t, t+T]$. For the analysis of the precession and obliquity, we shall only look for the precession frequency p , which is associated to the angle and action variables ψ, X . The initial phase ψ_0 is fixed. If we take some initial conditions X , we can carry out the frequency analysis for the orbits corresponding to initial conditions (ψ_0, X) (at $t=0$) over the time span $[0, T]$. We thus define the frequency map

$$F_T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ X \rightarrow p$$

The regularity of the precession and obliquity can be analysed very precisely by studying the regularity of the frequency map of this problem with $1+n$ degrees of freedom. The distortions of the frequency map indicate the non-existence of invariant surfaces which may bound the obliquity variations^{30,31}. As these distortions increase, they produce a complete loss of regularity of the frequency map, which is an indication of chaotic motion³².

date of the orbital solution (~ 3 Myr relative to Fig. 4a, b). This should convince the reader that the chaotic zone extends from nearly 0° to 60° . Figure 4d shows that some orbits changed dramatically in less than 45 Myr.

From this, we can conclude that the obliquity of the planet Mars is chaotic, with possible variations ranging from nearly 0° to $\sim 60^\circ$. We also computed the Liapounov exponent of the obliquity of Mars for the present initial conditions¹⁹ and found a value similar to that of the planet¹⁸, $\sim 1/5$ Myr. We checked

that this value reveals the intrinsic chaotic behaviour of the obliquity of Mars by repeating the computation with a 'regular' value ($50'' \text{ yr}^{-1}$) of precession constant. Nevertheless, we consider the frequency analysis as more significant, as it gives the extent of the chaotic zone. Moreover, by giving the global picture of the dynamics, it shows that small changes in the initial conditions or model will not affect this result substantially.

The chaotic behaviour of the orientations of Mars could have been important in its evolution, as its obliquity could have gone

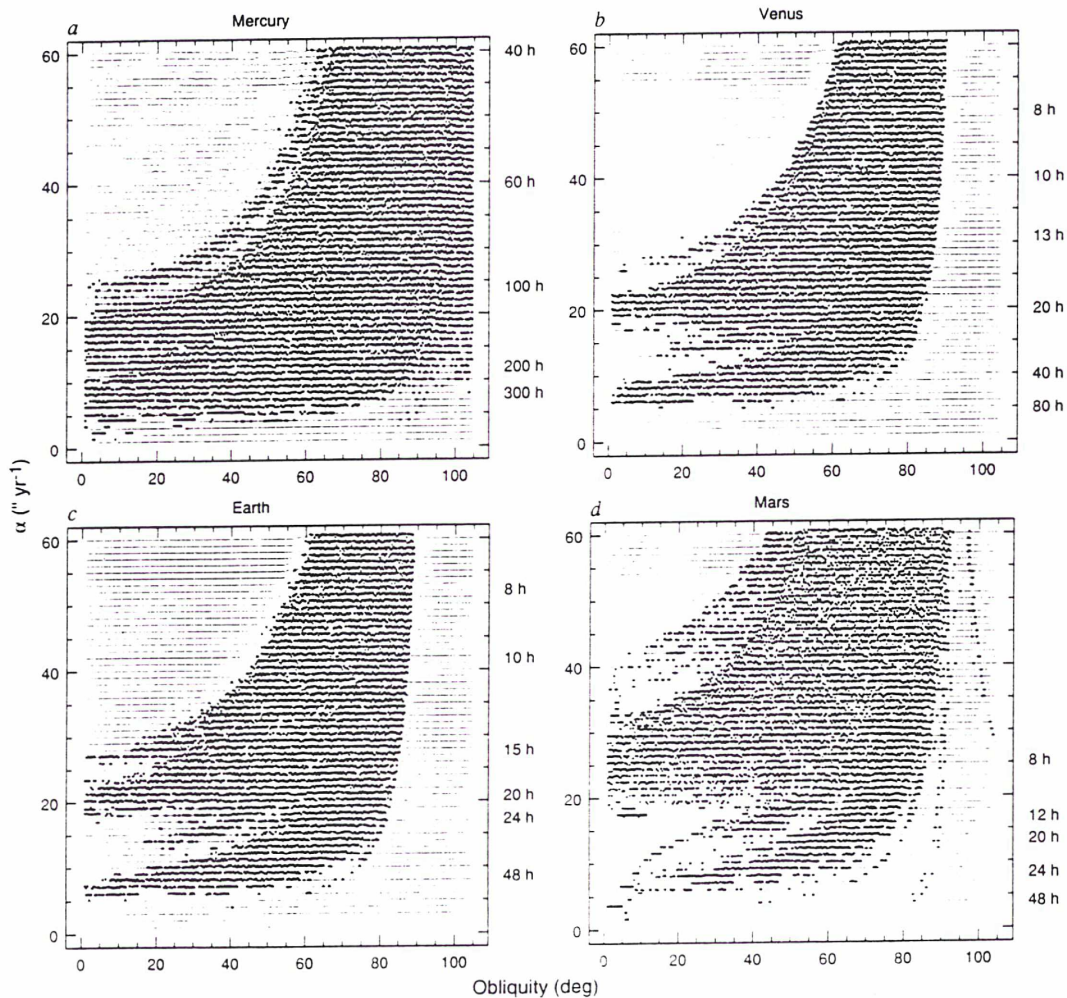


FIG. 5 The zone of large-scale chaotic behaviour for the obliquity of (a) Mercury, (b) Venus, (c) the Earth (without the Moon), (d) Mars, for a wide range of spin rate. The precession constant α is given on the left in arcseconds per year, and the estimate of the corresponding rotation period of the planet on the right, in hours. The regular solutions are represented by small dots, while large black dots represent solutions with large-scale chaotic behaviour. The chaotic motion is estimated by the diffusion of the precession frequency obtained from numerical frequency analysis over 36 Myr. For each initial condition (ϵ, α), the corresponding point is shifted vertically proportionally to the diffusion of the orbit. In the large chaotic

zones visible here, the chaotic diffusion will occur on horizontal lines (α is fixed), and the obliquity of the planet can explore horizontally all the black zone in a few million years. The extent of the chaotic zone should be even larger when one considers diffusion over longer timescales. With the Moon, one can consider that the present situation of the Earth can be represented in c roughly by the point $\epsilon = 23^\circ$, $\alpha = 55'' \text{ yr}^{-1}$, which is in the middle of a large zone of regular motion. Without the Moon, for a spin period ranging from about 12 h to 48 h, the obliquity of the Earth would suffer very large chaotic variations.

up to 60° during its history. The obliquity of Mars cannot be considered as primordial; the planet also could have been formed with any obliquity from 0° to 60°, and been driven to its present values only by the effect of the secular planetary perturbations.

The Earth. The equations for the precession of the Earth are complicated by the presence of the Moon; we consider the stability of its obliquity in the accompanying paper⁵. The present obliquity variations²⁰ are only $\pm 1.3^\circ$ around the mean value of 23.3°, but in the absence of the Moon, the torque exerted on the Earth would be smaller; we found, assuming a primordial rotation of 15 h, that the obliquity of the Earth would show very large variations in a chaotic zone ranging from nearly 0° to 85° (ref. 5).

The value of the primordial spin rate is controversial, so we decided to study the global stability of the obliquity for a wide range of rotation period (Fig. 5c). For a rotation period of 8 h, the increase of the equatorial bulge of the Earth would compensate for the lack of the Moon²¹, but for more generally accepted values of its spin, ranging from 12 to 48 h, most initial values of obliquity lead to large-scale chaotic variations, in many cases reaching 80–90° (Fig. 5).

For the Earth, as for the other terrestrial planets, the obliquity cannot be considered primordial. The Earth could have been formed in a large chaotic zone, and the capture of the Moon would have frozen the obliquity to its current value.

The outer planets. We also analysed the global stability of the obliquity of the outer planets (Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune). The orbital solution of these planets behaves in a very different way from those for the inner planets. As the different spectra of $A(t) + iB(t)$ show (Fig. 2), they consist only of well isolated lines. There will be no large overlap of the different resonant terms: as for the inner planets, and the solutions are essentially regular. Estimates of precession constants for the outer planets are imprecise because their structure is not well known, but are estimated²² to be well below $5'' \text{ yr}^{-1}$. As we obtain a global picture of the dynamics, we also learn how the obliquities behave for slightly different values of these constants. Practically speaking, it is difficult to destroy the stability of the obliquities until the precession constant of these planets reaches $26'' \text{ yr}^{-1}$, where it will be in resonance with the secular frequency

s_6 (ref. 8). Even then, this resonance being isolated, the motion will show large but regular oscillations. We can thus say that, as for the orbital motion, the obliquities of the outer planets are essentially stable, and should be considered as primordial.

But primordial here means that the obliquities have not changed since the Solar System was in the final state of its formation, in a state similar to its present one (at least for the outer planets). If it had, at some previous stage, been more massive than now, similar instabilities as for the inner planets could have occurred, which may have driven the obliquities of the outer planets to their present configurations.

Conclusions

None of the inner planets (Mercury, Venus, the Earth and Mars) can be considered as to have primordial obliquities, and all these planets could have been formed with a near-zero obliquity. The obliquities of all these planets could have undergone large-scale chaotic behaviour during their history. Mercury and Venus have been stabilized by dissipative effects, the Earth may have been stabilized by the capture of the Moon, and Mars is still in a large chaotic zone, ranging from 0° to 60°.

It should also be noted that planets in a retrograde state would be much more stable than planets with a prograde spin rate, as all the main forcing frequencies of the inclination are negatives (Fig. 2).

The obliquities of the outer planets (Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune) are essentially stable, and can thus be considered as primordial, that is, with about the same value they had at the end of the formation of the Solar System. Nevertheless, chaotic behaviour of the obliquities under planetary perturbations could have occurred in an earlier stage of the formation of the Solar System, when it could have been more massive, and this point should be clarified by further studies.

The chaotic orbital motion of the inner planets^{5,18} results in large-scale chaotic behaviour of their obliquity for most initial conditions. The stability of the Earth's climate thus depends on the presence of the Moon which stabilizes its obliquity⁵, and hence the insolation variations on its surface. This should be taken into consideration when estimating the probability of finding a planet with climate stability comparable to the Earth's around a nearby star. \square

Received 26 October 1992; accepted 25 January 1993.

- Harris, A. W. & Ward, W. R. *A. Rev. planet. Sci.* **10**, 61–108 (1982).
- Tremaine, S. *Icarus* **88**, 85–92 (1991).
- Dones, L. & Tremaine, S. *Science* **258**, 350–354 (1993).
- Safronov, V. S. *Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and the Planets* (Nauka, Moscow, 1969).
- Laskar, J., Joutel, F. & Robutel, P. *Nature* **363**, 615–617 (1993).
- Chirkov, B. V. *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979).
- Lambeck, K. *The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences* (Cambridge Univ. Press, 1980).
- Laskar, J. *Icarus* **88**, 266–291 (1990).
- MacDonald, G. J. F. *Rev. Geophys.* **2**, 467–541 (1964).
- Goldreich, P. & Soter, S. *Icarus* **6**, 375–389 (1966).
- Burns, J. A. *Icarus* **28**, 453–458 (1976).
- Peale, S. J. *Icarus* **28**, 459–467 (1976).
- Goldreich, P. & Peale, S. J. *Astr. J.* **75**, 273–284 (1970).
- Dobrovolskis, A. R. *Icarus* **41**, 18–35 (1980).
- Ward, W. R. *J. geophys. Res.* **79**, 3375–3386 (1974).
- Hilton, J. L. *Astr. J.* **102**, 1510–1527 (1991).
- Ward, W. R. & Rudy, D. J. *Icarus* **84**, 160–164 (1991).

- Laskar, J. *Nature* **338**, 237–238 (1989).
- Davies, M. E. et al. *Celest. Mech.* **53**, 377–379 (1992).
- Laskar, J., Joutel, F. & Boudin, F. *Astr. Astrophys.* (in the press).
- Ward, W. R. *Icarus* **50**, 444–448 (1982).
- Korycansky, D. G., Bodenheimer, P. & Pollack, J. B. *Icarus* **92**, 234–251 (1991).
- Goldreich, P. *Rev. Geophys.* **4**, 411–439 (1966).
- Murray, C. A. *Vectorial Astrometry* (Hilger, Bristol, 1983).
- Laskar, J. in *Chaos, Resonance and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System* (ed. Ferraz-Mello, S.) 1–16 (Kluwer, Dordrecht, 1992).
- Laskar, J., Quinn, T. & Tremaine, S. *Icarus* **95**, 148–152 (1992).
- Sussman, G. & Wisdom, J. *Science* **257**, 56–62 (1992).
- Colombo, G. *Astr. J.* **71**, 891–896 (1966).
- Henrad, J. & Murigneux, C. *Celest. Mech.* **40**, 345–366 (1987).
- Laskar, J., Froeschle, C. & Celletti, A. *Physica D* **56**, 253–269 (1992).
- Laskar, J. *Physica D* (in the press).
- Peale, S. J. *Astr. J.* **79**, 722–744 (1974).

ACKNOWLEDGEMENTS. We thank P. Barge, A. Chenciner, S. Dumas, D. Gautier, M. Herman, F. Joutel, P. Y. Longaretti, S. Peale and B. Sicardy for discussions, and J. Marchand for technical assistance.

