



HAL
open science

Une étude analytique du mouvement des satellites galiléens

Duong Tuyen Vu

► **To cite this version:**

Duong Tuyen Vu. Une étude analytique du mouvement des satellites galiléens. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1986. Français. NNT : . tel-02095284

HAL Id: tel-02095284

<https://hal.science/tel-02095284>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT
ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à
L'OBSERVATOIRE DE PARIS

86 OBSP 0057

par Duong Tuyen VU
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

Sujet de thèse :

UNE ÉTUDE ANALYTIQUE
DU MOUVEMENT DES
SATELLITES GALILÉENS

Soutenue le 12 novembre 1986 devant le jury composé de :

M.	BRAHIC	Président
MM.	CHAPRONT	Examineurs
	HENRARD	
	KOVALEVSKY	
	MORANDO	
	NAHON	
M.	FERRAZ-MELLO	Invité.

**THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT
ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES**

présentée à
L'OBSERVATOIRE DE PARIS

par **Duong Tuyen VU**
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

Sujet de thèse :

**UNE ÉTUDE ANALYTIQUE
DU MOUVEMENT DES
SATELLITES GALILÉENS**



Soutenue le 12 novembre 1986 devant le jury composé de :

M.	BRAHIC	Président
MM.	CHAPRONT	Examineurs
	HENRARD	
	KOVALEVSKY	
	MORANDO	
	NAHON	
M.	FERRAZ-MELLO	Invité.

Le traitement informatique et les calculs nécessaires
à ce travail ont été réalisés au

CENTRE INTER REGIONAL DE CALCUL ELECTRONIQUE

B.P. 63

91406 ORSAY

FRANCE

R E M E R C I E M E N T S

J'exprime ici ma reconnaissance à Monsieur BRAHIC, Monsieur CHAPRONT, Monsieur FERRAZ-MELLO, Monsieur HENRARD, Monsieur KOVALEVSKY, Monsieur MORANDO et Monsieur NAHON de m'avoir fait l'honneur de siéger dans le jury de cette thèse.

Cette thèse doit beaucoup à J. L. SAGNIER qui a guidé mes premiers pas dans cette étude théorique vraiment nouvelle du système des satellites galiléens. J. L. SAGNIER est actuellement absent de Paris. Ma première pensée va à lui et à sa famille qui m'ont accueilli avec grand coeur lors de mon séjour à Sao-Paulo.

Ce travail doit aussi beaucoup à Messieurs FERRAZ-MELLO, KOVALEVSKY et MORANDO qui m'ont aidé de leurs conseils et encouragements. Les inombrables remarques amicales de W. THUILLOT m'ont permis d'améliorer notablement le contenu et la présentation de cette thèse. Mes collègues au Bureau des Longitudes m'ont apporté leurs concours en me faisant partager leur expérience en Mécanique Céleste.

PLAN ET RESUME DE LA THESE

Le présent travail étudie le mouvement des satellites galiléens par voie analytique et donne la solution sous la forme des inégalités du mouvement exprimées en séries quasi-périodiques du temps. Il contient quatre chapitres :

Le premier chapitre présente la méthode adoptée. Les variables non singulières utilisées sont des expressions simples des éléments d'orbite. Elles facilitent l'étude du mouvement à très longue période du système. La méthode donne d'abord une solution intermédiaire par intégration des termes dépendant explicitement du temps; ensuite une solution variationnelle qui tient compte des excentricités propres et des inclinaisons propres des orbites.

Le deuxième chapitre donne le développement de la fonction perturbatrice et la formation des seconds membres des équations. La fonction perturbatrice provient de trois actions : l'interaction entre les satellites, l'action du renflement équatorial de Jupiter et l'action du Soleil.

Le troisième chapitre expose les divers traitements utilisés dans la résolution des équations et donne des extraits des résultats les plus significatifs de la solution, notamment les contributions aux ordres élevés dans la solution intermédiaire, une nouvelle solution de l'équation de la libration, une première approximation de la solution variationnelle, la formation et l'intégration des termes de degré élevé parmi lesquels les inégalités de Haerdtl sont complétées par de nouvelles contributions issues d'un développement plus poussé.

Le quatrième chapitre réexamine de façon détaillée le calcul des inégalités dues aux perturbations solaires et le choix d'une théorie du Soleil jovicentrique. Ce chapitre contient dans la première partie des tables de comparaison des extraits de résultats obtenus à ceux des théories connues et dans la deuxième partie le développement d'une théorie planétaire à solution quasi-périodique. La théorie relative au mouvement de Jupiter obtenue sera utilisée comme théorie du Soleil jovicentrique dans le calcul des effets de la perturbation solaire sur le mouvement des satellites galiléens.

A B S T R A C T

This thesis presents a study of the motion of the Galilean Satellites by analytical method. The solution gives the inequalities of the motion in the form of quasi-periodic series of time.

In chapter 1 we introduce the adopted method. The non-singular variables used in this work are simple expressions of the orbital elements. They facilitate the study of the long period evolution of the orbits of the system. The method gives, in the first stage, an intermediary solution supplied by the integration of all the terms which depend on time explicitly, and in the second stage, a variational solution which takes into account the free eccentricities and the free inclinations of the orbits.

In chapter 2 we develop the perturbation function and the second member of the motion's equations. The considered perturbation function arises from three actions : the interaction between the satellites, the action of the equatorial bulge of Jupiter and the Sun's action.

In chapter 3 we expose the different treatments used in the resolution of the equations and give some extracts from the most significant results; in particular, the contributions to the high orders of the intermediary solution, a new solution of the libration's equation, the first approximation of the variational solution and the terms of high degrees of eccentricities and inclinations, among which de Haerdtl's inequalities are given with supplementary terms.

In chapter 4 we present the calculation of the inequalities due to solar perturbations. This chapter contains, in the first part, a comparison of the results obtained with those of known theories, and in the second part the development of a new theory of the four great planets. The theory of Jupiter will be used as a jovicentric solar theory for the calculation of the perturbation of the Sun upon the galilean satellites.

I N T R O D U C T I O N

Parmi les seize satellites connus de la planète Jupiter, les quatre plus gros ont été observés pour la première fois par Galilée en 1610. Les magnitudes visuelles de ces quatre satellites sont respectivement 5,0 , 5,3 , 4,6 et 5,6. Les découvertes des autres satellites ont eu lieu beaucoup plus tard du fait que ceux-ci sont de loin plus petits; leurs magnitudes visuelles sont toutes supérieures à 13. Dans l'étude du mouvement du système des quatre satellites galiléens, on ne tient pas compte de la présence des petits satellites, car la masse la plus élevée, celle de J5 est encore plusieurs milliers de fois plus faible que celles des satellites galiléens.

Nous abordons, dans cette introduction, le résumé des particularités et des principales théories du mouvement de ces quatre grands satellites.

PARTICULARITES DU SYSTEME DES SATELLITES GALILEENS.

1. Les mouvements des satellites galiléens ne peuvent être étudiés un à un, de façon séparée, en raison de l'existence des perturbations mutuelles dues à leurs masses non négligeables devant celle de Jupiter. Les excentricités des orbites sont faibles; les inclinaisons des orbites sur l'équateur de Jupiter sont petites, la somme des amplitudes des termes en latitude du satellite le plus incliné, Callisto, n'atteint pas $0,8^\circ$. Pour ces raisons, on assimile souvent ce système à un modèle réduit du système planétaire. Mais la similitude se limite là, car les distances faibles séparant les satellites de Jupiter (de 5,9 à 26,4 fois le rayon équatorial de Jupiter, figure 1) ne permettent pas de considérer le corps central comme un point matériel dans l'étude théorique du mouvement du système. La forme très aplatie de Jupiter (aplatissement = 1/15,2) joue un rôle dominant dans les mouvements des grands axes et des noeuds des orbites des satellites. Une troisième source de perturbation importante est due à l'attraction du Soleil.

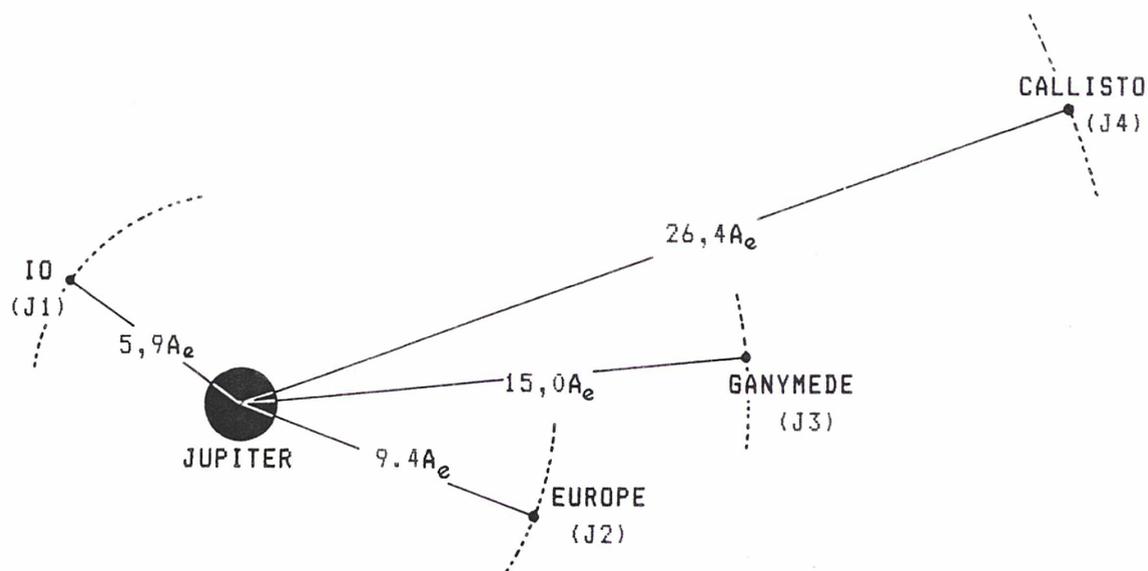


Fig. 1

Le système des satellites galiléens projeté sur le plan équatorial de Jupiter : Les distances moyennes séparant les satellites de Jupiter sont données en rayon équatorial A_e de la planète.

Table 1

	Sat.J1	Sat.J2	Sat.J3
Excentricité induite	0,0041	0,0094	0,0006
Valeur maximum de l'excentricité formée à partir des excentricités propres. }.....	0,0001	0,0005	0,0021

Dans le domaine des perturbations mutuelles, on peut relever deux particularités provenant de l'interaction très forte entre les trois premiers satellites : prédominance de certaines excentricités dites induites sur les excentricités dites propres relatives au mouvement d'oscillations libres des orbites (exemple : Table 1) et l'existence d'une libration entre les longitudes moyennes des trois premiers satellites. Des explications plus détaillées seront données dans la suite.

2. Au sujet de la première particularité, Sampson a donné son avis sur le choix d'une approche à utiliser dans la construction d'une théorie du mouvement des satellites galiléens. D'après lui (Theory, 1921, page 4), la méthode de variation des éléments elliptiques ne serait pas adaptée, car

les perturbations ont dépassé largement en amplitude les termes principaux dus à l'existence des excentricités propres des orbites, auxquels elles devraient simplement être ajoutées comme des corrections. Ce jugement est sévère, car la somme des termes de deux groupes reste bien inférieure aux excentricités connues des planètes (0,093 pour Mars et 0,206 pour Mercure). Or on sait que même pour ces grandes excentricités, les théories planétaires utilisant la méthode de variation des éléments elliptiques donnent des résultats excellents.

3. On peut illustrer le rôle joué par le terme résonnant, donnant lieu à cette excentricité induite, à côté du rôle des termes dus aux excentricités propres, en relevant dans la série obtenue comme solution pour la variable relative au mouvement du grand axe du satellite J1 les termes suivants :

$$\begin{aligned} \chi_3 = & 0,0000465 \exp i\pi_1 \\ & +0,0000015 \exp i\pi_2 \\ & +0,0000516 \exp i\pi_3 \\ & +0,0000259 \exp i\pi_4 \\ & +0,0041562 \exp i(-L_1 + 2L_2). \end{aligned}$$

Dans la notation utilisée, la variable citée χ_3 a pour expression $e \cdot \exp i\bar{\omega}$. $e, \bar{\omega}$ représentent l'excentricité et la longitude du périjove osculatrice. Les arguments des termes à très longues périodes $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ sont des expressions linéaires du temps dont les coefficients sont obtenus par calcul et dont les phases sont issues d'une comparaison à l'observation. Le coefficient du premier terme est l'excentricité propre du satellite 1. Les trois autres sont dus à la présence des excentricités propres des autres satellites. L_1 et L_2 représentent les parties linéaires du temps des longitudes moyennes des satellites J1 et J2.

On se trouve devant 4 termes à très longues périodes, à coefficients dépendant des excentricités propres des satellites. L'amplitude du cinquième terme (excentricité induite) est de loin plus grande que la somme de celles des autres. Ce terme est appelé induit car les variables angulaires figurées dans son argument sont de courtes périodes. Certains auteurs appellent ces deux types d'excentricités les pseudo-excentricités pour bien marquer la différence existant entre elles et l'excentricité osculatrice de l'orbite. Le terme forcé considéré ici est un terme à

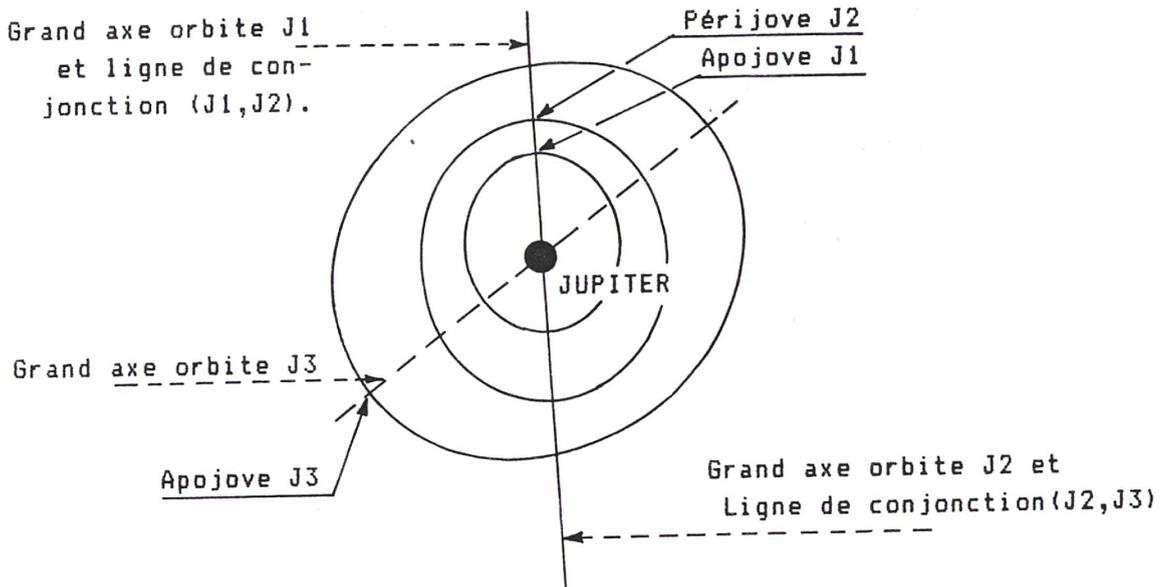


Fig.2 Disposition approchée des lignes de conjonction des trois premiers satellites et des grands axes des orbites.

longue période; sa fréquence $-N_1 + 2N_2$ a une valeur très faible du fait que le moyen mouvement N_1 de J1 est à peu près deux fois plus grand que N_2 de J2. L'axe porteur de ce terme ou la ligne passée par le centre de Jupiter ayant la direction définie par son argument, est aussi la ligne de conjonction des deux satellites. Elle a un mouvement lent, mais comparativement plus rapide que les axes des mouvements propres. Ce mouvement est rétrograde et fait une révolution complète en 487 jours.

Dans le cas du satellite J1, l'excentricité induite est importante. Son amplitude dominante est 33 fois plus grande que la somme de celles de quatre termes correspondants du mouvement libre, le grand axe osculateur de J1 se trouve alors très proche de la ligne de conjonction de J1 et J2.

L'excentricité induite est également dominante dans le cas du satellite J2. L'axe porteur du terme forcé correspondant est très proche de la ligne de conjonction des satellites J2 et J3. Cette ligne de conjonction régresse à la même vitesse que celle du couple (J1,J2). Sur deux révolutions, J2 se place en situation de conjonction deux fois avec J1 et une fois avec J3. La direction de cette conjonction J2-J3 se trouve à peu près à 180° par rapport à la dernière conjonction de J1-J2 qui la

précède, vue de Jupiter. La disposition des orbites des trois premiers satellites peut être présentée sommairement par la figure 2, dans laquelle, on peut voir qu'à tout instant, le périjove de l'orbite du satellite J1 se trouve à 180° de celui du satellite J2; par contre celui du satellite J3 n'est aligné conjointement par rapport à aucun des deux autres car son excentricité induite est faible.

C'est dans cette disposition particulière que la distance entre les deux satellites se trouve la plus faible au moment de leur conjonction, non seulement en raison des longitudes identiques mais aussi à cause de l'alignement du périjove de J2, de l'apojove de J1 et de Jupiter.

4. Il est intéressant de voir, à titre de comparaison, les amplitudes de telles composantes dans un cas d'une interaction moins forte de type planétaire comme celui de Jupiter dans son mouvement héliocentrique. Pour la même variable χ_3 ou $e \cdot \exp i\bar{\omega}$ osculatrice représentant le mouvement du grand axe de l'orbite héliocentrique de Jupiter, on voit la petitesse des termes forcés à côté des quatre principaux termes à très longues périodes du mouvement propre :

$$\begin{array}{l} \text{mouvement propre} : - 0,0157 \exp i\pi_5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 0,0444 \exp i\pi_6 \\ \quad \quad \quad \quad \quad - 0,0018 \exp i\pi_7 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 0,0001 \exp i\pi_8, \\ \quad \quad \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\ \text{mouvement forcé} \quad + 0,0007 \exp i(-L_5+2L_6) \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 0,0001 \exp i(-2L_5+3L_6), \\ \quad \quad \quad \quad \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

où les arguments $\pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8$ des termes à très longues périodes sont déterminés d'une façon identique à celle du cas des satellites galiléens déjà abordé; L_5 et L_6 , les longitudes moyennes héliocentriques de Jupiter et de Saturne.

5. Les trois premiers états de proche-résonance des satellites galiléens (Table 2) donnent naissance à des excentricités induites importantes. Dans le cas du satellite 4, l'unique groupe d'arguments de proche-résonance $3L_3 - 7L_4$ apparaît à partir du degré 3 des excentricités

Table 2

Satellites	Angle critique	état
J1 et J2	$L_1 - 2L_2$	} proches résonances;
J2 et J3	$L_2 - 2L_3$	
J3 et J4	$3L_3 - 7L_4$	
J1, J2, J3	$L_1 - 3L_2 + 2L_3$	} libration autour de 180°

et des inclinaisons dans les équations relatives aux mouvements des grands axes et des plans des orbites, et à partir du degré 4 des mêmes variables, dans les équations des longitudes et des moyens mouvements.

Les fréquences de ces arguments de proche résonance sont faibles mais non nulles. Elles ne créent pas une situation de divergence de la solution. Il en est autrement avec la libration. A la collection des termes du développement, on obtient des arguments, combinaisons des longitudes des trois premiers satellites, de la forme $k(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3)$, toujours proche de $k.180^\circ$, où k est un entier positif ou négatif.

La fréquence de ce terme n'est pas une simple combinaison des moyens mouvements moyens des trois premiers satellites :

$$k(N_1 - 3N_2 + 2N_3),$$

qui est nulle mais contient une autre composante provenant de la libration. L'argument ci-dessus peut s'écrire sous une forme plus détaillée :

$$k(L_1 - 3L_2 + 2L_3 + \mathcal{L}),$$

ou encore

$$k((L_1 + Q_1\mathcal{L}) - 3(L_2 + Q_2\mathcal{L}) + 2(L_3 + Q_3\mathcal{L})),$$

dans laquelle \mathcal{L} est la longitude de la libration. Elle est périodique et d'amplitude faible. Q_1 , Q_2 , Q_3 sont des facteurs de répartition de la longitude de la libration. Ce sont des constantes définies par le calcul vérifiant l'expression :

$$Q_1 - 3Q_2 + 2Q_3 = 1.$$

La théorie permet de calculer la fréquence de l'argument \mathcal{L} . Le dépouillement des observations déterminera ensuite les deux constantes d'intégration qui sont l'amplitude et la phase de la libration.

C'est dans ce cas de résonance exacte qu'on n'obtient pas directement les effets sous la forme de termes périodiques à arguments bien explicités en fonction du temps comme dans les cas non résonnants ou proche-résonnants. La technique de traitement consiste à isoler les termes portant des arguments résonnants et leurs harmoniques pour un traitement annexe dans la solution intermédiaire et un traitement associé à d'autres arguments à longues périodes dans la solution variationnelle.

LES PRINCIPALES ETUDES THEORIQUES DU MOUVEMENT DES SATELLITES GALILEENS.

6. Les périodes d'évolution des satellites autour de Jupiter sont petites. Si on compare celle de Io (1,77 jours) à celle de Jupiter (4333 jours), on voit qu'une durée de validité de 1000 ans d'une théorie des planètes extérieures correspond à une durée de validité réduite à 5 mois d'une théorie du même type dans le cas des satellites galiléens. Ceci explique pourquoi les théories du type séculaire ne conviennent pas à la représentation des mouvements des satellites galiléens. Ainsi des théories donnant des coordonnées sous la forme des séries de fonctions quasi-périodiques du temps ont été construites afin d'assurer une bonne représentation du mouvement sur de très longues durées.

Les travaux théoriques qui ont abouti à la construction d'éphémérides peuvent être classés en deux groupes d'après le type de variables utilisées :

- . Théorie de Laplace (1795) et les raffinements de Souillart (1865, 1894), traitent le problème par la méthode de variation de constantes arbitraires;
- . Théorie de Sampson (1921) et les développements très étendus de Lieske (1973, 1974, 1975, 1976) traitent le problème par le calcul des perturbations des coordonnées cylindriques moyennes.

La théorie de Laplace (1795) est la première théorie complète incluant le traitement théorique de la libration. Elle donne l'expression liant les longitudes moyennes des trois premiers satellites :

$$L_1 - 3L_2 + 2L_3 = 180^\circ;$$

Ce qui implique une deuxième relation entre les moyens mouvements moyens :

$$N_1 - 3N_2 + 2N_3 = 0.$$

qui est valable aussi bien pour les moyens mouvements synodiques que pour les moyens mouvements sidéraux. Laplace adopte l'orbite plane de Jupiter autour du Soleil comme plan de référence. En raison des inclinaisons modestes, de l'ordre de 3° , des orbites sur ce plan, le développement de la théorie n'a pas rencontré de gros inconvénients aux degrés faibles des excentricités et des inclinaisons. Les tables issues des résultats de la théorie de Laplace, permettant le calcul des éphémérides, sont celles de Delambre (1817), obtenues à partir de l'analyse de plus de 6000 éclipses observées et celles de Damoiseau (1836) à partir d'un plus grand nombre d'observations d'éclipses. L'amélioration de la précision obtenue par Damoiseau est pourtant modeste. Les affinements théoriques de Souillart ont porté principalement sur les termes quasi-résonnants, sur l'effet des termes critiques dans le mouvement à très longue période des périjoves et sur les effets des perturbations des planètes extérieures sur l'orbite plane de Jupiter. Son travail, suivi des compléments de Tisserand (1896), constitue la première théorie analytique complète du mouvement des satellites galiléens. Malheureusement, les données prises pour base de ses calculs ne sont pas très précises. Les tables de Damoiseau (1836), prolongées par d'autres astronomes ont été utilisées jusqu'au début de ce siècle.

D'après Sampson (1921), la méthode de variation des éléments elliptiques n'est pas adaptée à la construction d'une bonne théorie des satellites galiléens. Sa théorie calcule les variations des coordonnées équatoriales moyennes des satellites. Le plan de référence est l'équateur mobile de Jupiter. Le plan auxiliaire est l'orbite de 1900,0 de Jupiter autour du Soleil. Les fonctions perturbatrices sont développées jusqu'au degré 2 des variables-coordonnées sous forme analytique, mais les masses introduites dans le développement sont numériques. La solution ne dépend pas seulement des constantes arbitraires mais aussi des données d'un autre type. Ce sont des séries approchées représentant les variations périodiques des coordonnées, celles que la théorie cherche à établir. Le traitement débouche ensuite sur la détermination des masses au moyen des résultats fournis par l'observation. Le travail d'origine de Sampson et les reprises récentes du travail (Sagnier, Vu, 1974), (Lieske, 1977) ne

donnent pas des masses assez proches de celles connues aujourd'hui. Au moyen des développements très poussés et de l'introduction des paramètres auxiliaires traduisant les écarts relatifs à tous les paramètres du problème et en particulier ceux relatifs aux masses, Lieske a réalisé une théorie très performante. Dans son travail d'extension de la théorie de Sampson, des variables elliptiques ont été utilisées pour le calcul du groupe de termes de degré 4 des excentricités qui était absent dans la version d'origine de Sampson (termes de de Haerdtl, Lieske 1973).

Dans le but d'améliorer les éphémérides, Arlot (1982) utilise les séries de la théorie de Lieske. Les nouvelles constantes d'intégration ont été déterminées à partir d'un ajustement sur un vaste ensemble de séries d'observations photographiques. La théorie obtenue est baptisée G-5. Cette théorie et la version E-2 de la théorie de Lieske sont actuellement les plus précises.

Les principales autres études théoriques ne visant pas toutes la construction d'éphémérides sont ceux de de Sitter (1918 à 1931), de Marsden (1966), de Ferraz-Mello (1966, 1975, 1979) et de Brown (1976, 1977). De Sitter (1918) introduit une solution intermédiaire comprenant uniquement des termes dont les arguments sont des combinaisons de ceux du type excentricité forcée que nous avons mentionnés plus haut. Les orbites intermédiaires planes des trois premiers satellites sont alors des ellipses d'excentricités constantes (exemple : excentricité forcée du satellite 1, tableau 1). Du fait que l'on ne tient pas compte des autres termes à cette étape préliminaire; les grands axes des orbites intermédiaires sont confondus. Les mouvements vrais sont calculés ensuite comme des perturbations des orbites intermédiaires.

Marsden (1966) applique la méthode de transformations canoniques de Delaunay à ses équations exprimées sous forme hamiltonienne. Elles sont résolues par approximations successives donnant les principales caractéristiques du mouvement. Le nombre élevé de 26 variables du système des satellites galiléens est la difficulté majeure de cette méthode, car elle est habituellement employée pour traiter des systèmes différentiels à 6 variables au plus.

Ferraz-Mello (1966) donne une théorie utilisant les variables de Hill. Le calcul des perturbations utilise des paramètres représentant les

distances moyennes et corrigées des satellites à Jupiter. Ces valeurs sont obtenues à partir des moyens mouvements observés et corrigées des perturbations séculaires importantes. Sa méthode cherche à obtenir dès la première approximation les principales inégalités du mouvement. Les coefficients du temps des arguments utilisés sont des constantes ce qui évite les problèmes créés par des fréquences variables des approches usuelles. Par la suite, Ferraz-Mello a publié plusieurs articles sur la résonance et un traité sur la Dynamique du système des satellites galiléens (1979).

Dans un objectif précis d'une étude sur l'évolution à longues périodes du système des satellites galiléens, Brown (1976) utilise les éléments képlériens modifiés comme variables indépendantes du problème de manière à obtenir directement toutes les informations sur la dynamique des orbites.

Sagnier (1981) propose une méthode pour le développement d'une théorie générale analytique des satellites galiléens. Cette méthode est largement appliquée ici, notamment dans le choix des variables, de la forme des équations et des changements successifs des variables conduisant à la solution.

Duriez (1982) donne une application de sa théorie planétaire au cas de la résonance laplacienne des satellites de Jupiter. Dans ce travail, les termes de résonance sont traités en même temps que les termes autonomes, indépendants explicitement du temps, dans un système d'équations unique.

Henrard (1984) étudie la résonance laplacienne par le calcul de la perturbation de la fonction hamiltonienne. Le résultat obtenu est valable également dans le cas d'une résonance à grande amplitude.

Chapitre 1

M E T H O D E U T I L I S E E

Ce chapitre expose la partie théorique de la méthode et le traitement informatique utilisés dans la construction d'une théorie générale à solution quasi-périodique des satellites galiléens.

La première partie parle des contraintes du problème à résoudre et le découpage de la solution choisie. Elle donne ensuite le vocabulaire, les abréviations utilisées et une description du traitement informatique.

La deuxième partie donne les équations générales du mouvement et les approches utilisées dans le traitement de ces équations. La résolution des équations commence par le calcul de la solution intermédiaire non résonnante, puis par la formation et la résolution de l'équation de la libration. Le traitement utilise dans la suite trois changements successifs de variables dans la formation et la résolution du système des équations variationnelles. Lors de la présentation des résultats des chapitres 3 et 4, de nombreux compléments théoriques seront donnés pour exposer d'une façon concrète la démarche conduisant à ces résultats.

CONTRAINTES DU PROBLEME ET CHOIX DE LA SOLUTION.

7. Dans l'étude du mouvement d'un système constitué d'astres à évolution très rapide comme le système des satellites galiléens de Jupiter, il convient de construire une théorie générale à solution quasi-périodique afin d'en obtenir une validité sur de très longues durées. L'analyticité par rapport aux masses et aux autres constantes physiques des expressions du développement présente un intérêt théorique important, car elle facilite l'identification des origines et des ordres des différentes contributions dans la phase de la construction de la théorie comme dans celle de son utilisation. On conserve ainsi à côté des coefficients numériques des termes issus du développement, les traces de ces paramètres. Un autre avantage est la possibilité d'étudier par la suite la variation de la

solution en fonction du choix des petits paramètres du problème.

Les excentricités propres des orbites sont faibles; les inclinaisons de celles-ci sur l'équateur de Jupiter le sont également. Ce qui permet de découper le travail de construction de la théorie en deux phases principales : Dans la première phase, on néglige les excentricités propres et les inclinaisons propres des orbites et on cherche la première solution approchée du mouvement. Cette solution intermédiaire détermine une famille d'orbites ayant les mêmes moyens mouvements et les mêmes longitudes moyennes à l'instant initial que le système réel étudié. La deuxième phase tient compte de l'existence de ces paramètres excentricités et inclinaisons. Elle détermine parmi les groupes d'orbites de cette famille celui qui correspond aux mouvements réels des satellites. A côté de cette ligne directrice, les options théoriques seront présentées dans les pages suivantes par l'exposé du choix des variables, de la façon d'aborder les différentes approches de la solution et du traitement des cas singuliers.

On peut envisager un autre découpage plus proche de la construction réelle de la théorie: la solution intermédiaire constitue la première étape; la deuxième phase citée ci-dessus sera réalisée en deux autres étapes : la solution du système linéaire et le traitement des termes non linéaires.

L'étude théorique consiste à construire des séries quasi-périodiques par rapport au temps représentant les variations des éléments képlériens . Dans le cas non perturbé, le mouvement d'un satellite donné est connu par les trois composantes de son vecteur position \vec{r} et trois composantes de son vecteur vitesse \vec{v} . Ce même mouvement peut également être défini par les six éléments de son orbite :

- Le demi grand axe a,
- la longitude moyenne à l'instant initial t=0 E,
- l'excentricité de l'orbite. e,
- la longitude du périjove $\bar{\omega}$,
- l'inclinaison de l'orbite sur le
plan de référence I,
- la longitude du noeud ascendant sur ce plan . Ω .

Les trois longitudes sont mesurées à partir d'une direction fixe Jx. Les coordonnées rectangulaires du satellite considéré peuvent être écrites en fonction des éléments de l'orbite au moyen des relations :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \Omega \cos(v+\bar{\omega}-\Omega) - \cos I \cdot \sin \Omega \sin(v+\bar{\omega}-\Omega) , \\y &= r \sin \Omega \cos(v+\bar{\omega}-\Omega) + \cos I \cdot \cos \Omega \sin(v+\bar{\omega}-\Omega) , \\z &= r \sin I \cdot \sin(v+\bar{\omega}-\Omega) , \\r &= a(1-e^2)/(1+e \cdot \cos v) , \\v &= M + (2e - \frac{e^3}{4}) \sin M + (\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4) \sin 2M + \dots , \\M &= N(t-t_0) .\end{aligned}$$

où v représente l'anomalie vraie du satellite, M son anomalie moyenne et N , son moyen mouvement moyen. Inversement, les éléments de l'orbite sont des fonctions des vecteurs \vec{r} et \vec{v} :

$$\vec{X} = X(\vec{r}, \vec{v}) .$$

L'étude du mouvement perturbé repose sur la variation des éléments orbitaux en fonction des variations des vecteurs position et vitesse au moyen des théories de perturbation. Les équations (7) qui suivront sont établies dans ce but. Ce sont des équations de Lagrange écrites avec les variables définies par la suite dans (4) et (6). Ces variables représentent des petites quantités et sont choisies de telle sorte que leurs expressions permettent d'éviter des singularités dans l'expression des seconds membres des équations.

VOCABULAIRE, ABREVIATIONS ET TRAITEMENT INFORMATIQUE

8. Ce paragraphe donne la définition des termes couramment employés dans le texte et les traits essentiels du traitement informatique.

VOCABULAIRE.

a. Variables képlériennes.

Les positions et les vitesses des quatre satellites galiléens sont définies par les 24 fonctions inconnues du temps X_{pj} ($p=1, \dots, 6$, numéro d'équation, $j=1, \dots, 4$, numéro de satellite), liées de façon simple aux éléments képlériens classiques de leurs orbites. L'indice p est omis quand sa présence n'est pas nécessaire à la compréhension du texte. Elles appartiennent aux trois types (précisés dans le paragraphe 10):

- variable de circulation X_1 : la longitude moyenne osculatrice;
- variable de fréquence X_2 : le moyen mouvement osculateur;
- variables neutres :

X_3 , fonction complexe dont le module est l'excentricité et l'argument, la longitude du périjove;

X_4 , la conjuguée de X_3 ;

X_5 , fonction complexe dont le module est la fonction sinus de l'inclinaison et l'argument, la longitude du noeud de l'orbite;

X_6 , la conjuguée de X_5 .

Le travail de développement sera facilité par l'utilisation de deux variables auxiliaires réelles ζ_1 et ζ_2 représentant de petites quantités liées à X_1 et X_2 d'une façon simple par les relations (6) données dans la suite.

b. Variables liées au mouvement du repère utilisé.

Les deux variables supplémentaires, du type neutre, qui définissent l'orientation de l'équateur de Jupiter, constituent deux nouvelles fonctions inconnues supplémentaires.

c. Paramètres constants.

Ils définissent l'ordre de grandeur des perturbations. Ce sont :

- les masses m_j ($j=1,..4$) des satellites qui sont des petites quantités à côté de celle de Jupiter prise égale à l'unité.
- des combinaisons des harmoniques zonaux J_k du développement du potentiel de Jupiter, avec les distances des satellites au centre de la planète rapportées à son rayon équatorial A_e :

$$J_k \left(\frac{A_e}{r_j} \right)^k ;$$

- les facteurs :

$$\frac{M_s}{1+M_s} \left(\frac{N_s}{N_j} \right)^2$$

apparus dans la partie de la fonction perturbatrice provenant de l'action du Soleil. Ils sont plus faibles que les masses des satellites même en présence de la masse du Soleil M_s , car le carré du rapport de la vitesse angulaire du Soleil à celui du satellite j est très faible.

d. Paramètres variables.

Les positions des objets extérieurs au système jovien sont définies par des fonctions connues du temps : les éléments képlériens du Soleil, la longitude moyenne de Saturne etc...

e. Terme, coefficient, facteur variable et argument

Lors du développement préliminaire, les paramètres, les variables et les fonctions du temps apparaissent sous la forme littérale. Un terme est alors une expression monôme, composée de trois facteurs :

- un coefficient numérique et littéral,
- un facteur variable littéral, produit de variables dont chacune est dotée d'un exposant positif ou nul,
- une fonction exponentielle ou trigonométrique d'un argument dépendant du temps d'une façon explicite.

Les traitements par substitution font disparaître le facteur variable littéral et par suite, la solution ne contiendra que des termes à profil très simple formé d'un coefficient et d'une fonction explicite du temps.

Au cours du développement de la solution, nous utilisons également les adjectifs "préliminaire" et "substitué" pour désigner les deux états possibles des seconds membres des équations.

f. Caractéristique et harmonique.

Un terme est lié explicitement au temps par son argument, constitué d'arguments élémentaires qui sont des fonctions linéaires du temps. La caractéristique de ce terme est la somme des coefficients des arguments élémentaires. Un argument de la forme $k\alpha$ est un harmonique de l'argument α .

g. Ordre et degré.

Les définitions des variables et des paramètres sont telles que ces quantités sont petites. Dans ces conditions, la petitesse d'une expression monômiale de ces quantités sera qualifiée par son ordre et son degré:

- ordre = somme des degrés des paramètres constants formant le coefficient littéral du terme;
- degré = somme des degrés des variables et des paramètres variables contenus dans le facteur variable littéral du terme. Dans certains cas particuliers, le nom du type de variable sera précisé, notamment lors de la collecte des termes formant le système autonome ou le système critique.

h. Equations du mouvement képlérien.

Quand les paramètres constants et les variables sont nuls, c'est à dire quand il n'y a pas de perturbation, les éléments képlériens vérifient un système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} X - J.X = 0.$$

i. Equations du mouvement perturbé.

Si les paramètres constants ne sont pas nuls, les éléments képlériens vérifient un système de la forme :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} X - J.X = F,$$

où J est une matrice constante. F dépend du temps, des variables et des paramètres; elle est développable en série de monômes de ceux-ci. Chaque terme du développement de F a donc un ordre, un degré et une caractéristique.

j. Constantes arbitraires

Le but final du travail est la construction d'une solution des équations du mouvement perturbé dépendant du temps et de 26 constantes arbitraires indépendantes. Les constantes arbitraires peuvent apparaître comme des constantes d'intégration qui sont choisies plus tard ou être introduits autrement comme les longitudes moyennes et les moyens mouvements.

k. Solution intermédiaire non résonnante.

Par intégration des termes dépendant du temps de façon explicite du système différentiel (2), on obtient une famille de solutions qui ne dépendra que de six constantes arbitraires indépendantes qu'on a déterminé d'une manière préalable. Ce sont les 4 longitudes moyennes à l'instant $t=0$ et les 4 moyens mouvements moyens. Comme il existe deux relations de Laplace reliant les longitudes d'une part et les moyens mouvements d'autre part des trois premiers satellites, le nombre de constantes arbitraires indépendantes de cette solution se réduit à 6. Elles sont introduites lors de la définition des éléments képlériens (et non comme constantes d'intégration).

l. Solution intermédiaire résonnante.

La solution intermédiaire résonnante est une extension de la solution intermédiaire non résonnante. Elle dépend de huit constantes arbitraires indépendantes. Les deux nouvelles constantes sont l'amplitude et la phase de la libration.

m. Solution variationnelle.

On forme ensuite, par changement de variables, le système d'équations variationnelles constituées de termes dépendant également des variables excentricités et inclinaisons du système différentiel (2). De ce nouveau système, on extrait une partie autonome, qui ne dépend pas explicitement du temps; c'est le système autonome dont la résolution donne la solution à très longue période. La connaissance de cette solution permet de développer les termes du système variationnel qui dépend à la fois des variables et du temps par l'intermédiaire des longitudes moyennes contenues dans leurs arguments. Le résultat s'obtient ensuite par intégration des nouveaux termes issus de ce développement. Aux ordres supérieurs à 1, on parle souvent dans le cas des satellites galiléens d'un système critique. C'est le système autonome complété d'un groupe de termes importants apparus dès l'ordre 2. Ils sont dits critiques car ils sont générés par des termes importants ayant dans leurs arguments la commensurabilité (1,-2) des longitudes moyennes associées ou non à un argument à très longue période. Lors des traitements par substitution, certaines combinaisons d'arguments font disparaître les longitudes moyennes et donnent naissance à des termes critiques qui portent seulement des arguments à très longue période comme ceux issus de la solution du système autonome.

n. Abréviations.

i représente $\sqrt{-1}$,

E matrice colonne des longitudes moyennes à l'instant initial.

m ensemble des paramètres constants, composés des masses et des quantités assimilées provenant de harmoniques zonaux.

N matrice colonne des moyens mouvements N_j , $j=1$ à 4.

X matrice colonne de variables elliptiques,

Re() .. partie réelle de l'expression (),

Im() .. partie imaginaire de l'expression (),

Séc().. partie séculaire de l'expression (),

J1, J2, J3, J4 les quatre satellites Io, Europe, Ganymède, Callisto.

TRAITEMENT INFORMATIQUE.

9. Le travail soumis au traitement informatique comprend trois parties:
- Conception du codage;
 - Introduction des données d'après les codes utilisés;
 - Construction des programmes de traitement.

a. Le codage.

Le traitement informatique est essentiellement un traitement de séries dont le terme élémentaire a une structure mentionnée dans le paragraphe 8e et décrite avec plus de détails dans le paragraphe 35. Il peut être représentée par un certain nombre de mots de 4 octets dans le traitement informatique.

Deux codes sont utilisés dans ce traitement :

Code A, utilisé dans la première phase du développement et de la formation des seconds membres des équations. On ne considère alors que deux corps à chaque fois : l'astre perturbé (le satellite considéré) et le corps perturbateur (un autre satellite, le Soleil ou le renflement équatorial de Jupiter). Ce choix permet de limiter le nombre de mots informatiques dans la représentation des quantités utiles : deux masses, deux jeux de six variables relatives à ces deux corps et quatre autres paramètres. Un terme occupe ainsi 4 mots :

Mot1 et Mot2	Mot3	Mot4
Coefficient numérique en double précision	Variables littérales et arguments.	

dans lesquels le coefficient représenté en virgule flottante et en double précision occupe deux premiers mots. Les mots 3 et 4 contiennent les variables littérales, les arguments et quelques paramètres supplémentaires utiles au traitement. La valeur absolue d'un nombre entier représenté par un mot de 4 octets peut atteindre $2^{31} - 1$ ou 2147483647. La codification assigne aux paramètres représentés des zones numériquement bien délimitées dans chaque mot. L'information se trouve dans le contenu de ces zones ainsi définies. La valeur de ce contenu peut être ou bien un exposant entier ($\in \mathbb{N}$) si la zone considérée est affectée à une variable, ou bien un entier rationnel ($\in \mathbb{Z}$) si elle est destinée à représenter le coefficient d'un argument élémentaire tel qu'une longitude moyenne par exemple. On peut donc donner une valeur à ce contenu, la lire, la

modifier; c'est à dire agir de différentes façons sur les paramètres représentés. La même codification doit être conçue de façon à faciliter le traitement informatique.

C'est dans la limite d'une valeur entière maximum pouvant être logée dans 4 octets, c'est à dire 2147483647 de chaque mot informatique utilisée, qu'on définit les zones affectées aux variables représentées. Le mot 3 représente 10 variables :

$$v_1^{e_1} v_2^{e_2} v_3^{e_3} \dots v_{10}^{e_{10}},$$

les exposants e_1, e_2, \dots, e_{10} sont des entiers naturels. Chaque variable peut porter un exposant maximum différent. La liste suivante donne, pour chaque variable, les valeurs possibles que peut prendre son exposant et, dans la dernière colonne, la valeur numérique de représentation d'une unité de cet exposant.

Variable	exposant possible	valeur unitaire de l'exposant dans le codage
1	0 à 6	1
2	0 à 6	7
3	0 à 8	7^2
4	0 à 8	$7^2 \times 9$
5	0 à 8	$7^2 \times 9^2$
6	0 à 8	$7^2 \times 9^3$
7	0 à 6	$7^2 \times 9^4$
8	0 à 6	$7^3 \times 9^4$
9	0 à 8	$7^4 \times 9^4$
10	0 à 8	$7^4 \times 9^4$

Ainsi, le mot 3 du terme contenant $v_1^2 v_5^3$ porte une valeur numérique égale à la somme $2 \times 1 + 3 \times (7^2 \times 9^2)$, car la valeur unitaire de l'exposant de la variable v_1 est 1, celle de la variable v_5 est $7^2 \times 9^2$. Le contenu du mot 3 qui représente ces deux variables élevées aux exposants donnés, vaut alors 11909. Le décodage partiel ou total se fait très simplement par des opérations inverses. Considérons maintenant un autre terme contenant par exemple $v_1 v_4^2$, son mot 3 vaut alors $1 + 2 \times (7^2 \times 9) = 883$. Le produit de deux

termes donne la combinaison $v_1^3 v_4^2 v_5^3$ dont la représentation numérique est simplement 11909+883. Le traitement informatique se fait donc très rapidement, on doit seulement faire attention au dépassement possible de la valeur de chaque exposant. Les tests de dépassement de capacité sont alors inclus dans les sous-programmes de traitement.

Le mot 4 a une configuration différente du mot 3; il représente 2 variables et 6 paramètres. Les contenus de deux paramètres peuvent prendre des valeurs allant de -24 à 24 pour représenter les coefficients des longitudes moyennes dans l'argument de chaque terme.

Ce code utilisant des dimensions réduites permet de faire un développement économique pendant la première phase du traitement.

Code B. Lors des opérations de substitution accompagnant la montée dans l'échelle des ordres du développement global, on est conduit à introduire toutes les longitudes moyennes des corps considérés, toutes les masses sous forme littérale ainsi que tous les jeux de variables littérales. On doit également prévoir de la place pour loger d'autres paramètres à introduire au cours du développement de la solution, tels que les arguments relatifs au mouvement à très longues périodes des grands axes et des noeuds des orbites, les excentricités propres et les inclinaisons propres. Un terme occupe alors 9 mots, dont les deux premiers sont réservés au coefficient numérique.

b. Introduction des données.

Les données peuvent être introduites dans le calcul sous la forme des séries codées ou des séries à coder. Pour l'introduction de groupes importants de séries, telles que les séries de coefficients de Laplace et leurs dérivées, ou encore les séries de base mentionnées dans le paragraphe 37; nous construisons d'abord, une fois pour toutes, ces séries dans une étape préliminaire et les rangeons dans des fichiers à accès direct pour pouvoir les utiliser d'une façon répétitive dans les programmes de traitement par la lecture de ces fichiers.

c. Programmes de traitement.

Les programmes de traitement sont très variés suivant les résultats cherchés. Une bibliothèque de sous-programmes est construite pour tous les traitements courants. Ces routines appartiennent à plusieurs groupes :

Opérations : Addition, soustraction, multiplication des séries;

substitution d'un paramètre par une série; dérivation et intégration des séries etc ...

Calculs préliminaires : routines pour la formation des séries des coefficients de Laplace et leurs dérivées, calcul et formation des séries de base etc ...

Gestion et entrées/sorties : Lecture des données sur fichiers; écriture des résultats sur fichiers; impression des résultats. Parmi les sous-programmes de gestion, le plus fréquemment utilisé est le tri par dichotomie. Le tri conçu est du type différé utilisant une zone de travail de faible dimension (32 termes) et une zone de réception de dimension variable. Au début, la zone réceptrice a une dimension pouvant recevoir 64 termes. Quand le nombre de termes retenus dépasse ce nombre, la zone réceptrice double automatiquement en dimension et peut recevoir 128 termes, et ainsi de suite jusqu'à la dimension maximum de 32768 termes dans le code A ou 8192 termes dans le code B. Ces limites peuvent être modifiées facilement.

VARIABLES UTILISEES ET FORME LINEAIRE DU SYSTEME D'EQUATIONS.

10. Les variables utilisées appartiennent aux trois groupes :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t, \dots \dots \dots \text{variable de circulation;} \\ x_2 = n, \dots \dots \dots \text{variable de fréquence;} \\ x_3 = e \cdot \exp i \bar{\omega}, \quad x_4 = e \cdot \exp -i \bar{\omega}, \\ x_5 = \sin I \cdot \exp i \Omega, \quad x_6 = \sin I \cdot \exp -i \Omega \end{array} \right\} \text{ 4 variables neutres.}$$

Cette distinction vient du travail de Sagnier (1981), dans lequel, les variables sont classées suivant leur appartenance à trois sous-espaces vectoriels différents. L'explication sera donnée à la fin de ce paragraphe.

Dans les systèmes d'équations écrits sous forme matricielle, la colonne de variables relatives aux quatre satellites est représentée simplement par X. Dans le cas perturbé, on a le système :

$$\dot{X} - J \cdot X = F(X, t; m),$$

où m désigne l'ensemble des petits paramètres constants. La matrice J , constituée d'éléments égaux à 0 ou 1, est de la forme:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (p \times p) & (p \times p) & p \times (d-2p) \\ 0 & 0 & 0 \\ (p \times p) & (p \times p) & p \times (d-2p) \\ 0 & 0 & 0 \\ (d-2p) \times p & (d-2p) \times p & (d-2p) \times (d-2p) \end{bmatrix} .$$

Dans le cas du système des satellites galiléens, le nombre de corps du système est $p=4$, le degré du système est $d=6p=24$. Notons que J est nilpotente ($J^2=0$) et vérifie les expressions :

$$\begin{aligned} (1+Jt)^{-1} &= 1-Jt, \\ \exp Jt &= 1+Jt. \end{aligned}$$

Dans le cas non perturbé, la solution générale, en fonction de X_0 pour t nul est :

$$X = \exp Jt \cdot X_0 = (1+Jt)X_0,$$

dont une écriture plus explicite permet de mieux voir l'appartenance des composantes à trois sous espaces vectoriels différents :

$$\begin{cases} X_1 = X_{10} + X_{20}t, \\ X_2 = X_{20}, \\ X_j = X_{j0}, \quad \text{pour } j=3 \text{ à } 6. \end{cases}$$

La fonction affine du temps X_1 est la seule partie variable de X . Il appartient au premier sous-espace dit sous-espace de circulation. X_2 étant le coefficient de temps de X_1 fait partie du deuxième sous-espace dit sous-espace de fréquence; enfin, les autres composantes, n'intervenant pas dans l'expression des composantes de circulation, appartiennent au troisième sous-espace dit sous-espace neutre.

LES EQUATIONS DU MOUVEMENT

11. D'après le schéma du développement de la solution en trois étapes défini ci-dessus, la solution générale pour la variable X peut être décomposée sous la forme d'une combinaison de quatre contributions :

- . la première composante ξ est la solution non perturbée;
- . la deuxième représente la partie perturbée de la solution quand les excentricités et les inclinaisons propres des orbites sont ignorées. Ces deux premières composantes forment la solution intermédiaire;
- . la troisième représente la solution du système variationnel (de degré 1 ici);
- . la quatrième, le complément provenant des termes non linéaires par rapport à ces mêmes variables.

Dans le cas non perturbé, le second membre de (2) est nul. Celle ci devient :

$$\dot{\xi} - J\xi = 0.$$

La solution est de la forme :

$$\begin{aligned} X^{(0)} = \xi &= (1+Jt).X_0^{(0)} = (1+Jt).col(E,N,0) \\ &= col(E+Nt,N,0) = col(L,N,t), \end{aligned}$$

dans laquelle col(...) désigne la matrice colonne constituée des éléments de l'expression (...).

Cette solution est connue dès l'introduction de deux groupes de constantes arbitraires E et N, et on peut définir les variables η par :

$$X = \xi + \eta,$$

soit :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \eta_1 = X_1 - L, & \eta_2 = n - N, \\ \eta_3 = e.exp i\bar{\omega}, & \eta_4 = e.exp -i\bar{\omega}, \\ \eta_5 = \sin I.exp i\Omega, & \eta_6 = \sin I.exp -i\Omega. \end{array} \right.$$

Les équations deviennent :

$$(5) \quad \dot{\eta} - J\eta = F(\xi + \eta, t; m).$$

Ce nouveau jeu de variables n'est différent de X que par les deux

premières composantes :

$$\eta_1 = X_1 - L \quad \text{et} \quad \eta_2 = X_2 - N,$$

La première variable est imaginaire et ne permet pas une manipulation commode dans les opérations de développement. Ce travail sera facilité par l'utilisation de deux variables auxiliaires réelles :

$$(6) \quad \zeta_1 = i\eta_1 = i(X_1 - L), \quad \zeta_2 = \frac{\eta_2}{N} = \frac{X_2}{N} - 1.$$

Nous utilisons dans l'écriture des seconds membres les 4 dernières variables X appartenant au groupe de variables neutres, les deux premières sont remplacées par les variables auxiliaires réelles ζ_1 et ζ_2 . Les relations (6) permettent de faire une conversion rapide de ζ en X .

Les positions et vitesses des satellites sont rapportées au repère jovicentrique dont le plan fondamental est le plan équatorial de la date de Jupiter. Le troisième axe est l'axe polaire de la date. Ce choix présente deux avantages : le développement de la perturbation afférente au renflement équatorial de Jupiter devient plus simple; ensuite, les inclinaisons toujours très faibles des orbites des satellites sur ce plan permet d'arrêter plus tôt le développement par rapport aux variables d'inclinaison. Le système inertiel utilisé est le système équatorial ci-dessus à une date choisie comme origine du temps $t=0$. Le mouvement dans l'espace du système équatorial est repéré par rapport à ce plan fixe (Fig.3).

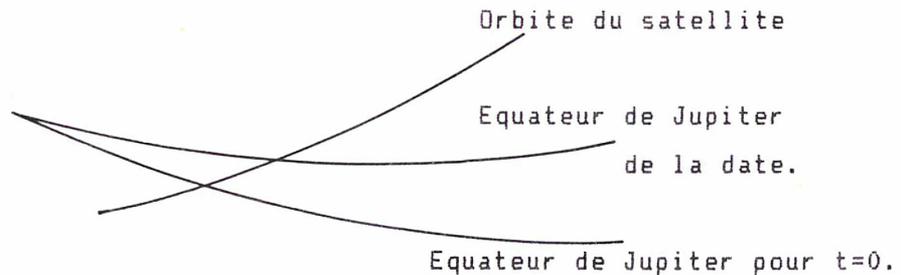


Fig.3

Le second membre de chaque équation contient une partie principale dérivant de la fonction perturbatrice et un supplément provenant du mouvement du système de référence.

EQUATIONS DU MOUVEMENT DES SATELLITES DANS LE REPERE MOBILE.

12. Dans la construction des seconds membres des équations, la partie la plus important dérivant de la fonction perturbatrice R est donnée par :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 - X_2 = N^{-1}A^{-2} \left[3f \frac{\partial R}{\partial \zeta_2} + \frac{1}{2}g^{**} (X_3 \frac{\partial R}{\partial X_3} + X_4 \frac{\partial R}{\partial X_4}) + \frac{1}{2}h^{**} (X_5 \frac{\partial R}{\partial X_5} + X_6 \frac{\partial R}{\partial X_6}) \right], \\ \dot{X}_2 = iA^{-2} \left[-3f \frac{\partial R}{\partial \zeta_1} \right], \\ \dot{X}_3 = iN^{-1}A^{-2} \exp iL \left[2g^* \frac{\partial R}{\partial X_4} - \frac{1}{2}X_3 g^{**} \frac{\partial R}{\partial \zeta_1} + \frac{1}{2}X_3 h^{**} (X_5 \frac{\partial R}{\partial X_5} + X_6 \frac{\partial R}{\partial X_6}) \right], \\ \dot{X}_5 = iN^{-1}A^{-2} \exp iL \left[2h^* \frac{\partial R}{\partial X_6} - \frac{1}{2}X_5 g^{**} \frac{\partial R}{\partial \zeta_1} - \frac{1}{2}X_5 h^{**} (X_3 \frac{\partial R}{\partial X_3} - X_4 \frac{\partial R}{\partial X_4}) \right]. \end{array} \right.$$

R représente la fonction perturbatrice; A, une constante proche du demi-grand axe de l'orbite déduite de N au moyen de la troisième loi de Képler. Les équations \dot{X}_4 et \dot{X}_6 se déduisent par conjugaison complexe de \dot{X}_3 et \dot{X}_5 . Les fonctions f, g*, h*, g** et h** ont pour expressions:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} f(\zeta_2) = (1 + \zeta_2)^{4/3}, \\ g^*(\zeta_2, X_3 X_4) = (1 + \zeta_2)^{1/3} (1 - X_3 X_4)^{1/2}, \\ h^*(\zeta_2, X_3 X_4, X_5 X_6) = (1 + \zeta_2)^{1/3} (1 - X_3 X_4)^{-1/2} (1 - X_5 X_6)^{1/2}, \\ g^{**}(\zeta_2, X_3 X_4) = 2(1 + \zeta_2)^{1/3} (X_3 X_4)^{-1} \left[(1 - X_3 X_4)^{1/2} - (1 - X_3 X_4) \right], \\ h^{**}(\zeta_2, X_3 X_4, X_5 X_6) = 2(1 + \zeta_2)^{1/3} (1 - X_3 X_4)^{-1/2} (X_5 X_6)^{-1} \left[(1 - X_5 X_6)^{1/2} - (1 - X_5 X_6) \right]. \end{array} \right.$$

EQUATIONS DU MOUVEMENT DU SYSTEME DE REFERENCE.

13. Deux équations supplémentaires relatives au mouvement du système de référence complètent le groupe des équations des inclinaisons et permettent ainsi d'obtenir l'ensemble de résultats concernant la précession duquel on extraira le coefficient du temps λ_q de la précession, nécessaire à la formation du complément (7b) du système (7). Toujours d'après Sagnier :

$$(7a) \quad \dot{X}_{5q} = i \sum_{j=1}^5 N_j \left[\frac{3}{2} \frac{A_j^2}{C} \frac{N_j}{\rho} \frac{m_j}{1+m_j} J_2 \frac{A_e^2}{A_j^2} (X_{5j} - X_{5q}) + \dots \right].$$

La sommation est faite sur les contributions de l'action des quatre satellites galiléens ainsi que le Soleil. Dans cette relation, C représente

le moment d'inertie de Jupiter par rapport à son axe de rotation, N_j , la vitesse angulaire jovicentrique du corps extérieur, A_j , le demi grand axe de son orbite, m_j , sa masse; A_e , le rayon équatorial et ρ la vitesse angulaire de rotation de Jupiter. Les indices q sont affectés aux variables du mouvement de l'équateur. La deuxième équation est la conjuguée de (7a).

COMPLEMENTS DES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS DU MOUVEMENT PROVENANT DU MOUVEMENT DU SYSTEME DE REFERENCE.

14. Considérons le système de référence animé d'une précession définie par :

$$I=I_q \text{ et } \Omega = \Omega_q ,$$

où I_q est une constante et Ω_q une fonction affine du temps de dérivée \mathcal{V}_q . Le plan fondamental pourra être appelé équateur moyen de la planète. D'après Sagnier (1981), les compléments ajoutés par cette perturbation fictive sont :

$$(7b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 - X_2 = 4\mathcal{V}_q , \\ \dot{X}_2 = 0 , \\ \dot{X}_3 = 2i \exp iL \cdot \mathcal{V}_q , \\ \dot{X}_5 = -i\mathcal{V}_q X_{5q} - i\mathcal{V}_q X_{6q} \exp 2iL . \end{array} \right.$$

Ce système admet la solution bornée :

$$X_1 = 0, \quad X_2 = -4\mathcal{V}_q ; \quad X_3 = 2 \frac{\mathcal{V}_q}{N} \exp iL, \quad X_5 = X_{50} - X_{5q} ,$$

où X_{50} est une constante d'intégration. Dans le cas d'un mouvement apparent circulaire, de vitesse angulaire N , la trajectoire relative est caractérisée par une vitesse angulaire et une excentricité définies par les relations :

$$\tilde{n} = N - 4\mathcal{V}_q, \quad e = -2 \frac{\mathcal{V}_q}{N} .$$

En ce qui concerne les termes d'inclinaison, la solution $X_5 = X_{50} - X_{5q}$ traduit une translation d'axes : la nouvelle origine est repérée par X_{5q} et le pôle du plan de l'orbite avant le changement de repère par la constante d'intégration X_{50} .

EXPRESSION INTEGRALE DES EQUATIONS.

15. Le système différentiel (2) est équivalent au système intégral (9) ci-dessous (Sagnier 1981):

$$(9) \quad X = (1+Jt)X_0 + \int_0^t F(X, \tau; m) d\tau + J \int_0^t d\tau' \int_0^{\tau'} F(X, \tau; m) d\tau,$$

où X_0 désigne la colonne des constantes arbitraires. Cette forme intégrale permet de voir que le troisième terme du second membre, en raison de la structure de J , n'existe que dans les composantes de circulation de X , et c'est le seul dont le calcul exige une double intégration par rapport au temps. Le premier terme, indépendant de F , constitue la partie non perturbée; le second est qualifié de "perturbation normale" s'obtient simplement par l'intégration par rapport au temps du second membre du système différentiel (2).

Si on sépare dans (9) les composantes relatives aux trois sous-espaces, on aura les expressions :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_{10} + X_{20}t + \int_0^t F_1(X, \tau; m) d\tau + \int_0^t d\tau' \int_0^{\tau'} F_2(X, \tau; m) d\tau, \\ \dot{X}_2 &= X_{20} + \int_0^t F_2(X, \tau; m) d\tau, \\ \dot{X}_j &= X_{j0} + \int_0^t F_j(X, \tau; m) d\tau, \quad j = 3 \text{ à } 6. \end{aligned}$$

CONDITIONS DE QUASI-PERIODICITE.

16. Les constantes d'intégration étant arbitraires, le choix convenables de ces quantités dépend de la forme quasi-périodiques de la solution (Sagnier, 1981). On est amené à considérer les termes séculaires obtenus dans les expressions des composantes de X . F étant quasi-périodique, $X^{(k)}$ d'ordre k est la somme d'une fonction périodique et d'un polynôme de second degré en t . On obtient des termes séculaires :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Séc}(X_1^{(k)}) &= X_{10}^{(k)} + X_{20}^{(k)}t + \langle F_1^{(k)} \rangle t + \frac{1}{2} \langle F_2^{(k)} \rangle t^2, \\ \text{Séc}(X_2^{(k)}) &= X_{20}^{(k)} + \langle F_2^{(k)} \rangle t, \\ \text{Séc}(X_j^{(k)}) &= X_{j0}^{(k)} + \langle F_j^{(k)} \rangle t, \quad j = 3 \text{ à } 6. \end{aligned} \right.$$

Où $\langle \rangle$ représente la partie constante du contenu et k , un indice désignant

l'ordre par rapport aux composantes de m . $\langle F_2^{(k)} \rangle$ n'apparaît pas dans le développement car on l'obtient sous la forme d'une série de fonctions sinus dont la partie constante est nulle; le terme quadratique du second membre de la première expression disparaît. Par contre, $\langle F_1^{(k)} \rangle$, la partie constante d'une série de fonctions cosinus existe et on doit compenser sa présence par le choix :

$$X_{20}^{(k)} = -\langle F_1^{(k)} \rangle,$$

qui constitue une correction de fréquence d'ordre k par rapport aux composantes de m .

Il reste à examiner la condition de quasi-périodicité des quatre composantes neutres X_j (pour $j=3$ à 6). En considérant la manière dont est construit le terme $F_j^{(k)}$, on constate que :

$$F_j^{(k)} = \frac{\partial F_j^{(1)}}{\partial X_j} X_{j0}^{(k-1)} + \varphi^{(k)},$$

$\varphi^{(k)}$ ne dépendent que des constantes libres $X_{10}^{(0)}$, $X_{20}^{(0)}$.

La condition pour que $\text{Séc.} X$ soit borné est :

$$\left\langle \frac{\partial F_j^{(1)}}{\partial X_j} \right\rangle X_{j0}^{(k-1)} = -\varphi^{(k)},$$

qui est un système linéaire en $X_j^{(k-1)}$ que l'on sait résoudre puisque son déterminant n'est pas nul. Ces conditions peuvent être résumées :

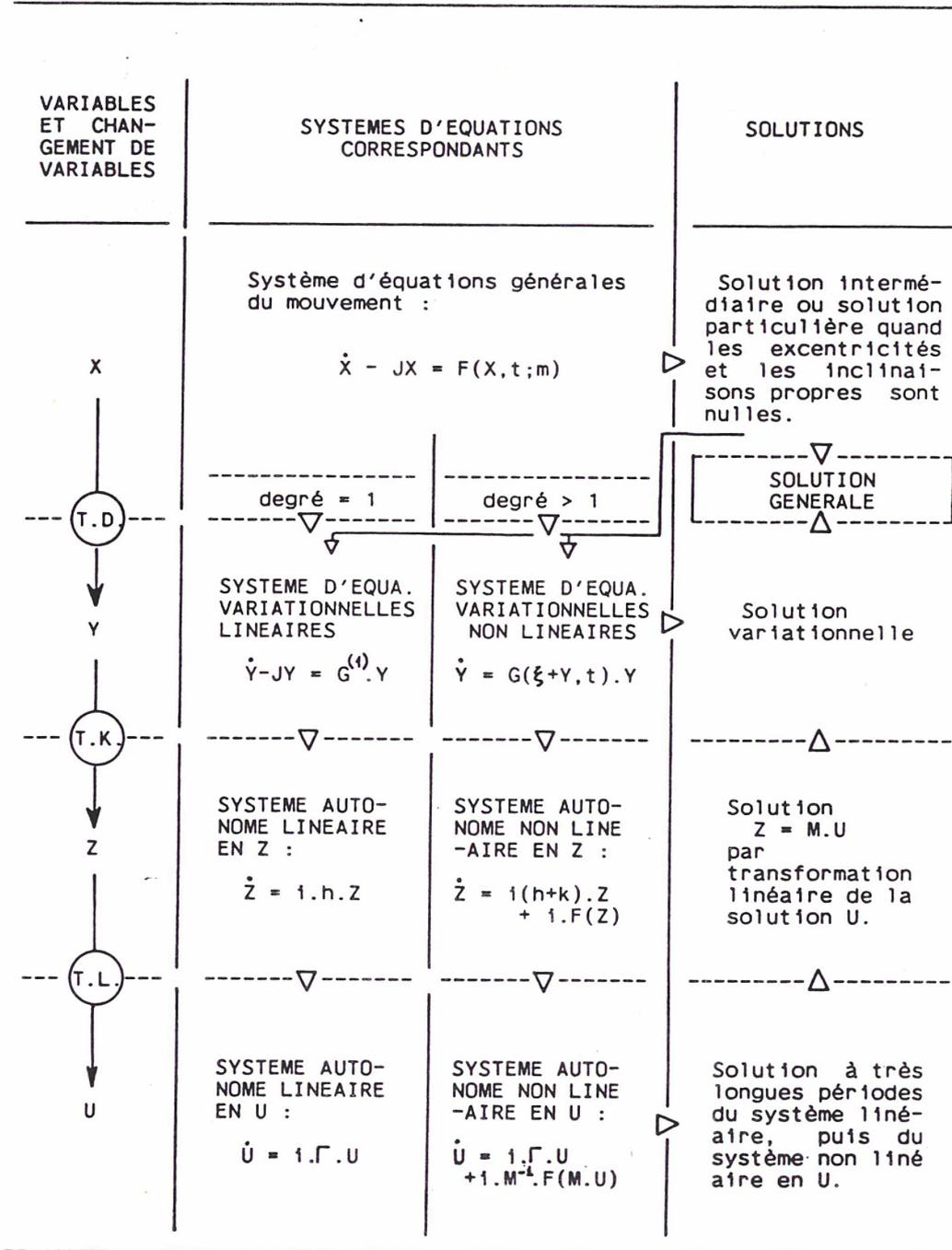
$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle F_2^{(k)} \rangle = 0, \\ \langle F_1^{(k)} \rangle + X_2^{(k)} = 0, \\ \det \left\langle \frac{\partial F_j^{(k)}}{\partial X_j} \right\rangle \neq 0. \end{array} \right.$$

DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION.

17. La figure 4 donne le schéma du développement de la solution. On y trouve, dans la première colonne, les jeux de variables utilisées; dans la deuxième colonne, les systèmes d'équations correspondants; dans la troisième colonne, les solutions correspondantes.

On intègre tout d'abord le système d'équations en X en négligeant les exectricités propres et les inclinaisons propres. On obtient la solution intermédiaire dépendant de $2p$ constantes arbitraires. Cette

Fig.4 : SCHEMA DU DEVELOPEMENT DE LA SOLUTION



T.D. : Transformation découplante,

T.K. : Transformation de Krasinskij,

T.L. : Transformation linéaire.

solution contient une grande partie des inégalités du mouvement réel.

On forme ensuite le système d'équations variationnelles dont la solution tient compte de l'existence des excentricités propres et des inclinaisons propres des orbites dans leurs oscillations libres. Pour parvenir à la détermination du mouvement libre, on isole d'abord dans les équations variationnelles les termes autonomes qui ne dépendent pas explicitement du temps. L'intégration du nouveau système, dit autonome, donne les fréquences de ces oscillations à très longues périodes. La comparaison de cette solution aux conditions initiales à l'instant $t=0$ permet ensuite de déterminer les amplitudes et les phases des termes à très longues périodes correspondants.

Les transformations utilisées dans la construction de ces systèmes sont :

- La transformation découplante, proposée par Sagnier (1981), permet d'obtenir le système d'équations variationnelles avec le découplage des variables neutres et des autres variables;

- La procédure de Krasinskij (1969), Brumberg (1970) permet d'isoler le système autonome linéaire en Z à partir du système variationnel en Y ;

- Une transformation linéaire, annexe à la transformation de Krasinskij, est utilisée lors de la résolution du système autonome en Z par l'opération de diagonalisation de la matrice constante associée à ce système. On obtient un nouveau système autonome en U dans lequel la matrice associée est une matrice diagonale.

Dans la première approximation, on ne considère que le système autonome linéaire. Ensuite, on s'occupe du même système complété des termes non linéaires. Le traitement de ces termes se fait d'une façon commode dans le système autonome en U .

Quand cette solution est connue, on remonte à la solution pour Z , puis au développement et à l'intégration de l'autre groupe de termes du système variationnel qui dépend à la fois de la solution à très longue période et du temps par l'intermédiaire des longitudes moyennes.

Les variables angulaires utilisées dans la composition des arguments et la forme de la solution.

18. Lors de la définition des variables, un premier type de variables angulaires est introduit sous la forme des fonctions $L=Nt+E$. Ces fonctions constituent le premier groupe d'arguments élémentaires. Lors de la solution des systèmes autonomes, on obtient également des arguments élémentaires sous la forme des fonctions linéaires du temps.

La solution a la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \sum_j A_j \sin(j|\sigma), \\ X_2 = \sum_k A_k \cos(k|\sigma), \\ X_3 = \sum_p A_p \exp(i(p|\sigma)), \\ X_5 = \sum_q A_q \exp(i(q|\sigma)). \end{array} \right.$$

Dans ces expressions, les coefficients A_j, A_k, A_p, A_q sont des constantes réelles. Les arguments sont des combinaisons linéaires des arguments élémentaires σ .

SOLUTION INTERMEDIAIRE.

Solution intermédiaire non résonnante.

19. La solution intermédiaire est la solution particulière du système perturbé. Dans cette première approche qui traite tous les termes dépendants explicitement du temps du développement, les excentricités propres et les inclinaisons propres des orbites sont négligées. C'est une solution qui ne dépendra que de huit constantes arbitraires indépendantes introduites lors de la définition des variables : quatre longitudes moyennes à l'instant initial et quatre moyens mouvements moyens. Ce nombre de huit constantes arbitraires est réduit de deux unités par la présence de deux relations de Laplace :

$$E_1 - 3E_2 + 2E_3 = 180^\circ,$$

et $N_1 - 3N_2 + 2N_3 = 0.$

Dans chacune de ces relations, une quantité peut se déduire des deux autres. Les constantes E_j , ($j=1$ à 4), sont liées aux longitudes moyennes L par la relation $L = N t + E$.

20. On tient compte dans la suite des termes résonnants présents dans les équations de fréquence et de circulation. Le traitement théorique établit l'équation de la libration dont la résolution donne la période de la libration ainsi que la répartition de la longitude de la libration dans les longitudes moyennes des trois premiers satellites.

La libration et la solution intermédiaire résonnante.

La deuxième partie η , constituée de termes périodiques, est obtenue par le calcul de la fonction perturbatrice au voisinage de ξ suivi par la formation des seconds membres des équations et les diverses opérations citées ci-dessus appliquées aux termes non résonnants.

$$X^{(0)} = \xi = (1+jt) X^{(0)}$$

$$= (1+jt) \cdot \text{col}(E, N; 0)$$

$$= \text{col}(E+Nt, N; 0)$$

La première partie ξ , représentant la solution non perturbée, est connue dès l'introduction des constantes E et N . Elle s'écrit :

$$X = \xi + \eta(\xi, t; m). \quad (12)$$

Cette solution comprend deux parties que nous noterons par :

arbitraires introduites lors de la définition des variables. Les termes issus de cette solution sont appelés termes forcés. Ils ne dépendent pas des constantes d'intégration relatives aux excentricités propres et aux inclinaisons propres, mais uniquement des constantes

L'opération similaire sera poursuivie pour les ordres plus élevés. temps fournit la solution intermédiaire non résonnante d'ordre 2. donne les seconds membres d'ordre 2, dont l'intégration par rapport au termes d'ordre 2 apparus dans le développement avant toute substitution seconds membres d'ordre 2 générés par substitution. Leur addition aux chaque terme de degré 1 des seconds membres. Cette opération donne la substitue ensuite cette première solution à la variable qui se trouve dans d'ordre 1 donne la solution intermédiaire non résonnante d'ordre 1. On donne lieu à chaque terme. L'intégration par rapport au temps des termes rapport aux composantes de m permettra de reconnaître la perturbation qui zéro. Ces termes sont d'ordre 1 au moins. Le développement analytique par Le traitement commence par la considération des termes de degré

Quand on se place dans le cas non résonnant, la fréquence des termes de libration s'écrit sous la forme d'un produit scalaire nul :

$$(13) \quad (\alpha | N) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^4.$$

Les valeurs de α correspondant aux moyens mouvements moyens N des satellites galiléens sont :

$$(1; -3; 2; 0) \text{ et ses multiples.}$$

Ces fréquences apparaissent dans les deux équations de circulation et de fréquence : dans la première sous la forme des fonctions cosinus et dans la deuxième, des fonctions sinus. Un argument de ce type, dont la fréquence est strictement nulle, est constant. L'argument correspondant à α peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (\alpha | L) &= (\alpha | E) \\ &= L_1 - 3L_2 + 2L_3 \\ &= E_1 - 3E_2 + 2E_3 \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Les fonctions cosinus de cet argument ou de ses harmoniques dans la première équation deviennent des constantes et les fonctions sinus de la deuxième équation, des zéros. Le traitement du problème est grandement simplifié, mais cette voie limite la généralité de la solution en raison du nombre réduit des constantes arbitraires introduites. Ce nombre, égal à $6p$ pour $p=4$ dans le cas des satellites galiléens, sera diminué de deux unités par l'existence de deux relations de commensurabilité entre les moyens mouvements moyens d'une part et les longitudes moyennes d'autre part :

$$\begin{aligned} N_1 - 3N_2 + 2N_3 &= 0, \\ L_1 - 3L_2 + 2L_3 &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Dans chacune de ces relations, la valeur d'une quantité peut se déduire de celles des deux autres. Si on se limite à ce nombre réduit de constantes arbitraires, la solution sera incomplète. Avec l'introduction de deux constantes arbitraires (amplitude et phase de la libration), on retrouve le nombre de $6p$ qui assure à la solution sa généralité.

Dans le problème du mouvement des satellites galiléens, on introduit par suite du mouvement du repère, deux autres constantes d'intégration.

21. Dans le cas résonnant, l'argument élémentaire introduit n'est plus une fonction linéaire du temps L , mais contient en plus une partie résonnante $\delta\lambda$.

On sait, par l'observation, que cet argument est de longue période et que l'amplitude associée à ce terme est extrêmement faible.

Les nouvelles longitudes utilisées dans les développements sont désormais λ à la place de L . On a les expressions suivantes liant ces quantités :

$$\lambda_1 = L_1 + \delta\lambda_1, \quad \lambda_2 = L_2 + \delta\lambda_2, \quad \lambda_3 = L_3 + \delta\lambda_3;$$

enfin $\lambda_4 = L_4$ car le satellite 4 ne fait pas partie du groupe de satellites en libration.

La fonction F ne sera plus développée au voisinage de :

$$x_0 = \xi = \text{col } (L, N, 0),$$

mais de :

$$x_0 = \hat{\xi} = \text{col } (\lambda, N, 0).$$

X s'écrit maintenant sous la forme d'une somme de deux groupes de termes bien distincts : les termes ordinaires \tilde{X} et les termes résonnants \bar{X} .

$$(14) \quad X = \tilde{X} + \bar{X} = \sum \tilde{X}^{(k)} + \sum \bar{X}^{(k)}.$$

22. Dans le développement de la solution, les termes résonnants apparaissent dès l'ordre 2 dans les équations de circulation et de fréquence :

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{X}}_{1j} - \bar{X}_{2j} &= \dot{\lambda}_j - N_j - \bar{X}_{2j} = \bar{F}_{1j}, \\ \bar{X}_{2j} &= \bar{F}_{2j}. \end{aligned}$$

On calcule :

$$(16) \quad \ddot{\lambda}_j = \bar{F}_{2j} + \bar{F}_{1j},$$

dans laquelle le second membre ne dépend du temps que par l'intermédiaire de :

$$\Lambda = (\alpha | \lambda).$$

On peut poser :

$$\mathcal{L}(\Lambda) = (\alpha | \bar{F}_2 + \bar{F}_1),$$

d'où l'équation de la libration du second ordre en Λ :

$$(17) \quad \ddot{\Lambda} = \mathfrak{L}(\Lambda).$$

Son calcul fournit la période de la libration et les facteurs de répartition Q_1, Q_2, Q_3 de la longitude de la libration parmi les trois satellites en résonance. La définition de ces facteurs sera précisée dans le paragraphe 67 lors du calcul de leurs valeurs.

Les résultats obtenus par l'étude de la libration seront introduits dans un calcul d'estimation d'éventuelles corrections à apporter à la solution acquise précédemment pour le mouvement non résonnant.

SOLUTION VARIATIONNELLE.

Formation du système variationnel

23. L'équation du système perturbé est de la forme $\dot{X} - JX = F(X)$, dans laquelle le second membre F dépend aussi du temps. Ici, cette forme réduite permet de simplifier l'écriture. On fait un changement de variables $(X \rightarrow Y)$ analytique qui transforme le système ci-dessus en un système d'équations aux variations, sachant que la solution intermédiaire donnée par $x = \xi + \eta(\xi)$ vérifie strictement le système d'équations $\dot{X} - JX = F(X)$. Le système variationnel est obtenu par l'utilisation d'une transformation dite découplante (Sagnier, 1981) définie par la relation :

$$(18) \quad X = \xi + \eta(\xi + \text{Proj}Y) + Y,$$

où $\text{Proj}Y$ est une projection sur le plan (Y_1, Y_2) :

$$\text{si } Y \text{ a pour composantes } \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{vmatrix} \quad \text{Proj}Y \text{ a pour composantes } \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

24. Moyennant l'utilisation de cette transformation, on montre (Gomes, 1986) que l'on obtient un système variationnel de la forme :

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{Y} - J.Y &= F(\xi + Y + \eta(\xi + \text{Proj}Y)) \\ &- F(\xi + \text{Proj}Y + \eta(\xi + \text{Proj}Y)), \end{aligned}$$

soit après le développement du second membre :

$$(20) \quad \dot{Y} - J.Y = G^{(1)}.Y + \sum G^{(k)}(Y),$$

où la matrice $G^{(1)}$ a une forme particulière permettant le découplage des variables neutres des autres variables.

$$(21) \quad G^{(1)}(\xi, t; m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_1^{(1)}(\xi, t; m) \\ 0 & 0 & G_2^{(1)}(\xi, t; m) \\ 0 & 0 & G_3^{(1)}(\xi, t; m) \end{bmatrix}.$$

25. Considérons maintenant le système linéarisé $\dot{Y} - JY = G^{(1)}.Y$ qui constitue la partie principale du système (20). Une écriture plus détaillée de ce système montrera la forme des équations relatives aux composantes de Y :

$$\dot{Y} = (J + G^{(1)})Y,$$

ou :

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & G_1^{(1)} \\ 0 & 0 & G_2^{(1)} \\ 0 & 0 & G_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_j \end{bmatrix},$$

avec $j=3$ à 6 .

ou encore :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= Y_2 + G_1^{(1)} Y_j, \\ \dot{Y}_2 &= G_2^{(1)} Y_j, \\ \dot{Y}_j &= G_3^{(1)} Y_j, \end{aligned}$$

dans lesquelles les matrices :

$$G_1^{(1)} = \frac{\partial F_1^{(1)}}{\partial X_j}, \quad G_2^{(1)} = \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial X_j}, \quad G_3^{(1)} = \frac{\partial F_j^{(1)}}{\partial X_j},$$

ont pour dimensions respectives 4×16 , 4×16 , 16×16 . Ce système apparaît comme une variante plus explicite des équations aux variations au voisinage de la solution

$$X = \xi + \eta(\xi, t; m),$$

car le système aux variables neutres est découplé de l'ensemble. Le système ainsi découplé

$$(22) \quad \dot{Y}_j = G_3^{(1)}(\xi, t; m).Y_j, \quad j=3 \text{ à } 6,$$

est de la forme :

$$(23) \quad \dot{Y} = G.Y,$$

où G est une matrice associée au système (23) dont les éléments dépendent du temps et des composantes de m , et Y un vecteur colonne de 16 variables dépendantes inconnues.

Une fois calculée la solution variationnelle Y , la transformation découplante (18) permet le retour aux variables X . Notons que pour la première approximation, cette transformation est équivalente à la transformation donnant les équations aux variations classiques.

Formation et intégration du système autonome.

26. La première étape consiste à intégrer le système (23) relatif aux variables neutres, dont la matrice associée est $G_3^{(1)}$. Cette résolution s'appuie sur la procédure de Krasinskij (1969) déjà développée par Brumberg dans des circonstances voisines. On applique au système envisagé la transformation voisine de l'identité :

$$Y = \theta.Z,$$

où θ est de la forme :

$$\theta = 1 + \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots,$$

dont la partie principale est la matrice identité, les compléments ordonnés par rapport aux composantes de m sont faibles et dépendent du temps. On impose de plus à Z de vérifier un nouveau système linéaire à coefficients constants

$$(24) \quad \dot{Z} = H.Z,$$

H et θ doivent être choisis tels que Y vérifie l'équation (23). On vérifie alors que les matrices θ , G , H vérifient le système différentiel :

$$\dot{\theta} = G.\theta - \theta.H.$$

Le couple de matrices (θ, H) qui permet de réaliser la transformation pour l'ordre 1 de m est :

$$(25) \quad H = \langle G^{(1)} \rangle, \text{ la moyenne de } G,$$
$$\theta = \int [G^{(1)} - \langle G^{(1)} \rangle] dt.$$

H est imaginaire, on utilise dans la suite la matrice h définie par $H=ih$.

27. La matrice h associée au système autonome (24) est une matrice constante dont les éléments sont des polynômes des masses et des grandeurs associées tels que les harmoniques zonaux J_2 et J_4 du développement du potentiel de Jupiter. Dans la résolution du système (24) qui fournit la solution à longue période des oscillations libres du système des satellites considérés, on calcule les valeurs propres et les vecteurs propres de h . La matrice M des vecteurs propres permet de définir un nouveau changement de variables $Z=M.U$. Le système (24) se transforme alors en un système en U :

$$M.\dot{U} = ih.M.U,$$

ou :

$$\begin{aligned}\dot{U} &= i M^{-1}.h.M.U \\ \dot{U} &= i\Gamma.U.\end{aligned}$$

Γ est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres obtenues lors de l'opération de diagonalisation de la matrice h . Le nouveau système admet comme solution :

$$U_j = C_j \exp i(g_j t + \beta_j).$$

La solution pour Z s'obtient ensuite par une transformation linéaire de la solution U . On a :

$$(26) \quad Z_j = \sum_k M_{jk} C_k \exp.i(g_k t + \beta_k),$$

où les quantités M_{jk} représentent les éléments de la matrice des vecteurs propres, C_k, β_k , les colonnes des constantes arbitraires à déterminer par la comparaison à l'observation. L'indice j désigne le numéro de satellite.

Remarques concernant le système autonome.

- Le nombre de 18 équations du système (24) peut être réduit de moitié car les équations sont conjuguées deux à deux. La matrice associée h est alors de dimension 9×9 .
- Dans la première approximation, on peut aussi traiter ce système en deux fois : la première avec la sous-matrice 4×4 relative au mouvement des grands axes, la deuxième avec la sous-matrice de dimension 5×5 relative au mouvement des noeuds et de la précession du repère. Cette opération est possible car les autres éléments de la matrice h sont nuls.

c. L'interaction très faible entre les mouvements orbitaux et la précession permet de faire le calcul de la précession d'une manière ponctuelle lors de la solution du système autonome et plus tard lors du traitement du système critique. Ce sont les seuls moments où l'on s'occupe de ces deux équations supplémentaires. Dans toutes les autres circonstances on considère uniquement les équations du mouvement des satellites affectées des compléments dus au mouvement du repère.

Intégration du système variationnel.

28. Cette première étape se termine avec le retour aux variables Y par la multiplication :

$$(27) \quad Y_j = (1 + \theta^{(1)}) Z_j,$$

Y_j étant connu, on aborde dans la deuxième étape l'intégration du système

$$(28) \quad \dot{Y}_2 = G_2^{(1)} Y_j$$

par rapport au temps. Dans la dernière étape, les résultats obtenus pour Y_2 sont introduits dans le système

$$(29) \quad \dot{Y}_1 = Y_2 + G_1^{(1)} Y_j,$$

dont la résolution est également faite par intégration par rapport au temps. Ainsi la partie concernant les variables de circulation est obtenue au moyen d'une intégration double par rapport au temps.

Calcul et intégration du système critique.

29. Les solutions (28) et (29) de la première itération seront utilisées dans les substitutions pour la formation des compléments venant de l'ordre 2. Dans les équations \dot{X}_3 relatives au mouvement des grands axes des orbites, ce sont les variables de fréquence et de circulation qui apportent les contributions les plus importantes. Dans cette opération, les arguments mixtes (constitués de deux types d'arguments : les longitudes moyennes L et les arguments à longues périodes $(g_j t + \beta_j)$) de ces solutions se combinent avec les arguments contenant seulement les longitudes moyennes pour redonner les fonctions du temps du type :

$$\exp i(g_j t + \beta_j),$$

comme celles de (26). Ce traitement est proche de ceux utilisés dans les travaux de Souillart cités dans Ferraz-Mello (1979). Ces contributions importantes portent les mêmes arguments que ceux de la solution à très longues périodes de la première approximation. Elles sont habituellement appelées termes critiques. Cet ensemble de compléments fournit, au moyen d'un traitement matriciel inverse, une matrice à éléments constants c , complément de h de l'équation (24). On obtient ainsi un système linéaire critique

$$(30) \quad \dot{Z} = i (h+c)Z,$$

dont la résolution fournit les nouvelles valeurs des fréquences g_k et les nouveaux vecteurs propres M_{jk} . Les étapes suivantes de l'intégration sont identiques à celles de la solution du système variationnel non critique.

TRAITEMENT DES TERMES NON LINEAIRES.

30. Les termes non linéaires sont ceux qui portent un degré supérieur à 1. Dans leur traitement, on les sépare en deux groupes : un groupe de termes autonomes qui ne dépendent pas explicitement du temps, et un groupe de termes qui dépendent du temps de façon explicite par l'intermédiaire des longitudes moyennes contenues dans les arguments. Les termes autonomes sont traités dans les équations exprimées en variables U avec ajustement des modules et des phases des termes à très longues périodes obtenues dans la solution du système linéaire en U . L'exposé de la méthode est plus commode avec la présentation des résultats. Il se trouve dans le paragraphe 82 du chapitre 4. On trouve dans le paragraphe 83 du même chapitre le traitement des termes non linéaires qui dépendent du temps de façon explicite.

Le traitement des termes non linéaires autonomes apporte des modifications sur les fréquences des termes à très longues périodes. Le traitement des termes non autonomes donnent des termes périodiques. Certaines commensurabilités entre les longitudes moyennes contenues dans les arguments peuvent donner lieu à des groupes de termes importants, comme le groupe de termes dits de de Haerdtl dans le cas des satellites galiléens ou celui de la grande inégalité Jupiter-Saturne dans le cas des planètes.

Chapitre 2

DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE ET FORMATION DES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS

Ce chapitre aborde le développement de la fonction perturbatrice et la formation des seconds membres des équations. Pour un satellite considéré, la fonction perturbatrice a trois composantes provenant de :

- l'action des autres satellites.
- l'effet de la distribution de masse à l'intérieur de Jupiter;
- l'action du Soleil.

Dans l'étude des perturbations du mouvement des satellites galiléens, le nombre de corps à considérer peut être limité à 6 : Jupiter, les quatre satellites galiléens et le Soleil. Les autres satellites du système jovien, de masse très faible, ne jouent aucun rôle dynamique sensible. Il reste à considérer la perturbation du Soleil car l'action directe des autres planètes est faible. Toutefois, on doit tenir compte des perturbations de ces mêmes planètes sur le mouvement du corps central qui est ici Jupiter dans son orbite héliocentrique. Les inégalités correspondantes apparaissent ainsi dans le mouvement relatif jovien du Soleil, et par suite dans le mouvement des satellites par le développement de la perturbation solaire.

LES TROIS TYPES DE PERTURBATION DU MOUVEMENT DES SATELLITES DE JUPITER.

31. Le mouvement d'un satellite donné est perturbé par les perturbations de trois types :

- Perturbation du type planétaire : c'est la perturbation créée par les autres satellites du système. Elle ressemble à celle de l'action mutuelle des planètes sur trois points : la masse dominante du corps central, les orbites à excentricité et à inclinaison faibles et enfin les distances mutuelles grandes par rapport aux dimensions des satellites permettant de considérer ceux-ci comme des points matériels;

- Perturbation du type lunaire : Le mouvement d'un satellite du système est perturbé par le Soleil de la même manière que celui de la Lune perturbé par le Soleil;
- Perturbation du type satellite artificiel : les satellites évoluent sur des orbites très proches de Jupiter et subissent l'action du bourrelet équatorial de Jupiter. Cette perturbation est identique à celle subie par un satellite artificiel en mouvement sur une orbite proche du corps central.

Ces trois types de perturbation ont pour effets principaux suivants :

- . Effets de l'interaction. Les commensurabilités existant entre les moyens mouvements des trois premiers satellites donnent des excentricités induites beaucoup plus importantes que les excentricités libres dans le cas de J1 et J2. Ces particularités ont été abordées dans l'introduction (paragraphe 1 à 5).
- . Effets de l'action du Soleil. L'orbite jovicentrique du Soleil se déduit directement de l'orbite héliocentrique de Jupiter. La perturbation due à la présence du Soleil est plus faible que celles des deux autres actions en raison de la grande distance séparant le Soleil et le système jovien. Comme effet indirect des actions des grosses planètes, certains termes contiennent dans leurs arguments des éléments des orbites de ces corps. Les amplitudes des termes obtenus lors du développement sont faibles, mais elles réapparaissent plus grandes après intégration car la vitesse angulaire faible du Soleil et le mouvement lent de l'orbite solaire donnent des facteurs de multiplication importants lors de l'intégration.
- . Effets de l'action du renflement équatorial de Jupiter. Les satellites du système jovien gravitent autour de l'astre central Jupiter par l'attraction de sa masse dominante. Mais la proximité des satellites et de Jupiter ne permet pas de considérer ce dernier comme un point matériel dans l'étude dynamique du système. Jupiter a approximativement la forme d'une ellipsoïde de révolution aplati. Comme effet à longue période, le bourrelet équatorial de Jupiter tend à ramener l'orbite du point matériel vers le plan de l'équateur et donne au grand axe de cette orbite un mouvement de même sens que son mouvement orbital. Cet effet décroît très vite avec la distance séparant le point matériel et Jupiter. Dans l'étude théorique, la présence de cette perturbation donne au système autonome des

variables neutres une forme assez remarquable : les éléments de la diagonale de la matrice associée à ce système sont nettement plus grands que les éléments voisins et cette décroissance en amplitude continue d'une façon graduelle jusqu'aux éléments les plus éloignés de la diagonale.

32. La fonction perturbatrice est constituée de trois composantes provenant des trois actions citées ci-dessus :

$$(31) \quad R = R_{jk} + R_S + R_J .$$

Chacune de ces composantes se développe d'une façon différente de celles des deux autres en raison du choix des petites quantités utilisées dans les développements (table 3).

Table 3

Type de perturbation	Petites quantités utilisées dans le développement en série entière.	Ordre de grandeur des petites quantités			
		sat.1	sat.2	sat.3	sat.4
Perturbation mutuelle	Rapport entre les demi-grands axes du couple de satellites considérés	0,2240	0,3564	0,3940	0,2240
		à 0,6284	à 0,6284	à 0,6269	à 0,5685
Perturbation du bourrelet équatorial de Jupiter	Rapport du rayon équatorial de Jupiter au demi grand axe de l'orbite du satellite.	0,1693	0,1064	0,0667	0,0379
Perturbation du Soleil	Rapport entre le demi-grand axe du satellite et celui du Soleil.	,00054	,00086	,00138	,00242

DONNEES UTILISEES DANS LE DEVELOPPEMENT.

33. Nous disposons, à l'heure actuelle de données beaucoup plus précises des constantes physiques qu'au début du siècle à l'époque où Sampson élaborait sa théorie. Plusieurs inconnues du problème sont devenues des données. Prenons le cas des masses des satellites par exemple, la théorie de Sampson utilise des valeurs numériques provisoires des masses pour

construire un système d'équations dont les masses sont des inconnues. La résolution de ce système s'appuie sur des résultats d'observation. La solution de Sampson et les récentes versions de solution de ce système utilisant la même théorie et des moyens de calcul sur ordinateur, ne donnent pas des valeurs des masses proches des celles obtenues par des sondes spatiales. L'écart relatif est très faible pour la masse de J2 mais atteint 25% pour celle de J4. Ces écarts ne peuvent être expliqués d'une façon simple, par exemple, supposer que l'observation utilisée pour la détermination de la masse de J2 est bonne, et celle utilisée pour déterminer la masse de J4 est mauvaise, car il est souvent difficile d'isoler un effet donné des résultats d'observation qui dépendent de nombreux paramètres. Dans l'élaboration de notre théorie, les masses sont considérées comme des constantes connues, leurs valeurs numériques sont introduites dans le calcul. Cependant, une trace littérale accompagne la valeur numérique de chaque quantité de façon notamment à pouvoir exprimer éventuellement la solution en fonction d'autres jeux de masses.

Constantes physiques.

Les constantes physiques sont prises dans les résultats de dépouillement des mesures des sondes Pioneer 10 et 11 par Null (1976) :

Les masses des satellites sont :

$$m_1 = 0,00004684,$$

$$m_2 = 0,00002523,$$

$$m_3 = 0,00007803,$$

$$m_4 = 0,00005661,$$

pour la masse de Jupiter prise égale à 1.

Le rapport de la masse du Soleil à celle du système de Jupiter :

$$\frac{M_s}{M_J + \sum m_j} = 1047,3463 .$$

Le rayon équatorial de Jupiter :

$$A_e = 71398 \text{ km} .$$

Les facteurs d'ellipticité jovipotentielle :

$$J_2 = 0,014733 ,$$

$$J_4 = -0,000587 .$$

Constantes arbitraires utilisées dans la définition des variables.

Les constantes arbitraires N sont prises dans la version E-2 (Lieske, 1980):

$$\begin{aligned}N_1 &= 203,488955363 \text{ } ^\circ/\text{jour} , \\N_2 &= 101,374724557 \text{ } ^\circ/\text{jour} , \\N_3 &= 50,317609154 \text{ } ^\circ/\text{jour} , \\N_4 &= 21,571070875 \text{ } ^\circ/\text{jour} .\end{aligned}$$

Constante de gravitation de Jupiter. Dans le mouvement héliocentrique de Jupiter, c'est la masse du système entier (Jupiter + satellites) qui est prise en compte. Dans l'étude du mouvement des satellites galiléens, nous définissons G_J comme la constante de gravitation due à la masse de Jupiter, dont la valeur est calculée au moyen de celle de la constante de Gauss k ($k = 0,01720209895$) du système des constantes astronomiques de l'U.A.I. 1976. A partir des données numériques ci-dessus, nous calculons le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil :

$$\frac{M_J}{M_S} = \frac{1}{1047,5628} ,$$

ensuite la valeur numérique de G_J :

$$G_J = k^2 \frac{M_J}{M_S} = 0,282476820622 \times 10^{-6} .$$

ORDRES DE GRANDEUR DES PERTURBATIONS.

34. Les masses des satellites sont faibles par rapport à celle de Jupiter. Le rapport entre la masse d'un satellite à celle de Jupiter est toujours inférieur à 1×10^{-4} c'est à dire au moins dix fois plus faible que le rapport entre la masse de Jupiter et celle du Soleil. Lors du développement, on a comparativement des amplitudes des termes plus faibles que celles obtenues dans une théorie planétaire par exemple. Mais certains arguments, dont les caractéristiques correspondent aux commensurabilités des moyens mouvements des trois premiers satellites, donnent des facteurs d'intégration importants. On trouve, après l'intégration, un groupe de termes dont les amplitudes sont fortement amplifiées.

La masse du Soleil est importante, mais l'éloignement du système de Jupiter diminue très fortement ses effets. Dans le développement de la perturbation solaire, ce n'est plus la masse du Soleil qui donne l'ordre de grandeur de sa perturbation mais l'expression :

$$\frac{M}{1+M} \left(\frac{N_S}{N_j} \right)^2$$

apparue en facteur de la fonction perturbatrice due à la présence du Soleil.

En ce qui concerne les différents termes de la perturbation due au renflement équatorial de Jupiter, l'ordre de grandeur de ces perturbations n'est pas J_2 , mais l'expression :

$$J_2 \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^2$$

apparue dans le développement du terme principal contenant J_2 . C'est dans le cas du satellite J1 que le premier élément de la série contenant le facteur J_2 paraît bien plus grand en ordre de grandeur que les masses des satellites. On sait en plus que le facteur J_4 a l'ordre de grandeur du carré du l'harmonique zonal principal J_2 .

Ces considérations montrent qu'il est bien difficile de définir un ordre homogène par rapport à cet ensemble hétérogène de paramètres physiques. La table 4 donne les ordres de grandeur de ces diverses perturbations.

Table 4

	j	$\frac{m_j}{1+m_j}$	$J_2 \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^2$	$J_4 \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^4$	$\frac{M_s}{1+M_s} \left(\frac{N_s}{N_j} \right)^2$
Sat.1	1	,00004684	,00042238	-,00000048	,00000017
Sat.2	2	,00002523	<u>,00016681</u>	-,00000007	,00000067
Sat.3	3	,00007802	,00006555	-,00000001	,00000272
Sat.4	4	,00005661	,00002119	-,00000000	<u>,00001482</u>

On peut remarquer que la gamme des masses des satellites n'est pas étendue; le rapport des deux masses extrêmes n'est que :

$$\frac{0,00007803}{0,00002523} \sim 3$$

C'est une valeur très faible comparée au rapport des masses proche de 6000 du couple Jupiter-Mercure dans le problème planétaire. La table 4 montre que, à côté de la colonne concernant les perturbations mutuelles et représentée par les masses m_j , les autres groupes de constantes dépendent des distances séparant les satellites et Jupiter; les deux premières constantes de la colonne contenant J_2 sont les seules valeurs plus grandes que les masses des satellites. On peut prendre, dans chacune des colonnes une valeur et la définir comme l'ordre l de la perturbation correspondante. Cette assimilation n'est pas nouvelle, Sampson (1921) a déjà utilisé des paramètres j_j et k_j (indice $j=1$ à 4 : numéros des

satellites) pour donner l'ordre de grandeur des perturbations :

$$(32) \quad \begin{aligned} j_j &= \frac{3}{2} (1+m_j) \left(\frac{A_e}{A_j}\right)^2 J_2, \\ k_j &= -\frac{15}{8} (1+m_j) \left(\frac{A_e}{A_j}\right)^4 J_4. \end{aligned}$$

A part des masses des satellites, pour fixer les idées, nous désignons la valeur soulignée dans chacune des trois dernières colonnes de la table 4 comme l'ordre 1 de la perturbation considérée. Chacune des autres valeurs de la même colonne est reliée à elle par un facteur numérique simple.

Ce choix arbitraire n'a aucune conséquence numérique car le coefficient calculé de chaque terme contient déjà numériquement les constantes physiques. Sur le plan de la mise en oeuvre par l'introduction d'une notation littérale, nous utilisons j_2 , j_4 , m_s pour marquer leurs traces à l'ordre 1. Il reste à voir s'il existe un inconvénient réel au niveau de l'ordre de grandeur des termes d'ordre 1 portant la trace j_2 comparé à celui des termes portant une trace m_k de même ordre. Le calcul effectif nous débarrasse de ce souci car le développement de la partie provenant de l'aplatissement donne parfois des amplitudes plus importantes mais les inégalités obtenues ne sont pas affectées de facteurs d'intégration de valeur élevée.

STRUCTURE D'UN TERME DU DEVELOPPEMENT.

35. Dans le développement en série de la fonction perturbatrice, chaque terme est une expression monôme composée de trois facteurs :

- Un coefficient numérique et une trace littérale. Dans le cas d'un terme d'ordre un, cette trace littérale permet d'identifier la constante physique utilisée, et par conséquent, la perturbation qui génère ce terme. Dans le cas d'un ordre plus élevé, on peut trouver les traces des constantes physiques du corps perturbé et du corps perturbateur.
- Un facteur apparu sous la forme d'un produit de variables. Chacune de ces variables est dotée d'un exposant positif ou nul. Ces variables sont des variables elliptiques dans le cas des satellites et de Jupiter et sous la forme des variables d'inclinaison dans le cas de l'équateur de Jupiter. Dans le développement de la fonction perturbatrice on considère chaque fois deux corps, un corps perturbateur et un corps perturbé, les variables apparues sont celles relatives à ces deux corps.

- Une fonction exponentielle d'un argument. A cette étape du développement, cet argument est une combinaison linéaire des arguments élémentaires du type longitude moyenne dont nous précisons le mode d'introduction dans le paragraphe suivant.

On voit qu'à cette étape préliminaire, un terme ne contient pas simplement un module et un argument, mais aussi un facteur littéral contenant des variables. Le traitement de ce facteur fait partie du développement de la solution.

La forme structurée d'un terme de la fonction perturbatrice relative à l'action d'un corps k sur le corps j est donc :

Coefficient	Facteur variable	Fonction du temps
$C_{(v)(s)}^{(jk)}$	$F_{(v)}^{(jk)}$	$\exp(i(s_{1j} L_j + s_{1k} L_k))$

Un des deux derniers facteurs ou même les deux facteurs peuvent être absents. Dans cette forme générale du développement de la perturbation mutuelle, le coefficient est numérique et contient les traces littérales des constantes physiques m_j, m_k :

$$C_{(v)(s)}^{(jk)} = C_{v_1 v_2 v_3 \dots v_{12} s_1 s_2 \dots s_{12}} [m_j^{r_1} m_k^{r_2}]$$

Pour les autres sources de perturbations, les coefficients apparaissent sous la même forme avec une des traces de j_2 ou j_4 ou m_s à la place de m_k du crochet. Cette forme indiquée indique que la valeur numérique du coefficient C dépend de la composition de l'argument et du facteur variable littéral dont la forme est donnée plus loin par la présence des coefficients (s) et des exposants des variables (v). Nous avons choisi d'évaluer le contenu du crochet composé des constantes physiques et de l'inclure dans le coefficient. Le coefficient numérique ainsi évalué donne l'ordre de grandeur du terme. Ces constantes physiques figurées ici ne représentent plus que des traces littérales utiles au repérage de l'ordre et l'origine des perturbations.

Le facteur variable littéral est un produit des variables et apparaît sous la forme :

$$F_{(v)}^{(jk)} = \zeta_{1j}^{v_1} \zeta_{2j}^{v_2} \zeta_{3j}^{v_3} \zeta_{4j}^{v_4} \zeta_{5j}^{v_5} \zeta_{6j}^{v_6} \zeta_{1k}^{v_7} \zeta_{2k}^{v_8} \zeta_{3k}^{v_9} \zeta_{4k}^{v_{10}} \zeta_{5k}^{v_{11}} \zeta_{6k}^{v_{12}}$$

Chacune de ces variables peut être absente dans cette expression. Dans ce

cas son exposant est nul. La propriété de d'Alembert, qui définit la relation entre la caractéristique de l'argument $s_{ij} + s_{1k}$ et les exposants des variables neutres, est donnée par la relation :

$$(33) \quad v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + v_9 - v_{10} + v_{11} - v_{12} = -(s_{ij} + s_{1k}).$$

ARGUMENTS UTILISES DANS LE DEVELOPPEMENT.

36. Les arguments utilisés sont des fonctions linéaires du temps dans le cas non résonnant. Ces arguments apparaissent dans le développement sous forme littérale. Cette forme littérale permet de représenter les arguments linéaires du temps et de compléter éventuellement par une composante résonnante fonction périodique du temps. Nous rencontrons ce type d'arguments dans le traitement de la libration, où le complément résonnant a une amplitude très faible. Dans le premier cas nous avons une fonction de circulation, qui reprend la même valeur chaque fois que son argument augmente de 360° . Dans le deuxième cas nous avons cette même fonction de circulation légèrement modifiée par la présence d'un petit complément périodique dans l'argument. Examinons le mode d'introduction de ces fonctions linéaires du temps comme arguments élémentaires.

Dans la solution intermédiaire non résonnante qui dépend de six constantes arbitraires, nous choisissons de les introduire tout à fait au début du traitement, dans la définition même des variables. Ces constantes arbitraires sont les moyens mouvements moyens N_j obtenus par l'observation et les longitudes moyennes E_j à l'époque initiale $t=0$. Ces définitions se trouvent dans (3) et (6), paragraphes 10 et 11. A l'heure actuelle, ces constantes sont très bien connues car leurs valeurs sont tirées des résultats de plusieurs siècles d'observation et leur ordre de grandeur est confirmé par la théorie. Il existe toujours un ajustement des valeurs attribuées à ces constantes dans chaque théorie après la comparaison aux observations, mais les écarts relevés sont toujours très faibles.

Exemple:

	N_1 °jour	N_2 °jour
Sampson	203,488954208	101,374723445
Lieske E-2	203,488955363	101,374724557
Ecart (L.-S.)	0,000001155	0,000001112

Les écarts relevés ne touchent que le neuvième chiffre significatif.

Le développement de notre théorie est fait au voisinage de ces constantes dont les valeurs sont données par Lieske E-2 (1980). Après la comparaison de la théorie à l'observation on pourra voir si les écarts entre les nouvelles valeurs ajustées et les valeurs utilisées initialement justifient une itération du développement de la théorie.

Dans le cas du mouvement non résonnant, la variable de circulation ζ_1 a pour expression :

$$\zeta_1 = i(\ell - L), \text{ où } L = Nt + E,$$

et dans le cas du mouvement résonnant :

$$\zeta_1 = i(\ell - \lambda), \text{ où } \lambda \text{ représente } L + \delta\lambda,$$

tel qu'il est défini au paragraphe 21. C'est cette dernière relation qui remplace en définitive la première relation de définition (6). Comme exemple de l'introduction effective des fonctions linéaires dans les arguments, nous prenons le développement d'une fonction d'un argument élémentaire du type longitude moyenne utilisée habituellement dans les théories classiques :

$$\begin{aligned} \exp i\ell &= \exp iL \cdot \exp \zeta_1 \\ &= \exp iL \left(1 + \zeta_1 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

La série développée ne contient que des arguments fonctions linéaires connues du temps :

$$\exp iL + \zeta_1 \exp iL + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \exp iL + \dots$$

La variable ζ_1 représente une petite quantité; la série converge rapidement. L'utilisation des variables de ce type permet d'éviter de faire des développements de Taylor au voisinage des données dans la construction des seconds membres des équations.

SERIES DE BASE UTILISEES DANS LE DEVELOPPEMENT.

37. L'expression de la fonction perturbatrice contient des rapports des distances et des distances angulaires des divers corps du système. Le développement de ces quantités utilise d'une façon fréquente quelques expressions que nous donnons ici sous la forme des développements en série de Fourier. On pourra remarquer que certaines de ces expressions sont utilisées aussi bien dans le développement de l'interaction que dans la perturbation par le Soleil par exemple.

Les expressions courantes sont nombreuses :

$$\frac{a}{r}, \quad \frac{r}{a}, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3, \quad \dots \quad \exp i\nu, \quad \exp i(\nu - M), \quad \text{etc} \dots$$

où a , r , ν sont définis au paragraphe 7. Il nous suffira d'obtenir

initialement deux développements de base :

$$\frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \frac{r}{a} \exp(i(v-M)),$$

à partir desquels nous pourrons former toutes les combinaisons utiles. Par exemple, le développement de $\frac{r}{a}$ peut être obtenu par l'intermédiaire de la série algébrique $(1+x)^{-1}$: un sous-programme de substitution remplace chaque paramètre littéral x de la série $(1+x)^{-1}$ par la série $(\frac{a}{r} - 1)$. Un autre exemple : la série $(\exp iv)$ sera obtenue de la façon suivante : une première multiplication de deux séries $\frac{a}{r}$ et $\frac{r}{a} \exp(i(v-M))$ donne la série $\exp(i(v-M))$; une deuxième multiplication par la série $(\exp iM)$ donne la série cherchée.

Le calcul des deux séries de base mentionnées ci-dessus utilise les relations données par Kovalevsky (1963) :

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{a}{r} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} 2J_p(pe) \cos pM, \\ r \cos v = a \left[-\frac{3e}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} (J_{p-1}(pe) - J_{p+1}(pe)) \cos pM \right], \\ r \sin v = a \sqrt{1-e^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} (J_{p-1}(pe) + J_{p+1}(pe)) \sin pM \right]; \end{cases}$$

dans lesquelles J_p, J_{p-1}, J_{p+1} représentent les fonctions de Bessel, le paramètre étant pe . Leurs développements en série relatifs à un paramètre quelconque x ont pour expressions :

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} - \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} + \dots$$

$$J_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{k!} \left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{1!(k+1)} + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{(-1)^n}{n!(k+1)(k+2)\dots(k+n)} + \dots \right]$$

Les développements en série de Fourier de ces expressions satisfont la propriété de d'Alembert qui fixe la relation entre le degré en excentricité du coefficient et la caractéristique de l'argument. Prenons comme exemple le développement en série de Fourier de l'expression

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k} \sin jv \quad \text{ou} \quad \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k} \cos jv;$$

dans chaque terme, le degré en excentricité du coefficient de $\sin pM$ ou $\cos pM$ est :

$$d = p - j.$$

Dans notre jeu de variables, X_3 traduit le mouvement du grand axe de l'orbite. Elle a comme module l'excentricité e et comme argument, $\bar{\omega}$ la longitude du périjove de l'orbite. La propriété de d'Alembert s'applique à X_3 d'une façon presque semblable qu'à e du cas abordé ci-dessus. Le degré d de X_3 de chaque terme du développement en série de

$$\exp i j v,$$

est lié à la caractéristique p de la fonction du temps $\exp i p L$ par la relation

$$d = -p + j.$$

Le nouvel argument L est formé par l'addition de l'argument $\bar{\omega}$ de X_3 à l'anomalie moyenne M . Ainsi, dans chaque terme du développement de $\frac{a}{r}$, le degré en X_3 sera $-p$ si la fonction du temps est $\exp i p L$; dans chacun des termes de $\frac{r}{a} \exp i j v$, le degré en X_3 sera $-p + 1$ si la fonction du temps a la même expression $\exp i p L$. D'après notre paramétrage, X_4 est la conjuguée de X_3 . Dans l'utilisation simultanée de ces deux variables dotées des exposants d_3, d_4 , la différence

$$d_3 - d_4$$

est liée à la caractéristique p de l'argument par la relation :

$$d_3 - d_4 = -p + j.$$

PRECISION UTILISEE LORS DE LA COLLECTE DES TERMES RETENUS

38. Lors du calcul des séries de base, nous avons utilisée une précision de calcul très poussée de 10^{-16} radian comme la plus faible valeur absolue à retenir. Ces séries de faible volume sont calculées une fois pour toutes. Elles sont rangées dans un fichier destiné à une utilisation fréquente lors du développement de la fonction perturbatrice.

A l'étape de la collecte des termes issus du développement de la fonction perturbatrice, nous n'avons plus la possibilité pratique d'adopter une précision commune à tous les degrés, en raison d'une augmentation rapide du nombre de termes avec le degré des variables. Le traitement des séries sur ordinateur reste une opération très coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire occupé par les séries; on est amené pendant le développement de la théorie à adopter une précision raisonnable. Nous comptons retenir dans le résultat final, après l'intégration des équations, tous les termes dont l'amplitude est

supérieure à 1×10^{-7} radian jovicentrique. Cette valeur correspond à 42, 67, 107 et 188 mètres respectivement dans le cas des quatre satellites de 1 à 4. Cette précision est aussi celle des théories de Sampson et de Lieske.

Pour bien situer cette précision dans le domaine théorique comme dans le domaine de l'observation, il est utile de voir les amplitudes de quelques termes principaux :

- Amplitude de la grande inégalité en longitude du satellite J1 provenant des perturbations mutuelles	} 0,0082631 radian jovicentrique.
- Amplitude du plus grand terme de la longitude du satellite J4, provenant de la perturbation solaire	} 0,0005594 radian jovicentrique.
- Amplitude du plus grand terme du rayon-vecteur du satellite J4, provenant de l'excentricité de l'orbite déduite des oscillations libres	} 0,0073742 radian jovicentrique.

Du côté de l'observation, une précision de $0''05$ géocentrique d'une observation photographique par exemple correspond à :

- 0,00050 radian jovicentrique dans le cas du satellite J1,
- ou 0,00028 radian jovicentrique dans le cas du satellite J2,
- ou 0,00018 radian jovicentrique dans le cas du satellite J3,
- ou 0,00010 radian jovicentrique dans le cas du satellite J4.

La grande précision des observations actuelles des phénomènes mutuelles des satellites galiléens permet de gagner un facteur 10 par rapport à ces chiffres.

A première vue, la base adoptée pour la collection des termes de 1×10^{-7} radian jovicentrique paraît trop faible; elle peut laisser dans la collection un bon nombre de termes inutiles. Cette valeur se trouve en réalité à un niveau raisonnable compte tenu des termes à très longues périodes qu'on doit obtenir avec une bonne précision.

La précision choisie impose des marges de développement assez variables. Celles-ci dépendent en effet des facteurs d'intégration des inégalités apparues. Voici quelques exemples :

- L'inégalité $(L_1 - L_2)$, de fréquence 1,78223 rad/jour, a un facteur d'intégration égal à 0,561095; une marge est inutile.
- L'inégalité $(L_1 - 2L_2)$, de fréquence 0,012907 a un facteur

d'intégration égal à 77,4784 nécessite un développement à la précision arrondie à 1×10^{-9} radian jovicentrique.

- L'inégalité $(-3L_3 + 7L_4)$, de fréquence 0,000780 rad/jour, a un facteur d'intégration égal à 1282,5. Elle se trouve dans certains seconds membres qui nécessitent une double intégration; le facteur d'intégration est alors porté à une valeur très élevée 1645000. Cet argument est souvent associé à d'autres longitudes des périjoves qui réduisent encore la fréquence générale. Par exemple, l'argument :

$$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - 3\pi_4$$

donne un facteur égal à $(64535)^2$ soit $4,165 \times 10^9$ après une double intégration. Heureusement, il y a peu d'arguments de ce type dans le cas des satellites galiléens. Les autres commensurabilités $(-1,+2)$ des moyens mouvements des couples J1-J2 et J2-J3 sont importantes aux degrés zéro et un, mais faibles aux degrés élevés. Une autre commensurabilité $(-1,+4)$ des moyens mouvements du couple J1-J3 donne des termes négligeables.

La considération de ces cas extrêmes permet de voir qu'il est nécessaire de déterminer un majorant numérique qui représentera un degré dans le test de collecte des termes significatifs. Ce majorant numérique est utilisé uniquement dans le test d'élimination des composantes négligeables et n'apparaît nulle part dans les expressions. La détermination de sa valeur doit tenir compte des modules réelles que peuvent avoir les variables et d'une large marge de sécurité.

Nous utilisons dans le développement général jusqu'au degré 2 la précision 5×10^{-9} . Dans le test sur l'amplitude des termes à retenir, la valeur utilisée pour représenter un degré est 0,01. D'autre part, dans des développements partiels répondant à certaines recherches spécifiques, la précision de collecte est portée plus loin par un facteur allant de 1×10^{-2} à 1×10^{-8} . La collecte des termes indépendants explicitement du temps jusqu'au degré 5 fait partie de ces développements ponctuels. L'estimation pratique permet de constater que toutes les contributions de degré supérieur à 5 sont négligeables pour la précision finale de 1×10^{-7} radian fixée au début de ce paragraphe.

DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL PERTURBATEUR PROVENANT DE L'INTERACTION.

39. On considère une masse ponctuelle m_j animée d'un mouvement voisin du mouvement képlérien autour de Jupiter dont la masse est prise égale à l'unité. D'après la troisième loi de Képler le moyen mouvement osculateur et le demi-grand axe osculateur de cette masse ponctuelle sont liés par la relation :

$$(35) \quad n_j^2 a_j^3 = G_J(1+m_j),$$

où le second membre $G_J(1+m_j)$ représente la constante d'attraction du couple Jupiter et masse ponctuelle m_j .

On utilisera aussi une longueur constante A_j , liée au moyen mouvement moyen observé N_j par la relation :

$$(36) \quad N_j^2 A_j^3 = G_J(1+m_j).$$

A_j est voisin de a_j , car N_j est très proche de n_j .

On se place à présent dans le cas des satellites galiléens, considérés comme des masses ponctuelles, en mouvement orbital autour de Jupiter dont le centre de masse est pris comme l'origine des coordonnées. La fonction perturbatrice représentant l'action du satellite k sur le satellite j est de la forme :

$$(37) \quad R_{jk} = G_J m_k \left[\frac{1}{\Delta_{jk}} - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right],$$

dans laquelle m_k est la masse du satellite k ; G_J représente la constante de gravitation due à Jupiter et dont la valeur numérique est donnée dans le paragraphe 33. Le crochet contient deux termes; le premier traduit l'action directe du satellite k sur le satellite j , le deuxième traduit l'action indirecte venant de celle du satellite k sur le corps central. \vec{r}_j et \vec{r}_k , les vecteurs positions des satellites j et k .

On remplace dans (37) G_J par :

$$\frac{N_j^2 A_j^3}{1+m_j}$$

R_{jk} devient :

$$R_{jk} = N_j^2 A_j^2 \cdot \frac{m_k}{1+m_j} \left(\frac{A_j}{\Delta_{jk}} - \frac{A_j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right),$$

L'exposé sur le développement de cette expression sera facilité si nous séparons dès maintenant les deux parties directe et indirecte.

Partie directe :

$$(38) \quad R_d = N_j^2 A_j^2 \cdot \frac{m_k}{1+m_j} \cdot \frac{A_j}{\Delta_{jk}},$$

et partie indirecte :

$$(39) \quad R_i = -N_j^2 A_j^2 \cdot \frac{m_k}{1+m_j} \cdot \frac{A_j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k}{r_k^3}.$$

Partie directe de l'interaction.

40. L'expression (38) peut s'écrire sous la forme d'un produit de quatre facteurs :

$$R_d = \underbrace{N_j}_{(1)} \cdot \underbrace{N_j A_j^2}_{(2)} \cdot \underbrace{\frac{m_k}{1+m_j}}_{(3)} \cdot \underbrace{\frac{A_j}{\Delta_{jk}}}_{(4)}.$$

- ① contient N_j , qui est une quantité déjà définie. Elle n'est autre chose que le moyen mouvement moyen du satellite j dont la valeur est donnée par l'observation.
- ② est une partie de compensation : elle annulera le facteur $1/N_j A_j^2$ présent dans les expressions (7) utilisées lors de la formation des seconds membres des équations.
- ③ sera développé sous la forme d'un polynôme des masses :

$$m_k (1+m_j)^{-1} = m_k - m_j m_k + m_j^2 m_k - \dots$$

C'est une série qui converge rapidement car les masses m_j et m_k sont faibles.

- ④ est le rapport de deux distances. La première A_j est une constante connue. Elle est déduite du moyen mouvement moyen N_j au moyen de (36). La deuxième Δ_{jk} , représentant la distance instantanée entre les deux satellites, est la seule quantité qui nécessite un développement important.

Jusqu'à présent, nous avons utilisé dans l'écriture des expressions le moyen mouvement osculateur n_j et le demi-grand axe osculateur a_j , ensuite le moyen mouvement moyen N_j obtenu par observation et une constante A_j proche du demi-grand axe. Les quantités n_j et a_j ne sont pas des constantes et la première approche de la solution utilise leurs développements en série au voisinage des constantes connues N_j et A_j . La théorie permet d'obtenir comme résultat pour n_j sous la forme :

$$n_j = N_j - \Delta N_j + \text{termes périodiques,}$$

dans laquelle la quantité constante ΔN_j est habituellement appelée la perturbation séculaire du moyen mouvement (Tisserand, 1896) et :

$$(40) \quad \bar{n}_j = N_j - \Delta N_j, \text{ le moyen mouvement;}$$

ensuite, \bar{a}_j , la quantité correspondante à \bar{n}_j est appelée le demi-grand axe.

Il est commode de mettre le facteur (4) sous la forme d'un produit de deux facteurs :

$$\frac{A_j}{\Delta_{jk}} = \frac{A_j}{a_j} \cdot \frac{a_j}{\Delta_{jk}}$$

Cette mise en facteur permet d'isoler la partie a_j / Δ_{jk} dépendant seulement des distances osculatrices; l'autre facteur A_j / a_j est une expression simple proche de 1 :

$$(1 + \zeta_2)^{2/3}.$$

Soit S , l'angle formé par les deux vecteurs \vec{r}_j et \vec{r}_k ; le carré de la distance Δ_{jk} séparant les deux satellites a pour expression:

$$\Delta_{jk}^2 = r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos S$$

$$\text{ou : (41) } \Delta_{jk}^2 = r_j^2 \left[\left(\frac{r_k}{r_j} \right)^2 + 1 - 2 \frac{r_k}{r_j} \cos S \right].$$

Le rapport r_k / r_j peut être plus grand ou plus petit que 1; nous distinguons deux cas :

$$\begin{array}{ll} \text{cas intérieur} & r_k < r_j, \\ \text{cas extérieur} & r_k > r_j. \end{array}$$

Développement de $\cos S$.

41. Soient (x, y) le plan de référence (fig.5),

$N_k \Pi_k P_k$ l'orbite du satellite perturbateur,

$N_j \Pi_j P_j$ l'orbite du satellite perturbé,

I_j, I_k les inclinaisons des orbites sur le plan de
référence,

J l'inclinaison mutuelle des orbites,

N_j, N_k les noeuds ascendants des orbites sur le plan de
référence,

Π_j, Π_k les périjoves des orbites,

et

$$\begin{aligned} \Omega_j &= xN_j & , & \quad \Omega_k = xN_k, \\ v_j &= xN_j + N_j P_j, & \quad v_k &= xN_k + N_k P_k, \\ \tau_j &= xN_j + N_j G, & \quad \tau_k &= xN_k + N_k G, \end{aligned}$$

On dispose initialement de deux relations entre des éléments de deux triangles sphériques $P_j G P_k$ et $G N_j N_k$:

$$\begin{aligned} \cos S &= \cos(v_j - \tau_j) \cdot \cos(v_k - \tau_k) + \sin(v_j - \tau_j) \cdot \sin(v_k - \tau_k) \cdot \cos J, \\ \cos J &= \cos I_j \cdot \cos I_k + \sin I_j \cdot \sin I_k \cdot \cos(\Omega_j - \Omega_k) ; \end{aligned}$$

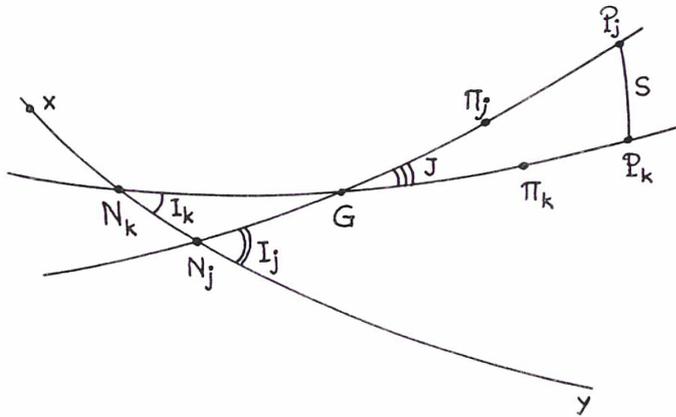


Fig.5

qu'on transformera au moyen des formules de Delambre pour éliminer τ_j et τ_k afin de pouvoir exprimer par la suite $\cos S$ en fonction des variables utilisées.

Les formules de Delambre :

$$(42) \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \cos \frac{\tau_j + \tau_k}{2} &= \cos \frac{\Omega_j + \Omega_k}{2} \cos \frac{\Omega_j - \Omega_k}{2} \sin \frac{I_j - I_k}{2} - \sin \frac{\Omega_j - \Omega_k}{2} \sin \frac{\Omega_j + \Omega_k}{2} \sin \frac{I_j + I_k}{2}, \\ \sin \frac{J}{2} \sin \frac{\tau_j + \tau_k}{2} &= \sin \frac{\Omega_j + \Omega_k}{2} \cos \frac{\Omega_j - \Omega_k}{2} \sin \frac{I_j - I_k}{2} - \cos \frac{\Omega_j + \Omega_k}{2} \sin \frac{\Omega_j - \Omega_k}{2} \sin \frac{I_j + I_k}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{\tau_j - \tau_k}{2} &= \cos^2 \frac{\Omega_j - \Omega_k}{2} \cos \frac{I_j - I_k}{2} + \sin^2 \frac{\Omega_j - \Omega_k}{2} \cos \frac{I_j + I_k}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{\tau_j - \tau_k}{2} &= \frac{1}{2} \sin(\Omega_j - \Omega_k) \left(\cos \frac{I_j - I_k}{2} - \cos \frac{I_j + I_k}{2} \right), \end{aligned} \right.$$

peuvent être facilement mises sous la forme :

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{J}{2} \cos \frac{\tau_j + \tau_k}{2} = \sin \frac{I_j}{2} \cos \frac{I_k}{2} \cos \Omega_j - \cos \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \cos \Omega_k, \\ \sin \frac{J}{2} \sin \frac{\tau_j + \tau_k}{2} = \sin \frac{I_j}{2} \cos \frac{I_k}{2} \sin \Omega_j - \cos \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \sin \Omega_k, \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{\tau_j - \tau_k}{2} = \cos \frac{I_j}{2} \cos \frac{I_k}{2} + \sin \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \cos (\Omega_j - \Omega_k), \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{\tau_j - \tau_k}{2} = \sin \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \sin (\Omega_j - \Omega_k). \end{array} \right.$$

On pose :

$$(44) \quad \begin{aligned} \chi &= \sin \frac{J}{2} \exp i \frac{\tau_j + \tau_k}{2}, \\ \eta &= \cos \frac{J}{2} \exp i \frac{\tau_j - \tau_k}{2}, \end{aligned}$$

et on écrit l'expression de $\cos S$ en fonction de ces quantités et de v_j et v_k .

$$\chi^2 \exp i (-v_j - v_k) = \sin^2 \frac{J}{2} \exp i (-v_j - v_k + \tau_j + \tau_k),$$

$$\eta^2 \exp i (-v_j + v_k) = \cos^2 \frac{J}{2} \exp i (-v_j + v_k + \tau_j - \tau_k).$$

Alors :

$$(45) \quad \cos S = \operatorname{Re} \left[\chi^2 \exp i (-v_j - v_k) + \eta^2 \exp i (-v_j + v_k) \right],$$

où Re désigne la partie réelle de l'expression complexe mise entre crochets. Les quantités χ et η seront exprimées en fonction de variables et seront introduites sous la forme des séries de monômes dans le calcul informatique.

$$\begin{aligned} \chi &= \sin \frac{J}{2} \exp i \frac{\tau_j + \tau_k}{2} = \sin \frac{I_j}{2} \cos \frac{\tau_j + \tau_k}{2} + i \sin \frac{I_j}{2} \sin \frac{\tau_j + \tau_k}{2} \\ &= \sin \frac{I_j}{2} \cos \frac{I_k}{2} \exp i \Omega_j - \cos \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \exp i \Omega_k \end{aligned}$$

C'est une série de 6 termes quand on limite le développement au degré 3 :

$$\chi = \left(\frac{I_j}{2} - \frac{I_j^3}{48} - \frac{I_j I_k^2}{16} \right) \exp i \Omega_j - \left(\frac{I_k}{2} - \frac{I_k^3}{48} - \frac{I_j^2 I_k}{16} \right) \exp i \Omega_k.$$

Le deuxième membre peut être exprimé facilement en fonction des variables. Par exemple le premier groupe est égal à :

$$\frac{1}{2} \sin I_j \exp i \Omega_j + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{48} \right) \sin^3 I_j \exp i \Omega_j - \frac{1}{16} \sin I_j \exp i \Omega_j \cdot \sin^2 I_k + \dots$$

$$\text{ou :} \quad \frac{1}{2} \chi_{5j} + \frac{1}{16} \chi_{5j}^2 \chi_{6j} - \frac{1}{16} \chi_{5j} \chi_{5k} \chi_{6k} + \text{degré 5.}$$

D'où le développement en série de :

$$\chi = \frac{\chi_{5j}}{2} - \frac{\chi_{5k}}{2} + \frac{\chi_{5j}^2 \chi_{6j}}{16} - \frac{\chi_{5k}^2 \chi_{6k}}{16} - \frac{\chi_{5j} \chi_{5k} \chi_{6k}}{16} + \frac{\chi_{5j} \chi_{6j} \chi_{5k}}{16} + \dots$$

De la même façon, on exprime η en fonction des variables :

$$\begin{aligned} \eta &= \cos \frac{J}{2} \exp i \frac{\zeta_j - \zeta_k}{2} \\ &= \cos \frac{J}{2} \left(\cos \frac{\zeta_j - \zeta_k}{2} + i \sin \frac{\zeta_j - \zeta_k}{2} \right) \\ &= \cos \frac{I_j}{2} \cos \frac{I_k}{2} + \sin \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \cos(\Omega_j - \Omega_k) + i \sin \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \sin(\Omega_j - \Omega_k) \\ &= \cos \frac{I_j}{2} \cos \frac{I_k}{2} + \sin \frac{I_j}{2} \sin \frac{I_k}{2} \exp i (\Omega_j - \Omega_k) \end{aligned}$$

C'est une série de 9 termes quand on limite le développement au degré 4 des inclinaisons :

$$\begin{aligned} \eta &= \left(1 - \frac{I_j^2}{8} + \frac{I_j^4}{384} \right) \left(1 - \frac{I_k^2}{8} + \frac{I_k^4}{384} \right) + \left(\frac{I_j}{2} - \frac{I_j^3}{48} \right) \left(\frac{I_k}{2} - \frac{I_k^3}{48} \right) \exp i \Omega_j \exp -i \Omega_k \\ &= 1 - \frac{I_j^2}{8} - \frac{I_k^2}{8} + \frac{I_j^2 I_k^2}{64} + \frac{I_j^4}{384} + \frac{I_k^4}{384} + \left(\frac{I_j I_k}{4} - \frac{I_j^3 I_k}{96} - \frac{I_j I_k^3}{96} \right) \exp i \Omega_j \exp -i \Omega_k. \end{aligned}$$

Le deuxième membre peut être exprimé facilement en fonction des variables X :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{X_{5j} X_{6j}}{8} - \frac{X_{5k} X_{6k}}{8} + \frac{X_{5j} X_{6k}}{4} + \frac{X_{5j} X_{6j} X_{5k} X_{6k}}{64} - \frac{5 X_{5j}^2 X_{6j}^2}{128} \\ &\quad - \frac{5 X_{5k}^2 X_{6k}^2}{128} + \frac{X_{5j}^2 X_{6j} X_{6k}}{32} + \frac{X_{5j} X_{5k} X_{6k}^2}{32} + \dots \end{aligned}$$

On constate que X^2 ne contient pas de termes constants alors que η^2 contient un terme constant égal à 1. On peut donc écrire $\cos S$ sous la forme :

$$(46) \quad \cos S = \operatorname{Re} \left[\exp i (-v_j + v_k) + \varphi \right],$$

dans laquelle φ représente le reste de l'expression et dépend des variables d'inclinaison.

Développement de $\frac{\partial_j}{\Delta_{jk}}$

42. On reporte l'expression (46) de $\cos S$ dans l'expression (41) de Δ_{jk}^2 . Cette dernière devient :

$$\Delta_{jk}^2 = r_j^2 \left[1 + \left(\frac{r_k}{r_j} \right)^2 - 2 \frac{r_k}{r_j} \cos(v_j - v_k) - 2 \frac{r_k}{r_j} \operatorname{Re}(\varphi) \right],$$

ou encore :

$$\Delta_{jk}^2 = r_j^2 \left[1 + \alpha_r^2 - 2 \alpha_r \cos(v_j - v_k) - 2 \alpha_r \operatorname{Re}(\varphi) \right],$$

quand on remplace le rapport de distances $\frac{r_k}{r_j}$ par α_r .

On pose ensuite :

$$d^2 = 1 + \alpha_r^2 - 2\alpha_r \cos(v_j - v_k)$$

et $\phi = \text{Re}(\psi)$,

Alors :

$$\Delta_{jk}^2 = r_j^2 d^2 \left(1 - \frac{2\alpha_r \phi}{d^2} \right),$$

et l'expression à développer prendra la forme :

$$(47) \quad \frac{a_j}{\Delta_{jk}} = \frac{a_j}{r_j} d^{-1} \left(1 - \frac{2\alpha_r \phi}{d^2} \right)^{-1/2},$$

dans laquelle $2\alpha_r \phi / d^2$ est une petite quantité devant 1. On va développer a_j / Δ_{jk} en série entière par rapport à cette petite quantité :

$$\frac{a_j}{\Delta_{jk}} = \frac{a_j}{r_j} \left[d^{-1} + \frac{1}{2} (2\alpha_r \phi) d^{-3} + \frac{3}{8} (2\alpha_r \phi)^2 d^{-5} + \frac{5}{16} (2\alpha_r \phi)^3 d^{-7} + \dots \right].$$

le second membre limité au degré 4 des inclinaisons se réduit à :

$$\frac{a_j}{r_j} \left[d^{-1} + \alpha_r \phi d^{-3} + \frac{3}{2} \alpha_r^2 \phi^2 d^{-5} \right].$$

On sépare ensuite les termes de ϕ en deux groupes, le premier portant les degrés 2 et le deuxième, les degrés 4 :

$$\phi = \phi_2 + \phi_4.$$

L'expression (48) ci-dessous est celle que nous utilisons dans le développement limité au degré 4 des inclinaisons :

$$(48) \quad \frac{a_j}{\Delta_{jk}} = \frac{a_j}{r_{jk}} \left[d^{-1} + \alpha_r (\phi_2 + \phi_4) d^{-3} + \frac{3}{2} \alpha_r^2 \phi_2^2 d^{-5} \right].$$

Les quantités d^{-s} ($s=1, 3, 5, \dots$) peuvent être développées en séries de Fourier d'une façon classique. Prenons un cas intérieur où $\alpha_r < 1$, si α_r était une constante, l'expression :

$$d^{-s} = \left[1 + \alpha_r^2 - 2\alpha_r \cos(v_j - v_k) \right]^{-s/2}$$

pourrait être développée en une série de la forme :

$$(49) \quad d^{-s} = \frac{1}{2} b_{s/2}^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} b_{s/2}^{(p)} \cos p(v_j - v_k)$$

après calcul effectif des coefficients de Laplace $b_{s/2}^{(0)}$ et $b_{s/2}^{(p)}$. Or le rapport de distances α_r dépend du temps par l'intermédiaire des variables et on ne connaît que la valeur du rapport

$$\alpha_A = \frac{A_k}{A_j}$$

déduite des valeurs numériques des moyens mouvements N_j et N_k . Il est donc important de mettre en évidence les différences existant entre les α portant des indices différents pour pouvoir évaluer le complément de développement.

α_A est calculé à partir des valeurs numériques de N_k et N_j au moyen de la troisième loi de Képler. On obtient :

$$\alpha_A = \left(\frac{N_k}{N_j} \right)^{-2/3} \left(\frac{1+m_k}{1+m_j} \right)^{1/3}$$

Le premier facteur du second membre est une constante numérique, on l'appelle α_0 . Deux autres valeurs intermédiaires sont :

$$\alpha_a = \frac{a_k}{a_j} \qquad \overline{\alpha}_a = \frac{\overline{a}_k}{\overline{a}_j}$$

respectivement le rapport de deux demi-grands axes osculateurs et le rapport de deux demi-grands axes. La définition des demi-grands axes a été donnée dans le praragraphe 40.

La correspondance entre les différentes expressions des α est mise en évidence par les éléments de la relation (50) ci-dessous :

$$(50) \quad \alpha_r = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{N_k}{N_j} \right)^{-2/3}}_{\alpha_0} \underbrace{\left(\frac{1+m_k}{1+m_j} \right)^{1/3}}_{\alpha_A/\alpha_0}}_{\alpha_A} \underbrace{\left(\frac{1+\zeta_{2k}}{1+\zeta_{2j}} \right)^{-2/3}}_{\frac{\alpha_a}{\alpha_A}} \underbrace{\left(\frac{r_k/a_k}{r_j/a_j} \right)}_{\frac{\alpha_r}{\alpha_a}}_{\alpha_a} \underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha_r}$$

Il convient de signaler dès maintenant que la solution pour ζ_{2k} , comme pour ζ_{2j} , contient une partie constante et une partie périodique. La partie constante, constituée d'un polynôme des paramètres constants, a une valeur très faible du fait que les termes les plus importants ont l'ordre des masses perturbatrices. La présence de cette constante est due à la deuxième condition de quasi-périodicité (11) du paragraphe 16. Elle dépend donc de l'ordre et du degré de la solution.

Il est courant d'aborder une solution d'ordre plus élevé en faisant un développement basé sur les résultats de la dernière solution connue. Par cette voie, on doit refaire à chaque fois le développement par substitution, du fait qu'on a une autre valeur du moyen mouvement. Une autre voie consiste à évaluer les valeurs de ces constantes à un ordre choisi et les utiliser une fois pour toutes dans un développement unique. C'est la méthode mise en oeuvre par Duriez (1979) dans sa théorie planétaire où les degrés de ces constantes sont appelés grades. Dans notre développement analytique par rapport aux masses, nous n'utilisons pas les grades numériques mais des quantités équivalentes obtenues par identification sous la forme des polynômes des masses et des grandeurs assimilées.

Soit $\zeta_{2j}^{(p)}$ la solution obtenue pour ζ_{2j} à l'ordre p . Cette solution contient un groupe de termes constants dont la somme est $-\sigma_j^{(p)}$ et une série de termes périodiques représentée par $\widetilde{\zeta_{2j}^{(p)}}$. Dans le développement de l'ordre $p+1$, il est parfois intéressant d'effectuer tout de suite la substitution de la partie constante dont la valeur est connue.

Le troisième facteur du second membre de (50) peut alors s'écrire :

$$\frac{\alpha_a}{\alpha_A} = \left(\frac{1 + \zeta_{2k}}{1 + \zeta_{2j}} \right)^{-2/3} = \left(\frac{1 + \widetilde{\zeta_{2k}} - \sigma_k}{1 + \widetilde{\zeta_{2j}} - \sigma_j} \right)^{-2/3} = \left(\frac{1 + \widetilde{\zeta_{2k}}}{1 + \widetilde{\zeta_{2j}}} \right)^{-2/3} \left(\frac{1 - \sigma_k}{1 - \sigma_j} \right)^{-2/3} + \dots$$

l'indice p a été omis pour simplifier l'écriture. Le facteur contenant σ_j et σ_k est une constante évaluée à partir de la solution d'ordre p . Il apparaît sous la forme d'un polynôme des paramètres constants. A cette approximation, on a :

$$\frac{\alpha_a}{\alpha_A} = \underbrace{\left(\frac{1 + \widetilde{\zeta_{2k}}}{1 + \widetilde{\zeta_{2j}}} \right)^{-2/3}}_{\frac{\alpha_a}{\alpha_A}} \underbrace{\left(\frac{1 - \sigma_k}{1 - \sigma_j} \right)^{-2/3}}_{\frac{\alpha_a}{\alpha_A}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\alpha_a}{\alpha_A}}$$

Pour ne pas encombrer la notation des signes additifs, on peut écrire (50) en utilisant ζ_{2k} et ζ_{2j} , mais dans ce cas on doit garder en mémoire que les séries représentées par elles ne contiennent plus les constantes extraites formant le facteur :

$$\left(\frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_j} \right)^{-2/3}$$

43. Le rapport des distances des satellites à Jupiter est α_r . C'est une

quantité variable; on la développe autour d'une valeur constante voisine α_0 définie au paragraphe précédent :

$$(51) \quad \alpha_r = \underbrace{\left(\frac{N_k}{N_j}\right)^{2/3}}_{\alpha_0 \text{ numérique}} \underbrace{\left(\frac{1+m_k}{1+m_j}\right)^{1/3} \left(\frac{1-\sigma_k}{1-\sigma_j}\right)^{-2/3} \left(\frac{1+\zeta_{2k}}{1+\zeta_{2j}}\right)^{-2/3}}_{\alpha_A \text{ constante}} \underbrace{\left(\frac{r_k/a_k}{r_j/a_j}\right)}_{\bar{\alpha}_a \text{ constante}}$$

α_a contient des variables de fréquence.

α_r contient tous les types de variables, sauf les variables d'inclinaison.

Le premier facteur du second membre est numérique; chacun des autres facteurs a un développement sous la forme d'une série dont la somme des termes est proche de 1. Mis à part le développement du dernier facteur qui nécessite les relations déjà établies dans le paragraphe 37, les autres facteurs se développent simplement à l'aide des formules du binôme.

On pose : $\alpha_r = \alpha_0 + \delta\alpha$,
et on calcule $\delta\alpha$,

$$\delta\alpha = \frac{r_k}{r_j} - \alpha_0 = \alpha_0 \left[\frac{r_k}{a_k} \cdot \frac{a_j}{r_j} \cdot \frac{a_k}{a_j} \cdot \frac{1}{\alpha_0} - 1 \right]$$

Le crochet est développable sous forme d'une série dépendant de toutes les variables relatives au couple de satellites considérés, à l'exception des variables d'inclinaison qui sont introduites seulement par le développement de $\cos S$ abordé précédemment. On note par $[S_a]$ la série représentée par le crochet; on utilise ensuite :

$$\alpha_r = \alpha_0 + \alpha_0 [S_a],$$

pour le développement des d^{-8} .

44. Un terme général de (49) développé au voisinage de α_0 , prendra la forme suivante, dans laquelle on utilise les dérivées des coefficients de Laplace par rapport à α :

$$(52) \quad b_{s/2}^{(p)} \cos(v_j - v_k) = \left[b_{s/2}^{(p)} + [S_a] \frac{\partial b_{s/2}^{(p)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} [S_a]^2 \frac{\partial^2 b_{s/2}^{(p)}}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{3!} [S_a]^3 \frac{\partial^3 b_{s/2}^{(p)}}{\partial \alpha^3} + \dots \right] [S_b] \text{cosp}(L_j - L_k),$$

dans laquelle $[S_b]$, dont l'expression contient des variables, a été préalablement évaluée au moyen de la relation :

$$(53) \quad \text{cosp}(v_j - v_k) = [S_b] \text{cosp}(L_j - L_k),$$

d'après l'approche du paragraphe 37. Le développement des séries $[S_a]$ et $[S_b]$ peut être réduit suivant le degré désiré des paramètres variables. Pour atteindre le degré n des variables, on doit pousser le développement jusqu'aux dérivées nièmes des coefficients de Laplace par rapport à α .

Le calcul des coefficients de Laplace et leurs dérivées par rapport à α_0 utilise les relations bien connues en mécanique céleste dans les théories planétaires. Notre travail dans ce domaine est essentiellement une introduction de ces relations sous une forme codée permettant un calcul automatique et rapide. Ce calcul est fait une fois pour toutes; les résultats sont rangés dans un fichier à accès direct auquel on peut faire appel à tout instant.

Le développement de (53) utilise les expressions du paragraphe 37. On doit faire disparaître v_j et v_k dans les arguments par un développement ne laissant dans l'argument que des fonctions bien connues du temps L_j et L_k . On considère la fonction du temps $\exp(ip(v_j - v_k))$; cette expression est mise d'abord sous la forme :

$$\exp(ip(v_j - v_k)) = \exp(ip(L_j - L_k)) \left[\exp(ip(v_j - L_j)) \cdot \exp(-ip(v_k - L_k)) \right];$$

$\exp(ip(L_j - L_k))$ sera conservé comme fonction explicite du temps, le crochet est à développer en fonction des paramètres variables. Ainsi par cette voie on a pu écrire $\text{cosp}(v_j - v_k)$ sous la forme (53).

Le développement de l'expression (52) donne une série dont chaque terme a une forme générale comprenant un coefficient numérique, un facteur variable composé de variables dont chacune porte un exposant positif ou

nul et enfin une fonction explicite du temps.

Expression unique de d^{-s} dans les deux cas intérieur et extérieur.

45. Dans le cas où l'orbite du satellite perturbateur se trouve à l'extérieur de celle du satellite perturbé (cas extérieur, définition dans le paragraphe 40), α_0 est supérieur à 1. Son inverse α_0^{-1} sera utilisé pour le calcul des coefficients de Laplace et des dérivées de ceux-ci :

$$d^{-s} = \alpha^{-s} \left[\alpha^{-2} + 1 - 2\alpha^{-1} \cos(v_j - v_k) \right]^{-s/2},$$

l'expression (49) devient :

$$(54) \quad d^{-s} = \alpha^{-s} \frac{1}{2} b_{s/2}^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} b_{s/2}^{(p)} \cos p(v_j - v_k).$$

Sagnier (1973) utilise une expression unique de d^{-s} pour les deux cas intérieur et extérieur :

$$(55) \quad d^{-s} = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{s/2}^{(p)} \cos p(L_j - L_k),$$

les coefficients $\gamma_{s/2}^{(p)}$ sont alors définis comme les coefficients de Laplace modifiés.

Les comparaisons des expressions (49) et (55) d'une part pour le cas intérieur et (54) et (55) pour le cas extérieur permettent de fournir la correspondance entre les coefficients $b_{s/2}^{(p)}$ et $\gamma_{s/2}^{(p)}$:

$$\begin{aligned} \text{- cas intérieur} & \quad \gamma_{s/2}^{(p)} = b_{s/2}^{(p)}, \\ \text{- cas extérieur} & \quad \gamma_{s/2}^{(p)} = \frac{1}{2} \alpha^{-s} b_{s/2}^{(p)}. \end{aligned}$$

On écrira (52) sous la forme :

$$(56) \quad \left[\gamma_{s/2}^{(p)} + [S_a] D_\alpha \gamma_{s/2}^{(p)} + [S_a]^2 D_\alpha^2 \gamma_{s/2}^{(p)} + [S_a]^3 D_\alpha^3 \gamma_{s/2}^{(p)} + \dots \right] [S_b] \cos p(L_j - L_k).$$

La correspondance entre les coefficients $D_\alpha^n \gamma_{s/2}^{(p)}$ d'une part et les coefficients de Laplace et leurs dérivées, d'autre part, est également établie par identification.

Dans le cas intérieur :

$$D_{\alpha}^n \gamma_{s/2}^{(p)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n b_{s/2}^{(p)}}{\partial \alpha^n}$$

et dans le cas extérieur :

$$D_{\alpha}^n \gamma_{s/2}^{(p)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n!} \bar{\alpha}^{(s-n)} \sum_{j=0}^n C_n^j (s)_{n-j} \bar{\alpha}^j \frac{\partial^j b_{s/2}^{(p)}}{\partial \bar{\alpha}^j},$$

avec $(s)_n = s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)$ et $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$.

Exemple :

$$D_{\alpha}^3 \gamma_{9/2}^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{3!} \bar{\alpha}^{(s-3)} \left[s(s-1)(s-2) b_{s/2}^{(p)} + 3s(s-1)\bar{\alpha} \frac{\partial b_{s/2}^{(p)}}{\partial \bar{\alpha}} + 3s\bar{\alpha}^2 \frac{\partial^2 b_{s/2}^{(p)}}{\partial \bar{\alpha}^2} + \bar{\alpha}^3 \frac{\partial^3 b_{s/2}^{(p)}}{\partial \bar{\alpha}^3} \right]$$

Partie indirecte de l'interaction.

46 L'expression (39) peut être mise sous la forme d'un produit de 4 facteurs :

$$(57) \quad R_i = \underbrace{-N_j}_{(1)} \underbrace{N_j}_{(2)} \underbrace{A_j^2 \frac{m_k}{1+m_j}}_{(3)} \cdot \underbrace{\frac{A_j r_j \cos S}{r_k^3}}_{(4)}$$

Les trois premiers sont identiques à ceux de la partie directe. Le quatrième facteur sera mis sous la forme d'un produit de plusieurs éléments :

$$(58) \quad \frac{A_j r_j \cos S}{r_k^2} = \frac{A_j}{a_j} \cdot \frac{r_j}{a_j} \left(\frac{a_k}{r_k} \right)^2 \left(\frac{a_j}{a_k} \right)^2 \cos S = \frac{A_j}{a_j} \frac{r_j}{a_j} \left(\frac{a_k}{r_k} \right)^2 \alpha_a^{-2} \cos S$$

dont le développement en série est connu d'après les résultats acquis dans la partie relative au développement de la partie directe de l'interaction.

DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL PERTURBATEUR DU SOLEIL.

47 Dans l'étude théorique du mouvement des satellites galiléens, il est commode d'utiliser un système jovicentrique. Ce qui a été fait avec le développement de l'interaction. Ce même système sera utilisé ici dans le développement de la perturbation due à la présence du Soleil dont la

position est donnée par un mouvement moyen et les inégalités les plus importantes. La partie afférente au mouvement képlérien est facile à développer car le moyen mouvement du Soleil est bien connu. Par contre, on doit faire une approximation sur les parties non képlériennes. On doit faire des hypothèses, car les inégalités connues du mouvement du Soleil sont rapportées au barycentre du système de Jupiter et non par rapport au centre de masse de Jupiter pour les raisons suivantes : les théories planétaires donnent le mouvement héliocentrique du système de Jupiter, en considérant ce système comme un point matériel ayant pour position son barycentre. On en déduit les inégalités du mouvement relatif du Soleil rapporté au barycentre du système comprenant Jupiter et ses quatre grands satellites quand les masses très faibles des autres satellites sont négligées. La distance entre le centre de masse de Jupiter et le barycentre du système reste toujours inférieure à 250 km, sa valeur est donc très faible à côté de celle du rayon équatorial de Jupiter (71398 km). Nous admettons que les inégalités connues du mouvement du Soleil rapportées au barycentre sont aussi valables dans notre système jovicentrique. Soit M_S la masse du Soleil pour la masse de Jupiter prise égale à l'unité. La masse du système de Jupiter est alors :

$$1 + \sum m_j = 1,00020671,$$

d'après les données numériques des masses m_j du paragraphe 33. Le rapport de la masse du Soleil à celle de Jupiter est 1047,5628 d'après les calculs du même paragraphe. La fonction perturbatrice due à la présence du Soleil a pour expression :

$$(59) \quad R_S = G_J M_S \left(\frac{1}{\Delta_{jS}} - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_S}{r_S^3} \right),$$

dans laquelle M_S est le rapport des masses du Soleil et de Jupiter mentionné plus haut; \vec{r}_j , \vec{r}_S , les vecteurs positions du satellite j et du Soleil; Δ_{jS} , la distance séparant le satellite j et le Soleil. Cette expression peut être mise sous la forme :

$$(60) \quad R_S = \frac{G_J M_S}{r_S} \left(\frac{r_S}{\Delta_{jS}} - \frac{r_j}{r_S} \cos S \right),$$

où S est l'angle formé par les deux vecteurs positions. Le développement en série utilise comme petite quantité le rapport du rayon vecteur du satellite à celui du Soleil. On porte l'expression de Δ_{jS} provenant de

l'égalité

$$\Delta_{jS}^2 = r_j^2 + r_s^2 - 2r_j r_s \cos S$$

dans (60), celle-ci devient :

$$R_s = \frac{G_J M_s}{r_s} \left[\left(1 - 2 \frac{r_j}{r_s} \cos S + \frac{r_j^2}{r_s^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r_j}{r_s} \cos S \right].$$

dont le développement par rapport aux puissances croissantes de la petite quantité donne les termes principaux suivants :

$$R_s = \frac{G_J M_s}{r_s} \left[1 + \frac{r_j}{r_s} \cos S + \frac{r_j^2}{r_s^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) + \frac{r_j^3}{r_s^3} \left(-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) + \dots - \frac{r_j}{r_s} \cos S \right].$$

Le deuxième terme du développement est éliminé par le dernier terme venant de la partie indirecte. Le premier terme est une constante et disparaît lors des dérivations partielles dans la formation des équations. On remplace ensuite G_J par $\frac{N_s^2 A_s^3}{1 + M_s}$, l'expression de la partie utile de la fonction perturbatrice limitée au degré 3 de la petite quantité se réduit à :

$$R_s = \frac{M_s}{1 + M_s} \left(\frac{N_s}{N_j} \right)^2 \cdot N_j \cdot N_j A_j^2 \left(\frac{r_j}{a_j} \right)^2 \left(\frac{a_j}{A_j} \right)^2 \left(\frac{A_s}{r_s} \right)^3 \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos S \right) + \frac{r_j}{r_s} \left(-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) \right],$$

puis on remplace $\frac{r_j}{r_s}$ du crochet par :

$$\frac{r_j}{a_j} \cdot \frac{a_j}{A_j} \cdot \frac{A_j}{A_s} \cdot \frac{A_s}{r_s}$$

et on obtient R_s sous la forme (61), dans laquelle tous les éléments sont développables en série d'après les expressions développées dans la partie du développement de l'interaction :

$$(61) \quad R_s = N_j \cdot N_j A_j^2 \frac{M_s}{1 + M_s} \cdot \frac{N_s^2}{N_j^2} \left(\frac{r_j}{a_j} \right)^2 \left(\frac{a_j}{A_j} \right)^2 \left(\frac{A_s}{r_s} \right)^3 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos S \right) - \frac{r_j}{a_j} \frac{a_j}{A_j} \frac{A_s}{r_s} \frac{A_j}{A_s} \left(-\frac{3}{2} \cos S - \frac{5}{2} \cos^3 S \right) \right]$$

Les deux premiers facteurs constants sont identiques à ceux de

l'interaction. $\frac{M_s}{1+M_s} \cdot \frac{N_s^2}{N_j^2}$ est une constante, c'est elle qui donne l'ordre de grandeur du développement de R_s .

$\frac{r_j}{a_j}$, $\frac{a_j}{A_j}$, $\cos S$ sont des séries connues. Il reste à déterminer le développement de $\frac{A_c}{r_j}$. Cette expression a un développement de la même forme que celui de $\frac{a_j}{r_j}$. Dans le traitement informatique, la même série est utilisée après une conversion remplaçant toutes les variables relatives au satellite par celles relatives au Soleil.

DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL PERTURBATEUR DU A LA FORME APLATIE DE JUPITER.

48. On se place dans le cas de l'étude du mouvement de masses ponctuelles autour d'un corps central de dimension finie. On supposera que la distribution de densité admet une symétrie de révolution autour d'un axe polaire. Soient A le rayon équatorial de Jupiter et r le vecteur de position du satellite j et b sa latitude; la fonction perturbatrice prend la forme (Morando, 1974) :

$$(62) \quad R_J(r) = -G_J \frac{1+m_j}{r} \sum J_k \left(\frac{A_e}{||r||} \right)^k \cdot P_k(\sin b), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

où les J_k , coefficients zonaux du développement en harmoniques sphériques de la fonction de force de Jupiter, sont des constantes qui dépendent de la distribution méridienne de densité, et où les P_k sont les polynômes de Legendre. Parmi ces coefficients zonaux, les deux plus grands que nous prenons compte dans la suite du développement sont J_2 et J_4 . Le fait d'ignorer les harmoniques zonaux d'ordre impair traduit l'hypothèse de la symétrie de la distribution de densité par rapport au plan équatorial. Les hypothèses simplificatrices sont en accord avec le dépouillement des mesures effectuées par Pioneer 10, Pioneer 11, Voyager 1 et Voyager 2 (Campbell et Synnott, 1985):

$$J_2 = 14733 \times 10^{-6}$$

$$J_3 = 1,4 \times 10^{-6}$$

$$J_4 = -587 \times 10^{-6}$$

$$J_6 = 31 \times 10^{-6}$$

L'effet créé par le terme contenant J_6 est négligeable à la précision préconisée pour la construction de la théorie. Le premier coefficient d'ordre impair est vingt fois plus faible que ce dernier. Les polynômes de Legendre associés aux coefficients J_2 et J_4 sont :

$$P_2(\sin b) = \frac{3}{2} \sin^2 b - \frac{1}{2},$$

$$P_4(\sin b) = \frac{35}{8} \sin^4 b - \frac{15}{4} \sin^2 b + \frac{3}{8}.$$

Le potentiel perturbateur se réduit à :

$$(63) \quad R_J = -G_J \frac{1+m_j}{r} \left[J_2 \left(\frac{A_e}{r} \right)^2 P_2(\sin b) + J_4 \left(\frac{A_e}{r} \right)^4 P_4(\sin b) \right],$$

qui peut être séparé en deux parties :

$$R_{J2} = -G_J \frac{1+m_j}{r_j} J_2 \left(\frac{A_e}{r_j} \right)^2 P_2(\sin b)$$

et

$$R_{J4} = -G_J \frac{1+m_j}{r_j} J_4 \left(\frac{A_e}{r_j} \right)^4 P_4(\sin b)$$

Pour leur développement, nous remplaçons d'abord $G_J(1+m_j)$ par $N_j^2 A_j^3$ et nous les mettons sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{J2} = -N_j \cdot N_j A_j^2 \cdot \frac{A_j}{a_j} \frac{a_j}{r_j} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^2 \left(\frac{A_j}{a_j} \right)^2 \left(\frac{a_j}{r_j} \right)^2 P_2(\sin b), \\ R_{J4} = -N_j \cdot N_j A_j^2 \cdot \frac{A_j}{a_j} \frac{a_j}{r_j} \cdot J_4 \cdot \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^4 \left(\frac{A_j}{a_j} \right)^4 \left(\frac{a_j}{r_j} \right)^2 P_4(\sin b). \end{array} \right.$$

A côté des facteurs dont le développement en série par rapport aux variables est connu grâce aux paragraphes précédents concernant le développement de l'interaction ou de la perturbation solaire, on trouve quatre nouveaux facteurs :

$$J_2 \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^2, \quad J_4 \left(\frac{A_e}{A_j} \right)^4, \quad P_2(\sin b) \quad \text{et} \quad P_4(\sin b).$$

Les deux premiers sont des constantes dont les valeurs sont calculables à l'aide des données du paragraphe 33. Les autres facteurs sont calculables après la détermination de $\sin b$ au moyen d'une relation tirée de la figure 6 et les expressions de définition des variables (3), paragraphe 10.

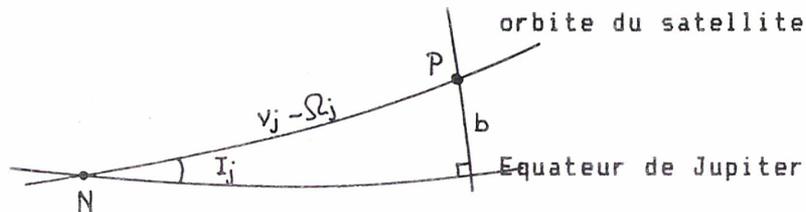


Fig. 6

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin I_j \cdot \sin(v_j - \Omega_j) \\ &= \sin I_j \cdot \frac{1}{2i} (\exp iv_j \exp -i\Omega_j - \exp -iv_j \exp i\Omega_j) \\ &= \frac{i}{2} (\chi_{5j} \exp -iv_j - \chi_{6j} \exp iv_j). \end{aligned}$$

La dernière expression contient $\exp iv_j$ et $\exp -iv_j$ qu'on peut développer d'après la voie indiquée dans le paragraphe 37.

Cette série contient i ou $\sqrt{-1}$ en facteur, par contre, les polynômes de Legendre P_2 et P_4 sont obtenus sous la forme des séries réelles car leurs expressions ne contiennent que des exposants pairs de la fonction $\sin b$.

Développement annexe utilisé pour la détermination du mouvement de l'équateur de Jupiter.

49. La date $t=0$, origine de temps est une date commode pour déterminer le mouvement de l'équateur par rapport à l'équateur à cette date pris comme plan fondamental du repère inertiel. Cette opération est faite lors de l'intégration d'un système autonome déterminant en même temps le mouvement de l'équateur de Jupiter et le mouvement à très longue période des plans des orbites. L'orbite de Jupiter à la même date est utilisée comme plan de référence pour évaluer le mouvement de l'équateur et le développement du sinus de la latitude $\sin b$ (fig.7) est identique à celui établi par Ferraz-Mello (1979).

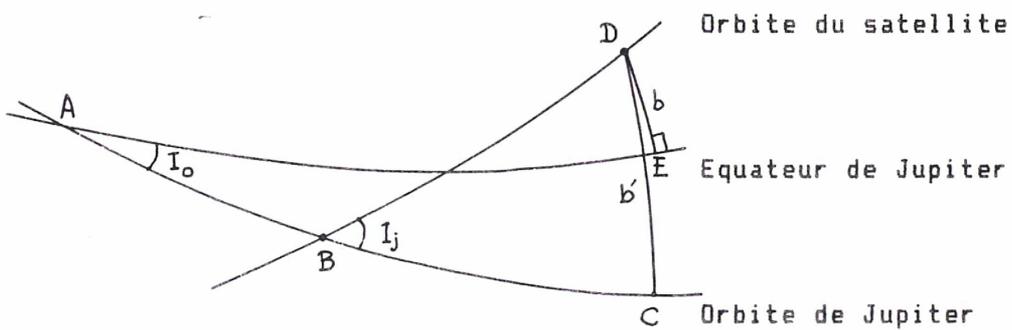


Fig.7

Dans la figure 7, nous admettons que :

$$\begin{aligned} BC \approx BD &= v_j - \Omega_j, \\ AE &= v_j - \Omega_0. \end{aligned}$$

Alors : $\sin b' = \sin I_j \sin BD = \sin I_j \sin BC.$

Dans cette approximation, si nous admettons en plus que :

$$\sin b = b \quad \text{et} \quad \sin b' = b',$$

nous aurons :

$$b' - b = \sin I_0 \sin(\nu_j - \Omega_0),$$

et : $\sin b = \sin I_j \sin(\nu_j - \Omega_j) - \sin I_0 \sin(\nu_j - \Omega_0).$

La première partie du second membre se développe comme dans le paragraphe précédent. La deuxième se développe d'une façon analogue et utilise les variables X_{50} et X_{60} relatives au mouvement de l'équateur.

DIMENSION DE QUELQUES SERIES APPARUES LORS DE LA FORMATION DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

Parmi les trois composantes de la fonction perturbatrice, l'interaction est la plus volumineuse et la partie directe de celle-ci occupe le plus grand espace de rangement ce qui est dû au nombre important de termes manipulés. Lors du développement à l'ordre 1 et au degré 8, on obtient, pour la partie indirecte de l'interaction relative à un couple de satellites, une série de 8854 termes si les degrés des variables de fréquence et de circulation sont limités à 3. C'est une dimension déjà difficile à manipuler. La partie directe est de loin plus volumineuse et on est conduit à éviter de faire un développement global sans une limitation du nombre de termes par un tri basé sur la comparaison de la valeur absolue du coefficient de chaque terme issu du développement à une valeur donnée, utilisée comme le plus petit coefficient à retenir. Aux degrés élevés, pour la collection de certaines caractéristiques ou de certains arguments donnés, on est amené à utiliser un tri sélectif éliminant tous les autres termes dont l'argument n'est pas figuré dans une liste donnée. Cette voie sélective permet d'utiliser beaucoup moins d'espace-mémoire de l'ordinateur; elle utilise des séries intermédiaires précalculées, rangées sur fichier. Prenons comme exemple, les éléments du groupe 1, constituants de l'expression (48) du paragraphe 42, reproduite ci-dessous :

$$\frac{\partial_j}{\Delta_{jk}} = \frac{\partial_j}{\Gamma_j} \left[d^{-1} + \alpha_r (\phi_2 + \phi_4) d^{-3} + \frac{3}{2} \alpha_r \phi_2^2 d^{-5} \right].$$

Ils ont pour dimension les nombres de termes donnés dans la table 5a.

Table 5a

Eléments groupe 1	Nombre de termes
$\frac{a}{r}$	128
$\alpha_r \phi_2$	5196
$\alpha_r \phi_4$	2048
$\frac{3}{2} \alpha_r^2 \phi_2^2$	7434
d^{-s} (s=1,3 et 5)	Chaque série contient plusieurs dizaines de milliers de termes. Elles sont calculées à partir des éléments groupe 2 d'après (56).

Table 5b

Eléments groupe 2	Nombre de termes
$[S_a]$ ou $\delta\alpha$	1152
$\exp(ip(v_j - v_k))$ ou $[S_b]$	769 à 919
$\gamma_{s/2}^{(p)}$ à $D^7 \gamma_{s/2}^{(p)}$ chacune	2p+1

Certains éléments de cette table sont calculés au moyen des éléments du groupe 2 de la table 5b d'après l'expression (56).

A la précision de collecte des résultats finaux, d'après notre estimation, les termes de degré 7 ou 8 sont vraiment négligeables du fait que l'amplitude du degré est de l'ordre 1×10^{-2} radian. Les plus hauts degrés significatifs sont les degrés 6 de la fonction perturbatrice pour la collection des termes autonomes, indépendants explicitement du temps, de degré 5 dans les seconds membres des équations; ensuite les degrés 5 de la fonction perturbatrice pour la collection des termes du degré 4 et portant la commensurabilité (-3,+7) des longitudes du couple de satellites 3 et 4 dont l'importance est signalée dans le paragraphe 38. Les termes de degré 6 portant la même commensurabilité sont négligeables.

51. Ces dernières remarques permettent de prévoir deux directions principales dans le développement de la fonction perturbatrice :

- Un développement global jusqu'au degré 3, dans lequel on conserve toutes les compositions des arguments apparus. Ce travail permet de ne pas laisser dans l'oubli certains arguments.
- Plusieurs développements sélectifs aux degrés 4, 5 et 6 permettant de réunir les termes à facteurs d'intégration importants ou des

termes indépendants explicitement du temps. Par le caractère sélectif, au moyen d'un argument donné au programme de tri, on peut réduire considérablement l'espace mémoire d'ordinateur nécessaire au traitement.

FORMATION DES EQUATIONS PRELIMINAIRES.

52. La suite du développement de la fonction perturbatrice est la construction des équations préliminaires d'après les expressions données dans (7) du paragraphe 12. Ces expressions présentent assez clairement les opérations conduisant à la formation des seconds membres des équations : ils sont les produits des fonctions (8) et des dérivées partielles de la fonction perturbatrice par rapport aux variables relatives au satellite perturbé et sont obtenus sous la forme des séries de termes contenant les traces littérales des paramètres constants, les variables littérales et les arguments littéraux. Nous les appelons les équations préliminaires pour les différencier des équations obtenues plus tard dans le traitement par substitution des variables ou les équations ou systèmes d'équations plus partiels traitant des problèmes particuliers comme le système autonome, le système critique ou l'équation de la libration. Les compléments de la forme (7b) sont ensuite ajoutés aux seconds membres pour représenter la partie due au mouvement du repère.

Chapitre 3

RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Ce chapitre complète la partie théorique du chapitre 2, explique les approches utilisées dans la résolution des équations et donne des extraits les plus significatifs des résultats obtenus dans les solutions suivantes:

- solution intermédiaire,
- solution de l'équation de la libration,
- une première approximation de la solution variationnelle,
- solution donnant des inégalités de degré élevé, notamment le groupe des inégalités dites de Haerdtl est complétées de nouvelles contributions obtenues par un développement plus poussé.

La méthode utilisée, exposée dans le chapitre 1, a défini les différentes étapes de la solution. A chaque étape, correspondent des groupes d'arguments facilement identifiables. Ainsi, dans la première étape concernant la solution intermédiaire, où on a négligé les excentricités propres et les inclinaisons propres des orbites, les arguments sont des combinaisons linéaires des arguments élémentaires du type longitude moyenne. Exceptionnellement, les arguments des termes provenant de cette solution contiennent aussi la longitude moyenne du Soleil, la longitude du périjove et la longitude du noeud de son orbite dans le repère jovicentrique utilisé. Cela vient du fait que le Soleil est considéré comme un corps perturbateur extérieur au système jovien dont le mouvement est connu. Ensuite, dans la solution du système autonome ou le système critique, on trouve des arguments à très longues périodes provenant des oscillations libres des grands axes et des plans des orbites. Enfin, c'est dans le traitement des degrés par substitution qu'on trouve toutes les combinaisons de ces deux groupes d'arguments. Un autre aspect de la solution concerne la montée en ordre dans ces différentes étapes. D'après la méthode utilisée, la solution variationnelle utilise le résultat fourni par la solution intermédiaire (paragraphe 24). On a le

choix entre les deux voies possibles : soit traiter les deux solutions ordre par ordre, soit construire la solution intermédiaire jusqu'à l'ordre le plus élevé et, seulement à ce moment là, aborder la solution variationnelle en raison d'une différence très nette entre les deux solutions : la solution intermédiaire est fortement dépendante des ordres et on trouve encore des termes non négligeables à l'ordre 7 des petits paramètres physiques, alors que la solution variationnelle est peu sensible aux ordres élevés et ne dépend surtout que des degrés des variables. C'est la deuxième voie qui a été choisie car elle offre plus de souplesse dans le traitement. Au moment d'aborder la solution variationnelle on pourra prendre la solution intermédiaire à un ordre choisi bien adaptée au résultat recherché.

Ce chapitre comprend trois parties correspondant aux trois étapes mentionnées dans le paragraphe 7 : la solution intermédiaire, la solution variationnelle et le traitement des degrés élevés.

DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION INTERMEDIAIRE.

Le traitement se compose de trois types d'opérations : les intégrations par rapport au temps, l'identification des perturbations séculaires des moyens mouvements et la résolution de l'équation de la libration dans la solution résonnante.

Dans le développement de la solution, nous insisterons sur l'aspect analytique du traitement qui permet de faire ressortir les détails des calculs expliquant pourquoi certains résultats ne ressemblent pas à ceux des théories récemment développées et dont les points de départ sont presque identiques à ceux que nous utilisons.

DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION INTERMEDIAIRE NON RESONNANTE.

53. La solution intermédiaire est la solution ne tenant pas compte des excentricités propres et des inclinaisons propres des satellites. D'après le schéma de la solution (Fig.4, page 38), elle est développée sans changement de variables. On recherche d'abord la solution d'ordre 1, le résultat obtenu est substitué aux variables pour construire les équations d'ordre 2, le résultat d'ordre 2 est utilisé pour construire les équations

d'ordre 3 et ainsi de suite. La solution intermédiaire d'ordre k est la somme des solutions partielles des ordres traités allant de l'ordre 0 à l'ordre k :

$$x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(k)} .$$

où $x^{(0)}$ représente la solution képlérienne ou la solution non perturbée. L'intégration par rapport au temps ne pose pas de problèmes particuliers sauf dans le cas de la libration où l'on groupe et traite d'une façon indépendante tous les termes résonnants. Les substitutions consécutives à exécuter lors de la montée en ordre de la solution intermédiaire sont parfois très longues et utilisent des espaces mémoires importants notamment lors de la recherche des composantes des grandes inégalités. On est conduit à utiliser un traitement conçu spécialement pour ce cas particulier dès le développement de l'ordre 2 de la solution.

TRAITEMENT DES EQUATIONS D'ORDRE 1.

54. Dans le traitement des équations d'ordre 1 et de degré zéro, le nombre de termes est faible. C'est une facilité qui nous permet de l'extraire pour exposer l'approche utilisée dans la solution. Cet extrait est limité ici au cas du satellite 1, on y trouvera les séries représentant les seconds membres des équations avant l'intégration puis les détails sur la double intégration concernant les deux premières équations et l'intégration simple de la troisième équation.

Les seconds membres des équations d'ordre 1.

Les extraits des séries représentant les seconds membres des équations, reproduits dans la Table 6 sont limités aux termes dont l'amplitude obtenue après intégration est au moins de même ordre de grandeur que celui choisi comme la limite inférieure des coefficients retenus. En raison des expressions complexes des variables, les équations (7) ne correspondent plus aux éléments de l'orbite pris individuellement sauf pour deux d'entre eux. C'est le cas de deux premières équations :

$\dot{\chi}_1 - \chi_2$, première équation, qui permet d'extraire l'équation de
la longitude $\dot{\chi}_1$,

$\dot{\chi}_2$, deuxième équation ou équation du moyen mouvement,

Par commodité, nous appelons les deux autres équations relatives au mouvement du grand-axe et du plan de l'orbite :

$\dot{\chi}_3$, troisième équation,

$\dot{\chi}_5$, quatrième équation.

Table 6

Sat.1 Série $\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2$, ordre 1.

Sat.1 Serie $\dot{\chi}_3$, ordre 1.

Sat.1 Série $\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2$, ordre 1.				Sat.1 Serie $\dot{\chi}_3$, ordre 1.			
Argument A	Coef.de cosA (1×10^{-7} rad.)	Trace littérale		Argument A	Coef.de iexpA (1×10^{-7} rad.)	Trace litt.	
1	$L_1 - L_2$	- 530,59	m_2	1	$12L_1 - 11L_2$	+ 7,54	m_2
2	$2L_1 - 2L_2$	- 1027,90	m_2	2	$11L_1 - 10L_2$	+ 11,35	m_2
3	$3L_1 - 3L_2$	- 767,32	m_2	3	$10L_1 - 9L_2$	+ 16,97	m_2
4	$4L_1 - 4L_2$	- 546,99	m_2	4	$9L_1 - 8L_2$	+ 25,16	m_2
5	$5L_1 - 5L_2$	- 379,83	m_2	5	$8L_1 - 7L_2$	+ 36,89	m_2
6	$6L_1 - 6L_2$	- 259,31	m_2	6	$7L_1 - 6L_2$	+ 53,29	m_2
7	$7L_1 - 7L_2$	- 174,92	m_2	7	$6L_1 - 5L_2$	+ 75,34	m_2
8	$8L_1 - 8L_2$	- 116,94	m_2	8	$5L_1 - 4L_2$	+ 103,01	m_2
9	$9L_1 - 9L_2$	- 77,64	m_2	9	$4L_1 - 3L_2$	+ 132,96	m_2
10	$10L_1 - 10L_2$	- 51,27	m_2	10	$3L_1 - 2L_2$	+ 151,94	m_2
11	$11L_1 - 11L_2$	- 33,70	m_2	11	$2L_1 - L_2$	- 61,85	m_2
12	$12L_1 - 12L_2$	- 22,07	m_2	12	L_1	- 194,55	m_2
13	$L_1 - L_3$	- 179,05	m_3	13	L_2	- 203,45	m_2
14	$2L_1 - 2L_3$	- 585,99	m_3	14	$-L_1 + 2L_2$	- 665,90	m_2
15	$3L_1 - 3L_3$	- 283,57	m_3	15	$-2L_1 + 3L_2$	- 516,62	m_2
16	$4L_1 - 4L_3$	- 129,13	m_3	16	$-3L_1 + 4L_2$	- 376,51	m_2
17	$5L_1 - 5L_3$	- 56,90	m_3	17	$-4L_1 + 5L_2$	- 265,26	m_2
18	$6L_1 - 6L_3$	- 24,56	m_3	18	$-5L_1 + 6L_2$	- 182,95	m_2
19	$7L_1 - 7L_3$	- 10,45	m_3	19	$-6L_1 + 7L_2$	- 124,35	m_2
20	$L_1 - L_4$	- 12,01	m_4	20	$-7L_1 + 8L_2$	- 83,63	m_2
21	$2L_1 - 2L_4$	- 70,76	m_4	21	$-8L_1 + 9L_2$	- 55,79	m_2
22	$3L_1 - 3L_4$	- 19,71	m_4	22	$-9L_1 + 10L_2$	- 36,98	m_2
23	$4L_1 - 4L_4$	- 5,14	m_4	23	$-10L_1 + 11L_2$	- 24,39	m_2
24	$2L_1 - 2L_5$	- 17,75	m_4	24	$-11L_1 + 12L_2$	- 16,02	m_2
				25	$6L_1 - 5L_3$	+ 13,31	m_3
				26	$5L_1 - 4L_3$	+ 29,75	m_3
				27	$4L_1 - 3L_3$	+ 63,79	m_3
				28	$3L_1 - 2L_3$	+ 126,01	m_3
				29	$2L_1 - L_3$	- 16,99	m_3
				30	L_1	- 102,36	m_3
				31	L_3	- 72,54	m_3
				32	$-L_1 + 2L_3$	- 419,00	m_3
				33	$-2L_1 + 3L_3$	- 205,57	m_3
				34	$-3L_1 + 4L_3$	- 94,32	m_3
				35	$-4L_1 + 5L_3$	- 41,76	m_3
				36	$-5L_1 + 6L_3$	- 18,09	m_3
				37	$-6L_1 + 7L_3$	- 7,72	m_3
				38	$3L_1 - 2L_4$	+ 16,93	m_4
				39	L_1	- 11,97	m_4
				40	L_4	- 4,96	m_4
				41	$-L_1 + 2L_4$	- 52,31	m_4
				42	$-2L_1 + 3L_4$	- 14,63	m_4

Sat.1 Série $\dot{\chi}_2$, ordre 1.

Argument A	Coef.de sinA (1×10^{-7} rad.)	Trace litt.
1	$L_1 - L_2$	+ 754,35 m_2
2	$2L_1 - 2L_2$	+ 4356,91 m_2
3	$3L_1 - 3L_2$	+ 3460,56 m_2
4	$4L_1 - 4L_2$	+ 2554,56 m_2
5	$5L_1 - 5L_2$	+ 1814,46 m_2
6	$6L_1 - 6L_2$	+ 1258,54 m_2
7	$7L_1 - 7L_2$	+ 859,02 m_2
8	$8L_1 - 8L_2$	+ 579,57 m_2
9	$9L_1 - 5L_2$	+ 387,61 m_2
10	$10L_1 - 10L_2$	+ 257,47 m_2
11	$11L_1 - 11L_2$	+ 170,08 m_2
12	$12L_1 - 12L_2$	+ 111,85 m_2

Table 6 (suite)

Serie \dot{X}_2 , ordre 1 (suite)				Série \dot{X}_3 , ordre 1 (suite)			
13	$L_1 - L_3$	+ 295,94	m_3	43	$3L_1 - 2L_5$	+ 4,44	m_5
14	$2L_1 - 2L_3$	+ 2903,47	m_3	44	L_1	- 2,96	m_5
15	$3L_1 - 3L_3$	+ 1434,95	m_3	45	L_1	+22502,17	j_2
16	$4L_1 - 4L_3$	+ 660,97	m_3	46	L_1	+ 32,13	j_4
17	$5L_1 - 5L_3$	+ 293,37	m_3	47	$-L_1 + 2L_5$	- 13,31	m_5
18	$6L_1 - 6L_3$	+ 127,27	m_3	<u>Sat.1</u> Groupe de termes constants de $\dot{X}_1 - X_2$ - 389,11(m_2) - 204,72 (m_3) - 23,94(m_4) - 5,92 (m_4) +45004,33(j_2) + 64,26 (j_4).			
19	$7L_1 - 7L_3$	+ 54,36	m_3				
20	$L_1 - L_4$	+ 20,88	m_4				
21	$2L_1 - 2L_4$	+ 368,89	m_4				
22	$3L_1 - 3L_4$	+ 103,39	m_4				
23	$4L_1 - 4L_4$	+ 27,04	m_4				
24	$2L_1 - 2L_4$	+ 94,55	m_4				

Rappelons que d'après la définition du paragraphe 12, X_4 et X_6 sont respectivement des conjuguées de X_3 et X_5 . Les fonctions des arguments du temps apparues sont :

- . Fonctions cosinus dans la première équation;
- . Fonctions sinus dans la deuxième équation;
- . Fonctions exponentielles dans les équations 3 et 4.

Le second membre de la quatrième équation est nul à cet ordre car il ne contient que des termes portant au moins un degré relatif aux variables de type inclinaison comme X_5 et X_6 . Les coefficients des termes sont donnés en unité de 1×10^{-7} radian. Dans la dernière colonne de chaque tableau figure la trace littérale de la perturbation génératrice de chaque terme qui correspond à une seule constante physique car les termes collectés sont d'ordre 1. A titre indicatif, le groupe de termes constants du second membre de l'équation de la longitude est placé à la fin de la Table 6 ; la collection globale de ce groupe de termes concernant les quatre satellites du système se trouve dans la Table 7a.

Identification des termes constants.

La première équation contient des termes dont la fonction de l'argument est du type cosinus. C'est la seule équation du système dans laquelle apparaissent des constantes sous la forme des monômes ne contenant ni variable, ni argument. D'après les conditions de quasi-périodicité exposées dans le paragraphe 17, la somme de ces constantes

changée de signe est identifiée à la perturbation séculaire du moyen mouvement. La relation (11) du même paragraphe donne :

$\langle F_1^{(1)} \rangle + X_2^{(1)} = 0$. Dans cette expression, $\langle F_1^{(1)} \rangle$ représente la somme des termes constants collectés et $X_2^{(1)}$, la perturbation séculaire du moyen mouvement à l'ordre 1. La table 7a regroupe les termes constants qui vont être identifiés aux perturbations séculaires des moyens mouvements des quatre satellites à l'ordre 1 de la solution intermédiaire.

Les perturbations séculaires ΔN_j des moyens mouvements à l'ordre 1 sont égales aux totales, figurées dans la dernière ligne de la table 7a, changées de signes. Dans la colonne concernant le satellite 1, on peut remarquer la prédominance de la contribution portant la trace littérale (j_2) venant de la perturbation par le renflement équatorial de Jupiter. Cet effet décroît rapidement avec l'éloignement du satellite de Jupiter et dans le cas du satellite 4, il est de même ordre de grandeur que les effets des perturbations mutuelles. Les perturbations séculaires des moyens mouvements sont souvent exprimées sous la forme $\Delta N_j = \sigma_j N_j$, où σ_j est une petite quantité devant l'unité. Les valeurs des σ_j sont données dans la Table 7b.

Table 7a

Séries $\langle F_1^{(1)} \rangle$ (unité : 1×10^{-7} radian)

Sat.1	Sat.2	Sat.3	Sat.4	Trace littérale
+45004,333	+ 8854,451	+ 1727,186	+ 239,346	j_2
+ 64,259	+ 4,993	+ 0,383	+ 0,017	j_4
0,0	+ 2444,607	+ 934,888	+ 366,619	m_1
- 389,109	0,0	+ 651,923	+ 210,535	m_2
- 204,718	- 593,035	0,0	+ 793,070	m_3
- 23,938	- 52,817	- 141,266	0,0	m_4
- 5,916	- 11,875	- 23,925	- 55,809	m_s
Totales :-----	-----	-----	-----	
+44444,911	+10646,324	+ 3149,189	+ 1553,778	

Table 7b

j	N_j (rad./jour)	σ_j
1	3,551552270	-0,0012514221
2	1,769322721	-0,0006017175
3	0,878207947	-0,0003585926
4	0,376486223	-0,0004121739

Intégration des termes périodiques.

Le premier membre de la première équation du système d'équations (7) paragraphe 12, contient $\dot{\chi}_2$. Il indique que l'intégration de la deuxième équation doit être effectuée en premier lieu. Le résultat servira à compléter la première équation par les termes provenant des perturbations périodiques du moyen mouvement. L'intégration par rapport au temps de la troisième équation est indépendante de celle des deux premières. Dans cet extrait limité au cas du satellite 1, les résultats de l'intégration de l'ordre 1 sont donnés dans les tables 8a, 8b et 8c.

Table 8a

Intégration de l'équation $\dot{\chi}_2$.

Sat.1 Série $\dot{\chi}_2$, ordre 1.				χ_2	
n	Argument A	Coef.de sinA (1×10^{-7} rad.)	Trace litt.	Facteur d'intégration	Coef.de cosA (1×10^{-7} rad.)
1	$L_1 - L_2$	+ 754,35	m_2	- 0,561095	- 423,26
2	$2L_1 - 2L_2$	+ 4356,91	m_2	- 0,280547	- 1222,32
3	$3L_1 - 3L_2$	+ 3460,56	m_2	- 0,187032	- 647,23
4	$4L_1 - 4L_2$	+ 2554,56	m_2	- 0,140274	- 358,34
5	$5L_1 - 5L_2$	+ 1814,46	m_2	- 0,112219	- 203,62
6	$6L_1 - 6L_2$	+ 1258,54	m_2	- 0,093516	- 117,69
7	$7L_1 - 7L_2$	+ 859,02	m_2	- 0,080156	- 68,86
8	$8L_1 - 8L_2$	+ 579,57	m_2	- 0,070137	- 40,65
9	$9L_1 - 9L_2$	+ 387,61	m_2	- 0,062344	- 24,17
10	$10L_1 - 10L_2$	+ 257,47	m_2	- 0,056109	- 14,45
11	$11L_1 - 11L_2$	+ 170,08	m_2	- 0,051009	- 8,68
12	$12L_1 - 12L_2$	+ 111,85	m_2	- 0,046758	- 5,23
13	$L_1 - L_3$	+ 295,94	m_3	- 0,374063	- 110,70
14	$2L_1 - 2L_3$	+ 2903,47	m_3	- 0,187032	- 543,04
15	$3L_1 - 3L_3$	+ 1434,95	m_3	- 0,124688	- 178,92
16	$4L_1 - 4L_3$	+ 660,97	m_3	- 0,093516	- 61,81
17	$5L_1 - 5L_3$	+ 293,37	m_3	- 0,074813	- 21,95
18	$6L_1 - 6L_3$	+ 127,27	m_3	- 0,062344	- 7,93
19	$7L_1 - 7L_3$	+ 54,36	m_3	- 0,053438	- 2,90
20	$L_1 - L_4$	+ 20,88	m_4	- 0,314954	- 6,58
21	$2L_1 - 2L_4$	+ 368,89	m_4	- 0,157477	- 58,09
22	$3L_1 - 3L_4$	+ 103,39	m_4	- 0,104985	- 10,85
23	$4L_1 - 4L_4$	+ 27,04	m_4	- 0,078739	- 2,13
24	$2L_1 - 2L_5$	+ 94,55	m_5	- 0,140841	- 13,32

Dans la Table 8a, la dernière colonne contient les coefficients des termes de la série représentant X_2 issue de l'intégration du second membre de l'équation \dot{X}_2 par rapport au temps. La première série de la table 6 représente $\dot{X}_1 - X_2$. A partir de ces deux séries, on pourra former la série de termes périodiques représentée par \dot{X}_1 . La Table 8b contient dans les premières colonnes, la série \dot{X}_1 ainsi formée; les deux dernières colonnes donnent respectivement le facteur d'intégration déduit du coefficient de temps de l'argument et le coefficient correspondant de chaque terme de X_1 . On peut remarquer que les facteurs d'intégration apparus dans les tables 8a et 8b sont faibles et leurs valeurs absolues sont toujours inférieures à 1.

Table 8b

Intégration de l'équation de la longitude moyenne \dot{X}_1 .

Sat.1 Série \dot{X}_1 , ordre 1.				X_1	
n°	Argument A	Coef.de cosA (1×10^{-7} rad.)	Trace litt.	Facteur d'intégration	Coef.de sinA (1×10^{-7} rad.)
1	$L_1 - L_2$	- 953,85	m_2	+ 0,561095	- 535,2
2	$2L_1 - 2L_2$	- 2250,52	m_2	+ 0,280547	- 631,3
3	$3L_1 - 3L_2$	- 1414,55	m_2	+ 0,187032	- 264,6
4	$4L_1 - 4L_2$	- 905,33	m_2	+ 0,140274	- 127,0
5	$5L_1 - 5L_2$	- 583,45	m_2	+ 0,112219	- 65,5
6	$6L_1 - 6L_2$	- 377,00	m_2	+ 0,093516	- 35,3
7	$7L_1 - 7L_2$	- 243,78	m_2	+ 0,080156	- 19,5
8	$8L_1 - 8L_2$	- 157,59	m_2	+ 0,070137	- 11,1
9	$9L_1 - 9L_2$	- 101,81	m_2	+ 0,062344	- 6,4
10	$10L_1 - 10L_2$	- 65,72	m_2	+ 0,056109	- 3,7
11	$11L_1 - 11L_2$	- 42,38	m_2	+ 0,051009	- 2,1
12	$12L_1 - 12L_2$	- 27,30	m_2	+ 0,046758	- 1,3
13	$L_1 - L_3$	- 289,75	m_3	+ 0,374063	- 108,4
14	$2L_1 - 2L_3$	- 1129,03	m_3	+ 0,187032	- 211,2
15	$3L_1 - 3L_3$	- 462,49	m_3	+ 0,124688	- 57,7
16	$4L_1 - 4L_3$	- 190,94	m_3	+ 0,093516	- 17,9
17	$5L_1 - 5L_3$	- 78,85	m_3	+ 0,074813	- 5,9
18	$6L_1 - 6L_3$	- 32,49	m_3	+ 0,062344	- 2,0
19	$7L_1 - 7L_3$	- 13,35	m_3	+ 0,053438	- 0,7
20	$L_1 - L_4$	- 18,59	m_4	+ 0,314954	- 5,9
21	$2L_1 - 2L_4$	- 128,85	m_4	+ 0,157477	- 20,3
22	$3L_1 - 3L_4$	- 30,56	m_4	+ 0,104985	- 3,2
23	$4L_1 - 4L_4$	- 7,27	m_4	+ 0,078739	- 0,6
24	$2L_1 - 2L_5$	- 31,07	m_5	+ 0,140841	- 4,4

Table 8c

Intégration de l'équation \dot{X}_3 .

Sat.1 Série \dot{X}_3 , ordre 1.				Facteur d'intégration	X_3 Coef.de expiA (1×10^{-7} rad.)
n°	Argument A	Coef.de iexpia (1×10^{-7} rad.)	Trace litt.		
1	12L ₁ - 11L ₂	+ 7,54	m ₂	+ 0,043185	+ 0,33
2	11L ₁ - 10L ₂	+ 11,35	m ₂	+ 0,046786	+ 0,53
3	10L ₁ - 9L ₂	+ 16,97	m ₂	+ 0,051042	+ 0,87
4	9L ₁ - 8L ₂	+ 25,16	m ₂	+ 0,056150	+ 1,41
5	8L ₁ - 7L ₂	+ 36,89	m ₂	+ 0,062394	+ 2,30
6	7L ₁ - 6L ₂	+ 53,29	m ₂	+ 0,070200	+ 3,74
7	6L ₁ - 5L ₂	+ 75,34	m ₂	+ 0,080239	+ 6,05
8	5L ₁ - 4L ₂	+ 103,01	m ₂	+ 0,093629	+ 9,65
9	4L ₁ - 3L ₂	+ 132,96	m ₂	+ 0,112382	+ 14,94
10	3L ₁ - 2L ₂	+ 151,94	m ₂	+ 0,140528	+ 21,35
11	2L ₁ - L ₂	- 61,85	m ₂	+ 0,187484	- 11,60
12	L ₁	- 194,55	m ₂	+ 0,281567	- 54,78
13	L ₂	- 203,45	m ₂	+ 0,565188	- 114,99
14	-L ₁ + 2L ₂	- 665,90	m ₂	-77,478425	+51592,68
15	-2L ₁ + 3L ₂	- 516,62	m ₂	- 0,557061	+ 287,79
16	-3L ₁ + 4L ₂	- 376,51	m ₂	- 0,279535	+ 105,25
17	-4L ₁ + 5L ₂	- 265,26	m ₂	- 0,186581	+ 49,49
18	-5L ₁ + 6L ₂	- 182,95	m ₂	- 0,140020	+ 25,62
19	-6L ₁ + 7L ₂	- 124,35	m ₂	- 0,112057	+ 13,93
20	-7L ₁ + 8L ₂	- 83,63	m ₂	- 0,093403	+ 7,81
21	-8L ₁ + 9L ₂	- 55,79	m ₂	- 0,080074	+ 4,47
22	-9L ₁ + 10L ₂	- 36,98	m ₂	- 0,070073	+ 2,59
23	-10L ₁ + 11L ₂	- 24,39	m ₂	- 0,062294	+ 1,52
24	-11L ₁ + 12L ₂	- 16,02	m ₂	- 0,056069	+ 0,90
25	6L ₁ - 5L ₃	+ 13,31	m ₃	+ 0,059108	+ 0,79
26	5L ₁ - 4L ₃	+ 29,75	m ₃	+ 0,070200	+ 2,09
27	4L ₁ - 3L ₃	+ 63,79	m ₂	+ 0,086419	+ 5,51
28	3L ₁ - 2L ₃	+ 126,01	m ₃	+ 0,112382	+ 14,16
29	2L ₁ - L ₃	- 16,99	m ₂	+ 0,160645	- 2,73
30	L ₁	- 102,36	m ₃	+ 0,281567	- 28,82
31	L ₃	- 72,54	m ₃	+ 1,138682	- 82,60
32	-L ₁ + 2L ₃	- 419,00	m ₃	+ 0,557061	+ 233,41
33	-2L ₁ + 3L ₃	- 205,57	m ₃	+ 0,223790	+ 46,00
34	-3L ₁ + 4L ₃	- 94,32	m ₃	+ 0,140020	+ 13,21
35	-4L ₁ + 5L ₃	- 41,76	m ₃	+ 0,101883	+ 4,25
36	-5L ₁ + 6L ₃	- 18,09	m ₃	+ 0,080074	+ 1,45
37	-6L ₁ + 7L ₃	- 7,72	m ₃	+ 0,065955	+ 0,51
38	3L ₁ - 2L ₄	+ 16,93	m ₄	+ 0,100993	+ 1,71
39	L ₁	- 11,97	m ₄	+ 0,281567	- 3,37
40	L ₄	- 4,96	m ₄	+ 2,656140	- 13,18
41	-L ₁ + 2L ₄	- 52,31	m ₄	- 0,357324	+ 18,69

Table 8c (suite)

Sat.1 Série \dot{X}_3 , ordre 1.				Facteur d'intégration	X_3	
n°	Argument A	Coef: de $i \exp iA$ (1×10^{-7} rad.)	Trace litt.		Coef. de $\exp iA$ (1×10^{-7} rad.)	
42	$-2L_1 + 3L_4$	- 14,63	m_4	- 0,167402	+ 2,45	
43	$3L_1 - 2L_5$	+ 4,44	m_5	+ 0,093881	+ 0,42	
44	L_1	- 2,96	m_5	+ 0,281567	- 0,83	
45	L_1	+22502,17	j_2	+ 0,281567	+ 6335,87	
46	L_1	+ 32,13	j_4	+ 0,281567	+ 9,05	
47	$-L_1 + 2L_5$	- 13,31	m_5	- 0,281797	+ 3,75	

Dans la Table 8c, les coefficients des termes de la série représentant X_3 obtenue après intégration se trouvent dans la dernière colonne. Parmi eux, on trouve une valeur de loin plus grande que toutes les autres en raison de la valeur absolue élevée du facteur d'intégration. Le coefficient du temps de son argument est très faible; sa composition correspond à une des commensurabilités entre les moyens mouvements des satellites du système. Les phénomènes de proche-résonance et de résonance provenant de ces commensurabilités ont été abordés dans le paragraphe 5. Dans le cas du satellite J1 examiné ici, ce terme de proche-résonance constitue la plus grande inégalité du mouvement. Comme la variable X_3 représente l'excentricité de l'orbite par son module et la position du grand axe de l'orbite par son argument; ce terme, portant un grand coefficient, apparu dans la série X_3 prédomine sur tous les autres et son amplitude constitue une sorte d'excentricité que l'on dénomme habituellement par excentricité induite de l'orbite du satellite.

Le traitement des équations relatives aux autres satellites est identique à celui du satellite 1 exposé dans ce paragraphe. Comme particularité de la forme des orbites, on peut signaler que l'excentricité induite de l'orbite du satellite 1 trouvé ici est plus faible que celle du satellite 2 et plus grande que celle du satellite 3; tandis que l'excentricité induite du quatrième satellite est très faible.

SUBSTITUTION DES VARIABLES DANS LA FORMATION DES EQUATIONS D'ORDRE SUPERIEUR A 1 ET CONVERGENCE DE LA SOLUTION.

55. Dans la préparation des équations d'ordre supérieur à 1, les seconds membres d'un ordre donné sont obtenus par substitution des variables par

les résultats correspondants obtenus dans la solution des ordres inférieurs. Avant l'opération de substitution, un terme quelconque des seconds membres des équations est un monôme dont la structure est donnée dans le paragraphe 35. Les variables littérales y sont apparues sous la forme de facteurs. L'opération de substitution consiste à remplacer ces facteurs par des séries.

Dans le cas le plus simple où le terme considéré ne contient qu'une seule variable portant un exposant égal à 1, l'opération sera faite par la suppression de cette variable dans l'expression monômiale du terme suivie d'une multiplication simple du restant par la série représentant la variable. L'ordre minimum d'un terme issu de l'opération est 2. Lors du développement préliminaire, il apparaît déjà certains termes d'ordre 2 générés en partie par le facteur $\frac{m_k}{1+m_j}$ de la fonction perturbatrice. La substitution globale des termes linéaires d'un second membre équivaut à la formation des termes d'ordre 2 de celui-ci d'après la relation :

$$F^{(2)} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial X} X^{(1)},$$

où F_1 représente le groupe des termes linéaires du second membre considéré et $F^{(2)}$, les termes d'ordre 2 calculés. $X^{(1)}$ utilisé dans le calcul est la solution intermédiaire d'ordre 1. Ces mêmes termes linéaires sont aussi générateurs d'une partie des termes d'ordre supérieur. Par exemple, les termes d'ordre 3 seront collectés par l'opération :

$$F^{(3)} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial X} X^{(2)},$$

Dans le cas où le terme considéré contient plusieurs variables portant des exposants de valeurs différentes, plusieurs voies sont possibles : on peut par exemple former la série représentant toutes ces variables par multiplication, ensuite la substituer à ce groupe de variables de la même manière que dans le cas d'une seule variable ci-dessus; on peut aussi faire la substitution facteur par facteur. La première voie n'est pas commode, car aux degrés élevés, une série importante porte toute une gamme très variée de combinaisons de variables qui rend très coûteux le traitement. La substitution globale d'un second membre à l'ordre p+1 équivaut à réaliser l'opération :

$$\sum \frac{\partial^p F}{\partial X_a \partial X_b \dots \partial X_p} X_a X_b \dots X_p.$$

Dans la deuxième voie, on cherche à substituer à chaque fois une seule variable pour la série donnée. Un sous-programme conçu pour ce traitement identifie la variable désignée par cet appel et effectue son travail en construisant d'abord toutes les séries représentant cette variable portant les exposants de 1 à la valeur la plus élevée, exécute ensuite la substitution pour l'ensemble des termes de la série. Cette démarche est sélective, c'est à dire que chaque terme est examiné, l'opération ne se déclenche que si la présence de la variable désignée est repérée. Le mode de substitution est donné par l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_b} \left(\frac{\partial F}{\partial x_a} x_a \right) x_b \right) \dots \right) x_n.$$

On aura dans le programme autant d'instructions d'appel du même sous-programme de substitution que de variables à substituer.

A la fin de la substitution, on obtient une série dont les termes apparaissent sous la forme de monômes de configuration très simple composée de deux facteurs : un coefficient numérique accompagné des traces littérales des constantes physiques et une fonction du temps. L'opération de substitution prend beaucoup de temps d'exécution quand les séries manipulées sont longues. Pour la quasi totalité des arguments, qui sont des termes de courtes périodes, le développement de la solution à l'ordre 3 est satisfaisant, car l'ordre 4 ne contient aucune contribution d'amplitude supérieure à 1×10^{-7} radian jovicentrique. Il en est pas de même pour les arguments de proche résonance qui sont de longues périodes.

56. Grâce à la petitesse des facteurs d'intégration, la convergence de la solution des termes à courtes périodes est rapide. La table 9 donne la liste où figurent les plus grandes composantes du coefficient à chaque ordre relatives à deux arguments choisis pour illustrer la convergence des termes de courtes et de longues périodes. L'argument $-2L_1 + 3L_2$ est de courte période, la solution converge rapidement et les contributions de l'ordre 4 sont négligeables. L'argument $-L_1 + 2L_2$ est de longue période, la solution partielle pour le groupe de termes portant cet argument converge plus lentement et à l'ordre 7, on trouve encore un petit nombre de contributions non négligeables.

Table 9. Convergence de la solution intermédiaire:

Satellite J1. Extrait de X_3 limité aux plus grandes contributions du coefficient à chaque ordre.

Ordre	Argument A = $-2L_1+3L_2$		Argument A = $-L_1+2L_2$	
	Coefficient de $\exp iA$ (10^{-7} radian)	Trace littérale	Coefficient de $\exp iA$ (10^{-7} radian)	Trace littérale
1	+ 278,79	m_2	+ 51592,68	m_2
2	- 5,81	m_2^2	- 8966,23	$m_2 j_2$
	- 3,88	$m_1 m_2$	- 920,39	m_2^2
	- 662,51	$m_1 m_2$
3	+ 0,45	$m_1 m_2^2$	+ 1569,70	$m_2 j_2^2$
	+ 0,24	$m_1^2 m_2$	+ 318,33	$m_2^2 j_2$
	+ 0,10	$m_2^2 j_2$	+ 136,60	$m_1 m_2 j_2$
4			- 273,67	$m_2 j_2^3$
			- 60,73	$m_2^2 j_2^2$
			- 23,86	$m_1 m_2 j_2^2$
5			+ 47,67	$m_2 j_2^4$
			+ 11,50	$m_2^2 j_2^3$
			+ 4,17	$m_1 m_2 j_2^3$
6			- 8,31	$m_2 j_2^5$
			- 2,16	$m_2^2 j_2^4$
			- 0,62	$m_1 m_2 j_2^4$
7			+ 1,45	$m_2 j_2^6$
			+ 0,29	$m_2^2 j_2^5$

Dans la solution intermédiaire, un argument peut être écrit sous la forme d'un produit scalaire :

$$(64) \quad (\rho | L).$$

où L dénote le groupe d'arguments élémentaires L_j , $j=1$ à 4. L'argument de longue période $-L_1+2L_2$ correspond à :

$$\rho = (-1, 2, 0, 0).$$

Il existe d'autres arguments égaux à cet argument à $k.180^\circ$ près en raison de l'existence de la relation :

$$L_1-3L_2+2L_3 = 180^\circ.$$

Les principales valeurs de ρ correspondantes se trouvent dans la table 10.

Table 10

k	P
-3	(-4, 11, -6, 0)
-2	(-3, 8, -4, 0)
-1	(-2, 5, -2, 0)
0	(-1, 2, 0, 0)
1	(0, -1, 2, 0)
2	(1, -4, 4, 0)
3	(2, -7, 6, 0)
4	(3 -10, 8, 0)

La solution pour les termes portant ces arguments converge lentement pour deux raisons : un facteur d'intégration important dû aux commensurabilités des moyens mouvements des trois premiers satellites et l'amplitude des termes générateurs.

APPROCHE UTILISEE DANS L'INTEGRATION DES EQUATIONS \dot{X}_3 AUX ORDRES ELEVES

57. La solution pour X_3 contient des grandes inégalités dont la composition des arguments est donnée dans la Table 10. Il est nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 7 pour pouvoir réunir toutes les composantes significatives. Or les séries résultats obtenues à l'ordre 3 sont assez volumineuses; il n'est pas commode d'itérer les substitutions jusqu'à l'ordre 7 avec de telles séries. De plus on sait bien que dans les ordres supérieures, la majorité des contributions sont négligeables; celles qui restent à collecter sont justement les contributions des grandes inégalités. D'autre part, on peut constater que les termes linéaires des variables qui ne portent pas d'argument sont de loin les plus importants des termes générateurs. Par exemple, dans le cas de l'équation \dot{X}_{31} relative au satellite J1, le plus grand terme linéaire du second membre est :

$$i \left[22502,2(j_2) + 64,3(j_4) + 431,8(m_2) + 174,5(m_3) + 18,7(m_4) + 4,4(m_5) \right] X_{31}$$

L'unité utilisée étant 10^{-7} radian. Le coefficient de ce terme contient une composante portant la trace (j_2) qui génère des composantes significatives jusqu'à l'ordre 7. On désigne par F_{31} la série des termes formant le second membre. En substituant le terme principal d'ordre 1 : $51592,68(m_2) \exp(-L_1 + 2L_2)$ de $X_{31}^{(1)}$ dans la formation de l'ordre 2, on obtient :

$$\underbrace{\frac{\partial F_{31}}{\partial X_{31}}}_{i.22502,2(j_2)} \cdot \underbrace{X_{31}^{(1)} = i [116,1 (m_2 j_2) \exp(-L_1 + 2L_2)]}_{51592,68(m_2) \exp(-L_1 + 2L_2)}$$

L'intégration fournit :

$$X_{31}^{(2)} = -8994,8 (m_2 j_2) \exp(-L_1 + 2L_2),$$

qui sera utilisé dans la formation de l'ordre 3. Quand on utilise seulement cette composante du terme linéaire, on obtient successivement:

- 8994,8 (m₂ j₂) à l'ordre 2
- + 1568,2 (m₂ j₂²) à l'ordre 3
- 273,4 (m₂ j₂³) à l'ordre 4
- + 47,7 (m₂ j₂⁴) à l'ordre 5
- 8,3 (m₂ j₂⁵) à l'ordre 6
- + 1,4 (m₂ j₂⁶) à l'ordre 7

Les termes linéaires de ce type sont les seuls générateurs des composantes des grandes inégalités à partir de l'ordre 4; les apports d'autres origines sont négligeables.

Ces considérations incitent à traiter d'une façon séparée les composantes des grandes inégalités générées par les termes linéaires. A chaque ordre, le résultat partiel obtenu sera fusionné ensuite dans le résultat global. On considère le système des équations \dot{X}_{3j} réduites aux termes linéaires et aux termes grandes inégalités (65) :

$$(65) \quad \begin{bmatrix} \dot{X}_{31} \\ \dot{X}_{32} \\ \dot{X}_{33} \\ \dot{X}_{34} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{\text{termes linéaires}} \cdot \begin{bmatrix} X_{31} \\ X_{32} \\ X_{33} \\ X_{34} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}}_{\text{grandes inégalités}} \exp i \omega t$$

où ω est la fréquence des grandes inégalités qui est la même pour toutes les combinaisons d'arguments de la table 10. On cherche les intégrales particulières de la forme :

$$\begin{cases} X_{31} = A_1 \exp i \omega t \\ X_{32} = A_2 \exp i \omega t \\ X_{33} = A_3 \exp i \omega t \\ X_{34} = A_4 \exp i \omega t \end{cases} \quad \text{on en déduit :} \quad \begin{cases} \dot{X}_{31} = i \omega X_{31} \\ \dot{X}_{32} = i \omega X_{32} \\ \dot{X}_{33} = i \omega X_{33} \\ \dot{X}_{34} = i \omega X_{34} \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans le système (65) on obtient un nouveau système dont la résolution fournira les valeurs de A_1 , A_2 , A_3 , A_4 cherchées.

$$(66) \quad \begin{bmatrix} \omega - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \omega - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \omega - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \omega - a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

On peut ramener la résolution du système au niveau de celle relative à une seule équation par l'identification des ordres des termes apparus. A l'ordre 1, on a immédiatement :

$$A_1^{(1)} = \frac{b_1^{(1)}}{\omega}; \quad A_2^{(1)} = \frac{b_2^{(1)}}{\omega}; \quad A_3^{(1)} = \frac{b_3^{(1)}}{\omega}; \quad A_4^{(1)} = \frac{b_4^{(1)}}{\omega};$$

où l'indice supérieur figuré entre parenthèses indique l'ordre de la solution pour la grandeur considérée. Quand l'ordre 1 est obtenu, (66) donne immédiatement les expressions de la solution pour A_1 , A_2 , A_3 et A_4 à l'ordre 2. Par exemple dans le calcul de A_1 , d'ordre 2 que l'on notera par $A_1^{(2)}$, on a d'abord une égalité tirée de (66) :

$$(\omega - a_{11}) A_1 - a_{12} A_2 - a_{13} A_3 - a_{14} A_4 = b_1,$$

à partir de laquelle, on obtient :

$$A_1 = (\omega - a_{11})^{-1} [b_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{14} A_4].$$

On procède ensuite à l'identification des éléments appartenant à l'ordre 2 des deux membres.

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{\omega} [b_1^{(2)} + a_{12}^{(1)} A_2^{(1)} + a_{13}^{(1)} A_3^{(1)} + a_{14}^{(1)} A_4^{(1)}] + \frac{1}{\omega^2} a_{11}^{(1)} b_1^{(1)}.$$

Pour les ordres plus élevés, il est utile de développer $(\omega - a_{11})^{-1}$ pour faciliter les identifications. On met ce facteur sous la forme :

$$\frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{a_{11}}{\omega}\right)^{-1}$$

dans laquelle a_{11}/ω est une petite quantité devant l'unité car ses composantes principales sont d'ordre 1. Le développement en série de ce facteur donne :

$$(67) \quad \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{a_{11}}{\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\omega} \left[1 + \frac{a_{11}}{\omega} + \left(\frac{a_{11}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{a_{11}}{\omega}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a_{11}}{\omega}\right)^k \right].$$

Avec a_{11} / ω plus petit que 1, les éléments du crochet du second membre de (67) montrent la décroissance continuelle en amplitude des composantes formées dans les ordres successifs. Pour une fréquence ω , la rapidité de la convergence de la solution dépend de la petitesse de $\frac{a_{11}}{\omega}$ par rapport à 1. Les valeurs de ce rapport des deux arguments cités dans la table 9 sont:

Argument	a_{11} / ω
$-2L_1 + 3L_2$	-0,00129215
$-L_1 + 2L_2$	-0,01290683

Ces chiffres montrent clairement que la convergence de la solution pour le premier argument (à courte période) est beaucoup plus rapide que celle du deuxième (à longue période).

A l'ordre 3, l'identification des termes de même ordre donne :

$$\begin{aligned} A_1^{(3)} &= \frac{1}{\omega} \left[b_1^{(3)} + a_{12}^{(1)} A_2^{(2)} + a_{13}^{(1)} A_3^{(2)} + a_{14}^{(1)} A_4^{(2)} + a_{12}^{(2)} A_2^{(1)} + a_{13}^{(2)} A_3^{(1)} + a_{14}^{(2)} A_4^{(1)} \right] \\ &+ \frac{1}{\omega^2} \left[a_{11}^{(1)} b_1^{(2)} + a_{11}^{(2)} b_1^{(1)} \right] \\ &+ \frac{1}{\omega^3} \left[(a_{11}^{(1)})^2 b_1^{(1)} \right] \end{aligned}$$

Aux ordres supérieurs, le mode d'identification est identique. On arrive ainsi à obtenir les composantes des ordres élevés des grandes inégalités des mouvements des trois premiers satellites avec un nombre de termes manipulés bien plus faible que celle qu'on aurait à considérer dans un développement de la solution par les substitutions normales utilisant des séries entières de volume important.

FORME ANALYTIQUE DE LA SOLUTION.

58. Dans le développement de la solution au moyen des substitutions comme dans la méthode de traitement partiel exposée dans le paragraphe précédent, on obtient dans le résultat final des termes portant des traces littérales des constantes physiques. La présence de ces traces littérales révèle non seulement la provenance du terme considéré, mais aussi son ordre par rapport aux paramètres constants. Cette forme analytique permet d'éviter une erreur courante qui est le mélange des ordres dans une

solution. En contre partie, l'espace occupé par un terme est plus important.

LES GRANDES INEGALITES.

59. La forme analytique des résultats permet de trouver à tout instant l'origine et l'ordre d'un terme de la solution intermédiaire. Dans la présentation des grandes inégalités, nous les conservons sous la forme d'un ensemble de composantes. Les arguments des composantes sont différents de $k.180^\circ$; leur composition est donnée dans la table 10. Ces arguments apparaissent lors du développement de la solution et nous ne cherchons pas à les réunir tout de suite sous la forme d'un seul terme portant un argument unique, car nous avons besoin de ce résultat très détaillé dans le calcul de la libration, dont les arguments sont repérés par l'apparition de l'argument résonnant $L_1 - 3L_2 + 2L_3$ et ses harmoniques. Cette présentation des grandes inégalités, sous la forme de composantes, existe dans les théories connues, mais d'une façon très réduite. Dans la théorie de Sampson (1921) par exemple, les grandes inégalités des longitudes vraies des trois premiers satellites contiennent respectivement 1, 2 et 1 composantes. La séparation des composantes n'est effective que pour le satellite J2; pour lequel Sampson compte séparer l'action de J1 sur J2 de celle de J3 sur J2 dans le calcul de la libration. La réalité est plus complexe et on peut citer un exemple réel de formation des arguments dans les deux cas suivants : le premier cas où l'on tient compte de l'existence de plusieurs arguments, tels qu'ils apparaissent dans le calcul et le deuxième cas où tous les arguments sont réduits à un seul. Avec la notation donnée par (64) :

$$(-2,5,-2,0) + (0,1,-2,0) \longrightarrow (-2,6,-4,0),$$

si le premier argument était auparavant modifié en $(-1,2,0,0)$ dans le regroupement avec la composante principale, on aurait :

$$(-1,2,0,0) + (0,1,-2,0) \longrightarrow (-1,3,-2,0).$$

Les deux arguments obtenus sont tous les deux des arguments résonnants, mais appartiennent aux harmoniques différents. Ceci conduit aux deux résultats différents dans le calcul de la libration comme on le verra dans le paragraphe 69.

60. Tous les huit arguments, différents les uns des autres de $k.180^\circ$ (table 10) qui nous intéressent, apparaissent dès l'ordre 2 par regroupement d'arguments des facteurs dans l'opération de substitution. On a par exemple :

$(-4,5,0,0) + (0,6,-6,0) \rightarrow (-4,11,-6,0)$
 $(-3,4,0,0) + (0,4,-4,0) \rightarrow (-4,11,-6,0)$
 $(-3,4,0,0) + (0,4,-4,0) \rightarrow (-3, 8,-4,0)$
 $(-3,3,0,0) + (0,5,-4,0) \rightarrow (-3, 8,-4,0)$
 $(-2,2,0,0) + (0,3,-2,0) \rightarrow (-2, 5,-2,0)$
 $(-2,4,0,0) + (0,1,-2,0) \rightarrow (-2, 5,-2,0)$
 $(-2,3,0,0) + (1,-1,0,0) \rightarrow (-1, 2, 0,0)$
 $(-2,4,0,0) + (1,-2,0,0) \rightarrow (-1, 2, 0,0)$
 etc ...

Les résultats obtenus pour les composantes des grandes inégalités à l'ordre 7 de la solution intermédiaire avec des amplitudes réduites en valeurs numériques sont donnés dans la table 11a. Notons qu'on doit ajouter les contributions provenant du mouvement libre. La table 11b donne l'ordre de grandeur des compléments quand on tient compte des excentricités et des inclinaisons libres des orbites des satellites.

Table 11a. Composantes des grandes inégalités de X_3 ,
 Amplitudes réduites aux valeurs numériques.
 (unité = 1×10^{-7} radian).

Argument	Amplitude		
	Sat.1	Sat.2	Sat.3
$(-4,11,-6,0)$	+ 0,63	- 1,31	0,00
$(-3, 8,-4,0)$	+ 55,82	- 136,11	+ 0,06
$(-2, 5,-2,0)$	+ 1235,96	- 2984,94	- 2,65
$(-1, 2, 0,0)$	+ 42808,59	- 23217,11	- 2,69
$(0,-1, 2,0)$	+ 64,56	+ 73894,59	- 6100,88
$(1,-4, 4,0)$	+ 6,41	+ 450,64	- 177,82
$(2,-7, 6,0)$	+ 0,06	+ 82,68	- 32,17
$(3,-10,8,0)$	+ 0,00	+ 0,81	- 0,32

Table 11b. Compléments des grandes inégalités de X_3 ,
 provenant des excentricités et des inclinaisons libres (unité = 1×10^{-7} radian).

Argument	Amplitude		
	Sat.1	Sat.2	Sat.3
$(-1, 2, 0,0)$	- 7,4	+ 10,1	0,0
$(0,-1, 2,0)$	+ 0,0	- 14,1	+ 3,2

Un examen rapide des amplitudes qui figurent dans la Table 11a permet de constater que dans le cas du satellite 1 par exemple, la deuxième composante représente environ 3% de la composante principale. Le fait de regrouper toutes les composantes dans un seul terme faussera le calcul de la libration que l'on veut être très précis.

Le résultat obtenu sous forme analytique est volumineux, La table 12 donne un extrait de ce résultat concernant les deux plus grandes composantes de X_3 de J1 portant respectivement les arguments $-L_1+2L_2$ et $-2L_1+5L_2-2L_3$.

Table 12.

Extrait de X_3 du satellite 1 :
Série de termes portant l'argument $A = -L_1+2L_2$.

	Coefficient de $\exp iA$ ($\times 10^{-7}$ rad)	Trace des cons-	Coefficient de $\exp iA$ ($\times 10^{-7}$ rad)	Trace des cons-	
		tantes physiques $j_2 j_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$		tantes physiques $j_2 j_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$	
1	+ 51592,7	. . . 1 . . .	29	- 60,7	2 . . 2 . . .
2	- 8966,2	1 . . 1 . . .	30	- 6,4	2 . . 1 1 . .
3	- 25,6	. 1 . 1 . . .	31	- 0,7	2 . . 1 . 1 .
4	- 662,5	. . 1 1 . . .	32	- 6,9	1 . 2 1 . . .
5	- 920,4	. . . 2 . . .	33	- 0,3	1 1 . 2 . . .
6	- 69,9	. . . 1 1 . .	34	- 13,4	1 . 1 2 . . .
7	- 7,3	. . . 1 . 1 .	35	- 5,7	1 . . 3 . . .
8	- 1,8	. . . 1 . . 1	36	- 0,9	1 . 1 1 1 . .
9	+ 1569,7	2 . . 1 . . .	37	- 0,8	1 . . 2 1 . .
10	+ 8,9	1 1 . 1 . . .	38	+ 0,4	1 . . 1 2 . .
11	+ 136,6	1 . 1 1 . . .	39	- 0,2	. . 1 3 . . .
12	+ 0,3	. 1 1 1 . . .	40	+ 47,7	4 . . 1 . . .
13	+ 318,3	1 . . 2 . . .	41	+ 0,5	3 1 . 1 . . .
14	+ 24,1	1 . . 1 1 . .	42	+ 4,2	3 . 1 1 . . .
15	+ 2,6	1 . . 1 . 1 .	43	+ 11,5	3 . . 2 . . .
16	+ 0,9	. 1 . 2 . . .	44	+ 1,5	3 . . 1 1 . .
17	+ 39,7	. . 2 1 . . .	45	+ 1,2	2 . 2 1 . . .
18	+ 72,6	. . 1 2 . . .	46	+ 2,3	2 . 1 2 . . .
19	+ 26,4	. . . 3 . . .	47	+ 1,0	2 . . 3 . . .
20	+ 4,1	. . 1 1 1 . .	48	+ 0,2	2 . . 2 1 . .
21	+ 2,6	. . . 2 1 . .	49	- 8,3	5 . . 1 . . .
22	- 2,4	. . . 1 2 . .	50	- 0,6	4 . 1 1 . . .
23	+ 0,3	. . 1 1 . 1 .	51	- 2,2	4 . . 2 . . .
24	+ 0,3	. . . 2 . 1 .	52	- 0,3	4 . . 1 1 . .
25	+ 0,6	1 . . 1 . . 1	53	- 0,2	3 . 2 1 . . .
26	- 273,7	3 . . 1 . . .	54	- 0,4	3 . 1 2 . . .
27	- 2,3	2 1 . 1 . . .	55	- 0,2	3 . . 3 . . .
28	- 23,9	2 . 1 1 . . .	56	+ 1,4	6 . . 1 . . .

Table 12 (suite). Extrait de X_3 du satellite 1 :
Série de termes portant l'argument $A = -2L_1 + 5L_2 - 2L_3$

	Coefficient de $\exp iA$ (1×10^{-7} rad)	Trace des cons- tantes physiques $j_2 j_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$		Coefficient de $\exp iA$ (1×10^{-7} rad)	Trace des cons- tantes physiques $j_2 j_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$
1	+1670,4	. . . 1 1 . .	12	+ 8,6	1 . . 1 2 . .
2	- 374,3	1 . . 1 1 . .	13	+ 0,2	. . . 3 1 . .
3	- 0,9	. 1 . 1 1 . .	14	+ 0,2	. . . 2 2 . .
4	- 52,1	. . 1 1 1 . .	15	- 10,6	3 . . 1 1 . .
5	- 64,1	. . . 2 1 . .	16	- 1,6	2 . 1 1 1 . .
6	- 47,2	. . . 1 2 . .	17	- 2,3	2 . . 2 1 . .
7	- 0,8	. . . 1 1 1 .	18	- 1,6	2 . . 1 2 . .
8	+ 60,6	2 . . 1 1 . .	19	+ 1,8	4 . . 1 1 . .
9	+ 0,3	1 1 . 1 1 . .	20	+ 0,3	3 . 1 1 1 . .
10	+ 9,1	1 . 1 1 1 . .	21	+ 0,4	3 . . 2 1 . .
11	+ 12,6	1 . . 2 1 . .	39	+ 0,3	3 . . 1 2 . .

Dans la table 12, la colonne "Trace des constantes physiques" donne les exposants de ces quantités. Un point "." occupe la place d'un exposant nul. Pour un terme considéré, la somme des exposants donne son ordre par rapport aux petits paramètres constants.

La convergence de la solution est bonne pour tous les arguments. La décroissance des amplitudes est très rapide par rapport aux ordres; le signe des contributions, changé d'un ordre à l'ordre suivant, montre que l'approximation est meilleure que le dernier ordre calculé. Dans le cas de la composante de la grande inégalité de la table 12, les coefficients obtenus sont :

Ordre	1	$51592,7 \times 10^{-7}$
	2	-10653,7 "
	3	+ 2205,6 "
	4	- 395,5 "
	5	+ 70,1 "
	6	- 12,2 "
	7	+ 1,4 "

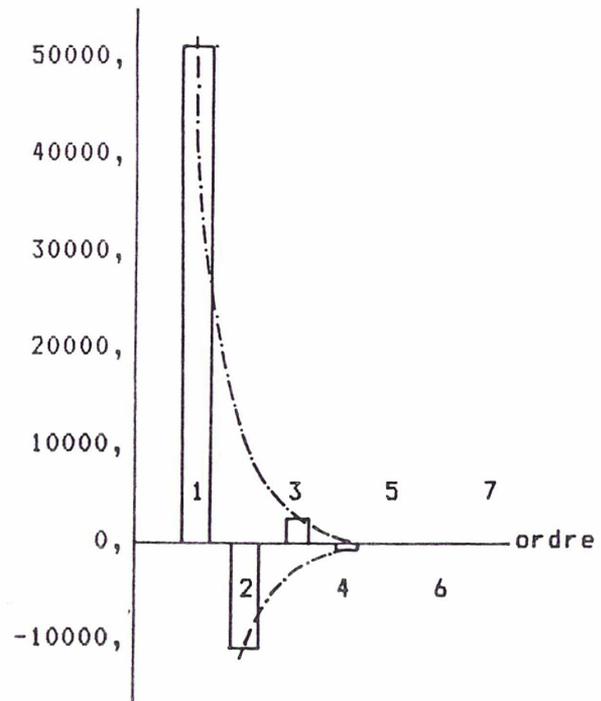


Fig.8

Les coefficients obtenus pour les derniers ordres sont tellement faibles par rapport à celle du premier ordre qu'il n'est pas facile de les porter tous sur le graphique avec une même échelle (fig.8).

PERIODES DES TERMES PERIODIQUES.

60. Dans la solution intermédiaire, les termes périodiques sont pour la majorité de périodes plus courtes que les périodes d'évolution des satellites, sauf dans le cas des grandes inégalités. La période de ces termes est de 486,8 jours. Elle est bien plus grande que les périodes d'évolution des satellites :

- Sat.1 - 1,769 jours,
- Sat.2 3,551 jours,
- Sat.3 7,155 jours,
- Sat.4 16,689 jours,

PERTURBATIONS SECLAIRES DES MOYENS MOUVEMENTS.

61. La table 7a du paragraphe 54 donne les perturbations séculaires des moyens mouvements obtenues à l'ordre 1 des petits paramètres constants.

Table 13

Satellite 1. Termes constants à identifier aux perturbations séculaires des moyens mouvements.

	Coefficient (1×10^{-7} rad)	Trace des constantes physiques						Coefficient (1×10^{-7} rad)	Trace des constantes physiques								
		j_2	j_4	m_1	m_2	m_3	m_4		m_5	j_2	j_4	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	
1	+45004,333	1	14	+	0,081	2	.	.
2	+ 64,259	.	1	15	+	0,018	1	1	.
3	- 389,109	.	.	.	1	.	.	16	-	0,012	.	.	1	.	.	1	.
4	- 204,718	1	.	17	+	0,018	2	.
5	- 23,938	1	18	+	0,439	3
6	- 5,911	1	19	-	0,181	1	.	1	1	.	.	.
7	- 40,395	2	20	-	0,380	.	.	2	1	.	.	.
8	- 0,142	1	1	21	-	0,901	1	.	.	2	.	.	.
9	- 1,405	1	.	1	.	.	.	22	-	0,917	.	.	1	2	.	.	.
10	+ 0,313	1	.	.	1	.	.	23	-	0,578	.	.	.	3	.	.	.
11	+ 5,481	.	.	1	1	.	.	24	-	0,026	.	.	1	1	1	.	.
12	+ 17,208	.	.	.	2	.	.	25	-	0,035	.	.	.	2	1	.	.
13	+ 0,156	1	.	.	.	1	.	26	-	0,119	.	.	.	1	2	.	.



Les contributions des ordres supérieurs décroissent rapidement. La table 13 donne toutes les contributions d'amplitude supérieure à 1.10^{-9} radian jovicentrique relatives au satellite 1.

MOUVEMENT DES ORBITES INTERMEDIAIRES.

62. Les orbites intermédiaires des satellites ne sont pas planes dans la solution intermédiaire en raison de l'existence des termes périodiques affectant leurs inclinaisons. Ces termes proviennent des perturbations du Soleil, qui est considéré dans la théorie comme un corps extérieur ne faisant pas partie du système jovien. A cette étape de la solution, c'est à dire quand les excentricités propres et les inclinaisons propres sont négligées, les termes principaux des X_5 sont donnés dans la table 14.

Table 14

Termes principaux de X_5 de la solution intermédiaire.

Coefficient de $\exp iA$ (unité : 1×10^{-7} radian)				Argument A
Sat.1	Sat.2	Sat.3	Sat.4	
- 4,52	- 16,34	- 36,87	- 87,86	$3G + 2\pi - \Omega_0$
- 16,66	- 133,30	- 320,61	- 772,92	$2G + 2\pi - \Omega_0$
- 2,2	+ 4,88	+ 15,27	+ 37,50	$G + 2\pi - \Omega_0$
0,0	0,0	0,0	+ 0,5	$-2\pi + \Omega_0$
- 7,01	+ 14,65	+ 44,78	+ 111,56	$G + \Omega_0$
- 31,10	- 33,72	- 52,67	- 115,76	$-G + \Omega_0$

La table 14 contient une ligne de coefficients très faibles. Notons qu'à la place de $+ 0,5 \exp i(-2\pi + \Omega_0)$, Sampson (1921) donne le coefficient du terme équivalent dans l'expression de la latitude du satellite 4 égal à -383 , cette différence entre autres sera développée dans le paragraphe 79 du chapitre 4.

DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION INTERMEDIAIRE RESONNANTE.

Le traitement se compose de deux parties : la résolution de l'équation de la libration et l'étude de l'effet de la libration sur les termes périodiques obtenus dans la solution intermédiaire non résonnante.

FORMATION ET RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA LIBRATION.

63. D'après les travaux de Laplace, on sait que l'argument de la libration est du type oscillatoire borné, au contraire des arguments des termes périodiques ordinaires qui sont du type circulatoire. Dans le jeu de variables utilisées, la première a une expression adaptée à l'étude du problème de résonance:

$$x_{1j} = l_j - \lambda_j ,$$

où $\lambda_j = L_j + \delta\lambda_j$. Le rattachement de la partie résonnante $\delta\lambda_j$ à L_j permet de détecter les arguments résonnants :

$$(68) \quad k(\delta\lambda_1 - 3\delta\lambda_2 + 2\delta\lambda_3),$$

qui accompagnent les arguments non traités dans la solution non résonnante

$$(69) \quad k(L_1 - 3L_2 + 2L_3), \text{ de fréquence nulle.}$$

Les arguments obtenus après les substitutions sont de la forme :

$$\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 + \alpha_4\lambda_4,$$

qui peut être écrite sous la forme d'un produit scalaire

$$(\alpha | \lambda)$$

Lorsqu'on se limite aux termes résonnants, le développement par substitution donne :

$$\dot{x}_1 - x_2 = \sum A_k \cos k(\alpha | \lambda),$$

$$\dot{x}_2 = \sum B_k \sin k(\alpha | \lambda),$$

où A_k , B_k sont des coefficients constants, k des entiers positifs et où α a pour valeur $(1, -3, 2, 0)$.

L'argument fondamental de libration est :

$$\Lambda = \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - 180^\circ.$$

$\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ et Λ sont différents de 180° . A l'argument $k(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3)$ correspond $k(\Lambda + 180^\circ)$; par suite, pour k impair, la fonction sinus de l'un est égal à la fonction sinus de l'autre changée de signe. Il en est de même pour les fonctions cosinus de ces quantités.

Le paragraphe 22 donne l'équation de la libration $\ddot{\Lambda} = \overline{F_2} + \overline{\dot{F}_1}$, dans laquelle $\overline{F_2}$ et $\overline{\dot{F}_1}$ représentent respectivement les parties résonnantes de F_2 et \dot{F}_1 . Le second membre ne contient que des termes résonnants : il ne dépend du temps que par l'intermédiaire de $(\alpha|\lambda)$ c'est à dire de Λ . On peut poser :

$$\mathfrak{F}(\Lambda) = (\alpha|\overline{F_2} + \overline{\dot{F}_1}), \quad \text{avec } \alpha = (1, -3, 2, 0),$$

d'où l'équation (17) en Λ , déjà écrite au paragraphe 22 :

$$\ddot{\Lambda} = \mathfrak{F}(\Lambda)$$

En raison de la forme du second membre, on cherche une solution sinus donc de la forme :

$$\Lambda = \frac{1}{2i}(u\sigma - \bar{u}\bar{\sigma}), \quad \text{avec } u = \varphi \text{ et } \sigma = \exp i\beta t;$$

où φ est une constante d'intégration $\varphi = |\varphi| \exp iE_L$.

Dans le calcul du second membre, le quatrième élément de α étant nul, ce produit scalaire peut s'écrire sous la forme développée suivante, où les grandeurs apparues portent un deuxième indice, qui est le numéro du satellite :

$$\ddot{\Lambda} = (\overline{F_{21}} + \overline{\dot{F}_{11}}) - 3(\overline{F_{22}} + \overline{\dot{F}_{12}}) + 2(\overline{F_{23}} + \overline{\dot{F}_{13}}).$$

Chaque parenthèse du second membre contient deux parties : $\overline{F_{2j}}$ et $\overline{\dot{F}_{1j}}$ ($j=1, 2, 3$). La première partie calculant $\overline{F_2}$ sera obtenue par une collecte de termes de résonance apparus dans le développement de F_2 après une substitution des variables par les séries correspondantes issues de la solution intermédiaire non résonnante complété par les compléments de la solution variationnelle. Les traces des arguments (69) signalent la présence des arguments résonnants (68). Le développement de la deuxième partie est plus complexe; on a tout d'abord l'égalité suivante:

$$\frac{dF_{1j}}{dt} = \sum_{p=1}^6 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_{1j}}{\partial X_{pk}} \frac{dX_{pk}}{dt} - \frac{\partial F_{1j}}{\partial t}$$

et on cherche à calculer la même expression réduite aux termes résonnants:

$$\overline{\frac{dF_{1j}}{dt}} = \sum_p \sum_k \overline{\frac{\partial F_{1j}}{\partial X_{pk}} \frac{dX_{pk}}{dt}} - \overline{\frac{\partial F_{1j}}{\partial t}}$$

Le groupe contenant l'opérateur $\sum_p \sum_k$ est étendu à toutes les variables X_{pk} présentes dans les termes de F_1 . Son développement est bien plus long que celui du calcul de F_2 en raison du nombre plus important d'opérations à effectuer. Chaque élément de cette somme est un produit de deux facteurs: le premier est une dérivée partielle de F_{1j} par rapport à une variable X_{pk} , le deuxième est la dérivée de la variable considérée par rapport au temps :

$$\frac{dX_{pk}}{dt}$$

qui n'est pas autre chose que le second membre F_{pk} d'une des équations obtenues dans le développement préliminaire. La multiplication des deux séries représentées par ces deux facteurs donne une série dont les termes contiennent toujours des variables. On procède ensuite à la substitution de ces variables par les séries correspondantes. Dans cette opération, on ne conserve que les termes portant un argument résonnant. On obtient ainsi la série représentant l'expression correspondante réduite aux termes résonnants :

$$\sum_{p=1}^6 \sum_{k=1}^3 \overline{\frac{\partial F_{1j}}{\partial X_{pk}} \frac{dX_{pk}}{dt}}$$

Le deuxième groupe est la dérivée partielle de F_{1j} par rapport au temps. On obtient les termes résonnants de F_1 au moyen d'une substitution identique à celle utilisée dans le calcul de F_2 . La dérivation des termes obtenus par rapport au temps n'est pas immédiate pour deux raisons : d'abord, l'argument de libration n'est pas une fonction linéaire du temps comme dans le cas des autres termes périodiques mais une fonction périodique du temps; ensuite on a besoin d'une valeur approchée ou d'une approximation donnée de la fréquence de libration pour pouvoir effectuer cette dérivation.

On obtient des termes contenant les fonctions $\sin \wedge$, $\sin 2 \wedge$, $\sin 3 \wedge$, $\sin 4 \wedge$ dans le développement de $\overline{F_2}$ et des termes contenant les fonctions

$\cos\Lambda$, $\cos 2\Lambda$, $\cos 3\Lambda$, $\cos 4\Lambda$ dans le développement de F_1 ; Λ étant une fonction périodique du temps. On développe toutes les fonctions sinus et cosinus de $k\Lambda$ en séries entières de la petite quantité Λ au moyen des relations :

$$\begin{aligned}\cos k\Lambda &= 1 - \frac{(k\Lambda)^2}{2!} + \frac{(k\Lambda)^4}{4!} - \frac{(k\Lambda)^6}{6!} + \dots \\ \sin k\Lambda &= k\Lambda - \frac{(k\Lambda)^3}{3!} + \frac{(k\Lambda)^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

La dérivation de F_1 devient plus simple car l'argument à considérer est maintenant Λ et non une fonction périodique de Λ . Cette dernière opération met l'équation (17) sous la nouvelle forme :

$$(70) \quad \ddot{\Lambda} = -\beta_0^2 \Lambda \left(1 + \sum p_{2k} \Lambda^{2k} \right).$$

k est un entier positif ou nul. La valeur de la parenthèse est proche de 1; β_0 est donc la fréquence de la libration dans la première approximation. C'est la partie principale de l'expression générale de la fréquence de la libration :

$$\beta = \sum \beta_{2k}$$

D'après Sagnier (1981), la correction de fréquence d'ordre 2 a pour expression :

$$\beta_2 = -\frac{3}{8} \beta_0 p_2 |\varphi|^2.$$

dans laquelle $|\varphi|$ représente l'amplitude de la libration. Les paragraphes suivants abordent successivement la collecte des termes résonnants dans la formation de l'équation de la libration; le traitement de l'équation de la libration et une discussion montrant pourquoi le résultat obtenu est différent de ceux des autres théories.

Collecte des termes résonnants dans la construction de l'équation de la libration.

64. Les coefficients des groupes de termes collectés sont présentés dans les tables 15 et 16. Les apports de F_2 ; provenant des degrés 3 et 4 des variables sont donnés dans le but de faciliter la comparaison des résultats à ceux des autres théories dont le calcul s'arrête au degré 2 des variables (Théorie de Sampson par exemple). Les fonctions des arguments apparues sont des fonctions sinus et cosinus. Elles seront développées dans le paragraphe suivant sous la forme de polynômes de Λ .

Table 15a . Collection des termes résonnants de F_{2j} (j : numéro du satellite).

		Coefficient x 10^{12} de			
		sin Λ	sin2 Λ	sin3 Λ	sin4 Λ
\overline{F}_{21}	(degré 1				
	+degré 2)	-1643673	+ 263454	- 9852	+ 1825
	degré 3	- 10245	- 14497	- 6528	+ 92
	degré 4	+ 142	+ 479	+ 526	+ 178
	Total...	-1653776	+ 249436	- 15854	+ 2095
\overline{F}_{22}	(degré 1				
	+degré 2)	+3664752	- 563657	+ 26487	- 3648
	degré 3	+ 16985	+ 21540	+ 9494	- 159
	degré 4	- 258	- 747	- 775	- 269
	Total...	+3681479	- 542864	+ 35206	- 4076
\overline{F}_{23}	(degré 1				
	+degré 2)	- 313122	+ 45324	- 2942	+ 225
	degré 3	- 495	- 70	+ 19	+ 2
	degré 4	+ 14	+ 4	0	0
	Total...	- 313603	+ 45258	- 2923	+ 227

Table 15b . Termes résonnants de $\sum_P \sum_k \frac{\partial F_j}{\partial X_{pk}} \cdot \frac{dX_{pk}}{dt}$, (j : numéro du satellite).

		Coefficient x 10^{12} de			
		sin Λ	sin2 Λ	sin3 Λ	sin4 Λ
j=1	- 52	+ 405	+ 12	+ 37	
j=2	+ 32172	- 50	+ 128	- 627	
j=3	- 5611	+ 240	+ 703	- 336	

Table 16 . Termes résonnants de F_{1j} , (j : numéro du satellite).

		Coefficient x 10^{12} de			
		cos Λ	cos2 Λ	cos3 Λ	cos4 Λ
j=1	+1199144	- 66556	+ 5014	- 580	
j=2	-5506988	+ 6886	- 3884	+ 180	
j=3	- 426984	+ 58732	- 3812	+ 252	

Calcul du second membre de l'équation de la libration.

65. Les tables 15a et 15b contiennent des données utilisables immédiatement dans le calcul du second membre de l'équation de la libration. Dans la première approximation, on ne tiendra compte que de ces données. La solution donnera une fréquence approchée qu'on utilisera dans le calcul du complément :

$$\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)}$$

Le second membre s'écrit alors :

$$\overline{F_2} - \overline{\left(\frac{\partial F_1}{\partial X} \frac{dX}{dt}\right)}$$

avec $\overline{F_2} = \overline{F_{21}} - 3\overline{F_{22}} + 2\overline{F_{23}}$ dont les éléments se trouvent dans la table 15a et

$$\overline{\left(\frac{\partial F_1}{\partial X} \frac{dX}{dt}\right)} = \sum_{p=1}^6 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(F_{11} - 3F_{12} + 2F_{13})}{\partial X_{pk}} \cdot \frac{dX_{pk}}{dt}$$

dont les éléments se trouvent dans la table 15b. La collection, limitée à l'argument 4Λ , donne :

$$(71) \quad \begin{aligned} & - 0,000013433209 \sin \Lambda \\ & + 0,000001969579 \sin 2\Lambda \\ & - 0,000000126284 \sin 3\Lambda \\ & + 0,000000016023 \sin 4\Lambda, \end{aligned}$$

dont le développement en polynôme de la fonction du temps Λ fournit :

$$-0,000009808811 \Lambda + 0,000000010129 \Lambda^3 + 0,000000294282 \Lambda^5 + \dots$$

L'équation (70), limitée au degré 5 en Λ , devient :

$$\ddot{\Lambda} = -0,000009808811 \Lambda (1 - 0,001033 \Lambda^2 - 0,030002 \Lambda^4),$$

La valeur de la fréquence de la libration, donnée par cette première approximation, est la racine carré de 0,000009808811 ou 0,00313190 radian par jour; ce qui correspond à une période de 2006,188 jours. Cette fréquence sera utilisée par la suite pour le calcul du complément mentionné au début de ce paragraphe. On a :

$$F_1 = F_{11} - 3F_{12} + 2F_{13}.$$

Avec les éléments donnés dans la table 16, on obtient :

$$F_1 = +0,000016866140 \cos \Lambda \\ +0,000000030250 \cos 2\Lambda \\ +0,000000009042 \cos 3\Lambda \\ -0,000000000616 \cos 4\Lambda,$$

dont le développement en un polynôme de Λ donne :

$$F_1 = -0,000008529331\Lambda^2 + 0,000000746869\Lambda^4 - 0,000000031765\Lambda^6 + \dots$$

La dérivation par rapport au temps de cette égalité, qui utilise la fréquence obtenue 0,00313190 radian/jour, fournit :

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right) = -0,000000053426\Lambda + 0,000000009356\Lambda^3 - 0,000000000597\Lambda^5 + \dots$$

Quand on tient compte de ce complément, l'équation de la libration devient:

$$\ddot{\Lambda} = -0,000009862237 \Lambda (1 - 0,00197572 \Lambda^2 - 0,02977874 \Lambda^4),$$

elle donne une nouvelle fréquence 0,0031404199 radian/jour. La période de la libration correspondante est 2000,747 jours.

Période de la libration.

66. Une itération du calcul du complément utilisant cette nouvelle fréquence donne :

$$(72) \ddot{\Lambda} = -0,000009862382 \Lambda (1 - 0,00197833 \Lambda^2 - 0,02977810 \Lambda^4).$$

On obtient une fréquence légèrement modifiée de 0,00314044296 radian/jour; ce qui correspond à une période de 2000,732 jours.

On peut à présent calculer la correction de fréquence la plus importante qui est β_2 .

$$\beta_2 = -\frac{3}{8} \beta_0 p_2 |\varphi|^2, \text{ avec } p_2 = -0,00197833;$$

$$|\varphi| = 0,0011519 \text{ radian};$$

$$\beta_0 = 0,00314044296 \text{ radian/jour.}$$

La valeur attribuée ici à $|\varphi|$ est tirée de celle donnée par Lieske dans sa théorie, version E-2 (Lieske, 1980).

La valeur obtenue pour cette correction de fréquence est très faible

$$\beta_2 = -3,1 \times 10^{-12}.$$

Les corrections suivantes décroissent très rapidement et il suffit de

tenir compte de la première correction dans le résultat final. Le résultat concernant la période de la libration reste inchangé car la correction n'affecte pas le dernier chiffre significatif retenu de la fréquence principale β_0 . Voici quelques valeurs obtenues pour la période de la libration :

Sampson (1921)	2041,1 jours,
Lieske E-0 (1977)	2091,1 jours,
Lieske E-2 (1980)	2074, jours,
Brown (1976)	2032, jours,
Ferraz-Mello (1979)	2012, jours,
Henrard (1984)	2014, jours.

Cette liste est donnée à titre d'information, car les valeurs des masses utilisées dans les travaux correspondants sont différentes.

Facteurs de libration.

67. Ces facteurs indiquent la contribution théorique des trois satellites concernés à la libration. Leurs valeurs sont liées par la relation :

$$Q_1 - 3Q_2 + 2Q_3 = 1.$$

L'indice donne le numéro du satellite. Dans la formation de l'équation de la libration avec une séparation des provenances, on obtient les contributions suivantes relatives au terme principal portant Λ :

Satellite 1	- 0,000001196186 Λ ,
Satellite 2	+ 0,000002732322 Λ ,
Satellite 3	- 0,000000234616 Λ .

Quand on note ces contributions par (1), (2), (3), le coefficient de Λ dans le second membre de l'équation de la libration est le total (1)-3(2)+2(3). La valeur de Q_1 par exemple s'obtient par la division de (1) par ce total. On obtient les valeurs suivantes des facteurs de libration :

$$(73) \quad Q_1 = 0,1213 ; \quad Q_2 = -0,2770 ; \quad Q_3 = 0,0238 .$$

La table suivante contient quelques valeurs connues de ces facteurs :

	Sampson (1921)	Lieske E-2 (1980)	Ferraz-Mello (1979)
Q_1	0,1381	0,1152	0,1238
Q_2	-0,2704	-0,2767	-0,2750
Q_3	0,0254	0,0274	0,0256

Coefficients des termes résonnants dans l'équation de la libration.

68. Un autre groupe d'éléments peut être utilisé dans la comparaison des théories est composé des coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 des termes résonnants de l'équation de la libration écrite sous la forme :

$$\ddot{\Lambda} = A_1 \sin \Lambda + A_2 \sin 2\Lambda + A_3 \sin 3\Lambda + A_4 \sin 4\Lambda.$$

A l'étape finale, le second membre de l'équation de la libration (72) de la présente théorie est un polynôme de Λ ; mais à une étape intermédiaire, le second membre incomplet possède une expression en sinus comme ci-dessus et les coefficients correspondants se trouvent dans (71) paragraphe 65.

Il existe très peu de résultats intermédiaires publiés. La table 16 donne liste de ces quelques valeurs intermédiaires. Il faut aussi signaler que dans ces différents travaux, les valeurs attribuées aux masses sont différentes.

Table 16.

	Sampson (1921)	Brown (1976)	Vu
A_1	$-1,1751 \times 10^{-5}$	$-1,184 \times 10^{-5}$	$-1,3433 \times 10^{-5}$
A_2	$+1,1392 \times 10^{-6}$	$+1,153 \times 10^{-6}$	$+1,9696 \times 10^{-6}$
A_3		$-3,8 \times 10^{-9}$	$-1,2628 \times 10^{-7}$
A_4		$+3,1 \times 10^{-9}$	$+1,6023 \times 10^{-8}$

Les différences apparaissent dès le premier coefficient. Ceci mérite quelques commentaires qui seront abordés dans le paragraphe suivant.

Détails utiles et discussion des résultats

69. Les approches utilisées dans la construction des théories connues sont différentes et il est difficile de trouver partout des grandeurs équivalentes pour procéder à une comparaison systématique. On peut seulement expliquer les différences par les moyens mis en oeuvre dans le développement de la solution et ensuite montrer les conséquences réelles sur les valeurs des grandeurs de repère comme la période de la libration par exemple.

Parmi les moyens mis en oeuvre dans le développement de la présente théorie, figurent deux éléments nouveaux :

- La formation des équations est étendue aux degrés 3 et 4 des variables. Les contributions correspondantes se trouvent dans la table 15a.

- Les composantes des grandes inégalités, portant des arguments différents, sont introduites dans le calcul. Elles ne sont plus groupées sous un ou deux arguments comme dans les théories utilisant la méthode de Sampson. Leurs amplitudes et leurs arguments sont donnés dans la table 11a, paragraphe 59.

La différence des moyens utilisés permet d'expliquer celle du groupe de coefficients de la table 16, ensuite celle des périodes de la libration. Considérons le cas précis d'un couple de termes de degré 1 de F_{22} , générateur d'importantes contributions aux termes résonnants du satellite 2 :

$$F_{22} = i \times 0,00026979471 \left[X_{32} \exp(i(\lambda_2 - 2\lambda_3)) - X_{42} \exp(i(-\lambda_2 + 2\lambda_3)) \right] + \dots$$

où X_{42} est la variable conjuguée de X_{32} . Lors du développement, on voit apparaître les combinaisons d'argument suivantes :

argument initial	arguments des grandeurs substituées		arguments résonnants apparus
	X_{32}	X_{42}	
(0, 1, -2, 0)	(-1, 2, 0, 0)		(-1, 3, -2, 0)
	(-2, 5, -2, 0)		(-2, 6, -4, 0)
	(-3, 8, -4, 0)		(-3, 9, -6, 0)
	(-4, 11, -6, 0)		(-4, 12, -8, 0)
(0, -1, 2, 0)		(1, -2, 0, 0)	(1, -3, 2, 0)
		(2, -5, 2, 0)	(2, -6, 4, 0)
		(3, -8, 4, 0)	(3, -9, 6, 0)
		(4, -11, 6, 0)	(4, -12, 8, 0)

On obtient deux groupes de termes portant des fonctions exponentielles dont les arguments sont conjugués; ils donneront des termes portant des fonctions sinus dans la présentation finale. De ce fait, il suffira d'examiner la formation d'un de ces deux groupes.

La substitution par la série $-0,002321711 \exp(\lambda_1 - 2\lambda_2)$
 $-0,000298494 \exp(2\lambda_2 - 5\lambda_3 + 2\lambda_3)$
 $-0,000013611 \exp(3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 4\lambda_3)$
 $-0,000000131 \exp(4\lambda_1 - 11\lambda_2 + 6\lambda_3),$

de la variable χ_{42} du deuxième terme du couple considéré donne :

$$i \left[0,000000626385 \exp(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3) + 0,000000080532 \exp(2\lambda_1 - 6\lambda_2 + 4\lambda_3) \right. \\ \left. + 0,000000003672 \exp(3\lambda_1 - 9\lambda_2 + 6\lambda_3) + 0,000000000035 \exp(4\lambda_1 - 12\lambda_2 + 8\lambda_3) \right].$$

Le regroupement de ce résultat avec celui du groupe conjugué donne :

$$F_{22} = \begin{matrix} -1252770 \times 10^{-12} \sin(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3) \\ -161064 \times 10^{-12} \sin(2\lambda_1 - 6\lambda_2 + 4\lambda_3) \\ -7344 \times 10^{-12} \sin(3\lambda_1 - 9\lambda_2 + 6\lambda_3) \\ -70 \times 10^{-12} \sin(4\lambda_1 - 12\lambda_2 + 8\lambda_3) \end{matrix} \quad \text{ou :} \quad \begin{cases} +1252770 \times 10^{-12} \sin\Lambda \\ -161064 \times 10^{-12} \sin 2\Lambda \\ +7344 \times 10^{-12} \sin 3\Lambda \\ -70 \times 10^{-12} \sin 4\Lambda \end{cases} \quad (74)$$

Si ce groupe de composantes de χ_{42} était réuni sous un argument unique $\lambda_1 - 2\lambda_2$:

$$\chi_{42} = -0,002036697 \exp(\lambda_1 - 2\lambda_2),$$

on aurait dans la collection un terme unique :

$$(75) \quad +1098980 \times 10^{-12} \sin\Lambda.$$

D'où la différence entre les développements très partiels (74) et (75) :

$$+0,000000153790 \sin\Lambda - 0,000000161064 \sin 2\Lambda + 0,000000007344 \sin 3\Lambda \\ - 0,000000000070 \sin 4\Lambda,$$

Comme $\overline{F_{22}}$ entre dans la composition du second membre de l'équation de la libration avec un facteur -3; les écarts créés, écrits avec les mêmes unités que les valeurs correspondantes de la table 16 sont :

$$(76) \quad \begin{matrix} -0,04614 \times 10^{-5} \sin\Lambda \\ +0,4832 \times 10^{-6} \sin 2\Lambda \\ -0,2203 \times 10^{-7} \sin 3\Lambda \\ +0,0210 \times 10^{-8} \sin 4\Lambda, \end{matrix}$$

et portent les mêmes signes qu'elles. Par conséquent, dans la table 16, les coefficients figurés dans la dernière colonne sont plus grands en

amplitude que ceux des colonnes des autres théories. Les écarts (76) montrent, qu'en cas de regroupement des arguments avant la substitution, il existe un phénomène de transfert des apports appartenant aux harmoniques vers l'argument de base Λ avec un changement éventuel de signe. Ils modifient notablement la valeur de la période de la libration car un même apport ne portera pas le même poids dans les différents harmoniques résonnants du développement en polynôme de Λ lors de la formation du second membre de l'équation de la libration. En raison de ce transfert, si on additionne les coefficients des écarts (76), on trouvera zéro; mais le développement de (76) en polynôme de Λ donne :

$$439750 \times 10^{-12} \Lambda - 2240 \times 10^{-12} \Lambda^3 + 1792 \times 10^{-12} \Lambda^5 .$$

La modification de la période de la libration, provenant des écarts obtenus par le développement partiel cité en exemple ici, est importante, de l'ordre -46 jours.

On peut aussi évaluer la modification de la période de la libration quand le calcul tient compte des apports des degrés 3 et 4 des variables; elle est de l'ordre de -32 jours. Ces divers éléments du développement de la solution contribuent à montrer pourquoi la valeur de la période de la libration obtenue ici est plus faible que celles des autres théories.

Perturbations séculaires des moyens mouvements dues à la libration.

70. La première équation du système (15) paragraphe 22, relative au satellite j ne contient que des termes résonnants. Elle s'écrit :

$$\overline{\dot{X}}_{1j} = \overline{X}_{2j} + \overline{F}_{1j} ,$$

où \overline{X}_{2j} peut être obtenu par une intégration de \overline{F}_{2j} par rapport au temps. \overline{F}_{2j} a pour développement en polynôme de Λ :

$$a\Lambda + b\Lambda^3 + c\Lambda^5 + \dots$$

dans lequel a, b, c sont de constantes et Λ , une fonction périodique du temps. Il ne contient donc que de termes périodiques. Son intégration fournira des termes périodiques qui n'entreront pas dans l'identification de la partie séculaire du moyen mouvement. Il reste donc à évaluer les termes constants provenant du développement de F_{1j} . Les quantités de la table 16 développées en polynôme de Λ donne :

$$(77) \quad \begin{aligned} F_{11} &= 1137022 \times 10^{-12} - 484383 \times 10^{-12} \Lambda^2 + 16329 \times 10^{-12} \Lambda^4, \\ F_{12} &= -5503806 \times 10^{-12} + 2755760 \times 10^{-12} \Lambda^2 - 236056 \times 10^{-12} \Lambda^4, \\ F_{13} &= -371812 \times 10^{-12} + 111166 \times 10^{-12} \Lambda^2 + 11186 \times 10^{-12} \Lambda^4. \end{aligned}$$

Λ est une fonction périodique du temps; les coefficients des termes contenant Λ^2 et Λ^4 sont faibles en raison de la petitesse de l'amplitude de la libration. Il reste à considérer les termes constants apparus dans le développement (77). Une identification identique à celle exposée dans le paragraphe 54 fournit les petits facteurs σ_{rj} des perturbations séculaires du moyen mouvement dues à la libration :

$$\begin{aligned} \Delta N_1 = \sigma_{r1} N_1 = -\langle F_{11} \rangle &= -0,000001137, \\ \Delta N_2 = \sigma_{r2} N_2 = -\langle F_{12} \rangle &= +0,000005504, \\ \Delta N_3 = \sigma_{r3} N_3 = -\langle F_{13} \rangle &= +0,000000372, \end{aligned} \quad \text{on en tire: } \begin{cases} \sigma_{r1} = -0,0000003201, \\ \sigma_{r2} = +0,0000031107, \\ \sigma_{r3} = +0,0000004234. \end{cases}$$

Ces perturbations séculaires sont beaucoup plus faibles que celles dues aux perturbations constantes ordinaires figurées dans la table 7b.

Conséquences de la présence de la libration.

a) sur les coefficients des termes périodiques de la solution intermédiaire.

71. Les arguments utilisés sont de la forme $\lambda = L + \delta\lambda$ où $L = Nt + E$ et $\delta\lambda$ une partie périodique de longue période. Rappelons que le moyen mouvement moyen N_j est la somme du moyen mouvement non perturbé n_j et des perturbations séculaires non résonnantes $\sigma_j N_j$ et résonnantes $\sigma_{rj} N_j$:

$$N_j = n_j + (\sigma_j + \sigma_{rj}) N_j;$$

La valeur de N_j utilisée dans l'intégration contient donc la partie $\sigma_{rj} N$ venant de la résonance. Il reste à s'occuper de la partie périodique $\delta\lambda_j$. A chaque instant, on a une expression de $\dot{\lambda}_j$ de la forme :

$$\dot{\lambda}_j = N_j + \frac{d}{dt} [Q_j |\varphi| \sin(\beta t + E_L)],$$

où Q_j représente le facteur de libration du satellite j. A l'instant t, la composante venant de la libration aura pour expression :

$$Q_j |\varphi| \beta \cos(\beta t + E_L),$$

toujours inférieur ou égal à $Q_j |\varphi| \beta$ en valeur absolue. Cette valeur est très faible à côté de N_j et ne joue aucun rôle sensible dans l'intégration des termes à courtes périodes. L'incertitude des résultats peut être estimée dans le cas des termes de proche résonance portant les arguments $\lambda_1 - 2\lambda_2$ et $\lambda_2 - 2\lambda_3$.

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 - 2\delta\lambda_2 &= (Q_1 - 2Q_2) |\varphi| \sin(\beta t + E_L) \\ &= 0,6753 |\varphi| \sin(\beta t + E_L). \end{aligned}$$

La dérivée de cette quantité par rapport au temps : $0,6753 \beta |\varphi| \cos(\beta t + E_L)$ est toujours inférieure à $0,6753 \beta |\varphi|$ en valeur absolue. En remplaçant les valeurs numériques de β et de $|\varphi|$ dans cette expression par les valeurs trouvées précédemment dans le paragraphe 66, on obtient le complément 0,000002443, qui est faible devant $N_1 - 2N_2 = 0,0129068268$. Le facteur d'intégration instantané des termes quasi-résonnants se trouve entre les deux limites :

$$77,478 \pm 0,015.$$

La modification de la valeur du coefficient correspondant sera faible, mais cette éventuelle correction demandera une bonne connaissance de l'amplitude et de la phase de la libration. Pour la grande inégalité de λ_3 du satellite 1, l'incertitude sur la valeur du coefficient est de 1×10^{-7} radian jovicentrique.

b) sur les termes à très longues périodes.

72. Notons que certains termes de la solution générale nécessitent une correction due aux effets indirects de la libration dont on ne donne ici que le principe. La méthode de Souillart (1865) permet de faire la correction des coefficients de ces termes qui ont une période proche de celle de la libration. Dans le cas non résonnant, l'équation de la longitude du satellite j restreint à ces termes s'écrit :

$$\ddot{\lambda} = -\sum \alpha^2 A_j \sin(\alpha t + \varepsilon);$$

Alors en considérant le mouvement affecté par la libration, on obtient un système de trois équations où les termes en A_j représentent des termes forcés :

$$\ddot{\lambda}_j = Q_j \sin \Lambda - \sum \alpha^2 A_j \sin(\alpha t + \varepsilon), \quad j=1 \text{ à } 3.$$

A la place de la solution non résonnante $\sum A_j \sin(\alpha t + \varepsilon)$, la résolution de ce système fournit les nouveaux termes :

$$\lambda_j = \sum (A_j + Q_j \frac{A_1 - 3A_2 + 2A_3}{\alpha^2 - \beta^2}) \sin(\alpha t + \varepsilon).$$

DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION VARIATIONNELLE.

On donne ici en résultat la solution variationnelle limitée à la première approximation déjà partiellement présentée dans Thuijlot et Vu (1983). Le développement de la solution variationnelle passe par plusieurs étapes successives décrites dans les paragraphes 23 à 29. La solution du système linéaire, composé de termes indépendants du temps de façon explicite, traduit l'évolution à longue période des orbites des différents corps du système. On obtient, suivant l'approximation considérée, des valeurs correspondantes des fréquences des termes principaux à longues périodes et une matrice de vecteurs propres définissant la répartition des amplitudes de ces mêmes termes. Dans l'expression (26) d'une solution de ce type, M_{jk} représente la matrice des vecteurs propres et g_k la colonne des valeurs propres ou des fréquences des termes à très longues périodes.

Solution du système autonome.

73. La solution du système autonome linéaire :

$$\dot{z} = i h \cdot z,$$
est donnée par l'expression (26) de la forme :

$$z = [P] \cdot \exp(i g t + \beta). \quad (78)$$

Dans cette première approximation, les éléments de $[P]$ notés $M_{jk} C_k$ dans (26) sont calculés au moyen des excentricités propres C_k dont les valeurs numériques se trouvent dans la table suivante :

Excentricité	propre C_k	Inclinaison	propre B_k
1	0,0000100	0,0004759	
2	0,0000920	0,0081550	
3	0,0014690	0,0031126	
4	0,0073330	0,0047469	

Solution du système critique.

Dans le système linéaire critique (30) :

$$\dot{z} = (h+c)z,$$

c représente la partie critique de la matrice associée à éléments

constants (h+c) dont la définition a été donnée dans le paragraphe 29. La formation de c s'obtient par la substitution des variables par la solution variationnelle d'ordre 1 qui fait suite à la solution (78). Les termes critiques principaux sont issus de la combinaison des termes portant un argument à longue période de fréquence $N_1 - 2N_2 + g_j$ par exemple et des termes portant une fréquence proche et de signe contraire $-N_1 + 2N_2$. Cet ensemble de termes forme le complément $[Q] \exp(i(gt + \beta))$ où $[Q]$ est une matrice constante carrée et $\exp(i(gt + \beta))$ une matrice colonne. La relation (78) donne :

$$\exp(i(gt + \beta)) = [P]^{-1} \cdot Z,$$

On obtient la relation suivante qui permet de calculer c :

$$c = [Q] \cdot [P]^{-1}.$$

Résultat du calcul.

74. En raison des approches très différentes utilisées dans les théories connues, les tables de comparaison 17 et 18 utilisent les numéros 1, 2 et 3 pour désigner les différentes approximations : 1 pour les résultats obtenus après la résolution du système autonome; 2 pour ceux issus de la résolution du système critique et 3 pour ceux qui contiennent une

Table 17 . Résultats comparés des valeurs propres g_j . Unité = 1×10^{-4} rad/jour.

	g_1	g_2	g_3	g_4
S-A 1 (1983)	23,2046	5,7818	1,2562	0,3188
Brown 1 (1976)	23,0426	5,7528	1,2260	0,3240
F.-Mello 1 (1979)	24,08	5,86	1,26	0,32
S-A 2 (1983)	27,2458	6,9945	1,2963	0,3192
F.-Mello 2 (1979)	27,93	7,05	1,30	0,321
Sampson (1921)	27,56	8,22	1,21	0,32
Brown 3 (1976)	26,9578	7,4447	1,2683	0,3244
Duriez 3 (1982)	25,95	6,77	1,27	0,32
Lieske E-0 (1977)	28,1382	8,3132	1,2173	0,3270
F.-Mello 3 (1979)	27,31	7,00	1,30	0,320

- 1 : résultat du système autonome,
- 2 : résultat du système critique,
- 3 : résultat avec correction de la libration.

correction due à la libration. Les tables 17 et 18 donnent les résultats comparés de ces deux groupes de grandeurs : valeurs propres et vecteurs propres. S-A désigne les solutions approchées issues de la présente théorie.

Table 18

Résultats comparés des vecteurs propres M_{jk} .				
	M_{1k}	M_{2k}	M_{3k}	M_{4k}
S-A 1	1, -2,699 -2 -1,292 -2 -7,713 -5	1,824 -2 1, -2,769 -2 -4,342 -4	5,379 -3 1,075 -1 1, -1,097 -1	7,951 -4 1,295 -2 1,052 -1 1,
Brown 1	1, -2,607 -2 -1,257 -3 -1,476 -5	1,824 -2 1, -2,727 -2 -4,203 -4	5,597 -3 1,110 -1 1, -1,177 -1	7,116 -4 1,161 -2 9,243 -2 1,
S-A 2	1, -1,063 -2 -9,007 -3 -3,969 -5	4,434 -3 1, -4,191 -2 -1,338 -4	3,313 -2 1,686 -1 1, -1,055 -1	3,439 -4 1,746 -2 1,007 -1 1,
Ferraz Mello 2	1, -1,29 -2 -8,6 -3 0,	5,8 -3 1, -4,24 -2 -1, -4	3,19 -2 1,77 -1 1, -1,061 -1	3,3 -3 1,72 -2 9,96 -2 1,
Sampson	1, 1,73 -1 -7,53 -3 0,	2,42 -3 1, -3,21 -2 0,	2,45 -2 2,03 -1 1, -1,20 -1	2,25 -3 1,76 -2 8,73 -2 1,
Brown 3	1, -3,868 -2 -8,661 -3 -3,897 -5	-1,637 -3 1, -4,516 -2 -5,213 -5	3,507 -2 1,686 -1 1, -1,127 -1	3,137 -3 1,519 -2 8,821 -2 1,
Ferraz Mello 3	1, -1,13 -2 -8,9 -3 0,	3,8 -3 1, -4,24 -2 0,	3,32 -2 1,692 -1 1, -1,059 -1	3,4 -3 1,73 -2 9,94 -2 1,

1 : résultat du système autonome,
 2 : résultat du système critique,
 3 : résultat avec correction de la libration.

Les tables 19 et 20 contiennent les valeurs comparées des valeurs propres h_k et les vecteurs propres N_{jk} relatifs au mouvement à très longues périodes des plans des orbites.

Table 19 . Résultats comparés des valeurs propres h_j Unité= 1×10^{-4} rad/jour.

	h_1	h_2	h_3	h_4	h
S-A	-23,2439	-5,7906	-1,2609	-0,3072	-0,000333
Ferraz Mello	-23,31	-5,80	-1,26	-0,31	-0,00033
Brown	-23,0497	-5,7576	-1,2257	-0,3124	
Lieske E-0	-23,3907	-5,7142	-1,2248	-0,3148	
Sampson	-23,40	-5,71	-1,23	-0,32	

Table 20 Résultats comparés des vecteurs propres N_{jk} .

	N_{1k}	N_{2k}	N_{3k}	N_{4k}	équateur
S-A	1,	2,329 -2	0,710 -2	-1,365 -3	0,99936
	-3,592 -2	1,	1,414 -1	2,290 -2	0,99388
	-2,659 -3	-3,722 -2	1,	1,510 -1	0,96918
	-2,759 -4	-1,136 -3	-1,613 -1	1,	0,95967
	-1,419 -3	-8,816 -4	-3,410 -3	-3,818 -3	1,
Ferraz Mello	1,	2,36 -2	0,71 -2	-1,3 -3	0,9994
	-3,59 -2	1,	1,418 -1	2,27 -2	0,9939
	-2,7 -3	-3,77 -2	1,	1,493 -1	0,9695
	-3, -4	-1,1 -3	-1,620 -1	1,	0,8601
	-1,4 -3	-9, -4	-3,4 -3	-3,8 -3	1,
Brown	1,	2,441 -2	1,111 -2	2,239 -3	
	-3,508 -2	1,	1,499 -1	2,414 -2	
	-2,639 -3	-3,696 -2	1,	1,367 -1	
	-2,744 -6	-1,125 -3	-1,745 -1	1,	

La table 17 montre la modification importante des valeurs propres g_1 et g_2 quand on passe de l'approximation 1 à l'approximation 2 c'est à dire de la solution du système autonome à celle du système critique; par contre, il n'y a pratiquement pas de changement de la valeur propre g_4

relative au mouvement propre du grand axe du satellite J4. Ce résultat vient du fait que l'apparition des termes critiques est en liaison étroite avec l'existence des excentricités induites. Ces dernières sont importantes dans le cas des satellites J1 et J2, nulles dans le cas du satellite J4. Par ailleurs, dans la solution des équations relatives au mouvement des plans des orbites, les valeurs propres h_k ne subissent pas de modifications notables entre les deux approximations 1 et 2; car il n'existe pas d'inégalités importantes venant du mouvement forcé.

TRAITEMENT DES TERMES DE DEGRE ELEVE.

75. Parmi les inégalités du mouvement des satellites galiléens issues des termes de degré élevé, il existe un seul groupe de termes importants calculé la première fois par de Haerdtl (1892).

Dans les équations des longitudes et des moyens mouvements, les inégalités de ce groupe sont de degré 4 par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Dans la présente théorie, ces termes sont de degré 4 par rapport aux variables X_3 , X_4 , X_5 , X_6 . Ceux de degré 6 des mêmes variables sont négligeables. Leurs arguments ont une partie principale commune :

$$-3L_3 + 7L_4$$

et un complément composé des longitudes des périjoves et des noeuds. L_3 et L_4 représentent les longitudes des satellites J3 et J4. Les arguments ainsi formés donnent lieu à des termes à longues périodes.

De Haerdtl donne l'ordre de grandeur de l'amplitude de ces inégalités dès 1892 en signalant que dans le cas du satellite J3, cette inégalité dépasse en amplitude les termes périodiques dus aux perturbations du satellite 1. Ses travaux sont bien antérieurs à ceux de Sampson. Lors de la publication de sa théorie, Sampson (1921) a signalé dans le chapitre "Erreurs et omissions" que son résultat concernant ce groupe de termes est incomplet, et c'est la raison pour laquelle il les a laissés à l'écart de sa théorie.

Lieske (1973) n'a pas suivi la voie indiquée par Sampson pour le calcul de ces termes. Son développement utilise pour variables les éléments des orbites.

orbites.

Le calcul de de Haerdtl est limité aux variables représentant les excentricités et les périjoves des orbites. Jusqu'à présent, les différentes approches ne vont pas au delà de ces limites et la collecte des termes de ce groupe reste incomplète. Il convient de compléter le développement par l'introduction, dans le calcul, des variables représentant les inclinaisons et les longitudes des noeuds des orbites. C'est ce qui a été fait ici.

Développements de de Haerdtl, de Sampson et de Lieske

76. De Haerdtl (1892) écrit l'équation donnant cette inégalité dans le cas de la longitude du satellite 3 sous la forme :

$$\frac{d^2 \ell''}{dt^2} = - \frac{3fm'''}{a''^2} \frac{dR}{d\varepsilon}$$

dans laquelle R représente la fonction perturbatrice; ℓ'' , a'' , ε'' désignent respectivement la longitude moyenne, le demi-grand axe et la longitude moyenne du satellite J3 à l'époque initiale; f est la constante de gravitation pour la masse de Jupiter prise égale à l'unité et m''' la masse du satellite J4. Le développement du second membre fait apparaître les cinq arguments suivants :

$$(79) \quad \begin{aligned} & -3\ell'' + 7\ell''' - 4\bar{\omega}'' \\ & -3\ell'' + 7\ell''' - 3\bar{\omega}'' - \bar{\omega}''' \\ & -3\ell'' + 7\ell''' - 2\bar{\omega}'' - 2\bar{\omega}''' \\ & -3\ell'' + 7\ell''' - \bar{\omega}'' - 3\bar{\omega}''' \\ & -3\ell'' + 7\ell''' - 4\bar{\omega}''' \end{aligned}$$

Les coefficients des termes correspondants sont de degré 4 par rapport aux excentricités e'' et e''' des satellites J3 et J4. L'intégration qui fait suite au développement tient compte des fréquences des longitudes des périjoves $\bar{\omega}''$ et $\bar{\omega}'''$.

Sampson (1921) écrit l'équation donnant l'inégalité de la longitude du satellite i sous la forme :

$$\frac{1}{n_i} \frac{d^2 v_i}{dt^2} = (-3 + 2\gamma_0 - 2\lambda_0) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_{ij} \right)_{\tau=t} / a_i^2 n_i^2 .$$

dans laquelle γ_0 , λ_0 sont des quantités faibles devant 1 et Ω_{ij} , la fonction perturbatrice. Le calcul n'a pas abouti à un résultat satisfaisant et ce groupe de termes est omis dans sa théorie.

Lieske (1973) utilise une équation identique à celle de de Haerdtl :

$$\frac{d^2\lambda_3}{dt^2} = - \frac{3k^2 m_4}{a_3^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda_3}$$

et un développement identique jusqu'à l'obtention des arguments (79). Ensuite, son développement se poursuit avec la substitution de chaque quantité osculatrice

$$\tilde{e}_j \cos \tilde{\omega}_j, \tilde{e}_j \sin \tilde{\omega}_j, \dots (j=3,4),$$

par une somme de termes équivalents à longues périodes donnée par :

$$(80) \quad \begin{aligned} \tilde{e}_j \cos \tilde{\omega}_j &= \sum_{i=1}^N e_i^{(j)} \cos \Pi_i \\ \tilde{e}_j \sin \tilde{\omega}_j &= \sum_{i=1}^N e_i^{(j)} \sin \Pi_i \end{aligned}$$

Lieske a comparé le résultat obtenu à celui de de Haerdtl. La comparaison a permis de trouver des erreurs de calcul numérique dans le résultat de de Haerdtl. L'introduction des termes dépendant de l'excentricité du périjove de l'orbite du Soleil dans les séries (80) lui a permis d'obtenir un petit nombre de termes supplémentaires.

Calcul des termes de de Haerdtl dans la présente théorie.

77. Les termes appartenant au groupe des inégalités de de Haerdtl apparaissent sans calcul particulier dans les seconds membres des équations du mouvement des satellites J3 et J4. Deux faits sont cependant à souligner et caractérisent le présent développement par rapport à celui qui a été fait par les auteurs précédents :

* Présence du groupe des variables représentant les inclinaisons et les longitudes des noeuds des orbites dans le développement au même titre que le groupe des variables représentant les excentricités et les longitudes des périjoves des orbites. Comme conséquence, on obtient dans le résultat non seulement les arguments (79) dont la composition est limitée aux longitudes des périjoves, mais aussi de nouveaux arguments dont la composition est étendue aux longitudes des noeuds.

* Présence des termes portant l'argument principal $-3L_3 + 7L_4$, de degrés 3 et 5 par rapport aux variables $x_{3j}, x_{4j}, x_{5j}, x_{6j}$ ($j=3,4$) dans les seconds membres des équations \dot{x}_{3j} et \dot{x}_{5j} relatives au

mouvement des grands axes et des plans des orbites, donnera des inégalités du rayon-vecteur, de la longitude vraie et de la latitude. Ces inégalités sont absentes dans les autres théories.

Par ordre d'importance dans le résultat final, ce sont les termes apparus dans les seconds membres des équations $\dot{\chi}_2$ qui arrivent en tête, car ces termes seront soumis à deux intégrations successives, la première donnera les inégalités des moyens mouvements et la deuxième donnera les inégalités des longitudes moyennes. Ensuite, arrivent les termes apparus dans les seconds membres des équations $\dot{\chi}_3$. Ils seront soumis à une seule intégration mais les amplitudes obtenues resteront importantes, car ce sont des termes de degré 3, c'est à dire un degré de moins par rapport à ceux de l'équation $\dot{\chi}_2$ relatif au moyen mouvement. En troisième position se trouvent les termes de $\dot{\chi}_5$ et en quatrième position, ceux de $\dot{\chi}_4$.

Les tables 21a à 21d contiennent un extrait de ce groupe de termes contenu dans les seconds membres F_{1j} , F_{2j} , F_{3j} , F_{4j} ($j=3,4$) des quatre équations du mouvement relatives aux satellites J3 et J4. Cet extrait est limité aux termes principaux d'ordre 1 des masses. Dans le développement, on trouve en effet un très grand nombre de termes de contribution insensible : ce sont des termes d'ordre 2 dont l'amplitude est au moins 1000 fois plus faible que celle de l'ordre 1 et aussi des termes de degré 6 ou ceux qui portent en plus des variables de fréquence ou de circulation. Dans la table 21a, extrait de F_{1j} , on trouve des couples de termes conjugués. Pour un terme portant le facteur variable littéral f et l'argument $3L_3 - 7L_4$, il existe un conjugué de même coefficient portant le facteur variable littéral \bar{f} , conjugué de f et l'argument $-3L_3 + 7L_4$. La fonction de temps de chaque terme est une exponentielle d'un argument du temps. C'est seulement après les opérations de substitution des variables par des séries correspondantes qu'on obtiendra F_{1j} sous la forme d'une série de cosinus dont les arguments dépendent du temps. Il en est de même dans F_{2j} où les fonctions apparues sont également des exponentielles. Ces termes apparaissent par couples de conjugués et fournissent à la fin des substitutions des termes portant des sinus dont les arguments dépendent du temps. Dans les tables 21a et 21b, les deux premiers couples sont représentés explicitement par des termes conjugués, ensuite, chaque couple suivant est représenté par un seul terme dans le but de simplifier la présentation des tables.

Extrait des seconds membres F_j , F_{2j} , F_{3j} , F_{4j} ($j=3,4$)
des équations du mouvement : groupes de termes d'ordre 1
portant l'argument quasi-résonnant $3L_3-7L_4$.

Table 21a. Extrait de F_{4j} .

n°	Argument A	Exposants des variables du facteur variable f								Coefficients de $f \cdot \exp iA$ ----- (1×10^{-7} rad.) dans -----			
		X_{33}	X_{43}	X_{53}	X_{63}	X_{34}	X_{44}	X_{54}	X_{64}	F_{β} , sat.3	Trace	F_{14} , sat.4	Trace
1	$3L_3-7L_4$	4	- 4344,52	m_4	5836,07	m_3
	$-3L_3+7L_4$.	4	- 4344,52	m_4	5836,07	m_3
2	$3L_3-7L_4$	3	.	.	.	1	.	.	.	24968,71	m_4	-34455,58	m_3
	$-3L_3+7L_4$.	3	.	.	.	1	.	.	24968,71	m_4	-34455,58	m_3
L'impression du conjugué est omise pour les termes suivants :													
3	$3L_3-7L_4$	2	.	.	.	2	.	.	.	-52883,00	m_4	75439,12	m_3
4	$3L_3-7L_4$	1	.	.	.	3	.	.	.	48684,26	m_4	-72428,44	m_3
5	$3L_3-7L_4$	4	.	.	.	-16314,12	m_4	25639,48	m_3
6	$3L_3-7L_4$	2	.	2	- 2288,76	m_4	2961,10	m_3
7	$3L_3-7L_4$	1	.	2	.	1	.	.	.	7421,35	m_4	- 9790,11	m_3
8	$3L_3-7L_4$.	.	2	.	2	.	.	.	- 6009,88	m_4	8116,12	m_3
9	$3L_3-7L_4$	2	.	1	.	.	.	1	.	4717,60	m_4	- 6067,78	m_3
10	$3L_3-7L_4$	1	.	1	.	1	.	1	.	-15342,28	m_4	20099,45	m_3
11	$3L_3-7L_4$.	.	1	.	2	.	1	.	12469,55	m_4	-16699,72	m_3
12	$3L_3-7L_4$	2	2	.	- 2428,84	m_4	3106,68	m_3
13	$3L_3-7L_4$	1	.	.	.	1	.	2	.	7920,93	m_4	-10309,34	m_3
14	$3L_3-7L_4$	2	.	2	.	- 6459,67	m_4	8583,59	m_3

Table 21b Extrait de F_{2j} .

n°	Argument A	Exposants des variables du facteur variable f								Coefficients de $i \cdot f \cdot \exp iA$ ----- (1×10^{-7} rad.) dans -----			
		X_{33}	X_{43}	X_{53}	X_{63}	X_{34}	X_{44}	X_{54}	X_{64}	F_{23} , sat.3	Trace	F_{24} , sat.4	Trace
1	$3L_3-7L_4$	4	- 2510,90	m_4	2610,42	m_3
	$-3L_3+7L_4$.	4	2510,90	m_4	- 2610,42	m_3
2	$3L_3-7L_4$	3	.	.	.	1	.	.	.	16169,53	m_4	-16810,41	m_3
	$-3L_3+7L_4$.	3	.	.	.	1	.	.	-16169,53	m_4	16810,41	m_3
L'impression du conjugué est omise pour les termes suivants :													
3	$3L_3-7L_4$	2	.	.	.	2	.	.	.	-38929,66	m_4	40472,63	m_3
4	$3L_3-7L_4$	1	.	.	.	3	.	.	.	41502,33	m_4	-43147,27	m_3
5	$3L_3-7L_4$	4	.	.	.	-16509,57	m_4	17163,93	m_3
6	$3L_3-7L_4$	2	.	2	- 1107,11	m_4	1150,99	m_3
7	$3L_3-7L_4$	1	.	2	.	1	.	.	.	3948,60	m_4	- 4105,10	m_3
8	$3L_3-7L_4$.	.	2	.	2	.	.	.	- 3555,03	m_4	3695,93	m_3
9	$3L_3-7L_4$	2	.	1	.	.	.	1	.	2214,23	m_4	- 2301,99	m_3
10	$3L_3-7L_4$	1	.	1	.	1	.	1	.	- 7897,19	m_4	8210,19	m_3
11	$3L_3-7L_4$.	.	1	.	2	.	1	.	7110,05	m_4	- 7391,86	m_3
12	$3L_3-7L_4$	2	2	.	- 1107,11	m_4	1150,99	m_3
13	$3L_3-7L_4$	1	.	.	.	1	.	2	.	3948,60	m_4	- 4105,10	m_3
14	$3L_3-7L_4$	2	.	2	.	- 3555,03	m_4	3695,93	m_3

Table 21c Extrait de F_{3j} .

n°	Argument A	Exposants des variables du facteur variable f								Coefficients de $if.exp iA$ ----- (1×10^{-7} rad.) dans -----			
		X_{33}	X_{43}	X_{53}	X_{63}	X_{34}	X_{44}	X_{54}	X_{64}	F_{33} , sat.3	Trace	F_{34} , sat.4	Trace
<u>degré 3</u>													
1	$-3L_3 + 7L_4$.	3	2541,44	m_4	- 4252,46	m_3
2	$-3L_3 + 7L_4$.	2	.	.	.	1	.	.	-12274,64	m_4	20476,38	m_3
3	$-3L_3 + 7L_4$.	1	.	.	.	2	.	.	19701,56	m_4	-32744,34	m_3
4	$-3L_3 + 7L_4$	3	.	.	-10501,77	m_4	17367,54	m_3
5	$-3L_3 + 7L_4$.	1	.	2	560,29	m_4	- 1038,45	m_3
6	$-3L_3 + 7L_4$.	.	.	2	.	1	.	.	- 999,15	m_4	1869,89	m_3
7	$-3L_3 + 7L_4$.	1	.	1	.	.	.	1	- 1120,58	m_4	2076,90	m_3
8	$-3L_3 + 7L_4$.	.	.	1	.	1	.	1	1998,31	m_4	- 3739,77	m_3
9	$-3L_3 + 7L_4$.	1	2	560,29	m_4	- 1038,45	m_3
10	$-3L_3 + 7L_4$	1	.	2	- 999,15	m_4	1869,89	m_3

degré 5. Contribution finale insensible; ci-dessous, une liste de cinq premiers termes sur les 68 termes d'ordre 1 :

11a	$3L_3 - 7L_4$	5	- 1848,20	m_4		
12	$3L_3 - 7L_4$	4	.	.	.	1	.	.	.	12144,95	m_4	-19284,93	m_3
13	$3L_3 - 7L_4$	3	.	.	.	2	.	.	.	-30356,24	m_4	49964,38	m_3
14	$3L_3 - 7L_4$	2	.	.	.	3	.	.	.	35021,80	m_4	-61159,64	m_3
15	$3L_3 - 7L_4$	1	.	.	.	4	.	.	.	-17387,73	m_4	34104,09	m_3
11b	$3L_3 - 7L_4$	5	.	.	.			- 6314,65	m_3

Table 21d Extrait de F_{4j} .

n°	Argument A	Exposants des variables du facteur variable f								Coefficients de $if.exp iA$ ----- (1×10^{-7} rad.) dans -----			
		X_{33}	X_{43}	X_{53}	X_{63}	X_{34}	X_{44}	X_{54}	X_{64}	F_{43} , sat.3	Trace	F_{44} , sat.4	Trace
<u>degré 3</u>													
1	$-3L_3 + 7L_4$.	2	.	1	560,29	m_4	- 582,32	m_3
2	$-3L_3 + 7L_4$.	1	.	1	.	1	.	.	- 1998,31	m_4	2076,90	m_3
3	$-3L_3 + 7L_4$.	.	.	1	.	2	.	.	1799,13	m_4	- 1869,89	m_3
4	$-3L_3 + 7L_4$.	2	1	- 560,29	m_4	582,32	m_3
5	$-3L_3 + 7L_4$.	1	.	.	.	1	.	1	1998,31	m_4	- 2076,90	m_3
6	$-3L_3 + 7L_4$	2	.	1	- 1799,13	m_4	1869,89	m_3

Le développement des seconds membres par substitution utilise la solution S-A2. Cette opération est suivie d'une intégration par rapport au temps. Les tables 22a et 22b donnent les inégalités obtenues comparée

Table 22a

INEGALITES DE DE HAERDTL. Satellite 3.

LIESKE (1973)			Argument	Résultat de notre développement		Coef. obtenu avec masses Sampson
Coef. 10^{-7} rad	Période	Coef. 10^{-7} rad.		Période		
<u>Longitude moyenne</u>						
1	- 0,6	75,6 ans	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - \pi_3 - 2\pi_4$	- 3,5	151,8 ans	- 2,8
2	+ 3,1	123,5 "	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - 3\pi_4$	+383,0	1102,8 "	+304,5
3	+ 0,5	57,9 "	$-3L_3 + 7L_4 - 4\pi_3$	+ 0,7	65,9 "	+ 0,6
4	- 7,1	44,6 "	$-3L_3 + 7L_4 - 3\pi_3 - \pi_4$	- 9,7	47,9 "	- 7,7
5	+ 43,8	36,3 "	$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_3 - 2\pi_4$	+ 56,1	37,7 "	+ 44,6
6	+ 0,2	34,0 "	$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_3 - \pi_4 - \pi_5$	+ 0,2	35,2 "	+ 0,2
7	-127,9	30,6 "	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - 3\pi_4$	-157,9	31,0 "	-125,5
8	- 0,9	29,0 "	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - 2\pi_4 - \pi_5$	- 1,1	29,3 "	- 0,9
9	+146,6	26,5 "	$-3L_3 + 7L_4 - 4\pi_4$	+176,9	26,4 "	+140,7
10	+ 1,4	25,2 "	$-3L_3 + 7L_4 - 3\pi_4 - \pi_5$	+ 1,7	25,2 "	+ 1,4
11			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - 2\pi_4 - \pi_5$	+ 1,5	1053,9 "	+ 1,2
12			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - \pi_4 - \pi_5 - \Omega_2 - \Omega_3$	+239,0	6563,9 "	+190,0
13			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - \pi_4 - 2\Omega_3$	- 1,7	19,8 "	- 1,4
14			$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - 2\Omega_3$	+ 4,8	17,8 "	+ 3,8
15			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - \pi_4 - \Omega_3 - \Omega_4$	+ 4,8	22,2 "	+ 3,8
16			$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - \Omega_3 - \Omega_4$	- 13,2	19,7 "	- 10,5
17			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - \pi_3 - 2\Omega_4$	- 3,0	1437,6 "	- 2,4
18			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - \pi_4 - 2\Omega_4$	- 3,5	25,3 "	- 2,8
19			$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - 2\Omega_4$	+ 9,3	22,1 "	+ 7,4
<u>Longitude vraie</u>						
1			$-4L_3 + 7L_4 - 3\pi_4$	+ 11,4	7,1 jours	+ 9,1
2			$-4L_3 + 7L_4 - \pi_3 - 2\pi_4$	- 6,5	7,1 "	- 5,2
3			$-4L_3 + 7L_4 - 2\pi_3 - \pi_4$	+ 1,1	7,2 "	+ 0,9
<u>Rayon-vecteur</u>						
1			$-4L_3 + 7L_4 - 3\pi_4$	+ 5,7	7,1 jours	+ 4,5
2			$-4L_3 + 7L_4 - \pi_3 - 2\pi_4$	- 3,3	7,1 "	- 2,6
3			$-4L_3 + 7L_4 - 2\pi_3 - \pi_4$	+ 0,6	7,2 "	+ 0,5
<u>Latitude</u>						
1			$-4L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - \Omega_4$	- 0,5	7,1 jours	- 0,4
2			$-4L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - \Omega_3$	+ 0,4	7,1 "	+ 0,3

Table 22b

INEGALITES DE DE HAERDTL. Satellite 4.

LIESKE (1973)			Résultat de notre développement		
	Coeff. 10 ⁻⁷ rad	Période	Argument	Coeff. 10 ⁻⁷ rad.	Période
<u>Longitude moyenne</u>					
1	+ 0,8	75,6 ans	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - \pi_3 - 2\pi_4$	+ 3,6	151,8 ans
2	- 4,2	123,5 "	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - 3\pi_4$	-398,2	1102,8 "
3	- 0,7	57,9 "	$-3L_3 + 7L_4 - 4\pi_3$	- 0,8	65,9 "
4	+ 9,5	44,6 "	$-3L_3 + 7L_4 - 3\pi_3 - \pi_4$	+ 10,1	47,9 "
5	- 58,6	36,3 "	$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_3 - 2\pi_4$	- 58,2	37,7 "
6	- 0,3	34,0 "	$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_3 - \pi_4 - \pi_5$	- 0,3	35,2 "
7	+171,1	30,6 "	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - 3\pi_4$	+164,1	31,0 "
8	+ 1,2	29,0 "	$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - 2\pi_4 - \pi_5$	+ 1,1	29,3 "
9	-196,1	26,5 "	$-3L_3 + 7L_4 - 4\pi_4$	-183,8	26,4 "
10	- 1,9	25,2 "	$-3L_3 + 7L_4 - 3\pi_4 - \pi_5$	- 1,7	25,2 "
11			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - 2\pi_4 - \pi_5$	- 2,8	1053,9 "
12			$-3L_3 + 7L_4 - 6 - \pi_4 - \pi_5 - \Omega_2 - \Omega_3$	-248,4	6563,9 "
13			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - \pi_4 - 2\Omega_3$	+ 1,8	19,8 "
14			$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - 2\Omega_3$	- 5,0	17,8 "
15			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - \pi_4 - \Omega_3 - \Omega_4$	- 5,0	22,2 "
16			$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - \Omega_3 - \Omega_4$	+ 13,7	19,7 "
17			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_2 - \pi_3 - 2\Omega_4$	+ 3,1	1437,6 "
18			$-3L_3 + 7L_4 - \pi_3 - \pi_4 - 2\Omega_4$	+ 3,6	25,3 "
19			$-3L_3 + 7L_4 - 2\pi_4 - 2\Omega_4$	- 9,6	22,1 "
<u>Longitude vraie</u>					
1			$-3L_3 + 6L_4 - 3\pi_4$	- 17,4	7,1 jours
2			$-3L_3 + 6L_4 - \pi_3 - 2\pi_4$	+ 9,7	7,1 "
3			$-3L_3 + 6L_4 - 2\pi_3 - \pi_4$	- 1,8	7,2 "
<u>Rayon-vecteur</u>					
1			$-3L_3 + 6L_4 - 3\pi_4$	- 8,7	7,1 jours
2			$-3L_3 + 6L_4 - \pi_3 - 2\pi_4$	+ 4,8	7,1 "
3			$-3L_3 + 6L_4 - 2\pi_3 - \pi_4$	- 0,9	7,2 "
<u>Latitude</u>					
1			$-3L_3 + 6L_4 - 2\pi_4 - \Omega_4$	+ 0,5	7,1 jours
2			$-3L_3 + 6L_4 - 2\pi_4 - \Omega_3$	- 0,4	7,1 "

à celles de Lieske (1973). Pour les amplitudes des termes qui se trouvent à la fois dans les deux théories, les différences viennent de deux sources: les valeurs attribuées aux masses m_3 , m_4 et les fréquences utilisées dans l'intégration. Ces fréquences sont relatives aux mouvements des axes définis par les arguments Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 . Ces différences sont très visibles dans les deux cas types suivants :

* La différence des amplitudes obtenues pour le terme numéro 7 de la longitude moyenne du satellite 3 vient de celles des masses utilisées : dans Lieske 1973, la valeur attribuée à m_4 est celle de la théorie de Sampson, elle est égale à 0,00004504 pour la masse de Jupiter prise égale à l'unité. La valeur de 0,00005661 provenant de Null (1976) est utilisée par contre dans ce travail.

* La différence des amplitudes obtenues pour le terme numéro 2 de la longitude moyenne du satellite 3 vient principalement de la fréquence de l'argument Π_2 utilisée dans le calcul. Dans le travail de Lieske (1973), $\Pi_2 = 0,000821643$ rad/jour, dans le nôtre cette valeur est issue du système critique (paragraphe 74) et elle vaut 0,000699451 rad/jour. Cette valeur a une grande influence sur celle du facteur d'intégration car la fréquence de l'argument principal $-3L_3 + 7L_4$ est de 0,000779718 rad/jour.

Chapitre 4

LE CALCUL DES INEGALITES DUES A LA PERTURBATION DU SOLEIL
ET LE CHOIX D'UNE THEORIE DU SOLEIL JOVICENTRIQUE

78. Les effets des perturbations directes des autres planètes sur le mouvement des satellites galiléens sont insensibles. On doit simplement tenir compte des effets indirects transmis par les inégalités du mouvement héliocentrique de Jupiter sous l'action de ces planètes. Ce groupe d'inégalités devient celui des coordonnées du Soleil quand on considère le mouvement relatif jovicentrique de celui-ci.

Certes, on peut prendre n'importe laquelle des théories planétaires connues pour le calcul des perturbations, car le mouvement de Jupiter est toujours rapporté à un système héliocentrique; mais dans la pratique, le choix de la théorie à utiliser dépend d'abord de sa précision, puis de la possibilité d'en faire une utilisation facile sans conversion complexe, ensuite de la compatibilité concernant la forme quasi-périodique ou séculaire des inégalités et enfin de la présentation de ces mêmes inégalités. Une voie possible évitant toutes les conversions est l'application de la méthode déjà développée pour les satellites galiléens à la construction d'une théorie de Jupiter. Un premier essai a été fait par Gomes (1982) qui a montré l'efficacité de cette méthode à la première approximation. Dans le présent travail, cette application est abordée avec un ordre et un degré plus élevés.

Ce chapitre contient trois parties :

- La première partie parle des effets de troncature dans le développement des théories de Sampson, de Lieske et de notre premier développement utilisant la théorie de Jupiter de Hill.

- La deuxième partie aborde le problème du choix d'une théorie du

Soleil jovicentrique pour le calcul des inégalités du mouvement des satellites galiléens.

- La troisième partie expose la méthode utilisée dans la construction d'une théorie planétaire de présentation commode pour son utilisation dans la théorie des satellites galiléens. Elle montre, en particulier, les opérations d'ajustement effectuées lors de l'introduction des termes non linéaires dans la solution à très longues périodes. Cet ajustement permet de limiter le nombre de phases apparues dans les fonctions trigonométriques de la solution. Les résultats obtenus se présentent ainsi sous une forme compatible avec celle de la théorie des satellites galiléens en construction.

EFFETS DE TRONCATURE DANS LE DEVELOPPEMENT DES INEGALITES,
COMPARAISON DES RESULTATS.

79. L'utilisation de la théorie de Jupiter de Hill (1895) avec les mêmes simplifications adoptées par Sampson pour l'élimination des termes de Poisson doit permettre de faire une vérification efficace de notre propre développement car les termes principaux obtenus doivent être identiques quel que soit le jeu de variables utilisé. A l'issue du développement de la solution (Thuillot et Vu, 1983) utilisant notre jeu de variables, de nombreux termes obtenus sont bien différents en amplitude de ceux de Sampson (1921) et de Lieske (1973). L'interprétation de ces différences n'est pas facile, en particulier l'approche utilisée ici et les variables choisies rendent difficile une comparaison dans les détails et surtout pendant les étapes intermédiaires du développement. On est amené à faire une vérification plus directe par une reprise du développement suivant le formulaire de Sampson complété par Lieske (1974). Le résultat confirme la solution obtenue précédemment par le premier calcul utilisant notre jeu de variables. Ce nouveau développement donne des termes identiques et aussi des termes très différents en amplitude en comparaison à ceux de Lieske (tables 23a à 23c). Les écarts peuvent atteindre quatre décimales significatives et peuvent s'expliquer en partie par des effets de troncature dans les séries de Lieske et de Sampson comme on va le voir ci-après. Les quantités publiées dans ces tables de comparaison appartiennent surtout au satellite J4, qui est le satellite le plus perturbé par le Soleil. C'est le cas le plus simple pour le travail de comparaison, du fait qu'il n'existe pas de redistribution des valeurs des coefficients portant le même argument, sous l'effet de la libration, comme dans le cas

des trois premiers satellites.

Un résumé très succinct des grandes lignes de la théorie de Sampson est donné ci-après. On peut ainsi mieux situer les quantités intermédiaires comparées.

Généralités sur la théorie de Sampson.

La position du satellite i est définie par les coordonnées cylindriques :

$$(81) \quad \begin{cases} x_i = a_i(1 + \xi_i), \\ y_i = l_i + \upsilon_i, \\ z_i = a \zeta_i \end{cases} .$$

rapportées au repère équatorial mobile de Jupiter. a_i représente la valeur moyenne de la projection du rayon-vecteur du satellite i sur ce plan de référence; l_i la partie linéaire du temps de la longitude moyenne. Les variables utilisées sont ξ_i , υ_i et ζ_i . Les composantes des fonctions perturbatrices sont notées Ω_{ij} pour la partie relative à l'interaction, Ω_{iS} pour la partie relative à l'action du Soleil et Ω_{iJ} pour la partie due aux harmoniques zonaux du développement du potentiel de Jupiter. Elles sont développées jusqu'au degré 2 par rapport à ces variables. Les équations du mouvement sont de la forme :

$$(82) \quad \begin{cases} \ddot{\xi} + \xi [1 + \lambda_0 + 2 \sum \lambda_1 \cos r t] - \sum E_{p'} \cos p' t = 0, \\ -\ddot{\upsilon} + \xi [2 + \lambda_0] - \sum B_{q'} \cos q' t = 0, \\ \ddot{\zeta} + \zeta [1 + \lambda_0 + 2 \sum \lambda_1 \cos \kappa t] - \sum C_{q'} \cos q' t = 0. \end{cases}$$

$E_{p'}$, $B_{q'}$, $C_{q'}$ sont des constantes. L'intégration de ce système donne comme solution pour les variables ξ , υ , ζ des séries de fonctions quasi-périodiques du temps. Quand la première équation est mise sous la forme simplifiée suivante :

$$\ddot{\xi} + p^2 \xi = \sum E_{p'} \cos p' t,$$

elle fournit la solution :

$$\xi = \sum \frac{1}{p^2 - p'^2} E_{p'} \cos p' t;$$

dans laquelle $F_1 = 1/(p^2 - p'^2)$ représente le facteur d'intégration correspondant à l'argument $p' t$; p a une valeur proche de 1. Lorsqu'on considère l'équation complète, le facteur d'intégration est légèrement

modifié :

$$F_1 = \frac{p^2 - p^2 - 2 - 2^2}{1}$$

Les petites quantités 2 et 2' sont faibles devant 1, c'est à dire devant p. Le résultat pour ξ , obtenu sous la forme d'une série de termes périodiques, est substitué ensuite à la variable ξ dans le développement de la deuxième équation (équation en ψ). Dans l'intégration de cette équation différentielle du premier ordre par rapport au temps, le facteur d'intégration d'un terme portant la fréquence l' est :

$$F_2 = \frac{1}{l'}$$

La troisième équation $\ddot{\xi}$ est une équation différentielle du deuxième ordre par rapport au temps. Son intégration est analogue à celle de la première.

Détails de développement pour quelques termes à coefficients très

différents.

Dans le travail de comparaison suivant, la notation des diverses grandeurs est celle de Sampson (1921) et de Lieske (1973), qui est différente de celle utilisée partout ailleurs dans la présente théorie.

Argument $l_4 - 2\pi + \psi$, table 23c

Le terme correspondant à cet argument provient du groupe de facteurs:

$$N^2 \frac{N^2 R_3}{3X_4 Z} - \frac{n_4^2}{S} \frac{N^2 R_3}{R_2}$$

dans l'expression de la fonction perturbatrice \mathcal{L}_{45} de l'équation \ddot{S}_4 ; où S désigne la masse du Soleil quand la masse de Jupiter est prise égale à 1, N le moyen mouvement du Soleil et n_4 celui du satellite 4, X_4 et Z les coordonnées du Soleil dans le système d'axes défini par la position du satellite J4 et R le rayon vecteur jovien du Soleil. Le premier facteur est une constante. Dans le cas du satellite 4, on a $N^2/n_4^2 = .0000148379$.

$S/N^2 R_3^2$ a pour développement la série : $\sum p_k \cos kg$, où k est un entier

positif ou nul et θ représente l'anomalie moyenne du Soleil jovicentrique.

Le dernier facteur se présente sous la forme d'une série de termes contenant les variables du problème.

Pour l'argument considéré $\ell_4 - 2\pi + \psi$, qui s'écrit aussi sous la forme $h_0''' - 2\pi + 2\psi$, le développement donne les contributions suivantes pour les différentes valeurs de k :

k	contribution en amplitude
0	-,021281
1	+,084720
2	-,062965
3	-,000436
4	-,000002

L'unité utilisée est 1×10^{-7} radian jovicentrique. Le développement de Sampson (1921) limité aux deux premières contributions donne à cet argument le coefficient 0,0637 :

$$,0637 \sin (h_0''' - 2\pi + 2\psi) \quad \text{avec } h_0''' = \ell_4 - \psi.$$

(Table XV, page 173 de sa théorie)

Ce coefficient est très proche de la somme de deux premières contributions obtenues ci-dessus : 0,063439.

La liste des contributions ci-dessus montre que la troisième contribution est presque égale à la somme des deux premières et de signe contraire. C'est donc la troncature faite plus ou moins tôt dans les séries utilisées qui est la cause principale de la différence apparue dans la table 23c. Pour ce même argument, nous avons trouvé des coefficients encore plus faibles dans le cas des trois premiers satellites du fait que les facteurs numériques :

$$N^2/n_1^2, N^2/n_2^2, N^2/n_3^2$$

qui doivent entrer dans le calcul sont nettement plus faibles que le rapport N^2/n_4^2 donné ci-dessus. Les résultats comparés pour cet argument se trouvent dans la table 23d. Le résultat est peu différent du nôtre pour ce qui concerne le satellite 4. Cependant il semble qu'il n'ait pas tenu compte de ces termes complémentaires pour le satellite 3 comme on le voit dans la table 23d.

Table 23a : INEGALITES DU RAPPORT r/a DU SATELLITE J4
Extrait du groupe de termes dus à l'action du Soleil.

Argument	coefficient x 10 ⁷		
	SAMPSON	LIESKE	Développement pour la comparaison
			- Partie concordante -
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 4G$	0	- 6	- 5,4
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 3G$	0	- 62	- 60,9
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 2G$	- 550	- 554	- 551,1
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - G$	0	27	27,3
$2 l_4 - 2\pi - 2G$	- 151	- 155	- 148,3
.....
			- Partie différente -
$l_4 + \pi_4 - 2\psi$	0	0	35,2
$l_4 - \pi_4 - 2\pi + 2\psi$	0	- 24	0
$l_4 - \pi_4 + 2\pi - 2\psi$	0	30	0
.....

Table 23b : INEGALITES DE LA LONGITUDE DU SATELLITE J4
Extrait du groupe de termes dus à l'action du Soleil.

			- Partie concordante -
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 4G$	0	12	10,9
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 3G$	0	124	123,3
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 2G$	1108	1091	1088,8
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - G$	0	- 55	- 54,9
$2 l_4 - 2\pi - 2G$	207	218	204,2
$2 l_4 - 2\pi - 3G$	0	36	34,9
$l_4 + \pi_4 - 2\pi - 2G$	0	- 28	- 27,8
$l_4 - 2\pi + 2\psi - 2G$	0	73	72,3
$l_4 - 2\pi + 2\psi - 3G$	0	8	8,2
.....
			- Partie différente -
$-2\pi + 2\psi$	0	-5349	- 6,0
$-2\pi_4 + 2\psi$	0	- 381	0,7
.....

Table 23c : INEGALITES DE LA LATITUDE DU SATELLITE J4
Extrait du groupe de termes dus à l'action du Soleil.

			- Partie concordante -
$l_4 - 2\pi + \psi - 4G$	6	8	7,8
$l_4 - 2\pi + \psi - 3G$	88	8	87,7
$l_4 - 2\pi + \psi - 2G$	768	769	769,3
$l_4 - 2\pi + \psi - G$	- 38	- 38	- 37,6
.....
			- Partie différente -
$l_4 - 2\pi + \psi$	- 383	2	- 0,5
.....

Table 23d : Extrait des tables des latitudes

	argument	Coefficient x 10 ⁷		
		Sampson	Lieske	Notre -- développement
sat.1	l ₁ -2π + ψ	0	0	0
sat.2	l ₂ -2π + ψ	-4	0	0
sat.3	l ₃ -2π + ψ	-42	-36	0
sat.4	l ₄ -2π + ψ	-383	+ 2	-0,5

Argument -2π + 2ψ de la table 23b

Le terme correspondant à cet argument a un coefficient important dans la théorie de Lieske :

$$-5349 \times 10^{-7} \text{ radian jovicentrique.}$$

Il est absent dans la théorie de Sampson. Dans notre développement, son coefficient est très faible. Il provient du produit :

$$-\frac{N^2}{n_4^2} \cdot \frac{S}{N^2 R^3} \cdot \frac{3X_4^2}{R^2}$$

qui apparaît comme facteur dans l'expression de Ω_{4S} . Comme dans le cas précédent, lors de la multiplication par les autres facteurs, les différents termes portant les fonctions coskG de la série S/N² R³ nous donnent les contributions suivantes pour k=0 à k=3 :

$$\begin{aligned} &-,000576 \\ &+,002295 \\ &-,001706 \\ &-,000012 \end{aligned}$$

l'unité étant 10⁻⁷ radian jovicentrique. La somme de deux premières contributions a pour valeur

$$+,001719.$$

La troisième contribution est de même ordre de grandeur que cette somme et de signe contraire. La quatrième contribution diminue encore le total général. A cinq contributions, on trouve un coefficient très faible de 0,000001 x 10⁻⁷ radian jovicentrique.

A l'intégration, ce total donne -9 x 10⁻⁷ radian jovicentrique. Cette amplitude est encore réduite par d'autres faibles contributions et on arrive à la valeur finale de -6 x 10⁻⁷ radian jovicentrique.

Arguments $l_4 - \pi_4 - 2\pi + 2\psi$ et $l_4 - \pi_4 + 2\pi - 2\psi$, table 23a

Les contributions pour ces arguments sont issues principalement du produit :

$$(83) \quad \frac{N^2}{n_4^2} \cdot \frac{S}{N^2 R^3} \cdot \frac{3X_4^2}{R^2} \cdot \xi_4$$

c'est à dire le développement précédent multiplié par la série ξ_4 qui contient un terme portant l'argument $l_4 - \pi_4$. Comme nous avons obtenu un très faible coefficient pour l'argument $-2\pi + 2\psi$, le produit par ξ_4 fournit des coefficients négligeables pour les deux arguments considérés.

Argument $l_4 + \pi_4 - 2\psi$, table 23a

Ce terme est présent dans notre résultat. Il apparaît dans le développement du produit (83) ci-dessus. Son argument est formé par la combinaison de deux arguments suivants : $l_4 - \pi_4$ dans la série ξ_4 et $2l_4 - 2\psi$ dans la série X_4^2/R^2 .

CHOIX D'UNE THEORIE DU SOLEIL JOVICENTRIQUE

POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SUR LES SATELLITES GALILEENS.

80. La théorie des satellites galiléens en construction donne les inégalités sous la forme des séries de fonctions quasi-périodiques du temps. Il est souhaitable de disposer d'une théorie du Soleil jovicentrique du même type, car l'absence de conversion ou de troncature permet de fournir une solution finale homogène et précise.

La théorie séculaire de Hill (1895) a été utilisée dans les travaux de Sampson et de Lieske. Elle l'est également dans notre première version destinée à une comparaison des résultats. Cette théorie donne les inégalités principales sous la forme d'une somme de termes :

$$\sum \left[A_0 \frac{\sin(\alpha t + \beta_0)}{\cos} + A_1 \cdot \theta \cdot \frac{\sin(\alpha t + \beta_1)}{\cos} + A_2 \cdot \theta^2 \cdot \frac{\sin(\alpha t + \beta_2)}{\cos} \right],$$

dans laquelle $A_0, A_1, A_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \alpha$ sont des constantes et où t dénote le temps compté à partir de 1850.0; θ représente aussi le temps compté à partir de la même date, mais l'unité utilisée pour θ est la durée de révolution de Jupiter.

Dans le développement utilisant cette théorie, la présence des termes de forme mixte implique des opérations assez complexes au niveau de l'intégration car le temps se trouve aussi dans le facteur de la fonction sinus ou cosinus du temps de ces termes. Dans le travail de Sampson, une simplification du problème consiste à remplacer θ par sa valeur numérique calculée pour une date donnée; il n'existe plus alors que des termes portant des fonctions sinus ou cosinus du temps.

On dispose actuellement de plusieurs théories planétaires plus précises élaborées avec des moyens informatiques : d'une part, les théories séculaires construites par Bretagnon (1982), par Simon (1983), par Simon et Bretagnon (1984), d'autre part, les théories générales analytiques construites par Duriez (1979) et par Laskar (1984).

Les théories planétaires de Bretagnon et de Simon offrent une très bonne précision sur des durées allant jusqu'à 6000 ans. Leur validité sur une si longue durée offre une perspective d'utilisation satisfaisante dans le cas des satellites galiléens dont les premières observations remontent à moins de 4 siècles. Mais le plus grand obstacle à l'utilisation de ces théories est l'incompatibilité entre la forme séculaire de leurs inégalités et la forme quasi-périodique des résultats qu'on souhaite obtenir dans la théorie générale des satellites galiléens en construction. On se retrouve dans un cas presque identique à celui de la théorie de Hill déjà abordé. On peut éviter la suppression brutale des termes mixtes comme Sampson l'a fait avec la théorie de Hill, mais la complexité du problème de conversion des termes mixtes en termes quasi-périodiques rend leur utilisation très difficile.

La théorie générale planétaire de Duriez utilise un jeu de variables très proche de celui de la présente théorie. Entre elle et la nôtre, il y a non seulement une compatibilité de forme des expressions des variables mais aussi une compatibilité de forme quasi-périodique des résultats. Elle semble être toute indiquée pour notre besoin. Or, l'existence d'un grand nombre de phases dans la solution avec lesquelles la théorie donne les expressions des fonctions périodiques du temps, fait apparaître quelques difficultés d'adaptation. Dans notre solution, les arguments du temps sont des fonctions linéaires des arguments élémentaires.

La table 24 montre un extrait des termes à très longues périodes de Duriez concernant le péricentre moyen de Jupiter \bar{z}_{05} .

Table 24. SOLUTION A TRES LONGUES PERIODES DU
MOUVEMENT DU GRAND AXE DE L'ORBITE DE JUPITER
DE DURIEZ (1979).

SOLUTION		\bar{z}_{05}		λ_{01}	λ_{02}	λ_{03}	λ_{04}	λ_{05}	λ_{06}	λ_{07}	λ_{08}
.015741	EXP(52,06273	-28,3278 *T)	(1	0	0	0	0	0	0)
-.044344	EXP(149,99680	-4,3089 *T)	(0	1	0	0	0	0	0)
-.001729	EXP(55,19735	-3,0982 *T)	(0	0	1	0	0	0	0)
-.000056	EXP(106,74329	-.6743 *T)	(0	0	0	1	0	0	0)
-.000009	EXP(58,53327	+80,8275 *T)	(-1	0	0	0	0	0	2)
-.000007	EXP(136,88568	+56,8086 *T)	(0	-1	0	0	0	0	2)
.000007	EXP(27,61189	-2,0779 *T)	(1	0	0	0	-1	0	1)
.000011	EXP(55,71472	-5,0707 *T)	(1	0	0	0	0	0	-1)
-.000002	EXP(64,58646	-4,9994 *T)	(0	1	0	0	1	-1	0)
-.000004	EXP(168,95208	-30,5588 *T)	(0	1	0	0	1	0	-1)
-.000001	EXP(53,62510	-3,6184 *T)	(0	1	0	0	-1	1	0)
.000001	EXP(73,47141	-29,8683 *T)	(0	1	0	0	0	1	0)
-.000001	EXP(36,48363	-2,0066 *T)	(0	1	0	0	0	-1	1)
.000012	EXP(140,84925	-27,5660 *T)	(0	1	0	0	0	0	1)
.000002	EXP(129,25948	+21,9410 *T)	(0	1	0	0	-1	0	1)
-.000001	EXP(130,77726	-.7959 *T)	(0	0	1	0	0	-1	1)
-.000001	EXP(55,14288	-26,3553 *T)	(0	0	1	0	0	0	1)
.000003	EXP(39,01569	-2,9766 *T)	(0	0	0	1	0	1	-1)
-.000688	EXP(125,81061	-52,3466 *T)	(2	-1	0	0	0	0	0)
.000045	EXP(31,51698	-53,5573 *T)	(2	0	-1	0	0	0	0)
-.000002	EXP(168,52286	-55,9812 *T)	(2	0	0	-1	0	0	0)
.000412	EXP(133,16457	-29,5384 *T)	(1	1	-1	0	0	0	0)
.000007	EXP(90,17044	-31,9623 *T)	(1	1	0	-1	0	0	0)
.000419	EXP(141,75182	-27,1171 *T)	(1	-1	1	0	0	0	0)
.000001	EXP(4,46407	-30,7516 *T)	(1	0	1	-1	0	0	0)
-.000007	EXP(4,74595	-24,6932 *T)	(1	-1	0	1	0	0	0)
-.000001	EXP(90,45232	-25,9039 *T)	(1	0	-1	1	0	0	0)
.000029	EXP(70,75336	+19,7100 *T)	(-1	2	0	0	0	0	0)
-.000056	EXP(54,81215	-5,5196 *T)	(0	2	-1	0	0	0	0)
-.000005	EXP(165,04699	+20,9207 *T)	(-1	1	1	0	0	0	0)
-.000002	EXP(12,09991	-1,8850 *T)	(0	1	-1	1	0	0	0)
.000007	EXP(157,69304	-1,8875 *T)	(0	-1	2	0	0	0	0)
-.000014	EXP(24,16303	-76,3655 *T)	(3	-2	0	0	0	0	0)
-.000002	EXP(109,86940	-77,5762 *T)	(3	-1	-1	0	0	0	0)
-.000001	EXP(40,10424	-51,1359 *T)	(2	-2	1	0	0	0	0)
.000001	EXP(172,40095	+43,7289 *T)	(-2	3	0	0	0	0	0)
-.000003	EXP(97,80628	-3,0957 *T)	(0	2	-2	1	0	0	0)
.000003	EXP(114,69891	-4,3114 *T)	(0	-1	3	-1	0	0	0)

VARIATIONS SECLAIRES:

RE	IM
.047074079	-.011324178
.001158850 t	-.002141952 t
-.000107096 t ²	-.000099134 t ²
-.000004147 t ³	.000005114 t ³
.000000199 t ⁴	.000000086 t ⁴

T en années juliennes à partir de 1950.0

t en milliers d'années juliennes à partir de 1950.0

La même variable est notée X_4 Jupiter ou encore X_{45} dans notre théorie. Sur les 38 termes de la table, les quatre premiers termes sont des termes linéaires modifiés par les termes non linéaires tabulés dans la suite. On y trouve 38 phases différentes. Le 22ème terme par exemple, dont la fréquence est une combinaison linéaire de celles des trois premiers termes linéaires, a une phase différente de celle obtenue par la même combinaison.

Dans les mêmes conditions, notre théorie propose une solution ne contenant que 12 phases, qui sont les valeurs à l'instant $t=0$ des 12 arguments élémentaires. Chaque phase est couplée à une des douze fréquences de base dont les quatre premières sont les moyens mouvements; les huit autres sont les huit valeurs propres de la solution à très longues périodes.

CONSTRUCTION D'UNE THEORIE DU SOLEIL JOVICENTRIQUE POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SUR LES SATELLITES GALILEENS.

81. Le développement de la solution est limité à l'ordre 2 des masses et au degré 5 des variables neutres. La grande inégalité obtenue à l'ordre 2 présente encore un grand écart d'une trentaine de secondes de degré par rapport à celles des théories séculaires de Bretagnon et de Simon. Cette approximation est insuffisante pour l'utilisation dans le calcul des inégalités du mouvement des satellites galiléens. Par conséquent, la collecte des contributions a été étendue à l'ordre 3 pour le calcul de ce groupe d'inégalités. On peut établir la correspondance entre la précision de ces données et celle des termes générés par elles dans les coordonnées des satellites galiléens. Pour une amplitude de $1000''$ de la grande inégalité correspond une amplitude de l'ordre 500×10^{-7} radian jovicentrique du terme généré par elle dans le cas du satellite 4, c'est à dire une grandeur de trois chiffres significatifs pour la précision initialement fixée à 1×10^{-7} radian jovicentrique pour la collecte des inégalités. La certitude sur le dernier chiffre significatif est assurée par une approximation ne dépassant pas $2''$ sur la valeur de l'amplitude de la grande inégalité. Pour les termes à courtes périodes, on n'a pas le même problème, car la précision de ces termes est de l'ordre du dixième de seconde de degré.

Les programmes de développement de la théorie des satellites galiléens sont adaptables au cas du mouvement des quatre planètes

extérieures. Les nombres de corps à considérer dans les deux cas sont identiques, ce qui simplifie beaucoup le travail d'adaptation. Le but est de construire des séries représentant le mouvement de Jupiter. L'exposé théorique et la comparaison de résultats se limitent ici à la méthode utilisée dans le traitement des termes non linéaires et les ajustements des phases qui permet de donner à l'argument du temps de chaque terme la forme d'une combinaison linéaire de 12 arguments élémentaires. Comme les phases sont les valeurs à l'instant $t=0$ des arguments élémentaires, il est inutile d'utiliser des mémoires supplémentaires pour les représenter dans le traitement informatique.

Dans l'élaboration de cette théorie, les constantes d'intégration (table 25a) sont déduites de la théorie VSOP82 de Bretagnon (1982).

AJUSTEMENT DE LA SOLUTION A TRES LONGUES PERIODES.

82. Les paragraphes 26 à 29 ont abordé l'approche utilisée dans la formation et dans l'intégration du système autonome linéaire. Le système des équations variationnelles (23) du paragraphe 26 relatif aux variables neutres a la forme matricielle suivante :

$$(84) \quad \dot{Y} = G(\xi+Y, t) \cdot Y ,$$

dans laquelle Y représente la matrice colonne composée des 8 variables Y_j et de leurs 8 conjuguées. On en extrait d'abord un système autonome linéaire dont les éléments ne dépendent pas explicitement du temps. Les nouvelles variables utilisées sont notées Z :

$$\dot{Z} = i \cdot h \cdot Z , \text{ où } i = \sqrt{-1}.$$

Rappelons que la solution pour Z est la solution à très longues périodes ou la solution des "oscillations libres" des orbites. La solution pour Y contient, en plus, des termes qui dépendent à la fois du temps par l'intermédiaire des longitudes moyennes et de cette solution à très longues périodes.

A l'issue de la diagonalisation de la matrice constante h , on obtient la matrice des vecteurs propres M et les valeurs propres g_j . Le changement de variables $Z = M \cdot U$, où M est la matrice des vecteurs propres, conduit à un système d'équations en U . Dans la première approximation où on ne tient compte que des termes linéaires, ce système

a une forme très simple :

$$\dot{U} = i.\Gamma.U,$$

dans laquelle Γ représente la matrice diagonale des valeurs propres obtenues par la diagonalisation citée ci-dessus. Ce système a pour solution:

$$(85) \quad U_j = C_j \exp.i(g_j t + \beta_j).$$

Par suite, la solution pour Z, qui est une transformation linéaire de la solution U au moyen de la matrice M, possède la forme donnée par l'expression (26), paragraphe 27. Les 16 constantes d'intégration constituées de 8 modules C_j et 8 phases β_j (Table 25b) sont déterminées par les valeurs connues des parties réelles et imaginaires des 8 fonctions Z_j à l'instant $t=0$.

On considère ensuite les autres termes du système en Y, qui dépendent du temps de façon explicite. Les variables neutres contenues dans les expressions de ces termes sont développées au moyen de la solution à très longues périodes du système linéaire. L'intégration de ces termes utilise les fréquences connues des U_j , c'est à dire les valeurs propres obtenues dans la résolution du système autonome. Cette intégration conduit à exprimer la solution Y en fonction des quantités U_j et de leurs conjugués. Dans la solution finale ces quantités sont substituées par des expressions qui tiennent compte des termes non linéaires suivant la méthode expliquée dans ce qui suit ci-après.

Revenons à la résolution du système autonome. Cette fois-ci on tient compte de l'existence des termes non linéaires. Dans le développement, les variables X_k sont représentées par les variables Z_k correspondantes; car, dans ce traitement, on ne considère que la partie à très longue période des variables X_k . On associe maintenant la partie non linéaire de l'expression de Y à sa partie autonome. Lors du changement de variables Z en U, le système $\dot{Z} = iAZ + iF(Z)$, où F représente la partie contenant les termes non linéaires de G de la relation (84), se transforme en un système d'équations en U :

$$(86) \quad \dot{U} = i.\Gamma.U + i.M^{-1}.F(M.U),$$

où $F(M.U)$ contient des termes non linéaires en U. Le développement de

l'équation portant l'indice j du système au moyen de la solution (85) donne deux groupes de termes complémentaires :

* Un terme portant la fréquence g_j , qui est la fréquence de la solution (85) pour U_j . Il se réduit à $\Delta g_j U_j$. C'est ce complément qui contribue à modifier, souvent d'une façon importante, la valeur propre portant l'indice j obtenue lors de la résolution du système linéaire.

* Une série de termes de fréquences ν_{jk} différentes de g_j ; ν_{jk} est formée par une combinaison linéaire des fréquences g_k , ($k=1$ à 8). Comme les constantes d'intégration C_j et β_j ont été introduites lors de la résolution du système linéaire, on recherche pour chacun de ces termes une solution particulière s'annulant à l'instant $t=0$ d'une façon analogue à Duriez (1979).

Après le développement de la partie non linéaire de (86) par une substitution de la solution (85) aux variables U_j , l'équation portant l'indice j du système (86) prend la forme suivante :

$$(87) \quad \dot{U}_j = i(g_j + \Delta g_j)U_j + i \sum_{jk} A_{jk} \exp i \nu_{jk} t ,$$

dont la solution particulière choisie pour les termes ne portant pas la fréquence g_j est :

$$(88) \quad \Delta U_j = \sum \frac{A_{jk}}{(g_j + \Delta g_j) - \nu_{jk}} \left[\exp. i (g_j + \Delta g_j) t - \exp. i \nu_{jk} t \right] .$$

Cette expression, qui s'annule pour $t=0$, montre que les deux termes du crochet de cette solution particulière ont la même phase et des coefficients égaux mais de signes contraires. Ce qui conduit à un ajustement des modules et des phases des termes linéaires au moyen de simples additions de vecteurs comme on le voit dans la suite.

Soit \vec{V}_j le vecteur représentant U_j déterminé par les constantes d'intégration à l'instant initial. Par cette attribution, on considère \vec{V}_j comme la résultante de l'ensemble des termes linéaires et non linéaires de la série représentant U_j pour $t=0$: une résultante qui ne doit changer ni en module ni en phase lors de l'introduction des termes non linéaires de la solution (88).

On considère un couple de vecteurs opposés correspondant aux deux

termes du crochet de (88) : \vec{v}_j (de même fréquence que celle de \vec{V}_j) et \vec{w}_{jk} (de fréquence différente) qui font partie de la solution particulière. Par sa composition issue des opérations de substitution, la phase associée au vecteur \vec{w}_{jk} est une combinaison linéaire des phases des 4 termes à très longues périodes de la solution du système linéaire. Dans l'opération d'ajustement, on groupe les deux vecteurs de même fréquence \vec{V}_j et \vec{v}_j .

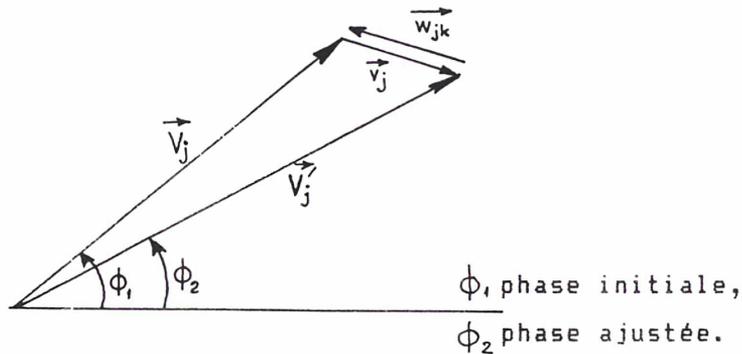


Fig. 9

La somme est un nouveau vecteur \vec{V}_j dont le module et la phase sont proches de ceux du vecteur initial \vec{V}_j (fig.9), du fait que le vecteur \vec{v}_j est nettement plus faible. Quand on ajoute \vec{w}_{jk} à ce nouveau vecteur \vec{V}_j , on retrouve l'affixe initiale de U_j pour $t=0$. La même opération est faite pour tous les couples de termes de la solution particulière; on obtient ainsi à l'issue d'un premier tour de calcul une valeur approchée ϕ_2 pour la phase de chaque vecteur \vec{V}_j . Dans cette première étape d'ajustement, les directions des petits vecteurs \vec{w}_{jk} représentant les termes non linéaires à l'instant $t=0$ étaient calculées au moyen des phases ϕ_1 qui sont les phases figurées dans la table 25b de la solution du système linéaire. Ensuite, par itération, on introduit les phases ϕ_2 ajustées dans le calcul de ces directions de façon à exprimer finalement l'argument de chacun des termes non linéaires en fonction des phases ajustés ϕ_2 des termes linéaires. On arrête le calcul quand les valeurs ϕ_2 qu'on cherche à déterminer ne varient plus. Trois itérations sont en général suffisantes pour cette opération d'ajustement. On obtient ainsi une solution à très longues périodes pour chaque U_j sous la forme d'une série de 4 termes linéaires et d'un nombre plus ou moins important des termes non linéaires suivant la précision donnée à la collecte de ces termes. Les phases finales ϕ_2

constituent les phases des arguments élémentaires. Dans cette solution, les phases des termes non linéaires sont des combinaisons linéaires des phases des arguments élémentaires. Ces dernières sont au nombre de 12 dont les valeurs des 4 longitudes à l'instant initial et 8 phases des arguments élémentaires à très longues périodes obtenues par l'opération d'ajustement décrite ci-dessus.

La table 26 donne les expressions des 12 arguments élémentaires.

Les tables 27a et 27b présentent des extraits de résultats relatifs aux quatre premières fonctions du temps U_j dans les deux solutions consécutives. Chacune de ces fonctions est obtenue dans la solution du système linéaire sous la forme d'un seul terme; ensuite dans la solution du système non linéaire sous la forme d'une série de termes :

$$U_j = \sum u_{jk} \exp i(k|\varphi) ,$$

où les modules u_{jk} sont des constantes et les arguments $(k|\varphi)$ sont des combinaisons linéaires des arguments élémentaires.

Le retour de la solution pour U à la solution pour Z se fait au moyen de la matrice de vecteurs propres M . La transformation est linéaire et simple à exécuter. Le résultat obtenu à l'issue de l'opération d'ajustement est pleinement satisfaisant en comparaison avec les conditions initiales issues de l'observation (Table 28). Ainsi, l'opération finale de la solution Z , consiste à remplacer, dans les expressions de Z , les fonctions U par les séries correspondantes obtenues après l'introduction des termes non linéaires. On procède de la même façon dans le calcul des termes qui dépendent explicitement du temps de \dot{Y} . Un exemple du traitement sera donné dans le paragraphe suivant avec le calcul de la grande inégalité Jupiter-Saturne.

Les tables 29a et 29b présentent deux solutions consécutives de Z_3 des 4 grosses planètes, c'est à dire les séries limitées aux termes à très longues périodes de X_3 de ces astres. Ces séries sont présentées sous la même forme que celle donnée dans l'extrait de la solution U_j des tables 27a et 27b. Elles contiennent en moyenne 250 termes chacune; la table 29b ne donne que la liste des termes les plus importants. A la suite de chaque

Table 25a : CONDITIONS INITIALES DEDUITES DE LA THEORIE VSOP82 DE BRETAGNON

	Re(Z ₃)	Im(Z ₃)	Re(Z ₅)	Im(Z ₅)
Jupiter	0,0469857212	0,0120038575	-,0041309548	0,0223660965
Saturne	-,0029600360	0,0554296425	-,0174308365	0,0397735628
Uranus	-,0459513238	0,0056379131	0,0037182169	0,0129720449
Neptune	0,0059997757	0,0066924241	-,0205805012	0,0230309322

Table 25b : CONSTANTES D'INTEGRATION (Modules et phases des fonctions U_j déterminés lors de la résolution du système linéaire en U.)

j	MODULE (radians)	PHASE (radians)
1	0,0507585142	2,3316232502
2	0,0656676981	0,5513337373
3	0,0251965303	5,1704497331
4	0,0094855743	1,3042531280
5	0,0531151956	5,0199588865
6	0,0104389450	3,5228606594
7	0,0155474593	2,3723584067
8	0,0170030702	2,2223778846

Table 26 : ARGUMENTS ELEMENTAIRES (radians)

$$\begin{aligned} L5 &= 0,529690965095 t + 0,59954649739 \\ L6 &= 0,213299095438 t + 0,87401675650 \\ L7 &= 0,074781598567 t + 5,48129387159 \\ L8 &= 0,038133035638 t + 5,31188628676 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P5 &= 0,0001361646 t + 2,2619958574 \\ P6 &= 0,0000207461 t + 0,5364639240 \\ P7 &= 0,0000149074 t + 5,3209455664 \\ P8 &= 0,0000032397 t + 1,2965854478 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q5 &= ,0000000099 t + 5,0200254651 \\ Q6 &= -,0000033636 t + 3,5352249723 \\ Q7 &= -,0000145468 t + 2,4557080476 \\ Q8 &= -,0001273358 t + 2,2245803796 \end{aligned}$$

t en années juliennes à partir de 2000.0 .

EVOLUTION DE LA SOLUTION POUR U_j AVANT ET APRES L'INTRODUCTION DES TERMES NON LINEAIRES
Extrait limité à U_j (j = 1 à 4)

Table 27a : SOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE :

$$\begin{aligned} U_1 &= 0,0507585142 \exp(0,0001126021 t + 2,3316232502) \\ U_2 &= 0,0656676981 \exp(0,0000199568 t + 0,5513337373) \\ U_3 &= 0,0251965303 \exp(0,0000144213 t + 5,1704497331) \\ U_4 &= 0,0094855743 \exp(0,0000031816 t + 1,3042531280) \end{aligned}$$

Les arguments sont exprimés en radians et t en années juliennes à partir de 2000.0 .

Table 27b : SOLUTION AJUSTEE APRES INTRODUCTION
DES TERMES NON LINEAIRES :

Forme de la solution :

$$U_j = \sum u_k \exp(i(k | \varphi)) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_k : \text{Coefficient,} \\ (k | \varphi) : \text{combinaison des arguments} \\ \text{élémentaires L, P, Q.} \end{array} \right.$$

SERIE U₁

COEFFICIENT		ARGUMENT											
		L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8
1	0,050321	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,004006	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0,000263	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	-0,000012	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0,000007	0	0	0	0	2	0	0	-1	0	0	0	0
6	-0,000153	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0
7	0,000006	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
8	0,002242	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
9	-0,000223	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
10	-0,000002	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
11	-0,000001	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0	0
12	0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
13	-0,000031	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	2
14	0,000002	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1
15	0,000006	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1
16	0,000003	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1
17	0,000001	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1
18	0,000049	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1
19	0,000005	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1
20	0,000001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0
21	0,000020	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0
22	-0,000004	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0
23	-0,001288	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
24	0,001286	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
25	0,000029	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
26	0,000004	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	0
27	-0,000022	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
28	-0,000001	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	0	0
29	-0,000001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0
30	-0,000006	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
31	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
32	0,000004	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-2
33	-0,000002	0	0	0	0	3	0	0	0	-2	0	0	0
34	0,000046	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0
35	-0,000004	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	0	0	0
36	0,000002	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	-2
37	-0,000002	0	0	0	0	2	1	0	0	-2	0	0	0
38	-0,000001	0	0	0	0	1	2	0	0	-2	0	0	0
39	0,000001	0	0	0	0	1	2	-2	0	0	0	0	0
40	-0,000006	0	0	0	0	3	-1	-1	0	0	0	0	0
41	-0,000003	0	0	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0
42	0,000001	0	0	0	0	-2	2	1	0	0	0	0	0
43	-0,000003	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0	0	2
44	0,000001	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	-1	1
45	0,000006	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	0	0	1

SERIE U₂

COEFFICIENT		ARGUMENT											
		L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8
1	0,001175	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,065879	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0,000304	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	-0,000005	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	-0,000001	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0
6	-0,000007	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0
7	0,000107	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
8	0,000098	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0

Table 27b (suite)

9	-0,000061	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
10	-0,000027	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
11	-0,000001	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0	0
12	-0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	2	0
13	-0,000007	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
14	0,000003	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	2
15	0,000003	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1
16	-0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1
17	-0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1
18	-0,000001	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0
19	-0,000002	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
20	-0,000004	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
21	-0,000004	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
22	0,000003	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
23	0,000002	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
24	-0,000032	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
25	0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1
26	-0,000002	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	1
27	-0,000005	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
28	0,000001	0	0	0	0	3	0	0	0	-2	0	0	0
29	0,000003	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0

SERIE U₂

	COEFFICIENT	ARGUMENT											
		L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8
1	-0,000805	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,004326	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0,024779	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0,000037	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	-0,000003	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0
6	0,000002	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
7	0,000008	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0
8	0,000296	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
9	-0,000075	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
10	0,000018	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
11	-0,000302	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
12	-0,000004	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0	0
13	-0,000001	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0
14	-0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0
15	-0,000001	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	0	0
16	-0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0
17	-0,000003	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0
18	-0,000006	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	2	0
19	-0,000001	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2	0
20	0,000003	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
21	-0,000002	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1
22	-0,000001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-1
23	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1
24	-0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1
25	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0
26	-0,000003	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	0
27	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
28	-0,000008	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0
29	0,000055	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0
30	-0,000001	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0
31	-0,000001	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0
32	0,000023	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
33	0,000027	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
34	-0,000027	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
35	0,000006	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
36	-0,000002	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
37	0,000001	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	0	0
38	0,000003	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0
39	0,000014	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	0
40	0,000008	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0
41	0,000001	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	0
42	0,000003	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	0
43	0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0
44	-0,000004	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0
45	-0,000004	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0
46	-0,000033	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1

Table 27b (suite)

47	0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1
48	0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1
49	-0,000010	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	1
50	0,000005	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
51	-0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	1
52	-0,000001	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1
53	0,000001	0	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0
54	-0,000002	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0
55	-0,000056	0	0	0	0	0	2	-2	1	0	0	0	0
56	-0,000003	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	1	-1
57	-0,000001	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	1	0
58	0,000003	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	1	-1
59	-0,000003	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	-1	1

SERIE U₄

COEFFICIENT	ARGUMENT												
	L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8	
1	0,000097	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,000216	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	-0,000092	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0,009052	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0,000003	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0
6	0,000003	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
7	-0,000001	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0
8	-0,000009	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
9	0,000010	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
10	-0,000002	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
11	-0,000004	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
12	-0,000002	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0
13	-0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0
14	-0,000001	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0
15	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
16	-0,000004	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0
17	-0,000002	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0
18	0,000005	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
19	-0,000003	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
20	-0,000004	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
21	0,000004	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
22	0,000023	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
23	-0,000023	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0
24	-0,000016	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	0
25	-0,000162	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0
26	0,000002	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	0
27	-0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	0
28	-0,000001	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0
29	-0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0
30	0,000002	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
31	-0,000002	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	1
32	0,000043	0	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	0	0

Table 28 : VERIFICATION DES AFFIXES DE Z_j APRES L'OPERATION D'AJUSTEMENT.

j	CONDITIONS INITIALES		APRES AJUSTEMENT	
	Re(Z _j)	Im(Z _j)	Re(Z _j)	Im(Z _j)
1	0,0469857212	0,0120038575	0,0469857212	0,0120038575
2	-,0029600360	0,0554296425	-,0029600360	0,0554296425
3	-,0459513238	0,0056379131	-,0459513237	0,0056379130
4	0,0059997757	0,0066924241	0,0059997757	0,0066924241
5	-,0041309548	0,0223660965	-,0041309548	0,0223660966
6	-,0174308365	0,0397735628	-,0174308365	0,0397735628
7	0,0037182169	0,0129720449	0,0037182169	0,0129720448
8	-,0205805012	0,0230309322	-,0205805012	0,0230309322

EVOLUTION DE LA SOLUTION POUR Z_3 AVANT ET APRES L'INTRODUCTION DES TERMES NON LINEAIRES

Table 29a : SOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE :

Jupiter

$$Z_3 = -0,0166846140 \exp i (0,0001126021 t + 2,3316232502) + 0,0426202420 \exp i (0,0000199568 t + 0,5513337373) - 0,0018991975 \exp i (0,0000144213 t + 5,1704497331) + 0,0000612089 \exp i (0,0000031816 t + 1,3042531280)$$

Saturne

$$Z_3 = 0,0479049984 \exp i (0,0001126021 t + 2,3316232502) + 0,0362513231 \exp i (0,0000199568 t + 0,5513337373) - 0,0018697050 \exp i (0,0000144213 t + 5,1704497331) + 0,0000698784 \exp i (0,0000031816 t + 1,3042531280)$$

Uranus

$$Z_3 = -0,0017747863 \exp i (0,0001126021 t + 2,3316232502) - 0,0405516113 \exp i (0,0000199568 t + 0,5513337373) - 0,0295769127 \exp i (0,0000144213 t + 5,1704497331) + 0,0016972858 \exp i (0,0000031816 t + 1,3042531280)$$

Neptune

$$Z_3 = -0,0001080809 \exp i (0,0001126021 t + 2,3316232502) + 0,0021154450 \exp i (0,0000199568 t + 0,5513337373) + 0,0037507462 \exp i (0,0000144213 t + 5,1704497331) + 0,0093570968 \exp i (0,0000031816 t + 1,3042531280)$$

Les arguments sont exprimés en radians et t en années juliennes à partir de 2000.0 .

Table 29b : SOLUTION AJUSTEE APRES INTRODUCTION DES TERMES NON LINEAIRES :

Forme de la solution :

$$Z_3 = \sum z_k \exp i(k | \varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_k : \text{Coefficient,} \\ (k | \varphi) : \text{combinaison des arguments} \\ \text{élémentaires L, P, Q.} \end{array} \right.$$

Z_3 JUPITER

	COEFFICIENT	ARGUMENT											
		L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8
1	-0,015716	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,044402	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	-0,001758	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0,000056	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	-0,000002	0	0	0	0	2	0	0	-1	0	0	0	0
6	0,000045	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0
7	0,000045	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
8	-0,000668	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
9	0,000032	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
10	0,000006	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
11	-0,000005	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
12	0,000012	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	2
13	0,000001	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1
14	-0,000003	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1
15	-0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1

Table 29b (suite)

16	-0,000016	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 -1
17	-0,000002	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 1 -1
18	-0,000004	0 0 0 0	0 0 0 1	0 1 -1 0
19	-0,000006	0 0 0 0	1 1 0 -1	0 0 0 0
20	0,000001	0 0 0 0	1 0 1 -1	0 0 0 0
21	-0,000001	0 0 0 0	0 1 1 -1	0 0 0 0
22	0,000419	0 0 0 0	1 1 -1 0	0 0 0 0
23	-0,000427	0 0 0 0	1 -1 1 0	0 0 0 0
24	-0,000005	0 0 0 0	-1 1 1 0	0 0 0 0
25	-0,000001	0 0 0 0	1 0 -1 1	0 0 0 0
26	0,000001	0 0 0 0	0 1 -1 1	0 0 0 0
27	0,000007	0 0 0 0	1 -1 0 1	0 0 0 0
28	-0,000001	0 0 0 0	0 1 0 0	0 -1 1 0
29	-0,000001	0 0 0 0	0 0 1 0	0 -1 1 0
30	-0,000018	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 -1 1
31	-0,000002	0 0 0 0	1 0 0 0	-1 0 0 1
32	0,000002	0 0 0 0	0 1 0 0	-1 0 0 1
33	-0,000001	0 0 0 0	3 0 0 0	0 0 0 -2
34	0,000001	0 0 0 0	3 0 0 0	-2 0 0 0
35	-0,000013	0 0 0 0	3 -2 0 0	0 0 0 0
36	0,000001	0 0 0 0	-2 3 0 0	0 0 0 0
37	0,000001	0 0 0 0	2 1 0 0	-2 0 0 0
38	0,000002	0 0 0 0	3 -1 -1 0	0 0 0 0
39	0,000001	0 0 0 0	2 -2 1 0	0 0 0 0
40	0,000004	0 0 0 0	0 2 -2 1	0 0 0 0
41	-0,000002	0 0 0 0	2 -1 0 0	-1 0 0 1

DEVELOPPEMENT EN TERMES SECLAIRES

Re(Z ₃)	Im(Z ₃)
0,0469857212	0,0120038575
0,0011128439 T	0,0021657646 T
-0,0001089009 T ²	0,0000963245 T ²
-0,0000041277 T ³	-0,0000052179 T ³
0,0000002032 T ⁴	-0,0000000907 T ⁴

T en milliers d'années juliennes à partir de 2000.0.

Z₃ SATURNE

COEFFICIENT	ARGUMENT											
	L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8
1	0,048201	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0,032910	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	-0,001423	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0,000050	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0,000006	0	0	0	0	2	0	0	-1	0	0	0
6	-0,000149	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0
7	0,000043	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
8	0,002176	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
9	-0,000245	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
10	0,000006	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0
11	-0,000001	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0
12	-0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0
13	-0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	2
14	-0,000028	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
15	0,000003	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1
16	0,000005	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1
17	0,000003	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1
18	0,000001	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1
19	0,000047	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1
20	0,000004	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
21	0,000001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1
22	-0,000004	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1
23	0,000019	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0

Table 29b (suite)

24	-0,000003	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0
25	-0,001219	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
26	0,001210	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
27	0,000032	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
28	0,000004	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	0
29	0,000001	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
30	-0,000020	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
31	-0,000001	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	0	0
32	-0,000001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0
33	-0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	0
34	-0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0
35	-0,000015	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
36	0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1
37	-0,000008	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
38	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
39	-0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	1
40	0,000004	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-2
41	-0,000001	0	0	0	0	3	0	0	0	-2	0	0	0
42	0,000045	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0
43	-0,000004	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	0	0	0
44	0,000002	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	-2
45	-0,000001	0	0	0	0	2	1	0	0	-2	0	0	0
46	-0,000001	0	0	0	0	1	2	0	0	-2	0	0	0
47	0,000001	0	0	0	0	1	2	-2	0	0	0	0	0
48	-0,000006	0	0	0	0	3	-1	-1	0	0	0	0	0
49	-0,000003	0	0	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0
50	0,000001	0	0	0	0	-2	2	1	0	0	0	0	0
51	0,000004	0	0	0	0	0	2	-2	1	0	0	0	0
52	-0,000003	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0	0	2
53	0,000001	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	-1	1
54	0,000006	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	0	0	1

DEVELOPPEMENT EN TERMES SECLAIRES

Re(Z ₃)	Im(Z ₃)
-0,0029600360	0,0554296425
-0,0052361064 T	-0,0037219461 T
0,0003076607 T ²	-0,0003124995 T ²
0,0000124313 T ³	0,0000161009 T ³
-0,0000006512 T ⁴	0,0000002835 T ⁴

Z₃ URANUS

COEFFICIENT	ARGUMENT												
	L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8	
1	-0,001522	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,035425	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	-0,029300	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0,001579	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0,000005	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0
6	-0,000002	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
7	-0,000415	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
8	-0,000050	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
9	0,000024	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
10	0,000371	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
11	0,000006	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0	0
12	0,000001	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0
13	0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0
14	0,000002	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0
15	0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0	0
16	0,000004	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0
17	0,000008	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	2	0
18	0,000001	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2	0
19	0,000002	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-1
20	0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1
21	0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1
22	0,000005	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0

Table 29b (suite)

23	0,000004	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	0
24	0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
25	0,000009	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0
26	-0,000065	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0
27	0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0
28	0,000002	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
29	0,000020	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
30	-0,000075	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
31	0,000030	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0
32	-0,000005	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
33	0,000003	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
34	-0,000002	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	0	0
35	-0,000008	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0
36	-0,000001	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0
37	-0,000019	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	0
38	-0,000039	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0
39	-0,000001	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	0
40	-0,000003	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	0
41	-0,000003	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0
42	0,000004	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0
43	0,000004	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0
44	0,000059	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
45	-0,000006	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1
46	-0,000002	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1
47	0,000013	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	1
48	-0,000003	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
49	0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	1
50	0,000001	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1
51	-0,000001	0	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0
52	0,000009	0	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	0	0
53	0,000066	0	0	0	0	0	2	-2	1	0	0	0	0
54	0,000003	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	1	-1
55	0,000002	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	1	0
56	-0,000004	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	1	-1
57	0,000003	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	-1	1

DEVELOPPEMENT EN TERMES SECULAIRES

Re(Z ₃)		Im(Z ₃)	
-0,0459513237		0,0056379130	
0,0001790994 T		-0,0007436424 T	
-0,0000007798 T ²		0,0000116641 T ²	
-0,0000004270 T ³		-0,0000004180 T ³	
0,0000000171 T ⁴		-0,0000000111 T ⁴	

Z₃ NEPTUNE

COEFFICIENT	ARGUMENT												
	L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8	
1	-0,000093	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,001700	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0,003607	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0,008935	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0,000003	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0
6	0,000003	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
7	0,000038	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
8	-0,000003	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
9	-0,000050	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0
10	-0,000002	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0
11	-0,000001	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0
12	-0,000001	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	0
13	-0,000002	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	2	0
14	-0,000004	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
15	-0,000005	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0

Table 29b (suite)

16	0,000007	0 0 0 0	0 0 0 1	0 1 -1 0
17	0,000005	0 0 0 0	0 1 1 -1	0 0 0 0
18	0,000003	0 0 0 0	1 1 -1 0	0 0 0 0
19	-0,000002	0 0 0 0	1 -1 1 0	0 0 0 0
20	0,000024	0 0 0 0	0 1 -1 1	0 0 0 0
21	-0,000022	0 0 0 0	0 -1 1 1	0 0 0 0
22	-0,000014	0 0 0 0	0 1 0 0	0 -1 1 0
23	-0,000158	0 0 0 0	0 0 1 0	0 -1 1 0
24	0,000002	0 0 0 0	0 0 0 1	0 -1 1 0
25	-0,000002	0 0 0 0	0 0 -1 0	0 1 1 0
26	-0,000002	0 0 0 0	0 -1 0 0	0 1 1 0
27	-0,000004	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 -1 1
28	-0,000004	0 0 0 0	1 0 0 0	0 -1 0 1
29	0,000042	0 0 0 0	0 -2 3 0	0 0 0 0
30	-0,000008	0 0 0 0	0 2 -2 1	0 0 0 0

DEVELOPPEMENT EN TERMES SECLAIRES

Re(Z_3)	Im(Z_3)
0,0059997757	0,0066924241
0,0000064608 T	0,0000767616 T
-0,0000011250 T ²	0,0000007178 T ²
-0,0000000268 T ³	-0,0000000319 T ³
0,0000000011 T ⁴	-0,0000000007 T ⁴

Table 30

INEGALITES SECLAIRES DE LA
SOLUTION VSOP82 DE BRETAGNON (1982)

	k	h	q	p	
Jupiter	0,0469857212	0,0120038575	-,0020656110	0,0111837716	
	+ 11301038	+ 21714936	- 3134016	- 2342756	T
	- 1093013	+ 985854	- 166739	+ 208676	T ²
	- 42875	- 51311	+ 7693	+ 5072	T ³
	+ 2054	- 901			T ⁴
Saturne	-,0029600360	0,0554296425	-,0087174744	0,0198914730	
	- 52960263	- 37559389	+ 8017150	+ 5943977	T
	+ 3092841	- 3199024	+ 414228	- 523512	T ²
	+ 129622	+ 159863	- 19605	- 12722	T ³
	- 5996	+ 3245	- 944	+ 830	T ⁴
Uranus	-,0459513238	0,0056379131	0,0018591508	0,0064861701	
	+ 1834405	- 7496435	- 1244938	- 1174473	T
	- 8085	+ 121020	- 20737	+ 31780	T ²
	- 4540	- 4209	+ 762	+ 732	T ³
	+ 219	- 171			T ⁴
Neptune	0,0059997757	0,0066924241	-,0102914782	0,0115168398	
	+ 87128	+ 782434	- 7273	+ 257554	T
	- 11990	+ 8080	- 657	+ 1938	T ²
	- 403	- 396	+ 167	+ 133	T ³

T en milliers d'années juliennes à partir de 2000.0 .

extrait de série, cette table contient un développement de la série entière correspondante en termes séculaires. Cette forme de résultat est identique à celle de la solution SVOP82 de Bretagnon (table 30). Une comparaison peut se faire sans conversion pour les quatre premières séries relatives au mouvement des grands axes (solution des variables X_3), et avec conversion pour les quatre dernières séries (solution des variables X_5) relatives au mouvement des plans des orbites en raison des expressions (89) des variables de la théorie VSOP82.

$$(89) \quad k=e.\cos\bar{\omega}, \quad h=e.\sin\bar{\omega}, \quad q=\sin\frac{I}{2}\cos\Omega, \quad p=\sin\frac{I}{2}\sin\Omega,$$

On peut identifier la correspondance : $X_3=k+i.h$, où $i=\sqrt{-1}$. Par contre, la variable X_5 , qui a pour expression $\sin I.\exp i\Omega$ ne s'exprime pas aussi simplement en fonction des variables q et p de Bretagnon. Les conditions initiales déduites des constantes d'intégration de la théorie VSOP82 sont données dans la table 25a.

La série $\overline{Z_{05}}$ de Duriez (table 24) représente la conjuguée de la série "Z₃ Jupiter", (Table 29b). La comparaison peut être faite après le calcul de la conjuguée de la Table 29b par exemple. Mais elles ne sont pas strictement équivalentes du fait que le groupe de constantes d'intégration introduit par Duriez est rapporté à l'époque initiale 1950.0, alors que le résultat donné ici est rapporté à 2000.0. Ces deux époques initiales ne sont pas très éloignées et on peut trouver dans les deux tables des amplitudes très proches pour les termes correspondants dans le groupe de termes linéaires comme dans celui des termes non linéaires.

CALCUL DES TERMES DEPENDANT DES DEGRES DES VARIABLES NEUTRES

83. Les termes considérés font partie de la solution Y. Ils sont différents des termes à très longues périodes par la présence des arguments du temps constitués des longitudes moyennes. Un exemple concret du calcul de ces termes peut être donné par le développement et l'intégration du groupe de termes formant la grande inégalité Jupiter-Saturne. Ils portent des degrés supérieurs à 1 des variables neutres : degrés impairs 3, 5, ... dans les équations de circulation \dot{X}_4 et de fréquence \dot{X}_2 ; degrés pairs 2, 4 ... dans les équations relatives aux variables neutres \dot{X}_3 et \dot{X}_5 .

Dans notre théorie, le développement des termes dépendant des variables neutres qui se trouvent dans les seconds membres du système Y utilise la solution à très longues périodes Z. L'intégration des nouveaux termes obtenus utilise aussi les fréquences de cette solution à très longues périodes.

Rappelons les deux étapes de la solution pour Z :

- intégration du système autonome linéaire avec changement de variables donnant Z en fonction des fonctions du temps U.

- Substitution de chacune des fonctions du temps U par une série de termes exprimés en fonction des arguments élémentaires obtenus lors de l'introduction des termes non linéaires. On obtient ainsi Z sous la forme des séries de termes dont les arguments du temps sont des combinaisons linéaires des arguments élémentaires.

Le traitement du groupe de termes non linéaires de la solution Y se compose des étapes suivantes :

- Développement des seconds membres par une substitution des variables contenues dans leurs termes par la solution $Z=M.U$. On obtient ainsi des seconds membres dont la fonction du temps de chaque terme périodique est composée d'un produit de fonctions U et une fonction du temps exprimée par une combinaison linéaire des longitudes moyennes. Ce développement donne aux fonctions du temps des termes de la grande inégalité en longitude la forme suivante:

$$(90) \quad \sum U_k^{e_k} . \text{expi}(2L_5 - 5L_6) - \sum U_k^{-e_k} . \text{expi}(-2L_5 + 5L_6) .$$

dans laquelle, les exposants e_k sont des entiers positifs ou nuls.

- Intégration des seconds membres par rapport au temps. Cette intégration utilise les fréquences des fonctions monomiales U_j obtenues lors de la solution du système linéaire $\dot{U} = i\Gamma U$.

- Substitution de chacune des fonctions monomiales U_j par une série de termes exprimés en fonction des arguments élémentaires obtenus lors de l'introduction des termes non linéaires. On obtient ainsi Y sous forme des séries de termes dont les arguments du temps sont des combinaisons

linéaires des arguments élémentaires.

Cette solution pour Y ressemble à la solution Z à très longues périodes par la même approche : les expressions à traiter sont exprimées d'abord en fonction des expressions monomiales de U_j de la solution du système linéaire; après des traitements annexes, on remplace ces monômes par les séries U_j de la solution du système non linéaire.

84. Pour être strictement conforme à la progression des ordres, les termes d'ordre 1 se développe au moyen de $(U_j)_1$ de l'ordre 1, les termes d'ordre 2 au moyen de $(U_j)_2$ obtenus à l'ordre 2. Par conséquent, dans la phase finale de substitution des fonctions U_j par les séries exprimées en fonction des arguments élémentaires on doit faire attention s'il s'agit des éléments appartenant à l'un ou à l'autre groupe.

L'ajustement de la solution à très longues périodes a été réalisé pour $(U_j)_2$ à l'ordre 2; la substitution finale de ces fonctions s'effectue d'une façon directe. Quand $t=0$, entre $(U_j)_1$ de l'ordre 1 et $(U_j)_2$ de l'ordre 2, il existe la relation matricielle :

$$(U_j)_1 = M_1^{-1} \cdot M_2 \cdot (U_j)_2,$$

dans laquelle M_1 et M_2 représentent respectivement les matrices des vecteurs propres à l'ordre 1 et à l'ordre 2. On calcule les séries représentant $(U_j)_1$ à l'aide de cette relation pour la substitution finale de ces fonctions dans les termes issus du développement à l'ordre 1.

Les contributions à l'ordre 3 de la grande inégalité contiennent à la fois des fonctions du temps de deux groupes $(U_j)_1$ et $(U_j)_2$ provenant des développements qui utilisent respectivement les résultats de l'ordre 1 et de l'ordre 2. Dans le calcul, ces deux groupes de contributions sont traités séparément.

La table 31a présente la contribution d'ordre 1 de la grande inégalité en longitude avant la substitution. La table 31b donne la même contribution développée en fonction des arguments élémentaires. Dans la table 31a, certaines combinaisons des fonctions U_j apparaissent deux fois. Les termes correspondants sont des contributions des degrés 3 et 5. Des marques distinctives ne sont pas données dans la table, mais on peut les

EVOLUTION DE LA SOLUTION POUR LA GRANDE INEGALITE EN
LONGITUDE DE JUPITER. Extrait limité au cas de l'ordre 1

Table 31a : SOLUTION EXPRIMEE EN FONCTION DES FONCTIONS U_j

	COEFFICIENT (" par an)	16 colonnes donnant les EXPOSANTS des fonctions U_j et de leurs conjuguées \bar{U}_j																ARGUMENT			
		j=1								j=2								L5	L6	L7	L8
		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8				
1	-1656669,77	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-5	0	0	
2	421658,27	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-5	0	0	
3	290916,13	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-5	0	0	
4	157200,36	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-5	0	0	
5	-784541,08	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
6	-402774,14	3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
7	-159904,86	2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
8	-49037,75	1	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
9	5128157,75	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
10	-4077857,96	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
11	43413,83	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
12	-1250227,11	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
13	1925,27	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
14	-112449,28	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
15	-2332,03	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
16	-2081,40	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
17	-463,63	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
18	-23956,01	0	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
19	-605997,53	3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
20	277375,58	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
21	-2407,40	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
22	52507,13	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
23	408,82	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
24	1832,56	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
25	211,43	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
26	-6682,42	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
27	-600,78	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
28	-874,48	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
29	-36508,29	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
30	-7818,37	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
31	-354,39	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
32	1792,46	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
33	345353,63	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
34	940,59	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
35	-1255,13	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
36	95967,65	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
37	-260,83	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
38	145678,85	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
39	400,49	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
40	533,82	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
41	-74682,51	2	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
42	-271,06	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
43	-325576,09	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	-5	0	0	
44	1627271,40	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-5	0	0	
45	-391181,96	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-5	0	0	
46	-193441,49	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-5	0	0	
47	-148270,86	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-5	0	0	
48	-363169,86	2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
49	-570,35	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
50	-991,76	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
51	-1348,01	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
52	-103941,61	0	2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
53	-3956,72	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
54	10914,86	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
55	1699,73	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
56	-768639,44	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	2	-5	0	0	
57	5546098,13	2	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
58	-623812,61	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
59	13417,35	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
60	-97148,08	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
61	1913,43	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	
62	-293343,64	0	2	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	0	0	

Table 31a (suite)

63	18707,16	0 0 1 0	0 0 0 2	0 0 0 0	0 0 0 0	2	-5	0	0
64	-18707,16	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
65	293343,64	1 0 0 0	0 0 0 0	0 2 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
66	97148,08	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
67	-1913,43	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
68	623812,61	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
69	-13417,35	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
70	-5546098,13	0 1 0 0	0 0 0 0	2 0 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
71	768639,44	0 0 1 0	0 0 0 0	2 0 0 0	0 0 0 2	-2	5	0	0
72	-1699,73	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 1	-2	5	0	0
73	-10914,86	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 1 1	-2	5	0	0
74	3956,72	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 1 0 1	-2	5	0	0
75	103941,61	1 0 0 0	0 0 0 0	0 2 0 0	1 0 0 1	-2	5	0	0
76	1348,01	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	1 0 0 1	-2	5	0	0
77	570,35	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 1	-2	5	0	0
78	991,76	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 1	-2	5	0	0
79	363169,86	0 1 0 0	0 0 0 0	2 0 0 0	1 0 0 1	-2	5	0	0
80	148270,86	0 0 0 0	1 0 0 0	0 3 0 0	0 0 0 1	-2	5	0	0
81	193441,49	0 0 0 0	1 0 0 0	1 2 0 0	0 0 0 1	-2	5	0	0
82	391181,96	0 0 0 0	1 0 0 0	2 1 0 0	0 0 0 1	-2	5	0	0
83	-1627271,40	0 0 0 0	1 0 0 0	3 0 0 0	0 0 0 1	-2	5	0	0
84	325576,09	0 0 0 0	0 0 1 0	3 0 0 0	0 0 0 1	-2	5	0	0
85	271,06	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	1 0 1 0	-2	5	0	0
86	74682,51	0 1 0 0	0 0 0 0	2 0 0 0	1 0 1 0	-2	5	0	0
87	-533,82	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0	-2	5	0	0
88	-400,49	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	1 1 0 0	-2	5	0	0
89	-145678,85	0 1 0 0	0 0 0 0	2 0 0 0	1 1 0 0	-2	5	0	0
90	260,83	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	2 0 0 0	-2	5	0	0
91	-95967,65	1 0 0 0	0 0 0 0	0 2 0 0	2 0 0 0	-2	5	0	0
92	-1255,13	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	2 0 0 0	-2	5	0	0
93	-940,59	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	2 0 0 0	-2	5	0	0
94	-345353,63	0 1 0 0	0 0 0 0	2 0 0 0	2 0 0 0	-2	5	0	0
95	-1792,46	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 1 1	0 0 0 0	-2	5	0	0
96	354,39	0 0 0 0	0 0 0 0	0 2 0 1	0 0 0 0	-2	5	0	0
97	7818,37	0 0 0 0	0 0 0 0	1 1 0 1	0 0 0 0	-2	5	0	0
98	36508,29	0 0 0 0	0 0 0 0	2 0 0 1	0 0 0 0	-2	5	0	0
99	874,48	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 3 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
100	600,78	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 2 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
101	6682,42	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 2 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
102	-1832,56	0 0 0 0	0 0 0 0	0 2 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
103	-211,43	0 0 0 0	0 0 0 0	0 2 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
104	-52507,13	0 0 0 0	0 0 0 0	1 1 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
105	-408,82	0 0 0 0	0 0 0 0	1 1 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
106	-277375,58	0 0 0 0	0 0 0 0	2 0 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
107	2407,40	0 0 0 0	0 0 0 0	2 0 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
108	605997,53	0 1 0 0	0 0 0 0	3 0 1 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
109	23956,01	1 0 0 0	0 0 0 0	0 4 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
110	2081,40	0 0 0 0	0 0 0 0	0 3 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
111	463,63	0 0 0 0	0 0 0 0	0 3 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
112	112449,28	0 0 0 0	0 0 0 0	1 2 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
113	2332,03	0 0 0 0	0 0 0 0	1 2 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
114	1250227,11	0 0 0 0	0 0 0 0	2 1 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
115	-1925,27	0 0 0 0	0 0 0 0	2 1 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
116	4077857,96 *	0 0 0 0	0 0 0 0	3 0 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
117	-43413,83 *	0 0 0 0	0 0 0 0	3 0 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
118	-5128157,75	0 1 0 0	0 0 0 0	4 0 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
119	49037,75	0 0 1 0	0 0 0 0	1 3 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
120	159904,86	0 0 1 0	0 0 0 0	2 2 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
121	402774,14	0 0 1 0	0 0 0 0	3 1 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
122	784541,08	0 0 1 0	0 0 0 0	4 0 0 0	0 0 0 0	-2	5	0	0
123	-157200,36	0 0 0 0	0 0 0 1	0 3 0 0	1 0 0 0	-2	5	0	0
124	-290916,13	0 0 0 0	0 0 0 1	1 2 0 0	1 0 0 0	-2	5	0	0
125	-421658,27	0 0 0 0	0 0 0 1	2 1 0 0	1 0 0 0	-2	5	0	0
126	1656669,77	0 0 0 0	0 0 0 1	3 0 0 0	1 0 0 0	-2	5	0	0

* Dans cette table, certaines combinaisons en U_j apparaissent 2 fois : les termes correspondants proviennent de degrés différents 3 et 5.

Table 31b : SOLUTION EXPRIMEE EN FONCTION DES ARGUMENTS ELEMENTAIRES.
 Extrait limité aux termes plus grands que 0",1 du
 développement de la grande inégalité à l'ordre 1.

	COEFFICIENT	ARGUMENT											
		L5	L6	L7	L8	P5	P6	P7	P8	Q5	Q6	Q7	Q8
1	-1081,95	2	-5	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
2	-332,14	2	-5	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0
3	-137,65	2	-5	0	0	4	-1	0	0	0	0	0	0
4	83,36	2	-5	0	0	3	1	-1	0	0	0	0	0
5	-79,73	2	-5	0	0	3	-1	1	0	0	0	0	0
6	16,37	2	-5	0	0	4	0	-1	0	0	0	0	0
7	15,95	2	-5	0	0	2	2	-1	0	0	0	0	0
8	-15,94	2	-5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
9	-13,43	2	-5	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0
10	-8,38	2	-5	0	0	5	-2	0	0	0	0	0	0
11	-6,48	2	-5	0	0	4	-2	1	0	0	0	0	0
12	-3,11	2	-5	0	0	2	1	0	0	0	0	1	-1
13	3,08	2	-5	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
14	2,78	2	-5	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0
15	-2,58	2	-5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
16	-2,09	2	-5	0	0	3	2	-2	0	0	0	0	0
17	-2,04	2	-5	0	0	3	-2	2	0	0	0	0	0
18	1,70	2	-5	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
19	1,43	2	-5	0	0	5	-1	-1	0	0	0	0	0
20	-1,36	2	-5	0	0	3	1	0	-1	0	0	0	0
21	1,28	2	-5	0	0	3	-1	0	1	0	0	0	0
22	0,72	2	-5	0	0	3	0	0	0	-1	0	0	1
23	0,66	2	-5	0	0	2	-1	2	0	0	0	0	0
24	-0,65	2	-5	0	0	1	2	0	0	0	0	1	-1
25	-0,64	2	-5	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
26	-0,55	2	-5	0	0	4	1	-2	0	0	0	0	0
27	-0,55	2	-5	0	0	3	0	0	0	1	0	0	-1
28	-0,52	2	-5	0	0	4	0	0	-1	0	0	0	0
29	0,48	2	-5	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0
30	-0,46	2	-5	0	0	2	0	1	0	0	0	1	-1
31	-0,40	2	-5	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0
32	0,35	2	-5	0	0	2	-1	0	0	2	0	0	0
33	-0,31	2	-5	0	0	3	0	-1	1	0	0	0	0
34	0,31	2	-5	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	2
35	0,30	2	-5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
36	-0,30	2	-5	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	2
37	-0,29	2	-5	0	0	4	-1	0	0	-1	0	0	1
38	-0,28	2	-5	0	0	6	-3	0	0	0	0	0	0
39	-0,26	2	-5	0	0	5	0	0	0	0	0	0	-2
40	-0,26	2	-5	0	0	3	0	0	0	0	0	1	-1
41	-0,26	2	-5	0	0	2	2	0	-1	0	0	0	0
42	-0,26	2	-5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
43	0,25	2	-5	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0
44	-0,25	2	-5	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	2
45	-0,23	2	-5	0	0	1	3	-1	0	0	0	0	0
46	-0,23	2	-5	0	0	5	-3	1	0	0	0	0	0
47	-0,21	2	-5	0	0	2	1	0	0	1	0	0	-1
48	0,20	2	-5	0	0	2	1	0	0	-1	0	0	1
49	-0,19	2	-5	0	0	2	1	0	0	0	1	0	-1
50	-0,18	2	-5	0	0	4	1	0	0	0	0	0	-2
51	0,17	2	-5	0	0	3	0	1	-1	0	0	0	0
52	-0,16	2	-5	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
53	0,16	2	-5	0	0	2	2	-1	0	0	0	1	-1
54	-0,16	2	-5	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
55	-0,16	2	-5	0	0	2	3	-2	0	0	0	0	0
56	0,15	2	-5	0	0	4	1	0	0	-2	0	0	0
57	0,15	2	-5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
58	-0,14	2	-5	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
59	0,13	2	-5	0	0	-1	4	0	0	0	0	0	0
60	0,13	2	-5	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0
61	0,12	2	-5	0	0	-1	2	0	0	2	0	0	0
62	-0,12	2	-5	0	0	2	-1	0	0	1	0	0	1
63	0,12	2	-5	0	0	3	0	0	0	0	0	-1	1
64	0,11	2	-5	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	2
65	0,11	2	-5	0	0	4	-2	0	1	0	0	0	0

reconnaître facilement car la contribution du degré 3 est toujours plus importante que celle du degré 5.

La table 32 donne le développement des contributions ordre par ordre du résultat sous la forme des inégalités séculaires. Un calcul comparatif par évaluation numérique a permis de donner l'évolution en fonction du temps de l'écart en amplitude de la grande inégalité en longitude donnée par ces termes par rapport à celle de la théorie séculaire VSOP82. Cet écart reste inférieur à 4" sur 2000 ans.

L'utilisation des valeurs propres numériques dans l'intégration ne permet pas d'obtenir une séparation nette des ordres dès l'ordre 2. L'exemple simple ci-dessous montre les raisons principales.

Un terme développé à l'ordre 1 peut générer, lors de l'intégration, des termes d'ordres supérieurs du fait que le facteur d'intégration

Table 32 : DEVELOPPEMENT DE LA GRANDE INEGALITE EN LONGITUDE DE JUPITER EN TERMES SECULAIRES.

Le développement donne une série de la forme .

$$\sum_{k=0}^5 \alpha_{sk} T^k \sin(2L_5 - 5L_6) + \sum_{k=0}^5 \alpha_{ck} T^k \cos(2L_5 - 5L_6)$$

LISTE DES COEFFICIENTS α_{sk} des fonctions $T^k \sin(2L_5 - 5L_6)$

k	ordre 1	ordre 2(+)	ordre 3(+)	Total	VSOP82
0	-1056,8543	-77,5421	-30,6988	-1165,0952	-1168,5331
1	+ 119,0961	+ 9,1353	+ 3,5152	+ 131,7466	+ 133,2654
2	+ 79,5092	+ 5,7897	+ 2,3153	+ 87,6142	+ 88,9275
3	- 5,6132	- 0,4103	- 0,1646	- 6,1881	- 7,2625
4	- 0,9769	- 0,0714	- 0,0284	- 1,0767	- 1,0129
5	+ 0,0655	+ 0,0047	+ 0,0019	+ 0,0721	+ 0,0891

LISTE DES COEFFICIENTS α_{ck} des fonctions $T^k \cos(2L_5 - 5L_6)$

k	ordre 1	ordre 2(+)	ordre 3(+)	Total	VSOP82
0	- 169,4573	-12,9536	- 5,0707	- 187,4816	- 184,0605
1	- 405,5156	-30,1803	-11,8340	- 447,5399	- 452,8855
2	+ 33,1250	+ 2,4740	+ 0,9738	+ 36,6716	+ 39,7507
3	+ 10,2238	+ 0,7468	+ 0,2978	+ 11,2684	+ 11,2708
4	- 0,6834	- 0,0497	- 0,0200	- 0,7531	- 0,9387
5	- 0,0732	- 0,0054	- 0,0021	- 0,0807	- 0,0504

T en milliers d'années juliennes à partir de 2000.0 .

correspondant à un argument tel que $2L_5 - 5L_6 + 3\pi_5$ est donné par l'expression :

$$\frac{1}{2N_5 - 5N_6 + 3g_5}$$

dans laquelle $2N_5 - 5N_6$ est numérique et où g_5 est une valeur propre qui peut être exprimée analytiquement sous la forme d'un polynôme des masses perturbatrices. Ceci est évident, car ce sont les masses qui donnent du mouvement aux grands axes et aux plans des orbites. Ce facteur d'intégration peut être développé en série, dans laquelle le terme d'ordre zéro des masses a une valeur prépondérante et les termes d'ordres supérieurs ont des modules de plus en plus faibles. L'utilisation des valeurs propres numériques a pour effet de regrouper les petits termes d'ordres plus élevés dans un seul terme portant l'ordre issu du développement qui précède l'intégration. Certains travaux récents (Duriez, 1983 et Thuillot, 1984) donnent des exemples de traitement permettant de donner les valeurs propres sous une forme analytique en fonction des variations des masses pour des études de comportement des orbites lors des variations de ces paramètres. Le problème posé ici est différent, car on a besoin des expressions des valeurs propres en fonction des masses et non de leurs variations.

Par suite de l'emploi des valeurs propres numériques dans l'intégration, la contribution d'ordre 2 de la table 32 contient une faible partie provenant des ordres supérieurs; pour cette raison, elle est notée "ordre 2(+)" sur cette table. Il en est de même pour la contribution d'ordre 3.

PERSPECTIVES D'UTILISATION DE LA THEORIE DU MOUVEMENT DE QUATRE GROSSES PLANETES.

85. La présentation des résultats de la grande inégalité, sous la forme des séries de dimension importante, montre qu'une théorie analytique est de loin plus volumineuse qu'une théorie séculaire surtout dans le cas planétaire où les excentricités propres et les inclinaisons propres sont importantes. L'utilisation d'une telle théorie quasi-périodique peut être difficile en raison du nombre important d'inégalités. Heureusement, dans le cas particulier du calcul des inégalités du mouvement des satellites

galiléens, on ne retient que des termes ayant une amplitude supérieure à 2".

On dispose, par cette voie, d'une théorie de Jupiter de présentation adéquate qu'on utilise ensuite comme théorie du Soleil jovicentrique dans le calcul des perturbations du mouvement des satellites galiléens. Le but recherché est atteint, car la théorie construite donne les fonctions du temps des inégalités obtenues sous la forme des combinaisons linéaires des arguments élémentaires. Cette présentation est compatible avec la théorie des satellites galiléens en construction. Elle facilite le travail de codification et de traitement informatique, elle facilite également l'utilisation ultérieure de la théorie dans le calcul des éphémérides.

La solution intermédiaire non résonnante d'ordre 3 est obtenue sous forme analytique en fonction des petits paramètres constants. Les contributions sensibles des ordres supérieurs ont été collectées au moyen

- une théorie du soleil jovien pour l'utilisation dans le calcul des inégalités venant de la perturbation solaire,
- une solution des termes de degré élevé,
- une première approximation de la solution variationnelle,
- une solution de l'équation de la libration, paramètres constants,
- une solution intermédiaire analytique en fonction des petits paramètres constants.

Les travaux entrepris ont donné successivement :
- une solution intermédiaire analytique en fonction des petits paramètres constants,
- une solution de l'équation de la libration,
- une première approximation de la solution variationnelle,
- une solution des termes de degré élevé,
- une théorie du soleil jovien pour l'utilisation dans le calcul des inégalités venant de la perturbation solaire.

Le système des satellites galiléens a un mouvement orbital rapide autour de Jupiter. La solution la plus appropriée donne aux inégalités la forme des fonctions quasi-périodiques du temps. Cette présentation permet de donner aux résultats une validité sur une très longue durée de temps. Sur cette voie, le présent travail cherche à pousser le plus loin possible la représentation analytique de la solution en fonction des constantes physiques. Les avantages de cette présentation sont nombreux : identification facile des ordres des termes et de l'origine de ces termes, facilité d'étude de la modification de la solution en fonction des paramètres physiques etc... Cette analyse est obtenue de façon réelle dans la solution intermédiaire non résonnante. Toutefois la présentation analytique rigoureuse a été limitée dans le résultat de la solution variationnelle par l'utilisation des valeurs propres numériques. Cette étude montre que l'on dispose des résultats corrects, mais la séparation des ordres n'est plus nette dès l'ordre 2. Ceci est dû au fait que l'on n'obtient pas les valeurs propres ou les fréquences des termes à très longues périodes des oscillations libres sous une forme analytique en fonction des masses lors de la résolution du système autonome. Dans la résolution de l'équation de la libration, la fréquence de la libration a été également obtenue sous forme numérique.

C O N C L U S I O N

d'une approche utilisant le développement des facteurs d'intégration. On obtient ainsi des contributions jusqu'à l'ordre 7 sous forme analytique.

Le développement du second membre de l'équation de la libration réalisé ici est plus complet que ceux des travaux connus sur deux points : la présence des termes de degrés 3 et 4 et l'utilisation des grandes inégalités sous forme de composantes. L'évaluation numérique des différentes contributions a permis de montrer l'origine des différences entre le résultat obtenu et ceux des autres théories.

La solution variationnelle présentée ici est obtenue à la première approximation. Elle fournit la solution à très longue période des oscillations libres des orbites par la résolution du système critique et des termes périodiques de plus courtes périodes qui dépendent de cette solution à très longue période. Le résultat est présenté sous la forme des tables de comparaison.

Le groupe de termes dits de Haerdtl de degré 4 a été développé d'une façon plus complète que ceux des théories connues. Les variables d'inclinaison ont été introduites dans le développement, ce qui n'a pas été fait auparavant. Par rapport aux anciens résultats, qui ne donnent que des inégalités de la longitude moyenne, ce calcul fournit des compléments des inégalités de la longitude moyenne et aussi des inégalités de la longitude vraie, du rayon-vecteur et de la latitude.

Dans le quatrième chapitre nous exposons une étude sur les effets de troncature dans le développement des termes solaires. Ce travail essaie de donner une explication sur quelques différences obtenues par notre théorie et les théories de Sampson et de Lieske. Ce chapitre aborde aussi le choix de la théorie du soleil jovicentrique à utiliser dans le calcul des inégalités dues à l'attraction solaire. Cette étude conduit à la construction d'une théorie des quatre grandes planètes. La théorie de Jupiter obtenue est utilisée comme théorie du soleil jovicentrique. Elle permet d'obtenir les inégalités sous une forme quasi-périodique de présentation compatible avec les autres groupes d'inégalités dans l'étude du mouvement des satellites galiléens.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARLOT, J.E.:1982, Amélioration des éphémérides des satellites galiléens de Jupiter par l'analyse des observations. Thèse, Observatoire de Paris.
- BRETAGNON, P.:1982, Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution SVOP82. Astron.Astrophys., 114, 278-288.
- BROWN, B.C.:1976, The Orbits of the Galilean Satellites of Jupiter, Ph.D. Thesis, University of Maryland, College Park.
- BROWN, B.C.:1977, The Long Behaviour of the Orbits of the Galilean Satellites of Jupiter, Celestial Mechanics, 16, 229-259.
- BRUMBERG, V.A.:1970, in Periodic Orbits, Stability and Resonances, Giacaglia (édit.) Reidel, 140.
- CAMPBELL, J.K., SYNNOTT, S.C.:1985, Gravity Field of the Jovian System from Pioneer and Voyager Tracking Data. Astron.J. 90, 364-372.
- DE DAMOISEAU:1836, Tables écliptiques des satellites de Jupiter. Bureau des Longitudes, Paris.
- DE HAERDTL, E.:1892, Sur une inégalité du quatrième ordre provenant de l'action mutuelle des deux derniers satellites de Jupiter. Bull.Astron. 9, 212-216.
- DE SITTER, W.:1918, Outlines of a New Mathematical Theory of Jupiter's Satellites, Ann. Sterrewacht Leiden, vol.XII.
- DE SITTER, W.:1931, Jupiter's Galilean Satellites, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 91, 706-738.
- DURIEZ, L.:1979, Approche d'une théorie générale planétaire en variables elliptiques héliocentriques. Thèse, Université de Lille.
- DURIEZ, L.:1982, Théorie générale planétaire étendue au cas de la résonance et application au système des satellites galiléens de Jupiter. Celest. Mech. 26, 231-255.
- DURIEZ, L.:1983, Les paramètres dans une théorie générale planétaire, 5ème Colloque du GSS Paris, 15-19.
- FERRAZ-MELLO, S.:1966, Recherches sur le Mouvement des Satellites Galiléens de Jupiter, Bull.Astronomique, Série 3, 1, 287-330.

- FERRAZ-MELLO, S.: 1974, On the Theory of the Galilean Satellites of Jupiter, in Kozai (edit.), The Stability of the Solar System, D. Reidel, Dordrecht, 167-184.
- FERRAZ-MELLO, S.: 1979, Dynamics of the Galilean Satellites. Université de Sao-Paulo.
- GALILEE : 1610, Sydereus Nuncius, Florence.
- GOMES, R.D.S.: 1983, Teoria Planetaria 1a Aproximacao, Thèse, Observatoire National de Rio de Janeiro.
- GOMES, R.D.S.: 1986, Earth, Moon and Planets 34, 103-116.
- HENRARD, J.: 1984, Libration of the Laplace's argument in the Galilean Satellites Theory, Colloquium for Celestial Mechanics, Ramsau, Autriche.
- HILL, G.W.: 1898, Astron. Pap. Washington 7, Part 1.
- KOVALEVSKY, J.: 1963, Introduction à la Mécanique Céleste, Armand-Colin, Paris.
- KRASINSKI, G.A.: 1969, Quasi-Periodic Solutions of the First Kind in the Planar N Body Problem, Trudy Inst. Teor. Astron., (Leningrad), 13, 105.
- LAPLACE, P.S.: 1795, Théorie des satellites de Jupiter. Oeuvres complètes de Laplace, tome XI, Gauthier-Villars Paris.
- LASKAR, J.: 1984, Théorie générale planétaire : éléments orbitaux des planètes sur un million d'années. Thèse, Observatoire de Paris.
- LIESKE, J.H.: 1973, On the 3-7 Commensurability between Jupiter's outer Two Galilean Satellites. Astron. Astrophys. 27, 59-65.
- LIESKE, J.H.: 1974, A Method of Revitalizing Sampson's Theory, Astron. Astrophys. 17, 137-150
- LIESKE, J.H.: 1977, Theory of Motion of Jupiter's Galilean Satellites. Astron. Astrophys. 56, 333-352.
- LIESKE, J.H.: 1980, Improved Ephemerides of the Galilean Satellites. Astron. Astrophys. 82, 340-348.
- MARSDEN, B.: 1966, The motions of the Galilean Satellites of Jupiter, Ph.D. Dissertation, Yale University, New Haven.
- MORANDO, B.: 1974, Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre, Gordon & Breach London.
- NULL, G.W.: 1976, Gravity Field of Jupiter and its Satellites from Pioneer 10 and Pioneer 11 tracking data, Astron. Journal, 81, 1153-1161.

- SAGNIER, J.L.:1973, Contribution à l'étude dynamique du système galiléen de Jupiter, *Astron. Astrophys.*, 25,113-124.
- SAGNIER, J.L.:1981, Le mouvement des Satellites Galiléen de Jupiter. Une méthode d'étude analytique. Thèse, Paris.
- SAGNIER, J.L., VU, D.T.:1974, Bull.n° 11, Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale.
- SAMPSON, R.A.:1921, Theory of the Four Great Satellites of Jupiter, *Mem. Roy. Astron. Soc.* Vol. LXIII. London.
- SIMON, J.L.:1983, Théorie du mouvement des 4 grosses planètes. Solution TOP82. *Astron. Astrophys.*, 120,197-202.
- SIMON, J.L., BRETAGNON, P.:1984, Théorie du mouvement de Jupiter et Saturne sur un intervalle de temps de 6000 ans. Solution JASON84. *Astron. Astrophys.*, 120,197-202.
- SOUILLART, M.:1865, Thèse : Essai sur la théorie analytique des Satellites de Jupiter. Gauthier-Villars, Paris.
- SOUILLART, M.:1894, Sur certains termes complémentaires des expressions des latitudes dans la théorie des satellites de Jupiter. *Bull. Astron.* 11, 145.
- THUILLOT, W., VU, D.T.:1983, Analytical theory of the Galilean Satellites of Jupiter : The First Approximation. S.Ferraz-Mello and P.E.Nacozy (Edit.), Universidade de Sao Paulo.
- THUILLOT, W.:1984, The Effect of the Dynamical parameters in the motion of the Galilean Satellites. *Celest. Mech.*, 34,245-253.
- TISSERAND, F.:1896, *Traité de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris, Vol. IV.
- VU, D.T.:1981, Les grandes inégalités et les termes de libration des satellites I, II et III de Jupiter, *Astron. Astrophys.*, 94,140-150.
-

TABLE DES MATIERES.

	page
Plan et résumé de la thèse	3
Abstract	4
<u>INTRODUCTION</u>	5
<u>Chapitre 1. METHODE UTILISEE</u>	15
VOCABULAIRE, ABREVIATIONS ET TRAITEMENT INFORMATIQUE	17
VARIABLES UTILISEES ET FORME LINEAIRE DU SYSTEME D'EQUATIONS	25
LES EQUATIONS DU MOUVEMENT.	27
Equations du mouvement dans le repère mobile	29
Equations du mouvement du système de référence	29
Compléments des seconds membres des équations provenant du mouvement du système de référence	30
DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION	32
SOLUTION INTERMEDIAIRE	35
Solution intermédiaire non résonnante	35
La libration et la solution intermédiaire résonnante	36
SOLUTION VARIATIONNELLE	39
Formation du système variationnel	39
Formation et intégration du système autonome	41
Intégration du système variationnel	43
Formation et intégration du système critique	43
TRAITEMENT DES TERMES NON LINEAIRES	44
<u>Chapitre 2. DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS PERTURBATRICES ET FORMATION DES SECONDS MEMBRES DES EQUATIONS</u>	
Les trois types de perturbation du mouvement des satellites de Jupiter	45
Données utilisées dans le développement	47

Ordres de grandeur des perturbations	49
Structure d'un terme du développement	51
Arguments utilisés dans le développement	53
Séries de base utilisées dans le développement	54
Précision utilisée lors de la collection des termes retenus	56
DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL PERTURBATEUR DE L'INTERACTION	59
DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL PERTURBATEUR DU SOLEIL	71
DEVELOPPEMENT DU POTENTIEL PERTURBATEUR DU A LA FORME APLATIE DE JUPITER	74
FORMATION DES EQUATIONS PRELIMINAIRES	79
<u>Chapitre 3. RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT</u>	80
DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION INTERMEDIAIRE NON RESONNANTE	81
Traitement des équations d'ordre 1	82
Substitution des variables dans la formation des équations d'ordre supérieur à 1 et convergence de la solution	89
Approche utilisée dans l'intégration des équations \dot{X}_3 aux ordres élevés	93
Les grandes inégalités	97
Perturbations séculaires des moyens mouvements	101
Mouvements des orbites intermédiaires	102
DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION INTERMEDIAIRE RESONNANTE	102
Formation et résolution de l'équation de la libration	103
Collection des termes résonnants	106
Facteurs de libration.	110
Détails utiles et discussion des résultats	111
Perturbations séculaires des moyens mouvements dues à la libration	114
Conséquences de la présence de la libration	115
DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION VARIATIONNELLE	117
Solution du système autonome	117
Solution du système critique	117
TRAITEMENT DES TERMES DE DEGRE ELEVE	121

<u>Chapitre 4. LE CALCUL DES INEGALITES DUES A LA PERTURBATION DU</u> <u>SOLEIL ET LE CHOIX D'UNE THEORIE DU SOLEIL JOVICENTRIQUE</u>	130
EFFETS DE TRONCATURE DANS LE DEVELOPPEMENT DES INEGALITES. COMPARAISON DES RESULTATS	131
CHOIX D'UNE THEORIE DU SOLEIL JOVICENTRIQUE POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SUR LES SATELLITES GALILEENS	137
CONSTRUCTION D'UNE THEORIE DU SOLEIL JOVICENTRIQUE POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SUR LES SATELLITES GALILEENS	140
Ajustement de la solution à très longues périodes	141
Calcul des termes dépendant des degrés des variables neutres .	155
Perspectives d'utilisation de la théorie du mouvement des quatre grosses planètes	162
<u>CONCLUSION.</u>	164
Références bibliographiques	166
Table des matières.	169

