HAL
open science

Estimation sans biais des variances des différents groupes d'observations dans une compensation hétérogène

Namik Kopliku

▶ **To cite this version:**

Namik Kopliku. Estimation sans biais des variances des différents groupes d'observations dans une compensation hétérogène. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1990. Français. NNT : . tel-02095281

HAL Id: tel-02095281

https://hal.science/tel-02095281v1

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
(Nouveau régime)

90 OBSP 0005

En
Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie
(Option : Photogrammétrie)

présentée par :

Namik KOPLIKU

ESTIMATION SANS BIAIS DES VARIANCES DES DIFFERENTS GROUPES D'OBSERVATIONS DANS UNE COMPENSATION HETEROGENE

ETUDES COMPLEMENTAIRES :

- Evaluation de l'exactitude obtenue en aérotriangulation analytique
- Décel et correction des systématismes en aérotriangulation analytique

Soutenue devant le jury composé de :

Mr.	BARLIER François Astronome	Président et Rapporteur
Mme.	FEISSEL Martine Astronome	Examinateur
Mr.	HOTTIER Philippe Ingénieur Directeur Géographe	Directeur de thèse
Mr.	FONTAINE André Ingénieur Général Géographe	Rapporteur
Mr.	EGELS Yves Ingénieur en Chef Géographe	Rapporteur

Invité : Mr. LE MEN Hervé
Ingénieur en Chef Géographe

Septembre 1990

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
(Nouveau régime)

En
Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie
(Option : Photogrammétrie)

présentée par :

Namik KOPLIKU

ESTIMATION SANS BIAIS DES VARIANCES DES DIFFERENTS GROUPES D'OBSERVATIONS DANS UNE COMPENSATION HETEROGENE

OBSERVATOIRE DE PARIS - SECTION DE PARIS
6720

ETUDES COMPLEMENTAIRES :

- Evaluation de l'exactitude obtenue en aérotriangulation analytique
- Décel et correction des systématismes en aérotriangulation analytique

Soutenue devant le jury composé de :

Mr.	BARLIER François Astronome	Président et Rapporteur
Mme.	FEISSEL Martine Astronome	Examinateur
Mr.	HOTTIER Philippe Ingénieur Directeur Géographe	Directeur de thèse
Mr.	FONTAINE André Ingénieur Général Géographe	Rapporteur
Mr.	EGELS Yves Ingénieur en Chef Géographe	Rapporteur

Invité : Mr. LE MEN Hervé
Ingénieur en Chef Géographe

Septembre 1990

à ma fille

Klarisa

REMERCIEMENTS

Je voudrait exprimer ma gratitude à Monsieur le professeur François BARLIER, astronome, directeur adjoint de l'O.C.A., qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury et de bien vouloir être un des rapporteurs de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur l'ingénieur directeur géographe Philippe HOTTIER pour sa volonté de faire aboutir cette recherche et dont les conseils ont été déterminants pour l'orientation et la conduite de cette thèse. Durant ces trois années de travail, il a toujours été prêt à m'écouter et me conseiller en toutes occasions. Je suis heureux de pouvoir lui témoigner ici toute ma gratitude.

Je suis très honoré par l'interêt porté à ce travail par Madame Martine FEISSEL, astronome à l'Observatoire de PARIS et Monsieur l'ingénieur général géographe André FONTAINE. Je les remercie vivement pour leur participation au jury de cette thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur l'ingénieur en chef géographe Yves EGELS, dont la disponibilité et les encouragements ont été constants.

Je remercie également Monsieur l'ingénieur en chef géographe Hervé LE MEN d'avoir accepté l'invitation à participer au jury.

Je remercie l'ensemble des enseignants de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques et l'Institut Géographique National de FRANCE de m'avoir permis de réaliser ce travail.

Je ne pourrais citer ici toutes les personnes qui m'ont aidé, je ne les oublie pas et les remercie très sincèrement.

Je remercie enfin ma chère femme Alma pour sa patience tout au long de ce travail et je lui adresse mes pensées pour les heures de vie familiale que je lui ai dérobées.

RESUME

Dans cette thèse on essaie d'apporter une réponse à certains problèmes qu'on rencontre dans les compensations **hétérogènes** (compensation d'observations de nature ou de précision différentes) par moindres carrés,en particulier en aérotriangulation analytique (problème classique de photogrammétrie) qui a servi ici à valider les résultats (on aurait aussi bien pu prendre des problèmes de géodésie ...)

La partie essentielle de la thèse (partie I) est l'exposé d'une méthode permettant d'estimer **sans biais** les **variances** des différents groupes d'observations participant à une même compensation; ce problème n'avait jamais - à notre connaissance - été correctement résolu avant nous; l'analyse du problème a été poussée aussi loin qu'on la pouvait, et les résultats validés en aérotriangulation analytique (où on peut avoir jusqu'à *cinq* catégories d'observation de nature totalement différente) ; on verra [I § 6] que les résultats sont pleinement satisfaisants (on peut non seulement estimer les différents écarts-type,mais encore prédire avec succès la précision des estimations).

Cela est suffisant pour affirmer, que si on l'applique correctement [I §3], la méthode est valable à tout type de problème.

Dans la partie II , on reconsidère le problème de l'évaluation de l'exactitude de la compensation; le problème est abordé dans le cadre de l'aérotriangulation analytique mais là-aussi, la méthode que nous préconisons pourrait *mutatis mutandis* être adaptée à d'autre problèmes ; nous montrons qu'on peut éviter le processus d'inversion de la *matrice normale*, qui outre des difficultés de calcul considérables quand le système est d'ordre élevé, peut conduire quand on connaît mal les poids à des résultats erronés sur le plan statistique. Nous attirons aussi l'attention sur une difficulté qui n'est peut-être pas propre à la photogrammétrie : *la définition* d'un point n'est pas la même sur le terrain (comme le voit l'opérateur) et sur la photo (comme on le voit dans un appareil de restitution): il y a *une erreur de transfert*, dont il faut connaître l'écart-type si on veut évaluer correctement l'exactitude ; or, quand les erreurs de triangulation (celle qui sert à déterminer les coordonnées-terrain des quelques points nécessaires à la compensation) sont *'petites'* , ce qui semble être toujours le cas, l'écart-type des données terrain issu de la méthode de la partie I, est à peu de chose près, l'écart-type de l'erreur de transfert. Là aussi les quelques essais faits sur des blocs réels semblent confirmer ces résultats.

Dans la partie III enfin, on étudie avant tout le problème de la détection du systématisme résiduel (celui dû aux déformations des clichés); en effet pour que les méthodes des parties précédentes soient sûres, il faut s'assurer que ce systématisme est sans effet sensible; et nous verrons que lorsqu'il est *indétectable* (avec les indicateurs que nous proposons, et qui sont faciles à mettre en oeuvre) il semble bien en être ainsi. Enfin, mais ceci est tout à fait indépendant du reste, nous comparons l'efficacité de plusieurs jeux d'inconnues de systématisme proposés par différents auteurs.

Partie I Estimation sans biais des variances des différents groupes d'observations dans une compensation hétérogène.

Etant donnés k groupes d'équations (impossible ...) d'observations :

$$\left.\begin{array}{l} {}_{n_i}A_{i\,r}\, x \,|= l_i \quad ; \quad i = 1,k-1 \\ \\ {}_{n_k}A_{k\,r}\, x \,|= l_k \quad ; \quad n_k \gg r \end{array}\right. \Longleftrightarrow \quad {}_{n}A_{r}\, x \,|= l \;; \quad \text{rang } A = r \qquad (1)$$

dont le dernier fortement redondant (condition probablement non toujours nécessaire), nous proposons deux méthodes pour estimer (sans biais) les variances σ_i^2 des différents groupes : la première tout à fait générale, mais assez gourmande, la seconde beaucoup plus frugale, mais ne s'appliquant que si le groupe est *'bien conditionné'* (c'est à dire si la solution *asymptotique* - poids très grand pour les observations du groupe k - est assez proche de la solution optimale).

■ **Méthode générale :**

Appelant $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_i$ les écarts-type inconnus des différents types d'observation, $p_1, p_2 \ldots p_i$ les poids à priori (déduits des informations dont on dispose) , et posant, $v_{1i}\,(i=1,n_1)$, $v_{2i}\,(i=1,n_2)$ étant les *résidus* relatifs aux différents catégories de mesures, :

$$\tilde{\rho}_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum v_{1i}^2 \;; \quad \tilde{\rho}_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum v_{2i}^2 \ldots \qquad (2)$$

on montre, $E\tilde{\rho}_i^2$ désignant l'espérance de la variable aléatoire $\tilde{\rho}_i^2$, que :

$$\begin{aligned} p_1 E\tilde{\rho}_1^2 &= \alpha_{11} p_1 \sigma_1^2 + \alpha_{12} p_2 \sigma_2^2 + \ldots \alpha_{1k} p_k \sigma_k^2 \\ p_2 E\tilde{\rho}_2^2 &= \alpha_{21} p_1 \sigma_1^2 + \alpha_{22} p_2 \sigma_2^2 + \ldots \alpha_{2k} p_k \sigma_k^2 \qquad (3) \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

avec : $0 \le \alpha_{ij} \le 1$; α_{ij} fonctions de $p_1, p_2 \ldots p_k$

En inversant le système (3) on exprime les σ_i^2 comme combinaisons linéaires des $E\tilde{\rho}_i^2$, auxquels on substitue les $\tilde{\rho}_i^2$: d'où pour les σ_i^2 des *estimateurs* sans biais.

Le calcul direct des coefficients α_{ij} est trop compliqué en aérotriangulation analytique : il nécessite le calcul de la matrice variance des résidus. On procède alors par simulation, ce qui nécessite quelques compensations (au minimum *k*; en fait pour assurer les valeurs des α_{ij}, il est prudent de réitérer), mais ce qui est infiniment moins long qu'un calcul direct.

L'estimation de la *précision relative* de $\tilde{\sigma}_i$ est donnée par la formule approchée :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\tilde{\sigma}_i} \simeq \frac{1}{\sqrt{2n_i\alpha_{ii}}}\left(1 + \frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right) \quad \text{où :} \quad \sigma_i' = \sqrt{\sum_{j,\, j\neq i} \frac{\alpha_{ij}p_j\tilde{\sigma}_j^2}{\alpha_{ii}p_i}} \tag{4}$$

σ_i' est *'l'écart-type équivalent'* relatif au groupe (*i*), qui chiffre en unité de mesure du groupe (*i*) la précision de la compensation des mesures des groupes ($j \neq i$).

- **Méthode asymptotique :**

Elle consiste à compenser le groupe redondant avec un poids infini (en pratique très grand). Dans ces conditions, si le groupe redondant est le groupe (*k*), on montre que :

$$\rho_i^2 = \left(1 - \frac{r - r_i'}{n_i}\right)\left(\sigma_i^2 + \beta_{ik}\sigma_k^2\right) \; ; \quad i = 1,k-1$$

$$\rho_k^2 = \left(1 - \frac{r_k}{n_k}\right)\sigma_k^2 \tag{5}$$

avec : $r = \text{rang } A$; $r_k = \text{rang } A_k$;

$r_i' = \text{rang } (A_1^T \ldots A_{i-1}^T, A_{i+1}^T \ldots A_k^T)$

L'avantage ici est que seule la colonne des β_{ik} est à estimer, d'où une économie considérable de calcul.

La précision relative de $\tilde{\sigma}_i$ peut être estimée par :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\tilde{\sigma}_i} \simeq \frac{1}{\sqrt{2[n_i - (r_i - r_i')]}}\left(1 + \frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right) \quad \text{où :} \quad \begin{array}{l} \sigma_i'^2 = \beta_{ik}\sigma_k^2 ; \; i=1,k-1 \\ \sigma_k'^2 = 0 \end{array} \tag{6}$$

Partie II Evaluation de l'exactitude obtenue en aérotriangulation analytique.

Nous présentons une méthode simple pour l'estimation de l'exactitude moyenne des coordonnées. Il suffit de faire deux compensations en rajoutant au 2e membre de chaque groupe d'observation un vecteur-erreur centrée e_1, puis un autre vecteur-erreur e_2 d'écart-type $\lambda\sigma$ (l'écart-type de chaque catégorie de mesure étant multiplié par un nombre λ *grand*); soient $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ les solutions.

Si $\bar{x}_{i1}$ et $\bar{x}_{i2}$ sont les estimations correspondantes pour la coordonnée x_i, l'estimation de l'exactitude moyenne $\sigma_{\bar{x}}$ est (en l'absence d'erreur de transfert) :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2n}\sum(\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2})^2} \qquad (7)$$

La précision de l'estimation n'a pu être définie par une formule théorique; elle semble dans les cas usuels meilleure que 10 % ; elle diminue quand le canevas d'appui est pauvre; mais elle reste bien meilleure que la méthode consistant à évaluer cette même quantité sur un petit nombre de points connus (dits de contrôle) inactifs dans les calculs.

En présence *d'erreur de transfert* (qui semble toujours exister en photogrammétrie, en tout cas quand il s'agit de déterminer des *détails naturels*) il convient de substituer à (7) :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\tau x}} \qquad (8)$$

où $\sigma_{\tau x}$ est l'évaluation de l'erreur de transfert en x, qui s'identifie pratiquement à l'écart-type des coordonnées-terrain en x, déterminé par la méthode de la partie I.

Partie III Détection et correction des systématismes en aérotriangulation analytique.

■ Nous présentons ici des *indicateurs de systématisme*, robustes par rapport aux variations des poids de compensation et faciles à mettre en oeuvre. On distingue des indicateurs de systématisme zonaux (on partage le cliché en 9 zones *ij* ; *i*=1,3 et *j*=1,3) et globaux.

*** indicateurs zonaux :**

$\nu_i = v_i/\sigma_i$ étant un résidu standard (v_i résidu de l'observation *i* et σ_i son écart-type) , $\bar{\nu}_{ij,x}$ ($\bar{\nu}_{ij,y}$) la moyenne des n_{ij} résidus standards en *x* et *y* dans la zone *ij*, $\tilde{\sigma}$ estimation après compensation de l'écart-type des mesures-cliché, il y aura systématisme résiduel si :

$$|\bar{v}_{ij,x}| = |\bar{\nu}_{ij,x}|\ \tilde{\sigma} > v_{ij,x_o} = \frac{2.57}{\sqrt{n_{ij}}}\ \tilde{\sigma}\ ;\quad |\bar{v}_{ij,y}| \text{ analogue} \qquad (9)$$

*** indicateurs globaux :**

$\nu_x = \sqrt{\dfrac{\sum n_{ij}\ \bar{\nu}^2_{ij,x}}{n}}$; i=1,3 et j=1,3 (ν_y analogue) étant la moyenne quadratique pondérée des 9 résidus standards (les 9 zones du cliché), il y aura systématisme résiduel si :

$$\bar{v}_x = \nu_x\ \tilde{\sigma} > v_{x_o} = \frac{4.655}{\sqrt{n}}\ \tilde{\sigma}\ ;\quad \bar{v}_y \text{ analogue} \qquad (10)$$

ou si on prend la moyenne quadratique pondérée des 9 résidus standards en *x* et en *y* : $\nu = \sqrt{\dfrac{\sum n_{ij}(\bar{\nu}^2_{ij,x} + \bar{\nu}^2_{ij,y})}{2n}}$; i=1,3 et j=1,3

il y aura systématisme résiduel si :

$$\bar{v}_{xy} = \nu\ \tilde{\sigma} > v_{xy_o} = \frac{4.172}{\sqrt{n}}\ \tilde{\sigma} \qquad (11)$$

Les essais montrent, que pour être *détectés* à l'aide de ces indicateurs, le rapport *systématisme/bruit* doit être supérieur à 0.3 et que si le systématisme résiduel est indétectable, il n'y a pas d'altération significative de l'exactitude.

■ A la fin de cette partie, nous comparons l'efficacité de deux jeux de paramètres de systématisme qui ont été proposés à l'I.G.N.

NOTATIONS ET RAPPEL DE LA THEORIE DES MOINDRES CARRES

Avertissement préalable.

Dans la lecture de la thèse, le lecteur est prié de bien garder à l'esprit la différence de sens entre les mots "précision" et "exactitude".

Employé dans un sens courant et vague, le mot "précision" évoque la *'qualité'* d'une mesure, ou d'un résultat déduit de la combinaison de plusieurs mesures. Employé en un sens statistique, il forme avec le mot "exactitude" un duo infernal :

∴ la "précision statistique" d'une quantité (mesure ou résultat issu de mesures), s'évalue par l'écart-type (σ) de cette quantité : elle chiffre la fluctuation de cette quantité autour de sa moyenne (ou de son erreur ⊙ *erreur = quantité - valeur nominale* ⊙ autour de son espérance) quand on répète les mesures.

∴ l'"exactitude" s'évalue par l'erreur moyenne quadratique de cette quantité (emq) : elle chiffre la fluctuation de cette quantité autour de sa valeur nominale quand on répète les mesures; on a toujours :

$$\text{emq} \geq \sigma$$

($\beta = \sqrt{\text{emq}^2 - \sigma^2}$ est le biais de la quantité; l'exactitude ne se confond avec la précision que si les erreurs de mesure sont *'centrées'*, c'est à dire réalisation d'une variable aléatoire d'espérance nulle).

A la limite une quantité peut être très précise (ainsi la moyenne d'une centaine de mesure brutes) mais d'exactitude médiocre. Dans la théorie des moindres carrés, on ne peut donner de sens statistique au résultat que si on fait l'hypothèse d'erreurs centrées (pas de systématisme résiduel) ; de graves difficultés proviennent en pratique de l'oubli de ce qu'a de gratuit cette hypothèse.

• • •

Ceci étant, pour comprendre les méthodes exposées, nous avons jugé nécessaire que le lecteur ait présentes à l'esprit les principales notions de la théorie des moindres carrés appliquée à la compensation des mesures surabondantes. Rappelons les brièvement.

Donnons d'abord les principales notations, empruntées au cours de Mr. Hottier, et employées telles quelles le long de la thèse.

Principales notations :

$_n\dot{A}_r$: matrice de linéarisation

$_n\dot{l}_1$: valeurs nominales des observables (après linéarisation)

$_nl_1$: observations linéarisées $(L = L_0 + l)$;
L (L_0) : valeurs observées (approchées)

$_n\bar{l}_1$: observations compensées $(\bar{l} = l + v)$

e : erreur (valeur observée - valeur nominale)

$_r\dot{x}_1$: valeurs nominales des paramètres du modèle linéaire fonctionnel

$_r\bar{x}_1$: paramètres compensés

$_nv_1$: vecteur des résidus $(v = A\bar{x} - l)$

P : matrice des poids des observations (carrée, symétrique et régulière)

σ, σ^2 : écart-type, variance (matrices carrées)

σ_0, σ_0^2 : facteur d'écart-type, de variance (scalaires)

r : nombre de paramètres

n : nombre des observations $(n > r)$

E : espérance d'une variable aléatoire

I : matrice unité

A^T : transposée de la matrice A

$|A|$: $(= \sqrt{\Sigma\, a_{ij}^2})$ norme euclidienne de A

$\mathrm{Tr}\, A$: trace de A $(\mathrm{Tr}\, A^2 = |A|^2)$

$N(m,\sigma)$: loi normale de moyenne m (scalaire ou vecteur), d'écart-type σ (scalaire ou matrice)

$u \in N(m,\sigma)$: le vecteur aléatoire u obéit à la loi normale $N(m,\sigma)$

$u \tilde{\in} N(m,\sigma)$: le vecteur aléatoire u obéit approximativement à la loi normale $N(m,\sigma)$

$|a| \ll |b|$: $|a|$ est très petit par rapport à $|b|$

• • •

La théorie des moindres carrés a pour but d'estimer au mieux les valeurs des paramètres (ou inconnues) dont dépend un phénomène physique à partir de mesures, généralement redondantes, de grandeurs attachées à ce phénomène (les observables) et d'hypothèses sur les lois physiques qui régissent le phénomène et les erreurs de mesures.

Il est commode de distinguer le modèle fonctionnel et le modèle stochastique.

La relation : $$\Phi(\dot{L},\dot{X}) = 0 \qquad (1)$$

qui permet d'exprimer la façon dont observables $(\dot{L})$ et paramètres $(\dot{X})$ sont liés constitue le *'modèle fonctionnel'*; elle est inversible en $\dot{X}$.

Le *'modèle stochastique'* est l'ensemble des hypothèses faites au sujet des erreurs de mesure.

On pose : $$e = L - \dot{L} = \text{faux} - \text{vrai} = \text{erreur} \qquad (2)$$

Un *'modèle stochastique'* parmi les plus utilisés est le suivant :

$$Ee = 0 \; ; \qquad \sigma^2 = P^{-1} * \sigma_0^2 \qquad (3)$$

'e' réalisation d'un vecteur aléatoire centré dont la matrice variance (σ^2) est connue entièrement, où à un facteur scalaire près (σ_0^2). (E symbole de l'espérance probabiliste). D'ordinaire on suppose que les matrices (σ^2) et (P) sont diagonales.

Ceci étant, on commence par linéariser (1) au voisinage d'une solution approchée (X_0); posant :

$$\dot{x} = \dot{X} - X_0 \; ; \qquad \dot{l} = \dot{L} - L_0 \tag{4}$$

avec : $L_0 \Longleftarrow \Phi(X_0, L_0) = 0$

on obtient : $${}_nA_r * \dot{x} = l - e \tag{5}$$

'e' étant inconnue, il faut travailler avec l'équation *'impossible'* (en général) :

$${}_nA_r * \dot{x} \,|= l \; ; \qquad n > r \tag{6}$$

L'équation (6), après 'pondération' devient :

$$\sqrt{P}\,{}_nA_r\dot{x} \,|= \sqrt{P}\; l \Longleftrightarrow \sigma^{-1}\,{}_nA_r\dot{x} \,|= \sigma^{-1}\; l \tag{7}$$

compte-tenu du modèle stochastique (3); on voit que si σ^2 est diagonale, (7) se déduit de (6) en divisant chacune des équations par l'écart-type (*précision*) de l'observation correspondante.

Parmi tous les estimateurs sans biais $\tilde{x}$ de $\dot{x}$ ($\tilde{x}$ est sans biais si $E\tilde{x} = \dot{x}$), le *'plus précis'* ($\tilde{x}$ est plus précis que $\tilde{x}'$ si $k^T\sigma^2\bar{x}\,k \le k^T\sigma^2\bar{x}'k$, $\forall\, k \in \mathbb{R}^r$, l'inégalité ayant lieu au moins pour un k) est donné par :

$$\bar{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPl = (A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-2}l \tag{8}$$

($\bar{x}$) est la solution des moindres carrés de l'équation (7), trouvée en minimisant en norme l'écart entre les deux membres d'équation : ($|\sqrt{P}\; A\; x - \sqrt{P}\; l|$ minimum).

On voit aussi que le passage de (7) à (8) se fait en multipliant les deux membres de (7) par la matrice transposée $A^T\sqrt{P}$:

$$A^TPA\;\dot{x} = A^TP\;l \tag{9}$$

(A^TPA) s'appelle classiquement la <u>matrice normale</u> .

Une fois trouvé $\bar{x}$, on en déduit $\bar{X} = \bar{x} + X_0$; on calcule aussi les valeurs *'compensées'* des observations (L) par :

$$\bar{l} = A * \bar{x} \; ; \qquad \bar{L} = \bar{l} + L_0 \tag{10}$$

ainsi que les *'résidus'* :

$$\bar{v} = \bar{l} - l \simeq \bar{L} - L \tag{11}$$

ces résidus sont de l'ordre de grandeur des erreurs ; ils permettent de réestimer σ_0^2 (3) par (estimateur sans biais) :

$$\sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{n - r} \tag{12}$$

Cette quantité ne doit pas différer significativement de 1 (test de Fisher - Snedecar). Pour le rendre moins abstraite on la multiplie (en photogrammétrie) par l'écart-type moyen des mesures-cliché:

$$\sigma'_0 = (\sigma_{x'} + \sigma_{y'}) \; / \; 2 \tag{13}$$

et on l'exprime en microns :

$$\tilde{\sigma}'_0 = \sigma'_0 * \sigma_0 \quad \mu m \tag{14}$$

Par exemple pour un bloc excellent : $\tilde{\sigma}'_0 = 3.5$ microns

Enfin, quand les poids ont été correctement choisis, la matrice variance de l'estimateur $\bar{X}$ est :

$$\sigma^2_{\bar{x}} = (A^T P A)^{-1} \sigma_0^2 \tag{15}$$

les termes diagonaux sont les variances des estimateurs des inconnues.

Les écarts-type correspondants chiffrent leur *'précision'*, c'est à dire la façon dont fluctuent les estimations $\bar{X}$ autour de leur espérance $(E\tilde{X})$, mais non, en pratique, leur *'exactitude'*, c'est à dire la façon dont fluctue $\bar{X}$ autour de $\dot{X}$.

Il n'y a confusion entre deux notions que si les erreurs, conformément à (3) sont rigoureusement centrées, hypothèse qui n'est vraie qu'en première approximation; d'où de nombreuses difficultés pour estimer correctement l'exactitude .

• • •

La méthode classique de moindres carrés ne permettait, quant aux problèmes de précision, d'estimer que la quantité σ_o définie par (12); quantité abstraite qui est dépourvue de sens quand les poids sont mal choisis, et qui n'est pas d'un grand intérêt dans les applications pratiques.

Nous allons exposer une méthode donnant des estimateurs SANS BIAIS des variances de n'importe quelle catégorie d'observation, par exemple en photogrammétrie :

—— écart-type des mesures-cliché en x
—— '' '' '' '' en y
—— '' '' mesures de coordonnées X,Y des appuis
—— '' '' '' '' Z '' ''

etc ...

Ceci à condition que le nombre d'observations dans chaque catégorie soit suffisant, et qu'il n'y ait pas de systématisme résiduel significatif (une méthode permettant de déceler un systématisme sera exposée en 3e partie); rappelons (introduction D) que pour les mesures terrain, ce n'est pas la variance des erreurs-terrain qui sera ainsi déterminée, mais celle de la somme de l'erreur-terrain et de l'erreur de transfert.

PARTIE 1

Estimation sans biais des variances des différents groupes d'observations dans une compensation hétérogène.

INTRODUCTION

Il est fréquent qu'on ait à compenser simultanément plusieurs catégories hétérogénes d'observations; ainsi en géodésie, mesures d'angles, de distances, et *'observations indirectes'* qui sont les coordonnées de points *'anciens'* sur lesquels on cale le réseau; en photogrammétrie on compense couramment des mesures de coordonnées de points de clichés aériens (dont la précision est de l'ordre du μm) et des mesures de coordonnées de points terrain (dont la précision - qui diffère en général en planimétrie et en altimétrie - varie entre quelques *cm* et quelques *dcm*).

Nous savons que dans la compensation, chaque observation doit être pondérée par sa précision, c'est à dire en définitive divisée par son écart-type; ceci naturellement si les observations sont non corrélées, ce qu'on se voit presque toujours contraint de supposer, ne serait-ce que pour éviter des complications de calcul.

Malheureusement il est rare qu'on connaisse bien ces précisions; il y a parfois des remèdes; ainsi quand chaque catégorie d'observation est suffisamment *redondante (c'est à dire quand le nombre d'observations est largement supérieur à celui des grandeurs observées correspondantes)*; il suffit alors de les compenser séparément, on estime ensuite la précision σ_i de la $i^{-ème}$ catégorie d'observations par :

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_j v_{ij}^2}{n_i - r_i} \qquad (1)$$

où :

v_{ij} $(j=1,n_i)$ sont les résidus de la compensation,

n_i le nombre d'observations,

r_i le nombre de degrés de liberté correspondants,

$\tilde{\sigma}_i^2$ *est une estimations non biaisée* de σ_i^2 (résultat classique, autrement dit $E\,\tilde{\sigma}_i^2 = \sigma_i^2$)

On peut ensuite faire une compensation d'ensemble avec les poids corrects ($1/\tilde{\sigma}_i^2$).

Mais cette méthode n'est applicable que si chaque catégorie d'observations permet à elle seule de résoudre le problème; (c'est très loin d'être toujours le cas); imaginons ainsi que pour déterminer un réseau tridimensionnel on dispose :

* d'observations de distances, redondantes, de précision σ_d
* d'observations de coordonnées planimétriques, non redondantes, de précision σ_{xy}
* d'observations de coordonnées altimétriques, non redondantes, de précision σ_z

On ne peut estimer ici que (σ_d) en compensant les distances. Seul un petit résultat supplémentaire est apporté par la compensation d'ensemble : si préalablement à la compensation on pose, (σ^2) étant la matrice-variance (non nécessairement diagonale), des erreurs :

$$\sigma^2 = p^{-1} * \sigma_o^2 \qquad (2)$$

avec (σ_o^2) scalaire arbitraire (souvent appelé *'facteur de variance'*), c'est à dire si on suppose la matrice (σ^2) connue à un facteur scalaire près, on sait estimer (σ_o^2) à l'issue de la compensation par :

$$\tilde{\sigma}_o^2 = \frac{v^T p v}{n - r} \qquad (3)$$

l'estimateur $(\tilde{\sigma}_o^2)$ est sans biais; de plus, il est classique que la quantité $(n-r) * \tilde{\sigma}_o^2$ est réalisation d'une variable (χ^2) à $(n-r)$ degrés de liberté (si on fait l'hypothèse d'erreurs normales) : un test permet alors de décider si la valeur à posteriori $(\tilde{\sigma}_o^2)$ est en bon accord avec la valeur à priori (σ_o^2); mais ce test, outre qu'il est fort peu sensible lorsqu'une catégorie d'observations prédomine en nombre, ne résout pas le problème : un désaccord entre $(\tilde{\sigma}_o^2)$ et (σ_o^2) peut être l'indice d'un mauvais choix des poids; si l'un des poids est bien connu (par exemple celui relatif aux distances) cela conduit à réestimer les autres par tâtonnements, méthode peu satisfaisante, très peu précise et sans fondement statistique.

Quand les erreurs de mesures sont normales, on peut aussi songer à utiliser la méthode du maximum de vraisemblance; la variance (σ_i^2) des observations de la $(i^{-\text{ème}})$ catégorie est alors estimée par :

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{v_i^T v_i}{n_i} \qquad (4)$$

où :

- v_i - est le vecteur résidu correspondant,
- n_i - est l'effectif des observations de cette catégorie.

Mais les estimateurs sont généralement *fortement biaisés*.

• • •

La méthode que nous proposons est basée sur des considérations statistiques élémentaires ; nous prouvons qu'en général il existe des estimateurs *sans biais* des variances de chaque catégorie d'observations, et nous en donnons une méthode de construction, en cas de systématisme résiduel faible (question qui sera approfondie en troisième partie).

Avant de la présenter, il n'est peut-être pas inutile de préciser l'intérêt de posséder des estimations non biaisées des variances des différents types d'observation :

■ *A* - La solution des moindres carrés n'est la plus précise qu'en cas de pondération juste; un mauvais choix des poids peut dans certains cas gravement l'altérer.

Si $Ax = l - e$ est l'équation d'observation, (σ^2) la variance du vecteur erreur centré (e), la variance de la solution $\bar{x} = (A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-2}l$ est :

$$\sigma^2_{\bar{x}} = (A^T\sigma^{-2}A)^{-1} \qquad (5)$$

Si on choisit la pondération erronnée $p^{-1}\sigma_o^2$ (σ_o^2 scalaire) au lieu de σ^2 (la solution est alors $\tilde{x} = (A^TpA)^{-1}A^Tpl$) on obtient la variance :

$$\sigma^2_{\tilde{x}} = (A^TpA)^{-1}A^Tp\sigma^2A(A^TpA)^{-1} \qquad (6)$$

■ *B* - Une pondération erronnée ($p^{-1}\sigma_o^2$ au lieu de σ^2), même sans gravité excesive, peut altérer gravement l'évaluation de la précision par les méthodes classiques.

Il faudrait en principe évaluer la précision de la solution $\tilde{x}$ par (6); comme on ne connaît pas σ^2, c'est impossible; on fait

donc comme si la pondération était juste, et on substitue à $\sigma^2_{\tilde{x}}$:

$$\sigma'^2_{\tilde{x}} = (A^T pA)^{-1}\sigma^2_o \qquad (7)$$

or la différence entre $\sigma'^2_{\tilde{x}}$ et $\sigma^2_{\bar{x}}$ semble (voir exemple ci-dessous) varier beaucoup plus rapidement avec (p) que la différence entre $\tilde{x}$ et $\bar{x}$.

■ *C* - Il est important de savoir estimer à priori les précisions des différentes catégories d'observations; soit à titre de contrôle (les précisions annoncées à priori sont-elles effectives ?) ; soit qu'il s'agisse d'un but en soi : on peut fort bien songer à recourir à une compensation hétérogéne pour estimer la précision d'une certaine catégorie d'observations ; soit enfin pour évaluer la précision des inconnues par les méthodes des mesures inactives (dans les calculs).

Cette dernière méthode est très employée, à cause de sa commodité (et aussi parce qu'en cas de systématisme elle est plus sûre); supposons que les inconnues intéressantes soient les coordonnées de points, et qu'on dispose pour les estimer de mesures de distances , et de mesures des coordonnées de certains points en nombre suffisant ; la méthode consiste à inactiver (c'est à dire à garder en réserve) '*n*' de ces points; si (m_i) est le point mesuré et $(\bar{m}_i)$ celui qui est compensé, on estime l'exactitudeobtenue par la racine de la quantité :

$$\bar{\rho}^2 = \frac{1}{n}\Sigma|\bar{m}_i - m_i|^2 \qquad (8)$$

or il faudrait l'estimer par :

$$\rho^2 = \frac{1}{n}\Sigma|\bar{m}_i - \dot{m}_i|^2 \qquad (9)$$

où $(\dot{m}_i)$ est le point nominal inconnu; ce faisant on vérifie que si (n) est suffisamment grand que :

$$\rho^2 = \bar{\rho}^2 - \frac{1}{n}\Sigma|m_i - \dot{m}_i| = \bar{\rho}^2 - \sigma^2_{m_i} \qquad (10)$$

où σ_{m_i} est la précision planimétrique des points mesurés; si cette précision est médiocre , et si on substitue $(\bar{\rho})$ à (ρ) on sous-estimera gravement l'exactitude obtenue.

■ D - Une dernière remarque importante doit compléter ce que précède, où on suppose implicitement que la définition des grandeurs inconnues (ou observées) est *la même* pour tous les processus de mesure qui entrent en jeu.

Dans la pratique, et on l'oublie souvent, les choses sont plus complexes ; par exemple en aérotriangulation analytique, où les inconnues ${}_n\dot{x}_1$ sont les coordonnées spatiales de points, on compense deux catégories de mesures :

∴ les mesures-cliché l , qui donnent lieu après linéarisation à l'équation :

$$A\dot{x} = l - e \qquad (\ e : \text{ erreur de mesure }) \tag{11}$$

∴ les mesures de coordonnées de quelques points (dit d'appui) par exemple si $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ sont les coordonnées nominales d'un appui, et x_1, x_2, x_3 leurs mesures, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = x_1 - e_{x_1} \ ; \quad \dot{x}_2 = x_2 - e_{x_2} \ ; \quad \dot{x}_3 = x_3 - e_{x_3} \ ; \tag{12}$$

mais, et c'est un fait d'expérience, le 'point' tel qu'il est vu sur le terrain, n'est pas le '*point*' vu sur la photographie aérienne : il y a un écart, aléatoire avec le point.

Au lieu d'écrire (12), il faut donc écrire :

$$\dot{x}_1 = x_1 - e_{x_1} - \xi_1 \ ; \quad \dot{x}_2 = x_2 - e_{x_2} - \xi_2 \ ; \quad \dot{x}_3 = x_3 - e_{x_3} - \xi_3 \ ; \tag{13}$$

où les ξ_i peuvent être assimilées à des réalisations de variables aléatoires centrées.

Et on voit que la méthode que nous allons exposer permettra d'estimer :

∴ d'une part l'écart-type des mesures-cliché

∴ d'autre part l'écart-type de l'erreur somme de l'erreur de mesure des coordonnées terrain et de l'erreur de transfert ξ ;

en particulier si les déterminations terrain sont excellentes eu égard à la précision des mesures-cliché, on obtiendra *l'écart-type de l'erreur de transfert* (qui lui est de l'ordre, ramené à l'échelle, de la précision des mesures-cliché).

• • •

Cette méthode très simple dans son principe semble originale ; les seules articles que nous avons pu trouvé et qui envisagent le même problème datent de 1970-1971; les auteurs (Kubik,Bosman) proposent une méthode de principe beaucoup moins clair : partant de la règle du maximum de vraisemblance (et supposant donc à priori les erreurs gaussiennes, ce qui n'est pas une nécessité chez nous) qui donnent lieu à des estimateurs biaisés, les auteurs rajoutent une condition pour obtenir des estimateurs non biaisés ; on débouche alors sur un problème non linéaire ; il faudrait critiquer en détail l'idée théorique mais de toute façon on peut dire que les essais numériques menés sur trois tout petits réseaux géodésiques réels sont peu probants (par exemple, chez Bosman et Kubik, la précision à priori des mesures angulaires évaluées à 5 cgr, et évaluée à posteriori à 3 cgr dans un premier réseau, et à 17 cgr dans un second ...); aucune validation statistique sérieuse ne semble avoir été faite ; enfin aucun moyen n'est donné pour apprécier la précision des estimations des écarts-type inconnus.

• • •

Terminons cette introduction en illustrant les points *A* et *B* par un exemple très simple.

Exemple :

De trois points (a,b,c) d'abscisse (-1,0,1) sur un axe, on mesure les distances à un point inconnu (m) de coordonnées $\dot{x}$ et $\dot{y}$ (avec $\dot{x} \simeq 0$; $\dot{y} \simeq y_o$) ; un autre procédé permet de mesurer les coordonnées $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

On appelle (σ_d) l'écart-type des erreurs sur les distances, et (σ_{xy}) celui des mesures de coordonnées. On fait la compensation des 5 mesures avec le poids (p_d) pour les distances et (p_{xy}) pour les mesures des coordonnées. On obtient ($\tilde{x}$ et $\tilde{y}$) comme estimations de (x et y); le calcul des variances de ($\tilde{x}$ et $\tilde{y}$) est aisé à faire, on trouve :

$$\sigma^2_{\tilde{x}} = \frac{\dfrac{2}{1+y_o^2}\sigma_d^2 + \dfrac{p_{xy}^2}{p_d^2}\sigma_{xy}^2}{\left(\dfrac{2}{1+y_o^2} + \dfrac{p_{xy}}{p_d}\right)^2} \quad ; \quad \sigma^2_{\tilde{y}} = \frac{\left(1+\dfrac{2y_o^2}{1+y_o^2}\right)\sigma_d^2 + \dfrac{p_{xy}^2}{p_d^2}\sigma_{xy}^2}{\left(1 + \dfrac{2\,y_o^2}{1+y_o^2} + \dfrac{p_{xy}}{p_d}\right)^2} \qquad (14)$$

(ayant pris la distance de *b* à *a* égale à 1, il en résulte que dans les formules (14) et (15), le rapport $[2/(1 + y_o)]$ est malgré les apparences sans dimensions).

Les graphiques de la page ci-contre montre l'évolution des écarts-type $\sigma_{\tilde{x}}$ et $\sigma_{\tilde{y}}$ en fonction du rapport $\sqrt{p_{xy} / p_d}$ dans deux cas : $y_o = 10$ et $\sigma_{xy} = \sigma_d$ pour le premier, $y_o = 1$ et $\sigma_{xy} = 2\sigma_d$ pour le second .

On note qu'au voisinage de la pondération juste ($\sqrt{p_{xy} / p_d} = 1$ pour le premier cas, $\sqrt{p_{xy} / p_d} = 0.5$ pour le second) la précision de la solution varie peu; quand le rapport $\sqrt{p_{xy} / p_d}$ est extérieur à [0.5 , 2] apparaissent des variations de 30% ; et l'altération s'aggrave rapidement.

On a d'autre part reporté la précision (estimée par la form. 7) que conduit à adopter la théorie des moindres carrés, quand on suppose à tort le rapport $\sqrt{p_{xy} / p_d}$ correct et quand on adopte pour facteur de variance ($\sigma_o^2 = 1/p_d$) ; on trouve alors :

$$\sigma'_{\tilde{x}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{1+y_o^2} + \dfrac{p_{xy}}{p_d}}} \quad ; \quad \sigma'_{\tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2\,y_o^2}{1+y_o^2} + \dfrac{p_{xy}}{p_d}}} \qquad (15)$$

les dérives (entre $\sigma'_{\tilde{x}}$ et $\sigma_{\tilde{x}}$ et $\sigma'_{\tilde{y}}$ et $\sigma_{\tilde{y}}$) deviennent rapidement très intolérables.

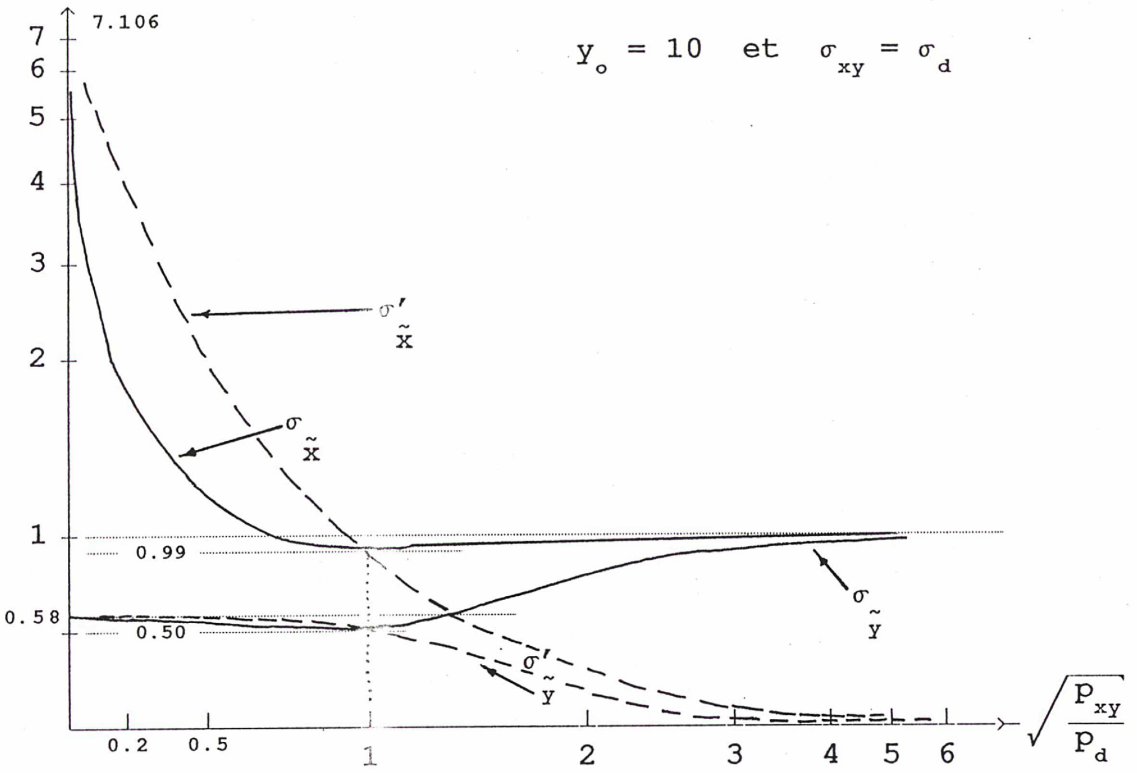


Fig 1.1 : *évolution de* $\sigma'_{\tilde{x}}$, $\sigma_{\tilde{x}}$, $\sigma'_{\tilde{y}}$, $\sigma_{\tilde{y}}$ *en fonction de* $\sqrt{p_{xy}/p_d}$

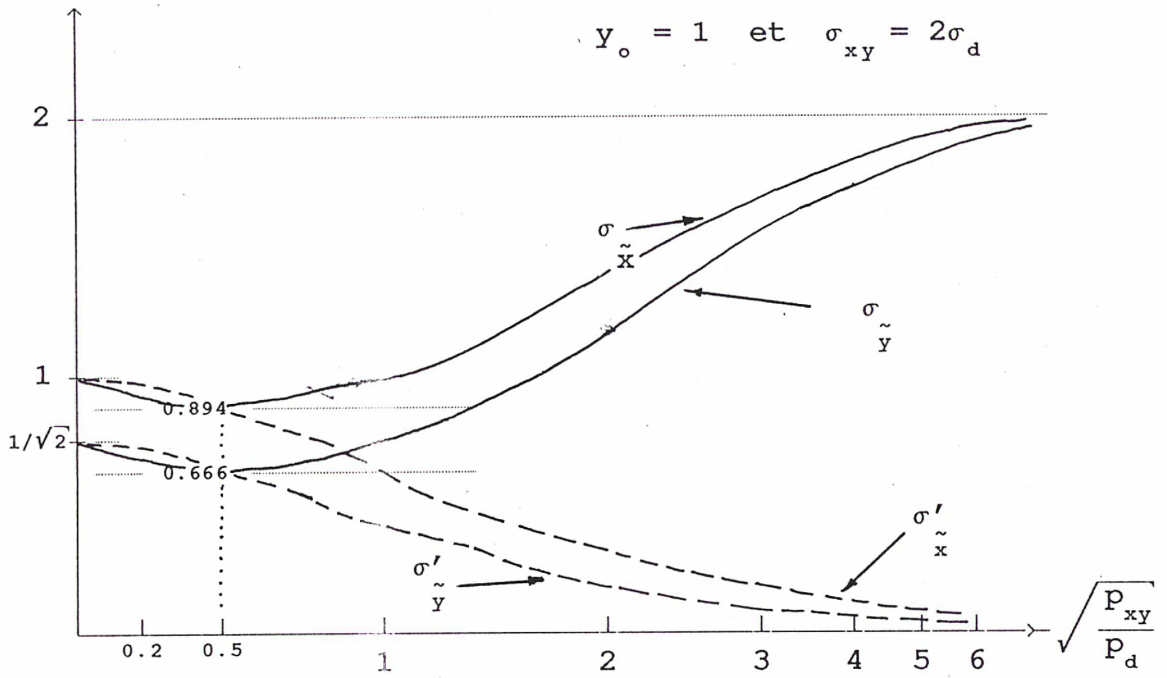


Fig 1.2 : *évolution de* $\sigma'_{\tilde{x}}$, $\sigma_{\tilde{x}}$, $\sigma'_{\tilde{y}}$, $\sigma_{\tilde{y}}$ *en fonction de* $\sqrt{p_{xy}/p_d}$

* 2 * PRESENTATION DE LA METHODE

2.1 PRINCIPE

Nous l'exposerons pour deux catégories d'observations; la généralisation ne présente aucune difficulté.

Le modèle fonctionnel est pris sous la forme :

$$ {}_{n}A_{r} * \dot{x} = \dot{l} = l - e \; ; \qquad \text{rang } A = r \; ; \qquad n \geq r \tag{1} $$

où :

- $\dot{l}$ est le vecteur des valeurs nominales des grandeurs observées,
- l est le vecteur des observations,
- e est le vecteur erreur supposé réalisation d'un vecteur aléatoire centré à variance que nous supposerons, sauf indication contraire <u>diagonale</u>.

S'il y a deux catégories d'observation, on peut récrire (1) sous la forme :

$$ {}_{n_1}A_{1\,r} * \dot{x} = l_1 - e_1 ; \qquad {}_{n_2}A_{2\,r} * \dot{x} = l_2 - e_2 \tag{2} $$

avec pour e_1 et e_2, les hypothèses statistiques suivantes :

$$ \begin{aligned} &Ee_1 = 0 \; ; \qquad \sigma_1^2 = Ee_1 e_1^T \qquad \text{scalaire} \\ &Ee_2 = 0 \; ; \qquad \sigma_2^2 = Ee_2 e_2^T \qquad \text{scalaire} \\ &Ee_1 e_2^T = 0 \end{aligned} \tag{3} $$

Si σ_1 et σ_2 étaient connus, il conviendrait de choisir le poids $1/\sigma_1^2$ pour les observations du premier groupe et le poids $1/\sigma_2^2$ pour les autres. *Mais nous ne les connaissons pas , et dans leur ignorance* adoptons les poids p_1 et p_2 ; de ce fait, l'estimation des moindres carrés pour l'inconnue $\dot{x}$ est :

$$\bar{x} = (A^T pA)^{-1} A^T pl \qquad \text{avec :} \qquad p = \begin{bmatrix} {}_{n_1}I_{n_1} p_1 & 0 \\ 0 & {}_{n_2}I_{n_2} p_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

(I matrice unité), et le vecteur résidu est :

$$v = A\bar{x} - l = -(I - A(A^T pA)^{-1} A^T p)\, l = -(I - A(A^T pA)^{-1} A^T p)\, e \tag{5}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{\sqrt{p}\; v = -\left(I - \sqrt{p}\; A(A^T pA)^{-1} A^T \sqrt{p} \right) \sqrt{p}\; e = -\, Q \sqrt{p}\; e} \tag{6}$$

La matrice Q est symétrique, et idempotente ($Q^2 = Q$)

Si on pose :

$$ {}_nQ_n = \begin{bmatrix} {}_{n_1}Q_{11}{}_{n_1} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & {}_{n_2}Q_{22}{}_{n_2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

on voit que (6) donne lieu aux deux équations :

$$\begin{aligned} -\sqrt{p_1}\; v_1 &= Q_{11} \sqrt{p_1}\; e_1 + Q_{12} \sqrt{p_2}\; e_2 \\ -\sqrt{p_2}\; v_2 &= Q_{12}^T \sqrt{p_1}\; e_1 + Q_{22} \sqrt{p_2}\; e_2 \end{aligned} \tag{8}$$

prenons pour chacun des deux résidus <u>pondérés</u> $\sqrt{p_1}\; v_1$ et $\sqrt{p_2}\; v_2$ leurs variances, il vient (p_1 et p_2 sont des scalaires) :

$$\begin{aligned} p_1\; Ev_1 v_1^T &= p_1\; Q_{11}^2\; \sigma_1^2 + p_2\; Q_{12}\; Q_{12}^T\; \sigma_2^2 \\ p_2\; Ev_2 v_2^T &= p_1\; Q_{12}^T\; Q_{12}\; \sigma_1^2 + p_2\; Q_{22}^2\; \sigma_2^2 \end{aligned} \tag{9}$$

posons alors (il s'agit ici de *scalaires*) :

$$\rho_1^2 = \frac{E v_1^T v_1}{n_1} \quad ; \qquad \rho_2^2 = \frac{E v_2^T v_2}{n_2} \tag{10}$$

(ρ_1^2 est l'espérance de la moyenne des carrés des résidus du premier groupe) et prenons la trace des deux membres dans les équations (9) ; il vient (rappelons que si $M = (m_{ij})$, $\mathrm{Tr}\, MM^T = |M|^2 = \sum m_{ij}^2$) :

$$\begin{aligned} p_1 \rho_1^2 &= \frac{|Q_{11}|^2}{n_1} p_1 \sigma_1^2 + \frac{|Q_{12}|^2}{n_1} p_2 \sigma_2^2 \\ p_2 \rho_2^2 &= \frac{|Q_{12}|^2}{n_2} p_1 \sigma_1^2 + \frac{|Q_{22}|^2}{n_2} p_2 \sigma_2^2 \end{aligned} \tag{11}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} p_1 \rho_1^2 &= \alpha_{11} p_1 \sigma_1^2 + \alpha_{12} p_2 \sigma_2^2 \\ p_2 \rho_2^2 &= \alpha_{21} p_1 \sigma_1^2 + \alpha_{22} p_2 \sigma_2^2 \; ; \quad \alpha_{21} = \frac{n_1}{n_2} \alpha_{12} \end{aligned} \tag{12}$$

Si la matrice des (α_{ij}) est inversible (nous étudierons ce problème au § 7 et en donnerons une solution partielle; mais que le lecteur se tranquilise les situations où la matrice est singulière sont rares), il vient :

$$\begin{aligned} p_1 \sigma_1^2 &= \beta_{11} p_1 \rho_1^2 + \beta_{12} p_2 \rho_2^2 \\ p_2 \sigma_2^2 &= \beta_{21} p_1 \rho_1^2 + \beta_{22} p_2 \rho_2^2 \end{aligned} \tag{13}$$

substituant à ρ_1^2 et ρ_2^2 , leurs estimations :

$$\tilde{\rho}_1^2 = \frac{v_1^T v_1}{n_1} \quad ; \qquad \tilde{\rho}_2^2 = \frac{v_2^T v_2}{n_2} \tag{14}$$

($\tilde{\rho}_1 = \sqrt{\tilde{\rho}_1^2}$ est le résidu moyen quadratique pour le premier groupe) nous estimerons σ_1^2 et σ_2^2 par :

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \beta_{11}\,\tilde{\rho}_1^2 + \beta_{12}\,(p_2 / p_1)\,\tilde{\rho}_2^2$$
$$\tilde{\sigma}_2^2 = \beta_{21}\,(p_1 / p_2)\,\tilde{\rho}_1^2 + \beta_{22}\,\tilde{\rho}_2^2 \qquad (15)$$

ce sont des estimations **SANS BIAIS** , évidemment, puisque à cause de la définition de $\tilde{\rho}_1^2$ et $\tilde{\rho}_2^2$, et de (13) :

$$E\,\tilde{\rho}_1^2 = \rho_1^2 \;, \quad \text{et} \quad E\,\tilde{\rho}_2^2 = \rho_2^2 \quad \Longrightarrow \quad E\,\tilde{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2 \;, \quad \text{et} \quad E\,\tilde{\sigma}_2^2 = \sigma_2^2$$

Plus généralement pour (k) groupes d'observations non corrélées, d'effectifs $(n_1, n_2 \ldots n_k)$, et d'écarts-type $(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_k)$, on a au lieu de (12) :

$$p_i\,\rho_i^2 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\,p_j\,\sigma_j^2 \quad ; \qquad \rho_i^2 = \frac{E\,v_i^T v_i}{n_i}$$

avec :

$$\alpha_{ij} = \frac{|Q_{ij}|^2}{n_i} \quad ; \qquad \alpha_{ji} = \frac{n_i}{n_j}\,\alpha_{ij} \qquad (16)$$

$$Q_{ii} = I - \sqrt{p_i}\,A_i\,(\textstyle\sum A_l^T p_l A_l)^{-1} A_i^T \sqrt{p_i}\,)$$

$$Q_{ij} = \sqrt{p_i}\,A_i\,(\textstyle\sum A_l^T p_l A_l)^{-1} A_j^T \sqrt{p_j}\,)$$

2.2 QUELQUES PROPRIETES DES COEFFICIENTS α_{ij}

Les coefficients (α_{ij}) sont positifs ou nuls, et obéissent à la relation suivante (puisque $\mathrm{Tr}\, Q^2 = \mathrm{Tr}\, Q = n - r$) :

$$\sum n_i \alpha_{ij} = n - r \tag{17}$$

ainsi qu'à (l'idempotence de Q entraîne $Q_{ii} = Q_{ii}^2 + \sum_{j \neq i} Q_{ij} Q_{ij}^T$ d'où $\mathrm{Tr}Q_{ii} = n_i * \alpha_{ii} + n_i * \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}$) :

$$n_i * \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \mathrm{Tr}Q_{ii} \tag{17 bis}$$

on a en outre les propriétés suivantes (on indiquera ci-dessous comment les établir) :

■ A. $$0 \leq 1 - \frac{r_i}{n_i} \leq \alpha_{ii} \leq 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \leq 1 \tag{18}$$

où :

$$r_i = \mathrm{rang}\, A_i \; ; \quad r'_i = \underset{j \neq i}{\mathrm{rang}}\, (A_1, \ldots A_j, \ldots A_k) \; ; \quad r = \mathrm{rang}\, A$$

r'_i est donc le nombre de degré de liberté du modèle fonctionnel quand on compense toutes les observations sauf le groupe (i).

Cette propriété est une conséquence du lemme de la fin du § et de la propriété D.

■ B. $$0 \leq 1 - \frac{r_i}{n_i} \leq \sum_j \alpha_{ij} \leq 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \leq 1 \; ; \; \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} < \frac{1}{4} \tag{19}$$

$$\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} < \min \left(\frac{1}{4} \, , \, 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} - \alpha_{ii} \right)$$

D'après le lemme ci-dessous, en effet, $\sum \alpha_{ij} = \mathrm{Tr}\, Q_{ii}/n_i$ est une fonction décroissante de p_i; tenant compte de la propriété D, on voit donc qu'elle est majorée par $(1 - (r - r'_i/n_i))$, et minorée par $(r - r_i/n_i)$.

Par ailleurs, si désignant les valeurs propres de Q_{ii} (qui sont ≥ 0 , et d'après le lemme ci-dessous ≤ 1) , il vient, tenant compte de l'identité $Q_{ii} = Q_{ii}^2 + \sum_{j \neq i} Q_{ij} Q_{ij}^T$:

$$\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} = \frac{\mathrm{Tr}\, Q_{ii} - \mathrm{Tr}\, Q_{ii}^2}{n_i} = \frac{\Sigma\, s_i (1 - s_i)}{n_i} \leq \frac{1}{4}$$

■ C. α_{ii} et $\sum_j \alpha_{ij}$ sont des fonctions décroissantes (au sens large) de p_i.

Plus généralement si plusieurs poids <u>dont</u> (p_i) augmentent simultanément (ils sont multipliés par un même scalaire > 1) alors α_{ii} et $\sum_j \alpha_{ij}$ ne peuvent que décroître; si plusieurs poids <u>autres que</u> (p_i) augmentent simultanément, α_{ii} et $\sum_j \alpha_{ij}$ ne peuvent que croître.

Corollaire immédiat du lemme ci-dessous.

■ D. $$\lim_{p_i \to 0} \alpha_{ii} = 1 - \frac{r - r_i'}{n_i}; \quad \lim_{p_i \to \infty} \alpha_{ii} = 1 - \frac{r_i}{n_i}; \quad \lim_{\substack{p_i \to 0 \\ p_i \to \infty}} \alpha_{ij} = 0 \qquad (20)$$

Cette propriété comporte des généralisations qui seront signalées au § 4.2 . L'existence des valeurs limites pour les coefficients α_{ij} sera établie au § 4 .

• • •

Voici à présent le lemme dont il a été question :

LEMME :

Les valeurs propres de Q_{ii} et Q_{ii}^2 sont dans [0,1] ; Tr Q_{ii} et Tr Q_{ii}^2 sont des fonctions décroissantes (au sens large) de p_i, et croissantes (au sens large) de p_j $(j \neq i)$.

On établit ce lemme à l'annexe 1 .

2.3 COMPORTEMENT MOYEN DES RESIDUS MOYENS QUADRATIQUES AVEC LES POIDS

Comment évoluent les espérances (ρ_i^2) des carrés des résidus moyens quadratiques avec les poids ? Une réponse partielle est donnée par la proposition suivante :

Proposition :

ρ_i^2 est une fonction décroissante (au sens large) de p_i ; on a :

$$\lim_{p_i \to \infty} \rho_i^2 = \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right) \sigma_i^2$$

$$\lim_{p_i \to 0} \rho_i^2 = \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right) \left(\sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \sigma_j^2\right) \tag{21}$$

avec $r_i = \text{rang } A_i$; $r'_i = \underset{j \neq i}{\text{rang}} (A_1, .. A_j, .. A_k)$; $r = \text{rang } A$

(où les β_{ij} sont des constantes pouvant éventuellement être très grandes).

Cette proposition se déduit du lemme suivant (établi à l'annexe 2) :

LEMME

$\alpha_{ij}(p_j/p_i)$ croît (au sens large) quand p_i décroît .

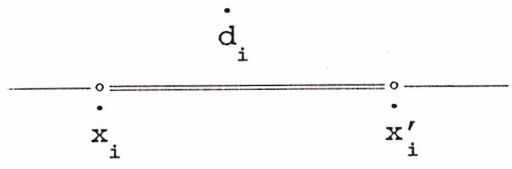
D'où, puisque : $$\rho_i^2 = \sum \alpha_{ij}(p_j/p_i) \sigma_i^2 \tag{22}$$

la première partie de la proposition ; l'existence de la première limite, quand $p_i \longrightarrow \infty$, découle du § 2.2.D ; celle de la deuxième sera établie au § 4.

2.4 UN EXEMPLE

Cet exemple, sans doute le plus simple qu'on puisse imaginer, bien que d'une portée pratique un peu limitée, permet d'illustrer assez complétement la méthode.

2.4.1 Sur un axe, on considère *n* segments de longueur $\dot{d}_i$ (i=1,n) dont les extrémités ont pour abscisses $\dot{x}_i$ et $\dot{x}'_i$; on mesure une fois $\dot{x}_i$ et $\dot{x}'_i$ et deux fois $\dot{d}_i$, on appelle x_i, x'_i, d_{i1} et d_{i2} les mesures ; les erreurs de mesure d'abscisses e_{1i} et e_{2i} sont supposées non corrélées, normales $N(0,\sigma_1)$, et celles des distances également non corrélées, normales $N(0,\sigma_2)$. Les inconnues sont σ_1 et σ_2 .



Linéarisant au voisinage des valeurs approchées :

$$\dot{x}_i = x_{i0} + \Delta x_i \ , \qquad \dot{x}'_i = x'_{i0} + \Delta x'_i$$

et posant $d_{i0} = x'_{i0} - x_{i0}$, on obtient au deuxième ordre près les équations d'observation :

$$\Delta x_i = x_i - x_{i0} - e_{1i} \ ; \qquad \Delta x'_i = x'_i - x'_{i0} - e_{2i} \tag{23}$$

$$-\Delta x_i + \Delta x'_i = d_{i1} - d_{i0} - e_{3i} \ ; \qquad -\Delta x_i + \Delta x'_i = d_{i2} - d_{i0} - e_{4i}$$

Ne connaissant ni (σ_1) ni (σ_2) , nous compensons avec les poids *arbitraires* (p_1 et p_2) ; cela peut évidemment se faire séparément pour chacun des (*n*) segments . Pour le segment (*i*), (23) s'écrit :

$$\sqrt{p}\ A \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta x'_i \end{bmatrix} = \sqrt{p}\ (l_i - e_i)\ ; \quad \sqrt{p}\ A = \begin{bmatrix} \sqrt{p}_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{p}_1 \\ -\sqrt{p}_2 & \sqrt{p}_2 \\ -\sqrt{p}_2 & \sqrt{p}_2 \end{bmatrix} ; \quad e_i = \begin{bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ e_{3i} \\ e_{4i} \end{bmatrix} \tag{24}$$

La matrice (Q) reliant le résidu pondéré ($\sqrt{p}\ v_i$) au vecteur erreur pondéré ($\sqrt{p}\ e_i$) § 2.1,6 se calcule facilement :

$$Q = \frac{1}{p_1+4p_2} \begin{bmatrix} 2p_2 & -2p_2 & \sqrt{p_1p_2} & \sqrt{p_1p_2} \\ -2p_2 & 2p_2 & -\sqrt{p_1p_2} & -\sqrt{p_1p_2} \\ \sqrt{p_1p_2} & -\sqrt{p_1p_2} & p_1+2p_2 & -2p_2 \\ \sqrt{p_1p_2} & -\sqrt{p_1p_2} & -2p_2 & p_1+2p_2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

d'où, désignant par (v_{1i}) le résidu-abscisses, et (v_{2i}) le résidu- distances, et posant :

$$\rho^2_{1i} = \frac{1}{2} E\ v^T_{1i} v_{1i}\ ; \quad \rho^2_{2i} = \frac{1}{2} E\ v^T_{2i} v_{2i} \tag{26}$$

les formules [§ 2.1,11] :

$$\begin{aligned} p_1\ \rho^2_{1i} &= \frac{8p_2^2}{(p_1+4p_2)^2}\ p_1\sigma_1^2 + \frac{2p_1p_2}{(p_1+4p_2)^2}\ p_2\sigma_2^2 \\ p_2\ \rho^2_{2i} &= \frac{2p_1p_2}{(p_1+4p_2)^2}\ p_1\sigma_1^2 + \frac{(p_1+2p_2)^2+4p_2}{(p_1+4p_2)^2}\ p_2\sigma_2^2 \end{aligned} \tag{27}$$

On note maintenant, si on compense simultanément les (4n) mesures relatives aux (n) segments, que ces formules restent valables à condition de substituer à (ρ^2_{1i} et ρ^2_{2i}) les quantités :

$$\rho_1^2 = \frac{1}{2n} E\, v_1^T v_1 \quad ; \quad \rho_2^2 = \frac{1}{2n} E\, v_2^T v_2 \tag{28}$$

où (v_1) est le résidu-abscisses (2n composantes) et (v_2) le résidu-distances (2n composantes également) .

Ceci étant on vérifie que le système (27) est *toujours* inversible.

On vérifie aussi que tout ceci garde un sens, si l'on fait tendre l'un des deux poids vers $+\infty$; en effet on remarque d'abord que les résidus aux 4 mesures sur le segment (i) qui sont :

$$v_{1i} = - \frac{2p_2(e_{1i} - e_{2i}) + p_2(e_{3i} + e_{4i})}{p_1 + 4p_2} \quad ; \quad v_{2i} = - v_{1i}$$

$$v_{3i} = - \frac{p_1(e_{1i} - e_{2i}) + (p_1 + 2p_2)e_{3i} - 2p_2 e_{4i}}{p_1 + 4p_2} \tag{29}$$

$$v_{4i} = - \frac{p_1(e_{1i} - e_{2i}) - 2p_2 e_{3i} + (p_1 + 2p_2)e_{4i}}{p_1 + 4p_2}$$

ont bien des limites; d'où notant $\rho_{1\infty}^2 = E\, v_{1\infty}^T v_{1\infty} / 2n$ ($\rho_{2\infty}^2$ analogue), et faisant tendre p_2 vers $+\infty$, dans les deuxièmes membres de (27) :

$$\rho_{1\infty}^2 = \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{8} \quad ; \quad \rho_{2\infty}^2 = \frac{\sigma_2^2}{2} \tag{30}$$

soit :

$$\sigma_1^2 = 2\,\rho_{1\infty}^2 - \frac{\rho_{2\infty}^2}{2} \quad ; \quad \sigma_2^2 = 2\,\rho_{2\infty}^2 \tag{31}$$

Noter que la seconde relation donne , lorsqu'on substitue $\tilde{\rho}_{2\infty}^2$ à $\rho_{2\infty}^2$, l'estimation classique de σ_2^2 ($\tilde{\sigma}_2^2 = \sum (v_{3i}^2 + v_{4i}^2)/(2n-n)$) quand on compense seulement les distances .

Si on fait tendre $p_1 \longrightarrow +\infty$, on n'obtient cette fois qu'une formule :

$$\rho_{2\infty}'^2 = 2\,\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{32}$$

2.4.2 Voici les résultats de quelques simulations.

■ A. On a considéré 30 segments donnant lieu à 60 mesures d'abscisses d'écart-type $\sigma_1 \simeq 0.204$, et 60 mesures de distances d'écart-type $\sigma_2 = \sqrt{2}\,\sigma_1 \simeq 0.289$. On a obtenu :

* Compensant avec $p_1 = p_2 = 1$ (formule 27)

$$\tilde{\sigma}_1 = 0.120 \quad (\text{ au lieu de } \sigma_1 = 0.204 \text{)}$$
$$\tilde{\sigma}_2 = 0.345 \quad (\text{ " } \sigma_2 = 0.289 \text{)} \tag{33}$$

* Compensant avec $p_2 = +\infty$ (formule 31)

$$\tilde{\sigma}_1 = 0.127 \qquad \tilde{\sigma}_2 = 0.336 \tag{34}$$

Est-ce que le processus converge ?

Il semble bien naturel de le penser. Les estimations ne semblent dépendre qu'infiniment peu des poids; du reste, recommençant avec cette fois les poids déduits de (33) : $p_1 = 1/\tilde{\sigma}_1^2$ et $p_2 = 1/\tilde{\sigma}_2^2$ on a trouvé :

$$\tilde{\sigma}_1 = 0.1219$$
$$\tilde{\sigma}_2 = 0.3448 \tag{35}$$

■ B. Avec 30 autres segments, on a trouvé :

$$\tilde{\sigma}_1 = 0.215 \quad (\text{ au lieu de } \sigma_1 = 0.204 \text{)}$$
$$\tilde{\sigma}_2 = 0.211 \quad (\text{ " } \sigma_2 = 0.289 \text{)} \tag{36}$$

■ C. Regroupant les 60 segments (120 mesures d'abscisses et 120 mesures de distances) on a trouvé :

$$\tilde{\sigma}_1 = 0.168$$
$$\tilde{\sigma}_2 = 0.286 \tag{37}$$

soit une amélioration très sensible.

2.4.3 Précision des estimations $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$

Nous venons de constater que les estimations semblaient peu dépendre des poids; nous allons vérifier qu'ici elles en sont totalement indépendantes, ce qui n'est qu'approximativement vrai dans la plupart des situations (comme on va le confirmer au § 6 pour l'aérotriangulation).

En fait, nous nous intéressons à un problème plus général : *quelles sont les précisions* de $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$; c'est à dire leurs écart-types $\sigma_{\tilde{\sigma}1}$ et $\sigma_{\tilde{\sigma}2}$ quand on fait l'hypothèse d'erreurs de mesures normales non corrélées !

Il se trouve qu'on peut dans ce cas particulier calculer $\sigma_{\tilde{\sigma}1}$ et $\sigma_{\tilde{\sigma}2}$, et on verra - c'est surprenant et probablement significatif - que ces précisions sont indépendantes des poids p_1 et p_2.

■ On part de (27), après substitution de $\tilde{\rho}_1^2$, $\tilde{\rho}_2^2$ à ρ_1^2 et ρ_2^2 de $\tilde{\sigma}_1^2$, $\tilde{\sigma}_2^2$ à σ_1^2 et σ_2^2 ; après inversion, il vient :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1^2 \\ \tilde{\sigma}_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4p_2^2} \begin{bmatrix} (p_1+2p_2)^2 + 4p_2^2 & -2p_2^2 \\ -2p_1^2 & 8p_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1^2 \\ \tilde{\rho}_2^2 \end{pmatrix} \qquad (38)$$

Mais $\tilde{\rho}_1^2 = (\Sigma v_{1i}^2 + \Sigma v_{2i}^2)/2n$ et $\tilde{\rho}_2^2 = (\Sigma(v_{3i}^2 + v_{4i}^2))/2n$ peuvent se calculer, à partir de (29) en fonction des erreurs de mesures; on trouve :

$$\tilde{\rho}_1^2 = \frac{p_2^2}{n(p_1+4p_2)^2}[4\sum(e_{1i}-e_{2i})^2+4\sum(e_{1i}-e_{2i})(e_{3i}+e_{4i})+\sum(e_{3i}+e_{4i})^2]$$

$$\tilde{\rho}_2^2 = \frac{1}{2n(p_1+4p_2)^2}[\,2p_1^2\sum(e_{1i}-e_{2i})^2 + (p_1+2p_2)^2\sum(e_{3i}^2+e_{4i}^2) +$$

$$4p_2^2\sum(e_{3i}^2+e_{4i}^2) + 2p_1(p_1+2p_2)\sum(e_{1i}-e_{2i})(e_{3i}+e_{4i}) -$$

$$4p_1p_2\sum(e_{1i}-e_{2i})(e_{3i}+e_{4i}) - 8p_2(p_1+2p_2)\sum(e_{3i}e_{4i})$$

Puis, reportant dans (38) :

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\sum(e_{1i}-e_{2i})^2+\frac{1}{2}\sum(e_{1i}-e_{2i})(e_{3i}+e_{4i})+\frac{1}{2}\sum e_{3i}e_{4i}\right]$$

$$\tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2n}\sum(e_{3i}-e_{4i})^2 \qquad (39)$$

les estimations sont indépendantes des poids ; il en sera donc de même pour leurs précisions.

- Précision de $\tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_2^2}$

Comme e_{3i} et e_{4i} sont indépendantes et normales $N(0,\sigma_2)$, la variable aléatoire ($n\,\tilde{\sigma}_2^2 / \sigma_2^2$) obeït à une loi χ_n^2 à n degrés de liberté; d'après l'approximation de Fisher :

$$\sqrt{2\,\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \;\tilde{\in}\; N(0,1) \Longrightarrow \chi_n \;\tilde{\in}\; N\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

il vient : $$\frac{\tilde{\sigma}_2}{\sigma_2} \;\tilde{\in}\; N\left(1, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \qquad (40)$$

ainsi : $$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\sigma_2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2n}} \qquad (41)$$

telle est la précision relative de $(\tilde{\sigma}_2)$; elle est indépendante des poids choisis et, *fait remarquable*, de (σ_1).

n	10	20	30	60	100	1000
$\sigma_{\tilde{\sigma}2} / \sigma_2$	22%	16%	13%	9%	7%	2.8%

Tab. 2.1 Valeurs de la précision relative de $(\tilde{\sigma}_2)$ *en fonction de* n

- Précision de $\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2}$

On procède de façon analogue; partant de (39) , on constate que les trois termes constituant le deuxième membre de $\tilde{\sigma}_1^2$ sont non corrélés; la variance de $\tilde{\sigma}_1^2$ et alors la somme des variances de ces trois termes :

$$v(\tilde{\sigma}_1^2) = \frac{1}{4n^2}\left[v\left(\sum(e_{1i} - e_{2i})^2\right) + v\left(\sum(e_{1i} - e_{2i})(e_{3i} + e_{4i})\right) + v\left(\sum e_{3i}e_{4i}\right)\right] \tag{42}$$

Les variables $(e_{1i} - e_{2i})$ sont indépendantes et normales $N(0,\sigma_1\sqrt{2})$ donc $\sum(e_{1i} - e_{2i})^2$ est le produit par $2\sigma_1^2$ d'une variable χ_n^2 (de variance $2n$ comme on sait), d'où :

$$v\left(\sum(e_{1i} - e_{2i})^2\right) = 2n * 4\sigma_1^4 \tag{43}$$

Pour les deux autres termes on voit immédiatement que :

$$v\left[\sum(e_{1i} - e_{2i})(e_{3i} + e_{4i})\right] = \sum E(e_{1i} - e_{2i})^2(e_{3i} + e_{4i})^2 = 4n\,\sigma_1^2\,\sigma_2^2$$

$$v\left(\sum e_{3i}e_{4i}\right) = \sum E\, e_{3i}^2 e_{4i}^2 = n\,\sigma_2^4 \tag{44}$$

ainsi :

$$v\left(\tilde{\sigma}_1^2\right) = \frac{1}{n}\left[2\sigma_1^4 + \sigma_1^2\,\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^4\right] \tag{45}$$

et pour n assez grand ($n > 10$) (théorème de la limite centrale)

$$\tilde{\sigma}_1^2 \,\tilde{\in}\, N\left(\sigma_1^2, \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2\sigma_1^4 + \sigma_1^2\,\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^4}\right) \tag{46}$$

Puis s'appuyant sur la propriété [voir annexe 3] :

$$u^2 \in N\left(m^2, \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow u \tilde{\in} N\left(m, \frac{1}{m}\frac{k}{2\sqrt{n}}\right) \qquad (47)$$

il vient, posant $\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2}$:

$$\tilde{\sigma}_1 \tilde{\in} N\left(\sigma_1, \frac{1}{2\sqrt{n}\,\sigma_1}\sqrt{2\sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^4}\right) \qquad (48)$$

d'où :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1} \simeq \frac{1}{\sqrt{2n}} * \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{8}\frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^4}} \qquad (49)$$

σ_1/σ_2 ↓ / n →	10	20	30	40	50	60	100	200	1000
∞	22 %	16	13	11	10	9	7	5	2.2
1	28	20	16	14	13	12	9	6	2.8
1/2	50	35	29	25	22	20	16	11	4.8
1/3	88	62	51	44	39	36	28	20	8
1/4	143	101	89	71	64	58	45	32	14
1/5	214	151	123	107	95	87	68	48	21

Tab. 2.2 Valeurs de la précision relative de $(\tilde{\sigma}_1)$ *en fonction de* n *et du rapport* σ_1/σ_2

On voit que si $\sigma_1 \geq \sigma_2$, la précision est bonne même pour n petit, elle devient médiocre pour $n < 60$ et $\sigma_1/\sigma_2 = 1/3$; au dela la situation se dégrade rapidement.

On verra comment généraliser au [§ 5].

* 3 * CONSTRUCTION DES ESTIMATEURS

Nous décrivons d'abord une méthode générale qu'on peut employer dans tous les cas (elle a pour seule limitation que la matrice des α_{ij} soit inversible; voir à ce sujet [§7]); puis une méthode asymptotique, beaucoup plus économique en calcul, mais qu'on ne peut employer que si figure parmi les (k) groupes de mesures un groupe (éventuellement deux) fortement redondant par rapport aux autres groupes, et qui soit (ou dont la réunion soit) *'bien conditionné'*, presque complet (ou *strictement complémentaire*) des autres groupes. Toutes ces conditions sont très fréquemment réalisées.

3.1 METHODE GENERALE

3.1.1 Le calcul direct des coefficients α_{ij} est le plus souvent impossible , car trop coûteux ; il faut alors procéder par simulation.

Voici sans doute une méthode très pratique que nous décrivons pour (k) groupes d'observations à variances scalaires inconnues $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_k$, et d'effectifs $n_1, n_2 \ldots n_k$:

$$A\dot{x} = l - e \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} A_1\dot{x} = l_1 - e_1 \\ A_2\dot{x} = l_2 - e_2 \\ \vdots \\ A_k\dot{x} = l_k - e_k \end{array} \qquad (1)$$

A. Une compensation préalable avec des poids à priori déduit des informations que'on a sur les précisions donne lieu pour chaque catégorie (i) d'observations au résidu moyen quadratique $\tilde{\rho}_i$. ($\tilde{\rho}_i^2 = \sum v_{ij}^2 / n_i$; $v_{ij} = \bar{l}_{ij} - l_{ij}$)

Pour déterminer les σ_i , on adopte alors des poids à priori de la forme :

$$p_i = c \,/\, \tilde{\rho}_i^2 \; ; \qquad c \text{ constante} \qquad (2)$$

On peut prendre $c = 1$; mais les essais semblent indiquer qu'il vaut mieux parfois partir de poids à priori *'faibles'* , et prendre $c = 0.5$

Si le groupe (k) est fortement redondant ($n_k \gg r_k$) et s'il est le seul à posséder cette propriété, on peut prendre :

$$p_k = \frac{n_k - r_k}{n_k \, \rho_k^2} \tag{3}$$

B. On crée un échantillon d'effectif n_1 de réalisations d'une variable aléatoire uniforme centrée d'écart-type arbitraire σ_1', soit e_1' $(n_1 \times 1)$, et on compense par moindres carrés, le système d'équations :

$$\begin{aligned} &\sqrt{p_1}\, A_1 \; x \; |= \sqrt{p_1}\, e_1' \\ &\sqrt{p_i}\, A_i \; x \; |= 0 \qquad\qquad i = 2,k \end{aligned} \tag{4}$$

On calcule les carrés des résidus moyens quadratiques $\tilde{\rho}_1'^{\,2} \ldots \tilde{\rho}_k'^{\,2}$; on a aussitôt [§ 2.1,16], puisque $\sigma_2 = \sigma_3 \ldots \sigma_k = 0$, l'estimation :

$$\tilde{\alpha}_{i1} = \tilde{\rho}_i'^{\,2} \;/\; \sigma_1'^{\,2} \qquad (i = 1,k) \tag{5}$$

On opère de même pour les autres colonnes des coefficients α_{ij} Pour assurer la précision des estimations α_{ij} , il est prudent de réitérer (voir § 3.1.2).

C. On compense à présent, toujours avec les poids p_i, les observations réelles, et on calcule les carrés des résidus moyens quadratiques $\tilde{\rho}_i^2$. On résout le système :

$$p_i \; \tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \tilde{\alpha}_{ij} \; p_j \; \tilde{\sigma}_j^2 \qquad (i = 1,k) \tag{6}$$

Si on trouve $\tilde{\sigma}_i^2$ négatif, cela signifie que l'effectif n_i est trop faible pour évaluer correctement σ_i^2 : on peut, sans aucune conséquence adopter $\sigma_i = 0$ (ou σ_i très faible) pour la compensation.

On peut aussi adopter l'estimation suivante, qui a l'inconvénient d'être biaisée, mais le mérite d'être toujours positive :

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\tilde{\rho}_i}{\sqrt{\sum_j \alpha_{ij}}} \tag{7}$$

[Elle se déduit du fait que si les poids à priori sont correctement choisis, autrement dit si $p_j \sigma_j^2 \simeq 1$, alors $\rho_i^2 = (\sum \alpha_{ij}) \sigma_i^2$]

D. L'estimation de la précision relative du $\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\tilde{\sigma}_i^2}$ (la formule sera justifiée au [§ 5.2]) est :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\tilde{\sigma}_i} = \frac{1}{\sqrt{2n_i \alpha_{ii}}} \left(1 + \frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right) \quad \text{où :} \quad \sigma_i' = \sqrt{\sum_{j \neq i} \frac{\alpha_{ij} p_j \tilde{\sigma}_j^2}{\alpha_{ii} p_i}} \tag{8}$$

où σ_i' est *'l'écart-type équivalent'* relatif au groupe i (sa signification sera donnée au § 5.2.1).

Cette formule (que nous appellerons le *'prédicteur général'* au § 5.2) suppose en principe que les poids à priori p_i soit voisins des quantités inconnues $1 / \sigma_i^2$; en fait, d'après les essais effectués, elle semble *'robuste'*.

Il serait évidemment possible d'estimer la précision des $\tilde{\sigma}_i$ par simulation, mais c'est en général assez délicat et coûteux.

3.1.2 Remarques importantes .

* *A* * Pour les colonnes correspondants à des groupes d'observation de faible effectif n_j , on a intérêt à réitérer, et à prendre la moyenne des $\tilde{\alpha}_{ij}$: sinon l'imprécision sur $\tilde{\alpha}_{ij}$ viendra grever la précision des estimations $\tilde{\sigma}_j$.

Nous montrerons [§ 5.2.2,15] que, moyennant quelques hypothèses pratiquement toujours vérifiées, on a pour la variance de $\tilde{\rho}_j^2$ l'encadrement :

$$2\,\alpha_{jj}\,\frac{\tilde{\rho}_j^2}{n_j} \le v(\,\tilde{\rho}_j^2\,) \le \frac{2\,\tilde{\rho}_j^2}{n_j} \qquad (9)$$

il en résulte compte-tenu de (5) :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\alpha}ij}}{\alpha_{ij}} \le \sqrt{\frac{2}{n_j}} \qquad (10)$$

(avec l'égalité si α_{jj} assez voisin de 1)

n_j	10	20	30	60	100	200	500	1000
$\frac{\sigma_{\tilde{\alpha}ij}}{\alpha_{ij}}$	44%	31%	25%	18%	14%	10%	6 %	4 %

Tab. 3.1 *Valeurs de la précision relative des* α_{ij} *en fonction de* n

Tout dépend donc de l'effectif n_j ; si $n_j < 20$, il est prudent de réitérer 4 - 5 fois.

On s'est par ailleurs aperçu, qu'on avait grandement intérêt à créer des échantillons bien centrés et d'écart-type estimé voisins de l'écart-type théorique (ce qui est parfaitement permis) : *on améliore beaucoup plus rapidement la précision des* α_{ij} *que ne le laisse penser le tableau précédent.*

* *B* * Il faut que les $\tilde{\rho}_i^2$ soient calculés avec une bonne précision numérique.

En particulier, on se méfiera des poids trop forts appliqués à des groupes d'observations faiblement redondants : si des précautions spéciales ne sont pas prises, les résidus n'ont plus de chiffres significatifs.

* *C* * Il convient de ne pas oublier les relations :

$$\alpha_{ij} = \frac{n_j}{n_i}\,\alpha_{ji} \qquad (11)$$

On note :

∴ que si n_i est grand par rapport à n_j, le coefficient α_{ij} (< 1, § 2.2,19) est négligeable :

$$n_i \gg n_j \Longrightarrow \alpha_{ij} \simeq 0 \tag{12}$$

on peut estimer (on a : $\alpha_{ij} \leq \frac{n_j}{4n_i}$) que ceci a lieu dès que ($n_i > 5n_j$)

∴ que si n_i et n_j sont du même ordre de grandeur il est bon de tenir compte de la relation (11).

* *D* * Si le groupe k est à la fois dominant ($n_k \gg n_i$, $\forall$ i≠k) et *'presque complet'* ($(r - r_k) / n_i \ll 1$) alors :

$$\tilde{\sigma}_k^2 \simeq \frac{\sum v_{kl}^2}{n_k - r_k} \tag{13}$$

En effet, nous avons vu [§ 2.2,B] que :

$$1 - \frac{r_k}{n_k} \leq \alpha_{kk} \leq 1 - \frac{r - r'_k}{n_k} \tag{14}$$

avec (puisque tous les n_i sont très petit devant n_k) :

$$r'_k = \text{rang}\ (A_1^T, A_2^T \ldots A_{k-1}^T) \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} \ll n_k \Longrightarrow \frac{r'_k}{n_k} \simeq 0$$

et :

$$\frac{r - r_k}{n_i} \ll 1\ ,\ \forall\ i<k \Longrightarrow \frac{r - r_k}{n_k} \simeq 0 \tag{15}$$

d'où (tenant compte pour α_{ki} de 12) :

$$\alpha_{kk} \simeq 1 - \frac{r_k}{n_k}\ ;\quad \alpha_{ki} \simeq 0 \qquad (i \neq k) \tag{16}$$

et donc :

$$\tilde{\rho}_k^2 \simeq \left(1 - \frac{r_k}{n_k}\right) \tilde{\sigma}_k^2 \tag{17}$$

d'où (13).

(On a ainsi l'explication du fait qu'en aérotriangulation analytique l'estimation par la formule (13) de l'écart-type des mesures cliché est toujours très bonne, quelque soient les poids).

* *E* * Les observations (ou les pseudo-observations que l'on fait égales à zéro pour lever une indétermination numérique) et dont la connaissance de l'écart-type importe assez peu, ont des coefficients α_{ij} négligeables; il n'y a pas à en tenir compte.

* *F* * S'il y a des systématismes résiduels (nous avons supposé qu'il n'y en avait pas), les relations (16) du [§ 2.1], s'écrivent :

$$p_i \rho_i^2 = \sum_{j=i}^{k} \alpha_{ij} \, p_j \, \sigma_j^2 + \beta_i \; ; \qquad i = 1,k \tag{18}$$

où β_i est une constante positive inconnue, dépendant des poids p_i, de la matrice A, et des systématismes. On voit, ce qui est évident, que les systématismes conduisent à des estimations par excès du bruit des mesures.

* *G* * Rien n'empêche, pour l'estimation des $\tilde{\sigma}_i^2$, d'envisager des $\tilde{\rho}_i^2$ issus des compensations effectuées avec des poids différents .

Par exemple, pour deux groupes d'observation, on peut effectuer une première compensation avec les poids p_1 et p_2, d'où la première relation :

$$p_1 \, \tilde{\rho}_1^2 = \alpha_{11} \, p_1 \, \sigma_1^2 + \alpha_{12} \, p_2 \, \sigma_2^2 \tag{19}$$

puis effectuer une autre compensation avec les poids p'_1 et p'_2, d'où la relation homologue :

$$p'_1 \, \tilde{\rho}'^2_1 = \alpha'_{11} \, p'_1 \, \sigma_1^2 + \alpha'_{12} \, p'_2 \, \sigma_2^2 \tag{20}$$

si le système est inversible, on en déduit $\tilde{\sigma}_1^2$ et $\tilde{\sigma}_2^2$.

3.2 METHODE ASYMPTOTIQUE

Elle consiste , quand figure parmi les k groupes, un groupe (par exemple k), *'bien conditionné '* (solution asymptotique voisine de la solution optimale), fortement redondant ($n_k - r_k \gg n_i - r_i$ $i < k$), et *'presque complet'* ($(r - r_k)/n_i \ll 1$, $i < k$), à compenser celui-ci avec un poids infini (en pratique très grand, mettons 10 fois plus que de raison).

Elle est bien plus économique que la méthode générale, et s'est avérée de précision comparable.

On peut la généraliser quand il existe deux groupes $k - 1$ et k fortement redondants ($n_k - r_k$ et $n_{k-1} - r_{k-1} \gg n_i - r_i$ $i < k-1$) dont la réunion est *'presque complète'*; on compense alors avec $p_{k-1} = p_k = \infty$. Au dela la généralisation est dépourvue d'intérêt pratique.

3.2.1 Cas d'un groupe k fortement redondant, *'bien conditionné '* et *'presque complet'*.

Par *'bien conditionné'* nous entendons que la solution obtenue en faisant $p_k = +\infty$ dans la compensation est assez proche de la solution optimale.

Cette condition est bien satisfaite dans de nombreux cas : par exemple pour un réseau géodésique à mesures angulaires qu'on compenserait avec les mesures des coordonnées d'un petit nombre de points (même situation en photogrammétrie, pour le couple, ou les blocs d'aérotriangulation non trop étendus, le groupe k étant alors celui des mesures cliché des points-image).

Il existe des cas où elle n'est pas satisfaite: par exemple celui où on forme un couple avec deux faisceaux perspectifs étroits: compenser les coordonnées du point-image avec un poids infini (le poids des appuis restant fini) fournit une très mauvaise solution et dans de tels cas, l'écart-type équivalent (voir ci-dessous) σ'_i est très grand, et la précision de l'estimation $\tilde{\sigma}_i$ très médiocre.

Par *'presque complet'*, nous entendons que la matrice $A_k(n_k \times r)$ est *'presque'* plein-rang colonne; plus précisément nous supposons :

$$\frac{r - r_k}{n_i} \ll 1 \ , \quad \text{pour} \quad i < k \quad \text{et} \quad r_k = \text{rang } A_k \tag{21}$$

Cette condition est fréquemment réalisée ; par exmple reprenant le cas d'un réseau géodésique à mesures angulaires compensé avec les coordonnées de n_1 points (groupe 1 : coordonnées , groupe 2 : angles), on a :

$$r - r_2 = 4 \qquad \text{(similitude plane)} \tag{22}$$

et si les mesures angulaires sont suffisemment redondantes ($n_2 - r_2$ élevé), et n_1 non trop petit, alors $(r - r_2) / n_1$ est petit.

(Noter que dans un tel cas , on a aussi $r - r'_1 = 4$ et donc $r - r_2 = r - r'_1$: le groupe 2 est '*strictement complémentaire*' du groupe 1. § 4.2.B)

En aérotriangulation analytique, distinguant 3 groupes, celui des mesures des coordonnées en x , y des points-terrain (*appuis planimétriques*), celui des mesures d'altitude des points-terrain (*appuis altimétriques*), et celui des *mesures* de coordonnées des points-image sur des *clichés photographiques*; on a :

$$r - r_3 = 7 \qquad \text{(similitude spatiale)} \tag{23}$$

et on a toujours : $(r - r_3) / n_1$, et $(r - r_3) / n_2$ petits .

(Noter, qu'ici encore le groupe 3 est '*strictement complémentaire*' des deux autres groupes; car $r - r'_1 = 4$ (similitude plane), $r - r'_2 = 3$ (translation verticale et basculement autourd'un axe horizontal), et donc : $r - r_3 = (r - r'_1) + (r - r'_2)$).

On pourrait d'ailleurs fort bien , scinder un ou plusieurs des premiers groupes en 2 ou plusieurs sous-groupes, sous réserve de conserver des effectifs suffisants (alors la condition de stricte complémentarité ne serait plus satisfaite). On montre [§4.2.C] que pour $p_k = +\infty$ (en pratique p_k grand) :

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &\simeq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)\left(\sigma_i^2 + \beta_{ik}\sigma_k^2\right) ; \qquad i = 1,k-1 \\ \rho_k^2 &\simeq \left(1 - \frac{r_k}{n_k}\right)\sigma_k^2 \end{aligned} \tag{24}$$

avec : $r'_i = \text{rang}\,(A_1^T, A_2^T \ldots A_{i-1}^T, A_{i+1}^T \ldots A_k^T)$

Il n'y a donc qu'une seule colonne (les β_{ik}) de coefficients à estimer : le gain de calcul est considérable.

La précision relative des $\tilde{\sigma}_i$ estimation de σ_i obtenue en inversant ces formules après substitution des $\tilde{\rho}_i^2$ aux ρ_i^2 est donnée par la même formule que [§ 3.1.1,8] ; qui s'écrit ici :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\tilde{\sigma}_i} \simeq \frac{1}{\sqrt{2(n_i-(r-r'_i))}} \left(1 + \frac{\sigma'^2_i}{\sigma^2_i} \right) \; ; \quad i = 1,k-1 \tag{25}$$

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}k}}{\tilde{\sigma}_k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2(n_k - r_k)}} \tag{26}$$

avec : $r'_i = \text{rang}\ (A_1^T, A_2^T \ldots A_{i-1}^T, A_{i+1}^T \ldots A_k^T)$

$\sigma'_i = \sqrt{\beta_{ik}}\ \sigma_i$ (écart-type équivalent pour le groupe $i \neq k$ des autres mesures).

* 4 * SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES

Nous allons d'abord nous borner à deux groupes d'observation, le deuxième étant redondant, d'écarts-type respectifs (σ_1) et (σ_2) inconnus, et montrer que si le poids (p_2) du second groupe est infini, il s'ensuit divers résultats et simplifications remarquables. Nous généraliserons ensuite à plus de deux groupes.

4.1 Cas de deux groupes d'observation.

Nous avons déjà vérifié sur l'exemple simple du [§ 2.4] que la méthode gardait son sens quand le poids p_2 tendait vers $+\infty$.

4.1.1 Pour établir ceci dans le cas général, nous ferons appel aux inverses généralisées, qui offrent ici le mérite de permettre d'arriver rapidement au but. Nous partirons du résultat suivant : la limite de la solution $\bar{x}$ des moindres carrés de la pseudo-équation :

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \; x \; |= l_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} \; A_2 \; x \; |= \frac{1}{\varepsilon} \; l_2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow {}_nA_r x \; |= l \; ; \quad \text{rang } A = r \qquad (1)$$

quand le scalaire positif ε tend vers zéro, existe et vaut :

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{x} = [\, A_1 (I - A_2^- A_2) \,]^- (l_1 - A_1 A_2^- l_2) + A_2^- l_2} \qquad (2)$$

(Nous notons par M^- l'inverse intrinsèque de M, qui est comme on sait l'unique matrice satisfaisant à : $MM^-M = M$, $M^-MM^- = M^-$, MM^- et M^-M symétriques).

(Le résultat et sa forme se conserve si rang $A < r$; $\bar{x}$ est alors la *'solution intrinsèque'*, c'est à dire la solution de norme minimale parmi toutes les solutions des moindres carrés).

Cette expression indique, ainsi qu'il est fort naturel de le penser, que pour obtenir $\lim \bar{x}$, on peut :

1 * En premier lieu compenser seulement les observations du $2^{-ème}$ groupe, c'est à dire résoudre par moindres carrés :

$$A_2 x \mid= l_2 \quad \text{d'où :} \quad \bar{x}' = A_2^- \, l_2 \tag{3}$$

les observations compensées du $2^{-\text{ème}}$ groupe sont alors :

$$\bar{l}_2'' = A \, \bar{x}_2' = A_2 A_2^- l_2 \tag{4}$$

2 * En deuxième lieu compenser : $A_1 x \mid= l_1$ compte-tenu de la *condition* : $A_2 x = \bar{l}_2''$

On montre en effet que la solution de $A\,x \mid= l$, compte-tenu la la *'condition'* $B\,x = k$ est : $\bar{x} = [A(I - B^- B)]^- (l - AB^- k) + B^- k$

** ** **

Un exemple simple peut aider à fixer les idées : un réseau bi-dimensionnel plan, où les inconnues sont les coordonnées (x,y) de chaque sommet, et où l'on dispose de deux sortes de mesures :

∴ groupe 1 : mesures de coordonnées d'un petit nombre de points (non corrélées, d'écart-type σ_1, non redondantes).

∴ groupe 2 : mesures de distances (non corrélées, d'écart-type σ_2 redondantes).

Compenser avec un poids infini les mesures de distances, revient à procéder en deux temps : faire d'abord une *'compensation libre'*, obtenant $\bar{x}' = A_2^- l_2$; les mesures compensées $\bar{l}_2' = A_2 \bar{x}'$ sont exactement les mêmes qui resulteraient de la compensation des seules mesures de distances; puis on passe de $\bar{x}'$ à $\bar{x}$, comme on peut la démontrer par une simple similitude calculée par moindres carrés sur l'ensemble des points connus.

Nous qualifierons une telle solution d'asymptotique ; dans beaucoup de cas (mais pas toujours !) - nous dirons alors le groupe 2 *'bien conditionné'* - cette solution est assez voisine de la solution optimale : rappellerons nous au lecteur qui connaît un peu de photogrammétrie qu'une méthode universellement employée de restitution, celle où on sépare l'*orientation relative'* (compensation d'un groupe de mesures internes redondantes) de la *'mise en place'* dans un repère cartographique (similitude) est justement une solution asymptotique?

Si nous faisons l'inverse, c'est à dire si nous compensons avec un poids infini les mesures des coordonnées (supposées non redondantes), nous obtenons une deuxième solution asymptotique: les co-

ordonnées compensées des points du groupe 1 sont alors identiques aux mesures ; la solution sera encore assez voisine de la solution optimale sauf si $\sigma_1 \gg \sigma_2$, auquel cas elle sera désastreuse ...

4.1.2 Montrons à présent que les résidus v_1 et v_2 ont des limites $v_{1\infty}$ et $v_{2\infty}$ quand $p_2 \longrightarrow +\infty$, et qu'on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho^2_{1\infty} &= \frac{1}{n_1} E\, v^T_{1\infty} v_{1\infty} = \left(1 - \frac{r - r_2}{n_1}\right)\left(\sigma_1^2 + \beta_{12}\sigma_2^2\right) \\ \rho^2_{2\infty} &= \frac{1}{n_2} E\, v^T_{2\infty} v_{2\infty} = \left(1 - \frac{r_2}{n_2}\right)\sigma_2^2 \\ &\text{avec : } r = \text{rang } A \ ; \qquad r_2 = \text{rang } A_2 \end{aligned}} \qquad (5)$$

Ces formules (noter que la seconde est intiutivement évidente quand $n_2 \gg n_1$) sont à priori fort intéressantes: pour un poids p_2 suffisamment grand , il apparaît inutile de calculer les coefficients diagonaux : seul β_{12} est à estimer par simulation.

Elles ne peuvent être employées cependant que si le groupe 2 (le groupe à poids infini) est redondant; sinon $\rho_{2\infty} = 0$, et il ne subsiste plus qu'une équation.

Nous verrons par ailleur que la quantité $\sigma'_1 = \sqrt{\beta_{12}}\ \sigma_2$ que nous appellerons *'écart-type équivalent'* pour le groupe (1) a un sens précis : si n_1 n'est pas trop petit, elle chiffre en unité de mesure du groupe (1) la précision de la compensation des mesures du groupe (2).

La démonstration des formules (5) se trouve en annexe 4.

4.2 Généralisation du cas de (k) groupes d'observation

Nous considérons à présent (k) groupes d'observation distincts, d'écart-type inconnus $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_k$, et nous nous demandons comment se comportent les carrés des résidus moyens quadratiques ρ_i^2, quand on fait tendre simultanément vers $+\infty$ un ou plusieurs des poids p_i; autrement dit, choisissant les poids $p_1, p_2 \ldots p_{1-1}, \lambda p_1, \lambda p_{1+1} \ldots \lambda p_k$, les résidus v_i ont-ils des limites quand $\lambda \longrightarrow +\infty$?

L'analyse faite pour deux groupes d'observations permet de conclure très vite à l'existence de ces limites ; en effet on peut poser :

$$B_1 \dot{x} \mid= m_1 \; ; \qquad \sqrt{\lambda}\, B_2 \dot{x} \mid= \sqrt{\lambda}\, m_2 \tag{6}$$

avec :

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1}\, A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{p_{l-1}}\, A_{l-1} \end{pmatrix} ; \quad m_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1}\, l_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{p_{l-1}}\, l_{l-1} \end{pmatrix} ; \quad B_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{p_k} A_k \end{pmatrix} ; \quad m_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} l_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{p_k} l_k \end{pmatrix}$$

Or la limite de la solution des moindres carrés de (6) existe - nous l'avons déjà rappelé - quand $\lambda \longrightarrow + \infty$, donc aussi les limites $v_{i\infty}$ de chacun des résidus $v_i = A_i \bar{x} - l_i$ relatifs à chacun des (k) groupes, et donc aussi les limites des résidus moyens quadratiques, que nous écrirons $\rho_{i\infty}$; on a :

$$\rho^2_{i\infty} = \alpha_{ii\infty} \left(\sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}\, \sigma_j^2 \right) \tag{7}$$

avec : $$\alpha_{ii\infty} = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \alpha_{ii} \; ; \qquad \beta_{ij} = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}} \frac{p_j}{p_i} \; ; \tag{8}$$

Mais ce qui nous intéresse, c'est évidemment l'allure des coefficients $\alpha_{ii\infty}$ et β_{ij}. Voici plusieurs propriétés :

* *A* * On a, (n_i) étant l'effectif du groupe (i) :

$$1 - \frac{r_i}{n_i} \leq \alpha_{ii\infty} \leq \frac{\mathrm{Tr}\, Q_{ii\infty}}{n_i} \leq 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \tag{9}$$

où : $r = \mathrm{rang}\, A$; $r_i = \mathrm{rang}\, A_i$; $r'_i = \underset{j \neq i}{\mathrm{rang}}\, (A_1^T, A_2^T \ldots A_j^T \ldots A_k^T)$;

$\alpha_{ii\infty} = \lim \alpha_{ii} \quad (p_1 \ldots p_k \longrightarrow \infty)$;

$Q_{ii\infty} = \lim Q_{ii} = \lim \left(I - \sqrt{p_i} A_i \left(\sum A_j^T p_j A_j \right)^{-1} A_i^T \sqrt{p_i} \right) \quad (p_1 \ldots p_k \longrightarrow \infty)$

(Noter que r_i est le nombre de degrés de liberté du groupe (i), et r'_i celui de l'ensemble des autres observations).

Cette propriété découle du lemme suivant (qui justifie, avec les formules (11) et (12) ci-dessous , les bornes et les limites annoncées au [§ 2.2.C] :

LEMME

$$1 - \frac{r_i}{n_i} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{\mathrm{Tr}\, Q_{ii\infty}}{n_i} \leq 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \tag{10}$$

Nous savons déjà que $\alpha_{ii} \leq \frac{1}{n_i} \mathrm{Tr}\, Q_{ii}$ (puisque $\alpha_{ii} = \frac{1}{n_i} \mathrm{Tr}\, Q^2_{ii}$ et $Q^2_{ii} \leq Q_{ii}$ § 2.2.B)

D'après l'étude faite pour deux groupes d'observation, on peut affirmer en premier lieu que :

$$\lim_{p_i \to 0} \frac{\mathrm{Tr}Q_{ii}}{n_i} = \lim_{p_i \to 0} \alpha_{ii} = \lim_{\lambda \to \infty} \alpha_{ii}(\lambda p_1, \lambda p_2 .. \lambda p_{i-1}, p_i, \lambda p_{i+1} .. \lambda p_k)$$

$$= 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \tag{11}$$

et en second lieu (en échangeant les rôles des deux groupes) :

$$\lim_{p_i \to \infty} \frac{\mathrm{Tr}Q_{ii}}{n_i} = \lim_{p_i \to \infty} \alpha_{ii} = \lim_{p_i \to \infty} \alpha_{ii}(p_1, p_2 .. p_{i-1}, p_i, p_{i+1} .. p_k)$$

$$= 1 - \frac{r_i}{n_i} \tag{12}$$

Nous savons d'autre part [§ 2.2.C] que si plusieurs poids *autres que* p_i croissent, α_{ii} et $\mathrm{Tr}\, Q_{ii}$ croissent au sens large; par suite :

$$\alpha_{ii}(p_1, p_2 \ldots p_k) \leq \alpha_{ii}(\infty, \infty \ldots \infty, p_i, \infty \ldots \infty) = 1 - \frac{r - r'_i}{n_i}$$

$$\mathrm{Tr}\, Q_{ii}(\quad " \quad) \leq \mathrm{Tr}\, Q_{ii}(\quad " \quad) = \quad "$$

et que si plusieurs poids *dont* p_i croissent, que α_{ii} et $\mathrm{Tr}\, Q_{ii}$ décroissent au sens large, donc :

$$\alpha_{ii}(p_1, p_2 \ldots p_k) \geq \alpha_{ii}(p_1 \ldots p_{i-1}, \infty, p_{i+1} \ldots p_k) = 1 - \frac{r_i}{n_i}$$

$$\mathrm{Tr}\, Q_{ii}(\quad " \quad) \geq \mathrm{Tr}\, Q_{ii}(\quad " \quad) = \quad "$$

d'où (10).

* *B* * Si le groupe (k) est *strictement complémentaire* des (k-1) premiers groupes, c'est à dire si :

$$r - r_k = \sum_{i<k} (r - r'_i) \tag{13}$$

Alors quand $p_k \longrightarrow +\infty$ (démonstration en annexe 5) :

$$\rho^2_{i\infty} = \alpha_{ii\infty}\left(\sigma^2_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \sigma^2_j \right) \quad (i=1,k-1) \quad ; \quad \rho^2_{k\infty} \simeq \frac{n_k - r_k}{n_k} \sigma^2_k \; ; \tag{14}$$

avec : $$\alpha_{ii\infty} \in \left[\left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)^2, 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \right]$$

$$\beta_{ij} \leq \frac{1}{1 - \frac{r - r'_i}{n_i}} \; \frac{r - r'_i}{n_i} \; \frac{p_j}{p_i} \quad ; \quad j \neq i \text{ et } k$$

(Nous avons vu au [§ 3.2.1] que la condition de stricte complémentarité est souvent vérifiée; quand elle l'est presque voir § C)

Le cas intéressant , très fréquent , est celui où les quantités $(r-r'_i)/n_i$ sont petites; dans ce cas on peut récrire (14) : (il n'y a plus qu'une seule colonne de coefficients inconnus)

$$\rho^2_{i\infty} \simeq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)\left(\sigma^2_i + \beta_{ik}\sigma^2_k\right) \; ; \quad i = 1, k-1$$

$$\rho^2_{k\infty} \simeq \left(1 - \frac{r_k}{n_k}\right) \sigma^2_k \tag{15}$$

Exemple

En aérotriangulation analytique, quand on distingue les trois groupes d'observations :

* points connus en planimétrie : n_1 (≥ 2)
* points connus en altimétrie : n_2 (≥ 3)
* mesures de coord. des points-image : n_3

on a : $r - r'_1 = 4$; $r - r'_2 = 3$; $r - r_3 = 7$; (16)

la condition de complémentarité est vérifiée.

De plus on a presque toujours :

$$n_1 \gg (r - r'_1) = 4 \quad \text{et} \quad n_2 \gg (r - r'_2) = 3 \tag{17}$$

dans ce cas on peut être assuré que si $p_3 \to \infty$ (ou p_1 et $p_2 \to 0$)

$$\rho^2_{1\infty} \simeq (1 - \frac{4}{n_1})(\sigma^2_1 + \beta_{13}\sigma^2_3) \; ; \qquad \rho^2_{2\infty} \simeq (1 - \frac{3}{n_2})(\sigma^2_2 + \beta_{23}\sigma^2_3)$$

$$\rho^2_{3\infty} \simeq (1 - \frac{r_3}{n_3})\, \sigma^2_3 = (1 - \frac{r-7}{n_3})\, \sigma^2_3 \; ; \tag{18}$$

* *C* * Si le groupe k est *'presque complet'*, c'est à dire si :

$$\boxed{(r - r_k) / n_i \ll 1 , \qquad \forall\, i < k} \tag{19}$$

(Noter qu'on a alors $r-r'_i < r-r_k$, car $r'_i \geq r_k$) , la formule (15) subsiste quand $p_k \to +\infty$ (démonstration en annexe 6) :

$$\rho^2_{i\infty} = \alpha_{i i \infty}(\sigma^2_i + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}\sigma^2_j) \simeq (1 - \frac{r - r'_i}{n_i})(\sigma^2_i + \beta_{ik}\sigma^2_k) \qquad (i=1,k-1)$$

$$\rho^2_{k\infty} \simeq (1 - \frac{r_k}{n_k})\, \sigma^2_k \tag{20}$$

OBSERVATOIRE DE PARIS

on a plus précisément :

$$\alpha_{i i \infty} \in \left[\left(1 - \frac{r - r_k}{n_i}\right)^2 , \; 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \right]$$

$$\beta_{i j} \leq 2 \, \frac{p_j}{p_i} \, \frac{(r-r_k)/n_i}{((n_i-(r-r_k))/n_i)^2} \qquad (j \neq i,k) \tag{21}$$

Cette condition est évidemment plus simple que celle énoncée au [§ B] : pour que s'applique la formule (15) il fallait à la fois stricte complémentarité et petitesse des quantités $(r - r'_i) / n_i$; ici n'est exigée que petitesse des quantités $(r - r_k) / n_i$ (qui entraîne d'ailleurs celles des quantités $(r - r'_i)/n_i$, car $r'_i \geq r_k$)

Si elle est vérifiée, la condition de stricte complémentarité est inutile, et on peut même alors, si leur effectif est suffisant dédoubler certains groupes.

Exemple : Reprenons le cas de l'aérotriangulation analytique ; nous distinguons à présent 4 groupes d'observations :

* points connus en planimétrie : ($n_1 \geq 4$ coord.)
* " " " " : ($n_2 \geq 4$ coord.)
* points connus en altimétrie : ($n_3 \geq 3$ coord.)
* coordonnées des points-image : (n_4)

La condition de stricte complémentarité n'est plus remplie pour le groupe 4 :

$$r - r'_1 = r - r'_2 = 0 \; ; \quad r - r'_3 = 3 \; ; \quad r - r'_4 = 7 \; ; \tag{22}$$

mais si les quantités $(r - r_k) / n_i$ $(i < 4)$ sont petites la formule (20) s'applique :

$$\rho^2_{1\infty} \simeq \sigma^2_1 + \beta_{14}\sigma^2_4 \; ; \qquad \rho^2_{2\infty} \simeq \sigma^2_2 + \beta_{24}\sigma^2_4$$

$$\rho^2_{3\infty} \simeq \left(1 - \frac{3}{n_3}\right)(\sigma^2_3 + \beta_{34}\sigma^2_4) \tag{23}$$

$$\rho^2_{4\infty} \simeq \left(1 - \frac{r_4}{n_4}\right)\sigma^2_4 = \left(1 - \frac{r-7}{n_4}\right)\sigma^2_4$$

On peut généraliser de la façon suivante :

* *D* * Si on fait tendre simultanément vers $+\infty$, plusieurs poids, par exemple p_{k-1} et p_k et si la réunion des deux groupes (k-1) et (k) est '*presque complète*', c'est à dire si :

$$\boxed{\frac{r - r_{k-1,k}}{n_i} \ll 1 \qquad \text{pour } i < k - 1} \tag{24}$$

avec $r_{k-1,k} = \text{rang}\ (A^T_{k-1}, A^T_k)$, alors :

$$\rho^2_{i\infty} \simeq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)\left(\sigma^2_i + \beta_{i,k-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{ik}\sigma^2_k\right) \ ; \qquad i < k-1$$

$$\rho^2_{k-1,\infty} = \beta_{k-1,k-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{k-1,k}\sigma^2_k \tag{25}$$

$$\rho^2_{k\infty} = \beta_{k,k-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{kk}\sigma^2_k \ ; \qquad \beta_{k,k-1} = \frac{n_{k-1}}{n_k}\frac{p_k}{p_{k-1}}\beta_{k-1,k}$$

Mais il n'y a plus d'expression simple pour les coefficients $\beta_{k-1,k-1}$ et $\beta_{k,k}$.

4.3 *Remarque terminale*

Les formules d'approximation précédentes ne valent en principe que pour un poids p_k infini; en pratique, lorsque le groupe (k) est '*dominant*' [$n_k \gg \Sigma\, n_i$ $(i < k)$] elles ont un champ de validité très large, et s'appliquent souvent pour des poids presque normaux. L'explication est celle-ci :

Pour que la formule (20) s'applique, il suffit - comme on le voit en reprenant la démonstration - que d'une part le groupe (k) soit presque complet, et que d'autre part :

$$\text{Tr}\ Q_{kk} = n_k - r_k \tag{26}$$

Or ce que nous savons à priori, c'est :

$$n_k - r_k \leq \mathrm{Tr}Q_{kk} \leq n_k - (r - r'_k) \quad \text{où : } r'_k = \mathrm{rang}(A_1^T, A_2^T \ldots A_{k-1}^T) \qquad (27)$$

la condition groupe (k) presque complet, implique : $r - r_k$ petit
la condition groupe (k) dominant, implique que : r'_k / n_k petit
(puisque $r'_k \leq \sum_{i<k} n_i \ll n_k$); il s'ensuit que les deux membres extrêmes de (27) sont voisins.

Nous savons d'autre part que quand p_k varie de 0 à $+\infty$, $\mathrm{Tr}\, Q_{kk}$ décroît de $(n_k - (r - r'_k))$ à $(n_k - r_k)$ [§ 2.2.D]; si la décroissance de $\mathrm{Tr}\, Q_{kk}$ en fonction de p_k est assez rapide à l'origine, on voit que la condition (26) peut être realisée même pour des faibles valeurs de p_k.

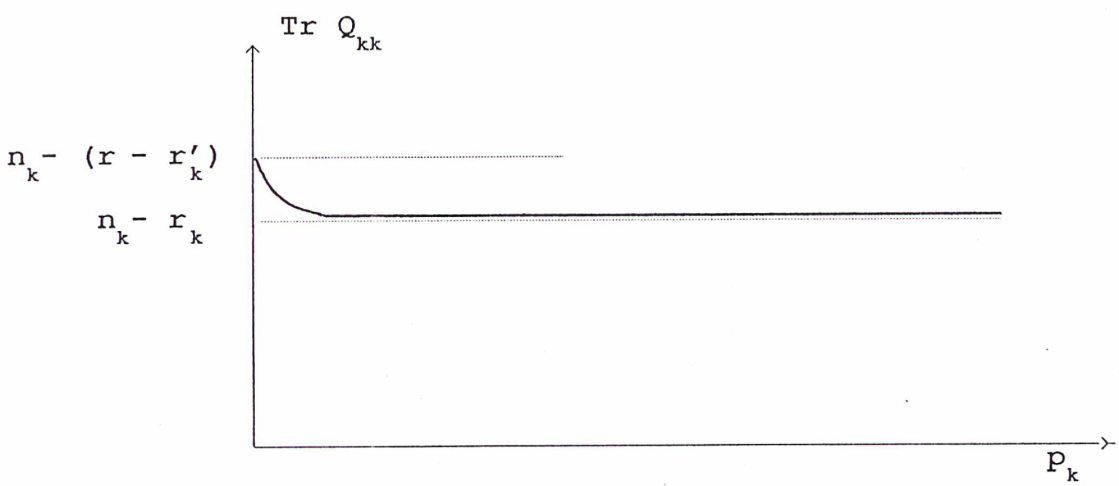


Fig. 4.1 Décroissance de $\mathrm{Tr}\, Q_{kk}$ *en fonction de* p_k

* 5 * LA PRECISION DES ESTIMATIONS DES ECARTS-TYPE

Quelle est la précision de la méthode ? Autrement dit comment estimer les précisions $\sigma_{\tilde{\sigma}i}$ (écart-type de $\tilde{\sigma}_i$) des estimations $\tilde{\sigma}_i$?

Il existe évidemment un prédicteur théorique de $(\sigma_{\tilde{\sigma}i})$ qu'on ne peut calculer explicitement que dans des cas très particuliers comme celui du [§2.4.3], et qu'on ne peut donc employer que moyennant des simulations.

Au prix de quelques approximations que nous croyons sans conséquence, nous allons montrer qu'on peut proposer des prédicteurs satisfaisants, beaucoup plus simples que les prédicteurs théoriques. Les formules ont été validées par de nombreux essais. [§ 6]

Le premier est un *prédicteur asymptotique*, et suppose l'emploi de la *méthode asymptotique* ([§ 4 : poids à priori infini pour un groupe bien conditionné et redondant); les prédictions sont très bonnes si le groupe à poids infini (*k*) est fortement redondant $[(n_k - r_k) \gg n_i - (r - r'_i)]$, et constituent des ordres de grandeurs dans les autres cas; on peut généraliser à plus d'un groupe fortement redondant [§ 5.1.2]. Le second que nous appelons prédicteur *'général'* s'emploie quand les poids de compensation sont voisins des écarts-type cherchés (σ_i) . Les deux semblent *'robustes'*.

5.1 Le prédicteur asymptotique

5.1.1 Cas de deux groupes de mesures, le deuxième fortement redondant, *'bien conditionné'*, compensé avec un poids infini.

■ *A.* Estimation de la précision $\sigma_{\tilde{\sigma}2}$ de $\tilde{\sigma}_2$.

Le poids (p_2) valant $+\infty$, on sait [§ 4.1.2,5] que σ_2 est estimé par :

$$\tilde{\sigma}_2^2 = \frac{v_{2\infty}^T v_{2\infty}}{n_2 - r_2} = \frac{n_2 \, \tilde{\rho}_{2\infty}^2}{n_2 - r_2} \qquad (1)$$

et il est classique que la quantité $[(n_2 - r_2) * \tilde{\sigma}_2^2 / \sigma_2^2]$ obéït à une loi du χ^2 à $(n_2 - r_2)$ degrés de liberté, assimilable à une loi normale de moyenne σ_2^2 et d'écart-type $\sqrt{2/(n_2 - r_2)}\ \tilde{\sigma}_2^2$ dès que $(n_2 - r_2 > 30)$:

$$\tilde{\sigma}_2^2 \;\tilde{\in}\; N\left(\sigma_2^2 \,,\, \sqrt{2/(n_2 - r_2)}\; \tilde{\sigma}_2^2 \right) \qquad (2)$$

ce qui entraîne (utilisant comme au [§ 2.4.3] l'approximation de Fisher :

$$\tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_2^2} \;\tilde{\in}\; N\left(\sigma_2 \,,\, \tilde{\sigma}_2 \,/\, \sqrt{2(n_2 - r_2)} \right) \qquad (3)$$

ainsi :

$$\boxed{\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\tilde{\sigma}_2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2(n_2 - r_2)}}} \qquad (4)$$

$n_2 - r_2$	10	20	30	60	100	500	1000
$\sigma_{\tilde{\sigma}2} / \tilde{\sigma}_2$	22 %	16 %	13 %	9 %	7 %	3,2%	2,2%

Tab. 5.1 Valeurs de l'estimation de la précision relative de $\tilde{\sigma}_2$ en fonction de la redondance $(n_2 - r_2)$ du groupe.

■ B. Estimation de la précision $\sigma_{\tilde{\sigma}1}$ de $\tilde{\sigma}_1$.

Le problème est plus délicat. Nous partirons de l'expression du résidu $v_{1\infty}$ [Annexe 4,9 et 14].

$$- v_{1\infty} = Q_{11\infty}(e_1 - A_1 A_2^- e_2)$$

où :
$$Q_{11\infty} = I - A_1(I - A_2^- A_2)[A_1(I - A_2^- A_2)]^- \qquad (5)$$

$$\text{rang } Q_{11\infty} = n_1 - (r - r_2) \;;\quad Q_{11\infty} = Q_{11\infty}^2$$

qui donne :
$$\tilde{\rho}_{1\infty}^2 = \frac{1}{n_1} \left| Q_{11\infty}(e_1 - A_1 A_2^- e_2) \right|^2 \qquad (6)$$

ainsi que [§ 4.1.2,5] :

$$\rho_{1\infty}^2 = E\,\tilde{\rho}_{1\infty}^2 = \left(1 - \frac{r - r_2}{n_1} \right) \left(\sigma_1^2 + \beta_{12}\,\sigma_2^2 \right) \qquad (7)$$

posons alors : $$\boxed{e'_1 = A_1 A_2^- e_2} \qquad (8)$$

Nous avons déjà rencontré et interprété [Annexe 4,10] cette expression : *écart à leur vecteur-espérance* ($E\bar{l}_1$) *des estimations des grandeurs du groupe (1) si on ne compensait que les mesures du groupe (2).*

On ne peut continuer de façon simple que si on substitue à la variance du vecteur (e'_1 qui est $A_1 A_2^- (A_1 A_2^-)^T \sigma_2^2$) une variance scalaire moyenne $I\sigma'^2_1$; nous poserons :

$$E\, e'_1 e'^T_1 = A_1 A_2^- (A_1 A_2^-)^T \sigma_2^2 \simeq I\, \sigma'^2_1 \qquad (9)$$

où : $$\sigma'^2_1 = \mathrm{Tr}\, A_1 A_2^- (A_1 A_2^-)^T / n_1$$

Selon nous, cette hypothèse - qui est la seule rajoutée aux hypothèses de départ - est grossièrement vérifiée au moins dans la plupart des situations habituelles, (n_1 et n_2 non petits) et sans danger pour l'objectif poursuivi.

Ceci étant nous allons voir (13) que (β_{12} défini par 7) :

$$\boxed{\sigma'^2_1 = \beta_{12}\, \sigma_2^2} \qquad (10)$$

Par définition σ'_1 représente *pour le groupe (1) l'écart-type équivalent de la compensation des mesures du groupe (2)*: il caractérise quand on ne compense que celles-ci les fluctuations autour de leur espérance ($E\bar{l}_1$) des estimations corrélatives ($\bar{l}_1$) des grandeurs du groupe (1).

- Nous nous appuierons dans ce qui suit sur le lemme suivant (diagonaliser S , et s'appuyer sur la loi du χ^2_n à (n) degrés de liberté : $v(\chi^2_n) = 2n$; $E\,\chi^2_n = n$)

LEMME

Si S est une matrice symétrique, (e) et (e') des vecteurs normaux non corrélés, à composantes non corrélées de même écart- type (σ) et (σ'), alors (v = variance) :

$$v(e^T S e) = 2 \operatorname{Tr} S^2 \sigma^4 \; ; \qquad v(e^T S e') = \operatorname{Tr} S^2 \sigma^2 \sigma'^2$$

$$E(e^T S e) = \operatorname{Tr} S \, \sigma^2 \; ; \qquad E(e^T S e') = 0 \tag{11}$$

$$E(e^T S e)^2 = [2 \operatorname{Tr} S^2 + (\operatorname{Tr} S)^2] \sigma^4 \; ; \quad E(e^T S e')^2 = \operatorname{Tr} S^2 \sigma^2 \sigma'^2$$

- Récrivons alors (6) sous la forme :

$$\tilde{\rho}^2_{1\infty} = \frac{1}{n_1} \left(e_1^T Q_{11\infty} e_1 - 2 e_1^T Q_{11\infty} e'_1 + e'^T_1 Q_{11\infty} e'_1 \right) \tag{12}$$

Appliquant (11) (et se rappelant que $Q^2_{11\infty} = Q_{11\infty}$), il vient :

$$\rho^2_{1\infty} = E \, \tilde{\rho}^2_{1\infty} = \left(1 - \frac{r - r_2}{n_1} \right) \left(\sigma_1^2 + \sigma'^2_1 \right) \tag{13}$$

qui rapproché de (7) justifie (10).

- On remarque à présent que les trois termes de (12) sont non corrélés; la variance de $(\tilde{\rho}^2_{1\infty})$ est donc la somme de leurs variances; d'où, appliquant (11) :

$$v(\tilde{\rho}^2_{1\infty}) = 2 \, \frac{n_1 - (r - r_2)}{n_1^2} \left(\sigma_1^2 + \sigma'^2_1 \right)^2 \tag{14}$$

- Mais $\tilde{\sigma}^2_1$ est estimé à partir de la relation :

$$\tilde{\rho}^2_{1\infty} = \left(1 - \frac{r - r_2}{n_1}\right) \left(\tilde{\sigma}_1^2 + \beta_{12} \tilde{\sigma}_2^2 \right) = \left(1 - \frac{r - r_2}{n_1}\right) \left(\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}'^2_1 \right) \tag{15}$$

où $\tilde{\sigma}^2_2$ est connu par hypothèse *avec une grande précision* ; il s'ensuit :

$$v(\tilde{\sigma}^2_1) \simeq \frac{n_1^2}{(n_1 - (r - r_2))^2} \, v(\tilde{\rho}^2_{1\infty}) \tag{16}$$

Si $\tilde{\sigma}^2_2$ n'est pas connu avec une précision infinie, la formule reste valable quand $(\sigma_1 > 2\sigma'_1)$; dans les autres cas, on la considérera comme fournissant un ordre de grandeur. D'où, rapprochant de (14):

$$v(\tilde{\sigma}_1^2) = \frac{2}{n_1-(r-r_2)} \left(\sigma_1^2 + \sigma_1'^2 \right)^2 \qquad (17)$$

Assimilant alors (théorème de la limite centrale) la loi de la variable $\tilde{\sigma}_2^2$ à une loi normale :

$$N \left(\sigma_1^2, \sqrt{\frac{2}{n_1-(r-r_2)}} \left(1 + \frac{\sigma_1'^2}{\sigma_1^2} \right) \sigma_1^2 \right) \qquad (18)$$

et tenant compte de la propriété énoncée dans l'annexe 3, il vient pour expression de l'écart-type de $(\tilde{\sigma}_1)$:

$$\boxed{\sigma_{\tilde{\sigma}1} = \frac{1}{\sqrt{2[n_1-(r-r_2)]}} \left(1 + \frac{\sigma_1'^2}{\sigma_1^2} \right) \sigma_1} \qquad (19)$$

Ceci pour $(\tilde{\sigma}_2)$ de précision *'infinie'* (pratiquement : $n_2 - r_2 > k\ (n_1 - (r - r_2))$, avec (k) valant 4 ou 5).

σ_1/σ_1' \ $n_1-(r-r_2)$	10	20	30	40	50	60	100	200
∞	22 %	16 %	13 %	11 %	10 %	9 %	7 %	5 %
2	28	20	16	14	12.5	11.4	9	6.3
1	45	32	26	22	20	18	14	10
1/2	112	79	64	56	50	45	35	25
1/3				111	100	91	70	50

Tab. 5.2 Valeurs de l'estimation de la précision relative de $\sigma_{\tilde{\sigma}1}/\sigma_1$ $\tilde{\sigma}_1$ en fonction du rapport (σ_1/σ_1') et du paramètre $[n_1 - (r - r_2)]$

On constate qu'un faible effectif ($n_1 < 30$) ne permet d'obtenir une précision acceptable (meilleure que 50 % en valeur relative) que si ($\sigma_1/\sigma'_1 > 1$); noter aussi que *plus la précision du groupe (1) est faible, plus elle sera estimée avec précision;* la précision de l'estimation demeure pratiquement constante pour ($2 < \sigma_1/\sigma'_1 < +\infty$).

■ C. Cas d'une estimation $\tilde{\sigma}_1^2$ négative.

Ce cas est moins ennuyeux qu'il n'y paraît : par exemple $\sigma_1/\sigma'_1 = 1/4$ signifie un rapport de poids de 1 à 16; il est évident qu'on ne peut songer à déterminer alors (σ_1) de façon précise sauf valeur très élevée de (n_1) : les mesures (l_2) sont pratiquement de poids infini par rapport aux mesures (l_1).

Si on ne peut estimer directement (σ_1) quand ($\tilde{\sigma}_1^2$) est négatif, on peut néanmoins déterminer la valeur du rapport (σ_1/σ'_1) pour que la probabilité d'une estimation négative ne soit pas négligeable. A cet effet, reprenons un résultat trouvé :

$$\tilde{\sigma}_1^2 \in N\left(\sigma_1^2 , \sigma_{\tilde{\sigma}_1^2}\right) \quad ; \quad \sigma_{\tilde{\sigma}_1^2} = \sqrt{\frac{2}{n_1 - (r - r_2)}}\left(\sigma_1^2 + \sigma_1'^2\right) \qquad (20)$$

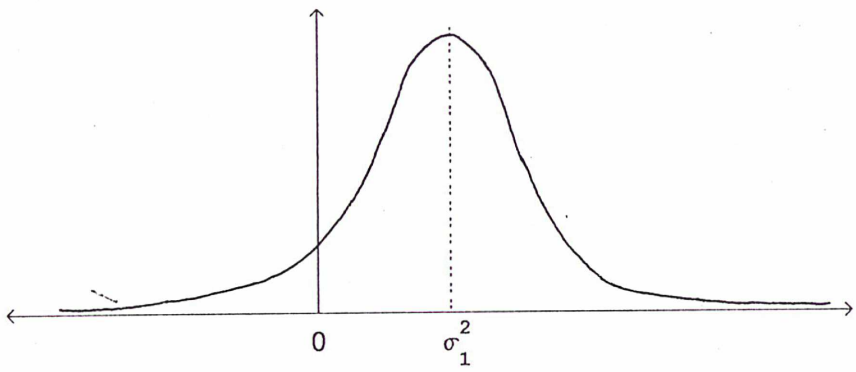


Fig. 5.1 : Densité de probabilité de la variance estimée ($\tilde{\sigma}_1^2$). Dans ce cas de la figure, ($\tilde{\sigma}_1^2$) peut fort bien être négatif.

Donnons nous un seuil (α) de probabilités faibles (mais non négligeables; par exemple (α = 10 ou 20 %) et posons :

$$k = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{\tilde{\sigma}_1^2}} \qquad \text{(20 bis)}$$

la probabilité pour que $(\tilde{\sigma}_1^2)$ soit négatif est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\,\sigma_{\tilde{\sigma}_1^2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\sigma_1^2}{\sigma_{\tilde{\sigma}_1^2}}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \int_{-\infty}^{-k} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = F(-k) \qquad (21)$$

où $F(-k)$ est la fonction de répartition de la loi standard $N(0,1)$

Alors, pour que la probabilité d'une estimation négative de $(\tilde{\sigma}_1^2)$ soit *non négligeable*, il faut :

$$F(-k) \geq \alpha \iff F(k) \leq 1 - \alpha \implies k \leq F^{-1}(1 - \alpha) = k_0 \qquad (22)$$

(on trouve $k_0 = 0.84$ pour $\alpha = 20\%$ et $k_0 = 1.28$ pour $\alpha = 10\%$)

Il faut donc que (20 et 20 bis) :

$$\sigma_1^2 \leq k_0 * \sqrt{\frac{2}{n_1 - (r-r_2)}}\,(\sigma_1^2 + \sigma_1'^2) \qquad (23)$$

soit en définitive :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1'} \leq \sqrt{\frac{k_0\sqrt{\frac{2}{n_1-(r-r_2)}}}{1 - k_0\sqrt{\frac{2}{n_1-(r-r_2)}}}} \qquad \text{avec : } k_0 = 0.84 \text{ si } \alpha = 20\%, \quad k_0 = 1.28 \text{ si } \alpha = 10\% \qquad (24)$$

Voici quelques valeurs devant majorer le rapport (σ_1/σ_1') pour qu'une estimation négative puisse survenir dans (α) cas au moins, selon la valeur du paramétre $n_1-(r-r_2)$:

$n_1-(r-r_2)$	10	20	30	40	50	60	100	200
α = 20 %	0.78	0.60	0.53	0.48	0.45	0.43	0.37	0.30
α = 10 %	1.16	0.82	0.70	0.63	0.59	0.55	0.47	0.38

Tab. 5.3 Valeurs devant majorer le rapport (σ_1/σ'_1) *pour qu'une estimation négative puisse survenir dans* (α) *cas au moins, en fonction du paramétre* $n_1-(r-r_2)$

■ D. Reste à expliciter la raison pour laquelle le système doit être *'bien conditionné'* : s'il n'en est pas ainsi la solution asymptotique peut être fort éloignée de la solution optimale; à priori ceci est sans danger quant à la précision de $(\tilde{\sigma}_2)$ (si le groupe 2 est suffisamment redondant); mais il n'en est plus de même pour le deuxième groupe, (σ'_1) l'écart-type équivalent est alors grand , et la précision de $\tilde{\sigma}_1$ (19) peut être très médiocre.

■ E. Des exemples d'application seront présentés au [§ 6]

• • •

L'estimateur proposé pour $(\sigma_{\tilde{\sigma}1})$ semble *'robuste'*, c'est à dire conserver sa valeur même dans des situations assez éloignées de ses conditions d'application.

C'est le cas ainsi, pour le problème traité au [§ 2.4] : rappelons qu'on mesurait sur un axe les abscisses des extrêmités (précision σ_1) et deux fois la longueur (précision σ_2) de n segments de longueurs voisines. On est ici très éloigné des conditions d'application de (19), car évidemment $(\tilde{\sigma}_2)$ ne peut nullement être considéré de précision infinie par rapport à $(\tilde{\sigma}_1)$ puisque les groupes (1) et (2) ont même effectif.

Cherchons cependant ce que donne (19) ; on a d'abord [§ 2.4,30] et (7) et (10) : $(n_1 = n_2 = 2n$; $r = 2n$; $r_2 = n)$:

$$\rho^2_{1\infty} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_1'^2\right) \qquad (25)$$

l'écart-type équivalent relatif au groupe (1) est donc : $\sigma'_1 = \sigma_1/2$; appliquant (19), il vient :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(1 + \frac{\sigma_1'^2}{\sigma_1^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) \tag{26}$$

or, nous avons pu dans ce cas, estimer rigoureusement $(\sigma_{\tilde{\sigma}1}/\sigma_1)$; on a trouvé [§ 2.4.3,49] :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{8} \frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^4}} \tag{27}$$

Or on vérifie que pour $(\sigma_1/\sigma_2 > 1/2 \iff \sigma_1/\sigma_1' \geq 1)$ les deux formules fournissent des estimations très voisines; pour des rapports $(\sigma_1/\sigma_2 < 1/3)$, il faut *n* très fort pour estimer valablement $(\tilde{\sigma}_1)$, et la situation devient irréaliste (Tableau 5.2); il ne peut être question d'estimer correctement σ_1 quand σ_1 est très petit par rapport à σ_2 ...

5.1.2 Généralisation à (*k*) groupes

Le dernier (*k*) est supposé fortement redondant, bien conditionné, et les conditions d'application de la formule [§ 4.2.B,15] réunies; par exemple [§ 4.2.C] le groupe (*k*) est *'presque complet'* :

$$\rho_{i\infty}^2 = \left(1 - \frac{r - r_i'}{n_i} \right) \left(\sigma_i^2 + \beta_{ik} \sigma_k^2 \right) ; \qquad i < k$$

$$\rho_{k\infty}^2 = \left(1 - \frac{r_k}{n_k} \right) \sigma_k^2 \tag{28}$$

Les (σ_i^2) sont estimés, en substituant aux $(\rho_{i\infty}^2)$, leurs estimations $(\tilde{\rho}_{i\infty}^2)$; la précision de $(\tilde{\sigma}_k^2)$ est donné par :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}k}}{\sigma_k} = \frac{1}{\sqrt{2(n_k - r_k)}} \tag{29}$$

et celles de $(\tilde{\sigma}_i)$ par :

$$\boxed{\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{2(n_i - (r - r'_i))}} \left(1 + \frac{\sigma'^2_i}{\sigma^2_i} \right) \; ; \quad \text{où : } \sigma'^2_i = \sqrt{\beta_{ik}}\, \sigma_k} \qquad (30)$$

(σ'_i) est *pour le groupe (i) l'écart-type équivalent*, de la compensation du groupe (k).

S'il y a plusieurs groupes fortement redondants, par exemple deux (k-1 et k) dont la réunion forme un groupe bien conditionné, on peut généraliser sans peine à partir des formules [§ 4.3,25] :

$$\rho^2_{i\infty} = \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \right) \left(\sigma^2_i + \beta_{ik-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{ik}\sigma^2_k \right) \; ; \quad i < k$$

$$\rho^2_{k-1,\infty} = \beta_{k-1,k-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{k-1,k}\sigma^2_k \qquad (31)$$

$$\rho^2_{k\infty} = \beta_{k,k-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{kk}\sigma^2_k$$

On trouve pour les (k-2) premiers groupes :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{2(n_i - (r - r'_i))}} \left(1 + \frac{\sigma'^2_i}{\sigma^2_i} \right) \; ; \quad \text{où : } \sigma'^2_i = \beta_{i,k-1}\sigma^2_{k-1} + \beta_{ik}\sigma^2_k \qquad (32)$$

Ces formules ne sont plus valables pour les deux derniers groupes (sauf si $\beta_{k-1,k}$ et $\beta_{k,k-1}$ sont petits par rapport à $\beta_{k-1,k-1}$ et β_{kk}); si on ne peut estimer (σ_{k-1} et σ_k) à partir de deux compensations successives, l'une avec ($p_{k-1} = +\infty$, p_k fini), l'autre avec ($p_k = +\infty$), on pourra utiliser le prédicteur *'général'* [§ 5.2] qui donne dans ce cas :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}k-1}}{\sigma_{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n_{k-1}\beta_{k-1,k-1}}} \left(1 + \frac{\beta_{k-1,k}}{\beta_{k-1,k-1}} \frac{\sigma^2_k}{\sigma^2_{k-1}} \right)$$

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}k}}{\sigma_k} = \frac{1}{\sqrt{2n_k\beta_k}} \left(1 + \frac{\beta_{k,k-1}}{\beta_{k,k}} \frac{\sigma^2_{k-1}}{\sigma^2_k} \right) \qquad (33)$$

5.2 Le prédicteur 'général'

Nous considérons (k) groupes de mesures, et supposons que les poids (p_i) de compensation sont '*voisins*' (ceci devant être entendu dans un sens assez large) des poids '*optimaux*', c'est à dire des quantités ($1 / \sigma_i^2$).

5.2.1 Définition de l'*écart-type équivalent* relatif au groupe *i*

Si (ρ_i^2) désigne l'espérance du carré du résidu moyen quadratique relatif au groupe (i), on a (§ 2,16) :

$$\rho_i^2 = \sum \alpha_{ij} \frac{p_j}{p_i} \sigma_j^2 \; ; \qquad i = 1,k \tag{34}$$

ou encore (le cas $\alpha_{ii} = 0$ qui entraîne : $\rho_i^2 = 0$ est totalement dépouvu d'intérêt pratique) :

$$\boxed{\rho_i^2 = \alpha_{ii} \left(\sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}} \frac{p_j}{p_i} \sigma_j^2 \right) = \alpha_{ii} (\sigma_i^2 + \sigma_i'^2) \; ; \; \alpha_{ii} \neq 0} \tag{35}$$

Cette formule ressemble singulièrement à celle que nous avons rencontrée dans le § précédent. Nous poserons ($\alpha_{ii} \neq 0$) :

$$\boxed{\sigma_i' = \sqrt{\sum_{j \neq i} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}} \frac{p_j}{p_i} \sigma_j^2}} \tag{36}$$

Cette quantité ne dépend pas de (σ_i). Le rapport (σ_i / σ_i') qui va jouer on rôle essentiel, peut être interprété de deux façon :

- A. Première interprétation (en termes de résidus).

D'après (35) on a :

$$\boxed{\frac{\sigma_i}{\sigma_i'} = \frac{\rho_i \; (\sigma_j = 0 \; ; \; j \neq i)}{\rho_i \; (\sigma_i = 0)}} \tag{37}$$

autrement dit $(\sigma_i^2/\sigma_i'^2)$ est le rapport de l'espérance de la somme des carrés des résidus du groupe (i) quand toutes les autres mesures sont exactes à l'espérance de cette même quantité quand les mesures du groupe (i) sont exactes, et celles des groupes $(j \neq i)$ d'écart-type σ_j .

■ B. Deuxième interprétation (en termes d'erreurs).

Nous allons voir qu'on a aussi bien :

$$\boxed{\frac{\sigma_i}{\sigma'_i} = \frac{\sqrt{\sigma_i^2 - \sigma_{mi\ (\sigma_j=0;\, j\neq i)}^2}}{\sigma_{mi\ (\sigma_i=0)}} \Longrightarrow \sigma'_i \geq \sigma_{mi\ (\sigma_i=0)}} \qquad (38)$$

où $(\sigma_{mi}(\sigma_j = 0;\ j \neq i))$ est la précision moyenne (écart-type) des *estimations* des grandeurs du groupe (i) quand les mesures des autres groupes sont exactes, et $(\sigma_{mi}(\sigma_i = 0))$ la quantité homologue quand les mesures du groupe (i) sont exactes.

On notera que si le poids (p_i) du groupe (i) est infini et si c'est le seul $(p_j < \infty\ ,\ j \neq i)$, l'écart-type équivalent (σ'_i) relatif au groupe (i) est nul: car alors $\sigma_{mi,(\sigma i=0)} = 0$ et (38) $\Longrightarrow \sigma'_i = 0$; que si le poids (p_i) est nul (ou : $p_j = \infty$, $j \neq i$) , (σ'_i) est égal à $\sigma_{mi(\sigma i=0)}$, car alors $\sigma_{mi,(\sigma j=0,\, j\neq i)} = 0$; on retrouve pour ces cas extrêmes l'interprétation donnée au [§ 5.1] pour l'écart-type équivalent. Par exemple si on compense des mesures de distances (groupe 1) et des mesures d'angles (groupe 2) avec un *poids* ∞ pour les distances $(p_1 = \infty)$, σ'_2 sera la précision moyenne des *angles compensés* quand on *impose les distances compensées;* quant à σ'_1, il est nul car les résidus relatifs aux mesures de distances ne sont pas influencés par les mesures d'angles.

Etablissons (38), avec les notations habituelles [§ 2.2,8 et 16] :

$$-v_i = Q_{ii} e_i + \sum_{j\neq i} Q_{ij} \frac{\sqrt{p_j}}{\sqrt{p_i}} e_j = \sqrt{\alpha_{ii}}\ \left(\frac{Q_{ii}}{\sqrt{\alpha_{ii}}} e_i - e'_i \right) \qquad (39)$$

avec :

$$Q_{ii} = I - \sqrt{p_i} A_i \left(\sum_m A_m^T p_m A_m \right)^{-1} A_i^T \sqrt{p_i}$$

$$Q_{ij} = \sqrt{p_i} A_i \left(\sum_m A_m^T p_m A_m \right)^{-1} A_j^T \sqrt{p_j}$$

$$e'_i = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_{ii}}} \sum_{j\neq i} Q_{ij} \frac{\sqrt{p_j}}{\sqrt{p_i}} e_j = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_{ii}}} A_i (\sum A_m^T p_m A_m)^{-1} \sum_{j\neq i} A_j^T \sqrt{p_j}$$

On en déduit :

$$\tilde{\rho}_i^2 = \frac{v_i^T v_i}{n_i} = \frac{1}{n_i} (e_i^T Q_{ii}^2 e_i - 2\sqrt{\alpha_{ii}}\, e_i^T Q_{ii} e'_i + \alpha_{ii} e'^T_i e'_i) \qquad (40)$$

dont l'espérance est donnée par (35); d'où par identification (noter que $Ee_i^T Q_{ii} e'_i = 0$) :

$$\frac{1}{n_i} E\, e_i^T Q_{ii}^2 e_i = \alpha_{ii} \sigma_i^2 \; ; \qquad \frac{1}{n_i} E\, \alpha_{ii} e'^T_i e'_i = \alpha_{ii} \sigma'^2_i \qquad (41)$$

Ceci étant, on note :

- que $(\sqrt{\alpha_{ii}}\, \sigma'_i)$ est la précision moyenne des mesures compensées $\bar{l}_i$ du groupe (i) quand les mesures l_i de ce groupe sont exactes ($l_i = \dot{l}_i$; $\sigma_i = 0$) ; en effet de :

$$\bar{x} = (\sum A_m^T p_m A_m)^{-1} \sum A_m^T p_m l_m \qquad (42)$$

on déduit, sachant que $l_i = \dot{l}_i$ ($\Longrightarrow e_i = 0$) :

$$e_{\bar{x}} = \bar{x} - \dot{x} = (\sum A_m^T p_m A_m)^{-1} \sum_{j\neq i} A_j^T p_j e_j \qquad (43)$$

puis compte-tenu de (39) :

$$\bar{l}_i - \dot{l}_i = A_i \bar{x} - A_i \dot{x} = \sqrt{\alpha_{ii}}\, e'_i \qquad (44)$$

ainsi :

$$\sigma^2_{mi(\sigma_i=0)} = \frac{1}{n_i} \mathrm{Tr}\, E\, (\bar{l}_i - \dot{l}_i)^T (\bar{l}_i - \dot{l}_i) = \alpha_{ii} \sigma'^2_i \qquad (45)$$

- que si toutes les mesures autres que celle du groupe (i) sont exactes, on a d'après (39) :

$$Q_{ii} e_i = -v_i = l_i - \bar{l}_i = (l_i - \dot{l}_i) - (\bar{l}_i - \dot{l}_i) \qquad \text{qui équivaut à :}$$

$$-v_i + (\bar{l}_i - \dot{l}_i) = e_i$$

or, il est classique que résidus et observations compensées sont non corrélées, il s'ensuit :

$$n_i\sigma_i^2 = Ee_i^Te_i = Ev_i^Tv_i + E(\bar{l}_i - \dot{l}_i)^T(\bar{l}_i - \dot{l}_i)$$

$$= n_i\alpha_{ii}\sigma_i^2 + n_i\sigma_{mi}^2 \quad (\sigma_j = 0 \ ; \ j = 0) \tag{46}$$

d'où, rapprochant de (45), la formule (38).

5.2.2 Estimation de la précision de $(\tilde{\sigma}_i)$

Pour poursuivre nous aurons besoin de faire le même type approximation qu'au § 5.1.1,B : nous considérerons que la quantité aléatoire (e'_i) définie par (39), dont l'espérance est nulle, a une variance scalaire, et qu'elle obeït sensiblement à une loi normale; autrement dit, compte-tenu de (40) nous écrirons :

$$\boxed{\alpha_{ii}\ E\ e'_ie'^T_i \simeq {}_{n_in_i}I\ \alpha_{ii}\sigma'^2_i \ ; \qquad e'_i \tilde{\in} N\ (0, I\sigma'_i)} \tag{47}$$

■ *A.* Ceci étant, remarquant (40) que $(\tilde{\rho}_i^2)$ est somme de trois termes non corrélés, il vient, pour la variance du $(\tilde{\rho}_i^2)$:

$$v(\tilde{\rho}_i^2) = \frac{1}{n_i^2}\ [v(e_i^TQ_{ii}^2e_i) + 4\ \alpha_{ii}v(e_i^TQ_{ii}e'_i) + \alpha_{ii}^2v(e'^T_ie'_i)] \tag{48}$$

D'où (lemme du § 5.1.1,B) :

$$v(\tilde{\rho}_i^2) = \frac{1}{n_i^2}\ [\ 2\ \mathrm{Tr}\ Q_{ii}^4\sigma_i^4 + 4\ \alpha_{ii}^2n_i\ \sigma_i^2\ \sigma'^2_i + 2\ \alpha_{ii}^2n_i\ \sigma'^4_i\ ] \tag{49}$$

Comme les valeurs propres de (Q_{ii}) sont inférieures à 1 :

$$\mathrm{Tr}Q_{ii}^4 \le \mathrm{Tr}Q_{ii}^2 = n_i\alpha_{ii} \tag{50}$$

Mais, on a aussi : $\mathrm{Tr}Q_{ii}^4 > n_i\alpha_{ii}^2$ (51)

(Cela revient à montrer, $(s_j \ (j=1,n_i))$ désignant les valeurs propres de (Q_{ii}), que :

$$\sum s_j^4 - n_i \left(\frac{\Sigma s_j^2}{n_i}\right)^2 \geq 0 \ ; \quad \text{ou encore :} \quad \left(\frac{\Sigma s_j^4}{n_i}\right) \geq \left(\frac{\Sigma s_j^2}{n_i}\right)^2 \tag{52}$$

ce qui est une inégalité classique pour les moyennes d'ordre 4)

En définitive : $\mathrm{Tr}Q_{ii}^4 \in [n_i \alpha_{ii}^2 \ , \ n_i \alpha_{ii}]$ (53)

et donc :

$$v(\tilde{\rho}_i^2) \geq \frac{2\alpha_{ii}^2}{n_i} \left(\sigma_i^4 + 2\ \sigma_i^2\ \sigma_i'^2 + \sigma_i'^4 \right) \tag{54}$$

$$v(\tilde{\rho}_i^2) \leq \frac{2\alpha_{ii}}{n_i} \left(\sigma_i^4 + 2\ \alpha_{ii}\sigma_i^2\ \sigma_i'^2 + 2\ \alpha_{ii}\sigma_i'^4 \right) \tag{55}$$

d'où, majorant dans la dernière relation α_{ii}^2 par α_{ii} (on rappelle que $\alpha_{ii} \leq 1$) :

$$\boxed{\frac{2\alpha_{ii}^2}{n_i} \left(\sigma_i^2 + \sigma_i'^2 \right)^2 \leq v(\tilde{\rho}_i^2) \leq \frac{2\alpha_{ii}}{n_i} \left(\sigma_i^2 + \sigma_i'^2 \right)^2} \tag{56}$$

■ *B.* Les $(\tilde{\sigma}_i^2)$ sont estimés à partir des équations :

$$p_i \rho_i^2 = \sum_j \alpha_{ij}\ p_j\ \sigma_j^2 \tag{57}$$

où on substitue $(\tilde{\rho}_i^2)$ à (ρ_i^2) et $(\tilde{\sigma}_j^2)$ à (σ_j^2); c'est ici que nous faisons intervenir *l'hypothèse selon laquelle les poids* (p_i) *sont voisins de* $(1/\sigma_i^2)$; qui implique *(l'égalité n'ayant besoin ici que d'être grossière) :*

$$\rho_i^2 \simeq (\sum \alpha_{ij})\sigma_i^2 \Longrightarrow \tilde{\sigma}_i^2 \simeq \frac{1}{\sum_j \alpha_{ij}} \tilde{\rho}_i^2 \tag{58}$$

et donc :

$$v(\tilde{\sigma}_i^2) \simeq \frac{1}{\left[\sum_j \alpha_{ij}\right]^2} v(\tilde{\rho}_i^2) \leq \frac{1}{\alpha_{ii}^2} v(\tilde{\rho}_i^2) \ ; \tag{59}$$

d'où, rapprochant de (56) :

$$\frac{2\alpha_{ii}^2}{n_i\left[\sum_j \alpha_{ij}\right]^2}\left(\sigma_i^2+\sigma_i'^2\right)^2 \le v(\tilde{\sigma}_i^2) \le \frac{2\alpha_{ii}}{n_i\left[\sum_j \alpha_{ij}\right]^2}\left(\sigma_i^2+\sigma_i'^2\right)^2 \qquad (60)$$

Puis assimilant $(\tilde{\sigma}_i^2)$ à une variable normale de loi $N(\sigma_i^2, \sqrt{v(\tilde{\sigma}_i^2)})$ et utilisant à nouveau la propriété énoncée en [Annexe 3] on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2n_i}}\,\frac{\alpha_{ii}}{\sum \alpha_{ij}}\left(1+\frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right) \le \frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} \le \frac{1}{\sqrt{2n_i}}\,\frac{\sqrt{\alpha_{ii}}}{\sum \alpha_{ij}}\left(1+\frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right) \qquad (61)$$

Nous appellerons alors prédicteur *'général'* de $(\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i)$ la quantité :

$$\boxed{\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{2n_i\alpha_{ii}}}\left(1+\frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right)} \qquad (62)$$

qui à l'évidence, majore la borne droite de (61); *cette quantité est d'autant plus proche de la précision relative de* $(\tilde{\sigma}_i)$, *que* (α_{ii}) *est voisin de 1.*

■ *C.* Si on trouve $(\tilde{\sigma}_i^2 \le 0)$, on peut procéder comme au [§ 5.1.1.C] et adopter comme estimation de (σ_i), celle définie par : $\tilde{\sigma}_i = k\,\sigma_i'$

$$\text{où :}\quad k = \sqrt{\frac{k_0\sqrt{\frac{2}{n_i\alpha_{ii}}}}{1-k_0\sqrt{\frac{2}{n_i\alpha_{ii}}}}}\;; \qquad \begin{array}{l} k_0 = 0.84 \quad \text{si} \quad \alpha = 20\ \% \\ k_0 = 1.28 \quad \text{si} \quad \alpha = 10\ \% \end{array} \qquad (63)$$

où (k) est la valeur devant majorer le rapport (σ_i/σ_i') pour que une estimation négative puisse survenir dans un pourcentage non négligeable de cas (α). On peut aussi adopter, conformement à (58)

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{\rho}_i \,/\sqrt{\Sigma\alpha_{ij}} \qquad (64)$$

5.3 Comparaison du prédicteur asymptotique et du prédicteur général.

5.3.1 Le prédicteur asymptotique $(\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i)_a$ (indice a; form. 30) et le prédicteur général $(\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i)_g$ (indice g; form. 62) sont des approximations simples d'un prédicteur compliqué, qui semblent robustes, c'est à dire qui semblent bien fonctionner loin de leurs conditions strictes d'application, et donnent (sous réserve que le groupe compensé avec un poids très grand dans la méthode asymptotique soit *'bien conditionné'*) des estimations fort voisines.

Pour le premier on note que (σ'_i) ne dépend pas (partir de 31 et faire tendre p_k vers $+\infty$) de (σ_i); pour le second il n'en est pas tout à fait ainsi: les coefficients α_{ij} varient en effet avec (σ_i), mais cette variation - nous avons déjà insisté sur ce fait - est *généralement lente* (parfois nulle, comme dans l'exemple du § 2.2.4) entre (σ_i) nettement positif et $(\sigma_i = \infty)$.

Précisons les limites de $(\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i)_g$ quand $(\sigma_i \Longrightarrow +\infty$ ou $\sigma_i \Longrightarrow 0)$ on part de [§ 2.2,D] :

$$\lim_{p_i \to 0} \alpha_{ii} = 1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\,; \quad \lim_{p_i \to \infty} \alpha_{ii} = 1 - \frac{r_i}{n_i}\,; \quad \lim_{\substack{p_i \to 0 \\ p_i \to \infty}} \alpha_{ij} = 0 \qquad (65)$$

On en déduit aussitôt (form. 62; rappelons qu'on suppose $p_i \simeq 1/\sigma_i^2$) :

$$\lim_{\sigma_i \to \infty} \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i}\right)_g = \frac{1}{\sqrt{2[n_i - (r - r'_i)]}} \qquad (66)$$

On voit ensuite, si le groupe (i) est *redondant* $(n_i > r_i$, noter qu'alors -- toujours quand on suppose $p_i\sigma_i^2 \simeq 1$ -- $\lim_{\sigma_i \to 0} \sigma'_i/\sigma_i = 0$; partir de 36 et de la propriété $\lim_{p_i \to \infty} \alpha_{ij} = 0)$:

$$\lim_{\sigma_i \to 0} \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i}\right)_g = \frac{1}{\sqrt{2(n_i - r_i)}} \qquad (67)$$

et si le groupe (i) *n'est pas redondant* :

$$\lim_{\sigma_i \to 0} \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i}\right)_g = +\infty \qquad (68)$$

Pour celles du prédicteur asymptotique on a immédiatement :

$$\lim_{\sigma_i \longrightarrow \infty} \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} \right)_a = \frac{1}{\sqrt{2[n_i - (r - r'_i)]}} \quad ; \quad \lim_{\substack{\sigma_i \longrightarrow 0 \\ (i \neq k)}} \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} \right)_a = + \infty$$

$$\lim_{\sigma_k \longrightarrow 0} \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} \right)_a = \frac{1}{\sqrt{2[n_k - (r - r'_k)]}} \qquad (69)$$

d'où l'allure schématique des variations des deux prédicteurs selon (σ_i) :

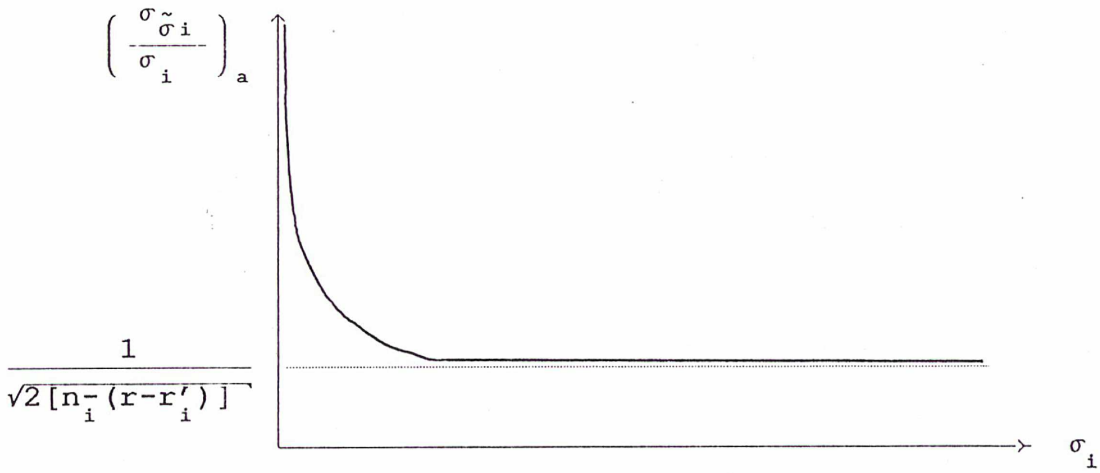


Fig 5.2 : Prédicteur asymptotique

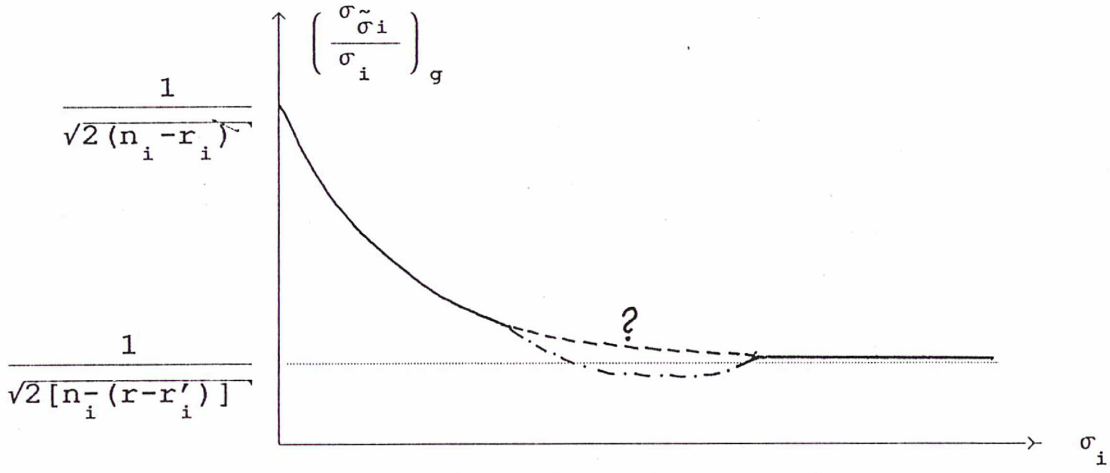


Fig 5.3 : Prédicteur général

La comparaison entre les deux prédicteurs n'est évidemment licite que s'il existe un groupe de mesures *'presque complet'* (pouvant éventuellement contenir plusieurs sous-groupes), le groupe k (celui à poids infini dans la méthode asymptotique).

Pour le groupe (k) le prédicteur asymptotique est constant (29), et on peut prendre indifféremment les valeurs : $1 / \sqrt{2(n_k - r_k)}$ ou $1 / \sqrt{2[n_k - (r - r'_k)]}$, très voisines en général ; quant au prédicteur général (on a encore $\sigma'_k \simeq 0$, car les (α_{ki}) sont quasi-nuls pour $i \neq k$) , il décroît de $1 / \sqrt{2(n_k - r_k)}$ à $1 / \sqrt{2[n_k - (r - r'_k)]}$.

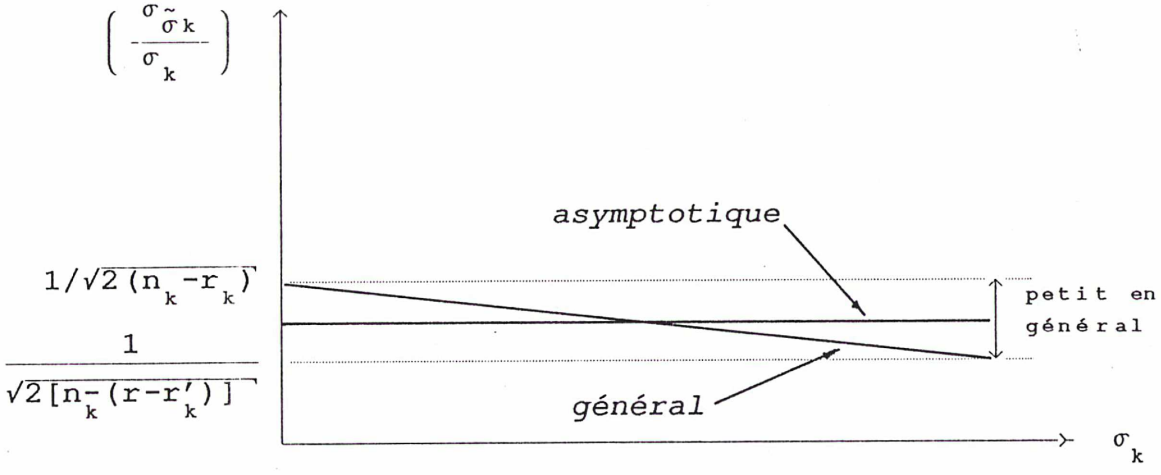


Fig 5.4 : Prédicteurs asymptotique et général pour un groupe (k) presque complet ($r - r_k / n_i \ll 1$, $i < k$)

Les deux prédicteurs sont équivalents pour ce groupe.

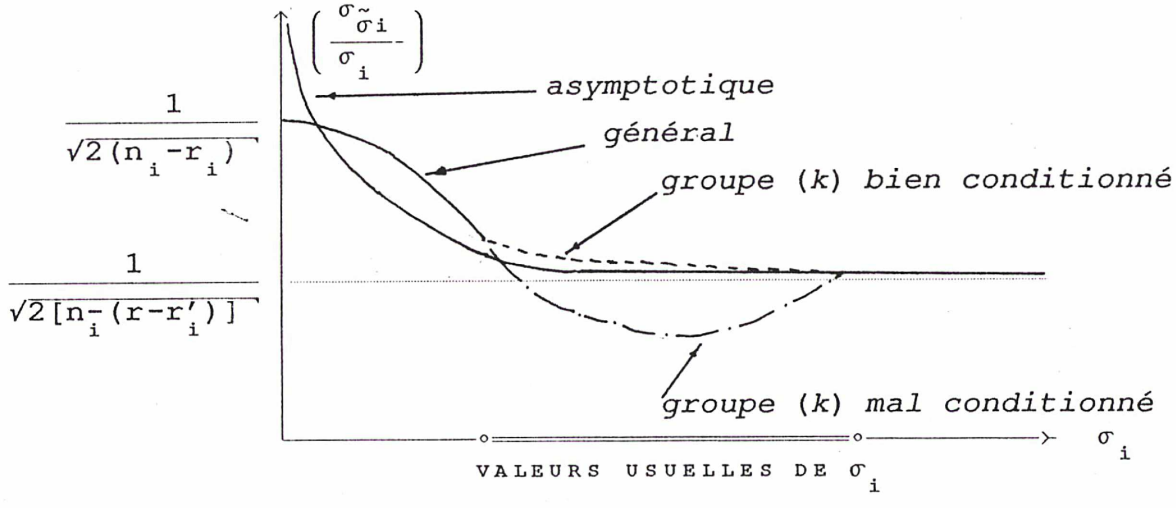


Fig 5.5 : Prédicteurs asymptotique et général pour un groupe $i \neq k$

Pour un groupe ($i \neq k$), il faut faire intervenir le *'conditionnement'* du groupe (k) ; s'il est *'bien conditionné'* (c'est à dire si la solution asymptotique est voisine de la solution optimale pour les valeurs usuelles de (σ_i)), il n'y a pas de différence sensible entre les deux prédicteurs; s'il est *'mal conditionné'*, le prédicteur général indique qu'une précision bien meilleure est obtenue avec la méthode générale.

5.3.2 Reprenons ainsi l'exemple du [§ 2.4].

Bien que cet exemple à cause de sa simplicité extrême échappe aux strictes conditions d'application des formules de prédiction proposées (il n'y a pas de groupe presque complet d'une part, et d'autre part, la variance dans la formule (47) n'est nullement scalaire comme on le voit tout de suite), ces formules restent satisfaisantes, quand on les compare aux prédicteurs théoriques, ici calculables et qui sont [§ 2.4.3,49 et 41] :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2n}} * \sqrt{(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^4} \; ; \qquad \frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \tag{70}$$

elles présentent la remarquable particularité d'être indépendantes des poids (p_1 et p_2) choisis pour la compensation: quelque soient ces poids la précision est constante, simplification extrême d'une situation assez générale.

Les prédicteurs asymptotiques (groupe 2 à poids p_2 infini) sont [§ 5.1.1.E,26 et 4] :

$$\left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1}\right)_a = \frac{1}{\sqrt{2n}} * \left(1 + \frac{1}{4}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) \; ; \qquad \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\sigma_2}\right)_a = \frac{1}{\sqrt{2n}} \tag{71}$$

Construisons les prédicteurs généraux ; de [§ 2.4.1,27] et de la définition [§ 5,36] on déduit : $\sigma'_1 = \sigma_2 / 2$

puis (62) :
$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1} = \frac{p_1 + 4p_2}{\sqrt{2*2n*8p_2^2}} * \left(1 + \frac{1}{4}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$$

ou (la méthode générale implique $p_1\sigma_1^2 \simeq p_2\sigma_2^2 \simeq 1$) :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2n}} * \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right)^2 \tag{72}$$

Pour celui relatif à $(\tilde{\sigma}_2)$, il vient d'abord [§ 2.4.1,27] :

$$\sigma_2'^{\,2} = \frac{2\,p_1^2}{(p_1 + 2p_2)^2 + 4p_1^2} * \sigma_1^2 \; ; \tag{73}$$

puis :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\sigma_2} = \frac{p_1 + 4p_2}{\sqrt{2*2n*(p_1 + 2p_2)^2 + 4p_2^2}} \left(1 + \frac{2\,p_1^2}{(p_1 + 2p_2)^2 + 4p_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) \tag{74}$$

soit $(p_1\sigma_1^2 \simeq p_2\sigma_2^2 \simeq 1)$:

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\sigma_2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{4 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}{\left(8 + \frac{4\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^4} \right)^{3/2}} * \left(8 + \frac{6\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^4} \right) \tag{75}$$

d'où, pour les trois types de prédicteurs les courbes suivantes :

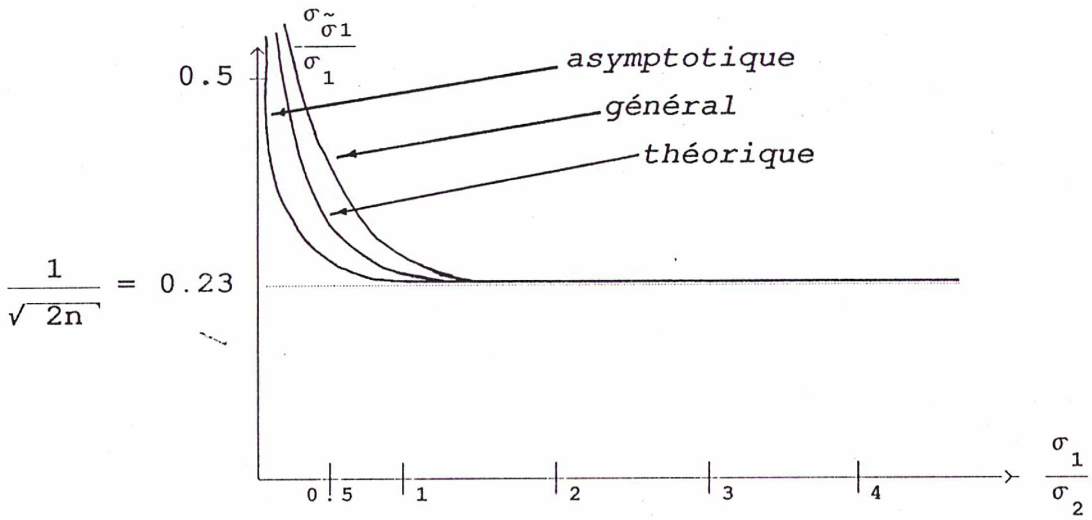


Fig 5.6 : comparaison des formules des prédictions de la précision relative de $(\tilde{\sigma}_1)$ pour n = 10 (le rapport entre les prédicteurs est indépendant de n)

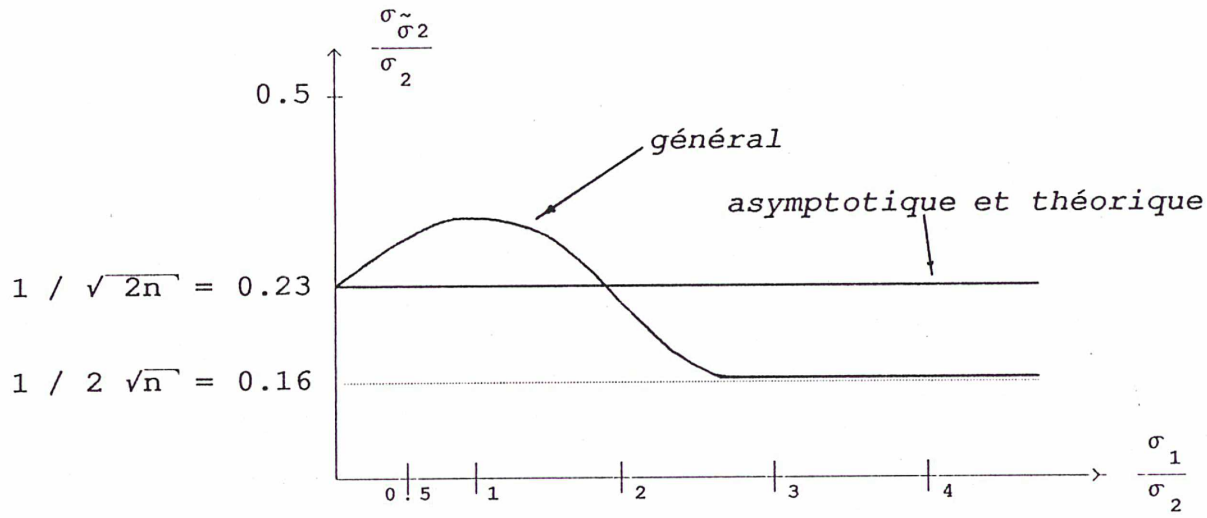


Fig 5.7 : *comparaison des formules des prédictions de la précision relative de* $(\tilde{\sigma}_2)$ *pour* n = 10

L'écart est tout à fait acceptable, bien - répétons le - qu'on soit assez loin de la situation pour laquelle a été faite cette étude.

* 6 * VALIDATION EN AEROTRIANGULATION ANALYTIQUE

L'aérotriangulation analytique est un processus d'interpolation : à partir d'une couverture aérienne (par exemple des clichés au 1/30000 de format 24x24 cm) formée de *bandes* de cliché (2 clichés successifs - qui forment un couple - présentent un recouvrement de 60 % en général; et 2 bandes adjacentes un recouvrement de l'ordre de 10 %), et la connaissance des coordonnées terrain X,Y,Z d'un petit nombre de points dits *d'appui*, il s'agit de déterminer les coordonnées X,Y,Z d'un grand nombre de points (6 par couple au minimum ; sont couramment plusieurs centaines d'inconnues par chantier).

On compense pour cela deux groupes d'observations (au moins) :

- le groupe des *observations terrain*, c'est à dire des coordonnées des points d'appui (qui ne sont jamais connues avec une exactitude infinie).

  Il faut au minimum 2 appuis connus en planimétrie, et 3 en altimétrie ; mais ceci est tout à fait insuffisant pour obtenir une exactitude finale acceptable. En fait on en utilise couramment de 10 à 30 .

  On est d'autre part amené , à cause de différences d'exactitude , à considérer deux groupes d'observations terrain distinctes , celui des *appuis planimétriques* (X,Y) et celui des *appuis altimétriques* (Z).

- le groupe des *observations-cliché* : les coordonnées-cliché x,y des *points-image* (dont on veut déterminer les coordonnées-terrain) qui sont mesurées au µm près sur un *comparateur*.

Comme on l'a dit dans le *rappel sur la théorie des moindres carrés*, la pondération des équations s'effectue en divisant les deux membres par l'*écart-type* de l'observation correspondante.

Encore faut-il connaître cet écart-type.

C'est ce problème qui est à l'origine de la méthode exposée; et c'est sur lui que nous l'avons expérimenté; comme on va le voir, la confirmation est excellente.

AVERTISSEMENT

Les unités (dans le calcul) sont le <u>mètre</u> pour les observations terrain, et le <u>mm</u> pour les observations clichés .

Exemple : un écart-type de 50 cm pour un appui, correspond à un poids de $1 / 0.5^2 = 4$;

un écart-type de 2 µm pour une coordonnée cliché correspond à un poids de $1 / (0.002)^2 = 0.25*10^6$

6.1 Exemples d'application de la méthode GENERALE

Sans entrer dans les détails de la programation, nous allons illustrer les différents aspects de la méthode générale sur des exemples.

Au début nous avons travaillé sur des chantiers fictifs bruités. Pour créer un chantier (bloc) fictif on effectue une première compensation avec les mêmes *poids* choisis approximativement qui vont servir jusqu'à la fin des calculs. Puis les résidus des équations d'observations sont ajoutés aux deuxième membre des équations en changeant leur signe : on obtient alors un bloc fictif parfait , c'est à dire un bloc , où les observations (fictives) sont *sans erreur;* on s'en aperçoit en recompensant le bloc ainsi obtenu : les résidus (aux erreurs numériques d'arrondi près) sont *nuls*.

Nous avons expérimenté tous les aspects de la méthode présentée aux [§ 2 et 3], sur plusieurs chantiers de caractéristiques différentes.

6.1.1 Premier exemple. Bloc FR0544 (fictif)

Grand bloc d'aérotriangulation avec 6 bandes, 75 clichés.
Echelle de prise de vue E = 1 / 30 000
5 groupes d'observations :

* 1 *	Planimétrie	avec	42	équations	d'observations
* 2 *	Altimétrie	"	41	"	"
* 3 *	Cliché	"	4588	"	"
* 4 *	G.P.S.	"	198	"	"
* 5 *	STATO	"	55	"	"

Les calculs ont été faits avec les poids approximatifs suivants :

P(1) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)
P(2) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)
P(3) = 0.6944 E+04	(σ = 0.0120 mm)
P(4) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)
P(5) = 0.4000 E+07	(σ = 0.0005 mbars)

Comme indiqué aux [§ 2] et [§ 3], il faut d'abord effectuer des calculs pour la détermination des coefficients α_{ij} . Un des points clés pour cette série de calculs est la création d'échantillons d'effectif (n), de réalisations d'une variable aléatoire centrée d'écart-type donné. Pour créer ces échantillons que l'on affecte aux deuxièmes membres des différents groupes d'observations, nous avons utilisé le procédure dite de Box et Müller qui donne des échantillons *gaussiens* (ce n'est pas une nécessité; on pourrait se contenter d'échantillons d'une variable uniforme ...) :

$y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ étant des nombres au hasard de [0,1], les quantités :

$$
\begin{aligned}
br\ (1) &= \sqrt{-2\ \lg(y_1)} * \cos(2\pi y_2) \\
br\ (2) &= \sqrt{-2\ \lg(y_3)} * \sin(2\pi y_4) \\
br\ (3) &= \sqrt{-2\ \lg(y_5)} * \cos(2\pi y_6) \\
br\ (4) &= \sqrt{-2\ \lg(y_7)} * \sin(2\pi y_8) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

sont des réalisations d'une variable gaussienne standarde *br* :

$$br \simeq N\ (\ 0,1\ ) \tag{2}$$

En multipliant tous les éléments de cet échantillon par une valeur ($k = \sigma_i$), nous créons ainsi un échantillon 'Br_i' de réalisations d'une variable aléatoire gaussienne br_i centrée d'écart-type (σ_i).

$$br_i \simeq N\ (\ 0, \sigma_i) \tag{3}$$

Comme nous avons vu au [§ 3.1.1] il faut opérer en plusieurs fois (5 compensations dans cet exemple), pour obtenir une série de coefficients (α_{ij} i=1,5; j=1,5). Pour assurer la précision des estimations α_{ij} nous avons pris deux précautions :

- Créer des échantillons 'br' *bien centrés* et *d'écart-type estimé voisins de l'écart-type théorique.*
- *Réitérer* la procédure de la détermination des (α_{ij}), et dans cet exemple nous avons réitéré 4 fois.

Nous donnons ci-dessous les valeurs des (α_{ij}) pour ce bloc de façon à faire voir comment ils changent d'une compensation à l'autre (leur stabilité) . Pour les autres exemples qui vont suivre nous donnerons seulement les résultats finals.

(α_{ijk} ; i(j) = 1,5 $\longrightarrow$ nr. de groupes; k = 1,4 $\longrightarrow$ nr. d'itér.)

** Les α_{ijk} issus de chaque itération **

k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
α(1,1,k)=0.692E+00	0.759E+00	0.709E+00	0.664E+00
α(1,2,k)=0.391E-02	0.646E-02	0.545E-02	0.575E-02
α(1,3,k)=0.620E-01	0.559E-01	0.576E-01	0.848E-01
α(1,4,k)=0.231E-01	0.422E-01	0.232E-01	0.193E-01
α(1,5,k)=0.431E-03	0.101E-02	0.192E-02	0.110E-02
α(2,1,k)=0.605E-02	0.565E-02	0.622E-02	0.114E-01
α(2,2,k)=0.466E+00	0.412E+00	0.394E+00	0.403E+00
α(2,3,k)=0.143E+00	0.118E+00	0.104E+00	0.147E+00
α(2,4,k)=0.273E-01	0.169E-01	0.131E-01	0.197E-01
α(2,5,k)=0.296E-02	0.269E-02	0.567E-02	0.155E-02
α(3,1,k)=0.746E-03	0.672E-03	0.727E-03	0.732E-03
α(3,2,k)=0.158E-02	0.162E-02	0.156E-02	0.159E-02
α(3,3,k)=0.516E+00	0.530E+00	0.533E+00	0.533E+00
α(3,4,k)=0.471E-02	0.457E-02	0.443E-02	0.468E-02
α(3,5,k)=0.241E-03	0.230E-03	0.247E-03	0.195E-03
α(4,1,k)=0.460E-02	0.371E-02	0.566E-02	0.643E-02
α(4,2,k)=0.262E-02	0.409E-02	0.474E-02	0.349E-02
α(4,3,k)=0.981E-01	0.101E+00	0.117E+00	0.111E+00
α(4,4,k)=0.495E+00	0.509E+00	0.488E+00	0.524E+00
α(4,5,k)=0.408E-02	0.357E-02	0.632E-02	0.366E-02
α(5,1,k)=0.908E-03	0.764E-03	0.928E-03	0.164E-02
α(5,2,k)=0.189E-02	0.274E-02	0.407E-02	0.223E-02
α(5,3,k)=0.148E-01	0.177E-01	0.190E-01	0.230E-01
α(5,4,k)=0.282E-01	0.105E-01	0.150E-01	0.157E-01
α(5,5,k)=0.848E+00	0.839E+00	0.791E+00	0.758E+00

Comme nous pouvons constater, les α_{ii} - qui sont les plus grands- sont les plus stables, et parmi eux, α_{33} qui correspond aux mesures clichés (l'échantillon de plus fort effectif), est le plus stable.

Les (α_{ij} ; j≠i) sont moins stables, vraisemblablement à cause des problèmes numériques (petitesse des (ρ_i^2) d'où ils viennent, [§ 3.1.1,B]).

Avec ces séries de coefficients (α_{ij}), on calcule la matrice des 'α_{ij} moyens' :

La matrice des coefficients 'α_{ij} moyens' :

$$\begin{bmatrix} 0.70600 & 0.00539 & 0.06508 & 0.02693 & 0.00112 \\ 0.00733 & 0.41870 & 0.12800 & 0.01926 & 0.00322 \\ 0.00072 & 0.00159 & 0.52820 & 0.00460 & 0.00023 \\ 0.00510 & 0.00373 & 0.10660 & 0.50380 & 0.00441 \\ 0.00106 & 0.00273 & 0.01865 & 0.01735 & 0.80920 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Pour vérifier la méthode d'estimation des variances σ_i^2 (supposées inconnues) on procède alors ainsi :

- on crée pour le bloc des observations fictives en ajoutant aux observations du bloc fictif parfait des erreurs gaussiennes centrées, d'écart-types :

$$\begin{array}{lll} \sigma_{plani} = 0.80 \text{ m} & \text{pour appuis planimétriques} & \\ \sigma_{alti} = 0.80 \text{ m} & \text{" " altimétriques} & \\ \sigma_{cliché} = 0.008 \text{ mm} & \text{pour mesures-cliché} & (5) \\ \sigma_{GPS} = 0.60 \text{ m} & \text{pour mesures G.P.S.} & \\ \sigma_{STATO} = 3*10^{-4} \text{mbar} & \text{pour mesures STATO} & \end{array}$$

- on compense ce bloc fictif avec les poids approximatifs choisis plus haut (qui correspondent à des écart-types de 1m en planimétrie et altimétrie, 12 μm pour les mesures cliché, 1m pour le G.P.S. et 0.0005 mbar pour les mesures STATO).

On obtient pour carrés des résidus moyens quadratiques :

$$\begin{array}{ll} \tilde{\rho}_i^2 \quad (i=1,5) & [\S\ 2.1,14] \\ \tilde{\rho}_1^2 = 0.452E+00 \quad m^2 & \\ \tilde{\rho}_2^2 = 0.302E+00 \quad m^2 & \\ \tilde{\rho}_3^2 = 0.349E-04 \quad m/m^2 & (6) \\ \tilde{\rho}_4^2 = 0.275E+00 \quad m^2 & \\ \tilde{\rho}_5^2 = 0.847E-07 \quad mbar^2 & \end{array}$$

On résout le système :

$$p_i \, \tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \alpha_{ij} \, p_j \, \tilde{\sigma}_j^2 \qquad (i = 1,5 \ ; \ j = 1,5) \qquad (7)$$

et on trouve les estimations SANS BIAIS des variances des 5 groupes d'observations :

$\tilde{\sigma}_i^2$	——	$\tilde{\sigma}_i$	(σ_i théoriques)	
$\tilde{\sigma}_1^2$ = 0.5777E+00	——	$\tilde{\sigma}_1$ = 0.760E+00 m	(0.80 m)	
$\tilde{\sigma}_2^2$ = 0.5508E+00	——	$\tilde{\sigma}_2$ = 0.742E+00 m	(0.80 m)	
$\tilde{\sigma}_3^2$ = 0.6516E-04	——	$\tilde{\sigma}_3$ = 0.807E+01 µm	(8 µm)	(8)
$\tilde{\sigma}_4^2$ = 0.4358E+00	——	$\tilde{\sigma}_4$ = 0.660E+00 m	(0.60 m)	
$\tilde{\sigma}_5^2$ = 0.9909E-07	——	$\tilde{\sigma}_5$ = 0.315E-03 mbars	($3*10^{-4}$ mbars)	

On remarquera que les chiffres obtenus sont meilleurs que ceux déduit de l'estimateur du maximum de vraisemblance ($\tilde{\sigma}'_i = \sqrt{\tilde{\rho}_i^2}$); par exemple $\tilde{\sigma}'_1 = 0.67$, $\tilde{\sigma}'_2 = 0.54$ (pour les mesure-clichés, on savait depuis longtemps qu'il ne fallait pas l'employer, mais utiliser : $\tilde{\sigma}'_3 = \sqrt{\tilde{\rho}_3^2 n_3 / (n_3 - r_3)}$ qui donne, nous l'avons *justifiée* au [§ 3,17], la bonne réponse).

La précision des $\tilde{\sigma}_i$ (c'est à dire leur écart-type $\sigma_{\tilde{\sigma}i}$) s'évalue ici au moyen du prédicteur *'général'* construit au [§ 5.2,62] :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{2 n_i \alpha_{ii}}} \left(1 + \frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2} \right) \qquad (9)$$

où :

n_i ——→ nombre d'équations du groupe d'observations (*i*)

α_{ii} ——→ élément (i,i) de la matrice des (α_{ij})

σ'_i ——→ l'écart-type *'équivalent'* des mesures du groupe (*i*)
σ'_i *chiffre en unité de mesure du groupe* (i) *la précision de la compensation des mesures des groupes* j≠i

Elle est donnée ci-dessous dans la dernière ligne; en regard, au dessus, on a placé l'*erreur relatif* $(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)/\sigma_i$ des estimations $\tilde{\sigma}_i$ (la validation expérimentale des prédicteurs sera faite au [§6.2])

Bloc FR0544		Plani.	Alti.	Cliché	G.P.S.	STATO.
$(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)/\sigma_i$	erreur relative	5.0 %	6.5 %	0.9 %	10.0 %	5.0 %
$\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i$	écart-type théorique	14.4 %	22.4 %	1.5 %	8.8 %	11.2 %

Tab. 6.1 Précision des estimations des écarts-type pour le bloc FR0544 (méthode générale).

6.1.2 **Deuxième exemple.** Bloc FR0514-1 (fictif)

Bloc d'aérotriangulation avec 4 bandes, 36 clichés. Echelle de prise de vue E = 1 / 30 000 ; 4 groupes d'observations :

* 1 *	Planimétrie	avec	22	équations	d'observations
* 2 *	Altimétrie	"	18	"	"
* 3 *	x Cliché	"	1174	"	"
* 4 *	y Cliché	"	1174	"	"

Nous avons ici partagé le groupe des équations d'observations cliché en deux sous-groupes; en x et y cliché, pour vérifier qu'on pouvait estimer les variances de ces deux groupes de mesures.

Voici les données et les résultats :

Les calculs ont été faits avec les poids approximatifs :

P(1) = 0.1000 E+01 (σ = 1.0000 metre)
P(2) = 0.1000 E+01 (σ = 1.0000 metre)
P(3) = 0.6250 E+05 (σ = 4.0000 microns)
P(4) = 0.6250 E+05 (σ = 4.0000 microns)

On a obtenu la matrice moyenne α_{ij} (4 itérations par colonne) :

$$\begin{bmatrix} 0.59280 & 0.00661 & 0.03419 & 0.02710 \\ 0.00107 & 0.51930 & 0.06214 & 0.01306 \\ 0.00084 & 0.00123 & 0.28070 & 0.02014 \\ 0.00056 & 0.00039 & 0.02164 & 0.48950 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

On a ensuite construit un bloc fictif où les erreurs de différents groupes d'observations sont gaussiennes $N(0,\sigma_i)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{x\ cli.} &= 6 \ \mu m \\ \sigma_{y\ cli.} &= 6 \ \mu m \end{aligned} \qquad (11)$$

Après la compensation (avec les poids approximatifs p_i définis plus haut) on a obtenue pour carrés des résidus moyens quadratiques :

$\tilde{\rho}_i^2$ (i=1,4) [§ 2.1,14]

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1^2 &= 0.354E{+}00 \quad m^2 \\ \tilde{\rho}_2^2 &= 0.453E{+}00 \quad m^2 \\ \tilde{\rho}_3^2 &= 0.102E{-}04 \quad m/m^2 \\ \tilde{\rho}_4^2 &= 0.189E{-}04 \quad m/m^2 \end{aligned} \qquad (12)$$

On résout le système :

$$p_i \, \tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \alpha_{ij} \, p_j \, \tilde{\sigma}_j^2 \qquad (i = 1,4 \; ; \quad j = 1,4)$$

et on trouve les estimations SANS BIAIS des variances des 4 groupes d'observations :

$$\begin{array}{lcll} \tilde{\sigma}_i^2 & \text{———} & \tilde{\sigma}_i & (\sigma_i \text{ théoriques}) \\ \tilde{\sigma}_1^2 = 0.3641E{+}00 & \text{———} & \tilde{\sigma}_1 = 0.603E{+}00 \text{ m} & (0.80 \text{ m}) \\ \tilde{\sigma}_2^2 = 0.5624E{+}00 & \text{———} & \tilde{\sigma}_2 = 0.750E{+}00 \text{ m} & (0.80 \text{ m}) \\ \tilde{\sigma}_3^2 = 0.3359E{-}04 & \text{———} & \tilde{\sigma}_3 = 0.580E{+}01 \ \mu\text{m} & (6 \ \mu\text{m}) \\ \tilde{\sigma}_4^2 = 0.3712E{-}04 & \text{———} & \tilde{\sigma}_4 = 0.609E{+}01 \ \mu\text{m} & (6 \ \mu\text{m}) \end{array} \qquad (13)$$

Bloc	FR0514-1	Plani.	Alti.	x Cli.	y Cli.
$(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)/\sigma_i$	erreur relative	24.6 %	6.3 %	3.3 %	1.5 %
$\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i$	écart-type théorique	32.1 %	35.9 %	4.2 %	3.1 %

Tab. 6.2 Précision des estimations des écarts-type pour le bloc FR0514-1 (méthode générale).

On constate que la précision théorique des estimations $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ est médiocre (deuxième ligne du tableau), ce que confirme l'erreur relative de $\tilde{\sigma}_1$; pour les 2 groupes de mesures-cliché elle est excellente. La précision (théorique) médiocre s'explique du fait que les effectifs de ces deux groupes sont très petits, respectivement (22) et (18) observations. Noter que dans un tel cas, il faut bien s'assurer des α_{ij} en réitérant leur calcul [§ 3.1.2.A, Tab 3.1] : avec un seul calcul, la précision relative $\sigma_{\tilde{\alpha}11}/\alpha_{11}$ de $\tilde{\alpha}_{11}$ est seulement de 31 % ...

6.2 Exemples d'application de la méthode ASYMPTOTIQUE.

La méthode asymptotique [§ 4] est ici applicable : on peut compenser le groupe des observations-cliché (cl) avec un *poids infini* (en pratique *grand*), parce qu'il est *'bien conditionné'* (solution asymptotique voisine de la solution optimale : c'est un *fait d'expérience*), *fortement redondant* ($n_{cl} - r_{cl}$ grand) et *'presque complet'* ($(r-r_{cl})/n_i \ll 1$; $\forall\ i \neq cl$).

Pour illustrer la méthode reprenons les deux mêmes exemples : (§ 6.1.1 et § 6.1.2) **avec les mêmes observations** afin de faciliter les comparaisons.

6.2.1 Premier exemple Bloc FR0544 (fictif)

Nous avons choisi comme poids *infini* pour le groupe d'équations d'observations cliché, le poids ($p_{cli.} = 1*10^6$ soit $\sigma = 1\ \mu m$). (Si l'on prenait un poids plus grand que celui-ci, on a des problèmes numériques comme on le montre plus loin).

Les calculs ont été faits avec les poids :

P(1) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)	Nr.éq.(1) =	42
P(2) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)	Nr.éq.(2) =	41
P(3) = 0.1000 E+07	(σ = 1.0000 micron)	Nr.éq.(3) =	4588
P(4) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)	Nr.éq.(4) =	198
P(5) = 0.4000 E+07	(σ = 0.0005 mbars)	Nr.éq.(5) =	55

Après 4 itérations par colonne on a obtenu la matrice moyenne α_{ij} :

$$\begin{bmatrix} 0.95470 & 0.00206 & 0.00420 & 0.00791 & 0.00024 \\ 0.00057 & 0.90730 & 0.00570 & 0.00784 & 0.00346 \\ 0.00027 & 0.00048 & 0.50790 & 0.00068 & 0.00012 \\ 0.00135 & 0.00366 & 0.00558 & 0.87210 & 0.00073 \\ 0.00025 & 0.00564 & 0.00125 & 0.00242 & 0.86660 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Rappelons qu'ici les observations sont bruitées selon des erreurs gaussiennes centrées d'écarts- type :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 80\ cm \\ \sigma_{alti} &= 80\ cm \\ \sigma_{cliché} &= 8\ \mu m \\ \sigma_{GPS} &= 60\ cm \\ \sigma_{STATO} &= 3*10^{-4}\ mbar \end{aligned} \qquad (15)$$

La compensation de ce bloc avec les poids approximatifs p(i) définis plus haut, a donné :

$$\tilde{\rho}_i^2 \quad (i=1,5) \qquad [\S\ 2.1,14]$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_1^2 &= 0.998E{+}00 \quad m^2 \\
\tilde{\rho}_2^2 &= 0.705E{+}00 \quad m^2 \\
\tilde{\rho}_3^2 &= 0.339E{-}04 \quad m/m^2 \\
\tilde{\rho}_4^2 &= 0.818E{+}00 \quad m^2 \\
\tilde{\rho}_5^2 &= 0.113E{-}06 \quad mbar^2
\end{aligned} \tag{16}$$

En résolvant le système :

$$p_i\ \tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \alpha_{ij}\ p_j\ \tilde{\sigma}_j^2 \qquad (\ i = 1,5\ ;\quad j = 1,5\ )$$

on a trouvé pour estimations des variances des 5 groupes d'observations :

$\tilde{\sigma}_i^2$		$\tilde{\sigma}_i$	(σ_i théoriques)	
$\tilde{\sigma}_1^2 = 0.7465E{+}00$	———	$\tilde{\sigma}_1 = 0.864E{+}00$ m	(0.80 m)	
$\tilde{\sigma}_2^2 = 0.3519E{+}00$	———	$\tilde{\sigma}_2 = 0.593E{+}00$ m	(0.80 m)	
$\tilde{\sigma}_3^2 = 0.6677E{-}04$	———	$\tilde{\sigma}_3 = 0.817E{+}01$ µm	(8 µm)	(17)
$\tilde{\sigma}_4^2 = 0.5084E{+}00$	———	$\tilde{\sigma}_4 = 0.713E{+}00$ m	(0.60 m)	
$\tilde{\sigma}_5^2 = 0.1058E{-}06$	———	$\tilde{\sigma}_5 = 0.325E{-}03$ mbars	($3*10^{-4}$ mbars)	

La précision théorique de ces estimations s'évalue au moyen du prédicteur *'asymptotique'* : [§ 5.1.2,30] :

$$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{2(n_i-(r-r'_i))}}\ \left(\ 1 + \frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\ \right) \tag{18}$$

Voici les résultats pour cet exemple (en haut les erreurs relatives des estimations, en bas les précisions évaluées selon 18) :

Bloc FR0544		Plani.	Alti.	Cliché	G.P.S.	STATO.
$(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)/\sigma_i$	erreur relative	8.0 %	25.9 %	2.1 %	18.8 %	8.3 %
$\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i$	écart-type théorique	16.1 %	25.3 %	1.1 %	9.4 %	12.6 %

Tab. 6.3 Précision des estimations des écarts-type pour le bloc FR0544 (méthode asymptotique).

Ces résultats sont obtenus en déterminant tous les coefficients α_{ij} , **chose inutile dans le cas de l'application de la méthode asymptotique** ; *seuls ceux de la colonne 3 sont effectivement inconnus.* On a vu [§4.2.C,20] que si les conditions d'emploi de la solution asymptotique sont remplies (voir § 4), on peut écrire :

$$\rho^2_{i\infty} \simeq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)\left(\sigma^2_i + \beta_{i3}\sigma^2_3\right) \qquad (i \neq 3)$$

$$\rho^2_{3\infty} \simeq \left(1 - \frac{r_3}{n_3}\right)\sigma^2_3 \qquad (19)$$

Dans cet exemple nous avons :

Nombre d'inconnues = 3 * nbr. de points + 6 * nbr. de clichés
+ 10 * nbr. de bandes

3 inconnues pour chaque point (X,Y,Z) ;
6 " " " cliché (3 coord. du sommet + 3 rotations)
10 " " " bande (5 systématis. + 3 transl. G.P.S.
+ 1 inc. STATO + 1 inc. LASER)

r = nbr. d'inconnues = 3 * 566 + 6 * 75 + 10 * 6 = 2208 inconnues

$r_3 = r - 7$ (7 degrés d'indétermination : similitude spatiale)

$\beta_{33} = 1 - r_3 / n_3 = 1 - (2208 - 7) / 4588 = 0.5203$

$r'_1 = r'_2 = r'_4 = r'_5 = r$

Alors (19) devient (égalité rigoureuse pour $p_3 = \infty$) :

$$\rho^2_{i\infty} = \sigma^2_i + \beta_{i3}\sigma^2_3 \qquad (i \neq 3)$$

$$\rho^2_{3\infty} = 0.5203 * \sigma^2_3 \qquad (20)$$

Ainsi, il suffisait d'estimer par simulation la colonne des β_{i3} (β_{33} étant par ailleurs rigoureusement connu); ici comme :

$$\beta_{i3} = \alpha_{i3} \frac{p_3}{p_i} \tag{21}$$

on peut, se basant sur les simulations (14) calculer β_{i3} ; on trouve, pour l'estimation des β_{ij} de (19) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4200 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5203 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5580 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00031 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

d'où par inversion de (19) :

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\sigma}_i^2 & \text{———} & \tilde{\sigma}_i \\ \tilde{\sigma}_1^2 = 0.7243E{+}00 & \text{———} & \tilde{\sigma}_1 = 0.851E{+}00 \text{ metres} \\ \tilde{\sigma}_2^2 = 0.3336E{+}00 & \text{———} & \tilde{\sigma}_2 = 0.578E{+}00 \text{ metres} \\ \tilde{\sigma}_3^2 = 0.6516E{-}04 & \text{———} & \tilde{\sigma}_3 = 0.807E{+}01 \text{ microns} \\ \tilde{\sigma}_4^2 = 0.4544E{+}00 & \text{———} & \tilde{\sigma}_4 = 0.674E{+}00 \text{ metres} \\ \tilde{\sigma}_5^2 = 0.0928E{-}07 & \text{———} & \tilde{\sigma}_5 = 0.305E{-}03 \text{ mbars} \end{array} \tag{23}$$

Dans le tab. 6.4 on rassemble les estimations des σ_i trouvées, selon qu'on a utilisé (14) ou (22) :

Bloc FR0544		Plani.	Alti.	Cliché	G.P.S.	STATO.
σ_i	Vrai	0.80 m	0.80 m	8 µm	0.60 m	$3*10^{-4}$
$\tilde{\sigma}_i$	Selon α_{ij} (14)	0.864	0.593	8.17	0.713	3.25
	Selon. β_{ij} (22)	0.851	0.578	8.07	0.674	3.05

Tab. 6.4 Estimations des écarts-type pour le bloc FR0544 *(méthode asymptotique).*

Ce sont pratiquement les mêmes : mais en ce qui concerne (22) une *économie considérable* de calcul.

6.2.2 **Deuxième exemple** Bloc FR0514-1 (fictif)

C'est le même bloc qu'en [§ 6.1.2], mais ici avec un poids *très fort* (10 fois plus que de raison) pour les **deux** groupes (en **x** et **y**) de coordonnées-cliché (les poids p(3) et p(4) correspondent tous deux à 1 μm)

P(1) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)	Nr.éq.(1) =	22
P(2) = 0.1000 E+01	(σ = 1.0000 metre)	Nr.éq.(2) =	18
P(3) = 0.1000 E+07	(σ = 1.0000 micron)	Nr.éq.(3) =	1174
P(4) = 0.1000 E+07	(σ = 1.0000 micron)	Nr.éq.(4) =	1174

Après 4 itérations par coefficient α_{ij} on a obtenu la matrice (α_{ij}) :

$$\begin{bmatrix} 0.78800 & 0.00090 & 0.00444 & 0.00314 \\ 0.00013 & 0.74850 & 0.00839 & 0.00467 \\ 0.00035 & 0.00089 & 0.28170 & 0.02129 \\ 0.00037 & 0.00054 & 0.02003 & 0.48540 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

ainsi que la matrice des β_{ij} (voir § 4.2.D,25 et § 6.2.1,21) :

$$\begin{bmatrix} 0.8182 & 0 & 3633 & 2570 \\ 0 & 0.8333 & 6989 & 3890 \\ 0 & 0 & 0.2817 & 0.0213 \\ 0 & 0 & 0.0200 & 0.4854 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

Les observations (les **mêmes** qu'en § 6.1.2 sont bruitées selon des variables aléatoires gaussiennes centrées d'écarts-type :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{x\ cli.} &= 6 \ \mu\text{m} \\ \sigma_{y\ cli.} &= 6 \ \mu\text{m} \end{aligned} \qquad (26)$$

Après la compensation avec les poids p(i) on a obtenu :

$$\tilde{\rho}_i^2 \quad (i=1,4) \qquad [\S\ 2.1,14]$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1^2 &= 0.461E{+}00 \quad m^2 \\ \tilde{\rho}_2^2 &= 0.813E{+}00 \quad m^2 \\ \tilde{\rho}_3^2 &= 0.101E{-}04 \quad m/m^2 \\ \tilde{\rho}_4^2 &= 0.187E{-}04 \quad m/m^2 \end{aligned} \qquad (27)$$

On a résolu le système : $p_i\ \tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \alpha_{ij}\ p_j\ \tilde{\sigma}_j^2 \quad (i = 1,4\ ;\ j = 1,4)$
et celui du [§ 4.2.D,25], et trouvé :

Bloc	FR0514-1	Plani.	Alti.	x Cli.	y Cli.
σ_i	Vrai	0.80 m	0.80 m	6 µm	6 µm
$\tilde{\sigma}_i$	Selon α_{ij} (24)	0.500	0.695	5.75	6.10
	Selon. β_{ij} (25)	0.548	0.725	5.75	6.10

Tab. 6.5 *Estimations des écarts-type pour le bloc* FR0514-1 *(méthode asymptotique).*

Soit des chiffres très comparables à ceux trouvés au § 6.1.2 ; les précisions théoriques sont évaluées par : (§ 5.1.2,32 et 33)

Bloc	FR0514-1	Plani.	Alti.	x Cli.	y Cli.
$(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)/\sigma_i$	erreur relative	31.5 %	9.4 %	4.1 %	1.7 %
$\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i$	écart-type théorique	28.6 %	31.3 %	4.2 %	3.1 %

Tab. 6.5 bis *Précision des estimations des écarts-type pour le bloc FR0514-1 (méthode asymptotique).*

6.3 Application de la méthode sur un bloc réel : Bloc FR0544

Ce bloc a été antérieurement utilisé pour créer un bloc fictif (§ 6.2.1); ici on a utilisé les observations réelles, et utilisé pour estimer leurs écarts-type la méthode asymptotique.

Poids approximatifs et nombre d'équations pour chaque groupe d'observations : (méthode asymptotique)

P(1) = 0.1000 E+01	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(1) =	42
P(2) = 0.4000 E+01	(σ = 0.500 metres)	Nr.éq.(2) =	41
P(3) = 0.1000 E+07	(σ = 1.000 micron)	Nr.éq.(3) =	4588
P(4) = 0.1562 E+01	(σ = 0.800 metres)	Nr.éq.(4) =	198
P(5) = 0.2778 E+07	(σ = 0.0006 mbars)	Nr.éq.(5) =	55

Après 4 itérations par colonne on a obtenu la matrice (α_{ij}) :

$$\begin{bmatrix} 0.91440 & 0.00085 & 0.00292 & 0.00688 & 0.00008 \\ 0.00108 & 0.82750 & 0.02774 & 0.01468 & 0.00230 \\ 0.00029 & 0.00040 & 0.51330 & 0.00064 & 0.00010 \\ 0.00288 & 0.00260 & 0.00741 & 0.85380 & 0.00025 \\ 0.00007 & 0.00116 & 0.00094 & 0.00102 & 0.87700 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

En fait, il suffisait -*c'est beaucoup plus économique*- d'estimer les α_{i3} $(i \neq 3)$, car comme en [§ 6.2.1,20], on doit trouver (dans la mesure où p_3 peut être considéré comme infini) :

$$\rho^2_{i\infty} = \sigma^2_i + \beta_{i3}\sigma^2_3 \qquad (i \neq 3)$$

$$\rho^2_{3\infty} = 0.5203 * \sigma^2_3 \qquad (28 \text{ bis})$$

Les différences constatées (0.91 et 0.83 au lieu de 1) viennent probablement de l'imprécision numérique des α_{ii} (avec n_1 = 42 (§ 3, Tab. 3.1) et 4 réitérations, on a une précision relative de 10 % seulement).

Les coefficients α_{ij} ou (β_{ij}) étant trouvés, on compense avec les mêmes poids (p_i) les observations réelles ; on a ici obtenu pour valeurs des carrés des résidus moyens quadratiques :

$\tilde{\rho}_i^2$ (i=1,5) [§ 2.1,14]

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_1^2 &= 0.450E{+}00 \quad m^2 \\
\tilde{\rho}_2^2 &= 0.436E{+}00 \quad m^2 \\
\tilde{\rho}_3^2 &= 0.195E{-}04 \quad m/m^2 \\
\tilde{\rho}_4^2 &= 0.509E{+}00 \quad m^2 \\
\tilde{\rho}_5^2 &= 0.934E{-}07 \quad mbar^2
\end{aligned} \tag{29}$$

D'où après résolution du système :

$$p_i \, \tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \alpha_{ij} \, p_j \, \tilde{\sigma}_j^2 \qquad (i = 1,5 \; ; \quad j = 1,5)$$

(ou du système $\tilde{\rho}_i^2 = \sum_j \beta_{ij} \, \tilde{\sigma}_j^2$) :

les estimations, ainsi que leur précision (écart-type) :

$\tilde{\sigma}_i^2$		$\tilde{\sigma}_i$	$\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i$	
$\tilde{\sigma}_1^2 = 0.3656E{+}00$	———	$\tilde{\sigma}_1 = 0.605E{+}00$ m	15.5 %	
$\tilde{\sigma}_2^2 = 0.2050E{+}00$	———	$\tilde{\sigma}_2 = 0.453E{+}00$ m	31.2 %	
$\tilde{\sigma}_3^2 = 0.3804E{-}04$	———	$\tilde{\sigma}_3 = 0.617E{+}01$ µm	1.5 %	(30)
$\tilde{\sigma}_4^2 = 0.3829E{+}00$	———	$\tilde{\sigma}_4 = 0.619E{+}00$ m	9.5 %	
$\tilde{\sigma}_5^2 = 0.9125E{-}07$	———	$\tilde{\sigma}_5 = 0.302E{-}03$ mbars	11.9 %	

Il n'y a ici pas moyen de confronter à la réalité (c'est pourquoi on a validé la méthode sur des observations simulées ...) ; noter qu'ici $\tilde{\sigma}_2$ = 45 cm diffère nettement de $\sqrt{\tilde{\rho}_2^2}$ = 66 cm .

Tout ce qu'on peut dire c'est qu'ils sont vraisemblables ...

(Mr. Million qui a longuement travaillé sur ce bloc dans sa thèse , a trouvé des estimations assez proches ...) ; et qu'en ce qui concerne les observations-terrain (4 groupes sur 5), ils ne donnent pas l'écart-type des observations-terrain, mais celui de l'erreur *somme de l'erreur terrain et de l'erreur de transfert système de mesure* ——> *cliché.*

6.4 Validation des deux méthodes d'estimation et des prédicteurs sur une série d'essais

6.4.1 Méthode générale

Nous avons effectué une série d'essais sur le même bloc fictif, en faisant seulement *varier l'échantillon et en gardant les mêmes poids de départ*.

Il est évident que dans de tels cas, la matrice des coefficients (α_{ij}) reste la même.

6.4.1.1 Premier exemple

Bloc FR0514 ——→ le même bloc que FR0514-1, sauf que quelques points de contrôle sont passés en appuis pour augmenter ainsi l'effectif des deux premiers groupes d'équations d'observation.

Les compensations sont faites avec les poids du départ, suivants choisis approximativement, mais *invariables dans tous les essais.*

P(1) = 0.2770 E+01	(σ = 0.600 metres)	Nr.éq.(1) =	54
P(2) = 0.2360 E+01	(σ = 0.650 metres)	Nr.éq.(2) =	64
P(3) = 0.6250 E+05	(σ = 4.000 microns)	Nr.éq.(3) =	1174
P(4) = 0.6250 E+05	(σ = 4.000 microns)	Nr.éq.(4) =	1174

On a changé les échantillons de bruitage pour chaque essai, mais ce sont toujours des réalisations de variables aléatoires gaussiennes centrées d'écarts-type respectifs :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 40 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 40 \text{ cm} \\ \sigma_{x\ cli.} &= 6 \ \mu m \\ \sigma_{y\ cli.} &= 7 \ \mu m \end{aligned} \qquad (31)$$

Après 8 essais nous avons calculé *l'estimation expérimentale* du $\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i$ et *la prédiction théorique* par la formule [§ 5.2.2,62] :

$$\left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i}\right)_{exp.} = \frac{\sqrt{\Sigma(\tilde{\sigma}_i-\sigma_i)^2/n_i}}{\sigma_i} \ ; \ \left(\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i}\right)_{théo} = \frac{1}{\sqrt{2n_i\alpha_{ii}}}\left(1+\frac{\sigma_i'^2}{\sigma_i^2}\right) \qquad (32)$$

Voici la matrice des coefficients (α_{ij}) moyens :

$$\begin{bmatrix} 0.71200 & 0.00406 & 0.0499 & 0.0400 \\ 0.00228 & 0.59800 & 0.1410 & 0.0187 \\ 0.00197 & 0.00627 & 0.2835 & 0.0196 \\ 0.00128 & 0.00087 & 0.0198 & 0.4987 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

et les résultats pour les 8 essais :

Nr. d'essais		$\sigma_{plani.}$	$\sigma_{alti.}$	$\sigma_{x\ cliché}$	$\sigma_{y\ cliché}$
1		0.376 m	0.457 m	5.89 µm	7.03 µm
2		0.392	0.372	6.00	6.93
3		0.382	0.461	5.79	7.14
4		0.457	0.347	5.88	6.58
5		0.396	0.441	6.24	6.70
6		0.383	0.211	5.92	6.41
7		0.365	0.362	5.71	7.04
8		0.367	0.415	6.22	6.82
Val. Moyenne		0.390 m	0.383 m	5.96 µm	6.83 µm
$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}_i}}{\sigma_i}$	Expér.	7.3 %	19.8 %	3.05 %	4.15 %
	Théor.	19.9 %	30.3 %	4.24 %	3.04 %

σ'	0.35 m	0.53 m	1.46 µm	1.25 µm
σ / σ'	1.13	0.75	4.10	5.60

Tab. 6.6 Validation de l'estimation des écarts-type et du prédicteur de précision pour le bloc FR0514 *(méthode générale).*

En se rapportant au tableau 5.2 [§ 5.1.1] on constate que les résultats confirment très bien les prévisions théoriques. Et cela aussi pour les exemples qui suivent.

Etant donné le petit nombre d'essais (8 essais conduisent pour $\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i$ à une estimation expérimentale dont la précision relative est de $1/\sqrt{16}$ = 25 %), on voit que la confirmation est fort bonne.

6.4.1.2 **Deuxième exemple** Bloc FR0544

Les écarts-type de bruitage sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{cliché} &= 8 \ \mu m \\ \sigma_{GPS} &= 60 \text{ cm} \\ \sigma_{STATO} &= 6*10^{-4} \text{ mbar} \end{aligned} \tag{34}$$

La matrice des coefficients α_{ij} (moyens) :

$$\begin{bmatrix} 0.76020 & 0.00446 & 0.0514 & 0.00864 & 0.00049 \\ 0.00526 & 0.49560 & 0.1412 & 0.02140 & 0.00174 \\ 0.00050 & 0.00142 & 0.5236 & 0.00513 & 0.00008 \\ 0.00193 & 0.00477 & 0.1405 & 0.50540 & 0.00159 \\ 0.00010 & 0.00125 & 0.0053 & 0.00616 & 0.87150 \end{bmatrix} \tag{35}$$

et les résultats pour les 10 essais :

Nr.	$\sigma_{plani.}$	$\sigma_{alti.}$	$\sigma_{cli.}$	$\sigma_{G.P.S.}$	$\sigma_{STA} * 10^3$
1	0.891 m	0.964 m	7.97 µm	0.576 m	0.564 mb
2	0.670	0.794	8.00	0.622	0.563
3	0.798	0.747	7.95	0.570	0.566
4	0.761	0.724	8.12	0.618	0.619
5	0.863	0.874	8.09	0.586	0.587
6	0.763	0.978	8.02	0.578	0.597
7	0.824	0.768	7.94	0.590	0.600
8	0.847	0.787	8.13	0.581	0.625
9	0.785	0.903	8.00	0.573	0.621
10	0.842	0.888	8.08	0.544	0.537
Moyenne	0.804 m	0.843 m	8.03 µm	0.584 m	0.588 mb
$\frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma_i}$ Exp.	7.6 %	12.0 %	0.9 %	4.5 %	5.1 %
$\frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma_i}$ Thé.	13.6 %	20.5 %	1.5 %	9.3 %	10.4 %

σ'	0.235 m	0.469 m	0.87 µm	0.34 m	$0.79*10^{-4}$
σ / σ'	3.4	1.8	9.0	1.8	7.4

Tab. 6.7 Validation de l'estimation des écarts-type et du prédicteur de précision pour le bloc FR0544 *(méthode générale).*

6.4.2 Méthode asymptotique

On a effectué le même nombre d'essais, sur les mêmes blocs fictifs d'aérotriangulation, avec exactement les *mêmes échantillons d'observations.* Seuls *ont changé les poids de départ.*

6.4.2.1 Premier exemple : Bloc FR0514

P(1) = 0.4000 E+01 (σ = 0.500 metres) Nr.éq.(1) = 54
P(2) = 0.4000 E+01 (σ = 0.500 metres) Nr.éq.(2) = 64
P(3) = 0.1000 E+07 (σ = 1.000 micron) Nr.éq.(3) = 1174
P(4) = 0.1000 E+07 (σ = 1.000 micron) Nr.éq.(4) = 1174

Bruitage du bloc fictif parfait :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 40 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 40 \text{ cm} \\ \sigma_{x\ cli.} &= 6 \ \mu m \\ \sigma_{y\ cli.} &= 7 \ \mu m \end{aligned} \qquad (36)$$

Voici la matrice des coefficients (β_{ij}) moyens (voir § 6.2) :

$$\begin{bmatrix} 0.92590 & 0 & 1585.0 & 1280.0 \\ 0 & 0.95310 & 7585.0 & 1362.0 \\ 0 & 0 & 0.2831 & 0.0194 \\ 0 & 0 & 0.0201 & 0.4802 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

et les résultats pour les 8 essais :

Nr. d'essais	$\sigma_{plani.}$	$\sigma_{alti.}$	$\sigma_{x\ cliché}$	$\sigma_{y\ cliché}$
1	0.492 m	0.321 m	5.83 µm	7.17 µm
2	0.305	0.326	6.13	7.04
3	0.315	0.362	5.76	7.15
4	0.548	0.252	5.83	6.67
5	0.338	0.216	6.20	6.74
6	0.375	0.306	5.94	6.57
7	0.448	0.277	5.69	7.16
8	0.456	0.212	6.19	6.88
Val. Moyenne	0.410 m	0.284 m	5.95 µm	6.92 µm
$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}_i}}{\sigma_i}$ Expér.	21.0 %	31.6 %	3.27 %	3.40 %
$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}_i}}{\sigma_i}$ Théor.	17.3 %	26.9 %	2.06 %	2.06 %

σ'	0.34 m	0.56 m	0	0
σ / σ'	1.17	0.71	∞	∞

Tab. 6.8 Validation de l'estimation des écarts-type et du prédicteur de précision pour le bloc FR0514 *(méthode asymptotique)*

6.4.2.2 **Deuxième exemple** Bloc FR0544

P(1) = 0.1000 E+01	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(1) = 42
P(2) = 0.1000 E+01	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(2) = 41
P(3) = 0.1000 E+07	(σ = 1.000 micron)	Nr.éq.(3) = 4588
P(4) = 0.1235 E+01	(σ = 0.900 metres)	Nr.éq.(4) = 198
P(5) = 0.4000 E+07	(σ = 0.0005 mbars)	Nr.éq.(5) = 55

Buitage :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{cliché} &= 8 \ \mu\text{m} \\ \sigma_{GPS} &= 60 \text{ cm} \\ \sigma_{STATO} &= 6*10^{-4} \text{ mbar} \end{aligned} \tag{38}$$

Matrice des coefficients β_{ij} (moyens) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2080.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8500.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5203 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5555.0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (39)$$

Résultats pour les 10 essais :

Nr.	$\sigma_{plani.}$	$\sigma_{alti.}$	$\sigma_{cli.}$	$\sigma_{G.P.S.}$	$\sigma_{STA} * 10^3$
1	0.760 m	0.741 m	7.94 µm	0.462 m	0.493 mb
2	0.580	0.476	7.99	0.420	0.501
3	0.725	0.559	7.93	0.527	0.521
4	0.915	0.408	8.07	0.655	0.593
5	0.777	0.839	8.05	0.554	0.589
6	0.657	0.896	8.00	0.481	0.543
7	0.758	0.622	7.92	0.489	0.556
8	0.945	0.630	8.09	0.585	0.560
9	0.652	0.570	7.99	0.397	0.557
10	0.718	0.940	8.05	0.449	0.478
Moyenne	0.749 m	0.668 m	8.00 µm	0.502 m	0.539 mb
$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}_i}}{\sigma_i}$ Exp.	14.8 %	26.9 %	0.72 %	20.6 %	11.9 %
$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}_i}}{\sigma_i}$ Thé.	13.2 %	20.4 %	1.04 %	10.1 %	11.2 %

σ'	0.365 m	0.738 m	0 µm	0.596 m	$1.6*10^{-4}$
σ / σ'	2.2	1.1	∞	1.0	3.7

Tab. 6.9 Validation de l'estimation des écarts-type et du prédicteur de précision pour le bloc FR0544 *(méthode asymptotique)*

• • •

On constate (tableaux 6.6 et 6.8, tableaux 6.7 et 6.9) d'une part que les précisions théoriques $\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i$ **sont extrêmement voisines** pour les deux méthodes (générale et asymptotique), d'autre part que les prédicteurs théoriques sont valides (si on tient compte du petit nombre d'essais, dans la comparaison du $\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i$ expérimental au prédicteur théorique), et enfin que les estimations des $\tilde{\sigma}_i$ sont elles mêmes solidement validées (il y a un écart apparamment important au tableau 6.9 ; la moyenne de 10 essais est $\tilde{\sigma}_{2,10}$ = 66.8 cm alors que la valeur vraie est σ_2 = 80 cm : mais on vérifie - l'écart-type du $\tilde{\sigma}_{2,10}$ est $0.204*80/\sqrt{10}$ - que au seuil de 1 % on reste *dans les tolérances* ; au tableau 6.8 un écart légèrement hors tolérance : 28.4 cm pour 40 cm).

6.5 Limites de la méthode.

■ Comme il est démontré théoriquement au [§ 5.1.1.B], pour des groupes de faibles effectifs ($n_i \leq 50$), il n'est pas possible d'estimer σ_i avec une précision acceptable (meilleure que 50% en valeur relative) si le rapport (σ/σ') est plus petit que (0.5). Dans de tels cas on peut même obtenir des estimations de (σ_i) de variances négatives, ce qui constitue une limite de la méthode. Par exemple [§ 5.1.1, Tab. 5.3], on trouve que pour :

$$n_i - (r - r'_i) = 50 \quad \text{et} \quad \sigma_i / \sigma'_i < 0.5 \tag{40}$$

il y aura au moins 20 % des cas avec $(\tilde{\sigma}_i)^2$ négatif.

Mais cela n'est pas forcément un handicap : cela signifie en effet que la précision du groupe (*i*) est **forte** (σ_i petit) par rapport a celles des autres mesures.

On peut alors adopter [§ 5.2.2,64] l'estimation (grossière) :

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\rho_i}{\sqrt{\sum_j \alpha_{ij}}} \tag{41}$$

Voici un exemple illustrant ce cas :

<u>Bloc FR0514</u> (bloc fictif bruité)

P(1) = 0.4000 E+01	(σ = 0.500 metres)	Nr.éq.(1) =	54
P(2) = 0.1000 E+01	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(2) =	64
P(3) = 0.1000 E+07	(σ = 1.000 micron)	Nr.éq.(3) =	1174
P(4) = 0.1000 E+07	(σ = 1.000 micron)	Nr.éq.(4) =	1174

Les erreurs d'observation ont pour écart-type :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 20 \text{ cm} \quad !! \textbf{ petit} \\ \sigma_{alti} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{x\ cli.} &= 6 \ \mu m \\ \sigma_{y\ cli.} &= 6 \ \mu m \end{aligned} \tag{42}$$

La matrice des coefficients α_{ij} (6 itérations par coefficient ; on aurait pu s'en disposer, puisque les poids-cliché sont forts...)

$$\begin{bmatrix} 0.84280 & 0.00107 & 0.00844 & 0.00722 \\ 0.00003 & 0.96090 & 0.00863 & 0.00272 \\ 0.00047 & 0.00068 & 0.28440 & 0.02050 \\ 0.00033 & 0.00038 & 0.02070 & 0.49340 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1'^2 = 0.17285$;

$\sigma / \sigma' = 0.48$;

$n_1 - (r - r_1') = 54 - 4 = 50$ équ.

Nous avons effectué une série de 11 essais. On donne les résultats dans le tableau ci-dessous. Par convention ($i = \sqrt{-1}$). Les valeurs (σ_1) entre paranthèses sont estimées par la formule [§ 5.2.2,64] :

Nr. d'essais	$\sigma_{plani.}$	$\sigma_{alti.}$	$\sigma_{x\ cliché}$	$\sigma_{y\ cliché}$
1	0.220 m	0.735 m	5.82 µm	6.06 µm
2	0.26*i (0.320)	0.765	5.93	5.96
3	0.23*i (0.336)	0.737	5.74	6.05
4	0.329	0.706	5.80	5.65
5	0.20*i (0.357)	0.651	6.20	5.70
6	0.155	1.020	5.90	5.55
7	0.238	0.757	5.70	6.06
8	0.172	0.668	6.14	5.82
9	0.339	0.822	6.00	6.00
10	0.22*i (0.353)	0.760	6.00	6.10
11	0.241	0.683	5.75	6.00
Val. Moyenne	0.278 m	0.755 m	5.91 µm	5.90 µm
$\frac{\sigma_{\sigma i}}{\sigma_i}$ Expér.	55.5 %	13.9 %	3.04 %	3.44 %
$\frac{\sigma_{\sigma i}}{\sigma_i}$ Théor.	58.0 %	15.4 %	4.16 %	3.07 %
σ'	0.41 m	0.65 m	1.6 µm	1.2 µm
σ / σ'	0.48	1.23	3.70	4.90

Tab. 6.10

Des exemples similaires sur d'autres blocs d'aérotriangulation ont donnés des résultats semblables à celui-ci.

OBSERVATOIRE DE PARIS

■ Par contre, si la précision du groupe (*i*) est **faible** (σ_i grand) elle sera estimée avec bonne précision, même si l'effectif du groupe est peu nombreux. On prend comme exemple pour montrer cela le même bloc FR0514.

Poids de compensation et effectifs des groupes d'equations d'observation :

P(1) = 0.2780 E+01	(σ = 0.600 metres)	Nr.éq.(1) = 54
P(2) = 0.1560 E+01	(σ = 0.800 metre)	Nr.éq.(2) = 64
P(3) = 0.1000 E+07	(σ = 1.000 micron)	Nr.éq.(3) = 1174
P(4) = 0.1000 E+07	(σ = 1.000 micron)	Nr.éq.(4) = 1174

Les écarts-type des erreurs d'observation du bloc fictif ont été prises égales à :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 1.5 \text{ m} \\ \sigma_{alti} &= 1.5 \text{ m} \\ \sigma_{x\ cli.} &= 6 \ \mu\text{m} \\ \sigma_{y\ cli.} &= 7 \ \mu\text{m} \end{aligned} \qquad (43)$$

Matrice des coefficients α_{ij} (moyens) :

$$\begin{bmatrix} 0.88430 & 0.00092 & 0.0054 & 0.0060 \\ 0.00003 & 0.87840 & 0.0133 & 0.0026 \\ 0.00037 & 0.00104 & 0.2902 & 0.0225 \\ 0.00039 & 0.00048 & 0.0205 & 0.5061 \end{bmatrix} \qquad (44)$$

On a effectué une série de 5 essais :

Nr. d'essais	$\sigma_{plani.}$	$\sigma_{alti.}$	$\sigma_{x\ cliché}$	$\sigma_{y\ cliché}$
1	1.436 m	1.622 m	5.90 µm	7.00 µm
2	1.520	1.369	5.85	7.00
3	1.635	1.614	6.00	6.94
4	1.418	1.411	6.20	6.65
5	1.415	1.571	6.10	6.85
Val. Moyenne	1.485 m	1.517 m	6.00 µm	6.90 µm
$\frac{\sigma_{\sigma i}}{\sigma_i}$ Expér.	5.7 %	7.2 %	2.1 %	2.5 %
$\frac{\sigma_{\sigma i}}{\sigma_i}$ Théor.	11.6 %	11.5 %	4.2 %	3.0 %

σ'	0.45 m	0.66 m	1.9 µm	1.2 µm
σ / σ'	3.35	2.26	3.07	5.80

Tab. 6.11

On vérifie bien que les résultats sont excellents ; car le rapport (σ / σ') est pour tous les groupes d'équations d'observation plus grand que 2. (voir § 5.1.1.B)

■ L'application de la méthode asymptotique pose le problème de la valeur effective à donner au poids théoriquement infini : des essais faits sur différents blocs d'aérotriangulation ont montré [§6.6] que les calculs *avec un poids cliché trop grand* [par exemple un poids cliché égal à ($p=1*10^{10}$) au lieu de ($p=1*10^{6}$)] donnent des *estimations des variances complétement erronées* . Cela ne veut nullement dire qu'on ne peut pas employer la méthode asymptotique : mais il faut *prendre un poids seulement 50÷100 fois plus grand que le poids optimal*, et la condition théorique du poids *'infini'* imposée pour l'applicationde la méthode est pratiquement remplie.

6.6 Evolution des estimations $\tilde{\sigma}_i$, de leurs précisions, et des écarts-type équivalents avec les poids à priori.

Dans ce dernier § , on s'est posé la question de savoir comment évoluait pratiquement les estimations $\tilde{\sigma}_i$, leurs précisions $\sigma_{\tilde{\sigma}i}/\sigma_i$ (évaluées au moyen du prédicteur général), les écarts-type équivalents σ'_i en fonction des poids choisis à priori.

On a choisi de faire varier le poids p_3 des mesures-cliché de $2.5*10^7$ à 400 (c'est à dire l'écart-type à priori des mesures-cliché de 0.2 μm à 50 μm).

Les essais ont été faits sur un bloc fictif, avec pour tous les essais *le même échantillon d'observation* ; pour chaque essai la matrice des coefficients α_{ij} a été calculée avec 5 itérations.

Bloc FR0544

Poids de compensation et effectifs des groupes d'equations d'observation :

P(1) = 0.1000 E+01	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(1) =	42
P(2) = 0.1000 E+01	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(2) =	41
P(3) = variable	(σ = variable)	Nr.éq.(3) =	4588
P(4) = 0.1000 E+00	(σ = 1.000 metre)	Nr.éq.(4) =	198
P(5) = 0.4000 E+07	(σ = 0.0005 mbar)	Nr.éq.(4) =	55

Les échantillons du bruitage du bloc fictif sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{plani} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{alti} &= 80 \text{ cm} \\ \sigma_{cliché} &= 8 \ \mu\text{m} \\ \sigma_{GPS} &= 60 \text{ cm} \\ \sigma_{STATO} &= 3*10^{-4} \text{ mbar} \end{aligned} \qquad (45)$$

Les résultats des simulations figurent dans les tableaux ci-dessous :

$\frac{1}{\sqrt{p_3}}$	σ_1 plani. (m)	σ'_1 (m)	$\frac{\sigma_1}{\sigma'_1}$	$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}1}}{\sigma_1}$	σ_2 alti. (m)	σ'_2 (m)	$\frac{\sigma_2}{\sigma'_2}$	$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}2}}{\sigma_2}$
0.2 µm	1.31	0.819	1.6	16 %	1.53	1.177	1.3	28 %
1 µm	0.86	0.537	1.6	16 %	0.59	0.656	0.9	26 %
2 µm	0.82	0.342	2.4	13 %	0.58	0.644	0.9	27 %
4 µm	0.76	0.304	2.5	14 %	0.63	0.573	1.1	22 %
6 µm	0.77	0.248	3.1	13 %	0.71	0.473	1.5	20 %
8 µm	0.74	0.274	2.7	14 %	0.67	0.515	1.3	23 %
10 µm	0.75	0.234	3.2	14 %	0.72	0.450	1.6	23 %
12 µm	0.76	0.253	3.0	15 %	0.74	0.411	1.8	23 %
25 µm	0.77	0.248	3.1	18 %	0.82	0.482	1.7	39 %
50 µm	0.77	0.257	3.0	27 %	0.81	0.476	1.7	75 %

Tab. 6.12, *A*, *B*

$\frac{1}{\sqrt{p_3}}$	σ_3 cliché (µm)	σ'_3 (µm)	$\frac{\sigma_3}{\sigma'_3}$	$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}3}}{\sigma_3}$	σ_4 GPS (m)	σ'_4 (m)	$\frac{\sigma_4}{\sigma'_4}$	$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}4}}{\sigma_4}$
0.2 µm	8.15	0.06	132	1.5%	1.07	0.892	1.2	10 %
1 µm	8.17	0.04	210	1.5%	0.71	0.645	1.1	10 %
2 µm	8.13	0.07	120	1.6%	0.69	0.531	1.3	9 %
4 µm	8.07	0.18	44	1.4%	0.67	0.419	1.6	8 %
6 µm	8.16	0.35	23	1.5%	0.65	0.382	1.7	8 %
8 µm	8.11	0.54	15	1.4%	0.65	0.342	1.9	8 %
10 µm	8.07	0.73	11	1.4%	0.63	0.331	1.9	8 %
12 µm	8.07	0.96	8.4	1.4%	0.66	0.330	2.0	9 %
25 µm	8.06	2.37	3.4	1.6%	0.66	0.287	2.3	11 %
50 µm	8.01	4.22	1.9	1.8%	0.63	0.252	2.5	15 %

Tab. 6.12, *C*, *D*

$\frac{1}{\sqrt{p_3}}$	$\sigma_{5\,STA}$ (µbar)	σ'_5 (µbar)	$\frac{\sigma_5}{\sigma_5}$	$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}5}}{\sigma_5}$
0.2 µm	0.504	0.388	1.3	17 %
1 µm	0.325	0.162	2.0	13 %
2 µm	0.331	0.132	2.5	12 %
4 µm	0.330	0.114	2.9	12 %
6 µm	0.320	0.080	4.0	11 %
8 µm	0.340	0.083	4.1	12 %
10 µm	0.320	0.074	4.3	11 %
12 µm	0.310	0.076	4.1	11 %
25 µm	0.310	0.089	3.5	12 %
50 µm	0.320	0.110	2.9	14 %

Tab. 6.12,*E*

Voici une présentation graphique partielle de ces résultats :

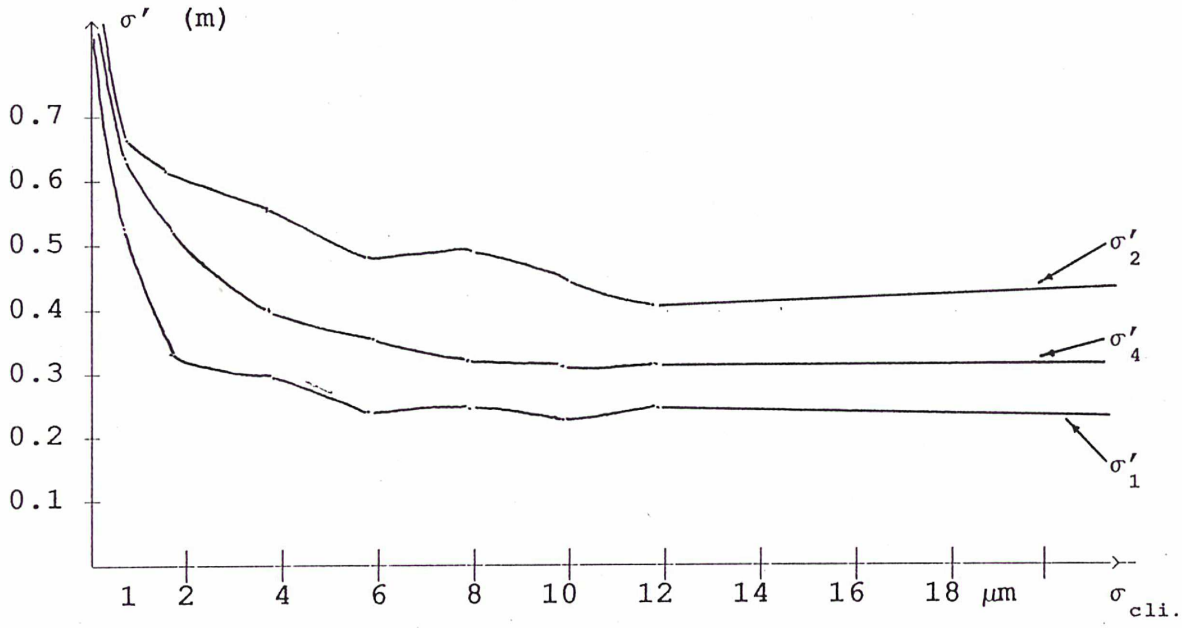


Fig. 6.1

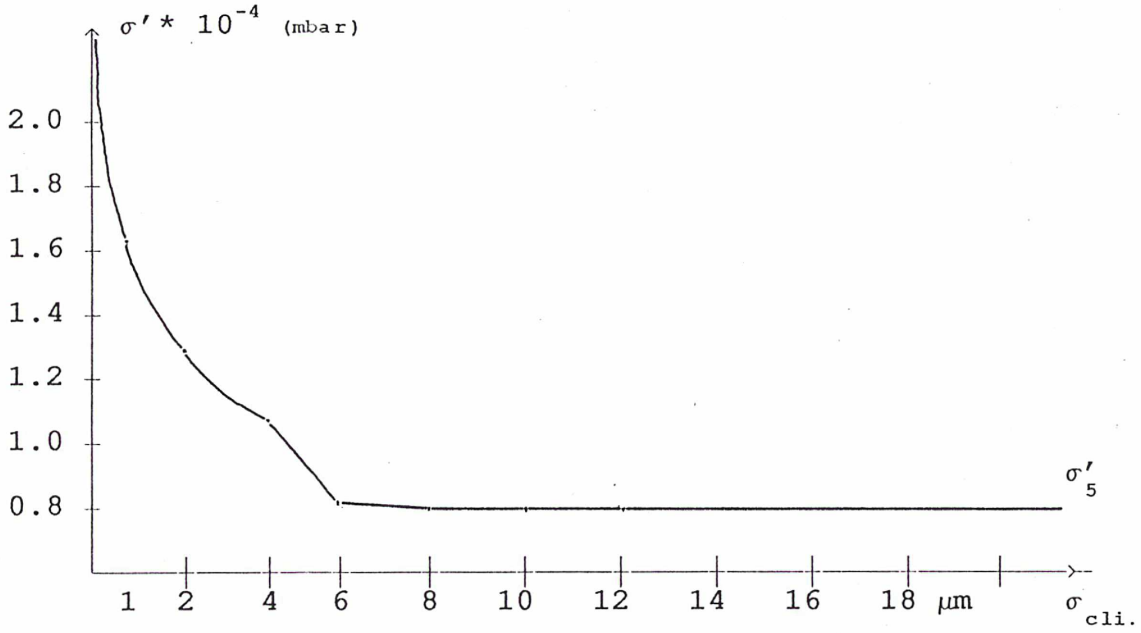

σ'* 10^-4 (mbar)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
σ'5
1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 µm
σ cli.

Fig. 6.2

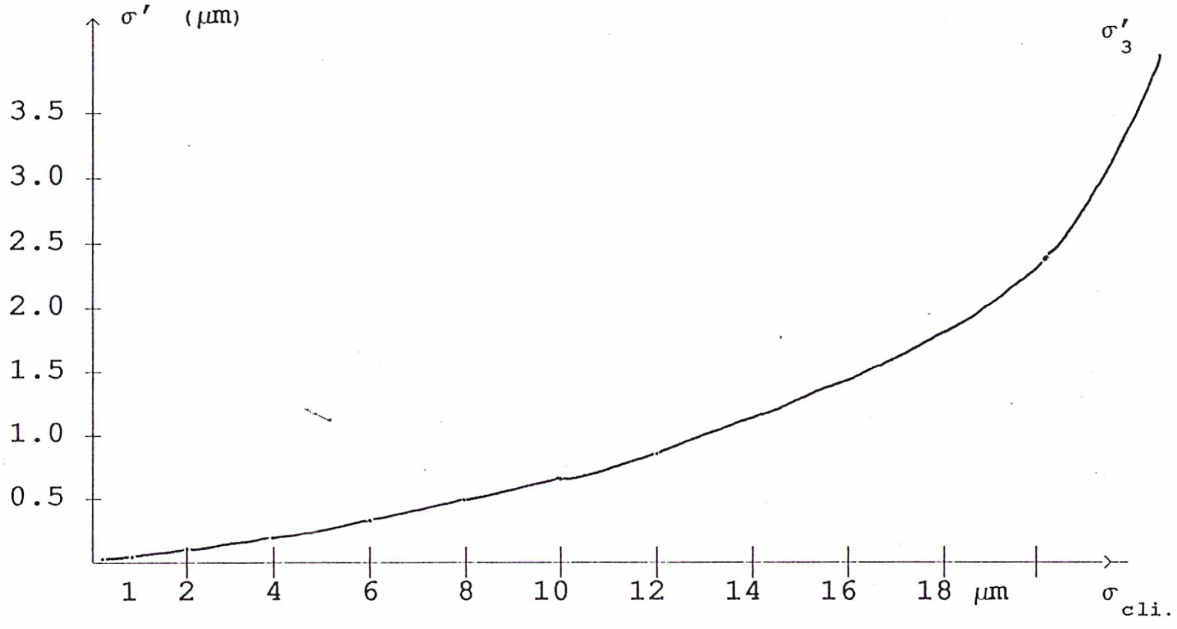

σ' (µm)
σ'3
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
1 2 4 6 8 10 12 14 16 18 µm
σ cli.

Fig. 6.3

On constate effectivement qu'*un poids numériquement trop 'élévé'* ($2.5*10^7$ - 1600 fois le poids optimal - pour les coordonnées-cliché) donne lieu à des estimations *érronées* pour toutes les catégories d'observations (sauf les coordonnées-cliché, tab. 6.12,C,D) : mais insistons bien, il s'agit ici d'un problème *numérique* et non d'un problème mathématique ; par contre pour un poids de 50 à 100 fois le poids optimal les estimations sont excellentes.

Une deuxième remarquable conclusion est la suivante : **les estimations des variances sont pratiquement indépendantes des poids à priori** (cela rappelle le résultat obtenu au § 2.3 où elles étaient exceptionnellement indépendantes des poids).

Ceci est confirmé par *la remarquable tenue des précision relatives* $\sigma_{\tilde{\sigma}_i}/\sigma_i$, **presque constantes:** il semble aussi que *la précision optimale s'obtienne au voisinage des poids optimaux ;* ce résultat est fort naturel mais n'a pu être établi théoriquement.

Enfin l'écart-type équivalent σ'_i , qui on rappelle, mesure en quelque sorte l'influence des mesures $j \neq i$ dans la compensation, est *lui-même*, sauf évidemment pour la catégorie à poids variable (ici i=3), assez stable, et semble lui aussi passer par un minimum pour des poids à priori optimaux.

* 7 * VALIDITE DE LA METHODE

EXTENSIONS

On considère (k) groupes d'observations non corrélées d'effectifs ($n_1, n_2 \ldots n_k$), d'écarts-type inconnus ($\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_k$); on compense avec les poids scalaires arbitraires (p_i), les équations d'observations correspondantes :

$$\sqrt{p_i}\ A_i x \mid = \sqrt{p_i}\ l_i \ ; \qquad i = 1,k \qquad (1)$$

à quelle condition le système d'équations permettant de calculer les (σ_i^2) en fonction des (ρ_i^2)

$$p_i\ \rho_i^2 = \sum \alpha_{ij}\ p_j\ \sigma_j^2 \ ; \qquad i = 1,k \qquad (2)$$

est-il inversible?

On soupçonne que la réponse ne doit faire intervenir que le modèle fonctionnel, et non les poids; nous prouverons que c'est effectivement le cas pour ($k = 2$).

Si cependant le système (2) n'est pas inversible, se pourraît-il qu'en associant des équations résultant de compensations faites avec d'autres poids (p_i) on arrive à calculer les (σ_i^2)? On a l'impression que non : or la réponse est oui parfois ...

Plus généralement encore, nous avons supposé les observations non corrélées; peut-on en étendant la méthode, estimer des covariances; la réponse est : oui parfois ...

Le problème qu'il faudrait résoudre est celui-ci: *étant donné un modèle fonctionnel associé à un vecteur observation de variance inconnue, quelles sont les informations (non biaisées) qu'on peut obtenir sur sa variance?*

Sous cette forme le problème semble encore redoutable. Nous n'avons réussi à obtenir que deux résultats nets.

7.1 Cas de deux groupes d'observation .

7.1.1 Théorème

Etant donné deux groupes d'observations non corrélées, d'écarts-type inconnus (σ_1 et σ_2), d'effectifs (n_1 et n_2) possédant respectivement (r_1 et r_2) degrés de liberté, et dont la réunion a (r) degrés de liberté : la condition nécessaire et suffisante pour que (σ_1^2 et σ_2^2) puissent être estimés sans biais au moyen des résidus d'une compensation effectuée avec les poids scalaires arbitraires (p_1 et p_2) est que :

∴ **ou bien les deux groupes soient redondants :**

$$n_1 > r_1 \quad \text{et} \quad n_2 > r_2 \tag{3}$$

∴ **ou bien l'un des deux groupes seulement, par exemple le second soit redondant ($n_2 > r_2$) , l'autre étant tel que :**

$$r_1 > r - r_2 \tag{4}$$

Démonstration :

Sans diminuer la généralité, nous pouvons choisir une inconnue $({}_r\dot{x}_1)$ à (r) degrés de liberté; les équations d'observation s'écrivent alors :

$$\sqrt{p}\,{}_nA_r\,\dot{x} \,|= \sqrt{p}\,l \quad r = \text{rang } A \iff \begin{array}{l} \sqrt{p_1}\,{}_{n_1}A_{1\,r_1}\,\dot{x} \,|= \sqrt{p_1}\,l_1 \quad r_1 = \text{rang } A_1 \\ \sqrt{p_2}\,{}_{n_2}A_{2\,r_2}\,\dot{x} \,|= \sqrt{p_2}\,l_2 \quad r_2 = \text{rang } A_2 \end{array} \tag{5}$$

Si (v) est le résidu, et (e) l'erreur, nous savons que :

$$-\sqrt{p}\,v = Q\sqrt{p}\,e \tag{6}$$

avec :

$$Q = I - \sqrt{p}\, A(A^T pA)^{-1} A^T \sqrt{p} = \begin{pmatrix} \underset{n_1 n_1}{Q_{11}} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & \underset{n_2 n_2}{Q_{22}} \end{pmatrix} \; ; \text{ rang } Q = n-r \qquad (7)$$

et pour qu'on puisse calculer σ_1^2 et σ_2^2 en fonction de ρ_1^2 et ρ_2^2 $[\rho_1^2 = E\, v_1^T v_1 / n_1 ;\ \rho_2^2 = E\, v_2^T v_2 / n_2]$, il faut [§ 2,11 et 12] que :

$$|Q_{11}|\ |Q_{22}| - |Q_{12}|^2 \neq 0 \qquad (8)$$

Or d'après un lemme que nous démontrons en annexe 7 , on a toujours :

$$|Q_{11}|\ |Q_{22}| - |Q_{12}|^2 \geq 0 \qquad (9)$$

le premier membre n'étant nul que dans deux cas :

- rang Q_{11} = rang Q_{22} = n - r (les valeurs propres de Q_{11} sont alors toutes égales à $(s_1 > 0)$, celles de Q_{22} toutes égales à $(s_2 > 0)$, et $(s_1 + s_2 = 1)$).

- rang $Q_{11} = 0$, rang $Q_{22} = n - r$ $(Q_{22} = Q_{22}^2)$ ou l'inverse.

Ceci étant :

** **la condition est nécessaire.** **

Hypothèse : $|Q_{11}||Q_{22}| - |Q_{12}|^2 > 0$; conclusion $[n_1 > r_1$ et $n_2 > r_2]$ ou bien $[n_2 > r_2$ et $r_2 > r - r_1]$ (ou l'inverse)

Raisonnons par l'absurde .

Supposons qu'aucun des deux groupes ne soit redondant; on aurait alors :

$$n_1 = r_1 \leq r \; ; \qquad n_2 = r_2 \leq r \qquad (10)$$

Mais :

$$Q_{11} = I - \sqrt{p}_1 A_1 (A^T pA)^{-1} A_1^T \sqrt{p}_1$$

$$Q_{12} = \quad - \sqrt{p}_1 A_1 (A^T pA)^{-1} A_2^T \sqrt{p}_2 \qquad (11)$$

$$Q_{22} = I - \sqrt{p}_2 A_2 (A^T pA)^{-1} A_2^T \sqrt{p}_2$$

Et évidemment, compte-tenu de (10) :

$$\text{rang} Q_{12} = \left[\begin{pmatrix} \underset{n_1 r_1}{\sqrt{p}_1 A_1} \\ \underset{r r}{0} \end{pmatrix} \sqrt{(A^T pA)^{-1}} \right] \left[\sqrt{(A^T pA)^{-1}} \begin{pmatrix} \underset{r n_2}{\sqrt{p}_2 A_2^T} , & \underset{r, r-n_2}{0} \end{pmatrix} \right] \qquad (12)$$

Appliquant alors la règle de Sylvester (si A et B sont carrées rang $AB \geq$ rang A + rang B - dim$A$) aux deux matrices entre crochets, et notant que (rang $\sqrt{(A^T pA)^{-1}} = r$)

$$\text{rang } Q_{12} \geq \text{rang } A_1 + \text{rang } A_2 - r = r_1 + r_2 - r = n - r \qquad (13)$$

Mais (Q_{12}) étant une sous-matrice de (Q) qui est de rang (n-r), l'inégalité inverse est vraie aussi ; donc :

$$\text{rang } Q_{12} = n - r \qquad (14)$$

Mais (Q) étant idempotente : $\quad Q_{11} = Q_{11}^2 + Q_{12} Q_{12}^T \qquad (15)$

qui entraîne : $\quad \text{rang } Q_{11} \geq \text{rang } Q_{12} Q_{12}^T = \text{rang } Q_{12} = n - r \qquad (16)$

mais comme l'inégalité inverse est vraie aussi :

$$\text{rang } Q_{11} = n - r \qquad (17)$$

On démontrerait de même que (rang $Q_{22} = n - r$); alors d'après le lemme cité : $|Q_{11}||Q_{22}| - |Q_{12}|^2 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, nécessairement l'un au moins des deux groupes est redondant. Supposons qu'il en soit ainsi du deuxième :

$$n_2 > r_2 \tag{18}$$

alors ou bien $[n_1 > r_1]$ (les deux groupes sont redondants) , ou bien $[n_1 = r_1]$ (le premier ne l'est pas)

Examinons ce cas : $$n_1 = r_1 \tag{19}$$

Nous commencerons par remarquer, nous référant à la forme de Q_{22} (11) , que :

$$\text{rang } Q_{22} \geq n_2 - r_2 \tag{20}$$

(car les valeurs propres de $Q_{22} \in [0,1]$ - voir annexe 1 - et il y en a au plus (r_2) qui valent 1); par suite, compte-tenu de (18) et (19) :

$$0 < n_2 - r_2 \leq \text{rang } Q_{22} \leq n - r = n_1 - r_1 + n_2 + r_1 - r = n_2 + r_1 - r$$

donc : $$r_1 \geq r - r_2 \tag{21}$$

mais l'égalité n'est pas possible, sinon on aurait :

$$\text{rang } Q_{22} = n_2 - r_2 \tag{22}$$

ce qui implique, d'après la forme de (Q_{22}), que la matrice de rang (r_2) $[\sqrt{p}_2 A_2 (A^T pA)^{-1} A_2^T \sqrt{p}_2]$ n'a que des valeurs propres nulles ou égales à (1), qu'elle est donc idempotente, et qu'il en est de même pour (Q_{22}).

et on aurait : $$r_1 = r - r_2 \Longrightarrow Q_{22} = Q_{22}^2 \tag{23}$$

Mais alors $$Q_{22} = Q_{22}^2 + Q_{12}^T Q_{12} \Longrightarrow Q_{12} = 0 \tag{24}$$

et par suite : $Q_{11} = Q_{11}^2 \Longrightarrow \text{rang } Q_{11} = n_1 - r_1 = 0$ (25)

ainsi, on aboutirait à la conclusion que $Q_{11} = 0$, et en définitive on aurait $|Q_{11}||Q_{22}| - |Q_{12}|^2 = 0$, contraire à l'hypothèse.

Donc : $n_1 = r_1 \Longrightarrow r_1 > r - r_2$ (26)

** **la condition est suffisante.** **

Hypothèse :* α * soit $(n_1 > r_1$ et $n_2 > r_2)$
* β * soit $(n_2 > r_2$ et $n_1 = r_1$, $r_1 > r - r_2$
* γ * soit $(n_1 > r_1$ et $n_2 = r_2$, $r_2 > r - r_1$

conclusion : $|Q_{11}||Q_{22}| - |Q_{12}|^2 > 0$

Raisonnons par l'absurde; supposons qu'en dépit de l'hypothèse :

$$|Q_{11}||Q_{22}| - |Q_{12}|^2 = 0 \qquad (27)$$

d'après le lemme démontré en annexe 7, on se trouverait dans l'un des deux cas suivants :

■ a. $\text{rang } Q_{11} = \text{rang } Q_{22} = n - r$ (28)

les valeurs propres non nulles de (Q_{11}) étant égales à $s_1 \in]\,0,1\,[$, et celles non nulles de (Q_{22}) égales à $s_2 \in]\,0,1\,[$

Mais alors la matrice : $\sqrt{p}_1 A_1 (A^T pA)^{-1} A_1^T \sqrt{p}_1 = I - Q_{11}$ (29)

serait de rang (n_1), et donc comme son rang est r_1 :

$n_1 = r_1$ de même , on a : $n_2 = r_2$ (30)

ce qui est contradictoire avec les trois hypothèses.

■ b. $$\text{rang } Q_{22} = 0 \; ; \quad \text{rang } Q_{11} = n - r \tag{31}$$

On aurait donc ($Q_{22} = 0$); alors la matrice : $\sqrt{p}_2 A_2 (A^T pA)^{-1} A_2^T \sqrt{p}_2$ serait de rang (n_2), et par conséquence :

$$n_2 = r_2 \tag{32}$$

ce qui élimine les hypothèses (α) et (β). Reste à éliminer (γ); on note que :

$$Q_{22} = 0 \Longrightarrow Q_{12} = 0 \tag{33}$$

par suite :

$$Q_{11} = Q_{11}^2 = I - \sqrt{p}_1 A_1 (A^T pA)^{-1} A_1^T \sqrt{p}_1 \tag{34}$$

la matrice $[\sqrt{p}_1 A_1 (A^T pA)^{-1} A_1^T \sqrt{p}_1]$ est donc idempotente, et son rang [puisqu'elle vaut $(I-Q_{11})$] est $(n_1 - (n-r))$ d'une part, (r_1) d'autre part; donc, puisque $(n_2 = r_2)$:

$$n_1 - n + r = r_1 \Longleftrightarrow r - r_2 = r_1 \Longleftrightarrow r_2 = r - r_1 \tag{35}$$

ce qui contredit l'hypothèse (γ). Notre supposition était fausse: chacune des trois hypothèses entraîne :

$$|Q_{11}||Q_{22}| - |Q_{12}|^2 > 0 \tag{36}$$

7.1.2 Pourtant, malgré la satisfaction qu'il peut procurer, le théoréme précédent ne resout pas complétement, même pour deux groupes d'observation, le problème posé : il se borne à énoncer dans quelles conditions on peut estimer σ_1^2 et σ_2^2 à partir des résidus d'*une seule compensation*.

Or dans certains cas on peut se sortir d'une situation desespérée en envisageant les résultats de plusieurs compensations effectuées avec des poids différents.

Exemple : On mesure les abscisses ($\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$) d'un segment porté par un axe ($\dot{x}_1 < \dot{x}_2$) avec des erreurs non corrélées d'écart-type σ_1 et la distance ($\dot{d} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$), avec une erreur d'écart-type σ_2 .

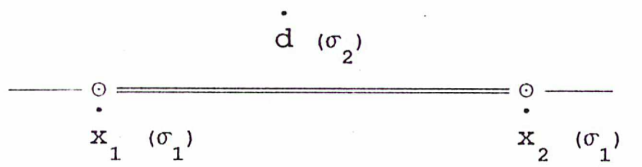


Fig. 7.1

Les trois équations d'observation sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - e_1 ; \quad e_1 \in L(0,\sigma_1) ; \\ \dot{x}_2 &= x_2 - e_2 ; \quad e_2 \in L(0,\sigma_1) \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_1 &= d - e_d ; \quad e_d \in L(0,\sigma_2) \end{aligned} \tag{37}$$

aucun des deux groupes des mesures n'est redondant.

D'après le théorème de [§ 7.1.1], il est donc impossible d'estimer les σ_1^2 et σ_2^2 à partir des résidus d'une compensation. De fait, compensant avec le poids (p_1) pour les mesures d'abscisses et (p_2) pour la mesure de la distance, on trouve :

$$Q = \frac{1}{p_1 + 2p_2} \begin{pmatrix} p_2 & -p_2 & \sqrt{p_1 p_2} \\ -p_2 & p_2 & -\sqrt{p_1 p_2} \\ \sqrt{p_1 p_2} & -\sqrt{p_1 p_2} & p_1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

puis :

$$\begin{aligned} |Q_{11}|^2 &= 4p_2^2 \,/\, (p_1 + 2p_2)^2 \\ |Q_{22}|^2 &= p_1^2 \,/\, (p_1 + 2p_2)^2 \\ |Q_{12}|^2 &= 2p_1 p_2 \,/\, (p_1 + 2p_2)^2 \end{aligned} \tag{39}$$

et il vient : $$|Q_{11}|^2 |Q_{22}|^2 - |Q_{12}|^4 = 0 \qquad (40)$$

Mais compensant une fois avec (p_1) et (p_2) , il vient pour l'expression de $\rho_1^2 \longrightarrow$ résidus abscisses :

$$\rho_1^2 = \frac{2\ p_2^2}{(p_1 + 2p_2)^2}\ \sigma_1^2 + \frac{2p_1p_2}{(p_1 + 2p_2)^2}\ \sigma_2^2 \qquad (41)$$

effectuant une seconde compensation avec les poids (p'_1) et (p'_2) il vient une deuxième expression analogue :

$$\rho_1'^2 = \frac{2\ p_2'^2}{(p_1' + 2p_2')^2}\ \sigma_1^2 + \frac{2p_1'p_2'}{(p_1' + 2p_2')^2}\ \sigma_2^2 \qquad (42)$$

et pour un choix convenable des poids les deux équations sont inversibles. Par exemple, avec : $p_1 = p_2 = p_1' = 1$, et $p_2' = 1/2$:

$$\rho_1^2 = (2/9)\ \sigma_1^2 + (2/9)\ \sigma_2^2 \quad ; \quad \rho_1'^2 = (1/8)\ \sigma_1^2 + (1/4)\ \sigma_2^2 \qquad (43)$$

7.2 Cas de (k) groupes d'observations ($k > 2$)

Un seul résultat net, donné au [§ 7.2.2], moins puissant d'ailleurs que le résultat analogue pour ($k = 2$).

Voici quelques indications.

7.2.1 Dans le cas où on cherche à évoluer les (σ_i^2) au moyen des résidus d'une seule compensation effectuée avec les poids scalaires (p_i), on pourrait penser par analogie avec le cas ($k = 2$), que l'un des groupes au moins doit être redondant : *c'est une erreur* ...

Exemple : On mesure les abscisses ($\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$) de deux extrémités d'un segment ($\dot{x}_1 < \dot{x}_2$) d'un axe, avec des erreurs d'écart-type (σ_1) et deux fois sa longueur avec des erreurs non corrélées d'écarts-type (σ_2) et (σ_3) distincts.

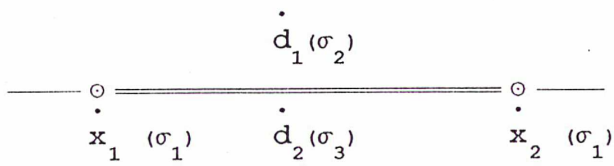


Fig. 7.2

Compensant avec le poids scalaire (p_1) pour les mesures d'abscisses, et le poids scalaire (p_2) pour les mesures des distances, on trouve :

$$Q = \frac{1}{p_1 + 4p_2} \begin{pmatrix} 2p_2 & -2p_2 & \sqrt{p_1 p_2} & \sqrt{p_1 p_2} \\ -2p_2 & 2p_2 & -\sqrt{p_1 p_2} & -\sqrt{p_1 p_2} \\ \sqrt{p_1 p_2} & -\sqrt{p_1 p_2} & p_1 + 2p_2 & -2p_2 \\ \sqrt{p_1 p_2} & -\sqrt{p_1 p_2} & -2p_2 & p_1 + 2p_2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} p_1 \rho_1^2 &= \frac{1}{(p_1 + 4p_2)^2} \left[4p_2^2 p_1 \sigma_1^2 + p_1 p_2^2 \sigma_2^2 + p_1 p_2^2 \sigma_3^2\right] \\ p_1 \rho_2^2 &= \frac{1}{(p_1 + 4p_2)^2} \left[2p_2 p_1^2 \sigma_1^2 + (p_1 + 2p_2)^2 p_2 \sigma_2^2 + 4p_2^3 \sigma_3^2\right] \\ p_1 \rho_3^2 &= \frac{1}{(p_1 + 4p_2)^2} \left[2p_2 p_1^2 \sigma_1^2 + 4p_2^3 \sigma_2^2 + (p_1 + 2p_2)^2 p_2 \sigma_3^2\right] \end{aligned} \tag{45}$$

et on vérifie que le déterminant est toujours positif; donc le système est inversible, bien qu'aucun des trois groupes ne soit redondant ...

7.2.2 *Théoréme* : **Pour toute bipartition des (k) groupes, en deux groupes (1) et (2), d'effectifs (n'_1) et (n'_2), de degré de liberté (r'_1) et (r'_2), (r étant celui de l'ensemble des grandeurs observées), il est nécessaire (mais non suffisant) que :**

** **soit** $n'_1 > r'_1$ **et** $n'_2 > r'_2$

** **soit** $n'_2 > r'_2$ **et** $n'_1 = r'_1$, $r'_1 > r - r'_2$

** **soit** $n'_1 > r'_1$ **et** $n'_2 = r'_2$, $r'_2 > r - r'_1$

En effet, partons des équations d'observations :

$$\sqrt{p_i}\ A_i \ |= \sqrt{p_i}\ (l_i - e_i)\ ;\quad e_i \in L\ (0,\sigma_i)\ ;\quad (i = 1,k) \qquad (46)$$

où les (σ_i) sont inconnus, et les (p_i) des scalaires arbitraires.

Il revient au même d'envisager :

$$\underset{n_i\ r}{A'_i} \ |= (l'_i - e'_i)\ ;\ e'_i = \sqrt{p_i}\ e_i ;\ e'_i \in L(0,\sqrt{p_i}\sigma_i)\ ;\ (i=1,k) \qquad (47)$$

et d'estimer les ($\sigma'_i = \sqrt{p_i}\ \sigma_i$); notre hypothèse étant qu'on peut estimer les (σ_i), quelque soit leur valeur, il s'ensuit qu'on peut estimer les (σ'_i) quelque soit leur valeur. Prenons alors :

$$(\sigma'_1 = \sqrt{p_1}\ \sigma_1) \qquad \text{et} \qquad \sigma'_i = \sigma'\ ;\quad i = 2,k \qquad (48)$$

(σ'_1) et (σ') doivent pouvoir être estimer sans biais : et les conditions du théorème [§ 7.1.1] s'appliquent.

On peut évidemment répéter le raisonnement pour toute bipartition des (k) groupes. Le théorème est établi.

Mais la condition n'est pas suffisante.

Exemple :

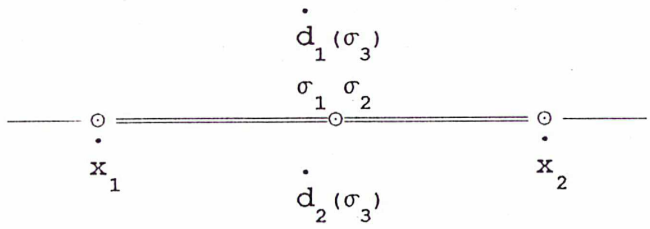


Fig. 7.3

On mesure deux fois l'abscisse du milieu d'un segment d'extrémité $(\dot{x}_1)$ et $(\dot{x}_2)$, $(\dot{x}_1 < \dot{x}_2)$ avec des mesures d'écart-type différent σ_1 et σ_2 et deux fois sa longueur avec des mesures d'écart-type σ_3. Les équations d'observation sont de la forme :

$$
\begin{aligned}
{}_{1\,2}A_1\dot{x} &= l_1 - e_1 \iff \frac{1}{2}\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2 = l_1 - e_1 \;;\quad e_1 \in L(0,\sigma_1) \\
{}_{1\,2}A_2\dot{x} &= l_2 - e_2 \iff \frac{1}{2}\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2 = l_2 - e_2 \;;\quad e_2 \in L(0,\sigma_2) \qquad (49) \\
{}_{2\,2}A_3\dot{x} &= l_3 - e_3 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = l_3 - e_3 \;;\quad e_3 \in L(0,\sigma_3)
\end{aligned}
$$

Or on vérifie que quelque soit la bipartition (A_1 et A_2A_3 , A_2 et A_1A_3 , A_3 et A_1A_2) les conditions précitées sont vérifiées ; pourtant on trouve :

$$
Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33} \end{pmatrix} \qquad (50)
$$

et on vérifie que le déterminant de la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} |Q_{11}|^2 & |Q_{12}|^2 & |Q_{13}|^2 \\ |Q_{12}|^2 & |Q_{22}|^2 & |Q_{23}|^2 \\ |Q_{13}|^2 & |Q_{21}|^2 & |Q_{33}|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad (51)$$

est nul ...

7.3 *Extension.*

Nous nous sommes bornés à des variances scalaires pour chaque groupe d'observation. Or ce n'est nullement une nécessité : on peut fort bien par cette méthode estimer des covariances.

Reprenons l'exemple du § 2.4 , et supposons que les deux mesures de distances, soient , bien que de même écart-type (σ_2) corrélées.

La variance du vecteur erreur correspondant est cette fois :

$$v(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} * \sigma_2^2 \qquad (52)$$

où (r) est le coefficient de corrélation.

Faisant la compensation avec les poids scalaire (p_1 pour les mesures d'abscisses) et (p_2 pour celles de distances), on obtient tout calcul faits :

$$p_1\rho_1^2 = \frac{1}{(p_1+4p_2)^2}\,[8p_1^3\sigma_1^2 + 2p_1p_2^2\sigma_2^2 + 2p_1p_2^2r\sigma_2^2]$$

$$p_2\rho_2^2 = \frac{1}{(p_1+4p_2)^2}\,[2p_1^2p_2\sigma_1^2 + ((p_1+2p_2)^2+4p_2^2)\,p_2\sigma_2^2 - 4(p_1+2p_2)p_2^2r\sigma_2^2] \qquad (53)$$

Elles sont évidemment insuffisantes pour déterminer les trois inconnues (σ_1^2, σ_2^2 et $r\sigma_2^2$) ; mais rien n'empêche d'y joindre une équation supplémentaire résultant d'une compensation faite avec des poids différents, choisis de telle sorte que les trois équations soient résolubles.

Ainsi, faisant d'abord $p_1 = p_2 = 1$, on obtient :

$$\rho_1^2 = \frac{1}{25} (8\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2r\sigma_2^2)$$
$$\rho_2^2 = \frac{1}{25} (2\sigma_1^2 + 13\sigma_2^2 - 12r\sigma_2^2) \qquad (54)$$

Faisant $p_2 = +\infty$, on obtient :

$$\rho_{1\infty}^2 = \frac{\sigma_2^2}{8} + \frac{r\sigma_2^2}{8} \qquad (55)$$

et on vérifie que le système est résoluble pour les trois inconnues $(\sigma_1^2, \sigma_2^2$ et $r\sigma_2^2)$.

ANNEXE 1

(Le lemme utilisé dans le § 2.2)

LEMME :

Les valeurs propres de Q_{ii} et Q_{ii}^2 sont dans [0,1] ; Tr Q_{ii} et Tr Q_{ii}^2 sont des fonctions décroissantes (au sens large) de p_i, et croissantes (au sens large) de p_j ($j \neq i$)

Preuve : Q_{ii} et Q_{ii}^2 sont symétriques et définies ou semi-définies positives (puisque Q_{ii} est propotionnelle à une matrice variance) ; leurs valeurs propres sont donc positives.

Pour alléger, nous ferons la convention d'écriture suivante pour deux matrices S et S' symétriques définies ou semi-définies positives :

$$\begin{aligned} S \geq S' &\iff u^T S u \geq u^T S' u \ , \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n \\ S > S' &\iff u^T S u > u^T S' u \ , \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \qquad (1)$$

Puisque la matrice Q est idempotente :

$$Q_{ii} = Q_{ii}^2 + \sum Q_{ij} Q_{ij}^T \implies Q_{ii} \geq Q_{ii}^2 \qquad (2)$$

Il s'ensuit que les valeurs propres de Q_{ii} (à fortiori celles de Q_{ii}^2) sont ≤ 1 (car si s_i est valeur propre de Q_{ii}, avec le vecteur propre unitaire u, $Q_{ii} u = s_i u \implies Q_{ii}^2 u = s_i^2 u$ et $Q_{ii} \geq Q_{ii}^2 \implies s_i \geq s_i^2 \implies s_i \leq 1$).

Etablissons le second point du lemme. On a :

$$\begin{aligned} Q_{ii}(p_i) &= I - \sqrt{p_i} A_i \left(A_i^T p_i A_i + \sum_{j \neq i} A_j^T p_j A_j \right)^{-1} A_i^T \sqrt{p_i} \\ &= I - A_i \left(A_i^T A_i + \sum_{j \neq i} (p_j / p_i) A_j^T A_j \right)^{-1} A_i^T \end{aligned} \qquad (3)$$

Et la classique identité $(S' \geq 0 \ , \ S > 0)$:

$$(S + S')^{-1} = S^{-1} - S^{-1}\sqrt{S'}\,(I + \sqrt{S'}\,S^{-1}\sqrt{S'})^{-1}\sqrt{S'}\,S^{-1} \qquad (4)$$

qui entraîne : $S^{-1} \geq (S + S')^{-1}$ donne lorsqu'on l'applique à :

$$S = A_i^T A_i + \frac{1}{p_i + \Delta p_i} \sum p_j A_j^T A_j \quad \text{et} \quad S' = \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_i + \Delta p_i}\right) \sum p_j A_j^T A_j \qquad (5)$$

avec $\Delta p_i > 0$:

$$Q_{ii}(p_i + \Delta p_i) \leq Q_{ii}(p_i) \qquad (6)$$

Il s'ensuit :

$$\mathrm{Tr}Q_{ii}(p_i + \Delta p_i) \leq \mathrm{Tr}Q_{ii}(p_i) \qquad (7)$$

qui entraîne :

$$\mathrm{Tr}Q_{ii}^2(p_i + \Delta p_i) \leq \mathrm{Tr}Q_{ii}^2(p_i) \qquad (8)$$

(Car S et S' étant symétriques positives :

$$S \geq S' \implies \mathrm{Tr}\ S^2 \geq \mathrm{Tr}\ S'^2;$$

en effet : $S = S' + S'' \implies S^2 = \sqrt{S}\ S'\ \sqrt{S} + \sqrt{S}\ S''\ \sqrt{S} \implies$

$$\mathrm{Tr}\ S^2 \geq \mathrm{Tr}\ \sqrt{S}\ S'\ \sqrt{S} = \mathrm{Tr}\ (\sqrt{S}\ \sqrt{S'})(\sqrt{S}\ \sqrt{S'})^T =$$

$$\mathrm{Tr}(\sqrt{S}\ \sqrt{S'})^T(\sqrt{S}\ \sqrt{S'}) = \mathrm{Tr}\ \sqrt{S'}\ S\ \sqrt{S'} \geq \mathrm{Tr}\ S'^2\ )$$

On établit de même façon que $\mathrm{Tr}\ Q_{ii}$ et $\mathrm{Tr}\ Q_{ii}^2$ sont des fonctions croissantes des p_j $(j \neq i)$.

ANNEXE 2

(Le lemme utilisé dans le § 2.3)

LEMME : $\alpha_{ij}(p_j/p_i)$ **croît (au sens large) quand** p_i **décroît.**

Preuve : Il suffit de l'établir pour $i = 1$; nous savons déjà qu'il est vrai pour $j = 1$ [§ 2.2.C] ; prenons alors $j \neq 1$.

Puisque (§ 2,16) $\alpha_{1j} = \mathrm{Tr}\, Q_{1j}Q_{1j}^T/n_1$, cela revient à démontrer que $\mathrm{Tr}\, Q_{1j}Q_{1j}^T/p_1$ croît au sens large quand p_1 décroît ; on a :

$$u\,(p_1) = \frac{\mathrm{Tr}\, Q_{1j}Q_{1j}^T}{p_1} = \frac{\mathrm{Tr}\, Q_{1j}^T Q_{1j}}{p_1} \qquad (1)$$

soit :

$$u(p_1) = \mathrm{Tr}\, \sqrt{p_j}A_j\,(A_1^T p_1 A_1 + \sum_{l\neq 1} A_l^T p_l A_l)^{-1} A_1^T A_1\,(A_1^T p_1 A_1 + \sum_{l\neq 1} A_l^T p_l A_l)^{-1} A_j^T \sqrt{p_j}$$

que nous écrivons sous la forme :

$$u(p_1) = \mathrm{Tr}\, B\,(p_1 S_1 + S_2)^{-1} S_1 (p_1 S_1 + S_2)^{-1}\, B^T \qquad (2)$$

avec : $S_1 = A_1^T A_1$; $S_2 = \sum_{l\neq 1} A_l^T p_l A_l$; $B = \sqrt{p_j}\, A_j$

Il suffit de montrer que la dérivée de $u(p_1)$ par rapport à p_1 est négative; utilisant l'identité (4) [An. 1], il vient ($\Delta p_1 > 0$) :

$$(p_1 S_1 + S_2 + \Delta p_1 S_1)^{-1} = (p_1 S_1 + S_2)^{-1} - \Delta p_1 (p_1 S_1 + S_2)^{-1} \sqrt{S_1} \,*$$
$$C * \sqrt{S_1}\,(p_1 S_1 + S_2)^{-1} \qquad (3)$$

avec : $C = (I + \Delta p_1 \sqrt{S_1}\,(p_1 S_1 + S_2)^{-1} \sqrt{S_1}\,)^{-1}$

On en déduit : $$u'_{p_1} = \lim_{\Delta p_1 \to 0} \frac{u(p_1 + \Delta p_1) - u(p_1)}{\Delta p_1}$$

$$= -\mathrm{Tr}\, B\,[2(p_1 S_1 + S_2)^{-1} S_1 (p_1 S_1 + S_2)^{-1} S_1 (p_1 S_1 + S_2)^{-1}]\, B^T \qquad (4)$$

qui à l'évidence est négatif ou nul.

ANNEXE 3

(La propriété utilisé au § 2.4.3, formule 47)

Propriété : quand *n* est grand :

$$u^2 \in N\left(m^2, \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow u \tilde{\in} N\left(m, \frac{1}{m}\,\frac{k}{2\sqrt{n}}\right) \qquad (1)$$

Preuve : Par hypothèse : $\dfrac{u^2 - m^2}{k/\sqrt{n}} \in N(0,1)$

mais : $$u^2 - m^2 = (u - m)(u + m) \qquad (2)$$

et si *n* est suffisamment grand, *u* s'écarte peu de *m* puisque la variance de n^2 est $k/\sqrt{n}$; donc :

$$u^2 - m^2 \simeq 2(u - m)m \qquad (3)$$

et : $$\frac{u^2 - m^2}{k/\sqrt{n}} \simeq \frac{u - m}{k/(2m\sqrt{n})} \in N(0,1) \qquad (4)$$

ANNEXE 4

(La démonstration des formules § 4.1.2,5)

$$\rho^2_{1\infty} = \frac{1}{n_1} E\, v^T_{1\infty} v_{1\infty} = \left(1 - \frac{r - r_2}{n_1} \right) \left(\sigma^2_1 + \beta_{12}\sigma^2_2 \right)$$

$$\rho^2_{2\infty} = \frac{1}{n_2} E\, v^T_{2\infty} v_{2\infty} = \left(1 - \frac{r_2}{n_2} \right) \sigma^2_2 \qquad (1)$$

avec : r = rang A ; r_2 = rang A_2

<u>Démonstration</u> . On part des 2 équations :

$$\sqrt{p_1}\, A_1 \dot{x} \mid = \sqrt{p_1}\, l_1 \; ; \qquad l_1 = \dot{l}_1 - e_1$$

$$\sqrt{p_2}\, A_2 \dot{x} \mid = \sqrt{p_2}\, l_2 \; ; \qquad l_2 = \dot{l}_2 - e_2 \qquad (2)$$

qui résolues par moindres carrés donnent $\bar{x}$, et dont les résidus sont :

$$v_1 = A_1 \bar{x} - l_1 \; ; \qquad v_2 = A_2 \bar{x} - l_2 \qquad (3)$$

Faisons tendre p_2 vers $+\infty$; nous avons rappelé qu'alors $\bar{x}$ a une limite [4.1.1,2], qui s'écrit ici (le $\sqrt{p_1}$ scalaire s'élimine) :

$$\lim \bar{x} = [\, A_1 (I - A_2^- A_2) \,]^- (l_1 - A_1 A_2^- l_2) + A_2^- l_2 \qquad (4)$$

Il en est donc de même des résidus v_1 et v_2 (form. 3), dont nous noterons les limites $v_{1\infty}$ et $v_{2\infty}$. On a d'abord (compte-tenu de l'identité * $(I-A_2^-A_2)[A_1(I-A_2^-A_2)]^- = [A_1(I-A_2^-A_2)]^-$) :

$$v_{2\infty} = A_2 \lim \bar{x} - l_2 = - (I - A_2 A_2^-) l_2 = - (I - A_2 A_2^-) e_2 \qquad (5)$$

d'où, par le raisonnement classique :

$$E\ v_{2\infty}^T v_{2\infty} = (n_2 - \text{rang } A_2)\ \sigma_2^2 \tag{6}$$

Ainsi avons nous justifié la formule donnant $\rho_{2\infty}^2$. On a ensuite :

$$v_{1\infty} = A_1 \lim \bar{x} - l_1 \tag{7}$$

$$\sqrt{p_1}\, v_{1\infty} = \sqrt{p_1} A_1 [\sqrt{p_1} A_1 (I - A_2^- A_2)]^- (\sqrt{p_1} l_1 - \sqrt{p_1} A_1 A_2^- l_2) + \sqrt{p_1} A_1 A_2^- l_2 - \sqrt{p_1} l_1$$

ou encore (utilisant la même identité * que plus haut) :

$$\sqrt{p_1}\, v_{1\infty} = -\ [I - \sqrt{p_1} A_1 (I - A_2^- A_2)(\sqrt{p_1} A_1 (I - A_2^- A_2))^-]\ \sqrt{p_1}(l_1 - A_1 A_2^- l_2)$$

Mais pour des mesures sans erreurs, ceci s'écrit :

$$0 = -\ [I - \sqrt{p_1} A_1 (I - A_2^- A_2)(\sqrt{p_1} A_1 (I - A_2^- A_2))^-]\ \sqrt{p_1}(\dot{l}_1 - A_1 A_2^- \dot{l}_2) \tag{8}$$

d'où retranchant membre à membre, et notant que p_1 scalaire n'intervient pas :

$$\boxed{\begin{aligned} -v_{1\infty} &= Q_{11\infty}(e_1 - A_1 A_2^- e_2) \\ \text{avec : } Q_{11} &= I - A_1 (I - A_2^- A_2)(A_1 (I - A_2^- A_2))^- \end{aligned}} \tag{9}$$

La matrice $Q_{11\infty}$ est *symétrique* et *idempotente*.

** **

* Si B est symétrique et idempotente , $B(AB)^- = (AB)^-$ cette propriété est fort utile, et s'établit ainsi :

$\therefore$ $AB\ B(AB)^- AB = AB$ $\Longrightarrow$ $B(AB)^-$ est l'inverse de AB

$\therefore$ $B(AB)^- AB\ B(AB)^- = B(AB)$ $\Longrightarrow$ $B(AB)^-$ est l'inverse réciproque de AB

$\therefore$ $B(AB)^- AB = B(AB)^- (AB) B$ $\Longrightarrow$ B et $(AB)^- AB$ étant symétriques, il en est de même de $B(AB)^- AB$

$\therefore$ $AB\ B(AB)^- = A\ B(AB)^-$ $\Longrightarrow$ $AB\ B(AB)^-$ est symétrique

Noter aussi que la quantité :

$$\boxed{\begin{array}{l} e'_1 = A_1 A_2^- e_2 = A_1 e_{\bar{x}'} \\ \text{avec : } \bar{x}' = A_2^- l_2 \ ; \quad e_{\bar{x}'} = \bar{x}' - E\bar{x}' \end{array}} \qquad (10)$$

représente - si on ne compensait que le groupe 2 - l'écart à leur vecteur-espérance $E\bar{l}_1$, des estimations corrélatives $\bar{l}_1$ des grandeurs du groupe 1 ; par exemple pour un réseau de distances l_2 appuyé sur quelques points l_1 , e'_1 est l'écart à leur vecteur-espérance, des estimations des positions des points résultant de la compensation des seules mesures de distances.

De (9) on déduit par le raisonnement du [§ 2] :

$$\rho^2_{1\infty} = \frac{1}{n_1} \text{ rang } Q_{11\infty}(\sigma_1^2 + \beta_{12}\sigma_2^2) = \left(1 - \frac{\text{rang } A_1 (I - A_2^- A_2)}{n_1}\right)(\sigma_1^2 + \beta_{12}\sigma_2^2) \qquad (11)$$

La formule se simplifie. En effet pour des poids p_1 et p_2 finis on a :

$$\text{Tr}Q = n - \text{rang } A = \text{Tr}Q_{11} + \text{Tr}Q_{22} \qquad (12)$$

avec :

$$\begin{aligned} -\sqrt{p_1}\ v_1 &= Q_{11}\sqrt{p_1}\ e_1 + Q_{12}\sqrt{p_2}\ e_2 \\ -\sqrt{p_2}\ v_2 &= Q_{12}^T\sqrt{p_1}\ e_1 + Q_{22}\sqrt{p_2}\ e_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

faisant tendre p_2 vers $+\infty$, $Q_{11} \longrightarrow Q_{11\infty}$ et $Q_{22} \longrightarrow (I - A_2 A_2^-)$ de rang $(n_2 - \text{rang } A_2)$; de (12) on déduit alors :

$$\text{Tr } Q_{11\infty} = n - \text{rang } A - (n_2 - \text{rang } A_2) = n_1 - (\text{rang } A - \text{rang } A_2) \qquad (14)$$

d'où rapprochant de (10), et quand $r = \text{rang } A$, ce qui est le plus souvent le cas, la formule (1).

ANNEXE 5

(La démonstration des formules § 4.2.B,14)

$$\rho^2_{i\infty} = \alpha_{ii\infty}(\sigma_i^2 + \sum_{j\neq i} \beta_{ij}\sigma_j^2) \quad (i=1,k-1) \; ; \qquad \rho^2_{k\infty} \simeq (1 - \frac{r_k}{n_k})\,\sigma_k^2$$

$$\text{avec :} \quad \alpha_{ii\infty} \in \left[(1 - \frac{r - r'_i}{n_i})^2,\; 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \right] \tag{1}$$

$$\beta_{ij} \leq \frac{1}{1 - \frac{r - r'_i}{n_i}} * \frac{r - r'_i}{n_i} * \frac{p_j}{p_i} \; ; \qquad j \neq i \text{ et } k$$

Démonstration

D'après l'étude faite pour deux groupes, nous savons que :

$$\lim_{p_k \to \infty} \alpha_{kk} = 1 - \frac{r_k}{n_k} \; ; \qquad \lim_{p_k \to \infty} \alpha_{ki} = 0 \tag{2}$$

ou encore, revenant à la définition des α_{ij} (§ 2.2,17 bis) :

$$\lim_{p_k \to \infty} \mathrm{Tr}\, Q_{kk} = n_k \lim \sum \alpha_{ki} = n_k - r_k \tag{3}$$

mais :

$$\mathrm{Tr}\, Q = \sum_i \mathrm{Tr}\, Q_{ii} = n - r \tag{4}$$

d'où :

$$\sum_{i<k} \lim_{p_k \to \infty} \mathrm{Tr}\, Q_{ii} = n - r - (n_k - r_k) = \sum_{i<k} n_i - (r - r_k) \tag{5}$$

mais tenant compte de l'hypothèse de complémentarité [§ 4,13] ,

$$r - r_k = \sum_{i<k} (r - r'_i) \quad : \tag{6}$$

il vient : $$\sum_{i<k} \lim_{p_k \to \infty} \mathrm{Tr}\, Q_{ii} = \sum_{i<k} [n_i - (r - r'_i)] \qquad (7)$$

mais d'après [§ 4,10] : $$\lim \mathrm{Tr}\, Q_{ii} \leq n_i - (r - r'_i) \qquad (8)$$

qui n'est compatible avec la relation précédente que si :

$$\mathrm{Tr}\, Q_{ii\infty} = \lim_{p_k \to \infty} \mathrm{Tr}\, Q_{ii} = n_i - (r - r'_i) \qquad (9)$$

Désignons alors par s_j (≤ 1) les (q_i) valeurs propres non nulles de $Q_{ii\infty}$; le minimum de : $\alpha_{ii\infty} = \mathrm{Tr}\, Q^2_{ii\infty} / n_i = (\sum s_j^2) / n_i$ a nécessairement lieu pour des $s_j = \mathrm{Tr}\, Q_{ii\infty} / q_i$ ($\mathrm{Tr}\, Q_{ii\infty} = \sum_1^{q_i} s_j$) ; donc tenant compte de 9 pour la dernière inégalité :

$$\min \alpha_{ii\infty} = \frac{q_i}{n_i} \left(\frac{\mathrm{Tr}\, Q_{ii\infty}}{q_i}\right)^2 \geq \frac{1}{n_i^2} (\mathrm{Tr} Q_{ii\infty})^2 \geq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)^2 \qquad (10)$$

d'où (nous connaissons déjà la borne droite § 4.2,9) :

$$\left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)^2 \leq \alpha_{ii\infty} \leq 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \qquad (11)$$

On a ensuite ($\sum_j \alpha_{ij\infty} = \mathrm{Tr} Q_{ii\infty} / n_i$) , tenant compte de (9) :

$$\sum_{j \neq i} \alpha_{ij\infty} = \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right) - \alpha_{ii\infty} \leq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right) - \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right)^2$$

$$\leq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right) * \frac{r - r'_i}{n_i} \qquad (12)$$

d'où, pour $j < k$:

$$\beta_{ij} = \frac{\alpha_{ij\infty}}{\alpha_{ii\infty}} * \frac{p_j}{p_i} \leq \frac{p_j}{p_i} * \frac{(r-r'_i)/n_i}{(1 - (r-r'_i)/n_i)} \qquad (13)$$

ANNEXE 6

(La démonstration des formules § 4.2.C,20)

$$\rho^2_{i\infty} = \alpha_{ii\infty}(\sigma^2_i + \sum_{j\neq i} \beta_{ij}\sigma^2_j) \simeq (1 - \frac{r - r'_i}{n_i})(\sigma^2_i + \beta_{ik}\sigma^2_k) \qquad (i=1,k-1)$$

$$\rho^2_{k\infty} \simeq (1 - \frac{r_k}{n_k})\ \sigma^2_k \qquad (1)$$

$$\text{avec :} \quad \alpha_{ii\infty} \in \left[(1 - \frac{r - r_k}{n_i})^2,\ 1 - \frac{r - r'_i}{n_i} \right]$$

$$\beta_{ij} \leq 2 * \frac{p_j}{p_i} * \frac{(r - r_k)/n_i}{((n_i - (r - r_k))/n_i)^2}; \qquad j \neq i \text{ et } k$$

Démonstration

Elle est analogue à celle faite en [Annexe 5]. On a d'abord :

$$\alpha_{kk\infty} = 1 - (r_k / n_k)\ ; \quad \alpha_{ki\infty} = 0\ ; \quad \mathrm{Tr}\ Q_{kk\infty} = n_k - r_k\ ; \qquad (2)$$

puis :

$$\sum_{i<k} \mathrm{Tr}\ Q_{ii\infty} = (n - r) - (n_k - r_k) = \sum_{i<k} n_i - (r - r_k) \qquad (3)$$

qui implique pour $i < k$; compte-tenu de l'hypothèse (§ 4,19) :

$$\mathrm{Tr}\ Q_{ii\infty} \geq n_i - (r - r_k) \geq 0 \qquad (4)$$

(sinon, si par exemple on avait $\mathrm{Tr}\ Q_{11\infty} < n_1 - (r - r_k)$, il viendrait, puisque $\mathrm{Tr}\ Q_{ii\infty} < n_i$ et puisque les valeurs propres de $Q_{ii\infty}$ sont inférieurs à 1, $\sum_{i<k} \mathrm{Tr}\ Q_{ii\infty} < \sum_{i<k} n_i - (r - r_k)$ ce qui contredirait 3)

Ainsi ; pour $i < k$: $n_i - (r - r_k) \leq \mathrm{Tr}\, Q_{i i \infty} \leq n_i - (r - r'_i)$

On en déduit, comme en [Annexe 5,10] que :

$$\alpha_{i i \infty} \geq \left(1 - \frac{r - r_k}{n_i}\right)^2 \tag{5}$$

d'où la deuxième borne étant déjà connue, l'encadrement de $\alpha_{i i \infty}$
Puis :

$$\sum_{j \neq i} \alpha_{i j \infty} \leq \frac{n_i - (r - r'_i)}{n_i} - \alpha_{i i \infty} \leq \left(1 - \frac{r - r'_i}{n_i}\right) - \left(1 - \frac{r - r_k}{n_i}\right)^2$$

$$\leq \frac{(r - r_k) + (r'_i - r_k)}{n_i} \leq 2\, \frac{r - r_k}{n_i} \tag{6}$$

D'où le majorant de $\beta_{i j}$.

ANNEXE 7

Une propriété des matrices symétriques idempotentes.

(Propriété utilisé dans le § 7)

Théorème :

Si $\underset{n\,n}{(Q)}$ est une matrice symétrique et idempotente ($Q^2 = Q$) de rang (q), et $\underset{n_1 n_1}{Q_{11}}, \underset{n_1 n_2}{Q_{12}}, \underset{n_2 n_1}{Q_{12}^T}, \underset{n_2 n_2}{Q_{22}}$ une partition quelconque de (Q) en 4 sous-matrices :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} \; ; \quad \text{rang } Q = q \qquad (1)$$

on a :

$$|Q_{11}|\,|Q_{22}| - |Q_{12}|^2 \geq 0 \qquad (2)$$

(avec $|M|^2 = \mathrm{Tr}\, M^2$), la nullité ayant lieu dans et seulement les deux cas suivants :

∴ a. $\quad \text{rang } Q_{11} = \text{rang } Q_{22} = q \qquad (3)$

[les valeurs propres de (Q_{11}) sont alors toutes égales à ($S_1>0$), celles de (Q_{22}) toutes égales à ($S_2>0$), avec ($S_1 + S_2 = 1$)]

∴ b. $\quad \text{rang } Q_{11} = 0 \;.\; \text{rang } Q_{22} = q$ **(ou l'inverse)** $\qquad (4)$

[Q_{22} est alors idempotente]

<u>Démonstration</u> .

Nous posons : $\quad \text{rang } Q_{11} = q_1 ; \quad \text{rang } Q_{22} = q_2$

Q symétrique et idempotente a toutes ses valeurs propres comprises entre (0 et 1); elle est donc définie ou semi-définie positive.

Il en est donc de même pour Q_{11} et Q_{22} : leurs valeurs propres $(s_{i1};\ i = 1,q_1)$ et $(s_{i2};\ i = 1,q_2)$ sont positives ou nulles; elles sont d'autre part inférieures à 1: c'est une conséquence immédiate des deux relations suivantes :

$$Q_{11} = Q_{11}^2 + Q_{12}Q_{12}^T \quad ; \qquad Q_{22} = Q_{22}^2 + Q_{12}^T Q_{12} \tag{5}$$

qui dérivent elles mêmes de l'idempotence de (Q) .

Outre ces deux relations, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ Q_{12}Q_{12}^T &= \mathrm{Tr}\ Q_{11} - \mathrm{Tr}\ Q_{11}^2 = \sum_1^{q_1} s_{i1} - \sum_1^{q_1} s_{i1}^2 \\ \mathrm{Tr}\ Q_{12}^T Q_{12} &= \mathrm{Tr}\ Q_{22} - \mathrm{Tr}\ Q_{22}^2 = \sum_1^{q_2} s_{i2} - \sum_1^{q_2} s_{i2}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

et donc :

$$\sum_1^{q_1} s_{i1} - \sum_1^{q_1} s_{i1}^2 = \sum_1^{q_2} s_{i2} - \sum_1^{q_2} s_{i2}^2 \tag{7}$$

Par ailleurs de $\mathrm{Tr}\ Q = q$ (puisque Q est idempotente) on déduit :

$$\sum_1^{q_1} s_{i1} + \sum_1^{q_2} s_{i2} = q \tag{8}$$

Ceci étant, posons :

$$U = |Q_{11}|^2 |Q_{22}|^2 - |Q_{12}|^4 = \mathrm{Tr}\ Q_{11}^2 * \mathrm{Tr}\ Q_{22}^2 - \mathrm{Tr}\ (Q_{12}Q_{12}^T)^2 \tag{9}$$

soit :

$$\begin{aligned} U &= \sum_1^{q_1} s_{i1}^2 \sum_1^{q_2} s_{i2}^2 - \left(\sum_1^{q_1} s_{i1} - \sum_1^{q_1} s_{i1}^2\right)\left(\sum_1^{q_2} s_{i2} - \sum_1^{q_2} s_{i2}^2\right) \\ &= \sum_1^{q_1} s_{i1}^2 \sum_1^{q_2} s_{i2} + \sum_1^{q_1} s_{i1} \sum_1^{q_2} s_{i2}^2 - \sum_1^{q_1} s_{i1} \sum_1^{q_2} s_{i2} \end{aligned} \tag{10}$$

Nous pouvons encore transformer (10); de (8) et (7) :

$$\sum s_{i2} = q - \sum s_{i1} \; ; \quad \sum s_{i2}^2 = q - 2 \sum s_{i1} + \sum s_{i1}^2 \tag{11}$$

d'où, reportant dans (10) :

$$U = q \sum_1^{q_1} s_{i1}^2 - (\sum_1^{q_1} s_{i1})^2 \tag{12}$$

et comme on aurait pu aussi bien exprimer les (s_{i1}) en fonction des (s_{i2}) :

$$U = q \sum_1^{q_1} s_{i1}^2 - (\sum_1^{q_1} s_{i1})^2 = q \sum_1^{q_2} s_{i2}^2 - (\sum_1^{q_2} s_{i2})^2 \tag{13}$$

Ceci étant nous distinguons deux cas :

** Premier cas : $q = 1$ **

Alors (on a évidemment $q \leq q_1 + q_2$) :

$$q_1 \leq 1 \leq q_1 + q_2 \; ; \qquad q_2 \leq 1 \leq q_1 + q_2 \tag{14}$$

Si $q_1 = 0$ (alors $q_2 = 1$), ou si $q_2 = 0$ (alors $q_1 = 1$) on vérifie sur (10) que $U = 0$

Si $q_1 = q_2 = 1$, on a encore (13) : $U = 0$, et évidemment (8) :

$$s_1 + s_2 > 0$$

** Deuxième cas : $q > 1$ **

Alors sommant les 2 expressions de U données par (13) et développant les carrés :

$$2U = (q-1)\left[\sum_1^{q_1} s_{i1}^2 + \sum_1^{q_2} s_{i2}^2\right] - 2\sum_{j\neq k} s_{j1}s_{k1} - 2\sum_{j\neq k} s_{j2}s_{k2} \geq$$

$$\left(\sum_1^{q_1} s_{i1}\right)^2 + \left(\sum_1^{q_2} s_{i2}\right)^2 \geq 0 \qquad (15)$$

Ainsi U est bien positif ou nul.

Il en résulte que : $U = q\sum_1^{q_1} s_{i1}^2 + \left(\sum_1^{q_1} s_{i1}\right)^2$ est une forme quadratique positive, dont le minimum est défini par :

$$\frac{\partial U}{\partial s_{i1}} = 2\,q\,s_{i1} - 2\sum s_{i1} = 0\ ; \qquad i = 1, q_1 \qquad (16)$$

Ce qui implique que tous les s_{i1} sont égaux à s_1; on démontre de même qu'alors tous les s_{i2} sont égaux à s_2 .

On a donc (13) :

$$\min U = q\,q_1 s_1^2 - q_1^2 s_1^2 = q_1 s_1^2 (q - q_1) \geq 0$$
$$\min U = q\,q_2 s_2^2 - q_2^2 s_2^2 = q_2 s_2^2 (q - q_2) \geq 0 \qquad (17)$$

et la valeur 0 ne peut être atteinte que :

* pour $q_1 = 0$ (ou $s_1 = 0 \Longrightarrow q_1 = 0$) et $q_2 = q$, ou

  pour $q_2 = 0$ et $q_1 = q$

* pour $q = q_1 = q_2$; mais alors, d'après (8) ,

  $s_1 + s_2 = 1$ et évidemment (s_1) et (s_2) sont positifs.

PARTIE 2

Evaluation de l'exactitude obtenue en aérotriangulation analytique.

EVALUATION DE L'EXACTITUDE OBTENUE EN AEROTRIANGULATION ANALYTIQUE

Introduction

Dans la partie I nous avons vu comment estimer l'emq des différents types d'observations compensées ; nous nous posons à présent le problème de l'estimation de l'exactitude des coordonnées des points obtenues après compensation.

Le problème est beaucoup plus simple que le précédent d'un point de vue théorique ; mais il est délicat en pratique du fait des raisons suivantes :

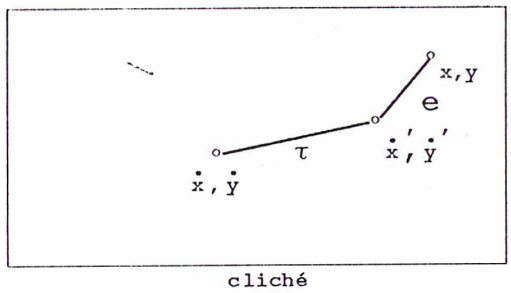
- on ne peut utiliser les formules théoriques que s'il n'y a pas de systématismes résiduels, ou ce qui revient au même si on est certain qu'ils sont non significatifs (ce problème sera examiné en partie III.

- la formule qui donne les variances des coordonnées $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ existe ; mais pratiquement, à cause de la grande taille de la matrice normale, elle est inutilisable; des méthodes (thèse de Basmaji -1989-) ont été proposées, mais qui sont compliquées, pour éviter le calcul de l'inverse de cette matrice.

Nous verrons que la difficulté s'évanouit si on se borne à évaluer l'emq *moyenne* des coordonnées : il existe un procédé *peu coûteux et précis*.

- la présence d'une *erreur de transfert* (dit aussi *d'identification*, mais la première dénomination est plus générale) indubitable lorsqu'on met en présence des mesures issues de procédés aussi différents que géodésie (mesures terrain) et photogrammétrie.

Cette erreur (τ) se manifeste de la façon suivante :



(x, y) mesures-cliché

$\dot{x}' = Ex \qquad \dot{y}' = Ey$

$(\dot{x}, \dot{y})$ coord. vraies

Fig 1. erreur de transfert τ : le point vu par l'opérateur sur cliché $(\dot{x}', \dot{y}')$ n'est pas le point vu sur le terrain $(\dot{x}, \dot{y})$

Appelons $\dot{x}, \dot{y}$ les coordonnées-cliché exactes d'un point-image :

alors il y a un décalage τ (composantes τ_x, τ_y) entre $\dot{x}, \dot{y}$ et les espérances Ex et Ey des mesures-cliché x,y du point ; autrement dit :

$$\dot{x} = Ex - e_x = x - \tau_x - e_x$$
$$\dot{y} = Ey - e_y = y - \tau_y - e_y \qquad (1)$$

avec : $Ee_x = Ee_y = 0$

Ce décalage τ *varie aléatoirement* avec le point (les moyennes de ses composantes sur un grand nombre de point sont nulle) ; ce n'est *pas un systématisme;* il est dû au fait que *l'appréciation de ce qu'est la valeur nominale d'un point varie* (pouvoir séparateur, ombres, texture...) *selon le processus de mesure ;* c'est *l'erreur de transfert.*

La méthode développée en partie I donne pour les différentes catégories d'observation *l'écart-type de l'erreur somme de l'erreur de transfert* (τ) *et de l'erreur de détermination terrain* (e).

En effet, si nous posons l'existence de deux valeurs nominales l'une $\dot{x}$ pour les grandeurs déterminées par géodésie, l'autre $\dot{x}'$ pour les mêmes grandeurs déterminées par photogrammétrie, on aura pour l'ensemble des équations d'observations-cliché :

$$A\,\dot{x}' = l - e \qquad (Ee = 0) \qquad (2)$$

et si $\dot{x}_i$ est la valeur nominale (géodésique) correspondant à la mesure (géodésique) x :

$$\dot{x}_i = x_i - e_i \iff \dot{x}'_i = x_i - \tau_i - e_i \qquad (3)$$

où τ_i est l'erreur de transfert (supposée aléatoire avec le point-image considéré) ; et c'est l'écart-type de $(e_i + \tau_i)$ qui sera estimé par la méthode de la partie I.

Comme l'erreur de détermination-terrain (voir ci-dessous est probablement toujours faible en pratique, par rapport à l'erreur de transfert, il faut en conclure que c'est l'écart-type de l'erreur de transfert qui est estimé en partie I.

■ *l'erreur de détermination-terrain* est elle même plus complexe qu'on ne le pense : elle ne se réduit à *l'erreur de triangulation* que si le point est *balisé* (cible) ; sinon elle est somme de l'erreur de triangulation et d'une *erreur de localisation* (centre d'un carrefour ?, buisson ? ...) *aléatoire avec l'opérateur-terrain;*

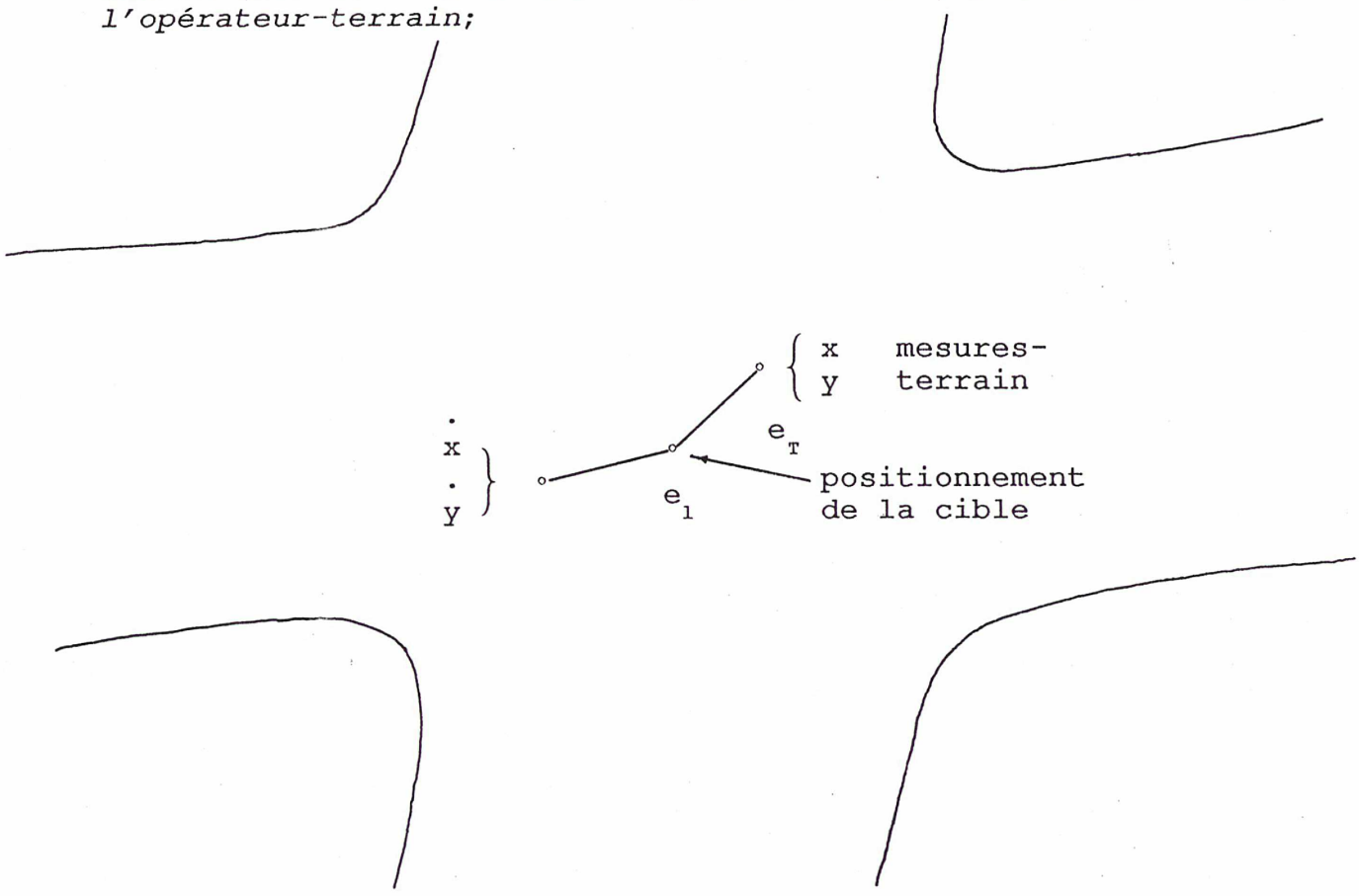


Fig 2. erreur de localisation sur le terrain d'un détail mal défini (ici centre d'un carrefour) ; l'erreur des mesures terrain est la somme de l'erreur de triangulation e_T *(généralement faible) et de l'erreur de localisation* e_1 (30, 40 *cm au* 1/30000 ?).

Cette erreur de localisation n'a malheureusement pas fait l'objet d'études ; il se pourrait comme certains résultats le laissent penser [§ 2.2.3 de cette partie] qu'elle soit assez importante (30 ÷ 40 cm au 1/30000 ?), mais *probablement* (?) négligeable (c'est à dire moitié moindre) que l'erreur de transfert.

* 1 * Méthodes habituelles pour l'estimation de l'exactitude obtenue en aérotriangulation analytique.

Problème délicat. Passons d'abord en revue quelques façons de faire.

1.1 **Résidus moyens quadratiques aux appuis.** (coordonnées connues actives dans les calculs)

Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées terrain d'un appui, et $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ les coordonnées compensées, on définit ces quantités par :

$$rmq_x = \sqrt{\Sigma\ (\bar{x}_i - x_i)^2 / n}\ ; \qquad rmq_y,\ rmq_z \quad \text{analogues} \tag{4}$$

Ce critère est très dangereux. Il est très sensible au poids ; des poids forts conduisent à des résidus faibles.

1.2 **Ecart-moyen quadratique à un échantillon de (*n*) points de contrôles** (dit aussi de *vérification*), supposés exactement connus et *inactifs dans les calculs.*

Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées terrain et $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ les coordonnées compensées, on définit comme en (4) :

$$\rho_x = \sqrt{\Sigma\ (\bar{x}_i - x_i)^2 / n}\ ; \qquad \rho_y,\ \rho_z \quad \text{analogues} \tag{5}$$

La précision relative de ces quantités est de l'ordre de $1/\sqrt{2n}$ (22 % pour n = 10 ; 10 % pour n = 50 ; 7 % pour n = 100).

On multiplie souvent ces chiffres par l'echelle E cliché et on les exprime en μm ; on les rapporte souvent enfin au facteur d'écart-type (σ'_0) ; autrement dit on écrit :

$$E * \rho_x = \Omega_x\ \sigma'_0\ ; \quad E * \rho_y = \Omega_y\ \sigma'_0\ ; \quad E * \rho_z = \Omega_z\ \sigma'_0 \tag{6}$$

Les nombres sans dimension $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, si toutes les hypohtèses stochactiques sont respectées ne dépendent que de la configuration du bloc.

A propos de ce critère, on remarquera qu'il fournit une estimation *pessimiste* de l'exactitude obtenue, car on choisit les points de vérification *assez loin des appuis, donc aux lieux où la précision est la plus médiocre.*

1.3 Les estimateurs précédents peuvent en principe sous-estimer considérablement (§2.1.2) l'exactitude de l'aérotriangulation quand l'exactitude des points de contrôle n'est plus infinie, donc quand les points de contrôle sont eux-mêmes entachés d'incertitude.

Il convient en principe de leurs substituer :

$$\rho_x = \sqrt{\Sigma(\bar{x}_i - x_i)^2 / n - \sigma_x^2} \; ; \quad \rho_y \; , \quad \rho_z \quad \text{analogues} \tag{7}$$

où $(\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2)$ sont les emq de détermination *terrain* (erreur de triangulation + erreur de localisation) des points de contrôle : *malheureusement nul ne sait* (sauf pour des points balisés, auquel cas l'emq terrain est celle du procédé de triangulation) *quelle peut en être la valeur* (introduction) ; (le procédé développé en partie I ne permet pas d'évaluer que l'écart-type de la somme de l'erreur terrain et de l'erreur de transfert).

En effet, si $(\dot{x}_i)$ est la valeur vraie, on a par définition pour *n* suffisamment grand :

$$emq_x^2 \simeq \sum (\bar{x}_i - \dot{x}_i)^2 / n \tag{8}$$

soit, posant : $$e_i = x_i - \dot{x}_i \tag{9}$$

$$emq_x^2 = \frac{1}{n}\sum(\bar{x}_i - x_i + e_i)^2 = \frac{1}{n}\sum(\bar{x}_i - x_i)^2 + \frac{2}{n}\sum(\bar{x}_i - \dot{x}_i - e_i)e_i$$
$$+ \frac{1}{n}\sum e_i^2 = \frac{1}{n}\sum(\bar{x}_i - x_i)^2 + \frac{2}{n}\sum(\bar{x}_i - \dot{x}_i)\, e_i - \frac{1}{n}\sum e_i^2 \tag{10}$$

Le terme central peut être négligé puisque les erreurs terrain (e_i) et les erreurs photogrammétriques $(\bar{x}_i - \dot{x}_i)$ sont indépendantes (i est de contrôle) ; le dernier terme vaut en moyenne σ_x^2 ; d'où (7).

Dans le pratique, cependant, il est probable que dans la majorité des cas, les emq de détermination-terrain sont faibles par rapport aux autres causes d'erreurs, et donc que le cas de sous-estimation de l'exactitude lorsqu'on emploie les formules (5) sont rares.

1.4 Pseudo-écart moyen quadratique aux appuis.

A l'IGN, un fois déterminées les inconnues de faisceaux, on met ces derniers en place et on calcule les inconnues des points, sans tenir compte des appuis, c'est à dire uniquement à partir des observations cliché.

On utilise alors les estimateurs :

$$\rho_x = \sqrt{\Sigma(\bar{x}_i - x_i)^2 / n} \; ; \quad \rho_y \; , \quad \rho_z \quad \text{analogues} \qquad (11)$$

calculés aux appuis pour estimer l'exactitude.

Il est évident qu'on obtient une estimation plus 'réaliste' que celle fournie par le résidu moyen quadratique *appui* dans une compensation normale.

En tout cas pour des appuis exactement connus.

Pour des appuis entachés d'incertitude, il conviendrait comme en (7) de soustraire (σ_x^2) sous le radical (σ_x^2 ayant le même sens que plus haut), quantité malheureusement mal connue.

Nul ne connaît en outre la valeur réelle de l'estimateur (11) : est-il sans biais? Il faudrit s'en assurer. Enfin la méthode viole - sans doute sans importance pratique dans certaines situations, mais est-ce vraie dans toutes ? - le principe fondamental de la compensation.

1.5 Application des formules de la théorie des moindres carrés.

Nous avons vu qu'en aérotriangulation analytique l'usage de ces formules entrainait de graves difficultés. Signalons en une autre, qu'on rencontre fréquemment dans les problèmes de petites tailles : *quand la redondance des observations* (rapport n/r de nombre d'observations au nombre d'inconnues) est *très grande*, l'emploi de ces formules conduit à une surestimation de l'exactitude ; ce danger n'est pas à craindre en aérotriangulation, car ce rapport excède rarement 2.

* 2 * Une méthode simple pour l'estimation de l'exactitude moyenne des coordonnées.

L'emploi correct de la méthode que nous allons décrire suppose essentiellement deux conditions :

∴ systématisme résiduel non significatif (partie III)

∴ estimation correcte des emq de différentes catégories de mesures : *par la méthode développée en partie* I (l'erreur de transfert, celle de localisation et celle de procédé de triangulation sont donc toutes trois prises en compte).

Elle consiste à estimer **l'exactitude moyenne** de chaque type de coordonnée ; considérons ainsi les coordonnées en (x); si $(\bar{x}_i)$ est l'estimation de (x_i), $(\sigma^2_{xi} \longrightarrow$ la variance de $\bar{x}_i)$, l'exactitude moyenne pour (*n*) points est, *en l'absence d'erreur de transfert* :

$$\sigma_x = \sqrt{\sum \sigma^2_{xi} \;/\; n} \qquad (12)$$

2.1 Principe

* On fait simplement *deux compensations*, (la méthode est donc peu coûteuse en calcul) en rajoutant au 2e membre de chaque groupe d'observation un vecteur-erreur centrée (e_1) d'écart-type $\lambda\sigma$ (l'écart-type de chaque catégorie de mesure est multiplié par un nombre $\lambda > 4 \div 5$); d'où pour les inconnues de points les estimations $(\bar{x}_1)$, puis un vecteur-erreur centrée (e_2) de même écart-type $\lambda\sigma$ (on change seulement l'échantillon); soit $(\bar{x}_2)$ les estimations.

* Si $\bar{x}_{i1}$ et $\bar{x}_{i2}$ sont les estimations correspondantes pour la coordonnée (x_i), une estimation sans biais de (σ^2_{xi}) est :

$$\tilde{\sigma}^2_{xi} = \frac{1}{2-1}\left[\left(\bar{x}_{i1} - \frac{\bar{x}_{i1}+\bar{x}_{i2}}{2}\right)^2 + \left(\bar{x}_{i2} - \frac{\bar{x}_{i1}+\bar{x}_{i2}}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\lambda^2}$$

soit :

$$\tilde{\sigma}^2_{xi} = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2}\right)^2 \qquad (13)$$

d'où pour ($\sigma_{\bar{x}}$) l'estimation :

$$\boxed{\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2n}\sum(\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2})^2}} \qquad (14)$$

On pourrait naturellement de la même façon calculer l'exactitude moyenne pour divers type de points (points de couples, points sur 3 clichés ... etc.).

L'avantage de ce type d'estimation est qu'elle *porte sur l'ensemble des points;* elle est donc en principe plus objective qu'une estimation de l'emq sur des points de contrôle (qui élimine les appuis et les points proches de ceux-ci) et évidemment elle est bien plus précise (l'échantillon de contrôle est généralement fort réduit).

Mais il y a un mais : il s'agit d'une précision qui ne se confond avec l'exactitude qu'en cas *d'erreurs de mesures centrées. Il faut donc pour qu'on puisse l'employer que d'une part le systématisme ait été résorbé* (Partie III), *d'autre part que l'erreur de transfert* (introduction) *soit nulle.*

Nous supposons ici la première condition remplie.

Par contre l'erreur de transfert, en tout cas quand on détermine les coordonnées de *détails naturels* (immense majorité des situations), existe toujours et il faut en tenir compte.

Nous avons vu dans ce cas (formules 2 et 3) que les coordonnées qui sont estimées dans la compensation, sont les coordonnées nominales $\dot{x}'$ du *système photogrammétrique;* et dans la formule 14 , $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ mesure la fluctuation de $\bar{x}$ autour de $\dot{x}'$ et non autour de $\dot{x}$ (coordonnées nominales du système (terrain+opérateur de triangulation); la différence entre $\dot{x}'$ et $\dot{x}$ est justement l'erreur de transfert, d'écart-type $\sigma_{\tau_{xy}}$ en x ou y, σ_{τ_z} en z, qu'il faut sommer avec la précédente. On sera donc conduit à estimer l'exactitude par :

$$\boxed{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}' = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\tau_{xy}}^2} \; ; \; \tilde{\sigma}_{\bar{y}}' \text{ analogue } ; \; \tilde{\sigma}_{\bar{z}}' = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\bar{z}}^2 + \sigma_{\tau_z}^2}} \qquad (14 \text{ bis})$$

$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{z}}$ calculées par (14)

quant à $\sigma_{\tau_{xy}}$ et σ_{τ_z} on pourra les confondre pratiquement (car l'erreur de détermination-terrain est probablement toujours faible c'est à dire au moins moitié moindre que l'erreur de transfert) avec les écarts-type σ_x ,σ_y ,σ_z des données terrain, évalués selon la méthode développée en partie I.

Ainsi, on voit que l'évaluation correcte de l'exactitude suppose réunies trois conditions :

- **systématisme résiduel négligeable (partie III)**
- **détermination des écarts-type des données-terrain par la méthode développée en partie I (assimilés à ceux des erreurs de transfert)**
- **emploi de la méthode qui vient d'être définie (14 et 14 bis)**

Aucun point de contrôle n'est alors nécessaire : toutes les données terrain peuvent être engagées dans les calculs.

2.2 Validation de la méthode.

La validation statistique a été faite sur des bloc fictifs. On a comparé :

- les estimations $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$,$\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$,$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ de $\sigma_{\bar{x}}$,$\sigma_{\bar{y}}$,$\sigma_{\bar{z}}$ par la méthode précédente
- aux estimations directes $\rho_{\bar{x}}$,$\rho_{\bar{y}}$,$\rho_{\bar{z}}$ de même quantités ($\rho^2_{\bar{x}} = \sum(\bar{x} - x)^2 / n$ ...), qu'il est possible de calculer ici puisqu'on connaît, (il s'agit des blocs fictifs) les valeurs nominales, (comme il y a deux compensations, on a pris : $\rho^2_{\bar{x}} = \frac{1}{2} (\rho^2_{1\bar{x}} + \rho^2_{2\bar{x}})$).

2.2.1 **Résultats.**

Bloc FR0514-1

emq-plani. = 0.6 m ; 15 points d'appui plani.

emq-altim. = 0.6 m ; 23 points d'appui altim.

emq-cliché = 6 μm ; 406 nr. de points d'aérotriang.

Les résultats sont moyennes de 8 estimations par 2 compensations.

l	$\rho = \sqrt{\Sigma vv / 406}$		$\rho = \sqrt{\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(l_{i1} - l_{i2})^2}{2 * 406}}$
	Comp. 1	Comp. 2		
X	0.274 m	0.272 m	$\rho_{\bar{x}}$ = 0.273 m	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ = 0.249 m
Y	0.346 m	0.328 m	$\rho_{\bar{y}}$ = 0.337 m	$\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$ = 0.341 m
Z	0.541 m	0.551 m	$\rho_{\bar{z}}$ = 0.546 m	$\tilde{\sigma}_{\bar{z}}$ = 0.538 m

Tableau 2.1 *Estimation de l'exactitude pour le bloc fictif* FR0514-1 (*points de contrôle* ***parfaits***)

On constate la parfaite concordance.

Naturellement la méthode que nous proposons est bien plus précise en général que la méthode des résidus moyens quadratiques, parce qu'elle porte *sur l'ensemble des points*.

De plus elle ne nécessite aucun point de contrôle.

Enfin elle est plus objective: il s'agit de l'exactitude moyenne de **tous** les points (pas seulement ceux qui sont loin des appui, là où il y a des bosses donc ...), et on tient compte d'une juste évaluation des écart-type de chaque catégorie de mesure (Partie I)

Remarque :

La précision de $\sigma_{\bar{x}}$, $\sigma_{\bar{y}}$, $\sigma_{\bar{z}}$ est difficile à chiffrer théoriquement; les essais qui suivent montrent qu'on ne peut considérer les erreurs comme indépendantes :

Exemple : Bloc fictif FR0514-1 (bruit de données-terrain : $\sigma_{plani} = \sigma_{alti} = 0.6$ m ; bruit de données-cliché $\sigma_{cli} = 8$ μm ; poids calculés en conséquences ; 15 appuis plani. , 23 appuis alti.)

Les résultats de 8 essais sont (chaque essai correspond à 2 compensations, et à l'appliquation de la formule 14) :

Nombre d'essai	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$	$\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$	$\tilde{\sigma}_{\bar{z}}$
1	0.21 m	0.35 m	0.72 m
2	0.39	0.52	0.69
3	0.33	0.30	0.67
4	0.26	0.40	0.60
5	0.28	0.46	0.66
6	0.36	0.41	0.61
7	0.30	0.39	0.62
8	0.30	0.35	0.71
Moyenne quadratique	0.30 m	0.40 m	0.66 m

Tableau 2.2

On trouve comme écart-type de $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{z}}$:

$$\sigma_{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}} = 0.094 \text{ m} \; ; \quad \sigma_{\tilde{\sigma}_{\bar{y}}} = 0.070 \text{ m} \; ; \quad \sigma_{\tilde{\sigma}_{\bar{z}}} = 0.050 \text{ m}$$

alors que si on considérait les erreurs comme indépendantes, on aurait $\sigma_{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}} \simeq 1/\sqrt{2n}\ \tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ (n=406), de l'ordre de 0.01 m ...

De plus, nous avons vérifié que les précisions des estimations $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{z}}$ diminuaient quand on appauvrit le canevas d'appui (dans un facteur 2 quand on diminue de moitié le nombre des appuis.

Il convient donc, surtout en ce cas de réitérer un nombre suffisant de fois, pour avoir dans ce cas une estimation valable des quantités $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{z}}$.

2.2.2 Simulation du cas où les points de contrôle sont entachés d'incertitude.

Nous avons dit [§1.3,7] que si on estimait l'exactitude sur des points de contrôle entachés d'incertitude on pouvait la sous-estimer gravement.

Ceci est très facile à simuler : on a pris le même bloc fictif qu'au [§ 2.2.1] ; mais au lieu de prendre des points de contrôle sans erreur, on les a *bruités ici de la même façon que les appuis* (0.6 m en X,Y et Z) : autrement dit on simule ici *une erreur de localisation* (§ Introduction).

Avec 13 points de contrôle en planimètrie

142 '' '' altimètrie

on a obtenu :

l	$\rho = \sqrt{\Sigma vv / n}$		$\rho = \sqrt{\dfrac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum(l_{i1} - l_{i2})^2}{2 * 406}}$
	Comp. 1	Comp. 2		
X	0.673 m	0.731 m	$\rho_{\bar{x}} = 0.703$ m	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 0.249$ m
Y	0.610 m	0.650 m	$\rho_{\bar{y}} = 0.633$ m	$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} = 0.341$ m
Z	0.825 m	0.855 m	$\rho_{\bar{z}} = 0.840$ m	$\tilde{\sigma}_{\bar{z}} = 0.538$ m

Tableau 2.3 *Estimation de l'exactitude pour le bloc fictif* FR0514-1 *(points de contrôle bruités)*

La différence est effectivement importante.

On vérifie qu'on a très sensiblement :

$$\sqrt{\rho_{\bar{x}}^2 - \tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2} \simeq \sigma_x = 0.6 \text{ m} \; ; \qquad Y, Z \quad \text{analogues}$$

Rappelons que σ_x, σ_y, σ_z sont ici les écarts-type des erreur-déterminations terrain (erreur de procédé de triangulation + erreur de localisation).

On sous-estime *fortement* l'exactitude moyenne obtenue, en employant (outre ses autres inconvénients) l'indicateur ρ ; ceci semble bien confirmé (en planimétrie en tout cas) sur les blocs réels [§ 2.2.3].

2.2.3 **Blocs réels.**

Sur les blocs réels, il semble qu'on ait, en tout cas lorsque les points sont des *détails naturels*, (et à l'imprécision statistique près des estimations de $\rho_{\bar{x}}$ et $\sigma_{\bar{x}}$) :

$$\rho_{\bar{x}} > \sigma_{\bar{x}} \; ; \quad \rho_{\bar{y}} > \sigma_{\bar{y}} \quad \text{et} \quad \rho_{\bar{z}} > \sigma_{\bar{z}} \quad \text{ou} \quad \rho_{\bar{z}} \simeq \sigma_{\bar{z}} \tag{15}$$

Comme la méthode [§ 2.1] est sûre d'un point de vue purement mathématiques, et comme sur les exemples étudiés il ne semble pas y avoir de systématisme résiduel significatif, il faudrait donc en conclure :

- qu'en planimétrie *l'erreur de transfert* est importante (plus en général qu'en altimétrie)
- **qu'il convient d'évaluer l'exactitude par la formule 14bis : ce point s'est trouvé solidement confirmé dans tous les cas de bloc réel (4 en tout) où nous avons tenté la vérification.**

Exemples :

A. Chantier de Lunel (avec mesures aéroportées : FR0544)

Rappelons [§6.3 Partie I] qu'on a trouvé pour ce bloc les estimations suivantes pour les écarts-type des différentes catégories d'observations :

$$\sigma_{pla.} = 0.605 \text{ m}$$

$$\sigma_{alt.} = 0.453 \text{ m}$$

$$\sigma_{cli.} = 6.17 \ \mu\text{m}$$

$$\sigma_{GPS.} = 0.619 \text{ m}$$

$$\sigma_{STA.} = 0.302\text{E-}03 \text{ mbars}$$

Avec 21 appuis planimétriques, 41 appuis altimétriques, 66 points GPS, et 55 points Statoscopes, on trouve comme estimation de l'exactitude moyenne :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 0.22 \text{ m} \; ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{y}} = 0.24 \text{ m} \; ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{z}} = 0.39 \text{ m} \tag{16}$$

Or lorsqu'on estime l'exactitude moyenne sur des points de contrôle (27 en planimétrie et 148 en altimétrie) on trouve les chiffres suivants :

$$\rho_{\bar{x}} = 0.75 \text{ m} \; ; \qquad \rho_{\bar{y}} = 0.71 \text{ m} \; ; \qquad \rho_{\bar{z}} = 0.57 \text{ m} \tag{17}$$

Et :

$$\rho_{\overline{x,y}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\rho_{\bar{x}}^2 + \rho_{\bar{y}}^2\right)} = 0.73 \text{ m} > \tilde{\sigma}_{\overline{x,y}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2 + \tilde{\sigma}_{\bar{y}}^2\right)} = 0.23 \text{ m}$$

$$\rho_{\bar{z}} > \tilde{\sigma}_{\bar{z}} \tag{18}$$

- en planimétrie, au moins, la différence est très significative ; or employant la formule (14 bis) , et assimilant $\sigma_{\tau_{xy}}$ à $\sigma_{pla} = 0.605$ m , on trouve :

$$\tilde{\sigma}'_{\overline{x,y}} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\overline{x,y}}^2 + \sigma_{\tau_{xy}}^2} = \sqrt{0.23^2 + 0.60^2} = 0.65 \text{ m} \tag{19}$$

qui ne diffère pas aux incertitudes statistiques près ($\rho_{\overline{x,y}}$ n'est évalué que sur 27 points) de $\rho_{\overline{x,y}} = 0.73$ m

- en altimétrie, prenant $\sigma_{\tau_z} = \sigma_{alti} = 0.45$ m , on trouve :

$$\tilde{\sigma}'_{\bar{z}} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\bar{z}}^2 + \sigma_{\tau_z}^2} = \sqrt{0.39^2 + 0.45^2} = 0.59 \text{ m} \tag{20}$$

soit exactement la valeur de $\rho_{\bar{z}}$ (évalué sur 147 points de cote connue).

B. Chantier FR0514 (11 appuis plani. , 18 appuis alti.)

Pour ce chantier on a trouvé pour les écarts-type des différentes catégories d'observations :

$$\sigma_{pla.} = 0.35 \text{ m}$$

$$\sigma_{alt.} = 0.25 \text{ m}$$

$$\sigma_{cli.} = 5 \; \mu\text{m}$$

On notera (il s'agit de *la même échelle* 1/30000) que les écart-types terrain sont *beaucoup plus faible* que pour le chantier précédent ; l'erreur de transfert serait donc ici plus faible. Sur le chantier de Lunel, les points ont été, d'après ce qu'on nous a dit *'repiqués'* d'une ancienne préparation : ce qui a aggravé fortement l'erreur de transfert.

Par la méthode exposée plus haut on trouve :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 0.22 \text{ m} ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{y}} = 0.29 \text{ m} ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{z}} = 0.51 \text{ m} \tag{21}$$

- or sur 17 points de contrôle planimétriques, on trouve :

$$\rho_{\bar{x}} = 0.35 \text{ m} ; \qquad \rho_{\bar{y}} = 0.50 \text{ m} ; \tag{22}$$

soit :

$$\rho_{\overline{x,y}} = 0.43 \text{ m} > \tilde{\sigma}_{\overline{x,y}} = 0.26 \text{ m} ; \tag{23}$$

Cette différence est statistiquement significative ; or employant (14 bis) on trouve (assimilant $\sigma_{\tau_{xy}}$ à $\sigma_{pla} = 0.35$ m) :

$$\tilde{\sigma}'_{\overline{x,y}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\overline{x,y}} + \sigma^2_{\tau_{xy}}} = \sqrt{0.26^2 + 0.35^2} = 0.44 \text{ m} \simeq \rho_{\overline{x,y}} \tag{24}$$

- sur 147 points de contrôle en altimétrie, on trouve :

$$\rho_{\bar{z}} = 0.43 \text{ m} \tag{25}$$

alors que la formule (14 bis) donne $\tilde{\sigma}'_{\bar{z}} = 0.56$ m ; soit ici une légère sous-estimation d'exactitude.

C. Chantier réel FR0501

Il s'agit d'un grand bloc d'aérotriangulation; 18 appuis plani. 34 appuis alti., 4 bandes, 92 clichés, 3006 équations en x-cliché et autant en y-cliché, 912 points actifs, Echelle de prise de vue E = 1/30000

Pour ce chantier on a trouvé pour les écarts-type des différentes catégories d'observations :

$$\sigma_{pla.} = 0.77 \text{ m} \qquad \sigma_{alt.} = 0.97 \text{ m} \qquad \sigma_{cli.} = 6.6 \ \mu\text{m}$$

puis par la méthode exposée plus haut :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 0.40 \text{ m} ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{y}} = 0.49 \text{ m} ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{z}} = 0.72 \text{ m} \tag{26}$$

- or sur 28 points de contrôle planimétriques, on trouve :

$$\rho_{\bar{x}} = 0.89 \text{ m} ; \qquad \rho_{\bar{y}} = 0.77 \text{ m} ; \tag{27}$$

soit :

$$\rho_{\overline{x,y}} = 0.832 \text{ m} > \tilde{\sigma}_{\overline{x,y}} = 0.445 \text{ m} ; \tag{28}$$

Cette différence est statistiquement significative ; or employant (14 bis) on trouve (assimilant $\sigma_{\tau_{xy}}$ à $\sigma_{pla} = 0.77$ m) :

$$\tilde{\sigma}'_{\overline{x,y}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\overline{x,y}} + \sigma^2_{\tau_{xy}}} = \sqrt{0.45^2 + 0.77^2} = 0.89 \text{ m} \simeq \rho_{\overline{x,y}} \tag{29}$$

- sur 193 points de contrôle en altimétrie, on trouve :

$$\rho_{\bar{z}} = 1.27 \text{ m} \tag{30}$$

prenant $\sigma_{\tau_z} = \sigma_{alti} = 0.97$ m , on trouve :

$$\tilde{\sigma}'_{\bar{z}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\bar{z}} + \sigma^2_{\tau_z}} = \sqrt{0.72^2 + 0.97^2} = 1.21 \text{ m} \tag{31}$$

soit presque exactement la valeur de $\rho_{\bar{z}}$

D. Chantier réel FR0524 (Saint Mandé)

Il s'agit d'un bloc d'aérotriangulation qui a servi pour la densification du canevas planimétrique urbain par méthode aéroportée, donc d'une préparation terrain très précise et d'un recouvrement entre deux clichés et entre deux bandes très large, respectivement 85% et 60% ; il y a 10 appuis plani. 10 appuis alti., 4 bandes, 31 clichés, 1402 équations en x-cliché et autant en y-cliché, 137 points actifs, Echelle de prise de vue E = 1/5000

Pour ce chantier on a trouvé pour les écarts-type des différentes catégories d'observations :

$$\sigma_{pla.} = 2.0 \text{ cm} \qquad \sigma_{alt.} = 4.8 \text{ cm} \qquad \sigma_{cli.} = 5.5\ \mu\text{m}$$

puis par la méthode exposée plus haut :

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 1.6 \text{ cm} ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{y}} = 1.6 \text{ cm} ; \qquad \tilde{\sigma}_{\bar{z}} = 5.2 \text{ cm} \tag{32}$$

- or sur 18 points de contrôle planimétriques, on trouve :

$$\rho_{\bar{x}} = 2.0 \text{ cm} ; \qquad \rho_{\bar{y}} = 3.0 \text{ cm} ; \tag{33}$$

soit :

$$\rho_{\overline{x,y}} = 2.55 \text{ cm} > \tilde{\sigma}_{\overline{x,y}} = 1.60 \text{ cm} ; \tag{34}$$

Cette différence est statistiquement significative ; or employant (14 bis) on trouve (assimilant $\sigma_{\tau_{xy}}$ à σ_{pla} = 2.0 cm) :

$$\tilde{\sigma}'_{\overline{x,y}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\overline{x,y}} + \sigma^2_{\tau_{xy}}} = \sqrt{1.6^2 + 2.0^2} = 2.56 \text{ cm} = \rho_{\overline{x,y}} \tag{35}$$

- sur 19 points de contrôle en altimétrie, on trouve :

$$\rho_{\bar{z}} = 8.3 \text{ cm} \tag{36}$$

prenant $\sigma_{\tau_z} = \sigma_{alti} = 4.8$ cm , on trouve :

$$\tilde{\sigma}'_{\bar{z}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\bar{z}} + \sigma^2_{\tau_z}} = \sqrt{5.2^2 + 4.8^2} = 7.1 \text{ cm} \simeq \rho_{\bar{z}} \tag{37}$$

* 3 * Exactitude, poids et appuis.

Nous allons dans ce dernier §, utilisant l'outil présenté au §2, montrer comment on peut répondre aux questions suivantes :

∴ comment évolue l'exactitude en fonction des poids ? (en aérotriangulation analytique)

∴ pourquoi est-il nécessaire de bien connaître les emq des différents types d'observation pour évaluer correctement l'exactitude obtenue ?

∴ comment varie l'exactitude en fonction du nombre ou de la disposition des appuis ?

Pour étudier ces problèmes il est commode d'écrire (nous supposons qu'il y a 3 groupes d'observations : appuis planimétriques, appuis altimétriques, et mesures-cliché, mais il peut y en avoir autant qu'on veut) :

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\bar{x}} &= \beta_{11}p_1\sigma_1^2 + \beta_{12}p_2\sigma_2^2 + \beta_{13}p_3\sigma_3^2 \\
\sigma^2_{\bar{y}} &= \beta_{21}p_1\sigma_1^2 + \beta_{22}p_2\sigma_2^2 + \beta_{23}p_3\sigma_3^2 \qquad (38) \\
\sigma^2_{\bar{z}} &= \beta_{31}p_1\sigma_1^2 + \beta_{32}p_2\sigma_2^2 + \beta_{33}p_3\sigma_3^2
\end{aligned}$$

où : l'indice 1 est relatif aux mesures plani.
'' 2 ' '' ' '' altim.
'' 3 ' '' ' '' cliché

(la démonstration est immédiate; les poids p_i sont ceux *utilisés dans la compensation;* les σ_i^2 sont les écarts-type *vrais* des groupes d'observations; les β_{ij} sont des fonctions des p_i)

Le lecteur voit bien l'analogie des coefficients (ß) avec les coefficients (α) rancontrés au [§ 2, Partie I].

Les coefficients β_{ij} se déterminent de la même façon que les coefficients α_{ij} : pour des poids de compensation p_i *donnés* , on fait successivement trois compensations avec un seul échantillon *i* ($\sigma_i \neq 0$) d'erreur normale :

$$
\begin{array}{llll}
* 1 * & \sigma_2 = \sigma_3 = 0 & \Longrightarrow & \beta_{11} \ (\beta_{21}, \beta_{31}) \\
* 2 * & \sigma_1 = \sigma_3 = 0 & \Longrightarrow & \beta_{12} \ (\beta_{22}, \beta_{32}) \\
* 3 * & \sigma_1 = \sigma_2 = 0 & \Longrightarrow & \beta_{13} \ (\beta_{23}, \beta_{33})
\end{array}
\qquad (39)
$$

Naturellement pour assurer les coefficients β_{ij} il est prudent de réitérer les calculs.

3.1 Evolution de l'exactitude moyenne en fonction des poids de compensation.

3.1.1 Exemple 1 : bloc (fictif) FR0514-1

Les coefficients β_{ij} ont été déterminés par la méthode ci-dessus, pour 5 jeux de poids p_i différents (non proportionnels naturellement) :

Le bloc (4 bandes, 36 clichés, E = 1/30000) était appuyé sur 11 appuis planimétriques et 18 appuis altimétriques.

L'exactitude moyenne (σ_x ,σ_y ,σ_z) a été calculée (formule 38) pour $\sigma_{plani} = \sigma_{alti} = 0.15$ m ; $\sigma_{cli.} = 6$ μm .

Par exemple : (série 2)

$$\sigma_x^2 = 1.77*\left(\frac{0.15}{0.30}\right)^2 + 0.04*\left(\frac{0.15}{0.30}\right)^2 + 2.86*\left(\frac{6}{6}\right)^2 = (0.18)^2$$

SERIE	$1/\sqrt{p_i}$ i ⟶ groupe d'observation	Matrice des coefficients $10^2 * \beta_{ij}$			Estimation de l'exactitude
1	pla = 0.15 m alt = 0.15 m cli = 6 µm	52 149 19	2 3 72	289 488 1490	σx = 0.19 m σy = 0.25 m σz = 0.40 m
2	pla = 0.30 m alt = 0.30 m cli = 6 µm	177 357 27	4 7 196	286 566 1475	σx = 0.18 m σy = 0.26 m σz = 0.39 m
3	pla = 0.60 m alt = 0.60 m cli = 6 µm	686 924 23	7 12 458	310 740 1498	σx = 0.19 m σy = 0.28 m σz = 0.39 m
4	pla = 1.00 m alt = 1.00 m cli = 6 µm	1918 2266 16	8 12 812	376 900 1576	σx = 0.20 m σy = 0.31 m σz = 0.40 m
5	pla = 2.00 m alt = 2.00 m cli = 6 µm	7586 8667 8	5 6 1971	506 1096 1918	σx = 0.23 m σy = 0.34 m σz = 0.44 m

Tab. 3.1 Estimation de l'exactitude pour le bloc fictif FR0514-1 *pour différents poids de compensation.*

(échantillons bruités selon $\sigma_{pla} = \sigma_{alti} = 0.15$ m ; $\sigma_{cli} = 6$ µm*)*

11 *appuis planimétriques et* 18 *appuis altimétriques.*

On constate que *pour cette situation (bloc correctement équipé en appuis)* que l'exactitude ne se dégrade que de 10 % quand les écarts-type $1/\sqrt{p_i}$ qui correspondent aux poids de compensations p_i passent de 0.15 m à 2 m ! (poids extrêmes dans le rapport 169 !)

Ce fait se manifeste probablement chaque fois qu'il y a possibilité d'une solution asymptotique correcte (partie I, §4) : mais il ne faut pas généraliser!

On notera aussi les faits suivants :

- la précision planimétrique des coordonnées calculées $\bar{x}, \bar{y}$ ne dépend pas de la précision altimétrique des appuis (2 est négligeable devant 52), et vice-versa.

- on voit aussi comment évolue dans la précision finale, la part qui revient aux mesures terrain, et celles qui revient aux mesures-cliché.

On comprend l'intérêt de ce type de méthode (aisé à mettre en oeuvre) pour simuler à l'avance de tel ou tel type d'observations supplémentaires.

Naturellement la matrice β_{ij} varie , toutes choses égales par ailleurs, avec le nombre et la disposition des appuis; ci-dessous on donne l'analogue du tableau 3.1 mais avec seulement 4 appuis planimétriques et 13 appuis altimétriques :

SERIE	$1/\sqrt{p_i}$ i ⟶ groupe d'observation	Matrice des coefficients $10^2 * \beta_{ij}$			Estimation de l'exactitude
1	pla = 0.02 m alt = 0.02 m cli = 6 µm	1.0 1.2 0.04	0.04 0.09 1.96	346 740 2190	σx = 0.20 m σy = 0.28 m σz = 0.48 m
2	pla = 0.15 m alt = 0.15 m cli = 6 µm	59 67 2	3 4 98	350 756 2190	σx = 0.20 m σy = 0.29 m σz = 0.47 m
3	pla = 0.60 m alt = 0.60 m cli = 6 µm	900 870 7	7 13 1142	484 961 2450	σx = 0.23 m σy = 0.32 m σz = 0.50 m
4	pla = 1.00 m alt = 1.00 m cli = 6 µm	2520 2153 8	6 10 2581	620 1142 2820	σx = 0.26 m σy = 0.34 m σz = 0.53 m
5	pla = 3.00 m alt = 3.00 m cli = 6 µm	21700 16600 3.2	1.4 2.6 14256	756 1260 4651	σx = 0.28 m σy = 0.36 m σz = 0.68 m

Tab. 3.2 *Estimation de l'exactitude pour le bloc fictif* FR0514-1 *pour différents poids de compensation.*

(*échantillons bruités selon* $\sigma_{pla} = \sigma_{alti} = 0.15$ m ; $\sigma_{cli} = 6$ µm)

4 *appuis planimétriques et* 13 *appuis altimétriques.*

On notera (*canevas d'appui pauvre*) que la dégradation de l'exactitude est ici *manifestement plus rapide.*

3.1.2 **Exemple 2** : bloc (fictif) FR0544 avec mesures aéroportées.

Le bloc comporte 6 bandes et 75 clichés.

Les échantillons ont été bruités avec :

$\sigma_{pla} = \sigma_{alti} = 0.80$ m ; $\sigma_{cli} = 8$ µm ; $\sigma_{GPS} = 0.60$ m ; $\sigma_{STA} = 0.80$ m

Dans le tableau ci-dessous, on donne l'exactitude moyenne pour 3 jeux de poids différents (série 2 : poids optimaux); on constate que l'exactitude ne varie guère.

SERIE	$1/\sqrt{p_i}$ i --> groupe d'observation	Matrice des coefficients $10^2 * \beta_{ij}$ (pla alt cli GPS STA)					Estimation de l'exactitude
1	pla = 0.30 m alt = 0.30 m cli = 8 µm GPS = 0.60 m STA = 0.80 m	100	6	467	71	6	$\sigma_{\bar{x}} = 0.358$ m
		48	13	520	53	8	$\sigma_{\bar{y}} = 0.317$ m
		28	125	2061	166	27	$\sigma_{\bar{z}} = 0.577$ m
2	pla = 0.80 m alt = 0.80 m cli = 8 µm GPS = 0.60 m STA = 0.80 m	139	28	640	151	12	$\sigma_{\bar{x}} = 0.311$ m
		46	35	640	222	19	$\sigma_{\bar{y}} = 0.310$ m
		22	335	2266	253	62	$\sigma_{\bar{z}} = 0.542$ m
3	pla = 1.50 m alt = 1.50 m cli = 8 µm GPS = 0.60 m STA = 0.80 m	166	27	756	216	15	$\sigma_{\bar{x}} = 0.323$ m
		27	25	708	376	27	$\sigma_{\bar{y}} = 0.335$ m
		12	586	2430	357	96	$\sigma_{\bar{z}} = 0.539$ m

Tab. 3.3 Estimation de l'exactitude pour le bloc fictif FR0544 *pour différents poids de compensation pour les mesures terrain.*

Echantillons bruités selon :

$\sigma_{pla} = \sigma_{alti} = \sigma_{STA} = 0.8$ m ; $\sigma_{GPS} = 0.6$ m ; $\sigma_{cli} = 8$ µm

(21 *appuis plani*, 41 *appuis alti*, 66 *GPS*, 55 *STATO*)

Dans le tableau qui suit on a fait varier d'autre poids ; la conclusion est la même.

SERIE	$1/\sqrt{p_i}$ i --> groupe d'observation	Matrice des coefficients $10^2 * \beta_{ij}$ (pla	alt	cli	GPS	STA)	Estimation de l'exactitude
1 *	pla = 0.30 m alt = 0.30 m cli = 8 µm GPS = 0.30 m STA = 0.80 m	64	7	437	48	2	$\sigma_{\bar{x}}$ = 0.31 m
		30	14	493	46	3	$\sigma_{\bar{y}}$ = 0.31 m
		28	100	2007	85	7	$\sigma_{\bar{z}}$ = 0.57 m
2 *	pla = 0.30 m alt = 0.30 m cli = 8 µm GPS = 0.60 m STA = 0.80 m	100	6	467	71	6	$\sigma_{\bar{x}}$ = 0.36 m
		48	13	520	53	8	$\sigma_{\bar{y}}$ = 0.32 m
		28	125	2061	166	27	$\sigma_{\bar{z}}$ = 0.54 m
1 *	pla = 1.50 m alt = 1.50 m cli = 8 µm GPS = 1.20 m STA = 0.80 m	335	50	986	400	41	$\sigma_{\bar{x}}$ = 0.35 m
		100	42	858	600	56	$\sigma_{\bar{y}}$ = 0.33 m
		20	713	2581	428	306	$\sigma_{\bar{z}}$ = 0.57 m
2 *	pla = 1.50 m alt = 1.50 m cli = 8 µm GPS = 1.20 m STA = 1.60 m	357	74	999	428	15	$\sigma_{\bar{x}}$ = 0.35 m
		108	44	906	635	26	$\sigma_{\bar{y}}$ = 0.35 m
		24	812	2642	630	190	$\sigma_{\bar{z}}$ = 0.55 m

Tableau 3.4 Estimation de l'exactitude pour le bloc fictif FR0544 *pour différents poids de compensation pour les mesures aéroportées.*

Echantillons bruités selon :

$\sigma_{pla} = \sigma_{alti} = \sigma_{STA} = 0.8$ m ; $\sigma_{GPS} = 0.6$ m ; $\sigma_{cli} = 8$ µm

(21 *appuis plani*, 41 *appuis alti*, 66 *GPS*, 55 *STATO*)

3.2 De la nécessite d'avoir des estimations correctes des emq des différents types d'observation pour pouvoir évaluer correctement l'exactitude.

Cela ressort à l'évidence des formules (38) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}}^2 &= \beta_{11} p_1 \sigma_1^2 + \beta_{12} p_2 \sigma_2^2 + \beta_{13} p_3 \sigma_3^2 \\
\sigma_{\bar{y}}^2 &= \beta_{21} p_1 \sigma_1^2 + \beta_{22} p_2 \sigma_2^2 + \beta_{23} p_3 \sigma_3^2 \qquad (40) \\
\sigma_{\bar{z}}^2 &= \beta_{31} p_1 \sigma_1^2 + \beta_{32} p_2 \sigma_2^2 + \beta_{33} p_3 \sigma_3^2
\end{aligned}$$

où les p_i sont les poids de compensation (toujours connus) et les σ_i les emq des groupes d'observation (qui ne peuvent ici être évalués, en abscence d'informations sûres *que par la méthode développée en Partie* I).

Par exemple si tous les σ_i sont sous-évalués dans le rapport 2, il en sera de même des exactitudes moyennes.

Si on surestime la précision des mesures-terrain (en assimilant l'erreur-terrain à l'erreur de triangulation, oubliant ses deux autres composantes, *l'erreur de localisation et l'erreur de transfert)* il en sera de même de l'exactitude.

Exemple : Bloc FR0514-1

Supposons que les valeurs réelles des écarts-type (ceux déterminées par la méthode de la Partie I), soient :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.60 \text{ m} \; ; \qquad \sigma_3 = 0.006 \text{ mm}$$

et qu'on ait compensé en prenant les poids p_i tels que : $1/\sqrt{p_1} = 1/\sqrt{p_2} = 0.15$ m (surestimation de la précision des données terrain) et $1/\sqrt{p_3} = 0.006$ mm (bonne estimation de la précision des mesures-cliché) ;

on trouvera alors les estimations incorrectes (matrice β_{ij} série 3 de Tab. 3.1) :

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.19 \text{ m} \; ; \qquad \sigma_{\bar{y}} = 0.28 \text{ m} \; ; \qquad \sigma_{\bar{z}} = 0.39 \text{ m} \; ;$$

alors que les estimations correctes (obtenues avec $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.6$ m) sont :

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.32 \text{ m} \; ; \qquad \sigma_{\bar{y}} = 0.41 \text{ m} \; ; \qquad \sigma_{\bar{z}} = 0.44 \text{ m} \; ;$$

on voit que l'erreur relative excède 50 % en planimétrie (seulement de 12 % dans ce cas en altimétrie).

3.3 Evolution de l'exactitude en fonction du nombre ou de la disposition des points d'appui, et plus généralement en fonction de la configuration des données externe.

L'outil présenté au [§ 3] (calcul de la matrice β_{ij} pour un *jeu donné de poids* p_i *de compensation, qui n'ont pas besoin d'être les poids optimaux,* parce que comme on l'a constaté l'exactitude moyenne varie très peu en fonction des poids [§ 3.1]) est extrêmement commode pour voir comment évolue l'exactitude en fonction des σ_j des différents types de données, on calcule :

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sum \beta_{1j} p_j \sigma_j^2 \; ; \quad \sigma^2_{\bar{y}} = \sum \beta_{2j} p_j \sigma_j^2 \; ; \quad \sigma^2_{\bar{z}} = \sum \beta_{3j} p_j \sigma_j^2 \qquad (41)$$

Si on veut voir comment évolue l'exactitude avec la configuration des données externes, il faut évidemment utiliser la méthode de § 2, ou si l'on veut se donner plus de souplesse, calculer pour chaque cas un nouveaux jeu de β_{ij} .

Exemple 1 : Bloc FR0514

Pour : $\sigma_{plani} = \sigma_{alti} = 0.60$ m ; $\sigma_{cli} = 6$ µm

on trouve (1er cas déduit de Tab 3.1, 2e cas déduit de Tab 3.2, 3e cas issu d'un calcul supplémentaire) :

Planim.	21 appuis	4 appuis	4 appuis
Altim.	142 appuis	13 appuis	3 appuis
$\sigma_{\bar{x}}$	0.32 m	0.37 m	0.37 m
$\sigma_{\bar{y}}$	0.40 m	0.43 m	0.43 m
$\sigma_{\bar{z}}$	0.44 m	0.60 m	3.70 m

Tableau 3.5

Exemple 2 : Bloc FR0544 (mesures aéroportées)

Toujours pour : $\sigma_{plani} = \sigma_{alti} = 0.60$ m ; $\sigma_{cli} = 6$ µm mais cette fois-ci avec des mesures aéroportées $\sigma_{GPS} = \sigma_{STA} = 0.40$ m ; on trouve (1er cas déduit de Tab 3.3, 2e et 3e cas déduit de Tab 3.4) :

Terrain	21 plani.	4 plani.	4 plani.
	41 alti.	3 alti.	3 alti.
Aéro-portées	66 G.P.S.	66 G.P.S.	0 G.P.S.
	55 STATO	0 STATO	55 STATO
$\sigma_{\bar{x}}$	0.22 m	0.22 m	0.38 m
$\sigma_{\bar{y}}$	0.23 m	0.23 m	0.42 m
$\sigma_{\bar{z}}$	0.40 m	0.43 m	0.59 m

Tableau 3.6

Bien que de même précision, les mesures-statoscope apparaissent bien moins efficace que les mesures GPS ...

PARTIE 3

Décel et correction des systématismes en aérotriangulation analytique.

DETECTION ET CORRECTION DU SYSTEMATISME RESIDUEL EN AEROTRIANGULATION ANALYTIQUE.

Introduction

Dans cette dernière partie, on s'est avant tout intéressé au problème de la détection du systématisme résiduel.

En effet les méthodes développées en partie I (estimation de variances des différents groupes d'observations) et partie II (estimation de l'exactitude obtenue) supposent *en principe* que la modélisation est correcte.

Pour savoir si la modélisation est correcte, il est naturel de s'intéresser aux résidus ; nous proposons et testons ci-dessous, des *indicateurs de systématisme* ; ces indicateurs semblent *robustes* par rapport aux variations des poids de compensation (autrement dit, nul besoin de bien les connaître pour les mettre en oeuvre ; et d'autre part, d'après les quelques essais effectués, il semble bien qu'un systématisme indétectable *«selon ces indicateurs»* ne donne pas lieu à une altération significative de l'exactitude dans les cas courants ; enfin ils sont facile à mettre en oeuvre (on est seulement amené à prendre des moyennes de résidus).

La démarche correcte, si on veut estimer correctement les précisions des observations et l'exactitude obtenue, est donc celle-ci :

- à l'issue d'une première compensation, on détecte le systématisme résiduel ; s'il y en a, on le corrige
- on emploie ensuite les méthodes développées en parties I et II

A la fin de cette partie, nous comparons l'efficacité de 2 jeux de paramètres de systématismes qui ont été proposés à l'I.G.N.

Il s'agit de deux méthodes de correction du systématisme résiduel, celle de d'Autume qui modélise à priori les erreurs systématiques des clichés d'après l'analyse des déformations d'une bande et celle de Ducloux qui modélise à priori des déformations du cliché.

* 1 * Détection du systématisme résiduel.

1.1 L'indicateur de systématisme qui sera employé ci-dessous tire son origine du lemme suivant (démonstration en annexe) :

Lemme : Soit $_n A_r \dot{x} = l - e$ une équation d'observation (e vecteur-erreur supposé gaussien $N(0,\sigma)$, σ matrice diagonale) ; alors la moyenne de k résidus-standards :

$$\boxed{\bar{\nu} = \frac{1}{k} \sum \nu_i \; ; \quad \nu_i = \frac{v_i}{\sigma_i}} \qquad (1)$$

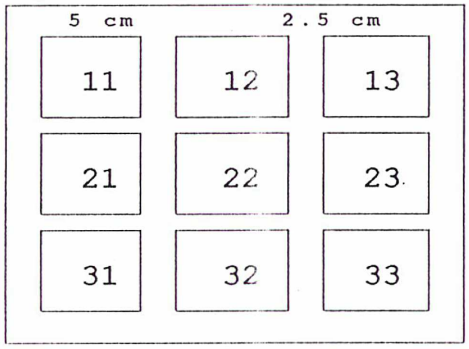
(v_i résidu de l'observation i ; $v_i = A_i \bar{x} - l_i$) obéit à la loi normale $N(0,\sigma_{\bar{\nu}})$, avec $\sigma_{\bar{\nu}} \leq 1/\sqrt{k}$:

$$\boxed{\bar{\nu} = \frac{1}{k} \sum \nu_i \in N(0,\sigma_{\bar{\nu}}) \; ; \quad \sigma_{\bar{\nu}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}} \qquad (2)$$

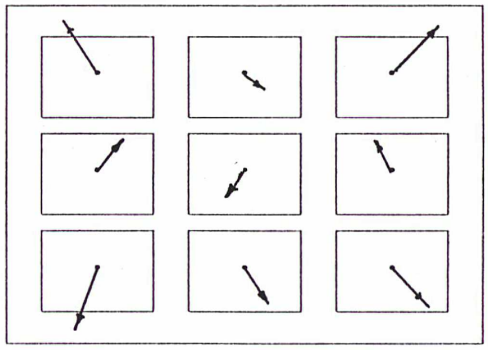
1.2 Méthodes des groupes de résidus standards.

En aérotriangulation analytique, il est classique que les systématismes résiduels proviennent pour l'essentiel des *déformations* des clichés, plus précisément de la partie des déformations qui est *constante* sur les clichés d'une même bande ou d'un même bloc.

Une méthode efficace (proposée par de Masson d'Autume) pour mettre en évidence de tels systématismes est de rapporter tous les résidus de mesures-cliché aux coordonnées-cliché du point-image correspondant. On obtient ainsi un *cliché fictif* où on peut juger de l'existence du systématisme ; les deux outils ci-dessous (que ne connaissait pas de Masson d'Autume) permettent de savoir si ce systématisme est significatif.



Indiçage des 9 zones du cliché



Moyennes des résidus dans les 9 zones

Fig 1 : Décel des systématismes-cliché résiduels.

1.2.1 Résidus moyens standards par zones (Indicateurs zonaux)

On partage (Fig 1) le cliché en 9 zones ij ($i = 1,3$; $j = 1,3$); sur la zone ij on calcule la moyenne des n_{ij} résidus standards en x et en y :

$$\bar{\nu}_{ij,x} = \frac{1}{n_{ij}} \sum \nu_{ij,x} \quad ; \quad \bar{\nu}_{ij,y} = \frac{1}{n_{ij}} \sum \nu_{ij,y} \tag{3}$$

d'après le lemme [§1.1], $\bar{\nu}_{ij,x}$ suit une loi gaussienne $N(0,\sigma_{\bar{\nu}ij,x})$ avec $\sigma_{\bar{\nu}ij,x} \leq 1/\sqrt{n_{ij}}$; par conséquent si on se donne un *risque de* $1^{-ère}$ *espèce* $\alpha = 1\%$, il y aura systématisme des mesures-cliché en x (y) dans la zone ij si (σ ecart-type des mesures-cliché) :

$$|\bar{\nu}_{ij,x}| > 2.57\ \sigma_{\bar{\nu}ij,x} \Longleftrightarrow |\bar{v}_{ij,x}| = |\bar{\nu}_{ij,x}\sigma| > 2.57\ \sigma_{\bar{\nu}ij,x}\sigma \tag{4}$$

et *à fortiori* si dans la formule finale, on substitue à σ, $\tilde{\sigma}$ (estimation après compensation de l'écart-type des mesures-cliché) :

$$\boxed{|\bar{v}_{ij,x}| \geq \frac{2.57}{\sqrt{n_{ij}}}\sigma \simeq v_{ij,x_0} = \frac{2.57}{\sqrt{n_{ij}}}\tilde{\sigma}} \tag{5}$$

Exemple : $n_{11} = 100$; $\tilde{\sigma} = 6\ \mu m$; Il y aura systématisme si :

$$\bar{v}_x = \bar{\nu}_x * \tilde{\sigma} > 2.57 / \sqrt{100} * 6 = 1.542\ \mu m$$

1.2.2 Résidus moyens quadratiques standards. (Indicateurs globaux)

■ *a.* On améliore (en général) la puissance du test précédent en prenant la moyenne *quadratique pondérée* des 9 résidus standard moyen :

$$\boxed{\nu_x = \sqrt{\frac{\sum n_{ij}\ \bar{\nu}^2_{ij,x}}{n}} \quad ; \quad \nu_y \text{ analogue } ; \quad i=1,3 \ ; \ j=1,3} \qquad (6)$$

Comme on va le voir ci-dessous, si on se fixe un risque de 1ère espèce $\alpha = 1\%$, alors dans plus de 99% des cas, il y aura systématisme des mesures en x si :

$$\nu_x > \frac{4.655}{\sqrt{n}}$$

ou encore si :

$$\boxed{v_x = \nu_x\ \tilde{\sigma} > v_{x0} = \frac{4.655}{\sqrt{n}}\ \tilde{\sigma} \quad ; \quad v_y \text{ analogue}} \qquad (7)$$

En effet, la variable :

$$\chi^2 = \sum \bar{\nu}^2_{ij,x} \ / \ \sigma^2_{\bar{\nu}ij,x}$$

est très sensiblement (les moyennes des résidus dans les 9 cases de la fig. 1 n'étant vraisemblablement que très faiblement corrélées) un chi-2 à 9 degrés de liberté ; or la valeur critique χ^2_0 pour un seuil de 1% est définie par :

$$\chi^2_0 = 21.666$$

mais comme $\sigma^2_{\bar{\nu}ij,x} < 1/n_{ij}$ (lemme [§ 1.1]), il y aura, dans plus de 99% des cas, systématisme en x si :

$$\sum \bar{\nu}^2_{ij,x} \ / \ 1 \ / \ n_{ij} > 21.666$$

soit :

$$\sqrt{\frac{\sum n_{ij}\ \bar{\nu}^2_{ij,x}}{n}} > \frac{\sqrt{21.666}}{\sqrt{n}}$$

Exemple : $n = 900$; $\tilde{\sigma} = 6\ \mu m$; Il y aura systématisme si :

$$v_x = \nu_x * \tilde{\sigma} > 4.655 * 6 / \sqrt{900} = 0.93\ \mu m$$

■ *b.* Un test encore plus puissant (en général) consiste à envisager le résidu moyen quadratique standard en x et en y :

$$\boxed{\nu = \sqrt{\frac{\sum n_{ij}(\bar{\nu}^2_{ij,x} + \bar{\nu}^2_{ij,y})}{2n}} ; \quad i=1,3 \ ; \ j=1,3} \qquad (8)$$

Le même raisonement que ci-dessus, montre, avec un risque de 1ère espèce de 1% , que dans plus de 99% des cas, il y aura systématisme si :

$$\nu > 4.172 / \sqrt{n}$$

ou encore si :

$$\boxed{v_{xy} = \nu\ \tilde{\sigma} > v_{xy,0} = \frac{4.172}{\sqrt{n}}\ \tilde{\sigma}} \qquad (9)$$

Exemple : $n = 900$; $\tilde{\sigma} = 6\ \mu m$; Il y aura systématisme si :

$$v_{xy} = \nu_{xy} * \tilde{\sigma} > 4.172 * 6 / \sqrt{900} = 0.83\ \mu m$$

Remarquons qu'il est bon d'effectuer les 3 tests successivement car dans certains cas le systématisme peut être fort dans une zone et pas dans une autre, ou bien fort en y et faible en x (voir exemple ci-dessous, Tab. 1.2 bande réelle).

1.3 Robustesse des indicateurs par rapport au choix des poids de compensation.

Les indicateurs que nous venons de définir sont-ils robustes par rapport aux poids ? Autrement dit, sont-ils peu sensibles aux variations des poids ?

Cette question devait être étudiée: car s'il s'avérait que pour des poids erronés, on soit incapable de détecter des systématismes *significatifs*, la méthode développée en partie I qui exige *en pricipe* qu'on ait corrigé le systématisme résiduel, pourrait échouer.

La réponse est *oui* ; les indicateurs proposés sont robustes.

On a procédé de la façon suivante: on a fait varié le poids des mesures-cliché dans le rapport de 1 à 12^2 (une compensation à partir d'un poids correspondant à un emq de 2 μm, une deuxième à une emq de 8 μm, et une troisième à une emq de 24 μm) ; on constate (exemple ci-dessous) que les valeurs des différents indicateurs varient peu.

■ *Exemple* 1 Bande fictive FR0501-B (1/30000)

(1 bande de 23 clichés; 9 appuis en planimétrie, 17 en altimétrie n = 750 mesures-cliché en *x*, autant en *y*; 471 mesures-cliché en *x* et autant en *y* dans l'ensemble des 9 zones de calcul des indicateurs)

Les erreurs des données (centrées) ont été bruitées selon les écarts-type :

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ; \qquad \sigma_{plani} = 0.6\ m\ ; \qquad \sigma_{alti} = 0.4\ m$$

on a en outre simulé des erreurs systématiques en employant les formules de d'Autume :

$$s_x = \frac{1}{3bp}(2b^2 - 3x^2)y\alpha - \frac{1}{3b}(2b^2 - 3x^2)\varepsilon$$

$$s_y = \frac{y}{b}\delta + \frac{1}{bp}xy^2\alpha - \frac{1}{6bp}(2b^2 - 3x^2)y\beta + \frac{1}{6b}(2b^2 - 3x^2)\gamma \qquad (10)$$

avec : x, y coordonnées-cliché en μm

b demi-largeur du cliché ($\simeq$ 10 cm)

p focale de prise de vue (ici 150 mm)

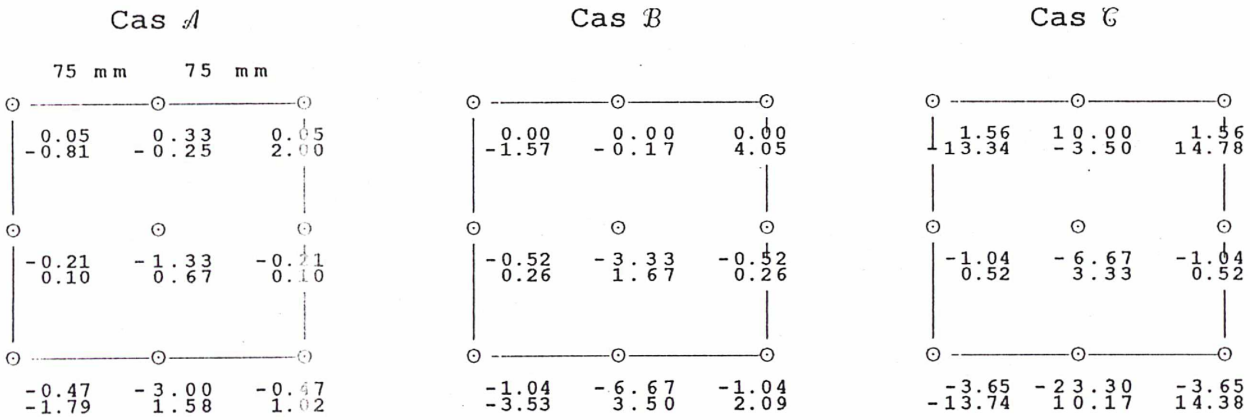
$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \delta$ coefficients définissant le systématisme

On a travaillé avec les 3 jeux de paramètres suivants :

	Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$
α (rad)	0.00005	0.0001	0.0005
β (rad)	0.0001	0.0002	0.0005
γ (rad)	0.00002	0.00005	0.0001
ε	0.00002	0.00005	0.0001
δ (mm)	0.001	0.002	0.002

(11)

Dans la figure ci-dessous on trouve les amplitudes (en μm) des systématismes simulés aux 9 points de base du cliché :



Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$
$s_x = 1.12$ μm	$s_x = 2.54$ μm	$s_x = 8.95$ μm
$s_y = 1.15$ μm	$s_y = 2.38$ μm	$s_y = 10.11$ μm
$s_{xy} = 1.14$ μm	$s_{xy} = 2.46$ μm	$s_{xy} = 9.55$ μm

Fig. 2 : Composantes des vecteurs systématisme-cliché en μm aux 9 points de base (s_x, s_y sont les moyennes quadratiques aux 9 points ; $s_{xy} = \sqrt{(s_x^2 + s_y^2)/2}$)

Dans la figure suivante on donne dans les 3 cas de systématisme $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ et pour trois compensations effectuées avec des poids différents pour les mesures-cliché ($1/\sqrt{p_{cli}} = 2$ μm, 8μm et 24μm; poids des appuis invariants : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6$m et $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4$m), les résidus moyens dans les 9 zones (et la valeur critique selon (5)) :

$1/\sqrt{p_{cli}} = 2\ \mu m$ $1/\sqrt{p_{cli}} = 8\ \mu m$ $1/\sqrt{p_{cli}} = 24\ \mu m$

Cas *A*

0.60 -0.95 0.70 -0.52 0.51 -0.68 2.94 2.71 3.70	0.63 -0.97 0.70 -0.81 0.46 -0.45	0.63 -0.94 0.54 -0.88 0.47 -0.27
0.20 -0.21 0.02 -0.14 -0.86 2.72 3.03 2.60 4.00	0.12 -0.04 -0.20 0.14 -1.03 2.64	0.02 0.07 -0.32 0.16 -1.05 2.55
-0.79 1.06 -0.74 0.37 -0.23 -1.43 3.16 2.63 3.22	-1.24 1.63 -1.08 0.78 -0.57 -1.38 $\tilde{\sigma}$ = 8.51 μm	-1.41 1.91 -1.26 1.07 -0.60 -1.67

Cas *B*

0.88 -1.45 1.14 -0.84 1.02 -1.61	0.83 -1.38 1.08 -1.21 0.88 -0.88 3.05 2.80 3.82	0.81 -1.33 0.88 -1.29 0.86 -0.63
0.05 0.03 -0.23 -0.79 -0.95 3.98	-0.10 0.29 -0.56 -0.37 -1.26 4.03 3.13 2.68 4.12	-0.20 0.43 -0.71 -0.33 -1.31 3.97
-1.64 2.26 -1.70 2.19 -1.30 -1.58	-2.22 3.00 -2.18 2.95 -1.88 -1.48 3.26 2.72 3.33	-2.43 3.35 -2.38 3.33 -1.95 -1.79 $\tilde{\sigma}$ = 8.79 μm

Cas *C*

4.58 -8.05 6.97 0.10 2.88 -8.28	4.55 -8.09 7.07 -0.12 2.79 -7.24	4.52 -8.11 6.82 -0.24 2.80 -6.90 4.95 4.55 6.20
-0.24 0.37 -0.46 -7.25 -0.10 12.51	-0.47 0.75 -0.97 -6.53 -0.61 12.52	-0.61 0.96 -1.18 -6.43 -0.69 12.41 5.09 4.36 6.70
-6.78 9.58 -7.45 9.55 -4.18 -4.54	-7.75 10.79 -8.28 10.80 -5.18 -4.20 $\tilde{\sigma}$ = 14.28 μm	-8.06 11.36 -8.60 11.40 -5.29 -4.65 5.30 4.42 5.41

Fig 3 : *Bande fictive* FR0501-B

Variation des indicateurs zonaux de systématisme avec le poids des mesures-cliché ($1/\sqrt{p_{cli}}$ = 2μm, 8μm *et* 24μm) *pour les* 3 *cas de systématisme définis par* (11). (*Encadré : la valeur critique* v_{ijo} *définie par* (5) ; $\tilde{\sigma}$ *estimation à posteriori de la précision des mesures-cliché ; unité* μm).

On constate :

- la relative insensibilité des indicateurs aux poids
- que le systématisme dans le cas $\mathcal{A}$) n'est pas détecté, mais qu'il l'est dans les cas $\mathcal{B}$) et $\mathcal{C}$)
- que les résidus moyens n'ont pas *mêmes directions* et sont (en valeur absolue) *plus faibles* que *les systématismes introduits* (Fig 2) , ce qui explique que les méthodes, où l'on essaie de corriger le systématisme par ces résidus , soient peu efficaces même au prix de nombreuses réitérations) ...

Voyons maintenant (Tab. 1.1) ce que donnent les indicateurs globaux v_x, v_y et v_{xy} (7 et 9) :

Cas	$\frac{1}{\sqrt{p_{cli}}}$	$\tilde{\sigma}$ (µm)	v_x (µm)	v_y (µm)	v_{xy} (µm)	$v_{x0} = v_{y0}$ (µm)	v_{xy0} (µm)
$\mathcal{A}$	2 µm	8.51	0.70	0.97	0.85	1.83	1.64
	8 µm	"	0.94	1.01	0.98	"	"
	24 µm	"	1.04	1.07	1.06	"	"
$\mathcal{B}$	2 µm	8.79	1.34	1.62	1.49	1.89	1.69
	8 µm	"	1.66	1.80	1.73	"	"
	24 µm	"	1.80	1.90	1.85	"	"
$\mathcal{C}$	2 µm	14.28	6.21	6.00	6.11	3.06	2.75
	8 µm	"	6.72	6.10	6.42	"	"
	24 µm	"	6.92	6.21	6.57	"	"

Tab 1.1 : Bande fictive FR0501-B (E = 1/30000, 9 *appuis en planimétrie,* 17 *appuis en altimétrie*)

Evolution des indicateurs globaux v_x, v_y, v_{xy} *en fonction du poids des mesures-cliché dans la compensation et dans les* 3 *cas de systématisme* (11)

($\tilde{\sigma}$ *évaluation de l'écart-type des mesures-cliché*
v_{x0}, v_{y0}, v_{xy0} *valeurs critiques des indicateurs globaux*).

La conclusion est la même que pour les indicateurs zonaux (Fig. 3) : les valeurs varient peu : elles augmentent légèrement quand on diminue le poids des mesures-cliché; pour n = 471 (nombre de points-image), le rapport signal/bruit (s_{xy}/σ_{cli} ; s_{xy} défini à la figure 2) doit atteindre (2.5/8) pour que le systématisme soit détecté.

■ *Exemple* 2 Bande réelle FR0501-B (1/30000)

(1 bande de 23 clichés; 9 appuis en planimétrie, 17 en altimétrie n = 750 mesures-cliché en *x*, autant en *y*; 471 mesures cliché en *x* et autant en *y* dans l'ensemble des 9 zones de calcul des indicateurs ; poids des appuis : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6$m et $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4$m)

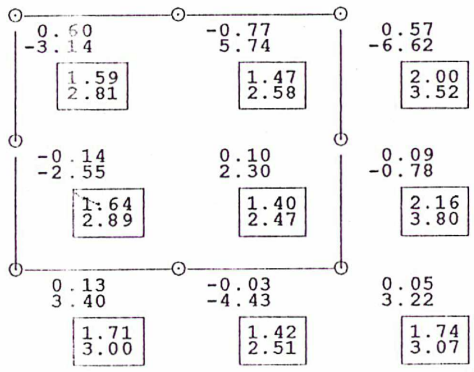
Voici le tableau montrant l'évolution des valeurs des indicateurs globaux en fonction des poids des mesures-cliché :

$\frac{1}{\sqrt{p_{cli}}}$	$\tilde{\sigma}$ (µm)	v_x (µm)	v_y (µm)	v_{xy} (µm)	v_{x0} (µm)	v_{y0} (µm)	v_{xy0} (µm)
2 µm	4.56 (en *x*)	0.45	3.54	2.52	0.99	1.74	1.27
8 µm		0.39	3.95	2.81	"	"	"
24 µm	8.10 (en *y*)	0.42	4.05	2.88	"	"	"

Tab 1.2 : *Bande réelle* FR0501-B *Evolution des indicateurs globaux* v_x, v_y, v_{xy} *en fonction du poids des mesures-cliché dans la compensation* ($\tilde{\sigma}_{x(y)}$ *évaluation de l'écart-type des mesures-cliché en* x (y) v_{x0}, v_{y0}, v_{xy0} *valeurs critiques des indicateurs globaux*).

On constate un systématisme sur les *résidus en y* : ici l'indicateur v_y en *y* est plus efficace que l'indicateur v_{xy} en *x,y* .

Voici pour $1/\sqrt{p_{cli}} = 8$ µm les valeurs prises par les 9 indicateurs zonaux (5) :



$$\frac{2.57}{\sqrt{n_{ij}}}\,\tilde{\sigma}_{x(y)}$$

$\tilde{\sigma}_x = 4.56$ µm

$\tilde{\sigma}_y = 8.10$ µm

Fig 4 : *Bande réelle* FR0501-B *Valeurs des indicateurs zonaux de systématisme pour* $1/\sqrt{p_{cli}} = 8$µm (*Encadré : la valeur critique* v_{ijo} *définie par* (5) ; $\tilde{\sigma}$ *estimation à posteriori de la précision des mesures-cliché; unité* µm).

■ *Exemple* 3 Bloc fictif FR0514-1 (1/30000)

(4 bande de 9 clichés; 15 appuis en planimétrie, 23 en altimétrie n = 1174 mesures-cliché en *x*, autant en *y*; 783 mesures cliché en *x* et autant en *y* dans l'ensemble des 9 zones de calcul des indicateurs ; poids des appuis : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6$m et $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4$m)

Les erreurs des différentes données ont été bruitées selon :

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.6\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.4\ m$$

et les erreurs systématiques simulées dans les mêmes conditions qu'à l'exemple 1 (10 et 11) .

Voici l'évolution des indicateurs globaux v_x, v_y, v_{xy} (7 et 9) :

Cas	$\frac{1}{\sqrt{p_{cli}}}$	$\tilde{\sigma}$ (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_{xy} (μm)	$v_{x0} = v_{y0}$ (μm)	v_{xy0} (μm)
A	2 μm	8.41	0.88	0.91	0.90	1.40	1.25
	8 μm	''	0.91	0.93	0.92	''	''
	24 μm	''	0.91	0.92	0.92	''	''
B	2 μm	8.79	1.53	1.53	1.53	1.46	1.31
	8 μm	''	1.60	1.67	1.64	''	''
	24 μm	''	1.61	1.73	1.67	''	''
C	2 μm	13.83	5.94	4.88	5.44	2.30	2.06
	8 μm	''	6.32	5.25	5.81	''	''
	24 μm	''	6.38	5.57	6.00	''	''

Tab 1.3 : *Bloc fictif* FR0514-1 (E = 1/30000, 4 *bandes de* 9 *clichés*, 15 *appuis en planimétrie*, 23 *appuis en altimétrie*)

Evolution des indicateurs globaux v_x, v_y, v_{xy} *en fonction du poids des mesures-cliché dans la compensation et dans les* 3 *cas de systématisme* (11)

($\tilde{\sigma}$ *évaluation de l'écart-type des mesures-cliché*
v_{x0}, v_{y0}, v_{xy0} *valeurs critiques des indicateurs globaux*).

On constate qu'en dépit de la configuration très différente (un bloc de 4 bandes au lieu d'une seule bande) on retrouve des valeurs très proches pour les indicateurs.

Un essai supplémentaire, a de plus montré que la *variation des valeurs était très faible quand on diminuait le nombre des appuis* (ceux-ci passant en planimétrie de 15 à 4, et en altimétrie de 23 à 13).

1.4 Nécessité de correction des systématismes résiduels pour obtenir des estimations correctes des variances des différents groupes d'observations.

Cela semble évident, en tout cas pour l'estimation de l'écart-type des mesures-cliché ; mais c'est vrai aussi pour les autres données, comme le montre les exemples suivants :

- *Exemple* 1 : Bande FR0502-B ($1/\sqrt{p_{cli}} = 2\mu m$)

	Bande fictive				
	Sans correction du system.			Avec correct. du syst.	$\frac{\sigma_{\tilde{\sigma}i}}{\sigma_i}$
	Cas *A*	Cas *B*	Cas *C*		
$\tilde{\sigma}_{plani}$	0.70 m	1.01 m	1.46 m	0.62 m	31 %
$\tilde{\sigma}_{alti}$	0.68 m	0.76 m	0.74 m	0.63 m	38 %
$\tilde{\sigma}_{x-cli.}$	8.53 µm	8.88 µm	15.55 µm	8.40 µm	4.5 %
$\tilde{\sigma}_{y-cli.}$	8.29 µm	8.62 µm	13.34 µm	8.20 µm	3.2 %
v_x	1.12 µm	1.69 µm	6.43 µm	0.81 µm	
v_y	0.84 µm	1.68 µm	6.49 µm	0.53 µm	
v_{xy}	0.99 µm	1.69 µm	6.46 µm	0.68 µm	
$v_{xo} = v_{yo}$	1.48 µm	1.54 µm	2.56 µm	1.46 µm	
v_{xyo}	1.33 µm	1.38 µm	2.29 µm	1.31 µm	

Tab 1.4 : *Estimation par la méthode de la partie* I *des* σ_i *en cas de systématisme résiduel non corrigé et corrigé.*

Bande FR0502-B, 33 *clichés au* 1/30000, 16 *appuis plani.*, 38 *appuis alti.*
poids de compensation : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6m$, $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4m$, $1/\sqrt{p_{cli}} = 2\mu m$

v_x, v_y, v_{xy} *valeurs des indicateurs globaux*

v_{x0}, v_{y0}, v_{xy0} *valeurs critiques des indicateurs globaux*

Il y a 681 *mesures-cliché en* x *et autant en* y *dans les* 9 *zones de calcul des indicateurs.*

Nous avons refait les essais avec le poids $1/\sqrt{p_{cli}}$ = 6µm, ceci avec d'une part la même bande fictive que précédemment (même bruitage) et d'autre part avec la bande homologue réelle.

On constate que pour les systématismes *indétectables où à la limite de la détéctabilité* (rapport systématisme/bruit < 0.3) les estimations obtenues quand on ne corrige pas le systématisme sont acceptables. Pour la bande réelle (où on ne connâit pas le systématisme) la différence est sensible pour 3 écarts-type sur 4.

Les exemples suivants, qui portent sur une bande plus courte et deux blocs d'aérotriangulation, l'un petit (4 bandes et 36 clichés), l'autre assez grand (4 bandes et 92 clichés), confirment ces résultats.

- *Exemple* 1bis : Bande FR0502-B ($1/\sqrt{p_{cli}}$ = 6µm)

	Bande fictive				Bande réelle	
	Sans correction du system.			Avec correct. du syst.	Sans correct. du syst.	Avec correct. du syst.
	Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$			
$\tilde{\sigma}_{plani}$	0.67 m	0.70 m	0.82 m	0.66	0.66 m	0.53 m
$\tilde{\sigma}_{alti}$	0.69 m	0.70 m	0.39 m	0.68 m	0.71 m	0.56 m
$\tilde{\sigma}_{x-cli.}$	8.51 µm	8.86 µm	15.60 µm	8.42 µm	4.17 µm	4.25 µm
$\tilde{\sigma}_{y-cli.}$	8.15 µm	8.51 µm	13.20 µm	8.06 µm	8.01 µm	5.23 µm
v_x	1.19 µm	1.83 µm	6.68 µm	0.81 µm	0.24 µm	0.56 µm
v_y	0.91 µm	1.80 µm	6.61 µm	0.51 µm	4.49 µm	0.69 µm
v_{xy}	1.06 µm	1.82 µm	6.65 µm	0.68 µm	3.18 µm	0.63 µm
$v_{xo}=v_{yo}$	1.49 µm	1.55 µm	2.57 µm	1.48 µm	0.77 µm 1.45 µm	0.77 µm 0.94 µm
v_{xyo}	1.34 µm	1.39 µm	2.30 µm	1.32 µm	1.04 µm	0.77 µm

Tab 1.5 : *Estimation par la méthode de la partie* I *des* σ_i *en cas de systématisme résiduel non corrigé et corrigé.*

Bande FR0502-B, 33 *clichés au* 1/30000, 16 *appuis plani.*, 38 *appuis alti.*
poids de compensation : $1/\sqrt{p_{pla}}$ = 0.6m, $1/\sqrt{p_{alt}}$ = 0.4m, $1/\sqrt{p_{cli}}$ = 6µm

■ *Exemple* 2 : Bande fictive FR0501-B

	Sans correction du systémat.			Avec correction du systémat.
	Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$	
$\tilde{\sigma}_{plani}$	0.84 m	1.50 m	2.32 m	0.59 m
$\tilde{\sigma}_{alti}$	0.72 m	0.99 m	1.84 m	0.48 m
$\tilde{\sigma}_{x-cliché}$	8.3 µm	8.7 µm	15.3 µm	8.2 µm
$\tilde{\sigma}_{y-cliché}$	8.6 µm	8.9 µm	13.2 µm	8.6 µm

Tab 1.6 : *Estimation par la méthode de la partie* I *de* σ_{pla} = 0.6m σ_{alti} = 0.4m, σ_{x-cli} = σ_{y-cli} = 8µm *en cas de systématisme résiduel non corrigé.*

(*Bande fictive* FR0501-B, 23 *clichés au* 1/30000, 9 *appuis plani.*, 17 *appuis alti.*, 3 *cas de systématisme simulés selon* (10) et (11); *poids de compensation* : $1/\sqrt{p_{pla}}$ = 0.6m, $1/\sqrt{p_{alt}}$ = 0.4m, $1/\sqrt{p_{cli}}$ =2µm)

On note en particulier que même pour un systématisme indétectable (cas $\mathcal{A}$, §1.2), les estimations de $\tilde{\sigma}_{pla}$ et $\tilde{\sigma}_{alti}$ sont médiocres.

■ *Exemple* 3 : Bloc fictif FR0514-1

	Sans correction du systémat.			Avec correction du systémat.
	Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$	
$\tilde{\sigma}_{plani}$	0.67 m	0.67 m	1.00 m	0.69 m
$\tilde{\sigma}_{alti}$	0.51 m	0.58 m	0.89 m	0.49 m
$\tilde{\sigma}_{x-cliché}$	8.5 µm	8.9 µm	15.4 µm	8.3 µm
$\tilde{\sigma}_{y-cliché}$	8.3 µm	8.6 µm	12.1 µm	8.1 µm

Tab 1.7 : *Estimation par la méthode de la partie* I *de* σ_{pla} = 0.6m σ_{alti} = 0.4m, σ_{x-cli} = σ_{y-cli} = 8µm *en cas de systématisme résiduel non corrigé.*

Bloc fictif FR0514-1, 36 *clichés au* 1/30000, 15 *appuis plani.*, 23 *appuis alti.*, 3 *cas de systématisme simulés selon* (10) et (11); *poids de compensation*: $1/\sqrt{p_{pla}}$ = 0.6m, $1/\sqrt{p_{alt}}$ = 0.4m, $1/\sqrt{p_{cli}}$ = 12µm

- *Exemple* 4 : Bloc fictif FR0501-4

	Sans correction du systémat.			Avec correction du systémat.
	Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$	
$\tilde{\sigma}_{plani}$	0.52 m	0.58 m	1.42 m	0.48 m
$\tilde{\sigma}_{alti}$	0.83 m	0.90 m	1.06 m	0.82 m
$\tilde{\sigma}_{x-cliché}$	8.0 µm	8.4 µm	14.3 µm	7.9 µm
$\tilde{\sigma}_{y-cliché}$	8.0 µm	8.4 µm	12.5 µm	7.9 µm

Tab 1.8 : *Estimation par la méthode de la partie* I *de* σ_{pla} = 0.6m σ_{alti} = 0.6m, σ_{x-cli} = σ_{y-cli} = 8µm *en cas de systématisme résiduel non corrigé.*

Bloc fictif FR0501-4, 92 *clichés au* 1/30000, 19 *appuis plani.*, 28 *appuis alti.*, 3 *cas de systématisme simulés selon* (10) et (11); *poids de compensation*: $1/\sqrt{p_{pla}}$ = 0.6m, $1/\sqrt{p_{alt}}$ = 0.6m, $1/\sqrt{p_{cli}}$ = 8µm

1.5 Détection des systématismes et déformations résiduelles du bloc.

Avec les indicateurs employés, le systématisme ne peut être détecté que si les valeurs critiques sont atteintes ou dépassées (formules 5,7 et 9).

La question sur laquelle nous terminons ce § est la suivante : si le systématisme est indétectable, (avec nos indicateurs ...) peut-il quand même altérer gravement l'exactitude ?

Pour répondre à cette question, il faut comparer l'exactitude *réellement obtenue* (donc celle chiffrée par la moyenne quadratique des erreurs sur un nombre *suffisant* de points de contrôle) à *l'exactitude théorique* (celle chiffrée par la méthode développée en partie II).

Voici les résultats relatifs à un certain nombre d'exemples :

■ *Exemple* 1 Bloc fictif FR0514-1 (4 bandes de 9 clichés, 15 appuis plani., 23 appuis alti., 1/30000)

Le bruitage des différentes données a été effectué avec les écarts-type :

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.6\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.4\ m$$

On a de plus simulé le systématisme du cas $\mathcal{A}$ (form. 10 et 11) ; après compensation, on a évalué l'exactitude ρ_x ,ρ_y ,ρ_z comme la moyenne quadratique des erreurs en <u>tous</u> les points; σ_x ,σ_y ,σ_z ont été évalués selon la méthode de la partie II .

Le systématisme $\mathcal{A}$ n'a pu être détecté ([§1.3, exemple 1]); il conduit à une déformation significative si :

$$\rho_x > \sigma_x\ ,\quad \text{ou}\quad \rho_y > \sigma_y\ ,\quad \text{ou}\quad \rho_z > \sigma_z$$

8 essais ont été effectués, on a trouvé les estimations suivantes : (unité m)

$$\begin{aligned} \rho_x &= 0.31 \pm 0.02\ ; & \sigma_x &= 0.29 \pm 0.04 \\ \rho_y &= 0.39 \pm 0.03\ ; & \sigma_y &= 0.39 \pm 0.04 \\ \rho_z &= 0.70 \pm 0.03\ ; & \sigma_z &= 0.65 \pm 0.03 \end{aligned} \qquad (12)$$

Il n'y a pas de différence statistiquement significative au seuil de 1% .

(Par exemple : $\dfrac{\tilde{\rho}_z - \tilde{\sigma}_z}{0.03*\sqrt{2}} = 1.18 < 2.57$: valeur critique au seuil de 1% si on admet $\tilde{\rho}_z \tilde{\in} N(\sigma_z, 0.03)$ et $\tilde{\sigma}_z \tilde{\in} N(\rho_z, 0.03)$

■ *Exem.* 1bis Même bloc fictif FR0514-1 ; mais les données appui ont été bruitées plus en rapport avec la précision des mesures-cliché (8 μm) ;

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.2\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.2\ m$$

les poids sont calculés en conséquence ; le systématisme (indétectable) est le même.

On a trouvé cette fois :
(unité m, 8 essais)

$$\begin{aligned} \rho_x &= 0.25 \pm 0.02\ ; & \sigma_x &= 0.23 \pm 0.03 \\ \rho_y &= 0.31 \pm 0.02\ ; & \sigma_y &= 0.31 \pm 0.02 \\ \rho_z &= 0.58 \pm 0.03\ ; & \sigma_z &= 0.55 \pm 0.03 \end{aligned} \tag{13}$$

Il n'y a toujours pas de différence statistiquement significative au seuil de 1% .

■ *Exemple* 2 Même bloc fictif FR0514-1 ; mêmes conditions qu'à l'exemple 1, mais le systématisme simulé est *plus fort* (cas $\mathcal{B}$) et *détectable* [§1.3, exemple 1] :

On a trouvé (unité m, 8 essais) :

$$\begin{aligned} \rho_x &= 0.34 \pm 0.02\ ; & \sigma_x &= 0.29 \pm 0.04 \\ \rho_y &= 0.42 \pm 0.03\ ; & \sigma_y &= 0.39 \pm 0.04 \\ \rho_z &= 0.79 \pm 0.03\ ; & \sigma_z &= 0.65 \pm 0.03 \end{aligned} \tag{14}$$

Cette fois, en *z*, on observe une *altération statistiquement significative*.

■ *Exemple* 2bis Refaisant le même essai, mais avec un bruit plus faible pour les appuis (0.2 m en plani. et alti, comme à l'essai 2), on a trouvé :

(unité m, 8 essais)

$$\rho_x = 0.28 \pm 0.02 \; ; \qquad \sigma_x = 0.23 \pm 0.03$$

$$\rho_y = 0.35 \pm 0.03 \; ; \qquad \sigma_y = 0.31 \pm 0.02 \qquad (15)$$

$$\rho_z = 0.62 \pm 0.04 \; ; \qquad \sigma_z = 0.55 \pm 0.03$$

Cette fois il n'y a pas *d'altération significative* en *z* .

■ *Exemple* 3 Même condition qu'à l'essai 2, (systématisme cas *B*, détectable) mais avec un canevas d'appui beaucoup plus pauvre (4 appuis plani. au lieu de 15, et 13 appuis alti. au lieu de 23).

On a trouvé (unité m, 8 essais) :

$$\rho_x = 0.46 \pm 0.06 \; ; \qquad \sigma_x = 0.39 \pm 0.06$$

$$\rho_y = 0.61 \pm 0.11 \; ; \qquad \sigma_y = 0.60 \pm 0.12 \qquad (16)$$

$$\rho_z = 0.98 \pm 0.08 \; ; \qquad \sigma_z = 0.86 \pm 0.07$$

ici même en *z* , l'altération n'est pas statistiquement significative : la diminution du nombre d'appui fait que ceux-ci prenent, du fait de leur médiocrité (0.6m en plani., 0.4m en alti.), beaucoup d'importance dans l'évaluation de l'exactitude.

■ *Exemple* 3bis Même condition qu'à l'essai précédent, sauf que les appuis sont moins médiocres (0.2 m comme à l'essai 3) ;

On a trouvé (unité m, 8 essais) :

$$\rho_x = 0.34 \pm 0.06 \; ; \qquad \sigma_x = 0.29 \pm 0.03$$

$$\rho_y = 0.51 \pm 0.13 \; ; \qquad \sigma_y = 0.46 \pm 0.12 \qquad (17)$$

$$\rho_z = 0.80 \pm 0.11 \; ; \qquad \sigma_z = 0.73 \pm 0.06$$

Conclusion : en cas de systématisme non détectable (rapport systématisme/bruit < 0.3), il n'y a pratiquement pas - du moins dans les cas étudiés - d'altération d'exactitude.

* 2 * Comparaison de 2 jeux d'inconnues de systématisme.

Il s'agit dans ce § de comparer deux jeux de paramètres de systématisme qui ont été proposés à l'I.G.N. le premier dû à une idée de l'IGG **d'Autume** et l'autre dû à l'ICG **Ducloux**. Le lecteur trouvera l'analyse du problème de systématisme en photogrammétrie par chacun de ces deux auteurs dans les documents cités en références bibliographiques. En résumé on peut dire que d'Autume fait la modélisation du systématisme d'après l'analyse des déformations d'une bande, tant que Ducloux modélise à priori des déformations du cliché.

D'Autume considère que la déformation la plus générale de la bande résorbable *en l'abscence des données externes* dépend de 4 paramètres indépendants :

* une torsion α autour de l'axe Ox
* une courbure β dans le plan vertical
* une courbure γ dans le plan horizontal
* un facteur ε de variation progressive d'échelle

L'ICG **Hottier**, parti de cette même idée propose après critique de l'analyse de d'Autume un jeu très légèrement différents, ainsi que l'introduction d'une affinité $(1+\delta)$ du cliché selon l'axe Oy, donc une paramètre supplémentaire δ (mais ce paramètre n'est déterminable en toute généralité que si on dispose de points d'appui); ce jeu est le suivant :

$$s_x = \frac{1}{3bp}(2b^2 - 3x^2)y\alpha - \frac{1}{3b}(2b^2 - 3x^2)\varepsilon$$

$$s_y = \frac{y}{b}\delta + \frac{1}{bp}xy^2\alpha - \frac{1}{6bp}(2b^2 - 3x^2)y\beta + \frac{1}{6b}(2b^2 - 3x^2)\gamma \qquad (18)$$

Ducloux, après avoir trouvé une cause de systématisme grave dans les prises de vue (contraintes thermiques face interne-face externe de certains hublots de prise de vue), propose des formules qui constituent un modèle de systématisme de type radial, avec des termes complémentaires pour la déformation du film (c'est le jeu des paramètres actuellement inclus dans le programme de compensation de l'aérotriangulation à l'IGN) :

$$s_x = \left(C_1 \frac{r}{b} + C_2 \frac{r^2}{b^2} + C_3 \frac{r^3}{b^3} \right) \frac{x}{r} + C_4 \frac{xy}{b^2}$$

$$s_y = \left(C_1 \frac{r}{b} + C_2 \frac{r^2}{b^2} + C_3 \frac{r^3}{b^3} \right) \frac{x}{r} + C_5 \frac{x^2}{b^2} \qquad (19)$$

avec : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $C_1 \ldots C_5$ coefficients de systématisme

Ici, d'après Hottier la part faite aux erreurs radiales (3 coefficients pour les corriger) est faite trop belle ; de plus on constate que :

* une déformation progressive de l'échelle (facteur ε de d'Autume) n'est pas prise en compte: les erreurs systématiques s_x sont centrées ;

* la torsion α de la bande n'est pas prise en compte : aucune combinaison des 3 termes (C_1, C_2, C_3) ne conduit à un schéma induisant cette torsion.

Ceci étant, on s'est posé la question : lequel de ces deux jeux de paramètres de systématisme est pratiquement le plus efficace ?

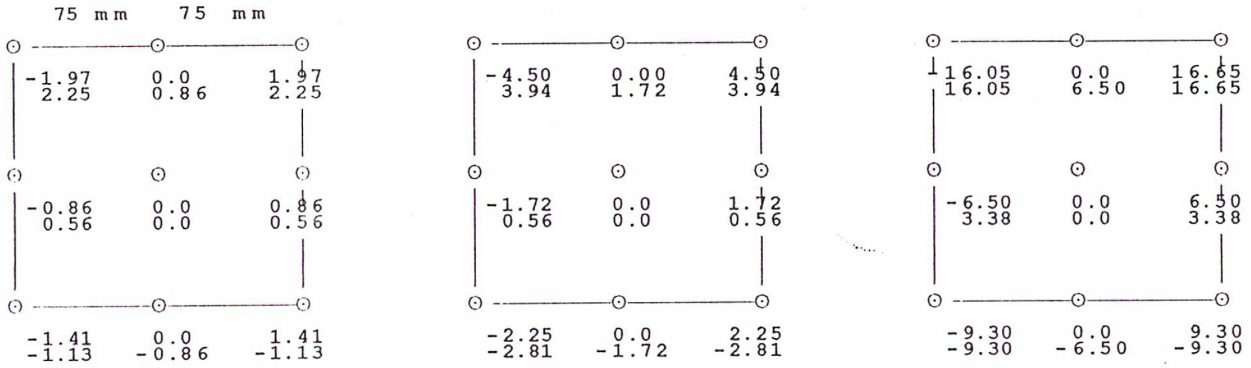
Pour donner une réponse à ce problème on a étudié l'évolution des indicateurs globaux de systématisme en fonction du modèles de systématisme dans la compensation des mêmes chantiers d'aérotriangulation. Comme chantiers d'essais on a employé des bandes et des blocs avec des configurations différentes : une bande longue FR0501-B (23 clichés) et une très longue FR0502-B (33 clichés) ; un grand bloc d'aérotriangulation FR0501-4 (4 bandes et 92 clichés) et le bloc FR0524 (St. Mandé) qui représente la particularité d'avoir le recouvrement longitudinal (80 ÷ 85 %) entre les clichés et le recouvrement transversal (60 ÷ 65 %) entre les bandes très importants par rapport à la pratique courante.

Pratiquement, on s'est efforcé d'abord de définir 3 cas de paramètres de systématisme avec les formules de Ducloux, comparables aux cas A,B,C (11) de d'Autume, soit :

	Cas $\mathcal{A}$	Cas $\mathcal{B}$	Cas $\mathcal{C}$
C1 (mm)	0.0005	0.001	0.005
C2 (mm)	0.001	0.002	0.005
C3 (mm)	0.0005	0.001	0.005
C4 (mm)	0.0005	0.002	0.006
C5 (mm)	0.001	0.001	0.006

(20)

qui donnent comme amplitudes (en μm) des systématismes aux 9 points de base du cliché :



$s_x = 1.21$ μm $\quad s_x = 2.51$ μm $\quad s_x = 9.27$ μm

$s_y = 1.28$ μm $\quad s_y = 2.31$ μm $\quad s_y = 9.40$ μm

$s_{xy} = 1.25$ μm $\quad s_{xy} = 2.41$ μm $\quad s_{xy} = 9.34$ μm

Fig 5 : Composantes des vecteurs systématisme-cliché en μm aux 9 points de base (s_x, s_y sont les moyennes quadratiques aux 9 points ; $s_{xy} = \sqrt{(s_x^2 + s_y^2)/2}$)

Puis, on a procédé de la façon suivante :

- on a calculé les indicateurs globaux aux 9 points de base pour des compensations avec et sans simulation du systématisme pour des blocs (bandes) *fictifs*, d'après *les formules de d'Autume* (18) - ce qu'on a appelé dans les tableaux qui suivent "la simulation d'Autume" -, en utilisant dans la compensation *les paramètres Ducloux* (19) - ce qu'on a appelé dans les tableaux "la correction Ducloux" -. Bien entendu pour les blocs (bandes) *réels* homologues on ne simule pas de systématisme mais on veut voir s'il y a après la correction un systématisme résiduel significatif. On a calculé aussi ces indicateurs pour le cas de la compensation avec simulation mais sans correction du systématisme. On a fait aussi des essais avec des valeurs α et ε seulement ($\beta=\gamma=\delta=0$) et le contraire, avec des valeurs β, γ et δ seulement ($\alpha=\varepsilon=0$).

- on a fait une deuxième série d'essais, en simulant maintenant le systématisme d'après *les formules de Ducloux* (19) et en le corrigeant par *les formules de d'Autume* (18).

- dans chaque cas, on a calculé la valeur des indicateurs globaux v_x et v_y ($v_x = \nu_x \sigma$ pour les blocs fictifs bruités avec l'écart-type σ , $v_x = \nu_x \tilde{\sigma}$ où $\tilde{\sigma}$ est estimée par la méthode développée en partie I pour les blocs réels ; ν_x , ν_y sont définis par (6)), et donné les valeurs critiques ν_{xo}, ν_{yo} (7) ; une correction est **effi-**

cace si $\nu_x < \nu_{xo}$ et $\nu_y < \nu_{yo}$; dans ce cas , nous avons vu d'après les essais du § 1.5 , qu'il n'y avait pas altération significative de l'exactitude.

Voici les tableaux sommaire des résultats des essais pour les 4 exemples qu'on a tenu à étudier :

- *Exemple* 1 : Bande FR0501-B

Les erreurs centrées des données (pour la bande fictive) ont été bruitées selon les écarts-type :

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.6\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.4\ m$$

Bande FR0501-B	fictive						réelle	
Simulation de systémat.	Cas $\mathcal{A}$		Cas $\mathcal{B}$		Cas $\mathcal{C}$			
Indicateurs globaux	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)
Pas de simulation ——— ⟶ correction "Ducloux"	0.31	0.80	"	"	"	"	**0.27**	**0.99**
Simulation "D'Autume" — ⟶ correction "Ducloux"	**0.92**	**0.99**	**1.63**	**1.48**	**6.62**	**5.33**		
Simulation "D'Autume" — ⟶ pas de correction	0.94	1.01	1.66	1.80	6.72	6.10	0.39	3.95
"D'Autume" (mais $\beta=\gamma=\delta=0$) ⟶ correction "Ducloux"	0.93	0.99	1.64	1.47	6.67	5.27		
"D'Autume" (mais $\alpha=\varepsilon=0$) ⟶ correction "Ducloux"	0.31	0.78	0.31	0.77	0.32	0.75		
Pas de simulation ——— ⟶ correction "D'Autume"	0.32	0.84	"	"	"	"	**0.41**	**0.74**
Simulation "Ducloux" — ⟶ correction "D'Autume"	**0.32**	**0.84**	**0.32**	**0.84**	**0.34**	**0.85**		
Simulation "Ducloux" — ⟶ pas de correction	0.32	0.79	0.34	0.89	0.45	3.13	0.39	3.95
v_{xo} et v_{yo}	1.72	1.72	"	"	"	"	0.86	1.29

Tableau 2.1 : *Evolution des indicateurs globaux en fonction du jeux d'inconnues de systématisme et dans les 3 cas de systématisme.*

Bande FR0501-B, 23 *clichés au* 1/30000, 9 *appuis plani.*, 17 *appuis alti*

poids de compensation : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6m$, $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4m$, $1/\sqrt{p_{cli}} = 8\mu m$

v_x, v_y (v_{x0}, v_{y0}) *valeurs (critiques) des indicateurs globaux*

Il y a 471 *mesures-cliché en* x *et autant en* y *dans les* 9 *zones de calcul des indicateurs.*

Simulation (correction) "*D'Autume*" ⟶ *d'après les formules* (18)
Simulation (correction) "*Ducloux*" ⟶ *d'après les formules* (19)

■ *Exemple* 2 : Bande FR0502-B

Les erreurs centrées des données (pour la bande fictive) ont été bruitées selon les écarts-type :

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.6\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.4\ m$$

Bande FR0502-B	fictive						réelle	
Simulation de systémat.	Cas $\mathcal{A}$		Cas $\mathcal{B}$		Cas $\mathcal{C}$			
Indicateurs globaux	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)
Pas de simulation ——— ⟶ correction "Ducloux"	0.84	0.57	"	"	"	"	**0.16**	**1.31**
Simulation "D'Autume" ⟶ correction "Ducloux"	**1.17**	**0.75**	**1.79**	**1.34**	**6.61**	**5.82**		
Simulation "D'Autume" ⟶ pas de correction	1.18	0.89	1.80	1.79	6.64	6.60	0.25	4.44
"D'Autume" (mais $\beta=\gamma=\delta=0$) ⟶ correction "Ducloux"	1.18	0.75	1.82	1.32	6.70	5.76		
"D'Autume" (mais $\alpha=\varepsilon=0$) ⟶ correction "Ducloux"	0.85	0.56	0.85	0.55	0.87	0.55		
Pas de simulation ——— ⟶ correction "D'Autume"	0.81	0.51	"	"	"	"	**0.56**	**0.67**
Simulation "Ducloux" ⟶ correction "D'Autume"	**0.81**	**0.51**	**0.81**	**0.51**	**0.80**	**0.52**		
Simulation "Ducloux" ⟶ pas de correction	0.85	0.85	0.85	1.06	0.88	3.60	0.25	4.44
v_{xo} et v_{yo}	1.42	1.42	"	"	"	"	0.77	0.93

Tableau 2.2 : *Evolution des indicateurs globaux en fonction du jeux d'inconnues de systématisme et dans les* 3 *cas de systématisme.*

Bande FR0502-B, 33 *clichés au* 1/30000, 16 *appuis plani.*, 38 *appuis alti*
poids de compensation : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6m$, $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4m$, $1/\sqrt{p_{cli}} = 8\mu m$
v_x, v_y (v_{x0}, v_{y0}) *valeurs (critiques) des indicateurs globaux*
Il y a 681 *mesures-cliché en* x *et autant en* y *dans les* 9 *zones de calcul des indicateurs.*

Simulation (correction) "D'Autume" ⟶ *d'après les formules* (18)

Simulation (correction) "Ducloux" ⟶ *d'après les formules* (19)

■ *Exemple* 3 : Bloc FR0501-4

Les erreurs centrées des données (pour le bloc fictif) ont été bruitées selon les écarts-type :

$$\sigma_{cliché} = 8\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.6\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.4\ m$$

Bloc FR0501-4	fictif						réel	
Simulation de systémat.	Cas $\mathcal{A}$		Cas $\mathcal{B}$		Cas $\mathcal{C}$			
Indicateurs globaux	V_x (μm)	V_y (μm)	V_x (μm)	V_y (μm)	V_x (μm)	V_y (μm)	V_x (μm)	V_y (μm)
Pas de simulation ——— ⟶ correction "Ducloux"	0.22	0.31	"	"	"	"	**0.24**	**0.86**
Simulation "D'Autume" ——— ⟶ correction "Ducloux"	**0.64**	**0.64**	**1.39**	**1.27**	**6.41**	**5.21**		
Simulation "D'Autume" ——— ⟶ pas de correction	0.65	0.77	1.41	1.73	6.46	6.00	0.29	3.82
"D'Autume" (mais $\beta=\gamma=\delta=0$) ⟶ correction "Ducloux"	0.66	0.61	1.43	1.21	6.51	5.10		
"D'Autume" (mais $\alpha=\varepsilon=0$) ⟶ correction "Ducloux"	0.23	0.34	0.24	0.42	0.30	0.76		
Pas de simulation ——— ⟶ correction "D'Autume"	0.16	0.28	"	"	"	"	**0.31**	**0.41**
Simulation "Ducloux" ——— ⟶ correction "D'Autume"	**0.16**	**0.28**	**0.16**	**0.28**	**0.19**	**0.30**		
Simulation "Ducloux" ——— ⟶ pas de correction	0.22	0.57	0.22	0.82	0.23	3.31	0.29	3.82
V_{xo} et V_{yo}	0.84	0.84	"	"	"	"	0.70	0.67

Tableau 2.3 : *Evolution des indicateurs globaux en fonction du jeux d'inconnues de systématisme et dans les* 3 *cas de systématisme.*

Bloc FR0501-4, 4 *bandes*, 92 *clichés au* 1/30000, 19 *app. pla.*, 28 *alti.*

poids de compensation : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.6m$, $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.4m$, $1/\sqrt{p_{cli}} = 8\mu m$

V_x, V_y (V_{x0}, V_{y0}) *valeurs (critiques) des indicateurs globaux*

Il y a 1966 *mesures-cliché en* x *et autant en* y *dans les* 9 *zones de calcul des indicateurs.*

Simulation (correction) "*D'Autume*" ⟶ *d'après les formules* (18)

Simulation (correction) "*Ducloux*" ⟶ *d'après les formules* (19)

■ *Exemple* 4 : Bloc FR0524

Les erreurs centrées des données (pour le bloc fictif) ont été bruitées selon les écarts-type :

$$\sigma_{cliché} = 6\ \mu m\ ;\quad \sigma_{plani} = 0.05\ m\ ;\quad \sigma_{alti} = 0.05\ m$$

Bloc FR0524 (St. Mandé)	fictif						réel	
Simulation de systémat.	Cas $\mathcal{A}$		Cas $\mathcal{B}$		Cas $\mathcal{C}$			
Indicateurs globaux	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)	v_x (μm)	v_y (μm)
Pas de simulation ——— → correction "Ducloux"	0.33	0.70	"	"	"	"	**0.63**	**1.15**
Simulation "D'Autume" ——— → correction "Ducloux"	**0.68**	**0.81**	**1.11**	**1.08**	**4.21**	**3.47**		
Simulation "D'Autume" ——— → pas de correction	0.68	0.85	1.13	1.11	4.27	3.58	0.64	1.11
"D'Autume" (mais $\beta=\gamma=\delta=0$) → correction "Ducloux"	0.69	0.76	1.13	0.97	4.20	3.32		
"D'Autume" (mais $\alpha=\varepsilon=0$) → correction "Ducloux"	0.32	0.76	0.32	0.85	0.49	1.19		
Pas de simulation ——— → correction "D'Autume"	0.38	0.73	"	"	"	"	**0.42**	**0.88**
Simulation "Ducloux" ——— → correction "D'Autume"	**0.40**	**0.72**	**0.43**	**0.71**	**0.61**	**0.69**		
Simulation "Ducloux" ——— → pas de correction	0.35	0.85	0.42	0.89	0.94	1.68	0.64	1.11
v_{xo} et v_{yo}	1.07	1.07	"	"	"	"	0.89	1.07

Tableau 2.4 : *Evolution des indicateurs globaux en fonction du jeux d'inconnues de systématisme et dans les 3 cas de systématisme.*

Bloc FR0524 4 *bandes*, 31 *clichés au* 1/5000, 10 *app. pla.*, 10 *app. alti*
poids de compensation : $1/\sqrt{p_{pla}} = 0.05m$, $1/\sqrt{p_{alt}} = 0.05m$, $1/\sqrt{p_{cli}} = 6\mu m$
v_x, v_y (v_{x0}, v_{y0}) *valeurs (critiques) des indicateurs globaux*
Il y a 684 *mesures-cliché en* x *et autant en* y *dans les* 9 *zones de calcul des indicateurs.*

Simulation (correction) "*D'Autume*" ——→ *d'après les formules* (18)

Simulation (correction) "*Ducloux*" ——→ *d'après les formules* (19)

Regardant les tableaux on constate, que dans tous les cas étudiés, le modèle de d'Autume est pratiquement plus efficace que celui de Ducloux : un systématisme simulé par les formules de *Ducloux (19) est toujours entièrement corrigé par les paramètres de d'Autume (18), mais l'inverse est faux.*

Dans les exemples portant sur des blocs fictifs, on observe, quand on corrige par les paramètres Ducloux un systématisme simulé par les paramètres d'Autume, qu'il subsiste systématisme résiduel *significatif* (donc une altération de l'exactitude), dès que le rapport systématisme/bruit excède 2.4/8 = 0.3 . Dans les 4 exemples réels traités, le systématisme est correctement corrigé par les formules de d'Autume ; dans 3 sur 4 il est incorrectement corrigé par les formules de Ducloux.

ANNEXE

■ Une propriété des résidus standards.

Lemme : Soit ${}_{n}A_{r}\,\dot{x} = l - e$ une équation d'observation (e vecteur-erreur supposé gaussien $N(0,\sigma)$, σ matrice diagonale) ; alors la moyenne de k résidus-standards :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{k} \sum \nu_i \quad ; \quad \nu_i = \frac{v_i}{\sigma_i}} \qquad (1)$$

(v_i résidu de l'observation i; $v_i = A_i \bar{x} - l_i$; σ_i écart-type de cette observation) obéit à la loi normale $N(0,\sigma_\mu)$, avec $\sigma_\mu \leq 1/\sqrt{k}$:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{k} \sum \nu_i \in N(0,\sigma_\mu) \quad ; \quad \sigma_\mu \leq \frac{1}{\sqrt{k}}} \qquad (2)$$

Plus généralement :

$$\boxed{\mu = \sum \alpha_i \nu_i \in N(0,\sigma_\mu) \quad ; \quad \sigma_\mu \leq \sqrt{\sum \alpha_i^2}} \qquad (3)$$

En effet, la solution des moindres carrés est : $\bar{x} = (A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-2}l$

le vecteur-résidu est défini par : $v = A\bar{x}-l = -(I-A(A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-2})l$

mais évidemment : $A\dot{x} = \dot{l} \Longrightarrow v = -\ (\ I - A(A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-2}\ )\ e$

Définissons le résidu standard ν par :

$$\nu = \sigma^{-1}v = -\ (\ I - \sigma^{-1}A(A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-1})\ \sigma^{-1}e$$

soit : $\nu = -q\sigma^{-1}e$; $q = (\ I - \sigma^{-1}A(A^T\sigma^{-2}A)^{-1}A^T\sigma^{-1})$;

$q^T = q$; $q^2 = q$ (q est symétrique et idempotente)

Il vient alors, pour σ_ν^2 , matrice variance du résidu standard :

$$\sigma_\nu^2 = q\sigma^{-1}\sigma^2\sigma^{-1}q^T = q^2 = q \qquad \text{et par suite :} \quad \nu \in N(0,q)$$

(ν est évidemment normal, centré).

Considérons alors une combinaison linéaire quelconque de k résidus standards : $\mu = \sum_1^k \alpha_i \nu_i$ nous pouvons toujours, quitte à changer l'ordre des observations, supposer les ν_i rangés dans l'ordre des k premières observations ; dans ces conditions, on peut écrire :

$$\mu = \alpha^T\nu \qquad \text{avec :} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots\ \alpha_k, 0, 0, \ \ldots\ 0)$$

d'où :
$$\sigma_\mu^2 = \alpha^T q\alpha = |\sqrt{q}\ \alpha|^2$$

Mais q étant symétrique et idempotente, est une projection orthogonale ; on a donc nécessairement :

$$|\sqrt{q}\ \alpha| = |q\ \alpha| < |\alpha| = \sqrt{\sum_1^k \alpha_i^2}$$

d'où :
$$\sigma_\mu < \sqrt{\sum_1^k \alpha_i^2}$$

Ajouter thèse

KOPLIKU

CONCLUSIONS

Etant donné une compensation par moindres carrés de k groupes d'observations non corrélées, on a montré *théoriquement* et vérifié *pratiquement* qu'il est possible de déduire des *résidus* de la compensation des **estimations non biaisées** des variances inconnues des erreurs de mesures relatives à ces k groupes. Il s'agit donc d'une généralisation de la méthode classique de l'estimation à posteriori du *'facteur de variance'* (jusque à présent il fallait supposer connus les rapports entre les variances des différents groupes, et seul le facteur de proportionnalité pouvait être réestimé).

De plus nous avons construit des prédicteurs de précision pour les estimations des écarts-type inconnus : la précision de l'estimation de l'écart-type σ_i , est sensiblement proportionnelle au rapport $(\sigma_i^2/\sigma_i'^2)$ où $\sigma_i'^2$,*écart-type équivalent*, reflète - dans l'unité de mesure du groupe i - la précision des autres groupes de mesures.

Deux méthodes d'estimation ont été présentées : une *méthode générale* qu'on peut employer dans tous les cas et qui suppose seulement que les poids de compensation à priori ne sont pas trop éloignés des poids cherchés, et une *méthode asymptotique*, beaucoup plus économique en calcul, mais qu'on ne peut employer que si figure parmi les k groupes de mesures un groupe fortement redondant par rapport aux autres, et qui soit *'bien conditionné'* (la solution obtenue en faisant le poids de ce groupe égal à infini dans la compensation doit être assez proche de la solution optimale), et *'presque complet'* (la matrice de linéarisation relative au groupe redondant est presque plein-rang colonne et pour chaque groupe i, autre que le groupe redondant, le rapport à son effectif n_i, du déficit en degrés de liberté des autres groupes, est petit)

Toutes ces conditions sont très fréquemment réalisées.

Les deux méthodes donnent alors des estimations de précisions voisines, robustes par rapport aux poids de compensation.

Pour qu'elles fonctionnent correctement il faut que le modèle fonctinnel soit *juste*, et donc que le *systématisme résiduel* soit négligeable; nous avons montré comment en aérotriangulation on pouvait détecter ce systématisme, à partir des moyennes *localisées* de résidus, méthode qu'on pourrait sans doute étendre à d'autres types de réseaux.

OBSERVATOIRE DE PARIS

Les applications pourraient être nombreuses et intéresser bien des spécialistes ; citons :

- détermination des poids optimaux pour une compensation: on sait que c'est seulement alors que la précision des estimations des inconnues est optimale,

- détermination de la *précision* et de l'*exactitude* des inconnues. Une bonne estimation de la précision obtenue (qui mesure la fluctuation des estimateurs inconnus par rapport à leur espérance) dépend d'une bonne connaissance des poids. Quant à l'exactitude (fluctuation des estimateurs autour des valeurs nominales), le problème - même en l'absence du systématisme - peut être délicat : nous avons vu qu'en photogrammétrie, il existe indubitablement une **erreurs de transfert**, due au fait que les grandeurs à estimer sont appréhendées par plusieurs systèmes de mesure différents (mesures sur des clichés aériens, mesures sur le terrain) : tout se passe un peu comme si chaque système de mesure définissait ses propres valeurs nominales. Nous avons vu qu'alors, il convenait pour estimer l'exactitude de sommer quadratiquement l'écart-type de l'erreur de transfert (qui se confond ici pratiquement avec l'écart-type des mesures-terrain, l'erreur de triangulation étant négligeable, et qu'on peut alors estimer par la méthode de la partie I) à l'écart-type statistique des inconnues (celui qui chiffre la '*précision*' et qui est issu du calcul des moindres carrés; nous donnons d'ailleurs une méthode pour atteindre ce dernier **sans inverser la matrice normal**).

Une analyse de ce genre, devrait être reprise pour tout problème de type différent : par exemple, l'erreur de transfert, peut-elle aussi se présenter en géodésie?

- enfin on voit apparaître la possibilité de déterminer réellement le gain en exactitude quand pour estimer un certain nombre d'inconnues (par exemple les coordonnées de *n* points) on accroît la redondance des mesures ou des *grandeurs*.

Indiquons le principe de la méthode (qu'il faudrait évidemment commencer par valider sur des simulations) :

Soit : $$\sigma^{-1}{}_n A_r \dot{x} = \sigma^{-1} l - \sigma^{-1} e \qquad (1)$$

où : $l \longrightarrow$ mesures
$e \longrightarrow$ vecteur erreur
$\sigma \longrightarrow$ matrice diagonale

l'équation d'observation pondérée ; on suppose la redondance (n - r) grande; si les hypothèses statistiques sont valides (c'est à dire si (e) obeït à une loi de moyenne nulle, et d'écart-type σ) alors on peut écrire :

$$\sigma^{-1}_{n}A_{r}\dot{x} = \sigma^{-1}l - \sigma^{-1}e \iff \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^{-1}\,{}_{n_1}A^1_r\,\dot{x} = \sigma_1^{-1}l_1 - \sigma_1^{-1}e_1 \\ \sigma_2^{-1}\,{}_{n_2}A^2_r\,\dot{x} = \sigma_2^{-1}l_2 - \sigma_2^{-1}e_2 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

les deux lots étant choisis pour que leurs redondances respectives $(n_1 - r)$ et $(n_2 - r)$ soient suffisantes.

On resout séparément les deux équations, d'où pour $\dot{x}$ deux estimations :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (A_1^T\sigma_1^{-2}A_1)^{-1}A_1^T\sigma_1^{-2}l_1 \\ \bar{x}_2 &= (A_2^T\sigma_2^{-2}A_2)^{-1}A_2^T\sigma_2^{-2}l_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

On estime alors (par exemple par la méthode du [II, §2] les précisions *moyennes* $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$ de $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$

On détermine ensuite x, en compensant simultanément les deux équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{x}_1 - e_{x_1} \quad ; \text{ poids } 1/\sigma^2_{x_1} \\ \dot{x} &= \bar{x}_2 - e_{x_2} \quad ; \text{ poids } 1/\sigma^2_{x_2} \end{aligned} \qquad (4)$$

d'où :

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{\sigma^2_{x_1}} + \frac{1}{\sigma^2_{x_2}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sigma^2_{x_1}}\bar{x}_1 + \frac{1}{\sigma^2_{x_2}}\bar{x}_2\right) \qquad (5)$$

Enfin on réestime σ_{x_1} et σ_{x_2} *par la méthode de la partie* I (qui devient ici élémentaire), d'où $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$

Si alors σ_{x_1} *ne diffère pas significativement* de $\tilde{\sigma}_1$, et σ_{x_2} de $\tilde{\sigma}_2$, c'est qu'on a eu raison d'accroître la redondance. Mais au dela d'un certain taux de redondance, on aura fatalement :

$$\sigma_{x_1} \gg \tilde{\sigma}_1 \quad \text{et} \quad \sigma_{x_2} \gg \tilde{\sigma}_2 \quad \ldots \qquad (6)$$

(Bien entendu, il faudrait d'abord prouver l'innocuité de l'hypothèse simplificatrice faite ici, où on suppose sans danger dans ces calculs, d'assimiler les variances de $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ à des matrices scalaires ...)

OBSERVATOIRE DE PARIS

BIBLIOGRAPHIE

1. Ackerman F., Ebner H., Klein H. *Block triangulation with independent models.* Phot. Eng.,39 pp. 967-981 (1973)

2. Ackerman F., Ebner H., Klein H. *Combined block adjustment of A.P.R. data and independent photogrammetric models.* The Canadian Surveyor,26 pp. 384-396 (1972)

3. Agha el Kalaa S. *Critique pratique de la théorie classique des erreurs. Essai d'application de la théorie des erreurs à deux composantes.* Thèse de doctorat ENSG-IGN (1981)

4. American Society of Photogrammetry : *Manual of photogrammetry (Fourth edition) Chap.* II,IX,XVI,XIX (1980)

5. Ashkenazi V. *The adjustment and analysis of very large networks* The Canadian Surveyor, (dec.1974)

6. Barry A&B. *Errors in practical me!sureeent in science, engineering and technology.* pp. 80-94 Edited by M.D.Morris New York, (1978)

7. Bartelme N., Meissl P. *Strength analysis of distance networks* Report N° 15 of the Geod. Inst. Tech. Univ. GRAZ (1974)

8. Basmaji R. *Etude des reseaux géodesiques réguliers.* Thèse de doctorat ENSG-IGN,Paris (1989)

9. Bjerhammar A. *Theory of errors and generalized matrix inverses* Londres,ELSEVIER (1973)

10. Bomford G. *Geodesy* Oxford,(1980)

11. Bonneval H. *Photogrammetrie générale.* Eyrolles,Paris (1976)

12. Bosman E.R., Kubik K. *The computation of geodetic networks with simultaneous estimation of the weights of the measured quantities.* Bulletin Géodésique (Dec.1971)

13. Commissariat à l'énergie atomique : *Statistique appliquée à l'exploitation des mesures.* pp. 232-238 Masson,(1978)

14. Ducloux J. *Etude des systématismes en photogrammetrie aerienne* IGN Paris, (1986)

15. Ebner H., Schneider W. *Simultaneous compensation of systematic errors with block adjustment by independent models.* Bildmessung und Luftbildwesen pp. 198-203 (1974)

16. Ebner H. *Theoritical accuracy models for block triangulation.* Bildmessung und Luftbildwesen,40 pp. 214-221 (1972)

17. Ebner H. *Theoritical and practical accuracy of photogrammetric control networks.* Invited paper,IAG Symposium,Sopron (1977)

18. Ebong M.B. *On the choice of a random variable which eliminates the bias caused by variable spacing in geodetic levelling* Bulletin Géodésique,60 pp. 279-287 (1986)

19. Ebong M.B. *Weights for least-squares adjustments of levelling networks.* Survey Review,29 pp. 175-180 (1987)

20. Faig W., Owolabi K. *Robust estimation for photogrammetric data using an adaptive tuning constant.* Photogrammetry Vol.I Technical Papers pp. 64-73 ASPRS, (1989)

21. Fontaine A. *Le poids des observations dans la méthode des moindres carrés.* Rapport interne à l'IGN Paris, (1989)

22. Ghosh S.K. *Analytical photogrammetry.* Univ.LAVAL,CANADA (1988)

23. Ghosh S.K. *Photogrammetrie fondamentale.* Univ. LAVAL, (1984)

24. Grafarend E., Kelm R. *Point and interval estimations especially of point errors, in multidimensional least-squares adjustment.* Bull.Geod. June 1972 (I) and Sept.1972 (II)

25. Grafarend E., Schaffrin B. *Unbiased free net adjustment.* Survey Review Janvier,(1974)

26. Guxo J., Tartari V., Shehu A. *Fotogrametria* pp. 57-84; 175-213 Tirana,Albanie (1981)

27. Hottier Ph., Mubarak M.R. *Application d'une idée de Georges De Masson D'Autume à l'estimation de l'exactitude d'un calcul d'aérotriangulation en fonction du nombre et de la disposition des points d'appui.* Bull. SFPT,76 pp. 15-27 (1979)

28. Hottier Ph., Kopliku N. *Estimations sans biais des variances des différents groupes d'observations dans une compensation hétérogène.* Rapport interne IGN (1989)

29. Hottier Ph. *Conséquences de l'erreur de transfert de point de bande à bande sur les résultats d'une compensation par faisceaux.* Documentation technique IGN Septembre (1976)

30. Hottier Ph. *Etudes des caractéristiques de la distribution des résidus aux coordonnées-cliché.* Documentation technique IGN Juillet (1976)

31. Hottier Ph. *Généralités sur les erreurs,précision,justesse et exactitude d'une estimation.* ENSG-IGN Paris (1984)

32. Hottier Ph. *La théorie élémentaire des moindres carrés,* cours d'analyse numérique à l'ENSG-IGN (1987)

33■ Hottier Ph. *Photogrammétrie* ENSG-IGN (1987)

34. Hottier Ph. *Quatre années d'études en aérotriangulation analytique.* Bull. SFPT,66 pp. 29-36 (1976)

35■ Hottier Ph. *Relèvement dans l'espace couple, bande, bloc.* ENSG-IGN (1989)

36■ Hottier Ph. *Statistiques,* cours à l'ENSG-IGN (1988)

37. Hottier Ph. *Théorie de Baarda : Détection des fautes et fiabilité des estimations et ses applications en photogrammétrie.* Bull. SFPT,84 pp. 5-20 (1981)

38. Hottier Ph. *Théorie des erreurs de mesure à deux composantes (bruit et silence).* Tomme 1-2 IGN Paris, (1980)

39. Kopliku N. *La répartition la plus économique des points d'appui dans le chantier de densification du canevas planimétrique urbain par méthode aéroportée.* DEA ENSG-IGN (1987)

40■ Kubik K. *The estimation of the weights of measured quantities within the method of least squares.* Bull. Geod. (1970)

41. Larsson R. *General triangulation-incorporating photogrammetric and other observations.* Presented paper ISP Commission III Symposium,Helsinki,FINLAND (1982)

42. Larsson R. *Gentri-a system for simultaneous adjustment of photogrammetric and other observations.* Presented paper ISP Commission V, Symposium,York,ENGLAND (1982)

43■ Masson d'Autume G. *Les erreurs systématiques dans l'aérotriangulation.* Bull. SFPT,56 pp. 55-61 (1974)

44. Masson d'Autume G. *L'interpolation par une règle flexible (spline) et ses applications en photogrammétrie numérique* Bull. SFPT,64 pp. 25-43 (1976)

45. Mayoud M. *Traitement analytique global des réseaux photogrammétriques terrestres.* CERN pp. 17-25 (1979)

46. Meissl P. *A-priori prediction of roundoff error accumulation in the solution of a super-large geodetic normal equation system.* NOAA Professional Paper 12 (1980)

47. Mikhail E.M., Ackerman F. *Observations and least squares.* University Press of America (1976)

48■ Million C. *L'utilisation des mesures saisies en vol en aérotriangulation.* Thèse de doctorat ENSG-IGN,Paris (1989)

49■ *Notes techniques du STN* de l'IGN FRANCE

50. Prisley S., Smith J. *Using classification error matrices to improve the accuracy of weighted land-cover models*. PHot. Engin. and Remote Sensing Vol.53 pp. 1259-1263 (1987)

51. Saporta G. *Théories et méthodes de la statistique*. pp. 173-189 Institut Français du Pétrole, Editions Technip (1978)

52. Snay R. *Reducing the profile of sparse symmetric matrices*. National Geodetic Survey, Rockville June (1976)

53. Spiegel M.R. *Théorie et application de la statistique*. Paris, MCGRAW-HILL (1981)

54. Strang van Hees G.L. *Variance-covariance transformations of geodetic networks*. Manuscripta Geodetica Vol. 1-20 (1982)

55. Subramaniam S. *Weights for geopotential numbers in adjustment computations*. Survey Review,26 pp. 244-247 (1982)

56. Theodor R. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Tomme 1-2, Masson Paris (1987)

Les références bibliographiques sont marquées d'un signe (■)

TABLE DES MATIERES

RESUME GENERAL 1

NOTATIONS ET RAPPEL SUR LA THEORIE DES MOINDRES CARRES 6

PARTIE I : ESTIMATION SANS BIAIS DES VARIANCES DES DIFFERENTS GROUPES D'OBSERVATIONS DANS UNE COMPENSATION HETEROGENE

1. Introduction 13

2. Présentation de la méthode 21

2.1 Principe 21

2.2 Quelques propriétés des coefficients α_{ij} 25

2.3 Comportement moyen des résidus moyens quadratiques avec les poids 27

2.4 Un exemple 28

2.4.1 Application de la méthode 28

2.4.2 Les résultats de quelques simulations 31

2.4.3 Précision des estimateurs $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ 32

3. Construction des estimateurs 36

3.1 Méthode générale 36

3.1.1 Le calcul des coefficients α_{ij} 36

3.1.2 Remarques importantes 38

3.2 Méthode asymptotique 42

3.2.1 Cas d'un groupe *k* fortement redondant, *'bien conditionné'* et *'presque complet'* 42

4. Solutions asymptotiques 45

4.1 Cas de deux groupes d'observation 45

4.2 Généralisation du cas de *k* groupes d'observation ... 47

4.3 Remarque terminale 53

5. La précision des estimations des écarts-type 55

5.1 Le prédicteur asymptotique 55

5.1.1 Cas de deux groupes de mesures 55

5.1.2 Généralisation à (k) groupes 63

5.2 Le prédicteur général 65

5.2.1 Définition de l'écart-type équivalent relatif au groupe i 65

5.2.2 Estimation de la précision de $\tilde{\sigma}_i$ 68

5.3 Comparaison du prédicteur asymptotique et du prédicteur général 71

6. Validation en aérotriangulation analytique 77

6.1 Exemples de l'application de la méthode générale ... 78

6.1.1 Premier exemple 78

6.1.2 Deuxième exemple 83

6.2 Exemples de l'application de la méthode asymptotique 85

6.2.1 Premier exemple 85

6.2.2 Deuxième exemple 89

6.3 Application de la méthode sur un bloc réel 91

6.4 Validation des deux méthodes d'estimation et des prédicteurs sur une série d'essais 93

6.4.1 Méthode générale 93

6.4.1.1 Premier exemple 93

6.4.1.2 Deuxième exemple 95

6.4.2 Méthode asymptotique 96

6.4.2.1 Premier exemple 96

6.4.2.2 Deuxième exemple 97

6.5 Limites de la méthode 100

6.6 Evolution des estimations $\tilde{\sigma}_i$, de leurs précisions et des écarts-type équivalents avec les poids à priori .. 104

7. Validité de la méthode. Extensions 109

7.1 Cas de deux groupes d'observation 110

7.1.1 Théorème 110

7.1.2 Exemple 115

7.2 Cas de (k) groupes d'observation ($k > 2$) 117

7.2.1 Exemple 117

7.2.2 Théorème 119

7.3 Extensions 121

Annexes 123

Annexe 1 123
Annexe 2 125
Annexe 3 126
Annexe 4 127
Annexe 5 130
Annexe 6 132
Annexe 7 134

PARTIE II : EVALUATION DE L'EXACTITUDE OBTENUE EN AEROTRIANGULATION ANALYTIQUE

Introduction 139

1. Méthode habituelle pour l'estimation de l'exactitude obtenue en aérotriangulation analytique 142

1.1 Rmq aux appuis 142
1.2 Emq aux points de contrôle supposés exactement connus 142
1.3 Emq aux points de contrôle entachés d'incertitude ... 143
1.4 Pseudo-emq aux appuis 144
1.5 Application des formules de la théorie des moindres carrés 144

2. Une méthode simple pour l'estimation de l'exactitude moyenne des coordonnées 145

2.1 Principe 145
2.2 Validation de la méthode 147
2.2.1 Résultats 148
2.2.2 Simulation du cas où les points de contrôle sont entachés d'incertitude 150
2.2.3 Bloc réels 151

3. Exactitude, poids et appuis 156

3.1 Evolution de l'exactitude moyenne en fonction des poids de compensation 157
3.1.1 Exemple 1 157
3.1.2 Exemple 2 160
3.2 De la nécessité d'avoir des estimations correctes des emq des différents types d'observation pour pouvoir évaluer correctement l'exactitude 162

3.3 Evolution de l'exactitude en fonction du nombre ou de la disposition des points d'appui, et plus généralement de la configuration des données externes ... 163

PARTIE III : DECEL ET CORRECTION DES SYSTEMATISMES EN AEROTRIANGULATION ANALYTIQUE

Introduction 165

1. Détection du systématisme résiduel 166

1.1 Lemme 166

1.2 Méthodes des groupes de résidus standards 166

1.2.1 Indicateurs zonaux 167

1.2.2 Indicateurs globaux 168

1.3 Robustesse des indicateurs par rapport au choix des poids de compensation 170

1.4 Nécessité de correction des systématismes résiduels pour obtenir des estimations correctes des variances des différents groupes d'observations 176

1.5 Détection des systématismes et déformations résiduelles du bloc 180

2. Comparaison de 2 jeux d'inconnues de systématisme 183

Annexe 191

BIBLIOGRAPHIE 193

TABLE DES MATIERES 197

INDEX DES MOTS-CLE 201

INDEX DES MOTS-CLE

aérotriangulation analytique ..... I (§6), II, III

appuis (points d'appui) ..... I (§6), II (§3)

approximation de Fisher ..... I (§2.4.3, annexe 3)

biais, sans biais ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.
(l'estimateur $\tilde{u}$ d'un variable aléatoire u est sans biais si :
$E\,\tilde{u} = u$ (E symbole de l'espérance))

bloc d'aérotriangulation analytique ..... I (§6.1)

Box et Müller ..... I (§6.1.1)

coefficients α_{ij} ..... I (§2.1, §2.2)

écart-moyen (ou erreur moyenne) quadratique ..... II (§1.2)

écart-type équivalent ..... I (§5.1.1, §5.1.2, §5.2.1, §6.6)

erreur ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

erreur de détermination terrain ..... II (introduction)

erreur de la localisation
d'un point sur le terrain ..... II (introd.,fig.2, §2.2.2, §2.2.3)

erreur de transfert ..... II (introd.,fig.1, §2.2.3)

exactitude ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

exactitude moyenne
(en aérotriangulation) ..... II (§2, §2.2.2, §2.2.3, §3)

facteur de variance ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

G.P.S. (Global positioning system) ..... I (§6.1.1)

groupe 'bien conditionné' ..... I (§3.2)

groupe 'presque complet' ..... I (§3.2)

groupe strictement complementaire (des autres) ..... I (§3.2.1)

inconnues de systématismes de d'Autume ..... III (§1.3, §2)

inconnues de systématismes de Ducloux ..... III (§2)

OBSERVATOIRE
DE PARIS

indicateurs de systématisme et poids ..... III (§1.3)

indicateurs de systématisme globaux ..... III (§1.2.2)

indicateurs de systématisme zonaux ..... III (§1.2.1)

loi de Gauss standard N (0,1) : variable gaussien, centré, d'écart-type unitaire

méthode asymptotique ..... I (§3.2, §4)

méthode générale ..... I (§3.1)

méthode de maximum de vraisemblance ..... I (introduction)

modèle 'fonctionel' ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

modèle 'stochastique' ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

poids ..... Notation et rappel sur la Th.M.C., I (§6), II (§3)

précision ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

prédicteur asymptotique ..... I (§5.1)

prédicteur général ..... I (§5.2)

redondante (catégorie d'observation) ..... I (introduction)

résidu ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

résidu moyen quadratique aux appuis ..... II (§1.1)

résidu standard ..... III (§1, Annexe)

robuste ..... I (§5.1.1,E)

Stato (observations statoscopes) ..... I (§6.1)

systématismes et estimation de l'exactitude ..... III (§1.5)

systématismes et estimation des variances ..... III (§1.4)

variance ..... Notation et rappel sur la Th.M.C.

OBSERVATOIRE
DE PARIS