



HAL
open science

Orbitographie des satellites artificiels sur de grandes périodes de temps

Pierre Exertier

► **To cite this version:**

Pierre Exertier. Orbitographie des satellites artificiels sur de grandes périodes de temps. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1988. Français. NNT: . tel-02095278

HAL Id: tel-02095278

<https://hal.science/tel-02095278>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS**

(nouveau régime)

**EN
ASTRONOMIE STATISTIQUE ET DYNAMIQUE**

présentée par

Pierre EXERTIER

Sujet de la thèse :

**ORBITOGRAPHIE DES SATELLITES ARTIFICIELS
SUR DE GRANDES PERIODES DE TEMPS**

POSSIBILITES D'APPLICATIONS

Soutenue à l'observatoire de Paris, le 28 mars 1988, devant le jury composé de :

Monsieur Kovalevsky

Président

Monsieur Balmino

Rapporteur

Monsieur Mignard

Rapporteur

Monsieur Barlier

Directeur de la thèse

Monsieur Chapront

Monsieur Nouel

9419

(163)
Y

U 6 NOV 1988

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
(nouveau régime)

EN
ASTRONOMIE STATISTIQUE ET DYNAMIQUE

présentée par

Pierre EXERTIER

Sujet de la thèse :

ORBITOGRAPHIE DES SATELLITES ARTIFICIELS
SUR DE GRANDES PERIODES DE TEMPS

POSSIBILITES D'APPLICATIONS

Soutenue à l'observatoire de Paris, le 28 mars 1988, devant le jury composé de :

Monsieur Kovalevsky
Monsieur Balmino
Monsieur Mignard
Monsieur Barlier
Monsieur Chapront
Monsieur Nouel

Président
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de la thèse



REMERCIEMENTS

Je voudrais tout particulièrement exprimer ici ma profonde gratitude à Monsieur François Barlier, qui a guidé mes premiers pas vers la recherche et dans la Géodésie Spatiale. C'est grâce à son attitude non directive et à ses idées toujours originales et nouvelles, que j'ai progressé dans ce travail. Je le remercie également pour les conseils de tout ordre, qu'il m'a prodigués avec une gentillesse toujours constante.

Je suis très reconnaissant à Monsieur G. Balmino, Directeur du Bureau Gravimétrique International, de n'avoir pas ménagé son temps, en dépit de ses nombreuses occupations, pour me faire profiter d'une grande compétence en Mécanique Spatiale. Au cours de mes différents déplacements à Toulouse, j'ai toujours été accueilli d'une façon chaleureuse au sein de son groupe, je l'en remercie ainsi que ses collaborateurs.

Je remercie également Monsieur F. Mignard, Directeur de Recherches au C.N.R.S., de m'avoir fait bénéficier de ses enseignements, et d'avoir porté un intérêt tout particulier à ces travaux. Ses remarques et suggestions m'ont toujours été d'un grand secours.

Je remercie Monsieur J. Kovalevsky d'avoir bien voulu présider ce jury, ainsi que Monsieur J. Chapront, responsable de la formation doctorale de l'Observatoire de Paris, et Monsieur F. Nouel, responsable du département Métrologie et techniques Orbitales de la division Mathématiques Spatiales du C.N.E.S., d'avoir accepté d'y participer.

Je remercie enfin l'équipe Dynamique Spatiale du C.E.R.G.A. de m'avoir soutenu et favorisé dans mon action, par son aide et la gentillesse des membres du groupe. Je suis très reconnaissant à Monsieur Y. Boudon et à Madame Saint-Crit de s'être chargés du traitement des nombreuses données de télémétrie laser sur satellites. Enfin, je suis particulièrement redevable à Madame C. Boche, qui m'a fait gagné un temps précieux en tapant le texte de cette thèse.

Je dédie ce travail à ma femme, dont la patience et le dévouement m'ont toujours accompagné.

INTRODUCTION

L'observation de la Terre se basait, jusqu'au milieu de notre siècle, sur les méthodes de géodésie classique pour la détermination de sa forme et de ses dimensions (ellipsoïde de référence), sur des méthodes astronomiques pour l'observation de son mouvement (rotations et translation), et sur des mesures locales de pesanteur et de déflexion de la verticale pour l'étude de son champ de gravité (géoïde).

Depuis le lancement des premiers satellites artificiels, tout a basculé. Le satellite est devenu une mire géodésique pratique, élargissant d'un seul coup les champs d'observations et d'applications à l'échelle de plusieurs continents puis à toute la planète. La géodésie spatiale était née et avec elle le besoin de localiser ces nouvelles cibles mobiles dans l'espace.

Au cours des trente dernières années, les deux notions d'observation et de calcul ont suivi des évolutions extrêmement importantes et strictement parallèles. Dans les années 1960, la précision des mesures optiques (100 mètres et plus) était compatible avec des déterminations analytiques du calcul de la trajectoire. Compte tenu des progrès technologiques atteints en matière de système de poursuite, la mécanique spatiale a dû s'enrichir de moyens informatiques et numériques puissants pour comparer, aujourd'hui, l'observation (mesures de distance par télémétrie laser au niveau centimétrique) au calcul théorique (couramment l'intégration numérique); (figures 2 et 3). D'une façon générale, plus le problème de mécanique céleste est complexe, plus on a été conduit à abandonner les développements analytiques et littéraires, en faveur de méthodes purement numériques.

Il ne suffit pas de s'attacher à la connaissance d'une orbite de satellite qui dépend du véhicule considéré (forme, masse, altitude) et des moyens de poursuite (précision, couverture) dont il fait l'objet. Il faut aussi connaître et améliorer sans cesse l'ensemble des paramètres du système Terre-satellite (champ de gravité notamment) et ce, à un degré de précision correspondant à celui de la quantité observée.

Ainsi, au fur et à mesure des décennies, les principales applications de la géodésie spatiale, que sont la localisation et les Sciences de la Terre, ont vu leurs performances augmenter. Inversement, chaque nouvelle détermination de paramètres géophysiques est venue améliorer la connaissance du système Terre-satellite étudié et donc, préciser la trajectoire calculée.

Avec les moyens de calculs actuels, la restitution d'orbites de satellites artificiels est devenue très précise et relativement rapide. Elle peut s'appliquer à n'importe quel type de trajectoire compte tenu de la diversité des applications souhaitée: observation de la Terre (SPOT,...), télécommunications (TDF,...), localisation (TRAN-

SIT,...), géodésie (LAGEOS,...), océanographie (SEASAT,...), etc... Les programmes d'ajustement d'orbites sur des observations de télédétection spatiale (logiciels de correction différentielle: GIN, ZOOM,...) sont des exemples typiques de l'utilisation rationnelle des méthodes numériques en général.

Ces méthodes ont permis de déterminer les constantes liées au développement du potentiel variable de la Terre en harmoniques sphériques. De tels traitements informatiques (logiciels GIN-DYNAMO,...) ont également restitués les réseaux de coordonnées de stations participant aux observations, les paramètres de rotation de la Terre, etc...

Certes ces techniques, sont coûteuses en temps calcul. Toutefois, appliquées sur des intervalles de temps courts (jusqu'à quelques mois), elles représentent aujourd'hui un des moyens les plus efficaces pour tester un modèle de forces, et aussi pour l'améliorer.

Cependant au-delà d'une certaine période de temps, il n'est plus possible pour le triplet ordinateur-logiciel-modèle de forces de traiter un nombre considérable de mesures (plusieurs millions) et aussi, d'assurer une précision numérique satisfaisante (propagation d'erreurs d'arrondi, forces de surface mal modélisées, paramètres non pris en compte,...).

Aussi, la détermination de certains paramètres, agissant en particulier sur l'évolution à long terme (voire très long terme) de l'orbite du satellite, n'est-elle plus possible, raisonnablement, avec de tels logiciels.

Une étude spécifique des perturbations à longues périodes des trajectoires de satellites artificiels s'avère nécessaire. En effet, elle peut permettre d'une part, de détecter des phénomènes géophysiques très fins négligés dans la plupart des modèles orbitographiques d'extrapolation ou de restitution et d'autre part, de mettre en évidence de petites variations séculaires (ou à longue période) induites sur le mouvement étudié, insoupçonnées à l'échelle de quelques jours.

La connaissance de l'évolution à long terme de l'orbite perturbée d'un corps se heurte à plusieurs difficultés.

La première difficulté concerne la présence de courtes périodes gênantes, et de plus sans intérêt majeur pour une telle étude, dans le système dynamique classique des équations du mouvement. En effet, ces termes sont responsables des pas très courts ($1/100^e$ de la période de révolution) de l'intégration numérique et donc, de temps de calcul élevés pour les logiciels. En conséquence, en l'absence d'une richesse

sans limite en temps de calcul, si nous voulons décrire le comportement qualitatif d'un satellite artificiel en orbite autour de la Terre pendant plusieurs milliers de révolutions, voire beaucoup plus, il est préférable, soit de s'affranchir des courtes périodes dans le système différentiel initial (technique de centrage), soit d'opter pour une intégration analytique de ce système.

La deuxième difficulté, propre à une étude à long terme, concerne les effets particuliers des forces de surface sur l'orbite considérée. En effet, ceux-ci sont bien connus et petits sur un court intervalle de temps, mais à long terme, ces petites perturbations peuvent générer des variations importantes le long de la trajectoire. L'assimilation de ces dernières à d'autres phénomènes est donc dangereuse, et il faudra séparer convenablement ce type de forces de l'ensemble de toutes les perturbations.

D'une façon très schématique, nous distinguons deux familles de méthodes pouvant répondre de manière plus ou moins satisfaisante au problème du calcul de l'éphéméride d'un satellite artificiel, c'est-à-dire encore de l'extrapolation d'orbites sur une période de temps très grande par rapport à la période de révolution (plusieurs dizaine de milliers de révolutions).

Nous classons dans la première famille les méthodes d'intégration analytique des équations de la dynamique (équations de Lagrange, en général). En utilisant différents procédés, un certain nombre d'auteurs, après le lancement des premiers satellites ont approché la solution exacte du système différentiel en question, dépendant d'un petit paramètre (ε), par un développement en série tronqué à (ε) , (ε^2) , (ε^3) ,... suivant les théories. Si les meilleures déterminations analytiques se limitent à un modèle perturbateur relativement simple (les premiers termes du développement du potentiel terrestre) par rapport aux exigences actuelles, les solutions à modèle plus complet ont un niveau de troncature trop bas (ε) pour être exploitées efficacement sur de grands intervalles de temps. De plus, les forces de surface, quand elles sont traitées, ne sont jamais très bien prises en compte dans les théories analytiques du mouvement d'un satellite artificiel de la Terre.

Dans l'optique du long terme, il faut s'attacher à combiner entre elles ces théories, en y ajoutant des termes numériques complémentaires pour satisfaire aux exigences de précision. Précisons à ce stade, que l'intégration numérique des équations différentielles du mouvement peut, dans certains cas, servir d'étape intermédiaire pour l'obtention et le contrôle d'une théorie analytique. Aussi, nous nous attacherons au choix d'un intégrateur performant, pour pouvoir comparer intégrations numérique et analytique.

La seconde famille de méthodes englobe les procédés semi-numériques. L'idée de base, propre à ces méthodes, est liée à une transformation du système différentiel

initial, afin de s'affranchir des courtes périodes, et à une intégration numérique, cette fois à grands pas (plusieurs fois la révolution du satellite) des nouvelles équations. C'est la méthode de centrage appliquée à la géodésie spatiale, méthode phare de notre travail, que nous nous proposons de développer à un ordre élevé, avec l'inclusion de toutes les forces quelle qu'en soit l'origine.

Dans notre cas, le centrage devra agir comme un filtre des courtes périodes, et uniquement de celles-ci; il aura pour fonction de moyenniser le second membre du système initial. Comme une grande précision est indispensable pour déterminer, par la suite, des paramètres physiques qui influent très peu à court terme sur l'orbite d'un satellite artificiel, il sera important d'avoir un niveau de troncature relativement élevé (par rapport au petit paramètre) dans l'algorithme de l'approximation (moyenne). Il conviendra aussi d'associer à la méthode un intégrateur précis stable et rapide.

Enfin, il faudra comparer l'orbite théorique (un arc de 6 mois, un an ou plus) à l'observation en général. L'utilisation de la méthode de centrage imposant de travailler avec de nouvelles variables (les éléments moyens), il sera nécessaire de déterminer des quantités équivalentes à partir des observations classiques de distances ou de vitesses (laser, Doppler,...). Un algorithme de filtrage doit donc être mis au point, afin d'effectuer un prétraitement sur les arcs courts choisis pour la comparaison.

Les orbites (2 jours à 1 semaine) ainsi prétraitées, et ayant été préalablement ajustées sur des observations, fourniront un ensemble de variables moyennes dites "pseudo-observées"; on pourra alors comparer théorie et "pseudo-observations", afin d'interpréter les résidus obtenus.

D'un point de vue historique, le problème de la détermination de paramètres physiques responsables de variations lentes, périodiques ou non, sur la trajectoire d'un satellite artificiel, n'est certes pas nouveau. Schématiquement, trois grands types de méthode d'analyse ont été abordés au cours des 20 dernières années.

Les procédés analytiques étaient prédominants dans les années 1960 (Kozai, King-Hele,...). Ils s'attachaient essentiellement à la détermination des coefficients zonaux du développement du potentiel terrestre, caractérisant les grandes ondulations du géoïde.

Un peu plus tard, plusieurs restitutions se sont effectuées par intégration numérique directe et correction différentielle d'orbites à partir d'observations brutes. Ces méthodes sont encore employées dans les gros centres de traitement opérationnel riches en temps de calcul (Université du Texas, NASA,...), et ont été étendues à la détermination de termes de marées, etc...

Enfin, sont apparus dans les années 1970, les procédés semi-numériques, combinant transformation analytique et intégration numérique (Wagner, Borderies,...).

Notre objectif principal étant présentement l'analyse à long terme de l'orbite perturbée d'un satellite artificiel, nous avons, pour ce faire, tenu compte des précédents travaux concernant cette analyse, avec l'utilisation de la structure des logiciels LAGRAN-CODIOR mise en place au G.R.G.S. il y a plus d'une dizaine d'années par G. Balmino et N. Borderies, notamment.

Nous avons complété voire entièrement revu ces programmes, mais l'architecture informatique de base a été maintenue dans son esprit.

L'exposé de nos travaux comportera deux volets.

Dans une première partie, nous ferons le point des approches numériques et analytiques du problème et des résultats obtenus.

Dans une deuxième partie, nous définirons la méthode de centrage, qui nous paraît constituer une avance originale et importante par rapport aux approches numériques et analytiques.

PREMIERE PARTIE

A. INTEGRATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL:

Un logiciel d'extrapolation d'orbites de satellites est, en soit, un outil indispensable en géodésie spatiale. Son utilisation est souvent liée au traitement des nombreuses données de poursuite de satellites (mesure de vitesse radiale, mesure de distance par laser,...), mais aussi aux calculs de prévisions de passages d'un satellite au-dessus d'une station d'observation, etc... (logiciels POINO et VISIRE), [10].

Les figures (1) et (1 bis) représentent une comparaison entre des mesures de distance obtenues par télémétrie laser (station de Grasse, C.E.R.G.A.) et un calcul d'orbite prédite. Les résidus (en aller et retour) peuvent être minimisés à des fins de tri, grâce à un ajustement empirique de biais (Δt et ΔM). Les figures (12) et (13) montrent le même type de résidus, obtenus en utilisant un calcul précis de la trajectoire, et à partir desquels une compression des données est effectuée (points normaux). La figure (14) indique les histogrammes de ces résidus, par station.

Compte tenu de la diversité des tâches à accomplir, il n'est pas nécessaire d'avoir toujours une grande précision sur l'orbite calculée, d'autant que précision est synonyme de ralentissement des procédures. Au cours de notre travail, nous avons été amené à utiliser des méthodes d'intégration numérique (logiciel type : LAGRAN2) et des méthodes analytiques (logiciel type : CANEL2) [8], [9].

Dans cette première partie, nous nous attacherons d'abord à la description des caractéristiques générales concernant ces méthodes en nous référant à des notes techniques déjà publiées, relatives aux différents logiciels et algorithmes.

Nous reprendrons les approches numériques et analytiques propres au calcul d'orbites et, pour chacune d'elles, nous examinerons dans quelle mesure elles permettent d'atteindre le double objectif de précision (nécessairement liée au traitement observationnel) et de stabilité (nécessairement liée à la détermination des arcs longs).

4448 ECHOS RMS :82 M

ITER: 1

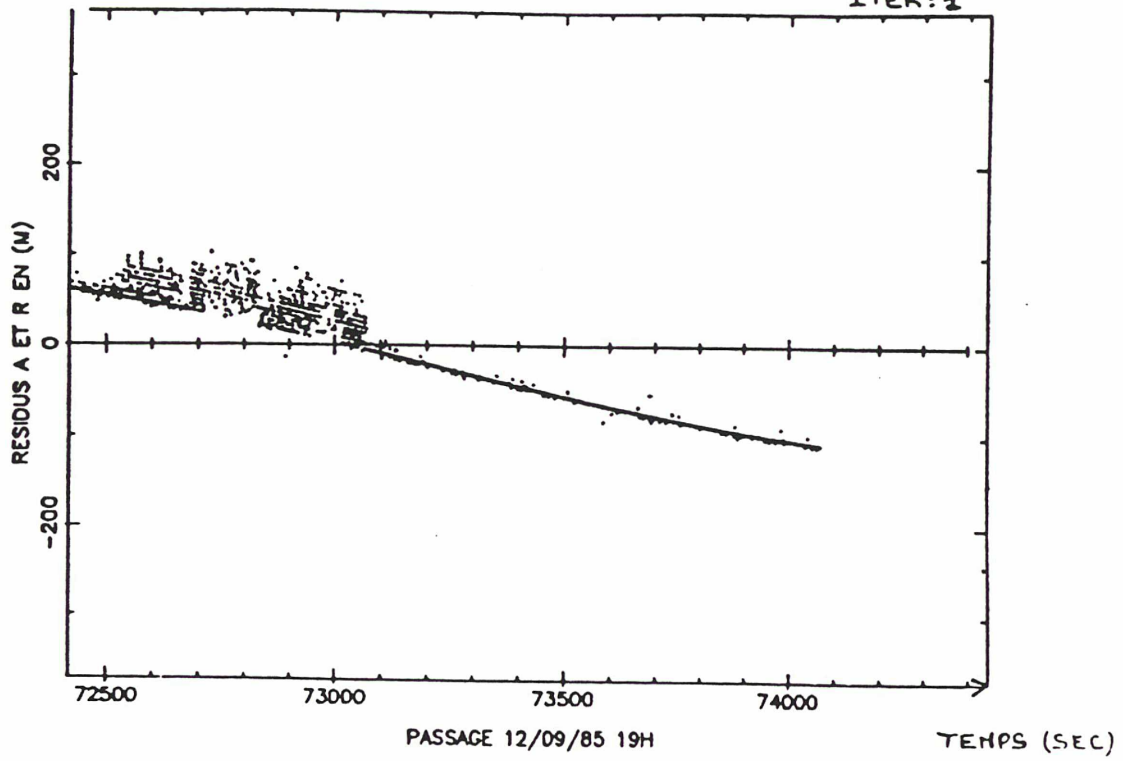
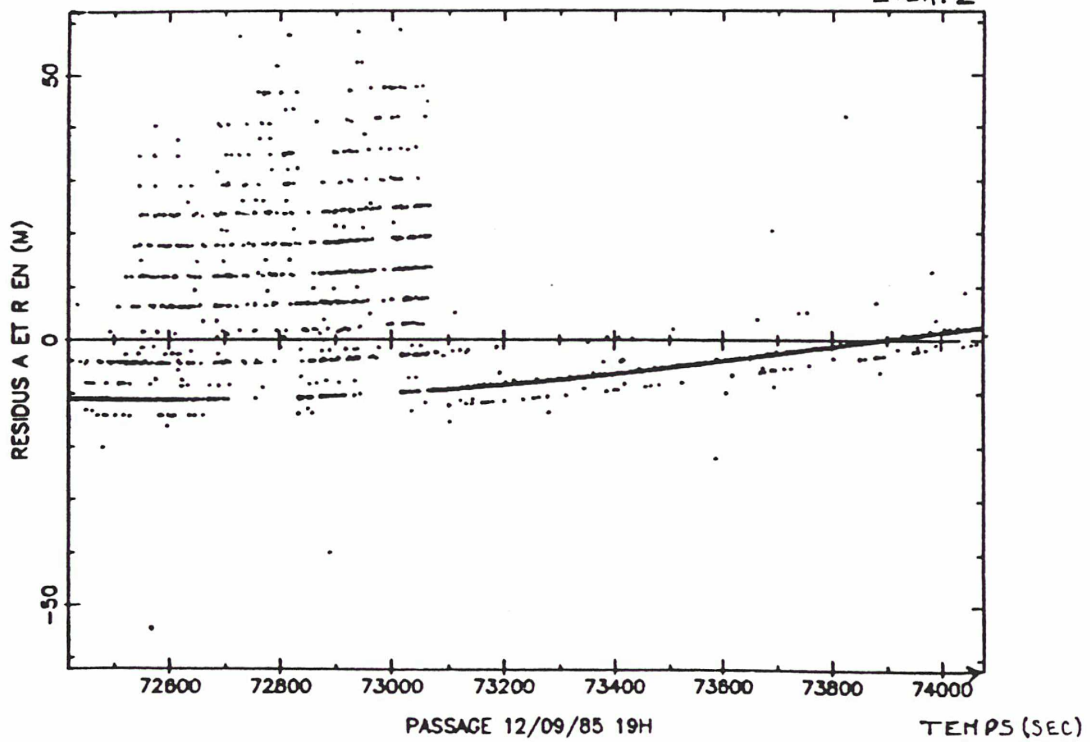


Fig. 1

4441 ECHOS RMS :10 M

ITER: 2



11
3643 ECHOS RMS :3 M

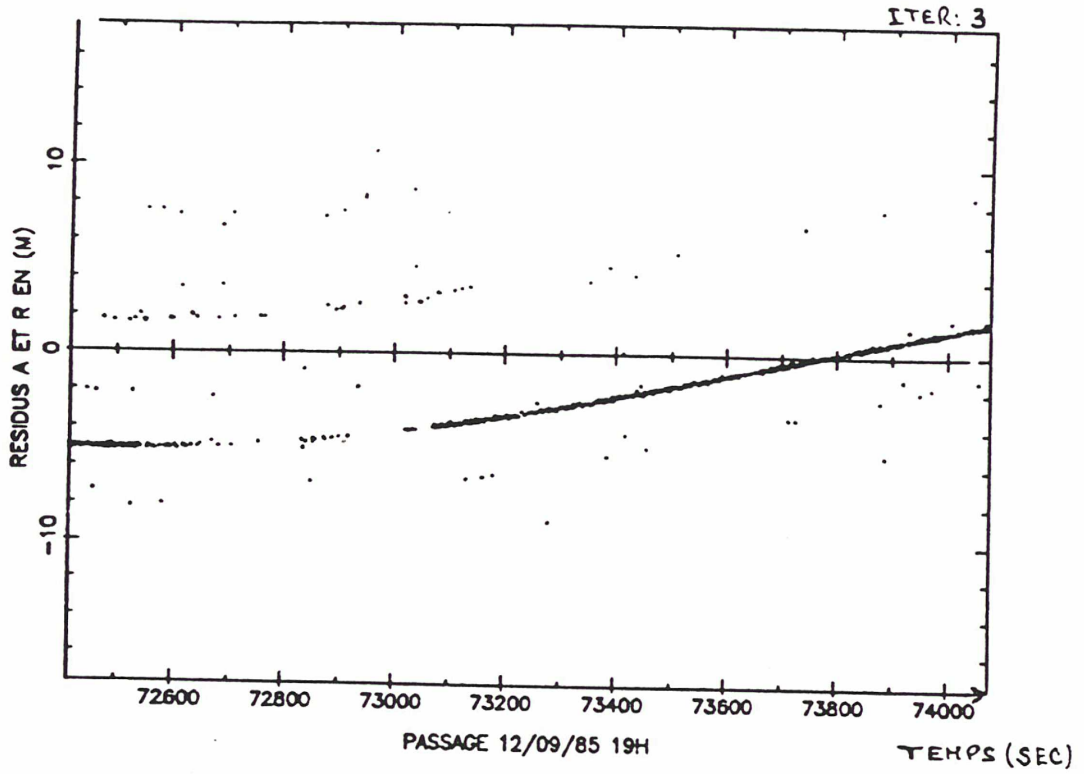
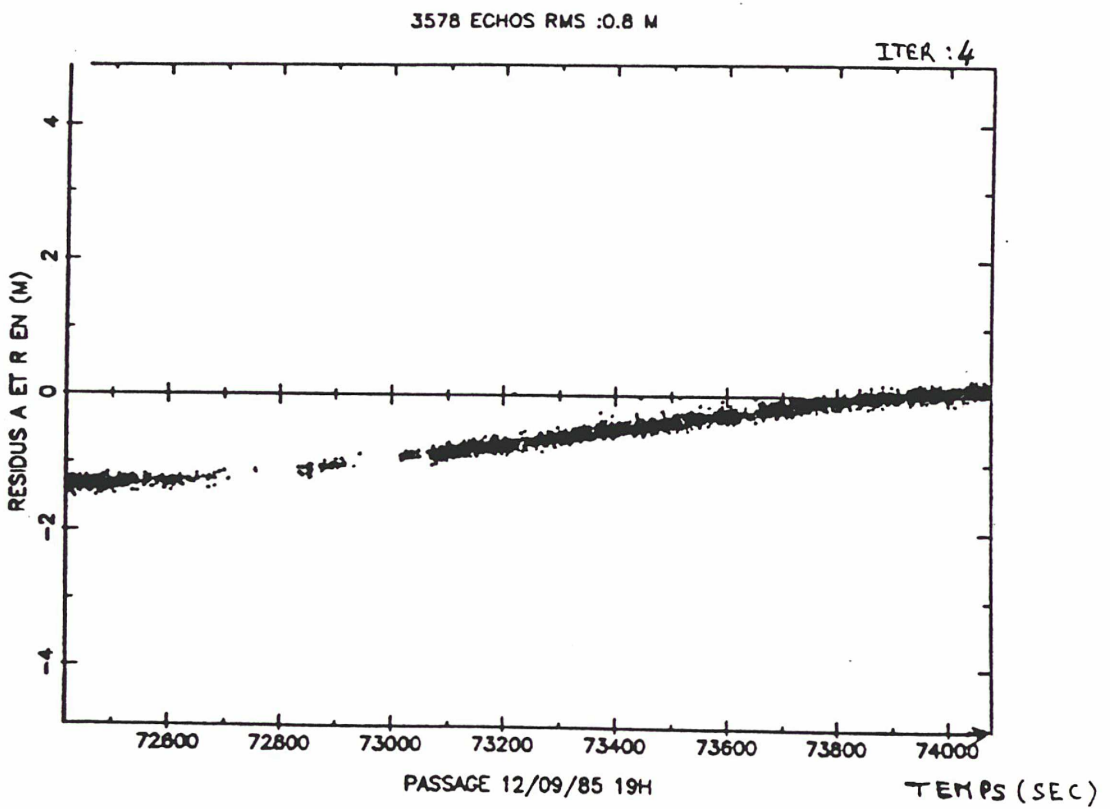


Fig. 1bis



Satellite LAGEOS

275 - 1984

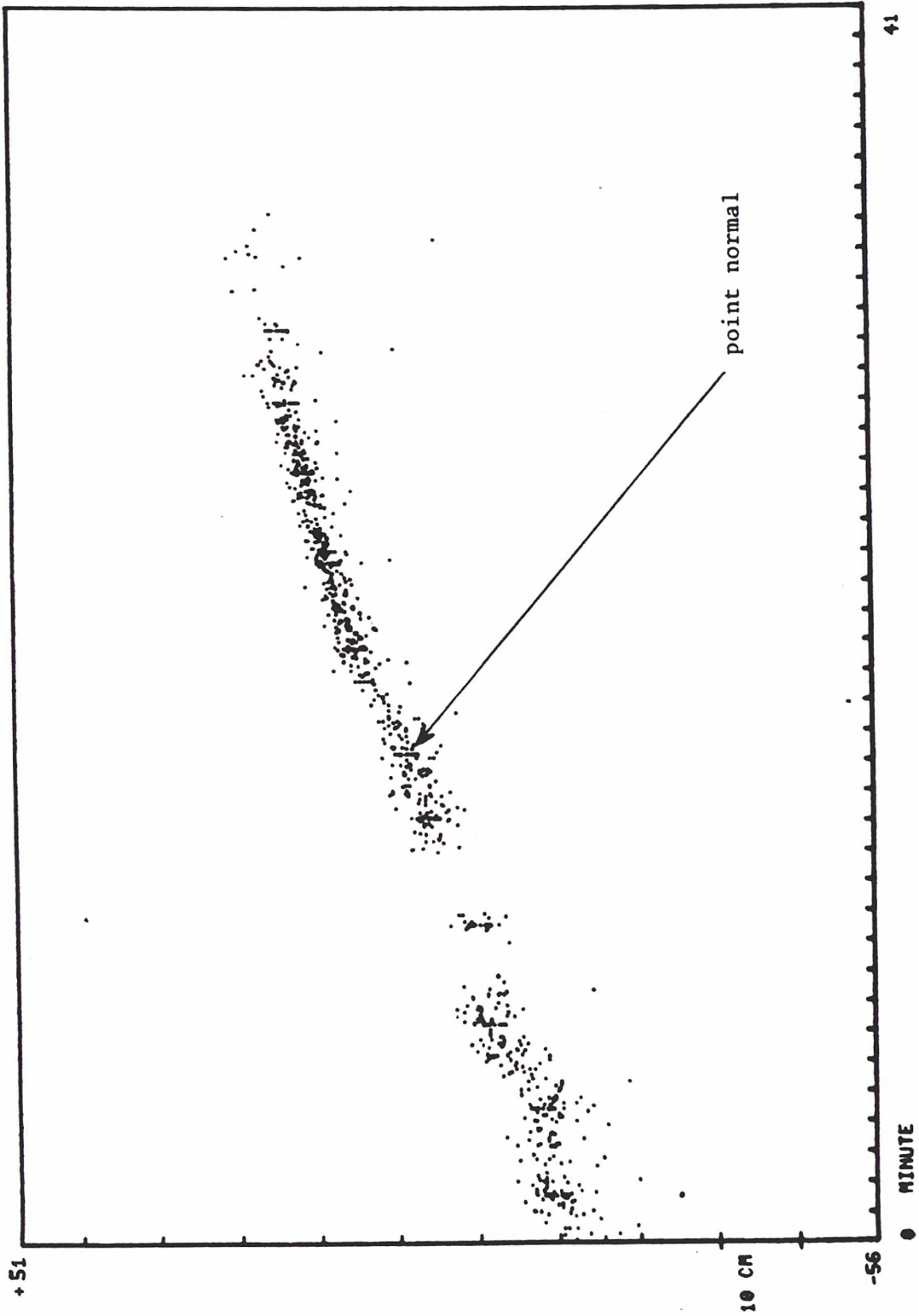
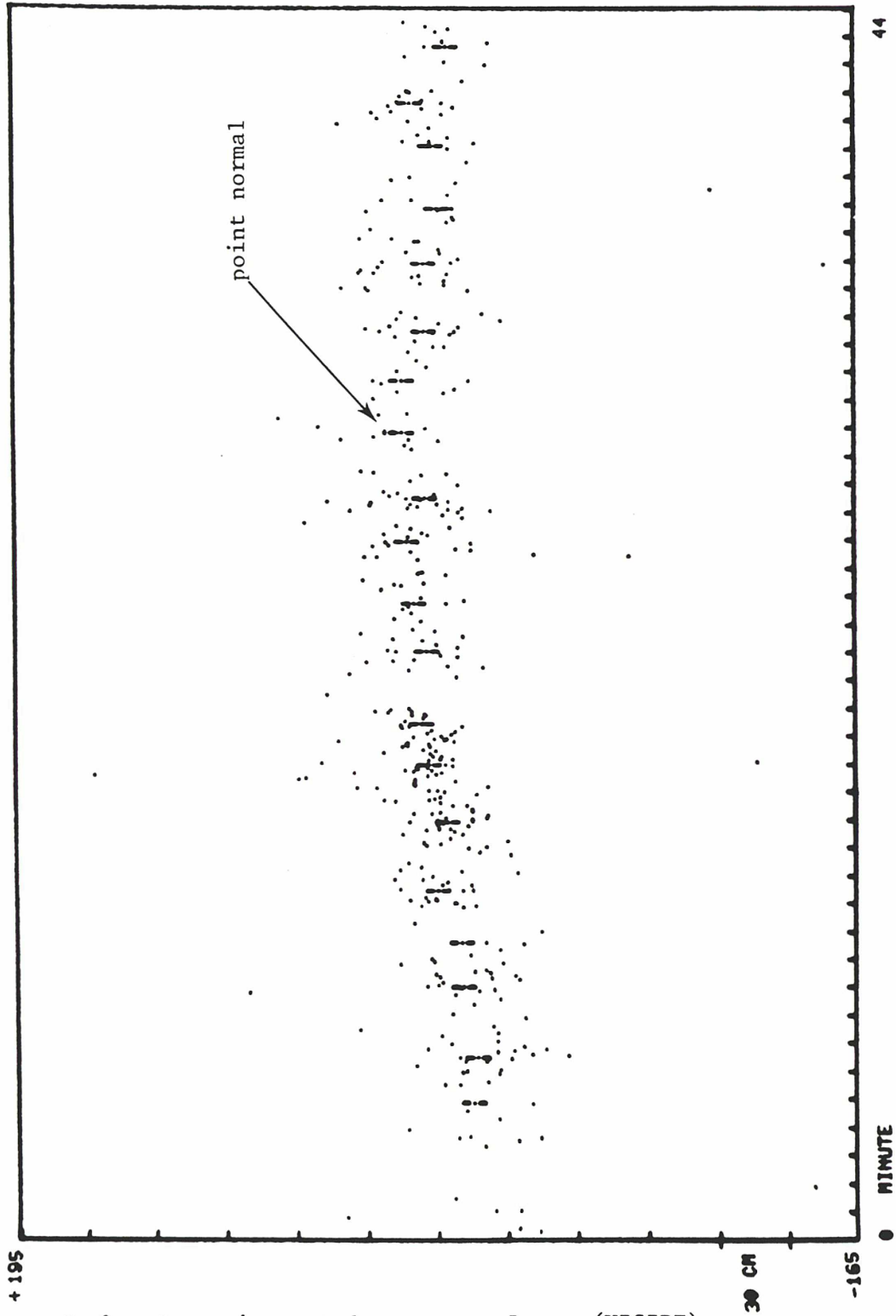


Fig. 2 STATION 7090 PASSAGE 2

Chaîne de traitement des mesures Laser (VISIRE)

Satellite LAGEOS

275 - 1984



Chaîne de traitement des mesures Laser (VISIRE)

Fig. 3 STATION 7907 PASSAGE 2

RESID <	-500.00	0
RESID <	-100.00	0
RESID <	-50.00	0
RESID <	-20.00	0
RESID <	-10.00	0
RESID <	-5.00	0
RESID <	-2.00	0
RESID <	-1.00	0
RESID <	-.00	0
RESID <	-.30	0
RESID <	-.70	0
RESID <	-1.50	8
RESID <	-3.00	19
RESID <	-6.00	14
RESID <	-12.00	15
RESID <	-24.00	26
RESID <	-48.00	25
RESID <	-96.00	23
RESID <	-192.00	26
RESID <	-384.00	16
RESID <	-768.00	22
RESID <	-1536.00	10
RESID <	-3072.00	14
RESID >	0.00	9
RESID >	.05	5
RESID >	.10	0
RESID >	.15	0
RESID >	.20	0
RESID >	.25	1
RESID >	.30	0
RESID >	.35	0
RESID >	.40	0
RESID >	.45	0
RESID >	.50	0
RESID >	.60	0
RESID >	.70	0
RESID >	.80	0
RESID >	.90	0
RESID >	1.00	0
RESID >	2.00	0
RESID >	5.00	0
RESID >	10.00	0
RESID >	20.00	0
RESID >	50.00	0
RESID >	100.00	0
RESID >	500.00	0

TOTAL : 245
R.M.S.: .329 m

RESID <	-500.00	0
RESID <	-100.00	0
RESID <	-50.00	0
RESID <	-20.00	0
RESID <	-10.00	0
RESID <	-5.00	0
RESID <	-2.00	0
RESID <	-1.00	0
RESID <	-.50	0
RESID <	-.40	0
RESID <	-.70	0
RESID <	-1.50	0
RESID <	-3.00	0
RESID <	-6.00	0
RESID <	-12.00	0
RESID <	-24.00	0
RESID <	-48.00	0
RESID <	-96.00	25
RESID <	-192.00	220
RESID <	-384.00	138
RESID <	-768.00	94
RESID <	-1536.00	49
RESID <	-3072.00	66
RESID <	-6144.00	52
RESID >	0.00	49
RESID >	.05	27
RESID >	.10	16
RESID >	.15	9
RESID >	.20	4
RESID >	.25	1
RESID >	.30	0
RESID >	.35	0
RESID >	.40	0
RESID >	.45	0
RESID >	.50	0
RESID >	.60	0
RESID >	.70	0
RESID >	.80	0
RESID >	.90	0
RESID >	1.00	0
RESID >	2.00	0
RESID >	5.00	0
RESID >	10.00	0
RESID >	20.00	0
RESID >	50.00	0
RESID >	100.00	0
RESID >	500.00	0

TOTAL : 800
R.M.S.: .078 m

RESID <	-500.00	0
RESID <	-100.00	0
RESID <	-50.00	0
RESID <	-20.00	0
RESID <	-10.00	0
RESID <	-5.00	0
RESID <	-2.00	0
RESID <	-1.00	0
RESID <	-.50	0
RESID <	-.40	0
RESID <	-.70	0
RESID <	-1.50	0
RESID <	-3.00	0
RESID <	-6.00	0
RESID <	-12.00	0
RESID <	-24.00	0
RESID <	-48.00	8
RESID <	-96.00	20
RESID <	-192.00	53
RESID <	-384.00	37
RESID <	-768.00	143
RESID <	-1536.00	134
RESID <	-3072.00	126
RESID <	-6144.00	94
RESID <	-12288.00	66
RESID <	-24576.00	30
RESID >	0.00	16
RESID >	.05	7
RESID >	.10	6
RESID >	.15	0
RESID >	.20	0
RESID >	.25	0
RESID >	.30	0
RESID >	.35	0
RESID >	.40	0
RESID >	.45	0
RESID >	.50	0
RESID >	.60	0
RESID >	.70	0
RESID >	.80	0
RESID >	.90	0
RESID >	1.00	0
RESID >	2.00	0
RESID >	5.00	0
RESID >	10.00	0
RESID >	20.00	0
RESID >	50.00	0
RESID >	100.00	0
RESID >	500.00	0

TOTAL : 800
R.M.S.: .213 m

Fig. 4 ; LAGRAN 2 + POINO - [O-C] : Satellite LAGEOS

A.I. METHODES NUMERIQUES:

Les méthodes numériques d'intégration de systèmes d'équations différentielles ont connu de récents progrès. Parallèlement, l'utilisation de calculateurs de plus en plus performants permet, depuis une vingtaine d'années, d'employer ces méthodes en mécanique céleste et en géodésie spatiale. Sur des arcs de trajectoire relativement courts, jusqu'à plusieurs milliers de révolutions, une précision cohérente avec les observations est conservée, dans la mesure où certains coefficients empiriques permettent de pallier les insuffisances des modèles de forces et des procédures numériques.

Pour tester ou déterminer un modèle de forces quelconque, que l'on veut proche de la réalité, il faut pouvoir restituer des orbites de satellite en intégrant les équations de la dynamique, puis comparer les résultats aux observations. De la qualité de l'intégration dépend donc la possibilité d'améliorer un modèle physique donné.

La nature même d'un système différentiel peut, à elle seule, conditionner tout un calcul. Aussi, avant de décrire les méthodes numériques utilisées pour intégrer ce système, considérons les équations du mouvement képlérien perturbé:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\frac{\mu x_i}{r^3} + f_l(x_i, \dot{x}_i, \varepsilon_k, t) \\ \text{(I)} \quad x_i(t_0) &= x_i^0 & (i = 1, 3) \\ \dot{x}_i(t_0) &= \dot{x}_i^0 \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont (x_i^0, \dot{x}_i^0) , μ est la constante gravitationnelle (notée également GM), f_l est le vecteur des forces non képlériennes ($l = 1, N_f$), et ε_k est le vecteur des paramètres du modèle adopté ($k = 1, N_p$).

L'étude des trajectoires képlériennes ($f_l = 0$) permet de définir 6 intégrales premières du mouvement non perturbé : $(a, e, i, \Omega, \omega, M - nt)$. A chaque instant, le passage des vecteurs position et vitesse du satellite aux éléments osculateurs instantanés $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$, ou vecteur E_j ($j = 1, 6$), se fait par une simple transformation mathématique.

Contrairement aux paramètres (x_i, \dot{x}_i) , dont l'amplitude des variations est très importante (valeurs négatives et positives) au cours du mouvement, le vecteur E_j évolue proportionnellement aux perturbations. Aussi est-il plus "naturel" de se reporter aux équations de Lagrange (et/ou de Gauss) pour une étude du mouvement.

Par ailleurs, il peut être extrêmement efficace d'intégrer le mouvement "réel"

d'un satellite, autour d'un mouvement de référence aussi proche que possible de la réalité et ce, afin de diminuer l'amplitude des perturbations à calculer et donc, d'augmenter la précision du calcul numérique ainsi que la stabilité de la solution (c'est le principe de la méthode d'Encke). Cependant, il est clair que la précision, avec laquelle l'orbite de référence est connue, devient une condition majeure à l'obtention de la solution désirée. Aussi, nous sommes nous placés encore présentement dans le cas d'une référence képlérienne; l'utilisation des équations de Lagrange (et/ou de Gauss) ainsi que la structure des intégrateurs numériques utilisés, permettent une mise en oeuvre aisée de cette méthode.

La composante newtonienne $(-\mu x_i/r^3)$ ayant disparue du système différentiel initial, les équations de la dynamique pourront être intégrées en tenant compte de perturbations très faibles ($10^{-13} m/s^2$ et même moins) dans le second membre $g(E_j, \varepsilon_k, t)$:

$$(II) \quad \begin{aligned} \dot{E}_j &= g(E_j, \varepsilon_k, t) \\ E_j(t_0) &= E_j^0 \end{aligned} \quad (j = 1, 6)$$

D'autre part, on pourra noter au passage la perte de la symétrie (x,y,z) dans le système différentiel initial et donc, l'obligation d'effectuer des transformations supplémentaires (de $\partial/\partial x_i$ à $\partial/\partial E_j$) à chaque instant.

Un mauvais conditionnement du système des équations de Lagrange (II) peut également provenir de la valeur même de l'excentricité (et/ou de l'inclinaison) d'un satellite donné, compte tenu de la présence de e et $\sin i$ au dénominateur du second membre des équations.

Afin d'éviter tout problème numérique au moment de l'intégration, un nouveau jeu de paramètres, dits "universels", peut alors être choisi (par exemple : $a, e \cos(\omega + \Omega), e \sin(\omega + \Omega), \tan i/2 \cos \Omega, \tan i/2 \sin \Omega, \omega + \Omega + M$). Les équations de Lagrange sont mieux conditionnées, mais contrairement aux équations de Gauss, elles font intervenir le calcul supplémentaire des dérivées partielles de la fonction perturbatrice par rapport aux nouveaux éléments.

Les méthodes d'intégration numérique que nous avons utilisées se restreignent à l'emploi d'intégrateurs linéaires, dit de premier ordre. La formule d'approximation la plus générale sur laquelle s'appuient ces intégrateurs est :

$$\frac{1}{h} \left[(E_j)_{n+1} + \sum_{k=p_0}^P a_k (E_j)_{n+1-k} \right] = \sum_{k=k_0}^K b_k g_k$$

où : K : ordre maximum de la méthode,

a_k, b_k : coefficients de poids.

D'un point de vue général, les méthodes sont basées sur le principe de la discrétisation: on cherche des valeurs approchées de la solution exacte $E_j(t)$, sur un ensemble de points équidistants (fréquemment). L'algorithme proprement dit consiste à faire correspondre à tous les points t_n ($t_0 + nh$, où h est le pas d'intégration) des nombres $(E_j)_n$ qui approchent la valeur $E_j(t_n)$ de la solution exacte du système au point t_n .

Nous distinguons les algorithmes à pas séparés (méthodes d'Euler, de Runge et Kutta,...) des algorithmes à pas liés (méthodes de Cowell, d'Adams, de Bulirsch et Stoer,..). Si les premiers n'utilisent pas l'information fournie, à un instant t_n , par les points t_{n+1-k} déjà calculés, les seconds (d'ordre $K = k$ maximum), l'utilisant, ont l'avantage d'avoir accès à la série des termes $g((E_j)_{n+1-k}, t_{n+1-k})$. En contrepartie, un algorithme à pas lié présente un problème de démarrage (constitution du premier tableau $(E_j)_q = E_j(t_q)$, qui ne peut être résolu que par itérations successives.

Deux grands types d'erreurs sont à l'origine de la divergence des méthodes numériques: les erreurs de troncature et les erreurs d'arrondi.

Si les méthodes d'Adams par exemple, intègrent exactement toute solution polynomiale de degré inférieur ou égal à l'ordre d'intégration, il existe cependant un résidu non nul provenant de la décomposition de $g(E_j(t), t)$ sur la classe des fonctions polynomiales $p_i(t) = t^{i-1}$. L'erreur de troncature, dans le cas classique d'intégration exacte de ces fonctions, est de l'ordre de h^{K+1} , pourvu que les dérivées soient bornées.

Cette erreur sera d'autant plus grande que l'ordre est faible, le pas grand, la durée d'intégration élevée, et que la décomposition de $g(E_j(t), t)$ sur les $p_i(t)$ converge mal. Ainsi, il peut être parfois avantageux de "circulariser" un algorithme, c'est-à-dire, de rendre toute fonction harmonique ($h_i(t) = \exp\sqrt{-1}(i-1)\omega t$) intégrable exactement. En pratique, ceci est couramment mis en oeuvre dans des études sur le mouvement orbital (logiciels ZOOM,...), bien que le temps de calculs en soit pénalisé.

La deuxième cause d'erreurs commises par un intégrateur numérique est directement liée au volume des calculs effectués, et au calculateur utilisé (14 chiffres significatifs, ou plus ou moins): c'est l'erreur d'arrondi. Elle sera d'autant plus grande que le pas est petit et que la durée d'intégration est grande.

A.I.1. METHODE D'INTEGRATION (PAR INTERPOLATION) MIXTE D'ADAMS-MOULTON COWELL:

La mise en oeuvre de cette méthode mixte d'intégration numérique a été faite par N. Borderies [1], afin de satisfaire aux exigences de la méthode de centrage, ainsi qu'aux impératifs de précision qui en découlent.

Le schéma de l'algorithme comporte, en première partie, une phase de démarrage (d'ordre c), dont le but est la convergence du tableau des dérivées secondes sur l'intervalle $[t_0 - ah, t_0 + bh]$ (avec a et b inférieurs à c). La seconde partie concerne la phase de progression (d'ordre m), qui s'effectue pas à pas (30 secondes à 120 secondes, en général) par un processus de prédiction-correction.

Nous avons testé et utilisé cet intégrateur dans plusieurs configurations dynamiques. La méthode mixte AMC est avantageuse du point de vue du temps de calcul (les formules font directement intervenir les valeurs de g et non des différences), et du point de vue de la précision (ordres élevés; jusqu'à $c = 16$, $m = 14$). D'autre part, le fait que l'algorithme soit entièrement paramétré par rapport aux ordres de démarrage et de progression permet une optimisation vis-à-vis des cas à traiter.

A.I.2. METHODE D'INTEGRATION (PAR EXTRAPOLATION) DE BULIRSCH et STOER:

La théorie de l'extrapolation fut exposée en 1965. Elle est à la base d'une des méthodes d'intégration les plus puissantes en précision et en stabilité. Elle a été mise en oeuvre par Bulirsch et Stoer [3], et reprise par G. Balmino [4] pour les besoins d'analyse à long terme en géodésie et planétologie, il y a plus d'une dizaine d'années au G.R.G.S.

La méthode de Bulirsch et Stoer intègre des équations différentielles du premier ordre. Elle est caractérisée par un pas variable (le concept de pas ayant toutefois un sens spécifique à cette méthode), un système prédicteur-correcteur très efficace et rapide, et une extrapolation par fraction rationnelle.

A partir du vecteur d'état $E_j(t)$ du satellite à un instant t , on cherche une estimation E_j^* de $E_j(t + H)$, H étant le pas "global" de l'intégration. Le processus de prédiction est à pas multiples et fournit plusieurs valeurs possibles $E_j^{(i)}$ de E_j^*

pour une suite positive décroissante (tendant vers zéro) de pas réels $h_{(i)} = H/2^{i-1}$.

La correction donne la meilleure estimation de E_j^* en extrapolant les différentes valeurs $E_j^{(i)}$ à l'aide d'une fraction rationnelle $C_m = [C_m^{(i)}, i = 1, n]$;

$$C_m^i(h) = \frac{\sum_{r=0}^{m/2} p_r^{(i)} h^{2r}}{\sum_{t=0}^{m/2} q_t^{(i)} h^{2t}}$$

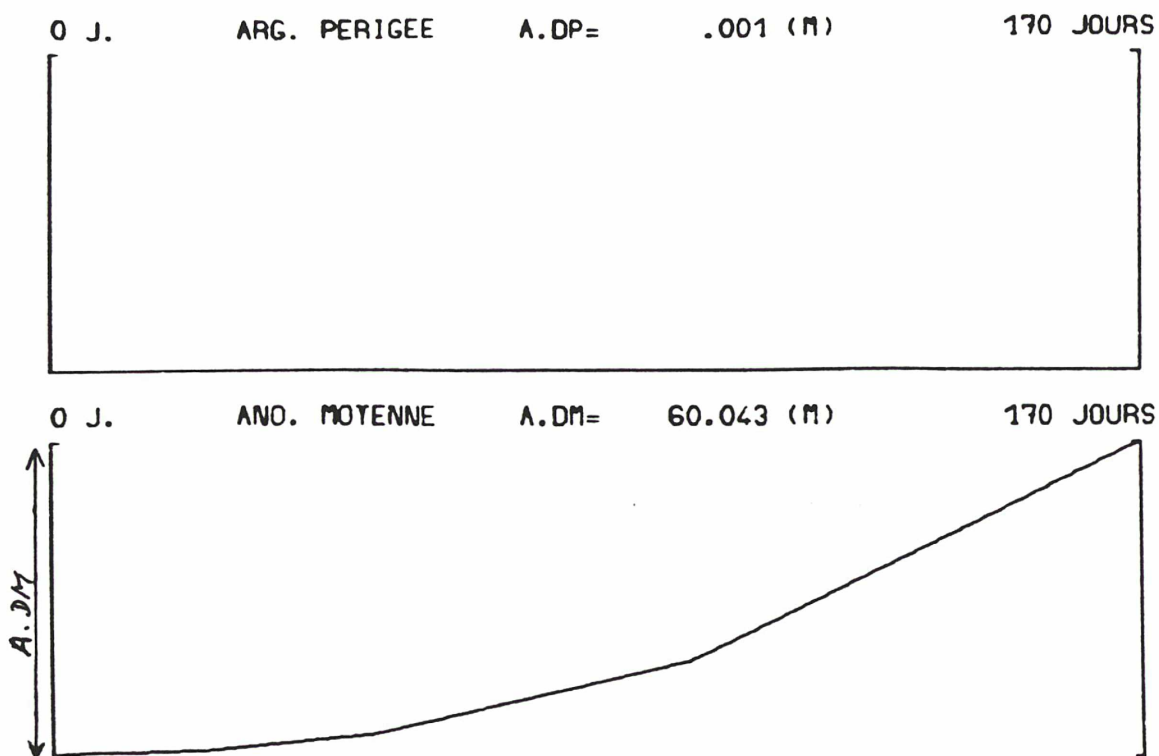
Le nombre n (maximum 10) est déterminé à chaque pas H par:

$$\|E_j^{(i+1)} - E_j^{(i)}\| < \varepsilon \|E_j^{(i)}\|$$

Plus précisément, le prédicteur détermine les valeurs $E_j^{(i)}$, pour un pas $h_{(i)}$ donné, par la méthode dite du "point-milieu". En conséquence, il est linéaire par morceaux dans l'intervalle d'intégration, et il intègre rigoureusement toute fonction $g(E_j(t), t)$ constante sur $[t, t + H]$.

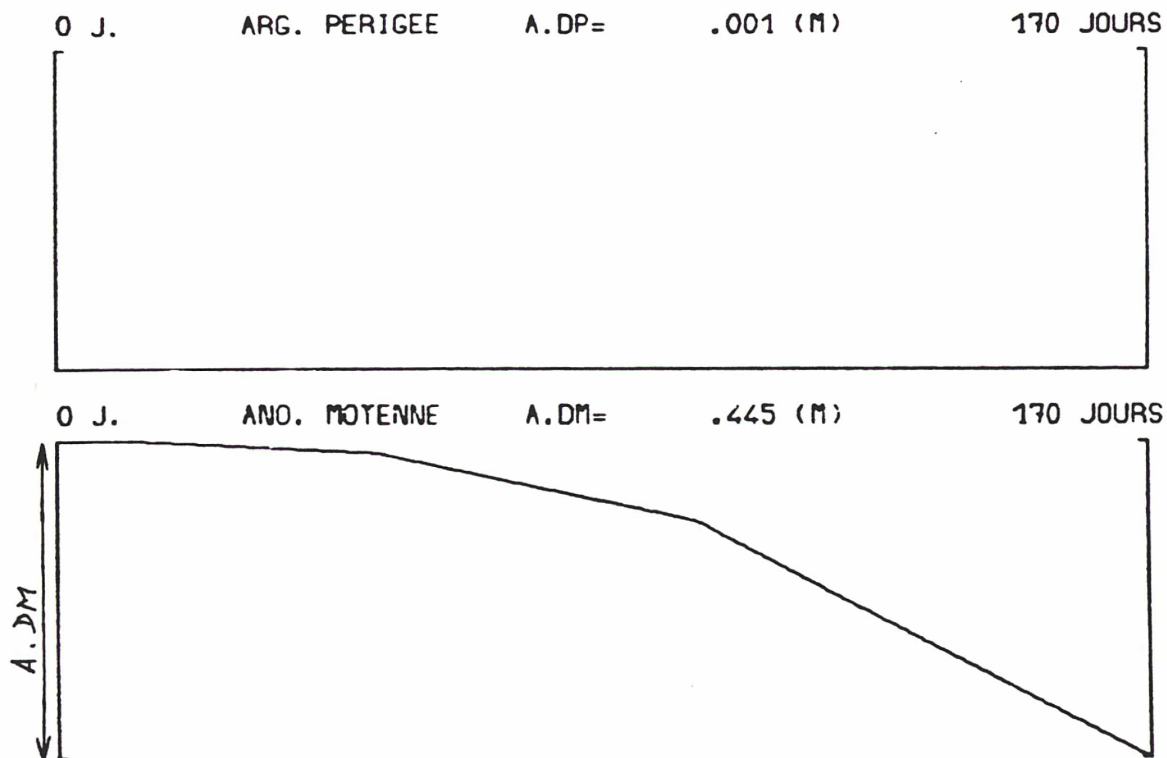
C'est exactement ce qui se passe dans les équations de Lagrange, avec un mouvement képlérien (non perturbé).

Nous avons trouvé une remarquable stabilité de la méthode d'extrapolation de Bulirsch et Stoer, vis-à-vis d'une méthode "classique" à pas lié d'ordre 14 (figure 5). D'autre part, cette méthode semble également plus précise, même si elle s'accompagne de l'inconvénient majeur (en correction différentielle sur des observations, par exemple) d'utiliser un pas global d'intégration assez élevé (quart de la révolution, le pas réel descendant, lui, jusqu'à une minute ou moins), ce qui diminue fortement la résolution temporelle de la solution.



Comparaison de l'intégration numérique (A.M.C.) (ord.14 et pas=60s) avec la solution analytique du mouvement képlérien en Double Précision

Fig. 5



Comparaison de l'intégration numérique (B.S.) avec $M=n(t-t_0)$

(Les constantes de la fonction perturbatrice sont mises à zéro pour les deux cas; les méthodes intègrent exactement le mouvement képlérien).

AMC/n/m ; n = ordre de progression

m = pas en secondes

BS/i/j ; i = nombre de sous-pas disponibles (max = 10)

j = pas en secondes

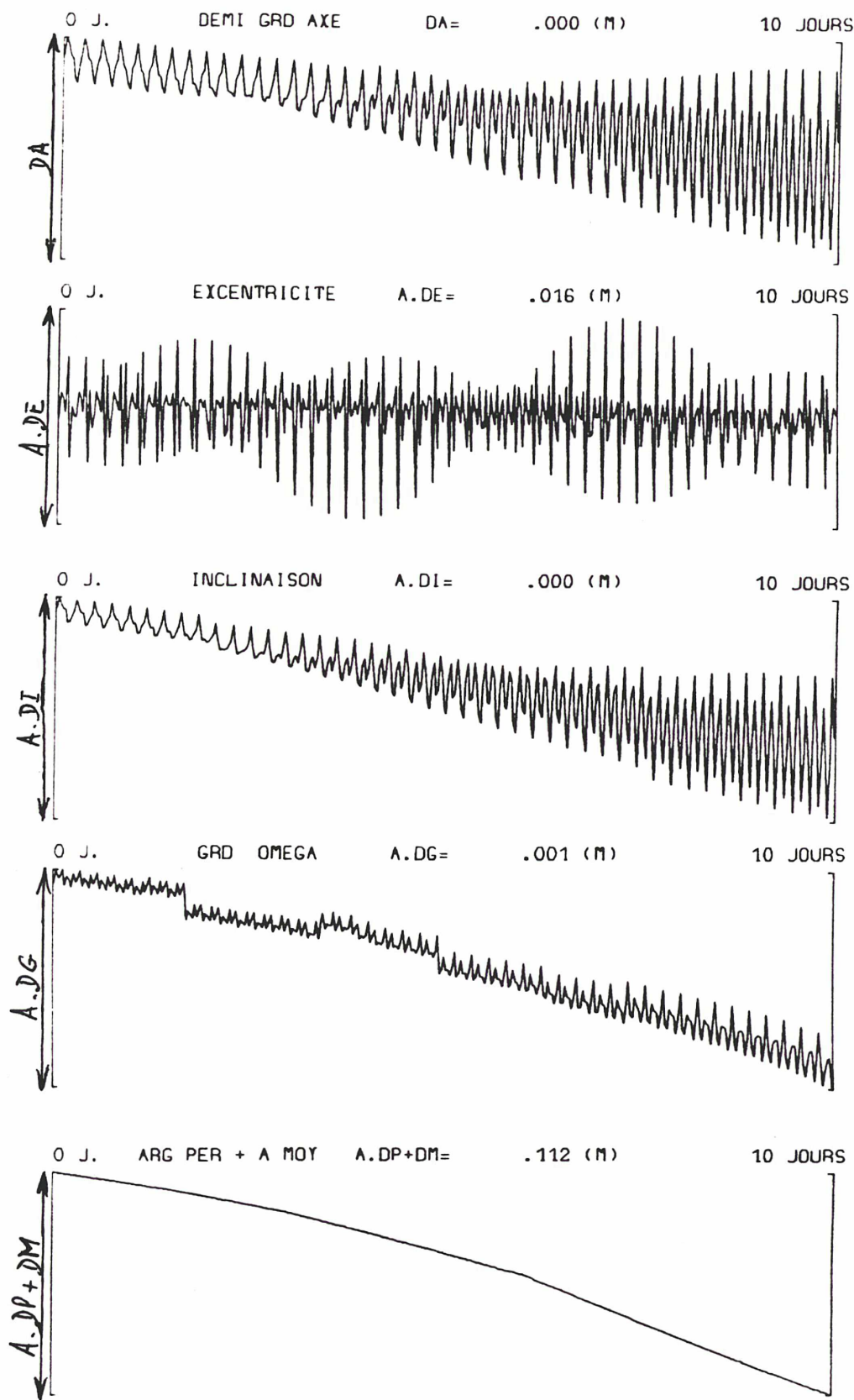
METHODE	TEMPS (CP)	NB D'APPELS SEC/MEMB. 10 jours
AMC/8/60	295 sec	45 607
AMC/12/120	215 sec	30 990
AMC/14/80	262 sec	34 464
BS/10/1200	304 sec	104 400
BS/6/1200	118 sec	35 280

Satellite type : 7300 km, 0.01, 50° $\equiv (\alpha, e, i)$

Fonction de forces : J₂ à J₇

Période : 170 jours

TABLEAU I



Satellite :

$a_0 = 7300 \text{ km}$

$e_0 = 0.01$

$i_0 = 50 \text{ deg}$

Différences des intégrations numériques :

AMC/12/120sec

BS/10/1200sec

Perturbations :

J_2

Fig. 6

L'utilisation de différentes formules d'interpolation (ou d'extrapolation), dans un algorithme de prédiction, débouche sur diverses méthodes d'intégration. Cowell utilise l'interpolation de Stirling (passage de la dérivée seconde \ddot{x}_i à la fonction x_i), les méthodes d'Adams utilisent les techniques de Lagrange et Newton, etc...

Notre étude montre que la méthode de Bulirsch et Stoer est la plus efficace, sous réserve que le nombre d'opérations élémentaires nécessaires au calcul de la fonction (second membre du système à intégrer) ne soit pas trop élevé, entraînant des temps de calculs prohibitifs. Sinon, l'avantage est à des formules du type Adams, ou Cowell, ou encore mixte (tableau I).

Sur une période d'intégration de 10 jours (figure 6), les résultats sont très semblables d'une méthode à l'autre (A.M. Cowell et Bulirsch et Stoer). L'erreur relative à craindre est de l'ordre de 10^{-10} ce qui est en bon accord avec la précision subdécimétrique à atteindre dans un calcul d'éphéméride de satellite.

Il est très difficile de mettre en évidence la défaillance d'un algorithme numérique donné en le comparant à un autre (!). Cependant, nous montrons figures (7) et (8), que la variation moyenne de l'ensemble des paramètres de la trajectoire provient des erreurs d'arrondi dans la méthode mixte Adams-Moulton Cowell, (ordres 14 puis 12, et pas de 120 secondes) par rapport à la méthode d'extrapolation de Bulirsch et Stoer. Hormis le déphasage croissant des courtes périodes, les variations linéaires des éléments métriques et paraboliques des éléments angulaires rappellent beaucoup l'effet du freinage atmosphérique sur une orbite de satellite, avec la différence importante qu'ici, l'anomalie moyenne est "ralentie" (paradoxe des satellites freinés et dont la vitesse augmente).

Compte tenu de ces remarques sur ces cas bien précis, nous avons fait une simulation de calcul de trajectoire, dans laquelle la propagation d'erreurs d'arrondi ("traînée numérique") a été partiellement compensée par une force fictive ($\vec{F}_{TN} = \alpha \cdot \vec{V}/V$, où $\alpha \geq 0$) d'environ $10^{-14} m/s^2$ (figure 9). Nous montrons par ce calcul, que l'effet de la "traînée numérique" dans la méthode A.M. Cowell ne peut se traiter correctement en ajustant un paramètre de freinage le long du vecteur vitesse. Si l'anomalie moyenne a été "accélérée" par le freinage \vec{F}_{TN} , les variables métriques décroissent sous l'action de ce vecteur; l'effet induit (couplage avec J_2) se traduit pleinement sur l'ascension droite du noeud de l'orbite du satellite. Le problème reste entier.

Le logiciel LAGRAN2 fonctionne avec la méthode mixte (AMC) pour tous les problèmes de prédiction à court terme, avec modèle de forces complet (traitement des observations, ..., figures 2, 3 et 4). Dans une seconde version, la méthode de Bulirsch et Stoer sert à effectuer des simulations d'orbites sur de grands intervalles de temps (6 mois à 1 an), avec possibilité de modèles de forces simplifiés (J_2 et une perturbation, par exemple).

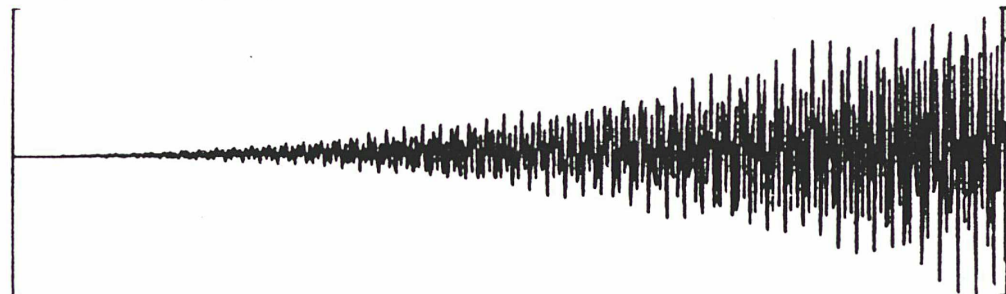
0 J. DEMI GRD AXE DA= .015 (M) 170 JOURS



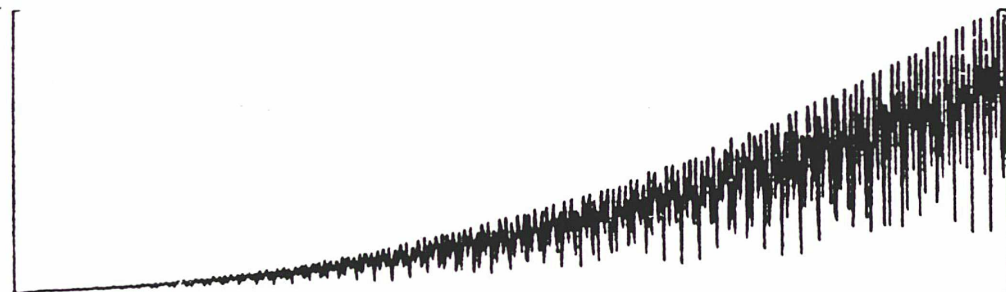
0 J. EXCENTRICITE A.DE= .069 (M) 170 JOURS



0 J. INCLINAISON A.DI= .013 (M) 170 JOURS



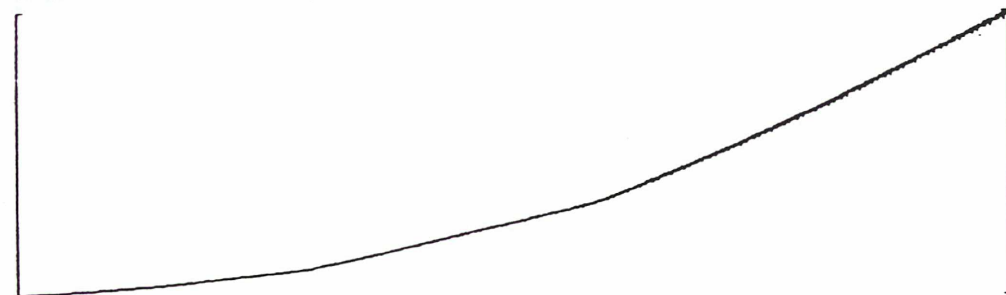
0 J. GRD OMEGA A.DG= .102 (M) 170 JOURS



0 J. ARG. PERIGEE A.DP= .809 (M) 170 JOURS



0 J. ANO. MOTENNE A.DM= 29.104 (M) 170 JOURS



Satellite

$a_o = 7620.083 \text{ km}$

$e_o = 0.0851$

$i_o = 10 \text{ deg}$

Diff. des intégrations numériques:

BS/10/1200sec.

et

AMC/14/120sec.

Perturbations :

$J_2 + J_3$

Fig. 7

0 J. DEMI GRD AXE DA= .046 (M) 170 JOURS



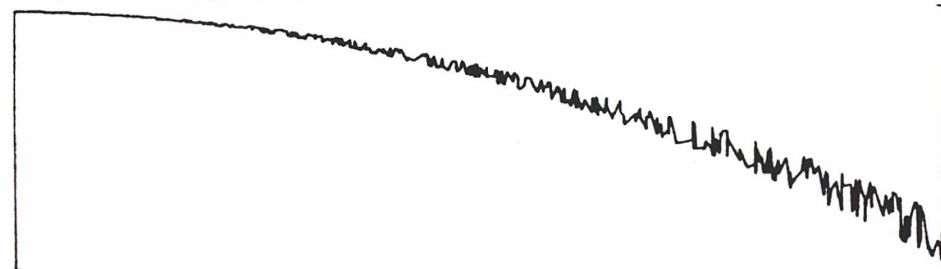
0 J. EXCENTRICITE A.DE= .053 (M) 170 JOURS



0 J. INCLINAISON A.DI= .018 (M) 170 JOURS



0 J. GRD OMEGA A.DG= .125 (M) 170 JOURS



0 J. ARG. PERIGEE A.DP= 5.838 (M) 170 JOURS



0 J. AND. MOTENNE A.DM= 21.440 (M) 170 JOURS



Satellite :

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Différence des intégrations
numérique :

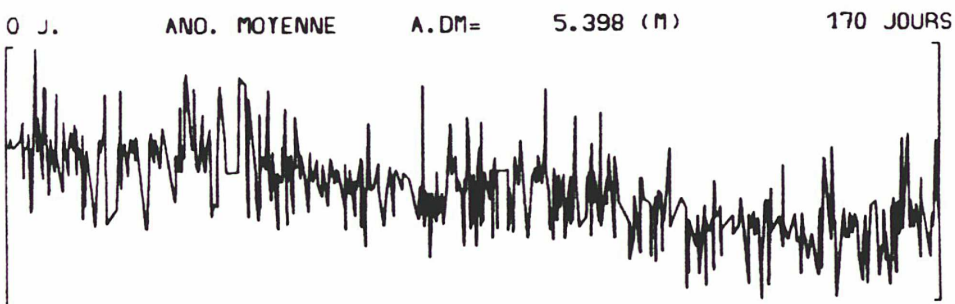
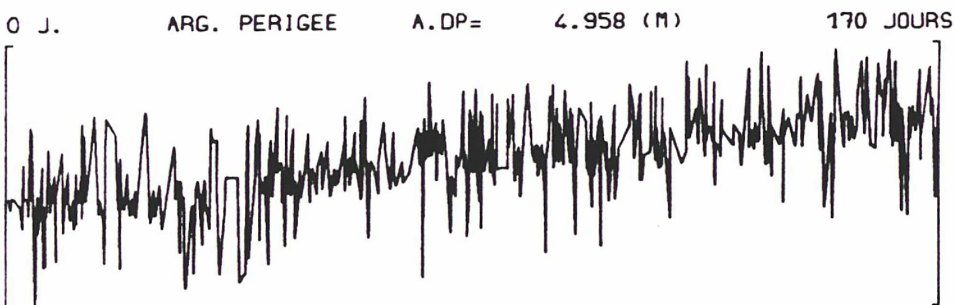
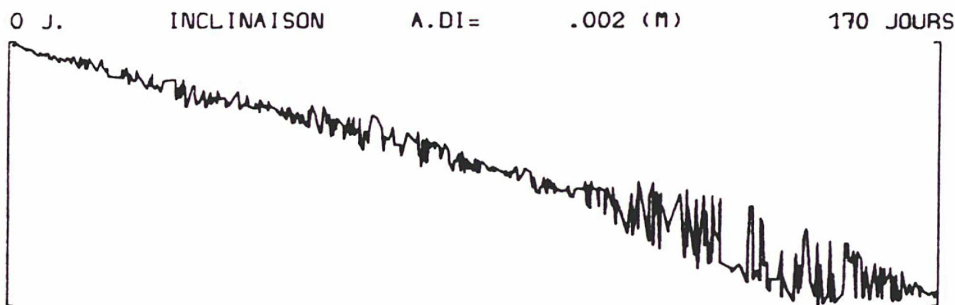
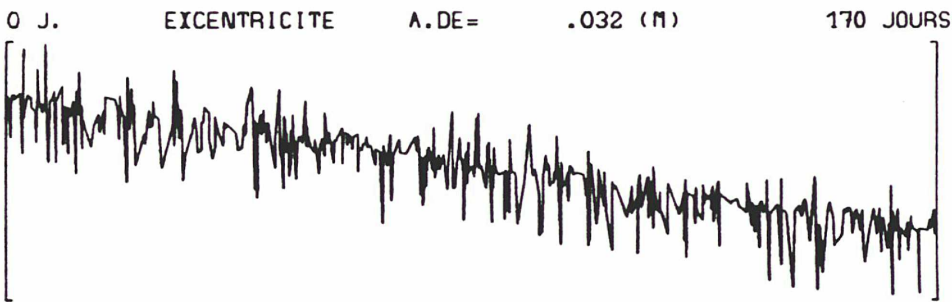
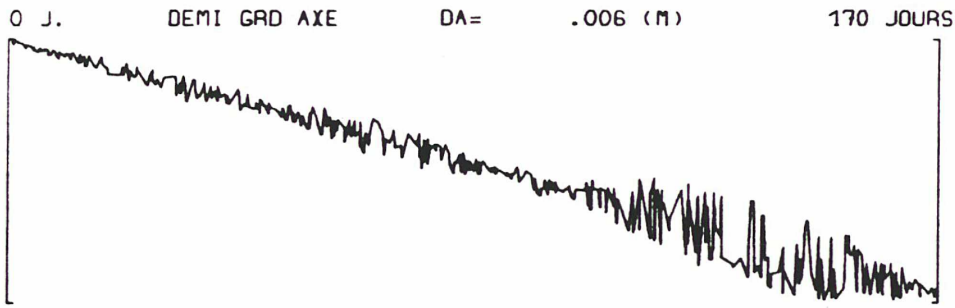
$$\text{AMC}/12/120\text{sec.}$$

$$\text{BS}/10/1200\text{sec.}$$

Perturbations :

J_2

Fig. 8



Satellite :

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Différence des intégrations numériques :

$$\text{AMC/12/120sec. } \left(+ \alpha \cdot \frac{\vec{V}}{V} \right)$$

$$- \text{BS/10/1200sec.}$$

Perturbations :

$$J_2$$

Fig. 9

A.II. METHODES ANALYTIQUES:

Si intéressantes qu'elles soient, les intégrations numériques ne satisfont pas entièrement les besoins d'une étude sur les perturbations d'orbites de satellite artificiel. Elles permettent de donner des résultats immédiats, mais il faut relancer les procédures pour chaque nouvelle trajectoire ou chaque variation d'un paramètre (quel qu'il soit).

De plus, les intégrations numériques se rapportent toujours à un intervalle de temps limité et, ne donnant aucune indication sur l'allure du mouvement au-delà, elles n'ont pas le caractère général d'une théorie analytique.

D'autre part, l'intégration numérique "mélange" toutes les perturbations au sein du second nombre des équations de la dynamique. En conséquence, il est impossible de séparer les causes et les effets propres à chaque terme perturbateur.

Le problème d'approcher la solution d'un système différentiel dépendant d'un petit paramètre (ε) n'est pas nouveau. Depuis le siècle dernier, des méthodes ont été développées pour obtenir des approximations de la solution exacte d'un tel système, celui-ci étant facilement intégrable lorsque le petit paramètre (ε) est nul. Ces méthodes sont à l'origine de la théorie des perturbations, qui cherche à approcher la solution exacte par un développement en série de (ε). Le théorème de Poincaré est relatif à un tel développement, dans la mesure où le second membre du système différentiel étudié est également développable en série.

L'un des intérêts des intégrations numériques est qu'elles fournissent des valeurs exactes instantanées de tous les paramètres, ce qui permet, par l'emploi des équations de Lagrange, d'obtenir en particulier les variations instantanées des éléments orbitaux des satellites sous l'action d'un champ de forces.

Dans les théories analytiques, ces valeurs exactes instantanées étant inconnues, on introduit des valeurs approchées (éléments képlériens) dans les second membres. Les équations sont alors facilement résolubles, pour obtenir une première solution (ordre un). Ensuite, une meilleure solution (la deuxième) peut être obtenue, en remplaçant dans le second membre du système différentiel les éléments moyens initiaux par les expressions fournies à la première itération.

Ce procédé itératif n'est pas la seule méthode qui existe pour obtenir la solution des équations du mouvement d'un satellite. Grâce à la théorie de Hamilton et Jacobi, il est apparu parfois avantageux de résoudre un système différentiel en le transformant. Historiquement ce but a été atteint pour les systèmes hamiltoniens; de là découle l'idée fondamentale de la méthode de Von Zeipel.

A.II.1. METHODE D'INTEGRATION PAR ITERATIONS:

Sachant que pour obtenir les expressions exactes des éléments orbitaux, il faut intégrer les équations de Lagrange en y introduisant les expressions mêmes de ces éléments, le problème se présente donc comme celui d'un développement en série de Taylor (linéarisation du second membre) et d'itérations (ordres par rapport au petit paramètre). Reprenons le système différentiel (II) et simplifions à l'extrême la fonction perturbatrice, de manière à réduire le vecteur de paramètres (ε_k) , à une seule dimension ($\varepsilon = J_2$ dans le cas du potentiel terrestre):

$$\begin{aligned} \dot{E}_j &= \varepsilon g(E_j, t) \\ E_j(t_0) &= E_j^0 \end{aligned} \quad (j = 1, 6)$$

Si (ε) égal zéro, la solution est telle que : $E_j = E_j^0 = \text{cste}$; c'est la première itération, d'ordre (ε^0) par rapport au petit paramètre. Dans notre cas, ceci correspond au mouvement képlérien; les variables déterminées sont les éléments moyens $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M)$.

A la deuxième itération, l'équation et la solution sont telles que:

$$\begin{aligned} \dot{E}_j &= \varepsilon g(E_j^0, t) \\ E_j &= E_j^0 + \varepsilon E_j^1(t) \end{aligned} \quad (j = 1, 6)$$

Parmi les différents travaux appliqués au mouvement d'un satellite artificiel de la Terre, les théories analytiques itératives ont été développées essentiellement au premier ordre [6], [7] et pour l'ensemble des coefficients du potentiel terrestre. Toutefois, l'algorithme de Kaula a également été appliqué, par lui-même [20], aux forces perturbatrices d'origine luni-solaire.

Cependant, il faut préciser que le premier ordre complet n'a pas été atteint par les auteurs, avec ce type de méthode. En effet, bien qu'une partie des familles de termes en J_2, J_n, \dots soit mise en évidence dans la solution, il manque des effets à longues périodes en J_2 , et des termes en J_2/J_n . Or, ceux-ci n'apparaissent qu'au cours du développement de la théorie au deuxième ordre (troisième itération), à cause de l'apparition de $\dot{\omega}(J_2)$, notamment, au dénominateur des équations calculant les termes à longues périodes.

D'autre part, l'introduction des couplages a été peu développée par les mécaniciens célestes, tout du moins en géodésie spatiale. En effet, la solution

généralement adoptée est le report des termes les plus importants du premier ordre dans les second-membres des équations du mouvement. Ce simple report permet de tenir compte, très commodément, d'une partie importante des effets de couplage, mais Berger [15] a montré que cette technique est loin de solutionner correctement le problème.

La théorie analytique de ce dernier auteur est encore aujourd'hui très utilisée; sa précision est en (J_2^3) et elle tient compte de l'ensemble des six premiers coefficients zonaux du potentiel terrestre. Nous verrons plus loin (A.III.2) les tests effectués par rapport à une intégration numérique.

Schématiquement, les expressions analytiques des fonctions de forces dues aux différentes harmoniques zonales sont en puissances positives ou nulles de l'excentricité, et l'inclinaison ne s'y présente que par son sinus. Par ailleurs, les termes séculaires sont calculés avant tout terme périodique et ils interviennent dans le calcul de tous ceux (termes périodiques) qui décrivent la position du satellite.

Pour résoudre globalement les équations de Lagrange au second ordre (J_2^2), en les développant en série de Taylor et en intégrant, Berger a montré qu'il faut itérer 5 fois le processus (ordre 0 à la première itération). Notons qu'il obtient des termes en J_2^3 par la suite !

A.II.2. METHODE D'INTEGRATION PAR TRANSFORMATIONS:

La distinction entre variables lentes et rapides, faite depuis longtemps en mécanique céleste, a été très féconde pour les résultats qu'elle a permis d'obtenir, et parce qu'elle a inspiré plusieurs méthodes de résolution.

L'idée de base de la méthode de Von Zeipel est de faire un changement de variables canoniques, proche de l'identité, tel que l'hamiltonien transformé ne contienne plus une des variables et donc, tel que le nouveau système puisse être résolu plus simplement.

Si $[(L_i, l_i), i = 1, 3]$ sont les variables canoniques initiales et $[(L'_i, l'_i), i = 1, 3]$ les variables issues de la transformation, tout hamiltonien $\Phi(L_i, l_i)$ dépendant d'un petit paramètre (ε) doit être transformé en un autre $\Phi'(L'_i, -, g', h')$ avec des systèmes d'équations différentielles tels que :

$$\begin{array}{ll}
 \dot{L}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial l_i} & \dot{L}'_i = \frac{\partial \Phi'}{\partial l'_i} \\
 (I) \quad l_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial L_i} & (II) \quad l'_i = -\frac{\partial \Phi'}{\partial L'_i}
 \end{array}$$

La première variable angulaire (l') n'apparaissant plus dans l'expression de Φ' , la première variable d'action (L') est donc constante.

Plusieurs transformations de ce type sont ainsi nécessaires pour s'affranchir peu à peu des variables angulaires. A la troisième transformation, l'hamiltonien $\Phi'''(L'''_i)$ ne s'exprime plus qu'avec trois variables, dont le système différentiel associé nous dit qu'elles sont constantes.

Les différents changements de variables sont déterminés par des fonctions intermédiaires $S(L'_i, l_i)$ dont le calcul, à chaque transformation, conditionne entièrement la forme du nouvel hamiltonien. De plus, chaque changement étant proche de l'identité, S est telle que :

$$\begin{array}{ll}
 L_i = L'_i + \sum_k \frac{\partial S_k}{\partial l_i} & S = L'_i \cdot l_i + \sum_k S_k(L'_i, l_i) \\
 (III) & \\
 l'_i = l_i + \sum_k \frac{\partial S_k}{\partial L'_i} &
 \end{array}$$

Les fonctions $S_k(L'_i, l_i)$ sont d'ordre (k) par rapport au petit paramètre (ϵ); elles permettent, à la précision (ϵ^k), de remonter des variables (L'''_i, l'''_i) au jeu initial (L_i, l_i).

La notion d'ordre apparaît plus clairement dans l'algorithme donné pour une transformation quelconque (L vers L' , ou L' vers L'' , etc...). En effet, comme $\Phi(L_i, l_i)$ est égal à $\Phi'(L'_i, l'_i)$, si les équations (III) sont substituées dans cette égalité, il vient:

$$\begin{array}{l}
 \Phi\left(\frac{\partial S}{\partial l_i}, l_i\right) = \Phi'\left(L'_i, \frac{\partial S}{\partial L'_i}\right) \\
 \\
 \Phi\left(L'_i + \frac{\partial S_1}{\partial l_i} + \dots, l_i\right) = \Phi'\left(L'_i, l_i + \frac{\partial S_1}{\partial L'_i} + \dots\right)
 \end{array}$$

Chaque membre de cette équation étant développé par le théorème de Taylor, il y a donc troncature à un ordre donné et correspondance des termes de même "niveau". A un ordre k , $(k + 1)$ équations permettent de calculer les fonctions S_k , ainsi que le nouvel hamiltonien avec, à chaque fois, un ordre de grandeur de plus de "gagner" en (ε) dans l'expression de $\Phi'(L'_i, l'_i)$.

Il faut noter au passage le fait que chaque fonction S_k est obtenue en intégrant la quantité $(\partial S_k / \partial l)$; un *a priori* existe donc à cet endroit de la transformation, dans la mesure où toute fonction des $(L'_i, -, g, h)$ d'ordre (k) peut être ajoutée arbitrairement à S_k .

Si tel est le cas, nous montrons par le développement ci-après, que l'utilisation d'une fonction $S_k^* = S_k + s_k(L'_i, -, g, h)$ ne change rien à la théorie; les variables (L_i, l_i) ont toujours la même expression, par rapport aux jeux (L'_i, l'_i) , (L''_i, l''_i) et (L'''_i, l'''_i) , que S_k^* ou S_k soit utilisée.

$$\begin{aligned} \Phi(L'_i, l_i) + \frac{\partial \Phi}{\partial L'_i} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l_i} + \dots \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial L'^2_i} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l_i} + \dots \right)^2 = \\ \Phi'(L'_i, l_i) + \frac{\partial \Phi'}{\partial l_i} \left(\frac{\partial S_1}{\partial L'_i} + \dots \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial l^2_i} \left(\frac{\partial S_1}{\partial L'_i} + \dots \right)^2 \end{aligned}$$

Si : $\Phi(L_i, l_i) = \Phi_0(L) + \Phi_1(L_i, l_i)$ est l'hamiltonien au premier ordre en (ε) :

$$\Phi'_0(L') = \Phi_0(L')$$

$$\Phi'_1(L'_i, l_i) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \Phi_1(L'_i, l_i)$$

$$\Phi'_1(L'_i, -, g, h) = \left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} \right\rangle_l + \langle \Phi_1 \rangle_l = \langle \Phi_1 \rangle_l$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \right)^{-1} \cdot [\Phi'_1 - \Phi_1]$$

d'où : $S_1(L'_i, l_i)$, et également : $S_1^* = S_1 + s_1(L'_i, -, g, h)$.

Au deuxième ordre :

$$\Phi'_2(L'_i, l_i) + \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial L'_i} \right] = \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial l_i} \right]$$

Dans le cas du potentiel terrestre (J_2), les expressions sont beaucoup moins lourdes à manipuler, puisque Φ ne dépend pas de (h) et Φ'_1 ne dépend pas des variables angulaires; d'où:

$$\Phi'_2 = \left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} \right\rangle_i + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 \right\rangle_i + \left\langle \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial l_i} \right] \right\rangle_i$$

$$\Phi_2^{*\prime} = \left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} \right\rangle_i + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial l} \right)^2 \right\rangle_i + \left\langle \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial S_1^*}{\partial l_i} \right] \right\rangle_i$$

$$\Phi_2^{*\prime} = \Phi'_2 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial G'} \frac{\partial s_1}{\partial g}$$

La seconde transformation permet de s'affranchir de la dernière variable angulaire ($g = \omega$), dans l'expression de $\Phi'(L'_i, -, g, -)$. Puisque Φ'_1 est déjà constant, l'équation du premier ordre en secondes variables donne: $\Phi''_1 = \Phi'_1(L'', G'', H'')$ et par conséquent: S'_1 et $S'_2(L'', G'', H'', g')$. A l'ordre deux :

$$\Phi''_2 = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial L''} \frac{\partial S'_2}{\partial l'} + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial G''} \frac{\partial S'_1}{\partial g'} + \Phi'_2$$

$$\Phi_2^{*\prime\prime} = \frac{\partial \Phi'_0}{\partial L''} \frac{\partial S'_2}{\partial l'} + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial G''} \frac{\partial S_1^{*\prime}}{\partial g'} + \Phi_2^{*\prime}$$

Dans le cas d'utilisation de S_1^* à la première transformation, Φ'_2 est modifié (pas Φ'_1), et par conséquent Φ''_2 et S'_1 . La dernière équation montre que: $S_1^{*\prime} = S'_1 - s_1$. Du point de vue des changements de variables ($L_i = L'_i + \partial S_1^*/\partial l_i$ et $L'_i = L''_i + \partial S_1^{*\prime}/\partial l'_i$) successifs, les termes dus à la fonction arbitraire $s_1(L'_i, -, g, h)$ se compensent mutuellement; la théorie est inchangée. Nous verrons cependant, dans la seconde partie, que tout arbitraire mis dans la fonction intermédiaire S_1 (puis S_2 , etc...) implique un changement de variables différent, dans la mesure où seule la première transformation (suppression de l') est effectuée dans l'algorithme de centrage.

A l'époque des premières recherches sur les satellites artificiels (1959), Brouwer a fourni les développements au premier ordre (algorithme poussé au second ordre ($\varepsilon^2 = J_2^2$), avec deux transformations pour l puis g) pour un modèle physique limité aux quatre premiers coefficients zonaux du potentiel terrestre, [14]. Un peu plus tard (1962), Kozai utilisant toujours la méthode de Von Zeipel, a donné une solution au deuxième ordre pour les coefficients J_2 à J_4 , avec effets séculaires en J_2^3 jusqu'à J_8 , [18].

C'est dans les années 1970 que nous trouvons des solutions analytiques développées au troisième ordre, pour l'effet des premières harmoniques zonales sur le mouvement d'un satellite artificiel, [19], [21]. A ce niveau de précision, il faut noter que les méthodes emploient généralement (sauf Berger, 1977) la technique des transformées de Lie, avec des programmations algébriques très puissantes.

Cette dernière méthode de transformation des systèmes hamiltoniens canoniques diffère de la "classique" méthode de Poincaré Von Zeipel, exposée plus haut. Si le principe général est le même ("perte" d'une variable dans le nouvel hamiltonien), les transformations des variables d'état sont ici explicites. D'autre part, le processus récursif d'obtention du générateur (fonction intermédiaire W) et des autres expressions se prête à un calcul automatique par système symbolique (crochets de Poisson $[f, g]$ essentiellement).

A partir de l'hamiltonien $\Phi(L_i, l_i)$ (développé au premier ordre (ε)), la transformation canonique permettant d'obtenir $\Phi'(L'_i, l'_i)$ exprimé en nouvelles variables, est telle que:

$$\begin{aligned} L_i &= E_W(L'_i) \\ l_i &= E_W(l'_i) \end{aligned} \quad \text{d'où : } \Phi'(L'_i, l'_i) = \Phi(L_i, l_i)$$

Pour une fonction $W = W_1 + \varepsilon W_2 + \dots$ dépendant explicitement de (ε), la transformation est définie par:

$$E_W f = \{\Delta_W^{(0)} f\}_{\varepsilon=0} + \varepsilon \{\Delta_W^{(1)} f\}_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\Delta_W^{(2)} f\}_{\varepsilon=0} + \dots$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta_W f &= L_W f + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} & L_W f &= [f, W] \\ \Delta_W^{(n)} f &= \Delta_W \Delta_W^{(n-1)} f & L_W^{(n)} f &= L_W f L_W^{(n-1)} f \end{aligned}$$

En utilisant l'algorithme de la transformation canonique, il vient, pour les variables (L_i, l_i) et (L'_i, l'_i) développées au premier ordre:

$$\begin{aligned} L_i &= L_i^{(0)} + \varepsilon L_i^{(1)} + \dots & L'_i &= L_i'^{(0)} + \varepsilon L_i'^{(1)} + \dots \\ l_i &= l_i^{(0)} + \varepsilon l_i^{(1)} + \dots & l'_i &= l_i'^{(0)} + \varepsilon l_i'^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_i &= E_W(L'_i) = \{\Delta_W^{(0)}(L'_i)\}_{\varepsilon=0} + \varepsilon \{\Delta_W^{(1)}(L'_i)\}_{\varepsilon=0} + \dots \\ l_i &= E_W(l'_i) = \{\Delta_W^{(0)}(l'_i)\}_{\varepsilon=0} + \varepsilon \{\Delta_W^{(1)}(l'_i)\}_{\varepsilon=0} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_i &= L_i'^{(0)} + \varepsilon \left(L_W^{(1)}(L'_i) + \frac{\partial L_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \dots \\ l_i &= l_i'^{(0)} + \varepsilon \left(L_W^{(1)}(l'_i) + \frac{\partial l_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_i &= L_i'^{(0)} + \varepsilon \left([L_i'^{(0)}, W_1] + L_i'^{(1)} \right)_{\varepsilon=0} + \dots \\ l_i &= l_i'^{(0)} + \varepsilon \left([l_i'^{(0)}, W_1] + l_i'^{(1)} \right)_{\varepsilon=0} + \dots \end{aligned}$$

$$L_i = L'_i + \varepsilon [L'_i, W_1] = L'_i - \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial l'_i}$$

$$l_i = l'_i + \varepsilon [l'_i, W_1] = l'_i + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial L'_i}$$

Pour l'hamiltonien développé au premier ordre:

$$\begin{aligned} \Phi(L_i, l_i) &= \Phi \left(L'_i - \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial l'_i}, l'_i + \frac{\partial W_1}{\partial L'_i} \right) \\ &= \Phi(L'_i, l'_i) - \varepsilon \left[\frac{\partial \Phi}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial l'_i} \right] + \varepsilon \left[\frac{\partial \Phi}{\partial l'_i} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial L'_i} \right] \\ &= \Phi(L'_i, l'_i) + \varepsilon [\Phi, W_1] \\ &= \Phi_0(L'_i, l'_i) + \varepsilon (\Phi_1(L'_i, l'_i) + [\Phi_0, W_1]) \end{aligned}$$

$$\Phi'_0(L'_i, l'_i) = \Phi_0(L'_i, l'_i)$$

$$\Phi'_1(L'_i, l'_i) = \Phi_1(L'_i, l'_i) + [\Phi_0, W_1]$$

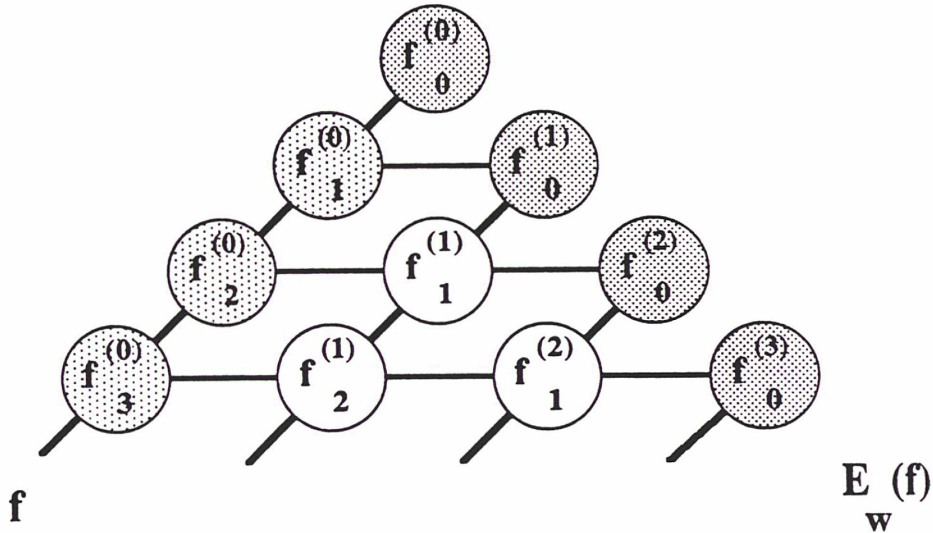
Avec le triangle de Lie, les expressions des variables ou de l'hamiltonien s'obtiennent immédiatement par:

$$\Phi_0$$

$$\Phi'_0 = \Phi_0$$

$$\Phi_1 \longrightarrow \Phi'_1$$

$$\Phi'_1 = \Phi_1 + C_0^1 \cdot [\Phi_0, W_1]$$



Nous sommes dans un cas d'équivalence avec la méthode de Von Zeipel, puisqu'au premier ordre: $W_1 = -S_1$. Cependant, dès le second ordre, les développements deviennent vite très complexes en utilisant Von Zeipel, car les fonctions intermédiaires s'expriment en nouvelles variables métriques (L'_i) et en anciennes variables angulaires (l_i). De plus, si l'on utilise des expressions de $\Phi(L_i, l_i)$ et $S_k(L'_i, l_i)$ exactes en excentricité (e) et anomalie vraie (v), certains termes comme $(v - l)(a/r)^n \cdot \cos mv$ sont ensuite très difficilement moyennables sur l'anomalie moyenne (l).

Toutefois, nous noterons que dans les deux cas, les méthodes doivent inmanquablement moyenner les différents termes par rapport à (l), pour exprimer les nouveaux hamiltoniens.

Grâce à la généralité de la méthode d'Hori, les auteurs sont parvenus à calculer tous les crochets de Poisson en utilisant d'une part le jeu des variables canoniques de Delaunay, et en développant d'autre part toutes les quantités en puissance de l'excentricité (forme exacte pour l'inclinaison).

Le programme CANEL2 fait référence à la théorie de Berger (J_2 à J_7 , en J_2^3); il est complété par un algorithme de Kaula pour le reste des coefficients du potentiel terrestre (36,36). D'autre part, nous pouvons également tenir compte des termes luni-solaires et des termes de marées (terrestres et océaniques), dont les potentiels respectifs ont été développés en fonction des éléments osculateurs du satellite et des éléments moyens de chaque corps perturbateur, [8].

A.III. MODELE PHYSIQUE:

Pour connaître la position d'un satellite artificiel, on réalise sur lui, des mesures de localisation, c'est-à-dire, des mesures de quantités physiques reliant à sa position ou sa vitesse des stations terrestres à des dates données.

Pour pouvoir interpréter les mesures réalisées, on est conduit à considérer simultanément un système de référence terrestre (lié à la croûte terrestre), et un système de référence céleste (lié aux galaxies lointaines).

C'est dans ce dernier système que sont écrites et résolues les équations de la dynamique.

A.III.1. SYSTEMES DE REFERENCE:

Un certain nombre de stations d'observation (aujourd'hui 70 environ), équipées d'instruments de mesure très performants (télémétrie laser de 3^{ème} génération, par exemple), sont localisées sur la Terre, grâce à leurs propres observations, avec une précision quasi-centimétrique.

Ces points sont dits fondamentaux; leur mouvement périodique imposé par les marées, et leur dérive séculaire, due au déplacement général des plaques tectoniques, sont modélisés. Ils constituent le repère de référence terrestre, qui résulte du concept idéal de système de référence terrestre, [5].

La propriété générale que doit vérifier un système de référence céleste idéal est la non rotation de ce système. Du point de vue de l'analyse à long terme d'orbites de satellites artificiels, cela signifie qu'il serait souhaitable de prendre, comme origine du repère associé, le barycentre du système solaire ainsi que des axes dirigés vers les plus lointaines galaxies. Cependant, ceci n'est pas réalisé actuellement dans les logiciels, mais on peut penser qu'une intégration du mouvement dans un tel système, avec une échelle de temps la plus uniforme possible (TDB), fournirait une solution quasiment idéale.

En pratique, les repères de référence célestes ont tous leur origine au centre des masses de la Terre, puisque l'intégration a notamment pour but de déterminer des paramètres liés à la géophysique.

Les logiciels d'intégration numérique adoptent généralement un repère céleste non inertiel, pour pouvoir comparer à chaque instant l'observation à la théorie, sans avoir à effectuer de lourdes transformations géométriques. Ainsi, l'axe (OZ) de ce repère d'intégration étant sur l'axe instantané de rotation de la Terre, et l'axe (OX) sur l'équinoxe dynamique de la date, la transformation à prendre en compte pour passer du repère terrestre au repère céleste instantané consiste en deux petites rotations de mouvement du pôle et une rotation de temps sidéral vrai.

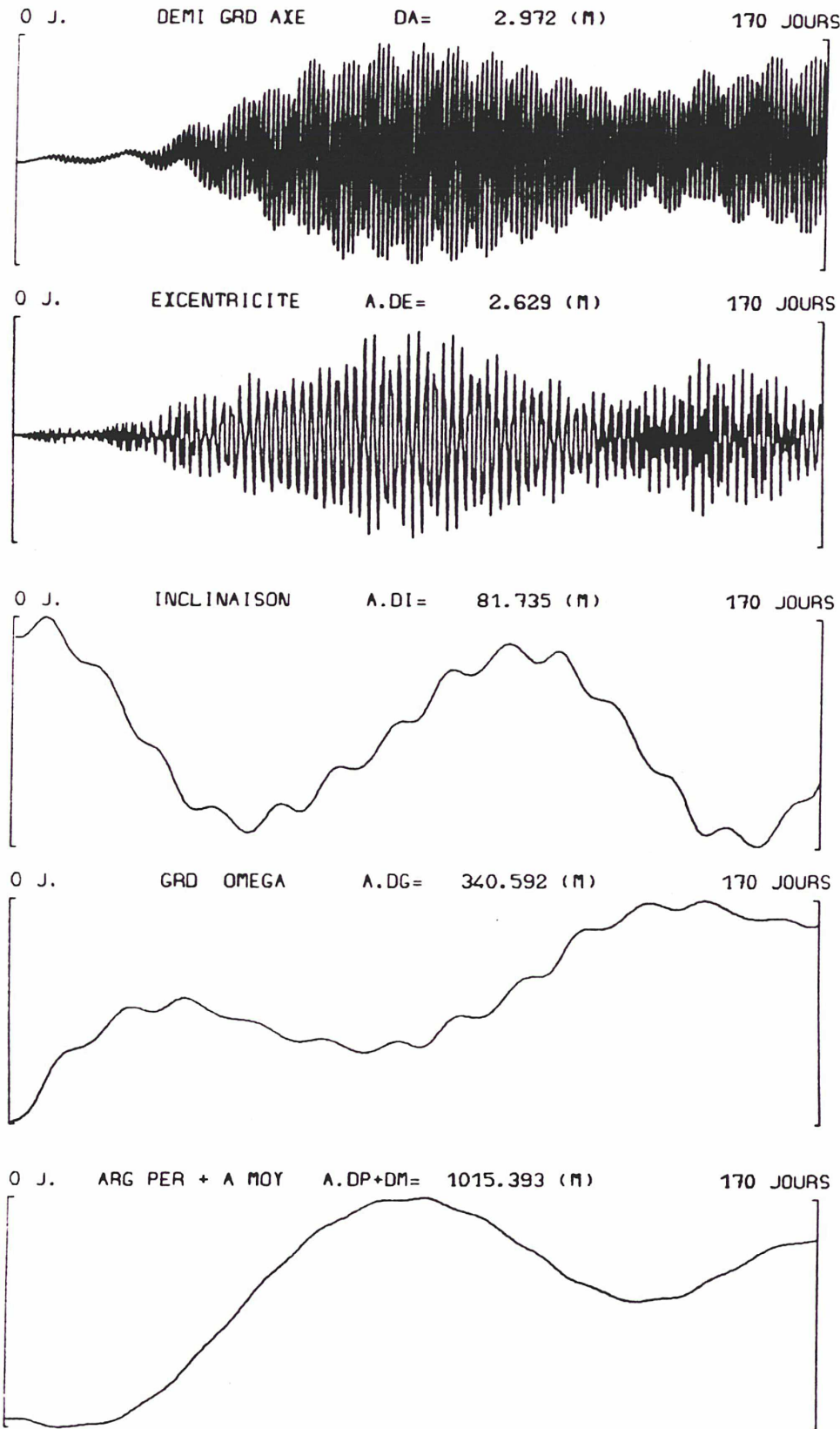
Compte tenu de ce choix (logiciel LAGRAN2 entre autres), le second membre des équations différentielles prend en compte les forces d'inertie complémentaires (entraînement et Coriolis). Ceci ne pose pas de difficulté majeure dans la mise en oeuvre, dans la mesure d'une grande modularité des logiciels et d'une écriture aisée (produits vectoriels).

En revanche, dans le cas d'une intégration analytique des équations du mouvement d'un satellite artificiel, le modèle physique étant strictement réduit aux seules forces d'origine gravitationnelle, pour des raisons évidentes de complexité des théories, le système de référence céleste est "naturellement" inertiel.

Pour des raisons pratiques, l'axe OZ de notre repère (logiciel CANEL2) est orienté vers un pôle d'inertie moyen (position moyenne de l'axe principal d'inertie du manteau terrestre, pour une certaine période de temps). Dans l'équateur fixe ainsi défini, l'axe OX est dirigé vers l'équinoxe moyen de la date γ_{moy} , qui est mobile. Par ailleurs, les arguments fondamentaux de la Lune et du Soleil, ainsi que le temps sidéral (moyen) sont rapportés à ce point vernal.

A long terme, la différence intrinsèque existant entre les systèmes de référence employés dans chaque méthode d'intégration (numérique et analytique), se fera ressentir sous forme de longues périodes et d'effets séculaires (figure 10). Cependant, nous verrons que ces effets sont de l'ordre de grandeur de certains termes de couplage (notamment) absents dans les théories analytiques utilisées. D'autre part, il est utile de remarquer que l'on peut s'affranchir d'une partie importante des effets représentés figure (10), dans la mesure où les vecteurs position et vitesse du satellite, issus de l'intégration analytique, sont tabulés dans un repère tournant. Grâce à une matrice de rotation (précession et nutation) et à une composition de vitesses ($\vec{\Omega} \times \vec{r}$), il serait ainsi possible de se rapprocher du cas de l'intégration numérique (intégration en repère tournant).

L'échelle de temps choisie pour tous les logiciels est le temps atomique TAI. Le temps dynamique terrestre TDT est l'argument des éphémérides de la Lune et du Soleil utilisées.



Satellite

$a_0 = 7300 \text{ km}$

$e_0 = 0.01$

$i_0 = 50 \text{ deg}$

Influence des forces complémentaires : (F.C.)

Différence :

$J_2 + \text{Lune} + \text{F.C}$

-

$J_2 + \text{Lune}$

Fig. 10

A.III.2. FORCES GRAVITATIONNELLES:

a. Potentiel terrestre:

Le champ de gravité terrestre exerce une accélération gravitationnelle sur les satellites artificiels, qui provient non seulement du "terme central" (potentiel en GM/r , force d'environ $1 m/s^2$), mais aussi des irrégularités de la répartition des masses à l'intérieur de la Terre. La prise en compte des termes du développement en fonctions harmoniques sphériques correspond à des accélérations pouvant aller de 10^{-3} à $10^{-6} m/s^2$.

Inversement, les principaux résultats acquis en géodésie dynamique ont permis d'accroître considérablement la connaissance de ce champ. Les méthodes d'analyse à court terme d'orbites de satellites (quelques jours, voire un mois) donnent une restitution globale de l'ensemble des coefficients propres au développement du potentiel terrestre en fonctions harmoniques sphériques.

Cependant, il est intéressant de souligner à quel point les méthodes purement numériques, discernent peu les causes des effets des perturbations. Ainsi, des équations de condition sont parfois introduites dans le traitement, pour "forcer" la détermination propre aux harmoniques zonaux (perturbations à longues périodes et séculaires). Une restitution semi-numérique des effets de ces harmoniques de bas degré (ordre zéro) et, d'une façon générale, des effets à longues périodes, est mieux adaptée.

La partie fixe du développement du potentiel de la Terre est donnée dans un repère terrestre. L'origine de ce repère (R_p) est au centre des masses, l'axe (OZ) est dirigé vers un pôle conventionnel (point fixe dans le repère), et l'axe (OX) passe par l'origine conventionnelle des longitudes.

Pour exprimer correctement l'effet du champ de gravité à chaque instant dans le repère céleste d'intégration (R_c), il faut effectuer une petite transformation sur tous les coefficients de la décomposition afin d'amener (R_p) sur (R_c). Or, d'une façon générale, on prend pour hypothèse, que les variations de mouvement du pôle n'affectent notablement que $C_{2,1}$ et $S_{2,1}$.

Comme une grande précision est recherchée dans les logiciels d'intégration numérique, le mouvement du pôle ($x(t) - x_{moy}$, $y(t) - y_{moy}$) est pris en compte.

Pour l'intégration analytique, la conception du repère de référence céleste est telle, qu'il suffit de mettre les coefficients $C_{2,1}$ et $S_{2,1}$ à zéro en début de période, une fois pour toutes.

Dans la méthode de centrage, nous verrons que la non prise en compte de ces deux coefficients ($C_{2,1}$, $S_{2,1}$) implique le choix d'un axe (OZ), du repère tournant d'intégration (R_c), mobile par rapport aux étoiles (précession et nutation) et fixe par rapport à la croûte terrestre.

L'emploi des fonctions harmoniques sphériques dans la décomposition du potentiel gravitationnel au voisinage de la Terre débouche sur l'expression :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{l,m}(\sin \varphi) (C_{l,m} \cos m\lambda + S_{l,m} \sin m\lambda)$$

où: G : constante de gravitation universelle,

M : masse de la Terre,

a_e : rayon équatorial de l'ellipsoïde conventionnel de référence,

$C_{l,m}$, $S_{l,m}$: séries de constantes: les coefficients du potentiel,

l : entier ≥ 0 (degré),

m : $0 \leq$ entier $\leq l$ (ordre),

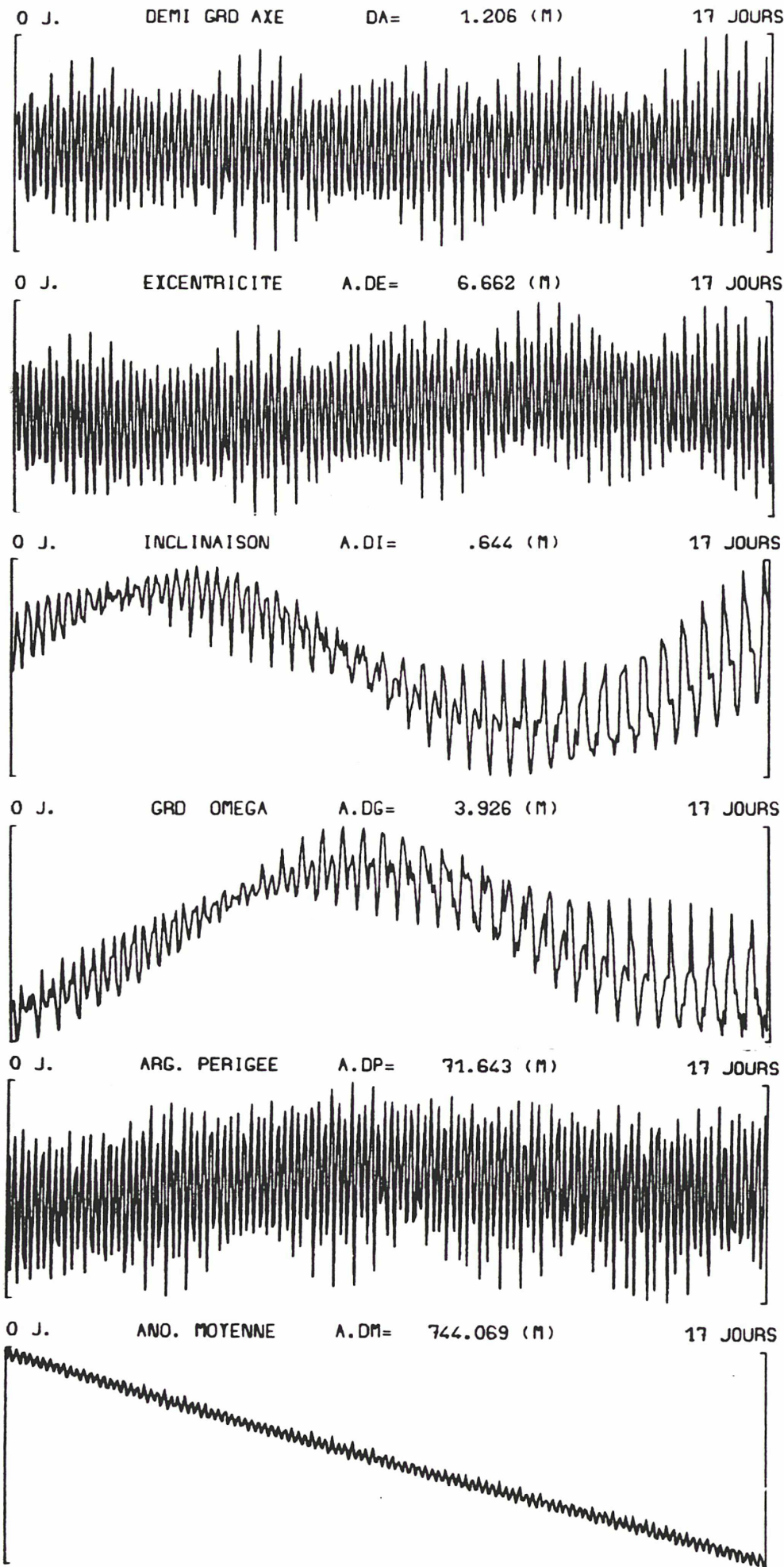
r : rayon centre Terre-satellite (S),

φ : latitude géocentrique de (S),

λ : longitude terrestre de (S).

Si l'on veut pouvoir intégrer les équations de Lagrange, il est nécessaire de connaître les dérivées partielles de $U(r, \lambda, \varphi)$ par rapport aux paramètres orbitaux du satellite considéré ($a, e, i, \Omega, \omega, M$).

L'intégration numérique calcule à chaque pas les jacobiens permettant les transformations de $(\partial U / \partial r, \lambda, \varphi)$ vers $(\partial U / \partial x, y, z)$, vers $(\partial U / \partial a, e, i, \dots)$.



Satellite

$$a_0 = 7620 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.034$$

$$i_0 = 10 \text{ deg}$$

Influence du mode
de développement du
potentiel terrestre:

$$U(r, \varphi, \lambda)$$

-

$$U(a, e, i, \dots): (\text{Kaula})$$

$$(\text{35 jeux } l, m, p, q)$$

Perturbations :

$$J_2 + J_3$$

Fig. 11

Une intégration analytique du système des équations différentielles du mouvement d'un satellite, impose de développer la fonction perturbatrice en fonction des éléments osculateurs. Dans le cas du potentiel terrestre, la forme générale du développement a été donnée par plusieurs auteurs [6], [7]; nous retiendrons celui de Kaula, pour lequel nous avons repris tout l'algorithme de calcul, [8]:

$$U = \frac{GM}{a} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{a}\right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{l,p,q}(e) S_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta)$$

avec :

$$S_{l,m,p,q} = \begin{bmatrix} C_{l,m} \\ -S_{l,m} \end{bmatrix}_{(l-m)_{\text{impair}}}^{(l-m)_{\text{pair}}} \cos[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)] \\ + \begin{bmatrix} S_{l,m} \\ C_{l,m} \end{bmatrix}_{(l-m)_{\text{impair}}}^{(l-m)_{\text{pair}}} \sin[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)]$$

où: θ : temps sidéral moyen,

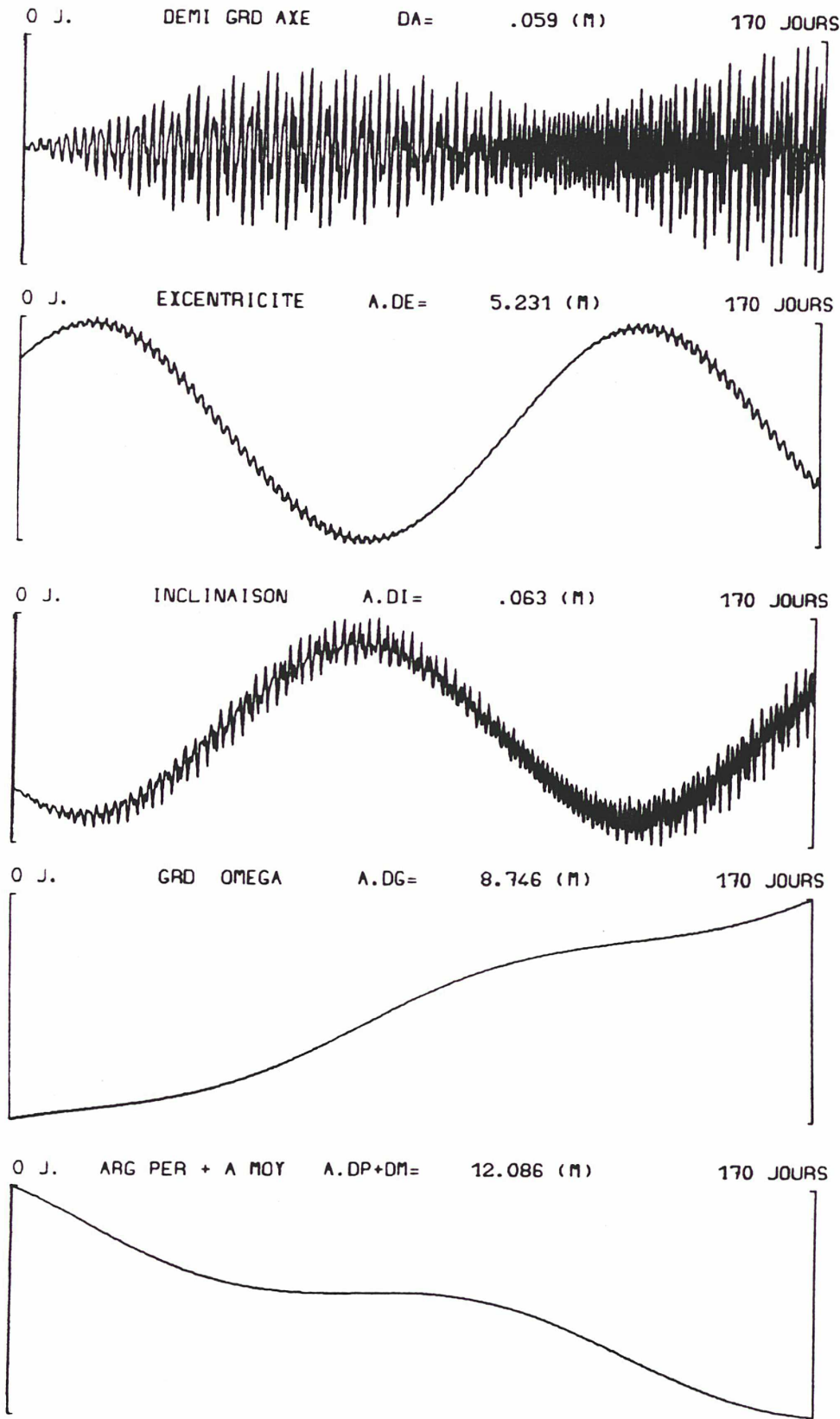
$F_{l,m,p}(i)$: fonction de l'inclinaison du satellite (formes finies),

$G_{l,p,q}(e)$: fonction de l'excentricité (cas particulier des fonctions de Hansen;
(a/r)^l . cos mv).

Il est facile de se rendre compte combien les calculs deviennent lourds dès que la précision impose d'aller loin en puissances de l'excentricité, ou bien dès qu'il faut développer des harmoniques de degré (l) élevé.

Il faut préciser, à ce stade, que la méthode d'intégration analytique de Von Zeipel permet de travailler avec des fonctions génératrices, définissant les différents changements de variables, qui s'expriment sous forme finie en fonction de l'excentricité et de l'anomalie vraie du satellite. Ainsi, le potentiel terrestre adopte dans ce cas une expression exacte (en (a/r)^l et v) et non un développement limité (en e et M), pour un jeu (l, m) maximum fixé.

La figure (11) montre la difficulté d'intégrer numériquement un potentiel terrestre donné (ici, $J_2 + J_3$), en utilisant un développement de U en fonction des éléments osculateurs (notamment e et M). En supposant l'intégration numérique de $U(r, \lambda, \varphi)$ exacte, il faut 35 jeux (l, m, p, q) de Kaula, dont on suppose qu'ils créent des perturbations d'amplitudes supérieures à 0.2 mètre, pour intégrer les équations



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence des harmoniques zonaux de degré : 30 à 36

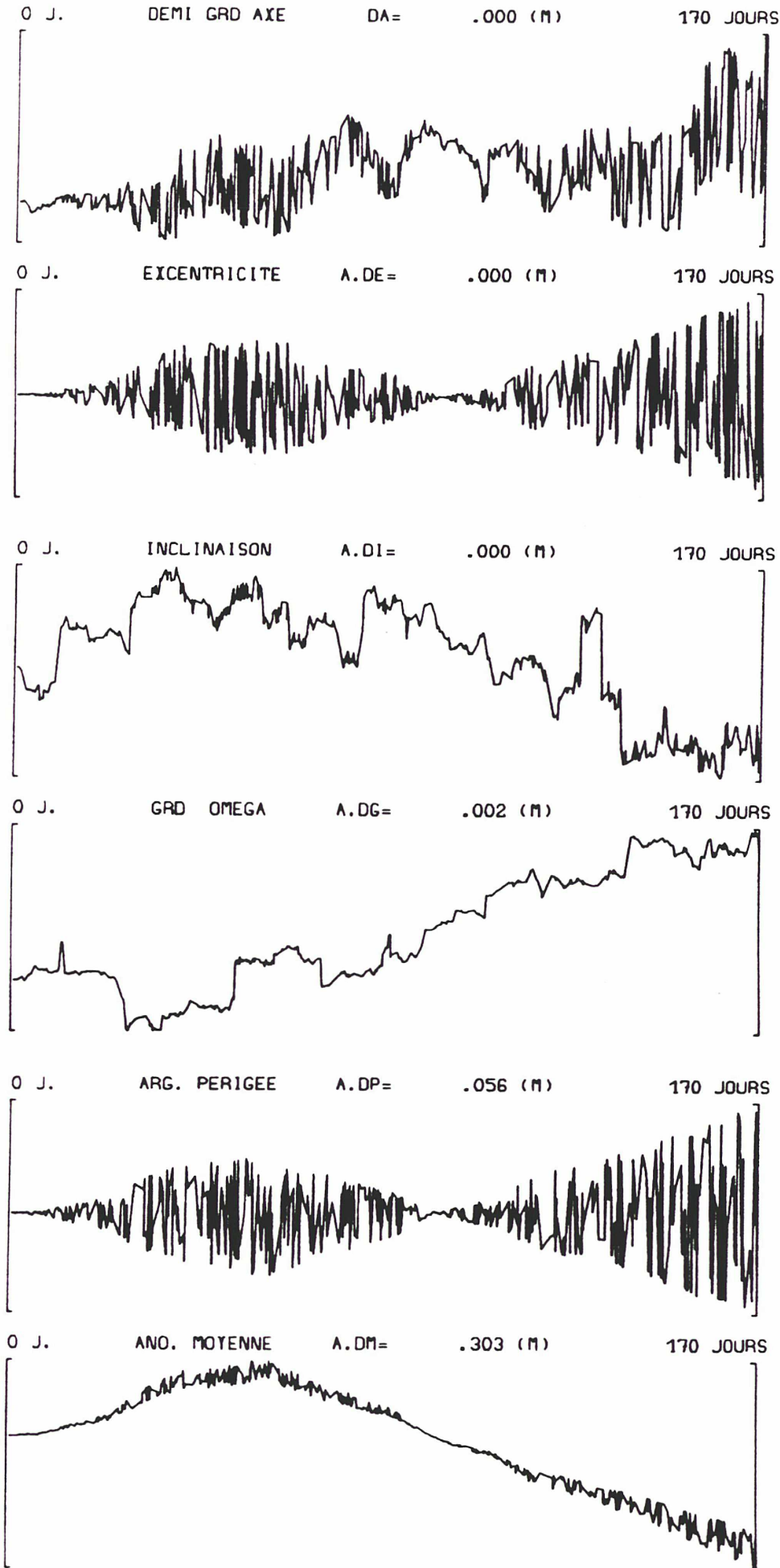
Différence :

$$J_2 + J_{30} \text{ à } J_{36}$$

-

$$J_2$$

Fig. 12



Satellite

$$a_0 = 12200 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.004$$

$$i_0 = 110^\circ$$

Influence des harmoniques zonaux de degré : 30 à 36

Différence :

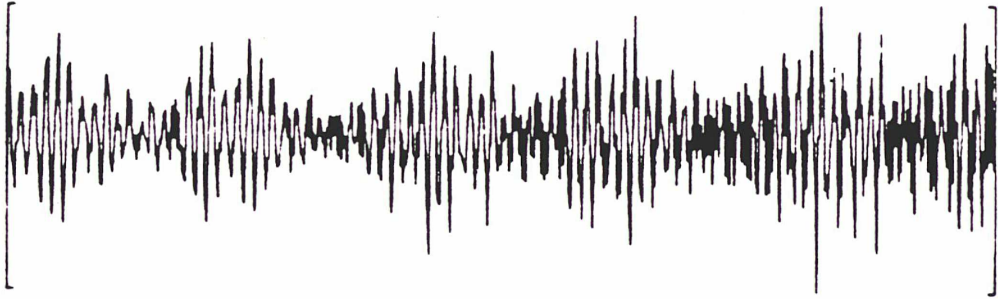
$$J_2 + J_{30} \text{ à } J_{36}$$

-

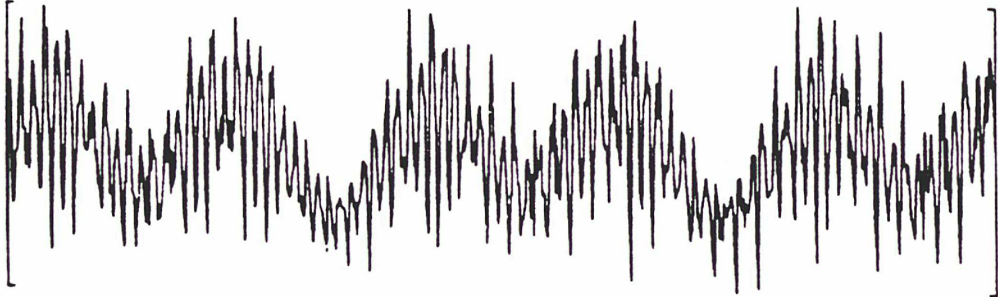
$$J_2$$

Fig. 13

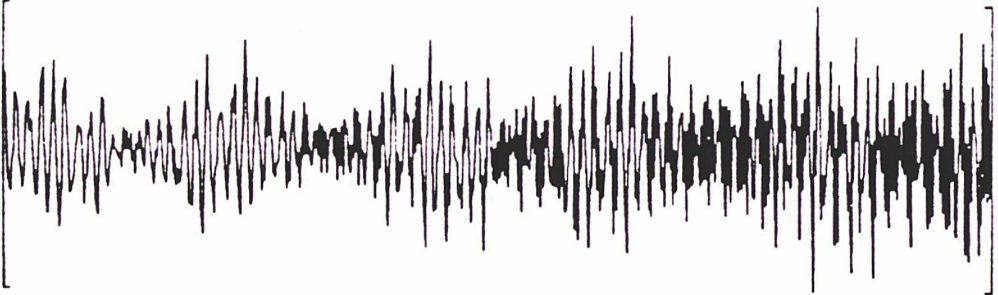
0 J. DEMI GRD AXE DA= .903 (M) 170 JOURS



0 J. EICENTRICITE A.DE= 1.421 (M) 170 JOURS



0 J. INCLINAISON A.DI= .392 (M) 170 JOURS



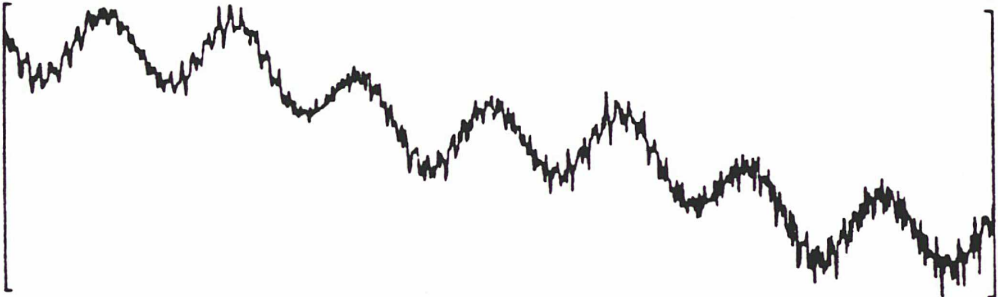
Satellite

$$\bar{a}_0 = 7617636.79 \text{ (m)}$$

$$\bar{e}_0 = 0.0847$$

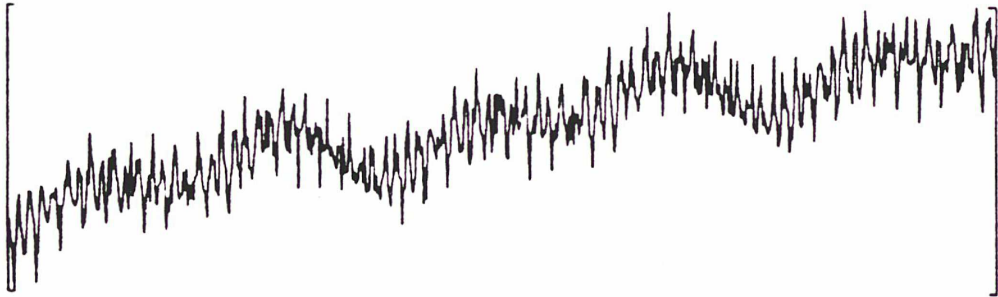
$$\bar{i}_0 = 0.688492 \text{ (rd)}$$

0 J. GRD OMEGA A.DG= 2.861 (M) 170 JOURS



Comparaison :
Intégration numérique
et (-)
Théorie analytique
(Berger)

0 J. ARG. PERIGEE A.DP= 44.179 (M) 170 JOURS



Perturbations :
J₂ à J₇

0 J. ANO. MOYENNE A.DM= 165.809 (M) 170 JOURS

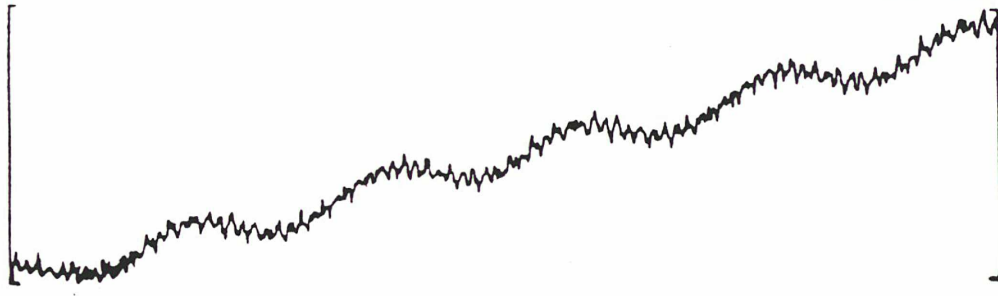
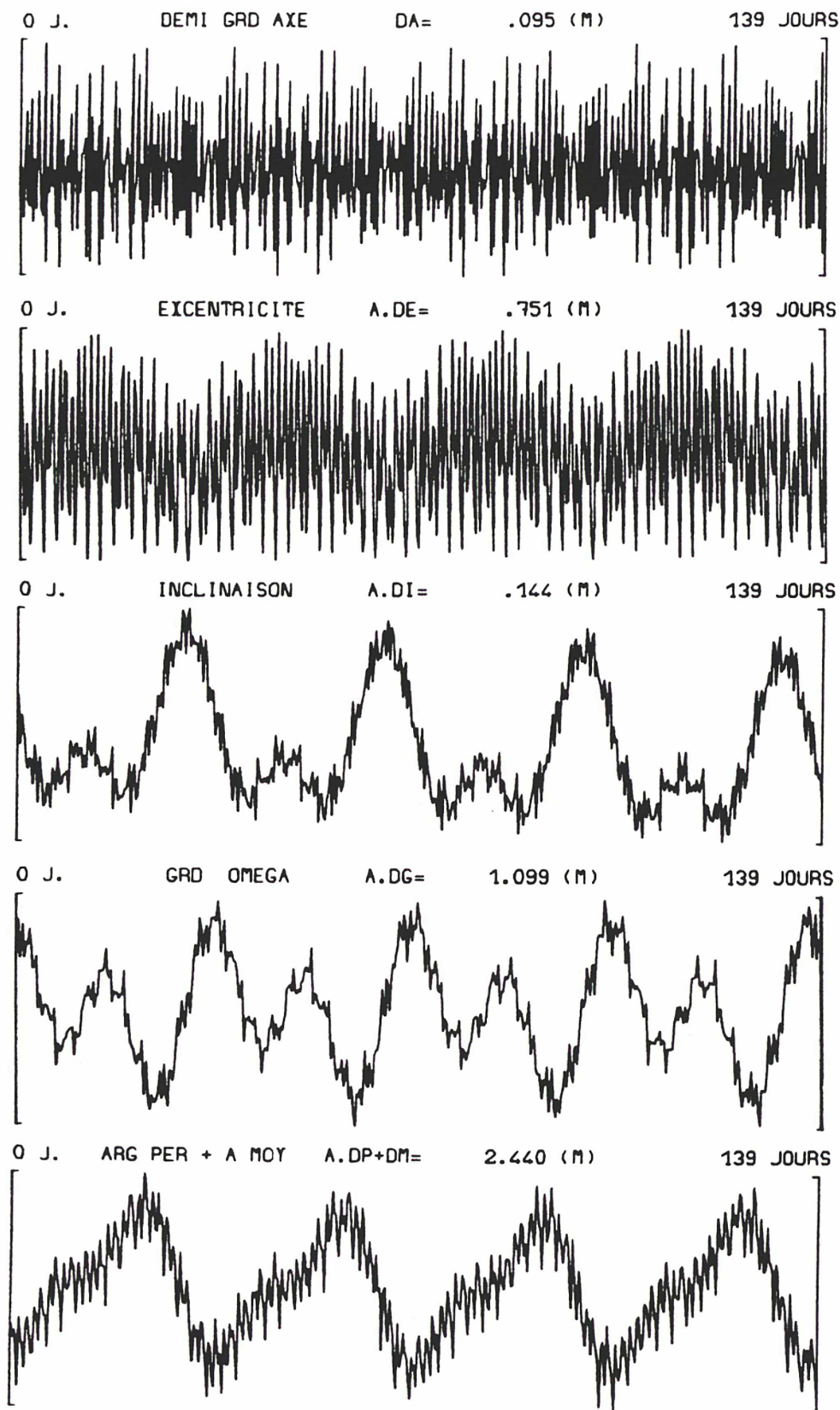


Fig. 14



Satellite

$$a_0 = 7620 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.084$$

$$i_0 = 10 \text{ deg}$$

Comparaison :

Intégration numérique

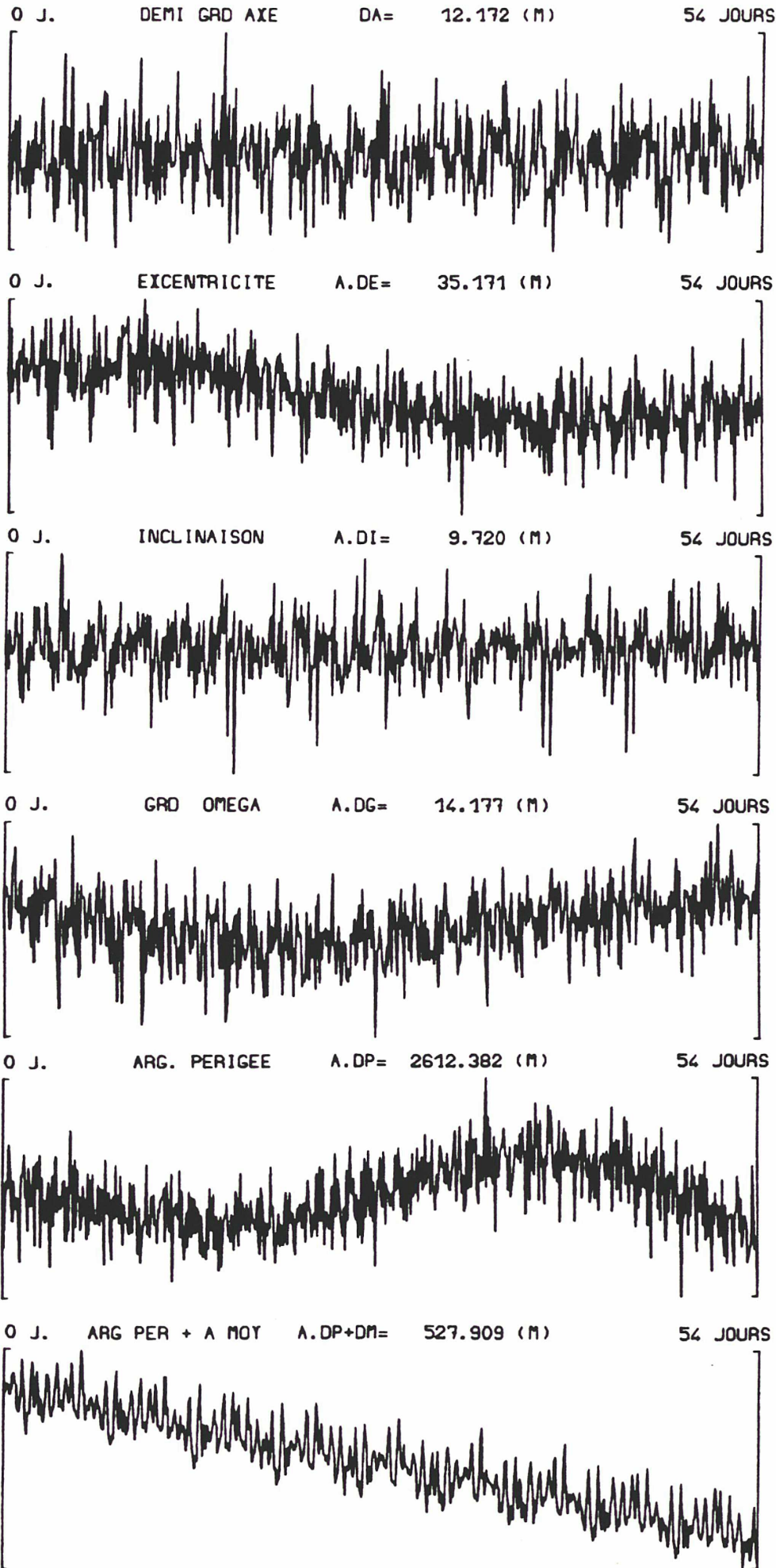
-

Théorie analytique
(Berger + pente)

Perturbations :

J_2 à J_5

Fig. 15



Satellite

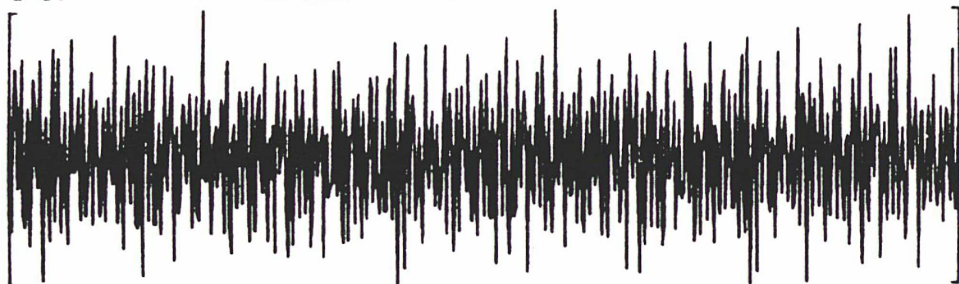
$a_0 = 7335 \text{ km}$
 $e_0 = 0.021$
 $i_0 = 49.8 \text{ deg}$

Comparaison :
 Intégration numérique
 -
 Théorie analytique
 (Berger, Kaula)

Perturbations :
 Potentiel $\ll(13,13)$

Fig. 16

0 J. DEMI GRD AXE DA= 2.344 (M) 8 JOURS



0 J. EXCENTRICITE A.DE= 108.057 (M) 8 JOURS



0 J. INCLINAISON A.DI= .731 (M) 8 JOURS



0 J. GRD OMEGA A.DG= 1.405 (M) 8 JOURS



0 J. ARG. PERIGEE A.DP= 34149.225 (M) 8 JOURS



0 J. ARG PER + A MOY A.DP+DM= 122.745 (M) 8 JOURS



Satellite

$$a_0 = 12200 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.004$$

$$i_0 = 110 \text{ deg}$$

Comparaison

Intégration numérique

-

Théorie analytique
(Berger, Kaula)

Perturbations :

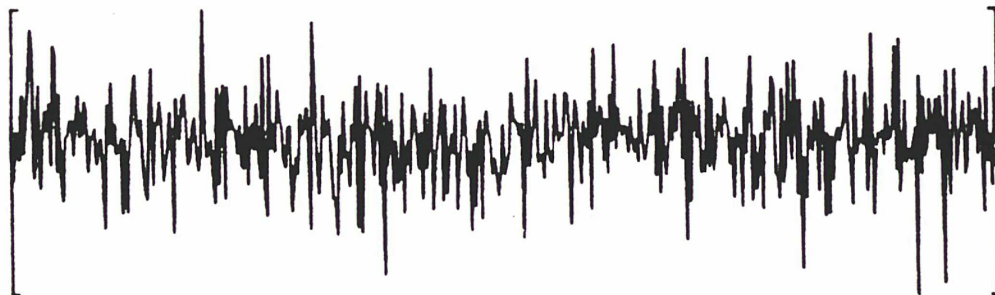
Potentiel $\llcorner(13,13)$

Fig. 17

0 J. DEMI GRD AXE DA= 28.204 (M) 40 JOURS



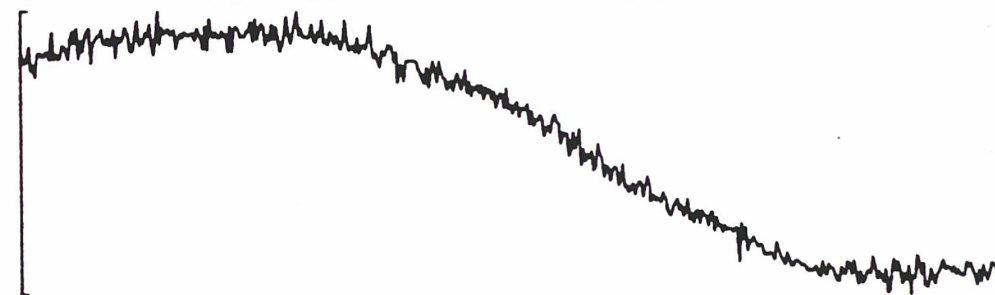
0 J. EICENTRICITE A.DE= 30.526 (M) 40 JOURS



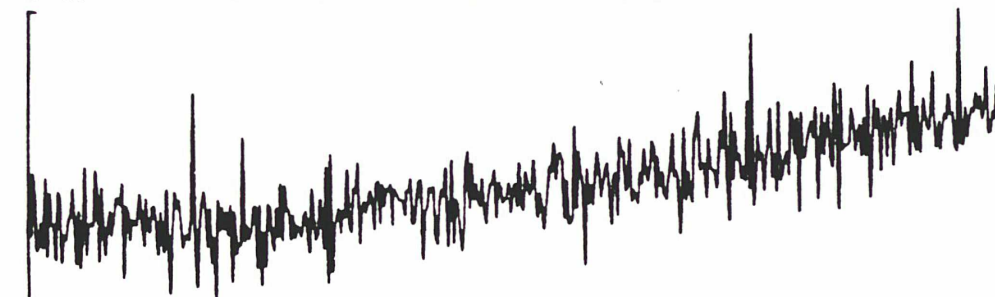
0 J. INCLINAISON A.DI= 17.042 (M) 40 JOURS



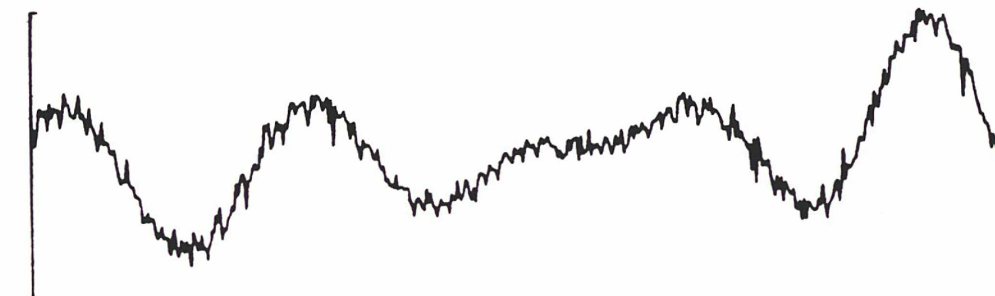
0 J. GRD OMEGA A.DG= 114.078 (M) 40 JOURS



0 J. ARG. PERIGEE A.DP= 615.323 (M) 40 JOURS



0 J. ANO. MOTENNE A.DM= 2005.193 (M) 40 JOURS



Satellite
 $\bar{a}_0 = 7617722.5$ (m)
 $\bar{e}_0 = 0.0847$
 $\bar{i}_0 = 0.688505$ (rd)

Comparaison :
 Intégration numérique
 —
 Théorie analytique
 (Berger et Kaula)

Perturbations :
 Potentiel $\leq (20, 20)$

Fig. 18

du mouvement avec $U(a, e, i, \Omega, \omega, M)$, à une précision de plusieurs mètres et en cent fois plus de temps. Il est important de remarquer combien les différents termes décimétriques, qui ont été négligés, agissent sur la trajectoire.

Si les perturbations d'orbite imposées par les premiers termes du développement du potentiel terrestre (J_2, J_3, \dots) sont très importantes (effets à courtes périodes (J_2) et à longues périodes (J_3, \dots)), les coefficients zonaux de degré élevé (J_{30} à J_{36}) sont également responsables, notamment dans leur couplage avec J_2 , de variations non négligeables sur les éléments osculateurs du satellite. Ainsi, les figures (12) et (13) représentent-elles ces perturbations, pour les satellites STARLETTE et LAGEOS respectivement. La sensibilité de ce dernier aux coefficients J_{30}, \dots , est moins évidente.

Les différents tests, que nous avons pu effectuer entre les intégrations numérique et analytique du potentiel terrestre (figures 14 à 18), montrent des résidus de l'ordre de quelques décimètres, en général. Si les effets des six premiers coefficients zonaux sont traités grâce à la théorie de Berger (J_2^3), le reste des termes (l, m) est pris en compte par Kaula. Au vu de ces résultats (défaillance des théories en présence de couplages et de petits diviseurs comme e, i ou des résonances), il est clair que l'intégration analytique doit être complétée par des termes numériques (ajustements empiriques de pentes, par exemple) linéaires ou périodiques, pour garder une précision d'environ dix mètres.

a. Potentiel luni-solaire:

Les perturbations gravitationnelles dues à la Lune et au Soleil sur les satellites artificiels, font directement appel à la formulation de Newton dans le cas des logiciels d'intégration numérique :

$$\gamma_* = GM_* \frac{\vec{SA}}{SA^3}$$

où: M_* : masse de l'astre perturbateur considéré,

S : position du satellite dans le repère géocentrique d'intégration,

A : position de la Lune ou du Soleil dans le même repère.

Pour des raisons de précision et de temps de calcul, les coordonnées rectangulaires géocentriques des astres sont rarement calculées pendant une procédure numérique. Une éphéméride des corps du système solaire (Bureau des Longitudes,

ou autre) est donc utilisée, car le calcul répété des termes des théories de Brown (Lune) ou de Newcomb (Soleil) serait beaucoup trop long vis-à-vis de la précision à atteindre (exemple : si $\Delta\gamma \simeq 10^{-14}m/s^2$, sur la trajectoire d'un satellite artificiel, alors, Δ Terre-Lune \simeq quelques mètres, et Δ Terre-Soleil \simeq quelques kilomètres).

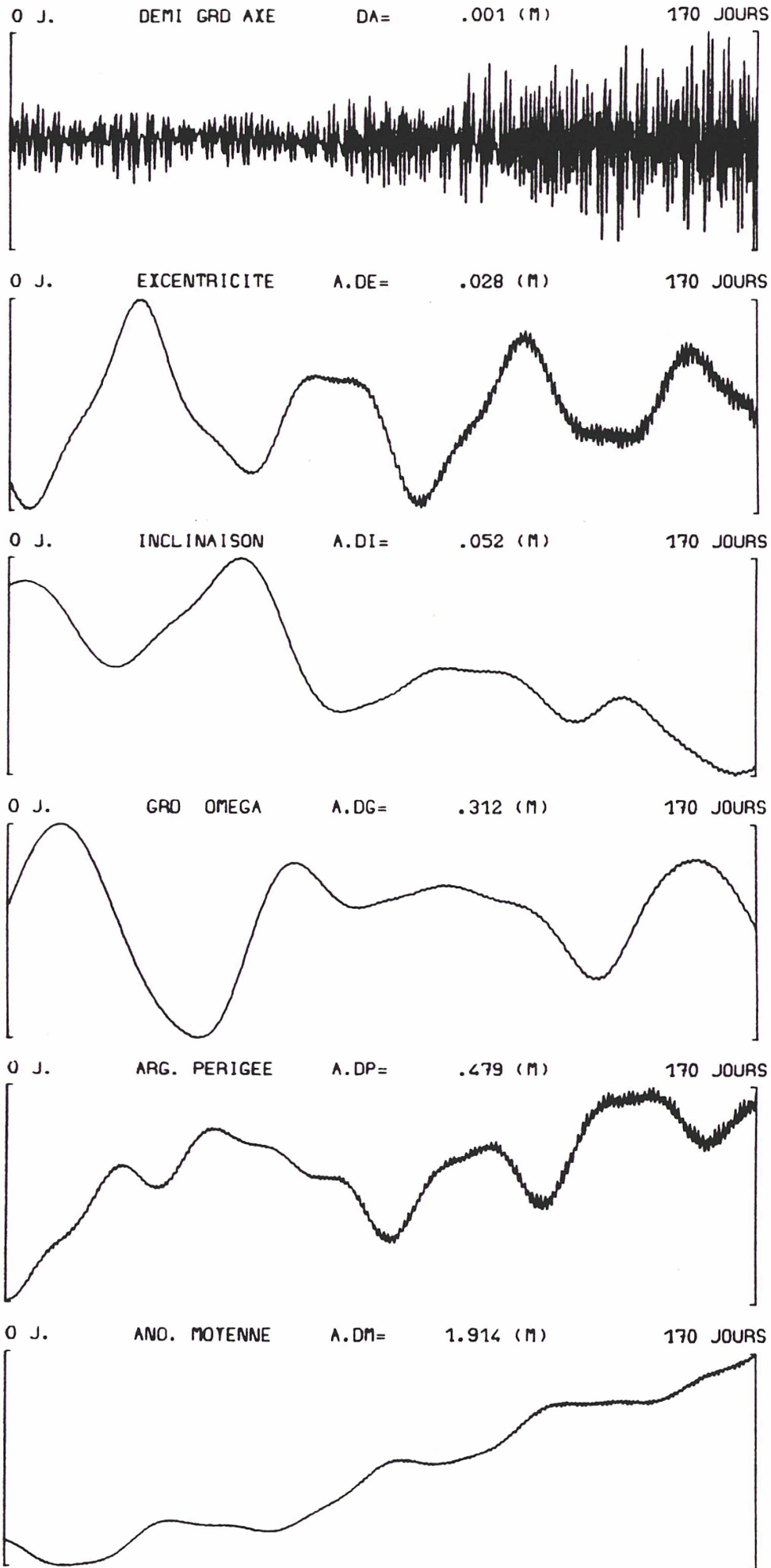
En revanche, les théories analytiques utilisant un développement limité (e, e_* et $(a/a_*)^l$) de la perturbation luni-solaire, en fonction des éléments orbitaux du satellite considéré et des éléments moyens des astres (\star) (développements type Kaula), la précision de la solution (orbite) se trouve limitée pour plusieurs raisons. La première provient de la non prise en compte des mouvements instantanés de ces astres; le Soleil et la Lune sont considérés comme des corps en ellipse de précession (mouvement képlérien plus les dérivées $\dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M}$) autour de la Terre (par rapport à γ_{moy} mobile), la première ellipse (Soleil) étant référencée dans l'équateur moyen, et la seconde (Lune) dans l'écliptique moyen. La seconde limitation de précision provient de l'ordre de troncature des développements adoptés pour chaque astre, compte tenu, pour la Lune, de la transformation supplémentaire nécessaire au passage: écliptique vers équateur, [8].

Les figures (19) et (20) montrent, sur une orbite de satellite, les écarts dus à une prise en compte d'astres moyens (ellipse en précession) par rapport à l'utilisation d'une éphéméride type DE200. Chaque trajectoire a été obtenue par une intégration numérique.

Cependant, pour la Lune, les différences constatées ici peuvent être réduites au niveau métrique, avec l'introduction dans le mouvement moyen de l'astre des quelques termes (4 ou 5 sur chacune des variables longitude, latitude, parallaxe) principaux de la théorie de Brown.

L'expression du potentiel solaire en fonction des éléments orbitaux est donnée par:

$$\begin{aligned}
 U_{\odot} = & \frac{GM_{\odot}}{a_{\odot}} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{a}{a_{\odot}}\right)^l \sum_{m=0}^l \delta_{0,m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\
 & \times \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \sum_{p'=0}^l F_{l,m,p'}(i_{\odot}) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} H_{l,p,q}(e) \sum_{q'=-\infty}^{+\infty} G_{l,p',q'}(e_{\odot}) \\
 & \times \cos[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M] \\
 & \quad [- (l-2p')\omega_{\odot} - (l-2p'+q')M_{\odot} + m(\Omega - \Omega_{\odot})]
 \end{aligned}$$



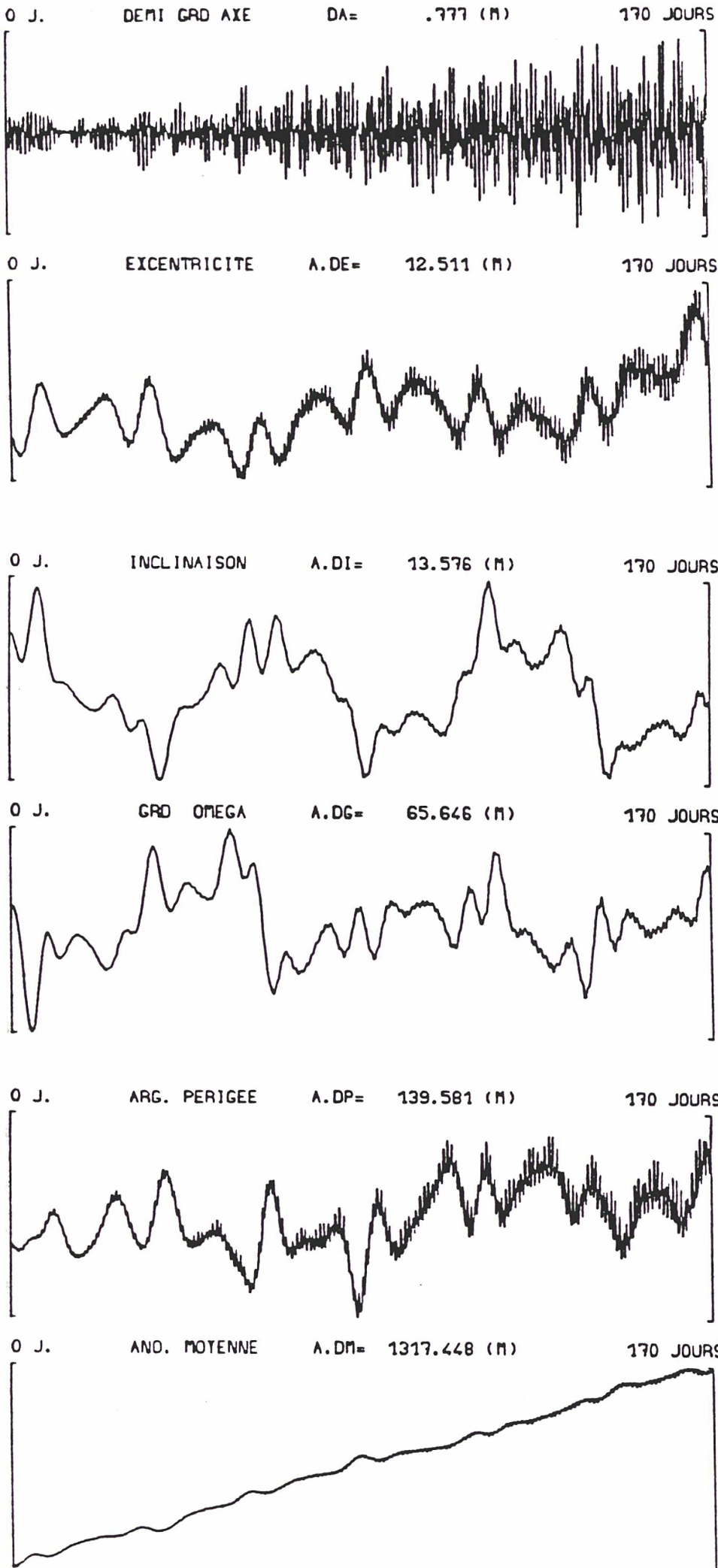
Satellite

$a_0 = 7620 \text{ km}$
 $e_0 = 0.0847$
 $i_0 = 10 \text{ deg}$

Influence du mouvement du Soleil (moyen - exact)

Perturbations :
 J_2 à J_5 + Soleil

Fig. 19



Satellite

$$a_0 = 7600 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.0547$$

$$i_0 = 30 \text{ deg}$$

Influence du
mouvement de la Lune
(moyenne - exacte)

Perturbations :

J_2 à J_5 + Lune

Fig. 20

Le potentiel lunaire a le développement (expression réelle) suivant:

$$\begin{aligned}
 U_{\odot} = & \frac{GM_{\odot}}{a_{\odot}} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{a}{a_{\odot}}\right)^l \sum_{m=0}^l \delta_{0,m} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{l-m}{2} \rfloor}}{(l+m)!} \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \\
 & \times \sum_{m'=-l}^{+l} (l-m')! C_{l,m'}^{m'}(\varepsilon/2) \sum_{p'=0}^l D_{l,m',p'}(i_{\odot}) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} H_{l,p,q}(e) \sum_{q'=-\infty}^{+\infty} G_{l,p',q'}(e_{\odot}) \\
 & \times \cos[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M - (l-2p')\omega_{\odot} - (l-2p'+q')M_{\odot} + m(\Omega - \Omega_{\odot})]
 \end{aligned}$$

La fonction $D_{l,m',p'}(i_{\odot})$ a été introduite pour pallier à la sommation sur m' , indice positif ou négatif. Son expression (avec l, m, p entiers ≥ 0) est du type :

$$D_{l,m,p}(i) = (-1)^{l-m+\lfloor \frac{l-m}{2} \rfloor} F_{l,m,p}(i)$$

$$D_{l,-m,p}(i) = (-1)^{\lfloor \frac{l-m}{2} \rfloor} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} F_{l,m,l-p}(i)$$

où: $\delta_{0,m}$: symbole égal 1 si $m = 0$, égal 2 si $m \neq 0$,

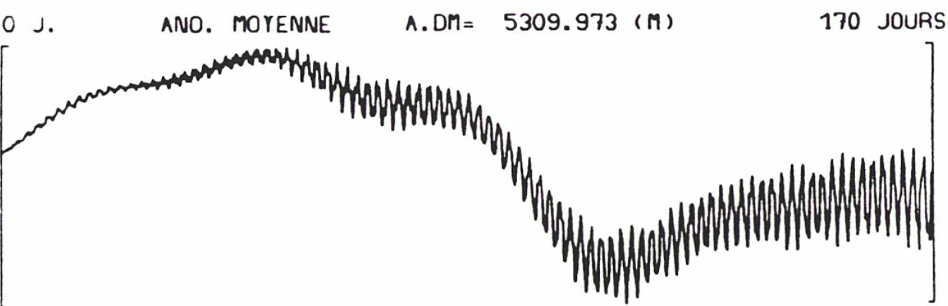
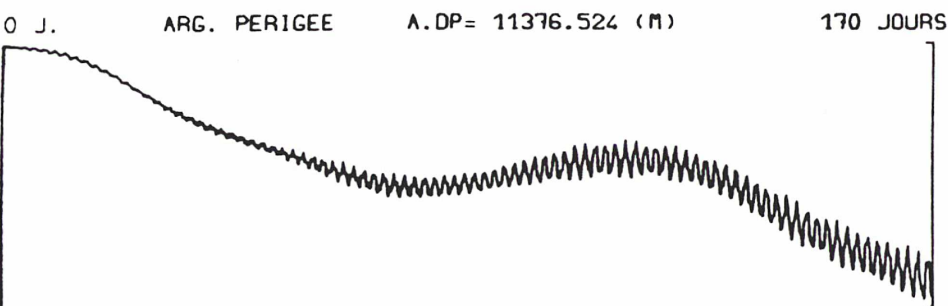
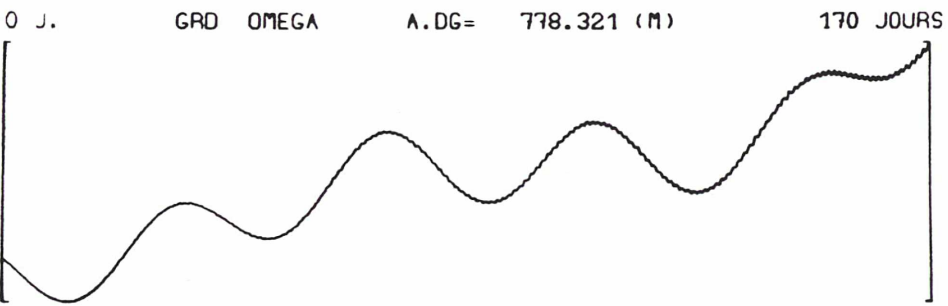
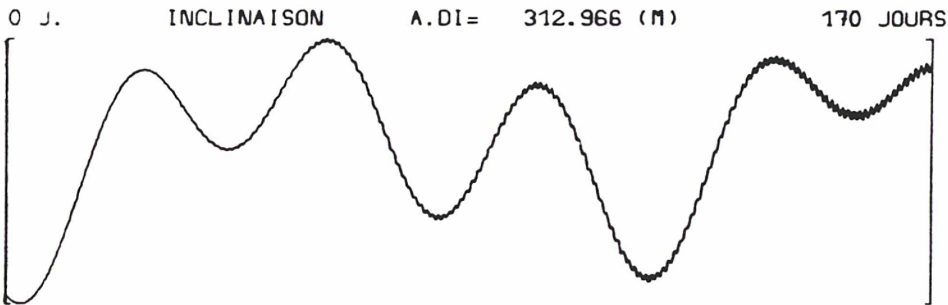
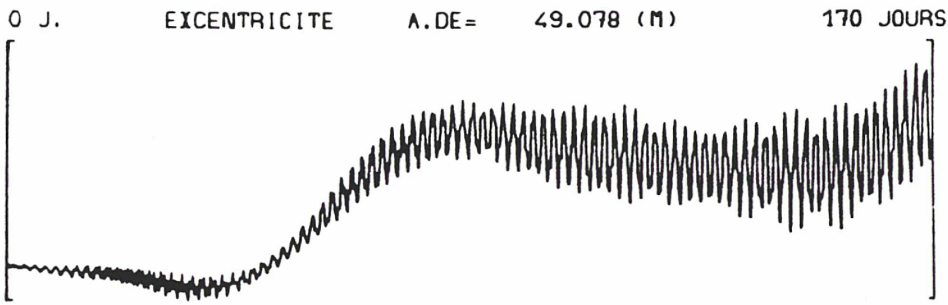
$C_{l,m}^{m'}(\varepsilon/2)$: polynôme trigonométrique (Euler-Clifford),

$D_{l,m',p'}(i)$: expression générale des fonctions finies de l'inclinaison ($\forall m'$),

$H_{l,p,q}(e)$: fonction de l'excentricité propre au développement de $(a/r)^l \cos mv$.

L'action du potentiel luni-solaire sur une orbite de satellite est essentiellement fonction des termes de couplage avec J_2 (figures 21 à 25). Ainsi, en l'absence d'aplatissement de la Terre, les perturbations du Soleil, par exemple, sont extrêmement différentes de ce qu'elles sont dans la réalité; il n'y a même aucun rapport ! (figures 21 et 22).

D'autre part, les paramètres de la trajectoire n'ont pas la même importance relative vis-à-vis des perturbations. D'une façon générale, l'altitude prédomine en imposant à la fois les amplitudes des perturbations (10 fois plus pour LAGEOS que pour STARLETTE) et les périodes (rapport 10 également) qui leur sont associées. Il faut cependant retenir, qu'aux basses inclinaisons (20 degrés), les couples luni-solaires sont moins importants, [8].



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence du
potentiel solaire

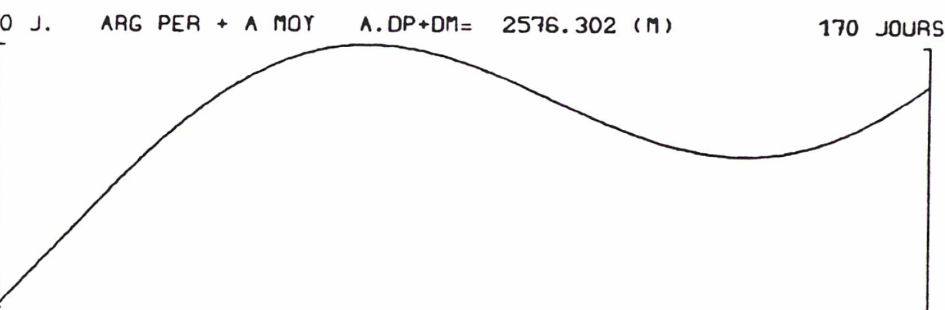
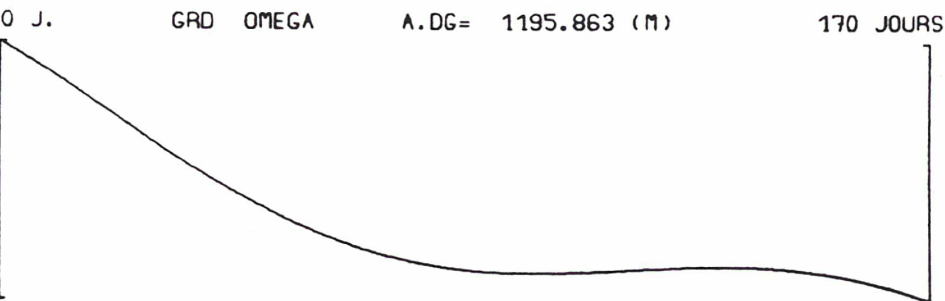
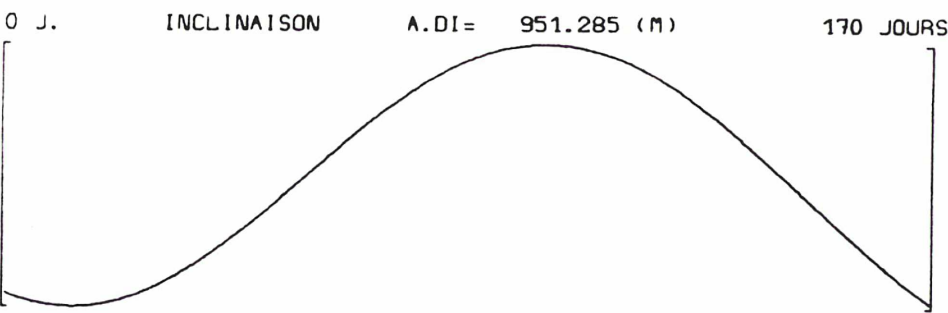
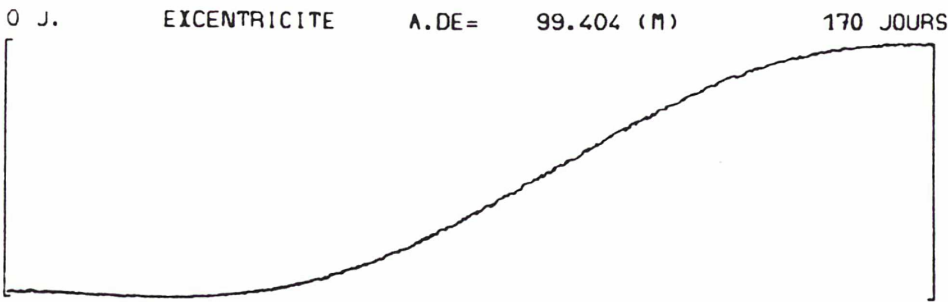
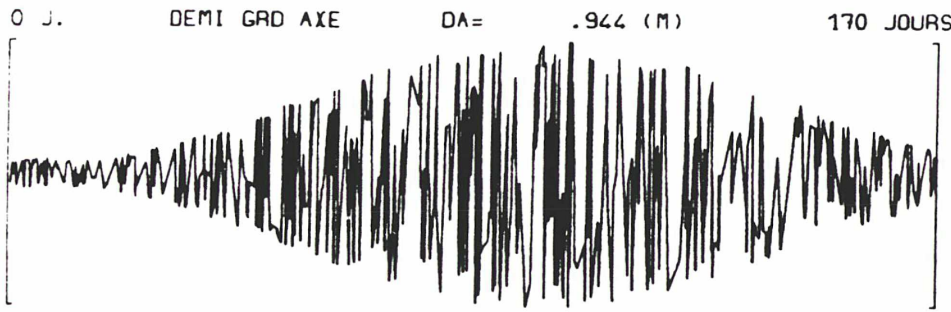
Différence :

$$J_2 + \text{Soleil}$$

-

$$J_2$$

Fig. 21



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence du
potentiel solaire
sans couplage avec J_2

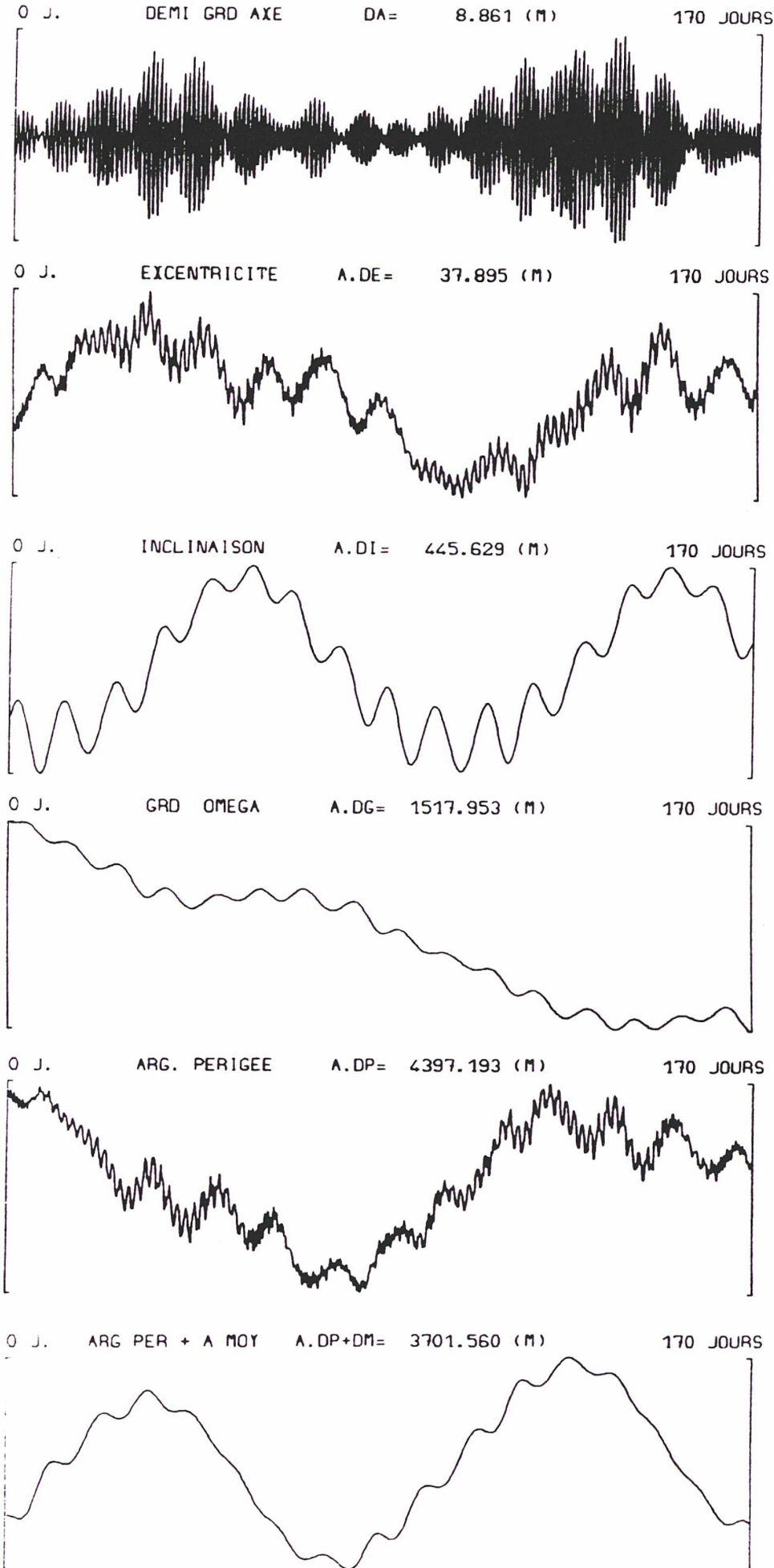
Différence :

$$J_3 + J_4 + \text{Soleil}$$

-

$$J_3 + J_4$$

Fig. 22



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence du
potentiel lunaire

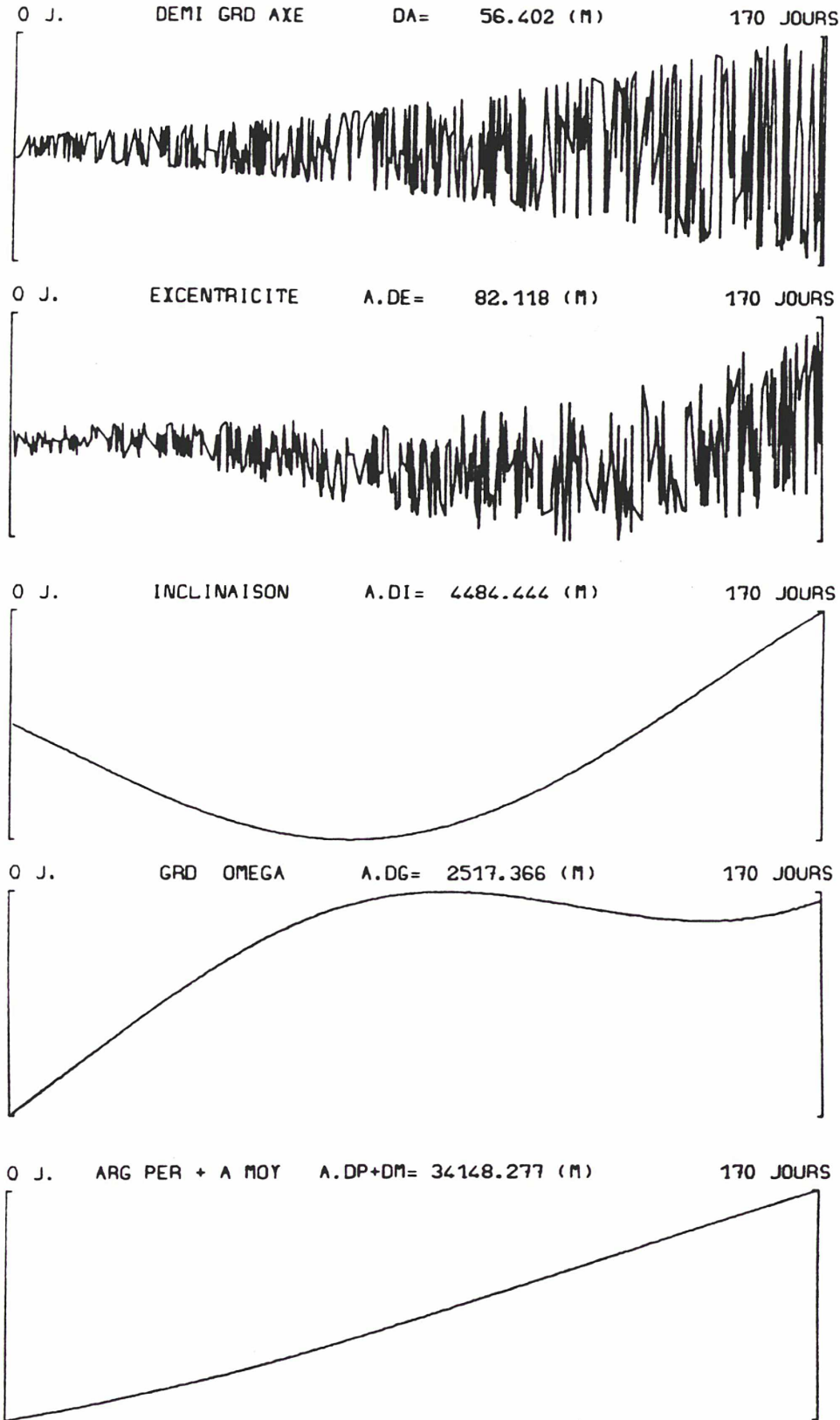
Différence :

$$J_2 + \text{Lune}$$

-

$$J_2$$

Fig. 23



Satellite

$a_0 = 12200 \text{ km}$

$e_0 = 0.004$

$i_0 = 110 \text{ deg}$

Influence du
potentiel solaire

Différence :

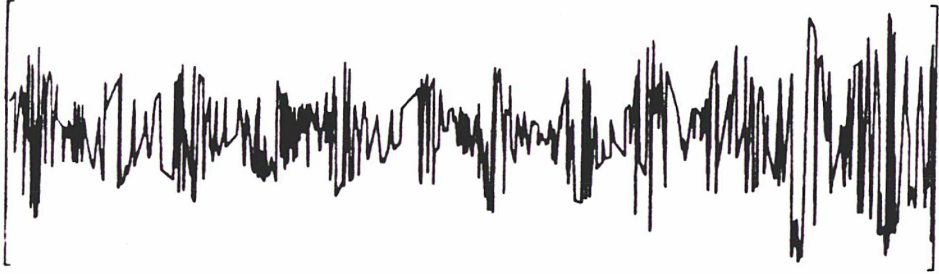
$J_2 + \text{Soleil}$

-

J_2

Fig. 24

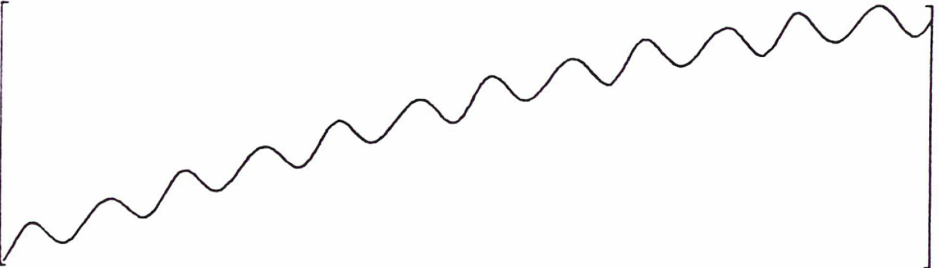
0 J. DEMI GRD AXE DA= 24.297 (M) 170 JOURS



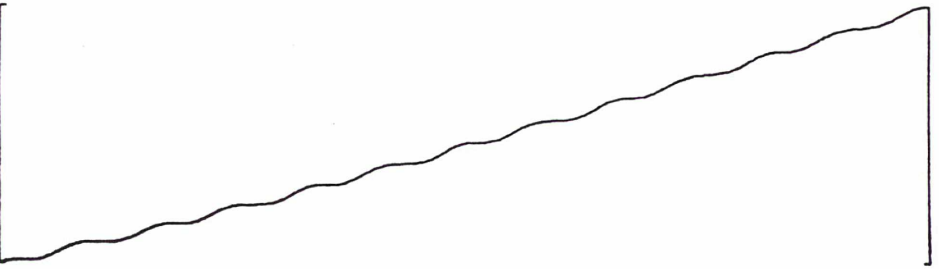
0 J. EXCENTRICITE A.DE= 248.452 (M) 170 JOURS



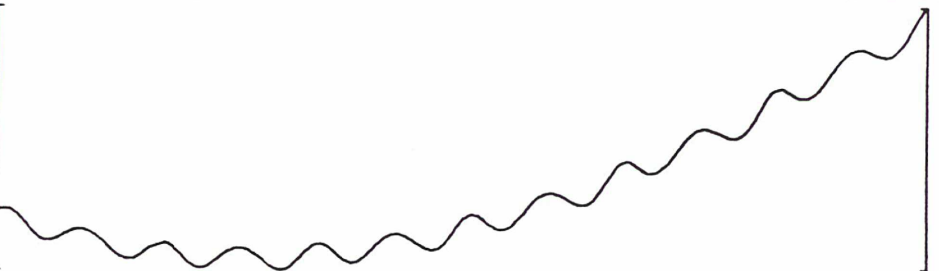
0 J. INCLINAISON A.DI= 4290.182 (M) 170 JOURS



0 J. GRD OMEGA A.DG= 14508.523 (M) 170 JOURS



0 J. ARG PER + A MOY A.DP+DM= 12672.532 (M) 170 JOURS



Satellite

$$a_0 = 12200 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.004$$

$$i_0 = 110 \text{ deg}$$

Influence du
potentiel lunaire

Différence :

$$J_2 + \text{Lune}$$

-

$$J_2$$

Fig. 25

Les comparaisons entre les intégrations numérique et analytique sont encourageantes. Bien que les problèmes de résonance dus aux harmoniques (13,13) du potentiel terrestre persistent (figure 26 par rapport à figure 18), la prise en compte d'un Soleil moyen dans la théorie ne dégrade pas l'orbite à plus du décimètre; les effets sont calculés, au premier ordre, à 90 pour cent. Dans le cas de la Lune (figure 27), nous constatons des écarts un peu plus importants, que nous expliquons par deux remarques. Ils proviennent d'une part du mouvement moyen adopté pour cet astre, qui est loin du mouvement réel instantané, et d'autre part, du satellite considéré (e , i , T_ω). En effet, ces paramètres sont tels qu'ils imposent de fortes perturbations sur (e), avec des couplages de l'ordre de l'hectomètre.

b. Potentiel de marées:

La partie variable du potentiel terrestre, due à la non stationnarité de la répartition des masses par rapport à la croûte, est également à prendre en compte pour un calcul de trajectoires précis.

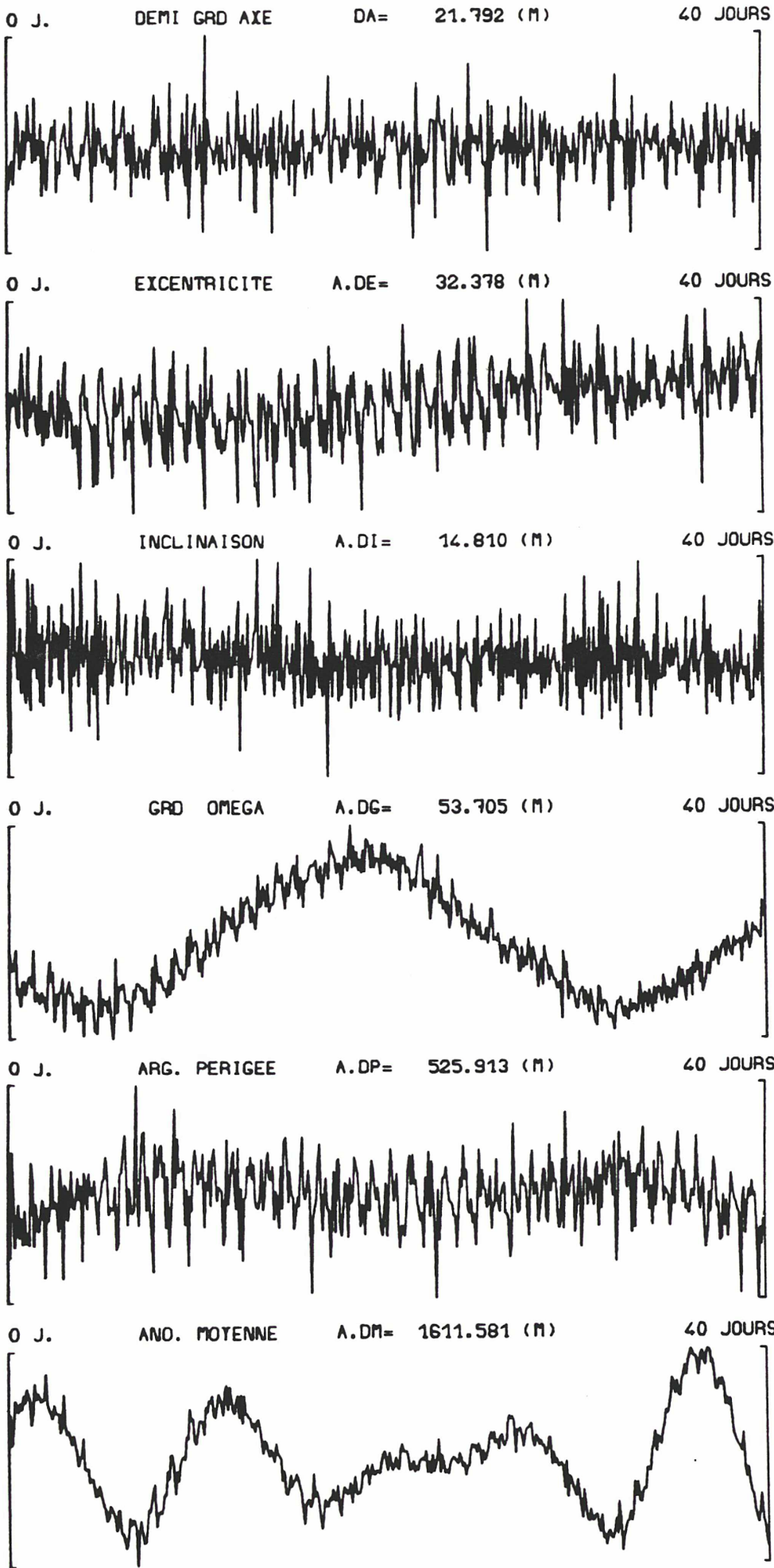
Si les marées terrestres sont liées à la réponse quasi-élastique de la Terre au potentiel luni-solaire, les marées océaniques proviennent de la redistribution spatio-temporelle des masses d'eau et à l'effet de charge induit sur la croûte.

L'utilisation du nombre de Love k_2 d'une part, et du modèle de Wahr d'autre part (hypothèse d'une Terre parfaitement élastique et à symétrie sphérique), permet le calcul du potentiel additionnel (corrections sur les coefficients de degré 2) de marées terrestres.

Dans le cas de l'intégration numérique, ce calcul s'opère en deux temps, compte tenu des recommandations propres au "Standarts Merit". A la partie "constante" (modulation par les arguments de la Lune et du Soleil) des coefficients d'appoint $\Delta C_{l,m}$ et $\Delta S_{l,m}$ ($l = 2$ et $m = 0$ à 2), s'ajoutent une partie diurne (4 ondes, pour $l = 2$ et $m = 1$) et une partie semi-diurne (2 ondes pour $l = 2$ et $m = 2$) provenant du modèle de Wahr. Pour le coefficient J_2 proprement dit, il n'est prévu qu'une partie constante, sans effets à longues périodes dus à une onde de marée quelconque.

Compte tenu de l'expression du potentiel gravitationnel de la Terre $U(r, \lambda, \varphi)$, les appoints "constants" dus aux marées terrestres ont pour expression générale:

$$\Delta C_{l,m} + j\Delta S_{l,m} = \frac{GM_\star}{r_\star} \frac{a_e}{GM} \left(\frac{a_e}{r_\star}\right)^l \delta_{0,m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(\sin \varphi_\star) [\cos m\lambda_\star + j \sin m\lambda_\star]$$



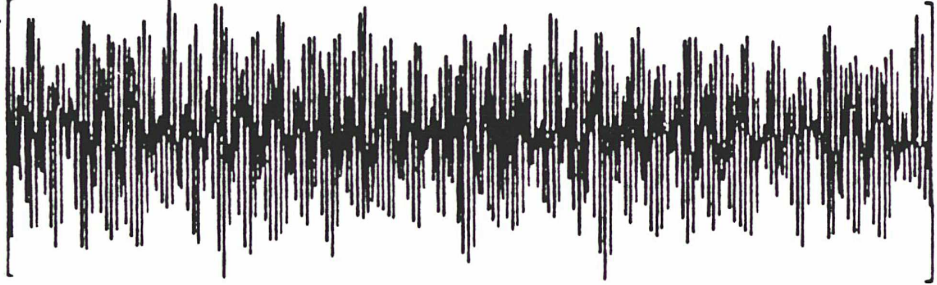
Satellite
 $a_0 = 7617.7$ km
 $e_0 = 0.0847$
 $i_0 = 39.4$ deg

Comparaison :
 Intégration numérique
 (Soleil exact)
 -
 Théorie analytique
 (Berger, Kaula
 (Soleil moyen) + pente)

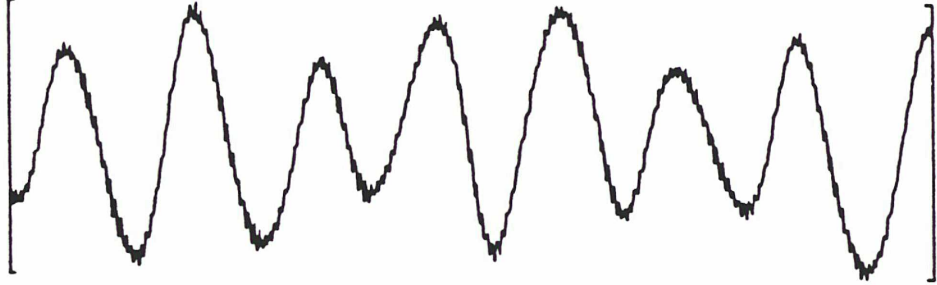
Perturbations :
 Potentiel (20,20)
 + Soleil

Fig. 26

0 J. DEMI GRD AXE DA= 3.193 (M) 170 JOURS



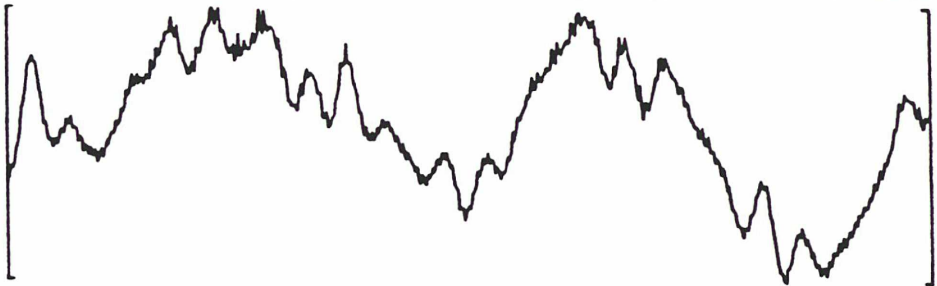
0 J. EXCENTRICITE A.DE= 195.475 (M) 170 JOURS



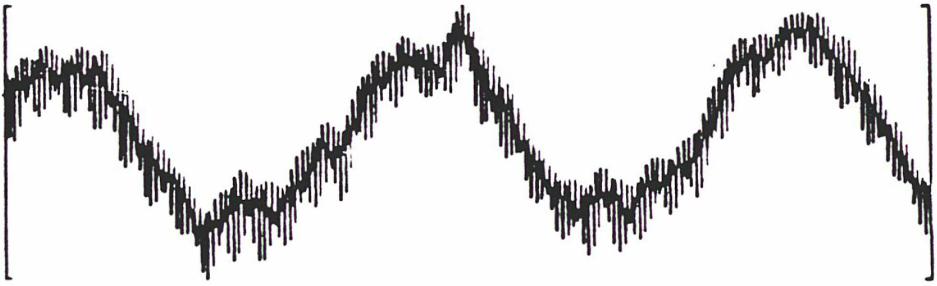
0 J. INCLINAISON A.DI= 13.225 (M) 170 JOURS



0 J. GRD OMEGA A.DG= 87.864 (M) 170 JOURS



0 J. ARG. PERIGEE A.DP= 608.338 (M) 170 JOURS



0 J. ARG PER + A MOY A.DP+DM= 575.867 (M) 170 JOURS



Satellite

$$\bar{a}_0 = 7617640. (m)$$

$$\bar{e}_0 = 0.08479$$

$$\bar{i}_0 = 0.1745 (rd)$$

Comparaison :

Intégration numérique
(Lune exacte)

—

Théorie analytique
(Lune moyenne)

Perturbations :

J_2 à J_5

+ Lune

Fig. 27

où : $(r_*, \lambda_*, \varphi_*)$ sont les coordonnées terrestres de l'astre $*$.

A cela s'ajoutent donc, pour les ondes données $(O_1, P_1, K_1, \Psi_1, M_2, S_2)$, des termes d'amplitude très faible sur les coefficients de degré 2 et d'ordres 1 et 2 (Wahr, 1980).

Le développement de la fonction perturbatrice en fonction des paramètres orbitaux du satellite, correspondant au potentiel de marées terrestres, est strictement parallèle à celui utilisé pour l'astre (Lune ou Soleil) lui même; ainsi, grâce à l'hypothèse de Love, et au principe d'extrapolation de Dirichlet pour un point extérieur à la Terre:

$$\Delta U_* = \sum_{l=2}^{+\infty} U_l^* k_l \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+1}$$

La modification totale de potentiel externe ΔU , due aux marées océaniques, se calcule en ajoutant à l'effet de la hauteur de la marée $h(\lambda, \varphi, t)$ (réponse des océans à la perturbation luni-solaire), un incrément $k'_l \cdot \Delta U_l(r)$ à chaque degré pris en compte. Ce développement du potentiel de marées océaniques se base essentiellement sur une hypothèse de réponse élastique de la surface de la Terre, à une charge variable (coefficients k'_l).

Les algorithmes d'intégration numérique utilisent le développement général suivant :

$$U(r, \lambda, \varphi, t) =$$

$$4\pi G a_e \rho_0 \sum_{\nu} \sum_{l,m} \sum_{\pm} \frac{1+k'_l}{2l+1} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{l+1} C_{\nu,l,m}^{\pm} \sin(\sigma_{\nu,t} \pm m\lambda + \psi_{\nu,l,m}^{\pm}) P_{l,m}(\sin \varphi)$$

où: ρ_0 : densité moyenne des océans,

k'_l : coefficients de charge induite,

$C_{\nu,l,m}^{\pm}, \psi_{\nu,l,m}^{\pm}$: amplitudes et phases des ondes progrades (+) et rétrogrades (-);
modèle de Schwiderski (1983),

$\sigma_{\nu,t}$: arguments des ondes de marées,

(r, λ, φ) : coordonnées sphériques terrestres du satellite.

Les principales ondes utilisées (au nombre de 9 à 11) sont de degrés 2 à 6 et d'ordres 0 à 2 (longues périodes, diurnes, semi-diurnes). Cependant, les modèles développés en fonctions harmoniques sphériques donnant des termes jusqu'à (20,20) quasiment, il peut être intéressant de pouvoir en tenir compte, au moment de l'intégration, pour calculer les perturbations correspondantes. L'intégration numérique de ces termes étant trop coûteuse en temps de calcul (les effets sont de plus à longues périodes), nous montrons, grâce à une intégration analytique (logiciel SELECT4), qu'ils peuvent engendrer des variations de un ou deux décimètres sur les éléments orbitaux d'un satellite comme STARLETTE.

Une résolution analytique des équations de Lagrange est envisageable pour ce type d'effets, dans la mesure où le développement de ΔU fait apparaître clairement les éléments orbitaux du satellite. Ainsi, en s'appuyant sur les résultats de Kaula, obtenus pour le potentiel terrestre propre, il est possible d'exprimer le potentiel de marées océaniques sous la forme:

$$\Delta U = 4\pi G a_e \rho_0 \sum_{\nu} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1+k_l'}{(2l+1)} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+1} \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \sum_{q=+\infty}^{-\infty} G_{l,p,q}(e) \\ \times \left(C_{\nu,l,m}^+ \begin{bmatrix} \sin \\ -\cos \end{bmatrix}_{(l-m)_{\text{impair}}}^{(l-m)_{\text{pair}}} (\Psi_{\nu,l,m,p,q}^+) - C_{\nu,l,m}^- \begin{bmatrix} \sin \\ -\cos \end{bmatrix}_{(l-m)_{\text{impair}}}^{(l-m)_{\text{pair}}} (\Psi_{\nu,l,m,p,q}^-) \right)$$

avec: $\Psi_{\nu,l,m,p,q}^{\pm} = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta) \pm \sigma_{\nu,t} \pm \psi_{\nu,l,m}^{\pm}$

A.III.3. FORCES DE SURFACE :

Les accélérations non gravitationnelles comprennent principalement, pour des satellites type SPOT, LAGEOS, ou STARLETTE, de forme, masse et altitude différentes :

- le freinage atmosphérique (atmosphère neutre ou plasma), (de $10^{-7} m/s^2$ à 800 kilomètres, à $10^{-12} m/s^2$ à 6000 kilomètres),

- les accélérations induites par la pression de radiation, quelqu'en soit l'origine ($10^{-7} m/s^2$ (SPOT) à $10^{-9} m/s^2$ (satellites géodésiques) en effet direct, et $10^{-8} m/s^2$ à $10^{-10} m/s^2$ en réfléchi),

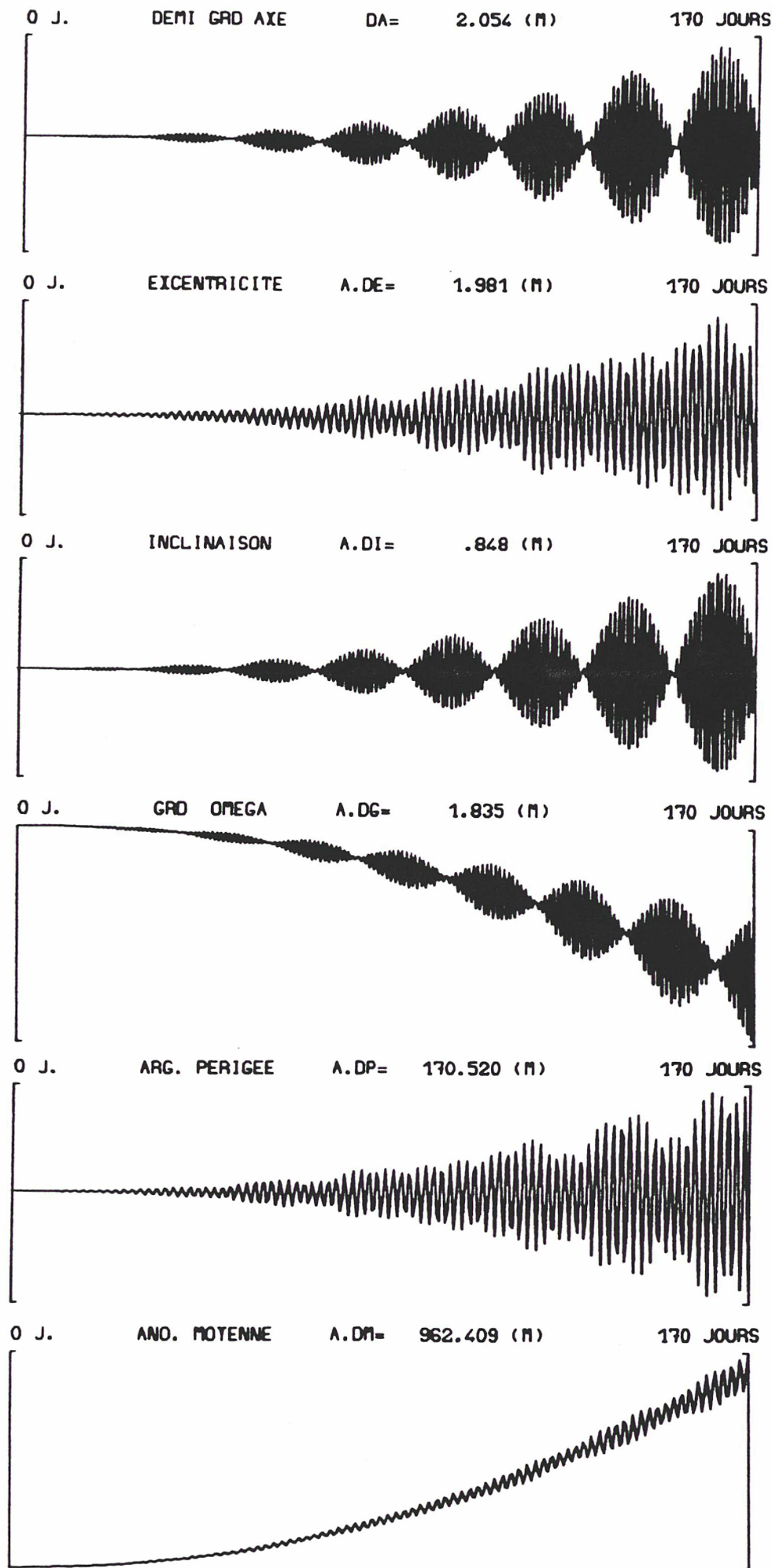
- l'émission infra-rouge d'origine thermique, de la surface du satellite ($10^{-9} m/s^2$ à $10^{-12} m/s^2$).

Ces principaux termes sont dus à des échanges de quantité de mouvement à la surface du satellite. Leur calcul est fonction de paramètres d'état de l'atmosphère, comme la masse volumique, la température, la masse moléculaire moyenne, etc..., dont la prédiction pose un problème complexe.

Ainsi, les hypothèses simplificatrices inhérentes à toute résolution font apparaître, schématiquement, des indéterminations de l'ordre de 30% pour les "gros" satellites (SPOT, TOPEX/POSEIDON,...) et de l'ordre de 10% pour les satellites géodésiques (rapport surface/masse optimum). De plus, il est bien évident que les problèmes s'accroissent quand l'altitude diminue, et inversement.

a. Freinage atmosphérique :

Malgré la faible valeur des densités atmosphériques rencontrées aux altitudes des satellites ($10^{-17} g/cm^3$ à $10^{-16} g/cm^3$ à environ 900 kilomètres), les perturbations d'origine aérodynamique sont très souvent observables (figure 28). Elles se caractérisent principalement par une décroissance linéaire du demi-grand axe de la trajectoire (1mm/jour (6000 km) à 1m/jour (600 km)) et, d'une façon générale, des éléments métriques (a, e, i); c'est une perte d'énergie mécanique. D'autre part, compte tenu de la dépendance des effets séculaires (J_2 , notamment) vis-à-vis de ces paramètres, il s'ensuit des termes paraboliques sur les angles (principalement le moyen mouvement), dits effets induits, nettement supérieurs aux effets propres de la perturbation.



Satellite

$a_0 = 8280$ km

$e_0 = 0.01$

$i_0 = 50$ deg

Influence du freinage atmosphérique

Différence :

$J_2 + \text{Freinage}$

-

J_2

Fig. 28

L'expression générale de l'accélération (freinage) est de la forme:

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{2}\rho\frac{S}{m}C_D V' \vec{V}'$$

où: ρ : densité atmosphérique,

S : surface exposée au freinage (section de choc),

m : masse du satellite,

C_D : coefficient aérodynamique,

\vec{V}' : vitesse relative du satellite dans l'atmosphère.

Les causes principales de l'indétermination de cette force proviennent de la densité, de la surface exposée et de la vitesse relative !

Si la densité dépend de manière prépondérante de l'altitude, en-dessous de 400 kilomètres, elle dépend principalement de la température, au-dessus de cette altitude. Ainsi, le profil de température adopté [11], [12] prend-il une importance toute particulière pour la détermination de (ρ).

D'autre part, la surface d'un satellite exposée au freinage n'est pas forcément bien modélisable. En faisant abstraction des satellites à forme sphérique (LAGEOS, STARLETTE,...), il existe un certain nombre de véhicules (SPOT, SEASAT, ERS-1,...) pour lesquels le rapport (S/m) peut changer pendant la période d'étude (restitution de la trajectoire).

Enfin, la modélisation des distributions de vents en altitude n'étant pas réalisée de manière satisfaisante à l'heure actuelle, le calcul de la vitesse V' du satellite dans l'atmosphère n'en tient pas compte. L'hypothèse de vents faibles (0.3 km/s) par rapport à la vitesse du satellite (7 km/s) peut introduire une certaine incertitude sur l'évaluation de l'accélération, puisque V' intervient au carré.

Compte tenu des hypothèses de non variation de ces différents paramètres, les restitutions de trajectoires prévoient souvent d'ajuster un coefficient C_D par jour sur la durée du traitement.

La prise en compte de la fonction de freinage atmosphérique dans les équations de la dynamique impose de choisir les équations de Gauss, dans la mesure où le système différentiel s'exprime en fonction des éléments orbitaux du satellite. Ceci ne présente pas de difficulté dans les logiciels d'intégration numérique.

Tout développement analytique de cette fonction perturbatrice n'est, à l'heure actuelle, pas mis en œuvre. Cependant, certains auteurs [13] procèdent à un calcul théorique de l'effet du frottement, en intégrant (quadrature numérique) les équations de Gauss entre deux périodes. Les dérivées théoriques (\dot{a} , \dot{e} , \dot{i} , ...) obtenues permettent alors de compléter une théorie analytique, afin d'extrapoler le mouvement du satellite en présence de freinage atmosphérique. Les effets induits sont bien entendu pris en compte, et le résultat, certes approximatif, est très satisfaisant.

b. Pression de radiation solaire

La quantité de mouvement d'un photon d'énergie e , s'écrit: $p = e/c$. Cette relation se généralise au cas d'un flux parallèle de photons d'énergie totale E . En définissant une constante solaire, pour une distance moyenne ($d_0 = 1$ unité astronomique) donnée, l'expression de l'accélération due à la pression de radiation solaire directe est:

$$\vec{\gamma} = -k \frac{A}{m} \frac{C_{\odot}}{c} \frac{S\vec{S}_o}{SS_o}$$

où: A : est la surface exposée,

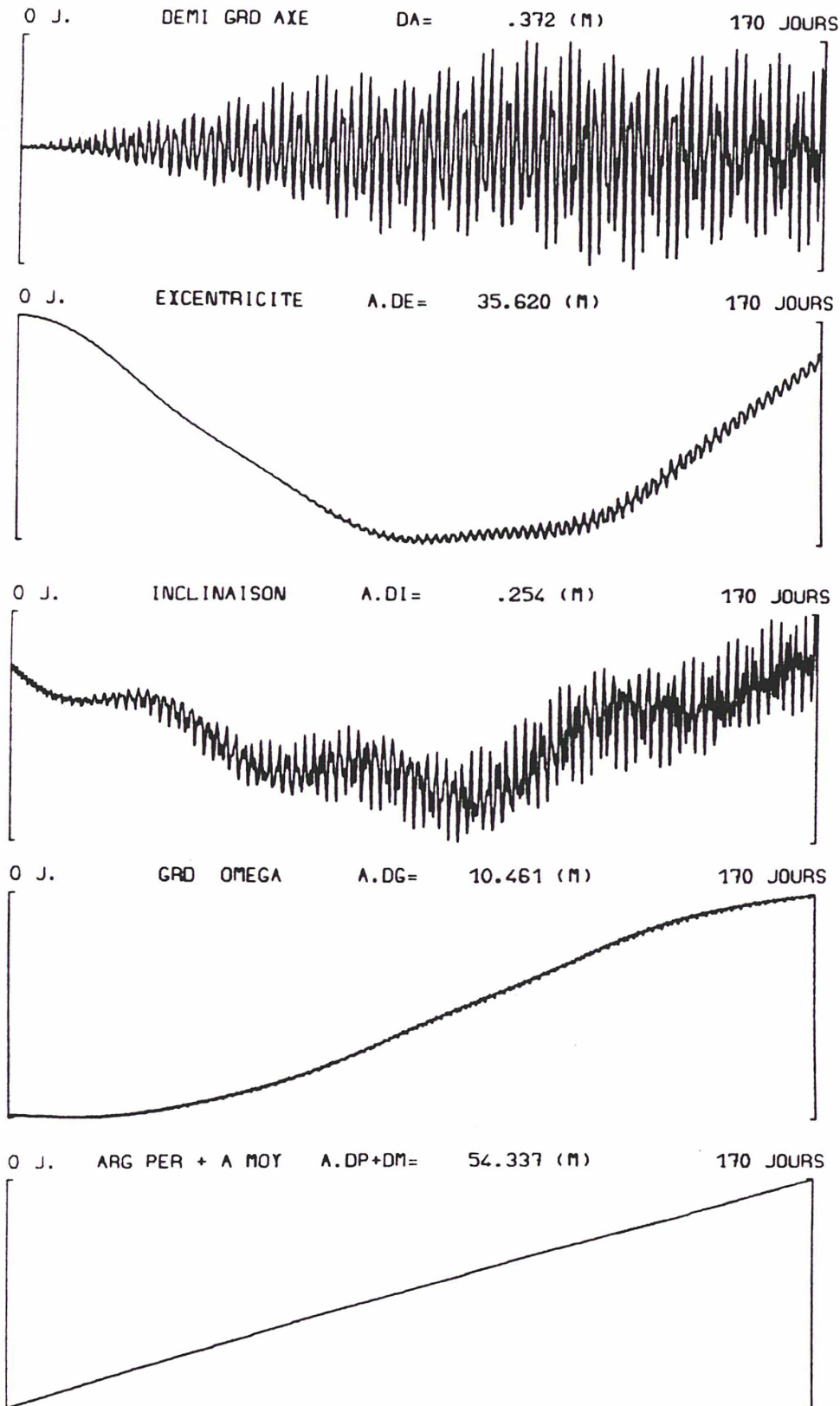
m : la masse du satellite,

k : un coefficient d'absorption qui dépend du satellite,

C_{\odot} : la constante solaire ($= \frac{L_{\odot}}{4\pi d_0^2} = 1370 \text{ W/m}^2$)

Sur un satellite artificiel, la pression de radiation solaire directe n'entraîne pas de variation d'énergie mécanique du satellite. Il n'y a pas de variation séculaire du demi-grand axe. Les effets sont à longues périodes sur (e , i , Ω , ω), et proviennent principalement de la configuration du plan de l'orbite par rapport à la direction Terre-Soleil (figures 29 et 30).

Cependant, lorsque le satellite passe à l'ombre de la Terre (ou de la Lune) le champ radiatif s'annule brutalement (environ 15 secondes pour un satellite comme D5B). Il faut alors tenir compte le mieux possible des passages rapides Soleil-ombre-Soleil, ce qui est en contradiction avec l'emploi d'algorithmes d'intégration numérique à pas liés (ordres 8 à 14).



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence de la
pression solaire directe
(sans ombre)

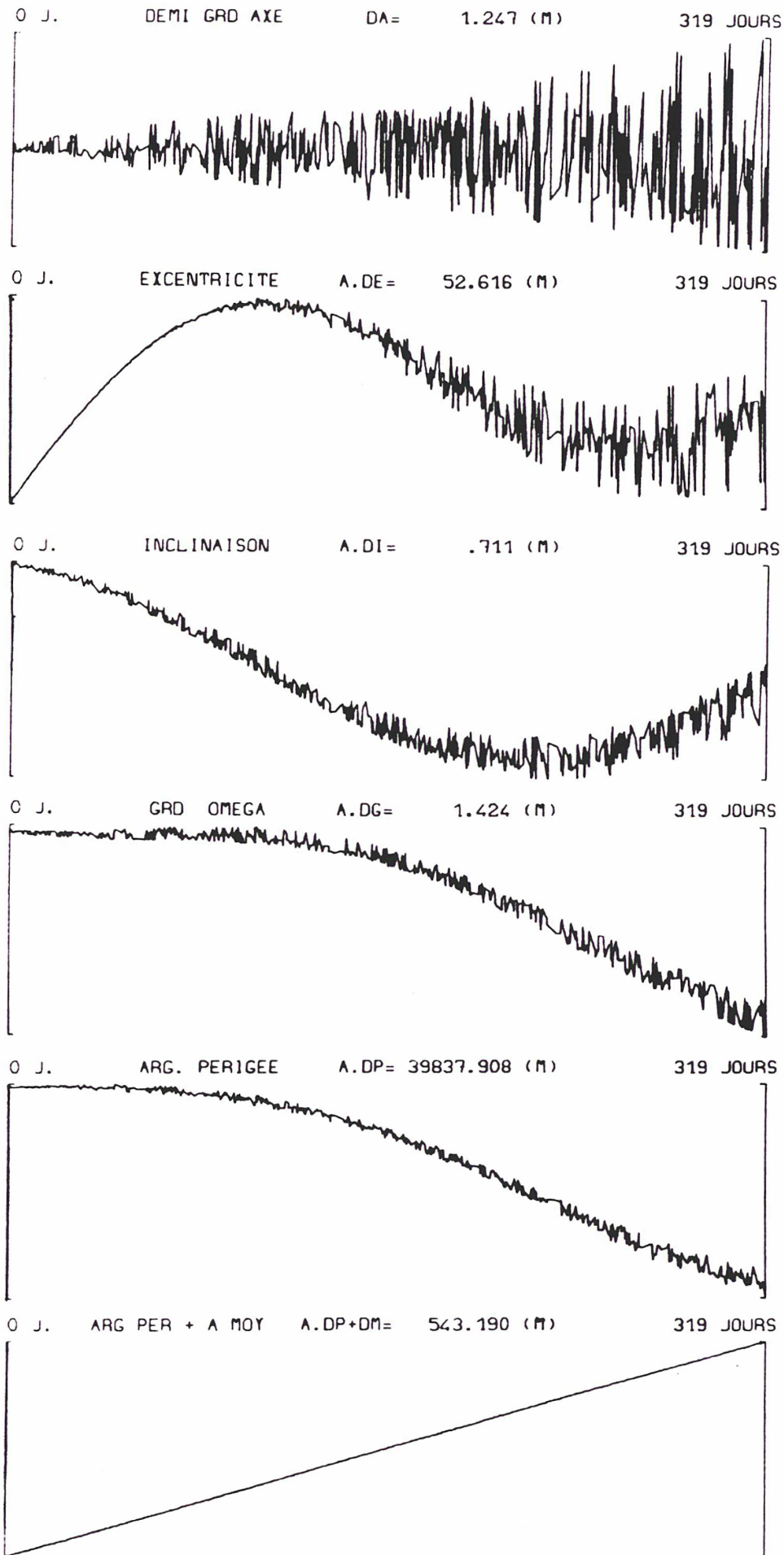
Différence :

$$J_2 + \text{P.R. (constante)}$$

-

$$J_2$$

Fig. 29



Satellite

$$a_0 = 12200 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.004$$

$$i_0 = 110 \text{ deg}$$

Influence de la pression
de radiation solaire
directe
(sans ombre)

Différence :

$$J_2 + P.R. \text{ (constante)}$$

-

$$J_2$$

Fig. 30

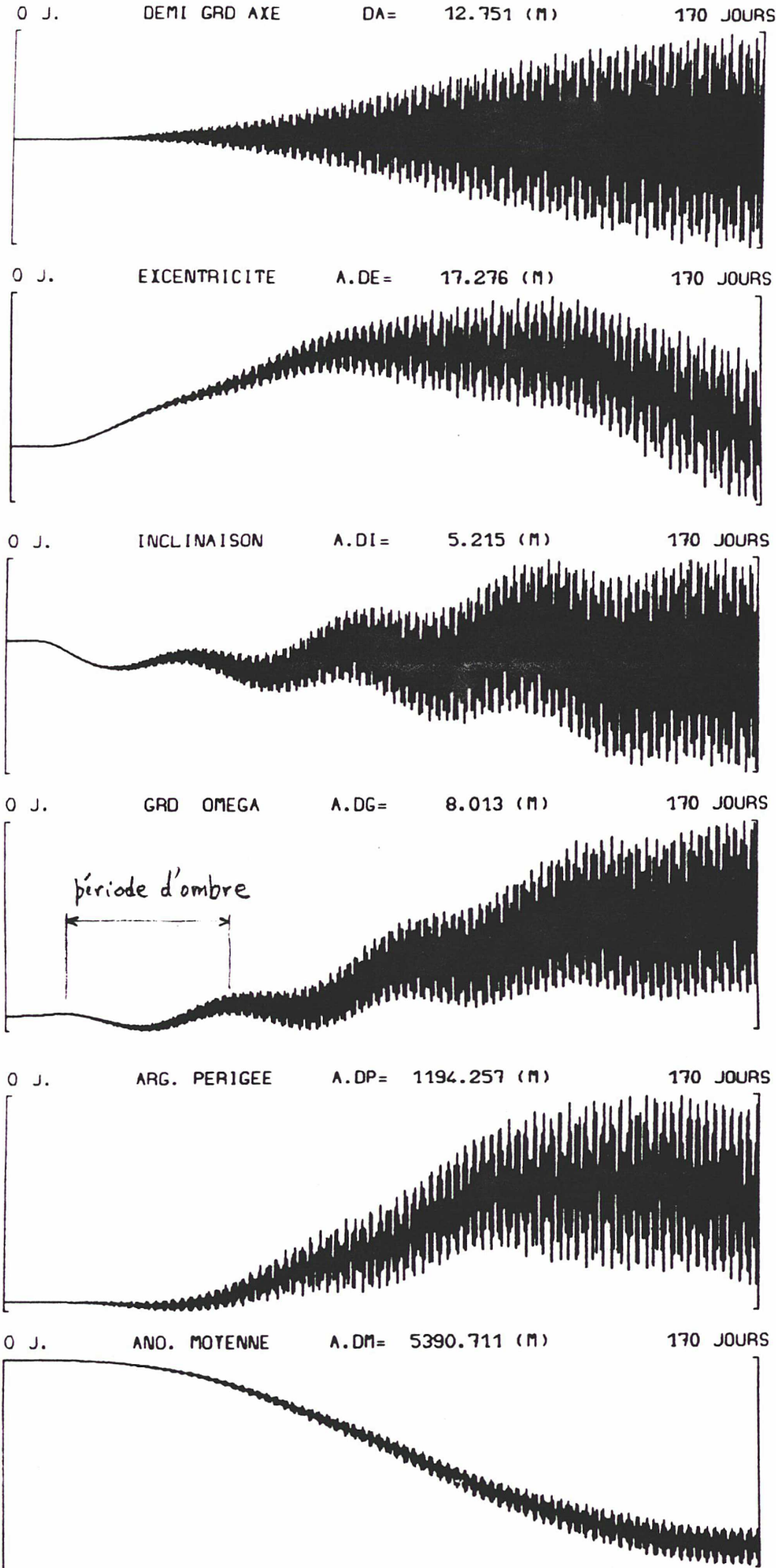
Les perturbations engendrées par le phénomène d'ombre sur les satellites artificiels sont très importantes; il importe donc de modéliser avec soin les entrées et sorties du satellite par rapport au cône non éclairé créé par la Terre.

Pour les satellites bas, les périodes d'ombre ($120^\circ \simeq 40$ jours) et d'éclairement (20 jours) se succédant avec rapidité, l'effet sur les angles i et Ω (figure 31) est quasiment périodique. A cela s'ajoutent des termes d'un an ou des termes de couplage entre $\dot{\Omega}$ et la longitude du Soleil.

Pour les satellites élevés (figure 32), les périodes d'ombre sont relativement plus courtes en angle (60°), mais plus longues en temps, puisque la période du noeud est plus grande que pour les satellites bas (rapport 1:10). D'autre part, ces périodes peuvent être très espacées. Sur un satellite du type LAGEOS, l'effet de la pression de radiation solaire directe en présence d'ombre agit comme un couple dissymétrique sur l'inclinaison, de sorte qu'en période d'éclairement, le satellite étant peu excentrique, il se produit à nouveau un équilibre. D'autre part, il est intéressant de remarquer les effets sur a (perte d'énergie) et sur Ω (couple mécanique).

Plusieurs méthodes sont employées à l'heure actuelle, dans les logiciels numériques de calcul d'orbites de satellite, pour tenir compte de ces changements brutaux. Certains auteurs calculent une table des entrées et sorties de l'ombre du satellite avant d'effectuer une restitution de trajectoires, d'autres adoptent des techniques d'intégration (changement de méthode; pas liés, puis, pas séparés....) spécifiques mais qui sont très lourdes d'emploi, etc... En ce qui nous concerne, nous utilisons une fonction régularisante dont le but est d'amortir la variation d'accélération sur plusieurs pas d'intégration. Si la programmation de cette fonction multiplicative (de zéro à un) de l'accélération ne pose pas de problème particulier, le danger réside dans l'étalement de la courbe en fonction du temps. En effet, les résultats sont différents selon que la durée de l'amortissement va de huit minutes (tests, figures 31 et 32) à une minute (tests, figures 33 et 34); la durée de l'éclairement change, donc l'énergie varie également.

Les erreurs de modélisation proviennent donc de ces changements brutaux dans la fonction perturbatrice, mais également, de la surface (A) exposée au Soleil. Non seulement cette quantité dépend du mouvement d'attitude du satellite considéré, mais encore, des pouvoirs absorbants, réfléchissants et diffusants des différentes pièces mécaniques assemblées.



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence de l'ombre de la Terre (pression de radiation solaire directe)

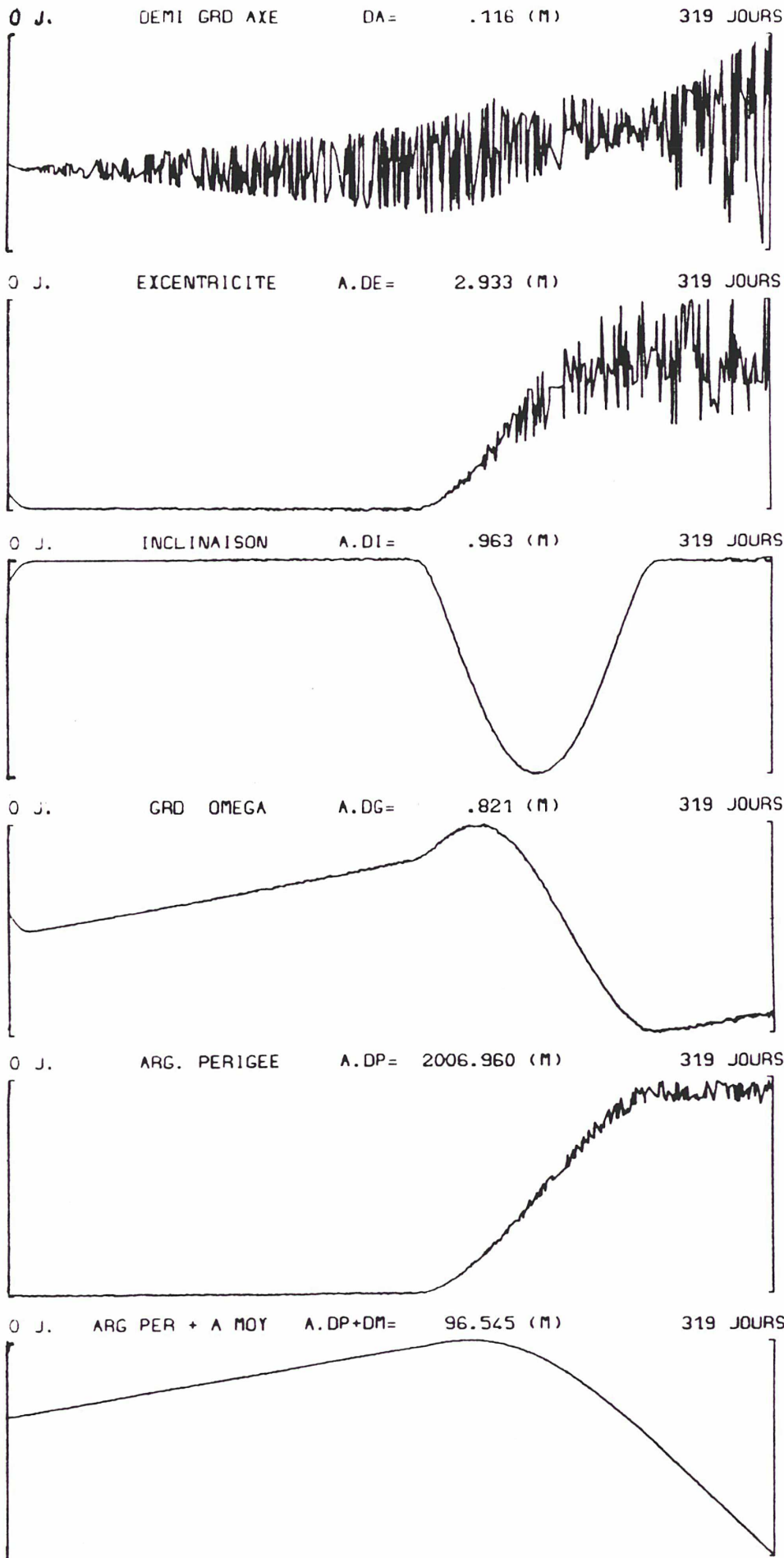
Différence :

$J_2 + P.R. \text{ (constante)}$
 (fonction ombre : 8mm)

-

$J_2 + P.R. \text{ (constante)}$

Fig. 31



Satellite

$a_0 = 12200 \text{ km}$

$e_0 = 0.004$

$i_0 = 110 \text{ deg}$

Influence de
l'ombre de la Terre
(pression de radiation
solaire directe)

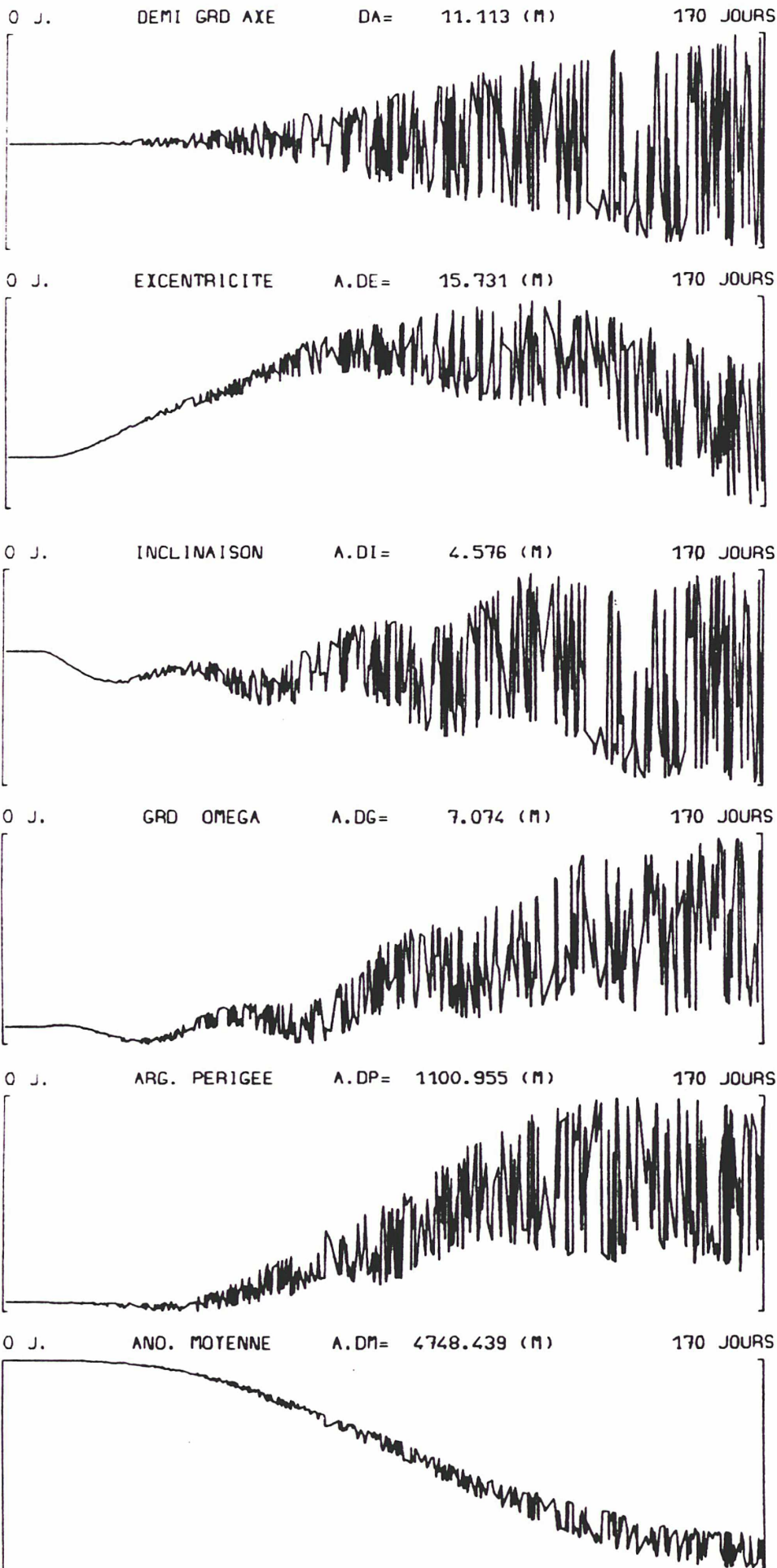
Différence :

$J_2 + \text{P.R. (non cste)}$
(fonction ombre : 8 mm)

-

$J_2 + \text{P.R. (cste)}$

Fig. 32



Satellite

$$a_0 = 7300 \text{ km}$$

$$e_0 = 0.01$$

$$i_0 = 50 \text{ deg}$$

Influence de
l'ombre de la Terre
(pression de radiation
solaire directe)

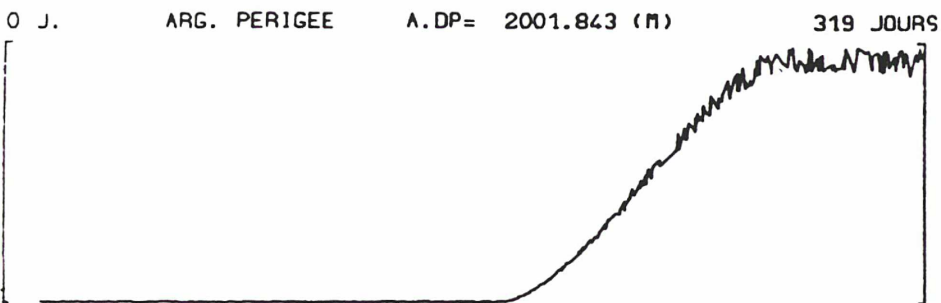
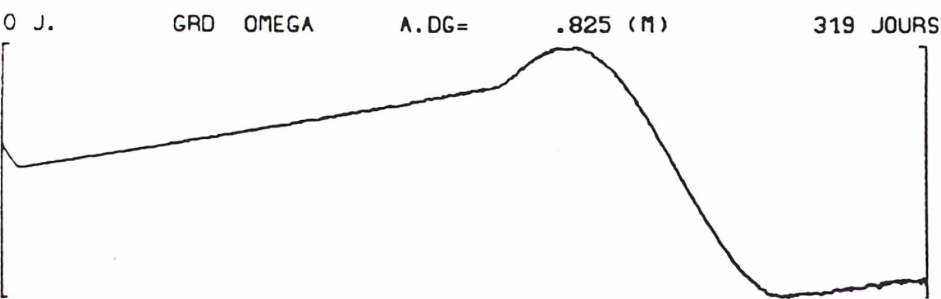
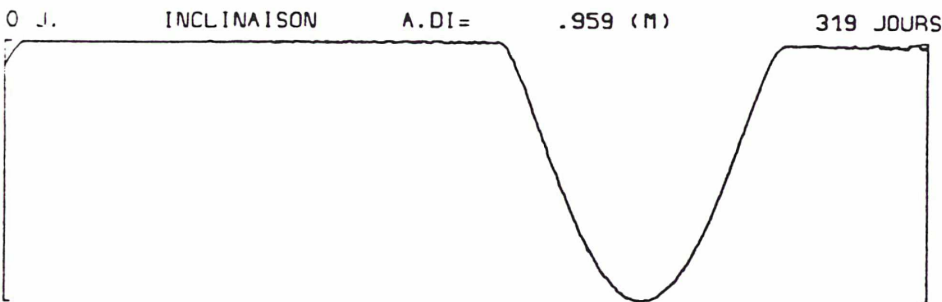
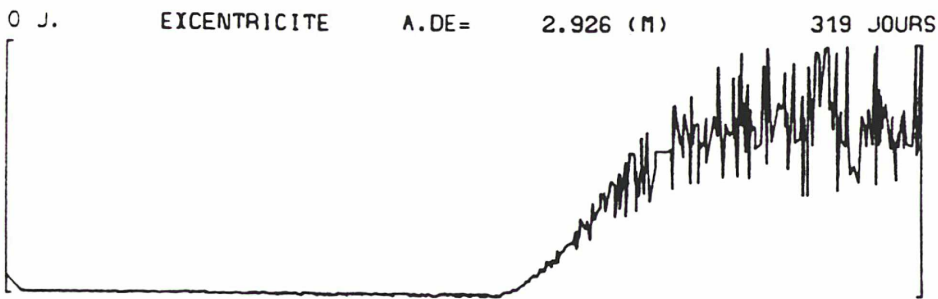
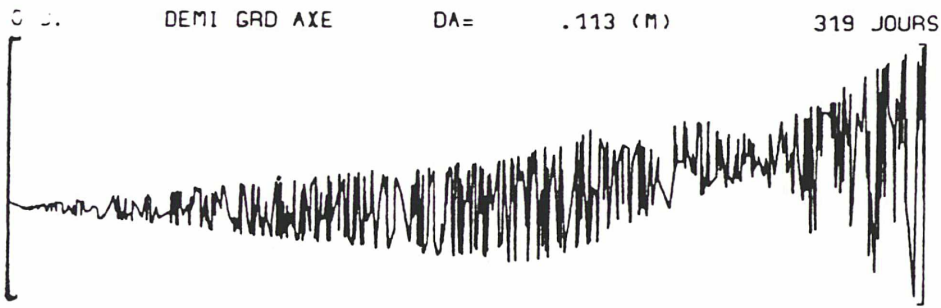
Différence :

$J_2 + \text{P.R. (non cste)}$
(fonction ombre : 1mm)

-

$J_2 + \text{P.R. (cste)}$

Fig. 33



Satellite

$$a_0 = 12200\text{km}$$

$$e_0 = 0.004$$

$$i_0 = 110\text{deg}$$

Influence de
l'ombre de la Terre
(pression de radiation
solaire directe)

Différence :

$J_2 + P.R$ (non cste)
(fonction ombre : 1mm)

-

$J_2 + P.R$ (cste)

Fig. 34

A.IV. CONCLUSION:

Si nous cherchons à intégrer numériquement les équations différentielles d'un système dynamique donné, comme par exemple le mouvement d'un satellite artificiel, nous pouvons nous placer du point de vue du court terme, typiquement quelques jours pour un satellite, ou de celui du long terme, typiquement plusieurs années. Toutefois, ces notions de longueur de temps ont un caractère relatif, car elles représentent, en quelques sortes, un nombre moyen de révolutions du corps considéré. Par exemple, un court terme d'une dizaine de jours, pour des satellites entre 800 et 1000 kilomètres, sera porté à un mois et plus pour des satellites plus élevés (6000 à 36000 kilomètres). Pour une planète comme la Terre, si le court terme signifie quelques siècles, le long terme peut aller jusqu'à des périodes de plusieurs millions d'années.

Sur une courte période de temps, la nature de l'intégrateur utilisé pour résoudre le système des équations différentielles du mouvement ne doit pas dégrader la solution de plus de quelques pour cent par rapport à la précision des meilleures observations effectuées (écart type des valeurs "observées - calculées", entre une orbite et une série de mesures données). Aussi, la cohérence interne des méthodes numériques employées aujourd'hui dans les calculs de trajectographie de satellites artificiels est-elle inférieure à quelques centimètres pour plusieurs jours. La plupart des algorithmes sont à pas liés et ils utilisent des systèmes prédicteur-correcteur très puissants; les erreurs de troncature y sont rendues minimales, et la propagation des erreurs d'arrondi, quand elle n'est pas extrêmement réduite (méthode type Bulirsch et Stoer), n'est pas très gênante sur quelques centaines de révolutions.

D'autre part, le second membre des équations du mouvement, c'est-à-dire encore le modèle physique des forces mises en jeu, doit être très complet pour assurer la précision de l'orbite, mais aussi relativement optimisé dans sa programmation, par rapport au type de corps étudié (forme, masse et altitude principalement). Par exemple, sur un intervalle d'une dizaine de jours, donc petit par rapport aux plus longues périodes de la plupart des phénomènes géophysiques, il n'est pas envisageable de tronquer le modèle de forces propre aux satellites bas.

Inversement, sur de plus grandes périodes de temps (plusieurs dizaines de milliers de révolutions pour un satellite artificiel), le même modèle de forces deviendra très lourd à calculer, et il fera ressortir les imperfections de sa modélisation, par rapport aux phénomènes réels en présence, sous forme de petites perturbations qui, les effets des couplages agissant, se transformeront en une divergence de la solution. Sur les satellites artificiels, les forces de surface sont généralement à l'origine des problèmes de prédiction à long terme de la trajectoire. En ce qui concerne les effets purement numériques survenant alors aux algorithmes utilisés, le nombre de chiffres significatifs des variables de l'intégration peut être augmenté, voire doublé (14 à 28 chiffres, par exemple).

La restitution de trajectoires de satellites artificiels, avec ajustement de paramètres internes (les conditions initiales) et externes (positions de stations, mouvement du pôle, coefficients du géopotentiel, etc...) se fait généralement en traitant successivement plusieurs arcs courts (quelques jours) de satellites bas, de périégée à périégée (un à quelques mois). D'une manière complémentaire, l'utilisation d'arcs d'une trentaine de jours de satellites hauts comme LAGEOS (période du périégée égale à 1700 jours; environ 5 ans), ou encore d'arcs beaucoup plus longs mais discrétisés (paramètres ajustés petit à petit puis conservés), apporte beaucoup d'informations sur l'évolution à moyen terme des composantes du système géophysique étudié (mouvement de plaques tectoniques,...). Aussi, l'utilisation de calculateurs de plus en plus performants permet-elle, dans les centres de traitement opérationnel, de faire de la restitution de trajectoires avec ajustement de plusieurs milliers de coefficients (géopotentiel, marées,...), sur des intervalles de temps de quelques mois.

Si la plupart des tests que nous avons réalisés en extrapolation numérique d'orbites de satellites se rapportent à des modèles perturbateurs peu réalistes (deux ou trois phénomènes), nous montrons cependant l'influence néfaste, à long terme, des intégrateurs sur la validité de la solution obtenue, ainsi que la sensibilité des résultats à des petites variations de paramètres initiaux plus ou moins physiques et de toute nature. Il convient donc de chercher à pallier les inconvénients de la rigidité d'un modèle de forces donné, lors de l'intégration de tel ou tel système dynamique. A cet égard, il serait approprié d'ajouter aux perturbations classiques un jeu de forces fictives, qui seraient ajustées au fur et à mesure des calculs, grâce à des techniques de filtrage du type Kalman. Ce type de contrôle de trajectoire permettrait non seulement de ne pas imposer plus ou moins arbitrairement aux conditions initiales les contraintes liées à tout le calcul, mais à une partie seulement, et il pourrait également permettre la modélisation de paramètres non encore envisagés, tout en compensant partiellement l'effet de "trainée numérique" des algorithmes.

Les phénomènes géophysiques, caractérisés essentiellement par des perturbations à longues périodes sur les mouvements orbitaux (coefficients zonaux du potentiel terrestre, par exemple), ne sont bien modélisés que sur de très grands intervalles de temps. Aussi, il est capital de les analyser à partir d'orbites moyennes filtrées des courtes périodes et ce, afin de ne pas perturber excessivement les algorithmes de restitution, compte tenu de l'amplitude relativement élevée de ces derniers termes à haute fréquence. C'est le principe général des études à long terme de paramètres physiques influant très peu sur le système dynamique à décrire.

La détermination des constantes propres à ces phénomènes doit pouvoir s'effectuer indépendamment des problèmes purement numériques, et également des perturbations strictement à courtes périodes. Malheureusement, d'une façon générale, un phénomène donné entraîne toujours des variations à courtes périodes,

dont l'amplitude vient souvent masquer les longues périodes générées également.

Aussi, afin de s'affranchir des courtes périodes dans la solution à analyser ensuite, il peut être intéressant, soit opter pour une discrétisation et un filtrage de l'intégration numérique du système des équations différentielles, soit de résoudre analytiquement ce système différentiel puisqu'une théorie analytique donne explicitement et une fois pour toutes les amplitudes et les périodes de chaque phénomène perturbateur traité, soit encore de moyenniser le second membre initial sur une courte période marquante (anomalie moyenne), pour l'intégrer ensuite numériquement à grands pas.

Si la première solution n'est pas envisageable pour l'orbitographie des satellites artificiels sur de longues périodes de temps (forces non gravitationnelles), la seconde possibilité a été abordée dans cette première partie. Plusieurs types de méthodes ont été programmées et analysées. Nous montrons ainsi, que si les théories existantes ne sont pas compétitives de l'intégration numérique sur de courtes périodes de temps (quelques jours à quelques semaines), elles redeviennent bien plus prometteuses sur de grands intervalles (1 an et plus). En effet, quoique certains termes périodiques (couplages essentiellement) ne soient pas pris en compte, l'association des théories de Berger et de Kaula (tout potentiel d'origine gravitationnelle) avec l'addition d'une dérive linéaire ajustée empiriquement, nous procure une solution hectométrique, quelle que soit la durée d'intégration, et avec un temps de calcul extrêmement réduit (inférieur à 100 secondes pour le modèle gravitationnel complet). Beaucoup d'intégrateurs, aussi puissants soient-ils, auraient déjà divergés (propagation d'erreurs,...); tous demanderaient des temps de calculs 100 à 1000 fois plus élevés.

Cependant, il faut préciser que le modèle de forces disponible est encore loin de la réalité, même si, pour les satellites élevés, il correspond à une précision suffisante pour l'observation. De plus, les petits diviseurs (e , i ou des résonances) ne sont pas toujours très bien pris en compte,... . Les forces de surfaces, et en particulier le freinage atmosphérique, sont traitées semi-numériquement (quadratures numériques) pour déterminer les variabilités temporelles des éléments osculateurs du satellite.

La troisième solution envisagée pour s'affranchir des courtes périodes latentes dans le système des équations différentielles du mouvement d'un satellite, consiste donc à moyenniser le second membre de ce système. C'est la méthode de centrage, que nous nous proposons de développer dans la seconde partie.

Nous nous attacherons à utiliser les différents résultats numériques et analytiques déjà décrits, en particulier pour choisir un intégrateur stable et précis associé au nouveau système différentiel, et aussi pour compléter le second membre par des termes de couplages déjà calculés dans les différentes théories analytiques existantes.

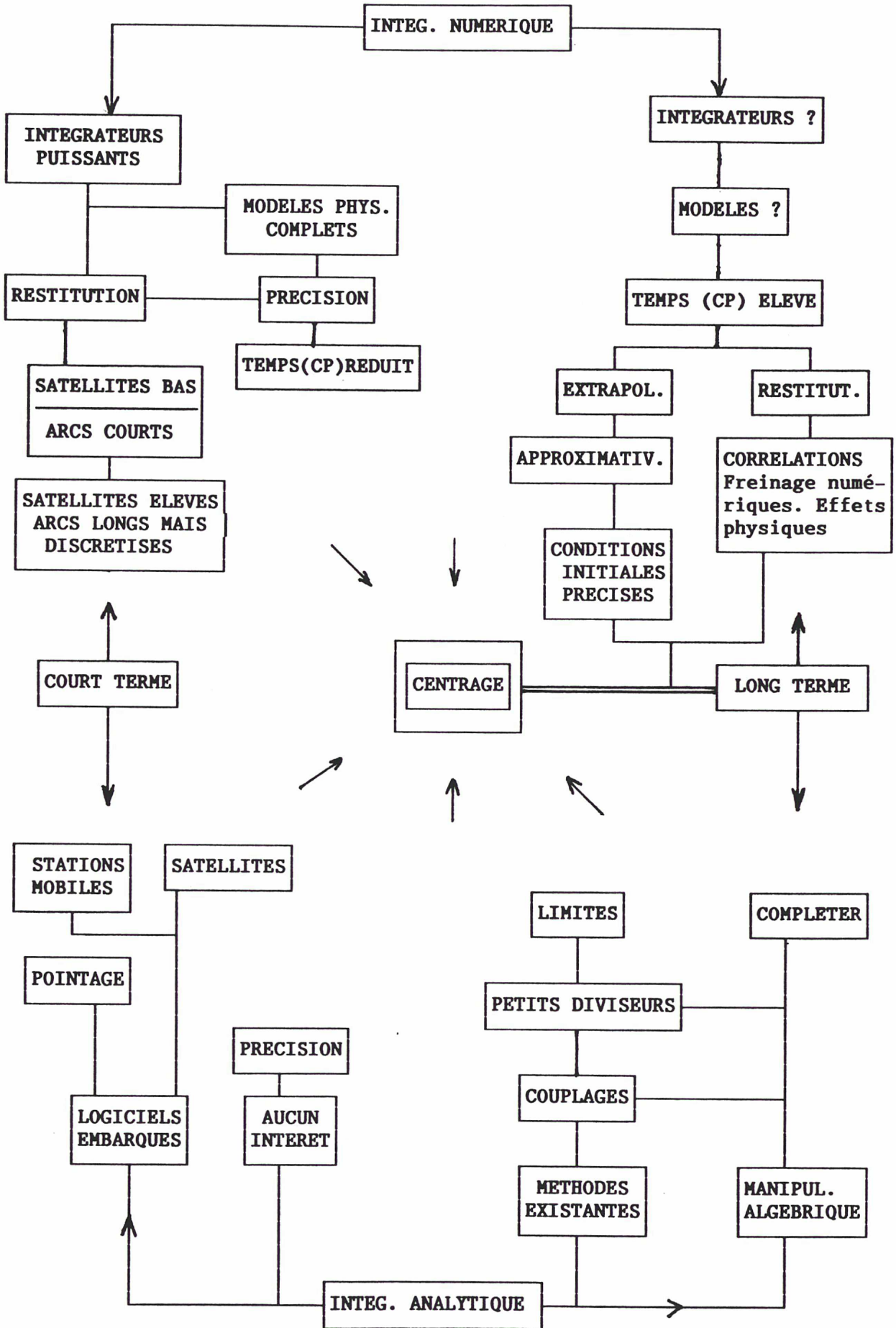


Tableau II

DEUXIEME PARTIE

B. LA METHODE DE CENTRAGE

Appliquée à l'étude sur un long intervalle de temps de l'orbite perturbée d'un corps, la méthode de centrage a pour caractéristique fondamentale de se centrer sur l'évolution à très long terme des paramètres moyens en s'affranchissant des courtes périodes et par conséquent des termes du second membre du système initial dépendant de l'anomalie moyenne. Nous chercherons donc à déterminer le plus rigoureusement possible les équations différentielles qui régissent l'évolution temporelle de ces paramètres moyens.

Nous partirons des équations différentielles classiques gouvernant les paramètres osculateurs et, en généralisant la méthode de Von Zeipel, nous définirons un changement de variables tel que les nouvelles variables caractérisent le comportement moyen de l'orbite. Morrison a montré que l'hamiltonien transformé par la méthode de Von Zeipel est, à l'ordre deux (termes en ε^2), identique à celui utilisé dans la méthode de centrage, [22].

L'application d'une telle méthode de transformation pose de nombreux problèmes, et ceux-ci ne peuvent être résolus qu'au moyen d'une théorie mathématique sur la méthode de centrage. On doit les fondements de cette théorie à Boglioubov et Mitropolski. Ces auteurs ont donné l'algorithme pour obtenir le système moyenné à un ordre quelconque, et ils ont établi les théorèmes sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques et presque périodiques. Les propriétés de la solution du système moyenné ont été étudiées dans plusieurs directions, notamment par N. Borderies [2], qui a montré d'une part la validité de l'approximation sur un intervalle de temps infini, et d'autre part, sa stabilité.

La détermination de paramètres physiques plus ou moins complexes s'appuyant sur l'analyse à long terme d'orbites de satellites, on comprend toute l'importance des propriétés de la solution du système transformé. Cependant, si les différents travaux théoriques effectués par les auteurs ont servi de base mathématique solide à toute la méthode, l'algorithme de la transformation lui-même n'a été développé qu'au second ordre et encore partiellement (fonction perturbatrice du potentiel terrestre, moyennée). Aussi aujourd'hui, nous nous attacherons d'une part, à compléter les travaux passés et d'autre part, à porter l'ordre de l'approximation à un degré supérieur. On veut notamment pallier les problèmes des longues périodes résiduelles (2ω notamment) importantes et non expliquées jusqu'à maintenant.

Nous montrerons ainsi que l'utilisation de la méthode de Von Zeipel, dont nous avons étendu l'emploi à la plupart des perturbations d'origine gravitationnelle pour des raisons d'homogénéité d'ensemble, impose une définition des nouvelles variables, qui peut être différente de la définition implicite des variables propres à la méthode

de centrage elle même. Mais ceci n'est finalement pas un inconvénient.

D'autre part, l'utilisation des équations de Lagrange, servant classiquement au traitement des forces conservatrices, a été remplacée par une formulation hamiltonienne avec les variables de Delaunay. Deux méthodes de transformation sont alors possibles pour s'affranchir des termes à courtes périodes dans l'hamiltonien initial; la méthode de Von Zeipel ou la technique des transformées de Lie. Cette dernière méthode peut être envisagée pour une application et un calcul à caractères automatiques.

Contrairement aux perturbations d'origine gravitationnelle, il n'est pas possible, pour les forces de surface, d'écrire la solution du système différentiel sous la forme d'un développement en série. Il faut pouvoir tenir compte à chaque instant de fluctuations temporelles diverses, comme la densité de l'atmosphère, l'ombre de la Terre, etc... En conséquence, le second membre des équations de Gauss, écrit en paramètres osculateurs, sera moyenné par une quadrature numérique.

D'autre part, et à des fins de comparaison de l'orbite moyenne théorique intégrée numériquement à grands pas (12 heures et plus) avec les observations, il est nécessaire de déterminer des pseudo-observations comparables à des variables moyennées et cela à partir des observations classiques de distances ou de vitesses radiales (laser, Doppler, etc...). Cette définition étant explicite, il faudra donc s'assurer de l'équivalence des deux types de variables, grandeurs de la solution du système différentiel et grandeurs venant des observations traitées.

Pour définir ces pseudo-observations, comparables à la solution du système différentiel, nous calculerons d'abord une trajectoire à partir des observations, de manière tout à fait classique (intégration numérique et correction différentielle); des éléments osculateurs seront ainsi déterminés à chaque instant. Nous chercherons alors à moyenner ces éléments osculateurs pour obtenir les pseudo-observations.

Un algorithme de filtrage est ainsi mis en place afin d'effectuer un traitement des arcs orbitaux (éphémérides de satellites, en éléments osculateurs). La méthode de centrage permet de relier une série d'arcs traités (les pseudo-observations) dont la distribution temporelle peut être répartie sur plusieurs années. Il est extrêmement avantageux de tenir compte d'observations passées (10 à 20 ans en arrière), dans la mesure où la longueur de l'intervalle de temps augmentant, la précision même faible de ces données permet d'atteindre des paramètres géophysiques (coefficients des harmoniques zonales du potentiel terrestre, termes de marées, variation de l'aplatissement terrestre, etc ...), grâce à un algorithme de restitution (correction différentielle).

B.I. ALGORITHME DE CENTRAGE:

Nous distinguons, dans le vecteur E_i ($i = 1, 6$) des éléments orbitaux du satellite, les variables métriques (a, e, i) ainsi que les variables angulaires "lentes" (Ω, ω), de l'anomalie (M), dite variable rapide. Ce dernier paramètre est d'ores et déjà séparé des autres, puisque dans la transformation, les termes du second membre du système différentiel le contenant, ont "disparu".

B.I.1. MOYENNE DU SECOND MEMBRE DU SYSTEME INITIAL:

Si l'on considère les équations du mouvement d'un satellite artificiel en orbite autour de la Terre, le système différentiel comporte, soit trois équations du second ordre (équation de la dynamique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, en paramètres rectangulaires), soit six équations du premier ordre obtenues en dédoublant les trois premières ou bien en réécrivant le système en paramètres osculateurs. C'est sous cette dernière forme, que nous nous proposons de faire l'étude de l'algorithme de centrage.

Nous pouvons écrire les équations du mouvement sous la forme (n étant le "moyen mouvement" du satellite, ou nombre moyen de tours par jour):

$$(I) \quad \begin{aligned} \dot{E}_i &= \varepsilon g_i^{(1)}(E, M) + \varepsilon^2 g_i^{(2)}(E, M) + \dots \\ \dot{M} &= n(E) + \varepsilon g_6^{(1)}(E, M) + \varepsilon^2 g_6^{(2)}(E, M) + \dots \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Dans ce système, il y a bien entendu six équations pour six inconnues, le second membre dépendant des inconnues ((E_i, M) $i = 1, 5$; ou plus simplement (E, M)). Par ailleurs, la forme générale des fonctions second membre $g_i(E, M)$ est telle que:

$$g_i(E, M) = \sum_{k,p} \varepsilon^k g_{i,p}^{(k)}(E) e^{j p M}$$

L'utilisation du théorème de Poincaré est délicate; on ne peut faire confiance à ce théorème pour l'applicabilité de la transformation. Les solutions du système différentiel sont certes développables en série de Taylor (ε), mais ce sont des séries formelles et on ne se soucie pas de la convergence du phénomène.

$$(II) \quad \begin{aligned} E_i &= \bar{E}_i + \varepsilon C_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + \varepsilon^2 C_i^{(2)}(\bar{E}, \bar{M}) + O(\varepsilon^3) \\ M &= \bar{M} + \varepsilon C_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + \varepsilon^2 C_6^{(2)}(\bar{E}, \bar{M}) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Les $C^{(k)}$ sont des fonctions périodiques (2π en \bar{M}), d'ordre (ε^k) des variables (\bar{E}, \bar{M}) ; elles représentent, dans notre étude sur le mouvement orbital, strictement les courtes périodes. Il est important de garder cette remarque présente à l'esprit, car il faudra par la suite imposer aux nouvelles variables (\bar{E}, \bar{M}) de contenir toutes les longues périodes, ou d'une façon plus générale, toute l'information à préserver dans la méthode de centrage pour intégrer un mouvement moyen ("au centre" de l'orbite réelle, en quelque sorte).

Le système différentiel initial des équations du mouvement est remplacé par un système plus simple, et tel que:

$$(III) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{E}}_i &= \varepsilon G_i^{(1)}(\bar{E}) + \varepsilon^2 G_i^{(2)}(\bar{E}) + \dots \\ \dot{\bar{M}} &= n(\bar{E}) + \varepsilon G_6^{(1)}(\bar{E}) + \varepsilon^2 G_6^{(2)}(\bar{E}) + \dots \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Il y a toujours six équations et six inconnues, mais le second membre ne contient plus l'anomalie moyenne (\bar{M}). En dérivant les deux membres des équations du système (II) par rapport au temps et en y substituant les équations (III), nous obtenons au second ordre:

$$\begin{aligned} \dot{E}_i &= \dot{\bar{E}}_i + \varepsilon \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} \left[n(\bar{E}) + \varepsilon G_6^{(1)}(\bar{E}) \right] + \varepsilon \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot \varepsilon G_j^{(1)}(\bar{E}) \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial C_i^{(2)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) + \dots \\ \dot{M} &= \dot{\bar{M}} + \varepsilon \frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} \left[n(\bar{E}) + \varepsilon G_6^{(1)}(\bar{E}) \right] + \varepsilon \frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot \varepsilon G_j^{(1)}(\bar{E}) \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial C_6^{(2)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) + \dots \end{aligned}$$

En développant les équations du premier système différentiel (I) en fonction des nouvelles variables, les termes s'identifient pour chaque ordre (ε^k), aux termes du système ci-dessus. Au premier ordre, les expressions sont:

$$G_i^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) = g_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \quad (i = 1, 5)$$

$$G_6^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) = g_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(1)}(\bar{E}, \bar{M})$$

Au second ordre, nous obtenons:

$$G_i^{(2)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} G_6^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot G_j^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) =$$

$$\frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + \frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} C_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + g_i^{(2)}(\bar{E}, \bar{M})$$

$$G_6^{(2)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} G_6^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot G_j^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) =$$

$$\frac{\partial g_6^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + \frac{\partial g_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} C_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) + g_6^{(2)}(\bar{E}, \bar{M})$$

$$+ \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(2)}(\bar{E}, \bar{M}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \bar{E}_{j_1} \partial \bar{E}_{j_2}} \cdot C_{j_1}^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \cdot C_{j_2}^{(1)}(\bar{E}, \bar{M})$$

où: $g^{(k)}(\bar{E}, \bar{M})$: six second membres du système initial écrits en nouvelles variables,
 $G^{(k)}(\bar{E})$: six second membres du systèmes centré (inconnus),
 (\bar{E}, \bar{M}) : six nouvelles variables (inconnues).

Nous pouvons effectuer le centrage proprement dit, c'est-à-dire encore, la moyenne de chaque terme par rapport à l'anomalie moyenne (\bar{M}), de part et d'autre des équations ci-dessus.

Les fonctions $C^{(k)}(\bar{E}, \bar{M})$ sont les courtes périodes (exprimées en variables moyennes); la méthode de centrage impose, comme condition supplémentaire, de prendre leur moyenne nulle. Au premier ordre les équations permettent de définir les second membres moyens:

$$G_i^{(1)}(\bar{E}) = \langle g_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} \quad (i = 1, 5)$$

$$\frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) = g_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) - G_i^{(1)}(\bar{E})$$

et:

$$G_6^{(1)}(\bar{E}) = \langle g_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \cdot \langle C_j^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}}$$

$$\frac{\partial C_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} n(\bar{E}) = g_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) - G_6^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(1)}(\bar{E}, \bar{M})$$

Nous pouvons remarquer, à ces équations, que si les six second membres du système centré sont obtenus en faisant la moyenne des second membres du système différentiel initial, les fonctions $C^{(k)}(\bar{E}, \bar{M})$, liées au changement de variables, sont calculées par une intégration sur (\bar{M}) et sont donc définies à une fonction des (\bar{E}) près. Compte tenu de la condition majeure à respecter pour ces fonctions dans la cadre de la méthode, nous obtenons:

$$C_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) = C_i^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \quad (i = 1, 6)$$

$$\langle C_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} = \langle C_i^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} = 0$$

$$G_6^{(1)}(\bar{E}) = \langle g_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}}$$

Le changement de variables est de moyenne nulle; il est défini au premier ordre par les équations:

$$E_i = \bar{E}_i + \varepsilon C_i^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) + O(\varepsilon^2) \quad (i = 1, 5)$$

$$M = \bar{M} + \varepsilon C_6^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) + O(\varepsilon^2)$$

Cependant, toute fonction arbitraire $c_i^{(1)}(\bar{E})$ pouvant se rajouter à $C_i^{(1)*}$, la fonction $C_i^{(1)}$ peut, dans certains cas, être de moyenne non nulle sur l'anomalie (\bar{M}) . Sous cette condition ($\langle C_i^{(1)} \rangle = c_i^{(1)}$), le changement de variables n'est plus sous sa forme centrée, et nous avons:

$$E_i = \bar{E}_i + \varepsilon c_i^{(1)}(\bar{E}) + \varepsilon C_i^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) + O(\varepsilon^2) \quad (i = 1, 5)$$

$$M = \bar{M} + \varepsilon c_6^{(1)}(\bar{E}) + \varepsilon C_6^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) + O(\varepsilon^2)$$

Les paramètres (\bar{E}, \bar{M}) ne sont plus les variables centrées, et il faut tenir compte du changement supplémentaire: $(\bar{E}_i + \varepsilon c_i^{(1)}(\bar{E}) ; \bar{M} + \varepsilon c_6^{(1)}(\bar{E}))$. Aussi, dans les équations du premier ordre, il vient:

$$G_i^{(1)}(\bar{E}) = \langle g_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} \quad (i = 1, 5)$$

$$G_6^{(1)}(\bar{E}) = \langle g_6^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \cdot c_j^{(1)}(\bar{E})$$

avec les fonctions: $C_i^{(1)}(\bar{E}, \bar{M}) = C_i^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) + c_i^{(1)}(\bar{E})$, pour $(i = 1, 6)$. En poursuivant les calculs au second ordre, en utilisant toujours ces mêmes fonctions, nous obtenons:

$$G_i^{(2)}(\bar{E}) + \frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot G_j^{(1)}(\bar{E}) = \langle \frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} + \frac{\partial G_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot c_j^{(1)}(\bar{E})$$

$$+ \langle \frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial \bar{M}} \cdot C_6^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} + \langle g_i^{(2)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}}$$

$$G_6^{(2)}(\bar{E}) + \frac{\partial c_6^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot G_j^{(1)}(\bar{E}) = \langle \frac{\partial g_6^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot C_j^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} + \frac{\partial G_6^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot c_j^{(1)}(\bar{E})$$

$$+ \langle \frac{\partial g_6^{(1)}}{\partial \bar{M}} \cdot C_6^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}} + \langle g_6^{(2)}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}}$$

$$+ \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \cdot c_j^{(2)}(\bar{E})$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \bar{E}_{j_1} \partial \bar{E}_{j_2}} \cdot \langle C_{j_1}^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \cdot C_{j_2}^{(1)*}(\bar{E}, \bar{M}) \rangle_{\bar{M}}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \bar{E}_{j_1} \partial \bar{E}_{j_2}} \cdot c_{j_1}^{(1)*}(\bar{E}) \cdot c_{j_2}^{(1)*}(\bar{E})$$

Nous voyons ainsi, que l'utilisation d'une fonction $C^{(k)}$ de moyenne non nulle, tout en "compliquant" le changement de variables, vient modifier la forme du second membre du nouveau système différentiel, par rapport à l'emploi d'une fonction $C^{(k)*}$ de moyenne nulle. Si le premier ordre $G_i^{(1)}(\bar{E})$ est inchangé, quelles que soient les fonctions intermédiaires choisies, le second ordre $G_i^{(2)}(\bar{E})$ est modifié par :

$$-\frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot G_j^{(1)}(\bar{E}) + \frac{\partial G_i^{(1)}}{\partial \bar{E}_j} \cdot c_j^{(1)}(\bar{E})$$

Il en sera de même à chaque ordre (ε^k), avec cependant une complexité croissante, puisqu'une fonction $C^{(k)}$ modifie tous les second membres d'ordre supérieur à (k), par rapport à l'utilisation de $C^{(k)*}$.

B.I.2. TRANSFORMATION DE VON ZEIPPEL DU SECOND MEMBRE INITIAL:

Si la méthode de centrage est une généralisation de la méthode de Von Zeipel, nous devons en pratique l'appliquer aux équations différentielles du mouvement d'un satellite. Or, ce système d'équations peut se mettre sous forme hamiltonienne, "à condition" d'utiliser les variables de Delaunay. Aussi, nous utiliserons l'algorithme de la transformation de Von Zeipel pour effectuer un changement de variables canonique proche de l'identité, tel que le nouvel hamiltonien ne contienne plus la variable rapide (l').

Nous serons toutefois attentif à l'expression des fonctions intermédiaires $S_k(L'_i, l_i)$, définissant les changements de variables à chaque ordre (ε^k), puisque dans l'esprit de la méthode de centrage, ces changements doivent être de moyenne nulle par rapport à l'anomalie moyenne.

D'autre part, l'emploi de la méthode de Von Zeipel comme "outil de centrage" du second membre du système différentiel initial étudié, peut se révéler extrêmement avantageux du point de vue de la comparaison avec les théories analytiques existantes. Ainsi, les expressions des hamiltoniens $\Phi'_k(L'_i, -, g, h)$, que nous recherchons, sont comparables dans certains cas, à celles obtenues par Brouwer et Kozai par exemple, puisque ces deux auteurs ont employé la méthode de Von Zeipel.

Par rapport à ces méthodes analytiques, et sans nous intéresser au mouvement instantané, donc aux courtes périodes, l'intégration numérique du système centré écrit en nouvelles variables, permet de s'affranchir d'une part énorme du travail de

résolution (développements littéraux pour obtenir de nouveau les (L_i, l_i)) tout en créant (automatiquement) un certain nombre de couplages (longues périodes entre elles), qui font défaut à bien des théories.

Ajouterons encore que l'utilisation de la technique des transformées de Lie ne représente pas un gain très important pour simplifier les développements, dans le cas de notre étude. En effet, nous voulons transformer un système différentiel, grâce à un changement de variables, sans jamais s'intéresser aux anciennes variables donc, sans avoir à rechercher l'expression d'une fonction quelconque donnée avec des paramètres de départ, pour l'obtenir par rapport à d'autres paramètres.

Par contre, il est bien évident que l'utilisation d'un processeur algébrique permettrait, comme nous le verrons, d'obtenir plus de termes dans l'algorithme de l'approximation, et en particulier, plus de couplages... .

Si nous reprenons les résultats obtenus dans la première partie, à l'ordre un (ε), nous savons d'une part que le nouvel hamiltonien Φ'_1 est obtenu en faisant la moyenne de l'hamiltonien initial Φ_1 exprimé en variables (L'_i, l_i) , et d'autre part, que la fonction intermédiaire $S_1(L'_i, l_i)$ est calculée à une fonction arbitraire des $(L'_i, -, g, h)$ près.

$$\Phi'_1(L'_i, -, g, h) = \langle \Phi_1(L'_i, l_i) \rangle_l$$

$$S_1(L'_i, l_i) = S_1^*(L'_i, l_i) + s_1(L'_i, -, g, h)$$

$$\langle S_1(L'_i, l_i) \rangle = \langle S_1^*(L'_i, l_i) \rangle + \langle s_1 \rangle = s_1(L'_i, -, g, h)$$

Nous voulons faire une étude particulière de l'algorithme de transformation de Von Zeipel, pour montrer que son utilisation, dans le cadre général de la méthode de centrage, impose de travailler avec des changements de variables de moyenne nulle, donc avec des fonctions du type $S_k^*(L'_i, l_i)$.

Si ce n'est pas le cas (utilisation des fonctions $S_k(L'_i, l_i)$), le développement ci-après indique qu'il faut alors effectuer des changements de variables lentes supplémentaires, sur les paramètres (L'_i, l'_i) , d'une façon strictement identique à la méthode de centrage décrite plus avant. Ainsi, nous avons :

$$L_i = L'_i + \frac{\partial S_1^*}{\partial l_i} + \frac{\partial s_1}{\partial l_i}$$

au premier ordre.

$$l'_i = l_i + \frac{\partial S_1^*}{\partial L'_i} + \frac{\partial s_1}{\partial L'_i}$$

Le changement de variables n'est pas de moyenne nulle; les variables centrées ne sont pas les (L'_i, l'_i) mais les $(L'_i + \partial s_1 / \partial l_i, l'_i - \partial s_1 / \partial L'_i)$, où au premier ordre, la fonction S_1 peut s'exprimer avec les nouvelles variables (L'_i, l'_i) .

Ici également, l'hamiltonien $\Phi'_1(L'_i, l'_i)$ est inchangé, quelle que soit la fonction intermédiaire choisie. Il n'en est pas de même au second ordre:

$$\begin{aligned} \Phi'_2(L'_i, l_i) + \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial S_1^*}{\partial L'_i} \right] + \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial L'_i} \right] &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial l} \right)^2 \\ &+ \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial S_1^*}{\partial l_i} \right] + \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial l_i} \right] \\ \Phi'_2 + \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial L'_i} \right] &= \left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial l} \right)^2 \right\rangle_{\overline{M}} \\ &+ \left\langle \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial S_1^*}{\partial l_i} \right] \right\rangle_{\overline{M}} + \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial l_i} \right] \end{aligned}$$

L'introduction d'une fonction $S_1(L'_i, l_i)$ de moyenne non nulle dans l'algorithme impose la modification du nouvel hamiltonien Φ'_2 , par les termes :

$$- \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial L'_i} \right] + \left[\frac{\partial \Phi'_1}{\partial L'_i} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial l_i} \right]$$

Le résultat est équivalent à celui trouvé pour la méthode de centrage.

Par ailleurs, comme les longues périodes du premier ordre en (ε) ne peuvent être obtenues qu'avec la prise en compte dans le nouveau système différentiel, de Φ'_2 (et aussi bien sûr de $\Phi'_0 + \Phi'_1$), il est équivalent, à cet ordre de précision, soit d'intégrer Φ'_2 obtenu avec S_1^* ($\langle S_1^* \rangle = 0$), soit d'intégrer Φ'_2 obtenu avec la fonction S_1 ($\langle S_1 \rangle = s_1$) tout en tenant compte de "corrections" sur les variables calculées: $+\partial s_1 / \partial l_i$ pour L'_i , et $-\partial s_1 / \partial L'_i$ pour l'_i .

Nous voyons ainsi apparaître le danger d'utiliser les développements (hamiltoniens Φ') déjà écrits par certains auteurs, ayant utilisé la méthode de Von Zeipel pour des déterminations entièrement analytiques d'orbite de satellite avec des fonctions intermédiaires S_k de moyenne non nulle [14], [18]; c'est le cas de Brouwer et Kozai, et non de Kinoshita, [21].

En effet, si l'utilisation de fonctions intermédiaires quelconques (à une fonction arbitraire près) ne perturbe absolument pas toute détermination analytique (première partie: A.II.2), à chaque fonction S_k d'ordre (ε^k) de moyenne non nulle il faut associer, dans notre cas, une transformation supplémentaire du même ordre sur les paramètres, sous peine de n'obtenir qu'une partie des longues périodes.

Si ceci ne présente pas de difficulté importante au premier ordre, l'algorithme poussé au second ordre devient extrêmement complexe à utiliser. La fonction intermédiaire S_2 , calculée avec l'équation du second ordre donnée plus haut, peut être elle-même de moyenne non nulle (elle l'est comme S_1 , pour le potentiel terrestre). Aussi, nous avons le choix entre moyenniser son expression ($\langle S_2 \rangle = s_2$) et rechercher dans l'hamiltonien transformé Φ'_3 les termes à modifier en conséquence, ou bien, rajouter le changement de variables: $+\partial s_2/\partial l_i$ pour L'_i , et $-\partial s_2/\partial L'_i$ pour l'_i .

D'autre part, toujours au second ordre, le changement de variables, sous forme complète, est donné aussi par les termes des développements de $(\partial S_1/\partial l_i)$ en fonction de (L_i, l_i) , et de $(\partial S_1/\partial L'_i)$ en fonction de (L'_i, l'_i) :

$$L_i = L'_i + \frac{\partial S_1}{\partial l_i}(L_i, l_i) + \frac{\partial S_2}{\partial l_i} - \left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial l_i \partial l_j} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial L_j} \right]$$

$$l'_i = l_i + \frac{\partial S_1}{\partial L'_i}(L'_i, l'_i) + \frac{\partial S_2}{\partial L'_i} - \left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial L'_i \partial L'_j} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial l_j} \right]$$

au second ordre.

Les derniers termes ne sont pas forcément de moyenne nulle sur l'anomalie (l); il faudrait ainsi les déterminer explicitement, pour tenir compte de leur moyenne dans les changements supplémentaires à apporter aux variables quasi-centrées.

En résumé, la méthode de centrage revient à utiliser la transformation de Von Zeipel, dans la mesure où le formalisme hamiltonien s'applique au système étudié, et où les fonctions intermédiaires S_k définissent des changements de variables de moyenne nulle ($\langle S_k \rangle = 0$).

Dans la pratique, si la première condition est réalisée, grâce à une écriture des équations différentielles en variables de Delaunay, nous appliquerons la seconde condition partiellement au second ordre.

B.II. FILTRAGE:

Si la méthode de centrage doit permettre une intégration numérique précise des variations séculaires et à longues périodes d'une orbite de satellite, il faut, par ailleurs, calculer des quantités équivalentes (éléments moyens) aux paramètres intégrés, à partir d'observations de poursuite de satellite.

C'est le principe de la correction différentielle d'orbites sur des observations de satellites, qui permet de déterminer dans ce cas des paramètres internes (conditions initiales moyennes) et des paramètres physiques externes (coefficients de marées, du potentiel terrestre,...).

Une première difficulté apparaît immédiatement, du fait que pour calculer les pseudo-observations, il faut introduire une définition extérieure à la méthode de centrage. En effet, les paramètres moyens sont obtenus à partir d'éléments osculateurs, dont il faut enlever uniquement les courtes périodes, ou plus exactement, les termes de période inférieure à une certaine période seuil. Les différents arcs d'orbite ainsi traités, provenant eux-mêmes d'un ajustement par correction différentielle (logiciel GIN, par exemple) sur des mesures (téléométrie laser, vitesses radiales,...), donneront l'orbite moyenne, ou encore orbite "pseudo-observée", qui est aussi proche que possible du mouvement moyen "réel".

Nous pouvons tout de suite remarquer que si la résolution temporelle de l'orbite instantanée est très faible (1 à 2 minutes en général), les pseudo-observations auront un pas de tabulation beaucoup plus grand, puisque bien supérieur à la période seuil. Cependant, ceci n'est pas gênant ensuite dans l'algorithme de restitution des paramètres géophysiques visés par la méthode de centrage, dans la mesure où les longues périodes à analyser sont bien plus grandes que la période de discrétisation des paramètres moyens pseudo-observés.

Reprenons le système des équations différentielles du mouvement perturbé d'un satellite artificiel, en orbite autour de la Terre:

$$(I) \quad \begin{aligned} \dot{E}_i &= \varepsilon g_i^{(1)}(E, M) + \varepsilon^2 g_i^{(2)}(E, M) + \dots \\ \dot{M} &= n(E) + \varepsilon g_6^{(1)}(E, M) + \varepsilon^2 g_6^{(2)}(E, M) + \dots \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Les variations des éléments osculateurs (E, M) peuvent être interprétées comme la superposition d'un mouvement séculaire et de mouvements périodiques à longues et courtes périodes. On veut définir des éléments moyens (\bar{E}, \bar{M}) qui ne diffèrent

des éléments osculateurs (E, M) que par des termes à courtes périodes. Aussi, en première approximation, les courtes périodes étant des sous-multiples de la période du satellite T , les paramètres moyens recherchés sont :

$$(II) \quad \begin{aligned} \overline{E}_i &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} E_i(\tau) d\tau \\ \overline{M} &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} M(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Nous pouvons différentier ces expressions par rapport au temps, en supposant T constante. En remplaçant de plus les dérivées (\dot{E}, \dot{M}) par les second membres du système initial, nous obtenons, au premier ordre, le nouveau système moyenné :

$$(III) \quad \begin{aligned} \dot{\overline{E}}_i &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} [\varepsilon g_i^{(1)}(E, M)] d\tau \\ \dot{\overline{M}} &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} [n(E) + \varepsilon g_6^{(1)}(E, M)] d\tau \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Si les éléments moyens prennent la définition correspondant au système des équations (II) précédentes, il faut d'autre part, intégrer le système différentiel ci-dessus. Cependant, au cours de l'intégration, les courtes périodes nécessaires à l'expression des second membres $g_i^{(k)}(E, M)$ ne sont pas forcément connues. Aussi, ces fonctions $g_i^{(k)}$ sont-elles souvent calculées, dans les techniques pratiquant le "numerical averaging" et qui intègrent le système (III), avec les éléments moyens courants, [23]. Si, dans ces derniers cas, l'approximation est du premier ordre, l'introduction des courtes périodes dues au premier coefficient J_2 (par exemple, grâce à la théorie de Brouwer) permet toutefois de prendre en compte les couplages importants de toute perturbation avec J_2 . Nous verrons ainsi que cette technique numérique peut venir compléter judicieusement un algorithme analytique d'obtention des second membres moyens, en ce qui concerne le calcul des forces de surface.

Reprenons le système centré des équations différentielles régissant le mouvement moyen :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{E}}_i &= \varepsilon G_i^{(1)}(\overline{E}) + \varepsilon^2 G_i^{(2)}(\overline{E}) + \dots \\ \dot{\overline{M}} &= n(\overline{E}) + \varepsilon G_6^{(1)}(\overline{E}) + \varepsilon^2 G_6^{(2)}(\overline{E}) + \dots \end{aligned} \quad (i = 1, 5)$$

Ces équations, obtenues par la méthode de centrage sont, au premier ordre, équivalentes au système différentiel (III) exprimé en paramètres moyens (\bar{E}, \bar{M}), donc à la définition explicite (II) des variables qui en découlent.

Cependant, nous avons noté, d'après les travaux antérieurs effectués sur la méthode, qu'un algorithme au premier ordre n'est pas satisfaisant (il manque les longues périodes en J_2, J_2^2, \dots). De plus, il n'existe pas, en pratique, de période de moyenne T , à la fois multiple de la période du satellite et des périodes imposées par les harmoniques tesseraux (sous-multiples de la durée du jour).

La détermination des pseudo-observations (éléments moyens), à partir d'arcs d'orbite instantanée (éléments osculateurs), doit donc s'effectuer par une méthode sophistiquée équivalente à plusieurs quadratures successives. Tout en conservant l'information à longue période contenue dans ces trajectoires instantanées (issues de la restitution, à l'aide d'observations), la méthode devra moyenner tous les termes en deçà de la période seuil choisie.

Compte tenu de l'amplitude des courtes périodes (J_2 , notamment), un procédé purement numérique (type quadrature de Gauss à 64 points) est trop imprécis ou instable. Aussi, si nous voulons porter la précision de la méthode de centrage à un ordre de degré supérieur, il est capital de calculer des éléments pseudo-observés avec soin, sans que l'algorithme utilisé ne perturbe les longues périodes (destruction ou addition de termes par effet purement numérique).

Différents types de procédés ont été tour à tour explorés, par différents auteurs [24], [25], Cependant, les méthodes analytiques largement employées dans les années 60, ont été peu à peu abandonnées au profit du "tout numérique".

Le programme CANEL est un élément original de la détermination des paramètres moyens, à partir d'éléments osculateurs (dits instantanés). Il a été construit par G. Balmino et L. Castel, il y a une dizaine d'années au G.R.G.S., mais il a été modifié notamment par M. Ventoux un peu plus tard. Compte tenu des objectifs à atteindre en matière de calcul d'orbites précis et d'analyse à long terme, nous avons repris les logiciels de la chaîne de traitement (aujourd'hui : LAGRAN2, SELECT4, CANEL2).

Dans le programme CANEL2 la méthode semi-analytique adoptée pour filtrer les courtes périodes s'appuie sur les théories de Berger et de Kaula [15],[7]. Le schéma de principe du calcul comporte trois grandes étapes.

La première étape consiste à retirer aux éléments instantanés (orbite tabulée à 1 ou 2 minutes) des termes périodiques calculables par les théories. Afin d'alléger le calcul répétitif de nombreux termes (fonctions de Kaula pour les harmoniques

tesseraux), le programme SELECT4 en sélectionne à l'avance un certain nombre, en fonction d'une période et d'amplitudes seuils. Ainsi, si les termes des harmoniques zonaux des degrés 2 à 7 (Berger) sont systématiquement retirés à l'orbite osculatrice (longues périodes et courtes périodes), il est possible de ne retirer qu'une petite partie des autres termes, sachant que les résidus à courtes périodes seront ensuite filtrés (temps de calcul fortement diminué).

La seconde étape est purement numérique. Aux éléments moyens obtenus précédemment, encore affectés de différents termes périodiques et séculaires, une dérive linéaire (voire parabolique) est retirée par fenêtre de quelques jours (1 à 8, en général), avant d'y appliquer un filtre glissant, [25]. Ce filtrage est obtenu en faisant le produit de convolution de la fonction signal $S(\tau)$, par une fonction du type $(\sin x/x)$:

$$\bar{s}(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) \frac{\sin \omega_C(t_i - \tau)}{2\pi(t_i - \tau)} d\tau$$

Il correspond, dans l'espace des fréquences, au produit de la transformée de Fourier du signal par une fonction porte. Le signal filtré $\bar{s}(t_i)$ est obtenu sur tous les points du quart centré de la fenêtre, puis, une moyenne arithmétique permet de définir la valeur moyenne finale au milieu de la fenêtre.

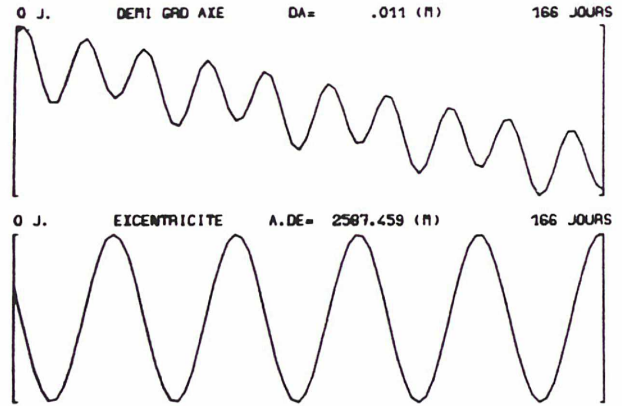
Enfin, la troisième étape consiste à rajouter à cette moyenne, la valeur de la droite enlevée précédemment ainsi que les longues périodes supérieures à la période seuil, qui auraient été enlevées à la première étape.

En pratique, l'utilisation de ce filtre doit se faire avec beaucoup de précautions. Les tests effectués montrent, en effet, la sensibilité du bruit à l'échantillonnage pris en compte. Celui-ci doit être d'environ un point par minute (ou deux), avec des fenêtres au moins huit fois plus grande que la période de coupure ($2\pi/\omega_C$). Nous choisirons généralement des fenêtres de deux à quatre jours, conditionnées par des périodes seuil de six à douze heures.

Compte tenu de l'absence de périodes entre 1 jour (termes tesseraux) et plusieurs jours (termes de résonance), on pourrait être tenté de mettre la coupure à 1 ou 2 jours, mais il faudrait alors utiliser des fenêtres de 8 à 16 jours, ce qui diminue fortement la résolution temporelle des points moyennés.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons effectuer, avec la version CANEL2, un filtrage d'orbite osculatrice instantanée avec des fenêtres non jointives, ce qui permet d'augmenter sensiblement le nombre de pseudo-observations, sans changer la période de coupure.

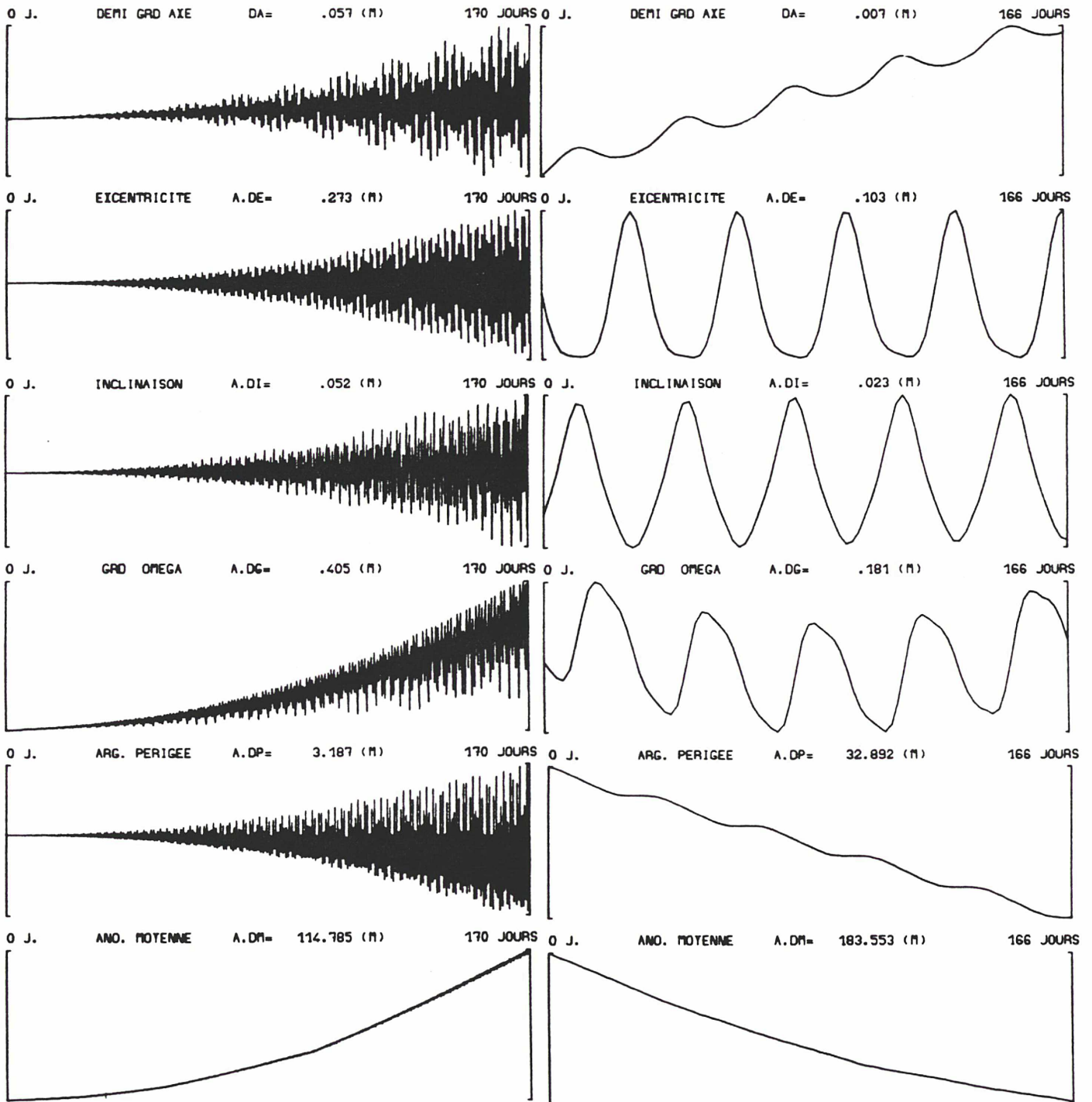
La figure ci-contre indique les variations à longues périodes du demi-grand axe et de l'excentricité d'un satellite comme D1C (7600 kilomètres, 0.085, 39 degrés) soumis au potentiel $J_2 + J_3$. Les éléments sont issus du filtrage, par fenêtre de deux jours, d'une orbite intégrée numériquement (AMC/14/30 secondes). La décroissance du demi-grand axe, due à la cumulation d'erreurs d'arrondi sur (M) (pas d'intégration petit), ainsi que les longues périodes de faibles amplitudes, (J_2^2) ont été détectées par le filtre.



La figure (35) montre d'une part (gauche), la comparaison entre l'intégration numérique à filtrer (AMC) et une autre technique numérique supposée plus stable (BS), et d'autre part (droite), la différence entre le résultat du filtre (les "pseudo-observations") et une intégration analytique (Berger) précise des longues périodes, toujours pour $J_2 + J_3$.

En dehors d'un ajustement nécessaire des deux orbites moyennes l'une par rapport à l'autre, nous voulons montrer à la fois la qualité des résultats du filtrage (pentes et longues périodes conservées), et aussi celle de l'intégration analytique (les écarts sur $\omega + M$ sont très petits). De plus, nous avons complété la théorie par une pente numérique sur Ω , ce qui permet ainsi de s'affranchir des effets séculaires résiduels (décamètre sur un an, en J_2^4), tout en montrant les effets paraboliques (petit pas de l'intégration numérique) et ceux à longues périodes (intégration analytique).

Satellite : 7600 Km, 0.085, 39 deg. ; potentiel : J_2+J_3



Différence des intégr. numériq. :
BS/10/1200 sec - AMC/14/30 sec

Différence en longues périodes :
Intég. analyt. (Berger) - Filtre (AMC)

Fig. 35

B.III. MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE CENTRAGE:

Le but essentiel de la méthode de centrage, outre l'extrapolation à long terme d'orbites de satellites, est de déterminer des paramètres physiques plus ou moins complexes, liés à une modélisation de forces engendrant des variations à longues périodes sur les trajectoires étudiées.

Comme il faut analyser ces variations séculaires et/ou à longues périodes sur les éléments elliptiques de la trajectoire, il est important que l'orbite moyennée obtenue par la méthode de centrage, passe effectivement au "milieu" de l'orbite réelle, et aussi qu'elle contienne toutes les longues périodes retenues pour l'étude.

Or, en appliquant la méthode de centrage au premier ordre, en plus des courtes périodes "génantes", on élimine également des perturbations séculaires (ordres suivant J_2^2, \dots) et à longues périodes (J_2), provenant notamment du couplage des courtes périodes entre elles. De plus, et quel que soit le degré de l'approximation de l'algorithme de centrage, des longues périodes peuvent être systématiquement éliminées (par exemple, les résonances), dans la mesure où l'argument qui gouverne ces termes contient l'anomalie moyenne, variable sur laquelle on fait la moyenne.

Compte tenu de ces remarques, nous aborderons le second membre du système différentiel par type de force, afin de quantifier, pour chaque perturbation, les amplitudes et surtout les périodes des termes à prendre en compte, mais aussi afin de donner un ordre de grandeur, en amplitude principalement, des termes d'ordre élevé ($\epsilon^3, \epsilon^4, \dots$) négligés.

Il est important de se fixer une période de coupure *a priori*, sachant qu'en deçà de ce seuil les termes seront soit moyennés par l'algorithme du centrage (sous-multiples de la période du satellite), soit purement éliminés comme la plupart des harmoniques tesseraux. A l'inverse, les termes responsables de périodes plus grandes que la période de coupure, seront conservés. Par exemple, les coefficients des harmoniques tesserales de résonances seront introduits sciemment dans le second membre centré du nouveau système différentiel puisque particulièrement leur argument, même si il contient (M), est à longue période.

Dans la pratique, nous choisissons de conserver les fonctions perturbatrices à intégrer, dans la mesure où les variations qu'elles imposent ensuite sur les paramètres de l'orbite du satellite ont notamment des périodes supérieures à un jour environ.

L'intégration analytique, même d'ordre un par rapport à J_2 , est un outil très efficace pour déterminer *a priori* les amplitudes et les périodes de chaque terme

perturbateur d'une fonction de force (conservative) donnée, et ce, pour n'importe quel type de satellite étudié de paramètres métriques (a_0, e_0, i_0), (logiciel SELECT4).

Ainsi, l'expression du potentiel terrestre, dont la fonction de force est à moyenner, est réduite aux termes des coefficients des harmoniques zonales (degrés 2 à 36) et aux termes de résonances, s'ils sont d'amplitude supérieure à un mètre environ, et si leur période dépasse deux jours. En effet, il ne serait pas gênant, pour un algorithme de restitution travaillant sur des périodes de l'ordre d'un mois ou plus (sous-multiples de la période du périégée), de conserver ce dernier type de termes; ils viendraient, en quelques sortes, créer une légère dispersion autour de phénomènes bien plus importants (longues périodes J_3, \dots).

D'autre part, la fonction perturbatrice provenant des potentiels luni-solaires directs et indirects (marées terrestres et océaniques), sera entièrement traitée par l'algorithme de centrage, en respectant dans le développement le niveau de troncature désiré ($\varepsilon^2 = (a/a_*)^2$).

Compte tenu des effets perturbateurs particuliers sur les trajectoires de satellites bas (< 1500 kilomètres), des forces de surface (freinage et pression de radiation), celles-ci seront également prises en compte dans le système différentiel centré des équations du mouvement moyen. De même que précédemment, nous rappellerons que l'intégration numérique peut facilement permettre de quantifier les variations induites par ces forces, sur une orbite de satellite.

La moyenne proprement dite des équations du système différentiel initial peut s'effectuer de façon analytique ou purement numérique pour chaque type de force envisagée. Aussi, certains auteurs [23], [24] ont-ils adopté le "numerical averaging", autrement dit, le calcul de chaque terme des équations de la méthode de centrage (ordres un puis deux: chapitre B.I.1) par une quadrature numérique du type Gauss-Legendre (24, 48 ou 64 points suivant les fonctions et donc, suivant les satellites). Cependant, même si les fonctions dépendent explicitement des variables moyennes issues de l'intégration courante, les quadratures prennent beaucoup de temps calcul (ordres deux puis trois) et ne tiennent généralement pas compte des couplages, J_2 - J_n, \dots .

Nous avons choisi de calculer analytiquement les quadratures pour l'ensemble des forces conservatrices. A ordre de troncature équivalent, le calcul sera plus précis et plus rapide que dans le cas des évaluations numériques. A l'inverse, si les développements de la partie (B.I) suffisent à la programmation de la méthode de centrage par quadrature numérique, les calculs analytiques sont longs et complexes pour obtenir un hamiltonien transformé à un ordre élevé.

Des déterminations analytiques ont été faites dans le passé et jusqu'à ces dernières années pour moyenner le système des équations du mouvement d'un satellite, mais elles se limitent toutes à l'obtention d'un hamiltonien à l'ordre deux, donc à des formulations incomplètes en longues périodes (J_2 , J_2^2 notamment), [27], [28].

Sans pouvoir utiliser présentement un processeur de calculs algébriques puissant, nous montrons toutefois que les termes d'ordre élevé (J_2^3 , J_2-J_3 , J_2-J_4 , J_2^4) de l'hamiltonien centré peuvent être repris, avec précautions, dans les différentes théories analytiques du mouvement d'un satellite artificiel déjà publiées, [18], [21]. En effet, les auteurs ont souvent choisi d'intégrer le système différentiel initial en adoptant les méthodes de transformations de Von Zeipel ou de Hori.

Dans les cas du calcul de la densité atmosphérique et du passage du satellite à l'ombre de la Terre, il est bien évident que nous ne pouvons utiliser les variables moyennes comme indicatrices d'une position réelle. En conséquence, pour les forces de surface, nous reprenons un calcul des équations centrées (second membre) par quadrature numérique. Ceci est dicté par la nécessité d'évaluer les second membres des équations de Gauss, avec des paramètres osculateurs instantanés, puisque nous avons montré, pour ces perturbations (A.III), les très importants termes de couplage (J_2 -freinage, par exemple).

B.III.1. FORCES GRAVITATIONNELLES:

a. Potentiel terrestre:

Nous séparons le traitement, dans l'algorithme de la transformation de Von Zeipel, du terme propre au coefficient J_2 , des autres coefficients zonaux; (notation: $\mu = GM$).

$$\Phi_0 = \frac{\mu^2}{2L^2}$$

$$\Phi_1(L_i, l, g, -) = \frac{\mu^4}{L^6} a_e^2 J_2 \frac{a^3}{r^3} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) \cos(2g + 2v) \right]$$

$$\Phi_2^{J_N} = \frac{GM}{r} \sum_{l=3}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^l C_{l,0} P_l(\sin \varphi)$$

Nous n'écrivons pas une nouvelle fois le développement du potentiel terrestre (type Kaula) en fonction des éléments orbitaux du satellite pour la prise en compte, dans le centrage, des termes de résonances. En effet, les expressions (en $C_{l,m}$ et $S_{l,m}$) dépendent de l'altitude du satellite considéré (donc, moyen mouvement/rotation sidéral terrestre), et les termes de la fonction perturbatrice correspondante s'obtiennent en triant (logiciel SELECT4) *a priori* les jeux (l,m,p,q) à retenir (de période $>$ à la période seuil), dans les second membres moyennés des équations de Lagrange écrites en nouvelles variables.

Si l'expression de Φ_1 est donnée en variables mixtes (L'_i, l_i) et (a, r, v) , pour adopter une formulation exacte en excentricité, l'hamiltonien initial $\Phi_2^{J_N}$ sera traité en paramètres classiques (r et v également):

$$\Phi_2^{J_N} = \frac{GM}{r} \sum_{l=3}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{p=0}^l F_{l,0,p}(i) C_{l,0} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix}_{(l)\text{impair}}^{(l)\text{pair}} [(l-2p)(\omega+v)]$$

Pour l'obtention de l'hamiltonien transformé Φ'_1 , nous utilisons la partie constante du développement de (a^3/r^3) en anomalie moyenne, et avec [16], [26]:

$$\Phi'_1(L', G', H') = \frac{\mu^4}{L'^3 G'^3} a_e^2 J_2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H'^2}{G'^2} \right)$$

$$\Phi_2'^{J_N} = \frac{GM}{a'} \sum_{l=3}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{a'}\right)^l \sum_{p=1}^{l-1} F_{l,0,p}(i') C_{l,0} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix}_{(l)\text{impair}}^{(l)\text{pair}} [(l-2p)\omega] \\ \times \left\langle \left(\frac{a'}{r'}\right)^{l+1} \cos(l-2p)v \right\rangle_M$$

avec:

$$\begin{array}{ll} L = \sqrt{\mu a} & l = M \\ G = L \sqrt{1 - e^2} = L \eta & g = \omega \\ H = G \cos i & h = \Omega \end{array}$$

et:

$$\begin{aligned} \langle \cos mv \rangle &= \frac{(-e)^m}{(1+\eta)^m} (1+m\eta) & \langle \frac{a}{r} \cos mv \rangle &= \frac{(-e)^m}{(1+\eta)^m} \\ \langle \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos mv \rangle &= (-1)^m \frac{(-n+2)\dots(-n+m+1)}{m!} \left(\frac{e}{2}\right)^m \eta^{-2n+3} \\ & \times F\left(\frac{m-n+2}{2}, \frac{m-n+3}{2}, m+1, e^2\right) \end{aligned}$$

dans cette dernière expression, $n \geq 2$ ou $n < 0$, et m quelconque; $F(a, b, c, x)$ est une série hypergéométrique, [26].

Nous ne donnons pas l'expression de S_1 , correspondant à l'obtention de Φ'_1 [17], mais celle de sa moyenne:

$$\langle S_1 \rangle (L'_i, -, g, -) = -\frac{\mu^2}{G'^3} a_e^2 J_2 \frac{1}{8} \left(1 - \frac{H'^2}{G'^2}\right) \frac{1+2\eta}{(1+\eta)^2} e^2 \sin 2g$$

Nous utilisons: $S_1^* = S_1 - \langle S_1 \rangle$, donc: $\langle S_1^* \rangle = 0$; d'où:

$$\begin{aligned} \Phi_2'^* &= \frac{\mu^6}{L'^3 G'^7} \frac{a_e^4 J_2^2}{4} \left[-\frac{15}{32} \left(1 - 2\frac{H'^2}{G'^2} - 7\frac{H'^4}{G'^4}\right) \right] \\ & \quad + \frac{3}{8} \left(1 - 6\frac{H'^2}{G'^2} + 9\frac{H'^4}{G'^4}\right) \eta' \\ & \quad + \frac{15}{32} \left(1 - \frac{18}{5}\frac{H'^2}{G'^2} + \frac{H'^4}{G'^4}\right) \eta'^2 \\ & \quad \left[+ \frac{3}{16} \left(1 - 16\frac{H'^2}{G'^2} + 15\frac{H'^4}{G'^4}\right) e'^2 \cos 2g \right] \\ & \quad + \frac{3}{16} \frac{\mu^6}{L'^3 G'^7} a_e^4 J_2^2 e'^2 \left(1 - \frac{H'^2}{G'^2}\right) \frac{1+2\eta}{(1+\eta)^2} \left(1 - 5\frac{H'^2}{G'^2}\right) \cos 2g \end{aligned}$$

A l'aide des différents termes Φ'_k nous obtenons maintenant un développement à l'ordre deux de la fonction perturbatrice (potentiel terrestre) moyennée.

Pour les quatre premiers coefficients des harmoniques zonaux, l'expression ($\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2$) est identique à celle obtenue par Brouwer, à la première transformation (moyenne sur (l)). Si l'on peut comparer l'intégration numérique à grand pas (6 à 12 heures, voire un jour) du nouvel hamiltonien, à l'intégration analytique donnée par ce dernier auteur (longues périodes), il est impossible de se rendre compte s'il manque dans l'une et/ou l'autre méthode, des termes à longues périodes.

Nous le constatons (figure 36 gauche), où la cohérence, entre les deux intégrations numérique ($\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2$) et analytique (Brouwer), pour la prise en compte du coefficient J_2 , est quasiment centimétrique.

La seconde série de graphes (36 droite) représente la différence des intégrations numériques de Φ'^* d'une part, et de Φ' d'autre part. Les termes sont d'ordre un par rapport à J_2 , puisqu'ils interviennent uniquement dans l'expression de Φ'^* . Ces variations quantifient le changement de variables (lentes) supplémentaire à effectuer, après intégration de $(\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2)(J_2)$, pour se ramener aux variables de la méthode de centrage.

Si la théorie de Brouwer prend en compte de façon correcte les effets séculaires au deuxième ordre (J_2^2), il lui manque des longues périodes significatives en (2ω) dues au coefficient J_2 . Pour s'en assurer, nous pouvons comparer l'intégration numérique de $(\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'^*)(J_2)$ à une intégration analytique plus précise.

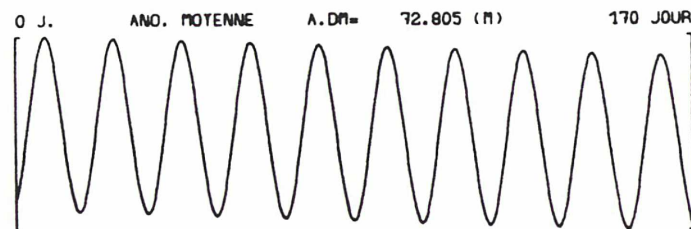
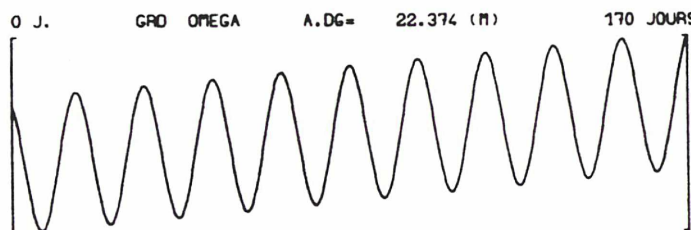
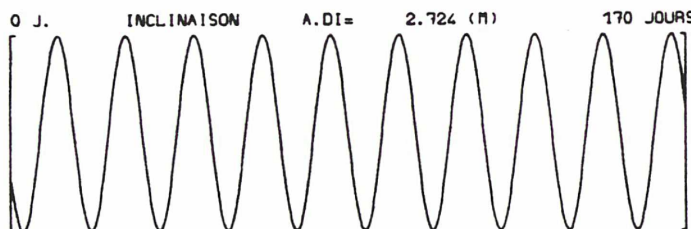
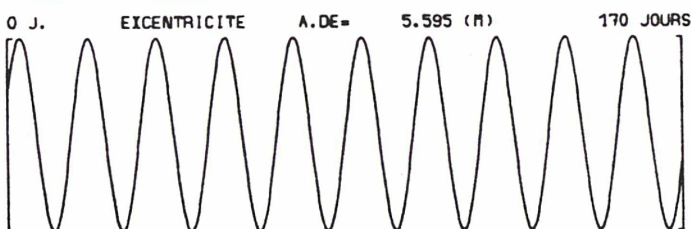
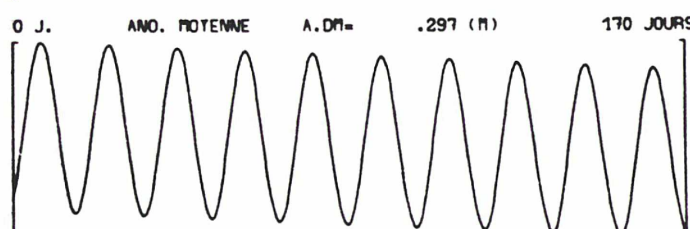
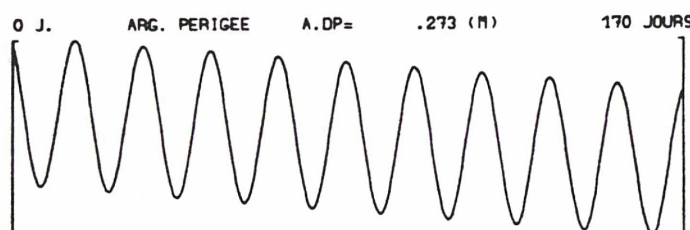
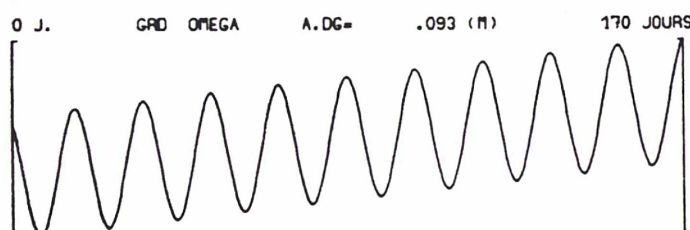
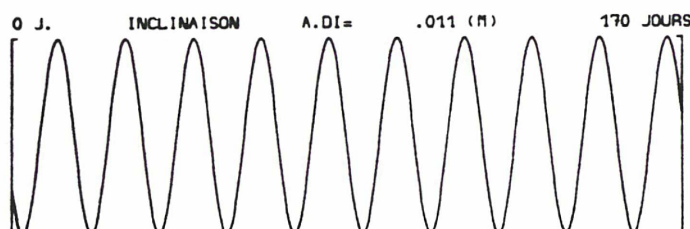
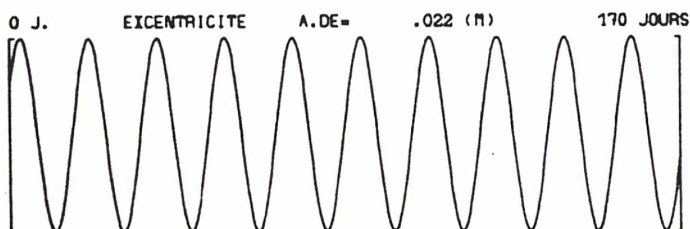
Grâce à un calcul automatique de produits de séries, Berger est parvenu à obtenir une théorie analytique complète, au deuxième ordre pour les effets à longues périodes, et au troisième ordre pour les termes séculaires. Une formulation aussi précise des paramètres caractérisant le mouvement moyen d'un satellite (perturbations J_2 à J_7) nous sert de référence sûre dans cette étude.

Il résulte de ce qui précède que toute comparaison entre cette théorie analytique et l'intégration numérique d'un second membre moyenné peut s'effectuer, si les termes séculaires sont développés au même ordre de troncature de part et d'autre. Afin de préparer les calculs pour l'obtention, dans Φ'_3 , des différents termes de couplage J_2 - J_n , nous avons calculé l'expression de S_2 , avec Φ'_1 , Φ'_2 et S_1 , pour les parties en J_2^2 , J_3 , J_4 et J_5 (!). Cependant, son expression très longue ne sera pas donnée ici.

Différence en longues périodes :

↓ Brouwer - $(\phi'_0 + \phi'_1 + \phi'_2)$

(analyt.) - (BS/10/43200 sec)
(numérique)



Différences des intég. Numériq. :

$(\phi'_0 + \phi'_1 + \phi'_2^*) - (\phi'_0 + \phi'_1 + \phi'_2)$

intégrateur : BS/10/43200 sec.

Fig. 36 - Satel. 7600 Km, 0.085, 10 deg. ; Perturb. : J₂

Dans l'algorithme de la transformation de Von Zeipel, l'équation du troisième ordre s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Phi'_3 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial L'} \frac{\partial S_3}{\partial l} + \frac{\partial^2 \Phi'_0}{\partial L'^2} \frac{\partial S_1}{\partial l} \frac{\partial S_2}{\partial l} \\
&+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial L'^3} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^3 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial G'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial g} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial L' \partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial l} \frac{\partial S_1}{\partial g} \\
&+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g} + \Phi_3
\end{aligned}$$

Le calcul du terme Φ'_3 du nouvel hamiltonien moyenné est très long. Si l'obtention de la partie au second ordre (Φ'_2) nécessite la moyenne d'une centaine de termes environ, il faut maintenant manipuler entre cinq et dix mille termes pour obtenir l'expression en J_2^3 .

Nous avons choisi de prendre l'hamiltonien Φ'_3 dans le travail de Kozai, [18]. Il tient compte, au troisième ordre, des 3 premiers coefficients des harmoniques zonaux du potentiel terrestre. L'expression est très condensée et nous pouvons facilement obtenir ses dérivées partielles par rapport aux paramètres moyens, afin de programmer les équations de Lagrange.

Il faut cependant noter que cet hamiltonien (J_2^3 , J_2-J_3 , J_2-J_4) a été construit à partir de fonctions intermédiaires S_1 et S_2 , de moyennes non nulles. Aussi, il faudra s'attendre par l'intégration numérique de ($\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi'_3$) à ne pas avoir toutes les longues périodes en J_2^2 (2ω) dans les éléments moyens obtenus.

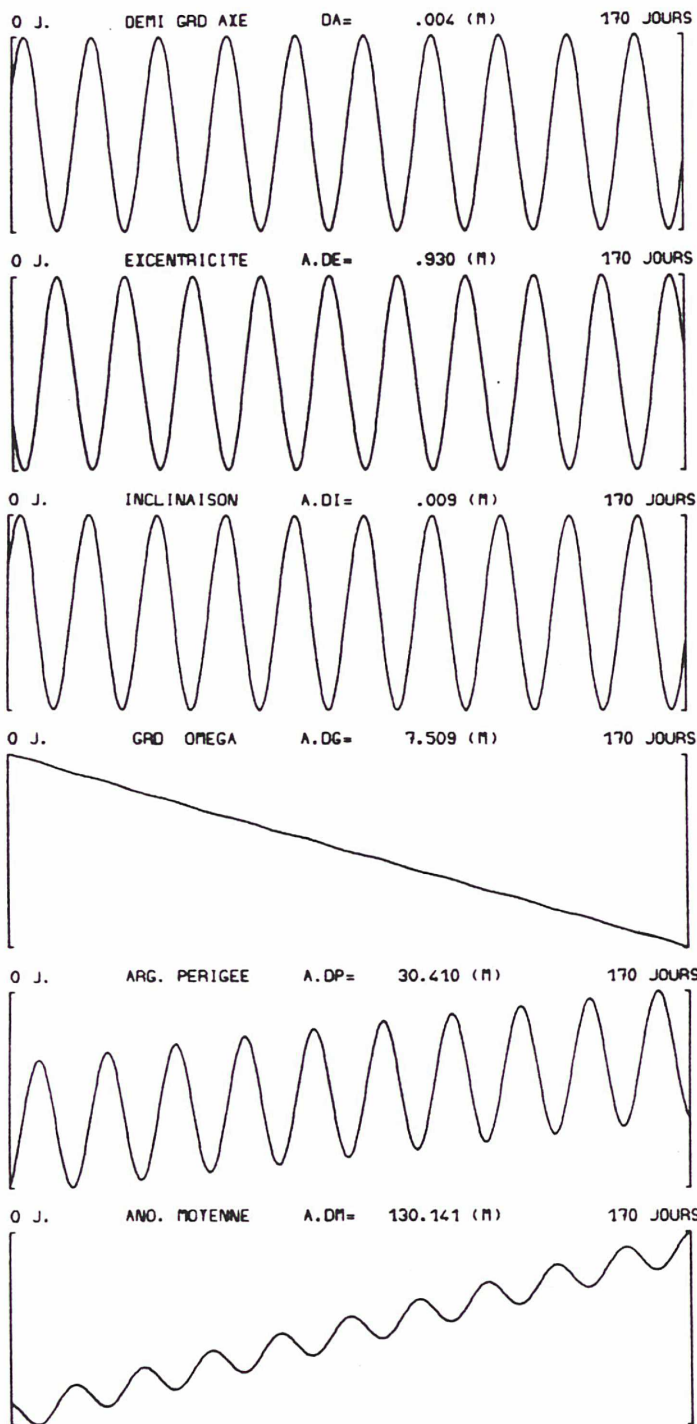
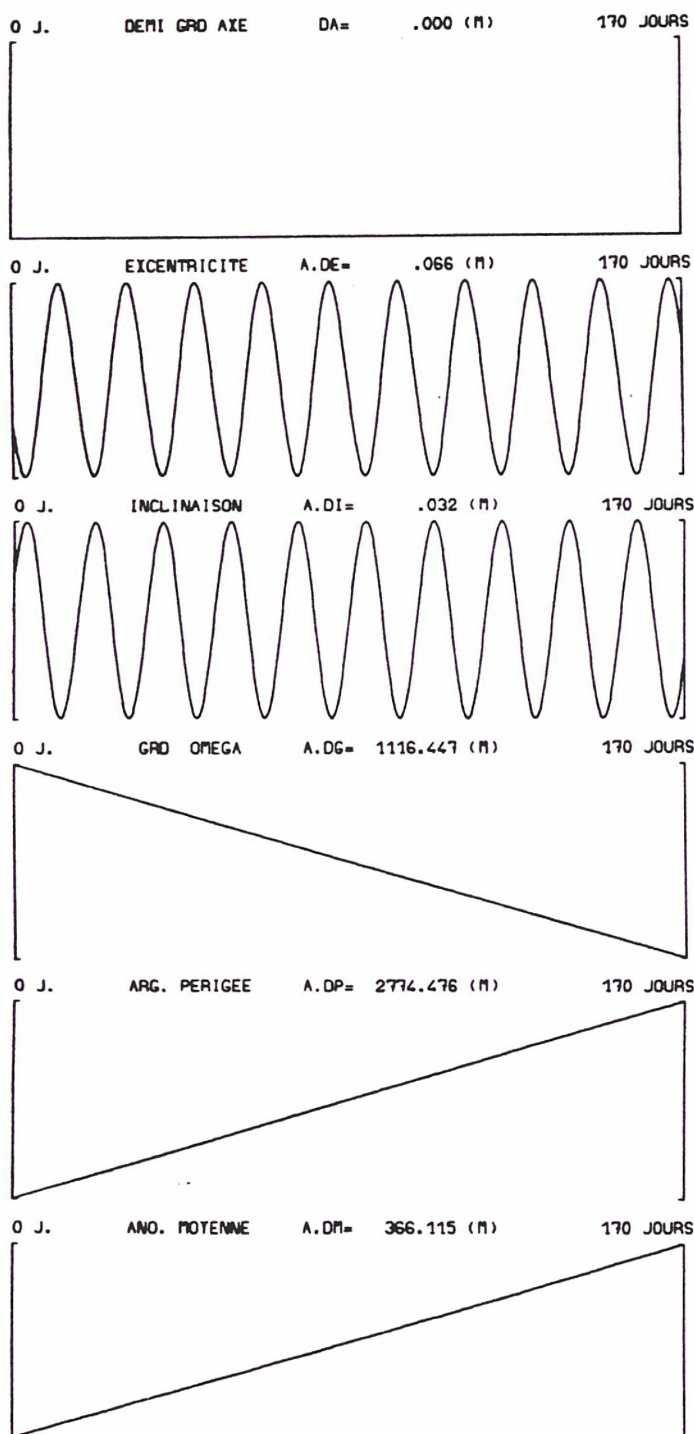
La figure 37 (gauche: $\Phi'_3 - \Phi'_2$) montre "l'apport", pour le coefficient J_2 , de cet hamiltonien $\Phi'_3(J_2)$; si les effets séculaires sont importants (J_2^3 : kilomètre/an), les amplitudes des longues périodes (J_2^2) sont très petites et sans rapport avec la réalité (figure 38).

La comparaison entre l'intégration numérique de ($\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi'_3$) et la théorie analytique (37, droite) montre un bon accord sur les effets séculaires (un ajustement plus fin serait nécessaire), et sur les longues périodes pour les variables (i'), (Ω') et ($\omega' + M'$). Les résidus plus importants sur (e'), (ω') et (M') proviennent des termes manquants (2ω , J_2^2) dans les variables centrées, puisque la fonction S_2 dans Φ'_3 n'est pas de moyenne nulle.

Différence des intég. numériq. :

$$(\phi_0' + \phi_1' + \phi_2' + \phi_3') - (\phi_0' + \phi_1' + \phi_2')$$

intégrateur: BS/10/43200 sec.



Différence en longues périodes :

$$\text{Berger } (\phi_0' + \phi_1' + \phi_2'^* + \phi_3')$$

(analyt.) (BS/10/43200 sec.)
(numérique)

Fig. 37 - Satel. 7600 km, 0.085, 10 deg. Perturb. : J₂

Les longues périodes constatées sur le demi-grand axe proviennent de la théorie de Berger; la méthode de Von Zeipel, telle que nous l'utilisons pour exprimer le centrage du système différentiel initial, ne donnera jamais aucun terme sur (a'), par définition: $\partial\Phi'/\partial l' = \dot{L}' = 0$. Cependant, la théorie analytique au deuxième ordre (il n'y a rien sur (a) au premier ordre) montre :

$$L = L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l} + \dots$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial l} = \frac{L'^3}{\mu^2} (\Phi_2 - \Phi'_2) + \text{termes à courtes périodes} \dots$$

Les hamiltoniens Φ_2 et Φ'_2 dépendent des coefficients J_3, \dots, J_n , mais Φ'_2 contient en plus les termes en J_2^2 . Les longues périodes sur (L), donc sur (a), sont directement issues de ces termes: $-n\Phi'_2(J_2^2)$.

La figure 38 permet de se rendre compte de l'importance des longues périodes en 2ω (J_2^2), sur les paramètres moyens d'une famille de trajectoires. Pour ces différentes excentricités et inclinaisons, le demi-grand axe de "référence" est de 7330 kilomètres. Compte tenu des amplitudes élevées (décamétrique et kilométriques) sur les variables (e'), (ω') et (M'), les remarques précédentes ($\langle S_2 \rangle \neq 0$) se comprennent mieux.

Pour approcher la solution du problème des longues périodes (J_2^2) il faut, soit travailler sur l'hamiltonien moyenné $\Phi'_3(J_2)$, mais cela nécessite alors l'emploi de manipulateurs algébriques, soit essayer d'introduire dans les variables "quasi-centrées", issues de l'intégration numérique de $(\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi'_3)(J_2)$, un changement de variable supplémentaire du deuxième ordre, de la forme: $(-\partial \langle S_2 \rangle / \partial L'_i, +\partial \langle S_2 \rangle / \partial l'_i)$.

Ces longues périodes manquantes (J_2^2) s'identifient d'une façon très nette dans une théorie analytique ayant utilisée la méthode de transformation de Von Zeipel. En particulier, le travail de Kozai [18], développé avec des fonctions intermédiaires (S_1 et S_2) de moyenne non nulle, fait apparaître ces différents termes au cours de la transformation inverse des (L'_i, l'_i) vers les (L_i, l_i) . Nous y avons repris les expressions en 2ω , pour les variables (a' , e' , ω' , M').

Compte tenu du niveau de précision centimétrique à atteindre sur les variables centrées, si nous pouvons toujours comparer la méthode de centrage à la théorie analytique (Berger), il est nécessaire de se référer maintenant à une troisième source de calcul, dont nous connaissons exactement la validité; nous voulons parler de l'intégration numérique.

Hormis les problèmes de propagation d'erreur d'arrondi, une intégration numérique calcule "exactement" l'effet, sur une orbite de satellite artificiel, d'un potentiel terrestre $U(r, \varphi, \lambda)$ ou de tout autre perturbation dont le modèle a déjà été testé par ailleurs (partie A). Dans le cadre de la méthode de centrage il est clair que toute comparaison de la théorie avec des éléments osculateurs classiques servant alors de référence devra s'effectuer après un filtrage soigné de ces derniers paramètres (B.II). C'est le principe général des études des systèmes dynamiques sur de grandes périodes de temps ([29]: sur la stabilité du système solaire, par exemple).

La figure 39 (gauche) indique une comparaison de la théorie analytique (J_2 : Berger) avec le résultat d'un filtrage d'une orbite intégrée numériquement (J_2 : AMC/14/120 secondes). Si la décroissance du demi-grand axe est directement due à la méthode d'intégration (erreur d'arrondi sur l'anomalie moyenne), les petites fluctuations proviennent de la dispersion des "pseudo-observations". A l'échelle centimétrique, le filtrage est donc dans ce cas précis très performant. D'autre part, la théorie est quasiment centimétrique en longues périodes (résidus en J_2^3), et elle laisse apparaître des termes séculaires en J_2^4 (quelques mètres/an).

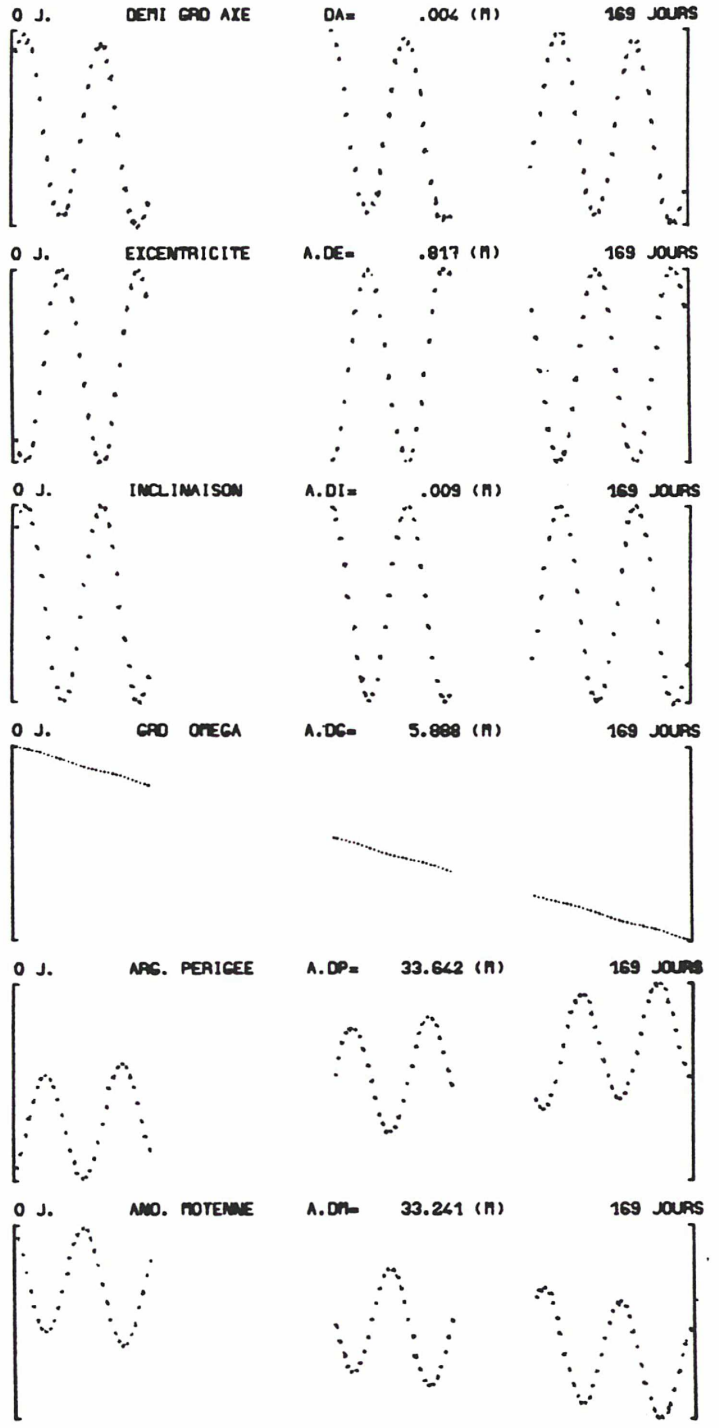
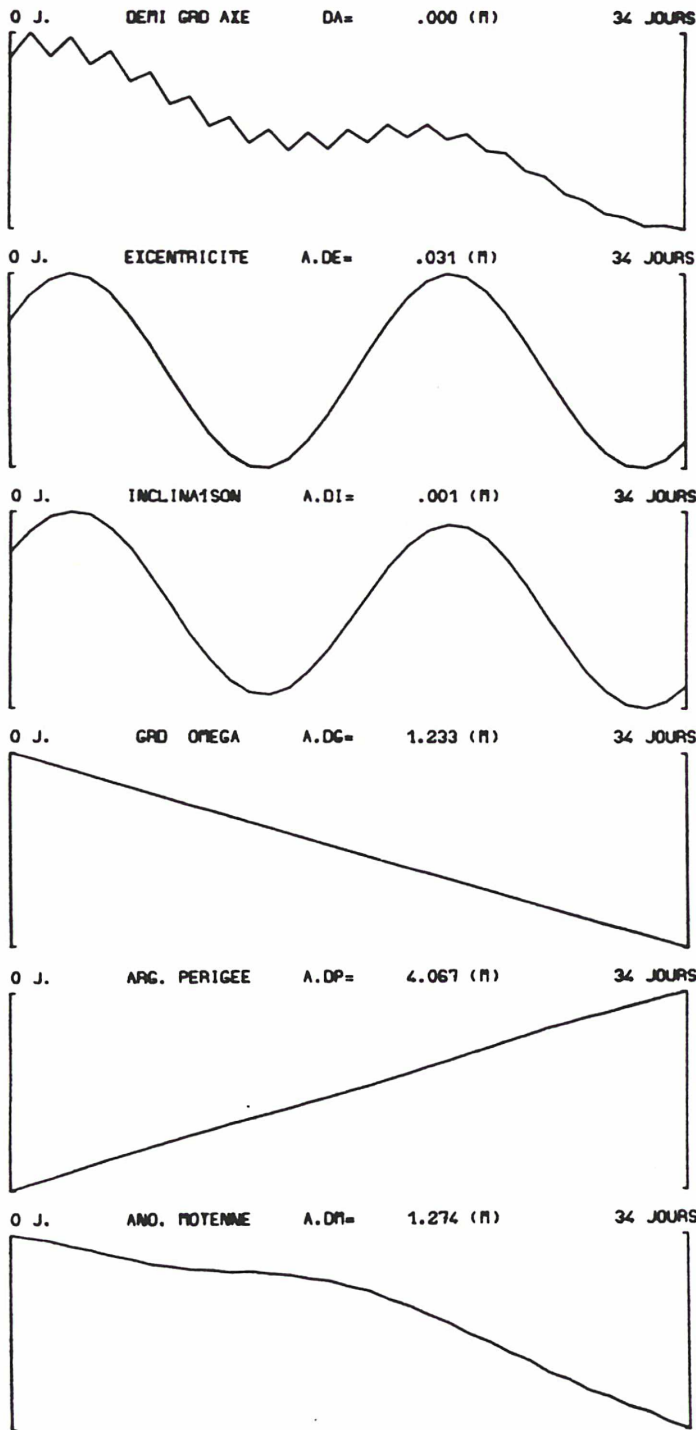
La méthode de centrage, appliquée partiellement au second ordre (J_2^2) en intégrant l'hamiltonien ($\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi'_3$) a été également comparée au filtrage ("pseudo-observations"). Sur de grandes périodes de temps (6 mois et plus), nous avons dû diviser l'intégration numérique (pas de 60sec à 120sec) en plusieurs tronçons, pour des raisons de simulations et de temps de calcul; toutefois, la mise en évidence des longues périodes issues du filtrage (coûteux en temps CPU) ne nécessite pas une densité continue très importante de points moyens.

La figure 39 (droite) montre des résidus du même ordre de grandeur que ceux de la figure 37 (droite), la théorie analytique utilisée dans les comparaisons étant très précise.

Si les termes à longues périodes en J_2^2 (2ω) de la théorie de Kozai viennent parfaitement compléter la théorie du centrage, pour les variables (ω') et (M'), ils sont tout à fait insuffisants pour l'excentricité (e'). L'auteur ayant développé les calculs sans l'utilisation d'un manipulateur algébrique, certaines approximations sont probablement à l'origine des termes absents. La théorie de Berger est donc plus complète, mais elle ne permet absolument pas d'isoler un terme quelconque pour l'utiliser ensuite dans le second membre des équations centrées. Compte tenu du caractère semi-numérique de la méthode de centrage nous avons choisi d'ajuster un coefficient (amplitude) empirique sur l'excentricité (e'), en gardant toutefois la période exacte (2ω) dans l'argument du terme trigonométrique (cosinus).

Différence :
intég. analyt. (Berger)

Filtrage de l'intég. numériq.
(AMC/14/120 sec.)



Différence de longues périodes :
intég. numériq. ($\phi_0' + \phi_1' + \phi_2'^* + \phi_3'$)

Filtrage de : 3x (AMC/14/120sec.)

Fig. 39 - Sat. 7840 km , 0.085, 10 deg. , Perturb. : J_2

En outre, et afin de compléter les termes séculaires jusqu'au quatrième ordre (J_2^4), nous avons repris l'hamiltonien Φ'_{4S} (partie séculaire) de Kinoschita [21], qui a développé une théorie analytique au troisième ordre (méthode de Hori, et calculs de crochets de Poisson) avec effets séculaires au quatrième ordre, pour les 3 premiers harmoniques zonaux du potentiel terrestre.

Les résultats de l'intégration numérique (perturbation: J_2) de l'hamiltonien ($\Phi'_0 + \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi'_3 + \Phi'_{4S}$), avec la prise en compte des termes analytiques sur (ω') et (M') et du terme empirique sur (e'), ont été comparés au filtrage, (figure 40). Les deux séries de graphes sont relatives à des satellites différents (paramètres métriques); si le premier subit des effets séculaires importants compte tenu de son inclinaison (10 degrés), le second est beaucoup moins perturbé (50 degrés).

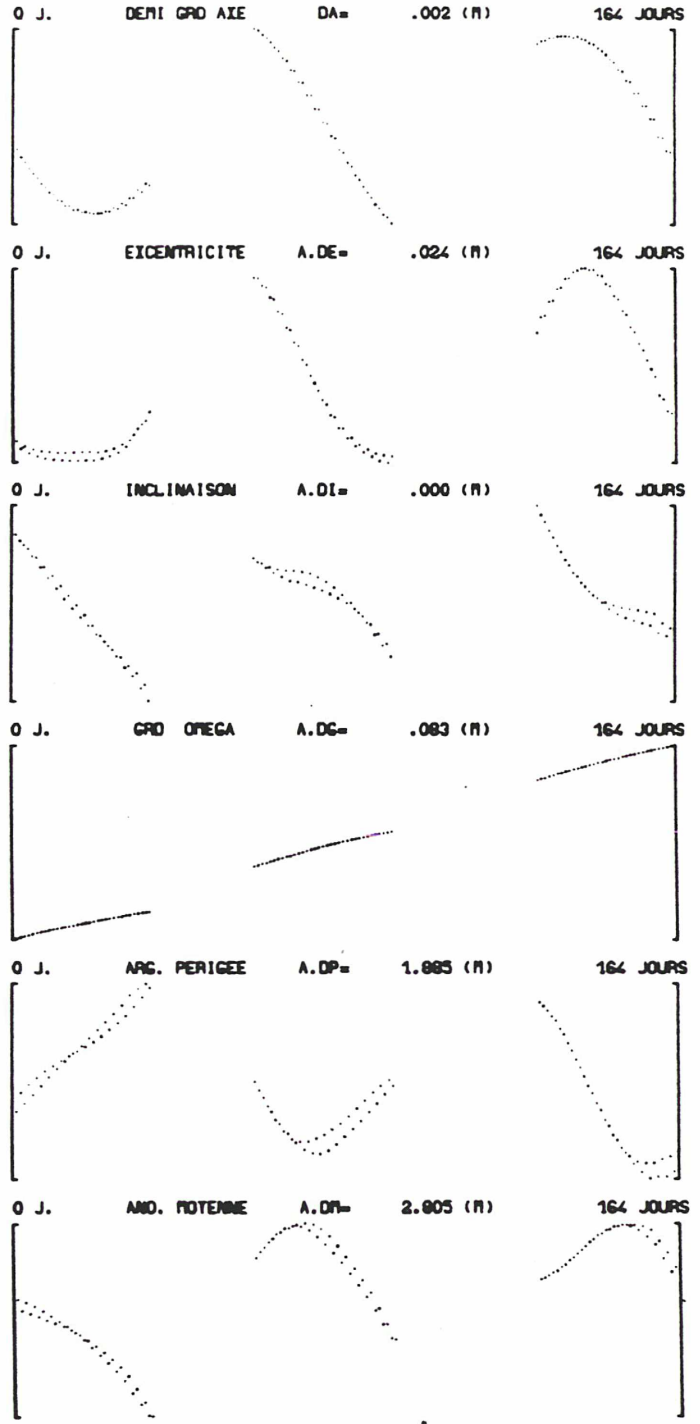
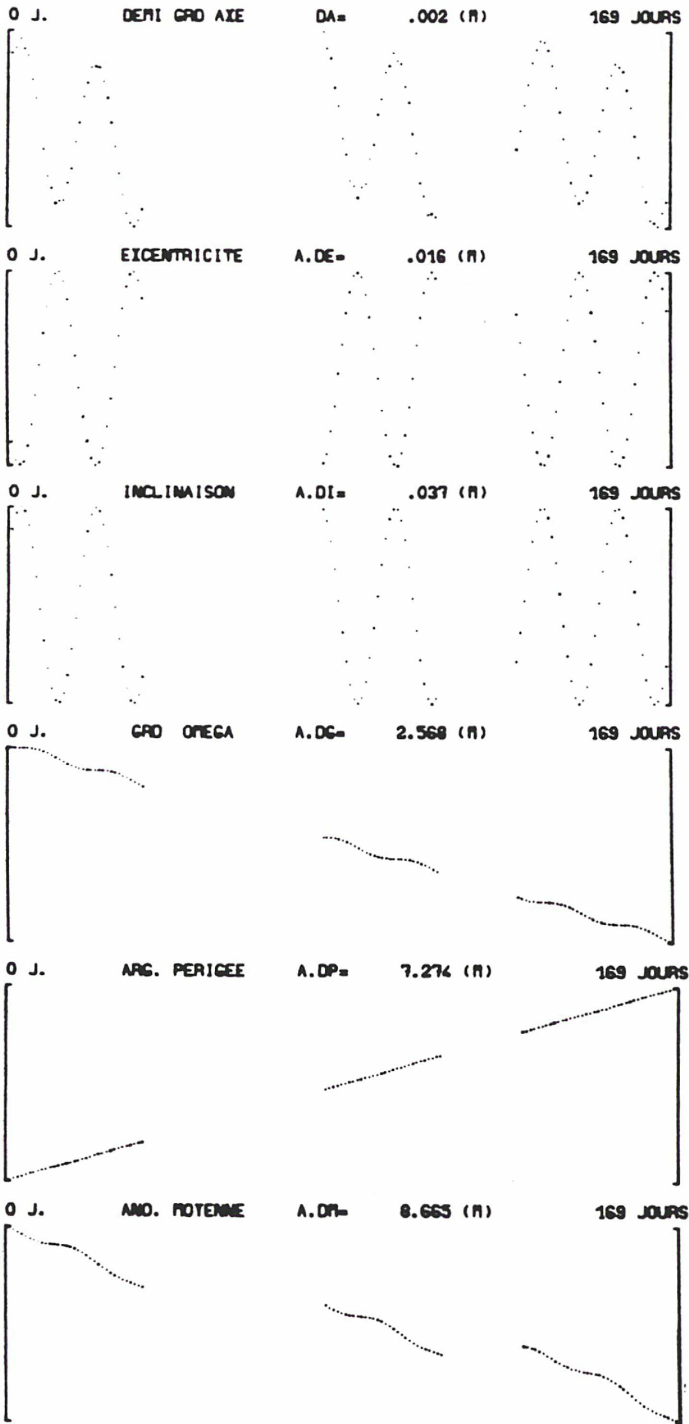
Les effets séculaires résiduels seront négligeables pour la plupart des satellites utilisés en géodésie spatiale; la détermination du coefficient (J_2), ou tout au moins l'équation de condition correspondante apportée par le traitement de chaque satellite dans la méthode de centrage, sera quasiment exacte. Les satellites d'inclinaison faible (inférieure à 20 degrés) seront alors les mieux appropriés.

Afin d'apporter à la méthode des solutions tout aussi précises pour l'analyse des longues périodes, il faut maintenant compléter le second ordre par les termes de couplage J_2-J_n , avec $n \neq 2$. L'hamiltonien Φ'_3 contenant déjà ces termes pour n égal 3 et 4, il faudrait obtenir une expression généralisée (pour n quelconque) de l'effet de couplage, à partir d'un traitement algébrique automatique de l'équation du troisième ordre (méthode de Von Zeipel). Compte tenu des différents développements analytiques et littéraires que nous avons déjà effectués, non seulement le manipulateur de séries trigonométriques pourrait être contrôlé, mais il serait de plus appliqué à la multiplication (couplages) des termes d'indice deux, contenant J_n , par les termes d'indice un, contenant J_2 , dans l'équation mentionnée.

La figure 41 (gauche) montre la qualité avec laquelle les couplages J_2-J_3 et J_2-J_4 , pourtant d'amplitudes importantes, sont calculés grâce à l'hamiltonien Φ'_3 . L'orbite centrée a été obtenue par intégration numérique (BS pour J_2 , J_3 et J_4) avec un pas de douze heures; le temps de calcul (CPU) de cette trajectoire est d'environ sept secondes, c'est-à-dire de 20 à 40 fois plus faible que lors de la plupart des calculs traditionnels utilisant des pas beaucoup plus petits (à cause des courtes périodes). Aussi, la qualité de l'orbite centrée n'est-elle plus limitée, à long terme (plusieurs années), par des problèmes de divergence purement numérique, mais par les approximations (troncatures) faites dans le développement du second membre moyenné, imperfections qui sont d'ailleurs très bien modélisables ensuite sur les paramètres de la trajectoire.

Satellite type :

7840 km, 0.085, 10 deg.



Satellite type :

8280 km, 0.011, 50 deg.

COMPARAISONS : FILTRAGES - CENTRAGE :
 ↓ ↓
 Perturb. J_2 ; 3x (AMC/14/60sec.) - ($\phi'*(J_2^4)$ + termes analytiques)

Fig. 40

Différence des long. périod. ($J_2 J_3 J_4$)
 intég. numériq. ($\phi^*(J_4^2) + \text{term. analyt.}$)

Filtrage : 3 x (AMC/14/60sec.)

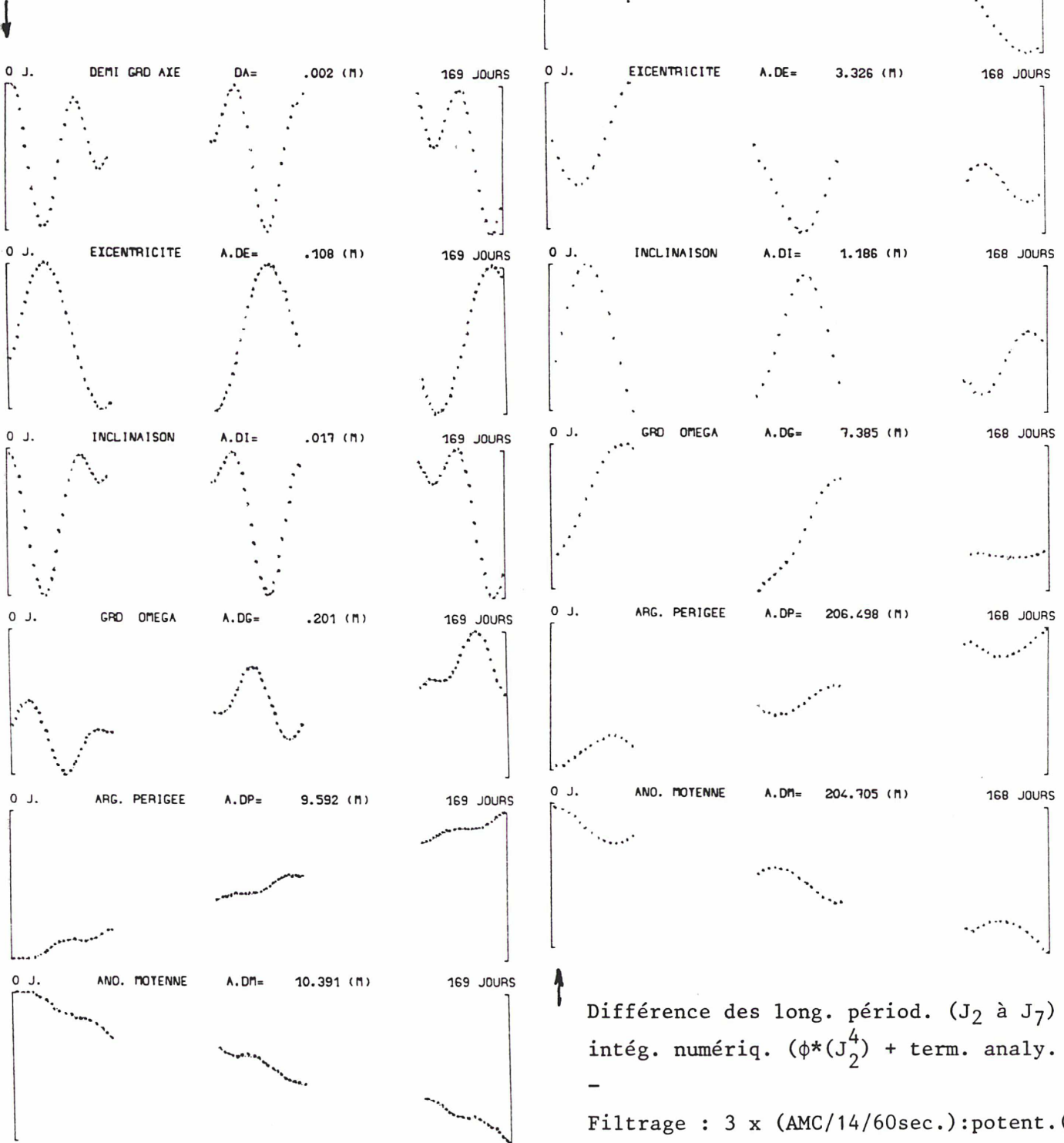


Fig. 41 - Sat : 7840 km , 0.085 , 10 deg.

La seconde partie des graphes (41 droite) représente la comparaison entre une orbite centrée (J_2 à J_7), où il manque certains termes de couplage du second ordre, et un filtrage de trois arcs d'orbite, obtenus par intégration numérique (AMC/14/60 secondes) d'un potentiel développé jusqu'au degré et ordre (7,7). Les résidus sont de l'ordre de quelques mètres.

b. Potentiel luni-solaire:

Nous partons du développement de ce potentiel en coordonnées terrestres (r, φ, λ), quel que soit l'astre considéré. Puis nous montrons comment, dans l'esprit de la méthode de centrage, la fonction est moyennée par rapport à l'anomalie (M').

Au cours de cette transformation, il n'est pas nécessaire de développer les termes par rapport aux éléments orbitaux des astres perturbateurs. Au contraire, nous gardons les coordonnées géocentriques (ascension droite, déclinaison et rayon vecteur), de façon à calculer le "plus exactement possible" la position de ces astres dans l'intégration numérique du mouvement moyen du satellite artificiel.

Cependant, même pour ces corps, dont le mouvement est relativement lent par rapport à celui du satellite, la notion de position exacte perd sa signification au moment du centrage du second membre des équations différentielles, donc, au moment de la moyenne (période d'environ 2 à 4 heures suivant les satellites). En toute rigueur, puisque le second membre dépend aussi du temps, il faudrait effectuer une seconde quadrature (entre 0 et 2π) sur les termes, en faisant varier la position de l'astre pendant cette deuxième moyenne.

En pratique, et compte tenu du mouvement moyen de la plupart des satellites, nous admettrons que la position des corps perturbateurs ne bouge pratiquement pas pendant le centrage. Aussi :

$$U_{\star} = \frac{GM_{\star}}{r_{\star}} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_{\star}}\right)^l \sum_{m=0}^l (A_{l,m} \cos m\alpha + B_{l,m} \sin m\alpha) P_{l,m}(\sin \varphi)$$

avec:

$$A_{l,m} = \delta_{0,m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(\sin \varphi_{\star}) \cos m\alpha_{\star}$$

$$B_{l,m} = \delta_{0,m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}(\sin \varphi_{\star}) \sin m\alpha_{\star}$$

$$\bar{U}_* = \frac{GM_*}{r_*} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{a}{r_*}\right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^l \cos(l-2p)v \right\rangle$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left[A_{l,m} \right]_{(l-m)\text{pair}}^{(l-m)\text{pair}} \cos \Psi + \left[B_{l,m} \right]_{(l-m)\text{impair}}^{(l-m)\text{pair}} \sin \Psi \\ \left[-B_{l,m} \right]_{(l-m)\text{impair}} \end{array} \right\}$$

avec: $\left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^n \right\rangle = \eta^{2n+3} F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}, 1, e^2\right)$, et: $\Psi = (l-2p)\omega + m\Omega$

La figure 42 montre d'une part (gauche), l'effet de la perturbation gravitationnelle du Soleil ajoutée à celle du coefficient J_2 ($J_2 + \odot$ - les éléments képlériens) et d'autre part (droite), la qualité de l'orbite centrée par rapport au filtrage d'une intégration numérique classique (AMC/14/60 secondes, avec $J_2 + \odot$) servant de référence. Les résidus sont de l'ordre du mètre, avec la seule prise en compte du premier terme en $(a/r_\odot)^2$ du développement du potentiel solaire. Si l'hypothèse de non mouvement du Soleil pendant le centrage du système différentiel est justifiée et ne provoque pas d'écarts significatifs, les couplages J_2 - \odot non pris en compte sont du second ordre sur les longues périodes.

Compte tenu des résultats obtenus dans la première partie concernant l'influence de la position du Soleil sur une trajectoire du satellite artificiel (figure 19), nous pouvons nous attendre à ces résultats (Soleil quasiment fixe pendant une révolution de satellite). Il faudra toutefois être plus prudent pour l'influence gravitationnelle de la Lune, puisque cet astre a un mouvement plus rapide.

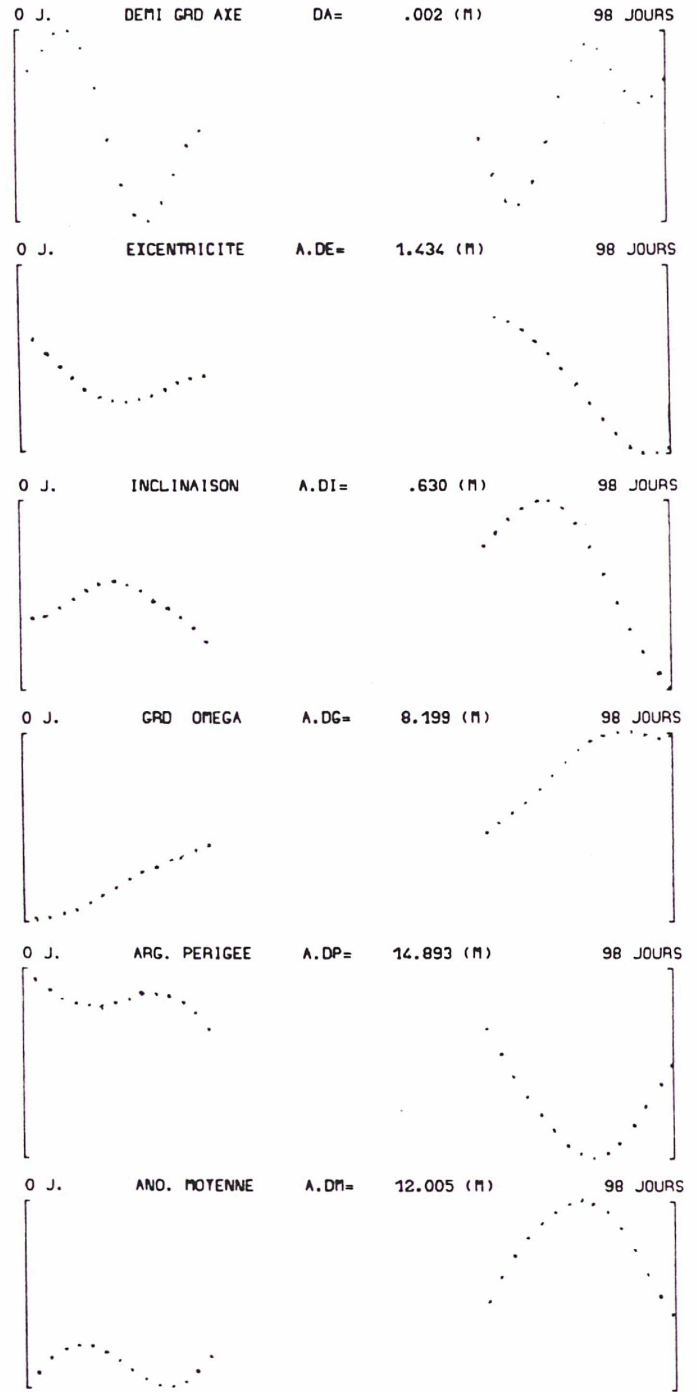
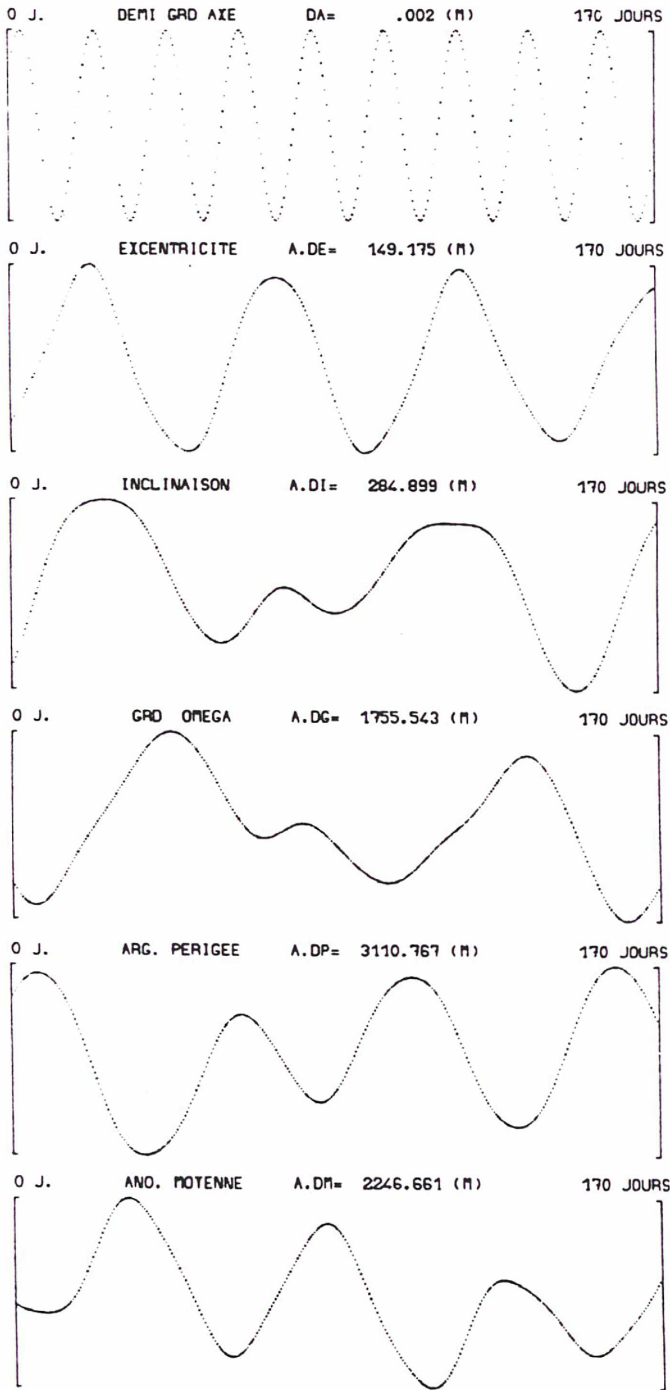
De la même façon, le potentiel moyenné de marées terrestres s'obtient par le développement :

$$\Delta U_* = \frac{GM_*}{r_*} \sum_{l=2}^{+\infty} k_l \left(\frac{a_e}{r_*}\right)^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (A_{l,m} \cos m\alpha + B_{l,m} \sin m\alpha) P_{l,m}(\sin \varphi)$$

avec la même définition des coefficients $A_{l,m}$ et $B_{l,m}$ que dans le cas des potentiels d'effets directs.

Longues périodes dues à $(J_2 + \Theta)$:
 Intég. numériq. $(\phi * (J_2^4) + \Theta)$

éléments képlériens



↑
 Différence des long. périod. $(J_2 + \Theta)$:
 intég. numériq. $(\phi * (J_2^4) + \Theta)$

—
 Filtrage : 2 x (AMC/14/60sec.)

Fig. 42 - Sat. 7840 km , 0.085 , 10 deg.

$$\begin{aligned} \overline{\Delta U}_* = \frac{GM_*}{r_*} \sum_{l=2}^{+\infty} k_l \left(\frac{a_e}{r_*}\right)^l \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) < \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \cos(l-2p)v > \\ \times \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} A_{l,m} \\ -B_{l,m} \end{array} \right]_{(l-m)\text{pair}}^{(l-m)\text{pair}} \cos \Psi + \left[\begin{array}{l} B_{l,m} \\ A_{l,m} \end{array} \right]_{(l-m)\text{impair}}^{(l-m)\text{pair}} \sin \Psi \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Le potentiel moyen de marées océaniques est tel que :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta U} = 4\pi G a_e \rho_0 \sum_{\nu} \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{1+k_l'}{2l+1} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{l,m,p}(i) \\ \times \sum_{\pm} C_{\nu,l,m}^{\pm} \left[\begin{array}{l} \pm \sin \\ \mp \cos \end{array} \right] \Psi_{\nu,l,m,p}^{\pm} < \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \cos(l-2p)v > \end{aligned}$$

Nous remarquerons, pour cette dernière perturbation gravitationnelle, que le centrage devra supposer fixe le paramètre θ (donc le temps sidéral) ainsi que les arguments $\sigma_{\nu,t}$ des différentes ondes de marées océaniques. Dans ce cas bien précis, il faudra moyenner une seconde fois la fonction de forces et ce, de façon analytique, ou éventuellement numérique.

B.III.2. FORCES DE SURFACE:

La prise en compte des forces non gravitationnelles dans l'algorithme de centrage est différente de l'approche que nous avons effectuée jusqu'ici pour l'ensemble des forces conservatives. En effet, si nous pouvons souvent considérer certains paramètres comme constants pendant le calcul analytique des moyennes de chaque potentiel, il n'est pas possible de considérer la densité atmosphérique, ou tout autre paramètre, comme constante pendant une révolution. Compte tenu de l'expression de ces termes en fonction de l'orbite réelle du satellite (éléments osculateurs), la formulation n'aurait aucun sens.

De plus, si les différents couplages entre les termes de plusieurs potentiels sont souvent d'un ordre de grandeur plus faibles que les effets propres aux perturbations respectives, il n'en n'est pas de même ici, où les perturbations induites (couplages avec J_2 principalement) dépassent de beaucoup les effets des forces elles-mêmes.

Aussi, la seule façon de tenir compte le plus exactement possible de ces couplages, est de moyenniser le second membre des équations différentielles initiales par une quadrature numérique, en supposant non pas les éléments constants pendant la moyenne, mais au contraire, affectés des principales courtes périodes pendant la révolution du satellite.

En pratique, ceci est réalisé grâce aux termes de la théorie de Brouwer, très rapides à obtenir. Nous calculons, pour chaque pas d'intégration à venir (12 heures ou 1 jour,..), et entre deux périodes, donc avec $(v + \omega)$, les dérivées moyennes par rapport au temps des différents paramètres (moyens) de la trajectoire, avec les équations de Gauss. La quadrature numérique utilise généralement 16 à 32 points, où sont calculées les courtes périodes à rajouter aux éléments moyens à l'instant courant, affectés cependant des variations séculaires dues au coefficient J_2 . Les équations sont du type :

$$\dot{\bar{E}}_i(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} [\varepsilon g_i^{(1)}(\bar{E}_i + \varepsilon C_i^{(1)}, \bar{M} + \varepsilon C_6^{(1)})] d\tau \quad (i = 1, 5)$$

$$\dot{\bar{M}}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} [n(\bar{E}_i + \varepsilon C_i^{(1)}) + \varepsilon g_6^{(1)}(\bar{E}_i + \varepsilon C_i^{(1)}, \bar{M} + \varepsilon C_6^{(1)})] d\tau$$

Les $C_i^{(1)}$ sont les courtes périodes de Brouwer (pour J_2 essentiellement), dont nous "corrigeons" tous les paramètres moyens à l'intérieur du signe somme. Ainsi, la densité atmosphérique peut-elle être calculée, dans le cas du freinage, avec une

signification et donc une précision bien meilleure qu'en utilisant les éléments moyens.

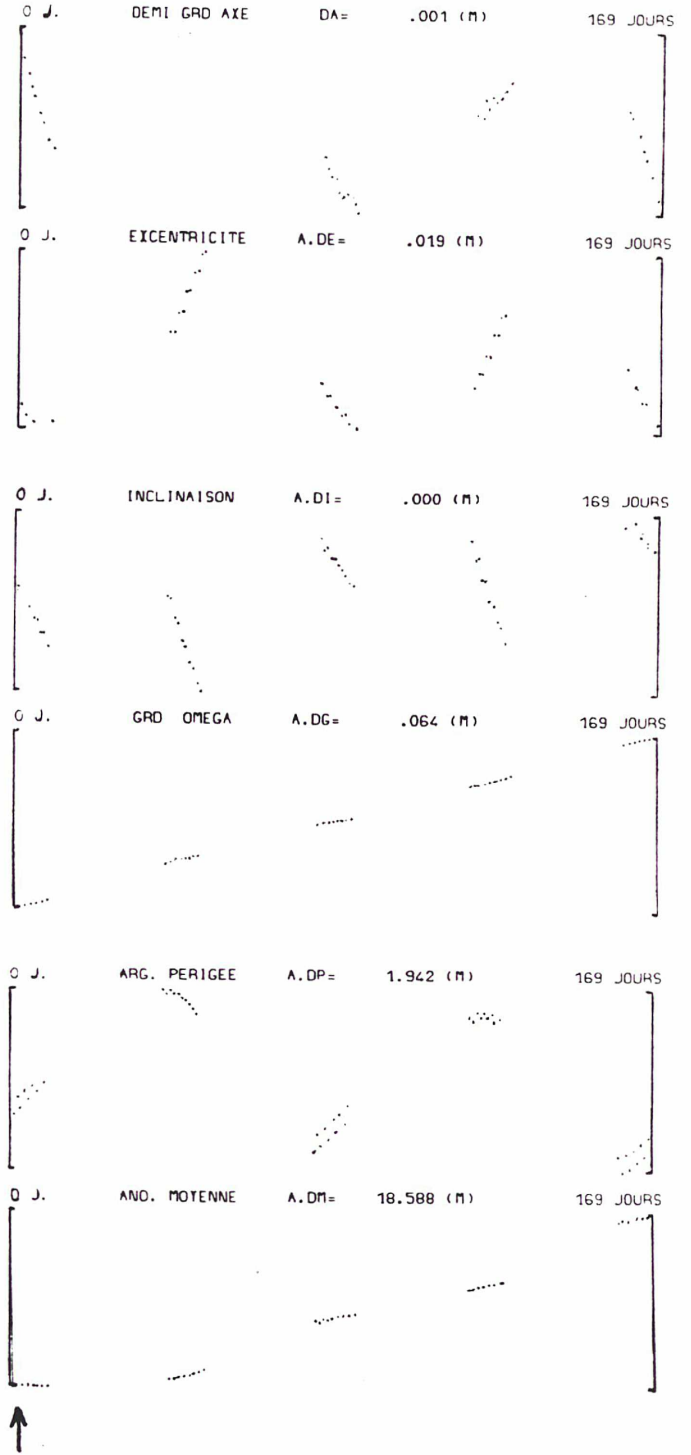
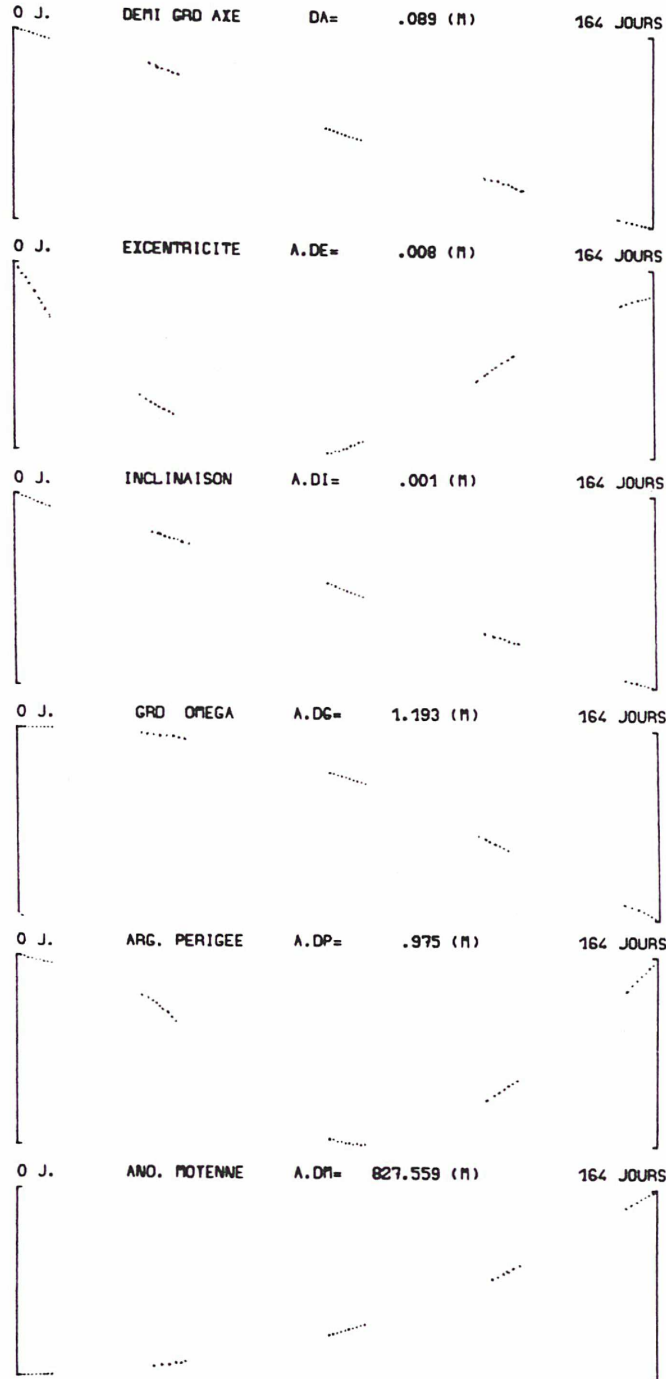
Les résultats de la figure 43 sont encourageants. Ils indiquent d'une part (gauche), les effets du frottement sur une orbite assez élevée (8280 kilomètres) et donc la sensibilité du filtre à les détecter sur trois arcs d'orbite, et d'autre part (droite), les résidus entre la méthode de centrage (décrite ci-dessus) en présence de freinage atmosphérique et du coefficient J_2 , et les "pseudo-observations" simulées.

En ce qui concerne la pression de radiation solaire directe, le principe est le même, puisqu'il faut obtenir aussi, pendant l'intégration des paramètres moyens, des éléments osculateurs pour calculer avec précision les sorties et entrées du satellite dans l'ombre de la Terre. Cependant, et compte tenu du fait que la force dérive d'un potentiel, nous pouvons calculer les quadratures sur un pas d'intégration, à l'aide des équations de Lagrange, et en prenant soin de ne pas compter les effets pendant les différents passages à l'ombre. Ceci n'est toutefois pas encore programmé dans le logiciel LAGRAN3 (intégration numérique des équations centrées).

Variations séculaires dues au freinage atmosphérique :

Filtrage : 5 x (AMC : J₂ + Frein.)

Filtrage : 5 x (AMC : J₂)



Différence des long. périodes
(J₂ + Freinage) :
intég. numériq. ($\phi' * (J_2 + \text{Frein.})$)
(+ term. analy. sur e)

Filtrage : 5 x (AMC/14/sec.)

Fig. 43 - Sat. 8280 km , 0.011 , 50 deg.

CONCLUSION

Depuis le lancement des premiers satellites artificiels, l'intégration numérique des équations différentielles régissant leur mouvement de révolution est venue très vite compenser le manque de précision des différentes théories analytiques, compte tenu de la complexité croissante des second membres à intégrer. Si plusieurs algorithmes numériques peuvent être utilisés présentement pour calculer les paramètres instantanés de la trajectoire, tous n'ont pas le même rapport exactitude sur rapidité d'exécution, ou bien la même capacité à résoudre un système différentiel donné dépendant d'un petit paramètre. Par contre, toutes ces méthodes de résolution numérique d'équations différentielles finissent toujours par donner des solutions de plus en plus erronées, en fonction du volume de calcul effectué.

A partir de l'équation fondamentale de la dynamique, les différentes forces agissantes aux altitudes des satellites sont modélisées de façon plus ou moins complexe. Si les forces d'origine gravitationnelle s'expriment souvent avec un nombre limité de paramètres, jusqu'à un millier pour le champ de pesanteur terrestre, la modélisation des forces de surface demanderait, à niveau de précision équivalent, la prise en compte d'un nombre très élevé de coefficients, dont on ne sait toujours pas, pour le moment, quantifier la mesure avec précision.

Aussi, le calcul d'extrapolation d'orbite de satellite artificiel est-il très délicat dans la pratique. Au problème de la détermination précise des constantes d'intégration, c'est-à-dire des conditions initiales du mouvement, s'ajoute l'importante question de la prédiction des phénomènes physiques liés à la modélisation des différentes forces en présence. Si ceci ne présente pas de difficulté majeure pour restituer de façon métrique une trajectoire pour laquelle il existe des observations très récentes, il faut cependant attendre quelques semaines avant de pouvoir utiliser les nombreuses données d'environnement proche de la Terre (rotation, mouvement du pôle, ...) ce qui contribue à améliorer la précision du calcul de l'orbite au niveau décimétrique.

Grâce aux nombreuses observations centimétriques de la télémétrie laser et à l'importante couverture terrestre matérialisée par l'implantation de balises Doppler, les logiciels de restitution numérique d'orbites de satellites artificiels fonctionnent aujourd'hui au niveau décimétrique. A court terme, ils représentent le moyen le plus efficace pour déterminer à la fois des coefficients propres à la géodynamique, et les paramètres des trajectoires étudiées. A plus long terme, les calculs sont non seulement très coûteux en temps d'exécution, mais les restitutions sont de plus très perturbées par les phénomènes à courtes périodes de grande amplitude et par des problèmes

numériques. Dans tous les cas, les durées de traitement envisagées sont toujours beaucoup plus courtes que la durée de vie de la plupart des satellites artificiels, et elles ne permettent pas de donner une réponse quantitative sûre à l'évaluation de phénomènes perturbateurs très fins (avance de périégée, par exemple).

La méthode que nous avons développée aujourd'hui n'est pas récente dans son principe, mais elle se révèle d'un intérêt majeur pour l'étude des systèmes dynamiques sur de grandes périodes de temps, car elle a la capacité d'aller très vite et très loin dans le temps tout en conservant une bonne précision sur l'orbite à déterminer, ou tout du moins, une précision dont on peut connaître parfaitement la valeur en fonction du temps, comme seul l'emploi des théories analytiques le permet. Dans sa philosophie générale, cette méthode s'attache à la détermination d'un mouvement moyen précis, autour du mouvement réel instantané. Son efficacité résulte de l'utilisation conjointe des méthodes de la mécanique céleste et de méthodes numériques récentes pour une intégration rapide et la plus exacte possible du système différentiel à résoudre.

Appliquée à la géodésie spatiale, la méthode de centrage consiste à effectuer une transformation de mécanique céleste sur le système différentiel classique des équations du mouvement, pour définir un nouveau jeu de paramètres, dits éléments moyens, qui représentent l'orbite initiale centrée, c'est-à-dire, sans les courtes périodes. En utilisant l'algorithme de la transformation de Von Zeipel pour déterminer les second membres moyens, nous avons pu obtenir des développements au second, troisième et quatrième ordre, en ce qui concerne les forces gravitationnelles et les forces de surface. Cependant, le calcul des termes de couplage, d'ordre trois, entre le coefficient de la principale perturbation et les autres phénomènes, nécessiterait l'emploi de manipulateurs algébriques pour compléter les nouveaux hamiltoniens.

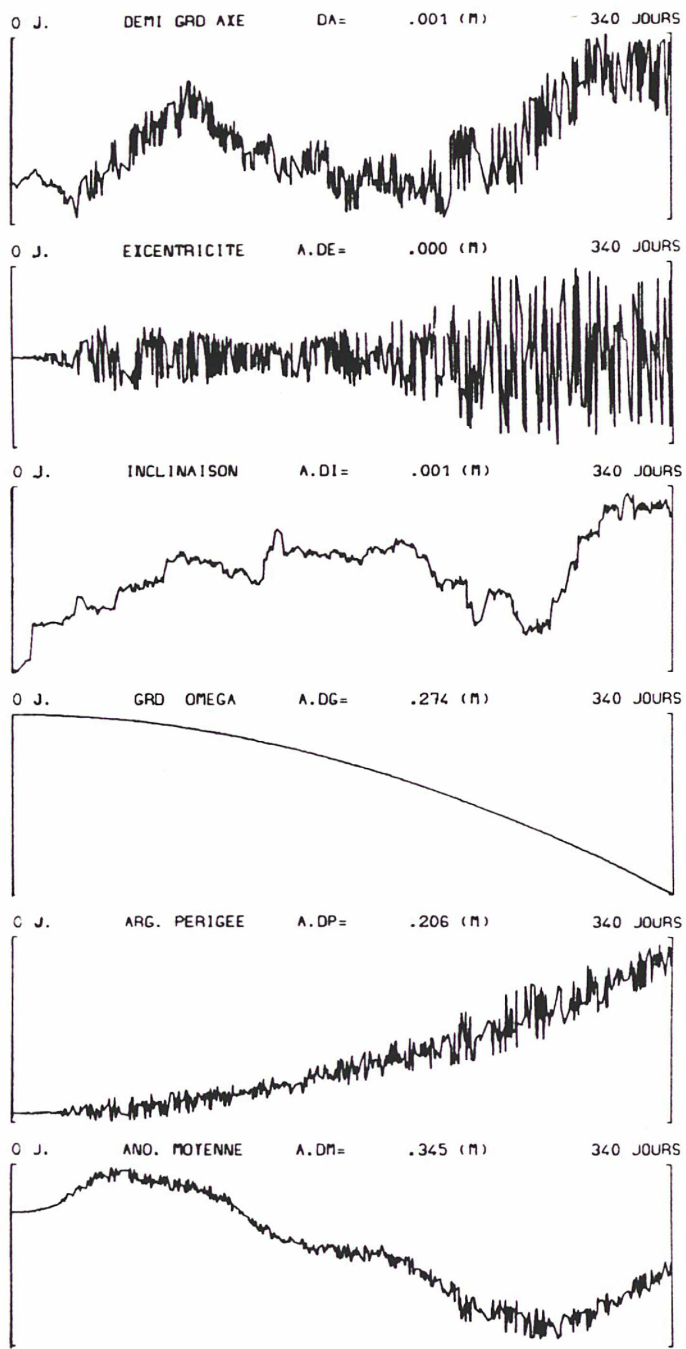
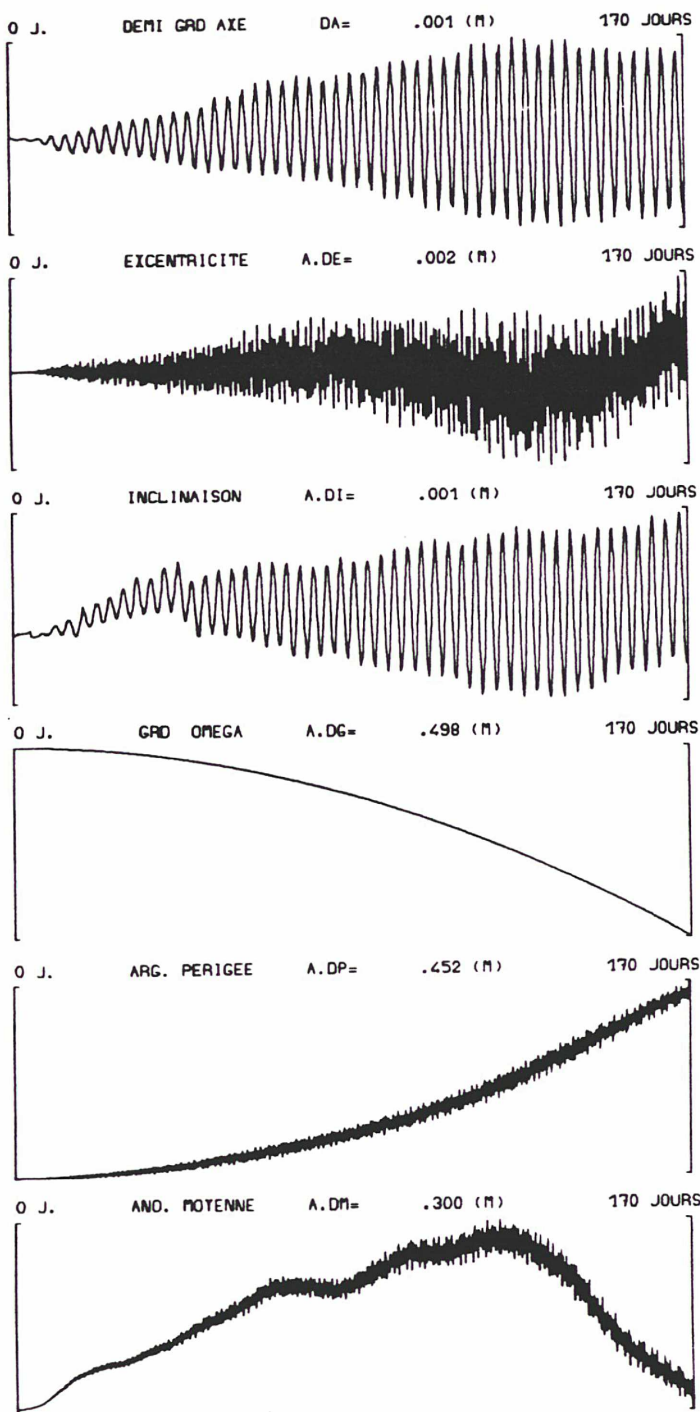
Au delà des problèmes pratiques de mise en oeuvre de la méthode en géodésie spatiale, nous voulons montrer l'extraordinaire puissance de cet intégrateur, pouvant par exemple calculer la trajectoire du satellite LAGEOS, soumis à l'aplatissement terrestre, pendant 20 ans, en 100 secondes de temps de d'exécution (CDC-990) et avec une dérive linéaire sur l'ascension droite du noeud de quelques mètres seulement.

Les possibilités d'applications de la méthode sont d'abord liées à une détermination précise des constantes géophysiques, qui sont à l'origine des perturbations à longues périodes dans le mouvement de révolution des satellites artificiels. Grâce à une restitution globale, faisant intervenir l'orbite centrée d'une part et les "pseudo-observations" d'autre part, les coefficients des harmoniques zonales du potentiel terrestre, mais aussi des termes de marées océaniques peuvent être calculés. Par ailleurs, l'ajustement d'éléments moyens initiaux peut également permettre la construction d'une trajectoire continue, de plusieurs années, à des fins de prévision ou de comparaison entre arcs longs et arcs courts,...

Ces exemples particuliers de l'utilisation rationnelle de la méthode représentent surtout une certaine approche de l'étude d'un problème dynamique à plusieurs corps sur une grande période de temps. Les logiciels classiques d'intégration des équations de la dynamique, que ce soit en restitution ou en pure extrapolation, ne sont pas sans limite. Un équilibre tend à se créer entre les observations, qui pourront sans doute passer le cap du centimètre, la modélisation propre à chaque phénomène perturbateur, et qui ne tient souvent pas compte des nombreuses variabilités temporelles possibles (exemple de prise en compte de J_2 , figure 44), et enfin les techniques numériques et informatiques, dont il faudrait déjà revoir la programmation pour augmenter la puissance du calcul et sa rapidité.

En l'absence d'une richesse infinie en moyens de calculs, la méthode de centrage peut venir compléter opportunément les études à long terme sur le comportement dynamique d'un système à plusieurs corps.

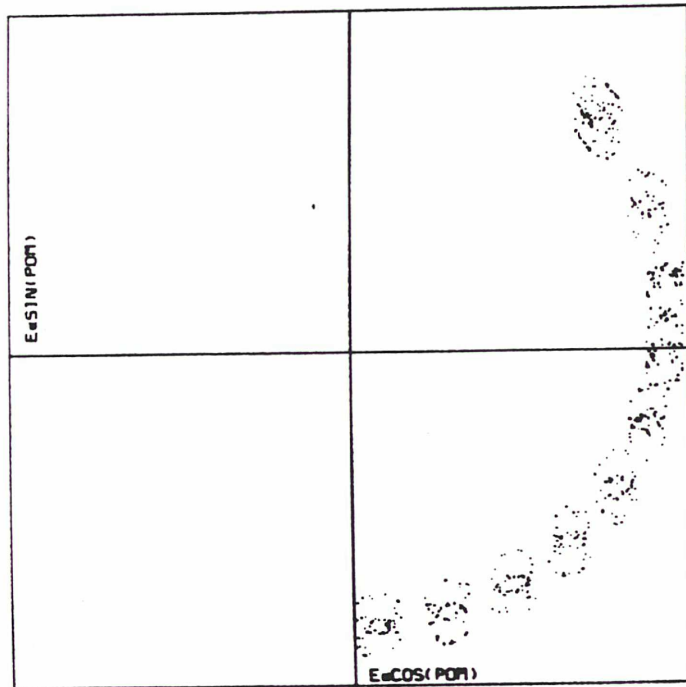
Satellite type : Starlette
7300 km, 0.011, 49 deg.



Satellite type : Lageos
12220 km, 0.004 , 110 deg.

Fig. 44 - Influence de $\dot{J}_2 = -8 \cdot 10^{-19}/s$

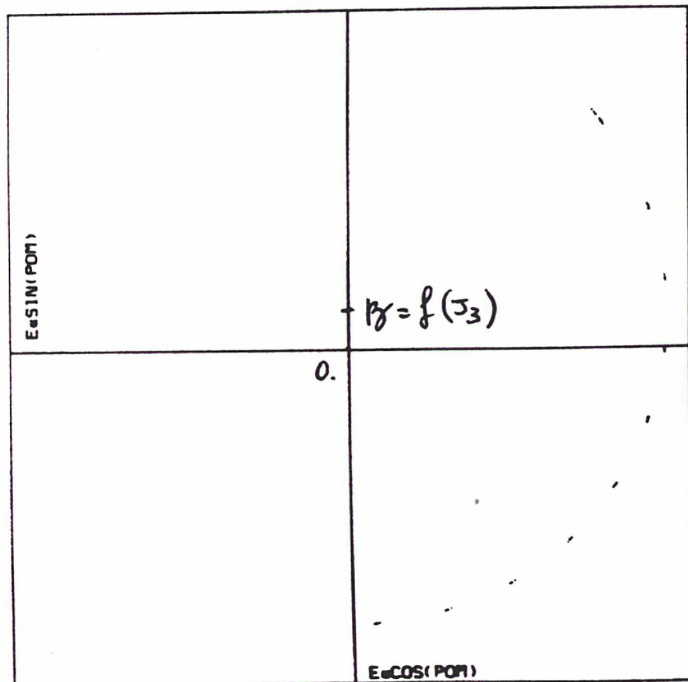
125 BIS



Éléments osculateurs : LAGEOS

11 arcs : 12.10.93 à 22.05.85

(Traitement : GIN - M^r: Y. BOUDON)



Éléments moyens correspondants
obtenus par filtrage
≡ pseudo-observations

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] - **Borderies, N.**, 1976 : Time regularization of an Adams-Moulton Cowell algorithm, *Celest. Mechan.* 16.
- [02] - **Borderies, N.**, 1976 : La méthode de centrage en géodésie spatiale, Thèse, Université P. Sabatier, Toulouse.
- [03] - **Bulirsch, R. & Stoer, J.**, 1966 : Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods, *Numer. Math.* 8, p. 1-13.
- [04] - **Balmino, G.**, 1969 : Méthode d'intégration numérique de Bulirsch et Stoer. Cas du satellite artificiel, note techn., GRGS.
- [05] - **Kovalevsky, J.**, 1985 : Systèmes de référence terrestres et célestes, *Bul. Astron. de l'Observatoire Royal de Belgique*, vol. X, 2.
- [06] - **Challe, A.**, et **Laclaverie, J.J.**, 1969 : Fonction perturbatrice et représentation analytique du mouvement d'un satellite, *Astron. and Astrophys.* 3, p. 15-28.
- [07] - **Kaula, W.M.**, 1966 : *Theorie of satellite geodesy*, Blaisdell publ. Co., Waltham, Mass.
- [08] - **Exertier, P.**, 1987 : Intégration analytique des équations différentielles du mouvement d'un satellite artificiel et calculs d'éléments orbitaux moyens, note techn., GRGS.
- [09] - **Exertier, P.**, 1986 : LAGRAN2, logiciel d'intégration numérique du mouvement d'un satellite artificiel, note techn. 8, GRGS.
- [10] - **Exertier, P.**, 1986 : POINO, logiciel de réduction des mesures de télémétrie laser sur satellites artificiels, calcul de points normaux, note techn. 7, GRGS.
- [11] - **Barlier, F.**, **Berger, C.**, **Falin, J.L.**, **Kockarts, G.**, **Thuillier, G.**, 1977 : A thermospheric model based on satellite drag data, *Aeronomica Acta* 185.
- [12] - **Jacchia, L.G.**, 1964 : Static diffusion models of the upper atmosphere with empirical temperature profiles, *SAO spec. rep.* 170.
- [13] - **Berger-Jaeck, C.**, 1976 : Analyse et modélisation statistique de différents paramètres de l'atmosphère neutre, asymétries hémisphériques, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie.
- [14] - **Brouwer, D.**, 1959 : Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, *Astron. J.* 64, p. 378-397.

- [15] - **Berger, X.**, 1975 : Théorie analytique programmée du mouvement des satellites artificiels sous l'action gravitationnelle de la Terre, *Celest. Mechan.* 11, p. 281-300.
- [16] - **Cayley, A.**, 1859 : Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion, *Memoirs of the Royal Astron. Soc.* 29, p. 191-306.
- [17] - **Kovalevsky, J.**, 1963 : Introduction à la mécanique céleste, Armand Colin.
- [18] - **Kozai, Y.**, 1962 : Second-order solution of artificial satellite theory without air drag, *Astron. J.* 67, p. 446-461.
- [19] - **Deprit, A.**, et **Rom, A.**, 1970 : The main problem of artificial satellite theorie for small and moderate eccentricities, *Celest. Mechan.* 2, p.166-206.
- [20] - **Kaula, W.M.**, 1962 : Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite, *Astron. J.* 67, p. 300-303.
- [21] - **Kinoshita, H.**, 1977 : Third-order solution of an artificial satellite theory, SAO special report 379.
- [22] - **Morrison, J.A.**, 1966 : Generalized method of averaging and the Von Zeipel method, *Methods in Astrodynamics ad Celestial Mechanics, Progress in Astronautics and Aeronautics* 17, p. 117-138.
- [23] - **Uphoff, C.**, 1973 : Numerical averaging in orbit prediction, *AIAA Journal* 11.
- [24] - **Grimard, M.**, 1985 : Long term prediction of satellite motion using vectorial orbital elements, *AAS/AIAA Astrodyn. Confer.*, Colorado.
- [25] - **Goad, C.C.**, 1977 : Application of digital filtering to satellite geodesy, techn. rep. NOS71 - NGS6, NOAA.
- [26] - **Tisserand F.**, 1890 : *Traité de mécanique céleste*, Gauthier Villards, tome I, rééd. 1960-1962.
- [27] - **de Lafontaine, J.**, 1985 : A semi-analytical satellite theory for orbital decay prediction, *AAS/AIAA Astrodyn. Confer.*, Colorado.
- [28] - **Salama, A.H.**, **Tapley, B.D.**, 1985 : A semi-analytical theory for satellite orbit prediction, *AAS/AIAA Astrodyn. Confer.*, Colorado.
- [29] - **Carpino M.**, **Milani, A.**, **Nobili, A.M.**, 1987 : Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer Planet, *Astron. Astroph.* 181, p. 182-194.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

A. INTEGRATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL :

A.I. METHODES NUMERIQUES :	15
A.I.1. Type Adams (par interpolation)	18
A.I.2. Type Bulirsch et Stoer (par extrapolation)	18
A.II. METHODES ANALYTIQUES :	27
A.II.1. Type Kaula, Berger (par itérations)	28
A.II.2. Type Von Zeipel (par transformations)	29
A.III. MODELE PHYSIQUE :	37
A.III.1. Systèmes de référence	37
A.III.2. Forces gravitationnelles	40
A.III.3. Forces de surface	66
A.IV. CONCLUSION	77

B. LA METHODE DE CENTRAGE :

B.I. ALGORITHME DE CENTRAGE :	84
B.I.1. Moyenne du second membre du système initial	84
B.I.2. Transformation de Von Zeipel de l'hamiltonien initial	89
B.II. FILTRAGE	93
B.III. MISE EN OEUVRE DE LA METHODE :	99
B.III.1. Forces gravitationnelles	101
B.III.2. Forces de surface	119

CONCLUSION