



HAL
open science

Définition d'un nouveau référentiel céleste

Jean Souchay

► **To cite this version:**

Jean Souchay. Définition d'un nouveau référentiel céleste. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1988. Français. NNT: . tel-02095277

HAL Id: tel-02095277

<https://hal.science/tel-02095277>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

88 OBSP0001

(NOUVEAU RÉGIME)

EN
ASTRONOMIE STATISTIQUE ET DYNAMIQUE

présentée par

Jean SOUCHAY

Sujet de la thèse :

DEFINITION D'UN NOUVEAU REFERENTIEL CELESTE
APPLICATION A LA ROTATION DE LA TERRE

Soutenue à l'Observatoire de Paris

le 14 janvier 1988 devant le jury composé de :

Monsieur F.NAHON	président
Madame N.CAPITAINE	directrice de thèse
Monsieur J.DELHAYE	rapporteur
Monsieur B.GUINOT	rapporteur
X Monsieur B.MORANDO	rapporteur

THESE DE DOCTORAT
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

(NOUVEAU RÉGIME)

EN
ASTRONOMIE STATISTIQUE ET DYNAMIQUE

présentée par

Jean SOUCHAY



Sujet de la thèse :

DEFINITION D'UN NOUVEAU REFERENTIEL CELESTE
APPLICATION A LA ROTATION DE LA TERRE

Soutenue à l'Observatoire de Paris.

le 14 janvier 1988 devant le jury composé de:

Monsieur F.NAHON	président
Madame N.CAPITAINE	directrice de thèse
Monsieur J.DELHAYE	rapporteur
Monsieur B.GUINOT	rapporteur
Monsieur B.MORANDO	rapporteur

R E M E R C I E M E N T S

Je remercie vivement Madame N.Capitaine, grâce à qui j'ai pu mener ce travail à bien. Son aide constante et précieuse sur le plan scientifique, ainsi que sa compréhension et son dévouement sur le plan humain m'ont permis de garder une confiance permanente.

Je suis très reconnaissant à Monsieur B.Guinot d'avoir contribué notablement, par son savoir et la justesse de ses critiques, à l'élaboration de mon travail.

J'ai apprécié la contribution spontanée de J.Laskar et de B.Morando dans certains secteurs spécifiques de mon travail; leur compétence m'a été d'un grand secours.

Je remercie Messieurs J.Delhaye, B.Guinot, B.Morando et F.Nahon d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie enfin toute l'équipe avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant plus de trois ans, cette équipe ayant contribué à créer une ambiance sympathique indispensable pour un travail efficace.

En particulier, j'insisterai sur l'aide inestimable que m'a apportée F.Medina pour ses compétences en traitement de texte.

J'associe à tous ces remerciements les nombreuses personnes appartenant ou non à la communauté astronomique (l'Observatoire est une grande famille!) qui, de près ou de loin, ont su m'encourager et me conseiller.

I N T R O D U C T I O N

Le Temps Universel, communément appelé UT1, est censé caractériser une échelle de temps la plus représentative possible de la rotation de la Terre. Pendant très longtemps (jusqu'au milieu de ce siècle) on ne disposait pas d'horloges terrestres suffisamment exactes et suffisamment précises pour pouvoir évaluer les écarts d'uniformité auxquels cette échelle de Temps légale et unitaire basée sur la rotation de la Terre, était sujette. Ce n'est que depuis l'avènement d'une instrumentation très précise (horloges à quartz, étalons de fréquence à césium, etc...) supplantant avantageusement les anciennes horloges à balancier, qu'a été permise une surveillance précise et systématique des variations de rotation de notre planète.

En dépit de cette rapide et impressionnante évolution dans les méthodes de mesure du Temps, la manière dont UT1 est définie n'a pas été modifiée, tout du moins dans son fondement, et cela depuis près d'un siècle (la nouvelle définition adoptée par l'UAI en 1984, ne fait que réactualiser l'ancienne par l'adoption de nouvelles constantes, sans y apporter de changement significatif dans le fond).

Ceci serait sans importance si le-dit fondement était d'origine purement conceptuel : en effet, s'il y avait correspondance directe entre UT1 et l'entité qu'il est censé matérialiser, à savoir la rotation de la Terre, il serait nul besoin d'en modifier le concept. Malheureusement, la définition actuelle d'UT1 fait appel à des intermédiaires qui ne font que compliquer son interprétation et rendre moins exacte sa définition par rapport à l'objectif qu'il est censé incarner. Parmi ces intermédiaires, on citera en guise d'exemple l'adoption de plans moyens, le choix de

l'équinoxe comme point de référence, l'introduction de la notion de "Soleil Moyen Fictif" qui a vu le jour à la fin du siècle dernier (Newcomb, 1895), et qui ne constitue en fait qu'un artifice supplémentaire dont il est possible de se priver.

Au vu de la précision actuelle des techniques d'observation (VLBI, tirs laser sur la Lune et sur satellites) pouvant atteindre quelques fractions de millième de seconde d'arc de résolution, il semble nécessaire d'élaborer une autre définition du Temps Universel qui réponde naturellement à deux exigences: l'une sera de s'interpréter le plus clairement et le plus simplement possible, tout en respectant scrupuleusement le suivi rigoureux des variations de la rotation terrestre. L'autre consistera à servir à l'élaboration du Temps légal, ce qui pose comme exigence un calage sur la succession des jours et des nuits, de telle sorte que 24 h. de Temps Universel ne s'écartent jamais sensiblement en moyenne de 24 h. de Temps Solaire vrai, ce qui est le cas actuellement.

C'est dans cette perspective que B.Guinot (1979) propose de définir le Temps Universel à partir d'un concept clair, celui de l'"Origine Non-Tournante". Cette origine se substituerait avantageusement à l'équinoxe par la condition même de non-rotation qui accompagne son appellation. Elle répond à l'idée simple en vertu de laquelle il faut, afin de connaître la rotation d'un corps autour d'un axe, avoir au préalable matérialisé ce que serait fictivement sa non-rotation autour de ce même axe.

Notons à cet égard que certains auteurs ont, par le passé,

utilisé l'Origine Non Tournante, sous une autre terminologie, dans le cadre de travaux relatifs à la Dynamique. Ainsi, la transformation de Hansen pour les équations différentielles des mouvements des planètes (Tisserand, 1889) introduit un paramètre σ permettant de localiser un point sur l'équateur instantané, qui n'est rien d'autre qu'une "Origine Non-Tournante". Par la suite, certains auteurs, comme Andoyer (1923), Brown & Shook (1933) ont fait référence à cette dernière, la dénommant autrement (on lui trouve souvent l'appellation de "departing point" autrement dit de "point de départ"). De même, dans son étude sur les systèmes de référence appropriés à l'étude du mouvement képlérien perturbé, André Deprit (1975) fait directement intervenir une condition de non-rotation d'un référentiel, qui n'est rien d'autre que celle invoquée plus haut. Enfin, Aoki & Kinoshita (1982), lors d'une analyse critique de l'Origine Non-Tournante, utilisent la terminologie de "Departure Point".

Ainsi donc, si l'"Origine Non-Tournante" n'est pas une entité nouvelle, c'est son utilisation à des fins cinématiques et non pas dynamiques qui semble constituer une application sans précédent: de par son rôle tout désigné de point de référence à l'étude de la rotation d'un solide, elle aurait dû apparaître de manière explicite dès lors que l'on s'est penché sur l'élaboration du Temps Universel. Certes, Newcomb (1895) y fait implicitement allusion lorsqu'il définit l'ascension droite du Soleil Moyen Fictif, base de la définition actuelle de UT1. Mais son effacement, alors qu'elle devrait naturellement être mise en évidence, apparaît regrettable. La nouvelle définition de UT1 proposée par B.Guinot (1979), pallie à cet inconvénient, de manière d'autant plus heureuse qu'il la rend aisément compréhensible par l'utilisateur courant.

Dans une première partie, on rappellera les principaux résultats relatifs à l'Origine Non-Tournante présentés récemment dans un article (Capitaine, Guinot, Souchay, 1986), résultats concernant aussi bien les moyens de la définir que diverses propriétés qui en découlent.

Il s'avère d'ailleurs que le concept en question ne s'adapte pas spécifiquement au cas de la Terre et est exploitable quel que soit le corps en rotation auquel on s'intéresse. Une partie du présent travail sera donc consacrée à la définition et aux implications de l'"Origine Non-Tournante" dans un cas tout à fait général. Il ne sera ainsi aucunement question dans cette seconde partie de la Terre, mais d'un corps quelconque en rotation, dont on s'attachera à vouloir établir un lien entre la norme de son vecteur rotation et un angle défini justement à partir de l'Origine Non-Tournante.

Adopter une nouvelle formulation de UT1 et en montrer l'intérêt n'a de sens que si on a préalablement effectué une étude suffisamment approfondie de la définition conventionnelle actuelle. C'est ce qui fera l'objet d'une troisième partie, qui traitera en outre des inconvénients que cette définition fait naître, par le choix des paramètres qui lui sont associés.

Enfin, une quatrième partie sera consacrée à un développement de certains calculs déjà évoqués dans la première partie, ainsi qu'à quelques compléments de celle-ci. En particulier, on abordera des propriétés relatives au positionnement de l'Origine Non-Tournante, à la

trajectoire qu'elle décrit, ainsi qu'au nouveau système de référence qu'elle implique.

P R E M I E R E P A R T I E :

D E F I N I T I O N D ' U N E O R I G I N E N O N - T O U R N A N T E
S U R L ' E Q U A T E U R D E R O T A T I O N I N S T A N T A N E E
P R O P R I E T E S . U T I L I S A T I O N S

I.1) Généralités

La présente partie a pour objectif de rappeler les principales définitions associées à l' "Origine Non-Tournante" (Guinot,1979), ainsi que les propriétés simples de cette origine. Ces résultats ont fait l'objet d'un article (Capitaine, Guinot, Souchay,1986) ; ils permettent de mettre en application l'Origine Non-Tournante dans la représentation de la rotation de la Terre (autrement dit le Temps Universel).

Les définitions associées à l' Origine Non-Tournante exigent que l'on dispose d'une réalisation parfaite du système de référence terrestre conventionnel , noté TRS, et du système de référence céleste conventionnel, noté CRS. On supposera dans ce chapitre que l'on dispose de ces réalisations parfaites; on décrira ultérieurement (cf. III.1,III.2) les matérialisations de ces systèmes de référence existant actuellement en indiquant leurs qualités.

I.2) Le référentiel céleste

Un système de référence céleste, encore appelé CRS (en anglais "Celestial Reference System"), ou système de référence "non-tournant" (Guinot 1979), est défini comme ayant des axes de référence fixes par rapport aux directions des objets les plus reculés de l'Univers, tels qu'ils sont vus depuis le barycentre du système solaire.

On peut se représenter le CRS par une sphère céleste de centre O avec un grand cercle fondamental de pôle \mathcal{P}_0 et une origine Σ_0 sur ce cercle (Figure 1). Un point P pourra alors être localisé par rapport au C R S par ses coordonnées polaires:

$$d = \mathcal{P}_0 P \quad ; \quad E = \widehat{\Sigma_0 \mathcal{P}_0 P}$$

ou bien par ses coordonnées rectangulaires X_0, Y_0, Z_0 , l'axe (OX_0) étant porté par Σ_0 , l'axe (OZ_0) par \mathcal{P}_0 , et (OY_0) complétant le système direct. Le pôle origine \mathcal{P}_0 et le point origine Σ_0 peuvent a priori être choisis de manière arbitraire.

On notera : $R_0 = (0, X_0, Y_0, Z_0)$ le référentiel représentant le CRS.

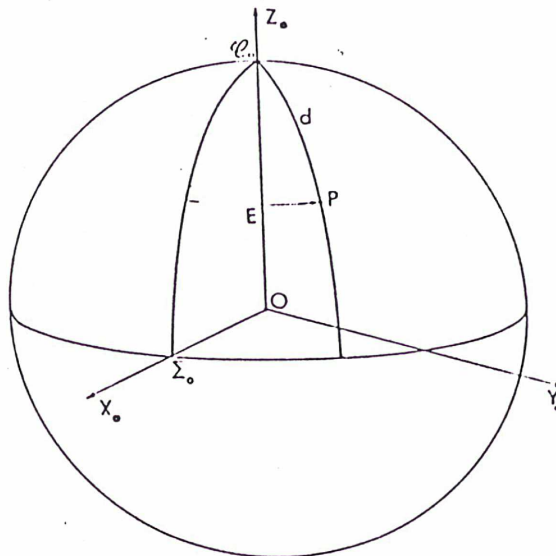


Figure 1

I.3) Le référentiel terrestre

Un référentiel terrestre conventionnel, encore appelé TRS (en anglais: Terrestrial Reference System) est défini par la condition qu'il n'existe pas de rotation ou de translation entre la surface de la Terre dans son ensemble et ce système de référence. Cette définition, bien que loin d'être satisfaisante, est suffisante dans le cadre de l'étude présente.

Les directions terrestres pourront être représentées (Figure 2) sur une sphère céleste de centre O par l'intermédiaire d'un grand cercle fondamental de pôle T et d'origine sur ce grand cercle (définissant l'origine des longitudes). On utilisera les coordonnées polaires d'un point P, à savoir:

$$g = T_0 P \quad ; \quad F = \widehat{\Pi_0 T P}$$

On pourra définir par ailleurs le système de coordonnées rectangulaires (O,x,y,z) tel que (Ox) soit porté par Π_0 , (Oz) soit porté par T, (Oy) complétant ce système direct.

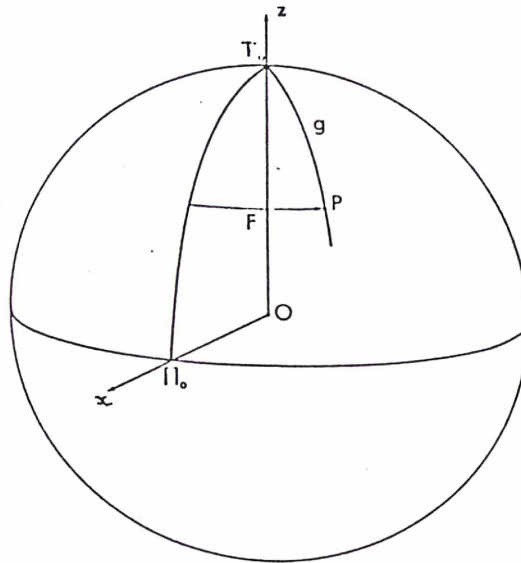


Figure 2

I.4) Précisions de langage relatives à la notion de "Rotation de la Terre"

Ce qu'on appellera la rotation de la Terre sera la rotation, au sens cinématique du mot, du référentiel R par rapport au référentiel R_0 . Définir quelle est la rotation de la Terre à proprement parler revient à définir:

- (1) L'orientation du vecteur de rotation instantanée de la Terre.
- (2) Son amplitude.

Si on appelle P le pôle de rotation instantanée de la Terre, ce pôle sera l'intersection du vecteur rotation instantanée de la terre avec la sphère céleste. La rotation de la Terre pourra alors être décrite par les mouvements de P dans le CRS et dans le CTS, ainsi que par la vitesse de rotation angulaire du CTS par rapport au CRS.

I.5) Le concept d' "Origine Non-Tournante"

I.5.1) L'origine non-tournante dans le C R S (Figure 3)

On considèrera un système de coordonnées trirectangles $R' = (0, x', y', z')$ ayant son axe $(0, z')$ le long de OP, et son axe $(0, x')$ le long d'un point σ , point origine sur l'équateur de rotation instantanée. σ est défini par une propriété caractéristique, de telle manière que:

Lorsque P se déplace dans le CRS, le référentiel $(0, x', y', z')$ ne possède pas de composante de rotation instantanée autour de l'axe de rotation $(0, z')$ par rapport au CRS (Guinot, 1979, 1981).

I.5.2) L'origine non-tournante dans le TRS (Figure 4)

De la même manière qu'a été définie une Origine Non-Tournante dans le CRS, il est possible de définir une origine non-tournante \bar{w} dans le TRS. On élabore ainsi un référentiel $R'' = (0, x'', y'', z'')$ tel que $(0z'')$ coïncide avec OP axe de rotation instantanée de la Terre, et tel que :

Lorsque P se déplace dans le TRS, $(0, x'', y'', z'')$ ne possède pas de composante de rotation instantanée autour de $(0, z'')$ par rapport au TRS.

L'origine non tournante sur la Terre $\bar{\omega}$ est alors l'intersection de $(0, x'')$ avec la sphère céleste.

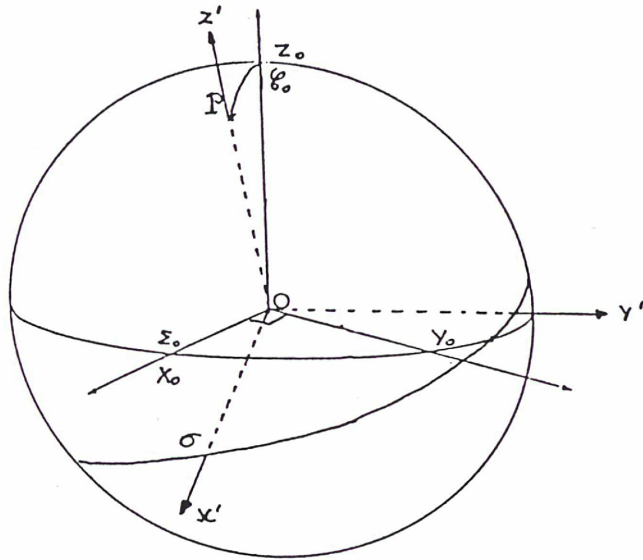


Figure 3

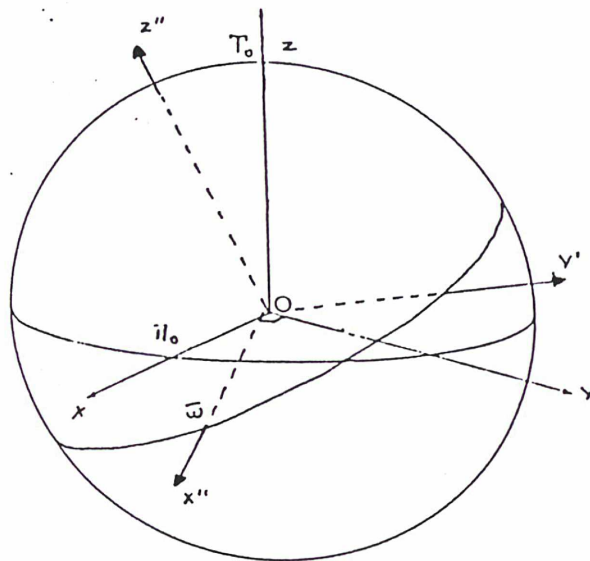


Figure 4

I.6) La notion d' "Angle stellaire"

Considérons l'angle $\widehat{\omega O \sigma}$ entre l' Origine non tournante σ et le méridien origine $P \omega$. Cet angle, positif vers l'Ouest sera appelé "angle stellaire" (Guinot, 1979) et noté θ .

L'angle stellaire exprime directement la rotation sidérale de la Terre, et sa dérivée par rapport au temps donne directement la vitesse de rotation angulaire de la Terre.

On peut alors concevoir un système de coordonnées défini à partir du point σ , que l'on appellera "coordonnées instantanées", de telle sorte que l'une d'entre elles serait la déclinaison vraie habituelle δ , l'autre étant l'équivalent de l'ascension droite α , établie non pas à partir de l'équinoxe vrai, mais à partir de l'origine non-tournante σ . On appellera "A" cette dernière.

I.7) Proposition d'une nouvelle définition de UT1 à partir de l'angle stellaire

La définition actuelle de UT1, telle qu'elle a été adoptée par l'UAI (Aoki & al., 1982) n'est pas une définition conceptuelle, mais une définition conventionnelle (Xu & al., 1986). Elle consiste à établir une relation, sous forme polynômiale, entre le Temps Sidéral Moyen et UT1, ceci en utilisant le système de référence base du F.K.5. Cette relation ne permet pas de définir clairement l'angle de rotation de la Terre, car elle fait intervenir l'équinoxe, qui ne joue en soi aucun rôle particulier dans la rotation de la Terre.

UT1 pourrait être défini comme un angle directement proportionnel à θ qui, comme on l'a vu plus haut, exprime rigoureusement la rotation sidérale de la Terre.

Une définition conceptuelle de UT1 serait (Guinot, 1979)

$$UT1 = K (\theta - \theta_0) \quad (1)$$

les constantes K et θ_0 étant choisies de telle manière que 12h de UT1 coïncident approximativement, à la date initiale t_0 , avec midi de Temps Solaire Moyen de Greenwich, et qu'un jour de UT1 reste à long terme voisin de la moyenne du jour solaire vrai.

On remarquera que par le biais d'une telle définition, UT1 augmenterait linéairement avec le temps dans le cas où la rotation de la Terre serait uniforme.

I.8) Définition d'une quantité "s"

La position du point σ à la date t dépend, par définition, du mouvement de P dans le CRS : considérons les positions P_0 et P du pôle, et celles σ_0 et σ de l'origine non-tournante, aux dates respectives t_0 et t . N_0 et N sont les noeuds à ces mêmes dates des équateurs de P_0 et de P , dans le plan inertiel fondamental (O, X_0, Y_0) . Si \vec{n} , \vec{n}_0 et \vec{l} désignent respectivement les vecteurs unitaires le long de OP , de $O\sigma_0$ et de ON (Figure 5), le vecteur de rotation instantanée du référentiel (O, x', y', z') lié à l'origine non-tournante, par rapport au CRS, est :

$$\vec{\omega}' = \dot{E} \vec{n}_0 - (\dot{E} + \dot{s}) \vec{n} + \dot{d} \vec{l}$$

en appelant s la quantité: $s = (\widehat{\sigma N} - \widehat{\sigma_0 N}) - (\widehat{\sigma_0 N_0} - \widehat{\sigma N_0})$ (2)

Aussi, la condition de non-rotation du référentiel (O, x', y', z') autour de l'axe (O, z') s'exprime par :

$$\vec{\omega}' \cdot \vec{n} = 0$$

Soit:
$$\begin{aligned} \vec{\omega}' \cdot \vec{n} &= (\dot{E} \vec{n}_0 - (\dot{E} + \dot{s}) \vec{n} + \dot{d} \vec{l}) \cdot \vec{n} \\ &= \dot{E} (\vec{n}_0 \cdot \vec{n}) - (\dot{E} + \dot{s}) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui revient à : $\dot{s} = \dot{E} (\cos d - 1)$

s étant nulle à la date t_0 , s aura pour expression :

$$s = \int_{t_0}^t \dot{E} (\cos d - 1) dt \quad (3)$$

Traduction vectorielle et analytique

Vectoriellement, s s'exprime sous la forme:

$$s = - \int_{t_0}^t \frac{(\vec{n} \wedge \dot{\vec{n}}) \cdot \vec{n}_0}{(1 + \vec{n}_0 \cdot \vec{n})} dt \quad (4)$$

Et, en utilisant les coordonnées X_0, Y_0, Z_0 du pôle de rotation P :

$$s = - \int_{t_0}^t \frac{X_0 Y_0 - Y_0 X_0}{(1 + Z_0)} dt \quad (5)$$

Remarque

Si on choisit conventionnellement σ_0 sur l'équateur de t_0 telle que:

simplifiée: $\widehat{\sigma_0 N} = \widehat{\Sigma_0 N}$, on obtient alors la formulation

$$s = \widehat{\sigma N} - \widehat{\sigma_0 N}$$

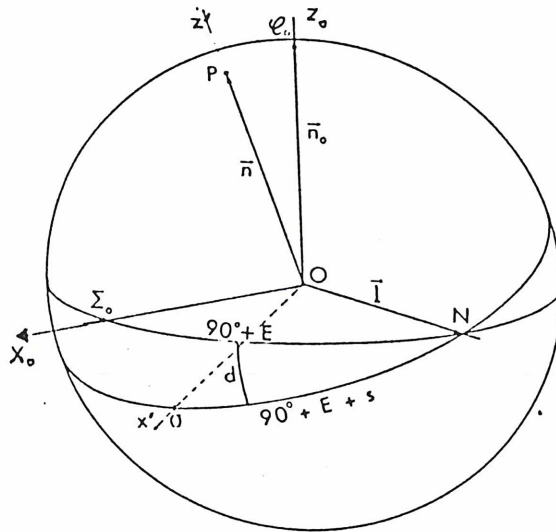


Figure 5

I.9) Définition d'une quantité "s"

Considérant le mouvement du pôle de rotation P sur la Terre, on peut, de même que précédemment, définir une quantité "s" (Figure 6) permettant de positionner l'origine non-tournante $\bar{\omega}$. Si M_0 et M sont les noeuds des équateurs de P_0 et de P par rapport à l'équateur de T_0 , et la position de $\bar{\omega}$ à la date t_0 , on a, avec la convention: $\bar{\omega}_0 M_0 = \bar{\pi}_0 M_0$:

$$s = \bar{\omega} M - \bar{\pi}_0 M = \int_{t_0}^t (\cos g - 1) \dot{F} dt \quad (6)$$

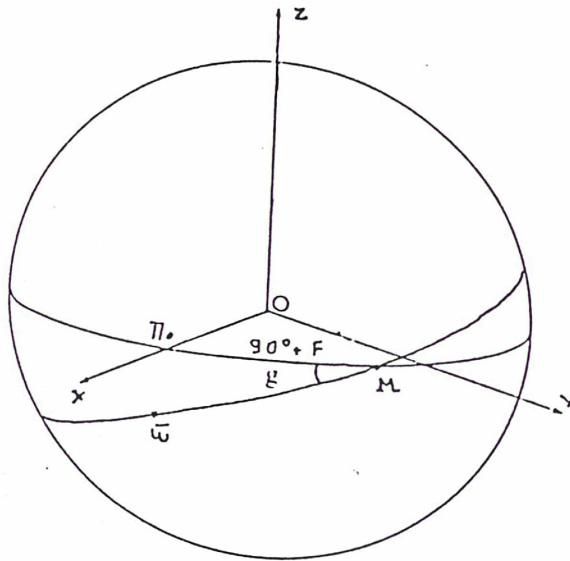


Figure 6

I.10) Propriété de la quantité s

Une propriété simple de la quantité s apparaît aisément à travers son expression vectorielle (4): dans le cas particulier où le pôle \mathcal{L}_0 est choisi proche de P_0 à la date t_0 , $P_0 P$ restant elle-même une quantité très faible, \vec{n}_0 et $\dot{\vec{n}}$ possèdent alors des orientations très voisines, et, par conséquent, à tout instant une approximation suffisante de s est donnée par:

$$s = (-1/2) \int_{t_0}^t (\vec{n} \wedge \dot{\vec{n}}) \cdot \vec{n}_0 dt$$

On considère alors le plan tangent en \mathcal{L}_0 à la sphère céleste (avec les axes $\mathcal{L}_0 \xi$ et $\mathcal{L}_0 \eta$ parallèles à OX_0 et OY_0).

Puis on appellera \vec{IP} la quantité : $IP = \vec{\xi} P$; $\dot{IP} = \dot{\vec{\xi}} P$ (Figure 7).

$$\text{Alors: } (\vec{n} \wedge \dot{\vec{n}}) \cdot \vec{n}_0 = (\vec{IP} \wedge \dot{\vec{IP}}) \cdot \vec{n}_0 \quad (7)$$

Et s peut désormais s'écrire sous la forme suivante:

$$s = -(1/2) \int_{t_0}^t (\vec{IP} \wedge \dot{\vec{IP}}) \cdot dt \quad (8)$$

On peut appliquer cette expression au cas réel en décomposant le mouvement de \vec{P} dans l'espace sous la forme de (n+1) composantes \vec{IP}_i , la première, \vec{IP}_0 , étant celle de la précession, et les autres caractérisant les n termes de la nutation généralement retenus dans le développement conventionnel.

$$\text{Ainsi: } \vec{IP} = \sum_{i=0}^n \vec{IP}_i$$

On obtient alors, en substituant ce développement de \vec{IP} dans (8):

$$s = -(1/2) \int_{t_0}^t \sum_{i=0}^n (\vec{IP}_i \wedge \dot{\vec{IP}}_i) \cdot \vec{n}_0 dt - (1/2) \int_{t_0}^t \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (\vec{IP}_i \wedge \dot{\vec{IP}}_j) \cdot \vec{n}_0 dt \quad (9)$$

s se décompose ainsi en deux parties. L'une est issue du terme de la précession et de chaque terme de la nutation. L'autre est constitué de n(n+1) termes croisés entre précession et nutation, et entre les différents termes de la nutation.

I.11) Le développement numérique de s en fonction du temps.

Dans le but d'évaluer l'ordre de grandeur des composantes de s , et de donner un aperçu de son évolution au cours du temps, on peut donner un développement approximé de cette quantité, en utilisant les propriétés évoquées dans le chapitre précédent. On repèrera la position du pôle P à partir du pôle moyen de la date $t_0 = 0$. Le déplacement de P le long des axes $P\xi$ (orienté vers l'équinoxe moyen γ_0) et $P\eta$ (orienté dans la direction opposée à celle du pôle de l'écliptique), est la combinaison du mouvement de précession, représenté ici avec une précision suffisante par:

$$\xi = c t \quad (c = 2004''/\text{siècle})$$

$$\eta = -e t^2 \quad (e = 22,41''/\text{siècle carré})$$

, et du mouvement de nutation, caractérisé par les n termes:

$$\xi_i = a_i \sin(\omega_i t - \psi_i)$$

$$\eta_i = b_i \cos(\omega_i t - \psi_i)$$

D'après (9), s s'écrit :

$$s = -(1/2) \int_0^t \sum_{i=0}^n (\vec{\Pi}_i \wedge \dot{\vec{\Pi}}_i) \cdot \vec{n}_0 dt - (1/2) \int_0^t \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i}^n (\vec{\Pi}_i \wedge \dot{\vec{\Pi}}_j) \cdot \vec{n}_0 dt$$

où $\vec{\Pi}_i$ a pour coordonnées: $\vec{\Pi}_i (\xi_i, \eta_i)$.

Une fois développée, la quantité s peut se scinder en composantes $s_{i,j}$ de nature différente

$$s = s_{0,0} + \sum_{i=1}^n (s_{0,i} + s_{i,0} + s_{i,i}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (s_{i,j} + s_{j,i})$$

$$\text{Avec: } s_{i,j} = -(1/2) \int_0^t (\xi_i \dot{\eta}_j - \eta_i \dot{\xi}_j) dt$$

Le terme dû spécifiquement à la précession

$$\text{Il s'écrit: } s_{0,0} = -(1/2) \int_0^t (\xi_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0) dt$$

$$\text{Avec: } \xi_0 = c t \quad \text{et: } \eta_0 = -e t^2$$

$$\text{D'où: } s_{0,0} = (1/6) e c t^3 = 0,036'' t^3$$

Les termes dûs spécifiquement à la nutation

$$\text{Ils s'écrivent: } s_{i,i} = -(1/2) \int_0^t (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) dt$$

Avec: $\xi_i = a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i)$

$\eta_i = b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$

Ce qui donne: $s_{i,i} = (1/2) \omega_i a_i b_i t$

En additionnant chaque contribution:

$$\sum_{i=1}^n s_{i,i} = (1/2) \sum_{i=1}^n (\omega_i a_i b_i) t = 0,004'' t$$

Les termes croisés précession-nutation

Chaque nutation donne lieu à un terme croisé précession-nutation, dont la formulation est:

$$s_{o,i} + s_{i,o} = b_i c \left\{ (1/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) - (t/2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right\} - a_i e \left\{ (-2/\omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) + (2t/\omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) + (t^2/2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) + ((b_i c/\omega_i) + ((2 a_i e / \omega_i^2)) \sin \varphi_i) \right\}$$

Les seuls termes à retenir, au-dessus de $5 \cdot 10^{-4}''$, sont:

Celui qui correspond à la nutation d'ordre 1:

$$s_{o,1} + s_{1,o} = -0,045'' t \cos \Omega - 0,003'' (\sin \Omega - \sin \Omega_0)$$

Celui qui correspond à la nutation d'ordre 9:

$$s_{o,9} + s_{9,o} = -0,003'' t \cos 2 \varphi$$

où Ω est la longitude tropique moyenne du noeud de la Lune, Ω_0 étant sa valeur à t_0 , et où φ est la longitude tropique moyenne du Soleil.

Les termes croisés nutation-nutation

Si on considère par exemple les deux nutations notées respectivement (ξ_i, η_i) et (ξ_j, η_j) , le terme croisé correspondant sera:

$$s_{i,j} + s_{j,i} = \frac{1}{4} (a_i b_j - a_j b_i) \frac{(\omega_i - \omega_j)}{(\omega_i + \omega_j)} \left[\sin [(\omega_i + \omega_j) t - (\varphi_i + \varphi_j)] + \sin(\varphi_i + \varphi_j) \right] + \frac{1}{4} (a_i b_j + a_j b_i) \frac{(\omega_i + \omega_j)}{(\omega_i - \omega_j)} \left[\sin [(\omega_i - \omega_j) t - (\varphi_i - \varphi_j)] + \sin(\varphi_i - \varphi_j) \right]$$

Aucun de ces termes ne dépasse la valeur de $5 \cdot 10^{-4}''$

Résultat numérique

Tenant compte des résultats précédents, le développement numérique approximatif de s , jusqu'à une précision de $5 \cdot 10^{-4}''$ par siècle, s'écrit :

$$s = 0,036'' t^3 + 0,004'' t - 0,003'' (\sin \Omega - \sin \Omega_0) - 0,045'' t \cos \Omega - 0,003'' t \cos 2\Omega$$

Le mouvement céleste diurne de P (sway) n'est ici pas pris en compte, du fait de sa contribution négligeable, à la précision recherchée.

Termes complémentaires dus au décalage entre l'origine ζ_0 et P

La quantité s a été calculée précédemment, en rapportant la position du pôle ζ_0 au pôle moyen de l'époque origine t_0 . On peut mesurer quel est l'effet sur la quantité s du décalage entre ζ_0 et le pôle moyen de rotation P_0 à la date origine. En introduisant les termes de réajustement u et v tels que :

$$\xi = u + \xi_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$\eta = v + \eta_0 + \sum_{i=1}^n \eta_i$$

, on trouve qu'il faut ajouter à s la quantité Δs telle que :

$$\Delta s = (1/2) u e t^2 + (1/2) v c t - (1/2) u \sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) + (1/2) v \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i)$$

Si on admet que les décalages u et v sont de l'ordre de grandeur de $0,01''$, alors le seul terme qui doit être pris en compte est :

$$(1/2) v c t = 5 \cdot 10^{-5}'' t$$

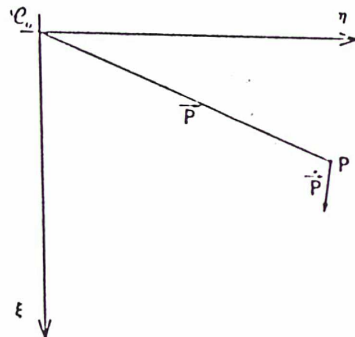


Figure 7

I.12) Le développement de la quantité s' en fonction du temps

On a vu (cf. I.3) que le couple de coordonnées (g, F) permettait de définir le "Mouvement du Pôle" qui est le mouvement du pôle de rotation de la terre P par rapport au référentiel terrestre $R=(0, x, y, z)$. Rappelons que ce mouvement peut se scinder en plusieurs composantes:

le mouvement de Chandler, de période approximative 1,2 an autour de T, et qui est la manifestation du mouvement libre d'Euler pour un modèle de Terre non rigide,

une composante annuelle, dont l'amplitude est d'un ordre de grandeur voisin de celui du mouvement chandlérien,

des nutations diurnes de faible amplitude, correspondant aux nutations célestes,

une dérive séculaire, dont l'interprétation est encore difficile à réaliser.

De la même manière que dans le cadre de l'étude du mouvement de P dans le CRS, et du fait du très faible écart qui sépare P de T_0 , on considérera le mouvement de P dans le TRS par ses différentes composantes dans le plan tangent en T à la sphère. On appellera:

\vec{p}_3 la dérive séculaire,

\vec{p}_2 le mouvement chandlérien,

\vec{p}_a la composante annuelle,

\vec{p}_i les nutations diurnes d'ordre i.

Ainsi, le mouvement de P dans le TRS sera caractérisé par le vecteur \vec{p} tel que:

$$\vec{p} = \vec{T}_0 \vec{P} = \vec{p}_3 + \vec{p}_2 + \vec{p}_a + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

\vec{n}_0 représentant le vecteur unitaire porté par OT_0 , s' aura pour expression, en se référant à l'expression de s' du I.9 et à l'expression équivalente simplifiée (8) de s :

$$(10) \quad s' = -(1/2) \int_{t_0}^t (\vec{p} \wedge \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}_0 \, dt = \overline{\omega M} - \overline{\omega_0 M}$$

(avec la convention: $\overline{\omega_0 M_0} = \overline{\Pi_0 M_0}$)

En admettant que la variation séculaire p_3 est de l'ordre de 0,3" par siècle, que le mouvement de Chandler a une amplitude de 0,5", le mouvement annuel de 0,10", les seuls termes de s' qui s'en trouvent issus, excédant 10^{-5} " par siècle, seront:

$$s_{\alpha\alpha}^{\prime} = -0,00002'' \text{ t}$$

$$0 < |s_{\alpha\alpha}^{\prime}| < 0,00032'' \text{ t}$$

Quand aux termes de s^{\prime} provenant des nutations diurnes, ils ont pour amplitude:

$$s_{\alpha_0}^{\prime} = 0,00004'' \text{ t}$$

$$s_{\beta_1 \beta_1}^{\prime} = 0,00003'' \text{ t}$$

$$s_{\beta_2}^{\prime} = 0,00001'' \text{ t} .$$

Leur contribution globale est donc : $s_{\alpha}^{\prime} = 0,00008'' \text{ t} ,$

I.13) Effet de l'erreur accompagnant la réalisation du système de référence céleste (CRS) sur la localisation de l'origine non-tournante σ et de l'erreur accompagnant la réalisation du système de référence terrestre (TRS) sur la localisation de l'origine non-tournante $\bar{\omega}$

La réalisation du système de référence idéal $(\mathcal{V}_0, \Sigma_0)$ peut avoir une rotation résiduelle Γ dans le CRS due par exemple aux erreurs sur les mouvements propres (dans le cas d'un système de référence stellaire). Dans ce cas, le système de référence instantané attaché à σ et à l'équateur de rotation instantanée possède lui-même une rotation résiduelle autour de l'axe de rotation, qui est la projection de Γ le long de cet axe. De ce point de vue, le système de référence instantané (lié à σ) ne constitue en aucun cas une amélioration par rapport au système équatorial classique (lié à l'équinoxe).

Appelons maintenant $(\mathcal{V}_0', \Sigma_0')$ et $(\mathcal{V}_0'', \Sigma_0'')$ deux réalisations du CRS et σ' et σ'' les positions correspondantes de l'origine non-tournante sur l'équateur associé à P (pôle de rotation instantanée).

De par la définition d'ordre cinématique même qui accompagne l'origine non-tournante, on peut montrer que la quantité $(\overline{\sigma' \sigma''})$ est constante, et cela quel que soit le mouvement du pôle de rotation P par rapport au CRS (cette constante sera égale à 0 dans le cas où σ' et σ'' coïncident à la date initiale t).

Il résulte de cela que la position de σ sur l'équateur de rotation instantanée est indépendante du choix du CRS, à condition que le CRS ne soit sujet à aucune rotation résiduelle.

D'une manière analogue, on démontrerait que la position du point $\bar{\omega}$ sur l'équateur de rotation instantanée ne dépend pas du choix du TRS adopté (à condition que ce TRS ne soit sujet à aucune rotation par rapport à la Terre).

I.14) Conséquences, sur le positionnement de σ , de l'erreur accompagnant la modélisation du pôle de rotation instantanée dans le CRS

On considère maintenant deux modélisations différentes du mouvement du pôle de rotation instantanée, caractérisées par les pôles de rotation associés P_a et P_b , σ_a et σ_b étant les Origines Non-Tournantes sur les équateurs respectifs (Figure 8). ν étant le noeud des deux référentiel $(0, x', y', z')$ associé à σ_a , au référentiel $(0, x', y', z')$ associé à σ_b , s'accompagne d'une rotation P , caractérisée par:

$$P = \widehat{\sigma_b \nu} - \widehat{\sigma_a \nu}$$

De par leur définition, les quantités s_a et s_b associées respectivement à σ_a et σ_b , s'expriment par:

$$s_a = \widehat{\sigma_a N_a} - \widehat{\Sigma_0 N_a}$$

$$s_b = \widehat{\sigma_b N_b} - \widehat{\Sigma_0 N_b}$$

N_a et N_b étant les noeuds des équateurs de P_a et de P_b par rapport au plan de référence $(0, X_0, Y_0)$. On a:

$$s_b - s_a = \widehat{\sigma_b N_b} - \widehat{\sigma_a N_a} - \widehat{N_a N_b}$$

Or:
$$P = \widehat{\sigma_b N_b} + \widehat{N_b \nu} - \widehat{\sigma_a N_a} - \widehat{N_a \nu}$$

D'où:
$$P = (s_b - s_a) + \widehat{N_b \nu} - \widehat{N_a \nu} + \widehat{N_a N_b}$$

L'expression (3) de la quantité s donne:

$$(s_b - s_a) = \int_{t_0}^t [\dot{E}_b (\cos d_b - 1) - \dot{E}_a (\cos d_a - 1)] dt$$

D'autre part, en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle sphérique (N_a, N_b, ν)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (N_b \nu - N_a \nu) = - \operatorname{tg} \frac{1}{2} (E_b - E_a) \frac{\cos \left[\frac{1}{2} (d_a + d_b) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2} (d_b - d_a) \right]}$$

On démontre que, si P_a et P_b sont suffisamment proches de φ_0 pour que l'on puisse négliger les termes en d^2 , on peut écrire:

$$\left(\widehat{N_a N_b} + \widehat{N_b \nu} - \widehat{N_a \nu} \right) = \frac{1}{2} d_a d_b \sin(E_b - E_a) = \frac{1}{2} (\vec{P}_a \wedge \vec{P}_b) \cdot \vec{n}_0$$

On aboutit alors à la formulation vectorielle de P suivante:

$$\begin{aligned} P &= - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left[\vec{P}_a \wedge \vec{P}_b + (\vec{P}_a + \vec{P}_b) \right] \cdot \vec{n}_0 dt \\ &= (s_b - s_a) + \frac{1}{2} (\vec{P}_a \wedge \vec{P}_b) \cdot \vec{n}_0 \end{aligned} \quad (11)$$

\vec{n}_0 étant le vecteur unité orienté vers φ_0 .

Applications

A l'aide de la formule précédente, il est possible d'évaluer l'influence de l'écart entre la position idéale P_a du pôle de rotation instantanée et sa modélisation P_b . On peut considérer que cet écart se traduit par les écarts en coordonnées correspondants:

$$\Delta \xi = u + k t + \sum_{i=1}^n \Delta a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i)$$

$$\Delta \eta = v - k' c t^2 + \sum_{i=1}^n \Delta b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

u et v caractérisent le biais initial existant entre P_a et P_b , k et k' sont des petites vitesses angulaires, caractérisant l'erreur commise sur la précession. Pour des valeurs raisonnables des quantités k et k' :

$$k < 0,1'' / \text{siècle} \qquad k' < 0,1'' / \text{siècle}$$

les termes les plus significatifs apparaissant dans ρ sont:

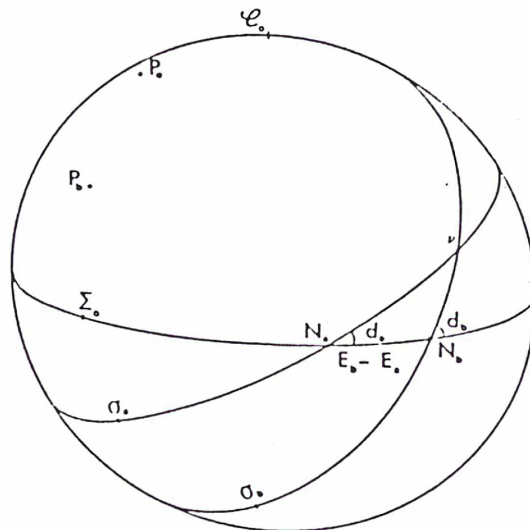
$$\rho = v c t + \sum_{i=1}^n \omega_i \int_{t_0}^t [b_i \Delta a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) + a_i \Delta b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)] dt$$

En guise d'exemple, on postulera que le décalage initial du pôle de rotation est: $u = v = 0,01''$, et que les erreurs sur les coefficients des termes les plus significatifs de la nutation ont une amplitude: $\Delta a_i = \Delta b_i = 0,01''$

Alors, sous ces différentes conditions, les seules contributions à ρ dépassant $10^{-6}''$ sont:

- l'effet du décalage initial v : $v c t = 10^{-5}'' (t - t_0)$,
- le terme 1 de la nutation: $2 \times 10^{-5}'' (t - t_0)$,
- le terme 9 de la nutation: $3 \times 10^{-5}'' (t - t_0)$,
- le terme 31 de la nutation: $8 \times 10^{-5}'' (t - t_0)$.

Figure 8



I.15) Effet de l'erreur accompagnant la modélisation de la trajectoire du pôle de rotation dans le TRS.

De la même manière qu'a été définie une rotation P due à une erreur de modélisation du pôle de rotation P dans le CRS, il est possible de définir la rotation P' due à une erreur de modélisation de P dans le TRS. La formulation de P' se déduit tout naturellement de celle de P (relation(11)):

$$P' = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \overrightarrow{P_a P_b} \wedge (\dot{\overrightarrow{P_a}} + \dot{\overrightarrow{P_b}}) \cdot \overrightarrow{n_0'} dt \quad (12)$$

$\overrightarrow{n_0'}$ étant le vecteur unitaire porté par OT_0' .

Du fait du faible écart existant entre les directions OT_0' et OZ_0' , on pourra sans conséquence significative remplacer dans (12) $\overrightarrow{n_0'}$ par $\overrightarrow{n_0}$.

$$P' = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\overrightarrow{P_a P_b} \wedge (\dot{\overrightarrow{P_a}} + \dot{\overrightarrow{P_b}})] \cdot \overrightarrow{n_0} dt$$

$$P' = (s_1' - s_2') + \frac{1}{2} (\overrightarrow{P_a} \wedge \overrightarrow{P_b}) \cdot \overrightarrow{n_0}$$

On peut montrer que la contribution de la dérive séculaire sur P' est négligeable. La contribution du mouvement du pôle (sur la quantité s') a déjà été évoquée au chapitre I.12. Quant aux effets des termes diurnes dus à l'erreur inhérente à la modélisation du pôle P , ils seront étudiés dans le chapitre suivant.

I.16) Effet de la mauvaise modélisation de la trajectoire du pôle de rotation P sur la détermination de l'angle stellaire θ

Rappelons que θ désigne l'écart angulaire entre σ et $\bar{\omega}$ sur l'équateur de rotation mobile. Or, on sait que ces dernières sont directement positionnées par les quantités s et s' dues au mouvement de P dans le CRS et dans le TRS.

Si θ_a désigne l'angle stellaire idéal, obtenu à partir des quantités elle-mêmes idéales s_a et s'_a , l'effet sur les erreurs commises en adoptant les valeurs s_b et s'_b provenant des modélisations du pôle de rotation P dans le CRS et dans le TRS, se traduit par l'écart:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \theta_b - \theta_a \\ &= p - p' \\ &= -(1/2) \int_{t_0}^t \left[\vec{p}_a \vec{p}_b \wedge (\dot{\vec{p}}_a + \dot{\vec{p}}_b) \right] \cdot \vec{n}_0 dt \\ &\quad + (1/2) \int_{t_0}^t \left[\vec{p}_a \vec{p}_b \wedge (\dot{\vec{p}}_a + \dot{\vec{p}}_b) \right] \cdot \vec{n}_0 dt \end{aligned} \tag{13}$$

Or, l'une des propriétés fondamentales du pôle de rotation instantanée P est d'avoir une vitesse égale dans le CRS et dans le TRS. Soit:

$$\dot{\vec{p}}_a = \dot{\vec{p}}_b, \text{ et: } \dot{\vec{p}}_b = \dot{\vec{p}}_b - \vec{\omega} \wedge \vec{p}_b$$

$\vec{\omega}$ étant le vecteur rotation de la Terre

Comme, de plus: $\vec{p}_a \vec{p}_b = \vec{p}_a \vec{p}_b$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \Delta\theta &= -(1/2) \int_{t_0}^t \left[\vec{p}_a \vec{p}_b \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{p}_a \vec{p}_b) \right] \cdot \vec{n}_0 dt \\ &= -(1/2) \int_{t_0}^t \omega (\vec{p}_a \vec{p}_b)^2 dt \end{aligned} \tag{14}$$

Si on admet, en guise d'exemple, une dérive séculaire de p_b par rapport à p_a , égale à:

$$p_a p_b = 0,1'' (t - t_0)$$

on aboutit alors à une erreur correspondante sur significative, puisqu'alors:

$$\Delta\theta = -0,002'' (t - t_0)^3$$

Remarque

On admet ici que les p¹oles p_b et p_b coïncident. Or, habituellement, dans les différentes observations de la rotation de la Terre, les termes de période diurne ne sont pas observés. Le p¹ole p'_b que l'on obtiendrait en tenant compte de ces termes serait alors plus proche

de p_n que p_t et l'erreur $\Delta\theta$ s'en trouverait réduite par rapport au cas précédent.

I.17) Application du chapitre I.16: conséquences entraînées par l'adoption du CEP à la place du pôle de rotation instantanée.

La définition cinématique de l'origine non-tournante implique l'utilisation du pôle de rotation instantanée.

Or, l'utilisation du Pôle Céleste des Ephémérides, ou CEP, dans les différentes réductions d'observation nous amène à rechercher quelle peut être l'influence de son écart avec le véritable pôle de rotation instantanée. L'écart en coordonnées ξ et η correspondantes (cf. I.11) s'exprime par:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \xi_{\text{cep}} - \xi_P \\ &= -0,0031'' \sin(\omega_3 t - \psi_3) - 0,0071'' \sin(\omega_{31} t - \psi_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \eta_{\text{cep}} - \eta_P \\ &= -0,0087'' + 0,0029'' \cos(\omega_3 t - \psi_3) + 0,0066'' \cos(\omega_{31} t - \psi_{31}) \end{aligned}$$

Avec: $\omega_3 = 1,26 \times 10^3$ (terme semi-annuel)

$\omega_{31} = 1,68 \times 10^4$ (terme semi-mensuel)

Alors, les rotations excédentaires qui s'en déduisent sont:

$$P = -0,00013'' (t - t_0)$$

$$P' = -0,00008'' (t - t_0)$$

Et l'erreur en angle stellaire correspondante est:

$$\Delta\theta = (P - P') = -0,00005'' (t - t_0)$$

Ainsi le choix du CEP à la place du pôle de rotation instantanée s'accompagne d'un biais séculaire d'amplitude très faible. Or du fait que l'on fasse intervenir non pas le pôle de rotation instantanée mais le CEP dans les réductions d'observation, incite alors à localiser σ non pas sur l'équateur de rotation mais sur l'équateur du CEP. De plus, l'emploi du CEP évite d'avoir à calculer les effets sur s' de la nutation diurne dans le TRS.

S E C O N D E P A R T I E

C O M P L E M E N T S D ' E T U D E S U R L ' O R I G I N E N O N -
T O U R N A N T E D A N S U N C A S G E N E R A L

II.1) Généralités.

Après avoir présenté l'Origine Non-Tournante dans le cadre de la rotation de la Terre, et avoir montré son utilisation pratique ainsi que ses propriétés fondamentales. il peut s'avérer intéressant, dans un second temps, de la situer dans un contexte tout à fait général, celui d'un corps Σ quelconque en rotation.

Aussi ne fera-t-on appel ici qu'à des notions mathématiques, en étudiant le mouvement de rotation d'un référentiel mobile (lié à Σ) par rapport à un autre référentiel pouvant être qualifié de "référentiel de base". La transformation entre ces deux derniers s'effectuera par l'intermédiaire des angles d'Euler.

Σ est un solide quelconque, qui sera supposé indéformable, afin de pouvoir définir un référentiel qui lui soit directement associé, et pour admettre l'existence d'un vecteur rotation instantané.

Si Σ peut a priori revêtir n'importe quelle forme, il sera toujours possible de lui associer une sphère S de rayon unité centrée en O , centre de gravité de Σ , et qui lui soit rigidement liée. Ainsi, dans la suite, il ne sera plus question que de S puisque les rotations de Σ et de S sont en fait assimilables l'une à l'autre.

Enfin, on n'aborde ici que l'aspect cinématique de la rotation de S sans pour autant s'intéresser aux causes d'ordre dynamique qui pourraient amener cette rotation. La résolution de toutes les équations cinématiques à suivre suppose connue la donnée de deux référentiels, l'un absolu, l'autre lié à S .

Par abus de langage, on gardera la notion d'"équateur" pour désigner le grand cercle de centre O et perpendiculaire à l'axe de rotation instantanée de S .

II.2) Donnée d'un référentiel absolu R_0 .

On postulera l'existence d'un référentiel absolu sensé matérialiser l'"absence de mouvement".

N'étudiant que la rotation de S , sans faire intervenir une éventuelle translation, on fera coïncider l'origine de R_0 avec le centre de masse O de S .

On posera ainsi:

$$R_0 = (O, X_0, Y_0, Z_0)$$

et on désignera par \vec{i}_0 , \vec{j}_0 , \vec{k}_0 les vecteurs orthonormés portés respectivement par les axes OX_0, OY_0, OZ_0 .

II.3) Donnée d'un référentiel lié à S

Puisque S est supposé rigide, il est possible de construire un référentiel R qui lui soit lié, c'est à dire que les coordonnées de tout point situé sur S gardent la même valeur lorsque t varie.

On appellera: $R = (O, x, y, z)$, ce référentiel.

On notera de meme \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} les vecteurs orthonormés portés par les axes Ox, Oy, Oz . Mis à part le fait que ces vecteurs constituent une base orthonormée, leur orientation initiale est purement arbitraire, aucune structure sur S ne permettant, a priori, de leur attribuer une orientation privilégiée.

II.4) Repérage du référentiel R lié au Solide étudié par rapport au référentiel inertiel R_0 .

Ce que l'on appelle le repérage (ou positionnement) de R par rapport à R_0 revient en fait à orienter les trois axes de R par rapport aux trois axes de R_0 . Ce positionnement peut être réalisé de la manière la plus classique et la plus appropriée qui soit par l'intermédiaire des paramètres dits "angles d'Euler", que l'on a coutume d'appeler θ , ψ , φ :

θ , traditionnellement appelé "angle de nutation" mesure l'écart angulaire entre les axes OZ_0 et Oz).

θ restera compris entre les valeurs 0° et 180° .

ψ , traditionnellement appelé "angle de précession", mesure l'écart angulaire entre $(0, X_0)$ et la ligne des noeuds qui est l'intersection des plans $(0, X_0, Y_0)$ et $(0, x, y)$. ψ est compris entre 0° et 360° (modulo 2π). ψ peut bien sûr être compté à partir du noeud ascendant ou par rapport au noeud descendant du plan $(0, x, y)$ par rapport au plan $(0, X_0, Y_0)$. On choisira conventionnellement le noeud descendant N. On se gardera d'assimiler ψ à la précession astronomique du pôle céleste de la Terre qui ne désigne que la composante séculaire de son mouvement dans l'espace.

φ , rotation complémentaire, mesure l'écart angulaire entre la ligne des noeuds ON et l'axe Ox , solidaire de la sphère. φ restera compris entre 0° et 360° (modulo 2π)

Une petite remarque a son importance: le couple de paramètres (ψ, θ) donne entièrement l'orientation de l'axe Oz dans R_0 , et la donnée complémentaire de φ donne entièrement l'orientation de l'axe Ox , et par suite de l'axe Oy (par orthogonalisation).

Ainsi est-il besoin de deux paramètres pour localiser un axe de R par rapport à R_0 , et d'un seul pour localiser les deux autres restant. La figure 9 montre schématiquement comment s'effectue la transformation qui mène de R_0 à R.

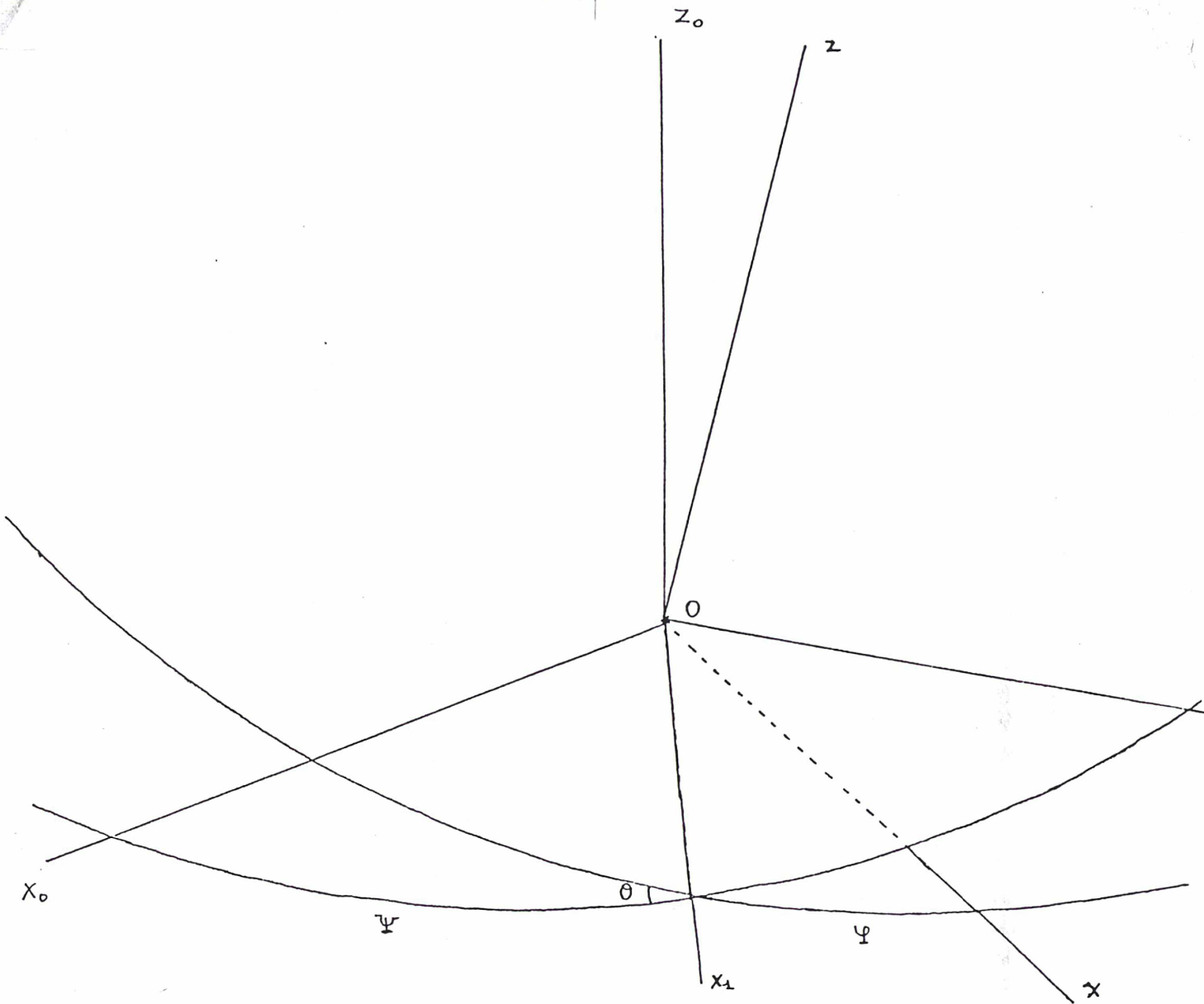


Figure 9

Représentation des trois angles d'Euler Ψ , θ et Ψ permettant d'effectuer la liaison entre le référentiel inertiel R_0 et le référentiel lié à S .

II.5) La matrice de transformation de R_0 à R et ses applications.

Après avoir inventorié les trois angles de transformation Ψ , θ , Ψ , on peut définir la matrice de changement de base (M) qui permet de relier R_0 et R .

Différentes combinaisons de ces trois rotations sont envisageables (Goldstein, 1950). Nous choisirons celle qui peut apparaître la plus appropriée, faisant tout d'abord intervenir les rotations d'angle Ψ et $-\theta$ amenées dans la suite de cette thèse à être de faible variation par rapport à la rotation d'angle Ψ . Les étapes sont donc les suivantes:

- R_0 ----- R_1 : Rotation d'angle Ψ autour de $(0, z_0)$
 - R_1 ----- R_2 : Rotation d'angle $-\theta$ autour de $(0, x_1)$
 - R_2 ----- R : Rotation d'angle Ψ autour de $(0, z_2)$
- avec $R_i = (0, x_i, y_i, z_i)$

Dans un souci de clarification, explicitons matriciellement ce qu'est une rotation d'angle λ autour des premier, second et troisième axes Ox , Oy , Oz d'un référentiel.

$$(M_x)(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix}$$

$$(M_y)(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{vmatrix}$$

$$(M_z)(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En choisissant cette terminologie .

$$R_0 \xrightarrow{(M_z) (\Psi)} R_1 \xrightarrow{(M_x) (-\theta)} R_2 \xrightarrow{(M_z) (\varphi)} R$$

La multiplication de ces trois matrices permet donc d'établir la correspondance recherchée.

$$R \xrightarrow{(M)} R$$

$$(M) = (M_z) (\varphi) \cdot (M_x) (-\theta) \cdot (M_z) (\Psi)$$

D'où l'expression suivante de cette matrice (M) :

$$(M) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \Psi - \sin \varphi \sin \Psi \cos \theta & \cos \varphi \sin \Psi + \sin \varphi \cos \Psi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \Psi - \sin \Psi \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \Psi + \cos \varphi \cos \Psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \Psi \sin \theta & +\cos \Psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Schématiquement, on peut se représenter (M) de la manière suivante :

$$(M) = \begin{array}{ccc|c} \vec{I}_0 & \vec{J}_0 & \vec{K}_0 & \\ \hline x & x & x & \vec{I} \\ x & x & x & \vec{J} \\ x & x & x & \vec{K} \end{array}$$

Ce qui signifie que, colonne par colonne, (M) représente les coordonnées de chaque vecteur de R_0 en fonction de chaque vecteur de R . (M) permet donc d'obtenir directement les coordonnées (X, Y, Z) d'un vecteur \vec{U} quelconque dans le référentiel R lorsqu'on connaît ses coordonnées (X_0, Y_0, Z_0) dans le référentiel R_0 .

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (M) \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

Transformation inverse .

Réciproquement, on peut faire appel à la matrice de transformation inverse (M^{-1}), qui permet de définir les coordonnées d'un point dans R_0 lorsqu'on connaît les coordonnées de ce même point dans le référentiel R . L'expression de (M^{-1}) se déduit directement de celle de (M) par démarche inverse, c'est à dire en substituant dans l'expression de (M) $-\psi$ à ψ $-\theta$ à θ , et $-\Psi$ à Ψ . On obtient alors l'expression de la matrice:

$$(M) = \begin{bmatrix} \cos\Psi \cos\psi - \sin\psi \sin\Psi \cos\theta & -\cos\Psi \sin\psi - \sin\Psi \cos\psi \cos\theta & \sin\Psi \sin\theta \\ \sin\Psi \cos\psi + \cos\Psi \sin\psi \cos\theta & -\sin\Psi \sin\psi + \cos\psi \cos\Psi \cos\theta & -\cos\Psi \sin\theta \\ -\sin\theta \sin\psi & -\cos\psi \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Schématiquement, on peut se représenter (M) de la manière suivante:

$$(M) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{matrix}$$

II.6) Expressions littérales du vecteur rotation instantanée de S par rapport aux référentiels R₀ et R.

S étant rigide, on sait qu'on peut lui définir un vecteur rotation instantané, que l'on notera $\vec{\omega}$; aussi, la seule donnée de $\vec{\omega}$ permet-elle à chaque instant t , par intégration, de caractériser le mouvement absolu de S qui consiste en fait à définir positionnement et vitesse des vecteurs de base de R.

Une formule mathématique simple s'applique pour la détermination de $\vec{\omega}$. Du fait que par définition on a les égalités suivantes :

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$$

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$$

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

alors :

$$\vec{i} \wedge \dot{\vec{i}} = -((\vec{i} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{i})$$

$$\vec{j} \wedge \dot{\vec{j}} = -((\vec{j} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{j})$$

$$\vec{k} \wedge \dot{\vec{k}} = -((\vec{k} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{k})$$

D'où il s'ensuit que (Murray, 1983):

$$\vec{\omega} = (1/2) \cdot ((\vec{i} \wedge \dot{\vec{i}}) + (\vec{j} \wedge \dot{\vec{j}}) + (\vec{k} \wedge \dot{\vec{k}}))$$

On peut évidemment exprimer dans les deux bases différentes que sont R₀ et R. On trouve ainsi les deux jeux de coordonnées suivants:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = & -(\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi) \cdot \vec{i} \\ & + (-\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi) \cdot \vec{j} \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} = & -(\dot{\theta} \cos \Psi + \dot{\psi} \sin \Psi \sin \sigma) \cdot \vec{I}_0 \\ & + (-\dot{\theta} \sin \Psi + \dot{\psi} \cos \Psi \sin \sigma) \cdot \vec{J}_0 \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \sigma) \cdot \vec{K}_0 \end{aligned} \quad (16)$$

Parallèlement, il peut s'avérer judicieux d'exprimer $\vec{\omega}$ de la manière la plus concise qui soit, en fonction des vecteurs des différentes bases. On remarquera à ce titre que :

$$\vec{k} = -(\sin \Psi \sin \theta) \cdot \vec{I}_0 + (\cos \Psi \sin \theta) \cdot \vec{J}_0 + (\cos \theta) \cdot \vec{K}_0$$

$$\vec{I} = (\cos \Psi) \cdot \vec{I}_0 + (\sin \Psi) \cdot \vec{J}_0$$

De telle sorte que $\vec{\omega}$ peut encore s'écrire :

$$\vec{\omega} = \dot{\Psi} \cdot \vec{K}_0 - \dot{\theta} \cdot \vec{I} + \dot{\phi} \cdot \vec{k}$$

(On retrouve à travers cette expression les différentes rotations respectives d'angle Ψ , θ , et ϕ , autour des axes $(\vec{K}_0, \vec{I}, \vec{k})$)
La norme de $\vec{\omega}$ est elle-même facilement déductible de son expression, que ce soit dans le référentiel R ou dans le référentiel R_0 .
On trouve :

$$|\vec{\omega}| = (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \dot{\phi} \dot{\Psi} \cos \theta)^{1/2} \quad (17)$$

II.7) Définition formelle de l'Origine Non-Tournante.

Définition

Introduisons (Figure 10), en plus de R_0 et R , un troisième référentiel : $R' = (0, x', y', z')$ encore appelé "référentiel instantané", vérifiant les deux conditions suivantes :

(a) L'axe $(0, z')$ est porté par l'axe de rotation instantanée.

(b) Lorsque $(0, z')$ se déplace dans R_0 , R' n'a pas de composante de rotation le long de Oz' . L'"Origine Non-Tournante", encore appelée σ , sera l'intersection du solide unité S avec Ox' .

Les vecteurs unitaires des axes Ox' , Oy' , Oz' seront respectivement appelés \vec{i}' , \vec{j}' et \vec{k}' .

On pourra localiser $R' = (0, x', y', z')$ par rapport à R_0 par le biais des angles d'Euler Ψ' , θ' et ψ' , à l'instar de R que l'on a localisé par rapport à R_0 par le biais de Ψ , θ et ψ .

Remarques

(1) Notons qu'à l'origine des temps ($t_0 = 0$), les axes (Ox') et (Oy') sont choisis d'une manière purement arbitraire sur l'équateur de rotation instantanée, mais qu'ensuite leur orientation est imposée par les deux conditions (a) et (b).

(2) Il existe une différence de nature entre les conditions (a) et (b): la première concerne le positionnement de l'axe de rotation instantané, imposant ainsi la valeur des coordonnées Ψ' et θ' . La seconde concerne son déplacement dans R_0 , imposant la valeur de la troisième coordonnée ψ' .

(3) On remarquera que l'adjectif "Non-tournante" que l'on a prêté à l'origine " σ ", ne se réfère pas à un référentiel absolu, mais au plan mobile de l'équateur instantané.

Effectivement, σ n'est pas fixe dans R_0 de par sa nature, puisque elle est localisée sur cet équateur instantané. Ainsi l'axe $O\sigma$ se trouve-t-il en rotation par rapport à R_0 .

Or, il ne faut pas oublier qu'un référentiel non-tournant qualifie en général un référentiel qui n'est sujet à aucune rotation par rapport à R_0 . D'où une confusion possible dans la terminologie dont il faut se méfier.

II.8) Première détermination pratique d'une Origine Non-Tournante (Figure 10), par l'intermédiaire des coordonnées eulériennes ψ' , θ' , φ' .

On appellera $\vec{\mathcal{R}}$ le vecteur rotation du référentiel R' lié à l'origine non-tournante σ . On obtiendra $\vec{\mathcal{R}}'$ par analogie avec $\vec{\mathcal{R}}$ en substituant respectivement à ψ , θ , et φ les paramètres ψ' , θ' et φ' .

$$\begin{aligned} \text{Comme, d'après (15) : } \vec{\mathcal{R}} &= -(\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi) \cdot \vec{i} \\ &+ (-\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi) \cdot \vec{j} \\ &+ (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cdot \vec{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } \vec{\mathcal{R}}' &= -(\dot{\psi}' \sin \varphi' \sin \theta' + \dot{\theta}' \cos \varphi') \cdot \vec{i}' \\ &+ (-\dot{\psi}' \cos \varphi' \sin \theta' + \dot{\theta}' \sin \varphi') \cdot \vec{j}' \\ (17) \quad &+ (\dot{\varphi}' + \dot{\psi}' \cos \theta') \cdot \vec{k}' \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante à la détermination de σ va porter sur le paramètre φ' , les autres paramètres ψ' et θ' étant des données imposées par l'orientation de l'axe de rotation instantanée. Cette condition s'exprime sous la forme de l'équation :

$$\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{R}}' = 0 \quad (18)$$

C'est à dire annulation de la composante de $\vec{\mathcal{R}}'$ le long de l'axe de rotation instantanée, celui-ci étant matérialisé par le vecteur rotation $\vec{\mathcal{R}}$.

Or, on sait que les vecteurs \vec{k}' et $\vec{\mathcal{R}}$ s'associent de la manière suivante :

$$\vec{k}' = (\vec{\mathcal{R}} / |\vec{\mathcal{R}}|) \quad \text{D'où : } (\vec{\mathcal{R}}' \cdot \vec{k}') = 0 \quad (19)$$

En traduisant directement cette égalité en utilisant l'expression de ci-dessus, on en arrive à :

$$\dot{\varphi}' + \dot{\psi}' \cdot \cos \theta' = 0 \quad (20)$$

L'équation (20) est la formule mathématique qui permet de définir le paramètre φ' à une constante près. La valeur de cette constante est directement associée à la localisation de " σ " à la date t_0 . Ainsi, la détermination de l'Origine Non-Tournante à l'instant t , soit $\sigma(t)$, est immédiate lorsque sont connues sa localisation à la date initiale ainsi que la valeur des angles d'Euler ψ' et θ' de l'axe de rotation instantanée $(0, \vec{k}')$, à chaque instant.

Application

Soit σ_0 la position arbitraire de σ à l'instant initial t_0 , sur l'équateur de rotation instantanée de cette même date, N' le noeud descendant de cet équateur de rotation instantanée sur le plan inertiel $(0, X_0, Y_0)$.

Alors, par définition de l'angle Ψ' :

$$\Psi'(t_0) = \Psi'_0 = \widehat{N'\sigma_0}$$

Et:

$$\begin{aligned} & \Psi'(t) \\ &= \widehat{N'(t)\sigma(t)} \\ &= \Psi'_0 - \int_{t_0}^t \dot{\Psi}' \cdot \cos \theta' dt \end{aligned} \quad (21)$$

en vertu de (20)

La figure 11 montre la manière dont s'effectue la localisation de σ à tout instant, en fonction du noeud N' et de l'expression sous forme d'intégrale ci-dessus.

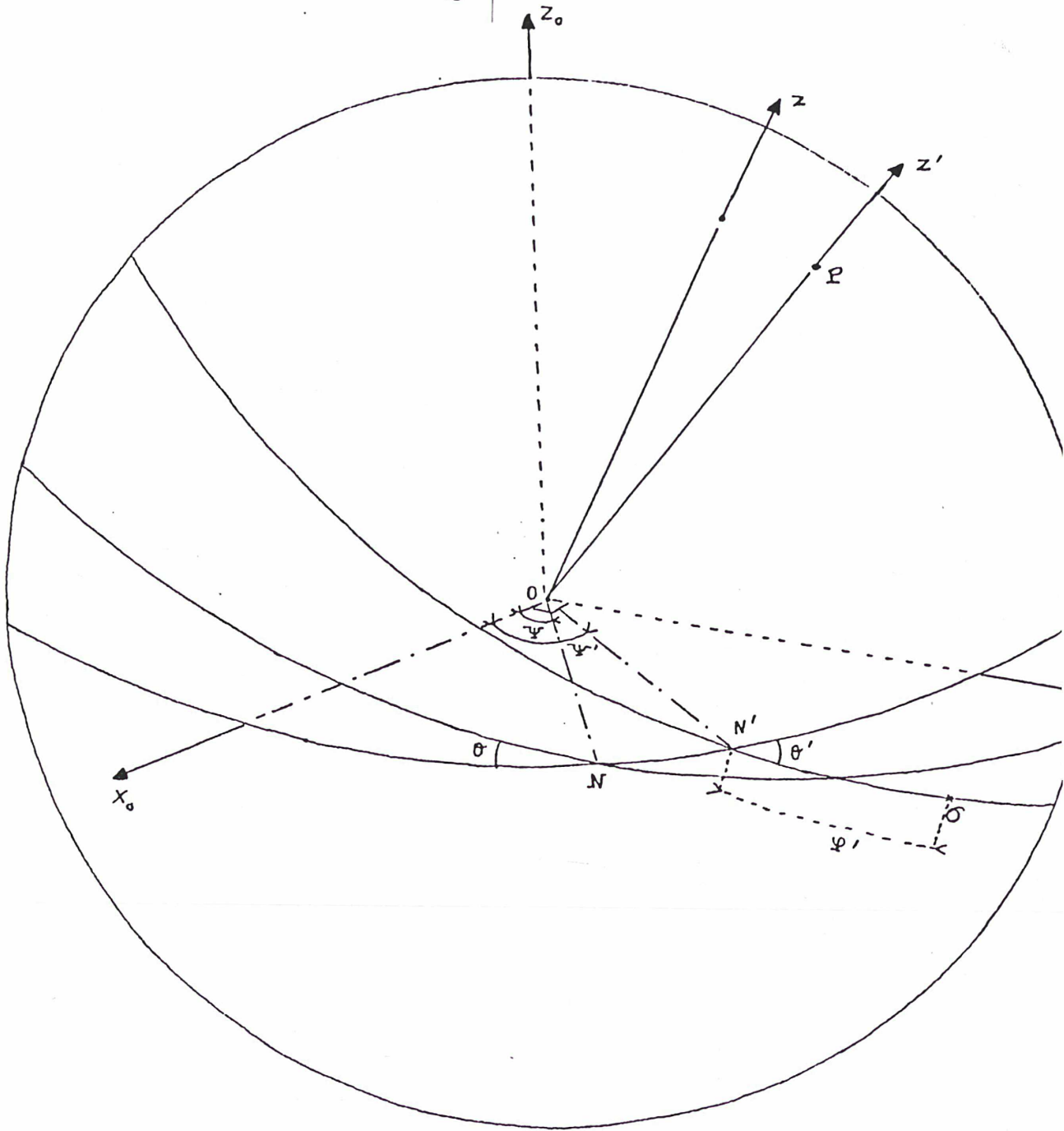


Figure 10

La localisation des équateurs de figure et de rotation s'effectue respectivement par l'intermédiaire des angles d'Euler ψ et θ d'une part, ψ' et θ' d'autre part. L'angle φ' permet de localiser σ dans le plan de l'équateur de rotation.

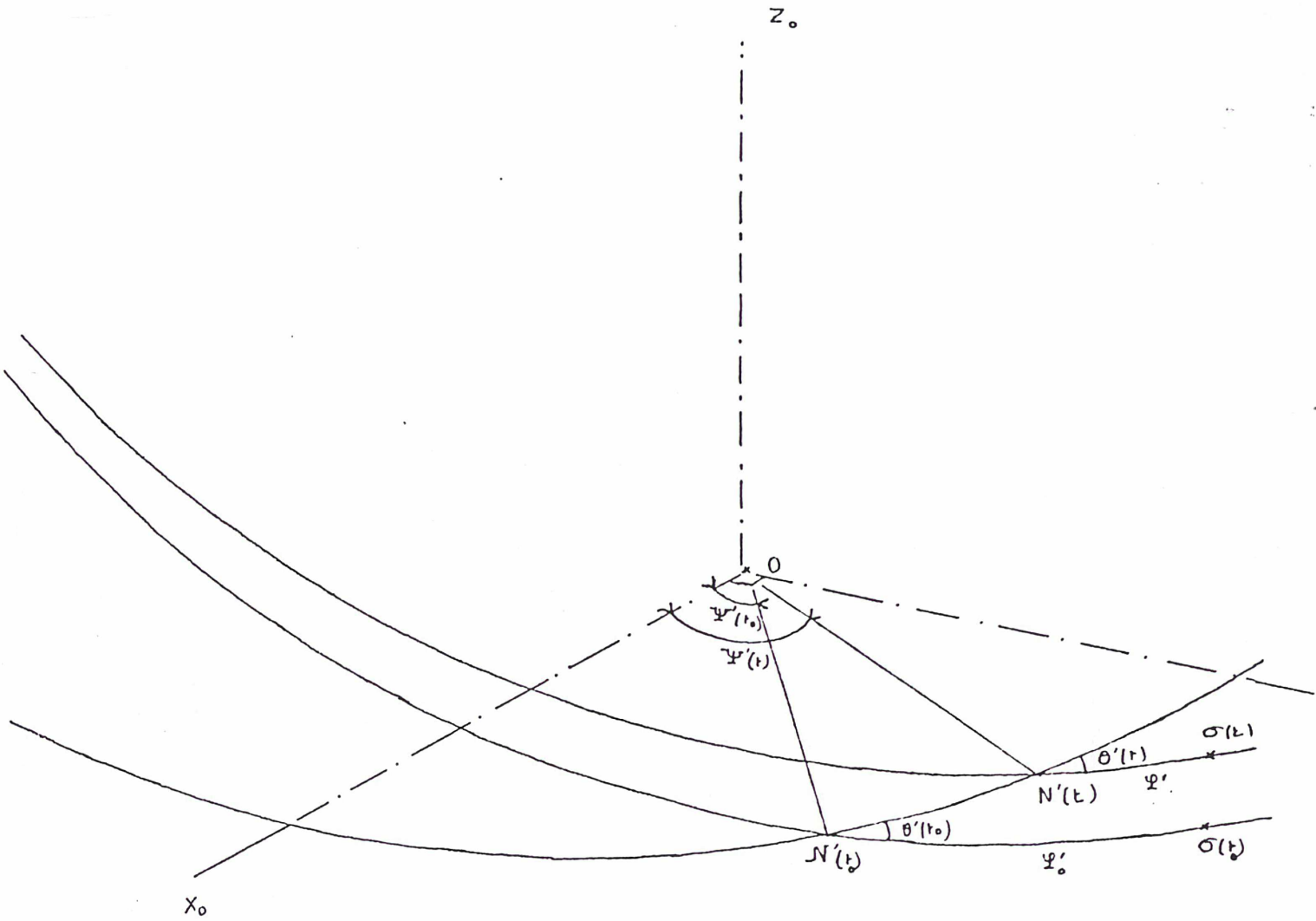


Figure 11

Définition de $\sigma(t)$ à partir de sa position σ_0 à la date origine t_0

II.9) Les coordonnées de l'Origine Non-Tournante dans le référentiel absolu Ro.

On sait (cf. chapitre précédent) que l'origine non-tournante σ de S en rotation peut être localisée par le biais des trois angles d'Euler Ψ' , θ' , φ' , la donnée des deux premiers angles étant imposée par le mouvement de l'axe de rotation (Oz'), et permettant de localiser cet axe par rapport au référentiel inertiel : $R_0 = (O, \vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$, le troisième provenant de la relation (21):

$$\varphi' = - \int_{t_0}^t \dot{\psi}' \cos \theta' dt + \varphi_0'$$

Pour calculer les coordonnées de l'Origine Non-Tournante dans le référentiel R_0 , on utilisera la matrice de transformation (M'^{-1}) qui établit la correspondance entre R_0 et R' .

$$(M'^{-1}) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Psi' \cos \varphi' - \sin \varphi' \sin \Psi' \cos \theta' & -\cos \Psi' \sin \varphi' - \sin \Psi' \cos \varphi' \cos \theta' & -\sin \Psi' \sin \theta' \\ \sin \Psi' \cos \varphi' + \sin \varphi' \cos \Psi' \cos \theta' & -\sin \Psi' \sin \varphi' + \cos \varphi' \cos \Psi' \cos \theta' & \cos \Psi' \sin \theta' \\ -\sin \theta' \sin \varphi' & \cos \varphi' \sin \theta' & \cos \theta' \end{bmatrix}$$

Schématiquement, on peut se représenter (M'^{-1}) de la manière suivante:

$$(M'^{-1}) = \begin{array}{ccc|c} & \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \hline & x & x & x \\ \hline & x & x & x \\ \hline & x & x & x \end{array} \begin{array}{l} \vec{I}_0 \\ \vec{J}_0 \\ \vec{K}_0 \end{array}$$

Alors, comme l'orientation de l'Origine Non-Tournante nous est donnée par le vecteur \vec{i}' , ses coordonnées seront évidemment celles de ce vecteur:

$$\vec{O\sigma} / R_0 = \begin{vmatrix} \cos \Psi' \cos \varphi' - \sin \varphi' \sin \Psi' \cos \theta' \\ \sin \Psi' \cos \varphi' + \cos \Psi' \sin \varphi' \cos \theta' \\ -\sin \theta' \sin \varphi' \end{vmatrix}$$

Avec :

$$\varphi' = - \int_{t_0}^t \dot{\Psi}' \cdot \cos \theta' dt + \varphi'_0$$

(22)

Où φ'_0 est, rappelons-le une quantité arbitraire que l'on se fixe à l'instant initial t_0 .

L'intérêt que l'on peut attribuer à l'établissement de ces coordonnées est de pouvoir définir la courbe décrite par σ . Cette courbe dépend évidemment de la constante d'intégration φ'_0 , son allure peut être parfaitement définie à partir du moment où sont connues les valeurs de Ψ' et de θ' en fonction du temps, à partir d'une date initiale.

Remarque:

Puisque φ'_0 , et donc σ_0 , sont choisis de manière purement arbitraire, par souci de simplicité il peut être intéressant de faire coïncider à l'instant t_0 le point σ_0 avec le noeud $N'(t_0)$. De sorte que l'équation (21) devienne:

$$\varphi'(t) = \widehat{N'(t) \sigma(t)} = - \int_{t_0}^t \dot{\Psi}' \cdot \cos \theta' dt$$

II.10) La quantité "s"

Dans la première partie (cf. I.8), on a vu comment il était possible de localiser l'origine non-tournante à partir du noeud de l'équateur de rotation sur un plan fondamental. On peut de manière équivalente faire intervenir ici une quantité "s", telle que, si Σ_0 est l'intersection de l'axe OX_0 avec la sphère S, s désigne, par analogie avec (2) (chapitre I.8) :

$$s = (\widehat{\sigma N'} - \widehat{\Sigma_0 N'}) - (\widehat{\sigma_0 N'_0} - \widehat{\Sigma_0 N'_0})$$

$$ds = d(\widehat{\sigma N'} - \widehat{\Sigma_0 N'})$$

Or, d'après (21): $d(\widehat{\sigma N'}) = -d(\widehat{N'\sigma}) = \cos \theta' d\Psi'$,

et, par définition: $d(\widehat{\Sigma_0 N'}) = d\Psi'$.

D'où: $ds = (\cos \theta' - 1) \cdot d\Psi'$. (23)

Si N'_0 désigne le noeud N' à une date initiale t_0 , alors (Figure 11)

$$s(t) = \int_{t_0}^t (\cos \theta' - 1) \cdot d\Psi' . \quad (24)$$

Ce qui est la traduction de la formule (3) de la première partie.

Cas particulier

$\sigma(t_0)$ étant arbitraire, on peut la choisir telle que:

$$\widehat{\sigma(t_0) N'} = \widehat{\Sigma_0 N'} .$$

Alors, on aboutit à l'expression simplifiée de s suivante:

$$s(t) = (\widehat{\sigma N'} - \widehat{\Sigma_0 N'}) = \int_{t_0}^t (\cos \theta' - 1) d\Psi' .$$

II.11) Comment s'interprète géométriquement la détermination de l'Origine Non Tournante.

L'équation (20) est la traduction simple du procédé qui permet de déduire l'Origine Non-Tournante d'un instant $(t+dt)$ de l'Origine Non-Tournante d'un instant t lorsque dt est un intervalle de temps infinitésimalement petit.

Effectivement, reportons-nous à la figure 12 ci-après. On schématise sur cette figure quatre plans différents, qui sont:

a) Le plan de référence $(0, X_0, Y_0)$ associé au référentiel inertiel R_0 .

b) L'équateur de rotation de l'instant t_0 , à savoir $Eq(t_0)$, où $Eq(t_0) = (0, x'(t_0), y'(t_0))$, associé au référentiel instantané $R'(t_0)$.

c) L'équateur de rotation de l'instant t , à savoir $Eq(t)$, où $Eq(t) = (0, x'(t), y'(t))$, associé au référentiel instantané $R'(t)$.

d) L'équateur de rotation de l'instant $(t+dt)$, à savoir $Eq(t+dt)$, où $Eq(t+dt) = (0, x'(t+dt), y'(t+dt))$, associé au référentiel instantané $R'(t+dt)$.

Rappelons qu'à tout instant t l'axe Ox' est porté par l'origine non-tournante $\sigma(t)$. On nommera $N'(t_0), N'(t), N'(t+dt)$ les noeuds descendants de l'équateur de rotation sur le plan de référence $(0, X_0, Y_0)$, aux instants respectivement $t_0, t, t+dt$. Dans l'intervalle de temps infinitésimal $(t, t+dt)$, on sait que, en vertu de la relation (21), l'angle Ψ' se sera incrémenté d'une quantité:

$$d\Psi' = -d\Psi' \cos \theta'.$$

Où: $d\Psi' = d(OX_0, ON')$.

De cette égalité, il résulte que l'origine non-tournante $\sigma(t+dt)$ n'est rien d'autre, lorsque dt tend vers 0, que la projection orthogonale de l'origine non-tournante $\sigma(t)$ sur l'équateur de rotation instantané de la date $(t+dt)$.

Par extension, $\sigma(t)$ se déduira de σ_0 par une succession de projections orthogonales infinitésimales du type de la précédente.

La dernière remarque qui vient d'être faite a son importance. Elle indique clairement la totale indépendance entre σ et le plan $(0, X_0, Y_0)$ inertiel choisi comme référence.

Effectivement, si un autre plan inertiel de référence est choisi, la localisation de σ par projections successives à partir de $\sigma(t_0)$ choisi arbitrairement à l'instant initial, ne subit aucune modification. Autrement dit, la localisation de l'Origine Non Tournante dépend seulement de la manière dont se déplace l'équateur instantané de

rotation.

Cette remarque a déjà été formulée dans le chapitre I.13, où l'on a recherché quelle pouvait être l'influence du choix du référentiel inertiel sur la localisation de σ .

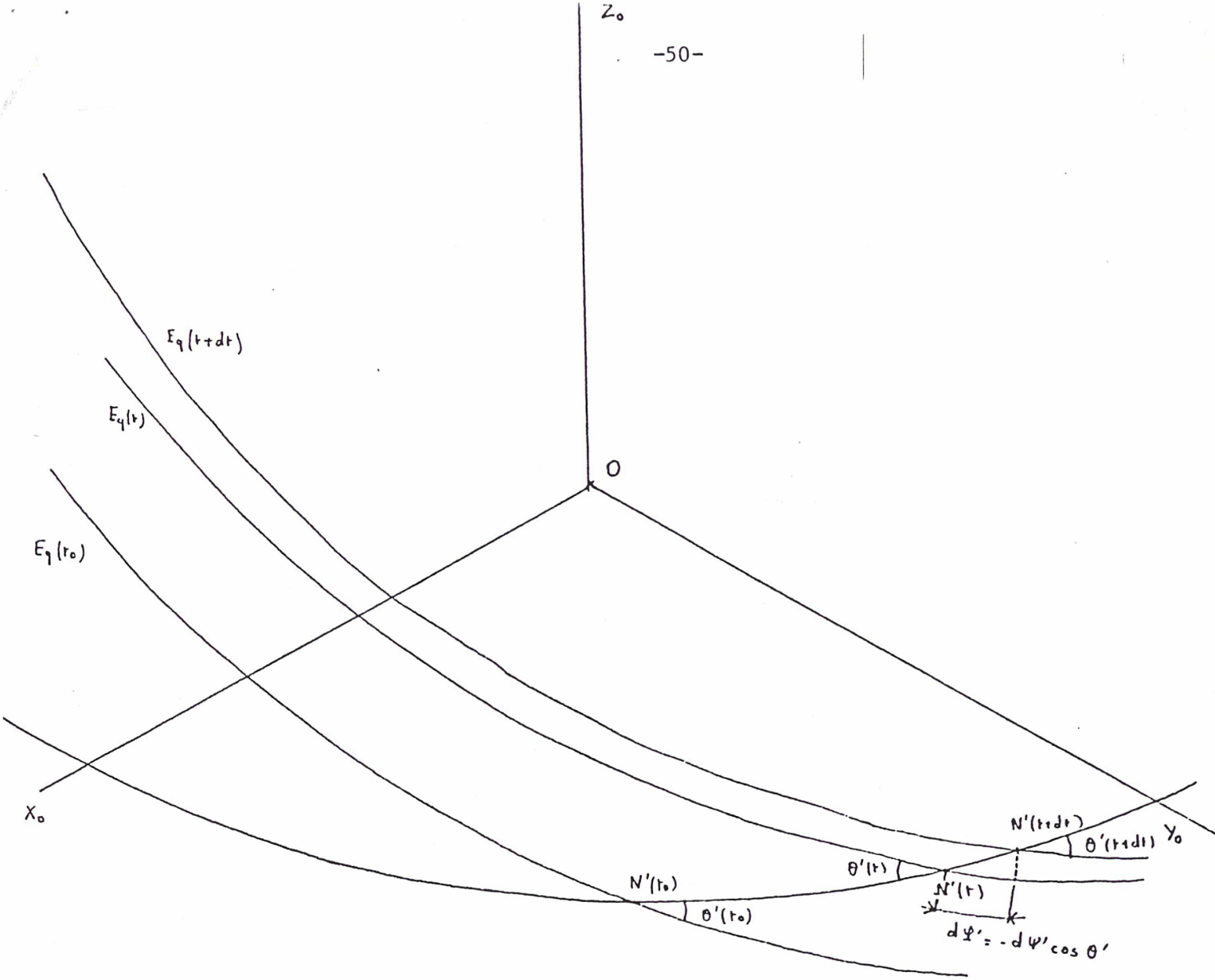


Figure 12

On représente sur cette figure quatre plans de base servant à l'étude à savoir le plan inertiel de référence (O, X_0, Y_0) , les équateurs instantanés de rotation $E_q(t_0), E_q(t)$ et $E_q(t+dt)$ dont les noeuds descendants, sur ce plan de référence, sont respectivement $N(t_0), N(t), N(t+dt)$.

On peut désormais déduire l'Origine Non Tournante $\sigma(t+dt)$ de celle, $\sigma(t)$, de l'instant t , par projection orthogonale de $\sigma(t)$ sur l'équateur $E_q(t+dt)$.

II.12) Cas particulier de détermination pratique de σ en utilisant des paramètres \bar{E} et \bar{d} uniquement liés au positionnement de l'équateur de la date t par rapport à l'équateur de la date t_0 .

On ne prend plus ici comme plan inertiel de référence un plan (O, X_0, Y_0) quelconque, mais le plan de l'équateur de rotation instantanée $Eq(t_0)$ de la date t_0 . Néanmoins, les axes OX_0 et OY_0 seront toujours choisis de manière arbitraire sur $Eq(t_0)$. Alors, on fera intervenir un couple de paramètres (\bar{E}, \bar{d}) (Capitaine, Guinot, Souchay, 1986) tel que (Figure 13) :

\bar{d} est l'angle que forment entre eux les plans des équateurs $Eq(t_0)$ et $Eq(t)$.

$(\bar{E} + \frac{\pi}{2})$ désigne l'angle, sur $Eq(t_0)$, entre l'axe OX_0 et le noeud ascendant $Q(t)$ de $Eq(t)$ sur $Eq(t_0)$.

On retrouve ainsi dans ce cas particulier le système de paramétrage sous forme d'angles d'Euler (par rapport au noeud descendant de $Eq(t)$)

$$\Psi' \text{ ----- } (\bar{E} - \frac{\pi}{2})$$

$$\theta' \text{ ----- } \bar{d}$$

De telle manière que l'angle Ψ' , qui n'est autre que :

$$\Psi' = \overline{Q(t) \sigma(t)}, \text{ sera tel que, en vertu de}$$

l'équation (19):

$$\dot{\Psi}' = \overline{Q(t) \dot{\sigma}(t)} = - (\bar{E} - \frac{\pi}{2}) \cos \bar{d} = - \dot{\bar{E}} \cos \bar{d}$$

$$\text{Or, il est immédiat que: } \overline{\sigma(t_0) Q(t)} = \dot{\bar{E}}$$

d'où la relation élémentaire suivante:

$$\overline{\sigma(t) Q(t)} - \overline{\sigma(t_0) Q(t)} = \dot{\bar{E}} \cos \bar{d} - \dot{\bar{E}}$$

Et, par intégration:

$$\overline{\sigma(t) Q(t)} - \overline{\sigma(t_0) Q(t)} = - \int_{t_0}^t (1 - \cos \bar{d}) d\bar{E}$$

On pourra par conséquent définir une quantité " \bar{s} " telle que:

$$\bar{s} = - \int_{t_0}^t (1 - \cos \bar{d}) d\bar{E} \tag{25}$$

D'où la localisation de σ par rapport au noeud $Q(t)$:

$$\overline{\sigma(t) Q(t)} - \overline{\sigma(t_0) Q(t)} = \bar{s} = - \int_{t_0}^t (1 - \cos \bar{d}) d\bar{E} \tag{26}$$



Ceci est une expression simplifiée par rapport à celle, plus générale, du chapitre II.8, qui en outre ne fait intervenir que les deux plans fondamentaux que sont $Eq(t_0)$ et $Eq(t)$: on s'affranchit ici ainsi de la localisation supplémentaire de ces deux plans fondamentaux par rapport à un troisième, inertiel, donné au départ.

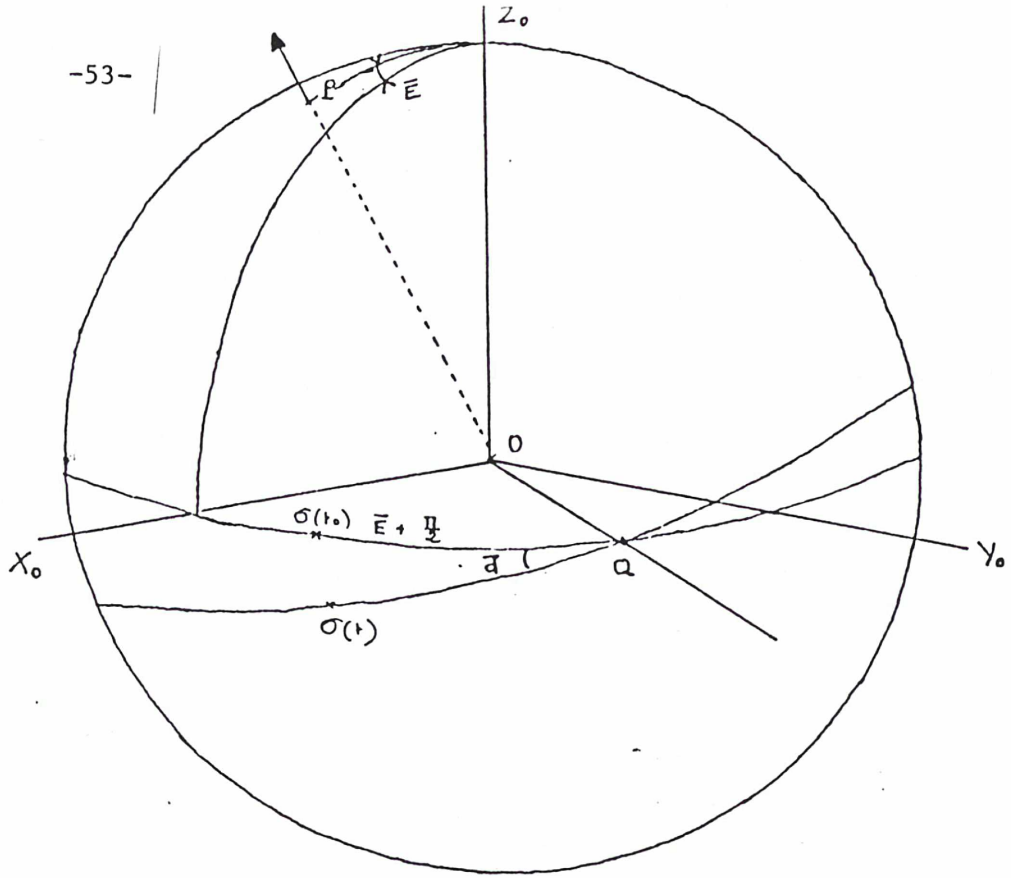


Figure 13

Le positionnement de l'équateur instantané $Eq(t)$ de la date t par rapport à l'équateur instantané $Eq(t_0)$ de la date initiale t_0 (qui sert alors de plan inertiel de référence) peut s'effectuer à l'aide des deux paramètres \bar{E} et \bar{d} . Si $Q(t)$ est le noeud ascendant de $Eq(t)$ par rapport à $Eq(t_0)$, $(\bar{E} + \frac{\pi}{2})$ est l'angle qu'effectue ce noeud avec l'axe inertiel $(0, X_0)$. $\bar{E} - \frac{\pi}{2}$ désignera donc l'angle entre cet axe et le noeud descendant de $Eq(t)$ sur $Eq(t_0)$.

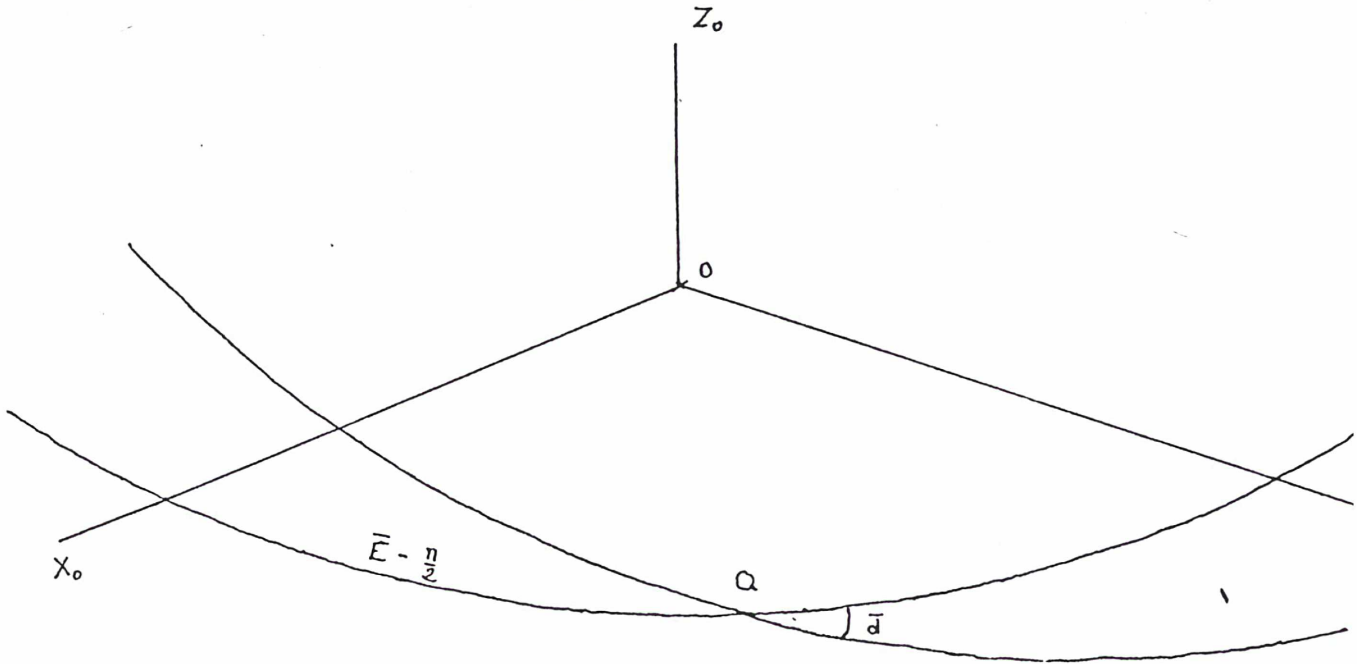


Figure 14

II.13) La détermination d'une Origine Non-Tournante $\bar{\omega}$ dans R.

De même que σ est parfaitement définie lorsqu'est connu le mouvement de l'axe de rotation instantanée de S dans R_0 , il est possible de définir une Origine Non-Tournante dans R, à partir du mouvement de l'axe de rotation instantanée dans ce dernier référentiel:

Appelons ν et Γ les paramètres permettant de positionner l'axe de rotation instantanée $(0, z')$ dans R (cf. Figure 15), de telle sorte que:

Γ désigne l'angle entre les plans méridiens (Ox, Oz) et (Oz', Oz) .

ν désigne l'écart angulaire entre les axes Oz et Oz' .

Appelons R'' le référentiel lié à $\bar{\omega}$: $R'' = (0, x'', y'', z'')$, (Oz'') étant l'axe de rotation instantanée, et (Ox'') étant porté par $\bar{\omega}$ sur l'équateur de rotation instantanée. Les deux premiers angles d'Euler permettant de positionner (Oz'') par rapport à $(0, x, y, z)$ ne sont autres que $(\Gamma - \frac{\pi}{2})$ et ν . La condition de non-rotation autour de (Oz'') du référentiel R'' s'exprime par:

$$\left[\vec{\Omega}_{[R''/R]}, \vec{\Omega} \right] = 0 \quad (27)$$

$\vec{\Omega}$ étant le vecteur de rotation de S
 $\vec{\Omega}_{[R''/R]}$ étant le vecteur de rotation du référentiel R'' par rapport à R.

Si Φ désigne le troisième angle d'Euler, par analogie avec la détermination de Ψ (cf. relation (20)), Φ est définie par la relation suivante:

$$\dot{\Phi} = - \dot{\Gamma} \cos \nu \quad (28)$$

Ainsi, Φ est-il défini, de même que Ψ , à une constante d'intégration près, cette constante étant directement liée à sa position initiale (à la date $t=0$) sur l'équateur de rotation instantanée.

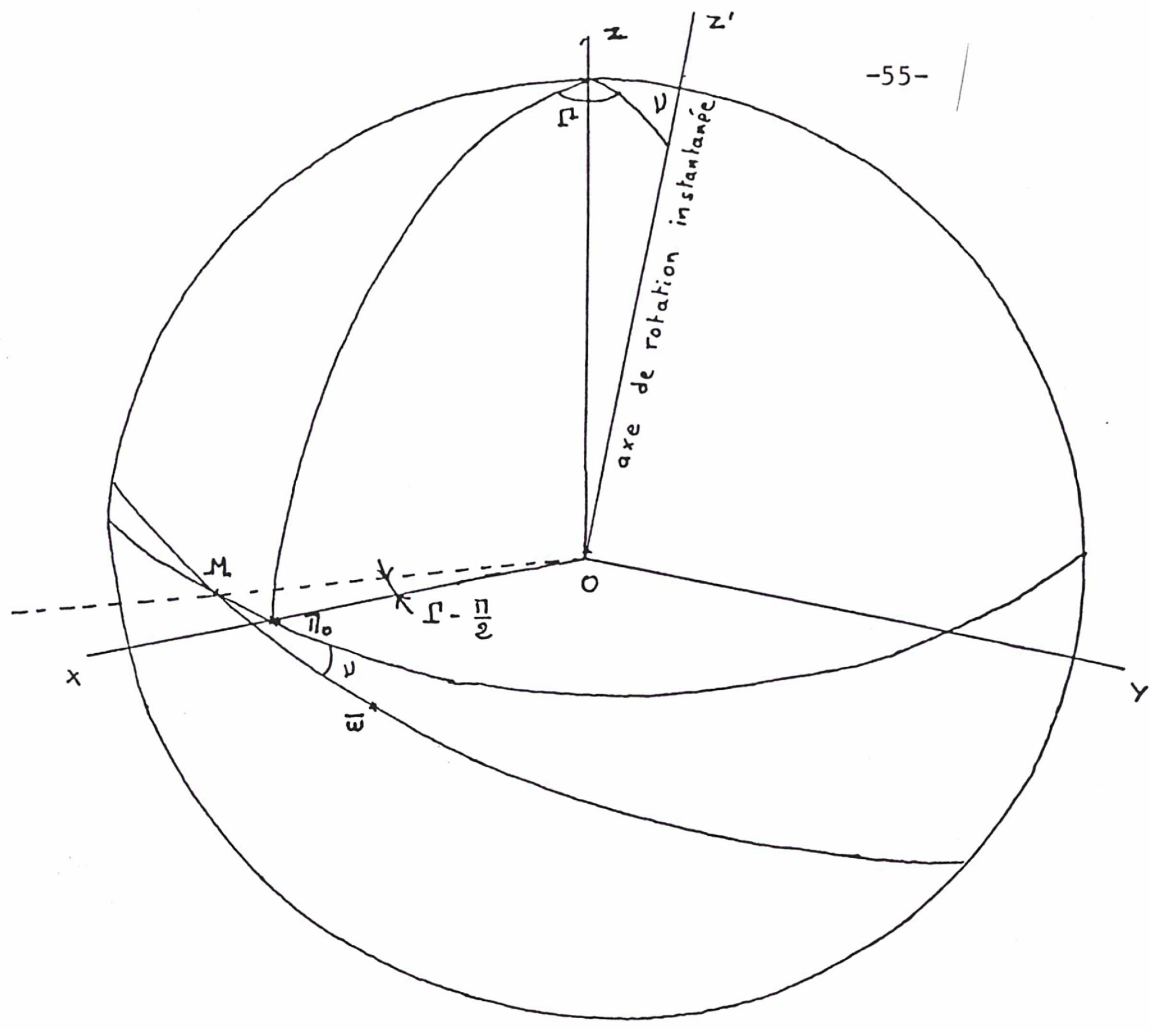


Figure 15

II.14) Positionnement de $\vec{\omega}$ dans le référentiel R par l'intermédiaire des angles d'Euler.

Les deux angles d'Euler de précession et de nutation permettant de positionner R'' par rapport à R₀ sont Ψ' et θ' . Il reste à définir quel est l'angle d'Euler de rotation complémentaire Ψ'' . Ce dernier peut se déduire de (27). En effet:

$$(27) \quad \vec{\Omega}_{[R''/R]} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

Mais:
$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{[R''/R]} &= \vec{\Omega}_{[R''/R_0]} - \vec{\Omega}_{[R/R_0]} \\ &= \vec{\Omega}_{[R''/R_0]} - \vec{\Omega} \end{aligned}$$

Ainsi, (27) devient:

$$(\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R''/R_0]}) - (\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}) = (\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R''/R_0]}) - \Omega = 0 \quad (29)$$

Mais, en s'inspirant de (15), \vec{i}'' , \vec{j}'' , \vec{k}'' étant les vecteurs unitaires portés respectivement par les axes Ox'', Oy'', Oz'', le vecteur rotation de R'' par rapport à R₀ s'écrit:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{[R''/R_0]} &= -(\dot{\Psi}' \sin \Psi'' \sin \theta' + \dot{\theta}' \cos \Psi'') \vec{i}'' \\ &\quad + (-\dot{\Psi}' \cos \Psi'' \sin \theta' + \dot{\theta}' \sin \Psi'') \vec{j}'' \\ &\quad + (\dot{\Psi}'' + \dot{\Psi}' \cos \theta') \vec{k}'' \end{aligned}$$

(puisque $\vec{k}' = \vec{k}''$)

Donc:
$$\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R''/R_0]} = (\dot{\Psi}'' + \dot{\Psi}' \cos \theta')$$

Et (29) entraîne:
$$\dot{\Psi}'' + \dot{\Psi}' \cos \theta' - \Omega = 0$$

$$\dot{\Psi}'' = (\Omega - \dot{\Psi}' \cos \theta')$$

(30)
$$\Psi'' = \int_{t_0}^t (\Omega - \dot{\Psi}' \cos \theta') dt + \Psi_0''$$

De cela il résulte que l'Origine Non-Tournante peut être positionnée sur l'équateur de rotation instantanée par le biais de l'angle d'Euler Ψ'' , dont l'expression est donnée par (30). Cet angle définit l'écart entre $\vec{\omega}$ et le noeud descendant N' de l'équateur de rotation sur le plan fondamental (O, X₀, Y₀) (cf. Figure 16)

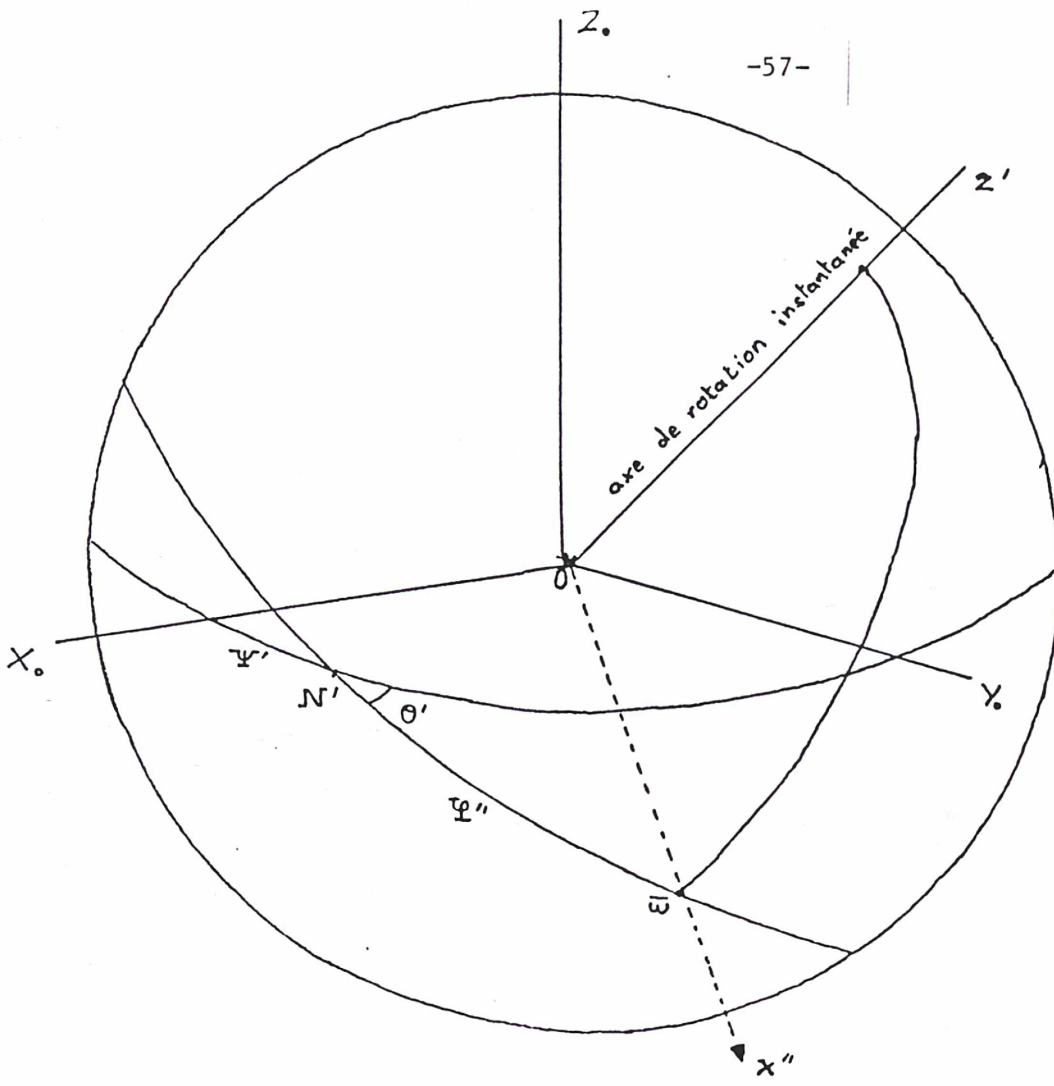


Figure 16

II.15) Détermination de $\bar{\omega}$ en fonction des angles d'Euler Ψ , θ , et φ ainsi que de leurs dérivées.

On sait que le point $\bar{\omega}$, situé sur l'équateur de rotation instantanée, est localisé par rapport au noeud $N(t)$, par l'intermédiaire de l'angle φ'' (relation (30))

$$\varphi'' = \int_{t_0}^t (\Omega - \dot{\Psi}' \cos \theta') dt + cte$$

Les expressions formelles de $\dot{\Psi}'$, $\cos \theta'$, et Ω en fonction des angles d'Euler Ψ , θ et φ ainsi que de leurs dérivées, sont les suivantes:

D'après l'annexe II (relation II.2)

$$\dot{\Psi}' = \dot{\Psi} - \left[\frac{\dot{\varphi} \dot{\theta}^2 \cos \theta}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \right] + \left[\frac{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \frac{d(\dot{\theta} / \dot{\varphi})}{dt} \right] \quad (31)$$

D'après l'annexe I (relation I.3):

$$\cos \theta' = \left[\frac{\dot{\Psi} + \dot{\varphi} \cos \theta}{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\Psi} \cos \theta} \right] \quad (32)$$

Enfin, Ω s'exprime ainsi:

$$\Omega = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\Psi} \cos \theta} \quad (17)$$

En résumé:

Le point $\bar{\omega}$, situé sur l'équateur de rotation instantanée, est localisé par rapport au noeud $N(t)$ de la manière suivante:

$$\widehat{N\bar{\omega}} = \varphi'', \text{ avec : } \varphi'' = \int_{t_0}^t (\Omega - \dot{\Psi}' \cos \theta') dt + \varphi_0''$$

Où les quantités $\dot{\Psi}'$, $\cos \theta'$, et Ω impliquées peuvent s'exprimer en fonction des angles d'Euler Ψ , θ , φ et de leur dérivées:

$$\dot{\Psi}' = \dot{\Psi} - \left[\frac{\dot{\varphi} \dot{\theta}^2 \cos \theta}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \right] + \left[\frac{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \frac{d(\dot{\theta} / \dot{\varphi})}{dt} \right]$$

$$\cos \theta' = \frac{\dot{\Psi} + \dot{\varphi} \cos \theta}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\Psi} \cos \theta}}$$

$$\| \text{Et : } \Omega = \sqrt{\psi^2 + \theta^2 + \psi^2 + 2\psi\psi \cdot \cos \theta}$$

II.16) Les coordonnées de $\vec{\omega}$ dans R

Tout comme σ , que l'on a positionnée par ses coordonnées rectangulaires dans R, il est possible, connaissant les angles d'Euler qui lui sont associés, d'exprimer les coordonnées rectangulaires de $\vec{\omega}$ dans R = (0,x,y,z). Ainsi, aux valeurs ψ' , θ' , ϕ' des angles d'Euler permettant de localiser σ dans R, se substitueront les angles d'Euler $(\Gamma - \frac{\pi}{2})$, ν et Φ , permettant de positionner $\vec{\omega}$ dans R.

En adoptant ces substitutions dans (22), on obtient directement les coordonnées rectangulaires de $\vec{\omega}$ dans R:

$$\vec{\omega} / R \left| \begin{array}{l} \sin \Gamma \cos \Phi + \sin \Phi \cos \Gamma \cos \nu \\ - \cos \Gamma \cos \Phi + \sin \Phi \sin \Gamma \cos \nu \\ - \sin \nu \sin \Phi \end{array} \right.$$

$$\text{avec: } \Phi = - \int_{t_0}^t \dot{\Gamma} \cos \nu dt + \Phi_0$$

(33)

II.17) La quantité "s'"

Dans la première partie (chapitre I.9), on a vu comment il était possible de localiser l'origine non-tournante $\bar{\omega}$ à partir du noeud de l'équateur de rotation instantanée sur un équateur de référence lié à la Terre. On peut, de manière équivalente, faire intervenir ici une quantité "s'" telle que, si Π_0 est l'intersection de l'axe Ox avec S, s' désigne, par analogie avec (6):

$$s' = (\widehat{\bar{\omega} M} - \widehat{\Pi_0 M}) - (\widehat{\bar{\omega}_0 M_0} - \widehat{\Pi_0 M_0}) \quad (\text{cf. Figure 15}) .$$

M étant le noeud descendant de l'équateur de rotation instantanée de S sur l'équateur de référence (0,x,y).

On sait que $\widehat{M \bar{\omega}}$ est l'angle de rotation complémentaire Φ déjà évoqué plus haut. Quant à $\widehat{\Pi_0 M}$, c'est l'angle de précession ($\Gamma^2 - \frac{\pi}{2}$). D'où l'expression de la dérivée de s' :

$$d s' = d (\widehat{\bar{\omega} M}) - d (\widehat{\Pi_0 M}) = - d \Phi - d(\Gamma^2 - \frac{\pi}{2}) .$$

Or, d'après (28): $d \Phi = - \cos \nu \quad d \Gamma^2$.

Ainsi: $d s' = (\cos \nu - 1) d \Gamma^2$.

Et: $s' = (\widehat{\bar{\omega} M} - \widehat{\Pi_0 M}) - (\widehat{\bar{\omega}_0 M_0} - \widehat{\Pi_0 M_0}) = \int_{t_0}^t (\cos \nu - 1) d \Gamma^2$

avec : $M_0 = M(t_0)$

(34)

Cas particulier

Si le positionnement de $\bar{\omega}$ est imposé par (34), sa localisation initiale est arbitraire. Aussi, on peut envisager le cas simplifié où $\bar{\omega}(t_0)$ est tel que:

$$\widehat{\bar{\omega}(t_0) M_0} = \widehat{\Pi_0 M_0} \quad (\text{cf. I.9})$$

Ce qui donne alors l'expression simplifiée de s' :

$$s' = (\widehat{\bar{\omega} M} - \widehat{\Pi_0 M}) = \int_{t_0}^t (\cos \nu - 1) d \Gamma^2$$

II.18) Rôle fondamental joué par les Origines Non-Tournantes σ et $\bar{\omega}$.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de S par rapport au référentiel absolu R_0 peut se décomposer en trois vecteurs rotation:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{[R/R_0]} = \vec{\Omega}_{[R/R'']} + \vec{\Omega}_{[R''/R']} + \vec{\Omega}_{[R'/R_0]} \quad (35)$$

$R_0 = (0, X_0, Y_0, Z_0)$ étant le référentiel absolu,

$R' = (0, x', y', z')$ étant lié à σ

(Oz' porté par $\vec{\Omega}$, Ox' porté par σ),

$R'' = (0, x'', y'', z'')$ étant lié à $\bar{\omega}$

(Oz'' porté par $\vec{\Omega}$, Ox'' porté par $\bar{\omega}$),

et $R = (0, x, y, z)$ lié à S .

\vec{k}' étant le vecteur unitaire lié à $\vec{\Omega}$,

$$\Omega = \vec{k}' \cdot \vec{\Omega} = (\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R/R'']}) + (\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R''/R']}) + (\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R'/R_0]})$$

Or, par définition des Origines Non-Tournantes σ et $\bar{\omega}$:

$$\vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R/R'']} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R'/R_0]} = 0$$

Et donc:
$$\Omega = \vec{k}' \cdot \vec{\Omega}_{[R''/R']} = \widehat{\sigma O \bar{\omega}}$$

D'où la justification cinématique de σ et de $\bar{\omega}$:

$$\widehat{\sigma O \bar{\omega}} = \Omega \quad (36)$$

L'angle, sur l'équateur de rotation instantanée, entre les deux Origines Non-Tournantes σ et $\bar{\omega}$, a une dérivée qui est rigoureusement égale en amplitude au vecteur rotation Ω (cf. Figure 17).

C'est cette propriété qui est utilisée, dans le cas pratique de la rotation de la Terre (chapitre I.6).

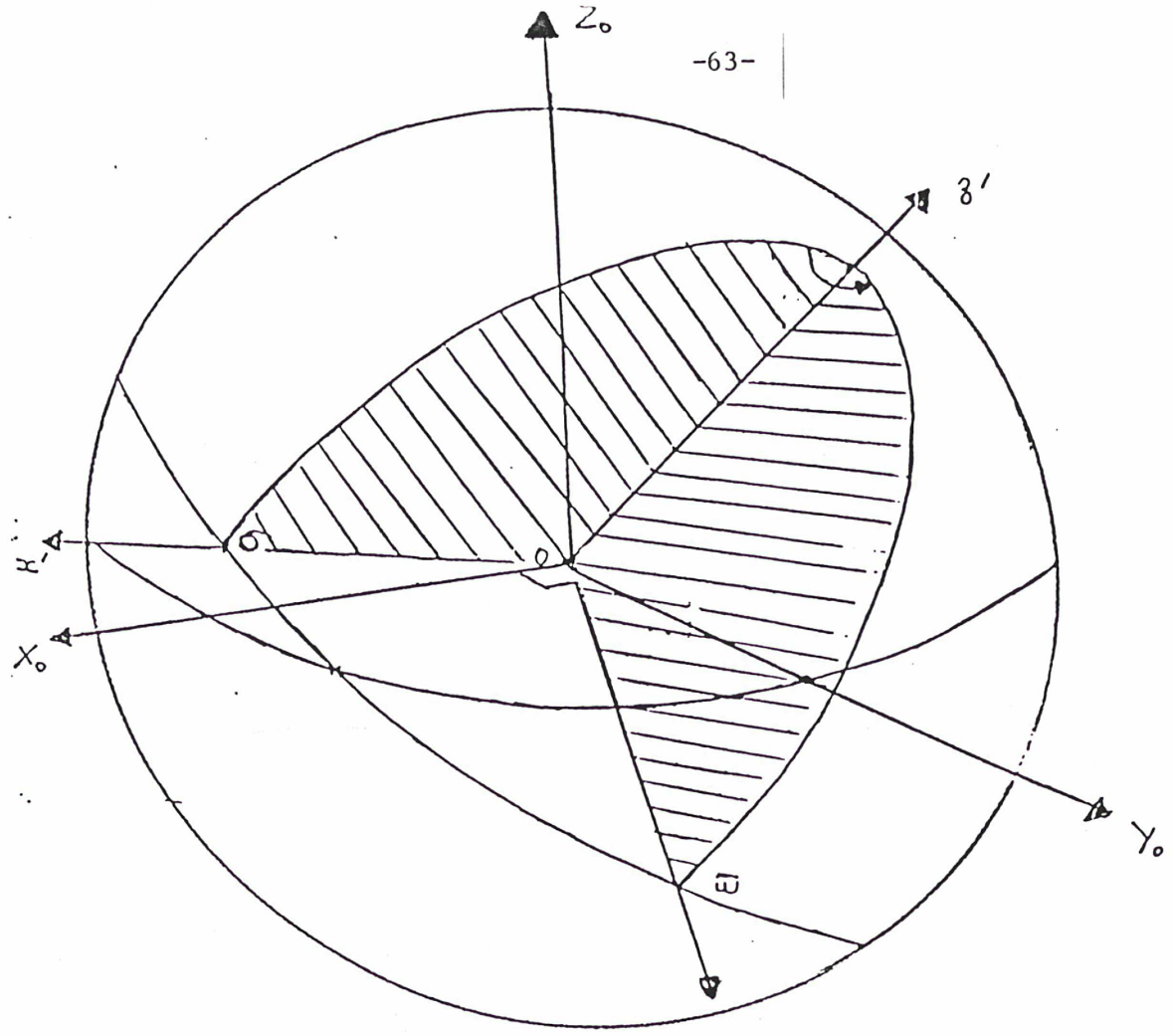


Figure 17

TROISIEME PARTIE

LA DEFINITION ACTUELLE DE UTI
ET SES INCONVENIENTS

III.1) Généralités

L'"Origine Non-Tournante" (Guinot 1979) ayant été conçue pour rendre plus claire et plus exacte la notion de "Temps Universel", il semble intéressant de bien cerner la manière dont est réalisée l'actuelle définition de UT1.

On s'attachera ainsi à rappeler les notions de Temps Sidéral, de Temps Universel, puis du lien qui les unit. Ensuite, on invoquera les raisons pour lesquelles cette définition, de type purement conventionnel, s'avère insatisfaisante.

Dans un premier temps, on présentera le cadre dans lequel s'effectue toute cette étude.

III.2) Donnée pratique d'un référentiel absolu

La notion de référentiel absolu est intimement liée à la notion de "référentiel inertiel" par allusion à la célèbre loi d'Inertie émise par Newton en 1686: "Tout corps reste dans un état de repos, ou dans un état de mouvement rectiligne uniforme à moins qu'il ne soit amené à changer d'état par l'intermédiaire de forces agissant sur lui-même". En mécanique classique, des systèmes de référence dans lesquels la loi ci-dessus reste valide, sont appelés des systèmes de référence "inertiels".

On peut en fin de compte trouver deux définitions possibles d'un référentiel inertiel (Mc.Green, p.49): l'une est que, dans un tel référentiel, les lois du mouvement de Newton peuvent être appliquées; l'autre qu'un tel référentiel reste fixe par rapport au reste de l'Univers.

D'un point de vue pratique, le catalogue FK5 est officiellement le catalogue de base pour la détermination implicite du plan de référence inertiel qu'est l'équateur moyen de l'époque ($t_0 = J 2000,0$). Le FK5 est une version améliorée du catalogue qui le précède, le FK4, adopté par l'UAI en 1961, et qui regroupait alors 1535 étoiles fondamentales distribuées de la manière la plus uniforme possible dans le ciel (Fricke, Kopff & al., 1963). L'exigence de la prise en compte d'un nombre d'étoiles plus élevé bien intégré au système du FK4 a conduit ensuite à la formation du FK4 Sup, par Fricke et ses collaborateurs (1987 étoiles supplémentaires), puis enfin du FK5.

Ce dernier se justifie en partie par le fait qu'il a fallu ajouter aux ascensions droites des étoiles du FK4 une correction d'équinoxe de telle manière que ce dernier se rapproche au mieux de l'équinoxe dynamique. De plus, une nouvelle constante de précession a été calculée (Lieske & al., 1977) qui a, elle aussi, été prise en compte.

Plusieurs défauts restent attachés à un tel catalogue d'étoiles: tout d'abord, si on admet que l'origine 0 du référentiel ainsi élaboré est en coïncidence avec le centre de gravité de la Terre, cette origine possède un mouvement accéléré, et ne peut donc pas être considérée comme l'origine d'un référentiel inertiel (Mc.Green, p.59), au sens de la mécanique classique (plus précisément, la vitesse orbitale de la Terre sur son orbite, de l'ordre de 30 km/s, correspond à 10^{-4} fois celle de la lumière).

Néanmoins, il est vrai qu'au sens de la relativité restreinte, on peut concevoir qu'un système se déplaçant avec la Terre autour du Soleil puisse être qualifié de référentiel inertiel, ceci grâce à un principe énoncé par Einstein (1956), en vertu duquel: "Il existe des régions finies de l'Univers où, par rapport à un espace de référence convenablement choisi, les particules matérielles se déplacent librement sans accélération, et dans lesquelles les lois de la relativité restreinte sont valables avec une exactitude remarquable". Il semble que le système solaire, dans lequel le centre de masse du système Terre-Lune "tombe" sur une orbite elliptique autour du Soleil, dans un champ gravitationnel faible, constitue une telle région (Mueller, 1980).

Le résultat est qu'on se doit, en plus des corrections de

parallaxe et d'aberration en vigueur, d'effectuer des corrections relativistes, lorsque une haute précision est exigée.

Autre inconvénient, les axes de référence associés aux catalogues d'étoiles utilisés actuellement se trouvent être en rotation par rapport au reste de l'Univers. Ceci provient de ce que les étoiles sont en mouvement les unes par rapport aux autres d'une part, et participent à une rotation d'ensemble autour du centre galactique d'autre part (Fricke, 1971). Ainsi, la rotation galactique différentielle elle-même produit-elle un mouvement propre μ pour une quelconque étoile du plan galactique, donnée par:

$$\mu = A \cos 2l + B$$

où l est la longitude galactique de l'étoile considérée et A et B sont les constantes de Oort. Ces dernières sont sujettes à révision (Oort, 1967; Fatchikin, 1970; Vlasiveskis & Klemola, 1971). Leur incertitude est de l'ordre du dixième de seconde d'arc pour un siècle, ce qui apparaît relativement élevé. En guise d'exemple, on pourra se référer, parmi d'autres, aux évaluations récentes de Fatchikin (1970) à partir d'étoiles appartenant au catalogue FK4:

$$\begin{aligned} A &= + 0,08'' \pm 0,10'' & / \text{ siècle} \\ B &= + 0,22'' \pm 0,09'' & / \text{ siècle} \end{aligned}$$

Enfin, un catalogue d'étoiles ne reste valide que dans un intervalle de temps relativement court (quelques décennies), intervalle au bout duquel une révision des mouvements propres des étoiles fondamentales s'avère nécessaire.

Compte tenu de tous ces éléments, il est impossible de définir avec une précision optimale un référentiel inertiel à partir des données brutes d'un catalogue d'étoiles.

L'adoption d'un nouveau catalogue de type VLBI permet de s'affranchir de ces derniers inconvénients. En effet, les observations de type VLBI permettent de situer des objets extra-galactiques dont on est persuadé qu'ils ne présentent pas de mouvement propre significatif par rapport à un référentiel inertiel. Ces observations conduisent ainsi à l'élaboration d'un système de référence céleste, encore appelé CRS (cf. chapitre I.2), ou système de référence non-tournant (Guinot, 1979), quasi-idéal.

III.3) Donnée pratique d'un référentiel terrestre

Des causes géodynamiques rendent complexe la mise en oeuvre d'un tel référentiel. Ce sont les mouvements tectoniques, qu'ils s'étendent sur une zone assez restreinte (failles, tremblements de terre, etc...) ou bien sur des milliers de kilomètres, tel le rift médio-océanique qui, au milieu de l'Atlantique, tend à écarter la plaque américaine de la plaque indo-européenne (Stablinski, 1981). Ces mouvements, de plus ou moins grande amplitude, ont pour effet direct de modifier les distances entre les différents sites d'observation dans un ordre de grandeur qui est celui des observations les plus précises, émanant des sessions VLBI (Boucher, 1984).

On est donc contraint d'adopter un référentiel terrestre conventionnel, encore appelé TRS (cf. I.3) défini sous la condition qu'il n'existe pas de rotation ou de translation significative entre la surface de la Terre dans son ensemble et ce système de référence.

L'un des objectifs du Service International de la Rotation de la Terre (IERS), anciennement BIH, est de réaliser le TRS par un ensemble de coordonnées cartésiennes de stations d'astrométrie et de géodésie spatiale, participant aux observations des paramètres de la rotation de la Terre (Annual Report for 1986, BIH, p.A1). Le TRS n'est alors pas seulement un système de référence en direction, mais aussi un système de coordonnées géocentriques.

III.4) Les théories des déplacements des plans fondamentaux

La modélisation des plans fondamentaux que sont l'écliptique moyen et l'équateur vrai, s'effectue selon deux théories principales: celle des perturbations planétaires, en ce qui concerne le premier, et celle des perturbations luni-solaires en ce qui concerne le second (en tenant compte du fait que l'on a tout de même besoin de connaître la position de l'écliptique pour connaître la position de l'équateur).

Le mouvement du pôle de l'écliptique par rapport à un écliptique fixe, dû aux perturbations planétaires, a été traité initialement par Newcomb (1894), ce dernier ayant calculé le moment cinétique de la Terre par rapport à l'écliptique fixe de 1850,0. La modélisation conventionnellement admise actuellement (Lieske & al., 1977) est issue de la théorie de Newcomb, en utilisant des données plus exactes (en particulier en ce qui concerne la masse des planètes).

Le mouvement du pôle céleste a été à l'origine défini par Newcomb (1906), puis discuté ensuite par Andoyer (1911), De Sitter & Brouwer (1938), Woolard (1963). Un des problèmes posés est la détermination de la constante de précession (P_0) à partir des données observationnelles. La qualité nettement accrue des observations depuis le début du siècle a conduit récemment à une révision de toutes les quantités relatives à la précession (Lieske & al., 1976). Aussi une nouvelle valeur numérique de la constante de précession P_0 a-t-elle été adoptée par l'Union Astronomique Internationale (XVI^{ème} Assemblée Générale de l'UAI, Grenoble, 1976). Le nouveau catalogue de référence (UAI, 1984) utilisé en correspondance avec cette valeur est celui du FK5.

Quant aux termes de la nutation, il a été décidé (Symposium UAI de Kiev, 1977) qu'ils soient déterminés à partir du nouveau système de référence et du nouveau système de constantes astronomiques évoqués plus haut. Leur valeur conventionnelle définit la nutation du CEP, ou Pôle Céleste des Ephémérides, ce dernier ne s'écartant que très faiblement du véritable pôle de rotation instantanée (cf. I.17). Les termes en question résultent de la combinaison de la théorie de la nutation pour un modèle de Terre rigide (Kinoshita, 1979) et de corrections additionnelles provenant de la non-rigidité de la planète (Wahr, 1981). On trouve leur donnée dans "La Connaissance des Temps" (Bureau des Longitudes, 1988).

III.5) Terminologie usuelle se rapportant à l'étude du mouvement des plans fondamentaux.

Devant le nombre assez important de quantités intervenant dans la théorie du mouvement de rotation de la Terre dans l'espace, il apparaît judicieux de consacrer un chapitre à la nomenclature des différentes quantités en question.

Six plans fondamentaux principaux peuvent s'avérer utiles dans la perspective de l'étude présente. Ce sont :

. L'écliptique (moyen) conventionnel de la date initiale t_0 (on dit encore de l'"époque"), que l'on appellera $E(t_0)$.

. L'écliptique (moyen) conventionnel de la date t , que l'on appellera $E(t)$.

. L'équateur moyen conventionnel de la date t_0 , que l'on appellera $E_q^m(t_0)$

. L'équateur moyen conventionnel de la date t , $E_q^m(t)$

. L'équateur vrai conventionnel de la date t , $E_q^v(t)$

. Le véritable équateur de rotation de la Terre, $E_q(t)$

En s'inspirant pour une large part des notations officiellement en vigueur (cf. "La Connaissance Des Temps, 1986"), on notera :

. χ_0 l'équinoxe moyen de la date t_0 , comme intersection entre $E_q^m(t_0)$ et $E(t_0)$.

. χ_m l'équinoxe moyen de la date t , comme intersection entre $E_q^m(t)$ et $E(t)$.

. χ_v l'équinoxe vrai de la date t , comme intersection entre $E_q^v(t)$ et $E(t)$.

. χ_d le noeud descendant de $E_q(t)$ sur l'écliptique $E(t_0)$.

. N le noeud ascendant de l'écliptique $E(t)$ sur l'écliptique $E(t_0)$.

. Q le noeud ascendant de $E_q(t)$ sur $E_q^m(t_0)$.

. Π_a la longitude, comptée à partir de χ_0 le long de

l'écliptique de l'époque t_0 , du noeud N.

- . η_A l'angle d'inclinaison entre les écliptiques $E(t_0)$ et $E(t)$
- . Ψ_A l'angle de précession, compté à partir de γ_0 , localisant le noeud descendant de $E_q^m(t)$ sur $E(t_0)$.
- . ω_A l'angle d'inclinaison entre $E_q^m(t_0)$ et $E(t_0)$.
- . ϵ_A l'angle d'inclinaison entre $E_q^m(t)$ et $E(t)$.
- . χ_A la précession planétaire, représentant en quelque sorte le déplacement de l'écliptique entre les dates t_0 et t le long de l'équateur moyen $E_q^m(t)$.
- . θ_A l'angle d'inclinaison relative des deux équateurs $E(t)$ et $E(t_0)$.
- . $\Delta\Psi$ la nutation en longitude, représentant l'écart relatif le long de l'écliptique de la date t , entre les noeuds des équateurs $E_q^m(t)$ et $E_q^v(t)$, respectivement γ_m et γ_v .
- . $\Delta\epsilon$ la nutation en inclinaison, qui est en fait la contribution de la nutation à l'angle d'inclinaison de l'équateur vrai par rapport à l'écliptique de la date.
- . $\Delta\Psi_1$ et $\Delta\epsilon_1$ les équivalents respectifs de $\Delta\Psi$ et de $\Delta\epsilon$, en ne considérant non plus l'écliptique $E(t)$, mais $E(t_0)$.
- . $\Delta\theta$ et $\Delta\chi$ les valeurs qu'il faut ajouter à θ_A et χ_A lorsqu'on considère non plus l'équateur moyen de la date t , mais l'équateur vrai de cette même date.
- . Ψ' et θ' les paramètres d'Euler associés au véritable pôle de rotation instantané de la Terre, ces mêmes paramètres étant définis par rapport au référentiel quasi-inertiel Ro .

Remarquons tout de suite que ce que l'on entend par équateur de rotation vrai conventionnel n'est rien d'autre que l'équateur perpendiculaire à l'axe relatif au pôle céleste des éphémérides (CEP). Ce pôle s'écarte du véritable pôle de rotation d'une quantité de faible amplitude et de période quasi-diurne par rapport à la Terre. Dans l'espace, l'écart entre le CEP et le véritable pôle de rotation instantanée se traduit principalement par la présence d'un terme constant, d'un terme semi-annuel, et d'un terme semi-mensuel, comme on a pu le voir dans la première partie (chapitre I.17).

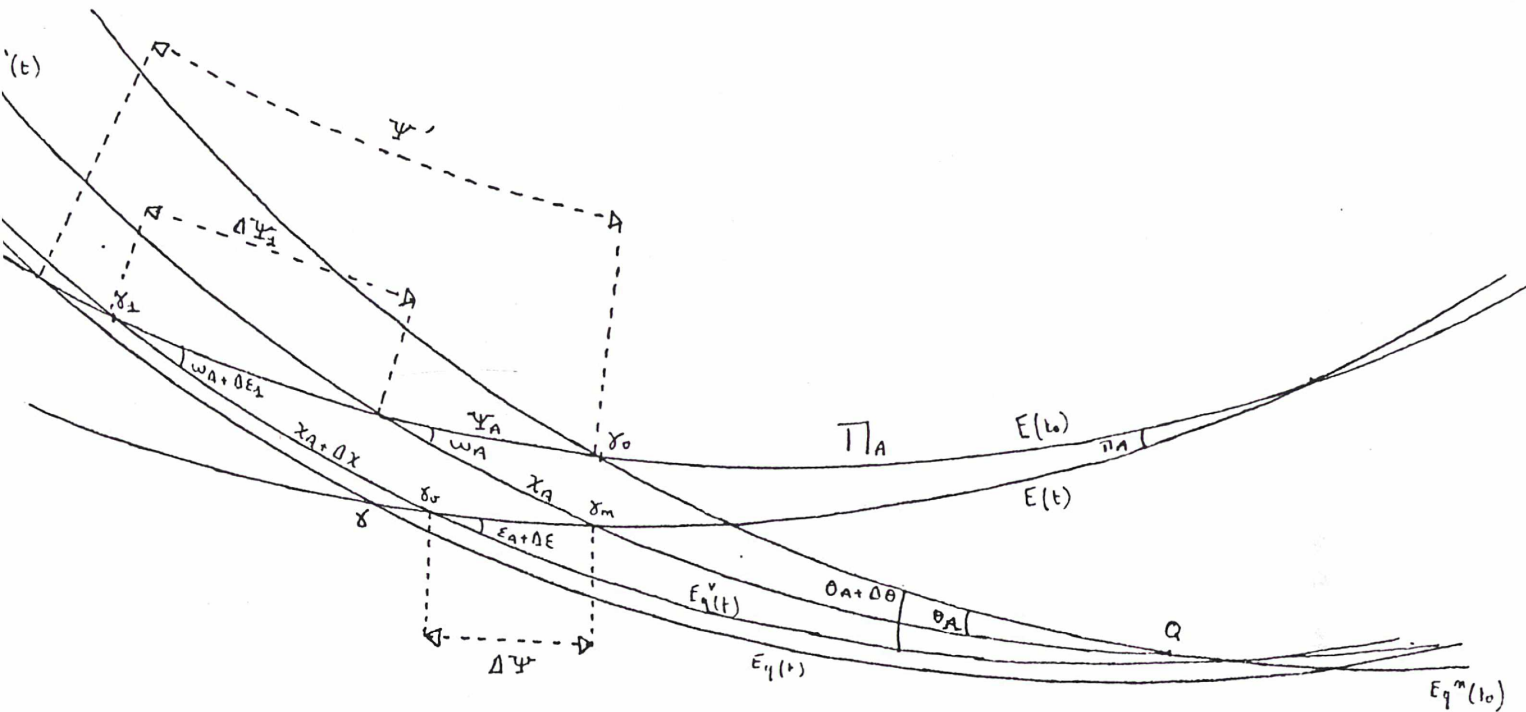


Figure 18

On reporte ici les six plans fondamentaux que sont l'écliptique $E(t_0)$ de la date t_0 , $E(t)$ de la date t , les équateurs moyens $E_q^m(t_0)$ et $E_q^m(t)$, enfin l'équateur vrai conventionnel $E_q(t)$ et le véritable équateur instantané de rotation $E_q'(t)$.

Toutes les notations relatives aux orientations relatives des quatre premiers plans sont les notations officielles adoptées par l'UAI et se trouvent dans "La Connaissance des Temps", il n'en est pas de même des notations $\Delta\theta$, $\Delta\lambda$, $\Delta\epsilon_1$, et $\Delta\Psi_1$, paramètres qui complètent l'ensemble.

III.6) Définition du "Temps Sideral Vrai" (Figure 19)

γ_v étant l'équinoxe vrai , c'est à dire l'intersection de l'équateur de rotation instantanée et l'écliptique de la date.

$\bar{\omega}$ étant l'intersection entre le méridien choisi conventionnellement comme méridien de rotation origine et l'équateur de rotation instantanée:

on appelle "Temps Sideral Vrai" la mesure de $\widehat{\bar{\omega} \gamma_v}$, compté en heures , minutes , secondes , cette mesure étant positive à l'ouest du meridien origine instantané.

On nommera " τ_v " le Temps Sideral Vrai , conformément à une dénomination courante (Woolard & Clemence p.337). On notera que la détermination de τ_v depend en fin de compte de trois localisations différentes:

(a) La localisation, par rapport à R_0 , du pôle de l'écliptique. Elle exige la donnée de deux paramètres en fonction du temps, qui sont l'inclinaison π_A du plan de l'écliptique par rapport au plan quasi-inertiel de référence considéré (en l'occurrence l'écliptique de t_0) et le déplacement Π_A le long de ce dernier de la ligne des noeuds que forme l'intersection des deux plans en question.

(b) La localisation, par rapport à R_0 , du pôle de rotation instantanée P . A cette fin, on a évidemment besoin d'un maximum de précision en ce qui concerne les termes polynômiaux de la précession , ainsi que les termes sinusoïdaux de la nutation, ces deux mouvements se combinant pour reconstituer le déplacement de l'axe de rotation instantanée dans l'espace.

(c) La localisation, par rapport à R , du pôle de rotation, puis du méridien origine qui s'en trouve issu. En effet, le point $\bar{\omega}$, par lequel passe ce méridien origine, n'est autre que l'Origine Non-Tournante définie sur l'équateur de rotation instantanée (cf. première partie, I.5): or, le positionnement de cette dernière dans le TRS est connu dès lors qu'est connu le positionnement de P dans le TRS.

Remarque

----- L'emploi de l'Origine Non-Tournante pour définir le méridien origine instantané clarifie cette définition. Jusque là cette dernière était restée vague: on considérait généralement que le méridien origine était défini par le pôle de rotation instantanée et un point de l'équateur fixe de référence.

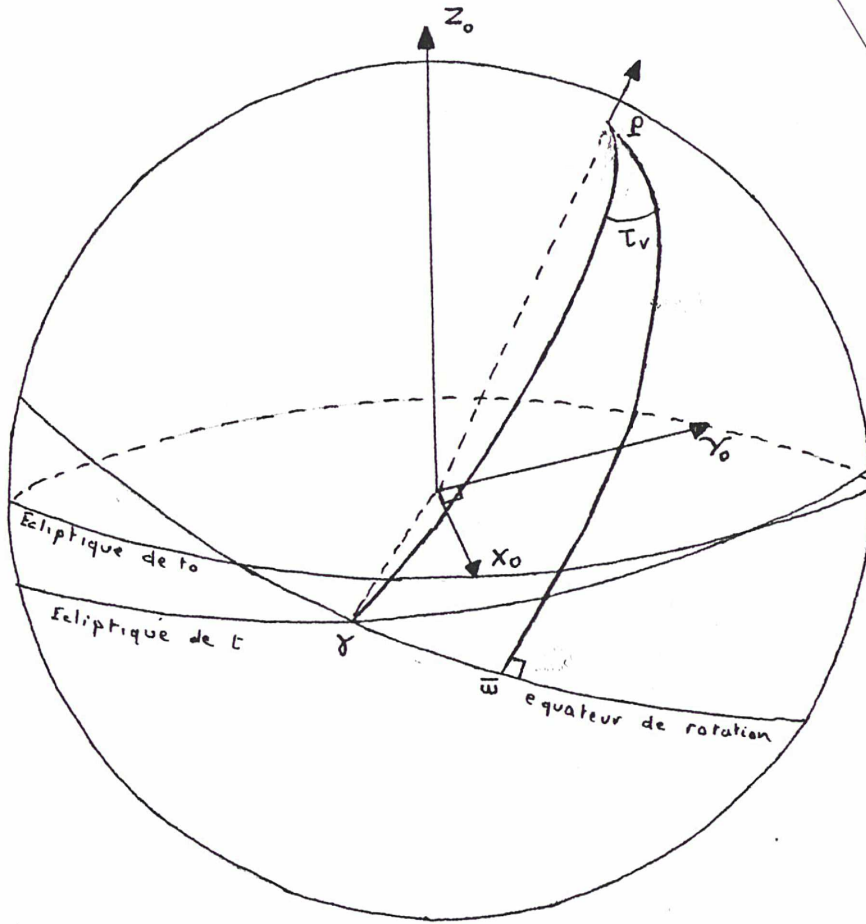


Figure 19

Le système de référence quasi-inertiel impliqué ici sera $R_0=(0, X_0, Y_0, Z_0)$ lié à l'écliptique (moyen) de la date initiale t_0 . γ est l'intersection à la date t de l'équateur de rotation instantanée avec l'écliptique moyen de cette date.

P est le pôle de rotation instantanée de la Terre. Le méridien de rotation origine est défini conventionnellement comme étant le demi-grand cercle passant par P et l'origine non-tournante $\bar{\omega}$ (cf. I.5).

Le Temps Sidéral est défini par: $\tau_v = \widehat{\bar{\omega} \gamma}$

III.7) Les fondements du Temps Universel

UT1 se définit comme le "Temps Solaire Moyen" par rapport à un méridien origine (en l'occurrence le méridien $P\bar{\omega}$ défini au chapitre précédent). Pour déterminer UT1, on procède ainsi: des observations conduisent à la détermination du Temps Sidéral Vrai (cf. chapitre précédent), puis du Temps Sidéral Moyen qui s'en différencie d'une quantité qui est la nutation en ascension droite (Danjon, 1959, p.114). Le Temps Universel est alors conventionnellement défini par une relation qui le rattache au Temps Sidéral Moyen au méridien origine. Cette relation est intimement liée à l'ascension droite du "Soleil Moyen Fictif", concept établi par Newcomb (1895), dont voici la définition ci-dessous:

Définition

Le Soleil Moyen Fictif "S" est un point conceptuel qui est situé sur l'équateur céleste moyen de la date t et est animé d'un mouvement uniforme le long de cet équateur (dans le système de référence défini par la constante de précession en vigueur). Le mouvement s'effectue à une vitesse qui est égale à la vitesse moyenne du Soleil le long de l'écliptique (à une époque précise).

En fait, pour définir le positionnement du Soleil Moyen Fictif, Newcomb fait implicitement appel à la notion d'"Origine Non-Tournante" (cf. Première Partie), sur l'écliptique tout d'abord, et sur l'équateur moyen ensuite. Cela provient de ce que pour caractériser un quelconque mouvement sur les plans mobiles que sont l'écliptique de la date t et l'équateur moyen de cette date, il faut préalablement avoir conçu, même sans l'énoncer, la condition de non-rotation le long de ces plans, cette condition étant parfaitement matérialisée par l'Origine Non-Tournante (cf. Première partie, chapitre I.5).

Pour exprimer dans un premier temps la longitude moyenne du Soleil en fonction de sa vitesse moyenne et de son accélération séculaire, on se réfèrera à la figure 20: celle-ci présente les écliptiques $E(t_0)$ et $E(t)$ des dates t_0 et t , situés l'un par rapport à l'autre par les angles classiques (Lieske & al., 1977) η_A et Π_A . Si on fait coïncider l'Origine Non Tournante $\sigma_{ec}(t_0)$ sur $E(t_0)$, avec γ_0 , équinoxe moyen de la date t_0 (rappelons qu'à la date initiale t_0 , σ_{ec} est arbitrairement choisie) celle, $\sigma_{ec}(t)$ qui s'en déduit sur $E(t)$, vérifiera (N étant le noeud des deux écliptiques):

$$\overbrace{\sigma_{ec}(t) N(t)} - \overbrace{\sigma_{ec}(t_0) N(t_0)} = - \int_{t_0}^t (1 - \cos \eta_A) d\Pi_A \quad ,$$

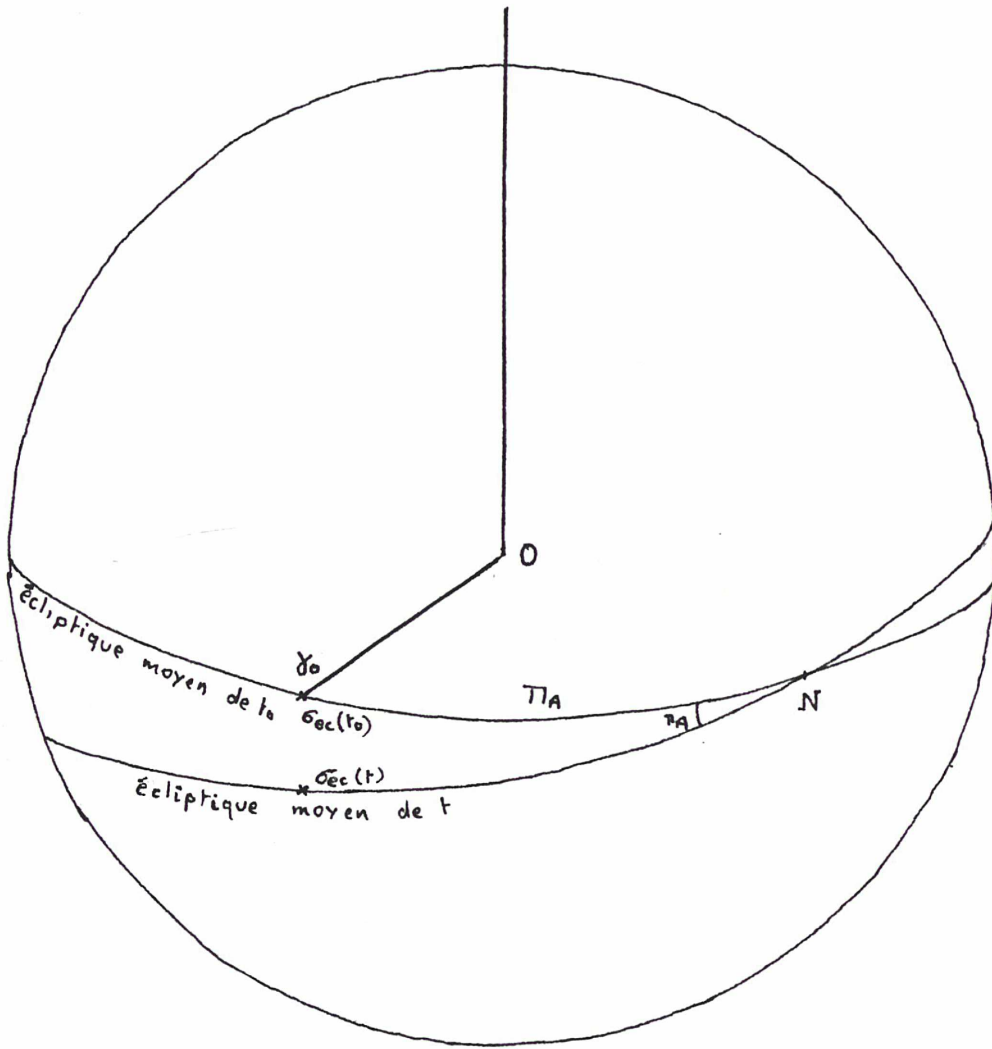


Figure 20

en vertu d'une formulation identique à la formulation (3) de la première partie (les angles π_A et $\frac{\pi}{2} + \pi_A$ se substituant respectivement aux angles \bar{d} et \bar{E}). De par la petitesse de π_A :

$$\overline{\sigma_{ec}(t) N(t)} - \overline{\sigma_{ec}(t_0) N(t)} = \overline{\sigma_{ec}(t) N(t)} - \overline{\gamma_0 N(t)} = - \int_{t_0}^t (\pi_A/2)^2 d\pi_A \quad . \quad (37)$$

Un calcul immédiat montre que cette quantité n'atteint pas $10^{-6}''$ en un siècle, ce qui permet de l'assimiler sans peine à 0, compte tenu du degré de précision exigé (de l'ordre de $10^{-5}''$ par siècle), soit :

$$\overline{\sigma_{ec}(t) N(t)} = \overline{\sigma_{ec}(t_0) N(t)}$$

Or, si γ_m désigne l'équinoxe moyen de t , γ_0 sa valeur à la date t_0 , γ_0 et γ_m seront liés par la précession générale en longitude, p_A :

$$\overline{\gamma_m N(t)} - \overline{\gamma_0 N(t)} = p_A = p_1 t + p_2 t^2 \quad (38)$$

en vertu du développement polynômial classique de p_A (cf. Lieske & al., 1977).

L'association des deux dernières équations donne :

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_m N(t)} - \overline{\gamma_0 N(t)} &= \overline{\gamma_m \sigma_{ec}(t)} + \overline{\sigma_{ec} N(t)} - \overline{\gamma_0 N(t)} = \overline{\gamma_m \sigma_{ec}(t)} = p_A \\ \overline{\gamma_m N(t)} - \overline{\gamma_0 N(t)} &= p_A = p_1 t + p_2 t^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Si λ_1 désigne la vitesse sidérale du Soleil et $2\lambda_2$ son accélération séculaire, ces deux valeurs sont définies en choisissant σ_{ec} comme point de départ; ainsi, la longitude moyenne du Soleil sera-t-elle donnée par :

$$L = \overline{\gamma_m \sigma_{ec}} + \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \quad , \text{ et, en vertu de (39):}$$

$$L = p_1 t + p_2 t^2 + \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$$

$$L = \lambda_0 + (p_1 + \lambda_1) t + (p_2 + \lambda_2) t^2$$

$$L = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 \quad (40)$$

Avec: $L_0 = \lambda_0$; $L_1 = (\lambda_1 + p_1)$; $L_2 = (\lambda_2 + p_2)$

La longitude moyenne du Soleil ainsi formulée, il reste à traduire l'exigence selon laquelle le Soleil Moyen Fictif S possède un mouvement sidéral strictement uniforme le long de l'équateur moyen de t .

Là encore, on se doit de faire intervenir une Origine Non-Tournante σ_m (m se référant à "moyen") située cette fois-ci sur l'équateur moyen $Eq_m(t)$ de la date t , et qu'on pourra, par souci de

simplicité, faire correspondre avec γ_0 à l'instant t_0 . La condition d'uniformité du mouvement de S ne se conçoit que par rapport à σ_m . $\sigma_m(t)$ est liée à $\sigma_m(t_0)$ par la quantité \bar{s}_m (cf. II.12) s'exprimant en fonction des angles θ_A et ζ_A permettant de positionner Eq(t) par rapport à Eq(t_0).

$$\begin{aligned} \bar{s}_m &= \widehat{\sigma_m(t) Q(t)} - \widehat{\sigma_m(t_0) Q(t)} = - \int_{t_0}^t (1 - \cos \theta_A) d(-\zeta_A) \\ &= \int_{t_0}^t (1 - \cos \theta_A) d\zeta_A \end{aligned}$$

(on applique ici la relation (25) du chapitre II.12, $(\pi/2) - \zeta_A$ correspondant à \bar{E} et θ_A à \bar{d}). Et, du fait de la petitesse de θ_A :

$$\bar{s}_m = \int_{t_0}^t (1/2) \theta_A^2 d\zeta_A \quad (41)$$

En outre le point S qui est défini comme possédant un déplacement strictement uniforme le long de l'équateur moyen de la date t vérifiera donc :

$$\widehat{\sigma_m S} = \mu t + \mu_0 \quad (42)$$

où μ_0 et μ sont des constantes arbitraires qu'il convient de déterminer.

Alors, l'ascension droite de S peut se décomposer ainsi :

$$\widehat{\gamma_m S} = \widehat{\gamma_m \sigma_m} + \widehat{\sigma_m S}$$

Pour la connaître, il suffit d'avoir accès à la quantité qui exprime l'ascension droite de l'Origine Non Tournante σ_m .

Q étant le noeud ascendant de l'équateur moyen $E_q^m(t)$ sur $E_q^m(t_0)$, on a accès, par l'intermédiaire des éphémérides, à la quantité $(\widehat{\gamma_m Q} - \widehat{\gamma_0 Q})$, à savoir la précession générale en ascension droite $m = (\zeta_A + z_A)$, et qui s'exprime classiquement sous forme polynômiale en t, t désignant un temps idéal (pratiquement, il s'agit du TDT, ou "Temps Dynamique Terrestre")

$$m = (\zeta_A + z_A) = m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3$$

Par différenciation entre cette quantité et la quantité s, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_m \sigma_m} &= (\widehat{\gamma_m Q} - \widehat{\gamma_0 Q}) - (\widehat{\sigma_m Q} - \widehat{\sigma_0 Q}) \\ &= m - \bar{s}_m \\ &= m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3 - \int_{t_0}^t (1/2) \theta_A^2 d\zeta_A \quad (43) \end{aligned}$$

D'où l'expression finale de l'ascension droite α_s du Soleil Moyen Fictif :

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \widehat{\gamma_m S} = \widehat{\gamma_m \sigma_m} + \widehat{\sigma_m S} \\ \alpha_s &= \widehat{\delta_m S} = m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3 - (1/2) \int \theta_A^2 d\zeta_A + \mu_0 + \mu t \\ \alpha_s &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 - \bar{s}_m \quad (44) \end{aligned}$$

Avec: $\bar{s}_m = (1/2) \int \theta_A^2 d\zeta_A$

$$\alpha_0 = \mu_0, \quad \alpha_1 = (m_1 + \mu_1), \quad \alpha_2 = m_2, \quad \alpha_3 = m_3$$

Par définition même de S, son mouvement sur $E_1^m(t)$ s'effectue selon la longitude moyenne du Soleil. Aussi y-aura-t-il identification entre les termes constants et du premier ordre de L et de α_s :

$$L_0 = \alpha_0, \quad L_1 = (\lambda_1 + p_1) = (\mu + m_1) \quad (45)$$

Cette dernière équation impose la valeur de la vitesse μ de S :

$$\mu = (\lambda_1 + p_1 - m_1) \quad (46)$$

Et dont se déduit l'expression de l'ascension droite de S :

$$\alpha_s = \alpha_0 + (\lambda_1 + p_1) t + m_2 t^2 + m_3 t^3 - \bar{s}_m$$

$$\alpha_s = \alpha_0 + (\lambda_1 + p_1) t + m_2 t^2 + m_3 t^3 - \int_{t_0}^t (1/2) \theta_A^2 d\zeta_A \quad (47)$$

L'écart entre la longitude moyenne du Soleil et l'ascension droite du Soleil Moyen Fictif a pour valeur, d'après (40) et (47):

$$L - \alpha_s = (L_2 - m_2) t^2 - m_3 t^3 + (1/2) \int_{t_0}^t \theta_A^2 d\zeta_A$$

$$L - \alpha_s = (\lambda_2 + p_2 - m_2) t^2 - m_3 t^3 + (1/2) \int_{t_0}^t \theta_A^2 d\zeta_A \quad (48)$$

On aboutit alors à un écart séculaire entre l'ascension droite du Soleil Moyen Fictif, et la longitude moyenne du Soleil, écart provenant à la fois de l'accélération séculaire du Soleil sur son orbite $2 \lambda_2$, et de la différence entre les quantités en t^2 et t^3 dans les termes en ascension droite et en longitude (Woolard & Clemence p.347).

On constate donc, en s'appuyant sur cette équation, l'impossibilité de concevoir un point fictif ayant à la fois un mouvement uniforme le long de l'équateur moyen, et dont l'ascension droite est rigoureusement égale, à tout moment, à la longitude moyenne du Soleil.

En ce qui concerne le Soleil Moyen Fictif S adopté conventionnellement, il remplit la première exigence au détriment de la seconde.

III.8) La définition conventionnelle du Temps Universel.

Une récente définition du Temps Universel UT1 a été recommandée par l'UAI à dater du 1er janvier 1984, en adoptant un nouveau système de référence astronomique (Aoki & al., 1981).

Ce dernier émane lui-même du choix de nouvelles constantes astronomiques (Lieske & al., 1977), d'une nouvelle théorie de la nutation (Wahr, 1981) et du choix d'un nouveau positionnement de l'équinoxe à l'époque J 2000.0 (en l'occurrence celui du FK5).

Aussi, l'expression nouvelle liant Temps Sidéral et Temps Universel trouve-t-elle toujours son origine dans la notion de "Soleil Moyen Fictif" (Newcomb, 1895). Elle se construit numériquement ainsi:

En vertu de (43): $\widehat{\gamma_m \sigma_m} = m - \bar{s}_m$

Selon les paramètres en vigueur (Lieske & al., 1977):

$$\begin{aligned} m &= (\zeta_A + z_A) \\ &= m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3 \\ &= 4612'',4632 t + 1'',39656 t^2 + 0'',036201 t^3 \end{aligned}$$

Et $\bar{s}_m = (1/2) \int_{t_0}^t \theta_A^2 dt$
 $\bar{s}_m = 0'',036293 t^3$

D'où l'ascension droite :

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma_m \sigma_m} &= 4612'',4362 t + 1'',39656 t^2 + 0'',036201 t^3 - 0'',036293 t^3 \\ &= 307^s, 4957 t + 0^s,093104 t^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6} t \end{aligned}$$

Et l'ascension droite du Soleil Moyen Fictif:

$$\alpha_s = \widehat{\gamma_m S} = \widehat{\gamma_m \sigma_m} + \widehat{\sigma_m S}$$

$$\alpha_s = \widehat{\gamma_m \sigma_m} + \alpha_0 + \rho t$$

$$\alpha_s = \alpha_0 + (307^s,4957 + \rho) t + 0^s,093104 t^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6} t^3$$

où t est exprimé en siècles juliens à partir de J 2000.0

Les constantes α_0 et ρ sont définies par les identifications (45) et (46):

$$\alpha_0 = 67310^s,54841$$

$$\rho = 8639877^s,3171$$

Finalement, l'expression conventionnelle de α_s devient:

$$\alpha_s = 67310^s,54841 + 8640184^s,812866 t + 0^s,093104 t^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6} t^3$$

(49)

UT1 est alors défini ainsi, par l'intermédiaire du Temps Sidéral moyen de Greenwich (GMST):

$$\begin{aligned} & \text{GMST à 0h. UT1} && (50) \\ & = \alpha_s - 12 \text{ h} \\ & = 23962^s,54841 + 8640184^s,812866 t + 0^s,093104 t^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6} t^3 \end{aligned}$$

où t est la date exprimée en siècles juliens de UT1 depuis J 2000.0:

$$t = (\text{JD} - 2451545,0)/36525$$

Remarque

L'expression de t en siècles juliens de Temps Universel ne doit pas faire oublier que les différentes entités qui rentrent en ligne de compte dans la relation (50), à savoir la précession générale m, et l'ascension droite du Soleil Moyen Fictif α_s , s'expriment en fonction de t. temps uniforme (qui dans la pratique peut être quasi-idéalement assimilé au Temps Dynamique Terrestre TDT).

De là résulte un défaut conceptuel, sans influence dans la réalité (la différence entre UT1 et un temps rigoureusement uniforme n'étant pas suffisamment grande pour créer un écart numérique significatif en ce qui concerne les entités en question ci-dessus)

III.9) Effet de l'erreur accompagnant la modélisation de l'écliptique sur le Temps Sidéral et le temps Universel

UT1, on l'a vu (relation (50)), dépend directement de l'ascension droite $\overline{\gamma_m S}$ du Soleil Moyen Fictif, elle-même tributaire de la quantité $\overline{\delta_m \sigma_m}$ (relation (43)), qui représente l'ascension droite de l'origine non-tournante σ_m dans le plan de l'équateur moyen de la date t .

La localisation de σ_m ne présente guère de difficultés, par l'intermédiaire de $\overline{\sigma_m}$ (relation (41)); à noter qu'il suffit alors de connaître le mouvement de $E_q^m(t)$ par rapport à $E_q^m(t_0)$ par la donnée des paramètres θ_A et $(\frac{\pi}{2} - \zeta_A)$. Effectivement, en se reportant à la figure 21: σ_m , coïncidant avec γ_0 à la date t , est donnée par:

$$\overline{\sigma_m} = \overline{\sigma_m Q(t)} - \overline{\gamma_0 Q(t)} = (1/2) \int_{t_0}^t \theta_A^2 d\zeta_A$$

d'après (41)

Plus délicate apparaît la détermination, sur $E_q^m(t)$, de l'équinoxe $\gamma_m(t)$, cette détermination dépendant étroitement du positionnement de $E(t)$ par rapport à $E(t_0)$. Il est à ce titre regrettable que, dans le cadre de la rotation de la Terre, on ait recours à un plan dont la modélisation est inévitablement sujette à des imperfections.

Prenons par exemple deux modélisations différentes du mouvement de l'écliptique auxquels correspondront deux positionnements $E_1(t)$ et $E_2(t)$ de cet écliptique, et par là même deux positionnements $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ de l'équinoxe vrai de t . L'écart entre ces deux équinoxes sera (Figure 22):

$$\delta \gamma = \overline{\gamma_1(t) - \gamma_2(t)} = \delta (\chi_A + \Delta \chi)$$

χ_A (chapitre III.5) est la précession planétaire. $\Delta \chi$ est la contribution qu'il faut lui ajouter lorsqu'on prend en compte le mouvement de nutation du pôle de rotation instantanée. Proposons-nous d'établir un ordre de grandeur de la quantité $(\chi_A + \Delta \chi)$.

Les récentes théories (Bretagnon, 1982 ; Newhall & al., 1983 ; Laskar, 1985) donnant l'orientation relative de l'écliptique $E(t)$ par rapport à $E(t_0)$ atteignent un degré de précision extrême, d'autant qu'elles sont amenées à prendre en compte des phénomènes de très faible amplitude, comme par exemple les perturbations relativistes (Laskar, 1985). Le résultat peut se présenter sous la forme d'un développement polynomial de quantités "p" et "q" telles que:

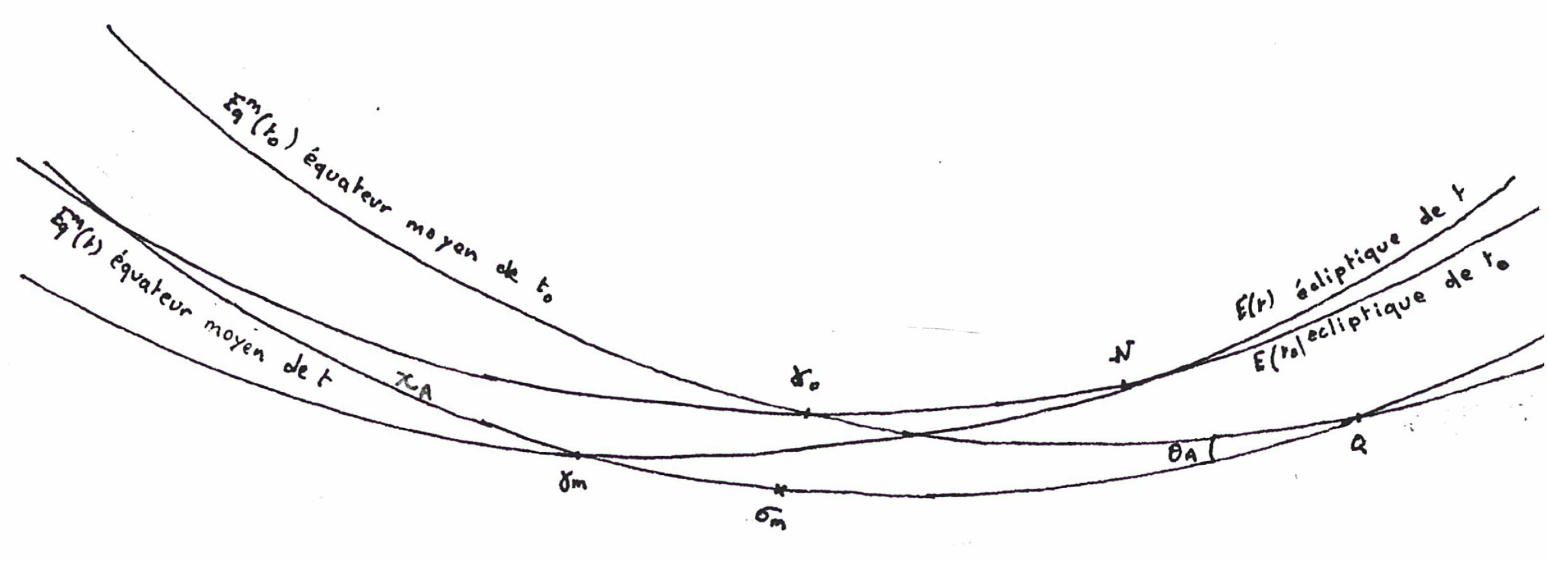


Figure 21

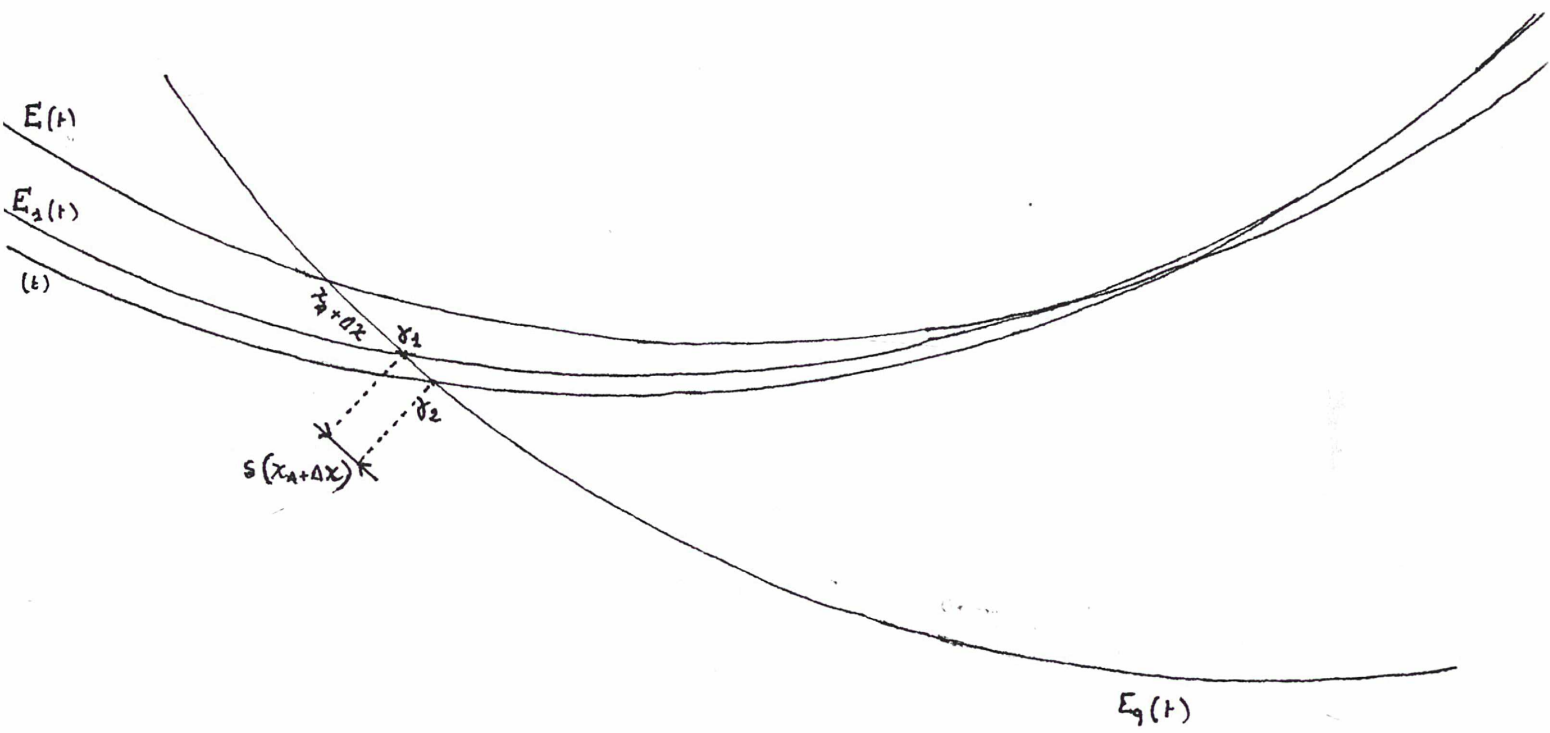


Figure 22

$$p = \sin(\pi_A / 2) \cdot \cos \pi_A$$

$$q = \sin(\pi_A / 2) \cdot \sin \pi_A$$

où π_A est l'inclinaison relative de E(t) par rapport à E(to), et π_A est la longitude du noeud ascendant de E(t) par rapport à E(to) comptée à partir de γ_0 , equinoxe moyen de to (cf. Figure 20).

Le triangle sphérique constitué par les trois plans fondamentaux E(to), E(t) et Eq(t) (cf. Figure 18) permet d'établir, à l'aide de l'analogie des sinus:

$$\left[\frac{\sin(\chi_A + \Delta \chi)}{\sin \pi_A} \right] = \left[\frac{\sin(\pi_A + \psi_A + \Delta \psi_1)}{\sin(\pi - \epsilon_A - \Delta \epsilon)} \right] \quad (51)$$

Soit:

$$\left[\frac{\sin(\chi_A + \Delta \chi)}{\sin \pi_A} \right] = \left[\frac{\sin(\pi_A + \psi_A + \Delta \psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta \epsilon)} \right] \quad (52)$$

Avec:

$$\begin{aligned} & \sin(\pi_A + \psi_A + \Delta \psi_1) \\ &= \sin \pi_A \cos(\psi_A + \Delta \psi_1) + \cos \pi_A \sin(\psi_A + \Delta \psi_1) \end{aligned}$$

Or: $\pi_A = 2 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{q^2 + p^2})$

$$\pi_A = \pi + \operatorname{Arctg}(p / q)$$

Ainsi: $\sin \pi_A = \sin [2 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{q^2 + p^2})]$

$$\sin \pi_A = 2 \sqrt{q^2 + p^2} \cos(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{q^2 + p^2}))$$

$$\sin \pi_A = 2 \sqrt{q^2 + p^2} \sqrt{1 - (q^2 + p^2)} \quad (53)$$

Du fait que : $\operatorname{tg} \pi_A = (p/q)$, il s'ensuit aisément que:

$$\cos \pi_A = \frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{Et:} \quad \sin \pi_A = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Et donc :

$$\sin \pi_A \sin \Pi_A = 2 p \sqrt{1 - (q^2 + p^2)} \quad (54)$$

$$\sin \pi_A \cos \Pi_A = 2 q \sqrt{1 - (q^2 + p^2)} \quad (55)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \sin(\chi_A + \Delta\chi) &= 2 p \sqrt{1 - (q^2 + p^2)} \left[\frac{\cos(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \quad (56) \\ &+ 2 q \sqrt{1 - (q^2 + p^2)} \left[\frac{\sin(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \end{aligned}$$

Etant donnée la petitesse des quantités q et p devant 1 (q est de l'ordre de $10^{-4}/s$ et p de l'ordre de $10^{-5}/s$), on effectuera une erreur relative au plus de l'ordre de 10^{-8} sur un siècle en remplaçant $(1 - q^2 - p^2)$ par 1. De plus, étant donnée la faiblesse présumée de $(\chi_A + \Delta\chi)$, on pourra assimiler ce dernier à son sinus (on s'entoure alors d'une erreur relative de l'ordre de $10^{-9}/s$). Ainsi :

$$(\chi_A + \Delta\chi) = 2 p \left[\frac{\cos(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] + 2 q \left[\frac{\sin(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right]$$

A partir de cette expression, il est possible d'évaluer de manière simple quelle est l'incertitude que l'on commet sur χ lorsque l'on sait préalablement évaluer les incertitudes $\delta(\psi_A + \Delta\psi_1)$, $\delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$, δp et δq qui accompagnent les différents paramètres associés au positionnement des plans fondamentaux (équateur vrai, écliptique moyen) par rapport à l'écliptique moyen d'une date initiale :

$$\begin{aligned} (\chi_A + \Delta\chi) &= 2 \delta p \left[\frac{\cos(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] + 2 \delta q \left[\frac{\sin(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \\ &- 2 p \left[\frac{\sin(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \delta(\psi_A + \Delta\psi_1) \\ &- 2 p \left[\frac{\cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \\ &+ 2 q \left[\frac{\cos(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \delta(\psi_A + \Delta\psi_1) \end{aligned}$$

$$- 2 q \left[\frac{\cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\psi_A + \Delta\psi_1)}{\sin^2(\epsilon_A + \Delta\epsilon)} \right] \delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$$

Etant donné que sur un siècle:

$$(1 - 10^{-7}) < \cos \psi_A < 1$$

$$[\cos(\psi_A + \Delta\psi_1) - \cos \psi_A] < 10^{-9}$$

$$\left[\frac{\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) - \sin \epsilon_0}{\sin \epsilon_0} \right] < 2 \cdot 10^{-4}$$

On assimilera $\cos(\psi_A + \Delta\psi_1)$ à 1, et $\sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$ à $\sin \epsilon_0$. De ce fait:

$$\begin{aligned} & \delta(\chi_A + \Delta\chi) \\ = & (2/\sin \epsilon_0) [\delta p + \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \delta q] \\ & + (2/\sin \epsilon_0) [-p \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) + q] \delta(\psi_A + \Delta\psi_1) \\ & + (2 \cos \epsilon_0 / \sin^2 \epsilon_0) [-p - q \sin(\psi_A + \Delta\psi_1)] \delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \end{aligned}$$

Ainsi l'incertitude $\delta(\chi_A + \Delta\chi)$ dépend-elle en partie des incertitudes δp et δq concernant exclusivement le mouvement de l'écliptique, en partie des incertitudes $\delta(\psi_A + \Delta\psi_1)$ et $\delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$ qui entourent la modélisation du mouvement de l'axe de rotation instantanée. On écrira, pour séparer ces deux composantes:

$$\text{On note: } \delta(\chi_A + \Delta\chi) = \delta a_1 + \delta a_2$$

$$\text{Avec: } \delta a_1 = (2/\sin \epsilon_0) [\delta p + \sin(\psi_A + \Delta\psi_1)] \delta q$$

$$\begin{aligned} \text{Et: } \delta a_2 = & (2/\sin \epsilon_0) [-p \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) + q] \delta(\psi_A + \Delta\psi_1) \\ & + (2 \cos \epsilon_0 / \sin^2 \epsilon_0) [-p - q \sin(\psi_A + \Delta\psi_1)] \delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \end{aligned}$$

(58)

L'indétermination δa_1 :

Celle-ci provenant directement de l'erreur commise sur la modélisation du mouvement de l'écliptique, il va de soi qu'elle est inhérente aux écarts constatés entre les différentes théories de ce mouvement, écart portant sur les paramètres de base p et q .

A titre d'exemple, on se penchera naturellement sur les modélisations les plus récentes du mouvement de l'écliptique. Celle qui est adoptée internationalement s'appuie sur la théorie de Newcomb (1894), utilise les données des masses des planètes adoptées par l'UAI en 1976 (Lieske & al., 1977), et donne le mouvement de l'écliptique moyen de la date t à partir de l'écliptique moyen de J 2000,0, ceci par l'intermédiaire des paramètres en vigueur, π_A et Π_A . Elle se traduit par les deux égalités ci-dessous:

$$\sin \pi_A \sin \Pi_A = 4'',1976 t + 0'',09723 t^2 - 0'',000089 t^3$$

$$\sin \pi_A \cos \Pi_A = -46'',8150 t + 0'',05059 t^2 + 0'',000344 t^3$$

Sachant que, en vertu des égalités (54) et (55) ci-dessus:

$$\sin \pi_A \sin \Pi_A = 2 p \sqrt{1 - (q^2 + p^2)}$$

$$\sin \pi_A \cos \Pi_A = 2 q \sqrt{1 - (q^2 + p^2)}$$

et compte tenu du fait que q et p sont des quantités de l'ordre de 10^{-4} rd/siècle et 10^{-5} rd/siècle, on effectue une erreur relative au plus de l'ordre de 10^{-8} sur un siècle (cf. plus haut) en posant:

$$p = \frac{(\sin \pi_A \sin \Pi_A)}{2} \qquad q = \frac{(\sin \pi_A \cos \Pi_A)}{2}$$

En considérant ces deux égalités comme acquises, on en déduit les expressions de p et de q obtenues à partir des valeurs conventionnelles de π_A et Π_A :

$$p = 2'',0988 t + 0'',09723 t^2 - 0'',000089 t^3$$

$$q = -23'',4075 t + 0'',02529 t^2 + 0'',000172 t^3$$

Une combinaison des théories VSOP 82 (Bretagnon P., 1982) et NGT (Laskar, 1985 a)) permet un développement allant jusqu'à la puissance 10 de t des paramètres p et q . La précision interne des valeurs trouvées est de l'ordre de la milliseconde par siècle (Laskar, 1985 b)), grâce aux méthodes d'intégration employées, aux déterminations relativement précises des masses des planètes adoptées, et aux phénomènes de faible amplitude pris en compte (dont les perturbations lunaires et relativistes).

Poussé à l'ordre 3, le développement de p et de q donne les résultats suivants (Laskar, 1985 b)) :

$$p_A = 2'',0998 t + 0'',09698 t^2 - 0'',000111 t^3$$

$$q_A = -23'',4046 t + 0'',02552 t^2 + 0'',000261 t^3$$

D'où les écarts associés:

$$\delta p = (p - p_1) = -0'',0010 t + 0'',0002 t^2 - 0'',000022 t^3$$

$$\delta q = (q - q_1) = -0'',0029 t - 0'',0002 t^2 - 0'',000089 t^3$$

Comme, d'après (58), δa_1 a pour expression :

$$\delta a_1 = (2 / \sin \epsilon_0) [\delta p + \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \delta q] .$$

En assimilant $\sin(\psi_A + \Delta\psi_1)$ au terme séculaire $\psi_1 t$ de ψ_A (du fait de la petitesse de $(\psi_A + \Delta\psi_1)$ dans la durée d'un siècle et de la prédominance du terme séculaire), on aboutit à l'expression de δa_1 suivante:

$$\begin{aligned} \delta a_1 = 5,025 [-0'',0010 t + 0'',0002 t^2 - 0'',000022 t^3] \\ + 5,025 [-0'',000070 t + \dots] \end{aligned}$$

$$\delta a_1 = -0'',0050 t + 0'',0010 t^2 - 0'',0001 t^3$$

Ainsi, un changement de modélisation du mouvement de l'écliptique, se traduisant par des valeurs δp et δq données précédemment, affecte la représentation du déplacement de l'équinoxe sur l'équateur instantané, de manière significative (de l'ordre de $0'',005/\text{siècle}$).

L'indétermination δa_2

δa_2 caractérise l'effet que provoquent, sur la quantité $(\chi_A + \Delta\chi)$, les incertitudes sur les quantités $(\psi_A + \Delta\psi_1)$ et $(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$ de précession-nutation permettant de positionner l'équateur vrai par rapport à l'écliptique de l'époque t_0 .

Concernant $\delta(\psi_A + \Delta\psi_1)$, c'est l'incertitude sur le coefficient du terme séculaire de ψ_A (appelé constante de précession luni-solaire en longitude) qui prévaut. La valeur généralement retenue (Lieske & al., 1977) pour la date J 2000,0 est:

$$\psi_1 = 5038'',7784 / \text{siècle} .$$

Fricke (1967), en analysant les mouvements propres d'environ cinq cent étoiles du FK4 et du FK4 sup, a contribué pour une large part à l'adoption de la valeur ci-dessus. L'erreur interne concernant cette détermination est de l'ordre de $0'',15$.

De nombreuses autres évaluations de la constante de précession

ont été réalisées , par le biais notamment de différents catalogues d'étoiles. Afin de prendre en compte un maximum d'étoiles, Asteriadis (1977) utilise les données de mouvement propre de l'AGK3 et trouve un biais: $\delta \Psi_1 = 0'',11 \pm 0'',05$ par rapport à la valeur ci-dessus. D'une manière générale, les différentes valeurs obtenues s'écartent d'une quantité tout au plus de l'ordre de quelques dixièmes de seconde d'arc par siècle de cette valeur.

Enfin, les techniques de pointe (Laser Ranging, VLBI), fournissent depuis déjà plus d'une décennie des résultats concluants sur l'évaluation de Ψ_2 , bien qu'elles montrent encore quelques difficultés à séparer les deux effets de la nutation et de la précession. En étudiant les données de VLBI sur une durée de dix ans, Sovers & al.(1984) constatent une différence dans le terme p_A de précession générale en longitude (qui se déduit de Ψ_1 ou réciproquement) de:

$$p_A = -0'',17 \pm 0'',02 \text{ /siècle ,}$$

par rapport à la donnée conventionnelle (Lieske & al.). Par un travail analogue, Herring & al.(1983) trouvent un résultat du meme ordre:

$$\delta p_A = -0'',11 \pm 0'',02 \text{ .}$$

Quant à la quantité $\delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$, son indétermination émane de l'incertitude qui règne sur la valeur initiale ϵ_0 de l'obliquité de l'écliptique, de celle qui entoure la variation séculaire de cette obliquité, enfin de l'incertitude sur la nutation en obliquité. Il apparaît que la première incertitude prime d'un ou deux ordres de grandeur sur les deux autres, puisque différentes observations conduisent à des écarts sur ϵ_0 de l'ordre de $0'',1$, alors que Lieske (1970) arrive à la conclusion qu'il n'existe pas d'incertitude notable concernant la variation séculaire de l'obliquité ϵ_A . Enfin, l'écart entre les coefficients théoriques de la nutation et ceux provenant de différentes sources ne paraît pas dépasser quelques millièmes de seconde d'arc.

On se bornera donc à attribuer aux écarts $\delta(\Psi_A + \Delta\Psi_1)$ et $\delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$ les valeurs indicatives suivantes:

$$\delta(\Psi_A + \Delta\Psi_1) = 0'',1 t$$

$$\delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon) = 0'',1$$

et à rechercher leur effet δa_2 .

En vertu de (58), on a numériquement:

$$\begin{aligned} \delta a_2 = & (-5,6 \times 10^{-4} t) \delta(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \\ & + (-1,1 \times 10^{-4} t + 0,3 \times 10^{-5} t^2) \delta(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \end{aligned}$$

D'où:

$$\delta a_2 = (-1'',1 \times 10^{-5} t) - (5'',6 \times 10^{-5} t^2)$$

Ce résultat indique que les écarts en $(\chi_A + \Delta\chi)$ provenant de différentes valeurs de $(\psi_A + \Delta\psi_2)$ et $(\epsilon_A + \Delta\epsilon)$ caractérisant le mouvement de l'équateur vrai, sont de l'ordre de quelques dix-millièmes de seconde d'arc par siècle (ce qui est l'ordre de grandeur des meilleures observations); il s'agit d'une quantité beaucoup plus faible que l'écart en $(\chi_A + \Delta\chi)$ provenant des différentes modélisations de l'écliptique. (cf. ci-dessus).

Conclusion

Le déplacement de l'équinoxe le long de l'équateur de rotation instantanée, matérialisé par le paramètre $(\chi_A + \Delta\chi)$, reste sujet à des corrections, au fur et à mesure que les théories de l'écliptique deviennent de plus en plus précises.

Même si un changement d'équinoxe s'accompagne parallèlement d'un changement équivalent sur les ascensions droites des objets célestes, il reste que le besoin de faire correspondre l'équinoxe conventionnel avec l'équinoxe réel, qui s'est déjà manifesté lors de l'adoption de la nouvelle définition (Aoki & al., 1982), est susceptible d'amener à l'avenir d'autres rectifications.

L'idéal est donc de concevoir un point origine autre que l'équinoxe, insensible aux différents modèles du mouvement de l'écliptique. L'origine non-tournante, outre ses propriétés intéressantes dans la perspective d'une nouvelle définition de UT1 (première partie, I.6) possède justement cet avantage.

III.10) Les désavantages de la définition actuelle de UT1

Le premier grief que l'on peut invoquer à propos de l'actuelle définition de UT1 est sa relative complexité (Xu & al.,1984). Basée sur le concept de "Soleil Moyen Fictif", on a vu qu'elle mettait en jeu à la fois le déplacement de ce point le long de l'équateur moyen de la date t , et le déplacement de l'équinoxe moyen γ_m le long de ce même plan (cf. III.7, III.8). L'utilisateur courant peut se trouver dérouté par la contribution de ces deux mouvements dans la formulation conventionnelle (50). D'autre part, il est amené à se demander pour quelle raison est-ce que l'on introduit la notion de "Soleil Moyen Fictif".

De plus, la définition actuelle de UT1 est une définition "conventionnelle" (Xu & al.,1984) dans laquelle interviennent des paramètres qui sont sujets à révision, ce qui entraîne alors ipso facto une révision des coefficients du polynôme qui lie le Temps Sidéral Moyen de Greenwich (GMST) et UT1 (relation (50)).

Ce fut le cas lorsque a été remplacée l'ancienne formule liant GMST et UT1 par la nouvelle (1er Janvier 1984), en tenant compte de l'introduction du nouveau système de constantes astronomiques du FK5 (UAI,1976), du réexamen de la Théorie de la Nutation (UAI,1980), et de l'adoption de l'équinoxe du FK5 à la place de celui du FK4.

Ainsi, la correction en équinoxe, qui représente l'ascension droite de l'équinoxe du FK4 dans le système du FK5 (cf. Fricke,1980) est donnée par:

$$E = E_0 + \dot{E} t$$

$$\text{avec: } E_0 = 0,06390 \text{ s}$$

$$\dot{E} = 0,08500 \text{ s /siècle}$$

Cette correction en équinoxe est incluse implicitement dans les positions et les mouvements propres de toutes les étoiles du FK5. On notera que l'adoption d'un nouveau système de référence et de nouvelles constantes astronomiques a des effets complexes lorsqu'il s'agit de transformer UT1: tout doit être mis en oeuvre pour que la relation entre GMST et UT1 soit modifiée sans qu'il n'y ait de saut en valeur ou en variation de UT1 à la date du changement (Aoki & al.,1982).

En second lieu, on remarquera que l'actuelle définition de UT1 fait intervenir l'équateur moyen de la date t , et non pas l'équateur vrai de cette même date. Ceci semble paradoxal, dans la mesure où l'échelle de temps UT1 est sensée représenter au mieux les variations de la rotation terrestre. En particulier, à la quantité $\bar{\sigma}_m$ qui sert à la localisation de l'origine non-tournante σ_m sur l'équateur moyen, et qui s'exprime par (41):

$$\bar{\sigma}_m = (1/2) \int_{t_0}^t \theta_A^2 d \zeta_A \quad , \text{ devrait se}$$

substituer une quantité $\bar{\sigma}$, telle que:

$$\bar{s} = (1/2) \int_{t_0}^t (\theta_A + \Delta\theta)^2 d(\zeta_A + \Delta\zeta) , \text{ dont}$$

le rôle serait de définir une origine non-tournante σ cette fois-ci sur l'équateur vrai. Aussi (ce sera l'un des objets de la quatrième partie), cette substitution amènerait-elle un surcroît de précision quant à la définition de UT1 elle-même.

Il faut ajouter à cela la conclusion du III.7, en vertu de laquelle il est impossible de concevoir un point fictif ayant à la fois un mouvement uniforme le long de l'équateur moyen, et dont l'ascension droite serait rigoureusement égale, à tout moment, à la longitude moyenne du Soleil. Newcomb (1895,p.188) montre ainsi qu'un point qui possède un mouvement uniforme en ascension droite par rapport à un référentiel inertiel tend à s'écarter d'un point dont l'ascension droite est égale à la longitude moyenne vraie du Soleil, d'une quantité de $0^s,020$ par siècle carré.

Enfin, on a pu se rendre compte de l'incertitude que pouvait amener la modélisation du mouvement de l'écliptique sur le positionnement du point origine qu'est l'équinoxe pour la détermination du Temps Sidéral et du Temps Universel (III.9).

C'est en ne perdant pas de vue l'inventaire de ces différents désavantages entourant la définition actuelle de UT1, qu'on effectuera l'étude approfondie de l'Origine Non-Tournante dans le cadre de la rotation terrestre, étude qui fait l'objet de la partie à suivre.

QUATRIEME PARTIE

COMPLEMENT D'ETUDE SUR L'ORIGINE
NON TOURNANTE DANS LE CADRE DE LA
ROTATION DE LA TERRE
PROPRIETES ANNEXES

IV.1) Généralités

La première partie du présent travail a été consacrée à la présentation de l'Origine Non-Tournante, ses implications fondamentales, ainsi qu'à son utilité majeure, qui est la définition conceptuelle du Temps Universel.

On se proposera ici d'ajouter quelques éléments d'étude servant de complément à cette première partie. Ils concerneront la détermination rigoureuse de l'Origine Non-Tournante (cf.I.5), et de la quantité s qui s'y trouve associée (cf.I.8), sa localisation par rapport à l'équinoxe, le nouveau référentiel qui s'y trouve associé, ainsi que la trajectoire qu'elle décrit.

IV.2) Identification des angles d'Euler.

On se donnera ici comme référentiel de base le référentiel quasi-inertiel $R = (O, X_0, Y_0, Z_0)$ tel que (OX_0) passe par l'équinoxe moyen de $t = J2000.0$, (OZ_0) par le pôle de l'écliptique de t_0 , (OY_0) complétant le trièdre direct. A noter que ce choix peut paraître peu judicieux dans la mesure où l'intérêt majeur de l'Origine Non-Tournante est d'utiliser un plan de référence quelconque. Néanmoins, il permet d'utiliser au mieux les données de précession et de nutation traditionnelles, et d'effectuer de manière simple le rattachement entre l'équinoxe et σ (il conviendrait, à ce titre, d'ajouter des termes provenant du décalage, à $t=t_0$, entre l'origine polaire et le véritable pôle de rotation instantanée à la date t_0 , comme ce fut le cas dans la première partie, I.11).

Quant au référentiel terrestre $R=(O,x,y,z)$, c'est celui qui a été précédemment défini en III.3 .

Les deux référentiels R_0 et R ainsi établis, on se réfèrera à la figure 23, où sont représentés les angles d'Euler relatifs à l'équateur de rotation et à l'équateur de figure (cf.II.4) .

θ , angle d'inclinaison, mesure l'écart angulaire entre les axes (OZ_0) et (Oz) . C'est donc l'angle entre le plan de l'écliptique fixe de la date t_0 et l'équateur perpendiculaire à l'axe Oz de la date t considérée.

ψ , angle de précession, mesure l'écart angulaire entre (OX_0) et la ligne des noeuds $(O \gamma_F)$, qui est l'intersection des plans de l'écliptique de la date t_0 et de l'équateur de figure de la date t .

φ mesure l'écart angulaire entre γ_F et le méridien de figure origine (xOz) . C'est donc l'angle entre les points γ_F et A (Figure 21) le long de l'équateur de figure.

$$\varphi = \widehat{\gamma_F A}$$

Un autre jeu de variables d'Euler (II.7), $(\psi', \theta', \varphi')$, permet de situer le référentiel $R'=(O,x',y',z')$ lié à l'Origine-Non-Tournante, tel que (O,x',y') soit confondu avec l'équateur de rotation, Ox' étant porté par l'Origine-Non-Tournante positionnée arbitrairement à la date t_0 , et Oy' lui étant directement perpendiculaire. Oz' sera, en ce qui le concerne, porté par le pôle de rotation instantanée.

On sait qu'un très faible écart sépare le pôle de rotation instantanée du pôle céleste des éphémérides (CEP). Dans l'espace, cet écart est constitué principalement d'un terme constant, d'un terme semi-annuel et d'un terme semi-mensuel d'amplitudes très faibles (cf.I.17). Il nous sera donc permis, lorsque des calculs relatifs au mouvement de précession et de nutation du pôle de rotation instantanée seront nécessaires, d'utiliser les valeurs numériques associées au mouvement du CEP. Une discussion devra porter a posteriori sur l'erreur causée par cette identification.

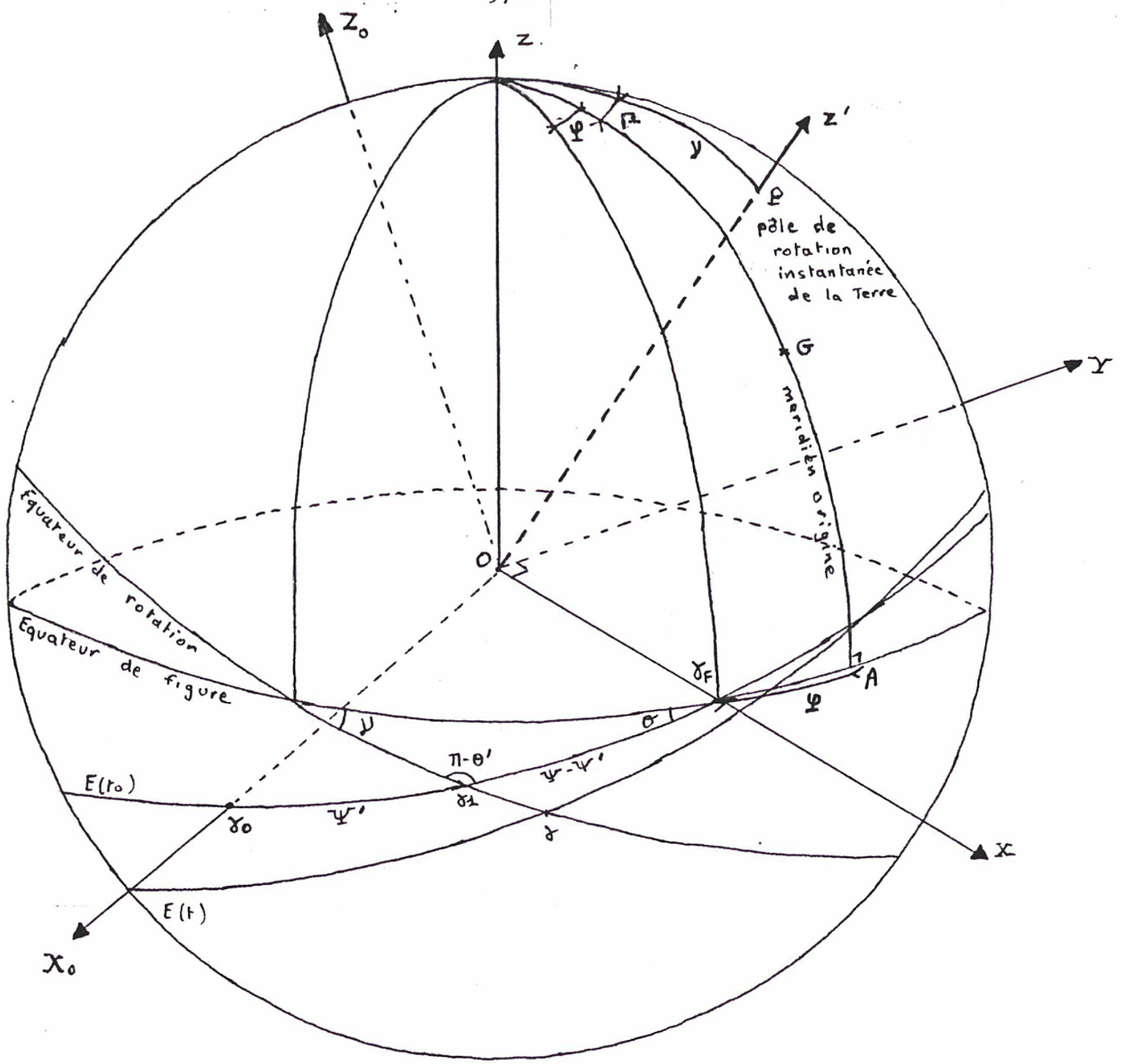


Figure 93

De là s'ensuit le rapprochement entre les angles d'Euler Ψ' et θ' relatifs au pôle de rotation instantanée, et les notations usuelles de "La Connaissance Des Temps" (Lieske & al., 1977).

θ' , angle d'inclinaison. mesure l'écart angulaire entre les axes $(O.z')$ et $(O.Z_0)$, autrement dit entre l'axe instantané de rotation de la Terre et la direction du pôle de l'écliptique de $t_0 = J2000.0$. Ainsi (Figure 22)

$$\theta' = (\omega_A + \Delta\epsilon_1) \quad (59)$$

$\Delta\epsilon_1$ désignant la contribution supplémentaire apportée par le phénomène de la nutation à l'angle ω_A , que forment entre eux le plan de l'équateur moyen de la date t , et le plan de l'écliptique de la date t_0 (III.5).

Ψ' , angle de précession, mesure l'écart angulaire sur l'écliptique de la date $t_0 = J2000.0$, entre l'équinoxe $\gamma(t_0)$, et le noeud descendant de l'équateur de rotation instantanée sur le dit écliptique. Ainsi (Figure 22)

$$\Psi' \approx -(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \quad (60)$$

$\Delta\Psi_1$ désignant la contribution supplémentaire apportée par le phénomène de la nutation sur l'angle Ψ_A (cf. III.5). On notera que Ψ_A et $\Delta\Psi_1$ sont comptés positivement dans le sens rétrograde.

Ψ'' , enfin, désigne l'écart angulaire $\widehat{\delta_1 O \sigma}$, sur l'équateur instantané de rotation. Sa détermination s'établit par le calcul, à l'aide de la relation (20):

$$d\Psi'' = -d\Psi' \cdot \cos\theta'$$

Soit:
$$d\Psi'' = d(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \cdot \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \quad (61)$$

On peut en fin de compte dresser un tableau récapitulatif des correspondances entre les angles d'Euler, et les dénominations qui les représentent, lorsqu'on passe du référentiel R_0 au référentiel R d'une part, du référentiel R_0 au référentiel R' d'autre part (cf. Tableau 1)

Remarque

Les coefficients des paramètres $\Delta\epsilon_1$ et $\Delta\Psi_1$ de la nutation luni-solaire en longitude et en obliquité, par rapport à l'écliptique $E(t_0)$ ont fait l'objet de tables, comme celle établie par Woolard (Woolard, 1953, p.138-141), qui s'est appuyé sur un modèle de Terre rigide,

T A B L E A U 1

Référentiel de base	Référentiel mobile	Angle d'Euler	Notation correspondant
Ro	R (lié à la Terre)	Ψ	Ψ
-	-	θ	θ
-	-	φ	φ
Ro	R' (lié à l'axe de rotation de la Terre)	Ψ	Ψ'
-	-	θ	θ'
-	-	φ	$\varphi' = f(\Psi')$
Ro	R(C.E.P) (lié au pôle céleste des éphémérides)	Ψ	$-(\Psi_A + \Delta\Psi_1)$
-	-	θ	$(\omega_A + \Delta\epsilon_1)$
-	-	φ	-

ainsi que sur des valeurs conventionnellement adoptées de la constante principale de la nutation de l'époque, ainsi que de la précession luni-solaire en longitude.

H.Kinoshita a développé depuis une théorie différente de celle de Woolard (H.Kinoshita.1977) toujours basé cependant sur un modèle de Terre rigide. Cette théorie ne s'élabore pas à partir des paramètres classiques d'Euler. mais à partir des variables d'Andoyer (Andoyer,1923). De par ce choix. il a été amené à adopter l'écliptique mobile $E(t)$, de la date comme plan de référence. La raison de l'adoption de ce système non-inertiel résulte de ce que le développement de la fonction perturbatrice luni-solaire s'en trouve avantageusement simplifiée.

De cela, il résulte que la détermination actuellement adoptée de la nutation du CEP qui provient de la théorie de Kinoshita, s'appuyant en outre sur un modèle de Terre plus proche de la réalité que le modèle de Terre rigide (puisqu'on y intègre un noyau fluide et un manteau élastique) s'effectue non pas par rapport à un plan inertiel de référence, mais par rapport à $E(t)$. C'est la raison pour laquelle il nous est utile d'utiliser des formules à la fois simples et précises permettant de relier entre eux les couples de paramètres ($\Delta\epsilon$, $\Delta\psi$) émanant des Ephémérides, et ($\Delta\epsilon_1$, $\Delta\psi_1$), relatif à $E(t_0)$. C'est ce qui fait l'objet de l'annexe III.

IV.3) Le positionnement de l'Origine Non-Tournante σ liée au mouvement de la Terre dans l'espace par le biais des angles d'Euler (Figure 24)

Le cheminement par l'intermédiaire duquel on peut positionner à partir des angles d'Euler est le suivant (cf. II.8)

(a) Tout d'abord . par le jeu de paramètres

$$\theta' = (\omega_A + \Delta\epsilon_1)$$

$$\Psi' = -(\psi_A + \Delta\psi_1)$$

on obtient directement l'orientation du pôle de rotation instantanée de la date t par rapport à R_0 , et par voie de conséquence l'orientation de l'équateur $E(t)$ par rapport à ce même référentiel. Le noeud descendant de $E(t)$ sur $E(t_0)$, à savoir $N'(t)$, est lui-même dès lors parfaitement défini.

Alors, en vertu de (61)

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \Psi'(t_0) - \int_{t_0}^t (\cos \theta') \cdot d\Psi' \\ \overline{N'(t) \sigma(t)} &= \overline{N'(t_0) \sigma(t_0)} - \int_{t_0}^t (\cos \theta') \cdot d\Psi' \end{aligned}$$

Et donc, en remplaçant Ψ' et θ' par leur valeur respective, donnée en IV.2 :

$$\overline{N'(t) \sigma(t)} = \overline{N'(t_0) \sigma(t_0)} + \int_{t_0}^t \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \quad (62)$$

Rappelons que le choix initial de l'Origine-Non-Tournante est arbitraire. Ce qui importe n'est pas sa localisation à l'instant t_0 , mais la manière dont il se déplace au sein de l'équateur de rotation instantanée (Il ne répond qu'à des exigences liées à la cinématique, et n'est défini qu'à une constante d'intégration près)

On peut cependant, pour des raisons évidentes de commodité, faire coïncider l'Origine-Non-Tournante à l'instant t_0 avec $\gamma(t_0)$, ce qui donne alors:

$$\overline{N'(t) \sigma(t)} = \int_{t_0}^t \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \quad (62')$$

En utilisant les développements en vigueur (cf. "La connaissance des Temps"), on présentera les quatre paramètres associés sous la forme:

$$\omega_A = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 t^2 + \dots$$

$$\psi_A = \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \dots$$

$$\Delta \psi_1 = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \psi_i)$$

$$\Delta \varepsilon_1 = \sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \psi_i)$$

Développons alors le second terme de (62):

$$\int_{t_0}^t \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

$$= \int_{t_0}^t \cos(\varepsilon_0 + \varepsilon_2 t^2 + \Delta \varepsilon_1) \cdot d(\psi_1 t + \psi_2 t^2 + \Delta \psi_1)$$

On admettra qu'à une quantité du second ordre près:

$$\cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1)$$

$$= \cos(\varepsilon_0 + \varepsilon_2 t^2 + \Delta \varepsilon_1)$$

$$= [\cos \varepsilon_0 - (\varepsilon_2 t^2 + \Delta \varepsilon_1) \sin \varepsilon_0] d(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

Alors, on peut considérer que :

$$\int_{t_0}^t \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) d(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

$$= [\cos \varepsilon_0 - (\varepsilon_2 t^2 + \Delta \varepsilon_1) \sin \varepsilon_0] d(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

$$= [(\psi_A + \Delta \psi_1) \cos \varepsilon_0]_{t_0}^t - \sin \varepsilon_0 \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \Delta \varepsilon_1) d(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

Soit:

$$\overbrace{N^-(t) \sigma^-(t) - N^-(t_0) \sigma^-(t_0)} \quad (63)$$

$$= [(\psi_A + \Delta \psi_1) \cos \varepsilon_0]_{t_0}^t - \sin \varepsilon_0 \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \Delta \varepsilon_1) d(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

Dans l'annexe **IV**, on effectue tous les calculs relatifs à ce développement, par l'intermédiaire des quantités transitoires Y_s , Y_p , Y_m (les indices faisant références aux mots "séculaire", "périodique", et "mixte"). Alors, en utilisant ces quantités transitoires:

$$\overbrace{N^-(t) \sigma^-(t) - N^-(t_0) \sigma^-(t_0)}$$

$$= [(\psi_A + \Delta \psi_1) \cos \varepsilon_0]_{t_0}^t - (Y_s + Y_p + Y_m) \sin \varepsilon_0$$

Avec: $Y_s = (\varepsilon_2 \Psi_1 / 3) t^3 + (\varepsilon_2 \Psi_2 / 2) t^4 + \dots$

$$\begin{aligned}
 Y_p = & (1/2) \left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \omega_i \right) t \\
 & + (1/4) \left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \sin(2(\omega_i t - \varphi_i)) \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \left[\frac{(b_i a_j \omega_j + b_j a_i \omega_i)}{2(\omega_i + \omega_j)} \right] \sin((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j > i} \left[\frac{(b_i a_j \omega_j - b_j a_i \omega_i)}{2(\omega_i - \omega_j)} \right] \sin((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j))
 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 Y_{m'} = & \Psi_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^N (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_0^t \\
 & + 2 \Psi_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^N (b_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_0^t \\
 & + 2 \Psi_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^N (b_i / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_0^t \\
 & + \varepsilon_2 t^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^N a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_0^t \\
 & + 2 \varepsilon_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^N (a_i / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_0^t \\
 & - 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^N (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_0^t
 \end{aligned}$$

A la suite de tous ces calculs, on peut dès lors développer jusqu'à un ordre d'incertitude inférieur à celui des observations ($5 \cdot 10^{-6}$ "), l'expression mathématique en vertu de laquelle se localise $\sigma(t)$:

Ainsi, en posant: $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{N(t) \sigma(t)} - \overbrace{N(t_0) \sigma(t_0)} \\
 = & (\Psi_1 \cos \epsilon_0) t \\
 + & (\Psi_2 \cos \epsilon_0) t^2 \\
 + & (\Psi_3 \cos \epsilon_0) t^3 \\
 + & \left[\sum_{i=1}^5 a_i \sin(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \cos \epsilon_0 \\
 - & \left[(\epsilon_2 \Psi_1 / 3) \sin \epsilon_0 \right] t^3 \\
 - & \left[(\epsilon_2 \Psi_2 / 2) \sin \epsilon_0 \right] t^4 \\
 - & \left[\sum_{i=1}^5 a_i b_i \omega_i (\sin \epsilon_0 / 2) \right] t \\
 - & \left[\sum_{i=1}^5 a_i b_i \sin(2(\omega_i t - \phi_i)) \right]_0^t (\sin \epsilon_0 / 4) \\
 - & \sin \epsilon_0 \left[\sum_{i=1}^5 \sum_{j < i} \left[\frac{(b_i a_j \omega_j + b_j a_i \omega_i)}{2(\omega_i + \omega_j)} \right] \sin((\omega_i + \omega_j)t - (\phi_i + \phi_j)) \right]_0^t \\
 - & \sin \epsilon_0 \left[\sum_{i=1}^5 \sum_{j < i} \left[\frac{(b_i a_j \omega_j - b_j a_i \omega_i)}{2(\omega_i - \omega_j)} \right] \sin((\omega_i - \omega_j)t - (\phi_i - \phi_j)) \right]_0^t \\
 - & (\Psi_1 \sin \epsilon_0) \left[\sum_{i=1}^5 (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \\
 - & (2\Psi_2 \sin \epsilon_0) t \left[\sum_{i=1}^5 (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \\
 - & (2\Psi_2 \sin \epsilon_0) \left[\sum_{i=1}^5 (b_i / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \\
 - & (\epsilon_1 \sin \epsilon_0) t^2 \left[\sum_{i=1}^5 a_i \sin(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \\
 - & (2\epsilon_2 \sin \epsilon_0) t \left[\sum_{i=1}^5 (a_i / \omega_i) \cos(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \\
 - & (2\epsilon_2 \sin \epsilon_0) \left[\sum_{i=1}^5 (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \phi_i) \right]_0^t \tag{64}
 \end{aligned}$$

Développement numérique de (64)

On se contentera de ne prendre en considération que les termes dont l'amplitude dépasse 5.10^{-6} " sur un intervalle d'un siècle julien.

Les expressions numériques des quantités relatives à la précession sont celles de "La Connaissance des Temps" (Lieske & al., 1977), ainsi que celles relatives à la nutation (Wahr, 1981).

L'époque de base (la date $t = 0$), est J2000,0

Alors :

$$(a) \quad (\Psi_1 \cos \varepsilon_0) t + (\Psi_2 \cos \varepsilon_0) t^2 + (\Psi_3 \cos \varepsilon_0) t^3 \\ = 4622''.61410 t + 0'',98400 t^2 - 0'',00105 t^3$$

$$(b) \quad - (\varepsilon_2 \Psi_1 / 3) \sin \varepsilon_0 t^3 = - 0'',00017 t^3$$

$$(c) \quad - \left[\sum_{i=1}^n ((a_i b_i \omega_i) / 2) \right] t \sin \varepsilon_0 = - 0'',00385 t$$

$$(d) \quad - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \sin(2(\omega_i t - \varphi_i)) / 4 \right) \sin \varepsilon_0 = + 0'',00006 \sin 2\mathcal{L}$$

$$(e) \quad - (\Psi_1 \sin \varepsilon_0) \sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) = + 0'',00265 \sin \mathcal{L}$$

\mathcal{L} étant la longitude du noeud ascendant de l'orbite lunaire.

D'où l'expression numérique finale:

$$\overbrace{N(t) \sigma(t) - N(t_0) \sigma(t_0)} \quad (64')$$

$$= 4622''.61410 t + 0'',98400 t^2 - 0'',00122 t^3 + (\Delta \Psi) \cos \varepsilon_0 \\ - 0'',00385 t + 0'',00006 \sin 2\mathcal{L} + 0'',00265 \sin \mathcal{L}$$

(t_0) étant arbitrairement choisie sur l'équateur de rotation de $t = 0$.

Remarque

Dans leur étude de la relation entre l'équinoxe et l'Origine Non Tournante, Aoki & Kinoshita (1982) font intervenir les quantités:

$$(\Delta q)_p = \Delta \Psi \cos \varepsilon_a + 0'',00264 \sin \mathcal{L} + 0'',00006 \sin 2\mathcal{L}$$

$$\text{Et: } (\Delta q)_s = - 0'',00388 t$$

Qui sont étroitement en accord avec les quantités correspondantes ici:

$$(\Delta q)_p = \Delta \Psi \cos \varepsilon_a + 0'',00265 \sin \mathcal{L} + 0'',00006 \sin 2\mathcal{L}$$

$$Et \quad (\Delta q)_s = - 0'',00385 \text{ t}$$

IV.4) Expression conventionnelle de l'ascension droite de l'Origine Non-Tournante $\sigma(t)$

Le point de repère traditionnellement utilisé en astrométrie étant le point γ , ou équinoxe, il peut paraître intéressant de connaître l'écart angulaire entre l'équinoxe vrai γ et l'Origine Non-tournante σ sur l'équateur de rotation instantanée de la date t .

En fait, cet écart angulaire ne fait intervenir qu'une quantité supplémentaire, qui est $(\chi_A + \Delta\chi)$, par rapport aux paramètres dont on se sert pour localiser $\sigma(t)$ par rapport au noeud $N'(t)$. En effet, conformément au chapitre précédent, en faisant coïncider $\sigma(t_0)$ avec $N'(t_0)$:

$$\overbrace{N'(t) \sigma(t)} = \int_{t_0}^t \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) d(\psi_A + \Delta\psi_1)$$

Mais:

$$\begin{aligned} \overbrace{N'(t) \sigma(t)} &= \overbrace{N'(t) \gamma(t)} + \overbrace{\gamma(t) \sigma(t)} \\ &= (\chi_A + \Delta\chi) + \overbrace{\gamma(t) \sigma(t)} \end{aligned}$$

Et donc, par substitution:

$$\overbrace{\gamma(t) \sigma(t)} = \int_{t_0}^t \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) d(\psi_A + \Delta\psi_1) - (\chi_A + \Delta\chi) \quad (65)$$

Le paramètre $(\chi_A + \Delta\chi)$ ne dépend que du mouvement intrinsèque de l'écliptique. L'incertitude qui le caractérise a été évoquée en III.9 II.9

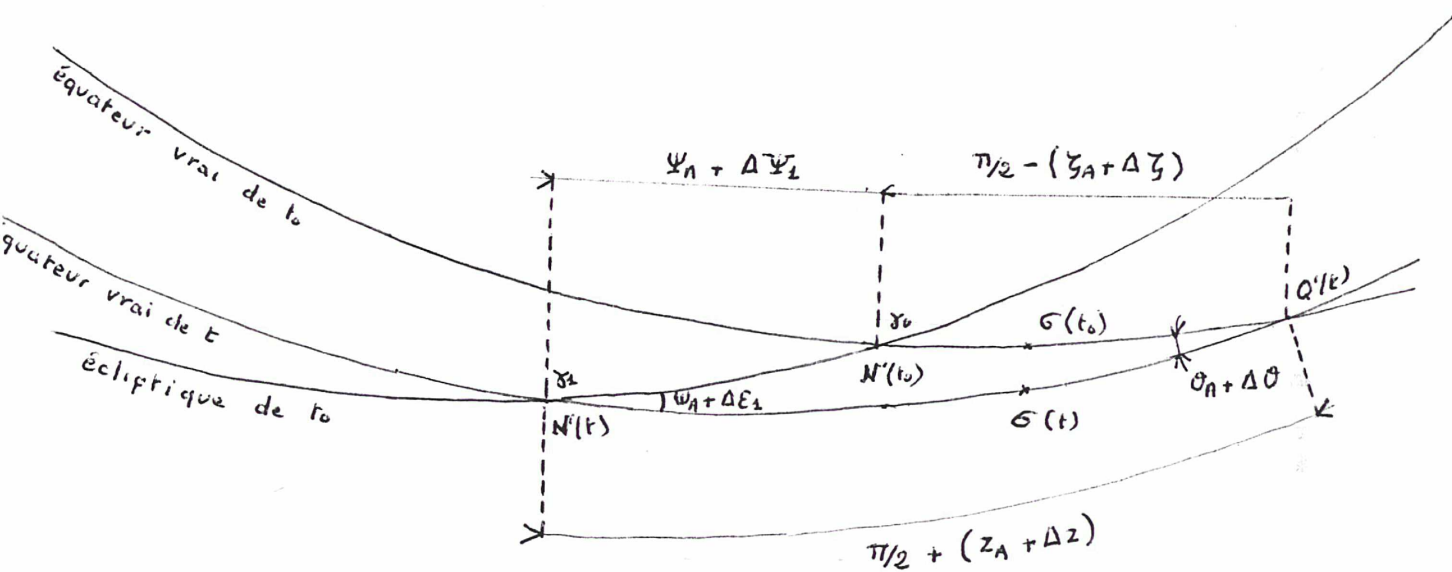


Figure | 24

IV.5) Une autre manière de définir, par le calcul, l'ascension droite de l'Origine Non-Tournante, en utilisant la quantité " \bar{s} " (Figure 24)

On ne prend plus ici comme plan de référence inertiel (O, X_0, Y_0) le plan de l'écliptique moyen $E(t_0)$, mais le plan de l'équateur $E_q(t_0)$. On pourra choisir ainsi comme référentiel inertiel $R_0 = (O, X_0, Y_0, Z_0)$ tel que (OZ_0) est porté par l'axe de rotation instantanée de t_0 , (OX_0) par l'équinoxe $\gamma(t_0)$ et (OY_0) complétant le trièdre direct. En reprenant la terminologie du chapitre II.12:

\bar{d} est l'angle que forment entre eux les plans des équateurs $E_q(t_0)$ et $E_q(t)$, \bar{E} permettant de localiser le noeud de ces deux équateurs.

$$\text{Ainsi: } \bar{d} = (\theta_A + \Delta\theta)$$

$$\bar{E} = -(\zeta_A + \Delta\zeta)$$

De telle sorte que: $(\bar{E} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - (\zeta_A + \Delta\zeta)$ désigne l'écart angulaire, sur $E_q(t_0)$, entre l'axe OX_0 et le noeud ascendant Q' de $E_q(t)$ sur $E_q(t_0)$. On sait que la localisation de σ par rapport à $Q'(t)$ peut s'effectuer par le biais de la quantité s :

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \overline{\sigma(t) Q'(t)} - \overline{\sigma(t_0) Q'(t)} = - \int_{t_0}^t (1 - \cos \bar{d}) d\bar{E} \\ (66) \qquad \qquad \qquad &= (1 - \cos(\theta_A + \Delta\theta)) d(\zeta_A + \Delta\zeta) \end{aligned}$$

Du fait que $(\theta_A + \Delta\theta)$ est un angle très voisin de 0, on peut écrire:

$$\bar{s} = \overline{\sigma(t) Q'(t)} - \overline{\sigma(t_0) Q'(t)} = \int_{t_0}^t ((\theta_A + \Delta\theta)^2 / 2) d(\zeta_A + \Delta\zeta) \quad (67)$$

(cf. terminologie chapitre III.5)

Or, les équinoxes γ_0 et $\gamma(t)$ sont liés par la relation:

$$\overline{\gamma(t) Q'(t)} - \overline{\gamma(t_0) Q'(t)} = (\zeta_A + \Delta\zeta) + (z_A + \Delta z) \quad (68)$$

Par soustraction de (67) avec (68), on obtient l'ascension droite de l'Origine Non-Tournante:

$$\begin{aligned} &\overline{\gamma(t) \sigma(t)} - \overline{\gamma(t_0) \sigma(t_0)} \qquad \qquad \qquad (69) \\ &= (\zeta_A + \Delta\zeta) + (z_A + \Delta z) - \bar{s} \\ &= (\zeta_A + \Delta\zeta) + (z_A + \Delta z) - \int_{t_0}^t (\theta_A + \Delta\theta)^2 d(\zeta_A + \Delta\zeta) \end{aligned}$$

où $(\zeta_A + \Delta \zeta)$ désigne la précession générale en ascension droite.

Conclusion

En guise de conclusion, on retiendra qu'il existe deux manières de donner l'expression de l'ascension droite de l'Origine Non-Tournante. Dans les deux cas, on fait intervenir la précession, que ce soit la précession en longitude (relation (68)) ou bien la précession générale en ascension droite (69).

Or, si déterminer l'ascension droite de l'Origine Non-Tournante revet un intérêt dans la perspective d'un rattachement entre ce nouveau concept et le point origine actuel qu'est l'équinoxe, il ne faut pas néanmoins perdre de vue que : l'un de buts principaux de l'Origine Non-Tournante est justement de s'affranchir de l'équinoxe. Ainsi, la quantité \bar{s} permet justement de définir σ en ne considérant que le mouvement relatif de l'équateur de rotation instantanée par rapport à un équateur origine.

IV.6) Expression de la quantité "s" en fonction des paramètres ($\Psi_A + \Delta\Psi_1$) et ($\omega_A + \Delta\varepsilon_1$).

D'après ce qui a été vu au chapitre précédent, \bar{s} s'exprime très simplement en fonction des paramètres relatifs au seul mouvement de l'équateur, à savoir ($\zeta_A + \Delta\zeta$) et ($\theta_A + \Delta\theta$). Or, il s'avère que les données de $\Delta\zeta$ et $\Delta\theta$ relatives à la nutation, n'émanent pas directement de la théorie. On peut néanmoins les déterminer à partir des données de $\Delta\varepsilon_1$ et de $\Delta\Psi_1$ relatives au mouvement de l'équateur de rotation instantanée par rapport au plan quasi inertiel de référence, et qui, en ce qui les concerne, sont déterminables par le calcul (Woolard, 1953, Kinoshita, 1981) (éventuellement en utilisant au passage les relations de l'annexe) établissant un lien entre le couple ($\Delta\varepsilon, \Delta\Psi$) et le couple ($\Delta\varepsilon_1, \Delta\Psi_1$).

On s'attachera donc ici à présenter la quantité "s" sous la forme d'un développement en fonction des paramètres ($\omega_A + \Delta\varepsilon_1$) et ($\Psi_A + \Delta\Psi_1$).

Sous sa forme primitive (cf. relation (66)) :

$$\bar{s} = \int_{t_0}^t (1 - \cos(\theta_A + \Delta\theta)) \cdot d(\zeta_A + \Delta\zeta)$$

Il va donc falloir établir la correspondance suivante:

$$\begin{array}{ccc} \theta_A + \Delta\theta & \longrightarrow & \omega_A + \Delta\varepsilon_1 \\ \zeta_A + \Delta\zeta & \longrightarrow & \Psi_A + \Delta\Psi_1 \end{array}$$

Dans le triangle sphérique de la figure 23, dont les cotés sont $N(t)$, $N(t_0)$, et $Q(t)$, on obtient de suite la liaison suivante :

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_A + \Delta\theta) \\ &= \cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \cdot \cos \varepsilon_0 + \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \cdot \sin \varepsilon_0 \cdot \cos(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \end{aligned}$$

D'où une nouvelle expression provisoire de s :

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \int_{t_0}^t (1 - \cos(\theta_A + \Delta\theta)) \cdot d(\zeta_A + \Delta\zeta) \\ \bar{s} &= \int_{t_0}^t (1 - (\cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \cdot \cos \varepsilon_0 + \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \cdot \sin \varepsilon_0 \cdot \cos(\Psi_A + \Delta\Psi_1))) \cdot d(\zeta_A + \Delta\zeta) \end{aligned}$$

Il reste à substituer à $d(\zeta_A + \Delta\zeta)$ une expression numérique ne faisant intervenir que ($\Psi_A + \Delta\Psi_1$) et ($\omega_A + \Delta\varepsilon_1$), ou bien leur dérivées

respectives . Pour cela on utilise le jeu d'équations provenant aussi des relations classiques du triangle sphérique :

$$\cos(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \tag{70}$$

$$= \cos \epsilon_0 \cdot \cos(\theta_A + \Delta \theta) + \sin \epsilon_0 \cdot \sin(\theta_A + \Delta \theta) \cdot \sin(\zeta_A + \Delta \zeta)$$

$$\sin(\theta_A + \Delta \theta) \tag{71}$$

$$= (\sin(\psi_A + \Delta \psi_1) \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1)) / \cos(\zeta_A + \Delta \zeta)$$

$$\cos(\theta_A + \Delta \theta) \tag{72}$$

$$= \cos \epsilon_0 \cdot \cos(\omega_A + \Delta \epsilon_1) + \sin \epsilon_0 \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta \psi_1)$$

En remplaçant dans (72) les expressions de $\sin(\theta_A + \Delta \theta)$ et de $\cos(\theta_A + \Delta \theta)$ données par (70) et (71), on élimine les variables indésirables :

$$\begin{aligned} & \cos(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \\ = & \cos^2 \epsilon_0 \cdot \cos(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \\ & + \cos \epsilon_0 \cdot \sin \epsilon_0 \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta \psi_1) \\ & + \sin \epsilon_0 \cdot \text{tang}(\zeta_A + \Delta \zeta) \cdot \sin(\psi_A + \Delta \psi) \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon) \end{aligned}$$

Et, par conséquent :

$$\begin{aligned} & \sin^2 \epsilon_0 \cdot \cos(\omega_A + \Delta \epsilon) \\ = & \cos \epsilon_0 \cdot \sin \epsilon_0 \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta \psi) \\ & + \sin \epsilon_0 \cdot \text{tang}(\zeta_A + \Delta \zeta) \cdot \sin(\psi_A + \Delta \psi) \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \end{aligned}$$

D'où l'établissement d'une relation entre $(\zeta_A + \Delta \zeta)$ et les variables "primaires" :

$$\begin{aligned} & \text{tang}(\zeta_A + \Delta \zeta) \tag{73} \\ = & \frac{(\sin \epsilon_0 \cdot \cos(\omega_A + \Delta \epsilon_1) - \cos \epsilon_0 \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta \psi_1))}{\sin(\psi_A + \Delta \psi_1) \cdot \sin(\omega_A + \Delta \epsilon_1)} \end{aligned}$$

Par dérivation de (73) membre à membre, on obtiendra alors une expression première de $d(\zeta_A + \Delta \zeta)$:

$$(1 + \text{tang}^2(\zeta_A + \Delta \zeta)) \cdot d(\zeta_A + \Delta \zeta) = (N / D),$$

"N" signifiant qu'il s'agit d'un numérateur.

"D" signifiant qu'il s'agit d'un dénominateur.

L'expression de D est simple : $D = \sin^2(\psi_A + \Delta\psi_1) \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1)$

Pour sa part, N aura pour expression:

$$\begin{aligned}
 & N \\
 & = \left[-\sin \epsilon_0 \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \right] \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 & - \left[\cos \epsilon_0 \cdot \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \right] \cdot \\
 & \qquad \qquad \qquad d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 & + \left[\cos \epsilon_0 \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \right] d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & - \left[\sin \epsilon_0 \cdot \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \cdot \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \right] \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & - \left[\sin \epsilon_0 \cdot \cos^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \right] \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 & + \left[\cos \epsilon_0 \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \cos^2(\psi_A + \Delta\psi_1) \right] \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & + \left[\cos \epsilon_0 \cdot \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \cdot \cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \right] \cdot \\
 & \qquad \qquad \qquad d(\omega_A + \Delta\epsilon_1)
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, on constate que le second élément du second terme ainsi que le dernier s'annulent, d'autres donnant lieu à une simplification, ce qui amène l'équation finale :

$$\begin{aligned}
 N & = \left[-\sin \epsilon_0 \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \right] \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 & + \left[\cos \epsilon_0 \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \right] \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & - \left[\sin \epsilon_0 \cdot \cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \cdot \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cdot \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \right] \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{(\sin^2(\psi_A + \Delta\psi_1) \cdot \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1))}{\cos^2(\zeta_A + \Delta\zeta)} \right] \cdot d(\zeta_A + \Delta\zeta) \\
 & = (-\sin \epsilon_0 \sin(\psi_A + \Delta\psi_1)) \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 & + \left[\cos \epsilon_0 \sin^2(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \right. \\
 & \quad \left. - \sin \epsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \right] \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1)
 \end{aligned}$$

Cependant, d'après (71)

$$\cos^2(\zeta_A + \Delta \zeta) = \frac{(\sin^2(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cdot \sin^2(\psi_A + \Delta \psi_1))}{\sin^2(\theta_A + \Delta \theta)}$$

$$\begin{aligned} & (1 - \cos^2(\theta_A + \Delta \theta)) \cdot d(\zeta_A + \Delta \zeta) \\ = & (1 - \cos(\theta_A + \Delta \theta)) \cdot (1 + \cos(\theta_A + \Delta \theta)) \cdot d(\zeta_A + \Delta \zeta) \\ = & [-\sin \varepsilon_0 \sin(\psi_A + \Delta \psi_1) d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\ & + [(\cos \varepsilon_0 \sin^2(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\ & - \sin \varepsilon_0 \cos(\psi_A + \Delta \psi_1) \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1)] d(\psi_A + \Delta \psi_1) \end{aligned}$$

Rappelons que la relation (66) établie précédemment nous donne la formulation simple de "s" :

$$\bar{s} = \int_{t_0}^t (1 - \cos(\theta_A + \Delta \theta)) \cdot d(\zeta_A + \Delta \zeta)$$

Or, en vertu de l'égalité précédemment trouvée, il est alors possible de modifier l'intégrand ci-dessus de telle manière à l'exprimer en fonction des paramètres désirés.

$$\begin{aligned} \bar{s} = & - \int_{t_0}^t \frac{\sin \varepsilon_0 \sin(\psi_A + \Delta \psi_1)}{(1 + \cos(\theta_A + \Delta \theta))} \cdot d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\ & - \left[\frac{(\sin \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta \psi_1) \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) - \cos \varepsilon_0 \sin^2(\omega_A + \Delta \varepsilon_1))}{(1 + \cos(\theta_A + \Delta \theta))} \right] \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1) \end{aligned}$$

Mais, en vertu de (72) :

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_A + \Delta \theta) \\ = & \cos \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) + \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta \psi_1) \end{aligned}$$

D'où, en guise de conclusion, la détermination rigoureuse de s en fonction des variables $\varepsilon_0, \omega_A, \psi_A, \Delta \varepsilon_1, \Delta \psi_1$:

$$\begin{aligned} \bar{s} = & \int_{t_0}^t \frac{(\sin \varepsilon_0 \sin(\psi_A + \Delta \psi_1))}{(1 + \cos \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) + \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta \psi_1))} \cdot d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\ & - \int_{t_0}^t \frac{(\sin \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta \psi_1) - \cos \varepsilon_0 \sin^2(\omega_A + \Delta \varepsilon_1))}{(1 + \cos \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) + \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta \psi_1))} \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1) \end{aligned} \quad (74)$$

Voilà le résultat recherché , qui consiste à n'inclure dans l'expression développée de \bar{s} que les variables que l'on pourrait qualifier de "primaires", à savoir ψ_A , ω_A , ϵ_0 , $\Delta\psi_A$, $\Delta\epsilon_A$, liées au plan de référence de l'écliptique moyen de la date $t = J2000.0$.

En utilisant cette égalité , on peut donc prétendre que l'incertitude avec laquelle s'entoure \bar{s} , ne dépend que de la précision et de l'exactitude des différentes quantités servant à évaluer précession et nutation luni-solaires par rapport à un plan fixe , en l'occurrence l'écliptique de J2000.0

IV.7) Développement complet de " \bar{s} " en tenant compte de certaines approximations.

Au vu de l'expression de " \bar{s} " telle qu'elle nous est donnée par l'équation (66), il va être possible d'en effectuer le développement, après s'être au préalable livré à des approximations largement justifiées.

Tout d'abord, on constatera que le dénominateur commun aux deux intégrants pourra être assimilé à 2. Effectivement :

$$\begin{aligned}
 & 1 + \cos \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) + \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 = & 1 + \cos \varepsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) + \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \\
 & - \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) ((\psi_A + \Delta\psi_1)^2 / 2) + o((\psi_A + \Delta\psi_1)^4) \\
 = & 1 + \cos(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) - (\sin \varepsilon_0 / 2) \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) (\psi_A + \Delta\psi_1)^2 \\
 & + o((\psi_A + \Delta\psi_1)^4) \\
 = & 2 - ((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^2 / 2) - (\sin \varepsilon_0 / 2) \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) (\psi_A + \Delta\psi_1)^2 \\
 & + o_2((\psi_A + \Delta\psi_1)^4, (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^4)
 \end{aligned}$$

Majorons la valeur absolue de l'erreur commise, sur un intervalle de 100 ans :

$$(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) < 5 \cdot 10^{-5} \text{ (rd)}$$

Donc:
$$\frac{(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^2}{2} < 5 \cdot 10^{-9}$$

Toujours sur ce même intervalle de 100 ans :

$$(\psi_A + \Delta\psi_1) < 25,5 \cdot 10^{-3} \text{ (rd)}$$

$$(\psi_A + \Delta\psi_1)^2 < 7 \cdot 10^{-4}$$

Et:
$$(\sin \varepsilon_0 \cdot \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) / 2) < 10^{-1}$$

D'où:
$$(\sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \cdot \sin \varepsilon_0) \cdot ((\psi_A + \Delta\psi_1)^2 / 2) < 7 \cdot 10^{-5}$$

Et l'erreur relative, majorée, sur s , due à l'approximation :

$$|(\Delta \bar{s} / \bar{s})| < (7/2) \cdot 10^{-5} = 3,5 \cdot 10^{-5}$$

En conclusion, en assimilant le dénominateur des intégrants à 2, on effectue au pire sur s une erreur relative de $5 \cdot 10^{-5}$. A posteriori, il sera utile d'évaluer l'erreur absolue correspondante commise sur s , une fois mesuré l'ordre de grandeur de s .

En tous les cas, l'approximation qui vient d'être réalisée

débouche sur la formule littérale suivante de \bar{s} , nettement simplifiée par rapport à la précédente :

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= - \int_{t_0}^t \frac{(\sin \varepsilon_0 \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_L))}{2} \cdot d(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \\ &+ \int_{t_0}^t \frac{(\cos \varepsilon_0 \sin^2(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) - \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \cos(\psi_A + \Delta\psi_L))}{2} d(\psi_A + \Delta\psi_L) \end{aligned}$$

Il sera alors utile d'effectuer les approximations suivantes :

(a1)

$$\begin{aligned} &\sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \\ &= \sin(\varepsilon_0 + \omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L) \\ &= \sin \varepsilon_0 + \cos \varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L) + o((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)^3) \end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned} &\sin^2(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \\ &= \sin^2 \varepsilon_0 + \sin 2\varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L) + \cos^2 \varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)^2 \\ &\quad + o((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)^3) \end{aligned}$$

(a3)

$$\begin{aligned} &\cos(\psi_A + \Delta\psi_L) \\ &= 1 - ((\psi_A + \Delta\psi_L)^2 / 2) + o((\psi_A + \Delta\psi_L)^4) \end{aligned}$$

(a4)

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \\ &= \cos(\varepsilon_0 + \omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L) \\ &= \cos \varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L) - (\cos \varepsilon_0 / 2) \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)^2 \\ &\quad + o((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)^4) \end{aligned}$$

Ainsi, le numérateur N_2 du second intégrant de s prend l'allure suivante :

$$\begin{aligned} N_2 &= \cos \varepsilon_0 \sin^2(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \\ &\quad - \sin \varepsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \cos(\omega_A + \Delta\varepsilon_L) \cos(\psi_A + \Delta\psi_L) \\ &= \cos \varepsilon_0 \sin^4 \varepsilon_0 + \cos \varepsilon_0 \sin 2\varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L) + \cos^3 \varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)^2 \\ &\quad - \sin \varepsilon_0 \cdot \left[(\sin \varepsilon_0 + \cos \varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_L)) \cdot (1 - ((\psi_A + \Delta\psi_L)^2 / 2)) \right] \end{aligned}$$

$$\left[\cos \varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) - (\cos \varepsilon_0 / 2) \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \right] \\ + o \left((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^3, (\psi_A + \Delta \psi_1)^3 \right)$$

N_2

$$= \cos \varepsilon_0 \sin^2 \varepsilon_0 \\ + \cos \varepsilon_0 \sin^2 \varepsilon_0 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + \cos^3 \varepsilon_0 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \\ - \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \\ + \sin^3 \varepsilon_0 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + ((\sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0) / 2) \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \\ - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \\ + ((\sin^2 \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0) / 2) (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 \\ + ((\sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 / 2)) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 \\ - (\sin^3 \varepsilon_0 / 2) \cdot (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + o \left((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^3, (\psi_A + \Delta \psi_1)^3, (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \cdot (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 \right)$$

N_2

$$= (\cos \varepsilon_0 \cdot \sin 2\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 + \sin^3 \varepsilon_0) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + (\cos^3 \varepsilon_0 + ((\sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0) / 2) + \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \\ + ((\sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0) / 2) (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 \\ + ((\sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0) / 2) - (\sin^3 \varepsilon_0 / 2) (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)$$

$$N_2 = \sin \varepsilon_0 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + \cos \varepsilon_0 \cdot (1 + (\sin^2 \varepsilon_0 / 2)) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \\ + ((\cos \varepsilon_0 \sin^2 \varepsilon_0) / 2) (\psi_A + \Delta \psi_1)^2$$

$$\begin{aligned}
 & + ((\sin \varepsilon_0 \cos 2\varepsilon_0)/2) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) (\psi_A + \Delta\psi_1)^2 \\
 & + o((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^2, (\psi_A + \Delta\psi_1)^4, (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^2 \cdot (\psi_A + \Delta\psi_1)^2)
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

D'une manière tout à fait analogue, il est possible d'envisager un développement limité du numérateur du premier intégrant de s :

$$\begin{aligned}
 N & = (-\sin \varepsilon_0) \cdot \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \tag{76} \\
 & = (-\sin \varepsilon_0) \cdot (\psi_A + \Delta\psi_1 - ((\psi_A + \Delta\psi_1)^3/6) + o((\psi_A + \Delta\psi_1)^5))
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (75) et de (76), ainsi que de l'approximation consistant à substituer 2 au dénominateur des deux intégrants, on en arrive à la formulation simplifiée de \bar{s} suivante :

$$\begin{aligned}
 \bar{s}(t) & = -\int_0^t (\sin \varepsilon_0 / 2) \left[(\psi_A + \Delta\psi_1) - ((\psi_A + \Delta\psi_1)^3 / 6) \right] \cdot d(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \\
 & + \int_0^t (\sin \varepsilon_0 / 2) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & + \int_0^t (\cos \varepsilon_0 / 2) (1 + (\sin^2 \varepsilon_0 / 2)) \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & + \int_0^t ((\cos \varepsilon_0 \sin^2 \varepsilon_0) / 4) \cdot (\psi_A + \Delta\psi_1)^2 \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & + \int_0^t ((\sin \varepsilon_0 \cos 2\varepsilon_0) / 2) (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) (\psi_A + \Delta\psi_1)^2 \cdot d(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
 & + o((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^3, (\psi_A + \Delta\psi_1)^4, (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)^2 \cdot (\psi_A + \Delta\psi_1)^2)
 \end{aligned}$$

Il n'est pas inutile de rappeler qu'il ne s'agit ici que d'un développement limité au troisième ordre en $(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)$ et en $(\psi_A + \Delta\psi_1)$ la limitation à cet ordre s'expliquant aisément par la faiblesse de ces quantités. Après un regroupement des termes croisés :

$$(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1) d(\psi_A + \Delta\psi_1)$$

et : $(\psi_A + \Delta\psi_1) d(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1)$,

et une intégration évidente, on aboutit à un développement relativement succinct de s :

$$\begin{aligned}
 \bar{s}(t) &= (\sin \varepsilon_0 / 2) \cdot \int_0^t [(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1) - (\psi_A + \Delta \psi_1) \cdot d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1)] \\
 &+ ((\sin^2 \varepsilon_0 \cdot \cos \varepsilon_0) / 12) \cdot \left[(\psi_A + \Delta \psi_1)^3 \right]_0^t \\
 &+ (\sin \varepsilon_0 / 12) \int_0^t (\psi_A + \Delta \psi_1)^3 \cdot d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\
 &+ ((\cos \varepsilon_0 / 4) \cdot (2 + \sin^2 \varepsilon_0)) \cdot \int_0^t (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2 \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1) \\
 &+ ((\sin^2 \varepsilon_0 \cdot \cos \varepsilon_0) / 2) \cdot \int_0^t (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \cdot (\psi_A + \Delta \psi_1)^3 \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1) \\
 &+ o((\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^3, (\psi_A + \Delta \psi_1)^2 \cdot (\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1)^2, (\psi_A + \Delta \psi_1)^4)
 \end{aligned}$$

(77)

où o est une quantité que l'on aura loisir de négliger, compte tenu de la précision exigée (de l'ordre de $5 \cdot 10^{-6}$ "/siècle).

D'ailleurs, en respectant cette précision, on peut se contenter du développement suivant :

$$\begin{aligned}
 \bar{s}(t) &= (\sin \varepsilon_0 / 2) \int_0^t \left[(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) \cdot d(\psi_A + \Delta \psi_1) - (\psi_A + \Delta \psi_1) \cdot d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \right] \\
 &+ ((\sin^2 \varepsilon_0 \cdot \cos \varepsilon_0) / 12) \left[(\psi_A + \Delta \psi_1)^3 \right]_0^t
 \end{aligned}$$

(78)

Développement numérique de (78) :

En utilisant les expressions en vigueur dans les éphémérides (cf. "La Connaissance des Temps"), déjà évoquées dans I.3 :

$$\omega_A = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 t^2$$

$$\psi_A = \psi_1 t + \psi_2 t^2$$

$$\Delta \psi_1 = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i)$$

$$\Delta \varepsilon_1 = \sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

$s(t)$ peut alors se décomposer selon différents termes dont l'expression exhaustive est donnée dans l'annexe V : On peut retenir selon leur nature :

Une composante en t^3 provenant du terme lié à la précession, à savoir
 $(\Psi_1^3 \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 / 12) t^3$

19 composantes en puissances de t de termes sinusoidaux, provenant de la combinaison "nutation-précession", à savoir:

$$(\sin \varepsilon_0 / 2) \int_0^t [(\omega_A - \varepsilon_0) d(\Delta \Psi_1) + (\Delta \varepsilon_1) d \Psi_A - \Psi_A d(\Delta \varepsilon_1) - (\Delta \Psi_1) d \omega_A]$$

Un terme séculaire et trois termes sinusoidaux provenant de la combinaison "nutation-nutation", à savoir:

$$(\sin \varepsilon_0 / 2) \int_0^t [\Delta \varepsilon_1 d(\Delta \Psi_1) - \Delta \Psi_1 d(\Delta \varepsilon_1)]$$

Tous ces termes ont été calculés par Capitaine & al. (1986); ils sont récapitulés dans le Tableau II ci dessous. Ω est la longitude tropique moyenne du noeud de l'orbite lunaire, φ et \odot sont respectivement les longitudes de la Lune et du Soleil, et p et p_s sont respectivement les longitudes tropiques moyennes du périégée de la Lune et du Soleil.

T A B L E A U II

Développement complet de \bar{s} en ne gardant que les termes au-dessus de $5 \cdot 10^{-6}$ "

Origine	No.	Termes de \bar{s} (10^{-5} "/siècle)	Période (jours)
précession		$3629 t^3$	
nutatation	Tous	$385 t$	
précession -nutatation	1	- 265 $\sin \Omega$ -4471 t $\cos \Omega$ - 37 t $\sin \Omega$ + 1 t $\cos \Omega$	6798,4 6798,4 6798,4 6798,4
	2	+ 1 $\sin 2 \Omega$ + 43 t $\cos 2 \Omega$	3399,2 3399,2
	9	- 279 t $\cos 2 \Theta$ - 3 t $\sin 2 \Theta$	182,6 182,6
	31	- 47 t $\cos 2 \ell$	13,7
	11	- 11 t $\cos(3\Theta - p_s)$	121,7
	33	- 10 t $\cos(2\ell - \Omega)$	13,6
	34	- 6 t $\cos(3\ell - p)$	9,1
	12	+ 5 t $\cos(\Theta + p_s)$	365,2
	13	+ 3 t $\cos(2\Theta - \Omega)$	177,8
	36	+ 3 t $\cos(\ell + p)$	27,1
	10	- 3 t $\cos(\Theta - p_s)$	365,3
	38	+ 2 t $\cos(\ell - p + \Omega)$	27,7
	39	- 2 t $\cos(-\ell + p + \Omega)$	27,4
	41	- 1 t $\cos(3\ell - p - \Omega)$	9,1
	40	- 1 t $\cos(3\ell + p - 2\Theta)$	9,6
	3	+ 1 t $\cos(2 p - \Omega)$	1305,5
	42	- 1 t $\cos(4\ell - 2\Theta)$	7,1
	45	- 1 t $\cos(4\ell - 2 p)$	6,9
	44	+ 1 t $\cos(\ell + 2\Theta - p)$	23,9
	nutatation -nutatation	9 et 16 10 et 12	+ 1 $\sin 2 p_s$
1 et 2 31 et 33		+ 1 $\sin \Omega$	6798,4
1 et 9		- 1 $\sin(2\Theta - \Omega)$	177,8

IV.8) Construction d'un nouveau système de coordonnées lié à l'Origine Non-Tournante.

La détermination de la quantité \bar{s} (cf. relation (66)) permet, on l'a vu au I.6, d'établir un nouveau système de coordonnées, que l'on appelle "système de coordonnées instantanées" (Guinot, 1979): Plus précisément, lorsqu'on considère le référentiel $R'(t)$ tel que: $R' = (0, x', y', z')$, où (Oz') est l'axe de rotation instantanée, où (Ox') est l'axe passant par l'Origine Non-Tournante, et où (Oy') complète le trièdre, $R'(t)$ se déduit de $R'(t_0)$ par l'intermédiaire des paramètres $(\zeta_A + \Delta\zeta)$, $(\theta_A + \Delta\theta)$ et \bar{s} , celui-là étant directement fonction des deux autres. Rappelons pour justifier ce fait, que :

$$\bar{s} = \overbrace{\sigma(t) Q'(t)} - \overbrace{\sigma(t_0) Q'(t)} = (1/2) \int_{t_0}^t (\theta_A + \Delta\theta)^2 d(\zeta_A + \Delta\zeta)$$

d'après (66)

où $Q'(t)$ est le noeud ascendant de $Eq(t)$ sur $Eq(t_0)$.

Faisons correspondre $\sigma(t_0)$ avec l'équinoxe vrai de t_0 ; alors, $R'(t)$ se déduira de $R'(t_0)$ de façon simple, par la combinaison de trois rotations:

$$R'(t) = Mz\left(\left(\zeta_A + \Delta\zeta\right) - \frac{\pi}{2} - \bar{s}\right) Mx\left(\theta_A + \Delta\theta\right) Mz\left(\frac{\pi}{2} - \left(\zeta_A + \Delta\zeta\right)\right) R'(t_0)$$

(79)

où le développement de s est donné par le tableau II.

On peut trouver un certain avantage à adopter un système de coordonnées instantanées. Effectivement, à une époque où les techniques de type VLBI permettent de positionner le pôle de rotation instantanée de la date t par rapport au pôle de rotation instantanée de la date t_0 avec une très grande précision, ceci de façon brute, il est logique de concevoir un système de coordonnées comme $R'(t)$ ne mettant finalement en jeu que le déplacement intrinsèque du pôle de rotation. En effet, il n'est nullement question ici du positionnement relatif de l'équateur par rapport à l'écliptique, donc d'inconnues auxiliaires comme l'obliquité de l'écliptique où la constante de précession. La quantité \bar{s} ne dépend elle-même que des paramètres $(\zeta_A + \Delta\zeta)$ et $(\theta_A + \Delta\theta)$ ne mettant en jeu que le mouvement intrinsèque de l'équateur.

IV.9) Les coordonnées instantanées d'un astre (Guinot 1979)

De la même manière que se trouve établi un système de coordonnées vraies (α , δ) permettant de positionner tout astre par rapport à l'équinoxe vrai de la date t , et de l'équateur vrai de cette date, il sera possible d'établir un autre système de coordonnées que l'on pourra appeler "Système de coordonnées instantanées" (α_i , δ_i), définies à partir du point σ et de l'équateur vrai de la date. Un astre S étant donné, ses coordonnées α et δ seront liées à α_i et δ_i par les relations simples:

$$\alpha = \gamma\sigma + \alpha_i = q + \alpha_i \quad (80)$$

$$\delta = \delta_i \quad (81)$$

où q est l'ascension droite de l'Origine Non Tournante.

Ainsi, il sera trivial de remplacer la coordonnée vraie d'un astre par sa coordonnée instantanée, une fois qu'est connue l'ascension droite de l'Origine Non-Tournante $\widehat{\gamma\sigma}$, dont l'expression est donnée par les relations (68) et (69).

Remarque

Si rapprochement entre ascension droite vraie et ascension droite instantanée est réalisable par le biais de la quantité "q", on ne doit pas perdre de vue que l'un des intérêts résidant dans l'adoption de l'ascension droite instantanée est de s'affranchir de l'indétermination à laquelle est sujette le mouvement de l'écliptique, qui est caractérisée par le paramètre ($\chi_A + \Delta\chi$) (cf. III.9). D'après (68), ce paramètre intervient explicitement dans "q".

IV.10) L'approche du phénomène d'aberration dans le cas de l'adoption du système de paramétrage "instantané".

Il semble que si l'on doit trouver un avantage quelconque à garder l'équinoxe comme point origine pour établir des coordonnées, c'est bien dans le cadre de l'aberration que l'on trouvera cet avantage. Effectivement, l'aberration est un phénomène physique dont l'expression classique, sous forme de correction de coordonnées équatoriales, est directement fonction de l'orientation du vecteur vitesse de la Terre et de son intensité, ce vecteur vitesse balayant l'écliptique au cours d'une révolution.

Le point γ est ainsi fort logiquement le point de base pour la détermination de ce vecteur vitesse: Ce dernier est orienté vers le point F de la sphère céleste dont la longitude l sera:

$$l_F = l_{\odot} - (\pi / 2)$$

où l_{\odot} est la longitude du Soleil.

Classiquement, on note:

$$\Delta\alpha = (K \sec \delta) \left[-\cos \alpha \cos l_{\odot} \cos \epsilon - \sin \alpha \sin l_{\odot} \right]$$

$$\Delta\delta = (-K \cos \delta) \sin \epsilon \cos l_{\odot} + (K \sin \delta) \left[\sin \alpha \cos l_{\odot} \cos \epsilon - \cos \alpha \sin l_{\odot} \right]$$

où $K = (v/c)$, v étant la vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil et c la vitesse de la lumière.

Il va de soi que les corrections ($\Delta\alpha_i$) et ($\Delta\delta_i$) que l'on devra appliquer aux ascensions droites instantanées α_i et δ_i d'un astre sont respectivement identiques à ($\Delta\alpha$) et ($\Delta\delta$), puisque un changement d'origine sur l'équateur instantané reste sans conséquences sur $\Delta\alpha$, et que: $\delta = \delta_i$

Il reste néanmoins à formuler ces corrections, en fonction de α_i et δ_i .

Substituons à l'ascension droite α sa valeur en fonction de l'ascension droite instantanée α_i : $\alpha = \alpha_i + q$. On obtient les formulations suivantes:

$$\Delta\alpha_i = (K \sec \delta_i) \left[\cos \alpha_i (-\sin q \sin l_{\odot} - \cos q \cos l_{\odot} \cos \epsilon) + \sin \alpha_i (\sin q \cos l_{\odot} \cos \epsilon - \cos q \sin l_{\odot}) \right] \quad (82)$$

$$= (K \cos \delta_i) \sin \alpha_i \cos l_{\odot}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (K \sin \delta_i) \left[\cos \alpha_i (-\cos q \sin l_0 + \sin q \cos l_0 \cos \varepsilon) \right. \\
 &\quad \left. + \sin \delta_i \sin \alpha_i (\sin q \sin \theta - \cos q \cos l_0 \cos \varepsilon) \right] \\
 &\hspace{15em} (83)
 \end{aligned}$$

où q désigne l'ascension droite vraie de l'Origine Non Tournante (q est donnée par les relations (68) ou (69)).

En guise de conclusion, on constatera que les formulations de $\Delta \alpha_i$ et de $\Delta \delta_i$ relatives au phénomène d'aberration se présentent de manière un peu plus longue lorsqu'elles s'expriment à partir des coordonnées instantanées que lorsqu'elles s'expriment en fonction des coordonnées vraies. Ceci provient de ce que le point σ ne constitue pas une origine parfaitement adaptée à un calcul qui fait intervenir l'équinoxe de manière privilégiée.

IV.11) Détermination des coordonnées du point σ par rapport au référentiel inertiel Ro . Allure de la courbe décrite par σ .

Coordonnées de σ dans Ro

Dans la seconde partie (II.9), on a vu comment il était possible de déterminer les coordonnées de l'origine σ dans le référentiel Ro . Ainsi:

$$\vec{O\sigma} / Ro \quad \left| \begin{array}{l} \cos \Psi' \cos \varphi' - \sin \Psi' \sin \varphi' \cos \theta' \\ \sin \Psi' \cos \varphi' + \cos \Psi' \sin \varphi' \cos \theta' \\ -\sin \theta' \sin \varphi' \end{array} \right. \quad (84)$$

En reprenant le paramétrage déjà adopté au chapitre I.2:

$$\theta' = (\omega_A + \Delta \varepsilon_1)$$

$$\Psi' = -(\Psi_A + \Delta \Psi_1)$$

Egalités auxquelles s'ajoute l'identité suivante:

$$\varphi' = \varphi'_0 + \int_0^t \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) d(\Psi_A + \Delta \Psi_1)$$

d'après (67)

Donc, en tenant compte des substitutions ci-dessus:

$$\vec{O\sigma} / Ro \quad \left| \begin{array}{l} \cos(\Psi_A + \Delta \Psi_1) \cos \varphi' - \sin(\Psi_A + \Delta \Psi_1) \sin \varphi' \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\ - \sin(\Psi_A + \Delta \Psi_1) \cos \varphi' + \cos(\Psi_A + \Delta \Psi_1) \sin \varphi' \cos(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\ - \sin(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \sin \varphi' \end{array} \right. \quad (85)$$

Avec: $\varphi' = \varphi'_0 + \left[(\Psi_A + \Delta \Psi_1) \cos \varepsilon_0 \right]_0^t - Y \sin \varepsilon_0$

et: $Y = Y_m + Y_p + Y_s$ (cf. chapitre IV.3)

(où les expressions formelles et développées de Y_s , Y_m et Y_p sont données dans l'annexe IV)

L'avantage est ici de présenter les coordonnées du point σ à tout instant de manière absolue, sans avoir à se référer à un plan mobile. De plus, cela va permettre de se représenter tout de suite l'allure de la trajectoire décrite par σ lorsque t varie (cf. ci-dessous).

Il sera intéressant, par comparaison, de donner l'expression des coordonnées du point γ_1 sur l'écliptique de t_0 :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ 0 \gamma_1 / R \end{array} \left| \begin{array}{l} \cos(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \\ -\sin(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \\ 0 \end{array} \right.$$

Trajectoire décrite par σ .

A l'instar du point vernal dont on sait qu'il effectue en près de 26 000 ans un cercle sur la voûte céleste, on peut évaluer globalement quelle est la trajectoire décrite par le point σ en fonction du temps. Dans cette optique, on pourra se livrer à certaines approximations:

(a) On négligera les effets de la nutation, effets à courte période qui ne transforment pas de manière significative l'allure de la trajectoire du point σ .

(b) On assimilera ω_A et Ψ_A à leur terme le plus significatif, à savoir:

$$\omega_A = \epsilon_0$$

$$\text{Et: } \Psi_A = \Psi_1 t$$

(c) On négligera, dans l'expression de Ψ' ci-dessus, les termes Y_m , Y_p et Y_s , dont l'amplitude reste en valeur absolue très faible, même sur une période de temps très longue (cf. relation (69))

De telle sorte que l'on se contentera de l'approximation:

$$\Psi' = \Psi'_0 + \Psi_A \cos \epsilon_0$$

$$\Psi' = \Psi'_0 + (\Psi_1 \cos \epsilon_0) t$$

où Ψ'_0 dépend de la localisation initiale de σ . Par

mesure de simplicité on pourra attribuer à Ψ_0 la valeur 0, puisque de toutes les manières l'allure de la courbe décrite par σ ne dépend pas de la localisation initiale de ce dernier.

Tout revient donc à étudier la trajectoire décrite par le point $\tilde{\sigma}$ dont les coordonnées paramétriques sont les suivantes:

$$\begin{cases} X(\tilde{\sigma}) = \cos \tilde{\Psi}_A \cos(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) + \sin \tilde{\Psi}_A \sin(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) \cos \varepsilon_0 \\ Y(\tilde{\sigma}) = -\sin \tilde{\Psi}_A \cos(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) + \cos \tilde{\Psi}_A \sin(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) \cos \varepsilon_0 \\ Z(\tilde{\sigma}) = -\sin \varepsilon_0 \sin(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) \end{cases}$$

Avec: $\tilde{\Psi}_A = \Psi_1 t$

Recherchons tout d'abord quelle est la projection $(\bar{\mathcal{E}})$ de la courbe (\mathcal{E}) décrite par $\tilde{\sigma}$, sur le plan $(0, X_0, Y_0)$. En fait:

$$(\bar{\mathcal{E}}) \begin{vmatrix} X(\tilde{\sigma}) \\ Y(\tilde{\sigma}) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\Psi}_A & \sin \tilde{\Psi}_A \\ -\sin \tilde{\Psi}_A & \cos \tilde{\Psi}_A \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) \\ \sin(\tilde{\Psi}_A \cos \varepsilon_0) \cos \varepsilon_0 \end{vmatrix}$$

Ainsi le procédé de construction de $\bar{\mathcal{E}}$ est le suivant:

Pour une valeur de t donnée, on positionne le point R de coordonnées $R(\cos((\Psi_1 \cos \varepsilon_0) t), \sin((\Psi_1 \cos \varepsilon_0) t) \cos \varepsilon_0)$ sur l'ellipse (\mathcal{E}) de demi-grand axe 1 le long de $(0, X_0)$, et de demi-petit axe $(\cos \varepsilon_0)$ le long de $(0, Y_0)$. Puis on effectue une rotation d'angle: $-\tilde{\Psi}_A = -(\Psi_1 t)$ autour de $(0, Z_0)$ du vecteur OR. On aboutit alors au point P qui est celui recherché (c'est à dire la projection de $\tilde{\sigma}$ sur $(0, X_0, Y_0)$). En résumé, P se déduit à tout instant d'une rotation par rapport un point situé sur (\mathcal{E}) .

La figure 25 ci-après retrace le procédé de construction de la courbe projection.

Les maximas de la distance OP.

La rotation d'angle $(-\tilde{\Psi}_A)$ ne modifiant pas les normes, les maximas de la distance OP se produiront lorsque la distance OQ sera elle-même maximum.

Comme: OQ $(\cos(\Psi_1 \cos \varepsilon_0) t), \sin((\Psi_1 \cos \varepsilon_0) t) \cos \varepsilon_0)$, les maximas de la distance OP auront lieu lorsque:

$$(\Psi_1 \cos \varepsilon_0) t = k \pi \quad , \text{ où } k \text{ est un entier.}$$

$$\text{Soit: } t = (k \pi / \Psi_1 \cos \varepsilon_0)$$

Ces maxima seront égaux à 1.

Les points correspondant à ces minima auront pour expression:

$$P_k \left\{ \begin{array}{l} X(P_k) = \cos(k\pi / \cos \epsilon_0) \cos k\pi \\ Y(P_k) = -\sin(k\pi / \cos \epsilon_0) \cos k\pi \end{array} \right.$$

Les trois premiers maxima pour la distance OP seront les points P_0, P_1, P_2 de coordonnées:

$$P_0(1 ; 0) \quad P_1(0,9602 ; -0,2790) \quad P_2(0,8442 ; -0,5359)$$

Les minima de la distance OP.

D'une manière analogue, ils se produiront lorsque OQ sera minimale, autrement dit quand:

$$(\Psi_1 \cos \epsilon_0) t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \text{ entier.}$$

Leur valeur sera $(\cos \epsilon_0)$.

Les points correspondant à ces minima auront pour expression:

$$P_k' \left\{ \begin{array}{l} X(P_k') = \sin((2k+1)\pi / 2 \cos \epsilon_0) \sin((2k+1)\pi) \cos \epsilon_0 \\ Y(P_k') = \cos((2k+1)\pi / 2 \cos \epsilon_0) \sin((2k+1)\pi) \cos \epsilon_0 \end{array} \right.$$

Les trois premiers minima pour la distance OP seront les points :

$$P_1' (0,9082 ; -0,1293) \quad P_2' (0,8360, -0,3776) \quad P_3' (0,6974 ; -0,5959)$$

La figure 26 montre la courbe $\bar{\sigma}$, avec les valeurs des angles de rotation $(-\Psi_n)$ utilisés. On remarque que $\bar{\sigma}$ n'est effectuée sur $(0, X_0, Y_0)$ qu'une petite portion dans l'intervalle de 26000 ans au cours duquel l'équinoxe est effectuée, en ce qui le concerne, un tour complet le long de $(0, X_0, Y_0)$. De plus, $(\bar{\sigma})$ est cyclique, la durée du cycle étant l'intervalle de temps qui sépare les maxima et les minima entre eux:

$$\Delta t = (\pi / \Psi_1 \cos \epsilon_0) = 14\,018 \text{ ans}$$

Au bout d'un cycle, l'angle $\alpha = (OX_0, O\bar{\sigma})$ a progressé d'une quantité égale à:

$$\Delta \alpha = (\pi / \cos \epsilon_0) - \pi \approx (\pi / 11)$$

Le point $\bar{\sigma}$ effectuera donc un tour complet le long du plan $(0, X_0, Y_0)$ en ayant accompli à peu près 22 cycles, soit dans une durée de l'ordre de 310 000 ans.

Quand à la coordonnée du point $\tilde{\sigma}$ le long de l'axe $(0, Z_0)$, elle varie de manière sinusoidale, puisque:

$$Z(\tilde{\sigma}) = -\sin \xi \cdot \sin(\tilde{\Psi}_1 \cos \xi)$$

La figure 27 retrace la valeur de cette coordonnée en fonction de t , à la même échelle que celle de la courbe 26. La période de la sinusoïde est deux fois celle du cycle, à savoir: 28 036 ans .

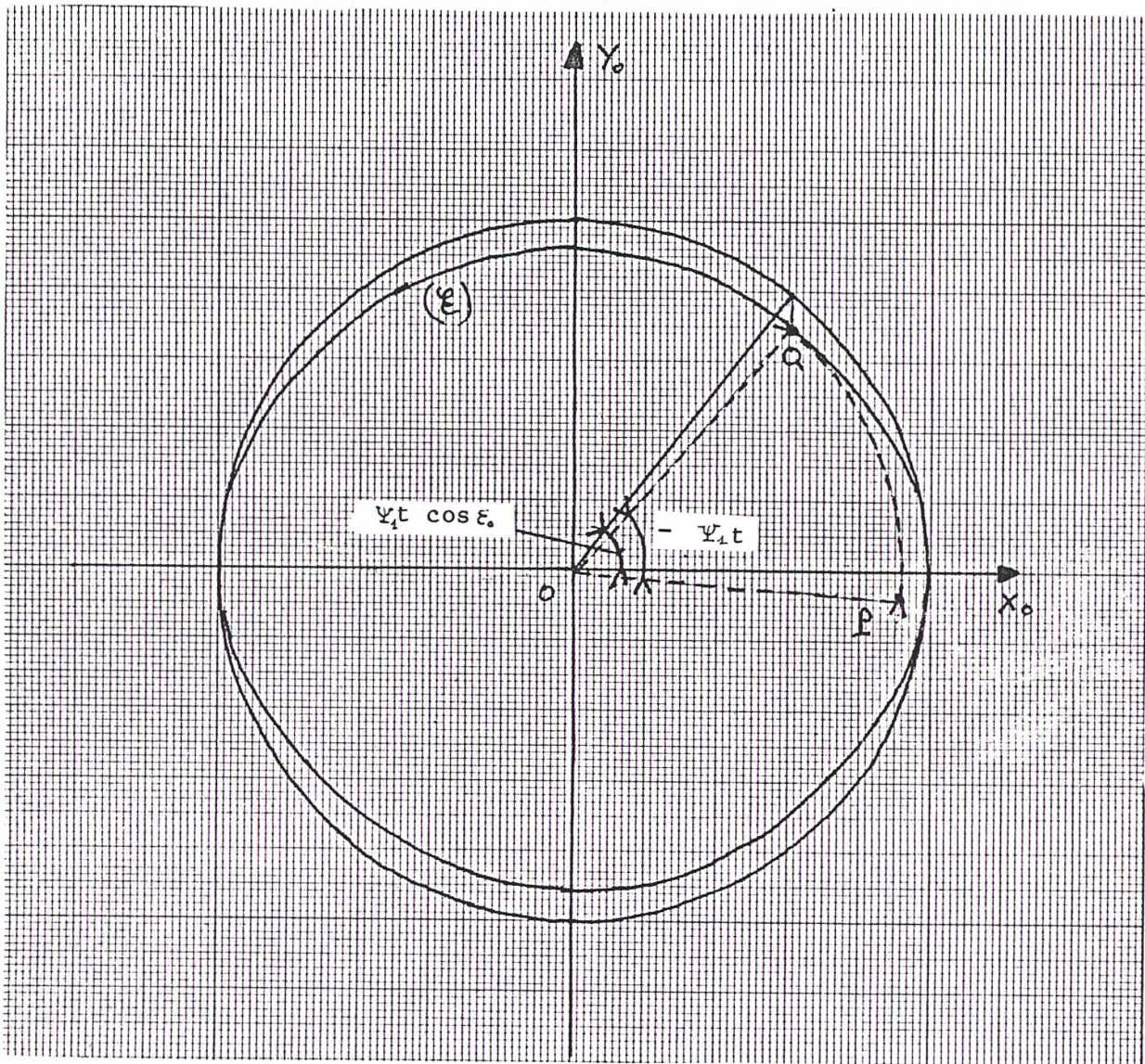
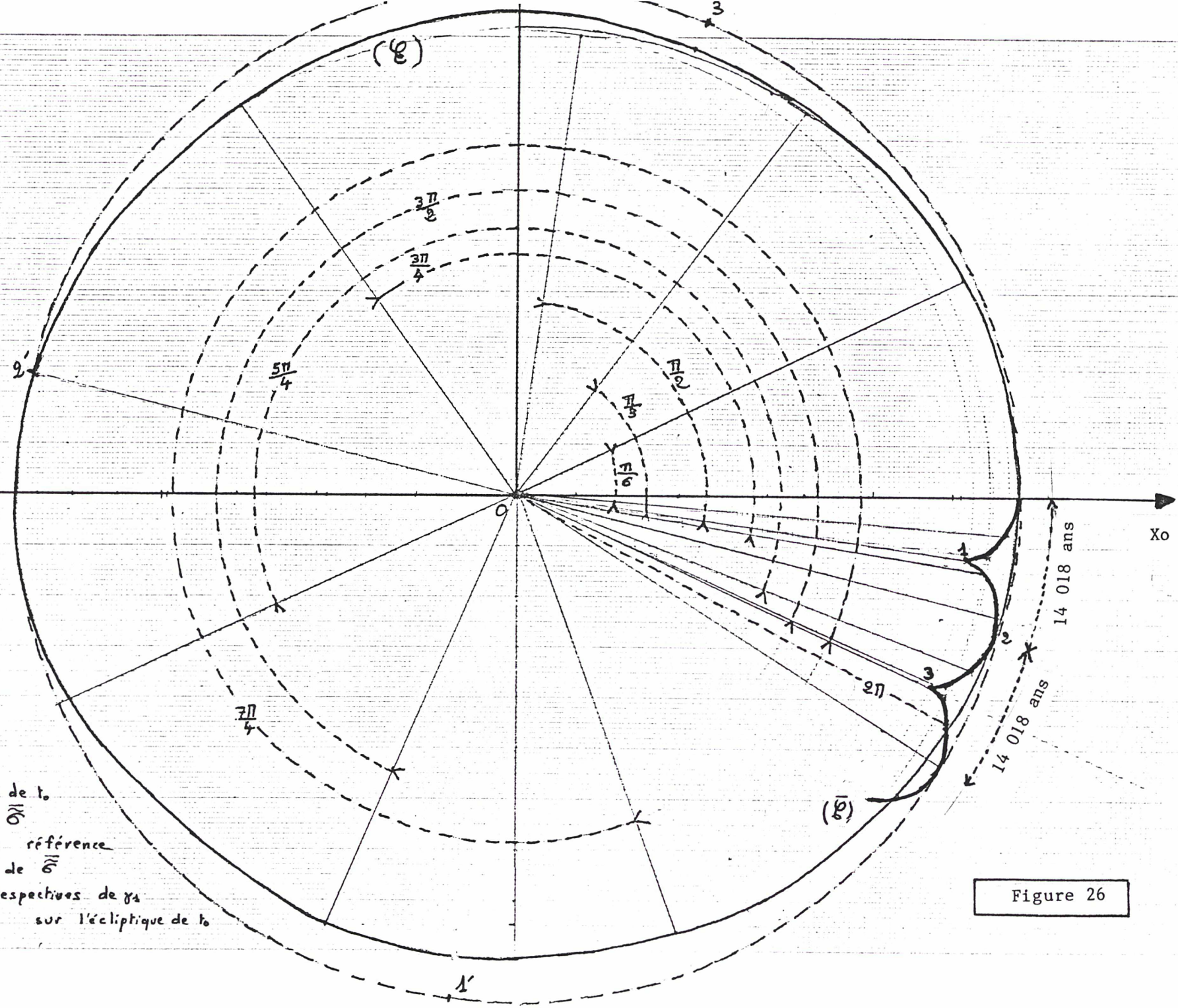


Figure 25

Pour une valeur de t donnée, on positionne sur l'ellipse (\mathcal{E}) le point d'abscisse : $\cos((\psi_1 t) \cos \epsilon_0)$ et d'ordonnée : $\sin((\psi_1 t \cos \epsilon_0) \cos \epsilon_0)$ puis on effectue autour de O une rotation d'angle $(-\psi_1 t)$ à partir de OQ pour aboutir au point P désiré, projection sur le plan inertiel de référence (O, X_0, Y_0) du point $\tilde{\sigma}$ (les valeurs de OQ et de OP étant les mêmes).



- - - - - Écliptique de t_0
 ———— trajectoire O''
 ———— ellipse de référence
 1, 2, 3 ; positions de O''
 1', 2', 3' : positions respectives de O''
 sur l'écliptique de t_0

Figure 26

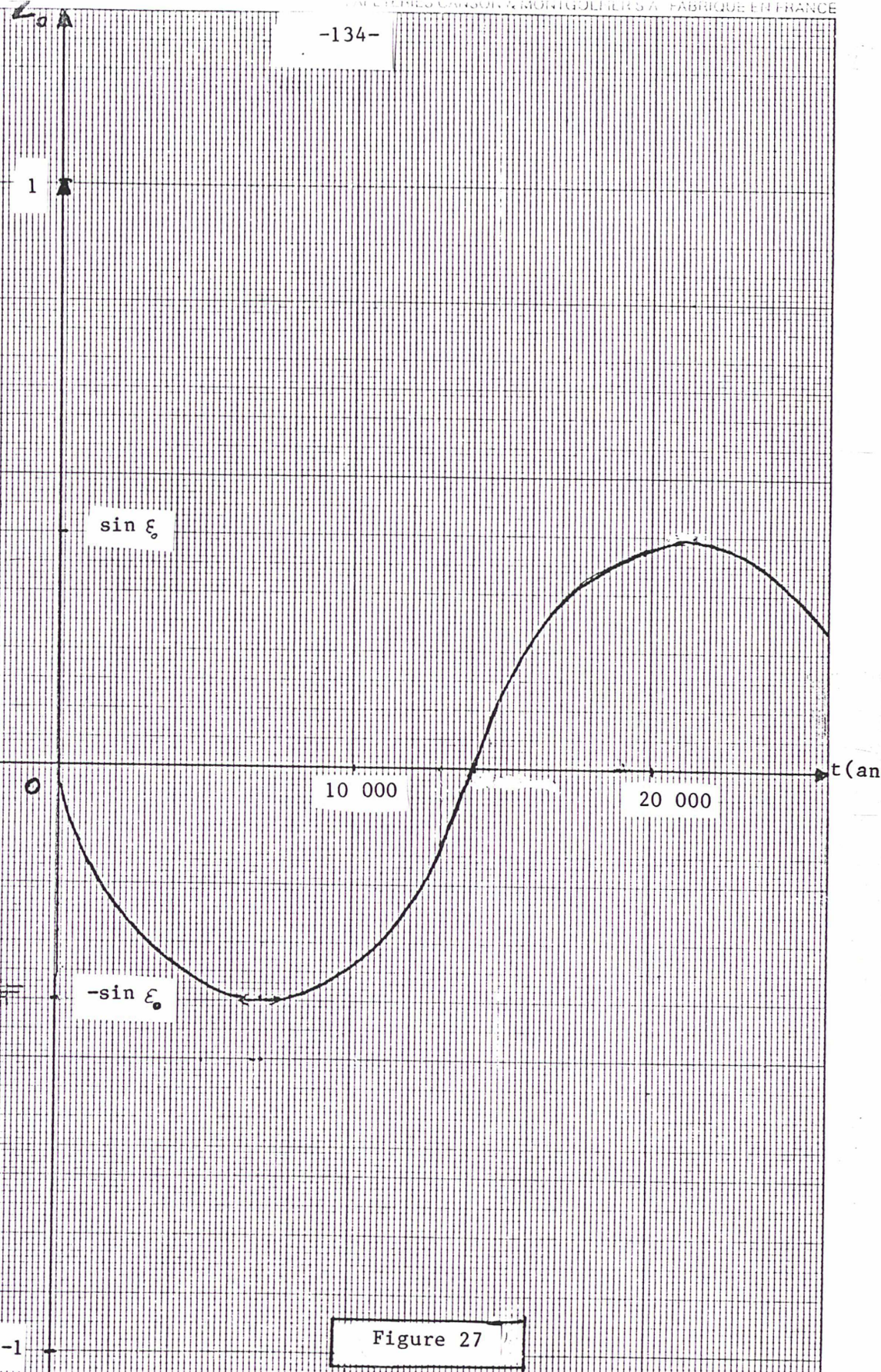


Figure 27

C O N C L U S I O N

L'Origine Non-Tournante est, au vu de l'étude précédente un concept indispensable lorsqu'il s'agit d'établir un angle censé matérialiser au mieux la rotation d'un corps quelconque, et par conséquent de la Terre. Sa double application par rapport à un référentiel non-tournant et par rapport à un référentiel terrestre permet à cet égard d'établir un angle (Angle stellaire, chapitre I.6) dont la dérivée est rigoureusement égale à l'amplitude du vecteur rotation de la Terre. Il s'ensuivrait une définition à la fois conceptuelle et simplifiée du Temps Universel (chapitre I.7), contrairement à la définition actuelle, relativement complexe et de nature conventionnelle.

La localisation des Origines Non-Tournantes, définie par une propriété cinématique simple, est indépendante du choix du référentiel de base choisi (R_0 pour σ , R pour $\bar{\omega}$). De plus, après avoir évalué l'ordre de grandeur du décalage existant entre la modélisation de la trajectoire du pôle de rotation instantanée et sa trajectoire véritable dans le système de référence céleste (ou CRS), il est possible d'en déduire quelle erreur ce décalage est susceptible d'amener sur l'angle stellaire θ . Cette erreur, bien que très faible, ne peut cependant être négligée.

Les définitions d'une quantité s dans l'espace et s' , sur la Terre, permettent de localiser rigoureusement les Origines Non-Tournantes correspondantes σ et $\bar{\omega}$ le long de l'équateur de rotation instantanée, une fois qu'est connu intégralement le mouvement de l'équateur de la date t par rapport à un équateur de référence d'une époque donnée t_0 . s et s' peuvent s'exprimer vectoriellement d'une manière très simple.

Le développement numérique de s en fonction des angles classiques de la précession et de la nutation (en adoptant les coefficients associés au Pole Céleste des Ephémérides) fait apparaître un terme en t^3 , émanant du seul phénomène de précession, d'autres termes provenant exclusivement de la nutation, dont l'un est séculaire, ainsi que des termes provenant exclusivement de la combinaison entre précession et nutation. Ainsi, les effets de la précession et de la nutation sur la position de σ apparaissent-ils très clairement par l'intermédiaire de cette quantité. Or, il s'avère que bien que bon nombre des termes ci-dessus possèdent des amplitudes largement supérieures au pouvoir de résolution des meilleures observations, et auraient dûs par conséquent être introduits dans la nouvelle définition de UT1 (datant du 1er janvier 1984), seul le premier d'entre eux a été pris en compte.

Quant à la quantité s' , elle permet de définir avec rigueur le positionnement de l'origine des longitudes sur la Terre. En particulier, elle met en évidence un terme dû au mouvement de Chandler qui ne peut être négligé dès lors qu'une grande précision (de l'ordre de $0'',0001$) est requise.

trajectoire de l'écliptique.

L'Origine Non-Tournante permet de définir un nouveau système de coordonnées, encore appelé "Système de coordonnées instantanées". La relation matricielle qui permet de le définir à tout instant, en fonction de la quantité s et des paramètres usuels liés au seul mouvement de l'équateur par rapport à un équateur de référence, est très simple. L'étude du phénomène d'aberration dans le nouveau système de coordonnées en question montre que ce dernier ne s'en trouve pas modifié, si ce n'est dans sa formulation.

La conclusion logique qui émane de toutes ces considérations est d'une part que le concept d'"Origine Non-Tournante" devrait être nécessairement utilisé dès lors que l'on se penche sur la rotation de la Terre et les moyens de la matérialiser, d'autre part que son emploi éliminerait certains inconvénients dont on ne peut s'affranchir lorsque l'on utilise l'équinoxe comme point origine. Enfin, son étude a permis de mettre en évidence la présence de termes ignorés dans l'actuelle définition de UT1.

Il est possible d'étendre la notion d'Origine Non Tournante dans le cas général de l'étude d'un référentiel R en rotation par rapport à un autre référentiel R_0 , ceci par le biais des angles d'Euler permettant de positionner le second par rapport au premier.

On peut alors exprimer les coordonnées des Origines Non-Tournantes qui s'en déduisent, l'une dans R_0 et l'autre dans R, et rappeler par une relation vectorielle simple le rôle important qui leur est imparti. L'application au cas de la rotation de la Terre permet de tracer l'allure de la trajectoire décrite par l'Origine Non-Tournante dans l'espace σ , après en avoir précisé les coordonnées dans un référentiel quasi-inertiel. Ainsi, la projection de cette trajectoire sur le plan de référence qu'est l'écliptique de la date origine t_0 , est-elle une courbe cyclique (cf. Figure 26) dont les minimas et les maximas de distance du centre O de la sphère céleste sont régulièrement espacés, selon une période correspondant à 14 028 ans. Quant au positionnement de σ par rapport au plan de référence ci-dessus, elle varie elle-même sinusoidalement selon le même cycle.

Une autre application de l'utilisation des angles d'Euler est l'expression de l'ascension droite de σ en fonction des quantités usuelles de la précession et de la nutation. Un développement poussé de cette expression a été formulé.

L'un des avantages de l'utilisation de l'Origine Non Tournante est de pouvoir s'affranchir totalement du mouvement de l'écliptique. Une étude approfondie a montré comment la localisation de l'origine actuelle qu'est l'équinoxe reste au contraire dépendante des modélisations de la

ANNEXE I

Relation entre les angles d'Euler ψ' , θ' liés au positionnement de l'axe de rotation instantanée de S, et les angles d'Euler ψ , θ et φ (ainsi que leurs dérivées), liés au positionnement de S par rapport à Ro.

Il peut être intéressant, dans certains cas, de pouvoir exprimer ψ' , θ' en fonction des paramètres ψ , θ et φ qui servent à positionner R par rapport à Ro, ainsi que leur dérivées.

\vec{k}' étant le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation instantanée (cf. , il s'exprime en fonction des angles d'Euler ψ' et θ'

$$\vec{k}' = (-\sin \psi' \sin \theta') \vec{I}_0 + (\cos \psi' \sin \theta') \vec{J}_0 + \cos \theta' \vec{K}_0$$

Comme d'autre part, $\vec{\omega}$, dans le référentiel inertiel a pour expression (cf. chapitre II.) :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = & -(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta) \cdot \vec{I}_0 \\ & + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) \cdot \vec{J}_0 \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cdot \vec{K}_0 \end{aligned}$$

Avec:

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta)^{1/2}$$

L'équivalence : $\vec{k}' = (\vec{\omega} / |\vec{\omega}|)$ donne alors les trois égalités :

$$\sin \psi' \sin \theta' = \frac{(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta}} \quad (I.1)$$

$$\cos \psi' \sin \theta' = \frac{(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta}} \quad (I.2)$$

$$\cos \theta' = \frac{(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta}} \quad (I.3)$$

Hypothèse (a)

On admettra que l'on se trouve dans la condition restrictive:

$$0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$$

de telle manière que : $\sin \theta' > 0$

En élevant les termes au carré dans II.1 et II.2, on tire immédiatement l'expression de $\sin \theta'$:

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta}} \quad (\text{I.4})$$

Puis, par substitution dans II.1 et II.2:

$$\cos \psi' = \frac{-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi} \cos \psi \sin \theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{I.5})$$

$$\sin \psi' = \frac{\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{I.6})$$

En guise de récapitulation, on écrira que:

La relation entre les angles d'Euler ψ' et θ' permettant de positionner l'axe de rotation instantanée dans R_0 , et les angles d'Euler ψ , θ et ψ (ainsi que leurs dérivées) s'établit comme suit:

$$\cos \theta' = \frac{(\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta)}{\sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta}} \quad (\text{I.3})$$

$$\sin \theta' = \frac{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta}} \quad (\text{I.4})$$

$$\cos \psi' = \frac{\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{I.5})$$

$$\sin \psi' = \frac{\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{I.6})$$

ANNEXE II

Relation entre la dérivée $\dot{\psi}'$ de l'angle d'Euler ψ' lié au positionnement de l'axe de rotation instantanée de R par rapport à Ro, et la dérivée $\dot{\psi}$ de l'angle d'Euler ψ lié au positionnement de S par rapport à Ro.

On dérive la relation II.6 de l'annexe I (en se plaçant toujours dans le cadre de l'hypothèse (a) : $\sin \theta > 0$) :

$$\sin \psi' = \frac{(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta)}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta}}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \dot{\psi}' \cdot \cos \psi' \\ &= \frac{(\ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\psi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta) \cdot (\dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \ddot{\psi} \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

Il suffit alors de remplacer "cos ψ' " par son expression littérale dans II.5, soit :

$$\cos \psi' = (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \cdot (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}$$

D'où le développement suivant :

$$\begin{aligned} & \dot{\psi}' \cdot (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \\ &= \frac{(\ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\psi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \\ &= \frac{(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta) \cdot (\dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \ddot{\psi} \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} \end{aligned}$$

En multipliant chaque terme par $(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
& \dot{\psi}' \cdot (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \\
= & \dot{\psi} \cdot (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \\
+ & (\ddot{\theta} \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta) \\
- & \left[\frac{(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta) \cdot (\dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \ddot{\psi} \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} \right]
\end{aligned}$$

Puis:

$$\begin{aligned}
& [\dot{\psi}' - \dot{\psi}] \\
= & \left[\frac{(\ddot{\theta} \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta)}{(\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)} \right] \\
- & \left[\frac{(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta) \cdot (\dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \ddot{\psi} \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \cdot (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)} \right]
\end{aligned}$$

En ramenant au même dénominateur les deux fractions du second membre, on aboutit à une égalité du type:

$$[\dot{\psi}' - \dot{\psi}] = (N/D)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
N = & (\ddot{\theta} \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta) \cdot (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \\
- & (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta) \cdot (\dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \ddot{\psi} \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)
\end{aligned}$$

Et :

$$D = (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \cdot (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)$$

En développant N, on aboutit à l'expression finale simple:

$$N = (\ddot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \cdot (\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)$$

Et, par élimination au numérateur et au dénominateur :

$$\dot{\psi}' = \dot{\psi} + \left[\frac{(\ddot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta)}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} \right] \quad (\text{II.1})$$

Ce qui peut encore s'exprimer de cette manière:

$$\dot{\psi}' = \dot{\psi} - \left[\frac{\dot{\psi} \dot{\theta}^2 \cos \theta}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} \right] + \left[\frac{\dot{\psi}^2 \sin \theta}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} \frac{d(\dot{\theta} / \dot{\psi})}{dt} \right]$$

(II.2)

Hypothèse (b)

Dans le cas où l'hypothèse suivante est vérifiée, :

(b) $|\dot{\theta}| \ll |\dot{\psi} \sin \theta|$

alors :

$$\frac{1}{(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)} = \left[\frac{1}{\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta} \right] \cdot \left[1 - (\dot{\theta}^2 / \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + o(\dot{\theta} / \dot{\psi} \sin \theta) \right]$$

où 0 est une quantité d'ordre 4 en $(\dot{\theta} / \dot{\psi} \sin \theta)$

Et, en substituant dans III.2 :

$$\dot{\psi}' = \dot{\psi} - \left[\frac{\dot{\theta}^2 \cos \theta}{\dot{\psi} \sin \theta} \right] \left[1 - \frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta} + o(\dot{\theta} / \dot{\psi} \sin \theta) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{d(\dot{\theta} / \dot{\psi})}{dt} \right] \left[1 - \frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta} + o(\dot{\theta} / \dot{\psi} \sin \theta) \right]$$

Et, en ne gardant que les termes les plus significatifs :

$$\dot{\psi}' = \dot{\psi} - \left[\frac{\dot{\theta}^2 \cos \theta}{\dot{\psi} \sin^2 \theta} \right] + \left[\frac{1}{\sin \theta} \right] \left[\frac{d(\dot{\theta} / \dot{\psi})}{dt} \right] + o'$$

(II.3)

où o' désigne une quantité du même ordre que $(\dot{\theta} / \dot{\psi})$ relativement au reste de l'expression.

Principe de détermination simplifiée des paramètres $\Delta\varepsilon_1$ et $\Delta\psi_1$ en fonction des paramètres classiques $\Delta\varepsilon$ et $\Delta\psi$ de la Connaissance Des Temps.

Les calculs qui suivent résultent de la constatation suivante : Les nutations en longitude et en obliquité $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$, sont données à tout moment et de manière conventionnelle (cf. Ephémérides de la Connaissance des Temps), lorsqu'on se réfère à l'écliptique de la date.

On se proposera d'établir ici une formulation simple susceptible d'effectuer la liaison entre ces quantités et les quantités $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$ qui en découlent lorsque on se réfère non pas par rapport au plan mobile qu'est l'écliptique de la date, mais par rapport au plan inertiel de référence que constitue l'écliptique d'une date initiale t_0 .

Dans tout le chapitre, on utilisera les expressions conventionnelles de la Connaissance des Temps pour les différents paramètres, expressions qui sont récapitulées dans le Tableau 1.

Notons que sur un siècle, la quantité $\Delta\psi_1$ ne dépasse pas 0.00025 rd., et que les quantités $\Delta\varepsilon$, $\Delta\psi$, $\Delta\varepsilon_1$, et $\Delta\psi_1$ sont telles que, à tout moment :

$$|\Delta\varepsilon| < 0.0001 \quad (\text{rd.})$$

$$|\Delta\psi| < 0.0001 \quad (\text{rd.})$$

$$|\Delta\varepsilon_1| < 0.0001 \quad (\text{rd.})$$

$$|\Delta\psi_1| < 0.0001 \quad (\text{rd.})$$

De telle sorte qu'il est permis de poser sans crainte les approximations suivantes, avec les erreurs relatives sur 100 ans :

$$\cos \pi_1 = 1 \quad (\text{erreur relative inférieure à } 3 \cdot 10^{-9})$$

$$\sin \pi_1 = \pi_1 \quad (\text{erreur relative inférieure à } 2 \cdot 10^{-9})$$

$$\cos \Delta\varepsilon = \cos \Delta\varepsilon_1 = 1 \quad (\text{erreur relative inférieure à } 2 \cdot 10^{-9})$$

$$\cos \Delta\psi = \cos \Delta\psi_1 = 1 \quad (\text{erreur relative inférieure à } 2 \cdot 10^{-9})$$

$$\sin \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon \quad (\text{erreur relative inférieure à } 4 \cdot 10^{-9})$$

$$\sin \Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_1 \quad (\text{erreur relative inférieure à } 4 \cdot 10^{-9})$$

$$\sin \Delta\psi = \Delta\psi \quad (\text{erreur relative inférieure à } 4 \cdot 10^{-9})$$

$$\sin \Delta\psi_1 = \Delta\psi_1 \quad (\text{erreur relative inférieure à } 4 \cdot 10^{-9})$$

Expression approximée de ($\Delta \epsilon - \Delta \epsilon_{\perp}$) :

En se référant à la figure ci-après, il est facile d'établir les relations classiques du triangle sphérique suivantes:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_A + \Delta \epsilon_{\perp}) &= \cos \pi_A \cdot \cos(\epsilon_A + \Delta \epsilon) \\ &+ \sin \pi_A \cdot \sin(\epsilon_A + \Delta \epsilon) \cdot \cos(\pi_A + p_A + \Delta \psi) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Et :

$$\begin{aligned} \cos \omega_A &= \cos \pi_A \cdot \cos \epsilon_A \\ &+ \sin \pi_A \cdot \sin \epsilon_A \cdot \cos(\pi_A + p_A) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Soustrayons l'une à l'autre les deux équations (III.2) et (III.1) ci-dessus. Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} &\cos(\omega_A + \Delta \epsilon_{\perp}) - \cos \omega_A \\ &= \cos \pi_A \cdot \cos(\epsilon_A + \Delta \epsilon) - \cos \epsilon_A \\ &+ \sin \pi_A \cdot \sin(\epsilon_A + \Delta \epsilon) \cdot \cos(\pi_A + p_A + \Delta \psi) - \sin \epsilon_A \cdot \cos(\pi_A + p_A) \end{aligned}$$

Effectuons les développements limités au premier ordre:

$$\begin{aligned} \cos(\epsilon_A + \Delta \epsilon) &= \cos \epsilon_A - (\sin \epsilon_A) \cdot \Delta \epsilon - (\cos \epsilon_A / 2) \cdot (\Delta \epsilon)^2 + O(\Delta \epsilon^3) \\ \cos(\omega_A + \Delta \epsilon_{\perp}) &= \cos \omega_A - (\sin \omega_A) \cdot \Delta \epsilon_{\perp} - (\cos \omega_A / 2) \cdot (\Delta \epsilon_{\perp})^2 + O(\Delta \epsilon_{\perp}^3) \\ \sin(\epsilon_A + \Delta \epsilon) &= \sin \epsilon_A + (\cos \epsilon_A) \cdot \Delta \epsilon - (\sin \epsilon_A / 2) (\Delta \epsilon)^2 + O(\Delta \epsilon^3) \\ \cos(\pi_A + p_A + \Delta \psi) &= \cos(\pi_A + p_A) - (\sin(\pi_A + p_A)) \cdot \Delta \psi \\ &- (\cos(\pi_A + p_A) / 2) \cdot (\Delta \psi)^2 + O(\Delta \psi^3) \end{aligned}$$

Où 0 désigne dans tous les cas une quantité dont l'ordre de grandeur correspond à celui du ou des paramètres mis sous la parenthèse qui lui est associée.

Ainsi l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} &-(\sin \omega_A) \cdot \Delta \epsilon_{\perp} - (\cos \omega_A / 2) \cdot (\Delta \epsilon_{\perp})^2 + O(\Delta \epsilon_{\perp}^3) \\ &= \cos \pi_A \left[-\sin \epsilon_A \cdot \Delta \epsilon - (\cos \epsilon_A / 2) \cdot (\Delta \epsilon)^2 + O(\Delta \epsilon^3) \right] \\ &+ \sin \pi_A \left[\cos \epsilon_A \cos(\pi_A + p_A) \Delta \epsilon - \sin \epsilon_A \sin(\pi_A + p_A) \Delta \psi \right] \\ &+ \sin \pi_A \left[-(\sin \epsilon_A / 2) \cos(\pi_A + p_A) (\Delta \psi^2 + \Delta \epsilon^2) - \sin(\pi_A + p_A) \cos \epsilon_A (\Delta \psi \cdot \Delta \epsilon) \right] \end{aligned}$$

$$+ O(\Delta\psi^2, \Delta\epsilon^2, \Delta\psi^2\Delta\epsilon, \Delta\psi\Delta\epsilon^2)$$

Soit, en assimilant $\sin \pi_A$ et $\cos \pi_A$ respectivement à π_A et 1, comme cela a déjà été justifié plus haut:

$$\begin{aligned} & (\sin \epsilon_A) \cdot \Delta\epsilon - (\sin \omega_A) \cdot \Delta\epsilon_{\perp} \\ = & \pi_A \left[(\cos \epsilon_A \cos(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\epsilon) - (\sin \epsilon_A \sin(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi) \right. \\ & + \pi_A \left[- (\sin \epsilon_A / 2) \cdot \cos(\pi_A + p_A) \cdot (\Delta\psi^2 + \Delta\epsilon^2) \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin(\pi_A + p_A) \cdot (\cos \epsilon_A) \cdot (\Delta\psi \cdot \Delta\epsilon) \right] \right. \\ & \quad \left. + (\cos \omega_A / 2) \cdot \Delta\epsilon_{\perp}^2 - (\cos \epsilon_A / 2) \cdot \Delta\epsilon^2 \right. \\ & \quad \left. + O((\Delta\psi^3), (\Delta\epsilon^3), (\Delta\psi^2 \cdot \Delta\epsilon), (\Delta\psi \cdot \Delta\epsilon^2)) \right] \end{aligned}$$

Dans le second membre de cette égalité, on pourra se restreindre seulement au premier terme. En effet, on montre aisément que:

$$\begin{aligned} & (\cos \omega_A / 2) \cdot \Delta\epsilon_{\perp}^2 - (\cos \epsilon_A / 2) \cdot \Delta\epsilon^2 \\ \approx & \cos \epsilon_A \cdot (\Delta\epsilon_{\perp} - \Delta\epsilon) \cdot (\Delta\epsilon) + ((\epsilon_A - \omega_A) / 2) \cdot \sin \epsilon_A \cdot (\Delta\epsilon_{\perp}^2) \end{aligned}$$

Le passage aux applications numériques montre que les quantités apparaissant dans cette égalité possèdent des ordres de grandeur totalement négligeables, tout du moins si l'on se restreint à ne considérer que les termes d'amplitude supérieure à 10^{-5} ".

Il en sera de même des quantités $\pi_A (\Delta\psi^2)$, $\pi_A (\Delta\epsilon^2)$ et $\pi_A (\Delta\psi\Delta\epsilon)$ faisant partie elles aussi du second membre.

On posera donc en conclusion:

$$\begin{aligned} & (\sin \epsilon_A) \cdot \Delta\epsilon - (\sin \omega_A) \cdot \Delta\epsilon_{\perp} \\ = & \pi_A \cos \epsilon_A \cos(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\epsilon - \pi_A \sin \epsilon_A \sin(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi \\ & + O((\Delta\psi^3), (\Delta\epsilon^3), (\Delta\psi^2 \cdot \Delta\epsilon), (\Delta\psi \cdot \Delta\epsilon^2), (\pi_A \Delta\psi^2), (\pi_A \Delta\epsilon^2), (\pi_A \Delta\psi \Delta\epsilon), \dots) \end{aligned}$$

Or:
$$\sin \omega_A = \sin \epsilon_A + (\omega_A - \epsilon_A) \cos \epsilon_A + O((\epsilon_A - \omega_A)^2)$$

$(\omega_A - \epsilon_A)$ étant (cf. Tableau 1) une quantité très faible, restant inférieure en valeur absolue à une minute d'arc, soit environ $3 \cdot 10^{-4}$ rd., sur 100 ans.

On en arrive alors au développement suivant, en substituant à $\sin \omega_A$ son expression ci-dessus:

$$\begin{aligned} & (\sin \epsilon_A) \Delta\epsilon - (\sin \epsilon_A) \Delta\epsilon_{\perp} + \left[((\epsilon_A - \omega_A) \cos \epsilon_A) + O((\epsilon_A - \omega_A)^2) \right] \Delta\epsilon_{\perp} \\ = & \pi_A \cos \epsilon_A \cos(\pi_A + p_A) \Delta\epsilon - \pi_A \sin \epsilon_A \sin(\pi_A + p_A) \Delta\psi \end{aligned}$$

$$+ 0(\dots)$$

$$\begin{aligned} & [\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_1] \\ &= \eta_A \cotg \varepsilon_A \cos(\pi_A + p_A) \cdot \Delta \varepsilon - \eta_A \sin(\pi_A + p_A) \cdot \Delta \psi \\ & \quad + (\omega_A - \varepsilon_A) \cotg \varepsilon_A + O((\omega_A - \varepsilon_A)^2) \\ & \quad \quad \quad + 0(\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_1] \\ &= \cotg \varepsilon_A \cdot [\eta_A \cos(\pi_A + p_A) - (\varepsilon_A - \omega_A)] \Delta \varepsilon \\ & \quad - [\eta_A \sin(\pi_A + p_A)] \Delta \psi \\ & \quad \quad \quad + 0(\dots) \end{aligned}$$

On assimilera en effet sans peine $\Delta \varepsilon$ à $\Delta \psi$ dans le second membre.

Il est facile de démontrer que le coefficient de $\Delta \varepsilon$ est quantité négligeable devant le coefficient de $\Delta \psi$. En effet, une relation simple du triangle sphérique amène l'identité:

$$\sin \eta_A \cos(\pi_A + p_A) = \cos \omega_A \sin \varepsilon_A - \sin \omega_A \cos \varepsilon_A \cos \chi_A$$

Soit:

$$\begin{aligned} \eta_A \cos(\pi_A + p_A) &= \cos \omega_A \sin \varepsilon_A - \sin \omega_A \cos \varepsilon_A \\ & \quad + \sin \omega_A \cos \varepsilon_A (\chi_A^2/2) \\ & \quad \quad \quad + 0(\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_A \cos(\pi_A + p_A) &= \sin(\varepsilon_A - \omega_A) \\ & \quad + \sin \omega_A \cos \varepsilon_A (\chi_A^2/2) \\ & \quad \quad \quad + 0(\dots) \end{aligned}$$

$$\text{Mais: } \sin(\varepsilon_A - \omega_A) = (\varepsilon_A - \omega_A) + O((\varepsilon_A - \omega_A)^2)$$

$$[\eta_A \cos(\pi_A + p_A) - (\varepsilon_A - \omega_A)] = O(\chi_A^2, (\varepsilon_A - \omega_A)^2)$$

Ce qui prouve bien que le coefficient de $\Delta \varepsilon$ dans l'expression de $(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_1)$ peut parfaitement être négligé.

D'où l'expression finale de $(\Delta \varepsilon_1 - \Delta \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} [\Delta \varepsilon_1 - \Delta \varepsilon] &= [\pi_A \sin (\pi_A + \rho_A)] \cdot \Delta \psi \\ &+ o(\dots) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Où $o(\dots)$ désigne une quantité dont l'ordre de grandeur est de loin inférieur à l'ordre de grandeur exigé .

Expression approximée de $(\Delta\psi_1 - \Delta\psi)$

Avant d'expliciter les étapes qui conduisent à l'évaluation de cette quantité, il est nécessaire au préalable de rechercher des formulations de quantités annexes. Ainsi:

$$\sin(\psi_A - p_A) = (\psi_A - p_A) + O((\psi_A - p_A)^3) \quad (\text{III.4})$$

$$= \sin((\pi_A + \psi_A) - (\pi_A + p_A))$$

$$= \sin(\pi_A + \psi_A) \cos(\pi_A + p_A) - \sin(\pi_A + p_A) \cos(\pi_A + \psi_A)$$

Or, une relation du triangle sphérique me donne:

$$\sin \chi_A \cos \omega_A = \cos(\pi_A + p_A) \sin(\pi_A + \psi_A)$$

$$- \sin(\pi_A + p_A) \cos(\pi_A + \psi_A) \cos \pi_A$$

$$= \cos(\pi_A + p_A) \sin(\pi_A + \psi_A) - \sin(\pi_A + p_A) \cos(\pi_A + \psi_A)$$

$$+ O(\pi_A^2)$$

Cependant, par analogie des sinus:

$$\sin \chi_A = \sin \pi_A \cdot (\sin(\pi_A + p_A) / \sin \omega_A),$$

relation précédente, et en tenant compte de (), ce qui, substitué dans la relation précédente, amène l'égalité:

$$(\psi_A - p_A) = \pi_A \cotg \omega_A \sin(\pi_A + p_A) + O(\pi_A^2, (\epsilon_A - \omega_A)^3) \quad (\text{III.5})$$

O ne dépassant pas $5 \cdot 10^{-10}$ rd. en valeur absolue, sur 100 ans.

D'autre part, on a vu dans C.1), que :

$$(\epsilon_A - \omega_A) = \pi_A \cos(\pi_A + p_A) + O((\chi_A^2), (\epsilon_A - \omega_A)^2) \quad (\text{III.6})$$

O ne dépassant pas $5 \cdot 10^{-9}$ rd. en valeur absolue, sur 100 ans.

$$\text{Et que: } (\Delta\epsilon_1 - \Delta\epsilon) = \pi_A \sin(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi + O(\dots) \quad (\text{III.7})$$

O désignant un ensemble de quantités de loin inférieures à l'ordre de grandeur exigé.

Utilisons désormais les développements limités suivants:

$$\sin(\pi_A + p_A + \Delta\psi)$$

$$= \sin(\pi_A + p_A) + \cos(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi - \sin(\pi_A + p_A) (\Delta\psi^2 / 2) + O(\Delta\psi^3)$$

$$\sin(\pi_A + \psi_A + \Delta\psi_1)$$

$$= \sin(\pi_A + \psi_A) + \cos(\pi_A + \psi_A) \cdot \Delta\psi_1 - \sin(\pi_A + \psi_A) (\Delta\psi_1^2/2) + o(\Delta\psi_1^3)$$

$$\sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1)$$

$$= \sin \omega_A + (\cos \omega_A) \cdot \Delta\varepsilon_1 - (\sin \omega_A / 2) \cdot (\Delta\varepsilon_1)^2 + o(\Delta\varepsilon_1^3)$$

$$\sin(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)$$

$$= \sin \varepsilon_A + (\cos \varepsilon_A) \cdot \Delta\varepsilon - (\sin \varepsilon_A / 2) \cdot (\Delta\varepsilon)^2 + o(\Delta\varepsilon^3)$$

Chacune de ces relations peut encore s'écrire:

$$\sin(\pi_A + p_A + \Delta\psi) \tag{III.8}$$

$$= \sin(\pi_A + p_A) \left[1 + (\cotg(\pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi) - (\Delta\psi^2/2) + o(\Delta\psi^3) \right]$$

$$\sin(\pi_A + \psi_A + \Delta\psi_1) \tag{III.9}$$

$$= \sin(\pi_A + \psi_A) \left[1 + (\cotg(\pi_A + \psi_A) \cdot \Delta\psi_1) - (\Delta\psi_1^2/2) + o(\Delta\psi_1^3) \right]$$

$$\sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1) \tag{III.10}$$

$$= \sin \omega_A \left[1 + (\cotg \omega_A \cdot \Delta\varepsilon_1) - (\Delta\varepsilon_1^2/2) + o(\Delta\varepsilon_1^3) \right]$$

$$\sin(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \tag{III.11}$$

$$= \sin \varepsilon_A \left[1 + (\cotg \varepsilon_A \cdot \Delta\varepsilon) - (\Delta\varepsilon^2/2) + o(\Delta\varepsilon^3) \right]$$

Or, l'analogie des sinus dans les triangles sphériques de la figure nous donne:

$$\frac{\sin(\pi_A + p_A)}{\sin \omega_A} = \frac{\sin(\pi_A + \psi_A)}{\sin \varepsilon_A} \tag{III.12}$$

Et:

$$\frac{\sin(\pi_A + p_A + \Delta\psi)}{\sin(\omega_A + \Delta\varepsilon_1)} = \frac{\sin(\pi_A + p_A + \Delta\psi_1)}{\sin(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)} \tag{III.13}$$

La division terme à terme de ces deux égalités, en tenant compte des identifications (III.8), (III.9), (III.10) et (III.11), donne l'égalité suivante:

$$\frac{1 + (\cotg(\pi_A + \psi_A) \cdot \Delta\psi_1) - (\Delta\psi_1^2/2) + o(\Delta\psi_1^3)}{1 + (\cotg \varepsilon_A \cdot \Delta\varepsilon) - (\Delta\varepsilon^2/2) + o(\Delta\varepsilon^3)}$$

$$= \frac{1 + (\cotg(\Pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi) - (\Delta\psi^2/2) + o(\Delta\psi^3)}{1 + (\cotg \omega_A \cdot \Delta\varepsilon_1) - (\Delta\varepsilon_1^2/2) + o(\Delta\varepsilon_1^3)}$$

Ce qui revient à:

$$\begin{aligned} & (\cotg(\Pi_A + \psi_A) \cdot \Delta\psi_1) + (\cotg \omega_A \cdot \Delta\varepsilon_1) - (\Delta\psi_1^2/2) - (\Delta\varepsilon_1^2/2) \\ & \quad + (\cotg(\Pi_A + \psi_A) \cotg \omega_A \cdot \Delta\psi_1 \Delta\varepsilon_1) \\ = & (\cotg(\Pi_A + p_A) \cdot \Delta\psi) + (\cotg \varepsilon_A \cdot \Delta\varepsilon) - (\Delta\psi^2/2) - (\Delta\varepsilon^2/2) \\ & \quad + (\cotg(\Pi_A + p_A) \cotg \varepsilon_A \cdot \Delta\psi \Delta\varepsilon) \\ & \quad \quad \quad + o(\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\Delta\psi_1 - \Delta\psi) \cotg(\Pi_A + \psi_A) + \Delta\psi \cdot [\cotg(\Pi_A + \psi_A) - \cotg(\Pi_A + p_A)] \\ = & (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_1) \cotg \varepsilon_A + \Delta\varepsilon_1 \cdot [\cotg \varepsilon_A - \cotg \omega_A] + Q \end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned} Q = & (\Delta\psi_1^2/2) + (\Delta\varepsilon_1^2/2) - (\Delta\psi^2/2) - (\Delta\varepsilon^2/2) \\ & + (\cotg(\Pi_A + \psi_A) \cotg \omega_A \cdot \Delta\psi_1 \Delta\varepsilon_1) \\ & - (\cotg(\Pi_A + p_A) \cotg \varepsilon_A \cdot \Delta\psi \Delta\varepsilon) \\ & \quad \quad \quad + o(\dots) \end{aligned}$$

Cependant:

$$\begin{aligned} & [\cotg(\Pi_A + p_A) - \cotg(\Pi_A + \psi_A)] \\ = & (1 / \sin^2(\Pi_A + \psi_A)) \cdot (\psi_A - p_A) + o((\psi_A - p_A)^3) \\ = & \Pi_A \cotg \omega_A (\sin(\Pi_A + p_A) / \sin^2(\Pi_A + \psi_A)) \\ & \quad \quad \quad + o((\psi_A - p_A)^3, \chi_A^2, (\varepsilon_A - \omega_A)^2) , \\ & \quad \quad \quad \text{en tenant compte de (III.5)} \end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned} & [\cotg \varepsilon_A - \cotg \omega_A] \\ = & -(1 / \sin^2 \varepsilon_A) \cdot (\omega_A - \varepsilon_A) + o((\varepsilon_A - \omega_A)^3) \\ = & - \frac{\Pi_A \cos(\Pi_A + p_A)}{\sin^2 \varepsilon_A} + o((\varepsilon_A - \omega_A)^2, \chi_A^2) , \end{aligned}$$

en tenant compte de (III.6)

D'où le résultat suivant:

$$\begin{aligned} & \cotg(\pi_A + \psi_A) [\Delta\psi_1 - \Delta\psi] \\ & - \left[\pi_A \cotg \omega_A (\sin(\pi_A + p_A) / \sin^2(\pi_A + \psi_A)) \right] \cdot \Delta\psi \\ = & \cotg \varepsilon_A [\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_1] \\ & - \left[\pi_A \cos(\pi_A + p_A) / \sin^2 \varepsilon_A \right] \cdot \Delta\varepsilon_1 + Q \end{aligned}$$

Et, en multipliant tout par $\tg(\pi_A + \psi_A)$:

$$\begin{aligned} [\Delta\psi_1 - \Delta\psi] = & \left[\pi_A \cotg \omega_A \sin(\pi_A + p_A) / (\sin(\pi_A + \psi_A) \cos(\pi_A + \psi_A)) \right] \cdot \Delta\psi \\ & - \left[\pi_A \cotg \varepsilon_A \sin(\pi_A + p_A) \tg(\pi_A + \psi_A) \right] \cdot \Delta\psi \\ & - \left[\pi_A (\cos(\pi_A + p_A) \tg(\pi_A + \psi_A)) / \sin^2 \varepsilon_A \right] \cdot \Delta\varepsilon_1 \\ & + Q \tg(\pi_A + \psi_A) \\ & + 0(\dots) \end{aligned}$$

en substituant à $(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon)$ son expression dans (VI.3).

Il est immédiat, en tenant compte des résultats (III.5) et (III.6) de montrer que l'on commet une erreur totalement négligeable (bien inférieure à 10^{-6} "), lorsqu'on substitue dans le second membre $(\pi_A + \psi_A)$ à $(\pi_A + p_A)$, et ε_A à ω_A .

De plus, on démontre aisément que les quantités $\pi_A \Delta\varepsilon$ et $\pi_A \Delta\varepsilon_1$ sont identiques à une quantité largement négligeable près (inférieure à 10^{-6} "). Il est donc plausible de les assimiler l'une à l'autre.

Enfin, la quantité Q s'approxime aisément:

$$\begin{aligned} Q \approx & 2\Delta\psi \cdot (\Delta\psi_1 - \Delta\psi) \\ & + 2\Delta\varepsilon \cdot (\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon) \\ & + \cotg(\pi_A + \psi_A) \cotg \varepsilon_A \left[\Delta\psi_1 (\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon) + \Delta\varepsilon (\Delta\psi_1 - \Delta\psi) \right] \end{aligned}$$

Ce qui prouve que Q est d'un ordre de grandeur bien plus faible (de l'ordre de 10^4 fois plus faible) que $(\Delta\psi_1 - \Delta\psi)$.

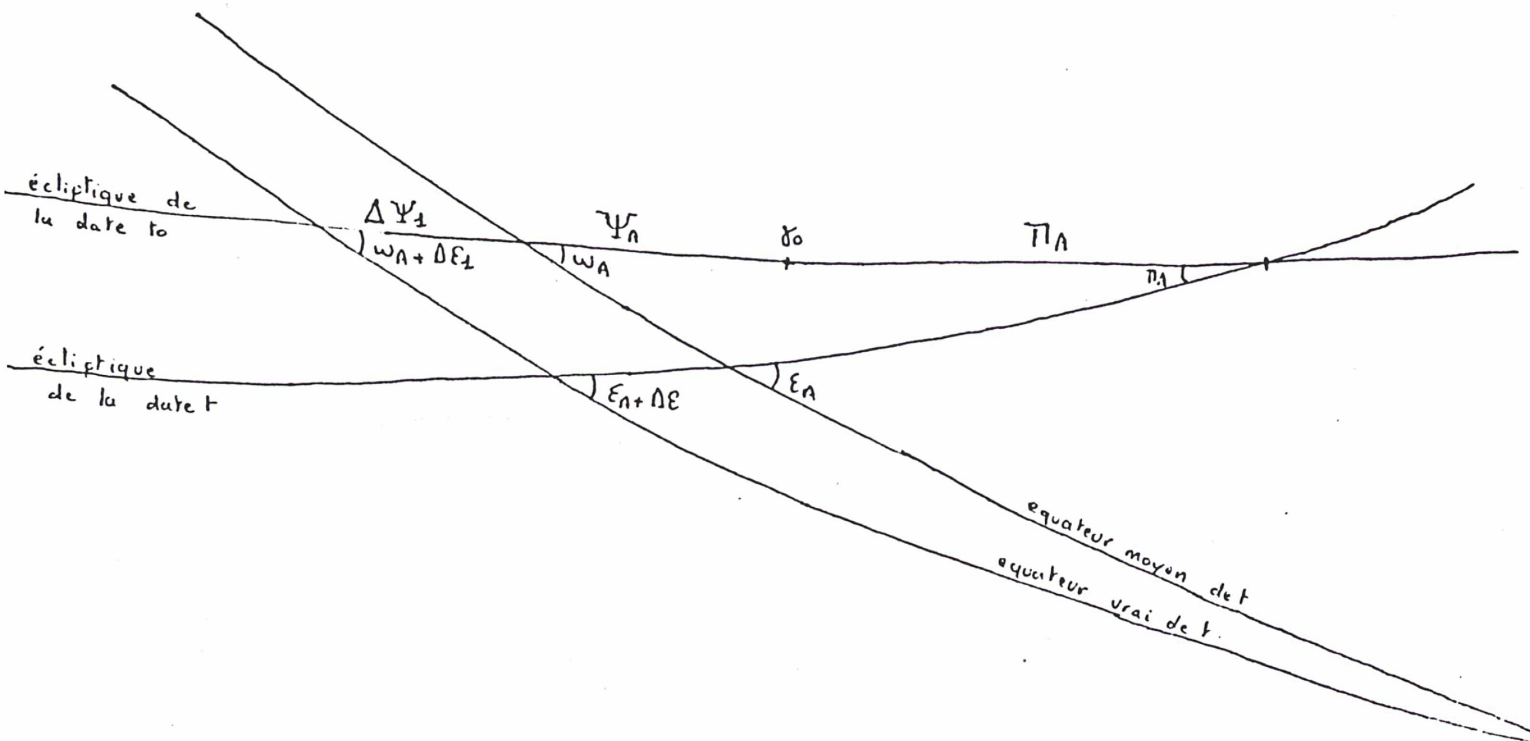
Fort de toutes ces constatations, il nous est maintenant possible d'établir la relation simple suivante:

$$[\Delta\psi_1 - \Delta\psi] = \pi_A \left[(\cotg \omega_A \sin(\pi_A + \psi_A)) / (\sin(\pi_A + \psi_A) \cos(\pi_A + \psi_A)) \right] \cdot \Delta\psi$$

$$\begin{aligned}
& - \tau_A \left[\cotg \varepsilon_A \operatorname{tg}(\pi_A + \psi_A) \sin(\pi_A + \psi_A) \right] \cdot \Delta \psi \\
& - \tau_A \left[\cos(\pi_A + \psi_A) \operatorname{tg}(\pi_A + \psi_A) / \sin^2 \varepsilon_A \right] \cdot \Delta \varepsilon \\
& + o(\dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Delta \Psi_1 - \Delta \Psi] = & \tau_A \left[\cotg \varepsilon_A \cos(\pi_A + \psi_A) \right] \cdot \Delta \psi & (\text{III-14}) \\
& - \tau_A \left[\sin(\pi_A + \psi_A) / \sin^2 \varepsilon_A \right] \cdot \Delta \varepsilon \\
& + o(\dots)
\end{aligned}$$

Où 0 est une quantité au plus de l'ordre de 10^{-6} "
(sur 100 ans)



Figure

Ici sont représentés les quatre plans fondamentaux que sont l'écliptique de la date initiale t_0 , l'écliptique de la date t , les équateurs moyen et vrai de la date t .

Des relations simples permettant de relier $\Delta \epsilon$ à $\Delta \epsilon_1$ d'une part, $\Delta \Psi$ à $\Delta \Psi_1$ d'autre part peuvent s'avérer utiles, dans la perspective où par exemple sont connus l'un des jeux de paramètres ($\Delta \epsilon$, $\Delta \Psi$) ou ($\Delta \epsilon_1$, $\Delta \Psi_1$) et où l'on désire en déduire l'autre. Les calculs effectués montrent que:

$$\Delta \epsilon_1 - \Delta \epsilon \approx \pi_A \cdot \sin(\pi_A + p_A) \cdot \Delta \Psi$$

$$\Delta \Psi_1 - \Delta \Psi \approx \pi_A \cdot [\cotg \epsilon_A \cos(\pi_A + \psi_A)] \cdot \Delta \Psi$$

$$- \pi_A \cdot [\sin(\pi_A + \psi_A) / \sin^2 \epsilon_A] \cdot \Delta \epsilon$$

Développements

$$\begin{aligned}
 \text{A) Développement du terme : } & \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \Delta\varepsilon_1) d(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \\
 & \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \Delta\varepsilon_1) d(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \\
 = & \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \Delta\varepsilon_1) d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2 + \Delta\Psi_1) \\
 = & \int_{t_0}^t \varepsilon_2 t^2 \cdot d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2) \\
 + & \int_{t_0}^t \Delta\varepsilon_1 \cdot d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2) + \varepsilon_2 t^2 \cdot d(\Delta\Psi_1) \\
 + & \int_{t_0}^t \Delta\varepsilon_1 \cdot d(\Delta\Psi_1)
 \end{aligned}$$

D'où la séparation de l'expression en trois parties: l'une d'ordre uniquement polynômiale ne faisant intervenir que la précession, l'autre de nature sinusoidale ne faisant intervenir que la nutation, la troisième que l'on pourra qualifier de terme mixte, provenant d'une juxtaposition des deux phénomènes. Je pourrai à ce titre utiliser différentes notations pour désigner chacune de ces trois parties, en appelant "Y" la présente expression :

$$\begin{aligned}
 Y &= \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \Delta\varepsilon_1) \cdot d(\Psi_A + \Delta\Psi_1) \\
 Y &= Y_s + Y_p + Y_m
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{aligned}
 Y_s &= \int_{t_0}^t \varepsilon_2 t^2 \cdot d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2) && \text{(s par analogie à "séculaire")} \\
 Y_p &= \int_{t_0}^t \Delta\varepsilon_1 \cdot d(\Delta\Psi_1) && \text{(p par analogie à "périodique")} \\
 Y_m &= \int_{t_0}^t \left[\Delta\varepsilon_1 \cdot d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2) + \varepsilon_2 t^2 \cdot d(\Delta\Psi_1) \right] && \text{(m par analogie à "mixte")}
 \end{aligned} \right.$$

B) Développement de Y_s

B.1) développement du terme Y_s :

$$\begin{aligned}
 Y_s &= \int_{t_0}^t \varepsilon_2 t^2 \cdot d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2) \\
 &= \int_{t_0}^t \varepsilon_2 t^2 \cdot (\Psi_1 + 2\Psi_2 t) \cdot dt \\
 &= \int_{t_0}^t (\Psi_1 \varepsilon_2 t^2 + 2\Psi_2 \varepsilon_2 t^3) \cdot dt
 \end{aligned}$$

$Y_s = (\varepsilon_2 \Psi_1 / 3) \cdot t^3 + (\varepsilon_2 \Psi_2 / 2) \cdot t^4$

B.2) Développement du terme Y_p :

$$\begin{aligned}
 Y_p &= \int_{t_0}^t \Delta \mathcal{E}_1 \cdot d(\Delta \Psi_1) \\
 &= \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right] d \left[\sum_{j=1}^n a_j \sin(\omega_j t - \varphi_j) \right] \\
 &= \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \cdot \sum_{j=1}^n a_j \omega_j \cos(\omega_j t - \varphi_j) \right] \cdot dt \\
 &= \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n b_i a_i \omega_i \cos^2(\omega_i t - \varphi_i) \right] \cdot dt \\
 &\quad + \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} b_i a_j \omega_j (\cos(\omega_i t - \varphi_i) \cdot \cos(\omega_j t - \varphi_j)) \right] \cdot dt
 \end{aligned}$$

Mais, en utilisant : $2 \cos^2(\omega_i t - \varphi_i) = (1 + \cos 2(\omega_i t - \varphi_i))$

Et : $\cos(\omega_i t - \varphi_i) \cdot \cos(\omega_j t - \varphi_j)$

$$= (1/2) \cdot \left[\cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) + \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \right]$$

Alors, on obtient le développement suivant pour Y_p :

$$\begin{aligned}
 Y_p &= \sum_{i=1}^n ((b_i a_i \omega_i) / 2) \cdot \int_{t_0}^t (1 + \cos(2(\omega_i t - \varphi_i))) \cdot dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left[((b_i a_j \omega_j) / 2) \cdot \int_{t_0}^t \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \cdot dt \right] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left[((b_i a_j \omega_j) / 2) \cdot \int_{t_0}^t \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \cdot dt \right]
 \end{aligned}$$

Et, à l'issue des intégrations :

$$\begin{aligned}
 Y_p &= (1/2) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \omega_i \right) \cdot t \\
 &\quad + (1/4) \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \sin(2(\omega_i t - \varphi_i)) \right) \right]_{t_0}^t \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left[(b_i a_j (\omega_j / 2(\omega_i + \omega_j))) \cdot \sin((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \right]_{t_0}^t \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left[(b_i a_j (\omega_j / 2(\omega_i - \omega_j))) \cdot \sin((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \right]_{t_0}^t
 \end{aligned}$$

On peut transformer les sommations pour obtenir l'expression finale :

$$\begin{aligned}
 Y_p &= (1/2) \cdot \left(\sum_i a_i b_i \omega_i \right) \cdot t \\
 &\quad + (1/4) \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \sin(2(\omega_i t - \varphi_i)) \right) \right]_{t_0=0}^t \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \left[((b_i a_j \omega_j + b_j a_i \omega_i) / 2(\omega_i + \omega_j)) \cdot \sin((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \right]_{t_0=0}^t \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \left[((b_i a_j \omega_j + b_j a_i \omega_i) / 2(\omega_i - \omega_j)) \cdot \sin((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \right]_{t_0=0}^t
 \end{aligned}$$

B.3) développement du terme Y_m :

$$Y_m = \int_{t_0}^t \left[(\Delta \mathcal{E}_1 \cdot d(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2)) + (\mathcal{E}_2 t^L \cdot d(\Delta \Psi_1)) \right]$$

$$Y_m = Y_{m1} + Y_{m2}$$

$$\text{Avec : } Y_{m1} = \int_{t_0}^t \Delta \xi_1 \cdot (\psi_1 + 2\psi_2 t) \cdot dt$$

$$\text{Et : } Y_{m2} = \int_{t_0}^t \xi_2 t^2 \cdot d(\Delta \psi_1)$$

Développons dans un premier temps Y_{m1} :

$$\begin{aligned} Y_{m1} &= \int_{t_0}^t \Delta \xi_1 \cdot (\psi_1 + 2\psi_2 t) \cdot dt \\ &= \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right] \cdot (\psi_1 + \psi_2 t) \cdot dt \\ &= \psi_1 \cdot \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_0}^t b_i \cdot \cos(\omega_i t - \varphi_i) \cdot dt \right] \\ &\quad + 2\psi_2 \cdot \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_0}^t b_i \cdot t \cdot \cos(\omega_i t - \varphi_i) \cdot dt \right] \end{aligned}$$

Mais on sait que :

$$\begin{aligned} &\int t \cdot \cos(\omega_i t - \varphi_i) \cdot dt \\ &= \left(\frac{t}{\omega_i} \right) \cdot \sin(\omega_i t - \varphi_i) + \left(\cos(\omega_i t - \varphi_i) / \omega_i^2 \right) \end{aligned}$$

D'où l'expression définitive de Y_{m1} :

$$\begin{aligned} Y_{m1} &= \psi_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \cdot \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0=0}^t \\ &\quad + 2\psi_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \cdot \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0=0}^t \\ &\quad + 2\psi_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i^2) \cdot \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

Procédons d'une manière identique pour le terme Y_{m2} :

$$\begin{aligned} Y_{m2} &= \int_{t_0}^t \xi_2 t^2 \cdot d(\Delta \psi_1) \\ &= \xi_2 \int_{t_0}^t t^2 \cdot d\left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right) \\ &= \xi_2 \int_{t_0}^t t^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \omega_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right) dt \end{aligned}$$

Cependant, on utilisera l'égalité :

$$\begin{aligned} &\int t^2 \cdot \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt \\ &= \left(\frac{1}{\omega_i} \right) \cdot t^2 \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\ &\quad + \left(\frac{2}{\omega_i^2} \right) t \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\ &\quad - \left(\frac{2}{\omega_i^3} \right) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \end{aligned}$$

D'où l'expression définitive de Y_{m2} :

$$Y_{m2} = \xi_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i t^2 \sin(\omega_i t - \varphi_i)) \right]_{t_0}^t$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n ((a_i / \omega_i) t \cos(\omega_i t - \varphi_i)) \right]_{t_0}^t \\
 & - 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n ((a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i)) \right]_{t_0}^t
 \end{aligned}$$

Et la formulation finale de Y_m :

$$\begin{aligned}
 Y_m = & \Psi_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
 & + 2 \Psi_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
 & + 2 \Psi_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
 & + \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n a_i t^2 \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
 & + 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i) t \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
 & - 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t
 \end{aligned}$$

Analyse approfondie, terme par terme, de la quantité "s".

On sait (Annexe III), que l'on ne commet pas d'erreur relative supérieure à 10^{-4} lorsqu'on substitue $\Delta \varepsilon$ à $\Delta \varepsilon_1$ et $\Delta \Psi$ à $\Delta \Psi_1$; ce qui permet, sans dommage, de les confondre, tout du moins sous réserve que cette confusion reste sans conséquences importantes sur le calcul qui va suivre. Ainsi, on admettra, en première approximation, que les identités suivantes sont vérifiées :

$$\Delta \Psi_1 = \Delta \Psi = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i)$$

$$\Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon = \sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

En conservant en outre les notations habituelles :

$$\omega_A = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 t^2 + \varepsilon_3 t^3$$

$$\Psi_A = \Psi_1 t + \Psi_2 t^2 + \Psi_3 t^3$$

Chacune des quantités faisant justement partie de la décomposition de s (cf. relation (79)) peut donner lieu à des transformations assez étendues, ce qui nous amène à les considérer individuellement :

(a) Développement du terme :

$$\int_{t_0}^t [(\omega_A - \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_1) d(\Psi_A + \Delta \Psi_1) - (\Psi_A + \Delta \Psi_1) d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1)]$$

Là encore, on opérera des développements annexes :

(a1) Développement du terme: $\int_{t_0}^t [(\omega_A - \varepsilon_0) d\Psi_A - \Psi_A d\omega_A]$

$$\begin{aligned} & (\omega_A - \varepsilon_0) d\Psi_A - \Psi_A d\omega_A \\ &= (\omega_A - \varepsilon_0) d\Psi_A - \Psi_A d(\omega_A - \varepsilon_0) \\ &= [(\varepsilon_2 t^2 + \varepsilon_3 t^3) \cdot (\Psi_1 + 2\Psi_2 t + 3\Psi_3 t^2)] \\ & \quad - [(\Psi_1 t + \Psi_2 t^2 + \Psi_3 t^3) \cdot (2\varepsilon_2 t + 3\varepsilon_3 t^2)] \cdot dt \\ &= [-\varepsilon_2 \Psi_2 t^2 - 2\varepsilon_3 \Psi_1 t^3 + (\dots) t + (\dots) t] \cdot dt \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t [(\omega_A - \varepsilon_0) \cdot d\Psi_A - \Psi_A \cdot d\omega_A] \\ &= [-(\varepsilon_2 \Psi_2 / 3) \cdot t^3 - (\varepsilon_3 \Psi_1 / 2) \cdot t^4 + \dots]_{t_0}^t \end{aligned} \quad (80)$$

(quantités négligeables)

(a2) Développement du terme: $\int_{t_0}^t \Delta \varepsilon_1 d\Psi_A$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \Delta \varepsilon_1 d\Psi_A \\ &= \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right) \cdot (\Psi_1 + 2\Psi_2 t + 3\Psi_3 t^2) \cdot dt \end{aligned}$$

On tiendra compte, dans le développement de cette intégrale, des identités suivantes :

$$\begin{aligned} & \int t \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt \\ &= (t/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) + (1/\omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \int t^2 \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt \\ &= (t^2/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) + (2t/\omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\ & \quad - (2/\omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \Delta \varepsilon_1 \cdot d\Psi_A \\ &= \Psi_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^n b_i \int_{t_0}^t \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt \right] \\ & \quad + 2\Psi_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n b_i \int_{t_0}^t t \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt \right] \\ & \quad + 3\Psi_3 \cdot \left[\sum_{i=1}^n b_i \int_{t_0}^t t^2 \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt \right] \\ &= \Psi_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & \quad + 2\Psi_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & \quad + 2\Psi_2 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & \quad + 3\Psi_3 t^2 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & \quad + 6\Psi_3 t \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & \quad - 6\Psi_3 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

(a3) Développement de : $\int_{t_0}^t (\Delta \Psi_1) d\omega_A$

$$\int_{t_0}^t (\Delta \Psi_1) d\omega_A$$

$$= \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right) \cdot (2 \varepsilon_2 t + 3 \varepsilon_2 t^2) dt$$

On tiendra cette fois compte des égalités suivantes :

$$\int t \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\ = (1/\omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) - (t/\omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

Et :

$$\int t^2 \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\ = (2/\omega_i^3) \cos(\omega_i t - \varphi_i) + (2t/\omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\ - (t^2/\omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

Ce qui aboutit à :

$$\int_{t_0}^t (\Delta \Psi_1) \cdot d\omega_1 \\ = 2 \varepsilon_2 \cdot \sum_{i=1}^n \left[a_i \int_{t_0}^t t \sin(\omega_i t - \varphi_i) dt \right] \\ + 3 \varepsilon_2 \cdot \sum_{i=1}^n \left[a_i \int_{t_0}^t t^2 \sin(\omega_i t - \varphi_i) dt \right] \\ = 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ - 2 \varepsilon_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ - 3 \varepsilon_2 t^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ + 6 \varepsilon_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ + 6 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^3) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t$$

(a4) Développement de: $\int_{t_0}^t [\Delta \varepsilon_1 d(\Delta \Psi_1) - \Delta \Psi_1 d(\Delta \varepsilon_1)]$

$$\int_{t_0}^t [\Delta \varepsilon_1 \cdot d(\Delta \Psi_1) - \Delta \Psi_1 \cdot d(\Delta \varepsilon_1)] \\ = \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \omega_j \cos(\omega_j t - \varphi_j) \right) dt \\ + \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \omega_j \sin(\omega_j t - \varphi_j) \right) dt \\ = \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i a_j \omega_j \cos(\omega_i t - \varphi_i) \cos(\omega_j t - \varphi_j) \right] dt \\ + \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j a_i \omega_j \sin(\omega_i t - \varphi_i) \sin(\omega_j t - \varphi_j) \right] dt$$

On peut alors se permettre de sortir les sommations :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t [\Delta \varepsilon_1 d(\Delta \Psi_1) - \Delta \Psi_1 d(\Delta \varepsilon_1)] \\
 = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\int_{t_0}^t b_i a_j \omega_j \cos(\omega_i t - \varphi_i) \cos(\omega_j t - \varphi_j) dt \right] \\
 + & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\int_{t_0}^t b_j a_i \omega_j \sin(\omega_i t - \varphi_i) \sin(\omega_j t - \varphi_j) dt \right] \\
 = & \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \left[\int_{t_0}^t (b_i a_j \omega_i / 2) \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) dt \right] \\
 + & \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \left[\int_{t_0}^t (b_i a_j \omega_j / 2) \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) dt \right] \\
 + & \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \left[\int_{t_0}^t (b_i a_j \omega_i / 2) \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) dt \right] \\
 - & \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \left[\int_{t_0}^t (b_i a_j \omega_j / 2) \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) dt \right] \\
 + & \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n (b_i a_i \omega_i) (\cos^2(\omega_i t - \varphi_i) + \sin^2(\omega_i t - \varphi_i)) dt \right] \\
 = & \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (b_i a_j / 2) \frac{(\omega_j - \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)} \sin((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \right]_{t_0}^t \\
 + & \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (b_i a_j / 2) \frac{(\omega_i + \omega_j)}{(\omega_i - \omega_j)} \sin((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \right]_{t_0}^t \\
 + & \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i \omega_i) t \right]_{t_0}^t
 \end{aligned}$$

Et, finalement :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t [\Delta \varepsilon_1 d(\Delta \Psi_1) - \Delta \Psi_1 d(\Delta \varepsilon_1)] \\
 = & \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (b_i a_j - b_j a_i / 2) \frac{(\omega_j - \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)} \sin((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \right] \\
 + & \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (b_i a_j + b_j a_i / 2) \frac{(\omega_i + \omega_j)}{(\omega_i - \omega_j)} \sin((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \right] \\
 + & \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i \omega_i) t \right]_{t_0}^t
 \end{aligned}$$

(a5) Développement du terme: $\int_{t_0}^t (\omega_n - \varepsilon_0) d(\Delta \Psi_1)$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t (\omega_n - \varepsilon_0) d(\Delta \Psi_1) \\
 = & \int_{t_0}^t (\varepsilon_2 t^2 + \varepsilon_3 t^3) \left(\sum_{i=1}^n a_i \omega_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right) dt
 \end{aligned}$$

De manière analogue à précédemment, je peux m'inspirer des intégrales suivantes:

$$\int_{t_0}^t t^2 \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt$$

$$= (t^2 / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) + (2t / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) - (2 / \omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i)$$

Et :

$$\int_{t_0}^t t^3 \cos(\omega_i t - \varphi_i) dt = (t^3 / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) + (3t^2 / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) - (6t / \omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i) - (6 / \omega_i^4) \cos(\omega_i t - \varphi_i)$$

Ce qui entraîne , en permutant intégrale et sommation :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t (\omega_A - \varepsilon_0) d(\Delta \psi_A) \\ = & \varepsilon_2 t^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + 2 \varepsilon_2 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 2 \varepsilon_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + \varepsilon_3 t^3 \cdot \left[\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + 3 \varepsilon_3 t^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 6 \varepsilon_3 t \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 6 \varepsilon_3 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (a_i / \omega_i^3) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

(a6) Développement de : $\int_{t_0}^t \psi_A \cdot d(\Delta \varepsilon_A)$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \psi_A \cdot d(\Delta \varepsilon_A) \\ = & - \int_{t_0}^t (\psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3) \left(\sum_{i=1}^n b_i \omega_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right) dt \end{aligned}$$

Rappelons au passage les formules utiles au développement de cette expression :

$$\begin{aligned} & \int t \sin(\omega_i t - \varphi_i) dt \\ = & (1 / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) - (t / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\ & \int t^2 \sin(\omega_i t - \varphi_i) dt \\ = & -(t^2 / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) + (2t / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\ & \qquad \qquad \qquad + (2 / \omega_i^3) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\ & \int t^3 \sin(\omega_i t - \varphi_i) dt \\ = & -(t^3 / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) + (3t^2 / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \end{aligned}$$

$$+ (6t/\omega_i^3) \cos(\omega_i t - \varphi_i) - (6/\omega_i^4) \sin(\omega_i t - \varphi_i)$$

Toujours en opérant de la même manière, c'est à dire en permutant intégrale et sommation, on trouve finalement que:

$$\begin{aligned} & \int \psi_A d(\Delta \varepsilon_1) \\ = & - \psi_1 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + \psi_1 t \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + \psi_2 t^2 \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 2\psi_2 t \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 2\psi_2 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + \psi_3 t^3 \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 3\psi_3 t^2 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & - 6\psi_3 t \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\ & + 6\psi_3 \left[\sum_{i=1}^n (b_i/\omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

(b) Développement du terme : $(\psi_A + \Delta\psi_1)^3$

$$(\psi_A + \Delta\psi_1)^3 = \psi_A^3 + 3\psi_A^2 \cdot (\Delta\psi_1) + 3\psi_A \cdot (\Delta\psi_1)^2 + (\Delta\psi_1)^3$$

Avec : $\psi_A = \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3 + \dots$

$$\psi_A^2 = \psi_1^2 t^2 + 2\psi_1\psi_2 t^3 + \psi_2^2 t^4 + 2\psi_1\psi_3 t^4 + \dots$$

(b1) $\psi_A^3 = \psi_1^3 t^3 + 3\psi_1^2\psi_2 t^4 + \dots$

(b2) $3\psi_A^2 (\Delta\psi_1)$

$$= (3\psi_1^2 t^2 + 6\psi_1\psi_2 t^3 + \dots) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right)$$

(b3) $3\psi_A \cdot (\Delta\psi_1)^2$

$$= 3(\psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3) \cdot (\Delta\psi_1)^2$$

Cependant :

$$\begin{aligned}
& (\Delta\psi_1)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_j \sin(\omega_j t - \varphi_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n a_i a_j \sin(\omega_i t - \varphi_i) \sin(\omega_j t - \varphi_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n a_i^2 \sin^2(\omega_i t - \varphi_i) \\
&= (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n a_i a_j \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \\
&\quad - (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n a_i a_j \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n a_i^2 \sin^2(\omega_i t - \varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n a_i a_j \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n a_i a_j \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \\
&\quad + (1/2) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) - (1/2) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \cos(2(\omega_i t - \varphi_i)) \right)
\end{aligned}$$

D'où la conclusion:

$$\begin{aligned}
& 3 \psi_1 \cdot (\Delta\psi_1)^2 \\
&= 3 (\psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3) \cdot \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n a_i a_j \cos((\omega_i - \omega_j)t - (\varphi_i - \varphi_j)) \right. \\
&\quad - \left. \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n a_i a_j \cos((\omega_i + \omega_j)t - (\varphi_i + \varphi_j)) \right] \\
&\quad + (3/2) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) (\psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3) \\
&\quad - (3/2) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \cos(2(\omega_i t - \varphi_i)) \right) (\psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3)
\end{aligned}$$

(b4) $(\Delta\psi_1)^3$ pourra être considérée comme une quantité tout à fait négligeable.

(c) Développement du terme : $\int_{t_0}^t (\psi_A + \Delta\psi_2)^3 \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1)$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t (\psi_A + \Delta\psi_2)^3 \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 = & \int_{t_0}^t [\psi_A^3 + 3\psi_A^2(\Delta\psi_2) + 3\psi_A(\Delta\psi_2)^2 + (\Delta\psi_2)^3] \cdot d(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
 = & \int_{t_0}^t \psi_A^3 \cdot d\omega_A \\
 & + 3 \int_{t_0}^t \psi_A^2(\Delta\psi_2) \cdot d\omega_A \\
 & + 3 \int_{t_0}^t \psi_A(\Delta\psi_2)^2 \cdot d\omega_A \\
 & + \int_{t_0}^t (\Delta\psi_2)^3 \cdot d\omega_A \\
 & + \int_{t_0}^t \psi_A^3 \cdot d(\Delta\epsilon_1) \\
 & + 3 \int_{t_0}^t \psi_A^2(\Delta\psi_2) \cdot d(\Delta\epsilon_1) \\
 & + 3 \int_{t_0}^t \psi_A(\Delta\psi_2)^2 \cdot d(\Delta\epsilon_1) \\
 & + \int_{t_0}^t (\Delta\psi_2)^3 \cdot d(\Delta\epsilon_1)
 \end{aligned}$$

Une brève évaluation permet d'éviter certains développements unitiles: les quatre premiers termes sont négligeables. Effectivement, on constate que pour chacun d'entre eux, l'intégrant ne dépasse jamais $2 \cdot 10^{-5}$ en valeur absolue, cela dans un intervalle de temps d'un siècle, alors que le paramètre intégré ω_A subit des variations qui ne dépassent pas 0"05 dans le même intervalle de temps.

Le cinquième terme, lui, nécessite d'être élucidé, puisqu'il constitue le terme dont l'amplitude prend les plus grandes valeurs:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t \psi_A^3 \cdot d(\Delta\epsilon_1) \\
 = & - \psi_A^3 \int_{t_0}^t t^3 \cdot \left[\sum_{i=1}^n b_i \omega_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right] \cdot dt + \dots \quad (\text{à négliger})
 \end{aligned}$$

On négligera en effet ici les termes du développement de ψ_A autres que ψ_1 , du fait de la petitesse des coefficients ψ_2 et ψ_3 devant ψ_1 (cela se justifiera d'autant lorsque l'on s'apercevra de la petitesse même du membre ci-dessus : $\int_{t_0}^t \psi_A^3 \cdot d(\Delta\epsilon_1)$)

$$= - \sum_{i=1}^n (b_i \omega_i \psi_1^3) \left[\int_{t_0}^t t^3 \sin(\omega_i t - \varphi_i) \cdot dt \right]$$

Mais :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t t^3 \sin(\omega_i t - \varphi_i) \cdot dt \\
 = & - (t^3 / \omega_i) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\
 & + (3t^2 / \omega_i^2) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\
 & + (6t / \omega_i^3) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\
 & - (6 / \omega_i^4) \sin(\omega_i t - \varphi_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } & \int_{t_0}^t \Psi_A^2 d(\Delta \varepsilon_1) \\
= & \left[(\Psi_1^3 t^3) \sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right. \\
& - (3 \Psi_1^3 t^2) \sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\
& - (6 \Psi_1^3 t) \sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \\
& + 6 \Psi_1^3 \sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \\
& \left. + \dots \text{ (quantités négligeables) . } \right]
\end{aligned}$$

On peut fort logiquement passer outre les trois derniers termes de l'expression de (c), du fait que, là encore, les fonctions mises sous intégrale sont très faibles :

$$3 |\Psi_A^2 \cdot \Delta \Psi_1| < 1.5 \cdot 10^{-7}$$

$$3 |\Psi_A \cdot (\Delta \Psi_1)^2| < 1.5 \cdot 10^{-7}$$

$$|(\Delta \Psi_1)^3| < 10^{-7}$$

et le paramètre intégré n'exécède jamais $10''$ en valeur absolue.

Finalement, on réduira notre expression au seul membre significatif :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t (\Psi_A + \Delta \Psi_1)^2 \cdot d(\omega_A + \Delta \varepsilon_1) \\
= & (\Psi_1^3 t^3) \cdot \left[\sum_{i=1}^n b_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
& - (3 \Psi_1^3 t^2) \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
& - (6 \Psi_1^3 t) \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i^2) \cos(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
& + (6 \Psi_1^3) \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i / \omega_i^3) \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right]_{t_0}^t \\
& + \dots \text{ (quantités négligeables) } \tag{88}
\end{aligned}$$

B I B L I O G R A P H I E

- AOKI, S., GUINOT, B., KAPLAN, G.H, KINOSHITA, H., MAC CARTHY, D.D., SEIDELMANN, P.K. : "The new definition of Universal Time"
A. & A. ,105, p.359 ,1982
- AOKI S. & KINOSHITA H. : "Note on the relation between the equinox and Guinot's Non-Rotating Origin"
Celestial Mechanics 29 (1983), p.335
- ANDOYER, H. : Bulletin astronomique 28, p.67, 1911
- ANDOYER, H. : Cours de Mécanique Céleste
Gauthier-Villars, 1923
- BOUCHER, C. : Les systèmes de référence. Cours de Technologie Spatiale du CNES "Mathématiques Spatiales", Toulouse, 1984
- BRETAGNON P., A. & A., 114, p.278, 1982
- CAPITAINE N., GUINOT, B., SOUCHAY, J., : "A Non-Rotating Origin on the instantaneous equator : definition, properties and use"
Celestial Mechanics 39, p.283, 1986
- DANJON, A. : Astronomie Générale,
Sennac Ed., Paris, 1959
- DEPRIT, A. : "Local frames for perturbed keplerian motions"
Celestial Mechanics 13, p.253, 1976
- DE SITTER, W., BROUWER, D. : Bull. Astron. Inst. Nether. 8, p. 213, 1938
- EINSTEIN, A. : The Meaning of Relativity
Princeton University Press,
Princeton, New Jersey, 1956
- FATCHIKIN, N.V. : Astron. Zh. 47, p.619
Translation: Soviet Astr. 14, p.495 , 1970
- FRICKE, W. : "Precession and galactic rotation derived from the Mc. Cormick and Cape proper motions on the system of the FK3, N30 and FK4"
A.J. 72, p. 642-649 , 1967

- FRICKE, W. : "Determination of Precession"
 (IAU Colloquium n° 9 , Heidelberg, 1970)
Celestial Mechanics 4 (1971), p. 150
- GOLDSTEIN, H. : Classical Mechanics, second edition , p.146
Addison-Welsey Publishing Company, 1980
- GUINOT, B. : "Basic problems in the kinematics of the rotation of the Earth", in "Time and the Earth's rotation", 7-18, D.D. Mc. Carthy and J.D Pilkington (eds), D.Reidel Publishing Company, 1979
- HERRY & al. : "Geodesy by interferometric studies of the nutations of the Earth's rotation axis"
EOS trans. Am. Geophysic Union 69,p.674 ,1983
- KINOSHITA H. : Celestial Mechanics 15 (1975), p.277
- KINOSHITA, H., AOKI, S. : Celestial Mechanics 31(1983), p.329
- KINOSHITA, H., NAKAJIMA, Y.K., NAKAGAWA, I., SASAO, T., YOKOYAMA,K. :
 "Note on the nutation in Ephemerides"
Publ. Int. Lat. Obs., Misuzawa, 12, p. 71-108, 1979
- LASKAR J. : A. & A. 144 , p. 133, 1985
- LASKAR J. : "Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory"
A. & A.,157, p.59, 1985
- LIESKE, J. H. : "On the secular change of the obliquity of the Ecliptic"
A. & A., 5, p.90, 1970
- LIESKE, J., LEDERLE, T., FRICKE, W., MORANDO, B. :
 "Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants"
A. & A., 58, p.1, 1977
- LOVE, A.E.H. : "General Theory of Earth Tides"
Some Publications of Geodesy, Chap. IV , p.49 , 1911

- MAC GREEN, R. : Spherical Astronomy
Cambridge University Press, 1985
- MELCHIOR, P. : "The Tides of the planet Earth".
Pergamon Press, 1978
- MONTER J.B & JORDAN T.H : "Present day plate motion".
J. Geophys. Res. 83, p.5331-5354 , 1978
- MUELLER, I. : IAU Colloquium 56 on Reference Coordinates System for Earth
Dynamics. September 8-12, 1980 .
E.M Gaposchkin and B. Kolaczek eds
D.Reidel Publishing Company
- NEWCOMB, S. : Astr. Papers American Ephemeris 5, Part 4, p. 301-378, 1894
- NEWCOMB, S. : "A Compendium of Spherical Astronomy"
Dover Publications, New York, 1960
- NEWHALL X.X. & al., 1983, A. & A., 125, p.150
- OORT, J.H. : Bull. Astr. Nether. 3, p.275, 1927
- SEIDELMANN, P.K., 1980: " Summary Report of the IAU Working Group on
Nutation (1979 Theory of Nutation) ".
Trans. of the IAU Vol XVII, B 1979 , p.80-81
- SLABINSKI, V.J : "Continental drift and the rotation of the Earth
A new and critical evaluation".
Celestial Mechanics 29 (1981), p.89
- SOVERS O.J & al.: "Radio-interferometric determination of
intercontinental baselines and Earth orientation
utilizing DSN antennas : 1971 to 1983
J. Geophys. Res 89, p. 7957 , 1983
- TISSERAND, F. : Traité de Mécanique céleste,
Gauthier-Villars & fils , 1889
- VLASLIVESKIS, S., KLEMOLA, A.R. : Astr. J. 76, p. 508, 1971

WAHR, J.M. : "The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic
and oceanless Earth"
Geophys J.R. astr. Society 64, p.705, 1981

WOOLARD, E.W : Theory of the rotation of the Earth around its center of
mass.
Astr. Papers Amer. Eph. Naut. Almanach XV, I, p.1
1953

WOOLARD, E.W, CLEMENCE, G.M. : Spherical Astronomy
Academic Press Inc. , p.235, 1966

XU, B., ZHU, S.Y, ZHANG, H. : "Discussion of meaning and definition of UT
in astrometric techniques"
H.K. Eichhorn & R.J. Leacock (eds)
D.Reidel Publishing Company
1984