HAL
open science

Méthodologie moderne de la détermination du géoïde

Zhiheng Jiang

To cite this version:

Zhiheng Jiang. Méthodologie moderne de la détermination du géoïde. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1996. Français. NNT : . tel-02095276

HAL Id: tel-02095276

https://hal.science/tel-02095276v1

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Corrigé

THESE DE DOCTORAT

19 AOUT 1997

En Astronomie Fondamentale,
Mécanique Céleste et Géodésie

Présentée par

Zhiheng JIANG

à l'Observatoire de Paris

Sujet de thèse

Méthodologie moderne de la détermination du géoïde

Application à la réalisation d'une référence verticale opérationnelle: contribution au géoïde français

Soutenue à l'Observatoire de Paris, le 10 décembre 1996, devant le jury composé de

G. Balmino	**Directeur de thèse (Directeur du BGI)**
R. Bayer	**Rapporteur (professeur de l'Université Montpellier II)**
C. Boucher	**Directeur du laboratoire d'accueil (LAREG/IGN)**
N. Capitaine	**Présidente du jury (astronome de l'Observatoire de Paris)**
J.M. Doizi	**Responsable Métiers Géodésie et Topographie (CGG)**
P. Paquet	**Astronome (Directeur de l'Observatoire Royal de Belgique)**
C.C. Tscherning	**Rapporteur (professeur de l'Université de Copenhague)**

OBSERVATOIRE DE PARIS
9410
BIBLIOTHEQUE

960BSP0069

A Fanny et à sa mère

(043)
JIA

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier monsieur Georges Balmino, directeur de cette thèse, dont les connaissances approfondies dans tous les domaines de la géodésie, la grande rigueur scientifique, les critiques constructives ainsi que la modestie et l'efficacité m'ont beaucoup apporté dans mon travail.

Je voudrais également exprimer toute ma gratitude à messieurs Claude Boucher et Pascal Willis, respectivement chefs actuel et précédent du LAREG, pour m'avoir accueilli au laboratoire et pour m'avoir, tout particulièrement au cours de la dernière année, apporté leur soutien scientifique et financier, pour avoir veillé à mes conditions de recherche, m'avoir mis en contact avec différentes organisations scientifiques et m'avoir enfin prodigué leurs encouragements.

Que monsieur Jean Denègre, directeur de l'ENSG, soit ici remercié pour ses conseils, ses encouragements, son aide dans toutes les démarches administratives ou pour la recherche de financement.

Messieurs Le Pape, Luzet et Harmel du SGN, trouveront ici mes remerciements pour avoir chaleureusement coopéré à mon travail et l'avoir encouragé.

Je voudrais également remercier monsieur Loïc Daniel pour l'aide qu'il m'a apportée dans le domaine informatique, madame Marie-Françoise Allaire, secrétaire du LAREG, pour avoir effectué pour moi de nombreuses démarches administratives et monsieur Henri Duquenne pour avoir effectué un examen critique de mes travaux.

Je voudrais profiter de cette occasion pour exprimer de chaleureux remerciements à tous ceux qui, de près ou de loin, ont grandement contribué au succès de mon travail :

monsieur Michel Louis, ancien directeur général adjoint de l'IGN, qui m'a aidé et m'a encouragé pour commencer des études en France et finalement réaliser cette thèse, monsieur Hervé Le Men pour ses conseils scientifiques, son aide dans la recherche de financement pour ces travaux et dans la résolution des problèmes administratifs.

monsieur Serre, ancien secrétaire général de l'ENSG, et monsieur Roch La Rivière de la direction technique pour leur aide, leur soutien et leur encouragement chaleureux.

monsieur Paul Paquet de l'Observatoire Royal de Belgique, monsieur C.C. Tscherning de l'Université de Copenhague et monsieur Roger Bayer de l'Université de Montpellier II pour m'avoir accueilli dans leur laboratoire et avoir apporté leur coopération à mon travail; que messieurs Tscherning et Bayer soient spécialement remerciés d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

mesdames Nicole Capitaine et Danielle Michoud de l'Observatoire de Paris, monsieur Daniel Preux de l'IGN, monsieur Michel Kasser de l'ESGT, monsieur Michel Sarrailh et monsieur Toustou du BGI.

Enfin je dédie ce mémoire à mes parents et aux membres de ma famille en Chine ainsi qu'à ma tante Maurine Ryan aux Etats Unis, pour m'avoir toujours soutenu pendant ces années.

Je n'aurais pu ni commencer ni, bien sûr, terminer ma thèse sans leur aide à tous et leur encouragement.

Remerciements 3
1. Introduction générale 6
1.1 Définition de géoïde 6
1.2 Principe méthodologique et état d'avancement du calcul du géoïde français 7
Chapitre II. Méthodologie de la détermination du géoïde 10
2-1 Introduction 10
2.1.1 Nivellement astronomique 10
2.1.2 Nivellement astro-gravimétrique 10
2.1.3 Réductions gravimétriques 11
2.1.4 Principe de la technique de retrait-restauration 11
2.1.5 Données requises 12
2-2 Rappel des théories de la méthode gravimétrique 13
2.2.1 Théorie de Stokes 13
2.2.2 Théorie de Molodensky 15
2.2.3 Collocation 17
2-3 Référence pour le géoïde français 19
2.3.1 Système de hauteur 19
2.3.2 Références 20
2.3.3 Transformations simples entre le géoïde calculé et une réalisation de référence 21
2-4 Définition de l'exactitude, précision relative/absolue/pessimiste 22
2-5 Modification du noyau de l'intégrale de Stokes 23
2.5.1 Modification de Molodensky 23
2.5.2 Modification de Meissl 24
2-6 Evaluation rapide des intégrales 24
2.6.1 FFT 24
2.6.2 Intégration rapide (*) 24
2-7 Interpolation 27
2.7.1 Collocation 27
2.7.2 Interpolation par une surface du second ordre (*) 28
2.7.3 Interpolation du géoïde en utilisant les points GPS nivelés et le MNT (*) 29
2-8 Combinaison optimale (*) 30
2.8.1 Combinaison des données gravimétriques et du modèle de géopotentiel 30
2.8.2 Ajustement combinant un géoïde gravimétrique et des points GPS nivelés 35
2.8.3 Ajustement combinant plusieurs géoïdes gravimétriques et des points GPS nivelés - Ajustement du géoïde français avec ceux des pays frontaliers 36
2-9 Logiciel PiLi (*) 38
2.9.1 Schéma général d'utilisation du logiciel PiLi 38
2.9.2 Sous-programmes principaux du logiciel PiLi 38
Chapitre III. Calculs numériques 40
3-1 Comparaison numérique entre l'intégration rapide et la sommation directe 40
3.1.1 Géoïde belge 40
3.1.2 Essai dans la région Rhône-Alpes 41
3-2 Géoïde de Belgique BG96 42
3-3 Géoïde Français G96-01b 44
3.3.1 G96-01b 44
3.3.2 Calcul du géoïde en utilisant G96-01b 45
3-4 Géoïde gravimétrique français G96-02a et G96-03a 46
3.4.1 Introduction 46
3.4.2 Géoïde gravimétrique G96-02a 49
3.4.3 G96-03a: Géoïde gravimétrique G96-02a adapté au RBF 62
3-5 Géoïde de Belgique-Luxembourg - essai de l'ajustement combiné du géoïde en prenant différentes réalisations par les pays voisins 69

3.5.1 Données disponibles 69
3.5.2 Plan de calcul 69
3.5.3 Résultats et résidus des géoïdes ajustés 70
3.5.4 Précisions des géoïdes ajustés 72
Annexe du chapitre 3: Illustrations du processus de retrait et restauration de G96-02a 75
Chapitre IV Conclusion générale 83
Références 85
Partie I: Publications (écrites par l'auteur pendant le déroulement de la thèse) 85
1. Publiées au niveau international 85
2. Publiées en France, à l'IGN, Rapport géoïde 85
3. Publications signées conjointement avec d'autres auteurs 86
Partie II: Publications principales 87
Chapitre V Annexe: articles publiés dans des revues internationales ou des annales de congrès internationaux 93
A5-1 On fast integration for geoid determination 94
A5-2 Geoid interpolation using GPS levelling points and digital terrain model 104
A5-3 On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination 112
A5-4 On the combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points 121
A5-5 A new Belgian geoid determination : BG96 132
A5-6 Geoid determination in France 141

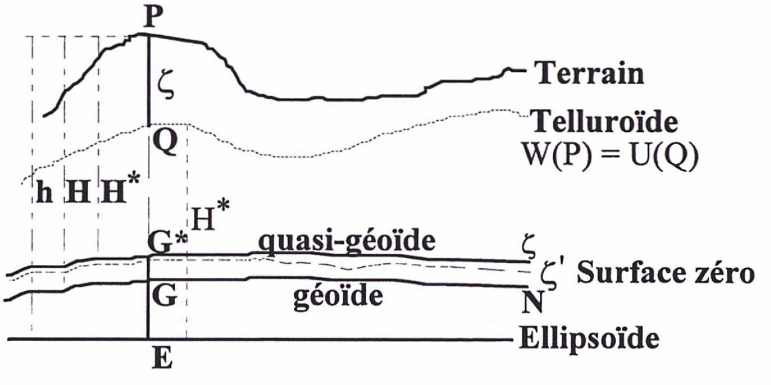
Remarque: Les sections marqués de (*) sont les résultats de recherche de l'auteur

1. Introduction générale

Ce mémoire présente les résultats de recherche obtenus lors de ma thèse, qui s'est déroulée de septembre 1994 à septembre 1996 sous la direction de monsieur Georges Balmino, au sein du Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG, dont le chef est monsieur Claude Boucher) de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG), à l'Institut Géographique National. Le but de cette thèse est d'étudier la méthodologie moderne de la détermination du géoïde et son application à la réalisation d'une référence verticale opérationnelle. Ces travaux contribuent à la détermination d'un nouveau géoïde français dont la précision attendue est de l'ordre de quelques centimètres.

1.1 Définition de géoïde

La définition du terme 'géoïde' utilisé dans ce mémoire est la même que celle du terme utilisé en géodésie physique, cf. par exemple Heiskanen et Moritz (1967). Un tel géoïde est indépendant du temps, c'est-à-dire qu'on ne considère pas la variation du champ de pesanteur de la Terre. Il faut préciser ici trois concepts (cf. Figure 1.1-1):



h = hauteur ellipsoïdale, H = hauteur orthométrique, H^* = hauteur normale

Figure 1.1-1 Géoïde, quasi-géoïde et surface zéro

i). Géoïde et hauteur de géoïde N :

Le géoïde est la surface de niveau du champ de pesanteur terrestre qui coïncide avec le niveau moyen des mers, définie par exemple par une moyenne temporelle sur une durée permettant d'annuler ses variations (e.g. dues aux marées) et en retirant aussi la partie stationnaire de la circulation océanique; c'est une surface équipotentielle ($W = W_0$). La hauteur du géoïde (N) est la distance entre le géoïde et l'ellipsoïde. Le système de hauteur correspondant est la hauteur orthométrique (H).

ii). Quasi-géoïde et anomalie de hauteur ζ :

Le quasi-géoïde est une surface très proche du géoïde, introduite par Molodensky (Molodensky et al. 1962) pour éviter certaines hypothèses physiques nécessaires au calcul du géoïde (cf. 1-2 et 2-2). C'est l'ensemble des points $\boldsymbol{G^*}$ de la figure 1.1-1, tel que $\boldsymbol{EG^*} = \boldsymbol{QP} = \zeta$ où $\boldsymbol{Q}$ parcourt le telluroïde, surface telle que le potentiel de l'ellipsoïde de référence en $\boldsymbol{Q}$

(potentiel normal, $U(Q)$) soit égal au potentiel réel de la Terre à sa surface, c'est-à-dire $W(P)$. Sur la mer, le géoïde et le quasi-géoïde sont identiques. Sur la terre, le quasi-géoïde, qui est une surface quasi-équipotentielle, présente une différence avec le géoïde, dont la partie linéaire peut être calculée en utilisant l'anomalie de Bouguer et l'altitude. Celle-ci a une valeur comprise entre 0 et 1.1 m en France. La hauteur correspondante est la hauteur normale (H^*) qui est le système d'altitude adopté en France. Pour simplifier, on écrira H à la place de H^*.

iii). Surface zéro ζ' :

C'est une réalisation d'une référence verticale pour un pays, qui contient toutes les erreurs de mesures et de calculs, et qui peut être définie, par exemple, à partir des observations du GPS (permettant d'avoir h de la figure 1.1-1) et du nivellement fournissant H, c'est-à-dire : $\zeta' = h_{GRS80} - H_{IGN69}$ (par rapport respectivement à l'ellipsoïde GRS80 et au système d'altitude IGN69). Une autre façon d'obtenir une surface zéro est d'adapter un géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés. Dans tous les cas, il faut toujours préter attention à ce que le nivellement présente des erreurs systématiques, par exemple 0,4 mètre entre le sud et le nord de la France. Pour simplifier, on a souvent parlé dans le passé de géoïde au lieu de quasi-géoïde ou de surface zéro, quand les différences de concepts importaient peu par rapport aux applications, ce qui est de moins en moins le cas aujourd'hui.

1.2 Principe méthodologique et état d'avancement du calcul du géoïde français

Le but classique de la recherche en géodésie est de déterminer la forme et la taille de la Terre, qui, dans une première approche, est la partie enveloppée par le géoïde. On divise généralement la géodésie classique en deux ensembles : les mesures géodésiques déterminant le relief de la Terre entre le sol et le géoïde, et la détermination des grandeurs définies sur la surface du géoïde, qui consiste essentiellement à étudier le champ de pesanteur. Ce partage traditionnel illustre aussi les limites actuelles, dans la pratique géodésique, entre le domaine appliqué et le domaine théorique, même si les moyens de mesure mis au service de la géodésie ont subi une série d'évolutions et de changements profonds.

Les mesures de la pesanteur ont été, jusque dans les années 70, la seule méthode pour déterminer la forme et la taille de la Terre. La transformation mathématique à la base de ce calcul est l'équation de Stokes qui exprime, sous la forme d'une intégrale sur toute la surface de la Terre, l'écart entre une surface de référence (ellipsoïde) et une surface équipotentielle du champ de pesanteur, le géoïde. Cette équation, généralisée par Pizetti, permet de calculer le champ dans tout l'espace en dehors de la Terre. Cependant, les calculs du géoïde utilisant ces équations sont longtemps restés peu rigoureux principalement en raison de trois difficultés théoriques et pratiques : a) le défaut théorique dû à l'hypothèse qu'il n'existe pas de masse en dehors du géoïde; b) le manque de mesures terrestres (résolution, précision) surtout dans les zones océaniques et c) les temps de calcul. Ce mémoire résume les solutions modernes de ces problèmes grâce à de nouvelles techniques, aux études théoriques et aux développements numériques de nombreux auteurs, et présente les résultats les plus récents de mes recherches. On rappelle brièvement les points suivants:

a) Au nom de Molodensky est associée une théorie pour les calculs géodésiques au niveau du sol ne faisant pas appel aux réductions du sol au géoïde; ainsi la connaissance de la masse spécifique du sous-sol n'est plus nécessaire;

b) Depuis deux décennies, les techniques spatiales ont rendu possible à la fois une approche globale du problème, et l'obtention d'une résolution et d'une précision très supérieures dans les zones océaniques. Tout d'abord, l'analyse des perturbations subies par les trajectoires de satellites artificiels a permis une description des grandes anomalies du champ de gravitation terrestre. Elles peuvent être représentées par des coefficients harmoniques d'un développement (tronqué) du champ de pesanteur en fonction sphérique. De plus, grâce aux mesures altimétriques et à la technique GPS/nivellement classique, le géoïde devient observable en mer et sur terre. Ces nouveaux développements ont profondément influencé la méthodologie de la détermination de géoïde, qui est basée à l'heure actuelle sur une combinaison de mesures terrestres, spatiales et d'un modèle global du champ de pesanteur. De nouvelles méthodes mathématiques pour combiner les différentes données ont été ainsi établies: collocation, combinaisons optimales, etc;

c) Plusieurs techniques numériques ont été proposées pour accélérer l'évaluation des intégrales pour le calcul du géoïde: FFT (fast Fourier transformation), intégration rapide, etc.

Un géoïde d'une précision de l'ordre de quelques centimètres, qui était le rêve des géodésiens, devient de ce fait aujourd'hui tout à fait réalisable.

De nombreux calculs de géoïde importants ont été réalisés dans des régions différentes, par exemple, le géoïde du nord de l'Europe (Forsberg 1996), le géoide européen (Denker et al. 1996), le géoïde du Canada (Sideris et al., She et Sideris 1995), le géoïde des Etats Unis (Milbert 1995), etc. Ils ont tous annoncé une précision de l'ordre de quelques centimètres.

Les deux derniers calculs du géoïde gravimétrique français sont celui de Levalllois-Monge (1978) et celui de Deloménie (1987). Le géoïde de Levallois-Monge a été calculé en utilisant la méthode astro-gravimétrique. A l'aide de la formule de Stokes en approximation sphérique et sans correction de terrain, la précision du géoïde Deloménie (cf. Balma et al. 1992) est de 0,2 à 1 m en plaine et pour des zones de relief modéré, et de 1 à 5 m en région montagneuse. Evidemment, ni l'un ni l'autre des deux géoïdes français existant ne peuvent être utilisés comme la référence verticale française.

Le SGN (Service de la Géodésie et du Nivellement de l'IGN) a établi le RBF (Réseau de Base Français) comprenant environ mille deux cent points GPS nivelés. Il donne en fait la hauteur du quasi-géoïde sur des points discrets, avec une grande précision mais malheureusement une pauvre résolution. On considère que les points du RBF sont à la base de la détermination de la surface zéro permettant de définir la référence verticale française. Ils jouent par conséquent un rôle important dans mes recherches.

Il faut souligner que Balmino et l'équipe du BGI (Bureau Gravimétrique International) à Toulouse ont fait beaucoup d'effort depuis plusieurs années pour la préparation théorique du calcul de géoïde gravimétrique, et surtout pour le gros travail d'élaboration de la banque de données gravimétriques couvrant l'ensemble de la planète. En fait, aujourd'hui, la plupart des travaux mondiaux ayant trait au calcul de géoïde, local, national et international, profitent de la banque de données du BGI. Duquenne et al. ont publié plusieurs résultats concernant des calculs de géoïde local pour quelques régions françaises (Duquenne, Jiang et Lemarié 1995, Duquenne et Jiang 1996).

Ce mémoire est constitué de cinq chapitres:

1) Chapitre I: cette introduction

2) Chapitre II: Présentation théorique, avec des sections marquées par (*) qui sont mes propres contributions à la détermination du géoïde: combinaisons optimales des données; intégration rapide et création du logiciel **PiLi** (**P**rogramme pour résoudre les **P**roblèmes d'**I**nterpolation et aux **Li**mites)

3) Chapitre III: Calculs numériques et présentation de plusieurs résultats. Les plus importants sont:

   a) Evaluation de l'intégration rapide;
   b) Géoïde de Belgique: **BG96** (un géoïde gravimétrique et une surface zéro);
   c) Trois solutions de géoïde français: **G96-01b** (surface zéro), **G96-02a** (quasi-géoïde gravimétrique) et **G96-03a** (surface zéro)

4) Chapitre IV: Conclusions

5) Chapitre V: Annexe: 6 articles écrits et publiés dans le cadre de ma thèse qui développent en détail les points théoriques et les modèles mathématiques, résultats de mes recherches pour la méthodologie de calcul de géoïde.

Chapitre II. Méthodologie de la détermination du géoïde

2-1 Introduction

Dans le domaine géodésique, le but classique du calcul de géoïde est de déterminer la forme et les dimensions de la Terre. Nous présentons ci-dessous les principes de base de ce calcul, ainsi que les contributions de cette thèse à ce calcul.

2.1.1 Nivellement astronomique

Cette première méthode date d'Helmert. Il s'agit d'une détermination astrogéodésique du géoïde exploitant essentiellement les mesures astronomiques et topographiques. Les étapes successives sont les suivantes :

a) choix d'un ellipsoïde de référence E(*a,f*); *a*: demi-grand axe, *f*: aplatissement
b) choix d'un point fondamental P1 où, par principe:
- la déviation de la verticale (ξ,η) est choisie arbitrairement (nulle par exemple);
- la hauteur géoïdale N1 est choisie de manière à rapprocher, en P1, ellipsoïde et géoïde.

c) application, en ce point, de la relation de Laplace (orientation de l'ellipsoïde) : azimut astronomique (*A*) - azimut géodésique (α) $= \eta tg\phi + (\xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha)\cot z$; ξ et η sont les composantes de la déviation de la verticale et *z* est la distance zénithale.

d) en des stations géodésiques successives, calcul de: $\xi = \Phi - \phi$, $\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\phi$, $\Delta\alpha = \eta tg\phi$. Φ et Λ (latitude et longitude astronomiques) sont obtenues par mesures astronomiques; ϕ et λ (latitude et longitude géodésiques) sont obtenues, après réduction et cheminement sur l'ellipsoïde, par des calculs géodésiques.

e) calcul de la déviation de la verticale dans la direction de progression d'azimut α: $\varepsilon = (\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha)$

f) détermination des variations *dN* de la hauteur géoïdale associée au déplacement *ds*: $dN = -\varepsilon ds$, d'où: $N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon ds$, où *A* et *B* sont deux points géodésiques.

g) calcul de la hauteur géométrique *h* (par rapport à l'ellipsoïde) en fonction de la hauteur orthométrique *H* (par rapport au géoïde) et de la hauteur géoïdale *N*: $h = H + N$

Le point fondamental P1 jouant ici un rôle très particulier, le géoïde ainsi obtenu n'a en général pas une validité mondiale. De plus, le centre géométrique de l'ellipsoïde n'a aucune raison, a priori, de coïncider avec le centre de masse de la Terre. L'axe de symétrie de l'ellipsoïde doit être parallèle à l'axe de rotation terrestre; en fait, cela n'est vrai que si l'on a correctement estimé (ξ, η, ϕ), la courbure de la verticale entre P1 et l'ellipsoïde. La précision obtenue peut être de l'ordre de la seconde d'arc.

2.1.2 Nivellement astro-gravimétrique

La méthode dite astro-gravimétrique repose essentiellement sur les formules de Stokes et de Vening-Meinesz (cf. section 2.2.1), et permet une exploitation complète des mesures d'anomalies de pesanteur (Δg). L'application de la méthode nécessite en effet: a) des mesures astronomiques, fournissant des coordonnées (Λ,Φ); b) des mesures topographiques, permettant le calcul de longueurs d'arc de courbes sur le géoïde. La méthode gravimétrique en question conduit à un processus itératif, chaque itération étant basée sur l'hypothèse d'un ellipsoïde dynamique caractérisé par: a) une masse *M'*, b) un potentiel *Uo*, c) un rayon équatorial *a*, d) un aplatissement *f*.

Son centre est généralement placé au centre de masse de la Terre., son axe doit être parallèle à l'axe de rotation terrestre. L'exploitation de l'ensemble des mesures (astronomiques, topographiques, gravimétriques) permet, à chaque itération, de faire:

- une estimation N° de la hauteur géoïdale;
- une estimation T° du potentiel perturbateur;
- une estimation W° du potentiel de la Terre;
- une estimation (GM)° du produit de G (constante de la gravitation) par M (masse de la Terre).

Ces deux dernières estimations permettent, le cas échéant, de faire une nouvelle itération avec un ellipsoïde dynamique amélioré. La méthode astrogéodésique n'a qu'une validité locale et requiert la connaissance d'un point fondamental à la surface de la Terre avec le centre de masse de la Terre inconnu; par contre, la méthode gravimétrique a une validité globale et requiert de connaître le centre de masse de la Terre sans avoir à connaître les dimensions de la Terre.

Le géoïde calculé par la méthode astro-gravimétrique a une meilleure précision que celui calculé par la méthode astronomique. Le géoïde de Levallois et Monge (1978) repose sur cette méthode.

2.1.3 Réductions gravimétriques

Ce sont les corrections appliquées aux mesures de pesanteur effectuées à la surface topographique de manière à définir des anomalies de pesanteur par rapport à une pesanteur de référence donnée par un modèle de terre. Certaines réductions peuvent conduire à un signal gravimétrique Δg plus régulier, protégé des perturbations locales dues à un relief accidenté.

- *la réduction de Bouguer* simple ($-0.1119H$) qui consiste à ôter de la pesanteur mesurée l'influence des masses topographiques situées au-dessus du géoïde, en espèrant ainsi atténuer les irrégularités de l'écart pesanteur corrigée-pesanteur normale. Ceci conduit à une simplification des opérations d'interpolation sur le terrain;
- *la réduction à l'air libre ou correction de Faye* ($+0.3086H$) qui consiste à ajouter à la valeur mesurée à l'altitude H au-dessus du géoïde une correction correspondant à l'intégrale sur H du gradient du champ causé par l'ensemble des masses intérieures au géoïde; ce gradient est de l'ordre de 0.3086 mgal/mètre.

Le désavantage des réductions est que ces opérations présentent une certaine analogie avec le lissage. Il faut cependant bien prendre conscience d'une différence essentielle:

a) le lissage a pour but d'éliminer le bruit d'un message, afin d'en faire ressortir le signal utile;
b) les réductions font disparaître une partie du signal utile, dans la mesure où l'on veut précisément connaître les propriétés réelles de la surface et du champ de pesanteur terrestre.

- *Effet indirect et co-géoïde*

Les réductions, par les modifications de masses qui les accompagnent, impliquent une modification des potentiels calculés, et par suite du géoïde calculé. Cette altération est appelée effet indirect de la réduction. Une détermination du géoïde par application de la formule de Stokes à un Δg réduit conduit donc en fait à une surface différente, nommée *co-géoïde.*

De toutes manières, il est possible de compenser l'effet indirect sur la détermination du géoïde. Grâce à la formule de Bruns, nous obtenons:

$$\delta N = \frac{\delta T(P)}{\gamma_{P_o}} \qquad (2.1.3\text{-}1)$$

δT est la variation de potentiel, au niveau du géoïde, imputable aux réductions adoptées (le potentiel U de l'ellipsoïde reste invariant).

2.1.4 Principe de la technique de retrait-restauration

Cette section ne présente que les principes généraux de cette technique. Il a été prouvé qu'une application optimale de cette technique est nécessaire pour le calcul d'un géoïde précis. La section 2-8 présente plus en détail la méthode. Il s'agit essentiellement de combinaisons optimales de données terrestres gravimétriques, de données GPS-nivelées et d'un modèle géopotentiel.

Le principe de la technique de retrait et restauration est basé sur les considérations spectrales suivantes : la hauteur du géoïde est décomposée en différentes longueurs d'ondes, grandes, moyennes et courtes, respectivement représentées par le modèle géopotentiel, les informations gravimétriques locales et les informations topographiques locales :

$$\zeta = \zeta_{MG} + \zeta_{Gravi-local} + \zeta_{Top-local} \qquad (2.1.4\text{-}1)$$

De même, l'anomalie de pesanteur à l'air libre peut être ainsi décomposée en :

$$\Delta G_{AL} = \Delta G_{MG} + \Delta G_{Gravi-local} + \Delta G_{Top-local} \qquad (2.1.4\text{-}2)$$

Ces longueurs d'ondes sont obtenues respectivement: 1) pour les grandes, par l'ensemble des coefficients du modèle géopotentiel, 2) pour les moyennes, par l'anomalie résiduelle sur la pesanteur et la transformation de la formule de Stokes pour le géoïde résiduel, 3) pour les courtes, par les informations topographiques (MNT, modèle numérique de terrain) : la correction de terrain sur la pesanteur et son effet sur le géoïde.

En pratique, le modèle géopotentiel est pris comme référence de façon à obtenir les informations résiduelles par rapport à ce modèle. Il contient bien sûr l'effet gravitationnel de la topographie au moins jusqu'à la longueur d'onde correspondant à son degré de troncature (approximation linéaire). L'information du MNT devient ainsi celle du RTM (modèle de terrain résiduel). Alors des formules (2.1.4-1) et (2.1.4-2), on déduit donc:

- le processus de retrait des informations gravimétriques:

$$\Delta G_{rés} = \Delta G_{AL} - \Delta G_{MG} - \Delta G_{RTM} \qquad (2.1.4\text{-}3)$$

- le processus de restauration des informations pour le (quasi-) géoïde:

$$\zeta = \zeta_{MG} + \zeta_{Stokes} + \zeta_{RTM} \qquad (2.1.4\text{-}4)$$

L'application des deux équations ci-dessus représente la technique générale de retrait et restauration, avec: $\Delta G_{rés}$ l'anomalie résiduelle, ΔG_{AL} l'anomalie à l'air libre, ΔG_{MG} l'anomalie donnée par le modèle de géopotentiel, ΔG_{RTM} la réduction du RTM, ζ le quasi géoïde calculé, ζ_{MG} le quasi géoïde du modèle, ζ_{Stokes} le quasi géoïde résiduel obtenu par la formule de Stokes, ζ_{RTM} l'effet du RTM (cf Figure 2.1.4-1).

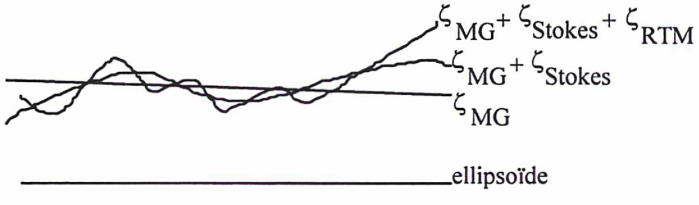


Figure. 2.1.4-1 Restauration du géoïde

Enfin, si l'on dispose de points GPS nivelés, on peut comparer le géoïde gravimétrique calculé à celui déduit du nivellement et du positionnement absolu aux points GPS nivelés, et si cela s'avère nécessaire, ôter le biais entre le géoïde gravimétrique calculé et celui déduit des points GPS nivelés. Ceci est souvent effectué au moyen d'une similitude à 4 paramètres ou d'une régression 3D (cf. section 2.3.3). On montre qu'en raison des erreurs dues aux grandes longueurs d'onde du modèle de champ, la précision absolue (l'exactitude) du quasi-géoïde ainsi calculé peut être mauvaise. L'adaptation aux points GPS nivelés est donc un processus important, en particulier en vue du nivellement par GPS.

2.1.5 Données requises

Supposons que l'on veuille obtenir un géoïde de l'ordre de quelques centimètres, alors de quelles données aurons nous besoin ? Les longueurs d'onde courtes variant faiblement, le géoïde, qui est une convolution intégrale des anomalies de gravité, est naturellement lissé. La variabilité des courtes longueurs d'onde caractérisant les ondulations du géoïde peut être approchée par la règle de Kaula (Kaula 1966) qui approxime les variances géopotentielles par degré:

$$\sigma_n^2 = R^2 \sum_{m=0}^{n} \left(\overline{C}_{nm}^2 + \overline{S}_{nm}^2 \right) \approx 10^{-10} \left(\frac{GM}{\gamma R} \right)^2 \frac{2n+1}{n^4} \qquad (2.1.5\text{-}1)$$

Au sens d'une moyenne globale, cette règle fournit une bonne approche du spectre d'énergie du champ de gravité (Forsberg 1984), surtout si une réduction de l'effet de terrain est effectuée dans les régions montagneuses. Grâce à la règle de Kaula, on peut facilement établir la variance des ondulations du géoïde à des degrés plus élevés qu'une limite donnée n_0 par la formule ci-dessous:

$$\sigma_n(n > n_0) \approx \frac{64}{n_0} \, mètre \qquad (2.1.5\text{-}2)$$

La demi-longueur d'onde d'un modèle géopotentiel de degré et d'ordre 360 est environ 55 km. Dans ce cas, le RMS des variances des hauteurs du géoïde est 18 centimètres. Pour une demi-longueur plus courte, aux environs de 10 km, le RMS des variances n'est que 3 centimètres. Pour déterminer un géoïde avec une précision de 3 centimètres, des données gravimétriques avec une densité minimum d'un point pour 10x10 km² sont donc nécessaires. Ceci est une indication moyenne, obtenue à partir du comportement spectral global de la fonction potentiel. Localement, ces caractéristiques spectrales peuvent en différer de manière significative et une estimation plus fine peut être obtenue à l'aide de la fonction de covariance locale (voir fin de 2.2.3). Lorsque dans une région, on manque de données gravimétriques, on peut partiellement les compenser par les données du MNT.

Forsberg (1990) montre un résultat intéressant. Il utilise :

1. une fonction de covariance, qui produit une variance d'anomalie de pesanteur (17 mGal)² avec la longueur de corrélation $x_{1/2} = 0.18°$ et une variance du géoïde correspondante de (0.58 m)²
2. une densité d'un point GPS nivellé par 50 x 50 km² et une densité d'un point gravimétrique par 10 x 10 km² sur une étendue de 2° x 2°;

on peut alors obtenir une précision pour le géoïde de 8 cm et pour la différence des hauteurs du géoïde de 2.5 cm (c'est à dire 2.3 ppm).

2-2 Rappel des théories de la méthode gravimétrique

Dans cette section, on présente les théories principales concernant la détermination du géoïde.

2.2.1 Théorie de Stokes

- **Théorème de Stokes:** Une fonction **V** harmonique à l'extérieur d'une surface **S** est entièrement déterminée par ses valeurs sur cette surface **S**. La recherche de **V** à partir de ses valeurs sur **S** constitue le problème extérieur de Dirichlet.
- **Problème de Stokes:** Le problème de Stokes est la détermination gravimétrique du géoïde (essentiellement à partir d'anomalies de pesanteur); ces anomalies sont rapportées au géoïde, supposé sans masses extérieures (géoïde nu).
- **Formule de Stokes** (dans l'approximation sphérique) :

$$T(M) = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma \Delta g S(\psi) d\sigma \qquad (2.2.1\text{-}1)$$

T est le potentiel perturbateur de la pesanteur sur le géoïde. ***R*** est le rayon de la sphère **S** représentant la Terre et ***S*(*ψ*)** est la fonction de Stokes:

$$S(\psi) = 1/t - 6t + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln(t + t^2)$$

avec $t = \sin\psi/2$

Selon la formule de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma} \qquad (2.2.1\text{-}2)$$

on a donc la solution du problème de Stokes sous la forme suivante:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \Delta g S(\psi) d\sigma \qquad (2.2.1\text{-}3)$$

Son application pratique a longtemps été freinée par l'absence de données relatives à certaines parties de la surface terrestre.

- **Expression de *T* dans l'approximation Terre plate**

Une telle approximation, en géodésie, a de quoi surprendre. Cependant, l'expression de $S(\psi)$ met en évidence sa partie principale $1/(\psi/2)$, lorsque ψ est faible; ceci correspond à des distances très petites vis-à-vis du rayon terrestre R. Dans ces conditions, la formule de Stokes se réduit à:

$$T(x,y)=\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g\frac{2}{\psi}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta g(u,v)\frac{dudv}{\left[(x-u)^2+(y-v)^2\right]^{1/2}} \quad (2.2.1\text{-}4)$$

Cette formule permet de mettre en évidence l'influence locale de Δg; en pratique, du fait de l'emploi d'un modèle de référence, le domaine d'intégration est limité à une zone dont les dimensions sont faibles.

- **Une démonstration de la formule de Stokes**

Prenons M un point où la perturbation de potentiel est calculée, M° un point courant sur la sphère S. $\Delta g(\varphi,\lambda)$ est l'anomalie de pesanteur définie sur S et qui peut être développée en fonctions harmoniques sphériques:

$$\Delta g(M)=\Delta g(\varphi,\lambda)=\sum_{o}^{\infty}\Delta g_n(\varphi,\lambda) \quad (2.2.1\text{-}5)$$

avec:

$$\Delta g_n(M)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g_{M^\circ}P_n(\cos\psi)d\sigma^\circ \quad (2.2.1\text{-}6)$$

où Δg_n est la n-ième harmonique du développement de Δg et P_n le polynôme de Legendre. Par ailleurs, le potentiel perturbateur T peut également être développé en fonctions harmoniques sphériques:

$$T(M)=\sum_{2}^{\infty}T_n(M) \quad (2.2.1\text{-}7)$$

$$T_n(M)=R\frac{\Delta g_n(M)}{n-1}=\frac{R}{n-1}\frac{2n+1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g_{M^\circ}P_n(\cos\psi)d\sigma^\circ \quad (2.2.1\text{-}8)$$

D'où

$$T(M)=\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma S(\psi)\Delta g_{M^\circ}dM^\circ \quad (2.2.1\text{-}9)$$

$$S(\psi)=\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\right] \quad (2.2.1\text{-}10)$$

Remarque: T_0 *et* T_1 sont nuls si nous admettons que la masse de la Terre et son centre sont égaux respectivement à la masse de l'ellipsoïde de référence et à son centre.

- **Erreur de troncature dans l'application de la formule de Stokes:**

L'intégrale double de la formule Stokes doit normalement être étendue à la Terre entière; cependant, la méconnaissance de Δg, en des régions éloignées du point étudié, conduit généralement à une limitation du domaine d'intégration à $\psi<\psi_0$. Il en résulte une erreur sur N:

$$\delta N=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\psi_o}^{\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\Delta g S(\psi)\sin\psi d\psi d\alpha \quad (2.2.1\text{-}11)$$

On montre (cf. par exemple Heiskanen et Moritz 1967) que:

$$M\{\delta N^2\}=\frac{R^2}{4\gamma^2}\sum Q_n^2 c_n \quad (2.2.1\text{-}12)$$

avec

$$Q_n=\int_{\psi_o}^{\pi}S(\psi)P_n(\cos\psi)\sin\psi d\psi$$
$$c_n=M\{\Delta g_n^2\} \quad (2.2.1\text{-}13)$$

M est l'opérateur valeur moyenne.

- **Formule de Stokes généralisée**

Elle suppose vérifiées les hypothèses de l'approximation sphérique en faisant intervenir: δM = masse de la Terre - masse de l'ellipsoïde; δW = potentiel de géoïde - potentiel d'ellipsoïde. La formule devient ainsi:

$$T = G\frac{\delta M}{R} + \frac{R}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g S(\psi)d\sigma \qquad (2.2.1\text{-}14)$$

D'après la formule de Bruns, nous avons:

$$N = \frac{T}{\gamma} - \frac{\delta W}{\gamma} \approx \frac{T}{\bar{\gamma}} - \frac{\delta W}{\bar{\gamma}} \qquad (2.2.1\text{-}15)$$

d'où:

$$N = -\frac{\delta W}{\bar{\gamma}} + \frac{G}{\bar{\gamma}}\frac{\delta M}{R} + \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}}\iint_\sigma \Delta g S(\psi)d\sigma = N_o + \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}}\iint_\sigma \Delta g S(\psi)d\sigma \qquad (2.2.1\text{-}16)$$

avec le terme zéro:

$$N_o = -\frac{\delta W}{\bar{\gamma}} + \frac{G}{\bar{\gamma}}\frac{\delta M}{R} \qquad (2.2.1\text{-}17)$$

2.2.2 Théorie de Molodensky

On ne présente dans cette section qu'un bref rappel de la théorie. Le lecteur intéressé peut se rapporter à Molodensky et al. (1962) ou Heiskanen et Moritz (1967).

Au nom de Molodensky est associé un ensemble de travaux effectués depuis 1945, conduisant souvent à des développements mathématiques importants et dont les caractéristiques principales sont:

1. travail théorique au niveau du sol, dont le modèle mathématique est le telluroïde.
2. utilisation systématique de la notion d'altitude normale, dont le calcul ne nécessite pas la connaissance de la masse volumique du sous-sol.

Ces méthodes ne font donc pas appel aux réductions (du sol au géoïde) et réalisent ainsi l'économie de leurs inconvénients.

- **Formules de Molodensky**

Sur une sphère S(O,R), nous considérons un point fixe P et un point courant $P°$:

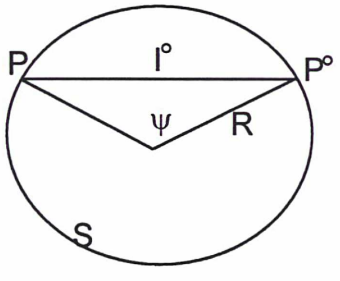


Fig. 2.2.2-1

Nous avons **la première formule de Molodensky:**

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_P = -\frac{1}{R}V_P + \frac{R^2}{2\pi}\iint_S \frac{V - V_P}{l_o^3}d\sigma° \qquad (2.2.2\text{-}1)$$

et **la deuxième formule de Molodensky:**

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_P = -\frac{2}{R}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_P + \frac{R^2}{2\pi}\iint_S \frac{1}{l_o^3}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{P^\circ} - \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_P\right] d\sigma^\circ \qquad (2.2.2\text{-}2)$$

où: $V = V(M)$ est une fonction harmonique et M peut se trouver sur **S** ou à l'extérieur de **S**.

- Méthode gravimétrique utilisant la modélisation de T par une couche mince placée sur le telluroïde

Le principe est le suivant:

1. établissement d'une équation intégrale reliant l'anomalie à l'air libre Δg (référencée au telluroïde Σ, cf. Figure 1.1-1), supposée connue, à la masse volumique k d'une couche mince dont le potentiel serait T (perturbation de potentiel de pesanteur à calculer);
2. résolution de l'équation intégrale par rapport à k;
3. calcul de T par application de la formule donnant le potentiel d'une couche mince (potentiels et forces de surface des simples couches).

Equation intégrale de Molodensky (approximation sphérique)

$$2\pi\phi - \frac{3}{2}R\iint_\sigma \frac{\phi}{l} d\sigma = \Delta g \qquad (2.2.2\text{-}3)$$

avec $\phi = Gk$. D'après la formule de Bruns pour les potentiels et les forces de surface de simple couche et la formule de Stokes, on peut écrire:

$$\bar{\gamma}N = T = R^2\iint_\sigma \frac{\phi}{l} d\sigma \qquad (2.2.2\text{-}4)$$

et:

$$T = \frac{2R}{3}(2\pi\phi - \Delta g) \qquad (2.2.2\text{-}5)$$

On montre que cette équation peut être résolue par une itération (mais en pratique, une seule itération est généralement suffisante):

$$T_i = \frac{2R}{3}(2\pi\phi_i - G_i) = \frac{R}{4\pi}\iint_\sigma G_i S(\psi) d\sigma \qquad (2.2.2\text{-}6)$$

avec $i = 0, 1, \ldots$ Ceci nous conduit à l'expression suivante de l'anomalie de hauteur:

$$\zeta = \frac{T}{\bar{\gamma}} = \zeta_0 + \zeta_1 \qquad (2.2.2\text{-}7)$$

où:

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}}\iint_\sigma \Delta g S(\psi) d\sigma$$
$$\zeta_1 = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}}\iint_\sigma G_1 S(\psi) d\sigma \qquad (2.2.2\text{-}8)$$

avec:

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{h - h_p}{l_0^3}\left(\Delta g + \frac{3G}{2R}\zeta_0\right) d\sigma \qquad (2.2.2\text{-}9)$$

2.2.3 Collocation

Le lecteur trouvera un exposé détaillé de cette méthode dans Tscherning (1984).

Soient W et U respectivement les potentiel du champ de pesanteur de la terre et du champ de pesanteur normal, la différence $T=W-U$ est le potentiel perturbateur qui peut être représenté par une fonction harmonique et développé en harmoniques sphériques solides:

$$T(\overline{\varphi},\lambda,r)=GM\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\overline{K}_{nm}Y_{nm}(\overline{\varphi},\lambda,r) \qquad (2.2.3\text{-}1)$$

$\overline{\varphi},\lambda,\ r$ sont respectivement la latitude géocentrique, la longitude et la distance radiale.

$$\overline{K}_{nm}=\begin{Bmatrix}\overline{C}_{nm}\\ \overline{S}_{nm}\end{Bmatrix}\begin{matrix}0\le m\le n\\ -n\le m\le 0\end{matrix}$$

$$\overline{Y}_{nm}(P)=\overline{Y}_{nm}(\overline{\varphi},\lambda,r)=\frac{a^n}{r^{n+1}}\overline{P}_{nm}(sin\,\overline{\varphi})\begin{Bmatrix}cos\,m\lambda\\ sin\,m\lambda\end{Bmatrix}\begin{matrix}0\le m\le n\\ -n\le m\le 0\end{matrix} \qquad (2.2.3\text{-}2)$$

a est le demi grand axe de la terre, $\overline{P}_{nm}$ sont les fonctions normalisées de Legendre et ($\overline{C}_{nm}$, $\overline{S}_{nm}$) les coefficients normalisés usuels. $\overline{Y}_{nm}(P)$ sont les fonctions de base orthogonales avec un produit interne isotrope dans un espace de Hilbert, qui sont des harmoniques se prolongeant jusqu'à la sphère de Bjerhammar (S_B) interne à la Terre. T n'est pas nécessairement un élément de cet espace mais il peut être approché arbitrairement par ces fonctions jusqu'à la surface de S_B. L'espace possède un noyau reproduisant, qui est une fonction de deux points P et Q (dont les coordonnées seront indiquées par le signe: ') et qui s'exprime par la formule :

$$K(P,Q)=\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)a^2\sigma_n^2\sum_{m=-n}^{n}\overline{Y}_{nm}(P)\overline{Y}_{nm}(Q)=\sum_{n=2}^{\infty}\sigma_n^2\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{n+1}P_n(sin\,\psi) \qquad (2.2.3\text{-}3)$$

où ψ, P_n, σ_n^2 sont respectivement la distance sphérique entre P et Q, les polynômes de Legendre non normalisés et les variances par degré du potentiel. Dans l'espace de Hilbert du noyau reproduisant (EHNR), on peut déterminer des approximations des éléments à partir des données pour lesquelles les fonctionnelles linéaires associées sont limitées. La relation entre les données et T est représentée en utilisant les fonctionnelles L_i, on a donc:

$$y_i=L_i(T)+e_i+A_i^TX \qquad (2.2.3\text{-}4)$$

où y_i est le i'ème élément de donnée. e_i, A_i et X sont respectivement l'erreur, un vecteur de dimension k et un vecteur de paramètres de dimension k également. Le dernier terme de l'équation (2.2.3-4) peut représenter, par exemple, l'effet d'une transformation du système de référence adopté pour les données.

Prenons les symboles suivants:

$$\begin{aligned}&\zeta(P)=T(P)/\gamma: && \text{anomalie de hauteur}\\ &\delta g=g(P)-\gamma(P): && \text{perturbation de gravité}\\ &\Delta g=g(P)-\gamma(Q): && \text{anomalie de gravité}\end{aligned} \qquad (2.2.3\text{-}5)$$

où g, γ sont la pesanteur et la pesanteur normale. Q est un point qui a la longitude et la latitude du point P, mais a une hauteur ellipsoïdale égale à la hauteur orthométrique du point P. Les fonctionnelles linéaires qui nous intéressent particulièrement ici sont :

$$\delta g=-\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\Delta g=-\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2T}{r} \qquad (2.2.3\text{-}6)$$

(2.2.3-6) représente les approximations sphériques qui ne sont utilisées que pour les quantités résiduelles. Dans le cas où il n'y a pas d'erreurs dans les observations ni de transformations faisant intervenir les paramètres X, c'est à dire $y_i = L_i(T)$, l'approximation optimale est:

$$\hat{T}(Q) = \sum_{1}^{n} b_i K(L_i, Q) \tag{2.2.3-7}$$

avec

$$\{b_j\} = \{K(L_i, L_j)\}^{-1}\{y_j\} \tag{2.2.3-8}$$

En se basant sur le modèle du champ de pesanteur donné par l'équation (2.2.3-7), toute fonctionnelle linéaire L peut ensuite être calculée par:

$$L(\hat{T}) = \sum_{i=1}^{n} b_i K(L_i, L) \tag{2.2.3-9}$$

Dans le cas où les données sont bruitées, les éléments σ_{ij} de la matrice de variance-covariance du vecteur-bruit doivent être ajoutés à $K(L_i, L_j)$. La solution optimale est donc celle qui minimise la somme du carré de la norme de T et de la variance du bruit.

Le noyau reproduisant (2.2.3-3) doit être égal à la fonction de covariance empirique: COV(P,Q), dont les variances par degré sont:

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=-n}^{n} \left(\frac{GM}{a}\right)^2 \overline{K}_{nm}^2 \tag{2.2.3-10}$$

La matrice normale, en tenant compte des variances-covariances d'erreur, est donc:

$$\overline{C} = \{COV(L_i, L_j)\} + \sigma_{ij} \tag{2.2.3-11}$$

d'où les prédictions:

$$L(\hat{T}) = \sum_{i=1}^{n} b_i COV(L, L_i) \tag{2.2.3-12}$$

avec

$$\{b_i\} = \overline{C}^{-1}\{y_i\}$$

et l'erreur estimée:

$$\sigma(L)^2 = COV(L, L) - \{COV(L, L_i)\}^T \overline{C}^{-1}\{COV(L, L_j)\} \tag{2.2.3-13}$$

Les covariances sont calculées en utilisant la loi de propagation des covariances: $COV(L_i, L_j) = L_i(L_j(COV(P,Q)))$. On peut obtenir la fonction de covariance de l'anomalie de gravité:

$$COV(\Delta g(P), \Delta g(Q)) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2 \frac{(n-1)^2}{rr'} \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \tag{2.2.3-14}$$

En utilisant la méthode de retrait (retrait des contributions du modèle de potentiel de référence et de l'effet topographique), les quantités résiduelles deviennent (cf. équation 2.2.3-4):

$$y_{i,res} = y_i - L_i(T_{MG}) - L_i(T_{top}) = L_i(T) - L_i(T_{MG}) - L_i(T_{top}) + e_i + A_i^T X \tag{2.2.3-15}$$

En introduisant des informations locales, les n_0 premières variances par degré ne sont pas nulles mais dépendent des erreurs des coefficients. Nous supposons qu'elles sont proportionnelles aux variances d'erreur par degré a priori, c'est-à-dire:

$$\sigma_n^2 = \alpha\left(\sigma_n^E\right)^2$$
$$\left(\sigma_n^E\right)^2 = \sum_{m=-n}^{n} \varepsilon_{nm}^2 \qquad (2.2.3\text{-}16)$$

où ε_{nm} est l'écart-type de $\frac{GM}{a}\overline{K}_{nm}$, et le facteur d'échelle α est à déterminer.

La fonction de covariance peut être estimée à partir des données puisqu'elle a aussi pour expression :

$$COV(P,Q) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} T(P)T(Q)d\alpha\cos\varphi d\varphi d\lambda \qquad (2.2.3\text{-}17)$$

L'intégration étant faite en azimut, latitude et longitude (α,φ,λ), elle ne dépend que des distances radiales de P et Q et de la distance sphérique ψ. En pratique, on utilise les données de pesanteur sur terre (ou les données altimétriques sur mer). Un échantillonnage de l'ensemble des données locales peut être nécessaire. La fonction de covariance pour les anomalies de gravité se calcule en utilisant la formule suivante:

$$COV_{\Delta g}(\psi,r,r') \approx \frac{1}{M}\sum_{\substack{i=1\\ \psi_{PQ}=\psi}}^{M} \Delta g(P)\Delta g(Q) \qquad (2.2.3\text{-}18)$$

La fonction de covariance analytique pour les anomalies est donnée par la formule (2.2.3-14), et les coefficients σ_n^2 peuvent être ajustés à partir des valeurs estimées par l'équation (2.2.3-18) à partir des mesures. (2.2.3-14) étant une sommation infinie, certaines expressions analytiques pour σ_n en permettent une estimation finie. Le meilleur modèle (Tscherning et Rapp 1974) est de la forme:

$$\sigma_n^2 = \frac{A}{(n-1)(n-2)(n-B)}\left(\frac{R_B}{R}\right)^2 \qquad (2.2.3\text{-}19)$$

où R_B est le rayon de la sphère de Bjerhammar, A est une constante et B un entier, toutes quantités pouvant en principe être estimées. Supposons qu'on veuille calculer un géoïde avec une précision relative de 1 ppm, soit 1 cm sur 10 km (ceci correspond à une erreur de 0.2" de la déviation de verticale et de 1.2 mgal de la pesanteur), la distance minimum d'échantillonnage des données gravimétriques requise (d) a été déterminée approximativement (Tscherning 1985) et est égale à:

$$d \approx \frac{1}{\sqrt{C_0}}\left(\frac{\bar{e}_d\psi_1}{0.3}\right) \qquad (2.2.3\text{-}20)$$

où $\bar{e}_d, C_0$ et ψ_1 sont respectivement l'écart-type de l'erreur gravimétrique interpolée, la variance de l'anomalie résiduelle et la distance de corrélation.

2-3 Référence pour le géoïde français

2.3.1 Système de hauteur

La réalisation d'un géoïde dépend du système de référence en raison :

1. de la définition des anomalies de pesanteur utilisées. Il s'agit donc des définitions de la pesanteur normale (les paramètres de l'ellipsoïde de référence), du modèle géopotentiel, etc;
2. du type de surface effectivement obtenue (géoïde ou quasi-géoïde);
3. de la méthode de calcul, par ex., le géoïde altimétrique, le géoïde-GPS (nivellement par GPS) et le géoïde-DOPPLER dépendent chacun de systèmes différents et eux-mêmes ne sont pas rigoureusement absolus comme on le verra plus loin;
4. de la définition et de l'origine (marégraphe) du système d'altitude.

Les deux systèmes de hauteur les plus importants sont le système de hauteur orthométrique et le système de hauteur normale.

La hauteur orthométrique est définie par: $H_P = \frac{1}{g_m}\int_0^P g dh$. où g *et* g_m sont respectivement la valeur de la pesanteur en surface et la valeur moyenne intégrée le long de la ligne de force de la pesanteur, i.e.: $g_m = \frac{1}{H}\int_0^P g_h dh$. Evidemment, cette valeur g_m ne peut pas être déterminée sans supposer que la masse spécifique le long du chemin de l'intégration soit connue. Donc la hauteur orthométrique ne peut pas être calculée précisément. Généralement, on évalue donc la hauteur orthométrique en faisant certaines hypothèses.

La hauteur normale est définie par: $H^\gamma = \frac{1}{\gamma_m}\int_0^P g dh$. où γ_m est la valeur moyenne de la pesanteur normale. Celle-ci peut être facilement calculée par la formule donnant la pesanteur normale et elle est donc déterminable sans hypothèse supplémentaire.

On peut alors estimer la différence des deux hauteurs. Compte tenu de la relation entre les deux définitions de hauteurs: $\int g dh = g_m H = \gamma_m H^\gamma$, on a alors: $H - H^\gamma = \left(\frac{\gamma_m}{g_m} - 1\right) H^\gamma = \left(1 - \frac{g_m}{\gamma_m}\right) H$.

L'avantage du système orthométrique est sa signification physique car il est basé sur la définition de la surface géopotentielle. L'inconvénient est que l'on ne peut atteindre que des valeurs approchées. Par contre, la hauteur normale peut être calculée précisément, mais sa signification physique est moins claire. Le système de nivellement français qui est adopté est le système normal. La Table suivant illustre les différences entre les deux systèmes de hauteur sur des reliefs différents.

Table 2.3.1-1 Différences entre hauteur orthométrique et hauteur normale

Relief	$g_m - \gamma_m$ (*mGal*)	H^γ (*m*)	$\lvert H - H^\gamma \rvert$ (*cm*)
Surface de la mer	~	0	0
Plaine	50	200	1
Montagne	200	2500	51

Sur la mer, les deux systèmes coïncident. En plaine, la différence est faible. Mais en montagne, la différence est si importante que l'on doit noter le système utilisé pour tous les calculs du géoïde.

2.3.2 Références

- **Modèle de géopotentiel et champ de pesanteur résiduel**

Pour calculer la hauteur de géoïde *N*, on utilise l'intégrale de Stokes avec une modification destinée à améliorer sa convergence. Conceptuellement, nous avons déjà vu que les anomalies de pesanteur peuvent être divisées en trois groupes selon les longueurs d'onde concernées. Le géoïde local peut ainsi être réduit à une fonction sensible à des anomalies de longueur d'onde moyenne que l'on obtient en soustrayant les contributions des grandes longueurs d'onde (modèle de géopotentiel) et des courtes longueurs d'onde (effet de terrain). L'effet de terrain produit des anomalies accidentelles, alors que le modèle géopotentiel produit des systématismes qui apparaissent si le géoïde est calculé sur une région étendue. Les anomalies ainsi obtenues indirectement s'appellent les anomalies gravimétriques résiduelles et elles déterminent (en général) le géoïde résiduel par rapport au modèle géopotentiel utilisé. Ce modèle géopotentiel joue donc un rôle de référence.

- **OSU91a et autres modèles géopotentiels**

Plusieurs modèles géopotentiels ont été publiés récemment. Par exemple :

GEM-T3 par NASA/Goddard Space Flight Center (Lerch et al. 1992);
GRIM4C4 par DGFI/CNES (Balmino et al. 1996);
OSU91A par Ohio State University (Rapp et al. 1991).

Les deux premiers sont d'ordre et de degré 72 équivalent à une résolution de 275 km. OSU91A est d'ordre et de degré 360 équivalent à une résolution de 50 km. Ils permettent d'évaluer le géoïde mondial avec une précision de quelques décimètres à un mètre selon les régions (Rapp, 1992). Un problème que tous rencontrent est le manque de données gravimétriques en Asie, en Europe de l'Est et dans les régions polaires. Les erreurs globales du géoïde mondial d'OSU91A sont reportées dans la table 2.3.2-2 ci-dessous:

Table 2.3.2-2 Erreurs globales de l'ondulation du géoïde mondial du modèle géopotentiel OSU91A

Région	Couverture gravimétrique	Précision du géoïde
Océans	-	±26cm
Continents	bien	±38cm
Continents	peu	±56cm
Continents	rien	±200cm

La précision moyenne globale est de l'ordre de 50 ~ 70 centimètres. Une autre méthode pour vérifier la précision du modèle géopotentiel est de le comparer avec le géoïde obtenu par le nivellement et GPS. Cela donne la précision relative présentée dans la table 2.3.2-3 suivante :

Table 2.3.2-3 Comparaison entre les résultats du géoïde par nivellement-GPS et par OSU91A

Régions	RMS des différences	ppm
Europe	±23cm	3.6
Canada	±19cm	6.6
Australie	±22cm	5.3

Il faut noter que les valeurs (RMS) ci-dessus dépendent de trois facteurs: le modèle OSU91A, le positionnement par GPS et le nivellement.

Remarques:

Les points suivants sont à prendre en considération lors de la détermination du géoïde à l'aide d'OSU91A (les autres modèles géopotentiels posent des problèmes identiques):

1. La formule de base de calcul du géoïde s'écrit $h = H + N$. Ce n'est qu'une approximation parce que la hauteur ellipsoïdale h fournie par GPS est mesurée selon la normale qui est perpendiculaire à la surface de l'ellipsoïde de référence, mais l'altitude ou la hauteur orthométrique sont mesurées selon le fil à plomb qui est perpendiculaire à la surface équipotentielle de la pesanteur de la Terre (le géoïde). La différence entre ces définitions théoriques de la quantité N peut être négligée.

2. L'ondulation du géoïde correspondant à un modèle géopotentiel tel que OSU91A est donnée par:

$$N_{MG} = \frac{GM}{r_p \gamma_p} \sum_{n=2}^{M} \left(\frac{a}{r_p} \right)^n \sum_{m=0}^{n} \overline{K}_{nm} \overline{Y}_{nm}(\theta, \lambda) + \frac{\Delta g_B}{\gamma_p} H = \zeta + \frac{\Delta g_B}{\gamma_p} H \qquad (2.3.2\text{-}1)$$

où Δg_B est l'anomalie de Bouguer. La différence, importante en France, entre le géoïde et le quasi-géoïde est un point abordé plus loin (section 3.4.1).

3. Le géoïde obtenu par OSU91A en employant la formule ci-dessus implique un ellipsoïde dont l'origine se trouve au centre de masse de la Terre. Le système de coordonnées de WGS84, par exemple, n'est pas géocentrique et peut introduire un biais de 60 centimètres comme on l'a vu auparavant. Pour les équations de la transformation, voir (Rapp 1983) ou le paragraphe suivant.

4. OSU91A implique également l'existence d'un ellipsoïde idéal (Heiskanen et Moritz 1967, paragraphe 5-11). Le grand axe le plus récent est estimé à 6378136.3 mètres, mais celui du GRS80 (Geodetic Reference System 1980) est de 6378137.0 mètres. Une différence de 70 centimètres est donc en partie introduite dans le calcul du géoïde.

- Le modèle le plus récent est celui de GSFC/DMA (EGM96).

2.3.3 Transformations simples entre le géoïde calculé et une réalisation de référence

La présentation de la combinaison rigoureuse est exposée plus loin ainsi qu'en annexes 5-3 et 5-4. Nous nous limitons ici aux cas simples les plus souvent employés par divers auteurs.

- **Similitude**

La plupart des transformations géométriques entre les systèmes géodésiques sont basées sur la similitude (ou transformation similaire), qui implique que la transformation soit conforme mais ne donne pas la correction de la

distorsion intérieure des réseaux géodésiques. En utilisant les coordonnées cartésiennes, la transformation similaire nécessite 7 paramètres : 3 translations $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, 3 rotations R_X, R_Y, R_Z et 1 facteur d'échelle k. En géodésie, les paramètres ont des valeurs faibles; on peut donc rendre linéaire le modèle de la transformation et obtenir ainsi l'équation bien connue:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_T = \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1+k & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1+k & R_X \\ -R_Y & -R_X & 1+k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_S \tag{2.3.3-1}$$

Lors de la détermination du géoïde, on simplifie souvent ce modèle en enlevant les trois paramètres de rotation. Posons R le rayon moyen de la terre, on a alors:

$$\Delta N = \frac{X}{R}\Delta X + \frac{Y}{R}\Delta Y + \frac{Z}{R}\Delta Z + k \cdot R \tag{2.3.3-2}$$

ou en coordonnées géographiques:

$$\Delta N = \cos\phi\cos\lambda\Delta X + \cos\phi\sin\lambda\Delta Y + \sin\phi\Delta Z + k \cdot R \tag{2.3.3-3}$$

Compte tenu des écarts de paramétres des ellipsoïdes de référence $\Delta a, \Delta f$, comme dans le cas de OSU91A et du GRS80 où pour le grand axe a et Δa =70 centimètres, on a la formule de Molodensky:

$$\Delta N = \cos\phi\cos\lambda\Delta X + \cos\phi\sin\lambda\Delta Y + \sin\phi\Delta Z + k \cdot R - \Delta a + a\Delta f \sin^2\phi \tag{2.3.3-4}$$

Ces formules servent plus à ajuster un géoïde par rapport à un autre géoïde qu'à déterminer les paramètres. La formule simplifiée est souvent utilisée pour ajuster un géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés. C'est donc un problème de régression à 4 inconnues et la solution peut être estimée simplement par la méthode des moindres carrés.

2-4 Définition de l'exactitude, précision relative/absolue/pessimiste

Introduisons ces notions, particularisées à l'objet de notre étude, et qui seront employées par la suite.

- **Exactitude:** L'exactitude est la différence entre un géoïde gravimétrique et la référence adoptée pour un système géodésique, par ex., le RBF (Réseau de Base Français, points GPS nivelés, voir plus loin).

- **Précision absolue:** La précision absolue est l'écart type de l'exactitude, c'est à dire, l'écart type des différences entre les points communs au géoïde gravimétrique et, par exemple, au RBF:

$$\sigma^{abs} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (V_i - \overline{V})^2}{N-1}} \tag{2.4-1}$$

$$V_i = \zeta_i^{GRV} - \zeta_i^{GPS}$$

$$\overline{V} = \frac{1}{N}\sum_i^N V_i \tag{2.4-2}$$

- **Précision relative:** La précision relative est le rapport de la moyenne quadratique des écarts et de la distance moyenne, i.e.:

$$\sigma^{rel} = \frac{1}{\overline{D}_{ij}}\sqrt{\frac{\sum_{i,j,j>i}^n v_{ij}^2}{n}} \tag{2.4-3}$$

$$v_{ij} = V_i - V_j = (\zeta_i^{GRV} - \zeta_i^{GPS}) - (\zeta_j^{GRV} - \zeta_j^{GPS}) \tag{2.4-4}$$

$\overline{D}_{ij}$ est la distance moyenne. Le calcul de la précision relative, dépendant de la distance, nécessite de sélectionner les données qui se trouvent dans une certaine fourchette de distances:

$$D_1 \leq D_{ij} \leq D_2 \tag{2.4-5}$$

$$\overline{D}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i,j,j>i}^{n} D_{ij} \tag{2.4-6}$$

Compte tenu de la distance moyenne entre les points RBF de 25 km, on choisi $D_2 - D_1 = 50$ km.

- **Précision pessimiste:** C'est une estimation de l'erreur par le "test à l'aveugle". Ceci sera utilisée pour une estimation objective de la précision de la prédiction du géoïde en utilisant les points RBF (Réseau de Base Français) et le MNT (voir plus loin). On définit d'abord *l'erreur pessimiste* d'un point à prédire par :

$$\Delta_{k,\zeta} = \zeta_{k,RBF} - \zeta_{k,pred.} \tag{2.4-7}$$

où $\zeta_{k,RBF}$ est la valeur connue d'un point RBF k ($k = 1,2, \ldots, 1081$), $\zeta_{k,pred.}$ est la valeur prédite du point k, mais *sans utiliser la valeur connue* $\zeta_{k,RBF}$ pour le calcul. L'équation ci-dessus constitue en fait ce que l'on appelle *la méthode à l'aveugle.* La précision pessimiste est l'écart-type des erreurs pessimistes.
Evidemment, cette estimation est la plus pessimiste puisque la valeur connue $\zeta_{k,RBF}$ n'est pas utilisée pour la prédiction de $\zeta_{k,pred.}$, la distance de prédiction devenant la distance entre les points RBF, c'est à dire 25 km. Mais, en pratique, d'une part, la distance de prédiction est la distance entre les points RBF divisée par 2, c'est à dire 12,5 km, d'autre part, la formule ci-dessus contient également l'erreur du point RBF. L'estimation est donc ainsi faite dans le cas le plus défavorable.

2-5 Modification du noyau de l'intégrale de Stokes

La modification a pour but d'améliorer la convergence du noyau de l'intégrale de Stokes $S(\psi)$ et de réduire l'erreur de troncature. Plusieurs modifications sont proposées par Molodensky et al. (1962), Wang et al. (1969), Ostach (1970), Meissl (1971), Wenzel (1982), Sjöberg (1984), Heck et Grüniger (1987) etc. Celles de Molodensky et celle de Meissl sont les plus intéressantes.

Posons Ω: $\psi \leq \psi_0$ la capsule de l'intégrale de Stokes sphérique, on a

2.5.1 Modification de Molodensky

$$N = \frac{R}{4\pi g_0} \iint_{\Omega} \Delta g S(\psi) d\sigma + \frac{R}{2g_0} \sum_{n=2}^{M} \Delta g_n Q_n \tag{2.5.1-1}$$

où M est le degré du modèle géopotentiel utilisé (Molodensky et al. 1962), et:

$$\Delta g_n = \frac{GM}{r^2}(n-1)\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \left[\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{mn} \sin m\lambda\right] \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \tag{2.5.1-2}$$

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} P_n(\cos\psi) S(\psi) \sin\psi d\psi \tag{2.5.1-3}$$

Cette formule est modifiée encore par Vanicek (1986):

$$N = N_M + \frac{R}{4\pi g_0} \iint_{\Omega} (\Delta g - \Delta g_M)[S(\psi) - S_M(\psi)] d\sigma \tag{2.5.1-4}$$

avec

$$S_M(\psi) = \left[\sum_{n=2}^{M} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)\right] \tag{2.5.1-5}$$

et où N_M et Δg_M sont donnés par le modèle géopotentiel de degré M.

2.5.2 Modification de Meissl

$$N = \frac{R}{4\pi g_0} \iint_{\Omega} \Delta G[S(\psi) - S(\psi_0)] d\sigma + \frac{R}{2g_0} \sum_{n=2}^{M} \Delta G_n \overline{Q}_n(\psi_0) \qquad (2.5.2\text{-}1)$$

$$\overline{Q}_n(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + \frac{S(\psi_0)}{n-1}\left[P_{n-1}(\cos\psi_0) - \cos\psi_0 P_n(\cos\psi_0)\right] \qquad (2.5.2\text{-}2)$$

Cette modification (Meissl 1971) est plus simple que celle de Molodensky, mais elles produisent toutes les deux la même erreur de troncature (Balmino 1982).

Remarque: Mainville a proposé une relation expérimentale entre ψ_0 et M: $180° < M \times \psi_0 < 190°$

2-6 Evaluation rapide des intégrales

Un problème pratique, de plus en plus aigu avec l'accroissement de la résolution des données et des géoïdes calculés est d'augmenter la vitesse du calcul du géoïde gravimétrique et des réductions, ainsi que de réduire la quantité de mémoire vive requise. Il est bien connu que la détermination d'un géoïde gravimétrique nécessite d'évaluer les trois intégrales de Stokes, de la correction de terrain pour les anomalies et le potentiel. La singularité au point calculé et la lenteur du calcul sont deux problèmes posés par ces évaluations. De nombreuses solutions ont été proposées par différents auteurs. Il y a 10 ans, Forsberg (1984) et Sideris (1985) ont commencé à introduire la technique Fast Fourrier Transform (FFT) dans ces calculs. Cependant, longtemps cette technique a fait l'hypothèse de l'approximation plane des trois intégrales. En 1993, Haagmans et al. ont proposé une FFT en 1 dimension pour évaluer l'intégrale de Stokes dans l'approximation sphérique. Mais, les deux autres intégrales se font encore dans l'hypothèse de l'approximation plane parce que la surface du terrain sur laquelle les intégrations s'effectuent est trop compliquée pour être représentée par une approximation plane.

C'est pourquoi j'ai proposé une autre méthode pour évaluer les intégrales de façon presque aussi rapide qu'avec la FFT sans perdre de précision.

Dans un premier temps nous rappelons brièvement l'application des techniques de FFT à ces problèmes (bien que nous ne les ayons pas utilisées) puis nous détaillerons la nouvelle méthode que nous avons introduite.

2.6.1 FFT

Un exposé détaillé a été donné par Schwarz et al. (1993). Nous nous limitons aux principes essentiels.

Posant $\mathbf{S}$ l'opérateur de Stokes, on a l'approximation plane de l'intégrale de Stokes:

$$N(x_P, y_P) = \mathbf{S}(\Delta g) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{\Delta g(x,y)}{\ell} dxdy \qquad (2.6.1\text{-}1)$$

Posons * l'opérateur de la convolution et $\mathbf{F}$ l'opérateur de la FFT, on a:

$$N(x,y) = \frac{1}{\gamma} \Delta g(x,y) * l_N(x,y) = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}^{-1}[\Delta G(u,v) L_N(u,v)] \qquad (2.6.1\text{-}2)$$

$$l_N(x,y) = (2\pi)^{-1}(x^2 + y^2)^{-1/2} \qquad (2.6.1\text{-}3)$$

$$\Delta G(u,v) = \mathbf{F}[\Delta g(x,y)] \qquad (2.6.1\text{-}4)$$

$$L_N = \mathbf{F}[l_N(x,y)] = \mathbf{F}[\mathbf{S}] = (2\pi)^{-1}(u^2 + v^2)^{-1/2} = (2\pi)^{-1} q^{-1} \qquad (2.6.1\text{-}5)$$

où u, v sont les fréquences circulaires par unité de distance correspondant à x, y. La singularité, $l_N(0,0)$, est calculée séparément:

$$dN(x_P, y_P) = \gamma^{-1}(\Delta x \Delta y / \pi)^{1/2} \Delta g(x_P, y_P) \qquad (2.6.1\text{-}6)$$

2.6.2 Intégration rapide (*)

Il s'agit d'une nouvelle méthode pour calculer les intégrales de Stokes, et de corrections de terrain (retrait sur l'anomalie de pesanteur, restauration sur le géoïde). Les détails en sont présentés dans l'article de l'annexe 5-1 (Jiang et Duquenne 1996b).

Le principe de la méthode est le suivant :

1). Profiter de l'isotropie des fonctions intégrées par rapport à la distance sphérique ψ ou par rapport au rayon vecteur r

2). Eviter le point singulier $\psi = 0$

3). Appliquer des processus optimaux fonction de la précision requise.

Pour cela, on doit premièrement modifier les intégrales qui se réduissent à une dimension (ψ) au lieu de deux ou trois.

On définit les symboles suivants (cf. Figure 2.6.2-1): N ou ζ = hauteur de géoïde (quasi-géoïde). R = rayon moyen de la Terre. γ = valeur moyenne du champ de pesanteur normale. Δg = anomalie à l'air libre du champ de pesanteur. ψ (ou r_0) = angle sphérique (ou distance) entre le point fixé et le point courant sur la surface du géoïde. r = distance entre le point fixé et le point courant sur la surface topographique. r' = distance entre le point fixé et le point courant sur la surface de référence. φ, λ = latitude et longitude. α = azimut du point courant. σ = surface d'intégration. U = fonction potentiel. T = fonction potentiel perturbateur. k = constante gravitationnelle. dm = élément de masse. ρ = masse volumique (constante). p = point à calculer sur la surface topographique. q = point courant sur la surface topographique. q' = point courant sur la surface de référence. H= hauteur orthométrique. RTM = modèle de terrain résiduel. ref = modèle de référence (terrain ou géopotentiel). C = correction de terrain. C_{RTM}, C_{ref} = correction de terrain correspondant au RTM ou au modèle de référence (ref) et S(ψ) = fonction de Stokes.

- **Modification de l'intégrale de Stokes**

L'intégrale de Stokes en approximation sphérique est:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \tag{2.6.2-1}$$

En coordonnées polaires, on a

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi,\alpha) S(\psi) \sin\psi d\psi d\alpha \tag{2.6.2-2}$$

Posons:

$$f(\psi) = S(\psi)\sin\psi = 2\cos\frac{\psi}{2} - \sin\psi\left[6t + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln(t + t^2)\right] \tag{2.6.2-3}$$

$$F(\psi) = \Delta\bar{g}(\psi) f(\psi)$$

$$\Delta\bar{g}(\psi) = M\{\Delta g(\psi,\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g(\psi,\alpha) d\alpha \tag{2.6.2-4}$$

avec l'opérateur de la moyenne:

$$M\{f(\bullet)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\bullet) d\alpha = \frac{1}{N}\sum_{i_\alpha=1}^{N} f_{i_\alpha}(\bullet) = \bar{f}(\bullet) \tag{2.6.2-5}$$

L'équation (2.6.2-2) devient:

$$N = \frac{R}{2\gamma}\int_0^{\psi} F(\psi) d\psi \tag{2.6.2-6}$$

On montre que le nouveau noyau $f(\psi)$ n'est plus singulier (Jiang et Duquenne 1996b). L'équation (2.6.2-6) est rigoureuse et peut être évaluée numériquement de façon très efficace.

- **Modification de l'intégrale de potentiel**

Grâce à la formule de Bruns, on peut calculer le géoïde à partir de la relation simple:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad \text{ou} \quad \delta N = \frac{\delta U}{\gamma} \tag{2.6.2-7}$$

où δU est le potentiel d'anomalie due au RTM:

$$\delta U_{RTM} = k\rho \iiint_V \frac{dV}{r} = k\rho \int_\sigma \int_{H^{ref}}^{H} \frac{dz}{r} d\sigma \tag{2.6.2-8}$$

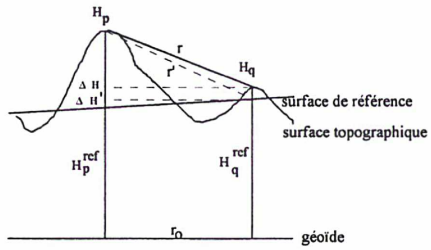


Fig. 2.6.2-1 Illustration des définitions

L'équation (2.6.2-8) peut être modifiée pour permettre une évaluation rapide. On ne donne ici que les résultats finaux du développement:

formule rigoureuse

$$\delta U_{RTM} = 2\pi k\rho R \int_0^\psi \frac{M\{H - H^{ref}\}\psi d\psi}{\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H'^2\}/R^2}} \tag{2.6.2-9}$$

formule linéaire

$$\delta U_{RTM} = 2\pi k\rho R \int_0^\psi M\{H - H^{ref}\} d\psi \tag{2.6.2-10}$$

Les noyaux des équations (2.6.2-9 et 10) ne sont plus singuliers et peuvent être évalués très rapidement. L'équation (2.6.2-9) est rigoureuse dans le sens de l'approximation sphérique. En effet, aucune hypothèse linéaire n'a été faite pour la modification mathématique dont le but est d'accélérer la vitesse de calcul.

- **Modification de l'intégrale de la correction de terrain**

La correction de terrain peut être représentée par:

$$C = -k\rho \iint_\sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\sigma \tag{2.6.2-11}$$

L'équation (2.6.2-11) peut être aussi modifiée pour une évaluation rapide. On ne donne ici également que les résultats du développement:

formule rigoureuse

$$C = -2\pi k\rho R \int_0^\psi \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H^2\}/R^2}} + 2\pi k\rho R\psi \tag{2.6.2-12}$$

ou sous une forme pour laquelle les calculs numériques convergent plus rapidement:

$$C = 2\pi k\rho R \int_0^\psi \left(1 - \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H^2\}/R^2}} \right) d\psi \tag{2.6.2-13}$$

formule linéaire

$$C = \frac{\pi k \rho}{R} \int_0^{\psi} \frac{M\{\Delta H^2\}}{\psi^2} d\psi \qquad (2.6.2\text{-}14)$$

Il est facile de prouver que le nouveau noyau des équations (2.6.2-12 et 13) converge même quand $\psi \to 0$:

$$\left| M\left\{ \frac{1}{\sqrt{\psi^2 + \Delta H^2 / R^2}} \right\} \psi \right| \leq 1 \qquad (2.6.2\text{-}15)$$

Ces formules sont également rigoureuses dans l'approximation sphérique.

- **La méthode de quadrature appliquée**

On a $x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}$ séparés par un intervalle constant h: $x_i = x_0 + i \times h,\ i = 0, 1, \ldots, N+1$. L'intégration est:

$$F(x) = \int_a^b f(x) dx \qquad (2.6.2\text{-}16)$$

On donne directement ci-dessous les formules pratiques que nous avons testées:

Règle étendue des trapèzes (formule fermée)

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h\left[\frac{1}{2} f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N\right] + O\left((b-a)^3 f'' / N^2\right) \qquad (2.6.2\text{-}17)$$

Règle étendue du point milieu (formule ouverte)

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h\left[f_{3/2} + f_{5/2} + f_{7/2} + \ldots + f_{N-3/2} + f_{N-1/2}\right] + O\left(1/N^3\right) \qquad (2.6.2\text{-}18)$$

et

Formule semi-ouverte

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = h\left[23/12\, f_2 + 7/12\, f_3 + f_4 + \ldots + f_{N-2} + 13/12\, f_{N-1} + 5/12\, f_N\right] + O\left(1/N^3\right) \qquad (2.6.2\text{-}19)$$

Cette dernière formule est fermée à droite et ouverte à gauche.

La méthode de l'intégration rapide est rigoureuse dans le cas de l'approximation sphérique, sans singularité et elle utilise la grille originale de l'anomalie résiduelle. Plusieurs comparaisons numériques nous conduisent à la conclusion que cette nouvelle technique peut gagner 95 à 98 % de temps CPU sans perdre de précision (voir section 3-1).

2-7 Interpolation

Le but de cette section est de discuter les méthodes de construction d'une grille à partir de points discrets. Il s'agit du problème d'interpolation ou de prédiction. Nous présentons les méthodes statistique et géométrique.

2.7.1 Collocation

Prenons $\tilde{s}$ les signaux de pesanteur à prédire et $\tilde{x}$ les quantités d'observation; on a, de manière similaire à ce qui a été exposé en section 2.2.3 mais avec d'autres notations:

$$\tilde{s} = \tilde{C}_{sx}\left(\tilde{C}_{xx} + \tilde{D}\right)^{-1} \tilde{x} \qquad (2.7.1\text{-}1)$$

$\tilde{C}_{sx}, \tilde{C}_{xx}, \tilde{C}_{ss}$ sont respectivement les matrices de la cross- et de l'auto-covariance des signaux prédits $\tilde{s}$ et des observations $\tilde{x}$, dépendant du modèle donné, et $\tilde{D}$ est la covariance des erreurs d'observations. Posons $\tilde{E}_{ss}$ la matrice d'estimation de la covariance des erreurs de prédiction, on a:

$$\tilde{E}_{ss} = \tilde{C}_{ss} - \tilde{C}_{sx}\left(\tilde{C}_{xx} + \tilde{D}\right)^{-1}\tilde{C}_{sx}^{T} \qquad (2.7.1\text{-}2)$$

Les erreurs sur les différences d'ondulation du géoïde peuvent être estimées par l'équation suivante:

$$\sigma^2(s_1 - s_2) = E(s_1, s_1) + E(s_2, s_2) - 2E(s_1, s_2) \qquad (2.7.1\text{-}3)$$

Les avantages de la collocation sont que l'on peut profiter de tous les types d'observation et les traiter ensemble dans un modèle unique afin ainsi d'obtenir directement la matrice de la covariance des erreurs. Pour comprendre ceci en détail, voir (Tscherning 1984 et 1994).

2.7.2 Interpolation par une surface du second ordre (*)

Supposons que l'on ait un point ***k*** à prédire (à interpoler) sur une surface (ζ^0) qui peut être développée au voisinage du point ***k*** en utilisant une surface du second ordre, soit:

$$\begin{aligned}\zeta^0(\varphi,\lambda) = \zeta_k^0 + a(\varphi - \varphi_k) + b\cos\overline{\varphi}(\lambda - \lambda_k) + \\ c(\varphi - \varphi_k)^2 + d\cos^2\overline{\varphi}(\lambda - \lambda_k)^2 + e\cos\overline{\varphi}(\varphi - \varphi_k)(\lambda - \lambda_k)\end{aligned} \qquad (2.7.2\text{-}1)$$

avec

$$\overline{\varphi} = \frac{\varphi_k + \varphi}{2} \qquad (2.7.2\text{-}2)$$

Evidemment, pour le point ***k***, on a:

$$\zeta^0(\varphi_k, \lambda_k) = \zeta_k^0 \qquad (2.7.2\text{-}3)$$

La constante ζ_k^0 et les coefficients ***a, b, c, d, e*** peuvent être déterminés par la méthode des moindres carrés pondérés en utilisant un ensemble de points connus au voisinage du point ***k*** (***i*** = ***1, 2, 3, ..., N*** et ***N*** >> ***6***), par exemple dans un disque de rayon ***R*** (voir la figure 2.7.2-1), pour lesquels les valeurs ζ_i^0 sont connues. Pour chaque point ***i***, on peut établir une équation d'observation:

$$\begin{aligned}P_i\colon\ V_i = \zeta_i^0 + a(\varphi - \varphi_i) + b\cos\overline{\varphi}(\lambda - \lambda_i) + \\ c(\varphi - \varphi_i)^2 + d\cos^2\overline{\varphi}(\lambda - \lambda_i)^2 + e\cos\overline{\varphi}(\varphi - \varphi_i)(\lambda - \lambda_i)\end{aligned} \qquad (2.7.2\text{-}4)$$

avec un poids fonction de la distance entre le point ***k*** (à prédire) et le point ***i*** (connu), par exemple:

$$P_i = \frac{1}{\left[(\varphi_k - \varphi_i)^2 + \cos^2\overline{\varphi}(\lambda_k - \lambda_i)^2\right]^n} \qquad (2.7.2\text{-}5)$$

avec *n = 0.5, 1, 1.5, 2 ....*

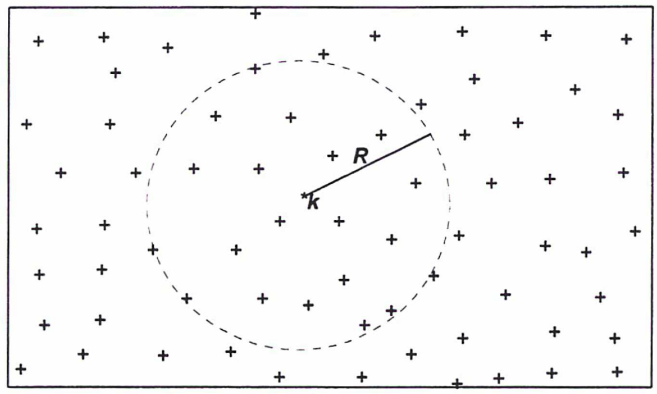


Fig. 2.7.2-1 Prédiction au point *k* en utilisant les points voisins dans un disque de rayon *R*

2.7.3 Interpolation du géoïde en utilisant les points GPS nivelés et le MNT (*)

Le but de cette étude est d'augmenter la précision de l'interpolation du géoïde en utilisant les points GPS nivelés ou les points RBF. Le principe est l'utilisation de la technique de retrait-restauration. Le processus de retrait-restauration (r-r) des contributions de terrain et d'un modèle géopotentiel (par exemple, OSU91A) nous permet de réduire considérablement l'erreur d'interpolation/prédiction en travaillant sur une surface (fonction résiduelle) plus lisse. L'idée principale est de prédire d'abord la valeur au point sur une surface lissée obtenue par le retrait des contributions d'OSU91A et du terrain sur les points RBF, puis de restaurer les contributions d'OSU91A et du terrain sur le point à prédire pour passer de la surface lissée au géoïde.

On veut construire une grille de géoïde qui représente la surface zéro du nivellement issue des points RBF. On peut donc convertir facilement un point d'altitude ellipsoïdale (h - GRS80) en altitude du nivellement (H - IGN69) en utilisant la relation simple suivante:

$$H = h - \zeta$$

où ζ est la hauteur du quasi-géoïde au dessus de l'ellipsoïde (anomalie de hauteur).

Cependant, la distance moyenne entre les points RBF est environ 25 km. Une interpolation purement géométrique peut produire une erreur importante dans les régions montagneuses ($\sigma > 20$ cm) en raison des variations non-linéaires qui proviennent d'anomalies de masse. Ces dernières sont corrélées au relief de terrain local. On peut donc profiter de l'information topographique du MNT pour calculer la variation non linéaire du géoïde. La principale méthode est celle de retrait-restauration modifiée (r-r, cf. Heiskanen et Moritz 1967, Forsberg 1984, Jiang 1995).

Sur la base d'une analyse spectrale, on essaie de définir une surface facile à utiliser (on l'appelle ζ^0 à partir de maintenant), assez lisse pour une interpolation géométrique en filtrant les différentes longueurs d'onde représentées par le modèle géopotentiel et les informations topographiques. L'information topographique correspondant au modèle géopotentiel est calculée en filtrant les informations topographiques des longueurs d'onde courtes, i.e. celles inférieures à celles correspondant à la fréqnence de Nyquist du modèle. Si celui-ci est développé jusqu'au degré n_0, la longueur d'onde correspondante est $360/n_0$. La différence entre la topographie réelle et cette surface lissée est le RTM (modèle de terrain résiduel). Le modèle géopotentiel que nous utilisons est OSU91A qui a une résolution de 0.5°. Les définitions de RTM et de ζ^0 sont donc :

$$H_{RTM} = H_{MNT} - H_{MNT\,filtré} \qquad (2.7.3\text{-}1)$$

$$\zeta^0 = \zeta_{RBF} - \zeta_{OSU} - \zeta_{RTM} \qquad (2.7.3\text{-}2)$$

ζ^0 n'a pas de signification physique ni géométrique. Elle n'est qu'une surface lisse intermédiaire pour la prédiction/interpolation du géoïde. En inversant la formule (2.7.3-2), on a:

$$\zeta_{pred.} = \zeta^0_{OSU} + \zeta^0_{RTM} + \zeta^0_{pred.} \qquad (2.7.3\text{-}3)$$

Etant données les coordonnées d'un point à prédire, on peut facilement calculer les trois termes de droite de la formule (2.7.3-3) à l'aide de, respectivement, l'ensemble des coefficients d'OSU91A, le MNT et l'interpolation

géométrique sur la surface ζ^0. La méthode d'interpolation de second ordre par moindres carrés pondérés (section 2.7.2) a été utilisée. En bref, les étapes de la prédiction du géoïde en utilisant les points RBF et le MNT sont:

1) Calcul et retrait du géoïde OSU91A et de l'effet du terrain sur les points RBF pour obtenir une surface plus lisse ζ^0

2) Construction d'une grille sur la surface ζ^0 en utilisant la méthode d'interpolation de second ordre

3) Calcul et restauration de l'effet du terrain résiduel et du géoïde du modèle de géopotentiel sur la grille, on a alors le géoïde 'MNT'.

2-8 Combinaison optimale (*)

A l'heure actuelle, la technique pour la détermination du géoïde gravimétrique est basée sur la combinaison de données terrestres (gravimétriques, MNT et nivellement) et de données spatiales (hauteur ellipsoïdale du GPS, altimétrie), en introduisant un modèle géopotentiel comme référence. Par conséquent, de nouveaux problèmes surgissent. Les données combinées sont des grandeurs différentes (aussi bien géométriques que physiques) et appartiennent à des domaines différents (numériques et fréquentiels). Le défaut dû à une combinaison simple est en fait maintenant la principale source d'erreur dans le calcul du géoïde gravimétrique. Le problème de la combinaison optimale se pose ainsi de la façon suivante :

le problème d'optimisation peut être séparé en deux parties :

1. Une ***pré-combinaison*** : entre les données terrestres gravimétriques et le modèle géopotentiel pour *calculer le géoïde gravimétrique*;
2. Une ***post-combinaison*** : entre le géoïde gravimétrique calculé et les données aux points GPS nivelés pour *éliminer les erreurs de grande longueur d'onde du modèle et les déformations locales*

La section suivante présente les principes théoriques du problème d'optimisation. Il existe une autre solution, qui peut traiter le problème globalement, c'est la collocation évoquée plus haut.

2.8.1 Combinaison des données gravimétriques et du modèle de géopotentiel

2.8.1-1. Discussion de la méthode de retrait-restauration au moyen du concept de fonctionnelle

La combinaison de données terrestres et d'un modèle géopotentiel est réalisée en utilisant la technique de retrait-restauration. Cette technique est aujourd'hui utilisée en pratique pour presque tous les calculs de géoïde.

Supposons que le potentiel d'anomalie du champ de pesanteur T soit représenté par trois composantes spectrales de longueurs d'onde respectivement grandes, courtes et moyennes, c'est-à-dire :

$$T = T^M + T^{RTM} + T^G \qquad (2.8.1\text{-}1)$$

avec:

T^M = la contribution du modèle géopotentiel

T^{RTM} = la contribution topographique locale du Modèle de Terrain Résiduel (Forsberg et Tscherning 1981)

T^G = la contribution gravimétrique du champ résiduel

Toute fonctionnelle linéaire du potentiel T peut être représentée de la manière suivante:

$$L(T) = L(T^M) + L(T^{RTM}) + L(T^G) \qquad (2.8.1\text{-}2)$$

où L est un opérateur linéaire. Dans cette équation, les deux premiers termes de droite sont connus ou peuvent être calculés facilement. Le problème pour modéliser le champ de pesanteur local provient de la détermination du troisième terme. On inverse cette équation:

$$\begin{aligned} L(T^G) &= L(T) - L(T^M) - L(T^{RTM}) \\ &= L(T - T^M - T^{RTM}) \end{aligned} \qquad (2.8.1\text{-}3)$$

Dans l'équation (2.8.1-3), $L(T)$ est une observation, $L(T^M)$ et $L(T^{RTM})$ sont connus. Alors $L(T^G)$ peut être déterminé de façon unique. Les équations (2.8.1-3) et (2.8.1-2) présentent la technique de retrait et restauration au moyen du concept de fonctionnelle, en supposant que toutes les quantités géodésiques sont des fonctionnelles linéaires du potentiel perturbateur *T*.

En définissant *L* comme l'opérateur linéaire du passage de T^G à ζ^g, la hauteur résiduelle du (quasi-) géoïde, on a:

$$\zeta = \zeta^M + \zeta^{RTM} + \zeta^g \tag{2.8.1-4}$$

On voit bien que la hauteur du géoïde peut être décomposée en trois parties correspondant à l'équation (2.8.1-1):

1) la contribution du modèle tronqué au degré l_{max}:

$$\zeta^M = \sum_{l=2}^{l_{max}} \zeta_l^M = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{l=2}^{l_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^{l} \left(C_{l,m} \cos m\lambda + S_{l,m} \sin m\lambda\right) P_{l,m}(\sin\varphi) \tag{2.8.1-5}$$

2) la contribution topographique correspondant au RTM:

$$\zeta^{RTM} = \frac{G\rho}{\gamma} \iiint_{RTM} \frac{dV}{r} \tag{2.8.1-6}$$

3) la contribution gravimétrique (intégrée jusqu'à une certaine distance):

$$\zeta^g = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g^G S(\psi) d\sigma \tag{2.8.1-7}$$

où Δg^G et $S(\psi)$ sont respectivement l'anomalie résiduelle de pesanteur et la fonction de Stokes:

$$\Delta g^G = \Delta g' - \Delta g^M - \Delta g^{RTM} \tag{2.8.1-8}$$

avec $\Delta g'$ l'anomalie à l'air libre, Δg^M l'anomalie à l'air libre du modèle et Δg^{RTM} l'effet du RTM, et

$$S(\psi) = \frac{1}{t} - 6t + 1 - (1 - 2t^2)\left[5 + 3\,ln(t + t^2)\right] \tag{2.8.1-9}$$

avec $t = sin\frac{\psi}{2}$ ou, comme nous avons déjà vu:

$$S(\psi) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{l-1} P_l(cos\,\psi) = \sum_{l=2}^{\infty} S_l(\psi) \tag{2.8.1-10}$$

En supposant le modèle géopotentiel tronqué au degré l_{max} et, par conséquent que l'intégrale de Stokes s'arrête à $\psi = \psi_0$, à partir les équations (2.8.1-7,8,9,10), on a

$$\zeta^G = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} \left(\Delta g' - \Delta g^M - \Delta g^{RTM}\right) S_0(\psi) d\sigma \tag{2.8.1-11}$$

avec (cf. section 2.5.1)

$$\Delta g^M = \sum_{l=2}^{l_{max}} \Delta g_l \tag{2.8.1-12}$$

$$S_0(\psi) = \sum_{l=l_{max}+1}^{\infty} S_l(\psi) \tag{2.8.1-13}$$

Si l'on calcule les équations (2.8.1-5,6,11) et qu'on les introduit directement dans (2.8.1-4), on a la ***combinaison simple***. Cependant, il n'est pas toujours raisonnable de faire cette combinaison simple en raison des problèmes suivants :

1. erreurs des données gravimétriques terrestres
2. erreurs des coefficients du modèle géopotentiel
3. erreurs de troncature du modèle
4. erreurs dues aux écarts entre les données terrestres et le modèle

L'analyse des résidus entre le géoïde gravimétrique et les données GPS nivelées montre que le défaut dû à la combinaison simple est devenu la source d'erreur la plus importante pour le calcul du géoïde gravimétrique d'une précision de l'ordre du centimètre. Cette conclusion a été faite non seulement lors d'essais dans des régions montagneuses, comme les Alpes (Jiang 1995), mais aussi lors d'essais dans des régions de plaines, comme en Belgique (Paquet et al. 1996), où les résidus sont groupés régulièrement selon leur signe : négatif ou positif (cf. figures 3.5.3-2, 3, 4)

Plusieurs auteurs ont étudié ce problème et ont proposé différentes méthodes pour minimiser les erreurs et les écarts lors de la combinaison, par exemple: Moritz (1976), Sjöberg (1981, 1984), Wenzel (1982), Wang (1993), Denker (1996) etc. Mais les méthodes proposées, soit n'ont pas été réellement utilisées soit ne considèrent pas l'ensemble des quatre erreurs ci-dessus. On propose ici une méthode qui reprend les avantages des méthodes de Wenzel (1982) et de Wang (1993). Le but est de garder l'intégrale de Stokes en modifiant le noyau d'intégration. En effet, l'intégrale de Stokes est toujours la méthode la plus rigoureuse et celle qui a la meilleure précision. De plus, le logiciel existant PiLi (Jiang 1995) et l'intégration rapide (Jiang et Duquenne 1996b) peuvent être utilisés (voir chapitre 3).

Remarque: Grâce à ζ^{RTM} et Δg^{RTM} dans les équations (2.8.1-4,11), qui éliminent l'effet topographique local, le champ d'anomalies est plus lisses. Mais ils n'interviennent pas dans le problème de la combinaison optimale. On rappelle que le principe de retrait et restauration est que l'on restaure autant que l'on retire. Donc, si l'on utilise exactement le même MNT et le même processus pour calculer ζ^{RTM} et Δg^{RTM}, on n'introduit théoriquement pas d'erreur. On va voir dans le chapitre suivant que notre problème revient en fait à déterminer les quantités du champ lissé: Δg^T et ζ^T.

2.8.1-2. Principe mathématique

Le but est de minimiser les erreurs des données gravimétriques terrestres, du modèle et de la troncature, ainsi que l'écart entre les données terrestres et le modèle.

Supposons que le champ d'anomalie ait été lissé topographiquement en retirant l'effet du RTM. Les quantités à traiter sont celles des anomalies lissées de pesanteur et de hauteur: Δg^T et ζ^T définies par (équations 2.8.1-4,8) :

$$\Delta g^T = \Delta g' - \Delta g^{RTM} \tag{2.8.1-14}$$

$$\begin{aligned}\zeta^T &= \zeta - \zeta^{RTM} = \zeta^M + \zeta^G \\ &= \zeta^M + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\left(\Delta g^T - \Delta g^M\right)S_0(\psi)d\sigma\end{aligned} \tag{2.8.1-15}$$

Remarquant que l'on a:

$$\zeta_l^M = \frac{r}{\gamma}\frac{\Delta g_l^M}{l-1} \tag{2.8.1-16}$$

Et introduisant (2.8.1-5), (12) et (16) dans (15), on a la représentation spectrale de ***la combinaison simple***:

$$\zeta^T = \frac{r}{\gamma}\sum_{l=2}^{l_{max}}\frac{\Delta g_l^M}{l-1} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\left(\Delta g^T - \sum_{l=2}^{l_{max}}\Delta g_l^M\right)\sum_{l=l_{max}+1}^{\infty}S_l(\psi)d\sigma \tag{2.8.1-17}$$

Evidemment, pour que les composantes spectrales dans l'équation (2.8.1-17) soient combinées de façon optimale, on doit les pondérer en tenant compte de leur précision et de certaines conditions. Posons P_l^M et P_l^T les poids spectraux pour les valeurs correspondant au modèle et aux données terrestres, on obtient la représentation de ***la combinaison optimale*** en pondérant l'équation (2.8.1-17):

$$\zeta^T = \frac{r}{\gamma}\sum_{l=2}^{l_{max}} P_l^M\left(1-P_l^T\right)\frac{\Delta g_l^M}{l-1} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\left(\Delta g^T - \sum_{l=2}^{l_{max}} P_l^M \Delta g_l^M\right)\sum_{l=2}^{\infty} P_l^T S_l(\psi)d\sigma \qquad (2.8.1\text{-}18)$$

Il faut noter que les sommations commencent toutes maintenant à $l=2$. P_l^M et P_l^T ajustent les contributions des différentes composantes pour déterminer ζ^T. (2.8.1-18) est l'équation générale de notre problème dont les trois cas spéciaux sont les équations (2.8.1-17, 20 et 21). Il n'est pas difficile de comprendre que :

$$P_l^T = 1 \text{ pour } l > l_{max}$$

$$0 \le P_l^T < 1 \text{ pour } 2 \le l \le l_{max}$$

$$0 \le P_l^M \le 1 \text{ pour } 2 \le l \le l_{max}$$

En substituant aux valeurs Δg_l^M et Δg^T les "vraies" valeurs Δg_l et Δg, on a alors la "vraie" valeur de ζ^T:

$$\zeta^T = \frac{r}{\gamma}\sum_{l=2}^{l_{max}}\frac{\Delta g_l}{l-1} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\left(\Delta g - \sum_{l=2}^{l_{max}}\Delta g_l\right)\sum_{l=l_{max}+1}^{\infty} S_l(\psi)d\sigma \qquad (2.8.1\text{-}19)$$

Notons que (2.8.1-19) est tronquée à $l = l_{max}$. De l'équation (18), on considère deux cas spéciaux: a) pas d'erreurs sur les données terrestres et b) pas d'erreurs sur le modèle:

$$\text{a) } \zeta_M^T = \zeta^T\Big|_{\substack{P_l^T=1\,(l>l_{max})\\ P_l^T=0\,(l\le l_{max})}} = \frac{r}{\gamma}\sum_{l=2}^{l_{max}} P_l^M\frac{\Delta g_l^M}{l-1} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\left(\Delta g^T - \sum_{l=2}^{l_{max}} P_l^M\Delta g_l^M\right)S_0(\psi)d\sigma \qquad (2.8.1\text{-}20)$$

$$\text{b) } \zeta_T^T = \zeta^T\Big|_{P_l^M=1} = \frac{r}{\gamma}\sum_{l=2}^{l_{max}}\left(1-P_l^T\right)\frac{\Delta g_l^M}{l-1} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma_0}\left(\Delta g^T - \Delta g^M\right)\sum_{l=l_{max}+1}^{\infty} P_l^T S_l(\psi)d\sigma \qquad (2.8.1\text{-}21)$$

On a alors l'erreur totale due au modèle et à la troncature:

$$\varepsilon^M = \zeta^T - \zeta_M^T \qquad (2.8.1\text{-}22)$$

et l'erreur totale due aux données terrestres et à l'écart entre les données terrestres et le modèle:

$$\varepsilon^T = \zeta^T - \zeta_T^T \qquad (2.8.1\text{-}23)$$

L'erreur maximum est donc:

$$\varepsilon_{max}^2 = \left(\varepsilon^M\right)^2 + \left(\varepsilon^T\right)^2 \qquad (2.8.1\text{-}24)$$

La condition de minimisation des moindres carrés est alors:

$$\frac{\partial\left(\varepsilon^M\right)^2}{\partial P_l^M} + \frac{\partial\left(\varepsilon^T\right)^2}{\partial P_l^T} = 0 \qquad (2.8.1\text{-}25)$$

où

$$\frac{\partial\left(\varepsilon^M\right)^2}{\partial P_l^M} = 0 \qquad (2.8.1\text{-}26)$$

et

$$\frac{\partial(\varepsilon^T)^2}{\partial P_l^T} = 0 \qquad (2.8.1\text{-}27)$$

De la condition (2.8.1-26), on tire (Wang 1993):

$$P_l^M = \frac{d_l^M}{d_l^M + \sigma_l^M} \qquad (2.8.1\text{-}28)$$

où les d_l^M sont les variances par degré des coefficients du modèle et les σ_l^M sont les variances par degré des erreurs sur ces coefficients.

De la condition (2.8.1-27), on tire (Wenzel 1982 et Denker et al. 1996):

$$P_l^T = \begin{cases} 1 & , \; l > l_{max} \\ \dfrac{\sigma_l^M}{\sigma_l^M + \sigma_l^T} & , \; l \le l_{max} \end{cases} \qquad (2.8.1\text{-}29)$$

où σ_l^T est la variance de degré l des erreurs des données gravimétriques terrestres. Denker et al. (1996) a utilisé la fonction de covariance suivante pour l'erreur des données gravimétriques :

$$cov(\varepsilon_{\Delta g}, \varepsilon_{\Delta g}) = 16[mgal^2]e^{-4\psi[°]} \qquad (2.8.1\text{-}30)$$

En bref, l'équation (2.8.1-18) avec les poids (2.8.1-28 et 29) est la combinaison optimale générale, dont les deux cas spéciaux (2.8.1-20 et 21) représentent respectivement l'utilisation optimale du modèle uniquement et des données terrestres uniquement. Le cas le plus simple est la combinaison simple représentée par l'équation (2.8.1-15) ou (2.8.1-17). Les figures 2.8.1-1 et -2 illustrent les pondérations spectrales pour les équations (2.8.1-15 ou -17, combinaison simple) et l'équation 2.8.1-21, dont les poids spectraux sont P_l^T, P_l^M $\left(P_l^T + P_l^M = 1\right)$.

La combinaison optimale est faite au niveau des composantes spectrales. Par conséquent, la consommation de temps CPU est beaucoup plus importante que pour la combinaison simple et cela ne peut malheureusement pas en être autrement.

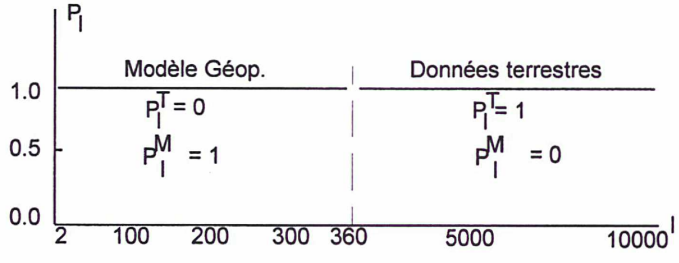


Fig. 2.8.1-1 Combinaison simple

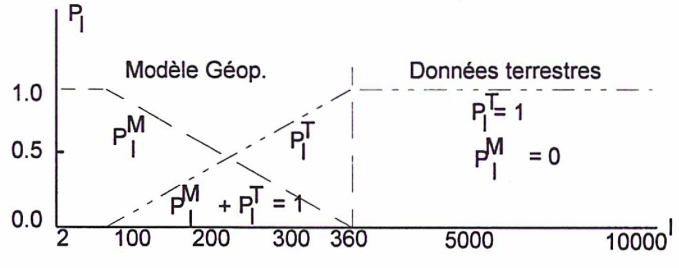


Fig. 2.8.1-2 Combinaison optimale (illustration linéaire)

2.8.1-3. Intégration rapide

Le premier terme de l'équation (2.8.1-18) est une sommation pondérée. Le deuxième est l'intégration de Stokes avec un noyau modifié. Celle-ci consomme beaucoup de temps de calcul si l'on utilise la méthode d'intégration

numérique classique. Pour accélérer cette intégration, on peut choisir différentes méthodes. Pour calculer un géoïde défini dans une très grande grille avec une résolution importante, la méthode la plus efficace est probablement la technique de FFT 1D (Haagmans et al. 1993, Denker et al. 1996). Dans les autres cas, surtout pour calculer la hauteur de géoïde sur des points discrets, la meilleure méthode est probablement l'intégration rapide (Jiang et Duquenne 1996b).

Pour conclure, les avantages de la méthode de *pré*-combinaison présentée ici sont que

1) en utilisant l'intégrale de Stokes, la méthode est rigoureuse et précise;
2) en pondérant les composantes spectrales en fonction des erreurs estimées, la combinaison est optimale et plus souple;
3) les observables autres que la gravimétrie, par ex. l'altimétrie, peuvent être utilisées de façon optimale (ce point n'est pas abordé ici);
4) en utilisant les techniques de FFT 1D ou l'intégration rapide, le calcul est rapide;
5) l'estimation de l'erreur du géoïde gravimétrique calculé est possible.

2.8.2 Ajustement combinant un géoïde gravimétrique et des points GPS nivelés

Jiang et Duquenne (1996a) et Jiang et al. (1996) (cf. annexes 5-3, 5-4) ont présenté une solution pour la ***post***-combinaison que nous discutons maintenant:

On définit d'abord les symboles suivants:

ζ^{GPS} = anomalie de hauteur correspondant au géoïde à partir des points GPS nivelés

ζ^{g} = anomalie de hauteur du géoïde gravimétrique

$\bar{\zeta}$ = anomalie de hauteur ajusté

$\Delta\zeta_{ij}^{g}$ = différence d'anomalies de hauteur entre deux points *i, j*

P_{ij} , P_{ij}^{g} = poids relatifs de l'équation d'observation relative pour $\Delta\zeta_{ij}^{g}$

P_k , P_k^{GPS} = poids absolus de l'équation d'observation relative pour un point GPS nivelé *k*

V_{ij} , V_k = résidus d'ajustement

$T(F)$, $\Delta T(F)$ = modèle de transformation globale avec *F* comme ensemble de paramètres

$t(f)$, $\Delta t(f)$ = modèle de déformation locale avec *f* comme ensemble de paramètres.

L'écart entre les références du géoïde gravimétrique et du géoïde obtenu par les points GPS nivelés, présente un caractère systématique qui peut être modélisé par une fonction globale *T* composée par exemple: d'une série périodique (modélisant l'écart dû aux erreurs sur les coefficients du modèle de géopotentiel), d'une similitude (rendant compte de la coexistence de deux systèmes de référence géodésiques) ou d'un polynôme (représentant les systématismes de la référence des altitudes). *T* dépend des coordonnées géographiques, latitude et longitude d'un point dans le géoïde gravimétrique:

$$T(F,\varphi,\lambda) = \delta\zeta^{per.} + \delta\zeta^{sim.} + \delta\zeta^{pol.} \qquad (2.8.2\text{-}1)$$

avec $\delta\zeta^{per.}$ série périodique, $\delta\zeta^{sim.}$ similitude et $\delta\zeta^{pol.}$ polynôme.

Une déformation locale *t*, dépendant aussi des coordonnées géographiques, représente la partie systématique de l'écart dû à des causes locales, telles que les erreurs systématiques locales de la gravimétrie. Le géoïde gravimétrique est divisé en morceaux homogènes du point de vue de la gravimétrie, de la topographie, etc. Pour chaque morceau, on peut introduire un ensemble de paramètres *f*. Pour un morceau de taille suffisamment petite, *t* peut être une simple fonction linéaire des coordonnées:

Les hauteurs du géoïde sont considérées comme des pseudo-observations : avec celles déduites du géoïde gravimétrique, on établit l'*équation d'observation relative* et avec celles déduites du GPS/nivellement, on établit l'*équation d'observation absolue* (*P* est un poids) :

$$P_{ij}^{g}:\ V_{ij} = \bar{\zeta}_j - \bar{\zeta}_i - \Delta\zeta_{ij}^{\ g} + \Delta T(F) + \Delta t(f) \qquad (2.8.2\text{-}2)$$

$$P_k^{GPS}:\ V_k = \zeta_k^{g} - \zeta_k^{\ GPS} + T(F) \qquad (2.8.2\text{-}3)$$

Cet ajustement peut être fait sur des surfaces différentes:

a) géoïde gravimétrique
b) géoïde lissé (après avoir enlevé les effets topographiques locaux du géoïde)

Les détails sont présentés dans (Jiang et Duquenne 1996a, Jiang et al. 1996, cf. annexes 5-3, 5-4).

2.8.3 Ajustement combinant plusieurs géoïdes gravimétriques et des points GPS nivelés - Ajustement du géoïde français avec ceux des pays frontaliers

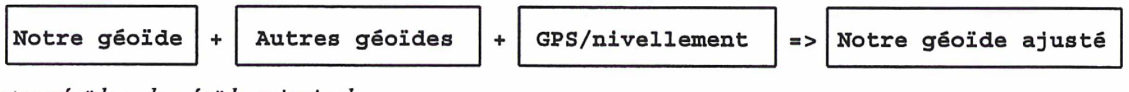
Il n'existe qu'un seul géoïde, mais il y a au moins autant de réalisations que de pays concernés et, ayant été déterminées indépendamment, ces réalisations présentent des différences entre elles. Trois méthodes sont proposées dans cette section pour uniformiser de façon optimale les différentes réalisations du géoïde au niveau d'un géoïde principal (appelé "notre géoïde"). L'avantage de cet ajustement combiné n'est pas seulement d'éliminer les écarts existant, la quantité de données requises autour du géoïde principal est également réduite grâce à l'utilisation des informations apportées par les géoïdes des pays frontaliers (cf. Jiang, Tscherning et Poitevin 1996).

Table 2.8.3-1 Les raisons des différences entre les réalisations du géoïde

raisons	ordre de grandeur des écarts
différentes références d'altitude	1 ~ 2 m
différents systèmes d'altitude : orthométrique/normal	0 ~ 1 m
calcul du géoïde basé sur des théories différentes: Molodensky/Stokes	0 ~ 1 m
calcul du géoïde en utilisant des méthodes différentes: intégrale de Stokes, FFT, collocation, etc.	1 dm
sources de données, précisions et résolutions différentes: gravité, MNT, altimétrie, GPS/nivellement	1 dm
logiciels différents et erreurs de calcul	1 ~ 5 cm

Les raisons pour lesquelles les réalisations du géoïde sont différentes sont repertoriées dans la table 2.8.3-1. Evidemment, ces écarts ne sont pas négligeables lorsqu'il s'agit de calculer un géoïde moderne. Il faut donc employer une méthode qui réduise ces écarts importants par une transformation simple, par exemple, un biais ou une pente, quand cela est nécessaire. La méthode proposée dans cette section consiste à exécuter un ajustement en prenant les différentes réalisations du géoïde. L'autre avantage de cet ajustement est que les données lointaines requises à l'extérieur du géoïde à calculer ne sont plus nécessaires, ou en tout cas il y en a besoin de moins, grâce aux informations apportées par les géoïdes des pays voisins. On ne discute pas ici des problèmes comme la transformation du système de référence. Les méthodes utilisées sont l'ajustement combiné et la collocation, voir (Jiang et Duquenne 1995, Tscherning 1994 ou Jiang et al. 1996) pour comprendre ceci en détail.

Le schéma de la figure 2.8.3-1 illustre la question posée :



notre géoïde = le géoïde principal
Autres géoïdes = ensemble des géoïdes des pays frontaliers, internationaux et des données d'altimétrie

Figure 2.8.3-1 Ajustement du géoïde en prenant différentes réalisations

Les types de données, "notre géoïde", les autres géoïdes et les points GPS nivelés sont considérés comme des observations indépendantes lors de l'ajustement. Il y a principalement trois méthodes (cf. table 2.8.3-2 et figure 2.8.3-2) selon la façon d'utiliser les différentes observations. Parmi celles-ci, les méthodes A et B peuvent être à nouveau divisées en deux selon que l'on utilise l'intégration de Stokes ou la collocation pour le calcul du géoïde gravimétrique résiduel. La table 2.8.3-2 rappelle ces méthodes. La figure 2.8.3-2 montre la configuration des différentes observations pour les calculs du géoïde ajusté .

Table 2.8.3-2 Méthodes différentes et caractéristiques de l'ajustement

méthode	observations indépendantes de l'ajustement	géoïde résiduel par	calcul
A) ajustement combiné	1) "notre géoïde", 2) autres géoïdes, 3) GPS/nivellement	Stokes	géoïde A1
		collocation	géoïde A2
B) ajustement combiné	1) "notre géoïde", 2) GPS/nivellement note: autres géoïdes transformés en données gravimétriques	Stokes	géoïde B1
		collocation	géoïde B2
C) collocation	1) altimétrie, 2) gravité, 3) autres géoïdes, 4) GPS/nivellement	collocation	géoïde C

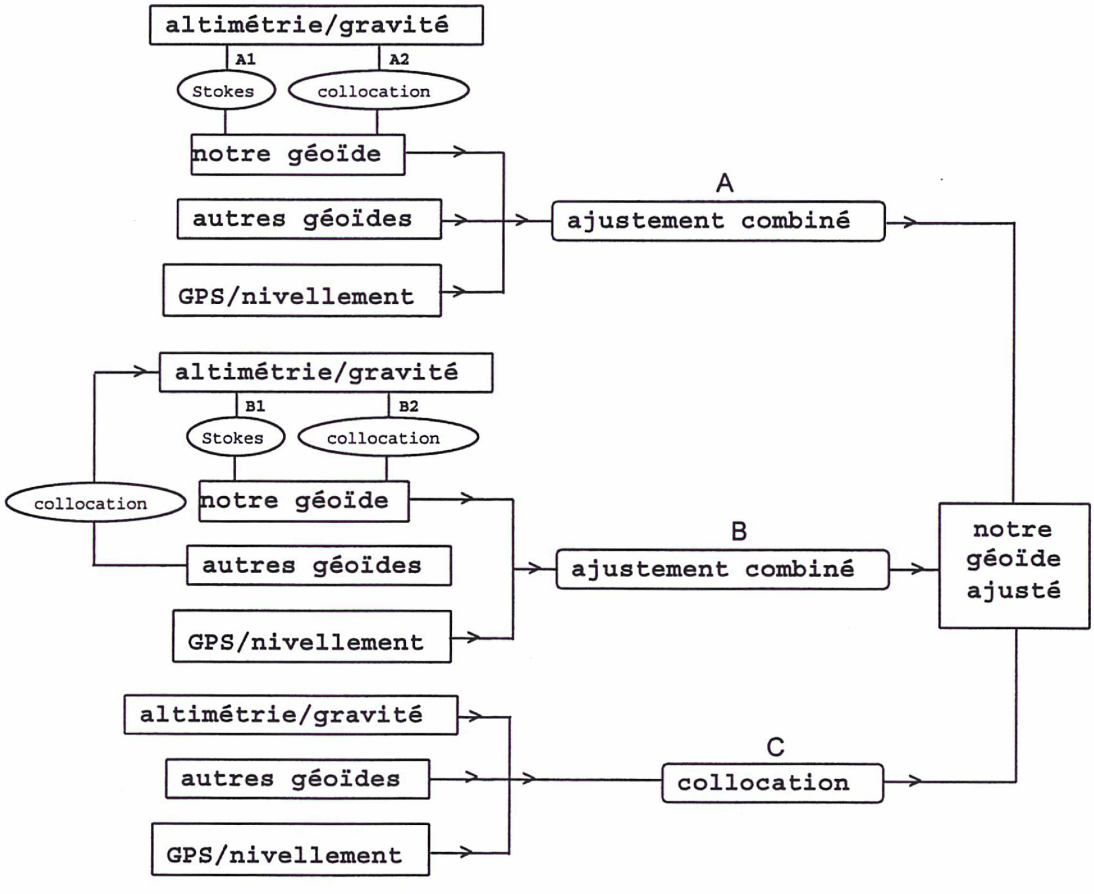


Figure 2.8.3-2 Configuration des observations et des méthodes d'ajustement

2-9 Logiciel PiLi (*)

2.9.1 Schéma général d'utilisation du logiciel PiLi

Le logiciel **PiLi** (**P**rogramme pour résoudre les **P**roblèmes d'**I**nterpolation et aux **L**imites, cf. Jiang 1995), écrit en langage Fortran, a pour but de résoudre les problèmes de géodésie physique en utilisant des données provenant de différentes sources comme, par exemple, des données gravimétriques, des MNT, etc. Ce logiciel sert notamment à la détermination du géoïde gravimétrique.

PiLi inclue les techniques issues des recherches effectuées dans le cadre de cette thèse; les trois plus importantes étant (cf. table 2.9-2 et figure 2.9-1,2):

a) la combinaison optimale des données gravimétriques terrestres, de GPS-nivellement et du modèle géopotentiel
b) l'ajustement combiné du géoïde gravimétrique et des points GPS nivelés
c) l'intégration rapide pour les problèmes aux limites de la géodésie physique

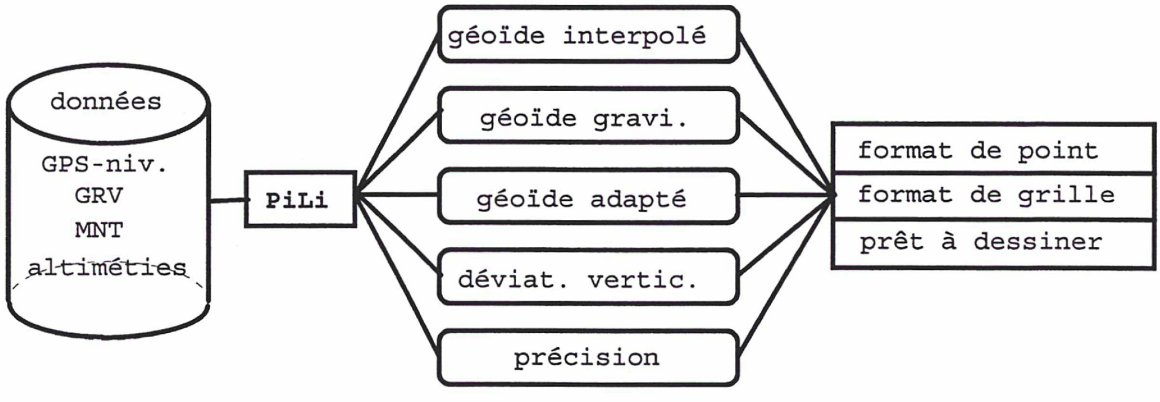


Figure 2.9-1 Schéma général d'utilisation du logiciel PiLi

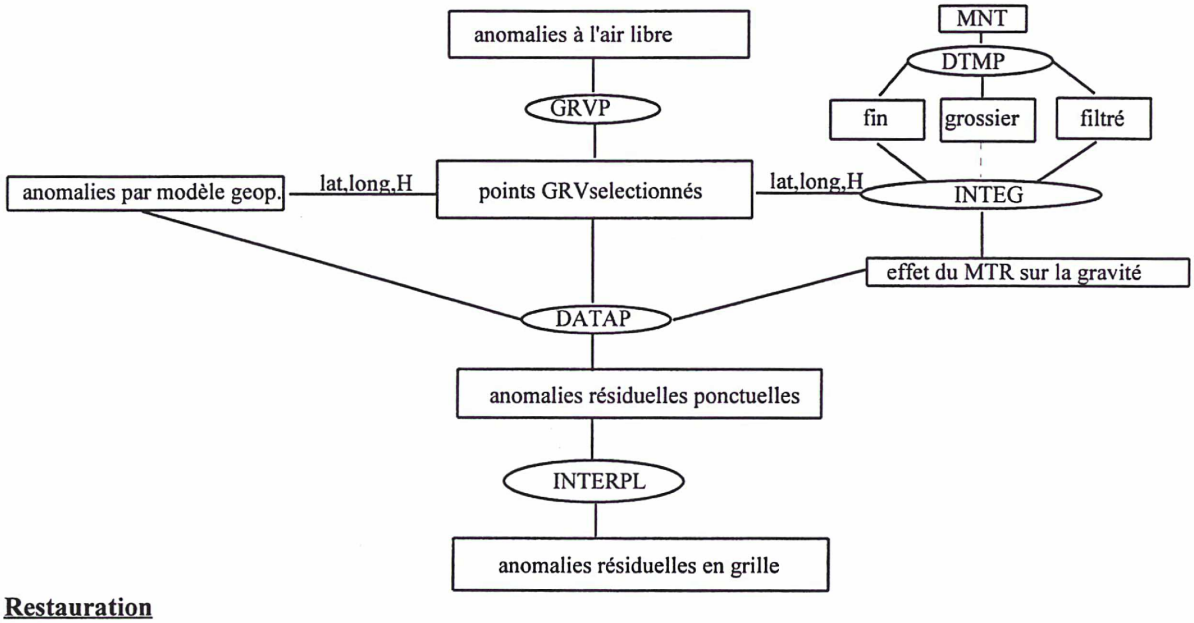
2.9.2 Sous-programmes principaux du logiciel PiLi

Table 2.9-2 Fonctions des sous-programmes de PiLi

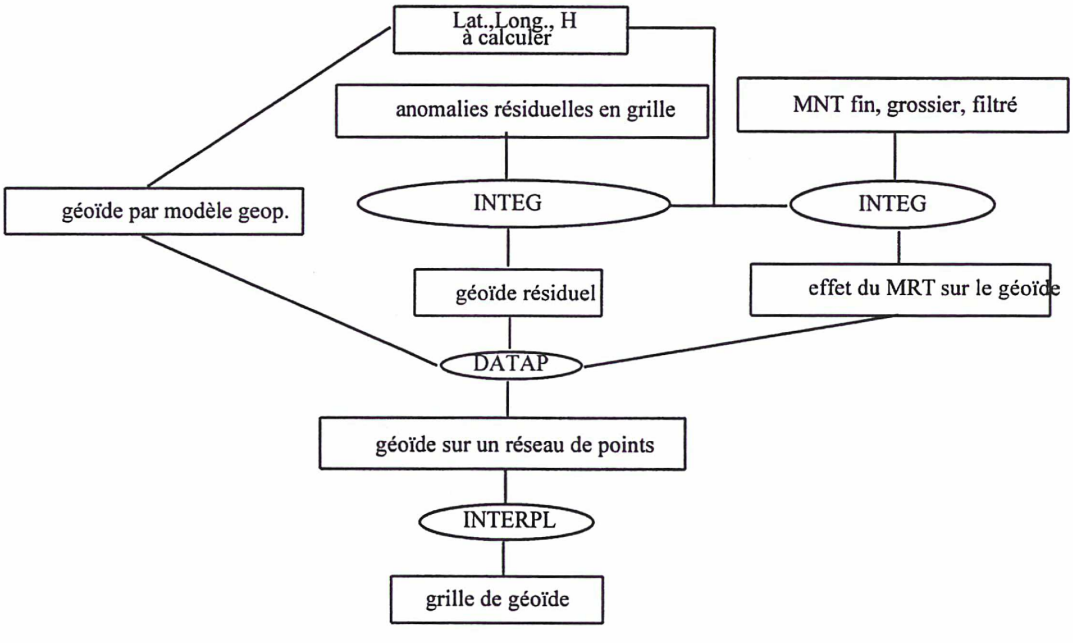
Sous programmes	Fonction
CHOICE	vérifier les altitudes et les anomalies, choisir des points gravimétriques
DTMP	vérifier la qualité et préparation du MNT
GEOM	modèle géopotentiel
INTERPL	Grille connue ⟹ Points discrets inconnus Points discrets connus ⟹ Grille inconnue Points discrets connus ⟹ Points discrets inconnus
INTEG	Intégration de Stokes Correction de terrain sur la gravité Effet indirect sur le géoïde
ADJ	Adapter globalement le géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés
DATAP, GRIDC, PiLi_JOB etc.	programmes utilitaires

La figure 2.9-2 montre un exemple d'utilisation des fonctions du logiciel **PiLi** pour le calcul d'un géoïde gravimétrique et de son adaptation aux points GPS nivelés.

Retrait



Restauration



Ajustement combinant le géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés

Figure 2.9-2 Détermination du géoïde en utilisant PiLi

Chapitre III. Calculs numériques

Ce chapitre présente les résultats des essais les plus importants effectués dans le cadre de cette thèse, principalement sur les nouvelles techniques proposées (les sections marqués par (*) dans le Chapitre II) :

a) Méthodologie

- L'*intégration rapide* (cf. section 2.6.2, Annexe 5-1)
- L'*ajustment combinant un géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés* (cf. Section 2.8.2 et Annexe 5-3 et 5-4)
- L'*ajustement combinant plusieurs réalisations de géoïde gravimétrique et des points GPS nivelés* (cf. Section 2.8.3)

b) Résultats numériques

- Calcul du géoïde gravimétrique belge **BG96** (cf. Annexe 5-5)
- Calcul du géoïde français **G96-01b** en utilisant le RBF et le MNT (cf. Section 2.7.3 et Annexe 5-2)
- Calcul du géoïde français gravimétrique **G96-02a** et **G96-03a** (cf. Annexe 5-6)

c) Logiciel **PiLi**

Les calculs ont été tous faits au moyen du logiciel **PiLi** (cf. Section 2-9), sauf ceux concernant la collocation pour lesquels le logiciel **GravSoft** a été utilisé (cf. Tscherning et al. 1992, sections 2.2.3 et 3-2, Annexe 5-5).

3-1 Comparaison numérique entre l'intégration rapide et la sommation directe

L'annexe 5-1 (article "*On fast integration for geoid determination*" accepté par le Journal of Geodesy) et la section 2.6.2 présentent le modèle mathématique en détail. Deux régions ont été choisies pour les essais et les comparaisons faites entre les résultats du géoïde gravimétrique, leur précision, le temps CPU utilisé et la quantité de mémoire requise pour les différents ordinateurs utilisés. Les essais ont été faits pour des régions de relief différent, plaines ou hautes montagnes, en utilisant des ordinateurs ou des systèmes différents : Vax et Unix au LAREG de l'Institut Géographique National de France et Unix à l'Observatoire Royal de Belgique. Les logiciel utilisées sont **INTEG** (sous-programme du logiciel **PiLi** pour l'intégration rapide) et **TC** (sous-programme du logiciel **GravSoft** pour la sommation directe).

3.1.1 Géoïde belge

Cette comparaison entre la sommation directe et l'intégration rapide a été réalisée lors du calcul du géoïde belge **BG96** (cf. Annexe 5-5).

- **Comparaison de l'intégration de Stokes**

Table 3.1.1-1 Comparaison de l'intégration de Stokes (m, sur 759 points)

intégration	min	max	moyenne	rms	écart-type
classique	-.305	.271	.021	.122	.120
rapide	-.293	.263	.020	.118	.116
différence	-.015	.010	.001	.005	**.005**

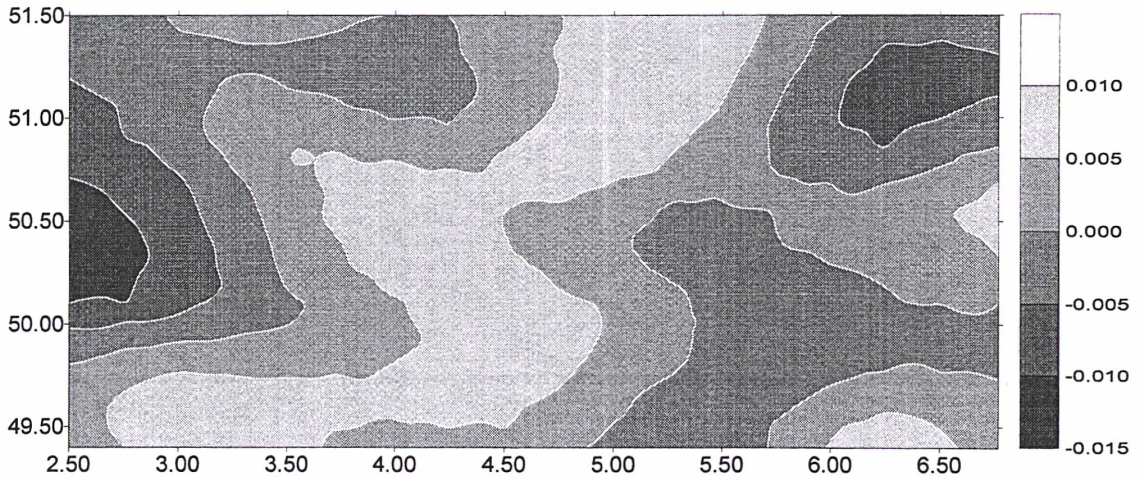


Fig. 3.1.1-1 Différence de l'intégration de Stokes calculée par la sommation directes et l'intégration rapide (m)

- **Comparaison du temps CPU pour l'évaluation des intégrations**

Table 3.1.1-2 Comparaison du temps CPU pour l'évaluation des intégrations

intégration	classique	rapide	pourcentage temps CPU (rapide/sommation directe)
Stokes	0h 03m 21s	0h 00m 26s	13.0 %
correction de terrain	0h 35m 25s	0h 00m 45s	2.1 %
l'effet de terrain sur géoïde	2h 56m 53s	0h 02m 35s	1.5 %
TOTAL	**3h 35m 38s**	**0h 03m 46s**	**1.7 %**

Table 3.1.1-3 Statistiques des écarts entre les résultats de la sommations directe et l'intégration rapide

intégration	écart-type des différences
correction de terrain	**.066 mGal**
effet de terrain sur géoïde	**.001 cm**
Stokes	**.005 cm**
Temps total	

Remarque: Les comparaisons numériques ci-dessus ont été faites en utilisant directement les résultats, c'est à dire qu'aucune correction (par ex. par une régression linéaire) n'a été faite avant d'effectuer les comparaisons.

Ces comparaisons nous conduisent à la conclusion suivante : comparée avec la sommation directe, l'intégration rapide par **PiLi** peut gagner 95 à 98 % de temps CPU sans perte de précision.

3.1.2 Essai dans la région Rhône-Alpes

C'est une région très montagneuse où les altitudes varient de 0 à 4100 mètres environ (Mont Blanc) et où 66 points RBF, des données gravimétriques et un MNT fin sont disponibles.

La table suivante montre les données statistiques de la différence entre les deux solutions sur les 1518 points calculés. Il y a deux comparaisons, la première est directe et la deuxième est faite après avoir effectué une régression à 3 dimensions (latitude, longitude et altitude). L'écart type est de 0.040 mètre.

Table 3.1.2-1 Différences des géoïdes gravimétriques par les intégrations classique/rapide sur 1518 points (m)

comparaison	max	min	moyenne	RMS	écart type
direct	0.267	-0.158	-0.041	0.063	0.048
après régression 3D	0.205	-0.243	-0.002	0.040	0.040

Considérant la précision du géoïde gravimétrique en utilisant la méthode de la sommation directe, qui est environ 0.11 mètre (cf. Duquenne et Jiang 1996), on peut conclure que, sur la région Rhône-Alpes, les deux méthodes donnent le même résultat pour le géoïde gravimétrique avec la même précision.

Discussion: D'habitude, pour diminuer les temps de calcul, on est obligé de sacrifier la précision, par exemple, par l'hypothèse planaire faite pour la méthode FFT classique. La philosophie générale pour l'accélération des calculs est de trouver un compromis entre le temps gagné et la précision perdue. Mais, dans la méthode d'intégration rapide utilisée par PiLi, aucune hypothèse d'approximation n'a été faite pour accélérer la vitesse au prix de la précison. En effet, dans les noyaux d'intégration modifiés, les calculs compliqués ont été évités. Par exemple, les traitements spéciaux pour le problème singulier autour du point calculé et les considérations sphériques, qui sont ennuyeuses pour presque tous les calculs de problèmes aux limites, ont disparu automatiquement dans les noyaux modifiés. Donc, du point de vue théorique, il n'existe pas de raison pour laquelle les résultats de la sommation directe et l'ntégration rapide doivent être très différents, ni de raison pour que la nouvelle méthode rapide doive perdre en précision pour gagner en temps de calcul. Les essais numériques effectués jusqu'à présent confirment ce point. Les différences sont faibles et raisonnables comparé à la précision qu'on peut obtenir.

Conclusion:

- **Les intégrations classique (sommation directe) et rapide donnent le même résultat pour le géoïde gravimétrique avec la même précision.** Prenons l'essai sur la région Rhône-Alpes: l'écart type des différences entre les deux solutions du géoïde gravimétrique est 0.040 mètre. Ces résultats ont été obtenus pour une région très montagneuse avec des altitudes variant de 0 à 4100 mètres. On peut donc penser que c'est un des cas les plus critiques qu'on puisse trouver en France et même en Europe.

- **Comparé à la sommation directe, l'intégration rapide ne consomme que 5% de temps CPU.**

Références de la section 3-1

Everaerts M. et al. (1996): Géoïde de Belgique BG96, Rapport géoïde n°26.

Jiang Z., H. Duquenne (1996): On fast intégration in geoid determinaton, présenté et accepté par Journal of Geodesy

Jiang Z. (1995): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA.

Tscherning C.C, Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the Geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic.

3-2 Géoïde de Belgique BG96

Dans cette section, on présente rapidement les résultats obtenus en Belgique, voir aussi l'annexe 5-5: *A new Belgian geoid determination : **BG96**.*

- Le but de ce travail est d'effectuer une nouvelle détermination du géoïde de la Belgique en utilisant les nouvelles données gravimétriques, les points GPS nivelés et le MNT (modèle numérique de terrain) disponibles depuis le dernier calcul effectué en novembre 1994 (Jiang et al. 1994, Poitevin et al. 1995). Deux méthodes sont utilisées pour le calcul du géoïde gravimétrique résiduel : la méthode de collocation et celle de Stokes, qui correspondent respectivement aux deux logiciels GravSoft et PiLi. Le résultat final est une grille de géoïde; baptisée BG96

- Les données suivantes sont disponibles en Belgique et dans les pays frontaliers:
  - 35 points BEREF en Belgique (GPS nivelés) d'une précision de 3 cm pour le GPS et de 1 cm pour le nivellement
  - 4567 points gravimétriques sélectionnés (issus de la banque de données gravimétriques qui compte environ 150,000 points gravimétriques) avec une distance moyenne entre points d'environ 4 à 5 km et une distribution peu homogène due au manque de données gravimétriques sur une partie des Pays-Bas, le Luxembourg et quelques endroits en Belgique
  - Un MNT de la Belgique au pas de 6" x 6" créé en utilisant le MNT belge original au pas de 3" x 6", un MNT français au pas de 18" x 30" et un MNT européen au pas de 4 km;

- Le nouveau géoïde BG96 est calculé sous la forme d'une grille de 49.40° ~ 51.50° en latitude et 2.5° ~ 6.5° en longitude avec une résolution respectivement de 0.03333° et 0.05°, soit 3 km environ (le géoïde de 1994

avait été calculé sur 1068 points gravimétriques). BG96 couvre donc toute la Belgique, le Luxembourg, une partie des Pays-Bas, une partie de l'Allemagne et une partie de la France. Puisque la couverture des données gravimétriques va en s'amenuisant sur les pourtours à l'est de la grille, la précision du géoïde se dégrade à ces endroits.

- La version actuelle de BG96 est disponible sur disquette et consiste en:

1. BG96.GD - grille de BG96 au format ASCII
2. BG96.for - programme Fortran pour interpoler (méthode bi-linéaire) la hauteur du géoïde pour un/des point(s), ou calculer une grille rectangulaire ou polygonale, définie par ses coordonnées (latitude, longitude). Il permet aussi de faire des calculs statistiques sur les résultats et de comparer les résultats obtenus avec les données connues (par exemple, les données GPS nivelées).
3. READ.ME de BG96 et du logiciel BG96.for
4. JBG96 - un fichier standard I/O (batch) pour lancer BG96.for

Remarque: Le géoïde gravimétrique ainsi calculé est en fait techniquement un quasi-géoïde. Une correction (Heiskanen et Moritz 1967) a été ajoutée pout obtenir le géoïde. BG96 représente donc bien la hauteur du géoïde, et correspond au système de hauteur orthométrique (défini par BEREF).

- Les solutions gravimétriques (collocation et Stokes) donnent approximativement la même précision. L'avantage principal de l'intégration rapide est la grande rapidité de calcul sans perte de précision. L'avantage de la collocation est de pouvoir compenser les erreurs du modèle géopotentiel.

- La compensation combinant le géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés est une des méthodes optimales pour ajuster les deux types de données. Celle-ci peut donner aussi une estimation de l'erreur, au sens des moindres carrés, du géoïde gravimétrique ajusté.

- Un résidu important, de l'ordre de 10 cm, a été trouvé pour le point "Arlon", pour une raison qui n'a pas pu être déterminée. Nous proposons donc de vérifier toutes les données concernant ce point : points GPS/nivellement belge et français, données gravimétriques de la Belgique et du Luxembourg, MNT du Luxembourg (en fait, c'est le MNT européen qui est douteux pour le Luxembourg).

- Les nouvelles solutions ont une précision absolue d'environ 3 ~ 4 centimètres et une précision relative d'environ 1 ~ 2 ppm pour les courtes distances de 25 à 50 km et 0.3 ~ 0.5 ppm pour les distances moyennes de 200 à 300 km. Finalement, la moyenne des deux solutions (celle de Stokes ajustée et celle de la collocation ajustée) est proposée comme résultat final de la nouvelle détermination du géoïde de la Belgique: BG96.

Référence de la section 3-2

Forsberg R. (1995): Geoid computation in the Noric and Baltic area, In: New geoids in the world, IAG, Bull. d'information No. 77, Iges Bull. No. 4

Jiang Z. C. Poitevin, M. Everaerts (1994): Premier essai du calcul du géoïde gravimétrique de la Belgique, Rapport du Géoïde N° 11

Jiang Z., H. Duquenne (1995a): On fast intégration in geoid determinaton, accépté par Journal of Geodesy

Jiang Z., H. Duquenne (1996b): On combined adjustement of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, Journal of Geodesy70:505-514

Jiang Z. C.C. Tscherning, C. Poitevin (1996): Ajustement combiné du géoïde en prenant différentes réalisations par les pays voisins, Rapport géoïde n° 23, présenté aux Journées de Recherche de l'IGN de France, le 19 - 20 Mars, 1996.

Poitevin C., Z. Jiang, M. Everaerts (1995): Le géoïde gravimétrique en Belgique, Photogrammétrie - Télédétection et Cartographie, n° 197-198, Belgique.

Tscherning C.C. (1985): Local approximation of the gravity potential by least squares collocation. In: K.P. Schwarz (Ed.): Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China. Aug. 21 - Sept. 4, 1984. Pub. 60003, Univ. of Calgary, Calgary, Canada, pp. 277-362, 1985.

Tscherning C.C, Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic.

Tscherning C.C.(1994):Geoid determination by least square collocation using GRAVSOFT, Lecture Notes of International School for the Determination and Use of the Geoid, October 10 -15, 1994, Milan, Italy.

3-3 Géoïde Français G96-01b

3.3.1 G96-01b

Dans cette section, nous présentons l'essentiel des résultats sur le Géoïde Français **G96-01b**; voir aussi les sections 2.4, 2.7.2 et l'annexe 5-2: *Geoid determination using GPS levelling points and digital terrain model.*

- L'objet général de l'étude est de convertir, en tout point du territoire national, les altitudes ellipsoïdales (GRS80) en système ETRS89 (réalisation GPS appuyé sur RGF93) en altitudes IGN69. Techniquement, il s'agit encore de la détermination du quasi-géoïde (mais on l'appelle géoïde, pour raison de simplicité) en utilisant les points RBF et toutes les informations disponibles: données gravimétriques, MNT, altimétrie et modèles de géopotentiel etc. *Ce travail peut être réalisé en trois étapes*:

  ❶ calcul d'un géoïde géométrique en utilisant seulement les points RBF: précision pessimiste obtenue σ = ***12.8*** cm (cf. Table 3.3.1-1)
  ❷ calcul d'un géoïde 'MNT' (G96-01a,b,c) en utilisant les points RBF et le MNT: précision pessimiste obtenue σ = ***6.4*** cm (cf. Table 3.3.1-1)
  ❸ calcul d'un géoïde gravimétrique et adaptation aux points RBF en utilisant toutes les informations disponibles: précision pessimiste espérée: ***3 ~ 5*** cm (G96-03a,b,c ...).

- **G96-01x** est une série de l'étape ❷, c'est à dire, un géoïde utilisant les points RBF et le MNT. Après G96-01a (Jiang 1996), **G96-01b** est la deuxième détermination de la série, chaque version (sur disquettes) consistant en:

  ❶ Un rapport technique: 'Géoïde français G96-01*x*', numéroté selon "Rapport Géoïde n° .."
  ❷ Une grille du géoïde (fichier de grille de format standard)
  ❸ Un logiciel pour interpoler le géoïde à partir des coordonnées des points à déterminer

- La série G96-01*x* a le même système de référence que le RBF

- Spécifications techniques de G96-01b:

  ❶ Total des points RBF utilisés: 1081, version de mars 1996 fournie par le SGN de l'IGN
  ❷ MNT utilisés : les MNTs français, espagnol, suisse, italien, allemand au pas de 500 m. Ils sont tous fournis par le SDT de l'IGN dans le système WGS84
  ❸ Total des points calculés: 76 467 pour tout le territoire français, sauf en Corse, avec une résolution de 2,5 km et une variation en latitude de 42° à 51° et en longitude de -5.0° à 8.2667°. Les points de cette grille en dehors du territoire français sont remplis par les valeurs d'OSU91A adaptées aux points RBF. Il y a au total 143 678 points dans cette grille.
  ❹ Précision : en plaine 2 à 3 cm; relief collinaire 3 à 4 cm, relief montagneux 5 à 6 cm, avec en moyenne une précision de 4 ~ 5 cm. Cette précision a été estimée uniquement pour les points du territoire français.

- Toutes les déterminations de cette série ont été et seront effectuées en utilisant la méthode présentée dans l'article de l'annexe 5-2. Cette méthode se caractérise par l'introduction d'un modèle de géopotentiel (OSU91A) et d'un RTM (modèle de terrain résiduel). Ceci nous permet de travailler uniquement avec des quantités faibles et certaines hypothèses compliquées ne sont donc plus nécessaires. Le logiciel utilisé est **PiLi**. Grâce à l'intégration rapide (Section 2.6.2), le calcul de G96-01b n'a pris que 30 minutes, c'est à dire qu'il est 20 fois plus rapide que la méthode de sommation directe, sans perte de précision.

- G96-01b a une précision faible dans les Pyrénées à la frontière franco-espagnole. La raison en est probablement la qualité du MNT espagnol. Il existe peut-être aussi un écart systématique entre le MNT français et le MNT espagnol.

- ***Cohérence entre RBF et G96-01b***: Comme cela est mentionné ci-dessus, l'interpolation par moindres carrés pondérés peut lisser certains bruits (et probablement une partie des structures accidentelles du géoïde). Les écarts entre les valeurs des 1081 points RBF et celles d'une interpolation bilinéaire à partir de la grille de G96-01b sont: min = -6.1, max = 5.2, moyenne = -0.1 et écart-type = 1.0 cm.

- *De l'importance d'introduire à la fois le modèle géopotentiel et le MNT dans le processus de retrait-restauration*: la table 3.3.1-1 montre qu'on obtient le meilleur résultat en utilisant le modèle géopotentiel et le MNT; Doerflinger et al. (1996) ont prononcé la même conclusion lors de l'étude du géoïde sur les Pyrénées Orientales.

Table 3.3.1-1 Erreurs pessimistes (test à l'aveugle) des différentes méthodes (cm) sur 1081 points RBF

méthode de retrait-restauration	min	max	moyenne	σ
géoïde géométrique sans OSU ni MNT	-71.7	78.8	-0.2	**12.8**
seulement OSU	-66.0	67.2	0.2	**12.1**
seulement MNT	-52.6	57.2	-0.3	**8.1**
OSU et MNT	-37.2	32.9	0.0	**6.4**

- **Précision**

Table 3.3.1-2 Précisions précédente, actuelle et perspective (écart-type, cm)

relief	**interpolation géométrique du RBF**	**G96-01a**[(a)] version précédente	**G96-01b**[(b)] version actuelle	**G96-01c**[(c)] version améliorée	perspective[(*)]
plaine	3 ~ 5	2 ~ 3	**2 ~ 3**	2 ~ 3	1 ~ 2
colline	4 ~ 7	3 ~ 5	**3 ~ 4**	3 ~ 4	2 ~ 3
montagne	6 ~ 15	5 ~ 7	**5 ~ 6**	4 ~ 6	3 ~ 5
moyenne	10 ~ 11	5	**4 ~ 5**	4 ~ 5	3 ~ 4

(a) RBF version mars 96, MNT français au pas de 500m, MNT européen au pas de 4km pour les pays frontaliers
(b) Idem G96-01a en ajoutant les MNT espagnol, italien, suisse et allemand au pas d'environ 500 m
(c) Idem G96-01b mais en utilisant le résultat du RBF, version finale, et le MNT au pas de 140m en espérant améliorer la précision en montagne, surtout dans les Pyrénées
(*) Géoïde gravimétrique en utilisant les MNT français et étrangers à pas fin et les données gravimétriques

3.3.2 Calcul du géoïde en utilisant G96-01b

Cet exemple illustre ce qui peut être fait pour tout type de produit géoïde fourni en format grille. G9601b représente la surface zéro du nivellement. On peut donc convertir facilement une altitude ellipsoïdale (h - GRS80) en altitude du nivellement (H - IGN69) en utilisant la relation simple suivante: $H = h - \zeta$ avec ζ la hauteur du quasi-géoïde au dessus de l'ellipsoïde (anomalie de hauteur).

Les outils principaux pour ce calcul sont **G96-01b.GD** (fichier de grille de format standard de PiLi) et le logiciel **G9601b** (sous-programme du logiciel **PiLi**). G9601b est un programme Fortran d'interpolation bilinéaire. En donnant les latitudes et longitudes des points à calculer, on peut évaluer les hauteurs du géoïde (anomalie de hauteur) et obtenir également les statistiques numériques du résultat. Il existe plusieurs MODEs d'entrée/sortie et des options pour, par exemple, calculer point par point ou sur une grille entière, comparer le résultat obtenu avec un résultat connu (un géoïde connu ou des valeurs GPS nivelées connues) et faire des statistiques sur les écarts. Les points ou la grille à calculer peuvent être limités à une forme géométrique quelconque (polygone).

Référence de la section 3-3

Boucher C. (1996a) : Pré étude du produit géoïde, LAREG à SGN, LAREG96-167, le 9 avril 1996

Boucher C. (1996b) : Pré étude géoïde SGN, Note aux destinaires, LAREG96-291, le 5 juillet 1996

Forsberg R.(1984): A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, OSU, report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Heiskanen W., H. Moritz (1967): Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, GRAZ, AUSTRIA

Jiang Z. (1995a): PiLi - A New Software for the Geoid Determination, presented to the XXII IUGG General Assembly, June 1995, Boulder, USA

Jiang Z. (1995b): Prédiction du Géoïde en Utilisant les Points RBF et le MNT - Méthode, Précision et Premier essai sur la région Rhône-Alpes, Rap. Géoïde n° 20, nov. 1995

Jiang Z. (1996a): Remarques sur le géoïde et le quasi-géoïde, Rap. Géoïde n° 24, mars 1996

Jiang Z. (1996b): Géoïde français G96-01a, Rap. Géoïde n° 25, avril 1996

Jiang Z. (1996c): Géoïde français G96-01b, Rap. Géoïde n° 30, juillet 1996

Jiang Z. (1996d): Guide d'utilisation du géoïde français G96-01b, Rap. Géoïde n° 31, juillet 1996

Jiang Z. (1996e): Geoid prediction using GPS levelling points and digital terrain model - a new French geoid determination G96-01, Proceedings of the XXI Congress of the European Geophysical Society 1996 (EGS96), Session G7, 6 - 10 May 1996, The Hague, Netherlands

Jiang Z. (1996f): Méthode de calcul du géoïde français G96-01b et de l'estimation de précision, Rap. Géoïde n° 34, septembre 1996

Jiang Z., H. Duquenne (1996a): On fast integration in geoid determination, accepted by Journal of Geodesy, under pressing

Rapp R. H. (1994): The use of potential coefficient models in computing geoid undulations, In: Lecture Notes of International School for the Determination and Use of the Geoid, October 10 -15, 1994, Milan, Italy

Rapp R.H. (1996): Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference, submitted to the Journal of Geodesy.

Willis P. (1996): Compte rendu de réunion du 6/9/96, Objet: Pré-étude géoïde, LAREG/96.372

3-4 Géoïde gravimétrique français G96-02a et G96-03a

Dans cette section, nous présentons les résultats de calcul de géoïde gravimétrique français en utilisant les méthodes exposées dans le chapitre 2.

3.4.1 Introduction

3.4.1.1 Objet général de l'étude

- L'objet général de cette étude est le même que celui de G96-01b (cf. section 3.3.1). Nous avons proposé de le réaliser par étapes, la troisième étant ce dont nous allons discuter dans cette section: calcul d'*un géoïde gravimétrique et adaptation au RBF* en utilisant toutes les informations disponibles. La précision pessimiste *espérée est* : $\sigma = 3 \sim 5$ ***cm***.

Remarques:

1. G96-02x est une série de calculs du géoïde gravimétrique français. **G96-02a** est le premier calcul de la série dont le système de référence est GRS80/OSU91A
2. G96-03x est une série d'adaptations de G96-02x au RBF. **G96-03a** est le premier calcul de la série dont le système de référence est le même que celui du RBF
3. Chaque version des G96-02x et G96-03x est un produit (sur disquettes) composé :
   ❶ d'un rapport technique: 'Quasi-Géoïde Gravimétrique français G96-02x et G96-03x', numéroté selon "Rapport Géoïde n° .."
   ❷ de deux grilles du géoïde: G96-02x et G96-03x (fichier de grille de format standard de PiLi)
   ❸ d'un logiciel pour interpoler la valeur du géoïde à partir des coordonnées des points à déterminer
4. G96-02a et G96-03a sont seulement les résultats des essais préliminaires.

- Spécifications de calcul de G96-02a et G96-03a:
  ❶ Nombre total de ***points gravimétriques*** utilisés: 87 485 séparés en moyenne de 4 km sur terre et 4 à 10 km sur mer, sélectionnés à partir de deux sources:
  a). 528 465 points (457 752 points terrestres et 70 713 points maritimes) sur une étendue de 40° ~ 53° en latitude et -6° ~ 10° en longitude, soit 1.5° maximum autour du territoire français, version de juillet 1996 fournie par le BGI (cf. Fig. 3.4-2)
  b). Sur mer et dans une bande de 1° de large en dehors des données du BGI, les données manquantes sont remplacées par les valeurs d'anomalie à l'air libre évaluées au moyen du nouveau modèle géopotentiel EGM-X02 du GSFC/DMA (Boucher et al. 1996) de degré 360 (tous les 10 km), sachant que les données les plus nouvelles de la gravimétrie, de l'altimétrie, etc, jusqu'en 1995 (Rapp 1994) ont été utilisées pour déterminer le nouveau modèle EGM-X02 qui est considéré comme le meilleur modèle disponible pour le moment
  ❷ Nombre total de ***points RBF*** utilisés: 1081 (Fig. 3.4-7), version de mars 1996 fournie par le SGN de l'IGN, dont la précision moyenne est estimée à environ 3 cm sans compter l'erreur systématique du nivellement de précision (IGN69).
  ❸ ***MNT*** utilisé: les MNTs français, espagnol, suisse, italien, allemand au pas de 500 m (Ils sont tous fournis par le SDT de l'IGN dans le système WGS84) et un MNT européen au pas de 4 km
  ❹ Nombre total des ***points calculés***: 4962 pour tout le territoire français, à l'exclusion de la Corse, avec une résolution de 10 km et une variation en latitude de 42° à 51° et en longitude de -5.0° à 8.25° (cf. Fig.3.4-6)

3.4.1.2 Objet particulier du calcul de G96-02a et G96-03a

L'objet du calcul de G96-02a et G96-03a n'a pas été d'obtenir tout de suite un géoïde de grande précision, mais de faire un essai en vue plus tard d'obtenir le géoïde précis qui permettra de convertir les altitudes ellipsoïdales en altitudes IGN69. Nous résumons ce qui concerne la méthodologie du calcul, le logiciel utilisé et les données. Nous examinerons donc les points suivants:

- ***Les nouvelles techniques*** pour le calcul de géoïde gravimétrique:

1. Combinaison optimale des données gravimétriques terrestres et des modèles géopotentiels (section 2.8.1);

2. Intégration rapide (section 2.6.2 et annexe 5-1);
3. Adaptation du géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés (section 2.8.2, annexes 5-3, 5-4)

- ***Le logiciel*** utilisé est **PiLi** (cf. section 2.9) dans lequel les nouvelles techniques ci-dessus ont été implantées (il reste cependant à achever l'implantation de la combinaison optimale). La Fig. 3.4-1 montre le schéma du calcul de G96-02a et G96-03a, qui est un exemple de l'utilisation de ce logiciel.

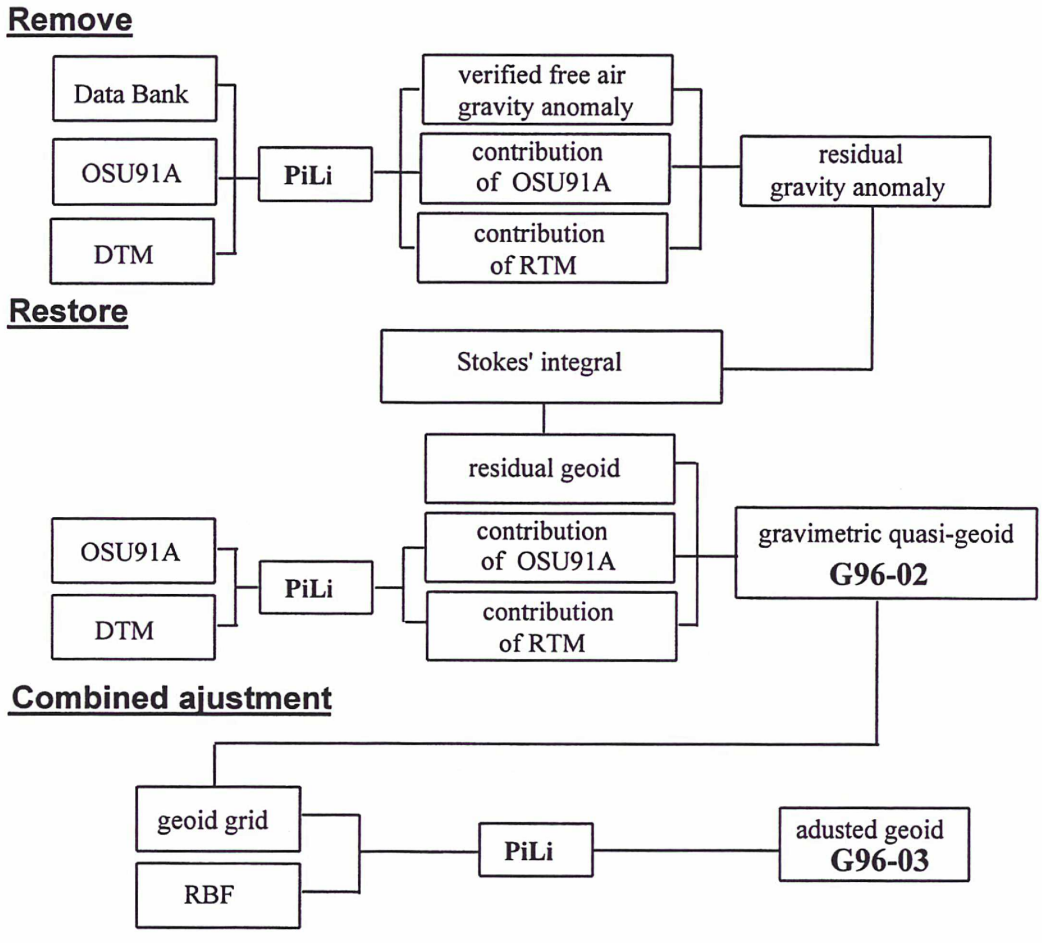


Fig. 3.4-1 : Schéma du calcul des géoïdes G96-02a et G96-03a au moyen de PiLi

- ***Données gravimétriques:*** il y a deux grands problèmes posés par les données gravimétriques: 1) la distribution des données (cf. fig. 3.4-2) n'est pas bonne dans les pays frontaliers et surtout en mer; 2) on ne connait pas très bien l'homogénéité des données.

- Le ***MNT*** français au pas de 140m est disponible à l'IGN. Mais pour l'essai préliminaire de G96-02a, seuls les MNTs français et des pays voisins au pas de 500m ont été utilisés. L'homogénéité des systèmes et les qualités des différents MNTs sont des aspects encore assez flous du problème (surtout pour le MNT espagnol).

- ***Les données du RBF*** disponibles au LAREG en ce moment sont celles de la version de mars 1996. L'estimation d'erreur n'est pas disponible pour tous les points.

- ***Les modèles géopotentiels*** disponibles au LAREG sont OSU91A et cinq nouveaux modèles d'essai du GSFC/DMA (Jiang et al. 1996). Le champ de pesanteur normale est calculé en utilisant le GRS80 (Geodesic Reference System 1980, Moritz 1992).

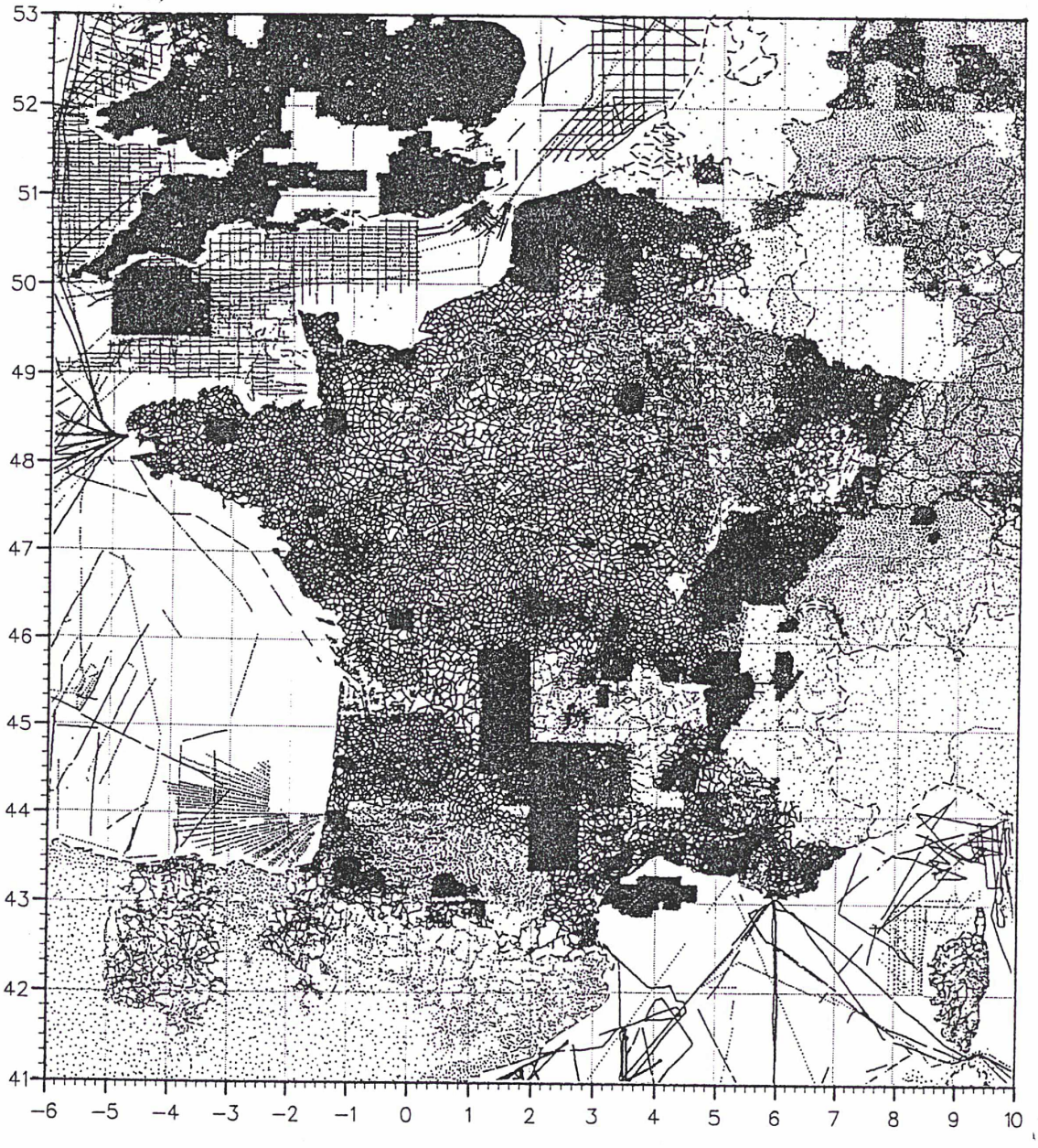


Fig. 3.4-2 : Données gravimétriques
(457 752 points terrestres et 70 713 points maritimes)

3.4.1.3 Principe du calcul de G96-02a et G96-03a

Le processus de calcul peut être séparé en deux parties (cf. section 2.8):

a) Une ***pré-combinaison*** : entre les données terrestres gravimétriques et le modèle géopotentiel pour *calculer le géoïde gravimétrique*;
b) Une ***post-combinaison*** : entre le géoïde gravimétrique calculé et les données GPS nivelées pour *éliminer les erreurs de grande longueur d'onde du modèle et les déformations locales*

Par conséquent, il y a deux étapes indépendantes:

a) Calcul du *géoïde gravimétrique* : **G96-02a** (quasi-géoïde)
b) *Adaptation* de G96-02a au RBF : **G96-03a** (surface zéro)

Remarque sur l'évaluation du modèle géopotentiel et sur le calcul de l'effet de terrain:

1. Correction d'anomalie de Bouguer : le géoïde (N, geoid undulation) est différent du quasi-géoïde (ζ, height anomaly). La différence (premier terme) est (cf. section 2.3.1):

$$N-\zeta=\frac{\bar{g}-\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}H\approx\frac{\Delta g_B}{\gamma}H$$

où $\bar{g}$ et $\bar{\gamma}$ sont la gravité actuelle moyenne et la gravité normale moyenne. Δg_B est l'anomalie de Bouguer. H est l'altitude. Cette différence est de 1,4 mètre sous le Mont Blanc (Heiskanen et Moritz 1967, section 8-13) et n'est pas linéaire.

2. Le système d'altitude IGN69, correspondant au quasi-géoïde dont la réalisation est la surface zéro dans la figure 3.4-3, est techniquement et officiellement la hauteur normale. On utilise donc l'anomalie de hauteur au lieu de l'ondulation du géoïde dans l'équation: $H=h-\zeta$. Par conséquent, tous les calculs concernant l'évaluation du modèle géopotentiel et l'effet de terrain etc., doivent être évalués *au niveau du terrain (ou plus précisément du telluroïde) et non au niveau du géoïde*. C'est un point théorique, mais il est pratiquement très important parce que *30 ~ 100 cm* d'erreur ou plus pourrait se produire en montagne si on l'ignorait. Le principe est donc le suivant : on calcule toujours le quasi-géoïde et dans le cas où c'est le géoïde dont on a besoin (l'ondulation du géoïde), on peut transformer le quasi-géoïde en géoïde par la simple correction d'anomalie de Bouguer. Ce processus est théoriquement plus rigoureux. Pour connaître plus de détails sur ce point, voir (Heiskanen and. Moritz 1967, Rapp 1994 et 1996, Jiang 1996).

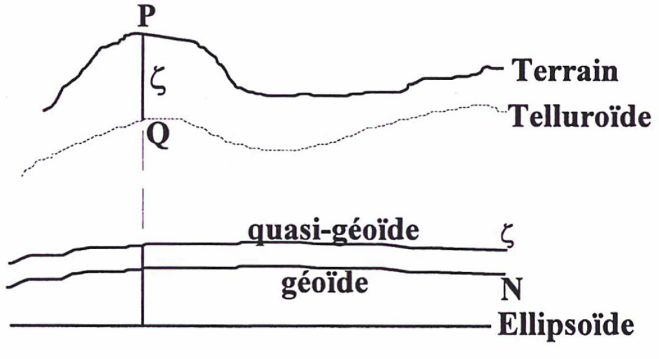


Figure 3.4-3 Géoïde, quasi-géoïde, terrain et telluroïde

3.4.2 Géoïde gravimétrique G96-02a

Le sous-programme de PiLi pour la combinaison optimale n'étant pas complètement achevé, seuls les cas simples de combinaison des données terrestres et du modèle ont été réalisés. Plusieurs combinaisons ont été calculées en utilisant des modèles différents et en les évaluant jusqu'à des degrés différents: 50, 70, 72, 180 et 360 etc. G96-02a correspond à OUS91A tronqué au degré 360. On présente ici seulement les résultats concernant les modèles OSU91A tronqués au degré 72 et 360, ainsi que le modèle EGM-X02 complet (degré 360). Dans notre calcul, EGM-X02 a été également utilisé pour remplir les zones où il n'y a pas eu de mesures gravimétriques, ce qui est le cas surtout en mer (cf. Fig. 3.4-2).

Le problème principal jouant sur la précision in fine est peut-être l'homogénéité des données gravimétriques et du MNT surtout en montagne ou entre des pays différents (cf. Fig. 3.4-2 et Fig. A1a en annexe du chapitre 3).

Les tables 3.4-2 (a, b), et 3 (a, b) ainsi que les figures en annexe du chapitre 3 montrent les statistiques et les distributions des grandeurs des différentes quantités du processus de retrait et restauration de G96-02a. Si on compare les tables 3.4-3a et 2a (cf. figures A1b, c, d et e), on voit bien que les anomalies résiduelles sont encore assez importantes car OSU91A a été tronqué au degré 72. Par conséquent, le géoïde résiduel calculé par l'intégrale de Stokes a des valeurs supérieures à 4 mètres (maximum). Voir aussi la table 3.4-3b et la comparer à la table 2b. Le fait qu'il reste encore des anomalies résiduelles importantes (par ex. max = 281.619 mGal dans la table 3.4-2a) signifie très probablement que des problèmes subsistent dans les données gravimétriques ou les MNTs.

Table 3.4-2a Statistique des grandeurs du retrait (m, mGal, OSU91A au deg. 360)

grandeur	symbole	min.	max	moyenne	σ	cf.
altitude	H	-38	3178	299.062	324.427	Fig.A1a
anomalie à l'air libre	Δg	-161.419	253.236	6.312	27.981	Fig.A1b
anomalie à l'air libre d'OSU91A (deg. 360)	Δg_{OSU}	-114.699	134.644	11.560	21.997	Fig.A1c
correction de terrain résiduel	Δg_{RTM}	-205.976	107.647	-3.603	15.713	Fig.A1d
anomalie résiduelle	Δg_{Res}	-196.085	281.619	-1.645	13.866	Fig.A1e

Table 3.4-2b Statistique des grandeurs du retrait (mGal, OSU91A au deg. 72)

grandeur	symbole	min	max	moyenne	σ
anomalie à l'air libre d'OSU91A(deg. 72)	Δg_{OSU}	-27.731	37.764	14.014	14.382
anomalie résiduelle	Δg_{Res}	-163.328	322.346	-4.099	23.248

Table 3.4-3a Statistique des grandeurs de la restauration (m, OSU91A deg. 360)

grandeur	symbole	min	max	moyenne	σ	cf.
anomalie de hauteur d'OSU91A	ζ_{OSU}	43.956	54.403	48.098	2.208	Fig.A1f
effet de terrain résiduel	ζ_{RTM}	-0.873	3.023	0.046	0.306	Fig.A1g
anomalie de hauteur résiduelle (Stokes)	ζ_{Res}	-2.106	1.171	0.020	0.343	Fig.A1h
anomalie de hauteur	ζ: G96-02a	43.738	54.110	48.164	2.218	Fig. 6

Table 3.4-3b Statistique des grandeurs de la restauration (m, OSU91A deg. 72)

grandeur	symbole	min	max	moyenne	σ
anomalie de hauteur d'OSU91A(deg. 72)	ζ_{OSU}	44.074	52.440	48.009	1.955
effet de terrain résiduel	ζ_{RTM}	-0.873	3.023	0.046	0.306
anomalie de hauteur résiduelle (Stokes)	ζ_{Res}	-4.319	3.304	0.237	0.932
anomalie de hauteur	ζ	43.204	54.488	48.292	2.187

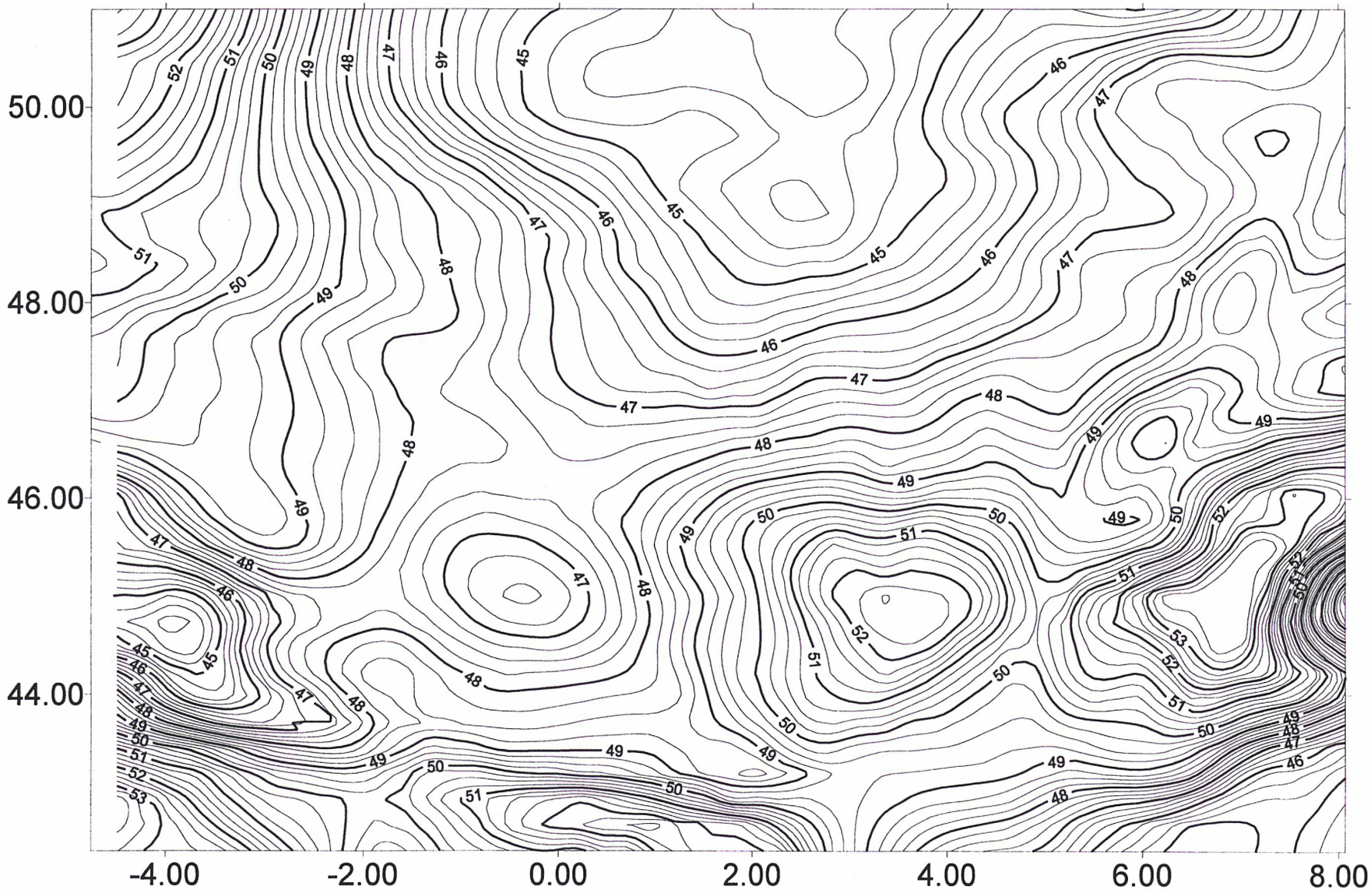


Fig. 3.4-6 : Quasi-géoïde gravimétrique français: G96-02a

Fig. 3.4-7 : Résidus globaux entre G96-02a et RBF

(après une régression 3D et OSU91A au deg. 360 : 1081 points, min =-116.0, max = 51.3, moyene = 4.9, σ=22.1, cm)

Sur la Figure 3.4-7, on voit clairement que les résidus entre G96-02a et RBF sont regroupés selon leur signe: négatif ou positif. La figure 3.4-8 suivante montre encore plus clairement cette tendance:

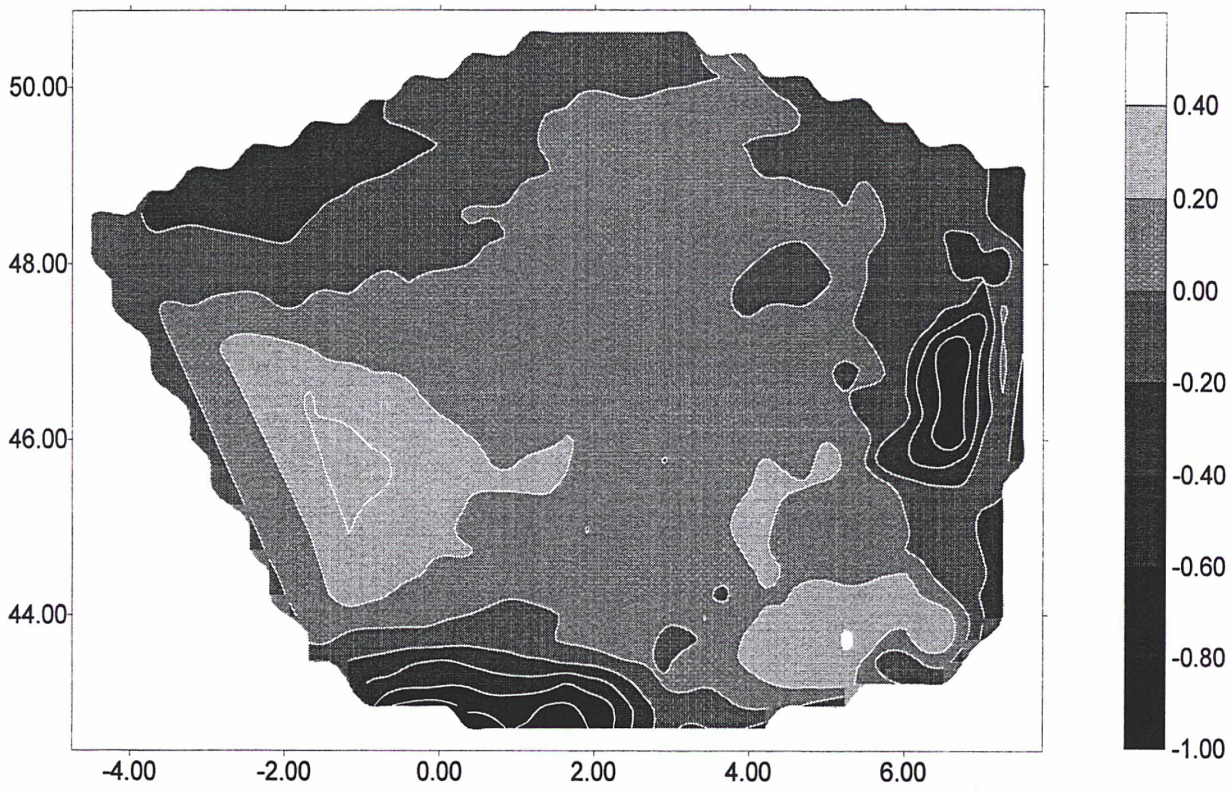


Fig. 3.4-8 : Tendance sur les résidus globaux entre G96-02a et RBF

<u>Discussion au sujet de la tendance sur les écarts entre G96-02a et RBF:</u>

1. Généralement, on considère que l'écart entre un géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés est dû aux erreurs de grande longueur d'onde du modèle de géopotentiel. Pour savoir de quelles longueurs d'onde provient cette tendance, on a calculé un géoïde gravimétrique en utilisant le modèle d'OSU91A tronqué au degré 72 correspondant à une résolution de 2.5°, soit 200 ~ 300 km (ou une période de 5°, soit 500 km environ). La figure 3.4-9 montre les résidus entre ce géoïde gravimétrique (avec OSU91A tronqué au degré 72) et le RBF. Si l'on compare la figure 3.4-9 avec les figures 3.4-7 et 8 (G96-02a, OSU91A tronqué au degré 360), on retrouve presque la même tendance sur les écarts. Noter également les statistiques des écarts: min = -101.9 contre -116.0, max = 68.8 contre 51.3, moyenne = 6.8 contre 4.9 et σ = 26.0 contre 22.1 (cm). Cette comparaison nous permet de conclure que l'écart entre G96-02a et RBF est dû principalement aux grandes longueurs onde égales ou inférieures au degré 72, et que *la combinaison optimale (cf. section 2-8) est absolument nécessaire pour un calcul du géoïde gravimétrique précis.*

```
-17-15-10 -7
-18-18-11-10 -6 -4
-24-20-17-10 -6 -4 -2 -9
-17-11-10 -9 -4 -3 0 -17
-13 -18 -20-15-16 -9 -7 -2 0 -7
-11-11-14 -11-12-12 -8 -2 -1 -3 -1
-35-34 -8 -8 -9 -5 -6 -3 -3 -6 0 -1 -1 4 -2
-31-30 -26 -8 0 1 -2 0 -6 -2 -2 -1 -1 -4 -3 -7 -8 -3 4 10 4 -12-15
-20 -8 -7 -1 4 2 0 0 2 1 -1 -4 -4 -8-10 0 5 8 2 -2 -3-14
-11 -3 3 7 13 15 9 14 10 4 1 2 0 -1 -2 -3 -7 -1 0 4 10 9 -1 -1 -2 -16-29
-48 -13 -5 7 5 16 20 23 23 18 22 18 16 12 7 4 1 0 4 1 -3 5 9 8 4 0 -1 -5 -21-23
-42 -41-47-52-50-50 -42-33-25 -14 3 0 12 16 15 20 22 23 17 12 5 0 4 5 4 -6 -1 4 5 4 4 4 5 -22-20-33
-40-38 -41-43 -41-35 -19 -5 0 12 20 22 22 23 23 19 18 17 18 11 5 3 4 3 -2 -5 0 5 5 6 2 8 1-28 -44
-25-34-30 -40-33-24 -16 2 7 17 20 24 25 19 16 19 21 18 10 7 4 4 0 0 -2 -4 -5 3 6 13 -1 2 -3 -43
-18 -15-30-26-21 -11 -3 15 16 22 21 21 20 29 31 17 11 7 6 1 -2 -2 -1 8 12 13 8 2 -22-37 -43
-3 -13 -15 -4 0 4 8 9 18 14 23 23 24 30 31 25 23 10 9 9 8 6 1 -1 -3 4 6 13 18 7 -1 -7-28 -29
7 17 -7 3 0 0 6 8 9 19 24 26 25 21 18 11 13 8 4 -2 -1 9 9 14 7 -6 -15 -5-12
38 19 11 11 7 15 17 16 19 26 27 23 19 16 13 8 6 2 -1 -3 -3 8 9 3 -3 -12 -9 -4 0 -30
27 20 13 13 17 18 20 22 23 23 22 18 14 13 9 10 3 0 7 2 -1-13-12-22-11 -1 -2
47 35 21 19 20 20 17 18 26 22 17 17 17 10 2 -1 -1-25-11 -35 -3
41 20 14 13 13 22 26 22 20 20 22 18 4 -16 -47-41 -39-28
66 43 24 13 11 10 13 13 22 23 23 23 29 27 29 26 17 -9-26-41 -54-47-39-38-26
36 19 11 6 8 8 11 24 25 28 29 33 41 33 25 11 -2 -45-47-54 -42-25 -36
51 27 14 8 6 6 7 5 19 22 29 29 34 39 16 5-22-41 -39-40-41-40 -22
63 39 22 8 2 0 5 15 19 37 40 43 44 37 20 4 -6-36 -34 -39-42 -17-37 -67-80
35 17 6 2 2 10 21 34 38 54 43 41 7 0-16 -32-27-36 -26-30-64 -65
58 36 20 10 4 0 2 10 16 27 37 52 47 42 39 9-10 -3-27-25 -28-35-26-25-47-62 -75
54 13 5 -2 -7 6 12 31 47 65 56 47 28 1 -2-11 -31 -33-38-59-57-67 -69
41 16 1 -6 -9 -4 27 44 68 65 59 45 18 10 -6-25-27 -30-27-51 -58
21 4 -17-15-15 4 11 49 53 59 51 39 18 5-19-29 -33-23 -35 -21
21 5 -13-23-25-20-16-11 12 25 41 34 28 19 14-15 -9-20-10-22 1 -48-33-37
10 -8 -18-32-35-28 2-10 16 33 34 34 28 23 14 7 2 -4 -4 -12-14
0 -4 -9-16 -30-34-30-23 -3 12 17 19 24 9 14 25 20 23 8 -1 1
-4 -5 -5 -5 -8-22-31 -32-24-13 -1 8 9 10 7 21 9 17 14 32 51 35 39 33 13 4 6 -4 -37
-8 -5 -6 -5 -22-26-22-12 -3 4 18 15 11 17 14 22 22 40 51 54 36 32 29 16 12 -13-13
-18 -9-10 -7-16-14-24 -18-15 -7 2 7 19 26 21 14 14 13 18 25 33 41 47 44 48 49 39 25 2
-28 -27-28-41-43 -30-22 -11 7 17 25 20 12 12 19 24 30 36 38 35 41 36 55 61 42
-18 -38-42-48 -59-57 -53-42-34-22-14 -4 10 25 30 24 22 21 32 31 34 31 27 45 60 41
-46-62 -62 -60-68-58 -50-40 -29 -5 10 19 27 23 21 37 41
-50 -86-77-75-74-67-56-52 -43-19 -9 1 6 19
-78-95 -84-64 -70-70 -19-13 -2 10
-32-18 -13 0 -6
-7-16 -18 -26
```

Fig. 3.4-9 : Résidus globaux entre le géoïde gravimétrique (OSU degré 72) et RBF

(après une régression 3D et OSU91A tronqué au degré 72 : 1081 points, min=-101.9, max=68.8, moyene=6.8, σ=26.0, cm)

2. Cependant, il n'est pas possible de prouver tout de suite que les écarts sont tous dus aux erreurs du modèle OSU91A. En effet, si l'on regarde la figure 3.4-12a,b,c à la section suivante, présentant les écarts entre un géoïde gravimétrique utilisant le nouveau modèle EGM-X02, on remarque une tendance qui ressemble à celle de G96-02a dans les figures 3.4-7 et 8. C'est à dire qu'il est possible que le RBF référencé au système d'altitude français (IGN69) soit distordu pour certaines raisons (qui restent à discuter). Considérant que le but général de cette étude est de convertir les altitudes ellipsoïdales (GRS80) en altitudes IGN69 (cf. section 3.4.1.1), une adaptation de G96-02a au RBF, c'est à dire, *un ajustement combinant le géoïde gravimétrique et les points RBF est nécessaire* (cf. section 2.8.2 et 3.4.3).

3. Après les écarts *absolus* entre G96-02a et RBF, on regarde maintenant les écarts *relatifs* de G96-02a et de RBF. Pour deux points ***i*** et ***j***, on définit :

Un écart relatif:

$$\delta(\Delta\zeta_{i,j}) = \left(\zeta_i^{RBF} - \zeta_j^{RBF}\right) - \left(\zeta_i^{G96-02a} - \zeta_j^{G96-02a}\right) \tag{3.4-1}$$

Moyenne des écarts relatifs:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n}\sum_{i,j}\delta(\Delta\zeta_{i,j}) \tag{3.4-2}$$

Ecart-type des écarts relatifs:

$$\sigma_\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i,j}\left[\delta(\Delta\zeta_{i,j})\right]^2} \tag{3.4-3}$$

La table 3.4-4 et la figure 3.4-10 (a,b,c) montrent, en fonction de la distance, l'écart relatif des deux points ***i*** et ***j*** sur le géoïde (où ppm = σ_δ/distance avec comme unité 1 cm/10 km).

Table 3.4-4 Statistique des écarts relatifs entre G96-02a et le RBF (m, ppm = cm/10 km)

km	$\bar{\delta}$	σ_δ	ppm	km	$\bar{\delta}$	σ_δ	ppm	km	$\bar{\delta}$	σ_δ	ppm
20	-0.006	0.085	4.23	263	-0.016	0.288	1.10	512	-0.017	0.337	0.66
39	-0.010	0.121	3.08	287	-0.017	0.297	1.03	537	-0.021	0.343	0.64
64	-0.013	0.159	2.49	313	-0.015	0.301	0.96	562	-0.024	0.348	0.62
88	-0.018	0.188	2.12	338	-0.016	0.307	0.91	587	-0.022	0.352	0.60
113	-0.020	0.210	1.85	362	-0.017	0.313	0.86	612	-0.013	0.353	0.58
138	-0.023	0.228	1.65	387	-0.016	0.315	0.81	637	-0.003	0.358	0.56
163	-0.022	0.242	1.49	412	-0.014	0.318	0.77	662	0.017	0.367	0.55
188	-0.020	0.254	1.35	437	-0.013	0.321	0.73	687	0.048	0.374	0.54
213	-0.018	0.267	1.25	463	-0.012	0.321	0.69	712	0.071	0.376	0.53
238	-0.017	0.277	1.17	487	-0.012	0.328	0.67	737	0.109	0.384	0.52

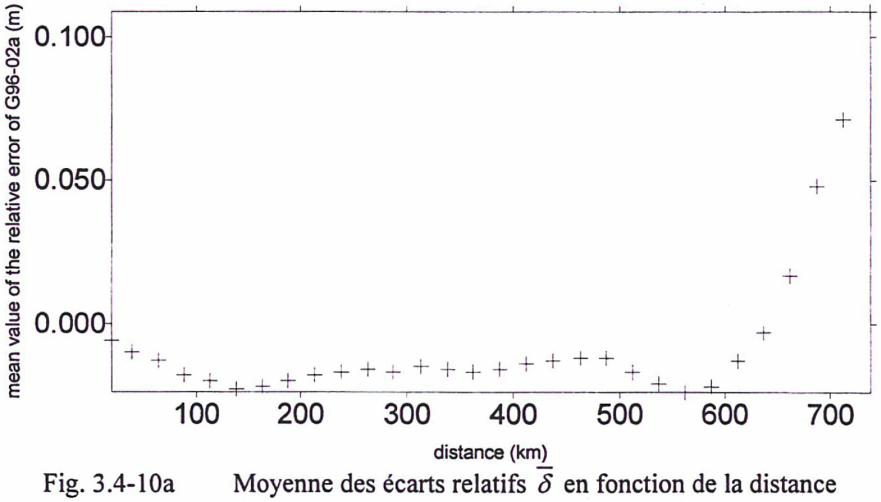


Fig. 3.4-10a Moyenne des écarts relatifs $\bar{\delta}$ en fonction de la distance

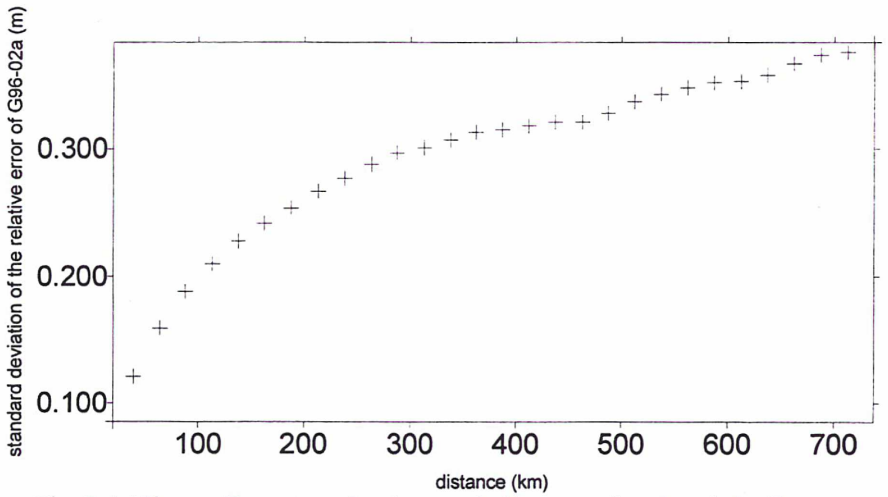


Fig. 3.4-10b Ecart-type des écarts relatifs σ_δ en fonction de la distance

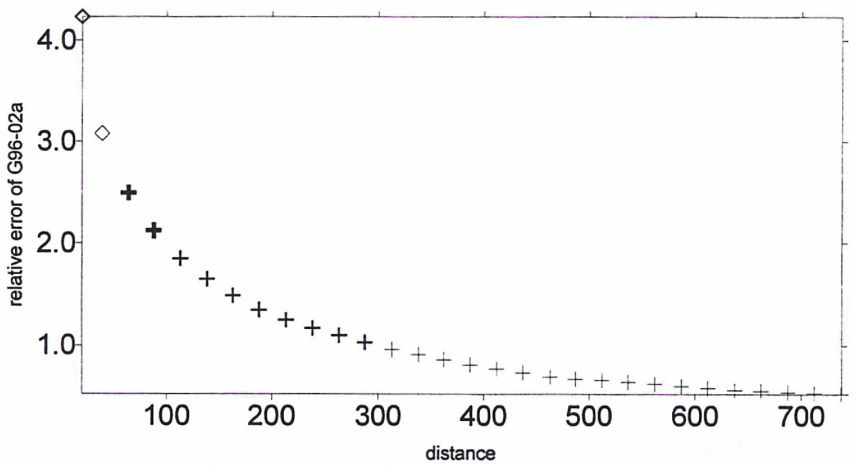


Fig. 3.4-10c σ_δ en fonction de la distance (ppm, km)

Fig. 3.4-10 : Ecarts relatifs en fonction de la distance

A l'examen de la table 3.4-4 et de la figure 3.4-10 (a,b,c), on comprend que

- l'écart-type des écarts relatifs σ_δ augmente simplement avec la distance, illustrant l'existence d'écart de grande longueur d'onde
- la moyenne des écarts relatifs $\overline{\delta}$ augmente et diminue régulièrement avec la distance, illustrant l'existence d'un écart périodique

4. On a prouvé qu'il existe des écarts globaux entre un géoïde gravimétrique dont la référence est un modèle géopotentiel et le RBF. Il faut donc enlever la tendance sur les écarts pour pouvoir faire une comparaison directe entre G96-02a et le RBF. Dans ce but, au lieu de faire une seule comparaison globale, on peut faire des comparaisons locales en divisant le territoire français en 21 sous-régions de 2° x 2° (3°) de côté, soit 200 ~ 300 km correspondant aux périodes analysées ci-dessus (voir la table 3.4-5 et la figure 3.4-11 suivants).

Table 3.4-5 Ecarts-types locaux entre G96-02a et le RBF dans les 21 sous-régions après une régression 3D (cm)

sous-région	point RBF	max	min	moyenne	σ
1	61	7.0	-7.4	.1	2.9
2	29	19.8	-15.5	.6	7.7
3	39	5.8	-6.1	.1	2.9
4	57	10.7	-9.1	.1	3.3
5	47	5.1	-6.6	.1	2.8
6	44	18.6	-18.1	.5	7.2
7	61	8.2	-10.9	.1	3.8
8	62	5.1	-6.6	.1	2.5
9	65	4.7	-9.1	.1	2.7
10	47	16.4	-14.0	.4	6.0
11	63	11.4	-12.2	.2	4.5
12	65	5.8	-5.9	.1	2.5
13	91	4.5	-5.6	.0	1.9
14	25	6.3	-6.9	.1	2.8
15	60	27.1	-23.1	.7	8.6
16	72	11.6	-7.6	.2	3.9
17	74	4.2	-6.1	.1	2.3
18	14	9.8	-10.0	.3	6.1
19	32	33.1	-20.1	1.4	11.8
20	29	12.5	-17.6	.7	8.2
21	44	8.9	-9.0	.2	4.3
total	1081	33.1	-23.1	.3	**4.2**

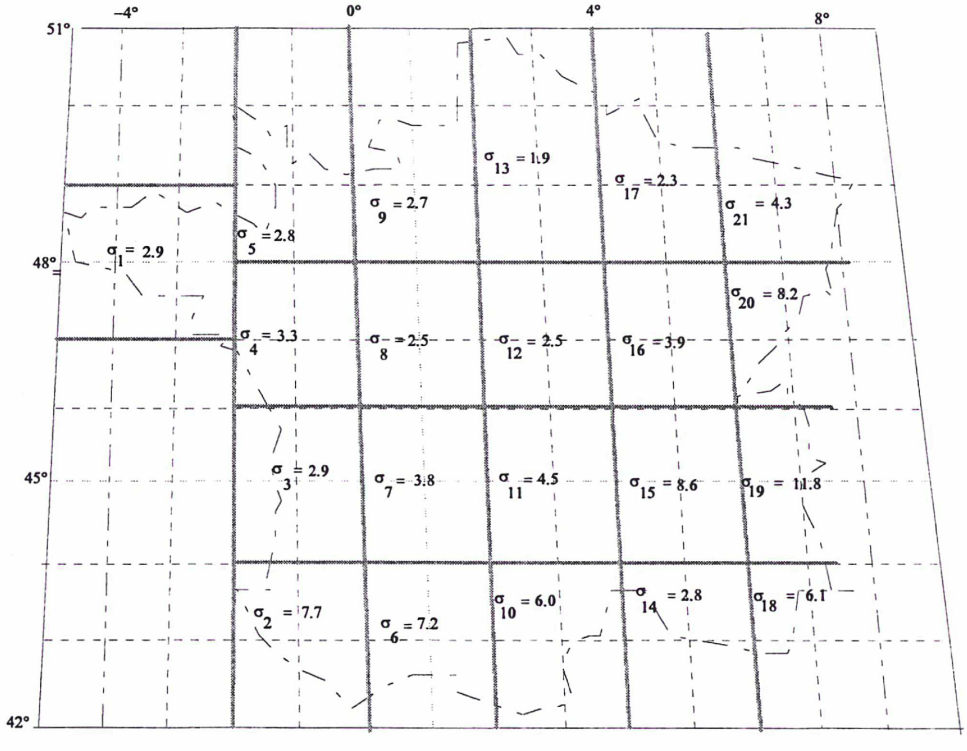


Fig. 3.4-11 : Ecarts-types des résidus entre G96-02a et le RBF dans les 21 sous-régions
(après une régression 3D: 1081 points, min = 1.9, max = 11.8, moyenne = 4.2, cm)

A partir du table 3.4-5 et de la figure 3.4-11, on peut déduire que

- La moyenne des écarts-types n'est que de 4.2 cm (moyenne pondérée par le nombre de points RBF). Si l'on compare la figure 11 aux figures 7 et 8, où l'écart-type global est 22.1 cm, on voit que la tendance globale des écarts n'existe plus. 4.2 cm peut être considérée comme la précision interne (un peu optimiste) de G96-02a avec une précision absolue relativement mauvaise

- Les écarts-types dans le nord de la France sont assez faibles: 2 ~ 3 cm, ce qui est presque, en fait, la précision du RBF. Cependant, en montagne, c'est-à-dire plus précisément dans les Pyrénées et dans les Alpes, les écarts-types sont assez importants. Les raisons en sont peut être que : (on rappelle que G96-02a n'est qu'un calcul préliminaire utilisant des données qui n'ont pas encore été toutes vérifiées):

1. les données gravimétriques sont séparées de 4 km, autrement dit 10% seulement des données disponibles ont été utilisées
2. il n'y a pas assez de données gravimétriques marines ni d'altimétrie sur l'Atlantique et la Méditerranée (elles n'ont été disponibles qu'en septembre 1996).
3. les données gravimétriques ne sont peut-être pas homogènes, surtout entre les données terrestres et les données marines
4. le MNT au pas de 500 m n'est pas suffisant en montagne. La qualité des MNTs étrangers, surtout espagnol, n'est probablement pas très bonne, ou alors ils ne sont pas homogènes du point de vue du système de référence
5. la combinaison simple des données terrestres et du modèle de géopotentiel est une source importante d'erreur de longueur d'onde moyenne 200 ~ 300 km.

- **Remarque sur la précision du futur calcul :**

En utilisant

- des données gravimétriques plus denses et des données d'altimétrie
- des MNTs fins au pas de 140 m
- le nouveau modèle de géopotentiel EGM96
- la technique de la combinaison optimale entre les données terrestres et le modèle

la précision du futur calcul devrait être améliorée.

- Etant donné que les écarts entre G96-02a et le RBF sont globalement important et localement faible, l'ajustement combinant G96-02a et les points RBF est non seulement possible mais nécessaire, voir les sections 2.8.2 et 3.4.3.

Discussion: Géoïde gravimétrique déterminé en utilisant le nouveau modèle EGM-X02

Pour savoir dans quelle mesure le nouveau modèle peut améliorer la précision du géoïde gravimétrique, on a également calculé un géoïde en utilisant le modèle EGM-X02.

Les tables 3.4-6 et 7 montrent les statistiques des grandeurs de retrait et restauration en utilisant un des nouveaux modèles du GSFC/DMA. Il y a au total cinq modèles et Boucher et al. (1996) ont montré, dans le cadre de l'évaluation du géoïde mondial, que la précision des nouveaux modèles a été améliorée. Si l'on compare la table 3.4-6 avec la table 3.4-2a, on voit bien que la variance d'anomalie résiduelle a diminuée. La figure 3.4-12a (cf. la table 3.4-7b) est l'histogramme des écarts entre le modèle EGM-X02 et le RBF. Voir aussi les figures 3.4-12b et 12c qui montrent les résidus et les écarts-types du géoïde gravimétrique déterminé en utilisant EGM-X02 tronqué au degré 360, comparés avec le RBF, globalement et localement dans les 21 sous-régions (l'écart-type des écarts-locaux est 4.4 cm). On voit que dans les Alpes, les écarts ont diminué.

```
 dm     Numb.
-18 !      0 !
-17 !      0 !
-16 !      0 !
-15 !      0 !
-14 !      0 !
-13 !      0 !
-12 !      0 !
-11 !      0 !
-10 !      0 !
 -9 !      1 ! #
 -8 !      6 ! ##
 -7 !     25 ! #####
 -6 !     48 ! ##########
 -5 !     94 ! ####################
 -4 !    164 ! ##################################
 -3 !    129 ! ###########################
 -2 !    101 ! #####################
 -1 !     94 ! ####################
  0 +     73 + ###############
  1 !     70 ! ##############
  2 !     53 ! ###########
  3 !     44 ! #########
  4 !     27 ! ######
  5 !     19 ! ####
  6 !     18 ! ####
  7 !     15 ! ###
  8 !     13 ! ###
  9 !     10 ! ##
 10 !      8 ! ##
 11 !      7 ! ##
 12 !      6 ! ##
 13 !      5 ! #
 14 !      3 ! #
 15 !      3 ! #
 16 !      3 ! #
 17 !      0 !
 18 !      4 ! #
```

Fig. 3.4-12a : Ecarts des hauteurs géoïdales entre EGM-X02 et le RBF

Table 3.4-6 Statistique des grandeurs du retrait (m, mGal, EGM-X02 deg. 360)

grandeur	symbole	min	max	moyenne	σ
altitude	H	-38	3178	299.062	324.427
anomalie à l'air libre mesurée	Δg	-161.419	253.236	6.312	27.981
anomalie à l'air libre par EGM-X02	Δg_{X02}	-128.421	134.668	11.489	23.591
correction de terrain résiduel	Δg_{RTM}	-205.976	107.647	-3.603	15.713
anomalie résiduelle	Δg_{Res}	-174.078	259.432	-1.574	12.389

Table 3.4-7a Statistique des grandeurs de la restauration (m, EGM-X02 deg. 360)

grandeur	symbole	min	max	moyenne	σ
anomalie de hauteur par EGM-X02	ζ_{X02}	43.499	54.343	48.053	2.160
effet de terrain résiduel	ζ_{RTM}	-0.873	3.023	0.046	0.306
anomalie de hauteur résiduelle (Stokes)	ζ_{Res}	-1.987	1.407	0.052	0.303
anomalie de hauteur	ζ	43.363	54.146	48.151	2.184

Table 3.4-7b Statistique des écarts entre EGM-X02 et le RBF (m, EGM-X02 deg. 360)

	min	max	moyenne	σ
EGM-X02	44.060	53.457	48.120	2.096
RBF	43.576	54.631	47.946	2.344
Ecart	-0.803	1.349	-0.174	0.374

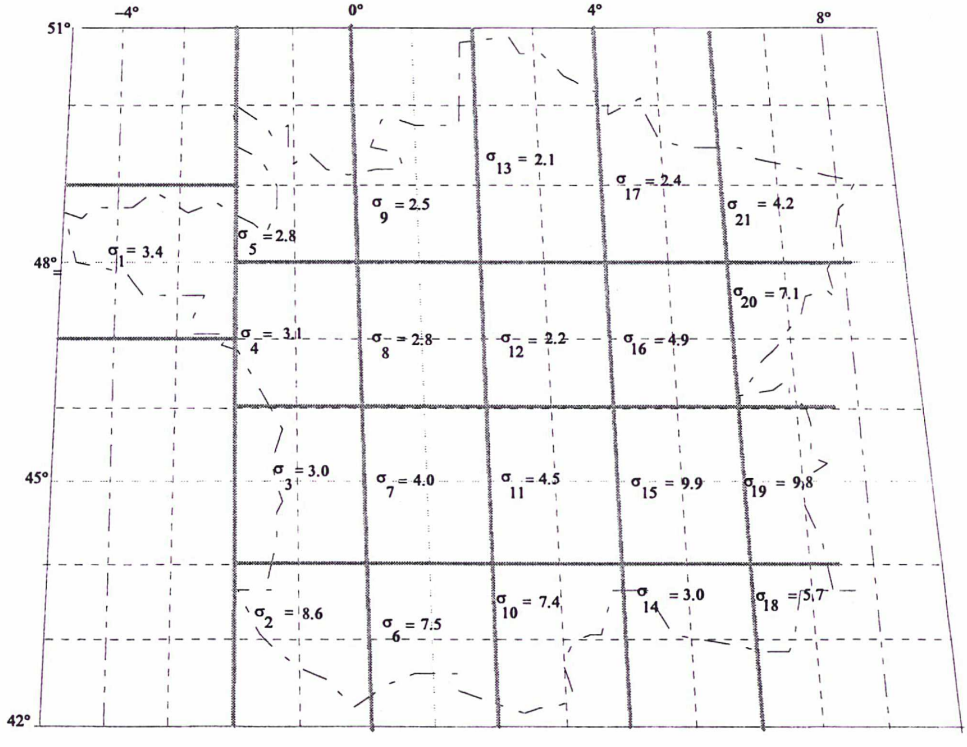


Fig. 3.4-12b : Ecarts-types des résidus entre le géoïde gravimétrique déterminé en utilisant EGM-X02 et le RBF dans les 21 sous-régions

(après une régression 3D: 1081 points, min = 2.1, max = 9.9, moyenne = 4.4, cm)

Fig. 3.4-12c : Résidus globaux entre le géoïde gravimétrique (EGM-X02) et le RBF

(après une régression 3D, EGM-X02 tronqué au degré 360 : 1081 points, min = -105.3, max = 42.7, moyenne = 5.6, σ = 23.7, cm)

3.4.3 G96-03a: Géoïde gravimétrique G96-02a adapté au RBF

- **Adaptation**

La méthode pour adapter G96-02a au RBF est l'ajustement combiné, résumé dans la section 2.8.2 (cf annexes 5-3 et 5-4 pour en connaître les détails).

1. ***Paramètres*** d'ajustement: Comme on l'a montré précédemment, il existe plusieurs problèmes sur les données gravimétriques et le MNT. Dans ce cas, les paramètres globaux, dont les significations physiques ne sont pas très claires à moins d'une analyse très prudente, ne doivent pas être introduits pour l'ajustement. De plus, le but du calcul de G96-03x est de convertir les hauteurs ellipsoïdale en altitudes IGN69 mais non de corriger les erreurs du modèle. On décide que seuls les paramètres locaux sont introduits pour l'ajustement.

2. ***Pondération*** d'observation (le géoïde gravimétrique et les données du RBF sont considérés comme des observations) :

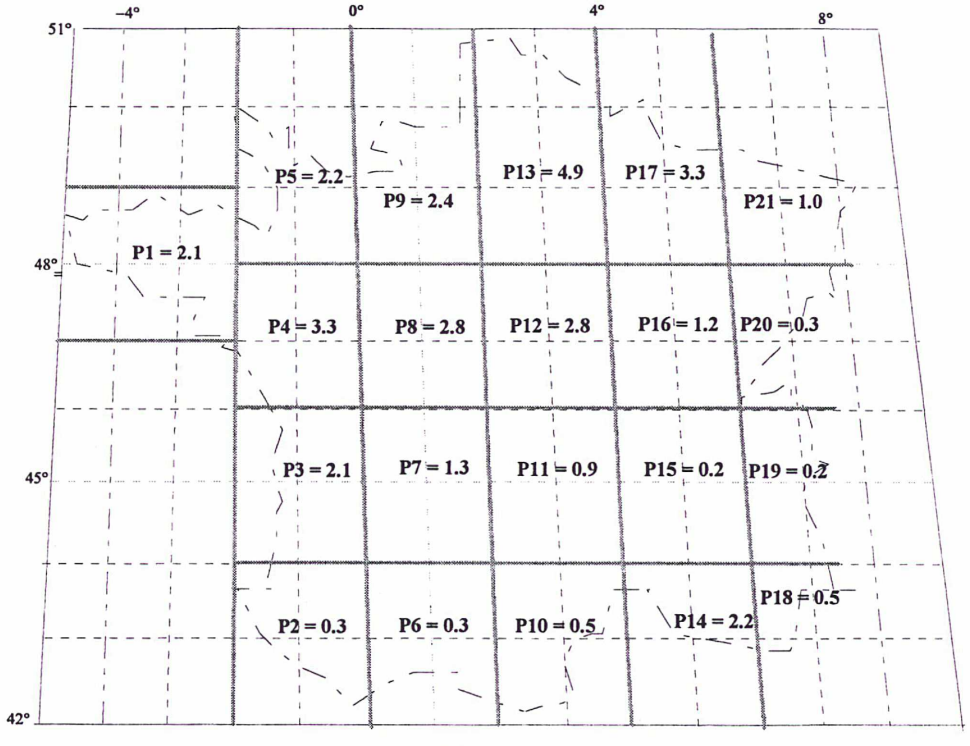


Fig. 3.4-13 : Poids de G96-02a dans les 21 sous-régions

- Nous utilisons la méthode suivante, basée sur la comparaison locale entre G96-02a et le RBF, présentée dans la section 3.4.2 pour estimer la précision du géoïde gravimétrique:

i) on prend l'écart-type d'une sous-région (résidus entre G96-02a et le RBF dans respectivement les 21 sous-régions) comme l'erreur moyenne du géoïde gravimétrique dans cette sous-région : σ_i^{GRV}

ii) on prend la moyenne (4.2 cm) des écarts-types de toutes les sous-régions comme l'erreur moyenne des moindres carrés unité: $\sigma_0 = 4.2$ cm

- le poids du géoïde gravimétrique d'une sous-région ***i*** est :

$$P_i^{GRV} = \frac{\sigma_0^2}{\left(\sigma_i^{GRV}\right)^2} = \frac{(4.2)^2}{\left(\sigma_i^{GRV}\right)^2} \qquad (3.4\text{-}4)$$

- le poids d'un point RBF est :

$$P_k^{GPS} = \frac{\sigma_0^2}{\left(\sigma_k^{GPS}\right)^2} \tag{3.4-5}$$

où σ_k^{GPS} est l'erreur du RBF.

Remarque: L'estimation d'erreur du RBF point par point n'est pas disponible. On est obligé de considérer que tous les points RBF ont une précision identique. L'erreur moyenne des moindres carrés du RBF est donc : σ^{GPS} = 3 cm. On a alors:

$$P_k^{GPS} = \frac{(4.2)^2}{(3.0)^2} = 1.96 \tag{3.4-6}$$

La figure 3.4-13 montre les poids régionaux de G96-02a pour chaque sous-région. La figure 3.4-14 montre le résultat de l'ajustement: **G96-03a**, le géoïde gravimétrique G96-02a adapté au RBF et les statistiques des corrections faites sur les 1081 points RBF.

• Discussion sur la précision de G96-03a

On discute de la précision au sens des moindres carrés, de la précision externe et de la précision relative:

1. Précision moyenne au sens des moindres carrés de G96-03a par l'ajustement

La figure 3.4-15 montre la précision estimée par la méthode des moindres carrés suite à l'ajustement combinant le géoïde gravimétrique G96-02a et le RBF. On voit bien que la valeur de cette estimation dépend des poids du géoïde gravimétrique G96-02a et de la position correspondante des points RBF (on rappelle que les poids sont identiques pour tous les points RBF). La précision moyenne externe de G96-03a par cette estimation est de 4.0 cm.

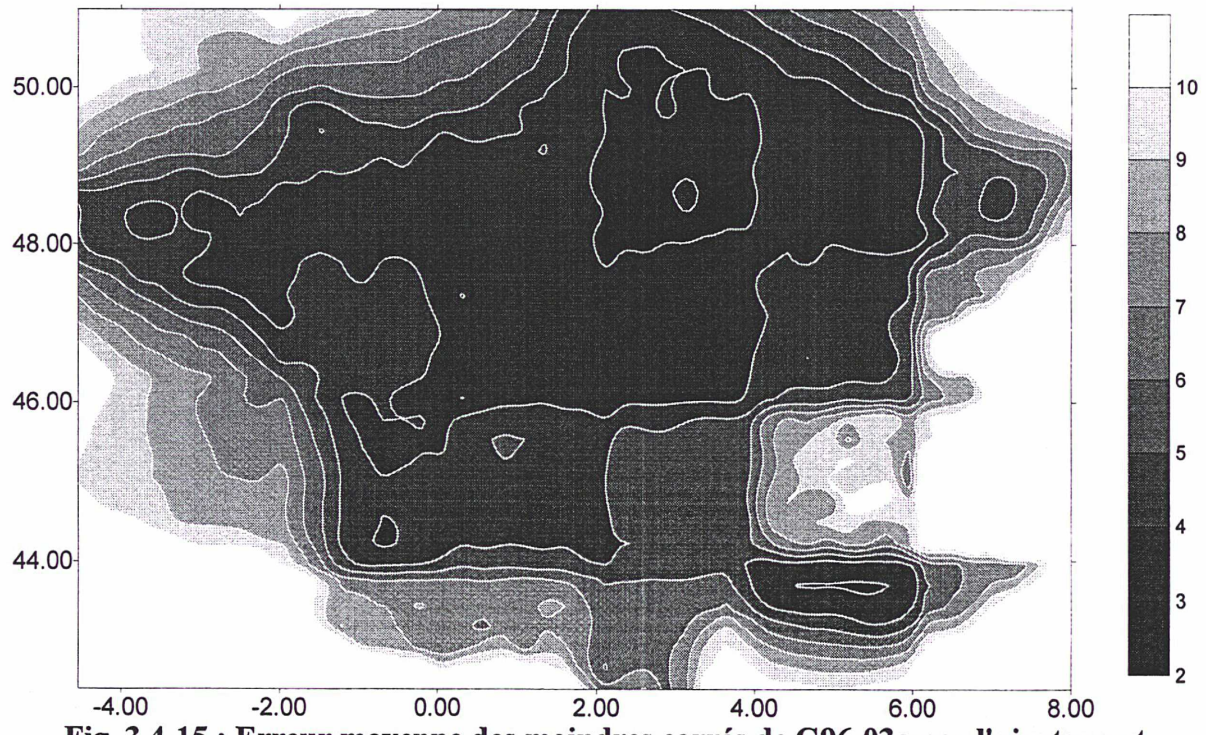


Fig. 3.4-15 : Erreur moyenne des moindres carrés de G96-03a par l'ajustement

(min= 2, max = 10, moyenne = 4 cm)

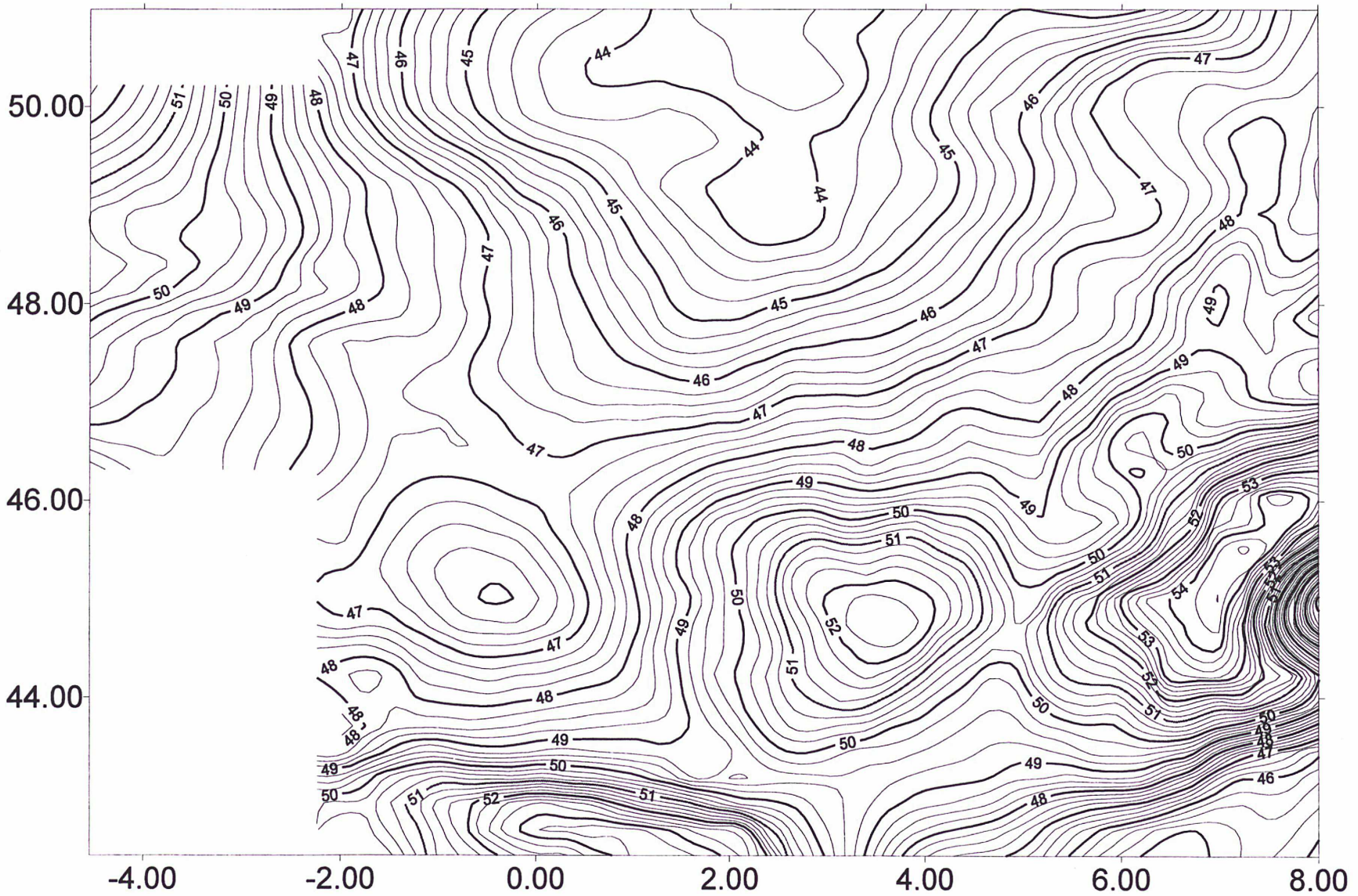


Fig. 3.4-14 : Quasi-géoïde gravimétrique français adapté au RBF: G96-03a

(corrections pour le RBF: min = -10.0, max = 11.8, moyenne = 0.0, σ = 3.1, cm)

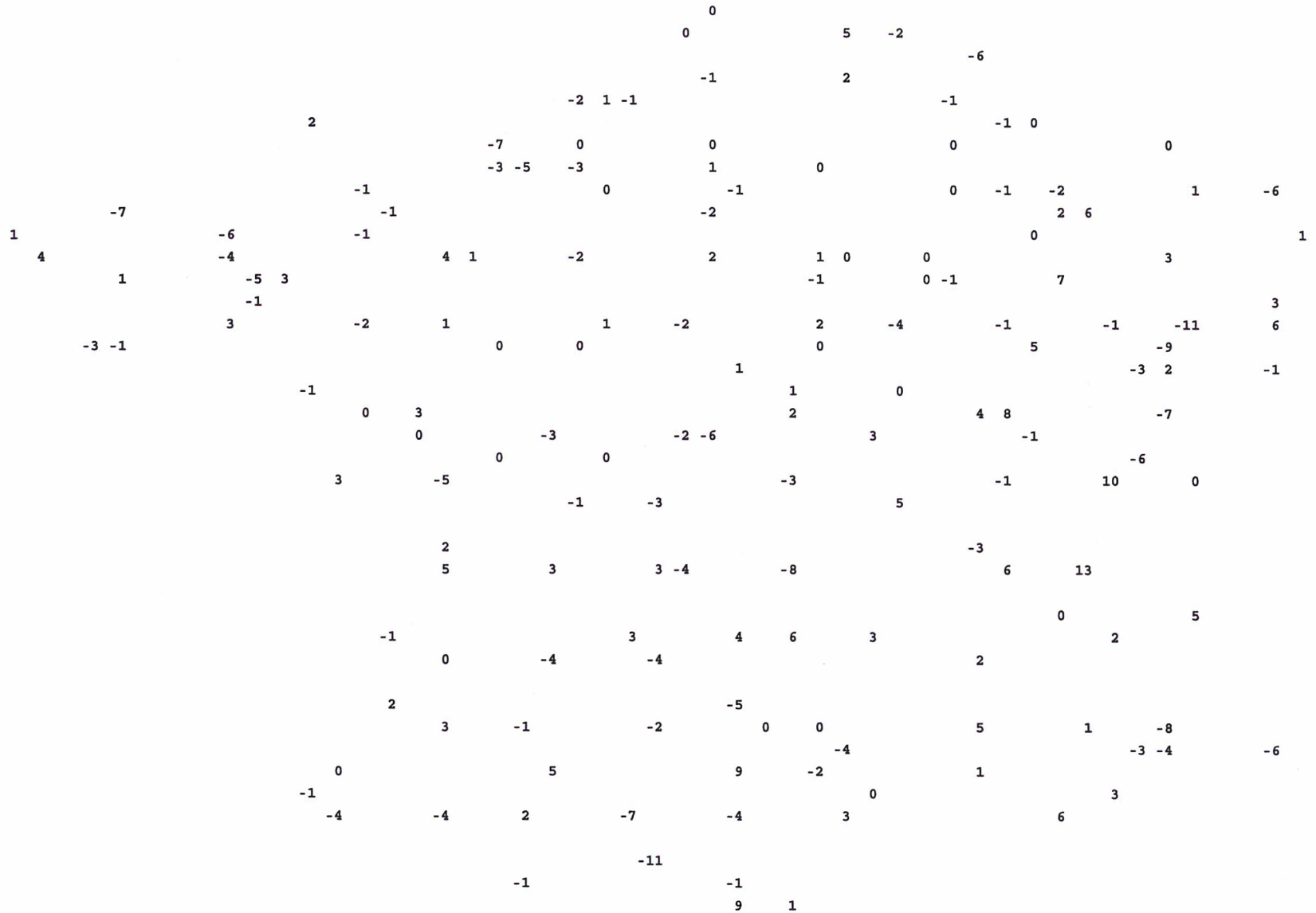


Fig. 3.4-16 : Précision externe de G96-03a: écarts sur les 167 points de contrôle
(min = -11.6, max = 13.0, moyenne = -0.2, σ= 4.1, cm)

2. Précision externe de G96-03a sur les 167 points de contrôle

Pour avoir une estimation objective de la précision, on a choisi 167 points RBF comme points de contrôle (un échantillonnage aléatoire de 1 point pour 80 x 80 km²), soit 15% du nombre total de points: 1081. Ces points n'ont pas été utilisés pour l'ajustement, ainsi l'on compare les valeurs ajustées avec celles des points de contrôle du RBF. Les écarts et les statistiques sont indiqués figure 3.4-16. Il y a 9 points pour lesquels les écarts sont supérieurs à 8 cm, soit 2 fois la valeur de l'écart-type: 4.1 cm. Les écarts importants se trouvent presque tous dans les régions frontalières montagneuses et sont en relation avec une faible densité de données gravimétriques dans ces zones. La précision moyenne externe de G96-03a par cette estimation est de 4.1 cm.

3. Précision relative de G96-03a

La précision relative (Jiang 1995b) est l'écart-type des écarts entre G96-03a et le RBF, défini par les équations (3.4-1,2,3) de la section 3.4.2. Les figures 3.4-17a, 17b et 17c montrent que (comparer également ces figures avec les figures 3.4-10a, 10b et 10c):

- l'écart-type des écarts relatifs est indépendant de la distance: les écarts de grande longueur d'onde n'existent plus
- la moyenne des écarts relatifs est très faible et indépendante de la distance: c'est une autre preuve que les écarts de grande longueur d'onde n'existent plus
- grâce à l'ajustement, la précision relative de G96-03a s'est beaucoup améliorée si on la compare à celle de G96-02a

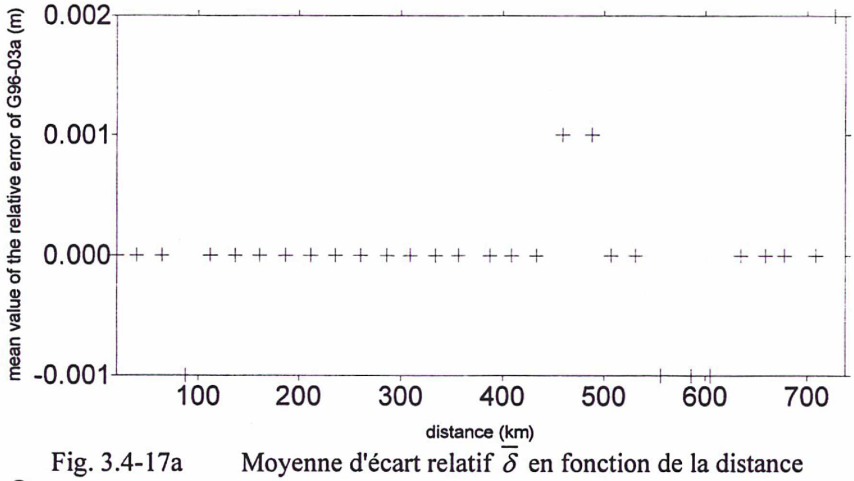


Fig. 3.4-17a Moyenne d'écart relatif $\overline{\delta}$ en fonction de la distance

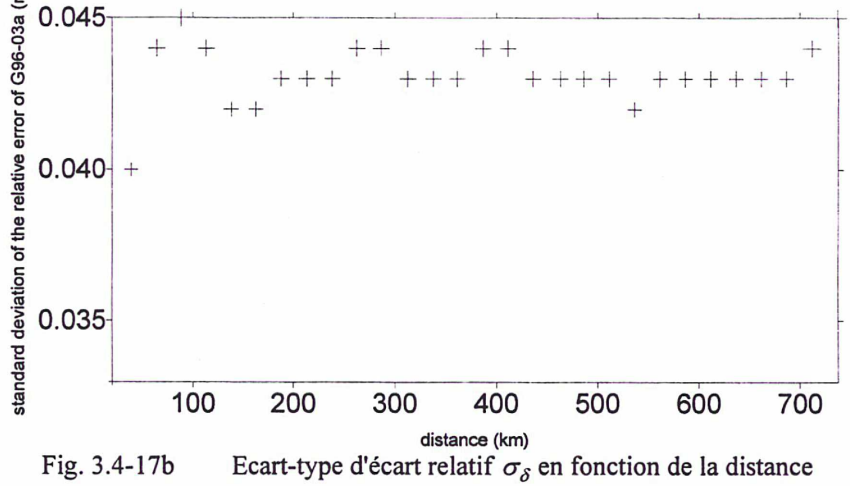


Fig. 3.4-17b Ecart-type d'écart relatif σ_δ en fonction de la distance

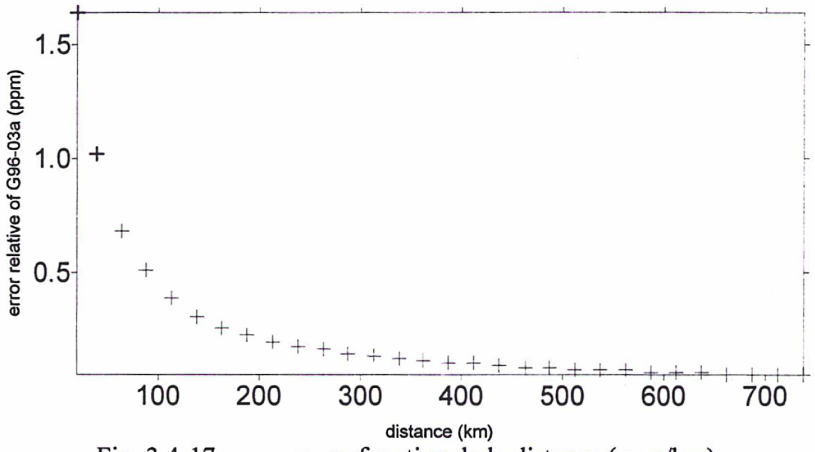


Fig. 3.4-17c σ_δ en fonction de la distance (ppm/km)

Fig. 3.4-17 : Précision relative: écarts relatifs en fonction de la distance

• Comparaison entre G96-03a et G96-01b

G96-01b est le géoïde calculé en utilisant les points RBF et le MNT (cf. section 3.3). La figure 3.4-18 montre les écarts entre G96-01b et G96-03a. Les écarts importants se trouvent dans les régions très montagneuses et aux limites du RBF où les valeurs de G96-01b ont été obtenues en utilisant les valeurs de OSU91A. L'écart-type des différences est 3.2 cm.

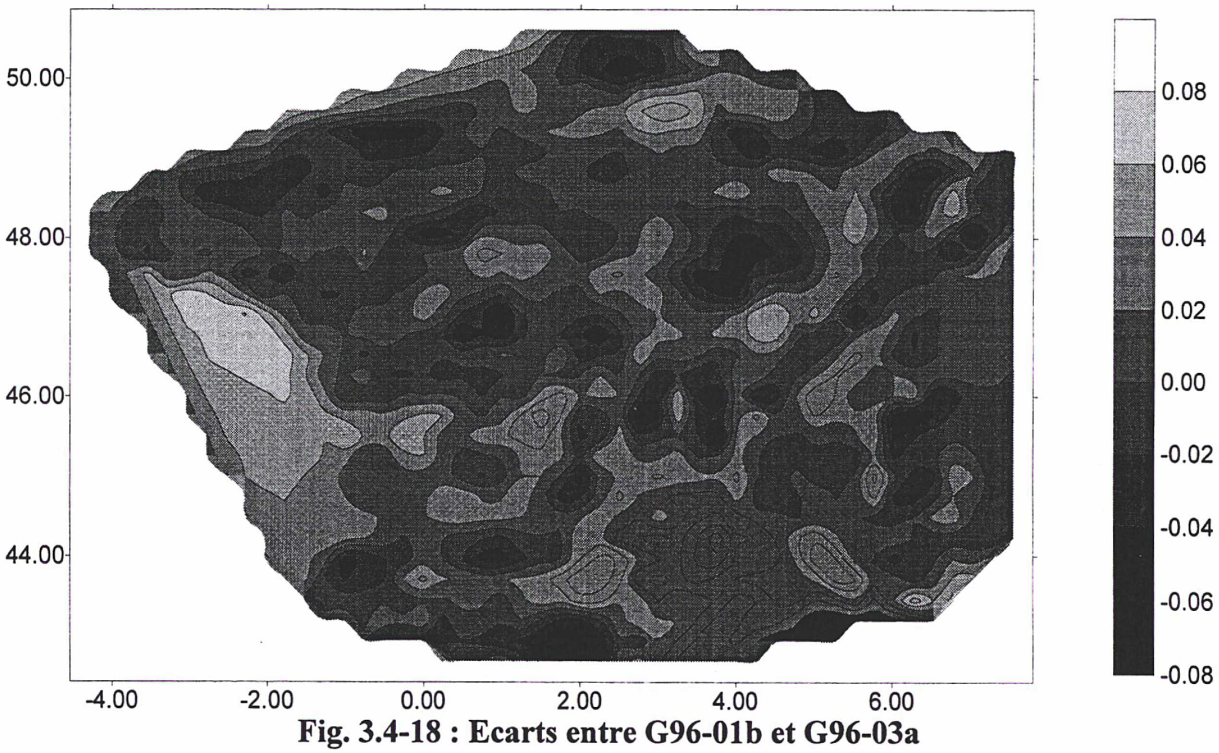


Fig. 3.4-18 : Ecarts entre G96-01b et G96-03a

(min = -12.0, max = 12.2, moyenne = 0.4, σ = 3.2)

Conclusion de la section 3-4

- La technique pour la détermination du géoïde gravimétrique est basée sur **la combinaison** de données terrestres, de données spatiales et d'un modèle géopotentiel. Le processus de calcul peut être séparé en deux parties : une ***pré-combinaison*** : entre les données terrestres gravimétriques et le modèle de géopotentiel et une ***post-combinaison*** : entre le géoïde gravimétrique calculé et les données GPS nivelées.

En raison du manque de temps pour effectuer les calculs, seule la combinaison simple a été utilisée pour le calcul de G96-02a. Ceci a probablement globalement distordu G96-02a pour de grandes longueurs d'onde et aussi localement, surtout dans les régions frontalières montagneuses (dans les Alpes et les Pyrénées), pour des

longueurs d'onde moyennes (1 degré par exemple). Un autre problème qui influence la précision de G96-02a est l'homogénéité assez douteuse des données gravimétriques et du MNT.

- **Le logiciel PiLi** a montré des qualités de rapidité, d'exactitude et d'efficacité lors de ces calculs.
- Pour la combinaison optimale, la couverture des données gravimétriques (sur le territoire français et dans un périmètre de plus de 100 km autour de la France, disponible actuellement au LAREG) n'est peut-être pas suffisante. Une couverture dans un périmètre de 200 ~ 250 km autour de la France est probablement nécessaire. De plus les **MNTs** au pas le plus fin possible et le nouveau modèle de géopotentiel EGM96 sont nécessaires pour les futurs calculs. Une attention particulière doit être portée à la couverture en Méditerranée et sur l'Atlantique, et à l'homogénéité des données gravométriques, altimétriques et de MNT.
- **Précision** de G96-03a: en plaine 1 à 3 cm; relief collinaire 2 à 4 cm, relief montagneux 4 à 7 cm, avec en moyenne une précision de 5 cm (cf. la table 3.4.8 ci-dessous). Cette précision a été estimée uniquement pour les points du territoire français. Les précisions des prochaines versions des séries devraient être améliorées en utilisant les méthodes rigoureuses et toutes les données disponibles: gravimétrie, MNT, altimétrie et un modèle de géopotentiel etc.

Table 3.4.8 Précisions précédente, actuelle et perspective (écart-type, cm)

relief	G96-01b(*)	G96-03a(**) version actuelle	perspective(***)
plaine	2 ~ 3	1 ~ 3	1 ~ 2
colline	3 ~ 4	2 ~ 4	2 ~ 3
montagne	5 ~ 6	4 ~ 7	3 ~ 5
moyenne	4 ~ 5	4 ~ 5	3 ~ 4

(*) RBF version mars 96, MNT au pas de 500m
(**) RBF version mars 96, MNT au pas de 500m et données gravimétriques séparées de 4 à 10 km
(***) Géoïde gravimétrique adapté au RBF en utilisant toutes les données disponibles

Références de la section 3-4

Boucher C. (1996a) : Pré étude du produit géoïde, LAREG à SGN, LAREG96-167, le 9 avril 1996

Boucher C. (1996b) : Pré étude géoïde SGN, Note aux destinaires, LAREG96-291, le 5 juillet 1996

Boucher C., Z. Jiang, L. Duhem (1996): Evaluation of the geoid derived by the GSFC/DMA models at the ITRF stations, Study report presented to the : Special Working Group On The GSFC/DMA Model Evaluation, International Geoid Service, IAG, June 1996

Denker H., D. Behrend, W. Torge (1996): The Eropean gravimetric quasigeoid EGG95, IAG Bull. d'information n° 7, New Geoid in the World

Forsberg R.(1984): A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, OSU, report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Heiskanen W., H. Moritz (1967): Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, GRAZ, AUSTRIA

Jiang Z. (1995a): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA.

Jiang Z. (1995b): Précision Relative de la Détermination du Géoïde, Rap. Géoïde n° 21, Publication interne de l'Institut Géographique National, oct. 1995

Jiang Z. (1996a): Remarques sur géoïde et quasi-géoïde, Rapport Géoïde n° 24, Publication interne de l'Institut Géographique National, Avril 1996

Jiang Z. (1996b): Géoïde français G96-01b, Rap. Géoïde n° 30, Publication interne de l'Institut Géographique National, juillet 1996

Jiang Z. (1996c): Guide d'utilisation de géoïde français G96-01b, Rap. Géoïde n° 31, Publication interne de l'Institut Géographique National, juillet 1996

Jiang Z. (1996d): Combinaison optimale des données gravimétriques terrestres et du modèle géopotentiel, Rap. Géoïde n° 32, Publication interne de l'Institut Géographique National, août 1996

Jiang Z., G. Balmino, H. Duquenne (1996): On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination, Proceedings of the XXI Congress of the European Geophysical Society 1996 (EGS96), Session G7, 6 - 10 May 1996, The Hague, Netherlands

Jiang Z., H. Duquenne (1996a): On combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, Journal of Geodesy, 70:505-514

Jiang Z., H. Duquenne (1996b): On fast integration in geoid determinaton, accepted by Journal of Geodesy, under pressing

Le Pape (1996): Géoïde, SGN au LAREG, le 17 mai 1996

Moritz H. (1992) Geodetic Reference System 1980, IN: The Geodesist's Handbook, Ed. by C.C. Tscherning, Bulletin Géodésique 1992

Rapp R. H. (1994): The use of potential coefficient models in computing geoid undulations, In: Lecture Notes of International School for the Determination and Use of the Geoid, October 10 -15, 1994, Milan, Italy

Rapp R.H. (1996): Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference, submitted to the Journal of Geodesy.

Paquet P., Z. Jiang, M. Everaerts, C. Poitevin (1996): A new Belgian geoid determination : BG96, IN: Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, University of Tokyo, Tokyo, Japan

Tscherning C.C, Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the Geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic.

3-5 Géoïde de Belgique-Luxembourg - essai de l'ajustement combiné du géoïde en prenant différentes réalisations par les pays voisins

Cette section présente l'essai numérique de la théorie discutée dans la section 2.8.3. Le géoïde à ajuster, c'est à dire "notre géoïde", est le géoïde de Belgique-Luxembourg. Comparé à celui de la France, c'est un cas relativement simple en raison de sa plus faible étendue; l'ensemble des données est donc plus complet. On note que cet essai a seulement pour but de tester la méthode proposée, et non de déterminer un géoïde précis dans la région concernée.

3.5.1 Données disponibles

- "Notre géoïde" est le géoïde de Belgique-Luxembourg pour lequel 3722 points gravimétriques, 32 points GPS nivelés et un MNT sont disponibles (Jiang et al. 1994 et 1996, Poitevin et al. 1995)
- "Autre géoïde n° 1" est une partie du géoïde français aux frontières de la France, de la Belgique et du Luxembourg. De plus, il y a 45 points GPS nivelés.
- "Autre géoïde n° 2" est une partie de l'EGG94 (European Gravimetric Quasigeoid 94, Denker et al. 1994), qui est autour de "notre géoïde" de Belgique-Luxembourg.

La figure 3.5-1 montre les trois géoïdes, qui sont considérés comme des observations directes ou indirectes (ou mélangées), qui participent à l'ajustement. Les ratios des écarts-types des trois types d'observation sont a priori respectivement de 1:1:2. Les observations (géoïdes France-Belgique-Luxembourg) sont pondérées en prenant les estimations des erreurs des géoïdes gravimétriques respectifs. La précision des points GPS nivelés est d'environ 3 ~ 5 cm. Les données altimétriques n'ont pas été utilisées pour l'essai présenté ici.

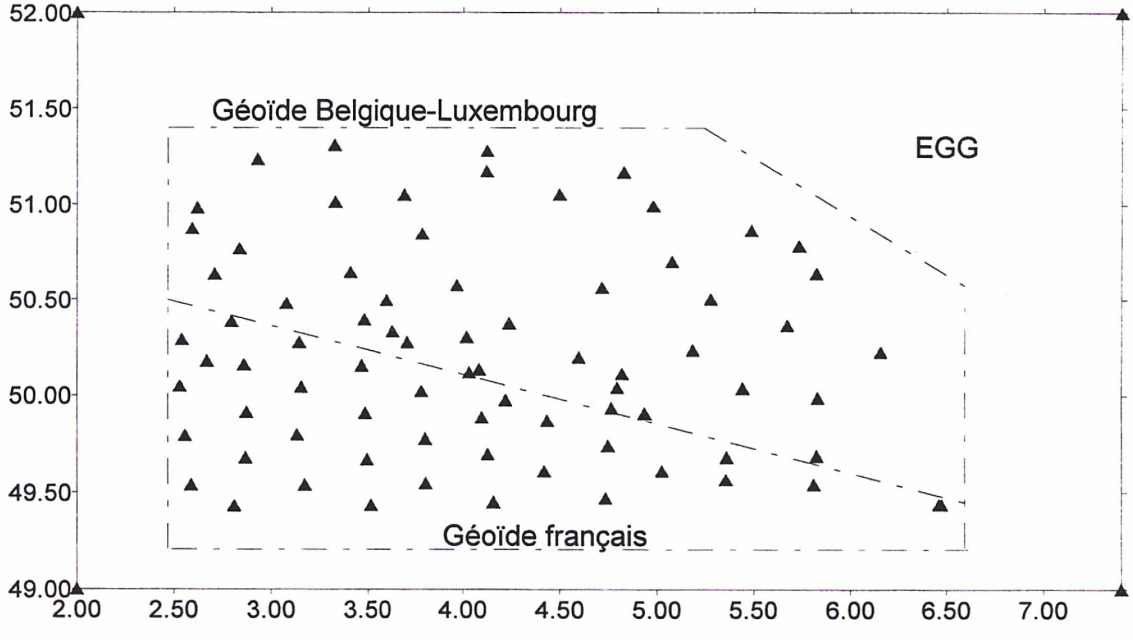


Figure 3.5-1 Les trois géoïdes connus et les 77 points GPS nivelés disponibles

3.5.2 Plan de calcul

Cinq calculs correspondant à la table 2.8.3-2 et à la figure 2.8.3-2 de la section 2.8.3 ont été effectués, nommés respectivement: géoïde A1, géoïde A2, géoïde B1, géoïde B2, géoïde C, dont les limites sont 49.4° ~ 51.5° en latitude et 2.5° ~ 6.8333° en longitude. Les logiciels GravSoft et PiLi ont été utilisés pour les calculs concernant les méthodes de collocation et d'ajustement combiné. Les paramètres polynomiaux et périodiques pour éliminer les erreurs des grandes longueurs d'ondes dans le modèle géopotentiel (cf. Tscherning 1994, annexes 5-3 et 5-4) n'ont pas été introduits parce que la taille du géoïde à calculer est petite. Cependant, pour les ajustements

combinés, les trois types de géoïde (figure 3.5-1) ont été considérés localement indépendants et les paramètres locaux ont été introduits pour enlever les erreurs locales systématiques (section 2.8.2).

Les quantités résiduelles: correction de terrain résiduel (RTM) sur la gravité, effet indirect dû au terrain résiduel sur le géoïde, sont calculées en utilisant la méthode d'intégration rapide implantée dans le logiciel PiLi.

3.5.3 Résultats et résidus des géoïdes ajustés

La table 3.5-1 et les figures 3.5-2,3,4 montrent les résidus des différents calculs en comparant avec les 77 points GPS nivelés. Il serait trop optimiste de considérer ces chiffres comme la précision de l'ajustement parce que les 77 points ont été entièrement utilisés comme observations pendant les ajustements ou le calcul de collocation. Mais, à partir de la table et des figures, on montre que les deux méthodes: ajustement combiné ou collocation sont bien aptes à adapter les géoïdes gravimétriques aux points GPS nivelés, et qu'elles donnent des résultats assez proches. Un problème très important cependant est de bien pondérer les observations sinon on risque d'introduire des erreurs sur les points GPS nivelés dans le résultat de l'ajustement.. La figure 3.5-5 suivante montre un des géoïdes calculés.

Table 3.5-1 Statistiques des résiduels du géoïde ajusté (m, 77 points GPS nivelés)

calcul	min	max	moyenne	écart-type
géoïde A1	-0.126	0.085	0.000	0.038
géoïde A2	-0.084	0.080	0.000	0.031
géoïde B1	-0.093	0.059	0.000	0.023
géoïde B2	-0.074	0.059	0.000	0.020
géoïde C	-0.116	0.087	0.001	0.034

Remarque: Une régression 3D (latitude, longitude et altitude) a été faite pour obtenir les résiduels du géoïde C.

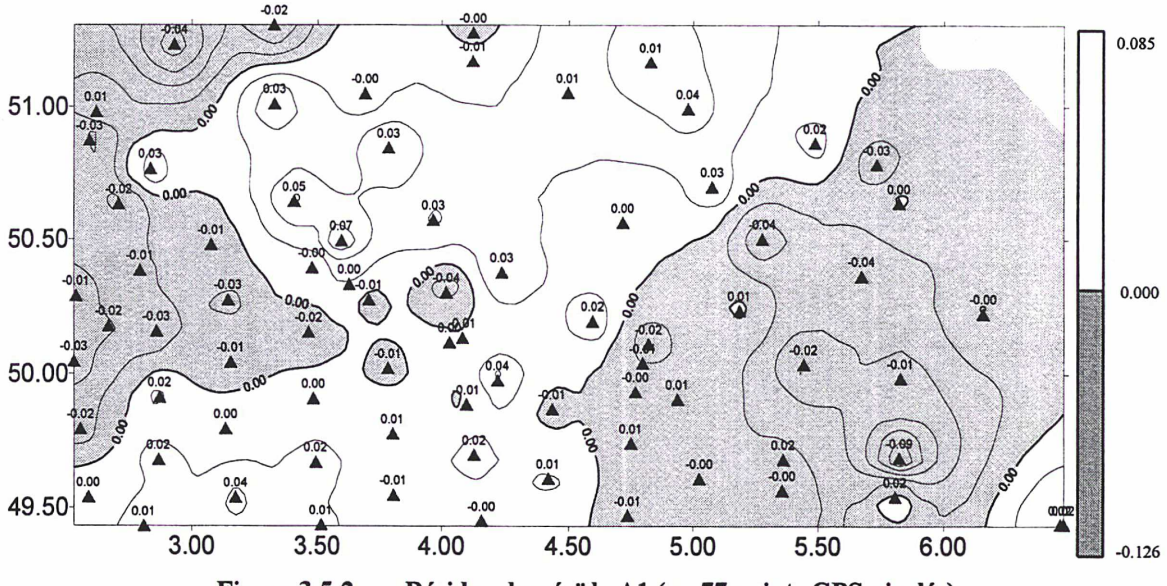


Figure 3.5-2 Résidus du géoïde A1 (m, 77 points GPS nivelés)

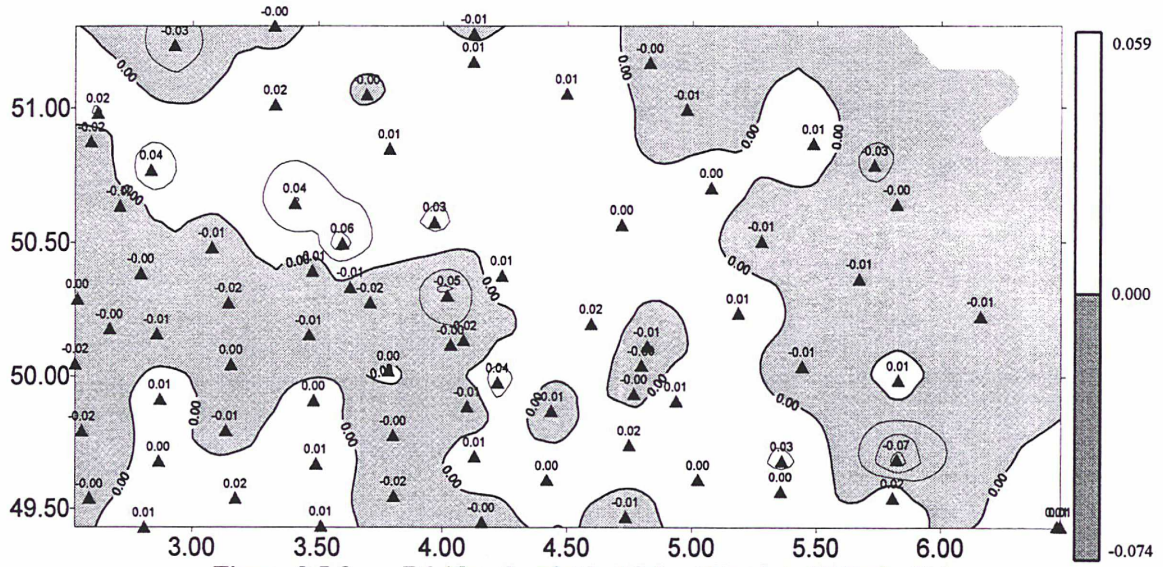


Figure 3.5-3 Résidus du géoïde B2 (m, 77 points GPS nivelés)

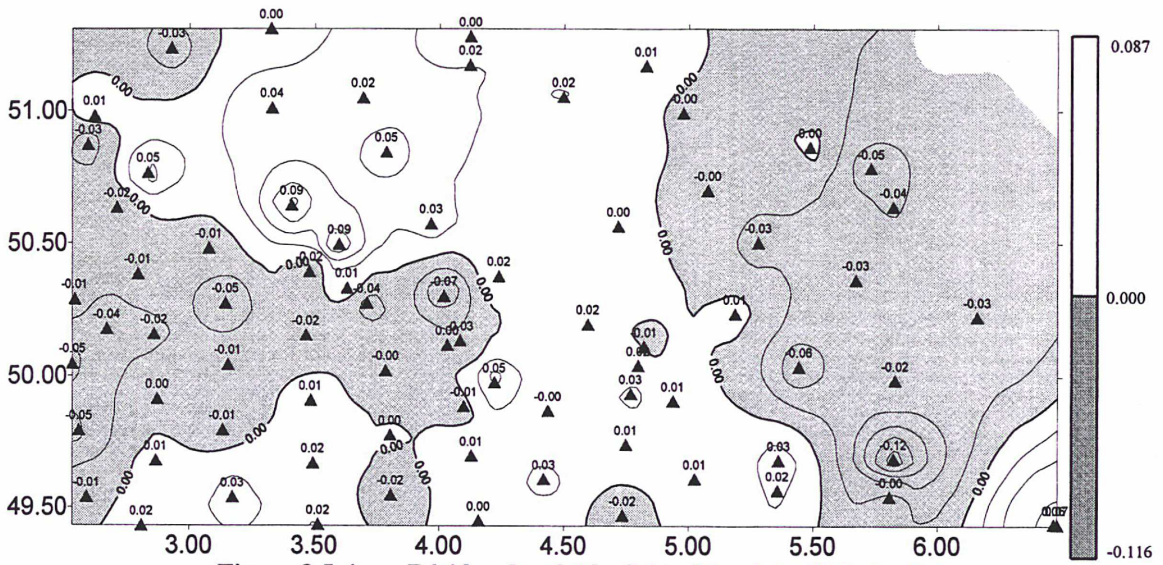


Figure 3.5-4 Résidus du géoïde C (m, 77 points GPS nivelés)

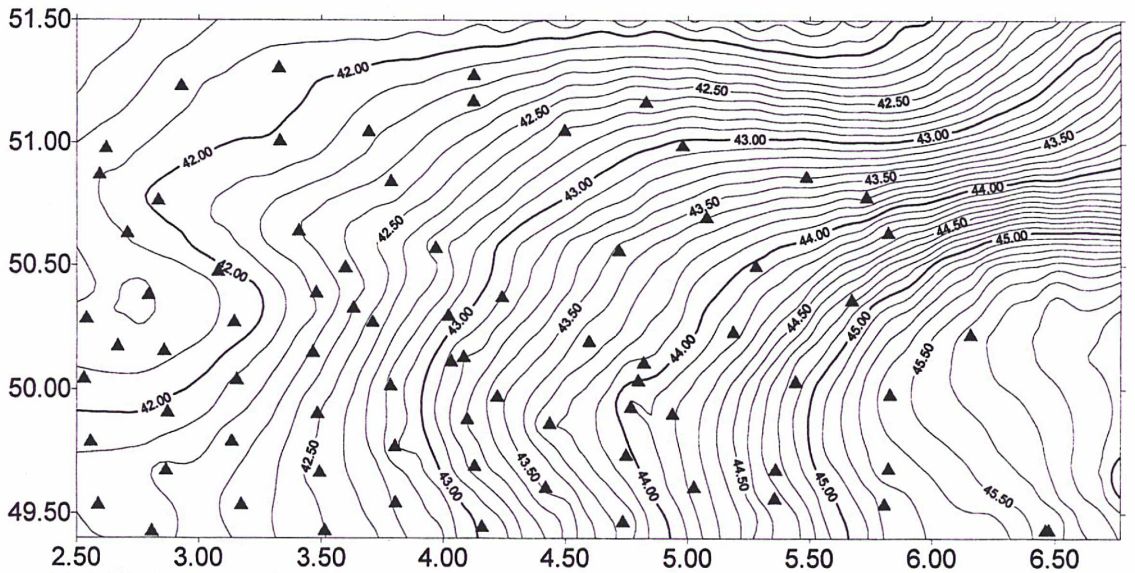


Figure 3.5-5 Géoïde B2: quasi-géoïde gravimétrique ajusté aux 77 points GPS nivelés par l'ajustement combiné (m)

3.5.4 Précisions des géoïdes ajustés

Erreur interne (erreur des moindres carrés)

L'ajustement combiné et la collocation donnent une estimation d'erreur pour les valeurs ajustées. Les figures 3.5-6 et 7 montrent ces erreurs pour les différents calculs. Les deux estimations d'erreur des géoïdes calculés ont la même tendance. On voit bien que les erreurs, dans tous les cas, dépendent beaucoup de la position relative par rapport aux points GPS nivelés. Plus lointaine est la position d'un point, moins bonne est sa précision (mais comparée avec le géoïde C, la précision du géoïde B2 se dégrade plus vite)

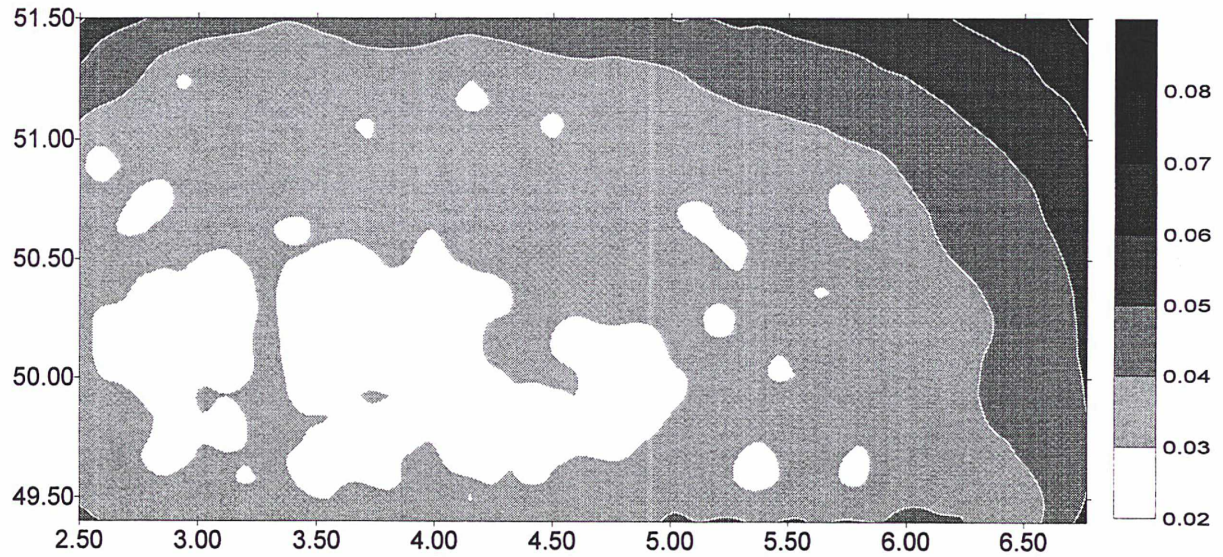


Figure 3.5-6 Géoïde B2: erreurs des moindres carrés de l'ajustement combiné

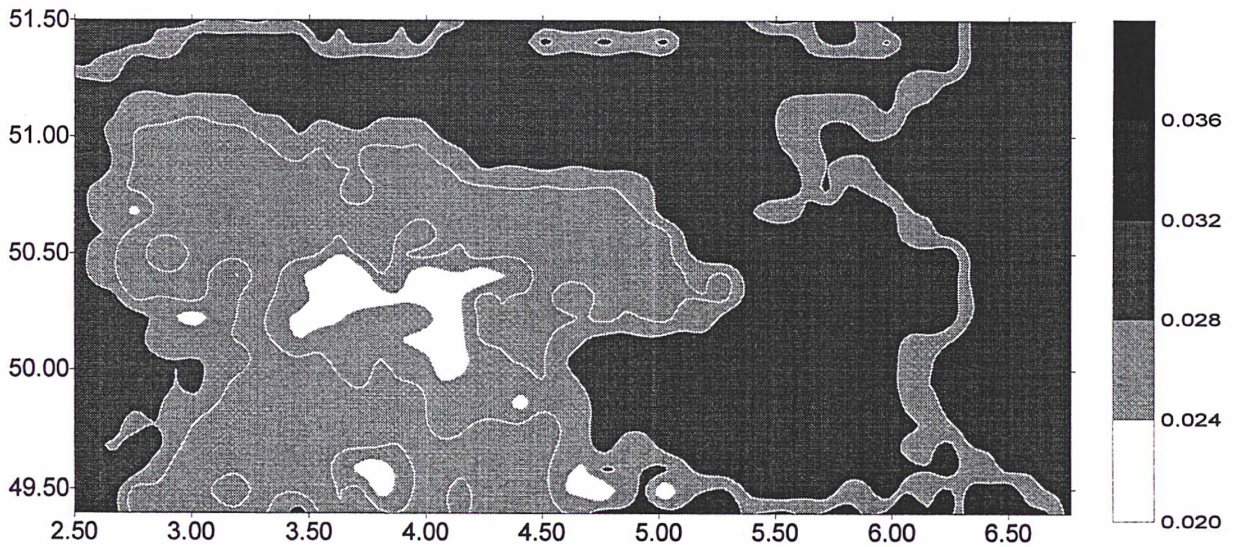


Figure 3.5-7 Géoïde C: erreurs des moindres carrés de la collocation

Erreur externe (comparaison avec les points de contrôle du GPS/nivellement)

L'écart type des résidus dans la section 3.5.3 est trop optimiste comme estimation d'erreur externe. Mais si l'on fait l'ajustement combiné ou la collocation en utilisant seulement une partie des 77 points GPS nivelés, disons la moitié, 38 points, l'écart-type des résidus sur les 77 points GPS nivelés peut être considéré comme l'erreur externe. Ceci est évidemment plus objectif et plus raisonnable. Le vrai écart-type doit donc être supérieur à cet estimateur externe. La table 3.5-2a montre que les erreurs externes sont entre -11.5 et 16.9 cm. Les écarts types

sont d'environ 2.9 ~ 5.2 cm pour les différents calculs. Ceci correspond aux estimations d'erreurs des moindres carrés (voir les figures 3.5-6 et 7). La table 3.5-2b donne l'estimation de l'erreur la plus pessimiste qui a été obtenue en calculant les résidus sur les 39 points contrôlés non utilisés pour l'ajustement du géoïde B2. Elle est de 3.4 cm et contient aussi en fait entièrement les erreurs des points GPS nivelés.

Table 3.5-2a Statistiques des erreurs externes du géoïde ajusté
(m, sur 77 points GPS nivelés parmi lesquels 39 points de contrôle non utilisés pour l'ajustement)

calcul	min	max	moyenne	écart-type
géoïde A1	-0.120	0.102	-0.003	0.052
géoïde A2	-0.115	0.169	-0.005	0.050
géoïde B1	-0.095	0.080	-0.001	0.038
géoïde B2	-0.064	0.107	0.001	0.029
géoïde C	-0.131	0.125	0.002	0.039

Table 3.5-2b Statistiques des erreurs externes les plus pessimistes du géoïde ajusté
(m, sur les 39 points de contrôle non utilisés pour l'ajustement)

calcul	min	max	moyenne	écart-type
géoïde B2	-0.064	0.107	-0.001	0.034

Précision relative externe (comparaison avec les points de contrôle du GPS/nivellement)

La précision relative peut être obtenue par comparaison des différences du géoïde ajusté et des points GPS nivelés. Comme pour l'analyse de la section précédente, la précision relative est calculée selon la méthode de l'estimation externe. La table 3.5-3 et la figure 3.5-8 montrent les précisions relatives pour les différents calcul.

Table 3.5-3 Précisions relatives externes des différentes solutions du géoïde ajusté (ppm = cm/10km)

distance moyenne	géoïde A1	géoïde A2	géoïde B1	géoïde B2	géoïde C
25 ~ 50 km	1.43	1.71	1.16	1.06	2.16
100 ~ 200 km	0.56	0.52	0.39	0.29	0.75
200 ~ 300 km	0.38	0.30	0.28	0.19	0.48

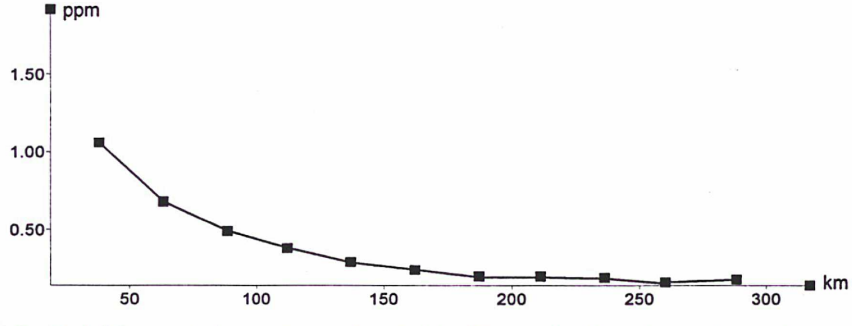


Figure 3.5-8 Précision relative externe du géoïde B2 par l'estimation externe (ppm = cm/10km)

A partir des écarts-types des erreurs internes et externes ainsi que de la précision relative (tables 3.5-1, 2a, 2b, 3), la meilleure solution est le géoïde B (B1 et B2).

Conclusion de la section 3.5

- Trois méthodes d'ajustement (A, B et C) ont été proposées pour combiner les différentes réalisations du géoïde. Les avantages principaux justifiant l'exécution de ce genre d'ajustement sont: 1) éliminer les écarts entre les différentes réalisations; 2) la quantité de données requises autour du géoïde principal est réduite grâce à l'utilisation des réalisations du géoïde des pays voisins; 3) les erreurs du modèle géopotentiel et des déformations locales peuvent être largement éliminées grâce aux points GPS nivelés, et la précision du géoïde ainsi calculé est donc améliorée; 4) l'estimation d'erreur est possible; 5) un tel géoïde ajusté aux points GPS nivelés peut être utilisé comme la surface zéro de référence pour les travaux du nivellement par GPS.
- L'analyse des erreurs absolues externes et internes, ainsi que la précision relative externe, montrent que la précision de la méthode B est meilleure que celle des méthodes A et C, et la solution B2 est la meilleure. Ceci doit être prouvé par d'autres essais numériques. A titre indicatif, les méthodes A1 et B1 consomment seulement 5~10% du temps CPU comparé avec les méthodes A2, B2 et C.
- L'essai pour le géoïde de Belgique-Luxembourg montre que la précision externe est 3 ~ 5 cm et la précision relative externe est 1 ~ 0.2 ppm pour des distances de 25 km ~ 300 km. Ce résultat pourra être amélioré en utilisant la nouvelle banque de données disponible récemment.
- Un des problèmes principaux pour la détermination du géoïde gravimétrique est dû aux erreurs des grandes longueurs d'onde. Le logiciel PiLi permet d'exécuter l'ajustement en prenant en compte des paramètres périodiques, mais l'ajustement présenté ici n'en a pas tenu compte du fait de la faible étendue du géoïde à calculer. Cependant, une tendance périodique est observée dans les résidus de tous les calculs (voir les figures 3.5-2, -3 et -4 où les résidus négatifs et positifs sont regroupés et non répartis de façon aléatoire). Un autre problème important est la pondération des observations. Ce sont les deux points à améliorer si possible.

Références principales de la section 3-5

Jiang Z. C. Poitevin, M. Everaerts (1994): Premier résultat du géoïde de la Belgique, Rapport du Géoïde N° 11, IGN, France

Jiang Z., H. Duquenne (1996a): On fast integration in geoid determinaton, présenté à et accépté par le Journal of Geodesy, sous pression

Jiang Z., H. Duquenne (1996b): On combined adjustement of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, Journal of Geodesy, 70:505-514

Jiang Z. (1995c): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA

Jiang Z. (1996): Nouvelle solutions pour le géoïde gravimétrique Belgique-Luxsembourg, Rapport du Géoïde N° 22, IGN, France

Denker H., D. Behrend, W. Torge (1994): European Gravimetrique Geoid: Status report 1994. Proceed. IAG Symp. No. 113, Gravity and Geoid, Graz, Austria, Sept. 11-17, 1994, 423-433, Springer, Berlin, Heidelberg, New York

Moritz H. (1980): Advanced physical geodesy, H. Wichmann Verlag, karlsruhe, 1980

Poitevin C., Z. Jiang, M. Everaerts (1995): Le géoïde gravimétrique en Belgique, Photogrammétrie - Télédétection et Cartographie, n° 197-198, Belgique

Tscherning C.C., Rapp (1974): A FORTRAN IV program for the determination of the anomalous potential using stepwise least squares collocation, Reports of the Department of Geodetic Science No. 212, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974

Tscherning C.C. (1985): Local approximation of the gravity potential by least squares collocation. In: K.P. Schwarz (Ed.): Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China. Aug. 21 - Sept. 4, 1984. Pub. 60003, Univ. of Calgary, Calgary, Canada, pp. 277-362, 1985

Tscherning C.C, Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the Fisrt Continental Workshop on the geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic

Tscherning C.C.(1994):Geoid determination by least square collocation using GRAVSOFT, Lecture Notes of International School for the Determination and Use of the Geoid, October 10 -15, 1994, Milan, Italy

Annexe du chapitre 3: Illustrations du processus de retrait et restauration de G96-02a

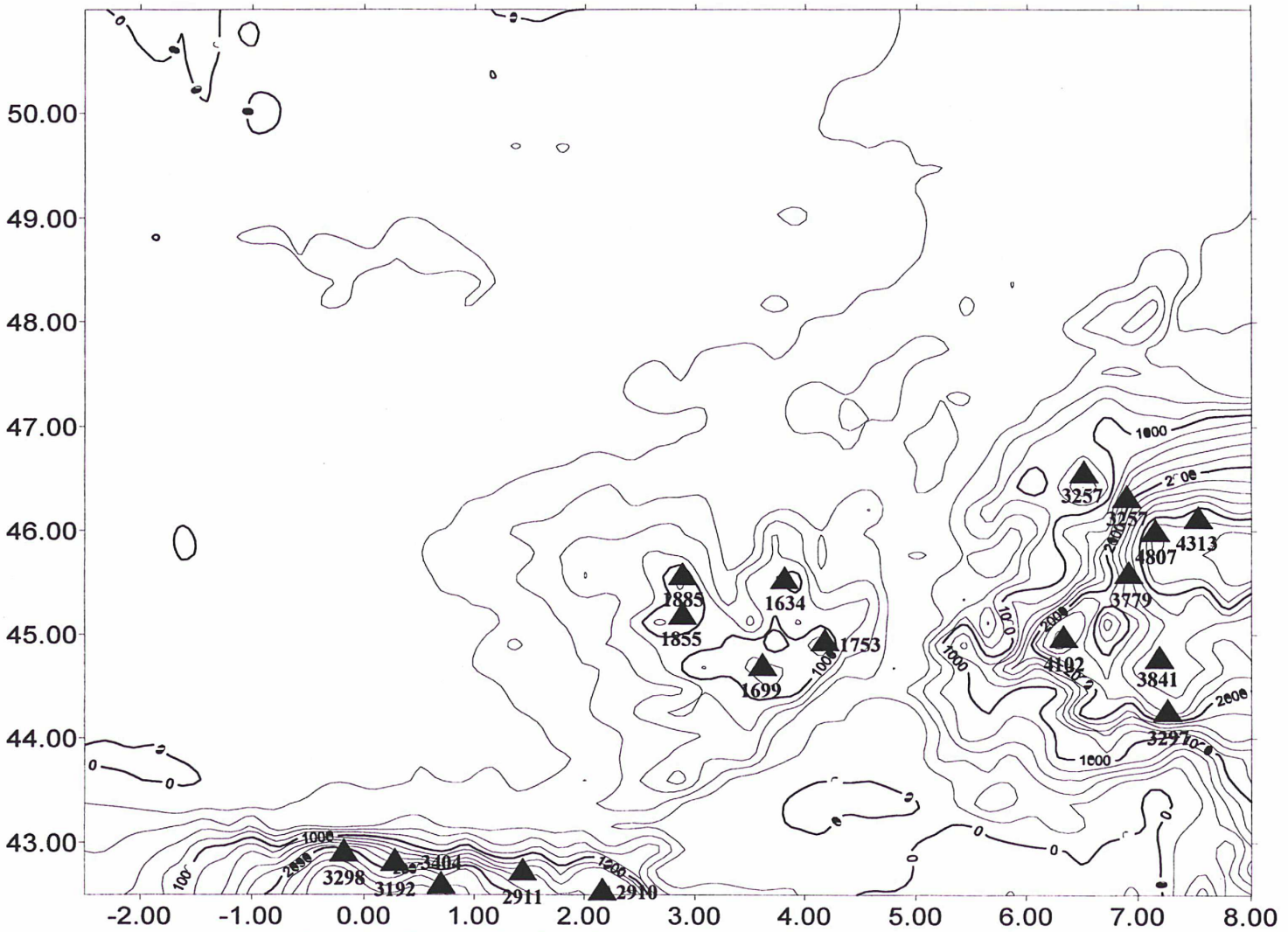


Fig. A1a : Topographie de la France (intervalle entre contours = 200m)

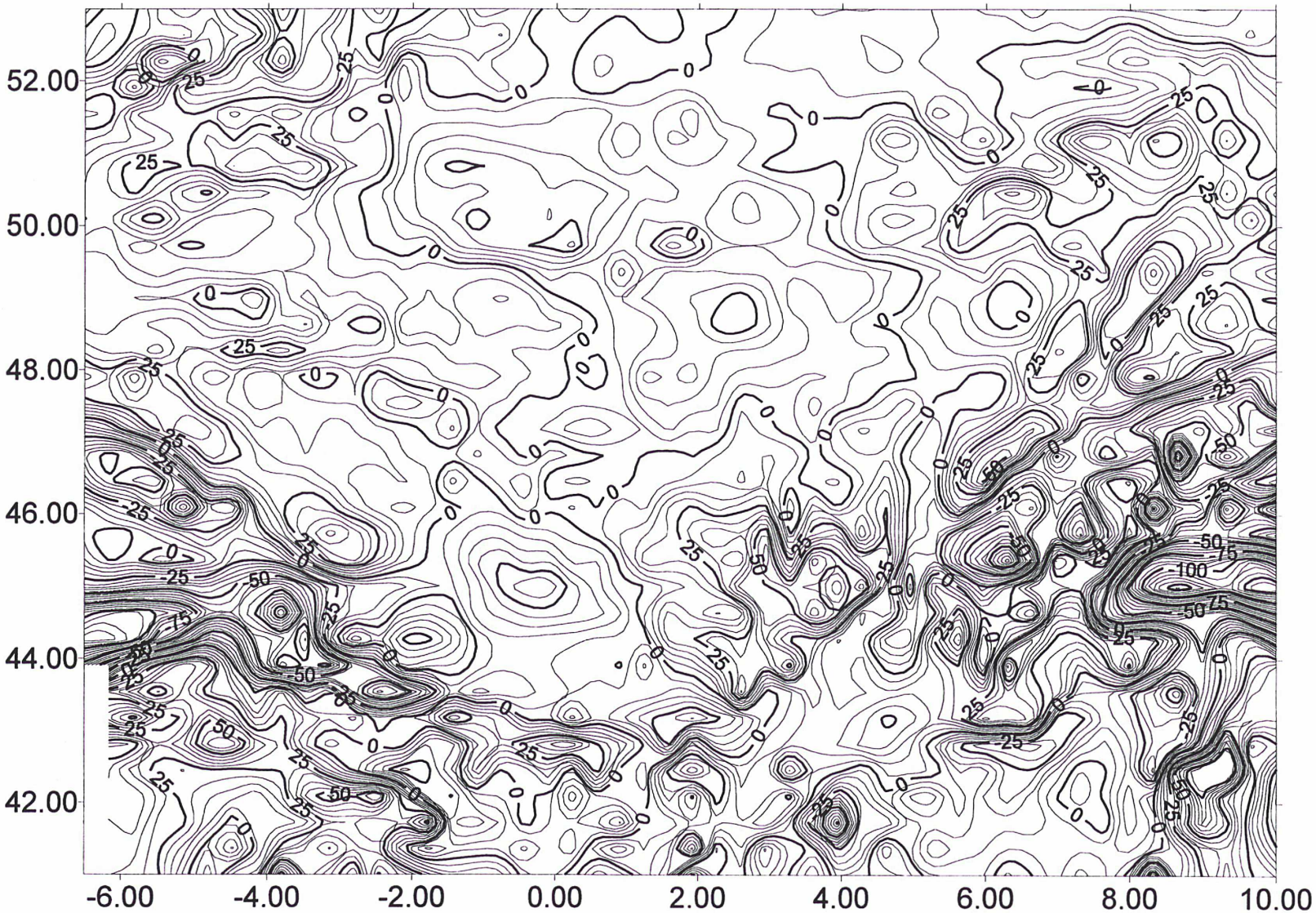


Fig. A1b : Anomalie à l'air libre (mGal, échantillonnage d'un points sur 10 km², intervalle entre contours = 5 mGal)

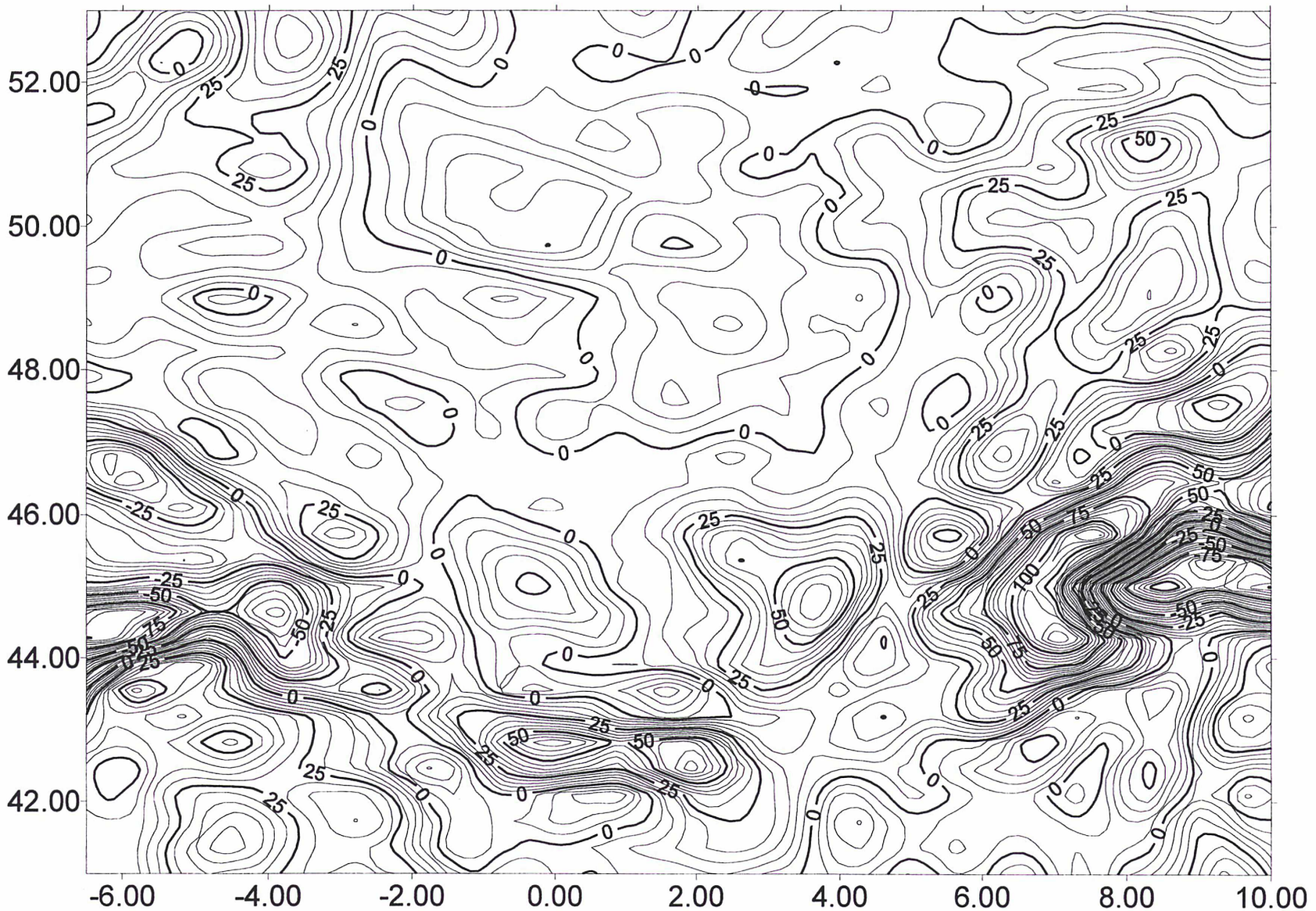


Fig. A1c : Anomalie à l'air libre par OSU91A (mGal, intervalle entre contours = 5 mGal)

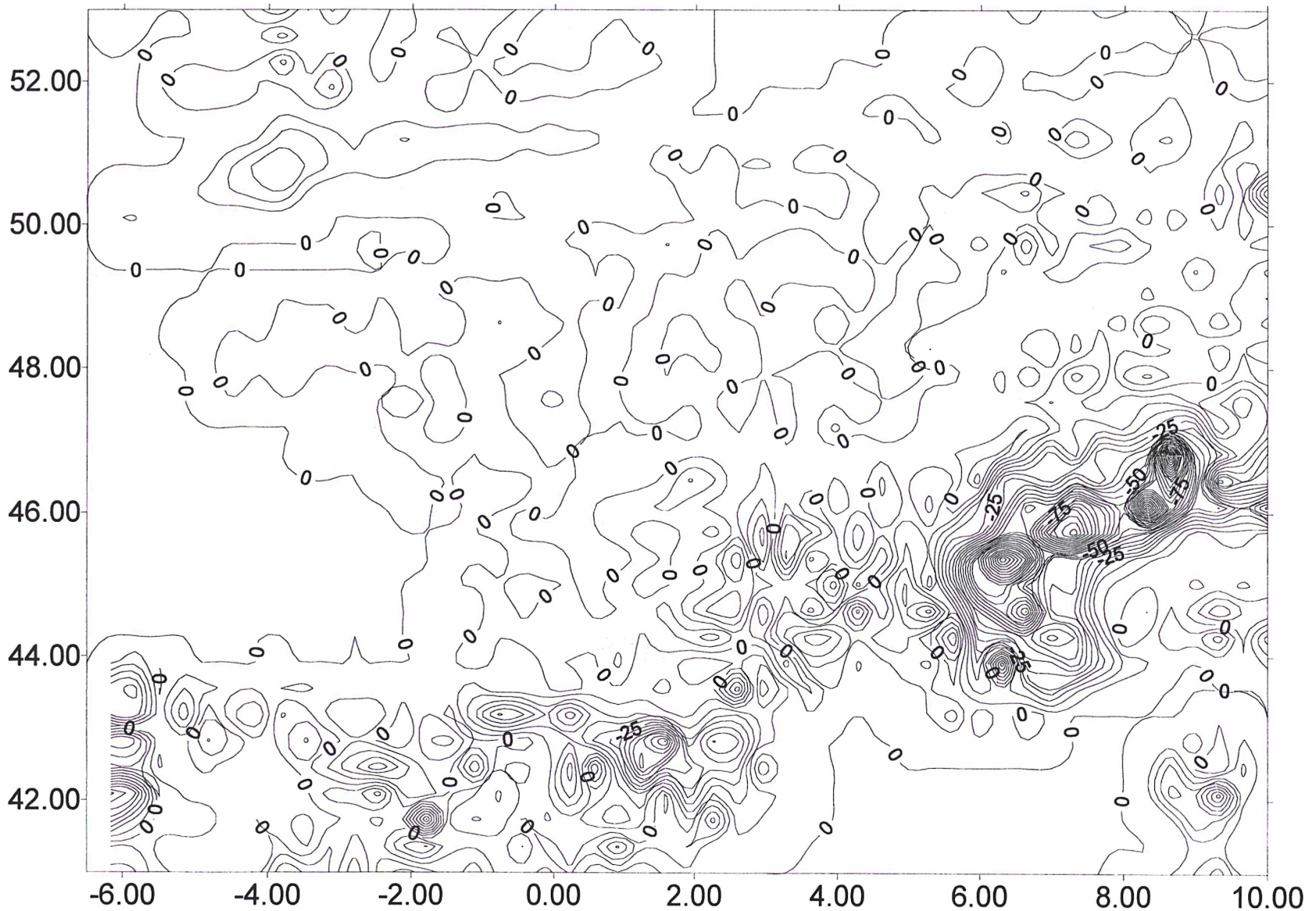


Fig. A1d : Correction de terrain résiduel en gravité (mGal, intervalle entre contours = 5 mGal)

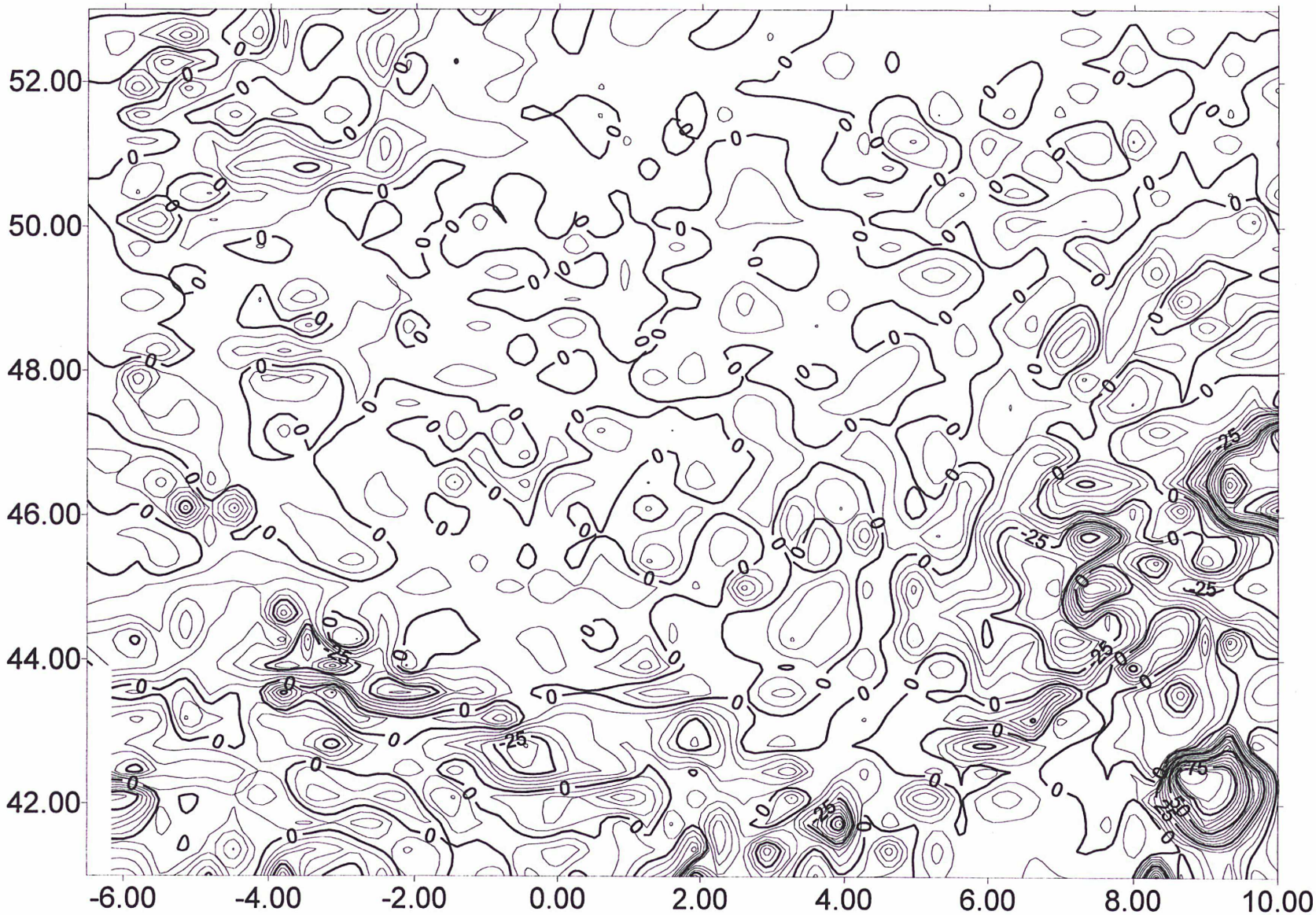


Fig. A1e : Anomalie résiduelle (mGal, intervalle entre contours = 5 mGal)

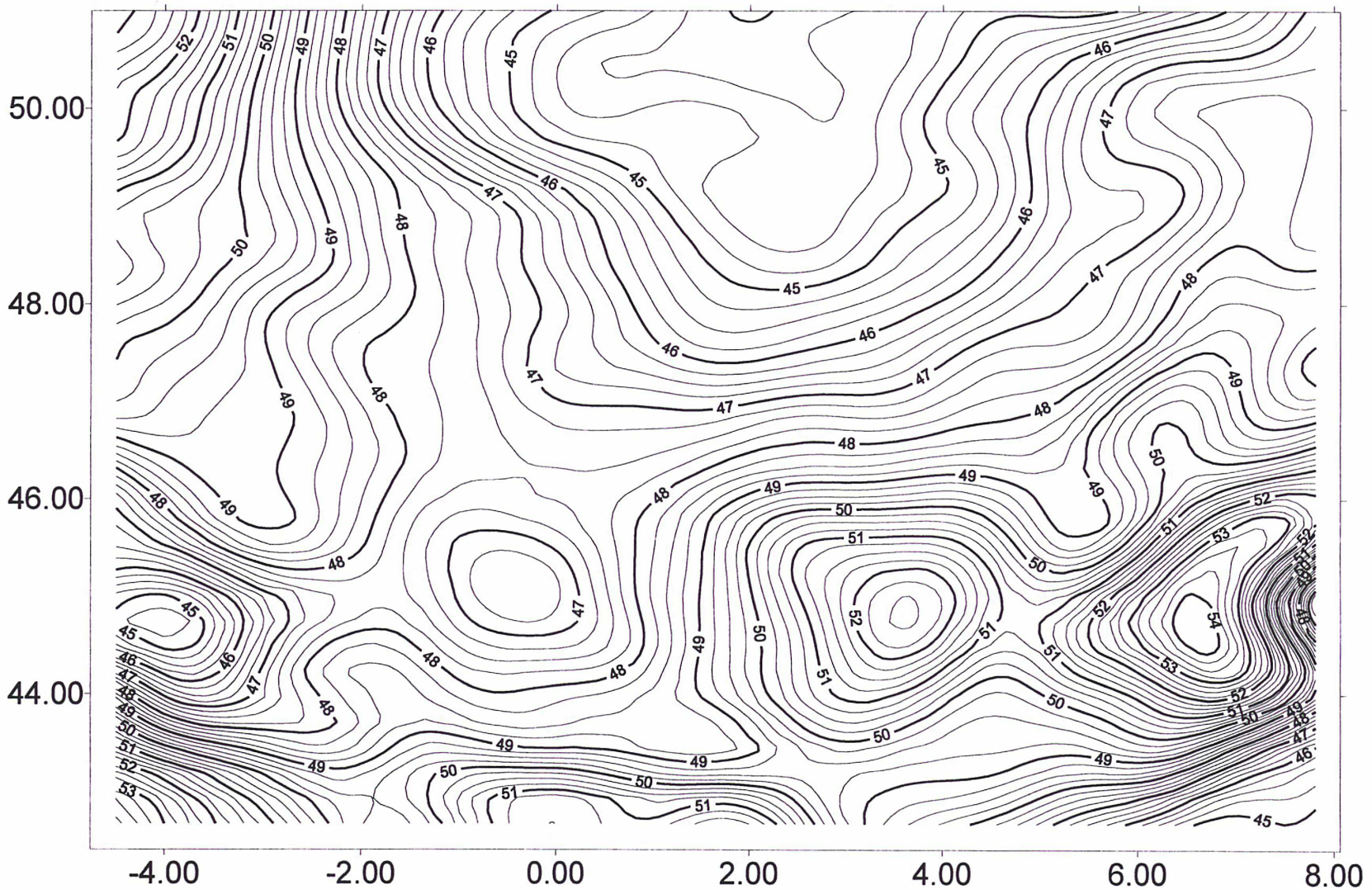


Fig. A1f : Anomalie de hauteur par OSU91A (m, intervalle entre contours = 0.25 m)

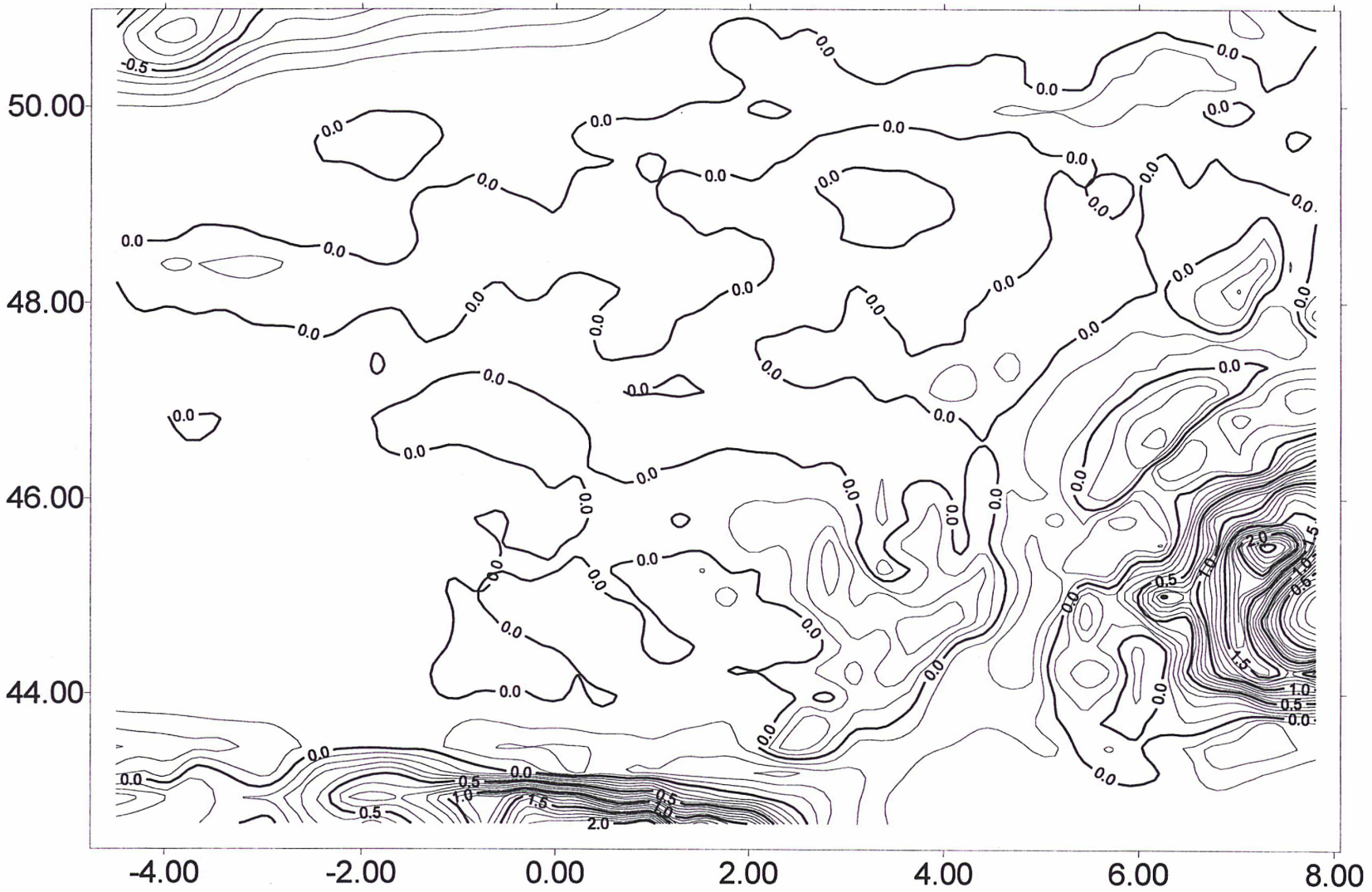


Fig. A1g : Effet de terrain résiduel (m, intervalle entre contours = 0.1 m)

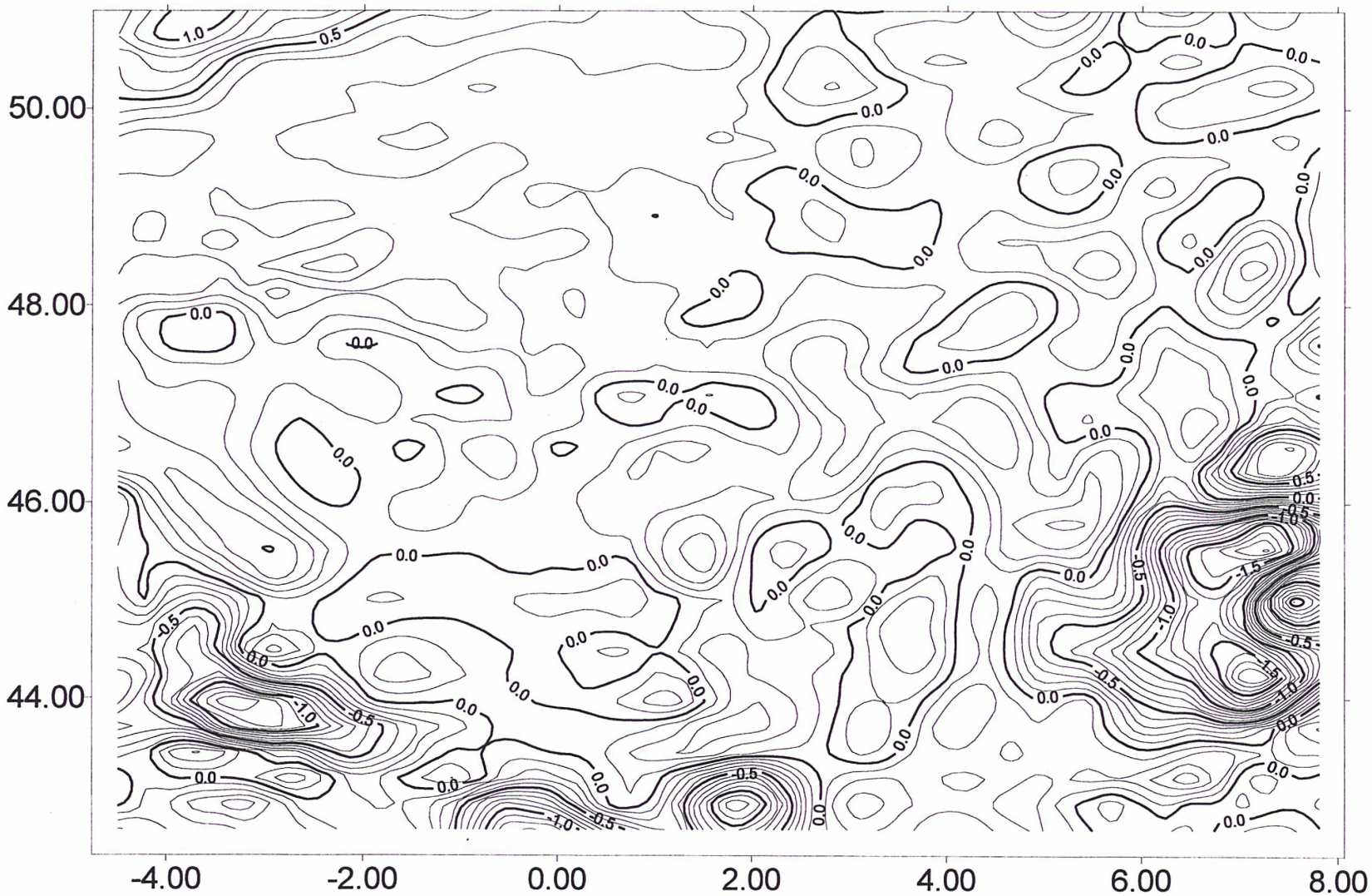


Fig. A1h: Anomalie de hauteur résiduelle par Stokes (m, intervalle entre contours = 0.1 m)

Chapitre IV Conclusion générale

Le calcul d'un géoïde d'une grande précision, de l'ordre de quelques centimètres, est aujourd'hui possible mais non trivial. Une grande attention doit être portée à la méthodologie et à l'homogénéité des données. A l'heure actuelle, la détermination du géoïde est basée sur la combinaison de données terrestres et de données spatiales en introduisant un modèle global de géopotentiel comme référence. Une technique de combinaison optimale peut faciliter l'obtention d'un géoïde précis.

Trois méthodes ont été discutées et utilisées pour les calculs de géoide en France et en Belgique. On peut les classer en deux groupes : celles qui utilisent et celles qui n'utilisent pas l'information gravimétrique.

1. La première méthode est la détermination de géoïde en utilisant les points GPS nivelés à l'aide d'un modèle de géopotentiel et d'un MNT sans faire intervenir les informations gravimétriques. C'est un cas simplifié de la méthode de retrait et restauration. Les principaux avantages de cette méthode sont la simplicité et la rapidité du calcul. De plus, l'étendue et la résolution du MNT requis sont moindres car le géoïde est beaucoup moins sensible à la topographie locale que la gravité. Un géoïde ainsi obtenu peut être utilisé directement pour les travaux de nivellement par GPS. Cependant, il y a quelques inconvénients qui sont, en premier lieu, la grande dépendance de la méthode à la densité des points GPS nivelés. Ainsi, dans les régions très montagneuses où le nivellement de précision est difficile, ou aux limites des réseaux de points GPS nivelés, la précision devient mauvaise. Ensuite, cette méthode est entachée de l'erreur systématique d'un réseau de nivellement. Cette erreur peut se présenter comme une distorsion d'une dizaine de centimètres. Donc, pour être tout à fait rigoureux, cette méthode produit la 'surface zéro' correspondant au système d'altitude du pays, mais non le géoïde (ou quasi-géoïde) tel qu'il est défini en géodésie physique. Le résultat numérique obtenu au cours des travaux présentés ici est le géoïde français **G96-01b** dont la précision est, en plaine 2 ~ 4 cm, pour les reliefs collinaires 3 ~ 5 cm, et les reliefs montagneux 5 ~ 7 cm, avec une moyenne de 4 ~ 6 cm.

   La méthode gravimétrique est indépendante de l'observation GPS nivelée. Les méthodes de Stokes et la collocation ont été présentées dans cette thèse.

2. La formule de Stokes modifiée pour s'adapter au processus de retrait-restauration et limiter l'erreur de troncature est une méthode largement utilisée pour le calcul de géoïde gravimétrique. On montre que la théorie de Stokes classique n'est plus suffisante pour expliquer les modifications apportées, et il faut introduire la théorie de Molodensky pour expliciter les quantités ainsi obtenues, dont les évaluations sont faites au niveau du terrain ou très proche du terrain, mais non au niveau du géoïde. La surface déterminée de cette façon est le quasi-géoïde et non le géoïde. L'avantage de cette méthode est sa rigueur théorique et sa grande précision relative. Un de ses principaux inconvénients est la grande consommation de temps calcul. Pour accélérer les calculs, des méthodes rapides comme l'utilisation de FFT 1D, ou l'intégration rapide présentée dans cette thèse, ont été développées récemment. Le résultat du calcul, illustrant cette technique, est le géoïde gravimétrique français **G96-02a**. Un problème important est posé par les erreurs de grandes longueurs d'onde dues principalement au modèle de géopotentiel. La solution proposée est un processus de combinaison optimale consistant en deux étapes: un pré-traitement combinant le modèle de géopotentiel et les données gravimétriques (Mais son

application semble délicate. Nous ne l'avons pas appliqué dans cette thèse) et un post-traitement combinant géoïde gravimétrique et données GPS nivelées. Le résultat du processus d'ajustement combinant le géoïde G96-02a et les points RBF est le géoïde français **G96-03a** dont la précision est, en plaine 1 ~ 3 cm, pour les reliefs collinaires 2 ~ 5 cm, et les reliefs montagneux 4 ~ 7 cm, avec une moyenne générale de 4 ~ 6 cm. La précision d'un prochain calcul pourrait être considérablement améliorée par l'utilisation de toutes les données disponibles et en prenant bien garde à leur homogénéité.

3. Au lieu d'utiliser les relations analytiques, souvent compliquées, entre les grandeurs géodésiques, la méthode de collocation utilise les relations statistiques pour passer d'une grandeur à l'autre. Son avantage le plus important est que l'on peut utiliser toutes sortes d'observations géométriques et physiques pour calculer n'importe quelle grandeur qui, dans notre cas le géoïde, est considérée comme une fonctionnelle du champ de pesanteur. Son désavantage est la grande consommation de temps calcul et de mémoires. Pour résoudre ce problème, la méthode de collocation rapide a été développée mais n'est pas discutée dans ce mémoire. Nous avons ainsi calculé le géoïde belge. Le nouveau géoïde gravimétrique belge **BG96** a une précision absolue d'environ 3 ~ 4 centimètres et une précision relative d'environ 1 à 2 ppm pour les courtes distances allant de 25 à 50 km, et de 0.3 à 0.5 ppm pour les distances moyennes allant de 200 à 300 km.

Certaines nouvelles techniques, dont les plus importantes sont l'intégration rapide et l'ajustement combiné, ont été développées dans cette thèse. Elles sont toutes implantées dans le logiciel **PiLi** qui a prouvé ses qualités de rapidité, d'exactitude et d'efficacité lors des calculs.

Il reste cependant certains aspects à étudier si l'on veut obtenir un nouveau géoïde français pouvant servir à la définition de la référence verticale :

combinaison optimale des données terrestres et d'un modèle de géopotentiel
utilisation appropriée des données altimétriques
qualité, homogénéité et couverture de toutes les données gravimétriques et du MNT, etc.
méthode objective d'estimation d'erreur

Références

Partie I: Publications (écrites par l'auteur pendant le déroulement de la thèse)

1. Publiées au niveau international

Jiang Z., H. Duquenne (1995): **Fast integration of the integrals of Stokes, potential and terrain correction in geoid determination**, *Proceedings of the XX Congress of the European Geophysical Society 1995* (EGS95), Session G4, 3 - 7 April 1995, Hamburg, Germany

Jiang Z., H. Duquenne (1995): **Optimal fitting of gravity geoid to GPS levelling points**, *Proceedings of the XX Congress of the European Geophysical Society 1995* (EGS95), Session G4, 3 - 7 April 1995, Hamburg, Germany

Jiang Z. (1995): **PiLi - A New Software for the Geoid Determination**, presented to the *XXII IUGG General Assembly*, 2 - 4 June 1995, Boulder, USA

Jiang Z., G. Balmino, H. Duquenne (1996): **On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination**, *Proceedings of the XXI Congress of the European Geophysical Society 1996* (EGS96), Session G7, 6 - 10 May 1996, The Hague, Netherlands

Jiang Z. (1996): **Geoid prediction using GPS levelling points and digital terrain model - a new French geoid determination G96-01**, *Proceedings of the XXI Congress of the European Geophysical Society 1996* (EGS96), Session G7, 6 - 10 May 1996, The Hague, Netherlands

Jiang Z., H. Duquenne (1996): **On the combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and GPS levelling stations**, *Journal of Geodesy**, 70:505-514

Jiang Z., H. Duquenne (1996): **On fast integration in geoid determination**, *Journal of Geodesy**, 71: 59-69

Jiang Z. (1996): **Geoid determination in France**, IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy* (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, University of Tokyo, Tokyo, Japan

2. Publiées en France, à l'IGN, Rapport géoïde

Jiang Z. (1993): **Détermination du géoïde local par géodésie intégrée**, *Rap. Géoïde n° 1*, **DEA**, Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie, Observatoire de Paris, Ecole Nationale des Sciences Géographiques et Université Paris 6, sept. 1993

Jiang Z. (1994): **Théories principales de détermination du géoïde**, *Rap. Géoïde n° 2*, fev. 1994

Jiang Z. (1994): **Détermination du géoïde et nivellement par GPS**, *Rap. Géoïde n° 3*, mars 1994

Jiang Z. (1994): **Détermination du géoïde par FFT**, *Rap. Géoïde n° 4*, mars 1994

Jiang Z., H. Duquenne (1994): **Plan de calcul du géoïde local sur la feuille de Manosque**, *Rap. Géoïde n° 5*, mai 1994

Jiang Z. (1994): **Compte rendu de calcul du géoïde gravimétrique sur la feuille de Manosque**, *Rap. Géoïde n° 6*, août 1994

Jiang Z. (1994): **Compensation combinant données du géoïde graivmétrique et GPS-nivellement pour un géoïde national français**, *Rap. Géoïde n° 7*, sept. 1994

Jiang Z. (1994): **Etat d'avancement du logiciel PiLi**, *Rap. Géoïde n° 8*, sept. 1994

Jiang Z. (1994): **Intégration rapide - modification des fonctions intégrées pour la détermination du géoïde**, *Rap. Géoïde n° 9*, oct. 1994

Jiang Z. H. Duquenne (1994): **Calcul du géoïde en utilisant le logiciel GravSoft**, *Rap. Géoïde n° 10*, nov. 1994

Jiang Z., C. Poitevin, M. Everaerts (1994): **Premier essai de calcul du géoïde gravimétrique de la Belgique**, *Rap. Géoïde n° 11*, nov. 1994

Jiang Z.(1995):**Terrain correction integral kernel's modification and fast integraion**,*Rap.Géoïde n°12*,fev. 1995

Jiang Z. (1995): **Combined adjustement of gravity geoid and GPS levelling stations**, *Rap. Géoïde n° 13*, jan. 1995

Jiang Z. (1995): **PiLi - nouveau logiciel pour le calcul du géoïde**, *Rap. Géoïde n° 14*, mars 1995

Jiang Z. (1995): **Détermination du géoïde à l'aide de GPS**, *Rap. Géoïde n° 15*, mars 1995

Jiang Z.(1995): **Interpolation du géoïde en utilisant la technique de retrait et restauration**, *Rap. Géoïde n° 16*, mars 1995

Jiang Z. (1995): **Plan de Numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination**, *Rap. Géoïde n° 17*, mai 1995

Jiang Z. (1995): **Comparaison des résultats des calculs du géoïde gravimétrique en utilisant les logiciels GravSoft et PiLi**, *Rap. Géoïde n° 18*, nov. 1995

Jiang Z. (1995): **Comparaison des résultats des calculs du géoïde gravimétrique en utilisant les logiciels GravSoft et PiLi**, *Rap. Géoïde n° 18bis*, nov. 1995

Jiang Z. (1995): **Calcul du géoïde de la région Rhône-Alpes en utilisant le logiciel PiLi**, *Rap.Géoïde n°19*,oct.1995

Jiang Z. (1995): **Prédiction du Géoïde en Utilisant les Points RBF et le MNT - Méthode, Précision et Premier essai sur la région Rhône-Alpes**, *Rap. Géoïde n° 20*, nov. 1995

Jiang Z. (1995): **Précision Relative de la Détermination du Géoïde,** *Rap. Géoïde n° 21*, oct. 1995

Jiang Z.(1995):**Nouvelles solutions pour le géoïde gravimétrique Belgique-Luxembourg**, *Rap.Géoïde n°22*, fev.1996

Jiang Z. (1996): **Ajustement combiné du géoïde en prenant différentes réalisations par les pays voisins**, *Rap. Géoïde n° 23*, présenté aux Journées de Recherche de l'IGN, le 19 - 20 mars 1996

Jiang Z. (1996): **Remarques sur le géoïde et le quasi-géoïde**, *Rap. Géoïde n° 24*, mars 1996

Jiang Z. (1996): **Géoïde français G96-01a**, *Rap. Géoïde n° 25*, avril 1996

Everaerts M., Z. Jiang, C. Poitevin (1996): **Géoïde de Belgique BG96**, *Rap. Géoïde n° 26*, avril 1996

Jiang Z., M. Everaerts (1996): **Comparaison de l'intégration classique et de l'intégration rapide - réalisée lors du calcul du Géoïde de Belgique BG96 -**, *Rap. Géoïde n° 27*, mai 1996

Jiang Z. C. Boucher, L. Duhem (1996): **Evaluation des nouveaux modèles géopotentiels de GSFC/DMA**, *Rap. Géoïde n° 28*, juin 1996

Jiang Z. (1996): **Géoïde français G96-01b**, *Rap. Géoïde n° 30*, juillet 1996

Jiang Z. (1996): **Guide d'utilisation du géoïde français G96-01b**, *Rap. Géoïde n° 31*, juillet 1996

Jiang Z. (1996): **Combinaison optimale des données gravimétriques terrestres et du modèle géopotentiel**, *Rap. Géoïde n° 32*, août 1996

Jiang Z. (1996): **Quasi-géoïde gravimétrique français G96-02a et G96-03a - essais préliminaires**, *Rap. Géoïde n° 33*, août 1996

Jiang Z. (1996): **Méthode de calcul du géoïde français G96-01b et de l'estimation de précision,** *Rap. Géoïde n° 34*, septembre 1996

Jiang Z. (1996): **Méthodologie moderne de la détermination du géoïde et application à la réalisation d'une référence verticale opérationnelle: contribution au géoïde français,** ***Thèse,*** *Rap. Géoïde n° 35*, dec. 1996

3. Publications signées conjointement avec d'autres auteurs

Duquenne H., Z. Jiang, C. Lemarié (1994): **Geoid determination and levelling by GPS: some experiments on a test network**, IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity and Geoid, Graze, Austria, 14 - 17 Sept. 1994*

Poitevin C., Z. Jiang, M. Everaerts (1995): **Le géoïde gravimétrique en Belgique**, *Photogrammétrie - Télédétection et Cartographie*, n° 197-198, 1995, Belgium

Duquenne H.; Z. Jiang (1996): **The geoid in the southern Alps of France**, IN: *New Geoids In The World*, Special Issue of IAG, Bulletin d'Information n° 77, IGeS Bulletin n° 4, 1996

Duquenne H., Z. Jiang, C. Lemarié (1994): **Geoid determination and levelling by GPS: Some experiments on a test network**, *Proceedings of the Graz Symposium "Gravity and Geoid"*, Graz, Austria, 14-17, Sept. 1994

Boucher C., Z. Jiang, L. Duhem (1996): **Evaluation of the geoid derived by the GSFC/DMA models at the ITRF stations**, study report presented to the : Special Working Group On The GSFC/DMA Model Evaluation, International Geoid Service, IAG, June 1996

Doerflinger E., Z. Jiang, H. Duquenne, R. Bayer (1996): **Estimation of the quasi-geoid in mountain area: the example of the Eastern Pyrenees** (France), IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy* (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, University of Tokyo, Tokyo, Japan

Paquet P., Z. Jiang, M. Everaerts, C. Poitevin (1996): **A new Belgian geoid determination : BG96**, IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy* (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, University of Tokyo, Tokyo, Japan

Partie II: Publications principales

Publications

Abramowitz, Milton, Stegun, A. Irene (1964), Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics, Vol. 55, section 25.4, New York, USA

Balmino G. (1982): Résolution pratique des équations de Stokes et de Molodensky, BGI Note Technique N° 4, 1982

Balma G., G.Balmino, M.Sarrailh, D.Toustou (1992): Géoïde gravimétrique français, Etat d'avancement et programme de travail au GRGS/BGI, FRANCE.

Boucher C., Z. Altamimi (1992): The IERS terrestrial reference system, Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, 1992, USA.

Cui X.Z., Yu Z.T., Tao B.Z., Liu D.J. (1982): Generalised adjustment of surveying and mapping, pp. 242-247, Publishing House of Surveying and Mapping, Beijing, China.

Delomenie M. (1987): Calcul d'un géoïde gravimétrique sur la France, Rapport de Stage, IGN et BGI 1987

Denker H., D.B. Behrend, W. Torge (1996): The European gravimetric quasigeoid EGG95, IN: New Geoids In The World, Special Issue of IAG, Bulletin d'Information n° 77, IGeS Bulletin n° 4, 1996

Duquenne H., Z. Jiang (1996) The geoid in the southern Alps of France, IAG Bull. d'information n° 7, New Geoid in the World.

Duquenne H., Z. Jiang, C. Lemarié (1994): Geoid determination and levelling by GPS: Some experiments on a test network, Proceedings of the Graz Symposium "Gravity and Geoid", Graz, Austria, 14-17, Sept.

Forsberg R., C.C. Tscherning (1981) The use of height data in gravity field approximation by collocation, J. Geophys. Res. Vol. 86, B9, pp. 7843-7854

Forsberg R.(1984) A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, OSU, report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Forsberg R. (1985) Gravity field terrain effect computations by FFT, Bull. Geoid., Vol 59, pp. 342-360

Forsberg R.(1993) Modelling the fine-structure of the geoid: method, data requirements and some results, Surveys in Geophysics Vol. 14, pp. 403 - 418., Netherlands.

Forsberg R., M.G. Sideris (1993) Geoid computation by the multi-band spherical FFT approach, manuscripta geodaetica, vol. 18, pp82-90

Forsberg R. (1994) Terrain effects in geoid computation, Lecture notes of International school for the determination and use of the geoid, Milan, Oct. 10-15, 1994

Haagmans R., E. de Min, M. van Gelderen (1993) Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT and a comparison with existing methods for Stokes' integral, manuscripta geodaetica, vol. 18, pp227-241

Heiskanen W., H. Moritz (1967) Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, GRAZ, AUSTRIA

Isaacson, Eugene, Keller, B. Herbert (1966) Analysis of Numerical Methods, section 7.1, New York, USA

Jiang Z.(1987a): On China Gravimetric Standard, Bull. d'informaiton, BGI, n° 61, France.

Jiang Z.(1991a): On the Adjustment for an Attached Gravimetric Net, Acta Seismologica Sinica, Vol. 4, pp.535-545, China.

Jiang Z.(1991b): GPS Levelling, Technical and Scientific Developments in Surveying and Mapping, n° 5-6, pp.1-14.

Kearsley A.H.W. (1986) Data requirements for determining precise relative geoid heights from gravimetry, Journal of Geophysical Research Vol. 91, B9, pp. 9193 - 9201

Kenyeres A. (1992) GPS-gravimetric geoid determination based on combination of GPS/levelling and gravity data, Proceedings of First Continental Workshop on the Geoid in Europe, pp.482-490.

Levallois, J.J.: Calcul du géoïde gravimétrique sur le territoire de la France, Communication présentée à la XV assemblée, Moscou, août 1971, 26.829 - IGN

Li, Y.C., M.G.Sideris (1994): Minimisation and estimation of geoid undulation errors, Bulletin Géodésique, Vol. 68, pp.201-219.

Mainville A., R.Forsberg, M.G.Sideris (1990): GPS levelling - performance of geopotential models and gravimetric geoid methods in the great slave lake area, Proceedings of Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Ottawa, Canada, Sept.

Moritz H. (1968) On the use of the terrain correction in solving Molodensky's problem, OSU, report 108, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Moritz H. (1980) Advanced Physical Geodesy section 48, H. Wichman Verlag, Karlsruhe.

Press, M.H, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling (1986) Numerical Recipes, Cambridge University Press

Rapp, R. (1992): Computation and accuracy of global undulation models, Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, pp.865-871, USA.

Rapp R.H., Y.M. Wang, N.K.Pavils (1991): The Ohio State 1991 geopotentiel and sea surface topography harmonic coefficient models, OSU Rept. n° 410, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA.

Schwarz K.P., M.G. Sideris and R. Forsberg (1990) The use of FFT technique in physical geodesy. Geophys. J. Int. Vol. 100, pp. 485-514

Sideris M.G. (1985) A fast Fourier transform method of computing terrain correction, manuscripta geodaetica, Vol. 10, No. 1, pp. 66-73

Sideris M.G., She B. (1995) A new, high-resolution geoid for Canada and part of U.S. by the 1D-FFT method, Bulletin Géodésique, vol. 69, pp92-108

Sideris M.G (1996) FFT geoid computation in Canada, IAG Bull. d'information n° 7, New Geoid in the World.

Sjöberg L. (1981): Least squares combination of satellite and terrestrial data in physical geodesy, Ann. Géophys. 37, 25-30

Sjöberg L. (1984): Least squares modification of Stokes' and Vening Meinesz' formulas by accounting for trucation and potential coefficient errors, Mauscripta geodaetica, Vol. 9 (1984) 209-229

Tscherning C.C., Forsberg R., Knudsen P.(1992) The GRAVSOFT package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the geoid in Europe(1990), PRAGUE, CZECH Republic

Wang Y.M. (1993): On the optimal combination of potential coefficent model with terrestrial gravity data for FFT geoid computations, Mauscripta geodaetica, Vol. 18, 406-416

Wenzel H.G. (1982): Geoid computation by least squares spectral combination using integral kernels, Proceed. IAG General Meeting, 438-453, Tokyo

Publications importantes avec résumés

ABD-ELMOTAAL .H: Modelling the global topographic-isostatic covariance function, Manuscripta geodaetica (1991) 16:243-253

Abstract: The two-components degree variance model introduced by Moritz (1977) is used to model analytically a global topogrphic-isostatic covariance function. Different model-fitting concepts are used. ... The results show a close relation between the horizontal gradient variance G_{oH} and the variance of the point isostatic gravity anomalies C_o (especially when using the free adjustment technique).

ARENT N. : Method for obtaining geoid undulations from satellite altimetry data by a quasi-geostrophic model of the sea surface topography, Manuscripta geodaetica (1992) 17:174-185

Abstract: The simultaneous estimation of the geoid undulations above a reference ellipsoid, the heights of the sea surface above the geoid and the radial components of the orbital error of a satellite carrying an altimeter is proposed.

AYHAN M.E.: Geoid determination in Turkey (TG-91), Bulletin Géodésique (1993) 67: 10:22

Abstract: 2.1 - 2.6 ppm accuracy for average baseline length of 45 km of GPS is obtained

CRESPI M. et al: GPS levelling and the geoid, to 2nd International seminar on "GPS in Central Europe" Penc, Hungary , 1993

Abstract: The method can be imagined as an interpolation solution, where the high accuracy GPS geoid heights are 'interpolated' by high resolution gravity data. The reference system of GPS-gravimetric will be the system of the given GPS network, which garantee the direct usefulness of the solution for GPS-levelling works.

BIRARDI G. : The Italian north-south GPS traverse and a proposal for a "first order" Italian geoidal net, Bulletin Géodésique (1993) 67 No 4

Abstract: The Italian portion of the European GPS Traverse to improve the definition of the European geoid is summarized. A comparison with the results of the Italgeo '90 geoid, and a tentative profile of the Italian geoid along the whole traverse are also sketched. ... a sub-decimetric accuracy in the Italian GPS derived orthometric heights may probably be achieved.

CAPORALI A.: Combined regional geoid determination for the ERS-1 radar altimeter calibration, Bulletin Géodésique (1993) 67, No 3

Abstract: A local model of the geoid in NE Italy and its section along the "Venice" ground track of the ERS-1 satellite of the European Space Agency is presented. The observational data consist of geoid undulations

determined with a network of 25 stations of known orthometric (by spirit levelling) and ellipsoidal (by GPS differential survey) and of 13 deflections of the vertical measured at sites of the network for which, besides the ellipsoidal (WGS 84) coordinates, also astronomic coordinates were known.

DUQUENNE H.: The new digital Topographic model of France, 1992
Abstract: In March 1991, the IAG - Subcommission for the Geoid in Europe and the Bureau Gravimétrique International requested the Institut Géographique National to supply a digital terrain model (DTM) covering France, in order to contribute to the determination of high precision geoid models. The paper descibes the new DTM and the raw data from which it is achieved. Some improvements are considered. IGN carried out a new DTM with a resolution of 4.5" x 6", which is to fulfil the present needs.

FARELLY B.: The geodetic approximations in the conversion of geoid height to gravity anomaly by Fourier transform, Bulletin Géodésique (1991) 65:92-101
Abstract: Six sources of error in the use of Fourier methods for the conversion of geoid heihts to gravity anomalies are unimportant. The errors due to approximations in Stokes' integral may be elminated by use of the gravity coating rather than the gravity anomaly. The chord-to-arc error and the truncation error may be reduced by using a reference field. Tapering of the edges of the measurement window reduces the truncation error. The long-wavelength components of the high degree spherical harmonics cause small offests in the resulting gravity anomalies. The errors due to the plane approximation can be reduced by approximate choice of map projection and area of integration.

FEATHERSTONE W.E.: Kernel Modifications in the Stocke's contribution to gravimetric geoid determination to IAG General Meeting, Beijing, 1993
Abstract: Numerical integration of modified Stokes' formulae are tested with control geoid heights derived from GPS. Root mean square comparisons demonstrates that low degree kernel modificaions are necessary when computing gravimetric geoid heights. This has implications on those implementations of Stokes' formula which omit kernel modifications.

FORSBERG R. et al. : Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach, Manuscripta geodaetica (1993) 18: 82-90
Abstract: The multi-band spherical FFT approach is generalization of the Strang van Hess spherical FFT geoid prediction method, allowing virtually error-free spherical FFT solutions through utilization of continously merged 'stripes ' of transforms. The errors of the planar and spherical FFT methods are investigated by comparing the geoids predicted from spherical harmonic models to geoids obtained by transforming the corresponding gravity anomalies.

FORSBERG R.: Modelling the fine-structure of the geoid: methods, data requirements and some results, Geodetic division, Denmark
Abstract: In this paper the geoid modelling methods and problems are reviewed, and some investigations on local data requirements for cm-level geoid prediction are presented. Some actual resutls are presente from Scandinavia, where a recent regional high-resolution geoid model yields apparent accuracies of 2-10 cm over GPS baselines of 50 to 2000 km.

GAUN Z. et al : Modified Stokes' integral formulas using FFT, Manuscripta geodaetica (1992) 17 No 4
Abstract: This paper presents a general modified Stokes' intergral formula, which takes a spherical rectangle as an inner zone. Base on this general formula, a very practical formula is derived in the case of planar approximation such that FFT technique can be used, and much computer time can be saved.

GIL A.J.et al. determination in central Spain from gravity and height data, Bulletin Géodésique (1993) 67 No 1
Abstract: The least-squares collocation method, combining a geopotential model complete to degree and order 360, gravity anomalies and topographic information. The area has been divided into two 1° x 1° block with gravity data spacing about 5' x 5' within each block, extended 1/2 °. Topograghic effects have been calculated from 6" x 9" heights using an RTM (residual terrain model)

HAAGMANS R. et al : Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral, Manuscripta geodaetica (1993) 18: 227- 241
Abstract: In contrast to existing 2D FFT methods, only yielding approximate results, an exact evaluation of the integral on the sphere is possible. This can be achieved by applying 1D FFT for the convolution of the kernel function and the data in east-west direction combined with an integration (or summation) over parallels. It is shown how the 1D FFT method can be applied to Vening Meinesz' formulae, Hotine's, Poisson's, and of course Stokes, integral.

IHDE J.: Some remarks on geodetic reference systems in Eastern Europe in preparation on a uniform European geoid, Bulletin Géodésique 67 No.2
Abstract: In view of a uniform European geoid determination with centimeter accuracy the situation of the geodetic reference systems in Eastern Europe is described. For the necessary transformations into a uniform reference system the relevant relations are specified.

JIANG Z.: GPS Levelling, Development of Surveying and Mapping, No. 2 1992, Research Institut of Surverying and Mapping, Pékin
Abstract: Based on the studies and experiments available on GPS levelling, the auther discussed various theories and methods, by which, the orthometric height can be determined by the combination of GPS technique and gravimetric solution without using traditional precise levelling.
It is concluded that 5 - 10 ppm, the relative accuracy, can be reached in flat area by geometric means, the same accuracy can be got with gravity data in mountainous area, and by combined adjustment, using the two parts of observations mentioned above, a better result with the accuracy of 2 - 3 ppm could be expected. It is possible that some jobs done by traditional precise levelling would be then taken over by GPS levelling in the coming future.

JIANG Z.: Détermination du géoïde local par géodésie intégrée, Rapport de stage, DEA Astronomie, Mécanique céleste et Géodésie, Sept. 1993
Abstract: La géodésie intégrée nous permet de triater des nombreux types d'observations ou de pseudo-observations de géodésie terrestre, de nivellement, de géodésie spatiale, de gravimétrie, d'astronomie, etc. Les unconnues que l'on veut déterminer sont des paramètres du champ de pesanteur, de position de stations, des inconnues auxiliaires, et la hauteur géoïdale et son erreur... On discute des théories et des méthodes principales, classiques et modernes, pour déterminer le géoïde.

KLOSE U.et al.: A solution to the singulariy problem ocurring in the terrain correction formula, Manuscripta geodaetica (1993) 18 : 263 - 279
Abstract: The computation formula for the planar gravimetric terrain correction is expressed as an infinite sum of formal convolution integrals. They are formal in so far as the intergrands in each term are non-integrable and the convolutions cannot be computed by Fourier transform techniques. Therefore, prior to their application the integrands have to be regularized and a new solution is given for the regularization due to Harrison and Dickinson. The existing regularization techniques either are restricted to a finite number of series terms or are not properly founded. In order to overcome thses difficlulties the application of tempered distributions is proposed. With this tool the planar gravimetric terrain correction is given rigorously as an infinted series expansion of non-classical Fourier transformations and finally calculated numerically by very efficient Fast Fourier Transform technique.

KNICKMEYER E., SCHWARZ K.P.: Geoid deternination using GPS-aided inertial systems, Department of surveying Engineering, The Uninversity of Calgary, Canada
Abstract: The paper discusses a kinematic method of determining continuous geoid profiles from a combination of INS and GPS measurements. The major erro sources, namely gyro drift, accelerometer bias variation, and GPS noise are modelled separately and their effect on the resulting relative geoid is studied.

LEHMANN .R. : The method of free-positioned point masses - geoid studies on the Gulf of Bothnia, Bulletin Géodésique (1993) 67: 31-40
Abstract: Gravity data inversion methods using spatial source distribtions are frequently investigated and applied in Geodesy. Nearly all of them construct a fixed geometry for the sources. It was shwon that this is not al all necessary. We give an approach to the problem of geoid determination based on free-positioned point masses. ... We determine a pure gravimetric geoid solution as well as a combined solution based on gravimetric and altimetric data. The problem of gross error detection in the altimetry is treated. The prediction accuracies obtained prouve the method to be suitable for such a problem.

MARTINEC Z. et al.: On Helmert's 2nd condensation method, Manuscripta geodaetica, Vol.18, No. 6, 1993
Abstract: In the past, two different methods were proposed to consider the effect of the terrain in Helmert's 2nd condensation method. In Vanicek, approach the attraction of the topographical masses is evaluated at a point on the topographical surface. By analogy with the Molodensky's theory, Wang claim that the free-air anomaly should be reduced by the terrain correction. They also state that the attraction of the topographical masses should be referred to a point on the geoid. This paper shows that key to solve this discrepancy is hidden in the way how the downward continuation of the anomalous gravity is treated in the particular methodes. ...

NAGY D. et al : Local geoid computation from gravity using the fast fourier transform technique, Bulll. Géod. 64 (1990) 283-294

Abstract: Model computation were performed for the study of numerical errors which are interjected into local geoid computaions by FFT. The gravity field model was generated through the attractions of granitic prisms derived from actual geology. Changes in sampling interval introduced only 0.3cm variation in geoid heights. Although zero padding alone provided an improvement of more than 5 cm in the FFT generated geoid, the combination of spectral windowing (tapering) and padding further reduced numerical errors.

PETROVSKAYA M.S. et al.: Methods for compact approximation of the geoid height, Manuscripta geodaetica (1990) 15: 253 - 260
Abstract: Compact modifications of two Molodensky's methods, as well as of Ostach-Meissl's, have been derived for geoid height approximation. One can choose the optimal set of three kinds of coefficients at a given cap radius, as well as reveal the optimal cap size for a fixed number of terms in the geopotential model and a given accuracy of computation.

SIDERIS G. : Rigorous gravimetric terrain modelling using Molodensky's operator, Manuscripta geodaetica (1990) 15: 97-106
Abstract: The theoretical problem with the techniques of FFT is that the kernel functions involved are often singular. In this paper, the planar gravity terrain effect integrals are treated from the beginning without the usual approximations, except for the assumption of constant density which was kept for the sake of implicity. New rigorous, simpler and more efficient formulas are developed, based on the successive application of Molodensky's vertical derivative operator to powers of heights. Term of any order can now be efficiently computed by FFT using the newly developed formulas, giving the effect of the terrain on gravity, gradiometry, deflections of the vertical and undulations of the geoid.

SJÖBERG. L.: Terrain effects in the atmospheric gravity and geoid corrections, Bulletin Géodésique (1993) 67 No 3
Abstract: The removal and restoring of the atmosphere in solving the exterior boundary value problems thus correspond to gravity and geoid corrections of the order of 0.9 mGal and -0.7 cm, repectively.
We demonstrate that the gravity terrain correction for the removal of the atmosphere is of the order of 50 uGal/km of elevation with a maximum close to 0.5 mGal at the top of Mount Everest. The corresponding effect on the geoid may reach several centimetres in mountainous region. Also the total effect on geoid determination for removal and restoring the atmosphere may contribute significantly, in particular by long wavelengths. This is not the case for the quasi geoid in mountainous regions.

SJÖBERG L.E. et al : Geoidal undulation computaion by modifying Stoke's kernel versus Hotine's kernel from gravity anomalies, Manuscripta geodaetica (1992) 17: 135-140
Abstract: The Wong and Gore type modified Stokes' formula is compared with a modificaton using Hotine's kernel. A numerical analysis show that there are cases, where the Hotine kernel is superior to the Stokes' kernel.

SJÖBERG L.E. et al. : Estimates of present rates of land and geoid uplift in eastern Nourth America, Manuscripta geodaetica (1990) 15: 261-272
Abstract: The maximum 'observed uplift' rate with respect to crust is estimated to be 10.9 +/-1.3 mm/a in southeastern Hudson Bay. A simple viscous flow model is used to estimate the temporal change of the geoid accompanying the observed uplift. ... It is estimated that current sedimentaion in Hudson Bay may contribute an additional 0.03 mm/a to the geoidal rise.

TSCHERNING C.C et al. : Harmonic continuation and gridding effects on geoid height prediction, Bull. Géod. 66 (1992) 41-53
Abstract: Proper handling of harmonic continuation is important, even when we as here have used a 1 km resolution DTM for the calculation of topographic effects. The effect of data gridding, required for the FFT method, seems not to be as serious as the need to limit the data distribution area, required when least squares collocaion is used with randomly distributed data.

VANICEK P. et al : A comparison of Stokes's and Hotine's approaches to geoid computation, Manuscripta geodaetica (1992) 17: 29-35
Abstract: In the paper, the classical as well as the generalized Stokes techniques - in which use is made of higher-order reference spheroid defined by satellite determined potential coefficients - are compared with Hotine's technique for geoid determination. While the Stokes techniques use gravity anomalies, Hotine's technique sues gravity disturbances. The geoid (assumed known) is replaced by a higher-order reference spheroid. Two approximate variations of Hotine's technique are then considered, and it is shown that under specific circumstances both of Hothine's variations give more accurate results than the Stokes techiques.

VERMEER M.: Progress on Geoid Determination in Europe, President, Subcommission for the Geoid in Europe, FGI, Finland

Abstract: This paper explains the importance of data availability and completenness of coverage (both anomalies and terrain data) for successful geoid determination, and the uses to which such a geoid may be put.

VERMEER M.: Filtrered terrain effects: a frequency domain approach to terrain effect evaluation, Manuscripta geodaetica (1992) 17 No 4
Abstract: A method resembling the "Residual Terrain Model" (RTM) is described, but formulated with more mathematical rigour, as a frequency-domain separation method. The "Filtered Terrain Effect"(FTE) reduction considers only the part of the topography-induced potential field above a specified cutoff frequency. We give FFT-based formulas for its evaluation, for the potential as well as for its first- and second-order derivatives; it is shown that the remaining topographic field, being long wavelength only, can be downward continued to the geoid, i.e. correctly represented "as if " emanating from masses internal to the geoid only.

WANG Y.M. : The effect of topography on the determination of the geoid using analytical downward continuation, Bull. Géod. 64(1990) 231-246
Abstract: The disturbing potential obtained by using the analytical downward continuation is different from the true disturbing potential on the sea level mostly by a term $-2\pi G\rho h_p^2$. This correction is important and it is very easy to compute and add to the final resutls. A terrain effect (effect of the topography from the Bouguer plate) is found to be much smaller than the correction of the Bouguer plate and can be neglected in most cases; The geoid determined by using the Helmert's second condensation(including the indirect effect) and using the analytical downward continuation procedure (including the topographic effect) are identical.

WANG Y.M.: On the optimal combination of potential coefficient model with terrestrial gravity data for FFT geoid computations, Manuscripta geodaetica, Vol.18, No. 6, 1993
Abstract: The local geoid undulation is usually computed by combinning a potential coefficient model with terrestrial gravity data. In order to get the best estimate of the geoid, a procedure is proposed that has the following advantages: a) the error of the geoid caused by the terrestrial gravity data error, the coefficient error and the truncation error are minimized in a least squares sense; b) the fast Fourier techniques may be used. The procedure is simple, but it is accurate and efficient for practical geoid computations.

WANG M.Y. : Terrain effects on geoid undulation computations, Manuscripta geodaetica (1990) 15: 23- 29
Abstract: The paper examines two methods for considering the effect of terrain in the calculation of geoid undulations. One mehtod is associated with the usual terrain correction as documented by Moritz. The second method, developed by Vanicek and Kleusberg, uses a correction term depending on topography, but in a much different way from Moritz. A theoretical discussion shows that the Moritz interpretation results in a free-air anomaly on the surface of a co-geoid defined by the Helmert second condensation procedure. The Vanicek reduction implies a free-air anomaly that refers to a surface of varying elevation. We feel that the use of such an anomaly in the Stokes' equation is inappropriate. Numerical calculations were carried out.

WANG Y.M. : Comments on proper use of the terrain correction for the computation of height anomalies, Manuscripta geodaetica (1993) 18: 53 - 57
Abstract: The Faye anomaly can be used for the geoid computaions. The Faye anomaly can also be used for solving the Molodensky's boundary value problem. Unfortunaltely the formulas for the geoid and height anolmay computations are the same (to a first-order approximation) which is in conflict with the fact that the two surfaces can be different by a meter in mountain areas. It was found that the conflict is caused by an inadequate application of the relationship between the Stokes and gradient operator LS = -I on the elevation h and h^2. A more accurate formula for the height anomaly computation using the Faye anomaly is given. The use of the terrain correction for the computation of the deflections of the vertical is also inspected.

WEIGEL G.: Geoid undulation computations at doppler satellite tracking stations, Manuscripta geodaetica (1993) 18 : 10-25
Abstract: Stockes' method (Meissl's modification) was used to compute serveral sets of WGS 84 gravimetric geoid undulations at 660 globally distributed Doppler station sites from WGS 84 geopotential coefficients. ... Through a comparison of solutions, estimates of systematic effects (1σ) were obtained for the 60° cap size solution (1.3m) and for vertical datum inconsistencies (0.8m).

Chapitre V Annexe: articles publiés dans des revues internationales ou des annales de congrès internationaux

A5-1 On fast integration for geoid determination

A5-2 Geoid interpolation using GPS levelling points and digital terrain model

A5-3 On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination

A5-4 On the combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points

A5-5 A new Belgian geoid determination : BG96

A5-6 Geoid determination in France

A5-1 On fast integration for geoid determination
IN: *Journal of Geodesy*, 71: 59-69

ON FAST INTEGRATION IN GEOID DETERMINATION

Z. JIANG[1] and H. DUQUENNE[2]

1: French National Geographical Institute, 94160 Saint Mandé, France, email: jiang@schubert.ign.fr, fax: 33 1 4398 8488

2: Ecole Supérieure des Géomètres et Topographes, 91025 Evry, France, email: duquenne@uranus.ign.fr

Abstract. In gravimetric geoid determination, there are three integrals to be evaluated: Stokes, terrain correction and potential. Using geographical grid data, the straightforward evaluation gives an 'exact' summation but is very time-consuming. This paper proposes a new method which is based on the modification of the integrated 2D or 3D function into a 1D (spherical distance angle) function applied to an optimal quadrature. The advantages are: a) It is exact (without approximation, especially the singularities have been removed) and can be used for all the three integrals; b) It involves gridded data and is easy to handle; c) It greatly speeds up the computation. A great mountain area, the southern Alps, has been chosen to test the new method. Numerical tests show that: compared with the straightforward evaluation, the new technique consumes on average only 1.23% of CPU time for the three integrals without adversely affecting accuracy.

1 Introduction

Geoid determination is a basic problem of geodesy, which depends nowadays principally on the modified theories of Stokes and Molodensky. A new national-wide geoid determination is being carried out in France. One of the problem encountered has been the discrepancy between the accuracy and computation time. In practice, when using either of these two theories, it is necessary to repeatedly calculate the three well known integrals as follows [c.f. beginning of section 3 for the notation in (1-1) ~ (1-3)]:

(1) Stokes' integral (in spherical approximation):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \Delta g S(\psi)\, d\sigma \qquad (1\text{-}1)$$

(2) Integral of potential:

$$U = k\iiint_{V} \frac{dm}{r} = k\iiint_{V} \frac{\rho dV}{r} \qquad (1\text{-}2)$$

(3) As well as its derivative: the integral of gravitation, a typical example is terrain correction (Moritz 1968):

$$C = -k\rho\iint_{\sigma}\int_{z=H_p}^{H} \frac{z-H_p}{r^3} dz d\sigma \qquad (1\text{-}3)$$

Remark: During the following discussions, the concept of an 'exact' solution makes sense if hold the three conditions:
a) No singularity in the integration interval;
b) Spherical approximation or it can be avoided;
c) High order approximation of slope distance r.

To calculate these three integrals, the classical method is based on an approximate evaluation by summation (Heiskanen and Moritz 1967). The surfaces evaluated are replaced by small but finite compartments which are obtained by suitably subdividing the integrated surface. A major problem with this method is the singularity. When $r \to 0$, all the three kernels $\to \infty$. Some specials treatments based on linear hypothesis have to be done in a central area (c.f. Heiskanen and Moritz 1967). The numerical method has been perfectly developed by several authors such as Forsberg (1984). Except for the singular problem, the classical method gives exact summation but is very time-consuming.

For the past few years, attention to evaluate these integrals has being focused on using FFT techniques, Forsberg (1985), Sideris (1985), Schwarz et al. (1990). The advantage of FFT is just as Schwarz et al (1990) have shown: its most outstanding feature is numerical speed which, in many cases, improves by at least an order of magnitude. However, in these earlier studies, too many approximations have been made to yield a geoid with cm-accuracy.

In more recent years, progress has been made in improving evaluations through the use of FFT. A multi-band FFT has been proposed to overcome the weaknesses of the planar approximation used in FFT (Forsberg and Sideris 1993). By dividing the area in question into a set of equidistant latitude zones extending from a northern limit to a southern limit, the integration is computed bandwise from north to south. However, there are slight discrepancies with subsequent solutions at band boundaries.

proposed and used in practice (Haagmans et al.1993, Sideris and She 1995, Denker et al.1996). Stokes' integral can be computed in 0.5% of the straightforward summation time.

It appears here that the multi-band and 1D-FFT methods are (quasi) exact in the sense of spherical approximation and can be used efficiently for Stokes' integration. As for eq. (1-2) and (1-3), linear approximations of the slope distance r are still used. Theoretically, all the integrals which can be written in convolution series may be evaluated by using FFT. However, high order approximations may make the FFT method less efficient and more difficult to deal with.

We are going to see that Stokes integral consumes only 0.54% of total time used for the three integrations (Tab. 6). and that in mountain areas the linear approximations for eq. (1-2) and (1-3) may cause respectively the errors of 1 ~ 3 cm or several mgals, which should not be ignored in cm-accuracy geoid determination (Tab. 1 and 2). It seems the discrepancy between accuracy and time consummation is still an open question. For the new French national-wide geoid determination program, it has been decided that in order to get the highest accuracy, only exact methods should be used.

The authors propose a new method here. The principle is to take advantage of the "isotropy* " of the functions integrated into the spherical angle ψ (spherical distance) and to apply an optimal numerical process to evaluate them. The latter speeds up the computation while controlling accuracy. The key problem is therefore to modify the integrated functions from three proper variables (φ, λ, H) into only one variable ψ . Advantages of the method are:

1) There is a rigorous solution** without approximation or singularity when ψ or $r \to 0$ so that special treatment for the central area is no longer necessary;
2) It can be used for all the three integrals and is easy to be adopted for the other problems of physical geodesy;
3) It involves the use of gridded data and is easy to handle;
4) It greatly speeds up computation (at least one order of magnitude in terms of time, as what through FFT gains).

The following discussion includes: a) a rapid review of the numerical integrals; b) modifications of the original integrals in order to adapt them into a suitable form of quadrature; and finally c) numerical tests. Our intent is thus to explain the method in view of its application; therefore, a simple, rather than completely rigorous, presentation is offered.

2 A quick review of the quadrature methods used

The quadrature methods are based on the obvious device of adding up the value of the integrals for a sequence of abscissas within the range of integration. The objective is to obtain the integral as accurately as possible with the smallest number of function evaluations of the integrals. Romberg integration, combined with the extended trapezoidal rule and the extended midpoint rule which are discussed in this paper as examples, is a general formality to make use of integration methods in a variety of different orders and it is widely used in practice. Apart from this, there are yet other methods to evaluate integrals. One other important class is based on functions approximations such as the Chebyshev approximated function and cubic spline quadrature.

We have a sequence of abscissas, denoted $x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}$ which are spaced apart by a constant step h: $x_i = x_0 + i \times h,\ i = 0,1,\ldots,N+1$. A function $f(x)$ has known values at the x_i's, $f(x_i) = f_i$. The integration is:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx \tag{2-1}$$

where a and b are each equal to one or the other of x_i's. An integration formula that uses the value of the function at the end points, $f(a)$ or $f(b)$, is called a *closed formula*, which is used in the case of regularity. Occasionally, it is necessary to integrate a function whose value at one or both endpoints is difficult to compute (e.g. f goes to a limit of zero over zero or worse yet, has an integral singularity there). In this case, it is necessary to use an *open formula*, which estimates the integral using only x_i's strictly between a and b.

From Abramowitz et al (1964) and Isaacson et al (1966), there are the formulas for the:

Extended trapezoidal rule (closed)

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right] + O\left((b-a)^3 f''/N^2\right) \tag{2-2}$$

Extended midpoint rule (open)

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h\left[f_{3/2} + f_{5/2} + f_{7/2} + \ldots + f_{N-3/2} + f_{N-1/2}\right] + O\left(1/N^3\right) \tag{2-3}$$

where the limits of integration are located halfway between tabulated abscissas; and the

---

* "isotropy" means that an integral element having an effect on the computed point does not depend on the azimuth but on the distance and the difference of height. The integral over azimuth can such be replaced by a simple mean value operator (eq. 3-2). This saves time (Tab. 6).

** When using remove-restore (r-r) technique (Forsberg and Tscherning 1981), it is only necessary to evaluate the three integrals over an area about 0.5° ~ 1° around the computed geoid/gravity points. When the computation is carried out point by point, the spherical problem is in fact automatically avoided. Therefore, the rigorous solution implies no recourse to a linear hypothesis, no singularity and a spherical approximation. This leads to improved accuracy (Tab. 3 and 5).

Semi-open formula

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h\left[23/12\, f_2 + 7/12\, f_3 + f_4 + \ldots + f_{N-2} + 13/12\, f_{N-1} + 5/12\, f_N\right] + O\left(1/N^3\right) \quad (2\text{-}4)$$

This formula with error term decreasing as $O(1/N^3)$ is closed on the right and open on the left.

Some elementary algorithms. Taking the trapezoidal rule as an example, for a fixed function $f(x)$ to be integrated between fixed limits a and b, the number of intervals in the extended trapezoidal can be doubled (and in the case of the extended midpoint rule, the number of intervals is tripled) without losing the benefit of previous works. The coarsest implementation is to average the function at its endpoints a and b. The first stage of refinement is to add the value of the function to this average at the halfway point. The second stage of refinement is to add the values at the 1/4 and 3/4 points. And so on. Obviously, this computation can be refined until it reaches some specified degree of accuracy. This is in fact how integration accuracy can be controlled. In practice, a control constant has to be determined, which is equal or identical to an error less than 0.2 cm. It is negligible in a geoid determination accurate to the centimetre.

Romberg integration. The basic idea applied in practice is to use the results from k successive refinements to remove all terms in the error series up to but not including $O(N^{2k})$. For example, some numerical algorithm may be calculated for various values of a parameter h, and then extrapolate (by a polynomial in our case) to the continuum limit $h=0$, i.e. to extrapolate the successive refinements to "0" step-size.

Improper integrals: In case of singularity, there must be a work-horse, which is an open formula, in that the integral need not to be evaluated at the endpoint. Equation (2-3), the extended midpoint rule, is the best choice. This computation will therefore always be convergent.

3 Modification of the integral kernels

Some notation:
N = geoid (quasi-geoid) height
R = mean radius of the earth
γ = mean gravity value
Δg = gravity anomaly
ψ or r_0 = spherical angle (distance) between the fixed and current points on the geoid
r = slope distance between the fixed point and the current point, which are both on the topographical surface
r' = slope distance between the fixed point on the topographical surface and the current point on the reference surface
φ, λ = latitude and longitude
α = azimuth of the current point
S(ψ) = Stokes' function, let $t = \sin\psi/2$:

$$S(\psi) = 1/t - 6t + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln(t + t^2) \quad (3\text{-}1)$$

σ = surface of integral
U = potential function
T = disturbing potential function
k = gravitational constant
dm = element of the mass M
ρ = mass density (constant)
p = point to compute on the topographical surface
q = current point on the topographical surface
q' = current point on the reference surface
H= orthometrical height
RTM = residual terrain model
DTM = digital terrain model
ref = reference (terrain or geopotential) model
C = terrain correction
C_{RTM}, C_{ref} = terrain correction relative to RTM or ref
mean value operator with respect to azimuth:

$$M\{f(\bullet)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\bullet)d\alpha = \frac{1}{N}\sum_{i_\alpha=1}^{N} f_{i_\alpha}(\bullet) = \bar{f}(\bullet) \quad (3\text{-}2)$$

Example: Taking $f(\bullet) = H(\psi)$ with ψ as diameter, the operation $M\{H(\psi = \psi_0)\}$ looks for all the $H(\psi = \psi_0)$ in a gridded file by changing azimuth α and then makes out the mean value. Considering a circle projected on a geographical coordinate grid (steps $\Delta\varphi$ and $\Delta\lambda$) is a quasi ellipse, the position of a current point $q(\varphi, \lambda)$ relative to a computed point $p(\varphi_0, \lambda_0)$ can be determined by the following relationship holding when ψ is not very great:

$$a = \psi/(\Delta\lambda\cos\varphi_0),\ b = \psi/\Delta\varphi$$
$$x = a \times \cos(\alpha), \quad (3\text{-}3)$$
$$y = b \times \sin(\alpha)$$

Because of the isotropy to ψ or r_0, the M{ } operator in fact plays the role of the integration with respect to azimuth α. It makes our formula derivations simpler and clearer and the numerical calculation faster.

3.1 Modification of Stokes' integral

Stokes' integral (1-1) can be written as:

$$N(\psi,\alpha) = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\psi=0}^{\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi,\alpha) S(\psi)\sin\psi d\psi d\alpha \quad (3\text{-}3)$$

Denoting:

$$f(\psi) = S(\psi)\sin\psi = 2\cos\frac{\psi}{2} - \sin\psi \times \left[6t + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln(t + t^2)\right] \quad (3\text{-}4)$$

$$F(\psi) = \Delta\bar{g}(\psi) f(\psi)$$

$$\Delta\bar{g}(\psi) = M\{\Delta g(\psi,\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g(\psi,\alpha)d\alpha$$

(3-3) becomes:

$$N(\psi)=\frac{R}{2\gamma}\int_0^{\psi}F(\psi)d\psi \qquad (3\text{-}5)$$

This leads such to a simple expression of Stokes' integral which is only a function of ψ . Furthermore, the singularity in the original kernel, due to the Stokes' function, has been removed. In fact, the mean value $\Delta\bar{g}(\psi)$ is obviously limited and the function $f(\psi)$ is very well behaved with no singularity in $[0,\pi]$, having a maximum value of about 2.5 at $\psi \cong 10°$ and approaching 2 as $\psi \to 0$, (Kearsley 1986). The new kernel $F(\psi)$ which is a constant for a fixed ψ is therefore a non-singular function. (3-5) is a spherical approximation and holds for all $0 \le \psi \le \pi$. The modified integral (3-5) can then be evaluated efficiently by using the extended trapezoidal rule (closed) combined with the Romberg method.

3.2 Modification of the integral of the potential function

3.2.1 Modification

The word potential here refers to the disturbing potential issued by the "disturbing mass". This is important because the simple relationship between the disturbing potential and geoidal height can be given by Bruns' famous formula:

$$N=\frac{T}{\gamma} \quad \text{or} \quad \delta N=\frac{\delta T}{\gamma} \qquad (3\text{-}6)$$

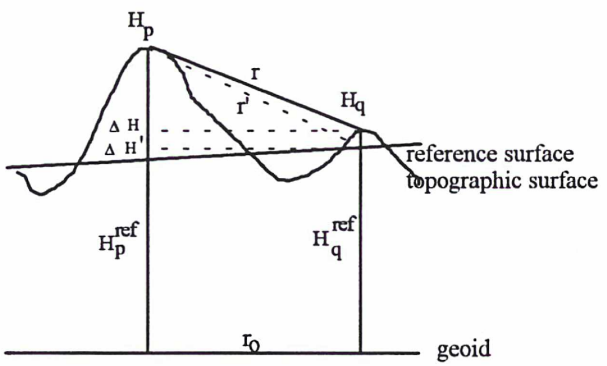


Fig. 1 Demonstration of the definitions

Because the RTM (Forsberg and Tscherning 1981) has been widely and successfully used in the geoid computation, our development of the modification will be discussed in terms of RTM. For general case, just note the reference surface height as H^{ref}=0. The potential issued by RTM can be written as (Forsberg 1984):

$$\delta U_{RTM}=k\rho\iiint_V\frac{dV}{r}=k\rho\int_\sigma\int_{H^{ref}}^{H}\frac{dz}{r}d\sigma \qquad (3\text{-}7)$$

When using the r-r technique, only a neighbourhood of, say 0.5° ~ 1.0°, around the computed point p needs to be considered. Then the following relations hold (c.f. Fig.1):

$$r_0=R\psi,\ d\sigma=r_0dr_0d\alpha \qquad (3\text{-}8)a$$

$$dr_0=Rd\psi,\ \Delta H=H_q-H_p,\ r^2=r_0^2+\Delta H^2 \qquad (3\text{-}8)b$$

$$\Delta H'=H_q^{ref}-H_p,\ r'^2=r_0^2+\Delta H'^2 \qquad (3\text{-}8)c$$

Because the reference surface is close to the topographical surface, the RTM potential can therefore be represented by a mass coating on the reference surface with a density $\rho'=\rho(H_q-H_q^{ref})$. To do it needs simply to substitute the r by r' in eq. (3-7):

$$\begin{aligned}\delta U_{RTM}&=k\rho\int_\sigma\int_{H^{ref}}^{H}\frac{dz}{r'}d\sigma=k\rho\int_\sigma\frac{H-H^{ref}}{r'}d\sigma\\&=k\rho\int_0^a\left(\int_0^{2\pi}\frac{H-H^{ref}}{r'}d\alpha\right)r_0dr_0\end{aligned} \qquad (3\text{-}9)$$

Remark: (3-9) is not the linear approximation (eq. 3-14b) shown in (Forsberg 1984), where in the place of r', it is r_0.

Introducing the mean value operator (3-2) yields:

$$\delta U_{RTM}=2\pi k\rho\int_0^a M\left\{\frac{H-H^{ref}}{\sqrt{r_0^2+\Delta H'^2}}\right\}r_0dr_0 \qquad (3\text{-}10)$$

or

$$\delta U_{RTM}=2\pi k\rho R\int_0^{\psi}M\left\{\frac{H-H^{ref}}{\sqrt{\psi^2+\Delta H'^2/R^2}}\right\}\psi d\psi \qquad (3\text{-}11)$$

Obviously, this integral is only the function of spherical angle ψ and it can easily be proved that this integral has no singularity. In fact, when $\psi \to 0$ the kernel (see Fig. 1):

$$\left|M\left\{\frac{H-H^{ref}}{\sqrt{\psi^2+\Delta H'^2/R^2}}\right\}\psi\right|\le M\left\{\frac{\left|H-H^{ref}\right|}{\sqrt{\psi^2+\Delta H'^2/R^2}}\right\}\psi$$

$$\le M\left\{\frac{\left|H-H^{ref}\right|}{\sqrt{\psi^2}}\right\}\psi=M\left\{\left|H-H^{ref}\right|\right\} \qquad (3\text{-}12)$$

Just like Stokes' integral, the integral of the potential (3-11) can be evaluated by using the quadrature method of section 2. (3-11) is rigorous and can be further simplified by applying the mean value operator directly to the terms $H-H^{ref}$ and $\Delta H'^2$ (this enables to greatly speed up the computation and error caused is negligible c.f. Appendix):

$$\delta U_{RTM}=2\pi k\rho R\int_0^{\psi}\frac{M\left\{H-H^{ref}\right\}\psi d\psi}{\sqrt{\psi^2+M\left\{\Delta H'^2\right\}/R^2}} \qquad (3\text{-}13)$$

We call (3-13) a <u>rigorous formula</u>. Ignoring the second term of the square root in equations (3-11,13), which is the same as replacing r' by r_0 in eq. (3-9), the result is a

<u>linear approximation:</u>

$$\delta U_{RTM} = 2\pi k\rho R \int_0^{\psi} M\{H - H^{ref}\} d\psi \qquad (3\text{-}14)a$$

Inserting (3-2) and (3-8)a,b into (3-14)a yields:

$$\delta U_{RTM} = k\rho \iint_{\sigma} \frac{H - H^{ref}}{r_0} d\sigma \qquad (3\text{-}14)b$$

This is the linear approximation given by Moritz (1968) but with respect to RTM (Forsberg 1984). (3-14)a and (3-14)b are therefore identical. It is the linear term of the Taylor series of the rigorous formula (3-13). (3-14)a performs nothing but a simple mean value operation with respect to azimuth and a weighted mean value operation with respect to the radius, using the radius as the weight. Most practical convolution formulas for FFT technique have been obtained from this linear approximation.

In order to further speed up the evaluation of (3-11,13), we can divide the integral into two parts separated by ψ_0 whose magnitude will be discussed in section 3.2.2 as:

$$\delta U_{RTM} = \delta U_0 + \delta U_1 = 2\pi k\rho R \left(\int_0^{\psi_0} + \int_{\psi_0}^{\psi} \right) \qquad (3\text{-}15)$$

and use respectively rigorous or linear solutions for the evaluations of δU_0 or δU_1.

3.2.2 Precision of linear approximations in the potential integral

To simplify the question, the mean values in the integration area are introduced as follows:

$$m_1 = \text{mean value of } M\{|H - H^{ref}|\}$$
$$m_2 = \sqrt{\text{mean value of } M\{\Delta H'^2\}} \qquad (3\text{-}16)$$

The error of linear approximation is the difference between equations (3-11) and (3-14)a. (3-14)a is subtracted from (3-11), (3-16) is inserted and integrated from ψ_i to ψ_{i+1}:

$$\varepsilon_i(\delta U_{RTM}) = 2\pi k\rho R m_1 \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + m_2^2/R^2}} - 1 \right) d\psi \qquad (3\text{-}17)$$

From (3-6,8), there is the error over geoid:

$$\varepsilon_i(N_{RTM}) = \frac{\varepsilon_i(\delta U_{RTM})}{\gamma} = \frac{2\pi k\rho m_1}{\gamma} \left[\sqrt{r^2 + m_2^2} - r \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \qquad (3\text{-}18)$$

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$$

(3-18) shows the error produced by a ring $r_{i+1} - r_i$ when using the linear approximation.

Letting $r_{i+1} - r_i$ = 1 km, Tab. 1 shows its magnitude and its convergence behaviours, corresponding respectively to different values of m_2 and to m_1 = 300 m (the case of a general mountain area). From Tab. 1, it is know that: a) In plain, the error is less than 0.2 cm which can be ignored. But in a hilly area where m_1 = 200 ~ 400 m and m_2 = 500 ~ 700 m, the linear approximation may cause an error of 0.5 ~ 1.0 cm. In great mountain area this error will become considerable: e.g. in the French Alps (see numerical test) where m_1 > 1000 m and m_2 = 800 ~ 1000 m have been found over some points, the error will be then three times that shown in Tab. 1, e.g. as big as 3 ~ 5 cm; b) The error quickly drops to zero even in great mountain areas as the distance increases beyond 10 km. Thus in eq. (3-15), $r_0 < 10$km or $\psi_0 < 0.1°$ can be assumed. c) The linear approximation is strongly recommended to use as often as possible, because its kernel is so simple that it acts as a mean value operator. The calculation runs very fast.

Tab.1. Linear approximation error by ring $r_{i+1} - r_i$ on geoid (cm, m_1=300m)

		r_i km									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_2 m	200	.1	.0								
	400	.3	-.1	.0							
	600	.6	-.3	-.1	-.1	.0					
	800	1.0	-.4	-.2	-.1	-.1	.0				
	1000	1.4	-.6	-.3	-.1	-.1	-.1	.0			
	1500	*	-1.0	-.5	-.3	-.2	-.1	-.1	-.1	-.1	.0
	2000	*	1.4	-.8	-.5	-.3	-.2	-.2	-.1	-.1	-.1

3.3 Modification of the integral of terrain correction

3.1.1 Modification

When (3-8)a,b are inserted into (1-3) and integrated with respect to z in closed form, it yields:

$$C = -k\rho \iint_{\sigma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\sigma \qquad (3\text{-}25)$$

Moritz (1968) has given the linear approximation of (1-3) which can be obtained by replacing r by r_0 and integrating it with respect to z:

$$C = \frac{k\rho}{2} \int_{\sigma} \frac{(H - H_p)^2}{r_0^3} d\sigma = \frac{k\rho}{2} \int_{\sigma} \frac{\Delta H^2}{r_0^3} d\sigma \qquad (3\text{-}26)$$

We shall now attempt to adapt (3-25) to our quadrature problem. Repeating the same steps as in sect. 3.2, there is:

$$C = -k\rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \Delta H^2}} - \frac{1}{r_0} \right) r_0 dr d\alpha$$

$$= -k\rho R \int_0^{\psi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\psi^2 + \Delta H^2/R^2}} \right] \psi d\psi + 2\pi k\rho R\psi$$

Introducing the mean value operator (3-2) yields:

$$C = -2\pi k\rho R \int_0^{\psi} M\left\{ \frac{1}{\sqrt{\psi^2 + \Delta H^2/R^2}} \right\} \psi d\psi + 2\pi k\rho R\psi \qquad (3\text{-}27)$$

Once again, the kernel becomes only the function of ψ and the singularity in (3-25) is removed. In fact, even when $\psi \to 0$, the new kernel is always conserved:

$$\left| M\left\{ \frac{1}{\sqrt{\psi^2 + \Delta H^2 / R^2}} \right\} \psi \right| \le 1 \qquad (3\text{-}28)$$

Similarly in sect. 3.2, assigning the mean value operator directly to ΔH^2 in (3-27) yields (c.f. Appendix, just ordering $H - H^{ref} \equiv 1$):

Rigorous formula:

$$C = -2\pi k\rho R \int_0^{\psi} \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H^2\}/R^2}} + 2\pi k\rho R\psi \qquad (3\text{-}29)\text{a}$$

or in a form which converges faster numerically:

$$C = 2\pi k\rho R \int_0^{\psi} \left(1 - \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H^2\}/R^2}} \right) d\psi \qquad (3\text{-}29)\text{b}$$

Developing (3-29) in a Taylor series and taking only the linear terms, there is:

linear approximation:

$$C = \frac{\pi k\rho}{R} \int_0^{\psi} \frac{M\{\Delta H^2\}}{\psi^2} d\psi \qquad (3\text{-}30)$$

It is easy to prove that (3-30) and (3-26), Moritz's linear approximation, are identical. It is enough to insert (3-2) and (3-8)a in (3-30). Moritz (1968, 1980) has shown that equation (3-26), therefore (3-30) too, is essentially nothing but the simple linear solution of Molodensky's boundary value problem. Unfortunately, (3-30) is weakly singular when $\psi \to 0$. Although semi-open formula (2-4) can be applied to evaluate it, (3-30) is not recommended to be used for the reason, not only that there exists the singularity but also that (3-30) does not save any time compared with the rigorous formula (3-29).

Substituting r_0 by r' in eq. (3-25) yields RTM terrain correction. It can be writen immediately:

$$C_{RTM} = 2\pi k\rho R \int_0^{\psi} \left(1\Big/\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H'^2\}/R^2} - 1\Big/\sqrt{\psi^2 + M\{\Delta H^2\}/R^2} \right) \psi d\psi \qquad (3\text{-}29)\text{c}$$

Inserting -1 and +1 in (3-29)c and comparing it with (3-29)b, there is the relationship between different kinds of terrain correction: $C_{RTM} = C - C_{ref}$.

3.3.2 Precision of the linear approximations of terrain correction

As in 3.2.2, let $m_2 = \sqrt{\text{mean value of } M\{\Delta H^2\}}$, the error of linear approximation is the difference between equations (3-29) and (3-30):

$$\varepsilon_i(C) = 2\pi k\rho R \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \left(1 - \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + m_2^2/R^2}} - \frac{m_2^2}{2R^2\psi^2} \right) d\psi$$

Integrating with respect to ψ and then replacing ψ by r:

$$\varepsilon_i(C) = 2\pi k\rho \left[r - \sqrt{r^2 - m_2^2} + m_2^2/2r \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \qquad (3\text{-}31)$$

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$$

(3-31) shows the error produced by a ring $r_{i+1} - r_i$ when using the linear approximation. Letting $r_{i+1} - r_i$ = 1 km, Tab. 2 shows its magnitude and behaviour of convergence, corresponding respectively to different values of m_2.

Tab. 2. Linear approximation error by ring $r_{i+1} - r_i$ on gravity (mGal)

		r_i km									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_2 m	200	.0									
	400	.3	-.3	.0							
	600	1.5	-1.3	-.2	.0						
	800	4.4	-3.7	-.5	-.1	.0					
	1000	9.6	-8.0	-1.1	-.3	-.1	.0				
	1500	*	-29.1	-4.7	-1.3	-.5	-.2	-.1	-.1	.0	
	2000	*	-66.3	-12.4	-3.7	-1.5	-.7	-.4	-.2	-.1	-.1

Tab. 2 shows: a) The error is very small in plain area and is very sensitive to the local topographical relief near the computed point. In mountainous area, it reaches several mGals that cannot be ignored. b) The error quickly drops to zero even in great mountainous area as the distance increases beyond 10 km.

3.4 Discussion

1) Time savers

Two factors explain the high speed obtained (Tab. 6). a) The use of an optimal process of quadurature which can be used only after the integrals have been modified as 1D integrals; b) The isotropy which decreases the summation times of the kernel function evaluation, by at least one order of magnitude. Taking Stokes' integral as an example, for a grid of size N x N, the classical integral (1-1) sums up $N \times N \times [\Delta g \cdot S(\psi)]$ while the new method (3-5) sums up $n \times [2\pi N \cdot \Delta g + S(\psi)]$. The complex Stokes' kernel is evaluated for only n times, here $n \le N$ (as the optimal quadurature stops when the accuracy is satisfactory). The integration with respect to azimuth is replaced by the simple mean value operation (3-2).

2) Geometrical explanation for the differences between linear approximations and rigorous solutions

We shall attempt to provide a simple geometric illustration rather than a rigorous explanation. Fig. 2a and 2b may demonstrate the geometric differences between the linear

and rigorous solutions of potential (3-11,13) and (3-14a,b) and of the terrain correction (3-27,29) and (3-26,30).

Using the real vector $\mathbf{r}$ (Fig. 2a) between p and q yields the rigorous solutions (3-11,27) while using its projection on geoid $\mathbf{r}_0$ yields the linear approximations whose error is caused by the vector $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ having an order of $|\Delta\mathbf{r}| = |\Delta H|$. Furthermore, using the averaged vector $|\bar{\mathbf{r}}| = M\{\mathbf{r}_\alpha\}$ (mean value respecting to azimuth α while $|\mathbf{r}_0|$ is fixed) yields the rigorous formulas (3-13,29). Here the topographical effect is represented by a continuous diameter changing ring with the mass condensed on it and where the density is $\rho'' = \rho\sqrt{M\{\Delta H^2\}} \times (r_{i+1} - r_i)$, $r_{i+1} \to r_i$ (c.f. Fig. 2b, where $|\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{M\{\Delta H^2\}}$ and q" is the projection of the topographical surface point q on the ring). To replace $|\mathbf{r}_\alpha|$ by $|\bar{\mathbf{r}}| = M\{\mathbf{r}_\alpha\}$ may cause a negligible error less than $|\Delta\mathbf{r}|^4 / |\mathbf{r}|^4$. This is proved in Appendix.

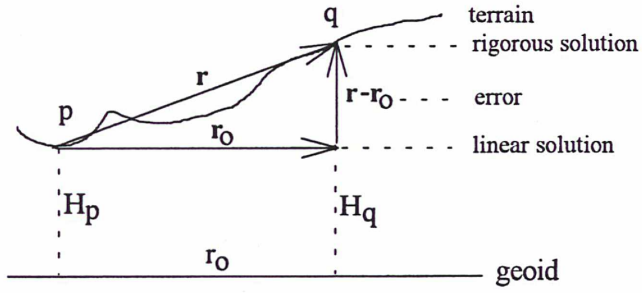


Fig. 2a Difference of linear approximations and rigorous solutions

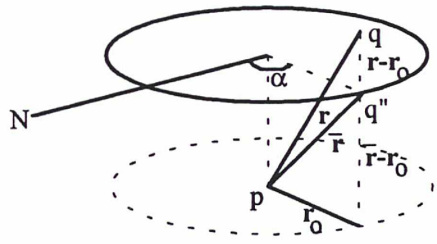


Fig. 2b Illustration of rigorous formula

It is interesting to review the 'isotropy' concept mentioned before. An integral element *dm* does not change its effect on p when only azimuth α changes but does when r_0 and ΔH change. So integrating with respect to α is time-wasting while with respect only to r_0 without ΔH causes error.

In sections 3.2.2 and 3.3.2, we have seen that in mountain areas, the linear approximations in potential and terrain correction may introduce totally as big as 2 ~ 5 cm error. However, most applicable convolutions for using FFT are in fact based on the very use of these linear approximations (Forsberg 1985, Sideris 1985, Schwarz et al. 1990, Tscherning et al. 1992, Forsberg and Sideris 1993, Forsberg 1994, Sideris and She 1995, Sideris 1996). These linear approximations may make the 'exact' Stokes' integration meaningless, because those errors will be directly or indirectly introduced into the final geoid determined. For example, in the Alps area (see section 4), the indirect effect due to RTM was found to be 1 ~ 2 meters, which is bigger than the residual geoid calculated by Stokes integral. As much attention must in fact be paid to DTM's contribution as to Stokes'. On the other hand, high order approximations may make the FFT less efficient.

4 Numerical tests

The new method mentioned above has been implemented in a FORTRAN program **INTEG,** sub-program of the software package **PiLi** (**P**roblèmes d'**I**nterpolation et aux **Li**mites, Jiang 1995). **INTEG** can evaluate Stokes (3-5), potential (3-11,13,14) and terrain correction (3-27,29) integrals. The results are compared first with those of the straightforward summation method (no FFT for only the 'exact' solutions should be used to make the comparisons), given by the FORTRAN programs **TC** and **STOKES**, sub-programs of the software package **GRAVSOFT** by Tscherning et al (1992) and also with 64 well distributed high precision GPS levelling points (points of the French Basic Network).

Several numerical tests have been carried out but we will present only the most interesting one here: quasi-geoid determination in the southern Alps of France. Geographically, this is one of the most difficult areas in Europe: its northern part is the Alps mountain chain while its southern part leads to the Mediterranean Sea. The quasi-geoid computed covers an area of 43.2 ~ 44.8° in latitude and 4.7 ~ 7.6° in longitude in which there is a set of 64 GPS levelling points separated with a distance of 20 ~ 25 km (Fig. 4), with an accuracy of 2 ~ 3 cm. The highest point in the quasi-geoid grid is at 4100 m, the highest GPS levelling point is at 2242 m and the lowest point is at 0 m. In the surrounding area, where gravitational and DTM data have to be used, the Mont Blanc is located at a height of 4807 m, which is the highest altitude in Europe, while the Mediterranean sea area plunges to a depth of about -2000 m (Fig. 3). There are also 2769 selected gravity points (the highest is 2555 m), a French DTM grid (4.5" by 6.0"), an Italian DTM grid (7.5" by 10.0") and an European DTM grid (0.04° by 0.05°). The radius for the three integrations is always 0.5°.

A gravimetric quasi-geoid has been determined by using r-r technique and straightforward summation (Duquenne and Jiang 1996). GRAVSOFT software (Tscherning et al. 1992) was used. Although the straightforward summation is very time-consuming, it is still probably the best way to reach accurate results in this great mountainous area. In addition, an other determination was carried out with PiLi software where the new fast integration method was used. The determined geoid is fitted to the 64 GPS levelling points. Tab. 3 shows a comparison between the residuals of the two gravimetric quasi-geoid solutions after a 3D linear regression (latitude, longitude and altitude) to the 64 GPS

OBSERVATOIRE DE PARIS

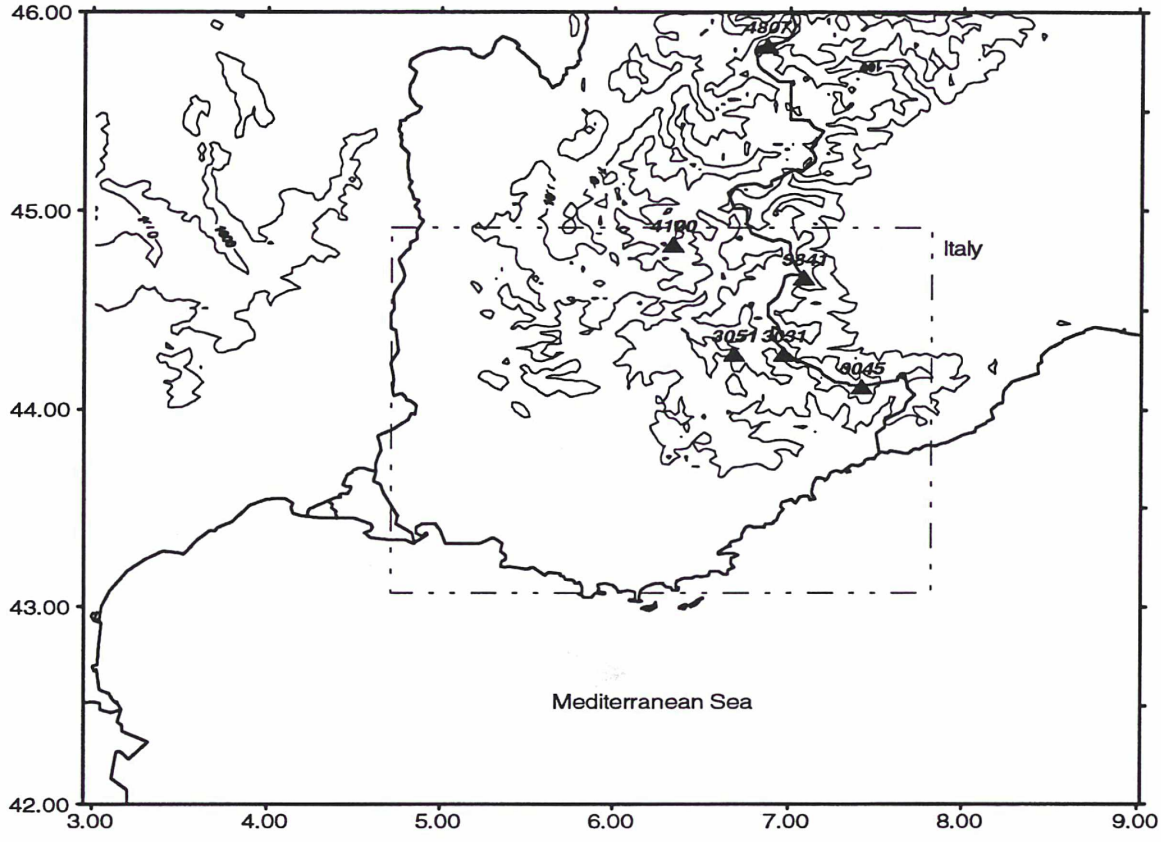


Fig. 3 The computed geoid1 (dotted box) and regional topography (coverage of DTMs) with contour interval = 1000 m

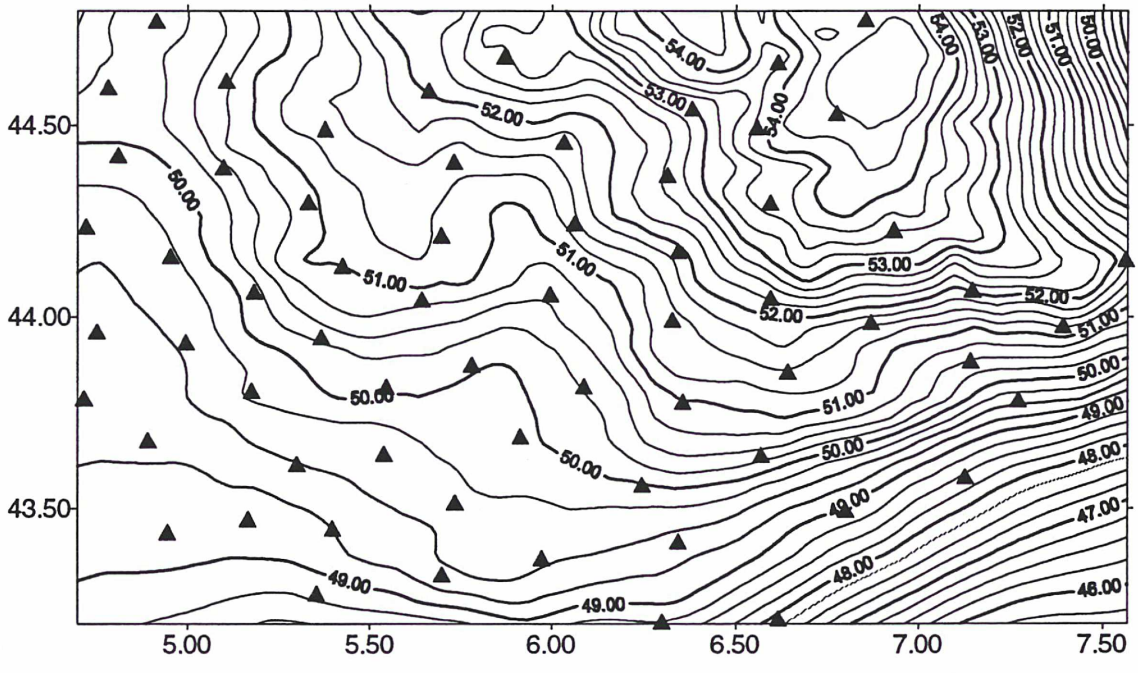


Fig. 4 Gravimetric quasi-geoid (geoid1 by PiLi) adjusted to 64 high precision GPS levelling points

levelling points. Different interpolation methods for computing the residual anomaly grid have been used. It should be pointed out that if a second order moving surface interpolation is used, the RMS of residuals was .089m. Among them there are 12 residuals whose absolute values are between .130 ~ .212 m. For the 12 points: 3 are located in great mountainous areas while 7 are by the seaside. Shortage of gravity data is the cause of bigger residuals.

Because gravity data distribution at the Mediterranean Sea is even worse than that in the Alps, there are more big residuals by the seaside. If the 7 seaside points are not taken into account, the max, min and RMS of the remaining 57 residuals are respectively -.137, .145 and .069 m. These computations and results are called geoid1.

Tab. 3 Residuals of geoid1 fitted to the 64 GPS levelling points (m)

evaluation	max	min	mean	RMS	interpolation
straightforward	.296		.000	.116	weighted mean
fast integration	.265	-.244	.001	.107	weighted mean

In order to better investigate the time spent and geoid accuracy, a careful cross-comparison between the straightforward and fast integration evaluations has been made for the 'worst' case: the roughest mountain area located from 43.95 ~ 44.8° in latitude and 5.5 ~ 6.97° in longitude, where the altitude changes about 1000 ~ 4100 m and there are 20 GPS levelling points are available. All the computations were made under the same condition using exactly the same data except that integration methods were different. The results are listed in the following tables. Tab. 4a, 4b and 6 respectively show the cross-comparisons between the quasi-geoid and the time spent by the two methods. Tab. 5 shows a comparison between the residuals over the 20 GPS points after a 3D linear regression. All the computations are carried out in a UNIX system at the Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG), IGN, France. These computations and results are called geoid2.

Tab. 4a Difference in quasi-geoid2 grids given by straightforward and fast integration evaluations (cm, φ : 43.95 ~ 44.8°, λ : 5.5 ~ 6.97°)

0	3	0	1	4	3	2	2	1	6	2	-1	1	3	1	2	7	2	-2	4	7	7	4
2	0	2	0	5	-2	4	2	1	-1	-8	2	-1	0	0	1	-1	1	1	5	8	5	-3
1	1	0	1	-2	-2	2	0	4	1	0	-1	-1	0	1	-3	1	4	2	2	2	-1	-4
1	1	-1	2	-2	1	-5	-1	-2	0	2	-2	-1	-8	2	-5	5	4	0	1	0	-2	4
0	-1	1	-2	-1	0	-1	-2	-3	0	-1	-3	-5	1	-6	-1	-3	-2	2	0	0	-2	-4
0	0	1	-3	0	0	1	1	-1	2	3	0	3	-1	1	4	0	0	1	0	-5	-7	-4
0	-1	-2	-1	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-4	-5	-1	-2	-7	1	3	0	0
0	0	-1	0	0	-2	-1	0	2	-2	-1	0	0	0	1	-3	-2	-7	0	0	0	-1	0
-1	0	0	-1	1	1	1	2	1	0	-2	2	0	-1	0	0	0	0	3	0	-1	-1	-4
0	0	0	3	1	-1	-2	0	1	0	0	-3	0	-1	-3	0	-6	1	0	-3	-1	0	0
0	0	-1	-1	-2	1	0	2	2	0	-1	-1	-3	-2	-2	-2	-3	1	-4	-3	-5	0	-3
0	0	-2	1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	-6	-2	1	-3	-2	-2	0	-1	-2	0	-2
0	-1	-1	0	-1	-2	1	-2	1	-3	0	0	-3	1	-1	-2	0	0	-4	0	-1	0	0
0	0	-3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-2	-1	-4	-5	0	0	2	-3
0	-1	-1	0	-2	0	1	0	0	0	0	3	4	-1	0	0	2	0	-2	1	2	0	0
0	0	0	0	0	2	0	2	1	2	1	1	0	-2	2	3	2	0	3	0	0	0	-1
0	0	0	1	0	2	2	0	1	0	1	0	1	1	0	2	2	1	1	3	4	0	6
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	2	1	0	3	1	0	2	1	-1	2	6	6	6

Tab. 4b Statistics of Tab. 4a (cm)

max	min	mean	RMS
8.1	-8.7	0.1	2.5

From Tab. 4a and 4b, the RMS of the differences is 2.5 cm. Considering that the external accuracy in comparison with 20 GPS levelling points is about 6 ~ 7 cm (Tab. 5), a discrepancy of 2.5 cm is permissible. The maximum and minimum differences are about 8 cm, directly due to the local topography: they occur in areas where the altitudes are from 3000 ~ 4100 m (c.f. Fig. 3). Tab. 3 and Tab. 5 show the external accuracy of geoid1 and geoid2 calculated by using fast integration and straightforward summation.

Tab. 5 Residuals of geoid2 fitted to the 20 GPS levelling points (m)

evaluation	max	min	mean	RMS
straightforward	.114	-.136	.004	.068
fast integration	.090	-.129	.004	.062

Finally, Tab. 6 shows the time spent by the two methods. Compared with the straightforward summation, fast integration discussed in this paper consumes only 1.23% of CPU time. Another important fact is that even the straightforward summation spends only about two minutes for Stokes' integral, which is only 0.54% of the total time, 5 hours 56 minutes, spent on all three integrals. Obviously, geoid calculation should be more efficient with the terrain correction and potential integrals rather than with Stokes'.

Tab. 6 Time spent compared in geoid2

integration evaluated	number of point	straightforward h m s	fast integration h m s	%
Stokes	434	0 01 55.6	0 00 17.3	14.97%
terrain correction	1600	4 40 39.4	0 02 01.6	0.72%
potential	434	1 13 19.9	0 02 04.7	2.83%
Total	2468	5 55 54.9	0 04 23.6	**1.23%**

5 Conclusion

To determine the geoid, it is necessary to evaluate the three basic integration: Stokes, potential and terrain correction (equations 1-1,2,3). A straightforward summation is exact if the singularity problem is not taken into account. But it is too time-consuming to be used in large scale geoid determination.

On the other hand, the application of FFT can greatly speed up the evaluations. 1D FFT used for Stokes' integral provides as exact a solution as with a straightforward evaluation. However, the fact that Stokes' integral consumes only 0.5% of total CPU time of all three integrals makes the time saved here less meaningful. Using linear approximations, FFT can greatly decrease calculation time for terrain correction and potential integration however there may be an error of several cm. High order approximations or other exact solution for the efficient evaluation using FFT are then expected.

Aiming at speeding up the calculation without losing accuracy, a new method has been proposed. It is based on two key points: a) the isotropy of the integral kernels to ψ ; b) an optimal quadrature process. To do these, the kernels should be modified. The advantages of this method are: a) it is exact without approximation, in addition, the singularities as $\psi \to 0$ have been removed; b) it can be used for all three integrals; c) it involves the use of gridded data and is easy to handle; d) it greatly speeds up the calculation, saving about 98% of CPU time compared with the straightforward method.

ACKNOWLEDGEMENTS. The authors are grateful to Prof. G. Balmino and the two reviewers for their constructive suggestions. We would like to express our appreciation here to Prof. C.C.Tscherning and R. Forsberg for kindly supplying us with several programs of GRAVSOFT. We would like to thank

Ms. S. Asch, who has carefully corrected the English version. Financial support for the first author has been provided by French National Geographical Institute (IGN). These are all appreciated.

Appendix

In equation (3-13), the mean value operator $M\{\bullet\}$ is used directly with concerned terms, as a factor and under the square root of the integrated function of equation (3-11). This modification can greatly speed up the calculation and make the derivations and results simpler and clearer. We now prove that it causes only a slight difference on the order of $o\left([\Delta H/R\psi]^4\right)$ which can be ignored in any kind of application.

From Fig. 1, where p is the point to calculate and q is the current point (in brief, let $\Delta H' = \Delta H$), there is:

$$H - H^{ref} = H_q(\psi) - H_q^{ref}(\psi)$$
$$\Delta H = \Delta H(\psi) = H_q(\psi) - H_p$$

Using Taylor's formula to develop the integral kernel of eq. (3-11):

$$M_1 = M\left\{\frac{H - H^{ref}}{\sqrt{\psi^2 + \Delta H^2/R^2}}\right\}\psi = M\left\{\frac{H - H^{ref}}{\sqrt{1 + \Delta H^2/R^2\psi^2}}\right\}$$
$$= M\left\{\left(H - H^{ref}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{R\psi}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{R\psi}\right)^4 - \frac{5}{16}\left(\frac{\Delta H}{R\psi}\right)^6 + \ldots\right]\right\}$$
$$= M\left\{H - H^{ref}\right\} - M\left\{(H - H^{ref})\Delta H^2\right\}/2R^2\psi^2$$
$$+ 3M\left\{(H - H^{ref})\Delta H^4\right\}/8R^4\psi^4 - \ldots \qquad \text{(A-1)}$$

Note here that $H - H^{ref}$ is the so-called residual terrain corresponding to the current point q and ΔH is the topographic difference between the points p and q. Both of them are accidentental and independent each other (or a weak correlation may be ignored). Thus, the result is:

$$M\left\{(H - H^{ref})\Delta H^k\right\} = M\left\{(H - H^{ref})\right\}M\left\{\Delta H^k\right\} \qquad \text{(A-2)}$$
$$k = 2, 4, 6, \ldots$$

Introducing (A-2) into (A-1):

$$M_1 = M\left\{H - H^{ref}\right\} - M\left\{H - H^{ref}\right\}M\left\{\Delta H^2\right\}/2R^2\psi^2$$
$$+ 3M\left\{H - H^{ref}\right\}M\left\{\Delta H^4\right\}/8R^4\psi^4 - \ldots \qquad \text{(A-3)}$$

On the other hand, by developing the integral kernel of eq. (3-13), there is:

$$M_2 = \frac{M\left\{H - H^{ref}\right\}}{\sqrt{\psi^2 + M\left\{\Delta H^2\right\}/R^2}}\psi = \frac{M\left\{H - H^{ref}\right\}}{\sqrt{1 + M\left\{\Delta H^2\right\}/R^2\psi^2}}$$
$$= M\left\{H - H^{ref}\right\} - M\left\{H - H^{ref}\right\}M\left\{\Delta H^2\right\}/2R^2\psi^2$$
$$+ 3M\left\{H - H^{ref}\right\}\left[M\left\{\Delta H^2\right\}\right]^2/8R^4\psi^4 - \ldots \qquad \text{(A-4)}$$

Then the difference between equations (3-11) and (3-13) is:

$$M_1 - M_2 = \frac{3M\left\{H - H^{ref}\right\}\left(M\left\{\Delta H^4\right\} - \left[M\left\{\Delta H^2\right\}\right]^2\right)}{8R^4\psi^4}$$
$$- \frac{5M\left\{H - H^{ref}\right\}\left(M\left\{\Delta H^6\right\} - \left[M\left\{\Delta H^2\right\}\right]^3\right)}{16R^6\psi^6} + \ldots$$

By the definition of variance $D(\,)$, we can write:

$$M\left\{\Delta H^4\right\} - \left[M\left\{\Delta H^2\right\}\right]^2 = D(\Delta H^2)$$

Finally we obtain the error of equation (3-13):

$$\left|M_1 - M_2\right| < \frac{3M\left\{H - H^{ref}\right\}}{8R^4\psi^4}D\left(\Delta H^2\right) \qquad \text{(A-5)}$$

Certainly, noting that $R\psi$ is the spherical distance between the points p and q, this slight difference of 4 order of a little quantity, can be ignored even in great mountains. This can also be proved by the numerical tests in sect. 4. The derivation from equation (3-27) to (3-29) can be proved similarly. It is in fact a simplified case of above derivation when $H - H^{ref} \equiv 1$.

References

Abramowitz, Milton, Stegun, A. Irene (1964), Handbook of Mathematical Functions, Applied Mathematics, Vol. 55, section 25.4, New York, USA

Denker H., D. Behrend, W. Torge (1996) The Eropean gravimetric quasigeoid EGG95, IAG Bull. d'information n° 7, New Geoid in the World.

Duquenne H., Z. Jiang (1996) The geoid in the southern Alps of France, IAG Bull. d'information n° 7, New Geoid in the World.

Forsberg R., C.C. Tscherning (1981) The use of height data in gravity field approximation by collocation, J. Geophys. Res. Vol. 86, B9, pp. 7843-7854

Forsberg R.(1984) A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, OSU, report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Forsberg R. (1985) Gravity field terrain effect computations by FFT, Bull. Geoid., Vol 59, pp. 342-360

Forsberg R., M.G. Sideris (1993) Geoid computation by the multi-band spherical FFT approach, manuscripta geodaetica, vol. 18, pp82-90

Forsberg R. (1994) Terrain effects in geoid computation, Lecture notes of International school for the determination and use of the geoid, Milan, Oct. 10-15, 1994

Haagmans R., E. de Min, M. van Gelderen (1993) Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT and a comparison with existing methods for Stokes' integral, manuscripta geodaetica, vol. 18, pp227-241

Heiskanen W., H. Moritz (1967) Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, GRAZ, AUSTRIA

Isaacson, Eugene, Keller, B. Herbert (1966) Analysis of Numerical Methods, section 7.1, New York, USA

Jiang Z. (1995) PiLI - a new software for the geoid determination, presented to the XXI Assembly of International Union of Geodesy and Geophysics, July, 1995, Boulder, USA

Kearsley A.H.W. (1986) Data requirements for determining precise relative geoid heights from gravimetry, Journal of Geophysical Research Vol. 91, B9, pp. 9193 - 9201

Moritz H. (1968) On the use of the terrain correction in solving Molodensky's problem, OSU, report 108, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Moritz H. (1980) Advanced Physical Geodesy section 48, H. Wichman Verlag, Karlsruhe.

Press, M.H, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling (1986) Numerical Recipes, Cambridge University Press

Schwarz K.P., M.G. Sideris and R. Forsberg (1990) The use of FFT technique in physical geodesy. Geophys. J. Int. Vol. 100, pp. 485-514

Sideris M.G. (1985) A fast Fourier transform method of computing terrain correction, manuscripta geodaetica, Vol. 10, No. 1, pp. 66-73

Sideris M.G., She B. (1995) A new, high-resolution geoid for Canada and part of U.S. by the 1D-FFT method, Bulletin Géodésique, vol. 69, pp92-108

Sideris M.G (1996) FFT geoid computation in Canada, IAG Bull. d'information n° 7, New Geoid in the World.

Tscherning C.C., Forsberg R., Knudsen P.(1992) The GRAVSOFT package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the geoid in Europe(1990), PRAGUE, CZECH Republic

A5-2 Geoid interpolation using GPS levelling points and digital terrain model
IN: *Proceedings of XXI Congress of the European Geophysical Society 1996* (EGS96), Session G7, 6~10 May 1996, The Hague, Netherlands

Geoid prediction using GPS levelling points and digital terrain model - a new French geoid determination G96-01

Z. JIANG
Institut Géographique National, F-94160 Saint Mandé, France, fax: 33 1 4398 8488, email: jiang@schubert.ign.fr

Abstract

To represent the geoid by waves of various wave-lengths is nowadays a common idea. In practice, we often use a geopotential model, the gravity and DTM information to represent respectively the long, mean and short wave-lengths. But this method is often limited by the shortage of gravity data.

In France, a country-wide GPS levelling network with a resolution of about 25 km is now available. This will be adopted as the national zero order levelling reference surface. Unfortunately, the resolution is not fine enough to perform a precision interpolation because of the non-linear variation, especially in the mountain areas. There lies a discrepancy : we have to use the gravity information to compute the non-linear part, but the gravity data are often shorted in those areas. To overcome this difficulty, we can replace the gravity information by the GPS levelling information smoothed by DTM to represent the corresponding wave-lengths. This can be easily explained in a rather loose way: because of the correlation between the structure of the local geoid and the relief of the terrain, we can remove the terrain's effect over the geoid, the rest part of the geoid becomes so smooth that it is possible to make a pure mathematical interpolation on it and then we restore the terrain's effect over the smoothed surface in order to get the real geoid.

A fast integration technique has been developed to compute the terrain effect. Based on 1041 GPS/levelling points and a digital terrain model with a resolution of about 500 m, a country-wide quasi-geoid (**G96-01**) has been determined. The accuracy of G96-01 is 2 ~ 3 cm for plain areas, 3 ~ 4 cm for hilly areas, 4 ~ 6 cm for mountain areas and 4 ~ 5 cm on average.

1. Introduction

The height anomaly (geoid undulation) becomes nowadays observable thanks to the GPS technique combined with the precision levelling. In France, a country-wide GPS levelling network with a resolution of 25 km on average has been now established. Named as **FBN** (French Basic Network with **RBF** as the abbreviation in French), the network consists of about 1100 height precision GPS levelling points and will be adopted as the national zero order levelling reference *surface*. The precision of the GPS levelling point implied quasi-geoid (in France, the normal height or height anomaly system is used) is estimated about 3 cm on average *on the benchmarks*. However as a *continuous reference surface* which should be realised by an interpolation computation between the FBN points, its accuracy drops down quickly *in the areas other than on the benchmarks,* especially in the mountain areas. For example, in the Alps mountains and Pyrennées mountains, the geoid height changes its value as big as 1 m within a distance of 10 km (cf. Fig. 1 and Fig. 2). Obviously, a simple-direct interpolation between the FBN points may cause a serious error (cf. Fig. 5a1, Fig.a2 and Fig 5b) due to the non-linear effects produced by the disturbing masses, of which the main contribution is from, in a rather loose way of speaking, the local topographical effects.

To represent the geoid by waves of various wave-lengths is nowadays a common idea. In practice, we often use a geopotential model, the gravity and DTM information to represent respectively the long, mean and short wave-lengths. But this method is often disturbed by the shortage of gravity data. To overcome this difficulty, we can replace the gravity information by the GPS levelling information smoothed by DTM to represent the corresponding wave-lengths.

This paper presents a method to make the geoid interpolation taking into account the non-linear effects. A new country-wide geoid is then determined this way. In fact, there is theoretically nothing new than the application of the well known remove-restore (r-r) technique (Heiskanen and. Moritz 1967, Forsberg 1984) without considering the gravimetric information. We will see that the key point of this method is to compute a smoothed intermediate surface, of which we do not take care of the geometrical and physical significations and on which the interpolation computation is performed.

A fast integration technique has been used to compute the terrain effect. Compared with the straightforward summation method, the fast integration consumes only 3 % CPU time without losing accuracy. This new technique has been fully discussed in (Jiang and Duquenne 1996b) and all the computation was carried out by using a newly developed software **PiLi** (Jiang 1995). However, this paper is focused on discussing the accuracy obtained for G96-01 but is not going into the details of the r-r method and the new fast integration as well as the interpolation techniques. People interesting in those problems can refer to the concerned publications mentioned above.

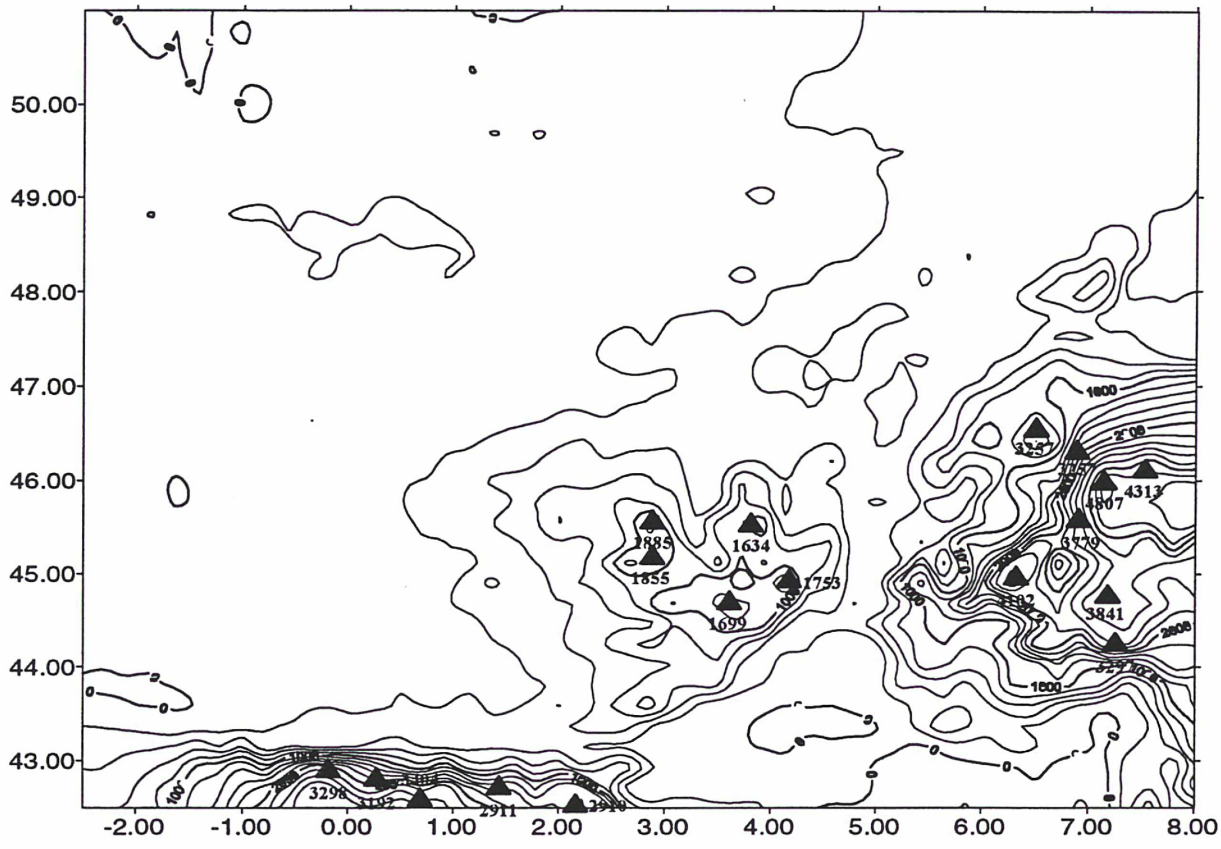


Fig. 1 Topographic relief of France (contour interval = 200 m)

This study is now especially meaningful because of the very fact that more and more countries have practically defined and used the GPS levelling point implied geoid as their countries' height reference surfaces and also because of the following technical considerations:

1. Compared with the gravimetric method, it is much more simpler and needs only a DTM grid with the limits of 30 ~ 55 km beyond the wanted geoid;

2. The error analysis discussed in this paper shows that the precision (absolute error) of the new French quasi-geoid G96-01 is 4 ~ 5 cm on average, which is much smaller than the absolute error in a gravimetric geoid (cf. the point 4 bellowing);

3. A weighted least square interpolation is used on the smoothed surface (Fig. 3). This surface is so smoothed that we can easily detect the gross errors in the GPS measurements. In fact a dozen of gross errors have been found this way during the computation of G96-01. The accidental error with small quantity can be adjusted while the weighted least square interpolation is being performed;

4. We should point here that a gravimetric determined geoid can not be *directly* used as the national zero order reference surface due to its long-wavelength error introduced by the adopted geopotential model which is considered as a reference surface during the computation. For example, the differences between a gravimetric geoid and the FBN points are: min = -1.418m, max = .561m, mean = -1.055m, σ = .157m. Even after a 3 parameters' transformation, there are still residuals: min = -.260m, max = .444m and σ = .079m. This is much bigger than the error of the FBN implied geoid in most part of France. The gravimetric geoid is obviously not suitable to be taken *directly* as the zero surface even after a system transformation has been performed. In order to solve this problem, a rigorous combined adjustment of the gravimetric geoid and the FBN points should be made (Jiang and Duquenne 1996a).

2. The remove-restore method

1. Remove

We define firstly a smoothed intermediate surface, on which all the interpolation should be carried out. We call it from now the surface ζ^0_{GPS} which is obtained by removing the contributions of the geopotential model (here is the OSU91A) and the RTM effect from the GPS levelling points implied height anomaly values (Fig; 2). RTM is the residual terrain model obtained by filtering the DTM (digital terrain model) with a 30' x 30' window. The resolution of the DTM used is 500 m. The advantage to use a geopotential model and the RTM is that only small quantities of the terrain effect should be dealt with and some complex theoretical assumptions can be avoided. Such as the topographic isostatic effect, it is so small that its influence can be therefore ignored.

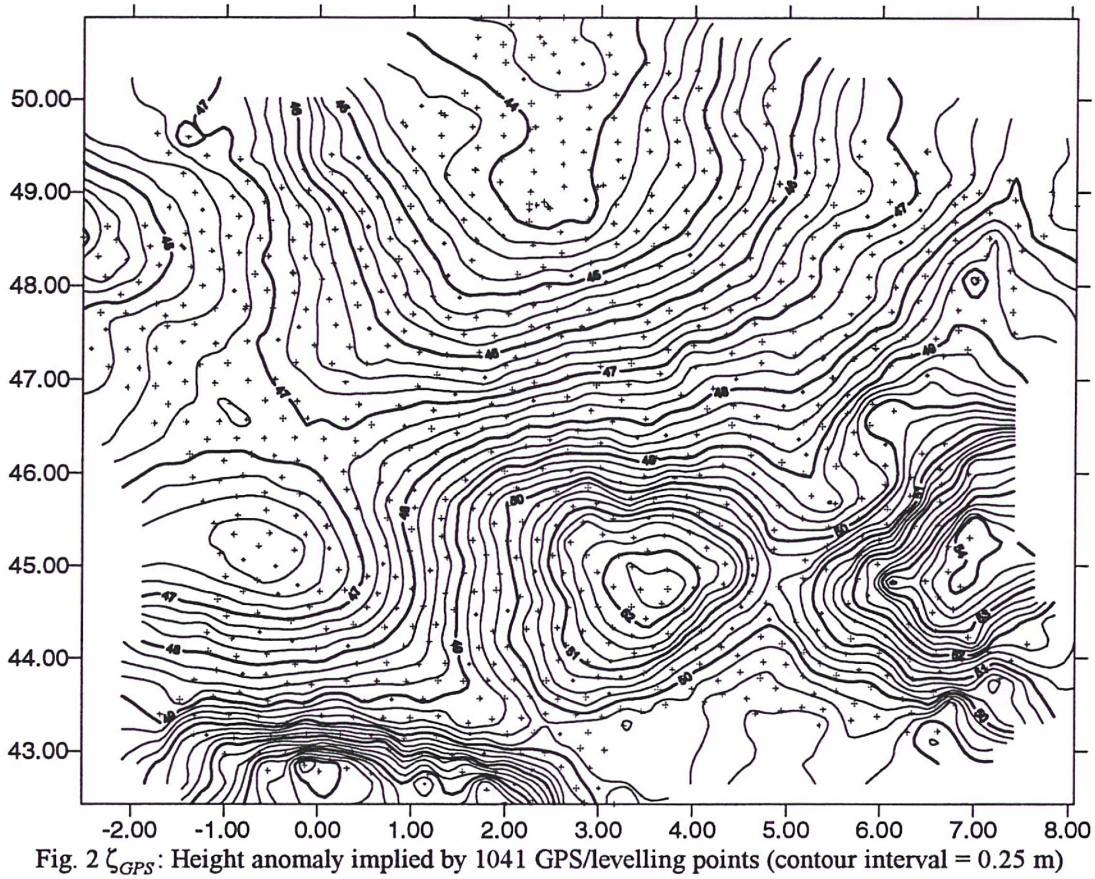


Fig. 2 ζ_{GPS}: Height anomaly implied by 1041 GPS/levelling points (contour interval = 0.25 m)

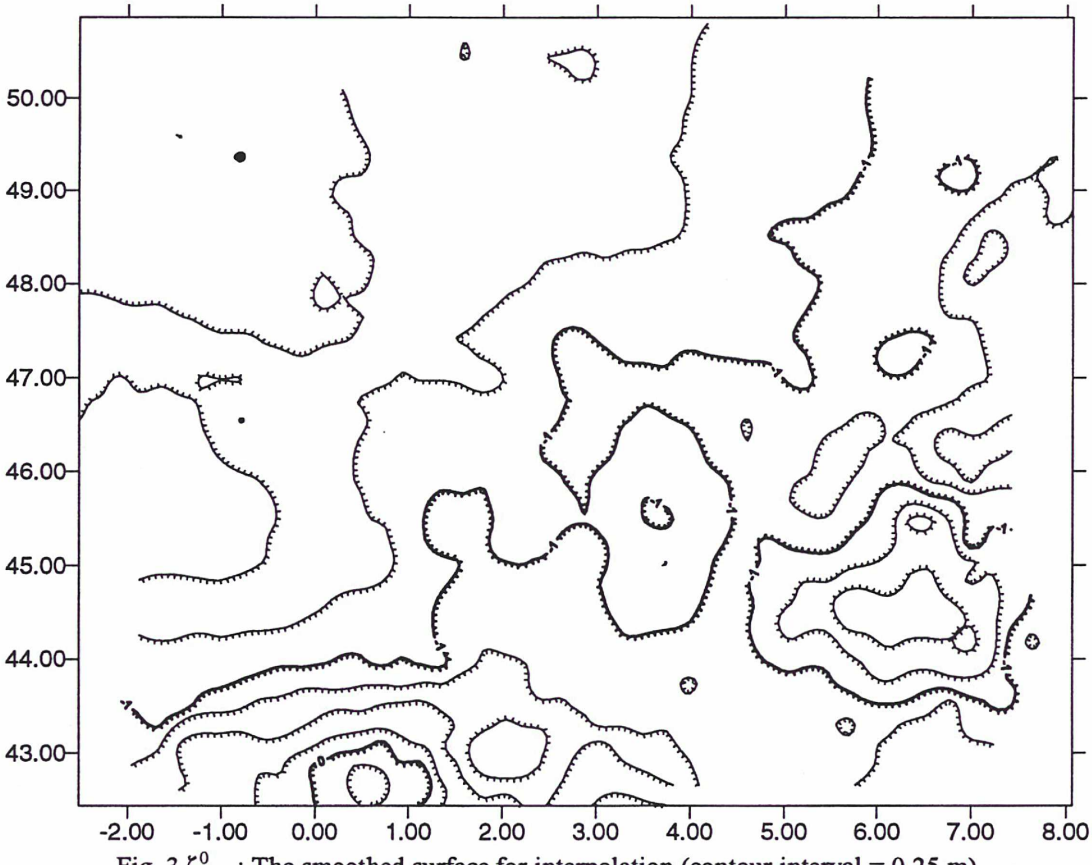


Fig. 3 ζ^0_{GPS}: The smoothed surface for interpolation (contour interval = 0.25 m)

We have then:

$$\zeta^0_{GPS} = \zeta_{GPS} - \zeta_{OSU} - \zeta_{RTM} \qquad (2\text{-}1)$$

Tab. 1 Statistics of the variations in various surfaces (m, cf. Fig. 2/3)

surfaces	min	max	mean	RMS	σ
topography (H)	0	**4807**	305	545	454
ζ_{GPS}	43.576	54.631	47.867	47.924	**2.366**
ζ_{OSU}	44.073	55.403	47.984	48.034	2.184
ζ_{RTM}	-0.558	1.929	0.025	0.225	0.223
ζ^0_{GPS}	-0.958	1.440	-0.143	0.322	**0.289**

The surface ζ^0_{GPS} has no physical nor geometric signification. It is nothing but an intermediate surface for the interpolation computation. Comparing Fig. 2 and Fig. 3 where the contour intervals are both equal to 0.25 m, we see immediately that ζ^0_{GPS} is much more smoothing than the GPS levelling points implied surface ζ_{GPS}. Most part of the non-linear variation has been removed and it is then an ideal smoothed surface for the interpolation computation. Table 1 gives the statistics of the variations in these two surfaces.

2. Prediction (interpolation on ζ^0_{GPS})

The second step is to build up a grid on the smoothed surface: ζ^0_{GPS} => $\zeta^0_{pred.}$ Over this grid, the height anomaly will be predicted. A weighted least square interpolation has been used.

3. Restore

Finally, we restore the OSU91A and terrain contributions over the grid in order to obtain the height anomaly on all the points to predict:

$$\zeta_{pred.} = \zeta^0_{pred.} + \zeta^0_{OSU} + \zeta^0_{RTM} \qquad (2\text{-}2)$$

The result is the new French quasi-geoid determination **G96-01** (Fig. 4).

Remark: A theoretical and important point is that the calculation of the geoid undulation *N within the masses*, from the spherical harmonic representation (of a geopotential model) is conceptually improper (Rapp 1996). Therefore, it is appropriate to evaluate the geoid value *at the surface of the Earth* and to regard such quantity as the *height anomaly* ζ which can be related to the geoid undulation N through the following relation (Heiskanen and Moritz 1967):

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_{Bouguer}}{\bar{\gamma}} \times H$$

where H is the height of the computed point. This non-linear effect has been shown in the mountain areas in the south of France to be 10 ~ 50 cm. Correspondingly, all the computation concerning the terrain *topographic effect* should be also calculated (integrated) *at the surface of the Earth.* Ignoring this theoretical point may cause a considerable error in mountain areas. Special attention should be paid here.

3. Accuracy of G96-01

In this section, we try to give an objective error estimation for G96-01. Two estimations will be discussed: the worst error estimation and the external error estimation.

3.1 The worst error estimation

The worst error of the height anomaly for a point to predict is to be defined as:

$$\Delta_{k,\zeta} = \zeta_{k,GPS} - \zeta_{k,pred.} \qquad (3\text{-}1)$$

here $\zeta_{k,GPS}$ is the known value of a FBN point k (k *=1,2, ... , 1041*), $\zeta_{k,pred.}$ the predicted value of point k but *without using the known value* $\zeta_{k,GPS}$. This is a *worst* error estimation because, without using the known value $\zeta_{k,GPS}$, the distance to predict $\zeta_{k,pred.}$ of point k is *doubled.* In the case for the worst error estimation, the predicted distance is 50/2 = 25 km instead of 25/2 = 12.5 km (here 25 km is the real distance between FBN points). Using the equation (3-1) for k *=1,2, ... , 1041*, we get the worst error estimation all over the French territory (Fig. 5a1). *If the r-r method is used, the 1041 worst errors have min = -56.7cm, max = 32.9cm and* σ = ***6.5cm***. If we divide France into 9 regions according to the topographic relief (Fig. 1), we find that the σ values of the worst error depend a lot on the topographic relief. The biggest values (6 ~ 8 cm) locate in the Alps and the Pyrennées mountain areas (cf. the values before ' / ' in Fig. 5b). The smallest errors (3.7 cm) locate in plain areas in the north of France.

The biggest worst errors are found in the Pyrennées mountains of the French-Spain border areas. This may be caused by the discrepancies between the two countries' DTM used.

It is important to point out that

1. *if the r-r method is not used, the 1041 worst errors become min = -71.8cm, max = 78.1cm and* σ = ***13.1cm*** (Fig. 5a2). Fig. 5b gives a comparison of the standard deviation σ of the worst error estimation in different topographic regions between the results of *using/without using* the r-r method corresponding to Fig. 5a1 and Fig. 5a2. Obviously, using the r-r method, the accuracy of interpolation has been greatly improved, especially in the mountain areas. This shows the importance of the use of r-r procedure that reduces considerably the non-linear (or short wave-length) effect.
2. the worst error estimation gives only the extreme case and would be too pessimist to be considered as the real accuracy of G96-01.

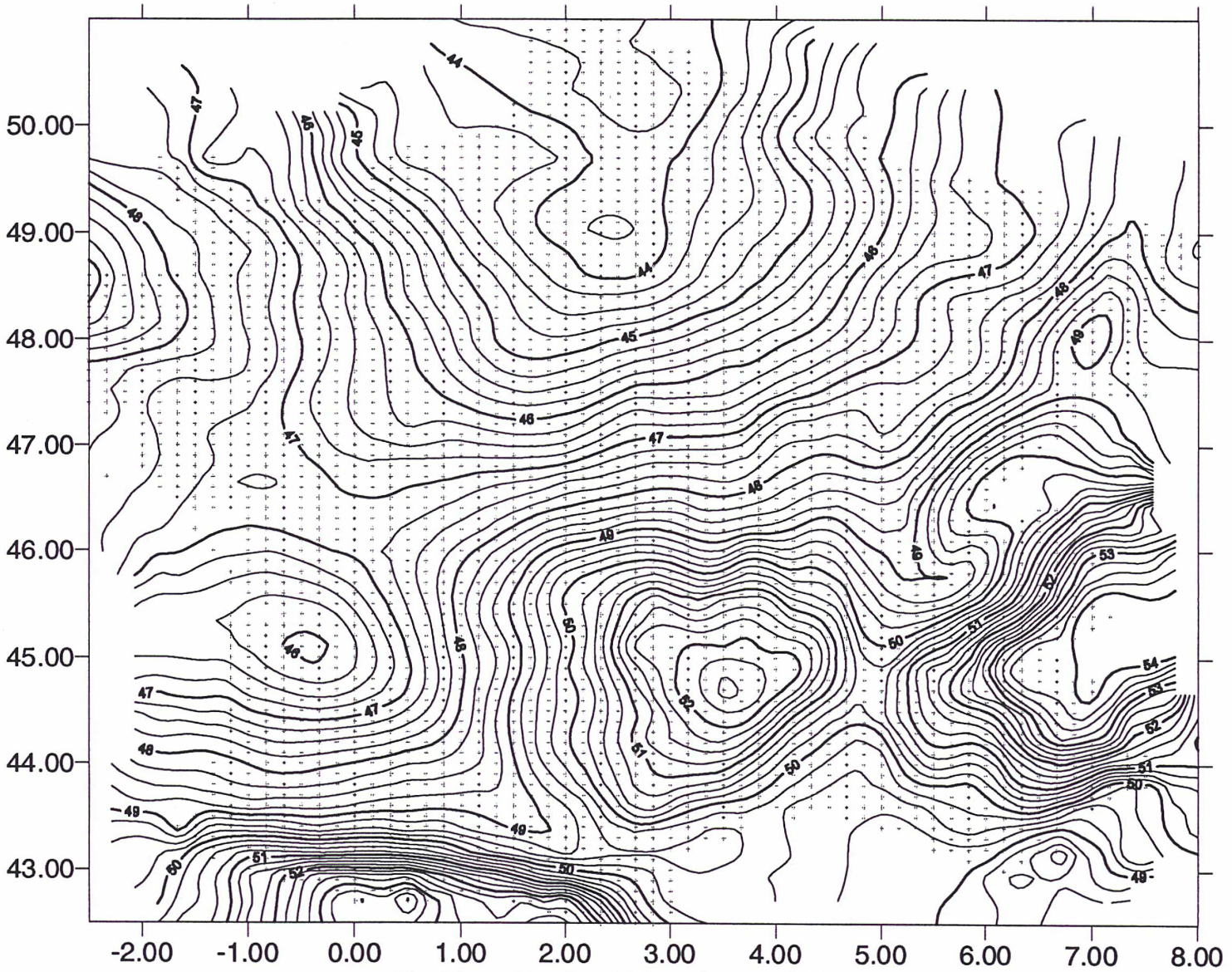


Fig. 4 A new French geoid determination G96-01

```
                                                 1     0  2
                                                 0 -3 -1       -2
                                                   -6 -3  2 -1 -3
                                                -4  0     3  8        0  0 -3
                                          1          2  0  3     3  2     3        1
                                       -3  3     4 -4  0     2     1  1  2 -4    -6  0
                                    0  0 -3 -9     0  3  1    -4    -4  4     4    -1
          0  0  0                      -1  2     2 -4  1  0 -4    -2     4       -1  0  0  4     0
          0  0  0-16          -4     0  2    -3        5     0  0    -3  0  0     0  0     7     0  0  0 -2  0
           -11        0     1 -1    -3    -2 -1 13-13  4  5     0  1 -2         0 -2 -2  0  0  0  0 -3  0  0 -7  0 10-18
                4  3     0  4  4  6  6     4  1 -3        0  3  5 -1 -3  0  5     3     3  0  2 -1 -4  3  3    -7  5    -1  0
        -3      0  0  0  2    -6    -1  0     0  0  1 -3  5 -2  7             0         0        0 -4  6     0  0  7-15         8-12
   19 -5     3 -5 -2 -5     0  0  1  0  8  1  0     0  3     5  0  1  0     2  0    -7  0  0 -5     0  0  3 12  1     0 -2  8
  -10 -1 -1 -8  4  0     9  1  6     0 -3     3     0    -1 -5  0     0  7    -1  0  0     0 0-11    -2     4 -1-16  0 -1
  -11  1  0  2     1 -1    -1  3  0 -9  6 -9 -2  0  1  0  0 -2  1 -1 -2 -4    -3 -1  4     0  5  0  0    -8  9 -7-15 -2
     -2        0 -3     4 -2     0    -2  0  6  7     5     0     5 -3        -3  1        6 -1  1     8        3    18
  13 13 -2 -8-12     1 -2  1  4     1  2 -4        3 -1 -1 -2  0  0  3 -3  1  1  7        0        0 -1  1  0  1        -6
  -1 -8  5     8    -1     0    -1  0    -4 -2 -3        1  2 -7  0  0  5     5  2 -3    -6 -3        6  8 -8  3  7   -11
-6  -10  0 -3  0  0  5 -1   -11 -1    -3 -1       -7  0  2 -5     0  9     6 -4    -3 -1  0  0 -8     0  0  2     0
   0 -1  0  4  4  0        2  8    21     1  1  7     0  0 -7    -4 -1        0        1 15  0  0  0  6  0  0  0  0
   0  9 -3-16 21    13-11        -4       0       12  8  9 -2    -4 -1  0  0    -5  1       -1  0
        0      -11     7 -3      -11  1     0  0  0    -9  2        -4    -2     0 -4        1  2     3
        1 16    -3-10 -7 12    10  4     0 -5 -7  5 -9  4  6  1 -9     9           0    -6  8 -8  1     4
             3  1    -8 -2 -4    -1 -5 -4     0     5    -1   -12  0  0 -3  3  0 -5  0  9   -11 -8  0      -24
          -5     0  3 -5  4  5  3    -9     9 -3 -4          -9 -6     0  0 14-11  0     3  9  0 -2  5    14
              1 -4  3 -3     7  0     5  7 -1  9    -7 -6    -2    14  3 -8 13     0   -10  9        9 -6 -7 -2 -3
             -5  2     4  0  0  0    -3 -1 -6    -4  7  0 13 -3 -3  6-12    -1  3    -2    -5 -6 -1     0    -4
                 0    -2  0        0  9  2  0 -6        6    -1     7  1 -9  2 0-11    -5 -5     3  4  6       32
              7  0    -5  6  0 -4        0-18    -5  0  5  5  1 -3  1    -7  5 15 -4  6        6  1-10  2 15    -7
                 5  1  0 -3  3     0  8 -1        3       -5 -5   -10 -5  7  4        9     6-10 -5         -12
                -4     2        0  1  0     6  6     0  4 -9    -4  5     9  1-11 -5 -1    12-15 -5  1        9
                   -4 -3  1  1  1     4  5  6    -9 -3  7     6  5     4  4  2 -6 -5     9           -6    -6-21
                 0 -2       -1 -3 -5 -4  0    -7 -4 -1 -1    -9  0  2     4  1  0 -9  0           0 14 -5 12 17
             -1          1  2 -5   -10  9 -5     0     5  0 -7    -5  0  0  1   -13  2  7  4  0  8    -6-12
             -5  0  2     1  4 -3  0     0  6  2-10  0     5  0  3 -2 -1     6 -5     3 12 -1 -6  8  3 -2       11
                 3 -2 -2  4        3  4 10 11  0  0  0 -3 -5 -4  3  4  4 -5-10     5  2  4 -8-14  7     0 -8 14     1 -6
             -4     0  2 -3  5 -1  2     0  0  1 -4 -5     0 -3 -4  1       -7 -7     1    -7 -6    -2 -4  0       -3
          10 11     3 -2-14        1 -6-11       -9 -5  6  3  0  9  2  0 -5 -1  4  3    -2  7  4  2     1 -4  2
       -3   -10-12 11  2  2  2  0  0  0  0 -9 -8  0    -9 -5 -1  3  3  2              3 -5-13  7 -8 12  5
             0-28    -4  7     5  4    20  9  9    19  1  3 -1                                        -15 19
                28  0     3 -4  0-45-56 -9    -2 25    20  0 -9 -6
                     13 12-17  3  8       -3  2  1    -4-12    -1
                                                 5 -9 11 -2 -1  7
                                                          1 -1-10
```

Fig. 5a1 The worst error estimation of G96-01: $\sigma = 6.5$ cm (interpolation using the r-r method, cm)

```
                                                 1     0 -1
                                                 0 -1 -1       -8
                                                  -10 -4  1 -5 -3
                                                 1  3     2  7       11 -1  0
                                          1          4  1  3     8  3     0       35
                                       3  1     0  0  2     6     0 -1 -5-11    -14  0
                                    3 -2 -2-21    -7  2  1    -2    -2  0    -2    -1
          0  0  0                       4 -4     2-11 -2 -3 -2     1     4       -1  1  0  0     0
          0  0  1 -1          1    -1  4     0       0     0  3    -3  0  1     4  0     2     0  0 -1  3  0
           -12      -10     6 -4    -7    -2  5 13-12  6  5     0  1 -4        2  0  0  0  0  0  0  0  0 -3  0  5-35
             2  2    -4 -3  5  2  4     2  2  1        2  2  7 -1 -7 -2  3     6     4  0 -3 -1  0 12  7    -6  4    -4
          5    -1  0  0 -3    -4    -8 -2     0  1 -1 -2  6 -2  9       -5 -4        0        0 -6 13     0  0  3-21       19-31
   11  2     6 -3  0  0     0  1  1 -2  9 -2  0     0  3    10  0  1 -3     0  0    -6  0  0-10     0  0  3 10  1     0 -2  0
  -19 -1 -1 -9  5 -2    11  2  8     4 -1     4     0     2 -2  0         7     0  1  2     0  0-16    -4     5 -1-15  0  8
  -10  1 -3  3     2  1    -3 -1  4 -9  5 -9     0  2  0  0 -2  1  0 -1 -6    -2  3  0     0  3  0 -1    -8  5 -9-55  8
     -1        0 -4     1 -2    -1    -7  0 10  8     5     0     1 -2       -4  2       10 -2  3    11      -10     9
  17 18 -2-10-14     1 -1  0  2    -4  1 -3        7  0 -1 -3  0  0  1 -3  1  4  3        0        5 -1  1  0  1       -6
   2 -3  6     6    -1     3     0 -2    -4  0  3        3  2 -4  0  0 12     7  4 -8    -7  3        9 10 -5 14 18    11
-8    -3  0  0  0  0  1  2    -2 -1    -3 -1       -3  0  5 -9     4  7    15-12   -10-11  3  6  0     0  0  5     0
   0 -1  0  9  3 -4        6 15    17     1 -1  6     0 -1-14     0 -1        0       -7 17  0  0  0 -7  0-19-12  0
   0  8 -2-12 17     7-11       -6       -6        9  6  6 -4    -7  1  0  0    -3 -1  3    -1  1
       -1      -12     2  1      -14 -1     0 -1  0   -12 -3       -5     1     0 -6        1  4    -6
       -7 13    -1-10-11  8    10  4     0  0 -2  3 -7  0  7  8 -7    11          -2    -4 10 -7-22   -23
             6  4    -5 -1 -4     0 -1 -1     0     5     4   -10  0  0 -5 14  0 -9  8 11   -11 -4 10       15
          -9    -1  3 -7  2  1  3    -6     9 -6  0          -2 -5     0  0 20-23-21     6 18  0-19 19    14
             0 -2  3 -6     4  0     7  2 -2 12    -3  0    -6    35 12-38 28     2    -2 15       28-35  9  7-25
            -2  3     1 -3  0  1    -8  1  1   -5-12 -9  9-10-15 19 -8    -9 -5   -10     5 18 15    11   -38
                4     0  0        2  9 -5  0 -5        6   -27    29-18-25 13 -3-12    11  3    25-24 40      -23
             5  1    -3  8  0 -4        0-12     4  3 15 15-12-18 30   -22 -7 18-41 12       11-13-27-56 34    36
                3  1  5  3 10     2  7 -5        3      -17-14    -6  8 14 11       39    42  5 52         -31
               -5     9        7  5  2    -1 14     4 11 -5     8-10    -4 -4-28 -3  0   -28-56 26-68       17
                  -7  0  3  3  4     6  3  3   -11 -8 19     0 -3   -12  1-19-29  1    44         -39   -16  4
                 0 -1        2  1  1  2  0    -8     3 15    22-11 11   -21 -6 18     8         -2 48 23-15-26
            -7           -2 -2  2    -6  9 -8    -6   -13  2-11    -1 -4 -4 16     0  8  4  0-13 20   -10-56
            -8  0 -1    -5 -7 -4  1     3  7  2-15  0     9  0 15 -9-24    14 -5    15 21  1-28 -5 41 14      -27     0
               -2 -4 -6  0       -5 -3  3 11 -3 -1  0  2  4 10 -7  5 -6  7  1     5  7 16 -4-16 30     0-28 30    14-46
            -8     2  3 -1  2 -4 -1    -4  3  4  1 -1     0-22 -7 -5        1 -4     1   -16-15    -3-35-23       3
          13  8     6 -2 -4       -1 -5 -9        2  4 25-16-22 17  7 16 -9 -2  3  0    -5 14 17 -6    -2-18 38
       9   -23-14 16  2 12  5  0  0  0  0  2 -4  9    -9-18  4 13  1  3              -5 -7 20  1-28 -7  8
             1-21     0 12    28 12    33 27 16    28 27 21 16                                        -30 19
                20-10   -42  9-62-37-49  0   -16 41    29-23-18-14
                      59-39 36 23  4      -15-11-37   -13 -6     3
                                                -63 78-71 15 15  6
                                                          1  0-24
```

Fig. 5a2 The worst error estimation of FBN: $\sigma = 13.1$ cm (interpolation without using the r-r method, cm)

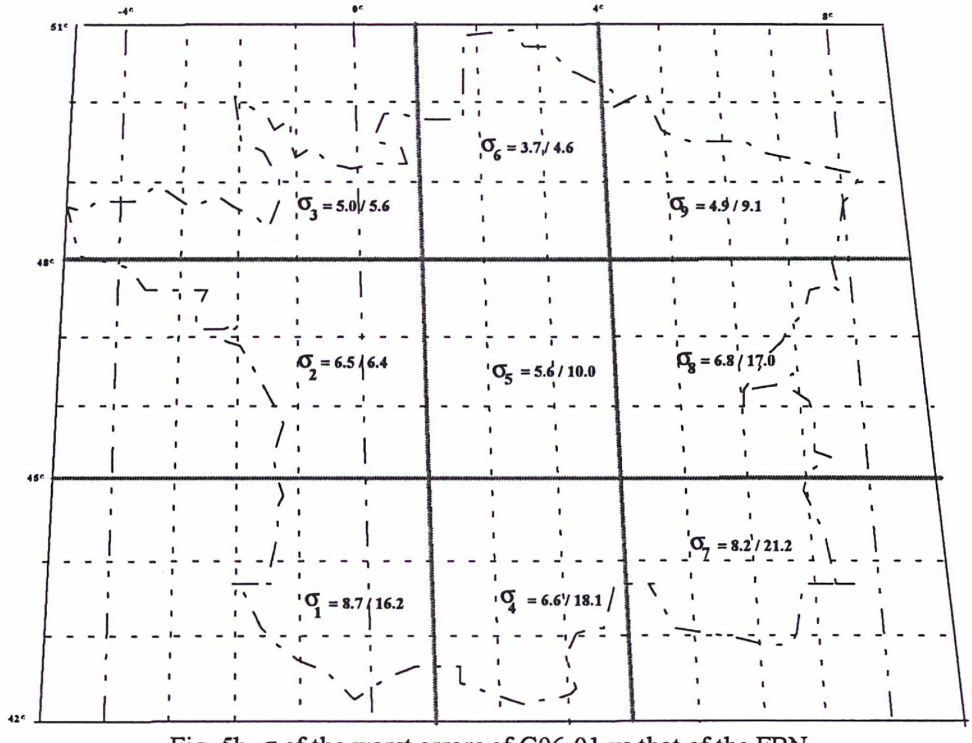


Fig. 5b σ of the worst errors of G96-01 vs that of the FBN
(comparison between the interpolations ***with/without*** using the r-r method, cm)

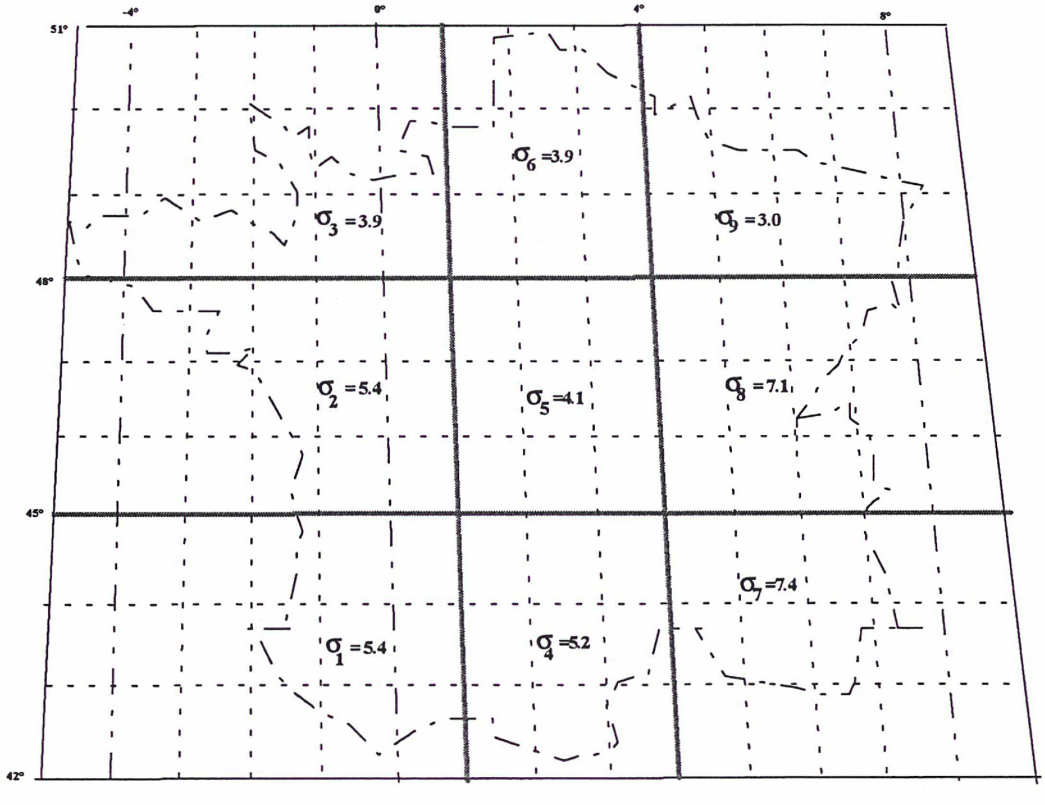


Fig. 6 σ of the external errors of G96-01 (cm)

3.2 External error estimation

The external error is defined by the discrepancy respectively (1) between G96-01 and a country-wide gravimetrically determined geoid and (2) between G96-01 and a set of 45 GPS levelling points in the East-Pyrennées mountains, which are not the French Basic Network points and therefore have not been used to compute G96-01.

(1) Comparison with a gravimetric geoid
In order to not introduce the long wave-length errors existing in the gravimetric geoid, the comparison has been carried out by dividing the total French territory into 9 sub-regions. The results and the statistics are shown in Tab. 3 and Fig. 6.

Tab. 3 External error of G96-01 (m)

region	min	max	mean	Std. Dev. (σ)
1	-.166	.463	.000	.054
2	-.174	.182	.000	.054
3	-.197	.134	.000	.039
4	-.145	.134	.000	.052
5	-.123	.111	.000	.041
6	-.560	.148	.000	.039
7	-.297	.300	.000	.074
8	-.548	.275	.000	.071
9	-.091	.117	.000	.030
mean				.050

(2) Comparasion with a set of GPS levelling points
A comparasion has been also made between G96-01 and 45 GPS levelling points in the East-Pyrennées moutain area. They have not been used to compute G96-01. The min, max and standard deviation σ of the differences are respectively: -16.8, 10.0 and 6.3 cm with a bias of 11.4 cm. From the above discussion on the worst errors, we have already known that it is in the Pyrenées mountain area where exist the biggest errors in G96-01. So this estimation is considered to be one of the worst cases.

4 Conclusion

This study is required by the very fact that, as what have being practically done in many countries, a national height reference network (FBN - the zero order levelling reference consisting of about 1100 points) has been set up using GPS and precise levelling techniques. The accuracy of this vertical controlling network is several centimetres *on the benchmarks*, that is, on the FBN points. Unfortunately, the distance between the FBN points is about 25 km on average. This resolution is not fine enough to establish a *continuous* vertical controlling *surface* by using only a simple direct interpolation, especially in mountain areas. Such an interpolation may become dangerous in some regions of France due to the existence of the great mountains such as the Alps and the Pyrennées. A non-linear interpolation is then necessary.

This paper mainly studies the accuracy of the remove-restore technique for the geoid prediction using GPS-levelling measurements, a geopotential model and DTM information. A new French quasi-geoid G96-01 has hence been determined. *The worst error* of G96-01 is about 3 ~ 4 cm in plain areas, 5 ~ 6 cm in hilly and small mountain areas, 7 ~ 8 cm in great mountain areas and **6.5** cm on average. However, the simple direct interpolation between the FBN GPS levelling points gives the worst error of **13.1** cm on average.

An external error estimation of G96-01 has also been discussed. This was done by making a regional comparison between G96-01 and a gravimetrically determined quasi-geoid. This comparison was made regionally in order to eliminate the long wave-length errors in the gravimetric quasi-geoid. The external error is 3 ~ 4 cm for plain areas, 4 ~ 5 cm for hilly areas, 5 ~ 7 cm for mountain areas and 5 cm on average.

The accuracy of G96-01 is estimated to be: 2 ~ 3 cm for plain areas, 3 ~ 4 cm for hilly areas, 4 ~ 6 cm for mountain areas and 4 ~ 5 cm on average.

Acknowledgement: The author is grateful to his colleagues: Mr. C. Luzet, Mr. A. Harmel, Mr. Lechat, Dr. E. Doerflinger and Prof. R. Bayer for their kind help during this study. The GPS/levelling and DTM data are supplied respectively by the SGN and SDT of Institut Géographique National and Montpellier University II. This is very appreciated.

Reference

Forsberg R.(1984) A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, OSU, report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA

Heiskanen W., H. Moritz (1967) Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, GRAZ, AUSTRIA

Jiang Z. (1995): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA.

Jiang Z., H. Duquenne (1996a): On combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, Journal of Geodesy, 1996 No 5

Jiang Z., H. Duquenne (1996b): On fast integration in geoid determinaton, submitted to Journal of Geodesy

Rapp R.H. (1996) Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference, submitted to the Journal of Geodesy.

Tscherning C.C, Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the Geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic.

A5-3 On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination
IN: *Proceedings of the XXI Congress of the European Geophysical Society 1996* (EGS96), Session G7, 6 - 10 May 1996, The Hague, Netherlands

On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination

Z. JIANG[1] , G. BALMINO[2] and H. DUQUENNE[1,3]

1: Institut Géographique National, F-94160 Saint Mandé, France, fax: 33 1 4398 8488, email: jiang@schubert.ign.fr
2: Bureau Gravimétrique International, F-31055 Toulouse, France fax: 33 1 6125 3098, email: balmino@pontos.cnes.fr
3: Ecole Supérieure des Géomètres et Topographes, F-91025, Evry, France fax: 33 1 6936 7305

Abstract

In the context of a country-wide geodetic adjustment, there are two kinds of errors in a gravimetric geoid determination by using the remove and restore technique (r.r.): accidental and systematic. 1) The accidental ones, in general introduced by some random causes, can be identified with the ordinary surveying errors which obey the normal deviate and can be eliminated in the least squares sense. 2) The systematic ones are introduced by the long wave-length errors of the geopotential model used, the biases existing in the gravity data and in the digital terrain model (DTM) etc. These biases can be each furthermore divided into two parts: a) Global tendency, which is due to the discrepancy between the geopotential model, the gravity and DTM data. This depends on the applied method, especially when the r.r. technique is used; b) Local deformations, which are caused by the systematic surveying errors, local reference systems (in bordering areas of a country for example) and the use of inhomogeneous data sources etc. The systematic errors are usually represented and then determined by using linear approximation models.

Based on this error behaviour analysis, a combined method is proposed to adjust the gravimetric geoid height with GPS levelling observations. Different random and functional models have been established: the random error observation equations for the accidental errors, a mixed analytical representation of polynomial, similar transformation and periodic function for the global tendency and finally, locally limited linear regressions for the local deformations. For the latter, one should divide the whole gravimetric geoid area into several sub-areas in order to better approximate the local systematic errors.

Numerical tests are carried out firstly with simulated models and then we try to predict what will be the accuracy in southern France of the coming determination of the French national geoid. By such numerical experiments, it is shown that when using well distributed GPS levelling points and high precision gravimetric geoid height "differences", a combined adjustment can separate and determine the systematic errors in the gravimetric geoid solution with a satisfactory accuracy. Such an adjusted geoid can have an accuracy of about 2 ~ 5 cm even over a very extended area. Also, the accuracy depends very much on the relative location between the GPS levelling points and the points where the gravimetric geoid is determined.

1. INTRODUCTION

A high precision gravimetric geoid (or quasi-geoid) is often computed by using the "remove-restore" technique (Heiskanen and Moritz, 1967, Balma et al. 1992, Forsberg 1996). The advantages of such an approach are that it can have a very high resolution and a very high "relative accuracy" in the differences of geoidal heights. There are disadvantages, however. (i) its "absolute accuracy", in the sense of the determined geoidal height itself, is currently poor due to the long-wavelength errors in the adopted reference model (Rapp et al. 1991, Rapp, 1992, Li and Sideris, 1994); (ii) it often contains the so called "local deformation". This is an important error source and is caused by the error or the shortage of the gravimetric or DTM data as well as the bias between the adopted local height reference system and the reference surface given by the geopotential model etc.

On the other side, due to the GPS/levelling, we can measure the geoid on some scattered points on land with very high absolute and relative accuracy. The advantage of this solution is its high accuracy. Its main disadvantage is its poor resolution.

Consequently, an adjustment which combines the two kinds of solution is always necessary. The usual methods consist in applying a datum transformation model with 4 or 7 parameters, or a polynomial model with 3 to 6 coefficients. These models correspond to a (quasi) "rigid movement" in space by which the gravimetric geoid does not change its *geometric form* but only its relative *position* to the GPS levelling points. Obviously, a rigid movement cannot absorb the local deformations and the errors at medium and short wavelengths. Those are the most important errors in the geoid determination nowadays.

Furthermore, the existing methods give no rigorous accuracy estimation.

To overcome this weakness, the optimal fitting problem is hence raised. It is based on analysing the behaviour of different errors and approximating them separately with corresponding mathematical models. The principles can be briefly explained as follows: i) cut up the area of the gravimetric geoid in several sub-zones; ii) set up functional models to approximate the local deformation and global tendency; iii) adjust as a whole which, clearly enough, does not need any spherical consideration. One of the problems which are encountered is how to deal with the large sparse linear systems (non zero elements < 10%). One effective method that operates only the non zero elements in the sparse matrices has been developed. The conjugate gradient method is used to solve the normal equation.

A simulation model has been established to investigate this approximation problem in this paper. Several numerical tests are discussed and the accuracy prediction of the new French geoid based on the RBF (Réseau de Base Français or French Basic Network) point distribution has been made.

2. MATHEMATICAL MODELS

2.1 Behaviour of the errors in the gravimetric and GPS levelling solutions

For the adjustment, we consider the gravimetric geoid and GPS levelling geoid solutions as the "observations". Correspondingly, there are then two kinds of errors: accidental and systematic.

1) The accidental ones, in general introduced by some random causes, can be identified with the ordinary surveying errors which obey the normal deviate and can be estimated in a least squares sense. They exist in both kinds of observations.

2) If we do not take into account neither the errors in GPS nor those in the levelling measurements, the systematic errors correspond mainly to the errors of the geopotential model used, the biases existing in the gravity data (e.g. in regional sources) and in the digital terrain model etc. The systematic errors, existing only in the gravimetric solution, can be furthermore divided into two parts:

a) Global tendency is due to the discrepancy between the geopotential model and the gravity and DTM data. This is periodic and depends on the method applied, especially when the r.r. technique is applied. The short periods which are equal to or smaller than the size of the studied area can be approximated by periodic functions of latitude and longitude. The highest frequency which is possible to separate, that is, the Nyquist frequency, corresponds to two times the average distance between points. In the case of RBF, this is about 25 km or 0.2° ~ 0.3°. So the periodic terms which can be possibly determined such that are : 0.5° $\leq 360°/K \leq 7.0°$ (the area covered by RBF) with K =1, 2, 3, ..., keeping adjacent values for which the interval is at least about 0.25°. The long periods which are greater than the size of the area over which the geoid is determined can be approximated by a datum transformation or a polynomial regression;

b) Local deformations, which can be attributed to systematic surveying errors, local reference systems (in bordering areas of a country for example), the use of different and inhomogeneous data sources etc. It is easy to understand that local deformations are globally accidental and locally systematic.

Based on these considerations, we can establish different random and functional mathematical models to approximate the errors: random error observation equations for the accidental errors, mixed analytical representation (polynomial, similar transformation and periodic functions) for the global tendency and finally, locally limited linear regressions for the local deformations. For the latter, one should divide the whole gravimetric geoid area into several sub-zones in order to better approximate the local systematic error (without complex spherical geometry considerations).

2.2 Relative and absolute accuracy vs. observation equations

An important concept is how to distinguish between the absolute and relative accuracy. As analysed in section 1, the gravimetric solution, which has a poor absolute accuracy, has a very high resolution and good relative accuracy exhibited in the gravimetric geoid height differences. Because local deformations are locally systematic, they will be almost cancelled in the gravimetric geoid height differences. On the other hand, the GPS levelling, which has a poor resolution, has a very high absolute accuracy. Based on these simple facts, our principles for the combined adjustment are the following: 1) For the gravimetric geoid data: take the difference of the geoidal heights at two points as the observation to establish the *relative observation equation* in order to eliminate the local deformation and short-wavelength errors. The unknown parameters will be locally determined. For this purpose, the whole gravimetric geoid area (usually a grid) should be divided into several smaller pieces according to some specifications: geographical location, relief of topography, coverage of data sources etc. A reasonable division is an important factor to reach the best adjustment result; 2) For the GPS levelling data: take the geoidal height itself as the observation to establish the *absolute observation equation* in order to absorb the medium and long-wavelength errors. The unknown parameters for the reference system transformation will be globally determined.

2.3 Combined adjustment model

Let us introduce the following notation:

ζ^{GPS} = height anomaly corresponding to the quasi-geoid determined by GPS levelling method;

ζ^g = height anomaly corresponding to the quasi-geoid determined by the gravimetric method;
$\bar{\zeta}$ = adjusted height anomaly;
$\Delta\zeta_{ij}^g = \zeta_j^g - \zeta_i^g$ = difference of height anomaly;
P_{ij}, P_{ij}^g = weight of relative observation equation;
P_k, P_k^{GPS} = weight of absolute observation equation;
V_{ij}, V_k = residual of adjustment;
$T(F)$ = global transformation model with F as the set of parameters;
$\Delta T(F)$ = differential of $T(F)$;
$t(f)$ = local deformation model with f as the set of parameters.
$\Delta t(f) = t(f)$ applied to a pair of points

2.3.1 Observation equations

Denote *i, j, k* as points on quasi-geoid. Introducing the systematic error models, the global transformation function $T(F)$ and local deformation function $t(f)$, we have the *generalised relative and absolute observation equations* (Jiang, 1991):

$$P_{ij}^g:\ V_{ij} = \bar{\zeta}_j - \bar{\zeta}_i - \Delta\zeta_{ij}^g + \Delta T(F) + \Delta t(f) \qquad (2\text{-}1)$$

$$P_k^{GPS}:\ V_k = \zeta_k^g - \zeta_k^{GPS} + T(F) \qquad (2\text{-}2)$$

In the following paragraphs, we will give the practical formulas for the systematic models $T(F)$, $t(f)$ and weight P.

2.3.2 Global transformation model *T(F)*

The global model consists of three terms:

$$T(F) = \delta\zeta^T + \delta\zeta^S + \delta\zeta^P$$

1) Periodic error model

$$\delta\zeta^T = \sum_{n=1}^{N}\Big[x_{n,\varphi}\cos(\omega_n\varphi) + y_{n,\varphi}\sin(\omega_n\varphi) + x_{n,\lambda}\cos(\omega_n\lambda) + y_{n,\lambda}\sin(\omega_n\lambda)\Big] \qquad (2\text{-}3)$$

where N is the total number of the periodic terms. φ, λ are latitude and longitude.

2) Similar transformation model

$$\delta\zeta^S = \Delta X\cos\varphi\cos\lambda + \Delta Y\cos\varphi\sin\lambda + \Delta Z\sin\varphi + k\cdot R \qquad (2\text{-}4)$$

where $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ are the three translations and k the scale factor. R is the earth radius.

3) Polynomial model

$$\delta\zeta^P = \sum_{p,q} Q_{p,q}(\varphi-\varphi_o)^p(\lambda-\lambda_o)^q\cos^q\varphi \qquad (2\text{-}5)$$

where p,q =0,1,2 and φ_0, λ_0 are the mean values of φ, λ. $Q_{p,q}$ are the polynomial coefficients.

2.3.3 Local deformation model *t(f)*

This model will only apply to differential quantities. When the sub-zones of the geoid area are small enough, we postulate that the local deformations are linear. We have:

$$\delta\zeta^R = \delta\zeta_0^R + a(\varphi-\varphi_0) + b'\cos\varphi_0(\lambda-\lambda_0) \qquad (2\text{-}6)$$

where the coefficients can be determined subject to some conditions.

2.3.4 Weights

Denoting by M_{GPS} and M_g the mean square errors of an observation at GPS levelling point and for the gravimetric solution respectively, and μ_0 being the unit mean square error, we compute the weights as follows:

relative observation equation: $P^g = \mu_0^2 / M_g^2$ (2-9)

absolute observation equation: $P^{GPS} = \mu_0^2 / M_{GPS}^2$ (2-10)

For fix/free an observation: $P \rightarrow \infty / 0$ (2-11)

3. SIMULATION TEST

3.1 Simulation characteristics and parameters

The following conditions will be assumed in the simulation model:

Area: 2.0° x 2.1° (see Fig. 1) Are given: (i) the gravimetric geoid grid of resolution: 0.1° x 0.1°; (ii) GPS levelling points of RBF every 0.2° in latitude and 0.3° in longitude;

Accidental error model: Normal distribution, $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ with zero mean: $\mu = 0$ and standard deviation: $\sigma = \pm 2.5$ cm. These errors will be added to both gravimetric and GPS levelling solutions;

Systematic error model:

1) local deformation: linear model with two parameters (ref. to Fig. 2);

2) global tendency:

polynomial model, 3 to 6 parameters or similar transformation model 3 or 4 parameters (ref. to Fig. 2),

periodic model, 1 to 7 periods: 0.5° ~ 2.0° by step of 0.25° with the possible maximum amplitude about $\sqrt{2\sum_{i=1}^{N} A_i^2}$ (ref. to Fig. 3). These errors will be added only to the gravimetric geoid (ref. to Fig. 4);

Simplification: with it we have the very simple adjusted unknown vectors $\boldsymbol{X}$ (the geoid height X_ζ and unknown global and local parameters X_P):

hypothesis 1: $\zeta \equiv 0$ (the real geoid height equals zero everywhere). This leads to the adjusted geoid height: X_ζ = real error, $\forall X_\zeta \neq 0$

hypothesis 2: all systematic error parameters are set to be equal to 0.1. This leads to all parameters determined by the adjustment: $X_P - 0.1 = \text{real error}, \forall X_P \neq 0.1$

Various strategies for test calculations:

(1) fitting by using only polynomial or similar transformations;

(2) optimal fitting by using the method discussed above:
- cut up into 1 ~ 16 sub-zones according to geographical regular or irregular boundaries
- change the number of systematic parameters
- change the magnitude of the accidental errors
- change the number of RBF points and their distribution
- change the weights (the accuracy) of gravimetric and GPS levelling solutions;

Obviously, a proper selection of the parameters and the division of the gravimetric geoid is very important. Before the final adjustment, a pre-adjustment is therefore necessary to select the parameters which should be taken into account as the unknowns and to divide the gravimetric geoid into several sub-zones in a suitable way.

Criteria for selecting the unknown parameters

(1) Criterion for selecting a periodic term parameter:

The average square of a periodic error of amplitude A over a 2π interval is:

$$\overline{M}_A^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A\cos\alpha)^2\,d\alpha = \frac{A^2}{2} \qquad (3\text{-}1)$$

Obviously, in order to be able to determine a periodic term, the value of $\overline{M}_A$ should be at least greater than the error in the geoid difference as given by the GPS levelling observations, that is:

$$A^2/2 > M^2_{\Delta(GPS-Level.)} \approx 2M^2_{GPS-Level.} \qquad (3\text{-}2)$$

Assuming an error of 0.025m in the height anomaly in the RBF, we get:

$$A > 2M_{GPS-Level.} \approx 0.05m \qquad (3\text{-}3)$$

That is, the amplitude of a periodic term can be well determined only if its magnitude is greater than 0.05m.

(2) We give a simplified criterion for selecting a parameter as an unknown in the final adjustment. We define the parameter to error ratio by:

$$R_{PE} = \frac{X_i}{M_{X_i}} = \frac{\text{Parameter}}{\text{Its mean square error}} \qquad (3\text{-}4)$$

where the parameters are those assumed in the systematic error models and should be set as the unknowns and determined in the combined adjustment. A parameter will be finally set as an unknown in the final adjustment when and only when $R_{PE} > 2$.

3.2 An example

The following conditions are used for this example (other conditions are the same in section 3.1, Fig. 1, 2, 3, 4):

- similar transformation error (datum shifting, Fig. 2);
- local deformation is added to the north-east area (0.5° x 0.5°) in the gravimetric geoid grid (Fig. 2);
- periodic error: 3 periods 0.5°, 1.0° and 1.25° with constant amplitudes and phases equal respectively to $\sqrt{0.1^2 + 0.1^2} = 0.141m$ and 45°. There are altogether 12 parameters (Fig. 3);
- GPS levelling and gravimetric solution weight ratio: 2:1. Taking the mean square error of GPS levelling is equal to 0.025 m, and using equations (2-10) and (2-11) we get the unit mean square error is equal to 0.035 m (a priori). The ratio may be modified according to error estimation.

Table 1 gives the statistics of the accidental and systematic errors introduced in the GPS levelling and gravimetric geoid "observations".

Table 1 Statistics of the error simulations (m)

error type	max	min	mean	SD
accidental	0.075	-0.080	0	0.025
local deformation	0.105	0.000	0.052	0.025
simil. transformat.	0.147	0.144	0.145	0.001
periodic	0.747	-0.561	0.051	0.243
total	0.921	-0.420	0.203	0.264

SD = standard deviation

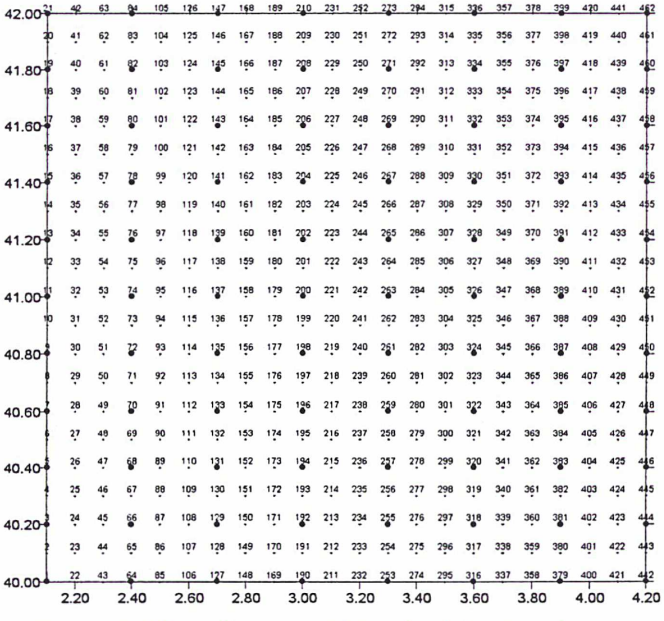


Fig. 1 88 GPS levelling points (RBF) marked by big black dots and gravimetric geoid (462 nodes)

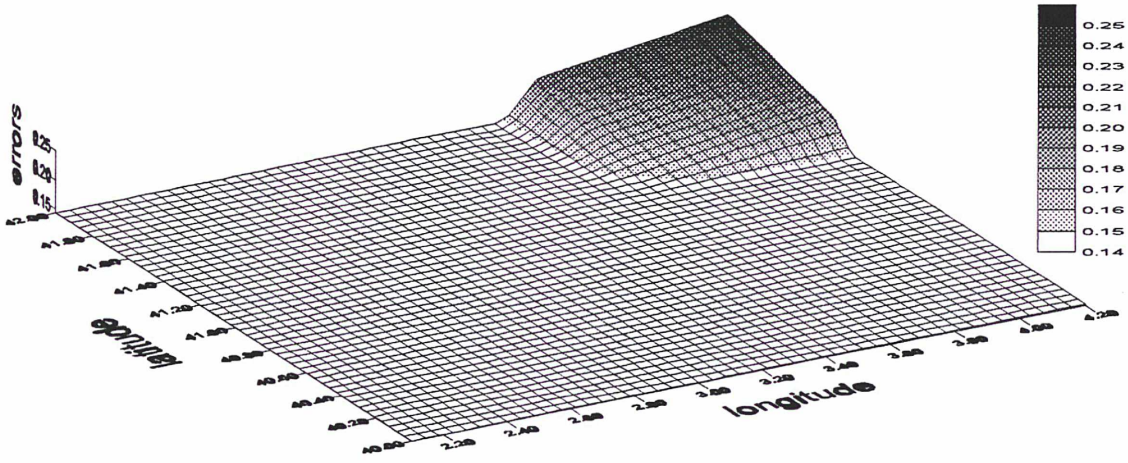


Fig. 2 Similar transformation error and local deformation (m)

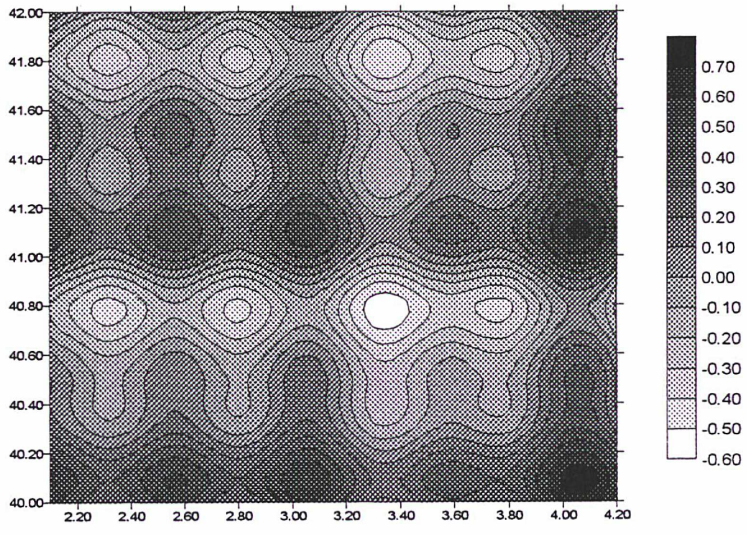


Fig. 3 Periodic terms: 0.5°, 1.0°, 1.25°

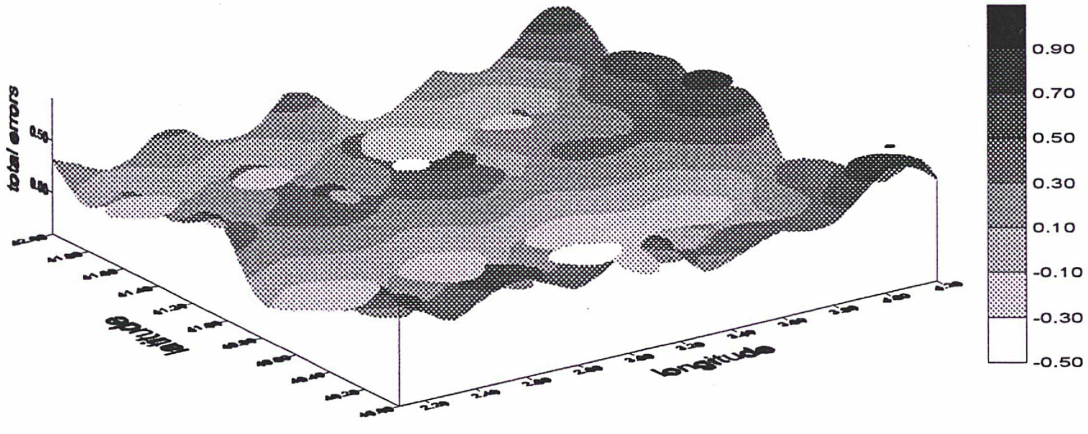


Fig. 4 All the systematic and accidental errors (m)

3.3 Selection of periodic terms

This is made by using an iteration method and the criteria mentioned in section 3.1. According to Nyquist law, the possible periods which can be determined from the given grid and the distribution of GPS levelling points are 0.5° $\leq 360°/K \leq$ 2.0°, K =1, 2, 3, ... with a minimum interval of about 0.25° between periods. We take as an example the periods: 0.5°, 0.75°, 1.0°, 1.25°, 1.5°, 1.75° and 2.0°. So during the pre-adjustment, all 7 periodic terms should be considered. Fig. 5 gives the result of the 7 amplitudes determined in the pre-adjustment.

By using criterion (3-3), we can immediately see that the terms of periods 0.75°, 1.75° and 2.00° do not exist. The term of 1.5° is less than the criterion there holds: 0.05 m. But to be on the safe side, we perform another pre-adjustment taking the remaining 4 terms: 0.50°, 1.00°, 1.25° and 1.50°. This makes sure that the term 1.50° does not exist. Having found these three terms (0.50°, 1.00° and 1.25°), we confirm their existence by looking at the error to parameter ratios.

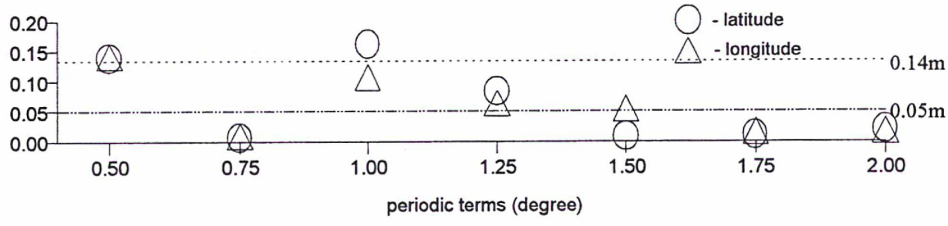


Fig. 5 Amplitudes of 7 periodic terms given by the pre-adjustment (m)

3.4 Selection of sub-zones

Iteration tests are made by cutting up the geoid grid into different sub-zones as shown in Fig. 6. a) one zone ; b) 4 zones; c) 9 zones; d) 2 very unequal area zones.

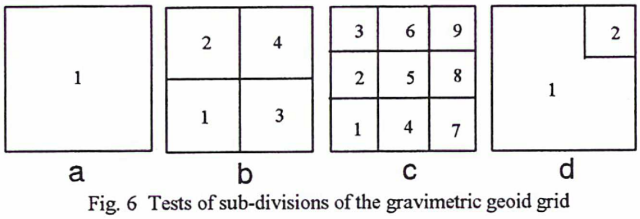


Fig. 6 Tests of sub-divisions of the gravimetric geoid grid

The results of the pre-adjustment show that the division of Fig. 6d is reasonable and in the sub-zone 2, we found big local deformation. See Table 2:

Table 2 Local parameters given by pre-adjustment (for Fig 6d, m/degree)

zone	a	$b\cos\varphi$	b
1	-0.0086	-0.0012	-0.0016
2	0.1090	-0.0325	-0.0431

3.5 Final adjustment

The final adjustment uses the selected three periodic terms: 0.5°, 1.0° and 1.25° and the sub-division in 2 local zones (Fig. 6d). The local deformation parameters determined are $a = 0.1090 \pm 0.0500$ and $b = 0.0431 \pm 0.0550$. Table 3 gives the determined periodic parameters; let us recall that the simulated values of all parameters should be 0.1 and the real values of the height anomaly $\zeta \equiv 0$. We see therefore that except for the local parameter b (the reason will be given in section 3.6), all other unknowns are determined with a satisfactory accuracy. The statistics of the real errors and of their estimations are listed in tables 4 to 6, see also Fig. 7 and 8.

Table 3 Periodic parameters determined (m)

period	φ		λ	
	x	y	x	y
0.5	0.1025 ±0.0045	0.0925 ±0.0044	0.1017 ±0.0070	0.1065 ±0.0075
1.0°	0.1010 ±0.0099	0.1048 ±0.0074	0.1012 ±0.0115	0.1070 ±0.0147
1.25°	0.1024 ±0.0088	0.1016 ±0.0111	0.1087 ±0.0168	0.0958 ±0.0094

The precision of the geoid determination (table 4) is 0.022 m. This is the estimated value (MSE) given by the adjustment and is close to the real error 0.025 m (given in the same table). On the other side, Table 5 gives the RMS error, 0.011m only, estimated from the residuals over the GPS levelling points after the adjustment. It is much more optimistic than the real value. This shows that the precision estimated only by the residuals of the gravimetric geoid fitted to the GPS levelling points, as many people are doing it usually, may be too optimistic. Table 6 shows significant corrections to the gravimetric geoid differences. This is an important character of our combined adjustment because this means that the "geometric form" of gravimetric geoid can really be modified rather than changing only its position in space.

Table 4 Errors of the adjusted geoidal height over all grid nodes (m)

type	max	min	mean	RMS
real error	0.076	-0.073	0.000	0.025
MSE	0.029	0.015	0.021	0.022

MSE = mean square error given by the adjustment.

Table 5 Errors of the adjusted geoidal height over 88 GPS points (m)

type	max	min	mean	RMS
real error	0.028	-0.029	0.000	0.011

Table 6 Adjustment correction to gravimetric geoidal height difference (m)

max	min	mean	RMS
0.025	-0.053	0.000	0.010

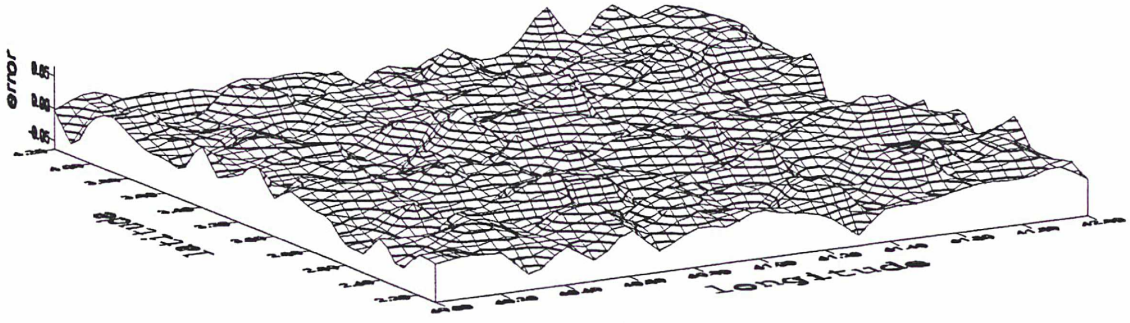


Fig. 7 The real errors (residuals) of the adjusted height anomaly (m)

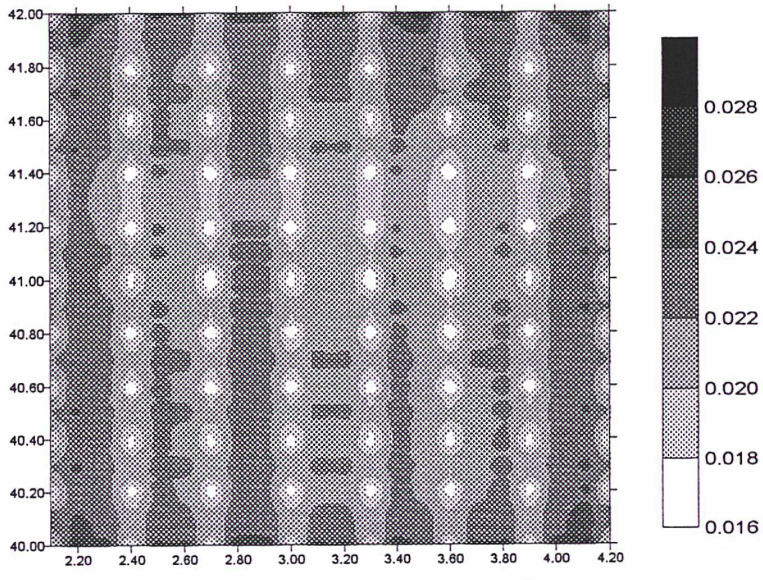


Fig. 8 Mean square error of the adjusted height anomaly

From Fig. 8, we see that the pattern and magnitude of the mean square error depend a lot on the location relative to the GPS levelling points: the error goes up quickly with the distance to the GPS points. Another interesting fact is that the MSE is larger in the north-east area where there exists a local deformation as could be expected.

3.6 Gross errors detection and role of weight

The combined adjustment gives a possibility to detect gross errors in the GPS levelling observations. A decreasing weight iteration method is used to find out the gross errors. Generally, when gross errors exist, they should be reflected in the adjustment residuals. For example, in our simulation data, we added 4 gross error of 0.2 m to 4 GPS levelling observations (see Fig. 1 and Table 7).

Table 7 Detection of the gross errors

point	gross error	weight 2.0	1.0	0.5	0.0
80	+0.200	0.110	0.078	0.051	0.008
131	+0.200	0.117	0.087	0.063	0.024
263	-0.200	-0.078	-0.034	0.003	0.061
381	-0.200	-0.122	-0.094	-0.070	-0.033
RMS	+0.200	0.108	0.076	0.052	0.034

The first adjustment is of equal weight for all the GPS levelling points. The result gives rather big residuals over those points and they are considered doubtful (see Table 7). Then by decreasing their weights, we get the residuals (here they are the real errors) which decrease quickly. And when the weight becomes small enough (approaches zero), that is, a GPS levelling point does not take the role of controlling point in the adjustment, we get the residuals (real error) MSR=0.034 m which approximates to 0.025 m, the accidental error added into the GPS levelling observations.

We can also change the weight of the relative observations. As can be seen from Fig. 2 et Fig.6c, the local deformation yields two abrupt slopes between sub-zone 9 and its neighbouring zones. An equal weight adjustment may introduce discontinuity in the abrupt slope areas. So the weights of the relative observations (gravimetric geoid) in the concerned area have been decreased. This produces a smoother adjusted geoid but the local parameters determined may be less accurate (see section 3.5).

3.7 A polynomial fitting

Table 8 and Fig. 9 show the level of precision which can be obtained by means of a traditional polynomial fitting (6 parameters). The residuals (RMS = 0.159 m) are so big that a simple linear interpolation between the known GPS levelling points would not be worse. The reason is that such

a model can not absorb the errors introduced by periodic and local deformations existing in the gravimetric solution: the gravimetric geoid changes only its position in space but not its shape.

Table 8 Real error after a polynomial fitting

over the points	max	min	mean	RMS
88 GPS levelling	0.163	-0.261	0.000	0.091
462 grid knots	0.501	-0.379	0.006	0.159

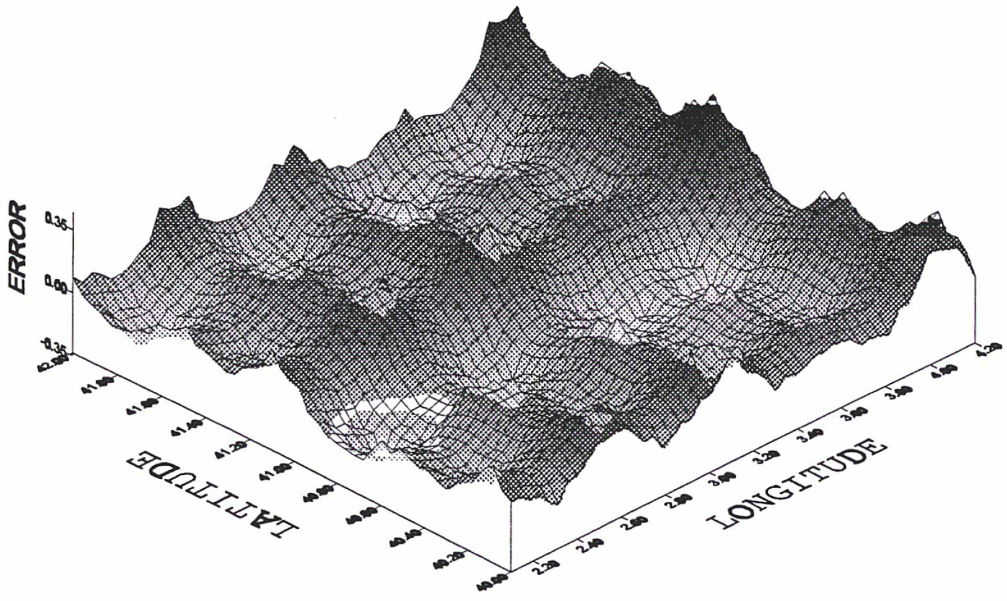


Fig. 9 Real error of a simple polynomial fitting (m)

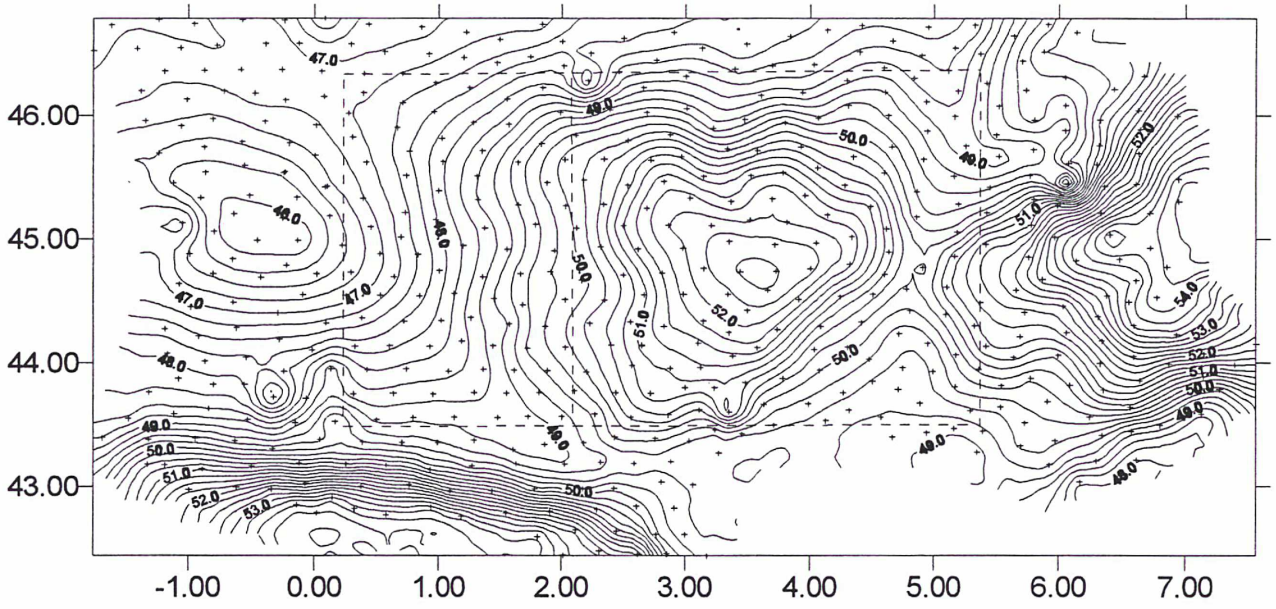


Fig.10 Geoid in south of France given by GPS levelling (RBF)

4. PREDICTING THE ACCURACY OF THE FUTURE NEW FRENCH GEOID

Fig. 10 shows the distribution of the 533 RBF points in the south of France. Using the conditions mentioned in the beginning of sections 3.1 and 3.2, we can make a prediction of the accuracy of the future geoid and the accuracy of the unknown parameters. Our main interest is focused in the general distribution of the error in the adjusted geoid. As an example, we take a rectangular area in the south of France a gravimetric geoid grid of size 3° x 5° with resolution 0.2° in latitude and longitude, (area limited by the broken lines on Fig. 10). According to the topographic relief, this area is cut into 2 sub-zones (separated by the median broken line on Fig. 10). Since the relief in zone 2 (right) is rougher than in zone 1 (left), we give the gravimetric geoid observations in zone 2 a smaller weight (0.75) than for those in zone 1 (where it is equal to 1.0). Fig. 11 and Table 9 give the errors

estimates respectively for the geoid and the unknown parameters.

In Fig. 11, sub-zone 2 obviously exists a bigger MSE than sub-zone 1, as a direct result of the unequal weights. The MSE becomes larger in the bordering areas. This shows the controlling function of RBF. Table 9a, b c show the predicted accuracy of geoid and of unknown parameters.

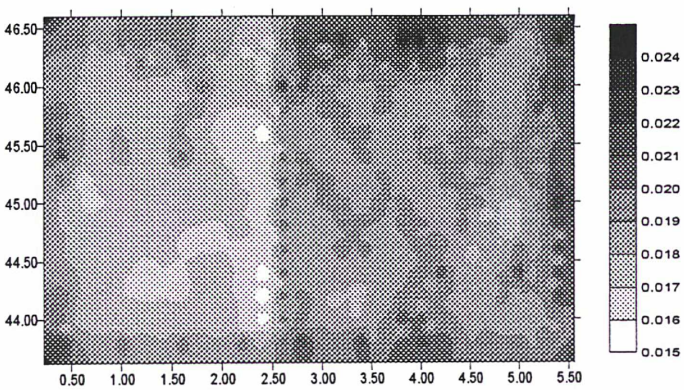


Fig. 11 Mean square error prediction of the geoid determination in south of France (m)

Table 9 Mean square errors predicted

9a Geoid (m)

max	min	mean	RMS
0.025	0.015	0.019	0.019

9b Local deformation parameters (m/degree)

coefficient	RMS
a_1	± 0.0122
b_1	± 0.0121
a_2	± 0.0112
b_2	± 0.0110

9c Periodic parameters (m)

period	φ		λ	
	x	y	x	y
0.5	± 0.0029	± 0.0030	± 0.0030	± 0.0030
1.0°	± 0.0040	± 0.0041	± 0.0032	± 0.0033
1.25°	$\pm$ **0.0043**	$\pm$ **0.0044**	$\pm$ **0.0036**	$\pm$ **0.0035**

5. CONCLUSION

A simple polynomial or similar transformation model fitting a gravimetric geoid to GPS levelling points is no longer satisfactory in view of the precision now achievable by modern techniques.

We propose a combined adjustment to fit the gravimetric solution (a gravimetric geoid grid) to the GPS levelling solution (discrete points). This is based on an error behaviour analysis in the two kinds of geoid solution. Different mathematical models have been established in order to approximate the accidental and systematic errors in the combined adjustment model. Especially, the systematic ones have been furthermore separated into global and local tendencies. For the local tendency, the entire geoid grid is cut into some smaller sub-zones and each sub-zone has its own local deformation model in order to perform locally a 2 dimensional linear regression. This combined adjustment can fully profit of the advantages of the two kinds of geoid solution, such as the relative and absolute accuracy, the high resolution, etc. It gives also a way to detect gross errors in both GPS-levelling points and gravimetric observations as well as to estimate the accuracy of the geoid and of the parameters determined. During the combined adjustment, the weighting takes an important role.

Imitating the French basic geodetic reference project (RBF), a simulation test has been carried out to study the possibility to approximate or to separate the three sorts of error: accidental, global and local. Numerical tests show that those errors can be well eliminated or determined. Gross errors may also be found if they happen randomly. Assignment of weight is very important to control the error distribution. There is a strong correlation between the geoid determination error and the distance between the location (where the gravimetric geoid is determined) and the GPS levelling points.

ACKNOWLEDGEMENTS: The first author is grateful to Dr. H. Le Men for his helpful discussion with him. The financial and technical support for this study has been provided by the Ecole National des Siences Géographiques, Institut Géographique National.

REFERENCES

Balma G., G.Balmino, M.Sarrailh, D.Toustou (1992): Géoïde gravimétrique français, Etat d'avancement et programme de travail au GRGS/BGI, FRANCE

Forsberg R. (1996): Geoid computation in the Noric and Baltic area, In: New geoids in the world, IAG, Bull. d'information No. 77, IGeS Bull. No. 4

Heiskanen W., H. Moritz (1967) Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, GRAZ, Austria.

Jiang Z.(1991): On the Adjustment for an Attached Gravimetrique Net, Acta Seismologica Sinica, Vol. 4, pp.535-545, China, 1991

Li, Y.C., M.G.Sideris (1994): Minimisation and estimation of geoid undulation errors, Bulletin Géodésique, Vol. 68, pp.201-219.

Mainville A., R.Forsberg, M.G.Sideris (1990): GPS levelling - performance of geopotential models and gravimetric geoid methods in the great slave lake area, Proceedings of Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Ottawa, Canada, Sept. 1990

Rapp, R. (1992): Computation and accuracy of global undulation models, Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Vol., pp.865-871, USA.

Rapp R.H., Y.M. Wang, N.K.Pavils (1991): The Ohio State 1991 geopotentiel and sea surface topography harmonic coefficient models, OSU Rept. n° 410, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA.

A5-4 On the combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points

IN: *Journal of Geodesy*, vol. 70:505-514

ON THE COMBINED ADJUSTMENT OF A GRAVIMETRICALLY DETERMINED GEOID AND GPS LEVELLING STATIONS

Zhiheng JIANG[1] and Henri DUQUENNE[2]
1: French National Geographical Institute, 94160 Saint Mandé, France
2: Ecole Supérieure des Géomètres et Topographes, France

Summary. A new basic geodetic network using the GPS technique is now being set up in France. There will be altogether 1000 benchmarks connected to the French levelling network. Obviously, the GPS levelling points are not dense enough to produce a national levelling reference surface. A gravimetrically determined geoid has therefore been proposed to be used for the interpolation between the GPS levelling points. However, because of long-wavelength errors, we consider that a gravimetric geoid does not have sufficient accuracy. A regression by fitting the gravimetrically determined geoid to the GPS levelling points is generally proposed. Unfortunately, this country-wide geoid fitting work cannot eliminate local deformations in the geoid, which happen in areas where there are errors or shortages of gravity or DTM data. This paper proposes and discusses a combined adjustment method. The principle is to divide up the geoid into small pieces and then to adjust them to the GPS levelling points locally with constraint conditions for the common points of the adjacent pieces. In order to benefit from the advantages of the high resolution and high relative accuracy of the gravimetric geoid, as well as the high absolute accuracy of the GPS levelling points, we establish respectively a relative observation equation for the difference of the gravimetric geoid undulation and an absolute observation equation for the GPS levelling points. Finally, we adjust the observation equations as a whole. Several global and local systematic errors are also taken into account and some special cases, such as adjustment in groups and blunder detection, are also discussed.

1 Introduction

In practice, a high precision gravimetrically determined geoid (or quasi-geoid) is often computed by using the "remove-restore" technique. Firstly, the long-wavelength of the reference field (which is usually given by a global geopotential model considered as the reference) and the short-wavelength due to topographic effects (which is usually given by information from DTM/RTM, Digital/Residual, Terrain Model) are removed analytically from the observed gravity data. Secondly, a geoid computation method, such as least-squares collocation or Stokes' integration, is used to convert the residual gravity anomalies into the residual geoid undulation; Finally, the required gravity geoid is obtained by restoring the effects of the reference and topographical fields (Forsberg and Tscherning 1981).

A typical remove-restore method of building up the gravity quasi-geoid can be demonstrated by the following model:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \qquad (1\text{-}1)$$

where ζ is the quasi-geoid undulation and ζ_1, ζ_2, ζ_3 are respectively the contributions of the geopotential model (represented by a spherical harmonic expansion), the terrain effect (important in hilly or mountain areas) and the residual geoid.

A geoid built up in this way can have a very high resolution and a very high "relative accuracy" in the sense of the difference of the determined geoidal height. However its "absolute accuracy", in the sense of the determined geoidal height itself, is currently very poor due to the long-wavelength errors in the adopted reference. Taking the latest geopotential model OSU91A, as an example, it is complete to spherical harmonic degree 360 that enables the calculation of geoid undulation to a resolution of 50 km with a predicted global accuracy of 57 cm on the average. This accuracy varies from region to region depending on the data that went into the development of the model. Statistics show that land accuracy is about 36 cm on the average (Rapp 1992), which is the so-called long-wavelength gravity field error. Clearly, the geopotential model is very useful and practical as a temporary reference during remove-restore computation, but is, at present at least, impossible to be adopted as an "absolute" reference to define a geoid or quasi-geoid.

As the geoid has recently become directly observable through space techniques, on land through a combination of GPS positioning and precise levelling and at sea through satellite altimetry, we can now measure the geoid on some scattered points on the earth's surface with very high absolute and relative accuracy, especially when the GPS coordinates have been tied directly to VLBI or SLR stations or an identical reference system, like ITRF90 (Boucher and Altamimi 1992).

Consequently, the two kinds of data can be combined: the gravity solution, which has very high resolution and relative accuracy but poor absolute accuracy, and the GPS levelling solution, which has poor resolution but very high accuracy.

This is the so called "fitting" computation. There are now two basic methods used in practice, see for example, Jiang(1991b), Forsberg(1993), Duquenne et al.(1994) and Li and Sideris(1994). The first method is based on a general 7-parameter similar datum shift transformation with its simplified 4 parameter model for only the geoid determination purpose. The second is a polynomial regression with its simplified case, a planar regression.

Obviously, for fitting a gravity geoid over extended region to a set of GPS levelling points, there arise two problems with either of the two methods:

1) a global fitting cannot absorb the local deformation in the gravity geoid solution, which happens in the areas where there exist: a) errors, or a shortage of gravity or DTM data; b) the bias due to the differences between data sources whose adopted reference systems are slightly different; c) the high degree errors in the geopotential model, see Mainville et al.(1990), Li and Sideris (1994). How can we remove local or short-wavelength errors (in this paper we call this local deformation)?

2) aiming at eliminating local deformation, we can cut up the whole gravity geoid into several pieces and then fit them together separately and locally. However, there will be the gaps or discrepancies between the adjacent pieces. How can we combine them optimally ?

This paper proposes a mathematical method to solve these two problems in a unique model. The principle is to deal with long- and short-wavelength errors separately. We can approximate these errors by different models: a) a set of globally-determined parameters for a general transformation of reference systems and, b) several sets of locally-determined parameters for different local deformations. This method permits us to benefit from the advantages of the two kinds of data, gravity and GPS levelling solutions. In particular, as the gravity geoid is cut up into small pieces which are adjusted to the GPS levelling points separately in a differential way, the problem of the earth's curvature is avoided. Consequently, the complex spherical considerations of such work will not be necessary at all. For this purpose absolute and relative observation equations as well as constraint condition equations have been established. Some detailed adjustment problems, like weight, adjustment considering the correlation problem are also discussed. Finally, the result of a numerical test is discussed.

2 First considerations for the combined adjustment

2.1 Definition of the geoid

First of all, with a high precision geoid, where the precision is of the order of centimetres, we have to consider the difference between the geoid and quasi-geoid. The adjustment should be carried out in the same defined geoids: either geoid or quasi-geoid. A simple correction will be accurate enough to unify the definition, as shown by Heiskanen and Moritz (1967):

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_B \times H}{\gamma} \tag{2-1}$$

where N is the geoid undulation, ζ the height anomaly, H the orthometric height, γ the normal gravity that can be replaced by the mean value on the earth surface, and Δg_B the Bouguer anomaly. From (2-1), a typical magnitude of 10 cm for a 1000 m range topography can be found and it is obviously not negligible.

2.2 Absolute and relative accuracy

As analysed in section 1, the solution used here, which has much less absolute accuracy than the GPS levelling solution, has a very high resolution and relative accuracy which exists principally in the difference of the geoidal height, because of the simple fact that the local deformations, such as data source differences and bias, are locally systematic. In the difference of the geoid they will be mostly cancelled out by the subtraction operation. On the other hand, GPS levelling, which has a poor resolution, has a very high absolute accuracy. Based on this reason, our principles for the combined adjustment are:

1) For the geoid data: Taking the difference of the geoidal height as the observation to establish the *relative observation equation*, in order to eliminate local deformation and short-wavelength errors. The parameters to represent them will be locally determined. For this purpose, the whole geoid (usually in grid form) should be divided into several small pieces according to certain specifications: geographical location, relief of topography, different data sources etc. Fig. 1 gives a typical geographically equal area division (divided by the double lines) of a geoid grid. In the figure, the knots are the points where the gravity geoid undulation is known. The stars in the small circles are the GPS levelling points where the gravity geoid undulation is known too. For the sake of convenience, they are marked in the centre of the squares; this is not the case in practice. The ties between two points are the differences of geoidal height. As we can imagine, a careful division of the geoid is a very important factor in reaching the best adjustment result.

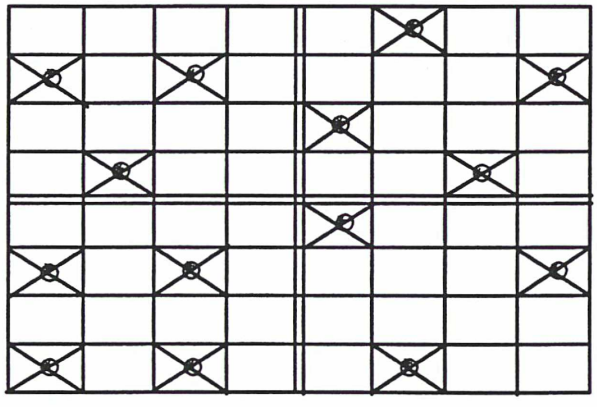


Fig.1 Division of a gravity geoid grid

2) For the GPS levelling data: taking the geoidal height itself as the observation to establish the *absolute observation equation* in order to correct long-wavelength error in the gravity solution. The unknown parameters (see section 3.2) for the reference system transformation will be globally determined.

3) Establishing the constraint condition to combine the different divided pieces of the gravity geoid and determine the local and global parameters.

4) Performing the combined adjustment as a whole or in groups to determine the final geoid and its adjusted precision, both usually in grid form. For this purpose, the weight, the sparse linear system of the block tridiagonal method and the correlative adjustment method (when correlation between the observations should be considered) have to be studied.

2.3 Surface of the combined adjustment

The combined adjustment can certainly be carried out on the geoid surface itself. However, this computation can also be performed on other surfaces. We call these surfaces, as Kenyeres (1993) did, filtered geoid surfaces. They can be obtained by removing the contributions of the topographic information, the residual gravity information, or the geopotential model information respectively from the gravity and the GPS levelling geoids. These adjustments performed on different surfaces allow us to study and analyse separately the errors from different sources. Mathematically, one method of adjustment on different surfaces is no different from another. By default, we shall define the surface on which our adjustment is performed as the quasi-geoid surface, which is just the geoid surface obtained by the GPS levelling observations. This adjustment can be performed on an ellipsoid surface or on other mathematical surfaces.

3 Mathematical model for the combined adjustment

We shall now develop mathematically the theoretical ideas from section 2.

Some notation:

ζ^{GPS} = height anomaly corresponding to the quasi-geoid determined by GPS levelling method;

ζ^{g} = height anomaly corresponding to the quasi-geoid determined by gravity method;

$\overline{\zeta}$ = adjusted height anomaly;

$\Delta\zeta_{ij}^{g}$ = difference of height anomaly between points *i, j*;

P_{ij} , P_{ij}^{g} = weight of relative observation equation for $\Delta\zeta_{ij}^{g}$;

P_k , P_k^{GPS} =weight of absolute observation equation for point *k*;

V_{ij} , V_k = residual of adjustment;

T(*F*), $\Delta T(F)$ = global transformation model with *F* as the set of the parameters;

t(*f*), $\Delta t(f)$ = local deformation model with *f* as the set of the parameters.

3.1 Observation equations

Denoting *i,j,k* as the points on the quasi-geoid, we can establish the *relative observation equation* for the gravimetric undulation solution:

$$P_{ij}:\ V_{ij} = \overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_i - \zeta_j^{\,g} + \zeta_i^{\,g} = \overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_i - \Delta\zeta_{ij}^{\,g}$$
$$\Delta\zeta_{ij}^{\,g} = \zeta_j^{\,g} - \zeta_i^{\,g} \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

Similarly the *absolute observation equation* for the GPS levelling solution:

$$P_k:\ V_k = \overline{\zeta}_k - \zeta_k^{\,GPS} \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

For general cases, we introduce systematic error models by adding to the accidental error equations (3-1-1) and (3-1-2) the global transformation function *T*(*F*) and local deformation function *t*(*f*). We have the *generalised relative and absolute observation equations* (noting that some of the global effects will be cancelled in the relative observations):

$$P_{ij}^{g}: V_{ij} = \overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_i - \Delta\zeta_{ij}^{\,g} + \Delta T(F) + \Delta t(f) \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

$$P_k^{GPS}:\ V_k = \zeta_k^{g} - \zeta_k^{\,GPS} + T(F) \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

In the following paragraphs, we will give the practical formulas of the weight *P*, the systematic models *T*(*F*) and *t*(*f*) as well as the constraint conditions for the common points in the adjacent pieces.

3.2 Global transformation model *T*(*F*)

We try to model the different wavelength errors in the gravity solution in order to fit them to a set of GPS levelling points.

3.2.1 Periodic model represented by a trigonometric function

Li and Sideris (1994) have shown that the largest errors in OSU91A appear when the degree and order n $\approx$360 and n $\approx$ 50. The reason for n = 360 is evidently because the maximum degree and order of OSU91A are 360. When using it as the reference of the remove-restore computation, errors might be introduced into the gravity geoid solution. As for n = 50, Rapp et al.(1991) have shown that the OSU91A geopotential model has been determined by combining the "satellite alone model" GEMT2 which is completed to degree and order 36 and contains 616 harmonic coefficients up to degree 50 and order 43. The geopotential coefficients up to degree 50 in OSU91A have been therefore better determined than the others.

Suppose that in the periodical errors, the latitude φ and longitude λ are independent from each other, we can then use the following trigonometric function to approximate them:

$$\Delta\zeta^T = \sum_{n=1}^{P_n}\left[x_{n,b}\cos(\omega_n\varphi) + y_{n,b}\sin(\omega_n\varphi) + x_{n,l}\cos(\omega_n\lambda) + y_{n,l}\sin(\omega_n\lambda)\right] \quad (3\text{-}2\text{-}1)\text{a}$$

$$x_{n,\cdot} = A_{n,\cdot}\cos(\Phi_{n,\cdot})$$

$$y_{n,\cdot} = A_{n,\cdot}\sin(\Phi_{n,\cdot})$$

with $A_{n,\cdot} = \sqrt{x_{n,\cdot}^2 + y_{n,\cdot}^2}$ (3-2-2)

$$tg\Phi_{n,\cdot} = \frac{y_{n,\cdot}}{x_{n,\cdot}}$$

$$\cdot = \varphi, \lambda$$

where P_n is the total number of the introduced periodic terms, n is the sequential number of the periodic term, A_n, Φ_n, ω_n are respectively the amplitude, the phase and the frequency of the periodic term n.

As previously stated, one of the advantages of this method is the possibility to gain from the "relative" precision of a gravimetric geoid. Some of the simulation computation we have made shows that the "global" functions, like the periodic terms etc. mentioned below, can be numerically determined with the help of local relative observation equations with sufficient accuracy. We discuss here hence the relative form of the formula (3-2-1)a:

$$\Delta\zeta_{ij}^T = \sum_{n=1}^{P_n}\left\{x_{n,b}\left[\cos(\omega_n\varphi_j) - \cos(\omega_n\varphi_i)\right] + y_{n,b}\left[\sin(\omega_n\varphi_j) - \sin(\omega_n\varphi_i)\right] + x_{n,l}\left[\cos(\omega_n\lambda_j) - \cos(\omega_n\lambda_i)\right] + y_{n,l}\left[\sin(\omega_n\lambda_j) - \sin(\omega_n\lambda_i)\right]\right\} \quad (3\text{-}2\text{-}1)\text{b}$$

or by differentiation of equation (3-2-1)a:

$$\Delta\zeta_{ij}^T = \sum_{n=1}^{P_n}\left[-x_{n,b}\sin(\omega_n\varphi_i)\Delta\varphi_{n,i} + y_{n,b}\cos(\omega_n\varphi_i)\Delta\varphi_{n,i} - x_{n,l}\sin(\omega_n\lambda_i)\Delta\lambda_{n,i} + y_{n,l}\cos(\omega_n\lambda_i)\Delta\lambda_{n,i}\right] \quad (3\text{-}2\text{-}1)\text{c}$$

where
$$\Delta\varphi_{n,i} = \omega_n(\varphi_j - \varphi_i)$$
$$\Delta\lambda_{n,i} = \omega_n(\lambda_j - \lambda_i)$$

Remark: The formula (3-2-1) depends on the condition of the independence of latitude and longitude. If we disregard this condition, we obtain a generalised form of this formula which is much more complex, considering the correlation between the terms of latitude and longitude:

$$\Delta\zeta^T = \sum\sum x_{m,n}\cos(\omega_m\varphi + \varphi_{0,m})\times \cos(\omega_n\lambda + \lambda_{0,n}) \quad (3\text{-}2\text{-}1)\text{d}$$

A way to remove the periodic terms is to make an harmonic analysis by using the Fourier transformation method before the adjustment.

3.2.2 Similitude transformation model

For the very long-wavelength errors, the well-known 7-parameter similitude datum shift transformation model in Cartesian coordinates can be used:

$$\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1+k & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1+k & R_X \\ -R_Y & -R_X & 1+k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3\text{-}2\text{-}3)$$

where $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ are the three translations, R_X, R_Y, R_Z the rotations and k the scale term. Considering that the long-wavelength error in the geoid is not very sensitive to the rotations, the formula (3-2-3) can be simplified as 4 parameters ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, k$) for only the vertical direction to the geoid:

$$\Delta\zeta^S = \frac{X}{r}\Delta X + \frac{Y}{r}\Delta Y + \frac{Z}{r}\Delta Z + k\times r \quad (3\text{-}2\text{-}4)$$

where r is mean value of the earth's radius. Represented by the geographical coordinates, we have:

$$\Delta\zeta^S = \cos\varphi\cos\lambda\Delta X + \cos\varphi\sin\lambda\Delta Y + \sin\varphi\Delta Z + k\times r \quad (3\text{-}2\text{-}5)$$

The geoid heights given by OSU91A refer to an ideal ellipsoid (Rapp, 1992), where the equatorial radius is at present a = 6378136.3 m whereas the equatorial radius of GRS80 is 70 cm longer. Taking this difference Δa and the difference of the flatting Δf into account, (3-2-5) becomes:

$$\Delta\zeta^S = \cos\varphi\cos\lambda\Delta X + \cos\varphi\sin\lambda\Delta Y + \sin\varphi\Delta Z + k\times r - \Delta a + a\Delta f\sin^2\varphi \quad (3\text{-}2\text{-}6)\text{a}$$

The relative form of this formula is as follows (note: the scale factor and ellipsoid terms will be cancelled if the two points i and j are very close):

$$\Delta\zeta_{ij}^S = (\cos\varphi_j\cos\lambda_j - \cos\varphi_i\cos\lambda_i)\Delta X + (\cos\varphi_j\sin\lambda_j - \cos\varphi_i\sin\lambda_i)\Delta Y + (\sin\varphi_j - \sin\varphi_i)\Delta Z \quad (3\text{-}2\text{-}6)\text{b}$$

3.2.3 Polynomial model

$$\Delta\zeta^P = \sum_{p,q} Q_{p,q}(\varphi - \varphi_o)^p(\lambda - \lambda_o)^q\cos^q\varphi \quad (3\text{-}2\text{-}7)\text{a}$$

$$p, q = 0, 1, 2, \ldots$$

where the φ, λ are the latitude and longitude, φ_0, λ_0 are the mean values of φ, λ. $Q_{p,q}$ are the polynomial coefficients. We can easily write out the relative form of this formula:

$$\begin{aligned}\Delta\zeta_{ij}^{P} &= Q_{1,0}(\varphi_j' - \varphi_i') + Q_{0,1}(\lambda_j' - \lambda_i')\cos\varphi_i \\ &+ Q_{2,0}(\varphi_j'^2 - \varphi_i'^2) + Q_{0,2}(\lambda_j'^2 - \lambda_i'^2)\cos^2\varphi_i \\ &+ Q_{1,1}(\varphi_j'\lambda_j' - \varphi_i'\lambda_i')\cos\varphi_i \\ \varphi' &= \varphi - \varphi_0,\ \lambda' = \lambda - \lambda_0\end{aligned} \qquad (3\text{-}2\text{-}7)b$$

3.3 Local deformation model *t(f)* and the constraint condition

3.3.1 Local deformation model

From the point of view of differential, when the pieces of the divided gravity geoid are small, we can always approximate the local deformation by a planar representation. So we have:

$$\begin{aligned}\Delta\zeta^{R} &= \Delta\zeta_0^{R} + a(\varphi - \varphi_0) + b'\cos\varphi_0(\lambda - \lambda_0) \\ &= \Delta\zeta_0^{R} + a(\varphi - \varphi_0) + b(\lambda - \lambda_0) \qquad (3\text{-}3\text{-}1) \\ b &= b'\cos\varphi_0\end{aligned}$$

where the constant and coefficients can be determined with certain conditions.

3.3.2 Constraint condition

We need the constraint condition to combine the gravity geoid pieces in the sense of least square solution. It should satisfy the following requirements:

1) a sub-gravity-geoid piece should be adjusted to the GPS levelling points which are contained by the sub-gravity-geoid piece itself;

2) the common points belonging to the different adjacent pieces should have the same adjusted values.

3) "repeated observations" are allowable, for example, when there exist several gravity geoid solutions on the same surface calculated from the different sources of gravity data (that is, for a given point there are several gravity geoid solutions).

We notice that this constraint condition is the local deformation model *t(f)* with the unknown coefficients to be determined. Suppose the required function can be approximated and represented by a differential plan in 3D space, we can write its equation as:

$$d\zeta = d\zeta_0 + a(\varphi - \varphi_0) + b(\lambda - \lambda_0) \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

We can write similarly the following constraint condition for different cases. If we consider the right side as the residuals for a least square problem, we get the related observation equation:

Condition equation for a <u>*point observation k in the geoid piece number m*</u>:

$$d\zeta_k^m = d\zeta_0^m + a^m(\varphi_k - \varphi_0^m) + b^m(\lambda_k - \lambda_0^m) \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

Condition equation for a <u>*relative observation (i,j) in the geoid piece number m*</u>:

$$\begin{aligned}d\zeta_{ij}^m &= d\zeta_j^m - d\zeta_i^m \\ &= a^m(\varphi_j - \varphi_i) + b^m(\lambda_j - \lambda_i)\end{aligned} \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

It is interesting to notice that when we establish the above equation along the latitude or longitude in a gravity geoid grid, either the latitude or longitude difference always takes the value zero. This fact can greatly simplify the computation in practice.

Condition equation for a <u>*common point observation k at the intersection of the geoid pieces number l, m, n, ...*</u>:

$$\begin{aligned}&d\zeta_o^l + a^l(\varphi_k - \varphi_o^l) + b^l(\lambda_k - \lambda_o^l) = \\ &d\zeta_o^m + a^m(\varphi_k - \varphi_o^m) + b^m(\lambda_k - \lambda_o^m) = \\ &d\zeta_o^n + a^n(\varphi_k - \varphi_o^n) + b^n(\lambda_k - \lambda_o^n) = \ldots\end{aligned} \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

Condition equation for a <u>*relative observation (i,j) in border of the geoid pieces number l, m*</u>:

$$\begin{aligned}d\zeta_{ij}^{l,m} &= d\zeta_0^l - d\zeta_0^m + \\ &a^l(\varphi_j - \varphi_0^l) + b^l(\lambda_j - \lambda_0^l) - \\ &a^m(\varphi_i - \varphi_0^m) - b^m(\lambda_i - \lambda_0^m)\end{aligned} \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

This equation will be solved in practical computation by ordering: $d\zeta_0^l = d\zeta_0^m$.

Remarks:

1) Gravimetric quasi-geoid undulation should be given to all the GPS levelling points too. So, for each GPS levelling point, there exist two kinds of observation equations: absolute (3-1-4) and relative (3-1-3), which are established between a GPS levelling point and its nearest 4 corner knots of the gravity geoid grid, see Fig. 1.

2) Adding the global transformation error model and the local deformation model to the observation equation (3-1-4) and (3-1-3) is identical to adding a certain degree of liberty in the concerned linear systems in order to give some movement between the two kind of geoid surfaces. For example, letting "*t(f)* = 0 and *T(F)* = 7 parameter transformation" is equal to making a rigid movement to fit the gravimetric geoid to a set of GPS levelling points. There are some limits:

1) $t(f) = 0,\ T(F) \neq 0$

2) $t(f) \neq 0\,(d\zeta_0 = 0),\ T(F) = 0$

$$3)\ t(f) \neq 0\,(d\zeta_0 \neq 0),\ T(F) = 0$$
$$4)\ t(f) \neq 0\,(d\zeta_0 = 0),\ T(F) \neq 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}7)$$
$$5)\ t(f) \neq 0\,(d\zeta_0 \neq 0),\ T(F) \neq 0$$

Generally speaking, in the first 4 cases (adjusting computation with a global/local rigid/affine movements of the geoid surface), we can usually obtain a regular least square solution. However, in the 5th case, especially when equally weighting both relative and absolute observations, we might have trouble with a non-regular linear system of observation equations because there are too many degrees of liberty. Briefly, like all adjustments with unknown parameter problems, one should examine the singularity in the linear system created. For example, when the calculated area is not large enough, the periodical terms of long-wavelength in formula (3-2-1) and the polynomial terms in (3-2-7) can not be differentiated one from the other.

3) For a geoid grid of size N × M and L GPS levelling points, there will be altogether 2×(N-1)×(M-1)+4×L+L observation equations. For N=M=200, there will be about 80,000 observation equations. If there still exist many unknown parameters and we treat this linear equation system normally, it will consume a lot of computing time and memory storage. But with a little careful study, we find that this equation system is a sparse linear system of the block tridiagonal. This fact allows us to use a special technique to greatly speed up the computation.

3.4 Weights

Denoting M_{GPS}, M_g as the mean square errors of the observations for GPS levelling and gravity geoid solution, μ_0 the unit mean square error, we define the weights as follows without taking into account the correlation between gravity observation and GPS levelling observation:

<u>relative observation equation</u>: $$P^g_{i,j} = \frac{\mu_0^2}{M^2_{g_{i,j}}} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

<u>absolute observation equation</u>: $$P^{GPS}_k = \frac{\mu_0^2}{M^2_{GPS_{i,j}}} \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

when we want to <u>fix/free an observation</u>: $P \to \infty / 0$ (3-4-3)

Theoretically the weights should be decided by considering the variances of geometric levelling, the GPS ellipsoidal height and the variance of the gravimetric geoid undulation. The problem of correlated observations will be discussed in section 3.6. However, some experiences (Jiang, 1991a and 1991b) show that the consideration of the correlation will not have a strong influence on the final adjusted values for the determined unknowns but will have some on the error estimation.

3.5 Error estimation

The method used in this computation will be the least square indirect adjustment. Let *V, X, P, N* be the matrices of residuals, unknowns, weights and normal equation respectively. We have:

Unit weight mean square error: $$\mu_o = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}} \qquad (3\text{-}5\text{-}1)$$

where *n, t* are the number of observations and the number of unknowns;

Mean square error of unknown *i*: $$M_{X_i} = \mu_o \sqrt{N_{ii}^{-1}} \qquad (3\text{-}5\text{-}2)$$

And the periodic terms' errors of formula (3-2-1):

$$M_{A_n} = \frac{\sqrt{x_n^2 M_{x_n}^2 + y_n^2 M_{y_n}^2}}{A_n}$$
$$M_{\Phi_n} = \frac{\sqrt{y_n^2 M_{x_n}^2 + x_n^2 M_{y_n}^2}}{A_n^2} \qquad (3\text{-}5\text{-}3)$$

3.6. Adjustment considering the correlation between the observations

We shall give only a quick review here. For details see for example Cui et al.(1982) and Jiang(1991a). We have two groups of different kinds of observations: a) physical geoid solution is given by gravity/DTM "observation"; b) geometric solution is given by GPS levelling observation. Correlation between the observation values inside each group is strong but the two groups' observations are almost independent of each other. So the problem of this section can be abstracted as an adjustment in two groups. This consideration will be very useful when we have to deal with a great number of linear equations.

Let L_1 and L_2 be respectively two fictitious groups of the gravity and GPS levelling observations. We can then obtain their observation equations as follows (Cui et al., 1982):

$$V_1 = a\delta X_a + b_1 \delta X_b + l_1$$
$$V_2 = b_2 \delta X_b + c\delta X_c + l_2 \qquad (3\text{-}6\text{-}1)$$

here
$$l_1 = aX_a^o + b_1 X_b^o + d_1 - L_1$$
$$l_2 = b_2 X_b^o + cX_c^o + d_2 - L_2$$

In the above formulas *a, b, c* are coefficients; δX_b are the common unknowns between the two observation groups (such as the global transformation parameters and the geoid undulation over the common points etc.); $\delta X_a, \delta X_c$ are the individual unknowns separately belonging to each of the groups (such as the geoid undulation over the uncommon points and the local deformation parameters etc.); X^o, d are the approximations and constants.

Let L consist of two parts L_1 and L_2. First we adjust L_1 and get the solution δX_1, then do the same to L_2, but with the condition of

$$\delta X = \delta X_1 + \delta X_2 = \begin{bmatrix} \delta X_a \\ \delta X_{b1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta X_{b2} \\ \delta X_c \end{bmatrix} \quad (3\text{-}6\text{-}2)$$

to get the solution of δX_2. Suppose now:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, P_{LL} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}6\text{-}3)$$

where B is the coefficient matrix. We then re-write the observation equation as:

$$V_1 = B_1 \delta X + l_1, \quad B_1 = (a, b_1, 0) \quad (3\text{-}6\text{-}4a)$$

$$V_2 = B_2 \delta X + l_2, \quad B_2 = (0, b_2, c) \quad (3\text{-}6\text{-}4b)$$

The correlation between the two group observations is so weak that we can put $P_{12} = P_{21} = 0$. Taking this fact into account, we obtain (Jiang 1991a):

$$\delta X_2 = -(P_{X_1} + B_2^T P_{22} B_2)^{-1} B_2^T P_{22} \tilde{l}_2 \quad (3\text{-}6\text{-}5)$$

$$\tilde{l}_2 = l_2 + B_2 \delta X_1$$

where $= B_2 X^o + B_2 \delta X_1 + d_2 - L_2, \; P_{X_1} = B_1^T P_{11} B_1$

$$= B_2 X^1 + d_2 - L_2$$

The unit weight MSE (mean square error) and the MSE for unknowns are:

$$\mu_o = \sqrt{\frac{V^T P_{LL} V}{n - t}} \quad (3\text{-}6\text{-}6a)$$

$$V^T P_{LL} V = V_1^T P_{11} V_1 + V_2^T P_{22} V_2 + \delta X_2^T P_{X_1} \delta X_2 \quad (3\text{-}6\text{-}6b)$$

$$M_{X_i} = \mu_o \sqrt{Q_{X_{ii}}}, \quad Q_{X_1} = (P_{X_1} + B_2^T P_{22} B_2)^{-1} \quad (3\text{-}6\text{-}6c)$$

4 Numerical tests

4.1 A quick look at the program used

A FORTRAN software **PiLi** (Problème d'Interpolation et aux Limites) has been developed by using the combined adjustment method at the French National Geographical Institute. Special attention has been paid to the following problems:

1) How to organise the data of the gravity geoid grid (or scattered points) and the GPS levelling points, and then to establish the observation equation matrix;

2) How to save memory and to speed up computation. In other words: how to store and solve the sparse matrices of observational and normal equations in which there are as many as 90% or even more zero elements (of course, this might not be the case when the correlation problem is considered).

The present version of **PiLi** reads the data in standard format of grid and point files and then both establishes and gives a weight to each observation equation. The observation equation matrix is condensed and stored in a "band". This matrix and the normal equation matrix are solved by using a technique where only the "non-zero" elements are computed. This greatly saves the storage place and computation time: two orders for each! **PiLi** also supplies a simulation generating mode of accidental errors for the gravity geoid and the GPS levelling points as well as the "systematic error" (the global transformation model $T(F)$ and the local deformation model $t(f)$) given in chapter 3. It can be used to analyse numerically the influence and the behaviour of the errors in the GPS-aided gravity geoid determination. The combined adjustment gives the unequal weighted least square estimations of the geoid height values for all the grid's knots and the GPS levelling points, the unknown global and local function parameters as well as their accuracy, mean square errors etc.

4.2 Local geoid determination in Manosque

Located in the south of France, Manosque is a geodetic test field. This is a hilly area where altogether 60 GPS levelling points are available(see Fig. 2a and 2b). A gravity geoid has been calculated by using the so-called remove-restore technique, Duquenne et al. (1994). We shall now try to adjust it to the GPS levelling points with the combined adjustment method. The gravity geoid grid covers an area of φ: 43.75° ~ 43.92° with a fixed step of 0.01° and λ: 5.77° ~ 6.15° with a fixed step of 0.0167°. The average distance between the points is about 1.25 km (see the regular distributed crosses in Fig. 4). From fig. 2b (the geoid given by the 60 GPS levelling points), we can see clearly that some of the contours of geoid are unreasonable. This is caused by a blunder in the GPS levelling measurements. So a pre-adjustment has been performed to pick out the doubtful GPS levelling points. As a consequence, 6 GPS levelling points whose residuals were 2.5 times larger than the standard deviations of the residuals have been rejected. The result of the pre-adjustment shows that the combined adjustment method is very effective for detecting the blunder errors in the GPS levelling measurements in spite of the GPS levelling points being given a weight (a priori) two times greater than the gravity geoid solution. Unfortunately, Manosque, as the only existing ideal test field in France at present, is a little too small to be as a perfect example to demonstrate the combined adjustment method. For example, we can not apply it to analyse the periodic error caused by the geopotential model which takes the role of reference system in the remove-restore technique. However, because so many GPS levelling points are concentrated in this area,

we can examine rigorously our combined adjustment method and come to some fruitful conclusions.

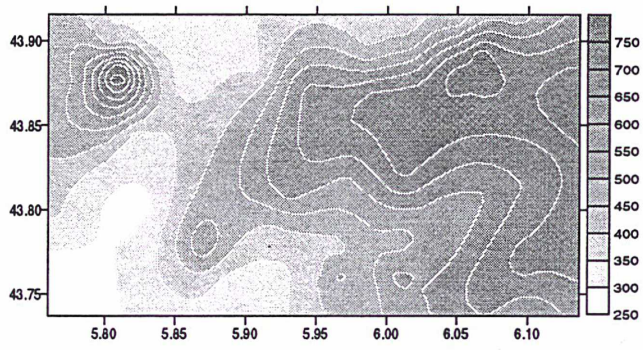


Fig.2a Altitude (m)

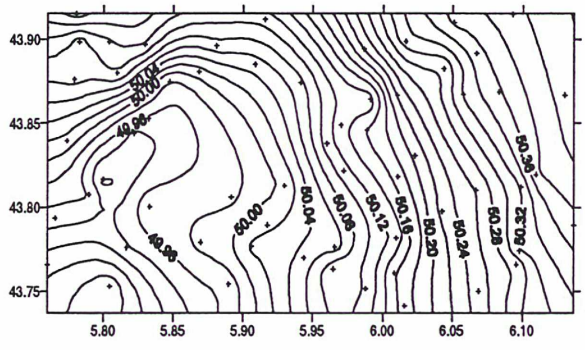


Fig.2b Geoid (m) given by 60 GPS levelling points

54 well-distributed GPS levelling points have been selected. The computation and the comparison of the results have been made in several different ways. We introduce here only two of them:

Plan I: global fitting by 3D linear regression(3-2-7).

Plan II: combined adjustment by cutting the area, into 4 geographically equal sub-zones. For each sub-zone, there are 2 local deformation parameters by using formula (3-3-4) and (3-3-6), refer to Fig. 1.

For each plan, two calculations are carried out by using 54 or 5 GPS levelling points. During the second calculation, only 5 GPS levelling points are used as the geoid height known points, and all the other 49 GPS levelling points were excluded from the combined adjustment in order to estimate the real accuracy given by the comparison between the adjusted values and the known ones. The 5 GPS levelling points are located in the centre and the 4 corners of the area, see Fig. 3.

As for the weight (a priori), let the geoid difference observation having the unit weight mean square error, hence, by formula (3-4-1) we have:

$$P^g = \frac{\mu_0^2}{M_g^2} = 1 \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

(In order to simplify our problem, we shall discuss only the simple case that the variances of the observations, gravimetric geoid differences and GPS levelling geoid, are constants. This might not be always reasonable for a rigorous computation in practice. But the weight problem, which is very important, is outside our present subject.) The real value of μ_0 will be discussed a little later. In formula (3-1-4), the global function $T(F)$ will be considered as unknowns in the adjustment. Suppose that the gravity and GPS levelling solutions have the same accuracy in the sense of "random error", by taking into account the law of error propagation, the mean square error of the gravity geoid height difference can be written as:

$$M_g^2(\zeta_j - \zeta_i) = (M_{GPS}^j)^2 + (M_{GPS}^i)^2 = 2M_{GPS}^2,$$

then, from (3-4-2), we have the weight (a priori) for the GPS levelling observation:

$$P^{GPS} = \frac{\mu_0^2}{M_{GPS}^2} = \frac{M_g^2}{M_{GPS}^2} = \frac{2M_{GPS}^2}{M_{GPS}^2} = 2 \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

The following tables give the comparisons of the results of the two plans over different numbers of GPS levelling points. Here, RMS means root of mean squares.

Table 1. Gravimetric geoid fitted to 54 GPS levelling points (no point free of the fitting, unit: m)

plan	μ_0	residuals over the 54 points			
		max.	min	mean	RMS
I	0.0237	0.065	-0.044	0.000	0.024
II	0.0063	0.029	-0.024	0.000	0.012

By table 1, we see that quite different unit weight mean squares μ_0 are obtained by I and II. They have different meanings. For I, μ_0=0.0237m, it is just the RMS of the fitting residuals. For II, μ_0=0.0063m is obtained from the combined adjustment. With the help of formula (4-2-1), this is the accuracy of the geoid height difference over the average distance between the points. It is about 1.25 km, the mean step of the grid. We can obtain in this way the relative accuracy of this geoid determination. It is about 0.0063m/1.25 km, that is, about 5 ppm over the area of Manosque. μ_0 is a basic estimation of the error of the unknowns by using formula (3-5-6) or (3-6-12), see table 3, 4 and fig. 3. From fig. 3, the mean square error of the determined geoid height which is between 0.4 cm ~ 1.5 cm is rather a function of the distance from the 5 GPS levelling points. The greater the distance is, the greater the error will be. The best accuracy is located along the two diagonals of the box. This shows a numerical demonstration of how much the local deformation can be corrected. Compared with fig. 6, we find that both estimations lead to the same conclusion: the largest errors are located near to the eastern border of the box. They are respectively -2.8 cm and 1.4 cm(mean square error).

Table 2. Gravity geoid fitted to 5 GPS levelling points (49 point free of the fitting, unit: m)

	residuals		over the	54 points
plan	max.	min	mean	RMS
I	0.058	-0.052	-0.001	0.024
II	0.049	-0.046	0.001	0.023

Table 3. Global parameter determination and accuracy with plan I

GPS point number	ζ_0^P (meter)	$Q_{1,0}$	$Q_{0,1}$
54	0.0106±0.0032	-0.0586±0.0629	0.1746±0.0408
5	0.0095±0.0159	0.0117±0.2413	0.1093±0.1479

Table 4. Local parameter determination and the accuracy with plan II

GPS point number	first	zone	second	zone	third	zone	forth	zone
	a^1	b^1	a^2	b^2	a^3	b^3	a^4	b^4
54	-.07030 ±.0781	-.1359 ±.0386	-.1113 ±.0725	-.1216 ±.0369	.2373 ±.0754	-.2048 ±.0434	.2180 ±.0776	.0015 ±.0446
5	-.0044 ±.1610	-.1394 ±.0600	-.0270 ±.1220	-.0630 ±.0599	.1270 ±.1510	-.0350 ±.0848	.1121 ±.1213	.0031 ±.0828

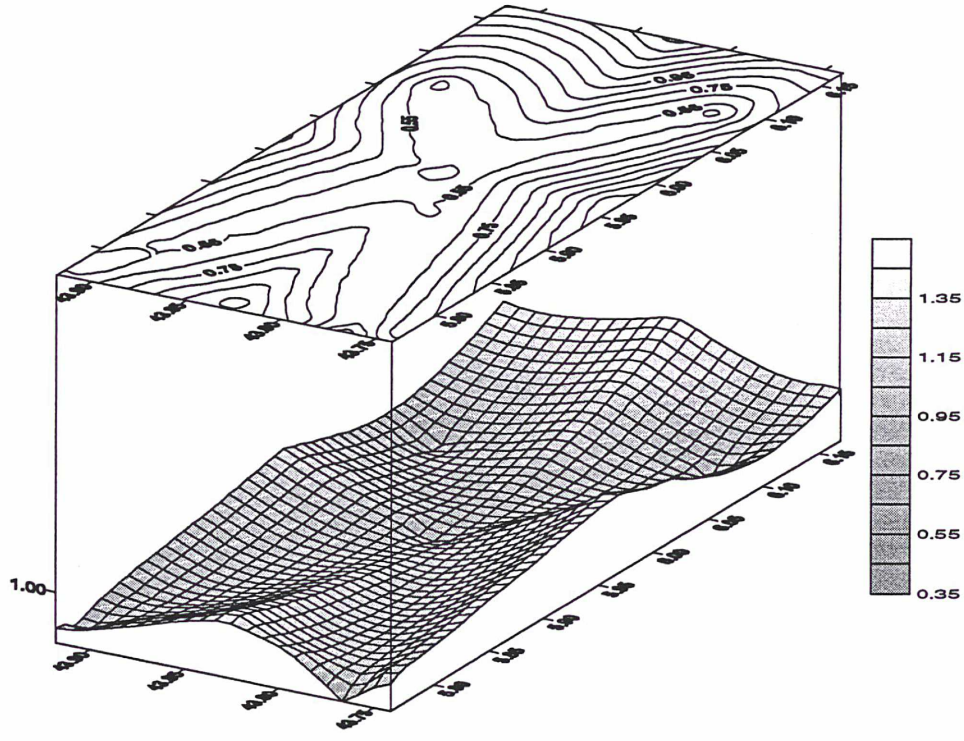


Fig.3 Mean square error estimation (cm) of geoid height determined by the combined adjustment with 5 GPS levelling points

From table 1, plan II, being so small, the RMS is a little surprising, only 0.012m. We do not believe this is the real accuracy of the determined geoid, but this provides proof that the combined adjustment can optimally fit the gravity geoid to the GPS levelling points in the least square sense. When the number of GPS levelling points are reduced, the two plans give almost the same RMS (table 2). Clearly, in a small area like Manosque, by using only 5 GPS points, these two plans should not differ too much.

From table 3, we know that the global term $Q_{1,0}$ (gradient of changing along the latitude) is so weak that its error is greater than itself. We can consider it negligible. From table 4, by using all 54 GPS levelling points, we can determine the 8 local deformation parameters very well. The ratios of the parameters and their errors show us that they exist and that they can be determined by the combined adjustment. But this is not the case for the 5 GPS points levelling points' solution. The reason is as follows. In fact, we want to determine the 8 unknown parameters with only 5 control points. Thanks to the constraint conditions given by formula (3-3-6), we can determine them. However, they are not independent of each other. This is why their errors are greater. But this is not to say that the local parameters so determined are meaningless; some of them have been correctly determined and the residual analysis shows that the local deformation really exists. This can be concluded by fig. 4, 5 and 6 too. From these figures, we see that the 5 GPS points' solution differs from the "ideal" 54 GPS points' solution from -3 cm ~ +2 cm. This quantity and its distribution coincide with fig. 3: mean square error estimation given by the combined adjustment.

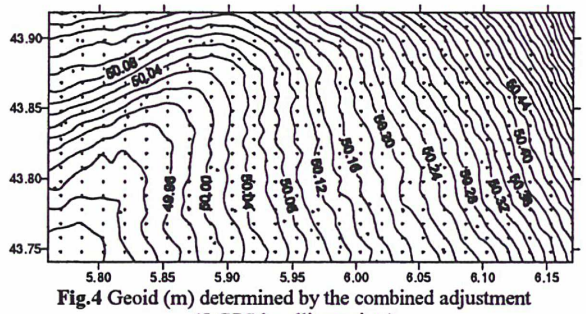


Fig.4 Geoid (m) determined by the combined adjustment (5 GPS levelling points)

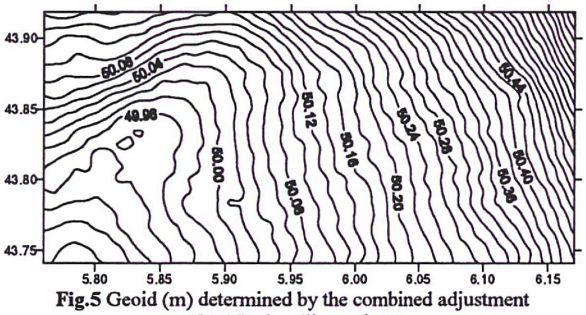


Fig.5 Geoid (m) determined by the combined adjustment (54 GPS levelling points)

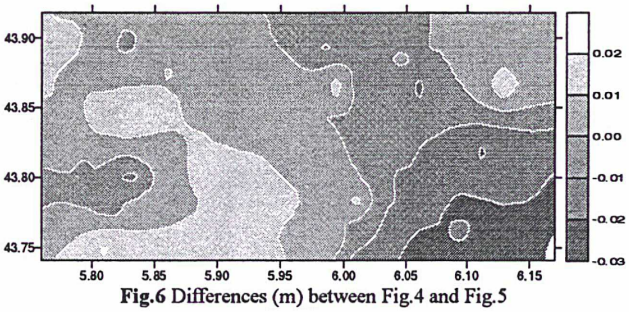


Fig.6 Differences (m) between Fig.4 and Fig.5

5 Conclusion

A combined adjustment method is proposed in this paper. The principle is, from the point of view of differential, to divide up the gravity quasi-geoid grid surface into small pieces and then adjust them locally to the GPS levelling points in order to eliminate the local deformation. Meanwhile, the long-wavelength errors are approximated globally by a carefully chosen transformation. For this purpose, the relative and absolute observation equations and the constraint conditions for the common points along the adjacent pieces have been established. The adjustment can be carried out as a whole or in groups. The mathematical models concerned have been exhaustively discussed.

This method allows us to benefit fully from the advantages of the high resolution and high relative accuracy of the gravimetric solution and at the same time the high absolute accuracy given by the GPS levelling observations. It also allows us to overcome the disadvantages of poor absolute accuracy and poor resolution of the two respective kinds of observations. In particular, the combined adjustment can detect blunders and gives the distribution of the adjusted error estimation over all the knots of the gravity solution grid. As the small pieces of gravimetric solution are fitted to the GPS levelling points in a differential way, any complex consideration due to the earth's curvature is no longer necessary.

Adjustment on different surfaces allow us to understand better the characteristics of the different sources of error.

A numerical test shows us that: (1) although we cannot avoid dealing with the large scale linear system, we can still solve it very effectively by using special techniques due to the fact that there are more than 90% zero elements in the system. This is quite different from the method of collocation. Meanwhile this system is very stable for determining geoid heights and the global and local parameters; (2) in a hilly area like Manosque, by using the combined adjustment, a GPS aided gravity geoid can have an accuracy of 1 ~ 3 cm with a relative accuracy of about 5 ppm over short distance, 1 ~ 2 km.

***Acknowledgements*:** The authors are grateful to Prof. G. Balmino for his constructive idea which has been of significant value in our research. Special thanks are given to the reviewers and Miss Jane Irisa, who have carefully read the manuscript and corrected the technical and English faults. The financial support for the first author has been provided by the French National Geographical Institute.

References

Balma G., G.Balmino, M.Sarrailh, D.Toustou (1992): Géoïde gravimétrique français, Etat d'avancement et programme de travail au GRGS/BGI, FRANCE.

Boucher C., Z. Altamimi (1992): The IERS terrestrial reference system, Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, 1992, USA.

Cui X.Z., Yu Z.T., Tao B.Z., Liu D.J. (1982): Generalised adjustment of surveying and mapping, pp. 242-247, Publishing House of Surveying and Mapping, Beijing, China.

Duquenne H., Z. Jiang, C. Lemarié (1994): Geoid determination and levelling by GPS: Some experiments on a test network, Proceedings of the Graz Symposium "Gravity and Geoid", Graz, Austria, 14-17, Sept.

Forsberg R., C.C. Tscherning (1981) The use of height data in gravity field approximation by collocation, J. Geophys. Res. Vol. 86, B9, pp. 7843-7854.

Forsberg R.(1993) Modelling the fine-structure of the geoid: method, data requirements and some results, Surveys in Geophysics Vol. 14, pp. 403 - 418., Netherlands.

Kenyeres A. (1992) GPS-gravimetric geoid determination based on combination of GPS/levelling and gravity data, Proceedings of First Continental Workshop on the Geoid in Europe, pp.482-490.

Heiskanen W., H. Moritz (1967) Physical Geodesy, Reprint (1981), Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.

Jiang Z.(1987a): On China Gravimetric Standard, Bull. d'informaiton, BGI, n° 61, France.

Jiang Z.(1991a): On the Adjustment for an Attached Gravimetric Net, Acta Seismologica Sinica, Vol. 4, pp.535-545, China.

Jiang Z.(1991b): GPS Levelling, Technical and Scientific Developments in Surveying and Mapping, n° 5-6, pp.1-14.

Li, Y.C., M.G.Sideris (1994): Minimisation and estimation of geoid undulation errors, Bulletin Géodésique, Vol. 68, pp.201-219.

Mainville A., R.Forsberg, M.G.Sideris (1990): GPS levelling - performance of geopotential models and gravimetric geoid methods in the great slave lake area, Proceedings of Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Ottawa, Canada, Sept.

Rapp, R. (1992): Computation and accuracy of global undulation models, Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, pp.865-871, USA.

Rapp R.H., Y.M. Wang, N.K.Pavils (1991): The Ohio State 1991 geopotentiel and sea surface topography harmonic coefficient models, OSU Rept. n° 410, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA.

IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy* (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, Tokyo, Japan

A new Belgian geoid determination : BG96

P. Paquet[1] , Z. Jiang[2] and M. Everaerts[1]

1: Observatoire Royal de Belgique, B1180, Bruxelles, Belgique, email: everaerts@oma.be
2: Institut Géographique National, F94160 St-Mandé, France, email: jiang@schubert.ign.fr

Abstract

Using new available data sets, a new geoid determination, named BG96, has been carried out in Belgium. Firstly, a gravimetric quasi-geoid was calculated with the Stokes and the least square collocation methods. Then the gravimetrically determined geoid was transformed to the geoid undulation and the latter was adjusted to the 35 BEREF points (Belgian Reference-GPS levelling points).

Two new techniques developed by one of the authors have been applied in this computation: a) Fast integration to evaluate the Stokes', the terrain correction and the potential integrals. Comparisons of the fast integration and the straightforward summation have been made in terms of time consuming and accuracy. It turns out that compared with the straightforward evaluation the new technique consumes only 5 % of CPU time without losing accuracy; b) A combined adjustment has been used to adjust optimally the gravimetric geoid undulation to the GPS levelling points. This allows for eliminating the long wavelength errors due to the geopotential model used and the local deformations due to the DTM and gravity information in the gravimetric solution.

The final result, BG96, has an absolute accuracy of about 3 ~ 4 centimetres and a relative accuracy of about 1 ~ 2 ppm for short distances from 25 to 50 km and 0.3 ~ 0.5 ppm for mean distances from 200 to 300 km

I. Introduction

The first test computation of Belgian geoid has been carried out in 1994. The modified Stokes' method with straightforward summation was used. A comparison with a set of 32 GPS levelling points after a 4 parameter similar transformation shows an *internal* accuracy of 5.1 cm (RMS of the residuals). The main weakness of this determination was the shortage of the gravity and DTM (Digital Terrain Model) data. The DTM file used for this calculation was built up in fact using the altitudes of gravity points.

Since then, progress has been made in establishing a gravity data bank and in collecting the DTM data. Fig. 2 shows the actual distribution of the thinned gravity point data set (separated by 4 km) and the blank part in several areas within the Belgian and the Luxembourg territories will be filled with new measurements which is expected to be completed by the end of this year. A DTM grid file with a resolution of 6" x 6" over Belgium, 18" x 30" over France and 4 km in the other neighbouring countries is now also available. The number of the GPS levelling points has been doubled thanks to the new GPS levelling campaigns performed in Belgium and in France. A new software aiming at the geoid determination: **PiLi** (Programme pour les Problèmes d'Interpolation et aux Limites) using some new techniques developed by one of the authors is available (Jiang 1995b).

This paper presents the latest development in this field. Using already available data sets, a new geoid determination, named BG96, has been carried out recently in Belgium. Firstly, a gravimetric quasi-geoid was calculated by using the Stokes and the least square

collocation methods. Then the gravimetrically determined geoid was transformed to the geoid undulation and the latter was adjusted to the 35 BEREF points (Belgian Reference-GPS levelling points). The new geoid grid BG96 covers an area of 49.40 ° ~ 51.50° in latitude and 2.5° ~ 6.5° in longitude with the steps 0.033° x 0.05° or a resolution of 3 km.

Instead of a theoretical discussion, attention of the authors is focused on the numerical analysis of the different results obtained by using quite different methods, such as, the fast integration (Jiang 1995a) vs. the straightforward summation, the collocation method (Tscherning 1985 and 1994) vs. the Stokes method, the simple fitting vs. the combined adjustment of the gravimetric geoid and the GPS levelling stations (Jiang and Duquenne 1996). Special attention has been paid at the accuracy analysis : internal vs. external, relative vs. absolute accuracy etc.

II. A quick look at the method

The typical remove-restore technique (Forsberg 1995, Rapp 1992) has been used. One first smoothes the free air gravity anomaly Δg_{al} by removing the contribution of the geopotential model (OSU91A) and of the RTM (residual Terrain Model) and gets the residual anomaly:

$$\Delta g_{res} = \Delta g_{al} - \Delta g_{OSU} - \Delta g_{RTM} \tag{2-1}$$

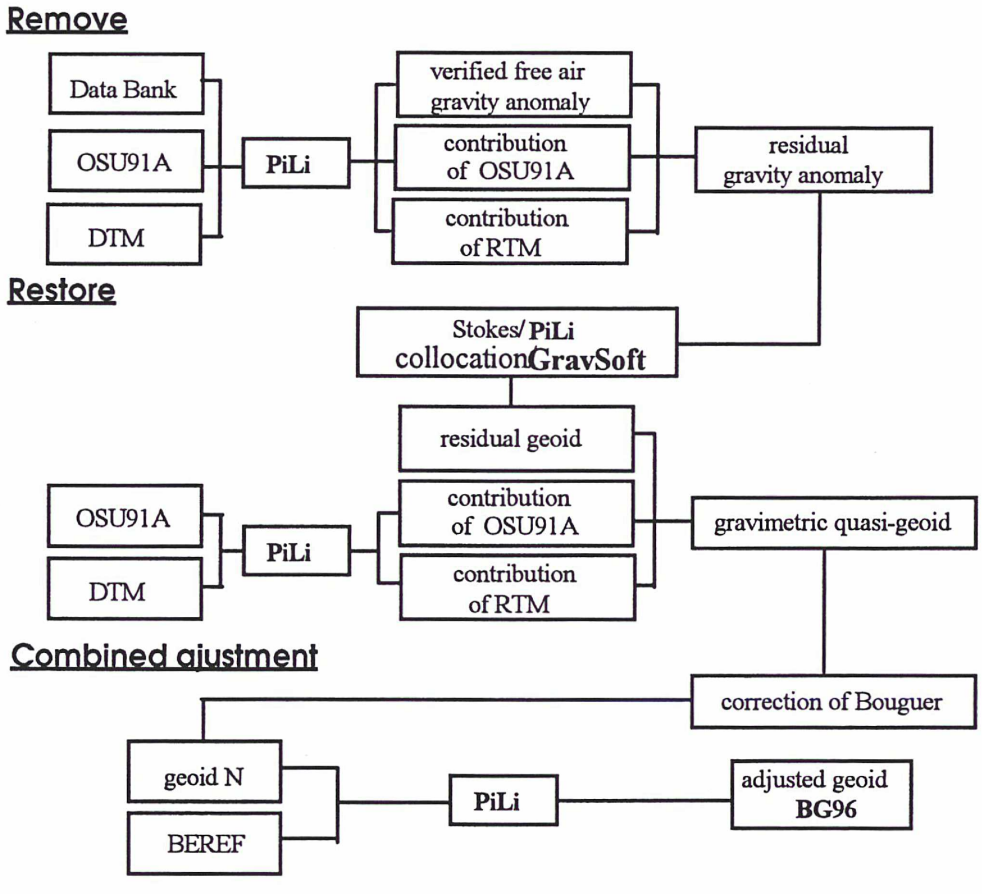


Fig. 1 Schema of the remove-restore-adjustment computation

Then using Stokes integration (fast integration technique provided by the software **PiLi**, cf. Jiang 1995a,b) or the collocation (provided by the software **GravSoft**, cf. Tscherning et al. 1992, Tscherning 1994), one obtains the so called residual geoid ant then restores the residual geoid by adding back the contribution of the model and the RTM:

$$\zeta = \zeta_{res} + \zeta_{OSU} + \zeta_{RTM} \tag{2-2}$$

The obtained gravimetric quasi geoids are firstly transformed into the geoid undulation (orthometric height system is used in Belgium, cf. Heiskanen and Moritz 1967) and then adjusted (Jiang and Duquenne 1996) to the 35 BEREF points. To be clear, we make the following notations :

- **Geoid BG-stk**: gravimetric quasi geoid by the Stokes method
- **Geoid BG-col**: gravimetric quasi geoid by the collocation method
- **Geoid BG-stk-adj** and **Geoid BG-col-adj**: gravimetric geoids adjusted to BEREF.

III. Numerical computation

3.1 Fast integration vs. the straightforward summation

Gravimetric geoid determination needs to evaluate the Stokes', the terrain correction and the potential integrals. The straightforward summation gives a good accuracy but is very time consuming. A new fast integration technique has been developed (Jiang and Duquenne 1995a) to speed up the computation. The following Table 1 and Fig. 2, 3 and 4 show a detailed comparison between the straightforward evaluation and the fast integration in terms of accuracy and time consuming. It turns out that compared with the straightforward evaluation the new technique consumes only 5 % of CPU time without losing accuracy.

Table 1 Accuracy and time comparison of the two methods

integration	Std. Dev. of the differences	percentage of CPU time (fast integ./summation)
terrain correction	**.066 mGal**	1.5 %
terrain effect on geoid	**.001 m**	2.1 %
Stokes	**.005 m**	13.1 %
total time		**1.7 %**

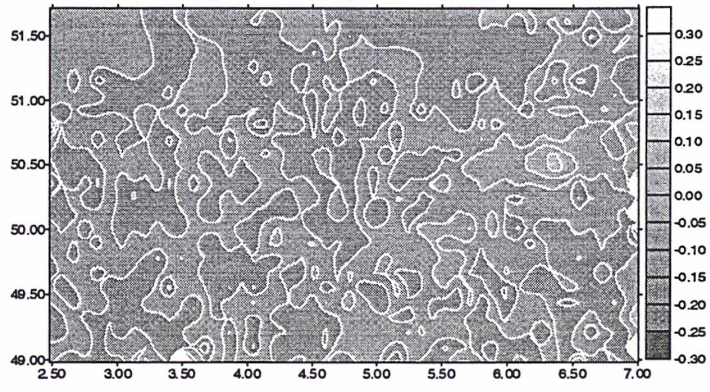


Fig. 2 Difference of terrain corrections by fast integration and straightforward summation (mGal)

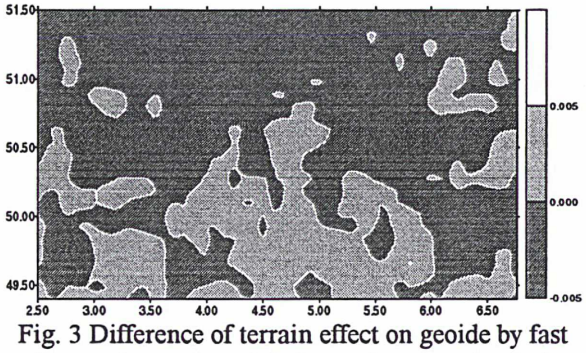


Fig. 3 Difference of terrain effect on geoide by fast integration and straightforward summation (m)

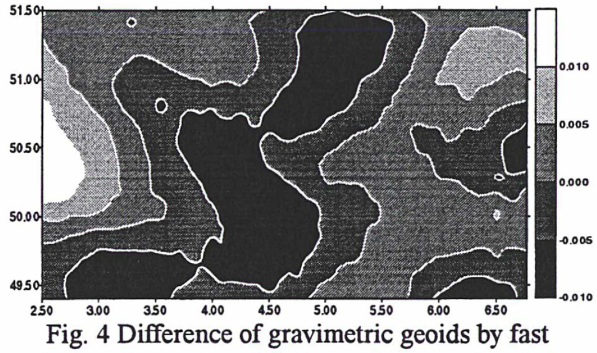


Fig. 4 Difference of gravimetric geoids by fast integration and straightforward summation (m)

3.2 Residual gravity anomaly and residual gravimetric geoid

Table 2 and Fig. 5 show the statistics and the distribution of the residual gravity anomaly after the removing treatment. One can see clearly the contour lines in Luxembourg and Germany (in the east part outside Belgium) show that the terrain effect are not correctly reduced : a direct result of the DTM's error (the resolution of the local DTM is 4 km !). This might give a negative influence to the determined gravimetric geoids, cf. Fig. 6/7/8/9, which might also explain the biggest residual at the point Arlon (cf. Fig. 10/11).

Table 2 Residual gravity anomaly (mGal)

anomaly	min	max	mean	rms	Std. Dev.
Δg_{al}	-34.438	61.184	0.603	15.666	15.655
Δg_{OSU}	-19.787	39.355	3.414	13.872	13.445
Δg_{RTM}	-20.167	28.893	-0.118	4.446	4.444
Δg_{res}	-29.937	25.040	-2.693	7.092	6.561

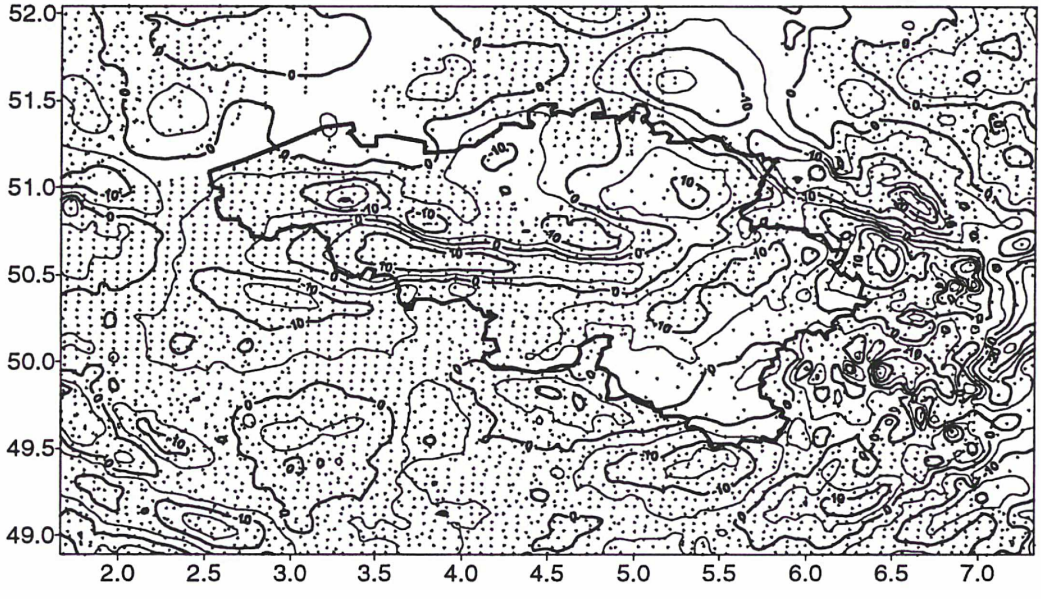


Fig. 5 Residual gravity anomaly

Fig. 6/7 and Fig. 8/9 show the residual/quasi- geoids calculated respectively using Stokes and collocation methods. One notices that these two solutions are very similar, except for the Luxembourg area where the contours present a shape showing the influence of the local DTM error mentioned just above. It seems the collocation solution is more sensitive to this error. The concerned parameters for the collocation solutions are : variance $C_0 = 41.79\ (\text{mgal})^2$, scale factor $\alpha = 0.049$, depth of the Bjerhammar sphere $R_B - R_e = -8.46$ km, mean height value $H_m = 151$ m.

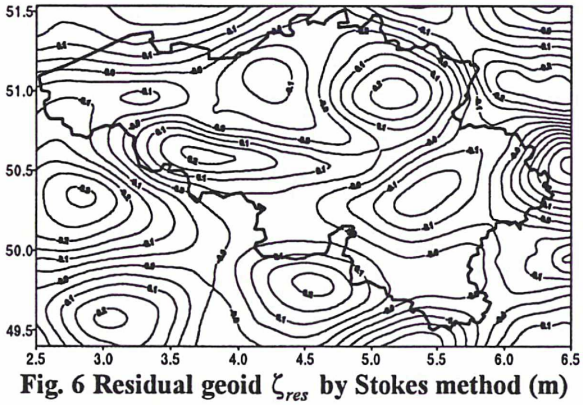


Fig. 6 Residual geoid ζ_{res} by Stokes method (m)

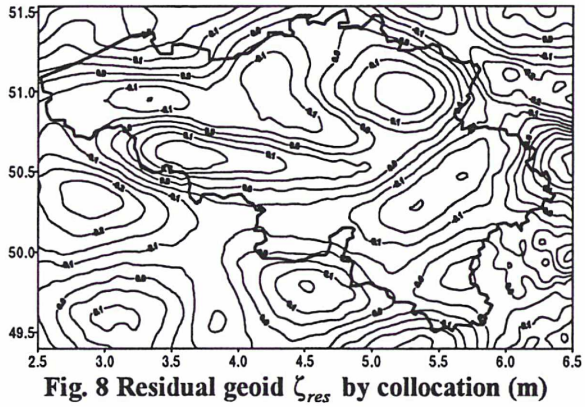


Fig. 8 Residual geoid ζ_{res} by collocation (m)

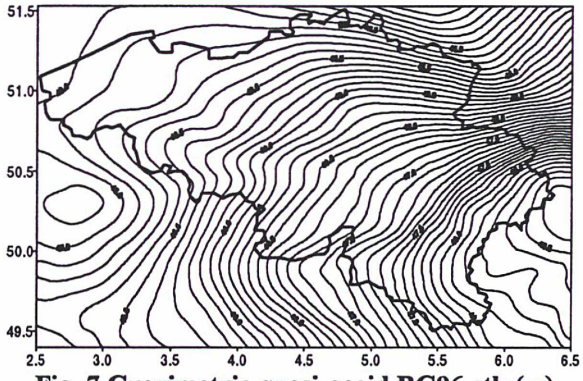


Fig. 7 Gravimetric quasi-geoid BG96-stk (m)

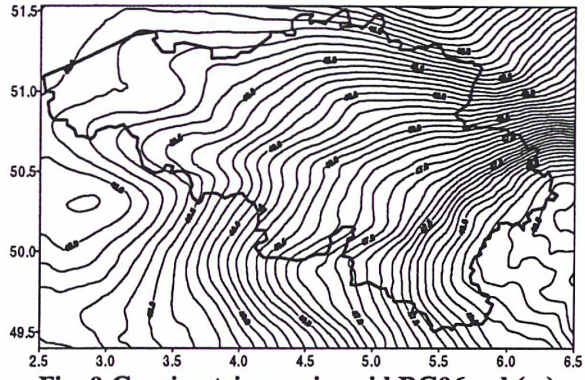


Fig. 9 Gravimetric quasi-geoid BG96-col (m)

3.3 Combined adjustment and accuracy analysis

3.3.1 A simple fitting and a combined adjustment of gravimetric geoid to BEREF

BEREF (Belgian Reference System) consists of 35 high precision GPS levelling points (the black triangles in Fig. 11) among them three are the EUREF points. The two obtained gravimetric geoids (**BG96-stk** and **BG96-col**) are fitted/adjusted to BEREF using two methods:

a) A simple fitting by a 4 parameter similar transformation (three vectors X, Y, Z and a scale factor) for the two gravimetric solutions. Table 3 and Fig. 10 (BG96-col) show the residuals and statistics. The standard deviations of the residuals are respectively 4.6 and 3.5 cm. The biggest residual is at point Arlon, a Belgium-Luxembourg border city, due to probably the same error source of the local DTM. This is called *a local deformation*. An other interesting thing is that the residuals are distributed according to the their +/- signs rather than accidentally: the residuals implied surface is somewhat a convex surface raised in its middle part. This is caused by the errors of the long wavelength (200 ~ 300 km) introduced by the geopotential model, the OSU91A in our case. This is called *the periodic global tendency*. Obviously, a simple fitting is not good enough to eliminate the local deformation and the periodic global tendency.

Table 3 Residual of the similar transformation (m, 35 BEREF points)

geoid	min	max	mean	Std.Dev.
BG-stk	-.150	.094	.000	.046
BG-col	-.105	.082	.000	.035

Table 4 Residual of the combined adjustment (m) (m, 35 BEREF points)

geoid	min	max	mean	Std.Dev.
BG-stk	-.055	.037	.000	.018
BG-col	-.062	.031	.000	.016

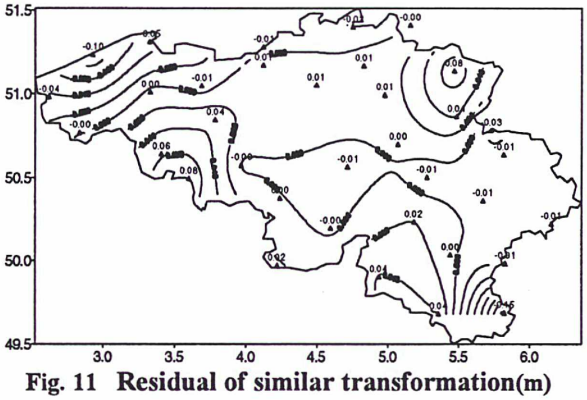


Fig. 11 Residual of similar transformation(m)

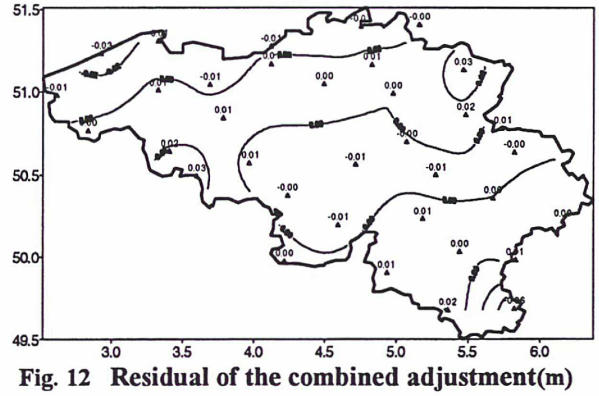


Fig. 12 Residual of the combined adjustment(m)

b) A combined adjustment proposed in (Jiang and Duquenne 1996) has been carried out in order to eliminate the local deformation and the periodic global tendency in the gravimetric geoid solutions. Controlled by the GPS levelling points, the new method allows for changing the geometrical form of the gravimetric geoid grid in a weighted least square

sense. The GPS levelling implied geoid and the gravimetric geoid are considered as the *observations* and are *weighted* according to their a priori precision. Table 4 and Fig. 12 (BG96-col) show the residuals and statistics based on the results of the combined adjustment. The standard deviations of the residuals are much more little than those given by the simple fitting: only 1.8 and 1.6 cm respectively and their distribution shows the local deformation and the periodic global tendency has been greatly reduced.

3.3.2 Accuracy estimation

1) Internal accuracy

The combined adjustment gives also the least square error estimation of the adjusted BG96. Fig. 13 shows the *absolute internal error* distribution which is between 2 ~ 9 cm. It is clear that the absolute error depends a lot on the position of the BEREF point. In the south-west and north-east corners which are far from the BEREF points, one finds bigger errors.

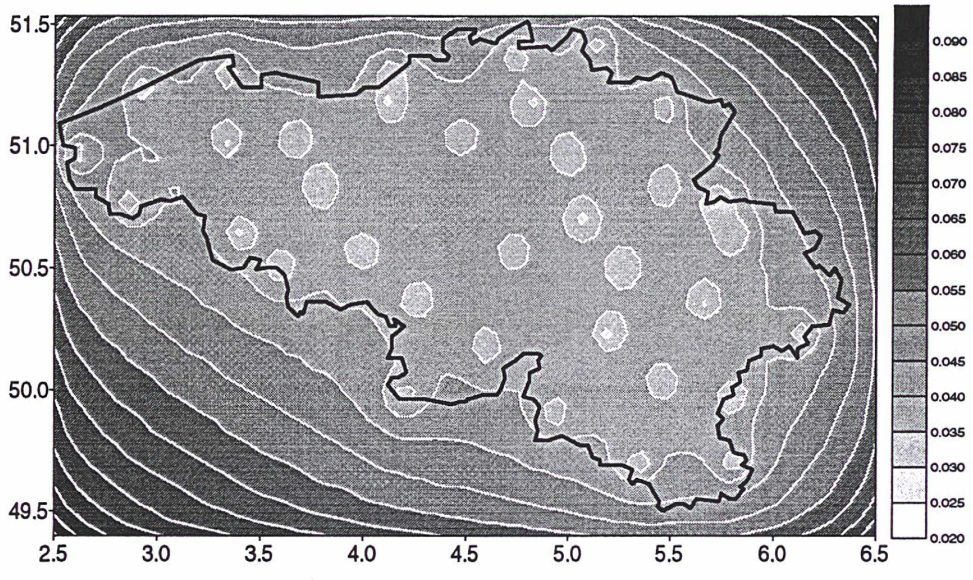


Fig. 13 Least square error of the adjusted BG96

Table 5 and Fig. 14 give the *relative error* estimation of the BG96 which is obtained by comparing the geoidal differences of the BG96 implied geoid and the BEREF implied geoid over different distances. The relative accuracy of the two solutions BG96-stk-adj and BG96-col-adj are very close.

Table 5 Relative accuracy of BG96 (ppm = cm/10km)

mean distance	BG-stk-adj	BG-col-adj
25 ~ 50 km	1.26	1.30
100 ~ 200 km	0.34	0.38
200 ~ 300 km	0.28	0.30

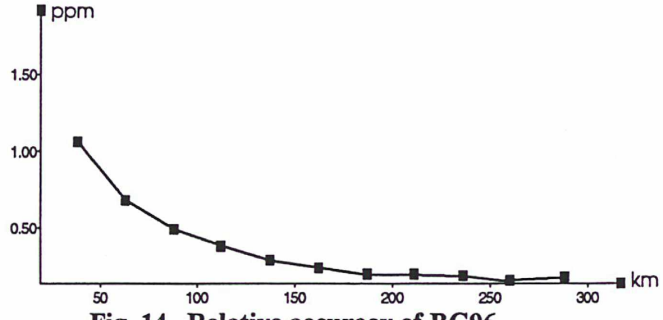


Fig. 14 Relative accuracy of BG96

2) External accuracy

An external accuracy estimation has also been made using altogether 32 GPS levelling points which are not used for the combined adjustment. Among them (cf. Fig. 15 for the distribution and statistics of the discrepancies), the 13 points in Belgium which show *an*

interpolation discrepancy of 2.6 cm; 18 points in France which show *an extrapolation discrepancy of 4.0 cm*. The two solutions of Stokes/collocation give the same estimation result. This external estimation is considered much more objective than the internal one.

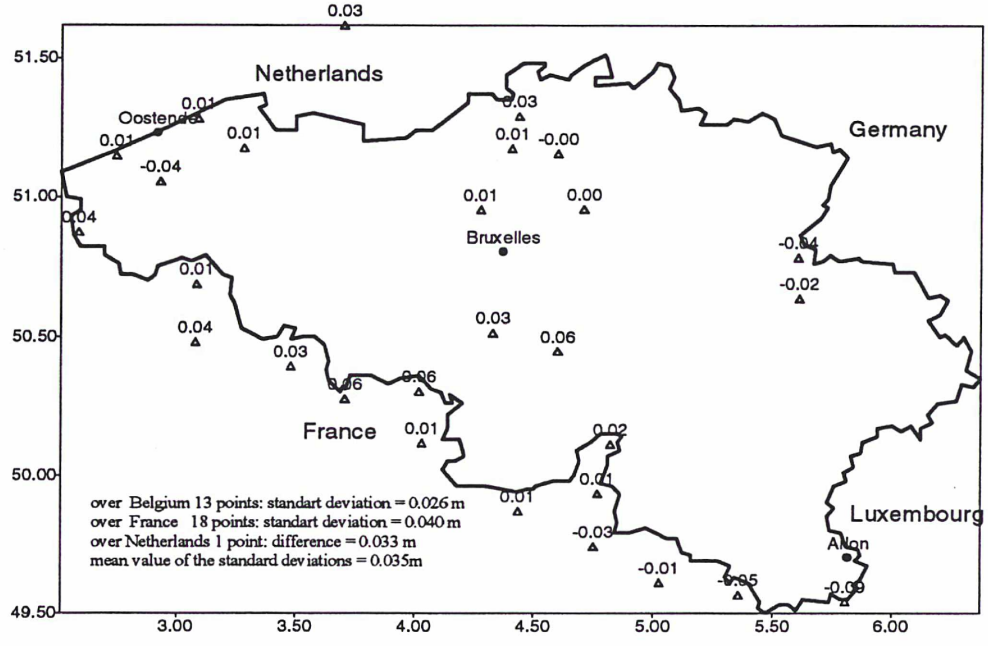


Figure 15 External accuracy of BG-col-adj given by 32 GPS levelling points

3.3.3 Final result of BG96

Based on the accuracy analysis, one can conclude that the adjusted Stokes/collocation solutions: BG96-stk-adj and BG96-col-adj have almost the same absolute and relative accuracy. It is therefore decided that the mean value of these two solutions will be adopted as the final result of the BG96.

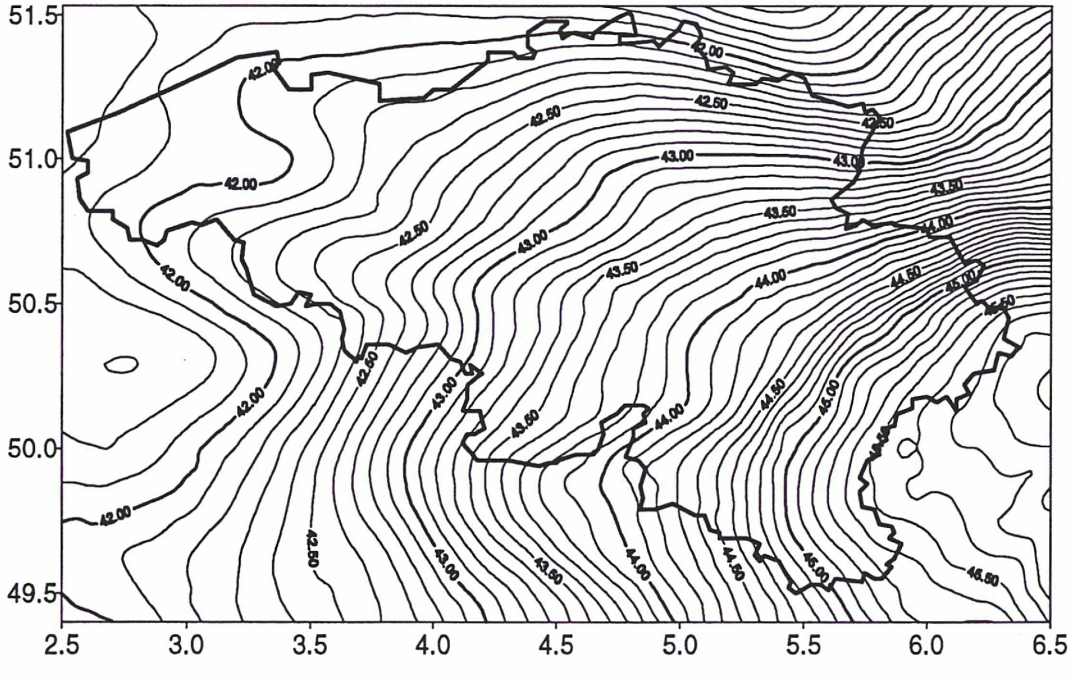


Figure 16 The Belgian Geoid BG96 (m)

IV. Conclusion

Using the Stokes and collocation methods, two gravimetric geoid grids have been obtained. They have then been adjusted to BEREF. Numerical analysis shows the two solutions accuracy are identical. The mean value is therefore adopted as the final result: BG96.

The new Belgian geoid determination has an absolute accuracy of about 3 ~ 4 centimetres and a relative accuracy of about 1 ~ 2 ppm for short distances from 25 to 50 km and 0.3 ~ 0.5 ppm for mean distances from 200 to 300 km

The fast integration technique have proved to be able to greatly speed up the computation. Compared with the straightforward evaluation, it consumes only 5 % of CPU time without losing accuracy

Acknowledgements

The authors are very grateful to the following persons: Mr. P. Lambot, Mr. C. Poitevin, Mr. A. Harmel, Mr. C. Luzet and M. Lechat who have supplied this project with the BEREF/RBF, the GPS levelling, DTM and gravity data in the geoid determination area; Dr. O. Francis, Dr. V. Dehaut and Mrs. Brondeel for their kind help during the calculation; Prof. Tscherning, Prof. Forsberg have supplied the software GravSoft; Prof. Rapp has authorised to use the geopotential model OSU91A. Without their kind cooperations, this work could not have been fulfilled.

Reference

Forsberg R. (1995): Geoid computation in the Noric and Baltic area, In: New geoids in the world, IAG, Bull. d'information No. 77, Iges Bull. No. 4

Jiang Z., H. Duquenne (1995a): On fast integration in geoid determination, submit to Journal of Geodesy

Jiang Z. (1995b): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA.

Jiang Z., H. Duquenne (1996): On combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, Journal of Geodesy, 70:505-514

Heiskanen, W. H. Moritz (1967): Physical geodesy, W.H. Freeman and Co.

Moritz H. (1980): Advanced physical geodesy, H. Wichmann Verlag, karlsruhe, 1980

Poitevin C., Z. Jiang, M. Everaerts (1995): Le géoïde gravimétrique en Belgique, Photogrammétrie - Télédétection et Cartographie, n° 197-198, Belgique.

Rapp R.H. (1992): Computation and accuracy of global geoid undulation models. Proc. of the 6th International Geodetic Symposium on Satellite positioning.

Tscherning C.C. (1985): Local approximation of the gravity potential by least squares collocation. In: K.P. Schwarz (Ed.): Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China. Aug. 21 - Sept. 4, 1984. Pub. 60003, Univ. of Calgary, Calgary, Canada, pp. 277-362, 1985.

Tscherning C.C, Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic.

Tscherning C.C.(1994):Geoid determination by least square collocation using GRAVSOFT, Lecture Notes of International School for the Determination and Use of the Geoid, October 10 -15, 1994, Milan, Italy.

IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy* (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, Tokyo, Japan

Geoid determination in France

Z. Jiang

Institut Géographique National, F94160 St-Mandé, France, email: jiang@schubert.ign.fr

Abstract

This paper presents the methods and the preliminary result of a new French quasi-geoid determination carried out in the French National Geographical Institute (IGN). The aim of this computation is, at present, to supply a precision geoid surface for the GPS levelling surveying.

A gravimetric geoid is firstly computed and then a combined adjustment is performed to adjust the gravimetrically determined geoid to a set of well distributed 1081 high precision GPS levelling points throughout France, which consist of the national zero levelling reference surface. This adjustment is believed to be able to eliminate the long wavelength errors in the global gravity geopotential model, and a part of the errors in the gravimetric geoid determination. The estimation of the errors for the gravity, GPS and levelling data were taken into account to weight different kinds of observations in the combined adjustment. A fast integration technique has been developed and used for the calculation of the integrals of Stokes', potential and terrain correction. This has been proved to be able to greatly speed up the computations without losing accuracy.

The accuracy of the determined geoid G96-03a is estimated to be about 2 - 3 cm on average in the plane areas and 4 - 7 cm on average in the mountain areas. The relative accuracy is about 2 ppm over 20 km, 0.2 ppm over 300 km and 0.06 ppm over 1000 km. Considerable improvement in the accuracy is expected by using a complete-homogenised data set and the new GSFC/DAM geopotential model.

I. Introduction

The last two gravimetric geoid determinations in France were that of Levallois and Monge (1978) and of Deloménie (1987). The first one was determined using the astro-gravimetric levelling method. The latter was a gravimetric geoid using spherical Stokes' formula with no terrain correction taken into account. The accuracy was 0.2 ~ 1.0 m in plain and hilly areas and 1.0 ~ 5.0 m in mountain areas (Balma et al. 1992). Since then, the techniques to determine the geoid have being greatly improved.

Thanks to the GPS technique combined with conventional geodesic methods, the geoid is nowadays becoming observable. Using GPS positioning and classical precision levelling techniques, about 1081 GPS-levelling points have been measured throughout the French territory (cf. Fig. 4 for the distribution) with an average accuracy of about 3 cm in the vertical direction. This consists of the French Basic Network (FBN) and supplies the so called national zero levelling reference surface, that is, the GPS-levelling point implied geoid. However, it is not at all a real surface but a set of scattered points. The aim of the present study is to investigate how to built up such a reference surface using the FBN points.

In fact there are more and more practical requirements in a precision geoid aiming at GPS levelling surveying using the simple relation between the ellipsoidal height (h) and the normal height (H, the normal height system is adopted in France):

$$H = h - \zeta$$

here ζ is the height anomaly which is related to the quasi-geoid. To be simple, we call it geoid.

In fact there are more and more practical requirements in a precision geoid aiming at GPS levelling surveying using the simple relation between the ellipsoidal height (h) and the normal height (H, the normal height system is adopted in France):

$$H = h - \zeta$$

here ζ is the height anomaly which is related to the quasi-geoid. To be simple, we call it geoid.

The method used consists in the determination of a precision gravimetric geoid and then an adjustment to fit it to the known FBN points by combining the terrestrial gravity, altimetry and GPS-levelling data as well as a height resolution geopotential model. There are two independent steps: 1) a pre-combination of the terrestrial gravimetric data and a geopotential model to determine a gravimetric geoid and 2) a post-combination of the determined gravimetric geoid and the GPS-levelling points to adjust the gravimetric geoid. Such a geoid can be used directly for the GPS-levelling surveying purpose.

A main problem involved in a gravimetrically determined geoid is the influence of the great wave-length errors (Rapp 1992) introduced by the use of the remove-restore (r-r) method. To solve this problem, a procedure of pre/post-treatments is used. The pre-treatment is an optimal combination of the terrestrial gravity data and the geopotential model. (Jiang 1996a) proposes a mixed method of Wenzel (1982) and of Wang (1993). The post-treatment is a combined adjustment of the gravimetric geoid and the GPS-levelling points (Jiang and Duquenne 1996b). Aiming at the GPS levelling surveying, special attention has been paid to the post-treatment.

In order to speed up the evaluation of integration, a fast integration technique has also been used in the new French geoid determination.

In the following sections, we give firstly a quick look at the mathematical models for the geoid determination and then a simple presentation for the preliminary result of the determined geoid, named G96-03a (see Jiang 1996b for details). For the first effort to compute an entire gravimetric geoid in France since years, only a part (a sample of about 15%) of DTM and gravity data and the simplified pre-treatment method have been used. Further investigations in the methodology, quality verification and homogeneity of the data set will be made for the final computation. It is believed that compared with the actual version, great improvement in accuracy will be realised by using all the homogenised data.

II. A quick look at the methods

2.1 Fast integration

In gravimetric geoid determination, there are three integrals to be evaluated: Stokes, terrain correction and potential. Using geographical grid data, the straightforward evaluation gives an 'exact' summation but is very time-consuming. A new method has been proposed (Jiang and Duquenne 1996a), which is based on the modification of the integrated 2D or 3D function into a 1D (spherical distance angle ψ) function applied to an optimal quadrature. The advantages are: a) it is exact (without approximation, especially the singularities have been removed) and can be used for all the three integrals; b) it involves gridded data and is easy to handle; c) it greatly speeds up the computation. The key problem is to modify the kernels of the integrals. Without proving, we give the modified formulae as follows:

i) Spherical approximation of the integral of Stokes' :

$$N(\psi) = \frac{R}{2\gamma}\int_0^{\psi} \Delta\bar{g}(\psi) f(\psi) d\psi$$

with $f(\psi)=S(\psi)\sin\psi$, $\Delta\bar{g}(\psi)=M\{\Delta g(\psi,\alpha)\}$ and mean value operator $M\{f(\bullet)\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\bullet)d\alpha$.

ii) Integral of potential issued by RTM (Residual Terrain Model, cf. Fig. 1) and its effect over geoid:

$$\delta U_{RTM}=2\pi k\rho R\int_0^{\psi} M\left\{H-H^{ref}\Big/\sqrt{\psi^2+\Delta H'^2/R^2}\right\}\psi d\psi \text{ and } \delta\zeta_{RTM}=\frac{\delta U_{RTM}}{\gamma}$$

iii) Integral of terrain correction

$$C=2\pi k\rho R\int_0^{\psi}\left(1-\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+M\{\Delta H^2\}/R^2}}\right)d\psi$$

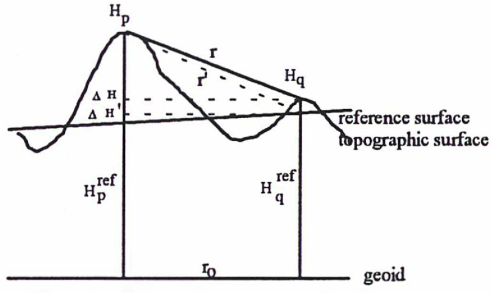


Fig. 1 Demonstration of the definitions

Numerical tests show that: compared with the straightforward evaluation, the new technique consumes on average only 1.23% of CPU time for the three integrals without adversely affecting accuracy (cf. for ex. Paquet et al. 1996).

2.2 Combined adjustment of a gravimetric geoid and the GPS levelling stations

The principle (Jiang and Duquenne 1996b, Jiang et al. 1996) is to divide up the geoid into some small sub-zones and then to adjust them to the GPS levelling points locally with constraint conditions for the common points of the adjacent sub-zones. In order to benefit from the advantages of the high resolution and high relative accuracy of the gravimetric geoid, as well as the high absolute accuracy of the GPS levelling points, we establish respectively a relative observation equation for the difference of the gravimetric geoid undulation and an absolute observation equation for the GPS levelling points. Finally, we adjust the observation equations as a whole. Global and local functional models [$T(F)$ and $t(f)$] are taken into account in order to eliminate the systematic errors. The fundamental observation equations for the gravimetric geoid and the GPS-levelling issued geoid are:

$$P_{ij}^{g}:\ V_{ij}=\bar{\zeta}_j-\bar{\zeta}_i-\Delta\zeta_{ij}^{\ g}+\Delta T(F)+\Delta t(f)$$

$$P_k^{GPS}:\ V_k=\zeta_k^g-\zeta_k^{\ GPS}+T(F)$$

with P_{ij}^g and P_k^{GPS} the weights, $T(F)$ the global function model consisting of the periodic, similar and polynomial transformations and $t(f)$ the local function model consisting of a linear regression fitting:

$$T(F,\varphi,\lambda)=\delta\zeta^{\ per.}+\delta\zeta^{\ sim.}+\delta\zeta^{\ pol.}$$

$$t(f)=t(\varphi,\lambda)=\Delta\zeta_0^R+a(\varphi-\varphi_0)+b'\cos\varphi_0(\lambda-\lambda_0)=\Delta\zeta_0^R+a(\varphi-\varphi_0)+b(\lambda-\lambda_0)$$

$$b=b'\cos\varphi_0$$

III. Numerical computation

The accidental relief features the south part of France: the great mountain areas such as in the Alps, where the Europe summit Mont Blanc is 4807 meters above the sea level (Fig. 2), the long and topographically complex sea-off areas. These increase the difficulty of the French geoid determination.

A DTM (Digital Terrain Model) with a resolution of 140m is available in France. Supplied by BGI, the gravity data available at IGN are shown in Fig. 3. The data shortage in the marine and mountain areas and the doubtful homogeneity between different DTM/Gravity data sources are the major problems encountered in the computation. The total FBN points available are altogether 1081 points (cf. Fig. 4a). Unfortunately, the FBN used was not the final adjustment result and the estimation for every individual point was not available. The geopotential model used is OSU91A (Rapp 1992). The program used is the new software PiLi (Jiang 1995).

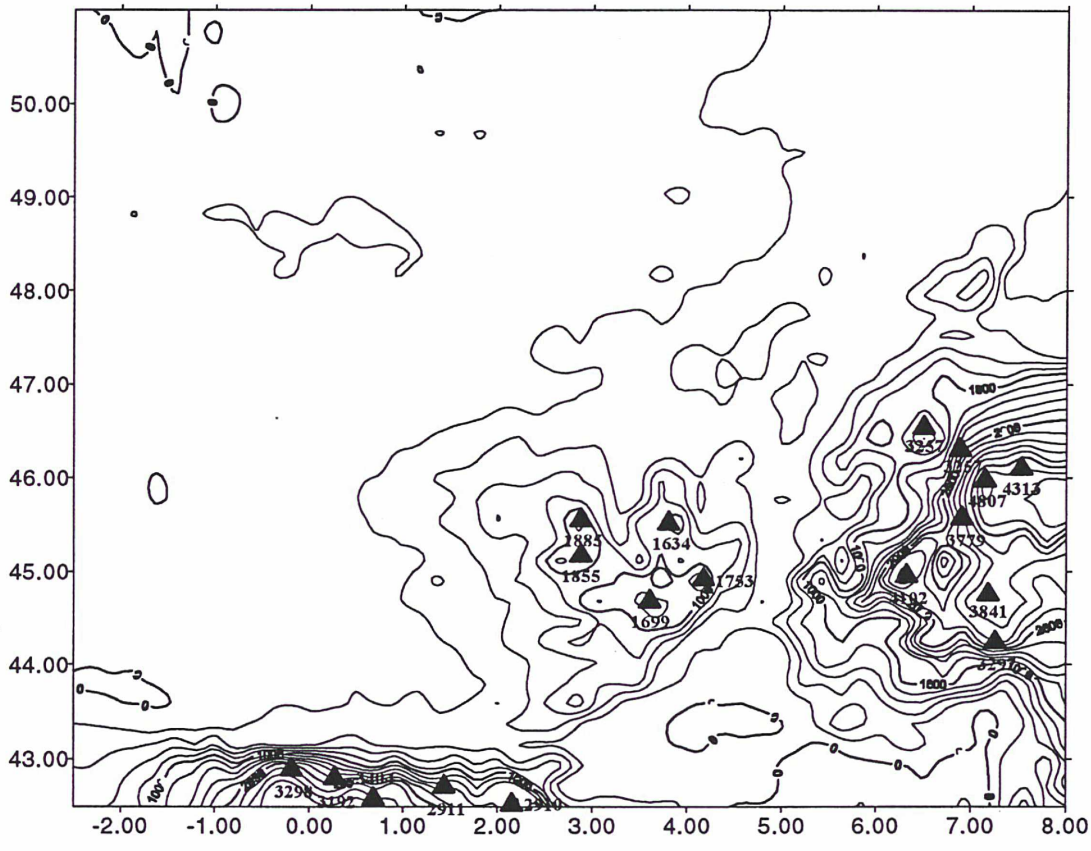


Fig. 2 Topography of France

For the first test, we have only used a DTM grid with a resolution of 500m, a set of gravity point separated about 4 km and the simplified combination of the gravity data and the geopotential model.

3.1 Gravimetric geoid determination

The gravimetrically determined geoid is named as **G96-02a**. The major problem of this gravimetric solution is the great wave-length difference between it and the FBN points. Fig. 4a and 4b show clearly the systematic tendency between them. Note that all the comparison here have been made after a 3 parameter linear regression. Great discrepancies are found in the Alps and Pyrenees mountains and Bretagne coast areas.

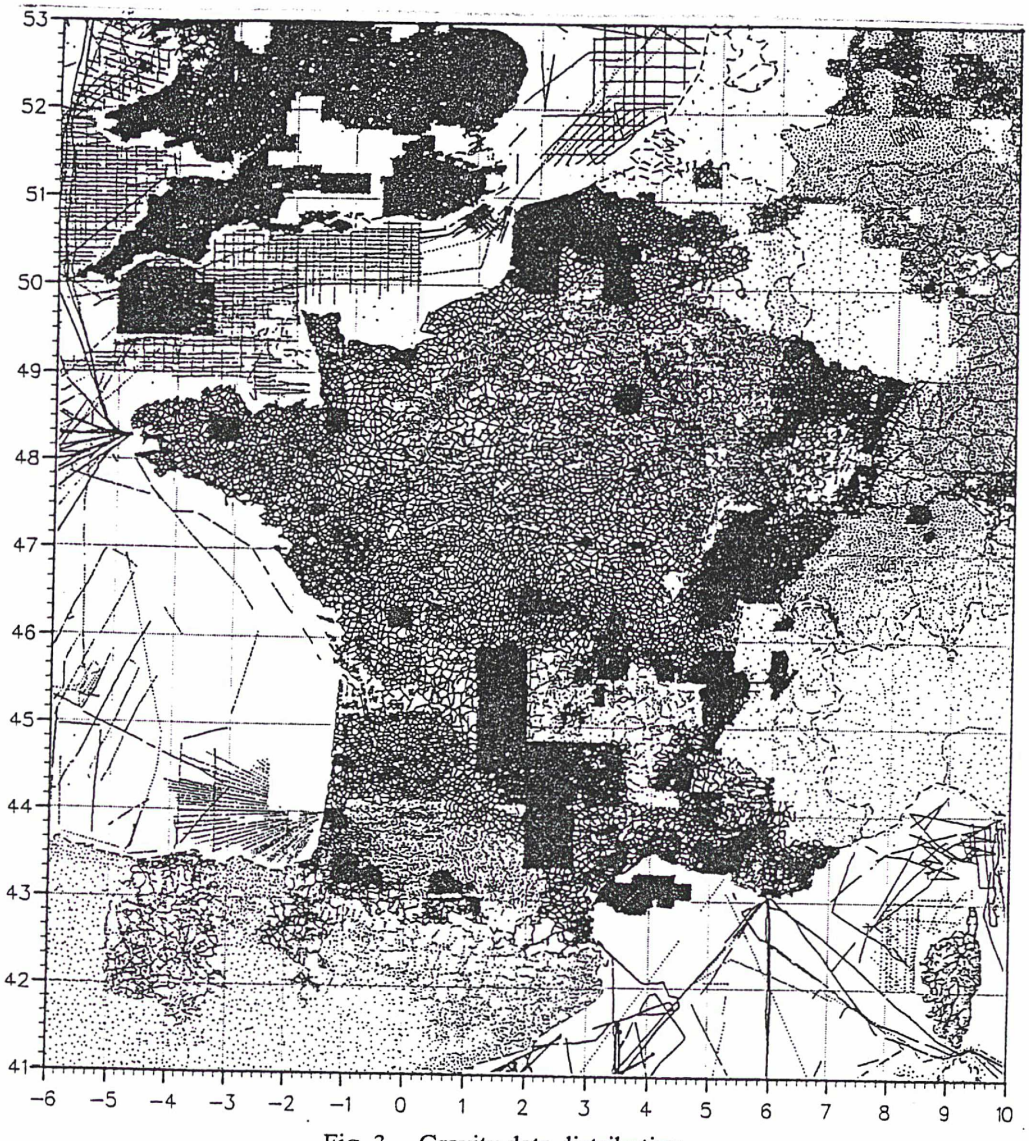


Fig. 3 Gravity data distribution

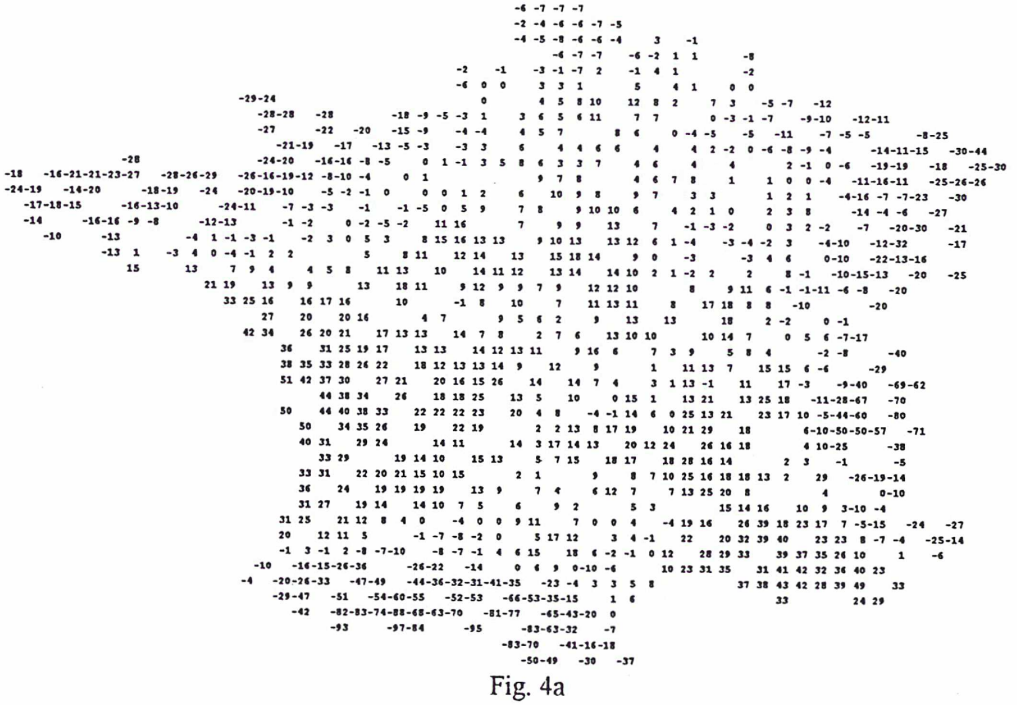


Fig. 4a

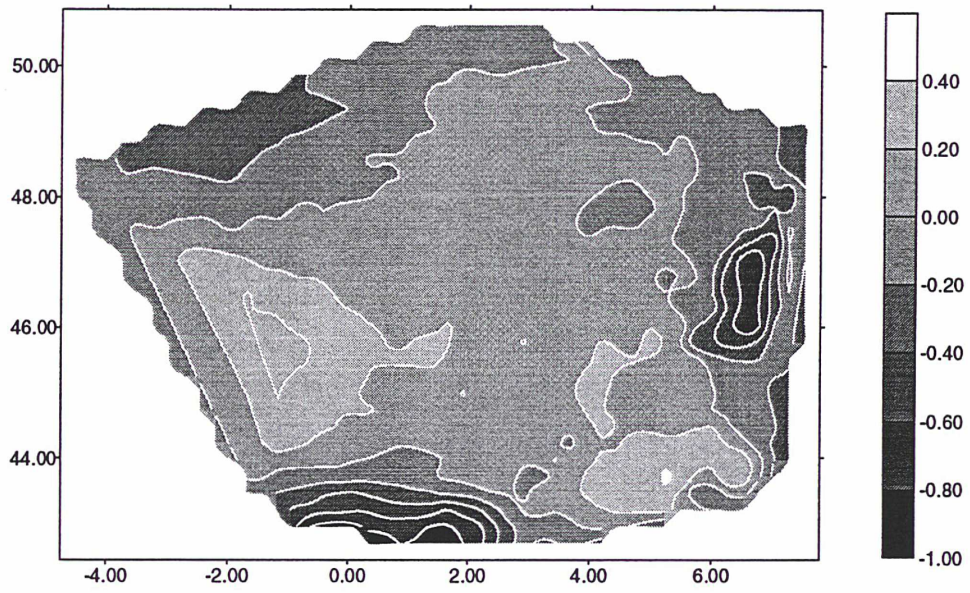


Fig. 4b

Fig. 4 Discrepancies between G96-02a and the FBN points (m)

It is interesting to notice that not only the absolute discrepancies show this tendency, the relative discrepancies also (Fig. 5a and 5b). Furthermore, Fig. 5 shows also the periodic variations in this tendency. The relative discrepancy of two points (i and j) is defined as:

$$\delta(\Delta\zeta_{i,j}) = (\zeta_i^{FBN} - \zeta_j^{FBN}) - (\zeta_i^{G96-02a} - \zeta_j^{G96-02a})$$

Mean value and standard deviation of the relative discrepancy are defined as:

$$\overline{\delta} = \frac{1}{n}\sum_{i,j}\delta(\Delta\zeta_{i,j}) \text{ and } \sigma_\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i,j}\left[\delta(\Delta\zeta_{i,j})\right]^2}$$

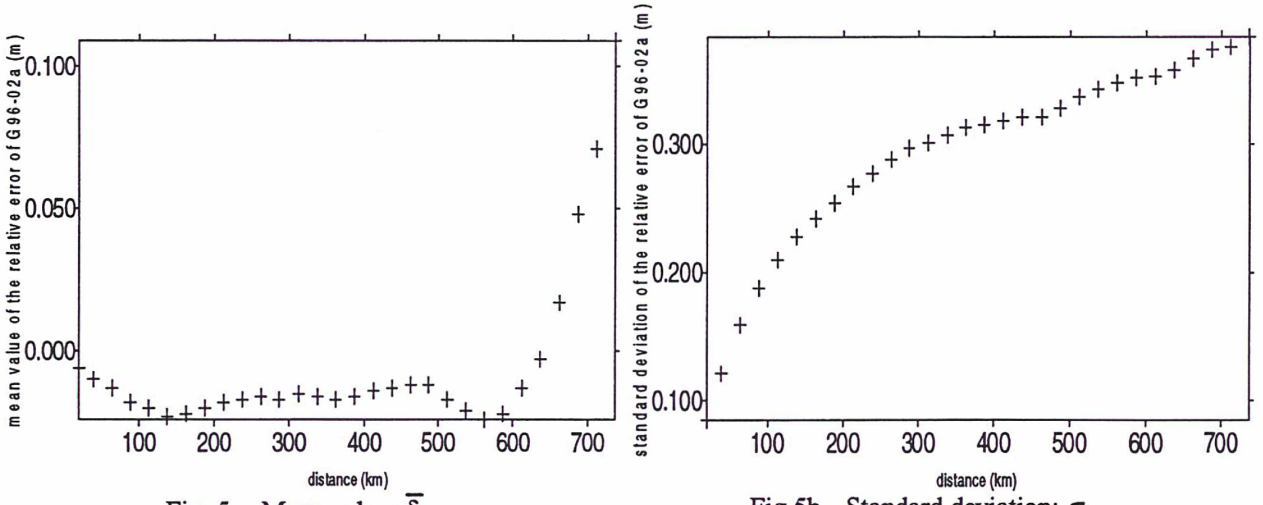


Fig. 5a Mean value: $\overline{\delta}$ Fig 5b Standard deviation: σ_δ

Fig. 5 Relative discrepancies between G96-02a and the FBN points

In order to get an inside light of the consistency between G96-02a and the FBN points, we divided France into 21 sub-regions and made a regional comparison. The result is shown in Fig. 6. The minimum σ is 1.9 cm in the northern part of France while the maximum is 11.8 cm in the Alps mountain. The mean value is 4.2 cm. Obviously, the global tendency of the

discrepancy has been removed and these regional comparisons show better the accuracy of G96-02a and the consistency with FBN.

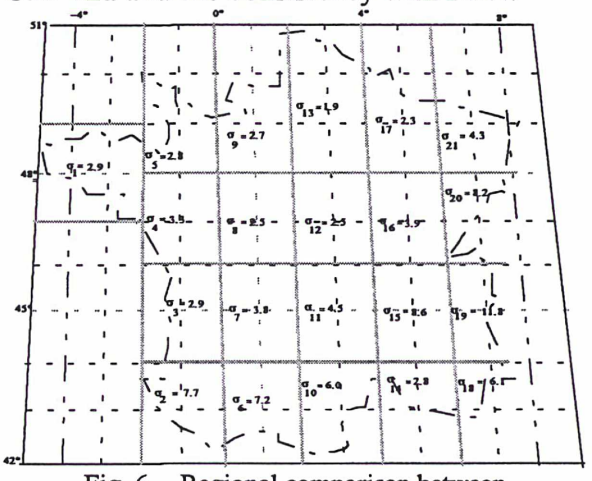


Fig. 6 Regional comparison between G96-02a and the FBN points

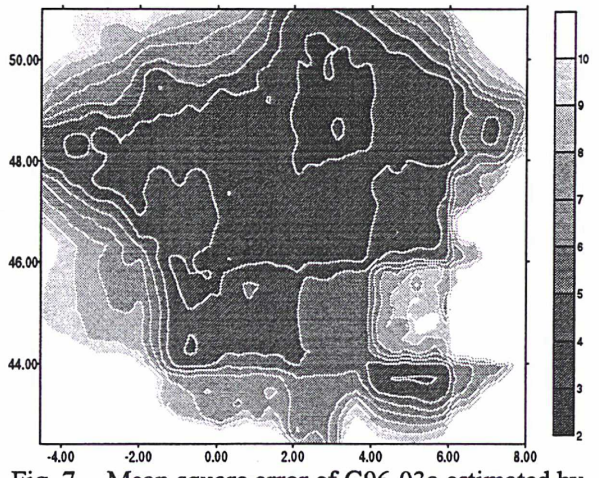


Fig. 7 Mean square error of G96-03a estimated by the combined adjustment

3.2 Combined adjustment of the gravimetric geoid and FBN

As discussed above, the fact that the discrepancies are globally big and regionally small show us that to eliminate the long wave-length errors by using a combined adjustment is not only necessary but also possible. This adjustment has been carried out by dividing the gravimetric geoid G96-02a and FBN into 21 sub-regions as shown in Fig. 6. The gravimetric geoid and FBN data are considered as the observations and are weighted in the following way:

Let σ_i^{GRV}, σ_k^{GPS} and σ_0 be respectively the mean square errors of gravimetric geoid in sub-region i (Fig. 6), of GPS-levelling point k and of the unit weight, we have then the weights:

$$P_i^{GRV} = \frac{\sigma_0^2}{\left(\sigma_i^{GRV}\right)^2} \quad \text{and} \quad P_k^{GPS} = \frac{\sigma_0^2}{\left(\sigma_k^{GPS}\right)^2}$$

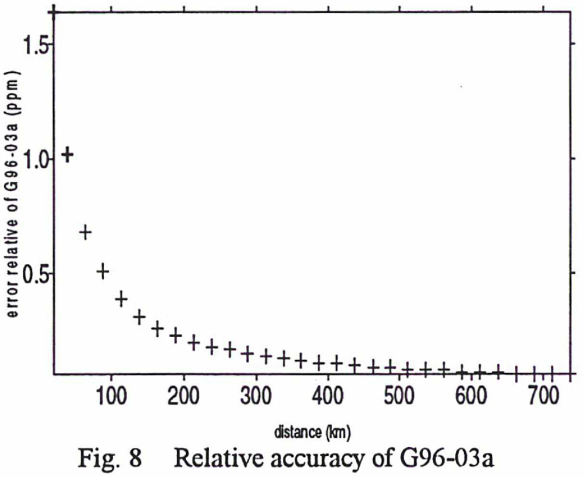


Fig. 8 Relative accuracy of G96-03a

The result is named as G96-03a. No global parameters have been introduced. Fig. 7 shows the mean square error estimation of G96-03a given by the adjustment, varying between 2 ~ 10 cm with 4 cm on average. This is an internal error estimation. Fig. 8 shows the relative accuracy of G96-03a.

In order to be more objective, an external error estimation has been made over 167 controlling point or 15% of the total 1081 FBN points. An adjustment has been performed without using the 167 controlling points and the adjusted values have been compared with the known FBN values. Fig. 9 shows the discrepancies given by this comparison with the max = 13.0 cm, min = -11.6 cm and σ = 4.1 cm.

To conclude, the optimal combination of the terrestrial data (gravity, GPS and precision levelling) and a geopotential model is becoming an important subject to study in the geoid determination. Some efforts have been made in the new French geoid determination and a

preliminary result is G96-03a. The regional comparison (Fig 6), the mean square error (Fig 7) and external error estimation (Fig. 9) show an accuracy of 4 ~ 5 cm on average. However the accuracy is not very homogeneous: 2 - 3 cm on average in the plane areas and 4 - 7 cm on average in the mountain areas. The relative accuracy is about 2 ppm over 20 km, 0.2 ppm over 300 km and 0.06 ppm over 1000 km. Considerable improvement in the accuracy is expected by using the complete-homogenised data set and the new GSFC/DAM geopotential model.

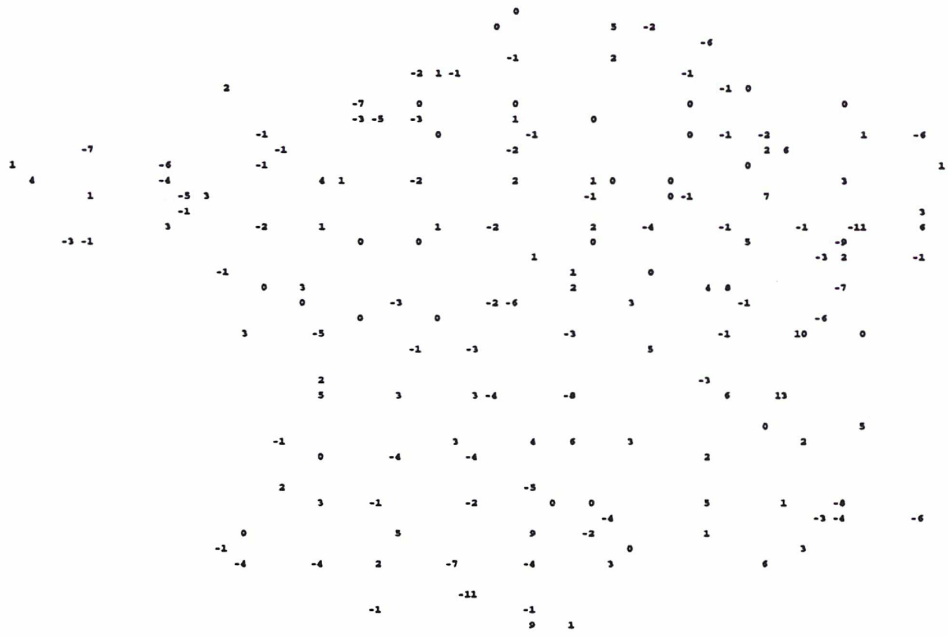


Fig. 9 External errors of G96-03a

Acknowledgements

The authors are very grateful to: Dr. G. Balmino of BGI, Dr. C. Boucher, Dr. P. Willis, Mr. L. Daniel, Mr. C. Luzet, Mr. A. Harmel and Mr. Lechat of IGN. This study could not have been completed without their kind corporations with the constructive scientific suggestions and the gravity, FBN as well as DTM data. The financial support has been provided by IGN.

Reference

Balma G., G. Balmino, M. Sarrailh, D. Toustou (1992): Géode gravimétrique français - Etat d'avancement et programm de travail du GRGS/BGI

Deloménie M. (1987): Clcul d'un géoïde gravimétrique sur la France, Rapport de Stage, IGN, BGI

Forsberg R. (1995): Geoid computation in the Noric and Baltic area, In: New geoids in the world, IAG, Bull. d'information No. 77, Iges Bull. No. 4

Jiang Z. (1995b): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA.

Jiang Z. (1996a): Combinaison optimale des données gravimétriques terrestres et du modèle géopotentiel, Rap. Géoïde n° 32, publication interne de l'Institut Géographique National, juillet 1996

Jiang Z. (1996b): Quasi-géoïde gravimétrique français G96-02a et G96-03a - essais préliminaires, Rap. Géoïde n° 33, publication interne de l'Institut Géographique National, août 1996

Jiang Z., G. Balmino, H. Duquenne (1996): On the numerical approximation of the errors in a GPS aided gravimetric geoid determination, Proceedings of the XXI Congress of the European Geophysical Society 1996 (EGS96), Session G7, 6 - 10 May 1996, The Hague, Netherlands

Jiang Z., H. Duquenne (1996a): On fast integration in geoid determination, accepted by Journal of Geodesy, vol. 71:

Jiang Z., H. Duquenne (1996b): On combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, Journal of Geodesy, vol. 70:505-514

Heiskanen, W. H. Moritz (1967): Physical geodesy, W.H. Freeman and Co.

Levallois W.A. G. Monge (1978): Géoïde Européan -version 1978, Inst. Géog. National, Paris

Paquet P., Z. Jiang, M. Everaerts, C. Poitevin (1996): A new Belgian geoid determination : BG96, IN: *Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy* (GraGeoMar96), Sept. 30 - Oct. 5, 1996, University of Tokyo, Tokyo, Japan

Rapp R.H. (1992): Computation and accuracy of global geoid undulation models. Proc. of the 6th International Geodetic Symposium on Satellite positioning.

Wang Y.M. (1993): On the optimal combination of potential coefficent model with terrestrial gravity data for FFT geoid computations, Mauscripta geodaetica, Vol. 18, 406-416

Wenzel H.G. (1982): Geoid computation by least squares spectral combination using integral kernels, Proceed. IAG General Meeting, 438-453, Tokyo

OBSERVATOIRE DE PARIS