



**HAL**  
open science

# Réduction des observations d'objets multiples du satellite Hipparcos

Franck Gazengel

► **To cite this version:**

Franck Gazengel. Réduction des observations d'objets multiples du satellite Hipparcos. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1993. Français. NNT: . tel-02095269

**HAL Id: tel-02095269**

**<https://hal.science/tel-02095269>**

Submitted on 10 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Réduction des observations  
d'objets multiples du satellite  
Hipparcos

thèse de doctorat

en

(0113)  
GAZ

Astronomie fondamentale  
mécanique céleste et géodésie  
(Observatoire de Paris)

présentée par

FREDK GAZENQEL

soutenue le 14 décembre 1993 à Grasse  
devant le jury composé de :

Mme Nicole CAPTAINÉ  
Mr Jean KOVALEVSKY  
Mme Patricia LAMPENS  
Mr Mario LATTANZI  
Mr François MIGNARD  
Mme Catherine JURON



## Remerciements

*J'aimerais exprimer ma reconnaissance à Jean Kovalevsky, qui a dirigé et soutenu pendant trois ans ma quête des objets multiples d'Hipparcos, à Jean-Louis Falin, que j'ai, pendant la même durée, bombardé de questions et problèmes informatiques en tout genre et qui y a toujours répondu avec compétence et gentillesse, à Jeanne Falin, qui a fourni le plus gros du travail de traitement de texte que vous avez devant les yeux et enfin à Patricia Lampens et Mario Lattanzi, qui ont eux fourni le non moins gros travail de relecture critique de cette prose obscure et calculatoire.*

*Un grand merci également à Alessandro Spagna, Renato Pannunzio et toute l'équipe de l'OATO pour l'accueil sympathique qui m'y a été réservé lors de mon séjour.*

*Je me permettrais enfin d'exprimer toute ma gratitude à l'ensemble du personnel de l'OCA, version Ouest du Var en particulier, pour l'ambiance sympathique qui règne dans la boutique.*



## Introduction

Le satellite astrométrique Européen Hipparcos a été lancé en 1989. Après une période d'incertitude due à son placement sur une mauvaise orbite, il a finalement effectué 37 mois d'observations d'une qualité au moins aussi bonne que celle attendue nominalement.

Afin d'accéder à cette précision, les données fournies par le satellite doivent parcourir toute une chaîne de réduction. Ceci ne pose pas de problème pour la majorité des objets observés.

Mais le satellite observe aussi différents types d'objets demandant un traitement particulier: objets du système solaire (Bec-Borsenberger, A&A 258, 94, 1992), étoiles variables, étoiles doubles (Mignard & al, A&A 258, 165, 1992) et étoiles multiples (Pannunzio & al, A&A 258, 173, 1992).

Cette dernière catégorie d'objets nécessite une étude d'astrométrie relative pour en déterminer la structure avant de pouvoir leur faire parcourir la chaîne générale de réduction.

Un algorithme de moindres carrés non-linéaires peut être utilisé pour mener cette étude (Pannunzio & al, op. cit.) mais la forte non-linéarité du problème posé demande que les estimations de départ des inconnues soient de bonne qualité, ce qui n'est généralement pas le cas pour les objets multiples.

L'approche de l'équipe Italienne de R. Pannunzio de ce problème du point de départ consiste à rechercher à travers les catalogues existants les meilleures données possibles sur les objets multiples.

La méthode de réduction des objets multiples d'Hipparcos que j'ai développée à l'Observatoire de la Côte d'Azur sous la direction du Pr Kovalevsky s'inscrit dans ce contexte avec la double optique de fournir un bon point de départ pour les moindres carrés et d'être en soi une méthode entièrement indépendante de réduction.

Après une description sommaire, chapitres 1 et 2, d'Hipparcos et de son contexte scientifique, on trouvera au chapitre 3 une justification et une vue générale de la méthode adoptée. Puis, après une rapide présentation au chapitre 4 de la simulation des signaux Hipparcos, les deux étapes de la méthode sont détaillées aux chapitres 5 et 6. Des résultats de réduction de données simulées sont présentés au chapitre 7 tandis qu'une vision du traitement des données réelles est exposée au chapitre 8.

## 1. D'Hipparque à Hipparcos

Depuis ses premiers balbutiements, l'astronomie s'est toujours heurtée au problème de la distance des astres. En effet, s'il n'est pas difficile de mesurer des angles le long de la sphère céleste, l'obtention de la distance, de la coordonnée radiale, n'est, elle, pas immédiate du tout. La méthode principale de détermination de la distance des astres consiste à mesurer un petit déplacement angulaire appelé parallaxe.

Pendant longtemps, l'astronomie fut essentiellement planétaire : la prédiction des éclipses et le mouvement des planètes étaient les grandes préoccupations des astronomes, de l'antiquité aux temps modernes.

Diverses méthodes - dont des mesures de parallaxes - leur donnèrent une idée de la distance des "astres errants", mais les étoiles étaient, elles, fixées sur leur sphère lointaine et immuable.

L'attention fut attirée sur la distance de cette sphère des fixes par les remous culturels du système de Copernic, car l'existence éventuelle de parallaxes stellaires était un test définitif de cette théorie.

Mais ces parallaxes sont tellement minuscules et demandent des mesures tellement précises que beaucoup de ceux qui s'essayèrent à les mesurer découvrirent des phénomènes importants, mais pas de parallaxes.

Il fallut attendre le deuxième quart du XIX<sup>e</sup> siècle pour que les premières parallaxes incontestables soient mesurées. Et à la fin du XX<sup>e</sup> siècle, juste avant le lancement du satellite Hipparcos, encore bien peu de ces parallaxes pourtant fondamentales pour la connaissance de l'univers étaient connues avec précision.

### 1.1. La parallaxe géométrique

La base mathématique de l'utilisation de la parallaxe pour mesurer la distance est très simple. Quand un même objet E est visé depuis deux points A et B, la mesure de l'angle  $\varpi = \frac{1}{2} \widehat{AEB}$  appelé parallaxe géométrique permet, connaissant la distance  $a = \frac{1}{2} AB$ , d'obtenir la distance  $d = ME$ , où M est le milieu de AB, par

$$d = \frac{a}{\tan(\varpi)}$$

La parallaxe décroît donc rapidement avec la distance. A précision égale dans les mesures d'angles, la plus grande distance mesurable est directement proportionnelle à la longueur a de la base d'observation.

Dans le cas des parallaxes stellaires, M est le centre du Soleil, A et B sont deux positions de la Terre diamétralement opposées sur son orbite. Alors, compte tenu du fait que  $\varpi$  est très petit et en exprimant la distance d en années-lumière et  $\varpi$  en secondes d'arc, il vient :

$$d(\text{a.l.}) = \frac{3,26}{\varpi(")}$$

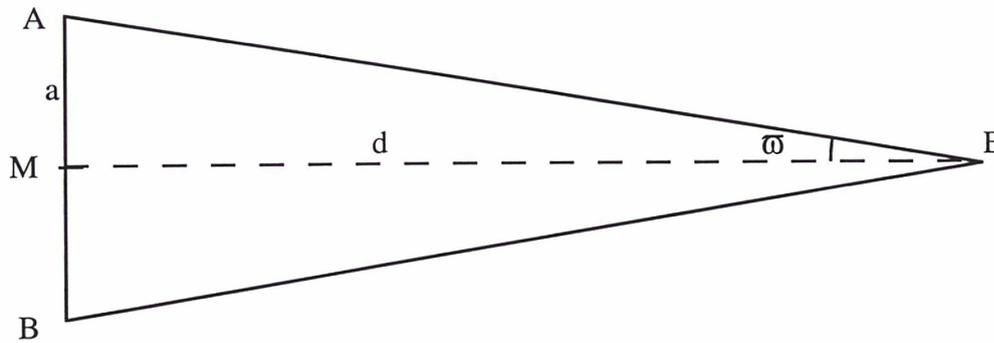


Figure 1 : La parallaxe et la distance.

$\omega$  est effectivement très petit : l'étoile la plus proche du Soleil,  $\alpha$ Centauri, qui est située à une distance de 4,3 a.l. a une parallaxe de l'ordre de 0,75".

En fait, le mouvement parallactique apparent d'une étoile est une ellipse, projection sur la sphère céleste du mouvement de révolution annuel de la Terre autour du Soleil. La détermination pratique d'une parallaxe stellaire consiste à reconstituer cette ellipse dont elle est le demi-grand axe.

## 1.2. Les Précurseurs

La méthode des parallaxes a été utilisée dès le VI<sup>e</sup> siècle avant notre ère par Thalès pour mesurer la distance de bateaux en mer à partir des visées de deux observateurs sur la côte.

Hipparque, au II<sup>e</sup> siècle avant notre ère, étudia l'effet de la parallaxe lunaire sur les éclipses de Soleil.

Cette même parallaxe lunaire permit à Ptolémée, au début du II<sup>e</sup> siècle de notre ère, de déterminer une distance de la Lune, largement fautive mais en accord avec celle qu'Hipparque avait obtenue à l'aide de la méthode des éclipses d'Aristarque.

Copernic, au début du XVI<sup>e</sup> siècle, arriva sensiblement au même résultat.

## 1.3. Les retombées parallactiques du Copernicisme

Il n'a jusqu'ici pas été question de parallaxe stellaire. En effet, les théories astronomiques les plus couramment admises à l'époque comprenaient généralement les deux idées suivantes: les étoiles étaient situées sur une sphère immuable, dite sphère des fixes, et la Terre était le centre du monde.

Compte tenu des valeurs, généralement sous-estimées mais cependant déjà très grandes des distances de la Terre à la Lune, de la Terre au Soleil et du diamètre terrestre connues à l'époque, le calcul montrait que cette sphère des fixes devait être trop éloignée pour que les étoiles aient une parallaxe mesurable entre deux points de la surface terrestre.

Le système de Copernic, qui faisait tourner la Terre autour du Soleil, permettait d'expliquer en grande partie les mouvements apparents des planètes, par un effet de parallaxe annuelle. L'une des objections les plus sérieuses au système de Copernic était alors la suivante : compte tenu de la grande distance de la Terre au Soleil, la base d'observation constituée de deux positions diamétralement opposées de la Terre sur son orbite doit être suffisamment grande pour que l'on puisse observer une parallaxe stellaire annuelle. Cette parallaxe n'est pas observée, donc la Terre ne tourne pas autour du Soleil.

Copernic expliquait cette contradiction en supposant que les étoiles étaient beaucoup plus éloignées que l'on ne pensait alors, à tel point que leur parallaxe n'était pas mesurable.

Il paraît bien difficile de réfuter des observations par une simple supposition, et le système de Copernic, qui eut un énorme retentissement, tant scientifique que religieux, attira l'attention des astronomes sur ce difficile problème de la mesure des parallaxes stellaires, qui pouvait départager les pro et les anti-Copernic.

#### **1.4. Tycho Brahé et la distance des astres**

Tycho Brahé, le meilleur observateur d'avant l'invention de la lunette astronomique, observa pendant 16 mois à partir de Novembre 1572 une nova dans la constellation de Cassiopée. En particulier des mesures angulaires répétées lui permirent de montrer que la nova n'avait pas de parallaxe perceptible. Il en déduisit qu'elle était certainement beaucoup plus distante de la Terre que la Lune et, comme de plus elle ne montrait aucun signe d'un mouvement orbital planétaire, elle devait en fait appartenir à la sphère des fixes.

D'autre part, en 1577, Tycho Brahé observa une comète et montra qu'elle était au moins trois fois plus éloignée de la Terre que la Lune, et qu'elle était en orbite autour du Soleil.

Tout cela n'a l'air de rien, mais la plupart des astronomes de l'époque partageaient le point de vue d'Aristote que la sphère des fixes était parfaitement immuable. L'apparition d'une "nova stella", une étoile nouvelle, était donc complètement révolutionnaire. De même les comètes étaient supposées appartenir à l'atmosphère terrestre. Les voici rejetées au beau milieu du système solaire. Mais comment pouvaient-elles alors traverser les sphères (solides!) de cristal qui, selon une croyance très répandue alors, étaient censées porter les planètes?

Les observations systématiques et très soignées de Tycho Brahé ne permirent donc pas seulement à Képler de fonder les bases de la mécanique céleste, mais aussi, en remettant différents phénomènes célestes "à leur place", permirent d'ébranler sérieusement les vieux dogmes Aristotéliens.

### 1.5. La première parallaxe planétaire

La distance de la Terre à Mars est minimale à chaque opposition et tous les 15 ou 16 ans ce minimum est particulièrement faible. C'était le cas pour l'opposition de 1672 qui permit à Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) d'obtenir la parallaxe, et donc la distance de Mars, à partir d'observations effectuées à Paris et à Cayenne.

### 1.6. Bradley, l'aberration et la nutation

Depuis que la controverse sur le système de Copernic avait attiré l'attention des astronomes sur les parallaxes stellaires, un grand nombre d'entre eux avaient essayé d'en mesurer. Tous avaient échoué quand, au XVIIe siècle, l'Astronome Royal anglais James Bradley (1693-1762) s'attaqua au problème.

Il ne réussit pas plus que les autres à mesurer des parallaxes, mais ses observations systématiques et très soignées de  $\gamma$ Draconis en particulier mirent en évidence des déplacements stellaires qui permirent de découvrir deux phénomènes importants: la nutation de l'axe de rotation de la Terre, et l'aberration de la lumière. Bradley montra d'ailleurs aussi ainsi que la parallaxe de  $\gamma$ Draconis, si elle existait, était certainement inférieure à 2", et probablement inférieure à 0,5".

### 1.7. Herschell et l'Univers

Jusqu'au XVIIIe siècle, à part les recherches de parallaxes stellaires liées au système de Copernic, les astronomes n'étudiaient les étoiles qu'en tant qu'ensemble de points de référence distribués sur une sphère pour les déplacements des planètes. Les motivations de l'astronome anglais William Herschell (1738-1822) étaient diamétralement opposées: "*a knowledge of the construction of the heavens has always been the ultimate object of my observations*" disait-il en 1811.

Il déploya une activité tous azimuts pour s'approcher de ce but. Il fit construire et utilisa de nombreux télescopes de plus en plus gigantesques. Cela lui permit de découvrir Uranus le 13 Mars 1781.

Mais surtout, la recherche de la structure de l'Univers le faisait se heurter de plein fouet au problème de la distance des étoiles. Compte tenu de la difficulté de la mesure des parallaxes stellaires, puisqu'un observateur de la qualité de Bradley n'y était pas parvenu, Herschell inventa et utilisa d'autres méthodes pour explorer la troisième dimension de l'Univers.

Il utilisa beaucoup la magnitude apparente comme indicateur de distance prenant, en l'absence de plus amples renseignements, l'hypothèse que toutes les étoiles ont le même éclat intrinsèque. Il utilisa aussi la méthode du dénombrement stellaire: en admettant que la densité d'étoiles est constante

dans l'Univers, la profondeur de cet Univers dans une direction donnée est proportionnelle au nombre d'étoiles observées dans cette direction. Il publia en 1785 le modèle d'Univers auquel il était parvenu par cette dernière méthode appliquée dans 683 régions du ciel.



*Figure 2 : L'Univers de Herschell obtenu à partir de dénombrements stellaires dans 683 régions du ciel.*

*L'ensemble est centré sur le Soleil.*

La faiblesse des hypothèses nécessaires à ces méthodes n'échappa pas à Herschell lui-même, en particulier les amas stellaires, dont il découvrit lui-même des centaines, mettaient fortement en doute la validité de la méthode du dénombrement stellaire, dans son hypothèse d'équirépartition des étoiles.

Herschell chercha aussi à utiliser la méthode différentielle suggérée par Galilée pour mesurer des parallaxes. Cette méthode consiste à mesurer les déplacements d'une étoile par rapport à une autre étoile très proche sur le ciel mais supposée beaucoup plus lointaine. Il se mit donc à chercher dans le ciel de tels couples d'étoiles. Il en répertoria des centaines, beaucoup trop pour qu'ils puissent être une simple conséquence de la répartition des étoiles dans le ciel : les étoiles doubles et multiples étaient découvertes et Herschell en publia le premier catalogue en 1782.

Ainsi, comme Bradley, Herschell fit une découverte astronomique majeure en cherchant sans succès à mesurer des parallaxes stellaires. Il fut également le premier à comprendre que le problème de la détermination des parallaxes était crucial pour la compréhension de notre Univers. Même si, en partant d'hypothèses excessives, le modèle obtenu est bien éloigné de la vision plus juste que nous en avons de nos jours, même si au XVIIIe siècle les astronomes admettaient en général déjà l'idée que les étoiles n'étaient pas toutes à la même distance de la Terre, Herschell fut le premier à s'intéresser au problème de la distance des étoiles en tant que mesure de notre Univers, le premier à faire éclater la sphère des fixes.

### **1.8. Les premières parallaxes stellaires**

La première parallaxe stellaire fut découverte trois siècles après que Copernic ait exposé son système héliocentrique. C'est en effet en 1838 que le prussien F.W. Bessel (1784-1846), à l'aide d'une variante de la méthode différentielle de Galilée, utilisant deux étoiles lointaines comme repères,

mesura la parallaxe de 61 Cygni comme valant un tiers de seconde d'arc (la valeur actuelle est de 0,293"). Puis coup sur coup T. Henderson (1798-1844) obtient une parallaxe de 1 seconde d'arc pour  $\alpha$ Centauri (valeur actuelle 0,754") en 1839 et F.G.W. Struve (1793-1864) donne, en 1840, une parallaxe de 0,25" pour Véga (valeur actuelle 0,123").

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, le Pr. Pritchard (1808-1893) commença à utiliser la photographie pour la détermination des parallaxes stellaires, et une cinquantaine d'étoiles avaient une parallaxe plus ou moins certaine.

### 1.9. Les parallaxes au XX<sup>e</sup> siècle : une question d'atmosphère

Les immenses possibilités ouvertes par l'utilisation de la photographie et de la spectroscopie, par l'extension des observations à d'autres domaines de longueur d'onde que l'étroite fenêtre du visible et les bonds en avant des théories physique ont fait que l'"atmosphère générale" de l'astronomie du XX<sup>e</sup> siècle est bien différente de celle des siècles précédents.

L'intérêt principal s'est en effet déplacé de l'astronomie de position vers l'astrophysique et d'autre part s'est largement recentré sur la physique stellaire, galactique et extragalactique.

Or passer de la magnitude apparente à la magnitude absolue d'une étoile sans faire d'hypothèse à priori sur sa nature nécessite de connaître sa parallaxe géométrique. C'est également une donnée fondamentale pour la connaissance des masses stellaires par l'intermédiaire des étoiles doubles.

De même, de nombreuses grandeurs fondamentales de la physique galactique sont déterminées à l'aide des étoiles du voisinage solaires et obtenir la distance de ces étoiles est indispensable à leur bonne connaissance.

Enfin, toute l'échelle des différents indicateurs de distance dans l'univers qu'utilisent actuellement les astronomes font appel, à un niveau ou à un autre, à des relations de physique stellaire qui sont de toute façon calibrées sur des étoiles dont la parallaxe est connue.

*Le Général Catalogue of Trigonometric Stellar Parallaxes* de W. Van Altena, dans sa troisième édition publiée en 1981 recense environ 6000 parallaxes. On peut estimer que la précision de la détermination de ces parallaxes n'est meilleure que 10% que pour les 700 étoiles les plus proches. Mais si un si petit nombre - 6000 en regard des 100 milliards d'étoiles de la Galaxie - de ces si précieuses parallaxes sont connues, et si mal connues, c'est que l'astrométrie au sol est fortement limitée dans la mesure des petits angles par l'instabilité de l'atmosphère.

D'où l'idée de placer en orbite autour de la Terre un télescope astrométrique dont la mission principale serait la mesure de parallaxes. Cette idée aboutit dans les années 70-80 à la conception du satellite Hipparcos et de sa mission.

## 2. Hipparcos

### 2.1. La genèse de la mission Hipparcos

Le professeur Lacroute soumit une première proposition de mission spatiale astrométrique au CNRS en mars 1966. Cette mission devait réaliser un système de référence de 7000 étoiles brillantes dont la position aurait été connue à mieux que 0,01 seconde d'arc.

Différentes révisions du projet furent exposées , à l'UAI en août 1967 et au CNES en novembre 1967 en particulier.

Le CNES lança, en 1969, une étude de faisabilité du "miroir complexe" , pièce maîtresse du schéma proposé (voir plus loin), mais on ne put fabriquer un miroir capable de résister aux vibrations du lancement.

Différentes propositions furent exposées, qui introduisaient quelques idées nouvelles, mais surtout mettaient beaucoup mieux en lumière la portée scientifique des résultats escomptés. L'intérêt grandissant de la communauté spatiale et astronomique aboutit à un symposium sur "l'Astrométrie spatiale" à Frascati en 1974 et, dans la foulée, au démarrage d'une étude de définition de la mission.

Pendant cette étude, E. Høg proposa l'utilisation d'innovations technologiques, en particulier la grille et le dissecteur d'image, un contrôle d'attitude actif qui permettait une meilleure couverture du ciel grâce à une loi de balayage plus complexe. Le projet ainsi défini devait obtenir la mesure des paramètres astrométriques de 100.000 étoiles pré-sélectionnées, avec une précision de l'ordre de  $2.10^{-3}$  secondes d'arc.

Lindgren exposa en 1976 la méthode de réduction en trois étapes qui sera mise en oeuvre par la suite par les deux consortiums de réduction des données.

Lorsque l'étude de faisabilité commença en 1977, la disponibilité de la fusée ARIANE permit de proposer un satellite plus lourd et géostationnaire.

Le projet fut approuvé par l'ESA en 1980. La construction débuta en 1984, après la fin des études pendant lesquelles, sur une proposition de E. Høg, furent ajoutés les deux repéreurs d'étoiles qui allaient aboutir au très fructueux programme TYCHO.

La mission fut baptisée "HIPPARCOS" pour **HI**gh **PAR**allax **COL**lecting Satellite, mais aussi en hommage à Hipparque.

Quatre consortiums scientifiques furent créés :

- L'INCA (INput CAlog) dirigé par C. Turon est chargé de collecter, dépoussiérer, harmoniser et compléter les données des 118.000 objets du catalogue d'entrée INCA d'Hipparcos à partir des différentes propositions d'étoiles à étudier provenant de toute la communauté astronomique.
- Le NDAC (Northern Data Analysis Consortium) dirigé par L. Lindegren et FAST (Fundamental Astronomy by Space Techniques) sont tous deux chargés de la réduction des données de la mission principale, l'indépendance entre les deux consortiums et la comparaison de leurs résultats devant être l'ultime garantie de la qualité des résultats finaux.
- Le TDAC (Tycho Data Analysis Consortium), dirigé par E. Høg, est chargé de la mission TYCHO qui, à partir des données des repéreurs d'étoiles, va sortir un catalogue photométrique et astrométrique d'un million d'objets, complément naturel du catalogue Hipparcos.

Le satellite fut lancé dans la nuit du 8 au 9 août 1989.

## 2.2. Le satellite

Le satellite, d'une masse de 1140kg au décollage, se compose de deux parties :

- la partie basse ou partie "vaisseau spatial", sur laquelle sont fixés les trois panneaux solaires, contient l'ensemble des équipements nécessaires au fonctionnement du satellite, en particulier les systèmes de contrôle de température, la stabilité de celle-ci étant fondamentale pour la qualité des mesures,
- la partie haute contient l'instrument proprement dit.

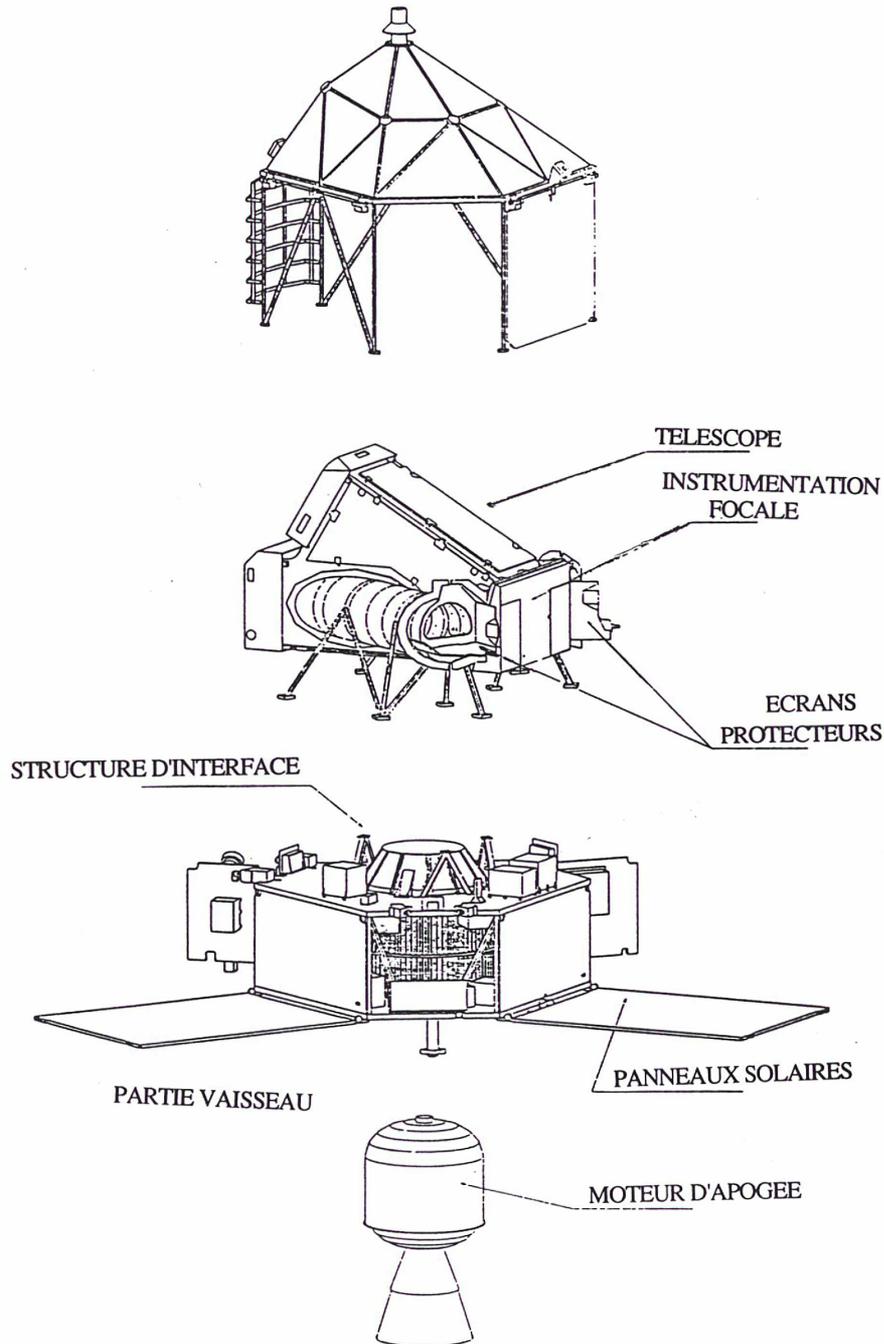
Cet instrument peut lui-même être décomposé en deux parties: l'optique et l'analyse du signal.

### 2.2.1. La partie optique

En astrométrie, comme dans toutes les disciplines métrologiques, la mesure des grandes valeurs (d'écarts angulaires en l'occurrence) est beaucoup moins précise que celle des petites valeurs.

L'idée de base de P. Lacroute permet de s'affranchir de ce problème de la manière suivante: deux champs stellaires éloignés sont observés simultanément et superposés au foyer du télescope par l'intermédiaire du miroir complexe.

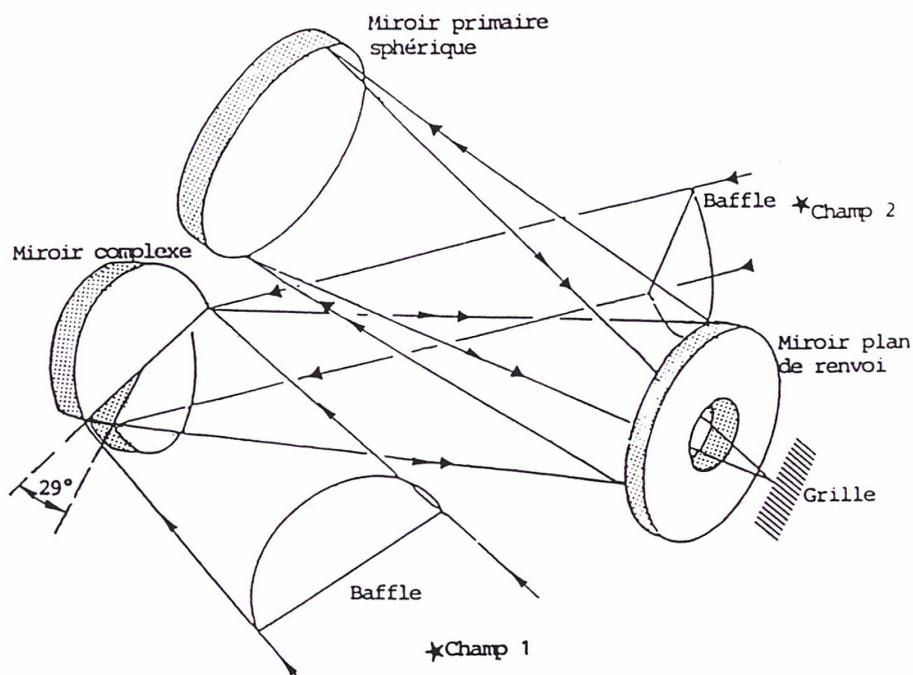
La mesure de l'angle  $\theta$  séparant deux étoiles prises chacune dans un champ différent est alors ramenée à la mesure du petit angle  $\varepsilon = (\theta - \gamma)$  où  $\gamma$  est l'angle de base du télescope, déterminé par l'angle entre les deux parties du miroir complexe. La mesure de  $\theta$  est ainsi obtenue avec la précision de celle de  $\varepsilon$ , à condition de connaître  $\gamma$  avec la même précision.



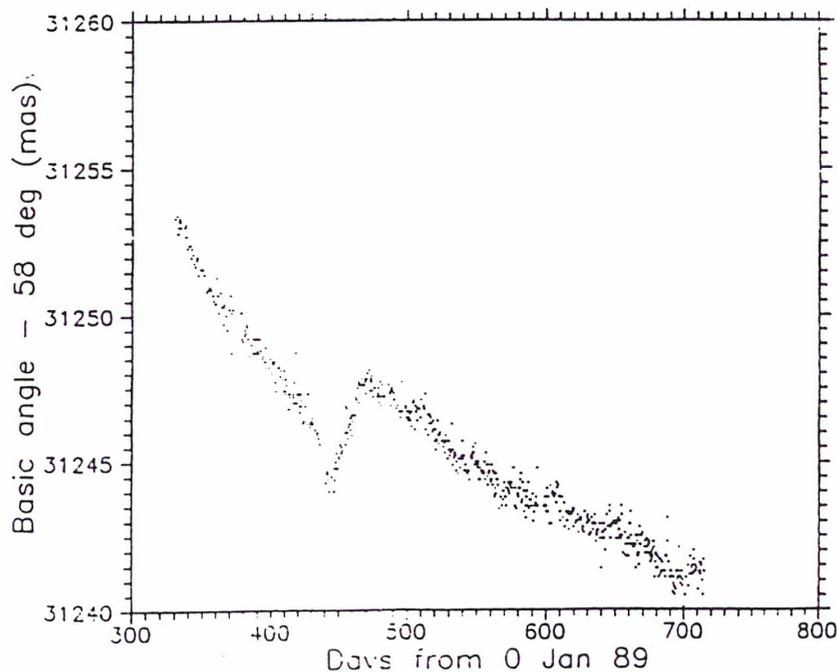
*Figure 3 : Éclaté du satellite : où l'on voit la partie vaisseau spatial, la partie instrument et un schéma de la structure externe.*

Cet angle  $\gamma$  est calibré avec soin, une valeur étant déterminée toutes les 10 heures. L'ensemble des valeurs obtenues pendant la première année d'observation est représenté figure 4. La précision de chacun de ces points est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-4}$  seconde d'arc. Cela correspond à peu près à un

déplacement de 2 nanomètres des deux parties du miroir qui proviennent d'un même miroir qui a été coupé en trois, la partie centrale étant écartée et les deux autres collées avec un angle de  $29^\circ$ . La qualité de cet assemblage et le contrôle de la température assurent la stabilité de l'angle de base du télescope sur une durée de quelques heures.



*Figure 4 : Principe de l'optique d'Hipparcos : les images de deux champs 1 et 2 sont superposées grâce au miroir complexe au foyer du télescope où se trouve la grille d'analyse.*



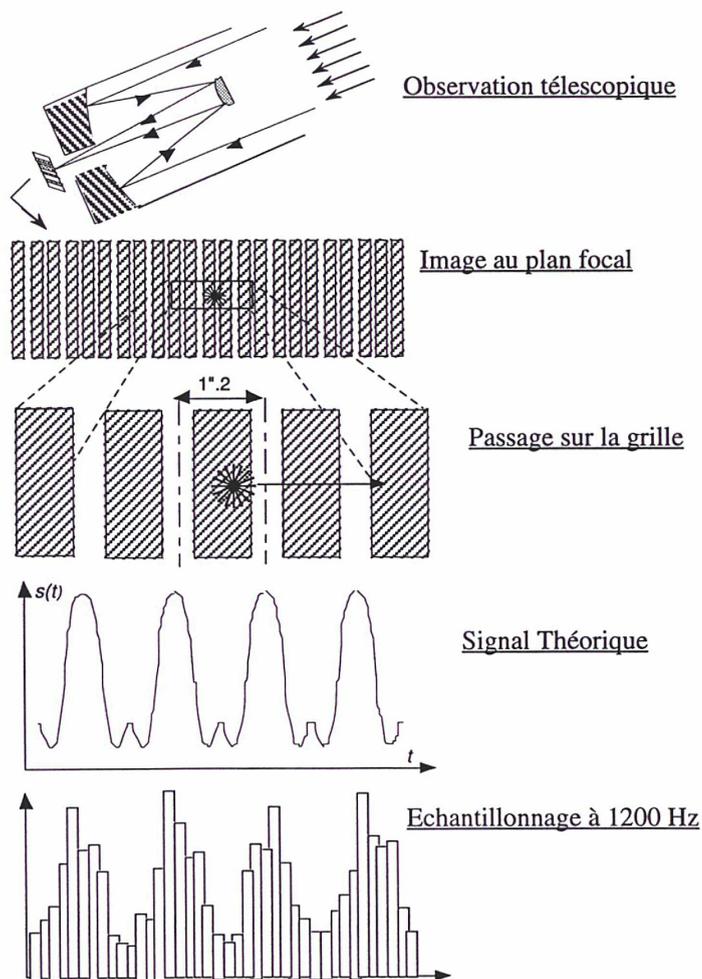
*Figure 5 : Variations de l'angle de base du télescope : en abscisse se trouve la date en jours. Ce graphique recouvre la première année de la mission. En ordonnée a été portée la valeur, en milliseconde d'arc, de la différence entre l'angle de base et 58 degrés.*

La lumière des deux champs superposés est ensuite concentrée au foyer du télescope via un miroir plan puis un miroir sphérique.

### 2.2.2. La partie traitement du signal

Au plan focal du télescope, la lumière rencontre la grille d'analyse composée de 2688 fentes identiques se répétant avec un pas de  $8,2\mu\text{m}$  représentant  $1,208$  seconde d'arc sur le ciel.

L'image défile perpendiculairement aux barreaux de la grille à la vitesse de rotation du satellite sur lui-même de  $168,75$  secondes d'arc par seconde de temps, ce qui module le signal lumineux à une fréquence de  $140$  Hz. Celui-ci est ensuite converti en signal électrique par une photocathode.



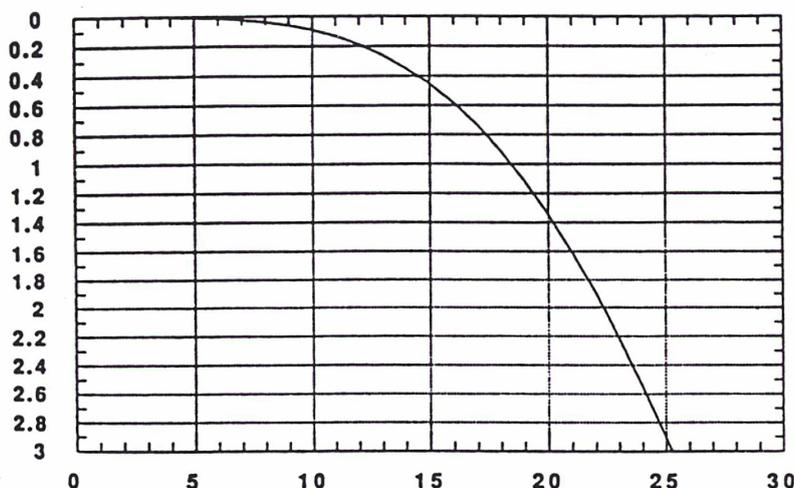
*Figure 6 : Principe de l'analyse du signal : l'étoile défile devant la grille perpendiculairement aux barreaux. Son signal est alors modulé à une fréquence de  $140$  Hz. Le signal résultant est échantillonné à  $1200$  Hz.*

L'information provenant des deux champs de 0,9 degré x 0,9 degré sur le ciel est beaucoup trop abondante pour pouvoir être analysée correctement.

C'est pourquoi entre la photocathode et l'électronique d'amplification s'intercale le dissecteur d'image qui fonctionne selon le même principe qu'un tube cathodique de téléviseur.

Il balaie la photocathode selon une loi complexe tenant compte du nombre et de la magnitude des étoiles présentes dans le champ et dirige les électrons provenant de la zone, et donc de l'étoile, choisie vers l'amplificateur où ils sont comptés à la fréquence de 1200 Hz. Les comptages sont ensuite envoyés au sol.

La sensibilité du détecteur ne diminue que progressivement en dehors de la zone centrale du dissecteur d'image (voir figure 7), ce qui entraîne des phénomènes de parasitage du signal d'un objet observé par un autre à l'extérieur de la zone visée (voir le chapitre 3.2).



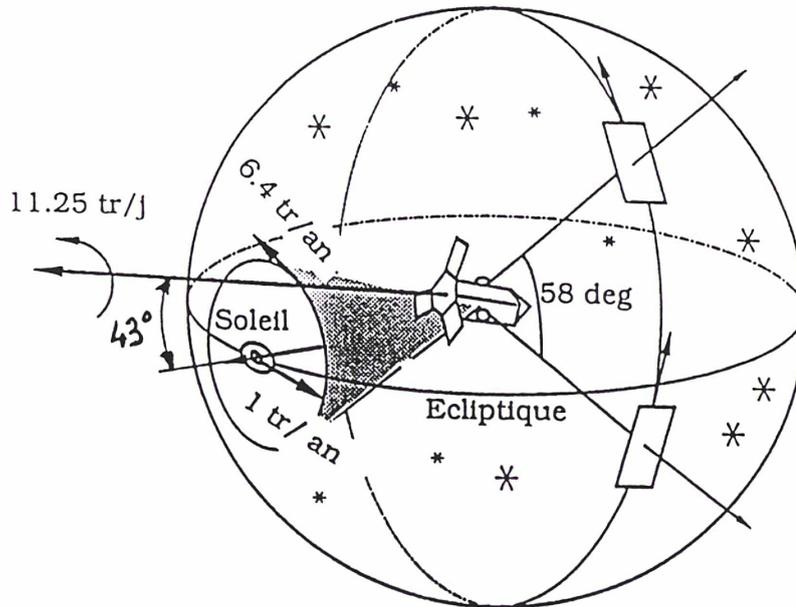
*Figure 7 : L'atténuation de la sensibilité du détecteur est ici portée en magnitude en fonction de la distance, en secondes d'arc, au centre de la zone activée par le dissecteur d'image.*

### 2.2.3. Le balayage du ciel

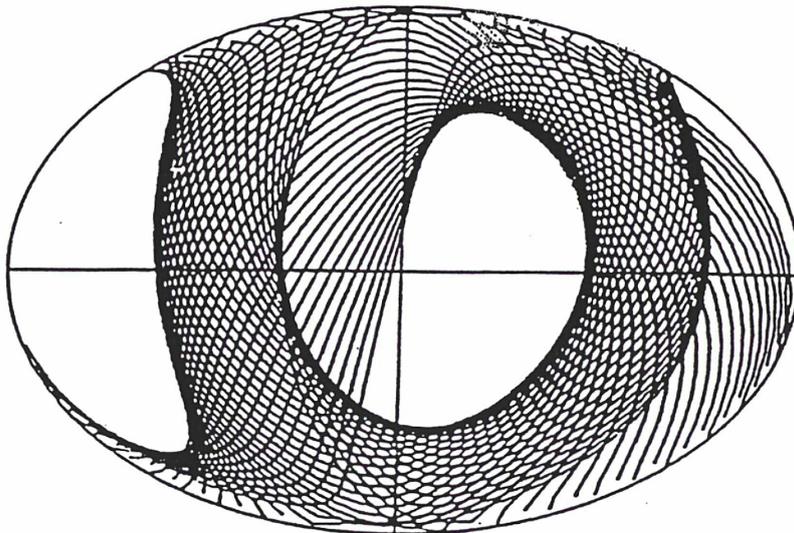
Le télescope balaie le ciel selon une loi bien déterminée composée de plusieurs mouvements: le satellite tourne autour de son axe à raison d'un tour en un peu plus de 2 heures et cet axe parcourt un cône de demi-angle au sommet  $43^\circ$  et d'axe la direction du soleil à raison d'un tour en un peu moins de deux mois.

L'attitude du satellite est contrôlée et corrigée en permanence afin que l'écart à cette loi nominale de balayage soit toujours inférieur à 10 minutes d'arc.

Cette loi permet de parcourir tout le ciel en observant toujours assez loin de la direction du soleil et en repassant aux mêmes points avec des directions de balayage différentes.



*Figure 8 : La loi de balayage d'Hipparcos : ce dessin illustre les principaux mouvements: passage d'une étoile dans les deux champs, avant puis arrière, tandis que le satellite tourne autour de son axe, cet axe décrivant un cône autour de la direction du Soleil.*



*Figure 9 : Partie du ciel balayée par Hipparcos : en 70 jours*

#### 2.2.4. Hipparcos sur orbite

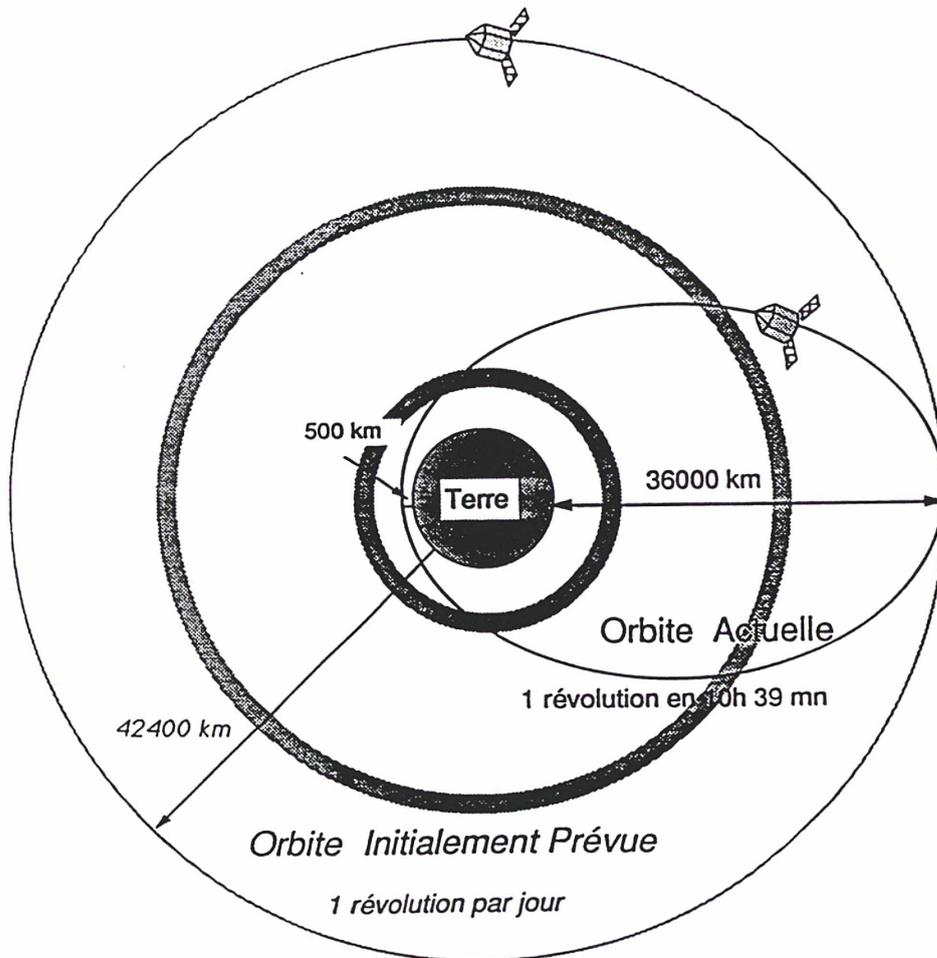
ARIANE plaça le satellite sur une orbite de transfert avec un périégée de l'ordre de 300 km d'altitude et un apogée de 36.000 km.

Cependant, le triple système de mise à feu du moteur d'apogée refusa obstinément de fonctionner et le satellite ne fut donc jamais transféré sur l'orbite géostationnaire prévue.

Les problèmes posés par le maintien du satellite sur l'orbite de transfert étaient tels que l'on pensa longtemps la mission définitivement compromise. Différents moyens mis en oeuvre, en

particulier la remontée à 500 km du péri-gée de l'orbite grâce aux réacteurs à hydrazine prévus pour la mise à poste du satellite, permirent de la sauver.

Le programme Hipparcos sera donc entièrement réalisé, avec des résultats d'une qualité meilleure que celle initialement prévue.



*Figure 10 : Les deux orbites : où l'on voit en particulier la traversée des ceintures de radiations imposée par l'orbite sur laquelle est resté le satellite.*

### 2.3. Les observations d'Hipparcos

En laissant de côté les problèmes de calibration, la chaîne d'acquisition et de réduction des observations d'Hipparcos se compose schématiquement de trois étapes : la réduction sur la grille, la projection sur les cercles et la reconstitution de la sphère.

#### 2.3.1. Réduction sur la grille

Le signal modulé par la grille est recueilli par un photomultiplicateur. Les comptages de

photons, effectués à une fréquence de 1200 Hz, sont ajustés à chaque base d'observation (appelée T4) de 32/15s à un modèle à 5 paramètres de la forme

$$S(t) = B_0 + b + B_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) + B_2 \cdot \cos 2(\omega t + \psi_2) \quad (1)$$

où, pour une étoile simple,

$$B_0 = I, B_1 = I M_1, B_2 = I M_2 \quad (2a)$$

avec I signal de l'étoile,  $M_1$  et  $M_2$  coefficients de modulation du premier et du second harmonique respectivement et b le bruit de fond.

Ces quantités ont pour ordre de grandeur :

$$M_1 \approx 0,76, M_2 \approx 0,28, b \approx 40 \text{ Hz} \quad (2b)$$

En pratique, il existe un décalage de phase  $\psi_1 - \psi_2$  de l'ordre de 5 à 6 degrés, variable en fonction du temps. Mais ce décalage est calibré avec précision sur les étoiles simples et sera donc considéré ici comme nul pour ces étoiles simples.

Tout au long de son passage (appelé transit) devant la grille, l'étoile sera observée typiquement à 9 reprises. Ces observations permettront d'obtenir la position de l'étoile par rapport à un repère local lié à la grille ou, de façon équivalente, par rapport à un repère lié au Cercle Instantané de Rotation (CIR), celui-ci se confondant avec la direction de balayage.

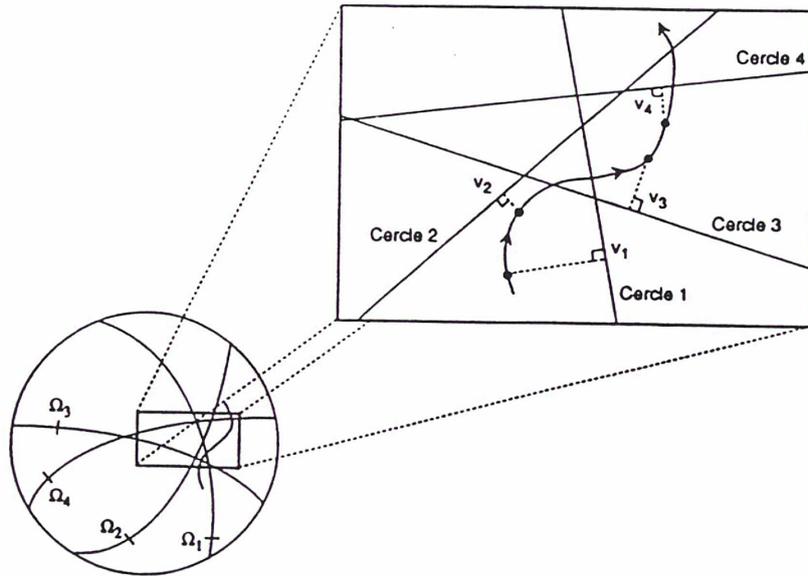
Cette information n'a de précision que perpendiculairement à la grille, c'est-à-dire parallèlement à la direction de balayage.

### 2.3.2. Projection sur les cercles

Après environ 10 heures d'observation, représentant 4 à 5 rotations du satellite sur lui-même, la direction de balayage n'a pas variée de plus de 1,6 degré. L'ensemble des abscisses grilles obtenues pendant cette période sur chacun des CIR permet de déterminer pour chaque étoile une abscisse sur le grand cercle de référence (GCR) par projection de la position de l'étoile le long de ce cercle moyen de balayage.

### 2.3.3. Reconstitution de la sphère

La totalité des GCR est ajustée par glissement de leurs origines, qui sont libres, pour reconstituer la sphère céleste et obtenir les paramètres astrométriques de chacune des étoiles.



*Figure 11 : La sphère, les étoiles et le temps : à gauche, la sphère céleste est reconstituée à partir des grands cercles par ajustement de leurs origines  $\Omega_i$ . A droite un agrandissement montre la combinaison du mouvement propre et du déplacement parallactique pour une étoile et la projection à différents instants de sa position sur un grand cercle.*

## 2.4 Hipparcos : quelques repères

Le passage du référentiel écliptique à celui d'un des champs d'Hipparcos s'effectue par une série de rotations qui définissent un certain nombre de repères intermédiaires. Tous les repères considérés ici sont orthonormés directs.

Notons  $R_i(\alpha)$  une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe numéro  $i$  d'un trièdre (les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un repère orthonormés direct ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) étant respectivement les numéros 1, 2 et 3). Un point ayant  $\lambda$  et  $\beta$  pour longitude et latitude écliptiques aura les coordonnées écliptiques cartésiennes ( $l$ ,  $j$ ,  $k$ ) :

$$\begin{pmatrix} l \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\lambda) \\ \cos(\beta)\sin(\lambda) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \quad (3a)$$

Dans le référentiel d'un GCR dont le vecteur polaire a pour coordonnées écliptiques  $\lambda_r$  et  $\beta_r$ , ce point aura pour coordonnées ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) avec :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = R_1\left(\frac{\pi}{2} - \beta_r\right) \cdot R_3\left(\frac{\pi}{2} + \lambda_r\right) \cdot \begin{pmatrix} l \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3b)$$

Pour ramener ce point sur le référentiel du satellite, qui lui est lié et tourne en même temps que

lui, il faut tenir compte des angles d'attitude. Deux séquences différentes de rotations peuvent être utilisées pour décrire cette attitude : une séquence 1-2-3 dite "Eulérienne" et une séquence 3-1-3 dite "astronomique".

Les coordonnées  $(x, y, z)$  du point dans ce référentiel du satellite s'obtiennent donc par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_1(-\varphi_e).R_2(-\theta_e).R_3(-\psi_e).\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3c)$$

ou :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(-\varphi_a).R_1(-\theta_a).R_3(-\psi_a).\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3d)$$

On peut noter que l'attitude (dite mixte) utilisée par FAST est un mélange des deux systèmes précédents (voir les chapitres 4.3 et 5.1.4).

L'axe  $x$  du référentiel du satellite est situé au milieu des deux directions de visée d'Hipparcos. Pour obtenir les coordonnées  $(f, w, z)$  du point dans le repère lié à un des champs du télescope, il faut utiliser l'indice  $c \in \{-1, +1\}$  de ce champ et l'angle de base  $\gamma$  du télescope pour une dernière rotation le long du cercle :

$$\begin{pmatrix} f \\ w \\ z \end{pmatrix} = R_3\left(-c\frac{\gamma}{2}\right).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3e)$$

### **3. Hipparcos et les étoiles multiples**

Les étoiles multiples sont des objets astronomiques presque aussi mal connus qu'ils sont fréquents. Dans le cas d'Hipparcos, les objets multiples posent un problème très spécifique provenant de la forme des observations Hipparcos elles-mêmes et qui a motivé le développement d'une méthode de réduction adaptée.

#### **3.1. Les étoiles multiples**

##### **3.1.1. Leur fréquence**

Si l'existence de couples stellaires était connue depuis l'antiquité, la nature physique, gravitationnelle, du lien entre les composantes d'un système double et la fréquence importante du phénomène ne furent mis en évidence qu'à partir de Herschell.

Ce lien permet, par l'intermédiaire de la théorie du problème des deux corps, d'accéder à une des grandeurs fondamentales de la physique stellaire : les masses des étoiles.

La multiplicité stellaire est un phénomène très commun. d'après Batten (1973), 70% des systèmes stellaires sont au moins doubles et 30% de ces derniers sont au moins triples. Les rapports semblent être les mêmes - 30% - pour les ordres de multiplicité supérieurs, même si là les chiffres doivent être pris avec précautions car basés sur de très petits nombres d'objets.

Ces rapports font que la probabilité de présence de systèmes n-uples dans la Galaxie décroît très vite avec n : aucun système multiple de 20 ou plus composantes ne devrait exister dans notre Galaxie.

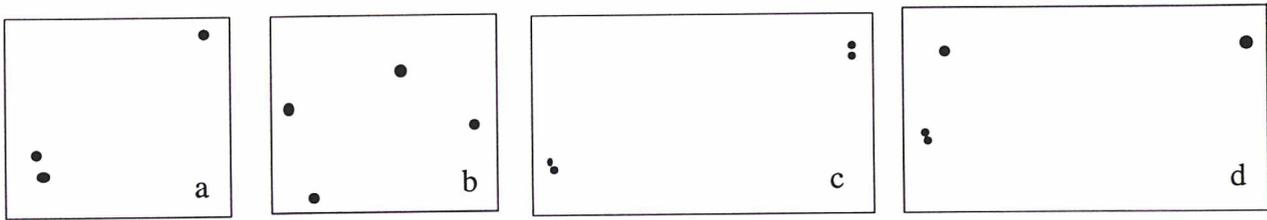
Il semble donc que la distinction à établir entre systèmes multiples et amas stellaires ne soit pas une simple question de vocabulaire lié au nombre d'étoiles, mais que ces deux types de regroupements stellaires aient une nature, ou au moins une origine, physique différente.

##### **3.1.2. La structure hiérarchique**

Les étoiles multiples peuvent donc, vu leur fréquence élevée, être un sujet d'étude en elles-mêmes, mais elles offrent également la possibilité de remonter aux masses stellaires. En effet, les configurations du type Trapèze (figure 12b) dans lesquelles les distances mutuelles sont du même ordre de grandeur sont gravitationnellement instables. L'évolution des systèmes multiples tend donc à former des sous-systèmes binaires.

Et de fait, les configurations observées sont dans la majeure partie des cas du type hiérarchisé (figure 12a, c, d), le système se divisant en couples de plus en plus serrés. De plus, les rapports observés entre les distances dans ce type de système sont généralement très grands, avec une valeur

typique de l'ordre de 200 à 300, pouvant aller jusqu'à 100 000 dans le cas de Castor C par exemple.



*figure 12 : la hiérarchie des systèmes multiples : en a, le type de triple le plus commun, formé d'une binaire et d'un compagnon éloigné. En b, un système quadruple de type Trapèze, sans hiérarchie. En c, un quadruple du type binaire plus binaire et en d un quadruple du type couple dont une des composantes est elle-même une binaire serrée, avec un compagnon lointain.*

Considérer un tel système comme une succession de systèmes à deux composantes devrait permettre d'accéder, de proche en proche, aux masses de ses diverses étoiles.

Malheureusement, la hiérarchie a aussi pour conséquence le fait que presque tous les systèmes multiples comprennent des composantes ayant un mouvement orbital de très grande période. Ce qui fait que très peu de systèmes possèdent des éléments orbitaux pour plus de deux composantes : 30 triples et 4 quadruples en 1978 (Heintz).

### 3.2. Vous avez dit multiples ?

Le catalogue d'entrée d'Hipparcos comporte quelques 2700 systèmes multiples - triples et plus. Cependant, un grand nombre de composantes de ces systèmes n'ont pas été retenues dans le programme d'observation d'Hipparcos, et les autres sont souvent observées séparément. Il peut arriver, par exemple, qu'un système quintuple soit ainsi décomposé : deux étoiles non observées, deux observées simultanément et une observée seule. Un tel système représentera en fait pour Hipparcos deux objets, un double et un simple, et ne posera donc pas d'autre problème que la réduction d'une étoile double et celle d'une simple.

Le problème particulier qui motive cette thèse apparaît lorsqu'un objet Hipparcos est au moins triple : au moins trois étoiles trop proches les unes des autres pour pouvoir être observées séparément. Hipparcos nous transmet donc de cet objet un signal de la même forme que celui d'une étoile simple mais qui est en fait la somme des signaux des trois - ou plus - étoiles qui le composent. C'est là le point de départ du problème, comme il sera expliqué un peu plus loin.

De tels objets multiples peuvent être ainsi repérés : les étoiles appartiennent au même système, elles portent donc le même numéro CCDM; elles sont de plus observées simultanément et portent donc le même numéro Hipparcos.

La liste des 287 objets triples, 17 quadruples et 2 sextuples ainsi trouvés est donnée en Annexe H.

D'autre part, la sensibilité du détecteur reste non négligeable assez loin autour de la zone visée par le dissecteur d'image (voir le paragraphe 2.2.2) et il y a donc des cas où la présence d'étoiles "parasites" ne faisant pas partie du programme d'observation rend un objet multiple. Ces cas ont été recensés par J.L. Falin et l'annexe H donne la liste de ces objets au moins triples et non déjà répertoriés comme objets multiples. De plus les objets triples 27783, 59017, et 76566 sont parasités et deviennent quadruples, le 88330 passe de triple à quintuple et le 98825 de quadruple à quintuple.

Toutes catégories confondues, il se trouve donc 627 objets triples, 53 quadruples, 4 quintuples et 3 sextuples concernés par ce travail.

Il faut noter que dans ce qui suit les objets multiples seront peut-être parfois abusivement appelés systèmes, mais sans ambiguïté puisqu'ils sont les seuls concernés par toute la partie "technique" de cette thèse.

### 3.3. Le signal d'un objet multiple

En négligeant les effets de couleur sur  $M_1$  et  $M_2$  et en supposant que les composantes de l'objet multiple soient des étoiles simples, chacune d'entre elles contribue au signal par

$$S_k(t) = I_k + M_1 I_k \cos(\omega t + \phi_k) + M_2 I_k \cos 2(\omega t + \phi_k) \quad (4)$$

Le détecteur étant linéaire, le signal total est de la forme (1) avec

$$B_0 = \sum_{k=1}^{n^*} I_k \quad (5a)$$

$$B_1 \cdot \cos(\psi_1) = \sum_{k=1}^{n^*} I_k M_1 \cos(\phi_k) \quad (5b)$$

$$B_1 \cdot \sin(\psi_1) = \sum_{k=1}^{n^*} I_k M_1 \sin(\phi_k) \quad (5c)$$

$$B_2 \cdot \cos(2\psi_2) = \sum_{k=1}^{n^*} I_k M_2 \cos(2\phi_k) \quad (5d)$$

$$B_2 \cdot \sin(2\psi_2) = \sum_{k=1}^{n^*} I_k M_2 \sin(2\phi_k) \quad (5e)$$

Chaque observation élémentaire amène cinq informations indépendantes. La structure d'un objet n-uple est déterminée par  $3(n-1)$  paramètres relatifs,  $n-1$  d'intensité et  $2(n-1)$  de position. Il faut donc au moins 6 paramètres pour déterminer la structure d'un objet au moins triple et il n'y a pas assez d'information dans une observation élémentaire pour cela.

Le projeté sur le cercle de la position d'un objet multiple dépend de sa structure. Déterminer cette structure sera donc le premier objectif à atteindre pour réduire ces observations. Pour cela, il faudra regrouper des observations de directions de balayage différentes.

Regrouper les observations sur un transit n'apporte pas plus d'information car l'angle de balayage du satellite ne varie pas suffisamment. Il faut donc les regrouper sur plusieurs Grands Cercles différents, ce qui pose le problème de l'origine le long de ces cercles.

En effet, hormis  $B_0$  qui est indépendant de la direction de balayage et qui donne accès au signal total de l'objet  $J_0$ , les paramètres du signal dépendent des phases des étoiles dont l'origine varie avec la direction de balayage.

### 3.4. Fonctions des différences de phases

A partir d'ici, on considérera un objet triple.

#### 3.4.1. Combinaisons des cinq paramètres du signal Hipparcos

Pour éliminer ce problème d'origine des phases à chaque direction de balayage, on est amené à combiner les paramètres du signal pour obtenir des expressions qui seront fonction uniquement des différences de phases :

$$\delta_1 = \phi_2 - \phi_3, \quad \delta_2 = \phi_3 - \phi_1 \quad \text{et} \quad \delta_3 = \phi_1 - \phi_2 \quad (6)$$

En supposant que les effets de couleur sur les coefficients de modulation  $M_i$  soient négligeables, il vient :

$$(B_1 \cos(\psi_1))^2 + (B_1 \sin(\psi_1))^2 = M_1^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + 2(I_1 I_2 \cos(\delta_3) + I_1 I_3 \cos(\delta_2) + I_2 I_3 \cos(\delta_1)))$$

d'où la fonction A :

$$A = 1 - \frac{B_1^2}{M_1^2 \cdot J_0^2} \quad (7a)$$

Un calcul similaire mène à la fonction B :

$$B = 1 - \frac{B_2^2}{M_2^2 \cdot J_0^2} \quad (7b)$$

Ces deux fonctions A et B n'utilisent que B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub>. Or l'information de position provient principalement de  $\psi_1 - \psi_2$ . En fait, seule  $2(\psi_1 - \psi_2)$  est facilement accessible. En tenant compte de :

$$2(B_1 \cos(\psi_1))(B_1 \sin(\psi_1)) = B_1^2 \sin(2\psi_1)$$

et

$$(B_1 \cos(\psi_1))^2 - (B_1 \sin(\psi_1))^2 = B_1^2 \cos(2\psi_1)$$

on arrive à :

$$B_1^2 B_2 \sin(2(\psi_1 - \psi_2)) = 2(B_1 \cos(\psi_1))(B_1 \sin(\psi_1))(B_2 \cos(2\psi_2)) \\ - ((B_1 \cos(\psi_1))^2 - (B_1 \sin(\psi_1))^2)(B_2 \sin(2\psi_2))$$

et

$$B_1^2 B_2 \cos(2(\psi_1 - \psi_2)) = 2(B_1 \cos(\psi_1))(B_1 \sin(\psi_1))(B_2 \sin(2\psi_2)) \\ + ((B_1 \cos(\psi_1))^2 - (B_1 \sin(\psi_1))^2)(B_2 \cos(2\psi_2))$$

où les deux membres de droite s'expriment en fonction des  $\delta_i$ . On aboutit ainsi aux deux fonctions C et D :

$$C = 2\sqrt{2} \frac{(B_1^2 B_2 \sin 2(\psi_1 - \psi_2))}{M_1^2 \cdot M_2 \cdot J_0^3} \quad (7c)$$

$$D = 1 - 2\sqrt{2} \frac{(B_1^2 B_2 \cos 2(\psi_1 - \psi_2))}{M_1^2 \cdot M_2 \cdot J_0^3} \quad (7d)$$

Les expressions en fonction des différences de phases de ces quatres fonctions sont :

$$A = J_2 J_3 (1 - \cos(\delta_1)) + J_1 J_3 (1 - \cos(\delta_2)) + J_2 J_1 (1 - \cos(\delta_3)) \quad (8a)$$

$$B = J_2 J_3 (1 - \cos(2\delta_1)) + J_1 J_3 (1 - \cos(2\delta_2)) + J_2 J_1 (1 - \cos(2\delta_3)) \quad (8b)$$

$$C = (J_2^2 J_3 - J_2 J_3^2) \cdot \{\sin(2\delta_1) - 2\sin(\delta_1)\} + (J_3^2 J_1 - J_3 J_1^2) \cdot \{\sin(2\delta_2) - 2\sin(\delta_2)\} \\ + (J_1^2 J_2 - J_1 J_2^2) \cdot \{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\} + 2J_1 J_2 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_2 - \delta_3) + \sin(\delta_3 - \delta_1)\} \quad (8c)$$

$$D = (J_2^2 J_3 + J_2 J_3^2) \cdot \{3 - (\cos(2\delta_1) + 2\cos(\delta_1))\} + (J_3^2 J_1 + J_3 J_1^2) \cdot \{3 - (\cos(2\delta_2) + 2\cos(\delta_2))\} \\ + (J_1^2 J_2 + J_1 J_2^2) \cdot \{3 - (\cos(2\delta_3) + 2\cos(\delta_3))\} + 2J_1 J_2 J_3 \{3 - (\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_2 - \delta_3) + \cos(\delta_3 - \delta_1))\} \quad (8d)$$

où les signaux des étoiles sont normalisés par :

$$J_k = \sqrt{2} \cdot \frac{I_k}{J_0} \quad (9)$$

Il faut noter que les expressions données ci-dessus en fonction des  $\delta_i$  des fonctions C et D nécessitent pour être valables que le décalage  $v_2$  des origines des phases du premier et du second harmonique soit nul. Ceci parce qu'il a fallu soustraire les phases doubles aux doubles des phases simples pour obtenir ces expressions. Ce n'est pas le cas des fonctions A et B. De toute façon,  $v_2$  est censé être nul après les calibrations dans le cas des données réelles (voir le chapitre 8.1.2).

### 3.4.2. Les inconnues spatiales

Les différences de phases s'expriment directement en fonction de la structure spatiale de l'objet et de l'angle de balayage par :

$$\delta_1 = - (f_1 \sin(\chi) + g_1 \cos(\chi)) \quad (10a)$$

$$\delta_2 = - (f_2 \sin(\chi) + g_2 \cos(\chi)) \quad (10b)$$

$$\delta_3 = - (f_3 \sin(\chi) + g_3 \cos(\chi)) \quad (10c)$$

où

$$\vec{E}_3 \vec{E}_2 \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \vec{E}_1 \vec{E}_3 \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_2 \vec{E}_1 \begin{pmatrix} f_3 \\ g_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

les  $f_i$  et  $g_i$  étant les coordonnées cartésiennes utilisées lors de la résolution du système d'équations.

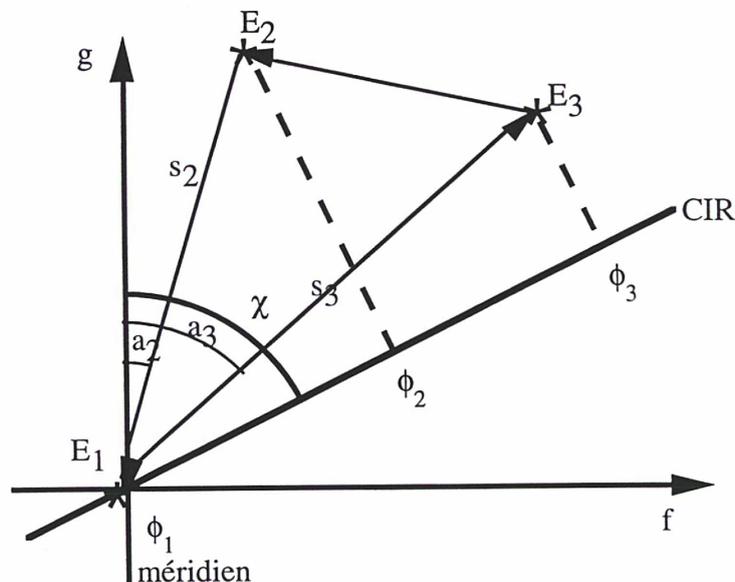


Figure 13 : Les phases du signal : Les projections des positions des étoiles sur le Cercle Instantané de Rotation CIR donnent leurs phases  $\phi_i$  celles des vecteurs donnent les différences de phases.

En fonction des coordonnées polaires  $s_i$  séparations exprimées en radians et  $a_i$  angles de position, et du pas de grille  $S$ , il vient :

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\sin(S)} (s_3 \cos(\chi - a_3) - s_2 \cos(\chi - a_2)) = ((u_3 - u_2) \sin(\chi) + (v_3 - v_2) \cos(\chi)) \quad (12a)$$

$$\delta_2 = -\frac{2\pi}{\sin(S)} (s_3 \cos(\chi - a_3)) = -(u_3 \sin(\chi) + v_3 \cos(\chi)) \quad (12b)$$

et

$$\delta_3 = \frac{2\pi}{\sin(S)} (s_2 \cos(\chi - a_2)) = (u_2 \sin(\chi) + v_2 \cos(\chi)) \quad (12c)$$

$$\text{où } \forall k \in \{1, 2\}, \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\sin(S)} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_k \cdot \sin(a_k) \\ s_k \cdot \cos(a_k) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Dans les quatre paramètres  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , il n'y a que trois paramètres indépendants :  $B_1$ ,  $B_2$  et  $\psi_1 - \psi_2$ . Il ne faut donc prendre que trois fonctions pour la résolution. Ont été retenues  $A$  et  $B$  pour leur simplicité et  $C$  qui, seule, fait intervenir le sinus des différences de phases.

### 3.4.3. Présentation sommaire des trois fonctions

Elles devront toutes trois être considérées soit comme des fonctions de sept inconnues  $f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3$  et à 1 paramètre  $\chi$ , soit comme des fonctions à une inconnue  $\chi$  :

$$A_0(\chi) = A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (14a)$$

$$B_0(\chi) = B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (14b)$$

$$C_0(\chi) = C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (14c)$$

les  $f_i, g_i$  et  $j_i$  étant fixés.

L'étude de fonctions à huit inconnues n'étant pas chose facile, on ne trouvera ici que quelques renseignements généraux permettant de s'en faire une idée.

#### 3.4.3.1. Périodicités et symétries

On a :

$$B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) = A(2f_1, 2g_1, j_1, 2f_2, 2g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (15)$$

Il suffit donc de considérer les fonctions  $A$  et  $C$ . Par rapport à l'angle de balayage  $\chi$ ,  $A$  est  $\pi$ -périodique,  $C$  est  $2\pi$ -périodique et vérifie  $C_0(x + \pi) = -C_0(x)$ .

### 3.4.3.2. Ordres de grandeur

A est une fonction à valeurs positives. De plus :

$$\left[ Q(x,y,z) = \frac{2xy}{(x+y+z)^2} \right] \Rightarrow \left[ \sup_{\mathbb{R}^3} Q(x,y,z) = \frac{1}{2} \right]$$

d'où

$$A \leq \frac{1}{2} (3 - (\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_2 - \delta_3) + \cos(\delta_3 - \delta_1)))$$

comme

$$\left[ G(\alpha, \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta) \right] \Rightarrow \left[ \inf_{\mathbb{R}^2} G(\alpha, \beta) = -1 \right]$$

il vient

$$\boxed{0 \leq A \leq 2} \quad (16a)$$

en notant que

$$\left[ Q_1(x,y,z) = \frac{2\sqrt{2}(x^2y - xy^2)}{(x+y+z)^3} \right] \Rightarrow \left[ \sup_{\mathbb{R}^3} Q_1 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right]$$

et

$$\left[ P(x,y,z) = \frac{4\sqrt{2}xyz}{(x+y+z)^3} \right] \Rightarrow \left[ \sup_{\mathbb{R}^3} P = \frac{4\sqrt{2}}{27} \right]$$

et

$$\left[ H(\alpha, \beta) = \sin(\alpha) + \sin(\beta) - \sin(\alpha + \beta) \right] \Rightarrow \left[ \sup_{\mathbb{R}^2} |H| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \right]$$

il vient

$$|C| \leq \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left( 3 \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{4\sqrt{2}}{27} \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

d'où

$$\boxed{|C| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \approx 0,67} \quad (16b)$$

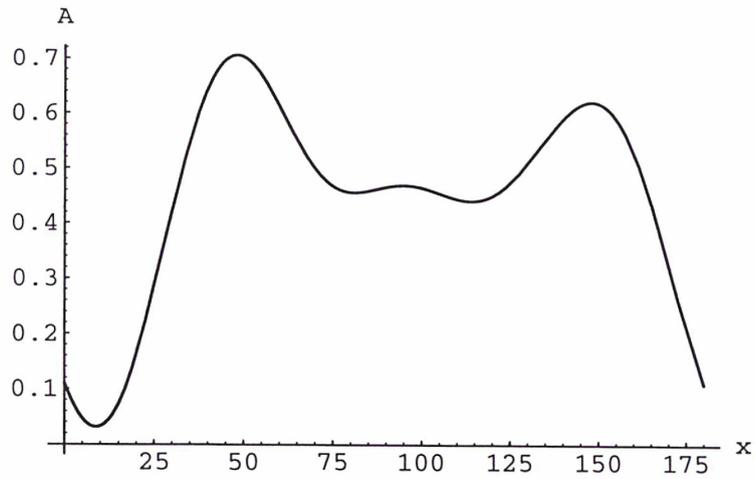
Les trois fonctions sont donc du même ordre de grandeur.

### 3.4.3.3. Représentations graphiques

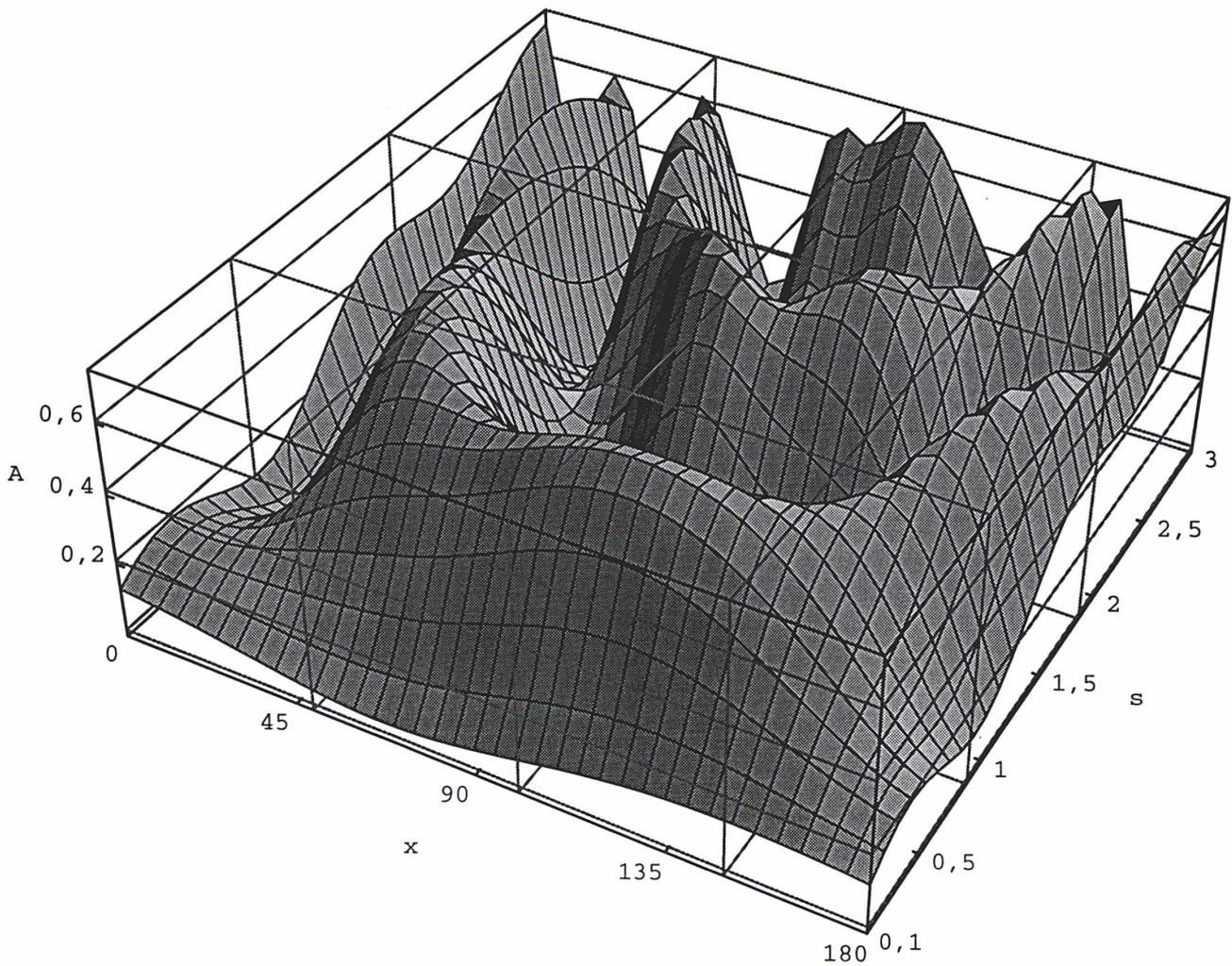
Quelques exemples permettront de se faire une idée de l'allure des fonctions.

La figure 14 représente la fonction A pour un objet ainsi composé :

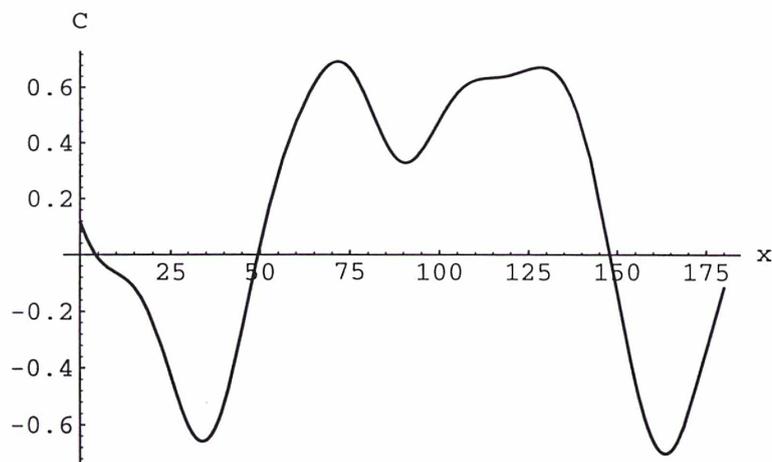
$m_1$	$s_2$ (")	$a_2$ (°)	$m_2$	$s_3$ (")	$a_3$ (°)	$m_3$
5	0,9	100	6,5	1,2	160	8



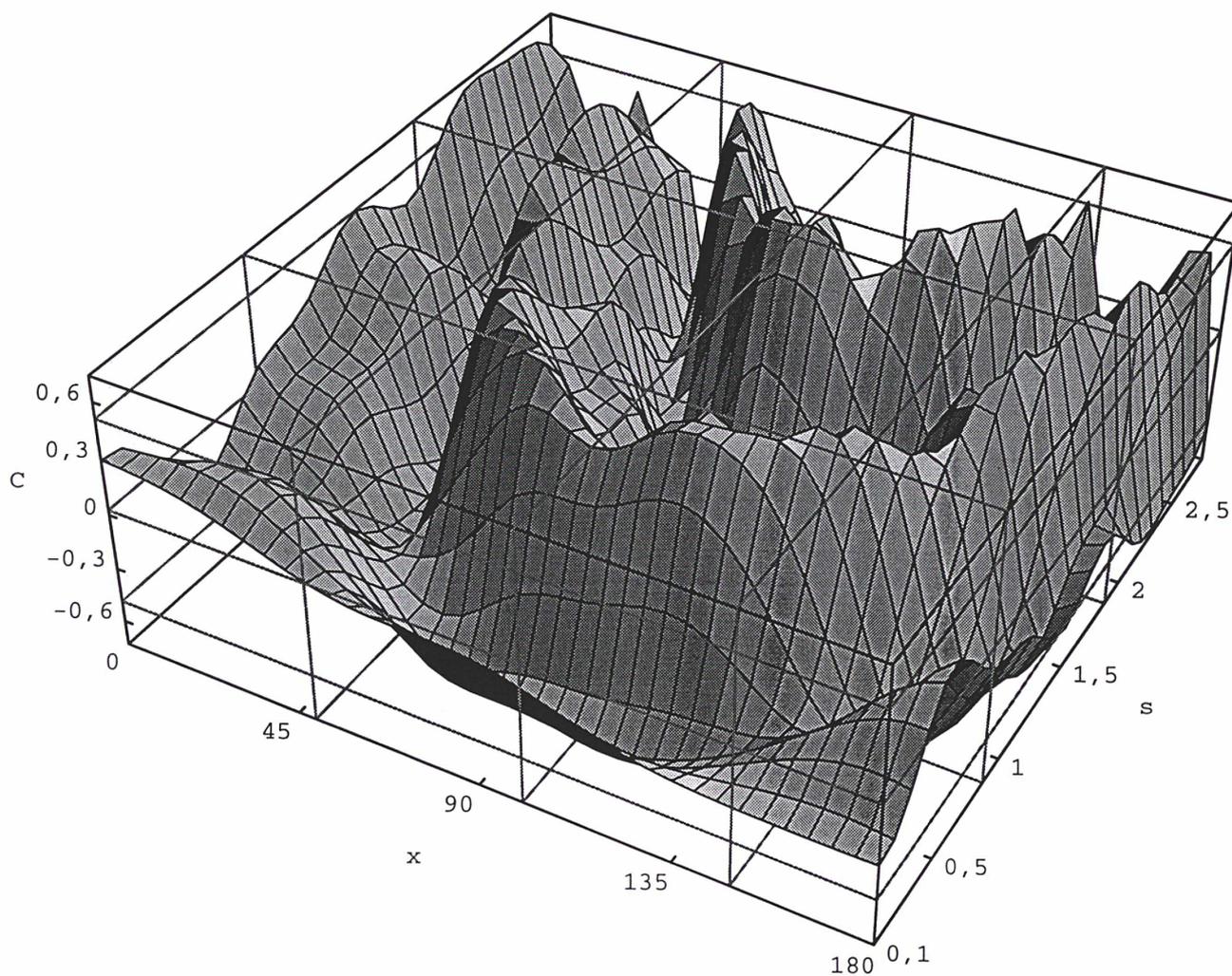
*Figure 14 : Fonction A représentée en fonction de l'angle de balayage noté  $x$  en degrés*



*Figure 15: Ensemble de fonctions A : pour chaque valeur de  $s$  en seconde d'arc on a une fonction A de l'angle de balayage noté  $x$  en degrés*



*Figure 16 : Fonction  $C$  représentée en fonction de l'angle de balayage noté  $x$  en degrés*



*Figure 17 : Ensemble de fonctions  $C$  : pour chaque valeur de  $s$  en seconde d'arc on a une fonction  $C$  de l'angle de balayage noté  $x$  en degrés. Le pas de  $5^\circ$  en angle de balayage est un peu trop grand pour rendre la structure fine des fonctions pour  $s$  grand.*

La figure 16 représente la fonction C pour le même objet. On peut constater que la fonction C a une structure plus complexe que celle de A, ce qui est général.

Sur les figures 15 et 17 ont été représentés des ensembles de fonctions A et C respectivement pour une famille de systèmes ainsi définie :

$m_1$	$s_2(\text{"})$	$a_2(\text{°})$	$m_2$	$s_3(\text{"})$	$a_3(\text{°})$	$m_3$
5	s	100	6,5	(s+0,3)	160	8

Les deux fonctions des figures 14 et 16 se trouvent sur les figure 15 et 17 pour  $s = 0,9$ . Les fonctions A et C du système n°1 des simulations s'y trouvent aussi pour  $s = 0,3$ . Ces graphiques permettent de mettre en évidence le fait que la complexité des fonctions augmente avec les séparations des étoiles.

Ceci s'explique ainsi : la période des phases intervenant dans l'expression des fonctions est égale au pas de grille, c'est-à-dire 1,208 seconde d'arc sur le ciel. Quand l'angle de balayage parcourt  $[0, 2\pi]$ , une des phases parcourra  $[-s, +s]$  où s est la séparation des deux étoiles correspondantes. Le nombre d'extremums des fonctions sera donc d'autant plus grand que les séparations seront grandes devant le pas de grille.

### 3.5. Principe de la méthode de réduction

La méthode d'utilisation des trois fonctions A, B et C pour la réduction des observations d'un objet multiple donné comporte deux étapes principales :

- La synthèse de l'information : Les trois fonctions A, B et C sont reconstituées numériquement en tant que fonctions de l'angle de balayage  $A_0(\chi)$ ,  $B_0(\chi)$  et  $C_0(\chi)$  à partir de l'ensemble des observations Hipparcos de l'objet

$$A_0(\chi) = A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (17a)$$

$$B_0(\chi) = B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (17b)$$

$$C_0(\chi) = C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi) \quad (17c)$$

Cette reconstitution doit obligatoirement permettre d'éliminer le bruit gaussien - en pratique il n'est bien sûr possible que d'augmenter le rapport signal sur bruit - car l'étape suivante ne peut en aucun cas en tenir compte. Les trois fonctions  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  contiennent implicitement toute l'information sur l'objet, et leur reconstitution numérique ne demande théoriquement aucune connaissance a priori de cet objet.

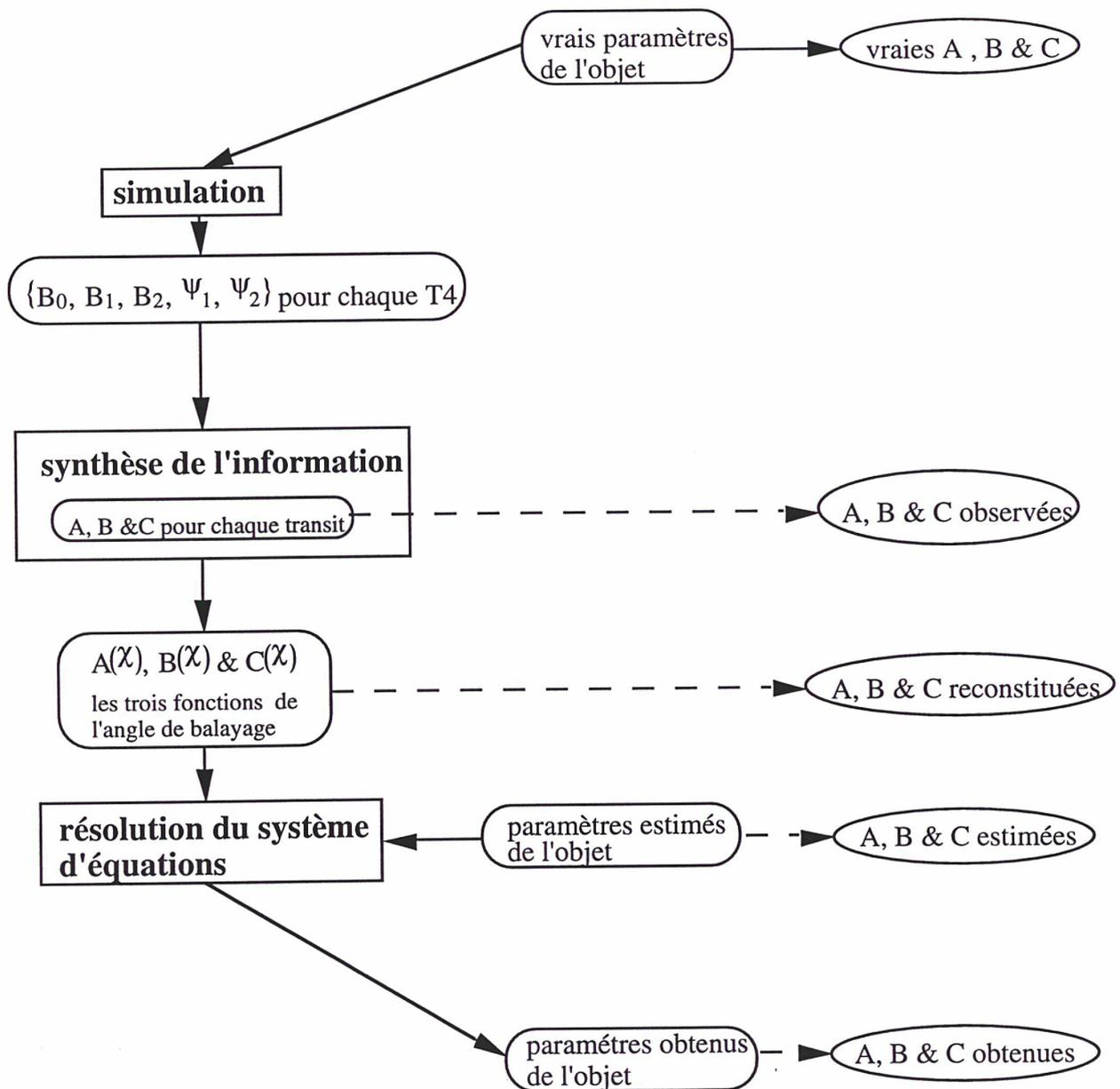
- La formulation et la résolution d'un système d'équations non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(\chi_1) - A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ B_0(\chi_1) - B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ C_0(\chi_1) - C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ A_0(\chi_2) - A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ B_0(\chi_2) - B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ C_0(\chi_2) - C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ \sqrt{2} - (J_1 + J_2 + J_3) = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

Deux angles particuliers  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont choisis. Le système est alors formé en prenant la différence entre les fonctions obtenues ci-dessus et leurs expressions théoriques, en chacun de ces angles. Ceci fournit 6 équations. Il suffit de six paramètres relatifs pour déterminer la structure d'un objet triple, mais pour des raisons liées à la forme des expressions, sept paramètres sont utilisés. Il suffit de rajouter en septième équation celle liant les trois paramètres non indépendants pour obtenir le système (18).

Ces deux étapes de la méthode sont détaillées dans les chapitres 5 et 6.

Le contrôle de la qualité de la résolution se fait en calculant l'écart quadratique moyen entre les valeurs des trois fonctions A, B et C à différents moments, soit à partir des valeurs elles-mêmes des fonctions soit par la formule théorique en fonction des paramètres de l'objet. Le schéma d'ensemble de la méthode, figure 18, indique les différents points de contrôle.



*Figure 18 : schéma d'ensemble de la méthode de résolution. Sont indiqués les différents points de contrôle par calcul des fonctions A, B et C correspondant à chaque étape de la résolution et aux différents jeux de paramètres de l'objet cherché.*

## 4. Les simulations

### 4.1. Les objets

Les objets utilisés pour les simulations sont décrits dans le tableau suivant, dont les colonnes représentent respectivement :

n°	:	numéro de l'objet simulé	HM1	:	magnitude de la primaire
S2	:	séparation de la secondaire et de la primaire (en ")			
NARG2:		angle de position de la secondaire (en degrés)			
HM2	:	magnitude de la secondaire	S3	:	séparation de la tertiaire
NARG3:		angle de position de la tertiaire	HM3	:	magnitude de la tertiaire
$\Delta M+$	:	plus grande différence de magnitude entre les trois composantes			
$\Delta M0$	:	la différence moyenne	$\Delta M-$	:	la plus petite différence de magnitude
S1	:	la troisième séparation			

N°	HMI	S 2	NARG2	HM2	S 3	NARG3	HM3	$\Delta M+$	$\Delta M0$	$\Delta M-$	S 1
1	5,0	0,3	100	6,5	0,5	160	8,0	3,0	1,5	1,5	0,4
2	8,6	8,8	95	12,9	0,3	60	9,7	4,3	3,2	1,1	8,6
3	7,6	6,1	24	9,9	6,2	26	9,9	2,3	2,3	0	0,2
4	7,9	0,5	231	8,3	7,0	247	11,0	3,1	2,7	0,4	6,5
5	9,3	0,4	174	9,8	7,6	296	10,0	0,7	0,5	0,2	7,8
6	4,2	0,8	40	7,0	6,4	243	7,0	2,8	2,8	0	7,1
7	8,6	2,0	322	9,1	7,0	62	12,1	3,5	3,0	0,5	7,6
8	8,8	0,2	158	8,8	6,0	235	9,2	0,4	0,4	0	6,0
9	9,5	0,2	146	9,5	1,3	35	10,2	0,7	0,7	0	1,4
10	4,7	7,3	132	5,2	10,0	125	6,1	1,4	0,9	0,5	2,9
11	7,7	9,0	65	9,3	9,7	66	9,6	1,9	1,6	0,3	0,7
12	8,6	1,6	280	10,4	1,8	279	10,4	1,8	1,8	0	0,2
13	6,2	2,9	178	11,6	2,7	177	11,9	5,7	5,4	0,3	0,2
14	8,5	0,2	15	8,5	6,6	41	11,5	3,0	3,0	0	6,4
15	9,4	1,1	8	11,0	0,8	12	11,1	1,7	1,6	0,1	0,3
16	6,4	0,5	315	8,0	0,5	292	10,0	3,6	2,0	1,6	0,2
17	7,9	4,1	201	10,2	4,9	203	11,0	3,1	2,3	0,8	0,8
18	8,8	0,5	24	10,3	2,8	228	10,8	2,0	1,5	0,5	3,3
19	6,8	3,3	17	9,5	3,1	12	10,2	3,4	2,7	0,7	0,3
20	8,2	0,3	137	8,2	4,1	277	9,5	1,3	1,3	0	4,3
21	9,1	3,4	354	12,0	10,0	45	11,5	2,9	2,4	0,5	8,3

Ces valeurs permettent de mettre en évidence des cas qui devraient être difficiles à résoudre: les systèmes numéro 2, 4, 7, 13, 16, 17 et 19 ont tous  $\Delta M+$  supérieure à 3,1, c'est-à-dire que le signal de la tertiaire représente moins de 5,8% de celui de la primaire. D'autre part, les systèmes numéro 3, 6, 8, 9, 12, 14 et 20 ont  $\Delta M- = 0$ , et donc deux magnitudes égales, ce qui est également un cas difficile. Il est à noter que les systèmes n°2 à 21 existent dans le catalogue d'entrée INCA d'Hipparcos.

## 4.2. Les GCR

Deux procédures ont été utilisées au cours de la mise au point du logiciel pour l'obtention des coordonnées des pôles des GCR: une génération directe de ces coordonnées par calcul, et une simulation de la loi de balayage.

### 4.2.1. Génération directe

L'ensemble des vecteurs polaires de ces GCR est l'ensemble des vecteurs unitaires du plan orthogonal au vecteur direction de l'étoile. Deux vecteurs  $\mathbf{P}_2$  et  $\mathbf{P}_3$  de ce plan, tels que  $\mathbf{P}_2 \perp \mathbf{P}_3$  sont par exemple :

$$\mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} \lambda_{P_0} = \lambda_* \\ \beta_{P_0} = \beta_* + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta_*) \cdot \cos(\lambda_*) \\ -\sin(\beta_*) \cdot \sin(\lambda_*) \\ \cos(\beta_*) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_2 \begin{pmatrix} \lambda_{P_1} = \lambda_* + \frac{\pi}{2} \\ \beta_{P_1} = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_*) \\ \cos(\lambda_*) \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors tout vecteur  $\mathbf{P}$  tel que  $\exists \theta \in \mathbb{R} / \mathbf{P} = \cos(\theta)\mathbf{P}_2 + \sin(\theta)\mathbf{P}_3$  est le vecteur polaire d'un GCR passant par l'objet. Cette méthode permet d'obtenir des échantillonnages réguliers en angle de balayage, utiles pour la mise au point des programmes.

### 4.2.2. Simulation de la loi de balayage

Le sous-programme PALEM, écrit par l'équipe pour les tests préliminaires de la chaîne de réduction d'Hipparcos, a été utilisé. Cette procédure fournit, en fonction de la date en jours juliens, deux angles  $\psi$  et  $\theta$  liés aux coordonnées écliptiques  $\lambda_r$  et  $\beta_r$  du pôle du cercle de rotation du satellite par

$$\theta = \beta_r - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \lambda_r - \frac{\pi}{2}$$

La loi de balayage a ainsi été simulée sur trois ans avec un pas d'échantillonnage de 8 heures. Seules les cercles passant à moins de 1 degré de la position de l'objet ont été retenus :

Si  $\mathbf{OE}$  est le vecteur direction de l'étoile et  $\mathbf{OP}$  le vecteur polaire du GCR, celui-ci passera à moins de 1 degré de celle-ci si

$$|\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OE}| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right) \right| \approx |u| < \frac{\pi}{180} = \varepsilon$$

On a d'autre part :

$$\mathbf{OP} = R_3(\psi) \cdot R_1(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\theta \\ -\cos\psi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{OE} = \begin{pmatrix} \cos\beta_* \cos\lambda_* \\ \cos\beta_* \sin\lambda_* \\ \sin\beta_* \end{pmatrix}$$

d'où la condition :  $\varepsilon > |\sin\psi \sin\theta \cos\beta_* \cos\lambda_* - \cos\psi \sin\theta \cos\beta_* \sin\lambda_* + \cos\theta \sin\beta_*|$

Neuf latitudes écliptiques de l'objet ont été utilisées, la longitude étant toujours prise à 0 heure. Les coordonnées des pôles de GCR retenus ont été placées dans des fichiers, un par position d'objet. Le tableau suivant donne le numéro du fichier, la latitude de la position correspondant, en degrés, et le nombre de GCR retenus.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B(°)	0	+11	-22	+33	-44	+55	-66	+77	-88
NGCR	36	33	45	73	102	73	61	50	53

Note : le signe de  $\beta$  est sans importance pour la simulation de la loi de balayage car elle est symétrique par rapport à l'écliptique, mais il est utile de vérifier le fonctionnement de la méthode de résolution des objets multiples.

### 4.3. L'attitude

La séquence "Eulérienne"  $\psi_e, \theta_e, \varphi_e$ , (voir le chapitre 2.4) étant utilisée dans la résolution, l'attitude sera ici générée dans la séquence "astronomique"  $\psi_a, \theta_a, \varphi_a$ , par souci d'indépendance de la simulation et de la résolution. Ainsi, pour chaque T4,  $\theta_a$  est d'abord tiré au hasard entre + ou - 1,5/180; l'indice du champ d'observation est aussi tiré au hasard:  $c \in \{+1, -1\}$ . Puis :

$$\psi_a = (v + \text{atan}(\tan(\theta_a) \cdot \sin(r))) \bmod 2\pi \quad \text{et} \quad \varphi_a = \left( a \cos(\cos(\psi_a - v) \cdot \cos(r)) - c \frac{\gamma}{2} \right) \bmod 2\pi \quad (19)$$

où  $(v, r)$  sont les coordonnées sphériques de la primaire de l'objet qui est l'étoile de référence, rapportées au GCR, obtenues par :

$$\begin{pmatrix} \cos(r) \cdot \cos(v) \\ \cos(r) \cdot \sin(v) \\ \sin(r) \end{pmatrix} = R_1\left(\frac{\pi}{2} - \beta_r\right) \cdot R_3\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_r\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \cdot \cos(\lambda_1) \\ \cos(\beta_1) \cdot \sin(\lambda_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} \quad (20)$$

à partir des coordonnées écliptiques  $\lambda_1, \beta_1$  de la primaire et  $\lambda_r, \beta_r$  du vecteur polaire du GCR.

Les angles de l'attitude mixte  $\psi, \theta, \phi$  sont ensuite calculés car ce sont ceux que l'on trouvera dans les données réelles.

$$\psi = (\psi_a + \varphi_a) \quad \theta = \text{asin}(-\sin(\theta_a) \cdot \sin(\varphi_a)) \quad \phi = \text{atan2}(\sin(\theta_a) \cdot \cos(\varphi_a), \cos(\theta_a)) \quad (21)$$

#### 4.4. Le signal

Il reste à calculer, pour chaque T4, les cinq paramètres  $b_i$  du signal de l'objet observé par Hipparcos. Les valeurs déterministes de ces  $b_i$  sont d'abord calculées par :

$$b_1 = I_b + \sum_{k=1}^{n^*} I_k \quad (22a)$$

$$b_2 = M_1 \sum_{k=1}^{n^*} I_k \cos(\phi_k) \quad (22b)$$

$$b_3 = -M_1 \sum_{k=1}^{n^*} I_k \sin(\phi_k) \quad (22c)$$

$$b_4 = M_2 \sum_{k=1}^{n^*} I_k \cos(2\phi_k + v_2) \quad (22d)$$

$$b_5 = -M_2 \sum_{k=1}^{n^*} I_k \sin(2\phi_k + v_2) \quad (22e)$$

$n^*$  étant le nombre d'étoiles de l'objet,  $I_k$  l'intensité du signal de chaque étoile,  $I_b$  le bruit de fond,  $M_1$  et  $M_2$  les coefficients de modulation. Ces grandeurs sont prises ici avec les valeurs suivantes :

$$I_b = 40 \text{ Hz}, M_1 = 0,76 \text{ et } M_2 = 0,28$$

$v_2$  étant dans le cas des données réelles parfaitement calibré sur les étoiles simples, sera pris ici égal à zéro.

D'autre part,  $\phi_k$  est obtenue par :

$$\begin{pmatrix} f_k \\ w_k \\ z_k \end{pmatrix} = R_3\left(-\frac{\gamma}{2} - \varphi_a\right) \cdot R_1(-\theta_a) \cdot R_3(-\psi_a) \cdot R_1\left(\frac{\pi}{2} - \beta_r\right) \cdot R_3\left(\frac{\pi}{2} + \lambda_r\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_k) \cdot \cos(\lambda_k) \\ \cos(\beta_k) \cdot \sin(\lambda_k) \\ \sin(\beta_k) \end{pmatrix} \quad (23)$$

(voir le chapitre 2.4 pour l'ensemble de ces rotations) et :

$$\phi_k = -\frac{2\pi}{\sin S} w_k \text{ mod } 2\pi \quad (24)$$

où  $(\lambda_k, \beta_k)$  sont les coordonnées écliptiques de l'étoile  $k$ ,  $\gamma$  l'angle de base du télescope et  $S$  le pas de grille.

Les  $b_i$  déterministes sont ensuite affectés d'un bruit gaussien dont la variance est donnée par :

$$\sigma_{b_1}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n^*} I_k}{T} \quad \text{et} \quad \sigma_{b_2}^2 = \sigma_{b_3}^2 = \sigma_{b_4}^2 = \sigma_{b_5}^2 = \frac{2 \sum_{k=1}^{n^*} I_k}{T} \quad (25)$$

où  $T$  (en secondes) est calculé par la formule approchée :

$$T = -0,5 + \frac{\text{magnitude hipparcos}}{4}$$

Il était nécessaire de calculer les paramètres du signal avec le modèle  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  pour pouvoir prendre en compte le bruit gaussien. Toutefois c'est le modèle  $B_0, B_1, B_2, \psi_1, \psi_2$  qui sera rencontré dans les données réelles. Il y a donc conversion par :

$$\begin{aligned} B_0 &= b_1 & B_1 &= \sqrt{(b_2^2 + b_3^2)} & B_2 &= \sqrt{(b_4^2 + b_5^2)} \\ \sigma_{B_0} &= \sigma_{b_1} & \sigma_{B_1} &= \frac{\sqrt{(b_2^2 \sigma_{b_2}^2 + b_3^2 \sigma_{b_3}^2)}}{|B_1|} & \sigma_{B_2} &= \frac{\sqrt{(b_4^2 \sigma_{b_4}^2 + b_5^2 \sigma_{b_5}^2)}}{|B_2|} \\ \psi_1 &= \text{atan2}(-b_3, b_2) & \psi_2 &= \frac{1}{2} \text{atan2}(-b_5, b_4) \\ \sigma_{\psi_1} &= \left( \frac{\sqrt{b_3^2 \sigma_{b_2}^2 + b_2^2 \sigma_{b_3}^2}}{B_1^2} \right) & \sigma_{\psi_2} &= \left( \frac{\sqrt{b_5^2 \sigma_{b_4}^2 + b_4^2 \sigma_{b_5}^2}}{2B_2^2} \right) \end{aligned}$$

## 5. La synthèse de l'information

Il s'agit, à cette étape, de reconstituer numériquement les trois fonctions  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  à partir de l'ensemble des données fournies au programme.

### 5.1. Les valeurs des trois fonctions

#### 5.1.1. Les coordonnées locales des étoiles

Il faut convertir les coordonnées des étoiles de l'objet dans le système basé sur les coordonnées écliptiques. Cette conversion se ramène à une rotation d'ensemble du repère local sur le plan tangent à la sphère céleste d'un angle  $\theta$  qui dépend de l'obliquité de l'écliptique  $\Theta$  et de la position de l'objet. Soient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{M}$  les vecteurs polaires des méridiens respectivement écliptique et équatorial passant par l'objet. Il vient :

$$\mathbf{m}_{\text{écliptiques}} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1) \\ -\cos(\lambda_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_{\text{équatoriales}} \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) \\ -\cos(\alpha_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{M}_{\text{écliptiques}} = \mathbf{R}_1(-\Theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{équatoriales}}$$

et enfin :

$$\theta = \arccos(\mathbf{m}_{\text{écliptiques}} \cdot \mathbf{M}_{\text{écliptiques}}) = \arccos(\sin(\lambda_1)\sin(\alpha_1) + \cos(\lambda_1)\cos(\alpha_1)\cos(\Theta)) \quad (26a)$$

$\theta$  n'est déterminé qu'entre 0 et  $\pi$  par la formule ci-dessus. Il faut donc trouver son signe par un autre moyen. En remarquant que  $\theta$  et  $\cos(\lambda_1)$  changent de signe quand l'objet passe dans le plan perpendiculaire à la ligne des noeuds, il vient :

$$(\text{signe de } \theta) = -(\text{signe de } \cos(\lambda_1)) \quad (26b)$$

La conversion des angles de position des étoiles devient alors simplement :

$$[a_{\text{écliptique}} = a_{\text{équatorial}} - \theta] \quad (26c)$$

#### 5.1.2. L'intensité du signal des étoiles

L'intensité du signal de chacune des étoiles de l'objet se déduit de sa magnitude Hipparcos :

$$I_k = 7.10^{(6 - 0,4 \cdot \text{magnitude Hipparcos de l'étoile } k)} \quad (27)$$

### 5.1.3. L'intensité totale du signal de l'objet

Le premier paramètre  $B_0$  de chaque observation Hipparcos d'un objet représente, au bruit de fond près, l'intensité totale  $J_0$  du signal de cet objet. Il est indépendant de la direction de balayage et de la structure de l'objet.  $J_0$  est donc tiré de l'ensemble des observations de l'objet par une simple moyenne pondérée des premiers paramètres diminués du bruit de fond dans le cas des simulations.

Dans le cas des données réelles, cette opération sera effectuée d'une manière plus sophistiquée et plus précise par la chaîne de réduction photométrique, pour laquelle un objet multiple ne présente pas de difficulté particulière. Dans toute la suite,  $J_0$  sera considéré comme connu.

### 5.1.4. Troisième angle d'attitude $\psi_e$

Les trois angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  de l'attitude mixte que l'on trouve dans les données réelles ne permettent pas un calcul direct de la matrice de rotation de l'attitude. Si l'on appelle  $(B_{ij})$  cette matrice de rotation (voir 2.4), on a

$$(B_{ij}) = R_1(\varphi_e).R_2(\theta_e).R_3(\psi_e) = R_3(\varphi_a).R_1(\theta_a).R_3(\psi_a)$$

Compte tenu du fait que

$$\boxed{\theta_e = \theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_e = \varphi} \quad (28a)$$

il vient :

$$B_{11}+B_{22} = \cos(\psi).(1+\cos(\theta_a)) = (\cos(\theta)+\cos(\varphi)).\cos(\psi_e)+\sin(\varphi).\sin(\theta).\sin(\psi_e)$$

et

$$B_{12}-B_{21} = \sin(\psi).(1+\cos(\theta_a)) = (\cos(\theta)+\cos(\varphi)).\sin(\psi_e)-\sin(\varphi).\sin(\theta).\cos(\psi_e)$$

d'où

$$\left[ (1+\cos(\theta_a)).(\cos(\psi)+i.\sin(\psi)) \right] = e^{i\psi_e} \left[ (\cos(\theta)+\cos(\varphi))+i.(-\sin(\varphi).\sin(\theta)) \right]$$

et donc

$$\boxed{\psi_e = \psi - \text{atan2}(-\sin(\theta).\sin(\varphi), \cos(\theta)+\cos(\varphi))} \quad (28b)$$

### 5.1.5. L'angle de balayage

Il faut déterminer l'abscisse de chaque observation, c'est-à-dire l'angle de balayage du CIR de chaque T4. Cet angle est l'angle entre le cercle méridien passant par l'étoile de référence (la primaire) et le CIR. Soient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{z}$  les vecteurs polaires respectifs de ces deux grands cercles.

Les coordonnées écliptiques de  $\mathbf{z}$  s'obtiennent par :

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}_3\left(-\lambda_r - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{R}_1\left(\beta_r - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{R}_3(\psi_e) \cdot \mathbf{R}_2(\theta) \cdot \mathbf{R}_1(\varphi) \cdot \mathbf{R}_3\left(c \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

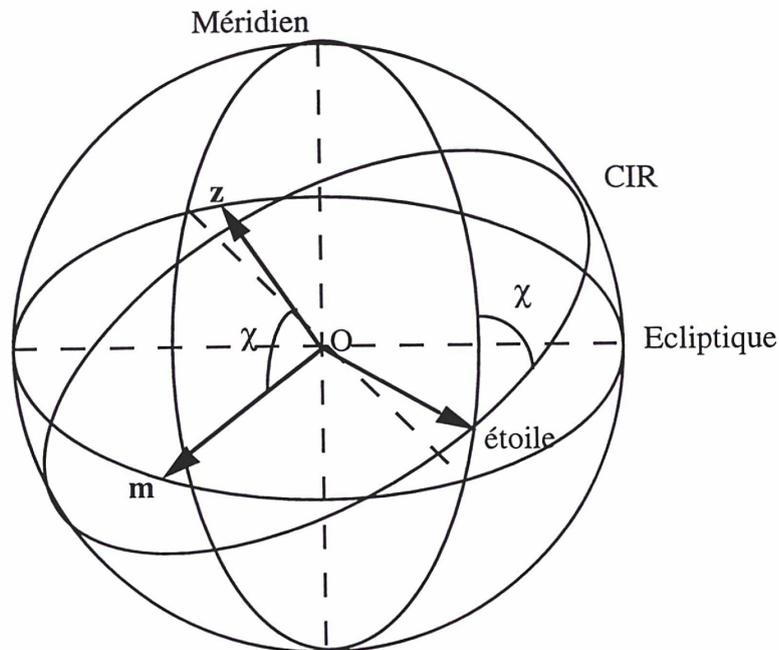
où  $\gamma$  est l'angle de base du télescope,  $c$  l'indice du champ utilisé,  $\theta$  et  $\varphi$  deux des angles de l'attitude mixte,  $\psi_e$  se déduisant de cette attitude par (28b);  $\lambda_r$  et  $\beta_r$  sont les coordonnées écliptiques du vecteur polaire du GCR correspondant.  $\mathbf{m}$  s'obtient par :

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \cos\left(\lambda_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\lambda_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1) \\ -\cos(\lambda_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1$  est la latitude écliptique de l'étoile de référence.

Il vient alors :

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{z} = \boxed{\cos(\chi) = z_1 \sin(\lambda_1) - z_2 \cos(\lambda_1)} \quad (30)$$



*Figure 19 : L'angle de balayage :  $\chi$  est l'angle entre le grand cercle méridien passant par l'étoile et le CIR. C'est aussi l'angle entre leurs vecteurs polaires respectifs  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{z}$ .*

La valeur absolue du sinus se déduit du cosinus; pour obtenir son signe, le vecteur  $\mathbf{OE}_1$ , vecteur unitaire de la direction de l'étoile de référence est utilisé. Sachant que :

$$\left[ \mathbf{m} \wedge \mathbf{OE}_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda_1) \cdot \sin(\beta_1) \\ -\sin(\lambda_1) \cdot \sin(\beta_1) \\ \cos(\beta_1) \end{pmatrix} \in \text{plan}(\mathbf{m}, \mathbf{z}) \right] \text{ et } [(\mathbf{m} \wedge \mathbf{OE}_1) \perp \mathbf{m}] \quad \text{il vient :}$$

$$\text{signe de } \mathbf{z} \cdot (\mathbf{m} \wedge \mathbf{OE}_1) = \boxed{\text{signe de } \sin(\chi) = \text{signe de } [z_3 \cos(\beta_1) - \sin(\beta_1) \cdot (z_1 \cos(\lambda_1) + z_2 \sin(\lambda_1))]} \quad (31)$$

### 5.1.6. Les valeurs des fonctions

Pour chaque T4 on calcule la valeur de chacune des trois fonctions par les formules (7a) à (7c) et celle des écarts types, soit par les formules suivantes :

$$\sigma_A = \frac{|B_1| \sigma_{B_1}}{M_1^2} \quad (32a)$$

$$\sigma_B = \frac{|B_2| \sigma_{B_2}}{M_2^2} \quad (32b)$$

$$\sigma_C = \frac{\sqrt{2}}{M_1^2 M_2 J_0} |B_1| \sqrt{\sin^2(2(\psi_1 - \psi_2)) (4B_2^2 \sigma_{B_1}^2 + B_1^2 \sigma_{B_2}^2) + 4B_1^2 B_2^2 (\cos(2(\psi_1 - \psi_2)))^2 (\sigma_{\psi_1}^2 + \sigma_{\psi_2}^2)} \quad (32c)$$

soit en les prenant tous égaux à 1. Cette dernière solution est utilisée pour les simulations car les précisions des cinq paramètres du signal simulé sont indépendantes de la date et du cercle choisi.

Toutefois, cette simplification risque de ne plus être correcte pour les données réelles et il faudra alors utiliser les formules ci-dessus.

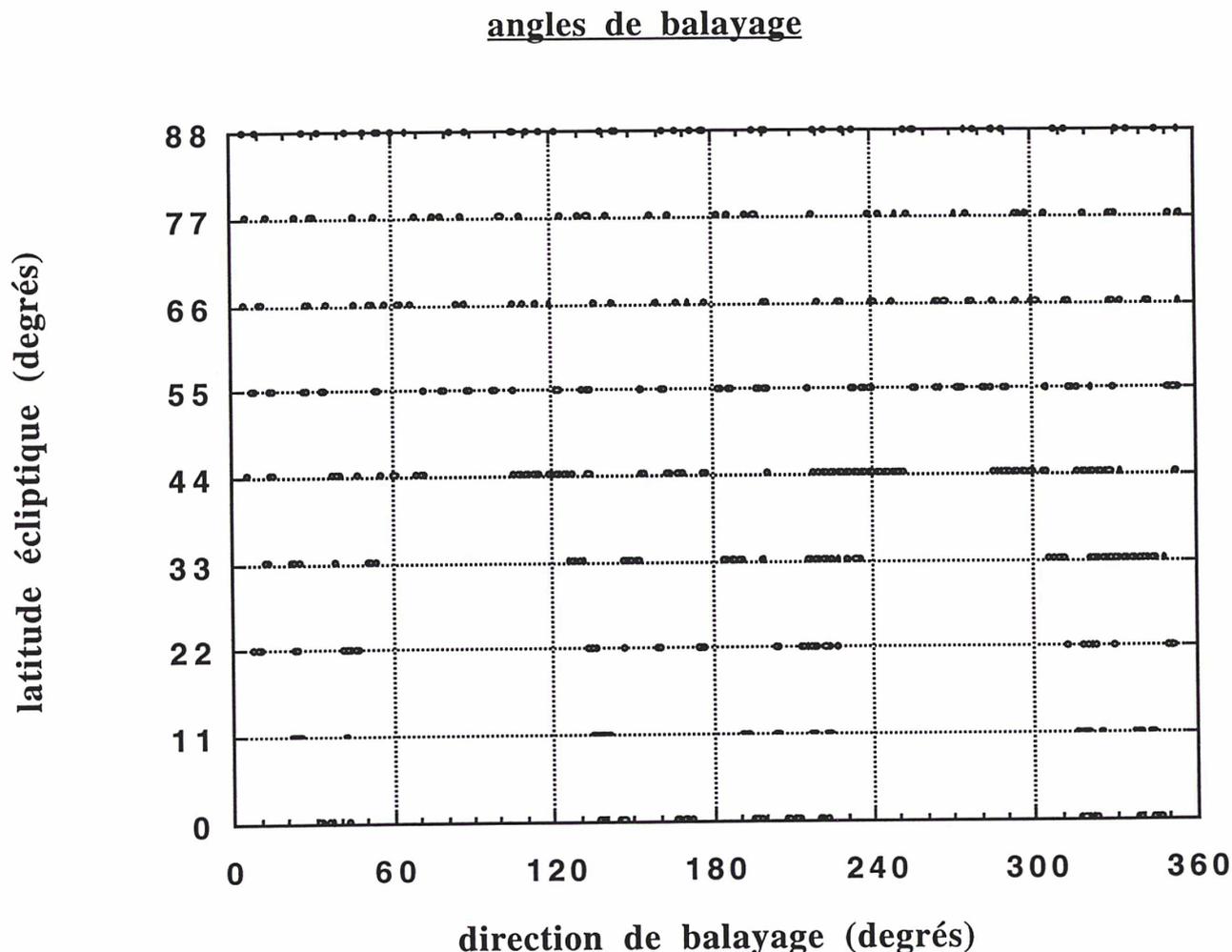
### 5.1.7. L'échantillonnage

Un autre problème apparaît alors: l'échantillonnage des fonctions qui provient de la loi de balayage du satellite est irrégulier.

Il y a deux grandes zones d'exclusion dues au fait que la direction de rotation propre du satellite fait un angle constant avec la direction du soleil. Ces zones vont en diminuant avec la latitude écliptique. Mais même pour des latitudes élevées, l'échantillonnage, bien que couvrant tout l'intervalle, reste irrégulier.

Cette irrégularité de l'échantillonnage rend impossible l'utilisation de méthodes classiques de transformées de Fourier pour la détermination des coefficients du développement en série de Fourier

des fonctions. C'est là cependant un problème linéaire qui se prête donc bien à une résolution par moindres carrés.



*Figure 20 : L'échantillonnage dû à la loi de balayage*

### 5.1.8. La moyenne sur un transit

Il faut alors effectuer un premier choix entre deux manières différentes de procéder :

- soit écrire une équation d'observation par T4, ce qui permet de prendre en compte l'attitude du satellite dans la valeur de l'angle de balayage,
- soit faire la moyenne sur un transit (qui représente approximativement 9 T4) des valeurs des fonctions, et écrire une équation d'observation par transit pour un angle de balayage moyen.

Une série de tests permet de départager les deux méthodes. Pour chacun des 21 systèmes choisis pour les tests, les trois fonctions ont été reconstituées par chacune des deux méthodes à partir des signaux simulés, avec le bruit gaussien, et pour une latitude éclipique de  $55^\circ$ .

Pour chacune des fonctions, les écarts quadratiques moyens (EQM) entre les valeurs des fonctions reconstituées et les observations d'une part (ORA, ORB & ORC), entre les fonctions reconstituées et les valeurs vraies (théoriques) d'autre part (VRA, VRB & VRC) ont été calculés.

Puis ensuite les EQM obtenus par la seconde méthode (moyenne sur un transit) ont été divisés par ceux provenant de la première : voir figure 21.

RAPPORT	VRA	VRB	VRC	ORA	ORB	ORC
minimum	0,81	0,67	0,69	0,29	0,25	0,25
maximum	1,40	1,34	1,04	0,95	0,91	0,90
moyenne	1,01	0,97	0,90	0,51	0,51	0,50
médiane	0,94	0,95	0,92	0,42	0,47	0,38

Première constatation : les rapports des EQM observés moins reconstitués sont tous inférieurs à 1. La moyenne sur un transit améliore donc l'ajustement aux observations des fonctions reconstituées, et ce d'un facteur 2 en moyenne comme on peut le voir dans le tableau des statistiques.

De plus la moyenne sur un transit améliore légèrement l'ajustement par rapport aux valeurs vraies, puisque médianes et moyennes sont toutes comprises entre 0,90 et 1,01 bien qu'il y ait des cas de franche détérioration: plus de 20% par exemple sur les fonctions A des systèmes 1, 9, 16 et 18 et sur les fonctions B des systèmes 9 et 13. Alors que pour ces mêmes systèmes, les rapports des EQM observés moins reconstitués sont excellents!

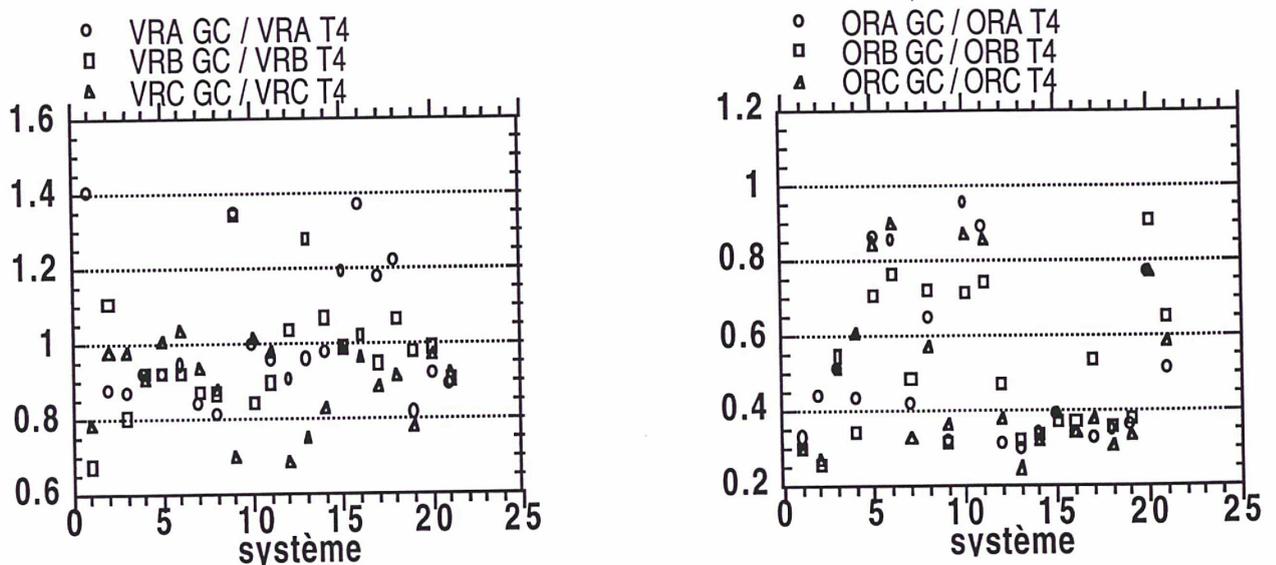


Figure 21 : rapports des EQM : Les rapports des EQM de la reconstitution des trois fonctions selon les deux méthodes. A gauche, par rapport aux valeurs théoriques, à droite par rapport aux valeurs observées.

Finalement, la moyenne sur un transit améliore nettement l'ajustement des fonctions reconstituées aux observations, probablement en éliminant une partie du bruit gaussien. C'est cette méthode qui est donc retenue.

## 5.2. La reconstitution des trois fonctions

Les trois fonctions  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  sont  $2\pi$ -périodiques et donc développables en série de Fourier :

$$F(\chi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \sin(p\chi) + b_p \cos(p\chi)) \quad (33)$$

D'autre part,  $A_0$  et  $B_0$  sont  $\pi$ -périodiques et  $C_0$  vérifie  $C_0(\chi+\pi) = -C_0(\chi)$ . Le développement en série de Fourier de ces fonctions est donc de la forme :

$$A(\chi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_{2p} \sin(2p\chi) + b_{2p} \cos(2p\chi)) \quad (34a)$$

pour  $A_0$  et  $B_0$  et de la forme :

$$C(\chi) = \sum_{p=1}^{+\infty} (a_{2p-1} \sin((2p-1)\chi) + b_{2p-1} \cos((2p-1)\chi)) \quad (34b)$$

pour  $C_0$ .

Ce qui signifie que la moitié des coefficients de Fourier des fonctions est connue d'avance comme étant nulle. C'est pour cela et pour la facilité de leur manipulation que les développements en série de Fourier ont été retenus pour la reconstitution des trois fonctions.

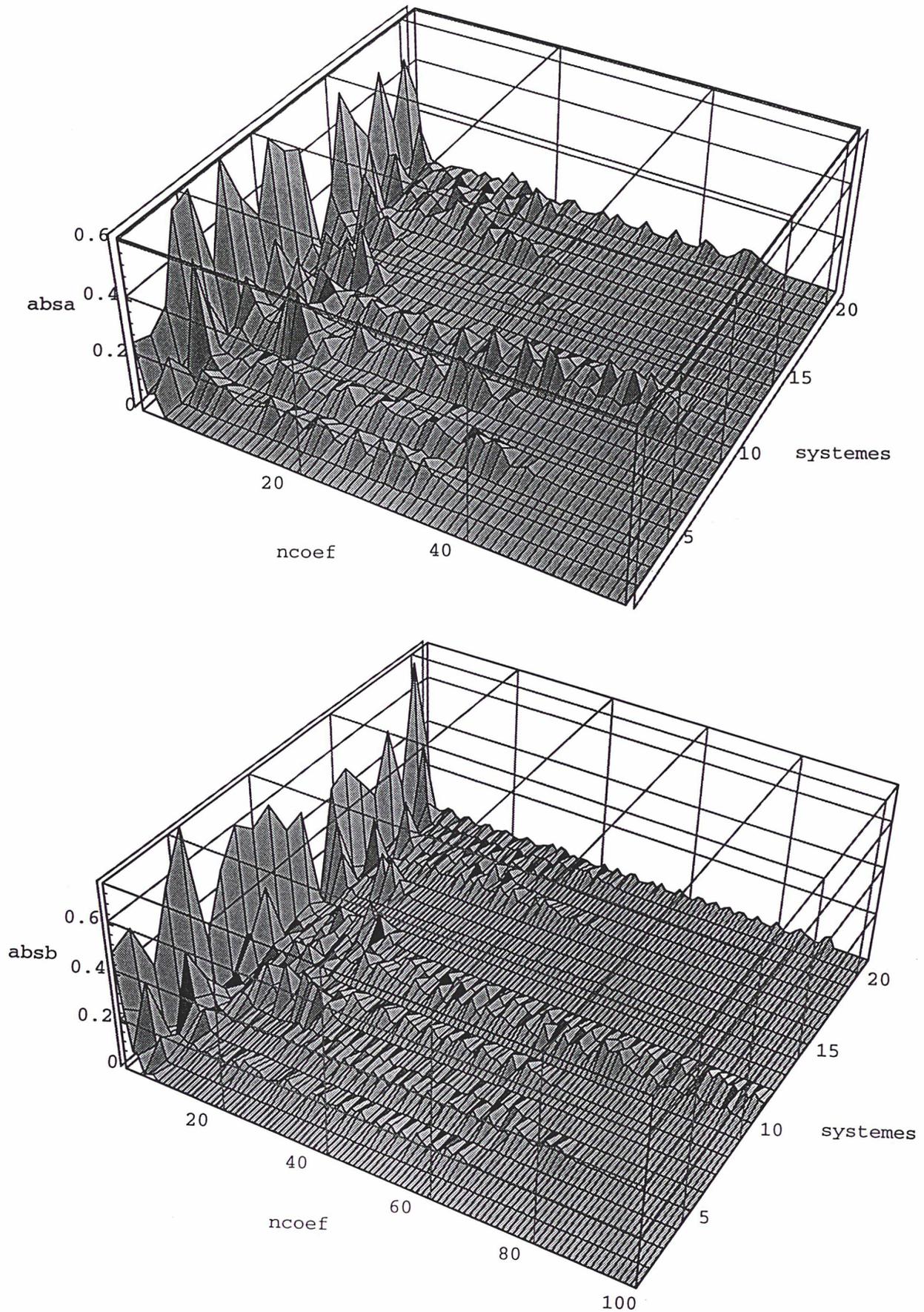
### 5.2.1. Les coefficients de Fourier

Le nombre d'observations étant limité, celui des coefficients de Fourier qui vont pouvoir être déterminés l'est aussi.

Sur les figures 22, 23 et 24 ont été portées les valeurs absolues des coefficients de Fourier des fonctions A, B et C théoriques correspondant à chaque système. Les coefficients dont on sait qu'ils sont nuls de par la nature de la fonction n'ont pas été représentés. Pour chaque système, les coefficients inférieurs au millième du plus gros ont été mis à zéro.

Le nombre de coefficients est toujours plus élevé pour les fonctions B et C mais dépend principalement du système considéré, comme l'illustre la figure 25. Sur ce graphique, le nombre de coefficients de B décrit pratiquement une droite de pente 1 tandis que celui de A décrit une droite de

*Figure 22 (ci après) : Les coefficients de A : les valeurs absolues des coefficients de Fourier de A sont ici portés sur l'axe "absa" en fonction du numéro du coefficient "ncoef" et de celui du système triple considéré.*



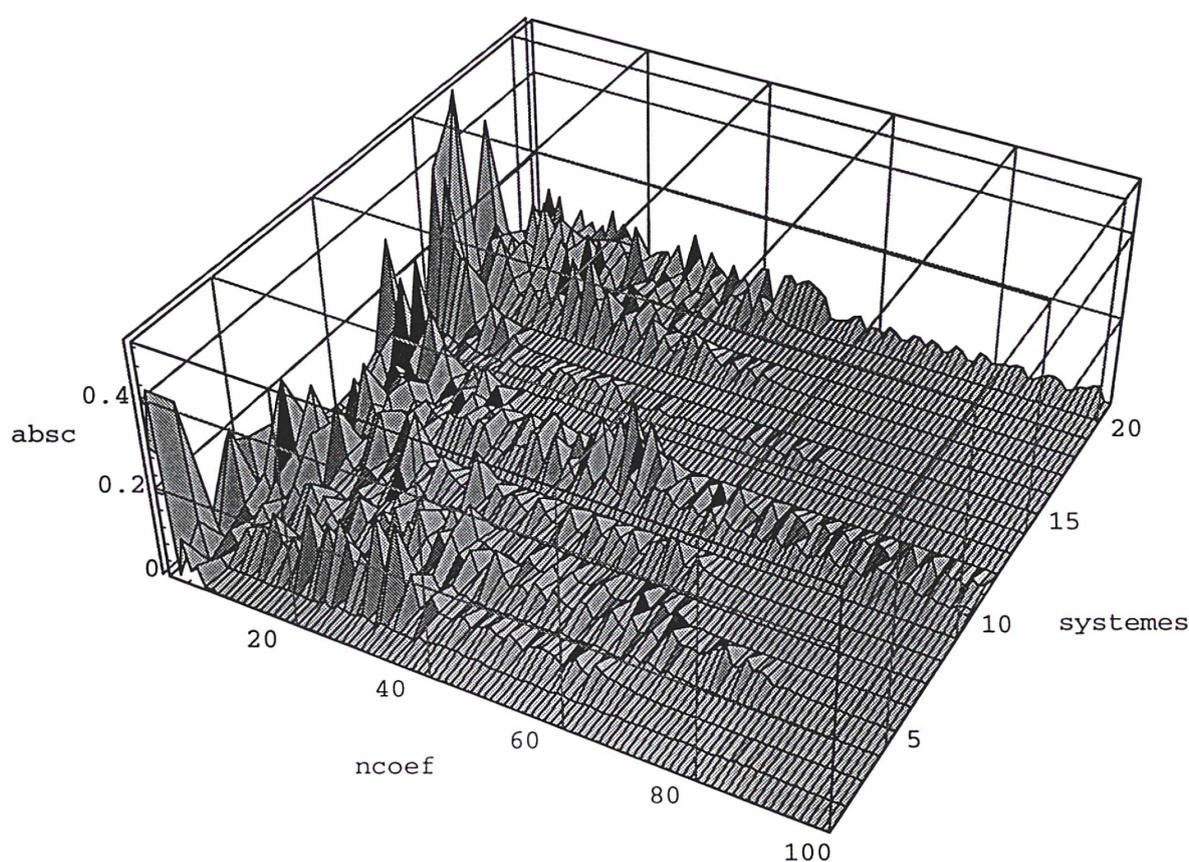
*Figure 23 : Les coefficients de B : Les valeurs absolues des coefficients de Fourier de B sont ici portées sur l'axe "absb" en fonction du numéro du coefficient "ncoef" et de celui du système triple considéré.*

pente environ 0,6.

Plus précisément, le nombre de coefficients significatifs dépend directement de la plus grande des trois séparations du système comme on peut le voir sur la figure 26.

Les figures 22 à 24 révèlent aussi la distribution complexe des termes significatifs : pour chacune des fonctions, la distribution est différente d'un système à l'autre, des termes nuls venant s'intercaler d'une manière a priori imprévisible.

Il faut donc définir un protocole qui permette d'obtenir un maximum de coefficients significatifs.



*Figure 24 : Les coefficients de C : Les valeurs absolues des coefficients de Fourier de C sont ici portées sur l'axe "absc" en fonction du numéro du coefficient "ncoef" et de celui du système triple considéré.*

*Figure 25 (ci-après) : Les nombres de coefficients : Ceux de A ("n3A") et ceux de C ("n3c") ont été portés ici en fonction de ceux de B ("n3b") pour les 21 systèmes simulés.*

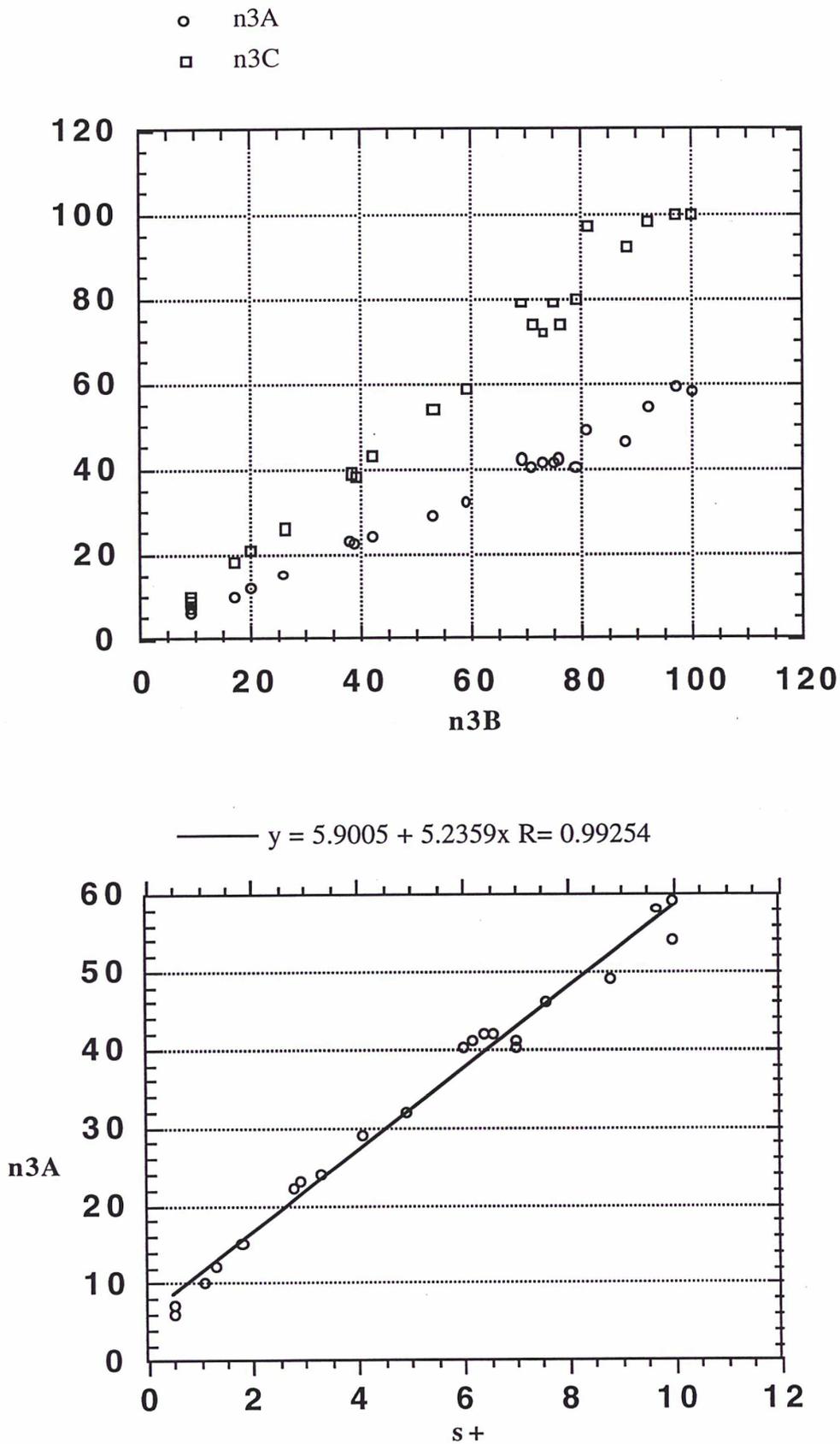


Figure 26 : *L'influence de la séparation* : ce graphique présente le nombre de coefficients de Fourier de la fonction A en fonction de la plus grande séparation du système. Les points s'alignent selon une droite dont l'équation est donnée au-dessus, avec une bonne corrélation "R".

### 5.2.2. Le codage des fréquences

Afin de manipuler plus aisément les suites et les sous-suites de fréquences de Fourier, le codage suivant a été utilisé: à un terme en  $\sin(px)$  est associé  $-p$ , à un terme en  $\cos(px)$  est associé  $+p$ . Un simple vecteur de nombres entiers détermine donc les termes concernés. Les codes correspondant aux fonctions A et B sont générés par la suite :

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n \cdot E\left(\frac{n}{2}\right) \quad (35a)$$

et ceux de C par la suite :

$$c_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(2E\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1\right) \quad (35b)$$

### 5.2.3. Les trois fonctions reconstituées

Pour chaque système et pour chaque fonction, la reconstitution se déroule en deux temps : la sélection des fréquences de Fourier à explorer, puis le calcul des valeurs des coefficients correspondants.

#### 5.2.3.1. La sélection des fréquences

Les valeurs théoriques de la fonction correspondant aux paramètres estimés (provenant du catalogue d'entrée ou d'une précédente résolution) de l'objet sont calculées en un grand nombre de points, de l'ordre de 500. Les moindres carrés sont alors appliqués sur ces valeurs théoriques pour obtenir les 100 premiers coefficients de la série de Fourier correspondante.

Les fréquences sont ensuite sélectionnées ainsi : en partant de la plus basse, une fréquence est retenue si la valeur du coefficient correspondant dépasse, en valeur absolue, la valeur d'un seuil généralement fixé à  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$  fois la valeur du terme de plus grande valeur absolue.

La sélection s'arrête soit quand toutes les fréquences ont été testées, soit quand le nombre maximal d'inconnues a été atteint. Ce maximum est pris inférieur au nombre d'observations pour assurer une redondance dans les moindres carrés, typiquement nombre d'observations moins 20, sauf pour les petits nombres, pour lesquels cette redondance est diminuée.

#### 5.2.3.2. La détermination des coefficients

Les coefficients de Fourier correspondant aux fréquences sélectionnées sont ensuite déterminés par moindres carrés à partir des observations. Le problème étant linéaire, il n'est pas nécessaire d'itérer le processus. Pour juger de la qualité de cet ajustement par moindres carrés, il faut étudier les résidus obtenus.

### 5.2.3.3. Les résidus

Les figures 27 et 28 représentent respectivement les moyennes et les écarts-types des résidus résultant de la reconstitution des trois fonctions par moindres carrés sur les 21 systèmes simulés. Le tableau suivant présente des statistiques sur ces mêmes grandeurs :

	moyenne A	écart-type A	moyenne B	écart-type B	moyenne C	écart-type C
Minimum	1,25e-15	0,00324	8,79e-16	0,00881	-0,0396	0,0131
Maximum	7,27e-14	0,123	7,28e-14	0,23	0,0158	0,696
Moyenne	3,38e-14	0,0214	4,01e-14	0,0586	-0,00228	0,0838
Médiane	3,35e-14	0,00783	3,94e-14	0,0286	-0,00136	0,0342
écart-type	1,71e-14	0,0335	1,85e-14	0,0643	0,0120	0,147

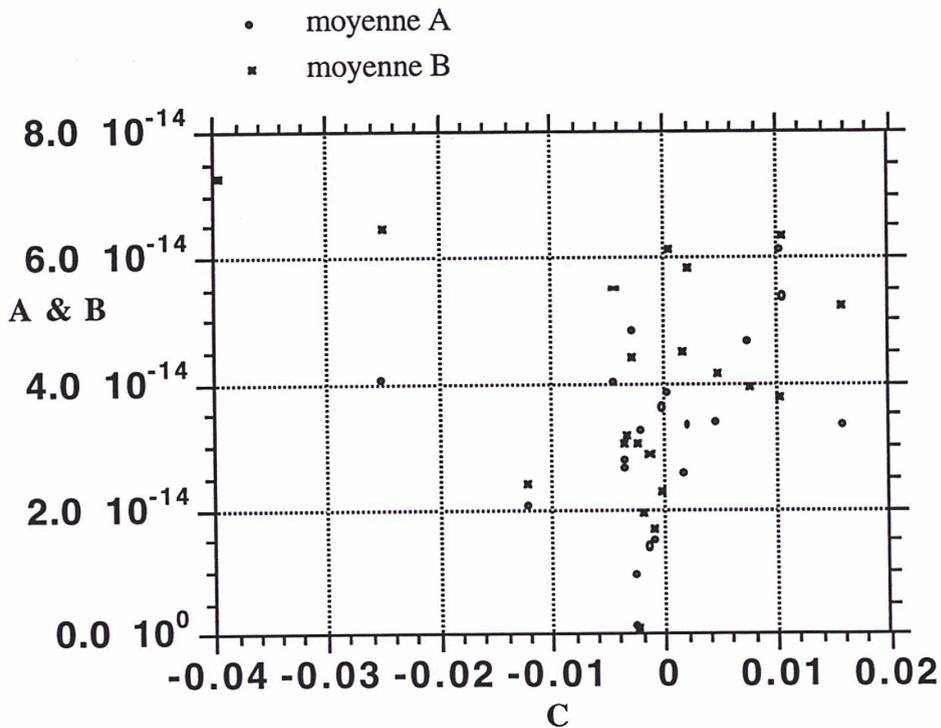
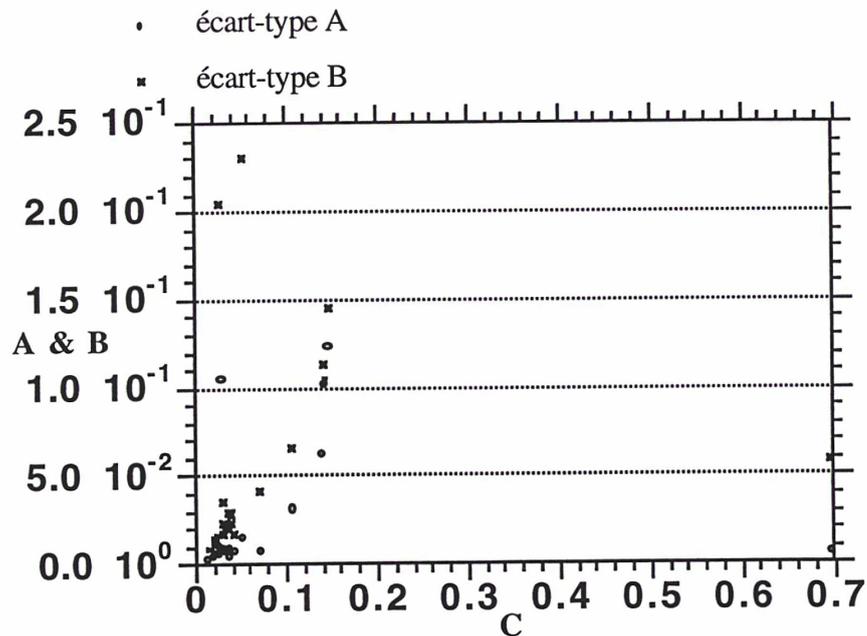


Figure 27 : *Moyennes des résidus* : pour les 21 systèmes, les moyennes des résidus de la reconstitution des fonctions A et B ont été représentées en fonction de ceux de C.

Les moyennes des résidus pour les fonctions A et B ne sont en fait que des "zéros informatiques", en effet, les paramètres ajustés par moindres carrés pour ces fonctions comprennent un terme constant, ce qui entraîne la nullité de la somme des résidus. Ce n'est pas le cas pour C, pour lesquelles les moyennes, sans atteindre le "zéro informatique", restent très proches de zéro. Les écarts-types, mis à part quelques valeurs aberrantes, sont du même ordre de grandeur pour les trois fonctions. Les médianes des écarts-types sont beaucoup plus basses que leurs moyennes, ce qui

signifie qu'un petit nombre de valeurs élevées contribue à augmenter notablement les valeurs de ces moyennes.

L'ajustement par moindres carrés des coefficients de Fourier des trois fonctions A, B et C est donc globalement bon, mais il y a un certain nombre de cas où une distribution des résidus assez éloignée de zéro signale une mauvaise reconstitution de ces fonctions.



*Figure 28: Écarts-types des résidus : Pour les 21 systèmes, les écarts-types des résidus de la reconstitution des fonctions A et B ont été représentés en fonction de ceux de C.*

## 6. La résolution

Une fois les trois fonctions reconstituées, il va falloir choisir deux angles de balayage particuliers, former un système d'équations à partir des valeurs des fonctions en ces angles puis, enfin, résoudre ce système.

### 6.1. Le choix des angles

Il s'agit ici de choisir des angles qui apporteront le maximum d'information sur l'objet. La première idée est donc de choisir des angles particuliers liés à la géométrie de l'objet. Mais on ne connaît que des valeurs estimées de ces angles. Des choix d'angles indépendants de l'objet n'ont pas cette imprécision et peuvent permettre une simplification du système d'équations.

Ces deux types de choix partagent cependant le même inconvénient c'est que les angles choisis ne correspondent a priori pas à des points d'observations. Or la qualité de la reconstitution des trois fonctions n'est pas garantie en dehors des points d'observations. Il peut donc être intéressant d'utiliser des angles correspondant à des observations.

#### 6.1.1. Angles dépendants de l'objet

Une idée naturelle est d'utiliser les angles de position des étoiles de l'objet, ce qui donne une direction parallèle à l'un des côtés du triangle que forment les étoiles. Pour un objet triple dont les angles de position sont  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ ,  $a_1$  étant l'angle de position du troisième côté défini par :

$$a_1 = \text{atan2}(f_1, g_1) \quad (36)$$

les choix suivants semblent intéressants :

$\chi_1$	$\chi_2$	Choix Numéro
$a_2$	$a_2 + \pi/2$	8
$a_1$	$a_1 + \pi/2$	9
$a_1 + \pi/2$	$a_2 + \pi/2$	10

En effet, les choix 8 et 9 simplifient les équations de la manière suivante :

$$A\left(a_2 + \frac{\pi}{2}\right) = J_3 \cdot (J_1 + J_2) \cdot (1 - \cos(\delta_1)) \quad (37a)$$

$$B\left(a_2 + \frac{\pi}{2}\right) = J_3 \cdot (J_1 + J_2) \cdot (1 - \cos(2\delta_1)) \quad (37b)$$

$$C\left(a_2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2J_3 \cdot [(J_1 - J_2) \cdot (J_1 + J_2 - J_3) + 2J_1 J_2] \cdot \sin(\delta_1) \cdot (\cos(\delta_1) - 1) \quad (37c)$$

$$A\left(a_1 + \frac{\pi}{2}\right) = J_1 \cdot (J_2 + J_3) \cdot (1 - \cos(\delta_2)) \quad (38a)$$

$$B\left(a_1 + \frac{\pi}{2}\right) = J_1 \cdot (J_2 + J_3) \cdot (1 - \cos(2\delta_2)) \quad (38b)$$

$$C\left(a_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 2J_1 \cdot [(J_2 - J_3) \cdot (J_2 + J_3 - J_1) + 2J_2 J_3] \cdot \sin(\delta_2) \cdot (\cos(\delta_2) - 1) \quad (38c)$$

Le système d'équations est donc simplifié de la manière suivante, pour les choix respectivement 8, 9 et 10 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(\chi_1) - A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ B_0(\chi_1) - B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ C_0(\chi_1) - C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ A_0(\chi_2) - A(f_1, g_1, j_1, \_ , \_ , j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ B_0(\chi_2) - B(f_1, g_1, j_1, \_ , \_ , j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ C_0(\chi_2) - C(f_1, g_1, j_1, \_ , \_ , j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ \sqrt{2} - (J_1 + J_2 + J_3) = 0 \end{array} \right. \quad (39a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(\chi_1) - A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ B_0(\chi_1) - B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ C_0(\chi_1) - C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ A_0(\chi_2) - A(\_ , \_ , j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ B_0(\chi_2) - B(\_ , \_ , j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ C_0(\chi_2) - C(\_ , \_ , j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ \sqrt{2} - (J_1 + J_2 + J_3) = 0 \end{array} \right. \quad (39b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(\chi_1) - A(\_ , \_ , j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ B_0(\chi_1) - B(\_ , \_ , j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ C_0(\chi_1) - C(\_ , \_ , j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) = 0 \\ A_0(\chi_2) - A(f_1, g_1, j_1, \_ , \_ , j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ B_0(\chi_2) - B(f_1, g_1, j_1, \_ , \_ , j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ C_0(\chi_2) - C(f_1, g_1, j_1, \_ , \_ , j_2, j_3 ; \chi_2) = 0 \\ \sqrt{2} - (J_1 + J_2 + J_3) = 0 \end{array} \right. \quad (39c)$$

D'après les tests effectués, ces choix n'ont en fait pas de vertu spéciale pour révéler la structure des objets. Ceci est probablement dû au fait que les valeurs de  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  fournies au programme ne peuvent être que des valeurs approchées provenant de l'estimation de départ dont on dispose pour les paramètres de l'objet. Les simplifications attendues du système d'équation n'ont alors pas lieu, et ces choix d'angles fonctionnent comme n'importe quel autre.

### 6.1.2. Angles indépendants de l'objet

Il est également possible de choisir deux angles a priori, sans lien avec l'objet étudié. Les choix suivants ont été utilisés :

Choix Numéro	1	2	3	4	5	6	7
$\chi_1$	0	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/3$	0	$\pi$	$\frac{(9\chi^- + \chi^+)}{10}$
$\chi_2$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/2$	$\frac{(9\chi^- + \chi^+)}{10} + \frac{\pi}{2}$

où  $\chi^-$  est le plus petit angle de balayage pour lequel il y a une observation, et  $\chi^+$  le plus grand.

Le choix n°1 est particulièrement intéressant car il permet une simplification du système d'équation du type (39c), sans dépendre de la qualité de l'estimation a priori des paramètres de l'objet, tout en utilisant deux directions faisant un angle de  $\pi/2$ . Le choix n°6 est redondant avec le 1, mais peut être utile si la qualité de la reconstitution des trois fonctions s'avère mauvaise pour ce dernier choix d'angles.

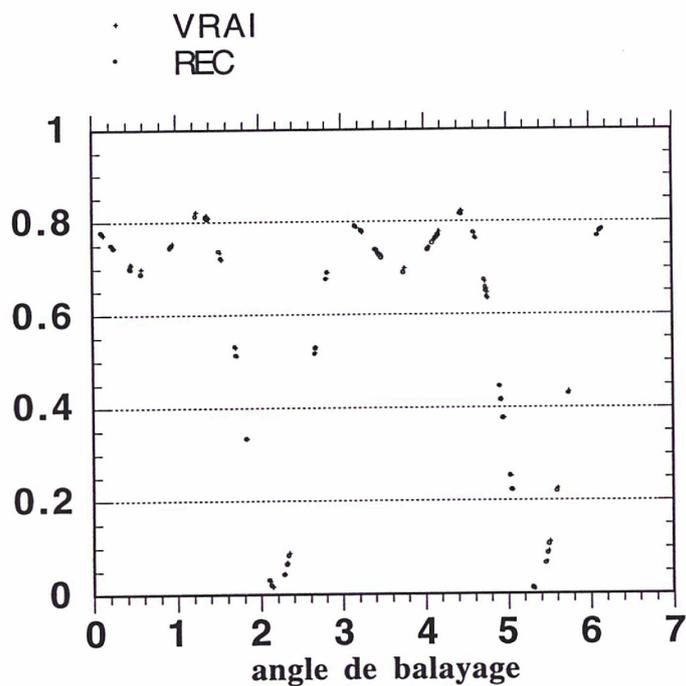
Cependant, l'ensemble des choix d'angles jusqu'ici présentés partage une même caractéristique: ils se placent n'importe où par rapport aux points d'observation. Et ceci peut être très gênant si la reconstitution d'au moins une des fonctions est de mauvaise qualité.

### 6.1.3. La reconstitution est souvent très correcte...

Comme il a été vu plus haut, la qualité de l'ajustement des coefficients de Fourier de la reconstitution des trois fonctions est généralement bonne, si on en juge par les résidus. Les résidus représentent les différences entre les valeurs de la fonction reconstituée aux points d'observation et ces mêmes observations.

Il paraît légitime de se demander dans quelle mesure cette reconstitution représente la "vraie" fonction, celle qui découle directement des paramètres de l'objet dans le ciel. Dans le cas des simulations, une réponse peut être apportée à cette question.

Prenons l'exemple de la fonction A du système 15. La reconstitution de cette fonction, avec une moyenne des résidus à  $6,11 \cdot 10^{-14}$  et un écart-type de  $1,05 \cdot 10^{-2}$ , est d'une qualité moyenne. En comparant (figure 29) les valeurs de la fonction théorique ("vraie") aux points d'observations avec celles de la fonction reconstituée, il apparaît que ces points sont pour la plupart confondus, et sinon sont de toute façon très proches.



*Figure 29 (ci-contre) :*

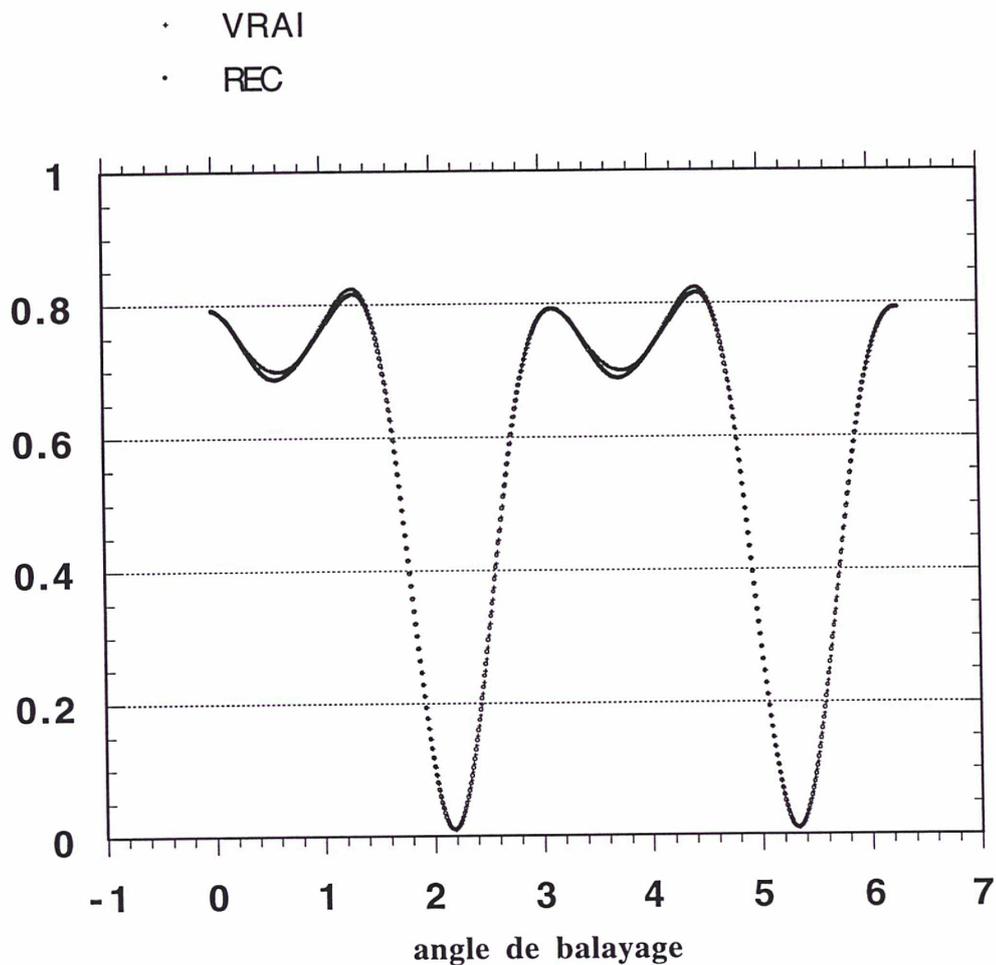
*Fonction A du système 15 :*

*les valeurs aux points  
d'observation des fonctions  
A théorique ("VRAI") et  
reconstituée ("REC") ont été  
portées ici en fonction de  
l'angle de balayage exprimé  
en radians.*

*Figure 30 (ci-dessous) :*

*Fonction A du système 15 :*

*même chose que la figure  
29, mais en 500 points  
uniformément répartis .*



La situation est largement confirmée en comparant cette fois sur 500 points uniformément répartis (figure 30). Les deux courbes sont confondues, sauf en deux petites zones autour de  $0,6$  radian et  $(0,6 + \pi)$  radians où elles restent de toute façon très proches.

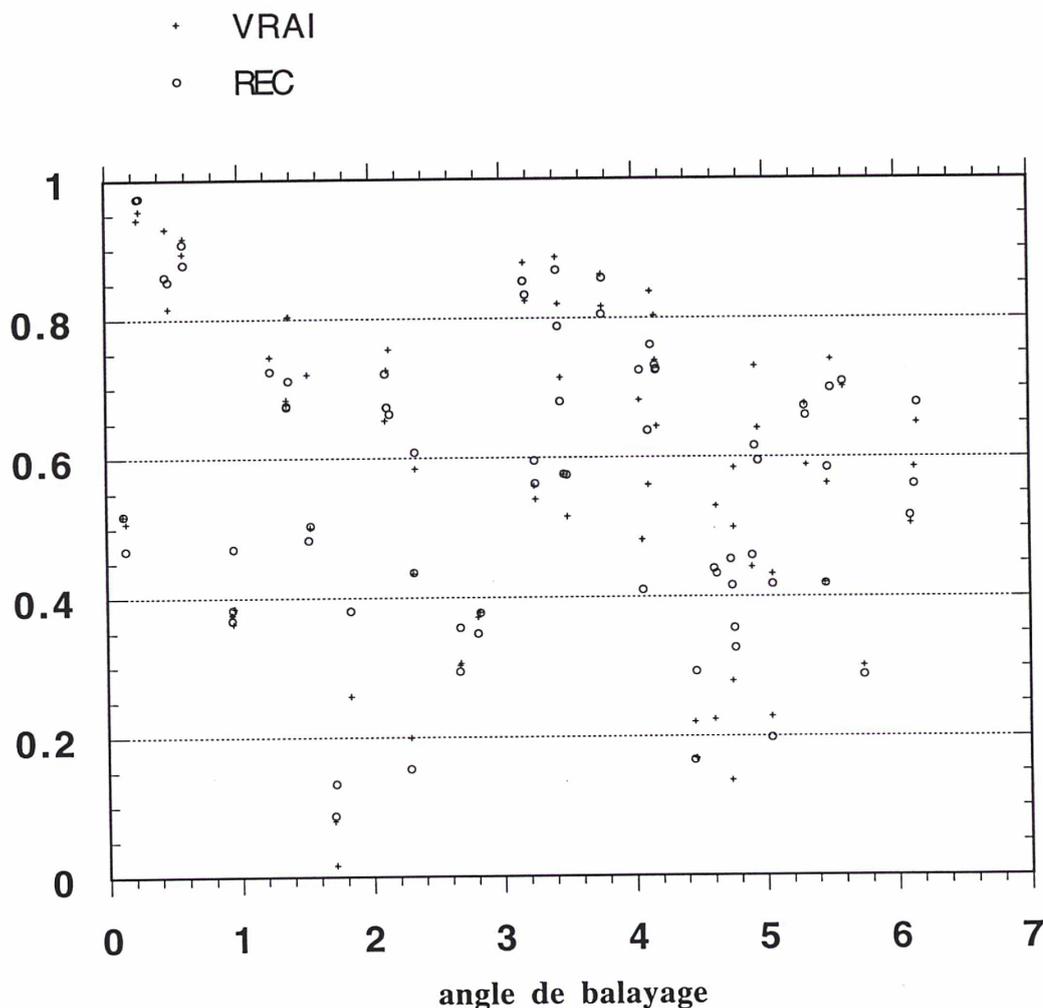
La reconstitution des fonctions est donc fiable, même pour des résidus moyens, et il est possible de choisir deux angles quelconques pour former le système d'équations.

#### 6.1.4. ... mais parfois exécrable

Cependant la situation peut être parfois bien pire.

Prenons l'exemple de la fonction A du système 5. La reconstitution de cette fonction, avec une moyenne des résidus à  $7,23 \cdot 10^{-14}$  et un écart-type de  $0,102$ , est l'une des plus mauvaises sur l'ensemble des fonctions A et B.

En comparant, figure 31, la fonction théorique à la fonction reconstituée, on constate que les points sont presque tous très différents mais quand même pour la plupart assez proches.

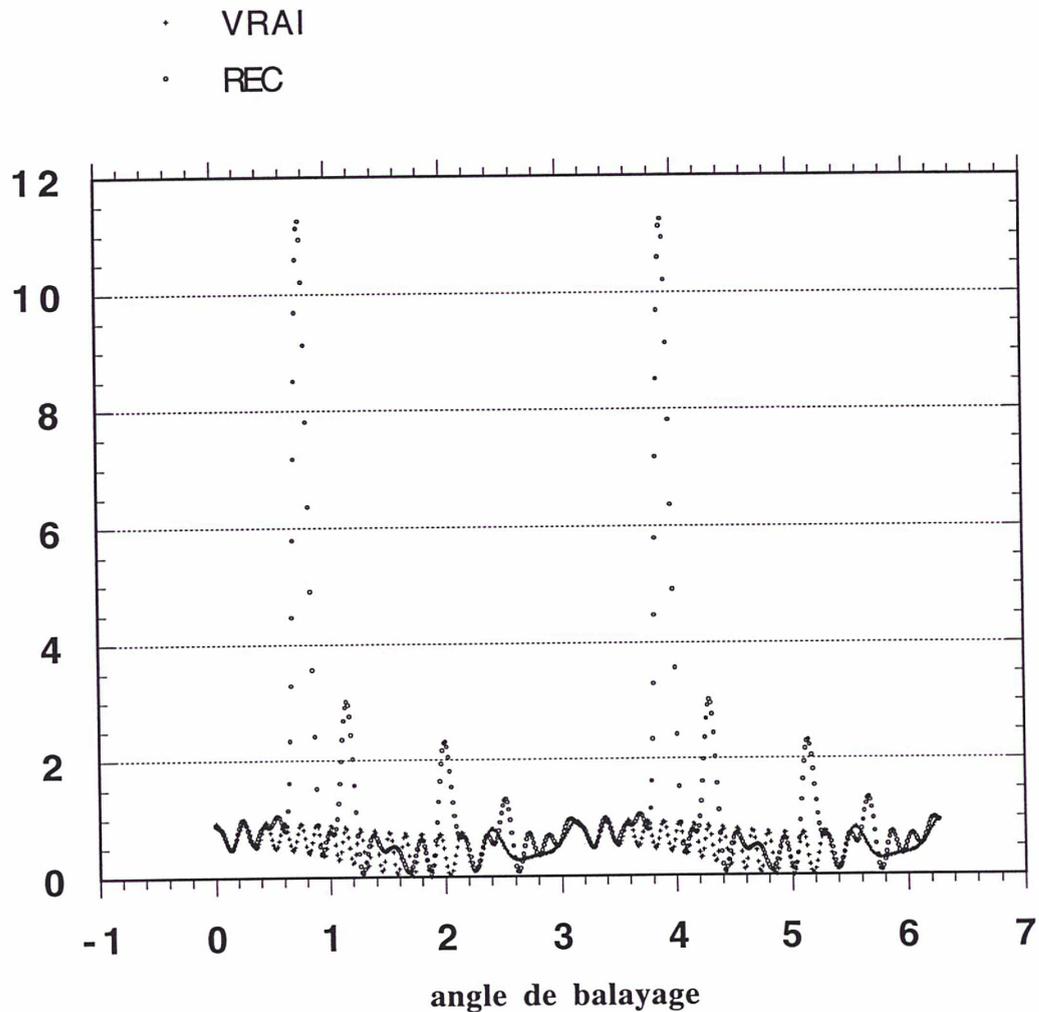


*Figure 31 : Fonction A du système 5 aux points d'observations : les valeurs aux points d'observations de la fonction A théorique ("VRAI") et celles de la fonction reconstituée ("REC") ont été portées ici en fonction de l'angle de balayage exprimé en radians.*

Mais c'est quand on compare ailleurs qu'aux points d'observation qu'apparaît la catastrophe: les différences peuvent être énormes, comme l'illustre la figure 32 et de plus, même dans les zones d'apparence "sage", les points sont de qualité assez médiocre, comme on peut le voir sur l'agrandissement de la figure 33.

Il est aisé de comprendre la raison d'un tel comportement en replaçant le système 5 sur la figure 22: la fonction  $A$  théorique de ce système contient un grand nombre de fréquences et donc des termes de haute fréquence d'amplitude non négligeable impossibles à retrouver à partir de l'échantillonnage dont on dispose.

Dans des cas semblables à celui-ci, on ne peut choisir deux angles quelconques sous peine de voir la résolution échouer ou, pire, converger vers des valeurs fausses.



*Figure 32 : Fonction  $A$  du système 5 : les valeurs en 500 points uniformément répartis des fonctions  $A$  théorique ("VRAI") et reconstituée ("REC") ont été portées ici en fonction de l'angle de balayage exprimé en radians.*

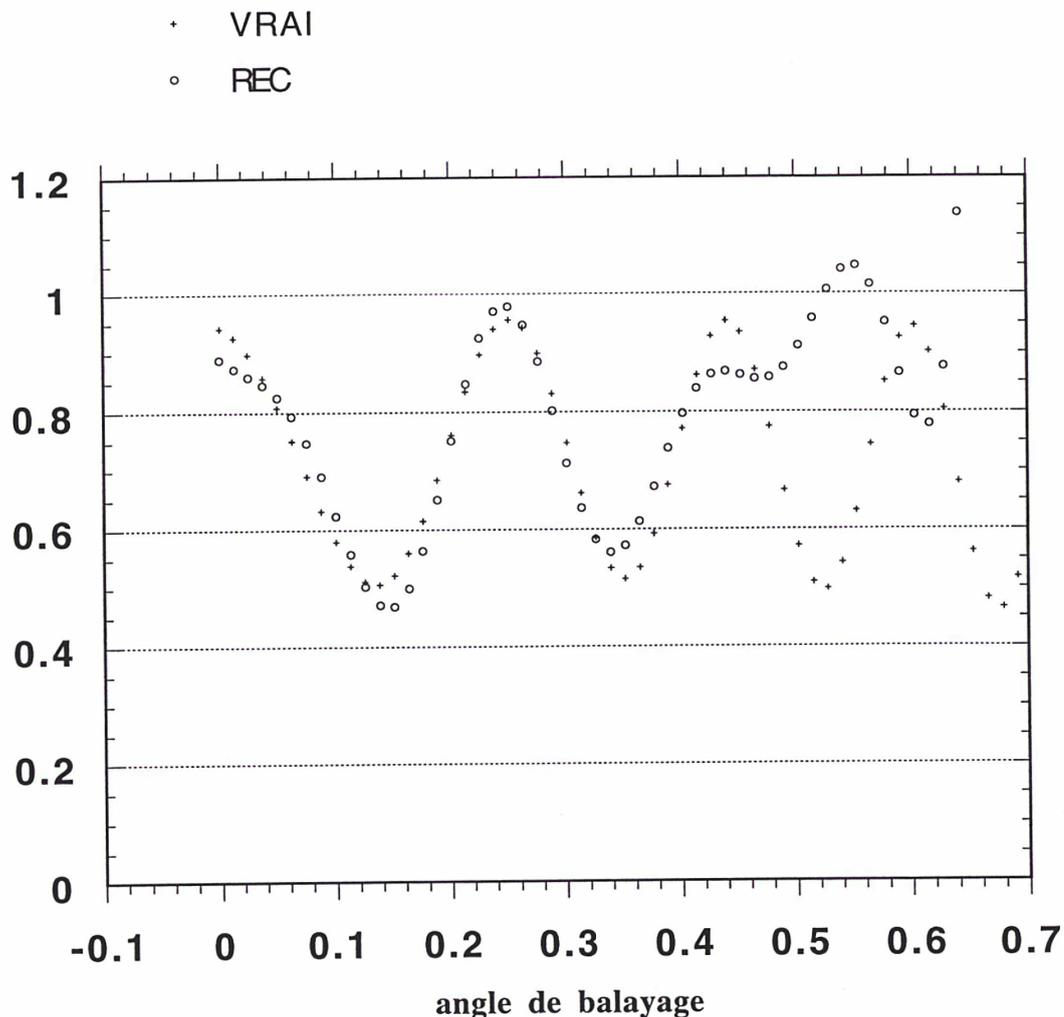


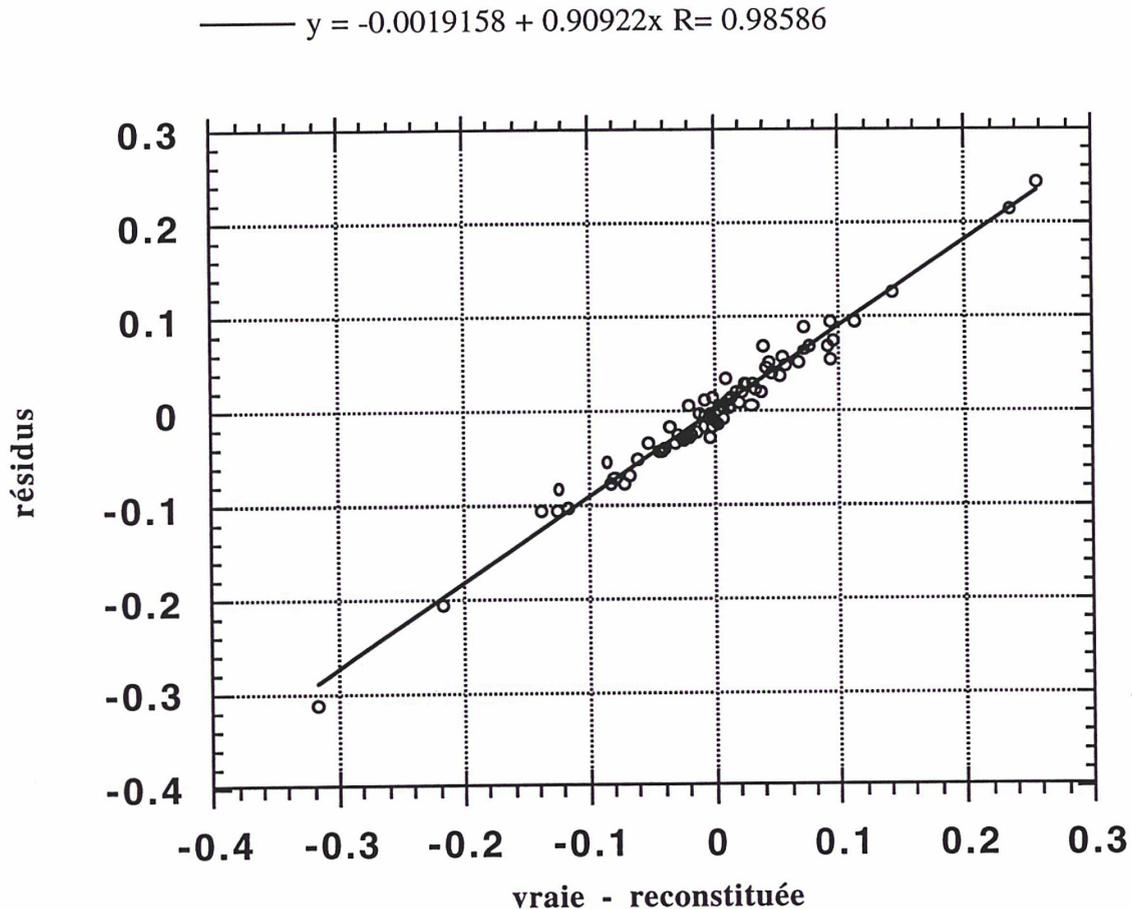
Figure 33 : *Fonction A du système 5, détail : Agrandissement d'une petite zone de la figure 29.*

### 6.1.5. Angles choisis aux points d'observation

Dans les cas où la qualité de la reconstitution est mauvaise, se placer en un point où elle l'est le moins possible devient le critère principal du choix des angles particuliers destinés à former le système d'équations.

Les résidus sont les seuls indicateurs de qualité disponibles. Il s'avèrent être très représentatifs de la qualité de la reconstitution aux points d'observation. En effet, comme on peut le voir sur la figure 34, il y a une relation de proportionnalité avec une très bonne corrélation entre les résidus et la qualité de la reconstitution aux mêmes points.

Le choix d'angles correspondant aux meilleurs résidus garantira donc de se placer aux points où la reconstitution est la moins mauvaise. On peut alors être amené à choisir 6 angles différents, une paire pour chacune des fonctions, puisque les résidus ne sont pas obligatoirement les meilleurs aux mêmes points pour les différentes fonctions, mais ceci n'est pas un problème.



*Figure 34 : Les résidus et la qualité de la reconstitution : les résidus de la reconstitution de la fonction A du système 5 ont été portés ici en fonction de la différence aux mêmes points entre les fonctions A reconstituée et théorique. Les points s'alignent avec une assez bonne corrélation "R" sur une droite dont l'équation est donnée au-dessus.*

## 6.2. Le système d'équations

Une fois choisis les angles particuliers à utiliser, il faut former le système d'équations, puis le résoudre. Ce système est fortement non linéaire, ce qui implique l'utilisation d'une méthode spéciale pour sa résolution.

### 6.2.1. La non linéarité

Le système d'équations est donc de la forme :

$$F(\mathbf{X}) = 0 \quad (40)$$

où

$$\mathbf{F} : \mathbf{X} = \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ j_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} A_0(\chi_1) - A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) \\ B_0(\chi_1) - B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) \\ C_0(\chi_1) - C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_1) \\ A_0(\chi_2) - A(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) \\ B_0(\chi_2) - B(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) \\ C_0(\chi_2) - C(f_1, g_1, j_1, f_2, g_2, j_2, j_3 ; \chi_2) \\ \sqrt{2} - (j_1 + j_2 + j_3) \end{pmatrix} \quad (41)$$

les six premières équations sont les différences entre la valeur en l'un des angles choisis d'une des fonctions reconstituées d'après les observations et l'expression en fonction des paramètres de l'objet de cette même fonction en ce même angle.

La septième équation relie les inconnues d'intensité du signal des étoiles. Le système aurait pu être réduit à 6 équations à 6 inconnues, mais cela complique l'expression des fonctions tout en brisant la symétrie. Cette expression a été donnée plus haut dans les formules 8a, b et c.

Les équations sont non linéaires de deux manières différentes: la dépendance en  $j_1$ ,  $j_2$  et  $J_3$  est polynomiale à trois inconnues, de degré deux pour A et B et de degré trois pour C, degré total par rapport à l'ensemble des inconnues. Le cas des inconnues spatiales est beaucoup plus sévère. En effet, elles sont contenues dans des termes en sinus ou cosinus de phases  $\delta_i$  avec :

$$\delta_i = - (f_i \sin(\chi_j) + g_i \cos(\chi_j)) = - \frac{2\pi}{\sin(S)} (s_i \cos(\chi_j - a_i)) \quad (42)$$

où  $(f_i, g_i)$  sont les coordonnées cartésiennes utilisées pour la résolution du système,  $s_i$  une séparation de deux étoiles de l'objet,  $a_i$  l'angle de position correspondant,  $\chi_j$  l'angle de balayage choisi et S le pas de grille.

Ramené sur le ciel, le pas de grille vaut 1,208 secondes d'arc. On voit donc que pour un décalage de 0,3 seconde d'arc entre la valeur sur le ciel et l'estimation dont on dispose de la séparation  $s_i$ , ou plus généralement de la position des deux étoiles, la phase  $\delta_i$  va varier de  $(0,3/1,208) \cdot 360^\circ \approx 89^\circ$ .

De plus, les fonctions B et C contiennent des phases doubles qui varieront, elles, dans les mêmes conditions, de  $179^\circ$ .

Sur une demi tour, un sinus ou un cosinus sont tellement peu linéaires que, pour résoudre directement le système d'équations qui nous intéresse à l'aide d'un logiciel de résolution de systèmes non linéaires éprouvé, il faut fournir une estimation de départ des paramètres de l'objet extrêmement proche de la valeur réelle. Cela fonctionne pour des écarts de l'ordre du centième de seconde d'arc, ce qui est totalement insuffisant.

D'où l'utilisation, pour résoudre ce système, d'une méthode de développement en polynôme de Taylor.

### 6.2.2. Le développement en polynôme de Taylor

Les algorithmes de résolution de systèmes non linéaires utilisent une linéarisation du système au voisinage d'un point. Cela correspond à un développement limité au premier ordre, ce qui est insuffisant dans les cas de forte non-linéarité.

Afin d'augmenter cet ordre, la résolution du système est remplacée par celle de :

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{h}) = 0 \quad (43)$$

où

$$\mathbf{h} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{a priori}} \quad (44)$$

est l'accroissement de  $\mathbf{X}$  et

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{h}) = \mathbf{F}|_{\mathbf{X}_{\text{a priori}}} + \mathbf{D}\mathbf{F}|_{\mathbf{X}_{\text{a priori}}}(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}\mathbf{D}^2\mathbf{F}|_{\mathbf{X}_{\text{a priori}}}(\mathbf{h}^2) + \dots + \frac{1}{n!}\mathbf{D}^n\mathbf{F}|_{\mathbf{X}_{\text{a priori}}}(\mathbf{h}^n) \quad (45)$$

est le polynôme de Taylor d'ordre  $n$ .

Si  $M$  est un majorant de la norme de la différentielle  $(n+1)$ ième de  $F$  sur le segment  $[\mathbf{X}_{\text{a priori}}, \mathbf{X}_{\text{a priori}} + \mathbf{h}]$ , l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\|\mathbf{P}_n(\mathbf{h})\| \leq \frac{M \cdot \|\mathbf{h}\|^n}{(n+1)!} \quad (46)$$

nous assure que, même si la norme de  $\mathbf{h}$  est grande, c'est-à-dire l'estimation mauvaise, un ordre  $n$  suffisamment grand permettra de se rapprocher du point recherché.

### 6.2.3. Les dérivées partielles

La mise en place de cette méthode nécessite, à chaque nouvelle estimation des paramètres de l'objet  $\mathbf{X}_{\text{a priori}}$ , le calcul des dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $n$  des trois fonctions en chacun des deux angles. Le tableau suivant donne le nombre de dérivées partielles d'une fonction à sept inconnues selon l'ordre de dérivation.

Ordre	0	1	2	3	4	5
Dérivées	1	7	28	84	210	462

Les plus courageux pourront jeter un coup d'oeil sur les formules de ces dérivées partielles qui sont données pour chacune des fonctions en Annexe D.

Les dérivées partielles sont stockées dans un tableau à deux dimensions pour chaque ordre de dérivation. Une des dimensions correspond à chacune des trois fonctions prise en chacun des deux



angles et l'autre aux différentes dérivées partielles rangées dans un ordre précis. Si l'on ordonne les inconnues de la manière suivante :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$f_1$	$g_1$	$j_1$	$f_2$	$g_2$	$j_2$	$j_3$

alors, si  $l_5 \geq l_4 \geq l_3 \geq l_2 \geq l_1$ ,  $-\frac{\partial}{\partial x_{l_p} \dots \partial x_{l_1}}$  se trouvera, dans le tableau des dérivées p-ièmes, à l'emplacement  $k_p(l_p, \dots, l_1)$  avec :

$$k_p(l_p, \dots, l_1) = \frac{(l_p + (p-2)) \cdot (l_p + (p-1)) \dots l_p(l_p-1)}{p!} + k_{p-1}(l_{p-1}, \dots, l_1)$$

#### 6.2.4. Expression du système

Le polynôme (45) peut se mettre sous la forme :

$$P_n(h) = P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_4}{24} + \frac{P_5}{120} \quad (47)$$

où chaque  $P_i$  est un polynôme homogène de degré total  $i$  par rapport à l'ensemble des sept inconnues.

Une formule, basée sur le schéma de Horner appliqué à un polynôme à sept inconnues du type (47) et en tenant compte du théorème de Schwarz, a été développée. Elle permet de gagner un facteur 6 en temps sur l'évaluation numérique en un point du système d'équations (43). Elle est explicitée à l'annexe P, degré 5.

#### 6.2.5. Expression du jacobien

$$\frac{\partial \left( P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_4}{24} + \frac{P_5}{120} \right)}{\partial h_j} = \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left( \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \left[ \sum_{l_4=1}^{l_3-1} P_{5j l_1 l_2 l_3 l_4} x_{l_4} + \frac{(P_{5j l_1 l_2 l_3 l_3} x_{l_3} + P_{5j l_1 l_2 l_2 l_3} x_{l_2} + P_{5j l_1 l_1 l_2 l_3} x_{l_1})}{2} + P_{4j l_1 l_2 l_3} \right] x_{l_3} \right) x_{l_2} + \left( \frac{(P_{5j l_1 l_1 l_1 l_2} x_{l_1} + P_{5j l_1 l_1 l_2 l_2} x_{l_2} + P_{4j l_1 l_1 l_2})}{3} x_{l_1} + \frac{(P_{5j l_1 l_2 l_2 l_2} x_{l_2} + P_{4j l_1 l_2 l_2})}{2} x_{l_2} + P_{3j l_1 l_2} \right) x_{l_1} + P_{1j} + \left( \frac{\left( \frac{(P_{5j l_1 l_1 l_1 l_1} x_{l_1})}{4} + P_{4j l_1 l_1 l_1} \right) x_{l_1}}{3} + P_{3j l_1 l_1} \right) x_{l_1} + P_{2j l_1} \quad (48)$$

Le Jacobien du système (43) se calcule à partir de la formule (48) obtenue à partir de celle de l'annexe P, degré 4.

#### 6.2.6. La résolution du système

Les deux sous-programmes calculant respectivement le système d'équations polynomiales et son jacobien qui sont ensuite utilisés par le logiciel NEQNJ de résolution de systèmes d'équations non linéaires de la bibliothèque IMSL. Ce logiciel est utilisé en boîte noire. Pour la petite histoire et pour les connaisseurs, il est basé sur un algorithme de Levenberg-Marquardt.

Il y en entrée du logiciel un paramètre de finesse de la solution cherchée. Après les tests, il s'avère qu'une valeur trop petite de ce paramètre peut entraîner un échec du programme, tandis qu'une grande valeur est pratiquement sans incidence sur la précision de la solution obtenue. Il est donc pris assez grand généralement, et diminué seulement quand on s'approche de la solution finale.

#### 6.2.7. La réduction "sans $j_1$ "

A la lumière du comportement du programme de réduction, un second modèle a été développé et baptisé réduction "sans  $j_1$ ". En effet, il apparaît que la résolution du système d'équations aboutit souvent à une très bonne valeur de l'intensité du signal de la primaire ( $j_1$ ), alors que les autres paramètres sont de médiocre qualité.

Pour affiner la solution, une résolution est alors effectuée en considérant  $j_1$  comme connu. Les inconnues deviennent alors :

$$(f_1, g_1, f_2, g_2, r_2, r_3) \quad \text{où} \quad r_2 = \frac{j_2}{j_1} \quad \text{et} \quad r_3 = \frac{j_3}{j_1}$$

Il faut supprimer une équation, ce qui se fait ainsi : pour chaque équation, la somme des carrés des résidus de la reconstitution de la fonction considérée aux deux points d'observation qui encadrent l'angle particulier de l'équation est calculée. L'équation pour laquelle cette somme est la plus élevée est alors supprimée.

Pour les autres équations, il n'est pas nécessaire de recalculer les dérivées partielles, mais il suffit d'effectuer les substitutions suivantes :

	fonction A	fonction B	fonction C	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$\partial/\partial j_1$	$\partial/\partial j_2$	$\partial/\partial j_3$
est remplacé par	$A/j_1^2$	$B/j_1^2$	$C/j_1^3$	1	$r_2$	$r_3$	0	$\partial/\partial r_2$	$\partial/\partial r_3$

D'autre part, la dernière équation devient :

$$\frac{\sqrt{2}}{j_1} - 1 - (r_2 + r_3) = 0 \quad (49)$$

Quand la primaire domine nettement les deux autres étoiles par sa magnitude, ce modèle est systématiquement utilisé. Lorsqu'au contraire la primaire et la secondaire sont de magnitudes comparables, il n'est pas utilisé du tout. Dans les cas intermédiaires, la réduction sans  $j_1$  est utilisée quand la résolution principale a donné un résultat de meilleure qualité que le point de départ.

Quand ce modèle est utilisé, seule la solution - entre celle de la résolution principale et celle de la réduction sans  $j_1$  - ayant le meilleur indice de qualité est retenue.

### 6.2.8. L'indice de qualité

Le logiciel de résolution de systèmes non linéaires utilisé ne donne aucune indication de précision de la solution obtenue. Un indice de qualité a donc été fabriqué.

La résolution du système donne un vecteur d'accroissement  $\mathbf{h}$ . Les paramètres du système triple correspondant sont calculés puis les valeurs théoriques des trois fonctions A, B et C correspondant à ce système, en chacun des points d'observation.

Pour chacune des fonctions, l'écart quadratique moyen entre ces valeurs calculées et les valeurs observées est ensuite déterminé. L'indice de qualité est alors :

$$Q = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2} \quad (50)$$

Cette expression a un sens car, comme il a été montré dans l'étude des fonctions, celles-ci sont du même ordre de grandeur.

### 6.2.9. Actualisation du point de calcul

La résolution du système d'équation en un point "ancien" donne un autre point "nouveau". Il faut alors réactualiser le point de calcul des dérivées partielles. L'examen du comportement des solutions successives obtenues montre que le point "nouveau" n'est souvent pas le plus proche des vraies valeurs, le logiciel ayant tendance à aller "trop loin" pour telle ou telle inconnue, ou à ne déterminer une bonne valeur que pour certaines d'entre elles tout en détériorant les autres.

Afin d'accélérer la convergence vers la solution et surtout d'éviter que le programme "erre" dans une mauvaise direction, les différents choix présentés dans le tableau qui suit sont testés à

chaque itération pour l'actualisation du point de calcul. A et N désignent l'"ancien" et le "nouveau" point, et  $Q_A$  et  $Q_N$  leurs indices de qualité respectifs.

INCONNUES							
Choix N°.	$f_1$	$g_1$	$j_1$	$f_2$	$g_2$	$j_2$	$j_3$
1	A	A	N	A	A	A	A
2	$\frac{(A+N)}{2}$						
3	$\frac{(A+N)}{2}$	$\frac{(A+N)}{2}$	N	$\frac{(A+N)}{2}$	$\frac{(A+N)}{2}$	$\frac{(A+N)}{2}$	$\frac{(A+N)}{2}$
4	N	N	N	N	N	N	$\frac{(A+N)}{2}$
5	N	N	A	N	N	A	A
6	Barycentre						
7	Barycentre	Barycentre	N	Barycentre	Barycentre	Barycentre	Barycentre
8	N	N	N	N	N	N	Barycentre
9	A	A	A	A	A	A	A
10	N	N	N	N	N	N	N

$$\text{où Barycentre} = \left( \frac{A}{Q_A} + \frac{N}{Q_N} \right) \frac{Q_A Q_N}{(Q_A + Q_N)}$$

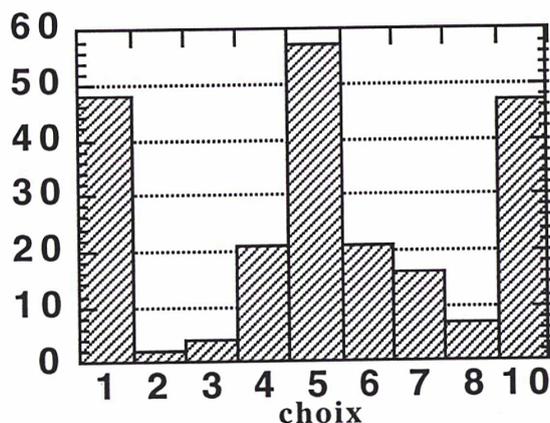
L'indice de qualité de chacun de ces choix est calculé et la combinaison d'inconnues correspondant au meilleur indice est utilisée comme nouveau point de départ de la résolution.

Les différents choix correspondent à des comportements précis du programme de résolution. Du plus utilisé au moins utilisé (voir figure 35), on trouve :

- le n°5 : seules les inconnues spatiales sont améliorées.
- le n°1 : seule la magnitude de la primaire est améliorée.
- le n°10 : amélioration globale de l'ensemble des inconnues.
- les n°4 et 8 : seule la magnitude de la tertiaire est corrigée dans le bon sens.
- les n°6 et 2 : l'ensemble des inconnues sont corrigées dans la bonne direction mais en allant trop loin.
- les n°3 et 7 : la magnitude de la primaire est améliorée et le programme corrige les valeurs des autres

inconnues en allant dans la bonne direction mais trop loin.

les n°2 et 3 n'ont pratiquement jamais été utilisés, et seront probablement supprimés pour la réduction des données réelles.



*Figure 35: L'actualisation du point de résolution - La fréquence d'utilisation des différents choix possibles pour la réactualisation du point de calcul des polynômes du système d'équations est ici présentée en ordonnée, l'abscisse correspondant au numéro du choix.*

#### 6.2.10. Critères d'arrêt

Les itérations s'arrêtent lorsque :

- la combinaison d'inconnues ayant le meilleur indice de qualité est la n°9, c'est-à-dire que la résolution n'a pas amélioré la solution

ou :

- la différence entre l'indice de qualité de l'"ancien" point et celui du point choisi pour l'actualisation est inférieure à  $10^{-5}$ . Cela évite certains comportements du programme qui parfois reste au même point tout en diminuant l'indice de qualité d'une manière infime.

#### 6.3. Vision d'ensemble

Le schéma qui suit, figure 36, permettra d'avoir une vue générale sur la résolution du système d'équations.

Tout ceci est censé être automatique, mais comme on pourra s'en apercevoir à la lecture du chapitre 7.1, quand le choix d'angles particuliers est mauvais, le programme s'interrompt et doit être relancé "à la main".

Cela offre au passage la possibilité de profiter d'une meilleure reconstitution des trois fonctions puisque, comme il a été expliqué au chapitre 5.2.3, cette reconstitution dépend en partie, dans la sélection des fréquences, des valeurs estimées des inconnues.

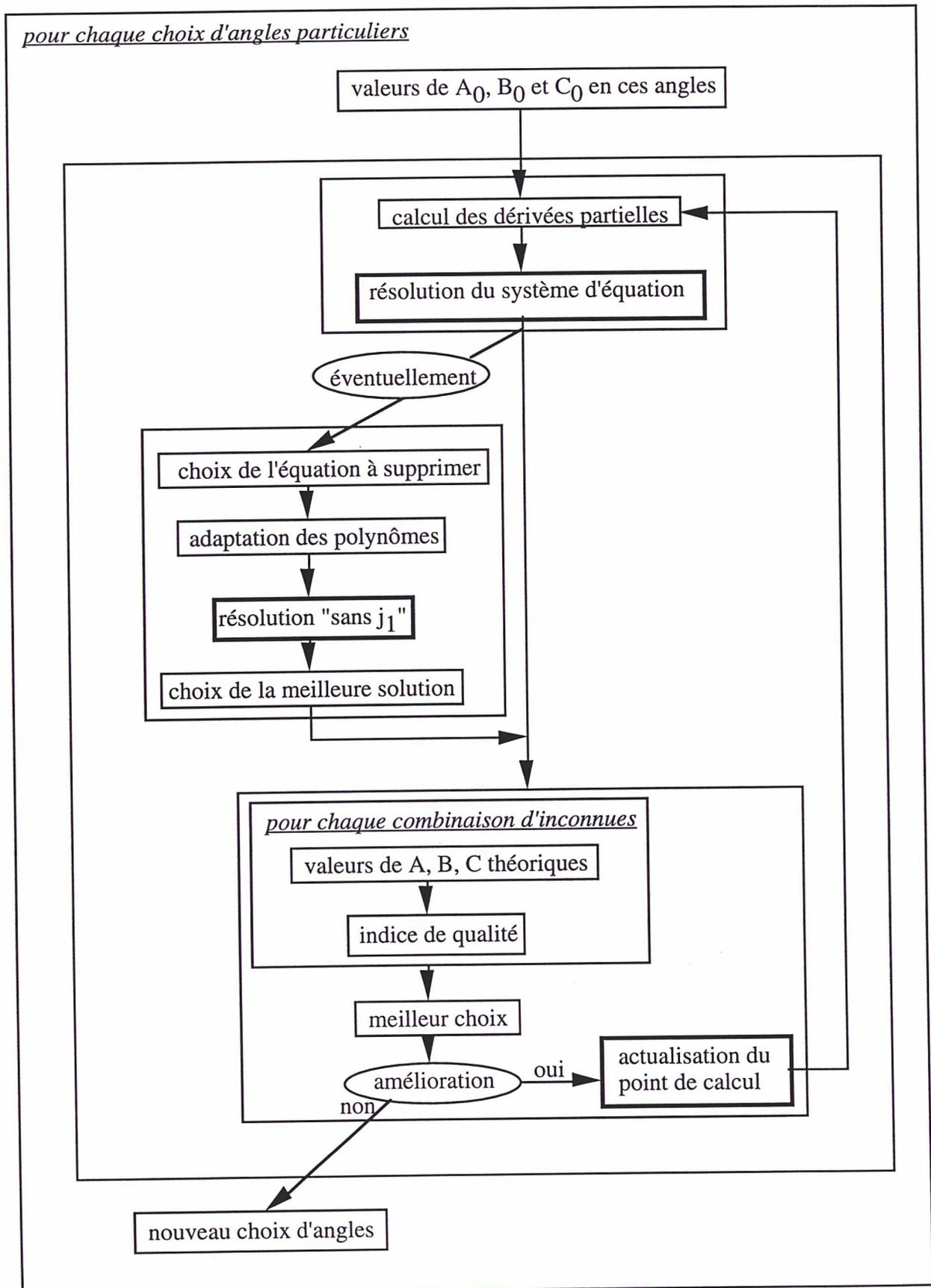


figure 36 : *La résolution du système d'équations*

#### 6.4. L'ajustement final

Quand le point obtenu est, à en juger par l'indice de qualité, très proche des valeurs réelles, un dernier ajustement est effectué par moindres carrés. Il utilise une équation par fonction A, B et C et par transit pour déterminer les sept inconnues du système. Etant donné le caractère non linéaire du problème, des itérations sont effectuées tant que l'estimateur du facteur de variance obtenu diminue.

Cet ajustement permet en général d'affiner un peu la solution finale, mais son rôle principal est de donner une indication sur la précision de la solution obtenue, sous la forme d'écart-types, dont la validité doit être relativisée du fait que le bruit sur les valeurs de A, B et C n'a guère de raison d'être gaussien, mais qui sont la seule indication dont nous puissions disposer.

Cet ajustement étant pratiqué en coordonnées cartésiennes, les écart-types finaux sont obtenus, avec les notations de la formule (13) du paragraphe 3.4.2, par

$$\sigma_s = \frac{3,24 \cdot 10^5 \sin(s)}{\pi^2} \sqrt{\frac{u^2 \sigma_u^2 + v^2 \sigma_v^2}{u^2 + v^2}} \quad (51a)$$

$$\sigma_a \equiv \left( \frac{180}{\pi} \sqrt{\frac{v^2 \sigma_u^2 + u^2 \sigma_v^2}{u^2 + v^2}} \right) [360] \quad (51b)$$

## 7. Résultats de simulations

Même si des modifications mineures sont probables, l'ossature générale de la chaîne de réduction qui sera appliquée aux données réelles des objets multiples d'Hipparcos est celle qui a été décrite aux chapitres précédents et utilisée pour obtenir les résultats de réduction de données simulées présentés ici. Ces résultats illustrent le fonctionnement général de cette chaîne et ses limites, qu'elles soient dues à la structure de l'objet lui-même ou aux irrégularités de l'échantillonnage provenant de la loi de balayage.

### 7.1. Une résolution pas à pas

Afin de donner une idée du fonctionnement de la partie résolution du système non linéaire de la réduction, une résolution complète est ici détaillée. L'essai a lieu à une latitude écliptique de 55 degrés. Le système à découvrir, qui est le numéro 2 des simulations, et l'estimation de départ ont les caractéristiques suivantes :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
Système	8,6	8,8	95	12,9	0,3	60	9,7
Estimation	8,3	9,1	95	13,2	0,6	60	10

La première résolution est effectuée avec le choix d'angles n°1 (0 et  $\pi/2$ ) mais le programme "se plante" tout simplement. Le programme est alors relancé avec le choix d'angles n°2 ( $\pi/4$  et  $3\pi/4$ ). Cela donne les itérations décrites ci-dessous, Q étant l'indice de qualité (celui de l'estimation de départ est de 0,478), et P le numéro de la meilleure actualisation trouvée par le programme (voir 6.2.9).

Itération	P	Q	$m_A$	$s_{AB}(\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
1	8	0,360	8,346	9,057	95,93	11,56	0,4801	68,41	10,60
2	4	0,3560	8,328	9,073	95,55	11,70	0,4983	65,92	10,68
3	5	0,3558	8,328	9,080	95,64	11,70	0,4788	68,87	10,68

Le programme se plante à la quatrième itération. On peut constater que les inconnues spatiales ont été améliorées alors que les magnitudes sont bien pires.

La dernière solution obtenue, à la troisième itération est prise comme nouveau point de départ et l'ensemble du programme est relancé, la reconstitution des trois fonctions dépendant de l'estimation de l'objet multiple, comme il a été expliqué au paragraphe 5.2.3. Le choix d'angles particuliers n°2 est gardé. Ceci entraîne un nouveau plantage du programme qui est relancé avec le

choix d'angles n°3 ( $\pi/6$  et  $2\pi/3$ ) et se plante encore. Il est alors relancé avec le choix d'angles n°4 ( $\pi/3$  et  $5\pi/6$ ) qui donne lieu aux itérations suivantes :

Itération	P	Q	m <sub>A</sub>	s <sub>AB</sub> (")	θ <sub>B</sub> (°)	m <sub>B</sub>	s <sub>AC</sub> (")	θ <sub>C</sub> (°)	m <sub>C</sub>
1	4	0,313	8,370	8,931	95,46	12,00	0,4859	58,69	10,80
2	10	0,194	8,442	8,826	94,99	12,24	0,3645	52,71	10,40
3	10	0,123	8,536	8,873	95,44	12,27	0,3488	56,85	9,956
4	10	0,118	8,543	8,867	95,44	12,27	0,3398	56,85	9,930
5	9	0,118	8,543	8,867	95,44	12,27	0,3398	56,85	9,930

Ici l'ensemble des inconnues a été amélioré. Le choix 9 comme point d'actualisation à la dernière itération signifie que le programme n'a plus réussi à améliorer les valeurs des inconnues.

Le programme est relancé avec comme estimation la meilleure solution, c'est-à-dire celle de la 4e (ou 5e) itération ci-dessus. Un choix 9 est de nouveau obtenu, on revient alors au choix d'angles n°2 qui avait donné des résultats précédemment, mais toujours en partant de la meilleure solution ci-dessus. Les itérations suivantes en sortent :

Itération	P	Q	m <sub>A</sub>	s <sub>AB</sub> (")	θ <sub>B</sub> (°)	m <sub>B</sub>	s <sub>AC</sub> (")	θ <sub>C</sub> (°)	m <sub>C</sub>
1	5	0,109	8,543	8,845	95,01	12,27	0,3141	55,43	9,930
2	10	0,099	8,564	8,844	94,86	12,25	0,3176	55,65	9,859
3	5	0,089	8,564	8,837	94,73	12,25	0,3120	57,09	9,859
4	9	0,089	8,564	8,837	94,73	12,25	0,3120	57,09	9,859

Le programme est alors relancé avec la meilleure solution (celle de la 3e itération ci-dessus), mais n'arrive pas à l'améliorer. De même, un nouvel essai avec le choix d'angle n°4 et la même estimation n'aboutit pas à une amélioration.

Apparemment on ne peut aller plus près. Il faut donc passer à l'ajustement final pour les inconnues et leurs écarts-types (l'erreur absolue a été également notée).

	m <sub>A</sub>	s <sub>AB</sub> (")	θ <sub>B</sub> (°)	m <sub>B</sub>	s <sub>AC</sub> (")	θ <sub>C</sub> (°)	m <sub>C</sub>
Valeur	8,604	8,828	94,80	12,99	0,3027	59,86	9,718
Ecart-type	18.10 <sup>-3</sup>	3,2.10 <sup>-3</sup>	1,8.10 <sup>-3</sup>	91.10 <sup>-3</sup>	2,2.10 <sup>-3</sup>	1,2	15.10 <sup>-3</sup>
Erreur absolue	3,8.10 <sup>-3</sup>	28.10 <sup>-3</sup>	-0,196	87.10 <sup>-3</sup>	2,7.10 <sup>-3</sup>	-0,14	18.10 <sup>-3</sup>

Les valeurs finales obtenues sont bonnes, sauf pour la séparation A-B qui est fautive de 28 millisecondes d'arc, mais surtout dont la précision de 3,2 millisecondes d'arc ne permet pas de soupçonner une telle erreur, et pour la magnitude de B, fautive de 8,7 centièmes, bien que là la précision de 9,1 centièmes soit cohérente avec cette erreur.

## 7.2. Différents objets

### 7.2.1. Présentation générale

Ici sont présentés les résultats d'une série d'essais de résolution sur seize systèmes différents, les numéros 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19 et 21 des objets simulés. Les essais ont lieu à une latitude écliptique de 55 degrés. Les paramètres vrais des systèmes sont ceux donnés au paragraphe 4.1, tandis que les points de départ sont tous obtenus en décalant ces valeurs selon le tableau suivant :

$m_A$	$s_{AB}(\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
- 0,3	+ 0,3	0	+ 0,3	+ 0,3	0	+ 0,3

Les résultats sont résumés d'une part par le tableau ci-dessous qui donne les moyennes et médianes des valeurs absolues des erreurs absolues sur les différents paramètres stellaires, et d'autre part par les figures 37 à 43. Sur chacune de ces figures - une par paramètre stellaire - ont été tracées les droites erreur =  $\sigma$ ,  $2\sigma$  et  $3\sigma$  car, dans le cas d'une distribution gaussienne, la probabilité de présence des points au dessous de ces droites devrait être respectivement de 84,1%, 97,7% et 99,9%. Les numéros associés à certains points remarquables sont ceux des systèmes correspondants.

tableau des erreurs absolues :

	$\Delta m_A$ ( $10^{-3}$ magn.)	$\Delta s_{AB}$ (mas)	$\Delta \theta_B$ ( $10^{-2}$ degrés)	$\Delta m_B$ ( $10^{-3}$ magn.)	$\Delta s_{AC}$ (mas)	$\Delta \theta_C$ ( $10^{-2}$ degrés)	$\Delta m_C$ ( $10^{-3}$ magn.)
moyenne	14,9	5,60	18,7	22,7	6,38	12,5	19,4
médiane	8,1	2,4	6,4	12	3,1	4,7	19

Pour tous les paramètres à l'exception de la magnitude de la tertiaire, les médianes sont fortement inférieures aux moyennes, ce qui signifie qu'il y a plus de petites valeurs que de grandes, mais que celles -ci sont nettement élevées. Cet effet est particulièrement sensible sur les inconnues spatiales, séparations et angles de position : la plupart sont déterminées avec une bonne précision, mais quelques cas donnent des valeurs largement plus mauvaises.

### 7.2.2. points remarquables

Voici une revue système par système des points qui sortent de l'ordinaire sur les figures 37 à 43 : valeurs élevées, points au-delà de la droite erreur =  $3\sigma$  et autres.

Le système 1 ne se distingue que par une erreur d'un demi degré sur l'angle de position de la tertiaire (figure 42), ce qui n'entraîne cependant qu'une erreur de l'ordre de 4,4 mas sur la position de

cette étoile car la séparation n'est que de 0,5 secondes d'arc.

Le système 2 admet une erreur importante de 28 mas sur la séparation primaire-secondaire (figure 38) qui de plus est bien au-delà de  $3\sigma$ , comme l'est celle sur l'angle de position de la secondaire (figure 39), une erreur de 8,7 centièmes sur la magnitude de la secondaire (figure 40).

Ce système est en fait nettement hiérarchique puisque composé d'une double serrée primaire-tertiaire et d'une secondaire plus faible de 4,3 et 3,2 magnitudes respectivement et située à une distance 29 fois plus importante que la séparation de la binaire. Ceci permet de comprendre que cette secondaire soit mal déterminée.

Le système 3 est également très hiérarchique puisque le couple secondaire-tertiaire admet une séparation 30 fois plus faible que sa distance à la primaire et deux magnitudes égales supérieures de 2,3 à celle de la primaire. Cependant, à la résolution, il ne se distingue guère que par une mauvaise magnitude de la tertiaire (figure 43), fautive de 4,3 centièmes.

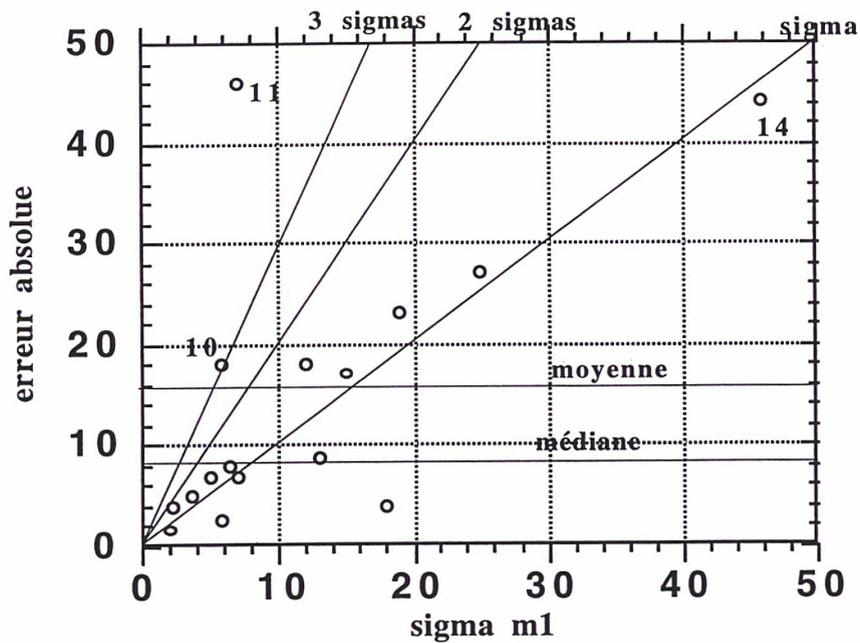
Le système 4 présente une hiérarchie semblable à celle du 2 c'est-à-dire une double serrée avec un compagnon ici éloigné de 14 fois la séparation de la binaire et plus faible que ses composantes de 3,1 et 2,7 magnitudes respectivement. On ne s'étonnera pas alors que la résolution donne une erreur de 3,7 centièmes sur la magnitude de la tertiaire et une de 16 mas sur la séparation primaire-tertiaire (figure 41). Il est par contre regrettable que cette dernière valeur soit nettement au-delà de  $3\sigma$ .

Le système 6 n'est que faiblement hiérarchique, le couple secondaire-tertiaire, dont les deux magnitudes égales sont supérieures de 2,8 à celle de la primaire, n'étant éloigné que de 8 fois sa séparation de cette dernière. Ce système ne se signale d'ailleurs que par une erreur sur la magnitude de la tertiaire juste au-delà de  $3\sigma$ .

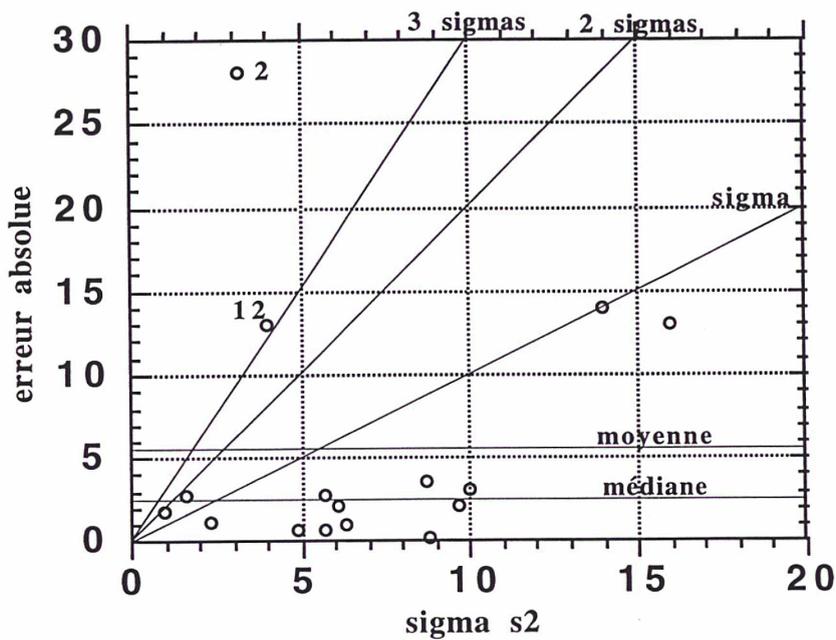
De même, le système 8 ne présente comme anomalie qu'une erreur sur la séparation primaire-tertiaire de 2,3 mas seulement mais au-delà de  $3\sigma$ . Il faut dire que dans ce système la tertiaire éloignée de 30 fois la séparation du couple primaire-secondaire n'est que de 0,4 magnitudes plus faible que ces deux étoiles.

L'erreur de 0,97 degrés sur l'angle de position de la secondaire du système 9 n'entraîne quant à elle qu'une erreur de position de la secondaire de 3,4 mas, compte tenu des 0,2 secondes d'arc de la séparation primaire-secondaire.

Le système 10 est composé de trois étoiles assez brillantes à des séparations du même ordre de grandeur et ne se distingue à la résolution que par une erreur sur la magnitude de la primaire (figure 37) à peine au-delà de  $3\sigma$ .



*Figure 37 : La magnitude de la primaire - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de seize systèmes différents. Les unités sont le millièmètre de magnitude sur les deux axes.*



*Figure 38 : La séparation primaire-secondaire - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de seize systèmes différents. Les unités sont le millièmètre d'arc sur les deux axes.*

Celle du système 11 est, quant à elle, nettement au-delà de  $3\sigma$ , et de plus assez élevée (4,6 centièmes). Cela peut peut-être s'expliquer par la hiérarchie du système, qui admet un rapport de 57 entre la séparation du couple secondaire-tertiaire et la distance de ce couple à la primaire. La différence maximale de 1,9 magnitudes n'est cependant pas très élevée.

Les autres systèmes présentant une hiérarchie du type binaire faible et étoile simple forte, les numéros 3, 6 et 12, se signalent plutôt par des erreurs sur la secondaire, pour le 12, ou la tertiaire, pour les trois, alors que la primaire, plus brillante, est bien déterminée.

La raison de cette erreur est peut-être à chercher ailleurs : ce système admet une séparation de 9,7 secondes d'arc, une des plus grandes de l'ensemble des systèmes simulés. Cela entraîne une grande complexité du développement en série de Fourier des 3 fonctions A, B et C, comme on peut le voir sur les figures 19 à 21. Ce type de système est donc spécialement difficile à traiter par la méthode des trois fonctions.

Le système 12, globalement plus serré que le 11, comporte la même hiérarchie que celui-ci, avec également un rapport de 57 entre la séparation du couple secondaire-tertiaire, dont les deux magnitudes sont ici égales, et sa distance à la primaire.

La résolution de ce système présente de grandes erreurs en position du couple faible : 13 mas sur la séparation primaire-secondaire, 23 sur la séparation primaire-tertiaire et 0,5 degrés sur l'angle de position de la tertiaire mais surtout ces valeurs sont nettement au-delà de  $3\sigma$ , ce qui ne permet pas de soupçonner de telles erreurs.

Le système 14 est composé, comme les numéros 2, 4 et 8, d'une binaire serrée et d'un compagnon plus faible. Le rapport distance-séparation est ici de 33 et le compagnon admet 3 magnitudes de plus que les deux autres étoiles, dont les magnitudes sont égales.

A la sortie, ce système présente une des plus fortes erreurs sur la magnitude de la primaire : 4,4 centièmes et également une des plus fortes sur l'angle de position de la secondaire, mais vu la séparation primaire-secondaire de 0,2 seconde d'arc, l'erreur de position résultante n'est que de 3 mas. Il faut signaler aussi que l'écart-type sur la magnitude de la tertiaire est 45 fois plus grand que l'erreur correspondante.

Le système 15 est serré et sans hiérarchie notable et l'erreur de 0,4 degrés sur l'angle de position de la tertiaire n'entraîne qu'une erreur de 3,6 mas sur la position.

Bien que son couple primaire-secondaire soit relativement serré, le système 18 n'admet guère de hiérarchie. Il admet par contre à la fin de la résolution une erreur sur la séparation primaire-tertiaire nettement au-delà de  $3\sigma$ .

Le système 21 ne présente pas de structure particulière mais c'est un autre exemple de système à grande séparation (10 secondes d'arc ici) qui pose des problèmes pour cette méthode de résolution.

En effet, on peut voir sur la figure 21 qu'en particulier la fonction C de ce système contient des fréquences élevées qu'on ne peut obtenir lors de la reconstruction.

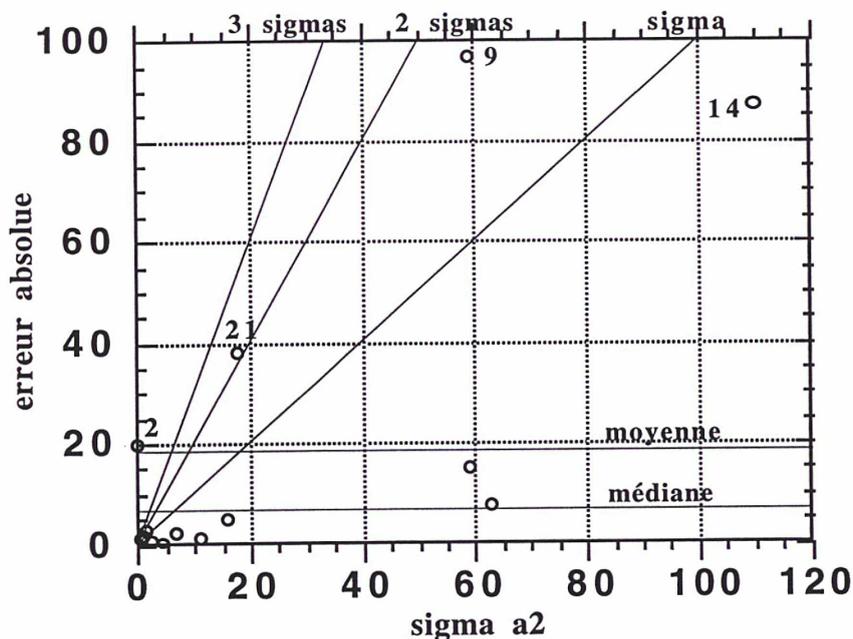


Figure 39 : *L'angle de position de la secondaire* - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de quatorze systèmes différents. Les unités sont le centième de degré sur les deux axes.

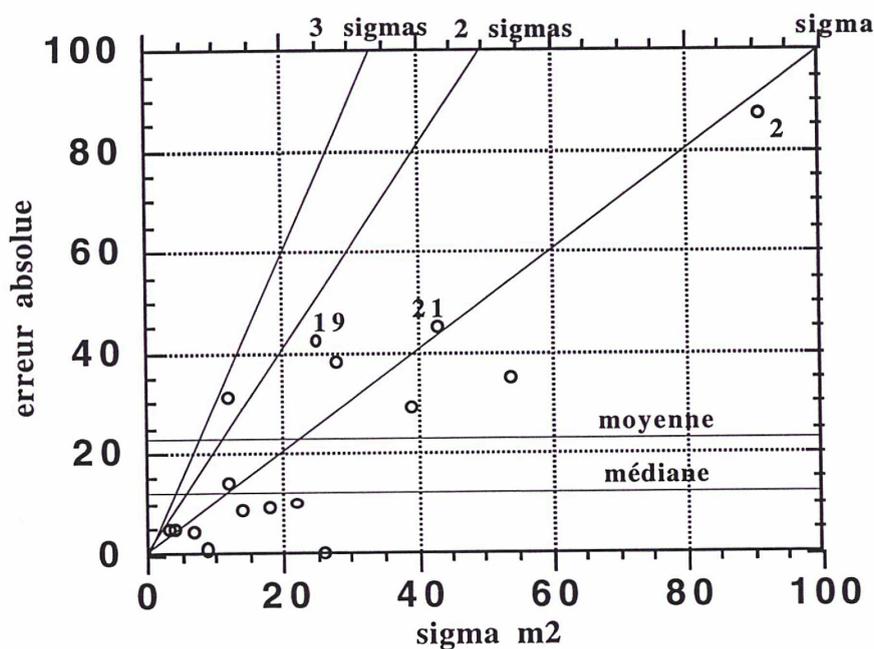


Figure 40 : *La magnitude de la secondaire* - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de seize systèmes différents. Les unités sont le millième de magnitude sur les deux axes.

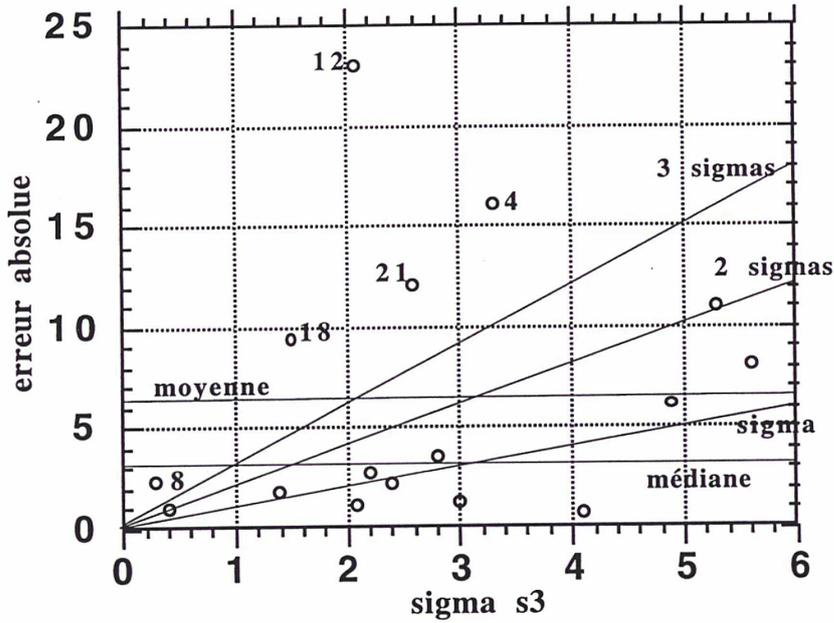


Figure 41 : La séparation primaire-tertiaire - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de seize systèmes différents. Les unités sont le millième de seconde d'arc sur les deux axes.

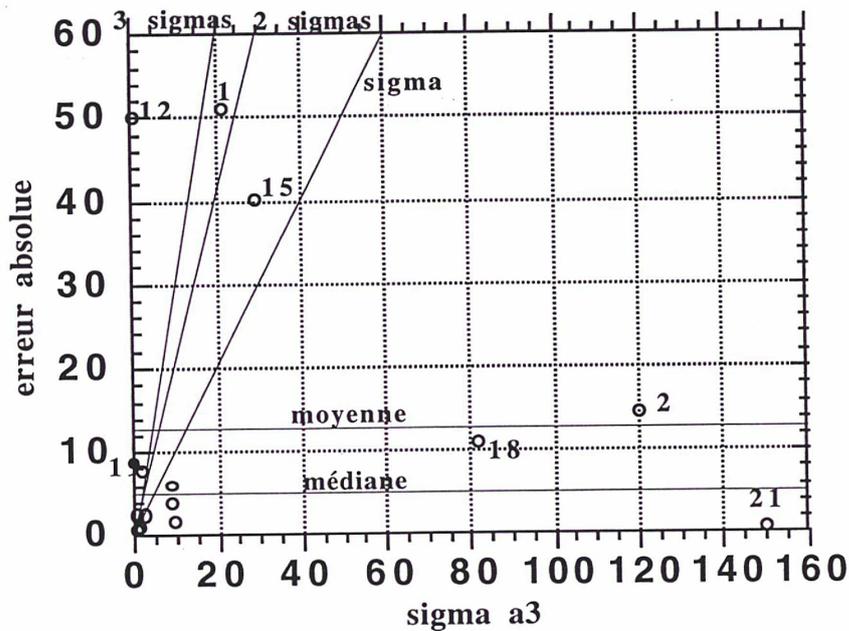
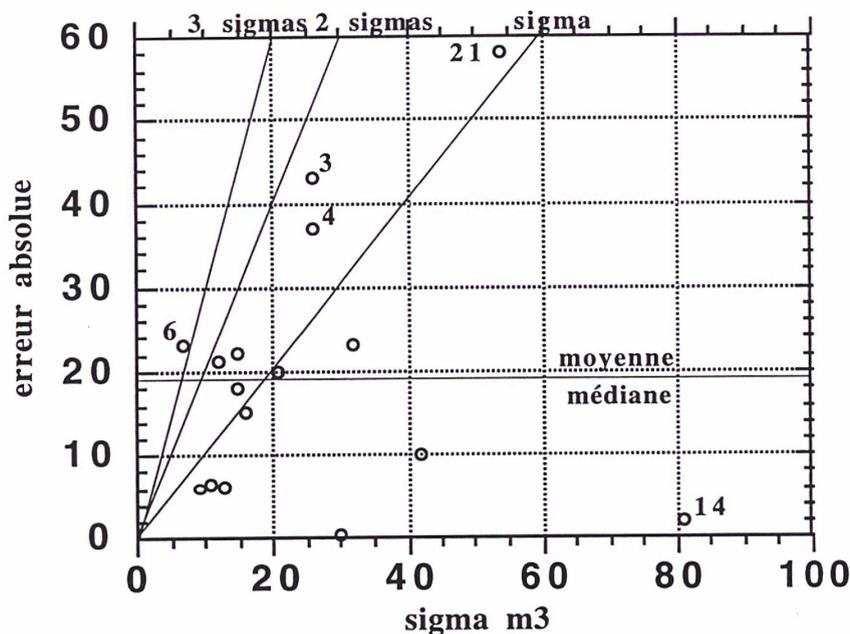


Figure 42 : L'angle de position de la tertiaire - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de quatorze systèmes différents. Les unités sont le centième de degré sur les deux axes.



*Figure 43: La magnitude de la tertiaire - Les erreurs absolues sont ici représentées en fonction de l'écart-type pour la simulation de la résolution de seize systèmes différents. Les unités sont le millième de magnitude sur les deux axes.*

Et de fait la résolution de ce système est l'une des plus mauvaises. L'erreur de 0,38 degrés sur l'angle de position de la secondaire entraîne une erreur de position de 22,5 mas, l'erreur de 4,5 centièmes sur la magnitude de la secondaire est importante, de même que celle de 5,8 centièmes sur la magnitude de la tertiaire et celle de 12 mas sur la séparation primaire-tertiaire qui n'est d'ailleurs pas signalée puisque située bien au-delà des  $3\sigma$ . Parmi les curiosités de cette résolution, il faut noter l'écart-type sur l'angle de position de la tertiaire 188 fois plus élevé que l'erreur.

Finalement, le seul système qui n'ait pas été signalé pour une erreur élevée ou au-delà de  $3\sigma$  est le numéro 17, qui est encore un cas de hiérarchie primaire forte et couple faible éloigné.

### 7.2.3. Les cas pathologiques

Lors de la série d'essais présentée dans ce paragraphe 7.2, certains objets ont donné des résultats suffisamment mauvais pour mériter une présentation individuelle. La plupart des cas sont explicables par la structure de l'objet multiples lui-même.

## 7.2.3.1. système 7

La solution finale obtenue est la suivante :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
Valeurs	8,556	1,989	322,2	9,268	7,501	63,51	11,54
Ecart-type							
Erreur absolue	- 0,044	- 0,011	0,2	0,168	0,501	1,51	- 0,56

Compte tenu des grandes valeurs des erreurs en angle de position, il est intéressant de regarder les erreurs en distance sur la position des étoiles : 0,013 secondes d'arc sur AB et 0,54 sur AC. Les écarts-types ne sont pas fournis car la solution obtenue ci-dessus n'est pas assez proche pour que les moindres carrés fonctionnent.

L'ensemble des valeurs obtenues est de faible qualité, mais surtout la tertiaire, qui compte respectivement 3 et 3,5 magnitudes de plus que les deux autres étoiles, est ici pratiquement invisible pour le programme, qui commet une erreur en position et une en magnitude largement supérieures au décalage de départ.

La hiérarchie, en magnitude et non en position, paraît critique pour ce système.

## 7.2.3.2. Système 13

la réduction donne les résultats suivants :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
Valeurs	6,097	2,883	178,0	12,00	2,688	177,8	11,93
Ecart-type	0,097	0,062	0,68	0,22	0,024	0,24	0,31
Erreur absolue	- 0,1026	- 0,017	- 0,016	0,40	- 0,012	0,78	0,035

Ici également l'ensemble des valeurs obtenues est fort médiocre, mais ce sont les erreurs énormes sur les magnitudes de la primaire et de la tertiaire qui justifient la présence de ce système dans ce paragraphe. Ces deux erreurs sont bien signalées par des  $\sigma$  importants.

Ce cas permet de mettre en évidence une des limites d'Hipparcos dans la résolution des objets multiples. C'est en effet un cas de très forte hiérarchie, en position avec un rapport de 57 entre la distance de la primaire au couple faible et la séparation de ce dernier et surtout en magnitude avec des différences de 5,7 et 5,4 magnitudes respectivement.

Ce sont ici principalement les magnitudes qui sont mal déterminées, la qualité des positions étant relativement moins mauvaise.

### 7.2.3.3. système 16

La solution finale obtenue est la suivante :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
Valeurs	6,401	0,4909	305,1	8,472	0,5066	305,9	8,730
Ecart-type	0,0034	0,0072	1,51	0,0079	0,0027	0,803	0,10
Erreur absolue	0,001	- 0,0091	- 9,895	0,472	0,0066	13,88	- 1,270

Etant données les grandes valeurs des erreurs en angles de position, il est intéressant de regarder les erreurs en distance sur la position des étoiles : 0,086 secondes d'arc sur AB et 0,12 sur AC.

On peut voir que la magnitude de la primaire et les séparations sont excellentes, tandis que les différences importantes sur les angles laissent tout de même des erreurs tout à fait acceptables sur les positions. Par contre, la chaîne de réduction délire complètement sur les magnitudes de la secondaire et de la tertiaire.

Tout ceci peut se comprendre ainsi : d'abord la plus grande différence de magnitude est de 3,6 et donc importante. Mais surtout les deux petites séparations jointes à une faible différence d'angles de position font que la séparation entre la secondaire et la tertiaire est d'à peine 0,1 seconde d'arc. Voilà pourquoi il est bien difficile de démêler les signaux de ces deux étoiles.

### 7.2.3.4. système 20

La solution finale obtenue est la suivante :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
Valeurs	8,315	0,7649	153,0	8,195	4,308	279,0	9,492
Ecart-type	0,082	0,070	2,1	0,062	0,019	0,012	0,088
Erreur absolue	0,115	0,4649	16,0	- 0,005	0,2080	2,0	- 0,008

Un cas atypique et difficilement explicable. Le système lui-même n'a rien de remarquable, avec une faible hiérarchie en position et des magnitudes du même ordre de grandeur.

Certes les deux magnitudes du couple serré primaire-secondaire sont égales, mais c'était déjà le cas pour d'autres systèmes, le 8 et le 14 par exemple. Ce dernier système présentait d'ailleurs une erreur importante sur la magnitude de la primaire, mais celle du système 20 est encore trois fois plus grande.

Ces résultats sont atypiques car les inconnues généralement les mieux déterminées, la magnitude de la primaire et les inconnues de position sont ici complètement fausses, avec en

particulier des erreurs en distance de 0,48 et 0,25 secondes d'arc sur les positions de la secondaire et de la tertiaire respectivement. Au contraire, les magnitudes de ces deux dernières étoiles sont très bien déterminées.

Ces mauvais résultats ne sont pas explicables par la configuration du système. Peut-être s'agit-il d'une distribution particulièrement défavorable du bruit gaussien ?

Il semble probable en fait que l'on ait ici un cas de convergence vers un minimum secondaire. En effet, bien que les écarts-types de la solution finale soient beaucoup trop petits pour signaler les grandes erreurs sur les inconnues de position, les moindres carrés affichent quand même une valeur de l'écart quadratique moyen des résidus un peu élevée, sans qu'elle soit diproportionnée par rapport à celles des autres réductions.

Mais surtout l'indice de qualité de 0,51 de la solution obtenue reste de l'ordre de celui de l'estimation de départ alors qu'une bonne amélioration de la solution donne en général un indice de qualité diminué d'un facteur 10.

La solution est donc signalée comme étant mauvaise, mais ni la chaîne principale ni les moindres carrés finaux ne parviennent à l'améliorer.

Il semble donc que la chaîne de résolution se soit fourvoyée dès le départ dans une mauvaise direction et ne puisse plus sortir d'un minimum secondaire.

### 7.3. L'influence de la loi de balayage

Afin d'étudier l'effet des irrégularités de l'échantillonnage dues à la loi de balayage, le système 15 et le système 17 ont été cherchés à partir des mêmes estimations de départ, données dans les tableaux ci-dessous à chacune des latitudes écliptiques présentées au chapitre 4.2.2 .

système 15 :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
estimation	9,1	1,4	1,3	12	1,1	6	11,4
différence	- 0,3	0,3	4	0,3	0,3	- 6	0,3

système 17 :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
estimation	7,6	4,4	201	10,5	5,2	203	11,3
différence	- 0,3	0,3	0	0,3	0,3	0	0,3

Pour les latitudes de 0, 11 et 22 degrés, aucun résultat n'a été obtenu du tout pour le système 15. A la latitude de 77 degrés, les inconnues spatiales de la solution obtenue pour ce même système 15 sont très mauvaises avec 0,33 et 0,34 secondes d'arc de différence sur les séparations primaire-

secondaire et primaire-tertiaire respectivement, et très mal signalées par des  $\sigma$  très petits : 0,0065 et 0,004.

A 88 degrés, la séparation primaire-tertiaire du système 17 admet une erreur de 0,265 secondes d'arc, alors que le sigma correspondant est de 1,3 mas, tandis que l'ensemble de la solution du système 15 est très mauvaise :

	$m_A$	$s_{AB}(\prime)$	$\theta_B(^{\circ})$	$m_B$	$s_{AC}(\prime)$	$\theta_C(^{\circ})$	$m_C$
valeur obtenue	9,292	0,6307	8,045	10,95	1,072	6,142	11,70
écart-type	0,28	0,018	25,6	1,27	0,0052	2,01	0,17
erreur absolue	- 0,1078	- 0,4693	0,045	- 0,049	0,272	- 5,858	0,6027

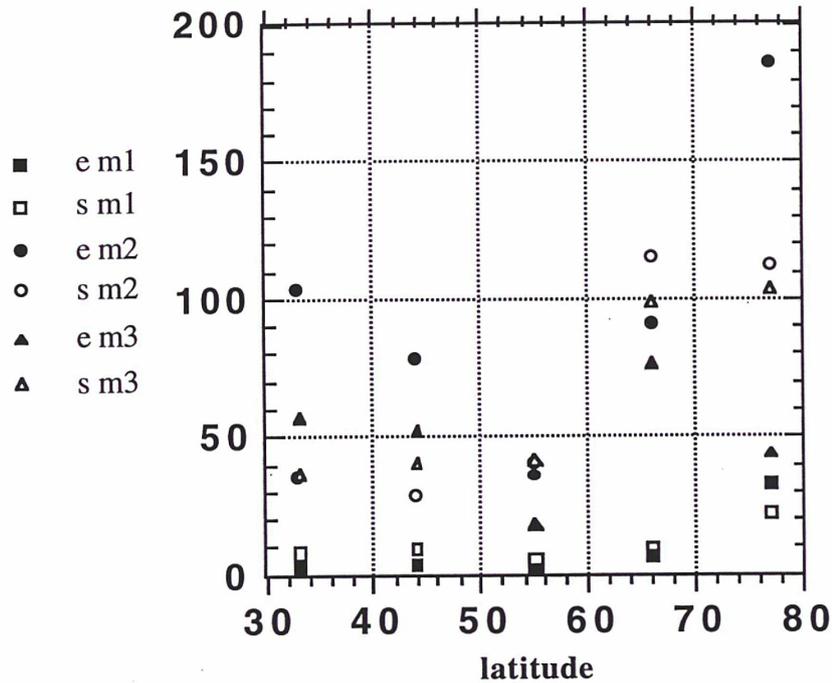
Les erreurs sur la séparation primaire-secondaire et la magnitude de la tertiaire sont énormes, supérieures aux décalages des estimations de départ. A part ceux de l'angle de position et de la magnitude de la tertiaire, les  $\sigma$  sont assez fantaisistes : petits quand les erreurs sont grandes et inversement.

L'ensemble des autres résultats sont présentés dans les figures 44 à 46 pour le système 15 et les figures 47 à 49 pour le 17. Les erreurs absolues y sont tracées en noir, les écarts-types en blanc. Les carrés concernent la primaire, les ronds la secondaire et les triangles la tertiaire.

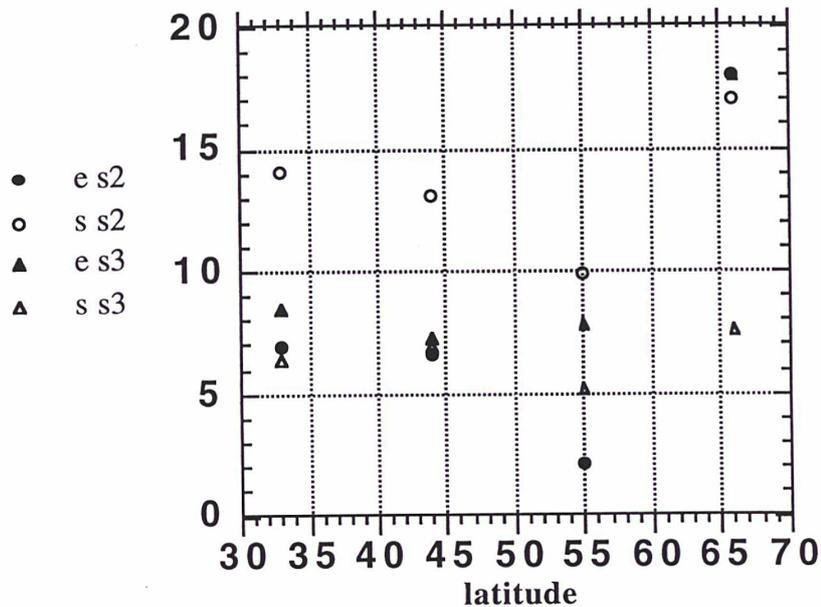
On y constate que les meilleurs résultats sont obtenus pour les latitudes moyennes, qui bénéficient à la fois d'un grand nombre de cercles (voir le tableau du 4.2.2) et d'une bonne répartition (voir le 5.1.7).

Les hautes latitudes admettent aussi des cercles bien répartis mais en moins grand nombre (deux fois moins à 77 ou 88 degrés qu'à 44), ce qui doit expliquer la qualité inférieure (pour le système 15 principalement) des résultats qui y sont obtenus.

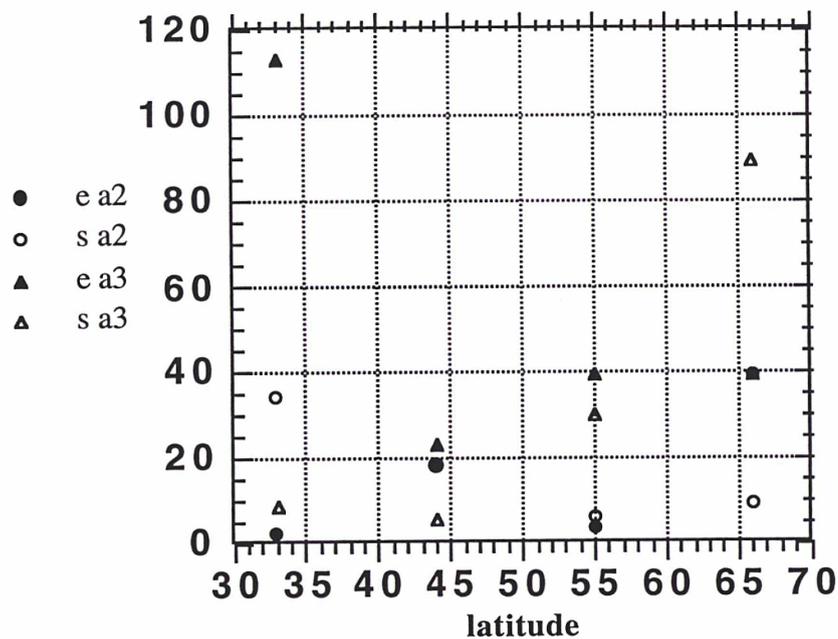
La répartition des cercles devient franchement lacunaire pour les basses latitudes, inférieures à 30 degrés, et c'est de plus là qu'il y a le moins de cercles. Il est alors à craindre que bon nombre d'objets multiples ne se comportent à ces latitudes comme le système 15, avec un refus total de coopération, même si on peut espérer qu'ils se contentent d'une certaine détérioration générale de la qualité de la solution, comme le système 17.



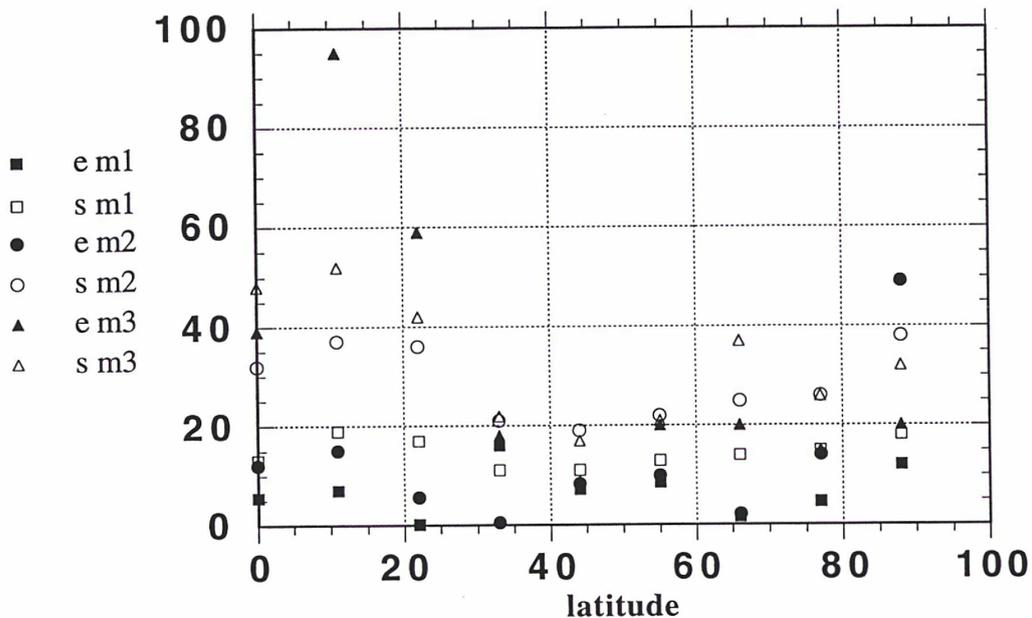
*Figure 44 : les magnitudes du système 15 et la latitude* Les erreurs et écarts-types en magnitude sont ici présentés en fonction de la latitude écliptique de l'objet. Les unités sont le millièème de magnitude et le degré.



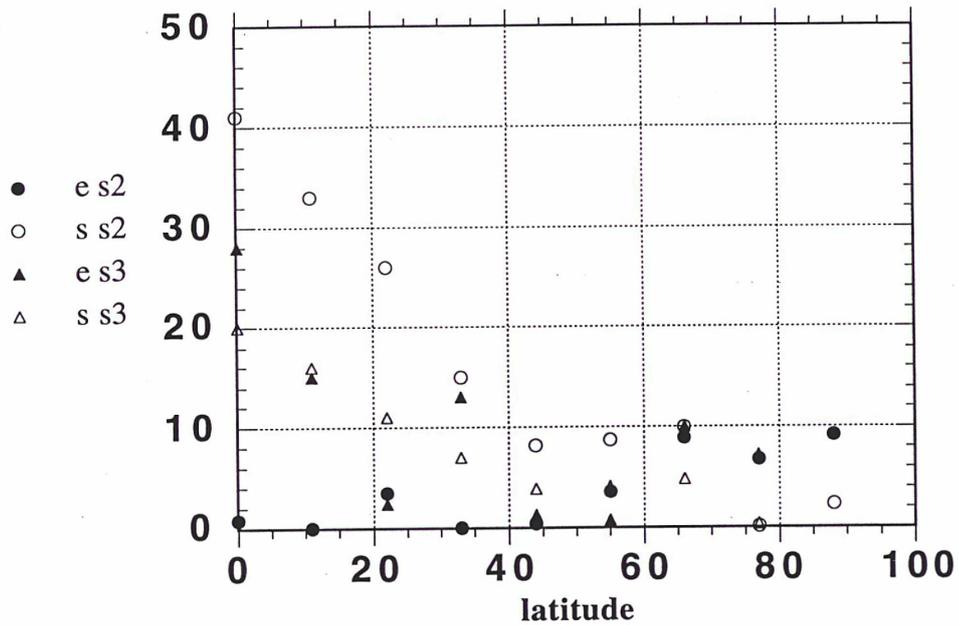
*Figure 45 : les séparations du système 15 et la latitude* Les erreurs et écarts-types en séparation sont ici présentés en fonction de la latitude écliptique de l'objet. Les unités sont le millièème de seconde d'arc et le degré.



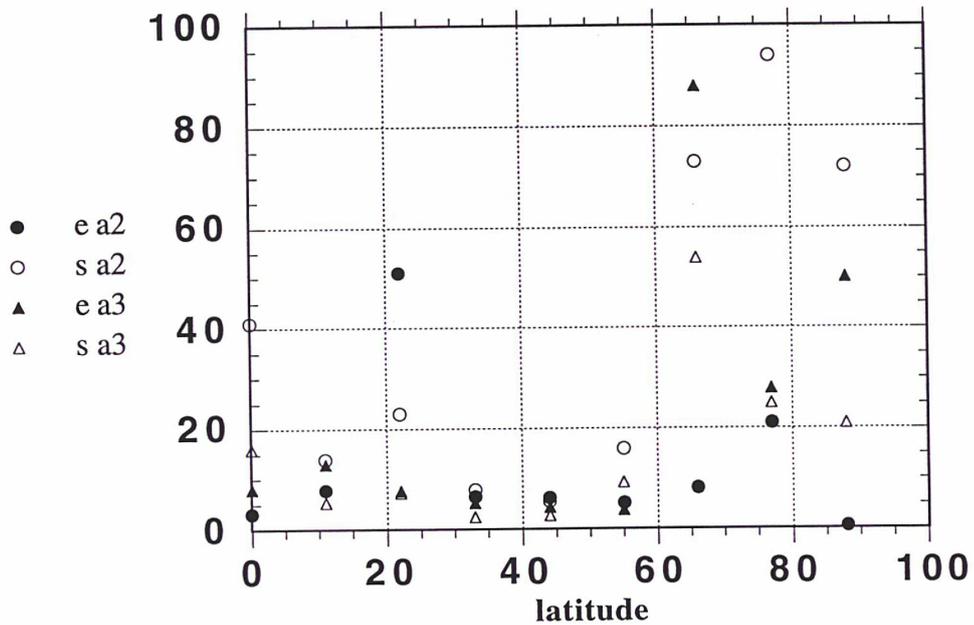
*Figure 46: les angles de position du système 15 et la latitude* Les erreurs et écarts-types en angles de position sont ici présentés en fonction de la latitude écliptique de l'objet. Les unités sont le centième de degré et le degré.



*Figure 47 : les magnitudes du système 17 et la latitude* Les erreurs et écarts-types en magnitude sont ici présentés en fonction de la latitude écliptique de l'objet. Les unités sont le millième de magnitude et le degré.



*Figure 48 : les séparations du système 17 et la latitude* Les erreurs et écarts-types en séparation sont ici présentés en fonction de la latitude écliptique de l'objet. Les unités sont le millième de seconde d'arc et le degré.



*Figure 49: les angles de position du système 17 et la latitude* Les erreurs et écarts-types en angles de position sont ici présentés en fonction de la latitude écliptique de l'objet. Les unités sont le centième de degré et le degré.

#### 7.4. Limites d'Hipparcos dans le traitement des objets multiples

La mission Hipparcos a été pensée et optimisée pour l'obtention des paramètres astrométriques d'étoiles simples et non pour l'étude des systèmes multiples. Les résultats de simulations qui précèdent permettent de donner une estimation des limites de la résolution des objets multiples par Hipparcos.

Très peu de résultats seront obtenus sur les objets comportant des différences de magnitudes supérieures à 5; ces systèmes sont, pour Hipparcos, des doubles ou des simples selon le cas.

Les objets situés à une latitude écliptique inférieure à 30 degrés risquent fort également de ne donner que des résultats d'assez faible qualité, voire pas de résultat du tout.

D'autre part, des résultats de faible qualité risquent d'apparaître pour les objets comportant des grandes séparations, approchant les 10 secondes d'arc ou au contraire des séparations de l'ordre de 0,2 secondes d'arc ou encore des différences de magnitudes supérieure à 3, ou situés à une latitude écliptique élevée de l'ordre de 80 degrés et plus.

Il va de soi que le cumul de plusieurs de ces difficultés rend d'autant plus probable une mauvaise qualité de la solution.

Rappelons tout de même qu'en dehors de ces types de cas, les solutions obtenues sont de bonne qualité, comme l'a montré le tableau de statistiques du 7.2.1.

## **8. Le traitement des données réelles**

Deux phases peuvent être distinguées dans le traitement des données réelles : d'abord le pré-traitement, qui comporte le regroupement, la calibration et la mise en forme des données, puis la résolution à proprement parler.

### **8.1. Pré-traitement**

#### **8.1.1. regroupement**

Dans la chaîne principale de réduction d'Hipparcos, les données sont regroupées GCR par GCR dans des fichiers, en particulier les "MODUL", un par GCR. Pour traiter un objet multiple, il faut disposer des observations de cet objet sur l'ensemble de la mission. Il est donc nécessaire de regrouper ces données dans des fichiers à part, un par objet.

En préliminaire, le fichier "MCL" nous donne les coordonnées du vecteur polaire et la date de début de chaque GCR.

Ensuite, chacun des fichiers "MODUL" est lu T4 par T4. Quand le numéro Hipparcos de l'objet observé à un T4 donné appartient à la liste des numéros des objets multiples, les quantités suivantes sont récupérées et placées dans le fichier d'observations de cet objet : le numéro du T4, qui permet de déduire l'instant d'observation, les 5 paramètres du signal et leurs écarts-types, l'indice du champ utilisé (précédent ou suivant) et les coordonnées de l'objet sur la grille, qui entrent dans les formules de calibration.

L'ensemble des données Hipparcos représente plus de deux mille fichiers "MODUL" archivés sur bandes magnétiques au CNES à TOULOUSE et qui ne peuvent être traités que quelques dizaines à la fois, compte tenu de leur taille.

#### **8.1.2. calibration**

##### 8.1.2.1. Les formules

Les calibrations d'Hipparcos sont utilisées pour ramener à des valeurs standard les observations d'objets multiples. Les grandeurs calibrées sont : l'angle de base  $\gamma$  du télescope, les coefficients de modulation  $M_1$  et  $M_2$  du premier et du second harmonique du signal, le décalage de phase  $v_2$  de ce signal et la réponse photométrique du détecteur sous la forme du rapport entre les intensités  $I$  réelle et  $I_0$  normalisée. Les formules employées sont les suivantes :

$$\Delta\gamma = P_1(c) + P_2(t) \quad (52a)$$

$$\Delta M_i = P_3(G, H) + c \cdot Q_3(G, H) \quad (52b)$$

$$\Delta v_2 = R_3(G, H) + c \cdot S_3(G, H) \quad (52c)$$

$$\frac{I}{I_0} = Q_1(t) + Q_2(c) + c \cdot R_1(t, G, H) + P_4(G, H) \quad (52d)$$

où  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $R_1$  sont des polynômes de degré 1,  $P_2$  et  $Q_2$  des polynômes de degré 2,  $P_3$ ,  $Q_3$ ,  $R_3$  et  $S_3$  des polynômes de degré total 3,  $P_4$  un polynôme de degré total 4,  $c$  l'indice de couleur de l'objet,  $G$  et  $H$  ses coordonnées sur la grille.

La date d'observation  $t$  n'intervient explicitement dans ces formules que pour un ajustement fin. En effet, la calibration étant effectuée à différentes dates successives, les coefficients des polynômes, que l'on trouve dans le fichier "CALGR", sont valables pour un intervalle de temps donné, et le temps intervient donc principalement dans les calibrations par l'adoption du jeu de coefficients valable sur l'intervalle contenant la date d'observation.

#### 8.1.2.2. Le problème de la couleur

L'indice de couleur intervient dans l'ensemble des formules de calibration. Cette calibration s'effectue sur le signal de la grille et on retrouve ici le problème fondamental de la réduction des objets multiples, à savoir l'impossibilité de distinguer, au niveau de ce signal de la grille, les contributions individuelles de chaque étoile de l'objet.

Donc, quand bien même des indices de couleur seraient disponibles pour chaque étoile de l'objet, seul un indice global pour l'ensemble de l'objet serait utilisable pour la calibration. D'autre part, même l'indice de couleur global n'est pas connu pour de nombreux systèmes, et il faut alors adopter une valeur moyenne  $B-V = 0,5$ .

La calibration des objets multiples est donc de moins bonne qualité que celle des autres objets dès que les étoiles qui les composent ont des indices de couleur différents, ou lorsque l'indice de couleur du système est inconnu.

Ce problème n'est cependant pas catastrophique car les termes de couleur sont tout de même des termes correctifs de faible amplitude, et leur méconnaissance ne sera très gênante que pour des systèmes présentant de forts effets de couleur.

On peut noter également que les fonctions  $A$  et  $B$  utilisées pour la résolution sont par construction (voir le paragraphe 3.4.1) indépendantes du décalage de phases  $v_2$  dont la calibration

dépend de la couleur, ce qui les rend moins sensibles à ces problèmes. Ce n'est cependant pas le cas de la fonction C.

Un schéma général du regroupement et de la calibration des données est présenté figure 50.

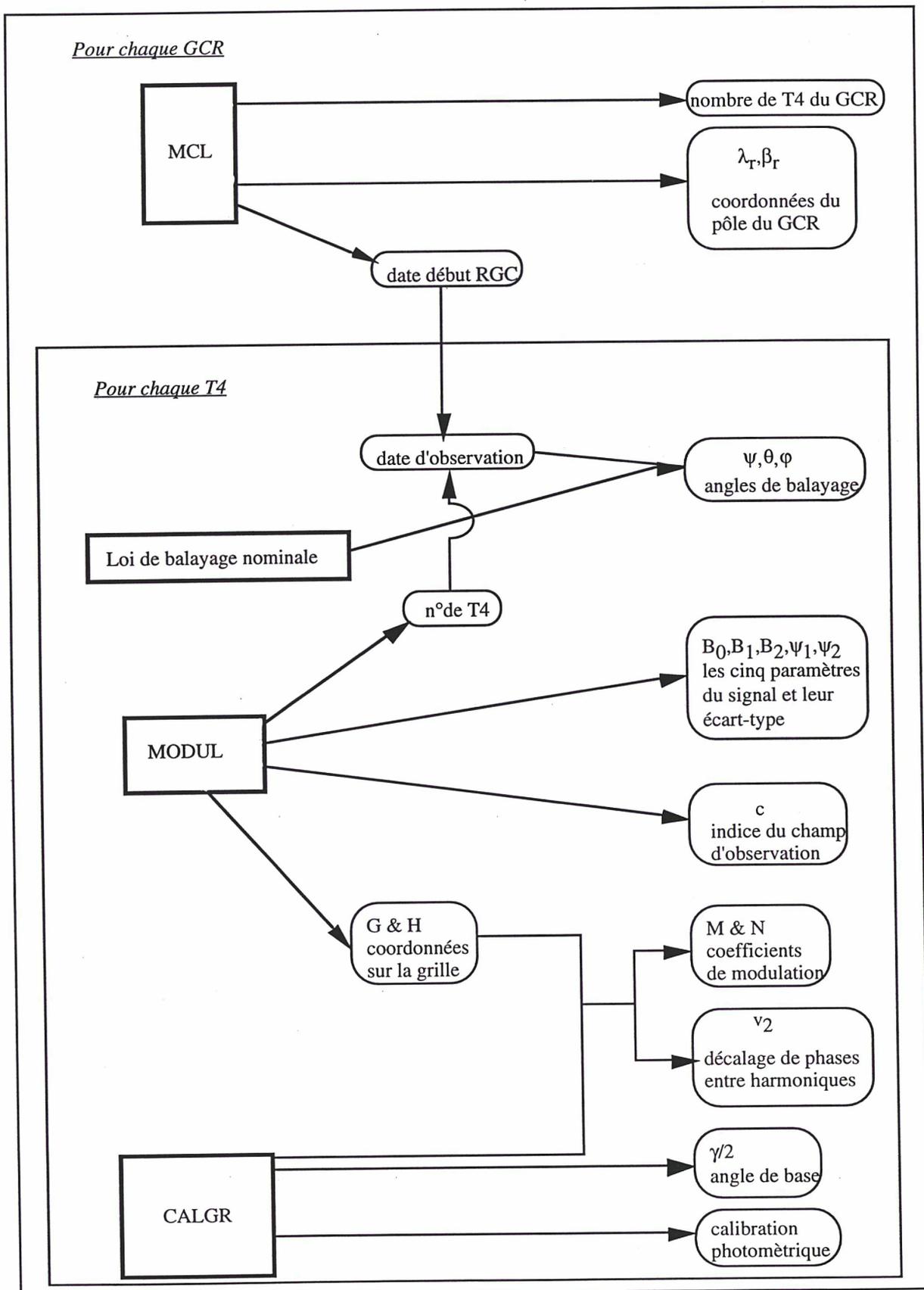


figure 50 : regroupement et calibration des données réelles

### 8.1.3. mise en forme

L'ensemble des calculs préliminaires présentés au chapitre 5.1 est effectué sur les données calibrées et les résultats de ces calculs sont stockés dans des fichiers individuels par objets. On y trouve donc une valeur de chacune des trois fonctions A, B et C et de l'angle de balayage par GCR, avec les écarts-types correspondants.

## 8.2 La résolution

Après le pré-traitement, la résolution des données réelles suit le même cours que celle des données simulées sauf pour quelques différences et cas non traités dans les simulations.

### 8.2.1 Les différences

Sans oublier le problème important de la couleur des étoiles qui a déjà été évoqué à propos de la calibration, les différences principales entre les simulations et le traitement des données réelles résideront dans la prise en compte du signal total de l'objet et la mise en oeuvre de la résolution.

#### 8.2.1.1 Le signal total de l'objet

Comme il a été dit au paragraphe 5.1.3, le signal total  $J_0$  de l'objet sera obtenu, pour les données réelles, par la chaîne de réduction photométrique d'Hipparcos, qui effectue une calibration fine de cette grandeur (voir Mignard & al., A & A 258, 142, 1992 ou le cours de Goutelas).

$J_0$  sera donc considéré non comme une inconnue mais comme un paramètre fixant la somme des signaux individuels des étoiles, fournissant ainsi une forte contrainte sur ces signaux.

#### 8.2.1.2 La stratégie de résolution

Comme l'a illustré le chapitre 7.1, la chaîne principale de réduction est assez longue à mettre en oeuvre. Pour les données réelles, un premier passage sera effectué directement avec les moindres carrés, plus rapides, pour profiter des cas où l'approximation de départ est de bonne qualité. Tous les cas qui n'auront pas fonctionné ou auront donné des valeurs de mauvaise qualité seront ensuite soumis à la chaîne principale, plus souple et plus robuste.

En outre, si certains cas s'avèrent trop difficiles à cause d'une mauvaise qualité du point de départ, il est toujours possible de pousser le développement en polynômes de Taylor au delà de l'ordre cinq, ce qui permettra de chercher l'objet à partir d'un point de départ plus lointain.

### 8.2.2 Cas non simulés

Parmi les problèmes qui n'ont pas été étudiés dans les simulations, il y a le cas des objets plus que triples et de celui des objets susceptibles de présenter un mouvement orbital sur l'ensemble de la mission.

#### 8.2.2.1 Ordres de multiplicité supérieurs

Le problème posé par un objet quadruple ou plus est de même nature que celui d'un triple, seul le nombre d'inconnues augmente : 9 inconnues indépendantes pour un objet quadruple, 12 pour un quintuple, 15 pour un sextuple contre 6 pour un triple.

Cela peut toutefois poser un problème de quantité d'information : chaque direction de balayage différente apporte 3 données indépendantes. Pour un objet n-uple, il faudra donc en trouver n ayant des angles de balayage suffisamment distincts pour amener des informations indépendantes, et donnant de plus des valeurs de qualité.

Cela promet de ne pas être évident.

#### 8.2.2.2 Les objets orbitaux

Les simulations ont été effectuées sur des objets censés rester fixes sur l'ensemble de la mission. Un certain nombre de systèmes pourront cependant présenter un déplacement orbital non négligeable pour au moins une des composantes.

Un terme de premier ordre peut alors être obtenu en divisant l'ensemble des observations en deux groupes chronologiques réduits séparément pour en tirer deux jeux de paramètres du système, à deux dates différentes.

Les termes du second ordre seront probablement rares, mais un tel terme pourrait être obtenu en ajoutant un troisième jeu de paramètres fourni par la réduction d'un ensemble d'observations du milieu de la mission.

Tout ceci suppose de travailler sur des ensembles de données deux fois moins riches en observations. Une méthode un peu plus complexe consiste à introduire dans l'ajustement par moindres carrés des termes dépendant du temps.

Cela permet de travailler sur l'ensemble des données, mais la chaîne principale de réduction ne pouvant pas être adaptée ainsi, il faudra disposer déjà d'une bonne approximation de départ des inconnues stellaires.

## Conclusion

La réduction des observations d'objets multiples du satellite Hipparcos pose, par rapport à celle des objets simples ou doubles, un problème particulier qui nécessite de déterminer la structure de l'objet avant de pouvoir lui faire suivre la chaîne principale de réduction astrométrique.

La méthode des fonctions de l'angle de balayage dont le principe et la mise au point ont été ici décrits permet de résoudre ce problème. Certaines de ses limites ont été mises en évidence par les essais de réduction de données simulées.

Ces limites sont principalement d'une part des trop grandes différences de magnitudes entre les composantes de l'objet cherché et d'autre part une latitude écliptique trop basse plaçant l'objet dans les zones où la loi de balayage d'Hipparcos restreint beaucoup la distribution et le nombre de directions d'observation. La couleur des étoiles de l'objet pose également un problème important au moment de la calibration des données observées.

En fait, le traitement des objets multiples permet d'atteindre les limites de la mission Hipparcos, qui a été pensée et optimisée pour obtenir une astrométrie fine d'étoiles simples, et non pour découvrir la structure de systèmes multiples.

Cependant, les résultats de simulations permettent aussi d'espérer que les 687 objets multiples concernés par ce travail seront, dans la grande majorité des cas, résolus avec une précision bonne, voire très bonne.

## **Bibliographie**

### **Histoire de la parallaxe**

"A short History of astronomy", Arthur Berry, 1898, réédité en 1961 par Dover Publications fut la source principale utilisée ici.

Des éléments plus complets sur ce sujet précis peuvent être trouvés dans "La recherche de la parallaxe des étoiles de Copernic à Bessel", François Mignard 1982, cahiers du séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences, université de Nice.

### **Hipparcos**

Le satellite, le catalogue d'entrée et la réduction des données ont été décrits en détail dans "The Hipparcos Mission, pre-launch Status", 1989, ESA SP 1111

Une description succincte se trouve dans "Astrométrie moderne", Jean Kovalevsky, 1990, lectures notes in physics, Springer-Verlag.

Trente trois articles sur la mission et ses premiers résultats ont été regroupés dans un numéro spécial d'Astronomy and Astrophysics : A&A 1992, 258, 1.

### **étoiles multiples**

Une fois mis de côté l'aspect problème des trois corps qui motive une littérature abondante, les ouvrages consacrés aux étoiles multiples - et non pas aux étoiles doubles principalement - brillent par leur absence. Quelques éléments d'intérêt général se trouvent dans "Binary and multiple systems of stars", Alan H. Batten 1973, Pergamon Press et dans "Double Stars", W.D. Heintz 1978, D. Reidel Publishing Company.

### **Les retombées d'Hipparcos**

Des spécialistes de nombreux domaines différents de l'astronomie font une présentation rapide de leur domaine et donnent une vision de ce que pourront y apporter les données Hipparcos dans "Hipparcos, une nouvelle donne pour l'astronomie", 1992, cours de Goutelas, Daniel Benest et Claude Froeschlé eds, OCA & SFSA qui contient également une présentation claire de la mission.

## Table des Figures

### 1 D'Hipparque à Hipparcos

<i>Figure 1 : La parallaxe et la distance.</i>	3
<i>Figure 2 : L'Univers de Herschell</i>	6

### 2 Hipparcos

<i>Figure 3 : Éclaté du satellite :</i>	10
<i>Figure 4 : Principe de l'optique d'Hipparcos :</i>	11
<i>Figure 5 : Variations de l'angle de base du télescope :</i>	11
<i>Figure 6 : Principe de l'analyse du signal :</i>	12
<i>Figure 7 : L'atténuation de la sensibilité du détecteur</i>	13
<i>Figure 8 : La loi de balayage d'Hipparcos :</i>	14
<i>Figure 9 : Partie du ciel balayée par Hipparcos :</i>	14
<i>Figure 10 : Les deux orbites</i>	15
<i>Figure 11 : La sphère, les étoiles et le temps :</i>	17

### 3 Hipparcos et les étoiles multiples

<i>Figure 12 : la hiérarchie des systèmes multiples</i>	20
<i>Figure 13 : Les phases du signal</i>	24
<i>Figure 14 : Fonction A</i>	27
<i>Figure 15: Ensemble de fonctions A</i>	27
<i>Figure 16 : Fonction C</i>	28
<i>Figure 17 : Ensemble de fonctions C</i>	28
<i>Figure 18 : schéma d'ensemble de la méthode de résolution.</i>	31

### 5 La synthèse de l'information

<i>Figure 19 : L'angle de balayage</i>	39
<i>Figure 20 : L'échantillonnage dû à la loi de balayage</i>	41
<i>Figure 21 : rapports des EQM</i>	42
<i>Figure 22 : Les coefficients de A</i>	(43) 44
<i>Figure 23 : Les coefficients de B</i>	44
<i>Figure 24 : Les coefficients de C</i>	45
<i>Figure 25 : Les nombres de coefficients</i>	(45) 46

<i>Figure 26 : L'influence de la séparation</i>	46
<i>Figure 27 : Moyennes des résidus</i>	48
<i>Figure 28: Ecart-types des résidus</i>	49

## **6 La résolution**

<i>Figure 29 : Fonction A du système 15 (points d'observation)</i>	53
<i>Figure 30 : Fonction A du système 15</i>	53
<i>Figure 31 : Fonction A du système 5 (points d'observation)</i>	54
<i>Figure 32 : Fonction A du système 5</i>	55
<i>Figure 33 : Fonction A du système 5, détail</i>	56
<i>Figure 34 : Les résidus et la qualité de la reconstitution</i>	57
<i>Figure 35 : L'actualisation du point de résolution</i>	64
<i>Figure 36 : La résolution du système d'équations</i>	65

## **7 Résultats de simulation**

<i>Figure 37 : La magnitude de la primaire</i>	71
<i>Figure 38 : La séparation primaire-secondaire</i>	71
<i>Figure 39 : L'angle de position de la secondaire</i>	73
<i>Figure 40 : La magnitude de la secondaire</i>	73
<i>Figure 41 : La séparation primaire-tertiaire</i>	74
<i>Figure 42 : L'angle de position de la tertiaire</i>	74
<i>Figure 43: La magnitude de la tertiaire</i>	75
<i>Figure 44 : les magnitudes du système 15 et la latitude</i>	80
<i>Figure 45 : les séparations du système 15 et la latitude</i>	80
<i>Figure 46: les angles de position du système 15 et la latitude</i>	81
<i>Figure 47 : les magnitudes du système 17 et la latitude</i>	81
<i>Figure 48 : les séparations du système 17 et la latitude</i>	82
<i>Figure 49: les angles de position du système 17 et la latitude</i>	82

## **8 Le traitement des données réelles**

<i>Figure 50 : regroupement et calibration des données réelles</i>	86
--	----

<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>1.D'Hipparque à Hipparcos</b> .....	<b>2</b>
1.1.La parallaxe géométrique	2
1.2.Les Précurseurs	3
1.3.Les retombées parallactiques du Copernicisme	3
1.4.Tycho Brahé et la distance des astres	4
1.5.La première parallaxe planétaire	5
1.6.Bradley, l'aberration et la nutation	5
1.7.Herschell et l'Univers	5
1.8.Les premières parallaxes stellaires	6
1.9.Les parallaxes au XXe siècle : une question d'atmosphère	7
<b>2.Hipparcos</b> .....	<b>8</b>
2.1.La genèse de la mission Hipparcos	8
2.2.Le satellite	9
2.2.1.La partie optique.....	9
2.2.2.La partie traitement du signal.....	12
2.2.3.Le balayage du ciel .....	13
2.2.4.Hipparcos sur orbite .....	14
2.3.Les observations d'Hipparcos	15
2.3.1.Réduction sur la grille.....	15
2.3.2.Projection sur les cercles .....	16
2.3.3.Reconstitution de la sphère.....	16
2.4.Hipparcos : quelques repères	17
<b>3.Hipparcos et les étoiles multiples</b> .....	<b>19</b>
3.1.Les étoiles multiples	19
3.1.1.Leur fréquence.....	19
3.1.2.La structure hiérarchique .....	19
3.2.Vous avez dit multiples ?	20
3.3.Le signal d'un objet multiple	21
3.4.Fonctions des différences de phases	22
3.4.1.Combinaisons des cinq paramètres du signal Hipparcos .....	22
3.4.2.Les inconnues spatiales.....	24
3.4.3.Présentation sommaire des trois fonctions .....	25
3.4.3.1.Périodicités et symétries.....	25
3.4.3.2.Ordres de grandeur .....	26
3.4.3.3.Représentations graphiques.....	26
3.5.Principe de la méthode de réduction	29
<b>4.Les simulations</b> .....	<b>32</b>
4.1.Les objets	32
4.2.Les GCR	33

4.2.1.Génération directe .....	33
4.2.2.Simulation de la loi de balayage .....	33
4.3.L'attitude .....	34
4.4.Le signal .....	35
<b>5.La synthèse de l'information .....</b>	<b>37</b>
5.1.Les valeurs des trois fonctions .....	37
5.1.1.Les coordonnées locales des étoiles.....	37
5.1.2.L'intensité du signal des étoiles.....	37
5.1.3.L'intensité totale du signal de l'objet.....	38
5.1.4.Troisième angle d'attitude $\Psi_e$ .....	38
5.1.5.L'angle de balayage .....	38
5.1.6.Les valeurs des fonctions.....	40
5.1.7.L'échantillonnage.....	40
5.1.8.La moyenne sur un transit.....	41
5.2.La reconstitution des trois fonctions .....	43
5.2.1.Les coefficients de Fourier .....	43
5.2.2.Le codage des fréquences .....	47
5.2.3.Les trois fonctions reconstituées.....	47
5.2.3.1.La sélection des fréquences.....	47
5.2.3.2.La détermination des coefficients .....	47
5.2.3.3.Les résidus.....	48
<b>6.La résolution.....</b>	<b>50</b>
6.1.Le choix des angles .....	50
6.1.1.Angles dépendants de l'objet.....	50
6.1.2.Angles indépendants de l'objet .....	52
6.1.3.La reconstitution est souvent très correcte.....	52
6.1.4.... mais parfois exécrable.....	54
6.1.5.Angles choisis aux points d'observation .....	56
6.2.Le système d'équations .....	57
6.2.1.La non linéarité .....	57
6.2.2.Le développement en polynôme de Taylor .....	59
6.2.3.Les dérivées partielles.....	59
6.2.4.Expression du système .....	60
6.2.5.Expression du jacobien .....	60
6.2.6.La résolution du système .....	61
6.2.7.La réduction "sans j1" .....	61
6.2.8.L'indice de qualité.....	62
6.2.9.Actualisation du point de calcul.....	62
6.2.10.Critères d'arrêt .....	64
6.3.Vision d'ensemble .....	64

6.4. L'ajustement final	66
<b>7.Résultats de simulations</b>	<b>67</b>
7.1. Une résolution pas à pas	67
7.2.Différents objets	69
7.2.1. Présentation générale	69
7.2.2. points remarquables	69
7.2.3. Les cas pathologiques	75
7.2.3.1. système 7	76
7.2.3.2. Système 13	76
7.2.3.3. système 16	77
7.2.3.4. système 20	77
7.3.L'influence de la loi de balayage	78
7.4. Limites d'Hipparcos dans le traitement des objets multiples	83
<b>8.Le traitement des données réelles</b>	<b>84</b>
8.1.Pré-traitement	84
8.1.1. regroupement	84
8.1.2. calibration	84
8.1.2.1. Les formules	84
8.1.2.2. Le problème de la couleur	85
8.1.3. mise en forme	87
8.2La résolution	87
8.2.1Les différences	87
8.2.1.1Le signal total de l'objet	87
8.2.1.2La stratégie de résolution	87
8.2.2Cas non simulés	88
8.2.2.1Ordres de multiplicité supérieurs	88
8.2.2.2Les objets orbitaux	88
<b>Conclusion</b>	<b>89</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# ANNEXES

(Les personnes susceptibles de présenter des symptômes d'allergie  
aux formules mathématiques sont priées de consulter un avis  
médical avant de consulter les pages qui suivent.)

## Annexe D : Dérivées partielles des trois fonctions

### Fonction A

ordre 1

ordre 2

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

ordre 3

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

ordre 4

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

ordre 5

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

### Fonction B

### Fonction C

ordre 1

ordre 2

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

ordre 3

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

trois dérivées par rapport aux  $j_i$

ordre 4

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

trois dérivées par rapport aux  $j_i$

ordre 5

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

trois dérivées par rapport aux  $j_i$

## Annexe H : Numéros Hipparcos des objets

I

I

I

I

I

I

II

II

II

II

III

III

III

III

IV

IV

IV

V

V

V

VI

VI

VI

VI

VII

VIII

VIII

VIII

VIII

IX

X

XI

XI

XI

XIII

XIV

XV

XV

XVI

XVII

XIX

XXI

<b>objets multiples</b>	<b>XXI</b>
triples	XXI
quadruples	XXII
sextuples	XXII
<b>objets parasités</b>	<b>XXII</b>
triples	XXII
quadruples	XXIII
quintuples	XXIII
sextuple	XXIII
<b>Annexe P : Sommes de polynômes homogènes</b>	<b>XXIV</b>
<b>Décomposition de polynômes homogènes</b>	<b>XXIV</b>
Degré 2	XXIV
Degré 3	XXIV
Degré 4	XXV
Degré 5	XXV
<b>Sommes des polynômes</b>	<b>XXVII</b>
ordre 2	XXVII
ordre 3	XXVII
ordre 4	XXVII
ordre 5	XXVIII
<b>Annexe H : Numéros Hipparcos des objets</b>	<b>XXI</b>
<b>objets multiples</b>	<b>XXI</b>
triples	XXI
quadruples	XXII
sextuples	XXII
<b>objets perturbés</b>	<b>XXII</b>
triples	XXII
quadruples	XXIII
quintuples	XXIII
sextuple	XXIII
<b>Annexe P : Sommes de polynômes homogènes</b>	<b>XXIV</b>
<b>Décomposition de polynômes homogènes</b>	<b>XXIV</b>
Degré 2	XXIV
Degré 3	XXIV
Degré 4	XXV
Degré 5	XXV
<b>Sommes des polynômes</b>	<b>XXVII</b>
ordre 2	XXVII
ordre 3	XXVII
ordre 4	XXVII
ordre 5	XXVIII

## Annexe D : Dérivées partielles des trois fonctions

### Fonction A

$$A = J_2 J_3 (1 - \cos(\delta_1)) + J_1 J_3 (1 - \cos(\delta_2)) + J_2 J_1 (1 - \cos(\delta_3))$$

où :

$$\delta_1 = -(f_1 \sin(\chi) + g_1 \cos(\chi)), \quad \delta_2 = -(f_2 \sin(\chi) + g_2 \cos(\chi)) \quad \text{et} \quad \delta_3 = -\delta_1 - \delta_2$$

#### ordre 1

$$\frac{\partial A}{\partial f_1} = (j_3 j_2 \sin(\delta_1) - j_1 j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi)) \qquad \frac{\partial A}{\partial g_1} = (j_3 j_2 \sin(\delta_1) - j_1 j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial A}{\partial j_1} = j_3 (1 - \cos(\delta_2)) + j_2 (1 - \cos(\delta_3))$$

$$\frac{\partial A}{\partial f_2} = (j_3 j_1 \sin(\delta_2) - j_1 j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi)) \qquad \frac{\partial A}{\partial g_2} = (j_3 j_1 \sin(\delta_2) - j_1 j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial A}{\partial j_2} = j_3 (1 - \cos(\delta_1)) + j_1 (1 - \cos(\delta_3))$$

$$\frac{\partial A}{\partial j_3} = j_2 (1 - \cos(\delta_1)) + j_1 (1 - \cos(\delta_2))$$

#### ordre 2

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = (j_3 j_2 \cos(\delta_1) + j_1 j_2 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial f_1 \partial f_2} = j_1 j_2 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^2 \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial g_1 \partial g_2} = j_1 j_2 \cos(\delta_3) \cdot (-\cos(\chi))^2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial f_1 \partial g_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial g_1 \partial f_2} = j_1 j_2 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi)) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = (j_3 j_1 \cos(\delta_2) + j_1 j_2 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_1 \partial f_1} = -j_2 \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi)) \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial j_1 \partial g_1} = -j_2 \sin(\delta_3) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_1 \partial f_2} = (j_3 \sin(\delta_2) - j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi)) \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial j_1 \partial g_2} = (j_3 \sin(\delta_2) - j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_2 \partial f_1} = (j_3 \sin(\delta_1) - j_1 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_2 \partial g_1} = (j_3 \sin(\delta_1) - j_1 \sin(\delta_3)) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_2 \partial f_2} = -j_1 \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_2 \partial g_2} = -j_1 \sin(\delta_3) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_3 \partial f_1} = j_2 \sin(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_3 \partial g_1} = j_2 \sin(\delta_1) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_3 \partial f_2} = j_1 \sin(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_3 \partial g_2} = j_1 \sin(\delta_2) \cdot (-\cos(\chi))$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_1 \partial j_2} = 1 - \cos(\delta_3) ; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_1 \partial j_3} = 1 - \cos(\delta_2) ; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_2 \partial j_3} = 1 - \cos(\delta_1)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial j_1^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_2^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial j_3^2} = 0$$

**ordre 3**

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 / p+q=3, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = (-j_3 j_2 \sin(\delta_1) + j_1 j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1+q_1+p_2+q_2=3 \wedge (p_1, q_1) \neq (0, 0) \wedge (p_2, q_2) \neq (0, 0)),$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = j_1 j_2 \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 / p+q=3, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = (-j_3 j_1 \sin(\delta_2) + j_1 j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1, q_1) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = j_2 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial f_2^p \partial g_2^q} = (j_3 \cos(\delta_2) + j_2 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_2, q_2) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = j_1 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\} , \frac{\partial^3 A}{\partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = (j_3 \cos(\delta_1) + j_1 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\} , \frac{\partial^3 A}{\partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = j_2 \cos(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\} , \frac{\partial^3 A}{\partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = j_1 \cos(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial j_3 \partial f_1 \partial f_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial j_3 \partial f_1 \partial g_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial j_3 \partial f_2 \partial g_1} = \frac{\partial^3 A}{\partial j_3 \partial g_1 \partial g_2} = 0$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1} = \frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_2} = -\sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial j_2 \partial g_1} = \frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial j_2 \partial g_2} = -\sin(\delta_3) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_2} = \sin(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^3 A}{\partial j_1 \partial j_3 \partial g_2} = \sin(\delta_2) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1} = \sin(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi)) \quad \frac{\partial^3 A}{\partial j_2 \partial j_3 \partial g_1} = \sin(\delta_1) \cdot (-\cos(\chi))$$

Toutes les autres dérivées partielles troisièmes de la fonction A comprenant au moins deux dérivations par rapport aux  $J_i$  sont nulles.

**ordre 4**

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3,4\}^2 / p+q=4 , \frac{\partial^4 A}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = -(j_3 j_2 \cos(\delta_1) + j_1 j_2 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0,1,2,3\}^4 / (p_1+q_1+p_2+q_2=4 \wedge (p_1, q_1) \neq (0,0) \wedge (p_2, q_2) \neq (0,0)) ,$$

$$\frac{\partial^4 A}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = -j_1 j_2 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3,4\}^2 / p+q=4 , \frac{\partial^4 A}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = -(j_3 j_1 \cos(\delta_2) + j_1 j_2 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2, 3\}^4 / (p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 3 \wedge (p_1, q_1) \neq (0, 0)),$$

$$\frac{\partial^4 A}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = j_2 \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 / p + q = 3, \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_1 \partial f_2^p \partial g_2^q} = (-j_3 \sin(\delta_2) + j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2, 3\}^4 / (p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 3 \wedge (p_2, q_2) \neq (0, 0)),$$

$$\frac{\partial^4 A}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = j_1 \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 / p + q = 3, \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = (-j_3 \sin(\delta_1) + j_1 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 / p + q = 3, \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = -j_1 \sin(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 / p + q = 3, \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = -j_2 \sin(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2, 3\}^4 / (p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 3 \wedge (p_1, q_1) \neq (0, 0) \wedge (p_2, q_2) \neq (0, 0)), \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 0$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 2,$$

$$\frac{\partial^4 A}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}, \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = \cos(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}, \quad \frac{\partial^4 A}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = \cos(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

Toutes les autres dérivées partielles quatrièmes de la fonction A comprenant au moins deux dérivations par rapport aux  $J_i$  sont nulles.

## ordre 5

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2 / p + q = 5, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = j_2(j_3 \sin(\delta_1) - j_1 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^4 / (p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 5 \wedge (p_1, q_1) \neq (0, 0) \wedge (p_2, q_2) \neq (0, 0)),$$

$$\frac{\partial^5 A}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = -j_1 j_2 \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2 / p + q = 5, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = j_1(j_3 \sin(\delta_2) - j_2 \sin(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3,4\}^2 / p+q=4, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_1 \partial f_2^p \partial g_2^q} = - (j_3 \cos(\delta_2) + j_2 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0,1,2,3,4\}^4 / (p_1+q_1+p_2+q_2=4 \wedge (p_1, q_1) \neq (0,0)),$$

$$\frac{\partial^5 A}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = - j_2 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3,4\}^2 / p+q=4, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = - (j_3 \cos(\delta_1) + j_1 \cos(\delta_3)) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0,1,2,3,4\}^4 / (p_1+q_1+p_2+q_2=4 \wedge (p_2, q_2) \neq (0,0)),$$

$$\frac{\partial^5 A}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = - j_1 \cos(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3,4\}^2 / p+q=4, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = - j_2 \cos(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3,4\}^2 / p+q=4, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = - j_1 \cos(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0,1,2,3,4\}^4 / (p_1+q_1+p_2+q_2=4 \wedge (p_1, q_1) \neq (0,0) \wedge (p_2, q_2) \neq (0,0)), \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 0$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0,1,2,3\}^4 / p_1+q_1+p_2+q_2=3,$$

$$\frac{\partial^5 A}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = \sin(\delta_3) \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3\}^2 / p+q=3, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = - \sin(\delta_2) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{0,1,2,3\}^2 / p+q=3, \quad \frac{\partial^5 A}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = - \sin(\delta_1) \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

Toutes les autres dérivées partielles cinquièmes de la fonction A comprenant au moins deux dérivations par rapport aux  $J_i$  sont nulles.

## Fonction B

$$B = J_2 J_3 (1 - \cos(2\delta_1)) + J_1 J_3 (1 - \cos(2\delta_2)) + J_2 J_1 (1 - \cos(2\delta_3))$$

où :

$$\delta_1 = - (f_1 \sin(\chi) + g_1 \cos(\chi)), \quad \delta_2 = - (f_2 \sin(\chi) + g_2 \cos(\chi)) \quad \text{et} \quad \delta_3 = -\delta_1 - \delta_2$$

Les formules des dérivées partielles de la fonction B se déduisent directement de celles de A en remplaçant  $\delta_1, \delta_2$  et  $\delta_3$  par, respectivement  $2\delta_1, 2\delta_2$  et  $2\delta_3$  et en remplaçant les facteurs de la forme  $(-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$  par des termes en  $2^{p+q}(-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$ .

### Fonction C

$$C = (J_2^2 J_3 - J_2 J_3^2) \cdot \{\sin(2\delta_1) - 2\sin(\delta_1)\} + (J_3^2 J_1 - J_3 J_1^2) \cdot \{\sin(2\delta_2) - 2\sin(\delta_2)\} \\ + (J_1^2 J_2 - J_1 J_2^2) \cdot \{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\} + 2J_1 J_2 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_2 - \delta_3) + \sin(\delta_3 - \delta_1)\}$$

où :

$$\delta_1 = -(f_1 \sin(\chi) + g_1 \cos(\chi)), \quad \delta_2 = -(f_2 \sin(\chi) + g_2 \cos(\chi)) \quad \text{et} \quad \delta_3 = -\delta_1 - \delta_2$$

#### ordre 1

$$\frac{\partial C}{\partial f_1} = 2 \left( \begin{aligned} & J_2 J_3 (J_2 - J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right) \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial C}{\partial g_1} = 2 \left( \begin{aligned} & J_2 J_3 (J_2 - J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial C}{\partial J_1} = \left( \begin{aligned} & J_3 (J_3 - 2J_1) \cdot \{\sin(2\delta_2) - 2\sin(\delta_2)\} + J_2 (2J_1 - J_2) \cdot \{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\} \\ & + 2J_2 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_2 - \delta_3) + \sin(\delta_3 - \delta_1)\} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial f_2} = 2 \left( \begin{aligned} & J_1 J_3 (J_3 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} + J_1 J_2 (J_2 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right) \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial C}{\partial g_2} = 2 \left( \begin{aligned} & J_1 J_3 (J_3 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} + J_1 J_2 (J_2 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right) \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial C}{\partial J_2} = \left( \begin{aligned} & J_3 (2J_2 - J_3) \cdot \{\sin(2\delta_1) - 2\sin(\delta_1)\} + J_1 (J_1 - 2J_2) \cdot \{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\} \\ & + 2J_1 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_2 - \delta_3) + \sin(\delta_3 - \delta_1)\} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial J_3} = \left( \begin{aligned} & J_2 (J_2 - 2J_3) \cdot \{\sin(2\delta_1) - 2\sin(\delta_1)\} + J_1 (2J_3 - J_1) \cdot \{\sin(2\delta_2) - 2\sin(\delta_2)\} \\ & + 2J_1 J_2 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_2 - \delta_3) + \sin(\delta_3 - \delta_1)\} \end{aligned} \right)$$

#### ordre 2

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_2 J_3 (J_2 - J_3) \cdot \{\sin(\delta_1) - 2\sin(2\delta_1)\} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_1 J_3 (J_3 - J_1) \cdot \{\sin(\delta_2) - 2\sin(2\delta_2)\} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0, 1), (1, 0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_1 \partial f_1} = 2 [J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} + J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_1 \partial g_1} = 2 [J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} + J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_1 \partial f_2} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_3(J_3 - 2J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} + J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ & + J_3 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_1 \partial g_2} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_3(J_3 - 2J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} + J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ & + J_3 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_2 \partial f_1} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_3(2J_2 - J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_2 \partial g_1} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_3(2J_2 - J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ & + J_1 J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_2 \partial f_2} = 2 [J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} + J_1 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_2 \partial g_2} = 2 [J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} + J_1 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_3 \partial f_1} = 2 [J_2(J_2 - 2J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1 J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_3 \partial g_1} = 2 [J_2(J_2 - 2J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1 J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\cos(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_3 \partial f_2} = 2 [J_1(2J_3 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} + J_1 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\sin(\chi))$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial j_3 \partial g_2} = 2 [J_1(2J_3 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} + J_1 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\}] \cdot (-\cos(\chi))$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial j_1^2} &= 2[J_3\{2\sin(\delta_2) - \sin(2\delta_2)\} + J_2\{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\}] \\ \frac{\partial^2 C}{\partial j_1 \partial j_2} &= 2[(J_1 - J_2) \cdot \{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\} + J_3\{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_3 - \delta_1) + \sin(\delta_2 - \delta_3)\}] \\ \frac{\partial^2 C}{\partial j_1 \partial j_3} &= 2[(J_3 - J_1) \cdot \{\sin(2\delta_2) - 2\sin(\delta_2)\} + J_2\{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_3 - \delta_1) + \sin(\delta_2 - \delta_3)\}] \\ \frac{\partial^2 C}{\partial j_2^2} &= 2[J_3\{\sin(2\delta_1) - 2\sin(\delta_1)\} - J_1\{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\}] \\ \frac{\partial^2 C}{\partial j_2 \partial j_3} &= 2[(J_2 - J_3) \cdot \{\sin(2\delta_1) - 2\sin(\delta_1)\} + J_1\{\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_3 - \delta_1) + \sin(\delta_2 - \delta_3)\}] \\ \frac{\partial^2 C}{\partial j_3^2} &= 2[J_2\{2\sin(\delta_1) - \sin(2\delta_1)\} + J_1\{\sin(2\delta_2) - 2\sin(\delta_2)\}]\end{aligned}$$

**ordre 3**

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\begin{aligned}\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p+q=3, \\ \frac{\partial^3 C}{\partial f_1^p \partial g_1^q} &= 2 \left[ \begin{aligned} &J_2 J_3 (J_2 - J_3) \cdot \{\cos(\delta_1) - 4\cos(2\delta_1)\} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ &+ J_1 J_2 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8\cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1), \\ \frac{\partial^3 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} &= 2 \left[ \begin{aligned} &J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ &+ J_1 J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + 4\cos(\delta_1 - \delta_3) - 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2), \\ \frac{\partial^3 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} &= 2 \left[ \begin{aligned} &J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ &+ J_1 J_2 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2\cos(\delta_1 - \delta_3) - 4\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p+q=3, \\ \frac{\partial^3 C}{\partial f_2^p \partial g_2^q} &= 2 \left[ \begin{aligned} &J_1 J_3 (J_3 - J_1) \cdot \{\cos(\delta_2) - 4\cos(2\delta_2)\} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ &+ J_1 J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q\end{aligned}$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\begin{aligned}\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}, \\ \frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial f_1^p \partial g_1^q} &= 2 \left[ \begin{aligned} &J_2 (2J_1 - J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ &+ J_2 J_3 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q\end{aligned}$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0,1), (1,0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0,1), (1,0)\}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\},$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_3(J_3 - 2J_1) \cdot \{\sin(\delta_2) - 2\sin(2\delta_2)\} + J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ + J_3 J_2 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\},$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_3(2J_2 - J_3) \cdot \{\sin(\delta_1) - 2\sin(2\delta_1)\} + J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0,1), (1,0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0,1), (1,0)\}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\},$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \\ + J_3 J_1 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\},$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(J_2 - 2J_3) \cdot \{\sin(\delta_1) - 2\sin(2\delta_1)\} \\ + J_2 J_1 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0,1), (1,0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0,1), (1,0)\}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 J_2 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\},$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(2J_3 - J_1) \cdot \{\sin(\delta_2) - 2\sin(2\delta_2)\} \\ + J_2 J_1 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p, q) \in \{(0,1), (1,0)\}, \quad \frac{\partial^3 C}{\partial j_1^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 J_2 \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0,1), (1,0)\},$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 [J_3 \cdot \{\cos(\delta_2) - \cos(2\delta_2)\} + J_2 \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\}] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ + J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{\cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3)\} \\ + J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_3 - J_1) \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} \\ + J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 \left[ J_3 \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + J_1 \cdot \{\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} , \quad \frac{\partial^3 C}{\partial j_2^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4J_1 \cdot \{\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_2 - J_3) \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} \\ + J_1 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} ,$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2J_1 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} , \quad \frac{\partial^3 C}{\partial j_3^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = -4J_2 \cdot \{\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1), (1,0)\} , \quad \frac{\partial^3 C}{\partial j_3^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4J_1 \cdot \{\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

trois dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1^2 \partial j_2} = 2 \{\sin(2\delta_3) - 2\sin(\delta_3)\}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_2^2} = 2 \{2\sin(\delta_3) - \sin(2\delta_3)\}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1^2 \partial j_3} = 2 \{ 2 \sin(\delta_2) - \sin(2\delta_2) \}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2^2 \partial j_3} = 2 \{ \sin(2\delta_1) - 2 \sin(\delta_1) \}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3} = 2 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_3 - \delta_1) + \sin(\delta_2 - \delta_3) \}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1 \partial j_3^2} = 2 \{ \sin(2\delta_2) - 2 \sin(\delta_2) \}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_2 \partial j_3^2} = 2 \{ 2 \sin(\delta_1) - \sin(2\delta_1) \}$$

$$\frac{\partial^3 C}{\partial j_1^3} = \frac{\partial^3 C}{\partial j_2^3} = \frac{\partial^3 C}{\partial j_3^3} = 0$$

**ordre 4**

pas de dérivée par rapport aux  $J_i$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_2 J_3 (J_2 - J_3) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_1) - \sin(\delta_1) \} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 16 \sin(\delta_1 - \delta_3) + \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1 + q_1 = 3 \wedge p_2 + q_2 = 1),$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 8 \sin(\delta_1 - \delta_3) + 2 \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 2),$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 4 \sin(\delta_1 - \delta_3) + 4 \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 3),$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 2 \sin(\delta_1 - \delta_3) + 8 \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_1 J_3 (J_3 - J_1) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_2) - \sin(\delta_2) \} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ 8 \sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} \\ & + J_1 J_2 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - \sin(\delta_1 - \delta_3) + 16 \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p+q=3,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_2 (2J_1 - J_2) \cdot \{ 4 \cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} \\ & + J_2 J_3 \{ -\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8 \cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1),$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{aligned} & J_2 (2J_1 - J_2) \cdot \{ 4 \cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} \\ & + J_2 J_3 \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) + 4 \cos(\delta_1 - \delta_3) - 2 \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{aligned} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2\cos(\delta_1 - \delta_3) - 4\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_3(J_3 - 2J_1) \cdot \{\cos(\delta_2) - 4\cos(2\delta_2)\} + J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_3(2J_2 - J_3) \cdot \{\cos(\delta_1) - 4\cos(2\delta_1)\} + J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8\cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1) ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + 4\cos(\delta_1 - \delta_3) - 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2\cos(\delta_1 - \delta_3) - 4\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(J_2 - 2J_3) \cdot \{\cos(\delta_1) - 4\cos(2\delta_1)\} \\ + J_1 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8\cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1) ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + 4\cos(\delta_1 - \delta_3) - 2\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2\cos(\delta_1 - \delta_3) - 4\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(2J_3 - J_1) \cdot \{\cos(\delta_2) - 4\cos(2\delta_2)\} \\ + J_1 J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 \wedge (p_1, q_1) \neq (0, 0) ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 4J_2 \{ \sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 [ J_3 \{ 2\sin(2\delta_2) - \sin(\delta_2) \} + J_2 \{ 2\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} ] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{ \sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3) \} \\ + J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0, 1), (1, 0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{ \sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3) \} \\ + J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{ \sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3) \} \\ + J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 J_2 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0, 1), (1, 0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_2 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_3 - J_1) \cdot \{ \sin(\delta_2) - 2\sin(2\delta_2) \} \\ + J_2 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} , \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_2^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 \left[ \begin{array}{l} J_3 \{ \sin(\delta_1) - 2\sin(2\delta_1) \} \\ - J_1 \{ \sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0, 1), (1, 0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\} ,$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 4 J_1 \{ 2\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2),(1,1),(2,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_2^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4J_1 \{2\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2),(1,1),(2,0)\},$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_2 - J_3) \cdot \{\sin(\delta_1) - 2\sin(2\delta_1)\} \\ + J_1 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0,1),(1,0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0,1),(1,0)\},$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2J_1 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2),(1,1),(2,0)\},$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2J_1 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2),(1,1),(2,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_3^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4J_2 \{2\sin(2\delta_1) - \sin(\delta_1)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0,1),(1,0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0,1),(1,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_3^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 0$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2),(1,1),(2,0)\},$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial j_3^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4J_1 \{ \sin(\delta_2) - 2\sin(2\delta_2) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

trois dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_1^2 \partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = \frac{\partial^4 C}{\partial j_1^2 \partial j_2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 \{ \cos(\delta_3) - \cos(2\delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_1^2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 \{ \cos(\delta_2) - \cos(2\delta_2) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = \frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 \{ \cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) - 2\cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \quad \frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \{ -\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2\cos(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \frac{\partial^4 C}{\partial j_1 \partial j_3^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 \{ \cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \frac{\partial^4 C}{\partial j_2^2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 \{ \cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,1),(1,0)\}, \frac{\partial^4 C}{\partial j_2 \partial j_3^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 \{ \cos(\delta_1) - \cos(2\delta_1) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

Toutes les autres dérivées partielles quatrièmes de la fonction C comprenant au moins trois dérivations par rapport aux  $J_i$  sont nulles.

### ordre 5

#### pas de dérivée par rapport aux $J_i$

$$\forall (p,q) \in \{0, \dots, 5\}^2 / p+q=5, \\ \frac{\partial^5 C}{\partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2 J_3 (J_2 - J_3) \cdot \{ 16 \cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1) \} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ \cos(\delta_3) - 16 \cos(2\delta_3) \} \\ + J_1 J_2 J_3 \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) - 32 \cos(\delta_1 - \delta_3) + \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 4\}^4 / (p_1 + q_1 = 4 \wedge p_2 + q_2 = 1), \\ \frac{\partial^5 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ \cos(\delta_3) - 16 \cos(2\delta_3) \} + J_1 J_2 J_3 \cdot \\ \{ -\cos(\delta_1 - \delta_2) - 16 \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2 \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1 + q_1 = 3 \wedge p_2 + q_2 = 2), \\ \frac{\partial^5 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ \cos(\delta_3) - 16 \cos(2\delta_3) \} + J_1 J_2 J_3 \cdot \\ \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) - 8 \cos(\delta_1 - \delta_3) + 4 \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 3), \\ \frac{\partial^5 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ \cos(\delta_3) - 16 \cos(2\delta_3) \} + J_1 J_2 J_3 \cdot \\ \{ -\cos(\delta_1 - \delta_2) - 4 \cos(\delta_1 - \delta_3) + 8 \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 4\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 4), \\ \frac{\partial^5 C}{\partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ \cos(\delta_3) - 16 \cos(2\delta_3) \} + J_1 J_2 J_3 \cdot \\ \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) - 2 \cos(\delta_1 - \delta_3) + 16 \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p,q) \in \{0, \dots, 5\}^2 / p+q=5, \\ \frac{\partial^5 C}{\partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1 J_3 (J_3 - J_1) \cdot \{ 16 \cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2) \} + J_1 J_2 (J_1 - J_2) \cdot \{ \cos(\delta_3) - 16 \cos(2\delta_3) \} \\ + J_1 J_2 J_3 \{ -\cos(\delta_1 - \delta_2) - \cos(\delta_1 - \delta_3) + 16 \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

une dérivée par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 16\sin(\delta_1 - \delta_3) + \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1+q_1=3 \wedge p_2+q_2=1),$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 8\sin(\delta_1 - \delta_3) + 2\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1+q_1=2 \wedge p_2+q_2=2),$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 4\sin(\delta_1 - \delta_3) + 4\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1+q_1=1 \wedge p_2+q_2=3),$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 2\sin(\delta_1 - \delta_3) + 8\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_3(J_3 - 2J_1) \cdot \{8\sin(2\delta_2) - \sin(\delta_2)\} + J_2(2J_1 - J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_2 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - \sin(\delta_1 - \delta_3) + 16\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_3(2J_2 - J_3) \cdot \{8\sin(2\delta_1) - \sin(\delta_1)\} + J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 16\sin(\delta_1 - \delta_3) + \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1+q_1=3 \wedge p_2+q_2=1),$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 8\sin(\delta_1 - \delta_3) + 2\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1+q_1=2 \wedge p_2+q_2=2),$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 4\sin(\delta_1 - \delta_3) + 4\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1+q_1=1 \wedge p_2+q_2=3),$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 2\sin(\delta_1 - \delta_3) + 8\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1+p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1+q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(J_1 - 2J_2) \cdot \{8\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \\ + J_1 J_3 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - \sin(\delta_1 - \delta_3) + 16\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_2(J_2 - 2J_3) \cdot \{8\sin(2\delta_1) - \sin(\delta_1)\} \\ + J_1 J_2 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 16\sin(\delta_1 - \delta_3) + \sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1 + q_1 = 3 \wedge p_2 + q_2 = 1) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 J_2 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 8\sin(\delta_1 - \delta_3) + 2\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 J_2 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - 4\sin(\delta_1 - \delta_3) + 4\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 3) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 J_2 \{ -\sin(\delta_1 - \delta_2) - 2\sin(\delta_1 - \delta_3) + 8\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 4\}^2 / p+q=4$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} J_1(2J_3 - J_1) \cdot \{8\sin(2\delta_2) - \sin(\delta_2)\} \\ + J_1 J_2 \{ \sin(\delta_1 - \delta_2) - \sin(\delta_1 - \delta_3) + 16\sin(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

deux dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_1, q_1) \neq (0, 0) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 4 J_2 \{ 4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p+q=3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 [ J_3 \{ 4\cos(2\delta_2) - \cos(\delta_2) \} + J_2 \{ 4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} ] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p+q=3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{ 4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} + \\ J_3 \{ -\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8\cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{ 4\cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3) \} \\ + J_3 \{ \cos(\delta_1 - \delta_2) + 4\cos(\delta_1 - \delta_3) - 2\cos(\delta_2 - \delta_3) \} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{4 \cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_3 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2 \cos(\delta_1 - \delta_3) - 4 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_1 - J_2) \cdot \{4 \cos(2\delta_3) - \cos(\delta_3)\} \\ + J_3 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8 \cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + 4 \cos(\delta_1 - \delta_3) - 2 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_2 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2 \cos(\delta_1 - \delta_3) - 4 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_3 - J_1) \cdot \{\cos(\delta_2) - 4 \cos(2\delta_2)\} \\ + J_2 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 [J_3 \{\cos(\delta_1) - 4 \cos(2\delta_1)\} + J_1 \{\cos(\delta_3) - 4 \cos(2\delta_3)\}] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, \dots, 3\}^4 / (p_2, q_2) \neq (0, 0) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 4 J_1 \{\cos(\delta_3) - 4 \cos(2\delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \left[ \begin{array}{l} 2(J_3 - J_2) \cdot \{4 \cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} + \\ J_1 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 8 \cos(\delta_1 - \delta_3) - \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \end{array} \right] \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 J_1 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + 4 \cos(\delta_1 - \delta_3) - 2 \cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2) ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2J_1 \{-\cos(\delta_1 - \delta_2) + 2\cos(\delta_1 - \delta_3) - 4\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2J_1 \{\cos(\delta_1 - \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_3) - 8\cos(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 , \quad \frac{\partial^5 C}{\partial j_3^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4J_2 \{4\cos(2\delta_1) - \cos(\delta_1)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p, q) \in \{0, \dots, 3\}^2 / p + q = 3 , \quad \frac{\partial^5 C}{\partial j_3^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4J_1 \{\cos(\delta_2) - 4\cos(2\delta_2)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / ((p_1 + q_1 = 2 \wedge p_2 + q_2 = 1) \vee (p_1 + q_1 = 1 \wedge p_2 + q_2 = 2)) , \quad \frac{\partial^5 C}{\partial j_3^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 0$$

trois dérivées par rapport aux  $j_i$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 2 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1^2 \partial j_2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 4 \{\sin(\delta_3) - 2\sin(2\delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\} , \quad \frac{\partial^5 C}{\partial j_1^2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 \{2\sin(2\delta_2) - \sin(\delta_2)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1, p_2, q_2) \in \{0, 1, 2\}^4 / p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 2 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2^2 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 4 \{2\sin(2\delta_3) - \sin(\delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2\}^2 / p + q = 2 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 2 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + 4\sin(\delta_1 - \delta_3) - \sin(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p_1, q_1) \in \{(0, 1), (1, 0)\} \wedge \forall (p_2, q_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3 \partial f_1^{p_1} \partial g_1^{q_1} \partial f_2^{p_2} \partial g_2^{q_2}} = 2 \{\sin(\delta_1 - \delta_2) + 2\sin(\delta_1 - \delta_3) - 2\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^{p_1 + p_2} \cdot (-\cos(\chi))^{q_1 + q_2}$$

$$\forall (p, q) \in \{0, 1, 2\}^2 / p + q = 2 ,$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_2 \partial j_3 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 2 \{-\sin(\delta_1 - \delta_2) + \sin(\delta_1 - \delta_3) - 4\sin(\delta_2 - \delta_3)\} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\}, \frac{\partial^5 C}{\partial j_1 \partial j_3^2 \partial f_2^p \partial g_2^q} = 4 \{ \sin(\delta_2) - 2 \sin(2\delta_2) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\}, \frac{\partial^5 C}{\partial j_2^2 \partial j_3 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 \{ \sin(\delta_1) - 2 \sin(2\delta_1) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

$$\forall (p,q) \in \{(0,2), (1,1), (2,0)\}, \frac{\partial^5 C}{\partial j_2 \partial j_3^2 \partial f_1^p \partial g_1^q} = 4 \{ 2 \sin(2\delta_1) - \sin(\delta_1) \} \cdot (-\sin(\chi))^p \cdot (-\cos(\chi))^q$$

Toutes les autres dérivées partielles cinquièmes de la fonction C comprenant au moins trois dérivations par rapport aux  $J_j$  sont nulles.

Annexe H : Numéros Hipparcos des objets

## objets multiples

## triples

1392	1699	1732	2252	2328	2533	2642	4044
4641	5348	5468	6060	6226	7158	7314	7372
7841	8938	9114	9500	9583	9640	10032	11569
11769	13424	13867	14376	14913	15450	16143	16172
17347	17923	18133	18818	19868	20157	20909	21434
21730	21787	22140	22255	22322	22856	22951	23592
23605	24349	24436	25240	25253	25342	25499	25837
26220	26221	26327	26402	26989	27218	27611	27783
27981	28187	28442	29087	29118	29685	30091	30867
30961	31437	31693	32349	32438	32628	33255	33985
34179	34219	34617	35263	35374	35613	35997	37096
37134	37198	37229	37614	38106	38562	38856	38931
39495	39533	40167	41361	41389	41616	41746	42908
42937	43109	43512	43794	43862	44127	44190	44804
45189	45581	45999	47174	47669	47892	48645	48731
49658	50018	50038	50425	50531	50637	51255	51496
52212	52526	52615	52944	53568	54130	55149	55574
57269	57432	57994	58112	58208	59017	59050	59966
61898	62584	63933	64425	64986	65518	66984	68717
69062	69241	69684	69894	70270	70327	70707	70753
70768	71109	72000	72427	72764	73108	74116	75427
75452	75790	76001	76143	76566	77486	77542	77574
77845	78394	78445	78540	78727	78749	78808	78842
78849	79230	79607	80625	81225	81619	82321	82676
83155	83260	83733	84312	85045	85151	85455	86011
86221	88311	88330	88375	88629	88841	88937	89156
89655	90032	90284	90441	90753	90996	91385	92373
92926	93466	93775	94000	94141	94173	94252	94387
95301	95542	95646	95759	96083	96171	96858	97162
97307	97496	97498	97578	97787	98253	98457	99085
99122	99283	99521	99861	99862	100058	100064	100127
100146	100192	100268	100295	100397	101319	102390	102648
103542	103859	104110	104113	104304	104440	105072	105862
106074	106774	106956	107461	107588	107611	107874	108072
109180	109651	111618	111680	112170	112241	112915	113354

114782    114929    115002    115022    115273    116243    117326

**quadruples**

4121    23624    30075    31130    35415    56769    79396    82936  
 84228    92027    92317    92507    98825    104047    108519    110539  
 114791

**sextuples**

35793    54948

**objets parasites****triples**

374    375    1076    1700    2327    2460    2487    2713  
 2715    3291    3843    3845    3923    3926    5385    7201  
 8282    8284    8475    10191    10659    10661    10674    10692  
 10769    10772    11469    11692    12375    12512    12973    13490  
 13543    13544    14270    15140    15144    16216    16740    16742  
 17126    17465    17468    17642    17646    17749    17750    18029  
 18031    20123    20555    20560    21087    22140    22290    22539  
 23419    23421    23452    24019    24020    24964    25763    25764  
 25773    26016    26536    26549    26780    26877    26878    27205  
 27600    27604    27634    28936    28937    29126    29127    29732  
 30014    30362    30365    31781    31784    31821    31825    31999  
 32000    32029    32075    33543    33544    33568    33645    33646  
 33649    33748    34301    34716    34718    35034    35035    35060  
 35129    35167    35261    35417    35666    36251    36609    36925  
 37102    37103    37486    37491    37975    38620    39083    39328  
 39620    39673    40425    40428    40927    41246    42379    42435  
 43794    44443    45433    45840    46213    46216    46365    47346  
 47708    47736    48406    48610    48993    50575    51662    51751  
 51797    52583    52585    53131    53132    53332    53568    54155  
 54353    57146    57148    58036    58456    58789    58909    58962  
 59272    59273    60471    60749    60750    61062    61063    61463  
 63307    64454    64603    64960    65378    66465    66739    66742  
 69399    69401    69577    69579    69952    71097    71100    71500  
 71502    72028    72029    74323    74911    74915    76051    76052  
 78385    78662    78821    79588    79592    79936    79996    79997

80062	80063	80448	80879	80880	81696	81702	81836
82936	83038	83042	83369	83371	83509	84100	84512
84513	85681	86441	86548	86647	87343	87345	88062
88421	88637	88639	88734	88759	89158	89364	91635
91636	91712	91720	91724	92005	92006	92118	92317
92964	93268	93519	93539	93943	93945	94038	94042
94223	94227	94856	94959	94961	95646	96005	96073
96074	96298	97508	97733	97905	98017	98216	98295
98369	98528	98534	99002	99749	100086	100369	101150
101216	101233	101235	101292	101319	101425	101430	102235
102764	102782	102784	103569	103571	103995	103996	104066
104067	104107	104833	104835	104878	105280	105569	105585
105743	105747	105792	106884	106886	106890	107174	107480
107481	108048	108119	108121	108227	108230	108291	108802
108983	109064	110145	110583	110893	111580	111582	111584
112317	112325	112326	112465	112854	112856	113180	113323
114063	114207	114209	114773	115131	115269	115272	115458
115981	115983	116016	116017	116488	117226	117426	117643
117646	117748	117752	118101	120004			

**quadruples**

4451	13308	18989	22289	26224	26551	27783	27786
30953	44542	44545	50572	50640	51929	55692	55855
59017	59018	74660	76563	76566	83506	84102	88333
91075	93538	98535	99862	101370	102681	102685	103658
113563							

**quintuples**

4121 99001

**sextuple**

99861

Annexe P : Sommes de polynômes homogènes

## Décomposition de polynômes homogènes

## Degré 2

Soit  $P_2$  un polynôme homogène de degré 2 par rapport à ses  $n$  inconnues

$$P_2(x_1 \cdots x_n) = \sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^n P_{2l_1l_2} x_{l_2} \right) x_{l_1}$$

on a

$$P_2 = \sum_{l_1=1}^n \left( 2 \sum_{l_2=1}^{l_1-1} P_{2l_1l_2} x_{l_2} + P_{2l_1l_1} \right) x_{l_1}$$

Vérification du nombre de termes :

Termes	Nombre
$P_{2l_1l_1}$	$n$
$P_{2l_1l_2}$	$+ 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$
Ensemble	$n^2$

## Degré 3

Soit  $P_3$  un polynôme homogène de degré 3 par rapport à ses  $n$  inconnues

$$P_3(x_1 \cdots x_n) = \sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^n \left( \sum_{l_3=1}^n P_{3l_1l_2l_3} x_{l_3} \right) x_{l_2} \right) x_{l_1}$$

on a

$$P_3 = \sum_{l_1=1}^n \left[ 3 \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left( 2 \sum_{l_3=1}^{l_2-1} P_{3l_1l_2l_3} x_{l_3} + P_{3l_1l_2l_2} x_{l_2} + P_{3l_1l_1l_2} x_{l_1} \right) x_{l_2} + P_{3l_1l_1l_1} x_{l_1}^2 \right] x_{l_1}$$

Vérification du nombre de termes :

Termes	Nombre
$P_{3l_1l_1l_1}$	$n$
$P_{3l_1l_1l_2}$	$+ 3 \times \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{3l_1l_2l_2}$	$+ 3 \times \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{3l_1l_2l_3}$	$+ 6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
Ensemble	$n^3$

## Degré 4

Soit  $P_4$  un polynôme homogène de degré 4 par rapport à ses  $n$  inconnues.

$$P_4(x_1 \cdots x_n) = \sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^n \left( \sum_{l_3=1}^n \left( \sum_{l_4=1}^n P_{4l_1l_2l_3l_4} x_{l_4} \right) x_{l_3} \right) x_{l_2} \right) x_{l_1}$$

on a

$$P_4 = \sum_{l_1=1}^n \left( 2 \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left[ 3 \left\{ 2 \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \left( 2 \sum_{l_4=1}^{l_3-1} P_{4l_1l_2l_3l_4} x_{l_4} \right) x_{l_3} + P_{4l_1l_1l_2l_2} x_{l_1} x_{l_2} \right\} x_{l_2} + P_{4l_1l_1l_1l_1} x_{l_1}^3 \right] x_{l_1} \right)$$

$$+ 2 \left( P_{4l_1l_2l_2l_2} x_{l_2}^2 + P_{4l_1l_1l_1l_2} x_{l_1}^2 \right)$$

Vérification du nombre de termes :

Termes	Nombre
$P_{4l_1l_1l_1l_1}$	$n$
$P_{4l_1l_1l_1l_2}$	$+ 4 \times \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{4l_1l_2l_2l_2}$	$+ 4 \times \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{4l_1l_1l_2l_2}$	$+ 6 \times \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{4l_1l_1l_2l_3}$	$+ 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{4l_1l_2l_2l_3}$	$+ 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{4l_1l_2l_3l_3}$	$+ 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{4l_1l_2l_3l_4}$	$+ 24 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
Ensemble	$n^4$

## Degré 5

Soit  $P_5$  un polynôme homogène de degré 5 par rapport à ses  $n$  inconnues.

$$P_5(x_1 \cdots x_n) = \sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^n \left( \sum_{l_3=1}^n \left( \sum_{l_4=1}^n \left( \sum_{l_5=1}^n P_{5l_1l_2l_3l_4l_5} x_{l_5} \right) x_{l_4} \right) x_{l_3} \right) x_{l_2} \right) x_{l_1}$$

on a

$$P_5 = \sum_{l_1=1}^n \left( 5 \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left( 2 \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \left[ \begin{aligned} & 6 \sum_{l_4=1}^{l_3-1} \left( 2 \sum_{l_5=1}^{l_4-1} P_{5l_1l_2l_3l_4l_5} x_{l_5} + P_{5l_1l_2l_3l_4l_4} x_{l_4} \right) x_{l_4} \right. \right. \\ & + P_{5l_1l_2l_3l_3l_4} x_{l_3} + P_{5l_1l_2l_2l_3l_4} x_{l_2} + P_{5l_1l_1l_2l_3l_4} x_{l_1} \left. \right) x_{l_3} \\ & + 3(P_{5l_1l_2l_2l_3l_3} x_{l_2} x_{l_3} + P_{5l_1l_1l_2l_3l_3} x_{l_1} x_{l_3} + P_{5l_1l_1l_2l_2l_3} x_{l_1} x_{l_2}) \\ & + 2(P_{5l_1l_2l_3l_3l_3} x_{l_3}^2 + P_{5l_1l_2l_2l_2l_3} x_{l_2}^2 + P_{5l_1l_1l_1l_2l_3} x_{l_1}^2) \\ & \left. + P_{5l_1l_2l_2l_2l_2} x_{l_2}^3 + P_{5l_1l_1l_1l_1l_2} x_{l_1}^3 + 2(P_{5l_1l_1l_1l_2l_2} x_{l_1} + P_{5l_1l_1l_2l_2l_2} x_{l_2}) x_{l_1} x_{l_2} \right] \right) x_{l_2} + P_{5l_1l_1l_1l_1l_1} x_{l_1}^4 \right) x_{l_1} \end{aligned}$$

Vérification du nombre de termes :

Termes	Nombre
$P_{5l_1l_1l_1l_1l_1}$	$n$
$P_{5l_1l_1l_2l_2l_2}$	$+ 10 x \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{5l_1l_1l_1l_2l_2}$	$+ 10 x \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{5l_1l_1l_1l_1l_2}$	$+ 5 x \frac{n(n-1)}{2}$
$P_{5l_1l_2l_2l_2l_2}$	$+ 5 x \frac{n(n-1)}{5}$
$P_{5l_1l_1l_1l_2l_3}$	$+ 20 x \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{5l_1l_2l_2l_2l_3}$	$+ 20 x \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{5l_1l_2l_3l_3l_3}$	$+ 20 x \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{5l_1l_1l_2l_2l_3}$	$+ 30 x \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{5l_1l_1l_2l_3l_3}$	$+ 30 x \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{5l_1l_2l_2l_3l_3}$	$+ 30 x \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$P_{5l_1l_1l_2l_3l_4}$	$+ 60 x \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
$P_{5l_1l_2l_2l_3l_4}$	$+ 60 x \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
$P_{5l_1l_2l_3l_3l_4}$	$+ 60 x \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
$P_{5l_1l_2l_3l_4l_4}$	$+ 60 x \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
$P_{5l_1l_2l_3l_4l_5}$	$+ 120 x \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$
Ensemble	$n^5$

ordre 2

$$P_1 + \frac{P_2}{2} = \sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^{l_1-1} P_{2l_1l_2} x_{l_2} + \frac{P_{2l_1l_1} x_{l_1} + P_{1l_1}}{2} \right) x_{l_1}$$

ordre 3

$$P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} = \sum_{l_1=1}^n \left[ \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left( \sum_{l_3=1}^{l_2-1} P_{3l_1l_2l_3} x_{l_3} + \frac{(P_{3l_2l_1l_1} x_{l_1} + P_{3l_1l_2l_2} x_{l_2})}{2} + P_{2l_1l_2} \right) x_{l_2} \right. \\ \left. + \frac{(P_{3l_1l_1l_1} x_{l_1} + P_{2l_1l_1})}{2} x_{l_1} + P_{1l_1} \right] x_{l_1}$$

ordre 4

$$P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_4}{24} = \sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left( \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \left[ \sum_{l_4=1}^{l_3-1} P_{4l_1l_2l_3l_4} x_{l_4} + \frac{(P_{4l_1l_2l_3l_3} x_{l_3} + P_{4l_1l_2l_2l_3} x_{l_2} + P_{4l_1l_1l_2l_3} x_{l_1})}{2} + P_{3l_1l_2l_3} \right] x_{l_3} \right) \right. \\ \left. + \frac{(P_{4l_1l_1l_1l_2} x_{l_2} + P_{4l_1l_1l_2l_2} x_{l_2} + P_{3l_1l_1l_2})}{2} x_{l_2} + \frac{(P_{4l_1l_2l_2l_2} x_{l_2} + P_{3l_1l_2l_2})}{2} x_{l_2} + P_{2l_1l_2} \right) x_{l_2} \\ \left. + \frac{\left( \frac{(P_{4l_1l_1l_1l_1} x_{l_1})}{4} + P_{3l_1l_1l_1} \right) x_{l_1}}{3} + P_{2l_1l_1} \right) x_{l_1} + P_{1l_1} \right) x_{l_1}$$

$$P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{6} + \frac{P_4}{24} + \frac{P_5}{120} =$$

$$\sum_{l_1=1}^n \left( \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \left( \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \left( \sum_{l_4=1}^{l_3-1} \left( \sum_{l_5=1}^{l_4-1} P_{5l_1l_2l_3l_4l_5} x_{l_5} + P_{4l_1l_2l_3l_4} \right) x_{l_4} \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{(P_{5l_1l_2l_3l_4l_4} x_{l_4} + P_{5l_1l_2l_3l_3l_4} x_{l_3} + P_{5l_1l_2l_2l_3l_4} x_{l_2} + P_{5l_1l_1l_2l_3l_4} x_{l_1})}{2} \right) x_{l_3} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(P_{5l_1l_2l_3l_3l_3} x_{l_3}^2 + P_{5l_1l_2l_2l_2l_3} x_{l_2}^2 + P_{5l_1l_1l_1l_2l_3} x_{l_1}^2)}{6} \right) x_{l_2} \right.$$

$$\left. + \frac{(P_{5l_1l_2l_2l_3l_3} x_{l_2} x_{l_3} + P_{5l_1l_1l_2l_3l_3} x_{l_1} x_{l_3} + P_{5l_1l_1l_2l_2l_3} x_{l_1} x_{l_2})}{4} \right) x_{l_1}$$

$$\left. + \frac{(P_{4l_1l_2l_3l_3} x_{l_3} + P_{4l_1l_2l_2l_3} x_{l_2} + P_{4l_1l_1l_2l_3} x_{l_1})}{2} + P_{3l_1l_2l_3} \right) x_{l_2}$$

$$\left. + \frac{\left( \left( \frac{(P_{5l_1l_1l_1l_2l_2} x_{l_2} + \frac{P_{5l_1l_1l_1l_1l_2} x_{l_1}}{2})}{2} + P_{4l_1l_1l_1l_2} \right) x_{l_1} + \frac{P_{4l_1l_1l_2l_2} x_{l_2} + P_{3l_1l_1l_2}}{2} \right) x_{l_1}}{3} \right) x_{l_1}}{2}$$

$$\left. + \frac{\left( \left( \frac{(P_{5l_1l_1l_2l_2l_2} x_{l_1} + \frac{P_{l_1l_2l_2l_2l_2} x_{l_2}}{2})}{2} + P_{4l_1l_2l_2l_2} \right) x_{l_2} + P_{3l_1l_2l_2} \right) x_{l_2}}{3} \right) x_{l_2}}{2} + P_{2l_1l_2}$$

$$\left. + \frac{\left( \left( \frac{(P_{5l_1l_1l_1l_1l_1} x_{l_1} + P_{4l_1l_1l_1l_1})}{5} \right) x_{l_1} + P_{3l_1l_1l_1} \right) x_{l_1}}{4} \right) x_{l_1}}{3} + P_{2l_1l_1} \right) x_{l_1}}{2} + P_{1l_1}$$

