



HAL
open science

Etude de l'instabilité de Vishniac et régime radiatif des restes de supernova

Julien Minière

► **To cite this version:**

Julien Minière. Etude de l'instabilité de Vishniac et régime radiatif des restes de supernova. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2014. Français. NNT : . tel-02095163

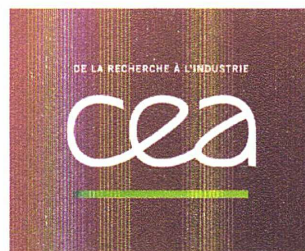
HAL Id: tel-02095163

<https://hal.science/tel-02095163>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Observatoire de Paris

École Doctorale d'Astronomie et
d'Astrophysique d'Ile-de-France

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par :

Julien MINIÈRE

Etude de l'instabilité de Vishniac
et régime radiatif des restes de
supernova



Jury :

<i>Président :</i>	Jean ABOUDARHAM
<i>Rapporteurs :</i>	Geoffroy LESUR Marina OLAZABAL-LOUMÉ
<i>Examineurs :</i>	Laurent DI MENZA Xavier RIBEYRE Laurent MASSE
<i>Directeurs de thèse :</i>	Serge BOUQUET Claire MICHAUT

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Présentation des restes de supernova	7
1.2	Principe de l'instabilité de Vishniac et état de l'art	9
1.2.1	Principe de l'instabilité de Vishniac	9
1.2.2	Etat de l'art : études analytiques	13
1.2.3	Etat de l'art : simulations numériques	14
1.2.4	Etat de l'art : études expérimentales	15
1.2.5	Résumé de l'état de l'art	16
1.3	Objectif et plan de travail	17
I	Etudes analytiques de l'instabilité de Vishniac	19
2	Modèle de la coquille	21
2.1	Etude de la coquille non-perturbée	21
2.2	Etude de la coquille perturbée	27
2.3	Relations de dispersion	32
2.3.1	Relation de dispersion selon Vishniac	32
2.3.2	Relation de dispersion généralisée	37
3	Etude de l'écoulement hydrodynamique autosemblable	45
3.1	Premières définitions et formalisme autosemblable	45
3.2	Equations hydrodynamiques de l'écoulement autosemblable non perturbé	47
3.3	Equations hydrodynamiques de l'écoulement perturbé	48
3.4	Equations hydrodynamiques de l'écoulement autosemblable perturbé	50
3.5	Séparation des variables	52
3.5.1	Séparation des variables angulaires	52
3.5.2	Séparation du temps	54
3.6	Equations différentielles ordinaires en ξ	55
3.7	Résolution numérique de l'écoulement de base	55
3.7.1	Développement limité à partir de la solution implicite	59

3.7.2	Calcul de l'écoulement de base : résolution et raccord	61
3.8	Résolution numérique des équations de l'écoulement perturbé	63
3.8.1	Adimensionnement des équations	63
3.8.2	Forme matricielle et méthode de résolution	64
3.9	Relations de dispersion	70
Conclusion des études analytiques		75
 II Etudes numériques de l'instabilité de Vishniac et des RSN en phase radiative		77
 4 Présentation du code HADES et des moyens et outils numériques		79
4.1	Présentation du code HADES	79
4.1.1	Les équations résolues et le schéma	80
4.1.2	Le maillage	81
4.1.3	La discrétisation temporelle	83
4.1.4	La version parallèle de Hades	83
4.1.5	Tests de performance	85
4.2	Moyens et outils numériques	88
4.2.1	Moyens de calcul	88
4.2.2	Outils numériques	89
 5 Simulations de restes de supernova : détermination des paramètres		91
5.1	Conditions initiales et critères de validité	91
5.1.1	Conditions initiales	92
5.1.2	Paramètres de la simulation et critères de validation de la phase de Sedov	93
5.2	Simulation d'initialisation	94
5.2.1	Etude du taux de compression	95
5.2.2	Etude de l'isotropie et des profils hydrodynamiques	95
5.2.3	Vérification de l'évolution autosemblable	101
5.3	Simulation haute définition du RSN en phase de Sedov	103
5.3.1	Etude de la résolution	105
5.4	Simulations avec pertes radiatives	106
5.4.1	Choix de la zone à refroidir	110
5.4.2	Choix du paramètre α	111
5.4.3	Etude du RSN avec refroidissement et choix du paramètre Λ_0	111
5.4.4	RSN en phase radiative : loi d'évolution autosemblable	125

5.4.5	RSN en phase radiative : estimation de la quantité d'énergie rayonnée	127
6	Etude de l'instabilité de Vishniac dans les RSN en phase de Sedov	131
6.1	RSN d'incide adiabatique $\gamma = 5/3$	133
6.2	RSN d'incide adiabatique $\gamma = 1,1$	146
6.3	Comparaison et conclusion	150
7	Etude de l'instabilité de Vishniac dans les RSN en phase radiative	153
	Conclusion	171
	Appendices	179
A	Phases d'évolution des restes de supernova	181
A.1	Analyse dimensionnelle	181
A.2	Modèle de la coquille	183
B	Dérivation temporelle d'intégrale aux bornes présentant une dépendance en temps	189
C	Equation différentielle ordinaire autonome	191
D	Calcul des paramètres introduits pour l'étude de stabilité de la coquille	193
D.1	Paramètre β	193
D.2	Variation temporelle de la température et paramètre E_0	194
E	Relations de Rankine-Hugoniot	195
E.1	Relations de Rankine-Hugoniot en choc plan	195
E.2	Relations de Rankine-Hugoniot en choc oblique	198
E.3	Cas de δv_T de l'étude hydrodynamique de stabilité	200
F	Détermination des équations autosemblables non perturbées	205
G	Détermination des équations hydrodynamiques perturbées au premier ordre	207
	Bibliographie	213

Chapitre 1

Introduction

L'astrophysique est une discipline faisant interagir de nombreux domaines de la physique, afin d'améliorer la compréhension que nous avons de l'Univers et des objets qui le composent. Ainsi, elle fait intervenir des théories allant de la mécanique newtonienne à la physique des particules, de la thermodynamique à la mécanique des fluides. Différents moyens sont utilisés et mis en place pour la développer. On peut retenir essentiellement quatre grandes catégories de moyens d'étude.

La première, historiquement, est l'observation. Elle consiste à regarder les objets présents dans notre ciel, avec des moyens allant de l'oeil nu jusqu'aux très grands télescopes actuels ou aux satellites spatiaux.

La seconde est la catégorie des études théoriques et analytiques. Elle est faite bien souvent à partir d'observations et est mise à l'épreuve par celles-ci.

La troisième, plus récente, est la simulation numérique. Elle consiste à résoudre à l'aide de calculateurs les équations de manière numérique, afin d'étudier et de reproduire des phénomènes sur ordinateur (simulations numériques).

Enfin, la quatrième est l'expérience. Elle est souvent considérée comme la partie la plus limitée, car il a longtemps été jugé impossible de reproduire les phénomènes astrophysiques lors d'expériences (voir Sect.1.2.4). Néanmoins, l'arrivée progressive d'installations scientifiques permettant d'accéder au domaine des très hautes densités d'énergie ("High Energy Density Physics", HEDP) comme les lasers de puissance ou bien encore les Z-pinches pousse au développement de ce qui est également appelé astrophysique de laboratoire (en anglais, « High Energy Density Laboratory Astrophysics », HEDLA).

La matière qui compose notre univers forme diverses structures comme les amas de galaxies, les galaxies, les étoiles et leurs planètes, les naines blanches, les étoiles à neutrons, les trous noirs et bien d'autres encore. Elle compose également le milieu interstellaire (MIS), composé d'hydrogène ionisé, atomique ou moléculaire selon la température, très dilué, dans lequel peuvent se former des nuages de gaz plus denses. C'est dans ces nuages (hydrogène moléculaire

H₂) en contraction gravitationnelle que se forment les étoiles. Une étoile passe au cours de son existence par différents stades. Dès le début de la contraction gravitationnelle, provoquée par une onde de choc (supernova, collision de nuages, ...) ou bien encore par d'autres phénomènes, la température du gaz comprimé augmente. L'effondrement gravitationnel continue jusqu'au moment où les conditions de température et de densité sont suffisantes pour initier les réactions de fusion thermonucléaire. L'étoile vient alors de naître. Les atomes d'hydrogène fusionnent alors en son cœur, en formant de l'hélium, et libèrent ainsi, au final, de l'énergie sous forme de rayonnement, lequel engendre une force due à la pression radiative et thermique. Cette force équilibre alors la force de contraction gravitationnelle pendant une période allant de quelques millions d'années pour les étoiles les plus massives (une centaine de fois la masse du soleil M_{\odot}) à quelques centaines de milliards d'années pour les étoiles les moins massives ($0.07 M_{\odot}$). Une fois le combustible de base épuisé, les éléments plus lourds fusionnent à leur tour et prennent le relais, durant des temps beaucoup plus courts. Enfin survient la mort de l'étoile : elle se contracte sous l'effet de la gravitation qui n'est plus compensée par la pression thermique du cœur. Si l'étoile est suffisamment massive ($8 M_{\odot}$), les couches externes de l'étoile tombent sur le noyau de fer de l'étoile et rebondissent dessus dans une explosion colossale : c'est une supernova (SN) gravitationnelle. D'autres supernovae, appelées supernovae thermonucléaires, se produisent lorsque des objets, les naines blanches, dépassent par accrétion de matière d'une étoile compagnon, ou bien par collision, une masse critique appelée masse de Chandrasekhar.

Lors de cette explosion, de la matière est éjectée à des vitesses de plusieurs dizaines de milliers de kilomètres par seconde, et va se propager dans le milieu circumstellaire dans un premier temps, puis dans le MIS, derrière un choc. On assiste alors à la formation d'un reste de supernova (RSN). C'est dans ce cadre que se situe le travail de cette thèse. Cette onde de choc est une onde de souffle, car elle est générée par la SN initiale puis se propage sans apport ultérieur d'énergie, et elle est ralentie uniquement par la faible densité du MIS qui est mis en mouvement centrifuge, ou bien par des pertes radiatives. Elle évolue alors pendant des temps de plusieurs dizaines ou centaines de milliers d'années, sur des distances de plusieurs parsecs, voire dizaines de parsecs. Depuis que l'Homme est sorti de la préhistoire, il a laissé à plusieurs reprises des témoignages de l'observation du phénomène de SN qu'on peut voir aujourd'hui sous la forme d'un RSN. En effet, une supernova peut éclairer davantage que la galaxie qui l'abrite, pendant plusieurs mois. Une supernova dans la voie lactée constitue donc un événement particulièrement lumineux, dans certains cas visible à l'oeil nu. Ce sont les seuls objets, à l'exception de la lune évidemment, capables de projeter des ombres dans la nuit terrestre. Ainsi, on compte parmi ces supernovae dites 'historiques' celle de 1006, qui

fut la plus lumineuse, celle de 1054, qui a donné naissance à la nébuleuse du Crabe, celle de 1572, découverte par le célèbre astronome Tycho Brahe, celle de 1885, qui est la première supernova de l'ère des télescopes, ou bien encore celle de 1987, appelée 1987a, qui est la dernière SN bien étudiée car elle est située dans le Grand Nuage de Magellan, à proximité de notre galaxie. L'observation de ces RSN montre que le front de choc présente des formes et des structures complexes, notamment dans les RSN âgés. Ces structures sont caractéristiques d'instabilités hydrodynamiques, telles que l'instabilité de Rayleigh-Taylor, bien connue.

Néanmoins, un autre mécanisme, proposé par Ethan T. Vishniac en 1983 [11], puis étudié plus finement par Ryu et Vishniac [12], permettrait d'expliquer ces formes filamenteuses et irrégulières mentionnées précédemment. Ce phénomène est appelée "instabilité de Vishniac (I.V.)", et est l'objet d'étude de cette thèse. D'autres études ont été menées par Kushnir [13], et une étude numérique a été menée dans le cadre de la thèse de C. Cavet [14], donnant lieu à plusieurs publications [16] [17] [15]. Ce phénomène peut être décrit de la façon suivante : l'onde de choc du RSN est initialement quasi-sphérique, et son expansion génère une coquille de matière sur-dense. Cependant, en rencontrant des hétérogénéités du MIS, cette coquille peut être déformée, et cette déformation peut s'avérer instable : c'est le phénomène décrit par Vishniac. Néanmoins, l'étude théorique présente des contradictions et des points litigieux (voir plus loin). L'étude numérique ne conduit pas, quant à elle, à la fragmentation et à la filamentation du RSN : l'instabilité sature et le phénomène s'atténue. Ainsi, on se pose la question de savoir si l'IV est un phénomène vraiment instable et s'il est vraiment effectif dans les RSN.

Cette thèse a pour but d'étudier certains points litigieux des modèles analytiques, ainsi que d'étudier l'instabilité de Vishniac dans des conditions plus réalistes et complexes, à l'aide de la simulation numérique.

1.1 Présentation des restes de supernova

On peut décrire le déroulement de l'expansion d'un RSN dans le MIS de façon simplifiée, en le divisant en différentes phases d'évolution. On décrit alors la supernova comme un dépôt instantané d'énergie ponctuel, qui va se répandre dans le milieu environnant. Celui-ci va alors être absorbé et mis en mouvement au fur et à mesure de l'expansion du RSN qui va être ralenti. Notons t le temps depuis l'explosion, r la distance au point où l'énergie est relâchée, ρ_{MIS} la densité du MIS, supposé uniforme (ρ_{MIS} est indépendant de r et t), dans lequel se propage l'onde de choc supposée sphérique et $R(t)$ son rayon (c'est aussi le rayon du RSN), M_i la masse initiale éjectée lors de l'explosion, et $M(t)$ la masse totale du RSN à l'instant t . Ces phases sont :

- La phase balistique

Cette première phase se déroule des premiers instants de l'existence du RSN jusqu'à un temps caractéristique de l'ordre du millier d'années. La masse éjectée par l'explosion est alors grande devant la masse englobée par le RSN : $M_i \gg (4/3) \pi R^3(t) \rho_{MIS}$. Le RSN n'est alors pas ralenti, et obéit à une loi du type :

$$R(t) \propto t \quad (1.1)$$

- La phase de Sedov-Taylor

Cette phase se déroule lorsque la masse initiale est devenue négligeable devant la masse totale du RSN, mais que les pertes d'énergie (par rayonnement, par exemple) n'ont pas encore eu d'impact sur la dynamique de l'expansion : le RSN est donc dans cette phase adiabatique. On a donc : $M_i \ll 4/3 \pi R^3(t) \rho_{MIS}$ et $t \ll t_{rad}$, où t_{rad} est le temps caractéristique associé aux processus de pertes d'énergie par rayonnement. Sedov [1], Taylor [2], Von Neumann [3] et Landau [4] ont étudié au milieu du XXème siècle le problème de l'explosion forte en un point, et en ont déduit la loi régissant cette phase. L'accrétion de masse engendre alors un ralentissement de la propagation du RSN. On trouve (voir les calculs en annexe A) :

$$R(t) \propto t^{2/5} . \quad (1.2)$$

Cette phase de l'évolution des RSN a été étudiée par Sedov [1] notamment, et des solutions analytiques implicites peuvent être trouvées dans le cadre d'une théorie autosemblable mais représentative de la réalité. On a donc connaissance à tout instant des profils spatiaux des grandeurs hydrodynamiques telles que la densité, la vitesse ou encore la pression.

- La phase radiative

Cette phase est plus tardive, et correspond à l'expansion du RSN lorsque les phénomènes radiatifs (perte d'énergie) influencent la dynamique du RSN. Lorsque la température derrière le front de choc devient inférieure à $10^6 K$, les pertes d'énergie deviennent non négligeables dans la dynamique, du fait des raies d'émission et de recombinaison des éléments lourds contenus dans le RSN. Le ralentissement est donc encore plus fort qu'avec la simple augmentation de masse. Différents modèles existent dans la littérature [5] [6] [7] [8], et aboutissent à deux lois d'évolution :

$$R(t) \propto t^{1/4} \quad (1.3)$$

ou

$$R(t) \propto t^{2/7} . \quad (1.4)$$

D'autre part, des simulations numériques [9] ont abouti à une loi d'évolution différente, pour laquelle on a :

$$R(t) \propto t^{3/10} . \quad (1.5)$$

– La phase finale

Enfin, lorsque la vitesse d'expansion du RSN atteint la vitesse du son, on assiste à la fin de l'existence du RSN [10] : le gaz se dilue alors dans le milieu et on ne peut plus différencier le MIS du RSN.

Les calculs de ces phases et de leurs lois d'évolution sont présentés en annexe A.

1.2 Principe de l'instabilité de Vishniac et état de l'art

1.2.1 Principe de l'instabilité de Vishniac

Comme mentionné précédemment, l'instabilité de Vishniac est un phénomène proposé par E.T. Vishniac [11] en 1983 pour expliquer la forme complexe que présentent les RSN (voir Fig. 1.1). On voit en effet que les RSN d'âge avancé (plusieurs dizaines de milliers d'années) ne sont pas sphériques, contrairement aux RSN plus jeunes (voir Fig. 1.2). Simeis présente une forme globalement sphérique, mais sont apparues, par rapport au RSN de Tycho-Brahé, des structures filamenteuses à l'intérieur du RSN, et le contour de celui-ci n'est plus continu. L'IV est régulièrement invoquée pour expliquer la filamentation des RSN, or cette instabilité, étudiée dans plusieurs articles de manière analytique [11] [12] [13] s'atténue et ne se développe donc pas dans les études numériques menées récemment par Cécile Cavet dans son travail de thèse [14], [15], [16], [17] au Laboratoire Univers et Théorie (LUTH) de l'Observatoire de Paris. Il est donc nécessaire d'étudier plus en détail le phénomène, afin de trancher quant à sa pertinence dans l'explication des structures observées.

Les RSN peuvent être, en première approximation, décrits comme une coquille de matière s'étendant derrière un front de choc, et contenant dans sa région interne un gaz très chaud et très dilué (voir annexe A). Ce gaz chaud exerce une poussée, due à la pression thermique, sur la surface interne de la coquille. Lors de son expansion, le RSN absorbe la matière du MIS et

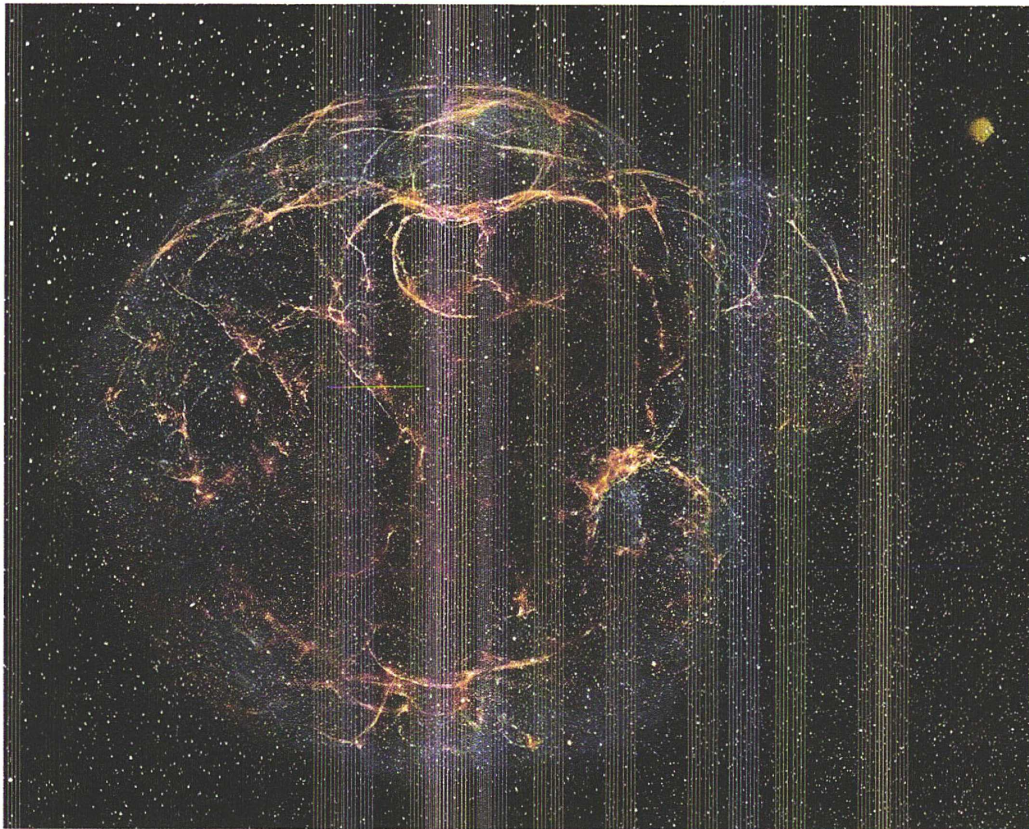


FIG. 1.1: Simeis, RSN de 38 000 ans. On observe des structures complexes s'étendant derrière le front de choc, comme des filaments. ©Digital Sky Survey, ESA/ESO/NASA FITS Liberator

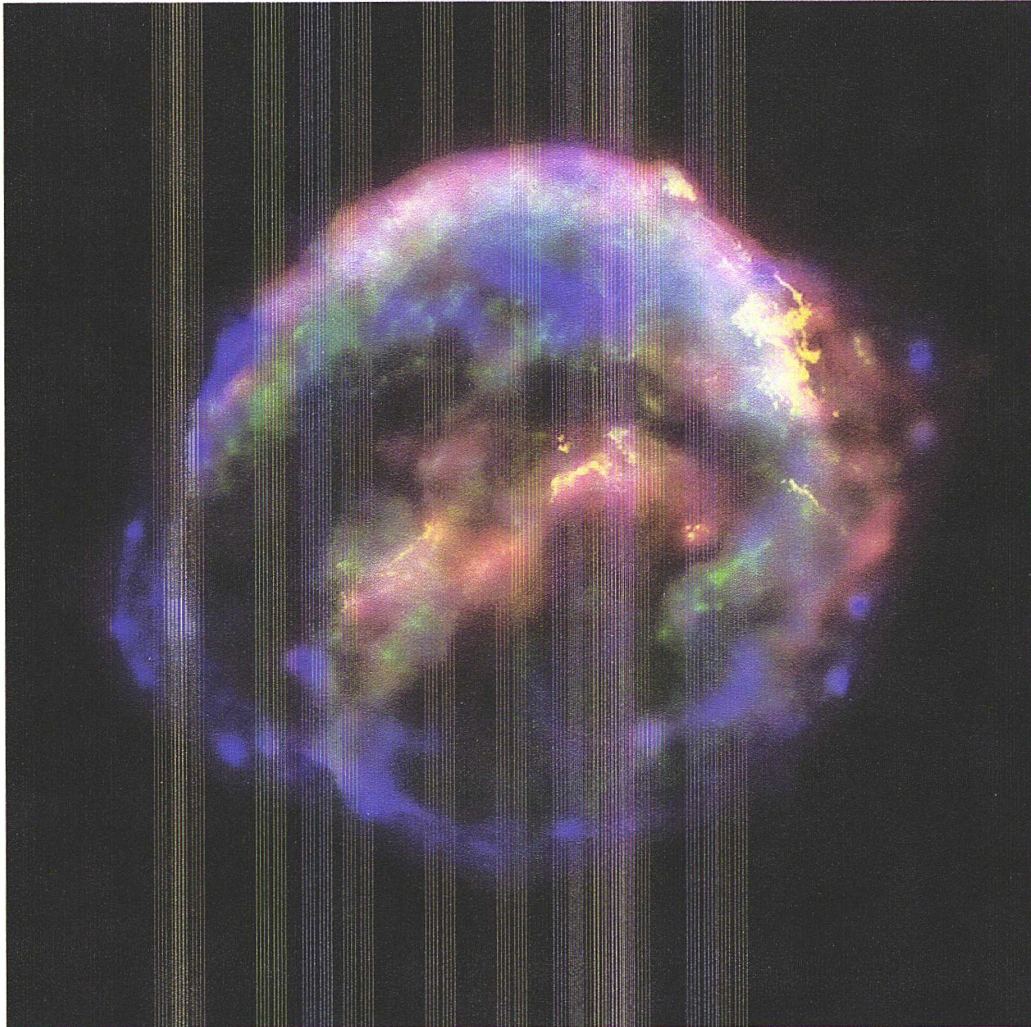


FIG. 1.2: RSN de Tycho-Brahé, RSN de 600 ans. ©NASA/MPIA/Calar Alto Observatory, Oliver Krause et al.

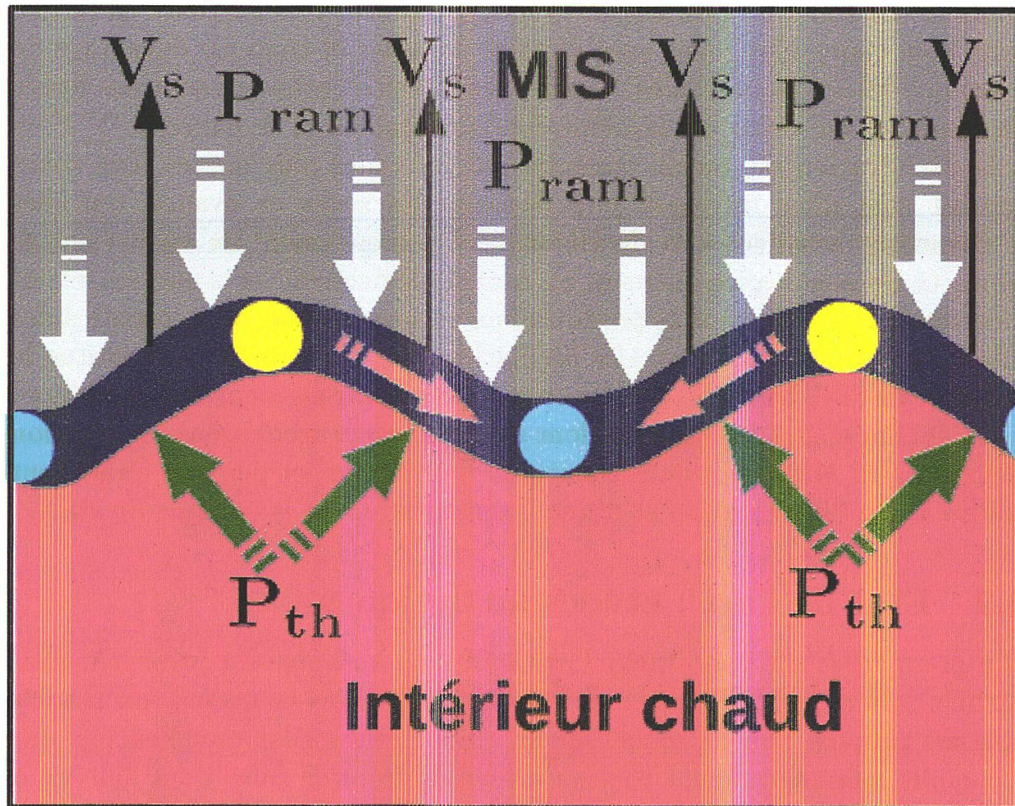


FIG. 1.3: Principe de l'instabilité de Vishniac. Le MIS est représenté en gris, la coquille dense en bleu, et la zone intérieure, très tenue et très chaude, en rouge.

la met en mouvement au passage du front de choc. Le transfert de quantité de mouvement lors de l'absorption génère l'équivalent d'une force de pression (pression "bélier", voir annexe A), s'opposant à l'expansion du RSN. Cette force est colinéaire à la direction de la vitesse de la coquille (voir Fig. 1.3). Lorsque le RSN est sphérique, ces deux forces sont colinéaires, car la force due à la pression thermique est normale à la surface, et la vitesse d'expansion l'est également. Le RSN est alors ralenti (voir paragraphe précédent).

Le RSN peut, lors de son expansion, être déformé, par exemple lors de la rencontre d'une zone surdense du MIS. Si tel est le cas, alors la direction de la résultante des forces en est modifiée (voir Fig. 1.3). En effet, la direction de la vitesse du RSN restant la même (V_s , flèches noires), la direction de la force exercée par la pression bélier est inchangée (P_{ram} , flèches épaisses bleues), tandis que la force de pression thermique de la zone interne très tenue et très chaude est toujours normale à la surface (P_{th} , flèches vertes), et cette surface ayant été déformée, les deux forces ne sont plus colinéaires. Le bilan des forces comporte alors une résultante selon la direction transverse, générant des flux

de matière des zones les plus avancées (points jaunes) vers les zones en retrait (points bleu clair). Ces zones vont alors se densifier et contenir davantage de matière que les zones en avance. Comme les forces en présence sont des forces surfaciques, et en vertu du principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, la décélération est moins ressentie par les zones plus denses. Les zones en retrait vont donc rattraper puis dépasser les zones en avance, qui elles sont davantage sensibles à la décélération. Un mouvement de va-et-vient se produit, et les zones anciennement en avance deviennent les zones en retrait et vice versa. Le mécanisme se produit alors en sens inverse, et on assiste à des oscillations des perturbations. Ces oscillations des perturbations constitue le mécanisme de l'IV, baptisée, à notre sens assez maladroitement "overstability" par E.T. Vishniac. La question est donc de savoir si ces oscillations (en position et densité) sont amplifiées ou atténuées avec le temps, et peuvent finalement conduire à une filamentation et à une fragmentation de la coquille du RSN.

1.2.2 Etat de l'art : études analytiques

La première étude concernant l'instabilité de Vishniac est présentée dans un article publié par E.T. Vishniac en 1983 [11]. Dans ce travail, un modèle simple est proposé afin de modéliser un RSN : celui-ci est modélisé par une coquille infiniment fine, située au niveau du front de choc, dont l'intérieur est rempli par un gaz très dense et très ténu. L'indice adiabatique γ du gaz est supposé tendant vers 1, afin de justifier l'hypothèse de coquille infiniment fine et de mimer l'effet des pertes d'énergie par rayonnement du RSN dans sa phase radiative (cette étude permet néanmoins de se placer dans le cadre d'une loi d'évolution du rayon en $R \propto t^n$ avec n quelconque). La vitesse et la densité du fluide dans cette coquille sont alors intégrées sur l'épaisseur de la coquille. Une perturbation du premier ordre (linéaire) est alors introduite, et l'influence de cette perturbation sur les grandeurs moyennées est calculée. Cela permet d'aboutir à une relation de dispersion liant le taux de croissance s de la perturbation au mode propre l de celle-ci. Cette relation de dispersion comporte un domaine d'instabilité pour des modes propres supérieurs à 8.

Par la suite, D. Ryu et E.T. Vishniac ont produit une seconde étude [12] dans laquelle le modèle proposé est plus élaboré. L'intégralité de l'écoulement au sein du RSN y est étudiée à l'aide des équations d'Euler et du formalisme autosemblable. Une étude perturbative de la solution de Sedov-Taylor [1] décrivant les RSN non radiatifs y est présentée, et aboutit à des relations de dispersion liant le taux de croissance de l'instabilité au mode propre de la perturbation. Toutefois, ces relations de dispersion ne fournissent pas les taux de croissances attendus pour des valeurs spécifiques du mode propre l ($l = 0$ et $l = 1$), qui ont été calculés par J. Sanz et al. [18] de manière simple et indépendante de ces études.

Une autre étude a été menée par D. Kushnir, E. Waxman et D. Shvarts [13], sur un modèle proche de celui de D. Ryu [12], considérant toujours un RSN en phase de Sedov-Taylor. Toutefois, ce travail ne prend pas en compte l'intégralité de l'écoulement et s'appuie sur d'autres critères afin de déterminer les relations de dispersion. Celles-ci sont pour l'essentiel semblables à celles proposées par D. Ryu et E.T. Vishniac, sauf pour les modes propres faibles (inférieurs à 2). Les domaines d'instabilité sont très proches de ceux de l'étude précédente. Toutefois, cette étude ne permet pas non plus de trouver les valeurs théoriques attendues pour les modes propres $l = 0$ et $l = 1$.

Ainsi, ces deux dernières études analytiques menées jusqu'à présent ont le défaut de ne pas retrouver ces valeurs théoriques spécifiques, et semblent donc présenter des insuffisances pour les modes propres faibles. Toutefois, elles sont en bon accord pour les modes élevés, et conduisent toutes deux à un domaine d'instabilité pour des valeurs de γ suffisamment petites ($\gamma < 1, 2$). Les trois études analytiques ont en commun de ne pas prendre en compte directement les pertes d'énergie par rayonnement, et aboutissent toutes les trois à un domaine d'instabilité.

1.2.3 Etat de l'art : simulations numériques

Des études présentant des simulations numériques ont également été menées par le passé. La première de ces études est l'oeuvre de M-M. MacLow et M.L. Norman [19]. Ce papier est basé sur des simulations numériques réalisées à l'aide d'un code 2D qui utilise une grille sphérique à coordonnées polaires. La technique qu'ils ont utilisée consiste à introduire, sur une portion de 18° du RSN, une perturbation similaire à la perturbation analytique de D.Ryu et E.T. Vishniac [12], qui n'introduit pas de perturbation du rayon mais uniquement les grandeurs hydrodynamiques (densité, pression, vitesse). Le RSN simulé est en phase de Sedov-Taylor et constitué de gaz d'indice adiabatique $\gamma = 1, 1$. Ils obtiennent alors une croissance de la perturbation en bon accord avec les prédictions des études analytiques. Toutefois, ils n'obtiennent pas de fragmentation du RSN, et indiquent que l'instabilité de Vishniac semble saturer lorsqu'elle rentre dans sa phase non-linéaire, notamment lorsque des chocs transverses se forment en raison des flux de matière dans la direction transverse derrière le front de choc.

D'autres études ont été menées dans le cadre de la thèse de C. Cavet [14]. Dans une première étude publiée par C. Cavet et al. [16], l'instabilité de Vishniac est étudiée en géométrie cylindrique. L'indice adiabatique du gaz est uniforme, avec $\gamma = 5/3$ pour initialiser le RSN puis $\gamma = 1, 1$ lors de l'étude de l'I.V.. L'instabilité est déclenchée par l'introduction de surdensités dans le MIS. Le mécanisme de l'I.V. est alors observé, sur des temps faibles (environ

10 000 ans). Le taux de croissance de l'instabilité déduit de ces simulations apparaît inférieur aux prédictions analytiques. Dans un second papier [17], l'influence de l'indice adiabatique est étudiée. Toutefois, celui-ci est variable selon la région du gaz : si la densité est supérieure à la densité du MIS, l'indice adiabatique est noté γ_2 , qui varie de $\gamma = 5/3$ à $\gamma = 1,1$, et dans le reste du gaz, il est fixé à $\gamma = 5/3$. Ce choix a été réalisé afin de se rapprocher de la structure de coquille fine attendue dans le cas d'un RSN en phase radiative. La géométrie étudiée ici est plane, et une perturbation géométrique est cette fois introduite. La conclusion de cet article est que plus γ_2 est faible, plus l'évolution aux premiers instants de la perturbation est instable, mais que dans tous les cas étudiés, on aboutit à une disparition de la perturbation à long terme. Ces deux études sont issues du travail de thèse de C. Cavet [14], qui constitue une étude paramétrique de l'I.V., essentiellement en géométrie plane, et également en partie en géométrie sphérique. Les différents paramètres optimaux pour le développement à court terme de l'I.V. y sont déterminés. Cette thèse conclut qu'un faible adiabatique γ_2 dans la région de la coquille favorise le développement de l'I.V. Une amplitude optimale de la perturbation a été déterminée, ainsi que pour le nombre de Mach. La conclusion principale de cette thèse est qu'il n'a pas été observé de cas où l'I.V. persiste à temps long dans le RSN. Toutes les simulations aboutissent à une disparition de la perturbation introduite. Enfin, un dernier article, publié par C. Michaut et al. [15] résume et complète les résultats en géométrie sphérique de la thèse de C. Cavet. La configuration est la même que celle décrite précédemment, et les simulations montrent également, après une phase initiale de croissance, une atténuation de l'instabilité de Vishniac.

1.2.4 Etat de l'art : études expérimentales

Des études expérimentales de l'instabilité de Vishniac ont été réalisées. Ces études sont basées sur une discipline récente, l'astrophysique de laboratoire, présentée en début de cette introduction. En l'occurrence, un laser de puissance, tel que le LULI de l'Ecole Polytechnique, GEKKO XII de l'Institute for Laser Engineering (ILE) au Japon, la LIL ou le laser MégaJoule au CESTA (CEA) en France, ou bien encore OMEGA de l'Université de Rochester et le NIF aux Etats-Unis, est utilisé afin de chauffer une cible. L'objectif est d'atteindre des conditions de température et de pression extrêmes, provoquant des processus physiques semblables à ceux à l'oeuvre dans les objets astrophysiques, ici les RSN. A l'aide de lois d'échelle, on peut ensuite comparer ces résultats expérimentaux à des observations de RSN ou à des simulations numériques.

La première étude expérimentale de l'instabilité de Vishniac a donné lieu à une publication de J. Grun et al. en 1991 [20]. L'ablation de plasma d'une cible de polystyrene placée dans une chambre remplie d'azote ou de xenon

permet d'obtenir une onde de souffle évoluant selon la loi de Sedov-Taylor. Le choix de ces deux gaz permet de varier l'indice adiabatique : en effet, dans les conditions de l'expérience, l'indice adiabatique de l'azote γ_N est de 1,3 tandis que celui du xénon γ_{Xe} est de 1,06. Cette étude montre que l'onde de souffle se propageant dans le xénon est instable, tandis que celle se propageant dans l'azote est stable. Dans le cas instable, un taux de croissance a été mesuré, et apparaît plus élevé que le taux théorique attendu. Toutefois, il a été montré ultérieurement que le laser utilisé pour la génération de l'onde de souffle perturbait celle-ci, rendant invalides ces résultats.

D'autres expériences ont été réalisées depuis par A. Edens et al. [21] [22] [23] et par T. Ditmire et al. [24], et montrent à plusieurs reprises ce qui semble être l'instabilité de Vishniac. Toutefois, ils demeurent réservés quant à la validité de leurs conclusions, et les écarts à la théorie sont grands.

Ainsi, les études expérimentales, si elles ont paru dans un premier temps confirmer la théorie analytique de Vishniac, paraissent à nos yeux peu fiables en l'état. D'autres expériences sont nécessaires selon nous avant de considérer l'aspect expérimental de l'I.V. comme une source fiable de renseignements sur la validité de la théorie de celle-ci.

1.2.5 Résumé de l'état de l'art

Depuis le premier article décrivant l'instabilité de Vishniac [11], cette dernière a été étudiée par différents moyens. Ces différentes approches aboutissent à des conclusions diverses, et parfois contradictoires. Les études analytiques réalisées jusqu'à présent suggèrent qu'il existe un domaine de paramètres pour lequel le mécanisme proposé en 1983 par E.T. Vishniac est instable, et peut conduire à la fragmentation du RSN. Toutefois, ces études présentent des lacunes : elles sont réalisées dans la phase de Sedov-Taylor du RSN (tout en faisant varier l'indice adiabatique pour mimer les effets des pertes radiatives), et fournissent des taux de croissance erronés pour les modes propres $l = 0$ et $l = 1$. Les simulations numériques montrent quant à elles que le mécanisme de Vishniac se développe bien dans les RSN, tout du moins au début de leur évolution, mais n'aboutit pas à la fragmentation du RSN. D'autre part, elles ne prennent pas en compte les pertes d'énergie par rayonnement. Enfin, les études expérimentales ne nous paraissent pas concluantes en l'état actuel de leur développement, et nécessitent selon nous d'être améliorées avant d'être prises en compte comme une contribution fiable dans l'étude de l'I.V.

1.3 Objectif et plan de travail

Cette thèse a pour objectif de lever une partie des interrogations qui subsistent quant à la pertinence de l'instabilité de Vishniac dans l'explication de la structure filamenteuse et fragmentée des RSN. Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à la théorie analytique de l'I.V. Pour cela, nous avons repris et amélioré le premier modèle de coquille infiniment fine de E.T. Vishniac [11] et nous présentons donc ici dans le chapitre 2 une extension et une généralisation de ce travail. Ensuite, nous avons repris l'étude de D. Ryu et E.T. Vishniac [12], nous avons développé ce travail plus en détail que ce qui est présenté dans leur article, et nous avons recalculé les relations de dispersion dans le cadre de ce modèle. Nous montrerons donc dans le chapitre 3 le résultat de cette étude, qui aboutit à des relations de dispersion en accord avec les valeurs attendues pour les modes propres $l = 0$ et $l = 1$. La seconde partie du travail de thèse utilise l'outil numérique à l'aide du code HADES (voir chapitre 4) afin de simuler des RSN en phase de Sedov-Taylor et en phase radiative. Après avoir déterminé les caractéristiques requises pour l'étude de l'I.V., nous avons étudié l'effet des pertes d'énergie par rayonnement sur la dynamique du RSN (chapitre 5). Le chapitre 6 présente les simulations de RSN en phase de Sedov-Taylor dans lesquelles nous introduisons des perturbations, afin de confirmer les prédictions analytiques. Enfin, le chapitre 7 est consacré à l'étude de l'influence des pertes radiatives sur le développement et l'évolution de l'I.V. : elle permet d'étudier celle-ci dans les RSN en phase radiative. Enfin, nous présentons les conclusions et les perspectives auxquelles conduit cette thèse dans le chapitre 7.

Première partie

Etudes analytiques de l'instabilité de Vishniac

Chapitre 2

Modèle de la coquille

Dans ce chapitre est présentée une étude hydrodynamique de l'expansion d'une coquille de matière éjectée par une supernova dans le MIS de densité uniforme ρ_{MIS} , selon une méthode analogue à celle développée par E.T. Vishniac [11]. Nous allons donc mener des calculs similaires aux siens afin de retrouver dans un premier temps ses résultats, puis d'étendre leur validité en relaxant certaines hypothèses. Dans un premier temps, il convient d'étudier le cas d'une coquille non perturbée, donc sphérique, de rayon d'expansion $R_0(t)$, de rayon interne $R_{i,0}(t)$ et de vitesse d'expansion $d[R_0(t)]/dt \equiv \dot{R}_0(t) \equiv V_0(t)$. On note P_i la pression sur la face interne de la coquille. Cet écoulement, que nous appelons écoulement de base, est 0D. Dans un second temps, nous étudions la coquille perturbée, puis nous comparons ces deux cas afin d'en déduire le taux de croissance de la perturbation.

2.1 Etude de la coquille non-perturbée

Les grandeurs caractéristiques du fluide constituant la coquille sont la densité ρ , sa vitesse v , et sa pression P . Dans le cas non perturbé, toutes ces grandeurs, en coordonnées sphériques, ne dépendent que de la coordonnée radiale r et du temps t . Cet écoulement est dit écoulement de base. Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent :

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) + \vec{\nabla} P = 0 . \quad (2.2)$$

Il n'y a pas besoin de l'équation d'énergie dans ce modèle, nous y reviendrons ultérieurement dans ce même chapitre. Afin d'étudier la coquille, d'après E.T. Vishniac nous définissons les grandeurs suivantes :

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{[R_0(t)]^2} \int_{R_{i,0}}^{R_0} \rho(r,t) r^2 dr \quad (2.3)$$

$$V_{r,0}(t) = \frac{1}{\sigma_0(t) [R_0(t)]^2} \int_{R_{i,0}}^{R_0} \rho(r,t) r^2 v dr \quad (2.4)$$

où $\sigma_0(t)$ représente la densité massique surfacique instantanée, et $V_{r,0}$ la vitesse radiale instantanée moyennée sur l'épaisseur de la coquille afin d'éviter de prendre en compte la complexité de l'écoulement radial interne de la coquille. Ces grandeurs ne dépendent que du temps : c'est le modèle 0D que nous avons mentionné au début de ce chapitre, et les quantités ρ et v qui rentrent dans les intégrales (2.3) et (2.4) sont celles de l'écoulement non perturbé 1D. On définira de manière similaire des moyennes pour l'écoulement perturbé (voir plus loin). Calculons à présent $d\sigma_0/dt$ et $dV_{r,0}/dt$:

$$\frac{d\sigma_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_0^2} \int_{R_{i,0}}^{R_0} \rho r^2 dr \right) = -2 \frac{V_0}{R_0} \sigma_0 + \frac{1}{R_0^2} \frac{d}{dt} \left(\int_{R_{i,0}}^{R_0} \rho r^2 dr \right) \quad (2.5)$$

où on rappelle que $V_0(t)$ est défini par :

$$V_0 = \frac{d}{dt} [R_0(t)] \quad (2.6)$$

Dans l'annexe B est présenté le calcul de la dérivée d'une intégrale dont les bornes dépendent du temps. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t,r) dr \right) &= f(t, R_2) \dot{R}_2 - f(t, R_1) \dot{R}_1 \\ &+ \int_{R_1(t)}^{R_2(t)} \partial_t f(t,r) dr \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $\dot{R}_j = dR_j/dt$. Ainsi, (2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_0}{dt} &= -2 \frac{V_0}{R_0} \sigma_0 \\ &+ \frac{1}{R_0^2} \left[\rho(R_0) R_0^2 V_0 - \rho(R_{i,0}) R_{i,0}^2 \dot{R}_{i,0} + \int_{R_{i,0}}^{R_0} \partial_t (\rho) r^2 dr \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

En utilisant (2.1), et en l'insérant dans l'intégrale, on peut la calculer très aisément comme étant la variation du terme $\rho v r^2$ entre ses bornes. L'équation (2.8) devient alors en développant et en regroupant les termes :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_0}{dt} = & -2\frac{V_0}{R_0}\sigma_0 + \rho(R_0)[V_0 - v(R_0)] \\ & -\rho(R_{i,0})\left(\frac{R_{i,0}}{R_0}\right)^2 \left[\dot{R}_{i,0} - v(R_{i,0})\right] . \end{aligned} \quad (2.9)$$

On notera que $v(R_0)$ correspond à la vitesse du fluide en $r = R_0$ et qu'elle n'est pas égale à $V_0 = \dot{R}_0$. Cependant, on va supposer qu'il n'y a pas d'échange de matière sur le bord interne de la coquille, ce qui implique que $v(R_{i,0}) = \dot{R}_{i,0}$. De plus, d'après les relations de Rankine-Hugoniot en choc plan (car la coquille est localement plane) calculées en annexe E.2, on a $\rho(R_0)[V_0 - v(R_0)] = \rho_{MIS}V_0$. Ainsi, on aboutit à la très simple équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$\frac{d\sigma_0}{dt} = -2\frac{V_0}{R_0}\sigma_0 + \rho_{MIS}V_0 . \quad (2.10)$$

A ce niveau, on peut faire un rapprochement avec le modèle de coquille présenté dans l'annexe A. En effet, $4\pi\sigma_0(R_0)^2$ représente la masse de la coquille et (2.10) donne :

$$\frac{d}{dt} [4\pi\sigma_0(R_0)^2] = 4\pi(R_0)^2 \rho_{MIS}V_0 . \quad (2.11)$$

Cette équation correspond exactement à (A.6). Revenant à l'équation (2.10), on remarque que c'est une EDO linéaire. Elle est donc intégrable, bien que ses coefficients dépendent du temps. Sa solution générale est :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\rho_{MIS}R_0(t) + \frac{k_0}{[R_0(t)]^2} \quad (2.12)$$

où k_0 est une constante d'intégration. Comme asymptotiquement la masse accrétée est $M_{acc,\infty}(t) = \frac{4}{3}\pi\rho_{MIS}[R_0(t)]^3$, seul le premier terme de (2.12) compte et on prend donc $k_0 = 0$.

De la même façon, on écrit l'équation régissant l'évolution temporelle de la vitesse radiale moyenne $V_{r,0}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{r,0}}{dt} = & -2\frac{\dot{R}_0}{R_0}V_{r,0} - \frac{d\sigma_0}{dt}\frac{V_{r,0}}{\sigma_0} \\ & + \frac{[\rho v r^2 \dot{R}]_{R_{i,0}}^{R_0}}{\sigma_0 R_0^2} + \frac{1}{\sigma_0 R_0^2} \int_{R_{i,0}}^{R_0} \partial_t(\rho v) r^2 dr . \end{aligned} \quad (2.13)$$

En utilisant les équations (2.1), (2.2) et (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dV_{r,0}}{dt} = & -\frac{\rho_{MIS}V_0}{\sigma_0}V_{r,0} + \frac{\left[\rho v r^2 \dot{R}\right]_{R_{i,0}}^{R_0}}{\sigma_0 R_0^2} \\ & + \frac{1}{\sigma_0 R_0^2} \int_{R_{i,0}}^{R_0} \left[-v \partial_r (\rho v r^2) - \partial_r P - \rho v \partial_r v\right] r^2 dr . \end{aligned} \quad (2.14)$$

En intégrant par partie les deux premiers termes de l'intégrale, on peut regrouper les termes afin d'utiliser les relations de Rankine-Hugoniot et le fait que la vitesse du fluide sur la face interne correspond à la vitesse de cette dernière (pas de flux de matière sur la face interne de la coquille). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV_{r,0}}{dt} = & -\frac{\rho_{MIS}V_0 V_{r,0}}{\sigma_0} + \frac{\rho_{MIS}V_0 v(R_0)}{\sigma_0} \\ & - \frac{[P(R_0)R_0^2 - P_i R_{i,0}^2]}{\sigma_0 R_0^2} + \frac{1}{\sigma_0 R_0^2} \int_{R_{i,0}}^{R_0} 2r P dr . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vishniac utilise alors dans son étude des approximations plus ou moins rigoureuses. Dans un premier temps, nous allons présenter les calculs qu'il a réalisés. Tout d'abord, il s'intéresse à une coquille infiniment fine : l'épaisseur h_0 de la coquille tend vers 0. Le terme en intégrale de la pression apparaissant dans (2.15) est dans ces conditions négligeable devant les autres, ce qui sera démontré un peu plus loin. D'autre part, le rapport des rayons extérieur et intérieur tend vers 1 dans l'hypothèse d'une coquille infiniment fine : $R_{i,0} \rightarrow R_0$. De plus, le terme $P(R_0)/\sigma_0$ contenu dans le membre de droite de cette équation donne, d'après les relations de Rankine-Hugoniot (voir annexe E.2), $P(R_0) = \rho_{MIS}V_0 v(R_0)$, soit une contribution exactement opposée à celle du second terme du membre de droite de (2.15). Ainsi, on a après ces simplifications :

$$\frac{dV_{r,0}}{dt} = -\frac{\rho_{MIS}V_0 V_{r,0} - P_i}{\sigma_0} . \quad (2.16)$$

Afin de fermer le système, Vishniac remplace alors $V_{r,0}$ par V_0 . En réalité, il devrait utiliser la relation de Rankine-Hugoniot sur la vitesse : $v(R_0) = \frac{2}{\gamma+1}V_0$, puis dire que la vitesse radiale moyennée $V_{r,0}$ correspond à la vitesse prise en R_0 . Néanmoins, avec $\gamma \rightarrow 1$, cela devient :

$$\frac{dV_0}{dt} = -\frac{\rho_{MIS}V_0^2 - P_i}{\sigma_0} . \quad (2.17)$$

Les équations (2.10) et (2.17) sont les équations finales proposées par Vishniac dans [11]. Cette dernière EDO est l'analogie de l'équation A.12 de l'annexe A pour la coquille infiniment fine en remplaçant dR/dt par V_0 et en négligeant la masse et le rayon initiaux devant la masse accrétée et le rayon d'expansion, respectivement. Cette EDO est non linéaire mais intégrable bien qu'elle soit du type Riccati, car les coefficients ne dépendent pas explicitement du temps (voir annexe C). En effet, (2.17) devient :

$$V_0 \frac{dV_0}{dR_0} = \frac{1}{\sigma_0} [\rho_{MIS} V_0^2 - P_i] . \quad (2.18)$$

On introduit alors ici le paramètre β , qui sera davantage détaillé dans le paragraphe 2.3.1, et qui représente le rapport entre la pression interne et la pression bélière : $P_i = \beta \times \rho_{MIS} V_0^2$. Ce paramètre permet notamment à E.T. Vishniac de ne pas avoir à utiliser de bilan énergétique. En effet, il a ainsi deux équations 2.10 et (2.18) à deux inconnues σ_0 et V_0 . L'équation 2.18 devient alors, en utilisant également la relation $\sigma_0(t) = \rho_{MIS} R_0(t) / 3$:

$$V_0 \frac{dV_0}{dR_0} = -3(1 - \beta) \frac{V_0^2}{R_0} . \quad (2.19)$$

En posant $W = V_0^2$, on obtient :

$$\frac{dW}{dR_0} = -6(1 - \beta) \frac{W}{R_0} \quad (2.20)$$

qui a pour solution : $W \propto R_0^{-6(1-\beta)}$. Comme $V_0 = X^{1/2}$, on peut revenir à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dR_0}{dt} = R_0^{-3(1-\beta)} \quad (2.21)$$

qui conduit à :

$$R_0(t) \propto t^{1/(4-3\beta)} . \quad (2.22)$$

On peut également aller plus loin que Vishniac, en prenant en compte les termes d'épaisseur. Reprenons donc l'équation (2.15) en gardant les termes du premier ordre en h_0 . On a affirmé que l'intégrale de pression dans cette équation est négligeable. En effet, en introduisant la quantité S , homogène à une surface, définie par l'égalité $S = r^2$, l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{R_{i,0}}^{R_0} 2rPdr &= \int_{R_{i,0}}^{R_0} PdS = \int_{R_{i,0}}^{R_0} d(PS) - \int_{R_{i,0}}^{R_0} SdP \\
&= P(R_0)R_0^2 - P_iR_{i,0}^2 - \bar{S}[P(R_0) - P_i] \quad (2.23)
\end{aligned}$$

où \bar{S} est une surface moyenne que l'on définit à notre convenance, en $r = R_i$ par exemple. Un développement limité au premier ordre en h_0 donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_{R_{i,0}}^{R_0} rPdr &= P(R_0)(R_0^2 - R_{i,0}^2) = 2P(R_0)R_0(R_0 - R_{i,0}) \\
&= 2P(R_0)h_0R_0 \quad (2.24)
\end{aligned}$$

qui est négligeable devant les autres termes lorsque l'on suppose que la coquille est infiniment fine.

On peut définir, pour une meilleure précision, $\bar{S} = (R_{i,0} + h_0/2)^2$. On a alors, en enlevant les termes d'ordre supérieur à 1 en h_0 :

$$\int_{R_{i,0}}^{R_0} 2rPdr = P(R_0)R_0^2 - P_iR_{i,0}^2 - (R_{i,0}^2 + h_0R_{i,0})[P(R_0) - P_i] \quad (2.25)$$

De plus, dans l'équation (2.15), le troisième terme apporte également une contribution supplémentaire lorsque l'on prend en compte l'épaisseur. En effet, ce terme s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\frac{[P(R_0)R_0^2 - P_iR_{i,0}^2]}{\sigma_0R_0^2} &= -\frac{P(R_0)}{\sigma_0} + \frac{P_i}{\sigma_0} \times \frac{(R_0 - h_0)^2}{R_0^2} \quad (2.26) \\
&= -\frac{P(R_0)}{\sigma_0} + \frac{P_i}{\sigma_0} \times \left(1 - \frac{2h_0}{R_0}\right) .
\end{aligned}$$

Après recombinaison, l'équation (2.15) devient donc :

$$\frac{dV_{r,0}}{dt} = -\frac{\rho_{MIS}V_0V_{r,0} - P_i}{\sigma_0} + \frac{2h_0}{\sigma_0R_0}[P(R_0) - 2P_i] \quad (2.27)$$

En négligeant la pression du MIS en en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot en choc fort (on prend ici aussi $V_{r,0} = [2/(\gamma + 1)]V_0$), on obtient alors :

$$\frac{dV_0}{dt} = -\frac{\rho_{MIS}V_0^2}{\sigma_0} \left(1 - \frac{2h_0}{R_0}\right) + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P_i}{\sigma_0} \left(1 - \frac{4h_0}{R_0}\right) \quad (2.28)$$

2.2 Etude de la coquille perturbée

Dans le cas général, toutes les grandeurs mentionnées hydrodynamiques non moyennées, à savoir la densité ρ , la vitesse \vec{v} , qui était uniquement radiale dans le cas précédant, et la pression p , dépendent de r , θ , ϕ et t . On nomme à présent $R_s(\theta, \phi, t)$ au lieu de R_0 (c'est la position du front de choc perturbé) le rayon d'expansion de la coquille, $R_i(\theta, \phi, t)$ au lieu de $R_{i,0}(t)$ le rayon interne, $V_s(\theta, \phi, t) \equiv \partial R_s / \partial t$ au lieu de V_0 la vitesse d'expansion de la coquille et $h(\theta, \phi, t)$ au lieu de h_0 l'épaisseur de la coquille. On néglige dans ce qui va suivre les termes d'ordre égal ou supérieur à 2 par rapport à la perturbation. On définit les grandeurs suivantes, de manière analogue à celles de l'écoulement de base :

$$\sigma(\theta, \phi, t) = \frac{1}{R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 dr \quad (2.29)$$

$$V_r(\theta, \phi, t) = \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 v_r dr \quad (2.30)$$

$$\vec{V}_T(\theta, \phi, t) = \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 \vec{v}_T dr \quad (2.31)$$

où $v_r(r, \theta, \phi, t)$ et $\vec{v}_T(r, \theta, \phi, t)$ désignent respectivement les composantes radiale et transverse de la vitesse, V_r et \vec{V}_T représentent les vitesses radiale et transverse moyennées sur la largeur de la coquille de v_r et de \vec{v}_T . La grandeur σ représente toujours la densité surfacique. Les calculs sont en grande partie similaires, nous n'en présenterons donc que les grandes lignes et les approximations effectuées. Toutefois, contrairement au cas précédant où ces grandeurs moyennées étaient 0D, on a ici des grandeurs 2D : elles dépendent des coordonnées spatiales angulaires θ et ϕ .

Pour ce qui est de la dérivation de l'équation différentielle gouvernant de la densité surfacique σ , un terme supplémentaire apparaît lors de la substitution de l'équation (2.1) dans l'équation (2.8) correspondant à la composante angulaire de la divergence :

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma = & -2 \frac{V_s}{R_s} \sigma + \rho(R_s) \dot{R}_s - \rho(R_i) \left(\frac{R_i}{R_s} \right)^2 \dot{R}_i \\ & - \frac{1}{R_s^2} \left[\int_{R_i}^{R_s} \partial_r (\rho v_r r^2) dr + \int_{R_i}^{R_s} \vec{\nabla}_T \cdot (\rho \vec{v}_T) r^2 dr \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

où ∂_t représente la dérivée partielle $\partial/\partial t$ et où $\vec{\nabla}_T$ désigne la composante transverse de la divergence :

$$\vec{\nabla}_T \cdot \vec{X} = \frac{1}{r \sin \theta} \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta X_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (X_\phi) \right] \quad (2.33)$$

avec X_θ et X_ϕ sont les composantes non radiales du vecteur \vec{X} en coordonnées sphériques. De plus, on note qu'à présent, \dot{R}_s et \dot{R}_i sont les notations de $\partial R_s/\partial t$ et de $\partial R_i/\partial t$ respectivement. Les autres termes sont traités comme précédemment, mais maintenant, nous nous intéressons aux perturbations linéaires de l'écoulement à symétrie sphérique. Dans ces conditions, E.T. Vishniac [11] obtient alors en prenant en compte les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\partial_t \sigma = -2 \frac{V_s}{R_s} \sigma + \rho_{MIS} V_s - \sigma \vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T. \quad (2.34)$$

Dans cette équation (2.34) obtenue par Vishniac, la prise en compte de l'épaisseur et de l'indice adiabatique γ n'apporte aucune modification. La seule condition à sa validité est l'absence d'échange de matière sur la face interne de la coquille, en $r = R_i$, qui implique : $v(R_i) = \dot{R}_i$. Il faut garder à l'esprit que $\vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T$ est un terme perturbatif du premier ordre.

Concernant la dérivation de la vitesse radiale, on note l'apparition de deux termes supplémentaires lorsque l'on prend en compte γ et l'épaisseur h :

$$\begin{aligned} \partial_t V_r = & -\frac{\rho_{MIS} V_s V_r - P_i}{\sigma} + \frac{2h}{\sigma R_s} \left[\frac{2\rho_{MIS} V_s^2}{\gamma + 1} - 2P_i \right] \\ & - \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \left[\vec{v}_T \cdot \vec{\nabla} (\rho v_r) - \frac{\rho (\vec{v}_T)^2}{r} \right] r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Etant donné que les dérivées spatiales dans la direction transverse de v_r et de ρ sont non nulles uniquement à l'ordre 1, le produit $\vec{v}_T \cdot \vec{\nabla} (\rho v_r)$ est une quantité du second ordre. Elle peut donc être négligée, comme la quantité ρv_T^2 . Cela conduit donc à la relation suivante, où a été utilisé également la relation de Rankine-Hugoniot sur la vitesse :

$$\partial_t V_s = -\frac{\rho_{MIS} V_s^2}{\sigma} \left(1 - \frac{2h}{R_s} \right) + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P_i}{\sigma} \left(1 - \frac{4h}{R_s} \right). \quad (2.36)$$

Dans le cadre de l'approximation de coquille infiniment fine ($h \rightarrow 0$) et en prenant, comme Vishniac, $\gamma \rightarrow 1$, on obtient :

$$\partial_t V_s = -\frac{\rho_{MIS} V_s^2 - P_i}{\sigma}. \quad (2.37)$$

C'est l'équation perturbée de Vishniac pour la vitesse radiale et elle est identique à (2.17) qui est non perturbée. Pour la dérivée partielle temporelle de la vitesse transverse \vec{V}_T , on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}_T = & -\frac{\rho_{MIS} V_s \vec{V}_T}{\sigma} - \left(\vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T \right) \vec{V}_T + \frac{\left[\rho \vec{v}_T R^2 \dot{R} \right]_{R_i}^{R_s}}{\sigma R_s^2} \\ & - \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \left[\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \vec{v}_T - \rho \partial_t \vec{v}_T \right] r^2 dr . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le second terme du membre de droite de l'équation (2.38) est du second ordre, puisqu'il comporte à deux reprises la vitesse transverse \vec{v}_T qui est une perturbation. On sépare la divergence transverse de la divergence radiale, puis on utilise (2.2). Dans l'intégrale va apparaître un terme en $r^2 \vec{v}_T \vec{\nabla}_T \cdot (\rho \vec{v}_T)$ qui est clairement du second ordre. La partie radiale de ce même terme peut être intégrée par partie. En utilisant les relations de Rankine-Hugoniot, on parvient finalement à :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}_T = & -\frac{\rho_{MIS} V_s \vec{V}_T}{\sigma} + \frac{\rho_{MIS} V_s \vec{v}_T (R_s)}{\sigma} \\ & - \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \left[r^2 \vec{\nabla}_T P + \rho r^2 \left(\frac{v_r \vec{v}_T}{r} \right) \right] dr . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans cette équation, on utilise l'opérateur gradient transverse $\vec{\nabla}_T$, qui est défini, pour toute fonction $f(r, \theta, \phi, t)$, par :

$$\vec{\nabla}_T f(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \quad (2.40)$$

avec \vec{u}_θ et \vec{u}_ϕ les vecteurs unitaires de la base des coordonnées sphériques. Tous les termes sont linéaires par rapport à la perturbation. Comme les vitesses \vec{V}_T et \vec{v}_T sont elles-mêmes les perturbations de la vitesse tangentielle qui est nulle dans l'écoulement de base et qu'elles apparaissent de façon linéaire dans (2.39), elles conduisent à des contributions du premier ordre en perturbation. C'est aussi le cas pour le terme qui contient $\vec{\nabla}_T P$. En effet, en écrivant $P(r, \theta, \phi, t) = P_0(r, t) + P_1(r, \theta, \phi, t)$ où P_1 est la perturbation de la pression P_0 de l'écoulement de base non perturbé avec $P_1 \ll P_0$, on a $\vec{\nabla}_T P = \vec{\nabla}_T P_1$ (car P_0 n'a pas de dépendance angulaire) qui est bien du premier ordre. En réalité, la définition donnée par E.T. Vishniac à la vitesse transverse moyennée \vec{V}_T (équation 2.38) comporte un défaut : comme la vitesse transverse \vec{v}_T comprise dans l'intégrale est du premier ordre (c'est purement une perturbation), on aurait pu définir la vitesse transverse en prenant dans le facteur normalisant

l'intégrale les quantité de l'écoulement de base, à savoir diviser l'intégrale par σ_0 et R_0 , au lieu de σ et R_s . Toutefois, nous avons conservé la définition d'E.T. Vishniac pour faciliter les comparaisons avec son travail. Nous nous débarrasserons des derniers termes d'ordre 2 provenant de cette normalisation dans le paragraphe suivant. On peut alors montrer que le dernier terme de (2.39) peut se réécrire, en développant $v_r = 2/(\gamma + 1)V_s + \epsilon_1$ et $R_s = r + \epsilon_2$:

$$\begin{aligned} \int_{R_i}^{R_s} \rho r v_r \vec{v}_T dr &= \int_{R_i}^{R_s} \rho r \left(\frac{2}{\gamma + 1} V_s + \epsilon_1 \right) \vec{v}_T dr & (2.41) \\ &\approx \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V_s}{R_s} \int_{R_i}^{R_s} (r + \epsilon_2) \rho r \vec{v}_T dr \\ &\approx \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V_s}{R_s} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 \vec{v}_T dr \approx \frac{2}{\gamma + 1} \sigma V_s \vec{V}_T R_s . \end{aligned}$$

Ainsi, (2.39) devient :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}_T &= -\frac{\rho_{MIS} V_s \vec{V}_T}{\sigma} + \frac{\rho_{MIS} V_s \vec{v}_T (R_s)}{\sigma} & (2.42) \\ &- \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V_s \vec{V}_T}{R_s} - \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} r^2 \left(\vec{\nabla}_T P \right) dr . \end{aligned}$$

Pour finir, évaluons l'intégrale qui subsiste dans (2.42). Pour cela, on utilise le calcul présenté en annexe B, mais appliqué aux intégrales dont les bornes dépendent des coordonnées angulaires θ et ϕ . On montre aisément que, pour toute fonction f , on a l'égalité :

$$\int_{R_i}^{R_s} r^2 \vec{\nabla}_T f dr = f(R_i) R_i^2 \vec{\nabla}_T R_i - f(R_s) R_s^2 \vec{\nabla}_T R_s + \vec{\nabla}_T \int_{R_i}^{R_s} f r^2 dr . \quad (2.43)$$

Dans cette équation apparaissent les termes $\vec{\nabla}_T R_i$ et $\vec{\nabla}_T R_s$, définis par, dans le cas général d'une fonction $g(\theta, \phi, t)$:

$$\vec{\nabla}_T g(\theta, \phi, t) = \frac{1}{R_0} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} . \quad (2.44)$$

On a choisi de prendre R_0 comme facteur au dénominateur, car comme les termes en dérivées angulaires sont forcément du premier ordre (l'écoulement de base d'ordre 0 ne dépendant pas des variables angulaires), prendre R_i ou R_s ferait apparaître implicitement des termes supplémentaires d'ordre supérieur à 1, qu'il faudrait éliminer par la suite. Ainsi, ce dernier terme de l'équation (2.42) devient :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} r^2 \left(\vec{\nabla}_T P \right) dr &= -\frac{P(R_i) R_i^2 \vec{\nabla}_T R_i}{\sigma R_s^2} \\
&+ \frac{P(R_s) R_s^2 \vec{\nabla}_T R_s}{\sigma R_s^2} - \frac{1}{\sigma R_s^2} \vec{\nabla}_T \int_{R_i}^{R_s} P r^2 dr .
\end{aligned} \tag{2.45}$$

En introduisant la vitesse du son c_s (on a donc $c_s^2 = \gamma P/\rho$, soit $P = \rho c_s^2/\gamma$, on peut réécrire le dernier terme cette équation :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma R_s^2} \vec{\nabla}_T \int_{R_i}^{R_s} P r^2 dr &= \frac{c_s^2}{\gamma \sigma R_s^2} \vec{\nabla}_T \left(\frac{R_s^2}{R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 dr \right) \\
&= 2 \frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\vec{\nabla}_T R_s}{R_s} + \frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\vec{\nabla}_T \sigma}{\sigma} .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Toutefois, il faut ici faire l'hypothèse que la vitesse du son est uniforme dans la coquille, ce qui suppose une coquille isotherme, afin de pouvoir sortir la vitesse du son de l'intégrale et du gradient transverse. Dans le travail d'E.T. Vishniac, le premier terme du membre de droite de (2.46) n'apparaît pas, ce qui nous paraît être un oubli. Toutefois, comme son calcul est peu détaillé, nous ne pouvons l'affirmer avec certitude.

Sachant que, d'après les relations de Rankine Hugoniot en choc oblique (voir annexe E.2), $P(R_s) = \frac{2}{\gamma+1} \rho_{MIS} V_s^2$, ainsi que $\vec{v}_T(R_s) = -V_s \vec{\nabla}_T R_s$ (continuité de la vitesse transverse en choc oblique), on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_t \vec{V}_T &= -\frac{\rho_{MIS} V_s \vec{V}_T}{\sigma} - \frac{2}{\gamma+1} \frac{V_s \vec{V}_T}{R_s} - \frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\vec{\nabla}_T \sigma}{\sigma} \\
&- \frac{P_i}{\sigma} \vec{\nabla}_T R_i - 2 \frac{c_s^2}{\gamma} \frac{\vec{\nabla}_T R_s}{R_s} - \frac{\rho_{MIS} V_s^2 \vec{\nabla}_T R_s}{\sigma} \times \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} \right) .
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Dans cette équation, les deux premiers termes du membre de droite correspondent à l'effet de la pression bélier en choc oblique. Le troisième terme correspond aux effets induits par le gradient de densité dans la direction transverse de la coquille, et les trois derniers termes comportent les effets dûs à l'irrégularité de la coquille. Enfin, en prenant $\gamma \rightarrow 1$ et en supposant la coquille infiniment fine (ce qui permet de substituer $\vec{\nabla}_T R_i$ par $\vec{\nabla}_T R_s$, comme E.T. Vishniac le fait, cela devient :

$$\partial_t \vec{V}_T = -\frac{\rho_{MIS} V_s \vec{V}_T}{\sigma} - \frac{V_s \vec{V}_T}{R_s} - \frac{c_s^2}{\sigma} \vec{\nabla}_T \sigma - \frac{P_i}{\sigma} \vec{\nabla}_T R_s \tag{2.48}$$

qui est exactement l'équation du papier [11] (afin de retrouver cette équation, nous avons utilisé le calcul d'E.T. Vishniac à propos de l'intégrale de pression de l'équation 2.46).

2.3 Relations de dispersion

2.3.1 Relation de dispersion selon Vishniac

On définit à présent les variables suivantes :

$$\delta = \frac{\sigma(\theta, \phi, t)}{\sigma_0(t)} - 1 \quad (2.49)$$

$$\Delta R(\theta, \phi, t) = R_s(\theta, \phi, t) - R_0(t) . \quad (2.50)$$

La troisième variable est toujours \vec{V}_T . Les équations régissant leur évolution peuvent être déduites des équations (2.10), (2.16), (2.34), (2.37) et (2.48). Ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_0 \partial_t \delta &= -2V_0 \frac{\sigma_0}{R_0} (1 + \delta) \left(1 + \frac{\partial_t \Delta R}{V_0} \right) \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0} \right) \\ &+ \rho_{MIS} (V_0 + \partial_t \Delta R) - \sigma \vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T + 2V_0 \frac{\sigma_0}{R_0} (1 + \delta) - \frac{\sigma}{\sigma_0} \rho_{MIS} V_0 . \end{aligned} \quad (2.51)$$

On a ici remarqué que $V_s - V_0 = \partial_t \Delta R$. En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient :

$$\partial_t \delta = \frac{2V_0 \Delta R}{R_0^2} - \partial_t \Delta R \left(\frac{\rho_{MIS}}{\sigma_0} - \frac{2}{R_0} \right) - \frac{\delta \rho_{MIS} V_0}{\sigma_0} - \vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T . \quad (2.52)$$

Cependant, nous avons la relation $\sigma_0 = \rho_{MIS} R_0 / 3$ [voir (2.12)], et ainsi, (2.52) devient :

$$\partial_t \delta = \frac{2V_0 \Delta R}{R_0^2} + \frac{\partial_t \Delta R}{R_0} - \frac{\delta \rho_{MIS} V_0}{\sigma_0} - \vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T . \quad (2.53)$$

A présent, calculons $\partial_t^2 \Delta R$, qui provient de l'équation (2.37) :

$$\partial_t^2 \Delta R = \partial_t V_s - \frac{dV_0}{dt} = -\delta \frac{dV_0}{dt} - \frac{\rho_{MIS} V_s^2 - P_i}{\sigma_0} + \frac{\rho_{MIS} V_0^2 - P_i}{\sigma_0} . \quad (2.54)$$

En négligeant les termes d'ordre 2, il vient :

$$\partial_t^2 \Delta R = -\delta \frac{dV_0}{dt} - 2 \frac{\rho_{MIS} V_0}{\sigma_0} \partial_t \Delta R . \quad (2.55)$$

Enfin, en négligeant les termes d'ordre 2 et en remplaçant σ par $\sigma_0 (\delta + 1)$ dans (2.48), on obtient :

$$\partial_t \vec{V}_T = -\frac{\rho_{MIS} V_0 \vec{V}_T}{\sigma_0} - \frac{V_0 \vec{V}_T}{R_s} - c_s^2 \vec{\nabla}_T \delta - \frac{P_i}{\sigma_0} \vec{\nabla}_T (\Delta R) . \quad (2.56)$$

Nous avons donc trois EDP non linéaires couplées sur les perturbations au premier ordre ΔR , δ et \vec{V}_T . Nous allons travailler ces équations afin de trouver la relation de dispersion de la perturbation et connaître sa stabilité. On sait que pour un RSN, le rayon d'expansion R_0 est de la forme $R_0 \propto t^M$ (c'est la notation de E.T. Vishniac), où M est un exposant compris entre 2/5 et 1/4. D'autre part, on définit β comme le rapport entre la pression interne et la pression bélier : $\beta = P_i / (\rho_{MIS} V_0^2)$. En utilisant alors l'équation (2.28), on a premièrement $V_0 = M R_0 / t$ et $dV_0 / dt = M (M - 1) R_0 / t^2$. Deuxièmement, on déduit que :

$$P_i = \left[\frac{M (M - 1)}{3} + M^2 \right] \left(\frac{R_0}{t_0} \right)^2 = \frac{M}{3} (4M - 1) \rho_{MIS} \left(\frac{R_0}{t_0} \right)^2 . \quad (2.57)$$

Ainsi, la pression interne est bien proportionnelle au produit $\rho_{MIS} V_0^2$ avec un coefficient β qui vaut :

$$\beta = \frac{4M - 1}{3M} . \quad (2.58)$$

Les équations (2.53), (2.55) et (2.56) deviennent alors :

$$(\partial_t + 3M/t) \delta = \frac{(\partial_t + 2M/t) \Delta R}{R_0} - \vec{\nabla}_T \cdot \vec{V}_T \quad (2.59)$$

$$(\partial_t + 6M/t) \partial_t \Delta R = M (1 - M) \delta R_0 / t^2 \quad (2.60)$$

$$(\partial_t + 4M/t) \vec{V}_T = -3\beta M^2 (R_0 / t^2) \vec{\nabla}_T (\Delta R) . \quad (2.61)$$

Pour arriver à cette dernière équation, nous avons supposé que le terme en $c_s^2 \vec{\nabla} \delta$ est négligeable dans (2.56).

Deux remarques sont maintenant nécessaires à propos de la façon de décomposer ΔR , δ et \vec{V}_T . Premièrement, comme $R_0(t)$ est une puissance du temps [$R_0(t) \propto t^M$], le coefficient R_0 / t^2 présent dans chacune des équations donne une variation en t^{M-2} . Par la suite, l'unique possibilité est de prendre des perturbations dont la partie temporelle est aussi proportionnelle à une

puissance du temps. Deuxièmement, la partie angulaire des perturbations va être proportionnelle aux harmoniques sphériques, $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, puisqu'elles sont les fonctions propres angulaires en géométrie sphérique. Grâce aux équations linéaires, les $Y_{l,m}$ vont disparaître à la fin, mais elles auront apporté des contributions lors des dérivations partielles $\partial/\partial\theta$ et $\partial/\partial\phi$. Au final, nous avons donc $\delta(\theta, \phi, t) = \delta_0 (t/t_0)^s Y_{l,m}(\theta, \phi)$, $\Delta R(\theta, \phi, t) = \Delta R_0 (t/t_0)^{M+s} Y_{l,m}(\theta, \phi)$ et $\vec{V}_T(\theta, \phi, t) = V_{T,0} (t/t_0)^{2M+s-1} \vec{\nabla}_T [Y_{l,m}(\theta, \phi)]$ où δ_0 , ΔR_0 et $V_{T,0}$ sont les amplitudes des perturbations du contraste de densité, du rayon et de la vitesse tangentielle à l'instant initial t_0 . L'exposant s est celui de la perturbation pour δ , cependant comme le rayon et la vitesse de l'écoulement de base varient comme t^M et t^{M-1} respectivement, les perturbations ΔR et \vec{V}_T varient comme t^{M+s} et t^{M+s-1} respectivement.

En introduisant l'expression de δ dans (2.60), on aboutit à la forme explicite de ΔR :

$$\Delta R = \frac{M(1-M)}{(M+s)(7M+s-1)} \delta_0 R_0 (t/t_0)^s Y_{lm} \quad (2.62)$$

et comme $R_0(t) \propto t^M$, on trouve bien $\Delta R \propto t^{M+s}$.

En utilisant cette expression dans (2.61) on peut obtenir \vec{V}_T :

$$\vec{V}_T = -3\beta M^3 (R_0^2/t) \frac{1-M}{(M+s)(s+5M-1)(7M+s-1)} \times \delta_0 (t/t_0)^s \vec{\nabla}_T Y_{lm} \quad (2.63)$$

où on trouve que la variation temporelle est en $\vec{V}_T \propto t^{s+M-1}$. Il faut noter qu'en effet que le gradient transverse, $\vec{\nabla}_T Y_{l,m}$, contient un terme en $1/R_0$ comme indiqué dans la définition (2.44). Enfin, on introduit l'ensemble des équations (2.62) et (2.63) dans (2.59), on injecte les perturbations, afin d'aboutir, après simplification et en utilisant le laplacien des harmoniques sphériques :

$$(s+3M)(s+5M-1)[(M+s)(7M+s-1) - M(1-M)] = 3\beta M^3 (1-M)l(l+1) \quad (2.64)$$

Cette relation de dispersion est un polynôme de degré 4. Elle procure l'exposant s de la perturbation en fonction des paramètres M et l car le coefficient β est donné par (2.58). De plus, comme on peut toujours exprimer analytiquement les quatre racines d'un polynôme quartique par la méthode de Ferrari, on trouve :

$$s(l, M) = \frac{1}{2} - 4M \pm \frac{1}{2} \sqrt{18M^2 + 1 - 6M \pm 2M \sqrt{(7M-1)^2 - 12l(l+1)M(1-M)(4M-1)/(3M)}} \quad (2.65)$$

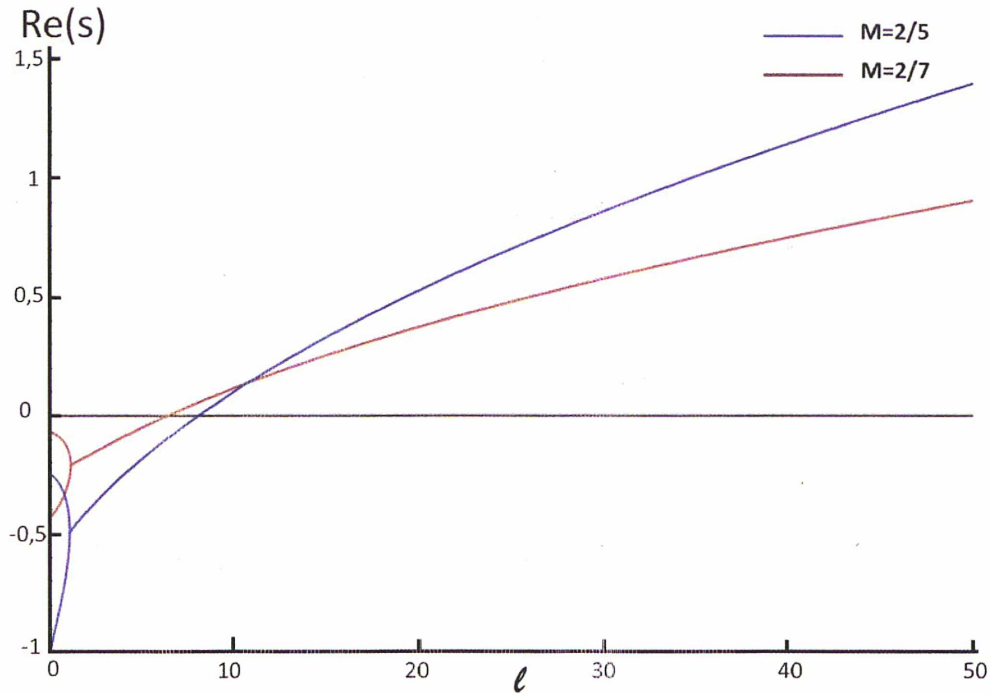


FIG. 2.1: Relation de dispersion selon E.T. Vishniac [11], pour deux valeurs de M : en rouge $M = 2/7$ (phase radiative selon Vishniac) et en bleu $M = 2/5$ (phase de Sedov-Taylor)

Cette relation de dispersion ne dépend pas du mode m comme il fallait s'y attendre, car l'écoulement de base est à symétrie sphérique. En général, pour des valeurs arbitraires de M et du mode l (ce nombre dépend de la longueur d'onde λ de la perturbation et il est donné par le quotient $2\pi R_0/\lambda$), $s(l, M)$ est un nombre complexe et si $Re(s) > 0$ (resp. $Re(s) < 0$), la perturbation croît (resp. décroît) avec le temps et l'écoulement est instable (resp. stable). L'exposant s correspond donc au taux de croissance de la perturbation.

Sur la figure 2.1 sont tracées les relations de dispersion pour deux valeurs de M , correspondant donc à deux phases différentes de l'évolution du RSN. Nous ne présentons ici que les racines du polynôme dont les valeurs présentent un domaine d'instabilité. En rouge est représentée la relation de dispersion pour $M = 2/7$, qui est la courbe tracée par E.T. Vishniac dans son article [11]. Une telle valeur de l'exposant M correspond à la phase radiative du RSN. En bleu est représentée la relation de dispersion pour $M = 2/5$, qui correspond à la phase de Sedov-Taylor du RSN, qui sera étudiée plus en détail dans le chapitre 3 de façon analytique ainsi que dans le chapitre 6 de façon numérique. On voit que dans les deux cas, les petits modes sont dans le

domaine de la stabilité ($Re(s) < 0$), et que, pour les valeurs de l supérieures à une certaine valeur l_{crit} ($l_{crit} \approx 6$ pour $M = 2/7$, et $l_{crit} \approx 8$ pour $M = 2/5$), la relation de dispersion présente un domaine instable. Ainsi, il ressort de l'étude d'E.T. Vishniac qu'un RSN subissant une déformation devrait présenter une instabilité, baptisée *overstability* dans son article, aboutissant d'après lui à la formation de filaments et à la fragmentation du RSN. Toutefois, il est important de noter que l'étude se limite au cas linéaire, donc à une perturbation de faible amplitude.

2.3.2 Relation de dispersion généralisée

On procède de la même façon avec les équations (2.34), (2.36) et (2.47) que nous avons obtenues en prenant en compte l'épaisseur h de la coquille et en supposant γ quelconque. L'équation sur δ n'est pas modifiée, car les équations sur les densités sont les mêmes dans les deux cas. Concernant $\partial_t \Delta R$, il y a en revanche des changements. En effet, deux termes supplémentaires apparaissent dans les équations régissant l'évolution de la vitesse radiale [voir les équations (2.28) et (2.36)] quand on considère une épaisseur finie. En prenant γ quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \Delta R = & -\delta \partial_t V_s - \frac{\rho_{MIS} V_s^2}{\sigma_0} \left(1 - \frac{2h}{R_s}\right) \\ & + \frac{\rho_{MIS} V_0^2}{\sigma_0} \left(1 - \frac{2h_0}{R_0}\right) + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P_i}{\sigma_0} \left(1 - \frac{4h}{R_s}\right) - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P_i}{\sigma_0} \left(1 - \frac{4h_0}{R_0}\right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

A présent, nous avons besoin de fermer le système avec une condition sur l'épaisseur que nous avons introduite. Nous proposons ici deux possibilités afin de traiter l'épaisseur de la coquille, qui représentent les deux possibilités limites, et elles induisent le plus de simplifications dans les équations. En effet, en toute rigueur, on a : $R_i(\theta, \phi, t) = R_{i,0}(t) + \Delta R_i(\theta, \phi, t)$, $R_s(\theta, \phi, t) = R_0(t) + \Delta R(\theta, \phi, t)$, $h_0(t) = R_0(t) - R_{i,0}(t)$ et $h(\theta, \phi, t) = R_s(\theta, \phi, t) - R_i(\theta, \phi, t)$. On peut adopter deux points de vue : soit on suppose que la coquille est rigide, dans le sens où son épaisseur ne varie pas angulairement, et dans ce cas, $h = h_0$, ce qui implique $\Delta R_i = \Delta R$, soit on suppose qu'on ne déforme que la face externe de la coquille, et dans ce cas nous avons $R_i(\theta, \phi, t) = R_{i,0}(t)$, qui conduit à $h(\theta, \phi, t) = h_0(t) + \Delta R(\theta, \phi, t)$, et $\Delta R_i(\theta, \phi, t) = 0$. Le cas de la coquille rigide est le plus proche de l'étude initiale de Vishniac, car en prenant $R_i \rightarrow R_s$, il suppose que la face interne subit la même déformation que la face externe. Toutefois, on étudie tout de même les deux cas, afin de voir l'influence de la déformation de la face interne. On s'attend à une baisse considérable des taux de croissance dans ce second cas, car le moteur de l'instabilité de Vishniac est la non colinéarité de la force

due à la pression thermique et de la pression bélier. En ne déformant que la face externe, l'instabilité ne devrait donc pas pouvoir se développer. Dans le cas d'une coquille rigide, pour laquelle l'épaisseur ne varie pas, on se ramène exactement à l'équation (2.55), les termes faisant intervenir l'épaisseur donnant alors uniquement des contributions d'ordre supérieur à 1. Dans le second cas, on obtient, en développant la vitesse selon $V_s = V_0 + \partial_t \Delta R$, et en négligeant les termes d'ordre 2, l'équation suivante :

$$\partial_t^2 \Delta R = -\delta \frac{dV_0}{dt} - \frac{2\rho_{MIS}}{\sigma_0} V_0 \partial_t \Delta R + \frac{2\rho_{MIS} V_0^2 \Delta R}{\sigma_0 R_0} - 2 \frac{\gamma + 1}{\sigma_0} P_i \frac{\Delta R}{R_0} . \quad (2.67)$$

On obtient ainsi deux nouveaux termes dus à l'épaisseur. Gardons en tête ces deux possibilités de traitement, et passons à la dérivation de la vitesse transverse. Concernant la vitesse transverse, l'épaisseur n'apparaît pas directement. Toutefois, on ne peut plus simplement dire, comme pour obtenir l'équation de Vishniac (2.48), que l'on peut remplacer R_i par R_s dans le terme contenant le gradient transverse du rayon. En prenant en compte également γ , cela donne, comme indiqué par l'équation (2.47) recopiée ci-après :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}_T = & -\frac{\rho_{MIS} V_s \vec{V}_T}{\sigma} - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V_s \vec{V}_T}{R_s} \\ & + \frac{\rho_{MIS} V_s^2}{\sigma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} - 1 \right) \vec{\nabla}_T R_s - \frac{1}{\gamma} \frac{c_s^2}{\sigma} \vec{\nabla}_T \sigma - \frac{P_i}{\sigma} \vec{\nabla}_T R_i . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Selon le cas considéré, à savoir une coquille rigide, ou une face interne non-perturbée, nous aurons ici aussi des différences. En effet, dans le premier cas, comme on a $\Delta R_i(\theta, \phi, t) = \Delta R(\theta, \phi, t)$, on retrouve une contribution du terme faisant intervenir la pression interne identique au cas de Vishniac. On a alors, en ne conservant que les termes d'ordre 1, et en remplaçant σ par $\sigma_0(\delta + 1)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}_T = & -\frac{\rho_{MIS} V_0 \vec{V}_T}{\sigma_0} - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V_0 \vec{V}_T}{R_0} - \frac{2}{R_0} \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla}_T \Delta R \\ & + \frac{\rho_{MIS} V_0^2}{\sigma_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} - 1 \right) \vec{\nabla}_T (\Delta R) - \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla}_T \delta - \frac{P_i}{\sigma_0} \vec{\nabla}_T (\Delta R) . \end{aligned} \quad (2.69)$$

En supposant que la face interne est non-perturbée, en revanche, le terme faisant intervenir la pression interne disparaît, et on aboutit à :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}_T = & -\frac{\rho_{MIS} V_0 \vec{V}_T}{\sigma_0} - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{V_0 \vec{V}_T}{R_0} - \frac{2}{R_0} \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla}_T R_s \\ & + \frac{\rho_{MIS} V_0^2}{\sigma_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} - 1 \right) \vec{\nabla}_T (\Delta R) - \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla}_T \delta . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Il y a donc deux traitements différents dans la suite : on va procéder comme dans le paragraphe précédent, en réalisant la même substitution que celle effectuée dans le paragraphe précédent ($V_0 = MR_0/t$, $dV_0/dt = M(M-1)R_0/t^2$, et $\sigma_0 = \rho_{MIS}R_0/3$) et introduisant les formes des perturbations, en utilisant dans le cas d'une coquille rigide les équations (2.53), (2.55) et (2.69), et dans le cas d'une coquille à la face interne indéformable les équations (2.53), (2.67) et (2.70).

Coquille rigide

Dans le cas d'une coquille rigide, on obtient pour la vitesse radiale :

$$\left(\partial_t + \frac{6M}{t}\right) \partial_t(\Delta R) = \delta M(1-M) \frac{R_0}{t^2}. \quad (2.71)$$

Pour la vitesse transverse, on obtient, en introduisant le paramètre β précédemment mentionné, et qui dépend ici de γ (voir annexe D) :

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{3\gamma + 5M}{\gamma + 1} \frac{1}{t}\right) \vec{V}_T = & - \left[3M^2 \frac{R_0}{t^2} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \beta \right) - \frac{2c_s^2}{\gamma R_0} \right] \\ & \times \vec{\nabla}_T(\Delta R) - \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla}_T \delta. \end{aligned} \quad (2.72)$$

A l'aide du calcul présenté en annexe D, on peut réaliser la substitution $c_s^2/\gamma = E_0 [R_0(t)/t]^2$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \frac{3\gamma + 5M}{\gamma + 1} \frac{1}{t}\right) \vec{V}_T = & - \left[3M^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \beta \right) - 2E_0 \right] \\ & \times \frac{R_0}{t^2} \vec{\nabla}_T(\Delta R) - E_0 \frac{R_0}{t^2} \vec{\nabla}_T \delta. \end{aligned} \quad (2.73)$$

En introduisant la forme des perturbations comme réalisé dans le paragraphe précédent, on aboutit à :

$$\Delta R = \frac{M(1-M)}{(s+7M-1)(s+M)} \delta_0 R_0 (t/t_0)^s Y_{l,m} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \left[2M \left(\frac{2\gamma + 3}{\gamma + 1} \right) + s - 1 \right] \vec{V}_T = & - \frac{1}{(s+M)(s+7M-1)} \\ \times \left\{ M(1-M) \left[3M^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \beta \right) + 2E_0 \right] + E_0 (s+7M-1)(s+m) \right\} \\ \times \frac{\delta_0}{(s+M)(s+7M-1)} \frac{R_0^2}{t} (t/t_0)^s \vec{\nabla}_T Y_{l,m}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

En introduisant ces deux équations dans l'équation (2.59) portant sur δ , on aboutit finalement à :

$$\begin{aligned} & (s + 3M) [(s + M)(s + 7M - 1) - M(1 - M)] \\ & \quad \times \left[2M \left(\frac{2\gamma + 3}{\gamma + 1} \right) + s - 1 \right] = -l(l + 1) \quad (2.76) \\ & \times \left\{ M(1 - M) \left[3M^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \beta \right) + 2E_0 \right] + E_0(s + M)(s + 7M - 1) \right\} . \end{aligned}$$

qui est une relation de dispersion reliant le taux de croissance s au mode propre l , au paramètre d'expansion M et à l'indice adiabatique γ . Cette relation de dispersion n'est malheureusement pas bicarrée, contrairement à celle de E.T. Vishniac, et ses quatre solutions, complexes, n'ont pas de forme élégante.

Sur la figure 2.2 sont tracées les relations de dispersion pour différentes valeurs de γ , et pour $M = 2/5$ (phase de Sedov-Taylor). Tout d'abord, on voit que le taux de croissance de l'I.V. tend vers celui de la solution de Vishniac dans l'hypothèse de coquille rigide lorsque $\gamma \rightarrow 1$. Ensuite, on observe que plus γ est grand, plus le domaine d'instabilité se réduit. Au dessus d'une valeur critique $\gamma_{crit} \approx 1,2$ il n'y a plus de domaine instable. Ainsi, il apparaît que dans le cadre de cette hypothèse, une faible valeur de γ permet le développement de l'I.V., ce qui n'est pas le cas pour des valeurs de γ plus grandes.

Coquille à la face interne indéformable

Dans le cas d'une coquille dont la face interne est indéformable, on obtient pour la vitesse radiale :

$$\left(\partial_t + \frac{6M}{t} \right) \partial_t \Delta R = M(1 - M) \delta \frac{R_0}{t^2} + \frac{6M^2}{t^2} [1 - (\gamma + 1)\beta] \Delta R \quad (2.77)$$

et pour la vitesse transverse :

$$\begin{aligned} \left[\partial_t + \frac{3\gamma + 5M}{\gamma + 1} \frac{M}{t} \right] \vec{V}_T = & - \left(\frac{2}{\gamma} \frac{c_s^2}{R_0} + 3M^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{R_0}{t^2} \right) \vec{\nabla}_T (\Delta R) \quad (2.78) \\ & - \frac{c_s^2}{\gamma} \vec{\nabla}_T \delta . \end{aligned}$$

En introduisant, comme précédemment, le paramètre E_0 pour faire disparaître la vitesse du son, on obtient :

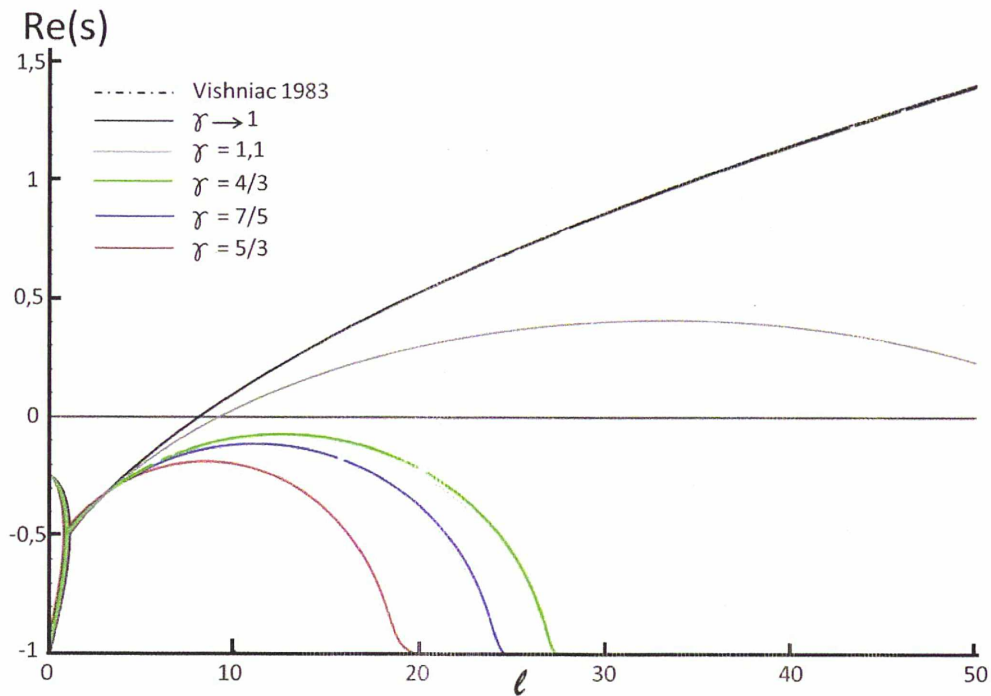


FIG. 2.2: Relations de dispersion du cas de la coquille rigide, pour différentes valeurs de γ (en rouge $\gamma = 5/3$, en bleu $\gamma = 7/5$, en vert $\gamma = 4/3$, en gris $\gamma = 1.1$ et en noir, $\gamma = 1.01$) et avec $M = 2/5$. On voit que plus l'indice adiabatique s'éloigne de l'unité, plus le domaine instable se réduit, et que pour des valeurs de γ suffisamment grandes ($\gamma > 1.2$), il n'y a plus de domaine instable. Pour γ proche de 1, la solution converge vers celle de Vishniac (pointillés noirs).

$$\left[\partial_t + \frac{3\gamma + 5M}{\gamma + 1} \frac{1}{t} \right] \vec{V}_T = - \left(2E_0 + 3M^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{R_0}{t^2} \vec{\nabla}_T (\Delta R) \quad (2.79)$$

$$- E_0 \frac{R_0^2}{t^2} \vec{\nabla}_T \delta .$$

On procède à présent comme dans le cas de la coquille rigide : nous utilisons les formes explicites des perturbations pour aboutir à :

$$\Delta R = \frac{M(1-M)}{\{(s+M)(s+7M-1) - 6M^2[1 - (\gamma+1)\beta]\}} \quad (2.80)$$

$$\times (t/t_0)^s \delta_0 R_0 Y_{l,m}$$

$$\left[s + M - 1 + \frac{3\gamma + 5}{\gamma + 1} \right] \vec{V}_T = -\delta_0 \frac{R_0^2}{t} \vec{\nabla}_T Y_{l,m} \quad (2.81)$$

$$\times \left\{ \left(2E_0 + 3M^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{M(1-M)}{(s+M)(s+7M-1) - 6M^2[1 - (\gamma+1)\beta]} + E_0 \right\} .$$

En introduisant ces deux équations dans l'équation (2.59) portant sur δ , on aboutit finalement à :

$$\{(s+M)(s+7M-1) - 6M^2[1 - (\gamma+1)\beta] - M(1-M)\} \quad (2.82)$$

$$\times (s+3M) \left(s + \frac{4\gamma+6}{\gamma+1} M - 1 \right) = -l(l+1)$$

$$\times \left\{ \left(2E_0 + 3M^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M(1-M) + E_0 [(M+s)(s+7M-1) + 6M^2[(\gamma+1)\beta - 1]] \right\} .$$

Sur la figure 2.3 sont tracées les relations de dispersion pour différentes valeurs de γ en phase de Sedov-Taylor ($M = 2/5$) dans le cadre de l'hypothèse de la coquille à face interne indéformable. On observe ici, contrairement au cas de la coquille rigide, que les relations de dispersion ne présentent pas de domaine instable, conformément à nos attentes. Ainsi, afin de subir l'I.V., la face interne de la coquille doit être également perturbée.

Dans ce chapitre, on a repris en détails l'étude de Vishniac, en montrant les points de désaccord concernant ses calculs. Nous avons dans un premier temps remontré ses résultats, puis nous avons généralisé cette étude en l'étendant à une valeur quelconque de l'indice adiabatique γ , et en considérant l'épaisseur de la coquille. Nous l'avons prise en compte de deux manières différentes, qui représentent les deux possibilités extrêmes entre lesquelles peut évoluer le

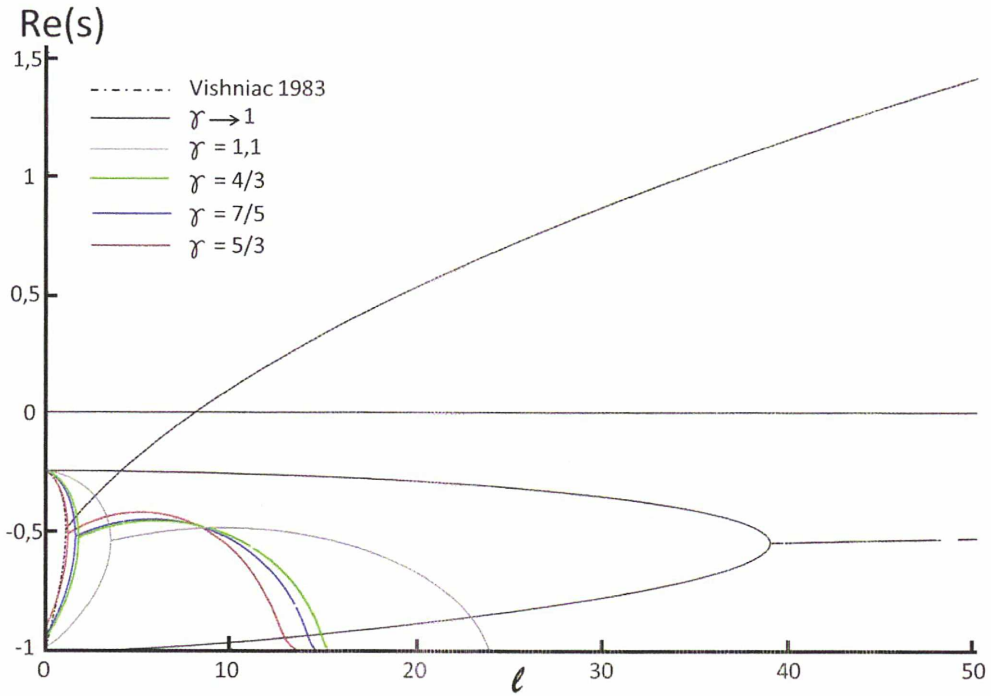


FIG. 2.3: Relations de dispersion du cas de la coquille à face interne indéformable, pour différentes valeurs de γ (en rouge $\gamma = 5/3$, en bleu $\gamma = 7/5$, en vert $\gamma = 4/3$, en gris $\gamma = 1.1$ et en noir, $\gamma = 1.001$) et avec $M = 2/5$. On voit que dans cette hypothèse, il n'y a pas de domaine instable, et que pour $\gamma \rightarrow 1$, la relation de dispersion ne tend pas vers celle d'E.T. Vishniac ou de la coquille rigide.

comportement de l'épaisseur. Dans le cas d'une coquille dont la déformation de la face interne suit la forme de la déformation de la face externe, on a pu voir qu'il existe un domaine d'instabilité pour une valeur de γ suffisamment faible ($\gamma < 1,2$). En revanche, dans le cas d'une coquille dont seule la face externe est déformée, on a montré qu'il n'existe pas de domaine instable. Cette étude détaillée remet donc en question les résultats initiaux d'E.T. Vishniac, selon lesquels les relations de dispersion présentent systématiquement un large domaine instable.

Chapitre 3

Etude de l'écoulement hydrodynamique autosemblable

3.1 Premières définitions et formalisme autosemblable

Au chapitre précédent, nous avons déterminé des relations de dispersion généralisées par rapport à celles de Vishniac [11]. Néanmoins, elles sont basées sur un modèle de coquille, où le détail de l'écoulement hydrodynamique n'est pas pris en compte. Le fait de moyenniser les grandeurs sur l'épaisseur de la coquille constitue une limite forte à cette étude, que l'on peut lever en s'intéressant à l'intégralité de l'écoulement hydrodynamique dans le RSN, depuis le front de choc jusqu'au centre du RSN.

Comme mentionné précédemment, Sedov [1], Taylor [2], Von Neumann et Landau [4] ont étudié la dynamique de l'explosion ponctuelle, forte et instantanée. Cette étude peut s'appliquer aux restes de supernova (RSN). D'autre part Ryu et Vishniac [12] ont étudié le développement de l'instabilité de Vishniac en prenant en compte l'intégralité de l'écoulement dans le cadre du formalisme autosemblable. Nous reprenons ici cette étude en détail. Afin d'aboutir à des relations de dispersion, il est généralement nécessaire de résoudre numériquement l'écoulement perturbé du fluide dans le RSN autour d'un écoulement de base instationnaire. Cependant, comme les équations de cet écoulement possèdent des singularités à l'origine ($r = 0$), nous devons déterminer analytiquement le comportement des solutions à proximité de l'origine.

L'écoulement est régi par les trois équations hydrodynamiques qui sont :

- l'équation de continuité
- l'équation du mouvement
- l'équation d'énergie

Ces équations sont respectivement, en géométrie sphérique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho v)}{\partial r} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (3.3)$$

où r , t , ρ , v , p et γ sont respectivement la coordonnée radiale, le temps, la densité, la vitesse, la pression et la constante adiabatique du fluide. Les deux premières équations (3.1) et (3.2) sont celles utilisées dans la première étude de E.T. Vishniac [11]. Toutefois, il est ici nécessaire de prendre en compte l'équation de la conservation de l'énergie. En effet, dans l'étude de E.T. Vishniac reposant sur un modèle de coquille, elle est rendue inutile par la relation connue entre la pression interne et la vitesse du front de choc (voir chapitre 2), ce qui n'est pas le cas ici.

Dans le cadre d'un écoulement auto-semblable (AS), on définit la variable "spatiale" AS, ξ , par :

$$\xi = \frac{r}{(\Omega t)^n} \quad (3.4)$$

où Ω est une quantité arbitraire homogène à une fréquence qui sera déterminée ultérieurement et n un exposant égal à $2/5$ en phase de Sedov-Taylor. Ce formalisme est un peu différent de celui qui est utilisé habituellement pour obtenir les solutions auto-semblables (SAS). L'avantage, entre autres, est qu'il permet de donner une interprétation simple à la variable ξ puisqu'elle a une dimension d'espace (comme r) et de réécrire l'ensemble des équations régissant l'écoulement en fonction de la seule variable radiale, ξ , dans laquelle le temps a été absorbé. Dans le cas général, une quantité physique q qui dépend de l'espace et du temps peut s'écrire $q = f(r, t)$ mais si elle a un comportement AS, elle peut se décomposer sous la forme :

$$f(r, t) = (\Omega t)^{a_f} \bar{f}(\xi) \quad (3.5)$$

où a_f est un exposant spécifique de f , et où \bar{f} ne dépend que de ξ . Ses dérivées partielles par rapport à t et à r sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Omega (\Omega t)^{a_f-1} \left[a_f \bar{f}(\xi) - n \xi \frac{d\bar{f}}{d\xi} \right] \quad (3.6)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\Omega t)^{a_f - n} \frac{d\bar{f}}{d\xi}. \quad (3.7)$$

Cette décomposition permet de passer de dérivées partielles par rapport à r et t à des dérivées totales par rapport à ξ . Ainsi, on définit la vitesse AS, \bar{v} , la densité AS, $\bar{\rho}$ et la pression AS, \bar{p} , auxquelles on associe respectivement les exposants a_v , a_ρ , a_p .

3.2 Equations hydrodynamiques de l'écoulement autosemblable non perturbé

Dans le cas de l'écoulement sphérique instationnaire non perturbé, les grandeurs v , ρ et p sont de la forme (3.5). On peut alors réécrire les équations hydrodynamiques ((3.1), (3.2), (3.3)) en fonction de \bar{v} , $\bar{\rho}$ et \bar{p} définis à la fin du paragraphe précédent avec ξ comme unique variable indépendante. On va alors passer d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) à un système d'équations aux dérivées ordinaires (EDO). De plus, pour indiquer qu'il s'agit de l'écoulement de base on va alors ajouter l'indice "0" aux grandeurs \bar{v} , $\bar{\rho}$ et \bar{p} . L'équation de continuité (3.1) devient (les calculs sont présentés dans l'annexe F) :

$$(\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi} + \bar{\rho}_0 \left(2\frac{\bar{v}_0}{\xi} + \frac{d\bar{v}_0}{d\xi} \right) = 0. \quad (3.8)$$

L'équation du mouvement (3.2) peut quant à elle se réécrire :

$$(\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d\bar{v}_0}{d\xi} + (n-1)\Omega\bar{v}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{d\bar{p}_0}{d\xi} = 0. \quad (3.9)$$

L'équation d'énergie (3.3) donne :

$$(\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d}{d\xi} (\bar{p}_0 \bar{\rho}_0^{-\gamma}) + 2(n-1)\Omega\bar{p}_0 \bar{\rho}_0^{-\gamma} = 0. \quad (3.10)$$

Lors de l'écriture de ces équations, on a été amenés à déterminer les exposants a_v , a_ρ , a_p . En effet, les termes en Ωt doivent disparaître dans le formalisme AS. Cela impose les valeurs suivantes :

$$a_v = n - 1 \quad (3.11)$$

$$a_p = 2(n - 1) \quad (3.12)$$

$$a_\rho = 0. \quad (3.13)$$

3.3 Equations hydrodynamiques de l'écoulement perturbé

Lorsqu'on étudie l'écoulement perturbé, les grandeurs fluides dépendent également de θ et ϕ (les paramètres angulaires de la représentation en coordonnées sphériques, voir Fig. 3.1). On note la perturbation $f_1(r, t, \theta, \phi)$ correspondant à la grandeur $f(r, t, \theta, \phi)$ à laquelle est associée la grandeur non-perturbée $f_0(r, t)$ par :

$$f(r, t, \theta, \phi) = f_0(r, t) + f_1(r, t, \theta, \phi) . \quad (3.14)$$

Cette décomposition s'applique à la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$, mais, de plus, elle comporte à présent une composante tangentielle \vec{v}_T en plus de la partie radiale \vec{v}_r . On définit $v_r(r, t, \theta, \phi)$ et $v_T(r, t, \theta, \phi)$ par :

$$\vec{v}(r, t, \theta, \phi) = v_r(r, t, \theta, \phi)\vec{e}_r + v_T(r, t, \theta, \phi)\vec{e}_T \quad (3.15)$$

où \vec{e}_r et \vec{e}_T sont respectivement le vecteur unitaire radial et le vecteur unitaire tangentiel de la représentation en coordonnées sphériques. Le vecteur \vec{e}_T est donné par :

$$\vec{v}_T = v_T\vec{e}_T = v_\theta\vec{e}_\theta + v_\phi\vec{e}_\phi \quad (3.16)$$

où \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ sont deux des vecteurs de la base des coordonnées sphériques (\vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_ϕ). On a donc :

$$\|\vec{v}_T\| = \sqrt{(v_\theta)^2 + (v_\phi)^2} \quad (3.17)$$

et

$$\vec{e}_T = \frac{v_\theta}{\sqrt{(v_\theta)^2 + (v_\phi)^2}}\vec{e}_\theta + \frac{v_\phi}{\sqrt{(v_\theta)^2 + (v_\phi)^2}}\vec{e}_\phi . \quad (3.18)$$

On décompose ensuite $v_r(r, t, \theta, \phi)$:

$$v_r(r, t, \theta, \phi) = v_0(r, t) + v_{1r}(r, t, \theta, \phi) . \quad (3.19)$$

Ici, v_{1r} est la perturbation radiale de la vitesse radiale v_0 . Par ailleurs, comme \vec{v}_T est une perturbation, elle sera notée dans la suite \vec{v}_{1T} par souci de cohérence.

En appliquant ensuite (3.14) à ρ et p , et en introduisant le résultat dans les équations (3.1), (3.2), (3.3), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho_0 + \rho_1)(v_0 + v_{1r})] + (\rho_0 + \rho_1)\vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T} = 0 \quad (3.20)$$

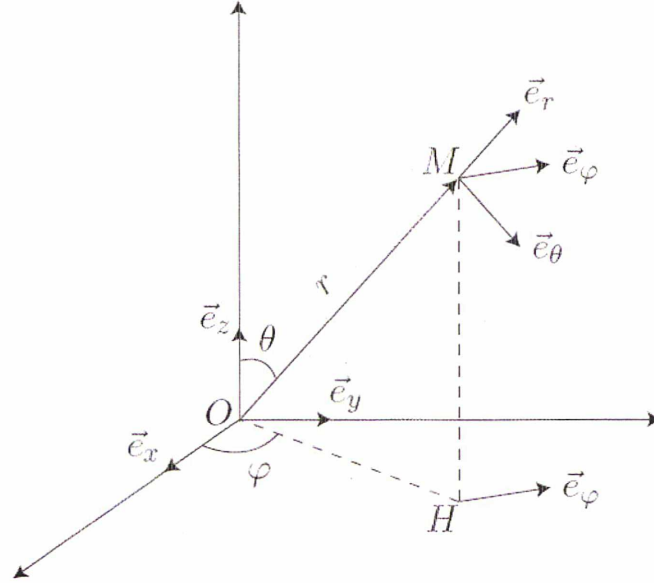


FIG. 3.1: Représentation des coordonnées sphériques

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_0 + v_{1r}) + (v_0 + v_{1r})\frac{\partial}{\partial r}(v_0 + v_{1r}) + \frac{1}{\rho_0 + \rho_1}\frac{\partial}{\partial r}(p_0 + p_1) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v_{1T}}{\partial t} + (v_0 + v_{1T})\frac{\partial v_{1T}}{\partial r} + \frac{(v_0 + v_{1T})v_{1T}}{r} + \frac{1}{\rho_0 + \rho_1}\vec{\nabla}_T(p_0 + p_1) = 0 \quad (3.22)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v_0 + v_{1r})\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] [(p_0 + p_1)(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma}] = 0 \quad (3.23)$$

Dans ces équations, on fait apparaître les opérateurs "divergence transverse" et "gradient transverse". Ces opérateurs sont définis par :

$$\vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (3.24)$$

et

$$\vec{\nabla}_T p = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (3.25)$$

En appliquant ensuite (3.14) à ρ et p , et en introduisant le résultat dans les équations (3.1), (3.2), (3.3), puis en développant ces équations, en utilisant les équations de l'écoulement de base (3.1), (3.2), (3.3), et en supprimant les termes d'ordre 2, on obtient alors les quatre EDP linéaires régissant les grandeurs perturbées (voir G) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial r^2 v_{1r}}{\partial r} + \rho_0 \vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T} \\ + \rho_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + 2 \frac{\rho_1 v_0}{r} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + v_{1r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial r} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial v_{1T}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_{1T}}{\partial r} + \frac{v_0 v_{1T}}{r} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla}_T (p_1) = 0 \quad (3.28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{p_1}{p_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + v_{1r} \log(p_0 \rho_0^{-\gamma}) = 0. \quad (3.29)$$

3.4 Equations hydrodynamiques de l'écoulement autosemblable perturbé

Afin de pouvoir étudier plus aisément ces équations, on souhaite se ramener à des EDOs, comme pour l'écoulement de base. On transforme donc l'écoulement perturbé dans le formalisme AS. Pour cela, on définit les grandeurs perturbées $\bar{f}_1(\xi, t, \theta, \phi)$ et $\delta f(\xi)$ dans le formalisme AS par :

$$f_1(r, t, \theta, \phi) = (\Omega t)^{a_f} \bar{f}_1(\xi, t, \theta, \phi) = (\Omega t)^{a_f} \delta f(\xi) F_f(t) G_f(\theta) H_f(\phi) \quad (3.30)$$

où $F_f(t)$ porte la composante temporelle de la perturbation, $\delta f(\xi)$ la dépendance en ξ , et les fonctions $G_f(\theta)$ et $H_f(\phi)$ portent les composantes angulaires de la perturbation. On détermine alors l'expression des dérivées partielles des fonctions perturbées AS par rapport à r et t :

$$\frac{\partial f_1(r, t, \theta, \phi)}{\partial r} = (\Omega t)^{a_f - n} \frac{\bar{f}_1(\xi, t, \theta, \phi)}{\delta f(\xi)} \frac{d\delta f}{d\xi} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial f_1(r, t, \theta, \phi)}{\partial t} = (\Omega t)^{a_f - 1} \bar{f}_1(\xi, t, \theta, \phi) \left[\Omega a_f + (\Omega t) \frac{\dot{F}_f(t)}{F_f(t)} - \frac{n \Omega \xi}{\delta f} \frac{d\delta f}{d\xi} \right] \quad (3.32)$$

On a noté $\dot{F}_f(t)$ la dérivée par rapport au temps de $F_f(t)$. Notre développement perturbatif de l'écoulement est au premier ordre. On reprend les

exposants a_f définis pour l'écoulement non perturbé, laissant l'évolution temporelle du taux de croissance être porté uniquement par la fonction $F_f(t)$. Lors de la réécriture des équations de l'hydrodynamique (3.1), (3.2), (3.3) régissant l'évolution des grandeurs considérées, il convient de supprimer les termes d'ordre supérieur au premier ordre comme cela a été fait au paragraphe précédent. De plus, pour le cas particulier de la vitesse transverse, on a :

$$\vec{v}_{1T} = (\Omega t)^{\alpha_{vT}} \delta v_T(\xi) F_{vT}(t) G_{vT}(\theta) H_{vT}(\phi) \vec{e}_T \quad (3.33)$$

qui provient à l'origine du développement perturbatif selon \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1T} = & (\Omega t)^{\alpha_{v\theta}} \delta v_\theta(\xi) F_{v\theta}(t) G_{v\theta}(\theta) H_{v\phi}(\phi) \vec{e}_\theta \\ & + (\Omega t)^{\alpha_{v\phi}} \delta v_\phi(\xi) F_{v\phi}(t) G_{v\phi}(\theta) H_{v\phi}(\phi) \vec{e}_\phi . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Cela correspond aux définitions données par (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19).

On introduit donc (3.14) dans les équations (3.26), (3.27), (3.28), (3.29). On obtient alors les équations régissant les grandeurs perturbées.

L'équation de continuité (3.1) donne :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 \left[(\Omega t) \frac{\dot{F}_\rho}{F_\rho} + (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{1}{\delta\rho} \frac{d\delta\rho}{d\xi} + 2 \frac{\bar{v}_0}{d\xi} + \frac{d\bar{v}_0}{d\xi} \right] \\ + \bar{v}_r \left(2 \frac{\bar{\rho}_0}{\xi} + \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi} + \frac{\bar{\rho}_0}{\delta v_r} \frac{d\delta v_r}{d\xi} \right) + \bar{\rho}_0 \vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

où l'opérateur $\vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T}$ qui est la divergence des termes transverses dans le formalisme AS est :

$$\vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T} = \frac{1}{\xi \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] . \quad (3.36)$$

L'équation du mouvement projetée selon \vec{e}_r conduit à :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1r} \left[(n-1) \Omega + \frac{d\bar{v}_0}{d\xi} + (\Omega t) \frac{\dot{F}_{vr}}{F_{vr}} + \frac{1}{\delta v_r} \frac{d\delta v_r}{d\xi} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \right] \\ + \frac{\bar{p}_1}{\bar{\rho}_0 \delta p} \frac{\delta p}{d\xi} - \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_0^2} \frac{d\bar{p}_0}{d\xi} = 0 . \end{aligned} \quad (3.37)$$

La même équation projetée selon \vec{e}_T mène quant à elle à :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1T} \left[(n-1)\Omega + (\Omega t) \frac{\dot{F}_{vT}}{F_{vT}} + \frac{1}{\delta v_T} \frac{d\delta v_T}{d\xi} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) + \frac{\bar{v}_0}{\xi} \right] \\ + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \vec{\nabla}_T (\bar{p}_1) = 0 . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ici, l'opérateur $\vec{\nabla}_T(p)$ qui est le gradient selon la composante transverse dans le formalisme AS, est donné par :

$$\vec{\nabla}_T p = \frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\xi \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{e}_\phi . \quad (3.39)$$

Enfin, l'équation d'énergie devient :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} \left\{ (2n-2)\Omega + (\Omega t) \frac{\dot{F}_p}{F_p} + \frac{1}{\delta p} \frac{d\delta p}{d\xi} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) - \frac{1}{\bar{p}_0} \left[(2n-2)\Omega \bar{p}_0 + (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d\bar{p}_0}{d\xi} \right] \right\} \\ - \gamma \frac{\bar{p}_1}{\bar{\rho}_0} \left[(\Omega t) \frac{\dot{F}_\rho}{F_\rho} + \frac{1}{\delta \rho} \frac{d\delta \rho}{d\xi} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) + \frac{1}{\bar{p}_0} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi} \right] \\ + \bar{v}_{1r} \left(\frac{1}{\bar{p}_0} \frac{d\bar{p}_0}{d\xi} - \frac{\gamma}{\bar{\rho}_0} \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.5 Séparation des variables

3.5.1 Séparation des variables angulaires

Les variables θ , ϕ , t et r étant indépendantes, on peut appliquer la méthode de séparation des variables aux équations (3.35), (3.37), (3.38), (3.40) et obtenir ainsi la forme des fonctions $F_f(t)$, $H_f(\theta)$ et $G_f(\phi)$. On peut en effet réécrire les équations (3.35), (3.37), (3.38), (3.40) sous la forme, respectivement :

$$\begin{aligned} l_1(\xi, t) G_\rho(\theta) H_\rho(\phi) + l_2(\xi, t) G_{vr}(\theta) H_{vr}(\phi) \\ + l_3(\xi, t) \vec{\nabla}_T \cdot [G_{vT}(\theta) H_{vT}(\phi) \vec{u}_T] = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} m_1(\xi, t) G_{vr}(\theta) H_{vr}(\phi) + m_2(\xi, t) G_p(\theta) H_p(\phi) \\ + m_3(\xi, t) G_\rho(\theta) H_\rho(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$h_1(\xi, t) G_{vT}(\theta) H_{vT}(\phi) - h_2(\xi, t) G_p(\theta) H_p(\phi) = 0 \quad (3.43)$$

$$k_1(\xi, t)G_p(\theta)H_p(\phi) + k_2(\xi, t)G_\rho(\theta)H_\rho(\phi) + k_3(\xi, t)G_{vr}(\theta)H_{vr}(\phi) = 0 \quad (3.44)$$

où les k_i , h_i , l_i et les m_i sont des expressions venant des équations (3.35), (3.37), (3.38), (3.40) et ne contiennent que des termes en ξ et t . Ces équations contiennent toutes une partie radiale indépendante de la partie en ξ et t , et on peut donc séparer ces composantes des équations. Ainsi, (3.43) nous indique que :

$$G_{vT}(\theta)H_{vT}(\phi) = L_0 \vec{\nabla}_T(G_p(\theta)H_p(\phi)) \quad (3.45)$$

où L_0 est une constante. L'équation (3.44) nous permet de dire que :

$$G_{vr}(\theta)H_{vr}(\phi) = -\frac{1}{k_3}(k_1G_p(\theta)H_p(\phi) + k_2G_\rho(\theta)H_\rho(\phi)) . \quad (3.46)$$

On utilise ensuite (3.42) afin de déterminer une relation entre $G_p(\theta)H_p(\phi)$ et $G_\rho(\theta)H_\rho(\phi)$. On introduit alors les expressions obtenues dans (3.41) afin d'obtenir une équation portant uniquement sur $G_p(\theta)H_p(\phi)$, qui est de la forme :

$$\Delta [G_p(\theta)H_p(\phi)] \propto G_p(\theta)H_p(\phi) . \quad (3.47)$$

On reconnaît ici une équation de Helmholtz tangentielle, qui admet pour solution les harmoniques sphériques :

$$G_p(\theta)H_p(\phi) = A_p Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (3.48)$$

où A_p est une constante, et l est le mode de la perturbation. On peut ainsi remonter aux expressions des composantes radiales des perturbations :

$$G_\rho(\theta)H_\rho(\phi) = A_\rho Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (3.49)$$

$$G_{vr}(\theta)H_{vr}(\phi) = A_{vr} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (3.50)$$

$$G_{vT}(\theta)H_{vT}(\phi) = A_{vT} \vec{\nabla}_T Y_{l,m}(\theta, \phi) . \quad (3.51)$$

3.5.2 Séparation du temps

Il s'agit ici de déterminer la forme des fonctions $F_f(t)$ pour chacune des variables, qui contiennent le taux de croissance de l'instabilité. Pour cela, on utilise l'équation (3.38), qui est de la forme :

$$c_{vT}(\xi, \theta, \phi)F_{vT}(t) + (\Omega t)c'_{vT}(\xi, \theta, \phi)\dot{F}_{vT}(t) + c_p(\xi, \theta, \phi)F_p(t) = 0 \quad (3.52)$$

où les c_f et c'_f sont des coefficients qui ne dépendent pas du temps. Les variables étant indépendantes, on en déduit :

$$F_{vT}(t) \propto (\Omega t)\dot{F}_{vT}(t) \propto F_p(t) . \quad (3.53)$$

On a ainsi une équation différentielle ordinaire sur F_{vT} :

$$F_{vT} = A(\Omega t)\dot{F}_{vT} \quad (3.54)$$

où A est une constante. Cette équation admet une solution du type :

$$F_{vT} = F_{vT0}t^s \quad (3.55)$$

où s est un nombre complexe et F_{vT0} est une constante. Cela peut se réécrire de manière plus explicite, avec $s = s_r + is_i$ la décomposition de s selon sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$F_{vT} = F_{vT0}(\Omega t)^{s_r} \{ \cos [s_i \ln (\Omega t)] + i \sin [s_i \ln (\Omega t)] \} . \quad (3.56)$$

La partie réelle de s est le taux de croissance de l'instabilité, alors que sa partie imaginaire intervient uniquement dans les oscillations des perturbations.

3.6 Equations différentielles ordinaires en ξ

En introduisant les formes (3.48), (3.49), (3.50), (3.51), (3.55), déterminées lors du précédent paragraphe, on peut déterminer des équations différentielles ordinaires en ξ . Celles-ci sont :

$$\begin{aligned} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi)\frac{d\delta\rho}{d\xi} + (\Omega s + 2\frac{\bar{v}_0}{\xi} + \frac{d\bar{v}_0}{d\xi})\delta\rho + \delta v_r\left(\frac{2\bar{\rho}_0}{\xi} + \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi}\right) \\ + \bar{\rho}_0\frac{d\delta v_r}{d\xi} - l(l+1)\frac{\bar{\rho}_0}{\xi}\delta v_{1T} = 0 . \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\left[(s+n-1)\Omega + \frac{d\bar{v}_0}{d\xi} \right] \delta v_r + (\bar{v}_0 - n\Omega\xi)\frac{d\delta v_r}{d\xi} + \frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{d\delta p}{d\xi} - \frac{\delta\rho}{\rho_0^2}\frac{\bar{p}_0}{d\xi} = 0 \quad (3.58)$$

$$\left[(s+n-1)\Omega + \frac{\bar{v}_0}{\xi} \right] \delta v_T + (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d\delta v_T}{d\xi} + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{\delta p}{\xi} = 0 \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} & \left[\Omega s - \frac{\bar{v}_0 - n\Omega\xi}{\bar{\rho}_0} \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi} \right] \frac{\delta p}{\bar{\rho}_0} + (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{d\delta\bar{p}}{d\xi} \\ & - \frac{\gamma}{\bar{\rho}_0} (\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d\delta\rho}{d\xi} - \left[\Omega s + \frac{n\Omega\xi - \bar{v}_0}{\bar{\rho}_0} \frac{d\bar{\rho}_0}{d\xi} \right] \frac{\gamma\delta\rho}{\bar{\rho}_0} \\ & + \left(\frac{1}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{d\xi} - \frac{\gamma}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{d\xi} \right) \delta v_r = 0 . \end{aligned} \quad (3.60)$$

3.7 Résolution numérique de l'écoulement de base

Afin de déterminer numériquement l'écoulement, il convient d'adimensionner les équations (3.8), (3.9), (3.10) pour l'écoulement de base, et les équations (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) pour l'écoulement perturbé. Pour ce faire, on introduit de nouvelles variables, adimensionnées : equation de helmholtz

$$\xi = K_\xi \tilde{\xi} \quad (3.61)$$

$$\bar{v}_0 = K_v \tilde{v}_0 \quad (3.62)$$

$$\bar{\rho}_0 = K_\rho \tilde{\rho}_0 \quad (3.63)$$

$$\bar{p}_0 = K_p \tilde{p}_0 \quad (3.64)$$

où K_ξ , K_v , K_ρ , et K_p sont des constantes qui contiennent respectivement les dimensions de la position, de la vitesse, de la densité, et de la pression. On est libre de leur choix, et on les définira plus tard de manière à simplifier les équations. Les équations (3.8), (3.9), (3.10) deviennent respectivement :

$$\frac{K_p}{K_\xi} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} [K_v \tilde{v}_0 - n\Omega K_\xi \tilde{\xi}] + K_\rho \tilde{\rho}_0 \left[2 \frac{K_v \tilde{v}_0}{K_\xi \tilde{\xi}} + \frac{K_v}{K_\xi} \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \right] = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{K_v^2}{K_\xi} \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \left[\tilde{v}_0 - n\Omega \frac{K_\xi}{K_v} \tilde{\xi} \right] + (n-1)\Omega K_v \tilde{v}_0 + \frac{K_p}{K_\rho K_\xi} \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} = 0 \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_v}{K_\xi} \left(\tilde{v}_0 - n\Omega\xi \frac{K_\xi}{K_v} \right) \left[K_p K_\rho^{-\gamma} \tilde{\rho}_0^{-\gamma} \frac{d\tilde{p}_0}{d\xi} - \gamma K_p K_\rho^{-\gamma} \tilde{p}_0 \tilde{\rho}_0^{-\gamma-1} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\xi} \right] \\ + 2(n-1)\Omega K_p K_\rho^{-\gamma} \tilde{p}_0 \tilde{\rho}_0^{-\gamma} = 0 . \end{aligned} \quad (3.67)$$

En posant

$$K_\xi = \xi_s \quad (3.68)$$

$$K_v = n\Omega\xi_s \quad (3.69)$$

$$K_\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{MIS} \quad (3.70)$$

et

$$K_p = K_\rho K_v^2 \quad (3.71)$$

où ξ_s est la valeur de ξ sur le front de choc, on obtient :

$$\left(\tilde{v}_0 - \tilde{\xi} \right) + \tilde{\rho}_0 \left(\frac{2\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \right) = 0 \quad (3.72)$$

$$\left(\tilde{v}_0 - \tilde{\xi} \right) \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} + \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} + \frac{n-1}{n} \tilde{v}_0 = 0 \quad (3.73)$$

$$\left(\tilde{v}_0 - \tilde{\xi} \right) \left(\frac{1}{\tilde{p}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} - \frac{\gamma}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} \right) + 2 \frac{n-1}{n} = 0 . \quad (3.74)$$

D'après les relations de Rankine Hugoniot, que l'on trouve dans la littérature, on connaît les valeurs des grandeurs \tilde{v}_0 , $\tilde{\rho}_0$ et \tilde{p}_0 en $\tilde{\xi} = 1$ (au front de choc). On a :

$$\tilde{\rho}_0(1) = 1 \quad (3.75)$$

$$\tilde{v}_0(1) = \frac{2}{\gamma+1} \quad (3.76)$$

$$\tilde{p}_0(1) = 2 \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} . \quad (3.77)$$

On peut donc à présent résoudre numériquement l'écoulement de base. Pour cela, il suffit de combiner les trois équations (3.72), (3.73) et (3.74) pour

obtenir une relation donnant la valeur de la dérivée d'une des trois grandeurs hydrodynamiques en fonction de ces mêmes grandeurs. On peut alors effectuer une résolution itérative. On obtient cette relation en exprimant la dérivée de la vitesse à l'aide de (3.72) :

$$\frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} = -2\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} - (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}}. \quad (3.78)$$

On utilise ensuite l'équation (3.73) et (3.78), pour exprimer la dérivée de la pression :

$$\frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} = \tilde{\rho}_0 (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \left(\frac{2\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0} \right) - \frac{n-1}{n} \tilde{v}_0 \tilde{\rho}_0. \quad (3.79)$$

Finalement, on utilise l'équation (3.74) dans laquelle on introduit (3.78) et (3.79) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} = & \frac{1}{\left[\frac{(\tilde{v}_0 - \tilde{\xi})^2}{\tilde{\rho}_0} - \frac{\gamma}{\tilde{\rho}_0} \right]} \\ & \times \left[\frac{2}{\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}} \frac{1-n}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{\tilde{v}_0 \tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0} - 2 \frac{\tilde{v}_0 \tilde{\rho}_0}{\tilde{\xi} \tilde{\rho}_0} (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

On peut à présent obtenir numériquement l'écoulement de base ; on utilise la définition de la dérivée :

$$\frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}) = \frac{\rho_0(\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi}) - \rho_0(\tilde{\xi})}{\delta\tilde{\xi}} \quad (3.81)$$

où $\delta\tilde{\xi}$ est une variation infinitésimale de $\tilde{\xi}$. On en déduit :

$$\tilde{\rho}_0(\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi}) = \tilde{\rho}_0(\tilde{\xi}) + \delta\tilde{\xi} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}). \quad (3.82)$$

En prenant $\delta\tilde{\xi}$ négatif, on peut, puisqu'on connaît la valeur des grandeurs hydrodynamiques au front de choc, "remonter" l'écoulement et ainsi le résoudre. On obtient alors ce type de profil :

Dans ces figures, une seconde normalisation a été effectuée : toutes les grandeurs sont normalisées à leur valeur au front de choc, ce qui implique que $\tilde{v}_0(1) = \tilde{\rho}_0(1) = \tilde{p}_0(1) = 1$

On remarque alors que la résolution numérique des équations présente une difficulté : certains termes divergent à l'origine, car la densité ρ tend vers 0 à l'origine (voir Fig. 3.2). Pour résoudre cette difficulté, qui empêche d'obtenir la vitesse près de l'origine, on va utiliser le développement limité près de l'origine calculé au chapitre (). Néanmoins, ce calcul de développement limité ne permet pas de déterminer toutes les constantes nécessaires. On utilise donc la solution implicite de Sedov [1].

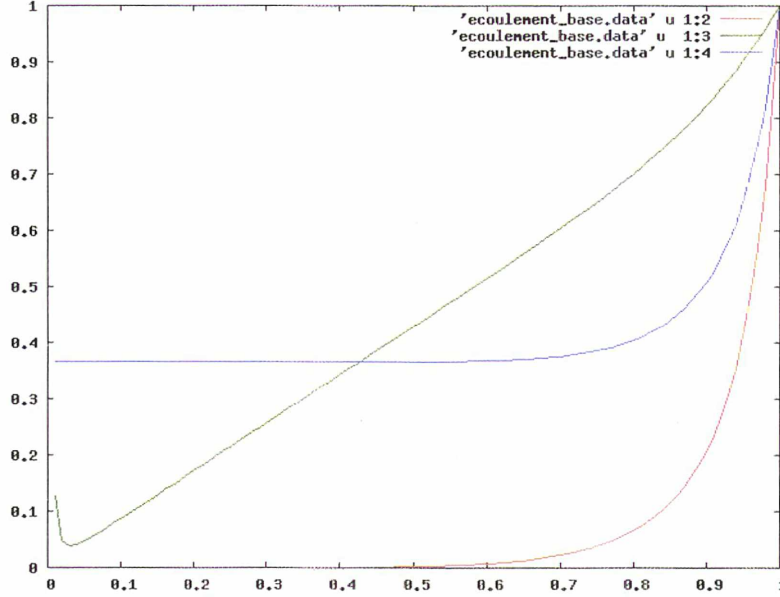


FIG. 3.2: Profils des grandeurs hydrodynamiques pour $\gamma = 1.4$. La vitesse est en vert, la densité en rouge et la pression en bleu

3.7.1 Développement limité à partir de la solution implicite

Dans cette partie, comme nous nous intéressons à l'écoulement de base de Sedov, la valeur de n est fixée à $n = 2/5$. La solution implicite permet d'exprimer la grandeur AS $\tilde{\xi}$ en fonction de \tilde{v} et de leur rapport, ici noté :

$$v' = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\tilde{v}}{\tilde{\xi}}. \quad (3.83)$$

Cette relation est :

$$v'^2 \left[\frac{5(\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)v'}{7 - \gamma} \right]^{\nu_1} \left(\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right)^{\nu_2} = \tilde{\xi}^{-5} \quad (3.84)$$

où ν_1 et ν_2 sont des exposants définis par :

$$\nu_1 = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)} \quad (3.85)$$

$$\nu_2 = -5 \frac{\gamma - 1}{2\gamma + 1}. \quad (3.86)$$

Le terme de droite dans (3.84) est divergent en 0. Le seul terme qui peut être divergent dans le terme de gauche est le terme à la puissance ν_2 , à la condition

que :

$$v' \longrightarrow \frac{\gamma + 1}{2\gamma} . \quad (3.87)$$

Cela implique :

$$\tilde{v}_0 = \frac{\xi}{\gamma} . \quad (3.88)$$

L'équation portant sur $\tilde{\rho}_0$ est :

$$\tilde{\rho}_0 = \tilde{\xi}^{\frac{-5\nu_3}{\nu_2}} v'^{\frac{-2\nu_3}{\nu_2}} \left[\frac{5(\gamma + 1) - 2(3\gamma - 1)v'}{7 - \gamma} \right]^{-\nu_1\nu_3/\nu_2 + \nu_4} \left(\frac{\gamma + 1 - 2v'}{\gamma - 1} \right)^{\nu_5} \quad (3.89)$$

où

$$\nu_3 = \frac{3}{2\gamma + 1} \quad (3.90)$$

$$\nu_4 = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2 - \gamma)(3\gamma - 1)(2\gamma + 1)} \quad (3.91)$$

$$\nu_5 = -\frac{2}{2 - \gamma} . \quad (3.92)$$

On introduit dans cette équation la relation portant sur v' (3.84) afin d'obtenir :

$$\tilde{\rho}_0 = \left[\frac{2\gamma^2 + 3\gamma + 1}{\gamma(7 - \gamma)} \right]^{\nu_1} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^{\nu_5} \left(\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right)^{\nu_3} . \quad (3.93)$$

On constate que le terme à la puissance ν_3 tend vers 0 à l'origine. Il convient donc d'introduire dans l'équation (3.84) un terme d'ordre supplémentaire dans l'expression de v' . On pose :

$$v' = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} + \epsilon . \quad (3.94)$$

En introduisant (3.94) dans (3.84), on obtient l'expression de ϵ en fonction de ξ :

$$\epsilon = \tilde{\xi}^{-5/\nu_2} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{-2/\nu_2} \left[\frac{2\gamma^2 + 3\gamma + 1}{\gamma(7 - \gamma)} \right]^{-\nu_1/\nu_2} (\gamma - 1) . \quad (3.95)$$

En insérant cette expression (3.95) dans (3.89), on obtient le développement limité de ρ :

$$\tilde{\rho}_0 = \left[\frac{2\gamma^2 + 3\gamma + 1}{\gamma(7-\gamma)} \right]^{\nu_1 - \nu_1\nu_3/\nu_2} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{\nu_5 - 2\nu_3/\nu_2} \tilde{\xi}^{-5\nu_3/\nu_2} . \quad (3.96)$$

On a ainsi obtenu le développement limité de $\tilde{\rho}_0$ en 0. Il nous reste alors à déterminer celui de \tilde{p}_0 , qui comporte un terme constant et un terme de premier ordre. La solution implicite sur \tilde{p}_0 est :

$$\tilde{p}_0 = v'^{-2\nu_3/\nu_2 + 2/\nu_2 + 2} \left[\frac{5(\gamma+1) - 2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma} \right]^{-\nu_1\nu_3/\nu_2 + \nu_4 + \nu_1/\nu_2} \left(\frac{\gamma+1-2v'}{\gamma-1} \right)^{\nu_5} \quad (3.97)$$

Le terme constant, correspondant à la valeur de \tilde{p}_0 en 0, s'obtient en introduisant l'équation (3.87). Ainsi, on obtient :

$$\tilde{p}_0(0) = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{-2\nu_3/\nu_2 + 2/\nu_2 + 2} \left[\frac{(2\gamma+1)(\gamma+1)}{\gamma(7-\gamma)} \right]^{-\nu_1\nu_3/\nu_2 + \nu_4 + \nu_1/\nu_2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right)^{\nu_5 + 1} \quad (3.98)$$

Ensuite, en introduisant (3.94) dans (3.97), on obtient le terme de premier ordre du développement limite de \tilde{p}_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= \tilde{p}_0(0) + \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) \frac{2\gamma-8}{5(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right) \frac{-\gamma}{2-\gamma} \\ &\times \left[\frac{(2\gamma+1)(\gamma+1)}{\gamma(7-\gamma)} \right] \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{5(3\gamma-1)(2-\gamma)(\gamma-1)} \\ &\times \left[\frac{10\gamma^2 + 16\gamma - 12}{(\gamma+1)(2\gamma+1)(2-\gamma)} \right] \tilde{\xi}^{-5\nu_3/\nu_2 + 2} . \end{aligned}$$

3.7.2 Calcul de l'écoulement de base : résolution et raccord

Dans un premier temps, nous avons effectué des tests concernant la résolution nécessaire afin de faire converger le calcul. Pour cela, nous avons testé différents pas de calcul, et sélectionné celui pour lequel la convergence est raisonnablement atteinte tout en restant dans des limites de temps de calcul réalistes. Cette convergence est atteinte pour un pas de $5 \cdot 10^{-8}$ (voir Fig. 3.7.2).

Ces développements limités nous permettent alors de calculer l'écoulement de base jusqu'à l'origine. Pour cela, on calcule depuis le front de choc ($\xi = 1$) les grandeurs hydrodynamiques à l'aide des équations de l'écoulement, et on compare à chaque pas de calcul la valeur de la vitesse calculée par les équations

ξ	ρ_0	v_0	p_0
dxi : 2.0000000000E-06			
0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01
0.5000000000E+00	0.17182085188E-02	0.42868661613E+00	0.36588076205E+00
0.1000000000E+00	0.96495386909E-08	0.85954117813E-01	0.36546569596E+00
0.5000000000E-01	0.46952489544E-10	0.43816413682E-01	0.36546569587E+00
0.1000000000E-01	-0.10506286913E-13	0.32541693007E-01	0.36546569587E+00
dxi : 1.0000000000E-06			
0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01
0.5000000000E+00	0.17183657182E-02	0.42868183488E+00	0.36587950232E+00
0.1000000000E+00	0.97368487331E-08	0.85834205616E-01	0.36546438725E+00
0.5000000000E-01	0.50533155821E-10	0.43336808056E-01	0.36546438716E+00
0.1000000000E-01	-0.24973654707E-14	0.20560181193E-01	0.36546438716E+00
dxi : 5.0000000000E-07			
0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01
0.5000000000E+00	0.17184443215E-02	0.42867944423E+00	0.36587887245E+00
0.1000000000E+00	0.97806853305E-08	0.85774246637E-01	0.36546373290E+00
0.5000000000E-01	0.52383402995E-10	0.43096982935E-01	0.36546373280E+00
0.1000000000E-00	0.10274926948E-15	0.14566711078E-01	0.36546373280E+00
dxi : 1.0000000000E-07			
0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01
0.5000000000E+00	0.17185072059E-02	0.42867753170E+00	0.36587836856E+00
0.1000000000E+00	0.98158418988E-08	0.85726278049E-01	0.36546320941E+00
0.5000000000E-01	0.53892637281E-10	0.42905112034E-01	0.36546320931E+00
0.1000000000E-01	0.10589100991E-15	0.97706292269E-02	0.36546320931E+00
dxi : 5.0000000000E-08			
0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01
0.5000000000E+00	0.17185150666E-02	0.42867729263E+00	0.36587830557E+00
0.1000000000E+00	0.98202419246E-08	0.85720281894E-01	0.36546314397E+00
0.5000000000E-01	0.54083114760E-10	0.42881127521E-01	0.36546314388E+00
0.1000000000E-01	0.19210729923E-15	0.91710379936E-02	0.36546314388E+00
dxi : 1.0000000000E-08			
0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01	0.1000000000E+01
0.5000000000E+00	0.17185213552E-02	0.42867710138E+00	0.36587825518E+00
0.9999999999E-01	0.98237628550E-08	0.85715484905E-01	0.36546309162E+00
0.4999999999E-01	0.54235790783E-10	0.42861939602E-01	0.36546309154E+00
0.1000000000E-01	0.28421775548E-15	0.86913469207E-02	0.36546309154E+00

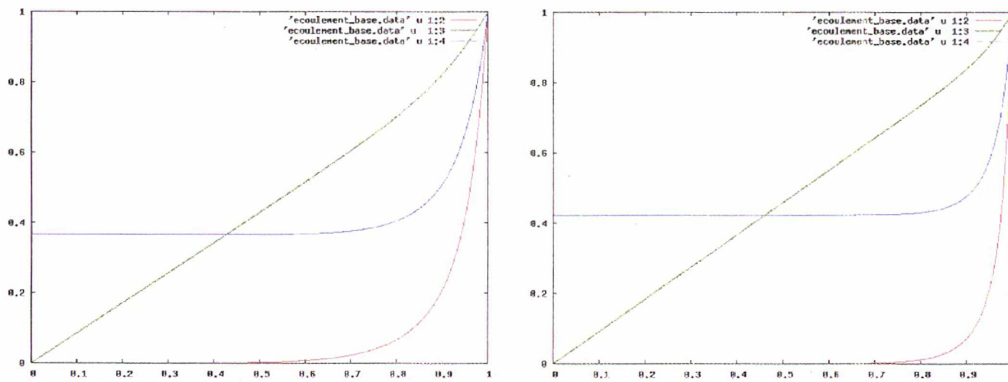
FIG. 3.3: Table de valeurs en différentes valeurs de ξ pour différents pas

ξ	v_0 num.	v_0 dl	dv_0 num.	dv_0 dl
0.1	0.714335682E-01	0.714285715E-01	0.714185778E+00	0.714285725E+00
0.2	0.142858397E+00	0.142857224E+00	0.714273528E+00	0.714289595E+00
0.3	0.214286681E+00	0.214289561E+00	0.714296441E+00	0.714407555E+00
0.4	0.285723050E+00	0.285773457E+00	0.714506044E+00	0.715691034E+00
0.5	0.357231077E+00	0.357635754E+00	0.716133405E+00	0.723650768E+00
0.6	0.429168688E+00	0.431357411E+00	0.724736836E+00	0.758397118E+00
0.7	0.503014989E+00	0.512049611E+00	0.759537533E+00	0.877816150E+00
0.8	0.583692142E+00	0.614273214E+00	0.875278372E+00	0.122306584E+01
0.9	0.684841343E+00	0.774030456E+00	0.119594626E+01	0.209889291E+01
1.0	0.833333333E+00	0.107118168E+01	0.180555555E+01	0.410479747E+01

FIG. 3.4: Valeurs de la vitesse v_0 et de la dérivée de la vitesse dv_0 calculées numériquement (num.) et avec le développement limité (dl).

hydrodynamiques à la valeur calculée avec le développement limité. Lorsque la différence entre les deux calculs est minimale, on effectue le branchement. Cela se produit pour ξ aux environs de 0.27 (voir Fig. 3.7.2).

Nous avons alors résolu l'écoulement de base.



(a) Profils des grandeurs hydrodynamiques pour $\gamma = 1.4$ (b) Profils des grandeurs hydrodynamiques pour $\gamma = 1.2$

FIG. 3.5: La vitesse est en vert, la densité en rouge et la pression en bleu

Dans cette figure, une seconde normalisation a été effectuée : toutes les grandeurs sont normalisées à leur valeur au front de choc, ce qui implique que $\tilde{v}(1) = \tilde{\rho}(1) = \tilde{p}(1) = 1$

3.8 Résolution numérique des équations de l'écoulement perturbé

3.8.1 Adimensionnement des équations

Une fois qu'on a résolu l'écoulement de base, on peut résoudre les équations régissant l'écoulement perturbé (3.57), (3.58), (3.59) et (3.60). Afin d'effectuer une résolution numérique, il convient d'adimensionner ces équations de la même façon que pour l'écoulement de base. Il apparaît dans l'écoulement perturbé les quantités $\delta\tilde{v}_T$ et $\delta\tilde{v}_r$, qui vont être normalisées par le facteur K_v du paragraphe précédent. Les équations deviennent, après adimensionnement :

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \frac{d\delta\tilde{\rho}}{d\tilde{\xi}} + \left(\frac{s}{n} + 2\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \right) \delta\tilde{\rho} + \left(2\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} \right) \delta\tilde{v}_r \\ - l(l+1) \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\xi}} \delta\tilde{v}_T + \tilde{\rho}_0 \frac{d\delta\tilde{v}_r}{d\tilde{\xi}} = 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\left(\frac{s+n-1}{n} + \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \right) \delta\tilde{v}_r + (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \frac{d\delta\tilde{v}_r}{d\tilde{\xi}} + \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\delta\tilde{p}}{d\tilde{\xi}} - \frac{\delta\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0^2} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} = 0 \quad (3.100)$$

$$\left(\frac{s+n-1}{n} + \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} \right) \delta\tilde{v}_T + (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \frac{d\delta\tilde{v}_T}{d\tilde{\xi}} + \frac{\delta\tilde{\rho}}{\tilde{\xi}\tilde{\rho}_0} = 0 \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{n} - \frac{\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} \right) \frac{d\delta\tilde{p}}{d\tilde{\xi}} + \frac{\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\delta\tilde{p}}{d\tilde{\xi}} - \frac{\gamma}{\tilde{\rho}_0} (\tilde{v}_0 - \tilde{\xi}) \frac{d\delta\tilde{\rho}}{d\tilde{\xi}} \\ - \gamma \frac{\delta\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{s}{n} + \frac{\tilde{\xi} - \tilde{v}_0}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\delta\tilde{\rho}}{d\tilde{\xi}} \right) + \left(\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} - \frac{\gamma}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} \right) \delta\tilde{v}_r = 0 . \end{aligned} \quad (3.102)$$

3.8.2 Forme matricielle et méthode de résolution

Ces équations adimensionnées peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$\frac{d}{d\tilde{\xi}} \delta Q = A \delta Q \quad (3.103)$$

où Q est un vecteur $Q = (\delta\tilde{v}_r, \delta\tilde{\rho}, \delta\tilde{p}, \delta\tilde{v}_T)$, et A est une matrice 4x4. Appelons a_{ij} les coefficients de la matrice A . Ces coefficients sont alors donnés par :

$$a_{11} = -\frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \tilde{p}_0 \quad (3.104)$$

$$\times \left[\frac{\gamma+1}{4} (5s-3) + \frac{d\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} \right] + \frac{\frac{\gamma-1}{2}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \left(\frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} + 2\gamma \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\xi}} \right)$$

$$a_{12} = \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} \quad (3.105)$$

$$+ \frac{\gamma-1}{2} \frac{\gamma \tilde{p}_0}{\tilde{\rho}_0} \frac{\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} + 2 \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}}$$

$$a_{13} = \frac{\frac{\gamma-15(\gamma+1)}{2} \frac{s}{4} - \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right) \frac{1}{\tilde{p}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.106)$$

$$a_{14} = -\gamma \frac{\gamma-1}{2} l(l+1) \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.107)$$

$$a_{21} = - \left(2 \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} \right) \tilde{p}_0 \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.108)$$

$$+ \tilde{\rho}_0^2 \frac{\frac{\gamma+1}{4} (5s-3) + \frac{d\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0}$$

$$- \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0 \frac{\frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} - \frac{\gamma \tilde{p}_0}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}}}{\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right) \left[\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0 \right]}$$

3.8. Résolution numérique des équations de l'écoulement perturbé

$$\begin{aligned}
 a_{22} = & - \left[\frac{5(\gamma+1)}{4}s + 2\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \right] \tilde{\rho}_0 \quad (3.109) \\
 & \times \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} \tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0 \\
 & + \gamma\frac{\gamma-1}{2} \frac{\frac{5(\gamma+1)}{4}s - \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma-1}{2}\tilde{\xi} \right) \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}}}{\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right) \left[\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0 \right]} \tilde{\rho}_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} = & - \frac{\gamma-1}{2} \frac{5(\gamma+1)}{4}s \quad (3.110) \\
 & \times \frac{\tilde{\rho}_0}{\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right) \left[\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0 \right]} \\
 & + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0}
 \end{aligned}$$

$$a_{24} = l(l+1) \tilde{\rho}_0^2 \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}}{\tilde{\xi} \left[\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0 \right]} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned}
 a_{31} = & - \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0} \left(\tilde{\rho}_0 \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} + \frac{2\gamma\tilde{\rho}_0\tilde{\rho}_0}{\tilde{\xi}} \right) \quad (3.112) \\
 & + \frac{\gamma\tilde{\rho}_0\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi} \right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\rho}_0} \left[\frac{\gamma+1}{4} (5s-3) + \frac{d\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} \right]
 \end{aligned}$$

$$a_{32} = -\frac{\gamma \tilde{p}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.113)$$

$$\times \left[\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \right) \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}_0}{d\tilde{\xi}} + \frac{2\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}} + \frac{d\tilde{v}_0}{d\tilde{\xi}} \right] - \frac{\gamma \tilde{p}_0 \gamma - 1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0}$$

$$a_{33} = -\tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.114)$$

$$\times \left[\frac{5(\gamma+1)}{4} s - \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right) \frac{1}{\tilde{p}_0} \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{\xi}} \right]$$

$$a_{34} = \gamma l (l+1) \tilde{p}_0 \tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi}}{\tilde{\xi} \left[\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0 \right]} \quad (3.115)$$

$$a_{41} = 0 \quad (3.116)$$

$$a_{42} = 0 \quad (3.117)$$

$$a_{43} = -\frac{\gamma-1}{2\tilde{\xi}\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)} \quad (3.118)$$

$$a_{44} = -\frac{\frac{\gamma+1}{4} (5s-3) + \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\xi}}}{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}} \quad (3.119)$$

3.8. Résolution numérique des équations de l'écoulement perturbé

En connaissant la valeur au front de choc des grandeurs perturbées, on peut à partir de la connaissance de l'écoulement de base calculer pas après pas l'écoulement perturbé. Néanmoins, il est nécessaire de réaliser un second calcul, afin de déterminer le taux de croissance. En effet, les coefficients de la matrice A dépendent de s et de l . On calcule donc l'écoulement de base pour un couple (l, s) choisi. Une fois l'écoulement perturbé calculé pour ce couple, on vérifie la condition $\delta\tilde{p} = 0$ au centre de l'écoulement. En effet, la solution n'est physiquement raisonnable que si la perturbation d'énergie est nulle au centre, ce qui implique $\delta\tilde{p}(0) = 0$. Une fois l'écoulement perturbé déterminé pour un couple (l, s) , on vérifie que ce critère est vérifié. Si ce n'est pas le cas, il faut réitérer le calcul avec une autre valeur de s (voir Fig. 3.6). La variation de s entre deux itérations est calculée selon la formule suivante :

$$\Delta s = -\frac{\delta\tilde{p}}{\frac{\partial\delta\tilde{p}}{\partial s}}. \quad (3.120)$$

Afin de pouvoir calculer Δs , il faut donc connaître la dérivée de la perturbation de pression par rapport au paramètre s . Pour cela, on peut écrire, à partir de (3.103) :

$$\frac{d}{d\tilde{\xi}} \frac{\partial\delta Q}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial s} \delta Q + A \frac{\partial\delta Q}{\partial s}. \quad (3.121)$$

En explicitant l'expression de la dérivée à l'aide de $\delta\tilde{\xi}$, le pas de dérivation, on obtient :

$$\frac{\partial\delta Q}{\partial s} (\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi}) = \frac{\partial\delta Q}{\partial s} (\tilde{\xi}) + \delta\tilde{\xi} \left[\frac{\partial A}{\partial s} \delta Q (\tilde{\xi}) + A \frac{\partial\delta Q}{\partial s} (\tilde{\xi}) \right]. \quad (3.122)$$

Il ne nous manque donc, pour calculer cette expression, que les coefficients de la matrice $\partial A/\partial s$. Appelons les s_{ij} . Ils sont :

$$s_{11} = -\frac{5(\gamma+1)}{2} \tilde{\rho}_0 \frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.123)$$

$$s_{12} = 0 \quad (3.124)$$

$$s_{13} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{5 \frac{\gamma+1}{4}}{\tilde{\rho}_0 \left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_0} \quad (3.125)$$

$$s_{14} = 0 \quad (3.126)$$

$$s_{21} = \frac{\frac{5(\gamma+1)}{4}\tilde{\rho}_0^2}{\tilde{\rho}_0\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_0} \quad (3.127)$$

$$s_{22} = -\frac{5(\gamma+1)}{4}\tilde{\rho}_0\frac{\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}}{\tilde{\rho}_0\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_0} \quad (3.128)$$

$$+ \frac{5(\gamma+1)}{4}\gamma\frac{\gamma-1}{2}\frac{\tilde{p}_0}{\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)\left[\tilde{\rho}_0\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_0\right]}$$

$$s_{23} = -\frac{\gamma-1}{2}\times\frac{5(\gamma+1)}{4}\frac{\tilde{\rho}_0}{\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)\left[\tilde{\rho}_0\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_0\right]} \quad (3.129)$$

$$s_{24} = 0 \quad (3.130)$$

$$s_{31} = \frac{5(\gamma+1)}{4}\gamma\tilde{p}_0\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_0} \quad (3.131)$$

$$s_{32} = 0 \quad (3.132)$$

$$s_{33} = -\frac{5(\gamma+1)}{4}\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_0\left(\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}\right)^2 - \gamma\frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_0} \quad (3.133)$$

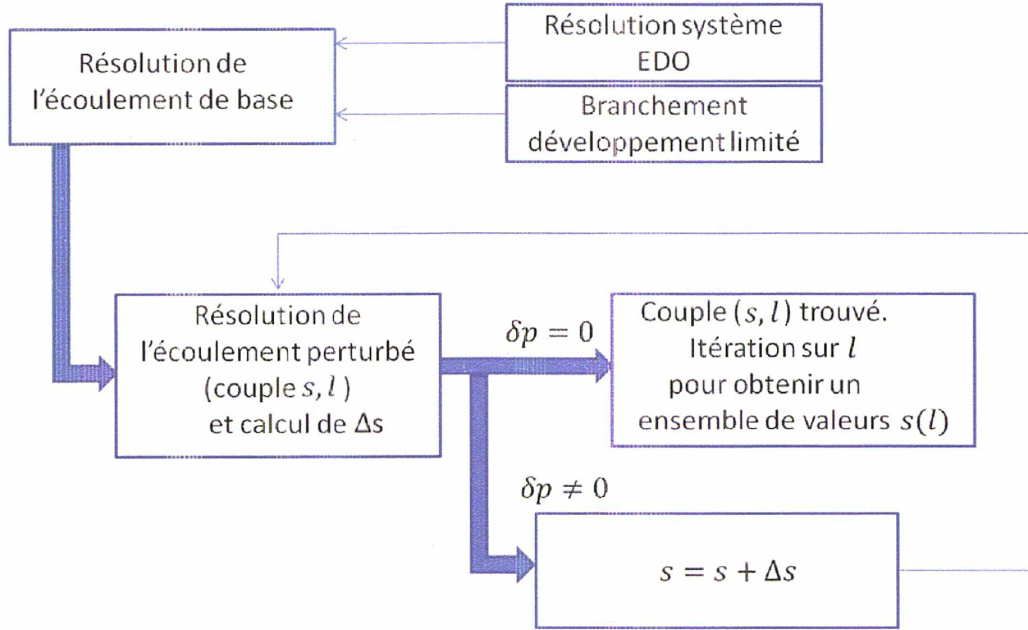


FIG. 3.6: Schéma de fonctionnement du programme permettant de déduire la relation de dispersion.

$$s_{34} = 0 \quad (3.134)$$

$$s_{41} = 0 \quad (3.135)$$

$$s_{42} = 0 \quad (3.136)$$

$$s_{43} = 0 \quad (3.137)$$

$$s_{44} = -\frac{5(\gamma+1)}{4}\tilde{v}_0 - \frac{\gamma+1}{2}\tilde{\xi}. \quad (3.138)$$

3.9 Relations de dispersion

Les relations de dispersion ainsi trouvées permettent de retrouver les valeurs théoriques $s(0) = -1$ et $s(1) = -2/5$ [18], contrairement à l'étude de D.

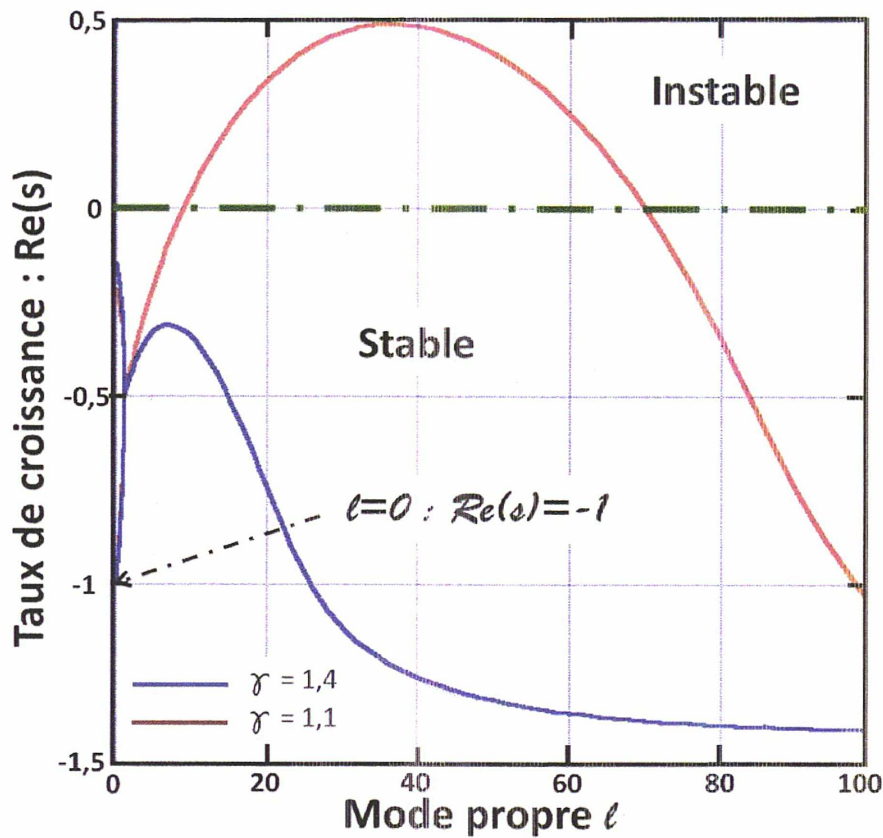


FIG. 3.7: Relations de dispersion pour $\gamma = 1,4$ et $\gamma = 1,1$. On remarque la valeur attendue pour le mode propre $l = 0 : Re[s(l = 0)] = -1$. D'autre part, on voit que, comme dans le cas de l'étude de la coquille fine, il existe un domaine d'instabilité pour une faible valeur de l'indice adiabatique, ce qui n'est pas le cas lorsque γ augmente. Les résultats pour les modes grands ($l > 3$) sont similaires à ceux obtenus par Ryu et Vishniac [12].

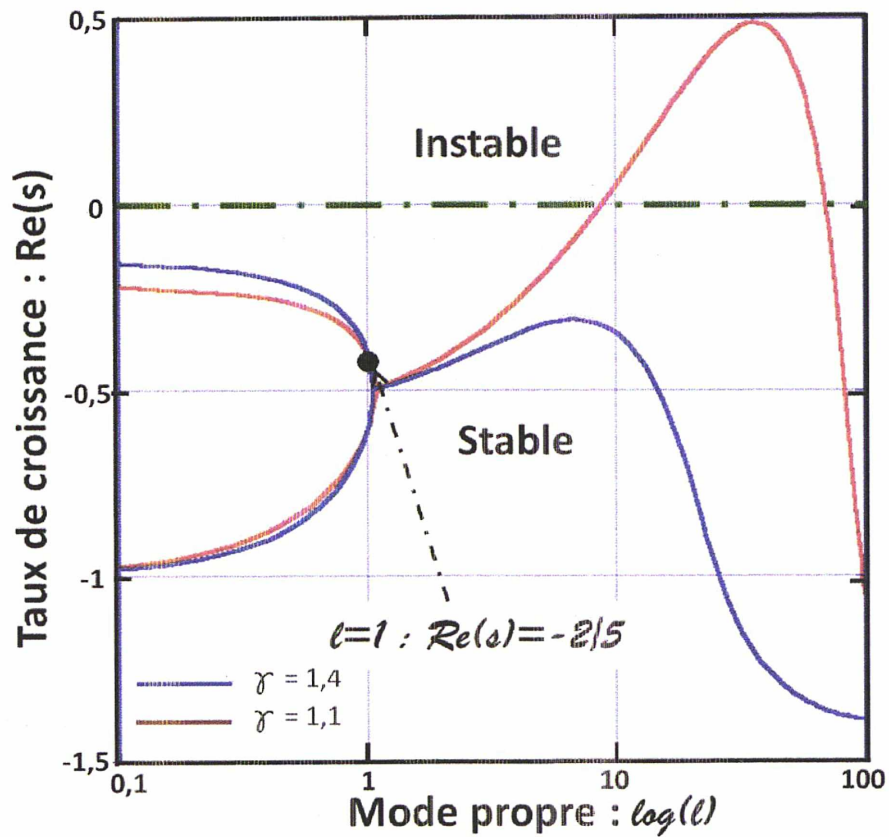


FIG. 3.8: Relations de dispersion pour $\gamma = 1,4$ et $\gamma = 1,1$, avec axe des abscisses logarithmique, mettant en évidence (point noir) la valeur de la partie réelle du taux de croissance pour le mode propre $l = 1 : Re [s (l = 1)] = -2/5$.

Ryu et E.T. Vishniac . On observe à nouveau que lorsque γ augmente, le domaine instable se réduit, voire disparaît. Globalement, on conclut de nos résultats que le calcul de D. Ryu et E.T. Vishniac, s'il présente des lacunes aux faibles modes, est correct pour des modes propres plus grands ($l > 3$) : nous sommes en très bon accord avec les relations de dispersion présentées dans leur article [12]. Nous pensons que leur erreur pour les faibles modes est due à leur méthode de résolution numérique des équations analytiques obtenues. L'introduction d'un développement limité pour le calcul de l'écoulement de base à proximité de l'origine, ainsi que l'étude de convergence définissant le pas spatial que nous avons menée a permis d'aboutir aux valeurs attendues aux faibles modes, contrairement à eux.

Pour des valeurs classiques ($\gamma = 5/3$) de l'indice adiabatique dans le cadre d'un gaz parfait monoatomique, la théorie prédit des taux de croissance négatifs, donc la stabilité, i.e. une décroissance de la perturbation et un retour à une configuration sphérique, tandis que pour des valeurs faibles de γ , un domaine d'instabilité apparaît. Les profils hydrodynamiques ainsi que le taux de compression au niveau du choc C (E.11) sont directement liés à la valeur de l'indice adiabatique. Le taux de compression augmente lorsque γ est proche de 1 : $C = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} +\infty$, et la matière est davantage concentrée derrière le front de choc : la coquille est davantage fine et dense. Le refroidissement du RSN par pertes radiatives conduit à ce genre de profil de densité très concentré derrière le front de choc. Ainsi, diminuer et rapprocher l'indice adiabatique de la valeur $\gamma \rightarrow 1$ est une façon de mimer les pertes d'énergie. Néanmoins, lorsque le RSN entre en phase radiative, son expansion dans le MIS est ralentie, et la valeur de l'exposant autosemblable n tel $R \propto t^n$ diminue de sa valeur en phase de Sedov-Taylor $n = 2/5$ à une valeur inférieure comprise entre $n = 1/4$ et $n = 3/10$ d'après la littérature [31] [32] [9]. Il apparaît donc, en conclusion de cette étude analytique, que l'instabilité de Vishniac pourrait se développer dans des RSN en phase radiative, plutôt qu'en phase de Sedov-Taylor.

Conclusion des études analytiques

Comme nous l'avons indiqué en introduction (chapitre 1), différentes études théoriques avaient été réalisées concernant l'instabilité de Vishniac. Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à la première étude sur ce sujet, qui est l'oeuvre d'E.T. Vishniac [11]. Dans cet article, un modèle simple est proposé afin d'étudier la stabilité d'un RSN constitué d'une coquille infiniment fine se propageant dans le MIS, poussée par une bulle de gaz très chaud dans la région interne. En reprenant en détail cette analyse, nous avons mis au jour différentes approximations et limites. Après avoir dans un premier temps retrouvé les résultats d'E.T. Vishniac, nous avons généralisé ses résultats. Nous avons notamment décidé de prendre en compte les effets de l'indice adiabatique, qui était considéré comme tendant vers 1 dans [11]. Nous avons également pris en compte l'épaisseur de la coquille, et ceci de deux façons différentes. Ces deux approches, qui constituent les deux cas limites, aboutissent à des résultats sensiblement différents. Dans le cas d'une coquille rigide, dont la perturbation sur la face externe se répercute à l'identique sur la face interne (ce qui correspond au traitement réalisé par E.T. Vishniac), nous aboutissons à des résultats similaires à ceux initialement trouvés en faisant tendre l'indice adiabatique γ vers 1 : il existe dans ce cas un domaine instable. Toutefois, on a montré que pour des valeurs supérieures de γ , ce domaine d'instabilité se réduit, et disparaît totalement pour des valeurs supérieures à $\gamma \approx 1, 2$. Dans le cas d'une coquille dont la face interne ne subit aucune déformation, les relations de dispersion calculées ne présentent aucun domaine d'instabilité. Il est intéressant de noter que, pour justifier le modèle de la coquille infiniment fine, il est judicieux de prendre γ proche de 1, car le taux de compression $C \equiv (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ diverge alors vers l'infini, ce qui signifie que la matière du RSN est concentrée au niveau du front de choc. Le fait de prendre un indice adiabatique si faible est une façon de prendre en compte indirectement les effets des pertes radiatives sur le RSN, car il est attendu [9] que les RSN en phase radiative présentent des profils de densité très piqués au niveau du front de choc. Ainsi, la généralisation de cette étude nous a permis de montrer que les RSN en phase de Sedov-Taylor, dans le cadre de cette théorie, ne sont pas supposés voir se développer l'I.V. pour des valeurs réalistes de γ ($\gamma = 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique). Toutefois, l'I.V. doit se développer lorsque l'on

considère un gaz d'indice adiabatique faible.

Dans un second temps (chapitre 3), nous nous sommes intéressés à une étude analytique menée par D. Ryu et E.T. Vishniac [12], dans laquelle l'intégralité de l'écoulement est considérée. En partant de l'écoulement de Sedov-Taylor [1], une étude perturbative est menée et l'introduction de perturbations linéaires permet d'aboutir à des relations de dispersion. Nous avons souhaité reprendre en détails cette étude, car la résolution numérique des équations analytiques obtenues nous paraissait sujette à caution, car elle ne fournit pas les valeurs attendues [18] pour les modes $l = 0$ et $l = 1$, et présente des différences avec les relations de dispersion obtenues ultérieurement par une autre étude adoptant une approche différente [13]. Notre étude, similaire à celle de D. Ryu et E.T. Vishniac, est en très bon accord avec leurs résultats, sauf pour les petits modes pour lesquels nous aboutissons bien aux résultats attendus. Nous en concluons que leur étude était bien réalisée, mais que leur méthode de résolution numérique n'était pas suffisamment performante pour traiter les petits modes. L'introduction d'un traitement de l'écoulement non perturbé à proximité par un développement limité de la solution de Sedov nous a permis de traiter ces cas, ainsi que la précision de notre calcul numérique. Toutefois, les conclusions sont sensiblement les mêmes que celles de l'étude initiale [12] : pour des valeurs de l'indice adiabatique suffisamment faibles, les relations de dispersion présentent un domaine instable : l'I.V. devrait donc se développer dans des RSN composées d'un gaz à faible γ . Néanmoins, comme nous l'avons déjà évoqué, cette contrainte sur l'indice adiabatique est artificielle. Elle implique en réalité un RSN en phase radiative, pour lequel l'écoulement hydrodynamique n'est plus celui de Sedov, et la loi d'évolution $R \propto t^n$ n'est plus celle de la phase de Sedov-Taylor. Il faut donc étudier le développement de l'I.V. en prenant en compte les pertes radiatives. Pour cela, nous avons utilisé l'outil numérique, et cette étude fait l'objet de la seconde partie de cette thèse.

Deuxième partie

Etudes numériques de l'instabilité de Vishniac et des RSN en phase radiative

Chapitre 4

Présentation du code HADES et des moyens et outils numériques

4.1 Présentation du code HADES

Le code que j'ai utilisé pour les simulations numériques de restes de supernova est un code développé au LUTH, par Chinh NGuyen lors de sa thèse sous la direction de Claire Michaut et de Laurent Di Menza [25]. C'est un code d'hydrodynamique 2D, qui résout les équations d'Euler de l'hydrodynamique. Le schéma numérique est un schéma explicite d'ordre 2 en temps et en espace. Il permet de simuler des géométries planes, mais également cylindriques et sphériques par l'introduction d'un terme source prenant en compte les termes angulaires de géométrie différentielle inhérents à la géométrie 3D. Il est adapté à la simulation d'environnements astrophysiques extrêmes. Les différents solveurs de Riemann implémentés dans le code permettent d'adapter la méthode de résolution aux différents cas rencontrés, selon par exemple le nombre de Mach rencontré dans la simulation. Ce code permet également de prendre en compte le rayonnement de la matière de deux manières distinctes. La première consiste à introduire un terme de perte dans l'équation d'énergie, appelé fonction de refroidissement. Cela suppose que le rayonnement émis par la matière n'interagit pas avec la matière environnante. Le milieu est alors supposé optiquement mince, ce qui équivaut à dire que le libre parcours moyen des photons au sein de la matière est grand devant la taille de l'objet. L'autre façon de prendre en compte le rayonnement est plus élaborée, et repose sur un couplage entre les équations de transfert radiatif et les équations hydrodynamiques. Cette dernière façon de modéliser le rayonnement n'a pas été utilisée dans le cadre de cette thèse. Nous avons utilisé le code dans deux configurations : dans un premier temps uniquement la partie hydrodynamique, puis avec pertes d'énergie par fonction de refroidissement. Ce code a été parallélisé par Fabrice Roy et Chinh Nguyen en 2008, puis amélioré par Marco Mancini.

Les tests de performance réalisés par ce dernier montrent que la parallélisation est efficace (voir paragraphe 4.1.5).

4.1.1 Les équations résolues et le schéma

Les équations résolues

La partie hydrodynamique du code HADES résout les équations d'Euler dans leur forme conservative. Ces équations, avec lesquelles on a travaillé dans l'étude analytique du chapitre 3, peuvent être écrites sous forme vectorielle. Pour être bien défini, le système d'équations doit également comporter les conditions initiales ainsi que les conditions au bord du système physique étudié. L'écoulement est ainsi modélisé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S(U), \\ \text{conditions initiales : } U(x, y, 0) = U_0(x, y), \\ \text{conditions aux bords} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où t , x et y sont respectivement le temps, la coordonnée selon l'axe (Ox) et la coordonnée selon l'axe (Oy). Les quantités U , $F(U)$, $G(U)$ et $S(U)$ comportent les termes des équations d'Euler :

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ v_x(E + P) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + P \\ v_y(E + P) \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Lambda + S_g \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où ρ , u , v , p et E sont respectivement la densité, la vitesse selon l'axe (Ox), la vitesse selon l'axe (Oy), la pression et l'énergie du fluide. Cette énergie est définie par $E = \rho (v_x^2 + v_y^2) / 2 + \rho e$, où e est l'énergie interne massique du système. Le terme source comporte deux termes : le terme de refroidissement $-\Lambda$ prenant en compte les pertes d'énergie radiative dans le régime optiquement mince, et le terme, dit source géométrique S_g , qui permet, comme mentionné précédemment, d'étudier des systèmes à symétrie sphérique.

Le schéma de résolution

Afin de résoudre le système d'équations 4.1, le problème est divisé en deux sous-problèmes pour lesquels nous connaissons des méthodes de résolution. Le code a été développé afin d'obtenir des solutions à l'ordre 2, et il convient alors d'organiser la résolution de manière adéquate afin d'obtenir des solutions d'ordre 2 en temps et en espace, avec un schéma explicite. Connaissant

l'état du système à un temps t , on souhaite obtenir l'état de ce système à un temps $t + \delta t$. Le système 4.1 est divisé en un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), composé du système d'équations homogène au système 4.1 :

$$\partial U / \partial t + \partial F(U) / \partial x + \partial G(U) / \partial y = 0 \quad (4.3)$$

et un système d'équations aux dérivées ordinaires (EDO), qui comporte la partie terme source du problème initial :

$$\frac{dU}{dt} = -\Lambda + S_g . \quad (4.4)$$

Afin d'obtenir un schéma à l'ordre 2 en temps, on réalise alors la résolution de la manière suivante : notons $P^{\delta t/2}$ l'opérateur solution du système d'EDP et $O^{\delta t}$ l'opérateur solution du système d'EDO. Le premier opère sur un temps correspondant à la moitié du pas de temps δt calculé à l'aide de la CFL, tandis que le second opère sur le temps δt . Le schéma consiste à appliquer une première fois $P^{\delta t/2}$, puis $O^{\delta t}$ et pour finir une seconde fois $P^{\delta t/2}$. Cela s'écrit sous la forme :

$$U(t + \delta t) = P^{\delta t/2} O^{\delta t} P^{\delta t/2} U(t) . \quad (4.5)$$

4.1.2 Le maillage

La discrétisation spatiale du problème est réalisée au moyen d'une grille cartésienne constituée de mailles rectangulaires de pas spatiaux constants (mais éventuellement différents) dans les deux directions. La taille de la boîte de simulation $x_{max} - x_{min}$ et $y_{max} - y_{min}$ ainsi que le nombre de mailles m_x et m_y choisis par l'utilisateur définissent les deux pas spatiaux δx et δy : $\delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m_x}$ et $\delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{m_y}$. A ce maillage s'ajoute une zone à la frontière de la grille, constituée de mailles dites "mailles fantômes" qui servent à imposer les conditions aux bords de la boîte de calcul et à permettre le calcul des cellules de la grille se trouvant sur les bords (voir figure 4.1). La taille des mailles, donc la résolution de la simulation réalisée, détermine la précision du calcul. En ayant une résolution trop grossière, donc un nombre de mailles trop faible, le calcul n'est pas précis et on ne peut pas bien modéliser les phénomènes étudiés, comme les chocs par exemple. Toutefois, un nombre trop élevé de mailles, donc une résolution trop fine, génère également des problèmes. Premièrement, le temps de simulation croît avec la résolution, si bien qu'une résolution très élevée requiert un temps de calcul qui peut devenir inaccessible avec les machines dont nous disposons actuellement. De plus,

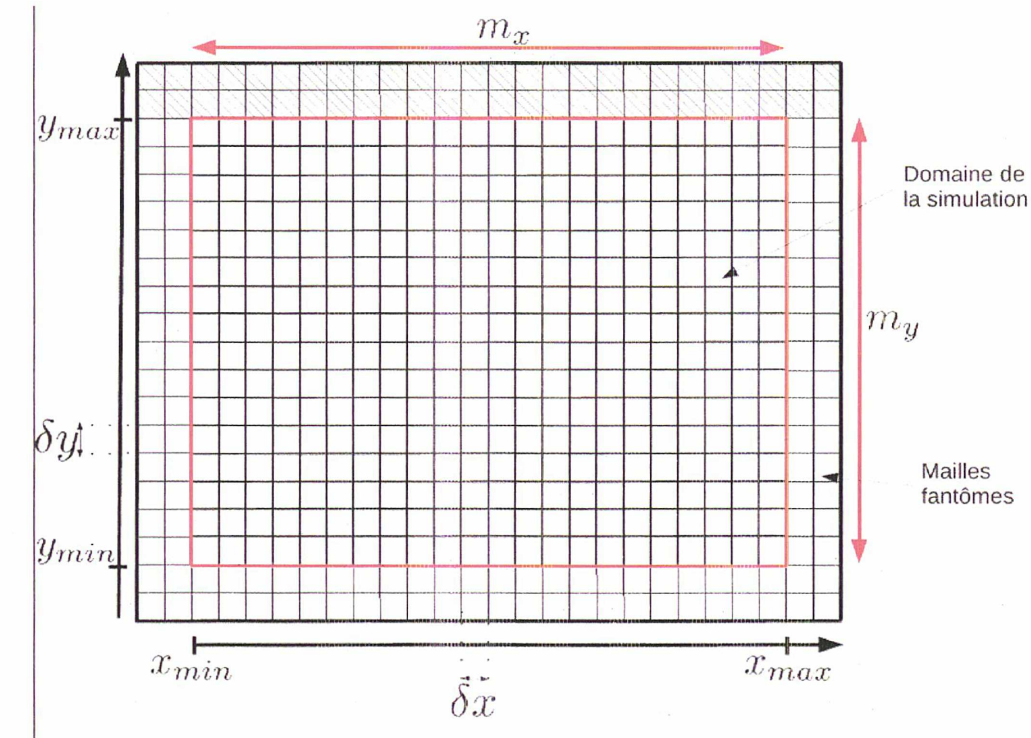


FIG. 4.1: Schéma du maillage dans le cadre d'une utilisation séquentielle du code. Encadrée en rouge apparaît la zone de simulation. À l'extérieur de cette zone sont représentées les mailles fantômes.

les erreurs numériques s'accumulent, et le calcul finit par perdre en précision. Il convient donc de mener une étude préalable sur la résolution nécessaire à la modélisation du phénomène à simuler avant d'étudier ce phénomène en lui-même.

4.1.3 La discrétisation temporelle

Le calcul du pas de temps δt est effectué à l'aide de la condition dite de Courant-Friedrichs-Lewy, ou condition CFL. La condition CFL est introduite par l'intermédiaire d'un paramètre noté CFL , de valeur $0 < CFL < 1$. Le principe est de limiter le pas de temps de façon à ce que l'information ne puisse parcourir plus d'une maille pendant le temps δt . Ainsi, le paramètre CFL est tel que :

$$\min(v_x \delta t / \delta x, v_y \delta t / \delta y) < CFL < 1. \quad (4.6)$$

Dans notre cas, nous avons utilisé une condition de courant $CFL = 0.9$.

4.1.4 La version parallèle de Hades

Ce travail de thèse a nécessité l'utilisation de la version multi-processeurs du code Hades. Hormis quelques tests, c'est la première fois que le code est utilisé en version parallèle. Dans le cas d'une telle utilisation, le maillage est divisé en autant de régions que de coeurs utilisés lors du calcul. L'utilisateur définit le nombre de coeurs dans chaque direction qu'il va utiliser : $n_{x,core}$ et $n_{y,core}$. Chaque coeur a alors pour mission de résoudre l'écoulement dans un domaine contenant $m_{x,core} = m_x/n_{x,core}$ et $m_{y,core} = m_y/n_{y,core}$ (on se place dans le cas où cela donne un résultat entier; dans le cas contraire, certains coeurs se voient attribuer le reste de mailles ne pouvant être réparties uniformément). Sur la figure 4.2) est montrée la décomposition du maillage pour une grille de simulation de 36 mailles selon (Ox) et 24 mailles selon (Oy), avec un calcul effectué sur 9 coeurs de calcul. On a alors $m_{x,core} = 12$ et $m_{y,core} = 8$. La grille physique intégrale est le domaine encadré en rouge. En vert sont représentés les sous-domaines que chaque coeur doit prendre en charge. Les coordonnées MPI des coeurs sont indiquées sous la forme XxY , où X et Y représentent la coordonnée MPI selon la direction (Ox) et (Oy). Chaque coeur génère un fichier de sortie qui lui est propre, contenant les résultats de ces sous-domaines. Néanmoins, le schéma étant d'ordre 2 en temps et en espace, le calcul de la solution des EDO et des EDP en une maille donnée nécessite de connaître la valeur des grandeurs dans les 2 mailles voisines, et ce dans chaque direction. Si la maille voisine n'appartient pas au domaine d'un autre coeur, alors cette maille n'appartient pas au domaine physique mais est une maille dite fantôme. Ces mailles fantômes sont donc nécessaires pour calculer la solution sur les bords du domaine. Leur valeur est définie à l'aide des conditions de bord, lesquelles sont choisies par l'utilisateur. Elles sont de plusieurs sortes :

- Condition de symétrie : le bord est un axe de symétrie. Les mailles fantômes ont alors même densité et énergie que les mailles symétriques par rapport au bord concerné, tandis que le vecteur vitesse dans les mailles fantômes est le symétrique par rapport au bord. C'est cette condition que nous utiliserons dans le cas de nos simulations en géométrie sphérique de restes de supernova, pour les bords de gauche et du bas.
- Condition d'extrapolation à l'ordre zéro : cette condition signifie que les mailles fantômes ont la même valeur que la maille adjacente appartenant au domaine physique. Elle est utilisée pour les bords de droite et du haut dans nos simulations.
- Condition périodique : cette condition impose dans les mailles fantômes les grandeurs présentes du coté opposé de la boîte de simulation. Par exemple, en mettant cette condition sur le bord de gauche, les deux

mailles à l'extrémité droite de la boîte de simulation sont recopiées dans les mailles fantômes.

En revanche, si cette maille voisine appartient au domaine physique d'un autre coeur, alors il faut que ce coeur communique ces valeurs à son voisin, et ce à chaque fois que le code effectue une résolution d'un des solveurs. Ainsi, comme au cours d'un pas de temps δt , on applique à deux reprises l'opérateur solution du système d'EDP, il faudrait réactualiser les valeurs à chaque $\delta t/2$. Toutefois, l'optimisation d'un code parallèle nécessite de limiter les échanges de données entre coeurs, car ce sont des étapes coûteuses en temps. Afin d'éviter ces communications, il est judicieux d'étendre le domaine de calcul de chaque coeur de calcul de deux mailles dans chaque direction où est présent un coeur voisin. Ainsi, à chaque début d'itération au temps t , sont transmises les 4 mailles jouxtant le coeur : 2 mailles pour l'extension du domaine de calcul, et 2 mailles servant de mailles fantômes. Ainsi, lors du premier appel du solveur d'EDP, on calcule également dans les 2 mailles à l'extérieur du domaine cible (en vert) à l'aide des nouvelles mailles fantômes, ce qui permet d'obtenir leur valeur (également calculée dans le processeur voisin par ailleurs) au temps $t + \delta t/2$. Lors du deuxième passage dans ce solveur, le domaine physique peut être calculée à l'aide de ces deux mailles (extérieures à la zone encadrée en vert sur la figure 4.2, mais dans la zone rouge). Ces deux mailles sont certes recalculées à cet instant, mais sans actualiser les mailles fantômes de la région bleue. Leur calcul est donc inexact, mais cela n'a pas d'importance, car le coeur voisin calcule lui de manière correcte dans ces mailles. Ainsi, on a bien calculé la solution dans le domaine dédié à chacun des coeurs, sans nécessiter de communications entre coeur à $\delta t/2$ au cours du pas de temps δt . Les tests réalisés par Marco Mancini montrent un réel gain de temps avec cette méthode.

Chaque coeur de calcul écrit son propre fichier de données de manière indépendante, ce qui constitue également un gain de temps important (on multiplie par le nombre de coeurs la vitesse d'écriture, qui peut être non négligeable dans une simulation ; le système de gestion des fichiers des machines utilisées étant lui-même doté d'un système de stockage fonctionnant de manière parallélisée, on n'est pas limité par la bande passante ou la vitesse d'écriture sur le disque dur).

4.1.5 Tests de performance

On peut mesurer l'efficacité de la parallélisation d'un code par différentes méthodes. Des tests ont été réalisés par Marco Mancini pour déterminer l'efficacité de la parallélisation. Une façon de mesurer l'efficacité de la parallélisation d'un code est de réaliser des tests dits de "scaling". Deux types de scaling ont été mesurés. Dans les deux cas, les tests consistent à effectuer des

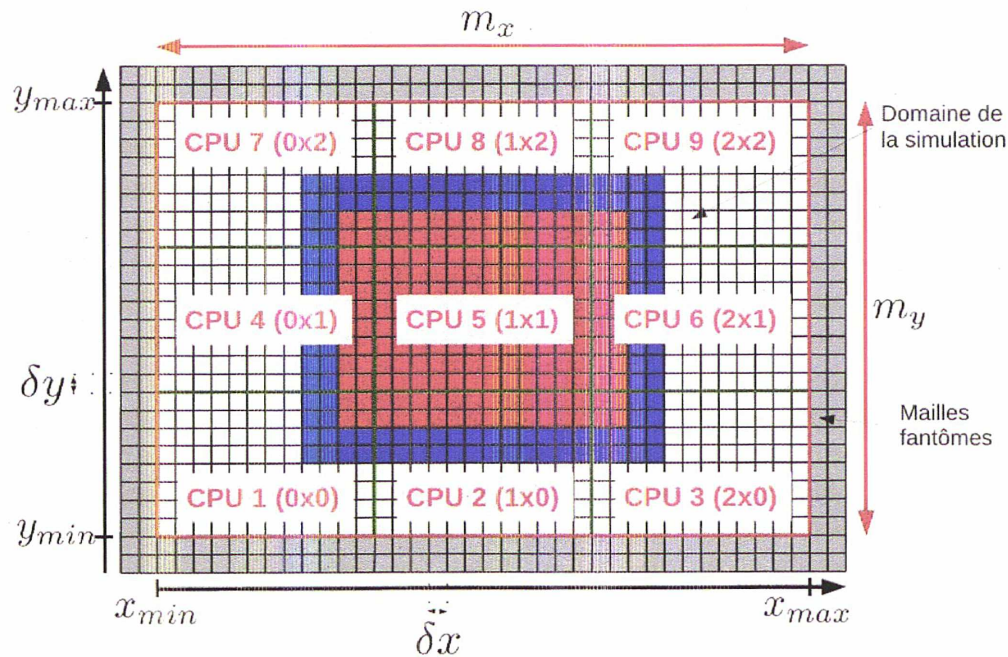


FIG. 4.2: Schéma du maillage dans le cadre d'une utilisation parallèle du code. Le domaine global est divisé en sous domaines répartis sur chaque coeur de calcul. Afin de limiter les communications entre coeurs, le domaine de calcul de chaque processeur est agrandi de deux mailles sur le domaine des coeurs voisins.

simulations avec différents nombre de coeurs de calcul, et d'étudier l'évolution du temps d'exécution de la simulation dans les différentes configurations.

- Le scaling faible ("Weak Scaling")

Le scaling faible consiste à conserver le nombre de mailles par coeur de calcul. Ainsi, les tests sont réalisés à travail constant par coeur, ici chacun calculant sur un maillage de 400×400 mailles. La fonction w de weak scaling est définie par :

$$w(N) = \frac{t_1}{t_N} \quad (4.7)$$

où t_1 est le temps d'exécution avec un seul coeur, et t_N le temps de calcul par coeur dans la configuration à N coeurs.

- Le scaling fort ("Strong Scaling")

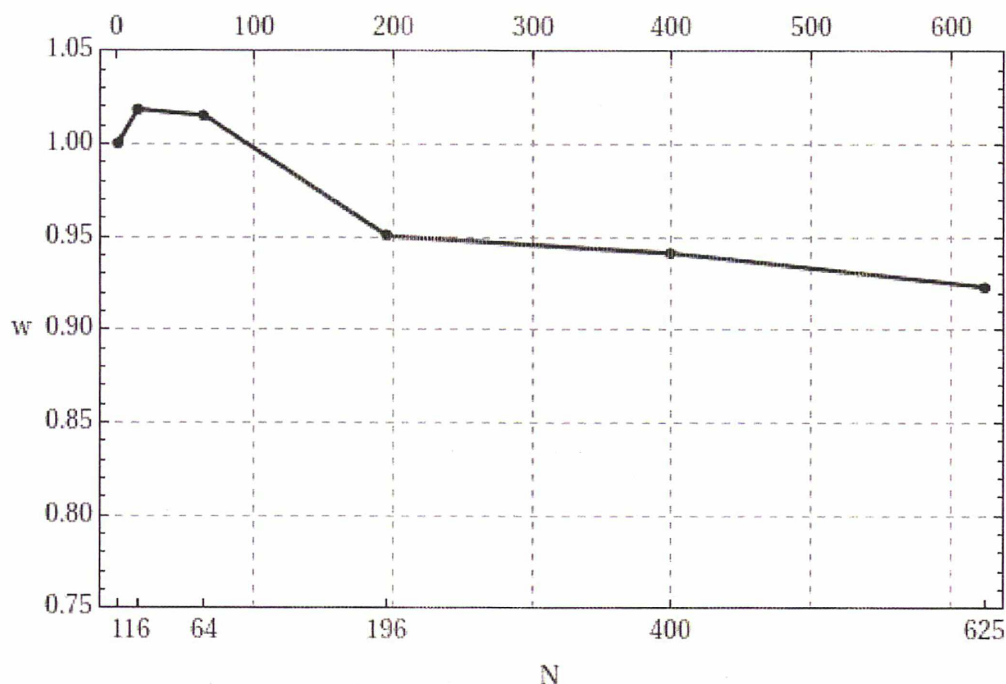


FIG. 4.3: Résultat du test de scaling faible.

Les test de scaling fort se font sur un système de taille fixe. En faisant varier le nombre de processeurs, le nombre de mailles par coeur varie également. Le test a ici été réalisé sur un maillage de $10\,000 \times 10\,000$ mailles, correspondant à 400×400 mailles par coeur avec 625 coeurs. Par contre, il n'a pas été possible de réaliser cette simulation sur moins de 16 coeurs, car la mémoire exigée par un tel maillage est supérieure à ce qu'un coeur seul peut gérer. Ainsi, le temps de référence est t_{16} , le temps de la simulation à 16 coeurs :

$$s(N) = \frac{t_{16}}{t_N} \quad (4.8)$$

où t_N est ici le temps global cumulé (la somme des temps pris par chaque coeur).

Ces deux tests de scaling montrent une légère perte de performance au fur et à mesure que le nombre de coeurs croît. Toutefois, pour $N = 144$, qui est le nombre maximum de coeurs que nous avons utilisés dans nos simulations, le rendement reste très bon, puisque supérieur à 0,95. Ainsi, la version parallélisée d'HADES est bien optimisée et peut être utilisée de manière efficace afin de réduire le temps de calcul.

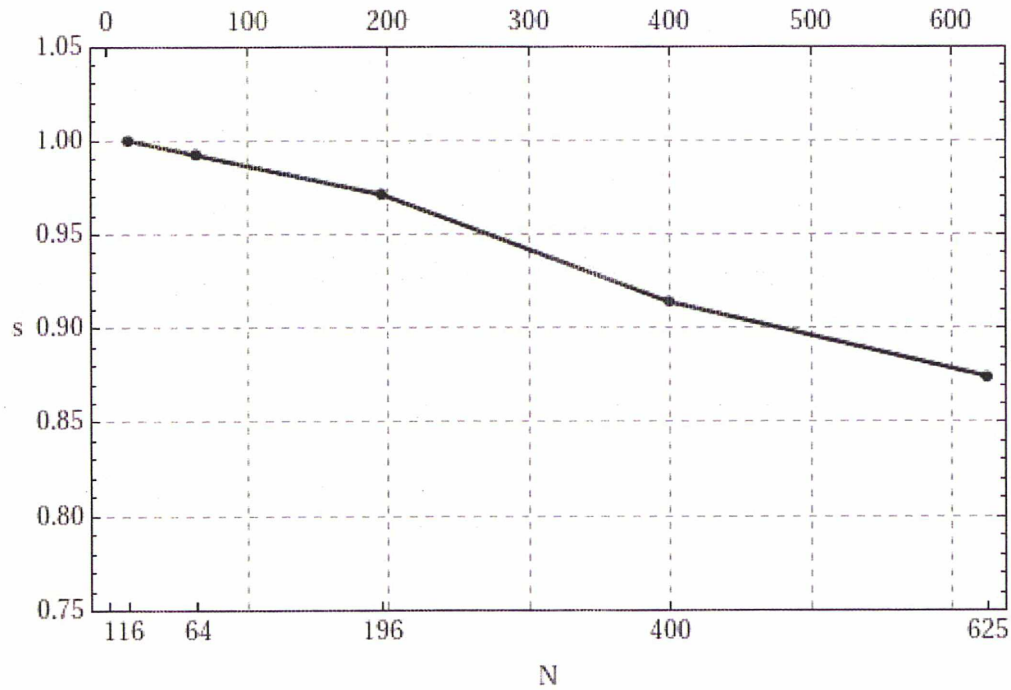


FIG. 4.4: Résultat du test de scaling fort.

4.2 Moyens et outils numériques

4.2.1 Moyens de calcul

Pour réaliser nos simulations numériques, nous avons eu accès à différentes machines de calcul. Voici une présentation succincte de ces différentes machines.

Siolino

La première machine que j'ai utilisée, Siolino, est une grappe de calcul dédiée à l'usage interne à l'Observatoire de Paris. C'est une machine qui n'est pas adaptée au calcul parallèle, car elle utilise différents modèles de processeurs. Elle nous a été utile lors de la prise en main du code, pour réaliser les premiers tests.

Starlight

Starlight est une machine du LUTH dédiée au débogage multiprocesseur. Nous l'avons utilisée exclusivement pour cela, afin de mieux comprendre l'architecture du programme et de résoudre certains problèmes auxquels nous avons été confrontés.

Mesopsl1

Mesopsl1 est le calculateur sur lequel ont été réalisées les premières simulations en parallèle. C'est une machine installée en 2011 à l'Observatoire de Paris sur le site de Meudon, qui appartient à l'index PSL Paris Sciences et Lettres, et qui est le prototype du calculateur Mesopsl. Les bi-processeurs hexa-coeurs Intel X5675 à 3,06 Ghz y sont regroupés en noeuds de 12 coeurs, chaque coeur disposant de 2 Go de mémoire. Les calculs peuvent être lancés sur un maximum de 8 noeuds simultanément, pour un total de 96 coeurs. La durée maximale d'un calcul dans cette configuration est de 24H dans la configuration que nous avons utilisée.

Mesopsl

Afin de réaliser davantage de simulations en des temps plus courts, nous sommes passés sur la machine Mesopsl, qui est le calculateur de l'index PSL comme évoqué précédemment. Cette machine est équipée de 92 noeuds de calcul, comportant des bi-processeurs 8-coeurs Intel E5-2670 à 2.60 Ghz. L'architecture système est en Linux/64 bits, et chaque noeud comporte 16 coeurs, soit un total sur cette machine de 1472 coeurs de calcul, disposant chacun de 4Go de mémoire. La plupart des simulations ont été réalisées sur 9 noeuds soit 144 coeurs.

4.2.2 Outils numériques

Afin d'analyser les données de sortie du code, initialement sous la forme de fichiers contenant à chaque temps de sortie 4 colonnes en ASCII correspondant aux grandeurs conservatives des équations d'Euler ρ , ρv_x , ρv_y et e (densité, produit de la densité et la vitesse selon \vec{e}_x et \vec{e}_y et énergie volumique) pour chaque point du maillage, j'ai tout d'abord utilisé un programme Matlab écrit par les précédents utilisateurs de l'équipe, notamment Claire Michaut, Clotilde Busschaert, Cécile Cavet et Chinh Nguyen. Néanmoins, lorsque les simulations génèrent des volumes de données considérables (plusieurs dizaines de Go par simulation), l'analyse avec Matlab se révèle laborieuse, voire impossible. Afin de réduire la taille des données de sortie et pour permettre l'utilisation de logiciels de visualisation scientifique, nous avons dû changer le format des fichiers de sortie. Nous avons alors opté pour le format binaire NetCDF, contenant l'ensemble des données comprises dans le système de sortie précédent. Un seul fichier de sortie est alors généré pour l'ensemble des temps de sortie. Ces fichiers sont ensuite lus par le logiciel libre ViSit développé par le Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL).

Chapitre 5

Simulations de restes de supernova : détermination des paramètres

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, les taux de croissance de l'instabilité de Vishniac semblent être analytiquement moins élevés que ce que laissent penser Vishniac et Ryu [11] [12] lorsque l'on s'éloigne de la limite $\gamma \rightarrow 1$. Cette limite permet, comme indiqué à la fin du chapitre 2, de "mimer" le fait que le RSN est sensé être en phase radiative dans ces études. Le refroidissement du gaz choqué a pour effet de densifier la matière derrière le front de choc, et de ralentir l'évolution du RSN. Il est très complexe d'étudier analytiquement le développement de l'instabilité de Vishniac dans le cadre d'un RSN en phase radiative. L'outil numérique va nous permettre d'observer l'évolution de perturbations de RSN lorsque celui-ci perd de l'énergie par rayonnement. Le principe de cette étude se décompose en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous cherchons à simuler un RSN en phase de Sedov-Taylor. Une fois celui-ci obtenu, nous introduisons une perturbation de sa géométrie, puis nous simulons son évolution, afin d'étudier la comportement de la perturbation et d'en déduire le taux de croissance. Différents cas sont étudiés, sans pertes d'énergie dans un premier temps, puis avec pertes d'énergie par fonction de refroidissement dans un second temps.

5.1 Conditions initiales et critères de validité

Afin d'étudier le développement de l'instabilité de Vishniac, nous souhaitons observer l'évolution d'un RSN, sphérique initialement, dans lequel est introduite une perturbation. Pour ce faire, nous devons donc au préalable simuler une expansion de RSN qui nous servira de base afin d'initialiser les simulations servant à l'étude de stabilité. En l'absence de pertes d'énergie, le

RSN va se situer en phase de Sedov-Taylor.

5.1.1 Conditions initiales

Zone de surpression

Afin d'obtenir ce RSN, nous devons introduire une zone de surpression, correspondant à la libération d'énergie d'une supernova, qui va se propager dans le milieu ambiant, qui correspond au MIS. Par un calcul simple, nous pouvons connaître les caractéristiques de cette zone de surpression. En effet, on sait que la supernova libère une énergie de l'ordre de grandeur de 10^{44} J [26] [27] [28]. Dans le cadre d'une explosion forte ponctuelle, on peut supposer une densité et une pression uniformes. L'énergie interne ϵ contenue dans la zone de rayon R peut s'écrire :

$$\epsilon = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{P}{\gamma - 1} . \quad (5.1)$$

Ainsi, on peut exprimer la pression à introduire dans la zone de surpression, en fonction du rayon R de celle-ci :

$$P(R) = \frac{3(\gamma - 1)}{4} \frac{\epsilon}{\pi R^3} . \quad (5.2)$$

La densité initiale n'a pas d'importance, puisque la masse initiale du RSN va être négligeable devant la masse de matière du MIS qu'il va absorber lors de son expansion.

Milieu interstellaire

Le milieu interstellaire est essentiellement constitué d'hydrogène ionisé [29]. La densité du milieu interstellaire est de l'ordre de $10^{-20} \text{kg.m}^{-3}$, qui correspond à une densité de quelques particules par m^3 . On peut alors déterminer la pression en fonction de la température du MIS :

$$P_{MIS} = \frac{\rho_{MIS} k_B T_{MIS}}{m_{proton}} . \quad (5.3)$$

Ainsi, une pression de 10^{-14} Pa correspond à une température du MIS de $T_{MIS} \approx 120$ K, tandis qu'une pression de 10^{-12} Pa correspond à une température de $T_{MIS} \approx 12\,000$ K. Dans notre cas, nous avons considéré un MIS d'une pression $P_{MIS} = 10^{-12}$ Pa, donc de température $T_{MIS} = 12\,000$ K.

5.1.2 Paramètres de la simulation et critères de validation de la phase de Sedov

Une étude a été menée afin de déterminer l'influence de la résolution et de la taille initiale de la surpression sur la dynamique du RSN. En effet, pour une taille initiale de surpression déterminée, plus la résolution diminue, moins la surpression occupe de mailles, et moins sa forme s'approche d'un disque. Cela génère des effets d'anisotropie dans le RSN. D'autre part, plus la résolution est élevée, et mieux le choc est simulé. Afin de déterminer quelles sont la résolution et la taille initiale de la surpression nécessaires pour obtenir une simulation satisfaisante d'un RSN, nous cherchons à satisfaire différents critères

- Taux de compression

Le taux de compression se rapproche du taux théorique donné par les relations de Rankine-Hugoniot au fur et à mesure qu'on augmente la résolution car le profil de densité étant très piqué, il contient de très forts gradients difficiles à calculer numériquement. Un problème raide doit toujours se répartir sur plusieurs mailles du schéma numérique donc plus la résolution est forte, mieux le calcul s'opère. Ce taux de compression théorique $C_{comp,th}$ est donné, pour un choc fort (nombre de Mach $M > 10$, voir annexe E) par :

$$C_{comp,th} = \frac{\rho_s}{\rho_{MIS}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} . \quad (5.4)$$

Pour $\gamma = 5/3$, on obtient un taux de compression théorique $C_{comp,th} = 4$. Pour $\gamma = 1,1$, il prend la valeur $C_{comp,th} = 21$.

- Profils hydrodynamiques

On connaît les profils théoriques des grandeurs hydrodynamiques ρ , v et p de l'écoulement à l'aide de la résolution des EDO analytiques données au chapitre 3. Ces EDO ont été résolues par le programme fortran que j'ai effectué, ainsi que sous Mathematica. Ces profils dépendent également de l'indice adiabatique γ . Les profils numériques obtenus doivent coïncider au mieux avec les profils obtenus à partir des équations analytiques en phase de Sedov-Taylor.

- Loi d'évolution autosemblable

On sait qu'en phase de Sedov-Taylor [1], le rayon du front de choc R a un comportement autosemblable :

$$R(t) \propto t^{2/5} . \quad (5.5)$$

Cette loi d'évolution du rayon du front de choc doit être retrouvée dans les simulations

- Caractère isotrope

L'explosion de l'étoile étant supposée générer un RSN parfaitement sphérique, toutes les grandeurs doivent être isotropes. Comme évoqué en préambule de ce paragraphe, ce caractère isotrope peut être mis en défaut par la forme de la surpression initiale. En effet, pour un rayon de la surpression initiale fixé, une résolution meilleure permet d'occuper avec cette zone davantage de mailles, et donc de rapprocher sa géométrie de celle d'un disque dans le plan (x, y) de la simulation. Dans les cas où la surpression n'occupe pas assez de mailles, la zone initiale se rapproche davantage d'une croix, et cela génère des anisotropies.

5.2 Simulation d'initialisation

Nous cherchons à simuler un RSN en phase de Sedov-Taylor à un temps $t_{init} = 1\,000$ ans, à partir duquel nous pourrions lancer les différentes simulations permettant l'étude du taux de croissance de l'instabilité. Cette simulation d'initialisation doit nous permettre d'obtenir un RSN le plus conforme possible aux modèles théoriques, tout en conservant des résolutions et des temps de calcul nécessaires raisonnables. Elle sera la base des simulations de l'instabilité, et a donc un rôle essentiel. Parmi les critères évoqués précédemment, deux présentent un caractère réellement contraignant sur la résolution : le caractère isotrope et le taux de compression. Le caractère isotrope est déterminé par le nombre de mailles occupées par la surpression initiale. Une fois ce caractère assuré dans la simulation d'initialisation, la résolution peut être baissée de façon significative pour la suite de la simulation tout en conservant le caractère isotrope (la taille du RSN est alors considérable, et occupe un grand nombre de mailles). En revanche, le taux de compression dépend de la résolution de la zone du choc. Cette zone du front de choc ne dépend pas de l'instant considéré, et la contrainte sur la résolution issue de ce taux de compression doit être conservée lors de la poursuite ultérieure des simulations. Ainsi, les deux études de résolution sont distinctes : on peut choisir une résolution très élevée pour garantir l'isotropie, puis la baisser par la suite, ce qui n'est donc pas le cas pour la contrainte résultant du taux de compression qui doit être conservée lors des études à plus long temps de simulation.

5.2.1 Etude du taux de compression

Sur la figure (5.1) est représenté le taux de compression en fonction de la résolution pour un indice adiabatique de $5/3$. On observe, conformément

à ce qui est attendu, que le taux de compression dépend de manière significative de la résolution. Néanmoins, on ne peut pas monter indéfiniment la résolution, car cela demande une augmentation considérable du temps de calcul et de la taille des fichiers. De plus, cette simulation d'initialisation est moins exigeante en temps que les simulations de l'étude perturbative. En effet, nous pouvons ici simuler un quart de disque, en appliquant les conditions aux bords convenables. On obtient alors, grâce aux symétries, une géométrie sphérique. En revanche, lorsque l'on introduit une perturbation, nous sommes dans l'obligation de simuler un demi cercle car la perturbation brise un axe de symétrie pour certains modes. L'autre aspect limitant dans les simulations de RSN avec perturbation est le temps final de la simulation. En effet, nous arrêtons notre simulation d'initialisation après un temps de l'ordre de 1000 ans, et le rayon du RSN est alors d'environ $1.25 \cdot 10^{17}$ m \approx 4 pc. On utilise donc une boîte de simulation de 1.44×10^{17} m \approx 4,7 pc. Lorsque l'on poursuit cette simulation, il est nécessaire d'agrandir considérablement la taille de cette boîte, d'un facteur 4 pour passer de 1 000 ans à 50 000 ans. Ce facteur 4 est en réalité un facteur 8 sur le nombre de mailles selon x , puisqu'il faut simuler un demi cercle. Ainsi, il y a un facteur 32 entre le nombre de mailles nécessaire pour obtenir la résolution de cette simulation d'initialisation et celui nécessaire pour obtenir la même résolution dans la simulation finale. Les temps de calculs peuvent devenir ingérables, ainsi que la taille des données générées par le code. Il ne faut donc pas avoir des exigences trop fortes sur le taux de compression. En n'étudiant que des modes propres de la perturbation multiples de 4, on peut toutefois se contenter de ne simuler que des quarts de cercle. C'est ce qu'on fera en définitive, afin d'alléger les simulations et de conserver une bonne résolution tout en limitant le temps de calcul.

5.2.2 Etude de l'isotropie et des profils hydrodynamiques

Le caractère isotropique de la simulation dépend du nombre de mailles que représente la zone de surpression initiale, que l'on souhaite la plus proche possible d'un disque. Deux paramètres nous permettent d'influer sur le nombre de mailles occupé par la zone de surpression initiale : le rayon de cette zone et la résolution. Diverses simulations ont donc été réalisées pour étudier l'influence de ces deux paramètres, et afin de trouver le meilleur compromis possible. Il est important de noter que la résolution requise pour atteindre l'isotropie ne donne pas de contrainte sur la résolution des simulations suivantes, puisque l'anisotropie provient de la forme et de la taille de la surpression initiale. Ainsi, il faut distinguer la résolution nécessaire pour atteindre l'isotropie lors de nos simulations générant le RSN en phase de Sedov, qui nous servent ensuite de base pour lancer nos simulations à plus grands temps utilisées pour l'étude

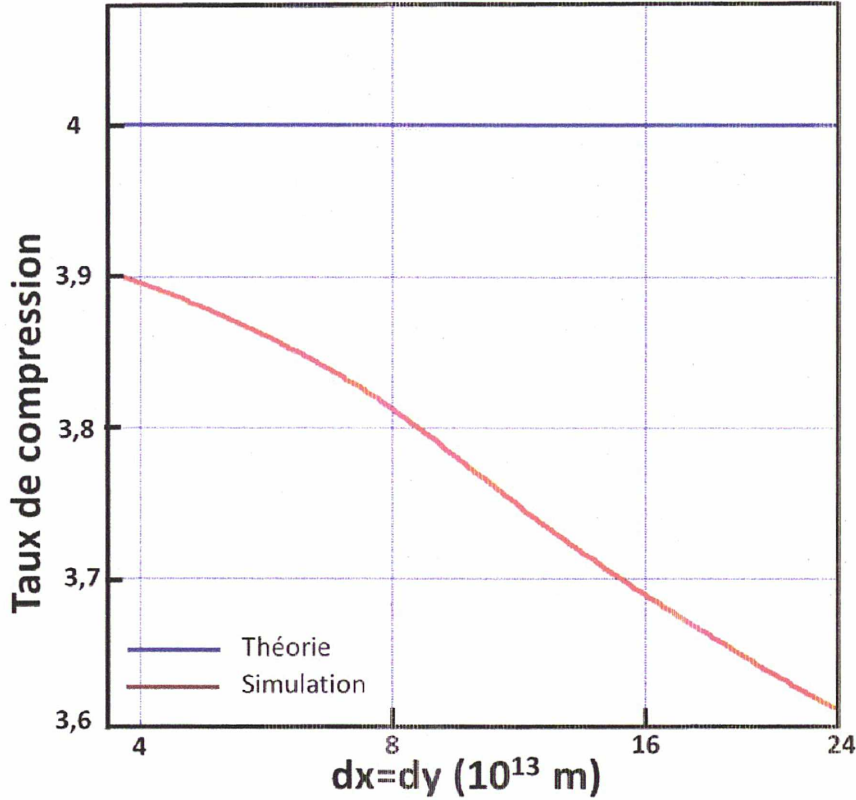


FIG. 5.1: Taux de compression en fonction de la résolution. En vert est montré le taux de compression théorique, et en rouge le taux de compression en fonction de la taille de la maille.

de stabilité. Pour la résolution la plus faible qui ait été testée, pour laquelle la taille de la maille est de $dx = 2.4 \times 10^{14}$ m, l'isotropie est déjà très bonne sur la pression et la densité (voir Fig. 5.2.2 et Fig. 5.4). En revanche, les profils de vitesse présentent une anisotropie importante, sur une zone allant du centre de l'écoulement jusqu'à une distance représentant approximativement 60% du rayon du RSN = $t \approx 1\,000$ ans (voir Fig. 5.5). On remarque également que cette anisotropie de vitesse dépend de la taille r_0 de la surpression initiale. L'anisotropie semble un peu mieux maîtrisée avec une taille de r_0 plus importante.

Augmentons la résolution en prenant $dx = 1,6 \times 10^{14}$ m, et comparons trois différentes tailles de la surpression initiale : $r_0 = 2 \times 10^{15}$ m, $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m et $r_0 = 8 \times 10^{15}$ m. Ces comparaisons sont montrées ci-dessous Fig. 5.6 et Fig. 5.7. On observe ici différents changements sur deux plans de comparaison : à résolution constante et r_0 variable, et à résolution variable et r_0 constant. Tout

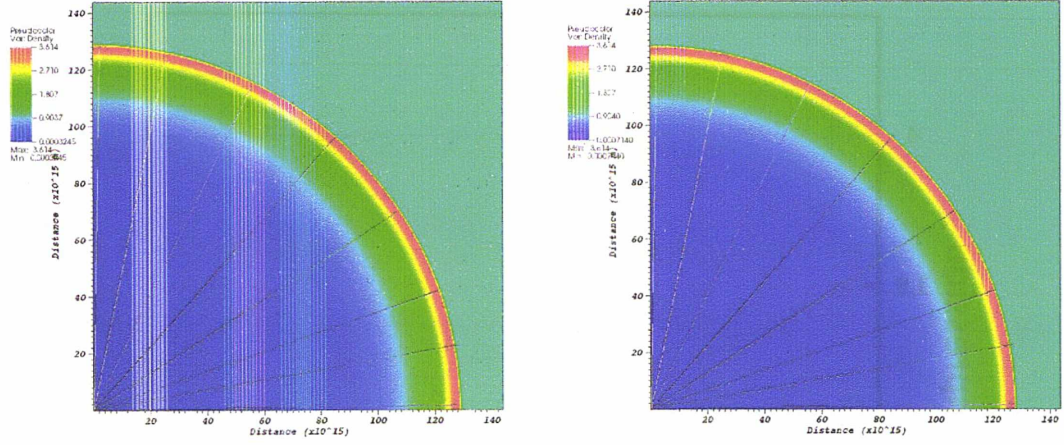
(a) $r_0 = 2 \times 10^{15}$ m(b) $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m

FIG. 5.2: Cartes de densité pour $dx = 2,4 \times 10^{14}$ m, avec deux tailles de surpression initiale différentes. On voit que les deux cartes sont similaires, et paraissent isotropes. Les segments visibles sur ces cartes sont les lignes de coupe sur lesquelles sont tracés les profils des grandeurs hydrodynamiques montrés dans les figures suivantes (voir Fig.5.3a à Fig.5.11b).

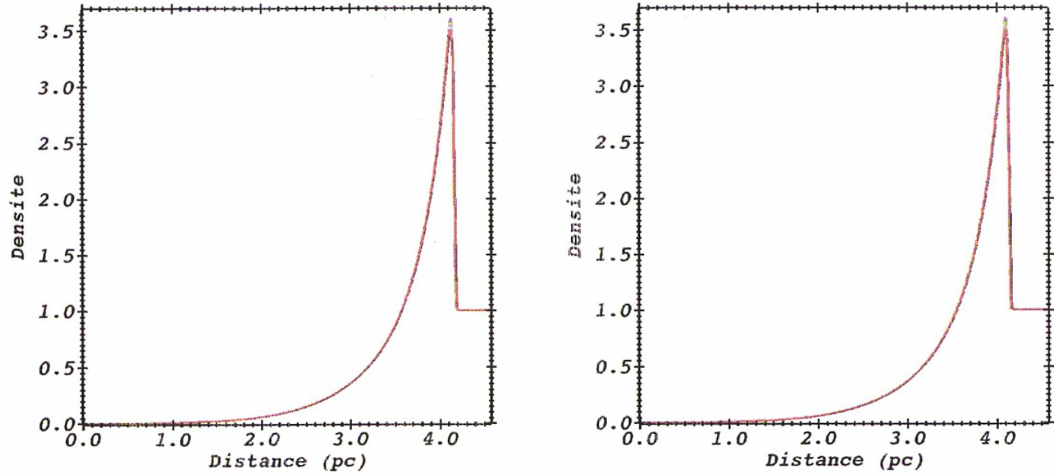
(a) $r_0 = 2 \times 10^{15}$ m(b) $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m

FIG. 5.3: Profils de densité pour $dx = 2,4 \times 10^{14}$ m, avec deux tailles de surpression initiale différentes. L'isotropie est très bonne.

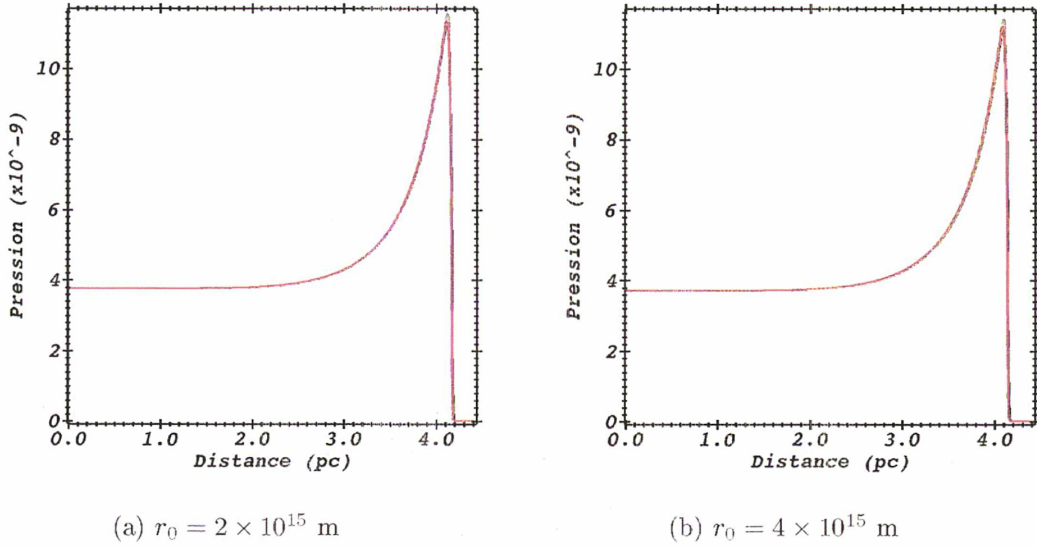


FIG. 5.4: Profils de pression pour $dx = 2,4 \times 10^{14}$ m, avec deux tailles de surpression initiale différentes. L'isotropie est également très bonne.

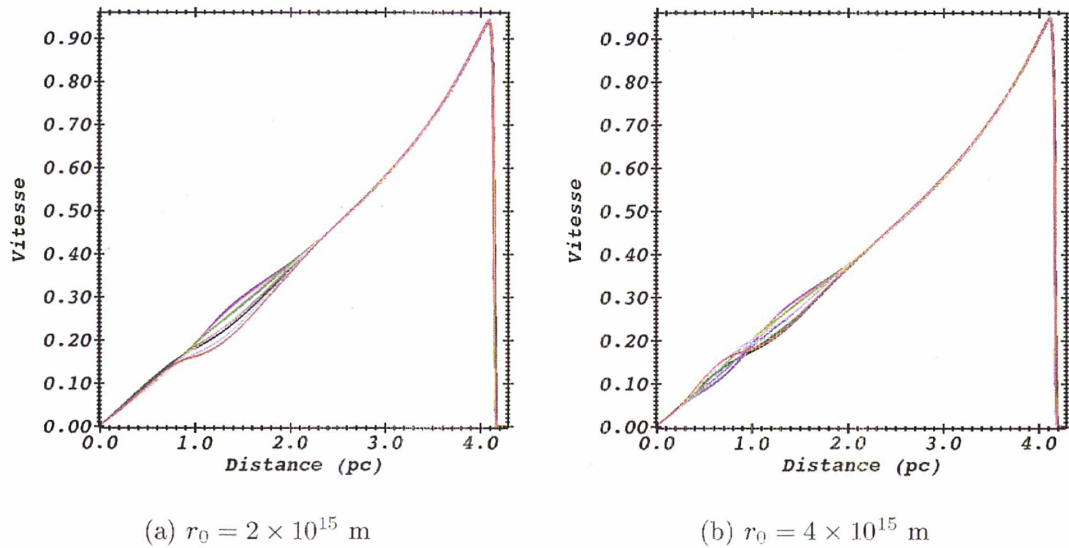


FIG. 5.5: Profils de vitesse pour $dx = 2,4 \times 10^{14}$ m, avec deux tailles de surpression initiale différentes. Les profils de vitesse présentent une anisotropie sur la partie interne du RSN.

d'abord, on voit que pour $r_0 = 2 \times 10^{15}$ m, le fait d'augmenter la résolution permet de diminuer l'anisotropie en s'éloignant du centre, mais que celle-ci est plus importante près de l'origine. Pour $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m, on constate

un comportement similaire. L'anisotropie proche du centre ne présente pas de grande difficulté, tant qu'elle est confinée proche du centre et dans des proportions raisonnables (quelques % de variation), pour l'étude de stabilité. En effet, le phénomène de l'instabilité de Vishniac se déroule à proximité du front de choc, et si l'anisotropie est cantonnée aux régions proches du centre, son influence sera nulle sur la dynamique du RSN et l'évolution des perturbations. On observe que les profils obtenus pour $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m et pour $r_0 = 8 \times 10^{15}$ m sont très semblables. L'anisotropie est légèrement moins importante en amplitude avec $r_0 = 8 \times 10^{15}$ m, mais s'étend légèrement plus loin (70×10^{15} m $\approx 2,3$ pc contre 64×10^{15} m ≈ 2 pc) du centre.

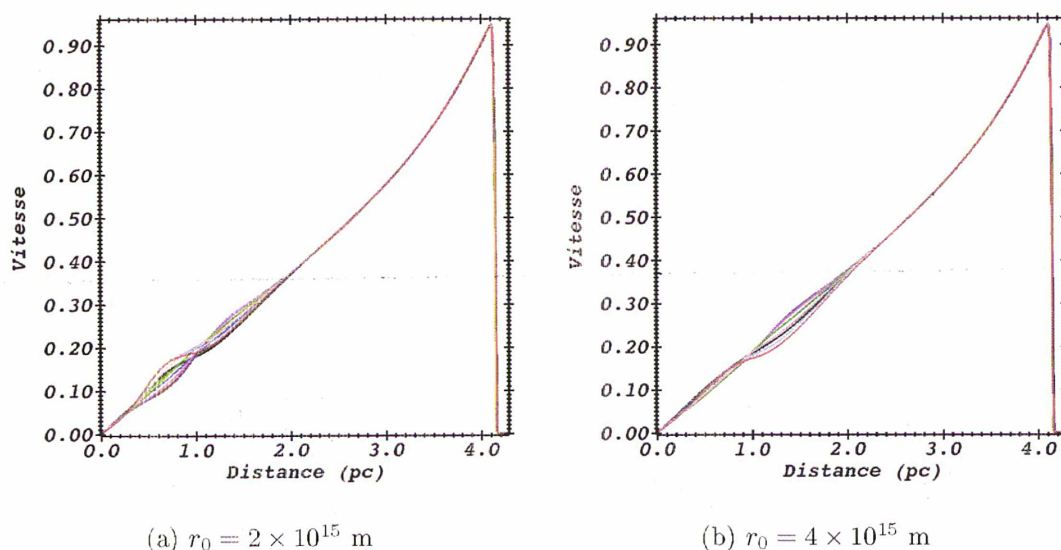


FIG. 5.6: Comparaison des profils de vitesse pour $dx = 1,6 \times 10^{14}$ m.

Augmentons maintenant la résolution et voyons si l'on parvient à diminuer encore cette anisotropie. Nous prenons à présent une résolution plus élevée, avec $dx = 8 \times 10^{13}$ m, et étudions trois simulations avec les trois rayons de suppression initialement précédemment définis (voir Fig. 5.8 et Fig. 5.9). Les conclusions sont identiques : on observe une diminution de l'amplitude de l'anisotropie dans les profils de vitesse. On observe toujours de grandes amplitudes d'anisotropie (proches de 50% de la vitesse en $r = 20 \times 10^{15}$ m *approx* 0,7 pc) pour le rayon initial $r_0 = 2 \times 10^{15}$ m. Cette valeur est donc écartée. En revanche, les deux autres valeurs présentent de grandes similarités dans leurs profils de vitesse. On a vu que les profils de densité semblent isotropes. Néanmoins, on remarque une zone entre 40×10^{15} m $\approx 1,3$ pc et 60×10^{15} m $\approx 1,9$ pc dans laquelle les profils de densité dévient légèrement des profils analytiques dans le cas $r_0 = 8 \times 10^{15}$ m (voir Fig. 5.10). On décide donc de prendre $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m, et de doubler une dernière fois la

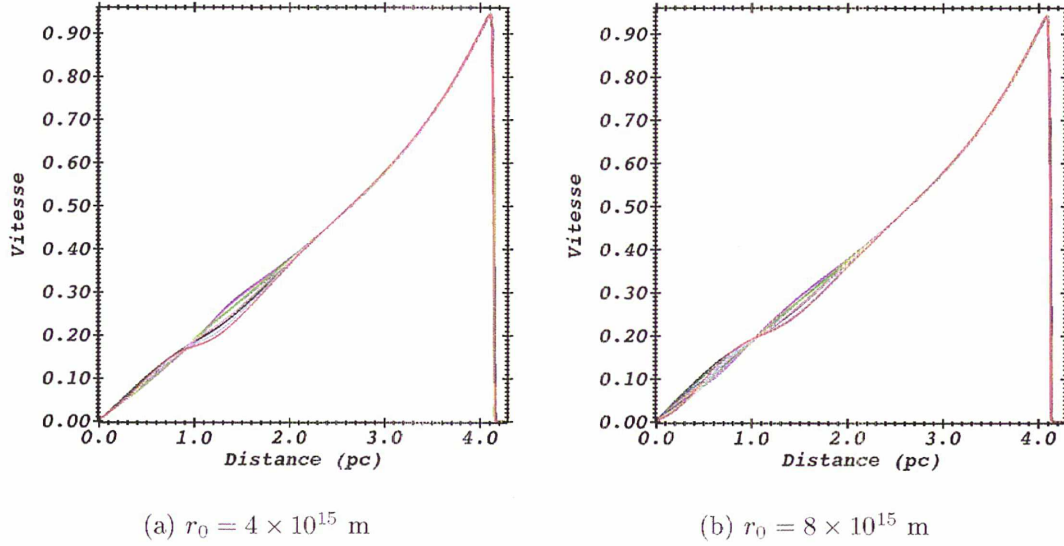
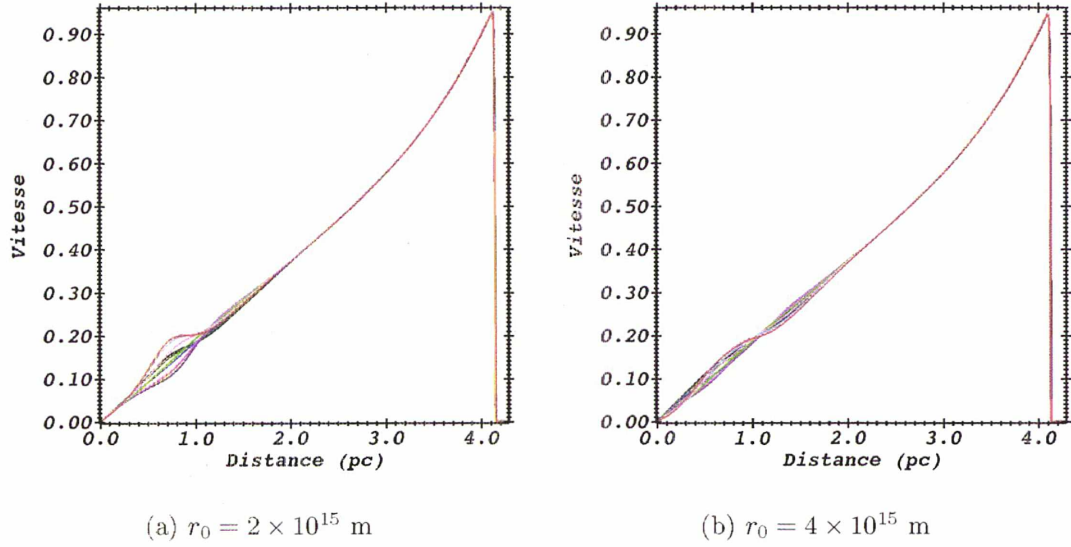
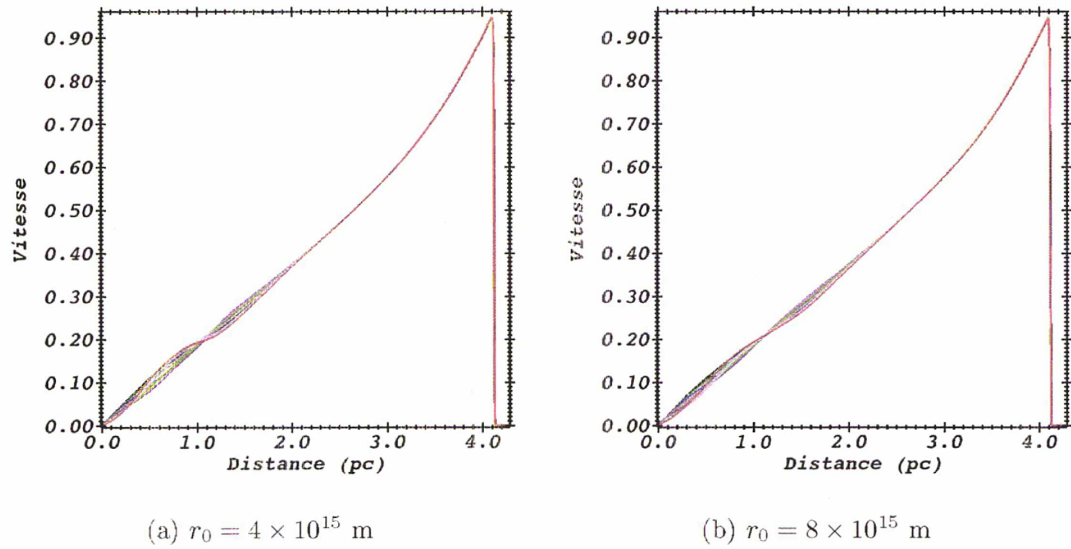


FIG. 5.7: Comparaison des profils de vitesse pour $dx = 1,6 \times 10^{14}$ m.

résolution afin de voir la différence générée. La taille de la maille est alors de $dx = 4 \times 10^{13}$ m. On observe alors une amélioration de l'isotropie des profils de vitesse dans la zone allant de 30×10^{15} m ≈ 1 pc jusqu'à 60×10^{15} m ≈ 2 pc (voir Fig. 5.11). Les profils de densité et de pression sont parfaitement isotropes, et correspondent de façon idéale avec les profils analytiques. On choisit donc de conserver cette configuration pour l'initialisation de la simulation : $r_0 = 4 \times 10^{15}$ m, $dx = dy = 4 \times 10^{13}$ m, et $x_{max} = y_{max} = 1,44 \times 10^{17}$ m $\approx 4,7$ pc. La valeur des bornes du domaine de simulation est ainsi choisie afin d'obtenir un maillage de 3600×3600 . Ce nombre de mailles est recherché afin de pouvoir aisément subdiviser le domaine lors de la parallélisation. Ainsi, on peut lancer la simulation sur 81 processeurs, correspondant alors à une subdivision du maillage en 9 lignes et 9 colonnes définissant 81 zones de 400 mailles de côté chacune. On peut également prendre une parallélisation à 36 processeurs, 100 processeurs, à 64 processeurs, et ainsi de suite en ayant respectivement des zones de 600, 360, 450 mailles de côté chacune, ce qui simplifie le post traitement et optimise le temps de calcul.

5.2.3 Vérification de l'évolution autosemblable

Une dernière vérification s'impose : si la simulation est correcte, on doit retrouver une évolution du rayon R du RSN en $R \propto t^{2/5}$, correspondant à la phase de Sedov-Taylor dans le cas sphérique. On a donc tracé l'évolution du rayon en fonction du temps, et également cherché à déterminer l'indice n tel que $R \propto t^n$. Cet indice est donné, entre deux instants t_1 et t_2 auxquels

FIG. 5.8: Comparaison des profils de vitesse pour $dx = 8 \times 10^{13}$ m.FIG. 5.9: Comparaison des profils de vitesse pour $dx = 8 \times 10^{13}$ m.

correspondent deux rayons R_1 et R_2 par :

$$n = \frac{\ln(R_2/R_1)}{\ln(t_2/t_1)} \quad (5.6)$$

On observe (voir Fig. 5.2.3) que l'évolution correspond bien à la phase de

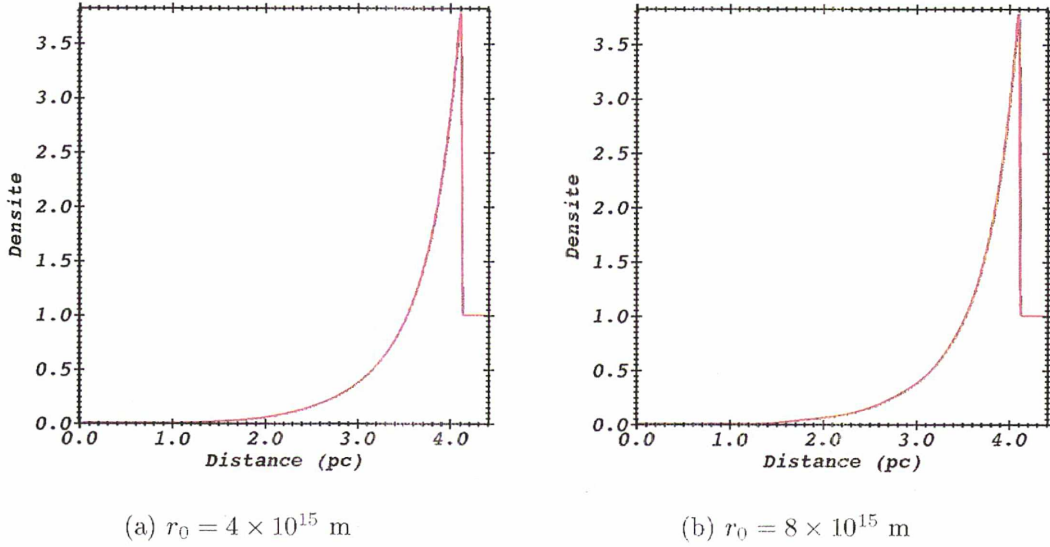


FIG. 5.10: Comparaison des profils de densité pour $dx = 8 \times 10^{13}$ m, avec deux valeurs de r_0 différentes.

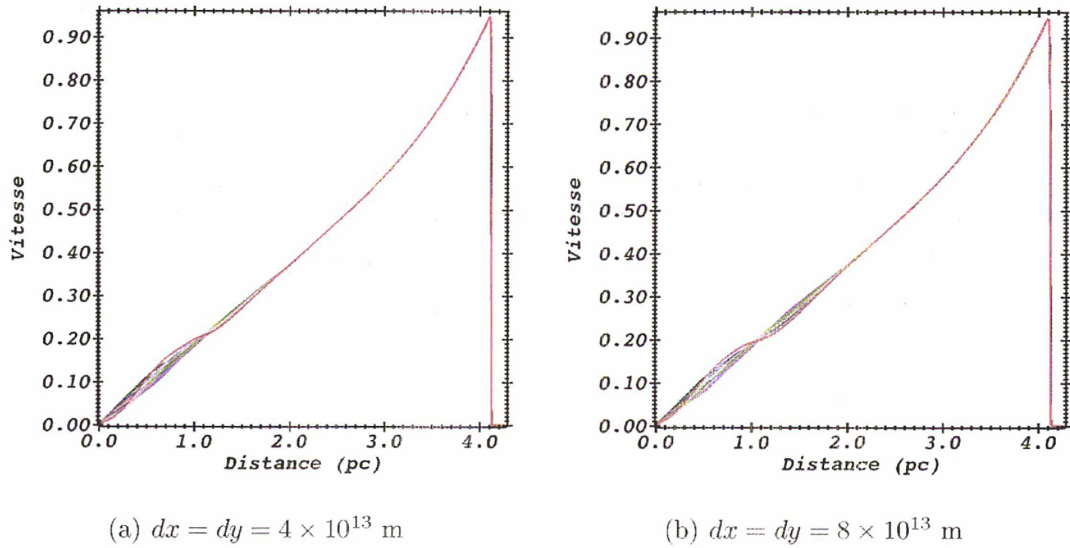


FIG. 5.11: Comparaison des profils de vitesse pour deux résolutions différentes et $r_0 = \times 10^{15}$ m.

Sedov-Taylor.

Le problème physique de l'explosion forte de Sedov est un cas test classique des codes hydrodynamiques. La solution analytique étant connue, il permet de vérifier les résultats issus d'un code d'hydrodynamique par comparaison

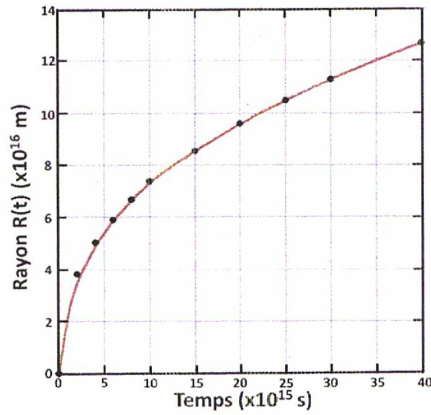
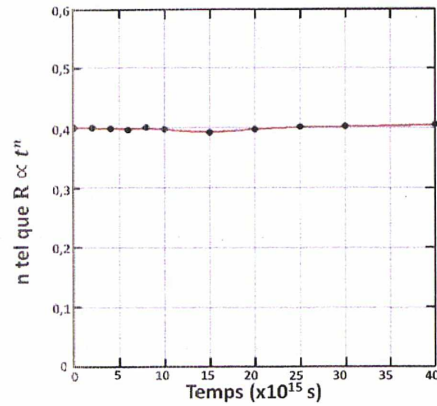


FIG. 5.12: Comparaison entre rayon d'expansion théorique et simulation


 FIG. 5.13: Evolution de l'indice n

avec le résultat théorique attendu. Dans notre cas, on a vu qu'il y a un très bon accord entre théorie et simulation, la différence portant sur les profils de vitesse qui présentent des anomalies localisées dans la région proche du centre, très peu dense. Cette anomalie est due à la taille de la surpression initiale qui est l'équivalent numérique de l'explosion ponctuelle de Sedov. Elle ne pose pas de problème dans notre étude, car elle reste localisée proche de l'origine.

5.3 Simulation haute définition du RSN en phase de Sedov

Dans un premier temps, nous avons souhaité faire évoluer le RSN, sans perturbation et en phase de Sedov, jusqu'à $t \approx 50\,000$ ans afin de disposer d'une base de comparaison pour les simulations qui serviront à l'étude de l'instabilité en phase de Sedov-Taylor ainsi que pour les simulations avec fonction de refroidissement. Comme on connaît la loi d'évolution du rayon (5.5), on peut calculer aisément le rayon qu'aura atteint le RSN après 50 000 ans. Ainsi, comme le RSN a un rayon de $R_1 = 1,25 \times 10^{17}$ m après un temps de 4×10^{10} s, son rayon à 50 000 ans est donné par

$$R_{final} = R_1 \left(\frac{t_{final}}{t_1} \right)^{2/5} \approx 5,5 \times 10^{17} \text{ m} . \quad (5.7)$$

Il faut donc une boîte d'approximativement $11,2 \times 10^{17} \text{ m} \times 5,6 \times 10^{17} \text{ m}$. On choisit alors la résolution afin d'avoir un taux de compression satisfaisant tout en conservant des temps de calculs raisonnables. On a choisi dans un premier temps de prendre $dx = dy = 1,6 \times 10^{14} \text{ m}$, sur un maillage

de 7200×3600 mailles, ce qui fait une taille de la boîte de simulation de $11,52 \times 10^{17} \text{ m} \times 5,76 \times 10^{17} \text{ m}$. On a donc ainsi l'ensemble des caractéristiques des simulations d'initialisation. Un programme a été réalisé afin de projeter la simulation d'initialisation, réalisée dans une résolution de $4 \times 10^{13} \text{ m}$, sur la nouvelle grille. Pour cela, il faut fusionner 16 mailles de la simulation d'initialisation sur une maille de la nouvelle grille, et réaliser le symétrique par rapport à l'axe y du quart de cercle. Néanmoins, cette approche qui a été la nôtre initialement a été modifiée en ne simulant plus que des quarts de cercle. On divise ainsi par deux le nombre de mailles nécessaires. Cela implique de mettre un axe de symétrie sur l'axe (Oy) comme condition de bord, et cela contraint également le choix des modes propres de la perturbation. En effet, en simulant un demi-cercle, le mode propre doit être pair, tandis qu'avec un quart de cercle, ce mode propre doit être un multiple de 4. Afin de gagner en taille de données et en temps de calcul, nous avons pris le parti de simuler des quarts de cercle, puisque nous n'avons pas besoin, dans le cadre de notre étude, d'étudier systématiquement chaque mode propre. Deux valeurs, multiples de 4, sont suffisantes. Nous simulons donc nos RSN sur un maillage de 3600×3600 mailles, correspondant à une taille de la boîte de simulation de $5,76 \times 10^{17} \text{ m} \times 5,76 \times 10^{17} \text{ m}$ soit un carré d'environ 18 pc de côté. Lors de la visualisation, nous réalisons un échantillonnage des résultats afin de pouvoir les analyser de manière efficace et fluide. Nous nous ramenons alors à un maillage de 900×900 mailles, ce qui a pour effet de quadrupler le pas spatial lors de la visualisation. Néanmoins, cette opération ne pose pas de problème, puisqu'elle ne concerne que l'analyse des résultats post-calcul. Elle permet en revanche d'alléger le stockage des données.

Six simulations à haute résolution ont été prévues, et leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous. Les simulations en phase de Sedov-Taylor non perturbé servent de base de comparaison à toutes les autres simulations. Ensuite, pour les deux indices adiabatiques de l'étude, on introduit une perturbation de mode $l = 24$ dans un premier temps, et de $l = 32$ dans un second temps. L'amplitude de la perturbation est choisie égale à 8% de la longueur d'onde de la perturbation. Ces valeurs caractéristiques de la perturbation proviennent de [14] et [15], et correspondent à un développement maximal de l'instabilité dans d'après ces études.

Au fur et à mesure de l'étude, il est apparu intéressant de poursuivre certaines simulations à des temps supérieurs à $t \approx 53\,000$ ans. Nous avons dans ce cas conservé la résolution $dx = dy = 1,6 \times 10^{14} \text{ m}$, et avons rajouté des mailles à nos simulations. Nous sommes alors passés sur des grilles de 5400×5400 mailles, représentant une boîte de simulation de dimension $8,64 \times 10^{17} \text{ m} \times 8,64 \times 10^{17} \text{ m}$ nous permettant de poursuivre les simulations jusqu'à des temps de $t \approx 200\,000$ ans. Cela correspond à un carré d'environ 28 pc de côté.

5.3.1 Etude de la résolution

L'étude sur la résolution a été menée sur une simulation de RSN en phase de Sedov, sans pertes radiatives ni refroidissement. Lorsqu'on introduit une perturbation, des surdensités vont se former dans les zones en retard sur la position moyenne du front de choc, où la matière converge. Ces zones, plus lourdes, vont alors être moins sensibles à la décélération due au bilan des forces de pression, et vont repasser devant les zones en avance : on observe alors un va et vient entre les zones avancées et les zones reculées. La résolution peut avoir une influence sur ce mécanisme, car une résolution plus importante, i.e. une dimension de maille inférieure permet de concentrer la matière dans une zone plus petite. Nous avons donc cherché à déterminer si la résolution utilisée est suffisante pour bien représenter ce phénomène. Pour cela, nous avons comparé des simulations en plan parallèle, comme pour l'étude des paramètres de refroidissement, avec la résolution équivalente à celle des simulations de l'étude perturbative ultérieure, et avec une résolution doublée. La comparaison des profils permet alors de savoir si la résolution est suffisante. On observe sur les figures Fig. 5.14, Fig. 5.15 et Fig. 5.16 qu'il y a de légères différences entre les profils des grandeurs hydrodynamiques dans ces deux résolutions. Néanmoins, ces différences sont faibles, et augmenter la résolution pour gommer ces différences serait trop coûteux en temps de calcul, pour un bénéfice faible puisque ces différences ne représentent au plus que quelques pourcents. On choisit donc de conserver la résolution qu'on avait définie précédemment.

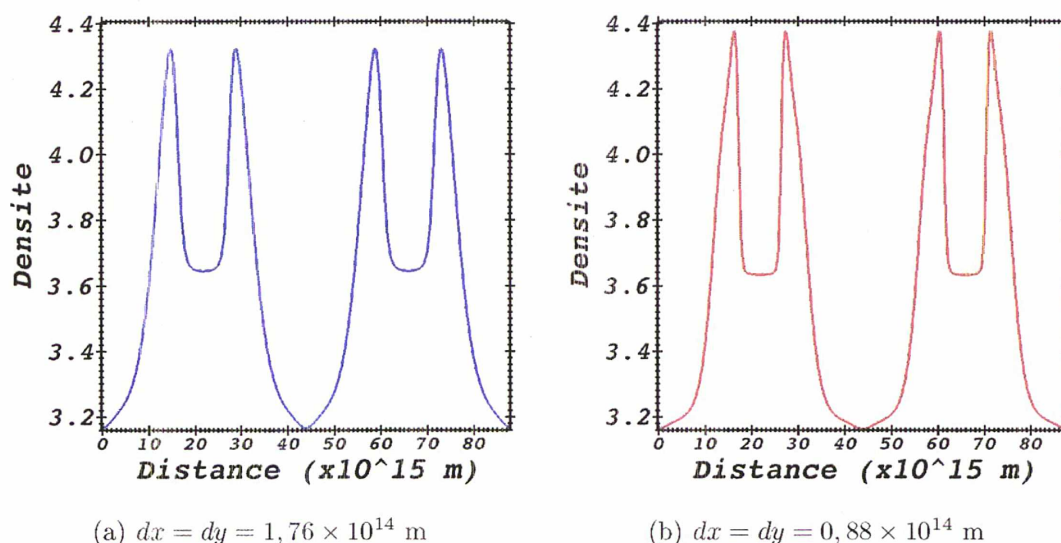


FIG. 5.14: Comparaison des profils de densité pour deux résolutions différentes

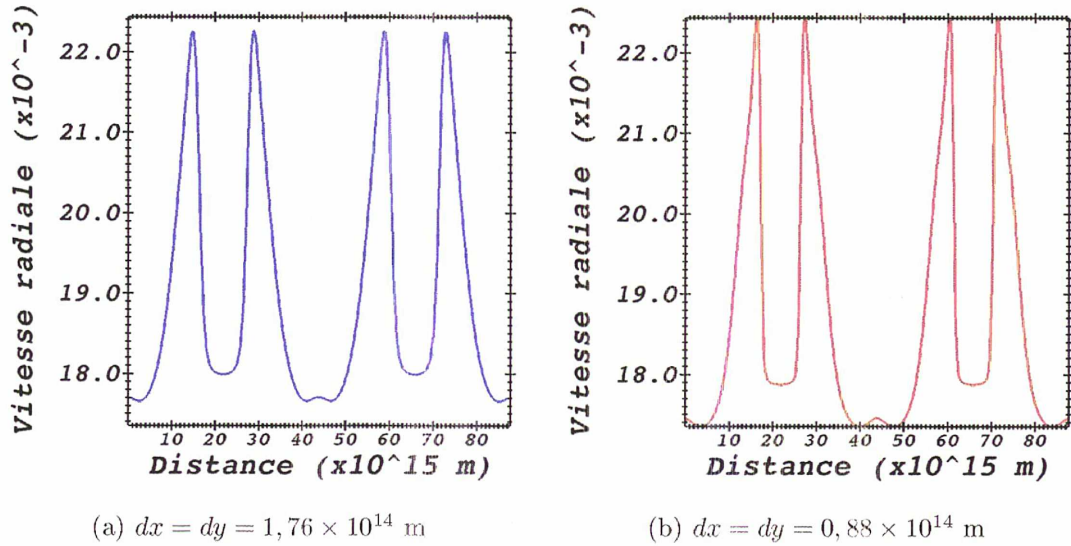


FIG. 5.15: Comparaison des profils de la vitesse radiale pour deux résolutions différentes

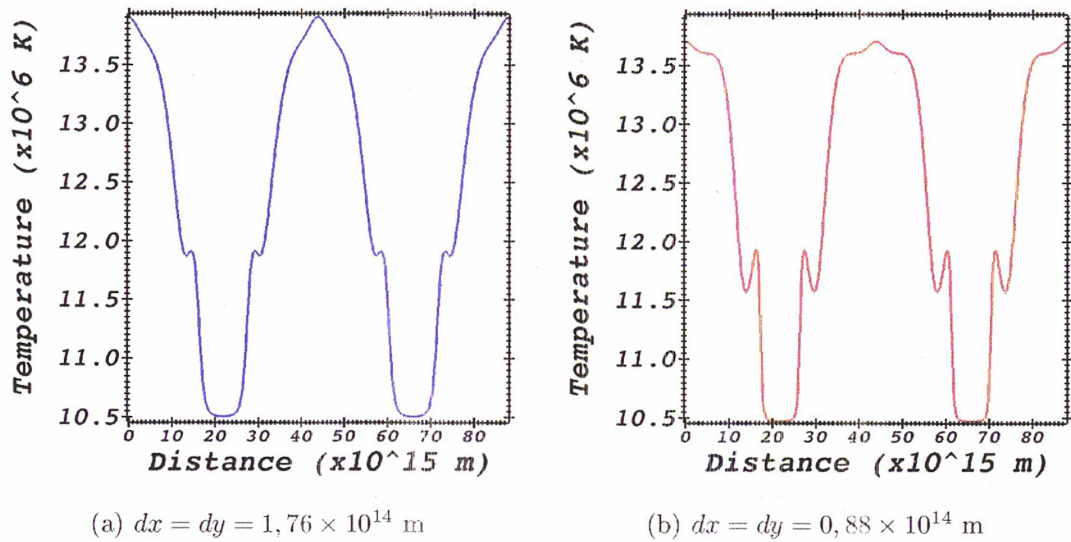


FIG. 5.16: Comparaison des profils de température pour deux résolutions différentes

5.4 Simulations avec pertes radiatives

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, l'une des contradictions essentielles de la théorie de Vishniac est que cette instabilité est supposée se dérouler en phase radiative des RSN, tandis que l'étude est réalisée en

phase de Sedov-Taylor. Afin de minimiser cette contradiction, Vishniac fait tendre dans son étude théorique [11] l'indice adiabatique γ vers 1. Ceci a pour but de tenir compte de la densification et de l'aminicissement de la partie dense du RSN, qui est assimilé à une coquille. Néanmoins, il conserve une loi en $R \propto t^{2/5}$. Cet artifice de modélisation et cette contradiction peuvent être levés dans une étude numérique, en prenant en compte des pertes par rayonnement du milieu choqué. Les RSN étudiés ici dans le cadre de l'étude de la phase radiative de leur expansion sont composés d'hydrogène ionisé d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$, qui est la valeur classique d'un gaz parfait. Dans l'étude présentée ici, ces pertes énergétiques dues au rayonnement sont modélisées par une fonction de refroidissement Λ introduite dans l'équation d'énergie, et il n'est donc plus besoin de prendre un indice adiabatique faible pour mimer l'effet des pertes radiatives. Ceci suppose que le milieu étudié est optiquement mince, ce qui signifie que les photons émis par le gaz rayonnant n'interagissent pas avec la matière, et emportent l'énergie rayonnée sans la retransmettre au milieu environnant. Les pertes d'énergie doivent générer une densification et un aminicissement de la coquille, ainsi qu'un ralentissement de l'expansion du RSN dans le MIS. Dans la littérature, différentes formes analytiques sont fournies en fonction des conditions hydrodynamiques du milieu [5], [10], [33], [29]. L'entrée en phase radiative peut se justifier par le fait que lorsque la température de la zone choquée diminue, les éléments lourds présents dans le gaz se recombinent avec les électrons, et on a alors l'apparition de raies d'émission et d'absorption. Néanmoins, on décide de tester des fonctions de refroidissement plus simples, ne faisant intervenir que la densité afin d'éviter les complications dues aux instabilités thermiques (dans un premier temps, on a testé une fonction de refroidissement constante de la forme : $\Lambda = \Lambda_0$, mais elle ne convenait pas car on refroidissait excessivement l'intérieur du RSN, lorsque la densité est très faible). L'objectif est d'obtenir un RSN dont les profils présentent une coquille fine et dense. On choisit donc de se limiter à des fonctions de refroidissement du type :

$$\Lambda = \Lambda_0 \rho^\alpha . \quad (5.8)$$

La démarche consiste à étudier les profils hydrodynamiques des RSN lorsque l'on introduit ces pertes d'énergie, afin de déterminer quelle valeur de α choisir. Dans tous les cas présentés, nous introduisons une température seuil en-deçà de laquelle le gaz ne subit plus de pertes radiatives. Cette température est celle du MIS $T_{MIS} \approx 12000$ K. On introduit alors le paramètre χ , qui est le rapport entre le temps de refroidissement et le temps dynamique :

$$\chi = \frac{t_\Lambda}{t_{dyn}} . \quad (5.9)$$

Ce paramètre nous permet de comparer l'intensité du refroidissement entre différentes fonctions de refroidissement. Le temps dynamique est alors choisi

comme le temps final des simulations de l'étude perturbative : $t_{dyn} = 50\,000$ ans. Ce paramètre χ est utilisé uniquement dans les tests préliminaires réalisés en géométrie plane. Le temps de refroidissement est défini par :

$$t_{\Lambda} = \frac{P}{(\gamma - 1)\Lambda} \quad (5.10)$$

et finalement, χ est donné par :

$$\chi = \frac{P}{(\gamma - 1)\Lambda t_{dyn}} \quad (5.11)$$

Les premiers tests de résolution et de détermination des paramètres ont été réalisés en géométrie plan parallèle, car cela permet d'économiser beaucoup de temps de calcul. En effet, en géométrie sphérique, les dimensions x et y doivent être augmentées toutes les deux pour prolonger une simulation, tandis qu'en plan parallèle, seule la direction x doit l'être. On économise donc beaucoup de temps de calcul en déterminant les paramètres dans cette géométrie. Trois fonctions de refroidissement ont été testées :

- $\alpha = 0$: $\Lambda = \Lambda_0$
- $\alpha = 1$: $\Lambda = \Lambda_0\rho$
- $\alpha = 2$: $\Lambda = \Lambda_0\rho^2$

On recherche la fonction de refroidissement qui nous permettra d'obtenir des profils de densité continus et réguliers, mais avec une densité très "piquée" derrière le front de choc. On peut choisir de refroidir soit dans la zone dite zone de la coquille, qui est la région dans laquelle $\rho > \rho_{MIS}$, ou bien dans la totalité du RSN. Le gaz ne se refroidit que si $T > T_{MIS}$, avec $T_{MIS} = 12\,100K$. Pour déterminer la résolution équivalente en plan parallèle à la résolution en géométrie sphérique, on choisit de faire correspondre le nombre de mailles occupé par la coquille dans les deux géométries. On en conclut que la résolution adaptée dans le cas plan parallèle est $dx = dy = 1,76\,10^{14}$ m. Il y a deux aspects dans l'étude du refroidissement des RSN : le premier est de déterminer le paramètre α et le critère de refroidissement (refroidir uniquement la coquille ou l'intégralité du RSN), le second est de déterminer le paramètre Λ_0 . L'étude du paramètre α ne nécessite pas de simulations sur des temps longs. On peut voir à des temps courts (quelques milliers d'années) les différences induites dans les profils des grandeurs hydrodynamiques. En revanche, déterminer Λ_0 nécessite des simulations allant jusqu'à des temps comparables aux temps finaux des simulations de l'étude perturbative, car l'objectif est alors de déterminer la valeur de Λ_0 qui nous permet de refroidir le RSN suffisamment pour obtenir une densification et un amincissement de la coquille, tout en ne refroidissant pas de manière excessive, ce qui aurait pour effet de trop ralentir le RSN.

5.4.1 Choix de la zone à refroidir

On souhaite conserver un intérieur du RSN suffisamment chaud pour que le ralentissement ne soit pas trop élevé, et afin de maintenir une pression thermique importante. Le but est de conserver une force due à la pression bélière et une force due à la pression thermique suffisantes pour déclencher et entretenir l'instabilité de Vishniac. On peut choisir, comme indiqué précédemment, de ne refroidir que la coquille, en prenant comme critère de ne refroidir le gaz que si sa densité est supérieure à celle du MIS. Des tests ont été menés dans ce type de configuration, et on s'aperçoit alors qu'une discontinuité apparaît dans les profils hydrodynamiques à l'interface entre la coquille et la zone interne du RSN (voir Fig. 5.17 et Fig. 5.18). On ne souhaite pas avoir de discontinuité et de rupture dans les profils hydrodynamiques, aussi on choisit de refroidir l'intégralité du RSN. Etant donné que la densité décroît très fortement lorsqu'on se rapproche du centre, il est toujours possible de refroidir très peu l'intérieur du RSN en prenant $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$. Les paramètres χ mentionnés dans ces simulations peuvent sembler faibles, mais cela est dû au fait que ces tests sont courts relativement au temps des simulations de l'étude perturbative, on a donc amplifié le refroidissement pour étudier plus facilement les effets du refroidissement sur les profils.

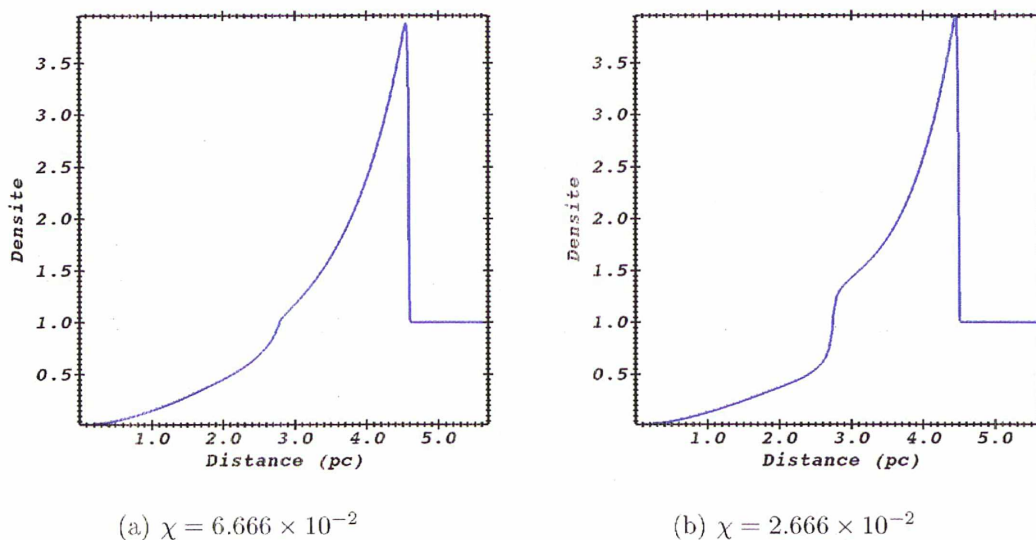
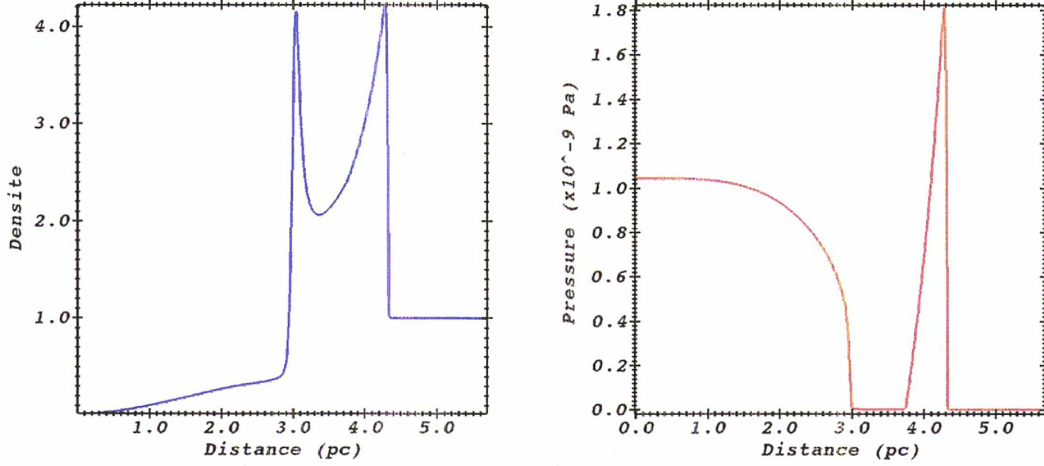


FIG. 5.17: Profils de densité : discontinuité des profils

5.4.2 Choix du paramètre α

Afin de déterminer la forme de la fonction de refroidissement qu'on va utiliser, on a réalisé des tests en géométrie plan parallèle du même type que



(a) profil de densité, $\chi = 1.333 \times 10^{-2}$

(b) profil de pression, $\chi = 1.333 \times 10^{-2}$

FIG. 5.18: Profils : la discontinuité apparaît de plus en plus grande

pour l'étude de la zone à refroidir. L'introduction d'une forme en $\lambda \propto \rho^\alpha$ avec $\alpha > 0$ permet de sélectionner la zone où le refroidissement est important, puisque la matière est essentiellement concentrée dans la coquille. Ci-dessous sont présentés les profils pour deux valeurs de ce paramètre α et différentes valeurs de χ . On remarque que pour des refroidissements élevés (Fig. 5.19 et Fig. 5.20), la pression présente un profil très irrégulier à proximité du front de choc pour $\alpha = 2$, tandis qu'avec $\alpha = 1$ on conserve des profils réguliers. On choisit donc de prendre une fonction de refroidissement du type :

$$\Lambda = \Lambda_0 \rho . \quad (5.12)$$

5.4.3 Etude du RSN avec refroidissement et choix du paramètre Λ_0

Cette étude est menée dans un premier temps en géométrie plan-parallèle, puis en géométrie sphérique. Par la suite, nous avons étudié le comportement du RSN sous l'effet du refroidissement en géométrie sphérique, afin de pouvoir ensuite introduire une perturbation pour étudier le comportement du RSN et le développement de l'instabilité de Vishniac en phase radiative. Cette étude du RSN purement sphérique en phase radiative nous permet donc de déterminer la valeur du paramètre Λ_0 que nous allons utiliser dans cette géométrie, et nous sert également de base de comparaison pour les simulations avec perturbation du RSN. Enfin, la compréhension de l'évolution des grandeurs hydrodynamiques sous l'effet du refroidissement nous sera utile pour

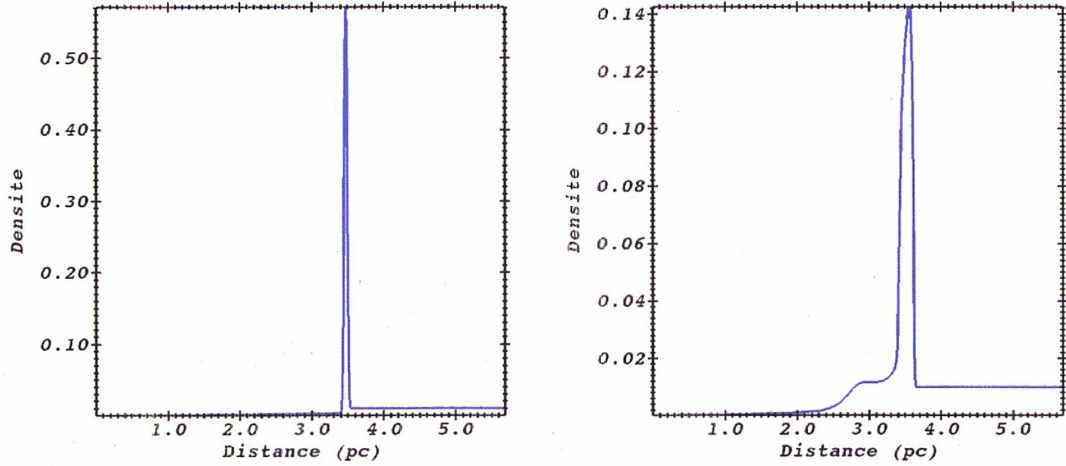
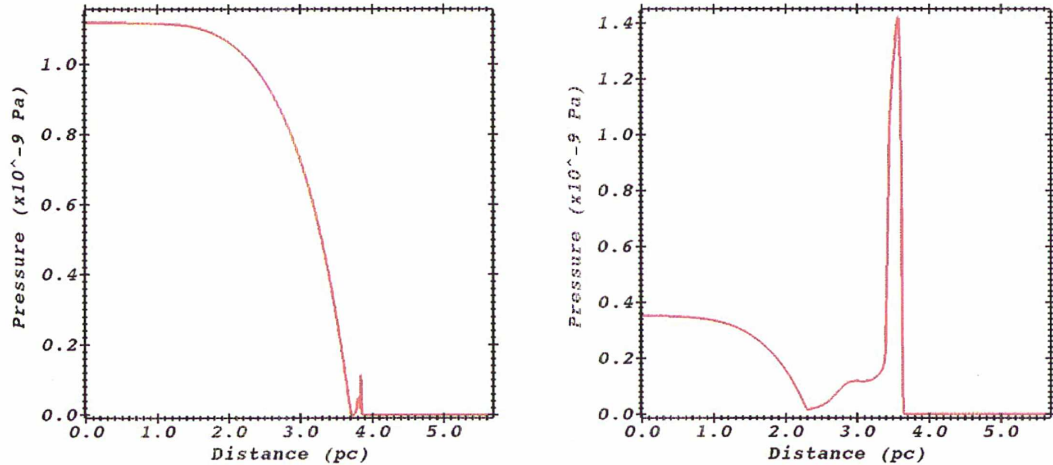
(a) profil de densité, $\alpha = 2$, $\chi = 1,25 \times 10^{-2}$ (b) profil de densité, $\alpha = 1$, $\chi = 1 \times 10^{-2}$

FIG. 5.19: Comparaison des profils de densité

(a) profil de pression, $\chi = 6,25 \times 10^{-2}$, $\alpha = 2$ (b) profil de pression, $\chi = 1 \times 10^{-2}$, $\alpha = 1$ FIG. 5.20: Irrégularité du profil de pression avec $\alpha = 2$

comprendre et analyser l'évolution du RSN radiatif perturbé. Pour cela, nous préparons un RSN en phase de Sedov-Taylor qu'on a laissé évoluer jusqu'à $t = 3\,000$ ans. Nous relançons alors la simulation en introduisant le terme de refroidissement et laissons évoluer le RSN jusqu'à $t \approx 120\,000$ ans.

Λ_0	R_s	R_i	e
0	732,5	460	272,5
0,025	701	453,5	247,5
0,05	662,5	457	205,5
0,075	604	464	140
0,1	569	467	102
0,2	521,5	488	33,5

TAB. 5.1: Tableau comprenant, de gauche à droite, la valeur du paramètre Λ_0 (en $W.kg^{-1}$), la position du front de choc R_s , la position de la face interne de la coquille R_i et l'épaisseur $e = R_s - R_i$ de cette coquille (tous trois en 10^{15} m).

Etude du RSN avec refroidissement en géométrie plane

Le but de cette étude est d'étudier l'influence du refroidissement et plus particulièrement celle du paramètre Λ_0 sur l'évolution des profils des grandeurs hydrodynamiques ρ , v , p et T dans les simulations de restes de supernova. L'étude préliminaire est menée en plan parallèle, afin de limiter les temps de calcul. On rappelle que les pertes radiatives sont prises en compte dans l'équation d'énergie, sous la forme d'une fonction de refroidissement, ce qui suppose que le milieu est optiquement mince. On a choisi une fonction de refroidissement de la forme :

$$\Lambda = \Lambda_0 \rho \quad (5.13)$$

où Λ_0 est une constante.

On peut voir, sur la Fig. 5.21, en haut les profils de température et de vitesse pour différentes valeurs de Λ_0 , et en bas les profils de densité. La position du front de choc est indiquée par des droites verticales en pointillés, afin de bien visualiser la correspondance des particularités entre les différents profils. Sur les profils de densité, on remarque que plus la valeur du paramètre Λ_0 est importante, plus la valeur maximale de la densité est importante, et moins la position du front de choc est avancée. Ces observations sont conformes à ce que l'on attendait. Une analyse plus fine de ces profils permet de connaître l'épaisseur de la coquille, définie comme la zone où la densité ρ est supérieure à la densité du milieu interstellaire ρ_{MIS} (voir Tab. 5.1 et Fig. 5.22).

On s'aperçoit alors, conformément à ce que l'on attendait, que plus le paramètre Λ_0 est grand, plus l'épaisseur se réduit et plus l'expansion du RSN a été ralentie : le refroidissement rend la coquille plus fine et diminue l'énergie cinétique du milieu choqué. Une valeur du paramètre de refroidissement de $\Lambda_0 = 0,1$ engendre une réduction de l'épaisseur de la coquille d'un facteur 2,7 et du rayon du RSN d'à peu près 20% (voir Fig.5.22), tandis que par

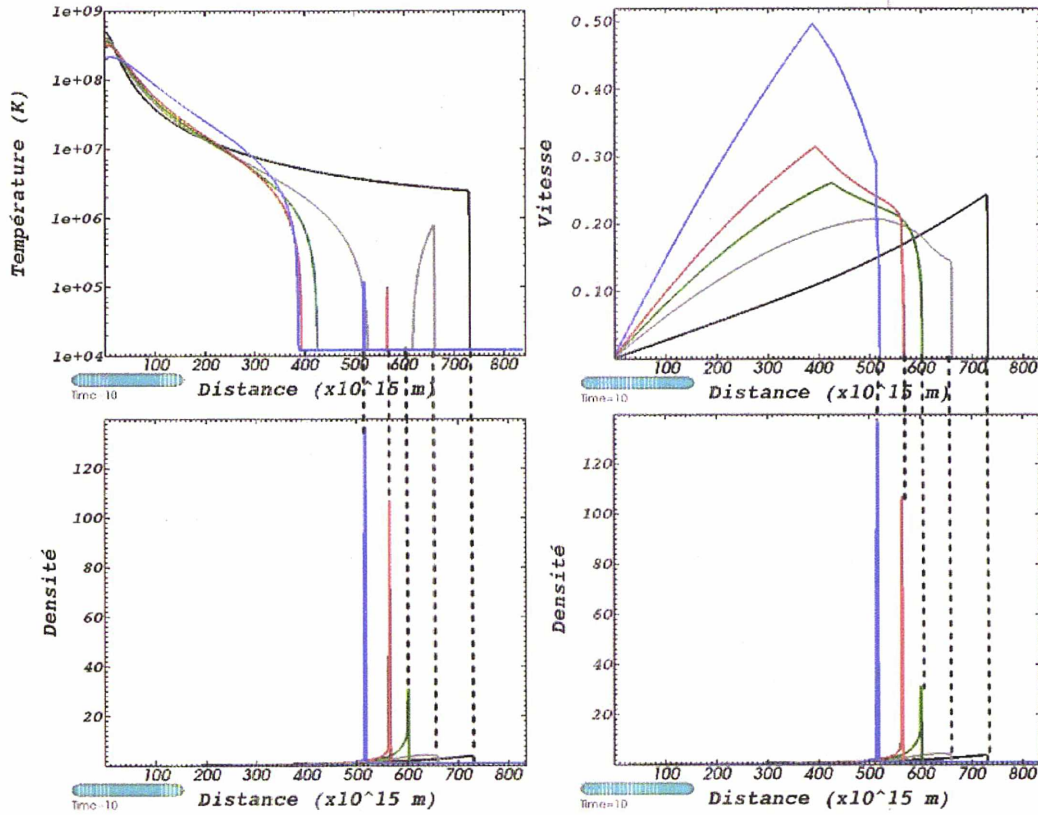


FIG. 5.21: Ces profils sont pris au temps $t = 50\,000$ ans. A gauche : en haut profils de température (en K , échelle logarithmique), en bas de densité (en $10^{-20} \text{ kg.m}^{-3}$), et à droite : en haut profils de vitesse (en 10^3 km.s^{-1}), en bas de densité, pour différentes valeurs de Λ_0 : $\Lambda_0 = 0$ (cas Sedov) en noir, $\Lambda_0 = 0,05$ en gris, $\Lambda_0 = 0,075$ en vert, $\Lambda_0 = 0,1$ en rouge et en bleu $\Lambda_0 = 0,2$. En pointillés est indiquée la position du front de choc. On observe le ralentissement du front de choc, et la structure "zone intérieure chaude - zone froide - résidu de matière chaude / pic de température".

rapport au modèle de Sedov ($\Lambda_0 = 0$), le maximum de densité a été multiplié par environ 25. De plus, si on compare à partir du Tab. 5.1 les configurations pour $\Lambda_0 = 0,025$ et $\Lambda_0 = 0,05$ au cas de Sedov, on voit que le recul du front de choc est environ 2 fois plus grand pour $\Lambda_0 = 0,05$ qu'il ne l'est pour $\Lambda_0 = 0,025$. Cette proportionnalité n'est plus vraie quand Λ_0 augmente car, d'une part, le refroidissement Λ ne peut plus être vu comme une perturbation en régime linéaire et, d'autre part, l'influence de ρ intervient en plus de Λ_0 dans Λ . Par rapport à la solution de Sedov, on observe sur les profils de température de la Fig. 5.21 l'apparition d'une zone froide, entre la région interne très chaude du RSN et le front de choc, dans laquelle $T = T_{MIS}$ (T est la température du fluide, T_{MIS} est la température du MIS), et l'apparition

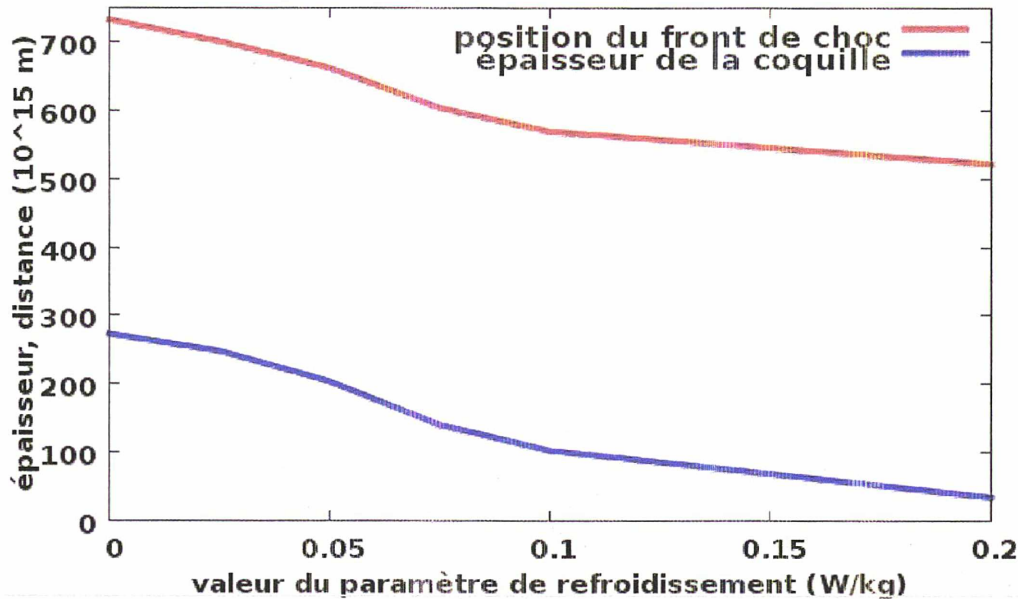


FIG. 5.22: En abscisse est portée la valeur du paramètre de refroidissement Λ_0 , en ordonnée est représentée la longueur en 10^{15} m. En rouge est tracée la position du front de choc, et en bleu l'épaisseur de la coquille.

d'un pic de température au niveau du front de choc. Cette structure des profils de température peut s'expliquer par la forme (voir Eq. (5.13)) de la fonction de refroidissement. En effet, on sait que la densité est très faible au centre, ce qui implique que la valeur de Λ y est également très faible : le centre n'est quasiment pas refroidi d'où la forte température qui y règne quelle que soit la valeur de Λ_0 (la valeur de la température est pratiquement indépendante de Λ_0). L'extension de cette région chaude centrale est d'autant plus réduite que Λ_0 est élevé. Le bord de cette région est caractérisé par une valeur de T qui chute brutalement à T_{MIS} et à cet endroit le front de température est vertical (la dérivée spatiale de T tend vers l'infini). La zone que nous définissons comme froide correspond à la partie du RSN située au delà du front thermique. En revanche, au fur et à mesure que l'on se rapproche du front de choc, la densité croît, et le refroidissement également. La matière absorbée par le RSN est d'abord comprimée par le front de choc, puis s'éloigne de celui-ci au fur et à mesure du temps. Elle est alors refroidie progressivement. Cela explique l'apparition de la zone refroidie à l'intérieur du RSN : cette zone contient de la matière qui a eu le temps de se refroidir alors qu'elle était suffisamment dense, tandis que la matière plus proche du centre était trop diluée, de densité trop faible pour être refroidie de manière sensible. On a donc l'apparition du front "thermique" séparant la matière qui a été refroidie et la matière chaude et diluée plus à l'intérieur du RSN, ainsi que la formation de la zone froide

qui s'étend vers le front de choc au fur et à mesure que le temps passe, car la densité entre le front thermique et le front de choc est élevée. On observe alors sur les profils de température à l'approche du front de choc le résidu de matière chaude qui est en train d'être refroidi, formant une sorte de pic large de température, visible sur la Fig. 5.21 sur la courbe grise correspondant à $\Lambda_0 = 0,05$, et qui voit son extension spatiale et sa température diminuer au cours du temps. A un temps inférieur à 50 000 ans, ce pic de température pour $\Lambda_0 = 0,05$ serait plus épais : le bord extérieur du pic serait toujours localisé sur le front de choc, mais le bord intérieur serait plus proche du front thermique. A un temps encore inférieur, la zone froide n'a pas encore eu le temps d'apparaître, et alors on a partout une température élevée. On remarque sur les profils de vitesse que celle-ci est également modifiée fortement par le refroidissement. Contrairement au profil de Sedov où la vitesse est décroissante en partant du front de choc et en revenant vers le centre du RSN, la vitesse croît du front de choc jusqu'à une position à l'intérieur du RSN, correspondant au front thermique, puis décroît ensuite jusqu'au centre.

On voit sur la figure Fig. 5.23 que la pression est également fortement modifiée par l'introduction du refroidissement. En partant du centre où la pression est uniforme comme dans les profils de Sedov, et en approchant de la zone froide, la pression diminue pour atteindre une valeur minimale à l'entrée de cette dernière. A partir de ce point jusqu'à proximité du front de choc (tant qu'on reste dans la zone froide), la pression est alors directement proportionnelle à la densité. En effet, comme l'équation d'état est celle d'un gaz parfait, on a :

$$P \propto \rho T \quad (5.14)$$

et comme la température est constante à la température $T = T_{MIS}$, finalement dans cette région $P \propto \rho$. On observe également pour $\Lambda_0 = 0,05$ un pic de pression analogue à celui observé sur les profils de température pour cette même valeur de Λ_0 . En effet, l'équation d'état (5.14) implique qu'au pic résiduel de température apparaissant sur la Fig. 5.21 correspond un pic de pression. Ces profils de pression expliquent l'allure des profils de vitesse : le refroidissement a généré une zone froide, dans laquelle la pression est très faible. En partant du centre, le gradient de pression est négatif, et atteint un minimum à l'entrée de la zone $T = T_{MIS}$. Ensuite, la pression augmente et le gradient de pression est alors positif. Or, on sait que :

$$\vec{F} \propto -\vec{\nabla} P . \quad (5.15)$$

Ainsi, la matière est accélérée dans la région entre le centre et l'entrée de la zone froide, puis décélérée entre l'entrée dans la zone froide et le front de choc. Il est donc normal d'observer, sur la Fig. 5.23 une discontinuité dans la dérivée de la vitesse à l'endroit du front thermique, indiquée par les droites en

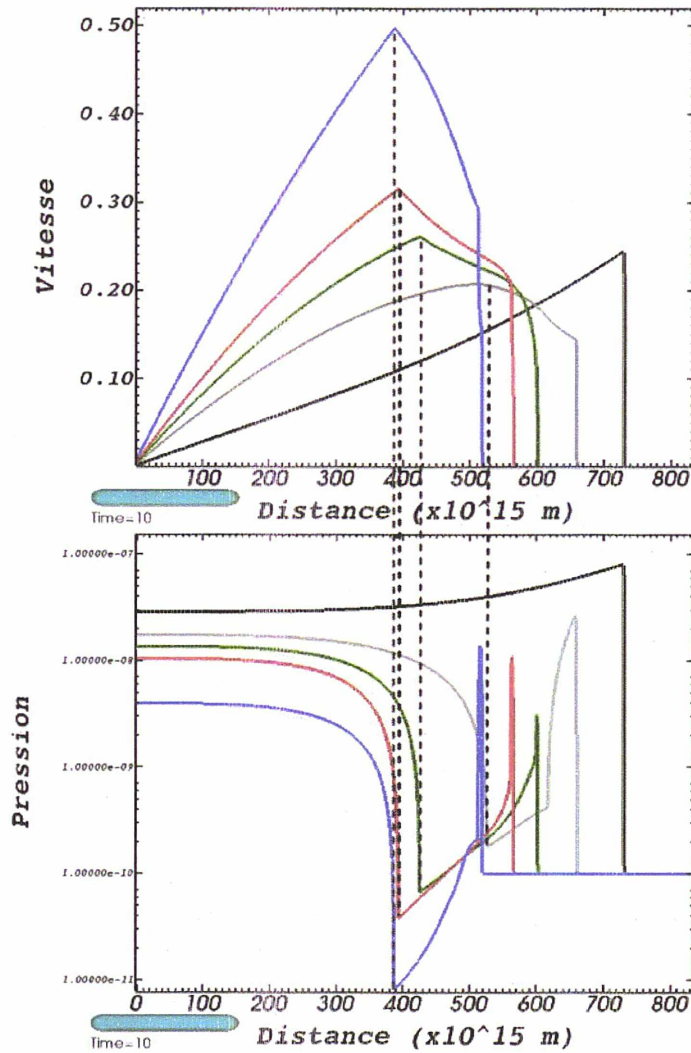


FIG. 5.23: Ces profils sont pris au temps $t = 50\,000$ ans. De manière analogue à la figure Fig. 5.21, on représente ici en haut le profil de vitesse (en 10^3 km.s^{-1}), et en bas le profil de pression (en Pa, échelle logarithmique) pour différentes valeurs de Λ_0 : $\Lambda_0 = 0$ (cas Sedov) en noir, $\Lambda_0 = 0,05$ en gris, $\Lambda_0 = 0,075$ en vert, $\Lambda_0 = 0,1$ en rouge et en bleu $\Lambda_0 = 0,2$. En pointillés est indiquée la position du point de pression minimale, qui correspond à l'endroit du front thermique après lequel commence la zone froide (en partant du centre du RSN).

pointillés : ce point d'inflexion correspond à l'inversion du signe du gradient de la pression. La matière allant plus vite que la matière du front de choc, elle rattrape celui-ci, vidant l'intérieur du RSN et contribuant à former une coquille fine et très dense.

Sur la Fig. 5.24, on montre la transition entre la configuration dans la-

quelle la zone froide n'a pas encore atteint le front de choc, et où le résidu de matière chaude derrière le choc est visible sous la forme d'un pic résiduel de température (profils en haut de la figure), et la configuration que l'on appelle "configuration en coquille fine, chaude et surdense". Ces deux configurations sont bien montrées sur la Fig. 5.21 : pour $\Lambda_0 = 0,05$ on a une configuration intérieur chaud - front thermique - zone froide - résidu de matière chaude, tandis que pour les valeurs de Λ_0 supérieures, on a une configuration intérieur chaud - front thermique - zone froide - coquille surdense et chaude. La matière froide qui a été accélérée par le gradient de pression rattrape finalement le front de choc lorsque cette zone finit par occuper toute la partie externe du RSN. A cet instant, la température est uniformément $T = T_{MIS}$ depuis le bord intérieur de la zone froide jusqu'au front de choc et le résidu de zone chaude qui formait un pic a disparu (profils en bas à gauche de Fig. 5.24). Néanmoins, l'arrivée de la matière et sa décélération sur la coquille génèrent alors un nouveau pic de température d'extension spatiale très limitée, et dont la température croît au fur et à mesure que la densité augmente dans la coquille fine ainsi formée. On ne voit pas sur cette figure, pour des raisons d'échelle, la formation du second pic de température immédiatement après. Néanmoins, un zoom approprié montré sur la Fig. 5.25 permet de se rendre compte qu'il apparaît simultanément à l'apparition du pic de densité : sur cette figure sont superposés les profils de température aux instants précédant la disparition du résidu de matière chaude (profils noir et vert), puis la croissance progressive du pic de température très localisé spatialement. Ce pic croît alors progressivement : l'arrivée de la matière, son ralentissement et sa compression à la rencontre de la matière du front de choc génèrent le pic de densité et de température, qui constitue une forme de coquille surdense et chaude (visible en bas à droite dans la Fig. 5.24). La structure du RSN est alors, en partant du centre :

- une zone de gaz chaud et très dilué, dans laquelle le gradient de pression est dirigé vers l'extérieur, accélérant la matière de manière centrifuge,
- un front dit "thermique", marquant la délimitation entre la matière chaude de l'intérieur du RSN et la zone froide
- une zone froide, à la température $T = T_{MIS}$, de densité croissante à l'approche du front de choc, dans laquelle le gradient de pression est centripète, décélérant la matière (laquelle a une vitesse néanmoins toujours supérieure à la vitesse du fluide au niveau du front de choc)
- une coquille surdense et chaude, spatialement très peu étendue, au niveau du front de choc.

Il est remarquable de noter que la structure globale des variables hydrodynamiques dépend certes de la valeur de Λ_0 , mais que globalement, l'introduction du refroidissement sous la forme (5.13) génère des phénomènes qui se retrouvent sur toute la gamme de valeurs de Λ_0 étudiée ici. En revanche, plus Λ_0 est grand, plus le "scénario" ici présenté se déroule rapidement. Ainsi, les

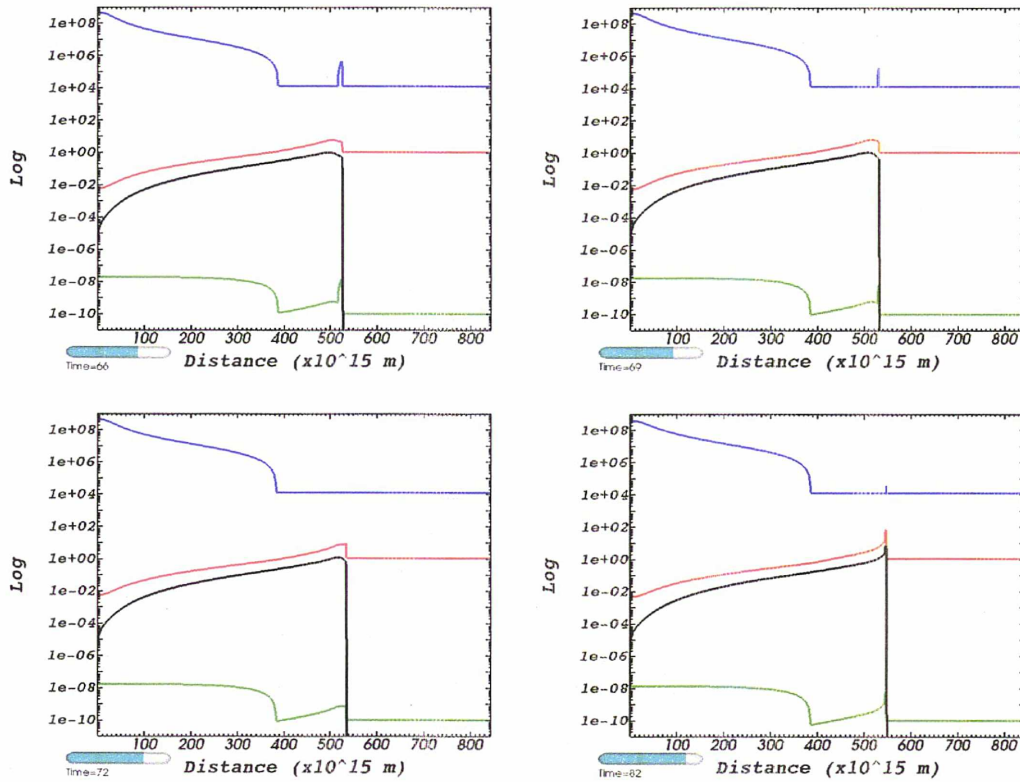


FIG. 5.24: Sur cette figure sont montrés les profils des grandeurs hydrodynamiques que sont la densité (en 10^{-20} kg.m^{-3}), en rouge, la température (en K , échelle logarithmique), en bleu, la vitesse (en 10^3 km.s^{-1}), en noir et la pression (en Pa , échelle logarithmique), en vert, pour $\Lambda_0 = 0,1$. En haut est montrée la disparition progressive du résidu de matière chaude lors de l'expansion de la zone froide jusqu'au front de choc (à gauche $t \approx 35$ 000 ans, à droite $t \approx 36$ 500 ans). En bas à gauche est montré l'instant où la zone froide a rejoint le front de choc ($t \approx 38$ 000 ans), et en bas à droite le pic de densité et de température résultant du ralentissement de la matière accélérée depuis l'intérieur du RSN sur le front de choc ($t \approx 43$ 000 ans).

figures Fig. 5.21 et Fig. 5.23 permettent évidemment de comparer différentes valeurs de Λ_0 , mais donnent également un aperçu de l'évolution temporelle qualitative des profils : les structures observées à Λ_0 plus faible montrent le passé des profils à Λ_0 plus élevé.

On a donc choisi pour nos simulations des valeurs du paramètre de refroidissement de $\Lambda_0 = 0,075$ et de $\Lambda_0 = 0,1$. En effet, ces deux valeurs permettent de générer une coquille dense et chaude de matière avant le temps final de 50000ans, tout en ne ralentissant pas de manière excessive le RSN. Les effets du refroidissement sont donc perceptibles suffisamment tôt dans la simula-

tion, sans pour autant modifier immédiatement et de manière trop brusque les profils hydrodynamiques. De plus, l'instabilité de Vishniac générant des surdensités, le refroidissement y sera plus important, et on souhaite éviter un emballement du processus de refroidissement, d'où la valeur pas trop grande, $\Lambda_0 = 0,1$ que nous sélectionnons.

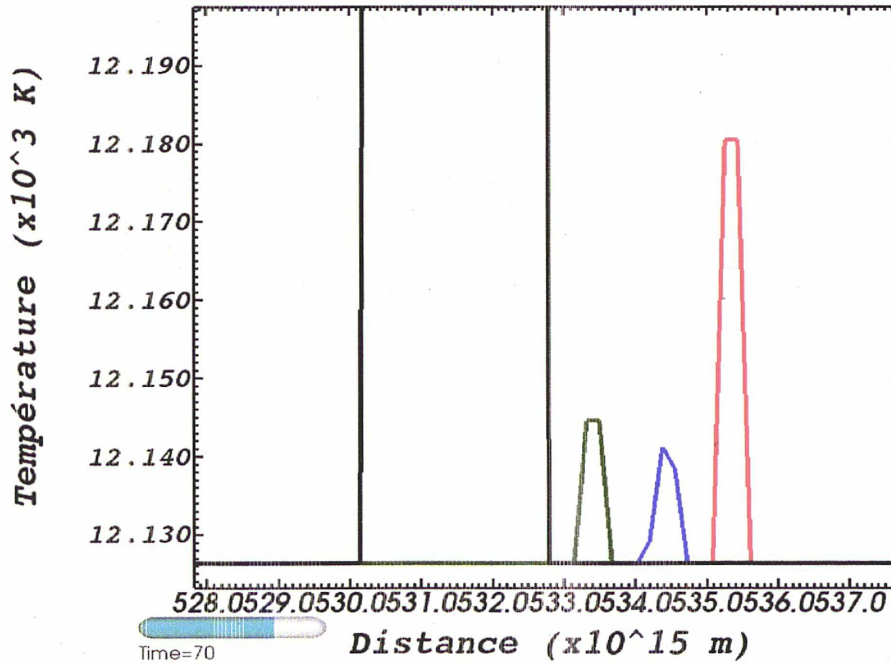


FIG. 5.25: Sur cette figure sont superposés les profils de température (en K) : en noir à $t \approx 37\,000$ ans, en vert à $t \approx 37\,500$ ans, en bleu à $t \approx 38\,000$ ans et en rouge à $t \approx 38\,500$ ans, pour $\Lambda_0 = 0,1$. On voit bien disparaître le résidu de matière chaude, puis la croissance d'un pic de température très fin.

Etude du refroidissement en géométrie sphérique

Nous présentons à présent des simulations réalisées en géométrie sphérique. Nous introduisons des pertes radiatives par fonction de refroidissement, selon la loi $\Lambda = \Lambda_0 \rho$ suite au travail préalable réalisé en géométrie plane, au temps $t \approx 3\,000$ ans. Comme précédemment, le gaz ne refroidit que jusqu'à la température $T_{MIS} \approx 12\,000$ K. Le but de ce travail est de vérifier que les résultats précédents sont toujours valables en géométrie sphérique. Nous souhaitons également vérifier que l'on aboutit bien, avec une telle loi de refroidissement, à des profils hydrodynamiques compatibles avec ce que l'on attend d'un RSN en phase radiative (densification derrière le front de choc et structure en co-

quille fine). On présente sur la figure 5.26 les profils de densité d'un RSN au temps $t \approx 33\,000$ ans.

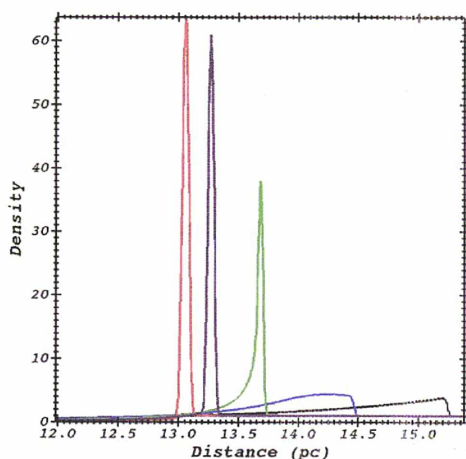


FIG. 5.26: Profils de densité à $t \approx 33\,000$ ans. En noir est représenté le cas sans refroidissement (profil de Sedov), en bleu le cas $\Lambda_0 = 0,03$, en vert le cas $\Lambda_0 = 0,05$, en bordeaux le cas $\Lambda_0 = 0,75$ et en rouge le cas $\Lambda_0 = 0,1\text{ W.kg}^{-1}$. Ces profils montrent une densification très semblable à celle obtenue en plan parallèle.

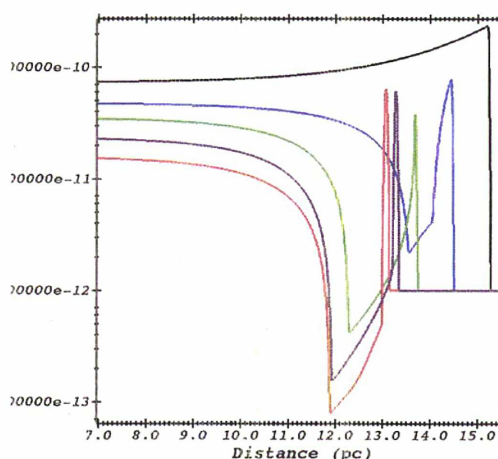


FIG. 5.27: Profils de pression au même temps et avec le même code couleur. On remarque qu'ici également, on a un comportement très similaire au cas plan, avec l'apparition d'une région de pression décroissante jusqu'à un minimum de pression, puis une région de croissance progressive et enfin un pic de pression dans la région surdense.

On remarque que ces profils sont très semblables aux profils obtenus en géométrie plane. Comme attendu, on observe bien une densification d'autant plus importante que la valeur du paramètre Λ_0 est grande. On voit également que plus le RSN est refroidi, plus son rayon d'expansion est faible : le RSN le plus refroidi a un rayon d'expansion de l'ordre de 15% inférieur au RSN en phase de Sedov-Taylor après un temps de $t \approx 33\,000$ ans. De même, on voit sur la figure 5.27 que l'effet des pertes radiatives sur les profils de pression est tout à fait similaire au cas plan. On note l'apparition d'une région dans laquelle la pression est décroissante, contrairement au cas de Sedov, qui implique donc un gradient de pression de direction opposée à celui du cas sans refroidissement dans cette région jusqu'au minimum de pression que se situe aux alentours de $11,8\text{ pc}$ pour les cas $\Lambda_0 = 0,75$ et $\Lambda_0 = 0,1$. Il y a ensuite une région de croissance modérée de la pression, puis un pic de pression au niveau du pic de densité. Les profils de vitesse montrés sur la figure 5.28 présentent donc la même structure que précédemment : en raison du sens du gradient de pression, le fluide est accéléré dans la région interne de pression décroissante,

puis freiné entre le minimum de pression et le pic de densité et de pression. Ainsi, la matière est ramenée des régions internes du RSN vers le front de choc, générant la surdensité observée. De même, les profils de température de la figure 5.29 montrent l'apparition dans un premier temps (ici visible pour $\Lambda_0 = 0,03 \text{ W.kg}^{-1}$) d'une région derrière le choc où le fluide n'a pas encore été totalement refroidi (la "dent"), avec dans les régions plus internes une température qui a atteint la température minimale T_{MIS} . Sur les profils de RSN davantage refroidis, on voit que cette dent a été réduite progressivement à un pic de température au niveau du front de choc correspondant au gaz qui vient d'être absorbé par le RSN, et qui a donc été chauffé par le choc, mais qui n'a pas eu le temps de refroidir. La valeur $\Lambda_0 = 0,1 \text{ W.kg}^{-1}$ est donc en bonne adéquation également en géométrie sphérique avec ce que nous attendions comme impact des pertes d'énergie sur la structure des RSN.

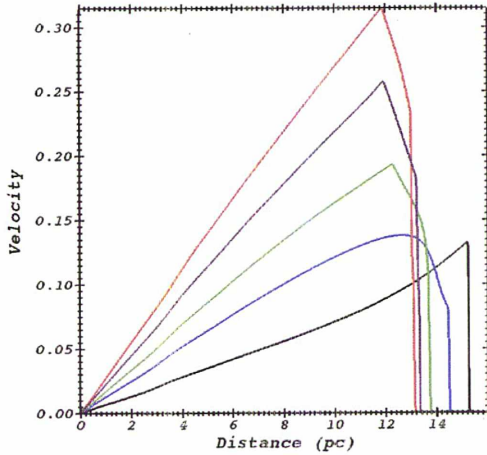


FIG. 5.28: Profils de vitesse à $t \approx 33\,000$ ans. En noir est représenté le cas sans refroidissement (profil de Sedov), en bleu le cas $\Lambda_0 = 0,03$, en vert le cas $\Lambda_0 = 0,05$, en bordeaux le cas $\Lambda_0 = 0,75$ et en rouge le cas $\Lambda_0 = 0,1 \text{ W.kg}^{-1}$

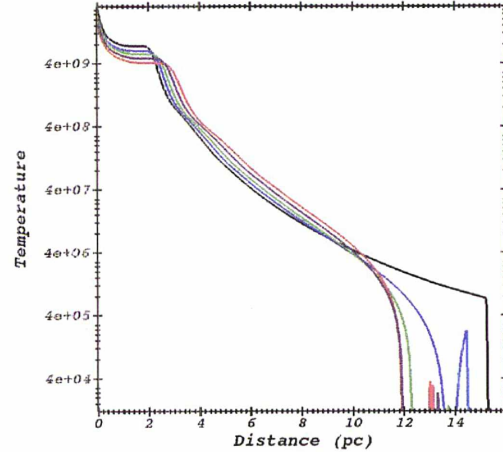


FIG. 5.29: Profils de température au même temps et avec le même code couleur.

Un moyen de mesurer le changement de structure des RSN en phase radiative par rapport aux RSN en phase de Sedov, et donc de quantifier la finesse et la densification de la coquille, est de calculer le pourcentage de masse contenu dans une proportion donnée du rayon du RSN. On note $M(X)$ la quantité de matière contenue dans la région comprise entre $r = X\% \times R_s$ et $r = R_s$. Elle s'écrit :

$$M(X) = 4\pi \int_{r=X\%R_s}^{r=R_s} \rho r^2 dr \quad (5.16)$$

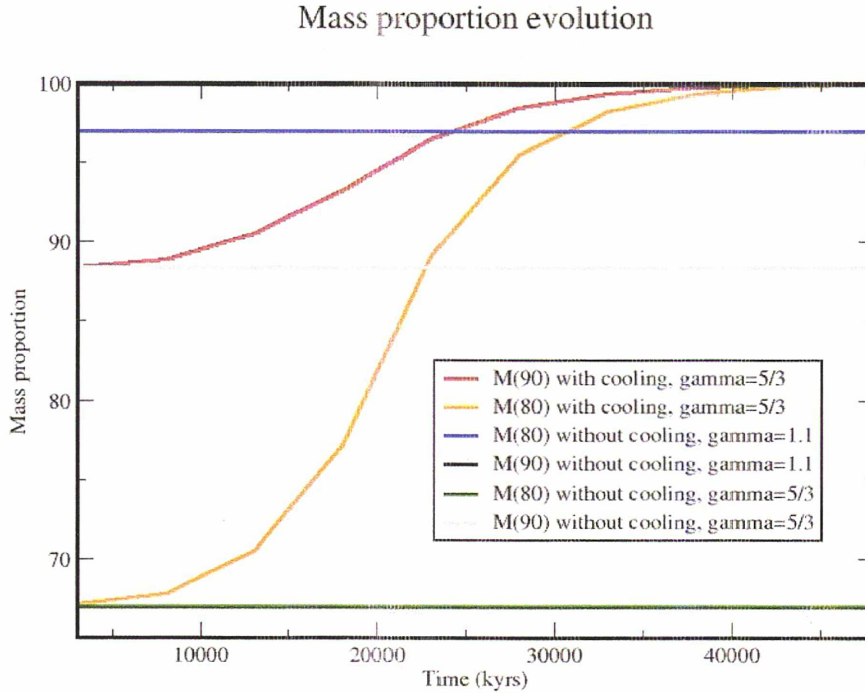


FIG. 5.30: Comparaison des proportions de masse entre un RSN en phase de Sedov-Taylor et un RSN en phase radiative.

Nous notons $\bar{M}(X\%)$ le rapport de la quantité de matière $M(X\%)$ contenue entre $X\%R_s$ et R_s , sur la masse totale du RSN $M(0\%)$, et nous exprimons cette quantité en pourcents. Son expression est donc :

$$\bar{M}(X\%) = \frac{M(X\%)}{M(0\%)} \times 100 \quad (5.17)$$

Cette quantité ne doit pas dépendre du temps dans un RSN en phase de Sedov, puisque les profils hydrodynamiques sont autosemblables. En revanche, lorsqu'on introduit les pertes radiatives, la densification progressive derrière le front de choc et l'accélération de la matière interne en direction de la coquille doivent conduire à une augmentation progressive de cette quantité. On voit sur la figure 5.30 l'évolution de cette grandeur entre $t \approx 3\,000$ ans et $t \approx 53\,000$ ans dans différentes situations. En vert et en bleu est représentée la quantité $\bar{M}(80\%)$ pour des RSN en phase de Sedov-Taylor et avec des indices adiabatiques respectifs $\gamma = 5/3$ et $\gamma = 1,1$, tandis qu'en gris et en noir est représentée $\bar{M}(90\%)$ pour ces mêmes RSN en phase de Sedov-Taylor. Pour $\gamma = 1,1$, $\bar{M}(90\%)$ a une valeur de plus de 99%, ainsi la courbe

noire est quasiment confondue avec l'axe $\bar{M} = 100\%$. En jaune et en rouge sont respectivement représentés \bar{M} (80%) et \bar{M} (90%) pour un RSN en phase radiative, avec un paramètre de refroidissement $\Lambda_0 = 0,1 \text{ W.kg}^{-1}$ et un indice adiabatique $\gamma = 5/3$. On observe bien que les proportions représentées sont remarquablement constantes pour un RSN en phase de Sedov, quel que soit l'indice adiabatique. Le RSN subissant des pertes d'énergie a au temps initial les mêmes proportions de masse que le RSN en phase de Sedov-Taylor $\gamma = 5/3$, ce qui est tout à fait logique puisque nous partons de ce cas. On voit alors qu'au cours du temps, ces proportions augmentent progressivement jusqu'à dépasser celles du cas Sedov avec indice adiabatique $\gamma = 1.1$, et que les deux proportions étudiées tendent vers 100%. A $t \approx 30\,000$ ans, la proportion de masse comprise entre 80% du rayon et le rayon du RSN dans le cas radiatif a dépassé celle du RSN en phase de Sedov-Taylor avec $\gamma = 1,1$. A $t \approx 50\,000$ ans, les deux quantités \bar{M} (80%) et \bar{M} (90%) sont très proches de 1. Cela confirme que les pertes radiatives que nous avons introduites ont engendré une densification considérable derrière le front de choc, et ont vidé la région interne du RSN, conformément à ce que nous attendions. On constate sur la figure 5.31, dans laquelle apparaissent en vert et en mauve les courbes d'évolution de \bar{M} (95%) et \bar{M} (98%) avec refroidissement, que l'essentiel de la masse est en réalité concentré dans les deux derniers pourcents du rayon à partir du temps $t \approx 40\,000$ ans, pour lequel \bar{M} (98%) $>$ 98%, alors qu'on a \bar{M} (98%) = 85% pour un cas Sedov avec $\gamma = 1.1$. Ces résultats confirment bien que les pertes d'énergie radiative génèrent une structure de coquille très fine et très dense, dans laquelle les 2% externes du rayon du RSN contiennent plus de 99% de la matière.

5.4.4 RSN en phase radiative : loi d'évolution autosemblable

Comme expliqué dans le chapitre 1, les différentes phases d'évolution des RSN sont caractérisées par des lois temporelles d'évolution du rayon autosemblables, du type $R \propto t^n$, où n est appelé exposant autosemblable. Ces lois sont simples à calculer pour les phases balistique et de Sedov-Taylor (voir A). En revanche, différents modèles existent pour les RSN en phase radiative, comme mentionné précédemment. Dans le cadre de l'étude de l'écoulement autosemblable, utilisant les équations d'Euler et la séparation des variables comme effectuée dans le chapitre 3, on peut introduire une fonction de refroidissement dans l'équation d'énergie 3.3 de la forme :

$$\Lambda = \Lambda_0 \rho^\alpha T^\beta . \quad (5.18)$$

Dans notre cas, on se limite à l'étude des fonctions de refroidissement pour

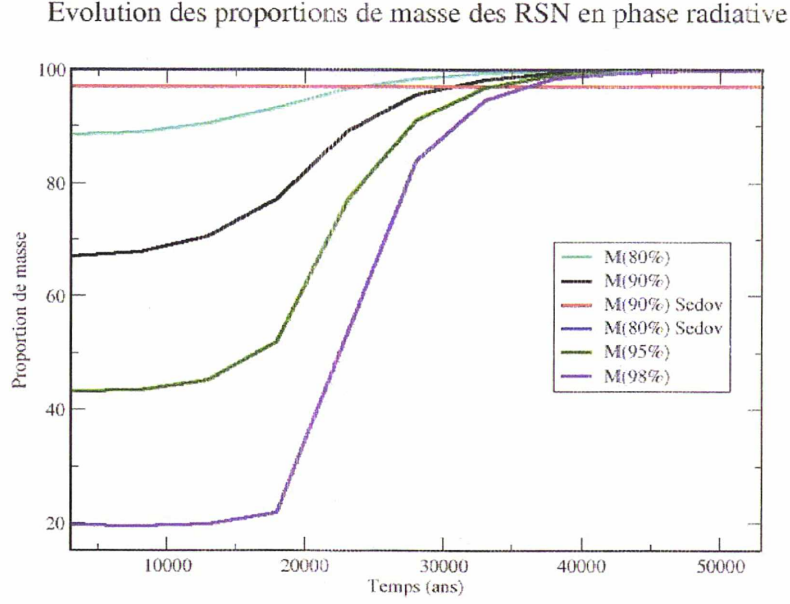


FIG. 5.31: On observe que l'essentiel de la masse du RSN se trouve progressivement ramenée dans les 2% externes du rayon du RSN.

lesquelles $\beta = 0$. L'équation d'énergie 3.3 devient alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}\right) (p\rho^{-\gamma}) = (1 - \gamma) \Lambda_0 \rho^\alpha . \quad (5.19)$$

En passant dans le formalisme autosemblable, comme dans la section 3.2, on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \Omega (\Omega t)^{2n-3} \left[(2n - 2) \bar{p} - n\xi \frac{d\bar{p}}{d\xi} \right] + \bar{v} (\Omega t)^{2n-3} \frac{d\bar{p}}{d\xi} - \\ & - (\Omega t)^{2n-3} \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \left[\bar{v} \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} - n\Omega \xi \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} \right] = (1 - \gamma) (\Omega t)^{\alpha_\Lambda} \Lambda_0 \bar{\rho}^\alpha \end{aligned} \quad (5.20)$$

où on a développé le terme de la fonction de refroidissement selon : $\Lambda = \Lambda_0 \bar{\rho}^\alpha (\Omega t)^{\alpha_\Lambda}$. On obtient donc que

$$\alpha_\Lambda = 2n - 3 \quad (5.21)$$

pour ce type de fonction de refroidissement.

Ainsi, la forme autosemblable de la fonction de refroidissement doit être :

$$\Lambda = \Lambda_0 \rho^\alpha (\Omega t)^{2n-3} . \quad (5.22)$$

Regardons le comportement de cette forme de fonction de refroidissement vis-à-vis de n . Tout d'abord, les pertes d'énergie sont sensées ralentir le RSN, et ainsi diminuer la valeur de n sous la valeur de la phase de Sedov-Taylor $n = 2/5$. En fixant Λ_0 et α , on voit que plus n est grand, plus Λ est grand. Ceci est contre-intuitif, car on s'attend à ce que les pertes d'énergie ralentissent le RSN. Or, ici, plus on perd d'énergie, i.e. plus n est grand, et plus on est proche de la phase de Sedov-Taylor dans laquelle $n = 2/5$. Ainsi, physiquement, on s'attend à ce que plus on refroidit, plus n diminue, mais mathématiquement, plus n diminue, moins on refroidit. Il doit donc y avoir une unique valeur physique de n .

Nous avons étudié différentes fonctions de refroidissement, incluant ou non la dépendance autosemblable en temps. On voit sur la figure 5.32 qu'invariablement, pour les lois $\Lambda = \Lambda_0 \rho$, $\Lambda = \Lambda_0 \rho (\Omega t)^{2n-3}$, et $\Lambda = \Lambda_0 \rho^2 (\Omega t)^{2n-3}$ avec dans ces deux derniers cas différentes valeurs de n testées, nous avons abouti à la même valeur de l'exposant n définissant la loi d'expansion du RSN. Il est remarquable de noter que la valeur de n ne dépendent ni de la puissance de ρ , ni de la valeur du paramètre de refroidissement Λ_0 , ni de la dépendance temporelle intervenant dans la fonction de refroidissement. Après un certain temps d'établissement du régime, on voit qu'on tend toujours vers la valeur $n = 0,3$. Durant ce temps d'établissement, on s'aperçoit que la valeur de l'exposant autosemblable diminue jusqu'à des valeurs très basses, de l'ordre de $n = 0,15$. Cela s'explique par le fait que la coquille est moins poussée par la zone refroidie derrière elle, puis l'exposant n remonte lorsque le gaz accéléré à l'intérieur du RSN rejoint la coquille. On entre alors dans le régime établi, pour lequel $n = 3/10$. Cette loi d'évolution est la même que celle trouvée par Cioffi [9], en introduisant des fonctions de refroidissement qui approchent des fonctions de refroidissement établies par Cox [34], ainsi que par Raymond, Cox et Smith [30]. Ces fonctions de refroidissement ont été établies en prenant en compte différents processus de physique atomique, comme le rayonnement bremsstrahlung, la recombinaison radiative et raies d'émission collisionnelle. Les fonctions de refroidissement que nous introduisons conduisent donc toutes à cette même loi d'évolution : $R \propto t^{3/10}$ trouvée avec cette fonction de refroidissement plus réaliste. La loi d'évolution autosemblable $R \propto t^{3/10}$ est donc un attracteur.

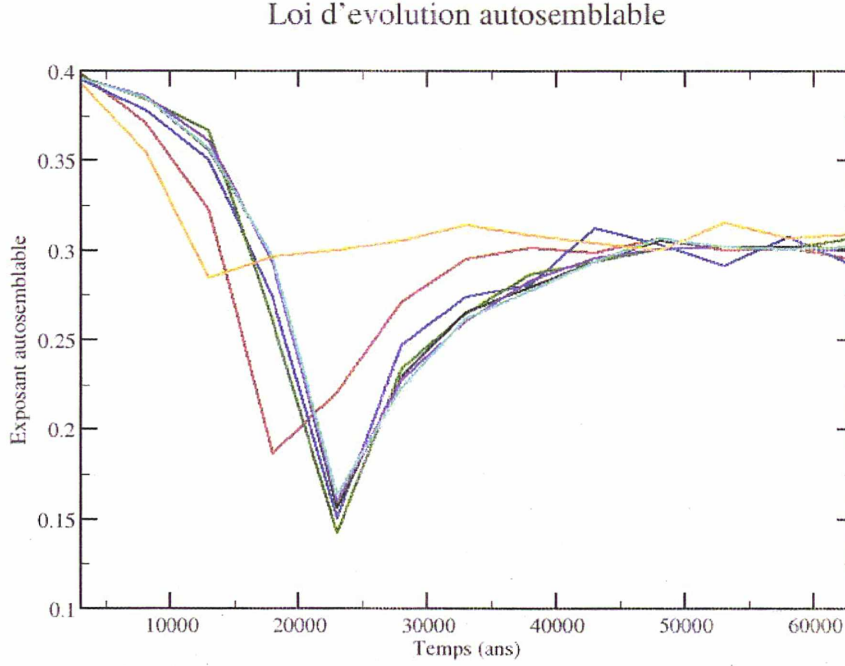


FIG. 5.32: Ici est présentée la valeur de l'exposant autosemblable n dans différentes conditions. Les courbes rouge, bleue et verte sont réalisées avec des fonctions de refroidissement du type $\Lambda = \Lambda_0 \rho$, avec respectivement $\Lambda_0 = 0, 1, \Lambda_0 = 0,075$, et $\Lambda_0 = 0.05 \text{ W.kg}^{-1}$. En noir, violet et turquoise, on a utilisé des fonctions de refroidissement du type $\Lambda = 0,1 \rho (\Omega t)^{2n-3}$, avec respectivement $n = 0, 4, n = 0, 35$ et $n = 0, 3$. Enfin, en orange, on a pris une fonction de refroidissement en $\Lambda = \Lambda_0 \rho^2 (\Omega t)^{2n-3}$ et $n = 0, 3$.

5.4.5 RSN en phase radiative : estimation de la quantité d'énergie rayonnée

Un calcul approximatif simple permet de vérifier que la quantité d'énergie perdue n'est pas absurde, et cohérente avec l'énergie initiale contenue dans le RSN. Notons $V(t)$ le volume du RSN à l'instant t . Entre les instants t et $t + \Delta t$, on perd la quantité d'énergie $\Delta E(t)$, donnée par :

$$\Delta E(t) = \int_{V(t)} \Lambda dV . \quad (5.23)$$

Avec la forme $\Lambda = \Lambda_0 \rho$, cela devient :

$$\Delta E(t) = \int_{V(t)} \Lambda_0 \rho dV . \quad (5.24)$$

Comme Λ_0 est une constante, on obtient :

$$\Delta E(t) = \Lambda_0 \int_{V(t)} \rho dV . \quad (5.25)$$

Or, on note que l'intégrale $\int_{V(t)} \rho dV$ n'est autre que la masse totale du RSN à l'instant t , notée $M(t)$. Celle-ci est donnée, lorsque le RSN entre en phase de Sedov-Taylor et dans la suite de son évolution, par $M(t) = V(t) \times \rho_{MIS}$, car la masse initiale éjectée est négligeable devant la masse balayée par le RSN. Finalement, la perte d'énergie $\Delta E(t)$ est donc donnée par :

$$\Delta E(t) = \Lambda_0 \times \rho_{MIS} \times V(t) . \quad (5.26)$$

Le volume du RSN est donné par : $V(t) = 4\pi R^3(t)/3$. Dans le cas général, la pertie d'énergie entre l'instant initial t_0 et l'instant t , notée $E_\Lambda(t)$, est ainsi donnée par :

$$E_\Lambda(t) = \int_{t_0}^t \Delta E(t') dt' = \frac{4}{3}\pi\Lambda_0 \rho_{MIS} \int_{t_0}^t R(t') dt' . \quad (5.27)$$

Dans cette formule 5.27, aucune approximation n'a été faite au premier abord. Néanmoins, l'introduction de la température de cut-off à $T = T_{MIS}$ implique qu'en réalité, cette formule surestime l'énergie perdue, puisqu'il y est supposé que le refroidissement ne cesse jamais. Il y a donc une première approximation dans ce calcul. De plus, comme la zone refroidie est dense, alors que la zone chaude est, elle, très diluée, cette surestimation n'est pas négligeable. D'autre part, en phase de Sedov-Taylor, on sait que $R(t) = R_0 (t/t_0)^{2/5}$ avec R_0 le rayon initial du RSN au temps t_0 . Toutefois, on a vu dans le paragraphe précédant que l'introduction du refroidissement ralentit l'expansion du RSN. On a montré qu'un régime autosemblable s'établit concernant l'évolution du rayon, dans lequel $R \propto t^{3/10}$. Ainsi, on ne connaît pas réellement la loi $R(t)$ à tout instant, et on a vu qu'elle était variable au cours du temps. Il y a donc une seconde approximation. Dans le cas général, en supposant une loi d'évolution $R \propto t^n$, on obtient :

$$E_\Lambda(t) = \frac{4}{3}\pi\Lambda_0 \rho_{MIS} \int_{t_0}^t [R_0 (t'/t_0)^n]^3 dt' \quad (5.28)$$

et finalement :

$$E_\Lambda(t) = \frac{4}{3}\pi\Lambda_0 \rho_{MIS} \left(\frac{R_0}{t_0^n}\right)^3 \times \frac{1}{3n+1} (t^{3n+1} - t_0^{3n+1}) \quad (5.29)$$

qui s'écrit également :

$$E_{\Lambda}(t) = \frac{4}{3}\pi\Lambda_0 \rho_{MIS}R_0^3 \times t_0 \times \frac{1}{3n+1} \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{3n+1} - 1 \right] \quad (5.30)$$

qui aboutit donc, en prenant $t_0 = 10^{11}$ s \approx 3 000 ans, $R_0 = 1,8 \times 10^{17}$ m, $\Lambda_0 = 0,1$ W/kg et enfin $\rho_{MIS} = 10^{-20}$ kg.m⁻³ à :

$$E_{\Lambda}(t) = \frac{20}{33}\pi \times 0,1 \times 10^{-20} \times 1,8^3 \times 10^{51} \times 10^{11} \times (17^{11/5} - 1) \quad (5.31)$$

dans le cas d'une loi d'évolution de Sedov-Taylor, donc avec $n = 2/5$. Au temps $t_{final} = 17 \times 10^{11}$ s \approx 53 000 ans, on obtient $E_{\Lambda} = 5,6 \times 10^{44}$ J. Ainsi, ce calcul, qui se base sur la phase de Sedov-Taylor, fournit bien une estimation supérieure à ce que l'on attend, à savoir une quantité d'énergie inférieure à l'énergie initiale (environ 5×10^{43} J ici). Toutefois, comme mentionné précédemment, cette énergie rayonnée est largement surestimée du fait de la température de cut-off introduite et de l'hypothèse de la loi d'expansion. En prenant la loi d'évolution en $R \propto t^{3/10}$, on devrait se rapprocher d'une estimation correcte, mais on va tout de même surestimer l'énergie perdue, toujours en raison de la température de cut-off, et également en raison du fait que cette loi d'évolution n'est atteinte qu'après un temps relativement long (environ 30 000 ans) durant lequel l'expansion du RSN est davantage freinée que cette loi ne l'impose. Toutefois, en prenant les mêmes valeurs numériques que ci-dessus, et avec $n = 3/10$, l'équation 5.31 devient :

$$E_{\Lambda}(t) = \frac{40}{57}\pi \times 0,1 \times 10^{-20} \times 1,8^3 \times 10^{51} \times 10^{11} \times (17^{19/10} - 1) \quad (5.32)$$

et cela donne une nouvelle estimation de l'énergie rayonnée : $E_{\Lambda} = 2,8 \times 10^{44}$ J. On peut donc voir que, dans ce calcul simple, la quantité d'énergie rayonnée est surestimée. En effet, il est ici supposé que toute la matière rayonne, alors que ce n'est pas le cas dans nos simulations. Toutefois, ce calcul permet de dire que, compte-tenu de cette surestimation, il apparaît que la valeur de la constante Λ_0 est cohérente avec l'énergie initialement introduite.

Chapitre 6

Etude de l'instabilité de Vishniac dans les RSN en phase de Sedov

Afin de confirmer les résultats analytiques établis dans les chapitres 2 et 3, nous réalisons des simulations de RSN en phase de Sedov, dans lesquels nous introduisons une perturbation. L'étude de l'évolution de cette perturbation au cours du temps permet d'étudier le développement de l'instabilité de Vishniac. Des études précédentes ont été réalisées [16] [17] [15] [14], dans lesquelles ont été étudiées différentes configurations de RSN. Dans ces précédents travaux, le RSN est simulé en phase de Sedov, i.e. sans pertes radiatives. Afin de se rapprocher des profils hydrodynamiques en phase radiative, la zone dense du RSN (pour laquelle $\rho > \rho_{MIS}$) a un indice adiabatique γ variable, avec $\gamma < 5/3$, tandis que le reste du gaz a l'indice adiabatique classique d'un gaz parfait $\gamma = 5/3$. Cela permet de générer une densification de la matière dans la région située derrière le front de choc, et donc de mimer l'effet du refroidissement sur le RSN. Néanmoins, cette configuration n'est pas en adéquation avec la théorie analytique développée, dans laquelle l'indice adiabatique du gaz est constant. Nous avons donc décidé de nous rapprocher des hypothèses théoriques afin de faciliter la comparaison entre théorie et simulations. Nous allons ici présenter deux simulations de RSN, dans lesquelles seul l'indice adiabatique est différent. Dans le premier cas, nous étudions un gaz d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$, et dans le second cas $\gamma = 1,1$. Dans les deux cas, nous présentons une perturbation de mode propre $l = 24$. La perturbation est introduite à $t_0 \approx 3\,000$ ans, et prend la forme d'une perturbation spatiale : les caractéristiques du fluide à la coordonnée r sont remplacées par celles à la coordonnée $r + \delta r$, où δr est la perturbation spatiale de r . Cette perturbation spatiale δr est donnée, à chaque point (r, θ, ϕ) , r , θ et ϕ étant les coordonnées sphériques classiques, par :

$$\delta r = A \times \sin(l\theta/2\pi) \tag{6.1}$$

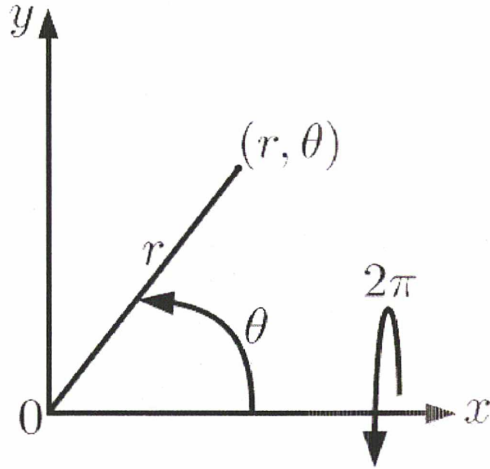


FIG. 6.1: L'angle θ est dans le domaine $[0, \pi/2]$. L'axe (O, y) est un axe de symétrie, tandis qu'une révolution est effectuée autour de l'axe (O, x) .

où A est l'amplitude de la perturbation. A t_0 , chaque quantité non-perturbée $q_0(r, t_0)$, ne dépendant que de r car l'écoulement de base est à symétrie sphérique et où q_0 correspond à n'importe laquelle des grandeurs hydrodynamiques, i.e. la densité ρ , la vitesse \vec{v} , la température T , est remplacée par une nouvelle valeur $q(r, \theta, t_0)$ qui correspond à la quantité perturbée, et qui ne dépend pas de l'angle ϕ . Cette quantité perturbée est donnée par :

$$q(r, \theta, t_0) = q(r + \delta r, \theta, t_0) . \quad (6.2)$$

La perturbation ne dépend pas de l'angle ϕ car nos simulations sont en 2D. L'angle θ est donc dans le domaine $[0, \pi/2]$, et une réflexion est ensuite effectuée par rapport à l'axe y , et enfin une révolution autour de l'axe x (terme source géométrique, voir chapitre 4) (voir Fig. 6).

La première configuration est prédite stable par la théorie, tandis que la seconde est dans le domaine instable 2 3. Nous allons ainsi pouvoir comparer l'évolution de la perturbation et analyser les différences de comportement entre ces deux cas.

6.1 RSN d'incide adiabatique $\gamma = 5/3$

Le premier cas étudié est un RSN composé d'un gaz d'hydrogène ionisé d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$, se propageant dans un MIS de même composition. Le temps final de cette simulation est $t_{final} \approx 53\,000$ ans. On va en effet

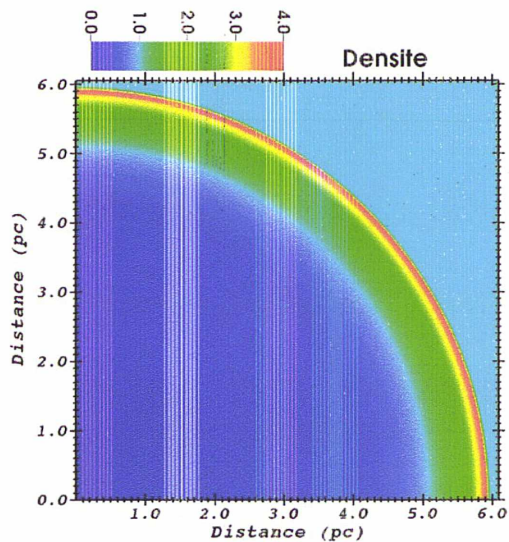


FIG. 6.2: Carte de densité d'un RSN non perturbé à $t \approx 3\,000$ ans.

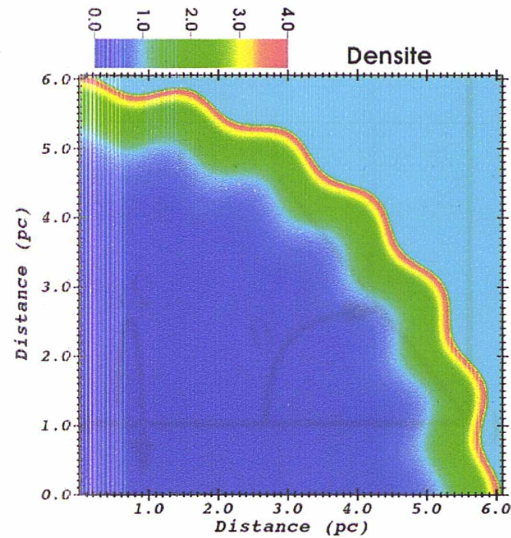


FIG. 6.3: Carte de densité du même RSN, perturbé.

montrer que le RSN est alors redevenu quasi-sphérique, i.e. que la perturbation a été atténuée très fortement. On peut voir sur la figure 6.1 l'introduction de la perturbation : à gauche de la figure, on voit le RSN en phase de Sedov, avant l'introduction de la perturbation spatiale, et à droite le même RSN après perturbation.

Une observation rapide des simulations effectuées dans ces conditions permet de constater l'atténuation de la perturbation sur la face externe du RSN. En effet, à un temps $t \approx 8\,000$ ans, on voit (Fig. ??) que le RSN a quasiment récupéré sa forme sphérique. En revanche, on observe que des structures complexes se sont formées et que des perturbations des grandeurs hydrodynamiques persistent, évoluent et se propagent à l'intérieur du RSN. Dès les premiers instants, on observe le phénomène de l'instabilité de Vishniac se dérouler : au niveau du front de choc, la matière se dirige des bosses vers les creux, engendrant une zone de surdensité dans la zone des creux. Cette surdensité est déjà visible à $t \approx 3\,250$ ans, et est localisée dans un premier temps à l'emplacement du creux, avant de s'étendre progressivement avec l'arrivée de matière. Intéressons-nous à présent dans le détail à ce qu'il se produit dans le fluide composant le RSN.

Sur la Fig. 6.4 sont montrés les profils de la vitesse radiale du fluide au temps $t \approx 3\,500$ ans. En bleu figure la zone correspondant à une bosse initiale, en noir la vitesse radiale sans perturbation, en rouge la vitesse radiale dans un creux et enfin en vert dans une position intermédiaire. On observe alors que conformément aux prédictions de modèles simplistes de type coquille (modèle dit du "serpent"), la vitesse radiale est plus élevée au niveau du front de choc

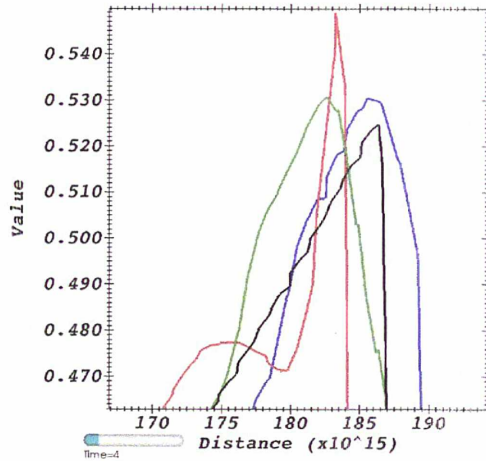


FIG. 6.4: Profils de la vitesse radiale. La courbe bleue correspond à une bosse, la noire est dite de référence et correspond à un cas Sedov non perturbé, la rouge correspond à un creux et la verte à une position intermédiaire à $t \approx 3\,500$ ans.

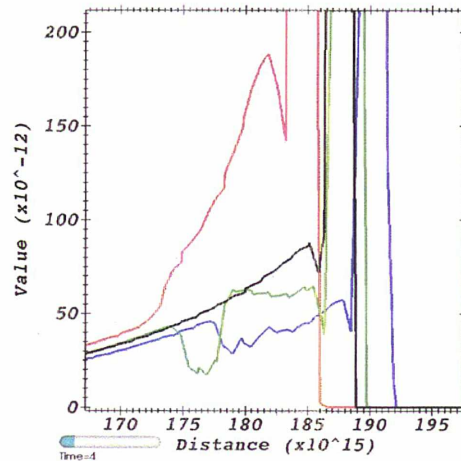


FIG. 6.5: Profils de la norme du gradient de pression, le code couleur et l'instant étant les mêmes que pour la figure de gauche.

pour le creux par rapport à celle du cas sans perturbation, et que celle-ci est elle-même plus élevée que la vitesse au niveau du front de choc dans une bosse. Néanmoins, il apparaît très clairement dans ces profils de vitesse un comportement plus surprenant, à savoir que la matière est fortement ralentie derrière le creux, et accélérée derrière la bosse. L'explication provient de l'évolution de la pression dans ces régions. En effet, dans les creux, l'arrivée de matière a généré un gradient de pression bien plus élevé que dans les bosses (voir Fig. 6.4 et Fig. 6.5). Or, la force exercée sur le fluide étant proportionnelle et de direction opposée à ce gradient ($\vec{F} \propto -\vec{\nabla}P$ comme énoncé dans le précédent rapport), comme ce gradient est dirigé de façon centripète, plus le gradient est élevé, plus le mouvement est ralenti, et inversement.

D'autre part, on se rend compte grâce à Fig. 6.6 que le mouvement de matière qui se produit dans le sens des bosses vers les creux au niveau du front de choc se produit dans le sens inverse à l'intérieur du RSN. Sur cette dernière figure sont tracés la densité d'une part, et les vecteurs vitesse transverse en différents points, la norme de la vitesse étant représentée non par la norme du vecteur représenté mais par sa couleur. Sans surprise, on voit clairement qu'à proximité du front de choc, les vitesses transverses sont dans la direction et le sens des creux. En revanche, il apparaît que, à partir d'une distance au front de choc faible devant le rayon du RSN (de l'ordre de quelques %),

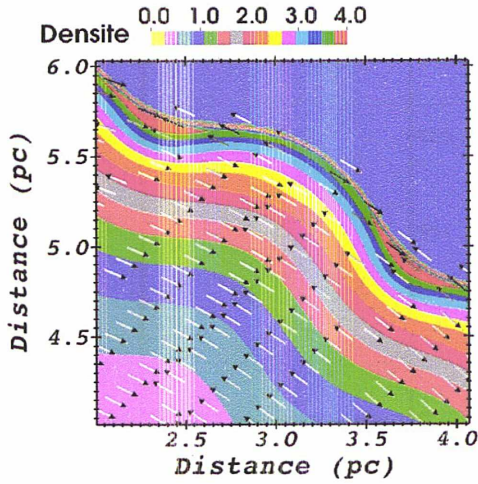


FIG. 6.6: Carte de densité présentant également les vecteurs vitesse transverse en différents points à $t \approx 3\,500$ ans. La valeur de la vitesse transverse est donnée par la couleur du vecteur représenté. Ce graphe montre que le sens de l'écoulement est inversé entre la région du front de choc et la zone interne du RSN.

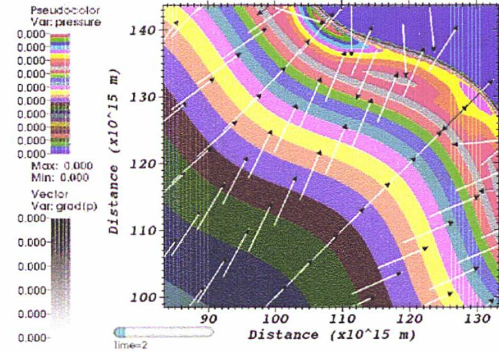


FIG. 6.7: Carte de pression montrant également le gradient de pression, au temps $t \approx 3\,250$ ans. Le procédé de représentation est identique à celui de la figure de gauche.

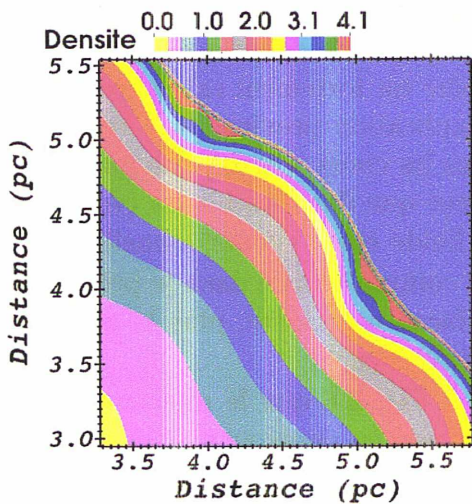


FIG. 6.8: Carte de densité à $t \approx 4\,000$ ans.

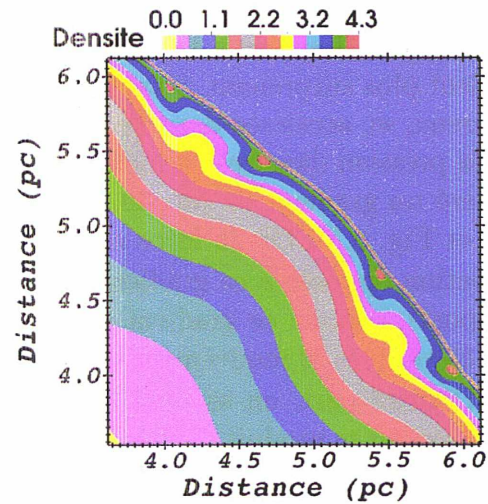


FIG. 6.9: Carte de densité à $t \approx 5\,000$ ans. On observe la migration progressive des surdensités des creux vers les bosses.

l'écoulement transverse se produit dans le sens opposé. Ce phénomène est dû à la perturbation initiale que l'on a introduite. En effet, la direction du gradient de pression que l'on peut voir sur la Fig. 6.7 où figurent la pression et le gradient de pression selon le même principe que la figure précédente, ici au temps $t \approx 3\,250$ ans, génère un mouvement allant des positions en creux vers les bosses internes.

Par la suite, on voit (voir Fig. 6.8 et Fig. 6.9) que les surdensités au niveau des creux migrent vers les bosses. Ce phénomène est causé par le fait que le centre du creux initial a commencé à dépasser en terme de déplacement radial les zones adjacentes. Localement, la zone creuse du front de choc initial se scinde en deux nouveaux creux qui s'en éloignent au fur et à mesure de la progression du creux initial. Ainsi, la matière du MIS absorbée par le RSN au niveau de l'ancien creux est dirigée vers ces zones adjacentes, et rencontre le fluide en mouvement transverse inverse provenant de la bosse initiale. D'autre part, on a vu précédemment (voir Fig. 6.4) que les profils de vitesse au niveau des creux sont tels que cette vitesse n'est pas monotone. Elle croît jusqu'à une région à proximité du front de choc dans laquelle elle décroît à cause de l'importance du gradient de la pression et recroît jusqu'au front de choc. Les couches internes remontent donc petit à petit dans le fluide et arrivent dans la zone du creux initial. Cette région ne recevant plus de matière du MIS, puisque celle-ci est dirigée vers les deux surdensités, la matière provenant de l'intérieur peut remonter jusqu'au front de choc progressivement, générant ces structures visibles sur la carte de densité Fig. ???. On observe à différents instants (Fig. 6.10, Fig. 6.11) que les cartes de pression montrent des structures évolutives dans les régions internes derrière les bosses. On remarque notamment une surpression semblant remonter vers l'intérieur du RSN au fur et à mesure du temps. Les profils de pression pris au temps $t \approx 3\,125$ ans (Fig. 6.12) montrent que dès le début, une surpression apparaît dans le creux, mais également dans la bosse. Cette dernière surpression n'en est pas réellement une, dans le sens où la bosse a une pression plus faible que la même région dans le cas de Sedov. En revanche, la zone entre la bosse et le creux a une pression qui diminue plus rapidement que le voisinage immédiat de la bosse. Ceci est dû au fait que l'endroit où la "pente" de la déformation est maximale est situé à mi-chemin entre les deux extrema. Localement, la bosse est plane et le mouvement transverse de matière y est donc moins rapide qu'à l'endroit de pente plus forte, ce qui est montré Fig. 6.13. C'est cette situation initiale qui se propage ensuite dans le RSN, générant ces perturbations dans la pression.

Il est intéressant d'étudier l'évolution de la vitesse transverse dans les différentes régions du RSN. Sous l'effet du choc et de l'absorption de matière du MIS, la matière à proximité du front de choc a une vitesse transverse la dirigeant vers les creux. Sur les Fig. 6.14 et Fig. 6.15, on voit également qu'il y a une zone plus interne dans laquelle la vitesse transverse est également

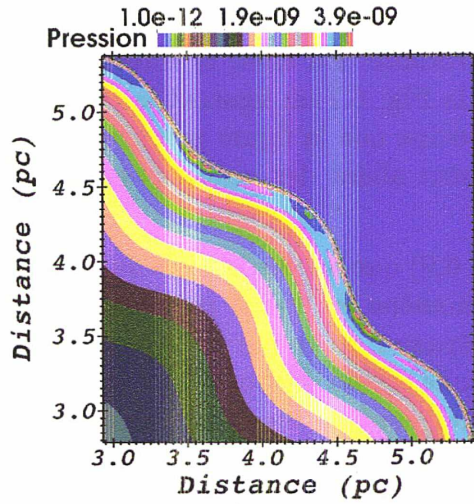


FIG. 6.10: Carte de pression à $t \approx 3\,125$ ans. On voit une région de moindre pression entre les extrema.

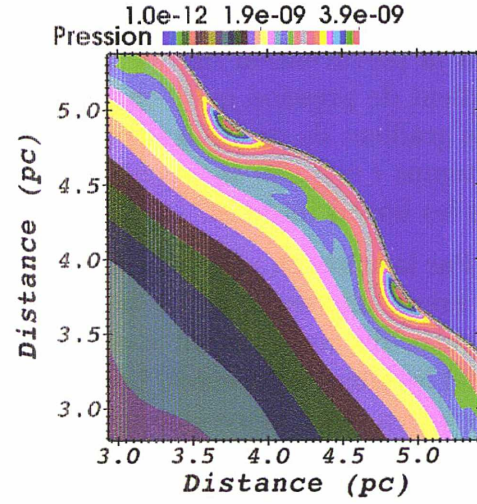


FIG. 6.11: Carte de pression à $t \approx 3\,500$ ans. On observe la propagation de la surpression dans l'axe de l'ancienne bosse.

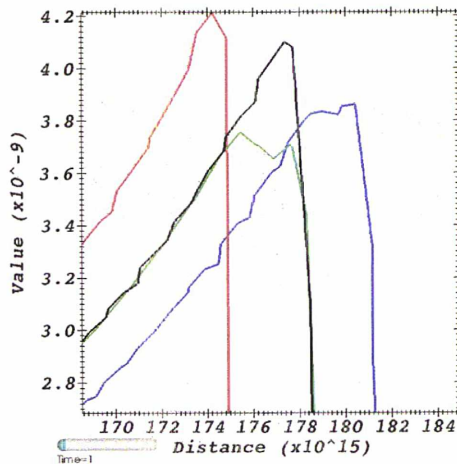


FIG. 6.12: Profils de la pression au temps $t \approx 3\,125$ ans, avec le même code de couleur que précédemment. On remarque le creux présente une surpression par rapport au cas Sedov, tandis que la région intermédiaire présente une sous-pression, ainsi que le creux à proprement parler, de moindre ampleur.

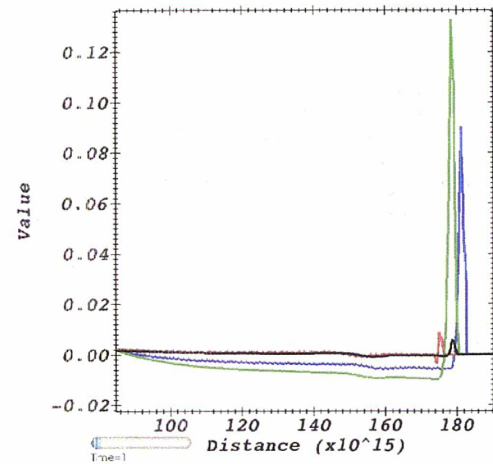


FIG. 6.13: Profils de la vitesse transverse à $t \approx 3\,125$ ans. On remarque que la vitesse transverse est maximale dans la zone intermédiaire, tandis qu'elle est quasi-nulle au niveau du creux.

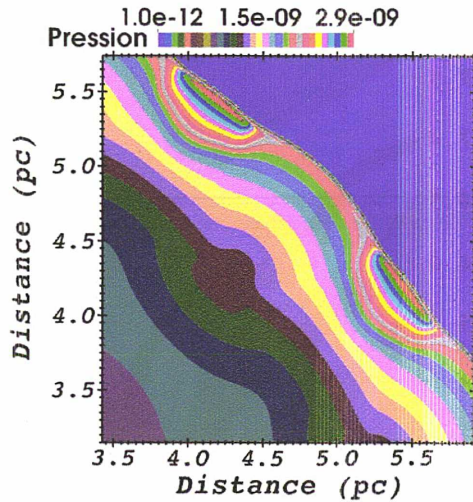


FIG. 6.14: Carte de pression à $t \approx 4\,500$ ans. On voit qu'il y a une région de forts gradients transverses de pression, située aux cotés des creux légèrement à l'intérieur du RSN, correspondant aux zones de vitesse transverse élevée dans ces mêmes régions sur la figure de gauche.

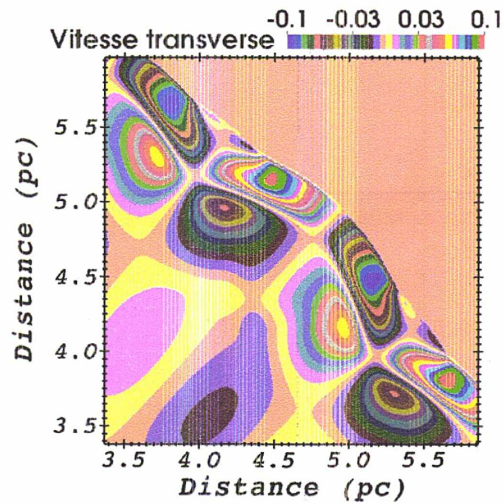


FIG. 6.15: Carte de la vitesse transverse à $t \approx 4\,500$ ans. On y observe la zone proche du choc où la vitesse transverse est conforme aux prédictions (dirigée vers les creux), ainsi qu'une seconde zone plus en profondeur où la matière a été accélérée dans l'autre direction.

importante, mais de sens opposé. Ceci est dû à la configuration de la pression précédemment décrite. En effet, on voit que le gradient de pression est élevé dans la zone des creux. Plus en profondeur encore dans le RSN, on voit apparaître une troisième zone, de sens encore opposé par rapport à la couche la précédant. Elle est également due à la structure de la pression, comme on peut le voir sur la carte de pression Fig. 6.14. On note également l'apparition, au niveau des anciens creux, d'une zone où la vitesse transverse dirige la matière des anciens creux vers les anciennes bosses. Cela s'explique simplement par le fait que l'ancien creux a à présent formé une bosse qui commence à se déverser. C'est donc le début de la première inversion "bosse/creux" que l'on observe. On se rend donc compte que les mouvements de la matière dans le RSN ne sont pas aussi simples que supposés par les modèles mécaniques simples, mais qu'en réalité apparaissent différentes couches de fluide reposant les unes sur les autres, elles-mêmes divisées périodiquement en deux zones contenant des fluides évoluant en sens opposé.

La migration des surdensités se poursuit jusqu'à ce qu'elles se rejoignent deux à deux, pour former une nouvelle surdensité formant un creux à l'endroit des bosses initiales (voir Fig. 6.16 et Fig. 6.17). On se retrouve alors dans la situation inverse à la situation initiale : les bosses sont devenus des creux et

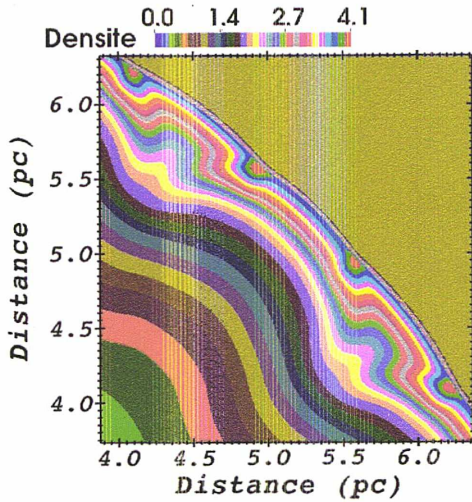


FIG. 6.16: Carte de densité à $t \approx 5\,500$ ans, montrant les surdensités convergeant deux à deux vers les anciennes bosses.

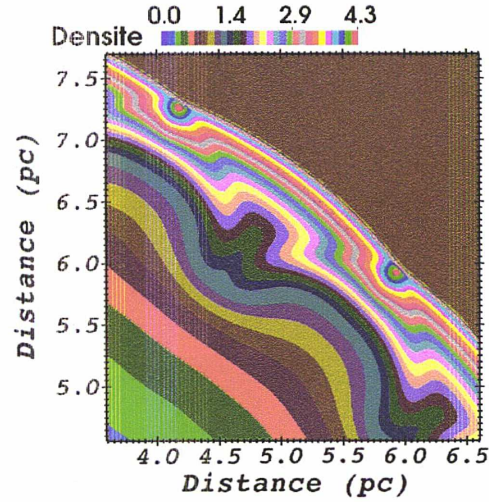


FIG. 6.17: Carte de densité à $t \approx 7\,500$ ans, montrant le creux formé par les surdensités aux emplacements occupés précédemment par des bosses.

vice-versa, mais l'amplitude de la perturbation est devenue très faible. En revanche, la structure interne a été considérablement modifiée par cette première inversion (voir Fig. 6.18). Le mouvement des nouvelles bosses vers les nouveaux creux débute alors, et aboutit à une nouvelle inversion à $t \approx 13\,000$ ans (voir Fig. 6.19). On voit que la perturbation initiale a été quasiment totalement amortie. Les structures qui étaient apparues derrière les creux initiaux se sont propagées dans le RSN, et demeurent visibles en profondeur, même après 50 000 ans (voir Fig. 6.20). En revanche, les mécanismes décrits précédemment concernant les couches de vitesse transverse s'atténuent eux aussi avec le temps en surface, de même que la perturbation de pression, mais les résidus dus à la première oscillation demeurent visibles également en profondeur dans le RSN (Fig. 6.21). Les oscillations se succèdent alors, de plus en plus ténues. On en voit la trace dans la vitesse transverse, présentée sur la Fig. 6.21. On remarque que, si les mouvements transverses sont très faibles dans les instants tardifs, le RSN a gardé "l'empreinte" des oscillations, et notamment de la première d'entre elles, qui est celle laissant les mouvements les plus importants.

Afin de quantifier l'évolution de l'instabilité, on mesure la variation de masse entre les régions. On intègre la densité sur le volume représenté par des portions du RSN correspondant aux collines et aux vallées initiales, comme indiqué sur la figure 6.22. On note θ_i l'angle inférieur correspondant à la i -ème région : ainsi, θ_1 correspond, dans le cas présenté sur la figure 6.22 à un angle

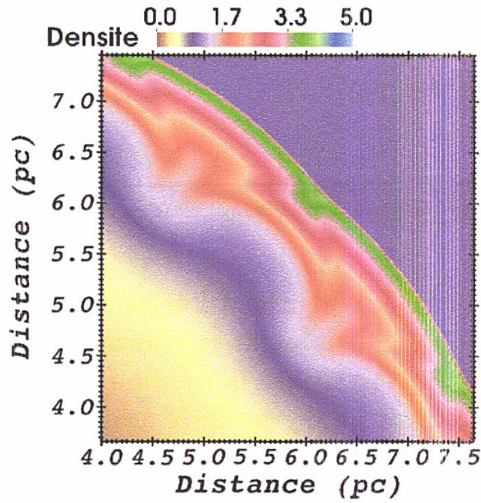


FIG. 6.18: Carte de densité à $t \approx 8\,000$ ans. La structure interne est considérablement modifiée, et le mouvement des nouvelles bosses vers les nouveaux creux a débuté.

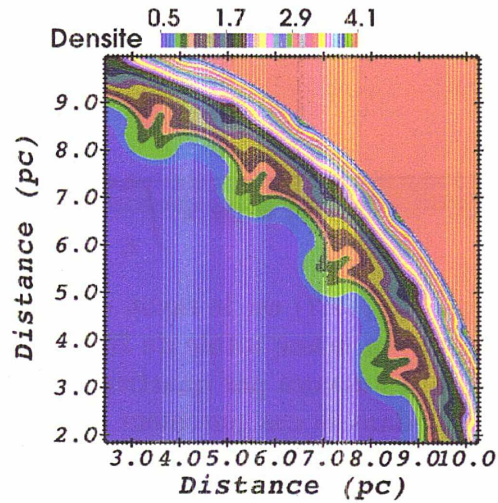


FIG. 6.19: Carte de densité à $t \approx 13\,000$ ans, lorsque l'oscillation prend fin. Les creux et les bosses sont revenus à leur position initiale. La perturbation en surface est très fortement atténuée.

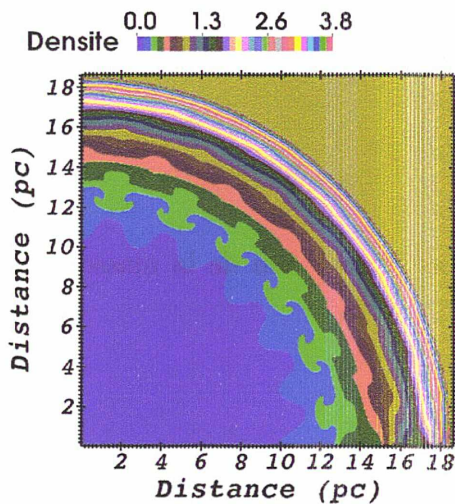


FIG. 6.20: Carte de la densité à $t \approx 53\,000$ ans. Les restes des structures apparaissant lors de la première oscillation derrière les creux sont toujours présents. Néanmoins, en surface, le RSN a retrouvé une quasi-sphéricité.

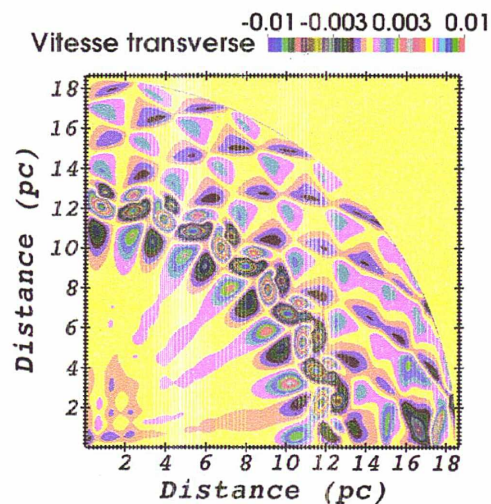


FIG. 6.21: Carte de la vitesse transverse à $t \approx 53\,000$ ans. Les résidus dus à la première oscillation demeurent bien visibles. On voit également la trace de chacune des oscillations suivantes.

$\theta = \pi/48$, et la région n°1 est donc la région correspondant à $\theta = [\pi/48, 3\pi/48]$. Afin de mesurer la variation de masse, on calcule les masses M_i des régions précédemment définies. Ces masses sont données par :

$$M_i(t) = 2\pi \times \int_{\theta_i}^{\theta_i + \pi/l} \int_0^{R_{pert}(\theta)} \rho(r, \theta, t) r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (6.3)$$

où $R_{pert}(\theta, t)$ est le rayon d'expansion du RSN perturbé à l'angle θ et au temps t . La masse totale du RSN peut être obtenue aisément en sommant les différentes masses par quartier du RSN. Ensuite, on utilise la relation simple reliant, dans le cas purement sphérique, la masse totale du RSN à la masse d'une région correspondant à la rotation d'un quartier compris entre θ_i et θ_{i+1} autour de l'axe (Ox). En effet, dans le cas sphérique, la masse comprise dans une région définie comme précédemment, délimitée par les angles α_1 et α_2 est donnée par :

$$M(\alpha_1, \alpha_2, t) = 2\pi \int_0^R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(r, t) r^2 \sin(\theta) dr d\theta . \quad (6.4)$$

Comme on est dans le cas purement sphérique, la densité ne dépend que de la coordonnée radiale, ce qui permet alors de calculer l'intégrale angulaire, et l'équation 6.4 devient :

$$M(\alpha_1, \alpha_2, t) = 2\pi [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \int_0^R \rho(r, t) r^2 dr . \quad (6.5)$$

En prenant $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, on obtient l'expression de la masse totale du RSN :

$$M_{RSN}(t) = 4\pi \int_0^R \rho(r, t) r^2 dr \quad (6.6)$$

On utilise alors l'équation 6.6 dans l'équation 6.5 afin de supprimer l'intégrale radiale, et on obtient alors :

$$M(\alpha_1, \alpha_2, t) = [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \times M_{RSN}/2 \quad (6.7)$$

qui est utilisée pour calculer la masse $M_{i,0}$ qu'aurait chaque région M_i dans un cas purement sphérique, en prenant $\alpha_1 = \theta_i$ et $\alpha_2 = \theta_{i+1}$. On définit alors la quantité normalisée adimensionnée $\delta M(i)$ par :

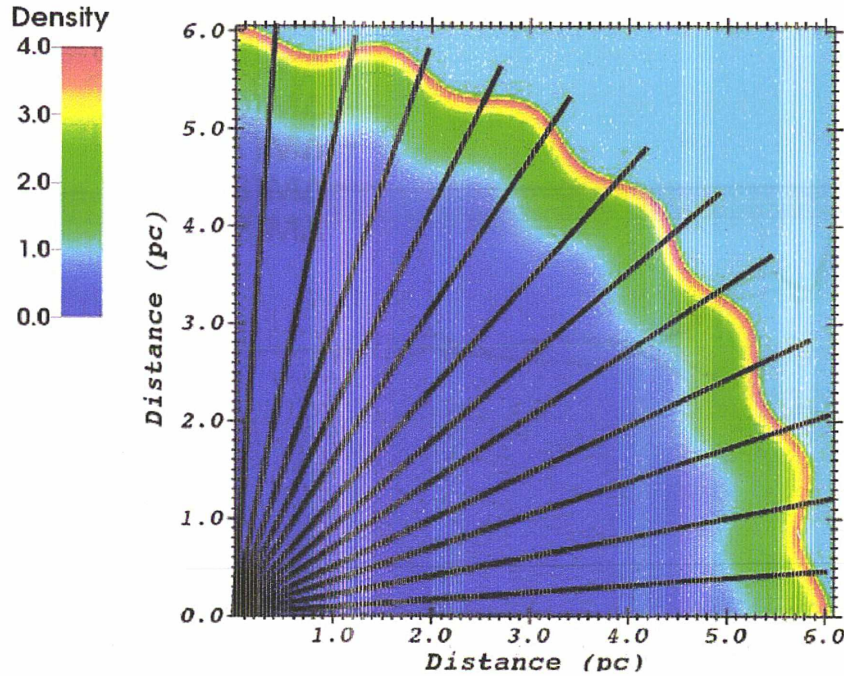


FIG. 6.22: Sur cette figure sont représentés les différents secteurs dans lesquels est calculée la variation de masse. La première région va de l'angle $\theta = \pi/48$ à $\theta = 3\pi/48$.

$$\delta M(i, t) \equiv \frac{M_i(t) - M_{i,o}(t)}{M_{RSN}(t)} \quad (6.8)$$

Les bosses ou collines initiales correspondent aux secteurs numérotés impairs, et les creux ou vallées initiales correspondent aux secteurs numérotés pairs. L'évolution au cours du temps de δM pour différents secteurs est montrée sur la figure 6.23. On observe que, conformément à la théorie et à l'analyse visuelle de la simulation, la matière s'est déplacée des collines vers les vallées. En effet, entre les temps $t \approx 3\,000$ ans et $t \approx 5\,000$ ans, on voit que δM augmente et est positif dans les vallées (les courbes bleue et rouge, $\delta M(6)$ et $\delta M(8)$ correspondent aux vallées initiales), alors que cette même quantité décroît et est négative dans les collines (les courbes noire, verte et violette, $\delta M(5)$, $\delta M(7)$ et $\delta M(9)$ correspondent aux collines initiales) : il y a bel et bien un transfert de matière des collines vers les plaines. A mesure que l'oscillation des positions vallées/collines se réalise, on voit que δM diminue dans les vallées initiales, tandis qu'il augmente dans les collines initiales du temps $t \approx 5\,000$ ans jusqu'à $t \approx 11\,000$ ans. Cet intervalle temporel correspond à la durée pendant laquelle les collines initiales se remplissent et deviennent des

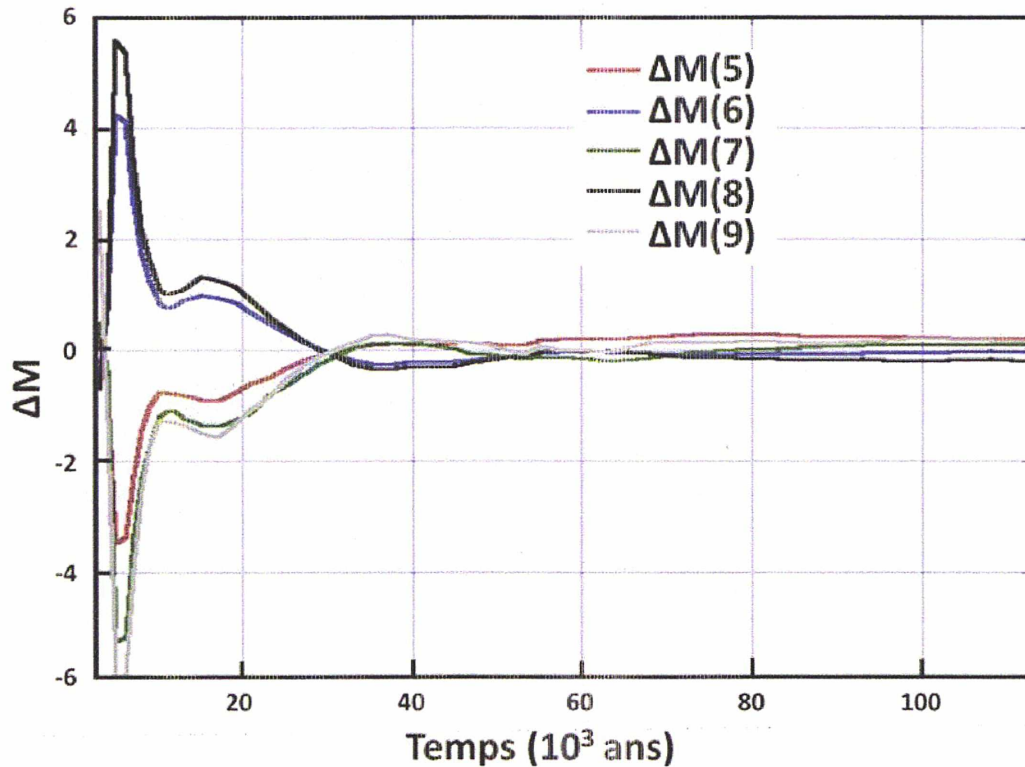


FIG. 6.23: Sur cette figure est représentée l'évolution de la quantité δM au cours du temps pour différents secteurs. On observe que les secteurs correspondant à des vallées (les secteurs n°6 et 8) ont tout d'abord un excès de masse, tandis que ceux correspondant à des collines (les secteurs n°5,7 et 9) ont un défaut de masse. Ceci est conforme aux observations précédentes et confirme l'existence de flux de masse transférant la matière des collines vers les vallées. On observe ensuite l'oscillation des variations de masse, correspondant aux différents battements de l'instabilité, avec une stabilisation autour d'une variation de masse nulle au cours du temps.

vallées (aux environs de $t \approx 7\,000$ ans, voir figure 6.17), sous l'effet des migrations des surdensités montrées sur la figure 6.16 qui s'éloignent des anciennes vallées, ainsi qu'au temps durant lequel la nouvelle vallée reçoit de la matière, avant que les surdensités formées ne rejoignent les nouvelles collines. Ensuite, de $t \approx 11\,000$ ans à $t \approx 17\,000$ ans, le phénomène inverse se produit, avec le retour des surdensités vers les vallées initiales, générant une croissance de ΔM dans les vallées initiales. Durant cette période, on a assisté au moment présenté sur la figure 6.19 à $t \approx 13\,000$ ans auquel une période de l'I.V. est achevée, et où les collines et les vallées ont retrouvé leur position initiale. On remarque que durant cette première oscillation, les vallées et les collines n'ont pas eu le temps d'échanger suffisamment de matière pour que la quantité ΔM

change de signe : les migrations sont trop rapides, et le transfert de matière pas suffisamment important. La perturbation est alors très fortement atténuée. Néanmoins, on assiste à une seconde période de l'I.V. s'écoulant sur une durée beaucoup plus importante, durant laquelle on observe à nouveau la croissance de ΔM dans la région des vallées et la décroissance dans celle des collines, de $t \approx 13\,000$ ans à $t \approx 17\,000$ ans. Ensuite, le phénomène se poursuit avec une amplitude de ΔM qui décroît progressivement, et on assiste à une inversion du signe de ΔM à $t \approx 32\,000$ ans. Les simulations avec un indice adiabatique $\gamma = 1.1$ nous montreront dans la partie suivante que l'inversion du signe de ΔM correspond à l'instant où les collines et les vallées sont formées, ce qui n'est pas visible avec $\gamma = 5/3$ en raison du fait que ΔM ne présente pas d'inversion de signe lors de la première oscillation, et que lors de la seconde oscillation, la perturbation est trop atténuée pour qu'on puisse identifier les collines et les vallées visuellement. Les extrema de ΔM sont atteints à environ $t \approx 37\,000$ ans. Par la suite, les variations de ΔM sont très faibles, si bien qu'il est difficile d'identifier réellement les oscillations : le mécanisme de l'instabilité de Vishniac est très fortement atténué, et le RSN récupère une structure quasi-sphérique, comme montré sur la figure 6.20. La quantité ΔM oscille alors très légèrement autour d'une valeur nulle. On remarque que la pseudo-période d'oscillation, qui n'est donc pas constante au cours du temps, est de plus en plus longue : les inversions collines/vallées sont de plus en plus lentes. Cela est conforme à la théorie. En effet, d'après l'équation 3.56, les perturbations, notamment celle du rayon δR , ont la forme :

$$\delta R \propto t^{s_r} \times \cos [s_i \ln(\Omega t)] \quad (6.9)$$

ce qui implique bien une pseudo-période croissante avec le temps en raison de la présence du terme en $\ln(\Omega t)$ dans le cosinus.

Cette simulation conforte donc la théorie : un RSN d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$ est stable, et la perturbation introduite s'atténue avec le temps. On a néanmoins observé que le mécanisme de Vishniac est bien à l'oeuvre : il y a bien eu génération de flux de matière transverses dans la zone derrière le front de choc, impliquant des surdensités dans les vallées. On a pu voir le phénomène oscillatoire à l'oeuvre, avec une inversion des positions collines/vallées, mais, conformément à la théorie, on a assisté à la disparition progressive de la perturbation introduite.

6.2 RSN d'indice adiabatique $\gamma = 1, 1$

A présent, nous présentons le second cas étudié. Nous simulons ici un RSN composé d'hydrogène d'indice adiabatique $\gamma = 1, 1$, se propageant dans un

MIS de composition identique. Selon la théorie analytique 2 3, une perturbation de mode propre $l = 24$ est instable avec une telle valeur de l'indice adiabatique. Nous étudions son développement sur un temps plus long que le cas précédent, jusqu'à $t \approx 200\,000$ ans.

Les premiers instants du développement de l'instabilité montrent un comportement similaire au cas $\gamma = 5/3$. On observe sur la figure 6.24 le mécanisme à l'oeuvre, avec l'apparition de flux de matière transverses générant un écoulement de matière depuis les collines en direction des vallées. On distingue sur la droite de la figure la colline située à l'angle polaire $\theta = 45^\circ$ (aux coordonnées $(3, 2\text{ pc}, 3, 2\text{ pc})$), ainsi que la vallée à un angle légèrement supérieur. Une surdensité s'est formée au niveau de la vallée. On voit sur la figure 6.25 qu'au temps $t \approx 18\,000$ ans, les collines sont devenues des vallées et inversement. En effet, à l'angle $\theta = 45^\circ$, la région qui était précédemment une bosse constitue désormais une région en retrait. On observe également l'apparition des mêmes structures à l'arrière de la coquille que dans le cas $\gamma = 5/3$, pour des raisons identiques à celles décrites dans le paragraphe précédent.

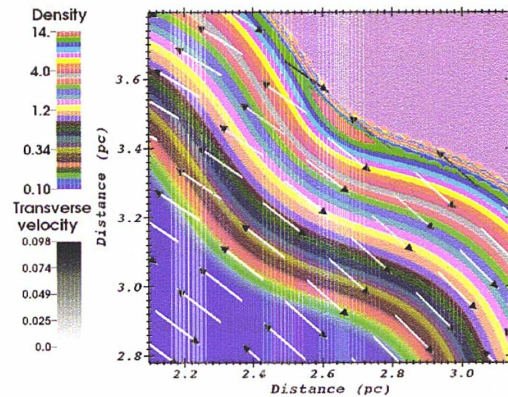


FIG. 6.24: Carte de densité avec composante transverse de la vitesse à $t \approx 4\,000$ ans. On observe bien le mécanisme de Vishniac à l'oeuvre.

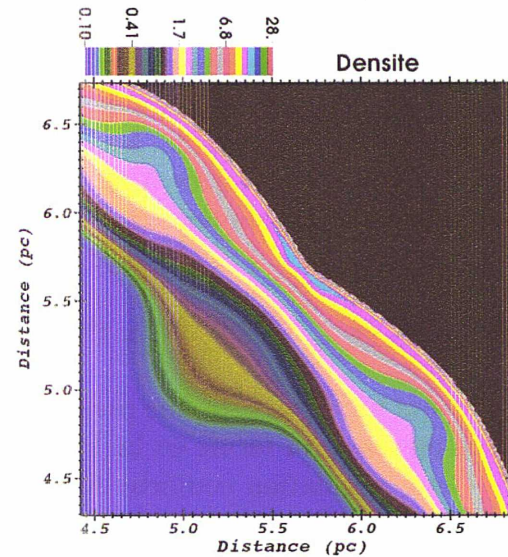


FIG. 6.25: Carte de densité à $t \approx 18\,000$ ans. Les collines sont devenues des vallées, et vice versa.

On voit sur la figure 6.26 qu'à $t \approx 53\,000$ ans, ces positions ont à nouveau été échangées. Contrairement au cas $\gamma = 5/3$, le mécanisme de l'instabilité est toujours à l'oeuvre, et des flux de matière dans la direction transverse à l'expansion sont toujours bien visibles. Les surdensités sont ici en train de migrer vers les creux situés de part et d'autre de la colline, et les structures

caractéristiques à l'arrière de la coquille sont toujours en formation. Sur la figure 6.27 est montrée cette même région au temps $t \approx 163\,000$ ans. On voit qu'à cet instant, le RSN est dans l'instant où les vallées et les collines sont en train de s'inverser. Les zones surdenses qui étaient précédemment des creux sont en train de dépasser les anciennes collines. Sur la figure 6.28, on montre que les positions sont à présent en train d'évoluer : on assiste à la suite de l'oscillation. Des mouvements transverses sont toujours générés, déplaçant les surdensités vers les régions en retrait : le mécanisme de Vishniac est observé à des temps longs de $t \approx 200\,000$ ans. On voit de façon nette sur la figure 6.29 que la perturbation est toujours présente à grande échelle, et que le RSN présente clairement les caractéristiques de l'instabilité de Vishniac : les collines et les vallées sont toujours en évolution, le phénomène oscillatoire se poursuit, et des structures sont en constante formation à l'arrière de la coquille.

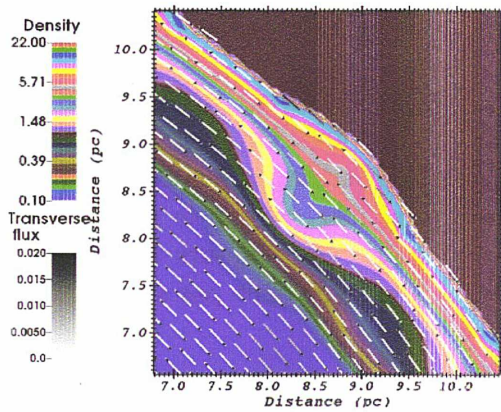


FIG. 6.26: Carte de densité et vecteurs vitesse transverse à $t \approx 53\,000$ ans. Une nouvelle oscillation a eu lieu. On observe que le mécanisme de l'instabilité est toujours à l'oeuvre : le flux de matière transverse est toujours bien visible, des collines vers les vallées.

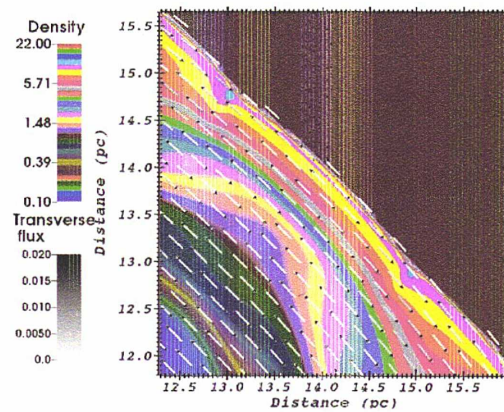


FIG. 6.27: Carte de densité et vecteurs vitesse transverse à $t \approx 163\,000$ ans. Cet instant est proche du moment où les vallées dépassent les collines.

L'évolution de la variation de masse par région, présentée dans la figure 6.30, définie dans la section précédente, conforte cette analyse visuelle. Comme dans le cas $\gamma = 5/3$, on observe que ΔM est positif dans les vallées de $t \approx 3\,000$ ans à $t \approx 18\,000$ ans, tandis que durant cette période les collines présentent un défaut de masse. Durant cette période, ΔM est passé par un extrema. En comparant avec la figure 6.25, on constate que l'inversion du signe de ΔM correspond à l'instant auquel les collines deviennent des vallées et vice-versa. En comparaison avec le cas $\gamma = 5/3$, on remarque que la durée d'oscillation

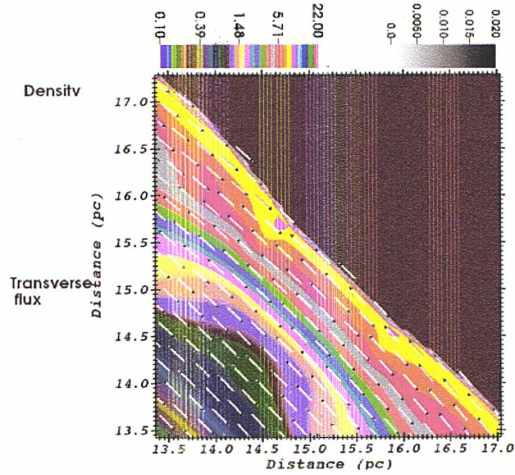


FIG. 6.28: Carte de densité et vecteurs vitesse transverse à $t \approx 203\,000$ ans. Les positions sont à présent en train d'évoluer. Le creux est en cours de formation, tandis que la colline se forme également. Le flux de matière est toujours présent, et génère à nouveau une surdensité migrant vers la vallée.

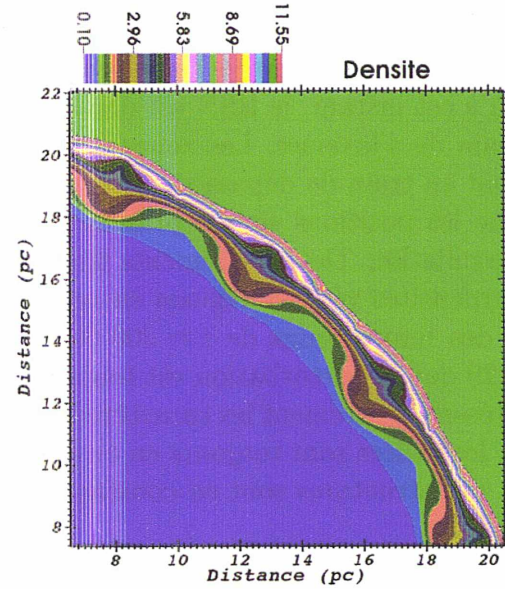


FIG. 6.29: Carte de densité à $t \approx 203\,000$ ans. On voit clairement que la perturbation est toujours en train d'évoluer, et que le mécanisme de Vishniac est toujours à l'oeuvre. Le RSN ne redevient pas sphérique.

est beaucoup plus longue avec un indice adiabatique $\gamma = 1.1$: la première inversion vallée/colline a lieu à $t \approx 7\,000$ ans dans le premier cas, alors qu'ici cette inversion n'a lieu qu'à $t \approx 18\,000$ ans. Cette première inversion dure donc environ $5\,000$ ans dans le premier cas, contre $15\,000$ ans ici. Entre $t \approx 18\,000$ et $t \approx 72\,000$ ans, ΔM reste positif pour les nouvelles vallées et négatif dans les nouvelles collines, en passant par des extrema à $t \approx 42\,000$ ans. Comme dans le cas $\gamma = 5/3$, et en conformité avec l'équation 6.9, on voit que la pseudo-période d'oscillation augmente au cours du temps, passant de $15\,000$ ans à $54\,000$ ans entre la première et la seconde inversion de ΔM . De $t \approx 72\,000$ ans à $t_{final} \approx 200\,000$ ans, le signe de ΔM est constant dans chaque région : le temps d'oscillation ayant augmenté, $128\,000$ ans ne suffisent pas pour obtenir une oscillation supplémentaire. Les différences observées entre les différentes régions s'expliquent par le fait que, en raison de la rotation autour de l'axe (Ox), les différentes régions ne sont pas équivalentes. Plus elles sont localisées à un angle θ élevé, i.e. plus elles sont éloignées de l'axe (Ox), plus elles représentent une fraction importante du RSN.

Cette simulation montre donc que les RSN en phase de Sedov-Taylor avec l'indice adiabatique $\gamma = 1.1$ sont capables de présenter le développement de l'instabilité de Vishniac sur des temps longs, sans atténuation des perturbations.

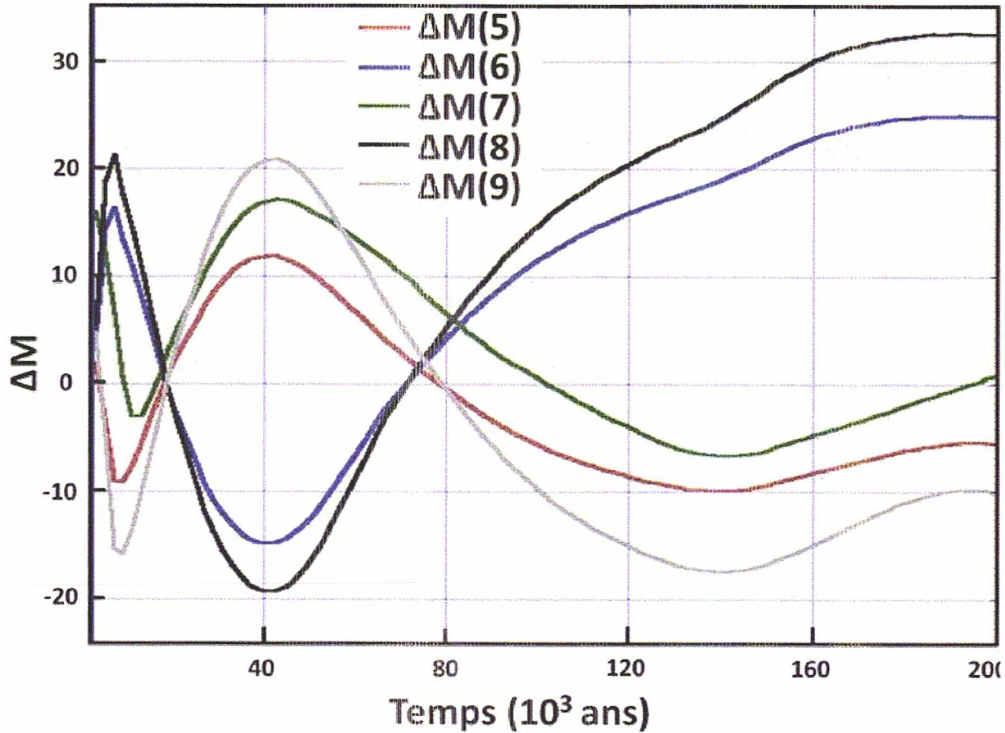


FIG. 6.30: Sur cette figure est représentée l'évolution de la quantité δM au cours du temps pour différents secteurs. Contrairement au cas $\gamma = 5/3$, on voit que l'amplitude de ΔM est quasi-constante. Les oscillations présentent toutes une inversion de cette quantité, et on observe jusqu'à des temps longs ($t \approx 200\ 000$ ans) le mécanisme de Vishniac à l'oeuvre.

6.3 Comparaison et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré, dans un cadre très proche de la théorie, i.e. avec un indice adiabatique uniforme, et en phase de Sedov, que les RSN d'indice adiabatique élevé (ici $\gamma = 5/3$) pouvaient subir le mécanisme de l'I.V., mais que celui-ci n'était pas instable. En effet, si on observe bien les caractéristiques du mécanisme, à savoir la génération de mouvements transverses derrière le front de choc, l'apparition de surdensités au niveau des vallées, ainsi que l'oscillation entre les collines et les vallées, il apparaît clairement, tant par une analyse "visuelle" que par une analyse quantifiée, que le mécanisme n'est pas instable. On aboutit rapidement (environ 15 000 à 20 000 ans) à un RSN

quasi-sphérique, présentant certes encore des mouvements transverses, mais très faibles. Des traces des oscillations sont visibles à l'intérieur du RSN, que ce soit dans la composante transverse de la vitesse ou dans la densité.

La situation des RSN d'indice adiabatique plus faible est différente. Pour $\gamma = 1.1$, on a également vu le mécanisme de l'I.V. générer des flux de matière derrière le front de choc, des surdensités et on a pu observer les oscillations colline/vallée. En revanche, il n'y a pas d'atténuation de la perturbation au cours du temps, contrairement au cas précédent. Le RSN présente, même à des temps longs ($t \approx 200\ 000$ ans) les caractéristiques de l'I.V. Il ne récupère pas sa structure quasi-sphérique et on observe toujours des variations de masse importantes : il n'y a pas d'atténuation du mécanisme de Vishniac.

Dans les deux cas étudiés, on note que le comportement temporel des oscillations est conforme aux prédictions analytiques : la pseudo-période d'oscillation est croissante. De plus, un indice adiabatique faible favorise très clairement le développement du mécanisme de l'I.V. et la persistance des perturbations.

Chapitre 7

Etude de l'instabilité de Vishniac dans les RSN en phase radiative

On a vu dans le chapitre 6 précédant que, conformément à la théorie, plus l'indice adiabatique est faible, plus l'I.V. peut se développer et persister à des temps longs. Comme mentionné à la fin du chapitre 2, le fait de prendre un indice adiabatique faible et proche de 1 permet de se rapprocher des conditions hydrodynamiques d'un RSN en phase radiative. Le taux de compression, qui est très élevé dans la phase radiative, est en effet d'autant plus grand en phase de Sedov-Taylor que γ est proche de 1. Néanmoins, étudier un RSN en phase de Sedov-Taylor avec un indice adiabatique faible n'est pas équivalent à étudier un RSN subissant des pertes d'énergie : les effets sur les profils hydrodynamiques (présence d'un pic de vitesse à l'intérieur du RSN, due au profil de température et de pression engendrant des gradients de pression de sens inverse à ceux de la phase de Sedov, voir chapitre 5) ne sont pas reproduits. Ainsi, dans ce chapitre, nous allons étudier l'évolution d'une perturbation introduite dans un RSN refroidi, afin d'observer le comportement de l'I.V. dans les RSN en phase radiative.

La fonction de refroidissement utilisée pour simuler la phase radiative du RSN est celle définie dans le chapitre 5 : $\Lambda = \Lambda_0 \rho$ avec $\Lambda_0 = 0.1 \text{ W.kg}^{-1}$. Après l'initialisation d'un RSN en phase de Sedov, jusqu'à l'âge de 3 000 ans, on introduit à la fois une perturbation de la forme indiquée au début du chapitre 6 (voir Eq. 6.2), et la fonction de refroidissement. L'indice adiabatique du gaz est $\gamma = 5/3$, qui correspond à la valeur pour un gaz parfait mono-atomique.

Sur la Fig. 7.1 est présentée une carte de densité à $t \approx 8\,000$ ans. On observe alors des structures quasiment identiques à celles que l'on observait, au même instant, sans refroidissement sur la Fig. 6.18. Une surdensité apparaît derrière les zones en retrait, positionnées à $(x; y) = (4, 2; 7, 4)$, $(6, 0; 6, 0)$ et $(7, 4; 4, 2)$. On distingue très bien les traces de la surdensité derrière la vallée initiale, autour des positions $(x; y) = (4, 8; 6, 4)$ et $(6, 4; 4, 8)$. De nou-

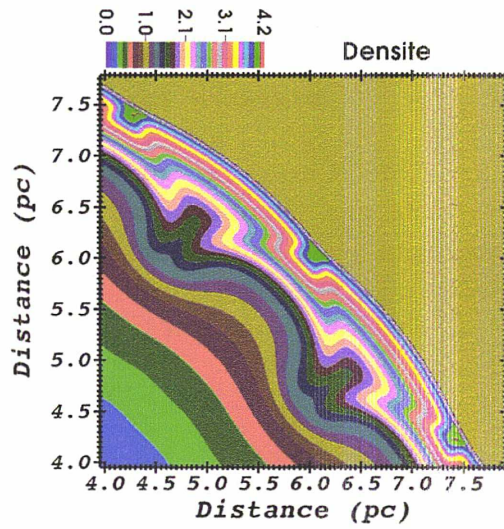


FIG. 7.1: Carte de densité à $t \approx 8\,000$ ans. On observe la première demi-oscillation : les vallées sont devenues des collines et vice-versa, comme dans le cas sans refroidissement.

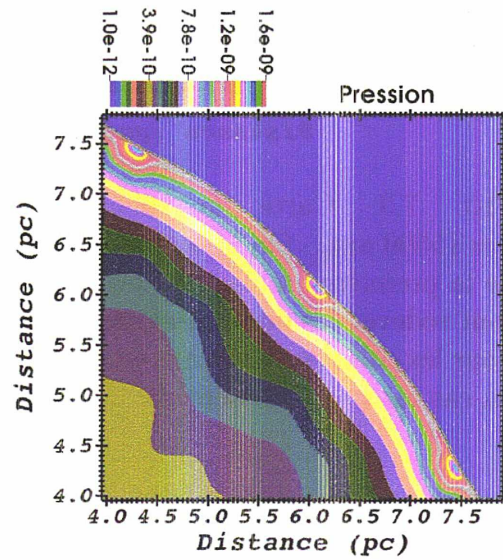


FIG. 7.2: Carte de pression à $t \approx 8\,000$ ans. On observe les mêmes structures que sans refroidissement.

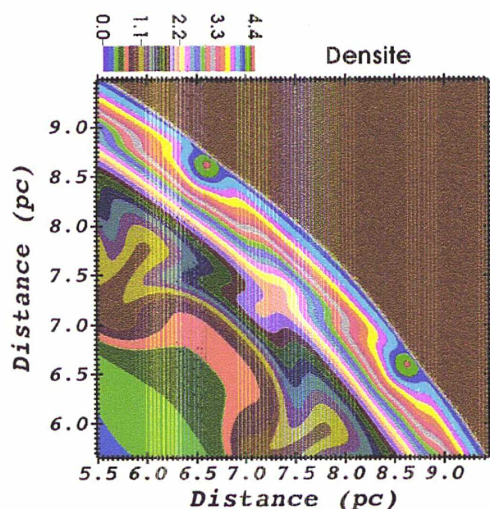


FIG. 7.3: Carte de densité à $t \approx 15500$ ans. On observe la fin de la première oscillation : les vallées sont redevenues des vallées, de même pour les collines, de manière similaire au cas sans refroidissement.

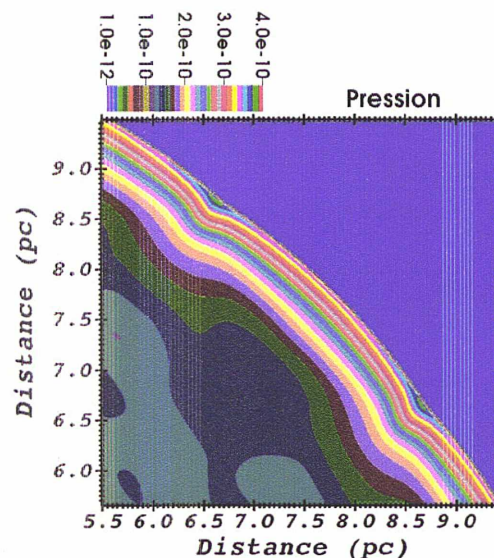


FIG. 7.4: Carte de pression à $t \approx 15500$ ans. On observe les mêmes structures que sans refroidissement.

velles structures identiques à celle-ci vont se former progressivement, puisque, comme on peut le voir sur la Fig. 7.2, une surpression est présente au niveau des surdensités, qui induit des gradients de pression formant ces structures derrière les vallées. On voit sur la Fig. 7.3 que la première oscillation se termine aux environs de $t \approx 15500$ ans. Les surdensités, localisées à $(x; y) = (6, 5; 8, 6)$ et $(8, 6; 6, 5)$ sont aux angles correspondant aux vallées initiales (derrière lesquelles se sont formées les structures profondes visibles autour de $(5, 5; 7, 5)$ et $(7, 5; 5, 5)$). On observe autour de la position $(7, 3; 7, 3)$ qu'une structure similaire s'est formée lors de la deuxième demi-oscillation derrière la colline initiale. Cette structure est moins profonde que les deux premières, puisqu'elle s'est formée plus tard. La carte de vitesse transverse (Fig. 7.5) montre que les flux de matière caractéristiques de l'I.V. sont similaires à ceux qu'on a décrits dans le chapitre 6 : une trace des précédentes oscillations est conservée dans les régions internes du RSN.

Ainsi, jusqu'à $t \approx 15\,000$ ans, le RSN évolue d'une façon très similaire à un RSN en phase de Sedov-Taylor : le refroidissement n'a pas encore eu le temps d'agir de façon importante sur la dynamique et les profils hydrodynamiques du RSN. A $t \approx 20\,000$ ans, on voit (Fig. 7.6) que le refroidissement commence à agir. En effet, on observe des régions de forte densité qui se forment derrière

le front de choc, aux positions (5, 7; 10, 2), (8; 8, 2), (10; 6) et (11; 3, 5). On voit toujours, à (7; 9, 5), (9, 2; 7, 2) et (11; 4, 5) les surdensités de l'I.V., mais on voit que les régions internes sont en train d'évoluer sous l'effet du refroidissement. La figure 7.7, qui représente la norme de la vitesse dans le RSN, montre que les régions internes du RSN sont en train d'être accélérées : elles vont plus vite que la face externe du RSN. Les régions les plus accélérées correspondent aux structures formées lors de la seconde demi-oscillation, mentionnées ci-dessus. Elles sont dans l'axe des régions de forte densité visibles sur la Fig. 7.6. En progressant en direction de la face externe du RSN, ces structures génèrent des surdensités qui vont progressivement rattraper le front de choc. On observe également sur la Fig. 7.7 que les structures formées derrière les vallées initiales, qui sont donc situées plus profondément dans le RSN, sont moins accélérées mais le sont tout de même. Elles vont donc elles aussi progressivement rattraper le front de choc, mais avec du retard. La carte de pression (Fig. 7.8) permet d'observer le profil de la pression dans le RSN. On y observe donc une fine couche de fluide juste derrière le front de choc dans laquelle la pression est élevée : la matière qui vient d'être choquée n'a pas encore eu le temps de perdre de l'énergie. Derrière cette région de forte pression, on voit alors, conformément à ce qui avait été décrit dans le chapitre 5, une région dans laquelle la pression est égale à la pression du MIS : c'est la zone totalement refroidie. Plus profondément dans le RSN, on observe que la pression croît au fur et à mesure qu'on approche du centre du RSN : le gradient de la pression est donc centripète, ce qui génère l'accélération centrifuge du fluide dans cette région.

Les figures 7.9 et 7.10 montrent l'évolution de la norme de la vitesse entre les temps $t \approx 23\ 000$ ans et $t \approx 26\ 000$ ans. On y observe que les perturbations dues au mécanisme de Vishniac lors des premières oscillations ont une influence sur la distribution spatiale de la vitesse. On observe que des zones, situées à $(x; y) \approx (6, 8; 8, 5)$ et $(8, 5; 6, 8)$ sur la Fig. 7.9, à $t \approx 23\ 000$ ans, sont moins accélérées que les zones présentes autour de $(5, 5; 9, 5)$, $(7, 8; 8)$ et $(9, 5; 5, 5)$. La Figure 7.10, correspondant à $t \approx 26\ 000$ ans, montre que les deux régions moins accélérées décrites précédemment le sont en réalité plus tardivement.

Il est également intéressant de s'intéresser aux flux de matière, à savoir le produit la densité par la norme de la vitesse. Les Figures 7.11 et 7.12 montrent les flux de matière aux instants correspondants aux cartes de vitesse précédemment évoquées. On voit sur ces cartes que les flux de matière sont importants dans les trois régions fortement accélérées décrites ci-dessus, mais également dans les deux régions moins accélérées, précédemment évoquées, qui sont davantage en profondeur. La figure 7.12 montre que ces deux régions se rapprochent progressivement de la coquille, tandis qu'entre elles, le flux de matière est important proche de la coquille, mais également dans un arc

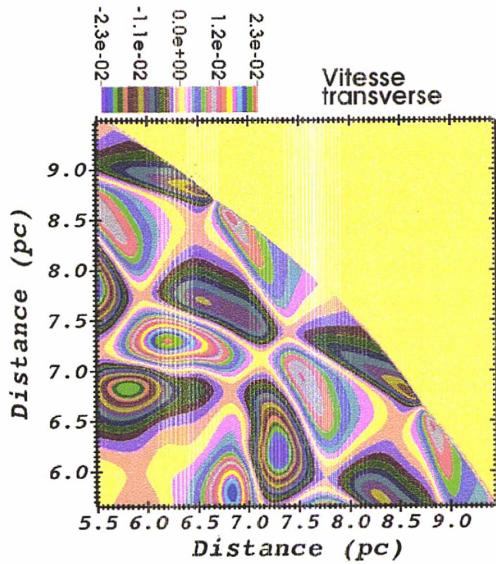


FIG. 7.5: Carte de vitesse transverse à $t \approx 15\,500$ ans. On voit que les flux transverse de matière sont similaires à ceux décrits dans le chapitre 6.

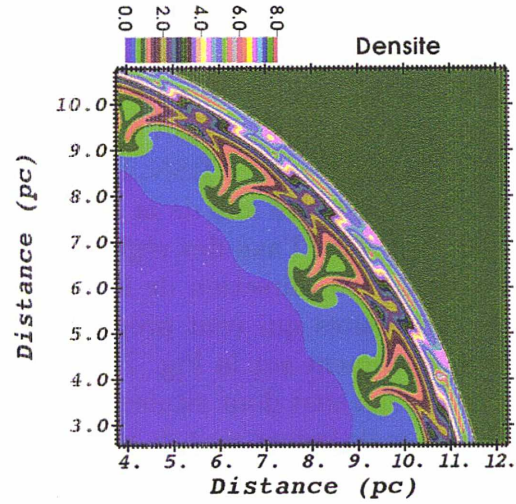


FIG. 7.6: Carte de densité à $t \approx 20\,000$ ans. Les pertes radiatives commencent à agir sur le RSN.

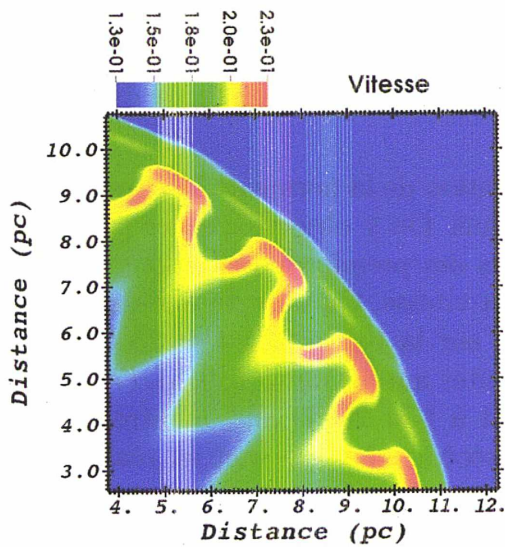


FIG. 7.7: Carte de la norme de la vitesse à $t \approx 20\,000$ ans. On voit que les zones internes sont accélérées sous l'effet du refroidissement, comme expliqué dans le chapitre 5.

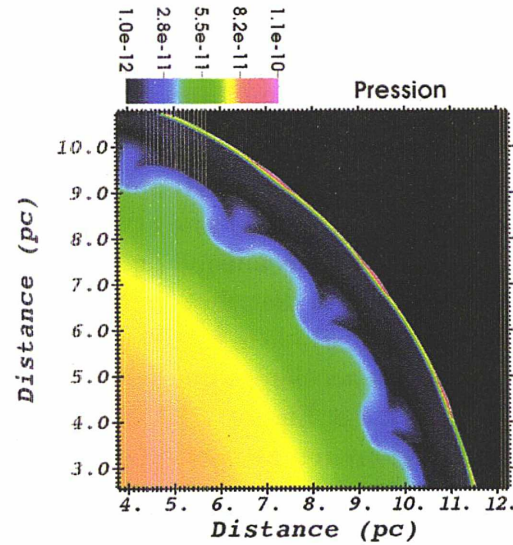


FIG. 7.8: Carte de pression à $t \approx 20\,000$ ans. Les pertes radiatives commencent à agir sur le RSN : le front de choc conserve une pression importante, puis apparaît une zone de faible pression où le refroidissement a fait son oeuvre.

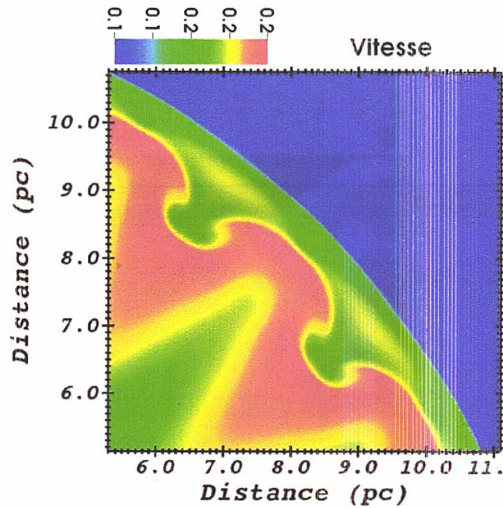


FIG. 7.9: Carte de la vitesse à $t \approx 23\,000$ ans.

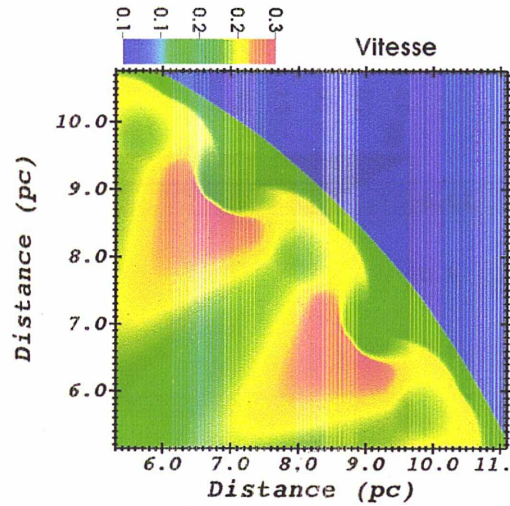


FIG. 7.10: Carte de vitesse à $t \approx 26\,000$ ans.

reliant ces deux régions plus en profondeur, autour de $(x; y) \approx (7, 8; 7, 8)$.

La Fig. 7.13, qui est une carte de densité à $t \approx 25\,000$ ans, confirme que le refroidissement a totalement modifié la structure du RSN. La densité maximale, qui est de 4 fois la densité du MIS théoriquement en phase de Sedov-Taylor avec un indice adiabatique $\gamma = 5/3$, est d'environ 70 fois la densité du MIS à présent dans la coquille. Les structures observées sur les cartes de flux de masse 7.11 et 7.12 se retrouvent sur cette carte de densité. A $t \approx 33\,000$ ans, la carte de densité 7.14 montre que les structures se rapprochent progressivement de la coquille. Le flux de matière entre les deux régions évoquées précédemment, formant un arc, a généré et amplifié des surdensités entre les structures présentes à présent autour de $(7, 8; 10, 3)$ et $(10, 3; 7, 8)$.

La carte de flux de matière Fig. 7.15 au temps $t \approx 33\,000$ ans montre l'instant précédant l'arrivée des structures surdensées sur la coquille, ainsi que la région en forme d'arc les reliant. Sur la figure 7.16, les structures surdensées ont atteint la coquille, et ont induit un amincissement et une densification supplémentaires de celle-ci. On voit que la région les reliant est également en train d'arriver sur la coquille.

A $t \approx 43\,000$ ans, on voit que l'amincissement et la densification de la coquille présentés précédemment suite à l'arrivée des structures surdensées sur la coquille ont généré deux bosses à $(x; y) \approx (8, 5; 11, 3)$ et $(11, 3; 8, 5)$. Ces points de densification ont augmenté leur inertie et sont donc moins sensibles à la décélération. De plus, l'arrivée de matière a généré une poussée en ces points. Cela aboutit donc à la formation d'une perturbation sur la coquille. Entre ces deux régions, une autre zone surdense s'est formée suite à l'arrivée de

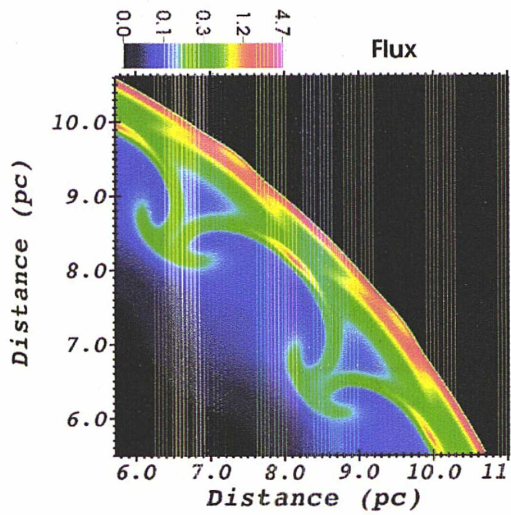


FIG. 7.11: Carte du flux de masse à $t \approx 23\,000$ ans.

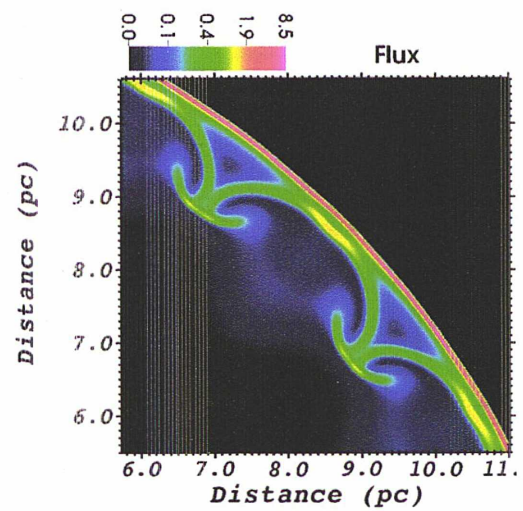


FIG. 7.12: Carte du flux de masse à $t \approx 26\,000$ ans.

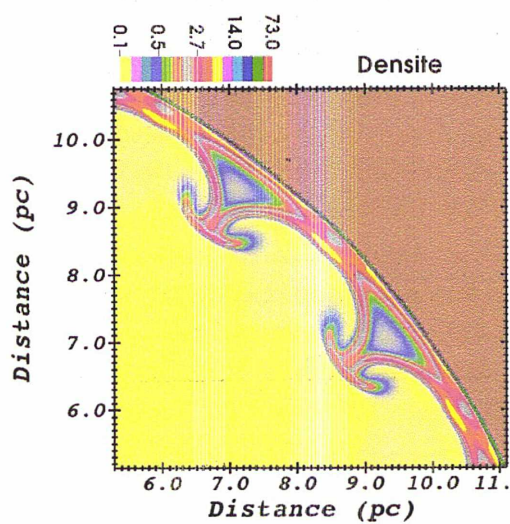


FIG. 7.13: Carte de la densité à $t \approx 25\,000$ ans.

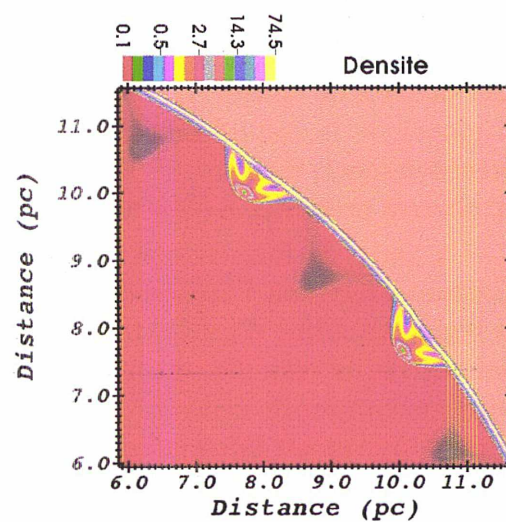


FIG. 7.14: Carte de la densité à $t \approx 33\,000$ ans.

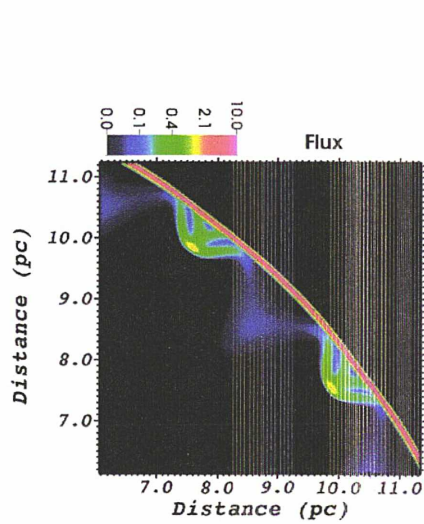


FIG. 7.15: Carte du flux de masse à $t \approx 33\,000$ ans.

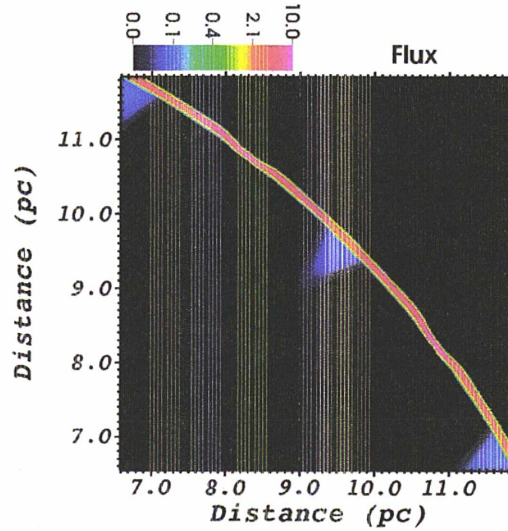


FIG. 7.16: Carte du flux de masse à $t \approx 38\,000$ ans.

la structure présentée sur la Fig. 7.16. Cette surdensité va également générer une bosse, comme le montre la Fig. 7.18. Ainsi, la coquille présente à présent une structure très fine, de haute densité et une perturbation de mode $l' = 48 = 2 \times l$, avec $l = 24$ le mode de la perturbation initiale.

À $t \approx 63\,000$ ans, on peut voir (Fig. 7.19) que la perturbation est toujours présente selon le même mode, mais qu'elle évolue : les surdensités ont commencé à migrer. De plus, il y a un flux de matière transverse qui est présente dans la coquille, des collines vers les plaines, comme le montre la Fig. 7.20. En comparant les trois cartes de densité à $t \approx 43\,000$ ans, $t \approx 50\,000$ ans et $t \approx 63\,000$ ans, on s'aperçoit que l'amplitude de la perturbation croît. Ainsi, toutes les caractéristiques de l'instabilité de Vishniac sont présentes : la présence de collines et de vallées, la présence de flux de matière transverse allant des collines vers les plaines, la migration des surdensités. On assiste donc à un redémarrage du mécanisme de l'I.V. à partir de $t \approx 40\,000$ ans, mais selon un mode l' doublé par rapport au mode de perturbation initial l : $l' = 2 \times l$.

Cette croissance de l'amplitude ainsi que la migration des surdensités est montrée sur les figures 7.21, 7.22, 7.23 et 7.24 aux temps $t \approx 83\,000$ ans et $t \approx 113\,000$ ans respectivement. Ces figures montrent bien qu'au cours du temps, l'amplitude continue à croître progressivement, et les surdensités continuent à migrer. Les flux de matière transverse sont toujours présents au cours du temps, et on note l'apparition progressive de structures à l'arrière de la coquille semblables à celles que l'I.V. génère dans les premiers temps de cette simulation, ou bien également dans les cas sans pertes radiatives présentés dans le chapitre 6. Du fait du décalage temporel entre les perturbations

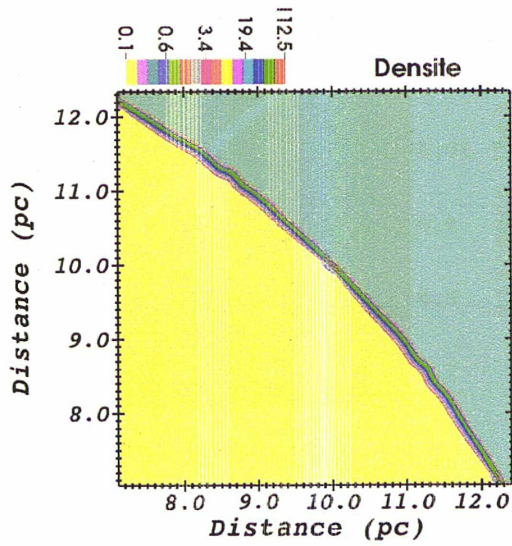


FIG. 7.17: Carte de la densité à $t \approx 43\,000$ ans.

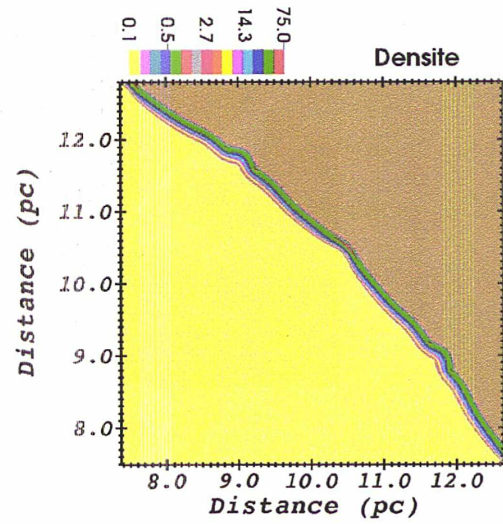


FIG. 7.18: Carte de la densité à $t \approx 50\,000$ ans.

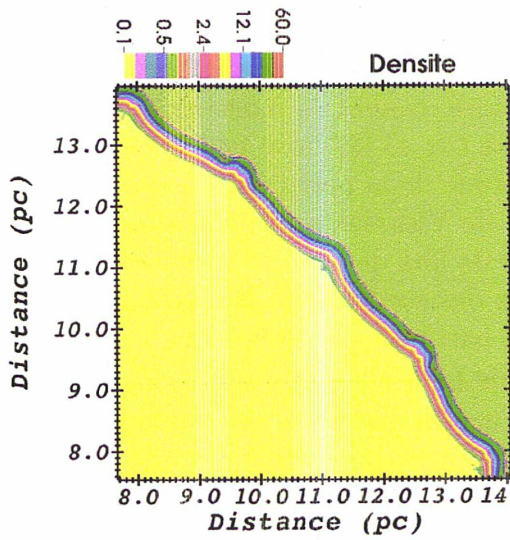


FIG. 7.19: Carte de la densité à $t \approx 63\,000$ ans.

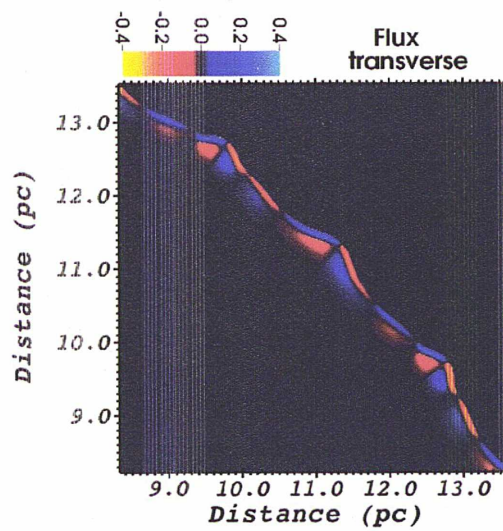


FIG. 7.20: Carte du flux transverse de matière à $t \approx 63\,000$ ans.

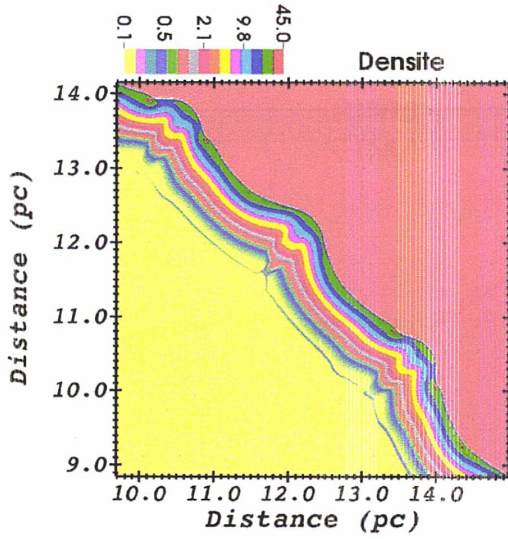


FIG. 7.21: Carte de la densité à $t \approx 83\,000$ ans.

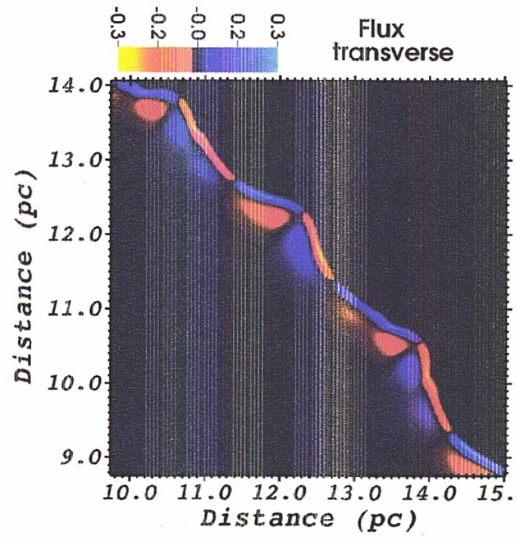


FIG. 7.22: Carte du flux transverse de matière à $t \approx 83\,000$ ans.

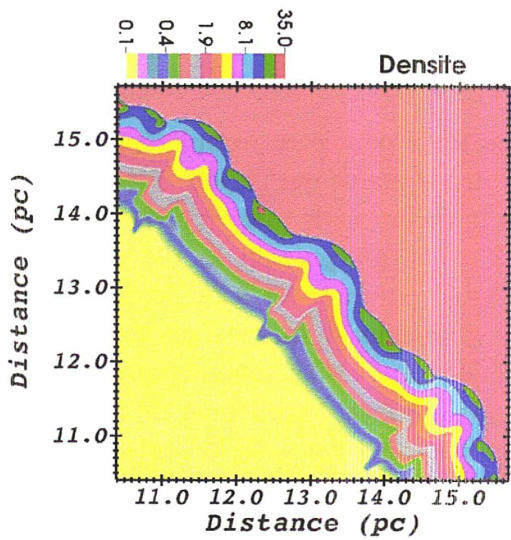


FIG. 7.23: Carte de la densité à $t \approx 113\,000$ ans.

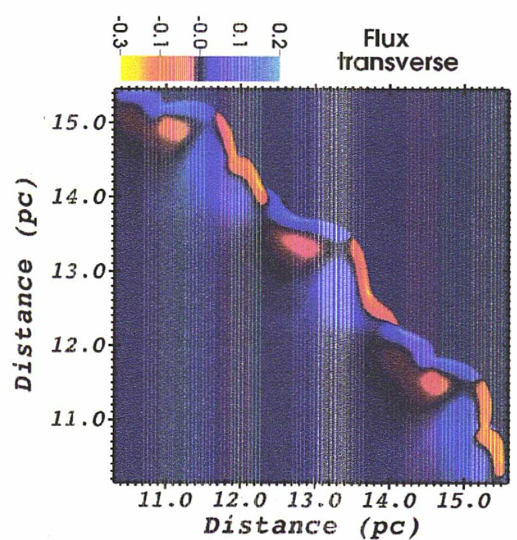


FIG. 7.24: Carte du flux transverse de matière à $t \approx 113\,000$ ans.

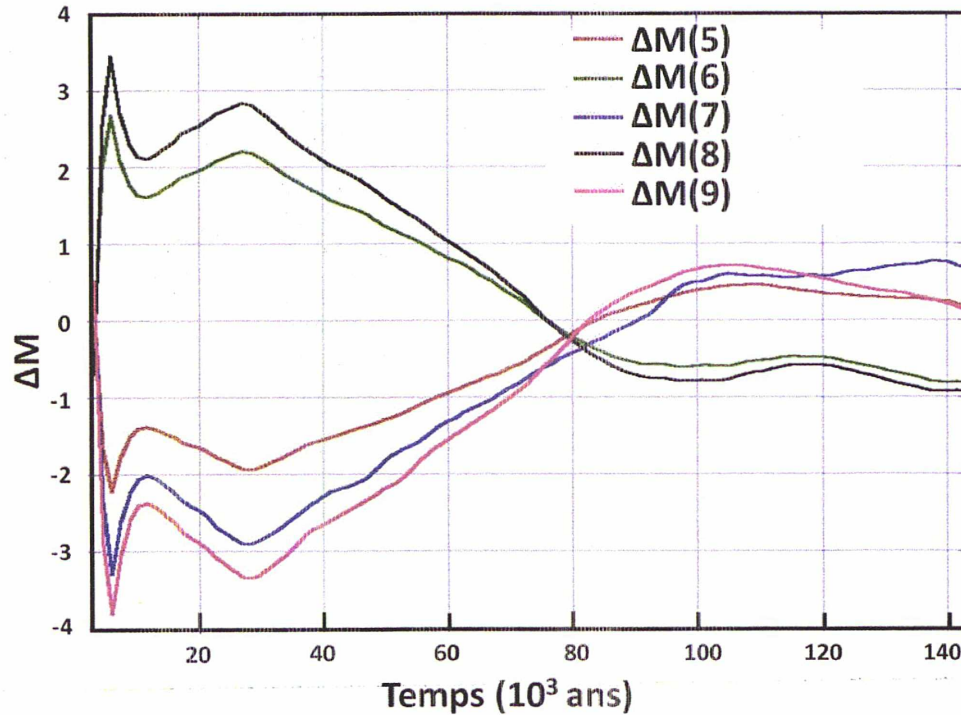


FIG. 7.25: Evolution de la quantité ΔM pour un mode $l = 24$.

voisines dû au doublement de mode, la symétrie qu'on observait par rapport aux centres de vallées n'est plus respectée.

Cette analyse visuelle de l'évolution du RSN peut être complétée, comme dans le chapitre 6, par l'analyse des variations de masse par région. Néanmoins, ici, il est également intéressant de regarder la variation de masse correspondant aux régions définies avec un mode $l' = 2 \times l = 48$, puisque la perturbation générée en phase radiative a un mode doublé par rapport à la perturbation initiale. La comparaison de l'évolution des variations de masse dans les régions définies par la perturbation initiale avec celle dans les régions définies sur un mode double doit permettre de mettre en évidence ce doublement de mode, et mettre également en évidence la croissance de l'amplitude de la perturbation.

La figure 7.25 présente l'évolution de la quantité ΔM définie au chapitre 6. On observe un comportement dans les premiers instants, de $t \approx 3\,000$ ans jusqu'à $t \approx 15\,000$ ans très semblable à celui observé dans le cas sans refroidissement, qui est présenté sur la Fig. 6.23. En effet, les variations de masse décrites dans le cas sans refroidissement sont toujours présentes avec refroidissement : le premier pic présent à $t \approx 5\,000$ ans est quasi identique

dans les deux cas. Par la suite, l'évolution jusqu'au second extremum local à $t \approx 11\,000$ ans est elle aussi très semblable avec et sans refroidissement. Cela confirme le fait, observé visuellement précédemment, que dans un premier temps le RSN n'est quasiment pas affecté par les pertes radiatives. En revanche, à partir de $t \approx 15\,000$ à $18\,000$ ans, les deux situations commencent à se différencier. Alors qu'un extremum local est à nouveau observé dans le cas sans refroidissement à $t \approx 17\,000$ ans, on n'en observe pas en présence de pertes radiatives avant $t \approx 27\,000$ ans, et cet extremum local correspond à une variation de masse plus importante (environ deux fois supérieure) que dans le cas sans refroidissement. Dans ce dernier cas, on observe une inversion du signe de la quantité ΔM à $t \approx 32\,000$ ans, puis un nouvel extremum local à $t \approx 37\,000$ ans, qui est suivi d'une convergence de ΔM vers une valeur nulle pour toutes les régions. Dans le cas présent, avec refroidissement, cette inversion de signe se produit bien plus tard, à $t \approx 75\,000$ ans, puis est suivie d'un extremum local à $t \approx 100\,000$ ans. On observe bien une diminution de l'amplitude de ΔM avec le temps, mais il apparaît qu'on n'atteint pas une convergence vers la valeur nulle. L'étude des variations de masse nous montre donc qu'il y a toujours, aux temps longs, des différences de masses entre régions qui sont caractéristiques de l'I.V. avec un mode $l = 24$. Ces effets ne sont pas perceptibles lors de l'analyse visuelle des résultats, car ils sont masqués par la perturbation de mode $l' = 48$.

L'évolution des variations de masse étudiées pour un mode propre $l' = 48$ est présentée sur la Fig. 7.26. Les régions présentées ici ne peuvent pas être regroupées deux par deux pour correspondre aux régions du mode $l = 24$, comme montré sur la Fig. 7.27. En effet, la construction de ces régions, notamment de la première demi-région adjacente à l'axe (Ox), implique une non correspondance. Ainsi, les régions dotées d'un numéro pair dans le mode $l' = 48$ sont à cheval sur deux régions adjacentes (donc une vallée et une colline) du mode $l = 24$. Ceci explique que, sur la Fig. 7.26, on observe des valeurs quasiment nulles pour chacune des régions paires entre $t \approx 3\,000$ ans et $t \approx 20\,000$ ans. En revanche, chaque région dotée d'un numéro impair représente la partie centrale d'une région du mode $l = 24$, et on observe donc un comportement, pour ces régions, très semblable au comportement observé pour le cas $l = 24$ présenté sur la Fig. 7.25 dans les premiers instants du RSN, de $t \approx 3\,000$ ans à $t \approx 30\,000$ ans. A partir de $t \approx 30\,000$ ans, qui correspond à l'instant où est générée la perturbation de mode double, l'évolution des variations de masse avec $l' = 48$ diffère de celle avec $l = 24$. En effet, les courbes $\Delta M(9)$ et $\Delta M(13)$ connaissent une croissance importante jusqu'à $t \approx 70\,000$ ans, et présentent un excédent de masse. De même, les régions 11 et 15 conservent un excès de masse légèrement croissant, contrairement aux régions 6 et 8 du mode $l = 24$ dont elles sont la partie centrale. Dans le même temps, les courbes paires montrent que les régions correspondantes

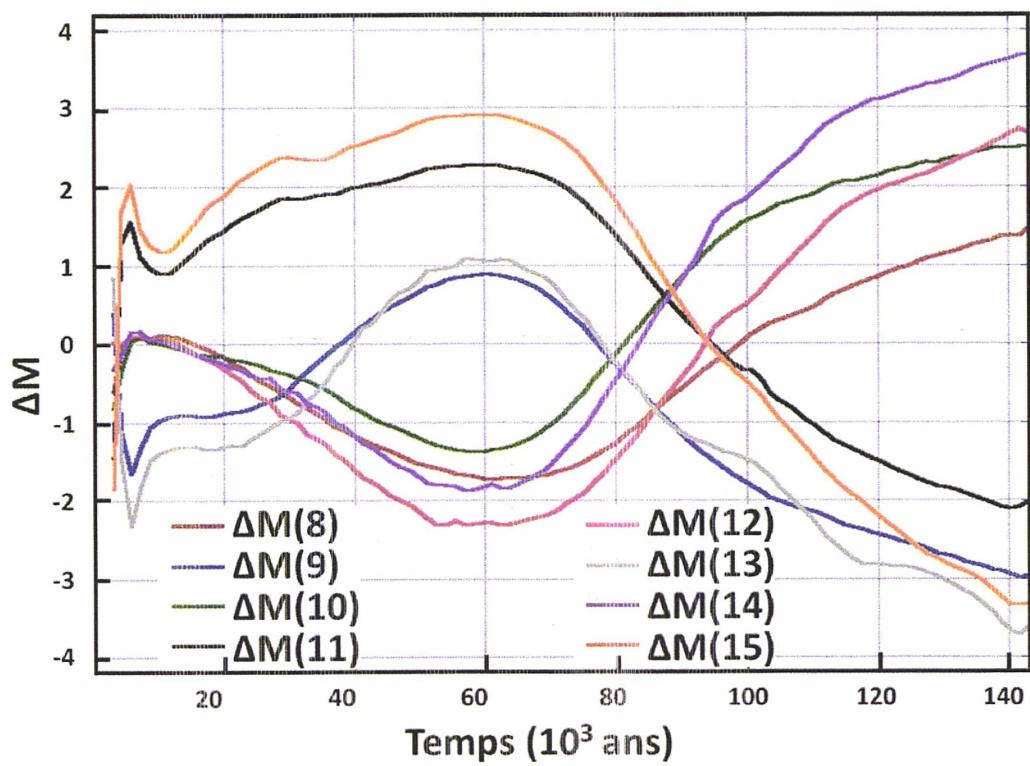


FIG. 7.26: Evolution de la quantité ΔM pour un mode $l' = 2 \times l = 48$.

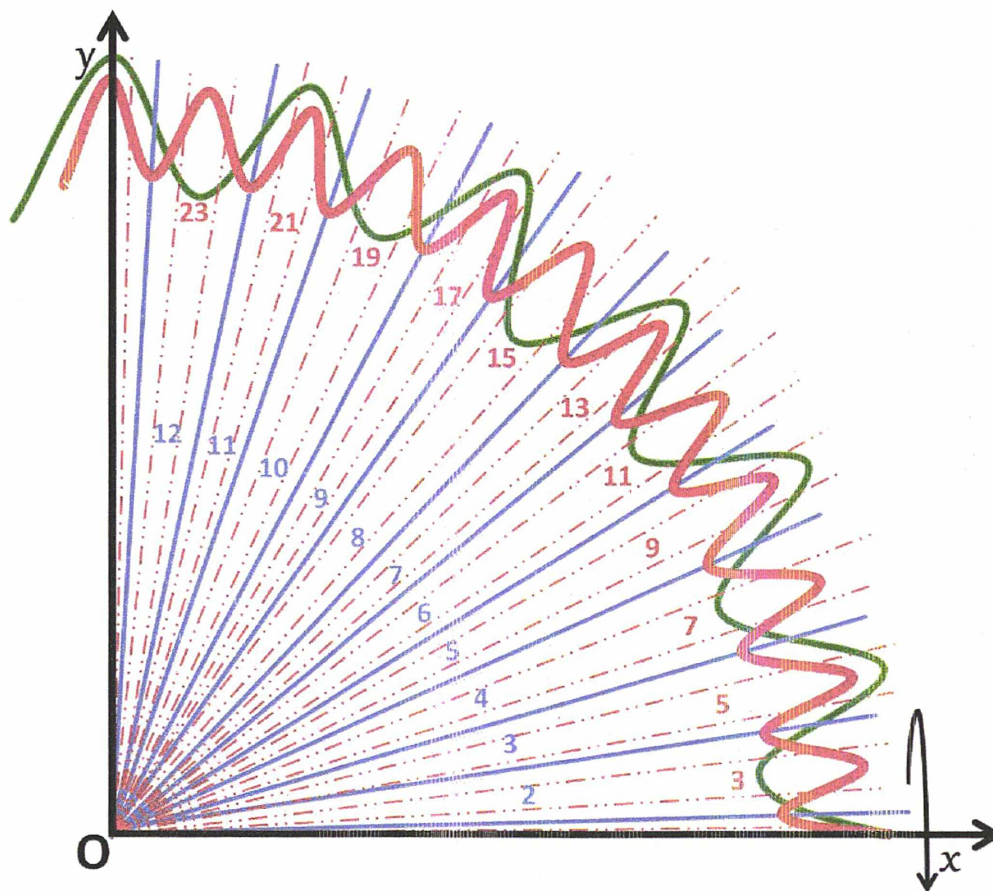


FIG. 7.27: Schéma des régions d'étude de la variation de masse pour les modes $l = 24$ et $l' = 48$.

subissent un défaut de masse. Ceci est en accord avec la Fig. 7.25, pour laquelle dans toutes les régions, la variation de masse diminue en valeur absolue. Par exemple, la région n°7 du mode $l = 24$ correspond à la région n°13 ainsi qu'à la moitié des régions n°12 et 14. Ainsi, comme la n°14 connaît un excès de masse croissant et les deux autres un défaut de masse croissant en valeur absolue, la région n°7 du mode $l = 24$, qui présentait initialement un défaut de masse, tend à le perdre du fait de l'excès de masse de la région n°13 dans le mode $l' = 48$. Ce comportement, de $t \approx 30\,000$ ans à $t \approx 70\,000$ ans, montre bien et confirme l'établissement de la perturbation de mode doublé $l' = 48$. Entre le temps $t \approx 70\,000$ ans et le temps $t \approx 140\,000$ ans, on observe une décroissance ΔM dans les régions présentant initialement un excès de masse, et une croissance de ΔM dans les régions présentant un défaut de masse, avec une inversion du signe de ΔM à $t \approx 80\,000$ ans pour les régions n°9, 10, 13 et 14, et à $t \approx 95\,000$ ans pour les régions n°8, 11, 12 et 15. On constate donc le décalage temporaire qui a été mentionné précédemment. On observe donc une oscillation entre excès de masse et défaut de masse, caractéristique de l'I.V., pour les régions définies pour un mode $l' = 2 \times l = 48$. Ceci confirme ce qui a été montré par l'analyse visuelle des simulations. L'amplitude des variations de masse est semblable à l'amplitude qu'on observe lors du premier extremum local, à $t \approx 5\,000$ ans. Ainsi, la reprise de l'I.V. due aux pertes par refroidissement du RSN est très clairement visible.

Dans ce chapitre, nous avons donc montré que les RSN en phase radiative sont propices au développement de l'instabilité de Vishniac. Alors qu'en phase de Sedov-Taylor et avec un indice adiabatique $\gamma = 5/3$, l'I.V. ne peut se développer, on voit ici que les traces des premières oscillations dues au mécanisme de Vishniac, à l'oeuvre aux premiers instants, génèrent une seconde perturbation de mode doublé par rapport à la perturbation initiale, et que cette nouvelle perturbation est croissante, tant dans son amplitude géométrique (déformation géométrique du front de choc) que dans les variations de masse qu'elle engendre. L'amplitude de ces variations de masse est comparable au maximum de celles de la perturbation initiale, ce qui rappelle le comportement des RSN en phase de Sedov-Taylor avec un indice adiabatique $\gamma = 1.1$. Ce résultat, inattendu quant au caractère doublé du mode la perturbation induite, est nouveau à notre connaissance, et suggère que les RSN en phase radiative sont en effet le siège de l'instabilité de Vishniac. Néanmoins, nos simulations ne montrent pas de croissance suffisante de l'I.V. pour aboutir à une fragmentation du front de choc du RSN.

Conclusion

Dans ce travail de thèse, nous avons étudié, analytiquement et par des simulations numériques, l'instabilité de Vishniac. Cette instabilité a dans un premier temps été proposée par E.T. Vishniac [11]. Elle a ensuite été étudiée analytiquement plus en détail par D. Ryu et E.T. Vishniac [12], par D. Kushnir, E. Waxman et D. Shvarts [13], ainsi que par J. Sanz, S.E. Bouquet et M. Murakami [36]. Ces différentes études comportent différentes hypothèses, parfois contradictoires, et n'aboutissent pas aux mêmes conclusions. Des études numériques ont également été menées, par M.M. Mac Low et M.L. Norman [19], ainsi que par C. Cavet, C. Michaut, S.E. Bouquet, F. Roy, H.C. Nguyen [14] [16] [17] [15]. Ces simulations ont étudié le comportement et l'évolution d'une perturbation géométrique de RSN dans différentes conditions, sans aboutir à une déformation conséquente du front de choc en géométrie sphérique. Ainsi, alors que l'instabilité de Vishniac est fréquemment citée pour expliquer la morphologie non sphérique des RSN, les études menées n'avaient pas pu confirmer que cette instabilité suffit à expliquer les structures filamenteuses observées dans les RSN âgés. Notre travail a consisté à améliorer la compréhension théorique du phénomène, tant dans les études analytiques que dans les simulations numériques. Nous avons également entrepris de mener des études plus réalistes, prenant mieux en compte les processus physiques à l'oeuvre dans les RSN.

Le chapitre 2 de cette thèse constitue une extension du travail analytique initial de E.T. Vishniac [11]. Dans ce premier papier, un modèle simple avait été proposé afin d'étudier l'évolution d'une perturbation géométrique dans un RSN en phase de Sedov-Taylor. Cette étude se limitait à modéliser le RSN par une coquille infiniment fine au niveau du front de choc, ne faisant intervenir l'intérieur du RSN que par l'intermédiaire de la condition de bord appliquée sur la face interne de la coquille. L'indice adiabatique γ était considéré comme tendant vers l'unité, dans le but de mimer les pertes radiatives. Nous avons donc entrepris d'étendre cette étude en prenant en compte l'épaisseur de la coquille dans ce même modèle, et en supposant l'indice adiabatique quelconque. Cette étude permet de montrer que, si en faisant tendre γ vers 1 dans la nouvelle relation de dispersion obtenue, on converge bien vers la solution de Vishniac [11], à savoir qu'il existe un domaine de longueur d'onde de la perturbation pour lequel le taux de croissance de l'instabilité est positif, le fait d'augmenter γ et de le rapprocher de la valeur $\gamma = 5/3$, correspondant au cas d'un gaz parfait monoatomique, restreint et supprime ce domaine d'instabilité. Ainsi, pour $\gamma > 1,2$, il n'existe plus de domaine de croissance de l'instabilité dans ce cadre. Cela nous a donc conduit à étudier le modèle plus perfectionné proposé par D. Ryu et E.T. Vishniac [12].

Le chapitre 3 reprend cette étude, en démontrant les hypothèses. L'utilisation du formalisme autosemblable dans les équations d'Euler permet en effet

d'étudier le comportement d'une perturbation linéaire des grandeurs hydrodynamiques. On peut se ramener à un système ne dépendant que de la grandeur autosemblable introduite, et en déduire des taux de croissance de l'instabilité. Les résultats obtenus par D. Ryu et E.T. Vishniac présentaient l'inconvénient de ne pas correspondre, pour les petits modes, aux valeurs théoriques prévues pour des valeurs particulières du mode propre introduit, mettant en doute l'intégralité de leurs solutions. Notre résolution permet quant à elle de retrouver ces valeurs, et correspond, pour les grands modes, aux relations de dispersion qui avaient été proposées, confirmant leur travail dans ce domaine de mode propre. Comme dans le modèle plus simple de la coquille fine, on a montré que, si pour des valeurs de γ proches de l'unité, il existe un domaine d'instabilité, ce n'est plus le cas lorsque $\gamma > 1.2$.

Dans ces deux études analytiques, le RSN est considéré comme étant en phase de Sedov-Taylor. Néanmoins, elles aboutissent à la conclusion que la perturbation n'est instable que si $\gamma \rightarrow 1$, ce qui correspond, en termes de répartition de matière et de structure globale du RSN, à un RSN en phase radiative. Ainsi, nous avons décidé d'étudier, grâce à l'outil numérique, le développement d'une perturbation, d'abord dans un cadre non radiatif (phase de Sedov-Taylor) afin de confirmer les résultats analytiques, puis ensuite les effets de pertes d'énergie par rayonnement sur le RSN et enfin sur l'évolution des RSN perturbés.

Le code hydrodynamique et les moyens utilisés sont présentés dans le chapitre 4. L'architecture du code HADES, les équations résolues et le schéma utilisé par la suite sont succinctement résumés. Les spécificités liées à l'utilisation du code HADES dans sa version parallélisée sont abordées, car ce travail de thèse a été le premier à utiliser ce code en version multi-processeurs. Ainsi, les particularités liées au découpage du maillage sont décrites. Nous présentons également succinctement les différentes machines sur lesquelles les simulations ont été réalisées, ainsi que les outils de post-traitement et d'analyse des simulations.

Le travail préalable à la réalisation des simulations finales constituant l'étude numérique à proprement parler de l'instabilité de Vishniac est le sujet du chapitre 5. Y sont abordés dans un premier temps les conditions initiales à introduire afin d'initialiser les simulations de RSN, ainsi que les critères à satisfaire afin de s'assurer de la convergence du schéma. On y montre l'étude qui a été réalisée concernant la résolution nécessaire à cette convergence, vérifiée à l'aide de l'isotropie, du taux de compression ou encore de la loi d'évolution autosemblable que doit satisfaire le RSN simulé. Le travail préliminaire concernant le choix des paramètres de refroidissement à introduire dans le cas de RSN en phase radiative y est également décrit, ainsi que l'analyse des effets du refroidissement sur la dynamique et les profils des grandeurs hydro-

dynamiques au sein du RSN. On y montre que, conformément à nos attentes, les pertes d'énergie par rayonnement engendrent une densification de la matière au niveau du front de choc, l'apparition d'une structure de coquille fine, la modification substantielle des profils de pression, de vitesse, de densité et de température, ainsi qu'une diminution de la vitesse d'expansion du RSN. On montre ainsi que, du point de vue de la répartition de matière, un RSN en phase radiative composé d'un gaz parfait monoatomique d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$ est similaire à un RSN en phase de Sedov-Taylor où l'indice adiabatique tend vers 1. On observe notamment une modification importante du profil de vitesse dans le RSN, avec l'apparition d'une zone interne dans laquelle le gaz est accéléré suite aux changements induits sur les gradients de pression, avec pour effet que le gaz dans cette région rejoint progressivement le front de choc. La dynamique du RSN y est étudiée et on a montré que, pour différentes formes de la fonction de refroidissement introduite, on aboutit dans chaque cas à la même loi d'évolution autosemblable pour le rayon d'expansion, de la forme : $R \propto t^{3/10}$. Ce résultat est en accord avec des simulations numériques effectuées par D.F. Cioffi, C.F. McKee et E. Bertschinger [9], qui avaient eux étudié la dynamique d'un RSN en phase radiative en prenant une fonction de refroidissement plus réaliste, basée sur des calculs de physique atomique de J.C. Raymond, D.P. Cox et B.W. Smith [30]. Il apparaît donc à l'issue de ces simulations préalables que la solution autosemblable $R \propto t^{3/10}$ possède des propriétés attractrices.

L'étude de l'évolution d'une perturbation spatiale d'un RSN en phase de Sedov-Taylor est présentée dans le chapitre 6. Ce travail diffère des travaux précédents de par la résolution des simulations effectuées, mais également de par les caractéristiques physiques introduites et étudiées. Dans les travaux précédents, les simulations étaient soit en géométrie plane [14] [17], soit en géométrie sphérique mais comportaient alors des conditions sur l'indice adiabatique afin de mimer l'effet du refroidissement sur la coquille seule du RSN [16] [15] (indice adiabatique $\gamma = 5/3$ partout, excepté dans la coquille au niveau du front de choc où $\gamma = 1, 1$). Les simulations présentées ici comportent dans tous les cas un indice adiabatique uniforme, conformément à la théorie analytique développée et analysée précédemment. Deux cas ont été présentés : le cas le plus réaliste d'un gaz d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$ correspondant à la valeur attendue dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, et le cas moins réaliste mais permettant de se rapprocher des profils de densité que l'on trouve dans la phase radiative de l'évolution des RSN, où $\gamma = 1, 1$. On a alors pu étudier les différences de comportement de la perturbation dans ces deux cas, et décrire le mécanisme de l'instabilité de Vishniac précisément, ainsi que quantifier l'évolution de la perturbation et observer les différences selon l'indice adiabatique. Dans les deux cas, on a observé le déclenchement du mécanisme de Vishniac :

- la présence caractéristique de surdensités dans les vallées, et leur migration progressive vers les plaines ;
- l'oscillation entre vallées et plaines ;
- la variation de masse de ces différentes régions, les vallées présentant des excès de masse et les collines des défauts de masse ;
- l'apparition progressive de structures complexes à l'intérieur du RSN constituant les traces de l'instabilité de Vishniac sur l'écoulement.

Néanmoins, dans le premier cas, on a observé une diminution de l'amplitude géométrique de la perturbation, aboutissant à un RSN redevenu sphérique après environ 20 000 ans, tandis que dans le second cas, on a pu constater que la perturbation ne subissait pas d'atténuation, et ce jusqu'à des temps non-atteints dans les études précédentes, à savoir environ 200 000 ans. Dans ce dernier cas, l'étude de la variation de masse par région confirme que le mécanisme de Vishniac est toujours à l'oeuvre à des temps longs, et que la période d'oscillation évolue conformément aux prédictions théoriques : en réalité, ce n'est pas une période d'oscillation, mais une pseudo-période qui croît avec le temps. En effet, la théorie prédit une évolution des perturbations δq en $\delta q \propto t^s$, où s est un nombre complexe, ce qui aboutit à la forme, en décomposant s en sa partie réelle s_r et sa partie imaginaire s_i : $\delta q \propto t^{s_r} \times \cos [s_i \ln (\Omega t)]$. L'amplitude de la variation de masse est quasiment constante, voire légèrement croissante dans le cas $\gamma = 1.1$. Il est toutefois important de noter que du fait de la forme sinusoïdale de la perturbation introduite, une comparaison rigoureuse des taux de croissance avec la théorie analytique est impossible, car celle-ci repose sur des harmoniques sphériques. Toutefois, cette étude et la comparaison entre les deux cas confirme bien qu'un indice adiabatique faible favorise le développement de l'instabilité de Vishniac. Néanmoins, nous n'avons pas observé de filamentation du RSN.

Ainsi, après avoir montré qu'un indice adiabatique faible, engendrant une structure en densité proche de celle attendue dans la phase radiative, favorisait l'instabilité de Vishniac, nous avons entrepris dans le chapitre 7 l'étude de l'évolution d'un RSN perturbé d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$ subissant des pertes d'énergie par rayonnement. Nous avons alors introduit la fonction de refroidissement définie dans le chapitre 5. Nous avons alors observé que, dans les premiers temps d'évolution (jusqu'à $t \approx 15\,000$ ans), le refroidissement n'ayant pas encore eu le temps d'agir sur la morphologie du RSN, le mécanisme de Vishniac se déclenche et évolue de manière similaire au cas sans rayonnement en phase de Sedov-Taylor pour $\gamma = 5/3$: on observe toutes les caractéristiques de l'instabilité de Vishniac récapitulées précédemment, et l'atténuation de la perturbation. Ainsi, on retrouve un RSN quasi-sphérique

à $t \approx 25\,000$ ans, dans lequel des traces de l'instabilité de Vishniac persistent sous la forme de structures complexes. Progressivement, les pertes radiatives modifient la structure du RSN, et le gaz de la région interne refroidie est accéléré. Les traces de l'instabilité de Vishniac initiale sont alors ramenées vers le front de choc, et génèrent lors de leur arrivée sur la coquille une nouvelle perturbation. Cette perturbation induite présente un mode l' qui est doublé par rapport au mode initial l . Cela s'explique par le fait que les traces de l'instabilité de Vishniac sont générées essentiellement derrière les plaines, et comme il y a oscillation des plaines et des vallées, il y en a donc deux par longueur d'onde. Nous avons décrit l'évolution de cette perturbation : son amplitude est croissante, tant spatialement que dans l'analyse des variations de masse par région qui montre clairement un comportement similaire à celui observé dans le cas de la phase de Sedov-Taylor. Ainsi, l'instabilité de Vishniac se développe à des temps longs dans les RSN en phase radiative d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$, contrairement au comportement dans la phase de Sedov-Taylor. Néanmoins, nous n'avons, ici aussi, pas observé de fragmentation ou de filamentation du RSN.

Ce travail de thèse a donc permis d'étendre la théorie initiale de Vishniac du modèle de coquille fine, et de préciser et valider les relations de dispersion dans le modèle comportant l'intégralité de l'écoulement hydrodynamique. Les simulations numériques ont permis de conforter ces résultats analytiques, en montrant que l'instabilité de Vishniac peut se développer dans un RSN en phase de Sedov-Taylor d'indice adiabatique faible, ce qui n'est pas le cas pour un RSN d'indice adiabatique élevé. Nous avons montré, pour la première fois à notre connaissance, qu'un RSN d'indice adiabatique $\gamma = 1.1$ voit se développer l'instabilité de Vishniac sur des temps longs (200 000 ans). L'introduction de pertes radiatives par l'intermédiaire d'une fonction de refroidissement a permis de décrire l'évolution de la morphologie d'un RSN en phase radiative, et a permis d'aboutir à une loi d'évolution autosimilaire du rayon du RSN en $R \propto t^{3/10}$ pour différentes formes de la fonction de refroidissement. Enfin, l'étude de l'instabilité de Vishniac dans un RSN d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$ en phase radiative a montré que les pertes radiatives favorisent le développement de l'instabilité de Vishniac. Plus précisément, les pertes radiatives génèrent, par l'intermédiaire des traces de l'instabilité de Vishniac initiale, une nouvelle perturbation de mode doublé, laquelle se développe alors sur des temps longs, ce qui n'avait jamais été montré précédemment à notre connaissance. Même si nous n'avons pas observé de fragmentation ou de filamentation jusqu'à présent, cette thèse offre des perspectives plus favorables quant au rôle que peut jouer l'instabilité de Vishniac dans les RSN. En effet, la conclusion essentielle de ce travail est que l'instabilité de Vishniac peut se développer, et croître, sur des temps longs, et avec des indices adiabatiques réalistes en phase radiative.

Ce travail offre différentes perspectives pour de futures études : il serait intéressant d'introduire une fonction de refroidissement plus réaliste afin d'étendre ces résultats. Toutefois, il nous semble fortement probable que la forme du refroidissement n'influe que peu sur les résultats obtenus, car quelque soit la forme de la fonction de refroidissement sur la structure du RSN, et notamment concernant l'accélération du gaz dans la région interne refroidie qui est cruciale quant à la génération de la seconde perturbation, le profil de pression devrait être similaire (diminution de la pression dans la zone refroidie), et donc assurer la présence de gradients de pression accélérant la matière interne. D'autre part, introduire des perturbations en harmoniques sphériques faciliterait la comparaison entre théorie et simulations. Cela peut être fait avec le code à notre disposition, à condition de choisir $m = 0$ dans les harmoniques sphériques Y_{lm} . Nous avons d'ailleurs commencé à le réaliser, mais la forme induite par les harmoniques sphériques implique une amplitude spatiale de la perturbation variable selon l'angle, et pose donc des problèmes quant au caractère linéaire de la perturbation introduite, et complique l'analyse de l'évolution de la perturbation, car celle-ci devient faible en s'écartant de l'axe (Ox). En effet, l'amplitude de la perturbation initiale doit être faible devant la longueur d'onde de la perturbation, et comme cette amplitude est, dans le cas des harmoniques sphériques, dépendante de la distance à l'axe, cette amplitude est soit trop grande à proximité de l'axe, et donc non-linéaire, soit trop petite lorsque l'on s'éloigne de l'axe, et il devient alors très difficile d'en analyser précisément l'évolution. Une meilleure résolution, et donc un accès à des calculateurs plus puissants, pourrait s'avérer nécessaire pour une telle étude. L'utilisation d'un code 3D permettrait d'étudier le développement de l'instabilité de Vishniac dans des conditions identiques à la théorie, et permettrait notamment de vérifier un point surprenant de cette théorie : l'indépendance de l'instabilité de Vishniac au nombre m intervenant dans la perturbation en harmoniques sphériques. Cependant, un tel code 3D nécessite des moyens de calcul conséquents dans le cadre de l'étude de l'instabilité de Vishniac, si l'on souhaite conserver une résolution permettant de l'étudier correctement. Enfin, une étude analytique de l'instabilité de Vishniac en phase radiative permettrait de confronter les résultats numériques obtenus ici à des modèles théoriques. Toutefois, de tels modèles s'avèrent difficiles à réaliser, car le formalisme autosemblable utilisé jusqu'à présent dans les études théoriques est compliqué à mettre en oeuvre lorsqu'on introduit une fonction de refroidissement.

Appendices

Annexe A

Phases d'évolution des restes de supernova

Il existe différentes façons de déterminer les lois d'évolution indiquées dans l'introduction. La plus simple, permettant de retrouver la phase de Sedov-Taylor, est l'analyse dimensionnelle. On peut également retrouver les différentes phases par un modèle simple.

A.1 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle (AD) est une méthode en physique tendant à simplifier au maximum un problème donné afin de trouver des solutions par rapport aux grandeurs physiques pertinentes sans avoir à écrire un modèle avec des équations différentielles. Cette approche peut s'avérer très efficace et rapide et s'appuie sur le fait que les grandeurs physiques ont des dimensions bien définies, s'exprimant à l'aide de dimensions fondamentales qui se combinent entre elles pour former de nouvelles grandeurs. Ces dimensions fondamentales sont : la longueur, la masse, le temps, l'intensité électrique, la température et l'intensité lumineuse. Le principe de l'AD repose sur le fait qu'on ne peut comparer entre elles que des grandeurs de même dimension. Cette assertion repose sur le théorème de Vaschy-Buckingham, aussi appelé théorème Pi. Ce théorème stipule que dans un problème de physique faisant intervenir n grandeurs indépendantes dont les dimensions s'expriment à l'aide de k unités physiques fondamentales, on peut construire $n - k$ nombres adimensionnés indépendants décrivant le phénomène physique étudié.

Le problème physique ici considéré est le problème de l'expansion d'une onde de choc sphérique à la suite d'une explosion instantanée et ponctuelle (la supernova) délivrant une énergie E dans un milieu de densité uniforme ρ_{MIS} . L'objectif est ici d'obtenir le rayon $R(t)$ de l'onde de choc donné par l'équation (1.2). Les dimensions des grandeurs que l'on vient de lister sont :

- $\rho_{MIS} : kg.m^{-3} \rightarrow [\rho_{MIS}] = ML^{-3}$
- $E : kg.m^2.s^{-2} \rightarrow [E] = ML^2T^{-2}$
- $t : s \rightarrow [t] = T$
- $R : m \rightarrow [R] = L$

où M désigne la dimension d'une masse, L la dimension d'une longueur, T la dimension d'un temps. On a donc quatre grandeurs, qui font intervenir trois dimensions fondamentales. Ainsi, on peut construire un seul nombre adimensionné, nommé N_1 , régissant l'évolution de l'onde de choc. On souhaite donc construire ce nombre adimensionné en utilisant un produit de puissances des quantités E , ρ_{MIS} , t et R . Soient α , β , δ et κ les exposants respectifs attribués à ces grandeurs. Ainsi :

$$[N_1] \equiv [E^\alpha \rho^\beta t^\delta R^\kappa] = M^{\alpha+\beta} L^{2\alpha-3\beta+\kappa} T^{-2\alpha+\delta} \quad (A.1)$$

où dans le membre de droite les exposants de M , L et T doivent être nuls. Cela impose donc :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha - 3\beta + \kappa &= 0 \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$-2\alpha + \delta = 0 \quad (A.3)$$

En résolvant ce système algébrique linéaire, on obtient :

$$N_1 = \frac{Et^2}{\rho_{MIS} R^5} \quad (A.4)$$

et il vient :

$$R(t) \propto \left(\frac{E}{\rho_{MIS}} \right)^{1/5} t^{2/5} \quad (A.5)$$

qui est bien la loi de Sedov-Taylor.

A.2 Modèle de la coquille

On peut également utiliser un modèle mécanique simplifié pour étudier la dynamique du RSN plus en détail. On trouve dans la littérature des descriptions des différentes phases de l'évolution d'un RSN à l'aide de modèles simples indépendants les uns des autres [29]. On va présenter ici un modèle

unique permettant de retrouver les différentes phases. Lors du phénomène de supernova, on suppose que la matière est éjectée de façon isotrope, et forme une coquille sphérique dont le rayon croît avec le temps. Néanmoins, la vitesse d'expansion n'est pas constante car la quantité de masse balayée par l'onde de choc (onde de souffle) est de plus en plus grande. On peut distinguer trois phases :

- Phase balistique, où le rayon dépend alors linéairement du temps : $R(t) \propto t$
- Phase adiabatique, ou phase de Sedov-Taylor dont l'évolution temporelle vient d'être montrée grâce à l'A.D. : $R(t) \propto t^{2/5}$.
- Phase isotherme : ici, nous ne parlerons pas des exposants $2/7$ et $3/10$ mentionnées dans le paragraphe 1.1 (voir toutefois la fin de cette annexe), et nous nous limitons à la loi d'évolution $R(t) \propto t^{1/4}$

Nous décrivons ici le RSN comme une coquille sphérique de rayon $R(t)$ et de masse $M(t)$ soumise à une pression intérieure $P(t)$ évoluant dans un MIS de densité constante ρ_{MIS} (voir Fig. A.1). Le RSN est donc assimilé à une sphère creuse soumise à la pression thermique de sa région intérieure très chaude, et accréant de la matière provenant du milieu extérieur. Ainsi, sa masse augmente au cours du temps, et son mouvement est freiné par le transfert de quantité de mouvement du RSN à la partie du MIS mise en mouvement.

Les équations utilisées sont l'équation fondamentale de la dynamique et celle de la conservation de la masse. La pression du MIS est négligée, car très faible devant celle de la région interne à la coquille. Les équations sont :

$$\frac{dM(t)}{dt} = 4\pi R^2(t) \rho_{MIS} v(t) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d}{dt} [M(t) v(t)] = 4\pi R^2(t) P(t) \quad (\text{A.7})$$

où $v = dR/dt$ est la vitesse de propagation de la coquille. L'équation (A.6) se résout immédiatement une fois mise sous la forme $dM = 4\pi R^2(t) \rho_{MIS} dR$:

$$M(R) = M_0 + 4\pi \rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3, \quad (\text{A.8})$$

où M_0 est la masse initiale éjectée par la supernova de rayon R_0 , à l'origine de la propagation de la coquille dans le MIS, et où la variable indépendante t a été remplacée par R dans M . À l'aide de ce résultat, on peut estimer la durée de la phase balistique, qui perdure tant que la masse initiale est grande devant la masse totale du RSN. Cela correspond à l'inégalité :

$$M_0 > 4\pi\rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3 . \quad (\text{A.9})$$

La taille initiale de la supernova est très vite négligeable devant le rayon d'expansion du RSN. Ainsi, on a :

$$R < \left(\frac{M_0}{4\pi\rho_{MIS}} \right)^{1/3} . \quad (\text{A.10})$$

On sait qu'en phase balistique (montré dans la suite du calcul), le rayon d'expansion R est proportionnel au temps d'expansion. Ainsi, on a : $R = v_{exp} \times t$ où v_{exp} est la vitesse d'expansion en phase balistique, que l'on sait constante. On obtient alors :

$$t < \left(\frac{M_0}{4\pi\rho_{MIS}} \right)^{1/3} / v_{exp} . \quad (\text{A.11})$$

En prenant un milieu interstellaire de densité $10^{-20} \text{ kg.m}^{-3}$, une vitesse d'expansion de $10\,000 \text{ km.s}^{-1}$, et une masse initiale de 10^{31} kg soit $5 M_\odot$, on aboutit à un temps caractéristique de l'ordre de 700 ans.

En injectant (A.8) dans l'équation (A.7), on obtient :

$$M(R) \frac{d^2 R}{dt^2} = 4\pi R^2 \left[P(t) - \rho_{MIS} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] . \quad (\text{A.12})$$

On remarque que cette équation fait apparaître dans son membre de gauche le terme "classique", ma , où a est l'accélération de la coquille, tandis que dans le membre de droite figurent les forces s'exerçant sur elle. Ces dernières sont :

- La force due à la pression thermique dans la région interne de la sphère, très chaude
- La force due à la pression dite "pression bélière", notée $P_{RAM}(t) \equiv \rho_{MIS} [v(t)]^2$, provenant de l'accrétion de masse issue du MIS et au transfert de quantité de mouvement que cette dernière subit lorsqu'elle rencontre la coquille.

L'équation (A.12) peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\pi R^2 \rho_{MIS}}{M_0 + 4\pi\rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \\ = \frac{4\pi R^2}{M_0 + 4\pi\rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3} P(t) . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Cette équation différentielle ordinaire (EDO) est d'ordre 2 et hautement non-linéaire. De plus, elle est non-autonome, c'est-à-dire, la variable indépendante t est explicitement dans $P(t)$. On ne sait a priori pas la résoudre. Néanmoins, on peut faire comme si elle était autonome : sauf au travers de R , les coefficients des dérivées d^2R/dt^2 et dR/dt ne dépendent pas explicitement du temps et pour la pression intérieure $P(t)$, on va transmettre la dépendance en t en une dépendance en R , $P(R)$. La propriété d'une EDO autonome est qu'on peut toujours réduire son ordre différentiel d'une unité. Pour cela, on pose :

$$w = \frac{d}{dt}R(t) . \quad (\text{A.14})$$

On peut donc écrire :

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = \frac{dw}{dt} = \frac{dR}{dt} \frac{dw}{dR} = w \frac{dw}{dR} = \frac{1}{2} \frac{d}{dR} (w^2) . \quad (\text{A.15})$$

La variable dépendante $R(t)$ et la variable indépendante t deviennent respectivement w^2 et R puisque (A.13) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dR} (w^2) + \frac{4\pi R^2 \rho_{MIS}}{M_0 + 4\pi \rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3} w^2 \\ = \frac{4\pi R^2}{M_0 + 4\pi \rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3} P(R) . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Le temps et la vitesse dR/dt ont disparu comme variables explicites et la pression $P(t)$, dont l'expression en fonction de t est non encore spécifiée a été remplacée par une fonction arbitraire de R , $P(R)$. L'EDO (A.16) est du premier ordre et les variables w^2 et R entrent en jeu. De plus, cette équation possède la remarquable propriété d'être linéarisable en posant :

$$u = w^2 \quad (\text{A.17})$$

et l'équation (A.16) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dR} + \frac{8\pi \rho_{MIS} R^2}{M_0 + 4\pi \rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3} u \\ = \frac{8\pi R^2}{M_0 + 4\pi \rho_{MIS} (R^3 - R_0^3) / 3} P(R) . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Cette équation a pour solution :

$$u(R) = \left(\frac{M_0}{M_0 + 4\pi\rho_{MIS}(R^3 - R_0^3)/3} \right)^2 \quad (\text{A.19})$$

$$\times \left\{ A + \frac{8\pi}{M_0} \int_{R_0}^R R' P(R') \left[1 + 4\pi \frac{(R'^3 - R_0^3)}{(3M_0)} \right] dR' \right\}$$

où A est le carré de la vitesse à l'instant initial. D'après (A.14) et (A.17), on peut maintenant exprimer formellement une relation dynamique entre le rayon R et le temps t , c'est-à-dire qu'on intègre analytiquement le système différentiel formé des EDO (A.6) et (A.7) :

$$t = \int_{R_0}^R dR'' \quad (\text{A.20})$$

$$\times \frac{\left[1 + 4\pi\rho_{MIS} (R''^3 - R_0^3) / (3M_0) \right]}{\sqrt{A + (8\pi/M_0) \int_{R_0}^{R''} R'^2 P(R') \left[1 + 4\pi\rho_{MIS} (R'^3 - R_0^3) / (3M_0) \right] dR'}}$$

La quadrature de droite n'est pas réalisable pour une pression $P(R)$ arbitraire. Néanmoins, nous n'avons pas besoin de son expression exacte pour obtenir les lois de $R(t)$ recherchées. L'équation (A.19) va nous permettre de les retrouver.

- En phase balistique, la masse accrétée est négligeable devant la masse initiale éjectée M_0 . Ainsi, l'équation (A.19) devient simplement $u \approx A$, ce qui donne $dR = \sqrt{A} dt$, qui correspond à une loi de type $R(t) \propto t$. Aussi, nous avons $v_{exp} = \sqrt{A}$.
- En phase adiabatique, avec une pression extérieure négligeable, l'énergie interne U est conservée. Le gaz est assimilé à un gaz parfait, ce qui permet d'écrire :

$$P = \frac{nk_B T}{V} = (\gamma - 1) \frac{U}{V} \quad (\text{A.21})$$

où k_B est la constante de Boltzmann, et n , T et V sont respectivement le nombre de particules, la température et le volume du gaz, et γ est l'indice adiabatique, défini comme étant le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants. Comme U est conservée, on a :

$$P(R) \propto \frac{P_0 V_0}{R^3} \propto R^{-3} \quad (\text{A.22})$$

où P_0 et V_0 sont la pression et le volume à l'instant de référence du début de la phase de Sedov-Taylor. Cela permet de remplacer P dans l'équation (A.19) par (A.22). De plus, en considérant que la masse accrétée est devenue grande devant la masse initiale M_0 , on obtient :

$$u(R) = \left(\frac{M_0}{4\pi\rho_{MIS}(R^3 - R_0^3)/3} \right)^2 \quad (\text{A.23})$$

$$\times \left[A + \frac{1}{M_0^2} \frac{32}{3} \pi^2 \rho_{MIS} P_0 V_0 \int_{R'_0}^R R'^2 dR' \right]$$

où R'_0 est le rayon de la coquille pour lequel on entre dans le domaine de validité de l'approximation. L'équation (A.23) devient alors, après intégration (on a négligé R_0 et R'_0 devant R) :

$$u(R) = \left(\frac{M_0}{4\pi\rho_{MIS}R^3/3} \right)^2 \quad (\text{A.24})$$

$$\times \left[A + \frac{8\pi}{M_0^2} P_0 V_0 M(t) \right].$$

Dans cette équation, $M_0 \times A$ représente l'énergie cinétique initiale, et est donc comparable à $P_0 V_0$. Comme $M(t) \gg M_0$, on a la relation $M_0 A \ll P_0 V_0 [M(t)/M_0]$. Ainsi, A est petit devant $P_0 V_0 / M_0$ quand R devient grand, et on obtient :

$$u(R) = \frac{6\pi P_0 V_0 R^3}{\rho_{MIS} R^6} \propto R^{-3}. \quad (\text{A.25})$$

En utilisant les changements de variables (A.14) et (A.17), on aboutit à la conclusion qu'en phase adiabatique, le rayon obéit à la loi $R(t) \propto t^{2/5}$ comme indiqué par la loi de Sedov-Taylor. On note que γ n'apparaît pas, ainsi qu'on devait s'y attendre.

- En phase isotherme, la pression thermique devient si faible qu'elle ne régit plus l'évolution du RSN. La masse accrétée est toujours très grande devant M_0 , et l'équation (A.19) devient :

$$\frac{du}{dR} + \frac{6}{R}u = 0 \quad (\text{A.26})$$

qui admet pour solution :

$$u(R) = \frac{B}{R^6} \tag{A.27}$$

où B est une constante. Il vient alors immédiatement $R(t) \propto t^{1/4}$, ce qui est conforme à nos attentes.

Il est intéressant de noter qu'il existe des transitions entre ces phases. Dans la littérature est évoquée une phase intermédiaire entre la phase de Sedov-Taylor et la phase isotherme, appelée phase PDTS (Pressure Driven Thin Shell). Durant cette phase, le RSN est encore poussé de l'intérieur par une pression thermique importante de l'intérieur chaud, mais les pertes de rayonnement ont commencé à affecter la dynamique du RNS. Il convient alors d'utiliser un bilan d'énergie et de modéliser les pertes d'énergie, afin de déterminer le rapport entre le temps dynamique t_{dyn} et le temps radiatif t_{rad} . Cela permet d'aboutir à une loi en $R(t) \propto t^{2/7}$.

Annexe B

Dérivation temporelle d'intégrale aux bornes présentant une dépendance en temps

Calculons la dérivée par rapport au temps d'une intégrale dont les bornes dépendent du temps. Soit $f(t, r)$ une fonction de deux variables.

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{R_1(t+\Delta t)}^{R_2(t+\Delta t)} f(t, r) dr - \int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr}{\Delta t} \quad (\text{B.1})$$

or $R(t + \Delta t) = R(t) + \Delta t \dot{R}(t) = R(t) + \Delta R$ et $f(t + \Delta t, r) = f(t, r) + \partial_t f(t, r) \Delta t$. On a ici noté \dot{R} la dérivée par rapport au temps de R : $\dot{R} = dR/dt$. Cela donne donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{R_1(t)+\Delta R_1}^{R_2(t)+\Delta R_2} [f(t, r) + \partial_t f(t, r) \Delta t] dr}{\Delta R} \\ &\quad - \frac{\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{R_1(t)+\Delta R_1}^{R_2(t)+\Delta R_2} f(t, r) dr - \int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr}{\Delta t} \\ &\quad + \int_{R_1(t)+\Delta R_1}^{R_2(t)+\Delta R_2} \partial_t f(t, r) dr \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{R_1(t)+\Delta R_1}^{R_2(t)+\Delta R_2} f(t, r) dr - \int_{R_1(t)}^{R_1(t)+\Delta R_1} f(t, r) dr}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{\Delta t \int_{R_1(t)+\Delta R_1}^{R_2(t)+\Delta R_2} \partial_t f(t, r) dr}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t, R_2) \dot{R}_2 - f(t, R_1) \dot{R}_1}{\Delta t} \\ &\quad + \int_{R_1(t)+\Delta R_1}^{R_2(t)+\Delta R_2} \partial_t f(t, r) dr . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{R_1(t)}^{R_2(t)} f(t, r) dr \right] &= f(t, R_2) \dot{R}_2 - f(t, R_1) \dot{R}_1 \\ &\quad + \int_{R_1(t)}^{R_2(t)} \partial_t f(t, r) dr \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dans le cas où la fonction sous f sous l'intégrale dépend du temps et de la coordonnée radiale, mais aussi des coordonnées angulaires, la formule B.6 devient :

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\int_{R_1(t, \theta, \phi)}^{R_2(t, \theta, \phi)} f(t, r, \theta, \phi) dr \right] &= f(t, R_2, \theta, \phi) \dot{R}_2 \\ &\quad - f(t, R_1, \theta, \phi) \dot{R}_1 + \int_{R_1(t, \theta, \phi)}^{R_2(t, \theta, \phi)} \partial_t f(t, r, \theta, \phi) dr . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Annexe C

Equation différentielle ordinaire autonome

Dans cette annexe, nous définissons et présentons certaines propriétés permettant la résolution des EDO autonomes, notamment le fait qu'une EDO autonome d'ordre n peut être transformée en une EDO d'ordre $n - 1$, c'est-à-dire qu'elle s'intègre une fois. En particulier, dans le cas d'une EDO autonome de premier ordre, on peut obtenir sa solution puisqu'on peut alors la ramener à une EDO d'ordre 0, donc une relation algébrique. Le cas des EDP autonomes n'est pas ici abordé, car il est bien plus complexe. De plus, on utilise les propriétés des équations différentielles autonomes dans le cadre du chapitre 2 dans lequel on rencontre une EDO autonome.

Afin de montrer la caractéristique énoncée ci-dessus, considérons une EDO de second ordre tout à fait générale :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) \quad (\text{C.1})$$

où f est une fonction quelconque. La variable dépendante est y , et x est la variable indépendante. On dit que l'EDO de second ordre (C.1) est autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement de x , soit $\partial f/\partial x = 0$. Du coup, (C.1) devient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) . \quad (\text{C.2})$$

En posant $z \equiv dy/dx$ la nouvelle variable dépendante, (C.2) donne :

$$\frac{dz}{dx} = f(z, y) . \quad (\text{C.3})$$

Toutefois, cette forme n'est pas assez élaborée car elle comporte les variables x , y et z . Pour la rendre consistante, on écrit dz/dx sous la forme $(dz/dy)(dy/dx)$. Comme $dy/dx = z$, (C.3) devient :

$$z \frac{dz}{dy} = f(z, y) . \quad (\text{C.4})$$

Enfin, en posant $Z = z^2$, on aboutit à :

$$\frac{dZ}{dy} = F(Z, y) \quad (\text{C.5})$$

où

$$F(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} f(\sqrt{\alpha}, \beta) . \quad (\text{C.6})$$

On a donc une EDO de premier ordre ($n=1$), mais elle n'est pas autonome puisque F dépend de y qui est maintenant devenue la variable indépendante. Néanmoins, comme (C.5) est du premier ordre, on a donc intégré formellement une fois l'équation initiale du second ordre (C.1). Enfin, si (C.5) est reconnue comme intégrable, on obtient sa solution $Z_0(y)$ puis d'après

$$Z \equiv \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (\text{C.7})$$

on arrive à la quadrature :

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{Z_0(y)}} \quad (\text{C.8})$$

soit

$$x - x_0 = \text{int} \frac{dy}{\sqrt{Z_0(y)}} \equiv Q(y) + Q_0 \quad (\text{C.9})$$

où x_0 et Q_0 sont deux constantes arbitraires (car $n = 2$) et $Q(y)$ est la primitive de la fonction $1/\sqrt{Z_0(y)}$. L'équation (C.9) donne y en fonction de x soit la solution sous forme implicite de l'équation autonome initiale (C.1).

Annexe D

Calcul des paramètres introduits pour l'étude de stabilité de la coquille

D.1 Paramètre β

Lorsque l'on calcule la relation de dispersion dans le cadre du modèle de la coquille, on introduit un paramètre β (paragraphe 2.1) qui correspond au rapport entre la pression sur la face interne de la coquille P_i et la pression bélier $\rho_{MIS}V_0^2$ subie lors de la propagation dans le MIS. Ce paramètre est défini par :

$$\beta = \frac{P_i}{\rho_{MIS}V_0^2}. \quad (D.1)$$

Nous l'introduisons suite au calcul de E.T. Vishniac [11]. On peut le calculer, en se basant sur l'équation (2.16), dans laquelle on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\frac{dV_0}{dt} = -\frac{\rho_{MIS}V_0^2 - \frac{\gamma+1}{2}P_i}{\sigma_0}. \quad (D.2)$$

Selon Vishniac, en utilisant le fait que $R_0 \propto t^M$, et en introduisant β à la place de P_i , on obtient à partir de (D.2)

$$M(M-1)\frac{R_0}{t^2} = -\frac{\rho_{MIS}}{\sigma_0}M^2\left(\frac{R_0}{t}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\beta\right). \quad (D.3)$$

Finalement, comme $\sigma_0 = \rho_{MIS}R_0/3$, on obtient la valeur de β :

$$\beta = \frac{2}{\gamma+1}\frac{4-1/M}{3}. \quad (D.4)$$

Si on fait $\gamma = 1$, on retrouve la valeur de β utilisée par E.T. Vishniac [?] et que nous avons employée dans le paragraphe 2.3.1

D.2 Variation temporelle de la température et paramètre E_0

Le paramètre E_0 introduit est un paramètre qui apparaît naturellement lorsqu'on cherche à calculer la vitesse du son. En effet, celle-ci, notée c_s , peut être définie par :

$$c_s^2 = \gamma p / \rho = \gamma k_B T / m \quad (\text{D.5})$$

où k_B est la constante de Boltzmann et m est la masse moyenne par particule, car on a supposé un gaz parfait. On suppose également que la vitesse du son est homogène dans la coquille, ce qui équivaut à dire que la température l'est aussi. Cela peut se justifier en supposant que le temps d'homogénéisation de la température du gaz à l'intérieur de la coquille fine est très court devant le temps caractéristique dynamique des phénomènes mécaniques. Ainsi, pour calculer le terme c_s , il suffit de le connaître au front de choc. Utilisons les relations de Rankine-Hugoniot suivantes :

$$p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_{MIS} V_s^2 \quad (\text{D.6})$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_{MIS} . \quad (\text{D.7})$$

On a donc :

$$\frac{c_s^2}{\gamma} = E_0 \left[\frac{R_0(t)}{t} \right]^2 \quad (\text{D.8})$$

où

$$E_0 = \frac{2M^2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} . \quad (\text{D.9})$$

En utilisant ces deux équations dans (D.5), on trouve immédiatement la variation temporelle de T :

$$T(t) \propto t^{2(M-1)} . \quad (\text{D.10})$$

Annexe E

Relations de Rankine-Hugoniot

E.1 Relations de Rankine-Hugoniot en choc plan

On considère un choc plan se propageant dans un fluide à la vitesse D (on entend par choc plan une onde de choc de surface plane, dont la normale à la surface est colinéaire à la vitesse \vec{D}). On écrit la pression P , la densité ρ , l'enthalpie spécifique h , l'énergie spécifique e , la vitesse dans le référentiel fixe v et celle dans le référentiel du choc V , indicées par 1 en amont du choc et par 2 en aval du choc (voir figure E.1). En écrivant la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie (ou de l'enthalpie), on établit les relations de Rankine-Hugoniot reliant les grandeurs en amont du choc à celles en aval. Pour cela, on considère un petit volume de masse m passant à travers le choc pendant un temps dt . En supposant que le gaz est un gaz parfait d'indice adiabatique γ , les équations dans le référentiel du choc sont les suivantes :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (\text{E.1})$$

$$\rho_2 V_2^2 + P_2 = \rho_1 V_1^2 + P_1 \quad (\text{E.2})$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} . \quad (\text{E.3})$$

L'équation (E.1) est issue de la conservation de la masse, (E.2) de la conservation de l'impulsion (la différence d'impulsion étant égale à la somme des forces que multiplie d'intervalle dt), et (E.3) de l'enthalpie. Elles sont ici écrites dans le référentiel du choc. Dans le référentiel fixe, on a respectivement :

$$\rho_1 D = \rho_2 (D - v_2) \quad (\text{E.4})$$

$$P_2 = P_1 + \rho_1 D v_2 \quad (\text{E.5})$$

$$h_2 = h_1 + D v_2 - \frac{v_2^2}{2} . \quad (\text{E.6})$$

Comme le gaz est supposé parfait, on a la relation :

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P V . \quad (\text{E.7})$$

En substituant les différentes variables de ces équations, on se ramène à un polynôme du second degré sur la vitesse par exemple. La résolution de cette équation permet de déterminer les transformations subies par la matière lorsqu'elle passe à travers le choc :

$$\rho_2 = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \rho_1 \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1 \quad (\text{E.8})$$

$$P_2 = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) P_1 \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{E.9})$$

$$V_2 = -\frac{2D}{(\gamma + 1) M^2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} D \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} D \quad (\text{E.10})$$

où $M = D/c_1$ est le nombre de Mach, c_1 étant la vitesse du son dans le milieu 1. Le passage à la limite $M \rightarrow +\infty$ correspond à la limite de choc fort. On note C le taux de compression, défini par le rapport suivant :

$$C \equiv \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} . \quad (\text{E.11})$$

Ces relations peuvent également être obtenues dans le cas de deux milieux d'indice adiabatique différents. Néanmoins, la quadrature est alors bien moins élégante et conduit aux relations suivantes :

$$V_2 = V_1 \left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2 + 1) M^2 \gamma_1} + \frac{\gamma_2 - \sqrt{\Delta}}{\gamma_1} \right] \quad (\text{E.12})$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma_2 + 1) M^2}{(1 + \gamma_1 M^2) \gamma_2 / \gamma_1 - M^2 \sqrt{\Delta}} \quad (\text{E.13})$$

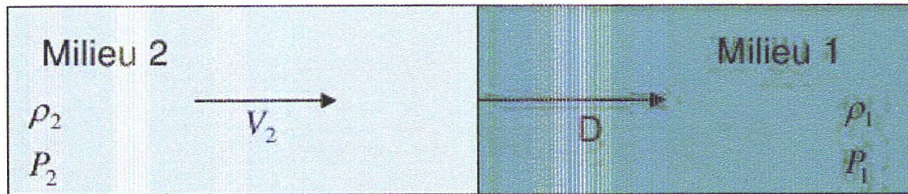
$$P_2 = \frac{P_1}{\gamma_2 + 1} \left[\gamma_2 + 1 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} + \gamma_2 M^2 (1 + \sqrt{\Delta}) \right] \quad (\text{E.14})$$

où

$$\Delta = 1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 M^4} + 2 \frac{1 - \gamma_2^2 / \gamma_1}{(\gamma_1 - 1) M^2}. \quad (\text{E.15})$$

Dans la limite du choc fort, on retrouve les mêmes relations où l'indice apparaissant est l'indice du milieu choqué.

Référentiel fixe



Référentiel du choc

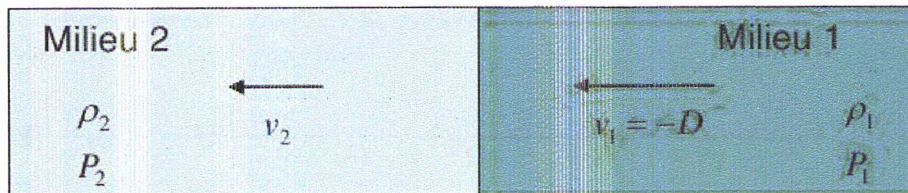


FIG. E.1: Schéma du système étudié

E.2 Relations de Rankine-Hugoniot en choc oblique

Le principe est le même dans le calcul des relations de Rankine-Hugoniot en choc oblique. Néanmoins, la conservation de la quantité de mouvement

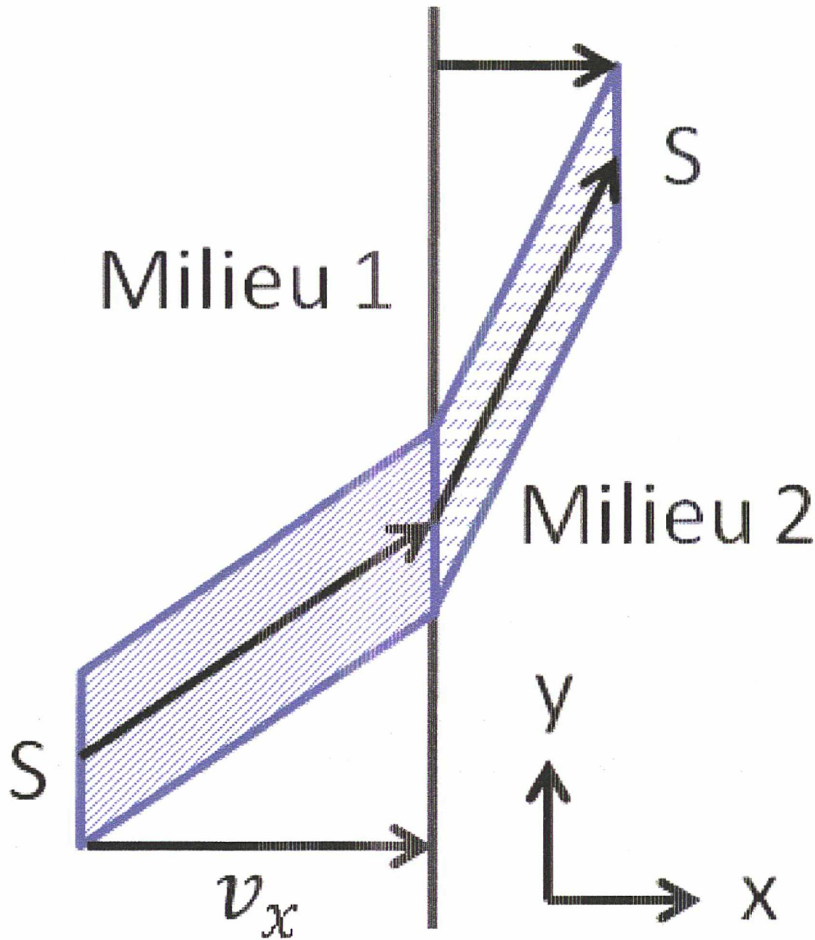


FIG. E.2: Schéma du choc oblique.

scalaire doit être remplacée par une équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme vectorielle. Plaçons nous dans le référentiel du choc, et appelons milieu 1 le milieu non choqué, milieu 2 le milieu choqué. Considérons une surface S du front de choc. Pendant un temps Δt , le volume \mathcal{V}_1 qui passe à travers cette surface est :

$$\mathcal{V}_1 = v_{1,x} S \Delta t . \quad (\text{E.16})$$

Il occupe dans le milieu 2 le volume :

$$\mathcal{V}_2 = v_{2,x} S \Delta t . \quad (\text{E.17})$$

La masse contenue dans ces deux milieux doit être égale, et on obtient donc :

$$\rho_1 v_{1,x} S \Delta t = \rho_2 v_{2,x} S \Delta t \quad (\text{E.18})$$

qui permet d'aboutir à :

$$\rho_1 v_{1,x} = \rho_2 v_{2,x} . \quad (\text{E.19})$$

On remarque que cette équation correspond à l'équation en choc plan (E.1), mais en remplaçant les vitesses scalaires v par les vitesses selon la norme à la surface v_x . A présent, on peut réaliser le bilan d'impulsion. La conservation de l'impulsion s'écrit :

$$\Delta \vec{p} = \Delta \Sigma \vec{F} . \quad (\text{E.20})$$

Ici, \vec{p} désigne l'impulsion, \vec{F} désigne les forces s'exerçant sur le volume considéré. Cela donne :

$$m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1 = \rho_2 v_{2,x} S \Delta t \vec{v}_2 - \rho_1 v_{1,x} S \Delta t \vec{v}_1 = (P_1 S - P_2 S) \vec{e}_x \Delta t \quad (\text{E.21})$$

où m_i désigne la masse du volume considéré dans le milieu i . On peut ainsi projeter la conservation de la quantité de mouvement sur l'axe \vec{e}_x et sur l'axe \vec{e}_y . Selon \vec{e}_x , on a :

$$\rho_2 v_{2,x}^2 - \rho_1 v_{1,x}^2 = P_1 - P_2 \quad (\text{E.22})$$

qui peut également s'écrire :

$$\rho_2 v_{2,x}^2 + P_2 = \rho_1 v_{1,x}^2 + P_1 . \quad (\text{E.23})$$

On remarque qu'à nouveau, ce bilan correspond au bilan dans le cas du choc plan, en remplaçant la vitesse totale par la composante selon x de la vitesse. Selon \vec{e}_y , on obtient :

$$\rho_1 v_{1,x} v_{1,y} = \rho_2 v_{2,x} v_{2,y} . \quad (\text{E.24})$$

En utilisant (E.19), on aboutit à :

$$v_{1,y} = v_{2,y} \quad (\text{E.25})$$

Il y a continuité de la vitesse transverse dans un choc oblique.

Enfin, le bilan sur la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\Delta E = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{d}l_i \quad (\text{E.26})$$

où E est l'énergie, et $\vec{d}l$ est le déplacement pendant le temps Δt . $\sum \vec{F}_i \cdot \vec{d}l_i$ est le travail des forces. La variation d'énergie cinétique est donnée par (en prenant en compte le fait que $m_1 = m_2$:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} S \Delta t \rho_1 v_{1,x} (v_{2,x}^2 - v_{1,x}^2) . \quad (\text{E.27})$$

La variation d'énergie interne ΔU peut s'écrire en fonction de l'énergie interne spécifique u_i dans chaque milieu :

$$\Delta U = u_2 \rho_2 v_{2,x} S \Delta t - u_1 \rho_1 v_{1,x} S \Delta t . \quad (\text{E.28})$$

Le travail des forces donne quant à lui :

$$\sum \vec{F} \cdot d\vec{l}_i = P_1 v_{1,x} S \Delta t - P_2 v_{2,x} S \Delta t . \quad (\text{E.29})$$

En substituant dans (E.26) chacun des termes par leur expression calculée dans (E.27), (E.28) et (E.29), on obtient :

$$\frac{1}{2} (v_{2,x}^2 - v_{1,x}^2) + u_2 - u_1 = \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} . \quad (\text{E.30})$$

Finalement, on remarque que les équations gouvernant la densité, la vitesse selon \vec{e}_x et la pression sont les mêmes dans le cas du choc plan que dans le cas du choc oblique, en remplaçant la vitesse totale du choc plan par la vitesse selon \vec{e}_x dans le cas oblique. Ainsi, les relations de Rankine-Hugoniot sur la densité, la vitesse selon \vec{e}_x et la pression sont les mêmes, et on a continuité de la composante transverse.

E.3 Cas de δv_T de l'étude hydrodynamique de stabilité

Dans l'étude de stabilité en prenant en compte l'intégralité de l'écoulement, il nous faut connaître la condition au bord régissant la perturbation de la vitesse transverse δv_T . On connaît, grâce au paragraphe précédant, la relation dans le cas d'un choc oblique : il y a continuité de la composante transverse. Néanmoins, lorsque le front de choc est perturbé, la normale au front de choc ne correspond pas à la composante selon \vec{e}_r des coordonnées sphériques (voir schéma E.3). Le front de choc peut être vu comme une courbe paramétrique d'équation :

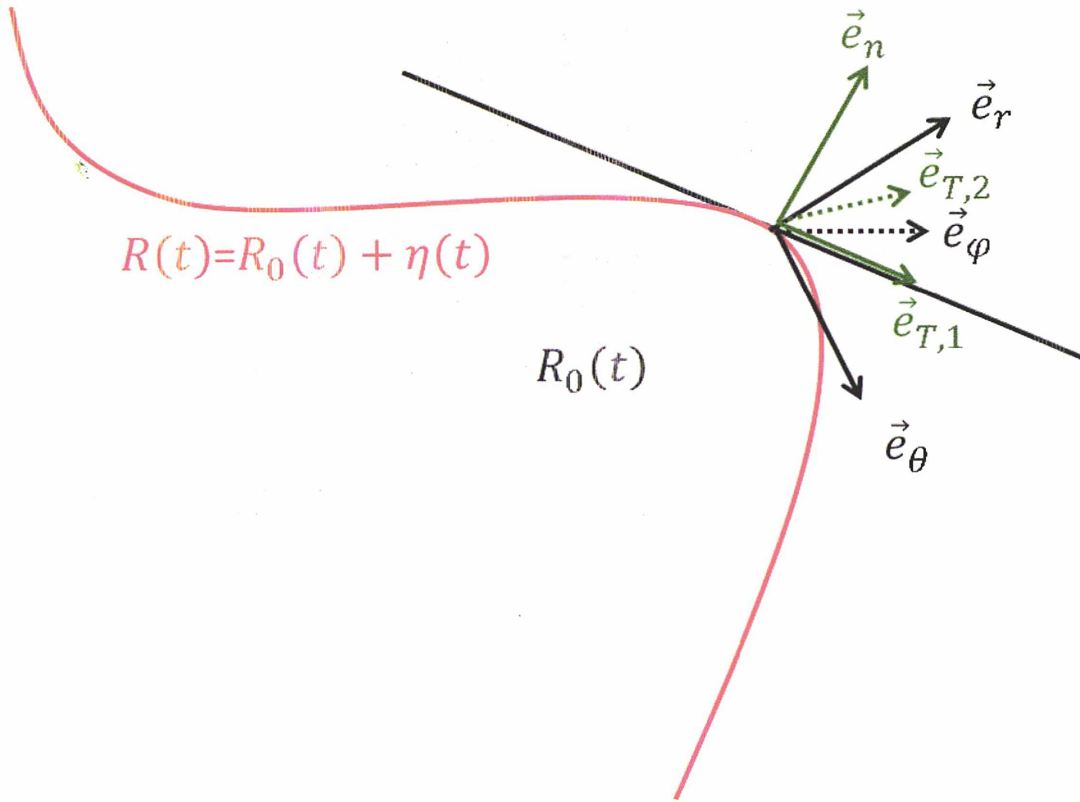
$$r = R_0(t) + \eta(\theta, \phi, t) . \quad (\text{E.31})$$

La normale \vec{e}_n à cette surface est donnée par :

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{e}_r - \vec{\nabla} \eta}{|\vec{e}_r - \vec{\nabla} \eta|} . \quad (\text{E.32})$$

Dans le contexte de l'étude de stabilité, nous considérons que η est une quantité d'ordre 1, et nous nous limitons à cet ordre. On peut donc faire un développement limité de cette expression (E.32) :

$$\vec{e}_n = \left(\vec{e}_r - \vec{\nabla}_T \right) \left(1 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla}_T \eta|^2 \right) = \vec{e}_r - \vec{\nabla}_T \eta . \quad (\text{E.33})$$



(a) Schéma de la configuration

FIG. E.3

Ici, l'opérateur $\vec{\nabla}_T$ est défini, comme dans l'étude hydrodynamique, par :

$$\vec{\nabla}_T \eta = \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \vec{e}_\phi . \quad (\text{E.34})$$

Ensuite, on définit $\vec{e}_{T,1}$ comme le vecteur unitaire normal à \vec{e}_n dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On a donc :

$$\vec{e}_{T,1} = e_{T,1,r} \vec{e}_r + e_{T,1,\theta} \vec{e}_\theta . \quad (\text{E.35})$$

Ce vecteur doit obéir à deux contraintes :

$$\vec{e}_{T,1} \cdot \vec{e}_n = e_{T,1,r} - \frac{e_{T,1,\theta}}{R_0 + \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{E.36})$$

et

$$e_{T,1,r}^2 + e_{T,1,\theta}^2 = 1 . \quad (\text{E.37})$$

De (E.36), on déduit :

$$e_{T,1,r} = \frac{e_{T,1,\theta}}{R_0 + \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} . \quad (\text{E.38})$$

En injectant ce dernier résultat (E.38) dans (E.37), on obtient :

$$\frac{e_{T,1,\theta}^2}{(R_0 + \eta)^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^2 + e_{T,1,\theta}^2 = 1, \quad (\text{E.39})$$

qui donne finalement :

$$e_{T,1,\theta}^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{(r_0 + \eta)^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^2}. \quad (\text{E.40})$$

En prenant (E.40) et (E.38) au premier ordre en η , on obtient :

$$\vec{e}_{T,1} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta. \quad (\text{E.41})$$

Enfin, on définit le dernier vecteur de base par le produit vectoriel des deux premiers :

$$\vec{e}_{T,2} = \vec{e}_n \wedge \vec{e}_{T,1} \quad (\text{E.42})$$

$$= \left(\vec{e}_r - \frac{1}{R_0} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right) \wedge \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta \right). \quad (\text{E.43})$$

Au premier ordre en η , on obtient donc :

$$\vec{e}_{T,2} = \vec{e}_\phi + \frac{1}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \vec{e}_r. \quad (\text{E.44})$$

Ainsi, on peut à présent écrire la relation de Rankine-Hugoniot. Notons $\vec{V}_{1,T}$ la vitesse transverse dans le milieu 1, et $\vec{V}_{2,T}$ celle dans le milieu 2. On sait que $\vec{V}_{1,T} = -\vec{V}_s = -V_s \vec{e}_r$, et que $\vec{V}_{1,T} = \vec{V}_{2,T}$

$$\vec{V}_{1,T} = -V_s \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{T,1} \vec{e}_{T,1} - V_s \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{T,2} \vec{e}_{T,2}. \quad (\text{E.45})$$

Ainsi, on obtient :

$$\vec{V}_{2,T} = -\frac{V_s}{R_0} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{V_s}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \vec{e}_\phi. \quad (\text{E.46})$$

Cela peut finalement s'écrire :

$$\vec{V}_{2,T} = -V_s \vec{\nabla}_T \eta. \quad (\text{E.47})$$

A présent, projetons la relation sur la vitesse normale sur la base des coordonnées sphériques. On a :

$$\rho_1 V_{1,n} = \rho_2 V_{2,n} \quad (\text{E.48})$$

or,

$$\rho_1 \vec{V}_{1,n} = -\rho_1 V_s \vec{e}_r \cdot \vec{e}_n = -\rho_1 V_s . \quad (\text{E.49})$$

Ainsi, on obtient :

$$V_{2,n} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} V_s . \quad (\text{E.50})$$

On a donc à présent toutes les composantes de la vitesse \vec{V}_2 du fluide derrière le choc dans la base sphérique :

$$\vec{V}_2 = V_{2,n} \vec{e}_n + V_{2,T,1} \vec{e}_{T,1} + V_{2,T,2} \vec{e}_{T,2} . \quad (\text{E.51})$$

En utilisant les expressions (E.33), (E.41) et (E.44) qui permettent de passer de la base liée au choc à la base des coordonnées sphériques, on obtient la vitesse du fluide dans le référentiel du choc en coordonnées sphériques :

$$\vec{V}_2 = -\frac{\rho_1}{\rho_2} V_s \vec{e}_r - V_s \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \vec{\nabla}_T \eta . \quad (\text{E.52})$$

La vitesse \vec{v}_2 du fluide dans le référentiel fixe en coordonnées sphériques est liée à \vec{V}_2 par $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 + V_s \vec{e}_r$, ce qui donne :

$$\vec{v}_2 = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) V_s \left(\vec{e}_r - \vec{\nabla}_T \eta \right) . \quad (\text{E.53})$$

En utilisant la relation de Rankine-Hugoniot sur la densité, les composantes radiale et transverse de la vitesse du fluide derrière le front de choc dans le référentiel fixe en coordonnées sphériques sont données par :

$$v_{2,r} = \frac{2}{\gamma + 1} V_s \quad (\text{E.54})$$

$$\vec{v}_{2,T} = -\frac{2}{\gamma + 1} \vec{\nabla}_T \eta . \quad (\text{E.55})$$

Annexe F

Détermination des équations autosemblables non perturbées

Dans cette annexe, nous allons montrer la transformation des équations non perturbées dans l'espace (r,t) à l'espace autosemblable (AS) et la détermination des exposants a_v , a_ρ , a_p . Rappelons les équations hydrodynamiques :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho v)}{\partial r} = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{F.2})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) (p \rho^{-\gamma}) = 0 . \quad (\text{F.3})$$

En utilisant les relations :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Omega (\Omega t)^{a_f - 1} \left[a_f \bar{f}(\xi) - n \xi \frac{d\bar{f}}{d\xi} \right] \quad (\text{F.4})$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\Omega t)^{a_f - n} \frac{d\bar{f}}{d\xi} . \quad (\text{F.5})$$

L'équation de continuité (F.1) devient :

$$n \Omega (\Omega t)^{-1} \xi \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} + 2 (\Omega t)^{a_v - n} \frac{\bar{\rho} \bar{v}}{\xi} + (\Omega t)^{a_v - n} \frac{d(\bar{\rho} \bar{v})}{d\xi} = 0 , \quad (\text{F.6})$$

soit :

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} [\bar{v}(\Omega t)^{a_v-n} - n\Omega\xi(\Omega t)^{-1}] + \bar{\rho} [2(\Omega t)^{a_v-n} \frac{\bar{v}}{\xi} + (\Omega t)^{a_v-n} \frac{d\bar{v}}{d\xi}] = 0 . \quad (\text{F.7})$$

Etant donné que le temps ne doit plus apparaître explicitement dans cette équation différentielle ordinaire (EDO), car c'est maintenant ξ la variable indépendante, cela impose une relation entre a_v et n :

$$a_v = n - 1 . \quad (\text{F.8})$$

L'équation de continuité s'écrit finalement :

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} [\bar{v} - n\Omega\xi] + \bar{\rho} [2\frac{\bar{v}}{\xi} + \frac{d\bar{v}}{d\xi}] = 0 . \quad (\text{F.9})$$

L'équation du mouvement (F.2) peut quant à elle se réécrire :

$$\Omega(\Omega t)^{n-2} [(n-1)\bar{v} - n\xi \frac{d\bar{v}}{d\xi}] + (\Omega t)^{n-2} \bar{v} \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{1}{\bar{\rho}} (\Omega t)^{a_v-n} \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = 0 . \quad (\text{F.10})$$

Cela impose la relation suivante entre n et a_p :

$$a_p = 2(n-1) . \quad (\text{F.11})$$

La forme finale de l'équation du mouvement est alors :

$$\frac{d\bar{v}}{d\xi} [\bar{v} - n\Omega\xi] + (n-1)\Omega\bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = 0 . \quad (\text{F.12})$$

L'équation d'énergie (F.3) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \Omega(\Omega t)^{2n-3} [b\bar{\rho} - n\xi \frac{d\bar{\rho}}{d\xi}] + \bar{v}(\Omega t)^{2n-3} \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} \\ & - \gamma(\Omega t)^{2n-2} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} [(\Omega t)^{-1} \bar{v} \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} - \Omega(\Omega t)^{-1} n\xi \frac{d\bar{\rho}}{d\xi}] = 0 , \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

soit :

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} [\bar{v} - n\Omega\xi] + \Omega 2(n-1)\bar{\rho} - \frac{\gamma\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} [\bar{v} - n\Omega\xi] = 0 , \quad (\text{F.14})$$

qui peut encore se réécrire :

$$(\bar{v}_0 - n\Omega\xi) \frac{d}{d\xi} (\bar{\rho}_0 \bar{\rho}_0^{-\gamma}) + 2(n-1)\Omega \bar{\rho}_0 \bar{\rho}_0^{-\gamma} = 0 . \quad (\text{F.15})$$

Annexe G

Détermination des équations hydrodynamiques perturbées au premier ordre

Dans cette annexe, nous allons montrer le calcul du développement des équations hydrodynamiques au premier ordre. Les équations hydrodynamiques utilisées sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{G.1})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0 \quad (\text{G.2})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \right] (p \rho^{-\gamma}) = 0 . \quad (\text{G.3})$$

Nous introduisons alors la décomposition des grandeurs hydrodynamiques suivante : On reprend les définitions des grandeurs hydrodynamiques du chapitre 3, équations (3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19) :

$$f(r, t, \theta, \phi) = f_0(r, t) + f_1(r, t, \theta, \phi) . \quad (\text{G.4})$$

Cette décomposition s'applique à la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$, mais, de plus, elle comporte à présent une composante tangentielle \vec{v}_T en plus de la partie radiale \vec{v}_r . On définit $v_r(r, t, \theta, \phi)$ et $v_T(r, t, \theta, \phi)$ par :

$$\vec{v}(r, t, \theta, \phi) = v_r(r, t, \theta, \phi) \vec{e}_r + v_T(r, t, \theta, \phi) \vec{e}_T , \quad (\text{G.5})$$

où \vec{e}_r et \vec{e}_T sont respectivement le vecteur unitaire radial et le vecteur unitaire tangentiel de la représentation en coordonnées sphériques. Le vecteur \vec{e}_T est donné par :

$$\vec{v}_T = v_T \vec{e}_T = v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi , \quad (\text{G.6})$$

où \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ sont deux des vecteurs de la base des coordonnées sphériques (\vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_ϕ). On a donc :

$$\|\vec{v}_T\| = \sqrt{(v_\theta)^2 + (v_\phi)^2} , \quad (\text{G.7})$$

et

$$\vec{e}_T = \frac{v_\theta}{\sqrt{(v_\theta)^2 + (v_\phi)^2}} \vec{e}_\theta + \frac{v_\phi}{\sqrt{(v_\theta)^2 + (v_\phi)^2}} \vec{e}_\phi . \quad (\text{G.8})$$

On décompose ensuite $v_r(r, t, \theta, \phi)$:

$$v_r(r, t, \theta, \phi) = v_0(r, t) + v_{1r}(r, t, \theta, \phi) . \quad (\text{G.9})$$

Ici, v_{1r} est la perturbation radiale de la vitesse radiale v_0 . Par ailleurs, comme \vec{v}_T est une perturbation, elle sera notée dans la suite \vec{v}_{1T} par souci de cohérence. Nous introduisons alors ces perturbations dans (F.1, F.2, F.3).

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \{(\rho_0 + \rho_1) [(v_0 + v_{1r} \vec{e}_r) + \vec{v}_T]\} = 0 . \quad (\text{G.10})$$

Nous développons les produits, et comme nous ne perturbons qu'à l'ordre 1, nous pouvons d'ores et déjà éliminer les termes d'ordre supérieur, qui sont tous les produits de termes d'ordre 1. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_0 v_0 + r^2 \rho_0 v_{1r} + r^2 \rho_1 v_0)}{\partial r} \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho_0 v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho_0 v_\phi)}{\partial \phi} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

On remarque qu'apparaît alors un terme correspondant à l'équation non perturbée (F.9), qui va donc disparaître. On applique ensuite les dérivées, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + 2 \frac{\rho_0 v_{1r}}{r} + \rho_0 \frac{\partial v_{1r}}{r} + \rho_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} \\ + 2 \frac{\rho_1 v_0}{r} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho_0}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

En posant

$$\vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{1T} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right], \quad (\text{G.13})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + 2 \frac{\rho_0 v_{1r}}{r} + \rho_0 \frac{\partial v_{1r}}{r} \\ & + \rho_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + 2 \frac{\rho_1 v_0}{r} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{1T} = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

A présent, il faut faire de même avec l'équation du mouvement (3.2). Cette équation est vectorielle, et comprend donc des composantes selon \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ . Selon \vec{e}_r , elle s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial \delta v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (\text{G.15})$$

Il convient alors d'introduire le développement (G.4). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_{1r}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_{1r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \\ & + v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (v_0 + v_{1r})}{\partial \theta} \\ & + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_0 + v_{1r})}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho_0 (1 + \rho_1/\rho_0)} \frac{(p_0 + p_1)}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

On peut faire le développement limité du terme en $1/\rho$, ce qui donne :

$$\frac{1}{\rho_0 (1 + \rho_1/\rho_0)} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right). \quad (\text{G.17})$$

Les termes d'ordre 0 correspondent à l'équation de l'écoulement non perturbé, et s'annulent donc. De plus, les termes $v_{1r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial r}$, en $v_\theta \frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta}$, en $v_\phi \frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta}$, en v_θ^2 , en v_ϕ^2 et en $\rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial r}$ sont d'ordre 2, et peuvent donc être négligés. On remarque également que les termes en $\frac{\partial v_0}{\partial \theta}$ et en $\frac{\partial v_0}{\partial \phi}$ sont nuls, puisque $v_0 = v_0(r, t)$.

On obtient donc finalement :

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial r} = 0. \quad (\text{G.18})$$

A présent, passons à la composante selon \vec{e}_θ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (v_0 + v_{1r}) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \\ + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} + \frac{1}{(\rho_0 + \rho_1) r} \frac{\partial (p_0 + p_1)}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Comme précédemment, on peut négliger tous les termes d'ordre 2, qui sont combinaison de deux termes d'ordre 1. De plus, on utilise à nouveau le développement limité (G.17), et on sait que $\partial p_0 / \partial \theta = 0$. On obtient alors :

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_0 v_\theta}{r} + \frac{1}{r \rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{G.20})$$

Selon \vec{e}_ϕ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (v_0 + v_{1r}) \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\ + \frac{(v_0 + v_{1r}) v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{(\rho_0 + \rho_1) r \sin \theta} \frac{\partial (p_0 + p_1)}{\partial \phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

On néglige à nouveau les termes d'ordre 2, on utilise le développement limité (G.17). De plus, on a également $\partial p_0 / \partial \phi = 0$, ce qui conduit finalement à :

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_0 v_\phi}{r} + \frac{1}{\rho_0 r \sin \theta} \frac{\partial p_1}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{G.22})$$

On peut à présent regrouper les deux équations selon \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ . En effet, on a alors faisant la somme vectorielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi)}{\partial t} + v_0 \frac{\partial (v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi)}{\partial r} + \frac{v_r (v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi)}{r} \\ + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

En utilisant la définition de la vitesse transverse (G.6) et introduisant le gradient transverse :

$$\vec{\nabla}_{Tp} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{e}_\phi, \quad (\text{G.24})$$

on obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \vec{v}_T}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \vec{v}_T}{\partial r} + \frac{v_0 \vec{v}_T}{r} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla}_{Tp} p_1 = 0. \quad (\text{G.25})$$

En introduisant les grandeurs (G.17), l'équation d'énergie (G.3) devient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v_0 + v_{1r}) \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} + \vec{v}_t \cdot \vec{\nabla} \right] \log [(p_0 + p_1) (\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma}] = 0. \quad (\text{G.26})$$

L'apparition du log dans cette équation se justifie par le fait qu'on peut diviser tous les termes par $p\rho^{-\gamma}$. On peut d'ores et déjà affirmer que le terme en $\vec{v}_T \cdot \vec{\nabla}$ ne donne pas de contribution à l'ordre 1. En effet, il est appliqué à des quantités d'ordre 0, mais qui ne dépendent que de r et t , ainsi qu'à des quantités d'ordre 1. D'une part, l'application de ce terme en v_T , donc du premier ordre, sur les quantités d'ordre 1 donne des termes d'ordre 2, donc négligeables. D'autre part, ce terme en $\vec{v}_T \cdot \vec{\nabla}$ fait intervenir des dérivées angulaires $\partial/\partial\theta$ et $\partial/\partial\phi$ qui, appliquées sur les termes d'ordre 0 (ne dépendant pas des variables angulaires), sont nulles. On peut donc réécrire cette équation :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v_0 + v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} \right] \log [(p_0 + p_1) (\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma}] = 0. \quad (\text{G.27})$$

On peut alors séparer les termes du log pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v_0 + v_{1r}) \frac{\partial}{\partial r} \right] \\ & \times \left[\log p_0 + \log \left(1 + \frac{p_1}{p_0} \right) - \gamma \log \rho_0 - \gamma \log \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

En utilisant l'équation de l'écoulement non perturbé et en développant, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\log \left(1 + \frac{p_1}{p_0} \right) - \gamma \log \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \right] \\ & + v_{1r} \frac{\partial}{\partial r} [\log(p_0) - \gamma \log(\rho_0)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

Dans cette équation, on a supprimé les termes du second ordre impliquant v_{1r} (appliqué à p_1 et ρ_1). A présent, on peut simplifier le premier terme de cette équation. En effet, au premier ordre :

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \left(1 + \frac{p_1}{p_0} \right) = \frac{1}{1 + p_1/p_0} \frac{\partial p_1/p_0}{\partial t} = \frac{\partial p_1/p_0}{\partial t} . \quad (\text{G.30})$$

Cette simplification s'effectue de même pour la dérivée temporelle s'appliquant à v_1/v_0 et la dérivée radiale sur les deux rapports. On obtient finalement :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{p_1}{p_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + v_{1r} \log (p_0 \rho_0^{-\gamma}) = 0 . \quad (\text{G.31})$$

On a donc obtenu les quatre équations régissant l'écoulement perturbé.

Bibliographie

- [1] L. Sedov *Similitude et dimensions en mécanique*. Moscou : Editions MIR, traduction française, 1977.
- [2] G.I. Taylor *Royal Society of London Proceedings Series A* 201, 159
- [3] J. Von Neumann *The Point Source Solution. Blast Wave, ch.2* Los Alamos Sci. Lab. Tech Series, VII Pt. II, 1947
- [4] L.D. Landau, E.M. Lifshitz *Mécanique des fluides* Oxford : Pergamon Press
- [5] E. Bertschinger *On the structure and stability of radiative shock waves* *Astrophys.J.*, 304 :154, 1986
- [6] Y.B. Zel'Dovich, Y.P. Raizer *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena* New York : Academic Press, 1966/1967, edited by W.D. Hayes ; R.F. Probstein
- [7] K.A. Keilty, E.P. Liang, T. Ditmore, B.A. Remington, K. Shigemori et al *Astrophys. J.* 538 :645, 2000
- [8] E. Liang, K. Keilty *Astrophys.J.* 533 :890, 2000
- [9] D.F. Cioffi, C.F. McKee, E. Bertschinger *Dynamics of radiative supernova remnants* *Astrophys.J.* 334 :252, 1988
- [10] L. Woltjer *Supernova Remnants* Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1972
- [11] E.T. Vishniac *The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks* *Astrophys.J.* 274 :152, 1983
- [12] D. Ryu, E.T. Vishniac *The growth of linear perturbations of adiabatic shock waves.* *Astrophys.J.* 337 :917, 1987
- [13] D. Kushnir, E. Waxman, D. Shvarts *The stability of decelerating shocks revisited* *Astrophys.J.* 634 :407, 2005
- [14] C. Cavet *Thèse de Doctorat de Cécile Cavet : Etude numérique de l'instabilité de Vishniac dans les restes de supernova* Thèse de doctorat, soutenue à Meudon le 19 novembre 2010
- [15] C. Michaut, C. Cavet, S.E. Bouquet, F. Roy, H.C. Nguyen *Numerical study of the Vishniac instability in supernova remnants* *Astrophys.J.* 759 :78, 2012

- [16] C. Cavet, H.C. Nguyen, C. Michaut, E. Falize, S. Bouquet *Theoretical and numerical studies of the Vishniac instability in supernova remnants* *Astrophys. Space Sci.* 322 :91, 2009
- [17] C. Cavet, H.C. Nguyen, C. Michaut, S. Bouquet *Numerical study of the adiabatic index effect for the Vishniac instability in supernova remnants* *Astrophys. Space Sci.* 336 :183, 2011
- [18] J. Sanz, S.E. Bouquet, C. Michaut, J. Minière *The Sedov-Taylor point explosion linear stability revisited : application to Vishniac and Ryu-Vishniac instabilities* *Astrophys.J.*, soumis.
- [19] M.M. Mac Low, M.L. Norman *Nonlinear growth of dynamical overstabilities in blast waves* *Astrophys.J.*, 407 :207, 1993
- [20] J. Grun, J. Stamper, C. Manka, J. Resnick, R. Burris, J. Crawford, B.H. Ripin *Instability of Taylor-Sedov Blast Waves Propagating through a Uniform Gas* *Physical Review Letter*, 1991
- [21] A.D. Edens, T. Ditmire, J.F. Hansen, M.J. Edwards, R.G. Adams, P. Rambo, L. Ruggles, I.C. Smith, J.L. Porter *Study of high Mach number laser driven blast waves* *Physics of Plasmas*, 2004
- [22] A.D. Edens, T. Ditmire, J.F. Hansen, M.J. Edwards, R.G. Adams, P. Rambo, L. Ruggles, I.C. Smith, J.L. Porter *Measurement of the Decay rate of Single-Frequency Perturbations on Blast Waves* *Physical Review Letters*, 2005
- [23] A.D. Edens, R.G. Adams, P. Rambo, L. Ruggles, I.C. Smith, J.L. Porter, T. Ditmire *Study of high mach number laser driven blast waves in gases* *Physics of Plasmas*, 2010
- [24] T. Ditmire, A.D. Edens *Laboratory simulations of astrophysical blast waves with high energy lasers* *Laser and Photonics Reviews*, 2008
- [25] H.C. Nguyen *Simulations de modèles hydrodynamiques et de transfert radiatif intervenant dans la description d'écoulements astrophysiques* Thèse de doctorat, Université Paris Sud XI, 2011
- [26] V.P. Utrobin, N.N. Chugai *Progenitor mass of the type IIP supernova 2005cs* *Astron. Astrophys.* 491 :507, 2008
- [27] V.P. Utrobin, N.N. Chugai *Type IIP supernova 2008in : the explosion of a normal red supergiant* *Astron. Astrophys.* 555 :145, 2013
- [28] M. Fink, M. Kromer, I.R. Seitenzahl, F. Ciaraldi-Schoolman, F.K. Roepke, S.A. Sim, R. Pakmor, A.J. Ruiter, W. Hillebrandt, *Three-dimensional pure deflagration models with nucleosynthesis and synthetic observables for Type Ia supernovae* *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 438 :1762, 2013
- [29] J. Lequeux *Le Milieu Interstellaire* CNRS Editions

- [30] J.C. Raymond, D.P. Cox, B.W. Smith *Radiative Cooling of a low-density plasma* *Astrophys.J.* 204 :290, 1976
- [31] J.H. Oort *Problems of Cosmical Aerodynamics* Dayton, Ohio : Central Air Document Office, p.118, 1951
- [32] C.F. McKee, J.P. Ostriker *A theory of the interstellar medium : three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate* *Astrophys.J.* 218 :148, 1977
- [33] J. Raymond et al. *Radiative cooling of a low density plasma* *Astrophys.J.* 204 :290, 1976
- [34] D.P. Cox, W.H. Tucker *Ionization equilibrium and radiative cooling of a low-density plasma* *Astrophys.J.* 157 :1157, 1969
- [35] D.P. Cox *Cooling and evolution of a supernova remnant* *Astrophys.J.* 178 :159, 1972
- [36] J. Sanz, S.E. Bouquet, M. Murakami *Self-consistent stability analysis of spherical shocks* *Astrophys. Space Sci.* 336 :195, 2011