



HAL
open science

Procédures expérimentales et traitement des données associées pour la mission spatiale MICROSCOPE

Emilie Hardy

► **To cite this version:**

Emilie Hardy. Procédures expérimentales et traitement des données associées pour la mission spatiale MICROSCOPE. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2013. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-02095140⟩

HAL Id: tel-02095140

<https://hal.science/tel-02095140v1>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Thèse de doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Procédures expérimentales et traitement des
données associées pour la mission spatiale
MICROSCOPE

présentée par :

Émilie HARDY

soutenue le 13 septembre 2013

Composition du jury

<i>Président :</i>	Marie-Christine	ANGONIN
<i>Rapporteurs :</i>	Stéphane Timothy	HOLÉ SUMNER
<i>Directeur de thèse :</i>	Gilles	MÉTRIS
<i>Examineurs :</i>	Claus Agnès Alain Peter	LÄMMERZAHL LEVY ROBERT WOLF
<i>Invités :</i>	Richard Pierre	BONNEVILLE TOUBOUL

Thèse de doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Procédures expérimentales et traitement des
données associées pour la mission spatiale
MICROSCOPE

présentée par :

Émilie HARDY

soutenue le 13 septembre 2013



Composition du jury

<i>Président :</i>	Marie-Christine	ANGONIN
<i>Rapporteurs :</i>	Stéphane Timothy	HOLÉ SUMNER
<i>Directeur de thèse :</i>	Gilles	MÉTRIS
<i>Examineurs :</i>	Claus Agnès Alain Peter	LÄMMERZAHL LEVY ROBERT WOLF
<i>Invités :</i>	Richard Pierre	BONNEVILLE TOUBOUL

Remerciements

J'ai effectué mon travail de thèse à l'ONERA, au sein de l'unité Instrumentation et Équipements Aérospatiaux du département Mesures Physiques. Merci à Pierre Touboul et Michel Lefebvre, successivement chefs de département, pour m'avoir accueillie dans ce laboratoire. J'ai reçu l'aide pour ces travaux de précieux collaborateurs à qui je souhaite ici exprimer toute ma reconnaissance.

Je remercie tout d'abord Gilles Métris, de l'Observatoire de la Côte d'Azur, qui a dirigé ma thèse, ainsi que Pierre Touboul et Agnès Levy, qui ont co-encadré mon travail à l'ONERA. Merci de m'avoir permis de travailler sur un sujet aussi intéressant. Je vous suis très reconnaissante pour le temps que vous avez consacré à mes travaux et questions et pour vos nombreux conseils. Merci aussi pour votre aide dans la rédaction de ce mémoire.

Merci à Manuel Rodrigues, chef du projet MICROSCOPE à l'ONERA. J'espère que ce travail aura contribué à l'avancée du projet.

Je remercie Jean-Pierre Marque et Bruno Christophe, successivement chefs de l'unité Instrumentation et Équipements Aérospatiaux durant mon doctorat, pour m'avoir accueillie dans leur équipe. Merci aussi à toute l'équipe Instrumentation et Équipements Aérospatiaux pour les conseils et l'expérience qu'ils m'ont apportés ainsi que pour leur sympathie qui m'a permis de passer ces trois dernières années dans un cadre professionnel des plus agréables. Je suis en particulier reconnaissante à Ratana Chhun qui m'a gentiment aidée à rédiger ces remerciements.

Je remercie également l'équipe du CNES avec qui j'ai eu l'occasion de travailler, et en particulier Alain Robert.

Je suis reconnaissante à tous les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à évaluer mon travail. J'adresse des remerciements particuliers à Marie-Christine Angonin pour avoir accepté de présider la commission d'examen, ainsi qu'à Stéphane Holé et Timothy Sumner pour avoir accepté d'être rapporteur pour mon mémoire de thèse.

Enfin, j'adresse toute ma reconnaissance à Sophie Hardy pour avoir corrigé l'orthographe et la grammaire de cette thèse alors qu'elle n'y comprenait rien, et à Benoit Hardy pour avoir tenté de déchiffrer le fonctionnement d'un pendule de torsion pour le test du Principe d'Équivalence en plein milieu d'une tempête. Merci à Yannick Bisiaux d'avoir essayé ladite tempête et les nombreuses autres intempéries. La météo fut très capricieuse cette année.

Table des matières

Remerciements	i
Glossaire	ix
Introduction	1
Chapitre 1 Le Principe d'Équivalence comme test de la Relativité Générale	5
1.1 Le Principe d'Équivalence	5
1.2 Les motivations pour le test du Principe d'Équivalence	6
1.3 Les expériences précédentes	8
1.3.1 Le pendule de torsion	8
1.3.2 La télémétrie laser-Lune	12
Chapitre 2 L'expérience MICROSCOPE	17
2.1 La mission	17
2.1.1 Avantages d'une expérience dans l'espace	17
2.1.2 Présentation générale de la mission	18
2.1.3 Le satellite	20
2.2 La charge utile	22
2.2.1 Principe de l'accéléromètre électrostatique	22
2.2.1.1 Le détecteur capacitif	23
2.2.1.2 Contrôle de la masse d'épreuve	24
2.2.1.2.a Contrôle par variation de l'entrefer	24
2.2.1.2.b Contrôle par variation de surface de recouvrement	27
2.2.2 L'instrument T-SAGE	29
2.3 Modélisation de la mesure instrumentale	32
2.3.1 Accélération de la masse test	32
2.3.2 Mesure de l'accélération par l'accéléromètre différentiel	36
2.3.2.1 Mesure de l'accélération par un capteur inertiel	36
2.3.2.2 Mode commun et mode différentiel	37
2.4 Bilan d'erreur de la mesure	39

4.1.1.5	Définition des gabarits de spécification	75
4.1.2	Minimisation de la projection de fréquences singulières : choix de la durée d'observation et de la fréquence de spin	80
4.1.2.1	Spécifications aux fréquences singulières	80
4.1.2.2	Optimisation des taux de réjection dans le cas idéal	80
4.1.2.3	Limitations pratiques	81
4.1.2.3.a	Protocole de choix de la durée d'observation et de la fréquence de spin	81
4.1.2.3.b	Calcul du taux de réjection pire-cas pour comparaison avec les spécifications	82
4.2	Étude de l'impact des pertes de mesure	87
4.2.1	Origines et occurrences des pertes de mesure	87
4.2.1.1	Les pertes de télémessure : l'expérience de la mission Picard	87
4.2.1.2	Mesures inexploitablees dues à la saturation de l'instrument	88
4.2.1.2.a	Les craquements du réservoir	88
4.2.1.2.b	Les craquements du revêtement du satellite	88
4.2.2	Stratégie pour les trous de courte durée	89
4.2.2.1	Gestion d'un trou de courte durée	89
4.2.2.1.a	Première méthode : remplacement des mesures manquantes par des valeurs nulles	89
4.2.2.1.b	Influence du moment de la perte de mesure	90
4.2.2.1.c	Influence de la durée du trou	91
4.2.2.1.d	Seconde méthode : interpolation des données manquantes	93
4.2.2.2	Gestion de nombreux trous de très courte durée	95
4.2.2.3	Conclusion sur la tolérance aux trous de courte durée	96
4.2.3	Stratégie pour les trous de longue durée	100
4.2.3.1	Description de la stratégie	100
4.2.3.2	Influence de la répartition temporelle des pertes de mesure	101
4.2.3.3	Influence du nombre de pertes de mesure	102

Chapitre 5 Validation du protocole de correction et de traitement de la mesure 105

5.1	Présentation du simulateur de la mission	106
5.1.1	Calcul de l'accélération et du gradient de gravité	106
5.1.2	Calcul de l'attitude	108
5.1.3	Simulation de la mesure instrumentale	109
5.1.4	Analyse des données simulées	111
5.1.5	Restitution d'orbite	115
5.2	Association des perturbations numériques et instrumentales	115

5.2.1	Choix de la durée de la session de mesure	116
5.2.2	Introduction des perturbations instrumentales	119
5.2.2.1	Performance des méthodes d'estimation des paramètres instru- mentaux	120
5.2.2.2	Performances des méthodes d'estimation du paramètre de vio- lation du Principe d'Équivalence	121
5.2.3	Introduction des pertes de mesure	122
5.2.3.1	Application de la stratégie de gestion des pertes de courte durée	123
5.2.3.2	Application de la stratégie de gestion des pertes de longue durée	124
5.2.3.3	Scénario d'apparition des pertes de données réalistes : projec- tion du cas de la mission PICARD sur une session de mesure de MICROSCOPE	125
Conclusion et perspectives		129
Annexe A Valeurs numériques		133
A.1	Paramètres de la mission	133
A.2	Correspondance entre les repères	133
A.3	Paramètres du satellite	133
A.4	Paramètres de l'instrument	134
A.4.1	Valeur maximale par construction des paramètres à étalonner	134
A.4.2	Biais	134
A.4.3	Bruit	135
A.5	Paramètres de la mesure	135
A.6	Mouvements d'étalonnage	136
A.7	Gradient de gravité	137
A.7.1	Expression du gradient de gravité	137
A.7.2	Valeurs numériques	137
A.7.3	Prise en compte de l'attitude du satellite	138
A.8	Paramètres de modélisation de la boucle de compensation de traînée	138
A.8.1	Hybridation de la mesure accélérométrique et de la mesure du capteur stellaire	138
A.8.2	Fonction de transfert de l'AOCS	139
A.8.3	Senseur stellaire	140
A.8.4	Système de propulsion	141
A.8.5	Environnement du satellite	142
Annexe B Perturbations numériques de l'étalonnage		143
B.1	Excentremets suivant \vec{X} et \vec{Z}	143
B.2	Paramètres de la matrice de sensibilité commune a_{c12} et a_{c13}	143

B.3	Excentration suivant \vec{Y} et paramètres de la matrice de sensibilité différentielle	144
B.4	Terme quadratique différentiel	146
B.5	Termes quadratiques de chaque capteur	146
Annexe C Utilisation de fenêtres d'apodisation		153
C.1	Présentation des fenêtres d'apodisation	153
C.2	Fenêtre de Hann	154
C.2.1	Approximation analytique	154
C.2.2	Simulation numérique	156
C.3	Fenêtre de Hamming	157
C.3.1	Approximation analytique	157
C.3.2	Simulation numérique	159
C.4	Fenêtre de Blackman	161
C.4.1	Approximation analytique	161
C.4.2	Simulation numérique	162
C.5	Conclusion sur l'utilisation des fenêtres d'apodisation	163
Publications		169
Bibliographie		171

Glossaire

AOCS	Attitude and Orbit Control System
APOLLO	Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation
CAN	Convertisseur Analogique-Numérique
CCC	Centre de Commande et Contrôle
CHAMP	CHALLENGING Micro-satellite Payload for geophysical research and application
CMS	Centre de Mission Scientifique
CNA	Convertisseur Numérique-Analogique
CNES	Centre National d'Étude Spatiale
DVA	Digital Voltage Amplifier
EOP	Earth Orientation Parameters
EP	Equivalence Principle
ESA	European Space Agency
FEEU	Front End Electronic Unit
FFT	Fast Fourier Transform
GINs	Géodésie par Intégrations Numériques Simultanées
GOCE	Gravity and Ocean Circulation Explorer
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
ICU	Interface Control Unit
IERS	International Earth Rotation and Reference System Service
MMC	Méthode des Moindres Carrés
MICROSCOPE	MICRO-Satellite à Compensation de traînée pour l'Observation du Principe d'Équivalence
MIGS	MICROSATellite Ground Segment
MLI	Multi-Layer Insulation
NASA	National Aeronautics and Space Administration
OCA	Observatoire de la Côte d'Azur
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
PID	correcteur Proportionnel Intégral Dérivé
SST	Senseur STellaire
STEP	Satellite Test of the Equivalence Principle
SU	Sensor Unit
TF	Transformée de Fourier
TM	Test Mass
T-SAGE	Twin Space Accelerometer for Gravitation Experiment
ZARM	Zentrum für Angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation

Introduction

La physique fondamentale confronte la Relativité Générale d'Einstein à des expériences de plus en plus précises afin d'en déterminer les limites. Cette théorie, dont un pilier est le Principe d'Équivalence, est celle utilisée aujourd'hui pour décrire l'interaction gravitationnelle. Cependant, le formalisme qu'elle implique est incompatible avec celui de la mécanique quantique qui décrit les trois autres interactions fondamentales. Dans l'objectif d'unifier les quatre interactions fondamentales, des théories alternatives à la Relativité Générale ont vu le jour. Certaines prévoient une violation du Principe d'Équivalence. C'est l'une des raisons pour lesquelles il est nécessaire de tester ce principe avec une précision toujours plus importante.

Différentes études ont été conduites pour tester le Principe d'Équivalence à travers sa manifestation la plus simple : l'universalité de la chute libre, qui stipule que tous les corps tombent avec la même accélération, quelles que soient leur masse et leur composition interne (chapitre 1). Le test le plus élémentaire de ce principe a été réalisé par l'astronaute Dave Scott sur la Lune en 1971. Il a lâché au même instant un marteau et une plume d'une même hauteur pour vérifier que les deux objets, de composition très différentes, atteignent le sol lunaire simultanément dans cet environnement sans frottement atmosphérique. La précision de cette expérience est évidemment très limitée : la hauteur initiale des objets, les instants de début et de fin de chute sont estimés humainement.

Des tests plus précis du Principe d'Équivalence sont effectués en exploitant les résultats obtenus par la télémétrie laser-Lune. L'expérience consiste à tester le mouvement de chute libre de la Terre et de la Lune dans le champ de gravité du Soleil en mesurant précisément la distance entre notre planète et son satellite grâce à un lien laser. Ces mesures ont permis de valider le Principe d'Équivalence à 10^{-13} près. Cependant, ce test est limité par les imprécisions sur la modélisation de la Terre et de la Lune. En outre, le test est conduit loin du Soleil, dans un champ gravitationnel faible par rapport à celui de la Terre au voisinage de celle-ci. Enfin, la Terre et la Lune étant des corps très massifs, l'identité de leur chute libre est soumise non seulement à des effets de composition chimique, mais aussi aux effets de leurs énergies internes qui sont différentes.

L'universalité de la chute libre peut être testée au sol au moyen de pendules de torsion. L'avantage de cette expérience est qu'elle permet de tester la chute libre dans le champ gravitationnel de la Terre. Elle a ainsi conduit à une précision record sur le test du Principe d'Équivalence de quelques 10^{-13} . Cependant, cette expérience est limitée par les instabilités dues à l'environnement terrestre, très perturbé.

Le Principe d'Équivalence sera testé pour la première fois dans l'espace par la mission MICROSCOPE du CNES. Ce microsatellite à traînée compensée sera placé en orbite basse autour de la Terre. À son bord sont embarqués deux accéléromètres différentiels électrostatiques. Ils sont formés de deux masses cylindriques emboîtées en lévitation électrostatique. La position

des masses est détectée par une méthode de mesure capacitive, et une boucle de contrôle permet aux électrodes de les maintenir centrées et concentriques. Les deux masses suivent donc la même orbite et sont soumises au même champ gravitationnel. Étant de compositions différentes, une différence mesurée dans les accélérations électrostatiques appliquées pour les maintenir sur la même trajectoire indiquerait une violation du Principe d'Équivalence. Étant conduite dans l'espace, cette expérience pourra s'affranchir des perturbations liées à l'environnement terrestre qui limitent la précision des expériences conduites au sol, tout en profitant du signal gravitationnel important de la Terre à basse altitude. MICROSCOPE a pour objectif de tester le Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-15} . Cependant, les caractéristiques de l'instrument ne sont pas mesurables de façon suffisamment précise au sol et limitent l'interprétation du signal mesuré (chapitre 2). De plus, des perturbations numériques apparaissent durant le traitement des données scientifiques. Ces deux types de perturbation pourraient limiter la précision du test du Principe d'Équivalence à un niveau incompatible avec l'objectif de la mission.

C'est ce qui justifie ces travaux de recherche. L'étude consiste en particulier à établir d'une part un protocole d'étalonnage en orbite de l'instrument et d'autre part une procédure de traitement des données permettant de valider la précision de 10^{-15} pour le test du Principe d'Équivalence à réaliser par la mission MICROSCOPE.

La démarche de cette étude a consisté dans un premier temps à déterminer un protocole permettant de réduire l'effet de certains paramètres de l'instrument (défauts d'alignement, couplages entre les axes...) qui limitent la précision de la mesure de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence en les étalonnant pour corriger la mesure de leurs effets (chapitre 3). L'évaluation au sol de ces paramètres est insuffisante pour atteindre la précision visée. Des sessions d'étalonnage en orbite sont donc nécessaires pour estimer suffisamment précisément ces paramètres. Ces procédures consistent à créer un signal connu qui amplifie l'effet du paramètre à estimer pour le rendre prépondérant. Les procédures d'étalonnage sélectionnées préalablement à cette étude et dont les performances, évaluées analytiquement, se sont révélées compatibles avec les spécifications imposées par les objectifs de la mission, doivent être validées numériquement. Pour ce faire, nous développons un simulateur numérique pour simuler les étapes de construction de la mesure instrumentale dans le cadre des phases d'étalonnage ([16]). Le simulateur d'étalonnage modélise l'instrument, constitué des deux masses composant l'accéléromètre différentiel, la prise en compte des forces perturbatrices extérieures et le système de contrôle d'attitude et d'altitude (AOCS) qui les compense pour réduire la dynamique du signal. La comparaison entre les résultats numériques et analytiques met cependant en évidence la présence d'effets numériques qui perturbent de manière non-critique la détermination des paramètres à étalonner.

Ces perturbations numériques interviennent de manière similaire lors de l'estimation de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence, ce qui est plus critique. La seconde étape de cette étude a donc consisté à évaluer leur impact sur l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence (chapitre 4). Ces effets numériques sont dus au caractère nécessairement fini dans le temps de la mesure : les signaux fournis par l'instrument sont intégrés sur un nombre d'orbites sélectionné mais limité. Le signal de violation du Principe d'Équivalence est en effet attendu à une fréquence bien déterminée, f_{EP} . Les perturbations à cette fréquence ont donc été réduites au maximum. Cependant, sur une durée finie, deux signaux monochromatiques à des fréquences distinctes ne se trouvent pas forcément décorrélés.

Une perturbation à une fréquence quelconque présentera donc une composante (dite "projection") à f_{EP} . L'impact de la fenêtre de mesure a été estimé afin de tenir compte des taux de projection des perturbations de tout le domaine spectral grâce à une étude analytique et des simulations numériques ([17]). L'objectif est de déterminer un gabarit fréquentiel de projection rendant compte de l'ampleur maximale possible de ces effets. Par ailleurs, il est souhaitable que les perturbateurs principaux, essentiellement liés aux mouvements du satellite autour de la Terre et sur lui-même, correspondent aux taux de projection les plus faibles. Il faut pour cela accorder la fréquence orbitale et la fréquence de rotation du satellite à la durée de la mesure. Cependant, les imprécisions de réalisation sur ces fréquences nous écartent du cas idéal. Afin de vérifier la compatibilité des taux de projection des perturbations les plus importantes avec les spécifications, des calculs sont réalisés en tenant compte des imprécisions et incertitudes pour obtenir des résultats pire-cas. Enfin, l'impact de la fenêtre de mesure sur le résultat du test varie lorsque des données sont manquantes, par exemple à cause d'erreurs de télémétrie. Des procédures de traitements des données sont déterminées pour réduire l'influence de ces pertes de mesure sur les valeurs de projection des perturbations à la fréquence du Principe d'Équivalence afin de respecter les gabarits de projection malgré la présence de trous dans les mesures.

À ce stade, un scénario d'étalonnage a été établi pour réduire les perturbations liées aux paramètres instrumentaux, et l'impact des perturbations numériques à prendre en compte lors du traitement des données a été évalué. La dernière étape de cette étude a consisté à valider le scénario de correction et de traitement de la mesure en étudiant l'effet de l'association des perturbations numériques et instrumentales (chapitre 5). Pour cela, les procédures d'étalonnage choisies ont été implémentées dans un simulateur numérique reproduisant les sessions de test du Principe d'Équivalence, afin de simuler la totalité du déroulement de la mission : les phases d'étalonnage, de test du Principe d'Équivalence (avec d'éventuelles pertes de données), puis le traitement de la mesure, incluant la correction de la mesure scientifique à partir des estimées des paramètres instrumentaux obtenues par étalonnage. Nous nous assurons ainsi que les méthodes développées dans les parties précédentes, une fois associées, sont bien compatibles avec une estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-15} . Ce simulateur de la mission prépare le traitement des données instrumentales actuellement en cours de définition par le Centre de Mission Scientifique de MICROSCOPE.

Chapitre 1

Le Principe d'Équivalence comme test de la Relativité Générale

—Objectif du chapitre 1—

L'objectif de ce chapitre est de déterminer les enjeux de la mission MICROSCOPE, qui vise à tester le Principe d'Équivalence avec une précision encore inégalée de 10^{-15} , et de présenter les expériences déjà conduites dans ce domaine.

1.1 Le Principe d'Équivalence

En 1971, l'astronaute Dave Scott profite de la mission Apollo 15 sur la Lune pour conduire une expérience : il lâche au même instant une plume et un marteau ([29]). Dans cet environnement exempt de frottement atmosphérique, les deux objets atteignent le sol lunaire au même instant malgré leurs densités et leurs masses très différentes.

Ce phénomène est appelé l'Universalité de la Chute Libre : tous les corps tombent avec la même accélération, quelles que soient leurs masses et leurs compositions internes. Galilée en fait le constat dès le début du XVII^e siècle ([11]). En 1687, Newton présente sa loi universelle de la gravitation ([30]), et considère que l'universalité de la chute libre équivaut à d'identité entre deux types de masse : la masse grave, qui intervient dans la force gravitationnelle, et la masse inerte, liée à l'inertie. Les définitions de ces deux masses sont pourtant tout à fait distinctes, elles n'ont donc aucune raison *a priori* d'être égales.

La masse inerte apparaît dans la seconde loi du mouvement de Newton, qui énonce le Principe Fondamental de la dynamique. Cette loi stipule que l'accélération \vec{a} subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante \vec{F} des forces appliquées et inversement proportionnelle à sa masse inerte m_i , donc :

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \tag{1.1}$$

L'inertie définit donc la résistance d'un corps à une modification de son mouvement, et la masse inerte mesure l'intensité de son accélération pour une force donnée.

Par ailleurs, Newton découvre la loi de l'attraction universelle, définissant la masse gravitationnelle d'un corps, qui est elle à l'origine de l'attraction gravitationnelle. Ainsi, la force

gravitationnelle exercée par un corps A sur un corps B (et inversement), respectivement de masse grave m_{gA} et m_{gB} , et situés à une distance r , est :

$$\vec{F} = \mathcal{G} \frac{m_{gA} m_{gB}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.2)$$

où \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation. Soit pour un corps de masse grave m_g dans le champ gravitationnel \vec{g} créé par un autre corps :

$$\vec{F} = m_g \vec{g} \quad (1.3)$$

La masse grave est donc l'élément avec lequel se couple le champ gravitationnel, comme la charge est celui auquel se couple le champ électrique.

En combinant ces deux lois, on a donc, pour un corps en chute libre, c'est-à-dire uniquement soumis à la force de gravitation :

$$\vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g} \quad (1.4)$$

Le rapport $\frac{m_g}{m_i}$ n'a *a priori* aucune raison de valoir 1, ni même d'être constant d'un matériau à l'autre. Mais plusieurs expériences conduisent Newton à déclarer la proportionnalité entre les deux types de masse, et même l'égalité en absorbant le facteur d'échelle dans la constante \mathcal{G} . Il n'y a donc pas de fondement théorique à ce postulat.

L'universalité de la chute libre sera élevée au rang de principe par Albert Einstein en 1907 ([9]) : c'est le Principe d'Équivalence, qui permet la transition de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale. Le Principe d'Équivalence d'Einstein généralise l'équivalence entre la gravité et l'inertie en introduisant l'équivalence complète entre un champ gravitationnel et un référentiel accéléré. Ce principe est illustré par la célèbre expérience de pensée de l'ascenseur : une personne se trouve dans un ascenseur en train de tomber. Localement, elle ne peut savoir si elle se trouve effectivement dans un ascenseur en chute libre, ou bien si l'ascenseur, isolé, se trouve dans l'espace où il n'est soumis à aucune force de gravitation.

Le Principe d'Équivalence d'Einstein est un pilier de la Relativité Générale, car il permet une description géométrique de l'attraction gravitationnelle. En effet, le Principe d'Équivalence a pour conséquence qu'il est localement équivalent pour un corps d'être en chute libre dans un champ gravitationnel ou d'être isolé, et donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Donc la trajectoire d'un corps dans un champ gravitationnel définit un mouvement rectiligne uniforme, et si son mouvement semble dévier, c'est en fait que l'espace-temps est courbe. Ainsi, la gravitation n'est plus considérée comme une force mais comme une manifestation de la courbure de l'espace-temps, cette dernière étant déterminée par la distribution des masses. La Relativité Générale est donc une théorie métrique de la gravitation, dans laquelle la métrique dépend du contenu de l'univers.

1.2 Les motivations pour le test du Principe d'Équivalence

La théorie de la Relativité Générale a connu de nombreux succès ([52]). Elle a notamment permis d'expliquer l'avancée du périhélie de Mercure et a prédit l'effet de lentille gravitationnelle, observé pour la première fois en 1979 ([50]). Aucune expérience n'a pu à ce jour la mettre en défaut.

Cependant, la Relativité Générale n'explique pas certaines anomalies observées en astrophysique. La première est la masse manquante : l'étude des spectres de galaxies spirales a

montré que leur vitesse de rotation loin du centre galactique est trop élevée par rapport à celle prévue par la théorie de la gravitation à partir de la matière observable qui compose la galaxie ([1]). La seconde concerne l'accélération de l'expansion de l'univers, observée à partir de mesure de supernovae distantes ([38], [33]). Ces deux observations ont été interprétées comme révélant l'existence respectivement d'une matière noire inconnue qui expliquerait la courbe de rotation des galaxies et représenterait 22% du contenu de l'univers, et d'une énergie noire dotée d'une pression négative accélérant l'expansion de l'univers et représentant 74% du contenu de l'univers. Cependant, il pourrait aussi s'agir de déviation par rapport au modèle de la Relativité Générale. Ces anomalies motivent donc des tests de plus en plus poussés de cette théorie afin de vérifier les limites de sa validité. Or, le test du Principe d'Équivalence est l'un des tests les plus directs de la Relativité Générale.

En outre, si la théorie de la Relativité Générale décrit avec une très grande précision les phénomènes macroscopiques, elle n'est pas compatible avec le formalisme quantique utilisé pour décrire les phénomènes microscopiques.

On dénombre quatre interactions fondamentales :

- la gravitation : l'intensité de cette interaction toujours attractive étant très faible, son action est surtout perceptible aux grandes distances au regard des autres interactions. Elle est responsable du mouvement des objets astronomiques.
- l'électromagnétisme : l'interaction électromagnétique est une force répulsive ou attractive qui agit sur les corps ayant une charge électrique. En liant les électrons au noyau de l'atome, elle est responsable de la cohésion atomique. Elle lie de même les différentes molécules entre elles, et permet ainsi les réactions chimiques et la formation de corps solides.
- l'interaction faible : l'interaction faible agit sur tous les fermions et est responsable en particulier de la désintégration radioactive.
- l'interaction forte : cette interaction agit sur les quarks. Elle est responsable de la cohésion du noyau atomique en liant les protons et les neutrons qui le composent.

Les interactions faible, forte et électromagnétique sont décrites par la mécanique quantique et unifiées par le Modèle Standard. La physique aspire à expliquer toutes les observations à partir d'un minimum d'axiomes, d'où une volonté de disposer d'une théorie permettant de décrire toutes les interactions fondamentales. Or, la gravitation résiste à cette unification dans sa description géométrique actuelle ([51]). Des théories alternatives sont donc développées pour permettre l'unification, comme les théories des cordes ou la supersymétrie.

Certaines de ces théories prédisent l'existence de nouvelles interactions qui se manifesteraient par une violation apparente du Principe d'Équivalence à un niveau très faible ([5]). En particulier, un champ vectoriel ou scalaire qui se couplerait à la masse violerait le Principe d'Équivalence. La plupart des violations du Principe d'Équivalence prédites prennent la forme de forces de Yukawa, de portée limitée, qui interagissent différemment avec les objets suivant leur composition chimique. Un potentiel de Yukawa entre deux particules est de la forme :

$$V_{1,2}(r) = \pm \frac{g^2}{4\pi} q_1 q_2 \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \quad (1.5)$$

où q_i correspond à la charge à laquelle est couplée le champ, $\lambda = \frac{\hbar}{m_b c}$ est la portée de l'interaction - elle dépend de la masse de la particule médiatrice (si la masse est nulle, on retrouve un potentiel coulombien classique) - et g est la constante de couplage de la nouvelle interaction, le potentiel étant attractif pour une interaction scalaire ou répulsif pour des charges vectorielles ([53]).

Il est nécessaire de tester le Principe d'Équivalence avec une précision très importante afin de valider ou d'invalider ces nouvelles théories.

1.3 Les expériences précédentes

De nombreuses expériences ont été menées au travers des siècles pour tester l'universalité de la chute libre, et à travers cela le Principe d'Équivalence, comme l'illustre la figure 1.1. Les plus anciennes remontent à Galilée, en 1610. Le savant imagine l'expérience de pensée suivante : laisser tomber du haut de la tour de Pise deux objets de compositions et de masses très différentes - un boulet de canon et une sphère en bois - et vérifier qu'ils touchent le sol au même instant. En pratique, Galilée réalisera des expériences sur la chute de corps le long d'un plan incliné. À la fin du XVII^e siècle, Newton utilisera des pendules pesants : l'expérience consiste à comparer la période d'oscillation de pendules de masses et de compositions différentes. Des pendules de torsion ont ensuite été utilisés et perfectionnés avec le temps. Ce type d'expérience, qui détient aujourd'hui le record de précision du test du Principe d'Équivalence, sera présentée dans une première partie. Nous nous intéresserons ensuite à l'exploitation de la télémétrie laser vers la Lune pour tester l'universalité de la chute libre à l'échelle du système solaire.

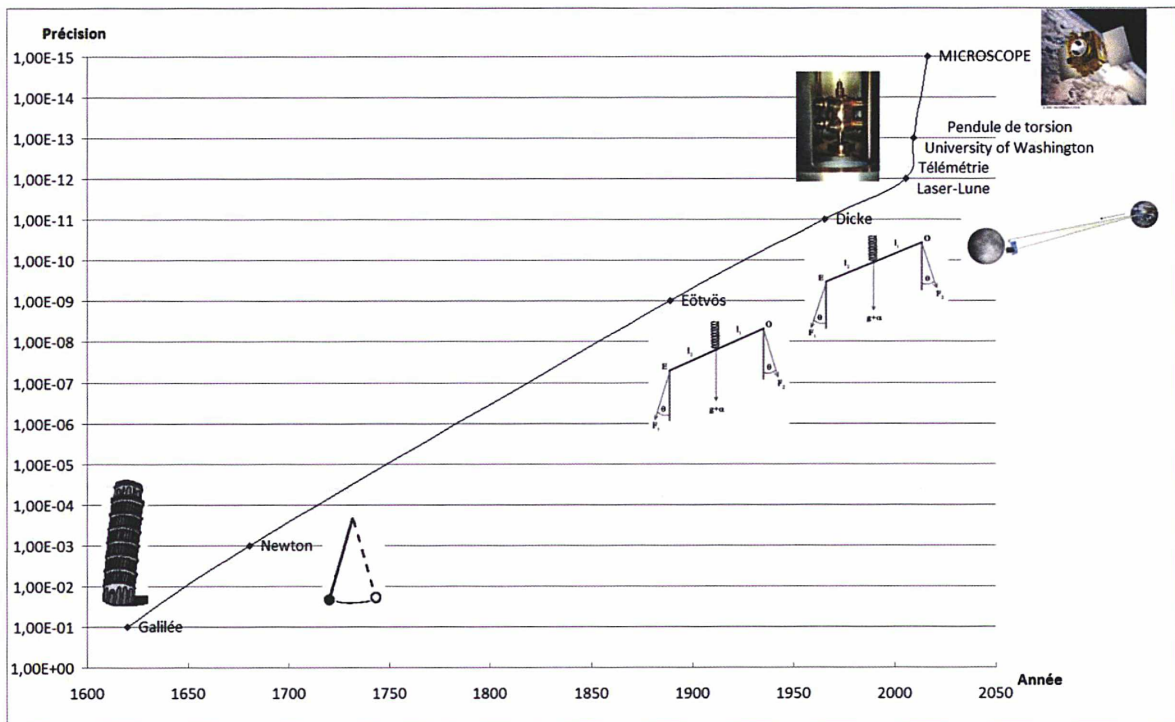


FIGURE 1.1 – Chronologie du test du Principe d'Équivalence.

1.3.1 Le pendule de torsion

Le test du Principe d'Équivalence à l'aide d'un pendule de torsion a été principalement développé par le physicien Loránd Eötvös à partir de 1885. Le pendule d'Eötvös est constitué de deux masses de compositions différentes placées aux extrémités d'une barre suspendue par

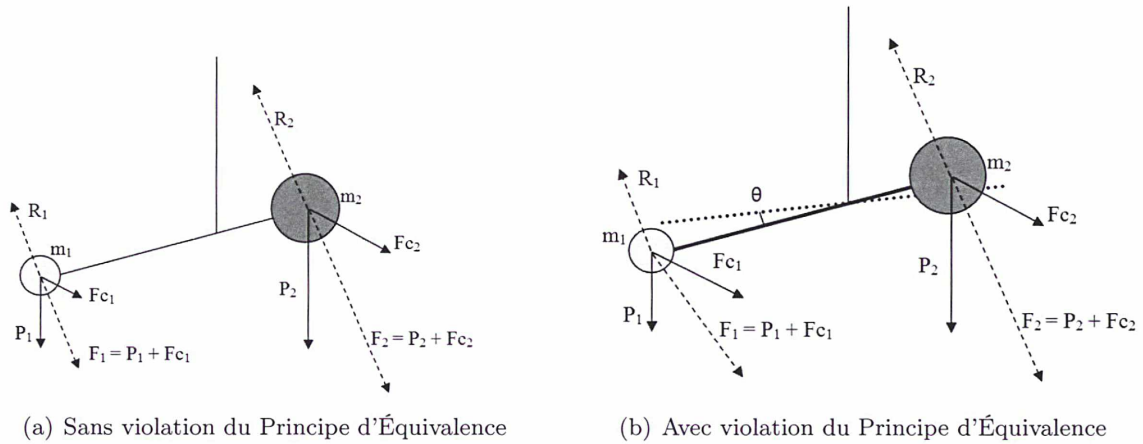


FIGURE 1.2 – Représentation schématique du pendule d'Eötvös, avec \vec{P} le poids, \vec{F}_c la force axifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même, \vec{R} la résistance de la barre. (a) : sans violation du Principe d'Équivalence, le pendule reste à l'équilibre. (b) : avec violation du Principe d'Équivalence, le pendule tourne. Par soucis de pédagogie, le bras du pendule est ici considéré comme horizontal. Dans l'expérience d'Eötvös, le bras du pendule est en équerre.

un fil (voir figure 1.2). Le point de suspension est ajusté le long de la barre pour que celle-ci reste horizontale, ce qui revient à ajuster le rapport des longueurs des bras du pendule pour annuler le moment produit par les forces gravitationnelles sur chaque masse, donc en fonction du rapport des masses graves des deux corps utilisés pour ce test. Fixé sur la barre ou le fil se trouve un miroir, qui permet de réfléchir un rayon lumineux vers un télescope. Ainsi, si le pendule tourne, le rayon lumineux est défléchi. Le mouvement sera perceptible pour l'observateur qui regarde dans le télescope. Ce dispositif permet donc de comparer l'accélération horizontale des deux masses.

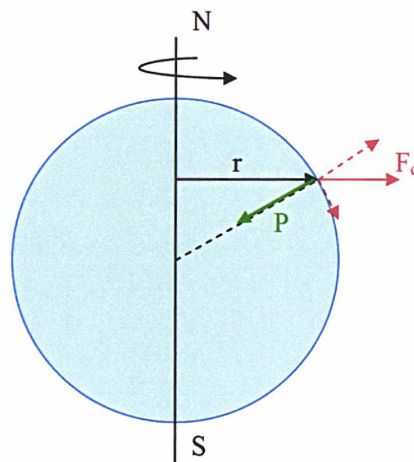


FIGURE 1.3 – Représentation des directions de la force gravitationnelle (poids \vec{P}) et de la force axifuge (\vec{F}_c) à la surface de la Terre.

Dans le référentiel terrestre, non galiléen, les masses du pendule sont soumises à la réaction de la barre et à la force de pesanteur terrestre, composée de la force de gravitation et de la force d'inertie due à la rotation de la Terre sur elle-même. Cette force étant axifuge, elle présente, dans le référentiel du laboratoire, une composante verticale (sauf aux pôles où elle s'annule) et une composante horizontale (sauf à l'équateur). L'accélération axifuge est :

$$\vec{a} = \omega_{\text{Terre}}^2 \vec{r} \quad (1.6)$$

où ω_{Terre} est la pulsation liée à la rotation de la Terre sur elle-même et \vec{r} est défini par la figure 1.3. La force axifuge qui s'applique sur la masse k (avec $k = 1$ ou 2) est donc :

$$\vec{F}_{c,k} = m_{i,k} \omega_{\text{Terre}}^2 \vec{r} \quad (1.7)$$

où $m_{i,k}$ est la masse inerte de la masse test k du pendule d'Eötvös.

En outre, le rapport des longueurs des bras du pendule a été fixé pour annuler le moment gravitationnel, donc en fonction du rapport des masses graves. Si le rapport entre les forces inertielles et les forces gravitationnelles est différent pour les deux objets test, alors ce choix de longueur ne permettra pas d'annuler le moment exercé par les forces centrifuges. Les résultantes des forces sur les masses d'épreuve ne seront pas parallèles, donc le pendule tournera jusqu'à ce que la raideur du fil de suspension arrête son mouvement : il présentera un angle non nul avec sa position de départ.

Si le rapport des forces inertielles dues à la rotation de la Terre avec les forces gravitationnelles est différent pour les deux masses du pendule, cela signifiera que la gravitation et l'inertie ne sont pas couplées à la même chose dans les deux masses, et donc que la masse inerte et la masse grave sont indépendantes.

Ainsi, détecter une rotation horizontale du pendule équivaut à détecter une violation du Principe d'Équivalence. Cette expérience a permis à Eötvös de valider le Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-9} en 1889 ([10]). L'expérience a ensuite été améliorée au cours du temps. En 1965, Dicke obtient une précision de 10^{-11} ([25]), puis Braginsky de 10^{-12} ([2]). Ces travaux sont aujourd'hui poursuivis par le groupe Eöt-Wash de l'université de Washington ([13]). Le dispositif expérimental a largement évolué depuis l'époque d'Eötvös.

Le dispositif actuellement utilisé est représenté sur la figure 1.4. Une des principales difficultés pour conduire à bien cette expérience consiste à maintenir un champ gravitationnel uniforme sur tout le pendule. Sans cela, le pendule présentera un angle de rotation même en l'absence de violation du Principe d'Équivalence. Il faut donc limiter les gradients de gravité dans l'environnement gravitationnel local et rendre le pendule le plus insensible possible à ces gradients. Pour ce faire, le pendule a été construit de manière symétrique (symétrie horizontale et symétrie de rotation, voir figure 1.4). En outre, le gradient de gravité ambiant est mesuré et annulé en plaçant des masses aux distances appropriées.

Afin de résoudre l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence, d'amplitude très faible, le signal est modulé en fréquence. Pour cela, le pendule est suspendu à une table tournante qui permet de faire tourner le dispositif de manière continue. Néanmoins, il est nécessaire que l'axe de rotation de la table tournante soit parfaitement aligné avec la verticale locale, sous peine que le fil de suspension du pendule présente une inclinaison. Pour parvenir à ce résultat, des détecteurs placés sur le fil détectent une éventuelle inclinaison, et contrôlent la température des pieds de la table tournante de manière à dilater les pièces pour obtenir l'alignement entre son axe de rotation et la verticale locale.

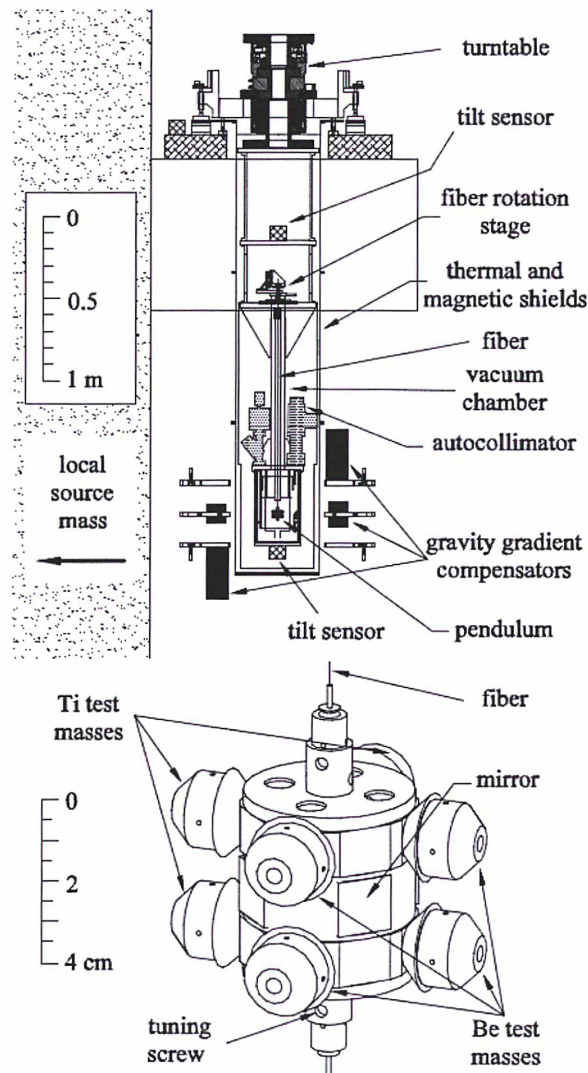


FIGURE 1.4 – Pendule pour le test du Principe d'Équivalence : représentation en coupe de l'expérience complète (en haut) et du pendule (en bas). Crédit [40].

Le pendule est de plus placé sous vide d'air pour éliminer tout frottement atmosphérique. Il est protégé des variations de température par des boucliers thermiques et se trouve dans une pièce à température contrôlée. Les gradients et fluctuations de température restent néanmoins la principale source d'incertitude de l'expérience.

L'expérience a été conduite avec plusieurs couples de matériaux : Béryllium et Titanium et Béryllium et Aluminium. L'angle de rotation du pendule est mesuré par autocollimation. Les données sont corrigées des effets liés aux variations de vitesse de rotation de la plateforme tournante, aux gradients de gravité et à l'inclinaison de l'axe de rotation par rapport à la verticale. Pour les effets de couplage magnétique entre le pendule et l'environnement extérieur et de gradient de température, des incertitudes statistiques ont été calculées. L'objectif est d'estimer le paramètre adimensionnel de violation du Principe d'Équivalence entre les deux matériaux A et B, $\delta(A-B)$, défini par le rapport entre la différence d'accélération mesurée pour

les deux matériaux sur la composante horizontal du champ de pesanteur, due à l'accélération centrifuge de la Terre. L'expérience a ainsi obtenu la précision record sur le test du Principe d'Équivalence : $\delta(\text{Be} - \text{Ti}) = (0,3 \pm 1,8) \cdot 10^{-13}$ et $\delta(\text{Be} - \text{Al}) = (1,5 \pm 1,5) \cdot 10^{-13}$ ([15]).

1.3.2 La télémétrie laser-Lune

Les tests par télémétrie laser-Lune sont aussi des tests de l'universalité de la chute libre. L'expérience consiste à étudier le mouvement de la Terre et de la Lune dans le champ gravitationnel du Soleil. Les deux astres sont de composition différente, la Terre possédant un noyau ferreux, contrairement à la Lune. Ainsi, si le Principe d'Équivalence est violé, on observerait une différence dans l'accélération des deux astres autour du Soleil. C'est pour observer cet effet éventuel que la technique de la télémétrie laser-Lune est utilisée : elle permet de mesurer très précisément la distance entre la Terre et la Lune, et ainsi, sur une longue durée, d'observer une éventuelle différence dans le mouvement de chute libre des deux astres autour du Soleil.

Cette expérience teste en fait le Principe d'Équivalence fort ([54]). Le Principe d'Équivalence faible, dont nous avons discuté jusqu'ici, énonce l'équivalence de la masse inerte et de la masse grave. Le Principe d'Équivalence fort étend en particulier cette équivalence à l'énergie propre des corps. En effet, d'après la Relativité Générale, la masse d'un objet provient de deux contributeurs : la masse des atomes d'une part, et la masse de l'énergie qui maintient la cohésion de l'objet, beaucoup plus faible, d'autre part. L'énergie propre pourrait ne pas contribuer de la même manière à la gravitation et à l'inertie, quand bien même l'autre partie le ferait. La contribution de l'énergie propre à la masse étant extrêmement faible, l'effet d'une violation du Principe d'Équivalence fort ne peut espérer être perçu que sur des objets astronomiques. L'énergie propre ne représente pas la même fraction de la masse de la Terre et de la Lune (respectivement $4,6 \times 10^{-10}$ et 2×10^{-11}), c'est pourquoi il est possible d'utiliser ces corps pour tester le Principe d'Équivalence fort. En particulier, dans le cas où l'énergie propre contribuerait exclusivement à la masse grave et pas à la masse inerte, l'effet Nordtvedt prédit un déplacement de l'orbite lunaire le long de l'axe Terre-Lune ([31]).

L'expérience de télémétrie laser-Lune teste donc une combinaison de deux effets : l'effet de la différence d'énergie gravitationnelle propre et l'effet de la différence de composition de la Terre et de la Lune.

Ce test du Principe d'Équivalence est rendu possible par la mesure très précise de la distance Terre-Lune obtenue par la télémétrie laser. Pour ce faire, un faisceau laser pulsé est émis vers la Lune et se reflète sur des réflecteurs posés à sa surface. La mesure du temps aller-retour d'un photon du faisceau permet de calculer la distance qu'il a parcourue (environ 2,6 s pour 385000 km). Les panneaux réflecteurs de la Lune y ont été déposés par de précédentes missions spatiales : trois ont été posés par les missions américaines habitées Apollo (Apollo 11, puis Apollo 14 et Apollo 15), et deux par les missions soviétiques robotisées Luna 17 et Luna 21 (voir figure 1.5). Les réflecteurs, visibles sur la figure 1.6, sont composés de plusieurs "coins de cube", c'est-à-dire des cellules construites de telle sorte que la surface réfléchissante renvoie la lumière dans la même direction que la direction incidente. Ces réflecteurs ont permis d'obtenir une précision de 25 cm sur la distance Terre-Lune dès les années 1960. Les systèmes de l'Observatoire McDonald et de l'Observatoire de la Côte d'Azur ont permis plus récemment d'obtenir une précision de l'ordre de 2 cm ([55]). Le nouveau laser APOLLO (Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation), en fonction depuis 2005, devrait permettre d'améliorer encore cette précision, grâce à un télescope à optique adaptative plus large et à un site aux conditions atmosphériques favorables.



FIGURE 1.5 – Sites lunaires des panneaux rétro-rélecteurs pour la télémétrie laser-Lune. A : Apollo, L : Lunokhod.

L'éventuel signal de violation est modulé à 29,5 jours, dépendant de la distance Lune-Soleil. Cette période est légèrement plus longue que la période de rotation de la Lune autour de la Terre, qui est de 27,3 jours (car la Terre a avancé dans son orbite autour du Soleil durant ces 27,3 jours). Cela facilite la mesure de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence, car de nombreux effets perturbateurs, comme les marées, ont une période différente de celle du signal de violation du Principe d'Équivalence. En revanche, d'autres effets comme la pression

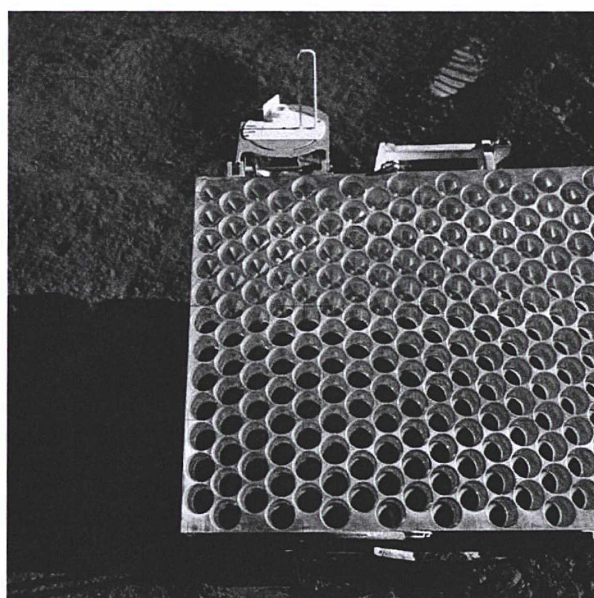


FIGURE 1.6 – Panneau rétro-réfecteur déposé par la mission Apollo 15 sur la Lune. Crédit : NASA.

de radiation du Soleil sur la Lune - heureusement très faible - se produisent avec une périodicité de 29,5 jours.

L'objectif du nouvel observatoire APOLLO est d'obtenir une précision millimétrique sur la distance Terre-Lune. Cependant, une distance de 1 millimètre correspond à un délai dans le temps de parcours aller-retour d'un photon de seulement 6,7 ps. Or, les panneaux rétro-reflecteurs induisent eux même une incertitude plus importante : les différentes cellules réfléchissantes ne sont pas à la même distance de la Terre, et il est impossible de savoir sur quelle cellule un photon donné s'est réfléchi. Pour réduire cette incertitude, il est nécessaire d'intégrer statistiquement un grand nombre de mesure : 3000 photons pour une précision de 1 mm. Or, l'atténuation de la puissance du signal est gigantesque. Pour des pulses de 10^{19} photons, les systèmes précédents ne reçoivent qu'un photon tous les 100 tirs en moyenne. D'où la nécessité d'un télescope plus grand pour récolter plus de photons, et de conditions atmosphériques plus favorables pour limiter l'atténuation du signal. Ainsi, l'observatoire APOLLO reçoit en moyenne un photon par pulse.

Une des principales difficultés de l'expérience provient de la modélisation de l'emplacement des stations. En effet, pour tester le mouvement orbital de la Terre et de la Lune dans le champ gravitationnel du Soleil, c'est la distance entre le centre de la Terre et le centre de la Lune qu'il faut connaître. La télémétrie laser permet de mesurer la distance entre une station sol à la surface de la Terre et un panneau réflecteur à la surface de la Lune. Il faut donc ensuite connaître la distance entre le centre de la Terre et la station laser, et celle entre le centre de la Lune et le panneau réflecteur, avec une précision millimétrique. Certes, la station sol et le panneau réflecteur sont tous deux stationnaires. Néanmoins, la Terre étant un environnement très dynamique, la station se déplace par rapport au centre de la planète (déplacement de l'axe des pôles, météo changeante qui déplace d'énormes masses d'eau, marée, et même dérive continentale). La mesure est plus facile pour la Lune, qui représente un environnement moins actif.

En outre, l'atmosphère terrestre ajoute un délai supplémentaire au temps aller-retour du photon. Ce délai varie avec la météo et la pression atmosphérique.

Il est nécessaire de modéliser le délai atmosphérique ainsi que la position de la station sol sur Terre et du panneau réflecteur sur la Lune pour pouvoir corriger les données de leurs effets.

La technique de la télémétrie laser-Lune a permis d'obtenir une précision sur la distance Terre-Lune d'environ deux centimètres, correspondant à une précision sur le test du Principe d'Équivalence meilleure que 10^{-13} ([55]). L'objectif de l'observatoire APOLLO et de l'observatoire de la Côte d'Azur est de repousser les limites de cette précision, en obtenant la distance Terre-Lune avec une précision de un millimètre, afin de tester le Principe d'Équivalence à quelques 10^{-14} ([28]). Mais il faudra pour cela que la modélisation progresse d'autant.

—Bilan du chapitre 1—

En définitive, le test du Principe d'Équivalence est un test direct de la Relativité Générale d'Einstein. Cette dernière doit être constamment mise à l'épreuve avec plus de précision afin de repousser les limites de sa validité, d'autant plus que de nouvelles théories alternatives prédisent une violation du Principe d'Équivalence à un niveau inférieur à 10^{-13} . Or, les expériences actuellement mise en œuvre sont limitées à quelques 10^{-13} . Les expériences utilisant les pendules de torsion sont limitées par les perturbations dues à l'environnement terrestre, et celles utilisant la télémétrie laser-Lune par les perturbations atmosphérique et la modélisation de la dynamique terrestre et, dans une moindre mesure, lunaire. La mission MICROSCOPE propose de tester le Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-15} grâce à un satellite placé en orbite autour de la Terre. Puisqu'elle se déroule dans l'espace, l'expérience s'affranchit des perturbations terrestres, et pourra ainsi dépasser les limitations de précision des expériences au sol.

Chapitre 2

L'expérience MICROSCOPE

Objectif du chapitre 2

L'objectif de ce chapitre est de mettre en exergue les limitations de précisions de la mesure du test du Principe d'Équivalence induites par la connaissance a priori des paramètres de l'instrument. Pour ce faire, après une présentation de la mission et du fonctionnement de son instrument, un modèle de la mesure sera établi.

Les tests du Principe d'Équivalence au sol étant limités par les perturbations liées à l'environnement terrestre, il faut s'affranchir de cet environnement pour augmenter la précision de l'expérience. MICROSCOPE sera le premier test du Principe d'Équivalence en orbite. L'expérience se déroule à bord d'un microsatellite à trainée compensée embarquant deux accéléromètres électrostatiques différentiels. Dans ce chapitre, la mission MICROSCOPE sera présentée, ainsi que l'instrument dédié, T-SAGE. Nous modéliserons ensuite la mesure instrumentale et caractériserons les effets qui limitent la précision de cette mesure.

2.1 La mission

La mission MICROSCOPE a pour objectif de tester le Principe d'Équivalence avec une précision encore inégalée de 10^{-15} ([47]). Pour cela, l'expérience va mettre à l'épreuve l'universalité de la chute libre en comparant les mouvements de deux masses d'épreuve de compositions différentes en chute libre autour de la Terre.

2.1.1 Avantages d'une expérience dans l'espace

Pour un test de chute libre, l'un des principaux avantages à conduire l'expérience en orbite vient du fait que la durée de la chute n'est pas limitée par la hauteur de chute. En effet, un objet en orbite autour d'un astre n'est soumis qu'à la gravité de cet astre (à l'exception de quelques forces perturbatrices) : il est donc en chute libre. Dans le cas de l'expérience MICROSCOPE, la durée de la mesure sera de un jour et neuf heures (soit 20 orbites) pour les sessions de mesure où le satellite est en rotation sur lui-même, et huit jours environ (120 orbites) pour les sessions de mesure où le satellite est en pointage inertiel. Intégrer le signal sur une durée aussi longue permet de réduire les perturbations stochastiques.

Par ailleurs, dans l'espace, les environnements électriques, magnétiques, thermiques, gravitationnels et vibrationnels sont très stables et peuvent être contrôlés beaucoup plus facilement que sur Terre, où les sources de perturbations sont beaucoup plus nombreuses et l'environnement beaucoup plus dynamique (variation de température, vibration du sol...).

Enfin, la mission MICROSCOPE utilise la Terre comme source de gravité, puisque c'est le mouvement des masses en chute libre autour de la Terre qui est étudié, plutôt que le Soleil, comme c'est le cas pour certaines expériences au sol afin d'obtenir un signal variable au cours du temps avec une fréquence caractéristique. En utilisant la Terre, le signal gravitationnel possède une amplitude mille fois plus élevée qu'en utilisant le Soleil. De plus, comme l'expérience est en orbite autour de la Terre, la fréquence de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence est très bien connue : il s'agit de la fréquence orbitale, éventuellement modulée par la fréquence de spin du satellite si celui-ci est en rotation sur lui-même.

2.1.2 Présentation générale de la mission

MICROSCOPE est un microsatellite à traînée compensée développé par le CNES. Il sera placé en orbite basse autour de la Terre. À son bord sont embarqués deux accéléromètres différentiels électrostatiques développés par l'ONERA. Ils sont formés de deux masses cylindriques emboîtées en lévitation électrostatique. La position des masses est détectée par une méthode de mesure capacitive, et une boucle de contrôle permet via des électrodes entourant les masses de les maintenir centrées et concentriques. Les deux masses suivent donc la même orbite avec une précision de 10^{-11} m et sont soumises au même champ gravitationnel, comme illustré par la figure 2.1. Pour l'un des deux accéléromètres différentiels, les deux masses sont de composition différente. Une différence mesurée dans les forces appliquées pour les maintenir sur la même trajectoire indiquerait donc une violation du Principe d'Équivalence ([46]). Le second accéléromètre, formé de deux masses identiques, permet de tester l'exactitude de l'expérience.

Le satellite sera placé sur une orbite quasi-circulaire - l'excentricité étant inférieure à 5×10^{-3} . L'altitude à 720 km représente un compromis entre l'intensité du signal gravitationnel de la Terre, qui décroît à mesure qu'on s'en éloigne, et la traînée atmosphérique résiduelle qui est plus importante à basse altitude. À cette altitude, l'intensité du champ gravitationnel terrestre est telle que détecter un éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence de $\delta = 10^{-15}$ revient à détecter une accélération de $\delta g = 8 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$. L'altitude choisie correspond à une période orbitale d'environ 5950 s. L'orbite est de plus héliosynchrone, ce qui signifie que l'angle du plan de l'orbite tourne en un an, comme la direction du soleil demeure constant. Ce choix d'orbite permet de faire en sorte qu'au cours d'une année, le satellite est exposé au Soleil de manière optimum et stable, excepté durant une période de trois mois pendant laquelle l'orbite connaît des éclipses, le satellite passant dans l'ombre de la Terre. Cela permet une optimisation de la configuration du satellite pour sa puissance électrique et sa stabilisation thermique, hors période d'éclipse.

Comme vu précédemment, la mesure pour le test du Principe d'Équivalence durera au plus environ huit jours. Mais la préparation de cette expérience nécessite des périodes d'étalonnage longues. Le déroulement de ces phases d'étalonnage sera détaillé dans la chapitre 3. De plus, l'expérience sera reproduite plusieurs fois dans des conditions variées pour éliminer tous les effets parasites. La mission durera ainsi 18 mois, voire deux ans.

Pendant les phases de mesure, le satellite sera orienté suivant deux modes. Le premier mode consiste à maintenir le satellite en pointage quasi-inertiel. Le satellite est alors fixe par rapport au plan moyen de l'orbite (et donc quasi-fixe par rapport au Soleil et aux étoiles).

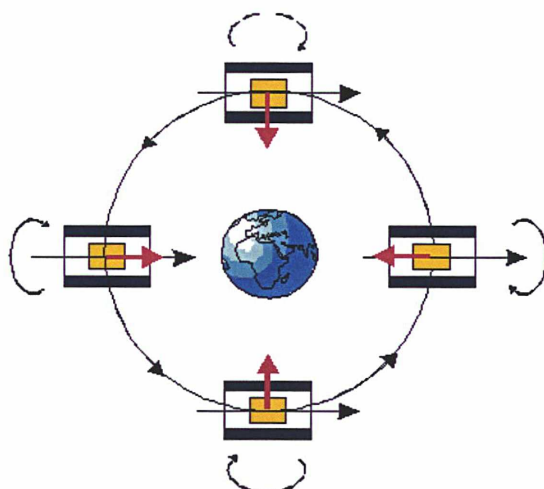


FIGURE 2.1 – Concept de la mission MICROSCOPE : deux masses de composition différente (ici en jaune et bleu) sont en chute libre autour de la Terre. Elles sont contrôlées pour rester sur la même orbite et la force électrostatique nécessaire à les y maintenir (en rouge) est mesurée précisément. En cas de violation du Principe d'Équivalence, on observera une différence dans les forces appliquées aux deux masses. Le satellite est soit maintenu en pointage inertiel, soit mis en rotation sur lui-même (flèches noires) ce qui modifie la fréquence du test.

Dans ce cas, l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence est modulé à la période orbitale :

$$f_{EP,i} = f_{orb} = 1,6 \times 10^{-4} \text{ Hz} \quad (2.1)$$

Ces sessions sont prévues pour durer 120 orbites. Pour le second mode, dit spinné, le satellite est en rotation lente sur lui-même, autour de son axe orbital. Cela permet d'augmenter la fréquence de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence, puisque celui-ci est alors modulé par la somme de la fréquence orbitale et de la fréquence de spin du satellite :

$$f_{EP,s} = f_{orb} + f_{spin} = 7,4 \times 10^{-4} \text{ Hz} \quad (2.2)$$

La fréquence f_{EP} ainsi augmentée est plus proche du minimum du bruit instrumental. Les sessions en mode spinné durent 20 orbites. Nous verrons dans le chapitre 4 comment ont été choisies la durée des sessions et la fréquence de spin.

La composante sol de la mission est composée de deux parties. La première est le MIGS (MICrosatellite Ground Segment). Ce segment est commun à tous les satellites scientifiques de la filière MYRIADE du CNES. Il se compose entre autre d'un réseau de station sol pour la réception des télémesures, et d'un Centre de Commande et Contrôle (CCC). La seconde est le Centre de Mission Scientifique (CMS) qui regroupe les fonctions de préparation des télécommandes pour l'instrument, d'optimisation du fonctionnement de l'instrument, de traitement, d'archivage et de distribution des données scientifiques.

Le lancement du satellite MICROSCOPE est prévu pour 2016. La mission est actuellement en phase C/D : la phase de conception est terminée et son passage en phase de construction a été validé.

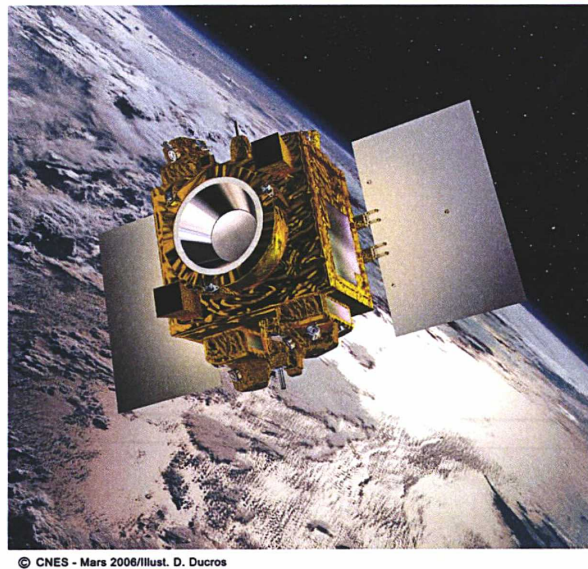


FIGURE 2.2 – Représentation du satellite MICROSCOPE. Crédit : CNES.

2.1.3 Le satellite

MICROSCOPE est un microsatellite de la filière Myriade du CNES (voir figure 2.2). Le satellite présente une masse totale de 280 kg pour une dimension de $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1,5\text{ m}$. La charge utile représente quant à elle une masse de 35 kg, avec une consommation de 40 W.

Afin de respecter les contraintes de poids et de taille liées au développement sur une plateforme du type microsatellite, le système de contrôle thermique est passif. Cela est rendu possible par le choix de l'orbite du satellite, qui permet une grande stabilité thermique. Par ailleurs, l'orbite étant héliosynchrone, le satellite présente toujours la même face au Soleil, autorisant ses deux panneaux solaires à être fixes et donc plus rigides.

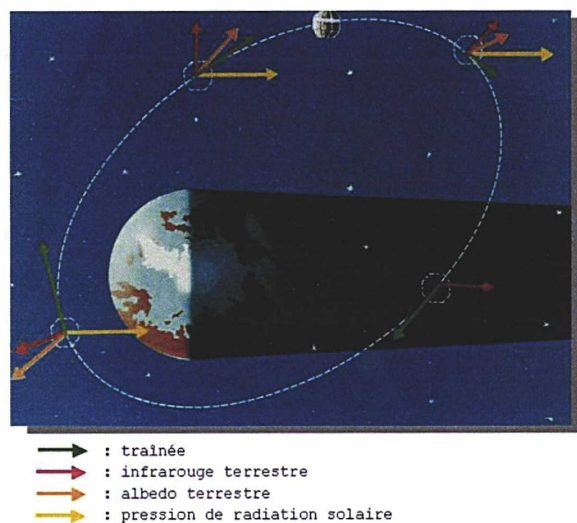


FIGURE 2.3 – Forces perturbatives surfaciques s'exerçant sur le satellite.

Par ailleurs, le satellite MICROSCOPE présente la particularité d'être équipé d'un système de compensation de traînée en continu. La plupart des satellites sont équipés d'un Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite (AOCS). Le contrôle d'attitude permet au satellite d'acquiescer et de conserver au cours du temps l'orientation souhaitée. Le contrôle d'orbite permet de contrôler les accélérations linéaires du satellite pour le maintenir sur l'orbite choisie, c'est-à-dire pour maintenir son altitude. En effet, un satellite en orbite autour de la Terre n'est pas uniquement soumis aux forces de gravitation. Des forces perturbatrices l'empêchent de suivre une orbite correspondant exactement à une géodésique, comme illustré sur la figure 2.3. Les principales perturbations sont la traînée due à l'atmosphère résiduelle à l'altitude du satellite, qui s'oppose au mouvement du satellite, et la pression de radiation solaire, c'est-à-dire la force de pression exercée par le rayonnement électromagnétique du Soleil sur la surface illuminée du satellite, opposée à la direction du Soleil. Ces perturbations surfaciques exercent une accélération supérieure à 10^{-8} ms^{-2} . Habituellement, le mouvement d'un satellite est soumis à toutes ces forces, et son orbite est corrigée lorsque cela s'avère nécessaire. Dans le cas de MICROSCOPE, cette accélération serait directement mesurée par les accéléromètres qui constituent l'instrument. La mesure recherchée est différentielle, et les forces perturbatrices s'exercent de manière identique sur les deux masses d'épreuve de chaque accéléromètre. Néanmoins, la dynamique instrumentale nécessaire pour détecter un signal de violation du Principe d'Équivalence à $8 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$ serait très grande et les différences de sensibilité des capteurs pourraient introduire des termes d'erreur trop importants. C'est pourquoi le satellite est équipé d'un système de correction de l'orbite en continu. Pour ce faire, les mesures accélérométriques de l'instrument sont à chaque pas de temps - soit tous les quarts de seconde - transmises au calculateur embarqué. Ce dernier commande les micro-propulseurs de manière à ce qu'ils appliquent au satellite la poussée nécessaire pour compenser l'effet des perturbations extérieures (voir figure 2.4). Ce contrôle se fait suivant les trois axes, à la fois en linéaire et en angulaire. Le système de compensation de traînée permet ainsi de réduire le bruit du résidu d'accélération à moins de $10^{-12} \text{ m.s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$.

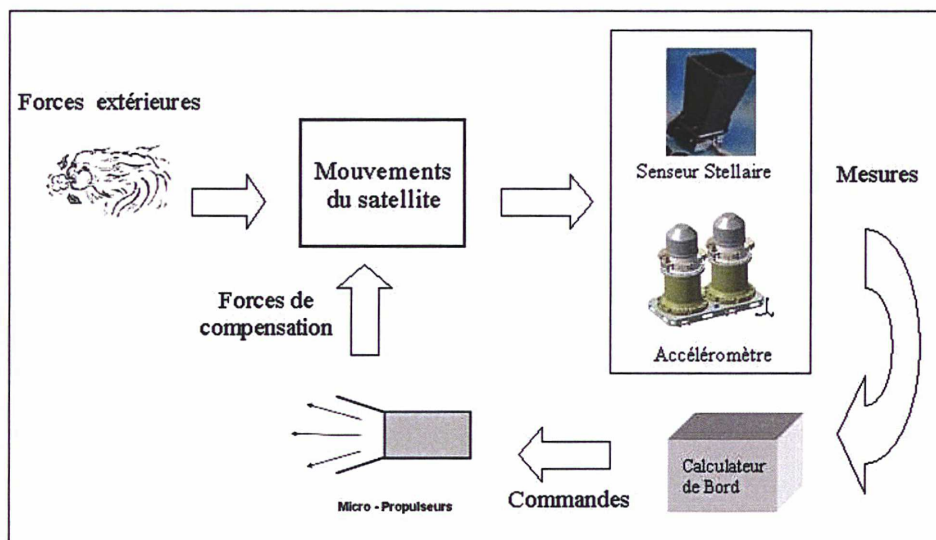


FIGURE 2.4 – Représentation de la boucle du Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite de MICROSCOPE. Crédit : CNES.

2.2 La charge utile

L'instrument utilisé pour l'expérience MICROSCOPE est composé de deux accéléromètres différentiels électrostatiques. Développés par l'ONERA, ces accéléromètres bénéficient de l'expérience acquise lors de précédentes missions spatiales exploitant cette technologie, comme la mission GRACE de la NASA et GOCE de l'ESA, qui cartographient le champ de gravité de la Terre ([48], [23]). Nous nous intéresserons tout d'abord au principe de fonctionnement d'un accéléromètre électrostatique, puis nous décrirons l'instrument de MICROSCOPE, appelé T-SAGE.

2.2.1 Principe de l'accéléromètre électrostatique

Un accéléromètre est composé d'une cage dans laquelle est enfermée une masse d'épreuve, dont la position est mesurée. Deux types d'accéléromètres existent. Les premiers sont les accéléromètres non-asservis : la masse d'épreuve n'est pas asservie en position et la position de la masse qui se déplace est mesurée. C'est ce type d'instrument qui est proposé pour la mission STEP ([24]). Les seconds sont asservis : il s'agit alors d'appliquer et de mesurer la force nécessaire pour maintenir la masse immobile au centre du système, appelé cage. Les accéléromètres de MICROSCOPE appartiennent à cette seconde catégorie.

Une méthode pour mesurer l'accélération subie par cette masse consiste à étudier la force de rappel nécessaire à son maintien à l'équilibre. Dans le cas des accéléromètres électrostatiques, la masse d'épreuve est entourée d'électrodes. Un mouvement de la masse induit une modification de sa position par rapport aux électrodes en regard, ce qui provoque une variation des capacités relatives. Un détecteur capacitif permet de mesurer la différence de capacités entre les électrodes. Les déplacements de la masse sont déduits de cette mesure. Les mêmes électrodes permettent de contrôler la masse d'épreuve pour la ramener au centre de sa cage. Pour cela, un potentiel électrique est appliqué de manière antisymétrique par ces électrodes afin que la force électrostatique totale ainsi développée s'oppose au déplacement de la masse d'épreuve. La boucle de contrôle est représentée sur la figure 2.5. Le potentiel de contrôle fournit la mesure de l'accélération de la masse d'épreuve, car celle-ci est proportionnelle au potentiel qui lui est appliqué, comme nous le verrons dans la suite de cette partie (le potentiel de la masse étant non nul).

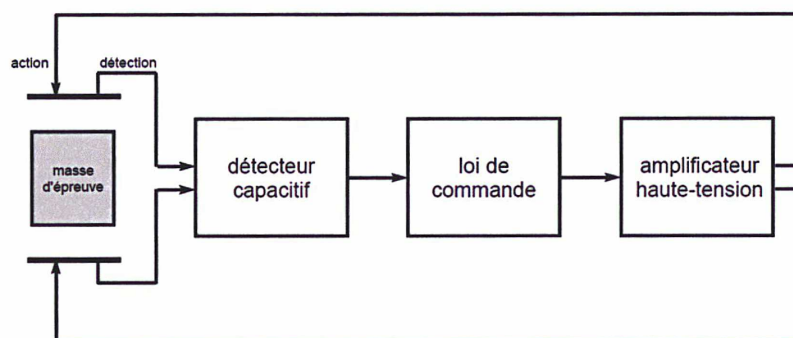


FIGURE 2.5 – Boucle d'asservissement de la masse d'épreuve d'un accéléromètre électrostatique.

2.2.1.1 Le détecteur capacitif

La mesure du déplacement de la masse d'épreuve se fait en utilisant la masse d'épreuve et une paire d'électrodes couplées correspondant au degré de liberté désiré (voir figure 2.6). La masse d'épreuve forme avec l'électrode en regard un condensateur. Le détecteur capacitif fournit une tension V_{det} proportionnelle à la différence de capacité entre les deux électrodes appariées grâce à un amplificateur de charge :

$$V_{det} = G_{det}(C_2 - C_1) \quad (2.3)$$

où G_{det} est le facteur de sensibilité du détecteur capacitif ([18]).

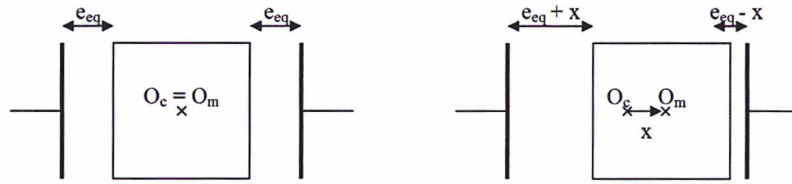


FIGURE 2.6 – Représentation simplifiée de l'accéléromètre électrostatique, avec la masse d'épreuve au centre entourée d'une paire d'électrodes. À gauche : la masse d'épreuve est à l'équilibre au centre de la cage. À droite : petit déplacement de la masse d'épreuve le long de l'axe \vec{X} , les entreferes sont modifiés.

Dans le cas d'une configuration simplifiée plane et dans le vide - l'instrument de la mission MICROSCOPE est maintenu sous vide d'air -, la capacité de l'électrode i ($i = 1, 2$) est égale à :

$$C_i = \frac{\varepsilon_0 S}{e_i} \quad (2.4)$$

avec :

- $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ A}^2 \text{ s}^4$ la permittivité du vide ;
- S la surface de recouvrement de l'électrode i avec la masse d'épreuve ;
- e_i l'entrefer, soit la distance entre l'électrode i et la masse d'épreuve.

Lorsque la masse est au centre de sa cage, elle est équidistante des deux électrodes et :

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq}} \quad (2.5)$$

avec e_{eq} l'entrefer à l'équilibre. En cas d'un petit déplacement x le long de l'axe correspondant à la paire d'électrodes, supposés identiques, les capacités sont modifiées de :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} + x} \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} - x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La tension en sortie du détecteur est alors, pour de petits déplacements ($x \ll e_{eq}$) :

$$\begin{aligned} V_{det} &= G_{det} \left(\frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} - x} - \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} + x} \right) \\ &= \frac{2G_{det}\varepsilon_0 S}{e_{eq}^2} x + O \left(\left(\frac{x}{e_{eq}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le détecteur capacitif fournit donc au premier ordre une tension proportionnelle au déplacement de la masse d'épreuve, avec un gain $\frac{2G_{det}\epsilon_0 S}{e_{eq}^2}$. Il est donc nécessaire de bien connaître les propriétés du détecteur capacitif (gain G_{det}) et la géométrie de l'instrument (entrefer e_{eq} et surface de recouvrement S) pour déduire le déplacement.

2.2.1.2 Contrôle de la masse d'épreuve

La tension délivrée par le détecteur capacitif est ensuite numérisée et amplifiée. Le signal résultant est traité par la boucle de contrôle de la masse d'épreuve pour en déduire la tension à appliquer aux électrodes afin d'annuler son déplacement et de la ramener au centre de sa cage, et donc d'annuler la tension V_{det} définie par l'équation 2.3 en sortie du détecteur capacitif.

D'après l'équation 2.4 définissant la capacité d'une électrode face à la masse d'épreuve, le contrôle peut se faire de deux manières : soit en faisant varier l'entrefer e , c'est-à-dire la distance entre la masse et l'électrode, soit en faisant varier la surface S de recouvrement.

2.2.1.2.a Contrôle par variation de l'entrefer

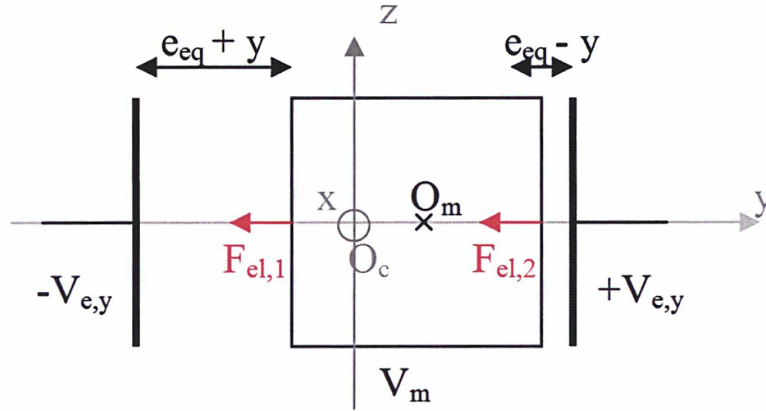


FIGURE 2.7 – Contrôle de la masse d'épreuve en translation par variation d'entrefer.

Nous nous intéressons au contrôle d'un mouvement de translation de la masse d'épreuve suivant l'axe \vec{Y} (voir la figure 2.7). Pour cela, une paire d'électrodes orthogonales à cet axe et soumises aux tensions antisymétriques $V_{e,y}$ et $-V_{e,y}$ est utilisée. La configuration géométrique est supposée initialement symétrique.

Considérons le condensateur de capacité C_i ($i = 1, 2$) formé par la masse d'épreuve de potentiel électrostatique V_m et l'électrode i en regard. En cas d'un déplacement de la masse d'épreuve de long de l'axe \vec{Y} , la capacité devient :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq} + y} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq} - y} \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'énergie potentielle de ce système est :

$$E_{p_i} = \frac{1}{2} C_i (V_{e,y_i} - V_m)^2 \quad (2.9)$$

Le travail élémentaire de la force électrostatique est :

$$\delta W_{F_{el,i}} = \vec{F}_{el,i} \cdot d\vec{u} = -dE_{p_i} \quad (2.10)$$

où $d\vec{u}$ représente un déplacement élémentaire du point d'application de la force. On en déduit l'intensité de la force électrostatique appliquée par l'électrode sur la masse d'épreuve :

$$F_{el,i} = \frac{1}{2} \nabla C_i (V_{e,y_i} - V_m)^2 \quad (2.11)$$

avec :

$$\nabla C_i = \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} \pm y} = \pm \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} \pm y)^2} \quad (2.12)$$

La résultante des forces électrostatiques s'appliquant sur la masse d'épreuve de la part des deux électrodes est :

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_{el,1} + F_{el,2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} + y)^2} (V_m - V_{e,y})^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} - y)^2} (V_m + V_{e,y})^2 \\ &= \frac{2\varepsilon_0 S V_m V_{e,y}}{e_{eq}^2} + \frac{2\varepsilon_0 S V_m^2 y}{e_{eq}^2 e_{eq}} \left(1 + \left(\frac{V_{e,y}}{V_m} \right)^2 \right) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{y}{e_{eq}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'accélération de la masse d'épreuve de masse inerte m_I est donc au premier ordre :

$$\Gamma_y = \frac{F_{el}}{m_I} = G_{e,y} V_{e,y} + \omega_p^2 y \left(1 + \left(\frac{V_{e,y}}{V_m} \right)^2 \right) \quad (2.14)$$

où l'on a défini :

- $G_{e,y} = \frac{2\varepsilon_0 S V_m}{m_I e_{eq}^2}$ le facteur de sensibilité ;
- $\omega_p^2 = \frac{2\varepsilon_0 S V_m^2}{m_I e_{eq}^3}$ le coefficient de raideur.

Pour les petits déplacements, l'accélération de la masse d'épreuve selon l'axe \vec{Y} est proportionnelle à la tension $V_{e,y}$ des électrodes. Ainsi, l'accélération est mesurée à partir de cette tension à condition d'avoir une bonne connaissance du facteur de sensibilité $G_{e,y}$ du système de contrôle de la masse.

En réalité, il existe un terme perturbateur correspondant à la raideur électrostatique du système. Ce terme introduit un biais et des non-linéarités quadratiques lorsque la masse n'est pas asservie au point d'équilibre de cette raideur. Comme les dissymétries de la configuration électrostatique sont par exigence de construction très limitées et les déplacements sont de faibles amplitudes, ce terme est négligeable devant le premier.

Pour le contrôle de la rotation θ autour de l'axe \vec{Y} de la masse d'épreuve, un jeu d'électrodes plus complexe est utilisé : deux paires d'électrodes placées suivant un axe orthogonale à \vec{Y} (voir figure 2.8). Chacune des quatre électrodes (notée i , avec $i = 1, \dots, 4$) développe une force électrostatique $F_{el,i}$ sur la masse d'épreuve. Cette dernière est définie par l'équation 2.11.

Lorsque la masse d'épreuve tourne d'un angle θ , l'entrefer entre la masse d'épreuve et l'électrode est modifiée d'environ $d \cdot \sin \theta$, où d est la distance entre le centre de l'électrode et l'axe médian de la cage. La capacité C_i devient :

$$C_i = \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} \pm d \sin \theta} \approx \frac{\varepsilon_0 S}{e_{eq} \pm d \theta} \quad (2.15)$$

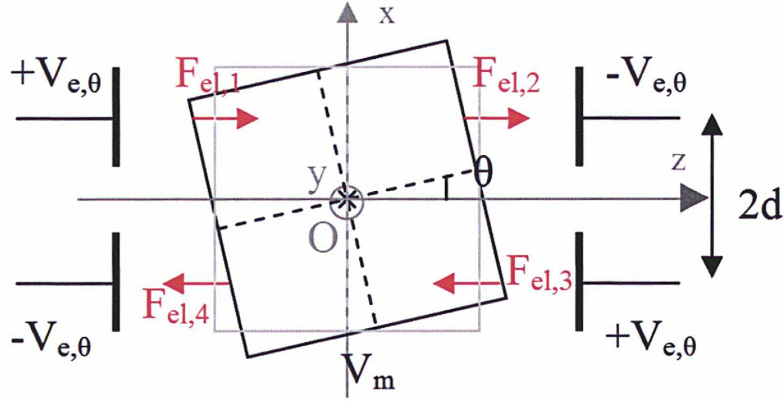


FIGURE 2.8 – Contrôle de la masse d'épreuve en rotation par variation d'entrefer.

car pour des petites rotations, on a au premier ordre $\sin \theta \approx \theta$.

Le moment de la force $\vec{F}_{el,i}$ s'exerçant au point P_i par rapport au pivot O est :

$$\vec{\mathcal{M}}_{F_{el,i}/Y} = \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{el,i} = d \cdot F_{el,i} \vec{Y} \quad (2.16)$$

Le moment total électrostatique est :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{F_{el}/Y} &= \sum_{i=1}^4 \vec{\mathcal{M}}_{F_{el,i}/Y} \\ &= -d \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} + d\theta)^2} (V_m - V_{e,\theta})^2 + d \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} - d\theta)^2} (V_m + V_{e,\theta})^2 \\ &\quad -d \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} + d\theta)^2} (V_m - V_{e,\theta})^2 + d \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(e_{eq} - d\theta)^2} (V_m + V_{e,\theta})^2 \\ &= \frac{4\varepsilon_0 S d V_m}{e_{ep}^2} V_{e,\theta} + \frac{4\varepsilon_0 S d V_m^2}{e_{eq}^2} \frac{d\theta}{e_{eq}} \left(1 + \left(\frac{V_{e,\theta}}{V_m} \right)^2 \right) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{d\theta}{e_{eq}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'après le théorème du moment cinétique, l'accélération angulaire autour de l'axe \vec{Y} vaut pour des petites rotations telles que $d\theta \ll e_{eq}$ et pour une approche mono-axe :

$$\Gamma_\theta = \frac{\mathcal{M}_{F_{el}}}{J_\theta} = G_{e,\theta} V_{e,\theta} + \omega_p^2 \theta \left(1 + \left(\frac{V_{e,\theta}}{V_m} \right)^2 \right) \quad (2.18)$$

où l'on a défini :

- $G_{e,\theta} = \frac{4\varepsilon_0 S d V_m}{J_\theta e_{eq}^2}$ le facteur de sensibilité ;
- $\omega_p^2 = \frac{4\varepsilon_0 S d V_m^2}{J_\theta e_{eq}^3}$ le coefficient de raideur.

Ainsi, la connaissance du potentiel de contrôle appliqué aux électrodes permet de déterminer l'accélération angulaire de la masse d'épreuve. Au premier ordre, la relation est linéaire, en négligeant un terme de raideur et un terme non linéaire de faible amplitude. De plus dans le cas d'un mouvement d'attitude selon trois axes, il sera nécessaire de considérer la sphéricité de la matrice d'inertie pour tenir compte des termes de variation du moment cinétique en fonction de la vitesse angulaire.

2.2.1.2.b Contrôle par variation de surface de recouvrement

Les méthodes de contrôle de la masse d'épreuve que nous avons vues précédemment exploitent une variation de la distance entre la masse d'épreuve et les électrodes de contrôle. Une alternative consiste à utiliser une variation de la surface en regard. Nous nous plaçons pour cette partie dans le cas d'une masse d'épreuve cylindrique.

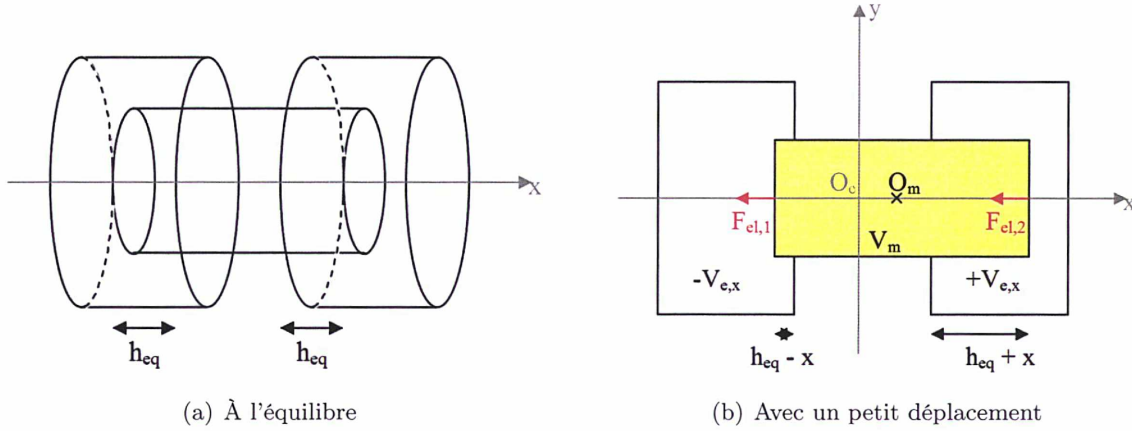


FIGURE 2.9 – Contrôle de la masse d'épreuve en translation par variation de surface de recouvrement. (a) : à l'équilibre, la masse est au centre de la cage. (b) : avec un petit déplacement le long de l'axe \vec{X} (dessin projeté dans le plan (\vec{X}, \vec{Y})).

Pour déterminer le déplacement de la masse d'épreuve le long de l'axe \vec{X} , une paire d'électrodes cylindriques concentriques coaxiales à la masse d'épreuve et placées à chacune de ses extrémités est utilisée (voir figure 2.9). La surface de recouvrement de l'électrode i ($i = 1, 2$) s'écrit :

$$S_i = 2\pi r h_i \quad (2.19)$$

avec :

- r le rayon de l'électrode cylindrique ;
- h_i la hauteur de recouvrement.

À l'équilibre électrostatique, la masse est au centre de la cage et $h_1 = h_2 = h_{eq}$. Lorsque la masse effectue un déplacement de x , les hauteurs de recouvrement deviennent :

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{eq} - x \\ h_2 &= h_{eq} + x \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'après l'équation 2.11, la force électrostatique qui s'applique sur les masses est :

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_{el,1} + F_{el,2} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla C_1 (V_m - V_{e,x})^2 + \frac{1}{2} \nabla C_2 (V_m + V_{e,x})^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} \nabla C_i &= \frac{\partial C_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\epsilon_0 S}{e} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\epsilon_0 2\pi r (h_{eq} \pm x)}{e} = \pm \frac{\epsilon_0 2\pi r}{e} \end{aligned} \quad (2.22)$$

On a donc :

$$F_{el} = \frac{4\varepsilon_0\pi r V_m}{e} V_{e,x} \quad (2.23)$$

et l'accélération de la masse d'épreuve est :

$$\Gamma_x = G_{S,x} V_{e,x} \quad (2.24)$$

avec $G_{S,x} = \frac{4\varepsilon_0\pi r V_m}{e}$.

Dans le cas d'un contrôle en translation par variation de la surface de recouvrement, l'accélération de la masse d'épreuve est directement proportionnelle au potentiel de contrôle des électrodes. Contrairement au cas où la variation d'entrefer est utilisée, il n'y a pas de terme perturbateur dû à la raideur électrostatique lorsque la configuration est parfaite. Ce mode de contrôle permet donc une détermination plus précise de l'accélération de la masse d'épreuve, à condition de connaître précisément la géométrie de l'instrument.

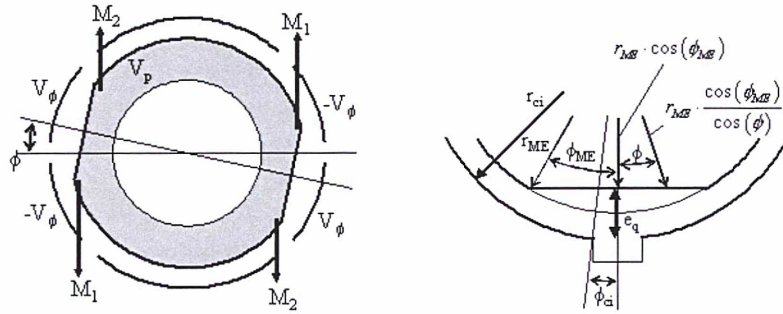


FIGURE 2.10 – Contrôle de la masse d'épreuve en rotation par variation de surface de recouvrement. À gauche : les couples créés. À droite : Zoom autour d'un méplat.

Pour le contrôle en rotation de la masse d'épreuve selon l'angle φ autour de l'axe \vec{X} , quatre électrodes placés sur un cylindre en regard de quatre méplats usinés dans la masse d'épreuve sont utilisés (voir figure 2.10). Ces méplats permettent de casser la symétrie cylindrique. Ainsi, une rotation de la masse d'épreuve d'un angle ϕ entraîne une modification de la surface de recouvrement entre la masse et l'électrode en regard.

Pour une rotation d'angle faible, l'accélération angulaire de la masse d'épreuve s'écrit au premier ordre, d'après [14] :

$$\Gamma_\phi = G_{S,\phi} V_\phi - \omega_p^2 \phi \left(1 + \left(\frac{V_{e,\phi}}{V_m} \right)^2 \right) \quad (2.25)$$

où l'on a défini :

- $G_{S,\phi} = \frac{4\varepsilon_0 h V_m}{J_\phi} \left[\frac{r_e - r_{ME}}{e} - \frac{r_{ci} \cos \phi_{ci} + r_{ME} \cos \phi_{ME}}{r_{ci} \cos \phi_{ci} - r_{ME} \cos \phi_{ME}} \right]$ le facteur de sensibilité, avec r_{ci} le rayon du cylindre d'électrodes, r_{ME} le rayon de la masse d'épreuve cylindrique, ϕ_{ci} le demi-angle de séparation entre deux électrodes, ϕ_{ME} le demi-angle correspondant au méplat sur la masse d'épreuve ;
- $\omega_p^2 = \frac{4\varepsilon_0 h r_{ci} r_{ME} \sin \phi_{ci} \cos \phi_{ME}}{J_\phi (r_{ci} \cos \phi_{ci} - r_{ME} \cos \phi_{ME})}$

Encore une fois, l'accélération de la masse d'épreuve est proportionnelle au potentiel des électrodes pour une rotation nulle. Dans le cas contraire, il existe un terme perturbateur.

2.2.2 L'instrument T-SAGE

Dans le cas de l'instrument de MICROSCOPE, les masses d'épreuve sont de forme cylindrique. Nous avons supposé dans la partie 2.2.1.2.a que le condensateur formé par la masse et l'électrode en regard était plan. Cette différence ne modifie pas la forme des résultats présentés.

Chaque masse test est entourée d'un ensemble de six paires d'électrodes, réparties sur un cylindre interne à la masse test et un cylindre externe, comme le montre la figure 2.11. Les cylindres d'électrodes sont composés d'un isolant recouvert d'or. Une gravure du cylindre retire la couche d'or et permet de séparer les différentes électrodes.

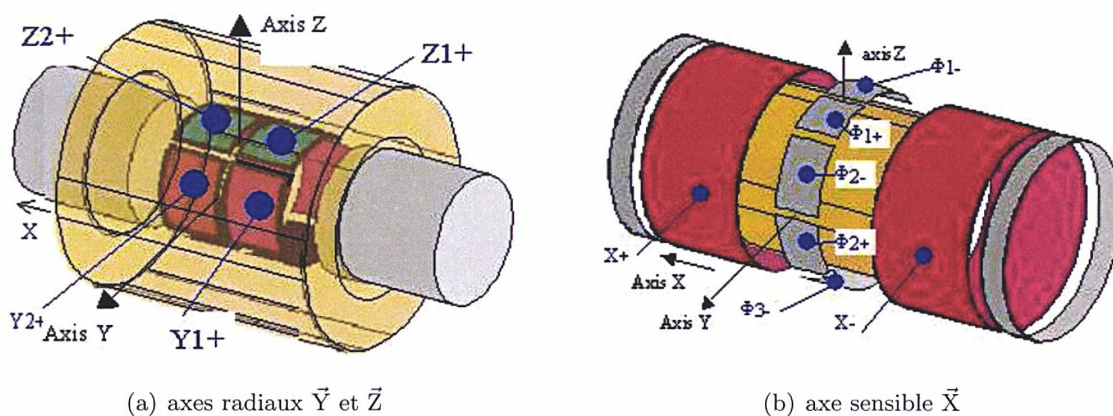


FIGURE 2.11 – Disposition des électrodes pour le contrôle de la masse test suivant ses six degrés de liberté.

Ces électrodes permettent de contrôler et de mesurer le mouvement de la masse test selon ses six degrés de liberté : trois translations et trois rotations. Le contrôle des axes radiaux \vec{Y} et \vec{Z} en rotation et en translation se fait par variation d'entrefer grâce aux quatre électrodes du cylindre interne. Nous avons vu dans la partie précédente que le contrôle en rotation de la masse d'épreuve par variation d'entrefer nécessite deux paires d'électrodes, alors que le contrôle en translation n'en n'utilise qu'une. En réalité, le mouvement de translation est également contrôlé avec les deux paires d'électrodes utilisées pour le contrôle en rotation, mais elles sont combinées différemment. En effet, le contrôle en rotation utilise la différence de signal fournie par les deux paires, alors que le contrôle en translation utilise la moyenne - les deux paires d'électrodes se comportent alors comme une seule. Les électrodes du cylindre externe permettent la détection suivant l'axe du cylindre, \vec{X} . La détection se fait cette fois par variation de surface. Pour le contrôle en translation, elle utilise les deux bagues cylindriques externes placées aux extrémités de la masse test. Pour le contrôle en rotation, ce sont les huit électrodes centrales du cylindre externe qui sont exploitées. Elles font face à quatre méplats sur la masse test, qui permettent de casser la symétrie cylindrique. Le contrôle par variation de surface permet de s'affranchir du terme de raideur électrostatique parasite qui intervient pour le contrôle par variation d'entrefer, comme nous l'avons vu dans la partie précédente. Cet axe offre donc une meilleure précision que les axes radiaux pour le contrôle de la masse : c'est l'axe de mesure pour le test du Principe d'Équivalence.

Par ailleurs, nous avons vu que le facteur de sensibilité G - le facteur de proportionnalité entre le potentiel des électrodes et l'accélération de la masse test - dépend du potentiel élec-

trique de la masse test V_m . Afin de maintenir ce potentiel constant, la masse test est reliée à une source électrique très stable par un fil d'or d'un diamètre de $7 \mu\text{m}$. Il s'agit de l'unique contact physique entre la masse en lévitation électrostatique et le reste de l'instrument.

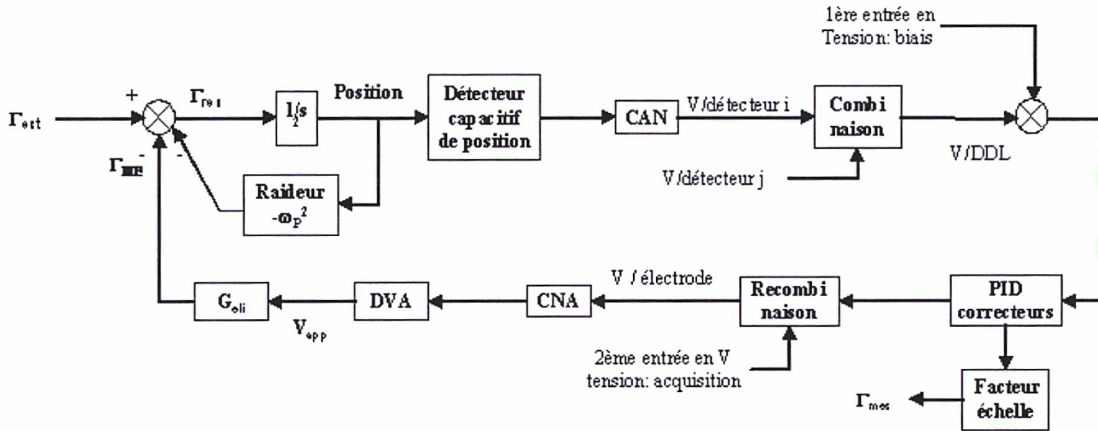


FIGURE 2.12 – L'asservissement numérique de la masse test.

La boucle de contrôle d'une masse test est présentée figure 2.12. L'asservissement est numérique : les signaux fournis par les détecteurs capacitifs sont numérisés par un convertisseur analogique-numérique (CAN). En combinant les réponses suivant les différents axes, la position de la masse selon ses six degrés de liberté est déduite. Il est possible d'ajouter au résultat, via une entrée secondaire, une consigne sur le mouvement de la masse test. Nous verrons dans le chapitre 3 que cela est utilisé pour étalonner certains paramètres de l'instrument en orbite. Dans la configuration de base, la masse doit être maintenue immobile au centre de la cage électrostatique : un correcteur du type proportionnel intégral dérivé (PID) permet de calculer la tension à imposer aux électrodes pour compenser les mouvements de la masse test. La tension calculée est reconvertie en signal analogique par le convertisseur numérique-analogique (CNA) avant d'être amplifiée par l'amplificateur de contrôle de tension (DVA) et transmise aux électrodes. Le fait que les mêmes électrodes permettent à la fois le contrôle et la détection est rendu possible par une séparation fréquentielle des deux fonctions. La détection est en effet effectuée grâce à un signal sinusoïdal à 100 kHz, tandis que la boucle de contrôle de la masse présente une largeur de bande de quelques Hertz. Nous avons vu dans la partie précédente que la tension délivrée par les électrodes permet de déduire l'accélération de la masse test. C'est cette mesure qui servira pour le test du Principe d'Équivalence.

Pour ce test, l'accélération de deux masses d'épreuve de compositions différentes est comparée. Il est nécessaire que les deux masses d'épreuve soient concentriques : ainsi, leurs centres de gravité sont confondus et les deux objets sont soumis au même champ gravitationnel. En outre, il est préférable qu'ils se comportent comme des quasi-monopoles gravitationnels, c'est-à-dire comme des masses ponctuelles vis-à-vis de la source gravitationnelle. La forme idéale aurait été la sphère. Cependant, la configuration avec deux sphères concentriques pose des difficultés technologiques, en particulier pour mettre en place le système de mesure de position de la masse interne ; d'où le choix de masses cylindriques pour la mission MICROSCOPE ([20]). Les dimensions des masses ont par ailleurs été choisies de manière à obtenir le même

moment d'inertie selon les trois axes de l'instrument.

Les deux masses d'épreuve cylindriques et emboîtées associées à leurs électrodes forment un accéléromètre différentiel électrostatique. Le satellite de la mission MICROSCOPE embarquera deux de ces accéléromètres différentiels, aussi l'instrument est-il appelé T-SAGE, pour "Twin Space Accelerometers for Gravitational Experimentation". Ces deux accéléromètres différentiels sont identiques, à la composition des masses près. L'un d'eux est constitué de deux masses d'épreuves de compositions différentes : il permet de tester le Principe d'Équivalence. Les matériaux qui constituent les masses ont été sélectionnés d'une part pour des raisons technologiques (conductivité électrique, thermique, magnétique...) et d'autre part pour maximiser l'intensité d'un éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. Pour cela, des matériaux présentant un écart important dans leur numéro atomique ont été choisis ([4]) : il s'agit d'un alliage de platine-rhodium (PtRh10) d'une part, composé de 90% de Platine et de 10% de rhodium, et d'un alliage à base de titane d'autre part (TA6V), composé de 90% de titane, 6% d'aluminium et 4% de vanadium. Le second accéléromètre différentiel est constitué de deux masses de même composition (PtRh10) et permet de tester la précision de la mesure.

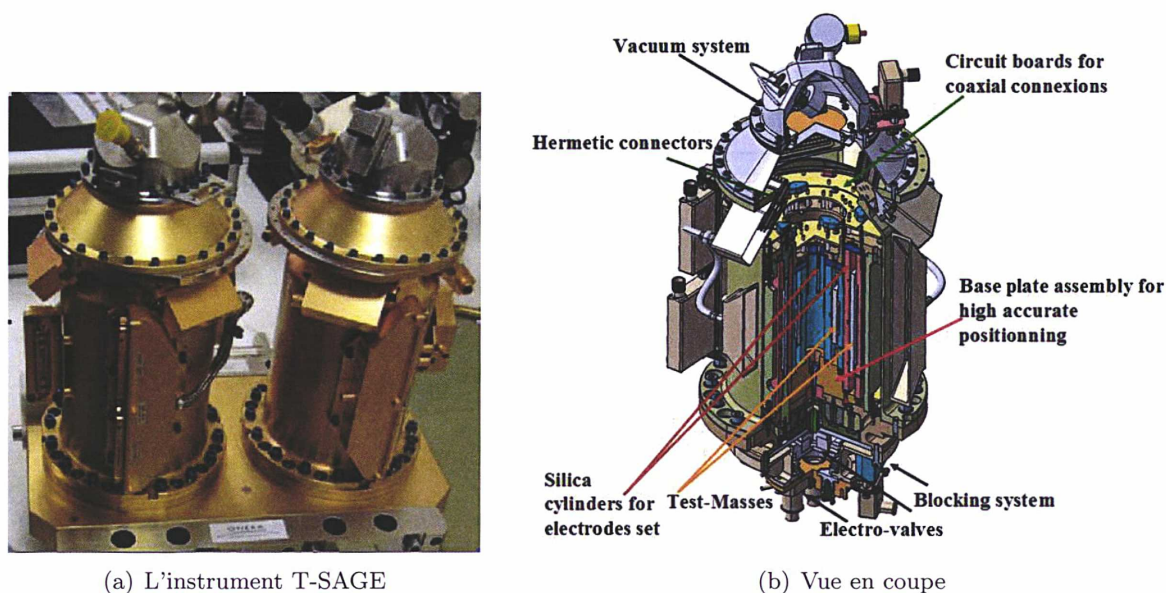


FIGURE 2.13 – L'instrument T-SAGE pour la mission MICROSCOPE. (a) : les deux accéléromètres différentiels de T-SAGE. (b) : chaque accéléromètre différentiel électrostatique est composé de deux masses d'épreuve cylindriques et concentriques (ici en violet) entourées d'électrodes (ici en bleu).

Chacun de ces deux accéléromètres différentiels électrostatiques est composé de trois unités (voir figure 2.13) : le capteur (Sensor Unit - SU), l'électronique (Front End Electronic Unit - FEEU) et l'interface de contrôle (Interface Control Unit - ICU). Le SU représente le cœur de l'instrument : les deux masses d'épreuve entourées des électrodes pour le contrôle et la détection de leurs positions. Il est placé dans une enceinte sous vide, permettant d'obtenir un vide meilleur que 10^{-5} Pa. Le FEEU gère les fonctions d'électronique analogique. Il est relié à l'ICU qui correspond à l'électronique numérique de la boucle de contrôle des masses d'épreuve et transmet les données instrumentales à la plate-forme satellite. La charge utile du satellite

opère dans un environnement thermique stable et est protégée des perturbations extérieures par un bouclier magnétique.

L'instrument est actuellement en phase de qualification. Puisque les masses d'épreuve ne peuvent être mise en lévitation sous 1g, le modèle de qualification est testé dans la tour de chute libre du ZARM. Située à Brême, en Allemagne, cette tour permet de conduire des expériences de micro-gravité de courte durée ([42]). La tour mesure 140 mètres de haut et est placée sous vide d'air. Lorsque l'instrument est lâché du sommet, cela correspond à une durée de chute libre d'environ 4,7 s. Un système de catapulte permet de réaliser un vol vertical parabolique et ainsi de doubler la durée de la chute libre. Si ces essais permettent de tester le fonctionnement de l'instrument dans des conditions proches de celles de la mission en orbite ([34]), ils ne permettent néanmoins pas de tester le Principe d'Équivalence, la durée de la chute libre étant beaucoup trop courte pour pouvoir réduire le bruit stochastique à un niveau acceptable.

2.3 Modélisation de la mesure instrumentale

Pour pouvoir déterminer s'il y a ou non violation du Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-15} , il est nécessaire d'établir un modèle précis des mesures accélérométriques qui seront fournies par l'instrument. Cela permet de déterminer tous les termes perturbateurs qui viennent réduire la précision de la mesure et d'identifier les facteurs dont ils dépendent pour pouvoir éventuellement les réduire afin d'atteindre l'objectif de précision visé.

L'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence sera évalué à partir d'une combinaison de la mesure des accélérations appliquées aux deux masses d'épreuve de l'accéléromètre différentiel par les électrodes pour les maintenir au centre de la cage. Nous commencerons donc par déterminer dynamiquement l'accélération électrostatique appliquée à une masse test. Nous nous intéresserons ensuite à la mesure effective de cette accélération par le capteur inertiel en modélisant les imperfections instrumentales.

2.3.1 Accélération de la masse test

Nous considérons dans cette partie une des deux masses d'épreuve composant un accéléromètre différentiel et indexée k ($k = 1$ pour la masse interne et 2 pour la masse externe). Dans le référentiel géocentrique J2000 \mathcal{R}_{in} , considéré comme inertiel, la masse k est soumise au champ d'attraction gravitationnelle de la Terre \vec{g} , aux forces électrostatiques $f\vec{e}_k$ appliquées par les électrodes pour la maintenir au centre de la cage électrostatique, et à des forces parasites $F_{Par,k}$. Le Principe Fondamental de la Dynamique est appliqué à la masse k de centre de masse O_k dans le référentiel inertiel \mathcal{R}_{in} d'origine O :

$$m_{Ik}\vec{\gamma}(O_k)_{/\mathcal{R}_{in}} = \int_{P \in \text{masse}_k} \vec{g}(P) dm_{gk} + f\vec{e}_k + F_{Par,k} \quad (2.26)$$

avec :

- m_{Ik} la masse inerte de la masse test k ;
- m_{gk} la masse gravifique de la masse test k .

La masse test k se trouve à bord du satellite, qui possède une vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ par rapport au référentiel inertiel. Dans le référentiel du satellite \mathcal{R}_{sat} d'origine O_{sat} , la masse test subie en plus des forces précédemment citées les forces d'inertie d'entraînement et d'inertie de

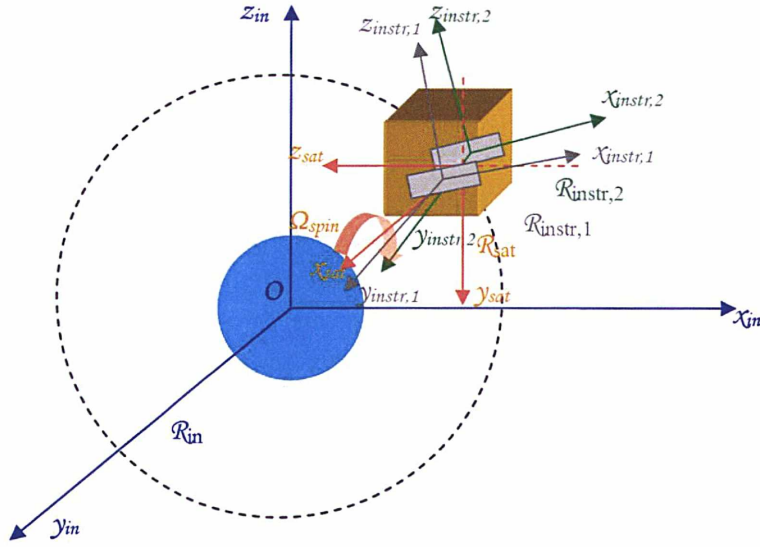


FIGURE 2.14 – Les différents repères de la mission MICROSCOPE.

Coriolis. Dans ce référentiel, l'accélération du centre de masse de la masse test k s'écrit :

$$m_{Ik} \vec{\gamma}(O_k)_{/\mathcal{R}_{sat}} = \int_{P \in \text{masse}_k} \vec{g}(P) dm_{gk} + \vec{f}_e^k + F_{Par,k} - \vec{f}_{ie} - \vec{f}_{ic} \quad (2.27)$$

avec :

– \vec{f}_{ie} la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m_{Ik} \left(\vec{\gamma}(O_{sat})_{/\mathcal{R}_{in}} + \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{sat}/\mathcal{R}_{in}}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}_{in}} \wedge O_{sat} \vec{O}_k + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{sat}/\mathcal{R}_{in}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{sat}/\mathcal{R}_{in}} \wedge O_{sat} \vec{O}_k) \right)$$

– \vec{f}_{ic} la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -m_{Ik} 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{sat}/\mathcal{R}_{in}} \wedge \vec{v}(O_k)_{/\mathcal{R}_{sat}}$$

On note $[In]$ la matrice gradient d'inertie, définie telle que :

$$[In] \cdot O_{sat} \vec{O}_k = \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}_{in}} \wedge O_{sat} \vec{O}_k + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O_{sat} \vec{O}_k)$$

Cette matrice s'écrit :

$$[In] = \begin{bmatrix} -\Omega_y^2 - \Omega_z^2 & \Omega_x \cdot \Omega_y - \dot{\Omega}_z & \Omega_x \cdot \Omega_z + \dot{\Omega}_y \\ \Omega_x \cdot \Omega_y + \dot{\Omega}_z & -\Omega_x^2 - \Omega_z^2 & \Omega_y \cdot \Omega_z - \dot{\Omega}_x \\ \Omega_x \cdot \Omega_z - \dot{\Omega}_y & \Omega_y \cdot \Omega_z + \dot{\Omega}_x & -\Omega_x^2 - \Omega_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La matrice de Coriolis, notée $[Cor]$, est définie telle que :

$$[Cor] \cdot O_{sat} \vec{O}_k = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(O_k)_{/\mathcal{R}_{sat}}$$

Elle s'écrit :

$$[Cor] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

L'équation 2.27 peut donc être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} m_{Ik} \vec{\gamma}(\mathbf{O}_k) / \mathcal{R}_{sat} &= \int_{P \in mass_k} \vec{g}(P) dm_{gk} + \vec{f}e_k + \vec{F}_{Par,k} \\ &\quad - m_{Ik} \vec{\gamma}(\mathbf{O}_{sat}) / \mathcal{R}_{in} - m_{Ik} [In] \cdot \mathbf{O}_{sat} \vec{\mathbf{O}}_k - m_{Ik} [Cor] \cdot \mathbf{O}_{sat} \vec{\mathbf{O}}_k \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le satellite est considéré comme un corps rigide aux fréquences qui nous intéressent (fréquence du Principe d'Équivalence, fréquence de contrôle des masses tests et fréquence de contrôle d'attitude et d'orbite). Il est soumis au champ gravitationnel de la Terre, à la réaction des forces électrostatiques appliquées aux masses d'épreuve et aux forces non-gravitationnelles $\vec{F}_{ng,sat}$. Ces dernières incluent la force de poussée \vec{F}_{propu} induite par le système de propulsion et les perturbations de surface $\vec{F}_{ext,sat}$ dues à l'environnement extérieur du satellite, comme la traînée atmosphérique résiduelle et la pression de radiation solaire et terrestre. L'application du Principe Fondamentale de la Dynamique au satellite de centre de masse \mathbf{O}_{sat} dans le référentiel inertie \mathcal{R}_{in} donne :

$$M_{Isat} \vec{\gamma}(\mathbf{O}_{sat}) / \mathcal{R}_{in} = \int_{P \in sat} \vec{g}(P) dM_{gsat} + \vec{F}_{ng,sat} - \sum_{j=1,4} \vec{f}e_j \quad (2.31)$$

avec :

- M_{Isat} la masse inerte du satellite ;
- M_{gsat} la masse gravifique du satellite.

En combinant les équations 2.30 et 2.31, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{sat} \ddot{\mathbf{O}}_k &= -\frac{1}{M_{Isat}} \int_{P \in sat} \vec{g}(P) dM_{gsat} + \frac{1}{m_{Ik}} \int_{P \in mass_k} \vec{g}(P) dm_{gk} \\ &\quad + \frac{\vec{f}e_k}{m_{Ik}} + \frac{\vec{F}_{Pa,k}}{m_{Ik}} - \frac{\vec{F}_{ng,sat}}{M_{Isat}} + \sum_{j=1,4} \frac{\vec{f}e_j}{M_{Isat}} \\ &\quad - [In] \cdot \mathbf{O}_{sat} \vec{\mathbf{O}}_k - [Cor] \cdot \mathbf{O}_{sat} \vec{\mathbf{O}}_k \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le développement limité du champ de gravité terrestre en un point P de la masse test ou du satellite autour du centre de masse du satellite \mathbf{O}_{sat} s'écrit :

$$\vec{g}(P) = \vec{g}(\mathbf{O}_{sat}) + [T] \cdot \mathbf{O}_{sat} \vec{\mathbf{O}}_k + \mathcal{O}(\mathbf{O}_{sat} \vec{\mathbf{O}}_k) \quad (2.33)$$

où [T] est le tenseur gradient de gravité terrestre, tenseur symétrique dont les composantes sont :

$$T_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

En première approximation, g peut s'écrire :

$$g = \mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

où

- \mathcal{G} est la constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$;
- M_T est la masse de la Terre : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- R_T est le rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$;
- h est l'altitude du satellite. Dans le cas de l'expérience MICROSCOPE, $h = 720 \text{ km}$.

À l'altitude à laquelle orbitera le satellite de l'expérience, g sera donc de l'ordre de 8 ms^{-2} . Les composantes du gradient de gravité [T] seront de l'ordre de $\mathcal{G} \frac{2M_T}{(R_T+h)^3} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, avec la distance $O_{sat}P$ inférieure au mètre pour un point P appartenant au satellite. Les dérivées d'ordre supérieur seront inférieures à $\mathcal{G} \frac{6M_T}{(R_T+h)^4} = 10^{-12} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-2}$, et peuvent donc être négligées devant le premier ordre.

Avec ce développement limité, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M_{Isat}} \int_{P \in sat} \vec{g}(P) dM_{gsat} - \frac{1}{m_{Ik}} \int_{P \in mass_k} \vec{g}(P) dm_{gk} \\ = & \frac{1}{M_{Isat}} \int_{P \in sat} (\vec{g}(O_{sat}) + [T] \cdot \vec{O}_{sat}P) dM_{gsat} - \frac{1}{m_{Ik}} \int_{P \in mass_k} (\vec{g}(O_{sat}) + [T] \cdot \vec{O}_{sat}P) dm_{gk} \\ & \approx \left(\frac{M_{gsat}}{M_{Isat}} - \frac{m_{gk}}{m_{Ik}} \right) \vec{g}(O_{sat}) + \frac{m_{gk}}{m_{Ik}} [T] \vec{O}_{sat} O_k \end{aligned} \quad (2.34)$$

$\frac{m_{gk}}{m_{Ik}} = 1 + \delta_k$, où δ_k est le terme de violation du Principe d'Équivalence associé au matériau composant la masse k . δ_k est inférieur à 10^{-13} , et les composantes de [T] sont de l'ordre de 10^{-6} s^{-2} , donc le terme $\delta_k [T] \vec{O}_{sat} O_k$ est négligeable et on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M_{Isat}} \int_{P \in sat} \vec{g}(P) dM_{gsat} - \frac{1}{m_{Ik}} \int_{P \in mass_k} \vec{g}(P) dm_{gk} \\ & \approx \left(\frac{M_{gsat}}{M_{Isat}} - \frac{m_{gk}}{m_{Ik}} \right) \vec{g}(O_{sat}) + [T] \vec{O}_{sat} O_k \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'accélération électrostatique appliquée à la masse test k pour la maintenir au centre de la cage de l'accéléromètre est notée $\Gamma_{App,k}$:

$$\Gamma_{App,k}^{\rightarrow} = \frac{\vec{f}e_k}{m_{Ik}} \quad (2.36)$$

En combinant les équations 2.32 et 2.35, l'accélération appliquée s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma_{App,k}^{\rightarrow} & = \left(\frac{M_{gsat}}{M_{Isat}} - \frac{m_{gk}}{m_{Ik}} \right) \vec{g}(O_{sat}) + ([T] - [In]) \cdot O_k \vec{O}_{sat} \\ & + \frac{F_{ng,sat}^{\rightarrow}}{M_{Isat}} - \frac{F_{Par,k}^{\rightarrow}}{m_{Ik}} - \sum_{j=1,4} \frac{f\vec{e}_j}{M_{Isat}} \\ & + [Cor] \vec{O}_{sat} \ddot{O}_k + \ddot{O}_{sat} O_k \end{aligned} \quad (2.37)$$

On définit par ailleurs l'accélération $\Gamma_{app,k}^{\rightarrow}$ telle que :

$$\Gamma_{app,k}^{\rightarrow} = \Gamma_{App,k}^{\rightarrow} + \frac{F_{Par,k}^{\rightarrow}}{m_{Ik}} \quad (2.38)$$

L'accélération appliquée $\Gamma_{App,k}^{\rightarrow}$ est celle qui sera mesurée par le capteur k à travers la différence de potentiel appliquée aux électrodes.

2.3.2 Mesure de l'accélération par l'accéléromètre différentiel

Nous allons maintenant nous intéresser à la mesure exploitée pour le test du Principe d'Équivalence. Cette mesure est obtenue en deux étapes : tout d'abord, l'accélération électrostatique appliquée à la masse test pour la maintenir au centre de sa cage est déduite des tensions appliquées aux électrodes. Ensuite, les mesures obtenues pour les deux masses d'épreuve de l'accéléromètre électrostatique sont combinées pour faire apparaître le paramètre de violation du principe d'Équivalence $\delta_{EP} = \delta_2 - \delta_1 = \frac{m_{g2}}{m_{I2}} - \frac{m_{g1}}{m_{I1}}$.

2.3.2.1 Mesure de l'accélération par un capteur inertiel

Certains paramètres physiques de l'instrument perturbent la mesure de l'accélération électrostatique $\Gamma_{App,k}$ appliquée à la masse test k pour la maintenir au centre de sa cage. De ce fait, l'accélération mesurée n'est pas exactement égale à l'accélération réellement appliquée à la masse test. Ces paramètres instrumentaux ont été modélisés jusqu'au deuxième ordre et permettent de décrire l'accélération effectivement exploitable :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,k}^{\vec{}} &= b_{0,k}^{\vec{}} + ([K_{1k}] + [\eta_k]) \cdot [\theta_k] \cdot \Gamma_{app,k/sat}^{\vec{}} \\ &+ ([K_{1k}] + [\eta_k]) \cdot \left(-\frac{F_{Pa,k/instr}}{m_{Ik}} - \frac{fe_{Par,k/instr}}{m_{Ik}} \right) \\ &+ K_{2k} \Gamma_{App,k/sat}^2 + \Gamma_{n,k}^{\vec{}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec :

- $b_{0,k}^{\vec{}}$ le biais du capteur k : il représente la somme des termes parasites constants, et inclut notamment l'effet de la raideur électrostatique du capteur (voir partie 2.2.1.2) ;
- $[K_{1k}]$ la matrice des facteurs d'échelle du capteur k :

$$[K_{1k}] = \begin{bmatrix} K_{1xk} & 0 & 0 \\ 0 & K_{1yk} & 0 \\ 0 & 0 & K_{1zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + dK_{1xk} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + dK_{1yk} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + dK_{1zk} \end{bmatrix}$$

dK_{1k} représente l'incertitude relative sur le facteur de proportionnalité G entre la tension des électrodes et l'accélération appliquée à la masse test. Aussi appelé facteur de sensibilité, ce paramètre dépend de la géométrie de l'instrument (surface de l'électrode, entrefer à l'équilibre, masse de la masse test) ainsi que des gains d'amplification de l'électronique de commande (voir partie 2.2.1.2) ;

- $[\eta_k]$ la matrice des couplages du capteur k , qui apparaissent du fait que les différents axes de mesure du capteur ne sont pas tout à fait orthogonaux :

$$[\eta_k] = \begin{bmatrix} 0 & \eta_{zk} & \eta_{yk} \\ \eta_{zk} & 0 & \eta_{xk} \\ \eta_{yk} & \eta_{xk} & 0 \end{bmatrix}$$

- $[\theta_k]$ la matrice des défauts d'alignement du capteur k , qui représentent de petites rotations entre le référentiel du satellite et celui de la masse test :

$$[\theta_k] = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{zk} & -\theta_{yk} \\ -\theta_{zk} & 1 & \theta_{xk} \\ \theta_{yk} & -\theta_{xk} & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$[d\theta_k] = \begin{bmatrix} 0 & \theta_{zk} & -\theta_{yk} \\ -\theta_{zk} & 0 & \theta_{xk} \\ \theta_{yk} & -\theta_{xk} & 0 \end{bmatrix}$$

- $f_{ePar,k}$ les forces parasites électrostatiques ;
- $[K_{2k}]$ la matrice diagonale des termes quadratiques, qui représentent les principales non-linéarités du capteur k , essentiellement liées aux défauts de symétrie de la géométrie du capteur ou de sa configuration électrique ;
- $\Gamma_{App,k/sat}^2$ le vecteur dont les composantes sont définies par le carré des composantes de $\Gamma_{App,k}$;
- $\Gamma_{n,k}$ le bruit de mesure du capteur k .

Les facteurs d'échelle $[K_{1k}]$, les couplages $[\eta_k]$ et les défauts d'alignement $[\theta_k]$ sont regroupés dans la matrice de sensibilité $[M_k]$:

$$[M_k] = [K_{1k}] \cdot [I + \eta_k] \cdot [\theta_k] \approx \begin{bmatrix} K_{1xk} & \eta_{zk} + \theta_{zk} & \eta_{yk} - \theta_{yk} \\ \eta_{zk} - \theta_{zk} & K_{1yk} & \eta_{xk} + \theta_{xk} \\ \eta_{yk} + \theta_{yk} & \eta_{xk} - \theta_{xk} & K_{1zk} \end{bmatrix}$$

car dK_{1ik} , η_{ik} et θ_{ik} sont petits devant 1.

La partie antisymétrique de cette matrice correspond aux défauts d'alignement ($\theta_{ij} = -\theta_{ji}$), sa partie symétrique les couplages ($\eta_{ij} = \eta_{ji}$) et la diagonale contient les facteurs d'échelle.

2.3.2.2 Mode commun et mode différentiel

Maintenant que nous disposons d'une modélisation précise de l'accélération mesurée par un capteur inertiel, nous nous intéressons au signal qui sera réellement exploité pour le test du Principe d'Équivalence, c'est-à-dire une combinaison linéaire des mesures des accélérations appliquées à la masse test externe et à la masse test interne pour les maintenir centrées.

On définit la contribution en mode commun (indiqué c) et la contribution en mode différentiel (indiqué d) des masses d'épreuve 1 et 2 à la mesure :

$$\begin{cases} \Gamma_{mes,c}^{\vec{}} = \frac{1}{2}(\Gamma_{mes,1}^{\vec{}} + \Gamma_{mes,2}^{\vec{}}) \\ \Gamma_{mes,d}^{\vec{}} = \frac{1}{2}(\Gamma_{mes,1}^{\vec{}} - \Gamma_{mes,2}^{\vec{}}) \end{cases} \quad (2.40)$$

La mesure différentielle $\Gamma_{mes,d}^{\vec{}}$ est celle qui sera exploitée pour l'expérience scientifique. Elle contient en effet le potentiel terme de violation du Principe d'Équivalence $\delta = \frac{m_{g2}}{m_{I2}} - \frac{m_{g1}}{m_{I1}}$.

L'accélération mesurée en mode commun $\Gamma_{mes,c}^{\vec{}}$ sert quand à elle d'entrée au système de compensation de traînée, pour permettre au satellite de suivre le mouvement de chute libre des masses d'épreuve malgré les perturbations extérieures :

$$\Gamma_{mes,c}^{\vec{}} = \Gamma_{res,df}^{\vec{}} + \vec{C} \quad (2.41)$$

où \vec{C} est la commande du système de compensation de traînée et $\Gamma_{res,df}^{\vec{}}$ le résidu de la boucle de contrôle.

Les expressions des mesures en mode commun et en mode différentiel sont déduites des équations 2.39 et 2.40. De la même manière que pour $\Gamma_{mes,c}^{\vec{}}$ et $\Gamma_{mes,d}^{\vec{}}$, on définit les paramètres

communs, spécifiés par l'indice c , et les paramètres différentiels, spécifiés par l'indice d , qui correspondent respectivement à la demi-somme et à la demi-différence des paramètres des masses interne et externe. On obtient ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{mes,c} &= \vec{b}_{0c} + ([K_{1d}] + [\eta_d]) \cdot \vec{b}_{1d} + ([K_{1d}] + [\eta_d] + [d\theta_d]) \cdot \vec{\Gamma}_{app,d/sat} \\ &\quad + ([K_{1c}] + [\eta_c]) \cdot \vec{b}_{1c} + ([K_{1c}] + [\eta_c] + [d\theta_c]) \cdot (\vec{\Gamma}_{App,c/sat} - \vec{b}_{1c}) \\ &\quad + \frac{1}{2}K_{21}\vec{\Gamma}_{App,1/sat}^2 + \frac{1}{2}K_{22}\vec{\Gamma}_{App,2/sat}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Gamma}_{n,1} + \frac{1}{2}\vec{\Gamma}_{n,2}\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{mes,d} &= \vec{b}_{0d} + ([K_{1c}] + [\eta_c]) \cdot \vec{b}_{1d} + ([K_{1c}] + [\eta_c] + [d\theta_c]) \cdot \vec{\Gamma}_{app,d/sat} \\ &\quad + ([K_{1d}] + [\eta_d]) \cdot \vec{b}_{1c} + ([K_{1d}] + [\eta_d] + [d\theta_d]) \cdot (\vec{\Gamma}_{App,c/sat} - \vec{b}_{1c}) \\ &\quad + \frac{1}{2}K_{21}\vec{\Gamma}_{App,1/sat}^2 - \frac{1}{2}K_{22}\vec{\Gamma}_{App,2/sat}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Gamma}_{n,1} - \frac{1}{2}\vec{\Gamma}_{n,2}\end{aligned}\quad (2.43)$$

où b_{1c} et b_{1d} représentent respectivement la demi-somme et la demi-différence de l'opposé des forces parasites s'appliquant sur les masses d'épreuve, incluant les forces électrostatiques parasites. La variation de ces forces parasites au cours du temps étant très lente, elles peuvent être considérées comme un biais mécanique au continu.

Nous allons maintenant développer l'expression 2.43 de $\vec{\Gamma}_{mes,d}$ afin d'exprimer cette accélération exclusivement en fonction de paramètres quantifiables. Cela nous permettra d'évaluer l'importance des termes perturbateurs dans la mesure différentielle suivant l'axe \vec{X} , $\Gamma_{mes,dx}$ qui est la mesure exploitée pour réaliser le test du Principe d'Équivalence. Pour ce faire, nous cherchons à évaluer $\vec{\Gamma}_{app,d}$ et $\vec{\Gamma}_{App,c}$ qui apparaissent dans l'équation 2.43.

L'expression de $\vec{\Gamma}_{app,d}$ est déduite des équations 2.37 et 2.38. Nous cherchons à présent à modéliser la mesure qui sera exploitée pour le test du Principe d'Équivalence. Or, pour les sessions de test du Principe d'Équivalence, le mouvement relatif de la masse test par rapport à l'instrument intégré rigidement au satellite est maintenu à zéro par la boucle de contrôle (mais ce ne sera pas toujours le cas pour les sessions d'étalonnage en orbite, comme nous le verrons dans le chapitre 3). L'accélération $\vec{O}_{sat}\vec{O}_k$ et l'accélération de Coriolis sont donc négligeables à la fréquence du test du Principe d'Équivalence. Dans ces conditions, $\vec{\Gamma}_{app,d}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{app,d} &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_{g2}}{m_{I2}} - \frac{m_{g1}}{m_{I1}} \right) \vec{g}(\vec{O}_{sat}) + \frac{1}{2}([\mathbb{T}] - [\mathbb{I}n]) \cdot \vec{\Delta} \\ &= \frac{1}{2}\delta\vec{g}(\vec{O}_{sat}) + \frac{1}{2}([\mathbb{T}] - [\mathbb{I}n]) \cdot \vec{\Delta}\end{aligned}\quad (2.44)$$

avec $\vec{\Delta} = \vec{O}_1\vec{O}_2$ l'excentrement entre les deux masses d'épreuve.

L'expression de $\vec{\Gamma}_{App,c}$ est déduite de l'équation 2.42. Cette accélération est relativement faible puisque la boucle du système de compensation de traînée l'asservit à zéro. En outre, dans l'expression 2.43 de $\vec{\Gamma}_{mes,d}$, elle est multipliée par la matrice $[\mathbb{M}_d] \approx [K_{1d}] + [\eta_d] + [\theta_d]$, représentant les petites dissymétries entre les deux capteurs inertiels, et dont les composantes sont donc de faibles valeurs. Tous les termes d'ordre supérieur à 1 peuvent donc être négliger dans l'expression de $\vec{\Gamma}_{App,c}$. Au premier ordre, l'équation 2.42 est approximée par :

$$\vec{\Gamma}_{mes,c} \approx \vec{b}_{0c} + [\mathbb{M}_d] \cdot \vec{\Gamma}_{app,d} + [\mathbb{M}_c] \cdot (\vec{\Gamma}_{App,c} - \vec{b}_{1c})\quad (2.45)$$

On en déduit :

$$\Gamma_{App,c} \vec{b}_{1c} \approx [M_c]^{-1} \cdot (\Gamma_{mes,c} \vec{b}_{0c}) - [M_c]^{-1} \cdot [M_d] \cdot \Gamma_{app,d} \vec{b}_{0c} \quad (2.46)$$

Et comme $\Gamma_{mes,c}$ sert de commande pour le système de compensation de traînée, l'équation 2.41 donne :

$$\Gamma_{App,c} \vec{b}_{1c} \approx [M_c]^{-1} \cdot (\Gamma_{resdf} \vec{C} + \vec{C} - \vec{b}_{0c}) - [M_c]^{-1} \cdot [M_d] \cdot \Gamma_{app,d} \vec{b}_{0c} \quad (2.47)$$

Dans l'équation 2.43, on remplace $\Gamma_{app,d}$ et $\Gamma_{App,c}$ par leurs expressions respectivement données par les équations 2.44 et 2.47 afin d'obtenir une expression de la mesure différentielle dans laquelle tous les termes peuvent être évalués. La mesure exploitée pour le test du Principe d'Équivalence est l'accélération mesurée en mode différentiel suivant l'axe \vec{X} de l'instrument :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,dx} &= \frac{1}{2} a_{c11} \delta g_x(O_{sat}) \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{c11} \\ a_{c12} \\ a_{c13} \end{bmatrix}^t [\Gamma - \text{In}] \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} a_{d11} \\ a_{d12} \\ a_{d13} \end{bmatrix}^t (\vec{\Gamma}_{resdf} + \vec{C} - \vec{b}_{0c}) \\ &+ 2K_{2cxx} (\Gamma_{app,d} + b_{1dx}) \left(\frac{\Gamma_{resdf,x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right) \\ &+ K_{2dxx} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx})^2 + \left(\frac{\Gamma_{resdf,x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right)^2 \right) \\ &+ b_{0dx} + ([K_{1d}] + [\eta_d]) b_{1cx} + ([K_{1c}] + [\eta_c]) b_{1dx} \\ &+ \Gamma_{n,dx} \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec :

- a_{cij} les composantes de la matrice $[A_c] = [M_c] - [M_d] \cdot [M_c]^{-1} \cdot [M_d]$. Au premier ordre,

$$\begin{bmatrix} a_{c11} \\ a_{c12} \\ a_{c13} \end{bmatrix}^t \approx \begin{bmatrix} K_{1cx} \\ (\eta_{cz} + \theta_{cz}) + \frac{K_{1dx}(\eta_{cy} - \theta_{cy})}{K_{1cx}K_{1cz}} \\ (\eta_{cy} - \theta_{cy}) + \frac{K_{1dx}(\eta_{cz} + \theta_{cz})}{K_{1cx}K_{1cy}} \end{bmatrix}^t$$

- a_{dij} les composantes de la matrice $[A_d] = [M_d] \cdot [M_c]^{-1}$. Au premier ordre :

$$\begin{bmatrix} a_{d11} \\ a_{d12} \\ a_{d13} \end{bmatrix}^t \approx \begin{bmatrix} \frac{K_{1dx}}{K_{1cx}} \\ \frac{(\eta_{dz} + \theta_{dz})}{K_{1cy}} - \frac{K_{1dx}(\eta_{cz} + \theta_{cz})}{K_{1cx}K_{1cy}} \\ \frac{(\eta_{dy} - \theta_{dy})}{K_{1cz}} - \frac{K_{1dx}(\eta_{cy} - \theta_{cy})}{K_{1cx}K_{1cz}} \end{bmatrix}^t$$

2.4 Bilan d'erreur de la mesure

Le signal qui nous intéresse correspond au premier terme de l'équation 2.48. Il s'agit du terme contenant le paramètre de violation du Principe d'Équivalence δ . L'éventuel signal de

violation du Principe d'Équivalence est modulé par l'accélération de gravité $g(O_{sat})$ dont la fréquence est bien déterminée. Lorsque le satellite est en pointage inertiel, ce signal est à la fréquence orbitale : $f_{EP} = f_{orb}$. Lorsque le satellite est en rotation sur lui-même à la fréquence f_{spin} , il est à la fréquence $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin}$. Le traitement du signal pour la détermination du paramètre δ va donc nécessiter une analyse spectrale pour extraire de la mesure le signal à la fréquence du Principe d'Équivalence.

Le biais de lecture b_0 et le biais mécanique b_1 agissant au continu et non à f_{EP} , nous ne les considérerons pas dans la suite de cette partie. L'équation de la mesure devient alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mes,dx}(f_{EP}) &= \frac{1}{2} a_{c11} \delta g_x(f_{EP}) \\
&+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{c11} \\ a_{c12} \\ a_{c13} \end{bmatrix}^t [\mathbf{T} - \mathbf{In}](f_{EP}) \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} a_{d11} \\ a_{d12} \\ a_{d13} \end{bmatrix}^t (\vec{\Gamma}_{resdf} + \vec{C}(f_{EP})) \\
&+ 2K_{2cxx} \left[(\Gamma_{app,d} + b_{1dx}) \left(\frac{\Gamma_{resdf,x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right) \right] (f_{EP}) \\
&+ K_{2dxx} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx})^2 (f_{EP}) + \left(\frac{\Gamma_{resdf,x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right)^2 (f_{EP}) \right) \\
&+ \Gamma_{n,dx}(f_{EP}) \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Le premier terme, qui contient le paramètre de violation du Principe d'Équivalence, est celui qui nous intéresse. Les autres termes sont des perturbations qui limitent la précision de la mesure de ce paramètre : effet du gradient de gravité, du mouvement d'attitude de l'instrument, du résidu d'accélération du système de compensation de traînée, du bruit et du biais de l'instrument. Ils doivent être quantifiés afin d'évaluer cette précision.

On souhaite estimer le paramètre de violation du Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-15} . À l'altitude du satellite, le champ gravitationnel de la Terre vaut environ 8 ms^{-2} . On veut donc détecter d'après l'expression 2.49 un signal d'amplitude $\frac{1}{2} \delta g_x(f_{EP}) = 4 \cdot 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$. Nous effectuerons deux bilans distincts : un bilan stochastique et un bilan déterministe. Les résultats des deux bilans sont sommés quadratiquement. En supposant que les termes harmoniques et déterministes contribuent de façon équivalente à l'erreur totale, la contribution de chacun des deux bilans doit donc rester inférieure à $\frac{4 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{2}} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$.

Le bruit stochastique limite la précision de cette estimation. Il provient de diverses sources : le bruit intrinsèque de l'instrument, le bruit de l'environnement (variations stochastiques thermiques, électriques, gravitationnelles et magnétiques), le bruit du système de compensation de traînée, le bruit du système de contrôle d'attitude et les bruits de restitution (restitution de la position et de l'attitude du satellite). Lorsque le satellite est en pointage inertiel, la densité spectrale d'amplitude du bruit total à la fréquence f_{EP} est $3,3 \cdot 10^{-12} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ ([45]). Il s'agit du bruit par capteur. Le bruit en mode différentiel S_{dx} correspond à la demi-somme quadratique des bruits de chaque capteur : $S_{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{S_{1x}^2 + S_{2x}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} S_{kx}$

Après filtrage autour de la fréquence du test du Principe d'Équivalence, on a :

$$\sigma^2 = S^2 \cdot f_e \tag{2.50}$$

où f_e est la fréquence d'échantillonnage du signal. Le niveau du bruit peut être réduit en l'intégrant sur une longue durée. Lorsque N mesures sont cumulées, la contribution stochastique diminue de sorte que la variance du signal devient :

$$\sigma_N^2 = \frac{S^2 \cdot f_e}{N} \quad (2.51)$$

N mesures correspondent à une durée d'observation du signal $T = \frac{N}{f_e}$, donc :

$$\sigma_N^2 = \frac{S^2}{T} \quad (2.52)$$

La contribution du bruit à comparer à la spécification est donc $\frac{S_{da}}{\sqrt{T}}$. Pour réduire la contribution du bruit à $2,8 \cdot 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$, il faut prévoir une durée de mesure de :

$$T = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} 3,3 \cdot 10^{-12}}{2,8 \cdot 10^{-15}} \right)^2 \approx 700000 \text{ s} \quad (2.53)$$

Cela correspond à une durée de 117 orbites, arrondie à 120. Nous verrons dans le chapitre 4 pourquoi la durée des sessions de test du Principe d'Équivalence en mode inertiel a été choisie exactement à 120 orbites.

La durée minimale des sessions de test avec le satellite en mode spinné permettant d'obtenir un rapport signal-à-bruit acceptable peut-être calculée de la même manière. La fréquence de spin est choisie de telle sorte que la fréquence du Principe d'Équivalence $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin}$ soit plus proche du minimum du bruit instrumental tout en restant compatible avec le système de contrôle du satellite. La densité spectrale d'amplitude du bruit d'un capteur vaut alors $1,4 \cdot 10^{-12} \text{ ms}^{-2}$, ce qui impose une durée de la session de mesure de 20 orbites.

Les termes d'erreur déterministes ne peuvent pas être réduits de manière similaire. Le tableau 2.4 présente la contribution de ces termes à l'erreur du test du Principe d'Équivalence en se basant sur les limitations technologiques de réalisation de l'instrument. La contribution totale de ces termes est de $2 \cdot 10^{-13} \text{ ms}^{-2}$, conduisant à un impact sur la détermination du paramètre de violation du Principe d'Équivalence δ_{EP} de $25 \cdot 10^{-15}$. Ce bilan est donc largement incompatible avec la précision visée pour la mission de 10^{-15} .

Il est donc nécessaire de corriger la mesure de ces effets. Cependant, leurs valeurs sont mal estimées à cause de paramètres de l'instrument dont la caractérisation est limitée par la technologie de réalisation de l'instrument ([35]). Les paramètres concernés sont identifiés dans le tableau 2.4. Il s'agit :

- des décentrages des masses d'épreuve (Δ_x , Δ_y et Δ_z);
- des défauts d'alignement commun (a_{c11}) et différentiel (a_{d11});
- des défauts d'alignement et des couplages entre les axes communs (a_{c12} selon \vec{Z} et a_{c13} selon \vec{Y}) et différentiels (a_{d12} selon \vec{Z} et a_{d13} selon \vec{Y});
- des facteurs d'échelle quadratique communs (K_{2cxx}) et différentiels (K_{2dxx}).

Les valeurs par construction de ces paramètres n'étant pas connues avec la précision nécessaire pour corriger la mesure ([19]), il faut les étalonner afin d'en obtenir une estimation précise. Il n'est pas possible de conduire cet étalonnage au sol où l'instrument est saturé : celui-ci devra donc se dérouler en orbite.

Terme perturbateur	Paramètre limitant la précision de l'estimation	Contribution à la mesure EP à f_{EP} (ms^{-2})	Impact sur l'estimation de δ_{EP}
$\frac{1}{2}a_{c11} \cdot T_{xx} \cdot \Delta_x$	$a_{c11} \cdot \Delta_x < 20, 2 \mu\text{m}$	$4, 2 \cdot 10^{-14}$	$10, 6 \cdot 10^{-15}$
$\frac{1}{2}a_{c11} \cdot T_{xz} \cdot \Delta_z$	$a_{c11} \cdot \Delta_z < 20, 2 \mu\text{m}$	$4, 3 \cdot 10^{-14}$	$10, 9 \cdot 10^{-15}$
$\frac{1}{2}a_{c11} \cdot T_{xy} \cdot \Delta_y$	$a_{c11} \cdot \Delta_y < 20, 2 \mu\text{m}$	$3, 0 \cdot 10^{-16}$	$0, 08 \cdot 10^{-15}$
$\frac{1}{2}a_{c12} \cdot T_{yy} \cdot \Delta_y$	$a_{c12} < 2, 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ $\Delta_y < 20 \mu\text{m}$	$4, 4 \cdot 10^{-16}$	$0, 11 \cdot 10^{-15}$
$\frac{1}{2}a_{c13} \cdot T_{zz} \cdot \Delta_z$	$a_{c13} < 2, 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ $\Delta_z < 20 \mu\text{m}$	$3, 4 \cdot 10^{-16}$	$0, 09 \cdot 10^{-15}$
$a_{d11} \cdot \Gamma_{res_{df},x}$	$a_{d11} < 10^{-2}$	$1, 0 \cdot 10^{-14}$	$2, 5 \cdot 10^{-15}$
$a_{d12} \cdot \Gamma_{res_{df},y}$	$a_{d12} < 1, 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	$1, 5 \cdot 10^{-15}$	$0, 38 \cdot 10^{-15}$
$a_{d13} \cdot \Gamma_{res_{df},z}$	$a_{d13} < 1, 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	$1, 5 \cdot 10^{-15}$	$0, 38 \cdot 10^{-15}$
$2 \cdot K_{2,cxx} \cdot \Gamma_{app,dx} \cdot \Gamma_{res_{df},x}$	$K_{2,cxx} < 14000 \text{ s}^2/\text{m}$	$4, 0 \cdot 10^{-16}$	$0, 10 \cdot 10^{-15}$
$K_{2,dxx} \cdot (\Gamma_{app,dx}^2 + \Gamma_{res_{df},x}^2)$	$K_{2,dxx} < 14000 \text{ s}^2/\text{m}$	$4, 0 \cdot 10^{-16}$	$0, 10 \cdot 10^{-15}$
Total		$2 \cdot 10^{-13}$	$25 \cdot 10^{-15}$

TABLE 2.1 – Bilan d'erreur déterministe de la mesure avant étalonnage pour une session en mode inertiel.

Bilan du chapitre 2

La mission MICROSCOPE teste le Principe d'Équivalence en comparant les accélérations électrostatiques appliquées à deux masses tests composées de matériaux différents pour les maintenir concentriques. Le modèle de la mesure de ces accélérations électrostatique a été établi. Les paramètres de l'instrument ainsi que le bruit introduisent des contributions non désirées dans la mesure. Si l'erreur stochastique peut-être réduite en intégrant la mesure sur une durée suffisante, ce n'est pas le cas des erreurs déterministes introduites par les paramètres instrumentaux. Ces derniers doivent être connus avec précision afin de corriger la mesure de leurs effets. Ces paramètres ne pouvant être estimés avec suffisamment de précision au sol, il est nécessaire de les étalonner en orbite.

Chapitre 3

Détermination d'un protocole d'étalonnage en orbite

Objectif du chapitre 3

L'objectif de ce chapitre est de caractériser au mieux les paramètres de l'instrument de MICROSCOPE afin de corriger la mesure et quantifier les perturbations résiduelles. Pour cela, un protocole d'étalonnage adapté spécifiquement à MICROSCOPE est établi, c'est-à-dire qu'un ensemble de méthodes capables de déterminer les valeurs de chaque paramètre est développé et nous vérifions grâce à un simulateur numérique que ces méthodes permettent bien d'obtenir les précisions désirées.

La précision de la mesure du paramètre de violation du Principe d'Équivalence est limitée par différentes sources de perturbation : effet du gradient de gravité, du mouvement d'attitude de l'instrument, du résidu d'accélération non-gravitationnelle, effets magnétiques et thermiques... À l'altitude du satellite MICROSCOPE, le champ gravitationnel de la Terre est d'environ 8 m.s^{-2} . Pour estimer le paramètre de violation du Principe d'Équivalence avec une précision de 10^{-15} , il faut être capable de mesurer un signal d'amplitude $\frac{1}{2}g_x(f_{EP}) \cdot \delta_{EP} = 4 \cdot 10^{-15} \text{ m.s}^{-2}$. Dans l'équation de mesure 2.49, plusieurs groupes d'erreurs apparaissent explicitement. Ils sont liés aux perturbations du mouvement des masses d'épreuve (forces électrostatiques parasites), aux performances du système AOCS, aux performances de l'électronique de lecture et aux caractéristiques de l'instrument.

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'il est nécessaire d'étalonner l'instrument en orbite afin d'estimer les paramètres instrumentaux pour corriger la mesure avec une précision suffisante. Les dix paramètres à estimer, qui sont des combinaisons des paramètres instrumentaux, sont identifiés dans le tableau 3. En tenant compte des autres perturbations venant s'ajouter aux perturbations instrumentales à la fréquence du test du Principe d'Équivalence, la spécification globale sur le résidu d'erreur engendré par ces perturbation instrumentales après étalonnage a été fixée à $2 \cdot 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$. La spécification de précision d'étalonnage pour chacun des paramètres en est déduite. Celles-ci sont présentées dans le tableau 3.

Paramètre à étalonner	Objectif de précision de l'étalonnage
$a_{c11} \cdot \Delta_x$	$0.1 \mu\text{m}$
$a_{c11} \cdot \Delta_z$	$0.1 \mu\text{m}$
$a_{c11} \cdot \Delta_y$	$2 \mu\text{m}$
a_{c12}	$9.0 \times 10^{-4} \text{ rad}$
a_{c13}	$9.0 \times 10^{-4} \text{ rad}$
a'_{d11}	1.5×10^{-4}
a_{d12}	$5 \times 10^{-5} \text{ rad}$
a_{d13}	$5 \times 10^{-5} \text{ rad}$
K_{2dxx}/K_{1cx}^2	$250 \text{ s}^2/\text{m}$
K_{2cxx}/K_{1cx}^2	$1000 \text{ s}^2/\text{m}$

TABLE 3.1 – Spécifications sur la précision de l'étalonnage.

3.1 Établissement du scénario d'étalonnage

3.1.1 Principe de l'étalonnage

Le principe de l'étalonnage de l'instrument de MICROSCOPE consiste à créer un signal d'accélération permettant d'amplifier l'effet du paramètre à déterminer, et ainsi de le rendre prépondérant dans la mesure. Contrairement à d'autres missions spatiales utilisant des accéléromètres électrostatiques mais ne disposant pas d'un système de contrôle d'orbite en continu, comme CHAMP et GRACE ([49]), l'étalonnage de MICROSCOPE peut exploiter le système de compensation de traînée du satellite. Le signal d'étalonnage est ainsi obtenu en imposant au satellite, à travers le système de compensation de traînée, un mouvement d'oscillation linéaire ou angulaire, ou bien en imposant aux masses d'épreuve, à travers la boucle de contrôle électrostatique, un mouvement d'oscillation ([14]). Il est enfin possible d'utiliser un signal naturellement présent et de forte amplitude à une fréquence donnée, comme l'est le gradient de gravité à deux fois la fréquence orbitale. Celui-ci est déterminé à partir d'un modèle très précis.

Si le signal d'étalonnage est une accélération du satellite ou des masses d'épreuve, il est mesuré par l'accéléromètre. Il n'est donc pas nécessaire de connaître précisément son amplitude et sa phase. En revanche, comme nous le verrons dans la partie suivante, sa fréquence doit être précisément connue.

La durée totale de l'étalonnage est de 138 orbites, soit neuf jours. Le scénario d'étalonnage sera joué trois fois au cours de la mission afin de tenir compte des variations de la valeur des paramètres instrumentaux au cours du temps. Il sera donc réalisé avant et après les sessions nominales de tests du principe d'Équivalence, et une fois au cours des tests de consolidation.

3.1.2 Description des procédures d'étalonnage en orbite

Des méthodes spécifiques ont été déterminées pour chacun des dix paramètres à étalonner ([22]). Nous allons maintenant présenter ces différentes procédures d'étalonnage ainsi que les résultats de l'évaluation analytique de leur performance ([21]). Ces évaluations permettent de déterminer la précision pire-cas qui sera obtenue sur l'estimation des paramètres après étalon-

nage. Les détails de cette évaluation seront présentés pour le premier paramètre. La démarche utilisée pour les autres paramètres est identique. Les performances des méthodes d'étalonnage dépendent de celles du système de contrôle d'attitude et d'orbite. Deux bilans sont possibles pour cette évaluation. Le premier repose sur les spécifications imposées à ce système. Le second dépend des performances mesurées sur le système. Les résultats présentés dans ce chapitre sont basés sur les spécifications du système AOCS, supposées moins contraintes que les performances finales.

Il est possible d'améliorer la détermination d'un paramètre en utilisant lors de son estimation la connaissance dont nous disposons sur les autres paramètres déjà étalonnés. Cette méthode sera prise en compte pour l'évaluation des performances des procédures d'étalonnage.

L'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence étant de faible amplitude par rapport aux signaux d'étalonnage, il sera négligé dans cette partie.

3.1.2.1 Excentremets suivant \vec{X} et \vec{Z}

L'excentrement $\vec{\Delta}$ entre les deux masses d'épreuve introduit les effets des gradients d'inertie [In] et de gravité [T], comme le montre l'équation de mesure (voir équation 2.48). Or, le signal du gradient de gravité présente une amplitude très importante à deux fois la fréquence orbitale lorsque le satellite est en pointage inertiel. Ce signal étant très bien connu, il est particulièrement adapté pour l'étalonnage.

Le satellite étant en pointage inertiel, son accélération angulaire est asservie à zéro par l'AOCS (Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite). Les composantes du gradient d'inertie correspondent seulement aux vitesses et accélérations angulaires résiduelles. Elles sont donc faibles et négligeables devant les composantes du gradient de gravité.

L'équation 2.48 de la mesure est utilisée à la fréquence $2f_{orb}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mes,dx}(2f_{orb}) &= \frac{1}{2}(a_{c11}[\mathbf{T}_{xx}(2f_{orb})\Delta_x + \mathbf{T}_{xy}(2f_{orb})\Delta_y + \mathbf{T}_{xz}(2f_{orb})\Delta_z]) \\
&+ \frac{1}{2}(a_{c12}[\mathbf{T}_{yx}(2f_{orb})\Delta_x + \mathbf{T}_{yy}(2f_{orb})\Delta_y + \mathbf{T}_{yz}(2f_{orb})\Delta_z]) \\
&+ \frac{1}{2}(a_{c13}[\mathbf{T}_{zx}(2f_{orb})\Delta_x + \mathbf{T}_{zy}(2f_{orb})\Delta_y + \mathbf{T}_{zz}(2f_{orb})\Delta_z]) \\
&+ a_{d11}\vec{\Gamma}_{resdf,x}(2f_{orb}) + a_{d12}\vec{\Gamma}_{resdf,y}(2f_{orb}) + a_{d13}\vec{\Gamma}_{resdf,z}(2f_{orb}) \\
&+ 2\mathbf{K}_{2cxx} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx}) \left(\frac{\Gamma_{resdf,x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right) \right) (2f_{orb}) \\
&+ \mathbf{K}_{2dxx} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx})^2 + \left(\frac{\Gamma_{resdf,x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right)^2 \right) (2f_{orb}) \\
&+ \Gamma_{n,dx}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Comme on peut le constater à partir des valeurs numériques des composantes du gradient de gravité à $2f_{orb}$ données en annexe A, les composantes faisant intervenir y sont mille fois plus faibles que les composantes \mathbf{T}_{xx} , \mathbf{T}_{xz} , \mathbf{T}_{zx} et \mathbf{T}_{zz} . Elles peuvent donc être négligées.

Par ailleurs, l'accélération 3.1 est divisible en deux parties en quadrature. L'expression du gradient de gravité présentée dans la partie A.7.1 de l'annexe A montre en effet que les composantes \mathbf{T}_{xx} et \mathbf{T}_{zz} sont en quadrature avec les composantes \mathbf{T}_{xz} et \mathbf{T}_{zx} . Cette propriété permet de séparer le terme contenant l'excentrement suivant \vec{X} du terme contenant l'excentrement

suivant \vec{Z} , afin de les évaluer indépendamment. Les phases des autres termes de l'accélération ne sont en revanche pas prises en compte. On se placera dans un cas pire en reportant l'intégralité de ces termes dans les équations d'étalonnage de chacun des paramètres.

Dans un premier temps, la partie "cosinus" de l'accélération est extraite :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mes,dx|cos}(2f_{orb}) &= \frac{1}{2}a_{c11}T_{xx}(2f_{orb})\Delta_x + \frac{1}{2}a_{c13}T_{zz}(2f_{orb})\Delta_z \\
&+ a_{d11}\vec{\Gamma}_{res_{df},x}(2f_{orb}) + a_{d12}\vec{\Gamma}_{res_{df},y}(2f_{orb}) + a_{d13}\vec{\Gamma}_{res_{df},z}(2f_{orb}) \\
&+ 2K_{2c_{xx}} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx}) \left(\frac{\Gamma_{res_{df},x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right) \right) (2f_{orb}) \\
&+ K_{2d_{xx}} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx})^2 + \left(\frac{\Gamma_{res_{df},x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right)^2 \right) (2f_{orb}) \\
&+ \Gamma_{n,dx}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Le premier terme, $\frac{1}{2}a_{c11}T_{xx}(2f_{orb})\Delta_x$ est le terme à extraire. Tous les autres termes contribuent à l'erreur sur la détermination du paramètre à étalonner. Nous remarquons par ailleurs qu'on n'évalue pas simplement le terme d'excentrement Δ_x , mais $a_{c11}\Delta_x$, qui tient aussi compte du facteur d'échelle selon l'axe \vec{X} , selon l'équation d'étalonnage :

$$\Gamma_{mes,dx|cos}(2f_{orb}) \approx \frac{1}{2}T_{xx}(2f_{orb})a_{c11}\Delta_x \tag{3.3}$$

L'erreur maximale entachant l'estimation de $a_{c11}\Delta_x$ est évaluée en calculant le résidu de l'étalonnage $\Gamma_{mes,dx|cos}(2f_{orb}) - \frac{1}{2}T_{xx}(2f_{orb})a_{c11}\Delta_x$. Cette erreur se compose d'une partie harmonique (amplitude de l'erreur à la fréquence d'étalonnage) homogène à une accélération et d'une partie stochastique (densité spectrale de puissance du bruit au voisinage de la fréquence d'étalonnage) qui s'exprime en ms^{-2}/\sqrt{Hz} . L'évaluation de la contribution des termes quadratiques à l'erreur harmonique doit tenir compte des termes croisés : deux signaux à des fréquences différentes de $2f_{orb}$ peuvent faire apparaître un signal à cette fréquence lorsqu'ils sont multipliés (Signaux à f_{orb} et f_{orb} , à f_{orb} et $3f_{orb}$, à $2f_{orb}$ et au continu. Au delà de $3f_{orb}$, l'amplitude du signal est suffisamment faible pour négliger l'impact des termes croisés.). L'erreur stochastique correspond à la somme quadratique des bruits apportés par les différents termes.

Ces erreurs sont évaluées en utilisant la valeur spécifiée des paramètres et signaux mis en jeu. Il est aussi possible d'utiliser les performances effectivement mesurées pour le système AOCS. Le tableau 3.2 fournit la valeur maximale des termes d'erreur obtenue à partir des valeurs spécifiées (cf annexe A pour les valeurs numériques).

L'erreur harmonique totale est de $8,7 \cdot 10^{-14} ms^{-2}$ et l'erreur stochastique (somme quadratique des différentes contributions) de $3,5 \cdot 10^{-12} ms^{-2}/\sqrt{Hz}$. L'erreur stochastique est intégrée sur le temps total d'analyse T. La contribution stochastique à 3σ est :

$$S_{stoch} = 3 \frac{dsa}{\sqrt{T}} \tag{3.4}$$

où dsa est la densité spectrale d'amplitude représentant l'erreur stochastique au voisinage de la fréquence d'étalonnage. Pour une session d'étalonnage de 10 orbites, soit environ 60000 s, cette erreur s'élève donc à $4,3 \cdot 10^{-14} ms^{-2}$.

Contributeur	Erreur harmonique en ms^{-2}	Erreur stochastique en $\text{ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$
$\frac{1}{2}a_{c13}\mathbb{T}_{zz}(2f_{orb})\Delta_z$	$4,4 \cdot 10^{-14}$	0
$a_{d11}\vec{\Gamma}_{res_{df},x}(2f_{orb})$	$1,0 \cdot 10^{-14}$	0
$a_{d12}\vec{\Gamma}_{res_{df},y}(2f_{orb})$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$5,0 \cdot 10^{-13}$
$a_{d13}\vec{\Gamma}_{res_{df},z}(2f_{orb})$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$5,0 \cdot 10^{-13}$
termes quadratiques	$2,5 \cdot 10^{-14}$	$3,2 \cdot 10^{-12}$
$\Gamma_{n,dx}$	0	$1,2 \cdot 10^{-12}$

TABLE 3.2 – Contributions des résidus d'étalonnage à l'erreur harmonique et à l'erreur stochastique sur la détermination de $a_{c11}\Delta_x$.

Contributeur	Erreur harmonique en ms^{-2}	Erreur stochastique en $\text{ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$
$\frac{1}{2}\delta(a_{c13})\mathbb{T}_{zz}(2f_{orb})\Delta_z$ $+\frac{1}{2}a_{c13}\delta(\mathbb{T}_{zz})(2f_{orb})\Delta_z$ $+\frac{1}{2}a_{c13}\mathbb{T}_{zz}(2f_{orb})\delta(\Delta_z)$	$1,6 \cdot 10^{-14}$	0
$\delta(a_{d11})\vec{\Gamma}_{res_{df},x}(2f_{orb})$ $+a_{d11}\vec{\Gamma}_{res_{df},x}(2f_{orb})$	$4,5 \cdot 10^{-15}$	0
$a_{d12}\vec{\Gamma}_{res_{df},y}(2f_{orb})$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	$2,3 \cdot 10^{-14}$
$a_{d13}\vec{\Gamma}_{res_{df},z}(2f_{orb})$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	$2,3 \cdot 10^{-14}$
termes quadratiques	$2,7 \cdot 10^{-14}$	$4,8 \cdot 10^{-14}$
$\Gamma_{n,dx}$	0	$1,2 \cdot 10^{-12}$

TABLE 3.3 – Contributions des résidus d'étalonnage à l'erreur harmonique et à l'erreur stochastique sur la détermination de $a_{c11}\Delta_x$ après retraitement des données.

On note $\delta(p)$ l'incertitude sur le paramètre p . L'erreur sur le terme extrait s'élève au total, en cumulant l'erreur harmonique et l'erreur stochastique, à :

$$\delta\left(\frac{1}{2}a_{c11}\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb})\Delta_x\right) = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ ms}^{-2}$$

Une autre erreur vient s'y ajouter quand le paramètre à étalonner $a_{c11}\Delta_x$ en est extrait : l'incertitude sur le gradient de gravité. Ce dernier étant très bien connu, l'incertitude relative est spécifiée inférieure à 10^{-3} . Cette erreur tient compte non seulement du modèle de gravité lui-même (connu beaucoup plus précisément), mais aussi du calcul du gradient de gravité en repère satellite, incluant les erreurs de position et d'attitude. On a la relation :

$$\delta\left(\frac{1}{2}a_{c11}\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb})\Delta_x\right) = \frac{1}{2}\delta(\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb}))a_{c11}\Delta_x + \frac{1}{2}\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb})\delta(a_{c11}\Delta_x) \quad (3.5)$$

Finalement, avec $\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb}) = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, on obtient :

$$\delta(a_{c11}\Delta) = \frac{\delta(a_{c11}\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb})\Delta_x) + \delta(\mathbb{T}_{xx}(2f_{orb}))a_{c11}\Delta_x}{\mathbb{T}_{xx}} = 0,17 \text{ } \mu\text{m} \quad (3.6)$$

La précision pire-cas de $0,17 \text{ } \mu\text{m}$ obtenue sur $a_{c11}\Delta_x$ après étalonnage n'est pas compatible avec la spécification, fixée à $0,1 \text{ } \mu\text{m}$. Néanmoins, il est possible d'améliorer ce résultat

en corrigeant l'équation d'étalonnage en utilisant les valeurs des autres paramètres déjà étalonnés. Le résidu d'étalonnage est ainsi réduit. Pour l'évaluation analytique de la précision de l'étalonnage, la valeur de ces paramètres est fixée à leur estimée pire-cas. Après étalonnage des dix paramètres présentés dans la tableau 3, on peut réécrire ainsi l'équation d'étalonnage :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,dx/\cos}(2f_{orb}) - \frac{1}{2}a_{c13} \cdot \hat{T}_{zz}(2f_{orb}) \cdot \hat{\Delta}_z \\ - a'_{d11} \cdot \Gamma_{mes,cx}(2f_{orb}) \\ - a_{d12} \cdot \Gamma_{mes,cy}(2f_{orb}) \\ - a_{d13} \cdot \Gamma_{mes,cz}(2f_{orb}) \\ - 2 \frac{K_{2dxx}}{K_{1cx}^2} \cdot \Gamma_{mes,cz}^2(2f_{orb}) = \frac{1}{2}T_{xx}(2f_{orb}) \cdot a_{c11} \cdot \Delta_x \end{aligned} \quad (3.7)$$

où \hat{p} représente la valeur estimée par étalonnage du paramètre p . Les erreurs stochastiques et harmoniques dues aux résidus d'étalonnage sont présentées dans le tableau 3.3. L'erreur totale sur l'évaluation de $\frac{1}{2}T_{xx}(2f_{orb}) \cdot a_{c11} \cdot \Delta_x$ est réduite à $6,7 \times 10^{-14} \text{ ms}^{-2}$, permettant d'atteindre dans le pire des cas une précision de $0,08 \mu\text{m}$ sur l'estimation de $a_{c11}\Delta_x$ avec une session d'étalonnage de dix orbites.

Le même procédé est utilisé pour l'étalonnage de $a_{c11}\Delta_z$, en utilisant la composante sinusoïdale de la mesure. En isolant cette composante dans l'équation 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,dx|\sin}(2f_{orb}) = \frac{1}{2}a_{c11}T_{xz}(2f_{orb})\Delta_z + \frac{1}{2}a_{c11}T_{xy}(2f_{orb})\Delta_y \\ + \frac{1}{2}a_{c13}T_{xz}(2f_{orb})\Delta_x \\ + a_{d11}\vec{\Gamma}_{res_{df},x}(2f_{orb}) + a_{d12}\vec{\Gamma}_{res_{df},y}(2f_{orb}) + a_{d13}\vec{\Gamma}_{res_{df},z}(2f_{orb}) \\ + 2K_{2cxx} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx}) \left(\frac{\Gamma_{res_{df},x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right) \right) (2f_{orb}) \\ + K_{2dxx} \left((\Gamma_{app,d} + b_{1dx})^2 + \left(\frac{\Gamma_{res_{df},x} + C_x - b_{0cx}}{K_{1cx}} \right)^2 \right) (2f_{orb}) \\ + \Gamma_{n,dx} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le signal que nous souhaitons extraire pour évaluer $a_{c11}\Delta_z$ correspond au premier terme. L'équation d'étalonnage s'écrit donc :

$$\Gamma_{mes,dx|\sin}(2f_{orb}) \approx \frac{1}{2}T_{xz}(2f_{orb})a_{c11}\Delta_z \quad (3.9)$$

Le terme d'erreur principal est $\frac{1}{2}a_{c13}T_{xz}(2f_{orb})\Delta_x = 4,5 \times 10^{-14} \text{ ms}^{-2}$. La précision finale sur le paramètre $a_{c11}\Delta_z$ est de $0,2 \mu\text{m}$, ce qui n'est pas compatible avec la spécification de $0,1 \mu\text{m}$. Encore une fois, l'opération de retraitement des données doit être réalisée. Après correction de la mesure en utilisant les valeurs des autres paramètres étalonnés, l'imprécision sur $a_{c11}\Delta_z$ est réduite à $0,09 \mu\text{m}$.

3.1.2.2 Excentrement suivant \vec{Y}

La méthode inertielle utilisée dans la partie précédente pour estimer les décentrages le long des axes \vec{X} et \vec{Z} ne peut être appliquée pour l'estimation du décentrage suivant \vec{Y} , $a_{c11}\Delta_y$.

En effet, l'axe \vec{Y} étant orthogonal au plan de l'orbite, la composante du gradient de gravité correspondant, T_{xy} , est trop faible pour permettre d'extraire ce signal de la mesure en présence des autres perturbations. Une solution pour amplifier l'effet de ce paramètre consiste à imposer au satellite, via son système de contrôle d'attitude, un mouvement d'oscillation sinusoïdal autour de l'axe \vec{Z} du satellite. Pour un mouvement d'amplitude angulaire α_0 à la fréquence $f_{cal/ang}$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 \sin(2\pi f_{cal/ang}t) \\ \Omega_y(t) &= \alpha_0(2\pi f_{cal/ang}) \cos(2\pi f_{cal/ang}t) \\ \dot{\Omega}_y(t) &= -\alpha_0(2\pi f_{cal/ang})^2 \sin(2\pi f_{cal/ang}t)\end{aligned}\quad (3.10)$$

La vitesse et l'accélération angulaires additionnelles du satellite sont introduites dans l'équation de mesure via la matrice du gradient d'inertie, définie par l'équation 2.28. En outre, cette oscillation implique que la valeur de la composante du gradient de gravité T_{xy} n'est pas nulle à la fréquence d'étalonnage, car l'oscillation fait sortir l'axe \vec{X} du plan orbital.

L'équation d'étalonnage s'écrit :

$$\Gamma_{mes,dx}(f_{cal/ang}) \approx \frac{1}{2}(T_{xy}(f_{cal/ang}) + \dot{\Omega}(f_{cal/ang}))a_{c11}\Delta_y \quad (3.11)$$

Les termes d'erreur ont une contribution totale de $1,4 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, les contributeurs principaux provenant du résidu du système de compensation de traînée introduit par le biais des couplages angulaire vers linéaire. L'impact de cette erreur sur l'estimation du décentrage pourrait être réduit en augmentant l'amplitude des oscillations pour amplifier le signal d'étalonnage, néanmoins l'amplitude de l'accélération permise par le système AOCS est limitée. Il en résulte une précision sur l'étalonnage de $a_{c11}\Delta_y$ de $4,5 \mu\text{m}$, que le retraitement des données ne permet pas de réduire.

3.1.2.3 Paramètres de la matrice de sensibilité commune

Les paramètres de la matrice de sensibilité en mode commun, a_{c12} et a_{c13} , contiennent essentiellement l'effet des couplages et des défauts d'alignement entre les axes de l'instrument et du satellite, respectivement pour les axes \vec{Z} et \vec{Y} . Dans l'équation 2.48, ces paramètres sont en facteur du terme de gradient de gravité et d'inertie. Comme pour l'étalonnage des excentremets selon \vec{X} et \vec{Z} , nous allons exploiter le signal du gradient de gravité à $2f_{orb}$, dont l'amplitude est naturellement élevée lorsque le satellite est en pointage inertiel. En outre, pour pouvoir distinguer le signal d'estimation des excentremets Δ_x et Δ_z de celui des paramètres de couplages et de défauts d'alignement, l'oscillation des masses d'épreuve est forcée selon l'axe \vec{Y} pour a_{c12} et \vec{Z} pour a_{c13} , selon un mouvement sinusoïdal d'amplitude Δ_{TM} et de fréquence f_{TM} :

$$\Delta(t) = \Delta_{biais} + \Delta_{TM} \sin(2\pi f_{TM}t) \quad (3.12)$$

Le signal oscillant de la position des masses module le signal du gradient de gravité, conduisant à un effet mesurable à $f_{TM} \pm 2f_{orb}$.

Le signal d'étalonnage est pour a_{c12} :

$$\Gamma_{mes,dx/\cos}(f_{TM} \pm 2f_{orb}) \approx \frac{1}{2}(-a_{c11} \cdot T_{xx}(2f_{orb})) \cdot \Delta_{TM} \cdot a_{c12} \quad (3.13)$$

Et pour a_{c13} :

$$\Gamma_{mes,dx/cos}(f_{TM} \pm 2f_{orb}) \approx \frac{1}{2} (T_{zz}(2f_{orb}) - a_{c11} \cdot T_{xx}(2f_{orb})) \cdot \Delta_{TM} \cdot a_{c13} \quad (3.14)$$

Le signal à extraire pour l'estimation de a_{c12} est deux fois plus faible que celui permettant l'étalonnage de a_{c13} . En effet, $T_{zz}(2f_{orb}) \approx -T_{xx}(2f_{orb})$. Or, le bruit est ici le terme prépondérant, et il décroît avec la racine carrée de la durée d'intégration. Ainsi, pour obtenir la même précision sur l'estimation de ces deux paramètres, la session d'étalonnage de a_{c12} doit durer quatre fois plus longtemps que celle de a_{c13} .

Avec une session de 10 orbites pour étalonner a_{c13} , l'erreur maximale totale est de $6,3 \cdot 10^{-14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Elle est majoritairement due au résidu du système de compensation de traînée apporté par le facteur d'échelle différentiel non-nul. La précision sur l'estimation du paramètre est de $7,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, ce qui est largement au dessus de la spécification. Le retraitement des données permet de réduire cette erreur d'estimation à $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Dans le cas de a_{c12} , une session d'étalonnage de 40 orbites permet une estimation à $14,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ près avant retraitement des données, et $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ après retraitement des données. Ces valeurs ont été calculées à partir des spécifications du système de compensation de traînée. Elle sont incompatibles avec les spécifications. Cependant, les performances de ce système sont plus favorables que les spécifications, et permettront une estimation plus précise.

3.1.2.4 Paramètres de la matrice de sensibilité différentielle

Dans l'équation 2.48, les paramètres différentiels sont en facteur de l'accélération en mode commun des masses d'épreuve, qui sert d'entrée au système de compensation de traînée. C'est pourquoi l'effet du paramètre de facteur d'échelle différentiel a_{d11} et des paramètres de couplages et de défauts d'alignement a_{d12} selon \vec{Z} et a_{d13} selon \vec{Y} peut être amplifié en ajoutant une commande additionnelle au système de compensation de traînée. Il s'agit d'une commande sinusoïdale C à une fréquence déterminée, $f_{cal/lin}$. Le satellite oscille donc suivant l'axe \vec{X} pour l'estimation de a_{d11} , \vec{Y} pour a_{d12} , et \vec{Z} pour a_{d13} .

En réalité, le terme estimé dans le premier cas n'est pas exactement le terme de la matrice de sensibilité différentielle a_{d11} , mais a'_{d11} , défini par :

$$a'_{d11} = a_{d11} + 2 \frac{K_{2cxx}}{K_{1cx}} b_{1dx} + 2 \frac{K_{2dxx}}{K_{1cx}} (C_{0x} - b_{0cx}) \quad (3.15)$$

L'objectif de ce changement de paramètre est d'inclure tous les termes de biais en facteur de la commande d'étalonnage du système de compensation de traînée C_x (sauf la composante de $\Gamma_{app,dx}$ au continu, qui est considérée négligeable sur la durée de la session d'étalonnage), et qui vont donc contribuer à l'accélération mesurée à la fréquence de cette commande, $f_{cal/lin}$.

L'équation d'étalonnage est pour ce paramètre :

$$\Gamma_{mes,dx}(f_{cal/lin}) \approx \Gamma_{mes,cx}(f_{cal/lin}) \cdot a'_{d11} \quad (3.16)$$

L'erreur maximale d'estimation de ce paramètre, majoritairement perturbée par les termes quadratiques, est de $3,1 \cdot 10^{-5}$.

De la même manière, on a pour a_{d12} :

$$\Gamma_{mes,dx}(f_{cal/lin}) \approx \Gamma_{mes,cy}(f_{cal/lin}) \cdot a_{d12} \quad (3.17)$$

Et pour a_{d13} :

$$\Gamma_{mes,dx}(f_{cal/lin}) \approx \Gamma_{mes,cz}(f_{cal/lin}) \cdot a_{d13} \quad (3.18)$$

Ces termes sont évalués avec une erreur maximale de $3,5 \cdot 10^{-6}$ rad avant retraitement des données et $2,4 \cdot 10^{-6}$ rad après.

3.1.2.5 Paramètre quadratique différentiel

Comme pour le terme de facteur d'échelle différentiel a_{d11} , l'étalonnage du terme quadratique différentiel K_{2dxx} se fait en imposant au satellite un mouvement d'oscillation le long de l'axe \vec{X} à la fréquence $f_{cal/lin}$. Le signal extrait se trouve cette fois au double de cette fréquence. L'équation d'étalonnage s'écrit :

$$\Gamma_{mes,dx}(2f_{cal/lin}) \approx \Gamma_{mes,cx}^2(2f_{cal/lin}) \cdot \frac{K_{2dxx}}{K_{1cx}^2} \quad (3.19)$$

Ce terme est évalué avec une précision de $1236 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ avant retraitement des données, cette estimation étant principalement perturbée par le facteur d'échelle différentiel. Le retraitement des données est nécessaire, et permet de réduire l'erreur maximale d'estimation à $19 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$.

3.1.2.6 Paramètre quadratique commun

Le facteur quadratique commun K_{2cxx} est obtenu en estimant séparément le facteur quadratique du capteur interne K_{21xx} et celui du capteur externe K_{22xx} . Dans un premier temps, K_{21xx} est estimé en imposant à la masse test interne un mouvement d'oscillation sinusoïdal le long de l'axe \vec{X} à la fréquence f'_{TM} avec une amplitude Δ'_{TM} , tandis que le système de compensation de traînée utilise en entrée l'accélération mesurée pour la masse test externe, qui est, elle, toujours asservie au centre de la cage électrostatique. Comme nous cherchons un terme quadratique, le signal est exploité au double de la fréquence d'étalonnage. L'équation d'étalonnage s'écrit alors :

$$\Gamma_{mes,1x}(2f'_{TM}) \approx \Gamma_{mes,1x}^2(2f'_{TM}) \cdot \frac{K_{21xx}}{K_{11x}^2} \quad (3.20)$$

Les rôles des deux capteurs sont ensuite inversés pour estimer le terme quadratique du capteur externe, K_{22xx} . Au total, deux sessions d'étalonnage sont donc nécessaires. Le terme quadratique commun est ensuite déduit des estimations précédentes :

$$K_{2cxx} = \frac{1}{2}(K_{21xx} + K_{22xx}) \quad (3.21)$$

Les termes quadratiques de chaque capteur, $\frac{K_{2ixx}}{K_{1ix}^2}$ sont déterminés avec une précision de $193,2 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$, étant essentiellement perturbés par le terme linéaire. L'erreur maximale d'estimation de $\frac{K_{2cxx}}{K_{1cx}^2}$ en est déduite : $569,1 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$. Cette valeur peut être améliorée à $501,3 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ grâce au retraitement des données. L'estimation de K_{21xx} et K_{22xx} permet aussi d'évaluer le paramètre quadratique différentiel K_{2dxx} , qui est la demi-somme de ces deux termes. La précision d'estimation résultante est néanmoins moins bonne que celle obtenue par la méthode dédiée (voir partie 3.1.2.5).

3.2 Validation numérique des performances des méthodes d'étalonnage

Nous disposons à présent de procédures adaptées pour étalonner chacun des paramètres limitant la précision de la mesure de l'expérience MICROSCOPE. Cependant, ces procédures d'étalonnage sont adaptées à un contexte satellitaire et ne peuvent être testées au sol, où l'instrument est saturé. Les performances de ces méthodes ont été évaluées analytiquement, et les résultats sont compatibles avec les spécifications. Néanmoins, cette évaluation analytique ne tient pas compte de tous les phénomènes qui viennent impacter le résultat de l'étalonnage. En particulier, la dynamique des différents systèmes et les effets pouvant apparaître au moment de l'extraction du signal d'étalonnage ont été négligés.

Afin de valider les performances des différentes méthodes d'étalonnage envisagées, elles ont été implémentées dans un simulateur numérique modélisant l'instrument et le satellite dans son environnement. L'objectif est de reconstruire la mesure dans le cadre de l'étalonnage et de lui appliquer le processus de traitement des données pour estimer le paramètre à étalonner. Cette analyse numérique permet de s'affranchir de certaines simplifications effectuées dans la partie précédente, et ainsi de vérifier leur pertinence tout en se rapprochant de la configuration réelle en orbite.

3.2.1 Développement d'un simulateur numérique pour l'étalonnage

Le simulateur d'étalonnage a été développé sous Simulink. La figure 3.1 présente son architecture globale, qui fait notamment apparaître la boucle du système de compensation de traînée. Des entrées secondaires permettent d'introduire, en fonction du paramètre à estimer, les signaux d'étalonnage : accélération linéaire ou angulaire du satellite ou oscillation des masses d'épreuve, comme nous l'avons vu dans la partie précédente. Les paramètres à étalonner sont fixés à des valeurs initiales réalistes qui peuvent être choisies aléatoirement - il est ainsi possible d'obtenir des résultats statistiques en jouant de nombreuses fois la simulation, comme nous le verrons dans la partie 3.2.2.2.

Dans le simulateur d'étalonnage, l'orbite du satellite n'est pas modélisée : nous ne nous intéresserons pas à la position absolue du satellite. L'accélération satellitaire fournie est exclusivement non-gravitationnelle, ce qui équivaut à soustraire le mouvement orbitale de l'accélération réelle du satellite.

$$\Gamma_{simu}^{\vec{}}(O_{sat}) = \Gamma_{real}^{\vec{}}(O_{sat}) - \Gamma_{grav}^{\vec{}}(O_{sat}) = \Gamma_{ng}^{\vec{}}(O_{sat}) \quad (3.22)$$

On utilise de ce fait le développement limité du champ de gravité autour du centre de masse du satellite présenté dans l'équation 2.33. Ainsi, nous n'exploiterons pas une représentation du champ de gravité complet mais seulement du tenseur gradient de gravité.

Nous nous intéressons dans cette partie à la modélisation des différents blocs composant le simulateur d'étalonnage : l'instrument, le système de compensation de traînée du satellite et l'environnement extérieur.

3.2.1.1 L'instrument

Dans le simulateur d'étalonnage, un seul des deux accéléromètres différentiels électrostatiques est représenté. Il est donc composé de deux masses d'épreuve cylindriques et emboîtées l'une dans l'autre : le capteur interne (indiqué 1) et le capteur externe (indiqué 2). L'éventuelle

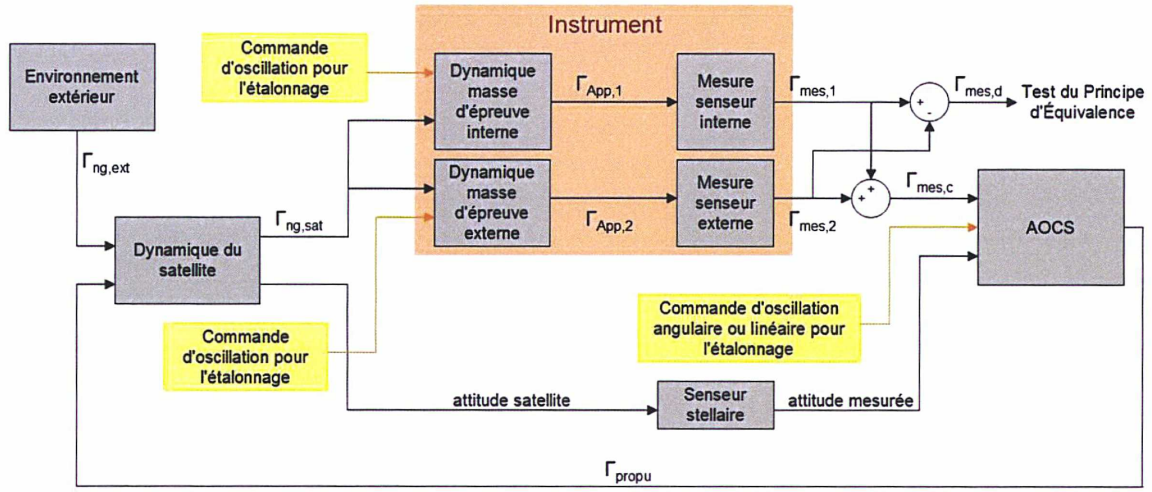


FIGURE 3.1 – Architecture du simulateur dédié à l'étalonnage

différence entre les masses graves et inertes des deux masses d'épreuve ayant été négligée, ce simulateur ne peut pas conduire à la détection d'un signal de violation du Principe d'Équivalence.

Par ailleurs, la boucle de contrôle de l'accéléromètre n'est pas représentée ici. En effet, la dynamique de l'instrument peut-être négligée car sa bande passante de 10 Hz est élevée par rapport aux fréquences d'étalonnage, qui sont de l'ordre de 10^{-2} Hz.

La modélisation de chacun des deux capteurs est décomposée en deux parties. Dans un premier temps, l'accélération de la masse test est modélisée : il s'agit de calculer l'accélération électrostatique appliquée au capteur pour compenser son mouvement par rapport au satellite. Dans un second temps, la mesure de cette accélération est modélisée : c'est là qu'entrent en jeu les paramètres de sensibilité de l'instrument.

3.2.1.1.a Simulation de la dynamique de la masse test

Le bloc "dynamique de la masse d'épreuve", représenté sur la figure 3.2, calcule l'accélération électrostatique $\vec{\Gamma}_{App,k}$ appliquée à la masse k pour la maintenir au centre de la cage électrostatique à partir de l'accélération non gravitationnelle du satellite $\vec{\Gamma}_{ng,sat}$ et de la distance entre le centre de masse du satellite et le centre de masse de la masse test $O_k \vec{O}_{sat}$ (cette distance peut éventuellement varier si la masse test est mise en mouvement au lieu d'être maintenue centrée, comme c'est le cas pour l'étalonnage).

La construction de l'accélération appliquée au capteur est dictée par l'équation 2.38 et s'exprime ici sous la forme :

$$\vec{\Gamma}_{App,k} = \vec{\Gamma}_{ng,sat} + ([T] - [In]) \cdot O_k \vec{O}_{sat} - [Cor] \cdot O_k \dot{\vec{O}}_{sat} - O_k \ddot{\vec{O}}_{sat} \quad (3.23)$$

avec $\vec{\Gamma}_{ng,sat}$ l'accélération non gravitationnelle du satellite : $\vec{\Gamma}_{ng,sat} = \frac{F_{ng,sat}}{M_{Isat}}$. Le terme d'accélération gravitationnelle $(\frac{M_{gsat}}{M_{Isat}} - \frac{m_{gk}}{m_{Ik}}) \vec{g}(O_{sat})$ a disparu car l'éventuelle violation du Principe d'Équivalence est négligé, donc le rapport de la masse grave sur la masse inerte est le même pour le satellite et la masse test.

Enfin, nous remarquons aussi l'absence du terme d'accélération parasite $\frac{F_{Par,k}}{m_{Lk}}$ présent dans l'équation 2.37. Pour faciliter la modélisation, ce terme n'interviendra que dans le bloc suivant. Nous modélisons donc bien ici $\vec{\Gamma}_{app,k}$ définie par l'équation 2.38 et non $\vec{\Gamma}_{App,k}$.

Cette accélération permet de compenser le mouvement de la masse test par rapport au satellite. Elle tient compte de l'effet du gradient de gravité qui apparaît du fait de l'excentrement entre le centre de masse du satellite et le centre de masse du capteur inertiel. L'excentrement total $\vec{O}_{sat}\vec{O}_k$ est la somme de deux excentrementes :

$$\vec{O}_{sat}\vec{O}_k = \vec{O}_{sat}\vec{O}_{c,k} + \vec{O}_{c,k}\vec{O}_k$$

où $\vec{O}_{c,k}$ est le centre de la cage électrostatique formée par les électrodes du capteur k . Il correspond donc à l'emplacement du centre de masse de la masse test k à l'équilibre électrostatique. Le vecteur $\vec{O}_{sat}\vec{O}_{c,k}$ comprend deux contributions : le décentrage entre le centre du satellite et le centre de l'accéléromètre différentiel considéré d'une part, et le léger décentrage entre le centre de l'accéléromètre et la position à l'équilibre électrostatique de la masse test k . Les deux masses d'épreuve étant concentriques, ce second décentrage devrait être nul : il existe à cause des légères imperfections de l'instrument. $\vec{O}_c\vec{O}_k$ correspond à la commande d'oscillation des masses d'épreuve pour les besoins de l'étalonnage. Cette contribution est nulle dans la configuration de base, puisque les masses d'épreuve sont asservies au centre de leur cage, au biais de décentrage près.

En outre, si le satellite connaît un mouvement de rotation, comme les mouvements d'oscillation angulaire du satellite servant pour l'étalonnage, cet excentrement entraînera aussi l'apparition d'un effet d'inertie. Par ailleurs, si la masse test est mise en mouvement pour les besoins de l'étalonnage dans un satellite en rotation, on verra apparaître un effet Coriolis.

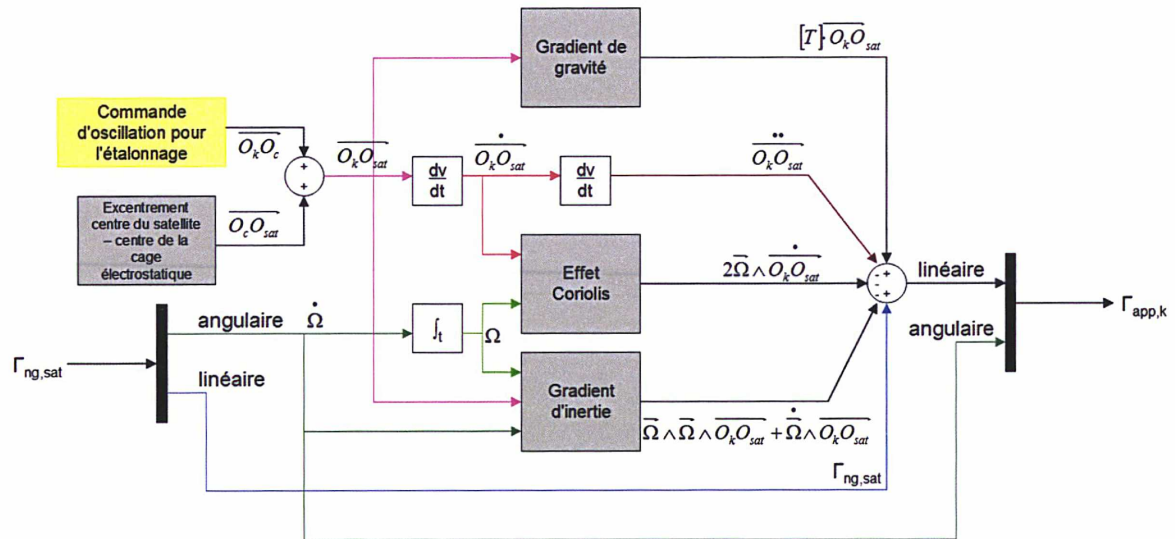


FIGURE 3.2 – Schéma-bloc modélisant la dynamique du capteur k

3.2.1.1.b Simulation de la mesure de l'accélération appliquée à la masse test

Le bloc "mesure du capteur" (voir figure 3.3) modélise la mesure de l'accélération appliquée à la masse test du capteur k . L'entrée du bloc est l'accélération électrostatique appliquée à la

masse test k pour compenser son mouvement par rapport au satellite, $\vec{\Gamma}_{app,k}$, et sa sortie est la mesure de cette accélération par le capteur associé, $\vec{\Gamma}_{mes,k}$.

Dans le cas d'un instrument parfait, la mesure de l'accélération appliquée serait exactement égale à celle-ci. Cependant, différents paramètres de l'instrument en limitent la précision : bruit, biais, matrice de sensibilité et terme quadratique. Les paramètres de sensibilité incluent les facteurs d'échelle K_1 , les couplages entre les axes η , les défauts d'alignement θ ainsi que des couplages linéaire/angularaire. C'est aussi dans ce bloc que sont introduites les forces parasites $F_{Par,k}$ agissant sur la masse test et non prises en compte dans sa dynamique. Les variations dans le temps de ces forces parasites étant très lentes, elles sont modélisées par un biais $-b_1$ au continu.

L'équation régissant ce bloc est :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{mes,k} = & b_{0,k} + ([K_{1k}] + [\eta_k]) \cdot [\theta_k] \cdot \vec{\Gamma}_{app,k} \\ & + ([K_{1k}] + [\eta_k]) \cdot \vec{b}_{1k} \\ & + K_{2k}(\vec{\Gamma}_{App,k/sat} + \vec{b}_{1k})^2 + \vec{\Gamma}_{n,k} \end{aligned} \quad (3.24)$$

En sortie de ce bloc, les mesures des accélérations appliquées aux masses interne et externe sont combinées. La demi-différence - ou accélération en mode différentiel - permettrait le test du Principe d'Équivalence. La demi-somme - ou mode commun - sert quand à elle d'entrée au système de compensation de traînée du satellite.

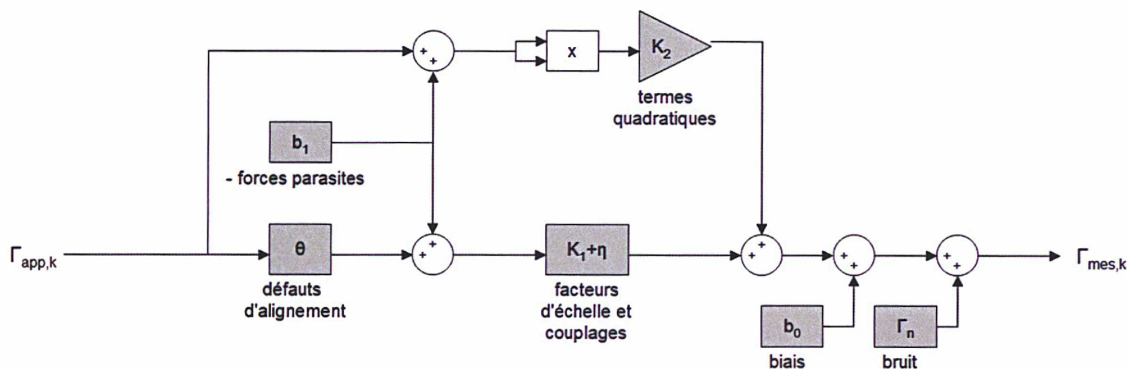


FIGURE 3.3 – Schéma bloc modélisant la mesure de l'accélération appliquée à la masse test du capteur interne.

3.2.1.2 La boucle de compensation de traînée

Dans le cas de la mission MICROSCOPE, charge utile et plateforme sont étroitement liées. Les performances du satellite influent en effet sur le résultat de l'expérience du test du Principe d'Équivalence.

La boucle de compensation de traînée permet de caler le mouvement du satellite sur le mouvement de chute libre des masses d'épreuve. Pour ce faire, elle utilise la mesure instrumentale pour connaître avec précision l'accélération non-gravitationnelle linéaire et angulaire du satellite. La poussée à appliquer pour compenser l'effet des accélérations non-gravitationnelles, comme la traînée atmosphérique résiduelle et la pression de radiation solaire et terrestre est

ensuite calculée puis appliquée avec précision - tant dans l'amplitude que dans la direction de poussée - par le système de propulsion.

Les différents blocs constituant cette boucle de compensation de traînée sont le contrôleur AOCS, le système de propulsion et le capteur stellaire. Nous allons maintenant détailler ces sous-systèmes.

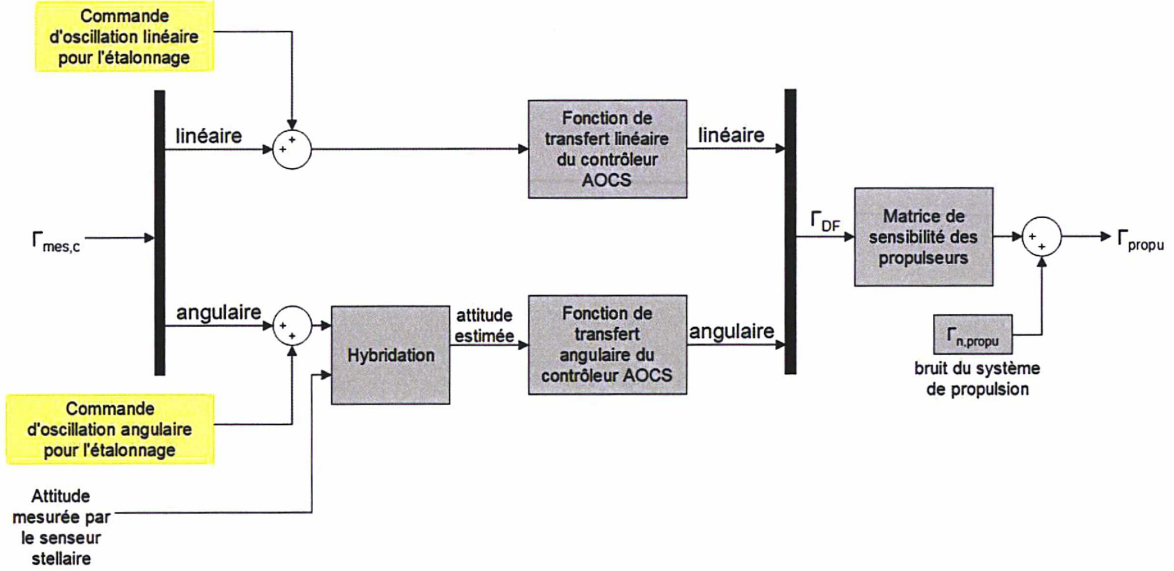


FIGURE 3.4 – Schéma-bloc modélisant le Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite, incluant le contrôleur et le système de propulsion.

3.2.1.2.a Le calculateur de compensation de traînée

Le contrôleur AOCS calcule l'accélération à appliquer au satellite pour compenser les accélérations non-gravitationnelles. Le calcul utilise en entrée la mesure en mode commun de l'instrument (demi-somme de la mesure des accélérations appliquées aux deux masses d'épreuve pour les maintenir centrées) pour l'accélération linéaire, et la mesure instrumentale ainsi que la mesure du capteur stellaire pour l'accélération angulaire.

Pour la mesure de l'accélération linéaire du satellite, l'instrument est le seul capteur. En revanche, la boucle angulaire de l'AOCS est composée de deux chaînes : l'une passe par l'instrument et l'autre par le capteur stellaire, et toutes deux rebouclent au niveau du contrôleur AOCS (voir figure 3.1). Cela permet, pour estimer l'attitude du satellite, de combiner deux types d'information : la mesure de l'accélération angulaire de l'instrument, plus performant aux hautes fréquences, intégrée deux fois, et la mesure de l'attitude par le capteur stellaire, plus performant aux basses fréquences (ce système sera détaillé dans la partie suivante). Cette méthode d'hybridation permet d'améliorer la précision de l'attitude estimée. L'attitude hybridée est obtenue en appliquant à la mesure instrumentale de l'accélération angulaire intégrée deux fois un filtre passe-haut, et à la mesure d'attitude par le capteur stellaire un filtre passe-bas.

$$\Phi_{hyb} = \frac{1}{s^2} \frac{s^2}{s^2 + 2a_{DF}\omega_{DF}s + \omega_{DF}^2} \Gamma_{mes,c,ang} + \frac{\omega_{SST}^2}{s^2 + 2a_{SST}\omega_{SST}s + \omega_{SST}^2} \Phi_{SST} \quad (3.25)$$

L'accélération à appliquer au satellite pour compenser l'accélération non gravitationnelle est ensuite calculée pour chaque axe, à partir de la mesure pure de l'instrument en linéaire, et à partir de la combinaison de la mesure instrumentale et de la mesure du capteur stellaire en angulaire. L'expression de cette accélération est la suivante :

$$\Gamma_{DF}^{\vec{}} = TF_{DF}(\Gamma_{mes,c}^{\vec{}} + C_{etalonnage}^{\vec{}}) \quad (3.26)$$

où $C_{etalonnage}^{\vec{}}$ est l'éventuelle commande d'oscillation linéaire ou angulaire du satellite pour les besoins de l'étalonnage.

TF_{DF} est la fonction de transfert du calculateur. Deux fonctions de transfert d'ordre 4 différentes sont utilisées pour l'accélération linéaire et l'accélération angulaire. Toutes deux sont fournies par le CNES en charge de ce sous-système (se reporter à l'annexe A pour les valeurs numériques). Une fois l'accélération à appliquer au satellite pour compenser les effets non gravitationnels calculée, elle est appliquée par le système de propulsion.

3.2.1.2.b Le capteur stellaire

Le capteur stellaire fournit la mesure d'attitude qui sera hybridée avec la mesure instrumentale de l'accélération angulaire pour commander le système de contrôle d'attitude. Ce système est en réalité composé de deux capteurs optiques placés de telle manière que leurs champs de vue soient orthogonaux.

L'attitude mesurée par le capteur stellaire est ici modélisée en intégrant deux fois l'accélération angulaire du satellite.

Le simulateur prend en compte le bruit et le biais du capteur stellaire. Le bruit est modélisé par la juxtaposition de deux bruits blancs, l'un plus élevé aux très basses fréquences, et l'autre sur le reste du spectre.

3.2.1.2.c Le système de propulsion

Le système de propulsion permet d'appliquer au satellite l'accélération de compensation de traînée. Il est composé de plusieurs micro-propulseurs à gaz froid fonctionnant à l'azote. Ces derniers sont placés aux coins du cube formé par la structure extérieure du satellite afin de pouvoir appliquer la poussée dans toutes les directions.

Dans le simulateur d'étalonnage, le système de propulsion est modélisé par une matrice de sensibilité $[M_{propu}]$ représentant les couplages et les défauts d'alignement entre les différents axes de poussée et par un bruit $\Gamma_{n,propu}^{\vec{}}$. L'accélération appliquée au satellite n'est donc pas exactement égale à l'accélération compensatrice calculée par le contrôleur AOCS, mais s'écrit :

$$\Gamma_{propu}^{\vec{}} = -[M_{propu}]\Gamma_{DF}^{\vec{}} + \Gamma_{n,propu}^{\vec{}} \quad (3.27)$$

3.2.1.3 L'environnement du satellite

Le bloc "dynamique du satellite" permet de prendre en compte l'influence de l'environnement perturbateur extérieur. Il prend en entrée l'accélération appliquée par le système de propulsion et fournit l'accélération non-gravitationnelle du satellite. Comme nous ne modélisons pas le mouvement orbital du satellite, l'accélération de gravité n'est pas calculée.

L'accélération totale non-gravitationnelle du satellite correspond à la somme de l'accélération de propulsion et des accélérations perturbatrices extérieures, comme le résidu de traînée

atmosphérique ou la pression de radiation solaire et terrestre.

$$\Gamma_{ng,sat}^{\vec{}} = \Gamma_{propu}^{\vec{}} + \Gamma_{ng,ext/sat}^{\vec{}} \quad (3.28)$$

Une étude sur les perturbations extérieures agissant sur le satellite a été conduite par le CNES. Elle a permis de déterminer la contribution harmonique de ces perturbations surfaciques (la contribution aléatoire étant négligeable) selon les trois translations et les trois rotations. Les forces et moments perturbateurs introduits dans le simulateur modélisent les effets aérodynamiques dus à la traînée atmosphérique résiduelle à l'altitude du satellite, la pression de radiation solaire, les perturbations magnétiques et les perturbations dues à l'action du gradient de gravité sur le satellite. Les contributions considérées agissent aux multiples de la fréquence orbitale. Pour les sessions d'étalonnage durant lesquelles le satellite oscille angulairement, ces perturbations voient apparaître une composante à la fréquence d'oscillation $f_{cal/ang}$. Néanmoins, l'amplitude de cette composante étant proportionnelle au sinus de l'angle d'oscillation ($\alpha_0 = 0,05$ rad), elle est presque deux ordres de grandeur plus faible que les autres composantes et sera donc négligée. En revanche, pour les sessions d'étalonnage avec oscillation des masses d'épreuve, le mouvement de ces dernières induit une accélération sur le satellite, puisque celui-ci est asservi sur les masses d'épreuve. Cette perturbation à la fréquence d'oscillation des masses d'épreuve f_{TM} ou f'_{TM} est prise en compte dans le simulateur.

Le sous-système "dynamique du satellite" calcule par ailleurs l'attitude du satellite en intégrant deux fois l'accélération angulaire. Cette attitude servira d'entrée au capteur stellaire. Elle sera transformée en une attitude mesurée en y ajoutant des défauts de bruit et de biais.

3.2.2 Exploitation du simulateur

Le simulateur d'étalonnage fournit une mesure simulée des accélérations électrostatiques appliquées aux masses d'épreuve de l'accéléromètre différentiel pour les maintenir au centre de leur cage. Le signal est échantillonné à 4 Hz, et doit être traité afin d'en extraire la valeur du paramètre en cours d'estimation.

3.2.2.1 Procédures de traitement des données

Le signal obtenu en sortie du simulateur correspond à la mesure différentielle des accélérations des masses d'épreuve sur une durée cumulant :

- le temps de convergence des mouvements provoqués pour la session d'étalonnage (mouvement d'oscillation linéaire ou angulaire du satellite, mouvement d'oscillation d'une ou deux masses d'épreuve) ;
- le temps de convergence du filtre numérique pour le traitement des données, qui sera détaillé dans la partie suivante ;
- les dix orbites de la session d'étalonnage.

L'ajout des durées de convergence permet d'éviter les effets transitoires qui perturberaient le signal à traiter.

3.2.2.1.a Extraction du paramètre à estimer

Deux méthodes sont envisagées pour extraire la valeur du paramètre à estimer de la mesure accélérométrique. La première consiste à se placer dans l'espace de Fourier. En effet, nous avons vu dans la partie précédente que le signal significatif pour l'estimation du paramètre

à étalonner est mesuré à une fréquence spécifique. Travailler dans l'espace de Fourier est donc adapté car cela permet de sélectionner la raie spectrale correspondant à la fréquence d'étalonnage.

Le signal est discret à support compact, car limité dans le temps. La transformée de Fourier discrète d'un signal x échantillonné avec un pas de temps Δt et comportant N échantillons s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{TFD}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-2i\pi kn\Delta t} \quad (3.29)$$

En pratique, cette transformée de Fourier est calculée à partir d'un algorithme de transformée de Fourier rapide. L'algorithme le plus connu, appelé FFT (Fast Fourier Transform), consiste à décomposer récursivement un problème à $N = 2^N$ points en deux problèmes à 2^{N-1} points ([3]). L'algorithme utilisé dans notre étude permet de ne pas se restreindre à un nombre de points de mesure correspondant à une puissance de deux, exploitant ainsi toutes les mesures. Pour calculer une transformée de Fourier discrète de N points, le problème est décomposé en plusieurs calculs de transformées de Fourier de tailles correspondantes à des sous-multiples de N . Cet algorithme est plus lent que la FFT, dont le nombre de calcul est de l'ordre de $N \log_2 N$, mais plus rapide que le calcul direct de la transformée de Fourier discrète, dont le coût est en N^2 ([36]).

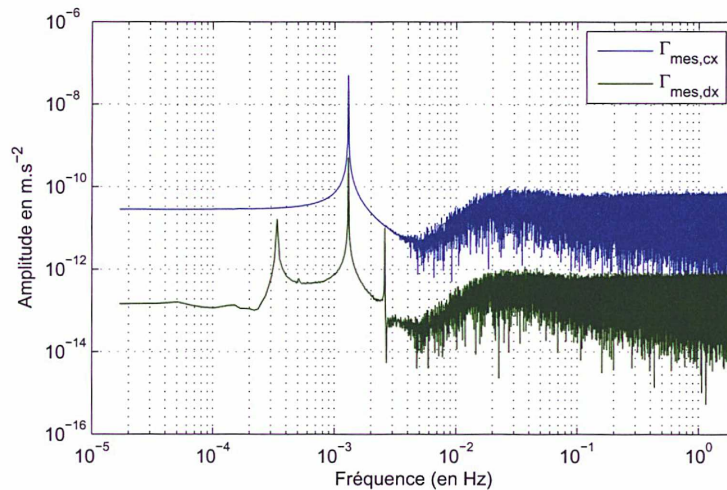


FIGURE 3.5 – Étalonnage du facteur d'échelle différentiel a'_{d11} : amplitude de la transformée de Fourier du signal mesuré ($\Gamma_{mes,dx}$) et du signal d'étalonnage ($\Gamma_{mes,cx}$). Les pics à $f_{cal/lin} = 1,3$ mHz correspondent à la raie d'intérêt.

Le même traitement est appliqué au signal d'étalonnage (gradient de gravité, gradient d'inertie, accélération en mode commun des masses d'épreuve...). La valeur estimée du paramètre à étalonner correspond au rapport de l'amplitude du signal mesuré sur l'amplitude du signal d'étalonnage à la fréquence d'intérêt. Par exemple, pour étalonner le facteur d'échelle différentiel a'_{d11} , l'équation 3.16 nous donne :

$$\hat{a}'_{d11} = \frac{\text{TF}(\Gamma_{mes,dx})(f_{cal/lin})}{\text{TF}(\Gamma_{mes,cx})(f_{cal/lin})} \quad (3.30)$$

où $TF(S)(f)$ représente l'amplitude de la transformée de Fourier du signal S à la fréquence f . L'amplitude des spectres est représentée figure 3.5.

Cette méthode de traitement du signal est adaptée à l'étalonnage puisqu'on recherche l'amplitude du signal à une fréquence bien déterminée. Elle présente néanmoins un inconvénient : les résultats sont très sensibles à l'erreur sur la fréquence d'étalonnage. On travaille ici avec une unique bande spectrale. Or, nous verrons dans le chapitre 4 qu'il existe des incertitudes sur la réalisation de la fréquence d'oscillation linéaire du satellite, de la fréquence d'oscillation angulaire et de la fréquence d'oscillation des masses d'épreuve. Si la fréquence d'étalonnage réelle ne correspond pas à la bande spectrale sélectionnée lors de l'analyse, l'estimation du paramètre à étalonner sera mauvaise.

Il est possible de traiter les données en utilisant la méthode des moindres carrés dans le domaine temporel. Considérons un vecteur de mesure Y contenant N mesures. On souhaite à partir de ces mesures estimer les p paramètres rassemblés dans le vecteur X d'un modèle théorique A représenté par une matrice de dimension $N \times p$. En présence d'un bruit B , les observations s'écrivent :

$$Y = A \cdot X + B \quad (3.31)$$

L'estimation par moindre carré est une méthode d'optimisation consistant à trouver l'estimateur \hat{X} permettant de minimiser l'erreur quadratique moyenne de la différence entre les observations réelles et les observations modélisées $\|Y - AX\|$. Les observations modélisées avec l'estimateur \hat{X} sont notées \hat{Y} :

$$\hat{Y} = A \cdot \hat{X} \quad (3.32)$$

On cherche à minimiser l'espérance $E((\hat{Y} - Y)^2)$:

$$\begin{aligned} E((\hat{Y} - Y)^2) &= (E(\hat{Y}) - Y)^T \cdot (E(\hat{Y}) - Y) \\ &= (A \cdot \hat{X} - Y)^T \cdot (A \cdot \hat{X} - Y) \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'estimateur \hat{X} qui la minimise est tel que :

$$\frac{\partial E((\hat{Y} - Y)^2)}{\partial \hat{X}} = 0 = 2A \cdot (Y - A \cdot \hat{X}) \quad (3.34)$$

Donc l'estimateur optimal est :

$$\hat{X} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y \quad (3.35)$$

Dans le cas des sessions d'étalonnage, les observations Y correspondent aux mesures d'accélération en mode différentiel des masses d'épreuve, le paramètre X au paramètre à étalonner et la matrice du modèle A au signal d'étalonnage. Cependant, l'estimation des moindres carrés est appliquée à toutes les observations, et en particulier à toutes les fréquences. Or, seules les raies proches de la fréquence d'étalonnage présentent un rapport signal à bruit favorable à l'estimation du paramètre à étalonner. Nous appliquons donc au signal un filtre passe-bande centré autour de la fréquence d'étalonnage correspondant à la session avant de réaliser l'inversion par la méthode des moindres carrés dans le domaine temporel. Il s'agit d'un filtre de Butterworth d'ordre 2, dont la réponse est présentée figure 3.6. L'amplitude d'un tel filtre est la plus constante possible à l'intérieur de la bande passante. Ce filtre présente plusieurs inconvénients : en particulier, il induit un déphasage et une modification de l'amplitude du signal.

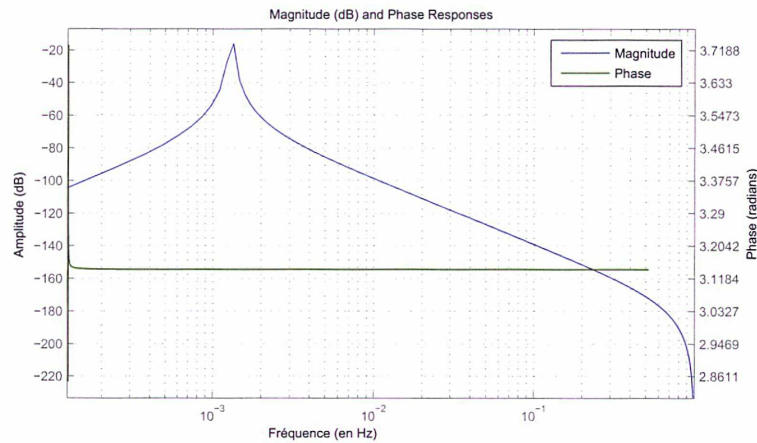


FIGURE 3.6 – Réponse du filtre de Butterworth passe-bande autour de la fréquence d'étalonnage $f_{cal/lin} = 1,3$ mHz.

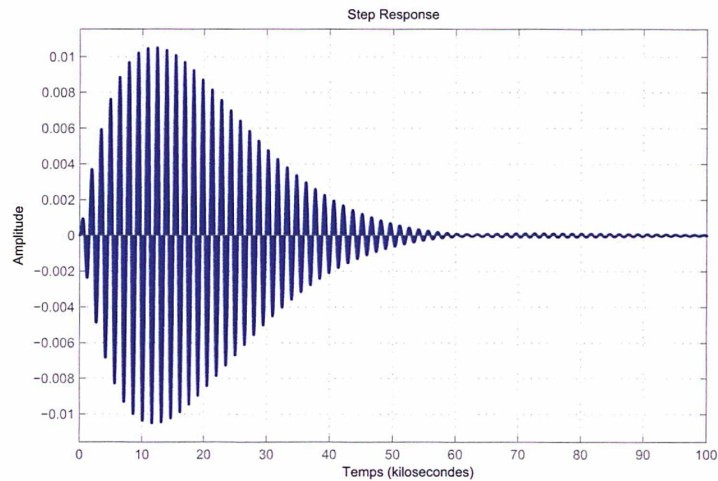


FIGURE 3.7 – Réponse temporelle du filtre de Butterworth à un échelon.

Ces défauts sont cependant absorbés par le fait que le filtre est appliqué à la fois à la mesure et au modèle, dont on cherche le rapport des amplitudes. En outre, la période nécessaire à la stabilisation du filtre est longue. La réponse du filtre à un échelon est présentée figure 3.7. Nous constatons que le temps de convergence est presque de 10 orbites (environ 60000 s), soit la durée d'une session d'étalonnage. Si l'on décide d'exploiter uniquement les mesures après convergence du filtre, il serait nécessaire de doubler la durée des sessions d'étalonnage pour inclure la durée de convergence du filtre numérique en plus des 10 orbites de mesure utile. Ce scénario n'est pas compatible avec l'autonomie en carburant du satellite. Nous constatons cependant sur la figure 3.7 que la valeur du dépassement ne dépasse pas 1%. Les mesures obtenues avant convergence du filtre restent donc exploitables.

L'estimateur obtenu par la méthode des moindres carrés est sans biais. La matrice de covariance de l'estimateur est de trace minimale à condition d'introduire une pondération des mesures par une matrice dont le carré est égal à l'inverse de la matrice de covariance du bruit

sur les observations ([26]). Cette opération est particulièrement importante en présence d'un bruit coloré. Le bruit de l'accéléromètre différentiel est fortement coloré. Cependant, le filtre numérique passe-bande appliqué aux mesures permet de se restreindre à une étroite bande spectrale autour de la fréquence d'étalonnage, où le bruit peut-être considéré comme blanc. Le calcul de la matrice de pondération étant par ailleurs lourd, il n'en est pas fait usage dans le simulateur d'étalonnage. Cela permet d'alléger le calcul et d'obtenir un résultat qui n'est pas optimal mais correspond à l'ordre de précision souhaité. Nous verrons dans le chapitre 5 comment ce calcul peut-être implémenté de manière allégée à condition de se placer dans le domaine spectral.

Une étude statistique a été menée sur 500 cas d'étalonnage de $a_{c11}\Delta_x$ afin de comparer l'efficacité de ces deux méthodes vis à vis de la précision de l'estimation du paramètre. Les résultats sont présentés figure 3.8 et sont légèrement en faveur de l'estimation par moindres carrés, qui présente une dispersion moins importante que l'estimation par analyse spectrale. L'estimation par moindres carrés a permis d'obtenir un résultat plus précis que par étude spectrale dans 60% des cas.

Ainsi, les résultats qui seront présentés dans la suite de ce chapitre ont été obtenus par analyse des mesures simulées avec la méthode des moindres carrés.

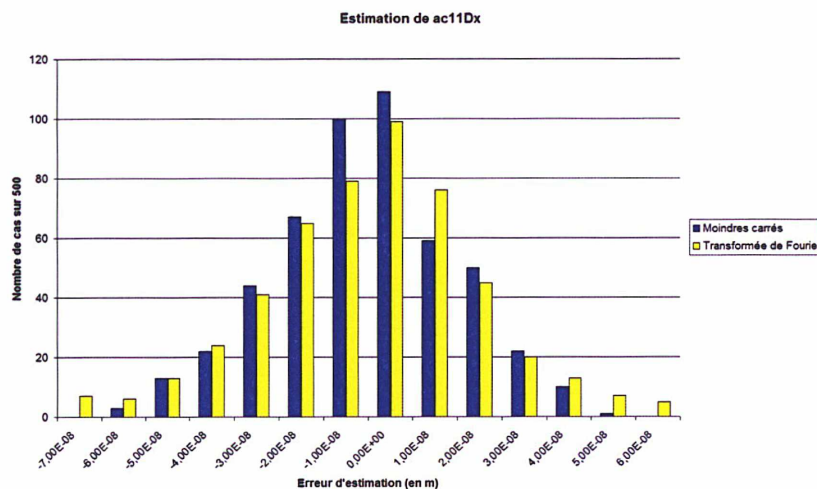


FIGURE 3.8 – Étalonnage de $a_{c11}\Delta_x$: comparaison de l'efficacité de l'estimation par moindres carrés et par analyse spectrale.

3.2.2.1.b Retraitement des données de l'étalonnage

Comme nous l'avons vu dans la partie 3.1, il est possible, une fois tous les paramètres étalonnés, d'améliorer le résultat de ces estimations grâce à un retraitement des données : les données sont à nouveau traitées, en corrigeant cette fois l'équation d'étalonnage de manière à prendre en compte les valeurs des paramètres déjà estimés.

Lors d'une simulation d'étalonnage, il est possible de choisir un jeu de valeur pour les dix paramètres à estimer, puis de dérouler les dix sessions d'étalonnage correspondant. Lors de chaque session, la valeur du paramètre recherché est déterminée indépendamment de celle des autres, selon les équations d'étalonnage présentées dans la partie 3.1.2. Une fois les dix

Paramètre à étalonner	Spécification sur la précision de l'estimation	Pire erreur d'estimation après étalonnage	Erreur d'estimation moyenne après étalonnage	Écart-type de l'erreur d'estimation après étalonnage
$a_{c11} \cdot \Delta_x$	0.1 μm	0.03 μm	0.01 μm	8.5 nm
$a_{c11} \cdot \Delta_z$	0.1 μm	0.03 μm	0.01 μm	7.1 nm
$a_{c11} \cdot \Delta_y$	2 μm	0.2 μm	0.06 μm	0.05 μm
a_{c12}	9.0×10^{-4} rad	1.1×10^{-3} rad	4.0×10^{-4} rad	3.0×10^{-4} rad
a_{c13}	9.0×10^{-4} rad	1.0×10^{-3} rad	3.4×10^{-4} rad	2.5×10^{-4} rad
a'_{d11}	1.5×10^{-4}	1.1×10^{-5}	2.8×10^{-6}	2.7×10^{-6}
a_{d12}	5×10^{-5} rad	2.5×10^{-6} rad	6.7×10^{-7} rad	5.3×10^{-7} rad
a_{d13}	5×10^{-5} rad	2.0×10^{-6} rad	6.6×10^{-7} rad	4.7×10^{-7} rad
K_{2dxx}/K_{1cx}^2	250 s ² /m	122 s ² /m	30 s ² /m	24 s ² /m
K_{2cxx}/K_{1cx}^2	1000 s ² /m	4891 s ² /m	1423 s ² /m	1051 s ² /m

TABLE 3.4 – Évaluation numérique des performances des procédures d'étalonnage : résultats après étalonnage et retraitement des données pour une étude de 100 simulations.

paramètres étalonnés, chacun est réestimé au moyen d'une équation d'étalonnage corrigée avec la valeur estimée des autres paramètres (voir l'exemple de l'équation 3.7 pour l'estimation de l'excentrement suivant l'axe \vec{X}). Ce processus est itéré jusqu'à convergence de l'estimation.

Une autre solution équivalente serait d'utiliser toutes les mesures d'étalonnage simultanément pour estimer tous les paramètres en même temps. Il s'agit en fait de d'estimer non pas un seul paramètre mais un vecteur de paramètres. Cette solution serait néanmoins beaucoup plus compliquée à mettre en place, notamment du fait que toutes les sessions d'étalonnage n'ont pas la même durée.

3.2.2.2 Résultats de simulation

Le bon fonctionnement du simulateur a été vérifié en étalonnant chaque paramètre, tous les autres défauts (autres paramètres instrumentaux, bruits, biais...) étant nuls. Les différents défauts sont ensuite ajoutés progressivement.

Le simulateur permet un choix aléatoire automatique des différents paramètres dans l'intervalle borné par leur valeur maximale par construction. Une étude statistique a ainsi été réalisée sur la base de 100 simulations. Pour chaque simulation, les dix paramètres présentés dans la partie 3.1.2 ont été étalonnés. Chaque session d'étalonnage dure dix orbites, sauf pour le paramètre en mode commun de la matrice de sensibilité suivant \vec{Z} , qui nécessite 40 orbites, et le terme quadratique différentiel, qui nécessite deux sessions de dix orbites pour estimer les termes quadratiques de chaque capteur. En outre, l'étalonnage de l'excentrement suivant \vec{X} et celui de l'excentrement suivant \vec{Z} peuvent être fait en même temps, de même que ceux du facteur d'échelle différentiel et du paramètre quadratique différentiel, qui nécessitent les mêmes mouvement du satellite et correspondent à des fréquences différentes. Au total, l'étalonnage de l'instrument dure donc 120 orbites, soit un peu plus de huit jours.

Les résultats des simulations sont présentés dans le tableau 3.4. Ils sont compatibles avec les spécifications, sauf pour les paramètres de la matrice de sensibilité en mode commun, a_{c12} et a_{c13} , qui présentent un dépassement des spécifications dans environ 5% des simulations, et pour le terme quadratique commun, K_{2cxx} , qui dépasse la spécification dans 50% des cas.

Cependant, le bilan d'erreur lié aux paramètres instrumentaux est largement compatible avec la spécification globale fixée à $2 \cdot 10^{-15}$ m \cdot s⁻¹, comme l'illustre le tableau 3.5.

Terme perturbateur	Contribution à la mesure du test du PE après étalonnage (ms ⁻²) (pire précision)	Contribution à la mesure du test du PE après étalonnage (ms ⁻²) (précision moyenne)
$a_{c11} \cdot T_{xx} \cdot \Delta_x$	1.3×10^{-16}	4.2×10^{-17}
$a_{c11} \cdot T_{xz} \cdot \Delta_z$	1.3×10^{-16}	4.3×10^{-17}
$a_{c11} \cdot T_{xy} \cdot \Delta_y$	5.9×10^{-18}	1.8×10^{-18}
$a_{c12} \cdot T_{yy} \cdot \Delta_y$	3.6×10^{-16}	1.3×10^{-16}
$a_{c13} \cdot T_{zz} \cdot \Delta_z$	2.4×10^{-16}	8.4×10^{-17}
$2 \cdot a_{d11} \cdot \Gamma_{resdf,x}$	2.2×10^{-17}	5.6×10^{-18}
$2 \cdot a_{d12} \cdot \Gamma_{resdf,y}$	4.7×10^{-18}	1.3×10^{-18}
$2 \cdot a_{d13} \cdot \Gamma_{resdf,z}$	3.8×10^{-18}	1.2×10^{-18}
$4 \cdot K_{2,cxx} \cdot \Gamma_{app,dx} \cdot \Gamma_{resdf,x}$	2.8×10^{-16}	8.1×10^{-17}
$2 \cdot K_{2,dxx} \cdot (\Gamma_{app,dx}^2 + \Gamma_{resdf,x}^2)$	7.0×10^{-18}	1.7×10^{-18}
Total	1.2×10^{-15}	3.9×10^{-16}

TABLE 3.5 – Bilan des erreurs liées aux paramètres instrumentaux après étalonnage, en utilisant les pires résultats et les résultats moyens obtenus sur 100 simulations.

3.2.2.3 Comparaison avec les résultats analytiques

L'évaluation analytique des performances des procédures d'étalonnage est pire-cas, puisqu'elle considère que tous les termes perturbatifs s'ajoutent. En réalité, suivant le signe des paramètres ou la phase des signaux, certaines contributions à l'erreur d'estimation d'un paramètre peuvent en compenser d'autres. C'est pourquoi les résultats obtenus par le simulateur numérique sur la précision d'estimation des paramètres par l'étalonnage devraient être meilleurs que les résultats analytiques présentés dans la partie 3.1.2. C'est le cas pour tous les paramètres sauf deux : les paramètres quadratiques K_{2dxx} et K_{2cxx} . L'objectif de cette partie est de déterminer l'origine de cet écart entre les résultats numériques et analytiques.

Le pire résultat d'estimation sur le paramètre quadratique différentiel s'élève à 122 s²/m, alors que l'étude analytique prévoit une erreur de 91 s²/m. L'écart est de 31 s²/m.

Ce paramètre est étalonné en faisant osciller le satellite le long de l'axe \vec{X} de l'instrument. Le terme quadratique introduit un effet de la consigne du système de compensation de traînée à deux fois la fréquence d'oscillation $f_{cal/lin}$. La figure 3.9 présente le spectre de la mesure de l'accélération différentielle exploitée pour cet étalonnage. La raie à $2f_{cal/lin}$, qui est utilisée pour l'estimation de K_{2dxx} , se détache nettement. Par ailleurs, on remarque aussi un signal fort à $2f_{orb}$, dû au gradient de gravité, et une raie d'amplitude très importante à $f_{cal/lin}$: il s'agit du terme linéaire d'accélération du satellite, introduit par le facteur d'échelle différentiel a_{d11} . Nous nous intéressons à présent à l'impact de ce paramètre sur l'estimation de K_{2dxx} , en comparant une simulation de l'étalonnage où sa valeur est nulle à une simulation où sa valeur est non nulle.

Une simulation de l'étalonnage de K_{2dxx} est réalisée en fixant tous les défauts (autres paramètres de l'instrument, bruit et biais de l'instrument, bruit et biais du système de propulsion

Par rapport à la première simulation, la seule contribution supplémentaire à la mesure à la fréquence d'étalonnage devrait être le résidu du système de compensation de traînée introduit par le facteur d'échelle différentiel $a_{d11} \cdot \Gamma_{res_{df,x}}(2f_{cal/lin})$. Le simulateur permet de sortir la composante de ce signal à la fréquence de notre choix. Elle est de $1,5 \cdot 10^{-13} \text{ ms}^{-2}$, ce qui représente un impact sur l'estimation de K_{2dxx} de $120 \text{ s}^2/\text{m}$. Cette contribution ne suffit donc pas à expliquer à elle seule l'erreur d'estimation de $144 \text{ s}^2/\text{m}$. Pourtant, nous avons vu grâce à la première simulation que la contribution quadratique était très bien modélisée par l'équation d'étalonnage, et il s'agit de la seule contribution supplémentaire par rapport à ce cas à $2f_{cal/lin}$.

Le facteur d'échelle différentiel introduit donc une autre source d'erreur sur l'estimation du paramètre quadratique différentiel. La seule autre contribution de ce paramètre à la mesure est $a_{d11} \cdot C_x$. Ce signal intervient à $f_{cal/lin}$, et il perturbe pourtant notre observation à $2f_{cal/lin}$. Ceci est dû au fait que cette raie de forte amplitude subit un étalement spectral en raison de la durée finie de la mesure. Elle peut donc présenter une contribution à une autre fréquence que celle de la sinusoïde. Sa contribution à l'erreur sur l'estimation de K_{2dxx} correspond à l'écart entre les erreurs obtenues avec les deux simulations, soit $24 \text{ s}^2/\text{m}$. Cette contribution est bien du même ordre de grandeur que l'écart entre les résultats obtenus analytiquement et numériquement.

Pour le paramètre quadratique commun, les paramètres de chaque masse test K_{21xx} et K_{22xx} sont estimés séparément. L'oscillation des masses d'épreuve produit un signal direct à f'_{TM} , et un signal quadratique à $2f'_{TM}$. Le second signal est utilisé pour l'étalonnage des termes quadratiques. Comme dans le cas du paramètre quadratique différentiel, le terme direct à f'_{TM} contribue à la composante de la mesure à $2f'_{TM}$, introduisant une erreur sur l'estimation des paramètres quadratiques non-considerée dans le bilan analytique.

Cet effet est non-critique pour l'étalonnage, puisque les procédures fournissent des résultats compatibles avec les spécifications même en présence de cette perturbation supplémentaire. Néanmoins, des effets similaires peuvent apparaître lors de l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. Il est nécessaire de s'assurer que leur présence n'empêche pas de réaliser l'objectif de précision de la mission de 10^{-15} .

Bilan du chapitre 3

Nous avons mis en place et validé un protocole d'étalonnage en orbite de l'instrument : une méthode d'étalonnage adaptée pour chaque paramètre instrumental à déterminer a été définie. Les paramètres instrumentaux qui pourraient limiter la précision de la mesure peuvent ainsi être estimés et cette dernière peut être corrigée de leurs effets avec une erreur résiduelle compatible avec l'objectif visé pour le test du Principe d'Équivalence. Mais la comparaison des résultats analytiques et numériques met en lumière l'apparition d'autres effets lors du traitement des données : des perturbations à d'autres fréquences se projettent à la fréquence d'intérêt au moment du traitement des données et perturbent l'observation du signal à détecter - ici le signal d'étalonnage, mais les mêmes effets existent pour l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. Il est donc nécessaire d'étudier ces effets.

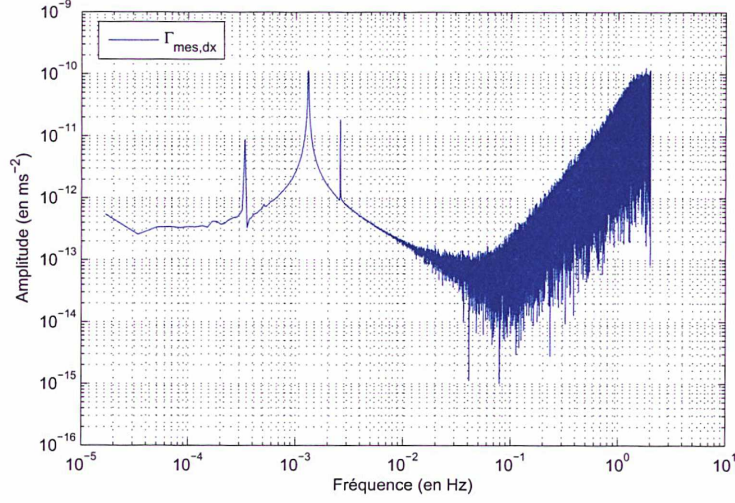


FIGURE 3.9 – Étalonnage du paramètre quadratique différentiel K_{2dxx} : amplitude de la transformée de Fourier du signal mesuré ($\Gamma_{mes,dx}$). Le pic à $2f_{cal/lin} = 2,6$ mHz correspond à la raie d'intérêt.

et du capteur stellaire) à zéro, y compris le facteur d'échelle différentiel a_{d11} . D'après l'équation 2.48, lorsque seul K_{2dxx} contribue à la mesure de l'accélération différentielle des masses d'épreuve (puisque tous les autres paramètres sont nuls), celle-ci s'écrit :

$$\Gamma_{mes,dx} = K_{2dxx} ((\Gamma_{app,dx})^2 + (\Gamma_{res_{df},x} + C_x)^2) \quad (3.36)$$

avec C la commande d'oscillation du satellite en entrée du système de compensation de traînée : $C_x = C_{eta,x} \sin(2\pi f_{cal/lin})$, et $C_{eta,x} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$. Comme nous l'avons vu dans la partie 3.1.2.5, nous estimons le paramètre quadratique différentiel en utilisant le modèle suivant pour l'équation d'étalonnage :

$$\Gamma_{calib} = \Gamma_{mes,dx}(2f_{cal/lin}) = C_x^2(2f_{cal/lin}) \cdot K_{2dxx} = \frac{C_{eta,x}^2}{2} \cdot K_{2dxx} \quad (3.37)$$

La précision de l'estimation ainsi obtenue est excellente : $8,1 \cdot 10^{-11} \text{ s}^2/\text{m}$. Notre modèle d'équation d'étalonnage est donc représentatif de la mesure différentiel à $2f_{cal/lin}$ à 10^{-25} ms^{-2} près.

La même simulation est ensuite réalisée en fixant la valeur du facteur d'échelle différentiel à sa valeur maximale par construction : $a_{d11} = 0,01$. Nous obtenons alors une précision sur l'estimation de K_{2dxx} de $144 \text{ s}^2/\text{m}$. D'après l'équation 2.48, lorsque seuls K_{2dxx} et a_{d11} contribuent à la mesure de l'accélération différentielle, celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,dx} &= a_{d11} \cdot (\Gamma_{res_{df},x} + C_x) \\ &\quad + K_{2dxx} ((\Gamma_{app,dx})^2 + (\Gamma_{res_{df},x} + C_x)^2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La commande du système de compensation de traînée étant une sinusoïde à la fréquence $f_{cal/lin}$, la mesure différentielle est à la fréquence d'étalonnage :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,dx}(2f_{cal/lin}) &= a_{d11} \cdot \Gamma_{res_{df},x}(2f_{cal/lin}) \\ &\quad + K_{2dxx} ((\Gamma_{app,dx})^2 + (\Gamma_{res_{df},x} + C_x)^2) (2f_{cal/lin}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Par rapport à la première simulation, la seule contribution supplémentaire à la mesure à la fréquence d'étalonnage devrait être le résidu du système de compensation de traînée introduit par le facteur d'échelle différentiel $a_{d11} \cdot \Gamma_{res_{df,x}}(2f_{cal/lin})$. Le simulateur permet de sortir la composante de ce signal à la fréquence de notre choix. Elle est de $1,5 \cdot 10^{-13} \text{ ms}^{-2}$, ce qui représente un impact sur l'estimation de K_{2dxx} de $120 \text{ s}^2/\text{m}$. Cette contribution ne suffit donc pas à expliquer à elle seule l'erreur d'estimation de $144 \text{ s}^2/\text{m}$. Pourtant, nous avons vu grâce à la première simulation que la contribution quadratique était très bien modélisée par l'équation d'étalonnage, et il s'agit de la seule contribution supplémentaire par rapport à ce cas à $2f_{cal/lin}$.

Le facteur d'échelle différentiel introduit donc une autre source d'erreur sur l'estimation du paramètre quadratique différentiel. La seule autre contribution de ce paramètre à la mesure est $a_{d11} \cdot C_x$. Ce signal intervient à $f_{cal/lin}$, et il perturbe pourtant notre observation à $2f_{cal/lin}$. Ceci est dû au fait que cette raie de forte amplitude subit un étalement spectrale en raison de la durée finie de la mesure. Elle peut donc présenter une contribution à une autre fréquence que celle de la sinusoïde. Sa contribution à l'erreur sur l'estimation de K_{2dxx} correspond à l'écart entre les erreurs obtenues avec les deux simulations, soit $24 \text{ s}^2/\text{m}$. Cette contribution est bien du même ordre de grandeur que l'écart entre les résultats obtenus analytiquement et numériquement.

Pour le paramètre quadratique commun, les paramètres de chaque masse test K_{21xx} et K_{22xx} sont estimés séparément. L'oscillation des masses d'épreuve produit un signal direct à f'_{TM} , et un signal quadratique à $2f'_{TM}$. Le second signal est utilisé pour l'étalonnage des termes quadratiques. Comme dans le cas du paramètre quadratique différentiel, le terme direct à f'_{TM} contribue à la composante de la mesure à $2f'_{TM}$, introduisant une erreur sur l'estimation des paramètres quadratiques non-considerée dans le bilan analytique.

Cet effet est non-critique pour l'étalonnage, puisque les procédures fournissent des résultats compatibles avec les spécifications même en présence de cette perturbation supplémentaire. Néanmoins, des effets similaires peuvent apparaître lors de l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. Il est nécessaire de s'assurer que leur présence n'empêche pas de réaliser l'objectif de précision de la mission de 10^{-15} .

Bilan du chapitre 3

Nous avons mis en place et validé un protocole d'étalonnage en orbite de l'instrument : une méthode d'étalonnage adaptée pour chaque paramètre instrumental à déterminer a été définie. Les paramètres instrumentaux qui pourraient limiter la précision de la mesure peuvent ainsi être estimés et cette dernière peut être corrigée de leurs effets avec une erreur résiduelle compatible avec l'objectif visé pour le test du Principe d'Équivalence. Mais la comparaison des résultats analytiques et numériques met en lumière l'apparition d'autres effets lors du traitement des données : des perturbations à d'autres fréquences se projettent à la fréquence d'intérêt au moment du traitement des données et perturbent l'observation du signal à détecter - ici le signal d'étalonnage, mais les mêmes effets existent pour l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. Il est donc nécessaire d'étudier ces effets.

Chapitre 4

Perturbations numériques à considérer lors du traitement des données

Objectif du chapitre 4

L'objectif de ce chapitre est de développer des procédures de traitement des données permettant de réduire au maximum les perturbations numériques, et de décider d'une stratégie de gestion des éventuelles pertes de mesure permettant de maintenir leur impact sur ces effets à un niveau compatible avec l'objectif de précision de la mission.

Comme nous l'avons vu dans la partie 3.2.2.3 du chapitre précédent sur les procédures d'étalonnage, des effets numériques apparaissent lorsque la raie à la fréquence d'intérêt du signal d'étalonnage est extraite. Ces perturbations dégradent la précision d'estimation, et ne se limitent pas au cas des sessions d'étalonnage. Si ces perturbations numériques ne sont pas problématiques dans le cadre de l'étalonnage, des effets similaires perturbent l'observation de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence lors des sessions de mesure scientifique de manière critique.

Le signal de violation du Principe d'Équivalence est attendu à une fréquence bien déterminée, f_{EP} , qui correspond à la fréquence orbitale f_{orb} lorsque l'attitude du satellite est inertielle ou à la somme de la fréquence orbitale et de la fréquence de spin, $f_{orb} + f_{spin}$, lorsque le satellite est en pointage rotatif. C'est pourquoi un effort spécial a été fourni pour réduire toutes les perturbations à cette fréquence ([44]) : perturbations liées aux incertitudes de dimensionnement de l'instrument grâce à l'étalonnage en orbite présenté dans le chapitre 3, mais aussi perturbations thermiques, magnétiques, défauts de pointage du satellite... Cependant, si deux signaux monochromatiques à des fréquences distinctes sont parfaitement décorrélés sur une durée d'analyse infinie, ce n'est pas toujours le cas sur une durée d'analyse finie. Or, la mesure que fournit l'instrument MICROSCOPE est nécessairement finie dans le temps. D'une la mission spatiale est limitée par un système propulsif. D'autre part, une mesure précise est impossible durant les périodes d'éclipse. Enfin, il est nécessaire d'avoir plusieurs phases de mesure aux conditions expérimentales différentes afin de supprimer certaines erreurs systématiques. Donc, s'il est favorable d'allonger la durée des mesures, il est nécessaire de la limiter pour des raisons opérationnelles. En conséquence, une perturbation sinusoïdale à une fréquence idéalement différente de f_{EP} se projettera avec une contribution non nulle sur f_{EP} .

Il s'agit d'un phénomène fondamental qui n'est pas lié à la méthode de traitement des données. L'utilisation de fenêtre d'apodisation, comme les fenêtre de Hann et Blackman, permet de diminuer cet effet (voir annexe C). En faisant lentement converger le signal vers zéro aux extrémités de la fenêtre d'observation, les fenêtres d'apodisation diminuent les effets de bord. Or, on souhaite garder une marge de manœuvre en n'imposant pas de contrainte a priori sur le futur traitement des données scientifique. Les mêmes données pourront être traitées sur des durées différentes (par exemple, six sessions de 20 orbites en mode spinné pourront être traitées comme une seule session de 120 orbites). Si une fenêtre d'apodisation est appliquée, une même mesure se verra alors attribuer des poids différents suivant la durée considérée pour la session. Pour ces raisons, nous préférons valider les performance de la mission en utilisant une simple fenêtre rectangulaire en étudiant les effets numériques pour vérifier qu'ils demeurent à un niveau acceptable.

Il est donc nécessaire de déterminer le taux de projection des différentes fréquences sur f_{EP} . Les spécifications sur l'amplitude des perturbations sur toute la gamme spectrale ont été déduites de cette étude. Ces spécifications se traduisent par des contraintes de performance pour les différents sous-systèmes du satellite (en particulier le système de contrôle d'attitude et d'orbite et le capteur stellaire). Cette étude sera réalisée dans la première partie de ce chapitre. Par ailleurs, l'étude de ce phénomène démontre la possibilité d'ajuster la durée d'observation de la mesure en fonction des périodes des principaux signaux perturbateurs de manière à réduire les taux de projection des perturbations les plus importantes. L'optimisation de la durée d'observation sera abordée dans la deuxième partie de ce chapitre. Nous étudierons dans un dernier temps la manière dont les taux de projection se trouvent modifiés en cas de données manquantes. L'impact de ces pertes de mesure sera étudié afin de déterminer des méthodes de traitement des données adaptées à leur présence de sorte de maintenir des taux de projection minimaux.

4.1 Influence de la durée finie de la fenêtre d'observation du signal

Considérons un sinus de durée infinie. Sa transformée de Fourier se compose d'une seule raie spectrale : toute l'énergie du signal est concentrée à la fréquence du sinus. En revanche, la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal à support compact subit un étalement spectral, et le signal présente une contribution à toutes les raies, comme illustré dans la figure 4.1. De la même manière, lors de l'analyse de la mesure instrumentale sur une session de durée finie, une perturbation à une fréquence f_p différente de la fréquence de notre signal d'intérêt, f_{EP} , se projette à f_{EP} avec un taux de projection donné.

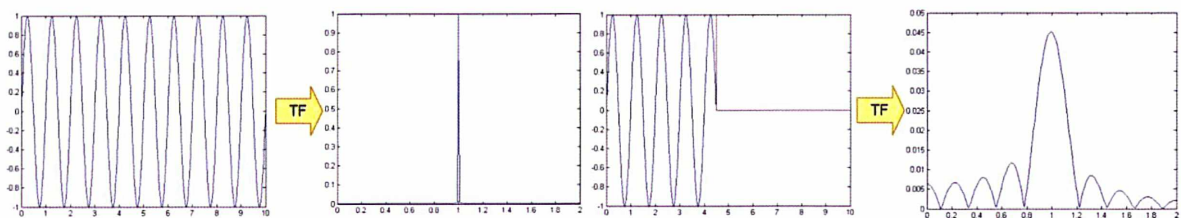


FIGURE 4.1 – À gauche : transformée de Fourier d'un sinus de durée infinie. À droite : transformée de Fourier d'un sinus après multiplication par une fenêtre rectangulaire de durée finie.

4.1.1 Calcul du taux de projection d'une perturbation à une fréquence quelconque sur la fenêtre du test du Principe d'Équivalence

Après correction de l'effet des paramètres instrumentaux sur la mesure scientifique de MICROSCOPE, celle-ci s'écrit :

$$\Gamma_{mes,dx,corr} = \frac{1}{2} a_{c11} \cdot \delta \cdot g_x \quad (4.1)$$

Le paramètre de violation du principe d'Équivalence δ est extrait de la mesure observée, que nous noterons ici S_{obs} : l'accélération différentielle électrostatique des masses d'épreuve. Le modèle d'observation suivant est utilisé pour tous les pas de temps t_i :

$$S_{obs}(t_i) = \delta S_{EP}(t_i) \quad (4.2)$$

La solution estimée par la méthode des moindres carrés (voir partie 3.2.2.1.a) est :

$$\hat{\delta} = \frac{\langle S_{EP}, S_{obs} \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} \quad (4.3)$$

où $\langle X, Y \rangle$ représente le produit scalaire des vecteurs X et Y de longueur N , défini par :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X(t_i) Y(t_i) \quad (4.4)$$

En présence d'un signal perturbateur S_p non identifié, la mesure devient :

$$\Gamma_{mes,dx,corr,p} = \frac{1}{2} a_{c11} \cdot \delta \cdot g_x + S_p \quad (4.5)$$

$$S_{obs,p} = \delta S_{EP} + S_p \quad (4.6)$$

Ce signal perturbateur n'est pas modélisé, et donc pas estimé, par la méthode des moindres carrés. Le modèle d'observation reste donc celui décrit par l'équation 4.2. La solution estimée par la méthode des moindres carrés devient :

$$\hat{\delta}_p = \frac{\langle S_{EP}, S_{obs,p} \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} = \frac{\langle S_{EP}, \delta S_{EP} + S_p \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} = \hat{\delta} + \frac{\langle S_{EP}, S_p \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} \quad (4.7)$$

Le signal perturbateur modifie donc l'estimation de :

$$\Delta\delta = \hat{\delta}_p - \hat{\delta} = \frac{\langle S_{EP}, S_p \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} \quad (4.8)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons que le signal S_p est sinusoïdal de fréquence f_p et d'amplitude A_p . L'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence S_{EP} décrit lui aussi un sinus d'amplitude A_{EP} à la fréquence f_{EP} , en prenant l'hypothèse réaliste que les masses d'épreuve suivent une orbite circulaire autour de la Terre, considérée comme un monopole gravitationnel. Nous avons donc :

$$S_{EP} = A_{EP} \sin(\omega_{EP} t + \varphi_{EP})$$

$$S_p = A_p \sin(\omega_p t + \varphi_p)$$

L'impact de la perturbation sur l'évaluation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence, $\Delta\delta$, vaut donc :

$$\Delta\delta = \frac{A_p}{A_{EP}} \frac{\langle \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}), \sin(\omega_p t + \varphi_p) \rangle}{\langle \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}), \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}) \rangle} \quad (4.9)$$

$\Delta\delta$ est proportionnel à $\frac{A_p}{A_{EP}}$. Pour simplifier, nous étudierons le taux de projection normalisé τ :

$$\tau = \frac{\langle \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}), \sin(\omega_p t + \varphi_p) \rangle}{\langle \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}), \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}) \rangle} = \frac{\langle s_{EP}, s_p \rangle}{\langle s_{EP}, s_{EP} \rangle} \quad (4.10)$$

avec $S_{EP} = A_{EP}s_{EP}$ et $S_p = A_p s_p$.

4.1.1.1 Description des approches utilisées

Cette partie a pour objectif de décrire les deux approches utilisées pour évaluer le taux de projection d'une perturbation à une fréquence quelconque sur la fréquence d'intérêt : il s'agit d'une part d'un calcul analytique simplifié permettant de mettre en évidence certaines caractéristiques de ce taux de projection, et d'autre part de simulations numériques.

4.1.1.1.a Approximation analytique

Afin de correspondre à la mesure discrète, le produit scalaire que nous avons défini dans la formule 4.4 est discret et défini sur un nombre fini d'instants. Cependant, il est possible de l'approximer par une intégrale continue afin de l'évaluer analytiquement. Le produit scalaire se définit alors par :

$$\langle X, Y \rangle = \int_{t=0}^T X(t)Y(t)dt \quad (4.11)$$

où T est la durée d'analyse du signal.

Pour un signal perturbateur de pulsation ω_p différente de la pulsation ω_{EP} de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence, on a :

$$\langle s_{EP}, s_p \rangle = \int_{t=0}^T \sin(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}) \sin(\omega_p t + \varphi_p) dt \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p} [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)t + (\varphi_{EP} - \varphi_p))]_0^T \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p} [\sin((\omega_{EP} + \omega_p)t + (\varphi_{EP} + \varphi_p))]_0^T \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le dénominateur du taux de projection s'écrit par ailleurs :

$$\begin{aligned} \langle s_{EP}, s_{EP} \rangle &= \int_{t=0}^T \sin^2(\omega_{EP}t + \varphi_{EP}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(T - \frac{1}{2\omega_{EP}} (\sin(2\omega_{EP}T + 2\varphi_{EP}) - \sin(2\varphi_{EP})) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Comme $T \gg T_{EP} = \frac{2\pi}{\omega_{EP}}$ ($T = 120 T_{EP}$ pour les sessions scientifiques en mode inertiel et $T = 93 T_{EP}$ pour les sessions scientifiques en mode spinné), on approxime :

$$\langle s_{EP}, s_{EP} \rangle \approx \frac{T}{2} \quad (4.15)$$

Le taux de projection d'un signal perturbateur sinusoïdal sur l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence est donc :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p} [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p)] \\ &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p} [\sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + \varphi_{EP} + \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)]\end{aligned}\quad (4.16)$$

Pour la suite de l'analyse, nous supposons que la durée T d'observation de la mesure a été choisie pour être la plus proche possible d'un nombre entier de périodes du signal de violation du Principe d'Équivalence $T_{EP} = \frac{2\pi}{\omega_{EP}}$:

$$\omega_{EP}T \approx 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.17)$$

Nous verrons dans la partie suivante la raison de ce choix, qui nous permet d'approximer :

$$\begin{aligned}\tau &\approx \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p} [\sin(-\omega_p T + \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p)] \\ &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p} [\sin(\omega_p T + \varphi_{EP} + \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)]\end{aligned}\quad (4.18)$$

On constate que la valeur du taux de projection dépend des phases des signaux, de la durée d'observation, et oscille en fonction de la fréquence perturbatrice. Ces dépendances seront traitées dans les parties suivantes.

4.1.1.1.b Simulations numériques

La méthode des moindres carrés conduit au même résultat si on applique une transformée de Fourier discrète de chaque côté de l'équation 4.2. En effet, on a :

$$[\text{TF}_N]S_{obs} = \delta[\text{TF}_N]S_{EP} \quad (4.19)$$

où $[\text{TF}_N]$ est la matrice associée à la transformée de Fourier discrète de dimension N :

$$[\text{TF}_N] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2i\pi}{N}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La solution estimée au sens des moindres carrés devient alors :

$$\hat{\delta} = \frac{\langle [\text{TF}_N]S_{EP}, [\text{TF}_N]S_{obs} \rangle}{\langle [\text{TF}_N]S_{EP}, [\text{TF}_N]S_{EP} \rangle} = \frac{([\text{TF}_N]S_{EP})^\top ([\text{TF}_N]S_{obs})}{([\text{TF}_N]S_{EP})^\top ([\text{TF}_N]S_{EP})} = \frac{S_{EP}^\top [\text{TF}_N]^\top [\text{TF}_N]S_{obs}}{S_{EP}^\top [\text{TF}_N]^\top [\text{TF}_N]S_{EP}} \quad (4.21)$$

Or $[\text{TF}_N]^\top [\text{TF}_N] = N[\text{Id}]$, on retrouve donc la solution précédente :

$$\hat{\delta} = \frac{\langle S_{EP}, S_{obs} \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} \quad (4.22)$$

Le produit scalaire peut donc être calculé dans l'espace de Fourier. À la fréquence du test du Principe d'Équivalence, celui-ci s'écrit :

$$\langle X, Y \rangle = \Re(\mathcal{F}(X)(f_{EP}))\Re(\mathcal{F}(Y)(f_{EP})) + \Im(\mathcal{F}(X)(f_{EP}))\Im(\mathcal{F}(Y)(f_{EP})) \quad (4.23)$$

où $\mathcal{F}(X)$ désigne la transformée de Fourier de X .

Nous nous intéressons ici au cas de signaux sinusoïdaux observés à travers une fenêtre temporelle rectangulaire discrétisée à la fréquence d'échantillonnage de la mesure. Soit le signal $s(t) = \sin(2\pi ft + \varphi)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$; sa transformée de Fourier est :

$$\forall f' \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}(s)(f') = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi}\delta(f' - f) - e^{-i\varphi}\delta(f' + f))$$

où δ représente la distribution de Dirac.

La fonction fenêtre s'écrit : $W_{rect}(n\Delta t) = 1$ si $n \in [0, \dots, N - 1]$ et 0 sinon avec $\Delta t = \frac{1}{f_e}$ le pas d'échantillonnage et N le nombre de points de mesure. Sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} \forall f' \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}(W_{rect})(f') &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_{rect}(n\Delta t)e^{-2i\pi f'n\Delta t} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi f'n\Delta t} \\ &= \exp\left(-\frac{i\pi f'(N-1)}{f_e}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi f'N}{f_e}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f'}{f_e}\right)} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de notre signal à la fréquence de violation du Principe d'Équivalence s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(W_{rect} \cdot s)(f_{EP}) &= \mathcal{F}(W_{rect}) * \mathcal{F}(s)(f_{EP}) \\ &= \frac{1}{2i} \exp\left(-i\pi \frac{f_{EP} - f}{f_e}(N-1)\right) \exp(i\varphi) \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{EP} - f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{EP} - f}{f_e}\right)} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \exp\left(-i\pi \frac{f_{EP} + f}{f_e}(N-1)\right) \exp(-i\varphi) \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{EP} + f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{EP} + f}{f_e}\right)} \quad (4.24) \end{aligned}$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

La simulation numérique, codée en Matlab, permet d'évaluer le taux de projection sur f_{EP} en fonction de la fréquence du signal perturbateur. Pour cela, on fait varier la fréquence f_p du signal perturbateur entre 10^{-5} Hz et 10^{-1} Hz et pour chaque valeur de f_p , la transformée de Fourier du signal perturbateur est calculée à f_{EP} selon la formule 4.24 et le taux de projection sur la fréquence f_{EP} en est déduit selon la formule du produit scalaire 4.23. L'algorithme de calcul est présenté en figure 4.6.

4.1.1.2 Courbe enveloppe du taux de projection

L'équation 4.18 montre que la valeur du taux de projection sur la fréquence de violation du Principe d'Équivalence dépend des phases des signaux. Afin d'obtenir un résultat pire-cas,

le taux de projection est maximisé par rapport à la phase du signal perturbateur, φ_p . Pour cela, on réécrit le taux de projection sous la forme :

$$\tau = \alpha \cos \varphi_p + \beta \sin \varphi_p \quad (4.25)$$

On obtient après développement de l'expression 4.18 :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p} [\sin(-\omega_p T + \varphi_{EP}) - \sin \varphi_{EP}] \\ &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p} [\sin(\omega_p T + \varphi_{EP}) - \sin \varphi_{EP}] \\ &= -\frac{4}{T} \frac{1}{\omega_{EP}^2 - \omega_p^2} \sin\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \left[\omega_{EP} \cos\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \cos \varphi_{EP} + \omega_p \sin\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \sin \varphi_{EP} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

et

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p} [-\cos(-\omega_p T + \varphi_{EP}) + \cos \varphi_{EP}] \\ &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p} [\cos(\omega_p T + \varphi_{EP}) - \cos \varphi_{EP}] \\ &= \frac{4}{T} \frac{1}{\omega_{EP}^2 - \omega_p^2} \sin\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \left[\omega_{EP} \sin\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \cos \varphi_{EP} - \omega_p \cos\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \sin \varphi_{EP} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le taux de projection maximisé par rapport à la phase φ_p s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ &= \frac{4}{T} \frac{1}{|\omega_{EP}^2 - \omega_p^2|} \left| \sin\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \right| \sqrt{\omega_{EP}^2 \cos^2 \varphi_{EP} - \omega_p^2 \sin^2 \varphi_{EP}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

On constate que le taux de projection s'annule pour les fréquences perturbatrices telles que :

$$\omega_p = \frac{2k\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.29)$$

En effet, les signaux s_{EP} et s_p ont dans ce cas tous deux des fréquences correspondant à une fréquence de la discrétisation de Fourier sur la fenêtre d'observation de durée T . Ils sont donc orthogonaux. Cette propriété servira dans la partie 4.1.2 pour minimiser le taux de projection sur l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence à certaines fréquences correspondant à des perturbations particulièrement importantes.

Le taux de projection τ oscille en fonction de ω_p entre ces valeurs nulles et des valeurs maximales qui dessinent une courbe enveloppe d'amplitude :

$$\tau_{env} = \frac{4}{T} \frac{1}{|\omega_{EP}^2 - \omega_p^2|} \sqrt{\omega_{EP}^2 \cos^2 \varphi_{EP} - \omega_p^2 \sin^2 \varphi_{EP}} \quad (4.30)$$

4.1.1.3 Influence des phases des signaux

L'équation 4.30 de la courbe enveloppe du taux de projection d'une perturbation à f_{EP} dépend de la phase φ_{EP} du signal de violation du Principe d'Équivalence, alors même que le taux de projection a été maximisé par rapport à la phase φ_p du signal perturbateur. Ainsi, le

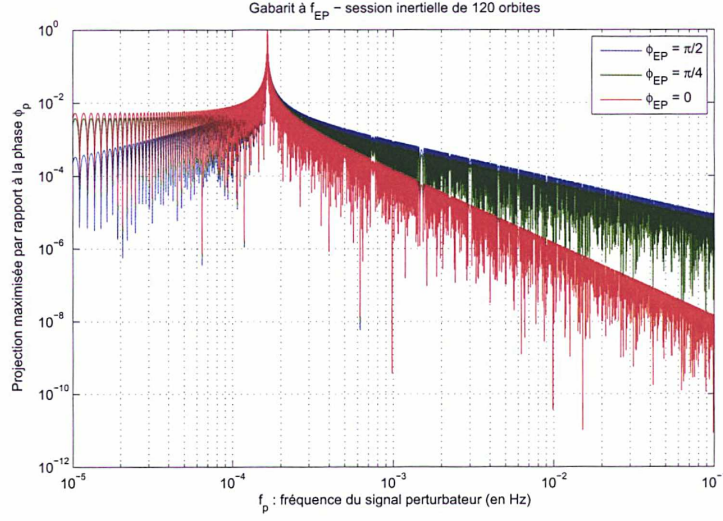


FIGURE 4.2 – Courbe du taux de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice maximisé par rapport à la phase du signal perturbateur et pour différentes valeurs de la phase du signal de violation du Principe d'Équivalence.

taux de projection ne dépend pas seulement de la différence de phase entre les deux signaux, $\varphi_{EP} - \varphi_p$, mais de chacune de ces deux phases.

Pour les signaux perturbateurs aux basses fréquences, $\omega_p \ll \omega_{EP}$ et il est possible d'approximer l'équation 4.30 :

$$\tau_{env,BF} \approx \begin{cases} \frac{4\omega_p}{T\omega_{EP}^2} & \text{si } \cos \varphi_{EP} = 0 \\ \frac{4|\cos \varphi_{EP}|}{T\omega_{EP}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.31)$$

La courbe enveloppe du taux de projection est donc constante par rapport à ω_p aux basses fréquences, sauf pour $\varphi_{EP} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$: dans ce cas la courbe enveloppe présente une pente de +1 en fonction de ω_p .

Quant aux signaux perturbateurs aux hautes fréquences ($\omega_p \gg \omega_{EP}$), ils donnent les simplifications suivantes :

$$\tau_{env,HF} \approx \begin{cases} \frac{4\omega_{EP}}{T\omega_p^2} & \text{si } \sin \varphi_{EP} = 0 \\ \frac{4|\sin \varphi_{EP}|}{T\omega_p} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.32)$$

Aux hautes fréquences, la pente de la courbe enveloppe du taux de projection présente une pente de -1 en fonction de la pulsation du signal perturbateur, ou de -2 si $\varphi_{EP} \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Les simulations numériques confirment les variations de la courbe enveloppe prédites analytiquement, comme le montre la figure 4.2. Puisque le taux de projection d'une perturbation à f_{EP} dépend à la fois de φ_{EP} et de φ_p et que nous souhaitons obtenir des résultats pire-cas sur l'impact des perturbations à la fréquence du test du Principe d'Équivalence, les simulations numériques fournies dans la suite de cette étude présenteront des valeurs du taux de projection maximisé par rapport aux deux phases. La démarche, illustrée par l'organigramme 4.7 est la suivante : pour chaque fréquence du signal perturbateur f_p , on fait varier φ_{EP} et φ_p dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ avec un pas de $\frac{\pi}{100}$ et la valeur maximale du taux de projection pour l'ensemble de ces phases est conservée.

4.1.1.4 Influence de la durée d'observation

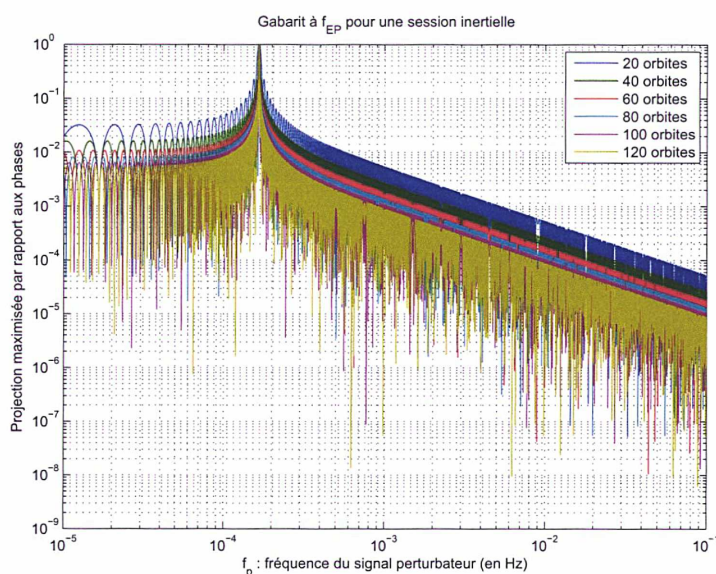


FIGURE 4.3 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice pour différentes durées du traitement du signal.

D'après l'équation 4.30, l'amplitude de la courbe enveloppe est inversement proportionnelle à la durée d'analyse T . Ceci est confirmé par les simulations numériques, comme le montre la figure 4.3. Ainsi, les projections maximales des perturbations sur la fréquence du Principe d'Équivalence seront six fois plus importantes pour les sessions en mode spinné de 20 orbites que pour les sessions en mode inertiel de 120 orbites.

4.1.1.5 Définition des gabarits de spécification

On souhaite définir des spécifications sur l'amplitude des perturbations à toutes les fréquences. L'amplitude maximale acceptable pour une perturbation à une fréquence f_p donnée dépend du taux de projection sur f_{EP} à cette fréquence, puisque c'est cette projection qui va réduire la précision de la détermination du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. Nous définissons donc un gabarit permettant de prendre en compte l'ensemble des taux de projection sur la fréquence du Principe d'Équivalence. Deux gabarits différents ont été définis : un pour les sessions où le satellite est en pointage inertiel et un pour les sessions où le satellite est en rotation, puisque les fréquences mises en jeu et les durées d'observation sont différentes. Ces deux gabarits sont présentés sur la figure 4.5. Comme on le voit sur la figure 4.4, les gabarits permettent d'englober l'ensemble des taux de projection en mode nominal. Ces gabarits de spécification sont définis à partir de taux de projection pire-cas, puisque maximisés par rapport aux phases des deux signaux.

Comme on l'a évoqué en introduction, il est possible d'utiliser des fenêtres d'apodisation pour réduire ces taux de projection (cf annexe C). Néanmoins, afin de définir les spécifications sans nous contraindre *a priori* sur les futures méthodes de traitement des données, nous avons choisi de définir les gabarits en nous basant sur des taux de projection calculés en n'utilisant aucun fenêtrage particulier, ce qui correspond au cas le plus défavorable.

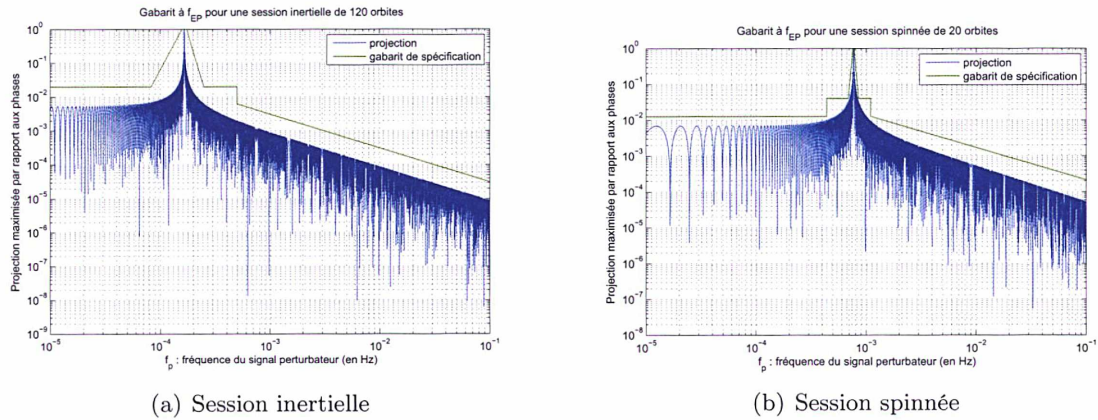
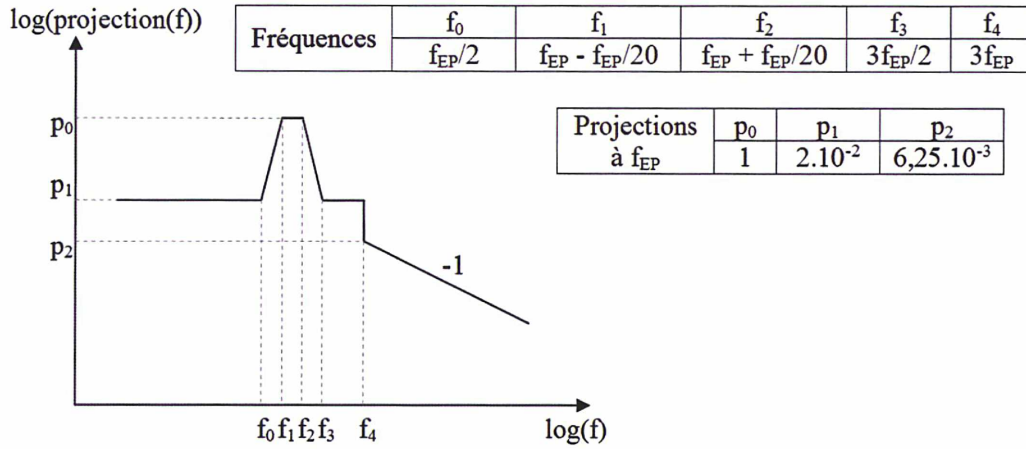
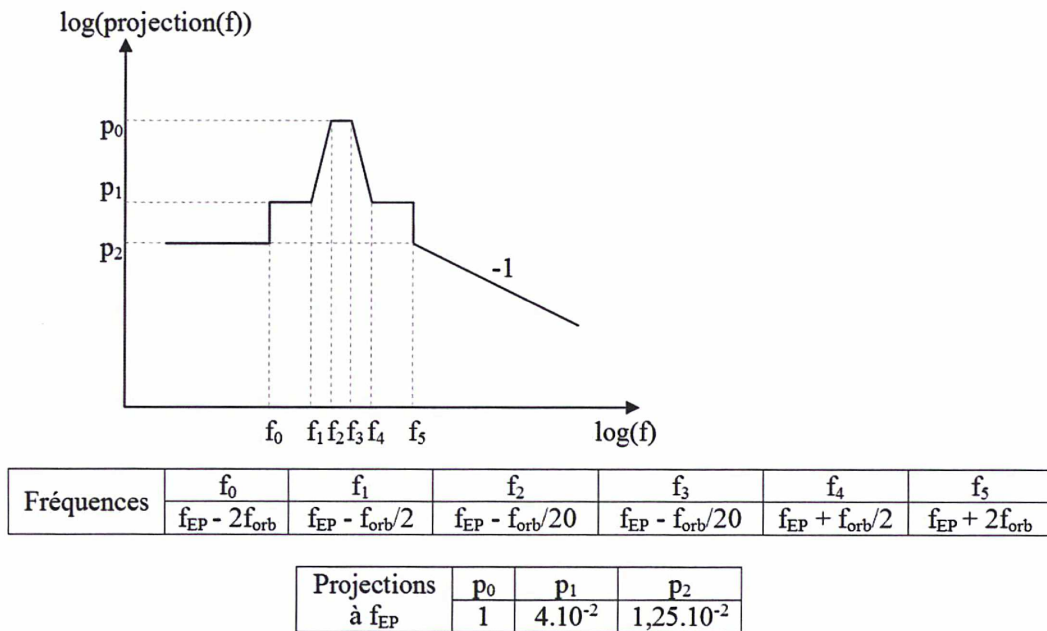


FIGURE 4.4 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice et gabarit de spécification. (a) : satellite en pointage inertiel, session de 120 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

Des gabarits de spécification similaires ont été réalisés pour les phases d'étalonnage. Le signal du Principe d'Équivalence est alors remplacé par le signal d'étalonnage, c'est-à-dire un signal sinusoïdal à la fréquence d'étalonnage. Ces gabarits permettent d'évaluer le taux de projection des perturbations à toutes les fréquences sur la fréquence d'étalonnage. On peut ainsi s'assurer que ces projections ne dégradent pas la précision des résultats de l'étalonnage en orbite de l'instrument au delà de la limite acceptable pour la mission. Les résultats sont présentés en annexe B



(a) Session inertielle



(b) Session spinnée

FIGURE 4.5 – Gabarit de projection pour la spécification de l'amplitude des perturbations : projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice. (a) : satellite en pointage inertielle, session de 120 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

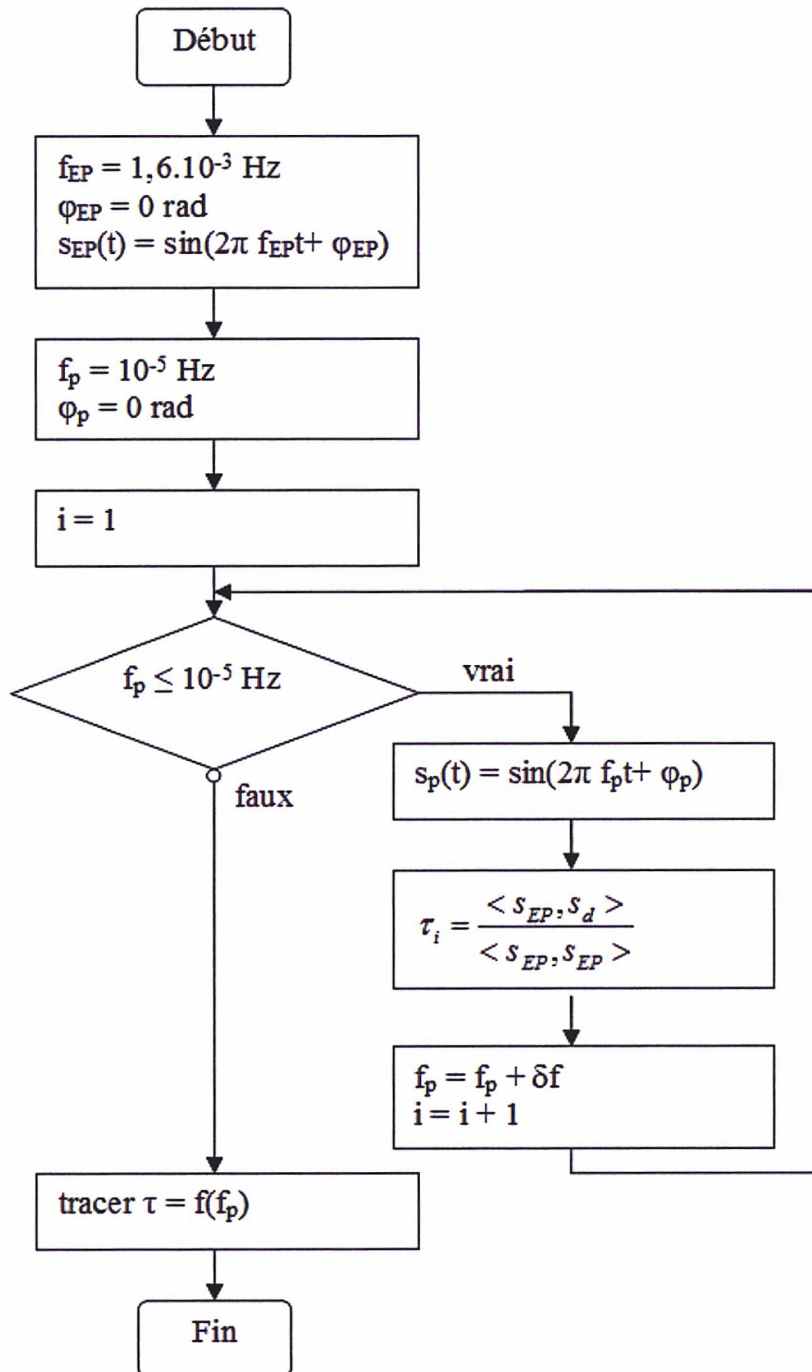


FIGURE 4.6 – Organigramme de programmation de l’algorithme de simulation numérique pour le calcul de la courbe du taux de projection d’une perturbation à la fréquence du test du Principe d’Équivalence en fonction de la fréquence du signal perturbateur.

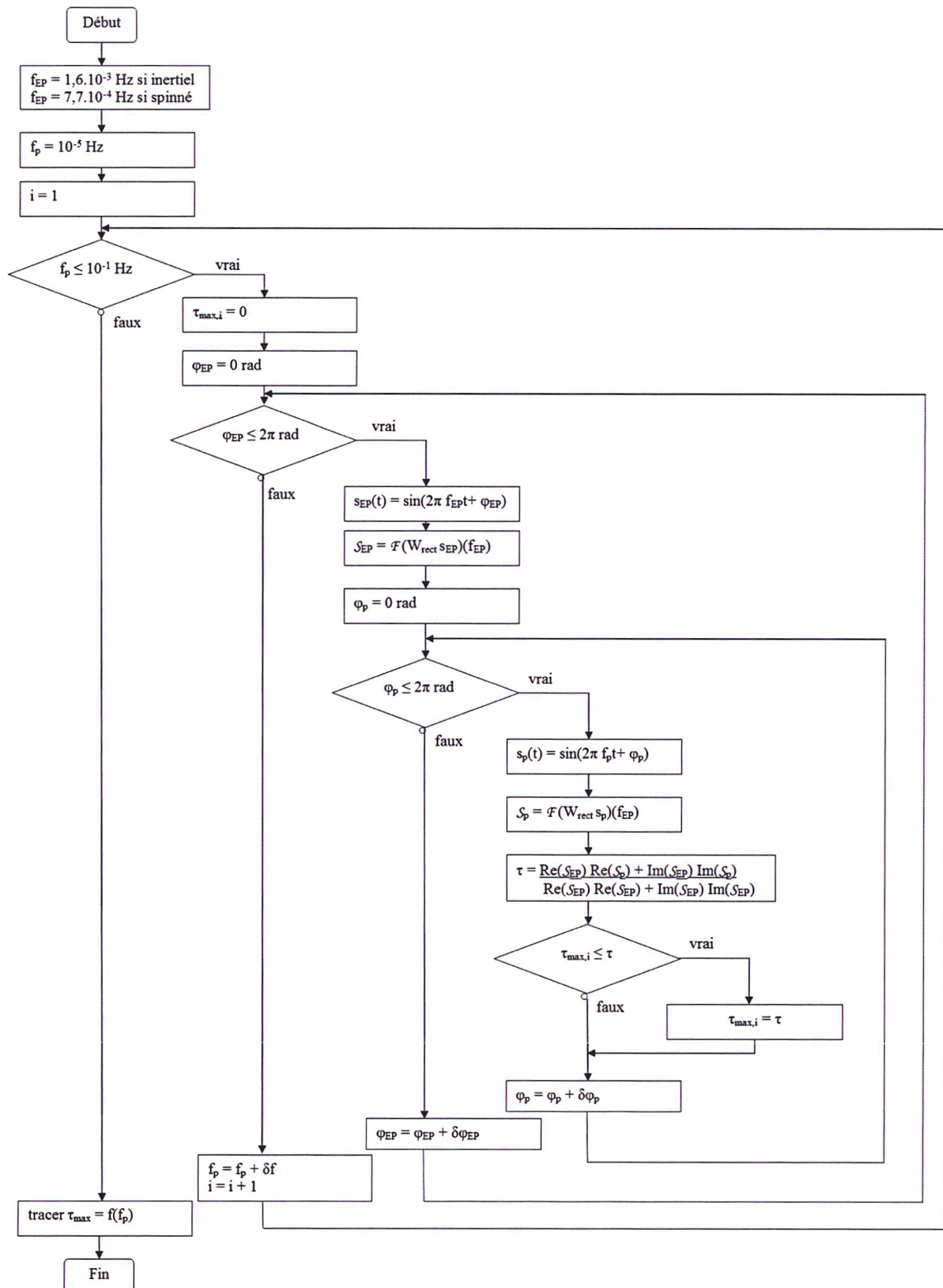


FIGURE 4.7 – Organigramme de programmation de l'algorithme de simulation numérique pour le calcul de la courbe du taux de projection d'une perturbation à la fréquence du test du Principe d'Équivalence en fonction de la fréquence du signal perturbateur : le taux de projection maximisé par rapport aux phases des deux signaux est calculé.

4.1.2 Minimisation de la projection de fréquences singulières : choix de la durée d'observation et de la fréquence de spin

4.1.2.1 Spécifications aux fréquences singulières

Les perturbations les plus importantes (effets thermiques, variations de pointage,...) se situent à des fréquences qui sont des multiples de la fréquence orbitale f_{orb} dans le cas du mode inertiel et des combinaisons linéaires de la fréquence orbitale f_{orb} et de la fréquence de spin f_{spin} dans le cas du mode spinné. Ces fréquences particulières seront par la suite nommées "fréquences singulières", et s'écrivent donc :

$$f_{p,sing} = n_1 f_{orb} + n_2 f_{spin}, \text{ avec } n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \quad (4.33)$$

f_{spin} peut éventuellement être nulle, dans le cas des sessions où le satellite est en pointage inertiel.

Les amplitudes des perturbations agissant aux fréquences singulières sont si élevées qu'appliquer directement le gabarit global défini dans la partie 4.1.1.5 à partir de la courbe enveloppe du taux de projection conduirait à une contribution à la fréquence de violation du Principe d'Équivalence incompatible avec l'objectif de précision de l'expérience.

L'analyse des performances aux fréquences singulières a permis d'estimer l'amplitude des perturbations correspondantes. A partir de ces amplitudes, des spécifications sur le taux de projection à ces fréquences singulières garantissant l'objectif de précision de l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence ont été définies. Ces spécifications sont plus restrictives que le gabarit global. Elles sont présentées dans le tableau 4.1 dans le cas des sessions où le satellite est en pointage inertiel et dans le tableau 4.2 dans le cas des sessions où le satellite est en rotation. Afin de faciliter leur lecture, elles sont données sous la forme de limites minimales acceptables pour les taux de réjection des fréquences perturbatrices à f_{EP} . La réjection se définit comme l'inverse de la projection :

$$R = \frac{1}{\tau} \quad (4.34)$$

4.1.2.2 Optimisation des taux de réjection dans le cas idéal

Le taux de réjection de ces fréquences singulières à f_{EP} peut être considérablement amélioré de manière à assurer sa compatibilité avec ces spécifications si l'on fait en sorte que les fréquences singulières coïncident avec une fréquence discrète de Fourier. En effet, l'équation 4.28 montre que le taux de projection s'annule quelles que soient les phases des signaux à condition que :

$$\begin{aligned} \omega_{EP} = \frac{2k\pi}{T}, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = \frac{k}{T}, k \in \mathbb{Z} \\ \omega_{p,sing} = \frac{2k\pi}{T}, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow f_{p,sing} = n_1 f_{orb} + n_2 f_{spin} = \frac{k}{T}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ces conditions sont vérifiées pour toutes les fréquences singulières si la durée d'analyse T et la fréquence de rotation éventuelle du satellite f_{spin} sont choisies de manière à avoir :

$$T = k_1 T_{orb} \text{ et } T = k_2 T_{spin}, \text{ avec } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \quad (4.36)$$

avec $T_{orb} = \frac{1}{f_{orb}}$ et $T_{spin} = \frac{1}{f_{spin}}$.

Pour les sessions où le satellite est en mode inertiel, il a été choisi $k_1 = 120$. Cela permet de réduire le bruit stochastique de l'instrument à un niveau acceptable en l'intégrant sur les 120 orbites de durée de la session. Pour les sessions en mode spinné, il est possible de jouer sur deux paramètres : la fréquence de spin et la durée de la mesure. Celle-ci peut-être plus courte qu'en mode inertiel si la fréquence de spin est choisie de manière à ce que la fréquence du Principe d'Équivalence soit proche du minimum du bruit instrumental. Cela correspond à choisir k_2 autour de 70 et permet de réduire la durée de la session de mesure à seulement 20 orbites. Le choix actuel s'est porté sur $k_1 = 20$ et $k_2 = 73$.

4.1.2.3 Limitations pratiques

Cependant, il existe de légères incertitudes sur les fréquences des signaux mis en jeu, et le cas idéal dans lequel les taux de projection aux valeurs singulières sont nuls ne peut de ce fait pas être réalisé exactement. Les causes en sont multiples :

- l'incertitude sur la détermination de l'orbite conduit à une erreur sur la fréquence orbitale au maximum égale à $2 \cdot 10^{-8}$ rad/s ;
- le pointage inertiel est réalisé avec une précision de 10^{-8} rad/s ;
- la fréquence de spin est contrôlée avec une précision de $3 \cdot 10^{-8}$ rad/s et calculée à partir de la fréquence orbitale, elle-même imparfaitement estimée ;
- la durée T de la fenêtre de traitement ne peut varier que par pas de 0,25 s, correspondant à la fréquence d'échantillonnage de la mesure à 4 Hz.

4.1.2.3.a Protocole de choix de la durée d'observation et de la fréquence de spin

Dans un premier temps, la fréquence orbitale f_{orb} , qui ne peut pas être contrôlée, est estimée. Une incertitude Δf_{orb} apparaît à cause des erreurs de connaissance de la position du satellite et des erreurs liées à la méthode d'estimation de f_{orb} . La fréquence orbitale estimée est :

$$\hat{f}_{orb} = f_{orb} + \Delta f_{orb} \quad (4.37)$$

La durée de la mesure T est ensuite définie à partir de la fréquence orbitale estimée :

$$T = \frac{k_1}{\hat{f}_{orb}} \quad (4.38)$$

où k_1 vaut 120 pour les sessions en mode inertiel et 20 pour les sessions en mode spinné. Du fait de l'échantillonnage à 4 Hz, la durée T ne peut en pratique varier que par pas de 0,25 s. Cela induit une erreur de réalisation ΔT sur la durée de la fenêtre pouvant atteindre 0,125 s. L'erreur sur $f_T = \frac{1}{T}$ est

$$\Delta f_T = \frac{\Delta T}{T^2} \quad (4.39)$$

Δf_T est de l'ordre de 10^{-11} Hz pour les sessions en mode spinné et 10^{-13} Hz pour les sessions en mode inertiel. Cette erreur est très petite face aux trois autres sources d'incertitude (de l'ordre de 10^{-9} Hz) et sera donc négligée par la suite.

La fréquence de spin à commander au satellite est alors déterminée :

$$f_{spin} = \frac{k_2}{T} = \frac{k_2}{k_1} \hat{f}_{orb} \quad (4.40)$$

Pour les sessions utilisant le mode spinné, k_2 vaut 73. Pour les sessions en mode inertiel, k_2 est évidemment nul. Cependant, f_{spin} est réalisée avec une certaine erreur - même dans le cas où elle est choisie nulle, le pointage inertiel étant imparfait - et la fréquence réelle de rotation du satellite sur lui-même n'est pas exactement égale à la fréquence commandée :

$$f_{spin} = \hat{f}_{spin} + \Delta f_{spin} \quad (4.41)$$

L'effet de ces incertitudes est illustré par la figure 4.8. Les perturbations réelles sont à des fréquences de la forme $n_1 f_{orb} + n_2 f_{spin}$, avec $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, alors que les taux de projection ont été optimisés pour des signaux aux fréquences estimées $n_1 \hat{f}_{orb} + n_2 \hat{f}_{spin}$, avec $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

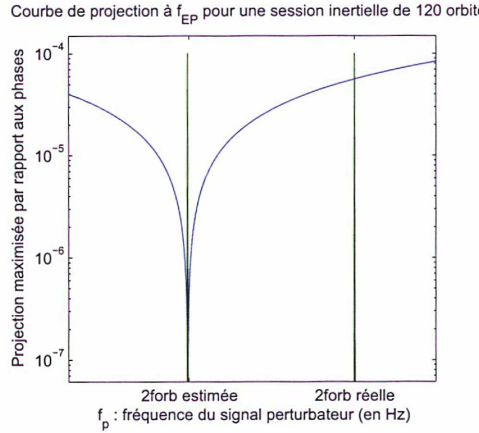


FIGURE 4.8 – Zoom autour de $2f_{orb}$ de la courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice. La durée de la mesure T est optimisée pour correspondre à un nombre entier d'orbites en utilisant la fréquence orbitale estimée. Cependant, la perturbation est à deux fois la fréquence orbitale réelle, et ne correspond de ce fait pas au taux de projection optimisé.

4.1.2.3.b Calcul du taux de réjection pire-cas pour comparaison avec les spécifications

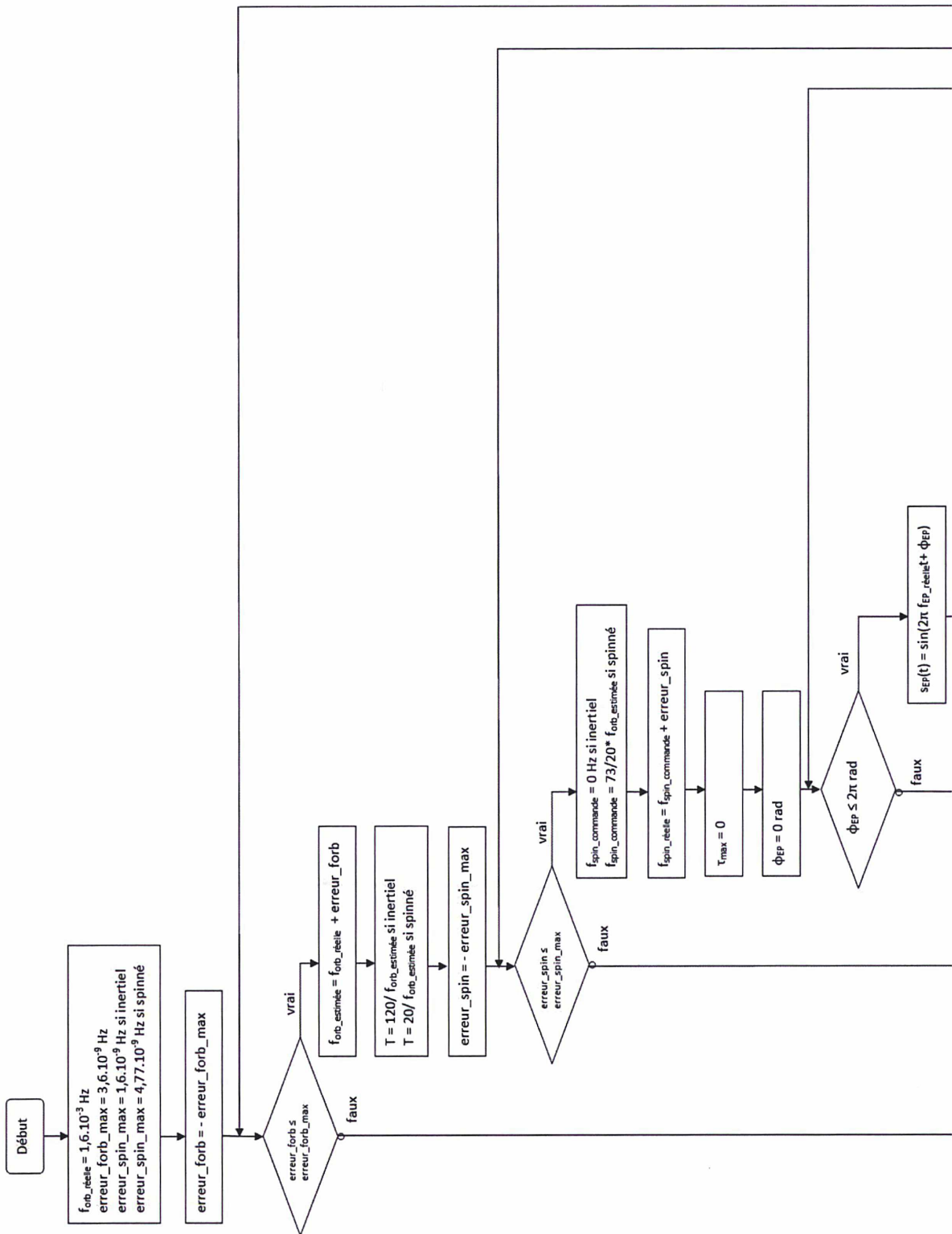
Nous nous intéressons donc à la projection de telles perturbations sur l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence de fréquence f_{EP} réelle, à la fréquence d'extraction \hat{f}_{EP} estimée. La fréquence d'extraction est la raie sélectionnée pour réaliser le produit scalaire 4.23. En réalité, les méthodes de traitement des données prévues pour extraire le signal de violation du Principe d'Équivalence ne requièrent pas l'utilisation explicite de la fréquence \hat{f}_{EP} . Celle-ci est implicitement contenue dans le signal de dérivée partielle, qui correspond à l'accélération de gravité exprimée en repère instrument. Mais cette dernière n'oscille pas forcément à la fréquence f_{EP} réelle. En effet, l'estimation de l'accélération gravité est obtenue en chaque point de l'orbite à partir d'un modèle qui souffre, comme l'estimation de \hat{f}_{EP} , d'une erreur due à l'incertitude sur la position et l'orientation du satellite. Cependant, contrairement à l'estimation explicite de \hat{f}_{EP} , cette méthode d'estimation n'est pas soumise à l'erreur de calcul liée aux méthodes d'estimation de la fréquence orbitale. Ainsi, utiliser la gravité calculée dans le repère instrument revient à extraire notre signal à une fréquence f_{EP} intermédiaire qui n'est pas exactement la fréquence réelle, mais qui contient moins d'erreur que la fréquence estimée. Néanmoins, les simulations numériques montrent que la différence obtenue avec les taux de

réjection calculés en utilisant comme fréquence d'extraction f_{EP} réelle et $f_{EP}^{\hat{}}$ estimée est faible (inférieure à 10%), aussi les calculs seront-ils fait seulement à $f_{EP}^{\hat{}}$.

Pour évaluer numériquement le taux de réjection d'une perturbation à une fréquence singulière sur le signal de violation du Principe d'Équivalence, l'algorithme décrit par la figure 4.9 est utilisé. Les incertitudes sur les fréquences impliquées varient sur l'intervalle $[-\Delta_{max}f; +\Delta_{max}f]$, et le pire cas des combinaisons de ces différentes erreurs est retenu. Les résultats de réjection obtenus sont présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2. On constate qu'ils sont largement compatibles avec les spécifications à toutes les fréquences singulières.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection à $f_{EP}^{\hat{}}$
0	100000	1487192
f_{orb}	1	1
$2f_{orb}$	2000	17219
$3f_{orb}$	2000	20395
$4f_{orb}$	2000	21507
$5f_{orb}$	2000	22024
$6f_{orb}$	2000	22305
$7f_{orb}$	2000	22477

TABLE 4.1 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) pire-cas aux fréquences singulières pour une session inertielle.



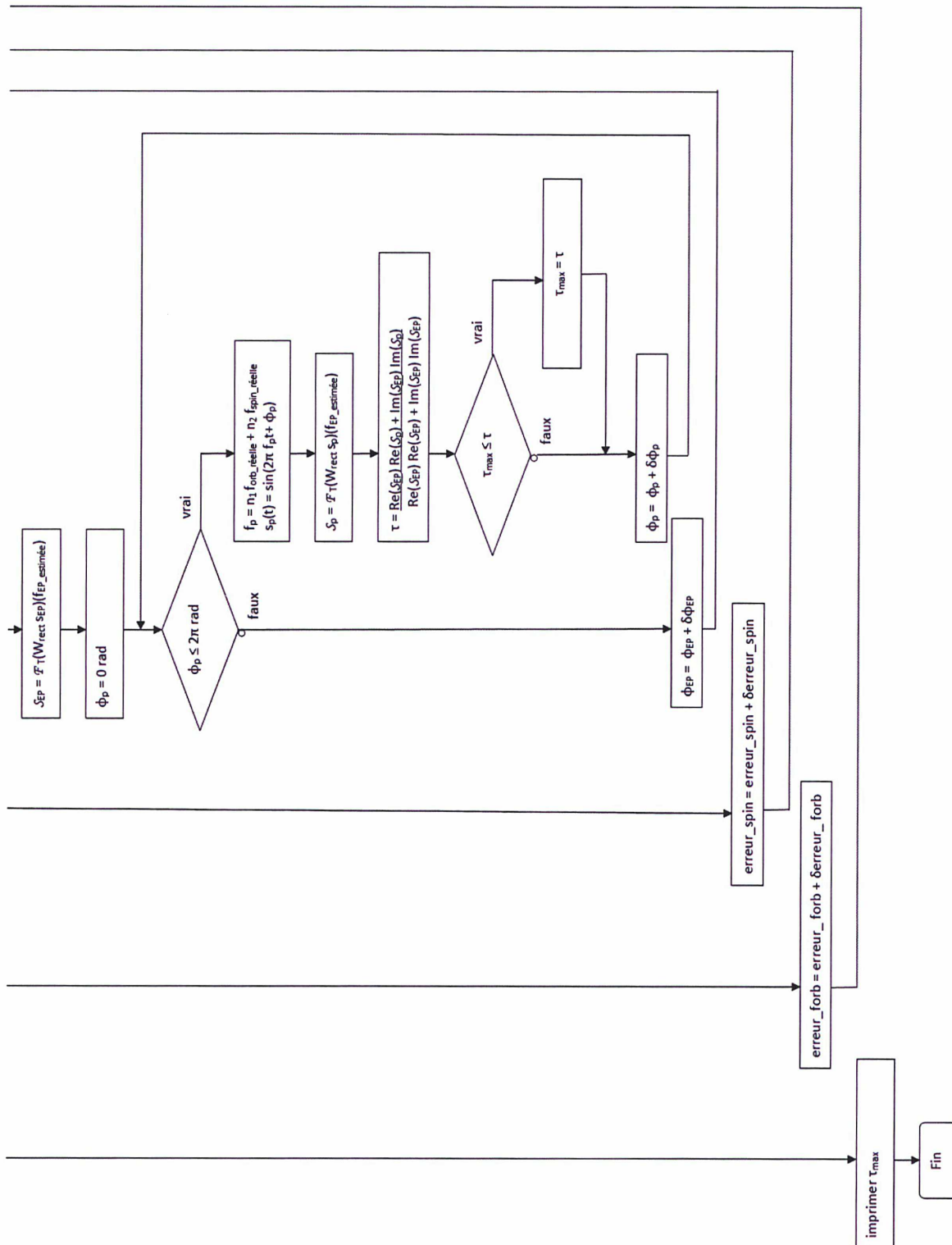


FIGURE 4.9 – Organigramme de programmation de l’algorithme de simulation numérique pour le calcul du taux de réjection pire-cas d’une fréquence singulière sur la fréquence du Principe d’Équivalence.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection à f_{EP}^*
0	20000	246981
$f_{spin} - 3f_{orb}$	2000	24291
f_{orb}	10000	102194
$f_{spin} - 2f_{orb}$	3000	28169
$2f_{orb}$	4000	43664
$f_{spin} - f_{orb}$	3000	31119
$3f_{orb}$	2000	20850
f_{spin}	3000	31041
$2f_{spin} - 3f_{orb}$	300	2747
$f_{spin} + f_{orb}$	1	1
$2f_{spin} - 2f_{orb}$	600	5902
$f_{spin} + 2f_{orb}$	1000	12600
$2f_{spin} - f_{orb}$	1000	16868
$f_{spin} + 3f_{orb}$	2000	18037
$2f_{spin}$	3000	32723
$f_{spin} + 4f_{orb}$	2000	20781
$2f_{spin} + f_{orb}$	3000	35679
$3f_{spin} - 2f_{orb}$	2000	22866
$2f_{spin} + 2f_{orb}$	3000	34312
$3f_{spin} - f_{orb}$	3000	31436
$2f_{spin} + 3f_{orb}$	3000	33209
$3f_{spin}$	4000	42976
$2f_{spin} + 4f_{orb}$	3000	32302
$3f_{spin} + f_{orb}$	4000	46503
$2f_{spin} + 5f_{orb}$	3000	31542
$3f_{spin} + 2f_{orb}$	4000	43104
$4f_{spin} - f_{orb}$	4000	37295
$3f_{spin} + 3f_{orb}$	4000	40611
$4f_{spin}$	4000	46337
$3f_{spin} + 4f_{orb}$	4000	38697
$4f_{spin} + f_{orb}$	5000	51420
$3f_{spin} + 5f_{orb}$	4000	37175
$4f_{spin} + 2f_{orb}$	4000	47796
$3f_{spin} + 6f_{orb}$	3000	35933
$4f_{spin} + 3f_{orb}$	4000	45016
$5f_{spin}$	5000	47856
$4f_{spin} + 4f_{orb}$	4000	42812
$5f_{spin} + f_{orb}$	5000	54148
$4f_{spin} + 5f_{orb}$	4000	41020
$5f_{spin} + 2f_{orb}$	5000	50695
$4f_{spin} + 6f_{orb}$	4000	39533
$5f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	47944
$6f_{spin} + f_{orb}$	6000	55856
$5f_{spin} + 5f_{orb}$	4000	43831
$6f_{spin} + 2f_{orb}$	5000	52658
$5f_{spin} + 6f_{orb}$	4000	42251
$6f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	50034
$5f_{spin} + 7f_{orb}$	4000	40898
$7f_{spin} + 2f_{orb}$	5000	54072
$6f_{spin} + 6f_{orb}$	4000	44384
$7f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	51601
$8f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	52821
$7f_{spin} + 7f_{orb}$	4000	44719

TABLE 4.2 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) pire-cas aux fréquences singulières pour une session spinnée.

4.2 Étude de l'impact des pertes de mesure

La partie précédente a permis d'étudier l'impact des perturbations à toutes les fréquences sur la détermination du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. À cause de la durée finie de la mesure, une perturbation à une fréquence quelconque se projette à la fréquence f_{EP} . Un gabarit a été défini pour rendre compte du taux de projection des perturbations à toutes les fréquences. Ce gabarit est utilisé pour définir les spécifications sur l'amplitude maximale des perturbations acceptable à chaque fréquence, qui détermine les choix de conception du satellite (bouclier thermique et magnétique, performance du système de contrôle d'attitude et d'orbite, du capteur stellaire...). Par ailleurs, pour les perturbations les plus importantes et impossibles à réduire, des spécifications sur le taux de projection à f_{EP} plus restrictives que le gabarit global ont été définies. En optimisant le choix des fréquences mises en jeu pour réduire les taux de projection de ces fréquences singulières, nous sommes assurés de leur compatibilité avec les spécifications.

Cependant, les simulations numériques de la partie précédente sont basées sur l'hypothèse d'un échantillonnage régulier des signaux impliqués. En pratique, des pertes de mesure peuvent se produire. Parce qu'elles modifient l'échantillonnage, elles changent le résultat du produit scalaire entre le signal perturbateur et l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence, et donc le taux de projection. Il est donc nécessaire d'étudier l'impact de ces pertes de mesure sur les résultats obtenus dans la partie précédente, et de déterminer un protocole de traitement des données en présence d'un tel événement permettant d'éviter une éventuelle augmentation de la valeur des taux de projection à f_{EP} .

4.2.1 Origines et occurrences des pertes de mesure

Les pertes de mesure peuvent avoir plusieurs origines. La principale cause de données manquantes - qui provoque les pertes de mesure les plus longues - provient d'erreurs de télétransmission. La mesure peut aussi devenir inexploitable si l'instrument est saturé. La saturation peut être due à des craquements au niveau des réservoirs du carburant des propulseurs ou du revêtement thermique du satellite, ainsi qu'à l'impact de météorites ou micrométéorites. Dans le dernier cas, la probabilité d'un événement significatif est extrêmement faible ([12]) et ne sera donc pas étudiée.

4.2.1.1 Les pertes de télémessure : l'expérience de la mission Picard

Des erreurs peuvent se produire durant la télétransmission des données depuis le satellite vers la station sol et causer des pertes de données. Le satellite est en vue d'une station CNES au sol environ huit fois par jour. Durant le survol d'une station, qui dure huit minutes, approximativement six heures de données sont transmises. Il est possible qu'une partie de ce paquet de données soit altérée, si une erreur passagère se produit. La totalité du paquet de données peut aussi être perdue en cas de configuration de télétransmission erronée ou de panne. Ainsi, sur l'ensemble d'une session de mesure (33 heures pour les sessions en mode spinné et huit jours pour les sessions en mode inertiel), les pertes de données sont généralement groupées sur des plages de six heures.

Les spécifications de disponibilité des stations sol sont de 98,5%. Une estimation plus précise de la fréquence d'apparition de ces pertes de données peut être déduite de l'expérience de la mission spatiale PICARD qui étudie le Soleil. Le satellite MICROSCOPE suivra en

effet une orbite similaire à celle du satellite PICARD et utilisera le même réseau de stations. Le taux de récupération de la télémesure lors de cette mission s'est avéré meilleur que la spécification, avec 99,3% de données disponibles. La perte de segments de données de plus d'une minute se produit en moyenne tous les quatre jours. Pour la mission MICROSCOPE, le taux de disponibilité des données pourra encore être amélioré en introduisant des redondances dans le système. Les données sont en effet disponibles à bord du satellite pendant environ neuf heures. Le Centre de Commande Contrôle (CCC) pourra détecter pendant ce délai une éventuelle perte de données et ordonner que la télémesure soit rejouée lors du prochain survol d'une station de réception, quelques heures plus tard. L'objectif est de récupérer ainsi 90% des données perdues, pour assurer une disponibilité des données MICROSCOPE de 99,93%, ou un trou de plus d'une minute tous les 40 jours en moyenne.

4.2.1.2 Mesures inexploitablees dues à la saturation de l'instrument

Une saturation de l'instrument peut rendre la mesure inexploitable. Le réservoir de carburant ainsi que le revêtement thermique du satellite peuvent ainsi émettre des craquements qui masquent la mesure pendant un temps très court.

4.2.1.2.a Les craquements du réservoir

Le réservoir de carburant pour le système de propulsion du satellite est composé d'un revêtement métallique recouvert d'une résine composite dont la taille augmente avec la pression (la longueur augmente de 5 mm pour une variation de pression de 350 bars). Lors de la dépressurisation du réservoir, des craquements peuvent se produire.

Des tests ont été conduits au CNES pour évaluer la fréquence de ces craquements. L'interprétation de ces tests avec des hypothèses pire-cas conduit à prévoir 260 craquements par orbite. Chaque craquement invalide les mesures pendant environ 0,5 s. Puisque l'échantillonnage est de 4 Hz, un craquement masque donc deux points de mesure.

4.2.1.2.b Les craquements du revêtement du satellite

L'isolation multicouche (MLI) du satellite permet l'isolation thermique grâce à un revêtement composé d'une superposition de plusieurs couches de fines feuilles. Chaque face du satellite se trouve alternativement en regard de la Terre et du vide spatial, avec une période égale à la période du signal de violation du Principe d'Équivalence. Les changements de température causés par cette alternance font apparaître des craquements au niveau du MLI. Ces craquements peuvent causer de petites quantités de mouvement qui vont saturer les accéléromètres de l'instrument T-SAGE.

Là encore, des tests ont été conduits par le CNES pour évaluer la fréquence de ces craquements et leur impact sur la mesure scientifique, en chauffant une plaque de MLI et en mesurant les craquements lors du chauffage et du refroidissement grâce à quatre accéléromètres. Une plaque de revêtement produit environ six craquements au cours d'un cycle thermique, chaque craquement altérant deux à trois points de mesure. Comme quatre faces du satellite subissent l'alternance Terre/vide spatial, il se produit en tout 24 craquements par période T_{EP} , soit 24 craquements par orbite si le satellite est en pointage inertiel et 111 si le satellite est spinné.

4.2.2 Stratégie pour les trous de courte durée

La perte de points de mesure modifie le taux de projection d'une perturbation à une fréquence quelconque sur l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. Cette modification peut aussi bien aller dans le sens d'une augmentation que d'une diminution du taux de projection. Néanmoins, nous avons vu dans la partie 4.1.2 que pour des fréquences singulières présentant d'importantes perturbations, les taux de projection ont été optimisés. Ainsi, pour ces fréquences singulières pour lesquelles les taux de projection à f_{EP} sont déjà proches du minimum, les pertes de mesure auront tendance à augmenter ces taux. Les spécifications risquent alors de ne plus être respectées. La compatibilité des taux de projection aux fréquences singulières avec les spécifications représente donc le principal facteur limitant sur la durée des pertes de données acceptables.

4.2.2.1 Gestion d'un trou de courte durée

4.2.2.1.a Première méthode : remplacement des mesures manquantes par des valeurs nulles

La méthode la plus simple en présence de mesures manquantes ou inexploitable consiste à calculer la projection de la même manière qu'en l'absence de trou, en se restreignant simplement aux mesures disponibles. Cela revient à remplacer les données manquantes par des valeurs nulles.

Cette méthode équivaut à multiplier notre signal de mesure et notre modèle par une fenêtre rectangulaire masquée au niveau des trous de mesure. Dans le cas d'un unique trou rendant indisponibles les mesures N_d à $N_f - 1$, cette fenêtre s'écrit :

$$W_{1trou}(n\Delta t) = 1 \text{ si } n \in [0, \dots, N_d - 1] \cup [N_f, \dots, N - 1] \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (4.42)$$

Sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} \forall f' \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}(W_{1trou})(f') &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_{1trou}(n\Delta t) e^{-2i\pi f' n \Delta t} \\ &= \sum_{n=0}^{N_d-1} e^{-2i\pi f' n \Delta t} + \sum_{n=N_f}^{N-1} e^{-2i\pi f' n \Delta t} \\ &= e^{-\frac{i\pi f' (N_d-1)}{f_e} \frac{\sin(\frac{\pi f' N_d}{f_e})}{\sin(\frac{\pi f'}{f_e})}} + e^{-\frac{i\pi f' (N+N_f-1)}{f_e} \frac{\sin(\frac{\pi f' (N-N_f)}{f_e})}{\sin(\frac{\pi f'}{f_e})}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

La transformée de Fourier à f_{EP} d'un signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi f t + \varphi)$ multiplié par

une telle fenêtre est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(W_{1\text{trou}} \cdot s)(f_{\text{EP}}) &= \mathcal{F}(W_{1\text{trou}}) * \mathcal{F}(s)(f_{\text{EP}}) \\
&= \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N_1-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} N_1\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N_1-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} N_1\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e}\right)} \\
&\quad + \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N+N_2-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N - N_2)\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N+N_2-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N - N_2)\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e}\right)} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Plus généralement, considérons N_{trous} trous de mesure. Le trou k débute à la mesure $N_d^{(k)}$ et finit à la mesure $N_f^{(k)} - 1$, comme illustré sur la figure 4.10. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(W_{N_{\text{trous}}} \cdot s)(f_{\text{EP}}) &= \mathcal{F}(W_{N_{\text{trous}}}) * \mathcal{F}(s)(f_{\text{EP}}) \quad (4.45) \\
&= \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N_d^{(1)}-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} N_d^{(1)}\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N_d^{(1)}-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} N_d^{(1)}\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e}\right)} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{N_{\text{trous}}} \left[\frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N_d^{(k)}+N_f^{(k-1)}-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N_d^{(k)} - N_f^{(k-1)})\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e}\right)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N_d^{(k)}+N_f^{(k-1)}-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N_d^{(k)} - N_f^{(k-1)})\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e}\right)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N+N_f^{(N_{\text{trous}})}-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e} (N - N_f^{(N_{\text{trous}})})\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}-f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N+N_f^{(N_{\text{trous}})}-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e} (N - N_f^{(N_{\text{trous}})})\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}}+f}{f_e}\right)}
\end{aligned}$$

4.2.2.1.b Influence du moment de la perte de mesure

Nous étudions dans cette partie l'influence de l'emplacement de la perte de mesure sur les taux de projection à f_{EP} . Nous nous intéressons au cas d'une seule perte de mesure durant une

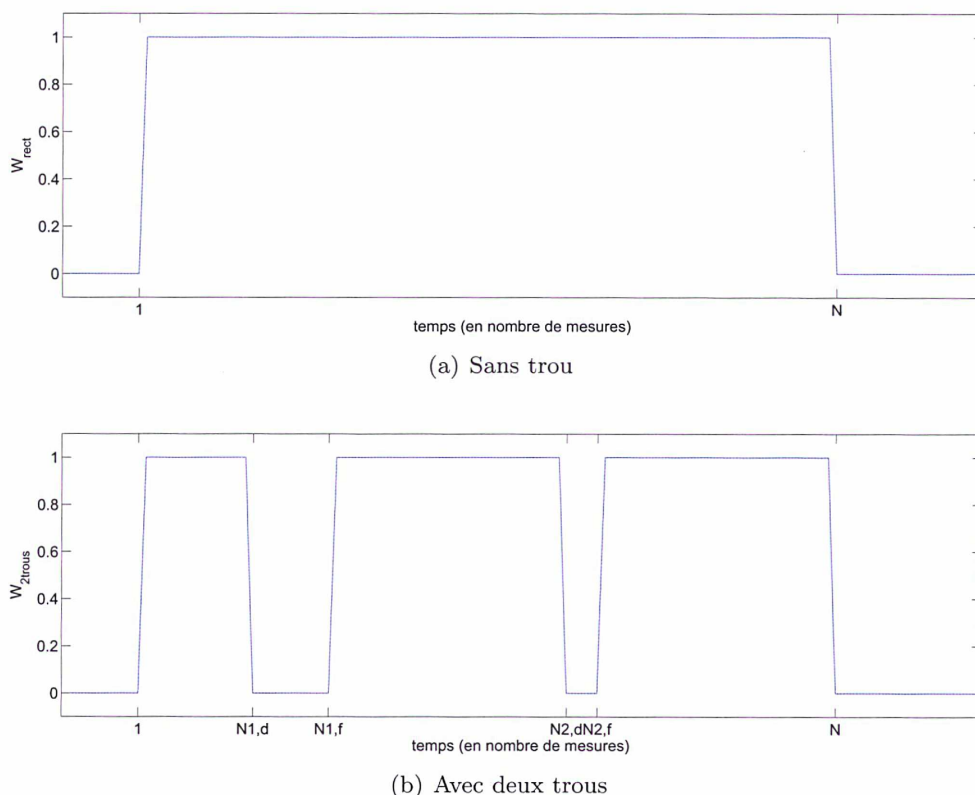


FIGURE 4.10 – Fenêtre utilisée (a) dans un cas sans perte de mesure, et (b) avec deux trous de mesure.

minute. La simulation numérique dont le résultat est présenté figure 4.11 permet de comparer l'impact du trou de mesure sur les gabarits de projection à f_{EP} en fonction du moment où il apparaît dans la mesure.

On constate que la position de la perte de mesure a peu d'effet sur la courbe enveloppe du taux de projection en fonction de la fréquence perturbatrice. Pour la suite de cette étude, nous choisissons donc de présenter les courbes de projection à f_{EP} en fonction de f_d avec une perte de mesure se produisant au milieu de la session de mesure.

Concernant les réjections aux fréquences singulières, on constate sur la figure 4.12 que le taux de réjection d'une perturbation à une telle fréquence oscille en fonction de l'instant d'apparition du trou au cours de la mesure. Afin d'obtenir les taux de réjection dans le pire des cas pour comparaison avec les spécifications, les résultats présentés correspondront aux taux de réjection minimisés par rapport à la date d'apparition du trou au cours de la session de mesure.

4.2.2.1.c Influence de la durée du trou

La figure 4.13 présente le gabarit de projection à f_{EP} en présence d'une perte de mesure de durée variable se produisant à la moitié de la session : une minute, cinq minutes puis dix minutes. La courbe de projection reste en dessous des gabarits de spécification. On constate

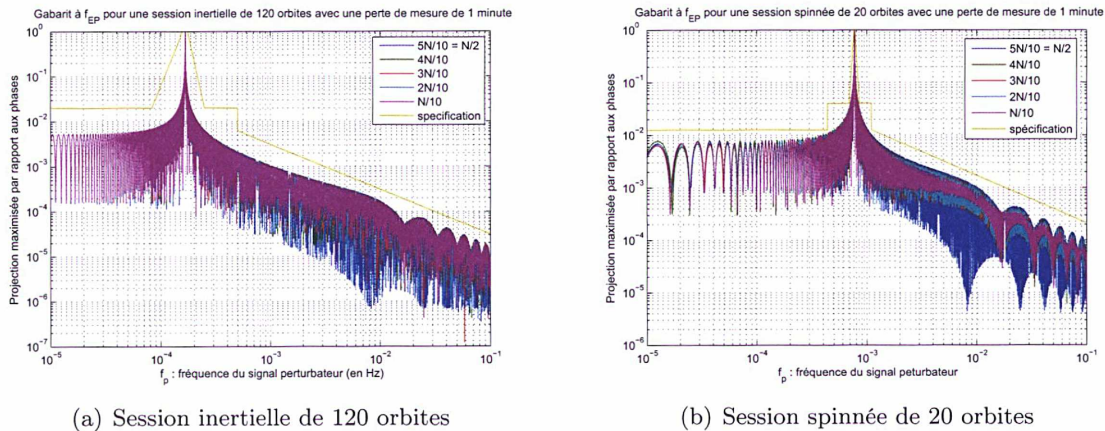


FIGURE 4.11 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice en présence d’une perte de mesure d’une minute se produisant à différents moments au cours de la première moitié de la session (l’effet est symétrique pour la seconde moitié).

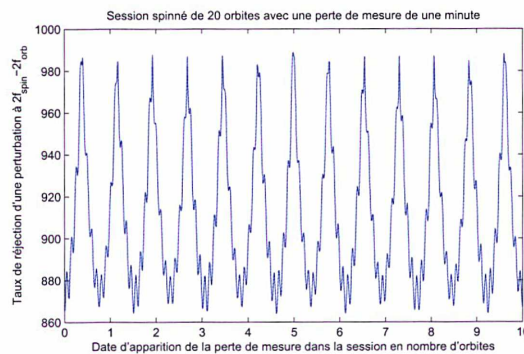
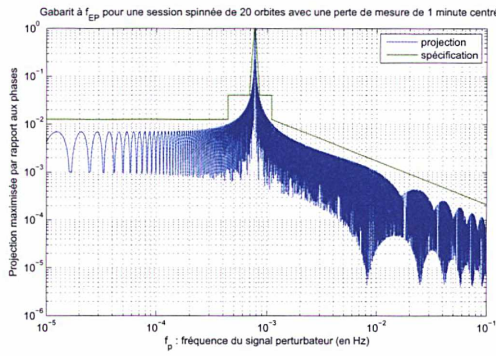


FIGURE 4.12 – Courbe du taux de réjection à f_{EP} d’une perturbation à la fréquence $2f_{spin} - 2f_{orb}$ pour une session spinnée de 20 orbites et en présence d’une perte de mesure d’une minute en fonction de la date d’apparition de la perte de mesure au cours de la première moitié de la session (symétrique pour la seconde moitié).

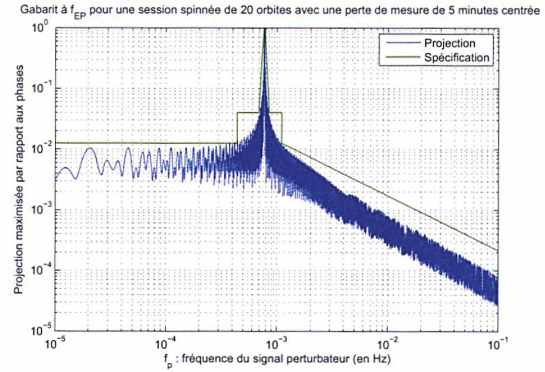
que la perte de dix minutes de données d’affilée est acceptable du point de vue des gabarits pour les sessions de 20 orbites en mode spinné.

Pour les sessions en mode inertielle, de plus longue durée, il est même possible d’accepter un trou d’une minute par tranche de 20 orbites, comme l’illustre la figure 4.13 (d).

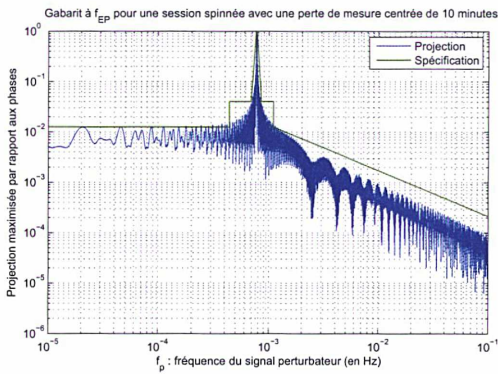
En revanche, du point de vue des réjections aux fréquences singulières, la troisième colonne du tableau 4.5 démontre que les spécifications ne sont pas respectées à la plupart des fréquences en présence d’un trou d’une minute se produisant au cours d’une session de 20 orbites. Puisqu’une perte de mesure de seulement une minute est hors tolérance, on recherche une méthode de traitement des données plus appropriée.



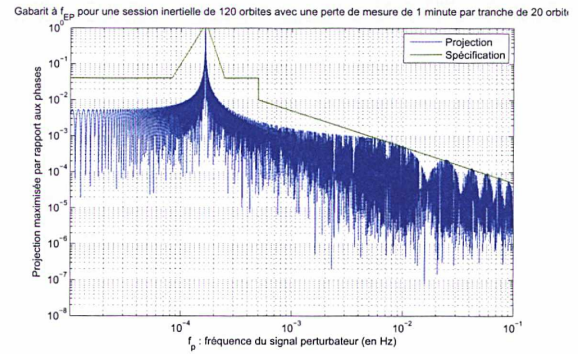
(a) Session spinnée - perte de une minute



(b) Session spinnée - perte de cinq minutes



(c) Session spinnée - perte de dix minutes



(d) Session inertielle - perte de une minute par tranche de 20 orbites

FIGURE 4.13 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice en présence d'une perte de mesure de durée variable.

4.2.2.1.d Seconde méthode : interpolation des données manquantes

Notre méthode de traitement des données consistait jusque-là à affecter une valeur nulle au signal aux dates affligées d'une perte de mesure. Pour augmenter la robustesse aux trous, une méthode possible consiste à reconstruire les mesures manquantes par interpolation à partir des mesures voisines. Dans la suite, nous utiliserons une simple moyenne : les mesures manquantes sont remplacées par une constante égale à la moyenne de la mesure avant et après la perte de données. Pour une perte de mesure rendant inexploitable les mesures N_1 à $N_2 - 1$, cela revient comme dans la partie précédente à fenêtrer le signal par une fenêtre telle que :

$$W_{1trou}(n\Delta t) = 1 \text{ si } n \in [0, \dots, N_1 - 1] \cup [N_2, \dots, N - 1] \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (4.46)$$

puis à ajouter un créneau au niveau du trou de mesure :

$$C_{1trou}(n\Delta t) = \alpha \text{ si } n \in [N_1, N_2 - 1] \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (4.47)$$

où α est la valeur moyenne du signal avant et après la perte de mesure.

La transformée de Fourier à f_{EP} d'un signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi ft + \varphi)$ après ce

traitement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(W_{1\text{trou}} \cdot s + C_{1\text{trou}})(f_{\text{EP}}) &= \mathcal{F}(W_{1\text{trou}}) * \mathcal{F}(s)(f_{\text{EP}}) \\
&= \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} (N_1 - 1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} N_1\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} (N_1 - 1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} N_1\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e}\right)} \\
&\quad + \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} (N + N_2 - 1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} (N - N_2)\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} (N + N_2 - 1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} (N - N_2)\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e}\right)} \\
&\quad + \alpha e^{-i\pi \frac{f}{f_e} (N_1 + N_2 - 1)} \frac{\sin\left(\pi \frac{f}{f_e} (N_2 - N_1)\right)}{\sin\left(\pi \frac{f}{f_e}\right)} \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Cette formule est à présent utilisée pour calculer les transformées de Fourier du signal de violation du Principe d'Équivalence et du signal perturbateur pour déterminer leur produit scalaire dans les simulations numériques. Le tableau 4.5 montre les taux de réjection aux fréquences singulières obtenus pour une session spinnée de 20 orbites subissant une perte de mesure centrée de durée variable : la durée maximale acceptable pour les trous de mesure est de une minute. La seconde méthode est donc plus efficace que la première, et conduit à des taux de réjection nettement plus élevés.

Cette méthode de reconstruction de la mesure par interpolation permet aussi de supporter un trou de une minute par tranche de 20 orbites pour les sessions inertielles, ce qui n'était pas le cas si l'on se contentait des mesures disponibles, comme le montre le tableau 4.3.

Notons que ces résultats ont été obtenus dans le cadre de simulations mettant en jeu des signaux non-bruités. En présence de bruit, l'interpolation basée sur un seul point avant et après la perte de mesure ne serait plus représentative du signal manquant. La solution consiste à exploiter la valeur moyenne du signal sur une durée d'une minute avant et après la perte de mesure au lieu de seulement un point.

En outre, il est possible d'améliorer la performance de cette méthode en utilisant un degré d'interpolation plus élevé ou une autre technique de lissage plus sophistiquée. L'algorithme *Inpainting* est actuellement en cours d'étude. D'abord utilisée dans le domaine du traitement de l'image et récemment adaptée avec succès à des données temporelles d'astérosismologie pour interpoler des mesures manquantes [39], cette méthode consiste à décrire les données grâce à un dictionnaire sur lequel les données complètes sont parcimonieuses (c'est-à-dire que la plupart des coefficients de la décomposition sont nuls) alors que les données incomplètes ne le sont pas.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection Méthode 1	Réjection Méthode 2
0	100000	1003	1487192
f_{orb}	1	1	1
$2f_{orb}$	2000	949	16843
$3f_{orb}$	2000	957	19249
$4f_{orb}$	2000	962	19349
$5f_{orb}$	2000	963	18691
$6f_{orb}$	2000	966	17707
$7f_{orb}$	2000	968	16580

TABLE 4.3 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) aux fréquences singulières pour une session inertielle de 120 orbites comportant un trou d'une minute par tranche de 20 orbites. Méthode 1 : les données manquantes sont remplacées par des zéros. Méthode 2 : les données manquantes sont remplacées par la moyenne du signal de part et d'autre de l'interruption.

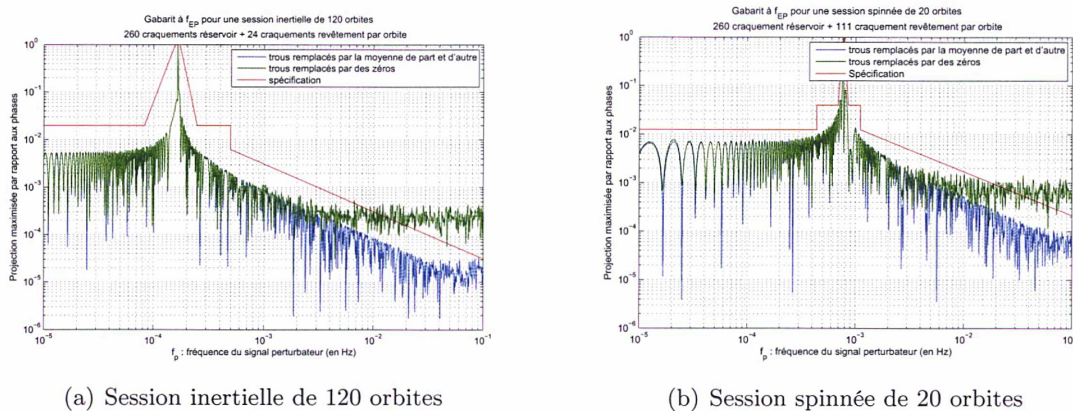


FIGURE 4.14 – Gabarit spécifié et courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence du signal perturbateur pour (a) une session en mode inertielle affectée de 284 trous de une demi-seconde répartis aléatoirement sur chaque orbite et (b) une session en mode spinné affectée de 371 trous de une demi-seconde répartis aléatoirement sur chaque orbite.

4.2.2.2 Gestion de nombreux trous de très courte durée

Les pertes de mesure dues aux craquements du réservoir ou du revêtement MLI du satellite, présentées dans la partie 4.2.1.2, sont traitées de la même manière que les trous de télémessure de courte durée. Néanmoins, elles requièrent des simulations différentes. En effet, elles se produisent beaucoup plus fréquemment que les trous de télémessure, mais leur durée est toujours extrêmement courte.

Les trous causés par les craquements dus au réservoir se produisent, selon les pires estimations, 260 fois par orbite. Les craquements du revêtement MLI se produisent quant à eux 24 fois par période T_{EP} , soit 24 fois par orbite pour les sessions où le satellite est en pointage inertielle et 111 fois par orbite pour les sessions avec pointage rotatif du satellite. Ces événements masquent à chaque fois deux points de mesure (soit une demi-seconde de mesure).

En cumulant ces deux causes d'indisponibilité, nous aurons donc au maximum 371 pertes de mesure d'une demi seconde en mode spinné et 284 en mode inertiel.

Les simulations numériques dont les résultats sont présentés dans cette partie ont été effectuées avec un tirage aléatoire de la répartition des 371 ou 284 trous sur chaque orbite. On constate d'une part sur la figure 4.14 pour les gabarits de projection, et d'autre part dans les tableaux 4.6 et 4.4 pour les réjections aux fréquences singulières, que les résultats obtenus avec la première méthode de traitement des données (remplacement des données perdues par des zéros) ne sont pas compatibles avec les spécifications. En revanche, en reconstruisant les données avec la moyenne de part et d'autre des trous de mesure, les résultats obtenus respectent les spécifications en mode spinné comme en mode inertiel.

Le fait que des mesures soient rendues indisponibles à cause des craquements dus au revêtement ou au réservoir du satellite est donc acceptable à condition d'utiliser une méthode d'interpolation des données manquantes à partir des données voisines.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection Méthode 1	Réjection Méthode 2
0	100000	2685	1487192
f_{orb}	1	1	1
$2f_{orb}$	2000	3645	17211
$3f_{orb}$	2000	3002	20364
$4f_{orb}$	2000	5820	21490
$5f_{orb}$	2000	2394	22040
$6f_{orb}$	2000	5035	22336
$7f_{orb}$	2000	2771	22529

TABLE 4.4 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) aux fréquences singulières pour une session inertielle de 120 orbites avec 284 trous d'une demi-seconde répartis aléatoirement sur chaque orbite. Méthode 1 : les données manquantes sont remplacées par des zéros. Méthode 2 : les données manquantes sont remplacées par la moyenne du signal de part et d'autre de l'interruption.

4.2.2.3 Conclusion sur la tolérance aux trous de courte durée

Nous disposons à présent d'une méthode de traitement des données permettant de supporter la perte d'une minute de mesure consécutive par tranche de 20 orbites (une perte de mesure pour les sessions spinnées de 20 orbites, six pour les sessions inertielle de 120 orbites) tout en conservant le gabarit de projection en dessous du gabarit de spécification défini dans la partie 4.1.1.5 et les réjections aux fréquences singulières au dessus des spécifications présentées dans la partie 4.1.2.1. Cependant, comme nous l'avons vu dans la partie 4.2.1.1 présentant les pertes de télémessures, une perte de données d'une durée supérieure à une minute se produit tous les quarante jours environ. Les sessions où le satellite est en rotation sont de courte durée : 20 orbites seulement. La probabilité qu'une perte de mesure se produise durant une telle session est donc relativement faible : 3%. Le tableau suivant présente la probabilité d'apparition d'un trou d'une durée supérieure à une minute avec un mécanisme de rejeu de télémessure permettant de récupérer 90% des données perdues :

Activité	Probabilité d'apparition d'au moins un trou > 1 minute
Session spinnée (20 orbites)	3,0%
Session inertielle (120 orbites)	19%

En revanche, pour les sessions où le satellite est en pointage inertiel, qui sont beaucoup plus longues, cette probabilité est loin d'être négligeable, puisqu'elle atteint presque 20%. Cela signifie que 20% des sessions inertielles ne seraient pas exploitables avec une performance suffisante. Il est donc nécessaire de disposer pour ces sessions d'une autre méthode de traitement des données permettant de supporter des pertes de mesure d'une durée au-delà d'une minute.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection	Réjection	Réjection
		Méthode 1 Trou de 1 minute	Méthode 2 Trou de 1 minute	Méthode 2 Trou de 5 minutes
0	20000	1007	246979	246786
$f_{spin} - 3f_{orb}$	2000	1001	23727	6351
f_{orb}	10000	1005	88564	5308
$f_{spin} - 2f_{orb}$	3000	994	26326	3039
$2f_{orb}$	4000	998	38591	2649
$f_{spin} - f_{orb}$	3000	989	27682	2005
$3f_{orb}$	2000	978	19057	1743
f_{spin}	3000	980	26511	1504
$4f_{orb}$	700	897	6686	1201
f_{ep}	1	1	1	1
$2f_{spin} - 2f_{orb}$	600	866	5740	851
$f_{spin} + 2f_{orb}$	1000	936	11151	822
$2f_{spin} - f_{orb}$	1000	960	14747	693
$f_{spin} + 3f_{orb}$	2000	960	14346	631
$2f_{spin}$	3000	989	23001	547
$f_{ep} + 3f_{orb}$	2000	969	14931	500
$3f_{spin} - 3f_{orb}$	1000	957	12154	466
$2f_{ep} - f_{orb}$	3000	994	21681	442
$f_{ep} + 4f_{orb}$	2000	974	14512	410
$2f_{ep}$	3000	996	18986	369
$3f_{spin} - f_{orb}$	3000	991	15729	332
$2f_{ep} + f_{orb}$	3000	998	16703	317
$3f_{spin}$	4000	1003	16218	291
$2f_{ep} + 2f_{orb}$	4000	1000	14803	279
$3f_{spin} + f_{orb}$	4000	1008	14897	260
$2f_{ep} + 3f_{orb}$	3000	1003	13204	251
$3f_{ep} - f_{orb}$	4000	1010	13047	237
$4f_{spin} - f_{orb}$	4000	1014	12285	225
$3f_{ep}$	4000	1013	11564	220
$4f_{spin}$	4000	1024	11771	212
$3f_{ep} + f_{orb}$	4000	1017	10343	208
$4f_{ep} - 3f_{orb}$	5000	1031	10850	203
$3f_{ep} + 2f_{orb}$	4000	1021	9321	200
$4f_{ep} - 2f_{orb}$	4000	1035	9658	198
$3f_{ep} + 3f_{orb}$	3000	1025	8452	196
$4f_{ep} - f_{orb}$	4000	1039	8674	196
$4f_{ep}$	4000	1044	7848	197
$5f_{ep} - 4f_{orb}$	5000	1049	7450	200
$4f_{ep} + f_{orb}$	4000	1050	7146	208
$5f_{ep} - 3f_{orb}$	5000	1055	6788	208
$4f_{ep} + 2f_{orb}$	4000	1056	6541	212
$5f_{ep} - 2f_{orb}$	5000	1060	6220	221
$5f_{ep} - f_{orb}$	4000	1067	5727	241
$5f_{ep}$	4000	1074	5295	270
$6f_{ep} - 4f_{orb}$	5000	1089	5274	298
$5f_{ep} + f_{orb}$	4000	1081	4916	315
$5f_{ep} + 2f_{orb}$	4000	1089	4579	387

TABLE 4.5 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) aux fréquences singulières pour une session spinnée comportant un trou de durée variable. Méthode 1 : les données manquantes sont remplacées par des zéros. Méthode 2 : les données manquantes sont remplacées par la moyenne du signal de part et d'autre de l'interruption.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection Méthode 1	Réjection Méthode 2
0	20000	1995	246980
$f_{spin} - 3f_{orb}$	2000	1135	24287
f_{orb}	10000	1838	101628
$f_{spin} - 2f_{orb}$	3000	1780	28099
$2f_{orb}$	4000	2049	43444
$f_{spin} - f_{orb}$	3000	2227	30975
$3f_{orb}$	2000	3129	20823
f_{spin}	3000	1643	30875
$2f_{spin} - 3f_{orb}$	300	1077	2743
$f_{spin} + f_{orb}$	1	1	1
$2f_{spin} - 2f_{orb}$	600	1194	5909
$f_{spin} + 2f_{orb}$	1000	1329	12564
$2f_{spin} - f_{orb}$	1000	1264	16882
$f_{spin} + 3f_{orb}$	2000	1539	18058
$2f_{spin}$	3000	1062	32681
$f_{spin} + 4f_{orb}$	2000	1623	21044
$2f_{spin} + f_{orb}$	3000	1868	35247
$3f_{spin} - 2f_{orb}$	3000	1287	22370
$2f_{spin} + 2f_{orb}$	1000	1509	33930
$3f_{spin} - f_{orb}$	3000	1806	31313
$2f_{spin} + 3f_{orb}$	3000	1160	33380
$3f_{spin}$	4000	2348	43015
$2f_{spin} + 4f_{orb}$	3000	1728	31217
$3f_{spin} + f_{orb}$	4000	2640	46534
$2f_{spin} + 5f_{orb}$	3000	1153	31255
$3f_{spin} + 2f_{orb}$	4000	2907	44372
$4f_{spin} - f_{orb}$	4000	1494	39291
$3f_{spin} + 3f_{orb}$	4000	1852	41005
$4f_{spin}$	4000	7667	45720
$3f_{spin} + 4f_{orb}$	4000	1369	38090
$4f_{spin} + f_{orb}$	5000	1218	54017
$3f_{spin} + 5f_{orb}$	4000	1754	35293
$4f_{spin} + 2f_{orb}$	4000	1351	48551
$3f_{spin} + 6f_{orb}$	3000	1183	38374
$4f_{spin} + 3f_{orb}$	4000	1455	47076
$5f_{spin}$	5000	1747	47317
$4f_{spin} + 4f_{orb}$	4000	1597	43657
$5f_{spin} + f_{orb}$	5000	1495	57359
$4f_{spin} + 5f_{orb}$	4000	911	40093
$5f_{spin} + 2f_{orb}$	5000	1325	50718
$4f_{spin} + 6f_{orb}$	4000	1722	36907
$5f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	1946	43450
$6f_{spin} + f_{orb}$	6000	3033	59876
$5f_{spin} + 5f_{orb}$	4000	2114	44221
$6f_{spin} + 2f_{orb}$	5000	825	44951
$5f_{spin} + 6f_{orb}$	4000	1073	42444
$6f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	2430	49691
$5f_{spin} + 7f_{orb}$	4000	3162	37868
$7f_{spin} + 2f_{orb}$	5000	2425	58263
$6f_{spin} + 6f_{orb}$	4000	2329	45084
$7f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	1280	56293
$8f_{spin} + 3f_{orb}$	5000	1142	52160
$7f_{spin} + 7f_{orb}$	4000	3090	43081

TABLE 4.6 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) aux fréquences singulières pour une session spinnée de 20 orbites avec 371 trous d'une demi-seconde répartis aléatoirement sur chaque orbite. Méthode 1 : les données manquantes sont remplacées par des zéros. Méthode 2 : les données manquantes sont remplacées par la moyenne du signal de part et d'autre de l'interruption.

4.2.3 Stratégie pour les trous de longue durée

La méthode consistant à reconstruire les données perdues en interpolant à partir de la moyenne des données voisines permet de supporter des pertes de mesure de durée maximale d'une minute par tranche de vingt orbites. Comme nous l'avons vu dans la partie 4.2.2, cette limite de durée n'est pas tant imposée par le niveau des gabarits de projection, que par les valeurs des réjections aux fréquences singulières. Si l'on souhaite disposer d'une méthode de traitement des données qui supporte des pertes de mesure au-delà d'une minute, il est donc nécessaire que cette méthode permette de maintenir les réjections aux fréquences singulières proches de leur maximum malgré les mesures manquantes.

4.2.3.1 Description de la stratégie

Pour maximiser les taux de réjection aux fréquences singulières sur la fréquence de violation du Principe d'Équivalence, une technique a été développée dans la partie 4.1.2. Elle consiste à choisir la durée de la mesure ainsi que les fréquences ajustables de telle sorte que la durée de la mesure corresponde à la fois à un nombre entier de périodes du signal de violation du Principe d'Équivalence et à un nombre entier de périodes correspondant aux fréquences singulières. Ainsi, les fréquences de ces signaux correspondent à une raie discrète de Fourier. Les pertes de mesure modifiant l'échantillonnage, leur apparition nous éloigne du cas optimum. Cependant, il est possible de rétablir l'orthogonalité des signaux en utilisant la même stratégie, c'est-à-dire en adaptant la durée de la mesure aux fréquences des signaux dont on souhaite minimiser le taux de projection à f_{EP} .

Ainsi, la stratégie en présence d'une perte de mesure de longue durée consiste à traiter les portions de signal avant et après l'interruption comme des sous-sessions indépendantes, en s'assurant que la durée de chacune des portions soit adaptée aux fréquences singulières afin de maintenir les propriétés d'orthogonalité désirées entre l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence et les signaux perturbateurs les plus importants. Pour ce faire, il pourra être nécessaire d'étendre la durée du trou de mesure au-delà des seules données indisponibles.

Pour les sessions spinnées, il n'est pas possible d'appliquer cette méthode. En effet, pour maintenir l'orthogonalité entre le signal de violation du Principe d'Équivalence - à $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin}$ - et les perturbations principales - aux combinaisons linéaires de f_{orb} et f_{spin} -, la durée de la mesure doit correspondre à la fois à un nombre entier d'orbites et à un nombre entier de périodes de spin. Or, 20 orbites est le plus petit multiple commun entre ces deux périodes. Il est donc impossible de diviser une session spinnée de 20 orbites en des portions de mesure plus courtes qui maintiendraient la propriété d'orthogonalité requise. Cependant, la probabilité d'apparition d'une perte de mesure d'une durée supérieure à une minute n'est que de 3% sur 20 orbites, ce qui est considéré comme acceptable. D'autant plus que la perte d'une session spinnée est bien moins pénalisante que celle d'une session inertielle : les sessions spinnées étant de courte durée, elles pourront éventuellement être rejouées si elles s'avèrent inexploitable.

Dans le cas des sessions avec le satellite en pointage inertiel, il suffit que la durée de la mesure corresponde à un nombre entier d'orbites pour obtenir l'orthogonalité entre l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence - à $f_{EP} = f_{orb}$ - et les perturbations aux fréquences singulières - aux fréquences multiples de f_{orb} . Ainsi, en présence d'un trou de mesure d'une durée supérieure à une minute, le choix le plus simple consiste à éliminer l'orbite entière affectée par le trou. Les portions de données avant et après l'orbite éliminée correspondent

alors toutes deux à un nombre entier d'orbites, satisfaisant la propriété nécessaire pour obtenir des réjections aux fréquences singulières optimales.

D'après l'équation 4.3, dans le cas d'une session complète avec un vecteur d'observation S_{obs} et un modèle S_{EP} , l'estimée du paramètre de violation du Principe d'Équivalence par la méthode des moindres carrés est :

$$\hat{\delta} = \frac{\langle S_{EP}, S_{obs} \rangle}{\langle S_{EP}, S_{EP} \rangle} \quad (4.49)$$

En cas d'apparition d'un trou de longue durée, nous traiterons deux segments de mesure considérés comme des sous-sessions indépendantes, respectivement de durée T_1 et T_2 . Nous cumulons donc deux séries d'observation :

$$\begin{cases} S_{obs,1} = \delta S_{EP,1} \\ S_{obs,2} = \delta S_{EP,2} \end{cases} \quad (4.50)$$

Il suffit de poser $\begin{cases} S_{obs,t} = \begin{bmatrix} S_{obs,1} \\ S_{obs,2} \end{bmatrix} \\ S_{EP,t} = \begin{bmatrix} S_{EP,1} \\ S_{EP,2} \end{bmatrix} \end{cases}$ pour obtenir immédiatement :

$$\hat{\delta} = \frac{\langle S_{EP,t}, S_{obs,t} \rangle_T}{\langle S_{EP,t}, S_{EP,t} \rangle_T} = \frac{\langle S_{EP,1}, S_{obs,1} \rangle_{T_1} + \langle S_{EP,2}, S_{obs,2} \rangle_{T_2}}{\langle S_{EP,1}, S_{EP,1} \rangle_{T_1} + \langle S_{EP,2}, S_{EP,2} \rangle_{T_2}} \quad (4.51)$$

Un signal perturbateur S_p modifie cette estimation de :

$$\Delta\delta = \frac{\langle S_{EP,1}, S_{p,1} \rangle_{T_1} + \langle S_{EP,2}, S_{p,2} \rangle_{T_2}}{\langle S_{EP,1}, S_{EP,1} \rangle_{T_1} + \langle S_{EP,2}, S_{EP,2} \rangle_{T_2}} \quad (4.52)$$

Ainsi, en présence de $n - 1$ trous de mesure, nous cumulerons n portions de mesure indépendantes, toutes d'une durée T_k multiple de la période orbitale, et nous nous intéresserons au taux de projection normalisé calculé suivant la formule :

$$\tau = \frac{\sum_{k=1}^n \langle S_{EP,k}, S_{p,k} \rangle_{T_k}}{\sum_{k=1}^n \langle S_{EP,k}, S_{EP,k} \rangle_{T_k}} \quad (4.53)$$

4.2.3.2 Influence de la répartition temporelle des pertes de mesure

Considérons le cas particulier où les n sous-sessions ont la même durée T' . Chacune correspond à un nombre entier d'orbites donc $T' = k'T_{orb}$, $k' \in \mathbb{N}$. Puisqu'on a supprimé une orbite affectée par une perte de mesure entre chaque sous-session, les débuts des différents segments de mesure sont espacés d'une durée $T' + T_{orb} = (k' + 1)T_{orb}$. Le signal de violation du Principe d'Équivalence étant à la fréquence orbitale f_{orb} , multiple de $\frac{1}{(k'+1)T_{orb}}$, il aura la même phase au début de chaque segment de mesure. De même, pour toute perturbation à une fréquence telle que $f_p = \frac{m}{(k'+1)T_{orb}}$, $m \in \mathbb{N}$, la phase sera la même au début de chaque segment. En outre, puisque les segments sont de même durée, ces signaux perturbateurs particuliers de même que le signal de violation du Principe d'Équivalence seront exactement les mêmes sur chaque sous-session. Cela revient à dire que pour certaines fréquences perturbatrices, le fait de cumuler plusieurs sous-sessions n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à une unique sous-session. En effet, le taux de projection s'écrit dans ce cas :

$$\tau = \frac{\sum_{k=1}^n \langle S_{EP,k}, S_{p,k} \rangle_{T'}}{\sum_{k=1}^n \langle S_{EP,k}, S_{EP,k} \rangle_{T'}} = \frac{n \langle S_{EP,k}, S_{p,k} \rangle_{T'}}{n \langle S_{EP,k}, S_{EP,k} \rangle_{T'}} = \frac{\langle S_{EP,k}, S_{p,k} \rangle_{T'}}{\langle S_{EP,k}, S_{EP,k} \rangle_{T'}} \quad (4.54)$$

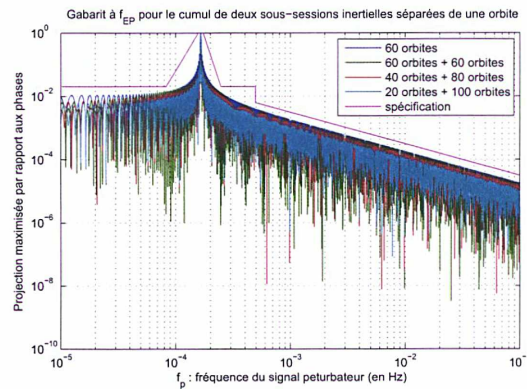


FIGURE 4.15 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice pour deux sous-sessions de durée totale 120 orbites cumulées. Le cas où les deux sous-sessions durent 60 orbites est le pire : le gabarit revient au niveau d’une seule session de 60 orbites, il est donc deux fois plus élevé que le gabarit obtenu avec une session complète de 120 orbites.

Ainsi pour ces fréquences perturbatrices, le taux de projection n’est pas diminué en cumulant les segments successifs. Il sera le même que pour un seul segment de mesure de durée $\frac{T}{n}$, soit n fois plus élevé que celui d’une session complète sans trou de durée T , puisque le taux de projection varie comme l’inverse de la durée de la session de mesure (voir partie 4.1.1.4). Le niveau du gabarit global sera donc lui aussi proche de cette valeur. Cela montre que, pour un nombre de trous donné, le cas le plus défavorable est celui où les segments sont tous de même durée. Cela a été confirmé par les simulations numériques, comme illustré sur la figure 4.15. Afin d’obtenir des résultats pire-cas, c’est cette disposition qui sera utilisée dans la suite de cette partie.

4.2.3.3 Influence du nombre de pertes de mesure

Des simulations ont été effectuées pour déterminer le nombre maximal de pertes de mesure de plus d’une minute acceptable au cours d’une session en pointage inertiel. La figure 4.16 montre qu’avec trois trous de mesure de longue durée, soit quatre segments de mesure de 30 orbites, la limite du gabarit de spécification est atteinte. Par ailleurs, cette stratégie de traitement des données se révèle efficace puisqu’on constate que les taux de réjection aux fréquences perturbatrices singulières, présentés dans le tableau 4.7, restent compatibles avec les spécifications.

D’après le tableau 4.8, la probabilité d’apparition de plus de trois trous de mesure d’une durée supérieure à une minute au cours d’une même session de 120 orbites est extrêmement faible, et tout à fait acceptable. Cependant, supporter trois trous de mesure de longue durée signifie réduire de trois orbites la durée de la mesure. Afin de maintenir le niveau du bruit stochastique à un niveau acceptable même dans ce cas, la durée des sessions en pointage inertiel est allongée à 123 orbites.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection
0	100000	364120
f_{orb}	1	1
$2f_{orb}$	2000	16818
$3f_{orb}$	2000	19834
$4f_{orb}$	2000	20882
$5f_{orb}$	2000	21367
$6f_{orb}$	2000	21630
$7f_{orb}$	2000	21788

TABLE 4.7 – Spécifications et valeurs des réjections aux fréquences singulières pour une session inertielle divisée en quatre segments de 30 orbites séparés par une orbite.

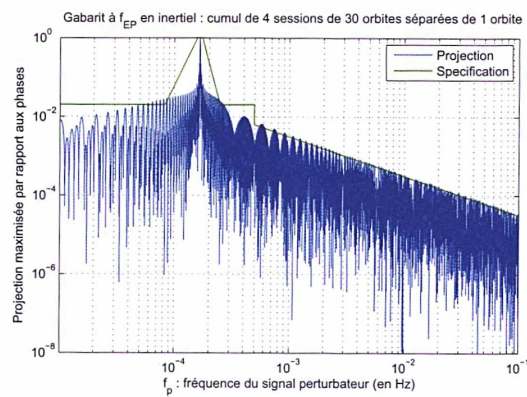


FIGURE 4.16 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice pour un cumul de quatre sous-sessions inertielle de 30 orbites séparées de une orbite.

Nombre de trou de durée > 1 minute	Probabilité pour une session inertielle
1	16%
2	2,5%
3	0,4%
4	0,07%

TABLE 4.8 – Probabilité d'apparition de plusieurs trous d'une durée supérieure à une minute avec un mécanisme de rejeu de télémessure permettant de récupérer 90% des données perdues durant une session inertielle de 120 orbites.

Bilan du chapitre 4

Les effets numériques apparaissant lors du traitement des données scientifiques de la mission MICROSCOPE dus à la projection à la fréquence du Principe d'Équivalence de perturbations à d'autres fréquences ont été étudiés. Des méthodes de traitement des données permettant de réduire ces effets ont été définies et un majorant de ces effets aux fréquences d'intérêt a été déterminé. À ce stade, des procédures ont été définies pour réduire et quantifier le résidu des perturbations instrumentales qui agissent à f_{EP} et des perturbations à d'autres fréquences qui se projettent à f_{EP} au moment du traitement des données.

Chapitre 5

Validation du protocole de correction et de traitement de la mesure

—Objectif du chapitre 5—

L'objectif de ce chapitre est de vérifier la précision de l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence en présence de perturbations numériques et instrumentales. Pour cela, les sessions d'étalonnage et la session de mesure de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence ont été simulées numériquement, puis nous avons appliqué à la mesure les méthodes de correction des effets des paramètres instrumentaux étalonnés suivant les procédures développées dans le chapitre 3 et les méthodes d'extraction des données scientifiques en présence des perturbations numériques et des pertes de mesure étudiées dans le chapitre 4.

Nous disposons à présent d'une part d'un protocole d'étalonnage en orbite permettant d'estimer précisément les paramètres instrumentaux (voir chapitre 3), et d'autre part des méthodes de traitement des données permettant de minimiser les perturbations numériques (voir chapitre 4). Nous souhaitons à présent tester l'association de ces méthodes pour vérifier qu'elle permet bien une estimation de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence compatible avec l'objectif de précision de la mission. Dans cette perspective, nous avons développé un simulateur numérique permettant de simuler l'ensemble du scénario de la mission : les sessions d'étalonnage en orbite des paramètres instrumentaux et les sessions de mesures scientifiques. Le traitement des données simulées est ensuite effectué en corrigeant la mesure à partir des estimations obtenues durant les phases d'étalonnage en vol. Puis le signal de violation du Principe d'Équivalence simulé à la fréquence f_{EP} est estimé. Cette estimation est bien sûr impactée par les perturbations aux autres fréquences introduites dans le simulateur. En outre, il est possible de modéliser des pertes de données qui modifient cet impact.

Après une présentation du simulateur de la mission, nous l'exploiterons pour tester les méthodes développées dans les parties précédentes. Dans un premier temps, nous étudierons l'influence des effets numériques sur l'estimation d'un paramètre en fonction de la durée de la session de mesure. En particulier, les durées de certaines sessions d'étalonnage seront adaptées afin de réduire ces effets. Les perturbations instrumentales seront ensuite introduites et les résultats obtenus pour l'étalonnage et pour le test du Principe d'Équivalence seront présentés.

Dans une dernière parties, nous introduirons l'effet des pertes de mesure dans ces deux types de sessions pour valider la performance des estimations dans des conditions les plus proches possibles des conditions réelles.

5.1 Présentation du simulateur de la mission

Le simulateur de la mission a été développé à partir d'un simulateur de l'Observatoire de la Côte d'Azur dédié aux sessions de test du Principe d'Équivalence, dans lequel le traitement des données associé aux procédures d'étalonnage a été implanté.

L'architecture globale du simulateur, codé en FORTRAN, est représentée figure 5.1. Contrairement au simulateur d'étalonnage, le simulateur de la mission tient compte de l'orbite du satellite. C'est pourquoi un fichier d'éphémérides est fourni en entrée. Celui-ci comprend la position et la vitesse du satellite en repère J2000, échantillonnées avec un pas de temps d'une minute. Ces éphémérides ont été obtenues grâce à un logiciel d'orbitographie et de calcul de paramètres nommé GINS (Géodésie par Intégrations Numériques Simultanées) ([7]). Pour chacun des points de cette orbite, l'accélération de gravité \vec{g} et le tenseur de gravité [T] sont calculés d'une part, et l'attitude du satellite d'autre part. Ces données sont ensuite transmises au bloc réalisant la simulation proprement dite. Celui-ci modélise le satellite MICROSCOPE et son instrument T-SAGE, et il simule les mesures telles qu'elles pourraient être délivrées par l'instrument. Ces mesures sont ensuite analysées en les confrontant à un modèle basé sur des données restituées afin d'estimer le paramètre, qu'il s'agisse du paramètre de violation du Principe d'Équivalence pour les sessions scientifiques ou d'un paramètre de l'instrument pour les sessions d'étalonnage.

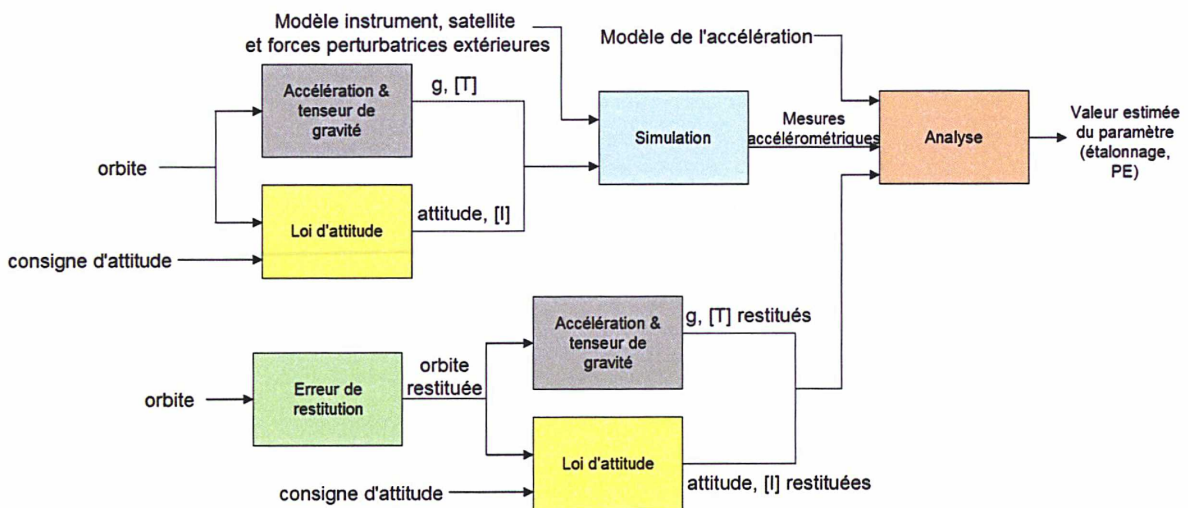


FIGURE 5.1 – Architecture du simulateur de la mission.

5.1.1 Calcul de l'accélération et du gradient de gravité

Le champ de gravité de la Terre \vec{g} et le tenseur de gravité [T] sont calculés dans le repère J2000 en chaque point de l'éphéméride du satellite. La gravité terrestre dérive d'un potentiel

V qui peut être développé en harmoniques sphériques et s'exprime alors sous la forme ([27]) :

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_e}{r} \right) P_{lm}(\sin \phi) (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) \quad (5.1)$$

avec :

- l le degré de l'harmonique sphérique ;
- m l'ordre de l'harmonique sphérique ;
- C_{lm}, S_{lm} les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques ;
- r, ϕ, λ les coordonnées sphériques du point en repère terrestre (distance au centre de la Terre, latitude, longitude) ;
- $\mu = \mathcal{G} \cdot M_T$, avec \mathcal{G} la constante de gravitation universelle et M_T la masse de la Terre ;
- R_e une longueur de référence (le rayon équatorial terrestre) ;
- P_{lm} le polynôme ou la fonction de Legendre.

À partir de ce potentiel, on peut calculer l'accélération de gravité de la Terre \vec{g} , qui correspond au gradient du potentiel :

$$g_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (5.2)$$

Le tenseur du gradient de gravité est une matrice (3×3) dont les composantes correspondent aux dérivées des composantes de \vec{g} par rapport aux coordonnées rectangulaires x_j :

$$T_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5.3)$$

Le simulateur de mission peut utiliser différents modèles du potentiel de gravité de la Terre, développés à des degrés et ordres plus ou moins élevés. Des tests ont montré qu'ils donnaient tous des résultats équivalents. Pour les simulations présentées ici, le modèle GRIM4 ([41]) est utilisé : le fichier fournit les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques C_{lm} et S_{lm} . Ce modèle est disponible jusqu'à l'ordre 60, mais peut-être tronqué à un ordre inférieur, car la précision requise pour les simulations est faible. Pour les simulations à venir nous avons pris en compte le potentiel jusqu'au degré 50.

Le fichier du modèle fournit le champ de gravité terrestre dans le repère terrestre, alors que les éphémérides du satellite sont dans le repère inertiel. Pour chaque instant t_i , les coordonnées du satellite correspondantes sur l'orbite sont converties du repère inertiel vers le repère terrestre. Il faut pour cela tenir compte des Paramètres d'Orientation de la Terre (EOP). L'orientation de la Terre correspond à la rotation entre la croûte terrestre et le repère céleste géocentrique, lié aux quasars ([6]). Cette orientation est composée de trois parties :

- le mouvement de l'axe des pôles, composé de la précession (changement graduel de l'orientation de l'axe des pôles qui décrit un cône) et de la nutation (oscillations rapides de l'axe des pôles), mais aussi de petits écarts au pôle céleste déduits de l'observation ;
- la rotation de la Terre sur elle-même, avec des variations de la durée du jour ;
- le mouvement du pôle par rapport à la croûte terrestre.

Si les mouvements de précession, nutation et rotation moyenne de la Terre sur elle-même sont modélisables avec une bonne précision à long terme, ce n'est pas le cas des autres effets, qui restent de faible influence. Pour tenir compte de ces effets non modélisables, on utilise les fichiers d'EOP fournis par l'IERS (International Earth Rotation and Reference System Service) qui résultent d'observations.

Une fois les coordonnées du satellite obtenues en repère terrestre, les trois composantes de l'accélération de gravité \vec{g} et les neuf composantes du tenseur gradient de gravité [T] sont calculées dans ce même repère au point courant de l'orbite grâce au modèle GRIM4. Le changement de repère inverse est ensuite effectué pour convertir l'accélération de gravité et le tenseur gradient de gravité dans le repère J2000.

5.1.2 Calcul de l'attitude

Nous décrivons dans cette partie le bloc du simulateur de la mission permettant de fabriquer une loi d'attitude à partir de l'orbite.

Trois commandes de pointage sont possibles : pointage inertiel, satellite spinné ou oscillation angulaire du satellite. La première configuration correspond au pointage inertiel. Les vecteurs \vec{X} et \vec{Z} du repère instrument (qui est tourné par rapport au repère satellite, voir annexe A pour la correspondance des axes) sont alors maintenus dans le plan orbital, tandis que le vecteur \vec{Y} est normal à ce plan. L'attitude étant définie par rapport au plan orbital, on comprend la nécessité d'avoir l'éphéméride du satellite en entrée de ce bloc de calcul. Le pointage du satellite peut aussi être spinné, auquel cas une vitesse angulaire constante dans le temps est appliquée autour de l'axe \vec{Y} . Enfin, pour les besoins de l'étalonnage, il est possible de faire osciller angulairement le satellite suivant un des trois axes, en précisant la fréquence, l'amplitude en radian et la phase des oscillations.

Le fichier d'éphémérides étant échantillonné avec un pas de temps pouvant différer de celui souhaité pour l'attitude, l'orbite est interpolée pour revenir à la fréquence d'échantillonnage voulue. À chaque date, l'attitude est ensuite calculée, c'est à dire les neuf composantes de la matrice de passage du repère inertiel J2000 au repère instrument. Pour cela, on passe par plusieurs repères intermédiaires en multipliant les matrices de passage. Le premier passage se fait du repère J2000 au repère nodal, qui tourne avec le plan orbital. On passe ensuite au repère satellite, en fonction de la commande d'attitude choisie. Enfin, on passe du repère satellite au repère instrument en utilisant la correspondance des axes donnée dans l'annexe A.

Il est possible de rajouter des défauts à l'attitude. Les erreurs de datation, les erreurs de pointage, les erreurs sur la vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont modélisées. Ces dernières sont liées aux performances du système de contrôle d'attitude du satellite.

Pour le calcul de la matrice de gradient d'inertie [In] et de la vitesse angulaire, l'équation cinématique de la matrice des cosinus directeurs est utilisée ([8]) :

$$[\dot{A}] = [\Omega] \cdot A \quad (5.4)$$

avec :

– [A] l'attitude, c'est à dire la matrice de passage du repère inertiel J2000 au repère instrument ;

– [Ω] la matrice des vitesses angulaires définie par : $[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{bmatrix}$.

On a alors :

$$[In] = [A] \cdot ([\dot{A}])^T \quad (5.5)$$

$$[\Omega] = -[A] \cdot ([\dot{A}])^T \quad (5.6)$$

En effet, $[A] \cdot ([\dot{A}])^T = [A] \cdot ([\Omega] \cdot [A])^T = [\Omega]^T = -[\Omega]$, car la matrice de passage est orthogonale et la matrice des vitesses angulaire est antisymétrique.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}] \cdot ([\ddot{\mathbf{A}}])^T &= [\mathbf{A}] \cdot ([\dot{\boldsymbol{\Omega}}] \cdot [\mathbf{A}] + [\boldsymbol{\Omega}] \cdot [\dot{\mathbf{A}}])^T \\
&= -[\dot{\boldsymbol{\Omega}}] - [\mathbf{A}] \cdot ([\boldsymbol{\Omega}] \cdot [\mathbf{A}])^T \cdot [\boldsymbol{\Omega}] \\
&= -[\dot{\boldsymbol{\Omega}}] + [\boldsymbol{\Omega}] \cdot [\boldsymbol{\Omega}] \\
&= [\mathbf{In}]
\end{aligned}$$

d'après l'équation 2.28 qui définit la matrice de gradient d'inertie.

Cette dernière contient une combinaison des vitesses et accélérations angulaires du satellite. Les accélérations angulaires, qui correspondent à la partie antisymétrique de la matrice du gradient d'inertie, en sont déduites :

$$[\dot{\boldsymbol{\Omega}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\Omega}_z & -\dot{\Omega}_y \\ -\dot{\Omega}_z & 0 & \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y & -\dot{\Omega}_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}([\mathbf{In}]^T - [\mathbf{In}]) \quad (5.7)$$

En sortie de ce bloc, nous disposons donc pour chaque pas de temps :

- des neuf composantes de la matrice d'attitude ;
- des neuf composantes de la matrice de gradient d'inertie ;
- des trois composantes de la vitesse angulaire ;
- des trois composantes de l'accélération angulaire.

5.1.3 Simulation de la mesure instrumentale

Une fois que nous disposons des données environnementales (accélération de gravité, tenseur gradient de gravité et matrice de gradient d'inertie) il est possible de reconstruire la mesure sur la base d'un modèle de l'instrument et du système de compensation de traînée du satellite. Contrairement au simulateur d'étalonnage, le simulateur de la mission modélise les deux accéléromètres différentiels électrostatiques qui forment l'instrument de MICROSCOPE : l'accéléromètre de référence, composé de deux masses identiques, et l'accéléromètre pour le test du Principe d'Équivalence, constitué de deux masses de compositions différentes. Ces deux accéléromètres sont représentés par des modèles totalement similaires, au paramètre de violation du Principe d'Équivalence près. En effet, pour l'accéléromètre dédié au test du Principe d'Équivalence, on modélise dans le simulateur une violation du Principe d'Équivalence d'amplitude δ_k . Le rapport entre la masse grave et la masse inerte de la masse test k ($k = 1$ pour la masse test interne et $k = 2$ pour la masse test externe) n'est pas tout à fait égal à 1 :

$$\frac{m_{gk}}{m_{Ik}} = 1 + \delta_k \quad (5.8)$$

où δ_k a été fixé à $1 \cdot 10^{-15}$ pour la masse interne et $2 \cdot 10^{-15}$ pour la masse externe. En mode différentiel, la violation Principe d'Équivalence simulée ici est donc d'amplitude 10^{-15} . Pour l'accéléromètre de référence, nous ne modélisons pas de violation du Principe d'Équivalence.

La mesure instrumentale est échantillonnée à 4 Hz. Cependant, il est possible d'inclure des erreurs de datation. Les mesures sont datées par l'horloge de bord du satellite qui n'est pas exacte. Un événement correspond à une date absolue qui diffère de la date de bord. Nous n'utiliserons pas cette option durant ce premier stade de simulation.

Pour chacune de ces dates, la valeur des données environnementales est calculée par interpolation : l'accélération de gravité \vec{g} , le tenseur gradient de gravité $[\mathbf{T}]$ et la matrice gradient

d'inertie [I]. La matrice d'attitude, calculée dans le bloc précédent, permet le passage de \vec{g} et [T] du repère inertiel au repère instrument.

Comme avec le simulateur d'étalonnage, nous calculons d'abord l'accélération électrostatique appliquée à la masse k pour la maintenir centrée, avant de modéliser la mesure de cette accélération. Ici aussi, il s'agit d'un modèle statique de l'accélération : la boucle de contrôle des masses d'épreuve n'est pas représentée. La dynamique de l'instrument n'est pas prise en compte dans ce cas car les fréquences des signaux qui nous intéressent (signal de violation du Principe d'Équivalence ou signal d'étalonnage) s'expriment à des fréquences très inférieures à la bande passante de l'accéléromètre.

Le simulateur de la mission, contrairement au simulateur d'étalonnage, utilise un modèle statique du système de compensation de traînée, comme c'est aussi le cas pour l'instrument. Si le système de compensation de traînée n'est pas pris en compte, les capteurs accélérométriques mesurent l'accélération non-gravitationnelle $\vec{\Gamma}_{NG,ext}$ appliquée au satellite par les perturbations surfaciques extérieures. Lorsque le système de compensation de traînée est pris en compte, il corrige ces accélérations non-gravitationnelles en asservissant l'accélération en mode commun $\vec{\Gamma}_{mes,c}$ des masses d'épreuve. Néanmoins, ce système n'est pas parfait, et l'instrument mesure un effet non-gravitationnel résiduel $\vec{\Gamma}_{res,DF}$, modélisé ici par un bruit et un biais, et des signaux harmoniques (à la fréquence du Principe d'Équivalence et ses multiples et à la fréquence d'étalonnage). Les valeurs de ce résidu correspondent aux spécifications sur les performances du système AOCS. L'accélération de poussée $\vec{\Gamma}_{th}$ exercée par le système de propulsion sur le satellite est calculée de sorte que : $\vec{\Gamma}_{mes,c} = \vec{C} + \vec{\Gamma}_{res,DF}$. La commande du système de compensation de traînée \vec{C} est normalement réglée de sorte à annuler les accélérations perturbatrices. Néanmoins, si l'on souhaite faire osciller le satellite pour l'étalonnage, cette commande sera réglée pour obtenir une accélération sinusoïdale le long de l'axe choisi : $\vec{C} = C_{eta} \sin(2\pi f_{cal}/lin t)$.

Nous disposons à ce stade des éléments pour calculer l'accélération électrostatique appliquée à la masse test k , selon l'équation 2.37.

$$\vec{\Gamma}_{App,k} = -\delta_k \cdot \vec{g} + ([T] - [In]) \cdot O_{DF} \vec{O}_k + 2\vec{\Omega} \wedge O_{DF} \dot{O}_k + O_{DF} \ddot{O}_k + \vec{\Gamma}_{NG,ext} + \vec{\Gamma}_{th} \quad (5.9)$$

avec :

- O_{DF} le point d'application de la compensation de traînée, qui peut-être différent du centre de masse du satellite ;
- O_k le centre de masse de la masse k ;
- $\vec{\Gamma}_{NG,ext}$ l'accélération non-gravitationnelle imposée par l'environnement ;
- $\vec{\Gamma}_{th}$ l'accélération de poussée du système de propulsion.

La vitesse et l'accélération de la masse test peuvent être commandées pour les besoins de l'étalonnage : la masse test oscille alors suivant l'axe choisi, avec l'amplitude et à la fréquence choisies.

Le modèle du capteur est ensuite appliqué pour simuler la mesure de cette accélération électrostatique. Pour chaque accéléromètre différentiel, on définit des paramètres propres au capteur interne ou externe qui conduisent à des paramètres en mode commun ou différentiel. Pour les paramètres en mode commun, on considère :

- les facteurs d'échelle communs $K_{1ci}, i \in x, y, z$;
- les défauts d'alignement de l'accéléromètre par rapport au repère satellite $\theta_{ci}, i \in x, y, z$ et leur stabilité au cours du temps ;
- les couplages communs entre axes $\eta_{ci}, i \in x, y, z$;

- les couplages communs de l'angulaire vers le linéaire.

Les paramètres en mode différentiel pouvant être pris en compte sont :

- les décentrages des masses d'épreuve $\Delta_i, i \in x, y, z$;
- les facteurs d'échelle différentiels $K_{1di}, i \in x, y, z$;
- les défauts d'alignement relatif des masses $\theta_{di}, i \in x, y, z$ et leur stabilité au cours du temps ;
- les couplages différentiels entre axes $\eta_{ci}, i \in x, y, z$;
- les couplages différentiels de l'angulaire vers le linéaire.

À partir de ces paramètres communs et différentiels sont calculés les paramètres relatifs au capteur interne et au capteur externe. On peut aussi ajouter pour chaque capteur k :

- le biais au continu (qui inclut le biais de lecture et le biais mécanique électrostatique) ;
- le bruit de mesure ;
- la stabilité des facteurs d'échelle ;
- la stabilité des couplages entre axes ;
- les termes quadratiques $K_{2kii}, i \in x, y, z$;
- la stabilité des termes quadratiques.

Tout ces termes sont pris en compte suivant l'équation de la mesure 2.39.

Une fois la mesure de l'accélération $\vec{\Gamma}_{mes,k}$ de la masse test k reconstruite, on peut ajouter des perturbations supplémentaires sous la forme de signaux harmoniques.

5.1.4 Analyse des données simulées

Le bloc suivant est dédié à l'analyse des données simulées. L'objectif est d'en extraire la valeur des paramètres p_{ke} que nous cherchons à estimer. Ces paramètres peuvent correspondre à des paramètres instrumentaux dans le cas d'une session d'étalonnage, ou au paramètre de test du Principe d'Équivalence dans le cas d'une session scientifique. Cette estimation se fait en confrontant les mesures observées à un modèle des accélérations, grâce à une méthode adaptée reposant sur la méthode des moindres carrés et qui sera présentée plus loin.

Dans notre cas, l'accélération exploitée sera presque toujours la mesure $\Gamma_{mes,dx}$ de l'accélération différentielle des masses d'épreuve selon l'axe des cylindres des masses d'épreuve \vec{X} (sauf pour l'estimation de K_{21xx} qui exploite $\Gamma_{mes,1x}$ et celle de K_{22xx} qui exploite $\Gamma_{mes,2x}$). Nous disposons d'un modèle de cette accélération, présenté dans la partie 2.3.2.2. Ce modèle est de la forme :

$$\Gamma_{mes,dx}(t) = f(p_k, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) p_k \quad (5.10)$$

avec :

- p_k l'un des n paramètres de l'instrument. Le paramètre ne sera pas forcément estimé. Il peut s'agir des décentrages entre les masses, des défauts d'alignement et de couplages linéaire-linéaire communs et différentiels, du facteur d'échelle commun, du facteur d'échelle différentiel, des facteurs d'échelle quadratiques, des couplages angulaire-linéaire, du biais de mesure ou du biais mécanique.
- $a_k(t) = \frac{\partial \Gamma_{mes,dx}(t)}{\partial p_k}(t)$ le signal de dérivée partielle de la mesure. Ces signaux sont mesurés directement (vitesses et accélérations angulaires du satellite, accélération en mode commun des masses d'épreuve) ou calculés à partir de modèle (accélération et gradient de gravité).

Le simulateur permet d'estimer plusieurs paramètres à la fois grâce à une même mesure, à condition que les mouvements du satellite ou des masses d'épreuve nécessaire à leur estimation soient identiques (dans le cas de la mission MICROSCOPE, il est ainsi possible d'estimer jusqu'à trois paramètres simultanément). Les effets des paramètres à estimer se réalisent à des fréquences distinctes, ce qui permet leur séparation (ou dans le cas des excentremets suivant \vec{X} et \vec{Z} , à la même fréquence mais en quadrature). Les estimations possibles à partir d'une même mesure simulée exploitent les fréquences suivantes :

- f_{EP} pour le paramètre de violation du Principe d'Équivalence ;
- $f_{cal/ang}$ pour l'excentrement suivant \vec{Y} ;
- $2f_{orb}$ pour les excentremets suivant \vec{X} et \vec{Z} ;
- $f_{TM} - 2f_{orb}$ et $f_{TM} + 2f_{orb}$ pour a_{c12} ou a_{c13} ;
- $f'_{cal/lin}$ pour a_{d11} , a_{d12} ou a_{d13} ;
- $2f_{cal/lin}$ pour K_{2dxx} ;
- $2f'_{TM}$ pour K_{2cxx} ;
- f_{EP} et $2f_{orb}$ pour estimer simultanément le paramètre de violation du Principe d'Équivalence et les excentremets suivant \vec{X} et \vec{Z} ;
- $f_{cal/lin}$ et $2f_{cal/lin}$ pour estimer simultanément a'_{d11} et K_{2dxx} .

Pour estimer les paramètres p_{ke} (au nombre de n_e), on considère que les termes correspondant à ces paramètres sont prépondérants devant les autres, considérés comme négligeables. Le modèle s'écrit alors :

$$\Gamma_{mes,dx}(t) = \sum_{k=1}^{n_e} a_{ke}(t)p_{ke} \quad (5.11)$$

Dans le cas de l'étalonnage, les modèles d'estimation ont été présentés dans la partie 3.1.2.

Pour améliorer la pertinence du modèle, il est possible de corriger la mesure en utilisant la meilleure estimation des autres paramètres disponible au moment de l'analyse. Ces valeurs initiales p_{k0} des paramètres p_k peuvent provenir de sessions d'étalonnage précédentes, ou bien correspondent aux valeurs nominales des paramètres (c'est à dire 0 pour tous les paramètres, sauf le facteur d'échelle en mode commun qui vaut 1). Après soustraction de ces valeurs *a priori*, le modèle de la mesure corrigée s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mes,dx/corr}(t) &= \Gamma_{mes,dx}(t) - \sum_{k=1}^n a_k(t)p_{k0} \\ &= \sum_{k=1}^{n_e} a_{ke}(t)(p_{ke} - p_{k0}) \\ &= \sum_{k=1}^{n_e} a_{ke}(t)\delta p_{ke} \end{aligned} \quad (5.12)$$

On soustrait ici la valeur initiale de tous les paramètres instrumentaux, y compris les paramètres à estimer. On estime donc en réalité la différence δp_{ke} à la valeur initiale du paramètre. Cette correction de la mesure sert d'une part à corriger la mesure du test du Principe d'Équivalence avec les valeurs des paramètres instrumentaux obtenues grâce aux sessions d'étalonnage, et d'autre part à améliorer la précision de l'étalonnage d'un paramètre en utilisant la valeur estimée des autres paramètres (voir la partie 3.2.2.1.b sur le retraitement des données d'étalonnage).

Le modèle peut être mis sous la forme :

$$Y = A \cdot X \quad (5.13)$$

avec :

- Y le vecteur observation, composé ici de la mesure accélérométrique (corrigée ou non avec les valeurs *a priori* des paramètres instrumentaux) aux différentes dates t_i , de dimension $[n_{obs}, 1]$;
- A la matrice d'observation, c'est à dire la matrice des dérivées partielles du modèle de mesure par rapport aux paramètres estimés, de dimensions $[n_{obs}, n_e]$;
- X le vecteurs des paramètres p_{ke} (ou δp_{ke}) à estimer, de dimension $[n_e, 1]$.

Le bloc "analyse" du simulateur commence par construire le vecteur observation. Il s'agit de la mesure instrumentale simulée par le bloc précédent, à laquelle la mesure initiale est soustraite. La mesure initiale correspond à la valeur du modèle de la mesure en utilisant les valeurs *a priori* des paramètres instrumentaux. Ces paramètres sont introduits dans le simulateur via un fichier de données.

La matrice d'observation est ensuite construite. Chacune de ses colonnes correspond à la dérivée partielle du modèle de la mesure par rapport à l'un des paramètres à estimer. Dans le cas d'une estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence, il s'agit de $\frac{1}{2}g_x$ (voir équation 2.48). Pour les sessions d'étalonnage, les dérivées partielles des différents paramètres estimables dérivent des équations d'étalonnage présentées dans la partie 3.1.2. Ces dérivées partielles sont basées en partie sur des signaux mesurés par l'instrument (position des masses d'épreuve, accélération et vitesse angulaires pour la matrice de gradient d'inertie, accélération mesurée en mode commun). Ces signaux sont alors introduits à partir des fichiers créés par le bloc précédent qui simulait la session de mesure. D'autres signaux intervenant dans les dérivées partielles sont calculés à partir de modèles en utilisant la position et l'attitude restituée du satellite (accélération et gradient de gravité). Pour cette première étape de simulation, les données restituées utilisées sont en réalité les mêmes que celles utilisées pour la simulation. En pratique, l'erreur de restitution introduira une différence entre les signaux environnementaux ayant réellement contribué à la mesure et ceux utilisés pour son analyse. Nous verrons dans la partie suivante comment cette erreur pourra être introduite.

Il est possible lors de cette phase d'analyse de simuler des pertes de données. Dans la pratique, les pertes de données se produisent à cause de saturations de l'instrument ou d'erreurs de télémétrie (voir partie 4.2.1). Elles rendent la mesure indisponible sur une durée donnée. Dans le simulateur, les pertes de mesure sont introduites au niveau de l'analyse plutôt que de la simulation pour des raisons pratiques. Le temps de calcul de la simulation est relativement long (plusieurs minutes). En tenant compte des pertes de données au niveau de l'analyse, on pourra superposer plusieurs schémas de trous de mesure à une simulation sans avoir besoin de la refaire. C'est donc à ce niveau du calcul que le signal d'observation tout comme les dérivées partielles sont mis à zéro au niveau des mesures perdues.

À ce stade, il est possible éventuellement de multiplier le vecteur d'observation et les dérivées partielles par une fenêtre d'apodisation. Ces fenêtres permettent de réduire les effets de bord et limitent ainsi les perturbations numériques étudiées dans le chapitre 4 (voir annexe C). Les fenêtres implémentées dans le simulateur sont la fenêtre de Hann et la fenêtre de Blackman. Cette option n'est pas utilisée dans le cas des résultats numériques présentés dans ce chapitre, l'objectif étant de vérifier les performances des méthodes de gestion des perturbations numériques dans une configuration pire-cas, c'est à dire sans fenêtre d'apodisation.

L'objectif est maintenant d'inverser le système $Y = A \cdot X$ par la méthode des moindres carrés afin d'obtenir l'estimée \hat{X} du vecteur des paramètres X . Pour le simulateur d'étalonnage, la méthode des moindres carrés ordinaires avait été utilisée, conduisant à l'estimateur $\hat{X} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y$. Il est possible de pondérer le système par une matrice de poids symétrique P :

$$P \cdot Y = P \cdot A \cdot X \quad (5.14)$$

L'estimateur devient dans ce cas :

$$\hat{X} = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot Y \quad (5.15)$$

Cette pondération permet de donner plus ou moins d'importance aux différentes observations et de tenir compte de leurs corrélations dans le cas d'une matrice poids non diagonale. C'est particulièrement important lorsque le bruit est fortement coloré, comme c'est le cas ici. En choisissant la matrice de pondération P telle que :

$$P^T \cdot P = [\gamma]^{-1} \quad (5.16)$$

où $[\gamma] = E(B \cdot B^T)$ est la matrice d'autocovariance du bruit de la mesure, le meilleur estimateur possible est obtenu, c'est à dire un estimateur \hat{X} dont la variance est minimale (si un seul paramètre est estimé et donc que X est un scalaire), ou dont la matrice de covariance est de trace minimale (si plusieurs paramètres sont estimés) ([26]). Ce choix présente deux problèmes. Premièrement, la matrice de covariance n'est pas connue : il faut donc disposer d'un modèle du bruit. Deuxièmement, la matrice de covariance doit être inversée, et ce calcul est très lourd puisque cette matrice a pour dimension le nombre d'observations.

Comme nous ne nous intéressons à la mesure qu'à des fréquences données (fréquence du test du Principe d'Équivalence ou fréquence d'étalonnage), une solution consiste à réduire la dimension du système en ne sélectionnant que certaines bandes de fréquences. Pour cela, un filtrage numérique dans le domaine temporel peut être appliqué, comme le filtre de Butterworth utilisé pour le simulateur d'étalonnage (voir partie 3.2.2.1.a). Cependant, nous avons vu que l'utilisation d'un tel filtre présente plusieurs inconvénients. En particulier, la période de stabilisation du filtre est longue et si les mesures restent exploitables durant cette période, elle ne sont pas optimales. Une alternative est utilisée dans le simulateur de la mission, permettant de se soustraire à cet inconvénient. Elle consiste à passer le système linéaire dans l'espace de Fourier, où il sera possible de simplement sélectionner les raies fréquentielles qui nous intéressent. Dans le simulateur de la mission, la méthode des moindres carrés dans le domaine temporel après filtrage numérique et la méthode des moindres carrés fréquentielle sont toutes deux implémentées. C'est cette dernière méthode qui est utilisée pour les simulations présentées ici.

Les deux côtés de l'équation 5.13 se voient appliquer une transformée de Fourier discrète. Les bandes spectrales d'intérêt sont ensuite sélectionnées en fonction des paramètres à estimer. Les fréquences centrales sont sélectionnées automatiquement en fonction des paramètres à estimer, mais la largeur de bande est fixée par l'utilisateur. Cette opération réduit le nombre d'observations (seules quelques raies spectrales sont sélectionnées), et modifie donc la taille du vecteur d'observation Y et de la matrice d'observation A .

Sur les étroites bandes de fréquences sélectionnées, la densité spectrale de bruit peut être considérée comme plate. La matrice de covariance des mesures s'écrit donc simplement :

$$[\gamma] = \sigma^2 \cdot \mathcal{I} \quad (5.17)$$

où σ^2 est la variance du bruit autour de la fréquence d'intérêt. Cette matrice, de petite taille et diagonale, est facilement inversée pour estimer les paramètres.

5.1.5 Restitution d'orbite

Le bloc orbite du simulateur permet de rajouter des erreurs de connaissance à l'orbite pour obtenir une simulation de l'orbite restituée. L'entrée de ce bloc est la même éphéméride produite par le logiciel GINS que celle utilisée pour la simulation de l'accélération et du gradient de gravité et de l'attitude qui ont servi à simuler la mesure instrumentale. Cette éphéméride comprend les dates, la position du satellite sur l'orbite correspondante et sa vitesse dans le référentiel inertiel.

Il est possible de bruite la datation de l'éphéméride avec un biais et un bruit.

On peut de la même manière bruite la connaissance de la position du satellite sur l'orbite. Le biais et le bruit peuvent être donnés dans le repère inertiel ou dans le repère instrumental. Dans ce dernier cas, il faudra utiliser l'information sur l'attitude (réelle) du satellite pour le passer en repère inertiel.

Alternativement, il est possible de considérer une erreur de restitution d'orbite via une accélération du satellite le long de celle-ci, en fournissant un biais et un bruit d'accélération en repère inertiel ou dans le repère de l'instrument. Ce bruitage de l'accélération doit être traduit en une erreur sur la position et la vitesse du satellite le long de l'orbite pour être inclus dans le format de l'éphéméride. L'orbite est donc intégrée avec les mêmes conditions initiales que celles de la simulation, mais en ajoutant la perturbation sur l'accélération. La différence des deux donne le bruit en position et en vitesse, qui est ajouté aux valeurs de positions et vitesses fournies par l'éphéméride originelle.

Une fois l'orbite restituée calculée, elle est réinjectée dans les blocs "Accélération et gradient de gravité" (5.1.1) et "Attitude" (5.1.2). Le champ gravitationnel restitué \vec{g} , le tenseur gradient de gravité restitué $[T]$, l'attitude restituée et la matrice d'inertie restituée $[I_n]$ calculées à partir de cette orbite restituée correspondent à ceux qui seront disponibles au moment de l'analyse des données.

Pour les simulations présentées dans la suite de ce document, l'erreur de restitution n'est pas encore considérée. Nous utilisons donc pour l'analyse les données exactes utilisées pour la simulation de la mesure accélérométrique de l'instrument.

5.2 Association des perturbations numériques et instrumentales

Dans cette partie, le simulateur de mission est exploité pour démontrer les performances des méthodes développées dans les parties précédentes pour la gestion des perturbations numériques et instrumentales.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux perturbations numériques. Les résultats fournis par le simulateur d'étalonnage ont montré un écart entre la précision d'estimation prévue analytiquement et celle obtenue numériquement. Cet écart est causé par les effets numériques. Il est possible de le réduire considérablement en choisissant correctement la durée des sessions d'étalonnage, de la même manière qu'on a choisi la durée des sessions de test du Principe d'Équivalence.

Nous introduirons ensuite l'influence des perturbations instrumentales sur l'estimation des paramètres à étalonner et du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. Les résultats obtenus avec le simulateur de mission après correction de la mesure en utilisant les valeurs des paramètres instrumentaux estimés par l'étalonnage seront présentés.

Dans une dernière partie, les pertes de données seront introduites. Ces pertes modifient l'amplitude des perturbations numériques. Nous appliquerons les méthodes de gestion des pertes de mesure développées dans le chapitre 4 aux données obtenues par simulation afin de valider leur performance en présence d'autres perturbations.

5.2.1 Choix de la durée de la session de mesure

Les résultats de l'étalonnage ont mis en évidence la présence de perturbations numériques qui limitent la précision d'estimation des paramètres instrumentaux (voir 3.2.2.3). Nous avons vu dans le chapitre 4 que ces effets sont dus à des perturbations à d'autres fréquences qui se projettent à la fréquence du signal à estimer, c'est à dire soit le signal de violation du Principe d'Équivalence, soit le signal d'étalonnage.

Pour plusieurs sessions d'étalonnage, la fréquence d'estimation est proche de perturbations d'amplitudes importantes.

C'est le cas pour les paramètres de la matrice de sensibilité en mode commun (défauts d'alignement et couplages) a_{c12} et a_{c13} . Pour étalonner ces paramètres, on utilise le signal du gradient de gravité, d'amplitude très importante au continu et à deux fois la fréquence orbitale f_{orb} , modulé par un mouvement d'oscillation des masses d'épreuve à la fréquence f_{TM} d'amplitude Δ_{TM} (voir 3.1.2.4). L'accélération des masses d'épreuve contribue à la mesure directement à la fréquence f_{TM} , et est modulée par le gradient de gravité aux fréquences $f_{TM} - 2f_{orb}$ et $f_{TM} + 2f_{orb}$ (voir figure 5.2). L'extraction du signal à $f_{TM} - 2f_{orb}$ ou $f_{TM} + 2f_{orb}$ est perturbée par la raie d'amplitude importante à f_{TM} .

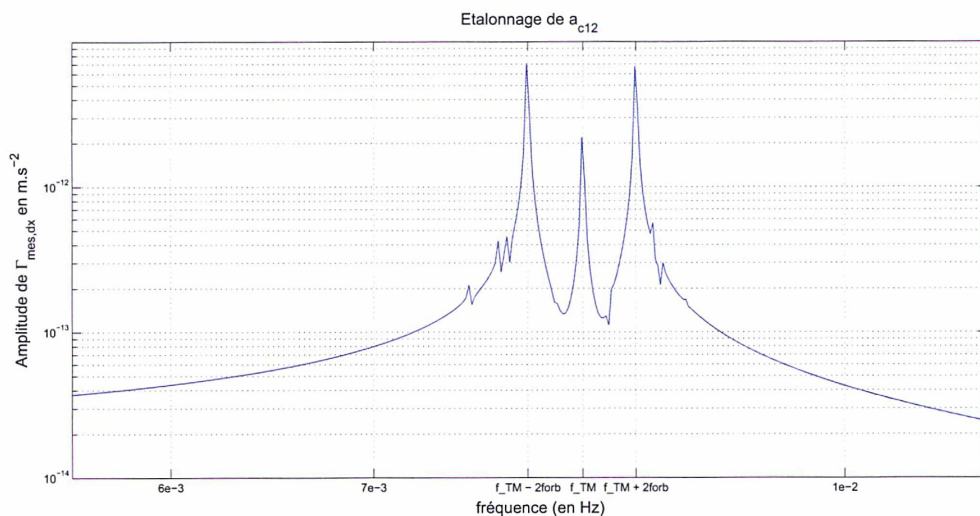


FIGURE 5.2 – Étalonage de a_{c12} : amplitude de la transformée de Fourier du signal mesuré ($\Gamma_{mes,dx}$). Les raies à $f_{TM} - 2f_{orb}$ et $f_{TM} + 2f_{orb}$ correspondent aux signaux utilisés pour estimer le paramètre. La raie centrale à f_{TM} est celle qui nous perturbe. Un spectre similaire est obtenu pour l'étalonnage de a_{c13} .

Pour étalonner le paramètre quadratique différentiel, K_{2dxx} , le satellite est mis en oscillation linéaire à la fréquence $f_{cal/lin}$ (voir 3.1.2.5). Pour cela, la commande du système de compensation de trainée est réglée sur $C_x = C_0 \sin(2\pi f_{cal/lin} t)$. Ce signal contribue à la mesure en mode différentiel à $f_{cal/lin}$ à cause du facteur d'échelle différentiel a_{d11} . En outre, le terme quadratique introduit une accélération à deux fois cette fréquence. C'est à cette fréquence que K_{2dxx} est estimé, mais cette estimation est perturbée par la raie à $f_{cal/lin}$ (voir figure 5.3). De la même manière, la raie à $2f_{cal/lin}$ pourrait perturber l'estimation du facteur d'échelle différentiel a'_{d11} à $f_{cal/lin}$. Cependant, la raie quadratique étant proportionnelle au carré de l'accélération linéaire du satellite, qui est faible ($5 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$), l'amplitude de la raie à $2f_{cal/lin}$ est très petite devant celle de la raie à $f_{cal/lin}$. C'est pourquoi les perturbations numériques affectent l'estimation de K_{2dxx} beaucoup plus que celle de a'_{d11} .

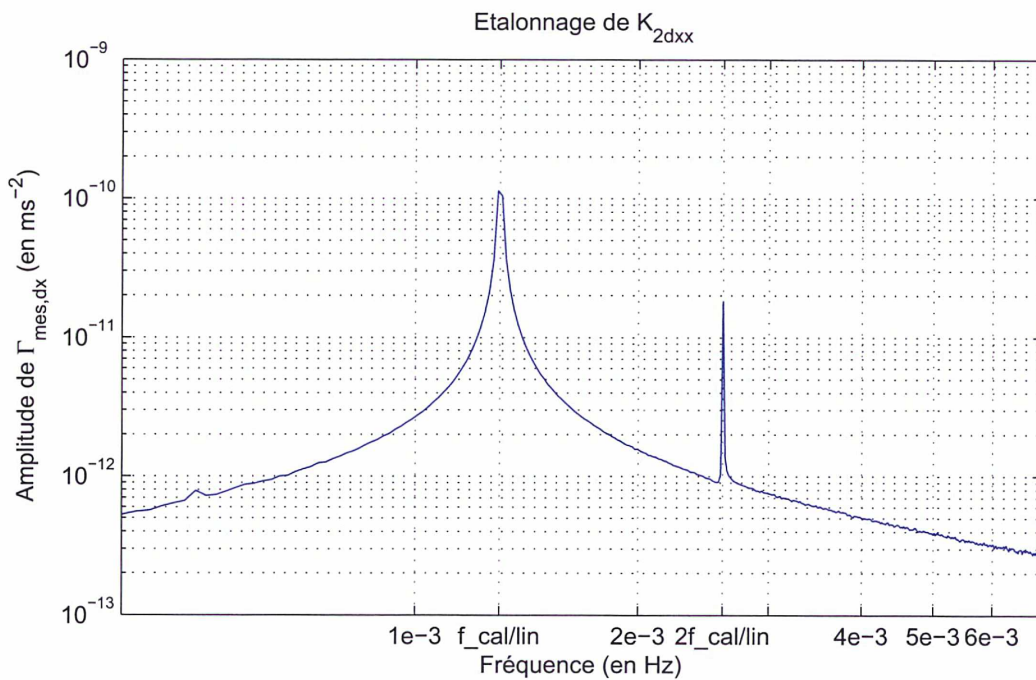


FIGURE 5.3 – Étalonage de K_{2dxx} : amplitude de la transformée de Fourier du signal mesuré ($\Gamma_{mes,dx}$). La raie à $2f_{cal/lin}$ correspond au signal utilisé pour estimer le paramètre. La raie à $f_{cal/lin}$ est celle qui nous perturbe.

Il en va de même pour l'étalonnage du terme quadratique en mode commun, K_{2cxx} , pour lequel K_{21xx} du capteur interne et K_{22xx} du capteur externe sont étalonnés séparément. La mesure d'un seul des deux capteurs de l'accéléromètre est cette fois exploitée. L'oscillation d'une des deux masses d'épreuve crée une contribution à la mesure directe à f'_{TM} , et le terme quadratique l'introduit à $2f'_{TM}$ (voir 3.1.2.6), comme le montre la figure 5.4.

Nous allons illustrer ces effets numériques avec l'exemple du terme quadratique du capteur interne, K_{21xx} . L'étalonnage de K_{21xx} est simulé en fixant tous les autres défauts de l'instrument - y compris le bruit et le biais - et les défauts du système de compensation de trainée à une valeur nulle. Cela permet de ne voir que les effets numériques dus à la durée finie de la mesure. K_{21xx} est initialisé à $20000 \text{ s}^{-2}/\text{m}$ et l'étalonnage est effectué sur la durée nominale de dix orbites. La valeur estimée obtenue est de $20534 \text{ s}^{-2}/\text{m}$, soit une erreur relative de 2,7%.

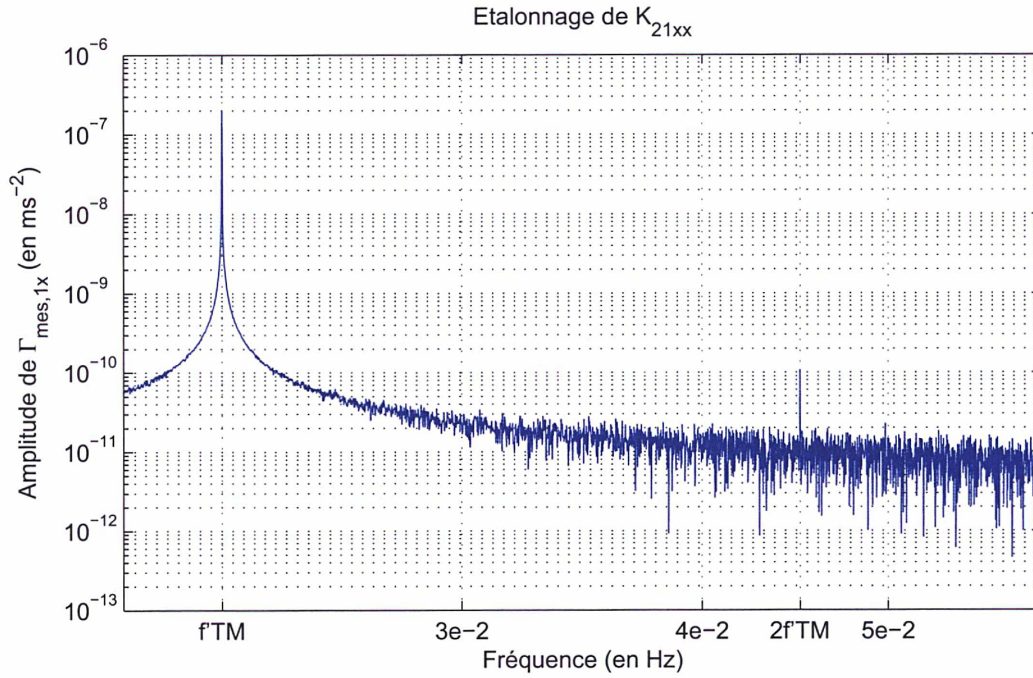


FIGURE 5.4 – Étalonage de K_{21xx} : amplitude de la transformée de Fourier du signal mesuré ($\Gamma_{mes,1x}$). La raie à $2f'_{TM}$ correspond au signal utilisé pour estimer le paramètre. La raie à f'_{TM} est celle qui nous perturbe. Un spectre similaire est obtenu pour l'étalonnage de K_{22xx} .

En utilisant la méthode de calcul numérique présentée par l'organigramme 4.7, on calcule le taux de projection normalisé d'une perturbation à la fréquence f'_{TM} sur la fréquence $2f'_{TM}$ du signal d'étalonnage, maximisé par rapport aux phases des deux signaux : $\tau = 1.6 \cdot 10^{-4}$. L'amplitude de la perturbation correspond à l'accélération de la masse test en l'absence de perturbations :

$$A_p = \Gamma_{mes,1x}(f'_{TM}) = \ddot{\Delta}_x = \Delta'_{TM}(2\pi f'_{TM})^2 \quad (5.18)$$

L'amplitude de la dérivée partielle correspond au carré de cette accélération (voir équation 3.20) :

$$A_e = \Gamma_{mes,1x}^2(2f'_{TM}) = \frac{1}{2}(\Gamma_{mes,1x}(f'_{TM}))^2 = \frac{A_p^2}{2} \quad (5.19)$$

D'après la formule 4.9, l'impact maximal de la perturbation sur l'estimation du paramètre p_e est de :

$$\Delta \hat{p}_e = \frac{A_p}{A_e} \tau = \frac{2}{A_p} \tau = 786 \text{ s}^2/\text{m} \quad (5.20)$$

Cela est compatible avec l'erreur de $534 \text{ s}^{-2}/\text{m}$ que nous avons obtenue par l'étalonnage sur l'estimation du paramètre quadratique.

Nous avons vu dans le chapitre 4 qu'il est possible d'ajuster les fréquences du signal à extraire et du signal perturbateur en fonction de la durée de la session de mesure afin de réduire les effets numériques (voir 4.1.2). En effet, si la période d'un signal est un sous-multiple de la durée de la session, sa représentation spectrale se réduira à une unique raie. Ainsi, si l'on s'assure que le signal d'estimation comme le signal perturbateur respectent cette propriété, leur corrélation sera nulle. Dans le cas des sessions de test du Principe d'Équivalence, la durée

d'observation choisie correspond à un nombre entier d'orbite et à un nombre entier de la période de spin du satellite. On s'assure ainsi que les perturbations importantes correspondant à des combinaisons linéaires de f_{orb} et f_{spin} présentent un taux de projection minimal à la fréquence du Principe d'Équivalence $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin}$. Cette même méthode peut être utilisée pour optimiser la durée des sessions d'étalonnage.

La durée de l'étalonnage est à présent fixée à $T = \frac{1355}{f'_{TM}}$, soit le multiple de la période d'oscillation des masses d'épreuve le plus proche de dix orbites. Nous obtenons cette fois une estimation de K_{21xx} de $20011 \text{ s}^{-2}/\text{m}$, soit une erreur relative de 0,05%. Un choix judicieux de la durée d'analyse d'une session de mesure permet donc de réduire efficacement l'effet des perturbations numériques. L'erreur résiduelle peut provenir de l'échantillonnage temporel à 0,25 s, à cause duquel la durée de la fenêtre ne peut être exactement égale à la durée souhaitée.

La configuration étant exactement la même pour le paramètre quadratique du capteur externe K_{22xx} , on fixera aussi la durée de son étalonnage à $T = \frac{1355}{f'_{TM}}$.

Inversement, il est aussi possible de maintenir une durée de session de dix orbites, et d'ajuster la fréquence d'oscillation des masses en fonction de celle-ci (donc après le lancement, une fois que la fréquence orbitale aura été déterminée) de manière à avoir $f'_{TM} = \frac{1355}{T} = 1355 \frac{f_{orb}}{10}$.

Pour le paramètre quadratique en mode différentiel, on obtient avec un étalonnage de 10 orbites en l'absence d'autres perturbations (à part le facteur d'échelle différentiel a_{d11} , qui introduit la raie perturbative à $f_{cal/lin}$) une précision relative de 1,1%. En ramenant la durée de l'étalonnage à $\frac{78}{f_{cal/lin}}$, l'estimation est améliorée et la précision relative est de 0,02%. Une autre solution pour bien séparer les deux fréquences est d'estimer simultanément a_{d11} à $f_{cal/lin}$ et K_{2dxx} à $2f_{cal/lin}$. La précision relative obtenue ainsi est meilleure que 0,01% même en gardant un durée de session non-optimisée pour la fréquence d'étalonnage.

Concernant l'estimation des défauts d'alignement et couplages en mode commun, a_{c12} et a_{c13} , l'étalonnage fait intervenir deux fréquences : la fréquence orbitale f_{orb} et la fréquence d'oscillation des masses d'épreuve f_{TM} . La fréquence orbitale ne peut pas être modifiée. Les seules paramètres ajustables sont la durée de la mesure T et la fréquence d'oscillation des masses - dont la valeur ne doit pas être grandement modifiée, au risque de s'éloigner du minimum du bruit de l'instrument. On choisit donc $T = 10$ orbites. La valeur de la fréquence d'oscillation des masses d'épreuve est ensuite fixée en fonction de ce choix : $f_{TM} = \frac{494}{T}$. La valeur obtenue pour la fréquence f_{TM} est extrêmement proche de sa valeur nominale (à $0,5 \mu\text{Hz}$ près).

Un choix judicieux des durées des sessions d'étalonnage et de test du Principe d'Équivalence permet donc bien de réduire l'impact des perturbations numérique en minimisant les taux de projections des perturbateurs dont les amplitudes sont les plus importantes sur le signal d'intérêt.

5.2.2 Introduction des perturbations instrumentales

Nous nous intéressons maintenant à l'impact simultané des perturbations numériques et instrumentales. Les perturbations numériques sont naturellement présentes dans la simulation, puisqu'elles découlent de la durée finie du signal étudié. L'introduction des perturbations instrumentales se fait en initialisant tous les paramètres instrumentaux à leur valeur maximale par construction. Ces paramètres gardent une valeur constante au cours d'une session simulée. En outre, pour une simulation la plus proche possible de la réalité, les résidus et le bruit du

système de compensation de traînée ainsi que tous les défauts de l'instrument (bruit et biais) sont ajoutés.

5.2.2.1 Performance des méthodes d'estimation des paramètres instrumentaux

Il s'agit dans cette partie d'estimer chacun des paramètres instrumentaux grâce aux méthodes d'étalonnage présentées dans le chapitre 3. Dans la partie suivante, ces estimations seront utilisées pour corriger la mesure obtenue lors d'une session simulée de test du Principe d'Équivalence des effets des paramètres instrumentaux.

Les sessions d'étalonnage simulées sont de dix orbites, et 40 orbites pour le défaut d'alignement et couplage communs suivant \vec{Z} (a_{c12}), sauf pour le paramètre quadratique différentiel K_{2dxx} et les paramètres quadratiques K_{21xx} et K_{22xx} pour lesquelles la durée de la session est adaptée aux fréquences d'étalonnage, selon l'étude menée dans la partie précédente.

Neuf sessions d'étalonnage sont simulées, afin d'estimer :

1. les excentremets $a_{c11}\Delta_x$ et $a_{c11}\Delta_z$ grâce au signal du gradient de gravité à deux fois la fréquence orbitale ;
2. l'excentrement $a_{c11}\Delta_y$ par oscillation angulaire du satellite autour de \vec{Z} ;
3. le terme a_{c12} de couplage et de défaut d'alignement communs selon \vec{Z} grâce au signal du gradient de gravité modulé par une oscillation des masses le long de \vec{Y} ;
4. le terme a_{c13} de couplage et de défaut d'alignement communs selon \vec{Y} grâce au signal du gradient de gravité modulé par une oscillation des masses le long de \vec{Z} ;
5. le terme de couplage et de défaut d'alignement différentiels selon \vec{Z} a_{d12} par oscillation linéaire du satellite le long de \vec{Y} ;
6. le terme de couplage et de défaut d'alignement différentiels selon \vec{Y} a_{d13} par oscillation linéaire du satellite le long de \vec{Z} ;
7. le facteur d'échelle différentiel a'_{d11} et le paramètre quadratique différentiel K_{2dxx} par oscillation linéaire du satellite le long de \vec{X} ;
8. le paramètre quadratique interne K_{21xx} par oscillation de la masse interne le long de \vec{X} et étude de la mesure de cette masse, le système de compensation de traînée étant verrouillé sur la masse externe ;
9. le paramètre quadratique externe K_{22xx} par oscillation de la masse externe le long de \vec{X} et étude de la mesure de cette masse, le système de compensation de traînée étant verrouillé sur la masse interne.

Après une première estimation de chacun de ces paramètres, les huit analyses sont refaites en corrigeant cette fois la mesure grâce aux valeurs obtenues à l'itération d'estimation précédente (voir la partie 5.1.4). Une troisième itération d'analyse a été effectuée en utilisant les valeurs obtenues à la deuxième estimation. Les résultats obtenus au troisième round d'analyse diffèrent peu de ceux obtenus au second round : les estimations ont convergé.

Les précisions obtenues sur les estimations des différents paramètres sans correction de la mesure sont présentées dans la troisième colonne du tableau 5.1. Les résultats sont déjà majoritairement compatibles avec les spécifications, sauf pour a'_{d11} . Les résultats obtenus après retraitement des données sont présentés dans la dernière colonne : la correction de la mesure a permis de réduire l'erreur d'estimation. Les résultats sont tous compatibles avec les spécifications.

Paramètre à étalonner	Spécification sur la précision de l'estimation	Erreur d'estimation sans retraitement de la mesure	Erreur d'estimation après retraitement de la mesure
$a_{c11} \cdot \Delta_x$	0,1 μm	0,03 μm	0,03 μm
$a_{c11} \cdot \Delta_z$	0,1 μm	0,05 μm	0,03 μm
$a_{c11} \cdot \Delta_y$	2,0 μm	0,13 μm	0,002 μm
a_{c12}	$9,0 \times 10^{-4}$ rad	$4,9 \times 10^{-4}$ rad	$1,2 \times 10^{-4}$ rad
a_{c13}	$9,0 \times 10^{-4}$ rad	$7,8 \times 10^{-4}$ rad	$5,9 \times 10^{-4}$ rad
a'_{d11}	$1,5 \times 10^{-4}$	$6,0 \times 10^{-4}$	$8,0 \times 10^{-5}$
a_{d12}	5×10^{-5} rad	$1,6 \times 10^{-6}$ rad	$9,0 \times 10^{-7}$ rad
a_{d13}	5×10^{-5} rad	$5,8 \times 10^{-6}$ rad	$6,6 \times 10^{-6}$ rad
K_{2dxx}/K_{1cx}^2	250 s ² /m	132 s ² /m	18 s ² /m
K_{2cxx}/K_{1cx}^2	1000 s ² /m	147 s ² /m	147 s ² /m

TABLE 5.1 – Résultat sur la précision d'estimation des paramètres instrumentaux après étalonnage.

5.2.2.2 Performances des méthodes d'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence

Nous allons maintenant simuler l'estimation de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence dans le cas d'une mesure en mode spinné et d'une mesure en mode inertiel. Dans les deux cas, les paramètres instrumentaux sont fixés à leurs valeurs maximales par construction. Le paramètre de violation du Principe d'Équivalence est fixé à $1 \cdot 10^{-15}$.

La session inertielle simulée a une durée de 120 orbites. Seul le paramètre de violation du Principe d'Équivalence à f_{EP} est estimé. La mesure simulée, une fois traitée, fournit une estimation du Principe d'Équivalence de $\delta_{EP} = -13,8 \cdot 10^{-15}$.

L'erreur d'estimation provient ici essentiellement des paramètres instrumentaux, la mesure n'ayant pas été corrigée de leurs effets. Ce résultat est compatible avec le bilan de l'erreur instrumentale présenté dans le tableau 2.4, qui prévoyait un impact pire-cas des paramètres instrumentaux sur l'estimation de δ_{EP} de $25 \cdot 10^{-15}$. En pratique, le paramètre de violation du Principe d'Équivalence sera estimé en même temps que les décentrages des masses d'épreuve suivant \vec{X} et \vec{Z} , qui sont quant à eux estimés à $2f_{EP}$. Nous utilisons la méthode des moindres carrés fréquentiels pour estimer simultanément ces trois paramètres, ce qui revient à corriger leurs effets les uns sur les autres. Or, l'effet des décentrages suivant \vec{X} et \vec{Z} représente les principaux termes d'erreurs introduits par les paramètres instrumentaux. L'impact de chacun sur l'estimation de δ_{EP} est d'environ $11 \cdot 10^{-15}$. Estimer ces décentrages en même temps que δ_{EP} devrait donc améliorer le résultat de manière significative. Effectivement, la simulation donne dans ce cas une estimation de $\delta_{EP} = 1,94 \cdot 10^{-15}$.

Nous utilisons ensuite le modèle de la mesure pour corriger les effets des paramètres instrumentaux estimés grâce à l'étalonnage dans la partie précédente. Pour cela, nous utilisons la valeur des paramètres présentés dans la dernière colonne du tableau 5.1, soit après étalonnage et retraitement des données. L'estimation du Principe d'Équivalence est ainsi largement améliorée, puisqu'on trouve à présent $\delta_{EP} = 1,25 \cdot 10^{-15}$, soit une erreur de $0,25 \cdot 10^{-15}$.

La session en mode spinné du test du Principe d'Équivalence est simulée sur une durée

Type de session	Erreur d'estimation sans étalonnage de l'instrument	Erreur d'estimation après étalonnage de l'instrument
Inertielle	$14,8 \cdot 10^{-15}$	$0,25 \cdot 10^{-15}$
Spinnée	$2,90 \cdot 10^{-15}$	$0,31 \cdot 10^{-15}$

TABLE 5.2 – Résultat sur la précision d'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. Une seule session de mesure respectivement de 20 orbites et de 120 orbites a été considérée pour le pointage inertielle ou spinné du satellite.

de 20 orbites. Avant utilisation des résultats de l'étalonnage de l'instrument, le paramètre de violation du Principe d'Équivalence est estimé à $\delta_{EP} = -1,9 \cdot 10^{-15}$. Le résultat est identique si l'on estime les décentrages suivant \vec{X} et \vec{Z} simultanément. En effet, en mode spinné, les composantes du gradient de gravité introduites par ces décentrages sont nulles à la fréquence f_{EP} . Ces deux paramètres ne contribuent donc pas à l'erreur d'estimation sur δ_{EP} . Après correction au moyen des valeurs des paramètres instrumentaux obtenues par étalonnage, l'estimée devient $\delta_{EP} = 0,69 \cdot 10^{-15}$.

Les performances de l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence sont regroupées dans le tableau 5.2. Après traitement de la mesure pour soustraire l'effet des perturbations instrumentales, le résultat d'estimation est compatible avec l'objectif de précision de 10^{-15} de la mission. On montre ainsi que les méthodes d'étalonnage étudiées dans le chapitre 3 permettent d'estimer les paramètres instrumentaux qui perturbent la mesure avec une précision suffisante pour atteindre l'objectif de la mission, même en présence des perturbations numériques, celles-ci étant maintenues à un niveau le plus bas possible grâce à un choix judicieux de la durée de la session de mesure et des fréquences ajustables, comme expliqué dans le chapitre 4.

Le simulateur permet par ailleurs de rajouter des erreurs harmoniques à la mesure. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, des perturbations d'amplitude importante agissent aux fréquences multiples de f_{orb} et f_{spin} . Ces perturbations sont à des fréquences différentes de la fréquence d'intérêt f_{EP} , mais peuvent quand même induire une erreur dans l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence car elles se projettent à cette fréquence.

Dans la simulation, nous ajoutons des signaux harmoniques à f_{spin} , $2f_{spin}$, $3f_{spin}$, $4f_{spin}$ et $2f_{EP}$, $3f_{EP}$, $4f_{EP}$. L'amplitude de ces signaux est de l'ordre de 10^{-13} ms^{-2} . Avec la durée de la session et la fréquence de spin choisie, l'estimation finale de δ_{EP} devient dans ces conditions $\delta_{EP} = 1,09 \cdot 10^{-15}$. En revanche, si l'on choisit une durée d'analyse quelconque ($T = 20, 13 \cdot f_{orb}$), le résultat est nettement dégradé, et l'on obtient, même après correction des paramètres instrumentaux, $\delta_{EP} = 2,57 \cdot 10^{-15}$. Cette expérience démontre l'efficacité des méthodes développées dans la partie 4.1.2 pour choisir la durée de la session et la fréquence de spin de manière à minimiser l'impact des perturbateurs principaux.

5.2.3 Introduction des pertes de mesure

Nous étudierons dans cette partie l'influence des pertes de mesure sur la détermination du paramètre de violation du Principe d'Équivalence δ_{EP} . L'objectif est de valider la performance des méthodes de gestion des pertes de mesure développées dans la partie 4.2 en présence d'autres perturbations que les perturbations numériques : perturbations instrumentales, résidu

du système de compensation de traînée, bruits... Nous nous intéressons dans une première partie aux trous de courte durée (c'est-à-dire inférieure à une minute). Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la gestion des trous de longue durée pour les sessions inertielles.

5.2.3.1 Application de la stratégie de gestion des pertes de courte durée

La méthode utilisée en cas de perte de mesure de moins d'une minute consiste à extrapoler les données manquantes à partir des mesures voisines. Dans le chapitre 4, une simple moyenne entre la valeur de la mesure au point précédent le trou de mesure et au point suivant le trou de mesure a été utilisée.

Nous utilisons le simulateur de la mission pour produire la mesure correspondant à une session en mode spinné de 20 orbites. Nous considérons une perte de mesure d'une minute située au centre de cette session, ce qui correspond au pire-cas d'après la partie 4.2.2.1.b.

Dans un premier temps, les données perdues sont remplacées par des zéros. On obtient alors une estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence de $\delta_{EP} = 0,6 \cdot 10^{-15}$, soit une erreur de $0,4 \cdot 10^{-15}$.

La mesure est ensuite corrigée des perturbations introduites par les paramètres instrumentaux grâce à leurs valeurs estimées par simulation de l'étalonnage dans la partie 5.2.2.1. Le paramètre de violation du Principe d'Équivalence est estimé avec une précision de $4 \cdot 10^{-14}$. L'objectif de précision de la mission n'est donc pas atteint. Par rapport à l'étude menée dans le chapitre 4, la mesure est ici entachée d'une erreur stochastique. Nous n'avons utilisés que deux points de mesure pour extrapoler les données perdues (un point avant et un point après la perte de mesure). En présence de bruit, une moyenne sur deux points seulement n'est pas représentative de la valeur du signal, d'où l'inefficacité de notre méthode.

Il est donc nécessaire d'utiliser une valeur moyennée du signal avant l'interruption de données et après l'interruption de données. La moyenne doit utiliser un nombre de points suffisant pour bien rejeter le bruit. Cependant, elle doit être calculée sur une durée suffisamment courte pour représenter l'évolution du signal perturbateur. Il faut donc trouver un compromis entre ces deux contraintes. Dans un premier temps, les moyennes sont calculées sur une durée de $\frac{1}{2f_{EP}}$. Cette valeur devra être affinée à l'avenir. Les mesures manquantes sont remplacées par la demi-somme de la moyenne calculée avant l'interruption de mesure et celle calculée après l'interruption de mesure. Le résultat est nettement amélioré, puisque cette nouvelle méthode permet d'estimer le paramètre de violation du Principe d'Équivalence avec une estimation de $\delta_{EP} = 0,6 \cdot 10^{-15}$. Le résultat est équivalent à celui obtenu en remplaçant les données manquantes par des zéros. Il est moins bon que dans le cas nominal, mais reste compatible avec l'objectif de la mission. C'est cette méthode que nous utiliserons dans la suite de cette étude.

Nous nous intéressons maintenant aux sessions de 120 orbites en mode inertiel. Ce type de session doit supporter un trou de moins d'une minute par tranche de 20 orbites. Nous simulons donc la mesure affectée d'un trou de une minute à 10, 30, 50, 70, 90 et 110 orbites. Ces trous sont traités comme pour les sessions en mode spinné : en remplaçant les valeurs manquantes soit par des zéros, soit par la demi-somme des moyennes sur le nombre de points correspondant à $\frac{1}{2f_{EP}}$ de part et d'autre de l'interruption de mesure. Après correction des effets des paramètres instrumentaux, on obtient avec ces deux méthodes une précision équivalente sur l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence de $0,3 \cdot 10^{-15}$. Le résultat est donc peu dégradé par rapport au cas nominal.

Nous simulons à présent des pertes de mesure dues aux craquements du revêtement MLI

Numéro de la sous-session	Début de la sous-session (en nombre d'orbites)	Fin de la sous-session (en nombre d'orbites)	δ_{EP} estimé
1	1	31	$1,37 \cdot 10^{-15}$
2	32	61	$0,64 \cdot 10^{-15}$
3	63	92	$2,78 \cdot 10^{-15}$
4	94	123	$0,48 \cdot 10^{-15}$
Moyenne			$1,31 \cdot 10^{-15}$

TABLE 5.3 – Résultat de l'estimation de δ_{EP} en divisant une session inertielle en quatre sous-session de 30 orbites pour un δ_{EP} attendu de 1.

du satellite ou du réservoir de carburant. Pour cela, nous plaçons aléatoirement, sur chaque orbite, 284 pertes de mesure d'une demi-seconde, ce qui correspond au pire nombre de craquements pouvant survenir. La méthode utilisées pour gérer ces données manquantes est celle du remplacement par une valeur moyenne. Elle permet d'obtenir une précision sur l'estimation de δ_{EP} de $0,6 \cdot 10^{-15}$, qui est compatible avec l'objectif de précision de 10^{-15} .

5.2.3.2 Application de la stratégie de gestion des pertes de longue durée

Pour les sessions en mode inertiel de 120 orbites, la probabilité d'apparition d'une perte de mesure dont la durée dépasserait une minute n'est pas négligeable. C'est pourquoi une méthode a été développée spécifiquement pour ce type de session dans la partie 4.2.3. La durée des sessions est allongée à 123 orbites, et en cas de perte de mesure d'une durée supérieure à une minute, on traite séparément la partie de la mesure avant et après le trou de mesure en supprimant la totalité de l'orbite affectée. L'objectif est de traiter des sous-sessions correspondant à un nombre entier d'orbites, afin de rejeter de manière efficace les perturbateurs principaux correspondant aux fréquences singulières, qui sont les multiples de la fréquence orbitale. La spécification opérationnelle impose de pouvoir supporter au moins trois trous de mesure de longue durée au cours d'une session inertielle, ce qui revient à traiter quatre sous-sessions indépendantes. Comme nous l'avons vu dans la partie 4.2.3, le pire cas correspond à des sous-sessions présentant toutes la même durée.

Le simulateur fournit une mesure simulée de l'accélération différentielle des masses d'épreuve sur 123 orbites. Après correction de l'effet des paramètres instrumentaux estimés par l'étalonnage, le signal de violation du Principe d'Équivalence est estimé à $1,12 \cdot 10^{-15}$, soit une erreur de $0,12 \cdot 10^{-15}$.

Nous supposons maintenant que les mesures correspondant aux orbites 31, 62 et 93 ont été perdues, partiellement ou totalement. Dans les deux cas, les orbites affectés par ces pertes sont entièrement éliminés. Nous traitons donc quatre segments de mesure de 30 orbites chacun. Pour chaque segment de mesure, le paramètre de violation du Principe d'Équivalence est estimé après correction de l'effet des paramètres instrumentaux. La moyenne des résultats sur les différentes sous-sessions est ensuite calculée. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.3.

Le résultat de l'estimation de δ_{EP} pour une sous-session individuelle de trente orbites est moins précis que le résultat obtenu avec 123 orbites et peut outrepasser l'objectif de précision de 10^{-15} . Cela est dû au fait que le bruit est intégré sur une durée moins longue que les 120 orbites initialement prévues. L'écart type introduit par le bruit intégré sur 30 orbites sur

l'estimation de δ_{EP} est de $1,8 \cdot 10^{-15}$, ce qui correspond à l'erreur maximale obtenue (pour la sous-session numéro 3). C'est donc essentiellement l'erreur stochastique qui limite ici la précision de notre estimation. Néanmoins, en moyennant les quatre résultats, on retrouve un résultat compatible avec l'objectif. La précision, de $0,31 \cdot 10^{-15}$, est légèrement moins bonne que dans le cas sans interruption.

5.2.3.3 Scénario d'apparition des pertes de données réalistes : projection du cas de la mission PICARD sur une session de mesure de MICROSCOPE

Nous souhaitons à présent tester les procédures de traitement des données précédentes dans un cas réaliste de pertes de mesure. Nous utilisons pour cela l'expérience du satellite PICARD. Ce micro-satellite du CNES présente à peu près la même orbite et utilise le même réseau de station au sol que ceux prévus pour la mission MICROSCOPE. Le tableau 5.4, fourni par le CNES, présente les trous dus à des problèmes de télémesure enregistrés sur ce satellite entre le 8 juillet et le 20 juillet 2010. Il s'agit d'une période de la mission où les pertes de télémesure ont été particulièrement nombreuses.

Nous considérons une session inertielle de test du Principe d'Équivalence qui se déroulerait du 12 juillet 2010 à minuit au 20 juillet 2010 à 14 heures, soit une durée correspondant à 123 orbites.

Les pertes de mesure très proches sont regroupées, afin de ne pas dépasser une perte de mesure de moins d'une minute par tranche de 20 orbites. Les trous 1 et 2 sont donc considérés comme un unique trou se déroulant de 15 heures et 32 secondes à 15 heures et 49 secondes, durant donc 17 secondes. Les trous 3 à 62 sont regroupés en un trou de 50 minutes et 33 secondes, et les trous 63 à 65 en un trou de 5 minutes et 57 secondes. Notre session est donc affectée par une perte de mesure de courte durée (17 secondes) et deux pertes de mesure de longue durée (plus d'une minute).

La première perte de mesure de longue durée se produit à cheval sur deux orbites. Elle commence 22 minutes avant le début de l'orbite numéro 37, et se termine 28 minutes après le début de celle-ci. L'orbite 36 étant affectée par la perte de mesure, la première sous-session couvre les orbites 1 à 35.

Entre la fin de premier trou de longue durée et le début du second, il y a 5 jours, 18 heures, 59 minutes et 8 secondes, soit tout juste 83 orbites. La seconde sous-session commencera donc à la fin du premier trou de mesure de longue durée, soit à 37 orbites et 28 minutes, et se terminera 83 orbites plus tard, soit à 120 orbites et 28 minutes. Ce décalage de 28 minutes permet de ne pas éliminer deux orbites entières tout en maintenant une sous-session comprenant un nombre entier d'orbites.

Le reste de l'orbite 120 est éliminé, car il contient la deuxième perte de mesure de longue durée. La troisième sous-session couvre donc les orbites 121 à 123.

Nous traitons donc trois sessions de mesure indépendantes, toutes correspondant à un nombre entier d'orbites (respectivement 35, 83 et 3 orbites), la première étant affectée d'une perte de mesure de 17 secondes. On calcule ensuite la moyenne pondérée par la durée de la sous-session de l'estimée du paramètre de violation du Principe d'Équivalence pour les trois sous-sessions. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.5. Le résultat après correction de l'effet des paramètres instrumentaux grâce à l'étalonnage est compatible avec l'objectif de la mission, puisque la précision sur l'estimation de δ_{EP} est de $0,17 \cdot 10^{-15}$.

Les méthodes de réduction des perturbations instrumentales (grâce à l'étalonnage et à la correction de la mesure) développées dans le chapitre 3 et les méthodes de réduction des

Numéro du trou	Date de début du trou		Date de fin du trou		Durée du trou (en s)
1	12/07/10	15:00:32	12/07/10	15:00:44	0:00:12
2	12/07/10	15:00:46	12/07/10	15:00:49	0:00:03
3	14/07/10	13:34:14	14/07/10	13:34:20	0:00:06
4	14/07/10	13:34:22	14/07/10	13:34:29	0:00:07
5	14/07/10	13:34:31	14/07/10	13:34:46	0:00:15
6	14/07/10	13:34:48	14/07/10	13:35:20	0:00:32
7	14/07/10	13:35:22	14/07/10	13:35:29	0:00:07
8	14/07/10	13:35:36	14/07/10	13:35:39	0:00:03
9	14/07/10	13:35:41	14/07/10	13:36:15	0:00:34
10	14/07/10	13:36:27	14/07/10	13:36:42	0:00:15
11	14/07/10	13:36:53	14/07/10	13:36:59	0:00:06
12	14/07/10	13:37:05	14/07/10	13:37:13	0:00:08
13	14/07/10	13:37:15	14/07/10	13:37:30	0:00:15
14	14/07/10	13:37:47	14/07/10	13:38:07	0:00:20
15	14/07/10	13:38:16	14/07/10	13:38:18	0:00:02
16	14/07/10	13:38:32	14/07/10	13:38:45	0:00:13
17	14/07/10	13:39:01	14/07/10	13:39:44	0:00:43
18	14/07/10	13:39:56	14/07/10	13:39:58	0:00:02
19	14/07/10	13:40:00	14/07/10	13:40:28	0:00:28
20	14/07/10	13:40:30	14/07/10	13:40:37	0:00:07
21	14/07/10	13:40:39	14/07/10	13:40:54	0:00:15
22	14/07/10	13:41:16	14/07/10	13:41:18	0:00:02
23	14/07/10	13:41:32	14/07/10	13:41:35	0:00:03
24	14/07/10	13:41:44	14/07/10	13:41:50	0:00:06
25	14/07/10	13:41:54	14/07/10	13:42:06	0:00:12
26	14/07/10	13:42:01	14/07/10	13:42:31	0:00:30
27	14/07/10	13:42:35	14/07/10	13:42:50	0:00:15
28	14/07/10	13:42:54	14/07/10	13:42:59	0:00:05
29	14/07/10	13:43:01	14/07/10	13:43:08	0:00:07
30	14/07/10	13:43:09	14/07/10	13:43:24	0:00:15
31	14/07/10	13:43:45	14/07/10	13:43:55	0:00:10
32	14/07/10	13:43:59	14/07/10	13:44:09	0:00:10
33	14/07/10	13:44:11	14/07/10	13:44:19	0:00:08
34	14/07/10	13:44:24	14/07/10	13:44:36	0:00:12
35	14/07/10	13:44:48	14/07/10	13:44:53	0:00:05
36	14/07/10	13:45:04	14/07/10	13:45:08	0:00:04
37	14/07/10	13:53:42	14/07/10	13:53:48	0:00:06
38	14/07/10	13:54:14	14/07/10	13:54:26	0:00:12
39	14/07/10	13:54:33	14/07/10	13:54:48	0:00:15
40	14/07/10	13:54:52	14/07/10	13:55:04	0:00:12
41	14/07/10	13:55:06	14/07/10	13:55:09	0:00:03
42	14/07/10	13:55:11	14/07/10	13:55:19	0:00:08
43	14/07/10	13:55:55	14/07/10	13:56:04	0:00:09
44	14/07/10	13:56:12	14/07/10	13:56:24	0:00:12
45	14/07/10	13:56:31	14/07/10	13:56:39	0:00:08
46	14/07/10	13:56:40	14/07/10	13:57:07	0:00:27
47	14/07/10	13:57:12	14/07/10	13:57:32	0:00:20
48	14/07/10	13:57:41	14/07/10	13:57:46	0:00:05
49	14/07/10	13:57:48	14/07/10	13:57:55	0:00:07
50	14/07/10	13:57:58	14/07/10	13:58:25	0:00:27
51	14/07/10	13:58:27	14/07/10	13:58:39	0:00:12
52	14/07/10	13:58:49	14/07/10	13:58:56	0:00:07
53	14/07/10	13:59:00	14/07/10	13:59:10	0:00:10
54	14/07/10	13:59:14	14/07/10	13:59:29	0:00:15
55	14/07/10	13:59:36	14/07/10	13:59:43	0:00:07
56	14/07/10	13:59:48	14/07/10	14:00:15	0:00:27
57	14/07/10	14:00:27	14/07/10	14:00:32	0:00:05
58	14/07/10	14:00:34	14/07/10	14:01:27	0:00:53
59	14/07/10	14:01:29	14/07/10	14:01:51	0:00:22
60	14/07/10	14:02:05	14/07/10	14:02:52	0:00:47
61	14/07/10	14:02:53	14/07/10	14:02:59	0:00:06
62	14/07/10	14:03:00	14/07/10	14:24:47	0:21:47
63	20/07/10	09:23:55	20/07/10	09:29:52	0:05:57
64	20/07/10	09:23:55	20/07/10	09:24:02	0:00:07
65	20/07/10	09:24:00	20/07/10	09:29:52	0:05:52

TABLE 5.4 – Trous de télémétrie enregistrés pour la mission PICARD.

Numéro de la sous-session	1	2	3	Moyenne pondérée
Date de début de la sous-session	12/07/10 00:00:00	14/07/10 14:24:48	20/07/10 10:34:57	
Date de fin de la sous-session	14/07/10 10:35:54	20/07/10 09:22:29	20/07/10 13:55:51	
Durée de la sous-session	35 orbites avec trou de 17 s	83 orbites	3 orbites	
δ_{EP} estimé sans étalonnage de l'instrument	$-14,03 \cdot 10^{-15}$	$-12,63 \cdot 10^{-15}$	$-16,34 \cdot 10^{-15}$	$-12,91 \cdot 10^{-15}$
δ_{EP} estimé avec étalonnage de l'instrument	$1,48 \cdot 10^{-15}$	$1,45 \cdot 10^{-15}$	$-9,24 \cdot 10^{-15}$	$1,17 \cdot 10^{-15}$

TABLE 5.5 – Résultat de l'estimation de δ_{EP} en présence des trous de télémétrie de la mission PICARD pour un δ_{EP} attendu de 1.

perturbations numériques (grâce au choix d'une durée de session adaptée et à l'application de méthodes de traitement des pertes de mesure adéquates) développées dans le chapitre 4 permettent donc bien d'atteindre l'objectif de la mission en terme de précision de l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence, dans le cas d'un scénario de pertes de télémétrie tiré de l'expérience d'une précédente mission spatiale. Une nouvelle gestion des télémétries ayant permis de réduire la fréquence des données perdues par rapport à la mission PICARD (en rejouant des télémétries présentant des pertes de données lors du survol suivant d'une station sol), le scénario des pertes de télémétrie devrait être plus favorable pour la mission MICROSCOPE.

Bilan du chapitre 5

Un scénario complet (étalonnage, mesure, traitement des données) a été établi qui garantit une précision meilleure que 10^{-15} pour le test du Principe d'Équivalence de MICROSCOPE en tenant compte des limites de caractérisation de l'instrument et des perturbations numériques amplifiées par les éventuelles pertes de mesure.

Conclusion et perspectives

La mission MICROSCOPE a pour objectif de tester le Principe d'Équivalence avec une précision encore inégalée de 10^{-15} . Pour valider la précision de ce test, il est nécessaire d'évaluer l'impact de toutes les perturbations agissant sur l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence.

Une phase d'étalonnage en orbite de l'instrument est indispensable pour atteindre l'objectif de précision MICROSCOPE. Les paramètres instrumentaux introduisant des perturbations dans la mesure à la fréquence du test du Principe d'Équivalence sont ainsi évalués. Leurs valeurs estimées sont utilisées pour corriger la mesure de leurs effets. Les performances de ces procédures d'étalonnage doivent être connues précisément afin de déterminer l'impact maximal du résidu de perturbation instrumentale sur l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence.

Une étude analytique des erreurs d'étalonnage, basée sur un modèle de la mesure au second ordre, a montré leur compatibilité avec les spécifications. Celle-ci ne peut cependant pas prendre en compte les effets numériques perturbant l'estimation des paramètres instrumentaux, ni la dynamique du système. En particulier, de dynamique de la boucle du système de contrôle d'attitude et d'orbite, qui est exploitée pour l'étalonnage en orbite de l'instrument, n'est pas prise en compte. Un simulateur de l'étalonnage, décrit dans le chapitre 3, a été développé pour évaluer numériquement les performances des procédures d'étalonnage. Cet outil simule la mesure de l'instrument intégré à la boucle du système de contrôle d'attitude et d'orbite, qui reproduit le calculateur, le système de propulsion, l'environnement extérieur et le capteur stellaire.

L'architecture du programme permet de jouer un grand nombre de simulations correspondant à des combinaisons des paramètres instrumentaux tirées aléatoirement. L'étude statistique ainsi menée a montré que les procédures d'étalonnage envisagées conduisent à une estimation des paramètres instrumentaux d'une précision suffisante pour démontrer la précision du test du Principe d'Équivalence à mieux que 10^{-15} une fois la mesure corrigée de leurs effets.

Cette étude montre la possibilité d'exploiter le système de compensation de traînée et de contrôle d'attitude d'un satellite pour l'étalonnage de son instrument. D'autres missions spatiales pourraient utiliser des méthodes similaires à l'avenir, comme la mission STEP, dont le système de contrôle d'attitude et d'orbite devrait présenter des performances proches de celui de MICROSCOPE ([43] et [32]).

Par ailleurs, ce travail a mis en évidence la présence de perturbations numériques lors de l'évaluation des paramètres.

Ces perturbations numériques sont non-critiques pour l'étalonnage, mais doivent être consi-

dérées lors de l'évaluation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence. Elles sont dues à la durée finie de la mesure qui biaise le spectre initial en projetant à la fréquence du Principe d'Équivalence les signaux perturbateurs agissant à d'autres fréquences. Les signaux de fortes amplitudes présentent donc à la fréquence du test un impact qui doit être évalué.

Le taux de projection d'une perturbation à une fréquence quelconque sur la fréquence du test du Principe d'Équivalence a été évalué dans le chapitre 4. Cette étude a conduit à définir un gabarit rendant compte de ces taux de projection sur tout le spectre. A partir de ce gabarit, des spécifications ont été définies sur les performances des systèmes du satellite (contrôle d'attitude et d'orbite en particulier) pour limiter l'amplitude des perturbations en fonction du taux de projection de la fréquence à laquelle elles agissent sur la fréquence du test. Il a été démontré en annexe que l'utilisation d'une fenêtre d'apodisation permet de réduire les taux de projection suffisamment pour valider la précision du test. Néanmoins, pour la définition des spécifications, nous nous sommes placés dans un cas pire avec une fenêtre d'observation rectangulaire.

Les amplitudes de certaines perturbations (variations thermiques en particulier) ne sont pas compatibles avec le taux de réjection obtenu à partir du gabarit et ne peuvent être réduites. Pour limiter leur impact sur l'estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence, il faut alors réduire le taux de projection de ces signaux sur la fréquence du test. Ces signaux agissant à des combinaisons linéaires de la fréquence orbitale et de la fréquence de spin du satellite, des spécifications ont été définies sur la valeur du taux de projection pour ces fréquences particulières. Nous avons montré qu'un choix de la durée de la session de mesure et de la fréquence de spin adapté à la durée de l'orbite permet de les réduire considérablement. Les taux de projection dans ces conditions optimisées ont été calculés en tenant compte des erreurs de réalisation de ces durées et fréquences ; ils se sont avérés compatibles avec les spécifications.

L'étude sur la valeur des taux de projection à la fréquence du test du Principe d'Équivalence a été conduite en considérant un échantillonnage régulier des mesures instrumentales. Cependant, des données manquantes modifient cet échantillonnage. Les origines de ces pertes de données ont été présentées : il s'agit principalement d'erreurs de télémétrie, mais aussi de saturations de l'instrument dues à des craquements se produisant au niveau du revêtement du satellite ou des réservoirs de carburant. Nous avons déterminé une méthode de gestion des données manquantes pour les pertes de mesure dont la durée n'excède pas une minute. Elle permet de supporter les craquements de très courtes durées, mais aussi une perte de mesure de durée inférieure à une minute par tranche de vingt orbites de mesure. Les pertes de mesure d'une durée supérieure à une minute sont suffisamment peu probables au cours d'une session de mesure de 20 orbites pour ne pas être considérées, mais doivent l'être pour une session de 120 orbites. Une seconde méthodologie a donc été mise en place pour gérer ces trous de longue durée en traitant les segments de mesure de part et d'autre comme des sous-sessions indépendantes. La performance de cette méthode a été validée dans le cas de trois trous dont la durée excède une minute, ce qui est le cas pire opérationnel considéré.

Un simulateur de la mission, présenté dans le chapitre 5, a été développé afin de tester les procédures de traitement des données scientifiques. Nous avons ainsi pu vérifier la performance de la correction des effets des paramètres instrumentaux pour estimer le paramètre de violation du Principe d'Équivalence en présence de perturbations numériques et de pertes de mesure. La procédure envisagée a été appliquée en calquant le scénario des pertes de télémétrie de la mission PICARD, qui est représentative de ce que sera l'expérience MICROSCOPE. Le scénario de la mission envisagé, incluant les phases d'étalonnage, la session de mesure scientifique

et le traitement des données, conduit à une estimation du paramètre de violation du Principe d'Équivalence compatible avec l'objectif de précision de la mission. Cependant, la méthode de gestion des pertes de mesure de courte durée, qui consiste à extrapoler les données manquantes à partir des mesures voisines, s'est révélée moins efficace que prévu de fait de la difficulté à estimer les données manquantes en présence d'un bruit important. Une méthode d'extrapolation plus robuste au bruit permettra d'améliorer le résultat. Ce simulateur numérique, tout comme le simulateur de l'étalonnage, exploite les spécifications des sous-systèmes du satellite. Il serait intéressant de refaire les simulations avec les performances attendues de ces sous-systèmes, déterminées par les équipes du CNES. Par ailleurs, le scénario de simulation développé ici ne prend pas en compte une dérive dans le temps des paramètres instrumentaux, ce qui réduira l'efficacité de la correction de la mesure. Cet effet a été pris en compte pour la définition des spécifications sur les performances des procédures d'étalonnage. Néanmoins, son impact au moment du traitement des données devrait faire l'objet d'une étude plus approfondie. Enfin, il serait intéressant de conduire avec le simulateur de mission une étude statistique similaire à celle présentée dans le cadre du simulateur d'étalonnage. Suivant les valeurs des paramètres instrumentaux, certains effets perturbateurs peuvent en effet s'ajouter ou au contraire se compenser, d'où l'intérêt d'étudier un large panel de combinaisons possibles.

Le Centre de Mission Scientifique de MICROSCOPE travaille actuellement à la définition du protocole de traitement des données scientifique pour l'estimation de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. La méthode de traitement des données utilisée dans cette étude en est une version préliminaire et simplifiée. Une fois les choix du Centre de Mission Scientifique arrêtés, le protocole réel pourra être implémenté dans le simulateur de la mission pour valider ses performances.

L'instrument de la mission MICROSCOPE est actuellement en phase de qualification. Le capteur mécanique a passé avec succès les tests environnementaux (thermique, vibrations et chocs) et son bon fonctionnement vis-à-vis de l'acquisition de la masse d'épreuve a été vérifié dans la tour de chute libre du ZARM à Brême. L'intégration du modèle de vol des capteurs est en cours. Pour les boîtiers électroniques de vol, les tests de performance ont été conduits et les tests environnementaux sont en cours de finalisation. Par ailleurs, après la sélection finale du système de micro-propulsion à azote, le satellite est lui aussi en phase de qualification au CNES. Son lancement est prévu pour avril 2016.

Annexe A

Valeurs numériques

A.1 Paramètres de la mission

Altitude orbitale :

$$\begin{aligned}h &= 720 \text{ km} \\i &= 98,7^\circ\end{aligned}$$

Fréquences caractéristiques :

$$\begin{aligned}f_{orb} &= 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ Hz} \\f_{spin} &= \frac{73}{20} f_{orb} = 5,84 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}\end{aligned}$$

A.2 Correspondance entre les repères

Voici les correspondances entre les axes des repères liés à l'instrument (\mathcal{R}_{instr}), au satellite (\mathcal{R}_{sat}) et au capteur stellaire (\mathcal{R}_{SST}) :

$$\begin{aligned}X_{instr} &\approx -Z_{sat} \approx X_{SST} \\Y_{instr} &\approx X_{sat} \approx -Z_{SST} \\Z_{instr} &\approx -Y_{sat} \approx Y_{SST}\end{aligned}$$

Sauf mention du contraire, toutes les valeurs fournies dans ce document sont entendues en repère instrument.

A.3 Paramètres du satellite

Masse :

$$M_{sat} = 280 \text{ kg}$$

Inertie en repère satellite en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$:

$$J_{sat} = \begin{bmatrix} 36.5 & 0.8 & -0.8 \\ 0.8 & 27.1 & 0.8 \\ -0.8 & 0.8 & 26.2 \end{bmatrix}$$

Fréquence de pixellisation du capteur stellaire :

$$f_{pix} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$$

Spécifications sur l'amplitude du résidu et du bruit du système de compensation de traînée :

Fréquence (en Hz)	Résidu harmonique (en ms^{-2})	Densité spectrale d'amplitude du bruit (en $\text{ms}^{-2}\sqrt{\text{Hz}}$)
0	10^{-9}	$3 \cdot 10^{-10}$
f_{orb}	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$
$2f_{orb}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$
$3f_{orb}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$
f_{cal}	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$
$2f_{cal}$	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-10}$
$3f_{cal}$	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-10}$
f_{TM}	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-9}$
f'_{TM}	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$
$2f'_{TM}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$
$3f'_{TM}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-10}$

A.4 Paramètres de l'instrument

A.4.1 Valeur maximale par construction des paramètres à étalonner

$$\begin{aligned}
 |\Delta_{x,y,z}| &\leq 20 \mu\text{m} \\
 |a_{c11}| - 1 &\leq 0,01 \\
 |a_{d11}| &\leq 0,01 \\
 |\theta_{cy,z}| &\leq 2,5 \text{ mrad} \\
 |\theta_{dy,z}| &\leq 1,5 \text{ mrad} \\
 |\eta_{cy,z}| &\leq 0,1 \text{ mrad} \\
 |\eta_{dy,z}| &\leq 0,1 \text{ mrad} \\
 |K_{2cxx}| &\leq 14000 \text{ s}^2/\text{m} \\
 |K_{2dxx}| &\leq 6000 \text{ s}^2/\text{m}
 \end{aligned}$$

A.4.2 Biais

Le biais de lecture de l'instrument pour le capteur k ($k = 1, 2$) est spécifié à :

$$b_{0,x_k} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-2}$$

Les spécifications sur les forces électrostatiques perturbatrices, assimilées à un biais b_1 sont pour les axes linéaires :

$$\begin{aligned} b_{1,x_k} &= 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ms}^{-2} \\ b_{1,y_k} &= 5 \cdot 10^{-7} \text{ms}^{-2} \\ b_{1,z_k} &= 5 \cdot 10^{-7} \text{ms}^{-2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Et pour les axes angulaires :

$$\begin{aligned} b_{1,\varphi_k} &= 5 \cdot 10^{-7} \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ b_{1,\theta_k} &= 5 \cdot 10^{-6} \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ b_{1,\psi_k} &= 5 \cdot 10^{-6} \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Dans le simulateur d'étalonnage, nous utilisons ces spécifications pour l'amplitude du biais. Le signe des différentes composantes du biais est tiré aléatoirement.

A.4.3 Bruit

Le bruit de l'instrument est défini à partir du gabarit présenté figure A.1. Le bruit est obtenu par tirage aléatoire à partir de ce gabarit dans l'espace de Fourier, puis une transformée de Fourier inverse permet d'obtenir le signal de bruit en temporel. Les caractéristiques du gabarit (fréquences de coupure et amplitude) sont définies dans le tableau suivant, en fonction de l'axe considéré :

Axe	B (en $\text{ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$)	F1 (en Hz)	F2 (en Hz)	F3 (en Hz)
\vec{X} en linéaire	10^{-12}	10^{-4}	10^{-3}	$2 \cdot 10^{-2}$
\vec{Y} et \vec{Z} en linéaire	10^{-11}	10^{-4}	10^{-3}	1
\vec{X} en angulaire	10^{-10}	10^{-4}	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-2}$
\vec{Y} et \vec{Z} en angulaire	10^{-10}	10^{-4}	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-2}$

Afin d'éviter le repliement de spectre, un filtre anti-repliement est placé en sortie de l'instrument pour permettre le sous-échantillonnage de la mesure qui passe de 1;kHz (fréquence de la boucle de l'accéléromètre) à 4 Hz (fréquence de la mesure scientifique). Les simulateurs que nous avons développés ne simulent pas la boucle de l'accéléromètre et travaillent donc directement à 4 Hz. Néanmoins, le bruit étant simulé sur tout le spectre des fréquence, il est nécessaire de lui appliquer le filtre anti-repliement. Ce dernier est composé de trois filtres de Butterworth passe-bas de fréquence de coupure à 1 Hz placés en série : deux filtres d'ordre 2 et un filtre d'ordre 1. Après filtrage, nous obtenons le bruit présenté figure A.2.

A.5 Paramètres de la mesure

Fréquence d'échantillonnage de la mesure :

$$f_e = 4 \text{ Hz}$$

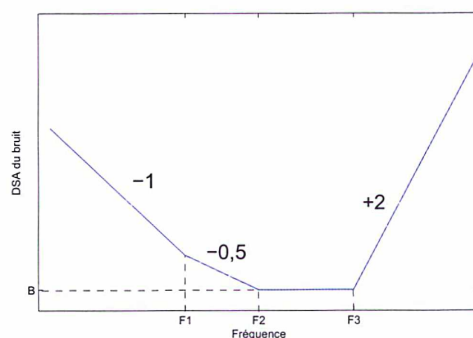


FIGURE A.1 – Gabarit de bruit aléatoire de l'instrument ($\sqrt{\text{densité spectrale de puissance}}$ en $\text{ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$).

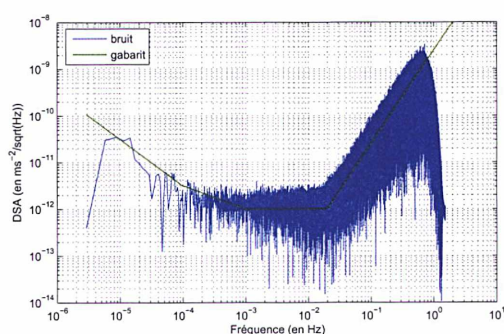


FIGURE A.2 – Bruit de l'instrument.

A.6 Mouvements d'étalonnage

Fréquences d'oscillation du satellite ou des masses d'épreuve :

$$f_{cal/ang} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

$$f_{cal/lin} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

$$f_{TM} = 8,2 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

$$f'_{TM} = 22,5 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

Amplitude des oscillations angulaires du satellite :

$$\alpha_0 = 0,05 \text{ rad}$$

Amplitude de l'accélération pour l'oscillation linéaire du satellite :

$$C_{eta,x,y,z} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$$

Amplitude d'oscillation des masses d'épreuve :

$$\Delta_{TM} = 6 \mu\text{m}$$

$$\Delta'_{TM} = 5 \mu\text{m}$$

A.7 Gradient de gravité

A.7.1 Expression du gradient de gravité

Soit V le potentiel gravitationnel de la Terre. Les composantes du gradient de gravité correspondent aux dérivées secondes de ce potentiel par rapport aux coordonnées rectangulaires x_i :

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$$

On approxime le potentiel gravitationnel par son terme monopolaire (dans les calculs numériques, des ordres plus élevés du potentiel sont pris en compte) :

$$V = \frac{\mu}{r}$$

avec :

- $\mu = \mathcal{G} \cdot M_T$, où \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation et M_T la masse de la Terre ;
- r la distance entre le satellite et le centre de la Terre.

Dans le repère instrument, les coordonnées du satellite sont de la forme :

$$\begin{cases} x = r \cos(u + \phi) \\ y = 0 \\ z = r \sin(u + \phi) \end{cases}$$

où :

- u représente la phase du satellite (qui varie à la fréquence orbitale) ;
- ϕ est lié à l'attitude du satellite (constante si le pointage est inertiel)

La partie dominante du tenseur gradient de gravité prend donc la forme :

$$[T] = \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cos(2(u + \phi)) + \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \sin(2(u + \phi)) \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} \sin(2(u + \phi)) & 0 & -\frac{3}{2} \sin(2(u + \phi)) + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Il existe de plus des composantes beaucoup plus faibles à la fréquence orbitale, proportionnelles à l'excentricité de l'orbite.

A.7.2 Valeurs numériques

Valeurs des composantes de gradient de gravité à l'altitude prévue pour le satellite en repère instrument dans le cas inertiel, avec une excentricité de l'orbite de $e = 5 \cdot 10^{-3}$ pour différentes fréquences :

$$\begin{aligned} [T](DC) &= \begin{bmatrix} 5,6 \cdot 10^{-7} & 3,4 \cdot 10^{-10} & 1,4 \cdot 10^{-10} \\ 3,4 \cdot 10^{-10} & -1,1 \cdot 10^{-6} & 6,3 \cdot 10^{-10} \\ 1,4 \cdot 10^{-10} & 6,3 \cdot 10^{-10} & 5,6 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \text{ s}^{-2} \\ [T](f_{orb}) &= \begin{bmatrix} 4,2 \cdot 10^{-9} & 3,0 \cdot 10^{-11} & 4,3 \cdot 10^{-9} \\ 3,0 \cdot 10^{-11} & 1,7 \cdot 10^{-8} & 3,4 \cdot 10^{-11} \\ 4,3 \cdot 10^{-9} & 3,4 \cdot 10^{-11} & 1,3 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} \text{ s}^{-2} \\ [T](2f_{orb}) &= \begin{bmatrix} 1,7 \cdot 10^{-6} & 1,1 \cdot 10^{-9} & 1,7 \cdot 10^{-6} \\ 1,1 \cdot 10^{-9} & 3,7 \cdot 10^{-9} & 1,1 \cdot 10^{-9} \\ 1,7 \cdot 10^{-6} & 1,1 \cdot 10^{-9} & 1,7 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

A.7.3 Prise en compte de l'attitude du satellite

Le gradient de gravité est introduit dans le simulateur via un fichier de données fourni par l'Observatoire de la Côte d'Azur qui contient les valeurs des composantes de $[T]$ pour chaque point de l'orbite prévue du satellite, échantillonnée à 4 Hz. Elles ont été calculées avec un développement en harmoniques sphériques d'ordre 5 (suffisant ici, mais le développement est disponible jusqu'à l'ordre 50) du potentiel gravitationnel de la Terre. Le gradient de gravité est exprimé dans le repère orbital (repère lié au mouvement orbital du satellite), et doit donc être exprimé dans le repère instrument. Lors de ce passage, il est nécessaire de tenir compte de l'éventuelle oscillation angulaire du satellite pour les besoins de l'étalonnage.

Si le satellite oscille d'un angle α , le gradient de gravité en repère instrument est modifié par rapport au gradient de gravité obtenu en repère instrument lorsque le satellite est en pointage inertiel $[T_{in}]$:

$$[T_{osc}] = [R_i(\alpha)] \cdot [T_{in}] \cdot [R_i(\alpha)]$$

où $[R_i(\alpha)]$ est la matrice de rotation d'un angle α autour de l'axe i .

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cadre des mouvements d'étalonnage, l'angle d'inclinaison du satellite α varie au cours du temps : $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(2\pi f_{cal/ang}t)$. Cet angle reste petit devant 1 ($\alpha_0 = 0,05$ rad), on peut donc approximer : $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx \alpha$.

A.8 Paramètres de modélisation de la boucle de compensation de traînée

Nous décrivons dans cette partie les paramètres utilisés dans le simulateur d'étalonnage pour modéliser la boucle de compensation de traînée.

Les caractéristiques du Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite (AOCS) sont fournies par le CNES en charge de ce sous-système ([37])

A.8.1 Hybridation de la mesure accélérométrique et de la mesure du capteur stellaire

L'attitude du satellite est évaluée par le calculateur du système AOCS par filtrage passe-haut de l'accélération angulaire intégrée deux fois mesurée par l'instrument et filtrage passe-bas de l'attitude mesurée par le capteur stellaire.

$$\Phi_{hyb} = \frac{1}{s^2} \frac{s^2}{s^2 + 2a_{DF}\omega_{DF}s + \omega_{DF}^2} \Gamma_{mes,c,ang} + \frac{\omega_{SST}^2}{s^2 + 2a_{SST}\omega_{SST}s + \omega_{SST}^2} \Phi_{SST}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{SST},x} &= 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\
 \omega_{\text{SST},y} &= 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\
 \omega_{\text{SST},z} &= 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\
 a_{\text{SST}} &= 0,5 \\
 \omega_{\text{DF},x} &= 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\
 \omega_{\text{DF},y} &= 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\
 \omega_{\text{DF},z} &= 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\
 a_{\text{DF}} &= 0,7
 \end{aligned}$$

A.8.2 Fonction de transfert de l'AACS

L'AACS est implémenté avec deux fonctions de transfert d'ordre 4 : une pour les trois axes linéaires, et une pour les trois rotations.

Pour le calcul de l'accélération compensatrice linéaire, la fonction de transfert est un filtre d'ordre 4 et se présente sous la forme d'une équation d'état discrétisée à 4 Hz :

$$\begin{aligned}
 y(n) &= Cx(n) + Du(n) \\
 x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n)
 \end{aligned}$$

où u est le vecteur d'entrée, y le vecteur de sortie et x un vecteur d'état, avec :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0,99905470502998 & 0,03122046651343 & 0,00690080373107 & 0,03460954738100 \\ -0,00000000054905 & 0,99905470502998 & 0,00230417216593 & 0,01155609677633 \\ 0,0 & 0,0 & 0,99905884598869 & 0,05005008301500 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,99905056552422 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0,00916518167809 \\ 0,00306024592806 \\ 0,01325409138658 \\ 0,52938171698774 \end{bmatrix} \\
 C &= [0.07267333326016 \quad 0.00113498413113 \quad 0.02677164341920 \quad 0.13426761541016] \\
 D &= [0.03555628957442]
 \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'accélération compensatrice angulaire, un contrôleur d'ordre 4 est utilisé. Ses caractéristiques pôles-zéros-gain sont synthétisées dans le tableau suivant :

Zéros	Pôles	Gain
-0,045	-5	2,86
-0,045	-5	
-0,045	-0,0008+0,003i	
	-0,0008-0,003i	

A.8.3 Senseur stellaire

Le capteur stellaire est modélisé dans le simulateur d'étalonnage par un biais, une erreur harmonique et un bruit.

Le biais du capteur stellaire est :

$$b_{0,sst} = \begin{bmatrix} 23,8 \\ 19,1 \\ 3,8 \end{bmatrix} \mu\text{rad}$$

La contribution de l'erreur harmonique aux différentes fréquences est donnée dans le tableau suivant, en μrad , lorsque le satellite est en mode inertiel :

Axe	f_{orb}	$2f_{orb}$	$3f_{orb}$	$4f_{orb}$	f_{pix}
X	42	14	15	11	20
Y	60	86	21	16	123
Z	42	14	15	11	20

Lorsque le satellite est en mouvement d'oscillation angulaire pour l'étalonnage, s'y ajoutent les contributions suivantes :

- Contribution harmonique additionnelle du capteur stellaire lorsque le satellite oscille angulairement autour de \vec{X} à la fréquence $f_{cal/ang}$ en μrad :

Axe	$f_{cal/ang}$	$2f_{cal/ang}$	$3f_{cal/ang}$	$4f_{cal/ang}$	$5f_{cal/ang}$
X	14	11	6	9	7
Y	257	188	156	81	109
Z	14	11	6	9	7

- Contribution harmonique additionnelle du capteur stellaire lorsque le satellite oscille angulairement autour de \vec{Y} à la fréquence $f_{cal/ang}$ en μrad :

Axe	$f_{cal/ang}$	$2f_{cal/ang}$	$3f_{cal/ang}$	$4f_{cal/ang}$	$5f_{cal/ang}$
X	18	7	12	9	11
Y	67	86	84	124	65
Z	18	7	12	9	11

- Contribution harmonique additionnelle du capteur stellaire lorsque le satellite oscille angulairement autour de \vec{Z} à la fréquence $f_{cal/ang}$ en μrad :

Axe	$f_{cal/ang}$	$2f_{cal/ang}$	$3f_{cal/ang}$	$4f_{cal/ang}$	$5f_{cal/ang}$
X	12	13	5	3	7
Y	162	220	79	136	50
Z	12	13	5	3	7

L'erreur stochastique du capteur stellaire est la superposition de deux bruits blancs : un bruit de fond et un bruit de pixelisation pour les fréquences inférieures à la fréquence de pixelisation. Les gabarits de ces bruits sont présentés figure A.3.

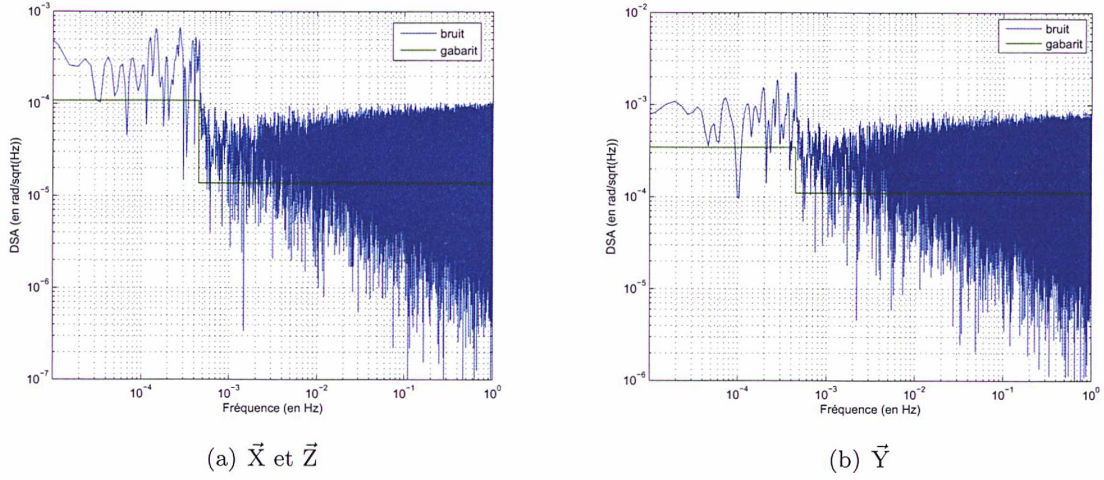


FIGURE A.3 – Bruit du capteur stellaire.

A.8.4 Système de propulsion

Chaque micro-propulseur produit un bruit aléatoire défini par le gabarit de la figure A.4. Le bruit est obtenu par définition du gabarit enveloppe dans l'espace de Fourier, à partir duquel on définit un gabarit moyen, tirage aléatoire puis transformée de Fourier inverse du résultat. Le bruit de propulsion global sur un axe est proportionnel au bruit d'un micro-propulseur, le facteur de proportionnalité dépendant de la position et de l'alignement des huit micro-propulseurs. Les valeurs de ces coefficients sont :

Axe	Coefficient de proportionnalité
X_{lin}	0,97
Y_{lin}	2,30
Z_{lin}	1,33
X_{ang}	1,24
Y_{ang}	1,08
Z_{ang}	1,04

La matrice de sensibilité du système de propulsion s'écrit :

$$[M_{propu}] = \begin{bmatrix} K_{x,propu} & \psi_{propu} & -\theta_{propu} \\ -\psi_{propu} & K_{y,propu} & \phi_{propu} \\ \theta_{propu} & -\phi_{propu} & K_{z,propu} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} |K_{x,y,z,propu}| - 1 &\leq 0,1 \\ |\phi_{propu}, \theta_{propu}, \psi_{propu},| &\leq 0,01 \end{aligned}$$

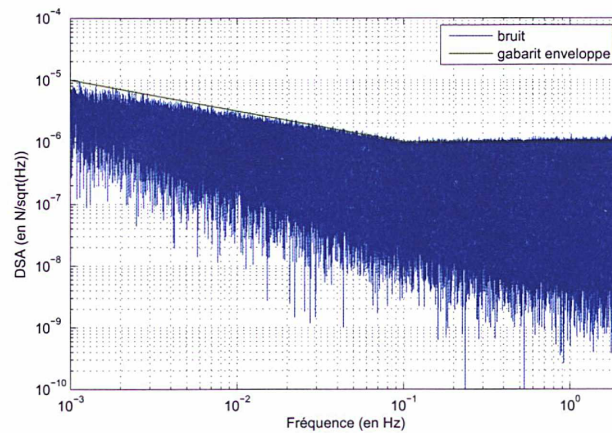


FIGURE A.4 – Bruit de poussée d'un micro-propulseur.

A.8.5 Environnement du satellite

Les perturbations harmoniques dues à l'environnement extérieur sont prises en compte dans le simulateur d'étalonnage sous la forme de forces et de moments angulaires.

Les contributions des forces sont données dans le tableau suivant, en μN , pour leur contribution harmonique :

Axe	f_{orb}	$2f_{orb}$	$3f_{orb}$	$4f_{orb}$	$5f_{orb}$	$6f_{orb}$	$7f_{orb}$	$8f_{orb}$	$9f_{orb}$
X	16	6	2	1	1	1	1	1	1
Y	5	4	2,5	1,5	1	1	1	1	1
Z	12	2	2	2	1	1	1	1	1

Les contributions harmoniques des moments perturbateurs extérieurs sur le satellite sont fournis en $\mu\text{N} \cdot \text{m}$:

Axe	f_{orb}	$2f_{orb}$	$3f_{orb}$	$4f_{orb}$	$5f_{orb}$	$6f_{orb}$	$7f_{orb}$	$8f_{orb}$	$9f_{orb}$
X	1	16	2	1	1	1	1	1	1
Y	1	8	2	16	3	3	3	3	3
Z	1	14	2	1	1	1	1	1	1

Annexe B

Perturbations numériques de l'étalonnage

Dans le chapitre 4, nous avons étudié les effets numériques qui viennent perturber l'estimation de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. Ces effets apparaissent du fait de la durée finie de la mesure dans le temps. Comme les signaux sont à support compact, deux signaux monochromatiques à des fréquences distinctes ne sont pas forcément décorrélés. Ainsi, une perturbation à une fréquence quelconque se projette sur la fréquence du Principe d'Équivalence.

Des effets similaires apparaissent durant le traitement des données pour l'étalonnage en orbite de l'instrument. Ces effets ne sont pas critiques, mais ont un impact sur l'estimation du paramètre à étalonner. Afin de les quantifier, des méthodes similaires à celles utilisées dans le chapitre 4 ont été utilisées. On s'intéresse dans cette annexe aux gabarits de spécification rendant compte des taux de projection des perturbations à toutes les fréquences sur les fréquences d'étalonnage, ainsi qu'aux réjections aux valeurs singulières de l'étalonnage.

B.1 Excentrement suivant \vec{X} et \vec{Z}

On s'intéresse aux projections à la fréquence $2f_{orb}$. La courbe des taux de projection obtenue et le gabarit défini à partir de cette dernière sont présentés figure B.1. Les valeurs des réjections (inverse de la projection) aux valeurs singulières sont présentées dans le tableau B.1. Comme le satellite est en pointage inertiel, les fréquences singulières sont les mêmes que pour l'extraction du paramètre de violation du Principe d'Équivalence δ_{EP} (voir partie 4.1.2.1). En effets, les perturbateurs principaux sont liés au mouvement orbital du satellite, et leurs fréquences sont des multiples de la fréquence orbitale f_{orb} . Cependant, on considère ici des sessions d'étalonnage de ces deux paramètres indépendantes des sessions de test du Principe d'Équivalence et présentant une durée totale de seulement 10 orbites.

B.2 Paramètres de la matrice de sensibilité commune a_{c12} et a_{c13}

Pour étalonner les termes de couplages et de défauts d'alignement a_{c12} et a_{c13} , on fait osciller les masses d'épreuve de l'instrument pour moduler le signal de gradient de gravité à $2f_{orb}$. Le signal d'étalonnage est extrait à $f_{TM} + 2f_{orb}$.

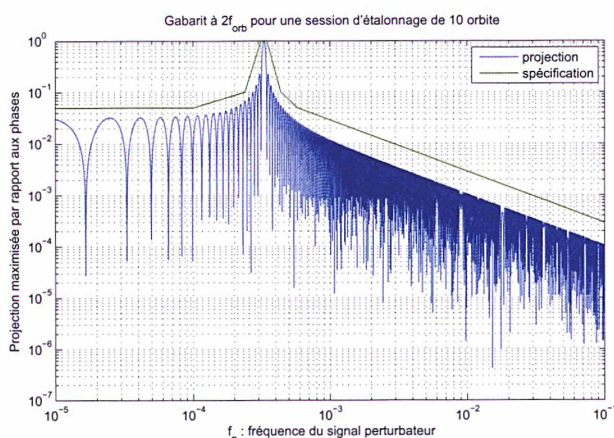


FIGURE B.1 – Courbe du taux de projection à $2f_{orb}$ en fonction de la fréquence perturbatrice et gabarit de spécification pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

Fréquence	Réjection à $2f_{orb}$
0	122002
f_{orb}	34564
$2f_{orb}$	1
$3f_{orb}$	12124
$4f_{orb}$	16071
$5f_{orb}$	17849
$6f_{orb}$	18803
$7f_{orb}$	19374

TABLE B.1 – Valeurs des réjections (inverse de la projection) à $2f_{orb}$ pour les fréquences singulières pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

La courbe des taux de projection obtenue pour l'étalonnage sur 10 orbites de a_{c13} et le gabarit défini à partir de cette dernière sont présentés figure B.2. Les valeurs des réjections (inverse de la projection) aux valeurs singulières sont présentées dans le tableau B.2. Le mouvement des masses d'épreuve et le mouvement orbitale du satellite provoquent des perturbations d'amplitude importante, c'est pourquoi on s'intéresse aux réjections pour les fréquences qui sont des combinaisons linéaires de f_{orb} et f_{TM} . Les résultats pour l'étalonnage de a_{c12} se déduisent de ceux de a_{c13} : l'étalonnage de ce paramètre durant quatre fois plus longtemps, les résultats seront quatre fois meilleurs (voir partie 4.1.1.4).

B.3 Excentrement suivant \vec{Y} et paramètres de la matrice de sensibilité différentielle

Pour l'étalonnage de l'excentrement Δ_y , le satellite oscille angulairement à la fréquence d'étalonnage $f_{cal/ang}$. Il oscille linéairement à $f_{cal/lin}$ pour les sessions d'étalonnage du facteur d'échelle différentiel a'_{d11} , et des termes de couplages et de défauts d'alignement différentiels a_{d12} et a_{d13} . Comme les fréquences d'oscillation linéaire et angulaire sont les mêmes, une seule étude est nécessaire pour ces deux configurations.

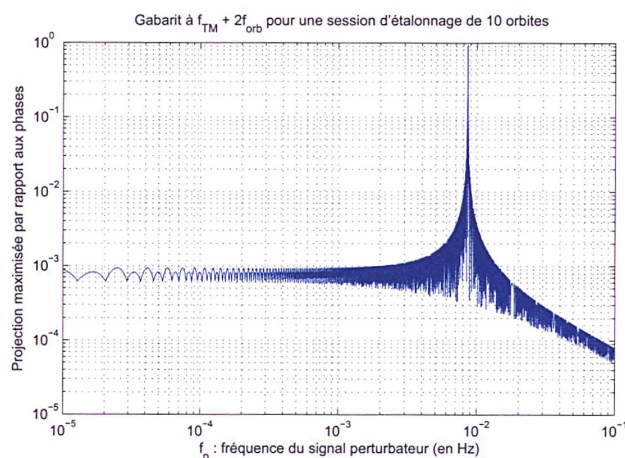


FIGURE B.2 – Courbe du taux de projection à $f_{TM} + 2f_{orb}$ en fonction de la fréquence perturbatrice et gabarit de spécification pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

On étudie donc dans cette partie les projections des perturbations à la fréquence $f_{cal/ang} = f_{cal/lin}$. La courbe des taux de projection obtenue et le gabarit défini à partir de cette dernière sont présentés figure B.3. Les valeurs des réjections (inverse de la projection) aux valeurs singulières sont présentées dans le tableau B.3. En plus du mouvement orbital du satellite, ses mouvements d'oscillation linéaires ou angulaires créent des perturbations importantes (effets de variation thermique par exemple) à la fréquence d'oscillation. Les fréquences des perturbateurs principaux correspondent donc à des combinaisons linéaires de la fréquence orbitale f_{orb} et de la fréquence d'oscillation linéaire ou angulaire du satellite $f_{cal} = f_{cal/lin} = f_{cal/ang}$. Ce sont ces fréquences pour lesquelles on calcule la valeur de la réjection à la fréquence d'extraction du paramètre à étalonner.

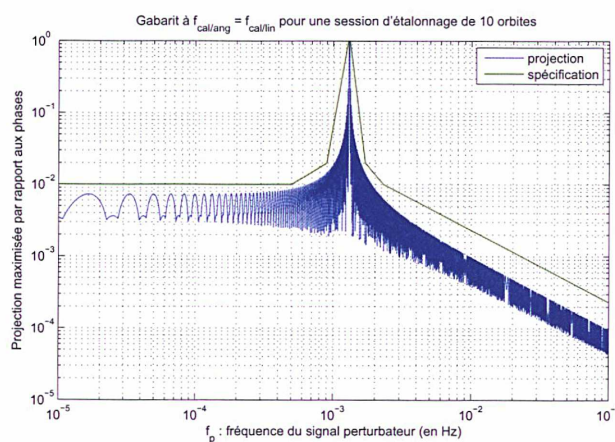


FIGURE B.3 – Courbe du taux de projection à $f_{cal/ang} = f_{cal/lin}$ en fonction de la fréquence perturbatrice et gabarit de spécification pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

B.4 Terme quadratique différentiel

Pour l'étalonnage de K_{2dxx} , le satellite oscille à $f_{cal/lin}$, mais le signal est étudié à deux fois cette fréquence afin de voir l'effet du terme quadratique. On s'intéresse donc ici aux effets numériques à $2f_{cal/lin}$. La courbe des taux de projection obtenue et le gabarit défini à partir de cette dernière sont présentés figure B.4. Les valeurs des réjections (inverse de la projection) aux valeurs singulières sont présentées dans le tableau B.4. Les fréquences singulières sont ici les mêmes que pour les paramètres de la matrices de sensibilité différentielle, car le mouvement du satellite est le même. En revanche, on s'intéresse cette fois aux réjections de ces fréquences au double de la fréquence d'oscillation du satellite.

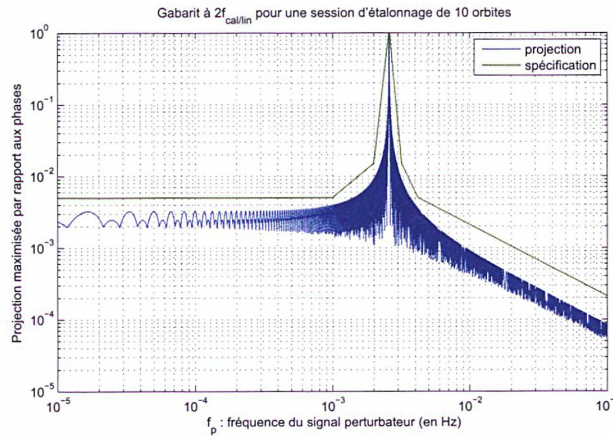


FIGURE B.4 – Courbe du taux de projection à $2f_{cal/lin}$ en fonction de la fréquence perturbatrice et gabarit de spécification pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

B.5 Termes quadratiques de chaque capteur

Pour l'estimation du terme quadratique $K_{2cxx} = \frac{1}{2}(K_{21xx} + K_{22xx})$, on étalonne séparément les termes quadratiques de chaque capteur, K_{21xx} et K_{22xx} . Pour cela, les masses d'épreuve oscille à la fréquence f'_{TM} . Comme on recherche l'effet d'un terme quadratique, la mesure est étudiée à la fréquence double, $2f'_{TM}$. C'est donc à cette fréquence que se font sentir les perturbations numériques qui perturbent les estimations de ces termes, tandis que les perturbateurs principaux se trouvent aux combinaisons linéaire de f_{orb} et f'_{TM} . La courbe des taux de projection obtenue et le gabarit défini à partir de cette dernière sont présentés figure B.5. Les valeurs des réjections (inverse de la projection) aux valeurs singulières sont présentées dans le tableau B.5.

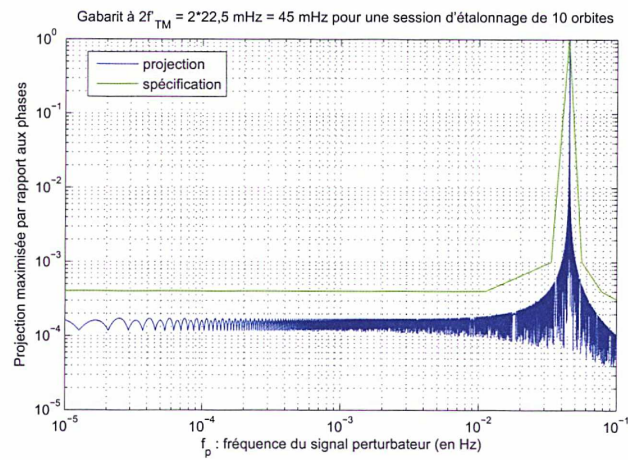


FIGURE B.5 – Courbe du taux de projection à $2f'_{TM}$ en fonction de la fréquence perturbatrice et gabarit de spécification pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

Fréquence	Réjection à $f_{\text{TM}} + 2f_{\text{orb}}$
0	1176
f_{orb}	1176
$2f_{\text{orb}}$	1175
$3f_{\text{orb}}$	1173
$4f_{\text{orb}}$	1170
$f_{\text{TM}} - 4f_{\text{orb}}$	2882
$f_{\text{TM}} - 3f_{\text{orb}}$	2910
$f_{\text{TM}} - 2f_{\text{orb}}$	2938
$f_{\text{TM}} - f_{\text{orb}}$	2966
f_{TM}	2994
$f_{\text{TM}} + f_{\text{orb}}$	3022
$f_{\text{TM}} + 2f_{\text{orb}}$	1
$f_{\text{TM}} + 3f_{\text{orb}}$	3078
$f_{\text{TM}} + 4f_{\text{orb}}$	3106
$2f_{\text{TM}} - 4f_{\text{orb}}$	1497
$2f_{\text{TM}} - 3f_{\text{orb}}$	1525
$2f_{\text{TM}} - 2f_{\text{orb}}$	1553
$2f_{\text{TM}} - f_{\text{orb}}$	1580
$2f_{\text{TM}}$	1608
$2f_{\text{TM}} + f_{\text{orb}}$	1635
$2f_{\text{TM}} + 2f_{\text{orb}}$	1662
$2f_{\text{TM}} + 3f_{\text{orb}}$	1689
$2f_{\text{TM}} + 4f_{\text{orb}}$	1716
$3f_{\text{TM}} - 4f_{\text{orb}}$	2523
$3f_{\text{TM}} - 3f_{\text{orb}}$	2547
$3f_{\text{TM}} - 2f_{\text{orb}}$	2572
$3f_{\text{TM}} - f_{\text{orb}}$	2597
$3f_{\text{TM}}$	2621
$3f_{\text{TM}} + f_{\text{orb}}$	2645
$3f_{\text{TM}} + 2f_{\text{orb}}$	2670
$3f_{\text{TM}} + 3f_{\text{orb}}$	2694
$3f_{\text{TM}} + 4f_{\text{orb}}$	2719
$4f_{\text{TM}}$	4109
$5f_{\text{TM}}$	6687
$6f_{\text{TM}}$	6504

TABLE B.2 – Valeurs des réjections (inverse de la projection) à $f_{\text{TM}} + 2f_{\text{orb}}$ pour les fréquences singulières pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

Fréquence	Réjection à f_{cal}
0	137
f_{orb}	135
$2f_{orb}$	128
$3f_{orb}$	117
$f_{cal} - 4f_{orb}$	453
$4f_{orb}$	102
$f_{cal} - 3f_{orb}$	491
$f_{cal} - 2f_{orb}$	529
$f_{cal} - f_{orb}$	567
f_{cal}	1
$f_{cal} + f_{orb}$	642
$f_{cal} + 2f_{orb}$	679
$f_{cal} + 3f_{orb}$	717
$2f_{cal} - 4f_{orb}$	128
$f_{cal} + 4f_{orb}$	754
$2f_{cal} - 3f_{orb}$	160
$2f_{cal} - 2f_{orb}$	192
$2f_{cal} - f_{orb}$	223
$2f_{cal}$	254
$2f_{cal} + f_{orb}$	285
$2f_{cal} + 2f_{orb}$	315
$2f_{cal} + 3f_{orb}$	346
$3f_{cal} - 4f_{orb}$	303
$2f_{cal} + 4f_{orb}$	376
$3f_{cal} - 3f_{orb}$	323
$3f_{cal} - 2f_{orb}$	344
$3f_{cal} - f_{orb}$	364
$3f_{cal}$	384
$3f_{cal} + f_{orb}$	404
$3f_{cal} + 2f_{orb}$	423
$3f_{cal} + 3f_{orb}$	443
$3f_{cal} + 4f_{orb}$	462
$4f_{cal} - 3f_{orb}$	1131
$4f_{cal} - 2f_{orb}$	1170
$4f_{cal} - f_{orb}$	1209
$4f_{cal}$	1248
$4f_{cal} + f_{orb}$	1286
$4f_{cal} + 2f_{orb}$	1324
$4f_{cal} + 3f_{orb}$	1363
$5f_{cal}$	795
$6f_{cal}$	881
$7f_{cal}$	1950
$8f_{cal}$	1186

TABLE B.3 – Valeurs des réjections (inverse de la projection) à $f_{cal} = f_{cal/ang} = f_{cal/lin}$ pour les fréquences singulières pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

Fréquence	Réjection à $2f_{cal}/lin$
0	307
f_{orb}	306
$2f_{orb}$	302
$3f_{orb}$	296
$f_{cal} - 4f_{orb}$	364
$4f_{orb}$	287
$f_{cal} - 3f_{orb}$	339
$f_{cal} - 2f_{orb}$	312
$f_{cal} - f_{orb}$	284
f_{cal}	255
$f_{cal} + f_{orb}$	225
$f_{cal} + 2f_{orb}$	194
$f_{cal} + 3f_{orb}$	163
$2f_{cal} - 4f_{orb}$	874
$f_{cal} + 4f_{orb}$	130
$2f_{cal} - 3f_{orb}$	905
$2f_{cal} - 2f_{orb}$	937
$2f_{cal} - f_{orb}$	968
$2f_{cal}$	1
$2f_{cal} + f_{orb}$	1030
$2f_{cal} + 2f_{orb}$	1061
$2f_{cal} + 3f_{orb}$	1092
$3f_{cal} - 4f_{orb}$	124
$2f_{cal} + 4f_{orb}$	1123
$3f_{cal} - 3f_{orb}$	154
$3f_{cal} - 2f_{orb}$	183
$3f_{cal} - f_{orb}$	211
$3f_{cal}$	239
$3f_{cal} + f_{orb}$	266
$3f_{cal} + 2f_{orb}$	293
$3f_{cal} + 3f_{orb}$	319
$3f_{cal} + 4f_{orb}$	344
$4f_{cal} - 3f_{orb}$	439
$4f_{cal} - 2f_{orb}$	471
$4f_{cal} - f_{orb}$	502
$4f_{cal}$	533
$4f_{cal} + f_{orb}$	564
$4f_{cal} + 2f_{orb}$	594
$4f_{cal} + 3f_{orb}$	625
$5f_{cal}$	1168
$6f_{cal}$	800
$7f_{cal}$	1269
$8f_{cal}$	1490

TABLE B.4 – Valeurs des réjections (inverse de la projection) à $2f_{cal}/lin$ pour les fréquences singulières pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

Fréquence	Réjection à $2f'_{\text{TM}}$
0	5312
f_{orb}	5312
$2f_{orb}$	5312
$3f_{orb}$	5311
$4f_{orb}$	5311
$f'_{\text{TM}} - 4f_{orb}$	5539
$f'_{\text{TM}} - 3f_{orb}$	5525
$f'_{\text{TM}} - f_{pix}$	4170
$f'_{\text{TM}} - 2f_{orb}$	5511
$f'_{\text{TM}} - f_{orb}$	5497
$f'_{\text{TM}} + f_{orb}$	5468
$f'_{\text{TM}} + 2f_{orb}$	5454
$f'_{\text{TM}} + 3f_{orb}$	5439
$f'_{\text{TM}} + 4f_{orb}$	5423
$2f'_{\text{TM}} - 4f_{orb}$	12812
$2f'_{\text{TM}} - 3f_{orb}$	12832
$2f'_{\text{TM}} - 2f_{orb}$	12851
$2f'_{\text{TM}} - f_{orb}$	12871
$2f'_{\text{TM}}$	1
$2f'_{\text{TM}} + f_{orb}$	12909
$2f'_{\text{TM}} + 2f_{orb}$	12929
$2f'_{\text{TM}} + 3f_{orb}$	12948
$2f'_{\text{TM}} + 4f_{orb}$	12967
$3f'_{\text{TM}} - 4f_{orb}$	7017
$3f'_{\text{TM}} - 3f_{orb}$	7055
$3f'_{\text{TM}} - 2f_{orb}$	7093
$3f'_{\text{TM}} - f_{orb}$	7130
$3f'_{\text{TM}}$	7168
$3f'_{\text{TM}} + f_{orb}$	7205
$3f'_{\text{TM}} + 2f_{orb}$	7243
$3f'_{\text{TM}} + 3f_{orb}$	7280
$3f'_{\text{TM}} + 4f_{orb}$	7317
$4f'_{\text{TM}}$	9033
$5f'_{\text{TM}}$	11055
$6f'_{\text{TM}}$	13251

TABLE B.5 – Valeurs des réjections (inverse de la projection) à $2f'_{\text{TM}}$ pour les fréquences singulières pour une session d'étalonnage de 10 orbites.

Annexe C

Utilisation de fenêtres d'apodisation

L'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence est attendu à la fréquence bien déterminée f_{EP} . Or, à cause de la durée finie de la mesure, une perturbation à une fréquence quelconque, différente de la fréquence f_{EP} , présente une composante plus ou moins importante à f_{EP} . Dans le chapitre 4, nous avons évalué le taux avec lequel une perturbation à une fréquence quelconque se projette sur f_{EP} . Ces résultats ont permis de définir des spécifications sur l'amplitude maximale tolérable pour les signaux perturbateurs sur tout le spectre. Ils ont été obtenus en fenêtrant les signaux par une simple fenêtre d'observation rectangulaire. Or, il est possible d'utiliser des fenêtres plus sophistiquées - appelées fenêtres d'apodisation - pour réduire considérablement le taux de projection des perturbations aux différentes fréquences sur la fréquence d'intérêt. Nous n'avons pas souhaité utiliser de telles fenêtres lors de la phase de définition des spécifications afin d'éviter d'imposer une contrainte *a priori* sur le futur traitement des données expérimentales. La restriction à une simple fenêtre rectangulaire nous a permis d'obtenir des résultats pire-cas. Cependant, il pourrait être bénéfique d'utiliser ce type de fenêtrage lors du traitement effectif des données de l'expérience MICROSCOPE.

C.1 Présentation des fenêtres d'apodisation

Trois types de fenêtres d'apodisation ont été testés pour extraire l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence de la mesure instrumentale : la fenêtre de Hann, la fenêtre de Hamming et la fenêtre de Blackman, dont les profils temporels et spectraux sont présentés par la figure C.1. Le principe de l'apodisation consiste à faire lentement converger le signal vers zéro aux extrémités de la fenêtre d'observation, ce qui permet de réduire les effets de bord. Comme on le voit sur la figure C.1, cela se traduit dans le domaine de Fourier par une atténuation des lobes secondaires beaucoup plus prononcée, et donc une réduction du taux de projection des perturbations dont les fréquences correspondent à ces lobes secondaires.

En revanche, le lobe principal subit un étalement plus important. Ainsi, les perturbations dont les fréquences se situent au voisinage immédiat de f_{EP} seront moins bien rejetées avec une fenêtre d'apodisation qu'avec une fenêtre rectangulaire.

Par ailleurs, les fenêtres d'apodisation réduisent la puissance du signal d'environ la moitié par rapport à la fenêtre rectangulaire. Cela dit, comme le signal de violation du Principe d'Équivalence ainsi que les signaux perturbateurs subissent ce même traitement, ils voient tous leur puissance divisée par deux. Le rapport signal à bruit reste donc inchangé.

Dans la suite de cette annexe, nous nous attacherons à quantifier ces effets afin d'évaluer

la pertinence de l'utilisation d'une fenêtre d'apodisation pour le traitement des données de l'expérience MICROSCOPE.

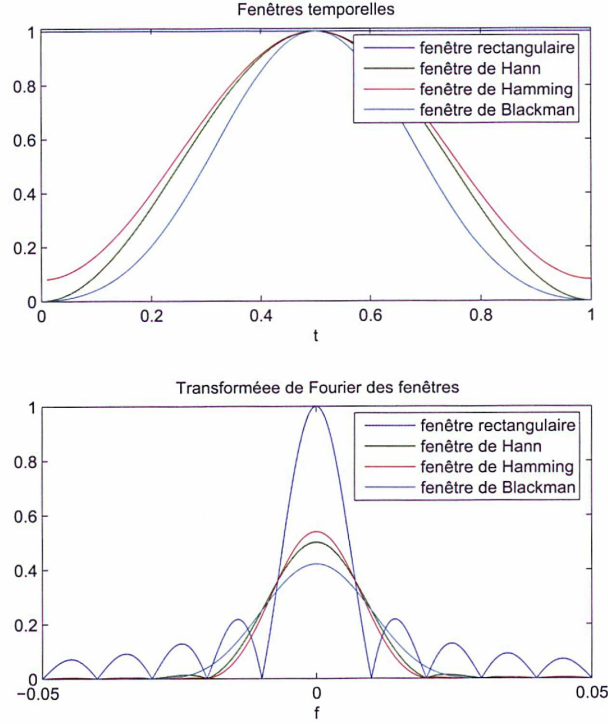


FIGURE C.1 – Comparaison entre trois types de fenêtre d'apodisation et la fenêtre rectangulaire, dans le domaine temporel et dans le domaine spectral.

C.2 Fenêtre de Hann

La fenêtre de Hann s'écrit :

$$W_{\text{Hann}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi \frac{t}{T})) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\omega_T t)) & \text{si } t \in [0, \dots, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec :

- T la durée de la mesure, soit 10 orbites pour les sessions d'étalonnage, 20 orbites pour les sessions scientifiques avec le satellite en mode spinné et 120 orbites pour les sessions scientifiques avec le satellite en pointage inertiel ;
- ω_T la pulsation telle que $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$.

C.2.1 Approximation analytique

Nous utilisons la même approximation analytique que dans la partie 4.1.1.1.a pour calculer le taux de projection $\tau = \frac{\langle s_{\text{EP}}, s_p \rangle}{\langle s_{\text{EP}}, s_{\text{EP}} \rangle}$ entre les signaux sinusoïdaux normalisés :

- signal de violation du Principe d'Équivalence : $s_{\text{EP}} = \sin(\omega_{\text{EP}} t + \varphi_{\text{EP}})$;

– signal perturbateur : $s_p = \sin(\omega_p t + \varphi_p)$.

Nous utilisons le produit scalaire dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned}
\langle s_{EP}, s_p \rangle &= \int_{t=0}^T s_{EP}(t) s_p(t) W_{Hann}(t) dt \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\omega_{EP} - \omega_p} - \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p - \omega_T} - \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_p + \omega_T} \right) \\
&\quad \times [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + (\varphi_{EP} - \varphi_p)) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p)] \\
&- \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\omega_{EP} + \omega_p} - \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p - \omega_T} - \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_p + \omega_T} \right) \\
&\quad \times [\sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + (\varphi_{EP} + \varphi_p)) - \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \tag{C.2}
\end{aligned}$$

et :

$$\langle s_{EP}, s_{EP} \rangle = \frac{T}{4} \tag{C.3}$$

Par rapport au résultat obtenu avec une fenêtre rectangulaire (équation 4.15), la puissance du signal est réduite de moitié.

Pour les perturbations aux basses fréquences, $\omega_p \ll \omega_{EP}$ et le taux de projection s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tau_{Hann,BF} &= \frac{1}{2T} \left(\frac{2}{\omega_{EP}} - \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_T} - \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_T} \right) \\
&\quad \times [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p) \\
&\quad - \sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + \varphi_{EP} + \varphi_p) + \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Or, d'après l'équation 4.18, on a avec une fenêtre rectangulaire pour les perturbations aux basses fréquences :

$$\begin{aligned}
\tau_{rect,BF} &= \frac{1}{T} \frac{1}{\omega_{EP}} \\
&\quad \times [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p) \\
&\quad - \sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + \varphi_{EP} + \varphi_p) + \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tau_{Hann,BF} &= \tau_{rect,BF} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega_{EP}} - \frac{1}{\omega_{EP} - \omega_T} - \frac{1}{\omega_{EP} + \omega_T} \right)}{\frac{1}{\omega_{EP}}} \\
&= \tau_{rect,BF} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{EP}}{\omega_T} \right)^2} \\
&\approx \tau_{rect,BF} \left(\frac{\omega_T}{\omega_{EP}} \right)^2 \tag{C.6}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour les sessions avec le satellite en pointage inertiel, qui durent 120 orbites, le gabarit de projection sur f_{EP} aux basses fréquences est multiplié par un facteur $7,0 \times 10^{-5}$ lorsqu'une fenêtre de Hann est utilisée par rapport au gabarit de projection obtenu aux basses fréquences avec une fenêtre rectangulaire ($\frac{\omega_{EP}}{\omega_T} = 120$).

Pour les sessions en mode spinné, la réduction du gabarit de projection se fait avec un facteur $1,2 \times 10^{-4}$ aux basses fréquences ($\frac{\omega_{EP}}{\omega_T} = 93$).

Pour les perturbations de fréquences élevées, $\omega_p \gg \omega_{EP}$ et le taux de projection peut s'approximer par :

$$\begin{aligned} \tau_{Hann,HF} &= \frac{1}{2T} \left(\frac{2}{\omega_p} - \frac{1}{\omega_p - \omega_T} - \frac{1}{\omega_p + \omega_T} \right) \\ &\quad \times [-\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T - \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p) \\ &\quad - \sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + \varphi_{EP} + \varphi_p) + \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \\ &= \tau_{rect,HF} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_T}\right)^2} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Ainsi, aux hautes fréquences, le gabarit de projection obtenu avec une fenêtre de Hann diminue d'un facteur d'autant plus important par rapport à celui obtenu sans fenêtre d'apodisation que la fréquence perturbatrice augmente.

C.2.2 Simulation numérique

Afin de vérifier ces développements analytiques, une simulation numérique est effectuée. Pour cela, nous calculons le taux de projection à f_{EP} en utilisant le produit scalaire défini par la formule 4.23. La transformée de Fourier de la fenêtre de Hann discrétisée à 4Hz s'écrit :

$$\forall f' \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}(W_{Hann})(f') = \frac{1}{2}\mathcal{F}(W_{rect})(f') - \frac{1}{4}\mathcal{F}(W_{rect})(f' - \frac{f_e}{N}) - \frac{1}{4}\mathcal{F}(W_{rect})(f' + \frac{f_e}{N}) \quad (C.8)$$

avec :

- \mathcal{F} la transformée de Fourier ;
- W_{rect} la fenêtre rectangulaire ;
- f_e la fréquence d'échantillonnage de la mesure ;
- N le nombre de mesures.

La formule de la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi ft + \varphi)$ implémentée pour la simulation est donc après fenêtrage :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(W_{\text{Hann}} \cdot s)(f_{\text{EP}}) &= \frac{1}{4i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} (N-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{4i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{8i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{8i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad - \frac{1}{8i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{8i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right)\right)}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Le résultat des simulations numériques est présenté sur la figure C.2 pour la courbe de projection et dans la quatrième colonne des tableaux C.2 et C.1 pour les résultats des taux de réjection aux fréquences singulières. On constate que le niveau du gabarit de projection est nettement réduit en utilisant la fenêtre de Hann par rapport à celui obtenu avec la fenêtre rectangulaire. Le rapport entre les deux gabarits correspond à celui prédit analytiquement dans la partie précédente.

C.3 Fenêtre de Hamming

La fenêtre de Hamming s'écrit :

$$W_{\text{Hamming}}(t) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 0,54 - 0,46 \cos(\omega_T t) & \text{si } t \in [0, \dots, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.10}$$

avec :

- T la durée de la mesure;
- ω_T la pulsation telle que $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$.

C.3.1 Approximation analytique

Dans le cadre de l'approximation analytique décrite dans la partie 4.1.1.1.a, le produit scalaire du signal perturbateur et du signal de violation du Principe d'Équivalence s'écrit en

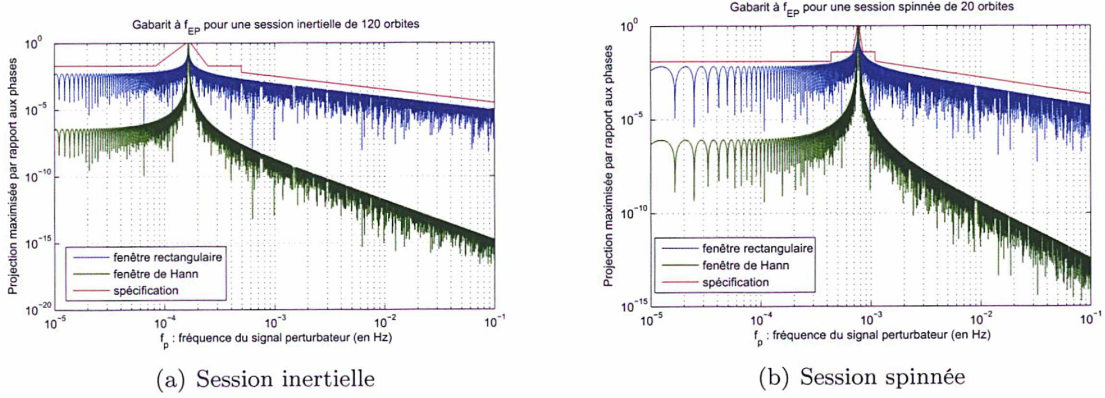


FIGURE C.2 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice avec utilisation d'une fenêtre rectangulaire et d'une fenêtre de Hann. (a) : satellite en pointage inertiel, session de 120 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

présence d'une fenêtre de Hamming :

$$\begin{aligned}
 \langle s_{EP}, s_p \rangle &= \int_{t=0}^T s_{EP}(t) s_p(t) W_{Hamming}(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{0,54}{\omega_{EP} - \omega_p} - \frac{0,46}{\omega_{EP} - \omega_p - \omega_T} - \frac{0,46}{\omega_{EP} - \omega_p + \omega_T} \right) \\
 &\quad \times [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + (\varphi_{EP} - \varphi_p)) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p)] \\
 &- \frac{1}{2} \left(\frac{0,54}{\omega_{EP} + \omega_p} - \frac{0,46}{\omega_{EP} + \omega_p - \omega_T} - \frac{0,46}{\omega_{EP} + \omega_p + \omega_T} \right) \\
 &\quad \times [\sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + (\varphi_{EP} + \varphi_p)) - \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \quad (C.11)
 \end{aligned}$$

et :

$$\langle s_{EP}, s_{EP} \rangle = 0,54 \frac{T}{2} \quad (C.12)$$

Pour les perturbations aux basses fréquences, $\omega_p \ll \omega_{EP}$ et le taux de projection s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \tau_{Hamming,BF} &= \frac{1}{0,54T} \left(\frac{0,54}{\omega_{EP}} - \frac{0,46}{\omega_{EP} - \omega_T} - \frac{0,46}{\omega_{EP} + \omega_T} \right) \\
 &\quad \times [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p) \\
 &\quad - \sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + \varphi_{EP} + \varphi_p) + \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \\
 &= \tau_{rect,BF} \frac{1}{0,54} \frac{0,54 - 0,08 \left(\frac{\omega_{EP}}{\omega_T} \right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_{EP}}{\omega_T} \right)^2} \\
 &\approx \tau_{rect,BF} \frac{1}{0,54} 0,08 \\
 &\approx 0,15 \cdot \tau_{rect,BF} \quad (C.13)
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour les sessions en mode inertiel de 120 orbites comme pour les sessions en mode spinné de 20 orbites, le gabarit de projection à f_{EP} pour les perturbations aux basses fréquences est réduit d'un facteur 0,15 en utilisant une fenêtre de Hamming plutôt qu'une fenêtre rectangulaire.

Pour les perturbations de fréquences élevées, $\omega_p \gg \omega_{EP}$ et le taux de projection peut s'approximer par :

$$\begin{aligned}
\tau_{Hamming, HF} &= \frac{1}{0,54T} \left(\frac{0,54}{\omega_p} - \frac{0,46}{\omega_p - \omega_T} - \frac{0,46}{\omega_p + \omega_T} \right) \\
&\quad \times [-\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T - \varphi_{EP} - \varphi_p) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p) \\
&\quad - \sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + \varphi_{EP} + \varphi_p) + \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \\
&= \tau_{rect, HF} \frac{1}{0,54} \frac{0,54 - 0,08 \left(\frac{\omega_p}{\omega_T} \right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_T} \right)^2} \\
&\approx 0,15 \cdot \tau_{rect, HF} \tag{C.14}
\end{aligned}$$

De même qu'aux basses fréquences, le rapport entre les taux de projection obtenus avec une fenêtre de Hamming et ceux obtenus avec une fenêtre rectangulaire converge rapidement vers 0,15 pour les signaux perturbateurs aux hautes fréquences.

C.3.2 Simulation numérique

Afin de vérifier ces développements analytiques, une simulation numérique est effectuée. Pour cela, nous calculons le taux de projection à f_{EP} en utilisant le produit scalaire défini par la formule 4.23. La transformée de Fourier de la fenêtre de Hamming discrétisée à 4Hz s'écrit :

$$\begin{aligned}
\forall f' \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}(W_{Hamming})(f') &= 0,54\mathcal{F}(W_{rect})(f') - \frac{0,46}{2}\mathcal{F}(W_{rect})(f' - \frac{f_e}{N}) \\
&\quad - \frac{0,46}{2}\mathcal{F}(W_{rect})(f' + \frac{f_e}{N}) \tag{C.15}
\end{aligned}$$

avec :

- f_e la fréquence d'échantillonnage de la mesure ;
- N le nombre de mesures.

La formule de la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi ft + \varphi)$ implémentée pour la simulation est donc après fenêtrage :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(W_{\text{Hann}} \cdot s)(f_{\text{EP}}) &= \frac{0,54}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} (N-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{0,54}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{0,46}{4i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{0,46}{4i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad - \frac{0,46}{4i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{0,46}{4i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right)\right)} \quad (\text{C.16})
\end{aligned}$$

Le résultat des simulations numériques est présenté sur la figure C.3 pour la courbe de projection, et dans la cinquième colonne des tableaux C.2 et C.1 pour les résultats des taux de réjection aux fréquences singulières. Le rapport entre les deux gabarits obtenus avec la fenêtre de Hamming et la fenêtre rectangulaire correspond à celui prédit analytiquement dans la partie précédente.

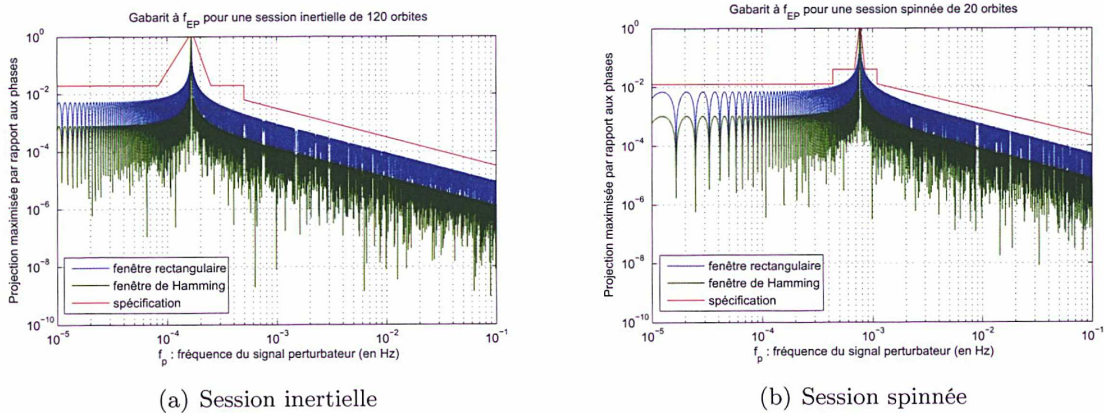


FIGURE C.3 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice avec utilisation d'une fenêtre rectangulaire et d'une fenêtre de Hamming. (a) : satellite en pointage inertiel, session de 120 orbites avec $f_{\text{EP}} = f_{\text{orb}} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{\text{EP}} = f_{\text{orb}} + f_{\text{spin}} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

C.4 Fenêtre de Blackman

La fenêtre de Blackman s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{Blackman}(t) &= \begin{cases} 0,42 - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 0,08 \cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right) & \text{si } t \in [0, \dots, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0,42 - \frac{1}{2} \cos(\omega_T t) + 0,08 \cos(2\omega_T t) & \text{si } t \in [0, \dots, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (C.17)$$

avec :

- T la durée de la mesure ;
- ω_T la pulsation telle que $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$.

C.4.1 Approximation analytique

Dans le cadre de l'approximation analytique décrite dans la partie 4.1.1.1.a, le produit scalaire du signal perturbateur et du signal de violation du Principe d'Équivalence s'écrit en présence d'une fenêtre de Blackman :

$$\begin{aligned} \langle s_{EP}, s_p \rangle &= \int_{t=0}^T s_{EP}(t) s_p(t) W_{Blackman}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{0,42}{\omega_{EP} - \omega_p} - \frac{\frac{1}{4}}{\omega_{EP} - \omega_p - \omega_T} - \frac{\frac{1}{4}}{\omega_{EP} - \omega_p + \omega_T} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{0,08}{2}}{\omega_{EP} - \omega_p - 2\omega_T} + \frac{\frac{0,08}{2}}{\omega_{EP} - \omega_p + 2\omega_T} \right) \\ &\quad \times [\sin((\omega_{EP} - \omega_p)T + (\varphi_{EP} - \varphi_p)) - \sin(\varphi_{EP} - \varphi_p)] \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{0,42}{\omega_{EP} + \omega_p} - \frac{\frac{1}{4}}{\omega_{EP} + \omega_p - \omega_T} - \frac{\frac{1}{4}}{\omega_{EP} + \omega_p + \omega_T} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{0,08}{2}}{\omega_{EP} + \omega_p - 2\omega_T} + \frac{\frac{0,08}{2}}{\omega_{EP} + \omega_p + 2\omega_T} \right) \\ &\quad \times [\sin((\omega_{EP} + \omega_p)T + (\varphi_{EP} + \varphi_p)) - \sin(\varphi_{EP} + \varphi_p)] \end{aligned} \quad (C.18)$$

et :

$$\langle s_{EP}, s_{EP} \rangle = 0,42 \frac{T}{2} \quad (C.19)$$

Pour les perturbations aux basses fréquences, $\omega_p \ll \omega_{EP}$ et le taux de projection s'écrit :

$$\tau_{Blackman,BF} = \tau_{rect,BF} \frac{1}{0,42} \left(0,42 - \frac{0,5}{1 - \left(\frac{\omega_T}{\omega_{EP}}\right)^2} + \frac{0,08}{1 - \left(\frac{2\omega_T}{\omega_{EP}}\right)^2} \right) \quad (C.20)$$

Pour les sessions en mode inertiel de 120 orbites, aux basses fréquences la courbe de projection obtenue avec une fenêtre de Blackman est à un niveau 3×10^{-5} fois plus faible que celle obtenue avec une fenêtre rectangulaire. Pour les sessions en mode spinné de 20 orbites, le rapport entre les deux est de 5×10^{-5} .

Pour les perturbations de fréquences élevées, $\omega_p \gg \omega_{EP}$ et le taux de projection peut s'approximer par :

$$\tau_{Blackman, HF} = \tau_{rect, HF} \frac{1}{0,42} \left(0,42 - \frac{0,5}{1 - \left(\frac{\omega_T}{\omega_p}\right)^2} + \frac{0,08}{1 - \left(\frac{2\omega_T}{\omega_p}\right)^2} \right) \quad (C.21)$$

Aux hautes fréquences, le gabarit de projection obtenu avec une fenêtre de Blackman est réduit d'un facteur d'autant plus important par rapport à celui obtenu sans fenêtre d'apodisation que la fréquence perturbatrice augmente.

C.4.2 Simulation numérique

Afin de vérifier ces développements analytiques, une simulation numérique est effectuée. Pour cela, nous calculons le taux de projection à f_{EP} en utilisant le produit scalaire défini par la formule 4.23. La transformée de Fourier de la fenêtre de Blackman discrétisée à 4Hz s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall f' \in \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{F}(W_{Blackman})(f') &= 0,42\mathcal{F}(W_{rect})(f') \\ &\quad - \frac{1}{4}\mathcal{F}(W_{rect})(f' - \frac{f_e}{N}) - \frac{1}{4}\mathcal{F}(W_{rect})(f' + \frac{f_e}{N}) \\ &\quad + \frac{0,08}{2}\mathcal{F}(W_{rect})(f' - \frac{f_e}{N/2}) + \frac{0,08}{2}\mathcal{F}(W_{rect})(f' + \frac{f_e}{N/2}) \end{aligned} \quad (C.22)$$

avec :

- f_e la fréquence d'échantillonnage de la mesure ;
- N le nombre de mesures.

La formule de la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi ft + \varphi)$ implémentée pour la simulation est donc après fenêtrage :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(W_{\text{Hann}} \cdot s)(f_{\text{EP}}) &= \frac{0,42}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} (N-1)} e^{i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{0,42}{2i} e^{-i\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e}\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad - \frac{1}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{1}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{1}{N}\right)\right)} \\
&\quad - \frac{0,08}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{2}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{2}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} - \frac{2}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{0,08}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{2}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{2}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} - \frac{2}{N}\right)\right)} \\
&\quad - \frac{0,08}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{2}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{2}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} - f}{f_e} + \frac{2}{N}\right)\right)} \\
&\quad + \frac{0,08}{2i} e^{-i\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{2}{N}\right) (N-1)} e^{-i\varphi} \frac{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{2}{N}\right) N\right)}{\sin\left(\pi \left(\frac{f_{\text{EP}} + f}{f_e} + \frac{2}{N}\right)\right)} \quad (\text{C.23})
\end{aligned}$$

Le résultat des simulations numériques est présenté sur la figure C.4 pour la courbe de projection, et dans la sixième colonne des tableaux C.2 et C.1 pour les résultats des taux de réjections aux fréquences singulières. Le rapport entre les deux gabarits obtenus avec la fenêtre de Blackman et la fenêtre rectangulaire correspond à celui prédit analytiquement dans la partie précédente.

C.5 Conclusion sur l'utilisation des fenêtres d'apodisation

Les courbes de projection sur le signal de violation du Principe d'Équivalence obtenues avec les différentes méthodes de fenêtrage sont présentées par la figure C.5. On constate que

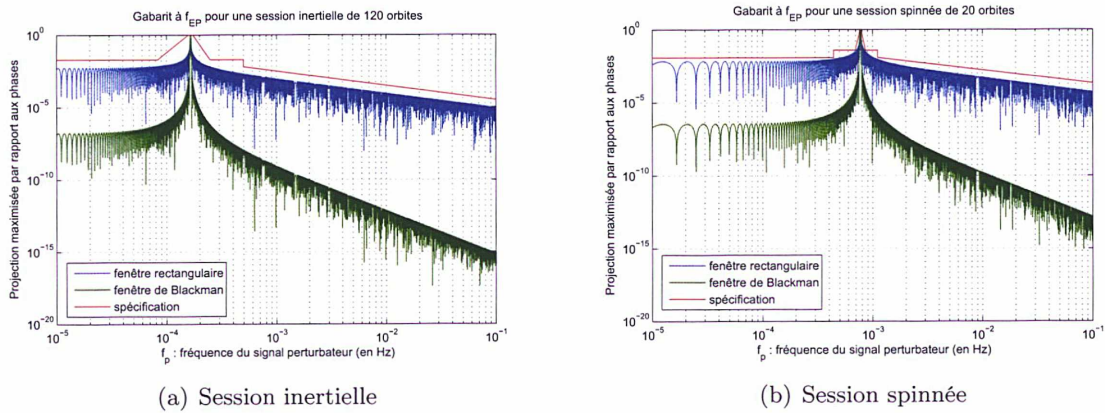


FIGURE C.4 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice avec utilisation d'une fenêtre rectangulaire et d'une fenêtre de Blackman. (a) : satellite en pointage inertielle, session de 120 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

toutes les fenêtres d'apodisation permettent d'améliorer les taux de projection de manière significative, la plus efficace étant la fenêtre de Blackman. De même, les tableaux C.2 et C.1 démontrent une augmentation importante des réjections aux fréquences singulières lorsqu'une fenêtre d'apodisation est utilisée.

En revanche, au voisinage immédiat de la fréquence du test du Principe d'Équivalence, l'efficacité des différentes fenêtres s'inverse, comme illustré par la figure C.6, et c'est la fenêtre rectangulaire qui permet de mieux rejeter les perturbations dont les fréquences sont très proches de f_{EP} . Cependant, toutes respectent le gabarit de spécification pour les projections, et comme aucune fréquence singulière - correspondant aux perturbations d'amplitude spécialement importante - ne se trouve dans cette zone, cette caractéristique n'est pas pénalisante dans le cas de l'expérience MICROSCOPE.

L'utilisation d'une fenêtre d'apodisation est donc pertinente pour l'extraction de l'éventuel signal de violation du Principe d'Équivalence. Les fenêtres les plus adaptées sont la fenêtre de Blackman et la fenêtre de Hann - cette dernière étant un peu moins efficace mais plus simple à utiliser.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection fenêtre rectangulaire	Réjection fenêtre Hann	Réjection fenêtre Hamming	Réjection fenêtre Blackman
0	20000	2.47E+05	2.14E+09	1.67E+06	4.99E+09
fspin - 3forb	2000	2.43E+04	1.90E+08	1.64E+05	4.45E+08
forb	10000	1.02E+05	6.11E+08	6.90E+05	1.43E+09
fspin - 2forb	3000	2.82E+04	1.35E+08	1.90E+05	3.15E+08
2forb	4000	4.37E+04	1.47E+08	2.95E+05	3.43E+08
fspin - forb	3000	3.11E+04	6.19E+07	2.11E+05	1.45E+08
3forb	2000	2.08E+04	2.60E+07	1.41E+05	6.11E+07
fspin	3000	3.10E+04	1.30E+07	2.12E+05	3.06E+07
2fspin - 3forb	300	2.75E+03	1.37E+05	2.10E+04	3.62E+05
fspin + forb	1	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00
2fspin - 2forb	600	5.90E+03	1.07E+06	4.11E+04	2.57E+06
fspin + 2forb	1000	1.26E+04	5.52E+06	8.62E+04	1.30E+07
2fspin - forb	1000	1.69E+04	2.17E+07	1.14E+05	5.08E+07
fspin + 3forb	2000	1.80E+04	3.38E+07	1.22E+05	7.91E+07
2fspin	3000	3.27E+04	1.17E+08	2.21E+05	2.73E+08
fspin + 4forb	2000	2.08E+04	9.18E+07	1.40E+05	2.15E+08
2fspin + forb	3000	3.57E+04	2.39E+08	2.41E+05	5.58E+08
3fspin - 2forb	2000	2.29E+04	2.22E+08	1.54E+05	5.18E+08
2fspin + 2forb	3000	3.43E+04	3.82E+08	2.32E+05	8.93E+08
3fspin - forb	3000	3.14E+04	4.75E+08	2.12E+05	1.11E+09
2fspin + 3forb	3000	3.32E+04	5.55E+08	2.24E+05	1.30E+09
3fspin	4000	4.30E+04	9.37E+08	2.90E+05	2.19E+09
2fspin + 4forb	3000	3.23E+04	7.56E+08	2.18E+05	1.76E+09
3fspin + forb	4000	4.65E+04	1.32E+09	3.14E+05	3.08E+09
2fspin + 5forb	3000	3.15E+04	9.83E+08	2.13E+05	2.29E+09
3fspin + 2forb	4000	4.31E+04	1.58E+09	2.91E+05	3.70E+09
4fspin - forb	4000	3.73E+04	1.64E+09	2.52E+05	3.82E+09
3fspin + 3forb	4000	4.06E+04	1.88E+09	2.74E+05	4.38E+09
4fspin	4000	4.63E+04	2.52E+09	3.13E+05	5.88E+09
3fspin + 4forb	4000	3.87E+04	2.19E+09	2.61E+05	5.11E+09
4fspin + forb	5000	5.14E+04	3.29E+09	3.47E+05	7.67E+09
3fspin + 5forb	4000	3.72E+04	2.53E+09	2.51E+05	5.90E+09
4fspin + 2forb	4000	4.78E+04	3.63E+09	3.23E+05	8.46E+09
3fspin + 6forb	3000	3.59E+04	2.88E+09	2.43E+05	6.73E+09
4fspin + 3forb	4000	4.50E+04	3.99E+09	3.04E+05	9.32E+09
5fspin	5000	4.79E+04	4.77E+09	3.23E+05	1.11E+10
4fspin + 4forb	4000	4.28E+04	4.39E+09	2.89E+05	1.02E+10
5fspin + forb	5000	5.41E+04	6.06E+09	3.66E+05	1.41E+10
4fspin + 5forb	4000	4.10E+04	4.81E+09	2.77E+05	1.12E+10
5fspin + 2forb	5000	5.07E+04	6.45E+09	3.42E+05	1.50E+10
4fspin + 6forb	4000	3.95E+04	5.25E+09	2.67E+05	1.22E+10
5fspin + 3forb	5000	4.79E+04	6.87E+09	3.24E+05	1.60E+10
6fspin + forb	6000	5.59E+04	9.59E+09	3.77E+05	2.24E+10
5fspin + 5forb	4000	4.38E+04	7.80E+09	2.96E+05	1.82E+10
6fspin + 2forb	5000	5.27E+04	1.00E+10	3.55E+05	2.34E+10
5fspin + 6forb	4000	4.23E+04	8.31E+09	2.85E+05	1.94E+10
6fspin + 3forb	5000	5.00E+04	1.05E+10	3.38E+05	2.44E+10
5fspin + 7forb	4000	4.09E+04	8.84E+09	2.76E+05	2.06E+10
7fspin + 2forb	5000	5.41E+04	1.43E+10	3.65E+05	3.33E+10
6fspin + 6forb	4000	4.44E+04	1.21E+10	3.00E+05	2.81E+10
7fspin + 3forb	5000	5.16E+04	1.48E+10	3.48E+05	3.45E+10
8fspin + 3forb	5000	5.28E+04	1.98E+10	3.57E+05	4.61E+10
7fspin + 7forb	4000	4.47E+04	1.71E+10	3.02E+05	4.00E+10

TABLE C.1 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) pire-cas aux fréquences singulières pour une session spinnée de 20 orbites en utilisant différentes fenêtres d'apodisation.

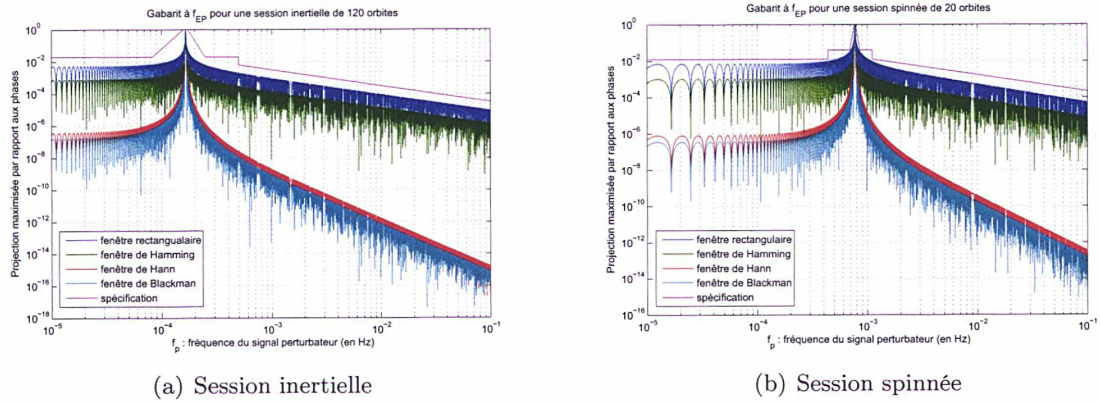


FIGURE C.5 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice avec utilisation de différentes fenêtres d'apodisation. (a) : satellite en pointage inertiel, session de 120 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

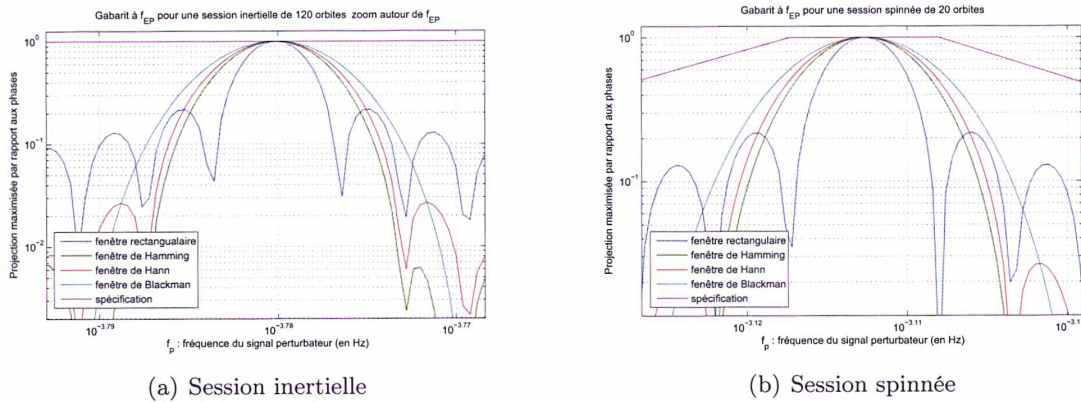


FIGURE C.6 – Courbe de projection à f_{EP} en fonction de la fréquence perturbatrice avec utilisation de différentes fenêtres d'apodisation : zoom autour de f_{EP} . (a) : satellite en pointage inertiel, session de 120 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Hz. (b) : satellite en rotation, session de 20 orbites avec $f_{EP} = f_{orb} + f_{spin} = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Hz.

Fréquence perturbatrice	Spécification	Réjection fenêtre rectangulaire	Réjection fenêtre Hann	Réjection fenêtre Hamming	Réjection fenêtre Blackman
0	100000	1.49E+06	2.14E+10	1.00E+07	5.00E+10
forb	1	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00	1.00E+00
2forb	2000	1.72E+04	3.19E+08	1.16E+05	7.45E+08
3forb	2000	2.04E+04	1.57E+09	1.38E+05	3.66E+09
4forb	2000	2.15E+04	3.67E+09	1.45E+05	8.56E+09
5forb	2000	2.20E+04	6.53E+09	1.49E+05	1.52E+10
6forb	2000	2.23E+04	1.01E+10	1.51E+05	2.35E+10
7forb	2000	2.25E+04	1.43E+10	1.52E+05	3.35E+10

TABLE C.2 – Spécifications et valeurs des réjections (inverse de la projection) pire-cas aux fréquences singulières pour une session inertielle de 120 orbites en utilisant différentes fenêtres d'apodisation.

Publications

Publications en revues spécialisées avec comité de lecture

[A1] E. Hardy, A. Levy, G. Métris, M. Rodrigues, and P. Touboul. Validation of the in-flight calibration procedures for the MICROSCOPE space mission, *Advances in Space Research*, 2013.

[A2] E. Hardy, A. Levy, G. Métris, M. Rodrigues, and P. Touboul. Determination of the Equivalence Principle violation signal for the MICROSCOPE space mission : optimization of the signal processing. Soumis à *Space Science Reviews*.

Publications à des colloques avec comité de lecture

[B1] E. Hardy, A. Levy, M. Rodrigues, P. Touboul, G. Métris, and A. Robert. In-flight calibration of the MICROSCOPE space mission instrument : development of the simulator. *SF2A-2011 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*. Eds. : G. Alecian, K. Belkacem, R. Samadi, and D. Valls-Gabaud, pp.647-651, 2011.

[B2] E. Hardy, A. Levy, M. Rodrigues, P. Touboul, G. Métris, and A. Robert. Influence of the measurement processing in the determination of the Equivalence Principle violation signal for the MICROSCOPE experiment. *SF2A-2012 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*. Eds. : S. Boissier, P. de Laverny, N. Nardetto, R. Samadi, D. Valls-Gabaud and H. Wozniak, pp.139-144, 2012.

[B3] E. Hardy, A. Levy, G. Métris, M. Rodrigues, and P. Touboul. Software tools for the validation of the in-flight calibration performance of the MICROSCOPE space mission. *SF2A-2013 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*. Proceeding en préparation.

Communications orales en colloque

[C1] SF2A 2011, 20-23 juin 2011, Paris, France : In-flight calibration of the MICROSCOPE space mission instrument : development of the simulator.

[C2] SF2A 2012, 5-8 juin 2012, Nice, France : Influence of the measurement processing in the determination of the Equivalence Principle violation signal for the MICROSCOPE experiment.

[C3] 39th COSPAR Scientific Assembly, 14-22 juillet 2012, Mysore, Inde : In-flight calibration of the MICROSCOPE space mission instrument.

[C4] Testing the Equivalence Principle - MICROSCOPE Colloquium II, 29-30 janvier 2013, Palaiseau, France : Tone errors, Data lacks and Observation Period.

[C5] SF2A 2013, 4-7 juin 2013, Montpellier, France : Software tools for the validation of the in-flight calibration performance of the MICROSCOPE space mission.

Bibliographie

- [1] A. Aguirre, C. P. Burgess, A. Friedland, and Nolte D. Astrophysical constraints on modifying gravity at large distances. *Classical and Quantum Gravity*, 18 :R223–R232, 2001.
- [2] V. Braginsky and V. Panov. Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass. *Sov. Phys. Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 34(3) :463–466, 1972.
- [3] J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine computation of the complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19 :297–301, 1965.
- [4] T. Damour and J. P. Blaser. Optimizing the choice of materials in Equivalence Principle experiment. In J. Tran Than Van, G. Fontaine, and E. Hinds, editors, *Particle Astrophysics, Atomic Physics and Gravitation*, pages 433–440. Éditions Frontières, 1994.
- [5] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano. Violation of the Equivalence Principle in a dilaton-runaway scenario. *Physical Review D*, 66, 2002.
- [6] SYRTE/Observatoire de Paris. Earth orientation center. <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>, 2010.
- [7] Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale. Gins. <http://grgs.obs-mip.fr/recherche/logiciels>, 2012.
- [8] T. Duhamel and P. Marchal. *Dynamique et stabilisation d'attitude des satellites*. ISAE, 2008.
- [9] A. Einstein. Über das Relativitätprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch des Radioaktivität und Elektronik*, 4 :411–462, 1907.
- [10] R. Eötvös, V. Pekár, and E. Fekete. Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik*, 68 :11–66, 1922.
- [11] G. Galilei. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due Nuove Scienze Attinenti alla Meccanica e i Movimenti Locali*. Leyden, 1638. Traduction de Maurice Clavelin : Discours concernant deux sciences nouvelles, éditée aux PUF, collection ÉPIMÉTHÉE.
- [12] F. Genin. Quantification du flux de débris sur l'orbite de MICROSCOPE. Technical Report MIC-NT-S-4-2203-CNS, CNES, 2013.
- [13] The Eöt-Wash Group. Laboratory tests of gravitational and sub-gravitational physics. <http://www.npl.washington.edu/eotwash/>, 2012.
- [14] E. Guiu. *Étalonnage de la mission spatiale MICROSCOPE : optimisation des performances*. Thèse, Université de Nantes, 2007.
- [15] J. H. Gundlach, S. Schlamminger, and T. Wagner. Laboratory tests of the Equivalence Principle at the University of Washington. *Space Science Reviews*, 148 :201–216, 2009.

- [16] E. Hardy, E. Levy, G. Métris, M. Rodrigues, P. Touboul, and A. Robert. In-flight calibration of the MICROSCOPE space mission instrument : development of the simulator. In R. Samadi G. Alecian, K. Belkacem and D. Valls-Gabaud, editors, *SF2A-2011 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, pages 647–651, 2011.
- [17] E. Hardy, E. Levy, G. Métris, M. Rodrigues, P. Touboul, and A. Robert. Influence of the measurement processing in the determination of the Equivalence Principle violation signal for the MICROSCOPE experiment. In N. Nardetto R. Samadi D. Valls-Gabaud S. Boissier, P. de Laverny and H. Wozniak, editors, *SF2A-2012 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, pages 139–144, 2012.
- [18] V. Josselin, P. Touboul, and R. Kielbasa. Capacitive detection scheme for space accelerometers applications. *Sensors and Actuators A : Physical*, 78(2-3) :92–98, 1999.
- [19] V. Josselin, P. Touboul, M. Rodrigues, and F. Liorzou. MICROSCOPE On-ground and In-orbit Calibration. *Space Science Reviews*, 151(1-3) :25–38, 2010.
- [20] L. Lafargue. *Configuration mécanique d'accéléromètres électrostatiques pour le test du Principe d'Équivalence*. Thèse, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, 2002.
- [21] A. Levy and P. Touboul. MICROSCOPE Instrument In-flight Calibration Plan. Technical Report MIC-DC-S-7-TS-5075-ONE, ONERA, 2011.
- [22] A. Levy, P. Touboul, M. Rodrigues, G. Métris, and A. Robert. The MICROSCOPE space mission and the inflight calibration approach for its instrument. In R. Samadi S. Boissier, M. Heydari-Malayeri and D. Valls-Gabaud, editors, *SF2A-2010 : Proceedings of the annual Meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, page 123, 2010.
- [23] J. P. Marque, B. Christophe, F. Liorzou, G. Bodovillé, B. Foulon, J. Guérard, and V. Lebat. The ultra sensitive accelerometers of the ESA GOCE mission. 59th International Astronautical Congress, 2008.
- [24] J. Mester, R. Torii, P. Worden, N. Lockerbie, S. Vitale, and C. W. F. Everitt. The step mission : principles and baseline design. *Classical and Quantum Gravity*, 18 :pp. 2475–2486, 2001.
- [25] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [26] G. Métris and P. Bério. Moindres carrés dans le domaine fréquentiel. Technical Report NT-GMT-014-OCA, OCA, 2013.
- [27] G. Métris, J. Xu, and I. Wytrzyszczak. Derivatives of the gravity potential with respect to rectangular coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71(2) :137–151, 1998.
- [28] Jr. Murphy, T. W., E. G. Adelberger, J. B. R. Battat, L. N. Carey, C. D. Hoyle, P. LeBlanc, E. L. Michelsen, K. Nordtvedt, A. E. Orin, J. D. Strasburg, C. W. Stubbs, H. E. Swanson, and E. Williams. The apache point observatory lunar laser-ranging operation : Instrument description and first detections. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 120(863) :pp. 20–37, 2008.
- [29] NASA. Apollo 15. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo15info.html>, 2009.

-
- [30] I. Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London, 1687. Traduction française en 1756 : Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Réédition, Dunod, 2005, 626 p.
- [31] K. Nordtvedt. Equivalence principle for massive bodies. I. Phenomenology. *Physical Review*, 169 :1014–1016, 1968.
- [32] J. Overduin, F. Everitt, J. Mester, and P. Worden. The Science Case for STEP. *Advances in Space Research*, 43(10) :1532–1537, 2009.
- [33] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, Knop R. A., and Nugent P. Measurements of omega and lamda from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2) :565–586, 1999.
- [34] G. Pionnier, M. Rodrigues, P. Touboul, B. Foulon, F. Liorzou, D. Boulanger, and A. Levy. Pre-flight verification of the differential accelerometers of the Microscope mission. 62nd International Astronautical Congress, 2010.
- [35] G. Pradels. *Étalonnage en orbite d'accéléromètres ultrasensibles pour un test du Principe d'Équivalence à 10^{-15}* . PhD Thesis, University Paris VI Pierre et Marie Curie, 2003.
- [36] W. Press, S. Teukolski, W. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical recipes : the art of scientific computing (FORTRAN version)*. Cambridge University Press, 1986.
- [37] P. Prieur. Hypothèses SCAA pour les bilans de performance analytiques. Technical Report MIC-NT-S-4-1700-CNS, CNES, 2012.
- [38] A. G. Riess, A. V. Filipenko, P. Challis, Clocciatti A., and Diercks A. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3) :1009–1038, 1999.
- [39] K. H. Sato, R. A. García, S. Pires, J. Ballot, S. Mathur, B. Mosser, E. Rodriguez, J. L. Starck, and K. Uytterhoeven. Inpainting : a powerful interpolation technique for helio- and asteroseismic data. *Soumis à Astronomische Nachrichten*, 2010.
- [40] S. Schlamminger, K. Y. Choi, T. A. Wagner, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger. Test of the Equivalence Principle using a rotation torsion balance. *Physical Review Letters*, 100, 2008.
- [41] P. Schwintzer, C. Reigber, A. Bode, Z. Kang, S. Y. Zhu, F.-H. Massmann, J. C. Raimondo, R. Biancale, G. Balmino, J. M. Lemoine, B. Moynot, J. C. Marty, F. Barlier, and Y. Boudon. Long-wavelength global gravity field models : Grim4-s4, grim4-c4. *Journal of Geodesy*, 71(4) :189–208, 1997.
- [42] Hanns Selig, Hansjörg Dittus, and Claus Lämmerzahl. Drop tower microgravity improvement towards the nano-g level for the microscope payload tests. *Microgravity Science and Technology*, 22(4) :539–549, 2010.
- [43] T. J. Sumner, J. Anderson, J. P. Blaser, A. M. Cruise, T. Damour, H. Dittus, C. W. F. Everitt, B. Foulon, Y. Jafry, B. J. Kent, N. Lockerbie, F. Loeffler, G. Mann, J. Mester, C. Pegrum, R. Reinhardt, M. Sandford, A. Scheicher, C. C. Speake, R. Torii, S. Theil, P. Touboul, S. Vitale, W. Vodel, and P. W. Worden. STEP (Satellite Test of the Equivalence Principle). *Advances in Space Research*, 39(2) :254–258, 2007.
- [44] P. Touboul. The MICROSCOPE mission and its uncertainty analysis. *Space Science Reviews*, 148(1-4) :455–474, 2009.
- [45] P. Touboul, R. Chhun, A. Levy, and M. Rodrigues. Scientific Mission Analysis. Technical Report MIC-DC-S-7-5028-ONE-6.2, ONERA, 2012.

-
- [46] P. Touboul, G. Métris, V. Lebat, and A. Robert. The MICROSCOPE experiment, ready for the in-orbit test of the Equivalence Principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18), 2012.
- [47] P. Touboul, M. Rodrigues, G. Métris, and B. Tatry. MICROSCOPE, testing the Equivalence Principle in space. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics*, 2(9) :1271 – 1286, 2001.
- [48] P. Touboul, E. Willemenot, B. Foulon, and V. Josselin. Accelerometers for CHAMP, GRACE and GOCE space missions : synergy and evolution. *Bolletino di Geofisica Teorica e Applicata*, 40(3-4) :321–327, 1999.
- [49] T. Van Helleputte, E. Doornbos, and P. Visser. CHAMP and GRACE accelerometer calibration by GPS-based orbit determination. *Advances in Space Research*, 43(12) :1890–1896, 2009.
- [50] D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann. 0957 + 561 A, B : twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*, 279 :381–384, 1979.
- [51] S. Weinberg. The making of the Standard Model. *European Physical Journal C*, 34 :5, 2004.
- [52] C. Will. Was Einstein right? Testing Relativity at the Centenary. *100 Years of Relativity : Spacetime Structure - Einstein and Beyond*, 2005.
- [53] C. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews Relativity*, 9(3), 2006.
- [54] J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs. Progress in Lunar laser ranging tests of relativistic gravity. *Physical Review Letters*, 93(26) :261101, 2004.
- [55] J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs. Lunar laser Ranging tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon. *International Journal of Modern Physics*, 33, 2009.



Procédures expérimentales et traitement des données associées pour la mission spatiale MICROSCOPE

L'objectif de la mission MICROSCOPE est de tester le Principe d'Équivalence avec une précision encore inégalée de 10^{-15} . L'expérience sera menée en orbite grâce à un accéléromètre différentiel électrostatique embarqué à bord d'un microsatellite à traînée compensée. L'instrument est composé de deux masses d'épreuve emboîtées maintenues en lévitation électrostatique, soumises au même champ gravitationnel mais constituées de matériaux différents. Les accélérations électrostatiques appliquées aux deux masses d'épreuve pour les maintenir sur la même trajectoire sont mesurées : une inégalité entre elles indiquerait une violation du Principe d'Équivalence.

La précision de la mesure exploitée pour ce test est cependant limitée par la connaissance *a priori* des paramètres de dimensionnement de l'instrument. Des sessions d'étalonnage en orbite sont indispensables pour évaluer précisément leurs valeurs afin de corriger la mesure de leurs effets. Des procédures d'étalonnage appropriées ont été déterminées et leurs performances ont été évaluées analytiquement. Afin de valider ces procédures, elles ont été implémentées dans un simulateur dédié aux phases d'étalonnage et modélisant l'instrument, le satellite et son environnement. Par ailleurs, d'autres perturbations sont à considérer lors du traitement des données scientifiques : des effets numériques apparaissent du fait du caractère fini dans le temps de la mesure. Ces effets ont été évalués et une procédure de traitement des données a été déterminée afin de les minimiser en situation nominale ainsi qu'en cas de mesures manquantes, ces dernières pouvant amplifier les perturbations numériques. Enfin, un simulateur permettant de jouer l'ensemble de la mission a été développé afin d'étudier l'association des perturbations instrumentales et numériques. En reproduisant à la fois les phases d'étalonnage et de test du Principe d'Équivalence, il permet de valider le protocole de correction et de traitement de la mesure.

Mots-clés : MICROSCOPE, test du Principe d'Équivalence, étalonnage en orbite, effets numériques

Experimental procedures and data analysis for the MICROSCOPE space mission

The MICROSCOPE space mission aims at testing the Equivalence Principle with an accuracy of 10^{-15} . The instrument will be embarked on board a drag-free microsatellite orbiting the Earth, and consists in a differential electrostatic accelerometer composed of two cylindrical test masses submitted to the same gravitational field but made of different material. The electrostatic accelerations applied to the masses to maintain them relatively motionless are measured and will demonstrate a violation of the universality of free fall if found unequal.

The accuracy of the measurement exploited for the test is limited by our *a priori* knowledge of the instrument physical parameters. An in-orbit calibration is needed to finely characterize them in order to correct the measurement. Appropriate calibration procedures have been determined and their analytical performances evaluated. In order to validate these procedures, they have been implemented in a software tool dedicated to the calibration sessions which simulates the instrument, the satellite and its environment. Other perturbations must be considered during the data analysis : numerical effects arise from the finite time span of the measurement. These effects have been evaluated and a procedure has been determined to process the data with minimal numerical perturbations, in a nominal situation as well as in the case of missing data, which may amplify these effects. Finally, a simulator has been developed for the entire mission scenario in order to study the association of instrumental and numerical simulations. This tool enables to simulate both the calibration sessions and the sessions for the test of the Equivalence Principle, and is therefore used to validate the protocol of measurement correction and analysis.

Keywords: MICROSCOPE, test of the Equivalence Principle, in-orbit calibration, numerical effects