



HAL
open science

Mesure de l'effet de lentille gravitationnelle dans le fond cosmologique avec le satellite Planck

Typhaine Déchelette

► To cite this version:

Typhaine Déchelette. Mesure de l'effet de lentille gravitationnelle dans le fond cosmologique avec le satellite Planck. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2012. Français. NNT: . tel-02095138

HAL Id: tel-02095138

<https://hal.science/tel-02095138>

Submitted on 10 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS-MEUDON
INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE PARIS

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité
« Astrophysique »

par

Typhaine Déchelette

MESURE DE L'EFFET DE LENTILLE GRAVITATIONNELLE DANS LE RAYONNEMENT DE FOND COSMOLOGIQUE AVEC LE SATELLITE PLANCK

Thèse soutenue le 17 décembre 2012 devant le jury composé de :

M ^{me}	FRANÇOISE COMBES	Observatoire de Paris-Meudon	(Président)
M ^{me}	CÉCILE RENAULT	LPSC Grenoble	(Rapporteur)
M.	ALAIN BLANCHARD	Observatoire Midi-Pyrénées	(Rapporteur)
M ^{me}	LAURENCE PEROTTO	LPSC Grenoble	(Examinateur)
M.	KARIM BÉNABED	Institut d'Astrophysique de Paris	(Directeur)
M.	FRANÇOIS BOUCHET	Institut d'Astrophysique de Paris	(Co-directeur)

OBSERVATOIRE DE PARIS-MEUDON
INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE PARIS

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité
« Astrophysique »

par

Typhaine Déchelette

MESURE DE L'EFFET DE LENTILLE
GRAVITATIONNELLE DANS LE
RAYONNEMENT DE FOND
COSMOLOGIQUE AVEC LE SATELLITE
PLANCK



Thèse soutenue le 17 décembre 2012 devant le jury composé de :

M ^{me}	FRANÇOISE COMBES	Observatoire de Paris-Meudon	(Président)
M ^{me}	CÉCILE RENAULT	LPSC Grenoble	(Rapporteur)
M.	ALAIN BLANCHARD	Observatoire Midi-Pyrénées	(Rapporteur)
M ^{me}	LAURENCE PEROTTO	LPSC Grenoble	(Examinateur)
M.	KARIM BÉNABED	Institut d'Astrophysique de Paris	(Directeur)
M.	FRANÇOIS BOUCHET	Institut d'Astrophysique de Paris	(Co-directeur)

À Marie et Emmanuel

REMERCIEMENTS

TROIS ans exactement se sont écoulés depuis le jour de mon retour d'Inde. Trois années parisiennes, riches de rencontres scientifiques, culturelles et humaines d'une qualité exceptionnelle. Une immense reconnaissance jaillit envers toutes les personnes qui ont participé à ces trois années pleines de rebondissements, de questions, de vie en somme.

En tout premier lieu, ma gratitude s'adresse à mon directeur qui a accepté, il y a plus de quatre ans, de m'accueillir en stage de Master puis m'a proposé de poursuivre en thèse, après la période de volontariat que j'avais décidé de faire en Inde. Contrairement à ses craintes, je suis bien revenue après ! Ce n'est qu'au milieu de la thèse que j'ai commencé à vouloir m'échapper de la Recherche et j'ai été très sensible à sa compréhension et son aide pour rebondir et trouver ma voie pour la suite. Je suis très heureuse d'avoir travaillé sur ces sujets passionnants de la cosmologie que sont le CMB et l'effet de lentille. Bien plus, je ne peux que louer les conditions de travail dont j'ai bénéficié : un laboratoire très agréable, une collaboration (Planck) stimulante, une équipe de travail porteuse. Mes remerciements vont particulièrement à Aurélien pour ses heures passées à comprendre des papiers obscurs ensemble, à refaire les calculs et à faire progresser nos codes. Ceux-ci s'adressent aussi à Simon pour sa patience et sa pédagogie dans l'exploration du monde des statistiques et de la programmation. Je n'oublie pas Jean-François, François, Eric, Andrea et tous les autres collègues de l'IAP et de la collaboration Planck.

La présence de mes co-bureaux successifs et des autres thésards a égayé le quotidien de ma thèse, au gré des discussions impromptues, des débats interminables à la cantine ou autour d'un café. Merci à François Sèvres pour son enthousiasme, Isabelle et Camilla pour quelques craquages mémorables, Jacopo de les avoir supportés, Hayley et Nicolas pour leur bonne humeur. Le soutien de Florence, Flavien, Sylvain et Ophélie m'ont été particulièrement précieux, notamment dans la dernière ligne droite, merci beaucoup !

Je tiens à remercier tous les membres de mon jury d'avoir accepté d'écouter mon travail et tout spécialement mes deux rapporteurs de l'avoir relu avec attention. J'ajoute un immense merci à Alexis qui a passé ce manuscrit au peigne fin, jusqu'à la moindre virgule et à Sylvain pour ces remarques pertinentes sur les premiers chapitres.

Avoir son sujet de thèse écrit sur un post-it dans le bureau de son grand-père n'est pas donné à tout le monde, j'en suis bien consciente.

Quel cadeau d'être ainsi portée par ma famille! Les mots ne suffisent pas à dire le trésor qu'elle représente et la reconnaissance que j'ai envers chacun, Maman, Charlotte et bientôt Adrien, Franklin, Bon-Papa et Bonne-Maman. Tante Sophie et Oncle Guillaume ainsi que Tessa occupent une place bien particulière dans toute cette histoire et je veux ici les remercier pour leur présence et leur soutien qui dépasse largement le cadre de ces trois ans de thèse. Avec le temps, ils font presque partie de la famille tant leur amitié est fidèle, et précieuse : Audrey, Yolaine et Stanislas, Solange. Leur soutien indéfectible a été et sera encore longtemps un trésor.

A l'heure de tourner une page de vie, je mesure la chance que j'ai d'être entourée d'amis précieux et dévoués. J'adresse ici une mention toute particulière à Lilo et Camille qui m'ont si souvent accueillie à déjeuner, goûter, dîner, boire une tisane et qui ont suivi presque au jour le jour mes tribulations. Merci pour tous ces excellents moments partagés, les longues conversations, les WE en Bretagne et les semaines de ski. Merci encore à Alix, Marie-Alix, Marie-Alice, Hermine et Jérôme, Armel, PE, JB et tous les "nantais" ou assimilés. Je veux encore remercier ici Sr Elisabeth, Sr Théophile, le Père Olivier, le Père Charles et tant d'autres pour leur soutien "invisible" et leur amitié.

Ces trois années ont été également marquées par un certain (trop grand diront certains) nombre d'engagements et d'activités qui m'ont donné de rencontrer de très belles personnalités. De la chorale du Jubilé, aux week-ends ressourçants passés avec les amis d'A Bras Ouverts, en passant par les délicieuses soirées passées Salle Pleyel ou aux Bernardins, j'ai été comblée d'instantanés de joie, de beauté et de vérité. Ces années ont tout spécialement été marquées par l'aventure du Festival et de l'Alliance à qui je dois bien plus qu'il n'est possible d'exprimer ici. Encore une fois, ce sont des personnes qui ont été au cœur de cette aventure et je tiens à leur dire mon amitié et ma gratitude pour tout ce qu'elles m'ont appris et apporté. Je veux dire spécialement merci à François de m'avoir fait confiance, soutenue, encouragée, bref d'être devenu un véritable frère! Il y aurait encore Christophe, Sophie, Delphine, Anne et Raph, Claire, Thibaud et Sophie, Olivia, Hélène, Abba, je ne pourrai pas citer tout le monde. Merci à tous ceux qui ont accepté d'être entraînés à leur tour dans cette aventure.

Une découverte importante de ma thèse aura été celle de ma vocation pour l'enseignement! Je remercie donc spécialement tous ceux grâce à qui j'ai pu faire ce choix : mes étudiants de Jussieu et de khôlles, leurs professeurs, en particulier Nicolas Treps avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler et toutes les personnes avec qui j'ai réfléchi à ce projet. Merci notamment à Clément de m'avoir mise sur la piste pour préparer l'Agrégation de Physique à Lyon. Une page se tourne, merci enfin au lecteur qui tournera encore ces pages et y trouvera de l'intérêt j'espère.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
INTRODUCTION	1
1 HISTOIRE THERMIQUE DE L'UNIVERS	5
1.1 CADRE THÉORIQUE	6
1.1.1 La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	6
1.1.2 L'expansion de l'Univers	7
1.1.3 Contenu de l'Univers	8
1.2 THERMODYNAMIQUE DE L'UNIVERS	10
1.2.1 Densité d'énergie du plasma primordial à l'équilibre	11
1.2.2 Ecart à l'équilibre et découplage	12
1.3 LE GEL DES INTERACTIONS FAIBLES	12
1.3.1 Le découplage des neutrinos	12
1.3.2 Le découplage des protons et des neutrons	13
1.3.3 L'annihilation e^+e^-	13
1.4 LA NUCLÉOSYNTÈSE	13
1.4.1 Formation du Deutérium	13
1.4.2 Formation des autres éléments jusqu'à l'Hélium 4	15
1.5 LE RAYONNEMENT DE FOND COSMOLOGIQUE	15
1.5.1 La transition radiation-matière	15
1.5.2 La recombinaison	15
1.5.3 Le découplage des photons	17
1.5.4 Propriétés du rayonnement fossile	18
2 HISTOIRE DYNAMIQUE DE L'UNIVERS	23
2.1 CADRE D'ÉTUDE	23
2.1.1 Une origine des perturbations	23
2.1.2 Echelles considérées	25
2.2 ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS DE MATIÈRE	26
2.2.1 Description du fluide	26
2.2.2 Perturbations de densité de la matière noire seule	29
2.2.3 Perturbations de densité des baryons seuls	30
2.2.4 Perturbations des baryons en présence de matière noire	31
2.3 ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS DES PHOTONS	33
2.3.1 Equations d'Einstein	33
2.3.2 Equations des perturbation	35
2.3.3 Evolution des perturbations	36
3 LES ANISOTROPIES DU CMB	39
3.1 OBSERVER LE CMB	39

3.1.1	Découverte du CMB	40
3.1.2	Observations du CMB	41
3.1.3	Le satellite Planck	43
3.2	LES ANISOTROPIES PRIMAIRES DU CMB	44
3.2.1	Formule de Sachs-Wolfe	44
3.2.2	Oscillations acoustiques dans un potentiel statique	44
3.2.3	Effet Sachs-Wolfe intégré (ISW)	46
3.2.4	Effet Doppler	46
3.2.5	Amortissement de Silk	46
3.2.6	Spectre de puissance	46
4	L'EFFET DE LENTILLE DANS LE CMB	51
4.1	DÉFLEXION DU CMB	52
4.1.1	Déplacement des anisotropies	52
4.1.2	Potentiel de lentille	54
4.1.3	Redistribution de la puissance dans le spectre angulaire	57
4.1.4	Création de non gaussianités	60
4.2	POURQUOI ÉTUDIER CET EFFET ?	61
4.2.1	Sonder la matière et l'évolution des structures	61
4.2.2	Contraindre les paramètres cosmologiques	61
4.2.3	Nettoyer les modes B de la polarisation	63
4.3	ESTIMER L'EFFET DE LENTILLE DANS LE CMB	65
4.3.1	Estimateurs construits sur la fonction de vraisemblance	65
4.3.2	Estimateur quadratique à variance minimale	65
4.3.3	Estimateur du spectre de puissance sans biais gaussien	66
4.3.4	Estimateurs dans l'espace réel	67
5	DÉTECTIONS ET MESURES	69
5.1	CORRÉLATIONS CROISÉES AVEC DES GRANDS RELEVÉS	69
5.1.1	WMAP ₁ + SDSS (LRGs) 2004 - Pas de détection	70
5.1.2	WMAP ₃ + NVSS 2007 - Détection à 3.4σ	70
5.1.3	WMAP ₃ + SDSS/NVSS -2008 - Détection à 2.5σ	71
5.2	SPECTRE DE PUISSANCE DES ANISOTROPIES DU CMB	71
5.2.1	ACBAR 2009 - Détection à 2σ	71
5.2.2	ACT 2011 - Détection à 2.8σ	71
5.2.3	SPT 2011 - Détection à 5σ	72
5.3	SPECTRE DE PUISSANCE DE L'EFFET DE LENTILLE	72
5.3.1	ACT 2011 - Détection à 4σ	72
5.3.2	SPT 2012 - Détection à 6.3σ	73
5.4	RETOUR AUX CORRÉLATIONS CROISÉES	76
5.4.1	SPT 2012	76
5.4.2	ACT 2012	76
6	ESTIMATEUR QUADRATIQUE	79
6.1	IDÉE POUR CONSTRUIRE UN ESTIMATEUR OPTIMAL NON BIAISÉ	79
6.1.1	Choix de la normalisation	80
6.1.2	Choix des filtres	80
6.2	DÉRIVATION COMPLÈTE DE L'ESTIMATEUR	81
6.2.1	Estimateurs non normalisés	81
6.2.2	Estimateurs non biaisés	82
6.2.3	Estimateurs à variance minimale	83

6.3	BIAIS DES SPECTRES DE PUISSANCE	84
6.3.1	Biais gaussiens	85
6.3.2	Biais d'ordre supérieur	85
6.4	SPECTRES DE PUISSANCE	88
6.4.1	Estimateurs des spectres de puissance	88
6.4.2	Covariance des spectres estimés	88
6.5	RECONSTRUCTION DU POTENTIEL DE LENTILLE	88
6.5.1	Description du pipeline	88
6.5.2	Validation du pipeline	89
7	FILTRES DE L'ESTIMATEUR	93
7.1	CONNAISSANCE DES SPECTRES SOUS-JACENTS AUX DONNÉES	93
7.2	INCERTITUDES SUR LE MODÈLE COSMOLOGIQUE	94
7.2.1	Modèle Λ CDM	95
7.2.2	Modèle Λ CDM plat	95
8	AVANT-PLANS	99
8.1	MASQUE GALACTIQUE	99
8.1.1	Etude analytique de l'effet du masque	100
8.1.2	Coupure équatoriale apodisée	103
8.1.3	Masque galactique apodisé	111
8.1.4	Autres méthodes de traitement	113
8.2	MASQUE DE POINTS SOURCES	115
8.2.1	Choix de la méthode de remplissage	115
8.2.2	Effet du remplissage sur le spectre de lentille reconstruit	117
8.2.3	Résultats	118
9	EFFETS INSTRUMENTAUX	123
9.1	MODÉLISATION DU BRUIT	123
9.1.1	Calcul analytique du champ moyen	123
9.1.2	Calcul analytique du biais du spectre de puissance	126
9.2	TRAITEMENT DU BRUIT	126
9.2.1	Simulation de cartes de bruit inhomogène	126
9.2.2	Calcul du champ moyen $\phi^{(MF)}$	127
9.2.3	Calcul du biais $C_L^{(bias)}$	127
10	RESULTATS	133
10.1	RÉSULTATS SUR DES SIMULATIONS	133
10.1.1	Convergence du pipeline	134
10.1.2	Reconstruction sur une carte	135
10.2	RÉSULTATS SUR LES DONNÉES PLANCK	135
10.2.1	Cartes en fréquence DX8	137
10.2.2	Cartes en fréquence DX9	141
10.2.3	Comparaison aux autres expériences actuelles	143
	CONCLUSION	145
A	ARTICLE SOUMIS À <i>Astronomie & Astrophysique</i>	149
B	HARMONIQUES SPHÉRIQUES	161
B.1	HARMONIQUES SPHÉRIQUES STANDARDS	161

B.1.1	Définition et propriétés	161
B.1.2	Autres propriétés	162
B.2	HARMONIQUES SPHÉRIQUES SPINNÉES	162
B.2.1	Définition	163
B.2.2	Conjugué	163
B.2.3	Orthogonalité et complétude	164
B.2.4	Produit	164
B.2.5	Dérivation covariante	164
C	SYMBOLES DE WIGNER-3J	167
C.1	DÉFINITION	167
C.2	SYMÉTRIE	167
C.3	INTÉGRALE DE GAUNT	168
C.4	CONJUGUÉ	169
C.5	PROPRIÉTÉS D'ORTHOGONALITÉS	169
C.6	SOMMES	169
C.7	IDENTITÉS	169
C.8	PERMUTER DES SYMBOLES	170
D	CALCULS AU 2^{ÈME} ORDRE EN ϕ	171
D.1	DL AU DEUXIÈME ORDRE DE LA TEMPÉRATURE LENTILLÉE	171
D.1.1	Intégrale $I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2}$	172
D.1.2	Intégrale $J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3}$	172
D.2	MOMENT À DEUX POINTS DE LA TEMPÉRATURE LENTILLÉE	174
D.2.1	Termes en $\delta\Theta$	174
D.2.2	Termes en $\delta\Theta^{(2)}$	175
D.3	ESPÉRANCE DES ESTIMATEURS DE L'EFFET DE LENTILLE	178
D.3.1	Partie gradient	178
D.3.2	Partie rotationnelle	179
D.4	CALCUL DE LA VARIANCE GAUSSIENNE DES ESTIMATEURS	180
D.4.1	Partie gradient	180
D.4.2	Partie rotationnelle	181
E	CALCUL DU BIAIS N_L^1 DE L'ESTIMATEUR	183
E.1	TERME D'ORDRE 0 EN ϕ	183
E.2	TERMES EN $\delta\Theta$ D'ORDRE 2 EN ϕ	185
E.2.1	Termes en ((12)(34))	185
E.2.2	Termes en ((13)(24)) et ((14)(23))	187
E.3	TERMES EN $\delta^{(2)}\Theta$ D'ORDRE 2 EN ϕ	190
E.3.1	Termes en ((13)(24))	190
E.3.2	Termes en ((14)(23))	191
E.4	VARIANCE DE L'ESTIMATEUR AU PREMIER ORDRE	192
F	CALCUL DU BIAIS N_L^2 DE L'ESTIMATEUR	195
F.1	SPECTRE DE TEMPÉRATURE À L'ORDRE 2 EN C_ℓ^ϕ	195
F.1.1	$\langle \delta^{(2)}\Theta_{\ell m} \delta^{(2)}\Theta_{\ell' m'}^* \rangle$	196
F.1.2	$\langle \delta^{(3)}\Theta_{\ell m} \delta\Theta_{\ell' m'}^* \rangle$	198
F.1.3	$\langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)}\Theta_{\ell m} \rangle$	199
	BIBLIOGRAPHIE	203

INTRODUCTION

LES grands relevés de galaxies, tels que le *Sloan Digital Sky Survey*, nous ont révélé et continuent d'explorer les propriétés des *grandes structures* de l'Univers. L'amélioration des instruments d'observation tant au sol que dans l'espace permet de sonder toujours plus profondément l'Univers, avec une large couverture. Il devient ainsi possible de cartographier la répartition de matière, aux très grandes échelles, en particulier celle de l'énigmatique *matière noire*.

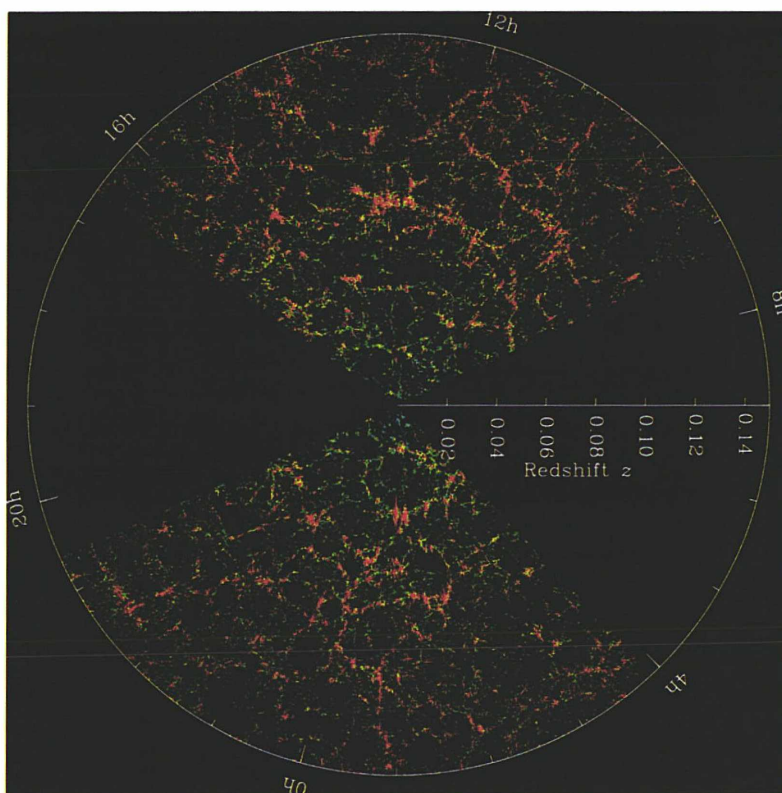


FIGURE 1 – Carte de la distribution des galaxies vues par le Sloan Digital Sky Survey. La Terre est au centre et chaque point représente une galaxie, colorée en fonction de l'âge de ses étoiles. Le cercle extérieur est à une distance de deux milliards d'années-lumière. Les régions vides ne sont pas cartographiées à cause de notre propre galaxie qui gêne l'exploration de l'Univers profond dans ces directions. Source : <http://www.sdss.org/>

Nous savons que les atomes qui constituent la matière ordinaire ne pèsent aujourd'hui guère plus du 5% dans le contenu énergétique global de l'Univers, et pas plus de 16% de son contenu matériel. L'étude des courbes de rotation des galaxies ou de la distribution du gaz chaud dans les amas a en effet conduit à postuler l'existence de matière non lumineuse appelée *matière noire*. Elle serait constituée de particules dont la nature reste à déterminer et qui n'ont pas d'interaction électromagnétique avec les photons.

Ces particules de matière noire étant massives en revanche, elles peuvent interagir gravitationnellement avec les photons grâce à *l'effet de lentille (gravitationnelle)*. C'est une conséquence de la théorie de la Relativité Générale d'Einstein, énoncée par Zwicky (1937) : la trajectoire d'un photon est modifiée lorsqu'il passe à proximité d'une masse. Plus précisément, celui-ci proposait que la lumière de galaxies d'arrière-plan - en principe cachées par celles situées devant - puisse nous parvenir, grâce à l'effet gravitationnel de ces avant-plans. La première confirmation observationnelle de cette prédiction n'a été obtenue que quarante ans plus tard par Walsh et al. (1979). Depuis lors, de nombreux objets ont été identifiés par cet effet, donnant quelques images magnifiques et apportant des renseignements précieux sur la masse des amas "lentilles". Néanmoins, de façon beaucoup moins spectaculaire, l'ensemble des grandes structures entraîne de petites déviations de la lumière des galaxies. Elles apparaissent ainsi légèrement déformées. Cet effet de *lentille faible* est notamment utilisé dans les grands relevés de galaxie pour sonder la matière noire (Fu 2008). Ces relevés ne vont toutefois pas au-delà de quelques unités de redshifts. Ils ne remontent donc que jusqu'à des phases peu anciennes de l'Univers.

De plus, les galaxies sont un traceur imparfait de la matière noire par effet de lentille gravitationnelle. En revanche, les cosmologistes disposent d'un outil hors-pair pour l'étudier : le *Rayonnement de Fond Cosmologique* (ou CMB pour *Cosmic Microwave Background*). Ce rayonnement relique de la phase très chaude et dense de l'Univers appelée *Big-Bang* a été émis à un redshift autour de $z \sim 1100$. Nous l'observons aujourd'hui, fortement refroidi par l'expansion, à une température de $T_0 = 2.726K$. Les petits écarts de l'ordre de 10^{-5} autour de cette température moyenne, appelés *anisotropies de température*, sont en effet la trace des petites fluctuations de densité qui sont à l'origine de la formation des structures.

Le CMB permet aussi de faire une deuxième mesure de la distribution des grandes structures, en l'utilisant comme source pour l'effet de lentille gravitationnelle (Blanchard et Schneider 1987). Il subit, au même titre que n'importe quel rayonnement, lorsqu'il passe à proximité de potentiels gravitationnels, une déviation qu'il est en principe possible de mesurer. Cette déviation est directement reliée à la quantité de matière, intégrée sur la profondeur, rencontrée par la lumière dans une direction donnée (Zaldarriaga et Seljak 1999). La mesure de l'effet de lentille sur le CMB

permet ainsi d'obtenir une carte de la répartition des grandes structures, certes bruitée et projetée sur la profondeur, mais avec un maximum d'efficacité situé autour de $z \sim 2$, soit bien au-delà de ce que les grands relevés ont pu atteindre jusqu'à présent, et sans biais.

Le satellite *Planck*, lancé en mai 2009, offre, entre autre, une opportunité inédite d'obtenir cette carte de la répartition des grandes structures tracées par la température du CMB. Il a en effet réalisé la mesure "ultime" des anisotropies du CMB, grâce à une résolution jusque-là inégalée sur le ciel complet. Cette précision doit permettre, en théorie, de mesurer l'effet de lentille avec un rapport signal sur bruit raisonnable. Les outils statistiques nécessaires pour effectuer cette mesure sont en effet bien connus. Cependant, en pratique, nous devons les adapter à la réalité des données expérimentales. Par exemple, de nombreux objets astrophysiques émettent de la lumière dans les mêmes longueurs d'onde que le CMB, à commencer par notre propre Galaxie. Il nous faut alors utiliser des masques sur les cartes du CMB, ce qui a tendance à créer un signal mimant l'effet de lentille.

Tout l'enjeu consiste donc à modifier la méthode théorique pour mesurer l'effet de lentille. C'est le cœur de cette thèse et de tout le travail réalisé par les différents membres de l'équipe "Lensing" de la collaboration Planck. Les méthodes et résultats que nous présenterons ont enrichi le travail de toute l'équipe. Nous nous sommes réparti l'étude de certaines systématiques tandis que pour d'autres, le traitement des masques par exemple, diverses méthodes ont été développées et confrontées. La ligne directrice que nous avons suivie à l'IAP est celle de la simplicité. Nous avons cherché une façon minimale de corriger les "non-idéalités" des données. En contrepartie, le résultat peut être moins optimal que ce que fournissent d'autres méthodes. Cela nous permet en revanche d'assurer une mesure robuste.

Les trois premiers chapitres de ce manuscrit dressent le décor. Le chapitre 1 décrit le modèle cosmologique standard d'un Univers en expansion, ayant connu une phase très chaude et très dense, et dont le refroidissement a abouti à l'émission du CMB, objet qui nous intéresse particulièrement. Le chapitre 2 permet, par l'étude de l'évolution des perturbations de densité, de comprendre la formation des grandes structures, responsables de l'effet de lentille dans le CMB, ainsi que l'origine de ses anisotropies. Nous esquissons, au chapitre 3, un panorama de la découverte et de la mesure des anisotropies du CMB dont nous détaillons la physique. Nous présentons, à cette occasion, le satellite Planck dont cette thèse contribue à exploiter les données. Nous y définissons aussi le modèle cosmologique Λ CDM choisi pour ce travail.

Les trois chapitres suivants développent peu à peu l'intrigue. La manière dont l'effet de lentille imprime sa signature dans le CMB est expliquée au chapitre 4. Les motivations pour le mesurer et les outils

disponibles pour le faire y sont détaillés. Nous passons en revue les détections et premières mesures de l'effet de lentille dans le CMB dans le chapitre 5. À partir du chapitre 6, nous dévoilons nos contributions personnelles, au travers, tout d'abord, d'une dérivation originale de l'estimateur quadratique utilisé pour mesurer l'effet de lentille dans le CMB. Nous construisons en effet une version modifiée de l'estimateur proposé par Okamoto et Hu (2003). Celui-ci consiste en une resommation des multipôles de la température, filtrés dans l'espace des harmoniques. Nous mettons en place le pipeline de base pour, à partir d'une carte des anisotropies de température, effectuer la mesure du potentiel de lentille. Celui-ci doit être modifié pour tenir compte des nombreux écarts à l'idéalité des données.

Pendant trois chapitres, surviennent un certain nombre de rebondissements avant d'aboutir au dénouement. Nous étudions, au chapitre 7, l'impact d'une connaissance incertaine du modèle cosmologique sur la qualité de la mesure. Les filtres de l'estimateur sont en principe choisis de telle sorte que sa variance soit minimale. Il faut alors connaître précisément les spectres sous-jacents aux données et les caractéristiques de l'instrument. Le traitement des systématiques d'origine astrophysique est présenté au chapitre 8. Les méthodes développées pour tenir compte de l'émission des objets d'avant-plan, comme notre propre Galaxie, y sont détaillées et testées. Le chapitre 9 aborde quant à lui le traitement d'un effet instrumental important : la couverture inhomogène du ciel par le satellite. Celle-ci se traduit par un bruit inhomogène dans les données. L'estimateur étant construit pour des données dont le bruit est supposé homogène, il nous faut évaluer la contribution de la partie inhomogène du bruit à l'estimation d'effet de lentille.

Dénouement de l'intrigue, nous présentons finalement au chapitre 10, la mesure d'effet de lentille effectuée dans des simulations ayant un certain nombre de caractéristiques des données Planck, puis celles effectuées dans les données elles-mêmes...

HISTOIRE THERMIQUE DE L'UNIVERS

1

SOMMAIRE

2.1	CADRE D'ÉTUDE	23
2.1.1	Une origine des perturbations	23
2.1.2	Echelles considérées	25
2.2	ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS DE MATIÈRE	26
2.2.1	Description du fluide	26
2.2.2	Perturbations de densité de la matière noire seule	29
2.2.3	Perturbations de densité des baryons seuls	30
2.2.4	Perturbations des baryons en présence de matière noire	31
2.3	ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS DES PHOTONS	33
2.3.1	Equations d'Einstein	33
2.3.2	Equations des perturbation	35
2.3.3	Evolution des perturbations	36

DANS ce chapitre, nous présentons le modèle cosmologique standard, permettant de décrire les premiers instants de l'Univers et son contenu actuel. La figure 1.1 nous en donne un aperçu rapide. Nous nous intéresserons en particulier dans ce chapitre à la phase qui va de la fin de l'inflation jusqu'à l'émission du CMB, 400 000 ans environ après le Big-Bang. Avant l'inflation, nous arrivons à des niveaux d'énergie pour lesquels la Physique actuelle ne nous permet plus que des spéculations. Tôt dans son histoire, l'Univers aurait subi une phase d'inflation, c'est-à-dire d'expansion très rapide. Jusqu'au *découplage*, l'Univers est opaque. C'est un plasma de matière ionisée dans lequel les photons sont prisonniers. Des noyaux atomiques se forment pendant cette période, c'est la nucléosynthèse. 400 000 ans seulement après le Big-Bang, à l'époque de la recombinaison, nous voyons l'Univers baigné d'un rayonnement à 3000K, appelé Rayonnement de Fond Cosmologique (ou CMB pour *Cosmic Microwave Background*). S'ensuit la période des "âges sombres", tandis que les premières étoiles ne se sont pas encore allumées. Nous voyons naître les premières étoiles, entre 400 et 700 millions d'années plus tard, puis les premières galaxies.

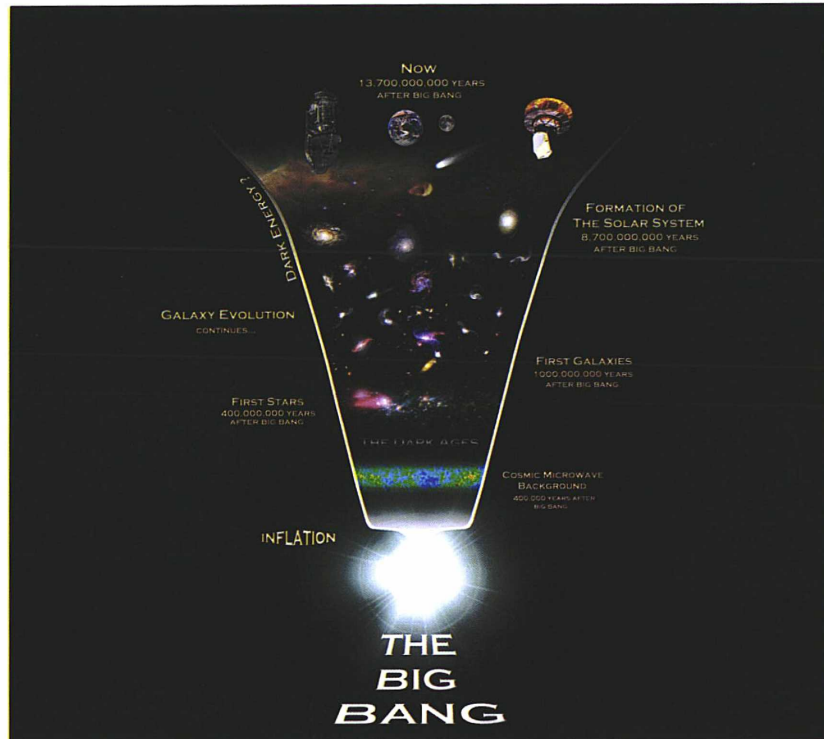


FIGURE 1.1 – Histoire de l'Univers depuis le Big-Bang. Source : <http://planck.cf.ac.uk/science/inflation>

1.1 CADRE THÉORIQUE

La théorie de la Relativité Générale a fourni le cadre théorique à l'étude de l'Univers dans son ensemble, le considérant comme un système physique. Celui-ci peut être décrit comme un ensemble de fluides "parfaits".

1.1.1 La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A très grande échelle (c'est-à-dire plus de 100Mpc), l'Univers est supposé spatialement homogène et isotrope, à tout instant. C'est le *principe cosmologique*. L'isotropie signifie qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans l'Univers. L'isotropie est suggéré par la répartition des galaxies autour de nous et le rayonnement de fond cosmologique. De plus, le temps doit s'écouler de la même façon partout. L'univers observable doit donc pouvoir être décrit par une métrique de Friedman-Lemaître :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

→ t , r , θ et ϕ sont les quatre coordonnées d'espace-temps. Les coordonnées d'espace sont des *coordonnées comobiles*. Elles donnent la position d'observateurs privilégiés pour lesquels l'univers est homogène et isotrope. La coordonnée temporelle t ou *temps cosmique* correspond au temps propre des observateurs comobiles.

→ Le paramètre k caractérise la courbure spatiale de l'univers. Il vaut 1, 0 ou -1 . S'il vaut 0, l'univers est spatialement plat.

→ Enfin, le terme $a(t)$ désigne le facteur d'échelle et traduit l'expansion de l'Univers qui sera présentée au paragraphe suivant. La distance de coordonnée Δx ne dépend pas du facteur d'échelle et est appelée *distance comobile*. La *distance physique* séparant deux lieux de l'espace à un instant donné est $a(t)\Delta x$.

Le temps conforme η est défini par :

$$d\eta = \frac{c}{a(t)} dt \quad (1.2)$$

La métrique se réécrit alors :

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

1.1.2 L'expansion de l'Univers

La découverte de l'expansion de l'Univers c'est-à-dire d'un apparent éloignement des galaxies les unes des autres, est attribuée à Hubble (1929). Il a observé en effet un décalage vers le rouge de la lumière émise par les galaxies, d'autant plus important qu'elles sont plus éloignées de nous. L'interprétation de ce décalage est fournie par la Relativité Générale : l'Univers (dans son ensemble) est en expansion. Dans le passé, il a donc bien dû avoir une phase très chaude et très dense. L'expansion est un premier "pilier" de la théorie du Big-Bang.

La constante de proportionnalité H qui relie les vitesses de récession apparentes des galaxies à leurs distances (pourvu qu'elles ne soient pas trop grandes) est appelée paramètre de Hubble. Il s'exprime en (km/s)/Mpc et correspond au taux d'expansion de l'Univers (et varie donc avec le temps) :

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.4)$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps t . Soit, en temps conforme η , en notant cette fois-ci par un prime la dérivée temporelle :

$$\mathcal{H} = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} = aH \quad (1.5)$$

Le redshift ou décalage spectral vers le rouge z s'écrit comme :

$$1 + z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{a_0}{a(t)} \quad (1.6)$$

Bien plus tard, en 1998, deux équipes dirigées par Perlmutter et al. (1999) et Riess et Filippenko (1998) ont mis en évidence, grâce aux supernovae de type Ia, que l'expansion de l'Univers était accélérée. Pour comprendre ce phénomène, il faut supposer l'existence d'un constituant dont la pression est négative, autrement dit qui s'oppose à la gravitation. Ce constituant inconnu est ce que nous nommons l'énergie noire ou constante cosmologique. Le Prix Nobel de Physique a récompensé en 2011 les deux chercheurs pour cette découverte.

1.1.3 Contenu de l'Univers

Le contenu énergétique de l'Univers se répartit entre différents constituants dont les proportions varient suivant l'époque considérée :

- matière non relativiste (matière noire et baryons)
- espèces relativistes parmi lesquelles la radiation (ou les neutrinos dans des phases très antérieures)
- des champs scalaires ou une constante cosmologique Λ qui peut encore être interprétée comme l'énergie du vide ou encore énergie noire.

Notre Univers est, par exemple, actuellement dominé par l'énergie noire à 72%, la radiation ayant presque totalement disparu et la matière ordinaire ne pesant que 5% du contenu total (cf. figure 1.2).

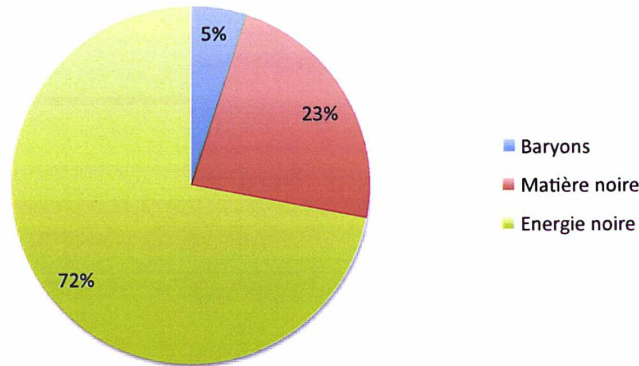


FIGURE 1.2 – Contenu de l'Univers à l'époque actuelle

L'Univers est assimilé à un fluide parfait ou, plus exactement, à un ensemble de fluides parfaits. Chaque fluide est caractérisé par sa densité d'énergie $\rho(t)$ et sa pression $p(t)$. Les équations d'Einstein avec constante cosmologique Λ se réduisent alors au système différentiel suivant :

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.7)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.8)$$

La connaissance de l'équation d'état du fluide, $p = p(\rho)$ permet ainsi de déterminer $a(t)$, $p(t)$ et $\rho(t)$. On peut par ailleurs dériver l'équation de conservation des deux équations précédentes :

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.9)$$

L'introduction du paramètre de Hubble dans l'équation 1.7 conduit à définir une densité critique :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.10)$$

dont la valeur donnée par Bernardeau (2007) est $\rho_c = 0.8 \times 10^{-29} g/cm^3$. Le paramètre de densité est le rapport de la densité du fluide à la densité critique :

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c} \quad (1.11)$$

On utilise habituellement les paramètres de densité évalués à l'époque actuelle t_0 :

$$\Omega = \Omega(t_0) = \frac{\rho(t_0)}{3H_0^2/8\pi G} \quad (1.12)$$

On peut encore réécrire les équations d'Einstein en fonction du temps conforme η en remarquant que :

$$\begin{cases} X' = a\dot{X} \\ X'' - \mathcal{H}X' = a^2\ddot{X} \end{cases}$$

Les équations deviennent donc :

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k + \frac{\Lambda}{3}a^2 \quad (1.13)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}a^2(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}a^2 \quad (1.14)$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0 \quad (1.15)$$

Chacune des espèces présentées suit une équation d'état de la forme :

$$P = \omega\rho \quad (1.16)$$

Nous avons alors, pour un univers à courbure nulle ($k = 0$), d'après l'équation de conservation (1.9) :

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (1.17)$$

Et d'après l'équation 1.7, nous aurons alors, pour un fluide, lorsque celui-ci domine le contenu énergétique de l'Univers :

$$a(t) \propto t^{2/3(1+\omega)} \quad (1.18)$$

D'après la définition du temps conforme, si $a(t) \propto t^n$, alors $a(\eta) \propto \eta^{n/(1-n)}$, d'où :

$$a(\eta) \propto \eta^{2/(1+3\omega)} \quad (1.19)$$

Nous en déduisons ainsi l'évolution des différents constituants de l'Univers, lorsque ceux-ci dominent le contenu total. Les équations précédentes sont appliquées aux différents fluides dans le tableau 1.1.

Les équations de Friedmann se ré-écrivent ainsi, en termes des paramètres de densité :

$$1 = \Omega_T + \Omega_k \text{ où } \Omega_T = \Omega_{NR} + \Omega_R + \Omega_\Lambda \quad (1.20)$$

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\Omega_{NR} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_R \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right] \quad (1.21)$$

	Matière non relativiste	Radiation	Energie noire
Equation d'état	$\omega = 0$	$\omega = \frac{1}{3}$	$\omega = -1$
Densité d'énergie	$\rho_{NR} \propto a^{-3}$	$\rho_R \propto a^{-4}$	$\rho_\Lambda \propto a^0$
Facteur d'échelle	$a_{NR}(t) \propto t^{2/3}$	$a_R(t) \propto t^{1/2}$	$a_\Lambda(t) \propto e^{Ht}$
Temps conforme	$\eta_{NR} \propto a^{1/2}$	$\eta_R \propto a$	$\eta_\Lambda \propto a^{-1}$
Paramètre de Hubble	$H(t) \propto t^{-1}$	$H(t) \propto t^{-1}$	$H(t) = Cte$

TABLE 1.1 – Evolution des constituants de l'Univers

où nous avons posé :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \Rightarrow \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (1.22)$$

$$\Omega_k = \frac{-k}{a_0^2 H_0^2} \Rightarrow \rho_k = \frac{-3k}{8\pi G a^2} \quad (1.23)$$

La densité d'énergie totale de l'Univers s'écrit donc :

$$\rho_{tot}(a) = \rho_R(a) + \rho_{NR}(a) + \rho_\Lambda(a) \quad (1.24)$$

$$= \rho_c \left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{NR} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda \right] \quad (1.25)$$

Le facteur d'échelle étant une fonction croissante du temps, on aura donc d'abord une phase de l'Univers dominée par la radiation, puis par la matière et, éventuellement, plus tard, par la constante cosmologique. Dans ce dernier cas, le facteur d'échelle croît exponentiellement et le paramètre de Hubble est constant. Par ailleurs, lorsqu'on remonte vers le passé, le facteur d'échelle tend vers zéro en un temps fini, ce qui impliquerait que l'Univers ait un âge fini.

1.2 THERMODYNAMIQUE DE L'UNIVERS

Nous avons vu que, par le passé, l'Univers était plus dense et plus chaud. Grâce à l'expansion, la densité et la température du plasma primordial ont peu à peu diminué. Nous allons nous intéresser ici à une chronologie des premiers instants de l'Univers, gouvernée par la température. Pour comprendre cette histoire thermique de l'univers, plusieurs hypothèses sont nécessaires :

- L'Univers est en expansion adiabatique¹. L'entropie globale de l'Univers n'augmente pas significativement lors de réactions irréversibles entre ses constituants. L'augmentation d'entropie est en effet négligeable devant l'entropie véhiculée par les photons reliques du Big-Bang.

1. Pour une démonstration voir le paragraphe 4.1. du cours de Durrer (2005)

- L'Univers a connu des époques où l'équilibre thermique était réalisé au moins pour une partie de ses constituants. Cet équilibre n'est pas remis en cause par l'expansion de l'Univers tant que les réactions ont lieu suffisamment rapidement. L'expansion est alors assimilée à une suite de transformations quasi-statiques et le gaz des particules reste à l'équilibre thermique.
- On peut assimiler les particules présentes à des fluides parfaits c'est-à-dire sans interaction.²

Lorsque l'équilibre thermique entre constituants est vérifié, on décrit donc l'Univers comme un fluide parfait en expansion adiabatique.

La fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ d'un gaz quantique à l'équilibre thermodynamique s'écrit :

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) \pm 1} \quad (1.26)$$

Le signe + s'applique aux fermions (électrons, neutrinos, positrons, etc), on parle alors de *distribution de Fermi-Dirac*, tandis que le signe – s'applique aux bosons (photons) et on parle de *distribution de Bose-Einstein*. On désigne par μ le potentiel chimique à la température T . Enfin, $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzman.

1.2.1 Densité d'énergie du plasma primordial à l'équilibre

Le plasma primordial, à l'époque que nous considérons est majoritairement constitué de photons qui baignent l'Univers, de protons, de neutrons et d'électrons. Toutes ces espèces sont alors relativistes. La densité d'énergie de bosons relativistes et en particulier des photons, s'écrit, à l'équilibre (Balland 2003) :

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (1.27)$$

g désigne le facteur de dégénérescence associé à l'espèce considérée (ici au photon ou au boson). Il tient compte des différents états de spin ou de polarisation. Pour le photon, $g_\gamma = 2$.

Connaissant les densités d'énergie des fermions (électrons, neutrinos et quarks essentiellement) relativistes et négligeant celles des fermions non-relativistes, nous obtenons la densité d'énergie totale du plasma primordial en fonction de la densité d'énergie des photons :

$$\rho_{tot} = \rho_\gamma g^{eff}(T) = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 g^{eff}(T) \quad (1.28)$$

avec :

$$g^{eff}(T) = \sum_{i \in \text{bosons}} \frac{g_{B_i}}{g_\gamma} \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j \in \text{fermions}} \frac{g_{F_j}}{g_\gamma} \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \quad (1.29)$$

2. Cette dernière hypothèse n'est pas incompatible avec la précédente bien que l'équilibre thermique soit assuré par des interactions entre les différents constituants de l'Univers. En effet, ces réactions sont suffisamment nombreuses pour assurer l'équilibre thermique et suffisamment peu nombreuses pour que l'on puisse traiter les différents composants comme des "gaz parfaits".

Le plasma est ainsi caractérisé par un nombre de degrés de liberté qui dépend de la température. Sa densité d'énergie totale est liée à celle des photons dont le bain joue le rôle de "thermostat" pour les autres espèces, à l'équilibre.

1.2.2 Ecart à l'équilibre et découplage

Après un certain temps, l'expansion a suffisamment dilué l'énergie disponible pour que certaines réactions qui assuraient l'équilibre thermique ne le fassent plus. Les particules qui n'interagissent plus avec les photons quittent l'équilibre et ne sont donc plus thermalisées. En d'autres termes, l'équilibre thermique résulte de la compétition entre réactions et expansion. L'expansion possède un temps caractéristique H^{-1} tandis que les réactions thermalisent efficacement le plasma en un temps Γ^{-1} où Γ désigne le taux de réaction. Le critère d'existence de l'équilibre thermique est donc :

$$\Gamma^{-1} < H^{-1} \Leftrightarrow \Gamma > H \quad (1.30)$$

Une estimation du taux de réaction Γ permet donc d'évaluer la période de découplage d'une espèce :

- Si $\Gamma > H$, les particules sont couplées au plasma et en équilibre thermique
- Si $\Gamma < H$, les particules sont découplées du plasma, elles n'interagissent plus avec les photons

1.3 LE GEL DES INTERACTIONS FAIBLES

Pour des températures supérieures à 100MeV , l'Univers est un plasma de particules relativistes maintenues à l'équilibre par l'interaction faible (réactions 1.31, 1.32) et les interactions entre électrons et positrons (1.33).

$$\begin{cases} e^+ + e^- \leftrightarrow \nu + \bar{\nu} \\ \nu + e \leftrightarrow \nu + e \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\begin{cases} \nu_e + n \leftrightarrow p + e \\ e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e \\ n \leftrightarrow p + e + \bar{\nu}_e \end{cases} \quad (1.32)$$

$$e + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma \quad (1.33)$$

Ces équilibres sont rompus au fur et à mesure que l'expansion l'emporte sur les taux de réaction correspondants, aboutissant au *gel des interactions faibles*.

1.3.1 Le découplage des neutrinos

Les neutrinos sont la première espèce du plasma primordial à se découpler, autour de :

$$T_v^{dec} \simeq 1.4\text{MeV} \quad (1.34)$$

Comme le découplage a lieu lorsque les neutrinos sont encore relativistes ($E \gg m$), leur distribution de Fermi (équation 1.26) est conservée avec une température qui décroît en a^{-1} (Balland 2003). Le nombre de neutrinos par unité de volume comobile ($N = na^3$) est également conservé.

1.3.2 Le découplage des protons et des neutrons

Lorsque la température est encore supérieure à 1MeV , les protons et les neutrons, sous l'action de l'interaction faible, ne cessent de transmuter, ce qui assure leur équilibre thermique. En dessous de 1MeV , c'est-à-dire vers $t = 1\text{s}$, le taux d'interaction devient inférieur au taux d'expansion. Les protons et les neutrons se découplent alors à leur tour du plasma primordial et ne se transforment plus entre eux. Ce découplage a lieu presque en même temps que celui des neutrinos. Les neutrons se désintègrent ensuite en une quinzaine de minutes en protons.

1.3.3 L'annihilation e^+e^-

Lorsque la température atteint environ la masse de l'électron (0.511MeV), peu de temps après le découplage des neutrinos, les électrons et les positrons s'annihilent. Cette réaction produit des photons dont l'entropie réchauffe le plasma thermalisé. Les neutrinos qui ont déjà découplé, ne sentent pas cet apport. La température du bain de photon diminue donc, à partir de ce moment-là, plus lentement que la température des neutrinos.

1.4 LA NUCLÉOSYNTHÈSE

La *nucléosynthèse primordiale* désigne la formation des noyaux des éléments légers (noyaux atomiques contenant 5 protons ou moins) durant les premières minutes de l'Univers. Alpher et al. (1948a), Gamow (1948a) ont en effet montré que le modèle du Big-Bang permet la formation de noyaux légers et d'en prédire l'abondance, en fonction des populations de neutrons et de protons (baryons). La vérification de ces prédictions présentées figure 1.3 constitue un second pilier de la théorie du Big-Bang.

La nucléosynthèse peut être décomposée en trois étapes majeures, les deux premières ayant déjà été évoquées au paragraphe précédent :

1. $T \gg 1\text{MeV}$, le plasma primordial est à l'équilibre thermodynamique (équations 1.31, 1.32 et 1.33).
2. $T \sim 1 - 0.7\text{MeV}$, gel des interactions faibles, les neutrons se désintègrent en protons mais les noyaux atomiques formés restent à l'équilibre.
3. $T \sim 0.7 - 0.05\text{MeV}$, l'équilibre des noyaux atomiques avec le plasma est déplacé, ceux-ci se forment (sans être désintégrés ensuite) par une suite de réactions à deux corps.

1.4.1 Formation du Deutérium

Au bout de trois minutes, en effet, alors que tous les neutrons ne sont pas encore désintégrés, le Deutérium, formé d'un proton et d'un neutron n'est plus photo-dissocié. La température est alors de $0,1\text{MeV}$ (un milliard de degrés Kelvin). La réaction de formation du Deutérium s'écrit :



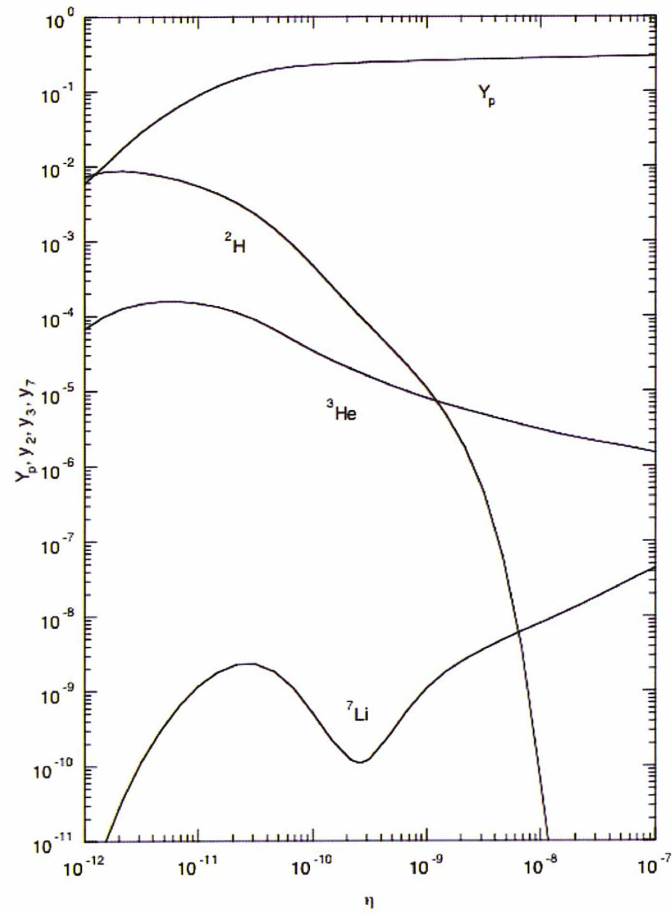


FIGURE 1.3 – Prédiction de l'abondance des éléments légers en fonction du rapport baryon/photon n_B/n_γ . Source : Olive et al. (2000)

1.4.2 Formation des autres éléments jusqu'à l'Hélium 4

Suite à la formation du Deutérium, les réactions nucléaires s'amorcent pour une centaine de secondes. L'hélium 3, l'hélium 4, le lithium 6 et 7, le Bore et le Béryllium sont formés pendant cette période, fixant la composition chimique de l'Univers (Peebles 1966).

1.5 LE RAYONNEMENT DE FOND COSMOLOGIQUE

Tant que la température du plasma est plus grande que l'énergie de liaison de l'hydrogène ($13.6eV$), la matière reste ionisée et les photons sont couplés aux électrons par diffusion Compton. Au-delà de cette limite en revanche, les électrons peuvent en principe se recombiner avec les noyaux. Ce processus aboutit alors au découplage des photons que l'on désigne comme l'émission du CMB.

1.5.1 La transition radiation-matière

Nous avons montré à l'équation 1.17 que la densité d'énergie du rayonnement varie comme a^{-4} tandis que celle de la matière varie comme a^{-3} . Il existe donc une époque à laquelle $\rho_R = \rho_m$. D'après l'équation 1.28, on a alors, à l'équivalence :

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega_m}{\Omega_R} \quad (1.36)$$

Les données WMAP7 ont permis à Larson et al. (2011) de mesurer $z_{eq} = 3196^{+134}_{-133}$.

1.5.2 La recombinaison

La *recombinaison* est la période pendant laquelle les électrons se combinent avec les noyaux d'hydrogène pour former des atomes neutres, lorsque la température est suffisamment basse. Auparavant, les électrons sont en équilibre avec les photons.

1.5.2.1 Equilibre thermique électron-photon

Les électrons ayant survécu à l'annihilation électrons-positrons sont à l'équilibre thermique avec les photons et sont non-relativistes ($T < m_e = 0,511MeV$). L'équilibre peut être maintenu grâce à de nombreuses réactions, parmi lesquelles, suivant Padamanabhan (2002) à la section 4.7 (p.248), la diffusion Compton, la diffusion Coulombienne, la double diffusion Compton, etc. Or ces deux dernières sont gelées dès $z \approx 10^7$, c'est-à-dire bien avant l'époque qui nous intéresse ici. L'équilibre électron-photon est donc assuré par diffusion Compton :

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e \quad (1.37)$$

Dans n'importe quel référentiel autre que celui du centre de masse, le photon cède une partie de son impulsion et de son énergie à l'électron. La diffusion Compton domine à très haute température ($T \geq 5eV$). A basse température ($z < 10^4$), il n'y a plus qu'un transfert d'impulsion et on

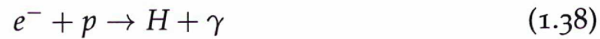
parle alors de *diffusion Thomson*. Celle-ci ne contribue plus à thermaliser le plasma puisqu'il n'y a pas d'échange d'énergie.

Les photons suivent donc une distribution de Bose-Einstein avec potentiel chimique (équation 1.26). Ce potentiel chimique est nul pour $T > 1\text{keV}$ et ne change que si l'on injecte des photons ensuite.

L'équilibre thermique reste maintenu tant que la température de l'Univers reste grande devant l'énergie de liaison de l'hydrogène et dépend de la densité d'électrons libres présents.

1.5.2.2 Formation des atomes d'hydrogène

Peu après l'égalité rayonnement-matière³, les électrons se combinent avec les protons, formant les noyaux d'hydrogène :



Définissons la fraction d'ionisation par :

$$X_e = \frac{n_e}{n_p + n_H} \sim \frac{n_p}{n_p + n_H} = X_p \quad (1.39)$$

L'équation de Saha, donne l'évolution de l'équilibre de la fraction d'ionisation X_e du plasma en fonction de la température :

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{e^{-B_H/T}}{n_b} \quad (1.40)$$

où B_H désigne l'énergie d'ionisation de l'hydrogène (13.6 eV) et n_b la densité numérique de baryons.

Par convention, on considère que la recombinaison a eu lieu lorsque 90% des électrons ont été intégré à des atomes d'hydrogène ($X_e \sim 0,1$). Pour $n_B = 3.10^{-10} n_\gamma$, nous trouvons :

$$T_{rec} \simeq 0,3 \text{ eV} = 3888 \text{ K} \Rightarrow 1 + z_{rec} \simeq 1250 \quad (1.41)$$

En réalité, la recombinaison ne se fait pas directement de l'état ionisé vers l'état fondamental. Cette réaction produit en effet des photons de 13,6 eV qui réionisent immédiatement les atomes formés. Elle se fait donc par étape, passant par divers niveaux excités de l'hydrogène. C'est un processus plus lent que celui que nous avons considéré. Toutefois, les résultats obtenus n'en sont que peu affectés.

1.5.2.3 Le gel de la recombinaison

Ce qui précède reste valable tant que l'équilibre est maintenu. La température T_{gel} du gel de la recombinaison, lorsque $\Gamma(T_{gel}) = H(T_{gel})$ vaut, pour $\Omega_m \simeq 0,3$:

$$T_{gel} \simeq 0,23 \text{ eV} = 2800 \text{ K} \Rightarrow 1 + z_{gel} \simeq 1000 \quad (1.42)$$

La fraction d'ionisation restante est alors $X_e(T_{gel}) \simeq 10^{-5}$.

3. En principe, la recombinaison devrait commencer dès que la température atteint 13,6 eV. En réalité, elle est retardée à cause de la proportion très faible de baryons en regard de celle des photons, autrement dit de la très grande entropie par baryon.

L'hydrogène neutre Après la recombinaison, l'hydrogène peut être assimilé à un gaz monoatomique ($\gamma = 5/3$) en expansion adiabatique. Sa température décroît alors comme a^{-2} .

Les électrons et protons résiduels Les photons, à partir du découplage, ne sentent plus la présence des électrons mais les électrons ont encore un grand nombre de collisions avec les photons. Cela n'affecte que peu de photons mais permet de maintenir les électrons à l'équilibre avec les photons jusqu'à un redshift $z \sim 20$.

1.5.3 Le découplage des photons

1.5.3.1 Emission du CMB

Du point de vue des photons, la densité d'électrons libres diminuant, leur taux d'interaction baisse également. En principe, à ce stade-là, les photons peuvent diffuser sur les atomes neutres (diffusion Rayleigh) ou sur les électrons. En pratique, la diffusion sur les électrons est beaucoup plus importante et, après un certain temps, seule la diffusion de Thomson élastique est encore effective. En comparant le taux de réaction Γ_γ de diffusion Thomson au taux d'expansion, nous calculons la température T_{dec} à laquelle les photons cessent d'interagir avec les électrons, pour $\Omega_m \simeq 0,3$:

$$T_{dec} \simeq 0.266 \text{ eV} = 3085 \text{ K} \Rightarrow 1 + z_{dec} \simeq 1130 \quad (1.43)$$

Le découplage des photons a donc lieu légèrement avant le gel de la recombinaison. Après le découplage, les photons se propagent librement, sans collision et ne subissent que l'influence de l'expansion. Leur libre parcours moyen ℓ_γ est en effet devenu plus important que le rayon de Hubble : $\ell_\gamma \gg H^{-1}$. Ils conservent donc leur distribution de Bose-Einstein avec une température qui décroît comme a^{-1} .

1.5.3.2 Surface de dernière diffusion

Après le découplage des photons, l'Univers qui était opaque, devient transparent. Il est baigné de ce rayonnement isotrope. Le moment où les photons interagissent pour la dernière fois définit une hypersurface de genre espace appelée *surface de dernière diffusion*. Les photons de ce rayonnement fossile que nous observons viennent ainsi de l'intersection de cette surface de dernière diffusion avec notre cône de lumière passé. Nous voyons donc la surface de dernière diffusion comme une sphère centrée sur nous.

Comme la recombinaison n'est pas instantanée, le libre parcours moyen des photons augmente progressivement. La surface de dernière diffusion n'est donc pas infiniment fine. Pour quantifier la transparence de l'univers, définissons la *profondeur optique de Thompson* τ par :

$$\tau = \int_{t_0}^t n_e X_e \sigma_T dt \quad (1.44)$$

où $dl = cdt$ est la distance physique parcourue par les photons. On définit l'époque de dernière diffusion t_* par $\tau(t_*) = 1$ et, de même, le redshift de dernière diffusion z_* par $\tau(z_*) = 1$. Ainsi, pour :

- $\tau \gg 1$, l'Univers est opaque.
- $\tau \ll 1$, l'Univers est transparent.

On montre que τ est indépendant des paramètres cosmologiques et ne dépend que du décalage spectral. Il vaut 1 pour $z_* = 1072$.

La probabilité pour qu'un photon ait diffusé dans l'intervalle $[z, z + dz]$ est donnée par la distribution de Poisson. On définit ainsi une fonction de visibilité $P(z)$ telle que :

$$P(z)dz = e^{-\tau}d\tau \quad (1.45)$$

Cette fonction pique autour de $z = 1100$ et sa largeur à mi-hauteur indique que les photons font leur dernière diffusion pendant un intervalle $\Delta z \sim 100$.

1.5.4 Propriétés du rayonnement fossile

Ce rayonnement de fond cosmologique (CMB pour *Cosmic Microwave Background*) a été découvert Penzias et Wilson (1965). Il possède les propriétés suivantes :

1. Il a une loi d'émission de corps noir à la température (Fixsen 2009) :

$$T_0 = 2.72548 \pm 0.00057 \text{ K} \quad (1.46)$$

2. Il est presque parfaitement isotrope. On observe des écarts à la température T_0 de l'ordre de 10^{-5} .
3. C'est la principale source de rayonnement de l'Univers avec une densité numérique $n = 420 \text{ cm}^{-3}$ à comparer avec le photon par centimètre cube provenant des étoiles et des galaxies.

1.5.4.1 Le spectre de corps noir

Le modèle standard suppose qu'il n'y a pas d'apport d'énergie aux photons entre l'annihilation électron-positron vers $z \sim 10^9$ et $z \sim 10 - 20$. Le rayonnement fossile émis vers $z = 1100$ doit donc avoir assez précisément conservé un spectre de Planck :

$$I(\nu) = \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (1.47)$$

Le satellite COBE a permis de vérifier cette prédiction (cf. figure 1.4) et d'étudier les éventuelles distorsions de ce spectre de corps noir causées par des injections d'énergie à des décalages spectraux inférieurs à $z \sim 10^6$.

Potentiel chimique Pour un décalage spectral compris entre $z \sim 2 \cdot 10^6$ et $z \sim 10^5$, la diffusion Compton permet encore de thermaliser le plasma sans modifier le nombre de photons. S'il y a donc une injection d'énergie sous forme de photons à cette période-là, le potentiel chimique cesse d'être nul et les photons ne suivent plus une distribution de Planck mais la distribution de Bose-Einstein. L'expérience FIRAS du satellite COBE (Smoot et Scott 1996) a montré que

$$\left| \frac{\mu}{T_\gamma} \right| < 9 \cdot 10^{-5} \quad (1.48)$$

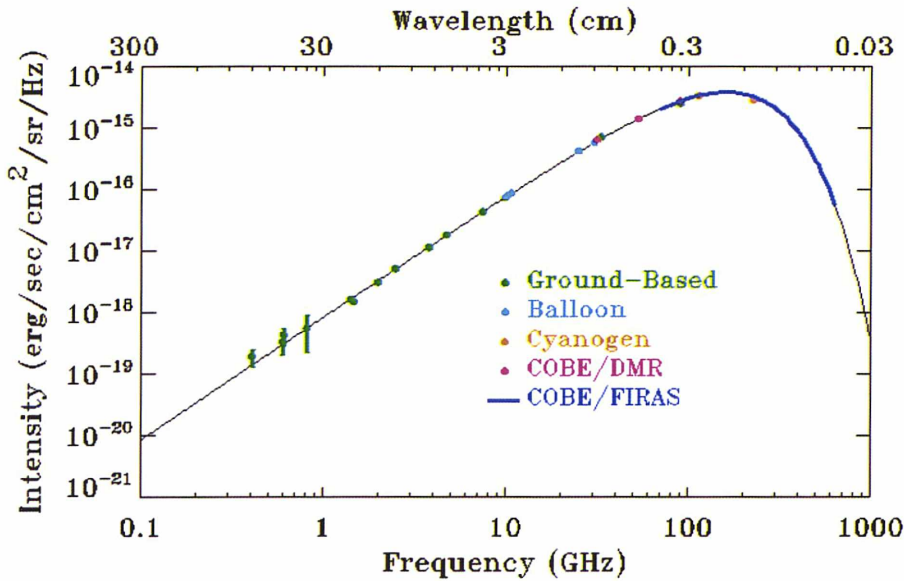


FIGURE 1.4 – Spectre du CMB mesuré par différents instruments (points) comparé à un spectre de corps noir à 2.726K. Source : Smoot et Scott (1996)

Diffusion Compton Après la recombinaison, les photons du CMB peuvent diffuser sur des zones réionisées (galaxies chaudes). Cette injection d'énergie ne peut plus être thermalisée. C'est l'effet Sunyaev Zel'dovich. Il entraîne un déplacement du spectre vers les plus hautes énergies (sans modifier le nombre de photons). On le mesure avec le paramètre y qui représente l'épaisseur optique de Compton intégrée. L'expérience FIRAS du satellite COBE (Smoot et Scott 1996) a montré que

$$|y| < 1,9 \cdot 10^{-5} \quad (1.49)$$

Diffusion free-free Il peut encore y avoir l'émission de photons lorsque des électrons diffusent sur des particules chargées de gaz chaud. La contamination par absorption free-free est mesurée par le paramètre Y_{ff} . L'expérience FIRAS du satellite COBE (Smoot et Scott 1996) a montré que

$$|Y_{ff}| < 1,5 \cdot 10^{-5} \quad (1.50)$$

Les limites sur les trois paramètres précédents posent des contraintes intéressantes sur les processus "non-standard" après $z \sim 10^7$.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Le modèle standard de la Cosmologie déduit du constat que l'Univers est en expansion l'existence d'une phase antérieure où il était beaucoup plus chaud et dense, appelée *Big-Bang*. Cette théorie est communément admise et confirmée par deux faits observationnels majeurs :

- La nucléosynthèse primordiale qui permet de prédire l'abondance des éléments légers
- Le rayonnement fossile (CMB) qui est la trace de cette phase ancienne de l'Univers

Ce modèle décrit ainsi un Univers homogène, isotrope, en expansion à l'aide de 5 paramètres indépendants $\{h, \Omega_K, \Omega_c, \Omega_b, \Omega_r\}$, récapitulés dans le tableau 1.2. La constante cosmologique est quant à elle contrainte par $\Omega_\Lambda = 1 - \sum_i \Omega_i$.

h	constante de Hubble	0.72 ± 0.05
Ω_K	paramètre de courbure	1.02 ± 0.02
Ω_c	densité de matière noire	0.113 ± 0.009
Ω_b	densité de baryons	0.02 ± 0.009
Ω_r	densité de rayonnement	4.148×10^{-5}
Ω_Λ	constante cosmologique	0.72 ± 0.03
w	équation d'état de l'énergie noire	$w < -0.6$

TABLE 1.2 – Paramètres cosmologiques du modèle standard de Big-Bang. Source : Peter et Uzan (2005)

Ce modèle souffre néanmoins d'un certain nombre de problèmes - que nous ne détaillerons pas ici - tels que celui de la platitude, de l'horizon, de la taille des fluctuations initiales, etc. Les scénarii d'inflation (Guth 1981) permettent de résoudre ces problèmes en proposant, avant l'ère dominée par le rayonnement, une phase d'expansion accélérée. Les perturbations de densité initiales sont générées pendant cette phase par amplification des fluctuations quantiques.

La résolution des équations de Friedmann (1.7, 1.8) dans un tel Univers et quelques arguments thermodynamiques nous ont permis de retracer son histoire thermique. Jusqu'à la fin de la recombinaison, vers un redshift de $z \sim 1100$, l'Univers est entièrement opaque. Aucune information ne peut nous parvenir de cette époque reculée sous la forme de rayonnement électromagnétique⁴. L'image la plus ancienne que nous ayons de l'Univers est ainsi celle donnée par le CMB. A partir de la "surface de dernière diffusion", l'univers devient transparent aux photons qui se propagent dans toutes les directions. Nous les observons avec une température homogène et isotrope en moyenne.

On observe en réalité de petits écarts de l'ordre de 10^{-5} fois la température moyenne T_0 , appelés "anisotropies de température". Elles sont directement reliées aux petites perturbations de densité de l'univers primordial dont elles nous donnent une image : les zones les plus chaudes (en rouge sur les cartes) correspondent aux sous-densités et les zones les plus froides (en bleu sur les cartes), aux sur-densités. Ces fluctuations de densité sont les graines à partir desquelles se sont formées les grandes structures par effondrement gravitationnel. Le CMB nous donne donc la

4. Les modèles inflationnaires prédisent toutefois l'existence d'ondes gravitationnelles primordiales qui pourraient être détectées (voir chapitre 2).

première photo des grandes structures de l'Univers.

Le chapitre suivant nous permettra de comprendre leur formation c'est-à-dire le passage de fluctuations quantiques à des perturbations de densité puis à des structures gravitationnellement liées. Nous pourrons ainsi lever le voile sur toute l'information physique contenue dans ces anisotropies du CMB.

HISTOIRE DYNAMIQUE DE L'UNIVERS

2

SOMMAIRE

3.1	OBSERVER LE CMB	39
3.1.1	Découverte du CMB	40
3.1.2	Observations du CMB	41
3.1.3	Le satellite Planck	43
3.2	LES ANISOTROPIES PRIMAIRES DU CMB	44
3.2.1	Formule de Sachs-Wolfe	44
3.2.2	Oscillations acoustiques dans un potentiel statique	44
3.2.3	Effet Sachs-Wolfe intégré (ISW)	46
3.2.4	Effet Doppler	46
3.2.5	Amortissement de Silk	46
3.2.6	Spectre de puissance	46

LES anisotropies de température observées dans le CMB sont la trace des petites fluctuations de densité présentes dans l'Univers au moment de la recombinaison. Nous allons, dans ce chapitre, nous attacher à expliquer l'apparition et l'évolution de ces perturbations, pour la matière puis pour le rayonnement. Le premier cas pourra, en général, être traité dans le cadre de la gravité newtonienne pour un Univers en expansion. Les perturbations de densité de rayonnement, en revanche, nécessitent un traitement relativiste que nous présenterons. Dans le chapitre suivant, nous en déduirons les caractéristiques du spectre angulaire des anisotropies du CMB.

2.1 CADRE D'ÉTUDE

2.1.1 Une origine des perturbations

Nous avons présenté à la fin du chapitre précédent la nécessité d'une phase d'expansion accélérée de l'Univers avant l'ère de domination du rayonnement pour expliquer, entre autre, son homogénéité et sa platitude. Les modèles d'*inflation à un champ* prédisent en effet que :

- l'inflation efface presque toutes les inhomogénéités classiques. L'univers observable est ainsi homogène et isotrope. Il peut donc être décrit par un univers de Friedmann-Lemaître (équation 1.1).
- l'inflation supprime exponentiellement la courbure, rendant l'Univers plat.

Toutefois, ces modèles ne se limitent pas à résoudre les problèmes de la théorie du Big-Bang. Ils proposent aussi une explication à l'apparition des structures dans l'Univers¹ (Bardeen et al. 1983) à partir des *fluctuations quantiques* du champ responsable de l'inflation.

Nous nous plaçons ici dans le formalisme du *roulement lent* qui décrit la plupart des modèles d'inflation, sans préjuger de la forme exacte du potentiel de l'inflaton, à l'aide de trois paramètres ϵ , δ et ξ . L'équation d'état associée au champ scalaire peut s'écrire :

$$w_\phi = -1 + \frac{2}{3}\epsilon \quad (2.1)$$

2.1.1.1 Variables de perturbations

Les perturbations sont dues au fait que l'inflaton atteint le fond de son potentiel à différents instants, en différents points de l'Univers. Ces fluctuations du champ scalaire (inflaton) engendrent des perturbations de la métrique dont l'expression dans la jauge newtonienne (ou longitudinale) est alors :

$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + \gamma_{ij}(1 - 2\Phi)dx^i dx^j \right] \quad (2.2)$$

La perturbation de la métrique est caractérisée par les *potentiels de Bardeen* Ψ et Φ pris petits pour pouvoir linéariser les équations. Dans le cas d'un fluide parfait, ces potentiels sont égaux et sont l'analogue relativiste du potentiel newtonien. γ_{ij} est la partie spatiale de la métrique non perturbée.

Le tenseur d'énergie-impulsion du fluide est, lui aussi, perturbé. Pour le décrire, nous devons introduire une perturbation de densité d'énergie et une perturbation de vitesse.

2.1.1.2 Equations de perturbation

En injectant la métrique et le tenseur d'énergie-impulsion perturbés dans les équations d'Einstein, nous obtenons des équations de perturbations dont les expressions peuvent être trouvées par exemple dans Peter et Uzan (2005), équations 8.123-125. Ces équations se décomposent en trois parties (*décomposition SVT*) :

- Des modes scalaires correspondant aux fluctuations de densité qui vont nous intéresser.
- Des modes vectoriels disparaissant avant la fin de l'inflation, d'après Bardeen (1980).
- Des modes tensoriels correspondant aux ondes gravitationnelles.

La résolution de ces équations augmentées de conditions initiales à définir a permis à Stewart et Lyth (1993) d'établir les spectres de puissance des

1. Cela ne saurait être la seule et d'autres sont également étudiées comme les modèles de pré Big-Bang, les théories de gravité quantique, les super-cordes, etc.

modes scalaires \mathcal{P}_S et tensoriels \mathcal{P}_T . Ces spectres peuvent être considérés comme des lois de puissance d'indice spectral n_S , respectivement n_T .

2.1.1.3 La fin de l'inflation

Des perturbations scalaires et tensorielles sont ainsi générées par l'inflation. Ces perturbations sont amplifiées et amenées à des échelles macroscopiques. Tous les modes observables aujourd'hui étaient super-Hubble (leur longueur d'onde est supérieure au rayon de Hubble) à la fin de l'inflation. Ces perturbations sont adiabatiques, de statistique gaussienne et ont un spectre presque invariant d'échelle. L'indice spectral peut varier légèrement avec la longueur d'onde. Ces perturbations sont cohérentes, ce qui se traduit par une structure de pics acoustiques dans le spectre de puissance angulaire du CMB.

2.1.2 Echelles considérées

À présent que nous avons proposé une origine pour les fluctuations de la métrique, voyons comment celles-ci évoluent à partir de l'ère dominée par la radiation. Il convient d'abord de bien définir les échelles spatiales et temporelles qui interviennent aux différentes époques que nous allons considérer. Celles-ci sont présentées sur la figure 2.1 par des traits horizontaux.

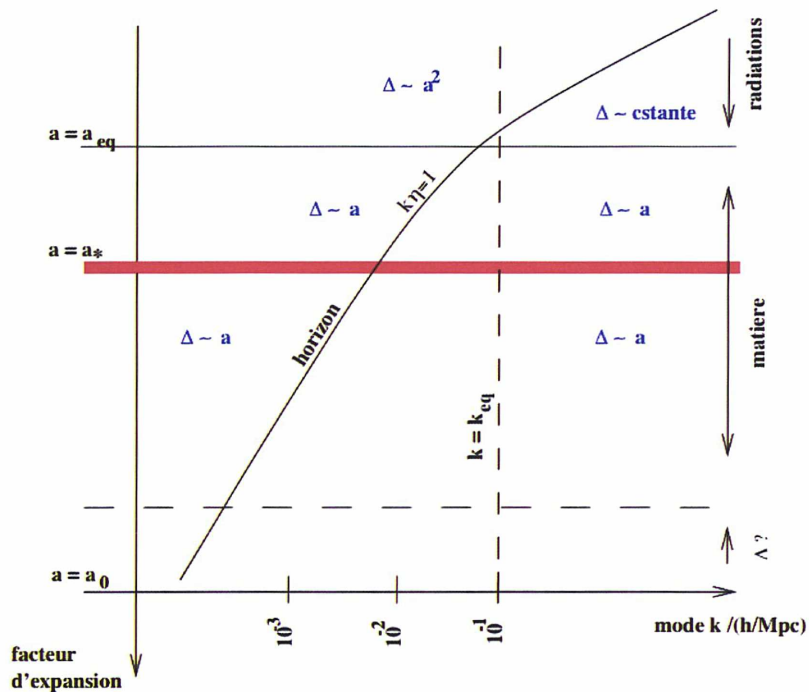


FIGURE 2.1 – Différents régimes pour l'étude de la croissance des perturbations dans le plan k - a en échelle logarithmique. La courbe en trait plein épaisse noire délimite l'horizon. Les modes situés au-dessus sont dits super-horizons, ceux situés en-dessous sont dits sub-horizons. L'époque de dernière diffusion est indiquée par le trait épais rouge. L'équivalence radiation-matière est indiquée par la ligne horizontale grise. Δ désigne la perturbation de densité. Source : Bernardeau (1998)

Le comportement du facteur d'expansion, nous l'avons vu, dépend de la nature du fluide qui domine l'Univers à une période donnée (tableau 1.1). Le fluide dominant est rappelé sur la droite du graphique et son évolution a été établie au chapitre 1. Nous pouvons aussi le caractériser par sa vitesse du son c_s . Pour un fluide d'équation d'état $P = f(\rho)$, elle est définie par :

$$c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho} \quad (2.3)$$

L'*horizon du son* est la distance qu'a pu parcourir une particule de fluide dans le plasma, jusqu'à l'époque η :

$$r_s = \int_0^\eta c_s d\eta \quad (2.4)$$

Les perturbations sont caractérisées par leur nombre d'onde k , proportionnel à l'inverse de leur longueur d'onde. À une époque η donnée (caractérisée par le taux d'expansion $a(\eta)$), ce mode peut donc être :

- *super-horizon* (ou *super-Hubble*²) si $k \ll k_H = 1/\eta$ (ou $k \ll H$) c'est-à-dire a une longueur d'onde supérieure à la taille de l'horizon (ou au rayon de Hubble), la physique microscopique ne peut pas intervenir,
- *sub-horizon* (ou *sub-Hubble*) si $k \gg k_H = 1/\eta$ (ou $k \gg H$) c'est-à-dire a une longueur d'onde inférieure à la taille de l'horizon (ou au rayon de Hubble). Il faut alors tenir compte des interactions entre particules.

Un mode de Fourier k entre dans l'horizon à une époque η caractérisé par $k\eta = 1$. Nous allons voir que le comportement d'une perturbation dépend de la valeur du mode k et du moment auquel ce mode entre dans l'horizon.

2.2 ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS DE MATIÈRE

Nous allons commencer par étudier la croissance des modes **sub-Hubble** des perturbations de matière. Nous pouvons en effet, dans ce cadre, adopter une démarche simplifiée en nous concentrant sur des perturbations scalaires et adiabatiques d'un fluide parfait non relativiste dans un univers plat (courbure spatiale nulle). Nous nous plaçons donc dans le cadre de la gravité newtonienne. Nous verrons, dans la partie suivante, un traitement plus complet et général de l'évolution des perturbations à partir des fluctuations de la métrique.

2.2.1 Description du fluide

Considérons un fluide de densité ρ , de pression P , de vitesse \vec{v} , plongé dans un potentiel newtonien ϕ . Son évolution est donnée par les équations classiques de l'hydrodynamique : l'équation de continuité (2.5), l'équation

2. Nous parlerons indifféremment de modes super- ou sub-horizons, le rayon de Hubble étant, à un facteur près, égal à la taille de l'horizon.

d'Euler (2.6) et l'équation de Poisson (2.7) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.7)$$

S'ajoute à ces cinq équations, l'équation d'état du fluide $P = f(\rho)$ qui permet de relier la pression P et la densité ρ .

2.2.1.1 Solution homogène

Ecrivons d'abord la solution homogène de ces équations :

$$\begin{cases} \rho_h(\vec{r}, t) = \rho_h(t) \\ \vec{v}_h(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r} \\ P_h(\vec{r}, t) = P_h(t) \\ \phi_h(\vec{r}, t) = \phi_h(\vec{r}, t) \end{cases}$$

D'après l'équation de Poisson (2.7), on a alors (en se plaçant en coordonnées sphériques) :

$$\phi_h = \frac{2}{3} \pi G \rho_h r^2 \quad (2.8)$$

L'équation de continuité (2.5) conduit à l'expression de la densité :

$$\rho_h(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \propto a^{-3}(t) \quad (2.9)$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu à l'équation 1.17 pour l'évolution de la densité d'énergie d'un fluide de matière non relativiste ($w = 0$) dans l'univers en expansion.

Enfin, l'équation d'Euler (2.6) conduit à :

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_h}{3} \quad (2.10)$$

Nous avons utilisé ici $\frac{d\vec{r}}{dt} = H\vec{r}$, ce qui conduit par ailleurs à $\vec{r}(t) = \frac{a(t)}{a_0} \vec{r}_0$.

2.2.1.2 Variables de perturbation

Les quantités perturbées sont définies par de petites variations autour de la solution homogène que nous venons de décrire :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_h + \rho_1 = \rho_h(1 + \delta) \\ \vec{v} &= \vec{v}_h + \vec{v}_1 \\ P &= P_h + P_1 \\ \phi &= \phi_h + \phi_1 \end{aligned}$$

où $\delta = \frac{\rho_1}{\rho_h}$ est appelé le *contraste de densité*.

Si les perturbations sont adiabatiques, nous avons alors :

$$c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{P_1}{\rho_1} \Rightarrow P_1 = c_s^2 \rho_1 \quad (2.11)$$

2.2.1.3 Equations de perturbation linéaires

Les équations de perturbations sont obtenues en remplaçant les quantités perturbées par leurs expressions et en tenant compte des relations vérifiées par les solutions homogènes. Nous ne gardons que les termes du premier ordre dans les perturbations afin d'avoir des équations linéaires.

Equation de Poisson

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_h \delta \quad (2.12)$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + 3H\rho_1 + H\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \rho_1 + \rho_h \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (2.13)$$

Soit encore, en fonction du paramètre de densité :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \delta + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (2.14)$$

Equation d'Euler

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + H\vec{v}_1 = -\vec{\nabla} \phi_1 - c_s^2 \vec{\nabla} \delta \quad (2.15)$$

2.2.1.4 Décomposition en modes de Fourier

Pour résoudre le système d'équations obtenu, il est plus pratique d'écrire les grandeurs δ , \vec{v}_1 et ϕ_1 dans la base de Fourier. Pour une grandeur $f(\vec{r}, t)$ nous avons :

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f_k(t) e^{-i \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{a(t)}} d^3 \vec{k} \quad (2.16)$$

avec \vec{k} le vecteur d'onde comobile et donc $\frac{\vec{k}}{a}$ le vecteur d'onde physique. Nous calculons pour chaque mode k :

Equation de Poisson

$$\frac{-k^2}{a^2} \phi_k = 4\pi G \rho_h \delta_k \quad (2.17)$$

Equation de continuité

$$\dot{\delta}_k - i \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_k}{a} = 0 \quad (2.18)$$

Equation d'Euler

$$\frac{\partial (a\vec{v}_k)}{\partial t} - i\vec{k} (c_s^2 \delta_k + \phi_k) = \vec{0} \quad (2.19)$$

En combinant les équations linéarisées 2.17, 2.18 et 2.19, nous trouvons finalement l'équation d'évolution du contraste de densité au premier ordre :

$$\ddot{\delta}_k + 2H(t)\dot{\delta}_k + \omega^2 \delta_k = 0 \quad (2.20)$$

Elle fait apparaître un terme d'amortissement visqueux, proportionnel au paramètre de Hubble et dû à l'expansion. La pulsation ω est alors définie par la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \left(\frac{c_s k}{a} \right)^2 - 4\pi G \rho_h = c_s^2 \left(\frac{k^2}{a^2} - k_J^2 \right) \quad (2.21)$$

où nous avons introduit la *longueur de Jeans* λ_J définie par :

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_h}} \quad (2.22)$$

Nous allons étudier les cas limites où la longueur d'onde du mode considéré est très petite ou très grande devant la longueur de Jeans pour différents cas : perturbations de densité de la matière noire seule, perturbations de densité de baryons seuls et perturbations de densité de baryons en présence de matière noire.

2.2.2 Perturbations de densité de la matière noire seule

La matière noire ou matière non baryonique est assimilée à un fluide de poussière sans pression, autrement dit une éventuelle vitesse de dispersion des particules de matières noires est négligeable. Nous considérons les modes sub-Hubbles : $\lambda \ll d_H$. L'équation d'évolution des perturbations s'écrit alors :

$$\ddot{\delta}_k + 2H(t)\dot{\delta}_k = 4\pi G\rho_{DM}\delta_k \quad (2.23)$$

Epoque primordiale, $1 < z < z_{ent}$, $\Omega_\Lambda = 0$ et $\Omega = 1$ On montre que l'expression complète du mode à l'intérieur du rayon de Hubble s'écrit :

$$\delta(y) = y_{ent}^2 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{4}{y_{ent}} \right) \right] \left(1 + \frac{3y}{2} \right) - 2y_{ent}^2 \ln \left(\frac{4}{y} \right) \quad (2.24)$$

où nous avons posé z_{ent} le redshift auquel le mode entre dans l'horizon, a_{ent} le facteur d'échelle correspondant et $y = \frac{a}{a_{eq}}$ donc $y_{ent} = \frac{a_{ent}}{a_{eq}}$. Cette quantité dépend donc de la longueur d'onde du mode considéré. Nous obtenons les cas limites suivants :

$$\delta(y) \propto \begin{cases} \ln y, & y \ll 1 \\ y, & y \gg 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Ere de matière, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega \neq 1$ Ecrivons cette fois-ci l'expression du mode en fonction du redshift z et de la densité de matière $\Omega \approx \Omega_{NR}$:

$$\delta(z) = \frac{1 + 2\Omega + 3\Omega z}{(1 - \Omega^2)} - \frac{3}{2} \frac{\Omega(1+z)\sqrt{1+\Omega z}}{(1-\Omega)^{5/2}} \ln \left[\frac{\sqrt{1+\Omega z} + \sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1+\Omega z} - \sqrt{1-\Omega}} \right] \quad (2.26)$$

En particulier, pour :

$z \gg 1$, c'est-à-dire au début de l'ère de matière, $\Omega_{NR} = 1$ et

$$\delta(z) \propto z^{-1} \propto a \quad (2.27)$$

$\Omega_{NR} \ll 1$, c'est-à-dire lorsque l'Univers devient dominé par la courbure :

$$\delta(z) \sim Cte \quad (2.28)$$

Conclusion La croissance des fluctuations, pendant l'ère de radiation et l'ère de matière est proportionnelle au facteur d'échelle. A la fin de l'ère de matière, elle est de nouveau stoppée par l'expansion.

2.2.3 Perturbations de densité des baryons seuls

2.2.3.1 Univers dominé par la radiation

Lorsque l'Univers est dominé par la radiation, le terme gravitationnel est négligeable devant le terme de pression dans la relation de dispersion 2.21. Cela correspond aux petites échelles telles que $\lambda_k a \ll \lambda_J$. L'équation 2.20 prend la forme :

$$\boxed{\ddot{\delta}_k + 2H(t)\dot{\delta}_k + \left(\frac{c_s k}{a}\right)^2 \delta_k = 0} \quad (2.29)$$

C'est l'équation d'une onde acoustique amortie par l'expansion. Dans la limite où $\frac{\dot{a}}{a} \rightarrow 0$, c'est-à-dire où $a(t) = Cte$, nous trouvons bien des oscillations acoustiques non amorties :

$$\delta_k(t) \propto \exp\left(\pm i \frac{c_s k}{a} t\right) \quad (2.30)$$

2.2.3.2 Après l'ère de radiation

Le terme de pression devient négligeable devant le terme gravitationnel dans la relation de dispersion 2.21. Cela correspond à présent aux grandes échelles telles que $\lambda_k a \gg \lambda_J$. L'équation 2.20 prend cette fois-ci la forme :

$$\boxed{\ddot{\delta}_k + 2H(t)\dot{\delta}_k - 4\pi G\rho_h \delta_k = 0} \quad (2.31)$$

Dans la limite où $\frac{\dot{a}}{a} \rightarrow 0$, c'est-à-dire où $a(t) = Cte$, nous trouvons cette fois :

$$\delta_k(t) \propto \exp(\pm t/\tau) \text{ avec } \tau = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}} \quad (2.32)$$

Dans un univers sans expansion, aux grandes échelles, c'est-à-dire après l'ère dominée par la radiation, les fluctuations de matière baryonique pourraient croître exponentiellement.

Nous pouvons modifier un peu l'équation 2.31 pour l'exprimer en fonction du taux d'expansion a plutôt qu'en fonction du temps t :

$$\dot{a}^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial a^2} + \left(\ddot{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a}\right) \frac{\partial \delta}{\partial a} - 4\pi G\rho \delta = 0$$

Utilisons les équations de Friedmann sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{a_0^2}{a^2} H_0^2 (1 - \Omega) \\ \frac{2\ddot{a}}{a} &= -\frac{8\pi G}{3} \rho \simeq -\frac{8\pi G}{3} \rho_m \end{aligned}$$

Nous avons négligé la pression et pris le paramètre de densité totale dominé par la densité de matière : $\Omega = \Omega_T \simeq \Omega_m$. Alors, en posant $\hat{a} = \frac{a}{a_0}$:

$$(\Omega + \hat{a}(1 - \Omega)) \hat{a}^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \hat{a}^2} + \left(\frac{3\Omega}{2} + 2\hat{a}(1 - \Omega)\right) \hat{a} \frac{\partial \delta}{\partial \hat{a}} - \frac{3\Omega}{2} \delta = 0 \quad (2.33)$$

Univers dominé par la matière (cas où $\Omega = 1$)

$$\hat{a}^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \hat{a}^2} + \frac{3}{2} \hat{a} \frac{\partial \delta}{\partial \hat{a}} - \frac{3}{2} \delta = 0 \quad (2.34)$$

Deux solutions sont possibles :

$$\delta \propto \hat{a} \text{ ou } \delta \propto \hat{a}^{-3/2} \quad (2.35)$$

Seule la première solution permet une croissance des fluctuations qui va alors comme le facteur d'échelle. En l'absence d'expansion, nous avons vu que les fluctuations pourraient croître exponentiellement. Ici, elles ne suivent qu'une loi de puissance (en fonction du temps). L'expansion agit donc comme un frein sur la croissance des fluctuations de densité.

Univers dominé par la courbure (cas où $\Omega = 0$)

$$\hat{a} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \hat{a}^2} + 2 \frac{\partial \delta}{\partial \hat{a}} = 0 \quad (2.36)$$

Nous avons ici deux autres solutions :

$$\delta \propto \hat{a}^0 \text{ ou } \delta \propto \hat{a}^{-1} \quad (2.37)$$

Les fluctuations de densité pour la matière baryonique ne peuvent plus croître non plus lorsque l'univers devient dominé par la courbure.

2.2.4 Perturbations de densité des baryons en présence de matière noire

Il faut en réalité tenir compte de la présence des fluctuations de matière noire pour étudier l'évolution des fluctuations de matière baryonique. L'équation d'évolution fait donc apparaître un terme de forçage créé par la matière noire et repéré par l'indice (DM) :

$$\ddot{\delta}_k^{(B)} + 2H(t)\dot{\delta}_k^{(B)} + \left(\frac{k^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G \rho_B \right) \delta_k^{(B)} = 4\pi G \rho_{DM} \delta_k^{(DM)} \quad (2.38)$$

Définissons la *longueur d'onde physique* par :

$$\lambda_{phy} = \frac{2\pi}{k} a(t) \quad (2.39)$$

Nous allons montrer qu'aux grandes échelles ($\lambda_{phy} > \lambda_J$), la croissance des fluctuations de matière noire entraîne la croissance des fluctuations de matière baryonique tandis qu'aux petites échelles ($\lambda_{phy} < \lambda_J$), cet entraînement est significativement réduit par la présence du terme de pression en $\frac{k c_s^2}{a^2}$.

2.2.4.1 Masse de Jeans

La *masse de Jeans* des baryons est définie comme la masse baryonique contenue dans une sphère de rayon $\lambda_J/2$:

$$M_J \propto \rho_B \lambda_J^3 \propto \frac{c_s^3}{\rho_B} \quad (2.40)$$

Nous allons voir que seules les perturbations qui contiendront une masse supérieure à la masse de Jeans pourront croître car la pression ne pourra pas s'opposer à la gravitation.

Au moment du découplage, la masse de Jeans chute brutalement. En effet, la pression de radiation $P_\gamma = n_\gamma k_B T_{dec}$ devient ineffective pour les baryons et remplacée par leur propre pression $P_b = n_b k_B T_{dec}$. Or, à ce moment-là, le rapport $\frac{n_b}{n_\gamma} = 10^{-8}$. Nous avons donc :

$$M_J(t < t_{dec}) = M_J^{(1)} = 10^{16} M_\odot \frac{\Omega_b}{\Omega} (\Omega h^2)^{-1/2}$$

$$M_J(t > t_{dec}) = M_J^{(2)} = 10^4 M_\odot \frac{\Omega_b}{\Omega} (\Omega h^2)^{-1/2}$$

Au découplage, des perturbations qui ne pouvaient pas croître peuvent donc se mettre à augmenter :

- Les perturbations de masse $M > M_J^{(1)}$ peuvent toujours croître
- Les perturbations de masse $M_J^{(2)} < M < M_J^{(1)}$ sont gelées jusqu'au découplage puis se mettent à augmenter.

2.2.4.2 Solutions de l'équation d'évolution

Avant le découplage Pendant l'ère de radiation, la pression domine sur la gravité. Nous avons donc des modes tels que $\lambda_{phy} \ll \lambda_J$. Pour un redshift $z > 1000$, les baryons sont étroitement couplés aux photons et leurs températures sont donc identiques $T_m \propto T_r \propto a^{-1}$. La vitesse du son dans le fluide peut donc s'écrire :

$$c_s^2 = \frac{k_B T}{m_p} = \frac{k_B T_0}{m_p} \left(\frac{a_0}{a} \right)$$

L'équation d'évolution des perturbations de baryons se réécrit alors :

$$\ddot{\delta}_k^{(B)} + 2H(t)\dot{\delta}_k^{(B)} + \left(\frac{k_B T_0}{m_p} \right) \frac{k^2}{a^3} \delta_k^{(B)} \approx 0 \quad (2.41)$$

Une solution de cette équation est de la forme :

$$\delta^{(B)}(t) \propto t^{-1/6} \quad (2.42)$$

Les fluctuations de densité de baryons ne peuvent donc pas croître avant le découplage.

Après le découplage La gravité est alors dominée par la matière noire ($\rho_b \delta_b \ll \rho_{DM} \delta_{DM}$) dont les fluctuations croissent comme le facteur d'échelle (i.e. $\delta_{DM} \propto t^{2/3}$). La vitesse du son est quant à elle $c_s^2 = \frac{k_B T}{m_p}$ avec $T \propto a^{-1}$. L'équation d'évolution des perturbations de matière baryonique sera donc, dans l'ère de matière :

$$\delta_k^{(B)} + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_k^{(B)} + \left(\frac{k_B T}{m_p} \right) \frac{k^2}{a^3} \delta_k^{(B)} = \frac{2}{3t^2} \delta_k^{(DM)} \quad (2.43)$$

Nous trouvons alors :

$$\delta_k^{(B)}(t) = \frac{\delta_k^{(DM)}(t)}{1 + Ak^2} \text{ avec } A(t) = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B T_0}{m_p} \right) \frac{t^2}{a^3} \quad (2.44)$$

Distinguons deux comportements limites de ce régime forcé :

- Les grandes échelles $A(t)k^2 \ll 1$:

$$\delta^B(t) \sim \delta^{DM}(t) \quad (2.45)$$

- Les petites échelles $A(t)k^2 \gg 1$:

$$\delta^B(t) \sim \frac{\delta^{DM}(t)}{A(t)k^2} \quad (2.46)$$

Nous retrouvons bien le résultat annoncé, l'évolution des fluctuations de matière baryonique est dictée par celle de la matière noire, après le découplage. Aux petites échelles, la pression des baryons réduit toutefois cette évolution forcée.

Conclusion

Les calculs que nous avons menés dans cette section sont valables dans la limite où les perturbations restent petites. Or, nous avons vu que ces perturbations de matière, après le découplage, croissent toutes proportionnellement au facteur d'échelle. Arrive donc un moment où les perturbations quittent le régime linéaire. Nous ne décrivons pas cela ici, mentionnons simplement que cette évolution non linéaire aboutit à la formation des structures. Revenons pour le moment aux fluctuations de densité des photons qui vont nous permettre d'expliquer les anisotropies du CMB. Nous avons pour cela besoin de travailler dans un cadre relativiste.

2.3 ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS DES PHOTONS

Pour étudier l'évolution des perturbations du fluide de photons, relativiste, nous allons écrire une version perturbée des équations d'Einstein. Nous ferons de nouveau l'approximation de perturbations linéaires.

2.3.1 Equations d'Einstein

Nous admettons, comme pendant l'inflation, que l'Univers peut être décrit par la métrique perturbée donnée à l'équation 2.2. Ces fluctuations de la métrique vont être à l'origine de la formation des structures de l'Univers observable. Pour déterminer leur évolution temporelle, il nous faut :

- préciser le contenu de l'Univers
- écrire les équations d'Einstein (et de conservation)
- relier ces potentiels à des quantités observables

2.3.1.1 Tenseur d'énergie-impulsion perturbé

Ecrivons les composantes du tenseur d'énergie impulsion pour un mode k du fluide x :

$$T_0^0 = -\rho_x - \delta\rho_x \quad (2.47)$$

$$T_0^i = \frac{1}{k}(\rho_x + P_x)V_{x,i} = -T_i^0 \quad (2.48)$$

$$T_j^i = (P_x + \delta P_x)\delta_j^i + \Pi_{x,j}^i \quad (2.49)$$

ρ_x et P_x sont la densité et la pression homogènes du fluide x , $\delta\rho_x$ et δP_x en sont les fluctuations relatives. V_x est la vitesse de x et $\Pi_{x,j}^i$ est la pression anisotrope.

2.3.1.2 Equations d'Einstein

Définissons la densité ρ_T , la pression P_T et la vitesse V_T du fluide total :

$$\rho_T = \sum_x \rho_x ; \delta\rho_T = \sum_x \delta\rho_x \quad (2.50)$$

$$P_T = \sum_x P_x ; \delta P_T = \sum_x \delta P_x \quad (2.51)$$

$$V_T = \frac{1}{\rho_T + P_T} \sum_x (\rho_x + P_x)V_x \quad (2.52)$$

Les équations d'Einstein perturbées s'écrivent alors en temps conforme :

$$3\mathcal{H}^2\Phi + 3\mathcal{H}\Psi' + k^2\Psi = -\frac{1}{2M_{Pl}^2}a^2\delta\rho_T \quad (2.53)$$

$$k(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = -\frac{1}{2M_{Pl}^2}a^2(\rho_T + P_T)V_T \quad (2.54)$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = \frac{1}{M_{Pl}^2}a^2\Pi_T \quad (2.55)$$

Les deux premières équations permettent d'établir une généralisation de l'équation de Poisson :

$$k^2\Phi = -\frac{1}{2M_{Pl}^2}a^2 \left(\delta\rho_T + 3\mathcal{H}(\rho_T + P_T)\frac{V_T}{k} \right) \quad (2.56)$$

Nous cherchons à décrire le comportement des contrastes de densité en particulier.

2.3.1.3 Quantités conservées et modes super-horizon

Bernardeau (2007) montre, à partir de l'équation de conservation de l'énergie, que la quantité

$$\mathcal{R} = -\Psi - \mathcal{H}\frac{\delta\rho_T}{\rho_T'} \quad (2.57)$$

est conservée aux échelles super-Hubble. Elle permet donc de faire le lien avec les échelles plus petites.

Pour des modes super-horizon, pour un fluide d'équation d'état donné, les potentiels gravitationnels sont constants et valent, dans l'ère dominée par le rayonnement (RD) et l'ère dominée par la matière (MD) :

$$\Psi_{RD} = \Phi_{RD} = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (2.58)$$

$$\Psi_{MD} = \Phi_{MD} = -\frac{3}{5}\mathcal{R} \quad (2.59)$$

Les modes super-horizon n'évoluent donc pas.

2.3.2 Equations des perturbation

Dans toute cette partie, nous suivons le chapitre 5 de Bernardeau (2007) et y renvoyons le lecteur pour le détail des calculs.

2.3.2.1 Fluide de photons

Pour décrire l'évolution des perturbations de densité pour le fluide de photon, il faut recourir à la résolution de l'équation de Liouville. qui traduit la conservation des photons. En négligeant toute interaction, les calculs conduisent à l'équation suivante pour le contraste de température des photons (directement relié au contraste de densité d'énergie) :

$$\frac{d}{d\eta}(\theta + \Phi) = \frac{d}{d\eta}(\Phi + \Psi) \quad (2.60)$$

Pour des potentiels statiques, $\theta + \Phi$ est donc conservé. Considérons le développement multipolaire de θ , la température au point \vec{x} dans la direction $\vec{\gamma}$:

$$\theta(\vec{x}, \vec{\gamma}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[\theta_0(\vec{k}) - i\frac{\vec{k}\cdot\vec{\gamma}}{k}\theta_1(\vec{k}) + \dots + (-i)^\ell P_\ell\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{\gamma}}{k}\right)\theta_\ell(\vec{k}) \right] \quad (2.61)$$

où les P_ℓ désignent les polynômes de Legendre (voir l'annexe B). A partir de cette décomposition, les calculs aboutissent à un système d'équations couplées. Celles-ci sont encore valables pour les neutrinos qui sont des particules relativistes sans interaction avec la matière.

Intéressons-nous à présent au cas où les interactions entre les photons et les baryons (électrons essentiellement) ne sont plus négligées. Il faut alors considérer l'équation de Boltzmann avec un terme de collision créé par la diffusion Thomson entre les photons et les électrons. Après quelques développements, nous arrivons à l'équation d'évolution suivante pour θ :

$$\theta' + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\theta + \Phi) - \Psi' = -\tau' \left(\theta_0 - \theta - \vec{\gamma}\cdot\vec{V}_e + \frac{1}{16}\gamma_i\gamma_j\Pi^{ij} \right) \quad (2.62)$$

où τ est la profondeur optique du plasma et Π^{ij} sont les composantes de la pression anisotrope du fluide de photons. De nouveau, ces calculs aboutissent à une "hiérarchie d'équations" similaire à celle établie précédemment mais avec des termes correctifs tenant compte des interactions entre les photons et la matière.

2.3.2.2 Fluide de matière

Qu'il s'agisse des baryons ou de la matière noire, ces fluides ont une pression négligeable ou nulle, ce qui simplifie considérablement leur étude. La conservation de l'énergie aboutit, pour le fluide de matière non relativiste, à :

$$\left(\frac{\delta\rho_m}{\rho_m}\right)' = 3\Psi' - kV_m \quad (2.63)$$

En revanche, l'équation d'Euler s'écrit différemment pour la matière noire (quantités notées avec un indice c) et pour les baryons (notés avec un indice b), ceux-ci étant couplés aux photons :

$$V_c' + \mathcal{H}V_c = k\Psi \quad (2.64)$$

$$V_b' + \mathcal{H}V_b = k\Psi + \tau'(V_b - \theta_1)\frac{4\rho_r}{3\rho_b} \quad (2.65)$$

2.3.2.3 Conditions initiales

Nous nous donnons encore les conditions initiales (dites *adiabatiques*) suivantes, correspondant au comportement super-horizon des perturbations :

$$\frac{\delta\rho_c}{\rho_c} = \frac{\delta\rho_b}{\rho_b} = \frac{3}{4}\frac{\delta\rho_r}{\rho_r} \quad (2.66)$$

$$V_c = V_b = \theta_1 \quad (2.67)$$

2.3.3 Evolution des perturbations

Nous avons présenté, pour les différents fluides en présence, les équations qui gouvernent l'évolution des perturbations. Détaillons-en les solutions pour des modes super-Hubble d'abord puis pour des modes sub-Hubble.

2.3.3.1 Modes super-Hubble

Nous avons déjà montré (équation 2.59) que, pour les modes super-Hubble, les perturbations de la métrique restaient constantes. Pendant l'ère dominée par la radiation, les perturbations de densité croissent comme le facteur d'échelle au carré. Après l'équivalence, les perturbations de densité de matière noire commencent à croître proportionnellement au taux d'expansion, tandis que les perturbations de baryons sont encore gouvernées par le comportement des photons, jusqu'au découplage. A ce moment-là, les baryons vont alors être entraînés par les perturbations de matière noire qui ont déjà évolué. Après le découplage, les fluctuations de matière, baryonique ou matière noire, sont amplifiées et pourront aboutir à la formation de structures gravitationnellement liées.

2.3.3.2 Modes sub-Hubble

Dans l'ère dominée par le rayonnement, nous avons :

$$\theta'' + k^2 c_s^2 \theta = \Psi'' - \frac{k^2}{3}\Psi \quad (2.68)$$

La matière baryonique est contrainte de suivre ces oscillations du fluide, tandis que nous verrons dans la prochaine section comment évolue la matière noire.

Les fluctuations de densité, après le découplage, dans l'hypothèse de couplage fort (c'est-à-dire que la profondeur optique varie vite lors de la recombinaison), suivent le système d'équations suivant :

$$\theta'_1 = -\frac{R'}{1+R}\theta_1 + \frac{1}{1+R}k\theta_0 + k\Psi \quad (2.69)$$

$$\theta''_0 + \frac{R'}{1+R}\theta'_0 + k^2c_s^2\theta_0 = \Psi'' + \frac{R'}{1+R}\Psi' - \frac{k^2}{3}\Psi \quad (2.70)$$

où θ_0 et θ_1 sont les deux premiers modes du développement 2.61. Nous avons posé $R = \frac{3\rho_b}{4\rho_r}$ et nous avons $c_s^2 = \frac{P'_r}{\rho'_b + \rho'_r} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+R}$.

Nous pouvons interpréter ces équations comme celles d'oscillateurs harmoniques avec un terme de forçage qui dépend de Ψ . Si le temps caractéristique $1/kc_s$ est petit devant le temps de Hubble, alors R et c_s varient plus lentement. Les solutions seront dans cette approximation des modes acoustiques déphasés d'un angle $\pi/2$ l'un par rapport à l'autre :

$$\theta_0 \sim \cos(kc_s\eta) \quad (2.71)$$

$$\theta_1 \sim 3c_s \sin(kc_s\eta) \quad (2.72)$$

Ces oscillations acoustiques sont le phénomène dominant dans la physique des anisotropies primaires du CMB que nous allons aborder au chapitre suivant.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Le modèle inflationnaire propose une explication à l'origine des petites inhomogénéités présentes dans l'Univers primordial. Ces fluctuations de densité ont été amplifiées par instabilité gravitationnelle, dès l'ère dominée par la radiation pour la matière noire. Les fluctuations de densité du rayonnement sont quant à elles amplifiées tant que leur taille caractéristique est plus grande que celle de l'horizon. A la traversée de l'horizon, le fluide photons-baryons se met à osciller à cause de la compétition entre la pression de radiation et la gravité. Les baryons tendent en effet à tomber dans les puits de potentiels créés par la matière noire, tandis que les photons s'opposent à ce mouvement, jusqu'au découplage où les perturbations de densité des baryons peuvent alors évoluer librement et finissent par suivre les perturbations de matière noire. Comme nous allons le voir au chapitre suivant, c'est la raison pour laquelle les anisotropies de température du CMB sont considérées comme une image des perturbations de densité au moment du découplage.

LES ANISOTROPIES DU CMB

3

SOMMAIRE

4.1	DÉFLEXION DU CMB	52
4.1.1	Déplacement des anisotropies	52
4.1.2	Potentiel de lentille	54
4.1.3	Redistribution de la puissance dans le spectre angulaire	57
4.1.4	Création de non gaussianités	60
4.2	POURQUOI ÉTUDIER CET EFFET ?	61
4.2.1	Sonder la matière et l'évolution des structures	61
4.2.2	Contraindre les paramètres cosmologiques	61
4.2.3	Nettoyer les modes B de la polarisation	63
4.3	ESTIMER L'EFFET DE LENTILLE DANS LE CMB	65
4.3.1	Estimateurs construits sur la fonction de vraisemblance	65
4.3.2	Estimateur quadratique à variance minimale	65
4.3.3	Estimateur du spectre de puissance sans biais gaussien	66
4.3.4	Estimateurs dans l'espace réel	67

L'HISTOIRE de la découverte du CMB puis de ses anisotropies mérite un petit détour que nous nous proposons ici. En moins d'un demi-siècle en effet, l'étude du CMB a abouti au modèle Λ CDM, aussi appelé *modèle de concordance* puisqu'il est compatible avec les autres observations telles que les relevés de galaxie, l'effet de lentille faible, les supernovae, etc. Ce modèle a été remarquablement confirmé par le satellite WMAP. Depuis, de nouvelles expériences, dont le satellite *Planck*, tentent d'améliorer les contraintes sur les différents paramètres du modèle et d'explorer plus précisément la physique encodée dans les anisotropies.

3.1 OBSERVER LE CMB

Depuis sa découverte fortuite par Penzias et Wilson (1965), le CMB a été l'objet d'une attention toute particulière de la part des cosmologistes. Il recèle en effet un nombre important d'informations sur les premiers instants de l'Univers, son évolution et son devenir. Des instruments d'observation au sol comme dans l'espace se sont donc succédés pour tenter d'améliorer sans cesse cette "première photo de l'Univers".

3.1.1 Découverte du CMB

3.1.1.1 Premières prédictions

Arno Penzias, dans son discours lors de la remise du Prix Nobel en 1978, retrace l'histoire des premières intuitions de l'existence d'un rayonnement relique des premiers instants de l'Univers, jusqu'aux prédictions plus précises qui ont à peine précédé sa découverte. Les premières prédictions remontent à la fin des années 40, au gré des discussions de Gamow (Gamow 1948b), Alpher et Herman (Alpher et al. 1948b) sur la formation des éléments dans l'Univers primordial. D'après Penzias, ils ne pensaient pas que ce "rayonnement fossile" puisse avoir une signature spectrale particulière (celle d'un corps noir) qui permette de le distinguer d'autres effets.

Ce n'est donc qu'en 1964 que Doroshkevich et Novikov (1964) présentent le rayonnement de fond comme des micro-ondes, reconnaissables à leur spectre de corps noir. Plus encore, il semble même que ces scientifiques aient proposé l'antenne des laboratoires Bell à Crawford Hill comme meilleur détecteur disponible ! Toutefois, ayant mal compris un papier de Ohm (daté de 1961), ils aboutissent à une non détection.

Cette même année, Dicke, Wilkinson et Roll, de l'Université de Princeton, commencent à construire un radiomètre pour tenter de détecter le CMB suivant le principe développé par Dicke (1946). Peebles avait en effet, dans un papier soumis début 1965, explicité à son tour l'existence d'un rayonnement fossile détectable dans le domaine des micro-ondes.

3.1.1.2 Une détection "accidentelle"

Parallèlement, à seulement 60 km de là, les radio-astronomes Penzias et Wilson des Laboratoires Bell, utilisaient eux aussi une antenne de Dicke de 6 m. Elle était initialement conçue pour détecter de faibles ondes radio émises par les premiers satellites de télécommunication testés à l'époque. Après avoir soustrait les signaux provenant des radars, des émissions radio terrestres et de la chaleur du récepteur lui-même, ils découvrent un bruit inattendu, isotrope, non saisonnier, ne venant ni de la Terre, ni du Soleil, ni même de notre Galaxie. Ils en déduisent l'origine extragalactique de ce rayonnement inconnu, mesuré avec une température d'antenne de 3 K.

Burke a informé Penzias et Wilson du papier de Peebles qui ont alors réalisé que leur détection avait précisément les caractéristiques du rayonnement recherché par Dicke et ses collègues. Ainsi mis en contact, Dicke, Peebles, Roll et Wilkinson Dicke et al. (1965) ont interprété le signal découvert comme la preuve de l'existence d'une relique du Big-Bang. De leur côté, Penzias et Wilson se sont contentés de publier leurs observations Penzias et Wilson (1965) à la suite du papier des cosmologistes. Ce sont finalement ces derniers qui furent récompensés pour cette découverte par le Prix Nobel de Physique en 1978.

3.1.1.3 Les suites de l'histoire...

L'interprétation du CMB comme signature du Big-Bang ne fut communément acceptée par la communauté scientifique que dans les années 70, après l'avoir observé dans plusieurs fréquences et avoir ainsi mis en évidence son spectre de corps noir thermalisé. La théorie de l'état stationnaire, jusqu'alors concurrente de celle du Big-Bang, ne pouvait expliquer un tel spectre. Le CMB est ainsi devenu un des trois piliers du modèle de Big-Bang avec l'abondance des éléments légers et l'expansion de l'Univers observée grâce au décalage vers le rouge des galaxies (Peebles et al. 1991).

A cette même époque, Harrison (1970), Peebles et Yu (1970) et Zel'dovich (1972) ont montré que l'Univers primordial devait présenter de petites inhomogénéités de l'ordre de 10^{-4} ou 10^{-5} . Leur empreinte sur le CMB a ensuite été calculée par Sunyaev Doroshkevich et al. (1978). Une immense fenêtre sur l'histoire de notre Univers était ainsi ouverte, justifiant bien les mots de Penzias lors du discours pour le Prix Nobel en 1978 : *Une chose est claire cependant, la cosmologie observationnelle est à présent une science respectable et florissante.*¹

3.1.2 Observations du CMB

3.1.2.1 Premières observations au sol et dans l'espace

Pendant les années 80, de nombreuses observations au sol ont permis d'améliorer les contraintes sur l'amplitude des anisotropies de température. Un premier satellite russe, *RELIKT-1*, a été également lancé en 1983. Ses mesures, publiées en janvier 1992 ont apporté une limite supérieure aux anisotropies.

3.1.2.2 Le satellite COBE

Le satellite *COsmic Background Explorer (COBE)* de la NASA a mesuré grâce à l'instrument *Differential Microwave Radiometer (DMR)* les anisotropies primaires du CMB (Smoot et al. 1992, Wright et Meyer 1992). L'instrument *Far-Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS)* a quant à lui confirmé le spectre de corps noir du CMB (Mather 1994). Publiés en 1992 et 1994, ces résultats ont été récompensés par un Prix Nobel en 2006 attribué aux principaux investigateurs des deux instruments, George Smoot et John Mather.

Toutefois, cette expérience n'avait pas encore la résolution suffisante pour mesurer le premier pic acoustique du spectre de puissance. Elle a donc été suivie d'un certain nombre d'expériences au sol ou embarquées dans des ballons. Celui-ci a été détecté par l'expérience *Mobile Anisotropy Telescope* (à Toco, au Chili) (Torbet et al. 1999) puis par *Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation ANd Geophysics (BOOMERanG)* et par *Archeops* (Benoît 2003), montrant que notre Univers est plutôt plat.

1. *One thing is clear however, observational cosmology is now a respectable and flourishing science.* A. Penzias, "The Origin of Elements", Nobel Lecture, 8 December 1978

3.1.2.3 Le satellite WMAP

Le satellite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) a été lancé en juin 2001 par la NASA. Il était initialement prévu pour observer le CMB sur le ciel complet pendant deux ans. Sa résolution est de $13'$, pour les détecteurs à 94GHz , quatre autres détecteurs à des fréquences inférieures permettant d'étudier et de soustraire les avant-plans. En réalité, le satellite a fonctionné jusqu'en décembre 2010, donnant lieu à de nombreuses avancées sur l'établissement du Modèle Standard de la cosmologie.

Dès les premières publications en 2003, basées sur la première année d'observations (Bennett 2003), Spergel et al. (2003) conclut à un Univers plat, dominé par la constante cosmologique et engendré par des perturbations gaussiennes adiabatiques presque invariantes d'échelle. Il établit l'âge de l'Univers à $13,7 \pm 0,2$ milliards d'années. Ces résultats sont obtenus grâce à la mesure du spectre de puissance par Hinshaw et al. (2003). Le second pic acoustique est ainsi mesuré pour la première fois ainsi que les modes E du CMB (Page et Nolta (2003)). Cela a permis à Peiris et al. (2003) d'apporter des contraintes sur le modèle d'inflation, en particulier sur l'indice spectral n_s .

En 2006, les trois premières années d'observation sont rendues publiques, puis, en 2008, l'accumulation de cinq années de données (Hinshaw et al. (2009)) conduit à la mesure du troisième pic acoustique du spectre de puissance de la température ainsi que du spectre de la corrélation croisée entre la température et les modes E (Nolta (2009)). Ces avancées permettent d'affiner les contraintes sur le modèle cosmologique et l'inflation (Komatsu et al. (2009)). Enfin, la communauté scientifique retient les résultats et paramètres publiés en 2010 dans Larson et al. (2011). La mission WMAP a finalement contribué à établir le modèle cosmologique standard (Komatsu et al. (2011)), d'un univers presque plat, dominé par la constante cosmologique, ayant connu une phase inflationnaire. Elle a aussi soulevé quelques questions sur ce même modèle (Bennett et al. (2011)) et apporté des informations astrophysiques importantes comme la mesure de l'effet Sunyaev Zeldovich autour d'amas, ou la modélisation des avant-plans galactiques.

Dans toute cette thèse, nous utilisons le modèle cosmologique obtenu avec WMAP7 et présenté dans Larson et al. (2011). Les paramètres cosmologiques utilisés sont présentés dans le tableau 3.1 et le spectre de puissance angulaire du CMB correspondant est représenté figure 3.1.

Densité de baryons	$\Omega_b h^2 = 0.02270$
Densité de matière noire	$\Omega_c h^2 = 0.1107$
Densité d'énergie noire	$\Omega_\Lambda = 0.738$
Profondeur de réionisation	$\tau = 0.086$
Indice spectral	$n_s = 0.969$
Amplitude scalaire	$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = 2.38 \times 10^{-9}$

TABLE 3.1 – Paramètres cosmologiques du meilleur ajustement ΛCDM aux données WMAP7

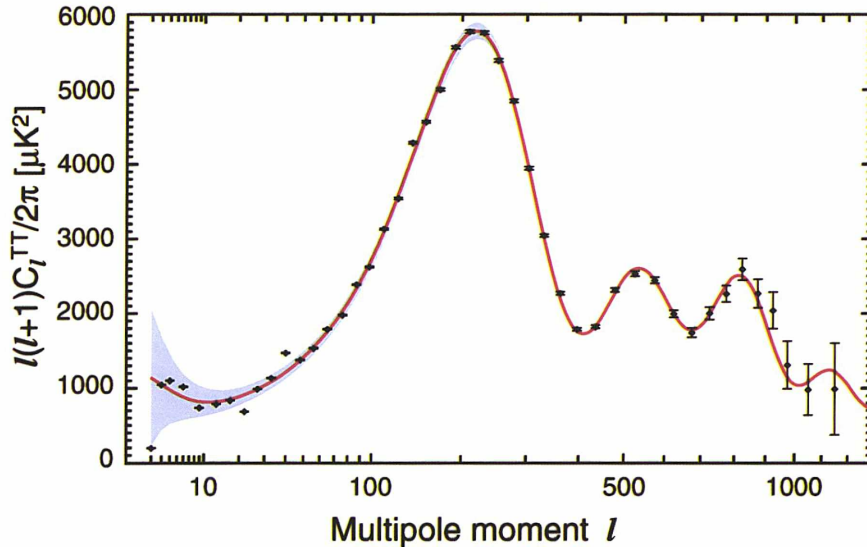


FIGURE 3.1 – Spectre de puissance de la température du CMB pour la 7^{ème} année de WMAP extrait de Larson et al. (2011). La courbe rouge est le meilleur ajustement des données à un modèle Λ CDM. Les barres d'erreur incluent le bruit instrumental, la zone grise représente la variance cosmique.

Depuis 2010, un certain nombre d'instruments tentent d'améliorer les résultats de WMAP, en particulier de mesurer les modes B de la polarisation. Le satellite qui a pris sa suite, *Planck* a été lancé en mai 2009.

3.1.3 Le satellite Planck

Planck est une mission de l'Agence Spatiale Européenne (ESA) dont le principal objectif est de mesurer les fluctuations du CMB avec une précision limitée uniquement par la variance cosmique.

Pour cela, le satellite observe le ciel complet (environ deux fois en un an) avec une sensibilité sans précédent ($\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-6}$), une résolution angulaire située autour de $5'$ et une large couverture en fréquence avec 9 bandes allant de 30 à 857 GHz. Il contient deux instruments, *LFI* (*Low Frequency Instrument*) Bersanelli et al. (2010) dont les récepteurs, semblables à ceux de *COBE* ou *WMAP*, sont maintenus à 20 K et couvrent la bande 30 – 100 GHz tandis que *HFI* (*High Frequency Instrument*) Lamarre et al. (2010) compte 52 bolomètres qui couvrent la bande 100 – 857 GHz et sont refroidis à 0,1 K. Parmi eux, 32 sont sensibles à la polarisation linéaire qui peut ainsi être cartographiée (de 100 à 333 GHz).

Le satellite a été lancé le 14 mai 2009 depuis la base spatiale de Kourou en Guyane et placé en orbite autour du point de Lagrange L2. Il a reçu sa "première lumière" le 13 août 2009. Ses caractéristiques sont résumées dans le tableau 3.2.

Fréquence ν (GHz)	Détecteurs N_{det}	Sensibilité $\Delta T/T$ ($10^{-6}\mu K/K$)	Bruit équivalent σ_N ($\mu K\sqrt{s}$)	Résolution θ_{FWHM}
100	8	2.5	61.6	9.37'
143	11	2.2	39.5	7.04'
217	12	4.8	56.2	4.68'
353	12	14.7	211	4.43'
545	3	147	...	3.80'
857	3	6700	...	3.67'

TABLE 3.2 – Caractéristiques instrumentales de HFI prévues par The Planck Collaboration (2006) pour la sensibilité et mesurées sur les données en vol pour les autres quantités (Planck Collaboration et al. (2011a)).

3.2 LES ANISOTROPIES PRIMAIRES DU CMB

En présence de fluctuations de densité, la gravité a tendance à faire s'effondrer le fluide baryons-photons dans les potentiels de matière noire. La pression de radiation tente de s'opposer à cette contraction, ce qui provoque une oscillation du fluide. Dans les zones de contraction, comme la densité de rayonnement est plus importante que dans les zones d'expansion, la température est plus élevée. Après le découplage des photons et des baryons, les photons peuvent s'échapper des potentiels. C'est l'émission du CMB et la raison pour laquelle nous l'observons aujourd'hui, très refroidi par l'expansion.

3.2.1 Formule de Sachs-Wolfe

L'étude de la propagation d'un photon dans un espace-temps perturbé, de courbure nulle, permet d'établir l'équation de Sachs-Wolfe (Sachs et Wolfe 1967). Cette équation relie l'énergie d'un photon du CMB observé aujourd'hui à son énergie au moment du découplage. Elle met en évidence trois contributions aux anisotropies de température :

- un terme caractérisant le photon au moment du découplage appelé "Sachs-Wolfe propre".
- un terme Doppler résultant des vitesses relatives de la source et de l'observateur
- un terme caractérisant l'évolution du photon après le découplage appelé "Sachs-Wolfe intégré".

Les anisotropies de température encodent donc l'état du fluide photons-baryons (zones de sous ou sur-densité) ainsi que l'évolution des photons après le découplage. Nous allons détailler à présent chacun de ces termes pour aboutir à l'établissement du spectre de puissance angulaire des anisotropies.

3.2.2 Oscillations acoustiques dans un potentiel statique

Considérons d'abord les fluctuations de température dues aux oscillations du fluide de photons dans un potentiel statique (surdensité). Plaçons-nous pour cela dans un univers dominé par la radiation, avec une vitesse du son dans le fluide $c_s = 1/\sqrt{3}$.

3.2.2.1 Effet Sachs-Wolfe

La fluctuation de température Θ_k se comporte comme la fluctuation de densité et suit donc l'équation 2.68 d'un oscillateur harmonique. Nous avons donc, en supposant que la fluctuation est initialement adiabatique et que le potentiel newtonien Ψ est statique :

$$\Theta_k(\eta) + \Psi = \frac{\Psi}{3} \cos(kc_s\eta) \quad (3.1)$$

L'horizon du son r_s^* est la distance maximale parcourue par une onde sonore (de vitesse c_s) depuis le Big-Bang jusqu'à la surface de dernière diffusion (défini à l'équation 2.4). Pour les modes super-soniques, c'est-à-dire pour lesquels $kc_s\eta \ll 1 \Leftrightarrow \lambda_k \gg r_s$, nous avons alors, à l'époque de dernière diffusion :

$$\Theta_0(\eta^*) + \Psi(\eta^*) = \frac{1}{3}\Psi(\eta^*) \quad (3.2)$$

Les fluctuations aux grandes longueurs d'onde (supérieures à l'horizon du son) sont des modes qui n'ont pas commencé à osciller à la recombinaison. Ils sont la combinaison des fluctuations initiales et du décalage vers le rouge subi par les photons qui s'échappent des potentiels à la surface de dernière diffusion. C'est l'*effet Sachs-Wolfe*.

3.2.2.2 Pics accoustiques

Les fluctuations de petites longueurs d'onde (inférieures à l'horizon du son), oscillent suivant l'équation 3.1. A l'époque de la dernière diffusion, ces fluctuations sont ainsi gelées dans différents états. Les extremas des oscillations sont donnés par :

$$k_m c_s \eta_* = m\pi \Leftrightarrow k_m = \frac{m\pi}{c_s \eta_*}, m \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

Sachant que le potentiel Ψ est négatif par convention, si m est pair, on est au minimum de la fluctuation de température, donc dans une zone de raréfaction. Si au contraire m est impair, on est au maximum de la fluctuation de température donc dans une zone de compression.

3.2.2.3 Effet des baryons

Nous avons jusqu'ici ignoré l'effet des baryons. Pour les prendre en compte, considérons un fluide baryons-photons dont la vitesse du son est alors donnée par :

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}} \quad (3.4)$$

Posons $R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$. Comme $R > 0$, $c_s^2 < \frac{1}{3}$ la vitesse du son dans un fluide de radiation pure. Puisque la vitesse du son est diminuée, la taille de l'horizon du son à la dernière diffusion l'est aussi. Supposons $R = Cte$, nous trouvons alors :

$$\Theta(\eta) + \Psi = \frac{\Psi}{3}(1 + 3R) \cos(kc_s\eta) - R\Psi \quad (3.5)$$

Les pics de compression sont ainsi $1 + 6R$ fois plus importants que ce qui a été calculé précédemment. De plus, la hauteur des pics de compression sera d'autant plus grande que R sera grand.

3.2.3 Effet Sachs-Wolfe intégré (ISW)

Nous avons fait l'approximation, dans la partie précédente, que les potentiels gravitationnels étaient statiques. L'effet Sachs-Wolfe intégré rend compte des décalages spectraux induits par la variation temporelle des potentiels gravitationnels le long de la trajectoire du photon :

$$\Theta_{ISW}(\vec{n}) = \int_{\eta_{dec}}^{\eta_0} (\Psi' + \Phi')(\eta, \vec{x}(\eta)) d\eta \quad (3.6)$$

3.2.4 Effet Doppler

La vitesse du fluide oscille elle aussi, avec un déphasage de $\pi/2$ par rapport aux fluctuations de densité. Pour un fluide dominé par le rayonnement, la projection de la vitesse v_γ du fluide sur la ligne de visée sera donc donnée, à l'époque de la dernière diffusion, par :

$$v_D(\eta^*) = \frac{\Psi}{3} \sin(kr_s) \quad (3.7)$$

Si l'effondrement est isotrope, alors $v_D = v_\gamma/3$. Cette composante de vitesse à la dernière diffusion produit un décalage Doppler en tout point de la surface.

3.2.5 Amortissement de Silk

En réalité, les baryons et les photons ne sont pas parfaitement couplés, les photons ont un libre parcours moyen non nul grâce à la diffusion Compton. Les photons qui diffusent des zones de compression vers les zones de raréfaction unifient la température de ces régions. Silk (1967) a montré que les fluctuations de température sont ainsi gommées exponentiellement sur des échelles caractéristiques $\lambda_D \sim \sqrt{N} \lambda_\gamma$ où λ_γ est le libre parcours moyen des photons. Celui-ci dépend, comme nous l'avons vu, du taux d'ionisation de l'univers.

3.2.6 Spectre de puissance angulaire des fluctuations de température

La fluctuation de température Θ est une variable stochastique que l'on peut caractériser par sa fonction de corrélation à deux points :

$$C(\theta) = \langle \Theta(\vec{x}_0, \eta_0, \vec{e}_1) \Theta(\vec{x}_0, \eta_0, \vec{e}_2) \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell P_\ell(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \quad (3.8)$$

La deuxième égalité définit le *spectre angulaire* C_ℓ à partir du développement de la fonction de corrélation sur la base des polynômes de Legendre. En effet, le principe cosmologique suggère l'isotropie statistique par laquelle la fonction de corrélation ne dépend que de l'angle entre les deux

directions \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Ce spectre angulaire est une mesure de la variance des fluctuations de température à l'échelle

$$\ell \sim \frac{\pi}{\vartheta} \quad (3.9)$$

Si le champ de température est gaussien, il est entièrement caractérisé par son spectre de puissance. Celui-ci se calcule² à partir de la décomposition des fluctuations de température dans l'espace des harmoniques sphériques, définie par l'équation B.9 de l'annexe B.

$$C_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle \quad (3.10)$$

avec :

$$a_{\ell m}(\vec{x}_0, \eta_0) = \int d^2\vec{e} \Theta(\vec{x}_0, \eta_0, \vec{e}) Y_{\ell m}^*(\vec{e}) \quad (3.11)$$

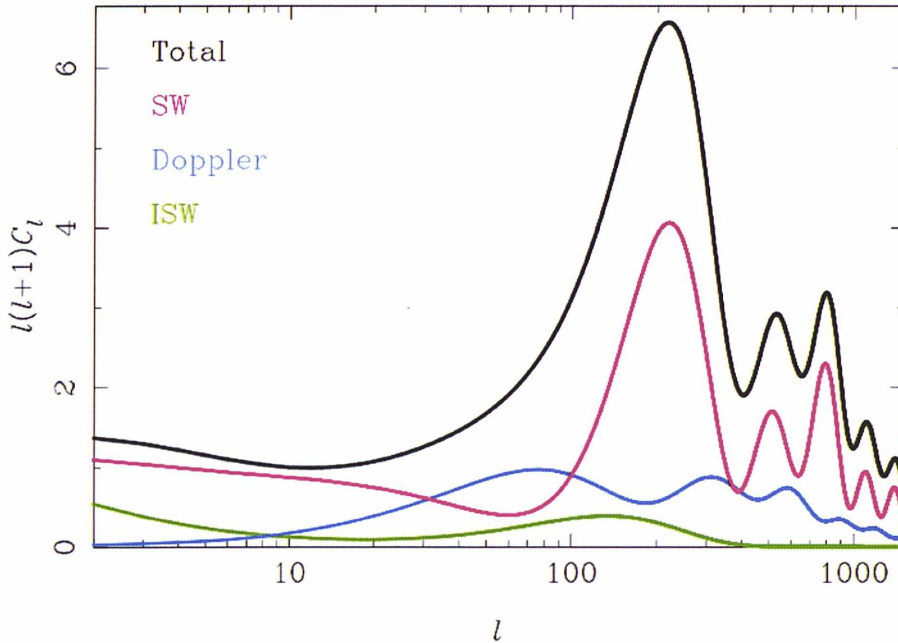


FIGURE 3.2 – Spectre de puissance angulaire du CMB (noir), pour des conditions initiales adiabatiques et ses différentes composantes : l'effet Sachs-Wolfe (rose), l'effet Sachs-Wolfe intégré (vert) et l'effet Doppler (bleu). Les unités sont arbitraires. Source : Challinor et Peiris (2009)

La figure 3.2 présente les contributions des différents termes au spectre de puissance angulaire du CMB.

Le plateau observé aux grandes échelles, appelé *plateau Sachs-Wolfe* vient des modes super-soniques qui sont restés intacts depuis la fin de l'inflation. Ces modes permettent donc de relier le spectre de puissance angulaire au spectre de puissance primordial $\mathcal{P}_S(k)$.

Nous avons vu que les modèles inflationnaires à roulement lent

² Pour son calcul complet, nous renvoyons le lecteur au chapitre 6, partie 1.2.1 de Peter et Uzan (2005).

prédisaient un spectre invariant d'échelle. Cela se traduit alors par $\ell(\ell + 1)C_\ell^\Theta \approx cste$. D'où le plateau observé (grâce à l'échelle logarithmique utilisée en abscisse).

Nous voyons que l'oscillation du fluide photon-baryon domine tous les autres effets. En particulier, le premier pic correspond aux modes qui atteignent leur premier maximum d'oscillation à la dernière diffusion. Sa position nous indique donc l'époque de la dernière diffusion η^* .

Nous vérifions aussi que l'effet Doppler est en opposition de phase avec les oscillations acoustiques. Il a tendance à en combler les creux.

L'effet Sachs-Wolfe intégré pique à une échelle proche du premier pic acoustique. Il lui ajoute de la puissance de manière cohérente puisqu'il dépend comme l'effet Sachs-Wolfe de $\Psi + \Phi$.

Nous observons enfin l'amortissement de Silk qui, aux petites échelles, amortit exponentiellement les oscillations.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Les anisotropies de température du CMB ont une distribution gaussienne. Toute l'information de ces anisotropies est donc contenue dans leur spectre de puissance. Cette courbe est du premier intérêt pour les cosmologistes. Elle contient des contraintes sur l'univers primordial et le modèle cosmologique. C'est la raison pour laquelle une mission comme Planck cherche à le mesurer avec la plus grande précision possible.

Toutefois, ces informations ne sont pas directement accessibles. En effet, des anisotropies dites secondaires, viennent s'ajouter, pendant le voyage des photons qui peuvent interagir avec la matière depuis la surface de dernière diffusion jusqu'à nous. Il en existe deux types associées à la réionisation de l'Univers et à la croissance des structures. Une présentation détaillée se trouve dans la revue de Aghanim et al. (2008) :

1. Anisotropies créées par interaction des photons avec des potentiels gravitationnels
 - (a) Effet de lentille gravitationnelle : c'est l'effet secondaire dominant, il sera présenté en détails dans le chapitre suivant.
 - (b) Effet Rees et Sciama (1968) : En général, le potentiel linéaire dépend du temps à bas redshift et, en particulier, lorsque ce potentiel n'est plus tout à fait linéaire.
2. Anisotropies créées par diffusion des photons sur des électrons chauds
 - (a) Effet Sunyaev et Zeldovich (1972) : Les puits des amas de galaxies contiennent des électrons chauds sur lesquels les photons diffusent. Deux effets peuvent être distingués : un effet Doppler appelé effet SZ cinétique - dû au mouvement des gaz chauds dans les amas - et un effet thermique. C'est un des moyens les plus efficaces de détecter des amas de galaxies à hauts redshifts (Planck Collaboration et al. 2011c).

- (b) Effet Ostriker et Vishniac (1986) : Effet cinétique du gaz chaud en mouvement à l'époque de la formation des galaxies.
- (c) Effet de réionisation anisotrope (Aghanim et al. 1996) : Effet dû au caractère inhomogène de la réionisation lorsque celle-ci commence, pour des redshifts $z \sim 5 - 10$.

Le spectre de ces anisotropies secondaires est présenté sur la figure 3.3. Nous allons, au chapitre suivant, détailler l'effet de lentille gravitationnelle, dominant pour les échelles angulaires de plus de quelques minutes d'arc (l'effet SZ est de même amplitude que l'effet de lentille mais c'est un effet additif qui dépend de la fréquence et peut donc en principe être soustrait par la séparation de composantes).

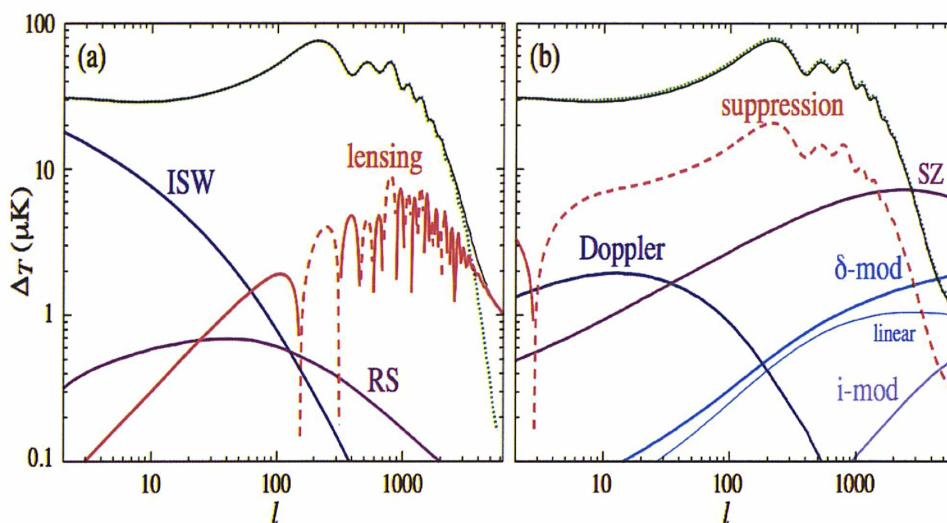


FIGURE 3.3 – Spectres de puissance des anisotropies secondaires de température créées par des effets gravitationnels (à gauche) : "RS" pour Rees-Sciama, "Lensing" pour l'effet de lentille et "ISW" pour l'effet Sachs-Wolfe intégré et par des effets de diffusion sur les électrons chauds (à droite) : "SZ" pour Sunyaev-Zeldovich, "Doppler" pour l'effet SZ cinétique et l'effet Ostriker-Vishniac et " $\delta - mod$ " pour l'effet de réionisation anisotrope. Source : Aghanim et al. (2008)

L'EFFET DE LENTILLE DANS LE CMB

SOMMAIRE

5.1	CORRÉLATIONS CROISÉES AVEC DES GRANDS RELEVÉS	69
5.1.1	WMAP ₁ + SDSS (LRGs) 2004 - Pas de détection	70
5.1.2	WMAP ₃ + NVSS 2007 - Détection à 3.4σ	70
5.1.3	WMAP ₃ + SDSS/NVSS -2008 - Détection à 2.5σ	71
5.2	SPECTRE DE PUISSANCE DES ANISOTROPIES DU CMB	71
5.2.1	ACBAR 2009 - Détection à 2σ	71
5.2.2	ACT 2011 - Détection à 2.8σ	71
5.2.3	SPT 2011 - Détection à 5σ	72
5.3	SPECTRE DE PUISSANCE DE L'EFFET DE LENTILLE	72
5.3.1	ACT 2011 - Détection à 4σ	72
5.3.2	SPT 2012 - Détection à 6.3σ	73
5.4	RETOUR AUX CORRÉLATIONS CROISÉES	76
5.4.1	SPT 2012	76
5.4.2	ACT 2012	76

L'EFFET de lentille gravitationnelle désigne la déviation des rayons lumineux en présence d'un potentiel gravitationnel. Dans le cadre de la Relativité Générale, il se comprend comme la déformation des géodésiques dans un espace-temps perturbé par la présence de matière. Les photons suivant les géodésiques, leur trajectoire est affectée par les puits de potentiel rencontrés.

En particulier, les photons du CMB subissent l'effet collectif des petites déviations dues aux potentiels de toutes les grandes structures¹ depuis la surface de dernière diffusion jusqu'à nous. L'étude de cet effet permet d'apporter des contraintes sur l'énergie noire, la masse des neutrinos et de lever des dégénérescences sur certains paramètres cosmologiques (Metcalf et Silk 1997), (Benoit-Lévy et al. 2012).

1. Ce sont les grandes structures, quasi-linéaires, qui dominent l'effet de lentille dans le CMB.

4.1 LA DÉVIATION DES PHOTONS DU CMB PAR LES GRANDES STRUCTURES

Nous allons présenter ici les résultats généraux sur la déviation des photons du CMB par l'effet collectif des grandes structures. La dérivation des équations est détaillée par Lewis et Challinor (2006).

4.1.1 Déplacement des anisotropies

L'effet de lentille gravitationnelle ne modifie pas la fréquence des photons. Ceux-ci gardent ainsi leur spectre de corps noir et on ne peut pas observer cet effet en utilisant des cartes multi-fréquences. De plus, la brillance de surface est conservée par l'effet de lentille. Si donc le CMB était parfaitement isotrope, les photons seraient déplacés mais conserveraient la même distribution, on ne pourrait pas observer d'effet de lentille. On peut l'étudier grâce à la présence des anisotropies primaires qui vont apparaître légèrement déplacées :

$$\tilde{T}(\vec{n}) = T(\vec{n} + \vec{\alpha}) \quad (4.1)$$

Nous noterons les quantités observées avec un tilde et les quantités primordiales sans tilde. Les quantités observées seront dites "lentillées" pour dire qu'elles ont subi l'effet de lentille gravitationnelle. Les quantités primordiales désignent les quantités telles qu'elles seraient évaluées si elles n'avaient subi aucun changement depuis l'émission des photons sur la surface de dernière diffusion. La température lentillée sur un point du ciel correspond donc à la température primordiale en ce point, décalée d'un petit déplacement $\vec{\alpha}$.

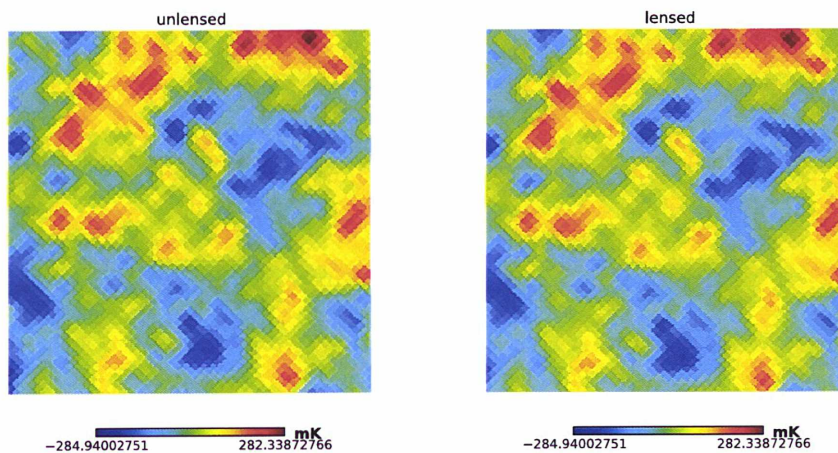


FIGURE 4.1 – Effet de lentille gravitationnelle dans une carte de température non lentillée (à gauche) et lentillée (à droite) pour une portion de ciel de $3^\circ \times 3^\circ$ environ, pour une résolution d'une arcminute par pixel.

La figure 4.1 montre la même portion de ciel d'environ $3^\circ \times 3^\circ$ avec une résolution d'une arcminute par pixel pour une réalisation du CMB sans effet de lentille (à gauche) et avec (à droite). Nous avons utilisé la même

échelle de couleurs pour les deux images de sorte à mettre en évidence le décalage de l'ordre de deux ou trois pixels des structures observées vers la gauche dans la carte lentillée.

4.1.1.1 Ordres de grandeur

Nous voyons que la déflexion totale subie par un photon sur son trajet depuis la surface de dernière diffusion jusqu'à nous (14000 Mpc) est de l'ordre de quelques arcminutes (environ 2,5' en moyenne). L'effet de lentille est donc très faible et a priori peu repérable dans une carte de température dont la taille typique des anisotropies est de l'ordre du degré. Quant au spectre, l'effet de lentille y introduit un changement de l'ordre du pour-cent (2.5' rapportées à 1°) à toutes les échelles. Cependant, cette déflexion totale correspond aux modes $l \gtrsim 3000$ pour lesquelles le CMB primordial ne contient quasiment plus de puissance à cause de l'amortissement de Silk. L'effet de lentille domine alors le spectre de température, en l'absence d'autres anisotropies secondaires.

Les photons observés dans une zone du ciel sous-tendue par la taille caractéristique d'un puits de potentiel auront subi la même déflexion. Cette taille caractéristique étant de 300Mpc (échelle correspondant au pic du spectre de puissance de la matière), la déflexion des photons sera cohérente sur environ 2° sur le ciel (pour un puits de potentiel situé au maximum de la fonction d'efficacité c'est-à-dire à mi-distance entre la surface de dernière diffusion et l'observateur). Aussi faibles ainsi soient les déflexions causées par l'effet de lentille, elles sont corrélées à l'échelle du degré et c'est l'exploitation de ces corrélations qui va nous permettre de les quantifier.

4.1.1.2 Angle de déflexion

La Relativité Générale permet de dériver l'équation des géodésiques dans un espace-temps perturbé par la présence de potentiels gravitationnels sur la ligne de visée des photons observés. Elle permet ensuite de calculer l'angle de déviation induit sur les photons par ces potentiels. Nous nous contenterons ici de donner les résultats tels qu'ils sont présentés dans Lewis et Challinor (2006).

Dans le cadre de l'effet de lentille faible, pour une source située à la distance comobile χ^* de l'observateur, comme décrit sur la figure 4.2, la déflexion totale d'un photon s'écrit, à l'ordre le plus bas dans le potentiel :

$$\vec{\alpha} = -2 \int_0^{\chi^*} d\chi \frac{f_K(\chi^* - \chi)}{f_K(\chi^*)f_K(\chi)} \vec{\nabla}_{\vec{n}} \Psi(\chi \vec{n}, \eta_0 - \chi) \quad (4.2)$$

Nous nous sommes placés dans le cadre de l'*approximation de Born* qui consiste à effectuer les calculs le long de la trajectoire non perturbée des photons. Cette approximation est suffisante pour l'effet de lentille faible qui nous intéresse ici. Les écarts à cette approximation ne modifient pas le spectre de puissance du potentiel mais seulement ses moments statistiques d'ordres supérieurs. Nous avons noté Ψ le potentiel gravitationnel situé à une distance comobile χ de l'observateur. $\eta_0 - \chi$ donne le temps conforme

auquel le photon était à la position $\chi\vec{n}$. $\vec{\nabla}_{\vec{n}}$ représente la dérivée angulaire, équivalente à la dérivée covariante sur la sphère définie par \vec{n} . La distance de diamètre angulaire $f_K(\chi)$ permet de relier les distances aux angles :

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi) & K > 0 \\ \chi & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}\chi) & K < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

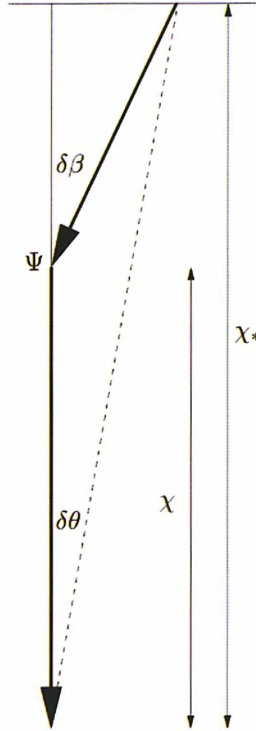


FIGURE 4.2 – Géométrie de l'effet de lentille faible pour une source (ici le CMB) située à une distance comobile χ^* . Un potentiel Ψ est placé à la distance χ de l'observateur et crée un angle de déflexion $\delta\beta$ dans la direction de propagation de la lumière. La source est donc vue par l'observateur décalée d'un angle $\delta\theta$. Source : Lewis et Challinor (2006)

4.1.2 Potentiel de lentille

4.1.2.1 Définition

A partir de l'équation 4.2, nous définissons le *potentiel de lentille* de telle sorte qu'au premier ordre, l'angle de déflexion soit le gradient du potentiel de lentille $\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\phi$:

$$\phi(\vec{n}) = -2 \int_0^{\chi^*} d\chi \frac{f_K(\chi^* - \chi)}{f_K(\chi^*)f_K(\chi)} \Psi(\chi\vec{n}, \eta_0 - \chi) \quad (4.4)$$

C'est la projection de tous les potentiels gravitationnels le long de la ligne de visée. Si le potentiel gravitationnel est gaussien (ce qui est vrai aux grandes échelles mais l'est moins aux petites échelles lorsque l'évolution des perturbations devient non linéaire), le potentiel de lentille l'est aussi.

4.1.2.2 Potentiels de lentille

En toute généralité, suivant Hirata et Seljak (2003b) et Namikawa et al. (2012) nous devrions écrire :

$$\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \psi \quad (4.5)$$

où ϕ est le potentiel de lentille précédemment défini et ψ la partie rotationnelle de la déflexion. Dans le cas du CMB, cette composante est nulle. Toutefois, il pourrait y avoir d'autres mécanismes conduisant à créer du signal dans la partie rotationnelle de la déflexion. C'est par exemple le cas des ondes gravitationnelles primordiales (Cooray et al. 2005). L'amplitude prédite pour ce signal étant très faible, nous considérerons par la suite que $\psi = 0$.

4.1.2.3 Spectre de puissance du potentiel de lentille

Si le potentiel de lentille est un champ gaussien, toute l'information statistique sur l'effet de lentille sera contenue dans son spectre de puissance et dans les corrélations avec d'autres champs.

Auto-corrélation Ecrivons d'abord le spectre de puissance du potentiel de lentille en fonction du spectre de puissance du potentiel gravitationnel \mathcal{P}_Φ :

$$C_\ell^\phi = 4\pi \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{P}_\Phi(k) [I_\ell^{len}(k)]^2 \quad (4.6)$$

où nous avons posé :

$$I_\ell^{len}(k) = -2 \int_0^{\chi^*} d\chi \frac{\chi^* - \chi}{\chi\chi^*} j_\ell(k\chi) \quad (4.7)$$

où $j_\ell(\chi)$ désigne les fonctions de Bessel sphériques.

Aux petites échelles, c'est-à-dire à grands ℓ , l'approximation de Limber est suffisante pour le calcul du spectre de puissance, surtout lorsqu'il s'agit de le faire numériquement :

$$C_\ell^\phi \approx \frac{8\pi^2}{\ell^3} \int_0^{\chi^*} \chi d\chi \mathcal{P}_\Psi(l/\chi; \eta_0 - \chi) \left(\frac{\chi^* - \chi}{\chi^*\chi} \right)^2 \quad (4.8)$$

En théorie linéaire, on peut écrire le potentiel Ψ en fonction de la perturbation primordiale de courbure \mathcal{R} , grâce à la fonction de transfert T_Ψ . Le spectre de puissance du potentiel de lentille devient alors :

$$C_\ell^\phi = 16\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \left[\int_0^{\chi^*} d\chi T_\Psi(k; \eta_0 - \chi) j_\ell(k\chi) \left(\frac{\chi^* - \chi}{\chi^*\chi} \right) \right]^2 \quad (4.9)$$

L'approximation du régime linéaire devient fautive à petite échelle. On évalue, par simulation numérique, que l'évolution non linéaire des perturbations augmente significativement la puissance aux petites échelles.

En général, on représente plutôt le spectre de puissance de l'angle de déflexion $\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\phi$ qui sera donné par $\ell(\ell + 1)C_\ell^\phi$. Il est représenté sur le

panneau supérieur de la figure 4.3 dans les cas linéaire et non linéaire et dans le cadre de l'approximation en ciel-plat ("flat" en pointillés bleus) ou calculé sur le ciel complet ("all" en traits pleins noirs). Nous voyons qu'aux petites échelles, l'hypothèse linéaire fait perdre un peu de puissance.

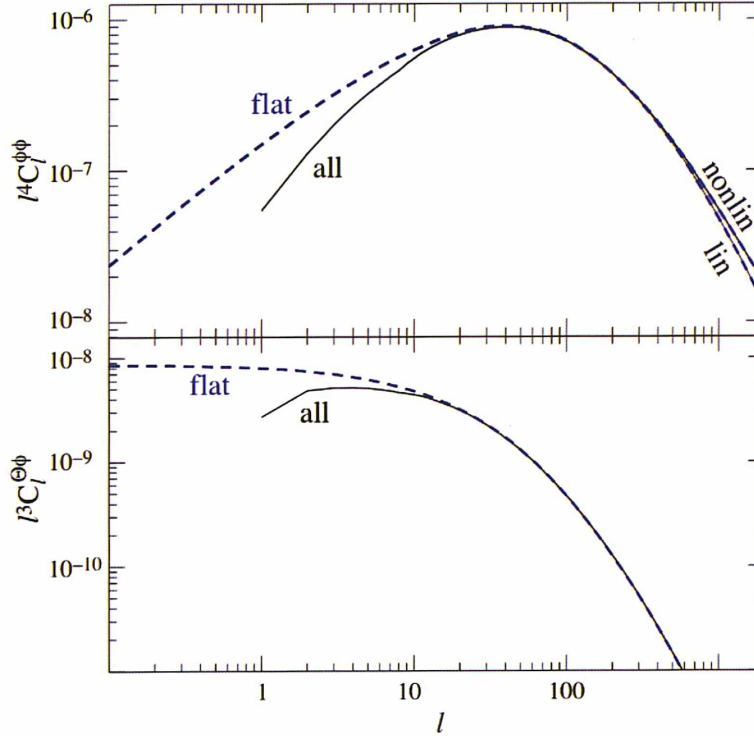


FIGURE 4.3 – Spectres de puissance de l'effet de lentille. En haut : auto-corrélation du potentiel de lentille calculée sur le ciel plat (pointillés bleus) ou sur le ciel complet (trait plein noir), pour des perturbations de densité linéaires ou non. En bas : corrélation croisée du potentiel de lentille avec la température du CMB. Source : Hu (2000)

Corrélation croisée du spectre de puissance du potentiel de lentille avec la température du CMB On peut aussi corréler le potentiel de lentille avec la température du CMB. En première approximation, nous pourrions supposer que cette corrélation est nulle. En réalité, certaines anisotropies secondaires dépendent elles-mêmes du potentiel gravitationnel ϕ . On s'attend donc à mesurer une corrélation non nulle. C'est en particulier le cas pour l'effet Sachs-Wolf Intégré (ISW) qui contribue à grande échelle aux anisotropies de température suivant l'équation 3.6 (Lewis et al. 2011). A plus petite échelle, le potentiel de lentille devient complètement décorrélé de la température, ce que nous confirme le panneau inférieur de la figure 4.3.

La corrélation croisée du potentiel de lentille et de la température s'écrit (Hu 2000) :

$$C_\ell^{\phi\Theta_{ISW}} = 16\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \int_0^{\chi_*} d\chi T_\Psi(k; \eta_0 - \chi) j_\ell(k\chi) \left(\frac{\chi_* - \chi}{\chi_* \chi} \right) \times \int_0^{\chi_*} d\chi' \dot{T}_\Psi(k; \eta_0 - \chi') j_\ell(k\chi') \quad (4.10)$$

4.1.3 Redistribution de la puissance dans le spectre angulaire

Pour calculer le spectre de puissance angulaire du CMB lentillé, nous allons nous placer dans l'espace des harmoniques sphériques. Nous considérerons toujours, dans le cadre de l'expérience Planck, un traitement "plein ciel". Nous décomposerons donc une quantité X sur la sphère, comme suit (Kamionkowski et al. 1997) :

$$X(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} X_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \quad (4.11)$$

Le spectre de puissance est alors défini par :

$$\langle X_{\ell m}^* X_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell}^X \quad (4.12)$$

Et la transformation inverse s'écrit :

$$X_{\ell m} = \int d\vec{n} X(\vec{n}) Y_{\ell m}(\vec{n}) \quad (4.13)$$

4.1.3.1 Développement limité de la température observée

Afin de calculer le spectre de puissance de la température observée, il nous faut évaluer les multipôles de la température. L'angle de déflexion étant petit, nous pouvons écrire un développement limité au second ordre dans le potentiel de la température observée à partir de l'équation 4.1 :

$$\tilde{\Theta}(\vec{n}) \approx \Theta(\vec{n}) + \nabla_i \phi(\vec{n}) \nabla^i \Theta(\vec{n}) + \frac{1}{2} \nabla_i \phi(\vec{n}) \cdot \nabla_j \phi(\vec{n}) \nabla^i \nabla^j \Theta(\vec{n}) + \dots \quad (4.14)$$

La transformation en harmoniques sphériques de cette équation conduit à (voir le début de l'annexe D pour le détail des calculs) :

$$\tilde{\Theta}_{\ell m} = \Theta_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \left[I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1 m_2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_3 m_3}^* J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1 m_2 m_3} \right] + \dots \quad (4.15)$$

où nous avons posé :

$$I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1 m_2} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot (\nabla_i Y_{\ell_1 m_1}) \cdot (\nabla^i Y_{\ell_2 m_2}) \quad (4.16)$$

$$J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1 m_2 m_3} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot (\nabla_i Y_{\ell_1 m_1}) \cdot (\nabla_j Y_{\ell_3 m_3}) \cdot \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} \quad (4.17)$$

4.1.3.2 Calcul du spectre lentillé au premier ordre

Par isotropie statistique, la covariance de la température lentillée est diagonale et on peut définir un *spectre lentillé* de la température :

$$\langle \tilde{\Theta}_{\ell m}^* \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tilde{C}_{\ell}^{\Theta} \quad (4.18)$$

Nous pouvons à présent écrire ce spectre lentillé au premier ordre en C_{ℓ}^{ϕ} :

$$\tilde{C}_{\ell}^{\Theta} \approx C_{\ell}^{\Theta} + \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi} C_{\ell_2}^{\Theta} S_1 + C_{\ell}^{\Theta} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi} S_2$$

où nous avons posé puis calculé (voir l'annexe D pour le calcul des intégrales I et J) :

$$S_1 = \sum_{m_1 m_2} (I_{l_1 l_2}^{m m_1 m_2})^2 = \frac{1}{2\ell + 1} (F_{\ell l_1 l_2})^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{m_1} J_{l_1 l_1 l_1}^{m m_1 m m_1} + c.c = -\frac{1}{2} \ell(\ell + 1) l_1(l_1 + 1) \frac{2\ell_1 + 1}{4\pi}$$

Nous avons encore défini le terme géométrique :

$$F_{\ell l_1 l_2} = \frac{1}{2} [l_1(l_1 + 1) + l_2(l_2 + 1) - \ell(\ell + 1)]$$

$$\times \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Ce terme pourra encore s'écrire, d'après la formule C.13 :

$$F_{\ell l_1 l_2} = -\sqrt{l_1(l_1 + 1)l_2(l_2 + 1)}$$

$$\times \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ell \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

D'où finalement l'expression du spectre lentillé :

$$\tilde{C}_\ell^\Theta \approx C_\ell^\Theta [1 - \ell(\ell + 1)R] + \sum_{l_1 l_2} C_{l_1}^\phi C_{l_2}^\Theta \frac{(F_{\ell l_1 l_2})^2}{2\ell + 1} \quad (4.21)$$

avec :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{l_1} l_1(l_1 + 1) \frac{2\ell_1 + 1}{4\pi} C_{l_1}^\phi \quad (4.22)$$

Le dernier terme du spectre lentillé indique une convolution du spectre de puissance primordial de la température avec le spectre de puissance du potentiel. Cette convolution a pour effet de lisser les pics du spectre primordial aux grandes échelles, ce que nous voyons sur le panneau en haut à droite de la figure 4.4. Elle permet également de transférer de la puissance des grandes échelles vers les petites échelles, initialement coupées par l'amortissement de Silk. Le panneau en haut à gauche et celui du bas montrent en effet comment le spectre lentillé domine, à grands ℓ le spectre non lentillé.

4.1.3.3 Comparaison avec d'autres anisotropies secondaires

Les différentes anisotropies secondaires du CMB ont été évoquées au chapitre précédent. Certaines, comme l'effet Sunyaev-Zel'dovich thermique, ont une signature spectrale différente du CMB et peuvent donc facilement être distinguées. En revanche, d'autres, comme l'effet Sunyaev-Zel'dovich cinétique, ont la même signature spectrale. Ce signal est, comme l'effet de lentille, un traceur des grandes structures et est donc corrélé avec lui.

Amblard et al. (2004) ont proposé, pour traiter l'effet Sunyaev-Zel'dovich cinétique, d'utiliser la mesure de l'effet Sunyaev-Zel'dovich

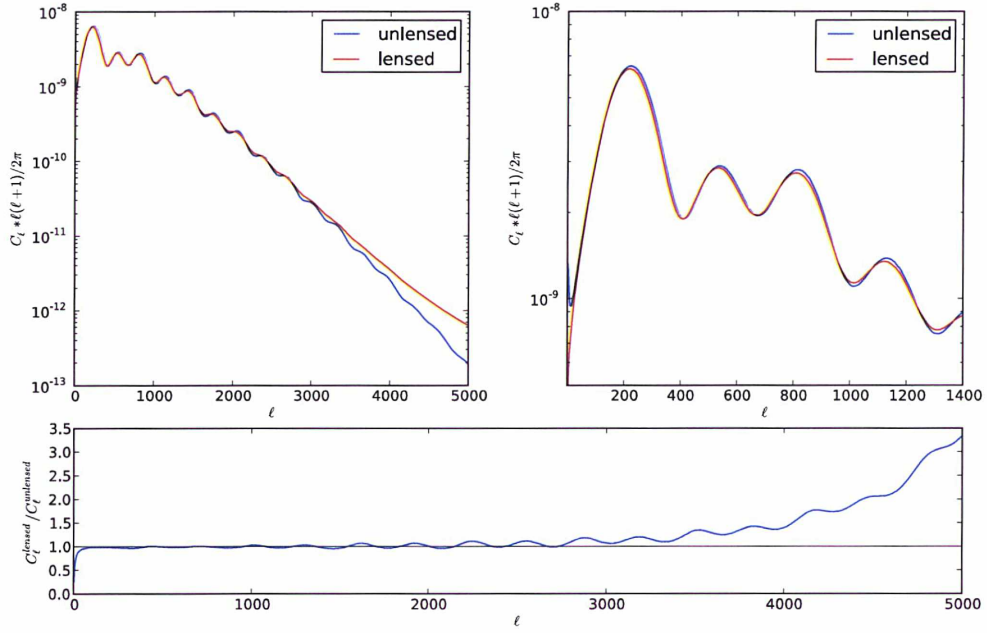


FIGURE 4.4 – Effet de lentille gravitationnelle dans le spectre de température du CMB : spectres obtenus avec les paramètres WMAP7. En haut : spectre non lentillé (bleu) comparé au spectre lentillé (rouge). En bas : rapport du spectre lentillé au spectre non lentillé.

thermique pour masquer les amas les plus gros, autour desquels l'effet SZ cinétique est concentré. Les zones masquées doivent ensuite être interpolées d'une manière ou d'une autre pour pouvoir recouvrir une bonne estimation de l'effet de lentille. En pratique, cet effet est largement dominé par les points sources et les résidus diffus d'avant-plans et est donc négligeable aux échelles qui nous intéressent.

4.1.3.4 Calcul au second ordre

Nous pouvons utiliser le développement limité de la température poussé au quatrième ordre en ϕ pour calculer le spectre de la température lentillée au second ordre en C_ℓ^ϕ . Le détail des calculs est présenté au début de l'annexe F et aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left\{ C_\ell^\ominus \left[1 - \ell(\ell+1)R + \frac{1}{2}[\ell(\ell+1)R]^2 \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2\ell+1} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus F_{\ell\ell_1\ell_2}^2 [1 - \ell_2(\ell_2+1)R] \\
 &\quad + \frac{1}{8} \frac{1}{2\ell+1} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus C_{\ell_3}^\phi \sum_L \frac{1}{2L+1} \left(\frac{F_{\ell\ell_1 L} F_{\ell_3 L \ell_2}}{L(L+1)} \right)^2 \\
 &\quad \left. \times [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)]^2 \right\} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

où R a été défini à l'équation 4.22.

4.1.4 Création de non gaussianités

Nous avons vu que, si l'inflation prédit un spectre des perturbations primordiales gaussien (pour les modèles les plus simples), et si leur évolution depuis la surface de dernière diffusion est linéaire, on peut considérer que les anisotropies du CMB sont elles-mêmes gaussiennes. Par ailleurs, le potentiel de lentille est sensible aux grands modes du champ de densité, qui sont aussi gaussiens. Le CMB que nous observons n'est toutefois pas gaussien. En effet, le développement limité 4.14 de la température observée fait notamment intervenir les dérivées de la température non lentillée qui ne sont pas des champs gaussiens. Nous allons utiliser cette non-gaussiannité pour extraire de l'information sur le potentiel de lentille. Pour cela, intéressons-nous aux moments d'ordres supérieurs à deux.

4.1.4.1 Moment à trois points (bispectre)

Le moment à trois points de la température s'écrit, à l'ordre dominant, d'après Lewis et al. (2011) :

$$\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3} \rangle \approx C_{\ell_2}^{\Theta\psi} \bar{C}_{\ell_3}^{\Theta\Theta} F_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} + 5perms. \quad (4.24)$$

où les permutations sont prises pour les couples d'indice (ℓ_i, m_i) . Le bispectre est alors défini par :

$$B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\Theta\Theta\Theta} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3} \rangle \quad (4.25)$$

Il donne une information directe sur la corrélation à grandes échelles entre la température et le potentiel de lentille. L'effet Sachs-Wolfe intégré intervient à bas redshift et est corrélé aux perturbations de densité qui contribuent au potentiel de lentille. Ainsi, le bispectre fournit des indications sur l'évolution récente des perturbations et de l'expansion ce qui permet de mettre des contraintes sur l'énergie noire et la courbure. Il ne permet en revanche pas de mesurer directement le potentiel ψ ou son spectre de puissance.

4.1.4.2 Moment à quatre points (trispectre)

Voyons à présent ce que peut nous apprendre le moment d'ordre quatre de la température observée. Si la température est gaussienne, ce moment sera une combinaison de produits de spectres de puissance. La signature non-gaussienne du moment à quatre points (que nous cherchons pour mesurer l'effet de lentille) sera donc contenue dans sa *partie connectée*. Celle-ci s'obtient en soustrayant la contribution gaussienne :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4} \rangle_C &= \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4} \rangle \\ &\quad - \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \rangle \langle \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3} \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4} \rangle - 2perms \end{aligned} \quad (4.26)$$

Nous verrons bientôt (voir déjà l'équation 4.29 pour s'en convaincre) que cette quantité fait apparaître le spectre de puissance du potentiel de lentille et peut donc être utilisée pour en construire un estimateur.

4.2 POURQUOI ÉTUDIER CET EFFET ?

L'intérêt premier de l'effet de lentille gravitationnelle dans le CMB est de permettre de mesurer le spectre de puissance (linéaire) de la matière, projeté grâce au spectre de puissance de la déflexion induite par cet effet. Plus encore, il est une source d'information cosmologique précieuse (Smith et al. 2009) et doit être pris en compte pour l'évaluation des paramètres cosmologiques (Zaldarriaga et al. 1997, Metcalf et Silk 1997). Toutefois, il est également un contaminant pour l'étude des ondes gravitationnelles primordiales (à partir des modes B de la polarisation). Notons enfin qu'il peut permettre de tester la Relativité Générale ou des modèles de gravité modifiée selon Calabrese et al. (2008; 2009) et Serra et al. (2009).

4.2.1 Sonder la matière et l'évolution des structures

La reconstruction de l'effet de lentille gravitationnelle dans le CMB permet d'obtenir directement le spectre de puissance de la matière projeté pour un redshift $z \sim 1100$. C'est l'avantage de l'effet de lentille appliqué au CMB par rapport à l'effet de lentille appliqué aux galaxies. Pour ces dernières, il y a une incertitude sur la relation entre la distribution de galaxies et la distribution de masse. De plus, l'effet de lentille du CMB donne accès à des redshifts plus importants que ceux atteints avec les galaxies et est sensible aux plus grandes échelles observables dans l'Univers.

En combinant l'effet de lentille du CMB à celui des galaxies, on reconstitue l'évolution du spectre de puissance de la matière en fonction du redshift et on sonde alors la distribution radiale de la matière. La corrélation de l'effet de lentille du CMB et des galaxies peut ainsi nous renseigner sur l'équation d'état de l'énergie noire. En effet, l'énergie noire modifie l'histoire de la croissance des structures. En comparant leur structuration à différentes époques, on peut donc avoir accès aux propriétés de l'énergie noire.

4.2.2 Contraindre les paramètres cosmologiques

Le spectre de puissance du potentiel de lentille dépend à la fois des distances et de la croissance des perturbations. Il est plus particulièrement sensible aux paramètres qui gouvernent l'évolution tardive ($z \lesssim 5$) de l'Univers (Smith et al. 2006).

4.2.2.1 Dégénérescence géométrique

La mesure du potentiel de lentille permet en premier lieu de lever la *dégénérescence de diamètre angulaire* (Stompor et Efstathiou 1999). Les paramètres qui permettent de décrire l'univers tardif dépendent essentiellement de l'évolution des distances et de la croissance des perturbations après la recombinaison. Ces paramètres sont la densité d'énergie noire Ω_Λ , l'équation d'état de l'énergie noire w , la courbure Ω_k et la somme des masses des neutrinos $\sum m_\nu$. Or le CMB primordial ne dépend de l'ensemble de ces paramètres qu'à travers la taille angulaire du pic acoustique

définie par :

$$\ell_a = \pi \frac{D_*}{s_*} \quad (4.27)$$

où D_* est la distance de diamètre angulaire à la recombinaison et s_* l'horizon du son à la recombinaison. Si on ajuste la densité d'énergie noire pour fixer D_* et que l'on fait varier l'un des autres paramètres, le spectre de puissance primordial du CMB ne change pas. Ce n'est pas le cas du spectre de puissance du potentiel de lentille, beaucoup plus sensible aux variations des paramètres $\{\Omega_v h^2, w, \Omega_k\}$ et qui permet donc de lever cette dégénérescence.

En particulier, la figure 4.5 montre que l'effet Sachs-Wolfe intégré (ISW) aux grandes échelles (petits ℓ), dans un univers plat, permet de caractériser l'énergie noire. Il est très sensible à l'équation d'état de l'énergie noire ainsi qu'à ses propriétés de "clustering". Cependant, même avec des expériences plein-ciel, on ne dispose que d'un petit nombre de réalisations des modes à grande échelle. De plus, à ces échelles, de nombreux autres effets secondaires s'ajoutent et modifient le spectre.

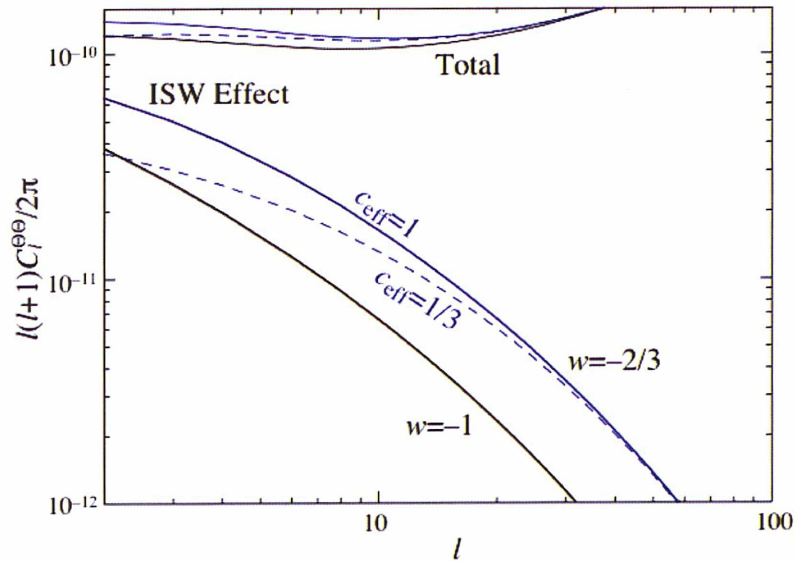


FIGURE 4.5 – Spectre de la contribution de l'effet Sachs-Wolfe intégré (ISW) aux anisotropies, tracé pour différentes équations d'état de l'énergie noire (valeur de w) et vitesses du son c_{eff} . Source : Hu (2002)

4.2.2.2 Masse des neutrinos

Les neutrinos sont des particules massives du modèle standard de la physique des particules qui possèdent trois états propres de masse qui ne sont pas complètement dégénérés. La contrainte actuelle fournie par les relevés de grandes structures et WMAP sur la somme des masses des neutrinos est :

$$\sum m_\nu \lesssim 0.7 eV \quad (4.28)$$

Or la présence de neutrinos amortit la croissance des structures ce qui modifie l'effet de lentille sur le CMB. Ainsi Planck pourra contraindre

cette masse totale à $0,15eV$ (Kaplinghat et al. 2003) (Lesgourgues et al. 2006) .

4.2.2.3 Energie noire

La présence d'énergie noire entraîne une accélération de l'expansion de l'Univers et donc un ralentissement de la croissance des perturbations. L'effet de lentille dans le CMB constitue ainsi un moyen indépendant de prouver l'accélération de l'expansion de l'Univers (Acquaviva et Baccigalupi 2006). D'autre part, si l'équation d'état de l'énergie noire n'est pas strictement -1 , elle peut s'accréter, augmentant les perturbations de la métrique. De nouveau, l'effet de lentille y est sensible et apporte des informations sur les propriétés de l'énergie noire (Hu 2002).

4.2.3 Nettoyer les modes B de la polarisation

Les différents modèles d'univers primordial (inflationnaires ou autres) prédisent l'existence de modes tensoriels. Ces perturbations aussi appelées *ondes gravitationnelles* sont à l'origine des modes B de la polarisation du CMB (Kamionkowski et al. 1997, Seljak et Zaldarriaga 1997). Leur détection permettrait de discriminer les différents modèles. Cependant, Hu (2000) a montré que l'effet de lentille gravitationnelle induit un mélange des modes E et B de la polarisation : une partie des modes E est transférée vers les modes B. L'effet de lentille crée donc un "bruit" dans les modes B primordiaux. Jusqu'aux environs de $\ell \approx 1000$, le spectre des modes B lentillés, produits par des modes E purement scalaires, est proche d'un spectre de bruit blanc : $\tilde{C}_\ell^B \sim 2 \times 10^{-6} \mu K^2$ (Lewis et Challinor 2006).

Ce bruit est un facteur limitant pour la détection des ondes gravitationnelles primordiales dont l'amplitude détermine la gamme d'énergie de l'inflation. On ne connaît pas cette amplitude qui pourrait être relativement faible et donc dominée par les modes B de l'effet de lentille, comme l'indique la figure 4.6. De plus, ce bruit ne peut être soustrait que statistiquement.

La limite de détectabilité des modes tensoriels pourrait être améliorée par des techniques de nettoyage direct (*delensing*) des modes B créés par l'effet de lentille, proposées par Seljak et Hirata (2004) et qui consistent à utiliser les anisotropies aux petites échelles pour reconstruire le potentiel de lentille. Cette dernière opération est en principe possible (Hu et Okamoto 2002) puisque, nous le voyons sur la figure 4.6, le spectre des modes B primordiaux pique autour de $l \sim 100$ et décroît ensuite aux plus petites échelles. Or, nous voulons retrancher le signal créé par l'effet de lentille à des échelles $\ell \gtrsim 200$. Les modes B, à ces plus petites échelles, seront entièrement dominés par le signal de lentille et peuvent donc être utilisés pour le reconstruire. Comme par ailleurs, le spectre de puissance du potentiel de lentille pique autour de $\ell \sim 60$, l'essentiel du signal de lentille viendra de ces modes à grande échelle.

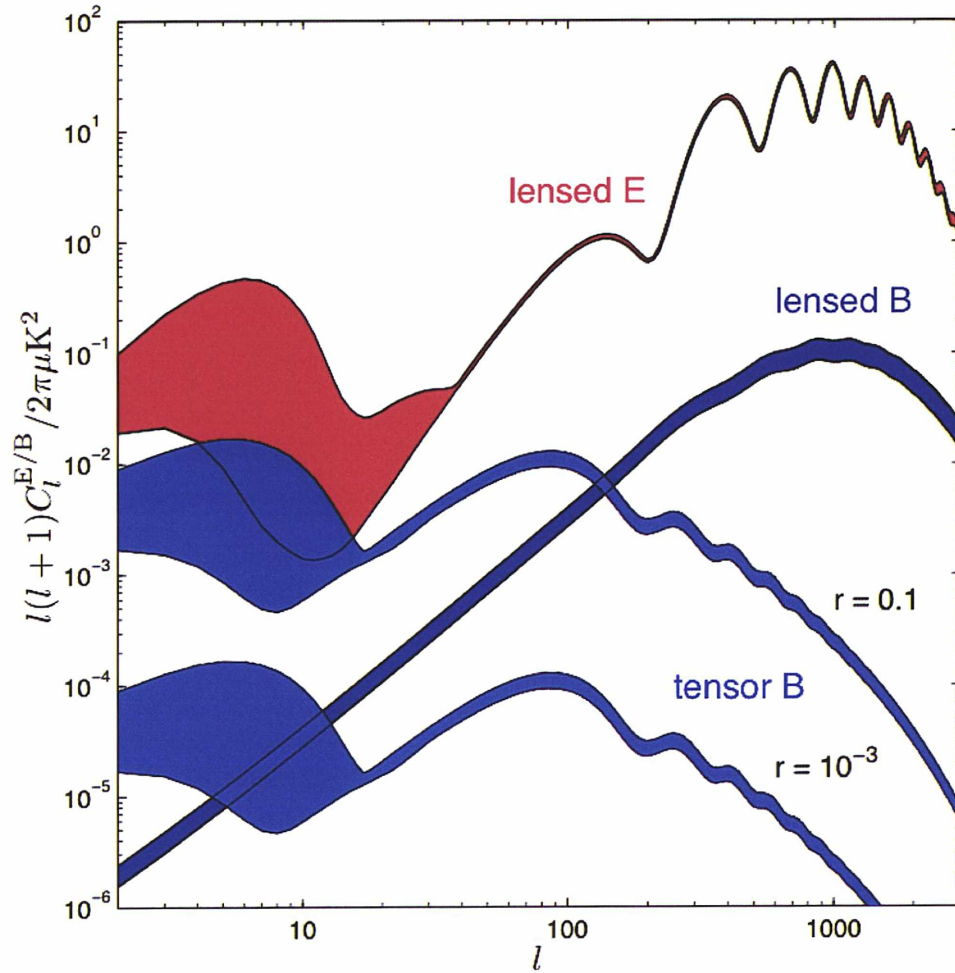


FIGURE 4.6 – Spectres de puissances de la polarisation du CMB : en rouge les modes E en présence d'effet de lentille, en bleu, les modes B "primordiaux" pour deux valeurs du rapport tenseur/scalaire r et en violet les modes B créés par l'effet de lentille. Source : Lewis et Challinor (2006)

4.3 ESTIMER L'EFFET DE LENTILLE DANS LE CMB

Les différentes méthodes proposées pour estimer l'effet de lentille gravitationnelle dans le CMB (sur le ciel complet) sont des approximations de la méthode de Hirata et Seljak (2003a) utilisant la fonction de vraisemblance.

- Estimateur quadratique de Hu et Okamoto
- Méthode sans biais Sherwin et Das
- Reconstruction dans l'espace réel de Bucher, Carvalho, Moodley et Remazeilles

4.3.1 Estimateurs construits sur la fonction de vraisemblance

Cette méthode consiste à supposer que les champs non lentillés, le potentiel de lentille et le bruit sont gaussiens et à écrire la probabilité du champ observé. Le théorème de Bayes permet alors de calculer la distribution postérieure des champs, connaissant les données. Cette fonction de probabilité contient toute l'information possible sur l'effet de lentille. Elle peut être alors utilisée pour construire des estimateurs tels que la fonction de maximum de vraisemblance (Hirata et Seljak 2003a, Hanson et al. 2010a).

Si l'estimateur quadratique du potentiel de lentille est très proche de l'optimalité pour Planck, des expériences à plus haute résolution ($\Theta_{FWHM} = 1'$) nécessiteront l'utilisation de fonctions de vraisemblance pour construire un estimateur optimal. De telles techniques sont non linéaires (et donc coûteuses). Dans le cas de Planck, elles n'apportent une amélioration que de 10 – 20% de l'erreur (RMS). L'estimateur quadratique pourrait donc rester un bon compromis.

4.3.2 Estimateur quadratique à variance minimale

Nous avons vu que l'effet de lentille dans le CMB crée une corrélation entre les différents modes en rompant l'anisotropie statistique (création d'éléments hors-diagonaux dans la covariance). Nous montrons en annexe D que cette corrélation est proportionnelle à la déflexion induite par l'effet de lentille (équation D.17) :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle |_{\phi} = & (-1)^m C_{\ell}^{\Theta} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \\ & + \sum_{LM} (-1)^M \phi_{LM} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ m & m' & M \end{pmatrix} \left[F_{\ell'L\ell} C_{\ell}^{\Theta} + F_{\ell L\ell'} C_{\ell'}^{\Theta} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

où l'indice ϕ sur la moyenne indique qu'elle est prise sur différentes réalisations de CMB à effet de lentille fixé. Pour une réalisation donnée d'effet de lentille, Hu (2001b), Okamoto et Hu (2003) ont donc proposé de construire un estimateur de la déflexion en prenant la somme pondérée de paires de multipôles de la température et en calculant les poids qui minimisent la variance. La dérivation complète de cet estimateur sera présentée au chapitre 6.

Il peut en réalité être biaisé et non optimal car il est construit à partir du développement limité au premier ordre en ϕ de la température. Les termes d'ordres supérieurs peuvent en effet avoir un impact non négligeable dès lors que l'angle de déflexion est comparable à l'échelle des modes utilisés dans la reconstruction du potentiel de lentille. Cet angle de déflexion est de l'ordre de l'arcminute et, pour des expériences à haute résolution, une grande partie de l'information vient donc de ces modes. Les termes non linéaires peuvent alors devenir importants. Comme nous l'avons déjà mentionné, dans le cadre de Planck, un tel estimateur sera une approximation suffisante pour reconstruire le potentiel de lentille dans les données.

4.3.3 Estimateur du spectre de puissance sans biais gaussien

L'estimateur quadratique présenté est non biaisé au sens où, en moyenne, il donne le potentiel de lentille. Toutefois, la variance de cet estimateur est biaisée et ce biais, nous le verrons, domine le signal pour une expérience type Planck. Il provient de la partie gaussienne du moment à quatre points. La mesure de l'effet de lentille ne sera possible que si l'on peut soustraire ce biais avec une précision suffisante. Il faut donc pouvoir le modéliser et, pour cela, connaître le spectre de puissance de la carte, les avant-plans, le bruit en détail.

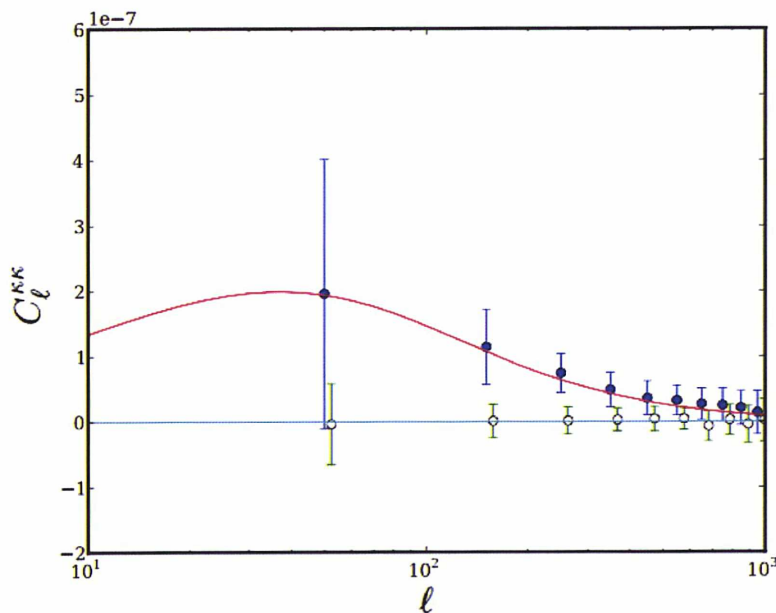


FIGURE 4.7 – Spectre de puissance du potentiel de lentille reconstruit sans biais gaussien sur des portions simulées de ciel de $5^\circ \times 15^\circ$ avec un bruit blanc de $2 \mu K'$. Les points bleus sont obtenus pour 120 réalisations de CMB lentillé, les points verts pour des réalisations non lentillées. Les barres d'erreur représentent la dispersion entre les réalisations. La courbe rouge est le spectre de puissance du potentiel de lentille théorique. Source : Sherwin et Das (2010)

Un moyen de s'en affranchir, d'après Sherwin et Das (2010) est de décomposer l'espace de Fourier en deux anneaux disjoints et de corrélérer les champs de déflexion reconstruits dans ces deux zones. Cette méthode a été testée sur des simulations et sur les données ACT et fournit un résultat satisfaisant comme en témoigne la figure 4.7. Toutefois, l'émission des points sources et l'effet Sunyaev Zel'dovich n'ont pas été pris en compte, la modélisation choisie pour le bruit est une version simplifiée de la réalité et les biais d'ordres supérieurs qui apparaissent dans l'estimateur quadratique demeurent. Les points ainsi obtenus pourraient être très corrélés entre eux et leurs barres d'erreurs sont nécessairement plus importantes que celles obtenues avec l'estimateur quadratique.

4.3.4 Estimateurs dans l'espace réel

L'estimateur quadratique présenté est optimal dans des conditions idéales. Il faut en effet supposer que le ciel complet est couvert uniformément et qu'il n'y a pas de trous dus à la Galaxie ou aux points sources. Bucher et al. (2012) choisissent donc une approche dans l'espace réel qui permet de faire un traitement local de l'effet de lentille au travers des trois composantes du tenseur de shear : la dilatation κ_0 et le shear κ_+ et κ_\times . Il est défini par :

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_0 + \kappa_+ & \kappa_\times \\ \kappa_\times & \kappa_0 - \kappa_+ \end{pmatrix} = \nabla_a \nabla_b \phi \quad (4.30)$$

Ces composantes fournissent des reconstructions de l'effet de lentille indépendantes et peuvent donc être comparées. De plus, contrairement au potentiel de lentille ϕ ou au vecteur de déplacement $\vec{\alpha}$ qui ne sont définis qu'à une constante près, ces quantités locales sont parfaitement bien définies. Des estimateurs de ces grandeurs peuvent être construits puis combinés pour calculer le potentiel de lentille ϕ . Les champs reconstruits sont en effet reliés suivant :

$$\kappa_0(\vec{\ell}) = -\frac{1}{2} (\ell_x^2 + \ell_y^2) \phi(\vec{\ell}) \quad (4.31)$$

$$\kappa_+(\vec{\ell}) = -\frac{1}{2} (\ell_x^2 - \ell_y^2) \phi(\vec{\ell}) \quad (4.32)$$

$$\kappa_\times(\vec{\ell}) = -\ell_x \ell_y \phi(\vec{\ell}) \quad (4.33)$$

Ces relations peuvent permettre de réduire le bruit de la reconstruction.

CONCLUSION DU CHAPITRE

L'effet de lentille affecte la distribution des anisotropies de température et peut être mesuré statistiquement dans les données de diverses manières qui sont toutes des approximations plus ou moins exactes du maximum de vraisemblance. Cette mesure permet de lever des dégénérescences sur certains paramètres cosmologiques et de sonder la distribution projetée de matière des grandes structures. Avant de détailler au chapitre 6 la dérivation de l'estimateur quadratique que nous avons retenu pour exploiter les données Planck, nous allons présenter une brève revue des détections et mesures déjà réalisées.

DÉTECTIONS ET MESURES DE L'EFFET DE LENTILLE DANS LE CMB

SOMMAIRE

6.1	IDÉE POUR CONSTRUIRE UN ESTIMATEUR OPTIMAL NON BIAISÉ	79
6.1.1	Choix de la normalisation	80
6.1.2	Choix des filtres	80
6.2	DÉRIVATION COMPLÈTE DE L'ESTIMATEUR	81
6.2.1	Estimateurs non normalisés	81
6.2.2	Estimateurs non biaisés	82
6.2.3	Estimateurs à variance minimale	83
6.3	BIAIS DES SPECTRES DE PUISSANCE	84
6.3.1	Biais gaussiens	85
6.3.2	Biais d'ordre supérieur	85
6.4	SPECTRES DE PUISSANCE	88
6.4.1	Estimateurs des spectres de puissance	88
6.4.2	Covariance des spectres estimés	88
6.5	RECONSTRUCTION DU POTENTIEL DE LENTILLE	88
6.5.1	Description du pipeline	88
6.5.2	Validation du pipeline	89

Nous présentons dans ce chapitre une rapide revue des détections et mesures de l'effet de lentille dans le CMB, depuis sa prédiction par Blanchard et Schneider (1987). Cela permet d'explicitier le contexte dans lequel notre travail s'inscrit. Les résultats sont mentionnés avec quelques commentaires. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à prendre connaissance des articles mentionnés correspondants.

5.1 CORRÉLATIONS CROISÉES AVEC DES GRANDS RELEVÉS

Avec le satellite *WMAP*, l'effet de lentille était encore trop faible par rapport aux anisotropies primaires pour permettre une détection interne. La solution pour augmenter le signal sur bruit a été de faire des corrélations croisées avec des traceurs des grandes structures à bas redshifts.

5.1.1 WMAP₁ + SDSS (LRGs) 2004 - Pas de détection

Hirata et al. (2004) ont tenté de faire la première détection d'effet de lentille dans le CMB en corrélant la première année de données de WMAP avec des galaxies rouges lumineuses (LRGs) du *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). Ces galaxies présentent l'avantage d'avoir une bonne luminosité intrinsèque, une importante densité numérique et une distribution en redshifts bien caractérisée.

Ils ont donc corrélaé la convergence reconstruite par un estimateur quadratique des cartes de CMB avec la fraction projetée de surdensité de galaxies. Cette première tentative n'a pas abouti à une détection. La densité numérique des galaxies utilisées tombe rapidement au-delà de redshifts $z = 0.5$, c'est-à-dire avant le domaine où le CMB pique.

5.1.2 WMAP₃ + NVSS 2007 - Détection à 3.4σ

Smith et al. (2007) ont obtenu la première détection indirecte d'effet de lentille dans le CMB en corrélant les trois premières années de WMAP avec 1.3 millions de sources radio du *NRAO VLA Sky Survey* (NVSS). La plupart de ces sources brillantes sont des radio-galaxies alimentées par un AGN et des quasars. La corrélation du potentiel de lentille du CMB reconstruit par un estimateur quadratique avec la densité de galaxies aboutit à une première détection à 3.4σ présentée sur la figure 5.1.

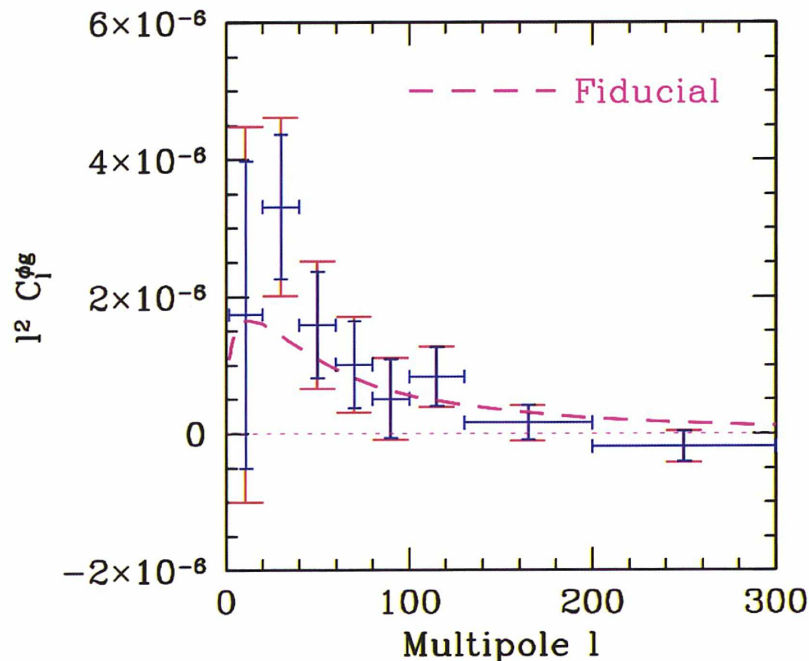


FIGURE 5.1 – Estimation de la corrélation croisée $C_l^{\phi_g}$ avec les données WMAP₃ et NVSS. Les barres d'erreur bleues représentent les erreurs statistiques seules, en rouge elles sont augmentées des erreurs systématiques.

5.1.3 WMAP₃ + SDSS/NVSS -2008 - Détection à 2.5σ

Hirata et al. (2008) ont réitéré l'exercice en incluant cette fois les LRGs et quasars de *SDSS* ainsi que les radio-sources du *NVSS*. Leur analyse utilise les données des trois premières années de *WMAP*, ce qui a permis de réduire le bruit instrumental. De même, le relevé *SDSS* couvre une plus grande partie du ciel. Enfin, le traitement de l'effet Sunyaev Zel'dovich thermique et des points sources a été amélioré.

Ils obtiennent donc la corrélation croisée entre trois échantillons de galaxies (LRGs, quasars et radio-sources) et l'effet de lentille du CMB. Cette corrélation est détectée à 2.5σ et confirme les résultats de Smith et al. (2007).

5.2 SPECTRE DE PUISSANCE DES ANISOTROPIES DU CMB

Comme nous l'avons montré, l'effet de lentille a tendance à lisser les pics du spectre de puissance du CMB et à redistribuer la puissance aux petites échelles. L'estimation du spectre de puissance dans les différentes données disponibles peut donc être un moyen de sélectionner les modèles avec ou sans effet de lentille.

5.2.1 ACBAR 2009 - Détection à 2σ

C'est ce qui est fait avec les données *ACBAR* et *WMAP*₅ (Reichardt 2009) combinées en définissant le paramètre q_{lens} par :

$$C_{\ell}^{\text{lens}} = C_{\ell}^{\text{no lens}} + q_{\text{lens}} \Delta C_{\ell}^{\text{lens}} \quad (5.1)$$

Ainsi $q_{\text{lens}} = 1$ correspond au spectre de puissance lentillé et $q_{\text{lens}} = 0$ donne le cas sans effet de lentille. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

WMAP ₅	$1.34^{+0.27}_{-0.26}$
WMAP ₅ + ACBAR	$1.23^{+0.21}_{-0.23}$
CMBall	$1.21^{+0.24}_{-0.24}$

Les données favorisent donc plutôt les modèles avec effet de lentille, avec une amplitude relativement conforme au modèle.

5.2.2 ACT 2011 - Détection à 2.8σ

Les données de l'*Atacama Cosmology Telescope* (*ACT*) ont été combinées elles aussi à *WMAP*₇ (Das et al. 2011a) pour contraindre un paramètre multiplicatif A_{ℓ} tel que $A_{\ell} = 1$ corresponde au spectre de puissance de l'effet de lentille tel qu'il est prédit par un modèle fiduciel Λ CDM, et $A_{\ell} = 0$ à l'absence d'effet de lentille. Les valeurs mesurées pour ce paramètre sont rapportées dans le tableau 5.1.

TABLE 5.1 – Effet de lentille dans le spectre de puissance du CMB

WMAP ₅ + ACBAR	$1.6^{+0.55}_{-0.26}$
WMAP ₇ + ACT	1.3 ± 0.5
WMAP ₇ + SPT	0.94 ± 0.15

5.2.3 SPT 2011 - Détection à 5σ

La même approche avec les données du *South Pole Telescope* conduisent à une préférence pour les modèles Λ CDM avec effet de lentille à 4.9σ (Keisler et al. 2011). La valeur obtenue du paramètre A_ℓ (cf. table 5.1) est compatible avec le niveau attendu d'effet de lentille.

5.3 SPECTRE DE PUISSANCE DE L'EFFET DE LENTILLE

Jusqu'à présent, nous n'avons évoqué que des signatures de l'effet de lentille gravitationnelle, détectées dans les cartes du CMB grâce à des corrélations croisées avec des traceurs des grandes structures ou à l'étude du spectre de puissance de la température. Depuis 2011, l'effet de lentille a pu être détecté en mesurant le moment à quatre points de la température, apportant une contrainte sur l'amplitude du spectre de puissance de la matière projeté.

5.3.1 ACT 2011 - Détection à 4σ

La première détection du spectre de puissance de la convergence du CMB ($\kappa = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}$) a été faite par Das et al. (2011b) avec le *Atacama Cosmology Telescope* et est présentée sur la figure 5.2. La contamination due aux points sources et aux amas SZ a été estimée au moins deux ordres de grandeur en-dessous du signal prédit.

Cette première détection a été immédiatement suivie d'une première contrainte intéressante sur l'énergie noire, par Sherwin et al. (2011), favorisant les modèles avec énergie noire à 3.2σ . La dégénérescence géométrique a ainsi été levée en combinant aux spectres de puissance de la température et de la polarisation de WMAP₇ la mesure de l'effet de lentille faite par ACT. La levée de cette dégénérescence est illustrée par la figure 5.3. Les modèles sans constante cosmologique sont alors écartés avec 95% de confiance. Le nouvel intervalle de confiance ainsi obtenu pour Ω_Λ est, à 3σ :

$$\Omega_\Lambda = 0.61^{+0.25}_{-0.53} \quad (5.2)$$

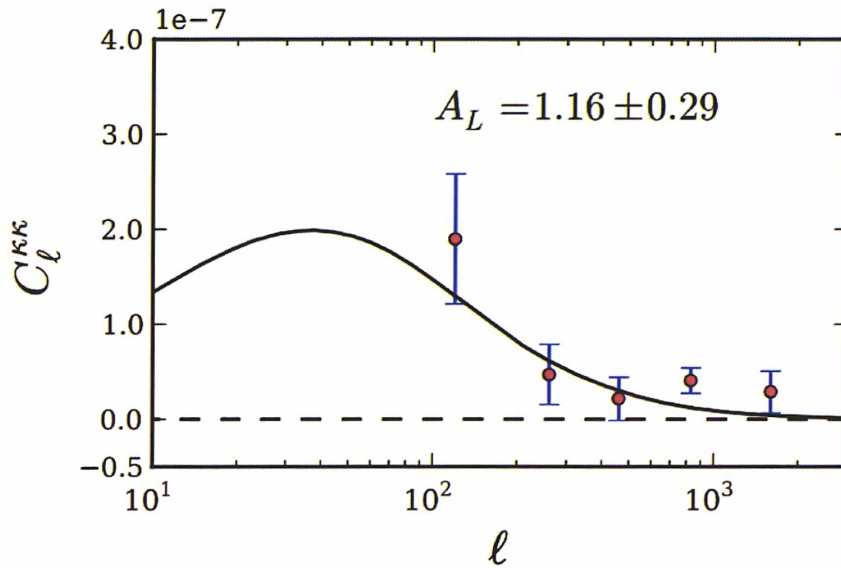


FIGURE 5.2 – Spectre de puissance de la convergence (points rouges) mesurée à partir de portions équatoriales du ciel vues par ACT. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion obtenue entre les estimées de 480 cartes simulées avec les mêmes caractéristiques que les données.

5.3.2 SPT 2012 - Détection à 6.3σ

Le *South Pole Telescope* a permis à van Engelen et al. (2012) de contraindre le paramètre $A_\ell = 0.86 \pm 0.16$ et de rejeter les modèles sans effet de lentille à 6.3σ en utilisant une couverture du ciel deux fois plus importante qu'ACT et en réduisant de 25% le bruit. Le spectre de puissance de lentille obtenu est présenté figure 5.4 et comparé aux points de mesure d'ACT.

Ces mesures ont également été accompagnées de contraintes intéressantes sur différents paramètres cosmologiques. Les données obtenues sur l'effet de lentille ont en effet été combinées aux données WMAP7. Elles permettent de lever la dégénérescence géométrique conduisant à :

$$\Omega_k = -0.001 \pm 0.017 \quad (5.3)$$

Elles correspondent encore à une densité d'énergie noire non nulle :

$$\Omega_\Lambda = 0.734 \pm 0.056 \quad (5.4)$$

Ces améliorations sont résumées dans les fonctions de vraisemblance de la figure 5.5. Cette figure témoigne par ailleurs de la possibilité d'améliorer les contraintes sur les paramètres à partir des spectres de température lentillée seuls.

La combinaison des données SPT, WMAP7 et de la mesure du paramètre de Hubble (Riess et al. 2011) permet encore de poser une contrainte importante sur la somme des masses des neutrinos $\sum m_\nu < 0.38 eV$ ainsi que sur l'équation d'état de l'énergie noire $w = -1.087 \pm 0.096$.

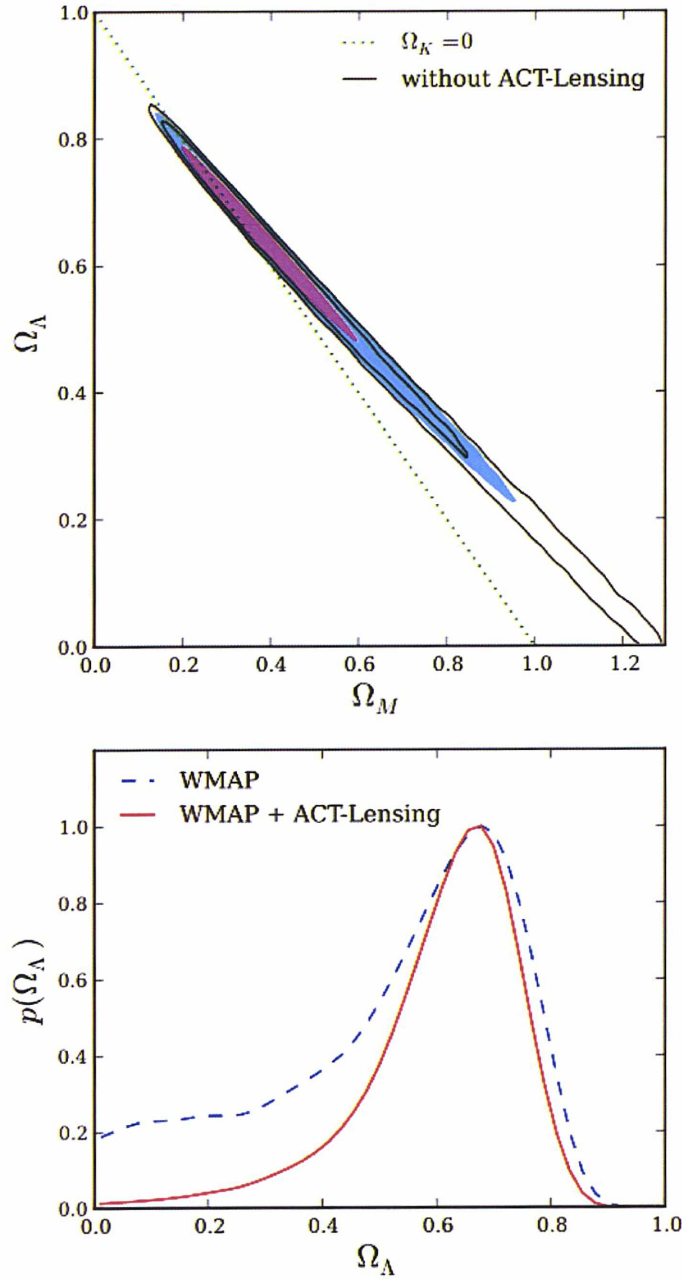


FIGURE 5.3 – En haut : probabilité marginale postérieure 2D pour Ω_m et Ω_Λ (intervalles de confiance à 68% et 95%). Les contours colorés sont les contraintes obtenues en combinant l'effet de lentille estimé dans ACT avec WMAP. Les lignes noires sont obtenues pour WMAP seul.

En bas : probabilité marginale postérieure 1D pour Ω_Λ calculée pour WMAP seul (tirets bleus) et en tenant compte de l'effet de lentille mesuré par ACT (en rouge).

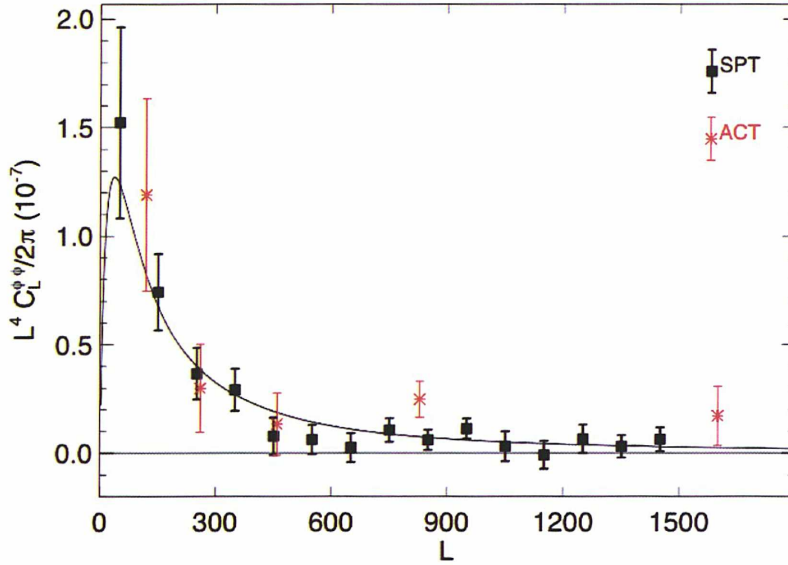


FIGURE 5.4 – Comparaison du spectre de puissance du potentiel de lentille reconstruit par ACT (points rouges) et par SPT (points noirs). La courbe en trait continu noir est le spectre de puissance obtenu pour un modèle Λ CDM.

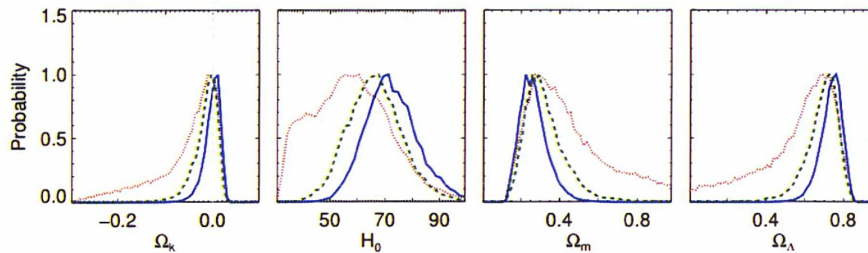


FIGURE 5.5 – Fonctions de vraisemblance 1D pour (de gauche à droite) la courbure, le paramètre de Hubble, la densité de matière, la densité d'énergie noire calculées avec WMAP7 seul (rouge), en y ajoutant le potentiel de lentille obtenu avec SPT (bleu) ou en n'ajoutant que l'information sur l'effet de lentille contenue dans le spectre de la température des cartes SPT (vert).

5.4 RETOUR AUX CORRÉLATIONS CROISÉES

Si les corrélations croisées du CMB avec des relevés de galaxie ont permis dans un premier temps de détecter l'effet de lentille dans le CMB, à présent que la détection interne est possible, ces corrélations demeurent une source d'information astrophysique importante.

5.4.1 SPT 2012

Ainsi les données SPT permettent de détecter des corrélations entre les cartes de convergence et des cartes de densité de galaxies à plus de 4σ . Les traceurs de grandes structures utilisés proviennent de relevés infra-rouge *Wide-field Infrared Survey Explorer* (WISE) ou optiques *Blanco Cosmology Survey* (BCS) et *Spitzer/IRAC*. Les spectres croisés sont extraits de Bleem et al. (2012) et présentés sur la figure 5.6.

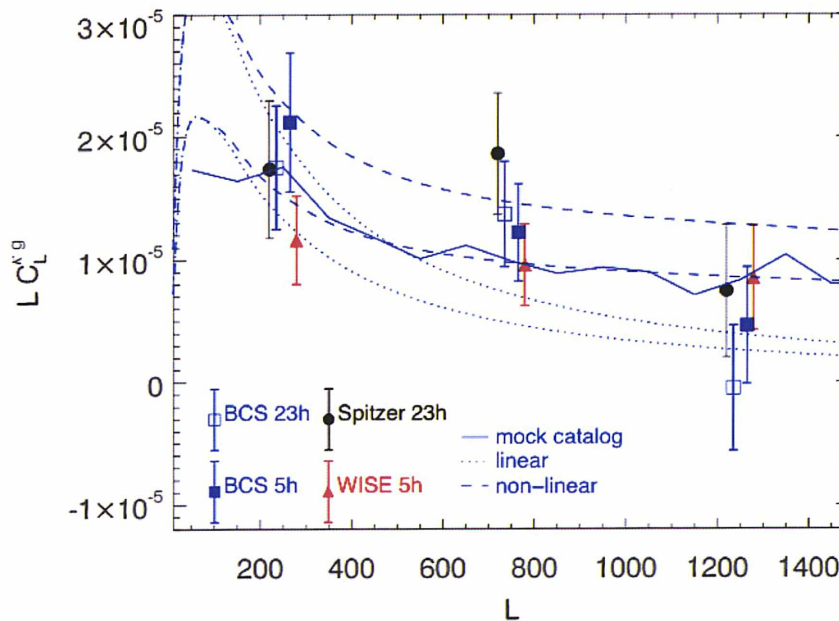


FIGURE 5.6 – Spectres croisés de cartes de densité numérique de galaxies avec des cartes d'effet de lentille (convergence) mesuré par SPT. Les courbes bleues sont les signaux attendus pour différentes modélisations et différents biais galactiques, pour les catalogues optiques.

5.4.2 ACT 2012

La densité numérique de quasars et l'amplitude de l'effet de lentille dans le CMB dans une direction donnée sont tous deux directement reliés à la densité de matière noire projetée dans cette direction. Les quasars sont de surcroît nombreux aux redshifts où l'effet de lentille est le plus important. C'est la raison pour laquelle les données sur l'effet de lentille obtenues avec ACT ont été corrélées aux quasars relevés par SDSS (catalogue photométrique DR8 SDSS-XDQSO). La figure 5.7 montre le spectre croisé mesuré à 3.8σ par Sherwin et al. (2012) ce qui confirme l'aptitude des quasars à tracer la matière noire.

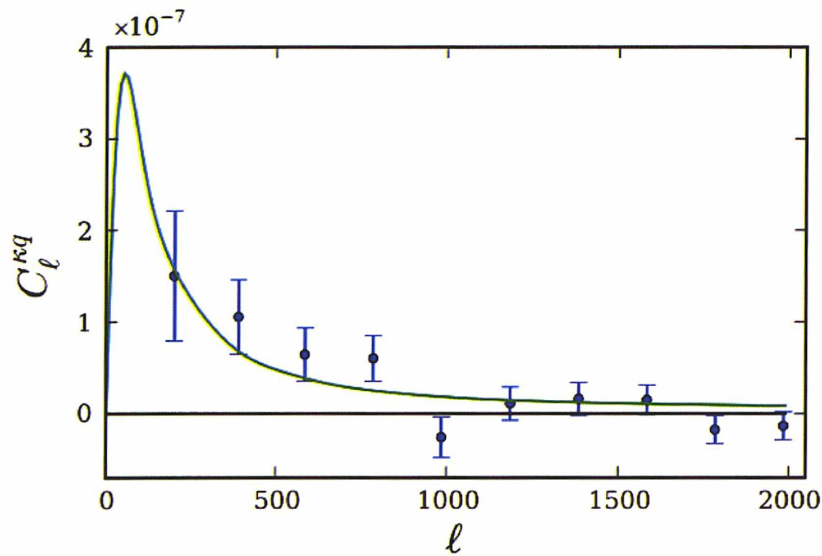


FIGURE 5.7 – Spectre de puissance croisé de l'effet de lentille du CMB avec la densité de quasars. En bleu, les points de mesure, en vert le signal théorique.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Des mesures plus précises de l'effet de lentille sont attendues avec *Planck* (c'est l'objet de cette thèse) et les données de polarisation d'*ACT-Pol* (Niemack 2010), de *SPTPol* (Bleem 2012) ou encore de *PolarBear* (Keating et Moyerman 2011). De telles mesures sondent la formation des structures et la géométrie de l'Univers bien après la recombinaison. Elles permettent ainsi de lever la dégénérescence géométrique du CMB seul. La figure 5.8 présente les incertitudes sur certains paramètres dégénérés en fonction des caractéristiques des instruments considérés (on pourra voir aussi Namikawa et al. (2010)). La taille du lobe de *Planck*, pour comparaison, à 143GHz est de $7'$ et celle d'*ACTPol* sera de $1.4'$. Toutefois, les expériences à venir nécessiteront un traitement plus précis des systématiques qui donneraient jusqu'alors des erreurs inférieures aux erreurs statistiques.

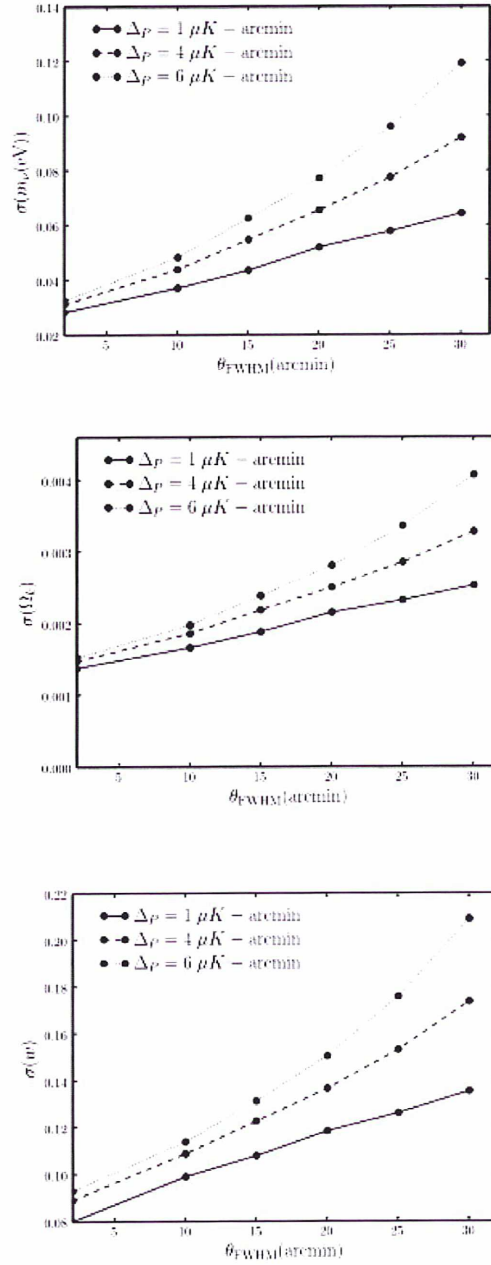


FIGURE 5.8 – Incertitudes sur la masse des neutrinos (panneau du haut), sur la courbure (panneau du milieu) et sur l'équation d'état de l'énergie noire (panneau du bas) en fonction de la sensibilité et de la résolution des expériences. Figures extraites de Smith et al. (2009).

ESTIMATEUR QUADRATIQUE DE L'EFFET DE LENTILLE DANS DES CARTES PLEIN-CIEL

SOMMAIRE

7.1	CONNAISSANCE DES SPECTRES SOUS-JACENTS AUX DONNÉES . . .	93
7.2	INCERTITUDES SUR LE MODÈLE COSMOLOGIQUE	94
7.2.1	Modèle Λ CDM	95
7.2.2	Modèle Λ CDM plat	95

Ce chapitre présente l'estimateur quadratique d'abord proposé par Hu et Okamoto ((Hu et Okamoto 2002), (Okamoto et Hu 2003)). Nous le dérivons suivant la démarche proposée dans Benoît-Lévy et al. (2012) que nous avons contribué à mettre en place.

6.1 IDÉE POUR CONSTRUIRE UN ESTIMATEUR OPTIMAL NON BIAISÉ

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, l'effet de lentille crée des termes non diagonaux dans la variance de la température observée (équation 4.29). Nous voulons donc écrire une resommation pondérée de ces termes pour extraire le potentiel de lentille ϕ . La pondération sera choisie de sorte à maximiser le signal sur bruit c'est-à-dire à minimiser la variance. Posons ainsi l'estimateur $\hat{\phi}_{LM}$:

$$\hat{\phi}_{LM} = A_L \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} (-1)^M \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} f_{\ell_1}^{(1)} \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} f_{\ell_2}^{(2)} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \quad (6.1)$$

où $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont des filtres et A_L est une normalisation à déterminer.

L'estimateur que nous proposons ici n'est valable que dans le cas de cartes de température "homogènes", autrement dit, lorsque tous les pixels de la carte ont été vus le même nombre de fois par l'instrument, dont le lobe est lui-même symétrique. Pour traiter des cartes inhomogènes, il

faudrait a priori des filtres dépendant de ℓ et m , ce qui complique singulièrement l'expression de l'estimateur. Nous verrons au chapitre 9 la manière de prendre en compte la violation de l'hypothèse d'homogénéité.

6.1.1 Choix de la normalisation

Nous avons écrit un estimateur du potentiel de lentille avec des pondérations très génériques et non normalisé. La normalisation est choisie de telle sorte que l'estimateur soit non biaisé, c'est-à-dire qu'il redonne en moyenne le champ ϕ cherché.

$$\langle \hat{\phi}_{LM} \rangle |_{\phi} \propto \phi_{LM} \quad (6.2)$$

Même si nous ne connaissons par encore l'expression des filtres, dans le cas homogène, la forme obtenue pour le coefficient de normalisation est donc :

$$A_L = (2L + 1) \left\{ \sum_{\ell_1 \ell_2} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \left[C_{\ell_1}^{\ominus} F_{\ell_2 L \ell_1} + C_{\ell_2}^{\ominus} F_{\ell_1 L \ell_2} \right] \right\}^{-1} \quad (6.3)$$

où l'expression de $F_{\ell_1 L \ell_2}$ a été définie à l'équation 4.19.

6.1.2 Choix des filtres

Utilisons à présent la condition de variance minimale pour définir les filtres. Nous calculons pour cela la variance de notre estimateur en faisant l'hypothèse que la température lentillée est gaussienne :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_{LM} \hat{\phi}_{L'M'}^* \rangle &= A_L A_{L'} \sum_{1,2,3,4} (-1)^{M+M'} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L' \\ m_3 & m_4 & -M' \end{pmatrix} \\ &\quad f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3}^* \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4}^* \rangle_d \\ \langle \hat{\phi}_{LM} \hat{\phi}_{L'M'}^* \rangle &= A_L A_{L'} \sum_{1,2,3,4} (-1)^{M+M'} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L' \\ m_3 & m_4 & -M' \end{pmatrix} \\ &\quad f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \left[\tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus} \delta_{\ell_2 \ell_4} \delta_{m_2 m_4} + \tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \delta_{\ell_1 \ell_4} \delta_{m_1 m_4} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus} \delta_{\ell_2 \ell_3} \delta_{m_2 m_3} \right] \\ &= A_L A_{L'} \sum_{1,2} (-1)^{M+M'} \tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \\ &\quad \times \left[\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L' \\ m_1 & m_2 & -M' \end{pmatrix} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} + \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_1 & L' \\ m_2 & m_1 & -M' \end{pmatrix} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \right] \\ &= \delta_{LL'} \delta_{MM'} \frac{A_L^2}{2L+1} \sum_{\ell_1 \ell_2} \tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \left[f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} + (-1)^{L+\ell_1+\ell_2} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

Le poids $f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)}$ qui minimise cette variance vérifie (Okamoto et Hu (2003)) :

$$f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} = \frac{C_{\ell_1}^{\ominus} F_{\ell_2 L \ell_1} + C_{\ell_2}^{\ominus} F_{\ell_1 L \ell_2}}{2 \tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus}} \quad (6.4)$$

En pratique, nous pouvons utiliser n'importe quel filtre dans l'estimateur, au prix d'un écart à l'optimalité. En particulier, nous pourrions utiliser ces mêmes filtres pour traiter le cas inhomogène. Cela entrainera une augmentation de la taille des barres d'erreur mais pas de biais supplémentaire (Hanson et al. (2009)).

6.2 DÉRIVATION COMPLÈTE DE L'ESTIMATEUR

Le lecteur pressé pourra aller directement aux résultats (équations 6.7 et 6.8). L'expression que nous avons proposée dans la partie précédente pour l'estimateur n'est pas utilisable telle quelle puisqu'elle nécessite de filtrer et de convoluer dans l'espace des harmoniques sphériques. En pratique, nous allons exploiter le fait que cette convolution est un simple produit dans l'espace réel. De plus, la forme du développement limité présenté au chapitre 4 (équation 4.14) indique que l'effet de lentille induit une corrélation entre la température et son gradient. Nous écrivons donc l'estimateur à partir de la température lentillée observée et du gradient \mathbf{D} de la température non lentillée. C'est une quantité vectorielle, donc de spin ± 1 :

$$\mathbf{d}(\vec{n}) \propto \Theta^{(1)}(\vec{n}) \mathbf{D} \left[\Theta^{(2)}(\vec{n}) \right] \quad (6.5)$$

où on écrit les vecteurs en gras et on a noté $\Theta^{(1)}(\vec{\theta})$ et $\Theta^{(2)}(\vec{\theta})$ les champs de température filtrés dans l'espace des harmoniques :

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)}(\vec{n}) &= \sum_{\ell m} f_{\ell}^{(1)} \tilde{\Theta}_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \\ \Theta^{(2)}(\vec{n}) &= \sum_{\ell' m'} f_{\ell'}^{(2)} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} Y_{\ell' m'}(\vec{n}) \end{aligned}$$

6.2.1 Estimateurs non normalisés

D'après la formule B.31, la dérivée covariante de $\Theta^{(2)}(\vec{\theta})$ s'écrit :

$$\mathbf{D} \left[\Theta^{(2)}(\vec{n}) \right] = \sum_{\ell' m'} f_{\ell'}^{(2)} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \sqrt{\frac{\ell'(\ell'+1)}{2}} \left[{}_{-1}Y_{\ell' m'}(\vec{n}) \mathbf{m} - {}_1Y_{\ell' m'}(\vec{n}) \bar{\mathbf{m}} \right]$$

D'où :

$$\mathbf{d} \propto \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\frac{\ell'(\ell'+1)}{2}} Y_{\ell m} \left[{}_{-1}Y_{\ell' m'} \mathbf{m} - {}_1Y_{\ell' m'} \bar{\mathbf{m}} \right]$$

Les vecteurs \mathbf{m} et $\bar{\mathbf{m}}$ se décomposent dans la base orthonormée $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suivant les équations B.32 et B.33, nous pouvons réécrire :

$$\mathbf{d} \propto \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\frac{\ell'(\ell'+1)}{2}} Y_{\ell m} \left[({}_{-1}Y_{\ell' m'} - {}_1Y_{\ell' m'}) \vec{e}_1 + i ({}_{-1}Y_{\ell' m'} + {}_1Y_{\ell' m'}) \vec{e}_2 \right]$$

Et nous en déduisons :

$$d_1 \pm id_2 \propto \mp \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} Y_{\ell m \pm 1} Y_{\ell' m'}$$

Or ces composantes $d_1 \pm id_2$ sont des objets de spin 1. Ils peuvent donc eux-mêmes être décomposés dans la base des harmoniques sphériques de spin 1 :

$$(d_1 \pm id_2)(\vec{n}) = \sum_{LM} (c \pm ig)_{LM \pm 1} Y_{LM} \quad (6.6)$$

Pour identifier c_{LM} que nous appellerons "partie rotationnelle" (ou "curl" ou "mode B") et g_{LM} que nous appellerons "partie gradient" (ou "gradient" ou "mode E"), nous écrivons la transformation inverse :

$$(c \pm ig)_{LM} = \int d\vec{n}(d_1 \pm id_2)(\vec{n})_{\pm 1} Y_{LM}^*$$

Nous obtenons donc, en remplaçant $d_1 \pm id_2$ par son expression et en appliquant la formule C.5 :

$$(c \pm ig)_{LM} = \mp \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)} (-1)^{M \pm 1} \\ \times \sqrt{\frac{(2L + 1)(2\ell + 1)(2\ell' + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ \pm 1 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$$

Nous aboutissons ainsi aux expressions suivantes pour c_{LM} et g_{LM} :

$$c_{LM} = (-1)^M \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)} \sqrt{\frac{(2L + 1)(2\ell + 1)(2\ell' + 1)}{4\pi}} \\ \times \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1 - (-1)^{L + \ell + \ell'}}{2} \quad (6.7)$$

$$g_{LM} = -i(-1)^M \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)} \sqrt{\frac{(2L + 1)(2\ell + 1)(2\ell' + 1)}{4\pi}} \\ \times \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1 + (-1)^{L + \ell + \ell'}}{2} \quad (6.8)$$

A l'avenir nous noterons :

$$p_{L\ell\ell'}^{\pm} = \frac{1 \pm (-1)^{L + \ell + \ell'}}{2} \quad (6.9)$$

Okamoto et Hu (2003) ont considéré la divergence de \mathbf{d} (équation 6.5) afin d'éliminer la composante rotationnelle que nous récupérons en ne faisant pas cette opération. Nos estimateurs diffèrent donc du leur d'un facteur $\sqrt{\ell(\ell + 1)}$ venant de cette dérivation supplémentaire. Comme, en pratique, le champ de déflexion est effectivement un pur gradient, nous nous servirons de la partie rotationnelle comme d'un null-test et indicateur d'éventuels problèmes dans le traitement des systématiques.

6.2.2 Estimateurs non biaisés

Calculons l'espérance, à ϕ fixé, de nos deux estimateurs (démonstrations en annexe D) :

$$\langle \hat{c}_{LM} \rangle_{\phi} \propto 0 \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \rangle_{|\phi} &\propto i \frac{\sqrt{L(L+1)}}{4\pi} \phi_{LM} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)}(2\ell+1) f_{\ell'}^{(2)}(2\ell'+1) p_{\ell\ell'L}^+ \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\sqrt{\ell'(\ell'+1)} C_{\ell'}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell' & \ell \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Pour calculer la normalisation de l'estimateur, nous imposons qu'il soit non biaisé c'est-à-dire qu'il redonne en moyenne le champ ϕ cherché :

$$\langle \hat{\phi}_{LM} \rangle = \phi_{LM} = \langle A_L \hat{g}_{LM} \rangle \tag{6.12}$$

Ce qui nous donne l'expression du coefficient de normalisation :

$$\begin{aligned}
A_L^{-1} &= i \frac{\sqrt{L(L+1)}}{4\pi} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)}(2\ell+1) f_{\ell'}^{(2)}(2\ell'+1) p_{\ell\ell'L}^+ \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \left[\sqrt{\ell'(\ell'+1)} C_{\ell'}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell' & \ell \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Cette expression peut encore s'écrire, d'après l'équation 4.20 :

$$\begin{aligned}
A_L^{-1} &= -i \frac{\sqrt{2L+1}}{4\pi} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} \sqrt{2\ell+1} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{2\ell'+1} p_{\ell\ell'L}^+ \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[F_{\ell L \ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + F_{\ell' L \ell} C_{\ell}^{\ominus} \right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

6.2.3 Estimateurs à variance minimale

Nous souhaitons que la variance "gaussienne" de nos estimateurs soit minimale. En d'autres termes, pour choisir les filtres $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$, nous minimisons la variance de g , calculée sous l'hypothèse que la température lentillée est gaussienne. Nous trouvons :

$$f_{\ell}^{(1)} = \frac{C_{\ell}}{C_{\ell}^{tot}}, \quad f_{\ell}^{(2)} = \frac{1}{C_{\ell}^{tot}} \tag{6.15}$$

où C_{ℓ}^{tot} désigne le spectre de puissance total de la température observée. Il se décompose en un spectre fiduciel lentillé \tilde{C}_{ℓ} , affecté d'une fonction fenêtre W_{ℓ}^b à cause du lobe, et un spectre de bruit instrumental n_{ℓ} dont nous supposons dans un premier temps qu'il est blanc et homogène (Knox (1995), Kamionkowski et al. (1997)).

$$C_{\ell}^{tot} = \tilde{C}_{\ell}^{\ominus} W_{\ell}^{b^2} + n_{\ell} \tag{6.16}$$

$$W_{\ell}^b = \exp \left(-\ell(\ell+1) \frac{\theta_{FWHM}^2}{8 \log 2} \right) \tag{6.17}$$

$$n_{\ell} = \frac{4\pi\sigma_N^2}{N_{pix}} \tag{6.18}$$

Il est donc nécessaire de connaître précisément les caractéristiques de l'instrument pour construire les filtres tels que l'estimateur soit optimal : le niveau de bruit σ_N et la résolution angulaire (ou taille du *beam*) θ_{FWHM} . L'amplitude du biais gaussien qui affecte la variance de l'estimateur est elle-même très sensible à ces caractéristiques (voir figure 6.1). Dans le cas de Planck, ces caractéristiques sont rappelées en fonction des fréquences considérées dans le tableau 3.2. Enfin, N_{pix} désigne le nombre de pixel de la carte, il est relié à sa résolution n_{side} par $N_{pix} = 12 \times n_{side}^2$.

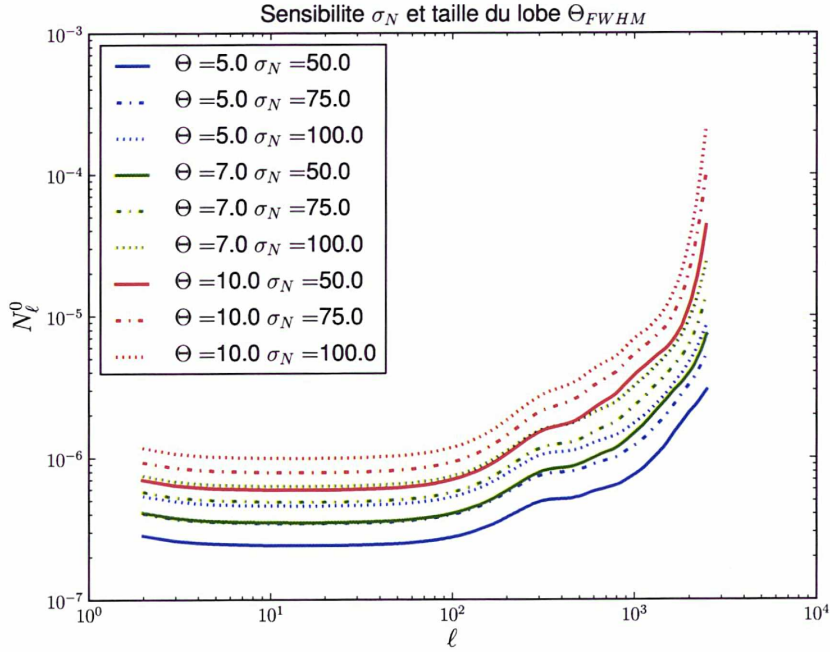


FIGURE 6.1 – Variance gaussienne de l'estimateur en fonction des caractéristiques instrumentales : taille du lobe (couleurs bleu, vert et rouge) et sensibilité (traits pleins, mixtes et pointillés).

6.3 BIAIS DES SPECTRES DE PUISSANCE

Si l'estimateur du champ ϕ n'est pas biaisé, celui de son spectre de puissance C_L^ϕ l'est. En effet, nous allons voir que la variance des estimateurs que nous avons construits s'écrit :

$$\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[C_L^\phi + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} + N_L^{(2,g)} \right] \quad (6.19)$$

$$\langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[N_L^{(0,c)} + N_L^{(1,c)} \right] \quad (6.20)$$

La variance des estimateurs est donc biaisée mais les filtres sont choisis de telle sorte que ce biais soit minimal. La partie "gradient" redonne bien le spectre de puissance du potentiel de lentille C_L^ϕ augmenté de biais $N_L^{(i,g)}$ où i indique qu'il dépend de $(C_\ell^\phi)^i$. La variance de la partie "rotationnelle" ne fait apparaître que des biais puisqu'elle est d'espérance nulle.

Par chance, ces biais sont calculables analytiquement dans le cas idéal homogène. Dans le cas inhomogène, nous pourrions encore les calculer par des intégrales Monte-Carlo. Il nous faut donc corriger l'estimée du spectre de puissance de nos estimateurs de biais qui, de surcroît, dominant le signal recherché.

6.3.1 Biais gaussiens

La variance des estimateurs est dominée par des termes N_L^0 , mais ces biais sont faciles à calculer et ne dépendent pas de ϕ . Ils viennent seulement de l'auto-corrélation du CMB qui contient du moment à quatre points (Hu 2001a). Ils correspondent en fait à la réponse des estimateurs à une carte de température purement gaussienne. Leur niveau dépend du lobe et du bruit de l'instrument. Nous montrons à l'annexe D :

$$\begin{aligned}
 N_L^0 &= \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
 &\times \begin{cases} p_{\ell_1 \ell_2 \ell}^+ (\mathbf{g}) \\ p_{\ell_1 \ell_2 \ell}^- (\mathbf{c}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Une conséquence du fait que ces biais ne dépendent pas de ϕ est qu'ils peuvent être calculés par des intégrales Monte-Carlo : il suffira de simuler des cartes gaussiennes ayant le même spectre que la carte de données et de prendre la moyenne des estimées de ces cartes sans effet de lentille.

6.3.2 Biais d'ordre supérieur

Les biais d'ordre supérieur dépendent de ϕ mais sont sous-dominants aux échelles qui nous intéressent. Ils viennent de la manière dont on a construit les estimateurs : ils n'ont pris en compte que les termes du premier ordre en ϕ et ils ne savent pas extraire l'information contenue dans les ordres suivants. D'où une contamination de ces termes qui ne sont pas resommables.

L'expression des biais d'ordre un en C_ℓ^ϕ est démontrée à l'annexe E.

$$N_L^1 = 2 \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\substack{\ell_i \\ i \in \{1;4\}}} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) (-1)^{\ell_2 + \ell_4 + L} \sum_{\lambda} C_\lambda^\phi \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & \lambda \end{Bmatrix} f_{\ell_1 \lambda \ell_3} f_{\ell_2 \lambda \ell_4} \tag{6.22}$$

où $g_{\ell_1 \ell_2}(L)$ a été défini à l'équation E.3. Notons que le biais $N_L^{(1,c)}$ de l'estimée de la partie rotationnelle de la déflexion dépend lui-même du potentiel de lentille ϕ . L'effet de lentille apparaît donc comme un contaminant pour les modes B de la déflexion. Toutefois, comme nous l'avons déjà mentionné, nous nous contenterons, suivant Cooray et al. (2005) et van Engelen et al. (2012) d'utiliser ces modes B comme des indicateurs d'effets systématiques éventuels.

Nous nous contentons par ailleurs d'une estimée partielle de ce biais calculée dans l'approximation "flat sky" (Kesden et al. 2003, Lesgourgues et al. 2005). Leur calcul plein-ciel demande en effet d'évaluer des symboles de Wigner-6j, ce qui serait trop coûteux.

Hanson et al. (2011) donnent une expression approchée pour le biais d'ordre deux en C_ℓ^ϕ :

$$\begin{aligned} N_L^2 \approx & 2C_L^\phi \frac{A_L^2}{(2L+1)^2} \sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) F_{\ell_2 L \ell_1} \\ & \times \left[\sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\ominus C_{\ell_b}^\phi F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2 \frac{\ell_1(\ell_1+1) + \ell_a(\ell_a+1) - \ell_b(\ell_b+1)}{\ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1)} \right. \\ & \left. - 2R \left(\ell_1(\ell_1+1) - \frac{1}{3} \right) \right] \left(\sum_{\ell_3 \ell_4} g_{\ell_3 \ell_4}(L) F_{\ell_3 L \ell_4} \right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ils montrent qu'une approximation simple de ce biais est donnée par :

$$N_L^2 \approx 4C_L^\phi \frac{A_L^2}{(2L+1)^2} \left(\sum_{\ell_3 \ell_4} g_{\ell_3 \ell_4}(L) F_{\ell_3 L \ell_4} \right) \sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) F_{\ell_2 L \ell_1} \Delta C_{\ell_1}^\ominus \quad (6.24)$$

où ΔC_ℓ^\ominus désigne la différence, au premier ordre en C_ℓ^ϕ entre les spectres de température lentillée \tilde{C}_ℓ^\ominus et non lentillée C_ℓ^\ominus . Cette différence vaut, d'après 4.21 :

$$\Delta C_\ell^\ominus = \tilde{C}_\ell^\ominus - C_\ell^\ominus \approx -\ell(\ell+1)RC_\ell^\ominus + \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus \frac{F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2}{2\ell+1} \quad (6.25)$$

Lewis et al. (2011) ont proposé, suivant cette idée, de remplacer les spectres de température non lentillés par leurs analogues lentillés dans les filtres de l'estimateur pour s'affranchir de l'inexactitude du développement perturbatif utilisé pour le construire, seul le filtre $f^{(1)}$ est ainsi affecté et s'écrit :

$$f_\ell^{(1)} = \frac{\tilde{C}_\ell}{C_\ell^{\text{tot}}} \quad (6.26)$$

Un tel procédé réduit en effet la variance des estimateurs à :

$$\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[C_L^\phi + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right] \quad (6.27)$$

$$\langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[N_L^{(0,c)} + N_L^{(1,c)} \right] \quad (6.28)$$

Suivant les études que nous présenterons par la suite, cette astuce sera ou non utilisée.

L'allure des biais et du signal recherché sont présentés à la figure 6.2. Nous voyons qu'autour de $\ell \approx 1500$, le biais N_L^1 domine à son tour le signal. Cela peut être compris, d'après Lewis et Challinor (2006), de la manière suivante : à cette échelle, les angles de déflexion deviennent comparables à la longueur d'onde du champ de température non lentillée. Le développement de Taylor de la température n'est donc plus du tout valable à cette échelle.

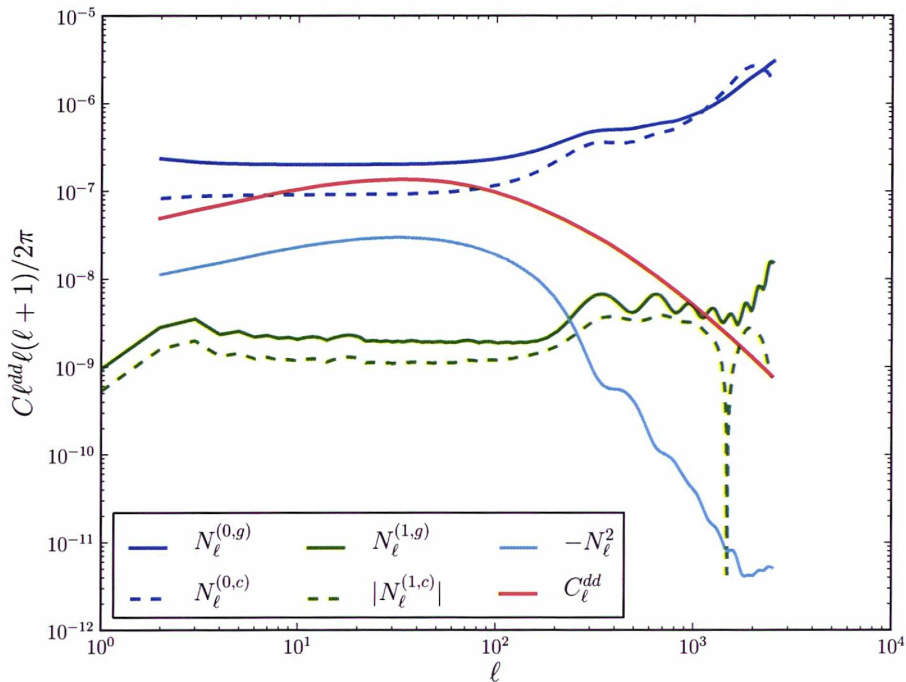


FIGURE 6.2 – Biais du spectre de puissance des estimateurs du potentiel de lentille calculés pour un lobe de taille $\theta_{\text{FWHM}} = 5'$ et un niveau de bruit $\sigma_{\text{N}} = 50\mu\text{K}$. La courbe rouge est le spectre du potentiel de lentille, autrement dit, le signal que nous cherchons à reconstruire. Les courbes bleues sont les biais gaussiens, dominant totalement le signal. Les courbes en traits pleins sont les biais de la partie gradient de l'estimateur, celles en pointillés sont les biais de la partie rotationnelle. Notons que le biais N_{ℓ}^2 (courbe cyan) est entièrement négatif et que le biais $N_{\ell}^{(1,c)}$ (courbe verte en pointillés) devient négatif autour de $\ell = 1500$.

6.4 ESTIMATION DES SPECTRES DE PUISSANCE DES POTENTIELS DE LENTILLE

6.4.1 Estimateurs des spectres de puissance

Comme nous l'avons introduit dans la partie précédente, nous allons le plus souvent nous intéresser aux estimateurs des spectres de puissance des potentiels de lentille. Ainsi, nous pouvons définir, suivant Kesden et al. (2003) :

$$\hat{C}_L^\phi = \langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'} \rangle \delta_{LL'} \delta_{MM'} - N_L^{(0,g)} - N_L^{(1,g)} - N_L^2 \quad (6.29)$$

$$\hat{C}_L^\psi = \langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{L'M'} \rangle \delta_{LL'} \delta_{MM'} - N_L^{(0,c)} - N_L^{(1,c)} \quad (6.30)$$

Ces estimateurs sont non biaisés. Leur espérance vérifie donc :

$$\langle \hat{C}_L^\phi \rangle = C_L^\phi \quad (6.31)$$

$$\langle \hat{C}_L^\psi \rangle = C_L^\psi = 0 \quad (6.32)$$

6.4.2 Covariance des spectres estimés

La covariance du spectre de potentiel estimé s'écrit quant à elle :

$$\text{Cov}(\hat{C}_L^\phi, \hat{C}_{L'}^\phi) = \langle C_L^\phi C_{L'}^\phi \rangle - \langle \hat{C}_L^\phi \rangle \langle \hat{C}_{L'}^\phi \rangle \quad (6.33)$$

Elle fait donc intervenir le moment à huit points de la température lentillée ! Hanson et al. (2011) montrent cependant qu'à l'ordre dominant, la variance est dominée par la composante gaussienne :

$$\text{Var}(\hat{C}_L^\phi) = \frac{2}{2L+1} \langle \hat{C}_L^\phi \rangle^2 \quad (6.34)$$

Nous retrouvons ici une expression analogue à celle de la variance cosmique et nous assimilerons les barres d'erreur théoriques des spectres reconstruits à la racine carrée de cette "variance cosmique". Elle est dominée par le biais gaussien N_L^0 .

L'examen de la matrice de corrélation, définie par :

$$\mathcal{R}(L, L') = \frac{\text{Cov}(\hat{C}_L^\phi, \hat{C}_{L'}^\phi)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{C}_L^\phi) \text{Var}(\hat{C}_{L'}^\phi)}} \quad (6.35)$$

montre que le spectre du potentiel estimé est corrélé à moins d'un pourcent. Cette corrélation est d'autant plus faible que la résolution de l'expérience est grande.

6.5 RECONSTRUCTION DU POTENTIEL DE LENTILLE

6.5.1 Description du pipeline

Nous voulons, à partir d'une carte du CMB observée, reconstruire le champ de potentiel de lentille et/ou son spectre. Nous suivons la procédure suivante :

1. Construire les filtres
 - (a) Nous nous donnons des spectres fiduciels C_ℓ^\ominus , \tilde{C}_ℓ^\ominus et C_ℓ^ϕ en choisissant une cosmologie à l'aide du code *CAMB* (Lewis et al. 2000).
 - (b) Nous mesurons précisément le spectre de la carte de données C_ℓ^{tot} à l'aide du code *Spice* (Hivon et al. 2002).
 - (c) Ou bien : nous donnons la taille du lobe θ_{FWHM} (ou son spectre b_ℓ) et le niveau de bruit σ_N (ou son spectre C_ℓ^N)
2. Calculer les estimateurs. Le code utilise les routines *HEALPix* (Górski et al. 2005) permettant le traitement de données sur la sphère et effectue les étapes suivantes :
 - (a) Passer la carte en harmoniques sphériques et diviser par le lobe.
 - (b) Appliquer les filtres
 - (c) Dériver $\Theta^{(1)}$ à l'aide de la routine *map2alm_spin* puis repasser les deux composantes en espace réel
 - (d) Passer $\Theta^{(2)}$ dans l'espace réel
 - (e) Faire les produits des deux cartes
 - (f) Calculer le coefficient de normalisation à partir de son expression analytique et l'appliquer aux deux champs estimés
 - (g) Calculer le spectre de puissance des deux champs estimés
3. Calculer les biais (N_L^0), N_L^1 (et N_L^2) à partir de leur expression analytique.
4. Eventuellement calculer les biais N_L^0 par des intégrales Monte-Carlo
 - (a) Simuler N_{map} réalisations gaussiennes sous le spectre C_ℓ^{tot} de la carte de données
 - (b) Appliquer l'estimateur à ces cartes sans effet de lentille
 - (c) Calculer la moyenne des spectres estimés $N_L^0 = \frac{1}{N_{map}} \sum_i C_L^{U_i}$

6.5.2 Validation du pipeline

Nous nous sommes donné une carte de CMB contenant de l'effet de lentille simulé sous le spectre tracé en rouge et que l'on cherche donc à reconstruire. Les simulations sont effectuées à l'aide du code développé par Basak et al. (2008). Nous avons pris un beam de $\theta_{FWHM} = 5'$ et un niveau de bruit $\sigma_N = 50\mu K$. En conséquence, nous n'utilisons qu'une résolution $n_{side} = 1024$ (le lobe coupe assez vite les modes au-delà).

Nous comparons sur la figure 6.3 le potentiel de lentille utilisé pour simuler une carte lentillée (en haut) et le potentiel reconstruit par l'estimateur et dont le bruit est traité par un filtre de Wiener de la forme $C_\ell^{theo} / C_\ell^{exp}$ (en bas). La carte reconstruite a donc une résolution moins bonne que la carte de départ et les structures qui y apparaissent ne sont pas exactement celles de la carte d'entrée. Toutefois, nous avons vérifié l'allure du spectre croisé entre la carte d'entrée et celle de sortie. Celui-ci redonne bien le spectre de puissance du potentiel de lentille.

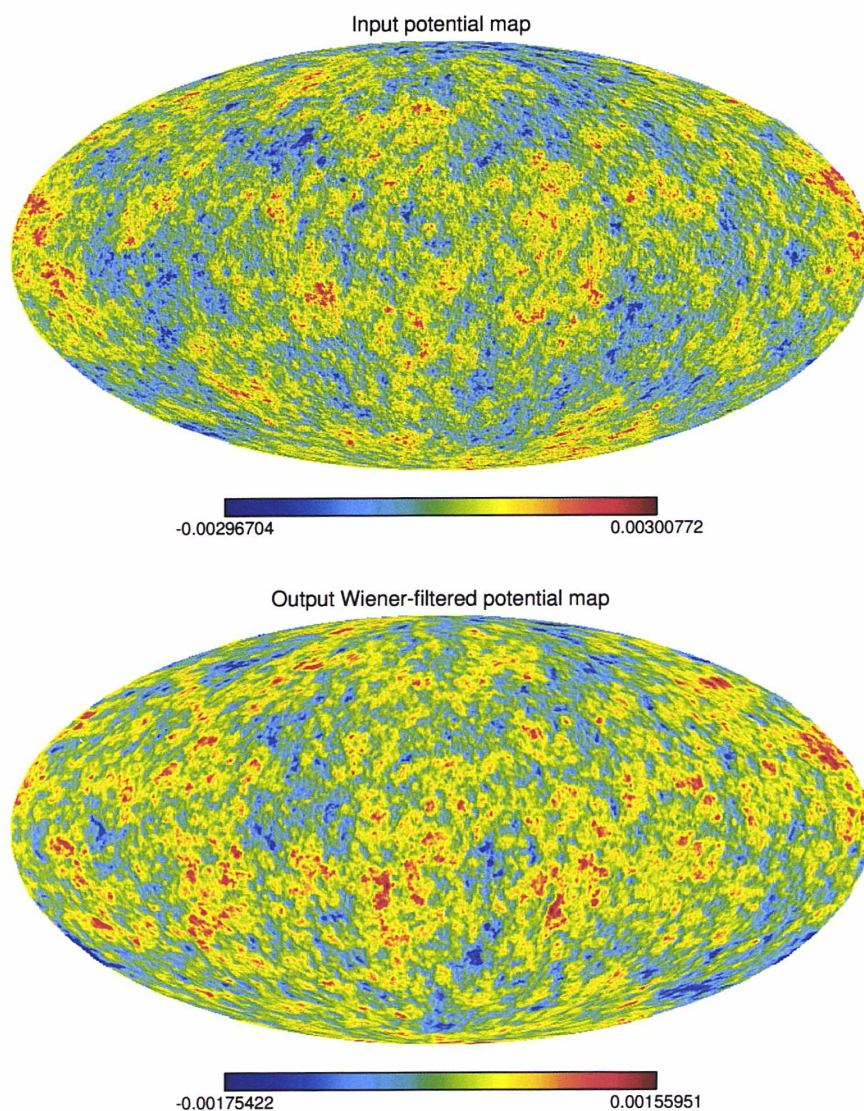


FIGURE 6.3 – Cartes du potentiel de lentille en $n_{\text{side}} = 1024$. En haut : carte de départ que nous cherchons à reconstruire à partir d'une carte de température lentillée par ce potentiel. En bas : carte reconstruite par l'estimateur et filtrée afin de réduire le bruit statistique.

Sur la figure 6.4, nous présentons un exemple de la meilleure reconstruction possible d'effet de lentille. Elle est réalisée dans un cas idéal sur une carte simulée du CMB avec effet de lentille pour laquelle les caractéristiques de l'instrument (lobe et niveau de bruit) ainsi que la cosmologie sous-jacente sont parfaitement connues. Les points bleus ont été obtenus en appliquant l'estimateur et le calcul analytique des biais sur la carte. Les barres d'erreur correspondent à la variance cosmique. Elles sont dominées par le biais N_{ℓ}^0 . Le panneau du haut nous montre un spectre du potentiel de lentille reconstruit qui est bien compatible avec le spectre initial. Celui du bas indique la compatibilité du spectre des modes B avec zéro, ce qui était attendu.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons obtenu un estimateur quadratique optimal de l'effet de lentille. Il permet de reconstruire le spectre du potentiel de lentille avec une très bonne précision. La partie "rotationnelle" fournit quant à elle un null-test naturel.

En réalité, les choses sont plus complexes ! Le calcul de l'estimateur et des biais dépendent de la connaissance parfaite du spectre primordial sous-jacent à la carte analysée, du lobe et du bruit instrumental. Si nous connaissions parfaitement le spectre, Planck n'aurait pas raison d'être. Quant aux caractéristiques de l'instrument, il est difficile de les connaître précisément. Nous verrons l'impact de cette méconnaissance au chapitre 7.

Par ailleurs, de nombreux objets émettent dans les mêmes fréquences que le CMB, à commencer par notre propre galaxie. Certains de ces avant-plans sont sous-dominants, nous n'en parlerons pas ici. D'autres dominent le CMB et il nous faut les gérer à l'aide de masques. Ce sera l'objet du chapitre 8.

Enfin, Planck n'a pas une stratégie de pointage homogène sur le ciel, certains endroits sont vus plus que d'autres. Ainsi, le bruit n'est pas homogène, ce qui crée des biais importants dans les données dont nous présenterons le traitement au chapitre 9. Les chapitres suivants vont ainsi détailler les solutions mises en place pour tenir compte de ces entorses aux hypothèses pour lesquelles nos estimateurs sont valables.

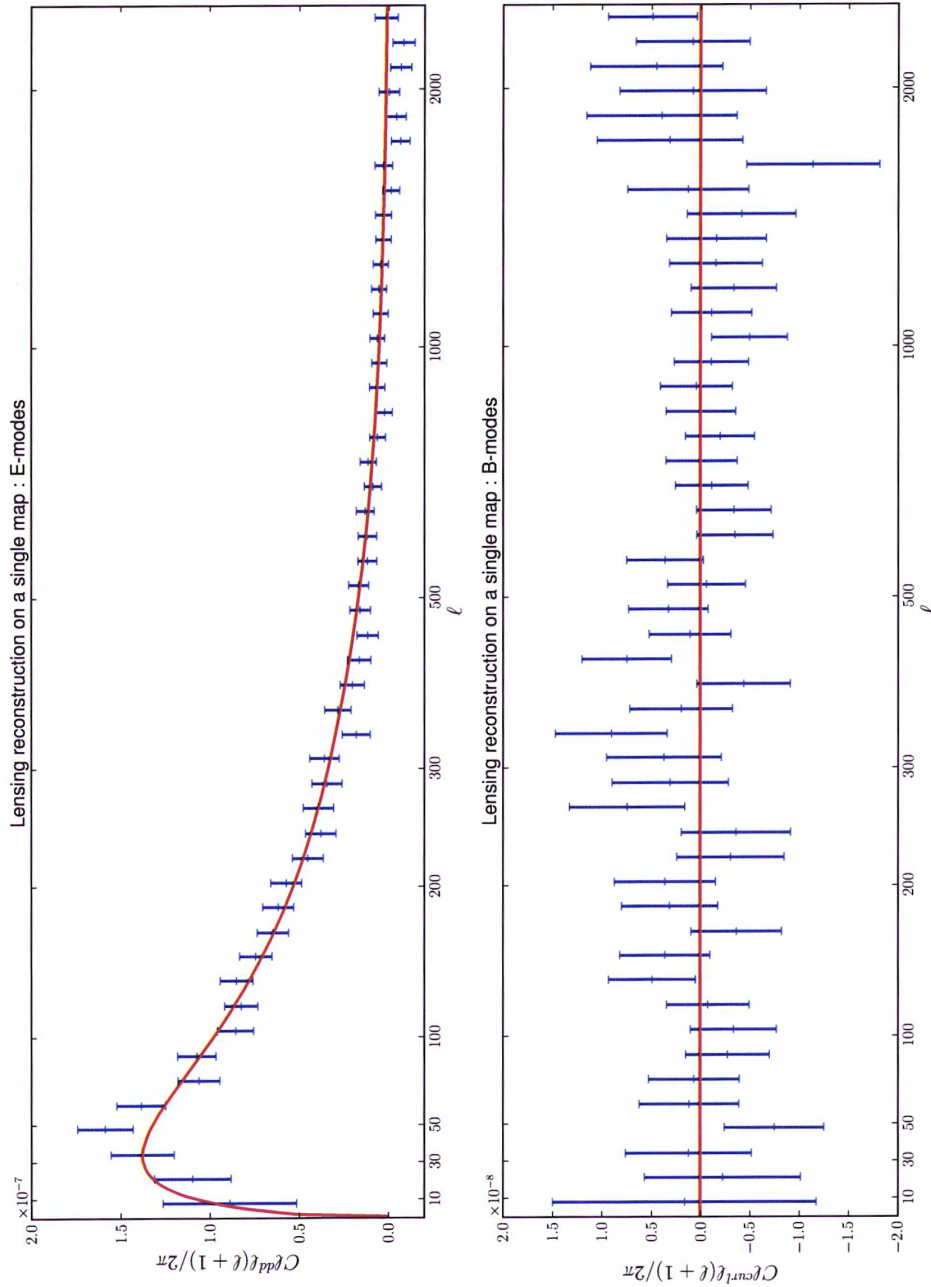


FIGURE 6.4 – Reconstruction purement analytique du spectre du potentiel de lentille sur une carte de CMB simulée avec un beam de $\theta_{\text{FWHM}} = 5'$ et un niveau de bruit $\sigma_N = 50\mu\text{K}$. Les barres d'erreur correspondent à la variance cosmique. Les courbes rouges sont les courbes attendues. En haut : partie "gradient", en bas : partie "rotationnelle"

FILTRES DE L'ESTIMATEUR ET CONNAISSANCE DU MODÈLE COSMOLOGIQUE

SOMMAIRE

8.1	MASQUE GALACTIQUE	99
8.1.1	Etude analytique de l'effet du masque	100
8.1.2	Coupure équatoriale apodisée	103
8.1.3	Masque galactique apodisé	111
8.1.4	Autres méthodes de traitement	113
8.2	MASQUE DE POINTS SOURCES	115
8.2.1	Choix de la méthode de remplissage	115
8.2.2	Effet du remplissage sur le spectre de lentille reconstruit	117
8.2.3	Résultats	118

LA connaissance des spectres C_ℓ^{tot} et \tilde{C}_ℓ est nécessaire pour construire les filtres d'estimateurs optimaux. Il est très difficile en réalité de connaître exactement les spectres sous-jacents aux données et les caractéristiques de l'instrument. De même, le calcul des biais d'ordres supérieurs nécessite de connaître le spectre de puissance de l'effet de lentille (que l'on cherche justement à reconstruire). Il faut donc faire des hypothèses sur ce spectre, c'est-à-dire sur le modèle cosmologique. Celui qui nous sert de référence est le modèle obtenu par *WMAP7* dont les différents paramètres ont été présentés dans la table 3.1 et les spectres correspondants sur la figure 3.1.

7.1 CONNAISSANCE DES SPECTRES SOUS-JACENTS AUX DONNÉES

Le premier point que nous avons évoqué est le moins grave. En effet, la connaissance des spectres et des caractéristiques de l'instrument est nécessaire pour avoir un estimateur optimal. L'imprécision sur ces données entraîne donc un écart à l'optimalité et une augmentation de la taille

des barres d'erreurs, mais pas de biais supplémentaire. En revanche, on n'est plus dès lors capable de calculer le biais N_ℓ^0 analytiquement et il faut recourir à des intégrales Monte-Carlo sur des simulations.

Nous avons validé cette approche dans l'étude suivante. Le graphe 7.1 montre en rouge le signal que nous cherchons à reconstruire. Les barres grises donnent la reconstruction purement analytique. Enfin, les points bleus ou verts correspondent à la reconstruction obtenue en évaluant le biais d'ordre zéro par Monte-Carlo sur 50 ou 200 simulations. Dans le cas idéal (pas de systématiques ici), cela fonctionne et converge pour un nombre raisonnable de simulations.

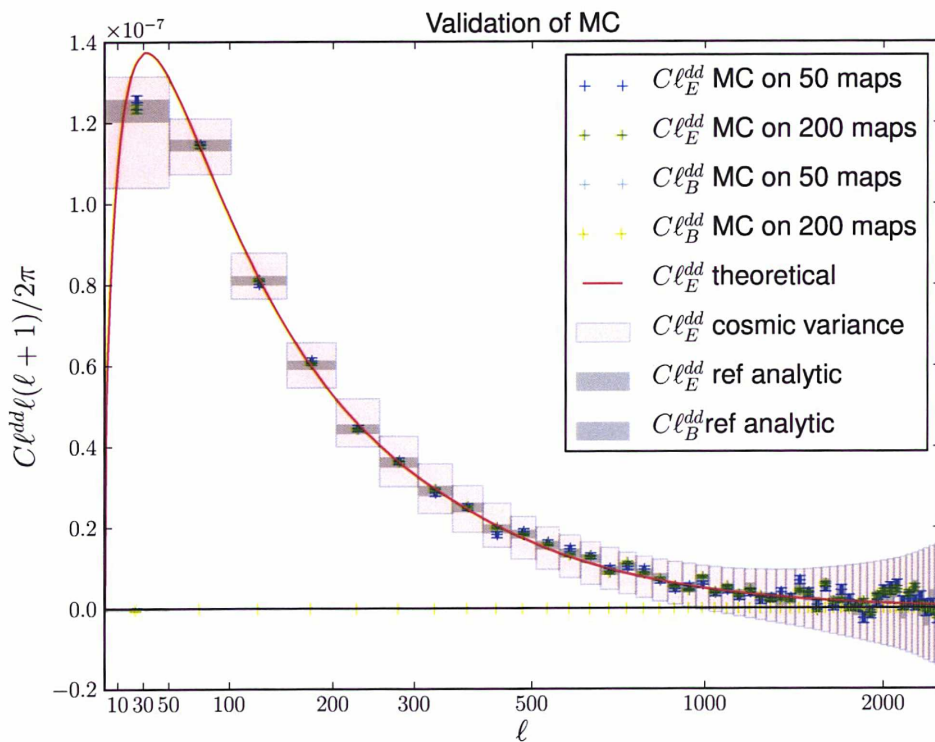


FIGURE 7.1 – Validation du calcul Monte-Carlo du biais N_ℓ^0 : celui-ci est estimé sur 50 (points bleus pour les modes E et cyans pour les modes B) puis 200 (points verts pour les modes E et jaunes pour les modes B) cartes non lentillées tirées sous le spectre de la carte de données. En rouge, le spectre théorique du potentiel de lentille et les barres d'erreurs données par la variance cosmique. Les barres grises indiquent le résultat obtenu par calcul analytique du biais, pour les modes E et B.

7.2 EFFET DES INCERTITUDES SUR LE MODÈLE COSMOLOGIQUE

Nous nous sommes intéressés à l'impact d'une mauvaise connaissance des spectres sur les biais d'ordres supérieurs en ϕ . Une incertitude sur les paramètres cosmologiques se traduit en effet par une incertitude sur le potentiel de lentille prédit et donc une augmentation des barres d'erreur

sur les biais N_ℓ^1 et N_ℓ^2 .

Nous avons considéré le modèle Λ CDM à six paramètres retenu par WMAP7 et fait des simulations en tirant aléatoirement des jeux de paramètres (distribution gaussienne). A partir de ces paramètres, à l'aide du code CAMB, nous avons calculé le spectre de puissance de lentille C_ℓ^ϕ et les biais N_ℓ^1 et N_ℓ^2 correspondant. Chaque quantité a été pondérée de la probabilité du jeu de paramètres :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

où x est la distance à la valeur moyenne du paramètre que l'on a fait varier et σ l'erreur sur ce paramètre. La valeur moyenne et l'erreur des paramètres sont présentés dans le tableau 7.1.

	Ω_b	Ω_{CDM}	Ω_Λ	Δ_R^2	n_s	τ
Valeur	0,0449	0,222	0,734	2,43	0,963	0,086
Erreur	0,0028	0,026	0,029	0,11	0,014	0,015

TABLE 7.1 – Paramètres cosmologiques WMAP7 et incertitudes

7.2.1 Modèle Λ CDM

Nous avons fait varier chaque paramètre séparément puis les six en même temps et calculé les valeurs moyennes correspondantes pour C_ℓ^ϕ , N_ℓ^1 et N_ℓ^2 . La figure 7.2 compare les spectres de lentille obtenus à leur valeur de référence.

Nous retrouvons bien ici que l'effet de lentille est particulièrement sensible à la densité de matière noire (Ω_{CDM} , courbe verte) et à la densité d'énergie noire (Ω_Λ , courbe rouge). En revanche, il n'est presque pas affecté par la profondeur optique de réionisation (τ , courbe jaune) ni par la densité de baryons (Ω_b , courbe bleue).

La figure 7.3 montre les valeurs moyennes de C_ℓ^ϕ , N_ℓ^1 et N_ℓ^2 obtenues pour la variation simultanée des six paramètres et les barres d'erreurs correspondant à la dispersion (pondérée par leur probabilité) de toutes les réalisations.

L'incertitude sur les paramètres se traduit donc par une augmentation d'environ 4% des barres d'erreur sur l'estimateur pour le biais N_ℓ^1 et 1,5% pour le biais N_ℓ^2 . L'impact sera donc faible.

7.2.2 Modèle Λ CDM plat

Nous considérons à présent le même modèle cosmologique en imposant la contrainte d'un univers plat. La constante cosmologique est alors fixée par $\Omega_\Lambda + \Omega_{CDM} + \Omega_b = 1$. Ce paramètre est remplacé par la constante de Hubble qui mesure le taux d'expansion de l'Univers. Sa valeur mesurée est $H = 71 \pm 2.5 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. La même analyse que précédemment est effectuée sur 100 tirages de jeux de paramètres. Les valeurs

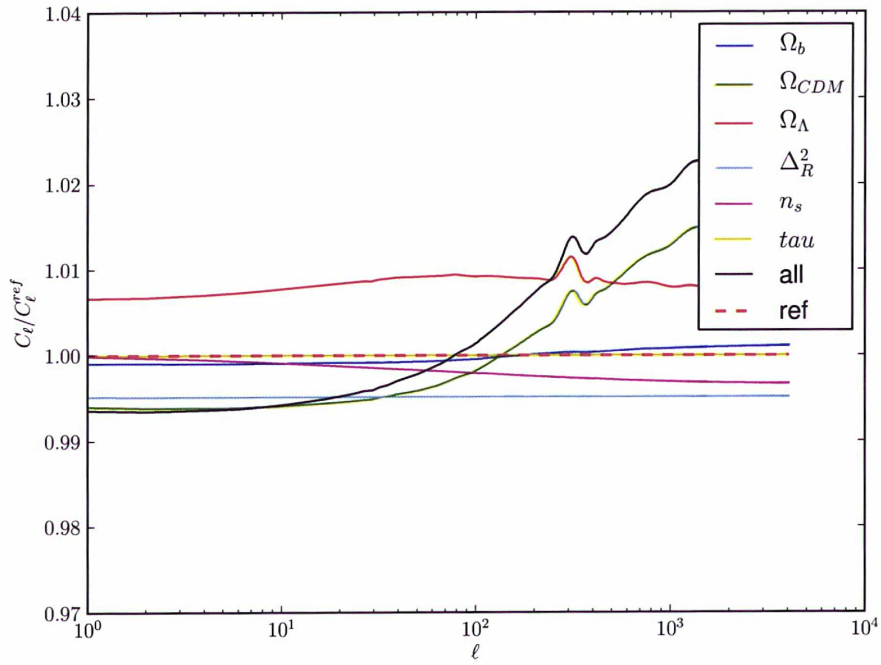


FIGURE 7.2 – Effet de la variation des paramètres cosmologiques sur le spectre de puissance de l'effet de lentille : moyenne réalisée sur 200 réalisations de jeux de paramètres tirés aléatoirement. La courbe noire correspond à la variation de tous les paramètres simultanément.

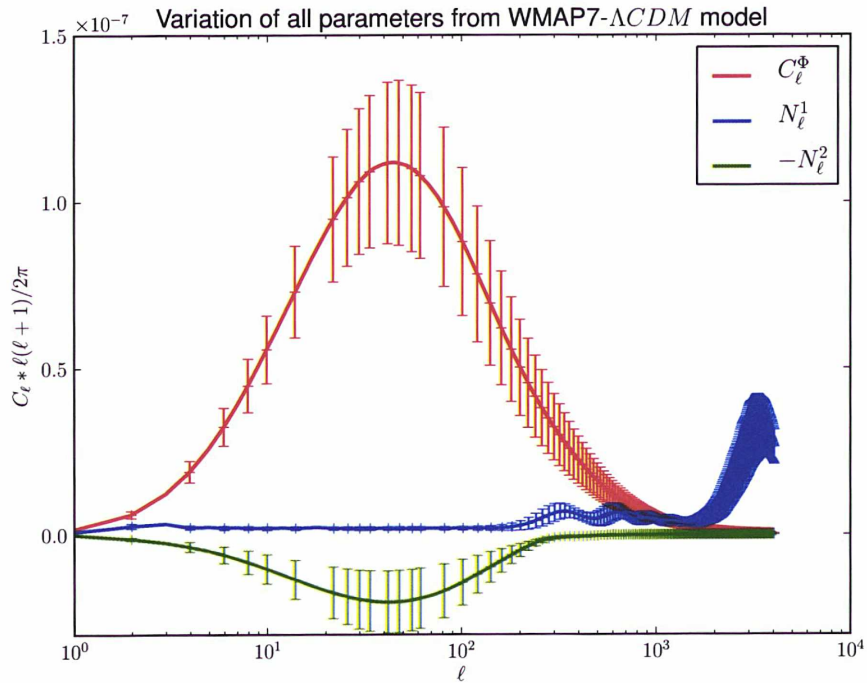


FIGURE 7.3 – Impact de l'incertitude sur les paramètres cosmologiques (modèle Λ CDM) pour le spectre de lentille (rouge), le biais d'ordre un (bleu) et le biais d'ordre 2 (vert). Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion entre les réalisations.

moyennes et barres d'erreurs associées obtenues sont présentées sur la figure 7.4.

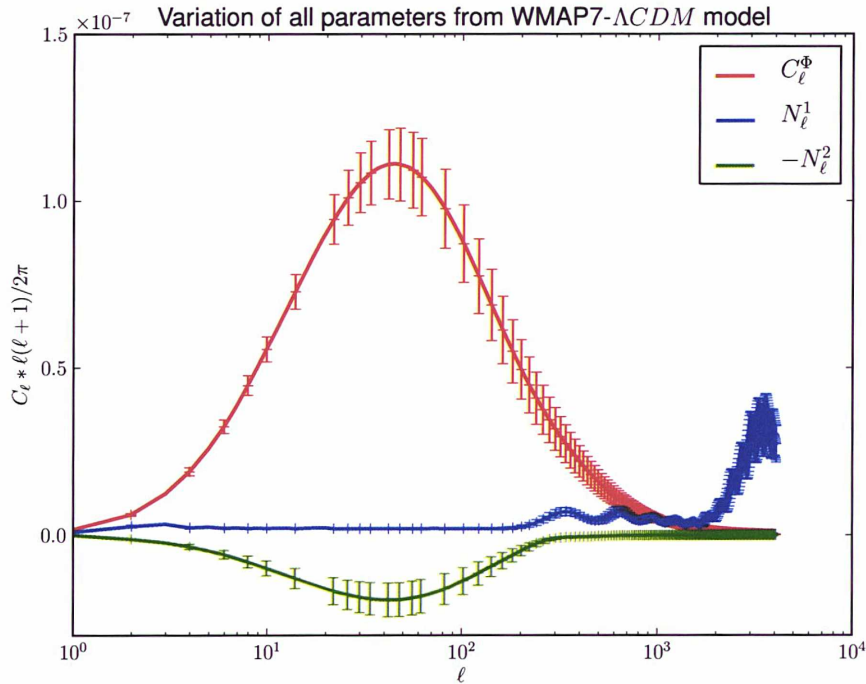


FIGURE 7.4 – Impact de l'incertitude sur les paramètres cosmologiques (modèle Λ CDM plat) pour le spectre de lentille (rouge), le biais d'ordre un (bleu) et le biais d'ordre 2 (vert). Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion entre les réalisations.

Le fait d'imposer un modèle plus réaliste réduit la taille des barres d'erreur sur les quantités qui nous intéressent.

CONCLUSION DU CHAPITRE

La connaissance précise des spectres sous-jacents aux données permet de construire des filtres tels que l'estimateur de l'effet de lentille soit optimal. En pratique, nous avons montré dans ce chapitre que des incertitudes sur le modèle cosmologique et donc sur les spectres pouvaient être prises en compte dans les barres d'erreurs de l'estimateur. De plus, nous avons proposé une méthode simple d'évaluation numérique du biais gaussien reposant sur des simulations Monte-Carlo. Nous verrons par la suite que cette approche est de toute façon nécessaire pour prendre en compte les autres "non-idéalités" des données que nous traitons (avant-plans, bruit inhomogène, etc.).

SOMMAIRE

9.1	MODÉLISATION DU BRUIT	123
9.1.1	Calcul analytique du champ moyen	123
9.1.2	Calcul analytique du biais du spectre de puissance	126
9.2	TRAITEMENT DU BRUIT	126
9.2.1	Simulation de cartes de bruit inhomogène	126
9.2.2	Calcul du champ moyen $\phi^{(MF)}$	127
9.2.3	Calcul du biais $C_L^{(bias)}$	127

L'ESTIMATEUR est construit pour extraire l'effet de lentille dans des cartes plein-ciel du CMB. En réalité, les cartes doivent toujours être masquées au niveau de la galaxie d'une part et des points sources d'autre part. Nous présentons dans ce chapitre l'effet de telles contraintes sur notre capacité à reconstruire l'effet de lentille. Par ailleurs, nous étudions également l'impact d'éventuels résidus de ces avant-plans, situé hors des masques.

8.1 MASQUE GALACTIQUE

La zone équatoriale du ciel est particulièrement contaminée par les émissions de notre propre galaxie (Zacchei et Maino 2011). Cette émission domine très largement le CMB lui-même, comme en témoigne la carte à 100GHz obtenue avec la mission nominale de Planck (figure 8.1).

Nous devons donc "cacher" la galaxie avec un masque dont la structure est a priori compliquée. Nous allons alors perdre une partie de la puissance du signal de lentille. Le spectre du potentiel étant proportionnel au moment à quatre points de la température, f_{sky} se calcule comme la moyenne sur les pixels du masque à la puissance 4 (Hivon et al. (2002)). Nous appelons $f_{sky}^{(gal,n)}$ la proportion de signal faisant intervenir le moment à n points de la température, préservée par un masque w :

$$f_{sky}^{(gal,n)} = \frac{1}{N_{pix}} \sum_i w_i^n \quad (8.1)$$

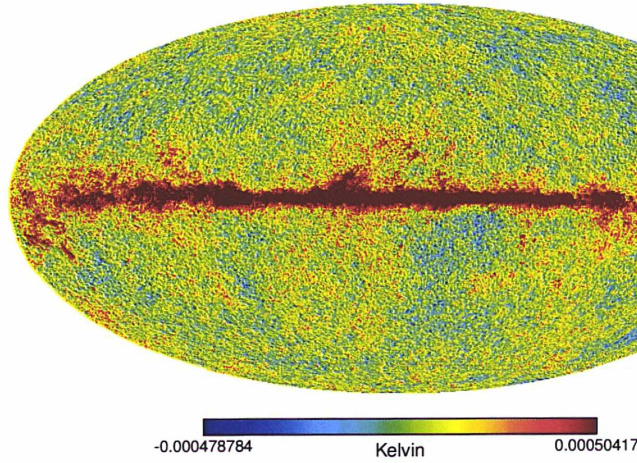


FIGURE 8.1 – Carte à 100GHz du CMB obtenue par Planck (v50)

Comme nous avons choisi d'appliquer directement l'estimateur d'effet de lentille aux cartes masquées, nous nous attendons à devoir au moins corriger le spectre de puissance du potentiel reconstruit par le facteur $f_{sky}^{(gal,A)}$.

8.1.1 Etude analytique de l'effet du masque

Caractérisons plus précisément l'effet du masque et notons $w(\vec{n})$ le masque dans l'espace des pixels et $\tilde{\Theta}^{msk}(\vec{n})$ la carte de température lentillée et masquée :

$$\tilde{\Theta}^{msk}(\vec{n}) = w(\vec{n}) \cdot \tilde{\Theta}(\vec{n}) \quad (8.2)$$

En utilisant les transformations en harmoniques sphériques et leur inverse (équations B.8 et B.9), nous avons alors :

$$\tilde{\Theta}_{\ell m}^{msk} = \int d\vec{n} Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \sum_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_1 m_1}(\vec{n}) \sum_{\ell_2 m_2} w_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_2 m_2}(\vec{n})$$

Ce qui s'écrit, d'après l'équation C.4 :

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{\ell m}^{msk} = & (-1)^m \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} w_{\ell_2 m_2} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \\ & \times \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Si nous remplaçons les multipôles $\tilde{\Theta}_{\ell m}$ de la température par l'expression des multipôles de la température masquée $\tilde{\Theta}_{\ell m}^{msk}$ dans l'expression 6.8 de l'estimateur, et si nous en prenons l'espérance, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \rangle &= -iA_L(-1)^M \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1, \dots, 8\}}} \langle \tilde{\Theta}_{\ell_5 m_5} \tilde{\Theta}_{\ell_6 m_6} \rangle \langle w_{\ell_7 m_7} w_{\ell_8 m_8} \rangle (-1)^{m_3+m_4} \\
&\times \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \sqrt{\prod_i (2\ell_i + 1)(2L + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ -m_3 & m_5 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ -m_4 & m_6 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'expression du moment à deux points de la température lentillée (équation D.17) nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \rangle &= -iA_L(-1)^M \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}}} (-1)^{m_3+m_4+m_5} C_{\ell_5}^{\ominus} \delta_{\ell_5 \ell_6} \delta_{m_5, -m_6} \langle w_{\ell_7 m_7} w_{\ell_8 m_8} \rangle \\
&\times \frac{2\ell_5 + 1}{(4\pi)^{3/2}} \sqrt{\prod_i (2\ell_i + 1)(2L + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ -m_3 & m_5 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ -m_4 & m_6 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \\
&+ -iA_L(-1)^M \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1, \dots, 8\}}} \sum_{\lambda \mu} (-1)^\mu \phi_{\lambda \mu} \begin{pmatrix} \ell_5 & \lambda & \ell_6 \\ -m_5 & \mu & -m_6 \end{pmatrix} \\
&\times \left[F_{\ell_5 \lambda \ell_6} C_{\ell_6}^{\ominus} + F_{\ell_6 \lambda \ell_5} C_{\ell_5}^{\ominus} \right] \langle w_{\ell_7 m_7} w_{\ell_8 m_8} \rangle (-1)^{m_3+m_4} \\
&\times \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \sqrt{\prod_i (2\ell_i + 1)(2L + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ -m_3 & m_5 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ -m_4 & m_6 & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous voyons que le premier terme ne dépend ni de ϕ ni de la réalisation du CMB considérée. Il est en revanche caractérisé par la matrice de covariance du masque et par le spectre de la température. Nous appelons ce terme déterministe le *champ moyen* et nous le notons $\phi^{(MF)}$:

$$\begin{aligned}
\phi_{LM}^{(MF)} &= -iA_L(-1)^M \sum_{i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}} (-1)^{m_3+m_4+m_5} C_{\ell_5}^{\ominus} \delta_{\ell_5 \ell_6} \delta_{m_5, -m_6} \langle w_{\ell_7 m_7} w_{\ell_8 m_8} \rangle \\
&\times \frac{2\ell_5 + 1}{(4\pi)^{3/2}} \sqrt{\prod_i (2\ell_i + 1)(2L + 1)} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_5 & \ell_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ -m_3 & m_5 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_5 & \ell_8 \\ -m_4 & -m_5 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Quant au second terme de l'espérance de l'estimateur, il fait apparaître le champ ϕ , affecté d'une matrice de mélange que nous notons $M_{LM}^{\lambda\mu}$ et dont l'expression est :

$$\begin{aligned} M_{LM}^{\lambda\mu} &= -iA_L(-1)^{M+\mu} \sum_{i \in \llbracket 1,8 \rrbracket} (-1)^{m_3+m_4} \left[F_{\ell_5\lambda\ell_6} C_{\ell_6}^\ominus + F_{\ell_6\lambda\ell_5} C_{\ell_5}^\ominus \right] \langle w_{\ell_7 m_7} w_{\ell_8 m_8} \rangle \\ &\times \sqrt{\frac{\prod_i (2\ell_i + 1)(2L + 1)}{(4\pi)^3}} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_5 & \ell_7 \\ -m_3 & m_5 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_4 & \ell_6 & \ell_8 \\ -m_4 & -m_6 & m_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de l'espérance de l'estimateur s'écrit sous la forme suivante :

$$\langle \hat{g}_{LM} \rangle = \sum_{\lambda\mu} M_{LM}^{\lambda\mu} \phi_{\lambda\mu} + \phi_{LM}^{(MF)} \quad (8.5)$$

Le premier terme de cette expression est le plus compliqué et n'est pas calculable analytiquement. Un calcul Monte-Carlo serait encore trop coûteux. Nous l'approcherons simplement par une matrice diagonale de coefficients inférieurs à un. En effet, par analogie avec l'estimée du spectre de puissance d'une carte masquée (Hivon et al. 2002), la variance du potentiel estimé peut être approchée par une matrice diagonale dont les coefficients sont donnés par le facteur $f_{sky}^{(gal)}$ présenté à l'équation 8.1 :

$$\left\langle \left(\sum_{\lambda\mu} M_{LM}^{\lambda\mu} \phi_{\lambda\mu} \right)^2 \right\rangle \approx f_{sky}^{(gal,4)} C_L^\phi$$

Ce facteur f_{sky} s'applique aussi aux biais $N_L^{(0,g)}$ et $N_L^{(1,g)}$ dans le calcul de la variance de l'estimateur pour des cartes masquées :

$$\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} f_{sky} \left[C_L^\phi + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right] + C_L^{(MF)} \quad (8.6)$$

où nous avons posé $\langle \phi_{LM}^{(MF)} \phi_{L'M'}^{(MF)*} \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} C_L^{(MF)}$. Rappelons que cette quantité vient du deuxième terme de l'équation 8.5. Son expression analytique fait intervenir un grand nombre de symboles de Wigner-3j et n'est donc pas utilisable en pratique non plus. Toutefois, nous avons vu que ce champ moyen est complètement déterministe pour un masque donné et ne dépend pas de l'effet de lentille. Nous pourrions donc le calculer par Monte-Carlo sur des simulations de cartes non lentillées ayant le même spectre que la carte dont nous voulons extraire le potentiel de lentille.

Nous allons à présent vérifier que l'effet du masque peut être pris en compte par le calcul Monte-Carlo du champ moyen et une simple correction en f_{sky} . Nous travaillerons d'abord avec une coupure équatoriale apodisée, puis avec des masques créés pour les données Planck.

8.1.2 Coupure équatoriale apodisée

Dans un premier temps, nous avons testé une simple coupure sur une bande équatoriale. L'avantage de cette approche est de préserver l'isotropie des cartes dans une direction. En revanche, il faut sacrifier une partie importante des cartes pour capturer toutes les structures des émissions galactiques. L'étude de la reconstruction de l'effet de lentille sur des cartes ainsi "coupées" nous a montré qu'il est nécessaire de lisser le bord du masque. En effet, l'estimateur quadratique effectue une resommation des multipôles dont l'effet est de mélanger toutes les échelles. La transition brutale due au masque crée ainsi du signal de lentille artificiel, autrement dit, un biais dans le spectre estimé du potentiel de lentille. Un moyen simple de remédier à ce problème est de lisser le bord du masque, autrement dit, d'imposer un passage continu, sur quelques pixels, de 0 à 1, à l'aide d'une arche de cosinus par exemple.

Pour tester l'utilisation de tels masques sur les données, nous avons utilisé 50 cartes lentillées simulées, de résolution $n_{side} = 1024$, auxquelles nous avons appliqué des coupures de 10° de part et d'autre de l'équateur :

- Sans apodisation (points bleus sur les figures)
- En apodisant sur 5° (points jaunes)
- En apodisant sur 8° (points verts)

Le biais N_ℓ^0 est évalué soit analytiquement, soit par Monte-Carlo suivant la méthode exposée au chapitre précédent, sur 100 cartes non lentillées auxquelles nous appliquons les mêmes masques. Les biais N_ℓ^1 et N_ℓ^2 sont quant à eux toujours évalués analytiquement.

8.1.2.1 Estimation de cartes sans effet de lentille

Nous appliquons tout d'abord notre estimateur sur 100 cartes non lentillées. La figure 8.2 nous montre l'allure du spectre de puissance des estimées des modes E et B, corrigées du facteur f_{sky} approprié mais non débiaisés. Nous observons plusieurs faits intéressants.

Tout d'abord, les cartes affectées d'un masque binaire (non apodisé) font apparaître des oscillations dans le spectre de l'estimée des modes E. Plus encore, nous pouvons déjà voir un biais dans les spectres des estimées des modes E comme des modes B (nous savons en effet que ces estimées doivent être, aux variations statistiques près, égales aux biais N_ℓ^0).

Pour les cartes masquées par une bande équatoriale apodisée, à haut ℓ , nous retrouvons bien l'égalité entre l'estimée des modes E et le biais gaussien correspondant. Le biais observé à bas ℓ diminue d'autant plus vite que la longueur d'apodisation est grande. Il correspond au spectre du champ moyen $C_L^{(MF)}$. Le fait d'apodiser le masque permet donc de diminuer ses effets de bord et nous place ainsi dans une configuration où l'approximation de la matrice de couplage par une matrice de diagonale semble fonctionner. Cela nous permet de continuer à utiliser notre estimateur quadratique pour reconstruire le signal de lentille, à condition toutefois de pouvoir soustraire le champ moyen. Pour les modes B, l'égalité entre l'estimée et le biais gaussien est préservée à toutes les échelles, l'utilisation du masque ne crée donc pas de champ moyen ou de biais dans ces modes.

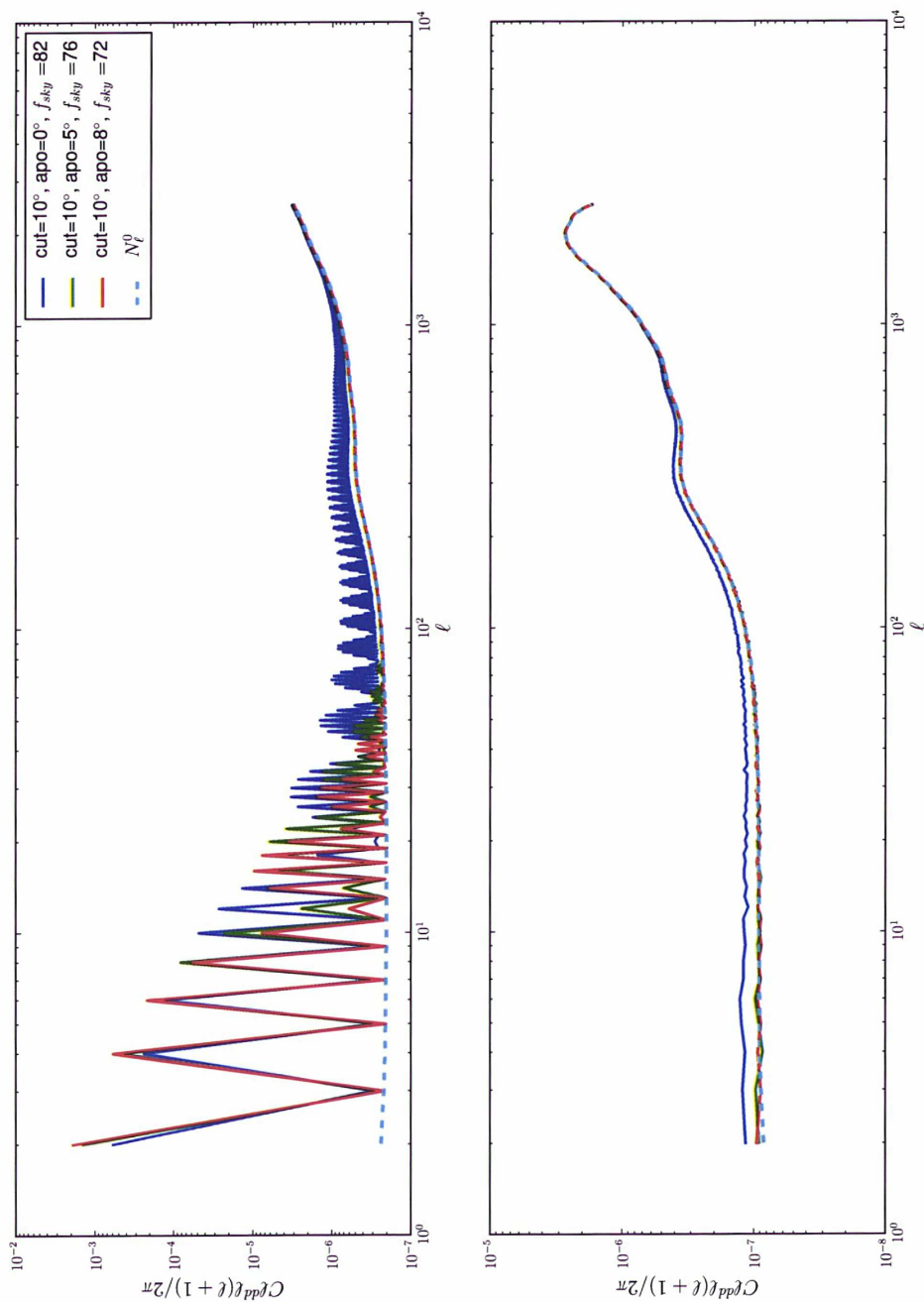


FIGURE 8.2 – Spectres de puissance des estimées des modes E (en haut) et B (en bas) obtenus sur 100 cartes sans effet de lentille et masquées par une bande équatoriale de 10° respectivement, sans apodisation (bleu), avec une apodisation sur 5° (vert) et avec une apodisation sur 10° (rouge). La courbe cyan correspond au biais gaussien calculé analytiquement.

8.1.2.2 Estimation de cartes lentillées - Calcul analytique du biais gaussien

La figure 8.3 montre la reconstruction de l'effet de lentille obtenue pour 50 cartes lentillées, lorsque le biais N_ℓ^0 est calculé analytiquement. Nous voyons que l'utilisation d'une coupure équatoriale non lissée entraîne la création d'un biais important dans les spectres reconstruits. Dans le cas de cartes masquées par des bandes apodisées, nous repérons deux régimes. À bas ℓ , le spectre du champ moyen domine la reconstruction. Aux autres échelles, le potentiel de lentille est en revanche très bien reconstruit, par une simple correction d'un facteur f_{sky} . Le spectre de la partie rotationnelle ne présentant aucun biais, nous ne montrerons plus les modes B dans la suite de cette étude. Pour conclure, le biais N_ℓ^0 peut donc a priori encore être calculé de façon analytique, pourvu que la coupure équatoriale soit apodisée.

8.1.2.3 Estimation de cartes lentillées - Calcul numérique du biais gaussien

Nous avons toutefois la possibilité de calculer ce biais par une intégrale Monte-Carlo en simulant des réalisations gaussiennes du spectre de puissance des cartes lentillées. Ces cartes ne contiennent pas d'effet de lentille et la moyenne de leurs estimations nous donne ainsi le biais gaussien. Appliquons cette méthode au cas qui nous intéresse ici. Nous masquons donc les 100 cartes non lentillées simulées avec les différentes bandes galactiques utilisées précédemment. La figure 8.4 nous indique qu'un tel traitement permet de prendre en compte une partie de l'effet du masque non apodisé : la reconstruction de l'effet de lentille est à présent moins biaisée. Plus intéressant, le biais à bas ℓ est, quel que soit le masque utilisé, réduit. Ce qui reste vient d'un champ moyen dont nous allons à présent tenir compte.

8.1.2.4 Traitement du champ moyen

Nous calculons aussi le champ moyen dû au masque $\hat{\phi}^{MF}$ à l'aide d'une intégrale Monte-Carlo. En effet, puisqu'il ne dépend pas de l'effet de lentille, nous prenons la moyenne des cartes de potentiel reconstruites à partir des N_{map} cartes non lentillées et masquées :

$$\hat{\phi}^{MF} = \frac{1}{N_{map}} \sum_i \hat{\phi}_i^U \quad (8.7)$$

La variance de notre estimée numérique du champ moyen s'écrit alors :

$$\langle \hat{\phi}_{LM}^{MF} \hat{\phi}_{L'M'}^{MF*} \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[C_L^{MF} + \frac{f_{sky}}{N_{map}} N_L^{(0,g)} \right] \quad (8.8)$$

Nous voyons apparaître un terme en plus du spectre du champ moyen qui est un bruit d'intégration numérique et peut être arbitrairement réduit en augmentant le nombre de simulations N_{map} utilisées.

Nous soustrayons ce champ moyen à chacune des cartes de potentiel estimé sur les cartes de température lentillée : $\hat{\phi} = \hat{g} - \hat{\phi}^{MF}$. Nous estimons

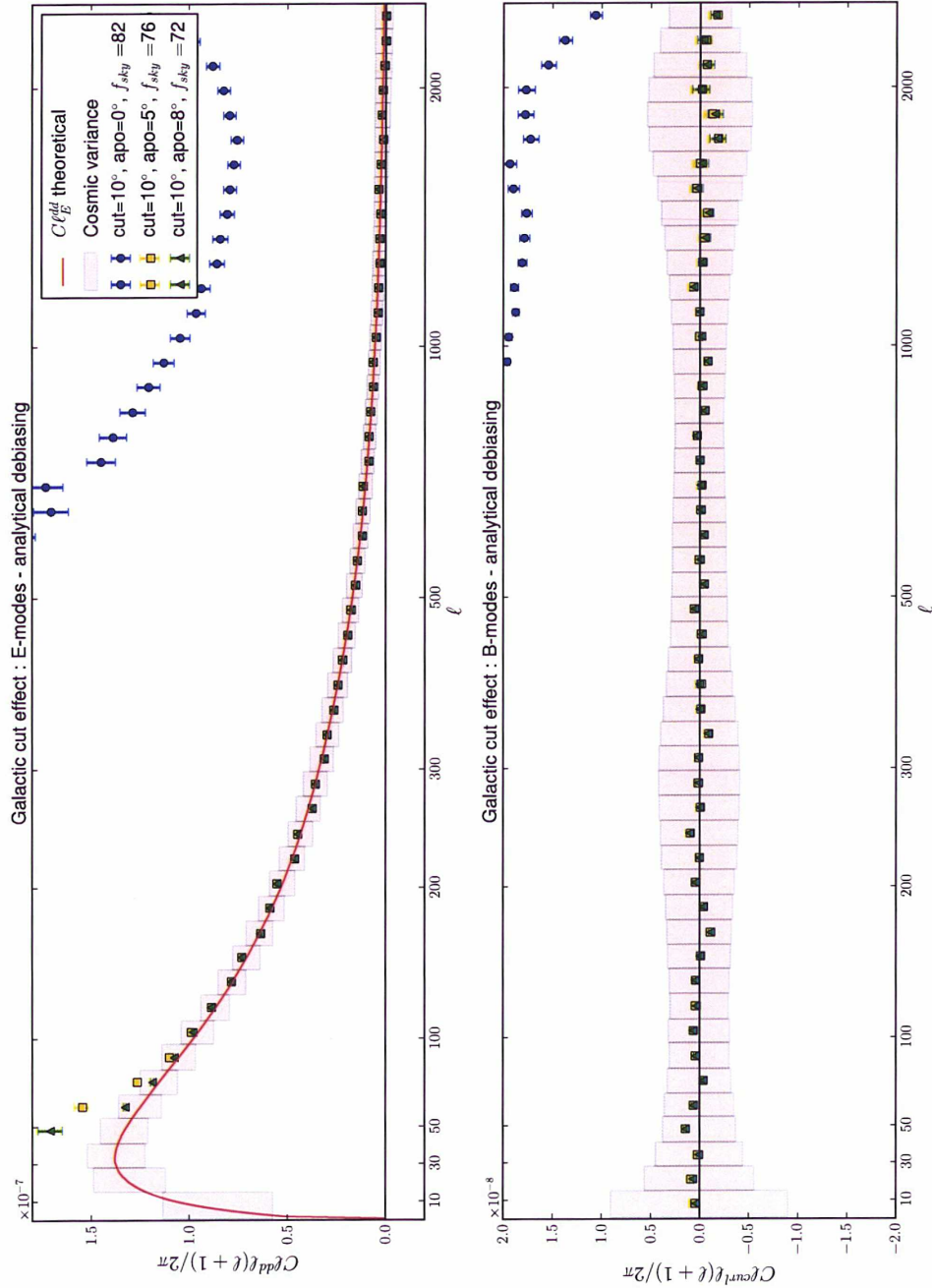


FIGURE 8.3 – Effet de lentille reconstruit sur 50 cartes lentillées masquées par une coupure équatoriale de 10° , non apodisée (bleu), apodisée sur 5° (jaune) ou sur 8° (vert). Le biais N_ℓ^0 est calculé analytiquement. En haut : spectre du potentiel de lentille, en bas : spectre de la partie rotationnelle. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins. Les barres rouges indiquent la variance cosmique des spectres théoriques.

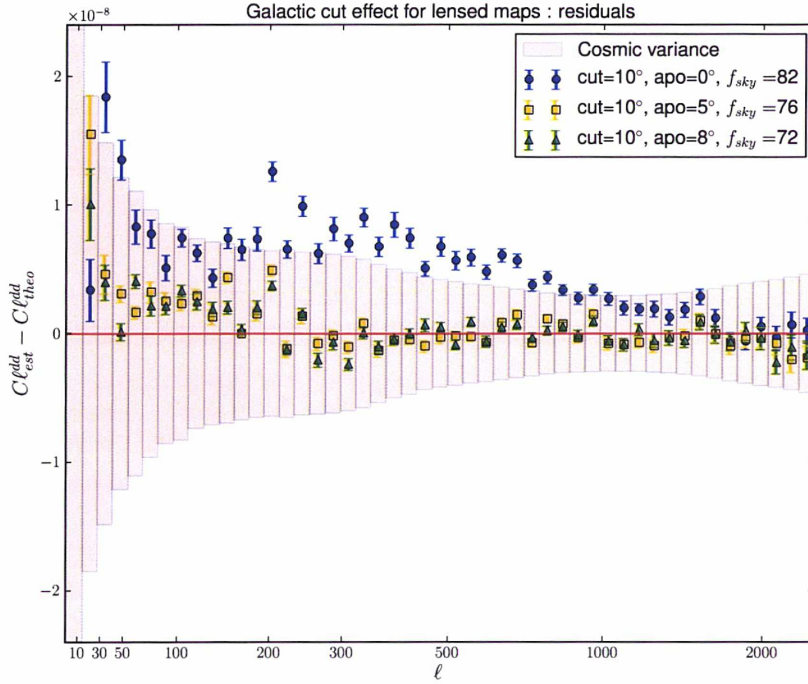


FIGURE 8.4 – Résidu de l'effet de lentille reconstruit sur 50 cartes lentillées masquées par une coupure équatoriale de 10° , non apodisée (bleu), apodisée sur 5° (jaune) ou sur 8° (vert). Le biais N_ℓ^0 est par Monte-Carlo sur 100 cartes non lentillées, de même spectre que les cartes lentillées et auxquelles les mêmes masques sont appliqués. La valeur théorique C_{theo}^{dd} du potentiel de lentille a été retranchée à sa valeur estimée $C_{est}^{dd} = (\hat{C}_\ell^E - \hat{N}_\ell^0) / f_{sky} - N_\ell^1 - N_\ell^2$. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins. Les barres rouges indiquent la variance cosmique des spectres théoriques.

ensuite le spectre du potentiel reconstruit, en dehors du masque, à l'aide de *Spice*. La variance de l'estimateur complet d'effet de lentille devient :

$$\langle \hat{\phi}_{LM} \hat{\phi}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} f_{sky} \left[C_L^\phi + \left(1 + \frac{1}{N_{map}} \right) N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right] \quad (8.9)$$

Nous sommes alors en mesure d'estimer le spectre de puissance du potentiel de lentille, ce dont témoigne la figure 8.5. La soustraction du champ moyen nous permet de reconstruire ce spectre, même à bas ℓ , avec une précision compatible avec la variance cosmique, tout en calculant le biais gaussien analytiquement.

Conclusion

Cette première étude nous a permis de démontrer notre capacité à inclure l'effet d'un masque galactique (simplifié) dans la reconstruction de l'effet de lentille gravitationnelle. Le masque préserve l'isotropie dans une direction et la rompt dans l'autre, ce qui explique l'apparition d'un "champs moyen" aux grandes échelles dont nous avons présenté le traitement.

La figure 8.6 montre encore la carte de potentiel de lentille utilisée pour construire les cartes de température lentillée et celle que nous reconstruisons avec l'estimateur, Wiener-filtrée. Ce résultat, obtenu en n'appliquant l'estimateur qu'à une carte, nous donne une idée du mieux que l'on puisse faire. Nous vérifions que le spectre croisé (mesuré hors du masque) des cartes de potentiel d'entrée et reconstruit redonne bien le spectre de puissance du potentiel, au facteur f_{sky} près. Les propriétés statistiques de la carte de potentiel reconstruit sont donc celles attendues. C'est ce que confirme également la figure 8.5, qui présente la moyenne des spectres des estimées sur 50 cartes lentillées. Jusqu'aux grandes échelles en effet, la perte de puissance qu'entraîne le masque peut être corrigée par un simple facteur f_{gal} .

Enfin, la largeur d'apodisation optimale, pour une coupure de 10° de part et d'autre de l'équateur, se situe autour de 5° . En effet, nous avons observé que plus cette largeur est grande, plus nous augmentons la taille des barres d'erreurs, sans toutefois améliorer significativement la qualité de la reconstruction du potentiel de lentille.

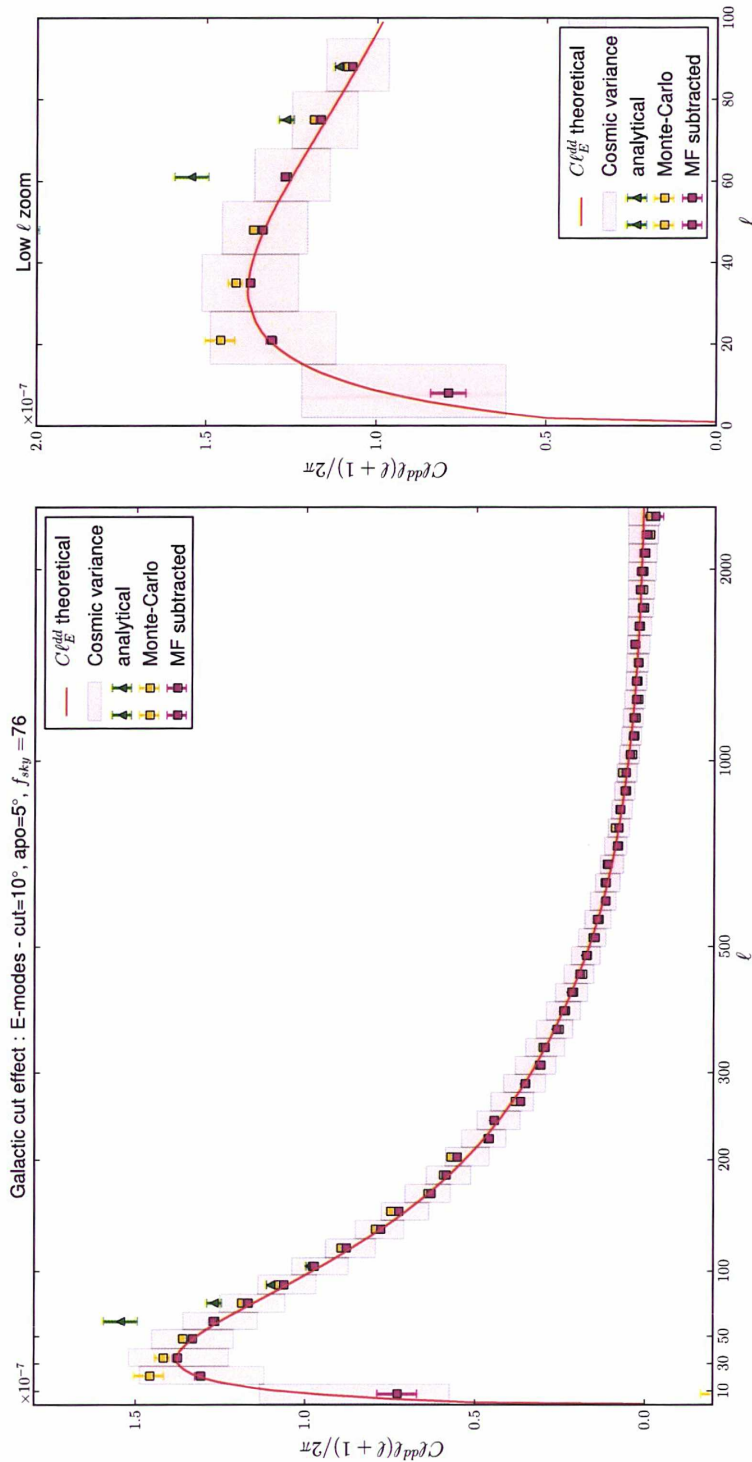


FIGURE 8.5 – Effet de lentille reconstruit sur 50 cartes lentillées masquées par une coupure équatoriale de 10° , apodisée sur 5° . Le biais N_ℓ^0 est calculé analytiquement pour les points jaunes et violet, par Monte-Carlo pour les points verts. Le champ moyen a été soustrait à la carte de potentiel estimée pour les points violets. A droite, un zoom à bas ℓ souligne l'efficacité de la soustraction du champ moyen. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins. Les barres rouges indiquent la variance cosmique des spectres théoriques.

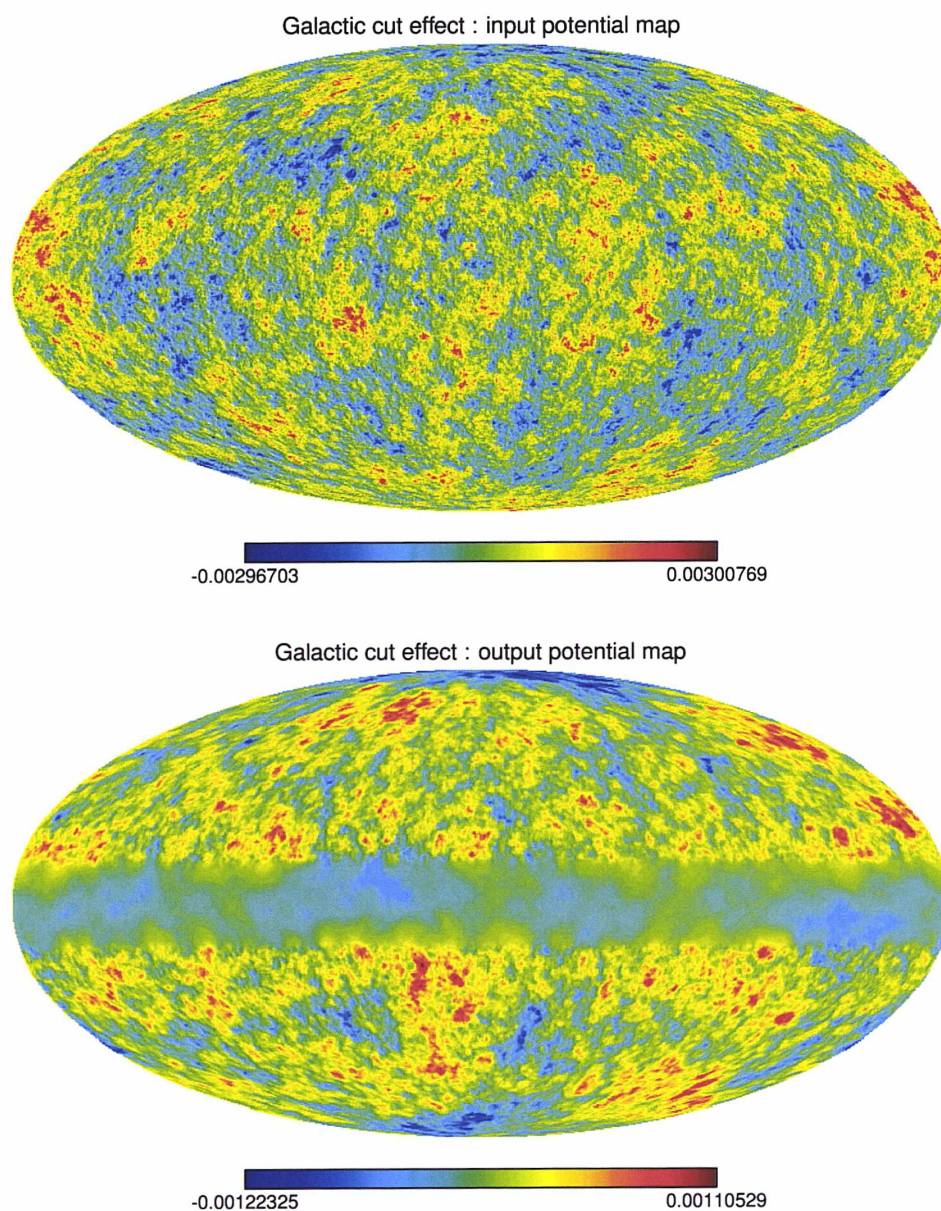


FIGURE 8.6 – Cartes du potentiel de lentille initial (en haut) et reconstruit (en bas) à l'aide de l'estimateur quadratique sur une carte lentillée, masquée par une bande équatoriale de 10° , apodisée sur 5° . Le champs moyen a été soustrait et un filtre de Wiener a été appliqué.

8.1.3 Masque galactique apodisé

Nous avons ensuite étendu l'étude à des masques mieux adaptés à la forme de la Galaxie sur le ciel. Nous leur avons aussi appliqué une apodisation afin de ne pas créer de discontinuités brutales dans les cartes. (figure 8.7). Nous avons fait une étude pour déterminer la longueur d'apodisation optimale évaluée ici autour de 10° . Avec une telle longueur d'apodisation, la proportion de carte préservée est $f_{gal} \approx 65\%$.

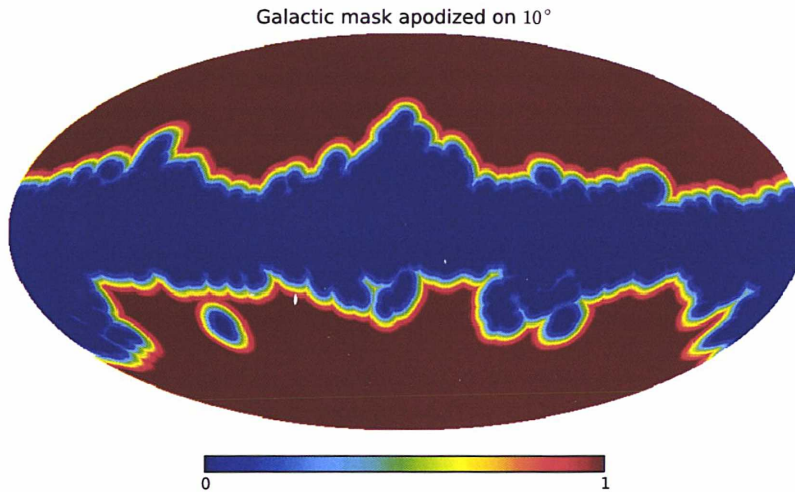


FIGURE 8.7 – Masque galactique réalisé à partir de la carte à 217GHz et d'une coupure en flux dans la carte à 857GHz (utilisé pour le "round 0")

8.1.3.1 Reconstruction du champ de potentiel

La figure 8.8 nous permet de voir que l'estimée d'une carte de température masquée est complètement dominée par le champ moyen dû au masque (figure du haut). Ce champ moyen peut lui-même être estimé sur 100 cartes sans effet de lentille puis retranché au potentiel estimé de la carte analysée. Le résultat obtenu est encore très bruité (figure du milieu), nous lui appliquons donc un filtre de Wiener pour obtenir une carte de potentiel plus proche de celle de départ (figure du bas). La taille des structures que nous observons dans cette carte est plus grande que celle des structures habituelles d'une carte de potentiel de lentille (voir figure 8.6 par exemple). Notons par ailleurs que même si cette dernière carte semble avoir du signal à l'intérieur du masque, le potentiel n'y est pas reconstruit. Il semble que la forme de ce masque pour lequel l'isotropie n'est préservée dans aucune direction, soit à l'origine des différences observées avec la figure 8.6. Pour autant, nous vérifions de nouveau ici que la corrélation croisée entre la carte de potentiel d'entrée et celle du potentiel reconstruit a le spectre attendu. La carte du potentiel reconstruit n'est donc pas exploitable en tant que telle mais conserve les bonnes propriétés statistiques.

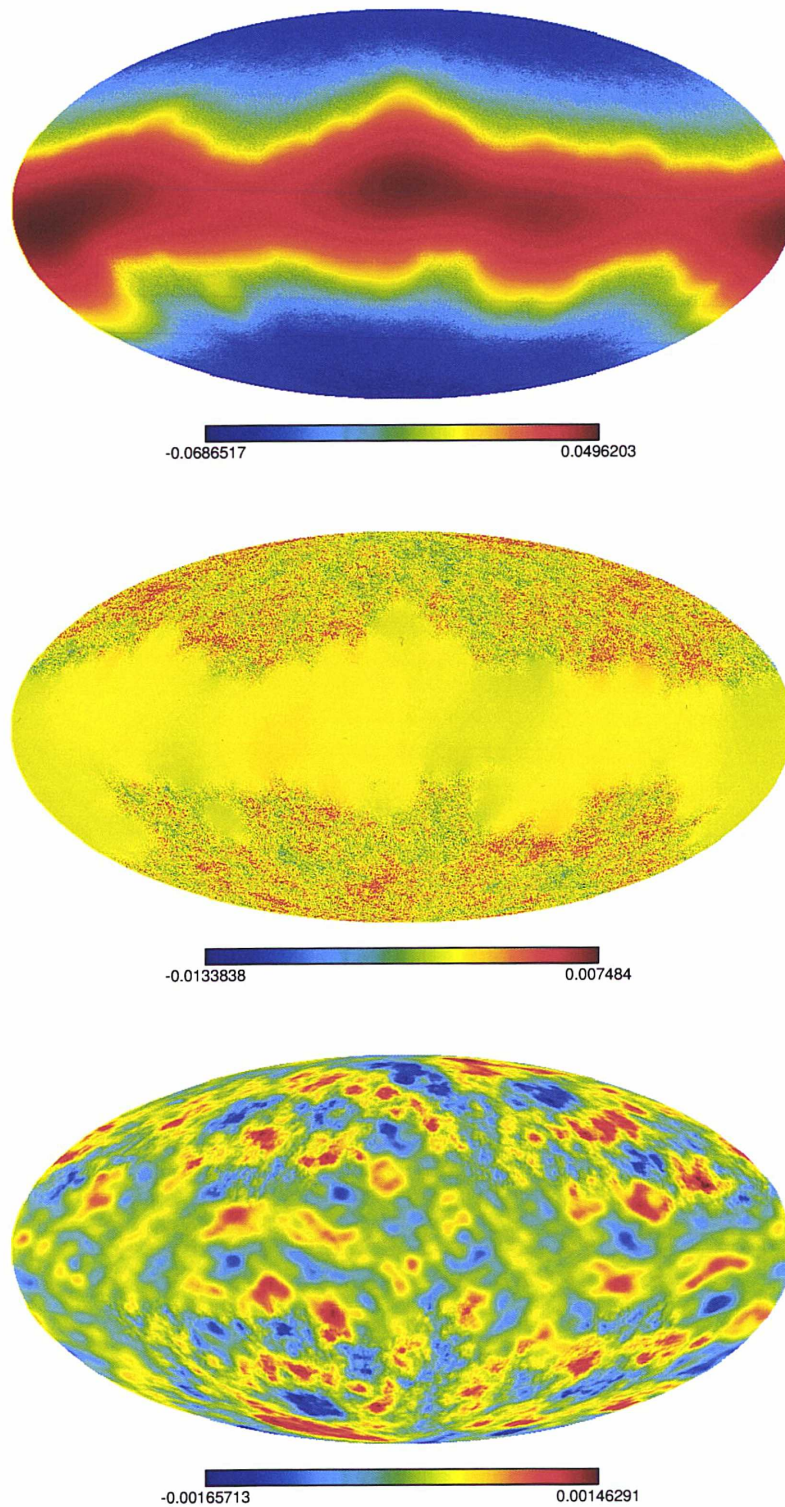


FIGURE 8.8 – Cartes du potentiel de lentille reconstruit à partir d'une carte de CMB lentillée, affectée d'un masque galactique apodisé sur 10° . En haut : résultat brut de l'estimateur. Au milieu : résultat de l'estimateur corrigé du champ moyen calculé par Monte-Carlo sur 100 cartes non lentillées. En bas : même résultat qu'au milieu auquel nous avons appliqué un filtrage de Wiener.

8.1.3.2 Reconstruction du spectre du potentiel

Nous validons l'utilisation de nos masques galactiques apodisés et choisissons la longueur d'apodisation optimale en estimant à nouveau 50 cartes de température lentillées, de beam $\theta_{FWHM} = 5'$ et de bruit $\sigma_N = 50\mu K$, affectées du masque galactique. Nous utilisons 5 longueurs d'apodisation différentes : 0° , 5° , 10° , 15° et 20° . Pour chacune, nous représentons sur la figure 8.9 le spectre des modes E et B de l'estimateur. Les biais N_ℓ^0 et le champ moyen dû au masque ont été calculés par Monte-Carlo sur 100 cartes non lentillées.

Conclusion

Cette seconde étude, plus réaliste, effectuée avec un masque galactique adapté aux données Planck, montre de nouveau la nécessité d'apodiser le masque. Les différentes longueurs d'apodisation testées fournissent toutes des résultats relativement comparables en précision. Toutefois, plus la longueur d'apodisation est grande, plus la taille des barres d'erreurs augmente. Nous écartons donc les apodisations sur 15° et 20° . Les deux autres longueurs (5° et 10°) sont raisonnables. Nous choisissons 10° par précaution.

8.1.4 Autres méthodes de traitement

Le traitement de la Galaxie n'est pas un problème nouveau dans l'étude de l'effet de lentille sur le CMB. Smith et al. (2007), pour extraire le potentiel de lentille des cartes *WMAP*, ont choisi d'utiliser les données de tous les canaux en température et d'inverser la matrice de covariance totale. Une telle méthode n'est pas transposable aux données Planck qui ont une résolution deux fois plus grande et un niveau de bruit beaucoup plus faible, ce qui dégrade le conditionnement du problème. Hirata et al. (2008) ont quant à eux pris le parti de faire la corrélation de plusieurs cartes en fréquence, ce qui créait des biais importants.

Pour traiter les données Planck, plusieurs approches ont été étudiées, en plus de celle que nous venons de présenter. En particulier, Perotto et al. (2010) ont proposé de remplir le masque galactique en recréant le signal à l'intérieur, avant d'estimer les cartes. Ils utilisent pour cela une méthode de remplissage basée sur la "parcimonie" ("sparsity") (Starck et al. 2012). Une autre méthode, développée par Plaszczyński et al. (2012), consiste à découper la carte, en-dehors de la zone masquée en éléments de $10^\circ \times 10^\circ$. L'estimateur est alors appliqué dans sa version ciel-plat et permet de reconstruire le spectre du potentiel de lentille à partir de $\ell = 100$.

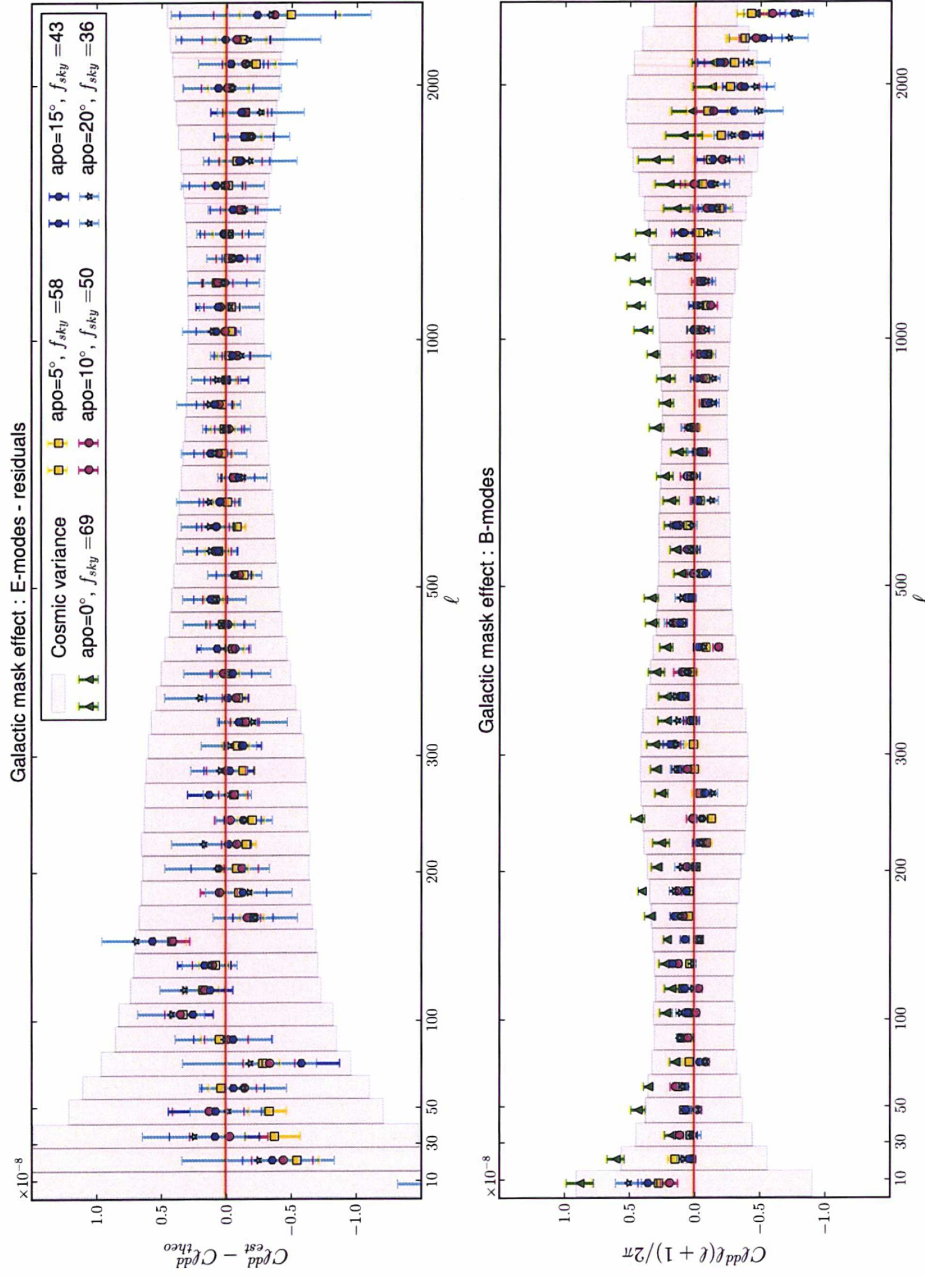


FIGURE 8.9 – Résidus des spectres des modes E et B moyens estimés sur 50 cartes lentillées, après correction du champ moyen, pour 5 longueurs d'apodisation différentes : 0° (vert), 5° (jaune), 10° (violet), 15° (bleu) et 20° (cyan). En haut : le résidu des modes E c'est-à-dire la différence entre le spectre de potentiel estimé et le spectre de potentiel théorique. En bas : les modes B dont la valeur attendue est zéro. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins.

8.2 MASQUE DE POINTS SOURCES

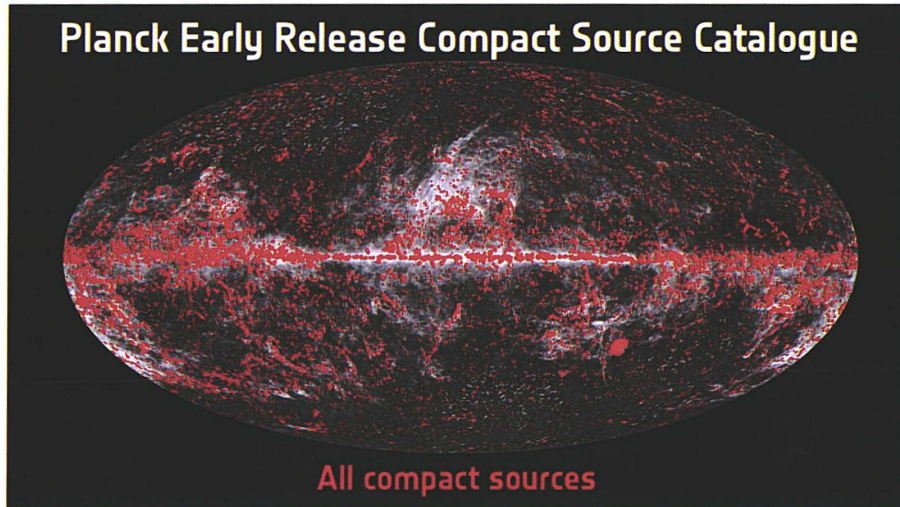


FIGURE 8.10 – Sources résolues relevées par Planck (janvier 2011)

Il reste bon nombre de sources, galactiques ou extra-galactiques, hors du masque galactique. Un certain nombre d'entre elles sont résolues. On ne peut pas leur appliquer un simple masque apodisé car cela serait trop coûteux ! Nous avons donc choisi de remplir les pixels pollués par ces sources à l'aide d'une méthode d'inpainting. Nous voulons reconstruire le signal, avec les bonnes propriétés statistiques, dans les trous de la carte à analyser.

8.2.1 Choix de la méthode de remplissage

8.2.1.1 Remplissage diffusif

Nous avons initialement utilisé un remplissage diffusif qui avait le mérite d'être simple et relativement efficace. Cependant, il consistait plus à lisser les trous qu'à les remplir ! En effet, ce procédé consiste à résoudre l'équation de la chaleur dans les trous suivant un algorithme itératif.

8.2.1.2 Réalisations contraintes gaussiennes : *Cork*

Nous avons depuis développé une méthode par réalisations contraintes gaussiennes qui va chercher l'information nécessaire dans les pixels voisins du trou. Cette méthode présente l'avantage de remplir les trous par du signal ayant les mêmes propriétés statistiques, au deuxième ordre, que le CMB observé. Elle ne devrait donc pas créer de champ moyen ni de biais supplémentaire dans le calcul de l'estimateur. Pour simplifier le problème, nous n'allons calculer la contrainte que sur un sous-ensemble de pixels autour des trous.

Avant de tester cette simplification, rappelons comment obtenir des réalisations contraintes gaussiennes. Nous décomposons la température

observée (et donc contaminée par les points sources) en deux parties :

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

où T_1 est le vecteur contenant les pixels pollués par les points sources, qui sont masqués et dans lesquels nous voulons restaurer le signal. Le vecteur T_2 contient quant à lui les autres pixels qui sont utilisés pour contraindre les valeurs des pixels masqués. Nous décomposons également la matrice de covariance de la température Σ suivant :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

La probabilité de T_1 connaissant la contrainte T_2 est une gaussienne centrée sur \tilde{T}_1 et de variance :

$$\tilde{T}_1 = -W_{11}^{-1}W_{12}T_2 = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}T_2 \quad (8.12)$$

$$\sigma^2 = W_{11}^{-1} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \quad (8.13)$$

où les W sont les compléments de Schur des blocs correspondants.

Nous suivons ensuite Hoffman et Ribak (1991) pour générer des réalisations contraintes gaussiennes dans les pixels masqués :

$$\hat{T}_1 = \tilde{T}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(T_2 - \tilde{T}_2) \quad (8.14)$$

où \tilde{T} est une réalisation aléatoire du spectre de puissance C_ℓ^{fid} fiduciel donné par *WMAP* ou *Planck* (ce peut être aussi une mesure filtrée du spectre de la carte, en dehors des trous).

Il faut donc a priori inverser la matrice de covariance de la température non masquée. C'est une opération très coûteuse si nous ne restreignons pas la contrainte donnée par le CMB aux pixels voisins du pixel à remplir. En pratique, nous n'utilisons donc que quelques pixels voisins du trou. Bien entendu, plus le nombre de pixels utilisés est grand, meilleure est la restauration du signal. La figure 8.11 montre la qualité du remplissage en fonction du paramètre "border" qui indique le nombre de pixels voisins utilisés autour des bords du trou à remplir. Le spectre de la carte ainsi nettoyée est comparé au spectre de la carte initiale, pour 50 simulations. Nous voyons qu'à partir de *border* = 10 (soit un bord de 34.4'), la différence entre les spectres de départ et restauré est inférieure à 0.5%. Par ailleurs, l'amélioration permise par une profondeur *border* = 20 (soit un bord de 68.7') est faible par rapport à la restauration obtenue pour *border* = 15 (soit un bord de 51.5'), tandis que le temps de calcul est plus que doublé. Nous opterons donc a priori pour *border* = 15 dans la suite¹.

Notre outil permet donc a priori de reconstruire un signal ayant le bon spectre dans les trous du masque de points sources mais pas d'y restaurer l'effet de lentille. En fonction du nombre de pixels utilisés au bord du trou, nous améliorons la reconstruction du signal. Bien entendu, cela est d'autant plus coûteux en temps de calcul que l'on va chercher loin. Toutefois, une fois cette opération réalisée, nous pouvons appliquer l'estimateur sans correction supplémentaire.

1. Pour de plus amples détails, voir le papier Benoît-Lévy et al. (2012) en annexe.

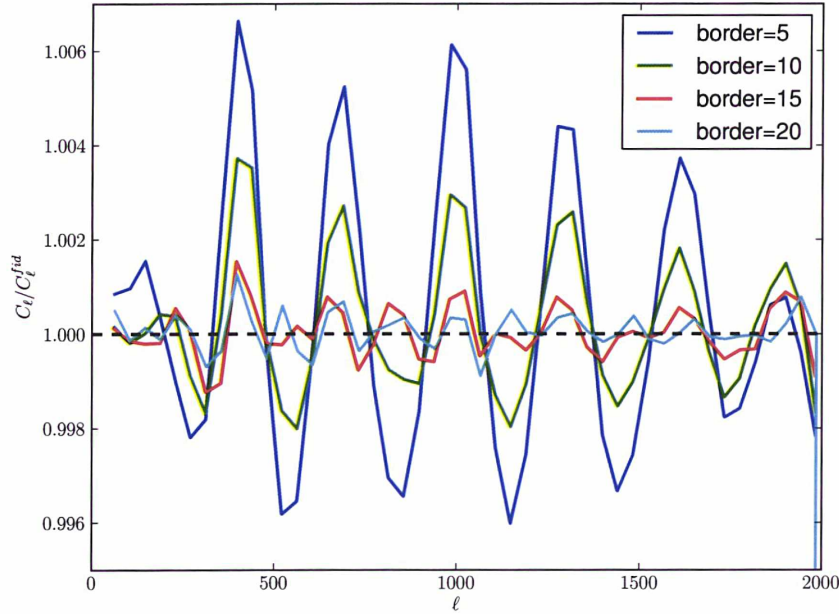


FIGURE 8.11 – Etude de la qualité de la reconstruction du spectre de puissance de 50 cartes lentillées dont les points sources sont remplis par Cork, pour différentes profondeurs de la zone utilisée comme contrainte. Le spectre de puissance de la carte remplie est rapporté au spectre de puissance de la carte initiale.

8.2.2 Effet du remplissage sur le spectre de lentille reconstruit

Il nous faut tenir compte du fait que la méthode de remplissage que nous avons présentée ne rétablit pas l'effet de lentille dans les pixels pollués. Notons f_{PS} la fraction du ciel qui n'est pas affectée par les points sources et dans laquelle l'effet de lentille demeure donc intact. La variance de notre estimateur fait alors apparaître des corrections en f_{PS}^2 . Plus précisément, le spectre C_L^ϕ dépend de ϕ^2 et sera donc affecté d'un facteur f_{PS}^2 , de même pour les biais N_L^1 :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle &= \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[f_{PS}^2 C_L^\phi + N_L^{(0,g)} + f_{PS}^2 N_L^{(1,g)} \right] \\ \langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{L'M'}^* \rangle &= \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[N_L^{(0,c)} + f_{PS}^2 N_L^{(1,c)} \right] \end{aligned}$$

D'où les estimées des spectres que nous cherchons :

$$\hat{C}_L^\phi = \frac{1}{f_{PS}^2} \left[\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle - N_L^{(0,g)} \right] - N_L^{(1,g)} \quad (8.15)$$

$$\hat{C}_L^{curl} = \frac{1}{f_{PS}^2} \left[\langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{L'M'}^* \rangle - N_L^{(0,c)} \right] - N_L^{(1,c)} \quad (8.16)$$

Le traitement des points sources induit donc une augmentation des barres d'erreur d'autant plus importante que le masque est grand.

8.2.3 Résultats

Nous utilisons pour cette analyse un masque de points sources construit pour les données Planck. Les sources compactes observées à 100, 143 et 217GHz relevées dans le *Early Release Compact Source Catalog* (Planck Collaboration et al. 2011b), sont masquées par un disque dont le rayon est trois fois la taille du lobe de la fréquence correspondante (soit environ 30', 21' et 15'). Rappelons que nous ne considérons que les sources situées en-dehors de la Galaxie, puisque nous masquerons ensuite cette zone. Cela se traduit par une valeur de $f_{PS} \approx 98\%$.

8.2.3.1 Champ de potentiel reconstruit

Nous avons comparé, figure 8.12, les cartes de potentiel reconstruit à partir d'une carte de température lentillée, avant et après avoir rempli les pixels pollués par les points sources avec *Cork*. La différence entre les deux champs reconstruits est mise en regard du masque de points sources utilisé. Cela nous permet de voir que les différences les plus importantes sont concentrées autour des trous du masque. Nous pouvons donc supposer que l'effet dominant de notre méthode de remplissage sera une perte de puissance dans l'effet de lentille au niveau des trous. Cela confirme quoi qu'il en soit que l'effet de lentille n'est pas reconstruit par notre méthode dans les 2% de la carte affectée par le masque de points sources.

8.2.3.2 Spectre du potentiel reconstruit

Nous présentons à la figure 8.13 le résultat de l'estimation de 50 cartes lentillées dont les pixels troués par le masque de points sources ont été remplis. Nous avons utilisé quatre nombres de pixels pris au bord du trou différents. Le pipeline de base présenté au chapitre 5 n'est donc modifié qu'à son démarrage : avant d'estimer le spectre des cartes lentillées, celles-ci sont inpaintées. Ce sont alors les spectres des cartes inpaintées qui sont utilisés pour les filtres de l'estimateur et pour simuler les cartes sans effet de lentille. Nous voyons d'abord que le procédé de remplissage des pixels pollués n'introduit pas de biais supplémentaire et est simplement pris en compte par une correction de la puissance du potentiel. De plus, le choix d'utiliser $border = 15$ est confirmé par l'adéquation entre les points obtenus pour cette valeur (points bleus foncés) et le cas de référence (points rouges) où les mêmes cartes ont été estimées avant d'être inpaintées. Notons enfin que les modes B ne sont absolument pas affectés par l'inpainting des cartes. Cela traduit sans doute le fait que ce n'est pas un test très sensible puisque même avec $border = 5$, ces modes sont bons.

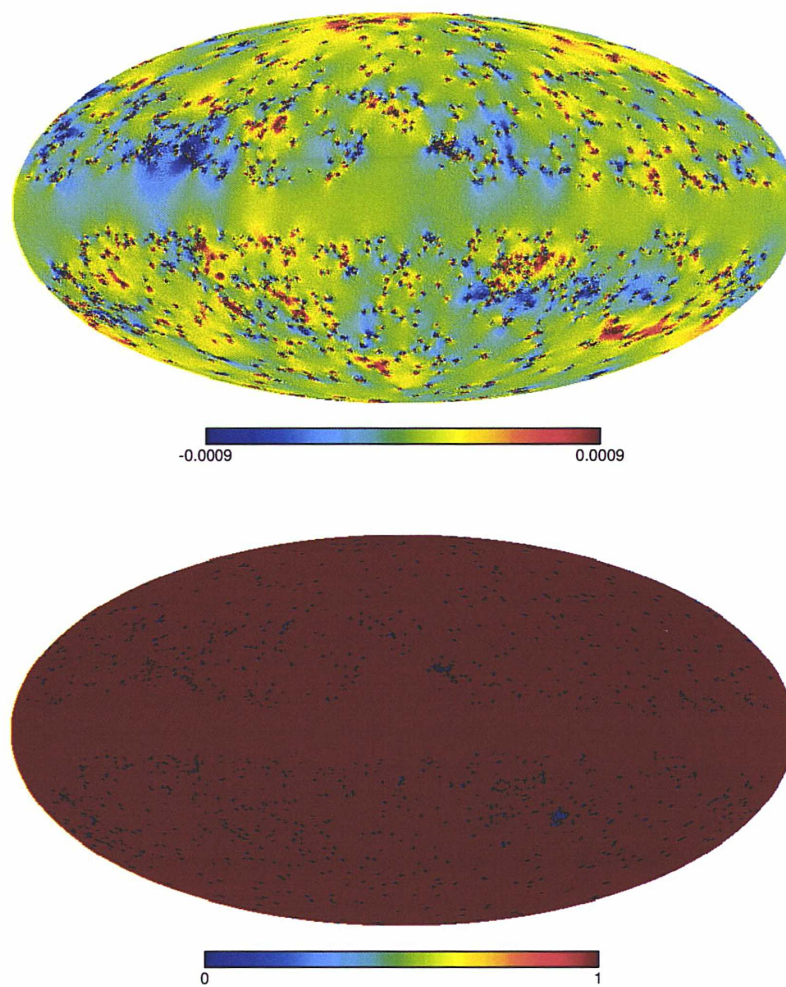


FIGURE 8.12 – Effet de l’*inpainting* sur la reconstruction d’une carte de potentiel. En haut : différence entre la carte de potentiel reconstruit à partir d’une carte lentillée de référence et le potentiel reconstruit à partir de la même carte *inpaintée* avec $\text{border} = 15$. L’échelle a été adaptée pour augmenter le contraste. En bas : masque de points sources utilisé pour l’*inpainting*.

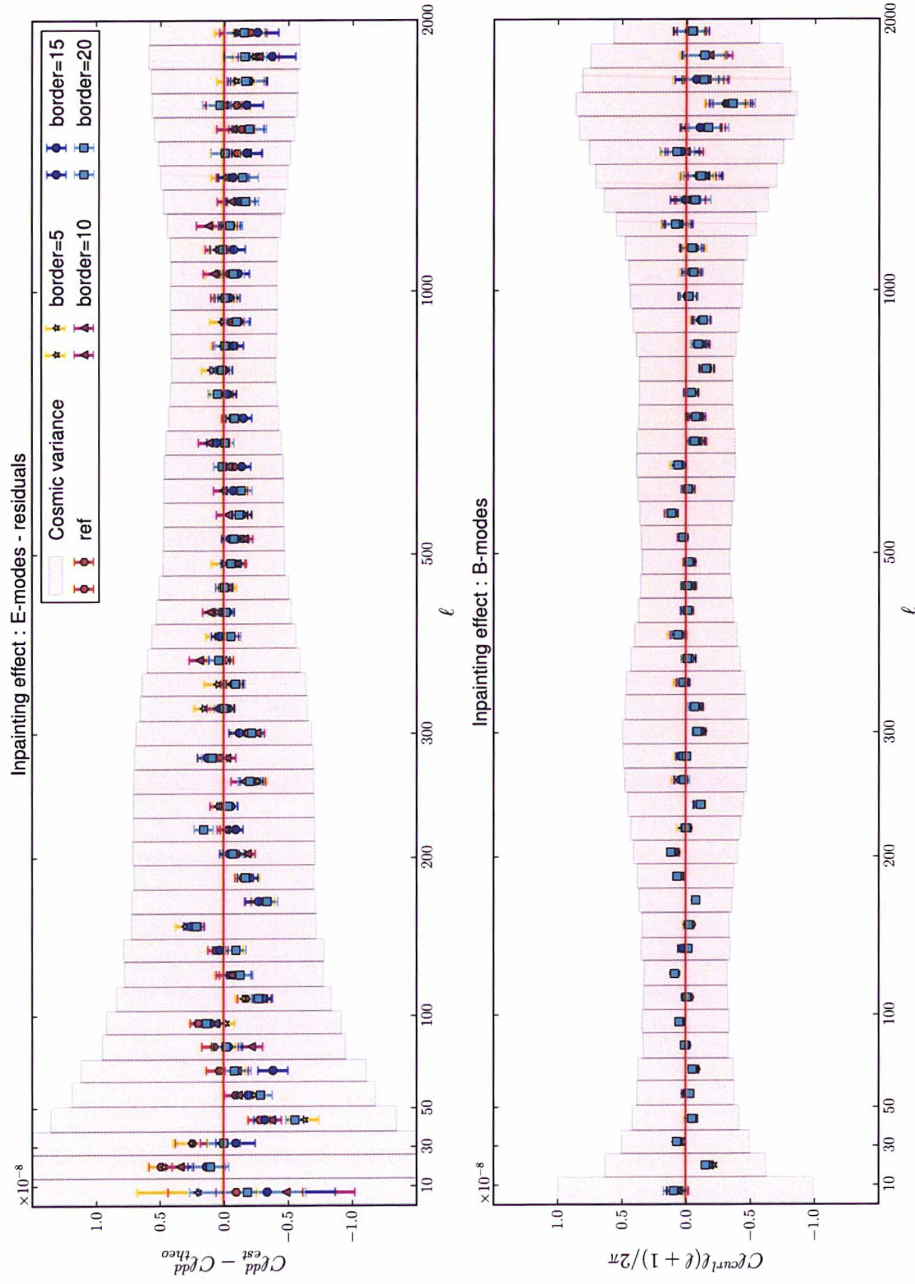


FIGURE 8.13 – Résidus des spectres des modes E et B moyens estimés sur 50 cartes lentillées et inpaintées, pour 4 profondeurs de contraintes différentes : 5 (jaune), 10 (violet), 15 (bleu) et 20 (cyan). Le cas de référence (cartes avant inpainting) est présenté en rouge. En haut : le résidu des modes E c'est-à-dire la différence entre le spectre de potentiel estimé et le spectre de potentiel théorique. En bas : les modes B dont la valeur attendue est zéro. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons présenté les méthodes mises en œuvre pour tenir compte de la présence d'avant-plans dans les données. Nous sommes ainsi capables d'utiliser l'estimateur quadratique en dehors des conditions idéales qui avaient été supposées au chapitre 6. Pour cela, il nous faut sacrifier les pixels situés au niveau de la galaxie en utilisant un masque apodisé dont l'effet est bien corrigé par le calcul d'un champ moyen. Nous devons aussi "nettoyer" les pixels pollués par les points-sources mais, dans ce cas, nous parvenons à reconstruire un signal de température avec les bonnes propriétés statistiques. Le signal de lentille n'y est en revanche pas restauré et il nous faut donc tenir compte de cette perte de puissance lors du calcul du spectre du potentiel.

Nous présentons à la figure 8.14 la moyenne des estimations réalisées sur nos 50 cartes lentillées, dont les trous ont été remplis, et affectées du masque galactique apodisé sur 10° . Plus précisément, ce sont les différences entre les spectres estimés et théoriques qui sont tracées. Nous voyons que le traitement conjoint des points-sources et de la Galaxie entraîne une dégradation de la qualité de l'estimation, en particulier du potentiel de lentille. Il semble qu'un biais apparaisse à haut ℓ , aussi bien pour les modes E que pour les modes B. Notons toutefois qu'à ces échelles ($\ell \sim 2000$), le signal sur bruit est si faible qu'il est inutile d'y chercher de l'information. Le premier bin des modes E est lui aussi hors des barres d'erreur fournies par la variance cosmique. Nous retiendrons cependant que pour $20 < \ell < 1200$ les spectres reconstruits sont tout à fait compatibles avec le signal théorique attendu, ce qui valide les méthodes présentées dans ce chapitre.

Notons que nous n'avons pas traité ici le cas des sources diffuses (non résolues et donc non identifiées dans les masques). Il faudrait aussi tenir compte d'éventuels résidus d'avant-plans de la Galaxie. Nous laissons ces deux aspects pour une étude ultérieure et nous allons nous intéresser, au chapitre suivant, aux effets systématiques liés à l'instrument cette fois, en particulier, celui de la couverture anisotrope du ciel.

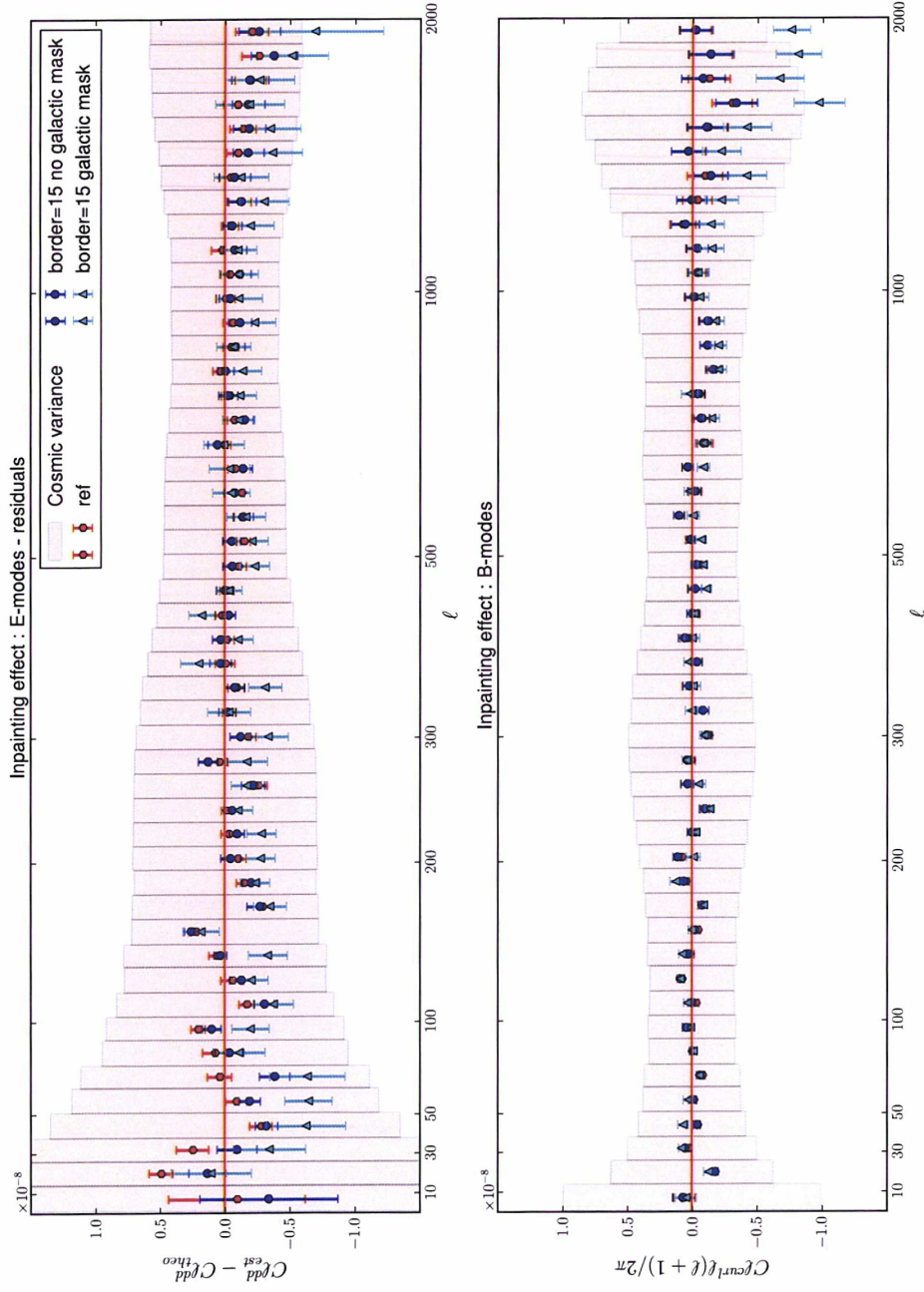


FIGURE 8.14 – Résidus des moyennes des spectres des modes E (en haut) et B (en bas) estimés sur 50 cartes lentillées pour 3 cas : le cas de référence sans avant-plan (rouge), le traitement des points-sources seuls (bleu) et le traitement des points-sources et de la Galaxie (cyan).

EFFETS INSTRUMENTAUX

9

SOMMAIRE

10.1	RÉSULTATS SUR DES SIMULATIONS	133
10.1.1	Convergence du pipeline	134
10.1.2	Reconstruction sur une carte	135
10.2	RÉSULTATS SUR LES DONNÉES PLANCK	135
10.2.1	Cartes en fréquence DX8	137
10.2.2	Cartes en fréquence DX9	141
10.2.3	Comparaison aux autres expériences actuelles	143

LES hypothèses qui sont faites sur les caractéristiques de l'instrument sont une importante simplification de la réalité : le lobe instrumental est loin d'être parfaitement circulaire d'une part et la couverture du ciel est, d'autre part, assez inhomogène. Il faut donc tenir compte de ces écarts aux conditions d'optimalité des estimateurs et développer des méthodes qui permettent d'en tenir compte raisonnablement. Nous ne présenterons ici qu'une étude concernant le bruit inhomogène. En ce qui concerne l'asymétrie du lobe, nous renvoyons le lecteur à Hanson et al. (2010b).

9.1 DÉFINITION ET MODÉLISATION DU BRUIT INHOMOGÈNE

La stratégie de pointage de Planck ne permet pas de voir tous les points du ciel pendant le même temps. C'est ce que traduisent les cartes de "hit" de Planck HFI Core Team (2011) présentées à la figure 9.1. Cela implique que le bruit par pixel n'est pas le même en tout point de la carte (figure 9.2). Nous faisons toutefois toujours l'hypothèse que le bruit n'est pas corrélé entre les pixels et qu'il est, par conséquent, complètement défini par sa variance dans chaque pixel.

9.1.1 Calcul analytique du champ moyen

Pour comprendre la réponse de l'estimateur que nous avons construit (équation 6.8) à une carte de CMB comportant du bruit inhomogène, décomposons la température observée $\tilde{\Theta}^{obs}(\vec{n})$ suivant :

$$\tilde{\Theta}^{obs}(\vec{n}) = \tilde{\Theta}(\vec{n}) + N(\vec{n}) \quad (9.1)$$

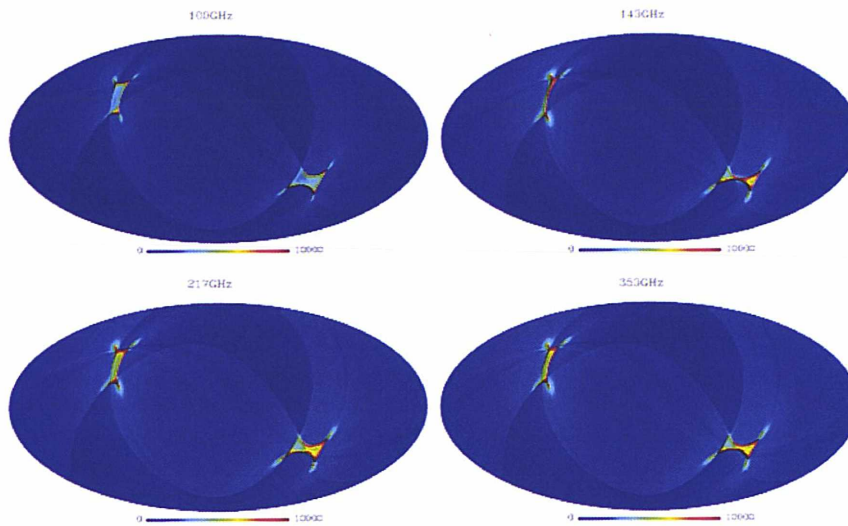


FIGURE 9.1 – Cartes du nombre de coups par pixel pour les détecteurs de Planck de fréquences 100, 143, 217 et 353GHz. $N_{\text{side}} = 2048$.

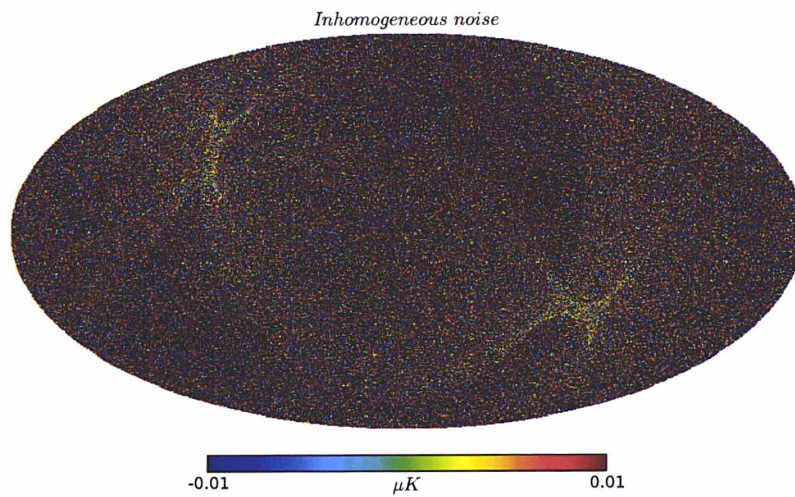


FIGURE 9.2 – Simulation d'une carte de bruit inhomogène obtenue à partir d'une carte de "hit" et de la variance du niveau du bruit. $N_{\text{side}} = 2048$.

où $\hat{\Theta}(\vec{n})$ correspond donc à la température du CMB (éventuellement entachée d'un certain nombre d'avants-plans ou effets astrophysiques) et $N(\vec{n})$ est le bruit du détecteur qui peut lui-même être décomposé en une composante homogène $N_H(\vec{n})$ et une composante inhomogène $N_I(\vec{n})$.

L'estimateur \hat{g} fait intervenir le moment à deux points de la température. Calculons donc le moment à deux points de la composante de bruit, à l'aide de la définition des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques (équation B.9) :

$$\begin{aligned} \langle N_{\ell_1 m_1} N_{\ell_2 m_2} \rangle &= \left\langle \int d\vec{n} N(\vec{n}) Y_{\ell_1 m_1}^*(\vec{n}) \int d\vec{n}' N(\vec{n}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\vec{n}') \right\rangle \\ &= \int d\vec{n} \int d\vec{n}' \langle N(\vec{n}) N(\vec{n}') \rangle Y_{\ell_1 m_1}^*(\vec{n}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\vec{n}') \end{aligned}$$

Or, nous avons supposé que le bruit n'était pas corrélé d'un pixel à l'autre. Il est donc entièrement déterminé par sa variance V :

$$\langle N(\vec{n}) N(\vec{n}') \rangle = V(\vec{n}) \delta(\vec{n} - \vec{n}') \quad (9.2)$$

D'où nous déduisons, en notant $V_{\lambda\mu}$ les coefficients harmoniques de V et en utilisant l'intégrale de Gaunt (équation C.4) :

$$\begin{aligned} \langle N_{\ell_1 m_1} N_{\ell_2 m_2} \rangle &= \int d\vec{n} \sum_{\lambda\mu} V_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\vec{n}) Y_{\ell_1 m_1}^*(\vec{n}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\vec{n}) \\ &= \sum_{\lambda\mu} V_{\lambda\mu} (-1)^\mu \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_1 & \ell_2 \\ -\mu & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer l'espérance de la réponse de l'estimateur à une telle carte de bruit :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \rangle_{Noise} &= -i A_L (-1)^M \sum_{\lambda\mu} (-1)^\mu V_{\lambda\mu} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \\ &\times f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} p_{L\ell_1\ell_2}^+ \\ &\times \begin{pmatrix} \lambda & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_1 & \ell_2 \\ -\mu & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore, d'après la propriété C.11 :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \rangle_{Noise} &= -i A_L V_{LM} \sum_{\ell_1 \ell_2} \frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} p_{L\ell_1\ell_2}^+ \\ &\times \begin{pmatrix} \lambda & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_{\lambda L} \delta_{\mu M} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Nous obtenons ainsi une expression complètement déterminée par la variance du bruit. Il s'agit d'un champ moyen, qui peut a priori être calculé analytiquement. Notons que nous avons ici une expression différente de celle proposée dans Hanson et al. (2009) puisque nous avons utilisé notre propre écriture de l'estimateur. L'idée est bien entendu la même malgré cela.

9.1.2 Calcul analytique du biais du spectre de puissance

A la différence du masque galactique qui est modélisé par un facteur multiplicatif, le bruit inhomogène se modélise par un terme additionnel de la température observée. Même si ce bruit n'est pas corrélé avec la température, il entraîne la création d'un biais supplémentaire dans l'estimateur quadratique de l'effet de lentille. En effet, la variance de cet estimateur dépend du moment à quatre points de la température observée que nous pouvons écrire ici :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_1^{obs} \tilde{\Theta}_2^{obs} \tilde{\Theta}_3^{obs*} \tilde{\Theta}_4^{obs*} \rangle &= \langle (\tilde{\Theta}_1 + N_1)(\tilde{\Theta}_2 + N_2)(\tilde{\Theta}_3^* + N_3^*)(\tilde{\Theta}_4^* + N_4^*) \rangle \\ &= \langle \tilde{\Theta}_1 \tilde{\Theta}_2 \tilde{\Theta}_3^* \tilde{\Theta}_4^* \rangle + \langle N_1 N_2 N_3^* N_4^* \rangle \\ &\quad + \langle \tilde{\Theta}_1 \tilde{\Theta}_2 \rangle \langle N_3^* N_4^* \rangle + 5perms. \end{aligned}$$

Le premier terme donne le résultat de l'estimateur dans le cas idéal, le second donne la contribution du champ moyen dû au bruit inhomogène et les six autres vont ainsi constituer un biais supplémentaire. Son calcul, que nous ne reporterons pas ici, conduit à une expression analytique compliquée faisant intervenir des symboles de Wigner-6j, etc. Nous allons détailler dans la partie suivante la méthode qui nous permet d'estimer ce biais numériquement. Nous avons, à ce stade, montré que :

$$\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[C_L^\phi + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} + N_L^2 + C_L^{(MF)} + C_L^{(bias)} \right] \quad (9.4)$$

9.2 TRAITEMENT DU BRUIT INHOMOGÈNE DANS LES DONNÉES

Nous nous sommes de nouveau donné 50 cartes lentillées dont le bruit a toujours un spectre de bruit blanc ($N = 50\mu K$) mais dont la distribution n'est plus homogène sur le ciel. Elle est déterminée par la carte du nombre de coups par pixel (carte de "hits" en anglais). Nous avons utilisé ici celle de la mission nominale pour les détecteurs à 217GHz (DX9-v53).

9.2.1 Simulation de cartes de bruit inhomogène

Pour estimer numériquement le champ moyen et le biais du spectre de puissance, nous devons simuler des cartes de bruit ayant les bonnes propriétés c'est-à-dire le bon spectre et une variance par pixel V_i donnée par :

$$V_i = \frac{1}{H_i} \left[\frac{1}{N_{pix}} \sum_j \frac{1}{H_j} \right]^{-1} \quad (9.5)$$

où H_i désigne la valeur de la carte de hit H dans le pixel i . Nous traduisons ici le fait que plus un pixel aura été vu, moins sa variance sera grande, le terme du numérateur assurant une normalisation unitaire.

Deux possibilités s'offrent à nous pour simuler des cartes de bruit inhomogène :

- Soit nous tirons N_{map} ayant la variance par pixel donnée par la carte de "hit", puis nous leur imposons, dans l'espace des harmoniques, le spectre attendu. Les cartes auront alors le bon spectre, mais une variance par pixel légèrement différente de celle attendue.
- Soit nous créons N_{map} réalisations gaussiennes du spectre de bruit que nous pondérons ensuite par la racine carrée de cette variance. Les cartes n'auront alors pas exactement le bon spectre mais aurons la bonne variance par pixel.

Notons que pour le bon fonctionnement du calcul Monte-Carlo des biais, il est a priori préférable de simuler des cartes ayant le bon spectre.

D. Hanson a proposé d'améliorer cette approche en simulant du bruit inhomogène à "deux dimensions" (*bruit 2D*). Pour cela, il utilise la carte de variance du bruit dans l'espace des harmoniques et construit de larges bandes en angle solide (en m). La distribution jointe ainsi obtenue permet de tirer des réalisations de bruit ayant toujours le bon spectre et dont la variance est plus proche de celle de départ. Nous verrons l'application de cette méthode dans les résultats présentés à la fin du chapitre 10.

9.2.2 Calcul du champ moyen $\phi^{(MF)}$

Nous avons montré précédemment que le champ moyen dû au bruit inhomogène correspond en fait à la réponse de l'estimateur au bruit seul de la carte. Il peut en principe être calculé analytiquement. En pratique, nous préférons en faire une estimation numérique par Monte-Carlo sur $N_{map} = 100$ simulations de cartes de CMB non lentillées, de même spectre que la carte de données et contenant du bruit inhomogène de même variance :

$$\hat{\phi}^{(MF)} = \frac{1}{N_{map}} \sum_i \hat{\phi}_i^U \quad (9.6)$$

La reconstruction de l'effet de lentille est totalement dominée par le bruit inhomogène si on n'en tient pas compte. C'est ce dont témoignent la carte du potentiel reconstruit à partir d'une carte lentillée contenant du bruit inhomogène et la carte de champ moyen associée à ce bruit, présentées à la figure 9.3.

9.2.3 Calcul du biais $C_L^{(bias)}$

Nous avons également établi à l'équation 9.4 que le moment à quatre points de la partie inhomogène du bruit crée un biais supplémentaire dans le spectre de puissance du potentiel de lentille reconstruit. La figure 9.3 a montré qu'il fallait d'abord soustraire le champ moyen. Voyons à présent l'ordre de grandeur du biais supplémentaire en étudiant, figure 9.4, le spectre de puissance du potentiel de lentille reconstruit sur 50 cartes lentillées, avec ou sans correction du champ moyen et en calculant le biais gaussien N_L^0 analytiquement. Nous vérifions bien que la soustraction du champ moyen permet une meilleure reconstruction des petits modes. En revanche, dans les deux cas, il est clair qu'un biais supplémentaire positif n'a pas été pris en compte.

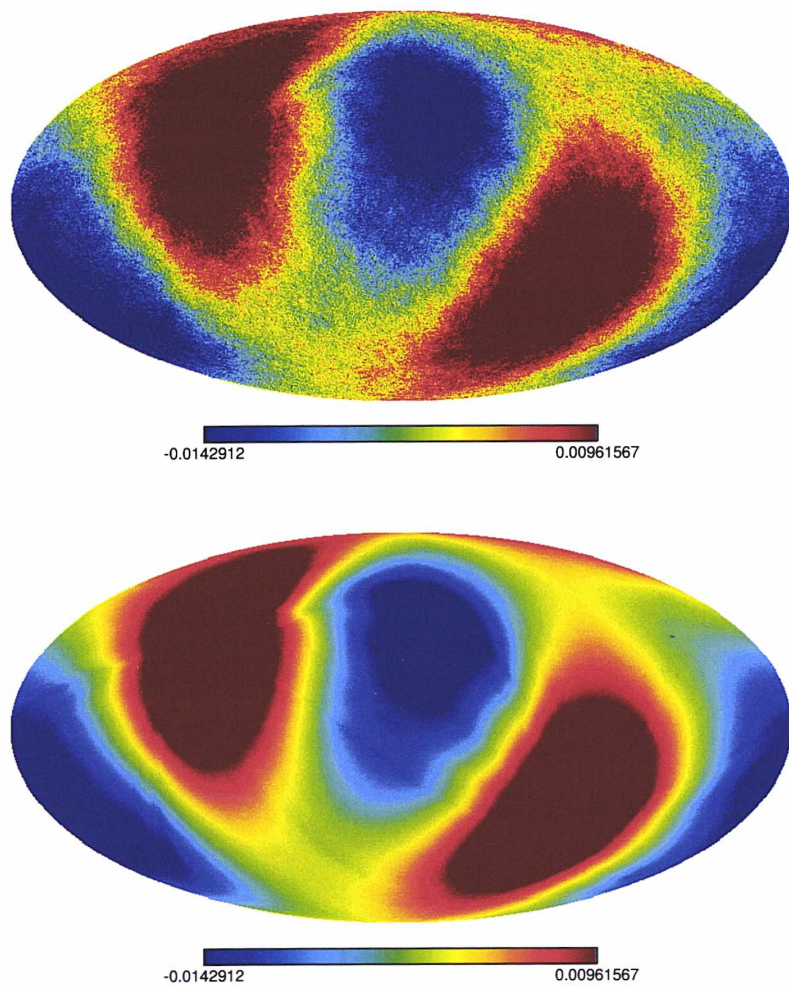


FIGURE 9.3 – En haut : potentiel de lentille estimé sur une carte contenant du bruit inhomogène et en bas : champ moyen correspondant, calculé sur 100 cartes non lentillées, de même spectre que la carte de données et contenant le même niveau de bruit inhomogène (sa distribution a la même variance que celle du bruit de la carte de donnée). Carte du potentiel de lentille reconstruit à partir d'une carte de CMB contenant du bruit inhomogène

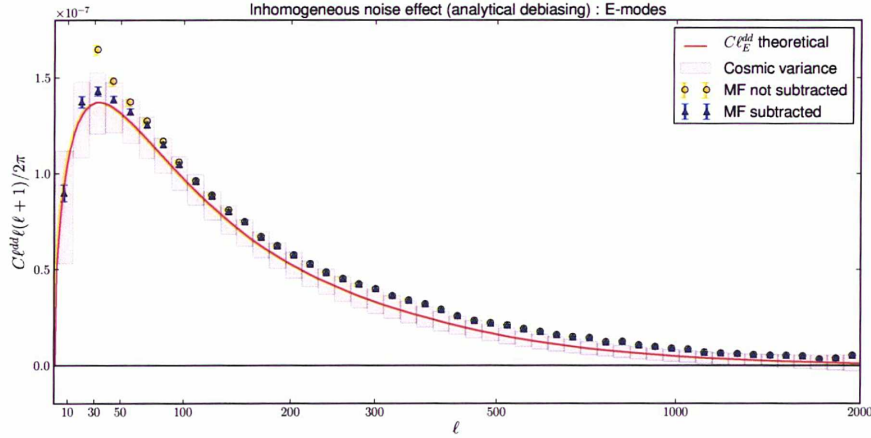


FIGURE 9.4 – Spectre du potentiel de lentille reconstruit sur 50 cartes lentillées contenant du bruit inhomogène, avec (points bleus) ou sans (points jaunes) correction du champ moyen. Celui-ci est calculé sur 100 cartes non lentillées de même spectre et contenant du bruit inhomogène de même variance. Le biais gaussien N_L^0 est calculé analytiquement. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins.

9.2.3.1 Etude analytique

Calculons, pour mettre en évidence ce biais, le spectre de puissance du potentiel estimé sur une carte, corrigé du champ moyen :

$$\hat{C}_L^{(E)} = \left\langle \left(\hat{\phi} - \hat{\phi}^{(MF)} \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{\phi}^2 \rangle + \langle \hat{\phi}^{(MF)^2} \rangle - 2 \langle \hat{\phi} \hat{\phi}^{(MF)} \rangle$$

Explicitons chacun de ces trois termes, à l'aide de l'équation 9.6 donnant le champ moyen $\hat{\phi}^{(MF)}$, en notant $C_L^{b_2}$ le biais venant du moment à deux points de la partie inhomogène du bruit et $C_L^{b_4}$ le biais venant de son moment à quatre points :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}^2 \rangle &= C_L^\phi + N_L^0 + N_L^1 + C_L^{b_2} + C_L^{b_4} \\ \langle \hat{\phi}^{(MF)^2} \rangle &= \frac{1}{N_{map}^2} \sum_{ij} \langle \hat{\phi}^{U_i} \hat{\phi}^{U_j} \rangle = \frac{1}{N_{map}^2} \left[\sum_{i=j} \langle (\hat{\phi}^{U_i})^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \hat{\phi}^{U_i} \hat{\phi}^{U_j} \rangle \right] \\ &= \frac{1}{N_{map}^2} \left[N_{map} (N_L^0 + C_L^{b_2} + C_L^{b_4}) + N_{map} (N_{map} - 1) C_L^{b_2} \right] \\ &= \frac{1}{N_{map}} (N_L^0 + C_L^{b_4}) + C_L^{b_2} \\ \langle \hat{\phi} \hat{\phi}^{(MF)} \rangle &= \frac{1}{N_{map}} \sum_i \langle \hat{\phi} \hat{\phi}^{U_i} \rangle = C_L^{b_2} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\hat{C}_L^{(E)} = C_L^\phi + \mathcal{N}_L^0 + N_L^1 \quad (9.7)$$

où nous avons ainsi défini un "biais gaussien" (au sens de réponse de l'estimateur à la partie gaussienne de la carte) \mathcal{N}_L^0 qui tient compte du moment à quatre points créé par la partie inhomogène du bruit :

$$\mathcal{N}_L^0 = \left(N_L^0 + C_L^{b_4} \right) \left(1 + \frac{1}{N_{map}} \right) \quad (9.8)$$

Nous calculons ce nouveau biais \mathcal{N}_l^0 par Monte-Carlo sur un autre jeu de $N_{map} = 100$ cartes non lentillées simulées de la même façon que pour le champ moyen. Plus précisément, l'estimée de chacune de ces cartes donne un potentiel $\hat{\phi}^{U_i}$ qui est corrigé du champ moyen $\hat{\phi}^{(MF)}$. La moyenne des N_{map} spectres de potentiel ainsi obtenus est l'estimation numérique de notre biais :

$$\mathcal{N}_l^0 = \frac{1}{N_{map}} \sum_i \left\langle \left(\hat{\phi}^{U_i} - \hat{\phi}^{(MF)} \right)^2 \right\rangle \quad (9.9)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\hat{\phi}^{U_i} - \hat{\phi}^{(MF)} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \left(\hat{\phi}^{U_i} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \hat{\phi}^{(MF)^2} \right\rangle - 2 \left\langle \hat{\phi}^{U_i} \hat{\phi}^{(MF)} \right\rangle \\ &= N_L^0 + C_L^{b_2} + C_L^{b_4} + \frac{1}{N_{map}} \left(N_L^0 + C_L^{b_4} \right) + C_L^{b_2} - 2C_L^{b_2} \\ &= \left(N_L^0 + C_L^{b_4} \right) \left(1 + \frac{1}{N_{map}} \right) = \mathcal{N}_L^0 \end{aligned}$$

9.2.3.2 Application aux données

Lorsque nous appliquons cette méthode pour calculer le biais \mathcal{N}_l^0 à partir de deux jeux de 100 cartes non lentillées, nous obtenons les points cyans de la figure 9.5. La reconstruction du spectre de potentiel de lentille sur 50 cartes lentillées inhomogènes y est comparée à celle obtenue pour les mêmes 50 cartes lentillées homogènes (à niveau de bruit égal). Dans ce cas de référence, les biais sont tous calculés analytiquement. Les barres d'erreur sont naturellement légèrement augmentées à cause du calcul numérique des biais pour le cas qui nous intéresse. Les modes E de l'estimateur sont cependant tout à fait comparables au cas de référence, ce qui valide notre approche pour prendre en compte l'inhomogénéité du bruit. Les modes B pourraient présenter une légère perte de puissance à très haut ℓ . Notons ici que ces modes sont calculés en faisant simplement la différence entre l'estimée des cartes lentillées et la moyenne des estimées des cartes non lentillées (il n'y a pas de champ moyen pour les modes B).

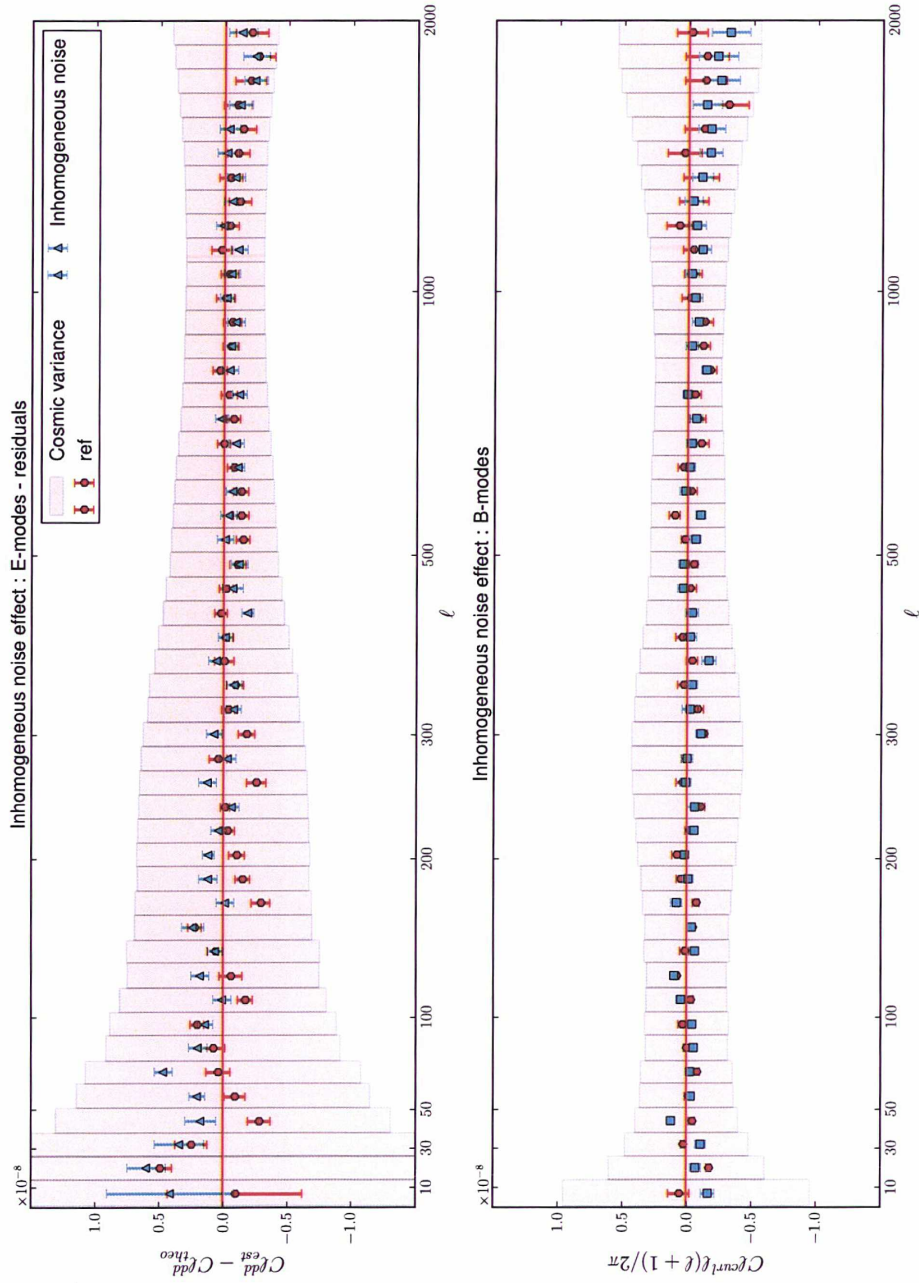


FIGURE 9.5 – En haut : Résidu du spectre des modes E reconstruits à partir de 50 cartes lentillées contenant du bruit homogène (cas de référence, points rouges) ou du bruit inhomogène (points cyans). En bas : Spectres des modes B reconstruits.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons présenté dans ce chapitre, une méthode robuste pour inclure l'effet des inhomogénéités dans les données, créées par la couverture anisotrope du ciel. Contrairement aux effets astrophysiques présentés au chapitre précédent, le bruit inhomogène doit être traité en deux temps :

- Soustraction du champ moyen dans la carte de potentiel estimé, calculé par Monte-Carlo sur 100 cartes non lentillées de même spectre et dont le bruit a la même variance.
- Soustraction d'un biais supplémentaire dans le spectre de potentiel estimé, créé par le moment à quatre points de la partie inhomogène du bruit et lui aussi calculé par Monte-Carlo sur 100 autres cartes non lentillées de mêmes caractéristiques.

Nous nous sommes placés pour cette étude dans le cas simple où le bruit reste blanc. Nous verrons au chapitre suivant, que s'il est coloré un tel traitement s'applique encore. Nous y présenterons aussi la synthèse des différents effets étudiés jusqu'ici : masque galactique, remplissage des pixels pollués par les points sources et couverture anisotrope du ciel par l'instrument.

LES méthodes que nous avons développées et présentées aux chapitres précédents ont été mises en oeuvre sur les données Planck, au fur et à mesure qu'elles ont été disponibles. Elles ont systématiquement été testées sur des simulations ayant des caractéristiques semblables mais simplifiées. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus sur des simulations contenant du bruit inhomogène, des points sources et un avant-plan galactique. Nous montrons ensuite l'application du pipeline développé aux données DX8. Enfin, nous finissons sur l'état des résultats obtenus par la collaboration au moment de la rédaction de ce manuscrit.

10.1 RÉSULTATS SUR DES SIMULATIONS

Nous nous sommes donné, pour tester notre pipeline, un jeu de 100 cartes lentillées ("cartes de données"), tirées sous les spectres *WMAP*, contenant du bruit inhomogène coloré (spectre de bruit qui n'est plus plat). Nous disposons, parallèlement, des spectres du lobe et du bruit ainsi que de 100 cartes de réalisations de bruit. La démarche adoptée est la suivante :

1. Prétraitement
 - (a) Remplir les pixels correspondant aux points sources dans les cartes de données à l'aide de *Cork* pour $border = 15$. Nous fournissons au code un spectre de CMB fiduciel, un spectre analytique du lobe, le spectre du bruit. Nous supposons alors que le spectre des cartes est bien restauré.
 - (b) Appliquer le masque galactique, apodisé sur 10° .
2. Estimer les cartes de données en utilisant les spectres fiduciels fournis pour le filtrage. Nous obtenons des cartes de déflexion $\hat{\phi}$.
3. Calcul du champs moyen et du biais gaussien
 - (a) Simuler deux jeux de $N_{map} = 50$ cartes non lentillées tirées sous le spectre fiduciel.
 - (b) Leur appliquer le lobe et leur ajouter une réalisation de bruit inhomogène.
 - (c) Leur appliquer le masque galactique.

- (d) Estimer ces cartes dont le spectre est ainsi identique aux cartes de données. Nous obtenons de nouveau des cartes de déflexion $\hat{\phi}^U$.
- (e) A partir du premier jeu de cartes, nous calculons le champ moyen dû au bruit inhomogène et au masque galactique :

$$\hat{\phi}^{(MF)} = \frac{1}{N_{map}} \sum_i \hat{\phi}_i^U$$

- (f) A partir de l'autre jeu de cartes, nous calculons le biais qui apparait dans le moment à quatre points en soustrayant le champ moyen aux cartes de déflexions obtenues puis en prenant la moyenne :

$$\hat{\mathcal{N}}_L^0 = \frac{1}{N_{map}} \sum_i \langle (\hat{\phi}_i^U - \hat{\phi}^{(MF)})^2 \rangle$$

4. Soustraire le champ moyen aux cartes de déflexion obtenues sur les données, puis en prendre le spectre hors du masque galactique avec *Spice* : $\hat{\mathcal{C}}_L^E = \langle (\hat{\phi} - \hat{\phi}^{(MF)})^2 \rangle$, corriger encore du facteur $f_{sky}^{(PS)}$ dû au remplissage des pixels pollués qui ne restaure pas l'effet de lentille.
5. Soustraire le biais calculé $\hat{\mathcal{N}}_L^0$, corriger du facteur $f_{sky}^{(gal)}$ dû au masque galactique et soustraire les biais d'ordres supérieurs N_L^1 et N_L^2 qui ont été calculés analytiquement.

Le spectre de puissance estimé du potentiel de lentille s'écrit donc :

$$\hat{\mathcal{C}}_L^\phi = \frac{1}{f_{sky}^{(gal)}} \left(\frac{\hat{\mathcal{C}}_L^E}{f_{sky}^{(PS)^2}} - \hat{\mathcal{N}}_L^0 \right) - N_L^1 - N_L^2 \quad (10.1)$$

10.1.1 Convergence du pipeline

Nous avons d'abord testé ce pipeline sur 50 cartes lentillées, en n'utilisant que 25 cartes non lentillées pour les Monte-Carlo, dans 4 configurations différentes reprises sur la figure 10.1 :

- Traitement du bruit inhomogène seul (bleu)
- Traitement du bruit inhomogène et du masque galactique (violet)
- Traitement du bruit inhomogène et du remplissage des points sources (vert)
- Traitement du bruit inhomogène, du masque galactique et du remplissage des points sources (cyan)

Nous voyons sur cette figure que la présence simultanée de bruit inhomogène et du masque galactique dans les cartes augmente le bruit de la reconstruction (points violets). L'effet conjoint de l'inpainting et du bruit inhomogène (points verts) est quant à lui moins marqué. Lorsque ces trois systématiques sont traitées (points cyans), la différence entre le spectre de potentiel reconstruit et le spectre théorique est compatible avec zéro. Nous validons ainsi, par cette première étude, notre aptitude à traiter ces trois systématiques conjointement. Leur présence simultanée ne semble pas introduire de corrélation supplémentaire.

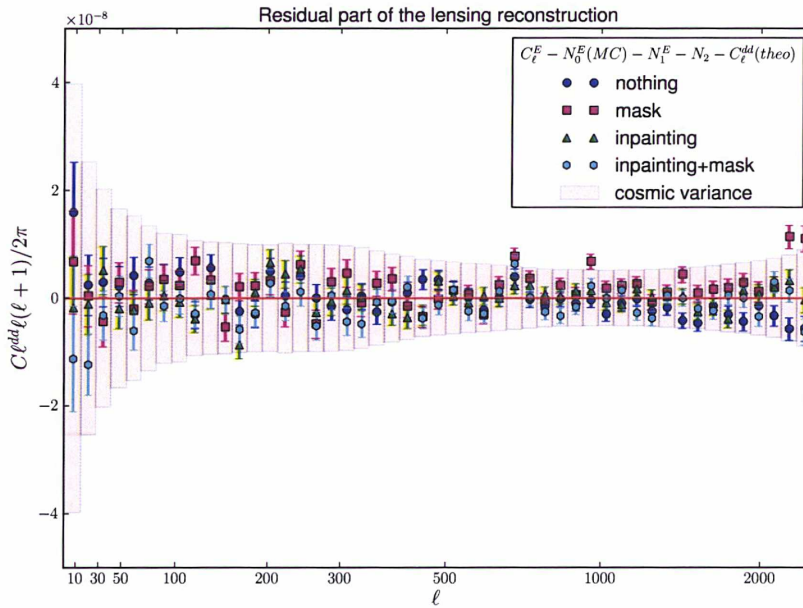


FIGURE 10.1 – Comparaison des résidus du spectre de potentiel reconstruit pour le traitement du bruit inhomogène seul (bleu), du bruit inhomogène et du masque galactique (violet), du bruit inhomogène et du remplissage des points sources (vert), du bruit inhomogène, du masque galactique et du remplissage des points sources (cyan). Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins.

Nous avons ensuite appliqué ce pipeline aux 100 cartes lentillées et fait la moyenne des spectres reconstruits pour les modes E et les modes B de l'estimateur de lentille. Ces spectres moyens sont présentés à la figure 10.2. Celle-ci confirme la robustesse et la convergence de notre outil puisque les spectres obtenus sont compatibles avec les spectres théoriques.

10.1.2 Reconstruction sur une carte

Nous présentons ici les résultats obtenus à partir d'une seule carte lentillée afin de montrer ce que nous pouvons faire *au mieux* sur les données réelles de Planck. Toutes les systématiques ne sont en effet prises en compte ici.

La figure 10.3 est la preuve que les biais créés par les systématiques que nous étudions sont bien corrigés. Il y a de la dispersion à cause des incertitudes sur les biais gaussiens (ordre 0), en particulier pour les modes B. De plus, le bruit devient de plus en plus important à hauts ℓ . Nous ne pourrions sans doute pas obtenir d'information sur l'effet de lentille au-delà de $\ell = 1000$.

10.2 RÉSULTATS SUR LES DONNÉES PLANCK

Après avoir validé nos méthodes sur des simulations, nous les avons appliquées aux données Planck au fur et à mesure qu'elles ont été dispo-

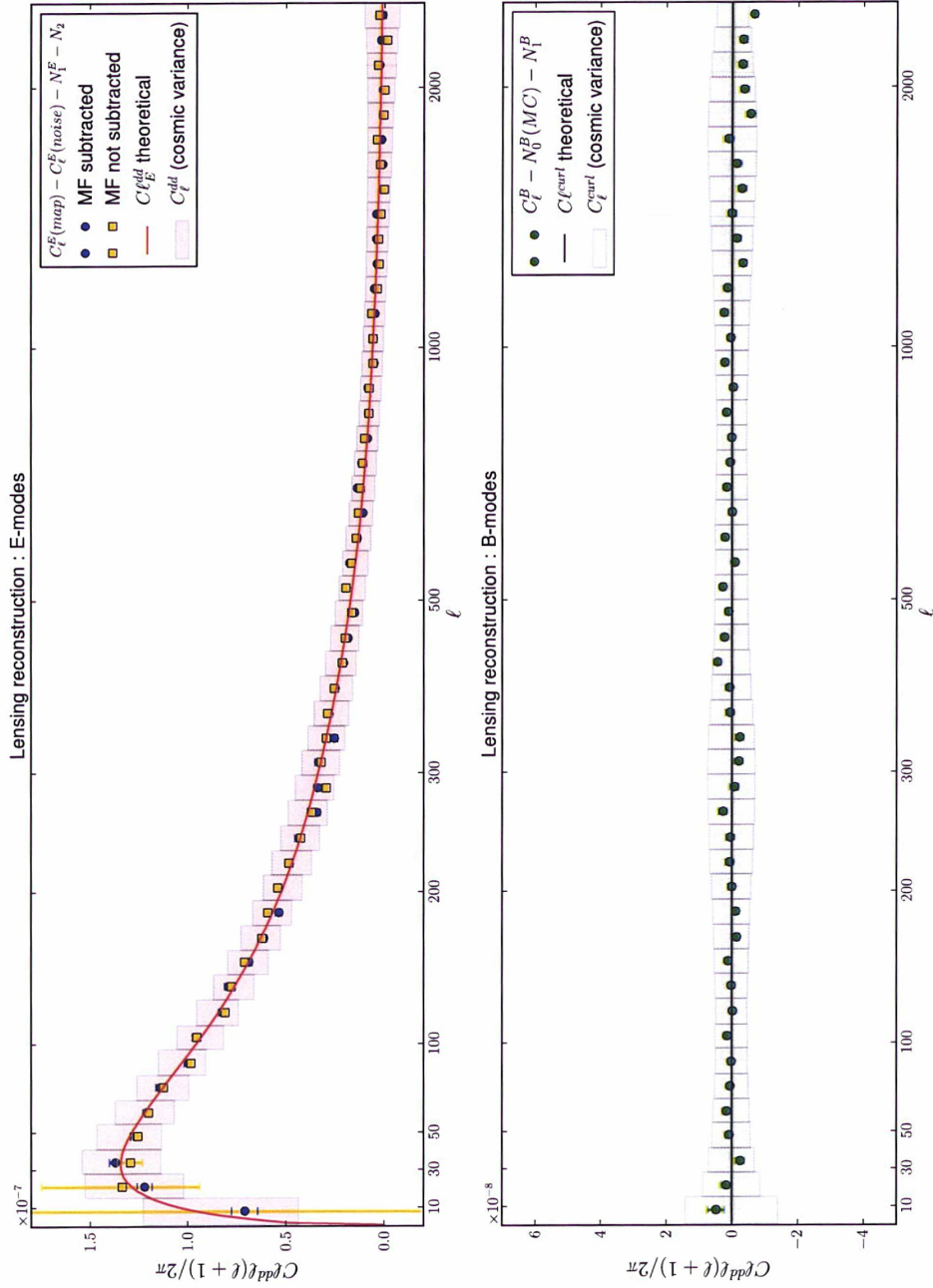


FIGURE 10.2 – Spectres des modes E (en haut) et B (en bas) du potentiel de lentille reconstruits sur 100 cartes contenant du bruit inhomogène, dont les points sources ont été remplis par réalisations contraintes gaussiennes et dont la galaxie a été masquée. Les points jaunes sont obtenus sans soustraire le champ moyen, les points bleus en ont été corrigés. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins.

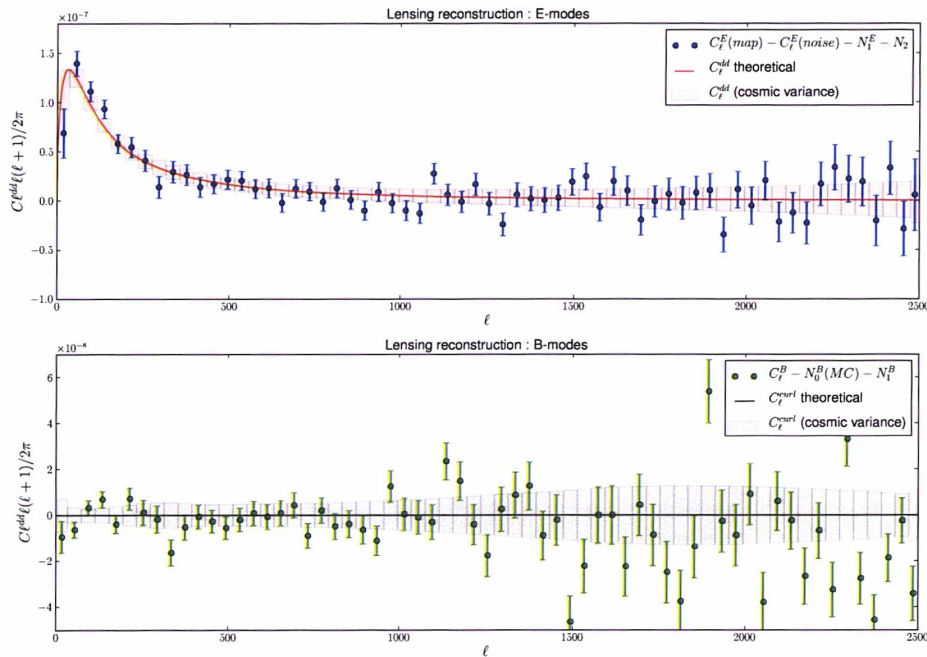


FIGURE 10.3 – Spectres du potentiel de lentille reconstruit sur une carte contenant du bruit inhomogène, dont les points sources ont été remplis par réalisations contraintes gaussiennes et dont la galaxie a été masquée. Le champ moyen a été corrigé pour les modes E (en haut). Les modes B sont présentés dans le panneau du bas. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion dans les bins.

nibles. En particulier, nous avons travaillé à partir des cartes en fréquence à 100, 143 et 217GHz.

10.2.1 Cartes en fréquence DX8

Nous disposons, pour la version "DX8", d'un certain nombre de produits tels que :

- Des cartes des premier et second relevés faits par Planck notées "FIRST" et "LAST".
- Des cartes de "hit" donnant, pour chaque carte, le nombre correspondant de coups par pixels.
- Le spectre du lobe de l'instrument par fréquence.
- Des spectres fiduciels donnés par les spectres *WMAP7*.

À partir des cartes "FIRST" et "LAST" nous construisons des cartes de demi-somme "SUM" et de demi-différence "DIFF". Ces dernières peuvent être considérées comme des cartes de bruit. Nous avons ainsi appliqué l'estimateur d'effet de lentille à trois séries de cartes : "FIRST", "LAST" et "SUM", en suivant la procédure décrite dans la section précédente, excepté pour le traitement du bruit. Celui-ci étant coloré, il est plus difficile de faire des simulations de cartes de bruit inhomogène qui aient les bonnes caractéristiques. Le champ moyen calculé n'encode donc que l'effet du masque et nous avons choisi de simplement retrancher l'estimation de la carte de bruit corrigée du champ moyen. Cela se traduit par de grandes barres d'erreur sur les spectres reconstruits présentés figure 10.4.

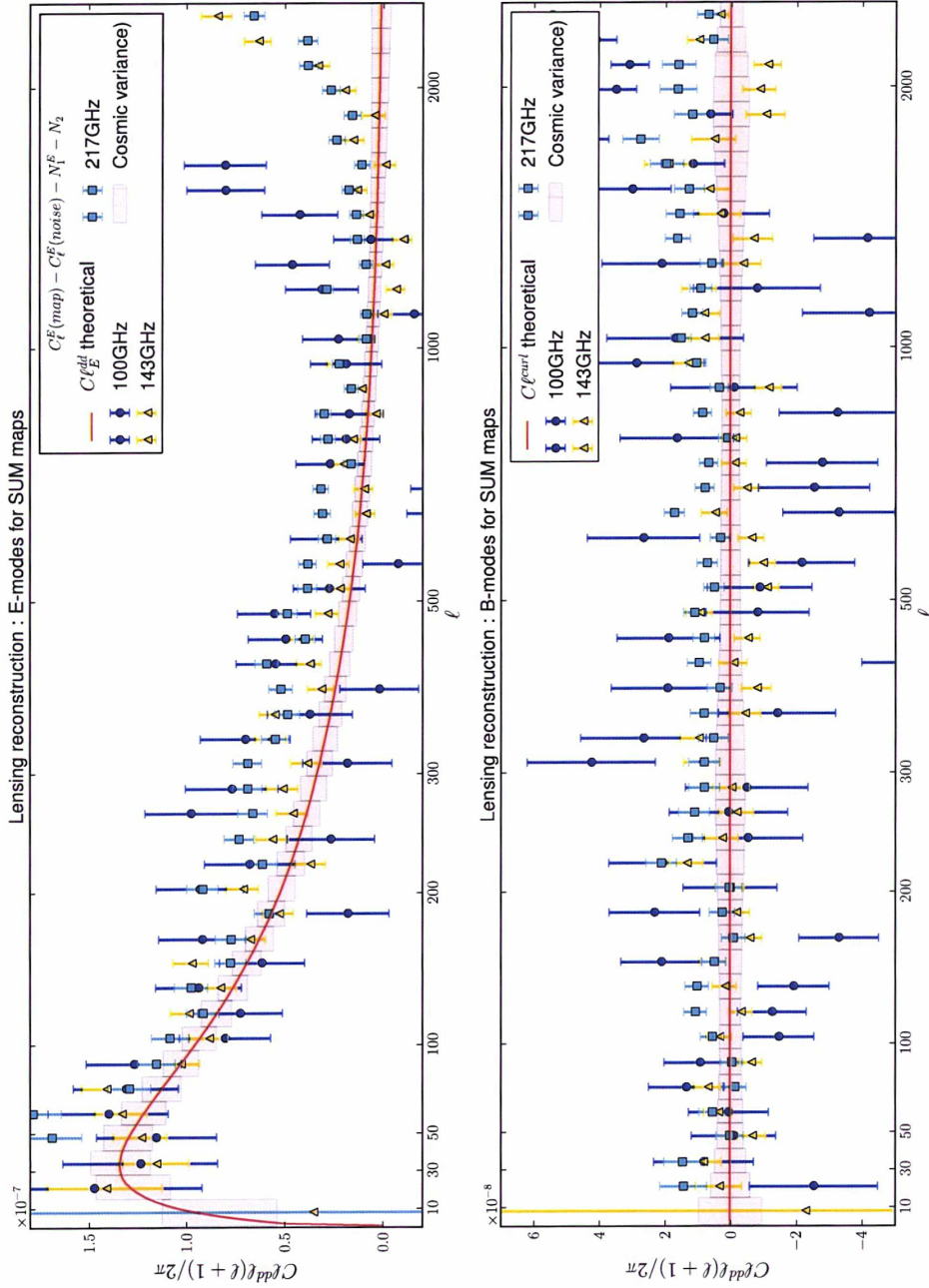


FIGURE 10.4 – Spectre du potentiel de lentille estimé dans les cartes à 100 (bleu), 143 (orange) et 217GHz (cyan). Les modes E (en haut) sont corrigés du champ moyen dû au masque et d'une contribution du bruit inhomogène, les modes B (en bas) sont débiaisés par Monte-Carlo. Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion dans les bins.

Cette figure nous indique qu'il reste une contamination importante, sans doute due au mauvais traitement du bruit inhomogène, mais aussi de possibles résidus d'avant-plans. En effet, il peut très bien rester, en dehors du masque galactique, des résidus diffus qui polluent le CMB (free-free, synchrotron, poussières, etc). La carte à 217GHz présente particulièrement de dispersion, tandis que celle à 143GHz semble plus raisonnable. Nous présentons les reconstructions obtenues à cette fréquence pour les trois cartes étudiées à la figure 10.5, et les coefficients A_{lens} correspondants dans le tableau 10.1. Ces coefficients ont été définis au chapitre 5.

TABLE 10.1 – Valeurs du paramètre A_{lens} mesuré pour les cartes à 143GHz dans l'intervalle $\ell \in [50, 500]$

Carte	A_{lens}
FIRST	1.11 ± 0.020
LAST	1.33 ± 0.027
SUM	1.15 ± 0.018

Nos mesures vont clairement dans le sens d'une détection de l'effet de lentille, à 32σ pour la carte "SUM", 25σ pour la carte "LAST" et 28σ pour la carte "FIRST". Nous rappelons en effet que $A_{lens} = 0$ indique l'absence d'effet tandis que $A_{lens} = 1$ montre sa présence.

En revanche, nous sommes encore à plus de 20σ du modèle, ce qui ne permet pas de conclure sur sa validité. Il reste en effet un certain nombre de systématiques à prendre en compte. Nous allons présenter, dans la partie suivante, une partie des résultats de la dernière étude en date menée par toute l'équipe "lensing" de Planck.

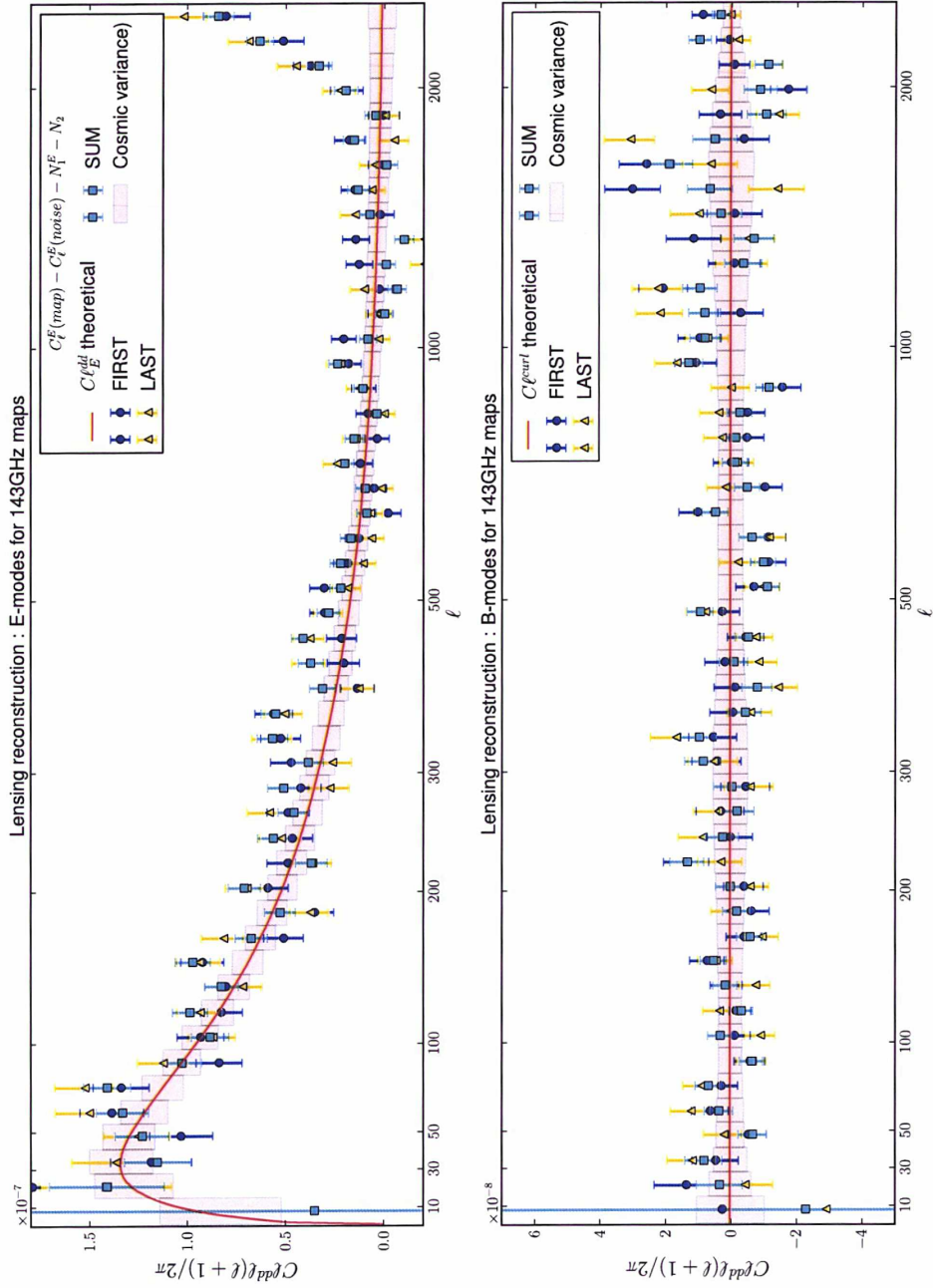


FIGURE 10.5 – Spectre du potentiel de lentille estimé dans les cartes à 143GHz 'FIRST' (bleu), 'LAST' (orange) et 'SUM' (cyan). Les modes E (en haut) sont corrigés du champ moyen dû au masque et d'une contribution du bruit inhomogène, les modes B (en bas) sont débiaisés par Monte-Carlo. Les barres d'erreurs correspondent à la dispersion dans les bins.

10.2.2 Cartes en fréquence DX9

Les résultats présentés dans cette partie sont l'état actuel du travail de toute l'équipe "Lensing" de Planck au moment de la rédaction de ce manuscrit. Une partie du traitement est similaire à celui présenté plus haut et reprend mes résultats. Un certain nombre de systématiques qui n'ont pas été présentées auparavant car étudiées par d'autres membres de l'équipe (lobes asymétriques, résidus de points sources non résolus, bruit à 2D, etc.) sont également incluses dans ces résultats.

Nous estimons la carte à 143GHz de la mission nominale (deux relevés complets du ciel) en utilisant un masque galactique apodisé sur 10° conservant environ 70% du ciel et un masque de points sources issu de la séparation de composantes. Nous avons choisi d'estimer les biais et les champs moyens dus aux différentes systématiques sur des jeux de cartes lentillées dont les caractéristiques essentielles sont les suivantes :

- Les réalisations d'effet de lentille sont obtenues à partir du spectre "best-fit" des données Planck-DX8.
- Une contribution des points sources non résolus calculée à partir des données du fond diffus infrarouge ou CIB pour "Cosmic Infrared Background" (Planck Collaboration et al. 2011d)
- Lobes asymétriques et "pixel window function"
- Réalisations de bruit 2D faites à partir de la carte de "hit" et de la carte de demi-différence (estimée du bruit).

Les spectres de puissance de ces simulations sont en accord au pourcent près avec les données jusqu'à $\ell = 1500$ et à 5% près jusqu'à $\ell = 2500$. Les spectres de température et de potentiel fiduciels utilisés pour les filtres sont les spectres "best-fit" obtenus avec ces données.

La figure 10.6 présente la reconstruction des modes E et des modes B de l'effet de lentille dans la carte. Le champ moyen a été calculé par Monte-Carlo sur un premier jeu de 100 simulations. Les biais ont été évalués sur un deuxième jeu de 100 simulations, enfin, les barres d'erreurs sont données par la dispersion, pour chaque mode, entre les 100 simulations d'un troisième jeu. Les modes E montrent des oscillations étonnantes pour $500 < \ell < 1000$. Celles-ci pourraient éventuellement être le signe de corrélations entre les bins, à cause du masque. La probabilité qu'il s'agisse d'une structure intrinsèque au CMB est en revanche faible. Ce point reste donc à élucider, d'autant que, nous allons le voir, les mêmes structures apparaissent dans la mesure réalisée par *SPT*. Les modes B, aux échelles qui nous intéressent, sont bien compatibles avec zéro et ne révèlent donc pas d'effet systématique qui soit détectable par ce test. Nous obtenons finalement le spectre du potentiel de lentille à 13σ environ de zéro, en ne gardant que les modes allant jusqu'à $\ell = 500$. Ce résultat est encore loin des 35σ que nous attendons et indique qu'il reste des systématiques à traiter. Ce spectre reconstruit est compatible à 3.5σ avec le spectre fiduciel Planck, ce qui est faible pour l'instant. Les modes B sont quant à eux compatibles à 3.8σ avec zéro, toujours en ne gardant que les modes $\ell < 500$.

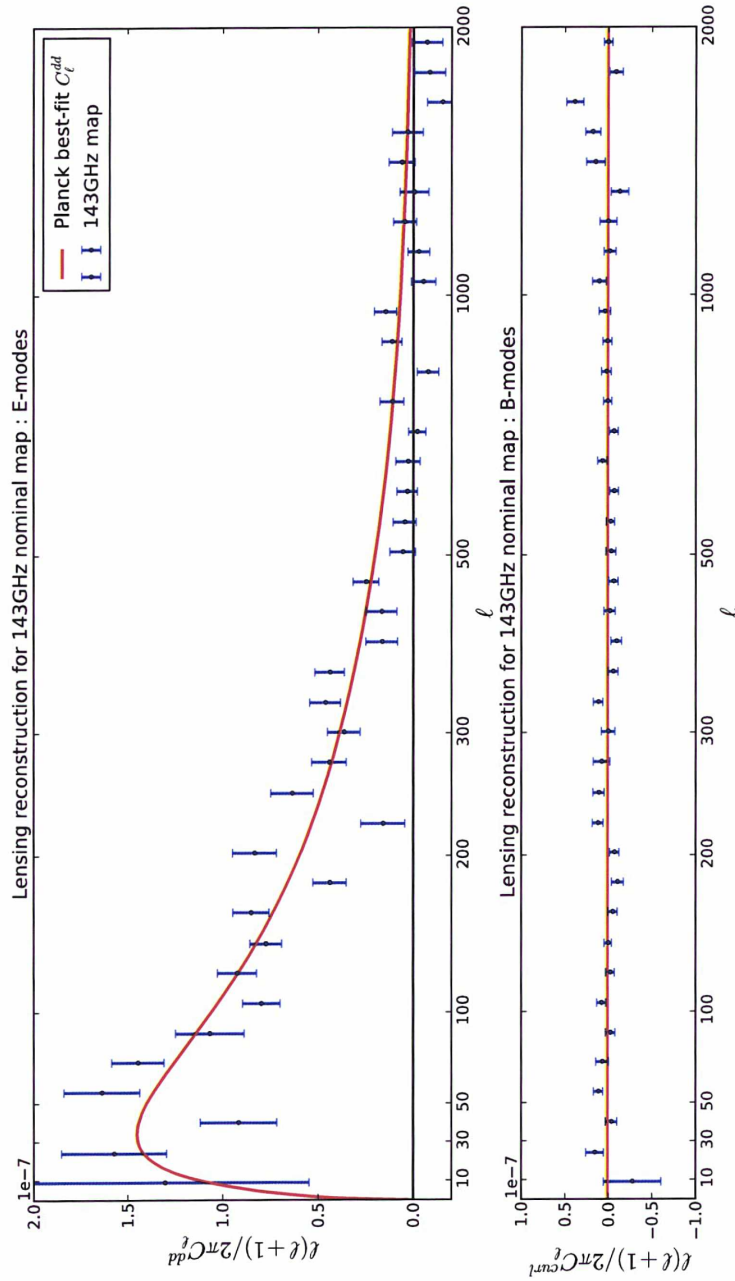


FIGURE 10.6 – Reconstruction de l'effet de lentille avec le pipeline "IAP" pour la carte de la mission nominale à 143GHz. En haut, les modes E, en bas, les modes B. En rouge, les spectres attendus. Le champ moyen, les biais des spectres estimés et les barres d'erreurs ont respectivement été évalués numériquement sur trois jeux de 100 simulation chacun de CMB lentillé.

10.2.3 Comparaison aux autres expériences actuelles

Comparons nos résultats à ceux obtenus avec les télescopes au sol *ACT* et *SPT*. La figure 10.7 présente les mesures du spectre du potentiel de lentille réalisées par les trois expériences. Celles de Planck et *SPT* sont tout à fait comparables. En particulier, au niveau de la perte de puissance et des oscillations observées à partir de $\ell = 500$, non encore expliquée. Ce point commun pourrait nous indiquer un effet systématique commun aux deux expériences et qui aurait, dans les deux cas, mal été traité (résidus de points-sources ou autre, ce point devra être élucidé dans les études ultérieures).

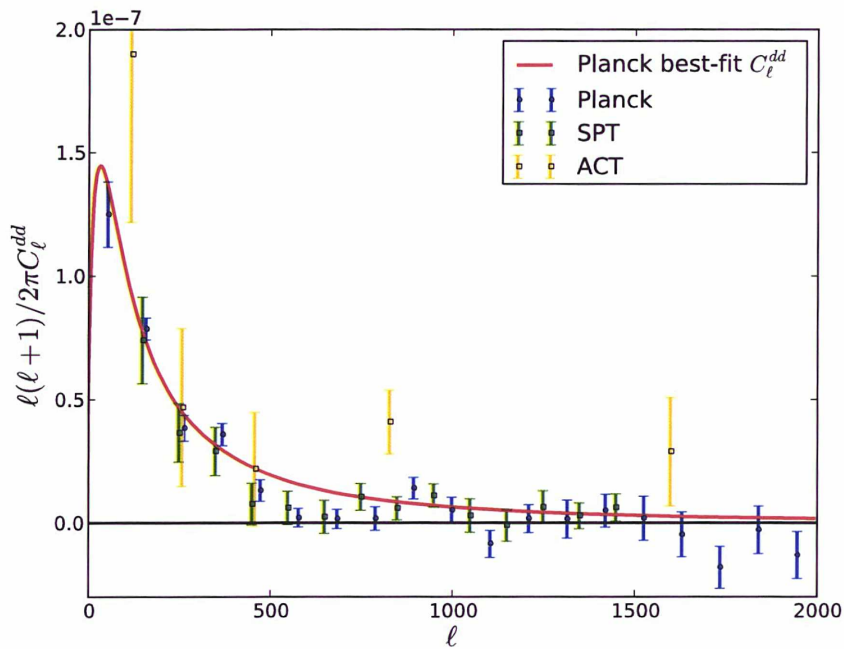


FIGURE 10.7 – Comparaison des spectres de puissance du potentiel de lentille estimés sur les données Planck (bleu), *SPT* (vert) issues de van Engelen et al. (2012) et *ACT* (orange) issues de Das et al. (2011b). Chaque point a été calculé sur un intervalle $\Delta\ell = 100$, excepté pour *ACT*. La courbe rouge représente le spectre prédit avec les paramètres Planck.

Nous mesurons aussi le paramètre A_{lens} défini au chapitre 5. Nous obtenons les valeurs présentées dans le tableau 10.2. Celles-ci indiquent que le modèle avec effet de lentille est nettement privilégié par rapport au modèle sans. Les valeurs obtenues avec nos données sont par ailleurs compatibles avec celles obtenues par *ACT* et *SPT*. Nous trouvons alors que notre mesure du spectre du potentiel de lentille est compatible à environ 0.5σ avec le spectre de potentiel théorique donné par les paramètres cosmologiques de Planck. Toutefois, nous avons vu plus haut qu'il restait du bruit mal représenté par les barres d'erreurs dans les données. Il est donc difficile de conclure sur la qualité de l'ajustement de A_{lens} .

TABLE 10.2 – Comparaison des mesures du paramètre A_{lens} pour les données CMB actuelles

Expérience	ℓ	A_{lens}	$\#\sigma$
ACT	[75, 2050]	1.16 ± 0.29	2σ
SPT	[100, 1500]	0.90 ± 0.19	2.4σ
Planck	[2, 2000]	0.96 ± 0.044	11σ
Planck	[50, 500]	1.02 ± 0.039	13σ

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons obtenu, au moment de la rédaction de ce manuscrit, une mesure à 12σ du spectre de puissance de l'effet de lentille dans les cartes les plus adaptées pour cette mesure (143GHz) de la mission nominale. Les systématiques principales ont été prises en compte, conduisant à une mesure robuste qui ne pourra qu'être améliorée dans les résultats finaux. Il reste en effet à inclure les effets suivants :

- une partie de l'asymétrie des lobes
- une soustraction d'un modèle de poussière. Une étude a cependant montré que cette contribution était tout à fait négligeable.
- les points sources diffus. Nous attendons un effet de moins d'un demi σ sur A_{lens} pour un modèle simplifié de points-sources (distribution poissonnienne ignorant les possibles corrélations avec la matière)

CONCLUSION

L'instrument *HFI* du satellite Planck a cessé d'être refroidi à 0.1K depuis janvier 2012, après trente mois de fonctionnement. Depuis son lancement en 2009, Planck a ainsi vu le ciel près de cinq fois dans sa totalité. Une partie des données sera rendue publique fin mars 2013, en même temps qu'un certain nombre de résultats scientifiques. Planck a effectué la mesure ultime des anisotropies de température du CMB. Nous avons vu qu'elles encodent un grand nombre d'informations passionnantes sur les premiers instants de l'Univers, sur son histoire et sur son contenu actuel. Parmi tous les résultats qui sont annoncés, la mesure de l'effet de lentille gravitationnelle est particulièrement attendue.

UN DÉFI COMPLEXE À RELEVER

En théorie, une re-sommation pondérée des multipôles de la température observée permet d'estimer le potentiel de l'effet de lentille ϕ dans le CMB sans biais (mais avec un bruit important). La variance de cet estimateur est cependant biaisée. Elle est même dominée par un biais gaussien dont l'amplitude dépend fortement des caractéristiques de l'instrument mais qui, heureusement, est indépendant de l'effet de lentille. Avec Planck, ce biais a atteint un niveau suffisamment bas pour permettre une mesure de l'effet de lentille à 30σ environ. De plus, l'indépendance de ce biais gaussien en ϕ est une chance pour le traitement des systématiques.

En pratique en effet, la mesure de l'effet de lentille dans les données Planck doit tenir compte d'un certain nombre de non-idéalités pour lesquelles l'estimateur n'est a priori pas adapté : incertitudes sur le modèle cosmologique, avant-plans (résolus ou non), couverture anisotrope du ciel, lobes asymétriques, etc. Toutefois, nous avons démontré qu'un certain nombre de ces effets pouvait être traités en ayant recours à des calculs Monte-Carlo sur des simulations de cartes de température sans effet de lentille. C'est le cas par exemple du masque galactique ou du bruit inhomogène.

Les biais d'ordres supérieurs au biais gaussien dépendent eux-mêmes du potentiel de lentille ϕ , ce qui complique également la mesure de l'effet de lentille dans le CMB. Il faut, pour estimer le potentiel de lentille d'une carte, connaître le spectre de ce potentiel ! Cette difficulté est en réalité la

moindre de toutes. Nous avons montré au chapitre 7 comment l'incertitude sur les paramètres cosmologiques, et donc sur le spectre du potentiel de lentille fiduciel, peut être prise en compte par une augmentation de la taille des barres d'erreurs pour ces biais. Leurs variations relatives ne sont que de l'ordre de quelques pour-cents pour les incertitudes sur les paramètres donnés par *WMAP7*.

Les nombreux objets qui émettent dans les mêmes fréquences que celles qui nous intéressent pour le CMB contaminent les cartes dont ils rendent une partie inexploitable. Pour la carte obtenue avec les détecteurs à 143GHz, nous voyons en particulier le signal de la Voie-Lactée dominer le CMB autour de l'équateur. De nombreuses radio-galaxies impriment aussi leur marque dans quelques pixels, à toutes les latitudes. Il nous faut donc masquer ces zones polluées de la carte.

Malheureusement, comme notre estimateur mélange toutes les échelles de la carte, la présence de trous, si l'on n'en tient pas compte, crée des biais dans le potentiel reconstruit. Une solution consiste à remplir ces trous par du bruit ayant les mêmes propriétés que le signal. Nous avons développé un algorithme qui restaure le signal du CMB, avec les bonnes propriétés statistiques dans les trous. L'effet de lentille n'y est en revanche pas rétabli, ce qui se traduit par une très légère perte de puissance dans l'estimée des cartes ainsi traitées. Cette méthode, en raison de la taille des matrices à inverser pour contraindre le signal dans les trous, ne peut cependant être appliquée qu'aux points-sources.

Reste à traiter le cas du masque galactique à cause duquel plus de 30% du ciel est perdu. Plutôt que de chercher à recréer du signal à l'intérieur de ce masque, nous avons proposé d'en minimiser l'effet. Pour cela, il suffit d'en lisser les bords sur une largeur de quelques pixels. Le sacrifice d'une petite portion supplémentaire de la carte sauve notre capacité à y mesurer l'effet de lentille, puisque l'estimée du potentiel est alors seulement augmentée d'un champ moyen. Celui-ci peut être évalué sur des cartes non lentillées, masquées et de même spectre. Le biais gaussien doit lui aussi être calculé par Monte-Carlo sur des simulations similaires. Moyennant ces deux calculs, nous sommes donc en mesure d'estimer l'effet de lentille dans des cartes masquées.

L'ensemble du traitement des avant-plans, objet du chapitre 8, a donné lieu à un article reproduit dans l'annexe A et soumis en même temps que ce manuscrit. Nous avons relevé le premier défi et le plus important pour l'estimation du potentiel de lentille : le spectre de potentiel reconstruit moyen (pour 300 simulations de cartes lentillées dans l'article), en présence de points-sources remplis et d'un masque galactique apodisé, est compatible avec le spectre théorique, à la variance cosmique près.

L'effet systématique dominant suivant est celui de la couverture anisotrope du ciel. Elle se traduit par un bruit inhomogène dans les données. Un traitement similaire à celui du masque galactique prend en compte une partie de son effet sur l'estimation du potentiel de lentille. Cependant,

le spectre du potentiel présente un biais supplémentaire puisque le bruit inhomogène crée du moment à quatre points, qui mime l'effet de lentille. Ce biais peut toutefois être évalué par Monte-Carlo, tout comme le champ moyen. La simulation de bruit inhomogène est une autre gageure à laquelle nous avons alors fait face, avec une précision plus ou moins grande selon les méthodes adoptées.

Des obstacles comme celui-ci n'ont pu être surmontés que par le travail de toute l'équipe. D'autres effets systématiques ont ainsi été traités par d'autres et ont permis d'aboutir aux résultats que nous présentons au chapitre 10. À l'heure où s'achève ce manuscrit, nous avons obtenu une mesure du spectre de puissance du potentiel de lentille à environ 12σ . Le défi semble relevé...

... MAIS CE N'EST QUE LE DÉBUT !

Ces résultats sont encore les préliminaires des mesures finales et nous avons détaillé les systématiques qui demandaient encore un peu d'attention. D'ici quelques mois, nous pouvons espérer une mesure autour de $20 - 30\sigma$ du spectre de puissance du potentiel de lentille. S'ensuivront quelques contraintes intéressantes sur certains paramètres cosmologiques, comme nous l'avons détaillé au chapitre 4.

Un tel effort n'aboutira pas seulement à préciser et confirmer le modèle cosmologique standard Λ CDM avec quelques décimales de plus. Nous nous sommes souvent concentrés, tout au long de ce travail, sur l'estimation du spectre du potentiel de lentille. Nous avons pourtant pris le soin de présenter, au moins dans les études sur des simulations, la carte du potentiel reconstruit lui-même. S'il était plus facile, dans un premier temps, de comparer nos résultats au spectre du potentiel de lentille (dont l'espérance est prédite théoriquement), ce sont les cartes du champ de potentiel qui sont les plus prometteuses.

En effet, bien que nous ne connaissions pas l'espérance de ce champ et que ces reconstructions soient assez bruitées, elles peuvent être corrélées à d'autres traceurs des grandes structures. Les corrélations de relevés à différents décalages spectraux permet l'étude de la distribution de matière dans l'Univers à différentes époques. L'estimation du potentiel de lentille mesuré sur le CMB présente l'immense avantage d'être non biaisé et de couvrir la quasi totalité du ciel (à la Galaxie près toujours). De telles corrélations ont déjà été effectuées, avec le Fond Diffus Infrarouge par exemple, donnant une mesure à 20σ (un article est en préparation) ou encore avec le catalogue de galaxies à bas décalage spectral (LRG pour *Low-Redshift Galaxies* en anglais) du SDSS. Des expériences à venir telles qu'*Euclid* (Laureijs et al. 2010, Amendola 2012), prévue pour un lancement vers 2020, permettront d'en apprendre toujours davantage sur l'histoire de la formation des grandes structures.

ARTICLE SOUMIS À *Astronomie & Astrophysique*

A

Les méthodes développées pour traiter les avant-plans présentées au chapitre 8, ont donné lieu à l'article suivant, écrit en collaboration avec A. Benoit-Levy. L'ensemble de notre travail sur le sujet y est présenté :

1. Une dérivation originale de l'estimateur, dont les calculs détaillés ont été faits au chapitre 6.
2. Le traitement des points-sources et la méthode de remplissage - par réalisations contraintes gaussiennes - mise au point pour cela.
3. Le traitement de la Galaxie par un masque apodisé.

Nous démontrons dans cet article, notre capacité à prendre en compte les avant-plans, pour des données ayant les caractéristiques de Planck, dans le cadre de l'estimation de l'effet de lentille gravitationnelle. Le remplissage des points-sources ne conduit à aucun biais supplémentaire mais entraîne seulement une perte de puissance de l'ordre de quelques pourcents dans le potentiel de lentille. L'utilisation d'un masque apodisé permet de limiter la création d'un faux signal de lentille qui survient par mélange des modes à toutes les échelles lors de l'utilisation d'un masque binaire. En contrepartie, il faut sacrifier une petite partie supplémentaire dans la carte. Les avantages de cette méthode justifient néanmoins un tel sacrifice puisque l'estimée de cartes masquées fait alors apparaître :

- un champ moyen qui peut être estimé par Monte-Carlo sur des simulations
- une perte de puissance dans le spectre du potentiel qui est corrigée, à toutes les échelles, par un facteur f_{gal} déterminé par le masque.

Full-sky CMB lensing reconstruction in presence of sky-cuts

Aurélien Benoit-Lévy^{1,2}, Typhaine Dechelette², Karim Benabed², Jean-François Cardoso^{2,3,4}, Duncan Hanson^{5,6}, and Simon Prunet²

¹ Department of Physics and Astronomy, University College London, London WC1E 6BT, UK

² Institut d'Astrophysique de Paris, CNRS, UMR7095, Université Pierre & Marie Curie, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France

³ Astroparticule et Cosmologie, CNRS UMR7164, Université Denis Diderot Paris 7, Bâtiment Condorcet, 10 rue A. Domon et L. Duquet, 75013 Paris, France

⁴ Laboratoire Traitement et de l'Information, CNRS UMR 5141 and Télécom ParisTech, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France

⁵ Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 4800 Oak Grove Drive, Pasadena CA 91109, USA

⁶ Department of Physics, McGill University, Montreal QC H3A 2T8, Canada

November 14, 2012

ABSTRACT

We consider the reconstruction of the CMB lensing potential and its power spectrum of the full sphere in presence of sky-cuts due to point sources and Galactic contaminations. Those two effects are treated separately. Small regions contaminated by point sources are filled in using Gaussian constrained realizations. The Galactic plane is simply masked using an apodized mask before lensing reconstruction. This algorithm recovers the power spectrum of the lensing potential with no significant bias.

Key words. gravitational lensing: weak, methods: data analysis, cosmological background radiation

1. Introduction

The gravitational potential of the large scale structure generates a deflection of the trajectories of the Cosmic Microwave Background (CMB) photons. This effect, known as CMB lensing has long been predicted (Blanchard & Schneider 1987; Bernardeau 1998; Zaldarriaga & Seljak 1999; see Lewis & Challinor (2006) for a review). It was first detected by cross-correlating CMB data with large-scale structure (Smith et al. 2007; Hirata et al. 2008) and was recently detected internally using only CMB observations (Das et al. 2011; van Engelen et al. 2012). CMB lensing consists in a remapping of the underlying unlensed temperature field. The lensed CMB is related to the unlensed by the deflection angle \mathbf{d} , which is the gradient of the lensing potential ($\mathbf{d}(\hat{\mathbf{n}}) = \nabla\phi(\hat{\mathbf{n}})$). Mathematically this reads

$$T(\hat{\mathbf{n}}) = \tilde{T}(\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{d}(\hat{\mathbf{n}})). \quad (1)$$

The lensing potential $\phi(\hat{\mathbf{n}})$ is defined as the integral along the line of sight of the gravitational potential of the large scale structure weighted by a geometrical kernel

$$\phi(\hat{\mathbf{n}}) = -2 \int d\eta \frac{\chi(\eta - \eta_{\text{rec}})}{\chi(\eta_{\text{rec}})\chi(\eta)} \Psi(\chi\hat{\mathbf{n}}, \eta), \quad (2)$$

where Ψ is the Newtonian potential, η is the conformal time, η_{rec} is the epoch of last scattering, and χ is the angular diameter distance in comoving coordinates. The lensing potential thus contains valuable information on the large-scale structure and on the cosmological parameters governing their growth such as the equation of state of Dark Energy or the sum of neutrino masses (Lesgourgues et al. 2006; Benoit-Lévy et al. 2012). It is therefore of utmost importance to be able to recover the lensing potential and its power spectrum from the wealth of high quality CMB data which will soon be available, especially with the forthcoming data of the Planck satellite.

CMB lensing modifies the Gaussian structure of the primary anisotropies and generates a correlation between the temperature and its gradient (Hu 2000). These couplings can efficiently be used to construct an estimator, quadratic in the observed temperature, that can be applied to data to recover the lensing potential (Okamoto & Hu 2003).

Reconstruction of the lensing potential on the full sky requires specially designed techniques to account for the complications inherent to real-data analysis. In particular, the presence of regions of the sky that are too contaminated by Galactic emission or by point sources prevents the direct and straightforward use of the quadratic estimator. Various techniques were developed to account for sky-cuts in a full sky CMB lensing analysis. Perotto et al. (2010) developed an algorithm to reconstruct the Gaussian fluctuations of the CMB inside the masked regions. Smith et al. (2007) chose to perform the optimal filtering of the observed temperature, by inverting the full variance of the data. This expensive operation, which requires the inversion of a matrix ($N_{\text{pix}} \times N_{\text{pix}}$) would be feasible at the Planck resolution but requires CPU consuming algorithms. Finally, Plaszczyński et al. (2012) recently proposed a hybrid method that decomposes the region outside the Galactic mask in small patches on which a flat-sky analysis can be performed.

In this article, we present a new and simple method to reconstruct the lensing potential on the sphere. We treat differently the zones of the sky which must be removed because of the presence of point sources and the regions contaminated by the Galaxy. The pixels corresponding to point sources are inpainted with Gaussian constrained realizations. The idea is to restore perfect Gaussian CMB fluctuations at the expense of adding a little noise in the data, so that the lensing estimator has the same response as it would have in the ideal case. Regarding the Galactic cut, we choose to apodize the Galactic mask and perform the usual isotropic filtering required by the lensing esti-

mator on the masked data. As we will show later, this operation is almost harmless to the lensing signal.

In Sec. 2, we present the formalism used in this paper for lensing reconstruction. Then we treat each aspect separately. In Sec. 3 we investigate the question of the point sources mask and deal with the Galactic mask in Sec. 4. Finally, in Sec. 5 we present a reconstruction where the two effects are present.

2. Lensing reconstruction

We review in this section the formalism of CMB lensing and CMB lensing reconstruction.

2.1. Notations

Throughout the paper, unlensed quantities are denoted with a tilde. Thus, C_ℓ denote the lensed TT power spectrum and \tilde{C}_ℓ , the unlensed. CMB lensing consists in a remapping of the unlensed temperature on the sky:

$$\theta[\hat{\mathbf{n}}] = \tilde{\theta}[\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{d}}], \quad (3)$$

where $\hat{\mathbf{d}}$ is the deflection angle. This deflection angle can be expressed as the gradient of the lensing potential ϕ , but for generality can also have a curl component (Hirata & Seljak 2003; Namikawa et al. 2012)

$$\hat{\mathbf{d}} = \nabla\phi + \nabla \times \psi. \quad (4)$$

In case of CMB lensing the curl component is null, $\psi = 0$, but there exist other mechanisms that could lead to non-zero curl in the deflection angle (e.g., primordial background of gravitational waves from inflation (Cooray et al. 2005)). Given the smallness of the signal that can be expected in the curl reconstruction we consider in the following that $\psi = 0$.

2.2. Quadratic estimator

The idea of lensing reconstruction is to rely on the off-diagonal terms in the CMB covariance that are created by CMB lensing. Lensing reconstruction then simply consists in computing the correlations between a filtered version of the observed temperature with a filtered version of its gradient (Okamoto & Hu 2003). The first step in the reconstruction consists in filtering the observed temperature by its variance. This can be done in several ways, either by inverting the full variance ($S + N$) (Smith et al. 2007), or, simply by applying an isotropic filtering. We chose the latter option and our inverse filtered map then takes the following form

$$a_{\ell m} = \frac{\theta_{\ell m}^{\text{obs}}}{C_\ell^{\text{tot}}}, \quad (5)$$

where $\theta_{\ell m}^{\text{obs}}$ are the harmonic multipoles of the observed temperature, and C_ℓ^{tot} the total power spectrum of the observed temperature. This total spectrum can be decomposed as

$$C_\ell^{\text{tot}} = C_\ell^{\text{fid}} + N_\ell, \quad (6)$$

where C_ℓ^{fid} is a fiducial lensed power spectrum and N_ℓ the power spectrum of the instrumental noise, which is considered here as white and homogeneous

$$N_\ell = \Delta T^2 e^{\ell(\ell+1) \frac{\theta_{\text{FWHM}}^2}{8 \log^2}}. \quad (7)$$

Here ΔT is the instrumental sensitivity and θ_{FWHM} is the angular resolution parameter of the CMB experiment (Knox 1995).

The inverse variance filtered multipoles are then used as an input to the quadratic estimator. We follow the construction of the quadratic estimator by Okamoto & Hu (2003), but we slightly modify it along the lines of Lewis et al. (2011). Instead of filtering the inverse variance filtered map by the unlensed temperature power spectrum, we use the lensed power spectrum. This small modification has been shown to greatly simplify the expression of the variance of the lensing estimator (Hanson et al. 2011) – hence the estimation of the lensing power spectrum. To summarize, we consider the following fields

$$\theta^{(1)}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} f_1(\ell) \theta_{\ell m}^{\text{obs}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad \theta^{(2)}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} f_2(\ell) \theta_{\ell m}^{\text{obs}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (8)$$

with

$$f_2(\ell) = C_\ell f_1(\ell) = \frac{C_\ell}{C_\ell^{\text{tot}}}. \quad (9)$$

We then consider the product of $\theta^{(1)}$ with the gradient of $\theta^{(2)}$, $\theta^{(1)} \nabla \theta^{(2)}$ (Hu 2000). This quantity is a vector field from which we can extract the curl-free $\bar{g}_{\ell m}$ and gradient-free $\bar{c}_{\ell m}$ components. After calculations, $\bar{g}_{\ell m}$ and $\bar{c}_{\ell m}$ take the following forms:

$$\bar{g}_{\ell m} = \sum_{\ell_1 \ell_2 m_1 m_2} F(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \ell, m) \theta_{\ell_1 m_1} \theta_{\ell_2 m_2} p_{\ell \ell_1 \ell_2}^+ \quad (10)$$

and

$$\bar{c}_{\ell m} = \mathbf{i} \sum_{\ell_1 \ell_2 m_1 m_2} F(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \ell, m) \theta_{\ell_1 m_1} \theta_{\ell_2 m_2} p_{\ell \ell_1 \ell_2}^- \quad (11)$$

where

$$F(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \lambda, \mu) = (-1)^\mu f_1(\ell_1) f_2(\ell_2) \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \times \quad (12)$$

$$\sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\lambda + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \lambda \\ m_1 & m_2 & -\mu \end{pmatrix}, \quad (13)$$

and

$$p_{\ell \ell_1 \ell_2}^\pm = \frac{[1 \pm (-1)^{\ell + \ell_1 + \ell_2}]}{2}. \quad (14)$$

$\bar{g}_{\ell m}$ and $\bar{c}_{\ell m}$ are two unbiased and unnormalized estimators of the lensing potential and the curl mode. The expectancy of these two estimators are

$$\langle \bar{g}_{\ell m} \rangle = [A_\ell^\phi]^{-1} \phi_{\ell m} \quad (15)$$

and

$$\langle \bar{c}_{\ell m} \rangle = 0, \quad (16)$$

where A_ℓ^ϕ is a scalar function that renormalizes the estimator so that the normalized estimator, $g_{\ell m} = A_\ell^\phi \bar{g}_{\ell m}$, is unbiased

$$\langle g_{\ell m} \rangle = \phi_{\ell m}. \quad (17)$$

We can easily show that A_ℓ^ϕ takes the following form

$$[A_\ell^\phi]^{-1} = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\ell(\ell + 1)} \sum_{\ell_1 \ell_2} f_1(\ell_1) f_2(\ell_2) \quad (18)$$

$$(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} p_{\ell \ell_1 \ell_2}^+$$

$$\left[C_{\ell_1} \sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_1 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. C_{\ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Operationally, this quadratic estimator can easily be implemented using the HEALPix (Górski et al. 2005) routine `map2alm_spin` with the two components of $\theta^{(1)}\nabla\theta^{(2)}$ as an input.

It is worth noting that our estimator is different from that of Okamoto & Hu (2003) by a factor $\sqrt{\ell(\ell+1)}$. This can be explained as Okamoto & Hu (2003) considered the divergence of the temperature-gradient product $\theta^{(1)}\nabla\theta^{(2)}$ to extract the curl-free part and then the lensing potential. Their estimator then involves an additional derivative which explain the $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ factor.

The variance of the lensing potential estimator is given by (Okamoto & Hu 2003; Kesden et al. 2003; Hanson et al. 2011)

$$\langle g_{LM}g_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'}\delta_{MM'} \left[C_L^{\phi\phi} + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right] \quad (19)$$

where $N_L^{(0,g)}$ is a bias term which emerges from the unlensed CMB. More precisely, the $N_L^{(0)}$ bias is the response of the quadratic estimator to the underlying unlensed CMB which has a non-zero trispectrum (Hu 2001)

$$N_\ell^{(0,g)} = \frac{[A_\ell^\phi]^2}{4\pi} \sum_{\ell_1\ell_2} f_1(\ell_1)f_2(\ell_2)\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \quad (20)$$

$$(2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} C_{\ell_1}^{\text{tot}} C_{\ell_2}^{\text{tot}} P_{\ell_1\ell_2}^+ \\ \left[f_1(\ell_1)f_2(\ell_2)\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. f_1(\ell_2)f_2(\ell_1)\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_1 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

The $N^{(1,g)}$ term can be expressed in the full-sky formalism (Hanson et al. 2011), but we need to resort to the flat-sky approximation (Kesden et al. 2003) for a computable expression (Lesgourgues et al. 2005). Following Hanson et al. (2011), $N^{(1,g)}$ takes the following form

$$N_L^{(1,g)} = \frac{2A_L^\phi}{(2L+1)\sqrt{L(L+1)}} \quad (21) \\ \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4L'} (-1)^{\ell_2+\ell_3} \frac{f_{\ell_1L\ell_2}}{2C_{\ell_1}^{\text{tot}}C_{\ell_2}^{\text{tot}}} \frac{f_{\ell_3L\ell_4}}{2C_{\ell_3}^{\text{tot}}C_{\ell_4}^{\text{tot}}} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & L' \end{Bmatrix} \\ C_{L'}^{\phi\phi} f_{\ell_1L'\ell_3} f_{\ell_2L'\ell_4} P_{L\ell_1\ell_2}^+ P_{L\ell_3\ell_4}^+ P_{L'\ell_1\ell_3}^+ P_{L'\ell_2\ell_4}^+$$

with

$$f_{\ell_1L\ell_2} = C_{\ell_2} F_{\ell_1L\ell_2} + C_{\ell_1} F_{\ell_2L\ell_1}, \quad (22)$$

and

$$F_{\ell_1L\ell_2} = -\sqrt{L(L+1)\ell_2(\ell_2+1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2L+1)}{4\pi}}. \quad (23)$$

This expression for $F_{\ell_1L\ell_2}$ is more general than the one frequently used in the literature and is valid whatever is the parity of the quantity $\ell_1 + \ell_2 + L$.

We also consider the variance of the estimator of the curl modes. Similarly, we have

$$\langle c_{LM}c_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'}\delta_{MM'} \left[N_L^{(0,c)} + N_L^{(1,c)} \right], \quad (24)$$

where $N_L^{(0,c)} + N_L^{(1,c)}$ are similar to $N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)}$, the only difference being in the parity conditions in their definitions

$$N_\ell^{(0,c)} = \frac{[A_\ell^\phi]^2}{4\pi} \sum_{\ell_1\ell_2} f_1(\ell_1)f_2(\ell_2)\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \quad (25) \\ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} C_{\ell_1}^{\text{tot}} C_{\ell_2}^{\text{tot}} P_{\ell_1\ell_2}^- \\ \left[f_1(\ell_1)f_2(\ell_2)\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. f_1(\ell_2)f_2(\ell_1)\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_1 & \ell \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

$$N_L^{(1,c)} = \frac{2A_L^\phi}{(2L+1)\sqrt{L(L+1)}} \quad (26) \\ \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4L'} (-1)^{\ell_2+\ell_3} \frac{f_{\ell_1L\ell_2}}{2C_{\ell_1}^{\text{tot}}C_{\ell_2}^{\text{tot}}} \frac{f_{\ell_3L\ell_4}}{2C_{\ell_3}^{\text{tot}}C_{\ell_4}^{\text{tot}}} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & L' \end{Bmatrix} \\ C_{L'}^{\phi\phi} f_{\ell_1L'\ell_3} f_{\ell_2L'\ell_4} P_{L\ell_1\ell_2}^- P_{L\ell_3\ell_4}^- P_{L'\ell_1\ell_3}^+ P_{L'\ell_2\ell_4}^+.$$

It should be noted that the $N^{(1,c)}$ term, despite being related to the curl-like part of the deflection depends on the lensing potential power spectrum. This means that CMB lensing will be a contaminant for any future studies that aim at detecting faint signals in the curl modes of the deflection angle. Here, we follow Cooray et al. (2005) and use the curl modes in the lensing reconstruction mainly as a systematic test as we expect a null signal, except for the small $N^{(1,c)}$ term (see also van Engelen et al. (2012) for a flat-sky discussion).

Given the expression of the variance of the quadratic estimator, we can construct an unbiased estimator of the spectrum of the lensing potential (Kesden et al. 2003)

$$C_L^{\bar{\phi}\bar{\phi}} = \langle g_{LM}g_{LM}^* \rangle - N_L^{(0,g)} - N_L^{(1,g)}. \quad (27)$$

This estimator is unbiased and at second order in ϕ its variance is given by

$$\sigma^2(C_L^{\bar{\phi}\bar{\phi}}) = \frac{2}{2L+1} \left[C_\ell^{\phi\phi} + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right]^2. \quad (28)$$

Similarly, the estimator of the power spectra of the curl modes reads

$$C_L^{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \langle c_{LM}c_{LM}^* \rangle - N_L^{(0,c)} - N_L^{(1,c)}. \quad (29)$$

The curl term is null at second order in ϕ . Besides it can be shown that computations of the next order yield a result compatible with 0. We then have

$$\langle C_L^{\bar{\psi}\bar{\psi}} \rangle = 0, \quad (30)$$

and the variance is given by

$$\sigma^2(C_L^{\bar{\psi}\bar{\psi}}) = \frac{2}{2L+1} \left[N_L^{(0,c)} + N_L^{(1,c)} \right]^2. \quad (31)$$

2.3. Simulations

In order to test the validity of the lensing estimator in the vanilla case of a pure lensed CMB with a perfectly white and homogeneous noise on the full sky, but also in presence of sky-cuts, we generate simulations of lensed temperature field. We use the

algorithm presented in Basak et al. (2008). Our lensed temperature maps are then filtered in harmonic space using a Gaussian circular beam with $\theta_{FWHM} = 5$ arcmin to account for the instrumental beam. We then add to these maps a $\Delta T = 50\mu\text{K}\cdot\text{arcmin}$ homogeneous white noise. The resulting synthetic maps have characteristics similar to those that the Planck experiment is expected to produce (Planck HFI Core Team et al. 2011). This map will be pixellized using the HEALPix (Górski et al. 2005) package. Given the experiment characteristics, we will only use the $N_{\text{side}} = 1024$ resolution.

As a benchmark of both our implementation of the lensing quadratic estimator and the quality of our simulations, we first try to reconstruct the lensing signal on those perfect full sky synthetic sky realisation. Results are presented in Fig. 1, where we show the average over $N = 300$ reconstructions on lensed maps. Thorough examination of the reconstruction for the gradient (middle panel) and the curl (bottom panel) modes reveals the presence of small residuals. Those are small compared to second order corrections ($N_\ell^{(1,gc)}$). They can either come from higher order corrections (that we are ignoring) or lack of convergence of our estimate as we are only using 300 realizations. In the following we will investigate how this residual degrades when taking into account and correct for masks.

Now that we have demonstrated that in the ideal case of an uncut sky the use of the quadratic estimator leads to an unbiased reconstruction, we successively address the questions of the point source mask and Galactic mask.

3. Treatment of the point sources mask

In the following results, we use a realistic point source mask constructed from the Planck Early Release Compact Source Catalog (Planck Collaboration et al. 2011). More precisely, we considered the compact sources from the 100, 143 and 217 GHz channels and masked disks with radius equal to three times the values of the beam of the corresponding channel. We therefore use a point sources mask which is composed of holes of various sizes, about 30, 21 and 15 arcmin. Some of the holes overlap, resulting in an enlarged distribution of holes sizes (Fig. 2). We anticipate on the following section, and we will only include in this mask the point sources which are outside a realistic Galactic mask which masks about 20% of the sky.

3.1. Filling the point source mask

The first step of the lensing reconstruction pipeline consists in restoring a (fake) signal in the region contaminated by resolved point sources. The aim of this operation is to restore the Gaussian statistics of the temperature map to ensure that the response of the quadratic estimator to this inpainted map will be unchanged compared to the full sky case (i.e. without masking). We will do so by filling the point source holes by a Gaussian realization constrained by the signal around the masked region. This will add a little bit of noise in a small area of the sky ($\approx 2\%$, given the point source mask we use). We will see that this is a small price to be paid for the simplicity gained this way.

We recall here quickly the equation of the Gaussian constrained realizations. The observed temperature map is decomposed in two parts

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

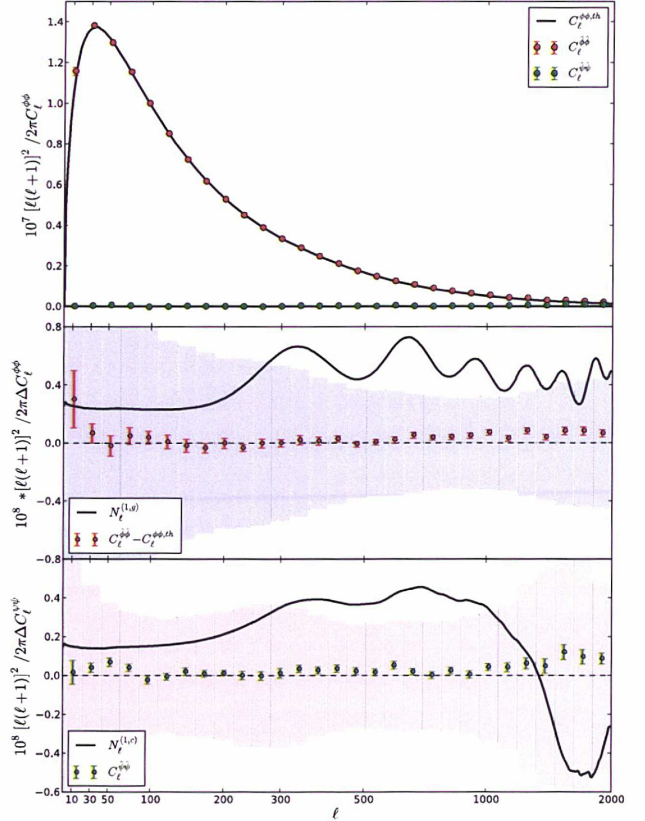


Fig. 1. Reconstructed power spectrum of the lensing potential averaged over 300 full-sky lensed simulations. Red dots represent the gradient mode of the deflection (i.e. the lensing potential). Green dots represent the reconstructed curl modes. Middle and bottom panels represent the residuals over 300 lensed simulations of the gradient (middle) and curl (bottom), with the corresponding first-order bias term (black lines). Histogram errors bars represent the theoretical dispersion expected for one single reconstruction (Eqs. 28) and (31). Error bars on the data points are the realization variance on 300 simulations.

where T_1 represents the regions of the sky which are masked and need to be inpainted and T_2 the regions of the sky which are used to constrain the value in the masked regions. We also write the covariance matrix Σ of the temperature field as

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (33)$$

The joint probability of (T_1, T_2) is given by

$$\mathcal{P}(T_1, T_2) \propto \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}^\dagger \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \right] \quad (34)$$

The probability of T_1 knowing the constraint T_2 , is a Gaussian centered on

$$\bar{T}_1 = -W_{11}^{-1} W_{12} T_2 = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} T_2, \quad (35)$$

and with a variance

$$\sigma = W_{11}^{-1} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \quad (36)$$

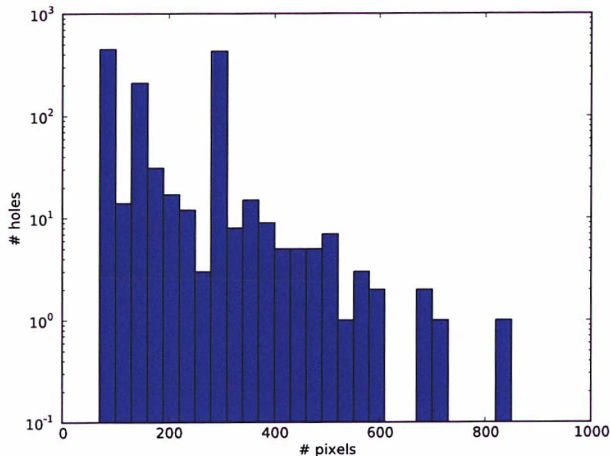


Fig. 2. Histogram of the sizes of the holes in the point sources mask.

Given this formalism, the generation of a local Gaussian constrained realization is straightforward (Hoffman & Ribak 1991).

We start by generating a random realization of the temperature \tilde{T} with a power spectrum C_ℓ^{fid} . As the variance of the masked regions given the constraints does not depend on the values of the field, both T_1 and \tilde{T}_1 have the same variance. We just need to shift the mean of the inpainted region to recover the expected mean in the masked region. Specifically, we fill the masked regions with the values

$$T = \tilde{T}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(T_2 - \tilde{T}_2). \quad (37)$$

The computation of this quantity requires the inversion of Σ_{22} . This operation can be prohibitively expensive if we use the full CMB as a constraint. However, given the statistical properties of the CMB temperature anisotropies, the data far away from a given hole will have a small constraint. This is shown in Fig. 3 where we represent in real space the CMB correlation function as well as the filter we are constructing above. As we can see the filter is quickly decreasing. This means that we can probably reduce the size of the matrix Σ_{22} by only computing it for the unmasked pixel in a narrow region around each hole and get a reasonable approximation of the result.

We perform tests on the Gaussian constrained realizations on our point sources mask with three different choices for the size of the constraint region around the hole, using a 10, 15 or 20 pixel border (resp, 34.4, 51.5 and 68.7 arcminutes with our HEALPix map resolution). The results of these tests are shown in Fig. 4 which presents the ratio between the mean power spectrum of 100 maps whose point source mask as been filled using the procedure described above and the power spectrum used to perform the random realizations. The different results (depending of the size of the border region used to build the constraint) are to be compared with the green line showing the ratio of the mean power spectrum of the unmasked maps to the input power spectrum. This green line, as expected, nicely varies in the region defined by the black lines, which represent the expected variance for 100 realizations in the (slightly wrong at low ℓ) gaussian approximation for the C_ℓ . We clearly see that using only 10 bordering pixels yield to an excess of scatter which is probably correlated given its apparent oscillatory behavior. However using 15 or 20 neighboring pixels seems to be acceptable and at

the level of precision of our simulation, the power spectrum is nicely recovered without any significant bias.

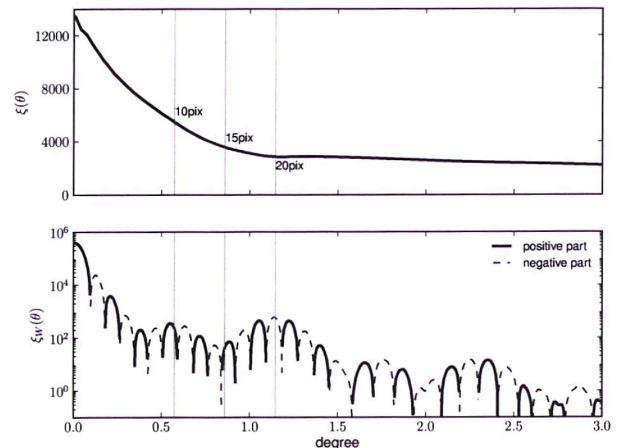


Fig. 3. Top panel is the CMB correlation as a function of the angular separation. Bottom, the filter corresponding to $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ as defined in eq. (37). Vertical lines show the angular separation corresponding to 10, 15 and 20 pixels (i.e. 34.4, 51.5 and 68.7 arcminutes)

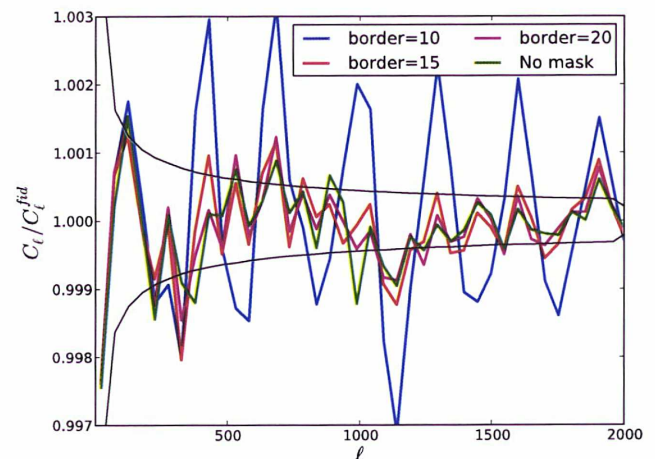


Fig. 4. Ratio of the mean of the $N=100$ power spectra of the inpainted maps to the fiducial power spectrum for three values of the width of the region used for constraining the Gaussian realization, 10 (blue), 15 (red), and 20 (magenta) pixels. The green line represents the case where no mask is applied. Black lines are the cosmic variance expected given the number of simulations and binning.

3.2. Point sources and lensing reconstruction

We now wish to demonstrate that our treatment of the point sources mask is harmless for lensing, *i.e.* that 1) it does not create any spurious lensing signal, and 2) that it enables an excellent reconstruction of the power spectrum of the lensing potential. We first test the case of unlensed maps. In that case, the terms involving the lensing power spectrum disappear and according to

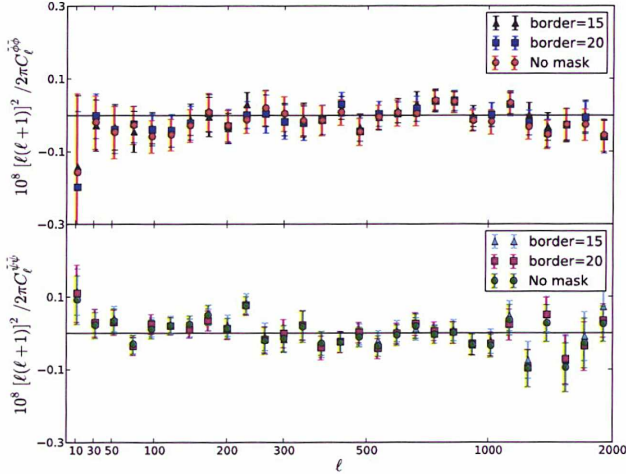


Fig. 5. Reconstructed gradient (top) and curl (bottom) modes of the deflection angle on 100 unlensed maps. Point sources are inpainted using 15 (red) to 20 (magenta) bordering pixels to constrain the Gaussian realizations. The unmasked case (green) is shown for comparison.

Eqs. 27 and 29, the estimated spectrum should be equal to zero. Here again using around 15 to 20 bordering pixels is required in order to get an unbiased reconstruction. Figure 5 shows the mean over 100 lensing reconstructions on unlensed maps. Both the cases with 15 and 20 bordering pixels prove to be in very good agreement with the unmasked case, for both the gradient and curl modes. We thus confirm that the point source inpainting does not create any artificial signal that could be seen as related to lensing via the lensing estimator.

We now turn our analysis on lensed maps. In that case, we need to modify the estimator of the lensing power spectrum to correct for the fact that the regions that are inpainted are filled with a perfectly Gaussian realizations and should therefore not contain any lensing signal. The outputs of the lensing estimator must therefore be rescaled by a factor that corresponds to the fraction of the signal that is masked. This factor should in principle be scale dependent as the large scale of the lensing potential are hardly affected by masking sub-degree scale pixels. However we found that using a scalar scale-independent renormalization gives an excellent reconstruction of the lensing power spectrum. The modified estimators thus reads

$$C_L^{\bar{\phi}\phi, PS} = \frac{\langle g_{LM} g_{LM}^* \rangle - N_L^{(0,g)}}{f_{PS}^2} - N_L^{(1,g)}, \quad (38)$$

where f_{PS} correspond to the fraction of the sky which is unmasked by point sources. With our fiducial point source mask, $f_{PS} = 0.98$.

Figure 6 represents the residuals of the reconstruction, *i.e.* $\Delta C_\ell^{\phi\phi} = C_\ell^{\bar{\phi}\phi, PS} - C_\ell^{\phi\phi, fid}$ averaged over 300 simulations. We also show the residuals of the curl estimator. We compare those results to the full-sky case, with no inpainting. As can be seen, there is no significant difference between the two cases, which validates the use of our inpainting algorithm for lensing reconstruction.

We therefore have a tool that can be efficiently used to inpaint the point sources and that can recover both the 2-point and 4-point statistics of a Gaussian field without introducing any spurious signal or bias.

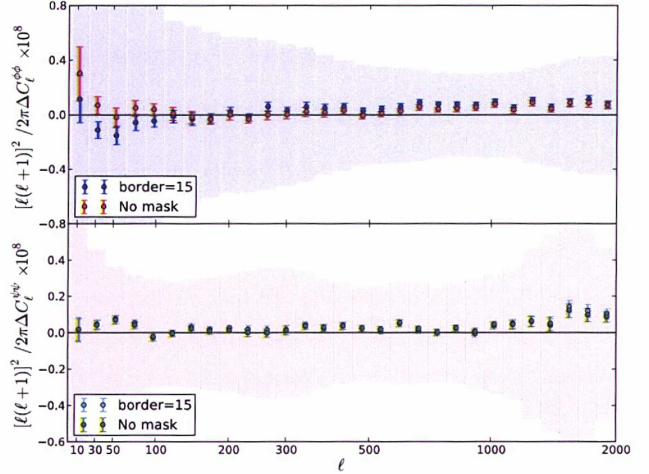


Fig. 6. Residuals of the reconstructed power spectrum of the lensing potential averaged over 300 full-sky lensed simulations in presence of the point sources mask. Top panel presents the gradient mode of the deflection (*i.e.* the lensing potential). Bottom panel presents the reconstructed curl modes. In both cases, we compare with the full-sky case (red for the gradient modes and green for the curl modes) Histogram errors bars represent the theoretical dispersion expected for one single reconstruction.

4. Treatment of the Galactic mask

The second problem frequently encountered in full-sky lensing reconstruction is the presence of large-scale foregrounds, mainly along the Galactic plane, that strongly contaminates the lensing signal. As mentioned in the introduction, several possibilities exist to deal with this complication. We choose a new approach which consists in masking the contaminated regions of the Galactic plane and then directly applying the lensing estimator on those masks maps. We first begin by presenting some analytical computations on the effect of the mask on the reconstructed lensing potential, and we show how these effects can be efficiently alleviated to provide a robust and rapid way of reconstructing the lensing potential.

4.1. Analytical computation of the mask

In presence of a mask, the expectancy of the lensing estimator become

$$\langle g_{LM} \rangle = \sum_{\lambda\mu} M_{LM}^{\lambda\mu} \phi_{\lambda\mu} + \bar{\phi}_{LM}^{MF}, \quad (39)$$

where $M_{LM}^{\lambda\mu}$ is a coupling matrix which replaces the scalar normalization A_L^ϕ , and $\bar{\phi}_{LM}^{MF}$ is a lensing independent quantity which we will loosely refer to as the “mask mean field”.

The variance of the estimator applied on a masked temperature map becomes an intricate expression

$$\langle g_{LM} g_{LM}^* \rangle = \sum_{\lambda} C_\lambda^{\phi\phi} M_{LM}^\lambda + N_{L,M}^{(0,g)} + N_{L,M}^{(1,g)} + C_L^{MF}, \quad (40)$$

where C_L^{MF} denotes the power spectrum of the mask mean-field. $N_{L,M}^{(0,g)}$ and $N_{L,M}^{(1,g)}$ are terms similar to the full-sky equivalent $N_L^{(0,g)}$ and $N_L^{(1,g)}$ but also depends on the structure of the mask. All the

terms in the two previous equations involve high order integrals of functions which can be written as imbricated summations of Wigner 3-j symbols. They are directly related to the structure of the mask and depend on its harmonic coefficients $w_{\ell m}$. Those functions and integrals can be written down analytically, but cannot lead to a form which can be efficiently evaluated numerically. However, we find that under certain circumstances, notably depending on the mask (and we will provide precise example in Sec. 4.2), those coupling matrices are essentially diagonal, in the sense that their effect on power spectra is just to apply a constant normalization factor. This normalization factor is related to the fraction of the sky which is unmasked (Hivon et al. 2002). More precisely, we have

$$\sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\phi\phi} M_{LM}^{\lambda} \approx f_{\text{gal},4} C_L^{\phi\phi} \quad (41)$$

and

$$N_{L,M}^{(0,g)} \approx f_{\text{gal},4} N_L^{(0,g)}, \quad N_{L,M}^{(1,g)} \approx f_{\text{gal},4} N_L^{(1,g)}, \quad (42)$$

where

$$f_{\text{gal},4} = \frac{1}{N_{\text{pix}}} \sum_i w_i^4. \quad (43)$$

The presence of the coefficients of the mask at the power of four is related to the fact that the variance of the lensing estimator is a resummation of the 4-point correlation function on the CMB. The variance of the lensing estimator then becomes

$$\langle g_{LM} g_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} f_{\text{gal},4} \left[C_L^{\phi\phi} + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right] + C_L^{\text{MF}}, \quad (44)$$

Even though all these mask kernels cannot be computed, some of them are fairly easy to estimate by a Monte-Carlo procedure. Applying the estimator on unlensed maps which have the same spectral content as the lensed map will precisely give the mask mean field

$$\langle g_{LM}^{\text{unl}} \rangle = \bar{\phi}_{LM}^{\text{MF}}, \quad (45)$$

It is thus straightforward to construct an unbiased estimator of $\bar{\phi}_{LM}^{\text{MF}}$ by averaging over several outputs of the estimator applied on unlensed masked maps

$$\hat{\phi}_{LM}^{\text{MF}} = \frac{1}{N_{\text{unl}}^{\text{MF}}} \sum_i^{N_{\text{unl}}^{\text{MF}}} g_{LM,i}^{\text{unl}}, \quad (46)$$

$\bar{\phi}^{\text{MF}}$ is an unbiased estimate of the mask mean-field and its variance can be approximated by

$$\langle \hat{\phi}_{LM}^{\text{MF}} \hat{\phi}_{L'M'}^{\text{MF}*} \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left(C_L^{\text{MF,mask}} + \frac{f_{\text{gal},4}}{N_{\text{unl}}^{\text{MF}}} N_L^{(0,g)} \right). \quad (47)$$

We can then define a mask mean-field debiased estimator by subtracting the estimated mask mean-field to the lensing potential reconstructed from the masked temperature field. We then define

$$\hat{g}_{LM}^{\text{MF}} = g_{LM} - \hat{\phi}_{LM}^{\text{MF}}. \quad (48)$$

The mean of this estimator is

$$\langle \hat{g}_{LM}^{\text{MF}} \rangle = \sum_{\lambda\mu} M_{LM}^{\lambda\mu} \phi_{\lambda\mu}, \quad (49)$$

and its variance becomes

$$\langle \hat{g}_{LM}^{\text{MF}} \hat{g}_{L'M'}^{\text{MF}*} \rangle \approx \delta_{LL'} \delta_{MM'} f_{\text{gal},4} \left[C_L^{\phi\phi} + \left(1 + \frac{1}{N_{\text{unl}}^{\text{MF}}} \right) N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right], \quad (50)$$

The removal of the mask mean-field by Monte-Carlo induces a small increase in the variance of the estimator, but this increase can be as small as required by averaging over a large number of unlensed realizations, which is a numerically cheap operation as it does not require the production of lensed simulations.

The estimator of the lensing power spectrum now takes the following form

$$C_L^{\bar{\phi}\bar{\phi},\text{mask}} = \frac{\langle \hat{g}_{LM}^{\text{MF}} \hat{g}_{L'M'}^{\text{MF}*} \rangle}{f_{\text{gal},4}} - \left(1 + \frac{1}{N_{\text{unl}}^{\text{MF}}} \right) N_L^{(0,g)} - N_L^{(1,g)}, \quad (51)$$

It should also be noted that on the curl estimator side, the situation is little simpler as there is no mask-mean field (Fig. 9, bottom panel). Therefore there is no need to subtract a "curl" mask mean field to the curl estimate.

If we now consider the variance of the estimator of the lensing power spectrum, it will depend on

$$f_{\text{gal},8} = \frac{1}{N_{\text{pix}}} \sum_i w_i^8, \quad (52)$$

as it involves the 8-point correlation function (Kesden et al. 2003; Hanson et al. 2011). We will then have

$$\sigma^2(C_{\ell}^{\bar{\phi}\bar{\phi},\text{mask}}) = \frac{f_{\text{gal},8}}{f_{\text{gal},4}^2} \frac{2}{2\ell+1} \left[C_{\ell}^{\phi\phi,\text{fid}} + N_{\ell}^{(0,g)} + N_{\ell}^{(1,g)} \right]^2 \quad (53)$$

We have set up the formalism to perform a reconstruction on a masked field. We will now give precise examples and explain the regime of validity of our hypothesis.

4.2. Apodization

If we apply the quadratic estimator directly to the masked temperature fields, both the mask mean field and the band couplings caused by the presence of the mask will highly bias the reconstruction (Fig. 7), both for the gradient and curl estimator. This pathologic behavior is caused by the sharp transition at the boundary of the mask, that creates important power leakage at all scales.

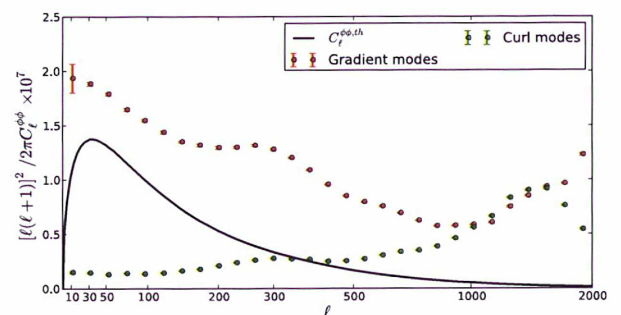


Fig. 7. Reconstructed lensing potential (Eq. 51) over 100 lensed simulations using the binary mask (no apodization). Green dots are the gradient mode which should overlap the black line, and magenta dots the curl modes, which should be compatible with zero.

In order to reduce the off-diagonal terms in the coupling matrix and the frequency extent of the mask mean field, we simply need to first apodize the mask before masking the temperature field. Apodization smoothes the spectral content of the mask and reduces the mask-mean field amplitude and removes almost all the off-diagonal terms. This operation has nevertheless a drawback as it decreases the quantity of data used for reconstruction and therefore degrades the statistical significance of the reconstruction. The apodization of the mask is performed by applying a cos-like function to the pixels bordering the mask so that the apodized region goes smoothly from 0 to 1 over the apodization length θ_{apo} .

Figure 8 presents the variance of the estimator of the mask mean field (or equivalently the estimated power spectrum of the mask mean-field) for both the gradient (top panel) and curl (bottom panel) estimators and for different values of the apodization length. In all cases, the variance has been rescaled by the corresponding $f_{\text{gal},4}$ factor. In this figure, $N_{\text{unl}}^{\text{MF}} = 100$. We here confirm that the mask does not create a mean-field in the curl estimator (bottom panel). We also see that even a small apodization over 1 degree is enough to remove all the off-diagonal terms and restore the ability of the quadratic estimator to successfully reconstruct the lensing power spectrum. On the top panel, we clearly see that the mean-field frequency extent decreases when the apodization length is increased. We therefore choose the higher value, $\theta_{\text{apo}} = 10^\circ$ to perform the reconstruction. With this value of apodization length, we have $f_{\text{gal},4} = 0.65$.

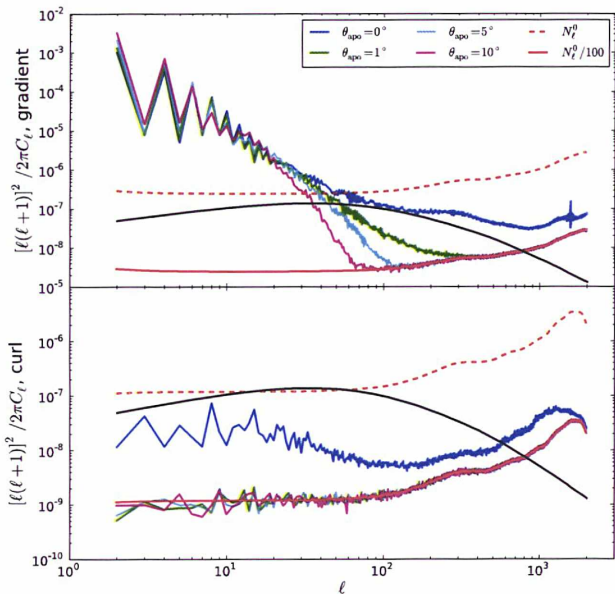


Fig. 8. Power spectrum of the mask mean field rescaled by f_{gal} (top, gradient modes; bottom curl modes). The full red line is the Gaussian noise $N^{0,gc}$ divided by the number on unlensed simulation, $N=100$. When the binary Galactic mask is applied (blue lines) the reconstruction is strongly biased at high multipoles. Note the absence of a mask mean-field in the curl modes.

The final reconstruction is presented on Fig. 9 where we show the mean over 100 residuals of the reconstructed lensing potential power spectrum. In this case, the reconstruction seems less in agreement with the fiducial spectrum at low multipoles,

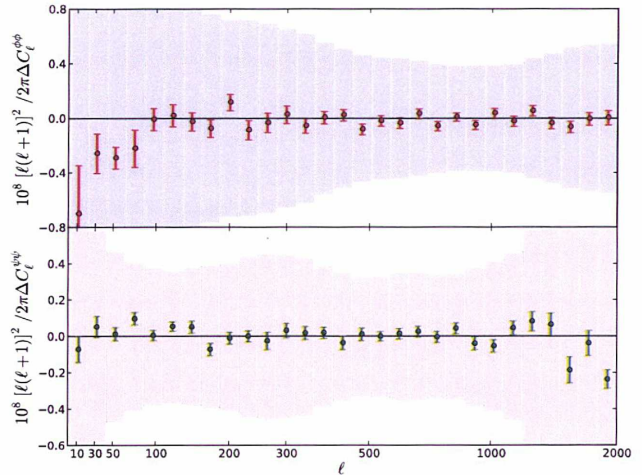


Fig. 9. Residuals over 100 lensed simulations of the gradient (top) and curl (bottom) modes of the deflection angle in presence of the Galactic mask, apodized over $\theta_{\text{apo}} = 10^\circ$. Histograms represent the error bars for one reconstruction (Eq. 53).

but it should be emphasized that the small bias that can be seen is well with the expected errors bars, whereas the mask-mean field is actually several orders of magnitude higher than the lensing potential at those scales.

4.3. Normalization

The rescaling of the power spectrum of the reconstructed map by $1/f_{\text{gal},4}$ can be thought as a modification of the normalization factor applied to the unnormalized estimator $\bar{g}_{\ell m}$. Indeed, rescaling the power spectrum by $1/f_{\text{gal},4}$ is equivalent to applying a normalization factor equal to $A_\ell^\phi f_{\text{gal},4}^{-1/2}$. We can elaborate on this by estimating the normalization factor to apply to the unnormalized reconstructed potential by computing it by a Monte-Carlo procedure. There are two ways of doing so, either by correlating the lensing potential reconstructed from a lensed simulation with the input lensing potential used to generate the lensed temperature map, or by correlating two lensing reconstructions from two different temperature maps lensed with the same lensing potential. We thus form the following correlations that define the Monte-Carlo normalizations $A_\ell^{\phi,MC,2}$ and $A_\ell^{\phi,MC,4}$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \bar{g}_{\ell m}^i \phi_{\ell m}^{th} \rangle = \frac{C_\ell^{\phi\phi,th}}{A_\ell^{\phi,MC,2}} \quad (54)$$

$$\frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \langle \bar{g}_{\ell m}^i \bar{g}_{\ell m}^j \rangle = \frac{C_\ell^{\phi\phi,th}}{(A_\ell^{\phi,MC,4})^2}, \quad (55)$$

where $\bar{g}_{\ell m}^i$ and $\bar{g}_{\ell m}^j$ are to be understood as reconstructions from different realizations of temperature maps lensed with the same lensing potential. As Eq. (54) brings in the two-point correlation function of the masked temperature and Eq. (55) the four-point correlation function, relations between $A_\ell^{\phi,MC,2}$, $A_\ell^{\phi,MC,4}$ and A_ℓ^ϕ depend on $f_{\text{gal},2}$ and $f_{\text{gal},4}$, where

$$f_{\text{gal},2} = \frac{1}{N_{\text{pix}}} \sum_i w_i^2. \quad (56)$$

More precisely, we have

$$A_\ell^{\phi,MC,2} = \frac{A_\ell^\phi}{f_{gal,2}}, \text{ and } A_\ell^{\phi,MC,4} = \frac{A_\ell^\phi}{\sqrt{f_{gal,4}}}. \quad (57)$$

Figure 10 presents the ratio of the normalization computed by Monte-Carlo to the theoretical normalization. Red dots correspond to $A_\ell^{\phi,MC,2}$ and green dots correspond to $A_\ell^{\phi,MC,4}$. The first bin is not in agreement because of the presence of the mask mean field which yield a non-zero correlation in Eq. (55). Accordingly, when computing the normalization by correlating the reconstructed lensing potential to the input potential, the mask mean field disappears from the correlation. This figure shows a very good agreement between the ratio and the expected constant values, which validates once again the use of an apodized Galactic mask for CMB lensing reconstruction. It should be noted that the two normalizations computed here do not have the same utilization. We have seen previously that $A_\ell^{\phi,MC,4}$ is used to normalize the power spectrum of the reconstructed lensing potential. As $A_\ell^{\phi,MC,2}$ only brings in a single reconstructed potential in its definition, it should be used to normalize correlations between the reconstructed lensing potential and any other field that would have a non-zero correlation with the lensing potential but not with the reconstruction noise. A perfect example for such a field would be an external dataset of tracers of the large scale structure.

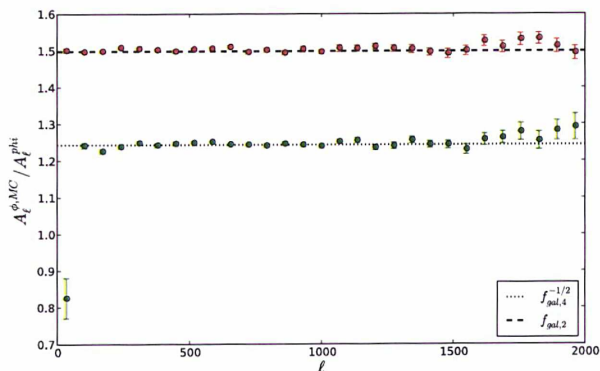


Fig. 10. Ratio of the normalization computed by Monte-Carlo to the theoretical normalization in the case of a reconstruction with an apodized Galactic mask.

5. Point source and galactic mask

All the ingredients are now in place to reconstruct the lensing potential and its power spectrum when both the point sources and Galactic masks are included. The algorithm is fairly simple. We first inpaint the regions masked by the point sources mask using the algorithm described in Sec. 3.1. We then apply the apodized Galactic mask on this inpainted map. We chose to use the largest apodization length we considered previously, $\theta_{apo} = 10^\circ$. We then generate a set of unlensed simulations under the lensed temperature power spectrum on which we run the quadratic estimator to estimate the mask mean-field.

Renormalization of the reconstructed lensing potential power spectrum requires some care as some of the masked regions in the Galactic plane do not have any signal and must therefore be rescaled by the Galactic mask renormalization value $f_{gal,4}$.

However the inpainted regions lack the lensing signal, but possess the full Gaussian structure, so that the Gaussian noise coming from those regions is the theoretical $N_\ell^{(0)}$. The estimator of the lensing potential power spectrum then takes the following form

$$C_L^{\tilde{\phi}\tilde{\phi},\text{mask+PS}} = \frac{1}{f_{PS}^2} \left[\frac{\langle g_{LM} g_{LM}^* \rangle}{f_{gal,4}} - \left(1 + \frac{1}{N_{unl}^{MF}} \right) N_L^{(0,g)} \right] - N_L^{(1,g)}, \quad (58)$$

and its variance becomes

$$\sigma^2 \left(C_\ell^{\tilde{\phi}\tilde{\phi},\text{mask+PS}} \right) = \frac{f_{gal,8}}{f_{PS}^4 f_{gal,4}^2} \frac{2}{2\ell + 1} \left[C_\ell^{\phi\phi,\text{fid}} + \left(1 + \frac{1}{N_{unl}^{MF}} \right) N_\ell^{(0,g)} + N_\ell^{(1,g)} \right]^2 \quad (59)$$

The residuals over 300 lensed simulations of the gradient and curl power spectra reconstruction are presented in Fig. 11. We notice the presence of biases at low multipoles both for gradient and curl modes and at high multipoles for the curl modes, but their amplitude is small, about 0.1σ . However, the residuals show excellent agreement with zero in the multipole range $100 \leq \ell \leq 1000$, for both the gradient and the curl modes of the deflection angle. This multipole range is also where the signal-to-noise ratio is the highest, thus validating the described pipeline.

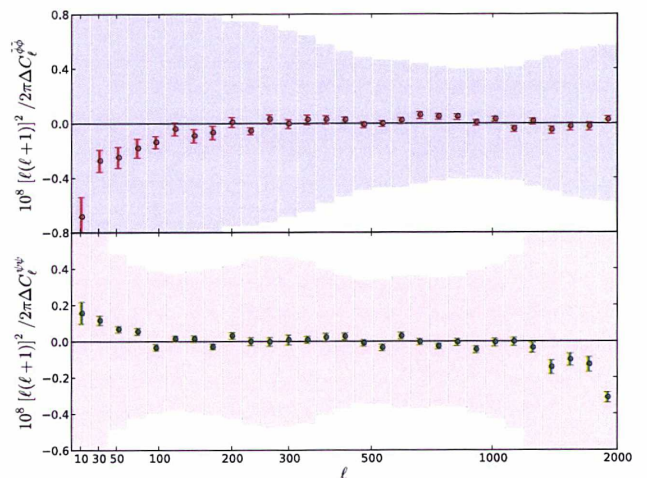


Fig. 11. Residuals over 300 simulations of the gradient (top) and curl (bottom) modes of the deflection angle in presence of the point sources mask and of the Galactic mask, apodized over $\theta_{apo} = 10^\circ$. Histograms represent the error bars for one reconstruction (Eq. 60).

6. Discussion

We have presented a new, simple, and robust pipeline for CMB lensing reconstruction. This pipeline is designed to treat two important issues in a full-sky lensing reconstruction analysis: the presence of point sources that need to be masked and Galactic foregrounds. We treat the first problem by filling in the holes of the temperature map by Gaussian constrained realizations. This

operation perfectly restores the Gaussian structure of the original map and inpainted maps can then safely be ingested in the lensing estimator.

The issue of Galactic contamination is treated by simply applying an apodized Galactic mask to the temperature map before the lensing estimation. The presence of the mask creates a bias in the reconstructed potential. However, since this bias is solely related to the mask and does not depend on the actual lensing potential, it can be efficiently estimated from unlensed simulations and then subtracted to the final result. This simple operation is enough to guarantee an unbiased reconstruction of the lensing power spectrum.

By using an isotropic filtering during the reconstruction process, this pipeline remains analytical, in the sense that both the normalization A_ℓ^ϕ and the Gaussian noise N_ℓ^0 keep their theoretical expression as they are just properly rescaled by scale-independent factor to account for the missing power due to the presence of masked region.

In this article, we have used a simple noise model by considering that the detector noise is white and homogeneous. This will not be the case for a realistic experiment like Planck, where the scanning strategy lead to a non-uniform coverage of the sky. Analytical predictions of the effect of inhomogeneous noise on lensing reconstruction have been investigated in Hanson et al. (2009). The pipeline described in this work can easily be generalized to inhomogeneous noise, by taking into account the noise structure in the unlensed simulations when the mask mean-field is computed. In that case, the estimated mean-field would be the sum of the noise and mask mean-fields. Similarly, any other systematic effects that would create a fake lensing potential can be treated in a similar way, the difficulty being more in the ability to correctly simulate these effects than in the lensing reconstruction in itself.

Acknowledgments

ABL acknowledges fruitful discussions with E. Hivon. ABL is supported by the Leverhulme Trust and STFC. DH acknowledges support from CITA National Fellowship. Part of this work has been initiated with the CMB lensing working group of the Planck Collaboration. We also acknowledge the use of the HEALPix package and the cosmological code CAMB.

References

- Basak, S., Prunet, S., & Benabed, K. 2008, ArXiv e-prints
 Benoit-Lévy, A., Smith, K. M., & Hu, W. 2012, ArXiv e-prints
 Bernardeau, F. 1998, *Astron. & Astrophys.*, 338, 767
 Blanchard, A. & Schneider, J. 1987, *Astron. & Astrophys.*, 184, 1
 Cooray, A., Kamionkowski, M., & Caldwell, R. R. 2005, *prd*, 71, 123527
 Das, S., Sherwin, B. D., Aguirre, P., et al. 2011, *prl*, 107, 021301
 Górski, K. M., Hivon, E., Banday, A. J., et al. 2005, *Astrophys. J.*, 622, 759
 Hanson, D., Challinor, A., Efstathiou, G., & Bielewicz, P. 2011, *Phys. Rev. D*, 83, 043005
 Hanson, D., Rocha, G., & Górski, K. 2009, *MNRAS*, 400, 2169
 Hirata, C. M., Ho, S., Padmanabhan, N., Seljak, U. c. v., & Bahcall, N. A. 2008, *Phys. Rev. D*, 78, 043520
 Hirata, C. M. & Seljak, U. c. v. 2003, *Phys. Rev. D*, 68, 083002
 Hivon, E., Górski, K. M., Netterfield, C. B., et al. 2002, *Astrophys. J.*, 567, 2
 Hoffman, Y. & Ribak, E. 1991, *ApJ*, 380, L5
 Hu, W. 2000, *Phys. Rev. D*, 62, 043007
 Hu, W. 2001, *Phys. Rev.*, D64, 083005
 Kesden, M., Cooray, A., & Kamionkowski, M. 2003, *Phys. Rev. D*, 67, 123507
 Knox, L. 1995, *Phys. Rev. D*, 52, 4307
 Lesgourgues, J., Liguori, M., Matarrese, S., & Riotto, A. 2005, *prd*, 71, 103514
 Lesgourgues, J., Perotto, L., Pastor, S., & Piat, M. 2006, *Phys. Rev. D*, 73, 045021

- Lewis, A. & Challinor, A. 2006, *Phys. Rep.*, 429, 1
 Lewis, A., Challinor, A., & Hanson, D. 2011, *JCAP*, 3, 18
 Namikawa, T., Yamauchi, D., & Taruya, A. 2012, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 1, 7
 Okamoto, T. & Hu, W. 2003, *Phys. Rev. D*, 67, 083002
 Perotto, L., Bobin, J., Plaszczynski, S., Starck, J.-L., & Lavabre, A. 2010, *A&A*, 519, A4
 Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2011, *A&A*, 536, A7
 Planck HFI Core Team, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2011, *A&A*, 536, A6
 Plaszczynski, S., Lavabre, A., Perotto, L., & Starck, J.-L. 2012, ArXiv e-prints
 Smith, K. M., Zahn, O., & Doré, O. 2007, *Phys. Rev. D*, 76, 043510
 van Engelen, A., Keisler, R., Zahn, O., et al. 2012
 Zaldarriaga, M. & Seljak, U. 1999, *Phys. Rev. D*, 59, 123507

HARMONIQUES SPHÉRIQUES

B

L'évaluation d'un estimateur pour l'effet de lentille sur le ciel complet nécessite la généralisation sur la sphère des développements en série de Fourier, les développements en harmoniques sphériques. Nous présentons donc ici la définition et les principales propriétés des harmoniques sphériques, ainsi que la notion d'harmonique sphérique spinnée.

B.1 HARMONIQUES SPHÉRIQUES STANDARDS

B.1.1 Définition et propriétés

Les harmoniques sphériques sont solutions de la partie angulaire de l'équation de Laplace, exprimée en coordonnées sphériques :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

La solution pour cette partie angulaire s'écrit :

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = e^{im\phi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell m}(\cos \theta) \quad (\text{B.2})$$

où $P_{\ell m}$ désigne le polynôme de Legendre donné par :

$$P_{\ell m}(x) = (-1)^m \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[(x^2-1)^\ell \right] \quad (\text{B.3})$$

Cette solution peut encore s'écrire d'après Riazuelo (2000) mais en tenant compte de la convention adoptée (terme en $(-1)^m$) :

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = e^{im\phi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!(\ell+m)!}{4\pi(\ell!)^2}} \sin^{2\ell} \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \sum_r \binom{\ell}{r} \binom{\ell}{r-m} (-1)^{\ell+m-r} \left[\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{2r-m} \quad (\text{B.4})$$

B.1.1.1 Conjugué

Nous avons adopté la convention de Condon-Shortley (McEwen (2008) ou encore Zaldarriaga et Seljak (1997)) pour la définition des polynômes de Legendre. Celle-ci assure que le conjugué d'une harmonique sphérique est donné par :

$$Y_{\ell m}^* = (-1)^m Y_{\ell, -m} \quad (\text{B.5})$$

B.1.1.2 Orthogonalité et complétude

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\Omega Y_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\vec{n}) Y_{\ell m}^*(\vec{n}') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') \quad (\text{B.7})$$

Puisque les harmoniques sphériques forment ainsi une base orthogonale complète sur la sphère S^2 , toute fonction $f \in L^2(S^2)$ de carré sommable sur la sphère peut être décomposée sur cette base :

$$f(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \quad (\text{B.8})$$

Les coefficients complexes $f_{\ell m}$ sont alors donnés par la projection sur la base des harmoniques sphériques :

$$f_{\ell m} = \int d\vec{n} f(\vec{n}) Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \quad (\text{B.9})$$

Si f est une fonction réelle, le conjugué de ce coefficient sera quant à lui donné par :

$$f_{\ell m}^* = (-1)^m f_{\ell, -m} \quad (\text{B.10})$$

B.1.2 Autres propriétés

Par construction, le laplacien d'une harmonique sphérique s'écrit :

$$\nabla^2 Y_{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m} \quad (\text{B.11})$$

Nous avons encore la relation suivante :

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vec{n}) Y_{\ell m}(\vec{n}) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} \quad (\text{B.12})$$

B.2 HARMONIQUES SPHÉRIQUES SPINNÉES

Les harmoniques sphériques spinnées sont la généralisation des harmoniques sphériques classiques qui incluent la notion de spin.

Une position sur la sphère est caractérisée par les angles (θ, ϕ) . Notons \vec{n} le vecteur directeur radial et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) des vecteurs tangents à la sphère. Ces deux derniers ne sont définis qu'à une rotation près autour de \vec{n} . Par définition, une fonction ${}_s f$ est dite *de spin s* si elle se transforme par une rotation d'angle ψ de la sphère suivant¹ :

$${}_s f(\vec{n}) \rightarrow e^{-is\psi} {}_s f(\vec{n}) \quad (\text{B.13})$$

1. Nous utilisons ici une convention de signe différente de celle de Goldberg et al. (1967), basée elle-même sur le travail de Newman et Penrose (1962). Nous privilégions en effet la convention adoptée pour décrire la polarisation du CMB par Zaldarriaga et Seljak (1997) par exemple.

Il existe deux opérateurs $\bar{\partial}$ et $\bar{\bar{\partial}}$ qui permettent respectivement d'augmenter et de diminuer le spin s d'une fonction suivant :

$$\bar{\partial}({}_s f(\vec{n})) \rightarrow e^{-i(s+1)\psi} \bar{\partial}({}_s f(\vec{n})) \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{\bar{\partial}}({}_s f(\vec{n})) \rightarrow e^{-i(s-1)\psi} \bar{\bar{\partial}}({}_s f(\vec{n})) \quad (\text{B.15})$$

Leurs définitions explicites, dans les coordonnées sphériques standard s'écrivent :

$$\bar{\partial}({}_s f(\vec{n})) = -(\sin \theta)^s \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} [(\sin \theta)^{-s} {}_s f(\vec{n})] \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{\bar{\partial}}({}_s f(\vec{n})) = -(\sin \theta)^{-s} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} [(\sin \theta)^s {}_s f(\vec{n})] \quad (\text{B.17})$$

Ces opérateurs définissent une dérivation covariante sur la sphère. Si f est de spin s , alors $\bar{\partial}f$ est de spin $s + 1$ et $\bar{\bar{\partial}}f$ est de spin $s - 1$.

B.2.1 Définition

Les harmoniques sphériques spinées sont notées ${}_s Y_{lm}$ et sont dérivées des harmoniques sphériques standards grâce aux opérateurs $\bar{\partial}$ et $\bar{\bar{\partial}}$:

$${}_s Y_{lm} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}} \bar{\partial}^s (Y_{lm}) & \text{si } 0 \leq s \leq l \\ \sqrt{\frac{(l+s)!}{(l-s)!}} (-1)^s \bar{\bar{\partial}}^{-s} (Y_{lm}) & \text{si } -l \leq s \leq 0 \\ 0 & \text{si } l < |s| \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

L'expression explicite de ces fonctions peut s'écrire, suivant Zaldarriaga et Seljak (1997)² :

$${}_s Y_{\ell m}(\vec{n}) = e^{im\phi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!(\ell-m)!}{4\pi(\ell+s)!(\ell-s)!}} \sin^{2\ell} \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \times \sum_r \binom{\ell-s}{r} \binom{\ell+s}{r+s-m} (-1)^{\ell+m-r-s} \left[\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{2r+s-m} \quad (\text{B.19})$$

La somme portant sur les valeurs de r telles que les arguments des factorielles ne soient pas négatifs. Pour $s = 0$, nous retrouvons bien l'expression des harmoniques sphériques standard donnée à l'équation B.4 : ${}_0 Y_{\ell m} = Y_{\ell m}$.

B.2.2 Conjugué

La généralisation de la relation de conjugaison pour les harmoniques sphériques standards s'écrit :

$$\boxed{{}_s Y_{\ell m}^* = (-1)^s {}_{-s} Y_{\ell, -m}} \quad (\text{B.20})$$

2. Ici, nous adoptons de nouveau la convention pratiquée pour la polarisation du CMB plutôt que celle choisie par Goldberg et al. (1967) et suivie (étrangement) par Hu et White (1997), Riazuelo (2000) et McEwen (2008).

B.2.3 Orthogonalité et complétude

Cet ensemble de fonctions suit les mêmes relations que les harmoniques sphériques standards :

$$\int d\vec{n} {}_s Y_{\ell m}^*(\vec{n}) {}_s Y_{\ell' m'}(\vec{n}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.21})$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_s Y_{\ell m}(\vec{n}) {}_s Y_{\ell m}^*(\vec{n}') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') \quad (\text{B.22})$$

Ainsi, les harmoniques sphériques spinnées forment elles aussi une base orthogonale complète des fonctions spinnées sur la sphère S^2 . Toute fonction de spin s $f \in L^2(S^2)$ de carré sommable sur la sphère peut donc se décomposer dans cette base :

$${}_s f(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_s f_{\ell m} {}_s Y_{\ell m}(\vec{n}) \quad (\text{B.23})$$

Les coefficients complexes ${}_s f_{\ell m}$ sont encore donnés par la projection sur la base des harmoniques sphériques spinnées :

$${}_s f_{\ell m} = \int d\vec{n} {}_s f(\vec{n}) {}_s Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \quad (\text{B.24})$$

Si la fonction de spin s vérifie ${}_s f^* = -{}_s f$, le conjugué de ce coefficient sera quant à lui donné par :

$${}_s f_{\ell m}^* = (-1)^{s+m} -{}_s f_{\ell, -m} \quad (\text{B.25})$$

B.2.4 Produit

D'après Hu et White (1997), nous avons :

$$\begin{aligned} ({}_{s_1} Y_{\ell_1 m_1}) ({}_{s_2} Y_{\ell_2 m_2}) &= \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi}} \sum_{LMS} (-1)^{M+S} \sqrt{2L+1} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ -s_1 & -s_2 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} {}_s Y_{LM} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

B.2.5 Dérivation covariante

Nous avons, d'une part, d'après la formule (A14) de Okamoto et Hu (2003),

$$D_i [{}_s f(\vec{n})] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\partial_s {}_s f(\vec{n})) \bar{\mathbf{m}}_i + (\bar{\partial}_s {}_s f(\vec{n})) \mathbf{m}_i \right] \quad (\text{B.27})$$

D'autre part, appliquons les opérateurs de création et d'annihilation de spin sur les harmoniques sphériques (Zaldarriaga et Seljak (1997)) :

$$\bar{\partial} ({}_s Y_{\ell m}) = \sqrt{(\ell - s)(\ell + s + 1)} {}_{s+1} Y_{\ell m} \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{\partial} ({}_s Y_{\ell m}) = -\sqrt{(\ell + s)(\ell - s + 1)} {}_{s-1} Y_{\ell m} \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{\partial} \bar{\partial} ({}_s Y_{\ell m}) = -(\ell - s)(\ell - s + 1) {}_s Y_{\ell m} \quad (\text{B.30})$$

D'après Okamoto et Hu (2003), cela nous permet de donner une définition covariante du gradient des harmoniques sphériques :

$$D_i[sY_{\ell m}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\ell+s)(\ell-s+1)} {}_{(s-1)}Y_{\ell m} \mathbf{m}_i - \sqrt{(\ell-s)(\ell+s+1)} {}_{(s+1)}Y_{\ell m} \bar{\mathbf{m}}_i \right] \quad (\text{B.31})$$

Les vecteurs \mathbf{m} et $\bar{\mathbf{m}}$ sont définis dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ par :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{e}_1 + i\vec{e}_2] \quad (\text{B.32})$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{e}_1 - i\vec{e}_2] \quad (\text{B.33})$$

Ils vérifient donc :

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 1 \quad (\text{B.35})$$

Nous allons montrer la propriété suivante mentionnée dans Hu (2000) :

$$\sum_m \nabla_i Y_{\ell m} \nabla_j Y_{\ell m}^* = \frac{1}{2} \ell(\ell+1)(2\ell+1) [\mathbf{m}_i \bar{\mathbf{m}}_j + \bar{\mathbf{m}}_i \mathbf{m}_j] \quad (\text{B.36})$$

Repartons de la dérivée covariante des harmoniques sphériques (équation B.31) :

$$\begin{aligned} \sum_m \nabla_i Y_{\ell m} \nabla_j Y_{\ell m}^* &= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \sum_m [-{}_1Y_{\ell m} \mathbf{m}_i - {}_{-1}Y_{\ell m} \bar{\mathbf{m}}_i] [-{}_1Y_{\ell m}^* \mathbf{m}_j - {}_{-1}Y_{\ell m}^* \bar{\mathbf{m}}_j] \\ &= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \sum_m [(-{}_1Y_{\ell m})(-{}_1Y_{\ell m}^*) \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j - (-{}_1Y_{\ell m})({}_1Y_{\ell m}^*) \mathbf{m}_i \bar{\mathbf{m}}_j \\ &\quad - ({}_1Y_{\ell m})(-{}_1Y_{\ell m}^*) \bar{\mathbf{m}}_i \mathbf{m}_j + ({}_1Y_{\ell m})({}_1Y_{\ell m}^*) \bar{\mathbf{m}}_i \bar{\mathbf{m}}_j] \end{aligned}$$

D'après les formules (7) de Hu et White (1997) et (57) de Hu (2000) nous avons, [en adaptant les conditions de normalisation] :

$$\sum_m {}_{s_1}Y_{\ell m}^*(\vec{n}) {}_{s_2}Y_{\ell m}(\vec{n}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} {}_{s_2}Y_{\ell, -s_1}(\vec{0}) \quad (\text{B.37})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_m \nabla_i Y_{\ell m} \nabla_j Y_{\ell m}^* &= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \sqrt{2\ell+1} \left[-{}_1Y_{\ell, 1}(\vec{0}) \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j - {}_{-1}Y_{\ell, -1}(\vec{0}) \mathbf{m}_i \bar{\mathbf{m}}_j \right. \\ &\quad \left. - {}_{-1}Y_{\ell, 1}(\vec{0}) \bar{\mathbf{m}}_i \mathbf{m}_j + {}_1Y_{\ell, -1}(\vec{0}) \bar{\mathbf{m}}_i \bar{\mathbf{m}}_j \right] \end{aligned}$$

Nous savons de plus (Hu 2000) que les seuls termes non nuls de l'expression précédente seront données par :

$$-{}_1Y_{\ell, 1}(\vec{0}) = {}_1Y_{\ell, -1}(\vec{0}) = \sqrt{2\ell+1} \quad (\text{B.38})$$

D'où le résultat annoncé.

Nous allons également montrer la propriété suivante, mentionnée elle aussi dans Hu (2000) :

$$\nabla^i \nabla^j Y_{\ell m} [\mathbf{m}_i \bar{\mathbf{m}}_j + \bar{\mathbf{m}}_i \mathbf{m}_j] = -\ell(\ell + 1) \quad (\text{B.39})$$

Partons de l'expression vectorielle de la dérivée covariante :

$$\vec{\nabla}_s Y_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\ell + s)(\ell - s + 1)} {}_{s-1} Y_{\ell m} \mathbf{m} - \sqrt{(\ell - s)(\ell + s + 1)} {}_{s+1} Y_{\ell m} \bar{\mathbf{m}} \right]$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^j \nabla^j Y_{\ell m} &= -\sqrt{\frac{\ell(\ell + 1)}{2}} {}_1 Y_{\ell m} \\ \bar{\mathbf{m}}^j \nabla^j Y_{\ell m} &= \sqrt{\frac{\ell(\ell + 1)}{2}} {}_{-1} Y_{\ell m} \end{aligned}$$

En réappliquant l'expression vectorielle de la dérivée covariante à chacune de ces deux équations, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\mathbf{m}^j \nabla^j Y_{\ell m} \right) &= -\frac{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}{2} \left[\sqrt{\ell(\ell + 1)} Y_{\ell m} \mathbf{m} - \sqrt{(\ell - 1)(\ell + 2)} {}_2 Y_{\ell m} \bar{\mathbf{m}} \right] \\ \vec{\nabla} \left(\bar{\mathbf{m}}^j \nabla^j Y_{\ell m} \right) &= \sqrt{\frac{\ell(\ell + 1)}{2}} \left[\sqrt{(\ell - 1)(\ell + 2)} {}_{-2} Y_{\ell m} \mathbf{m} - \sqrt{\ell(\ell + 1)} Y_{\ell m} \bar{\mathbf{m}} \right] \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}^i \nabla^i \left[\mathbf{m}^j \nabla^j \right] &= -\frac{\ell(\ell + 1)}{2} Y_{\ell m} \\ \mathbf{m}^i \nabla^i \left[\bar{\mathbf{m}}^j \nabla^j \right] &= -\frac{\ell(\ell + 1)}{2} Y_{\ell m} \end{aligned}$$

Dont nous déduisons le résultat annoncé.

SYMBOLES DE WIGNER-3J

C

L'utilisation du développement en harmoniques sphériques sur le ciel conduit à l'apparition des symboles de Wigner-3j dans les calculs. Ceux-ci sont reliés aux symboles de Clebsch-Gordan¹ qui interviennent quant à eux dans le couplage des moments angulaires dans les lois de la Physique quantique. Nous donnerons ici la définition et les propriétés utiles aux développements des calculs qui nous intéressent. De nombreuses relations sur les Wigner-3j peuvent être trouvées sur <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/ThreeJSymbol/>.

C.1 DÉFINITION

Les symboles de Wigner-3j sont des scalaires représentés par un tableau de six paramètres :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Ces paramètres sont tous des entiers ou des semi-entiers qui obéissent à des règles de "sélection" précises. Si l'une de ces règles n'est pas respectée, le symbole de Wigner-3j est nul :

- Inégalité triangulaire : $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$.
La somme $j_1 + j_2 + j_3$ est un entier.
- Les indices m vérifient : $\begin{cases} -|j_i| \leq m_i \leq |j_i| \\ m_1 + m_2 = m_3 \end{cases}$.

C.2 SYMÉTRIE

Les Wigner-3j sont invariants par toute permutation paire de ses colonnes :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

1. La relation qui lie les w_{3j} aux Clebsch-Gordan est :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle$$

Ils gagnent un terme de phase sous l'effet d'une permutation impaire des colonnes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Le changement de signe des paramètres m apporte également un terme de phase :

$$\boxed{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}} \quad (\text{C.3})$$

C.3 INTÉGRALE DE GAUNT

L'intégrale de trois harmoniques sphériques, appelée *intégrale de Gaunt*, est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int d\vec{\theta} Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_3 m_3} &= \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Et nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \int d\vec{\theta} Y_{\ell_1 m_1}^* Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_3 m_3} &= (-1)^{m_1} \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser ces relations à l'intégrale de trois harmoniques sphériques spinées suivant :

$$\begin{aligned} \int d\vec{n} ({}_{s_1} Y_{\ell_1 m_1}) ({}_{s_2} Y_{\ell_2 m_2}) ({}_{s_3} Y_{\ell_3 m_3}) &= \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \int d\vec{n} ({}_{s_1} Y_{\ell_1 m_1}^*) ({}_{s_2} Y_{\ell_2 m_2}) ({}_{s_3} Y_{\ell_3 m_3}) &= (-1)^{m_1+s_1} \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ s_1 & -s_2 & -s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après Hanson et al. (2011), nous avons encore, en utilisant la propriété B.26, puis en faisant appel à la propriété C.5 :

$$\begin{aligned} \int d\vec{n} ({}_{s_1} Y_{\ell_1 m_1}) ({}_{s_2} Y_{\ell_2 m_2}) ({}_{s_3} Y_{\ell_3 m_3}) ({}_{s_4} Y_{\ell_4 m_4}) &= \\ \frac{\sqrt{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)}}{4\pi} \sum_{LMS} (-1)^{M+S} (2L+1) & \\ \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ -s_1 & -s_2 & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ -s_3 & -s_4 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} & \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

C.4 CONJUGUÉ

$$\boxed{\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^* = (-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}} \quad (\text{C.7})$$

C.5 PROPRIÉTÉS D'ORTHOGONALITÉS

$$\sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (\text{C.8})$$

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^2 = 1 \quad (\text{C.9})$$

C.6 SOMMES

D'après Okamoto et Hu (2003), nous avons les deux formules suivantes (équations 31 et 32) :

$$\sum_m (-1)^{\ell+m} \begin{pmatrix} \ell & \ell & L \\ m & -m & M \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2L+1}} \delta_{L0} \quad (\text{C.10})$$

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L' \\ m_1 & m_2 & M' \end{pmatrix} = \frac{1}{2L+1} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1 m_2 m_4 m_5 m_6} (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5+j_6+m_1+m_2+m_4+m_5+m_6} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & -m_3 & m_1 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ -m_1 & m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_5 & j'_3 & j_4 \\ -m_5 & m'_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ -m_4 & -m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \\ & = \frac{(-1)^{j_3+m_3}}{2j_3+1} \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

C.7 IDENTITÉS

D'après la formule (A6) de Hanson et al. (2011), nous avons, pour les valeurs paires de $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$:

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\ell_3(\ell_3+1) - \ell_1(\ell_1+1) - \ell_2(\ell_2+1)}{\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)\ell_2(\ell_2+1)}} \quad (\text{C.13})$$

D'après la formule (A14) de Hanson et al. (2011), nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\ell_3-1)(\ell_3+2) \prod_{i=1,2,3} \ell_i(\ell_i+1)}} \\ & \{ \ell_1(\ell_1+1)[\ell_3(\ell_3+1) - \ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1)] \\ & + \ell_2(\ell_2+1)[\ell_3(\ell_3+1) + \ell_1(\ell_1+1) - \ell_2(\ell_2+1)] \} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{4\pi}{\prod_{i=1,2,3}(2\ell_i + 1)}} \frac{\ell_1(\ell_1 + 1)F_{\ell_1\ell_2\ell_3} + \ell_2(\ell_2 + 1)F_{\ell_2\ell_3\ell_1}}{\sqrt{(\ell_3 - 1)(\ell_3 + 2) \prod_{i=1,2,3} \ell_i(\ell_i + 1)}} \quad (\text{C.14})$$

C.8 PERMUTER DES SYMBOLES

Pour permuter des paires d'indices dans un produit de deux Wigner-3j, on utilise un Wigner-6j (cf. Hu (2001a)) :

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ \alpha & \beta & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & c & d \\ \epsilon & \gamma & -\delta \end{pmatrix} = \sum_f (2f + 1) (-1)^{a+b+c+d+f+e+\alpha+\gamma} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} b & c & f \\ \beta & \gamma & -\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & f & d \\ \alpha & \phi & -\delta \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

CALCULS AU 2^{ÈME} ORDRE EN ϕ

D

D.1 DL AU DEUXIÈME ORDRE DE LA TEMPÉRATURE LENTILLÉE

Partons du développement limité de la température lentillée au deuxième ordre en ϕ , dans l'espace réel présenté à l'équation 4.14 :

$$\tilde{\Theta}(\vec{n}) \approx \Theta(\vec{n}) + \nabla_i \phi(\vec{n}) \nabla^i \Theta(\vec{n}) + \frac{1}{2} \nabla_i \phi(\vec{n}) \cdot \nabla_j \phi(\vec{n}) \nabla^i \nabla^j \Theta(\vec{n}) + \dots \quad (\text{D.1})$$

Par définition, la température lentillée s'écrit, dans l'espace des harmoniques sphériques :

$$\tilde{\Theta}_{\ell m} = \int d\vec{n} \tilde{\Theta}(\vec{n}) Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \quad (\text{D.2})$$

Nous avons alors, en ne notant plus la dépendance en \vec{n} pour alléger les notations :

$$\tilde{\Theta}_{\ell m} = \int d\vec{n} \Theta Y_{\ell m}^* + \int d\vec{n} \nabla_i \phi \nabla^i \Theta Y_{\ell m}^* + \frac{1}{2} \int d\vec{n} \nabla_i \phi \cdot \nabla_j \phi \nabla^i \nabla^j \Theta Y_{\ell m}^* + \dots$$

La transformée inverse des harmoniques sphériques vers l'espace réel s'écrit :

$$\Theta(\vec{n}) = \sum_{\ell m} \Theta_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \quad (\text{D.3})$$

D'où, en considérant que ϕ est un champ réel (donc $\phi^* = \phi$) :

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{\ell m} &= \Theta_{\ell m} + \int d\vec{n} \sum_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_2 m_2} \nabla^i Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell m}^* \\ &+ \frac{1}{2} \int d\vec{n} \sum_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_3 m_3}^* \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \sum_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_2 m_2} \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell m}^* + \dots \\ \tilde{\Theta}_{\ell m} &= \Theta_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \left[\int d\vec{n} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla^i Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell m}^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_3 m_3}^* \int d\vec{n} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell m}^* + \dots \right] \end{aligned}$$

Nous retrouvons la formule 4.15 du chapitre 4 :

$$\tilde{\Theta}_{\ell m} = \Theta_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \left[I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_3 m_3}^* J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} + \dots \right] \quad (\text{D.4})$$

Et nous avons défini ¹ :

$$I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2} = \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla^i Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{D.5})$$

$$J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} = \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{D.6})$$

D.1.1 Intégrale $I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2}$

On montre d'abord, par une triple intégration par parties que :

$$I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2} = \frac{1}{2} [\ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) - \ell(\ell + 1)] \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{D.7})$$

L'intégrale restante est donnée par la formule C.3. Nous avons donc :

$$I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2} = (-1)^m F_{\ell\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

où nous avons posé :

$$F_{\ell\ell_1\ell_2} = \frac{1}{2} [\ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) - \ell(\ell + 1)] \times \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Nous pouvons montrer par ailleurs, d'après la propriété C.7 et sachant que la somme $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ est paire à cause du coefficient F :

$$I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2*} = I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2} \quad (\text{D.10})$$

D.1.2 Intégrale $J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3}$

Utilisons l'expression B.31 de la dérivée covariante des harmoniques sphériques pour expliciter ce coefficient :

$$\begin{aligned} J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} &= \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} \\ &= \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \sqrt{\frac{\ell_1(\ell_1 + 1)}{2}} \sqrt{\frac{\ell_2(\ell_2 + 1)}{2}} \sqrt{\frac{\ell_3(\ell_3 + 1)}{2}} \int d\vec{n} [-{}_1Y_{\ell_1 m_1} \mathbf{m}_i - {}_1Y_{\ell_1 m_1} \bar{\mathbf{m}}_i] \\ &\quad \times [-{}_1Y_{\ell_3 m_3}^* \mathbf{m}_j - {}_1Y_{\ell_3 m_3}^* \bar{\mathbf{m}}_j] \left[-\sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} Y_{\ell_2 m_2} (\bar{\mathbf{m}}^i \mathbf{m}^j + \mathbf{m}^i \bar{\mathbf{m}}^j) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\ell_2 - 1)(\ell_2 + 2)} ({}_2Y_{\ell_2 m_2} \bar{\mathbf{m}}^i \bar{\mathbf{m}}^j + {}_{-2}Y_{\ell_2 m_2} \mathbf{m}^i \mathbf{m}^j) \right] \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés B.35 des vecteurs \mathbf{m} et $\bar{\mathbf{m}}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} &= \frac{1}{4} \sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)\ell_2(\ell_2 + 1)\ell_3(\ell_3 + 1)} \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \\ &\quad \times \left[\sqrt{(\ell_2 - 1)(\ell_2 + 2)} (-{}_1Y_{\ell_1 m_1} \cdot {}_2Y_{\ell_2 m_2} \cdot {}_{-1}Y_{\ell_3 m_3}^* + {}_1Y_{\ell_1 m_1} \cdot {}_{-2}Y_{\ell_2 m_2} \cdot {}_1Y_{\ell_3 m_3}^*) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} (-{}_1Y_{\ell_1 m_1} \cdot Y_{\ell_2 m_2} \cdot {}_1Y_{\ell_3 m_3}^* + {}_1Y_{\ell_1 m_1} \cdot Y_{\ell_2 m_2} \cdot {}_{-1}Y_{\ell_3 m_3}^*) \right] \end{aligned}$$

1. Attention, ici nous suivons les définitions de Hu (2000) plutôt que celles de Hanson et al. (2011).

Les intégrales de quatre harmoniques sphériques se calculent à l'aide de la formule C.6 en utilisant la propriété de conjugaison B.20. Nous arrivons ainsi à :

$$J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} = \frac{[1 + (-1)^{\ell+\ell_1+\ell_2+\ell_3}]}{16\pi} \sqrt{(2\ell+1) \prod_{i=1,2,3} \ell_i(\ell_i+1)(2\ell_i+1)} (-1)^{m_1} \\ \sum_{LM} (2L+1) \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & L \\ -m & m_1 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L \\ m_2 & -m_3 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & L \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \left[\sqrt{(\ell_2-1)(\ell_2+2)} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Notons ici que l'intégrale $J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3}$ est nulle pour les valeurs impaires de la somme $\ell + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$. Nous ne considérerons donc à partir d'ici que le cas où cette somme paire. D'après l'équation C.14 :

$$\begin{pmatrix} L & \ell_3 & \ell_2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{4\pi}{(2L+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}} \frac{L(L+1)F_{L\ell_2\ell_3} + \ell_3(\ell_3+1)F_{\ell_3L\ell_2}}{\sqrt{(\ell_2-1)(\ell_2+2)L(L+1) \prod_{i=2,3} \ell_i(\ell_i+1)}}$$

D'autre part, d'après l'équation 4.20 :

$$\begin{pmatrix} L & \ell_3 & \ell_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{F_{\ell_2L\ell_3}}{\sqrt{L(L+1)\ell_3(\ell_3+1)}} \sqrt{\frac{4\pi}{(2L+1)(2\ell_3+1)(2\ell_2+1)}}$$

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & L & \ell \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{F_{\ell\ell_1L}}{\sqrt{\ell_1(\ell_1+1)L(L+1)}} \sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell_1+1)(2L+1)(2\ell+1)}}$$

Donc nous avons :

$$J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} = \frac{(-1)^{m_1}}{2} \sum_{LM} \frac{1}{L(L+1)} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & L \\ -m & m_1 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L \\ m_2 & -m_3 & -M \end{pmatrix} (-F_{\ell\ell_1L}) \\ \times \left[L(L+1)F_{L\ell_2\ell_3} + \ell_3(\ell_3+1)F_{\ell_3L\ell_2} - (-1)^{\ell_2+\ell_3+L} \ell_2(\ell_2+1)F_{\ell_2L\ell_3} \right] \quad (\text{D.11})$$

Après ré-écriture du dernier facteur, nous trouvons finalement :

$$J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} = \frac{(-1)^{m_1}}{2} \sum_{LM} \frac{-1}{L(L+1)} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & L \\ -m & m_1 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L \\ m_2 & -m_3 & -M \end{pmatrix} \\ \times F_{\ell\ell_1L} \begin{cases} [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)] F_{\ell_3L\ell_2} \\ [\ell_2(\ell_2+1) + L(L+1) - \ell_3(\ell_3+1)] F_{\ell_2L\ell_3} \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

D.2 MOMENT À DEUX POINTS DE LA TEMPÉRATURE LENTILLÉE

Dans un premier temps, notons $\delta\Theta$ le terme d'ordre un en ϕ et $\delta^{(2)}\Theta$ celui d'ordre deux, pour alléger le calcul :

$$\tilde{\Theta}_{\ell m} = \Theta_{\ell m} + \delta\Theta_{\ell m} + \delta^{(2)}\Theta_{\ell m} + \dots$$

Ecrivons la variance de la température lentillée, à effet de lentille fixé, au deuxième ordre en ϕ (et le moment à deux points $\langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle_{|\phi}$ qui sera utile pour évaluer l'espérance de nos estimateurs) :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} &= \left\langle \left(\Theta_{\ell m} + \delta\Theta_{\ell m} + \delta^{(2)}\Theta_{\ell m} \right) \left(\Theta_{\ell' m'}^{(*)} + \delta\Theta_{\ell' m'}^{(*)} + \delta^{(2)}\Theta_{\ell' m'}^{(*)} \right) \right\rangle_{|\phi} \\ &= \left\langle \Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \right\rangle_{|\phi} + \left\langle \Theta_{\ell m} \delta\Theta_{\ell' m'}^{(*)} \right\rangle_{|\phi} + \left\langle \delta\Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \right\rangle_{|\phi} \\ &\quad + \left\langle \delta\Theta_{\ell m} \delta\Theta_{\ell' m'}^{(*)} \right\rangle_{|\phi} + \left\langle \Theta_{\ell m} \delta^{(2)}\Theta_{\ell' m'}^{(*)} \right\rangle_{|\phi} + \left\langle \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \delta^{(2)}\Theta_{\ell m} \right\rangle_{|\phi} + \dots \end{aligned}$$

Le premier terme se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} &= C_{\ell}^{\Theta} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \\ \langle \Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} &= (-1)^m C_{\ell}^{\Theta} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m - m'} \end{aligned}$$

Détaillons à présent le calcul des autres termes.

D.2.1 Termes en $\delta\Theta$

Il y a deux types de termes en $\delta\Theta$, ceux qui n'en contiennent qu'un et qui, moyennés sur les grandes structures, s'annuleront et ceux qui en contiennent deux.

D.2.1.1 Termes en $\langle \delta\Theta \cdot \Theta \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \delta\Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} &= \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \langle \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} \\ \langle \delta\Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} &= \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \langle \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} \\ &= \sum_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_1 m_1} C_{\ell'}^{\Theta} \delta_{\ell' \ell_2} \delta_{m' m_2} I_{\ell \ell_1 \ell'}^{m m_1 m'} \end{aligned}$$

D'après la formule D.8, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \langle \delta\Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} &= (-1)^m C_{\ell'}^{\Theta} \sum_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell' \\ -m & m_1 & m' \end{pmatrix} F_{\ell \ell_1 \ell'} \\ \langle \delta\Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} &= C_{\ell'}^{\Theta} \sum_{\ell_1 m_1} (-1)^{m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell' \\ -m & m_1 & -m' \end{pmatrix} F_{\ell \ell_1 \ell'} \end{aligned}$$

Et, de même :

$$\langle \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle_{|\phi} = (-1)^{m'} C_{\ell}^{\ominus} \sum_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_1 & \ell \\ -m' & m_1 & m \end{pmatrix} F_{\ell' \ell_1 \ell}$$

$$\langle \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} = C_{\ell}^{\ominus} \sum_{\ell_1 m_1} (-1)^{m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_1 & \ell \\ -m' & m_1 & -m \end{pmatrix} F_{\ell' \ell_1 \ell}$$

D.2.1.2 Terme en $\delta \Theta \cdot \delta \Theta$

$$\langle \delta \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^{(*)} \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^{(*)} \rangle I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_3 \ell_4}^{m' m_3 m_4^{(*)}}$$

$$\langle \delta \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle_{|\phi} = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* C_{\ell_2}^{\ominus} \delta_{\ell_2 \ell_4} \delta_{m_2 m_4} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_3 \ell_2}^{m' m_3 m_2}$$

$$\langle \delta \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3} (-1)^{m_2} C_{\ell_2}^{\ominus} \delta_{\ell_2 \ell_4} \delta_{m_2, -m_4} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_3 \ell_2}^{m' m_3 -m_2}$$

Si nous moyennons en plus sur les grandes structures :

$$\langle \delta \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} C_{\ell_1}^{\phi} \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} C_{\ell_2}^{\ominus} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_1 \ell_2}^{m' m_1 m_2}$$

Or, nous pouvons encore écrire, grâce à la formule D.8 :

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_2} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_1 \ell_2}^{m' m_1 m_2} &= (-1)^{m+m'} F_{\ell \ell_1 \ell_2} F_{\ell' \ell_1 \ell_2} \\ &\times \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_1 & \ell_2 \\ -m' & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où, d'après la formule C.11 :

$$\sum_{m_1 m_2} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_1 \ell_2}^{m' m_1 m_2} = F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2 \frac{1}{2\ell + 1} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (\text{D.13})$$

Donc nous obtenons :

$$\langle \delta \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi} C_{\ell_2}^{\ominus} F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2$$

D.2.2 Termes en $\delta \Theta^{(2)}$

$$\begin{aligned} \langle \delta \Theta_{\ell m}^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \rangle_{|\phi} &= \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \langle \Theta_{\ell' m'}^{(*)} \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle \phi_{\ell_3 m_3}^* I_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} C_{\ell'}^{\ominus} \delta_{\ell' \ell_2} \delta_{m' m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* I_{\ell \ell_1 \ell_3}^{m m_1 m_3} \end{aligned}$$

$$\langle \delta_{\Theta_{\ell m}^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^*} \rangle_{|\phi} = \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} C_{\ell' \ell_2}^{\Theta} \delta_{\ell' \ell_2} \delta_{m' m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* J_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m' m_3}$$

$$\langle \delta_{\Theta_{\ell m}^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^*} \rangle_{|\phi} = \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} (-1)^{m'} C_{\ell' \ell_2}^{\Theta} \delta_{\ell' \ell_2} \delta_{m', -m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* J_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 -m' m_3}$$

Si nous moyennons en plus sur les grandes structures :

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\Theta_{\ell m}^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^*} \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} C_{\ell' \ell_2}^{\Theta} \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \rangle_{|_{LSS}} J_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m' m_3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} C_{\ell' \ell_2}^{\Theta} C_{\ell_1}^{\phi} \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} J_{\ell \ell_1 \ell' \ell_1}^{m m_1 m' m_1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} C_{\ell' \ell_2}^{\Theta} C_{\ell_1}^{\phi} J_{\ell \ell_1 \ell' \ell_1}^{m m_1 m' m_1} \end{aligned}$$

Or, d'après les formules B.36 et B.39 nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{m_1} J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_1}^{m m_1 m_2 m_1} &= \int d\vec{n} \sum_{m_1} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_j Y_{\ell_1 m_1}^* \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell m}^* \\ &= -\frac{1}{2} \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \ell_2 (\ell_2 + 1) \int d\vec{n} Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell m}^* \end{aligned}$$

Enfin, d'après la condition de normalisation des harmoniques sphériques (équation B.6), nous avons :

$$\sum_{m_1} J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_1}^{m m_1 m_2 m_1} = -\frac{1}{2} \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \ell (\ell + 1) \delta_{\ell \ell_2} \delta_{m m_2} \quad (D.14)$$

Ce qui donne finalement pour le moment à deux points :

$$\langle \delta_{\Theta_{\ell m}^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^*} \rangle = -\frac{1}{4} C_{\ell}^{\Theta} \ell (\ell + 1) \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi} \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \quad (D.15)$$

Conclusion

La variance de la température lentillée s'écrit donc, au deuxième ordre en ϕ :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle_{|\phi} &= C_{\ell}^{\Theta} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \\ &+ \sum_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell' \\ -m & m_1 & -m' \end{pmatrix} \left[(-1)^m F_{\ell \ell_1 \ell'} C_{\ell'}^{\Theta} + (-1)^{m'} (-1)^{\ell + \ell' + \ell_1} F_{\ell' \ell_1 \ell} C_{\ell}^{\Theta} \right] \\ &+ \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3} C_{\ell_2}^{\Theta} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_3 \ell_2}^{m' m_3 m_2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \left[C_{\ell'}^{\Theta} J_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m' m_3} + C_{\ell}^{\Theta} J_{\ell' \ell_1 \ell \ell_3}^{m' m_1 m m_3} \right] \end{aligned} \quad (D.16)$$

ou encore, pour le moment à deux points de la température lentillée :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} &= (-1)^m C_{\ell}^{\ominus} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m - m'} \\
&+ \sum_{\ell_1 m_1} (-1)^{m_1} \phi_{\ell_1 m_1} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell' \\ -m & m_1 & -m' \end{pmatrix} \left[F_{\ell \ell_1 \ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + (-1)^{\ell + \ell' + \ell_1} F_{\ell' \ell_1 \ell} C_{\ell}^{\ominus} \right] \\
&+ \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3} (-1)^{m_2} C_{\ell_2}^{\ominus} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} I_{\ell' \ell_3 \ell_2}^{m' m_3 - m_2} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \left[(-1)^{m'} C_{\ell'}^{\ominus} J_{\ell \ell_1 \ell'}^{m m_1 - m' m_3} + (-1)^m C_{\ell}^{\ominus} J_{\ell' \ell_1 \ell}^{m' m_1 - m m_3} \right]
\end{aligned} \tag{D.17}$$

Et en moyennant aussi sur les grandes structures :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \left\{ C_{\ell}^{\ominus} \left[1 - \frac{1}{2} \ell(\ell + 1) \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi} \ell_1(\ell_1 + 1)(2\ell_1 + 1) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi} C_{\ell_2}^{\ominus} F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2 \right\}
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Nous avons ainsi démontré l'expression 4.21 du spectre de puissance de la température lentillée, au premier ordre en C_{ℓ}^{ϕ} :

$$\boxed{\tilde{C}_{\ell}^{\ominus} = C_{\ell}^{\ominus} [1 - \ell(\ell + 1)R] + \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^{\phi} C_{\ell_2}^{\ominus} F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2} \tag{D.19}$$

où nous avons posé :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\phi} \ell_1(\ell_1 + 1)(2\ell_1 + 1) \tag{D.20}$$

D.3 ESPÉRANCE DES ESTIMATEURS DE L'EFFET DE LENTILLE

Rappelons les expressions obtenues au chapitre 5 pour les estimateurs (équations 6.7 et 6.8) :

$$c_{LM} = (-1)^M \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \\ \times \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} p_{L\ell\ell'}^- \quad (\text{D.21})$$

$$g_{LM} = -i(-1)^M \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \\ \times \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} p_{L\ell\ell'}^+ \quad (\text{D.22})$$

avec :

$$p_{L\ell\ell'}^{\pm} = \frac{1 \pm (-1)^{L+\ell+\ell'}}{2} \quad (\text{D.23})$$

D.3.1 Partie gradient

Utilisons l'expression D.17 au premier ordre en ϕ pour calculer l'espérance de g :

$$\langle \hat{g}_{LM} \rangle_{|\phi} \propto -i \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} (-1)^M p_{L\ell\ell'}^+ \\ \times \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \propto -i \sum_{\ell m} \sqrt{\ell(\ell+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell}^{(2)} (-1)^m C_{\ell}^{\ominus} (-1)^M p_{L\ell L}^+ \\ \times (2\ell+1) \sqrt{\frac{(2L+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell \\ M & m & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ -i \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \sum_{\ell_1 m_1} (-1)^{m_1+M} \phi_{\ell_1 m_1} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} p_{L\ell\ell'}^+ \\ \times \left[F_{\ell\ell_1\ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + (-1)^{\ell+\ell'+\ell_1} F_{\ell'\ell_1\ell} C_{\ell}^{\ominus} \right] \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \\ \times \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell' \\ -m & m_1 & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où, d'après les formules C.10 et C.11 :

$$\langle \hat{g}_{LM} \rangle_{|\phi} \propto -i \sum_{\ell} \sqrt{\ell(\ell+1)(2\ell+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell}^{(2)} (-1)^{\ell} C_{\ell}^{\ominus} \frac{(2\ell+1)}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 & \ell & \ell \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_{L0} \\ -i \sum_{\ell\ell'} \phi_{LM} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} p_{L\ell\ell'}^+ \left[F_{L\ell\ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + (-1)^{\ell+\ell'+L} F_{\ell'L\ell} C_{\ell}^{\ominus} \right] \\ \times \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \frac{1}{2L+1} \delta_{L\ell_1} \delta_{M,-m_1} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En négligeant le monopole et en remarquant que p^+ est non nul pour des valeurs paires de la somme $\ell + \ell' + L$ nous avons donc :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \rangle_{|\phi} &\propto -i \frac{\phi_{LM}}{\sqrt{2L+1}} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} p_{\ell\ell'L}^+ \left[F_{\ell L \ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + F_{\ell' L \ell} C_{\ell}^{\ominus} \right] \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons, d'après l'expression du coefficient $F_{\ell L \ell'}$ (équation 4.19) :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \rangle_{|\phi} &\propto \frac{-i}{4\pi} \phi_{LM} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} (2\ell+1) f_{\ell'}^{(2)} (2\ell'+1) p_{\ell\ell'L}^+ \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left[(\ell'(\ell'+1) + L(L+1) - \ell(\ell+1)) C_{\ell'}^{\ominus} \begin{pmatrix} \ell & L & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (\ell(\ell+1) + L(L+1) - \ell'(\ell'+1)) C_{\ell}^{\ominus} \begin{pmatrix} \ell' & L & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Enfin, l'équation C.13 donne, si la somme $\ell + \ell' + L$ est paire :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \rangle_{|\phi} &\propto i \frac{\sqrt{L(L+1)}}{4\pi} \phi_{LM} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} (2\ell+1) f_{\ell'}^{(2)} (2\ell'+1) p_{\ell\ell'L}^+ \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left[\sqrt{\ell'(\ell'+1)} C_{\ell'}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell' & \ell \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

D.3.2 Partie rotationnelle

Nous procédons de même en omettant directement le terme qui donne un monopole :

$$\begin{aligned} \langle \hat{c}_{LM} \rangle_{|\phi} &\propto \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'} \rangle_{|\phi} (-1)^M p_{\ell\ell'L}^- \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\propto \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \sum_{\ell_1 m_1} (-1)^{m_1+M} \phi_{\ell_1 m_1} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} p_{\ell\ell'L}^- \\ &\quad \times \left[F_{\ell\ell_1 \ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + (-1)^{\ell+\ell'+\ell_1} F_{\ell' \ell_1 \ell} C_{\ell}^{\ominus} \right] \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell' \\ -m & m_1 & -m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après l'équation C.11, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \langle \hat{c}_{LM} \rangle_{|\phi} &\propto \frac{\phi_{LM}}{\sqrt{2L+1}} \sum_{\ell\ell'} \sqrt{\ell'(\ell'+1)} f_{\ell}^{(1)} f_{\ell'}^{(2)} p_{\ell\ell'L}^- \left[F_{\ell L \ell'} C_{\ell'}^{\ominus} + (-1)^{\ell+\ell'+L} F_{\ell' L \ell} C_{\ell}^{\ominus} \right] \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L & \ell & \ell' \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_{L\ell_1} \delta_{M,-m_1} \end{aligned}$$

Or, les coefficients F sont non nuls si et seulement si la somme $\ell + \ell' + L$ est paire tandis que le coefficient p^- est non nul pour les valeurs impaires de cette même somme. L'espérance de la partie rotationnelle est donc identiquement nulle :

$$\langle \hat{c}_{LM} \rangle_{|\phi} \propto 0 \quad (\text{D.25})$$

D.4 CALCUL DE LA VARIANCE GAUSSIENNE DES ESTIMATEURS

Par construction, nous souhaitons minimiser la variance de nos estimateurs, calculée en faisant l'hypothèse que la température lentillée est gaussienne.

D.4.1 Partie gradient

La variance de l'estimateur \hat{g} s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle &= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\ &\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2L'+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3}^* \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4}^* \rangle \end{aligned}$$

Nous ne retenons, dans le moment à quatre points de la température lentillée, que la partie déconnectée :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle_d &= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\ &\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2L'+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \left[\tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus \delta_{\ell_2 \ell_4} \delta_{m_2 m_4} + \tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \delta_{\ell_1 \ell_4} \delta_{m_1 m_4} \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus \delta_{\ell_2 \ell_3} \delta_{m_2 m_3} \right] \\ \langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle_d &= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \ell_2(\ell_2+1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \right)^2 \tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus \\ &\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_1 \ell_2 L'}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_1 & \ell_2 \\ -M' & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus \\ &\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_2 \ell_1 L'}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_2 & \ell_1 \\ -M' & m_2 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après les propriétés sur les symboles de Wigner-3j présentées aux équations C.10 et C.11, nous avons alors l'expression du biais dit "gaussien" de l'estimateur, donnée à l'équation 6.21 :

$$N_L^{(0,g)} = \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{D.26})$$

D.4.2 Partie rotationnelle

La variance de l'estimateur \hat{c} s'écrit :

$$\langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{L'M'}^* \rangle = \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\ \times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^- p_{\ell_3 \ell_4 L'}^- \sqrt{(2L+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2L'+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)} \\ \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \times \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3}^* \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4}^* \rangle$$

Les mêmes calculs que pour la partie gradient conduisent à :

$$N_L^{(0,c)} = \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \tilde{C}_{\ell_1}^{\ominus} \tilde{C}_{\ell_2}^{\ominus} p_{\ell_1 \ell_2 L}^- (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{D.27})$$

Or, rappelons l'expression 6.13 obtenue pour le coefficient de normalisation A_L :

$$A_L^{-1} = i \frac{\sqrt{L(L+1)}}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} C_{\ell_2}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} C_{\ell_1}^{\ominus} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{D.28})$$

Pour des filtres donnés par :

$$f_{\ell}^{(1)} = \frac{C_{\ell}}{\tilde{C}_{\ell}^{\text{tot}}} \quad (\text{D.29})$$

$$f_{\ell}^{(2)} = \frac{1}{\tilde{C}_{\ell}^{\text{tot}}} \quad (\text{D.30})$$

nous aurons alors,

$$N_L^0 = \frac{A_L}{L(L+1)} \quad (\text{D.31})$$

CALCUL DU BIAIS N_L^1 DE L'ESTIMATEUR

E

Les biais N_L^1 dépendent du spectre du potentiel de lentille C_L^ϕ . Ils viennent donc d'une partie des termes du moment à quatre points de la température observée faisant intervenir deux ϕ . Nous allons ainsi expliciter dans cette annexe le calcul complet de la variance de l'estimateur quadratique défini aux équations 6.8 et 6.7, à partir du développement limité au deuxième ordre en ϕ .

Le moment à quatre points de la température observée s'écrit, en tenant compte du développement limité à l'ordre 2 en ϕ :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3}^* \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4}^* \rangle = \\ \langle \left(\Theta_{\ell_1 m_1} + \delta \Theta_{\ell_1 m_1} + \delta^{(2)} \Theta_{\ell_1 m_1} \right) \left(\Theta_{\ell_2 m_2} + \delta \Theta_{\ell_2 m_2} + \delta^{(2)} \Theta_{\ell_2 m_2} \right) \\ \left(\Theta_{\ell_3 m_3}^* + \delta \Theta_{\ell_3 m_3}^* + \delta^{(2)} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \right) \left(\Theta_{\ell_4 m_4}^* + \delta \Theta_{\ell_4 m_4}^* + \delta^{(2)} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \right) \rangle \end{aligned}$$

N'écrivons toutefois que les 11 termes jusqu'à l'ordre 2 en ϕ qui ne s'annulent pas :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell_1 m_1} \tilde{\Theta}_{\ell_2 m_2} \tilde{\Theta}_{\ell_3 m_3}^* \tilde{\Theta}_{\ell_4 m_4}^* \rangle = \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \\ + \langle \delta \Theta_{\ell_1 m_1} \delta \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle + 5 \text{ perms.} \\ + \langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle + 3 \text{ perms.} \end{aligned}$$

Nous allons montrer dans la section E.1 que le premier terme de cette somme vient du biais gaussien. Dans la section E.2, nous montrerons que les termes en $\delta \Theta$ redonnent, pour une part, le spectre C_L^ϕ recherché et, pour l'autre part, le biais N_L^1 . Enfin, nous verrons dans la section E.3 que les termes en $\delta^{(2)} \Theta$ complètent le biais gaussien.

E.1 TERME D'ORDRE 0 EN ϕ

Seul le premier terme de l'équation précédente ne fait pas intervenir le potentiel de lentille :

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle = \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle \langle \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \\ + \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle + \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \\ = (-1)^{m_1} C_{\ell_1}^\Theta \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1, -m_2} (-1)^{m_3} C_{\ell_3}^\Theta \delta_{\ell_3 \ell_4} \delta_{m_3, -m_4} \\ + C_{\ell_1}^\Theta \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} C_{\ell_2}^\Theta \delta_{\ell_2 \ell_4} \delta_{m_2 m_4} + C_{\ell_1}^\Theta \delta_{\ell_1 \ell_4} \delta_{m_1 m_4} C_{\ell_2}^\Theta \delta_{\ell_2 \ell_3} \delta_{m_2 m_3} \end{aligned}$$

Le seul terme de la variance de g , d'ordre 0 en ϕ , vient de la partie déconnectée de l'expression précédente.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle^{(0)} &= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\
&\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle_d \\
&= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \ell_2(\ell_2+1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \right)^2 C_{\ell_1}^\ominus C_{\ell_2}^\ominus (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \\
&\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_1 \ell_2 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_1 & \ell_2 \\ -M' & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} C_{\ell_1}^\ominus C_{\ell_2}^\ominus (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \\
&\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_2 \ell_1 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_2 & \ell_1 \\ -M' & m_2 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'après la formule C.11, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle^{(0)} &= \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \ell_2(\ell_2+1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \right)^2 C_{\ell_1}^\ominus C_{\ell_2}^\ominus (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \\
&\times p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \\
&+ \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} C_{\ell_1}^\ominus C_{\ell_2}^\ominus (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \\
&\times p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (-1)^{\ell_1+\ell_2+L} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_{LL'} \delta_{MM'}
\end{aligned}$$

Nous retrouvons une expression similaire au biais N_ℓ^0 , mais où les \tilde{C}_ℓ lentillés ont été remplacés par des C_ℓ non lentillés :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle^{(0)} &= \delta_{LL'} \delta_{MM'} \frac{A_L^2}{4\pi} \\
&\times \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} C_{\ell_1}^\ominus C_{\ell_2}^\ominus (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&\hspace{15em} \text{(E.1)}
\end{aligned}$$

E.2 TERMES EN $\delta\Theta$ D'ORDRE 2 EN ϕ E.2.1 Termes en $((12)(34))$

Pour cette combinaison des paires d'indices, le terme en $\langle\delta\Theta.\delta\Theta\rangle\langle\Theta.\Theta\rangle$ conduit à un monopole que nous n'écrivons donc pas. Nous avons alors quatre termes de la forme $\langle\delta\Theta.\Theta\rangle\langle\delta\Theta.\Theta\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle\hat{g}_{LM}\hat{g}_{L'M'}^*\rangle_{((12)(34))}^{(\delta\Theta)} &= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)}\sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\ &\times (-1)^{M+M'} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times (\langle\langle\delta\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2}\rangle\rangle \langle\delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^*\rangle) + 3 \text{ perms.} \end{aligned}$$

Or nous avons, en remplaçant les coefficients I par leur expression (formule D.8) :

$$\begin{aligned} \langle\delta\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2}\rangle \langle\delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^*\rangle &= C_{\ell_2}^\Theta C_{\ell_4}^\Theta \sum_{\ell_a m_a} \sum_{\ell_b m_b} (-1)^{m_a+m_b} \phi_{\ell_a m_a} \phi_{\ell_b m_b}^* \\ &\times F_{\ell_1 \ell_a \ell_2} F_{\ell_3 \ell_b \ell_4} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_a & \ell_2 \\ -m_1 & m_a & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_b & \ell_4 \\ -m_3 & m_b & -m_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} &\frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)}\sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\ &\times p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \langle\langle\delta\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2}\rangle\rangle \langle\delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^*\rangle \\ &= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\substack{\ell_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)}\sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} C_{\ell_2}^\Theta C_{\ell_4}^\Theta p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\ &\times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} F_{\ell_1 \ell_a \ell_2} F_{\ell_3 \ell_b \ell_4} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_a & \ell_2 \\ -m_1 & m_a & -m_2 \end{pmatrix} \\ &\times \sum_{m_3 m_4} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_3 & \ell_4 \\ -m_a & m_3 & -m_4 \end{pmatrix} C_{\ell_a}^\Phi \delta_{\ell_a \ell_b} \delta_{m_a m_b} \end{aligned}$$

En appliquant deux fois la formule C.11, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\substack{\ell_i \\ i \in \{1;4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} C_{\ell_2}^{\ominus} C_{\ell_4}^{\oplus} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\
&\quad \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i + 1)} F_{\ell_1 \ell_a \ell_2} F_{\ell_3 \ell_a \ell_4} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \frac{\delta_{L \ell_a} \delta_{M m_a}}{2L+1} \frac{\delta_{L' \ell_a} \delta_{M' m_a}}{2L'+1} C_{\ell_a}^{\phi} \\
&= \frac{A_L^2}{4\pi} \frac{C_L^{\phi}}{2L+1} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\substack{\ell_i \\ i \in \{1;4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} C_{\ell_2}^{\ominus} C_{\ell_4}^{\ominus} \\
&\quad \times p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{\prod_i (2\ell_i + 1)} F_{\ell_1 L \ell_2} F_{\ell_3 L \ell_4} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons, pour simplifier les notations :

$$g_{\ell_1 \ell_2}(L) = \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \sqrt{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Les différents termes de la forme $\langle \delta \Theta \cdot \Theta \rangle \langle \delta \Theta \cdot \Theta \rangle$ se calculent de la même façon et vont donner :

$$\begin{aligned}
\langle \delta \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle \langle \delta \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle &\rightarrow \frac{C_L^{\phi}}{2L+1} \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) F_{\ell_1 L \ell_2} C_{\ell_2}^{\ominus} \times \sum_{\ell_3 \ell_4} g_{\ell_3 \ell_4}(L) F_{\ell_3 L \ell_4} C_{\ell_4}^{\ominus} \\
\langle \delta \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle \langle \Theta_{\ell_3 m_3}^* \delta \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle &\rightarrow \frac{C_L^{\phi}}{2L+1} \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) F_{\ell_1 L \ell_2} C_{\ell_2}^{\ominus} \times \sum_{\ell_3 \ell_4} g_{\ell_3 \ell_4}(L) F_{\ell_4 L \ell_3} C_{\ell_3}^{\ominus} \\
\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \delta \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle \langle \delta \Theta_{\ell_3 m_3}^* \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle &\rightarrow \frac{C_L^{\phi}}{2L+1} \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) F_{\ell_2 L \ell_1} C_{\ell_1}^{\ominus} \times \sum_{\ell_3 \ell_4} g_{\ell_3 \ell_4}(L) F_{\ell_3 L \ell_4} C_{\ell_4}^{\ominus} \\
\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \delta \Theta_{\ell_2 m_2} \rangle \langle \Theta_{\ell_3 m_3}^* \delta \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle &\rightarrow \frac{C_L^{\phi}}{2L+1} \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) F_{\ell_2 L \ell_1} C_{\ell_1}^{\ominus} \times \sum_{\ell_3 \ell_4} g_{\ell_3 \ell_4}(L) F_{\ell_4 L \ell_3} C_{\ell_3}^{\ominus}
\end{aligned}$$

Au total, nous aurons donc :

$$\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle_{((12)(34))}^{(\delta \Theta)} = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \frac{C_L^{\phi}}{2L+1} \frac{A_L^2}{4\pi} \left[\sum_{\ell_1 \ell_2} g_{\ell_1 \ell_2}(L) \left(F_{\ell_1 L \ell_2} C_{\ell_2}^{\ominus} + F_{\ell_2 L \ell_1} C_{\ell_1}^{\ominus} \right) \right]^2$$

Nous retrouvons, grâce à la définition 6.14 du coefficient de normalisation A_L :

$$\boxed{\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle_{((12)(34))}^{(\delta \Theta)} = \delta_{LL'} \delta_{MM'} C_L^{\phi}} \quad (\text{E.4})$$

E.2.2 Termes en ((13)(24)) et ((14)(23))**E.2.2.1 Termes de la forme $\langle\delta\Theta.\delta\Theta\rangle\langle\Theta.\Theta\rangle$**

Cette fois-ci, ces termes ne conduisent pas à un monopole. Calculons par exemple :

$$\langle\langle\delta\Theta_{\ell_1 m_1} \delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle\langle\Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle\rangle = \frac{\delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3}}{2\ell_1 + 1} \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2 C_{\ell_2}^\Theta \delta_{\ell_2 \ell_4} \delta_{m_2 m_4} \quad (\text{E.5})$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} & \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} \\ & \times p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i + 1)} \\ & \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \times \langle\langle\delta\Theta_{\ell_1 m_1} \delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle\langle\Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle\rangle \\ & = \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \ell_2(\ell_2 + 1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)}\right)^2 p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ & \quad \times \frac{1}{2\ell_1 + 1} C_{\ell_2}^\Theta \sum_{\ell_a \ell_b} F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2 C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta \end{aligned}$$

De même, on montre :

$$\begin{aligned} & \langle\langle\delta\Theta_{\ell_1 m_1} \delta\Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle\langle\Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle\rangle \rightarrow \\ & \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1 + 1) \\ & \times (2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\ell_1 + 1} C_{\ell_2}^\Theta \sum_{\ell_a \ell_b} F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2 C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle\langle\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle\langle\delta\Theta_{\ell_2 m_2} \delta\Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle\rangle \rightarrow \\ & \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \ell_2(\ell_2 + 1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)}\right)^2 p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ & \times \frac{1}{2\ell_2 + 1} C_{\ell_1}^\Theta \sum_{\ell_a \ell_b} F_{\ell_2 \ell_a \ell_b}^2 C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle\langle\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle\langle\delta\Theta_{\ell_2 m_2} \delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle\rangle \rightarrow \\ & \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1 + 1) \\ & \times (2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\ell_2 + 1} C_{\ell_1}^\Theta \sum_{\ell_a \ell_b} F_{\ell_2 \ell_a \ell_b}^2 C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta \end{aligned}$$

Donc, au total, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle^{\langle (\delta \Theta, \delta \Theta) \rangle \langle \Theta, \Theta \rangle} &= \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \\
&\times \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&\times \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta \left[C_{\ell_2}^\Theta \frac{F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2}{2\ell_1+1} + C_{\ell_1}^\Theta \frac{F_{\ell_2 \ell_a \ell_b}^2}{2\ell_2+1} \right]
\end{aligned} \tag{E.6}$$

E.2.2.2 Termes de la forme $\langle \delta \Theta, \Theta \rangle \langle \delta \Theta, \Theta \rangle$

Les combinaisons de paires d'indices ((13)(24)) et ((14)(23)) vont donner des résultats semblables (il suffira d'échanger les indices 3 et 4). Nous allons donc détailler le calcul pour la première combinaison. De plus, pour chacune de ces combinaisons, on peut de nouveau écrire 4 termes de la forme $\langle \delta \Theta, \Theta \rangle \langle \delta \Theta, \Theta \rangle$. Sachant

$$\begin{aligned}
\langle \langle \delta \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \delta \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \rangle &= (-1)^{m_1+m_2} C_{\ell_3}^\Theta C_{\ell_4}^\Theta \sum_{\lambda \mu} (-1)^\mu C_\lambda^\phi F_{\ell_1 \lambda \ell_3} F_{\ell_2 \lambda \ell_4} \\
&\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \lambda & \ell_3 \\ -m_1 & \mu & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \lambda & \ell_4 \\ -m_2 & -\mu & m_4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

nous avons,

$$\begin{aligned}
&\frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \prod_i (2\ell_i+1) \langle \langle \delta \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \delta \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \rangle \\
&= \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} \sum_{\ell_i \lambda} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} C_{\ell_3}^\Theta C_{\ell_4}^\Theta C_\lambda^\phi F_{\ell_1 \lambda \ell_3} F_{\ell_2 \lambda \ell_4} \\
&\times p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \prod_i (2\ell_i+1) \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sum_{m_i \mu} (-1)^{M+M'} (-1)^{m_1+m_2+\mu} \\
&\times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \lambda & \ell_3 \\ -m_1 & \mu & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \lambda & \ell_4 \\ -m_2 & -\mu & m_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les sommes de produits de quatre symboles de Wigner-3j sont données par la formule C.12. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\
& \quad \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \quad \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \langle \delta\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \delta\Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \\
& = \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_i} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L}^+ C_{\ell_3}^{\ominus} C_{\ell_4}^{\ominus} \\
& \quad \times \sqrt{\prod_i (2\ell_i+1)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \quad \times (-1)^{\ell_2+\ell_4+L} \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\phi} F_{\ell_1 \lambda \ell_3} F_{\ell_2 \lambda \ell_4} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & \lambda \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

En reprenant la notation définie à l'équation E.3, nous trouvons donc pour les différents termes en ((13)(24)) :

$$\begin{aligned}
\langle \delta\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \delta\Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle & \rightarrow \sum_{\ell_i \lambda} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) C_{\ell_3}^{\ominus} C_{\ell_4}^{\ominus} C_{\lambda}^{\phi} F_{\ell_1 \lambda \ell_3} F_{\ell_2 \lambda \ell_4} \\
& \quad \times (-1)^{\ell_2+\ell_4+L} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & \lambda \end{Bmatrix} \\
\langle \delta\Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \delta\Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle & \rightarrow \sum_{\ell_i \lambda} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) C_{\ell_3}^{\ominus} C_{\ell_2}^{\ominus} C_{\lambda}^{\phi} F_{\ell_1 \lambda \ell_3} F_{\ell_4 \lambda \ell_2} \\
& \quad \times (-1)^{\ell_2+\ell_4+L} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_4 & L \\ \ell_2 & \ell_3 & \lambda \end{Bmatrix} \\
\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \delta\Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle & \rightarrow \sum_{\ell_i \lambda} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) C_{\ell_1}^{\ominus} C_{\ell_4}^{\ominus} C_{\lambda}^{\phi} F_{\ell_3 \lambda \ell_1} F_{\ell_2 \lambda \ell_4} \\
& \quad \times (-1)^{\ell_2+\ell_4+L} \begin{Bmatrix} \ell_3 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_1 & \lambda \end{Bmatrix} \\
\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \delta\Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \delta\Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle & \rightarrow \sum_{\ell_i \lambda} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) C_{\ell_1}^{\ominus} C_{\ell_2}^{\ominus} C_{\lambda}^{\phi} F_{\ell_3 \lambda \ell_1} F_{\ell_4 \lambda \ell_2} \\
& \quad \times (-1)^{\ell_2+\ell_4+L} \begin{Bmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ \ell_2 & \ell_1 & \lambda \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Nous arrivons ainsi à l'expression factorisée suivante :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle_{((13)(24))}^{(\delta\Theta)} & = \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_i} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) (-1)^{\ell_2+\ell_4+L} \\
& \quad \times \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\phi} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & \lambda \end{Bmatrix} f_{\ell_1 \lambda \ell_3} f_{\ell_2 \lambda \ell_4}
\end{aligned}$$

où nous avons défini le coefficient f par :

$$f_{\ell_1 \ell_2} = C_{\ell_2}^{\ominus} F_{\ell_1 L \ell_2} + C_{\ell_1}^{\ominus} F_{\ell_2 L \ell_1} \quad (\text{E.8})$$

Et pour les termes en ((14)(23)), il suffit d'échanger les indices 3 et 4 dans le résultat précédant, ce qui conduit au même résultat.

Conclusion

L'ensemble des termes que nous avons détaillés ici n'est pas capturé par le biais gaussien et contribue donc au biais d'ordre 1 en C_L^ϕ :

$$N_L^1 = 2 \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_i} g_{\ell_1 \ell_2}(L) g_{\ell_3 \ell_4}(L) (-1)^{\ell_2 + \ell_4 + L} \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\phi} \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & \lambda \end{array} \right\} f_{\ell_1 \lambda \ell_3} f_{\ell_2 \lambda \ell_4} \quad (\text{E.9})$$

Nous retrouvons l'équation 6.22 annoncée au chapitre 6.

E.3 TERMES EN $\delta^{(2)} \Theta$ D'ORDRE 2 EN ϕ

Les termes de la forme $\langle \delta \Theta \cdot \Theta \cdot \Theta \cdot \Theta \rangle$ conduisent à un monopole pour la combinaison d'indice ((12)(34)). Nous ne nous intéresserons donc qu'aux deux autres combinaisons. Pour chacune, nous aurons quatre termes différents, soit au total, huit termes qui contribuent au biais gaussien.

Par ailleurs, la formule D.15 nous donne que :

$$\langle \delta \Theta_{\ell m}^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle = -\frac{1}{2} C_{\ell}^{\Theta} \ell(\ell+1) R \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (\text{E.10})$$

où R a été défini à l'équation 4.22.

E.3.1 Termes en ((13)(24))

$$\begin{aligned} & \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\ & \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \\ & = -\frac{1}{2} \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \ell_2(\ell_2+1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \right)^2 p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_1 \ell_2 L'}^+ C_{\ell_1}^{\Theta} C_{\ell_2}^{\Theta} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_1 & \ell_2 \\ -M' & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \quad \times (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \ell_1(\ell_1+1) R \\ & = -\frac{R}{2} \frac{A_L^2}{4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \ell_2(\ell_2+1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \right)^2 C_{\ell_1}^{\Theta} C_{\ell_2}^{\Theta} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \ell_1(\ell_1+1) \end{aligned}$$

Le terme $\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \delta^{(2)} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle$ conduit exactement au même résultat. Un calcul semblable conduit encore à :

$$\begin{aligned} & \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\ & \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \\ & = -\frac{R A_L^2}{2 \cdot 4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \ell_2(\ell_2+1) \left(f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \right)^2 C_{\ell_1}^{\Theta} C_{\ell_2}^{\Theta} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \ell_2(\ell_2+1) \end{aligned}$$

Le calcul de $\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \delta^{(2)} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle$ donne le même résultat.

E.3.2 Termes en ((14)(23))

Le même calcul s'applique encore à ces termes et conduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\ & \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \\ & = -\frac{R A_L^2}{2 \cdot 4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} C_{\ell_1}^{\Theta} C_{\ell_2}^{\Theta} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \\ & \quad \times (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ell_1(\ell_1+1) \end{aligned}$$

De même pour $\langle \Theta_{\ell_1 m_1} \delta^{(2)} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle$. Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{A_L A_{L'}}{4\pi} (-1)^{M+M'} \sum_{\substack{\ell_i m_i \\ i \in \{1,4\}}} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_4(\ell_4+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_3}^{(1)} f_{\ell_4}^{(2)} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ p_{\ell_3 \ell_4 L'}^+ \\ & \times \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ -M & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ -M' & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \times \sqrt{(2L+1)(2L'+1) \prod_i (2\ell_i+1)} \langle \Theta_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_4 m_4}^* \rangle \langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_3 m_3}^* \rangle \\ & = -\frac{R A_L^2}{2 \cdot 4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} C_{\ell_1}^{\Theta} C_{\ell_2}^{\Theta} p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ \\ & \quad \times (2\ell_1+1)(2\ell_2+1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ell_2(\ell_2+1) \end{aligned}$$

Conclusion

En rassemblant les résultats des deux sous-sections précédentes, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{L'M'}^* \rangle^{(\delta^{(2)\Theta})} &= -\frac{R A_L^2}{2 \cdot 4\pi} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} C_{\ell_1}^\Theta C_{\ell_2}^\Theta p_{\ell_1 \ell_2 L}^+ (2\ell_1 + 1) \\ &\times (2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} [\ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1)] \\ &\times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

E.4 CONCLUSION : VARIANCE DE L'ESTIMATEUR AU PREMIER ORDRE EN C_L^ϕ

Nous avons, dans cette annexe, explicité entièrement le calcul de la variance de l'estimateur du potentiel de lentille, en allant jusqu'au premier ordre en C_L^ϕ . Celle-ci est donnée par :

$$\langle \hat{g}_{LM} \hat{g}_{LM}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[C_L^\phi + N_L^{(0,g)} + N_L^{(1,g)} \right] \quad (\text{E.12})$$

$$\langle \hat{c}_{LM} \hat{c}_{LM}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left[N_L^{(0,c)} + N_L^{(1,c)} \right] \quad (\text{E.13})$$

→ Nous avons montré que la variance de l'estimateur donnait le spectre de puissance du potentiel de lentille (équation E.4) à partir des termes connectés i.e. la combinaison ((12)(34)) de la forme $\langle \delta^\Theta \Theta \rangle^2$ du moment à quatre points de la température observée, développée au deuxième ordre en ϕ . Ces termes donnent en revanche une contribution nulle à la variance de la partie rotationnelle de l'estimateur pour les mêmes raisons que celles pour lesquelles son espérance était déjà nulle.

→ Un certain nombre de termes que nous avons calculés précédemment dans la variance de l'estimateur, au premier ordre en C_L^ϕ , sont en fait inclus dans le biais gaussien. Rappelons en effet son expression obtenue à l'annexe D, valable pour la partie gradient comme pour la partie rotationnelle (signe + ou - de $p_{\ell_1 \ell_2 L}$) :

$$\begin{aligned} N_L^0 &= \frac{A_L^2}{4\pi} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \tilde{C}_{\ell_1}^\Theta \tilde{C}_{\ell_2}^\Theta p_{\ell_1 \ell_2 L}^\pm (2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1) \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \left[\sqrt{\ell_2(\ell_2 + 1)} f_{\ell_1}^{(1)} f_{\ell_2}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_1 & \ell_2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)} f_{\ell_2}^{(1)} f_{\ell_1}^{(2)} \begin{pmatrix} L & \ell_2 & \ell_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Les spectres de température \tilde{C}_ℓ désignent ici les spectres lentillés dont l'expression au premier ordre en C_ℓ^ϕ a aussi été établie à l'annexe D et s'écrit :

$$\tilde{C}_\ell^\Theta = C_\ell^\Theta [1 - \ell(\ell + 1)R] + \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\Theta F_{\ell \ell_a \ell_b}^2$$

Nous pouvons donc expliciter le produit $\tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus$ dans le biais N_L^0 , au premier ordre en C_ℓ^ϕ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\ell_1}^\ominus \tilde{C}_{\ell_2}^\ominus &= \left[C_{\ell_1}^\ominus [1 - \ell_1(\ell_1 + 1)R] + \frac{1}{2\ell_1 + 1} \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\ominus F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2 \right] \\ &\quad \times \left[C_{\ell_2}^\ominus [1 - \ell_2(\ell_2 + 1)R] + \frac{1}{2\ell_2 + 1} \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\ominus F_{\ell_2 \ell_a \ell_b}^2 \right] \\ &\approx C_{\ell_1}^\ominus C_{\ell_2}^\ominus - C_{\ell_1}^\ominus \ell_2(\ell_2 + 1)R - C_{\ell_2}^\ominus \ell_1(\ell_1 + 1)R + \frac{C_{\ell_1}^\ominus}{2\ell_2 + 1} \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\ominus F_{\ell_2 \ell_a \ell_b}^2 \\ &\quad + \frac{C_{\ell_2}^\ominus}{2\ell_1 + 1} \sum_{\ell_a \ell_b} C_{\ell_a}^\phi C_{\ell_b}^\ominus F_{\ell_1 \ell_a \ell_b}^2 \end{aligned}$$

La contribution du premier terme est donnée par l'équation E.1. Celle des deux termes suivants correspond à l'équation E.11. Enfin, les deux derniers termes se retrouvent dans l'équation E.6. Pour ces trois termes, les expressions ont été obtenues pour la partie gradient de l'estimateur mais peuvent facilement être transposées à la partie rotationnelle en remplaçant le facteur p^+ par p^- .

→ Enfin, le biais N_L^1 (équation E.9) provient des termes déconnectés de la forme $\langle \delta\Theta \ominus \ominus \rangle^2$. Une fois encore, nous avons fait le calcul pour la partie gradient de l'estimateur. Pour la partie rotationnelle, il suffit de nouveau de remplacer p^+ par p^- .

CALCUL DU BIAIS N_L^2 DE L'ESTIMATEUR

F

Pour calculer le biais d'ordre deux en C_ℓ^ϕ de l'estimateur, nous allons calculer les termes supplémentaires qui apparaissent dans sa variance, c'est-à-dire essentiellement dans le moment à quatre points de la température observée, lorsque le développement limité de la température est poussé au quatrième ordre en ϕ . Nous commencerons par étudier le moment à deux points de la température avant d'explicitier ces termes supplémentaires.

F.1 EXPRESSION DU SPECTRE DE PUISSANCE DE LA TEMPÉRATURE LENTILLÉE AU DEUXIÈME ORDRE EN C_ℓ^ϕ

Le développement limité de la température lentillée s'écrit, en allant jusqu'à l'ordre 4 en ϕ :

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(\vec{n}) &\approx \Theta(\vec{n}) + \nabla_i \phi(\vec{n}) \nabla^i \Theta(\vec{n}) + \frac{1}{2} \nabla_i \phi(\vec{n}) \cdot \nabla_j \phi(\vec{n}) \nabla^i \nabla^j \Theta(\vec{n}) \\ &\quad + \frac{1}{6} \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_k \phi \nabla^i \nabla^j \nabla^k \Theta(\vec{n}) \\ &\quad + \frac{1}{24} \nabla_i \phi \nabla_j \phi \nabla_k \phi \nabla_h \phi \nabla^i \nabla^j \nabla^k \nabla^h \Theta(\vec{n}) + \dots\end{aligned}\quad (\text{F.1})$$

La transformation en harmoniques sphériques de cette équation conduit à :

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_{\ell m} &= \Theta_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} I_{\ell \ell_1 \ell_2}^{m m_1 m_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m m_1 m_2 m_3 m_4} \\ &\quad + \frac{1}{24} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sum_{\ell_5 m_5} \phi_{\ell_1 m_1} \Theta_{\ell_2 m_2} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell_5 m_5}^* H_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 \ell_5}^{m m_1 m_2 m_3 m_4 m_5} + \dots\end{aligned}\quad (\text{F.2})$$

où nous avons posé :

$$I_{\ell\ell_1\ell_2}^{mm_1m_2} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \nabla^i Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{F.3})$$

$$J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \cdot \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{F.4})$$

$$K_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4}^{mm_1m_2m_3m_4} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \cdot \nabla_k Y_{\ell_4 m_4} \cdot \nabla^i \nabla^j \nabla^k Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{F.5})$$

$$H_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\ell_5}^{mm_1m_2m_3m_4m_5} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \cdot \nabla_k Y_{\ell_4 m_4} \cdot \nabla_h Y_{\ell_5 m_5}^* \cdot \nabla^i \nabla^j \nabla^k \nabla^h Y_{\ell_2 m_2} \quad (\text{F.6})$$

Nous retrouvons bien, en limitant les calculs au deuxième ordre en ϕ , l'expression 4.15 introduite au chapitre 4 et établie dans l'annexe D.

Ecrivons la variance de la température lentillée :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle &= \left\langle \left(\Theta_{\ell m} + \delta \Theta_{\ell m} + \delta^{(2)} \Theta_{\ell m} + \delta^{(3)} \Theta_{\ell m} + \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\Theta_{\ell' m'}^* + \delta \Theta_{\ell' m'}^* + \delta^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* + \delta^{(3)} \Theta_{\ell' m'}^* + \delta^{(4)} \Theta_{\ell' m'}^* \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Ne retenons que les termes d'ordre pair inférieur ou égal à 4 en ϕ :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle &= \langle \Theta_{\ell m} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle + \langle \Theta_{\ell m} \delta^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle + \langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(2)} \Theta_{\ell m} \rangle + \langle \delta \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle \\ &\quad + \langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell m} \delta^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle + \langle \delta \Theta_{\ell m} \delta^{(3)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle + \langle \delta^{(3)} \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle \\ &\quad + \langle \Theta_{\ell m} \delta^{(4)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle + \langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle \end{aligned}$$

Les termes de la première ligne sont ceux de l'expression obtenue au deuxième ordre en ϕ . Nous avons donc 5 termes supplémentaires à calculer.

$$\mathbf{F.1.1} \quad \left\langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell m} \delta^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell m} \delta^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* \right\rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell'_1 m'_1} \sum_{\ell'_2 m'_2} \sum_{\ell'_3 m'_3} J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} J_{\ell'\ell'_1\ell'_2\ell'_3}^{m'm'_1m'_2m'_3} \\ &\quad \times \left\langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \phi_{\ell'_3 m'_3} \right\rangle \left\langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell'_2 m'_2}^* \right\rangle \end{aligned}$$

Notons que, par parité de la somme $\ell' + \ell'_1 + \ell'_2 + \ell'_3$, nécessaire pour que $J_{\ell'\ell'_1\ell'_2\ell'_3}^{m'm'_1m'_2m'_3}$ ne soit pas nul, nous avons $J^* = J$.

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(2)} \Theta_{\ell m} \delta^{(2)} \Theta_{\ell' m'}^* \right\rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell'_1 m'_1} \sum_{\ell'_3 m'_3} J_{\ell\ell_1\ell_2\ell_3}^{mm_1m_2m_3} J_{\ell'\ell'_1\ell'_2\ell'_3}^{m'm'_1m'_2m'_3} \\ &\quad \times \left\langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \phi_{\ell'_3 m'_3} \right\rangle C_{\ell_2}^{\Theta} \delta_{\ell_2 \ell'_2} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned}$$

Le moment à 4 points en ϕ donne quant à lui :

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \phi_{\ell'_3 m'_3} \right\rangle &= (-1)^{m_1+m_3} C_{\ell_1}^{\phi} \delta_{\ell_1 \ell'_3} \delta_{m_1, -m'_3} C_{\ell_3}^{\phi} \delta_{\ell'_1 \ell_3} \delta_{m'_1, -m_3} \\ &\quad + C_{\ell_1}^{\phi} \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} C_{\ell'_1}^{\phi} \delta_{\ell'_1 \ell'_3} \delta_{m'_1 m'_3} + C_{\ell_1}^{\phi} \delta_{\ell_1 \ell'_1} \delta_{m_1 m'_1} C_{\ell_3}^{\phi} \delta_{\ell_3 \ell'_3} \delta_{m_3 m'_3} \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2)\Theta} \delta_{\ell m} \delta^{(2)\Theta} \delta_{\ell' m'}^* \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\ell_2 m_2} C_{\ell_2}^\Theta \left[\sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell'_1 m'_1} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell'_1}^\phi J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_1}^{m m_1 m_2 m_1} J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell'_1}^{m' m'_1 m_2 m'_1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_3}^\phi J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} \left(J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell_3}^{m' m'_1 m_2 m_3} + (-1)^{m_1+m_3} J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell_3}^{m' -m_3 m_2 -m_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Et nous montrons :

$$\begin{aligned} J_{\ell' \ell_3 \ell_2 \ell_1}^{m' -m_3 m_2 -m_1} &= \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \nabla_i Y_{\ell_3, -m_3} \nabla_j Y_{\ell_1, -m_1} \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} \\ &= (-1)^{m_1+m_3} \int d\vec{n} Y_{\ell m}^* \nabla_i Y_{\ell_3 m_3}^* \nabla_j Y_{\ell_1 m_1} \nabla^i \nabla^j Y_{\ell_2 m_2} \\ &= (-1)^{m_1+m_3} J_{\ell' \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m' m'_1 m_2 m_3} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2)\Theta} \delta_{\ell m} \delta^{(2)\Theta} \delta_{\ell' m'}^* \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\ell_2 m_2} C_{\ell_2}^\Theta \left[\sum_{\ell_1 \ell'_1} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell'_1}^\phi \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1) \delta_{\ell \ell_2} \delta_{m m_2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{2} \ell'(\ell'+1) \ell'_1(\ell'_1+1)(2\ell'_1+1) \delta_{\ell' \ell_2} \delta_{m' m_2} + 2 \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_3}^\phi J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell_3}^{m' m'_1 m_2 m_3} \right] \\ \langle \delta^{(2)\Theta} \delta_{\ell m} \delta^{(2)\Theta} \delta_{\ell' m'}^* \rangle &= C_\ell^\Theta \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{4} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^\phi \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\ell_2 m_2} C_{\ell_2}^\Theta \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_3}^\phi J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell_3}^{m' m'_1 m_2 m_3} \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation D.12 :

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1 m_2 m_3} J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell_3}^{m' m'_1 m_2 m_3} \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \frac{(-1)^{m_1}}{2} \sum_{LM} \frac{-1}{L(L+1)} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & L \\ -m & m_1 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L \\ m_2 & -m_3 & -M \end{pmatrix} \\ &\quad \times F_{\ell \ell_1 L} [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)] F_{\ell_3 L \ell_2} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{m'_1}}{2} \sum_{L'M'} \frac{-1}{L'(L'+1)} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_1 & L' \\ -m' & m_1 & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_3 & L' \\ m_2 & -m_3 & -M' \end{pmatrix} \\ &\quad \times F_{\ell' \ell'_1 L'} [\ell_2(\ell_2+1) - L'(L'+1) + \ell_3(\ell_3+1)] F_{\ell_3 L' \ell_2} \end{aligned}$$

D'où, d'après la propriété C.11 appliquée deux fois :

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1 m_2 m_3} J_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3} J_{\ell' \ell'_1 \ell_2 \ell_3}^{m' m'_1 m_2 m_3} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m_1} \sum_{LM} \frac{\delta_{LL'} \delta_{MM'}}{[L(L+1)]^2 (2L+1)} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & L \\ -m & m_1 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_1 & L' \\ -m' & m_1 & M' \end{pmatrix} \\ &\quad \times F_{\ell \ell_1 L} F_{\ell' \ell'_1 L'} [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)]^2 F_{\ell_3 L \ell_2}^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{\delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}}{2\ell+1} \sum_L \frac{1}{[L(L+1)]^2 (2L+1)} F_{\ell \ell_1 L}^2 [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)]^2 F_{\ell_3 L \ell_2}^2 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2)\Theta_{\ell m}} \delta^{(2)\Theta_{\ell' m'}} \rangle &= C_{\ell}^{\Theta} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{4} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^{\Phi} \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1) \right]^2 \\ &+ \frac{1}{8} \frac{\delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}}{2\ell+1} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_2}^{\Theta} C_{\ell_1}^{\Phi} C_{\ell_3}^{\Phi} \sum_L \frac{1}{[L(L+1)]^2 (2L+1)} \\ &\times F_{\ell \ell_1 L}^2 [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)]^2 F_{\ell_3 L \ell_2}^2 \end{aligned}$$

Soit encore, en utilisant la définition 4.22 du coefficient R :

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2)\Theta_{\ell m}} \delta^{(2)\Theta_{\ell' m'}} \rangle &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \left\{ C_{\ell}^{\Theta} \left(\frac{\ell(\ell+1)R}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{2\ell+1} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1}^{\Phi} C_{\ell_2}^{\Theta} C_{\ell_3}^{\Phi} \right. \\ &\times \left. \sum_L \frac{1}{2L+1} \left(\frac{F_{\ell \ell_1 L} F_{\ell_3 L \ell_2}}{L(L+1)} \right)^2 [\ell_2(\ell_2+1) - L(L+1) + \ell_3(\ell_3+1)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

F.1.2 $\langle \delta^{(3)\Theta_{\ell m}} \delta^{(3)\Theta_{\ell' m'}} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(3)\Theta_{\ell m}} \delta^{(3)\Theta_{\ell' m'}} \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sum_{\ell'_1 m'_1} \sum_{\ell'_2 m'_2} K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m m_1 m_2 m_3 m_4} I_{\ell' \ell'_1 \ell'_2}^{m' m'_1 m'_2} \\ &\times \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell'_2 m'_2}^* \rangle \\ \langle \delta^{(3)\Theta_{\ell m}} \delta^{(3)\Theta_{\ell' m'}} \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sum_{\ell'_1 m'_1} K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m m_1 m_2 m_3 m_4} I_{\ell' \ell'_1 \ell'_2}^{m' m'_1 m'_2} \\ &\times \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \rangle C_{\ell_2}^{\Theta} \delta_{\ell_2 \ell'_2} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned}$$

Le moment à 4 points s'écrit cette fois :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell'_1 m'_1}^* \rangle &= (-1)^{m_1+m_3} C_{\ell_1}^{\Phi} \delta_{\ell_1 \ell_4} \delta_{m_1, -m_4} C_{\ell_3}^{\Phi} \delta_{\ell_3 \ell'_1} \delta_{m_3, -m'_1} \\ &+ C_{\ell_1}^{\Phi} \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} C_{\ell_4}^{\Phi} \delta_{\ell_4 \ell'_1} \delta_{m_4 m'_1} + C_{\ell_1}^{\Phi} \delta_{\ell_1 \ell'_1} \delta_{m_1 m'_1} C_{\ell_3}^{\Phi} \delta_{\ell_3 \ell_4} \delta_{m_3 m_4} \end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(3)\Theta_{\ell m}} \delta^{(3)\Theta_{\ell' m'}} \rangle &= \frac{1}{6} \sum_{\ell_2 m_2} C_{\ell_2}^{\Theta} \left[\sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_4 m_4} K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m m_1 m_2 m_3 m_4} I_{\ell' \ell'_1 \ell'_2}^{m' m'_1 m'_2} C_{\ell_1}^{\Phi} C_{\ell_4}^{\Phi} \right. \\ &+ \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_3}^{m m_1 m_2 m_3 m_3} I_{\ell' \ell'_1 \ell'_2}^{m' m'_1 m'_2} C_{\ell_1}^{\Phi} C_{\ell_3}^{\Phi} \\ &\left. + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_1}^{m m_1 m_2 m_3 -m_1} I_{\ell' \ell'_1 \ell'_2}^{m' -m'_1 m'_2} (-1)^{m_1+m_3} C_{\ell_1}^{\Phi} C_{\ell_3}^{\Phi} \right] \end{aligned}$$

Repartons de la définition F.5 pour expliciter les trois termes en K . Nous utiliserons les propriétés B.36 et B.39 :

$$K_{\ell \ell_1 \ell_2 \ell_1 \ell_4}^{m m_1 m_2 m_1 m_4} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \nabla_j Y_{\ell_1 m_1}^* \cdot \nabla_k Y_{\ell_4 m_4} \cdot \nabla^i \nabla^j \nabla^k Y_{\ell_2 m_2}$$

$$\sum_{m_1} K_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{mm_1 m_2 m_3 m_4} = -\frac{1}{2} \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \ell_2 (\ell_2 + 1) I_{\ell_4 \ell_2}^{mm_4 m_2}$$

De même,

$$\sum_{m_3} K_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_3}^{mm_1 m_2 m_3 m_3} = -\frac{1}{2} \ell_3 (\ell_3 + 1) (2\ell_3 + 1) \ell_2 (\ell_2 + 1) I_{\ell_1 \ell_2}^{mm_1 m_2}$$

Enfin,

$$K_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_3}^{mm_1 m_2 m_3 -m_1} = \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \cdot \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \cdot \nabla_j Y_{\ell_3 m_3}^* \cdot (-1)^{m_1} \nabla_k Y_{\ell_1 m_1}^* \cdot \nabla^i \nabla^j \nabla^k Y_{\ell_2 m_2}$$

$$\sum_{m_1} (-1)^{m_1} K_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_3}^{mm_1 m_2 m_3 -m_1} = -\frac{1}{2} \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \ell_2 (\ell_2 + 1) (-1)^{m_3} I_{\ell_3 \ell_2}^{m -m_3 m_2}$$

Réinjectons ces expressions :

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(3)} \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle &= -\frac{1}{12} \sum_{\ell_1} C_{\ell_1}^\phi \sum_{\ell_2} \ell_2 (\ell_2 + 1) C_{\ell_2}^\Theta \\ &\quad \times \left[\ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \sum_{\ell_4} C_{\ell_4}^\phi \sum_{m_2 m_4} I_{\ell_4 \ell_2}^{mm_4 m_2} I_{\ell' \ell_4 \ell_2}^{m' m_4 m_2} \right. \\ &\quad + \sum_{\ell_3} \ell_3 (\ell_3 + 1) (2\ell_3 + 1) C_{\ell_3}^\phi \sum_{m_1 m_2} I_{\ell_1 \ell_2}^{mm_1 m_2} I_{\ell' \ell_1 \ell_2}^{m' m_1 m_2} \\ &\quad \left. + \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) \sum_{\ell_3} C_{\ell_3}^\phi \sum_{m_2 m_3} I_{\ell_3 \ell_2}^{m -m_3 m_2} I_{\ell' \ell_3 \ell_2}^{m' -m_3 m_2} \right] \end{aligned}$$

D'après l'expression calculée à l'équation D.13, nous avons donc :

$$\langle \delta^{(3)} \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle = -\frac{1}{4} \frac{\delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'}}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1} \ell_1 (\ell_1 + 1) (2\ell_1 + 1) C_{\ell_1}^\phi \sum_{\ell_2} \ell_2 (\ell_2 + 1) C_{\ell_2}^\Theta \sum_{\ell_3} C_{\ell_3}^\phi F_{\ell_3 \ell_2}^2$$

Soit encore pour les deux termes en $\delta^{(3)}$, en renommant l'indice muet ℓ_3 en ℓ_1 :

$$\langle \delta^{(3)} \Theta_{\ell m} \delta \Theta_{\ell' m'}^* \rangle + \langle \delta \Theta_{\ell m} \delta^{(3)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle = -\frac{\delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'}}{2\ell + 1} R \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^\phi \ell_2 (\ell_2 + 1) C_{\ell_2}^\Theta F_{\ell_1 \ell_2}^2 \quad (\text{F.8})$$

F.1.3 $\langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle &= \frac{1}{24} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sum_{\ell_5 m_5} H_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 \ell_5}^{mm_1 m_2 m_3 m_4 m_5} \\ &\quad \times \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell_5 m_5}^* \rangle \langle \Theta_{\ell_2 m_2} \Theta_{\ell_2 m_2}^* \rangle \\ \langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle &= \frac{1}{24} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} \sum_{\ell_4 m_4} \sum_{\ell_5 m_5} H_{\ell_1 \ell_1' \ell_3 \ell_4 \ell_5}^{mm_1 m' m_3 m_4 m_5} \\ &\quad \times \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell_5 m_5}^* \rangle C_{\ell'}^\Theta \delta_{\ell_2 \ell'} \delta_{m_2 m'} \end{aligned}$$

Le moment à 4 points s'écrit cette fois :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\ell_1 m_1} \phi_{\ell_3 m_3}^* \phi_{\ell_4 m_4} \phi_{\ell_5 m_5}^* \rangle &= (-1)^{m_1+m_3} C_{\ell_1}^\phi \delta_{\ell_1 \ell_4} \delta_{m_1, -m_4} C_{\ell_3}^\phi \delta_{\ell_3 \ell_5} \delta_{m_3, -m_5} \\ &+ C_{\ell_1}^\phi \delta_{\ell_1 \ell_3} \delta_{m_1 m_3} C_{\ell_4}^\phi \delta_{\ell_4 \ell_5} \delta_{m_4 m_5} + C_{\ell_1}^\phi \delta_{\ell_1 \ell_5} \delta_{m_1 m_5} C_{\ell_3}^\phi \delta_{\ell_3 \ell_4} \delta_{m_3 m_4} \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle &= \frac{1}{24} C_{\ell'}^\ominus \left[\sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_4 m_4} H_{\ell \ell_1 \ell' \ell_4}^{m m_1 m' m_4} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_4}^\phi \right. \\ &\left. + \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_3 m_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_3}^\phi \left(H_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m_3 m_1} + H_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m_3 -m_1 -m_3} (-1)^{m_1+m_3} \right) \right] \end{aligned}$$

Or d'après la définition donnée par l'équation F.6,

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_4} H_{\ell \ell_1 \ell' \ell_4}^{m m_1 m' m_4} &= \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \sum_{m_1} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_j Y_{\ell_1 m_1}^* \cdot \sum_{m_4} \nabla_k Y_{\ell_4 m_4} \nabla_h Y_{\ell_4 m_4}^* \cdot \nabla^i \nabla^j \nabla^k \nabla^h Y_{\ell' m'} \\ &= \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \frac{\ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1)}{2} \frac{\ell_4(\ell_4+1)(2\ell_4+1)}{2} [\ell'(\ell'+1)]^2 Y_{\ell' m'} \\ &= \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1)\ell_4(\ell_4+1)(2\ell_4+1) \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{4} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_3} H_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m' m_3} &= \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \sum_{m_1} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_h Y_{\ell_1 m_1}^* \cdot \sum_{m_3} \nabla_j Y_{\ell_3 m_3} \nabla_k Y_{\ell_3 m_3}^* \cdot \nabla^i \nabla^j \nabla^k \nabla^h Y_{\ell' m'} \\ &= \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1)\ell_3(\ell_3+1)(2\ell_3+1) \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{4} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \end{aligned}$$

Et enfin en utilisant la définition du conjugué d'une harmonique sphérique (équation B.20),

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 m_3} (-1)^{m_1+m_3} H_{\ell \ell_1 \ell' \ell_3}^{m m_1 m' m_3} &= \int d\vec{\theta} Y_{\ell m}^* \sum_{m_1} \nabla_i Y_{\ell_1 m_1} \nabla_k Y_{\ell_1 m_1}^* \cdot \sum_{m_3} \nabla_j Y_{\ell_3 m_3} \nabla_h Y_{\ell_3 m_3}^* \\ &\quad \times \nabla^i \nabla^j \nabla^k \nabla^h Y_{\ell' m'} \\ &= \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1)\ell_3(\ell_3+1)(2\ell_3+1) \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{4} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \end{aligned}$$

D'où, en rassemblant les termes :

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle &= \frac{3}{24} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell'}^\ominus \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{4} \left[\sum_{\ell_1} \ell_1(\ell_1+1)(2\ell_1+1) C_{\ell_1}^\phi \right]^2 \\ &= \frac{1}{8} C_{\ell'}^\ominus R^2 [\ell(\ell+1)]^2 \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \end{aligned}$$

Nous avons finalement, pour les deux termes en $\delta^{(4)}$:

$$\langle \Theta_{\ell' m'}^* \delta^{(4)} \Theta_{\ell m} \rangle + \langle \Theta_{\ell m} \delta^{(4)} \Theta_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell'}^\ominus \left(\frac{\ell(\ell+1)R}{2} \right)^2 \quad (\text{F.9})$$

Conclusion

Rassemblons les termes calculés F.7, F.8 et F.9 :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle = & \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left\{ C_\ell^\ominus [1 - \ell(\ell + 1)R] + \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus \frac{F_{\ell_1 \ell_2}^2}{2\ell + 1} \right. \\ & + C_\ell^\ominus \left(\frac{\ell(\ell + 1)R}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus C_{\ell_3}^\phi \\ & \times \sum_L \frac{1}{2L + 1} \left(\frac{F_{\ell \ell_1 L} F_{\ell_3 L \ell_2}}{L(L + 1)} \right)^2 [\ell_2(\ell_2 + 1) - L(L + 1) + \ell_3(\ell_3 + 1)]^2 \\ & \left. - \frac{R}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^\phi \ell_2(\ell_2 + 1) C_{\ell_2}^\ominus F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2 + C_\ell^\ominus \left(\frac{\ell(\ell + 1)R}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de l'expression donnée à l'équation 4.23 :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}_{\ell m} \tilde{\Theta}_{\ell' m'}^* \rangle = & \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left\{ C_\ell^\ominus \left[1 - \ell(\ell + 1)R + \frac{1}{2} [\ell(\ell + 1)R]^2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus F_{\ell \ell_1 \ell_2}^2 [1 - \ell_2(\ell_2 + 1)R] \\ & + \frac{1}{8} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1}^\phi C_{\ell_2}^\ominus C_{\ell_3}^\phi \sum_L \frac{1}{2L + 1} \left(\frac{F_{\ell \ell_1 L} F_{\ell_3 L \ell_2}}{L(L + 1)} \right)^2 \\ & \left. \times [\ell_2(\ell_2 + 1) - L(L + 1) + \ell_3(\ell_3 + 1)]^2 \right\} \quad (\text{F.10}) \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- V. Acquaviva et C. Baccigalupi. Dark energy records in lensed cosmic microwave background. *Physical Review D*, 74(10) :103510, Novembre 2006. (Cité page 63.)
- N. Aghanim, F. X. Desert, J. L. Puget, et R. Gispert. Ionization by early quasars and cosmic microwave background anisotropies. *Astronomy & Astrophysics*, 311 :1–11, Juillet 1996. (Cité page 49.)
- N. Aghanim, S. Majumdar, et J. Silk. Secondary anisotropies of the CMB. *Reports on Progress in Physics*, 71(6) :066902, Juin 2008. (Cité pages 48 et 49.)
- R. A. Alpher, H. Bethe, et G. Gamow. The Origin of Chemical Elements. *Physical Review*, 73 :803–804, Avril 1948a. (Cité page 13.)
- R. A. Alpher, R. Herman, et G. A. Gamow. Thermonuclear Reactions in the Expanding Universe. *Physical Review*, 74 :1198–1199, Novembre 1948b. (Cité page 40.)
- A. Amblard, C. Vale, et M. White. Weak lensing of the CMB by large-scale structure. *New Astronomy*, 9 :687–704, Octobre 2004. (Cité page 58.)
- L. et al. Amendola. Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite. *ArXiv e-prints*, Juin 2012. (Cité page 147.)
- C. Balland. *Formation des Structures - Cosmologie*. ED d’Astrophysique d’Ile de France, 2003. URL <http://gujungou.free.fr/cours-balland.pdf>. (Cité pages 11 et 12.)
- J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, 22 :1882–1905, Octobre 1980. (Cité page 24.)
- J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, et M. S. Turner. Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe. *Physical Review D*, 28 :679–693, Août 1983. (Cité page 24.)
- S. Basak, S. Prunet, et K. Benabed. Simulating weak lensing on CMB maps. *ArXiv e-prints*, Novembre 2008. (Cité page 89.)
- C. L. Bennett, R. S. Hill, G. Hinshaw, D. Larson, et K. M. et al. Smith. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Are There Cosmic Microwave Background Anomalies? *The Astrophysical Journal Supplement*, 192 :17, Février 2011. (Cité page 42.)
- et al. Bennett. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Preliminary Maps and Basic Results. *The Astrophysical Journal Supplement*, 148 :1–27, Septembre 2003. (Cité page 42.)

- et al. Benoît. The cosmic microwave background anisotropy power spectrum measured by Archeops. *Astronomy & Astrophysics*, 399 :L19–L23, Mars 2003. (Cité page 41.)
- A. Benoit-Lévy, K. M. Smith, et W. Hu. Non-Gaussian structure of the lensed CMB power spectra covariance matrix. *ArXiv e-prints*, Mai 2012. (Cité page 51.)
- A. Benoit-Lévy, T. Déchelette, D. Hanson, K. Benabed, J-F. Cardoso, et S. Prunet. Full-sky CMB lensing reconstruction in presence of sky-cuts. 2012. (Cité pages 79 et 116.)
- F. Bernardeau. Cosmologie, la formation des grandes structures de l'Univers. *ArXiv Astrophysics e-prints*, Avril 1998. (Cité page 25.)
- F. Bernardeau. *Cosmologie - Des fondements théoriques aux observations*. EDP Sciences / CNRS Editions, 2007. (Cité pages 9, 34 et 35.)
- M. Bersanelli, N. Mandolesi, R. C. Butler, A. Mennella, et F. et al. Villa. Planck pre-launch status : Design and description of the Low Frequency Instrument. *Astronomy & Astrophysics*, 520 :A4, Septembre 2010. (Cité page 43.)
- A. Blanchard et J. Schneider. Gravitational lensing effect on the fluctuations of the cosmic background radiation. *Astronomy & Astrophysics*, 184 :1–6, Octobre 1987. (Cité pages 2 et 69.)
- L. E. Bleem, A. van Engelen, et G. P. et al. Holder. A Measurement of the Correlation of Galaxy Surveys with CMB Lensing Convergence Maps from the South Pole Telescope. *The Astrophysical Journal Letters*, 753 :L9, Juillet 2012. (Cité page 76.)
- L. et al. Bleem. An Overview of the SPTpol Experiment. *Journal of Low Temperature Physics*, 167 :859–864, Juin 2012. (Cité page 77.)
- M. Bucher, C. S. Carvalho, K. Moodley, et M. Remazeilles. CMB lensing reconstruction in real space. *Physical Review D*, 85(4) :043016, Février 2012. (Cité page 67.)
- E. Calabrese, A. Cooray, M. Martinelli, A. Melchiorri, L. Pagano, A. Slosar, et G. F. Smoot. CMB lensing constraints on dark energy and modified gravity scenarios. *Physical Review D*, 80(10) :103516, Novembre 2009. (Cité page 61.)
- E. Calabrese, A. Slosar, A. Melchiorri, G. F. Smoot, et O. Zahn. Cosmic microwave weak lensing data as a test for the dark universe. *Physical Review D*, 77(12) :123531, Juin 2008. (Cité page 61.)
- A. Challinor et H. Peiris. Lecture notes on the physics of cosmic microwave background anisotropies. Dans M. Novello et S. Perez, éditeurs, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1132 de *American Institute of Physics Conference Series*, pages 86–140, Mai 2009. (Cité page 47.)
- A. Cooray, M. Kamionkowski, et R. R. Caldwell. Cosmic shear of the microwave background : The curl diagnostic. *Physical Review D*, 71(12) :123527, Juin 2005. (Cité pages 55 et 85.)

- S. Das, T. A. Marriage, et al. The Atacama Cosmology Telescope : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum at 148 and 218 GHz from the 2008 Southern Survey. *The Astrophysical Journal*, 729 :62, Mars 2011a. (Cité page 71.)
- S. Das, B. D. Sherwin, et al. Detection of the Power Spectrum of Cosmic Microwave Background Lensing by the Atacama Cosmology Telescope. *Physical Review Letters*, 107(2) :021301, Juillet 2011b. (Cité pages 72 et 143.)
- R. H. Dicke. The Measurement of Thermal Radiation at Microwave Frequencies. *Review of Scientific Instruments*, 17 :268–275, Juillet 1946. (Cité page 40.)
- R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, et D. T. Wilkinson. Cosmic Black-Body Radiation. *The Astrophysical Journal*, 142 :414–419, Juillet 1965. (Cité page 40.)
- A. G. Doroshkevich et I. D. Novikov. Mean Density of Radiation in the Metagalaxy and Certain Problems in Relativistic Cosmology. *Soviet Physics Doklady*, 9 :111, Août 1964. (Cité page 40.)
- A. G. Doroshkevich, Y. B. Zel'dovich, et R. A. Syunyaev. Fluctuations of the microwave background radiation in the adiabatic and entropic theories of galaxy formation. *Soviet Astronomy*, 22 :523, Octobre 1978. (Cité page 41.)
- R. Durrer. *Cosmologie (cours pour le deuxième cycle)*. Département de Physique Théorique de l'Université de Genève, 2005. URL <http://theory.physics.unige.ch/~durrer/courses/cosmo.pdf>. (Cité page 10.)
- D. J. Fixsen. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. *The Astrophysical Journal*, 707 :916–920, Décembre 2009. (Cité page 18.)
- L. et al. Fu. Very weak lensing in the CFHTLS wide : cosmology from cosmic shear in the linear regime. *Astronomy & Astrophysics*, 479 :9–25, Février 2008. (Cité page 2.)
- G. Gamow. The Evolution of the Universe. *Nature*, 162 :680–682, Octobre 1948a. (Cité page 13.)
- G. Gamow. The Origin of Elements and the Separation of Galaxies. *Physical Review*, 74 :505–506, Août 1948b. (Cité page 40.)
- J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich, et E. C. G. Sudarshan. Spin-s Spherical Harmonics and δ . *Journal of Mathematical Physics*, 8 :2155–2161, Novembre 1967. (Cité pages 162 et 163.)
- K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, et M. Bartelmann. HEALPix : A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere. *The Astrophysical Journal*, 622 :759–771, Avril 2005. (Cité page 89.)

- A. H. Guth. Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23 :347–356, Janvier 1981. (Cité page 20.)
- D. Hanson, A. Challinor, G. Efstathiou, et P. Bielewicz. CMB temperature lensing power reconstruction. *Physical Review D*, 83(4) :043005, Février 2011. (Cité pages 86, 88, 168, 169 et 172.)
- D. Hanson, A. Challinor, et A. Lewis. Weak lensing of the CMB. *General Relativity and Gravitation*, 42 :2197–2218, Septembre 2010a. (Cité page 65.)
- D. Hanson, A. Lewis, et A. Challinor. Asymmetric beams and CMB statistical anisotropy. *Physical Review D*, 81(10) :103003, Mai 2010b. (Cité page 123.)
- D. Hanson, G. Rocha, et K. Górski. Lensing reconstruction from Planck sky maps : inhomogeneous noise. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400 :2169–2173, Décembre 2009. (Cité pages 80 et 125.)
- E. R. Harrison. Fluctuations at the Threshold of Classical Cosmology. *Physical Review D*, 1 :2726–2730, Mai 1970. (Cité page 41.)
- G. Hinshaw, D. N. Spergel, et L. et al. Verde. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : The Angular Power Spectrum. *The Astrophysical Journal Supplement*, 148 :135–159, Septembre 2003. (Cité page 42.)
- G. Hinshaw, J. L. Weiland, R. S. Hill, N. Odegard, et D. et al. Larson. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations : Data Processing, Sky Maps, and Basic Results. *The Astrophysical Journal Supplement*, 180 :225–245, Février 2009. (Cité page 42.)
- C. M. Hirata, S. Ho, N. Padmanabhan, U. Seljak, et N. A. Bahcall. Correlation of CMB with large-scale structure. II. Weak lensing. *Physical Review D*, 78(4) :043520, Août 2008. (Cité pages 71 et 113.)
- C. M. Hirata, N. Padmanabhan, U. Seljak, D. Schlegel, et J. Brinkmann. Cross-correlation of CMB with large-scale structure : Weak gravitational lensing. *Physical Review D*, 70(10) :103501, Novembre 2004. (Cité page 70.)
- C. M. Hirata et U. Seljak. Analyzing weak lensing of the cosmic microwave background using the likelihood function. *Physical Review D*, 67(4) :043001, Février 2003a. (Cité page 65.)
- C. M. Hirata et U. Seljak. Reconstruction of lensing from the cosmic microwave background polarization. *Physical Review D*, 68(8) :083002, Octobre 2003b. (Cité page 55.)
- E. Hivon, K. M. Górski, C. B. Netterfield, B. P. Crill, S. Prunet, et F. Hansen. MASTER of the Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum : A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex Cosmic Microwave Background Data Sets. *The Astrophysical Journal*, 567 :2–17, Mars 2002. (Cité pages 89, 99 et 102.)

- Y. Hoffman et E. Ribak. Constrained realizations of Gaussian fields - A simple algorithm. *The Astrophysical Journal Letters*, 380 :L5–L8, Octobre 1991. (Cité page 116.)
- W. Hu. Weak lensing of the CMB : A harmonic approach. *Physical Review D*, 62(4) :043007, Août 2000. (Cité pages 56, 63, 165, 166 et 172.)
- W. Hu. Angular trispectrum of the cosmic microwave background. *Physical Review D*, 64(8) :083005, Octobre 2001a. (Cité pages 85 et 170.)
- W. Hu. Mapping the Dark Matter through the Cosmic Microwave Background Damping Tail. *The Astrophysical Journal Letters*, 557 :L79–L83, Août 2001b. (Cité page 65.)
- W. Hu. Dark synergy : Gravitational lensing and the CMB. *Physical Review D*, 65(2) :023003, Janvier 2002. (Cité pages 62 et 63.)
- W. Hu et T. Okamoto. Mass Reconstruction with Cosmic Microwave Background Polarization. *Astrophysical Journal*, 574 :566–574, Août 2002. (Cité pages 63 et 79.)
- W. Hu et M. White. CMB anisotropies : Total angular momentum method. *Physical Review D*, 56 :596–615, Juillet 1997. (Cité pages 163, 164 et 165.)
- E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15 :168–173, Mars 1929. (Cité page 7.)
- M. Kamionkowski, A. Kosowsky, et A. Stebbins. Statistics of cosmic microwave background polarization. *Physical Review D*, 55 :7368–7388, Juin 1997. (Cité pages 57, 63 et 83.)
- M. Kaplinghat, L. Knox, et Y.-S. Song. Determining Neutrino Mass from the Cosmic Microwave Background Alone. *Physical Review Letters*, 91 (24) :241301, Décembre 2003. (Cité page 63.)
- B. Keating et S. et al. Moyerman. Ultra High Energy Cosmology with POLARBEAR. *ArXiv e-prints*, Octobre 2011. (Cité page 77.)
- R. Keisler, C. L. Reichardt, et al. A Measurement of the Damping Tail of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum with the South Pole Telescope. *The Astrophysical Journal*, 743 :28, Décembre 2011. (Cité page 72.)
- M. Kesden, A. Cooray, et M. Kamionkowski. Lensing reconstruction with CMB temperature and polarization. *Physical Review D*, 67(12) :123507, Juin 2003. (Cité pages 86 et 88.)
- L. Knox. Determination of inflationary observables by cosmic microwave background anisotropy experiments. *Physical Review D*, 52 :4307–4318, Octobre 1995. (Cité page 83.)
- E. Komatsu, J. Dunkley, et M. R. et al. Nolta. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations : Cosmological Interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement*, 180 :330–376, Février 2009. (Cité page 42.)

- E. Komatsu, K. M. Smith, et J. et al. Dunkley. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement*, 192 :18, Février 2011. (Cité page 42.)
- J.-M. Lamarre, J.-L. Puget, P. A. R. Ade, F. Bouchet, G. Guyot, A. E. Lange, et F. et al. Pajot. Planck pre-launch status : The HFI instrument, from specification to actual performance. *Astronomy & Astrophysics*, 520 :A9, Septembre 2010. (Cité page 43.)
- D. Larson, J. Dunkley, G. Hinshaw, E. Komatsu, et M. R. et al. Nolta. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Power Spectra and WMAP-derived Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement*, 192 :16, Février 2011. (Cité pages 15, 42 et 43.)
- R. J. Laureijs, L. Duvet, I. Escudero Sanz, P. Gondoin, D. H. Lumb, T. Oosterbroek, et G. Saavedra Criado. The Euclid Mission. Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 7731 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, Juillet 2010. (Cité page 147.)
- J. Lesgourgues, M. Liguori, S. Matarrese, et A. Riotto. CMB lensing extraction and primordial non-Gaussianity. *Physical Review D*, 71(10) :103514, Mai 2005. (Cité page 86.)
- J. Lesgourgues, L. Perotto, S. Pastor, et M. Piat. Probing neutrino masses with CMB lensing extraction. *Physical Review D*, 73(4) :045021, Février 2006. (Cité page 63.)
- A. Lewis et A. Challinor. Weak gravitational lensing of the CMB. *Physics Reports*, 429 :1–65, Juin 2006. (Cité pages 52, 53, 54, 63, 64 et 86.)
- A. Lewis, A. Challinor, et D. Hanson. The shape of the CMB lensing bispectrum. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 3 :18, Mars 2011. (Cité pages 56, 60 et 86.)
- A. Lewis, A. Challinor, et A. Lasenby. Efficient Computation of Cosmic Microwave Background Anisotropies in Closed Friedmann-Robertson-Walker Models. *The Astrophysical Journal*, 538 :473–476, Août 2000. (Cité page 89.)
- J. C. et al. Mather. Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument. *The Astrophysical Journal*, 420 :439–444, Janvier 1994. (Cité page 41.)
- J. D. McEwen. Fast, exact (but unstable) spin spherical harmonic transforms. *ArXiv e-prints*, Juillet 2008. (Cité pages 161 et 163.)
- R. B. Metcalf et J. Silk. Gravitational Magnification of the Cosmic Microwave Background. *The Astrophysical Journal*, 489 :1, Novembre 1997. (Cité pages 51 et 61.)
- T. Namikawa, S. Saito, et A. Taruya. Probing dark energy and neutrino mass from upcoming lensing experiments of CMB and galaxies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 12 :27, Décembre 2010. (Cité page 77.)

- T. Namikawa, D. Yamauchi, et A. Taruya. Full-sky lensing reconstruction of gradient and curl modes from CMB maps. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1 :7, Janvier 2012. (Cité page 55.)
- E. Newman et R. Penrose. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3 :566–578, Mai 1962. (Cité page 162.)
- M. D. et al. Niemack. ACTPol : a polarization-sensitive receiver for the Atacama Cosmology Telescope. Dans *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 7741 de *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, Juillet 2010. (Cité page 77.)
- M. R. et al. Nolta. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations : Angular Power Spectra. *The Astrophysical Journal Supplement*, 180 :296–305, Février 2009. (Cité page 42.)
- T. Okamoto et W. Hu. Cosmic microwave background lensing reconstruction on the full sky. *Physical Review D*, 67(8) :083002, Avril 2003. (Cité pages 4, 65, 79, 80, 82, 164, 165 et 169.)
- K. A. Olive, G. Steigman, et T. P. Walker. Primordial nucleosynthesis : theory and observations. *Physics Reports*, 333 :389–407, Août 2000. (Cité page 14.)
- J. P. Ostriker et E. T. Vishniac. Generation of microwave background fluctuations from nonlinear perturbations at the ERA of galaxy formation. *The Astrophysical Journal Letters*, 306 :L51–L54, Juillet 1986. (Cité page 49.)
- T. Padamanabhan. *Theoretical Astrophysics : Galaxies and Cosmology (vol. 3)*. Cambridge University Press, 2002. (Cité page 15.)
- L. Page et M. R. et al. Nolta. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Interpretation of the TT and TE Angular Power Spectrum Peaks. *The Astrophysical Journal Supplement*, 148 :233–241, Septembre 2003. (Cité page 42.)
- P. J. E. Peebles. Primordial Helium Abundance and the Primordial Fireball. II. *The Astrophysical Journal*, 146 :542, Novembre 1966. (Cité page 15.)
- P. J. E. Peebles, D. N. Schramm, R. G. Kron, et E. L. Turner. The case for the relativistic hot big bang cosmology. *Nature*, 352 :769–776, Août 1991. (Cité page 41.)
- P. J. E. Peebles et J. T. Yu. Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe. *The Astrophysical Journal*, 162 :815, Décembre 1970. (Cité page 41.)
- H. V. Peiris, E. Komatsu, L. Verde, et D. N. et al. Spergel. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Implications For Inflation. *The Astrophysical Journal Supplement*, 148 :213–231, Septembre 2003. (Cité page 42.)

- A. A. Penzias et R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142 :419–421, Juillet 1965. (Cité pages 18, 39 et 40.)
- S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. et al. Nugent, et Supernova Cosmology Project. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517 :565–586, Juin 1999. (Cité page 7.)
- L. Perotto, J. Bobin, S. Plaszczynski, J.-L. Starck, et A. Lavabre. Reconstruction of the cosmic microwave background lensing for Planck. *Astronomy & Astrophysics*, 519 :A4, Septembre 2010. (Cité page 113.)
- P. Peter et J. P. Uzan. *Cosmologie primordiale*. Belin, 2005. (Cité pages 20, 24 et 47.)
- Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Baker, A. Balbi, et A. J. et al. Banday. Planck early results. I. The Planck mission. *Astronomy & Astrophysics*, 536 :A1, Décembre 2011a. (Cité page 44.)
- Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Balbi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, et et al. Planck early results. VII. The Early Release Compact Source Catalogue. *Astronomy & Astrophysics*, 536 :A7, Décembre 2011b. (Cité page 118.)
- Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Balbi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, et et al. Planck early results. VIII. The all-sky early Sunyaev-Zeldovich cluster sample. *Astronomy & Astrophysics*, 536 :A8, Décembre 2011c. (Cité page 48.)
- Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Balbi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, et et al. Planck early results. XVIII. The power spectrum of cosmic infrared background anisotropies. *Astronomy & Astrophysics*, 536 :A18, Décembre 2011d. (Cité page 141.)
- Planck HFI Core Team. Planck early results. VI. The High Frequency Instrument data processing. *Astronomy & Astrophysics*, 536 :A6, Décembre 2011. (Cité page 123.)
- S. Plaszczynski, A. Lavabre, L. Perotto, et J.-L. Starck. A hybrid approach to cosmic microwave background lensing reconstruction from all-sky intensity maps. *Astronomy & Astrophysics*, 544 :A27, Août 2012. (Cité page 113.)
- M. J. Rees et D. W. Sciama. Large-scale Density Inhomogeneities in the Universe. *Nature*, 217 :511–516, Février 1968. (Cité page 48.)
- C. L. et al. Reichardt. High-Resolution CMB Power Spectrum from the Complete ACBAR Data Set. *The Astrophysical Journal*, 694 :1200–1219, Avril 2009. (Cité page 71.)

- Alain Riazuelo. *Signature de divers modèles d'univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile*. PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, 2000. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00003366>. (Cité pages 161 et 163.)
- A. G. Riess et A. V. et al. Filippenko. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, 116 :1009–1038, Septembre 1998. (Cité page 7.)
- A. G. Riess, L. Macri, S. Casertano, H. Lampeitl, H. C. Ferguson, A. V. Filippenko, S. W. Jha, W. Li, et R. Chornock. A 3% Solution : Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3. *The Astrophysical Journal*, 730 :119, Avril 2011. (Cité page 73.)
- R. K. Sachs et A. M. Wolfe. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background. *The Astrophysical Journal*, 147 :73, Janvier 1967. (Cité page 44.)
- U. Seljak et C. M. Hirata. Gravitational lensing as a contaminant of the gravity wave signal in the CMB. *Physical Review D*, 69(4) :043005, Février 2004. (Cité page 63.)
- U. Seljak et M. Zaldarriaga. Signature of Gravity Waves in the Polarization of the Microwave Background. *Physical Review Letters*, 78 :2054–2057, Mars 1997. (Cité page 63.)
- P. Serra, A. Cooray, S. F. Daniel, R. Caldwell, et A. Melchiorri. Lensed cosmic microwave background constraints on post-general-relativity parameters. *Physical Review D*, 79(10) :101301, Mai 2009. (Cité page 61.)
- B. D. Sherwin et S. Das. CMB Lensing - Power Without Bias. *ArXiv e-prints*, Novembre 2010. (Cité pages 66 et 67.)
- B. D. Sherwin, S. Das, et A. et al. Hajian. The Atacama Cosmology Telescope : Cross-Correlation of CMB Lensing and Quasars. *ArXiv e-prints*, Juillet 2012. (Cité page 76.)
- B. D. Sherwin, J. Dunkley, S. Das, et al. Evidence for Dark Energy from the Cosmic Microwave Background Alone Using the Atacama Cosmology Telescope Lensing Measurements. *Physical Review Letters*, 107(2) :021302, Juillet 2011. (Cité page 72.)
- J. Silk. Fluctuations in the Primordial Fireball. *Nature*, 215 :1155–1156, Septembre 1967. (Cité page 46.)
- K. M. Smith, A. Cooray, S. Das, O. Doré, D. Hanson, C. Hirata, M. Kalplangat, B. Keating, M. Loverde, N. Miller, G. Rocha, M. Shimon, et O. Zahn. CMBPol Mission Concept Study : Gravitational Lensing. Dans S. Dodelson, D. Baumann, A. Cooray, J. Dunkley, A. Fraisse, M. G. Jackson, A. Kogut, L. Krauss, M. Zaldarriaga, et K. Smith, éditeurs, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1141 de *American Institute of Physics Conference Series*, pages 121–178, Juin 2009. (Cité pages 61 et 78.)

- K. M. Smith, W. Hu, et M. Kaplinghat. Cosmological information from lensed CMB power spectra. *Physical Review D*, 74(12) :123002, Décembre 2006. (Cité page 61.)
- K. M. Smith, O. Zahn, et O. Doré. Detection of gravitational lensing in the cosmic microwave background. *Physical Review D*, 76(4) :043510, Août 2007. (Cité pages 70, 71 et 113.)
- G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, et E. L. et al. Wright. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal Letters*, 396 :L1–L5, Septembre 1992. (Cité page 41.)
- G. F. Smoot et D. Scott. The Cosmic Background Radiation. *ArXiv Astrophysics e-prints*, Mars 1996. (Cité pages 18 et 19.)
- D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, et M. R. et al. Nolta. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement*, 148 :175–194, Septembre 2003. (Cité page 42.)
- J.-L. Starck, M. J. Fadili, et A. Rassat. Low-l CMB Analysis and Inpainting. *ArXiv e-prints*, Octobre 2012. (Cité page 113.)
- E. D. Stewart et D. H. Lyth. A more accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation. *Physics Letters B*, 302 :171–175, Mars 1993. (Cité page 24.)
- R. Stompor et G. Efstathiou. Gravitational lensing of cosmic microwave background anisotropies and cosmological parameter estimation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 302 :735–747, Février 1999. (Cité page 61.)
- R. A. Sunyaev et Y. B. Zeldovich. Formation of Clusters of Galaxies ; Protocluster Fragmentation and Intergalactic Gas Heating. *Astronomy & Astrophysics*, 20 :189, Août 1972. (Cité page 48.)
- The Planck Collaboration. The Scientific Programme of Planck. *ArXiv Astrophysics e-prints*, Avril 2006. (Cité page 44.)
- E. Torbet, M. J. Devlin, W. B. Dorwart, T. Herbig, A. D. Miller, M. R. Nolta, L. Page, J. Puchalla, et H. T. Tran. A Measurement of the Angular Power Spectrum of the Microwave Background Made from the High Chilean Andes. *The Astrophysical Journal Letters*, 521 :L79–L82, Août 1999. (Cité page 41.)
- A. van Engelen, R. Keisler, et O. et al. Zahn. A Measurement of Gravitational Lensing of the Microwave Background Using South Pole Telescope Data. *The Astrophysical Journal*, 756 :142, Septembre 2012. (Cité pages 73, 85 et 143.)
- D. Walsh, R. F. Carswell, et R. J. Weymann. 0957 + 561 A, B - Twin quasis-tellar objects or gravitational lens. *Nature*, 279 :381–384, Mai 1979. (Cité page 2.)

- E. L. Wright et S. S. et al. Meyer. Interpretation of the cosmic microwave background radiation anisotropy detected by the COBE Differential Microwave Radiometer. *The Astrophysical Journal Letters*, 396 :L13–L18, Septembre 1992. (Cité page 41.)
- A. Zacchei et D. et al. Maino. Planck early results. V. The Low Frequency Instrument data processing. *Astronomy & Astrophysics*, 536 :A5, Décembre 2011. (Cité page 99.)
- M. Zaldarriaga et U. Seljak. All-sky analysis of polarization in the microwave background. *Physical Review D*, 55 :1830–1840, Février 1997. (Cité pages 161, 162, 163 et 164.)
- M. Zaldarriaga et U. Seljak. Reconstructing projected matter density power spectrum from cosmic microwave background. *Physical Review D*, 59(12) :123507, Juin 1999. (Cité page 2.)
- M. Zaldarriaga, D. N. Spergel, et U. Seljak. Microwave Background Constraints on Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal*, 488 : 1, Octobre 1997. (Cité page 61.)
- Y. B. Zeldovich. A hypothesis, unifying the structure and the entropy of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 160 :1P, 1972. (Cité page 41.)
- F. Zwicky. Nebulae as Gravitational Lenses. *Physical Review*, 51 :290–290, Février 1937. (Cité page 2.)