



**HAL**  
open science

# Aspects of the dynamics of extrasolar planetary systems

François Farago

► **To cite this version:**

François Farago. Aspects of the dynamics of extrasolar planetary systems. Astrophysics [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2010. English. NNT: . tel-02094983

**HAL Id: tel-02094983**

**<https://hal.science/tel-02094983>**

Submitted on 10 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat de l'Observatoire de Paris

Spécialité  
Astronomie et Astrophysique

Présentée par  
**François Farago**

Pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Observatoire de Paris**

## **Quelques aspects de la dynamique des systèmes planétaires extrasolaires**

Soutenance en avril 2010

devant un jury composé de :

Anne Lemaître	Rapporteur
Jesùs Palacián	Rapporteur
Alexandre Correia	Examineur
Bruno Sicardy	Examineur
Caroline Terquem	Examinatrice
Jacques Laskar	Directeur de Thèse



Leve 2/08/2020

Le grand Dieu feist les planettes et nous  
faisons les platz netz.

François Rabelais, *La vie très horricque du  
grand Gargantua père de Pantagruel.*

## Remerciements

Je souhaite commencer par remercier tous ceux qui m'ont permis de mener ce travail jusqu'à son terme. En premier lieu, je voudrais témoigner ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Jacques Laskar, dont la puissance intellectuelle et l'exigence ont inspiré et guidé mes efforts.

Je souhaite remercier également les membres de l'IMCCE et de l'équipe ASD pour leur accueil et les discussions toujours fructueuses que j'ai pu engager avec eux. En particulier, je remercie spécialement Philippe Robutel pour sa disponibilité et ses conseils scientifiques qui m'ont toujours été bénéfiques. Je remercie également Mickaël Gastineau pour son aide précieuse dans la résolution des problèmes techniques qui accompagnent toujours un tel travail, et Agnès Patu pour sa relecture de mon manuscrit.

Les doctorants de l'IMCCE, du SYRTE et du LERMA, et notamment Petr, Yannick, Lucia et Wassila, ont beaucoup contribué à faire de l'Observatoire un cadre de travail agréable, et je leur suis très reconnaissant pour leur soutien et leur amitié quotidiens.

Je tiens enfin à remercier mes parents et mes amis pour leur présence chaleureuse autour de moi, et à remercier tout particulièrement Julia pour sa patience : à moi maintenant de prendre le relais !

# Quelques aspects de la dynamique des systèmes planétaires extrasolaires

Cette thèse expose des méthodes analytiques pour étudier la dynamique de systèmes de corps soumis principalement à leurs interactions gravitationnelles mutuelles. Elle a été motivée par la grande diversité des propriétés et des comportements exhibés par les systèmes planétaires extrasolaires dont le nombre ne cesse d'augmenter depuis la première détection en 1995 (Mayor et Queloz, 1995). Cependant, les méthodes présentées ici peuvent également s'appliquer à l'étude de systèmes stellaires multiples, ou encore à l'étude des populations d'étoiles autour des objets compacts qui se trouvent au centre des galaxies.

L'accent est mis sur les modèles séculaires qui permettent une simplification des équations ainsi qu'une accélération considérable des temps de calcul. Ce dernier facteur s'avère critique lorsqu'il faut explorer un ensemble important de conditions initiales, par exemple dans le cadre de la détermination d'un ajustement optimal des paramètres d'un modèle à des données observationnelles. La première partie de ce travail est consacrée à un modèle semi-séculaire qui permet de traiter le cas d'un système où l'un des corps est beaucoup plus proche du corps central que les autres corps du système. Elle donne une illustration de cette méthode en l'appliquant au système multiplanétaire autour de  $\mu$  Arae. Cette première partie permet également d'introduire le formalisme vectoriel qui est utilisé dans le reste de la thèse.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude du mécanisme de Kozai (Kozai, 1962; Lidov, 1962). Kozai a étudié le mouvement d'une particule sans masse autour d'un corps central, sous l'effet de la perturbation d'un troisième corps éloigné. Ce problème est intégrable et donne lieu sous certaines conditions à un échange cyclique entre l'inclinaison et l'excentricité de la particule sans masse. Le problème reste intégrable si la particule a une masse non nulle (Harrington, 1969; Lidov et Ziglin, 1976; Ferrer et Osacar, 1994). Le problème de Kozai est donc un cas limite de celui de Harrington. Il existe cependant un autre cas limite qui correspond au mouvement d'une particule sans masse autour d'une binaire. Ce cas a été exploré par Palacián et al. (2006), et la deuxième partie du présent travail s'attache à en développer un modèle simple qui puisse être utilisé pour expliquer des résultats comme ceux de Verrier et Evans (2008, 2009).

La dernière partie de cette thèse s'intéresse à l'ajout d'interactions supplémentaires dans des systèmes dominés par le mécanisme de Kozai. Les forces de marées et la précession relativiste du périhélie sont notamment prises en compte et donnent lieu à un mécanisme connu sous le nom de *cycles de Kozai avec dissipation de marée*. Un modèle de ce phénomène est dérivé et appliqué au cas de HD 80606b, qui est la planète extrasolaire la plus excentrique qui ait été découverte avec  $e = 0.93$  (Naef et al., 2001).

# Aspects of the dynamics of extrasolar planetary systems

This doctoral thesis presents analytical methods to study the dynamics of systems of bodies under their mutual gravitational interactions. It is motivated by the great diversity of properties and behaviors exhibited by extrasolar planetary systems. The number of these systems is steadily growing since the first detection of an extrasolar planet in 1995 (Mayor et Queloz, 1995). However, the methods which we present here can also apply in other contexts such as the study of multiple stellar systems or the study of stellar populations around compact objects in the galactic center.

We widely use secular models because they allow a simplification in the equations as well as a considerable speed-up in numerical computations. This last aspect is critical when a large set of initial conditions must be explored, for instance when fitting the parameters of a model to observational data. The first part of this thesis derives a semi-secular model which is adapted to the study of a system where one of the bodies is much closer to the central body than the other ones. This model is illustrated on the multi-planetary system around  $\mu$  Arae. The vectorial formalism used throughout this doctoral work is also introduced in the first part.

The second part of this thesis studies the Kozai mechanism (Kozai, 1962; Lidov, 1962). Kozai studied the motion of a massless particle around a central body, under the perturbation of a distant third body. This problem is integrable and gives rise under specific conditions to a periodic exchange between the eccentricity and the inclination of the massless particle. The problem is still integrable if the particle has a non-zero mass (Harrington, 1969; Lidov et Ziglin, 1976; Ferrer et Osacar, 1994). As such, Kozai's problem is a limit case of Harrington's problem. There is however another limit case corresponding to the motion of a massless particle around a binary. This case was explored by Palacián et al. (2006) and the second part of the present work gives a simple model of it which can be used to explain results such as those obtained by Verrier et Evans (2008, 2009).

The last part of this thesis focuses on the addition of other interactions in systems dominated by Kozai's mechanism. Tidal interactions and relativistic precession of the perihelion are taken into account and give rise to a mechanism known as *Kozai cycles with tidal friction*. We derive a model of this phenomenon and apply it to the case of HD 80606b which is the most eccentric extrasolar planet discovered with an eccentricity of  $e = 0.93$  (Naef et al., 2001).

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	La diversité des systèmes planétaires extrasolaires . . . . .	2
1.2	Méthodes de détection . . . . .	5
1.2.1	Vitesses Radiales . . . . .	5
1.2.2	Transits photométriques . . . . .	6
1.2.3	Microlentilles gravitationnelles . . . . .	8
1.2.4	Observation directe . . . . .	8
1.2.5	Astrométrie . . . . .	9
1.3	Plan de ce travail . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Moyennisation dans un système multiplanétaire</b>	<b>13</b>
2.1	Stabilité et détermination des paramètres des systèmes planétaires extrasolaires multiples . . . . .	13
2.1.1	Généralités . . . . .	13
2.1.2	Un exemple de caractérisation . . . . .	14
2.2	Article inclus . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Problème séculaire quadripolaire des trois corps</b>	<b>37</b>
3.1	Le mécanisme de Lidov-Kozai . . . . .	37
3.1.1	Hamiltonien et intégrale de Lidov-Kozai . . . . .	38
3.1.2	Equilibres du problème restreint intérieur . . . . .	40
3.2	Article inclus . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Effets dissipatifs et corps étendus – Le cas de HD 80606</b>	<b>57</b>
4.1	Introduction . . . . .	57
4.1.1	Le cas de HD 80606b . . . . .	57
4.1.2	But de notre modélisation . . . . .	59
4.2	Effets dus à l'étendue des corps . . . . .	61
4.2.1	Marées . . . . .	61
4.2.2	Aplatissement . . . . .	64
4.3	Equations séculaires du mouvement . . . . .	68
4.3.1	Interactions de marées séculaires . . . . .	69
4.3.2	Effets séculaires de l'aplatissement rotationnel des corps . . . . .	72
4.3.3	Interaction quadripolaire avec le compagnon lointain . . . . .	73
4.3.4	Précession relativiste . . . . .	77
4.3.5	Modèle complet . . . . .	77

*Table des matières*

4.4	Résultats et discussion . . . . .	77
4.4.1	Paramètres physiques et orbitaux utilisés . . . . .	77
4.4.2	Facteur de qualité . . . . .	78
4.4.3	Résultats . . . . .	82
4.4.4	Discussion et conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Depuis la découverte de la première planète extrasolaire en 1995 autour de l'étoile<sup>1</sup> 51 Peg (Mayor et Queloz, 1995), on connaît maintenant plus de 400 nouvelles planètes<sup>2</sup>. Depuis le début de ce travail en 2006, ce nombre a plus que doublé. De même, depuis la découverte du premier système extrasolaire multiplanétaire autour de  $\nu$  Andromedae par Butler et al. (1999), on dénombre aujourd'hui 42 systèmes multiplanétaires.

La question de savoir si notre système solaire est un représentant « moyen » de l'ensemble des systèmes planétaires ou, au contraire, s'il fait figure d'exception, commence à pouvoir être explorée de manière scientifique.

Les premiers systèmes détectés ont tout de suite manifesté des propriétés si étranges et si différentes par comparaison avec notre système solaire que ce dernier semblait faire figure d'exception. Ainsi, la toute première planète extrasolaire détectée, 51 Peg b, possède la moitié de la masse de Jupiter, mais orbite autour de son étoile hôte à une distance de 0.052 UA, soit une distance 100 fois moindre que la distance Soleil–Jupiter ! Elle accomplit ainsi une révolution autour de son étoile en seulement 4.23 jours.

Pour l'instant, les statistiques disponibles ne permettent pas encore de répondre à la question de la spécificité du système solaire car elles sont entachées de biais dûs aux méthodes de détection. De plus, les informations que nous possédons sur ces nouvelles planètes sont fragmentaires et ne permettent pas encore de véritablement caractériser ces planètes : ainsi pour une planète possédant la même masse que Jupiter, nous ne sommes pas encore en mesure d'affirmer qu'elle a les mêmes caractéristiques physiques ou la même apparence. Malgré tout, il est maintenant clair que les systèmes planétaires ne sont pas tous calqués sur notre modèle. La nouveauté et la diversité des propriétés orbitales des planètes extrasolaires découvertes jusqu'à présent ont fourni un nouveau souffle à l'étude dynamique des systèmes planétaires.

---

1. Les premiers objets de masses planétaires hors du Système Solaire ont été détectés autour du pulsar PSR 1257+12 (Rasio et al., 1992). Les conditions autour d'un tel objet placent cependant ces planètes dans une catégorie différente des planètes orbitant autour d'une étoile.

2. Le site <http://exoplanet.eu> fournit un recensement des candidats planétaires mis à jour régulièrement.

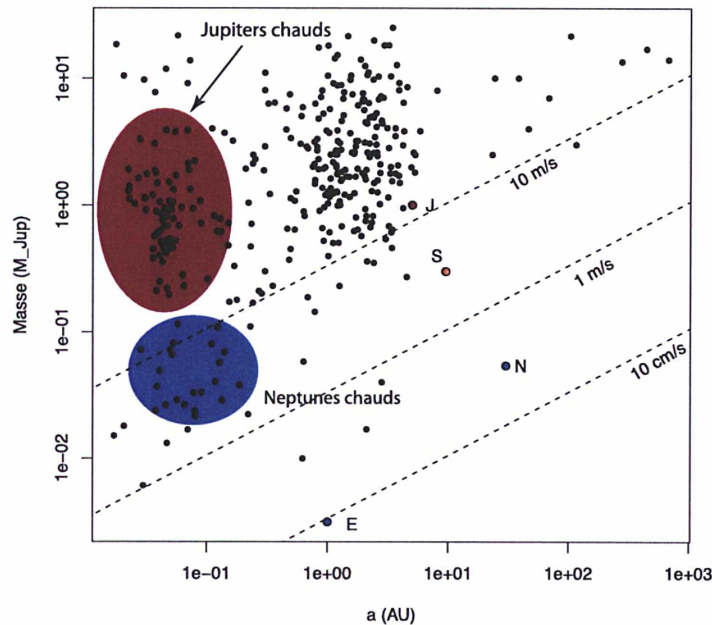


FIGURE 1.1: Masses des planètes extrasolaires en fonction de leur demi-grand axe. Les deux lignes pointillées correspondent à des amplitudes de vitesses radiales pour une étoile d'une masse solaire de  $10\text{m.s}^{-1}$ ,  $1\text{m.s}^{-1}$  et  $10\text{cm.s}^{-1}$ . La Terre (E), Jupiter (J), Saturne (S) et Neptune (N) ont été rajoutées à l'ensemble des planètes extrasolaires.

## 1.1 La diversité des systèmes planétaires extrasolaires

Les masses des planètes extrasolaires découvertes s'étalent dans un spectre très large (voir figure 1.1). Ainsi, HD 43848 b avec ses 25 masses de Jupiter est-elle aujourd'hui l'objet le plus massif découvert. Il appartient ainsi à un groupe d'objets dont la nature relève plus de la naine brune que d'une véritable planète.

Les premières planètes détectées ont été des planètes géantes, mais les distances orbitales auxquelles elles ont été trouvées ont été très surprenantes. Ainsi, nous avons déjà mentionné 51 Peg b et son orbite de 4.23 jours. Ces planètes ont été nommées *Jupiter chauds*, du fait des températures extrêmes qui règnent si près de leur étoile hôte et qui contrastent avec le froid des régions extérieures du Système Solaire où nous avons l'habitude d'imaginer les planètes géantes. Avec l'amélioration des techniques observationnelles, nous constatons depuis peu que les régions très proches des étoiles hôtes abritent également des objets moins massifs, dont la masse est de l'ordre de 10 à 20 masses terrestres, baptisés *Neptunes chauds*.

La planète la moins massive observée, Gl 581 e, « pèse » 0.006 masses de Jupiter, soit environ 2 masses terrestres. Elle appartient à une population de planètes qui émerge actuel-

## 1.1 La diversité des systèmes planétaires extrasolaires

lement et qui sont appelées *Super-Terres*. Malgré ce nom, nous sommes cependant ignorants quant à l'aspect de ces planètes, dont notre Système solaire ne possède aucun exemplaire : la planète qui vient immédiatement après la Terre dans l'ordre des masses du Système Solaire est Uranus, avec ses 14.5 masses terrestres.

Ces Super-Terres se retrouvent également dans des situations orbitales extrêmes. Ainsi, CoRoT-Exo-7 b et ses 4.8 masses terrestres orbite-t-elle seulement à 0.017 UA, 100 fois plus proche de son étoile que la Terre et 23 fois plus proche que Mercure. Au niveau de son orbite, qu'elle met 20 heures à parcourir, elle est exposée à des températures de l'ordre de 1000°C. Mercure, par comparaison, subit sur sa face exposée au Soleil des températures d'environ 420°C.

Le fait qu'aucune planète n'ait été découverte en-dessous de quelques masses terrestres est dû aux limitations techniques et aux biais des méthodes de détection actuelles. De même, le fait que des planètes soient découvertes principalement sur des orbites de courtes périodes est dû à un biais observationnel, mais également à une limite intrinsèque : l'exploration n'a débuté qu'en 1995, et si l'on veut observer une période orbitale complète, les 15 ans qui se sont écoulés depuis correspondent à un demi-grand axe maximal observable de 6 UA pour une étoile d'une masse solaire.

Malgré tout, l'existence même de ces systèmes soulève de nombreuses questions. En ce qui concerne la formation des planètes par exemple, peut-on dire que les mêmes processus ont été à l'oeuvre dans la formation d'un Jupiter chaud et dans la formation de « notre » Jupiter ? Et si ces deux planètes se sont formées de la même manière, à la même distance de leur étoile, quel mécanisme de migration les a amenées sur des orbites si différentes<sup>3</sup> ?

Les excentricités des planètes extrasolaires ont également suscité la surprise (voir figure 1.2) : alors que la planète la plus excentrique du Système Solaire est Mercure, avec  $e = 0.2$ , les excentricités des planètes extrasolaires montent jusqu'à plus que 0.9 (la médiane se situant actuellement à 0.15 et la moyenne à 0.22). Si la plupart des planètes proches de leur étoile ont une excentricité faible, en accord avec les théories de circularisation par effets de marées, une grande proportion garde une excentricité non négligeable, dont il faut alors expliquer la valeur. Un exemple extrême est fourni par HD 80606 b dont nous parlerons dans la dernière partie de ce travail : sa période de 111 jours et son excentricité de 0.93 en font un objet dont l'existence autour d'une étoile âgée d'environ 7.5 milliards d'années soulève de nombreuses questions : en effet, les théories de formation planétaire favorisent un scénario dans lequel les planètes se forment après leur étoile hôte sur des orbites quasi-circulaires dans un disque de matière résiduelle.

De nombreuses hypothèses ont été avancées pour expliquer ces grandes excentricités, mais aucune ne suffit à elle seule pour rendre compte de l'aspect de la figure 1.2. Tremaine et Zakamska (2004) fournissent une liste de mécanismes possibles pour créer des fortes excentricités planétaires : interactions avec le disque de gaz protoplanétaire, rencontres proches entre

---

3. Papaloizou et Terquem (2006) présentent une revue des théories de formation et de migration planétaire et de leurs implications dans les systèmes extrasolaires.

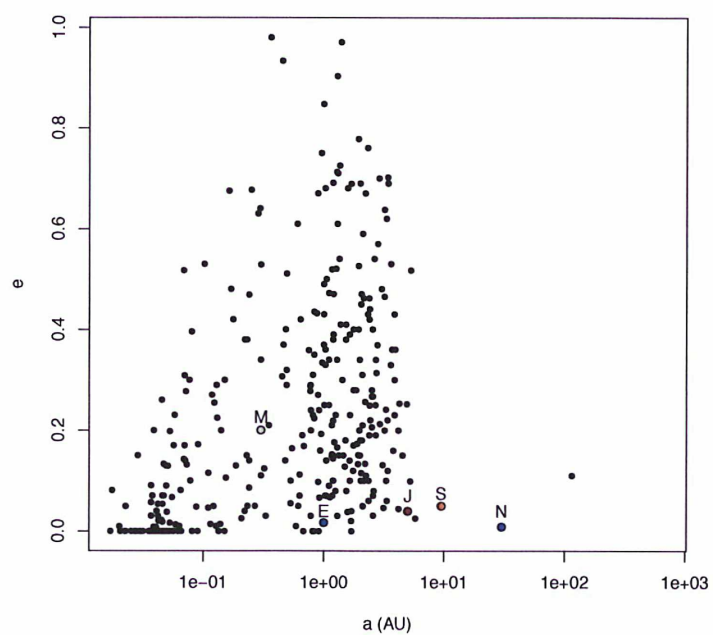


FIGURE 1.2: Excentricités des planètes extrasolaires en fonction de leur demi-grand axe. Mercure (M), la Terre (E), Jupiter (J), Saturne (S), et Neptune (N) ont été ajoutées aux planètes extrasolaires.

planètes voire évolution collisionnelle violente, résonances entre planètes, interactions séculaires avec un compagnon planétaire ou stellaire distant (comme par exemple le mécanisme de Lidov-Kozai), propagation de perturbations dues à des passages d'étoiles proches vers l'intérieur des systèmes planétaires ou encore mécanismes de formation planétaire rapide intervenant en même temps que la formation stellaire (Papaloizou et Terquem, 2001).

Une des propriétés les plus élusives des systèmes extrasolaires aujourd'hui est l'inclinaison des planètes. Ceci est dû à la méthode principale de détection, dite des vitesses radiales, qui n'a pas accès à cette propriété directement. D'autres méthodes de détection permettent toutefois de déterminer les inclinaisons planétaires, et il semble que la diversité et la différence par rapport au Système Solaire soit tout aussi grande dans ce domaine. Ainsi, par observation du transit spectroscopique (effet Rossiter-McLaughlin), il a été découvert que la planète HAT-P7 b évolue autour de son étoile hôte sur une orbite inclinée d'au moins  $86^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de son étoile hôte (Winn et al., 2009). Dans les systèmes multiplanétaires, les inclinaisons peuvent également être contraintes par analyse de la stabilité dynamique du système (Couetdic et al., 2009, par exemple).

## 1.2 Méthodes de détection

### 1.2.1 Vitesses Radiales

La première méthode, dite *méthode des vitesses radiales*, proposée très tôt (Struve, 1952), mesure le déplacement des raies d'un spectre stellaire dû à la vitesse du centre de masse de l'étoile dans la direction d'observation (effet Doppler lumineux). Cette vitesse radiale peut-être attribuée à de nombreuses causes : activité, sismologie stellaire, mais aussi perturbation gravitationnelle due à un compagnon planétaire. Dans ce dernier cas, l'amplitude  $K$  de la perturbation est une fonction de la masse du corps perturbateur  $m_p$ , de sa distance à son étoile hôte, ou de manière équivalente de sa période orbitale  $P$ , ainsi que de son excentricité  $e$  et de son inclinaison  $i$  qui est conventionnellement comptée par les observateurs depuis le plan du ciel (ainsi un système vu par la tranche est-il incliné à  $90^\circ$ ) :

$$K = \left( \frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{m_p \sin i}{(M_* + m_p)^{2/3} \sqrt{1 - e^2}} \quad (1.1)$$

L'observation répétée d'une source permet d'obtenir la période ainsi que l'amplitude du signal. La forme du signal donne accès à l'excentricité de l'orbite du compagnon planétaire. Reste l'inclinaison, qui est inaccessible par l'utilisation exclusive de la technique des vitesses radiales. Ainsi, seule une masse minimale  $m_p \sin i$  peut-être obtenue par cette méthode.

L'expression de l'amplitude  $K$  montre que la méthode des vitesses radiales possède un biais de détection en faveur des fortes masses et des faibles périodes (ce biais était déjà mentionné

	Masse	Séparation	K
Jupiter	$1 M_{\text{Jup}}$	1.0 UA	$28.4 \text{ m.s}^{-1}$
Jupiter	$1 M_{\text{Jup}}$	5.0 UA	$12.7 \text{ m.s}^{-1}$
Neptune	$3.5 M_{\text{Jup}}$	0.1 UA	$4.8 \text{ m.s}^{-1}$
Neptune	$3.5 M_{\text{Jup}}$	1.0 UA	$1.5 \text{ m.s}^{-1}$
Super-Terre	$5 M_{\oplus}$	0.1 UA	$1.4 \text{ m.s}^{-1}$
Super-Terre	$5 M_{\oplus}$	1.0 UA	$0.45 \text{ m.s}^{-1}$
Terre	$1 M_{\oplus}$	1.0 UA	$9 \text{ cm.s}^{-1}$

TABLE 1.1: Amplitude  $K$  du signal de vitesses radiales dans des situations types.

par Struve (1952)), même si la forte progression de la précision instrumentale fait constamment reculer les limites de détection. Du fait des effets concurrents de l'activité stellaire que nous avons mentionnés plus haut, la méthode des vitesses radiales est également biaisée en faveur d'étoiles peu actives.

Le tableau 1.1 donne l'amplitude du signal de vitesses radiales dans un certain nombre de situations types. L'instrument le plus prolifique en détections actuellement, le spectrographe HARPS, permet d'atteindre une précision sur les vitesses radiales de l'ordre de  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . Nous avons tracé sur la figure 1.1 trois lignes correspondant aux limites de détection à deux précisions de  $10 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $10 \text{ cm.s}^{-1}$ , autour d'une étoile de type solaire. La prochaine génération d'instruments, comme ESPRESSO qui sera installé au VLT, devrait atteindre la précision de  $10 \text{ cm.s}^{-1}$  correspondant à un signal comparable à celui de la Terre sur le Soleil.

La méthode des vitesses radiales est actuellement la méthode qui a produit le plus grand nombre de résultats : au moment de l'écriture de ce travail, 378 planètes sur 405 sont observables grâce à cette méthode.

## 1.2.2 Transits photométriques

Lorsqu'une planète passe devant son étoile hôte, la luminosité apparente de l'étoile baisse pendant la durée du passage (ou *transit*). Cette méthode est la deuxième en terme de nombre de candidats planétaires observés : 63 des 405 planètes détectées ont un transit observable. La durée du transit ainsi que la forme de la courbe de lumière fournissent des renseignements sur l'objet qui occulte l'étoile, notamment le rapport du rayon planétaire au rayon stellaire (Rauer et Erikson, 2007). Elle contraint également fortement l'inclinaison planétaire par rapport au plan du ciel.

Cette méthode est également biaisée en faveur des grosses planètes (cette fois en termes de rayon et non de masse) qui orbitent près de leur étoile. Ainsi, une planète de la taille de Jupiter passant devant une étoile de type solaire causerait une baisse de luminosité relative de quelques pourcents, tandis qu'un objet de la taille de la Terre ne causerait qu'une baisse de quelques

dix-millièmes (voir tableau 1.2). La première planète détectée grâce à la méthode des transits, OGLE-TR-56 b, orbite ainsi à 0.029 UA de son étoile, soit une période orbitale de seulement 29 heures (Konacki et al., 2003)<sup>4</sup>. Une des contraintes principales de la détermination précise des durées des transits planétaires réside dans la rotation de notre propre planète, qui limite la durée des observations : si un transit est plus long qu'une nuit d'observation, il devient nécessaire de disposer de sources d'observation multiples pour déterminer la durée du transit.

De plus, la méthode des transits est très dépendante de l'orientation du plan de l'orbite de la planète par rapport au plan du ciel : la planète ne peut occulter son étoile hôte que si son inclinaison orbitale est très faible par rapport à la ligne de visée. La probabilité géométrique pour qu'un système contenant une planète de rayon  $R_p$ , orbitant autour de son étoile avec un demi-grand axe  $a$ , présente un transit observable a été évaluée par Charbonneau et al. (2007) :

$$P = 0.0045 \frac{1AU}{a} \frac{R_* + R_p}{1R_\odot} \frac{1 + e \cos(\pi/2 - \omega)}{1 - e^2}, \quad (1.2)$$

où  $e$  est l'excentricité de l'orbite,  $\omega$  la longitude du périastre de l'objet occulteur, et  $R_*$  le rayon de l'étoile. En utilisant cette formule, un Jupiter chaud à 0.05 AU de son étoile a une probabilité géométrique de transit de 10 %, tandis qu'un Jupiter à 5 AU n'a qu'une probabilité de transit de 0.1 %. Ces faibles probabilités impliquent de suivre un très grand nombre d'étoiles simultanément pour obtenir suffisamment d'événements intéressants, ou bien d'observer des candidats déjà détectés par une autre méthode pour vérifier s'ils présentent des transits observables. Ainsi, la recherche des transits planétaires extrasolaires repose sur des réseaux d'instruments capables d'observer de grandes régions du ciel au sol (SuperWasp, HATNet, OGLE, ...) et depuis 2006 sur le satellite européen CoRoT. Cette année a également vu le lancement du satellite américain Kepler dédié à la recherche de transits planétaires. De plus, la méthode des vitesses radiales est utilisée en complément afin de valider les détections des transits.

### Transit spectroscopique

Cette technique illustre la forte complémentarité entre les observations de vitesses radiales et celles de transits photométriques. Lorsqu'une planète passe devant le disque de son étoile, le signal de vitesses radiales est altéré par l'effet Rossiter-Mac Laughlin (Gaudi et Winn, 2007). La forme de la courbe de vitesses radiales pendant la durée du transit donne alors accès à l'angle entre l'axe de rotation de l'étoile et l'axe de l'orbite planétaire. C'est grâce à cette méthode que l'on a découvert que l'alignement entre ces deux axes n'est pas la norme. Ainsi, l'orbite HD 80606 b que nous avons déjà mentionnée pour sa très forte excentricité, est-elle inclinée d'environ 50° par rapport à l'axe de rotation de son étoile. De même, nous avons déjà mentionné HAT-P7 b et son orbite quasiment polaire (Winn et al., 2009).

4. Le transit d'une planète extrasolaire déjà détectée par la méthode des vitesses radiales avait été observé dès 2000 pour HD 209458b (Charbonneau et al., 2000).

Planète	Période (ans)	a (AU)	Durée du Transit (hr)	Profondeur du Transit (%)	Probabilité géométrique (%)
Mercuré	0.241	0.39	8.1	0.0012	1.19
Venus	0.615	0.72	11.0	0.0076	0.65
Terre	1.000	1.00	13.0	0.0084	0.47
Mars	1.880	1.52	16.0	0.0024	0.31
Jupiter	11.86	5.20	29.6	1.01	0.089
Saturne	29.5	9.5	40.1	0.75	0.049
Uranus	84.0	19.2	57.0	0.135	0.024
Neptune	164.8	30.1	71.3	0.127	0.015

TABLE 1.2: Propriétés des transits des planètes du système solaire. Issu de la description de la mission Kepler, lancée le 6 mars 2009 <http://kepler.nasa.gov/sci/basis/character.html>.

### 1.2.3 Microlentilles gravitationnelles

La troisième méthode de détection utilise un phénomène relativiste de déflexion de la lumière, les lentilles gravitationnelles (Beaulieu et al., 2006). Lorsqu'un système planétaire passe devant un objet du fond du ciel, il crée une lentille gravitationnelle dont la signature photométrique peut-être analysée pour obtenir la configuration du système occulteur. Là encore, il s'agit d'une méthode qui repose sur des campagnes d'observation très importantes afin d'obtenir un nombre de détections satisfaisant : la probabilité d'un tel événement est en effet de l'ordre de  $10^{-6}$ .

De plus, contrairement aux transits qui sont appelés à se reproduire de manière périodique, les occultations donnant lieu à des lentilles gravitationnelles impliquent un objet occulteur et un objet occulté qui sont très distants l'un de l'autre et donc indépendants : il s'agit donc d'événements uniques et la probabilité de réobserver un même système une deuxième fois est très faible. Cette méthode cependant possède un certain nombre d'avantages par rapport aux deux précédentes : elle n'a pas de biais sur la distance des étoiles hôtes ni sur leur type spectral. Elle est surtout moins biaisée en faveur des planètes massives et proches de leur étoile. Elle a donc un fort potentiel pour établir des statistiques fiables sur les planètes extrasolaires. Aujourd'hui, 10 candidats planétaires ont été détectés grâce à des événements de lentille gravitationnelle.

### 1.2.4 Observation directe

L'observation directe des planètes extrasolaires est la méthode qui permettrait d'obtenir le plus d'informations sur ces objets. Elle donnerait accès à une détermination orbitale très précise, et la possibilité d'isoler la lumière planétaire de la lumière stellaire permettrait de déterminer la composition de l'atmosphère planétaire par spectroscopie. Le principal obstacle



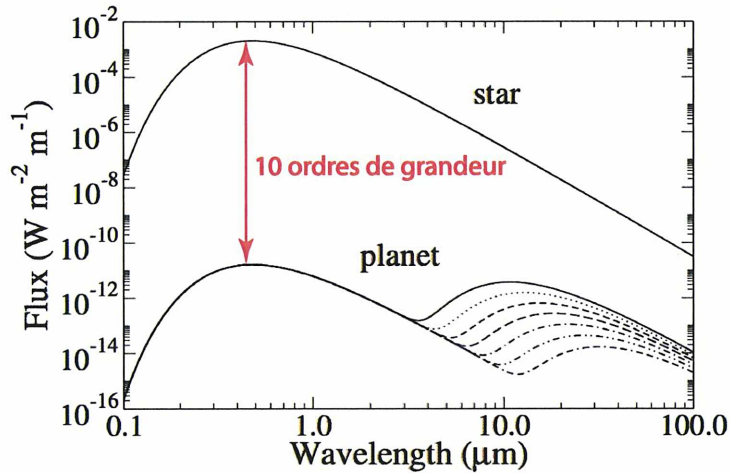


FIGURE 1.3: Flux d'une étoile de type solaire (température effective de 6000K, rayon de 700 000 km) à 5 pc, et flux d'une planète géante analogue à Jupiter (rayon de 70 000 km et albédo géométrique de 1) orbitant son étoile à une distance de 5.2 AU. Les différentes courbes pour la planète correspondent à des âges différents. Les deux corps sont modélisés par des corps noirs simples. Issu de (Stam et al., 2004).

à cette méthode n'est pas la séparation angulaire entre la planète et son étoile qui est largement à la portée des télescopes actuels pour des étoiles assez proches. Pour les étoiles de type solaire, cet obstacle est le très fort contraste entre le flux lumineux stellaire et celui de la planète : le rapport des deux flux atteint dans le domaine visible une dizaine d'ordres de grandeur (voir figure 1.3). La solution à ce problème est d'utiliser un coronographe afin de bloquer la lumière de l'étoile. Cependant, la forte diffraction de la lumière stellaire par le coronographe pollue les zones proches de l'étoile et ne permet en l'état actuel que de déterminer des planètes loin de leur étoile. Ainsi Fomalhaut b, observée grâce au télescope spatial Hubble en 2008 (Kalas et al., 2008), est-elle une planète géante orbitant à une distance projetée de 115 UA, et le chiffre approximatif de 40 UA est avancé pour son demi-grand axe.

### 1.2.5 Astrométrie

Là où la méthode des vitesses radiales consiste à mesurer le déplacement d'une étoile le long de la ligne de visée par effet Doppler, la méthode astrométrique propose d'observer le déplacement des étoiles dans le plan du ciel. L'amplitude angulaire  $\theta$  d'un tel mouvement est donnée par la relation :

$$\theta = \frac{M_p}{M_*} \frac{a}{D}, \quad (1.3)$$

où  $M_p$  et  $M_*$  sont les masses planétaire et stellaire,  $a$  le demi-grand axe planétaire et  $D$  la distance de l'étoile par rapport à l'observateur.

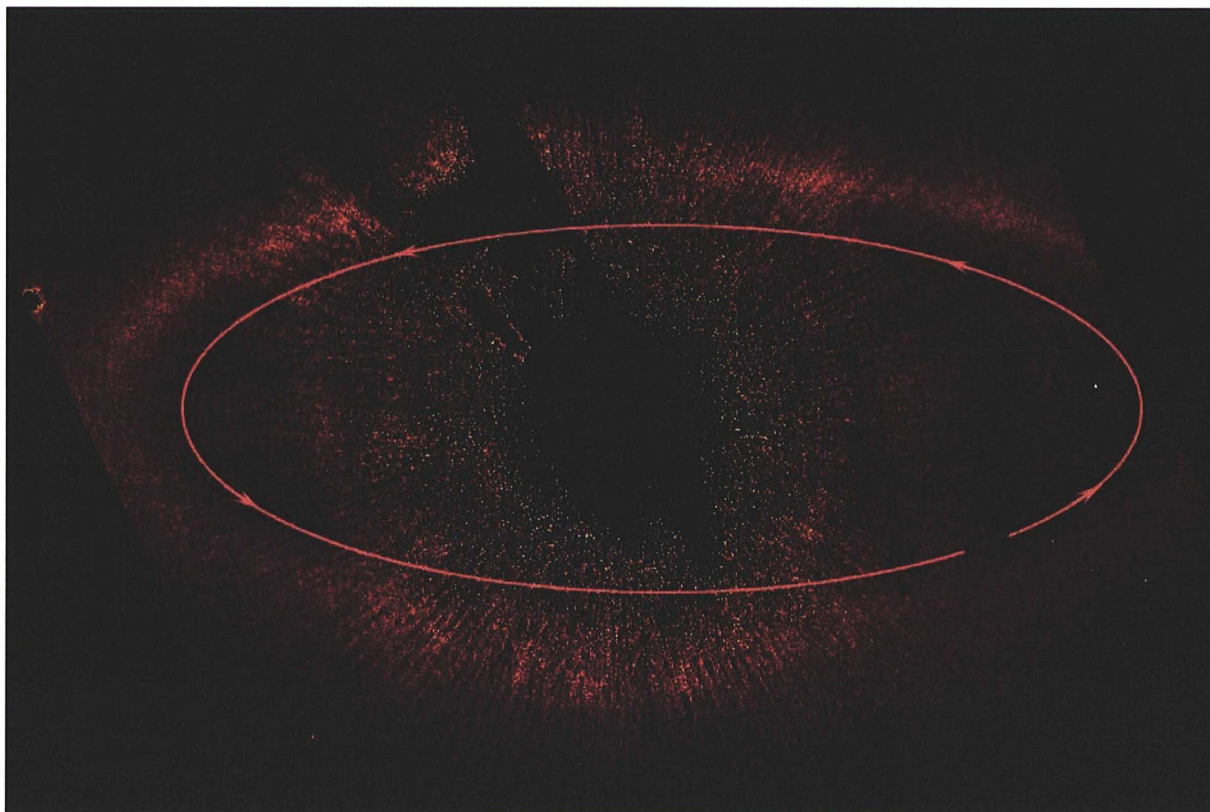


FIGURE 1.4: Première image directe d'une planète extrasolaire autour de Fomalhaut b, d'environ  $3M_{\text{Jup}}$ , à une distance projetée de 115 au, d'excentricité  $e=0.11$ . La zone noire correspond à la partie de l'image bloquée par le coronographe et le halo lumineux est dû à la diffraction de la lumière stellaire par le coronographe. Issu de (Kalas et al., 2008).

La principale limitation de cette technique réside dans la forte précision requise : le déplacement angulaire causé par Jupiter à 5 UA du Soleil, vu depuis une distance de 10 pc est de l'ordre de  $500\mu\text{as}$ , et de  $0.33\mu\text{as}$  pour la Terre à 1 UA. Par comparaison, le mouvement propre typique d'une étoile a une amplitude angulaire de l'ordre de  $500\text{mas}$ , soit trois ordres de grandeur au-dessus du déplacement dû à Jupiter. De plus, les meilleures observations actuelles, utilisant de manière astucieuse l'interféromètre qui sert de système de guidage au télescope spatial Hubble (Benedict et al., 2002), atteignent la précision de  $1\text{mas}$ .

Cette technique est donc actuellement limitée par la précision disponible, mais l'envoi prochain de la mission astrométrique Gaia devrait fournir des détections planétaires. Une mission interférométrique américaine dédiée, SIM, est également à l'étude.

## 1.3 Plan de ce travail

Une fois les données d'observation disponibles, il faut trouver un modèle de système planétaire qui permette d'expliquer ces données de manière satisfaisante. Il s'agit d'un problème d'ajustement complexe puisque le nombre même de planètes à inclure dans le modèle n'est pas connu a priori, et que chaque planète possède potentiellement 7 paramètres à ajuster : 6 paramètres orbitaux et une masse.

Les étoiles qui abritent les systèmes observés actuellement, du fait des limitations des techniques d'observation, sont des étoiles déjà âgées de plusieurs milliards d'années. Pour que des systèmes planétaires existent autour de telles étoiles, il faut donc de plus vérifier que les modèles proposés soient stables dynamiquement sur des périodes comparables à l'âge des étoiles observées. Cela implique de réaliser une analyse numérique supplémentaire dans un sous-ensemble de l'espace des paramètres. Tous ces calculs prennent un temps conséquent si une planète de courte période est présente dans le modèle, à cause de la nécessité d'adapter les pas de calcul à cette courte période. Nous présentons dans une première partie une façon de réduire ce temps de calcul en moyennisant analytiquement le mouvement orbital de la planète à courte période, ce qui nous permet de régler les pas d'intégration en fonction de la seconde période la plus courte, et nous illustrons cette méthode pour l'analyse de la stabilité de  $\mu$  Arae, un système de 4 planètes.

Les équations moyennes présentées dans la première partie font intervenir un corps moyennisé en présence d'un système planétaire non moyennisé, dans un formalisme vectoriel inspiré de Boué et Laskar (2006). Dans la deuxième partie de ce travail, nous utilisons ce formalisme pour explorer le problème des trois corps séculaire et quadripolaire, où tous les mouvements orbitaux sont cette fois moyennisés. Le problème séculaire quadripolaire fournit un moyen d'échanger l'excentricité du corps intérieur avec l'inclinaison mutuelle entre le corps intérieur et le corps extérieur. Le mécanisme de Lidov-Kozai (Lidov, 1962; Kozai, 1962), qui est sa version restreinte dans le cas où le corps sans masse est le corps intérieur, est souvent utilisé comme moyen d'explication des excentricités des planètes extrasolaires dans les systèmes

## Chapitre 1 Introduction

binaires.

Nous replaçons le mécanisme de Lidov-Kozai dans le cadre du problème quadripolaire séculaire général, et nous détaillons le cas restreint complémentaire où le corps extérieur est sans masse, exploré par Palacián et al. (2006). Nous développons un modèle simple du problème restreint extérieur que nous appliquons à des travaux sur un disque de débris autour de la binaire HD 98800, suggérant une population de particules stables à forte excentricité (Verrier et Evans, 2008, 2009).

La dernière partie de ce travail s'intéresse à un scénario d'évolution planétaire nommé *migration de Kozai*, qui associe le mécanisme de Lidov-Kozai aux effets de marées levés par l'étoile hôte sur la planète, et réciproquement. Un tel scénario a été proposé pour expliquer l'état actuel du système HD 80606 b avec sa très forte excentricité (Wu et Murray, 2003; Fabrycky et Tremaine, 2007). Nous dérivons un modèle de ce mécanisme et discutons des différentes hypothèses qui le sous-tendent, notamment en ce qui concerne la modélisation des effets de marées et d'aplatissement rotationnel.

# Chapitre 2

## Moyennisation dans un système multiplanétaire

Les premiers systèmes planétaires extrasolaires découverts, et la grande majorité de ceux qu'on connaît aujourd'hui, ne contiennent qu'une seule planète en orbite autour de son étoile hôte. Cependant, depuis la découverte par Butler et al. (1999) de trois compagnons planétaires autour de  $\nu$  Andromedae, 42 systèmes planétaires multiples ont été détectés. Parmi eux, 55 Cancri possède le plus grand nombre de planètes, avec 5 compagnons détectés. L'identification correcte du nombre des planètes dans ces systèmes ainsi que de leurs paramètres orbitaux soulève des difficultés spécifiques que l'on ne rencontre pas dans les systèmes n'abritant qu'une planète.

Les méthodes d'ajustement de données observationnelles et d'analyse des systèmes extrasolaires multiples sont, de plus, souvent très gourmandes en ressources de calcul. Après avoir introduit le sujet et présenté un exemple typique, nous proposons dans ce chapitre un moyen de réduire les temps de calcul caractéristiques des études menées sur les systèmes multiples dans le cas où le système possède une planète dont la période de révolution orbitale est beaucoup plus courte que celles des autres planètes du système.

### 2.1 Stabilité et détermination des paramètres des systèmes planétaires extrasolaires multiples

#### 2.1.1 Généralités

Lorsque deux corps (une étoile et une planète par exemple) sont seuls à interagir gravitationnellement, la dynamique qui résulte de leur interaction est particulièrement simple : la forme elliptique et l'orientation de leurs orbites sont constantes, et seul un angle orbital change. Ainsi, ces systèmes sont toujours stables en l'absence de perturbations extérieures, et peuvent exister indéfiniment dans des conditions idéales. Dans ce cas, l'ajustement d'un

modèle orbital aux observations est assez simple techniquement puisque la période du signal observé se traduit simplement en période orbitale pour la planète.

Lorsque des corps supplémentaires sont présents, et que l'interaction entre ces corps est suffisamment faible (du fait de grandes distances mutuelles par exemple), on peut chercher à ajuster les observations à un modèle dans lequel chaque planète interagit uniquement avec l'étoile hôte. Cela revient à considérer que le signal observationnel est une somme algébrique de signaux keplériens indépendants et à identifier chaque fréquence du signal total à une planète, ce qui reste techniquement simple et rapide.

Cependant, dès lors que l'on considère des systèmes contenant plus de trois corps, les interactions mutuelles entre corps peuvent être déterminantes dans l'évolution du système. Prendre en compte ces interactions mutuelles dans l'ajustement des données observationnelles nécessite alors de réaliser des intégrations du modèle planétaire à chaque pas de la procédure d'ajustement afin de vérifier sa capacité à reproduire les observations. Ces intégrations sont très coûteuses en temps de calcul, notamment lorsqu'une des planètes proposées possède une courte période.

De plus, Poincaré (1892) a démontré que l'évolution d'un système contenant 3 corps ou plus peut être chaotique. Laskar (1989, 1990) a déterminé que les planètes intérieures du Système Solaire ont un tel comportement chaotique. Récemment, Laskar et Gastineau (2009) ont évalué à environ 1% la probabilité que l'excentricité de Mercure prenne une valeur élevée dans quelques milliards d'années, ouvrant la possibilité à des trajectoires collisionnelles entre les planètes intérieures.

Or, les modèles de formation planétaire prévoient que les planètes se forment peu de temps après leur étoile hôte. Lorsque l'on observe aujourd'hui un signal indiquant la présence d'un système planétaire extrasolaire autour d'une étoile âgée de plusieurs milliards d'années, il faut donc s'assurer que le modèle de système proposé soit dynamiquement stable sur une durée comparable. Pour ce faire, il faut réaliser un grand nombre d'intégrations avec des conditions initiales différentes prises au voisinage de l'ajustement qu'on souhaite tester, pour ensuite leur appliquer des outils de mesure de stabilité. Souvent, le modèle optimal issu de la procédure d'ajustement n'est pas stable, et il faut modifier légèrement ses paramètres pour obtenir un système un peu moins bon dans sa reproduction des observations, mais qui possède la stabilité qui est une condition nécessaire de son existence.

### 2.1.2 Un exemple de caractérisation

La figure 2.2 présente l'exemple du système HD 202206 au moment de la publication de sa seconde planète (Correia et al., 2005), afin d'illustrer ce qui vient d'être décrit. Sur le panneau a, à gauche, on voit l'évolution du demi-grand axe et de l'excentricité des deux planètes (en rouge pour la planète intérieure et vert pour la planète extérieure) dans une intégration prenant pour conditions initiales les paramètres du meilleur ajustement aux données, pour un modèle

## 2.1 Stabilité et détermination des paramètres des systèmes planétaires extrasolaires multiples

keplérien négligeant les interactions mutuelles entre les deux planètes. Ce modèle est fortement instable, et la planète extérieure est éjectée en 5000 ans.

Sur le panneau a, à droite, on voit une intégration du système avec pour conditions initiales les paramètres du meilleur ajustement aux données pour un modèle newtonien, qui prend en compte les interactions mutuelles entre les planètes. Ce modèle est plus stable que le précédent, mais d'après Correia et al. (2005) la planète extérieure est éjectée après environ 40000 ans.

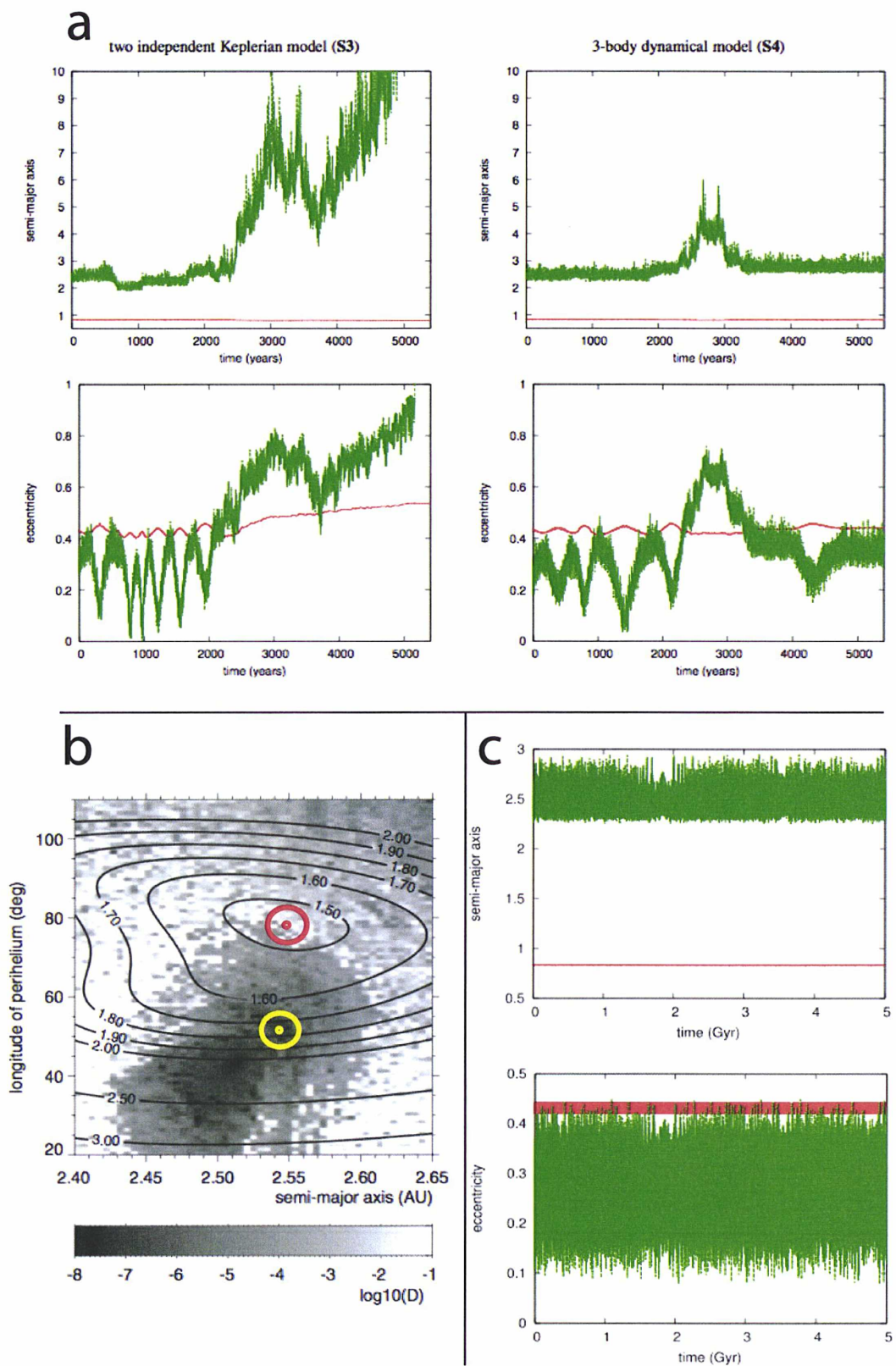
Ces deux exemples montrent la nécessité d'effectuer une analyse de stabilité complémentaire à l'ajustement des données, indépendamment de la sophistication du modèle utilisé pour ajuster les données. Une carte de stabilité du système est présentée sur la figure 2.2b. Elle montre le niveau de stabilité du système en fonction des conditions initiales de demi-grand axe et de longitude du périhélie de la planète extérieure, calculé par analyse en fréquence (Laskar, 1993) : les gris clairs sont moins stables que les gris sombres. Par-dessus la carte de stabilité, des lignes noires représentent les niveaux de  $\sqrt{\chi^2}$  constant, qui est une quantité mesurant la capacité du modèle à reproduire les données observationnelles.

Sur cette figure, on voit clairement que le meilleur ajustement possible, situé au minimum de  $\sqrt{\chi^2}$  et marqué par un point rouge, est dans une région instable de l'espace des paramètres. Cependant, une zone stable se trouve à proximité – dans le cas particulier de HD 202206, cette zone correspond à la résonance de moyen mouvement 5 : 1 entre les deux planètes. Correia et al. (2005) proposent donc de choisir un système dont les paramètres se trouvent dans la zone stable, tout en restant le plus proche possible du meilleur ajustement. Les conditions initiales de ce système sont repérées par un point jaune.

Le panneau c, enfin, présente le demi-grand axe et l'excentricité des deux planètes au cours d'une intégration à très long terme du système issu des conditions initiales stables repérées en jaune sur le panneau b, et illustre la stabilité du système proposé sur 5 milliards d'années.

---

FIGURE 2.2: Importance de l'analyse de stabilité pour les systèmes multiplanétaires extrasolaires : l'exemple de HD 202206 (Correia et al., 2005). Panneau a, gauche : Intégration des conditions initiales issues du meilleur ajustement d'un modèle sans interactions entre planètes. Panneau a, droite : Intégration des conditions initiales issues du meilleur ajustement d'un modèle avec interactions mutuelles. Panneau b : Carte de stabilité du système autour du meilleur ajustement, en fonction du demi-grand axe et de la longitude du périhélie de la planète extérieure. Les gris sombres sont plus stables que les gris clairs. Les courbes représentent les niveaux de  $\sqrt{\chi^2}$ , qui mesure la qualité de l'ajustement. En rouge : position approximative du meilleur ajustement ; en jaune : position de la solution stable proposée. Panneau c : Intégration à long terme de la solution stable proposée.





## 2.2 Article inclus : *Averaging on the motion of a fast revolving body. Application to the stability study of a planetary system*

Dans le cas où le système planétaire étudié possède une planète dont la période orbitale est beaucoup plus courte que les autres, cette période courte dicte le pas de temps des intégrations utilisées pour tester l'ajustement des données observationnelles ou pour analyser la stabilité du système.

Dans le travail inclus ci-après, nous décrivons une méthode pour moyenniser le mouvement d'une planète très rapide par rapport aux autres planètes d'un même système de façon analytique. La période orbitale de cette planète rapide n'est alors plus le facteur limitant du pas d'intégration, ce qui permet des gains de temps conséquents. Les équations du mouvement moyennisé sont présentées dans un formalisme vectoriel inspiré de Boué et Laskar (2006).

La méthode proposée exploite le fait que la planète qui orbite rapidement autour de l'étoile est de manière équivalente la planète la plus proche de l'étoile. Ainsi, on peut développer la partie du Hamiltonien qui décrit les interactions entre la planète rapide et le reste du système en fonction du rapport des distances, en s'arrêtant dans notre cas au second ordre, ou ordre *quadripolaire*.

On repère la planète rapide par rapport à l'étoile hôte avec le vecteur  $\mathbf{r}_1$ , et les autres planètes plus lointaines par rapport au barycentre de l'étoile hôte et de la planète rapide avec les vecteurs  $(\mathbf{r}_i)_{i=2,n}$  ; on complète ces variables de position avec des variables d'impulsion pour les  $n$  planètes,  $(\tilde{\mathbf{r}}_i)_{i=1,n}$ , de sorte que l'on ait un ensemble de  $2n$  variables canoniques (voir équations 2.2 dans l'article). Le Hamiltonien du système, développé à l'ordre quadripolaire dans les rapports  $r_1/r_i$ , est donné par (équations 2.9a-d dans l'article)<sup>1</sup> :

$$H = K_1 + H_n + \sum_{2 \leq k}^n H_{1,k}, \quad \text{avec :} \quad (2.1a)$$

$$K_1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1\beta_1}{r_1}; \quad (2.1b)$$

$$H_n = \sum_{2 \leq k} \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k^2}{2\beta_k} - \frac{\mu_k\beta_k}{r_k} \right) + \sum_{2 \leq k < k' \leq n} \left[ \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{k'}}{m_0 + m_1} - G \frac{m_k m_{k'}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k'}|} \right]; \quad (2.1c)$$

$$H_{1,k} = -G \frac{\beta_1 m_k}{2r_k^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1)^2}{r_k^2} - r_1^2 \right). \quad (2.1d)$$

On a ainsi découpé le Hamiltonien en un premier terme keplérien  $K_1$  qui décrit le mouvement

---

1. Les masses réduites  $\beta_i$  et les constantes gravitationnelles  $\mu_i$  sont définies dans l'article aux équations 2.4 et 2.5.

de la planète rapide autour de l'étoile hôte, en un second terme  $H_n$  qui décrit le système des  $n - 1$  planètes extérieures interagissant entre elles et avec l'étoile hôte, et enfin en une somme de termes décrivant les interactions individuelles de chaque planète extérieure avec la planète rapide, à l'ordre quadripolaire.

Nous moyennisons alors le Hamiltonien (2.1) sur l'anomalie moyenne  $M_1$  de la planète rapide, en utilisant la méthode vectorielle de Boué et Laskar (2006). Celle-ci fait apparaître trois vecteurs unitaires  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  liés à l'orbite de la planète intérieure comme suit :  $\mathbf{i}$  pointe dans la direction du périastre,  $\mathbf{k}$  est colinéaire au moment cinétique orbital et  $\mathbf{j}$  complète les deux précédents pour former une base orthonormale directe. Le Hamiltonien moyennisé sur  $M_1$  est alors (équation A.1 de l'article) :

$$\langle H \rangle_{M_1} = H_n - G \sum_{2 \leq k}^n \frac{\beta_1 m_k}{4r_k^3} a_1^2 \left[ (1 - 3e_1^2) - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} + 3e_1^2 \left( 4 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2}{r_k^2} - \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2}{r_k^2} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Dans le cas où les interactions séculaires entre la planète intérieure et les planètes extérieures sont faibles, l'excentricité de la planète intérieure peut être supposée constante, et on peut alors simplifier encore les termes d'interaction en les moyennisant à nouveau sur l'argument du périhélie de la planète intérieure. Le Hamiltonien résultant est alors (équation 2.15 de l'article) :

$$\langle H \rangle_{M_1, \omega_1} = H_n + \sum_{2 \leq k}^n \langle H_{1,k} \rangle = H_n - \alpha \sum_{2 \leq k} \frac{m_k}{r_k^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \alpha = G \frac{\beta_1 a_1^2}{4} \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right). \quad (2.4)$$

Ce Hamiltonien a de nombreux avantages pour l'intégration de systèmes extrasolaires. D'une part, il ne suppose aucune restriction dans la valeur des excentricités ni des inclinaisons planétaires. D'autre part, les termes d'interaction  $H_{1,k}$  donnent lieu à des équations du mouvement qui sont intégrables explicitement, ce qui permet leur utilisation dans un schéma d'intégration numérique inspiré de celui des intégrateurs symplectiques. Les sections 2.2 et 2.3 de l'article développent en détail ces considérations.

Notons ici que lorsque les interactions séculaires entre la planète rapide et les autres planètes ne sont plus négligeables, il faut utiliser le Hamiltonien (2.2). Les équations du mouvement issues des termes d'interaction entre la planète rapide et les autres planètes ne sont alors plus intégrables simplement, et il faut utiliser un intégrateur numérique traditionnel.

Dans la dernière partie de l'article, nous appliquons les équations moyennes que nous venons de présenter à l'analyse de la stabilité du système  $\mu$  Arae qui contient 4 planètes et qui se prête particulièrement bien à cette méthode : la planète la plus proche de l'étoile possède une

période de 9.6 jours, tandis que la seconde planète la plus rapide possède une période de 310.5 jours.

Nous comparons notre modèle moyen à trois autres méthodes d'intégration : une première intégration classique incluant les quatre planètes ; une intégration dans laquelle on a simplement enlevé la planète intérieure rapide ; une intégration dans laquelle on a ajouté la masse de la planète rapide à la masse de l'étoile. Nous avons testé ces méthodes dans un système coplanaire ainsi que dans un système où la planète intérieure est initialement inclinée par rapport aux planètes extérieures. Enfin, comme la planète intérieure dans le système  $\mu$  Arae a une masse qui est un ordre de grandeur en-dessous des autres masses planétaires, nous avons également mené l'intégralité des tests dans un système fictif où nous avons multiplié par 10 la masse de la planète intérieure.

La figure 2.3 de l'article, qui reproduit la figure 6 de l'article, illustre la comparaison entre les quatre méthodes dans le cadre du système fictif qui possède une planète intérieure massive, en présence d'inclinaisons mutuelles entre les planètes. Les quatre panneaux présentent des cartes de stabilité calculées en fonction du demi-grand axe de la seconde planète la plus proche de l'étoile (sur l'axe des abscisses), et de l'argument de son noeud (sur l'axe des ordonnées). Le panneau (a) montre la carte obtenue à partir de équations moyennes, et le panneau (b) celle qui résulte d'une intégration complète du système. Le panneau (c) et le panneau (d) correspondent à des modèles à trois planètes ; dans le modèle (c) on a simplement enlevé la planète intérieure, tandis que dans le modèle (d) on a rajouté sa masse à l'étoile hôte.

On constate que les équations moyennes reproduisent fidèlement la forme de la carte obtenue par intégration complète, tout en utilisant environ 10 fois moins de temps de calcul. Les autres méthodes simplificatrices ne sont pas suffisantes dès que la planète intérieure est massive ou que le système n'est pas coplanaire. Elles fonctionnent cependant assez bien lorsque la masse de la planète intérieure est petite et que le système est coplanaire (voir figure 3 de l'article).

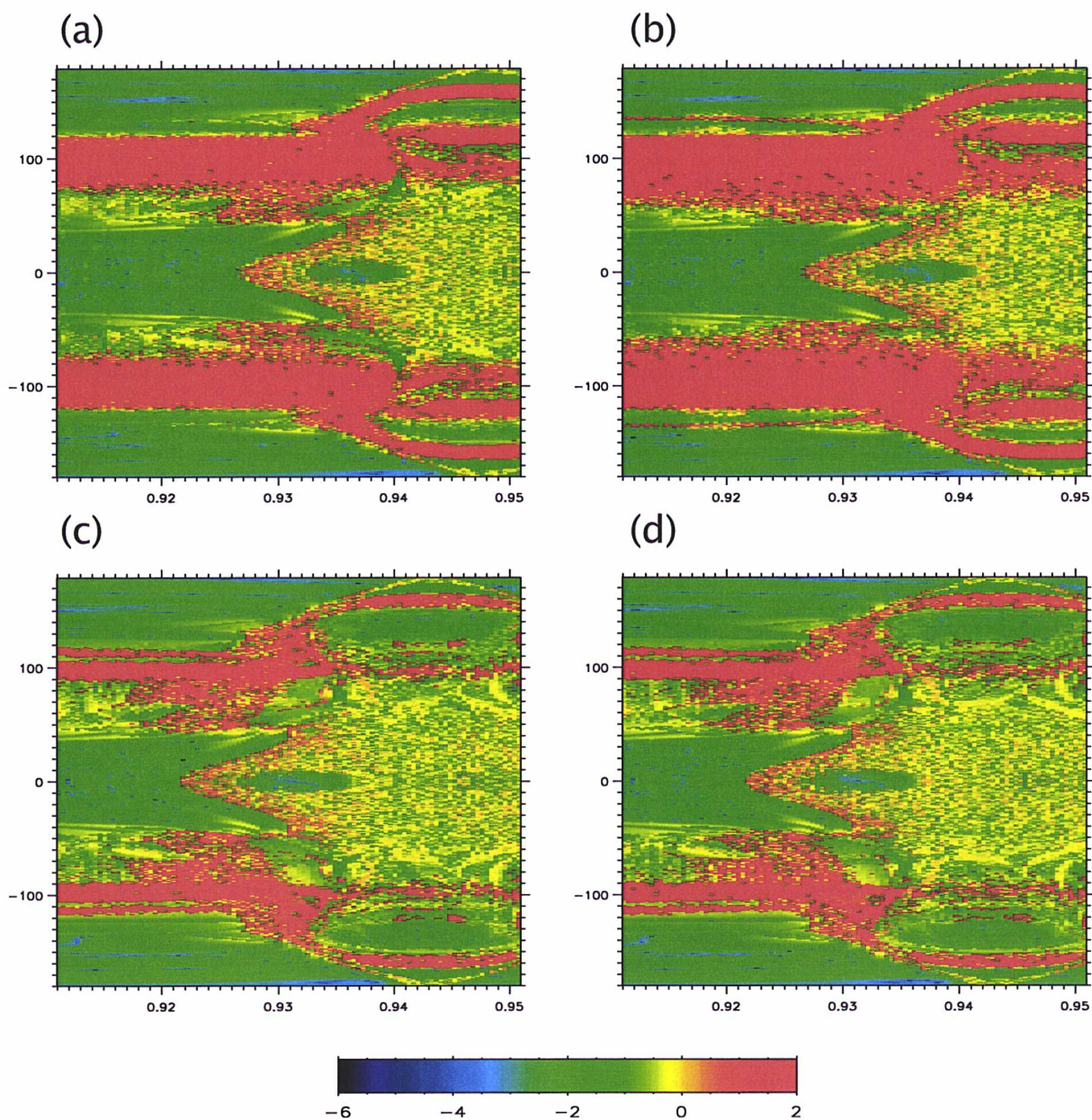


FIGURE 2.3: Cartes de stabilité pour un système inspiré de  $\mu$  Arae, dans lequel on a multiplié par 10 la masse de la planète intérieure. L'axe des abscisses correspond au demi-grand axe de la seconde planète la plus proche de l'étoile, et l'axe des ordonnées à l'argument du noeud de cette même planète. a : équations moyennes ; b : système complet à quatre planètes ; c : système sans planète intérieure ; d : système dans lequel la masse de la planète intérieure a été rajouté à la masse de l'étoile centrale.

Celest Mech Dyn Astr  
DOI 10.1007/s10569-009-9209-2

ORIGINAL ARTICLE

## Averaging on the motion of a fast revolving body. Application to the stability study of a planetary system

François Farago · Jacques Laskar · Jocelyn Couetdic

Received: 3 December 2008 / Revised: 6 March 2009 / Accepted: 26 March 2009  
© Springer Science+Business Media B.V. 2009

**Abstract** Exploring the global dynamics of a planetary system involves computing integrations for an entire subset of its parameter space. This becomes time-consuming in presence of a planet close to the central star, and in practice this planet will be very often omitted. We derive for this problem an averaged Hamiltonian and the associated equations of motion that allow us to include the average interaction of the fast planet. We demonstrate the application of these equations in the case of the  $\mu$  Arae system where the ratio of the two fastest periods exceeds 30. In this case, the effect of the inner planet is limited because the planet's mass is one order of magnitude below the other planetary masses. When the inner planet is massive, considering its averaged interaction with the rest of the system becomes even more crucial.

**Keywords** N-Body problems · Planetary systems · Numerical methods · Stability · Chaotic motions ·  $\mu$  Arae · Averaged integration

### 1 Introduction

In this paper, we study a planetary system composed of a central star and  $n$  planets revolving around it. We suppose that the innermost planet is much closer to the central star than the other  $n - 1$  ones, or equivalently that its orbital period is much smaller. The ever-growing list of discovered extrasolar planetary systems provides us with such systems. Good examples, which feature more than two planets, can be found for instance around  $\mu$  Arae (Pepe et al. 2007) or Gliese 876 (Rivera et al. 2005). Another motivation for this work is the study of stars orbiting a binary black hole in highly eccentric orbits (Gillessen et al. 2009; Mikkola and Merritt 2008).

The analysis of the global dynamics of planetary systems allows to search for dynamical features such as possible stable resonant islands. These islands can give constraints on the

---

F. Farago · J. Laskar (✉) · J. Couetdic  
Astronomie et Systeme Dynamique, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC,  
77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France  
e-mail: Laskar@imcce.fr

Published online: 30 May 2009

 Springer

planetary elements based on dynamical stability (Correia et al. 2005). However, the parameter space grows rapidly with the number of planets, and the computations can as such be quite lengthy. In this context, when a fast planet has a low influence on the other planets, it can be ignored to speed up the computations (Pepe et al. 2007). Other time-critical phases occur for instance in the fitting process of extrasolar planetary orbits in multiple systems hosting a hot Jupiter.

We take advantage of both the closeness of the inner planet and its fast orbital motion when compared to the other planets of the system, and derive a first order averaged interaction between this planet and the outer ones. The averaging removes the inner planet's short orbital period from the system, and makes it possible to base numerical integrations on a larger time step.

We used as a starting point the secular perturbation theories based on an expansion with respect to the semi-major axes of the planets rather than on their eccentricities and inclinations. The second order or quadrupolar expansion was developed for a three-body system by Kozai (1962). After expanding the perturbing function in the three-body problem to the second order in the semi-major axes, Kozai averaged it over the orbital motions of all the bodies, yielding a fully secular model. The theory was later extended to the third or octupolar order (Marchal 1990; Krymowski and Mazeh 1999; Ford et al. 2000; Lee and Peale 2003). These models are all for three-body systems, and they are all fully secular; that is, they are averaged over the orbital motions of all the bodies. However, in the present work, the averaging is only performed on the innermost planet.

In Sect. 2, we derive a quadrupolar expansion for the central planet. We average it over the inner planet's orbital motion and then over its argument of perihelion using the geometric approach of Boué and Laskar (2006). This additional averaging over the argument of perihelion allows us to get expressions for the Hamiltonian and the equations of motion that preserve the angular momentum which are very convenient to integrate numerically. We also provide in the appendix more general equations that are not averaged over the perihelion, and that can be used in cases of stronger secular interactions. Finally, we derive equations of motion for this partially averaged n-body system. The lowest orbital period is now that of the second innermost planet. It allows us to largely increase the time step in the numerical integration in the same way as if we had ignored the inner planet, while still retaining its average interaction with the outer planets.

In Sect. 3, we use these results to analyze the dynamical stability of the  $\mu$  Arae planetary system. We compare our method to the full integration of the system and to two usual simplifications, where we either suppress the inner planet, or add its mass to the central star. For  $\mu$  Arae the mass of the inner planet is one order of magnitude below the other planetary masses. Nevertheless, the inner planet has a significant effect on the dynamics of the outer ones for highly inclined orbits. We then run the same tests on a system based on the  $\mu$  Arae system where we increase the inner planet's mass by an order of magnitude, bringing it in line with its other companions. In this case, the averaged equations still provide a very good approximation although the effect of the inner planet becomes large.

## 2 Averaged planetary equations

### 2.1 Derivation of the Hamiltonian

In this section, we derive planetary equations which will be averaged over the mean anomaly of the innermost planet. We follow the vectorial method used in (Boué and Laskar 2006).

Averaging on the motion of a fast revolving body

Let us consider  $n$  planets orbiting a central star. We index the star and the planets such that the star has index 0 and the planets have an increasing index with respect to their semi major axis. The innermost planet has index 1. We denote the barycentric coordinates and momenta as  $(\mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i)_{0 \leq i \leq n}$ . In barycentric coordinates, the  $(n + 1)$ -body problem has the traditional Hamiltonian:

$$H = \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_i^2}{2m_i} - G \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|}. \tag{2.1}$$

Since we assume that the innermost planet is much closer to the central star than the other ones ( $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0| \ll |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_0|$  for  $k \geq 2$ ), the outer planets will interact with the barycenter of the inner planet and the star rather than with both bodies individually. For the outer planets, we thus change to canonical heliocentric coordinates (Laskar and Robutel 1995) centered on the barycenter of the inner planet and the central star. For the inner planet, we use its position relatively to the central star. The linear canonical change of variables is given by:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{u}_0; \quad \tilde{\mathbf{r}}_0 = \sum_{k=0}^n \tilde{\mathbf{u}}_k = 0; \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0; \quad \tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1 + (1 - \delta) \sum_{k=2}^n \tilde{\mathbf{u}}_k = \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 - (1 - \delta) \tilde{\mathbf{u}}_0; \\ \mathbf{r}_k &= \mathbf{u}_k - (\delta \mathbf{u}_0 + (1 - \delta) \mathbf{u}_1); \quad \tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k \text{ for } k \geq 2; \end{aligned} \tag{2.2}$$

where  $\delta = m_0/(m_0 + m_1)$ . In these coordinates, we separate the terms involving the inner planet, and the Hamiltonian becomes:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k^2}{2\beta_k} + \sum_{2 \leq k < k' \leq n} \left[ \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{k'}}{m_0 + m_1} - G \frac{m_k m_{k'}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k'}|} \right] \\ &+ \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1 \beta_1}{r_1} \right) - G \sum_{2 \leq k \leq n} \left[ \frac{m_0 m_k}{|\mathbf{r}_k + (1 - \delta) \mathbf{r}_1|} + \frac{m_1 m_k}{|\mathbf{r}_k - \delta \mathbf{r}_1|} \right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

In this expression,

$$\mu_1 = G(m_0 + m_1); \quad \beta_1^{-1} = m_0^{-1} + m_1^{-1}; \tag{2.4}$$

$$\mu_k = G(m_0 + m_1 + m_k); \quad \beta_k^{-1} = (m_0 + m_1)^{-1} + m_k^{-1} \text{ for } k \geq 2. \tag{2.5}$$

As said before,  $r_1 \ll r_k$  for  $k \geq 2$ . We thus use the following second order expansions:

$$\frac{m_0}{|\mathbf{r}_k + (1 - \delta) \mathbf{r}_1|} = \frac{m_0}{r_k} \left[ 1 - (1 - \delta) \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1}{r_k^2} + \frac{(1 - \delta)^2}{2} \left( 3 \left( \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1}{r_k^2} \right)^2 - \frac{r_1^2}{r_k^2} \right) \right]; \tag{2.6}$$

$$\frac{m_1}{|\mathbf{r}_k - \delta \mathbf{r}_1|} = \frac{m_1}{r_k} \left[ 1 + \delta \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1}{r_k^2} + \frac{\delta^2}{2} \left( 3 \left( \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1}{r_k^2} \right)^2 - \frac{r_1^2}{r_k^2} \right) \right]. \tag{2.7}$$

Since  $m_1 \delta - m_0(1 - \delta) = 0$  and  $m_0(1 - \delta)^2 + m_1 \delta^2 = \beta_1$ , the above two terms add up to:

$$\frac{m_0}{|\mathbf{r}_k + (1 - \delta) \mathbf{r}_1|} + \frac{m_1}{|\mathbf{r}_k - \delta \mathbf{r}_1|} = \frac{m_0 + m_1}{r_k} + \frac{\beta_1}{2r_k^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1)^2}{r_k^2} - r_1^2 \right). \tag{2.8}$$

We can now rewrite the Hamiltonian (2.3) as

$$H = K_1 + H_n + \sum_{2 \leq k}^n H_{1,k}, \quad \text{with:} \quad (2.9a)$$

$$K_1 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1\beta_1}{r_1}; \quad (2.9b)$$

$$H_n = \sum_{2 \leq k} \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k^2}{2\beta_k} - \frac{\mu_k\beta_k}{r_k} \right) + \sum_{2 \leq k < k' \leq n} \left[ \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{k'}}{m_0 + m_1} - G \frac{m_k m_{k'}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k'}|} \right]; \quad (2.9c)$$

$$H_{1,k} = -G \frac{\beta_1 m_k}{2r_k^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1)^2}{r_k^2} - r_1^2 \right). \quad (2.9d)$$

$K_1$  is the Keplerian Hamiltonian of the inner planet.  $H_n$  is the  $n$ -body Hamiltonian of the  $n - 1$  outer planets orbiting around the barycenter of the star and the inner planet, written in canonical heliocentric coordinates. Each of the  $H_{1,k}$  represents the quadrupolar interaction between the inner planet and the  $k$ -th planet. We now average  $H$  over the mean anomaly  $M_1$  of the fast planet, assuming that the orbital motion of the inner planet is not resonant with those of the outer planets.

$K_1$  is simply equal to  $-\mu_1\beta_1/2a_1$ , where  $a_1$  is the semi-major axis of the rapid body's orbit, and  $H_n$  does not depend on the motion of the inner planet. In order to treat the  $H_{1,k}$  for  $k \geq 2$ , we introduce 3 unit vectors ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) bound to the orbit of the inner planet. The vector  $\mathbf{i}$  is colinear to the direction of perihelion,  $\mathbf{k}$  is colinear to the angular momentum, and  $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$ . We can then average each term appearing in  $H_{1,k}$  as in (Boué and Laskar 2006):

$$\langle (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_1)^2 \rangle_{M_1} = \frac{1}{2} a_1^2 (r_k^2 - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2) + a_1^2 e_1^2 \left( 2(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2 \right); \quad (2.10)$$

$$\langle r_1^2 \rangle_{M_1} = a_1^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right). \quad (2.11)$$

Thus:

$$\langle H_{1,k} \rangle_{M_1} = -G \frac{\beta_1 m_k}{4r_k^3} a_1^2 \left[ (1 - 3e_1^2) - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} + 3e_1^2 \left( 4 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2}{r_k^2} - \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2}{r_k^2} \right) \right]. \quad (2.12)$$

To simplify even further, we average over the argument of perihelion of the fast planet. By doing this, we suppose that the value of the eccentricity of the inner planet is a near-constant. In Appendix Appendix, we also provide equations of motion that are not averaged over the argument of perihelion of the fast planet. These equations can be used in case of stronger secular interactions leading to variations of the inner planet's eccentricity.

We have  $\langle (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i}) \rangle_{\omega_1} = 0$  and by symmetry  $\langle (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2 \rangle_{\omega_1} = \langle (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2 \rangle_{\omega_1}$ . As  $(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2 + (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2 + (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2 = r_k^2$ , we obtain:

$$\langle (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2 \rangle_{\omega_1} = \langle (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2 \rangle_{\omega_1} = \frac{1}{2} (r_k^2 - (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2).$$

The above interaction term thus becomes:

$$\langle H_{1,k} \rangle = -\alpha \frac{m_k}{r_k^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} \right), \quad \text{with } \alpha = G \frac{\beta_1 a_1^2}{4} \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right). \quad (2.13)$$



Averaging on the motion of a fast revolving body

We can now write the fully averaged Hamiltonian as:

$$\langle H \rangle_{M_1, \omega_1} = H_n - \frac{\mu_1 \beta_1}{2a_1} - \alpha \sum_{2 \leq k} \frac{m_k}{r_k^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} \right). \quad (2.14)$$

This Hamiltonian is composed of three terms. The first one is the  $n$ -body Hamiltonian involving the  $n - 1$  outer planets orbiting around the barycenter of the central star and of the inner planet, written in canonical heliocentric coordinates. The second one is the Keplerian energy of the fast planet, and is a constant that can be dropped from the Hamiltonian. The third one contains the average interaction between the inner planet and the outer ones. Finally,

$$\langle H \rangle_{M_1, \omega_1} = H_n + \sum_{2 \leq k} \langle H_{1,k} \rangle = H_n - \alpha \sum_{2 \leq k} \frac{m_k}{r_k^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} \right). \quad (2.15)$$

*Remark* The Hamiltonian can be further averaged over the argument of node of the inner planet. Let us call  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  a fixed direct orthonormal base that we use as a global reference frame. Then,  $\mathbf{k} = \sin i_1 \sin \Omega_1 \mathbf{e}_x - \sin i_1 \cos \Omega_1 \mathbf{e}_y + \cos i_1 \mathbf{e}_z$ , and:

$$\langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_k)^2 \rangle_{\Omega_1} = \frac{1}{2} \left[ \sin^2 i_1 r_k^2 + (2 - 3 \sin^2 i_1) (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{e}_z)^2 \right]. \quad (2.16)$$

The Hamiltonian, fully averaged over all the orbital angles of the inner planet, becomes:

$$\langle H \rangle_{M_1, \omega_1, \Omega_1} = H_n - \alpha \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_1 \right) \sum_{2 \leq k} \frac{m_k}{r_k^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{e}_z)^2}{r_k^2} \right). \quad (2.17)$$

After this averaging, the inner planet's inclination becomes constant. When the outer planets are nearly coplanar in the  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  plane, the scalar products  $(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{e}_z)$  can be neglected. In this situation, the inner planet can be seen as a ring lying in a fixed plane around the barycenter of the central star and the inner planet. The coupling constant  $\alpha(1 - (3/2) \sin^2 i_1)$  takes into account the inclination and the eccentricity of the inner planet as is done for instance by (Quinn et al. 1991) in their analysis of the influence of the Earth–Moon system on the Solar System.

However, in a system with non-negligible mutual inclinations, the Hamiltonian (2.17) depends explicitly on the direction  $\mathbf{e}_z$ , and thus the total angular momentum of the system is not preserved. For this reason, we prefer to use the Hamiltonian (2.15) which preserves the total angular momentum, and is still easily integrated as will be shown in Sect. 2.3.

## 2.2 Equations of motion

When we average over the variables  $M_1$  and  $\omega_1$ , their conjugate variables  $a_1$  and  $e_1$  become constant. Let us denote  $\mathbf{y}$  the vector of all remaining variables  $(\mathbf{r}_k, \tilde{\mathbf{r}}_k)_{k \geq 2}$  and  $\mathbf{k}$ . With  $\mathcal{B}(\mathbf{y})$  the matrix of their mutual Poisson brackets,<sup>1</sup> the general form of the equation of motion is:

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathcal{B}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \langle H \rangle. \quad (2.18)$$

<sup>1</sup> We use the following convention, where  $p_i$  are momenta and  $q_i$  positions:  $\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$ .

Calling  $L_1 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1 (1 - e_1^2)}$  the norm of the angular momentum of the fast body, we get the following matrix (Boué and Laskar 2006):

$$B(\mathbf{y}) = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & -i d_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ i d_{n-1} & 0 & 0 & -k_z/L_1 & k_y/L_1 \\ \hline 0 & 0 & k_z/L_1 & 0 & -k_x/L_1 \\ -k_y/L_1 & k_x/L_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.19)$$

The equations of motion are thus:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_k = \nabla_{\mathbf{r}_k} \langle H \rangle = \nabla_{\mathbf{r}_k} H_n; \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} \langle H \rangle = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H_n - \nabla_{\mathbf{r}_k} \langle H_{1,k} \rangle; \\ \dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{L_1} \nabla_{\mathbf{k}} \langle H \rangle \wedge \mathbf{k} = \frac{1}{L_1} \sum_{2 \leq k} \nabla_{\mathbf{k}} \langle H_{1,k} \rangle \wedge \mathbf{k}. \end{cases} \quad (2.20)$$

### 2.3 Integration scheme for the averaged equations

The averaged equations are not integrable. In order to integrate them numerically, we split them in smaller pieces which are individually integrable. Following Eq. (2.15), we can split  $\langle H \rangle$  into the  $n - 1$  following parts: the first one is  $H_n$ , and the  $n - 2$  other are the  $\langle H_{1,k} \rangle$  where  $2 \leq k \leq n$ . The equations of motion generated by each of the  $\langle H_{1,k} \rangle$  taken separately are obtained with (2.20) as:

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \nabla_{\mathbf{r}_k} \langle H_{1,k} \rangle = \mathbf{0}; \quad (2.21a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} \langle H_{1,k} \rangle = -3\alpha \frac{m_k}{r_k^5} \left( 2(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} + \left( 1 - 5 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} \right) \mathbf{r}_k \right); \quad (2.21b)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{L_1} \nabla_{\mathbf{k}} \langle H_{1,k} \rangle \wedge \mathbf{k} = \frac{6\alpha m_k}{L_1 r_k^5} (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k}) \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{k}. \quad (2.21c)$$

For a given  $k$ , the above equations are integrable. Indeed, under these equations, the positions remain constant. Using Eq. (2.21c), it can be easily shown that  $\gamma_k = (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})$  is also constant. Therefore, we can rewrite Eq. (2.21b) and (2.21c) as:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}_k = -3\alpha \frac{m_k}{r_k^5} \left( 2\gamma_k \mathbf{k} + \left( 1 - 5 \frac{\gamma_k^2}{r_k^2} \right) \mathbf{r}_k \right); \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \Omega_k \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} \wedge \mathbf{k} \quad (2.23)$$

with

$$\Omega_k = \frac{6\alpha m_k}{L_1 r_k^4} \gamma_k. \quad (2.24)$$

Equation 2.23 is the equation of a rotation around the direction  $\mathbf{r}_k/r_k$  with angular frequency  $\Omega_k$ . The solution vector  $\mathbf{k}$  can then be used to integrate Eq. (2.22) in which the only non-constant quantity is  $\mathbf{k}$ . Indeed, if we call  $\mathcal{R}_{\mathbf{r}_k}(\theta)$  the rotation of angle  $\theta$  around the direction  $\mathbf{r}_k$ , we have between times  $t$  and  $t' = t + \Delta t$ :

Averaging on the motion of a fast revolving body

$$\mathbf{k}(t') = \mathcal{R}_{\mathbf{r}_k}(\Omega_k \Delta t) \cdot \mathbf{k}(t); \quad (2.25)$$

$$\int_t^{t'} \mathbf{k}(\tau) d\tau = -\frac{1}{\Omega_k} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} \wedge (\mathbf{k}(t') - \mathbf{k}(t)) + \Delta t \frac{\gamma_k}{r_k} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k}. \quad (2.26)$$

Using result (2.26) in Eq. (2.22), we obtain the full solution of the equations generated by  $\langle H_{1,k} \rangle$  for a given  $k$ . Between times  $t$  and  $t'$ , if we note for all variables  $x(t') = x'$  and  $x(t) = x$ , we have:

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k; \\ \tilde{\mathbf{r}}'_k = \tilde{\mathbf{r}}_k - 3\alpha \frac{m_k}{r_k^5} \left[ \frac{2\gamma_k}{\Omega_k} (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \wedge \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} + \left( 1 - 3\frac{\gamma_k^2}{r_k^2} \right) \Delta t \mathbf{r}_k \right]; \\ \mathbf{k}' = \mathcal{R}_{\mathbf{r}_k}(\Omega_k \Delta t) \cdot \mathbf{k}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Since the unit angular momentum of the inner planet  $\mathbf{k}$  is not a canonical variable, we do not have here a full symplectic scheme. However, we can still use the same ideas that lead to these integrators to combine the flows of the different parts of the system. We use the *SABA*<sub>4</sub> scheme (Laskar and Robutel 2001) which we modify to take into account the  $\langle H_{1,k} \rangle$  contributions.

The  $n$ -body Hamiltonian  $H_n$  is the sum of  $n - 1$  decoupled Keplerian terms which are integrable, and of a perturbing function which depends on the positions and on the momenta. The Keplerian terms are the A step. The perturbing function is split in two terms  $B_1(\mathbf{r}_k) + B_2(\tilde{\mathbf{r}}_k)$  which are integrable separately. We modify the B step by adding into it the  $\langle H_{1,k} \rangle$  contributions and symmetrizing the result as follows (Laskar and Robutel 2001):

$$\exp(\tau L_B) = e^{\frac{\tau}{2} L_{B_1}} \cdot e^{\frac{\tau}{2} L_{\langle H_{1,n} \rangle}} \dots e^{\frac{\tau}{2} L_{\langle H_{1,2} \rangle}} \cdot e^{\tau L_{B_2}} \cdot e^{\frac{\tau}{2} L_{\langle H_{1,2} \rangle}} \dots e^{\frac{\tau}{2} L_{\langle H_{1,n} \rangle}} \cdot e^{\frac{\tau}{2} L_{B_1}}. \quad (2.28)$$

*Remark* In fact, the sum of the  $\langle H_{1,k} \rangle$  terms,  $\langle H_1 \rangle = \sum_{2 \leq k \leq n} \langle H_{1,k} \rangle$ , is actually integrable. Indeed, we can rewrite the equation of motion for  $\mathbf{k}$  that is derived from  $\langle H_1 \rangle$  by summing Eqs. (2.21c) over the integer  $k$ :

$$\dot{\mathbf{k}} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{T} \cdot \mathbf{k}, \quad \text{with} \quad \mathbf{T} = \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{6\alpha m_k}{L_1 r_k^5} (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k). \quad (2.29)$$

The positions remain constant under the equations of motion derived from  $\langle H_1 \rangle$ , so the matrix  $\mathbf{T}$  is constant. It is also symmetric. Following Tremaine et al. (2009), it can be identified with the inverse of the inertia tensor of the  $n - 1$  outer planets seen as point masses  $m_k$  with positions  $\mathbf{r}_k$ . We can then solve Eq. (2.29) to obtain the motion of  $\mathbf{k}$  by diagonalizing  $\mathbf{T}$  and using the method described by Landau and Lifshitz (1969) for the asymmetrical top. Since the equations derived from  $\langle H_1 \rangle$  for the momenta are identical to (2.21b), the only time-dependent quantity in the right hand side is  $\mathbf{k}$ , and the momenta can be calculated using a quadrature. However, the expression of  $\mathbf{k}$  contains elliptic functions which must then be integrated to obtain the momenta. Moreover, the precision achieved by splitting  $\langle H_1 \rangle$  into smaller and more easily integrable  $\langle H_{1,k} \rangle$  parts was largely sufficient for our purpose.

### 3 Application to the stability analysis of the $\mu$ Arae planetary system

The equations derived in the previous section allow us to eliminate the short period terms associated with the inner body's orbital motion. The timescale of the evolution of  $\mathbf{k}$  is of the

same order as the secular frequencies of the inner planet, which are usually much smaller than the orbital frequencies of the outer planets. We are thus able to take into account the average interaction of the inner planet for nearly the same computing cost as if we had simply ignored it.

A good example is given by the  $\mu$  Arae system (Pepe et al. 2007) which features 4 planets<sup>2</sup> around a  $1.08M_{\odot}$  star. The inner planet,  $\mu$  Arae c ( $m_c = 0.03321M_{\text{Jup}}$ ), revolves around the central star in 9.6 days, whereas the second closest planet,  $\mu$  Arae d ( $m_d = 0.5219M_{\text{Jup}}$ ), has an orbital period of 310.5 days.  $\mu$  Arae d is near a 2:1 mean motion resonance with  $\mu$  Arae b ( $m_b = 1.676M_{\text{Jup}}$ ), which orbits at 643.25 days. Lastly,  $\mu$  Arae e ( $m_e = 1.814M_{\text{Jup}}$ ) has a very loosely determined period of  $4205.8 \pm 758.9$  days.

### 3.1 Comparison between averaged trajectories and full integrations

Before computing the dynamical maps of the system, we first validated the averaged equations by comparing individual planetary trajectories in the system. The planet on which most differences are seen is the second innermost planet,  $\mu$  Arae d. In Fig. 1, we show the semi-major axis, eccentricity, and inclination of  $\mu$  Arae d in the full system with initial conditions that both allow for a mutual inclination between the planets in the system, and ensure a regular trajectory. Indeed, if initial conditions lead to a chaotic trajectory, the difference between the averaged model and the full system expectedly diverges after a short time.

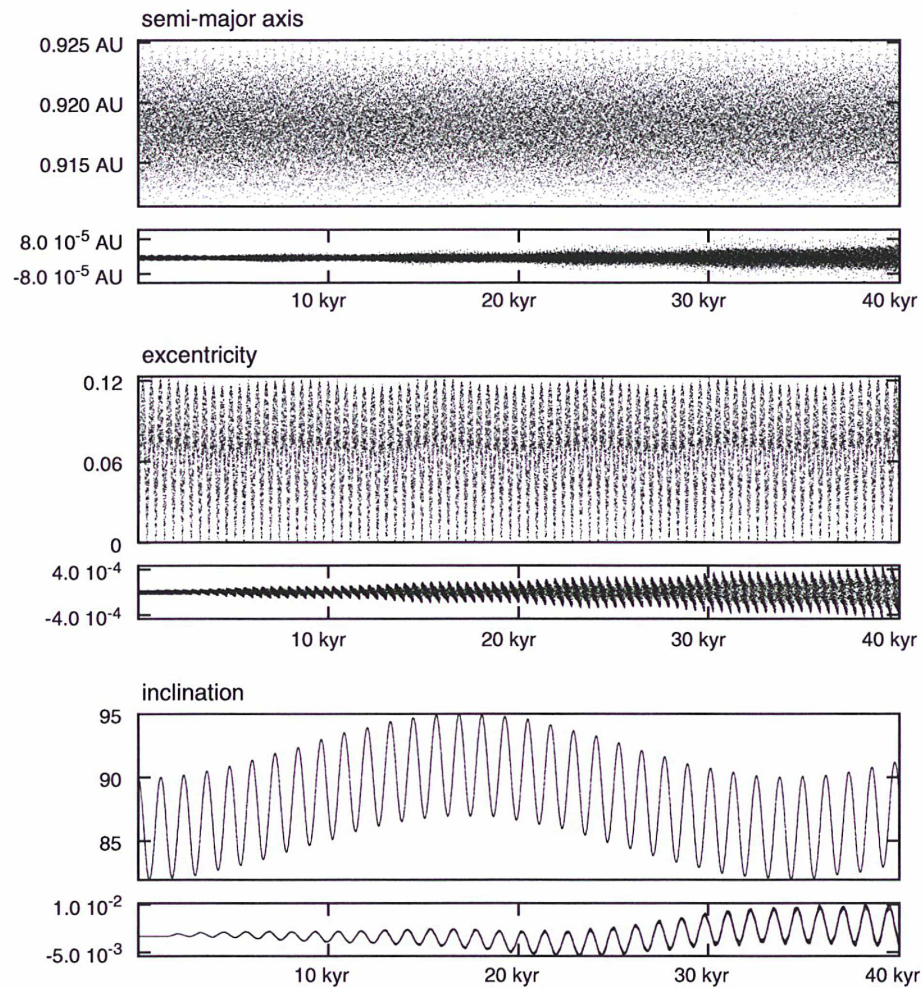
Specifically, the initial conditions were the same as those published by Pepe et al. (2007), except for  $a_d = 0.92123$  AU (instead of 0.9210 AU) and  $i_b = 85^\circ$  (instead of  $90^\circ$ ). We used the *SABA4* symplectic integrator (Laskar and Robutel 2001), which we modified to include the averaged perturbation of the central planet as shown in the previous section.

After 40 kyr, which correspond roughly to 40000 orbits of  $\mu$  Arae d, the relative difference between the trajectories obtained through the averaged integration and through the full integration amount to 0.08% on the semi-major axis, 0.4% on the eccentricity, and 0.01% on the inclination. The mean longitude suffers from a small linear trend due to the model difference between the full and the averaged equations. This trend can be subtracted using Kepler's third law to obtain the result shown in Fig. 2. Specifically, we added  $1.48 \times 10^{-5}$  days to the period of  $\mu$  Arae d in the initial conditions of the averaged integration in order to cancel the linear trend in mean longitude. After 40 kyr, the difference in mean longitude between both models amounts to a few  $10^{-3}$  radians.

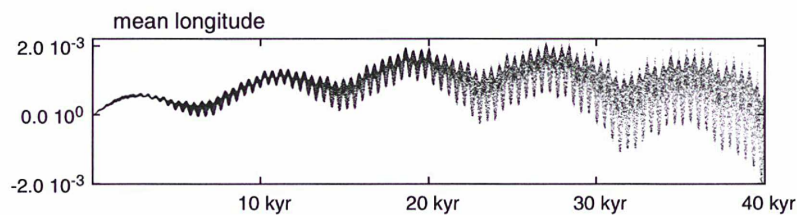
We also performed an integration where we ignored the inner planet, but added its mass to the mass of the central star. In this case, we had to add 0.117 days to the orbital period of  $\mu$  Arae d in order to subtract the linear trend observed in the mean longitude of  $\mu$  Arae d. This is a much larger correction than in the averaged integration. The maximum relative differences seen in the orbital elements of  $\mu$  Arae d rise to 1% on the semi-major axis and 1% on the inclination, when compared to the full system over the same 40 kyr period. The secular frequency of the perihelion is significantly greater in the three-planet system, and the argument of perihelion gains a full period over the four-planet integration within approximately 40 kyr. The difference in eccentricity between both integrations thus reaches the full value of the eccentricity after about 20 kyr.

<sup>2</sup> Since we compare our results to (Pepe et al. 2007), we will use the same naming conventions as them.

## Averaging on the motion of a fast revolving body



**Fig. 1** Trajectory of  $\mu$  Arae d for a 4-planet integration over 40 kyr based on initial conditions that provide a regular trajectory. For each orbital element, the difference between the full integration and an average integration is shown below the corresponding graph



**Fig. 2** Difference between the mean longitude of  $\mu$  Arae d as computed in a full integration versus an averaged integration, in radians. The planet's orbital period has been slightly adjusted in the averaged integration by adding  $1.48 \times 10^{-5}$  days in order to subtract a linear trend due to the difference between both models

### 3.2 Comparison between the dynamical maps

In their stability analysis of the system, [Pepe et al. \(2007\)](#) had simply chosen to ignore the central planet  $\mu$  Arae c because of both its proximity to the star and its low mass (one order of magnitude below the other planetary masses). We computed again some dynamical maps of the system for four different approaches:

- a full-system map, with a time step of  $2.10^{-3}$ yr adapted to the fast planet,  $\mu$  Arae c;
- a full-system map using averaged equations for the inner planet, with a time step of  $2.10^{-2}$ yr adapted to the second fastest planet,  $\mu$  Arae d;
- a three-planet map similar to that computed by [Pepe et al. \(2007\)](#), with the same time step of  $2.10^{-2}$ yr;
- another three-planet map where the inner planet is ignored but its mass is added to the central star's mass, again with a time step of  $2.10^{-2}$ yr.

Following [Pepe et al. \(2007\)](#),  $\mu$  Arae d is the least constrained planet (after  $\mu$  Arae e for which there is still insufficient data). We thus performed 50kyr integrations for different eccentricities and semi-major axes of  $\mu$  Arae d in the ranges  $0 \leq e_d \leq 0.3$  and  $0.910AU \leq a_d \leq 0.930AU$ , with steps of 0.003 in  $e_d$  and 0.0002 AU in  $a_d$ .

The stability index is computed using frequency analysis ([Laskar 1993](#)). Two determinations of the mean motion of  $\mu$  Arae d are obtained during the first half (0–25kyr) and then the second half (25–50kyr) of the integration. The difference between the two values is a measure of the chaotic diffusion of the trajectory. It should be close to zero for a regular solution, while high values correspond to strongly chaotic motions. The output maps are shown in [Fig. 3](#) for a planar configuration. All four methods produce very similar results. We thus confirm that the suppression of the innermost planet in ([Pepe et al. 2007](#)) is relevant. This is mainly due to the fact that this planet has both a short orbital period and a mass one order of magnitude below that of the other planets in the system. Because of the time step used, the three-planet maps and the averaged map were obtained 10 times faster than the full-system map.

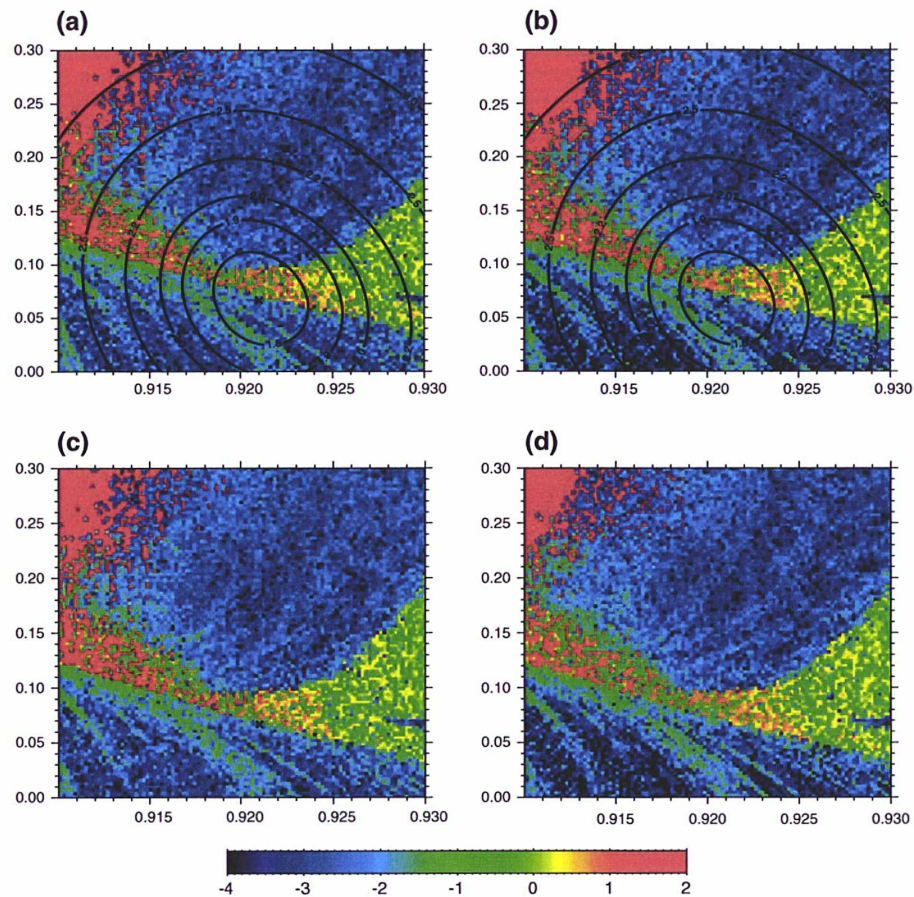
Similarly, we tested our code with mutually inclined planets. The conventions for observations are that the plane of the sky has zero inclination, and that the observed systems are in an orthogonal plane. In this situation, the mutual inclination between two planets of indices  $i$  and  $j$  is  $I_{i,j} = \Omega_i - \Omega_j$ . We thus performed 5kyr integrations for different semi-major axes and arguments of node of  $\mu$  Arae d in the ranges  $0.910AU \leq a_d \leq 0.951AU$  and  $-180^\circ \leq \Omega_d \leq 180^\circ$  with steps of 0.0004 AU in  $a_d$  and  $1^\circ$  in  $\Omega_d$ . Again, we tried a full four-planet system, a three-planet system where the inner planet is ignored, another three-planet system where the mass of the inner planet is added to the central star's mass, and a system using the averaged equations.

The results can be seen in [Fig. 4](#). The inner planet now has a significant effect on the dynamics of the system. Indeed, in the two three-planet frequency maps, there are two stable zones around  $a_d = 0.943$  AU and  $\Omega_d = \pm 135^\circ$ . In the full and in the averaged map, these zones are destabilized by the inner planet. For the spatial case, it is thus insufficient to consider only the zero-order contribution of the inner planet by adding its mass to the central star.

### 3.3 A $\mu$ Arae inspired system with a significantly massive inner planet

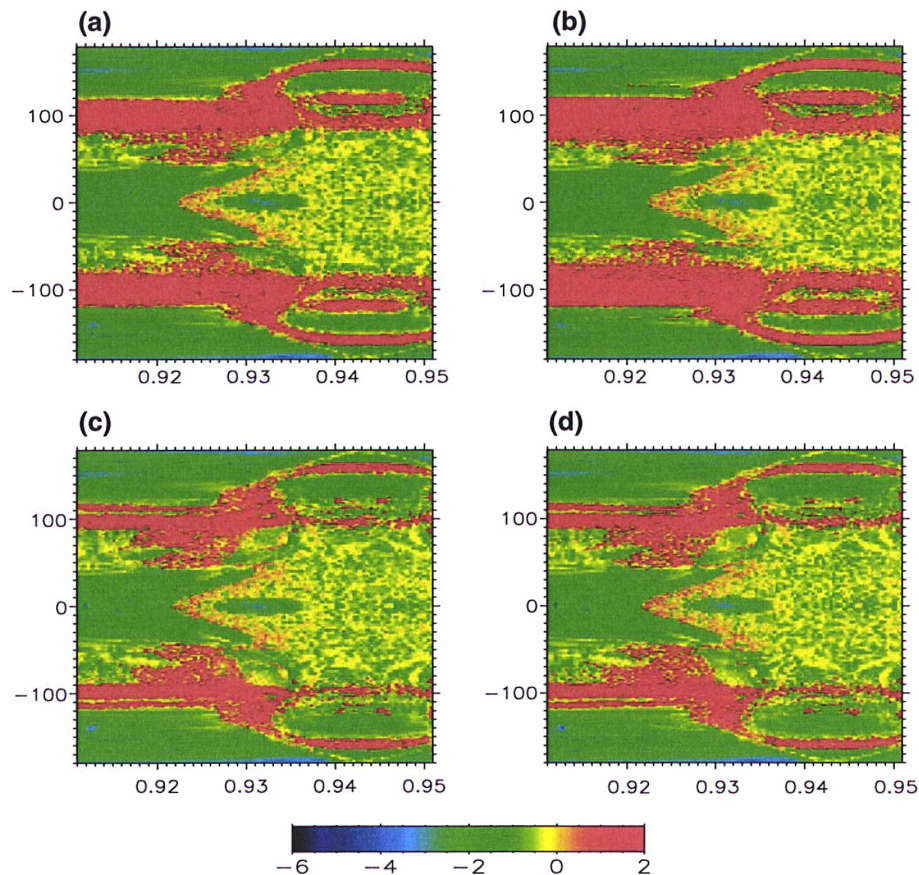
In order to test a case for which the effect of the fast planet is even larger, we performed the same analyses on a fictional system we obtained from  $\mu$  Arae by multiplying the inner

## Averaging on the motion of a fast revolving body



**Fig. 3** Frequency maps of the  $\mu$  Arae system for different values of the semi-major axis of  $\mu$  Arae d (on the  $x$  axis) and of its eccentricity (on the  $y$  axis). **a**: averaged system, time step 0.02 yr; **b**: full system, time step 0.002 yr; **c**: 3-planet system, time step 0.02 yr; **d**: 3-planet system with the mass of the inner planet added to the central star's mass, time step 0.02 yr. The numerical color scale goes from the most stable trajectories (stability index  $\leq -4$ ) to the least stable trajectories (stability index  $\geq 2$ ). The black contours correspond to the iso- $\chi^2$  lines of the fit provided by [Pepe et al. \(2007\)](#)

planet's mass by 10. The same method as in the above section is applied, and the output maps are shown in Figs. 5 and 6. In both cases, the full map appears to be shifted to the right when compared to the actual system, and this behaviour is very well reproduced by the averaged equations. The three-planet system which completely ignores the inner planet is of course not affected by the modification we made. The zero-order contribution of the inner planet does not produce significant improvements, even though the inner planet is massive. In the mutually inclined situation, the stable islands around  $a_d = 0.943$  AU and  $\Omega_d = \pm 135^\circ$  in the 3-planet map are subject to the same destabilization as previously observed in the  $\mu$  Arae system.



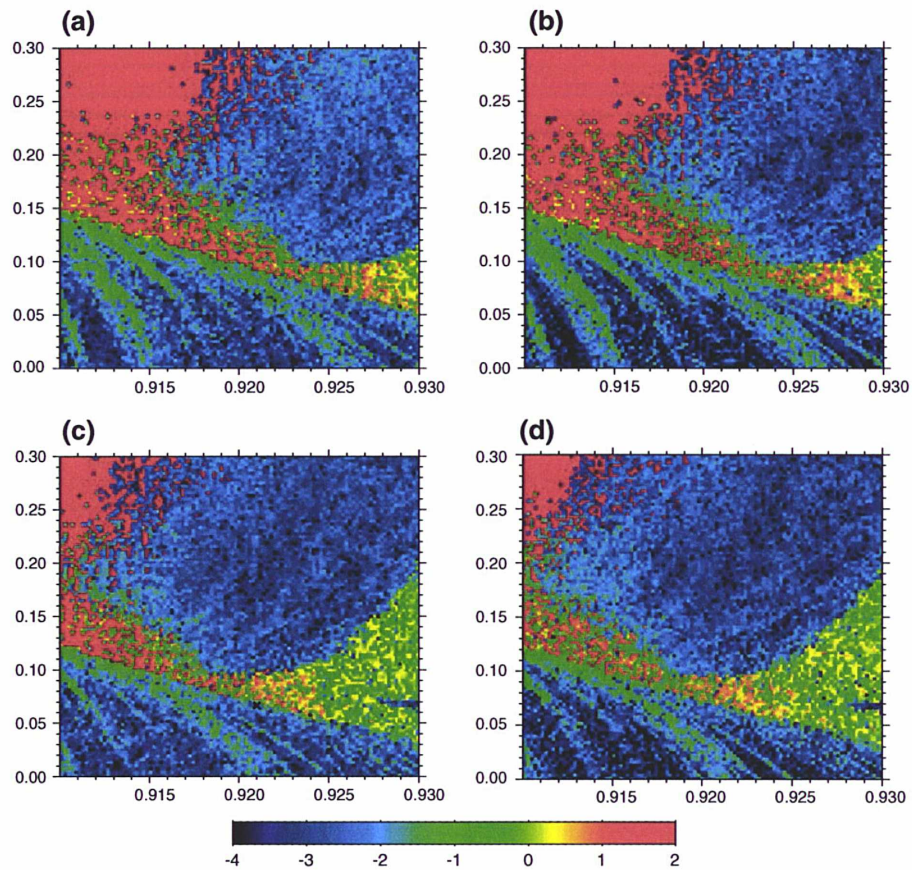
**Fig. 4** Frequency maps of the  $\mu$  Arae system for different values of the semi-major axis of  $\mu$  Arae d (on the  $x$  axis) and of its argument of node (on the  $y$  axis). **a**: averaged system, time step 0.02 yr; **b**: full system, time step 0.002 yr; **c**: 3-planet system, time step 0.02 yr; **d**: 3-planet system with the mass of the inner planet added to the central star's mass, time step 0.02 yr. The numerical color scale goes from the most stable trajectories (stability index  $\leq -6$ ) to the least stable trajectories (stability index  $\geq 2$ )

#### 4 Conclusion

We provided a set of hybrid equations for a system of  $n$  planets orbiting around a central star, which are averaged on the motion of the fastest planet. This allows us to choose a much larger time step when performing numerical integrations. We applied them to the  $\mu$ -Arae system in which the ratio of the two fastest periods exceeds 30. The averaged equations yield results that agree with a full integration. In the  $\mu$  Arae planar case, the influence of the inner planet is very small as stated in (Pepe et al. 2007). However, for a mutually inclined system, the three-planet approximation is no longer satisfactory while the averaged model remains close to the full system. The zero-order contribution of the inner planet, which is obtained by ignoring the inner planet but still adding its mass to the central star, does not provide better results. We also looked at a modified  $\mu$ -Arae system where the inner perturbing body is ten times as massive as in the original system. In this case, ignoring the inner planet is not



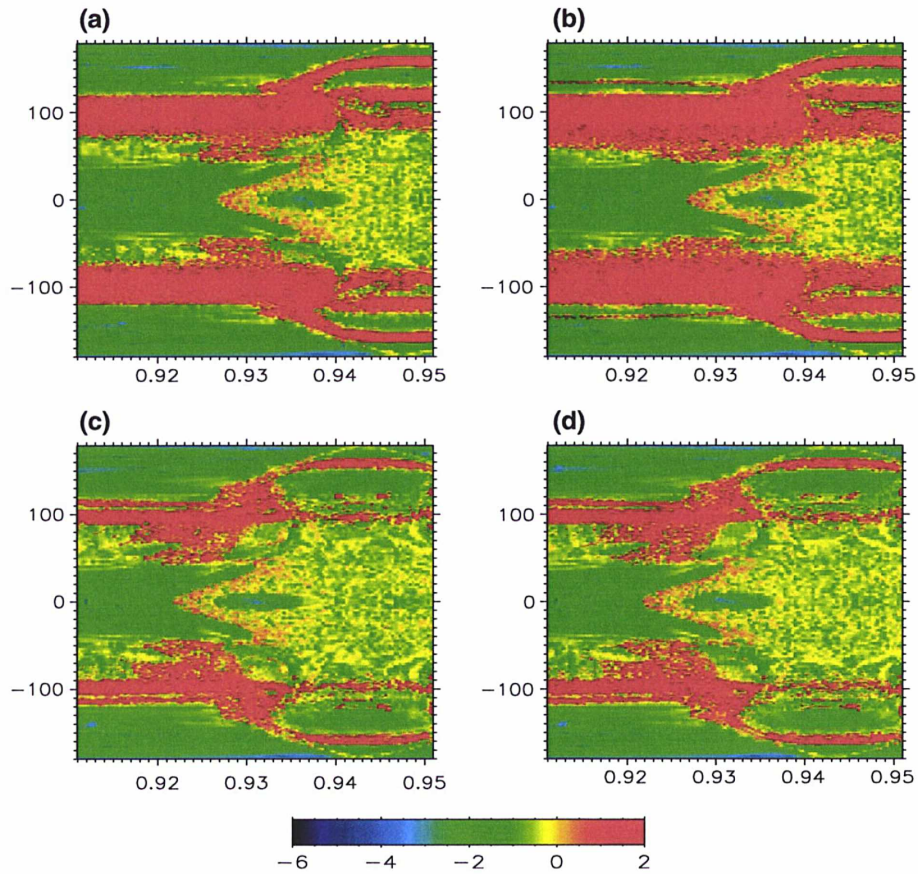
## Averaging on the motion of a fast revolving body



**Fig. 5** Frequency maps of a  $\mu$  Arae inspired system with the innermost planet 10 times as massive as in the actual system. On the  $x$  axis is the semi-major axis of the second innermost planet, on the  $y$  axis its eccentricity. **a:** averaged system, time step 0.02 yr; **b:** full system, time step 0.002 yr; **c:** 3-planet system, time step 0.02 yr; **d:** 3-planet system with the mass of the inner planet added to the central star's mass, time step 0.02 yr. The numerical color scale goes from the most stable trajectories (stability index  $\leq -4$ ) to the least stable trajectories (stability index  $\geq 2$ )

possible anymore even in the planar case. Even though the inner planet is massive, there is no improvement when we consider only its zero-order contribution. The averaged equations produce results that are very close to those obtained through a full integration, while lowering the computing time by an order of magnitude.

This set of equations could also be used in other phases of the study of extrasolar planetary systems. It could for instance be used in fitting algorithms to account for the interaction of fast planets instead of simply ignoring them. In some occasions of strong secular interaction with the inner body, it may be necessary to avoid averaging over the argument of perihelion of the inner planet. The equations presented in Appendix A can provide a way of treating these situations.



**Fig. 6** Frequency maps of a  $\mu$  Arae inspired system with the innermost planet 10 times as massive as in the actual system. On the  $x$  axis is the semi-major axis of the second innermost planet, on the  $y$  axis its argument of node. **a**: averaged system, time step 0.02 yr; **b**: full system, time step 0.002 yr; **c**: 3-planet system, time step 0.02 yr; **d**: 3-planet system with the mass of the inner planet added to the central star’s mass, time step 0.02 yr. The numerical color scale goes from the most stable trajectories (stability index  $\leq -6$ ) to the least stable trajectories (stability index  $\geq 2$ )

### Appendix A Hamiltonian and equations of motion averaged only over $M_1$

We have averaged over  $\omega_1$  in order to obtain a very efficient model. Here, we give the full equations of motion when averaged only over  $M_1$ . The Hamiltonian is obtained by replacing the perihelion-averaged terms in (2.15) by those given in Eq.(2.12):

$$\langle H \rangle_{M_1} = H_n - G \sum_{2 \leq k}^n \frac{\beta_1 m_k}{4r_k^3} a_1^2 \left[ (1 - 3e_1^2) - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{k})^2}{r_k^2} + 3e_1^2 \left( 4 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{i})^2}{r_k^2} - \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{j})^2}{r_k^2} \right) \right]. \tag{A.1}$$

To derive equations of motion, we first rewrite the interaction term using the angular momentum divided by the constant  $\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}$  noted  $\mathcal{K}$  and the Laplace vector noted  $\mathcal{I}$ .

Averaging on the motion of a fast revolving body

That is:

$$\mathcal{K} = \sqrt{1 - e_1^2} \mathbf{k}; \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{I} = e_1 \mathbf{i}. \quad (\text{A.3})$$

The Hamiltonian is written with these new variables as:

$$H = H_n - G \sum_{2 \leq k} \frac{\beta_1 m_k}{4r_k^3} a_1^2 \left[ 1 - 6\mathcal{I}^2 - 3 \frac{(\mathcal{K} \cdot \mathbf{r}_k)^2}{r_k^2} + 15 \frac{(\mathcal{I} \cdot \mathbf{r}_k)^2}{r_k^2} \right]. \quad (\text{A.4})$$

As calculated for instance in (Boué and Laskar 2006; Tremaine et al. 2009), the Poisson brackets of the coordinates of  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{I}$  are given by:

$$\{\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \mathcal{K}_k; \quad \{\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \mathcal{K}_k; \quad (\text{A.5})$$

$$\{\mathcal{K}_i, \mathcal{I}_j\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \mathcal{I}_k. \quad (\text{A.6})$$

The equations of motion are thus:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_k = \nabla_{\mathbf{r}_k} H; \\ \dot{\dot{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H; \\ \dot{\mathcal{I}} = -\frac{1}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} (\mathcal{K} \wedge \nabla_{\mathcal{I}} H + \mathcal{I} \wedge \nabla_{\mathcal{K}} H); \\ \dot{\mathcal{K}} = -\frac{1}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} (\mathcal{I} \wedge \nabla_{\mathcal{I}} H + \mathcal{K} \wedge \nabla_{\mathcal{K}} H). \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

When expanded (leaving out the gradients of  $H_n$ ):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_k = \nabla_{\mathbf{r}_k} H_n; \\ \dot{\dot{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H_n - G \frac{3\beta_1 m_k a_1^2}{4r_k^5} \left[ (1 - 6\mathcal{I}^2) \mathbf{r}_k \right. \\ \quad \left. + \left( 2(\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{K}) \mathcal{K} - 5 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{K})^2}{r_k^2} \mathbf{r}_k \right) - 5 \left( 2(\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{I}) \mathcal{I} - 5 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{I})^2}{r_k^2} \mathbf{r}_k \right) \right]; \\ \dot{\mathcal{I}} = \frac{3Ga_1^2}{2\sqrt{\mu_1 a_1}} \sum_{k \geq 2} \frac{m_k}{r_k^3} \left[ \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{K}}{r_k} \mathbf{r}_k \wedge \mathcal{I} - 5 \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{I}}{r_k} \mathbf{r}_k \wedge \mathcal{K} + 2\mathcal{I} \wedge \mathcal{K} \right]; \\ \dot{\mathcal{K}} = \frac{3Ga_1^2}{2\sqrt{\mu_1 a_1}} \sum_{k \geq 2} \frac{m_k}{r_k^3} \left[ \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{K}}{r_k} \mathbf{r}_k \wedge \mathcal{K} - 5 \frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathcal{I}}{r_k} \mathbf{r}_k \wedge \mathcal{I} \right]. \end{cases}$$

## References

- Boué, G., Laskar, J.: Precession of a planet with a satellite. *Icarus*. **185**, 312–330 (2006). doi:[10.1016/j.icarus.2006.07.019](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.07.019)
- Correia, A.C.M., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N.C.: The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD 202206 or a circumbinary planet? *A&A*. **440**, 751–758 (2005). doi:[10.1051/0004-6361:20042376](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20042376)
- Ford, E.B., Kozinsky, B., Rasio, F.A.: Secular evolution of hierarchical triple star systems. *ApJ*. **535**, 385–401 (2000). doi:[10.1086/308815](https://doi.org/10.1086/308815)
- Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., Alexander, T., Genzel, R., Martins, F., Ott, T.: Monitoring stellar orbits around the Massive Black Hole in the Galactic Center. *ApJ*. **692**, 1075–1109 (2009). doi:[10.1088/0004-637X/692/2/1075](https://doi.org/10.1088/0004-637X/692/2/1075)
- Kozai, Y.: Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron. J.* **67**, 591–598 (1962)
- Krymowski, Y., Mazeh, T.: Studies of multiple stellar systems—II. Second-order averaged Hamiltonian to follow long-term orbital modulations of hierarchical triple systems. *MNRAS*. **304**, 720–732 (1999)

- Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: *Mechanics. Course of Theoretical Physics.* 2nd edn. Pergamon Press, Oxford (1969)
- Laskar, J.: Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion. *Physica D.* **67**, 257–281 (1993). doi:[10.1016/0167-2789\(93\)90210-R](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90210-R)
- Laskar, J., Robutel, P.: Stability of the planetary three-body problem. I. Expansion of the planetary Hamiltonian. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **62**, 193–217 (1995). doi:[10.1007/BF00692088](https://doi.org/10.1007/BF00692088)
- Laskar, J., Robutel, P.: High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **80**, 39–62 (2001)
- Lee, M.H., Peale, S.J.: Secular evolution of hierarchical planetary systems. *ApJ.* **592**, 1201–1216 (2003). doi:[10.1086/375857](https://doi.org/10.1086/375857)
- Marchal, C.: *The Three-Body Problem.* Studies in Astronautics, Studies in Aeronautics, Vol. 4. Elsevier, Amsterdam (1990)
- Mikkola, S., Merritt, D.: Implementing few-body algorithmic regularization with post-Newtonian terms. *Astron. J.* **135**, 2398–2405 (2008). doi:[10.1088/0004-6256/135/6/2398](https://doi.org/10.1088/0004-6256/135/6/2398)
- Pepe, F., Correia, A.C.M., Mayor, M., Tamuz, O., Couetdic, J., Benz, W., Bertaux, J.L., Bouchy, F., Laskar, J., Lovis, C., Naef, D., Queloz, D., Santos, N.C., Sivan, J.P., Sosnowska, D., Udry, S.: The HARPS search for southern extra-solar planets. VIII.  $\mu$  Arae, a system with four planets. *A&A.* **462**, 769–776 (2007). doi:[10.1051/0004-6361:20066194](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066194)
- Quinn, T.R., Tremaine, S., Duncan, M.: A three million year integration of the earth's orbit. *Astron. J.* **101**, 2287–2305 (1991). doi:[10.1086/115850](https://doi.org/10.1086/115850)
- Rivera, E.J., Lissauer, J.J., Butler, R.P., Marcy, G.W., Vogt, S.S., Fischer, D.A., Brown, T.M., Laughlin, G., Henry, G.W.: A  $\approx 7.5M_{\oplus}$  planet orbiting the nearby star, GJ 876. *ApJ.* **634**, 625–640 (2005). doi:[10.1086/491669](https://doi.org/10.1086/491669)
- Tremaine, S., Touma, J., Namouni, F.: Satellite dynamics on the Laplace surface. *Astron. J.* **137**, 3706–3717 (2009). doi:[10.1088/0004-6256/137/3/3706](https://doi.org/10.1088/0004-6256/137/3/3706)

# Chapitre 3

## Problème séculaire quadripolaire des trois corps

Le développement quadripolaire que nous avons effectué au chapitre précédent dans le cadre d'un système multiplanétaire, ainsi que la moyennisation partielle du Hamiltonien sur la seule anomalie moyenne de la planète rapide, nous ont fourni une introduction naturelle au problème séculaire quadripolaire des trois corps, dans lequel les anomalies moyennes de tous les corps sont moyennisées.

Le problème séculaire et quadripolaire, ainsi que ses deux versions restreintes intérieure (dans laquelle le corps intérieur est sans masse), et extérieure (dans laquelle c'est le corps extérieur qui est sans masse), sont particulièrement intéressants dans l'étude des systèmes planétaires extrasolaires de par leur capacité à exciter l'excentricité du corps intérieur et l'inclinaison mutuelle entre les deux orbites.

Nous commençons par brièvement rappeler les développements qui ont été faits sur le problème séculaire et quadripolaire restreint intérieur, et qui ont mené à la mise en évidence du mécanisme de Lidov-Kozai. Ce mécanisme permet un échange cyclique entre l'excentricité du corps intérieur sans masse et l'inclinaison mutuelle des orbites. Puis, nous présentons un travail qui propose un modèle simple du problème restreint extérieur et qui met en perspective les deux problèmes restreints intérieur et extérieur dans le cadre du problème séculaire et quadripolaire non restreint.

### 3.1 Le mécanisme de Lidov-Kozai

Le problème des trois corps séculaire et quadripolaire restreint, dans le cas où la particule sans masse est le corps intérieur, est le cadre dans lequel le mécanisme de Lidov-Kozai a été d'abord développé (Lidov, 1962; Kozai, 1962). Lidov s'y est intéressé dans son étude de la stabilité orbitale des satellites artificiels, notamment ceux qui étaient destinés à orbiter autour de la Lune sous la perturbation de la Terre (le programme soviétique *Luna*), et a illustré de manière dramatique le destin d'une Lune en orbite polaire autour de la Terre, qui serait

vouée à s'y écraser en une cinquantaine de révolutions (Béletski, 1986). Kozai, quant à lui, a abordé le problème des astéroïdes sous les influences du Soleil et de Jupiter. Enfin, Kinoshita et Nakai (1999, 2007) fournissent une description analytique complète du problème séculaire et quadripolaire restreint intérieur.

Comme nous allons le voir plus bas, le mécanisme de Lidov-Kozai permet d'exciter l'excentricité du corps intérieur sans masse. De nombreux auteurs (Mazeh et al., 1997; Innanen et al., 1997; Holman et al., 1997, par exemple) ont par conséquent suggéré ce mécanisme comme une origine possible des excentricités élevées de nombreuses planètes extrasolaires. Rappelons ici qu'il ne peut pas être considéré comme le seul responsable de ces excentricités (voir le chapitre 1). Il est en revanche particulièrement approprié dans les systèmes d'étoiles doubles, lorsque la planète orbite autour de l'une des composantes de la binaire.

### 3.1.1 Hamiltonien et intégrale de Lidov-Kozai

Dans cette section, on repère deux des corps, d'indice 1 et 2, par rapport au troisième auquel on assigne l'indice 0. On suppose de plus que le corps d'indice 1 est le corps intérieur sans masse. Dans le référentiel barycentrique, les positions des trois corps sont notées  $(\mathbf{u}_i)_{i=0,1,2}$ , et on note  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0$ . On utilise de plus les variables de Delaunay associées pour le corps intérieur  $(\Lambda_1, G_1, H_1, M_1, \omega_1, \Omega_1)$ , ainsi que l'anomalie moyenne du corps extérieur,  $M_2$ .

Le problème étant restreint, les propriétés géométriques et l'orientation de l'orbite du corps extérieur ne varient pas, seule son anomalie moyenne évolue, selon  $M_2 = n_2 t$ , avec  $n_2^2 a_2^3 = G(m_0 + m_2)$ . De manière générale, le hamiltonien de la particule s'écrit donc :

$$H = H(\Lambda_1, G_1, H_1, M_1, \omega_1, \Omega_1; M_2) . \quad (3.1)$$

Si l'on moyennise les deux angles  $M_1$  et  $M_2$  pour obtenir un hamiltonien séculaire,  $\Lambda_1$  devient constant et l'on a<sup>1</sup>

$$\langle H \rangle_{M_1, M_2} = H(\Lambda_1, G_1, H_1, \cdot, \omega_1, \Omega_1; \cdot) . \quad (3.2)$$

Si le corps extérieur est sur une orbite circulaire, le problème possède une symétrie de révolution autour de la normale au plan orbital du corps extérieur. Par conséquent, le noeud  $\Omega_1$  ne doit pas apparaître dans l'expression (3.2). Le seul angle dont dépend le hamiltonien du corps intérieur est alors le périhélie  $\omega_1$ , et le problème est donc intégrable. De plus,  $H_1$  est constant et on a l'intégrale première dite de Lidov-Kozai :

---

1. On omettra par la suite les indices  $M_1$  et  $M_2$  dans la notation  $\langle H \rangle_{M_1, M_2}$ .

$$\mathfrak{h}_1 = \frac{H_1}{\Lambda_1} = \sqrt{1 - e_1^2} \cos i_1 = \text{Ct} . \quad (3.3)$$

Dans le cas où le corps extérieur a une orbite circulaire, ce résultat est tout à fait général et ne nécessite aucun développement du hamiltonien, ni aucune hypothèse sur les paramètres orbitaux du corps intérieur. Le fait que  $\mathfrak{h}_1$  soit constant est à la base du mécanisme de Lidov-Kozai : l'excentricité  $e_1$  varie sous l'effet de la dynamique du périhélie  $\omega_1$ , seul angle restant dans le hamiltonien, et entraîne l'inclinaison au travers de l'égalité (3.3). Cette égalité crée une relation décroissante entre excentricité et inclinaison, si bien que pour une valeur donnée de  $\mathfrak{h}_1$ , les états circulaires sont maximalelement inclinés ( $i_{1,\text{max}} = \text{Acos}(\mathfrak{h}_1)$ ) et réciproquement, les états coplanaires sont maximalelement elliptiques ( $e_{1,\text{max}} = \sqrt{1 - \mathfrak{h}_1^2}$ ).

Le cas où le corps extérieur a une orbite elliptique ne présente plus la symétrie de révolution qui existe dans le cas circulaire, et exige un développement du hamiltonien pour restreindre le nombre de degrés de liberté du système. Le hamiltonien s'écrit de manière classique :

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2} - \frac{Gm_0}{r_1} - \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} , \quad \text{où } \tilde{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 . \quad (3.4)$$

En se plaçant dans le cas où  $r_1 \ll r_2$ , on peut développer le hamiltonien au deuxième ordre en  $r_1/r_2$ . En écrivant que  $\tilde{\mathbf{r}}_1^2/2 - Gm_0/r_1 = -Gm_0/2a_1$  on a :

$$H = -\frac{Gm_0}{2a_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \left[ 1 + \frac{1}{2r_2^2} \left( 3 \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2} \right)^2 - r_1^2 \right) \right] . \quad (3.5)$$

Si l'on moyennise sur les deux anomalies moyennes  $M_1$  et  $M_2$ , et que l'on retire les parties constantes, il reste après introduction des vecteurs  $(\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i)_{i=1,2}$  liés aux orbites de la particule et du corps extérieur comme décrit dans le chapitre précédent :

$$\langle H \rangle = -\frac{3}{8} \frac{Gm_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} \left( -\frac{1}{3} + 2e_1^2 + (1 - e_1^2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 5e_1^2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 \right) . \quad (3.6)$$

Comme l'orbite du corps extérieur est fixe, on peut choisir les vecteurs  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$  comme repère dans lequel définir les angles d'orientation de l'orbite du corps intérieur. On a dans ce cas  $(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 = (\sin i_1 \sin \omega_1)^2$  et  $(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 = \cos^2 i_1$ . En remplaçant ces valeurs dans l'équation (3.6), et après quelques manipulations algébriques élémentaires, on obtient (voir Kinoshita et Nakai (1999), équation 3, à ceci près qu'ils utilisent un hamiltonien de signe opposé) :

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{16} \frac{Gm_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} \left( (2 + 3e_1^2)(3 \cos^2 i_1 - 1) + 15e_1^2(1 - \cos^2 i_1) \cos 2\omega_1 \right) . \quad (3.7)$$

On peut maintenant voir qu'à l'ordre quadripolaire, le hamiltonien est indépendant du noeud de la particule, et que par conséquent  $\mathfrak{h}_1$  est encore conservé à cet ordre de développement, alors même qu'il n'y a plus de symétrie de révolution par rapport à la normale au plan de l'orbite extérieure. Cependant, pour un système où le corps extérieur est elliptique,  $\mathfrak{h}_1$  n'est plus une intégrale première dès lors qu'on pousse le développement du hamiltonien un ordre plus loin en  $r_1/r_2$ . Il s'agit donc d'une *coïncidence heureuse* comme le disent Lidov et Ziglin (1976), et qui se rencontre sous d'autres formes dans la version complète et la version restreinte extérieure du problème quadripolaire séculaire, comme nous le verrons dans la section 3.2.

Lorsque  $\mathfrak{h}_1$  est positif, l'inclinaison du corps intérieur reste toujours comprise entre 0 et  $\pi/2$ , la borne supérieure étant exclue. De même, lorsque  $\mathfrak{h}_1$  est négatif, l'inclinaison du corps intérieur reste toujours entre  $\pi/2$  et  $\pi$ , la valeur de  $\pi/2$  étant ici aussi exclue. En revanche, lorsque  $\mathfrak{h}_1 = 0$ , le problème est dégénéré car cette égalité implique  $e_1 = 1$  ou  $i_1 = \pi/2$ . L'étude des orbites polaires dans le problème restreint intérieur doit donc incorporer des termes d'interaction supplémentaires pour lever cette dégénérescence. De bons candidats sont par exemple le terme suivant dans le développement multipolaire du potentiel, l'inclusion d'un terme d'aplatissement pour le corps central, ou encore l'inclusion d'un terme dû à la relativité générale. Béletski (1986) cite une étude de Lidov sur les satellites d'Uranus dans laquelle il mentionne ce problème et utilise l'aplatissement d'Uranus pour le résoudre. Delsate et al. (2010, à paraître) mènent une étude détaillée de cette situation, adaptée au cas d'un satellite artificiel en orbite quasi-polaire autour de Mercure. L'influence de la relativité générale enfin, est abordée par Migaszewski et Goździewski (2008).

### 3.1.2 Équilibres du problème restreint intérieur

Afin d'étudier les équilibres du problème restreint intérieur, nous réécrivons le hamiltonien (3.7) en fonction de  $\eta_1 = \sqrt{1 - e_1^2} = G_1/\Lambda_1$ , en tenant compte du fait que  $\cos^2 i_1 = \mathfrak{h}_1^2/\eta_1^2$  :

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{16} \frac{Gm_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} \left( (5 - 3\eta_1^2)(3(\mathfrak{h}_1^2/\eta_1^2) - 1) + 15(1 - \eta_1^2)(1 - (\mathfrak{h}_1^2/\eta_1^2)) \cos 2\omega_1 \right) . \quad (3.8)$$

Les équations du mouvement sont alors :

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{1}{\Lambda_1} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \omega_1} = -\frac{15}{8} \frac{Gm_2}{\Lambda_1(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} (1 - \eta_1^2)(1 - \cos^2 i_1) \sin 2\omega_1 \quad (3.9)$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{\Lambda_1} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \eta_1} = -\frac{3}{8\eta_1} \frac{Gm_2}{\Lambda_1(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} [\eta_1^2 - 5 \cos^2 i_1 + 5(\cos^2 i_1 - \eta_1^2) \cos 2\omega_1] \quad (3.10)$$

Au niveau d'un point d'équilibre, ces deux variations s'annulent. L'équation d'évolution de



$\eta_1$  s'annule tout d'abord si  $\cos^2 i_1 = 1$ , soit  $i_1 = 0$  ou  $\pi$ . Dans ce cas, la relation (3.3) implique que  $\eta_1 = \mathfrak{h}_1$ . En remplaçant cette égalité dans la relation  $\dot{\omega}_1 = 0$ , on obtient que :

$$\cos 2\omega_1 = \frac{5 - \mathfrak{h}_1^2}{5(1 - \mathfrak{h}_1^2)} \geq 1, \quad (3.11)$$

le cas d'égalité n'ayant lieu que dans la situation dégénérée où  $\mathfrak{h}_1 = 0$ . Dans le cas général, il n'y a donc pas d'équilibre fixe pour  $\cos^2 i_1 = 1$ , mais une trajectoire périodique où l'excentricité et donc l'inclinaison sont fixes et le périhélie circule.

La variation de  $\eta_1$  s'annule aussi lorsque  $\sin 2\omega_1 = 0$ , soit  $\cos 2\omega_1 = +1$  ( $\omega_1 = 0$  ou  $\pi$ ) ou  $\cos 2\omega_1 = -1$  ( $\omega_1 = \pm\pi/2$ ). Si  $\cos 2\omega_1 = +1$ , l'annulation de la variation du périhélie implique  $\eta_1 = 0$ , soit  $e_1 = 1$ . Cette situation est en-dehors du cadre que nous avons choisi, dans lequel les corps ont des orbites elliptiques.

En revanche, lorsque  $\cos 2\omega_1 = -1$ , on trouve que l'équation  $\dot{\omega}_1 = 0$  peut avoir une solution dès lors que  $\mathfrak{h}_1 \leq \sqrt{3/5}$ . Lidov (1962) et Kozai (1962) ont montré que le point fixe qui apparaît dans ce cas est elliptique et correspond donc à un régime de libration du périhélie autour de  $\omega_1 = \pm\pi/2$ . En utilisant la relation (3.3), on peut donc dire que ce régime de libration apparaît lorsque l'on étudie des situations dans lesquelles l'inclinaison de l'orbite du corps intérieur est supérieure à  $A\cos\sqrt{3/5} \approx 39.23^\circ$ . Lorsque  $\mathfrak{h}_1 > \sqrt{3/5}$ , le périhélie du corps intérieur circule pour toutes les conditions initiales.

La variation de  $\eta_1$  (3.9) s'annule enfin également lorsque  $\eta_1 = 1$ , soit  $e_1 = 0$ . Dans ce cas, le périhélie de l'orbite est mal défini, et il faut utiliser d'autres variables pour étudier le problème. L'article présenté dans la section 3.2 propose d'étudier le problème du point de vue de la dynamique du noeud et de l'inclinaison plutôt que du point de vue de l'excentricité et du périhélie.

Il montre que pour le problème non restreint, dans le domaine de l'espace des paramètres qui correspond à une dynamique topologiquement équivalente au problème de Lidov-Kozai, les trajectoires d'excentricité nulle et donc d'inclinaison maximale ont un noeud qui circule lorsque la dynamique est équivalente au problème restreint de Lidov-Kozai au dessus de la valeur critique  $\mathfrak{h}_1 = \sqrt{3/5}$ . Dans ce cas, la trajectoire périodique associée à un corps intérieur en orbite circulaire est stable.

En revanche, dans le domaine où la dynamique est équivalente à celle du problème de Lidov-Kozai au dessous de la valeur critique  $\mathfrak{h}_1 = \sqrt{3/5}$ , un régime de libration du noeud apparaît. Dans ce cas, les trajectoires associées à un corps intérieur en orbite circulaire sont instables, et une trajectoire ayant une excentricité faible et une inclinaison supérieure à  $39.23^\circ$  pour conditions initiales va voir son excentricité osciller avec une amplitude non négligeable.

### 3.2 Article inclus : *High-inclination orbits in the secular quadrupolar three-body problem*

Après ce rappel général sur le fonctionnement du problème quadripolaire restreint intérieur et du mécanisme de Lidov-Kozai, nous nous intéressons dans l'article présenté ici au problème quadripolaire restreint extérieur. Il correspond au cas d'un corps sans masse orbitant loin d'un système de deux corps massifs, et possède des applications dans l'étude de halos de débris, qui est présentée ici avec l'explication des travaux de Verrier et Evans (2008, 2009), mais aussi potentiellement dans l'étude des objets lointains du système Solaire, des orbites stellaires autour de trous noirs binaires, ou l'étude de systèmes planétaires autour d'étoiles binaires. Un tel système a été découvert cette année autour de HW Virginis (Lee et al., 2009), mais ses paramètres orbitaux sont encore très imprécis. Il est composé de deux corps de  $19.2M_{\text{Jup}}$  et  $8.5M_{\text{Jup}}$ , de périodes orbitales respectives 5767 et 3321 jours, alors que la binaire HW Virginis a une période de 2.8 heures.

Le problème quadripolaire restreint extérieur a été étudié par Palacián et al. (2006) et Palacián et Yanguas (2006), qui ont déterminé les points fixes du problème séculaire pour reconstruire des familles d'orbites périodiques du problème non séculaire. Nous ne regardons ici que le problème séculaire, et nous en proposons une description complète simple dans le formalisme vectoriel que nous utilisons tout au long de ce travail, et qui est utilisable directement dans un cadre astronomique.

Nous considérons donc dans la première partie de l'article une particule sans masse en orbite autour d'une binaire de masse totale  $\mathcal{M}_{01}$ , de masse réduite  $\beta_1$ , et de moyen mouvement  $n_1$ . On repère l'une des composantes de la binaire par rapport à l'autre avec le vecteur  $\mathbf{r}_1$ , et la particule par rapport au centre de masse de la binaire avec le vecteur  $\mathbf{r}_2$ .

Le Hamiltonien de la particule est développé à l'ordre quadripolaire dans le rapport  $r_1/r_2$ , et ensuite moyennisé sur les deux anomalies moyennes de la binaire et de la particule,  $M_1$  et  $M_2$ , en utilisant les mêmes techniques issues de Boué et Laskar (2006) qu'au chapitre précédent. En notant  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  le trièdre associé à l'orbite de la binaire de sorte que  $\mathbf{i}$  pointe dans la direction du périastre, et  $\mathbf{k}$  soit colinéaire au moment cinétique de la binaire, et en notant  $\mathbf{w}$  le vecteur unitaire colinéaire au moment cinétique de la particule, on obtient le Hamiltonien et les équations du mouvement suivantes (respectivement équations 2.9 et 2.15 de l'article) :

$$\langle H \rangle = -\frac{\alpha G_2}{2} \left[ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})^2 - e_1^2 (4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{w})^2) \right], \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = -\alpha \left[ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{k} \wedge \mathbf{w}) - e_1^2 (4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{i} \wedge \mathbf{w}) - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{j} \wedge \mathbf{w})) \right], \quad (3.13)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{3}{4}n_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{7/2} \frac{\beta_1}{\mathcal{M}_{01}} \frac{1}{(1-e_2^2)^2}, \quad \text{et } G_2 = \sqrt{G\mathcal{M}_{01}a_2(1-e_2^2)}. \quad (3.14)$$

La conservation du Hamiltonien ainsi que le fait que  $\mathbf{w}$  soit de norme 1 fournissent deux relations indépendantes entre les trois composantes de  $\mathbf{w}$ , et le système est par conséquent intégrable. Dans la partie 2.4 nous exposons les six points fixes du mouvement de  $\mathbf{w}$ , qui correspondent à  $\mathbf{w} = \pm\mathbf{i}$ ,  $\pm\mathbf{j}$ , ou  $\pm\mathbf{k}$ . Les deux points fixes correspondant à  $\pm\mathbf{j}$  sont instables alors que les quatre autres sont stables. Il peut donc y avoir deux types de précession du moment cinétique  $\mathbf{w}$  de la particule : une précession à faible inclinaison pour les orbites directes (autour de  $\mathbf{k}$ ) ou rétrogrades (autour de  $-\mathbf{k}$ ) avec un régime de circulation pour le noeud de la particule  $\Omega_2$ , ou bien une précession à forte inclinaison autour de  $\pm\mathbf{i}$  correspondant à un régime de libration du noeud de la particule autour de  $\pm 90^\circ$ . Les périodes de ces précessions sont calculées dans la partie 2.4.2 :

$$T = \frac{16}{3n_1} \frac{\mathcal{M}_{01}}{\beta_1} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{7/2} \frac{(1-e_2^2)^2}{\sqrt{(1-e_1^2)(h+4e_1^2)}} \mathcal{F}(h), \quad (3.15)$$

où  $h$  est une quantité directement liée au Hamiltonien et  $\mathcal{F}(h)$  est une expression faisant intervenir des fonctions elliptiques (voir l'article pour plus de détails).

Nous utilisons ces résultats afin d'expliquer des travaux de Verrier et Evans (2008, 2009). Ces auteurs simulent l'évolution d'un nuage de débris dans le système stellaire quadruple HD 98800. Ils obtiennent le résultat surprenant qu'une population de particules est stable à forte inclinaison autour de la binaire Ba-Bb, malgré la perturbation destructrice du compagnon stellaire A (lui-même double). Dans une étude plus approfondie, ils isolent le mécanisme stabilisateur comme étant une précession nodale imposée par la binaire Ba-Bb sur les particules.

Le modèle séculaire du problème restreint extérieur que nous présentons dans l'article permet de reproduire fidèlement les résultats des simulations numériques non séculaires de Verrier et Evans. La figure 3.1 montre ainsi côte à côte les résultats des intégrations numériques de Verrier et Evans pour dix particules test autour d'une binaire d'excentricité  $e_1 = 0.79$  (à gauche), et les lignes de niveau du Hamiltonien séculaire (3.12) pour la même valeur de l'excentricité de la binaire. Les axes de ces deux figures correspondent aux coordonnées  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  construites à partir de l'inclinaison et du noeud de la particule test.

De la même manière, la figure 3.2 montre le bon accord entre d'une part un ajustement de la période de précession des particules que Verrier et Evans obtiennent à partir de leurs données simulées avec un modèle non-séculaire ; et d'autre part la courbe qui résulte de l'expression analytique (3.15) obtenue grâce au modèle séculaire.

Dans la dernière partie de l'article, nous décrivons comment les deux problèmes séculaires restreints intérieur et extérieur se positionnent dans le cadre du problème séculaire et quadripolaire non restreint. Ce problème a été traité intégralement par Lidov et Ziglin (1976),

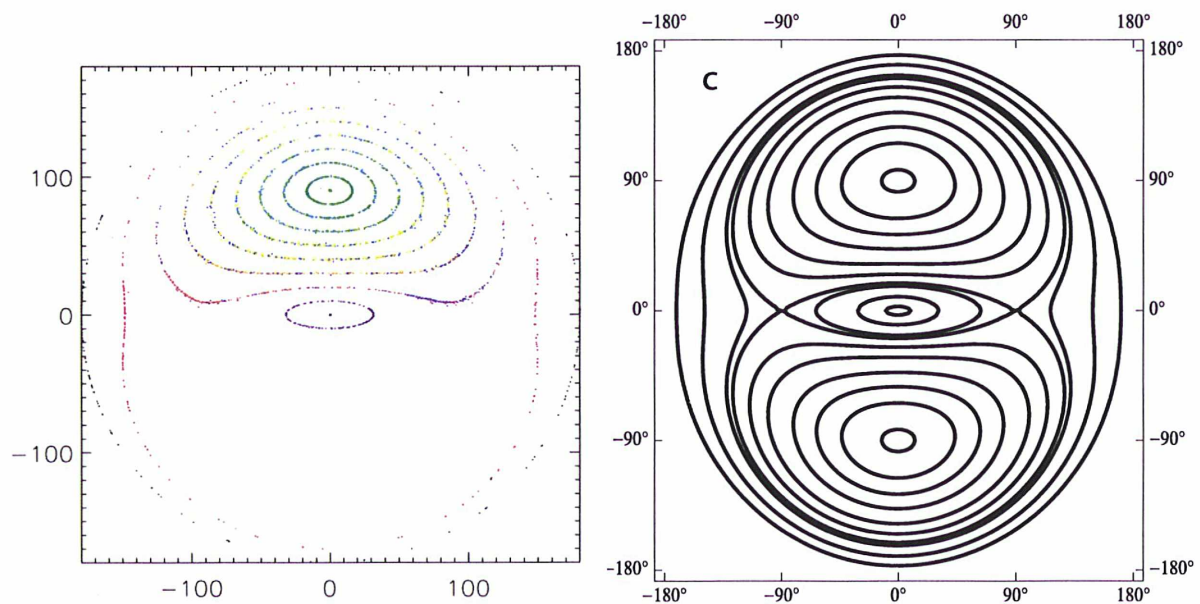


FIGURE 3.1: A gauche : Simulation numérique issue de Verrier et Evans (2009), utilisant un modèle non séculaire. A droite : contours du Hamiltonien séculaire (3.12), pour la même valeur de l'excentricité de la binaire intérieure ( $e_1 = 0.79$ ). Les deux figures utilisent comme coordonnées le couple  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$ .

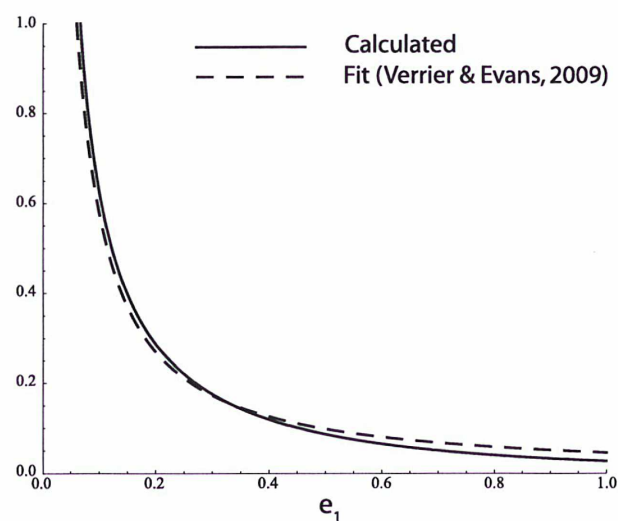


FIGURE 3.2: Dépendance de la période de libration des particules en fonction de l'excentricité de la binaire intérieure. Les pointillés correspondent à l'ajustement que Verrier et Evans obtiennent à partir de leurs données simulées avec un modèle non-séculaire. La courbe pleine correspond à l'expression analytique (3.15) obtenue dans le cadre du modèle séculaire.

puis Ferrer et Osacar (1994), qui ont décrit tous les régimes dynamiques possibles en fonction des deux paramètres que sont le moment cinétique total et le moment cinétique du corps extérieur. Ce dernier est conservé suite à la coïncidence que nous avons mentionnée dans la section précédente, qui fait que le périhélie du corps extérieur n'apparaît pas dans le Hamiltonien séculaire lorsqu'il est développé à l'ordre quadripolaire.

Là où les travaux précédents se sont intéressés à la dynamique du périhélie et de l'excentricité du corps intérieur, nous utilisons notre formalisme vectoriel afin de présenter de façon simple la dynamique du noeud et de l'inclinaison du corps extérieur, dans le référentiel mobile de l'orbite intérieure. Les figures 5 et 6 présentent les différents régimes dynamiques qui connectent le problème restreint extérieur au problème restreint intérieur, respectivement dans les coordonnées  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  et en représentant le mouvement de la pointe du vecteur moment cinétique unitaire du corps extérieur.



## High-inclination orbits in the secular quadrupolar three-body problem

F. Farago<sup>\*</sup> and J. Laskar<sup>\*</sup>

ASD, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

Accepted 2009 September 11. Received 2009 September 3; in original form 2009 July 10

### ABSTRACT

The Lidov–Kozai mechanism allows a body to periodically exchange its eccentricity with inclination. It was first discussed in the framework of the quadrupolar secular restricted three-body problem, where the massless particle is the inner body, and later extended to the quadrupolar secular non-restricted three-body problem. In this paper, we propose a different point of view on the problem by looking first at the restricted problem where the massless particle is the outer body. In this situation, equilibria at high mutual inclination appear, which corresponds to the population of stable particles that Verrier & Evans find in stable, high-inclination circumbinary orbits around one of the components of the quadruple star HD 98800. We provide a simple analytical framework using a vectorial formalism for these situations. We also look at the evolution of these high-inclination equilibria in the non-restricted case.

**Key words:** methods: analytical – methods:  $N$ -body simulations – celestial mechanics – planetary systems.

### 1 INTRODUCTION

As it is known, the secular three-body problem after node reduction has two degrees of freedom (e. g. Poincaré 1905; Malige, Robutel & Laskar 2002). However, due to what Lidov & Ziglin (1976) called a *happy coincidence*, this problem is integrable when it is expanded up to the order of 2 in the ratio of semimajor axes, i.e. at the quadrupolar approximation. Indeed, the argument of perihelion of the outer body does not explicitly appear in the quadrupolar expansion of the secular problem, thus giving one more integral of motion linked to the eccentricity of the outer body.

The limiting case where the inner body has no mass has been extensively studied (Kozai 1962; Lidov 1962; Kinoshita & Nakai 2007). We will call this problem the *inner restricted problem*, while the converse case where the two inner bodies are massive and the outer body is massless will be called the *outer restricted problem*. In the inner restricted case, the conservation of the normal component of the angular momentum enables the inner particle to periodically exchange its eccentricity with inclination (the so-called Lidov–Kozai mechanism). The inner restricted model is well suited when the inner body has a small mass with respect to the other two. However, when looking at higher mass ratios, for example in triple star systems, this is no longer justified.

Since the Hamiltonian of the quadrupolar problem of three masses is very similar to that of the inner restricted problem when it is written in elliptic variables, the study of the massive problem has mainly focused on the dynamics of the two inner bodies (Harrington 1969; Lidov & Ziglin 1976; Ferrer & Osacar 1994). These previous

works completely classified the different dynamical regimes and bifurcations, using the equations of motion of the inner binary.

There is, however, another limit case to the massive problem, which is the outer restricted problem. Palacián et al. (2006) have studied this case and discussed the existence and stability of equilibria in the non-averaged system using the framework of KAM<sup>1</sup> theory. We give here a very simple model of the outer restricted case which provides an alternate formulation of these previous results and is directly usable in an astronomical context. We also fully describe the possible motions of the bodies and give an analytical expression of their frequencies. We use this model to explain the results of Verrier & Evans (2008, 2009), who find populations of particles at very high inclinations around one of the components of the double-binary star HD 98800, which are stable even under the perturbation of the other component. We then look at the quadrupolar problem of three masses from the perspective of the outer restricted problem and show how the inner and outer restricted cases are related to the general case. Vectorial methods as developed by Boué & Laskar (2006, 2009) and Tremaine, Touma & Namouni (2009) are extremely well suited for this approach.

### 2 SECULAR OUTER RESTRICTED PROBLEM

#### 2.1 Derivation of the Hamiltonian

We consider here the case of a massless particle orbiting a central binary object. We do not restrict ourselves with respect to inclinations or eccentricities. The components of the binary have masses

<sup>\*</sup>E-mail: farago@imcce.fr (FF); laskar@imcce.fr (JL)

<sup>1</sup>Named after Andreï Kolmogorov, Vladimir Arnold and Jürgen Moser.

## 2 F. Farago and J. Laskar

$m_0$  and  $m_1$ , the binary's total mass is  $\mathcal{M}_{01} = m_0 + m_1$  and its reduced mass is  $\beta_1 = m_0 m_1 / (m_0 + m_1)$ . The two massive components have barycentric positions  $\mathbf{u}_0$  and  $\mathbf{u}_1$ . We also denote  $\delta = m_0 / \mathcal{M}_{01}$  and  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$ , and  $\mathbf{r}_2$  is the position of the outer particle relatively to the barycentre of the inner binary. Using these notations, the particle has the following Hamiltonian:

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2} - G \left( \frac{m_0}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{u}_0|} + \frac{m_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{u}_1|} \right), \quad (2.1)$$

where  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$  is the canonical momentum associated to the position of the massless particle,  $\mathbf{r}_2$ . Since  $\mathbf{u}_0 = -(1 - \delta)\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{u}_1 = \delta\mathbf{r}_1$ , we can rewrite the Hamiltonian as

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2} - G \left( \frac{m_0}{|\mathbf{r}_2 + (1 - \delta)\mathbf{r}_1|} + \frac{m_1}{|\mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_1|} \right). \quad (2.2)$$

We now suppose that  $r_1 \ll r_2$  and expand the Hamiltonian to the order of 2 in  $r_1/r_2$ :

$$H = \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2} - \frac{G\mathcal{M}_{01}}{r_2} \right) - \frac{G\beta_1}{2r_2^3} \left[ 3 \frac{(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2}{r_2^2} - r_1^2 \right]. \quad (2.3)$$

The first term is the Keplerian energy of the particle interacting with the binary, seen as a point mass  $\mathcal{M}_{01}$ . It is equal to  $-G\mathcal{M}_{01}/2a_2$ , where  $a_2$  is the semimajor axis of the particle.

Since we are interested in the secular behaviour of the particle, we average this quadrupolar Hamiltonian over the mean anomalies of the binary ( $M_1$ ) and of the particle ( $M_2$ ). In order to do this, we first introduce four unit vectors:  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  are bound to the orbit of the binary, remain constant and will provide a natural reference frame and  $\mathbf{w}$  is bound to the orbit of the particle and will vary. More precisely,  $\mathbf{i}$  points in the direction of the perihelion of the binary,  $\mathbf{k}$  is collinear to the angular momentum of the binary and  $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$ ; the last vector  $\mathbf{w}$  is collinear to the angular momentum of the massless particle.

We can then compute the following averaged quantities, where quantities indexed with 1 relate to the binary, quantities with index 2 relate to the particle and  $\mathbf{u}$  is an arbitrary fixed vector (see e.g. the appendix of Boué & Laskar 2006):

$$\langle r_1^2 \rangle_{M_1} = a_1^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right); \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 \rangle_{M_1} &= \frac{a_1^2}{2} [r_2^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)^2] \\ &\quad + \frac{a_1^2 e_1^2}{2} [4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}_2)^2 - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}_2)^2]; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\left\langle \frac{1}{r_2^3} \right\rangle_{M_2} = \frac{1}{a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}; \quad (2.6)$$

$$\left\langle \frac{(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{u})^2}{r_2^5} \right\rangle_{M_2} = \frac{u^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2}{2a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}. \quad (2.7)$$

The substitution of these expressions in (2.3) yields

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{M_1, M_2} &= -\frac{G\mathcal{M}_{01}}{2a_2} - \frac{3}{8} \frac{G\beta_1 a_1^2}{a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} \\ &\quad \times \left\{ \left( e_1^2 - \frac{1}{3} \right) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})^2 - e_1^2 [4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{w})^2] \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Since the particle has no mass, the only variable element of the binary is its mean anomaly  $M_1$ . After averaging over this angle, it is no longer present in the Hamiltonian. After averaging over

the mean anomaly of the particle, its semimajor axis  $a_2$  becomes constant. Moreover,  $\mathbf{w} = \sin i_2 \sin \Omega_2 \mathbf{i} - \sin i_2 \cos \Omega_2 \mathbf{j} + \cos i_2 \mathbf{k}$ , so the argument of pericentre  $\omega_2$  of the particle does not appear in the averaged Hamiltonian. Hence, at the quadrupolar order, the conjugate momentum associated to  $\omega_2$ , i.e. the norm of the angular momentum of the particle  $G_2 = \sqrt{G\mathcal{M}_{01}a_2(1 - e_2^2)}$ , is constant. Therefore, the eccentricity  $e_2$  of the particle is constant. This fact is a feature of the quadrupolar expansion, not a property of the restricted problem. As such it remains true when the outer body has a non-zero mass (see Section 3). This is the *happy coincidence* that Lidov & Ziglin (1976) noted. Finally, only one degree of freedom remains, related to the couple  $(i_2, \Omega_2)$ .

If we drop the constant terms in (2.8), and introduce the mean motion  $n_1$  of the binary into the Hamiltonian ( $n_1^2 a_1^3 = G\mathcal{M}_{01}$ ), we get the following expression<sup>2</sup> (see also equation 10 in Palacián et al. 2006):

$$\langle H \rangle = -\frac{\alpha G_2}{2} \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})^2 - e_1^2 [4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{w})^2] \}, \quad (2.9)$$

where

$$\alpha = \frac{3}{4} n_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^{7/2} \frac{\beta_1}{\mathcal{M}_{01}} \frac{1}{(1 - e_2^2)^2}. \quad (2.10)$$

This Hamiltonian can be rewritten in a very compact form as

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{2} {}^t \mathbf{w} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}, \quad \text{where} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{T} = \alpha G_2 \begin{pmatrix} -4e_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

We also give the expression of the Hamiltonian using the inclination and the node of the particle:

$$\langle H \rangle = -\frac{\alpha G_2}{4} [2 \cos^2 i_2 - e_1^2 \sin^2 i_2 (3 - 5 \cos 2\Omega_2)]. \quad (2.13)$$

## 2.2 Equations of motion

As discussed in Boué & Laskar (2006), the equations of motion for  $\mathbf{w}$  are simply obtained by

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{G_2} \nabla_{\mathbf{w}} \langle H \rangle \wedge \mathbf{w}. \quad (2.14)$$

After computing the gradient, we find

$$\dot{\mathbf{w}} = -\alpha \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{k} \wedge \mathbf{w}) - e_1^2 [4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{i} \wedge \mathbf{w}) - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{j} \wedge \mathbf{w})] \}. \quad (2.15)$$

If we note  $x = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})$ ,  $y = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{w})$ , and  $z = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})$ , we get the following system for  $(x, y, z)$ :

$$\dot{x} = \alpha (1 - e_1^2) yz; \quad (2.16)$$

$$\dot{y} = -\alpha (1 + 4e_1^2) zx; \quad (2.17)$$

$$\dot{z} = 5\alpha e_1^2 xy. \quad (2.18)$$

In these variables, the fact that  $\mathbf{w}$  is a unit vector and the energy integral translate into the following equalities:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad (2.19)$$

<sup>2</sup> We will from now write  $\langle H \rangle$  for the averaged Hamiltonian, omitting the subscripts  $M_1, M_2$ .

$$z^2 - e_1^2(4x^2 - y^2) = h = \text{Cst.} \quad (2.20)$$

The system of three differential equations (2.16)–(2.18) has thus two independent first integrals and is as such integrable. It is also straightforward from these two relations that

$$-4e_1^2 \leq h \leq 1. \quad (2.21)$$

### 2.3 Motion of a massless body around a circular binary

In the case of a circular binary, the Hamiltonian and the equations of motion greatly simplify:<sup>3</sup>

$$\langle H \rangle = -\frac{\alpha G_2}{2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})^2, \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = -\alpha (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{w}). \quad (2.23)$$

The scalar product  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) = \cos i_2$  remains constant, and the nodes of the orbit of the particle simply precess around the angular momentum of the binary, with a constant precession rate:

$$\dot{\Omega} = -\alpha \cos i_2 = -\frac{3}{4} n_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^{7/2} \frac{\beta_1 \cos i_2}{\mathcal{M}_{01} (1 - e_2^2)^2}. \quad (2.24)$$

This precession is equivalent to the precession generated by the quadrupolar potential of a circular and homogeneous ring of mass  $\beta_1$  and of radius  $a_1$  following an idea which can be traced back to Gauss (see Touma, Tremaine & Kazandjian 2009 and references therein).

### 2.4 Motion of a massless body around an elliptic binary

#### 2.4.1 Qualitative overview

When the binary is elliptic, the situation changes and cannot be explained any longer by the quadrupolar torque of a circular ring. If we substitute  $z^2$  in (2.20) using (2.19), we get

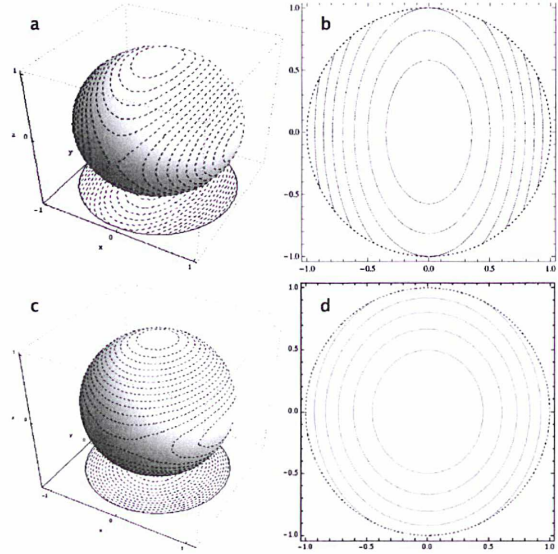
$$(1 + 4e_1^2)x^2 + (1 - e_1^2)y^2 = 1 - h \geq 0, \quad (2.25)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (2.26)$$

The intersections of the energy surfaces and the normalized angular momentum sphere of the particle can thus be seen as the intersections of elliptic cylinders with the unit sphere. For a given value of the energy  $h$ , the extremity of the unit angular momentum vector of the particle  $\mathbf{w}$  will move on the intersection of the corresponding cylinder with the unit sphere. Figs 1(a) and (c) show these intersections for different values of the energy as dotted lines drawn on the unit sphere, in two situations where the binary has an eccentricity of 0.5 and 0.2, respectively. The three axes correspond to the scalar products  $x$ ,  $y$  and  $z$  that are defined in Section 2.2.

There are four visible kinds of trajectories: closed trajectories around the two poles of the sphere  $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$  and closed trajectories around the points  $(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0)$ .

When the extremity of the angular momentum of the particle  $\mathbf{w}$  follows a trajectory around the north pole, it means that it precesses around the angular momentum of the binary  $\mathbf{k}$  with an inclination



**Figure 1.** Intersections of the energy surfaces and the unit angular momentum sphere (a) and its projection in the  $(x, y)$  plane (b) for  $e_1 = 0.5$ . Intersections of the energy surfaces and the unit angular momentum sphere (c) and its projection in the  $(x, y)$  plane (d) for  $e_1 = 0.2$ .

that is strictly inferior to  $90^\circ$ : in this case, the orbital motion of the particle is prograde relatively to the orbital motion of the binary.

When the extremity of the angular momentum of the particle  $\mathbf{w}$  follows a trajectory around the south pole, it means that it precesses around the opposite of the angular momentum of the binary,  $-\mathbf{k}$ , with an inclination that is strictly superior to  $90^\circ$ : in this case, the orbital motion of the particle is retrograde relatively to the orbital motion of the binary.

When the extremity of the angular momentum of the particle  $\mathbf{w}$  follows a trajectory around one of the two points  $(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0)$ , it precesses around the direction of the perihelion of the binary or the opposite of this direction. In this case, the inclination oscillates around  $\pm 90^\circ$ .

#### 2.4.2 Frequencies

The frequencies of these motions can be found analytically. Indeed, using equation (2.25), we see that  $x$  and  $y$  are on ellipses or arcs of ellipses bounded by the unit circle (Figs 1b and d show, respectively, the cases where  $e_1 = 0.5$  and 0.2). Thus, there is an angle  $\phi$  such that

$$x = \sqrt{\frac{1-h}{1+4e_1^2}} \cos \phi, \quad (2.27)$$

$$y = \sqrt{\frac{1-h}{1-e_1^2}} \sin \phi. \quad (2.28)$$

Using (2.19), we can then express  $z^2$  as

$$z^2 = \frac{h + 4e_1^2}{1 + 4e_1^2} - \frac{5e_1^2}{1 + 4e_1^2} \frac{1-h}{1-e_1^2} \sin^2 \phi. \quad (2.29)$$

There are two opposite values of  $z$  for each  $\phi$ , reflecting the symmetry of the system with respect to the orbital plane of the binary. If

<sup>3</sup> The next non-zero term of the Hamiltonian which is the fourth order in  $(a_1/a_2)$  plays an important part in the circular case as has been discussed in detail by Palacián & Yanguas (2006).



4 *F. Farago and J. Laskar*

we use expression (2.29) in combination with equation (2.18), we obtain the following equation for  $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \mp \alpha \sqrt{(1 - e_1^2)(h + 4e_1^2)} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad (2.30)$$

$$k^2 = \frac{5e_1^2}{1 - e_1^2} \frac{1 - h}{h + 4e_1^2}. \quad (2.31)$$

The constant  $k^2$  is positive because of relation (2.21). The value  $k^2 = 1$  defines a limit between two dynamical regimes. If  $k^2 < 1$ , or equivalently if  $h > e_1^2$ ,  $\dot{\phi}$  never vanishes and the projection of  $\mathbf{w}$  on the orbital plane of the binary moves along the full ellipse (2.25). In this case,  $\mathbf{w}$  precesses around the angular momentum of the binary,  $\mathbf{k}$ . If  $z > 0$ , the mutual inclination of the two orbits is always less than  $90^\circ$  so the orbital motion of the particle is prograde; conversely, if  $z < 0$  the mutual inclination of the two orbits is always superior to  $90^\circ$  so the orbital motion of the particle is retrograde.

If  $k^2 > 1$  (or  $h < e_1^2$ ) then  $\dot{\phi}$  vanishes for  $\phi_0 = \pm \arcsin(1/k)$ , changes its sign (which is accompanied by a change of sign in the  $z$  variable) and the angle  $\phi$  librates between  $-\phi_0$  and  $+\phi_0$ . Thus, the projection of  $\mathbf{w}$  on the orbital plane of the binary is bounded by the unit circle to stay on an arc of ellipse (2.25). In this case,  $\mathbf{w}$  precesses around the direction of perihelion of the binary, so that both the inclination and the node of the particle librate around  $\pm 90^\circ$ .

In both cases, the period of the motion can be calculated with a simple quadrature using equation (2.30):

$$T = \frac{16}{3n_1} \frac{\mathcal{M}_{01}}{\beta_1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{7/2} \frac{K(k^2)(1 - e_2^2)^2}{\sqrt{(1 - e_1^2)(h + 4e_1^2)}}, \quad (2.32)$$

where  $K(k^2)$  is the elliptic integral of the first kind defined by

$$K(k^2) = \begin{cases} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} & \text{if } k^2 < 1 \\ \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} & \text{if } k^2 > 1 \end{cases}. \quad (2.33)$$

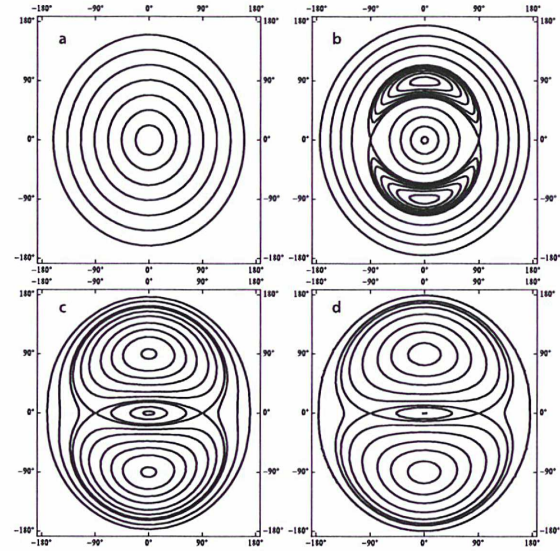
The last case where  $k^2 = 1$  (or  $h = e_1^2$ ) corresponds to the trajectories that separate the previous two types. They link the points  $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ , and the associated period is infinite. In the projection on the  $(x, y)$  plane, these separatrices form the ellipse which is tangent to the unit circle. Since all trajectories that are inside this ellipse correspond to the precession of  $\mathbf{w}$  around  $\mathbf{k}$ , the width  $\Delta x_{\text{sep}}$  of the separating ellipse in the  $(x, y)$  plane gives an indication on the proportion of such trajectories. Using equation (2.27) and the fact that  $h = e_1^2$  on the separatrix, we get

$$\Delta x_{\text{sep}} = 2 \sqrt{\frac{1 - e_1^2}{1 + 4e_1^2}}. \quad (2.34)$$

Therefore, when the inner binary is circular, this width is equal to 2, the full width of the unit circle, and the only possible motion is precession of  $\mathbf{w}$  around  $\pm \mathbf{k}$ . When the eccentricity of the binary increases, the width of the separatrix decreases to zero, which is a limit case since it can only be reached for a value of the binary's eccentricity equal to 1. The precession motions of  $\mathbf{w}$  around  $\pm i$  thus become predominant when the eccentricity of the binary grows.

### 2.5 Comparison with numerical studies

In Verrier & Evans (2009), the authors investigate a family of particles at high inclinations around the binary HD 98800 Ba–Bb, which remain stable even under the perturbation of an outer third stellar companion. They isolate a nodal precession imposed by the inner binary as the stabilizing mechanism working against the destabilizing



**Figure 2.** Energy levels of the Hamiltonian (2.8) in the  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  plane for values of the eccentricity of the binary  $e_1 = 0$  (a),  $e_1 = 0.1$  (b),  $e_1 = 0.79$  (c),  $e_1 = 0.9$  (d).

Kozai perturbations of the outer companion. They run simulations of test particles orbiting the binary HD 98800 Ba–Bb using non-secular equations. They observe the libration islands around  $i_2 = \pm 90^\circ$  and  $\Omega_2 = \pm 90^\circ$  that we discussed in the previous section. As they show their results in the  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  plane, we plotted the energy levels of the outer restricted Hamiltonian using these same coordinates for an easier comparison. Fig. 2 shows these levels for different values of the eccentricity. The panel (c) in particular uses the same value for the eccentricity of the binary ( $e_1 = 0.79$ ) as figs 4 and 5 of Verrier & Evans (2009).

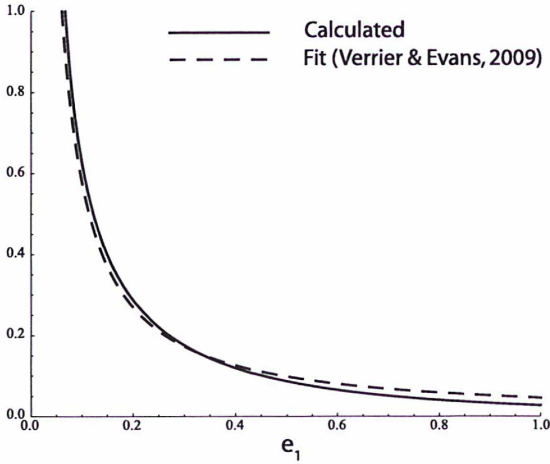
Verrier and Evans note no apparent structure in the dynamics of the  $(e_2, \omega_2)$  couple apart from the circulation of the perihelion. This is in agreement with the fact that the particle's eccentricity is constant at the quadrupolar approximation.

The authors also suggest that the projection of the angular momentum of test particles along the line of apses of the binary may be an integral of motion. From the results of the previous section, it is straightforward to see that the projection  $x$  of the angular momentum of test particles along the line of apses of the binary is not constant. It varies with an amplitude that decreases to 0 when the inclination of the particle approaches  $\pm 90^\circ$ , which can be misleading when looking at numerical results for highly inclined particles. However, the norm of the angular momentum of the test particles is an integral of the secular motion.

Finally, the authors give a power-law fit of the period of the libration of the node with respect to three parameters: the eccentricity of the binary; the ratio of the semimajor axes  $a_2/a_1$  and the mass ratio of the binary,  $\delta$ . Their power law is fitted using particles with fixed inclinations ( $85^\circ$ ). They give in their equation (5):

$$T \propto e_1^{-1.1} \delta^{-0.8} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{3.37}. \quad (2.35)$$

By rewriting the mass dependences of equation (2.32), we get the following analytical dependence with respect to the mass ratio and



**Figure 3.** Dependence of the period (2.32) with respect to the eccentricity of the binary, in normalized units. The full line corresponds to the calculated period, while the dashed line corresponds to the power-law fit given by Verrier & Evans (2009). We used a least-squares method to fit the relative position of the two curves.

the semimajor axis of the binary:

$$T \propto \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3.5} [\delta(1-\delta)]^{-1}. \quad (2.36)$$

These two exponents compare very well with the fitted power law, in spite of the differences between the two models. The dependency with respect to  $e_1$  is rather complex in equation (2.32), and it is best compared in Fig. 3.

The grid of initial conditions for the particles in Verrier & Evans (2009) extends, however, from 3 to 10 au for a binary separation of 1 au, so the quadropolar approximation may not be sufficient to fully describe the motion of the particles with the lowest semimajor axes. In particular, Verrier and Evans state that some low-inclination particles show large eccentricity variations and even instability. This could be due to a low initial semimajor axis and to resonances that are eliminated in our secular model by the averaging over the mean anomalies.

### 3 PROBLEM OF THREE MASSIVE BODIES

As we already stated, the quadropolar secular three-body problem is still integrable when all the bodies have positive masses. As such, it is possible to show how the outer restricted problem we discussed in the previous section relates to the general case, and to the inner restricted case studied by Kozai (1962) and Lidov (1962). We will first express the Hamiltonian of the secular quadropolar problem using the same vectorial method as in the previous section in order to focus on the relative movements of the orbits. In their studies of the secular quadropolar problem, Lidov & Ziglin (1976) and Ferrer & Osacar (1994) have shown that this problem depends on two parameters. We will then point out which regions of parameter space are topologically equivalent to the outer restricted case, and which regions correspond to the inner restricted case, in order to show the continuity that exists between both situations.

### 3.1 Hamiltonian

Let us consider three masses  $m_0$ ,  $m_1$  and  $m_2$ , this time with  $m_2 \neq 0$ . We note the barycentric coordinates and impulsions  $(\mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i)_{i=0,1,2}$ . As in the previous section, we suppose that the two bodies of indices 0 and 1 form a binary and that the distance of the third body to this binary is much larger than the separation of the binary. We still note  $\delta = m_0/(m_0 + m_1)$ . We first perform a canonical change of variables to Jacobi coordinates,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0 \quad \tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \quad \tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1 + (1-\delta)\tilde{\mathbf{u}}_2 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{u}_2 - \delta\mathbf{u}_0 - (1-\delta)\mathbf{u}_1 \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2. \quad (3.3)$$

In these coordinates, the Hamiltonian of the three bodies is (Laskar 1989)

$$H = \left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1\beta_1}{r_1}\right) + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2\beta_2} - Gm_2 \left(\frac{m_0}{|\mathbf{r}_2 + (1-\delta)\mathbf{r}_1|} + \frac{m_1}{|\mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_1|}\right), \quad (3.4)$$

where  $\beta_1^{-1} = m_0^{-1} + m_1^{-1}$ ,  $\beta_2^{-1} = (m_0 + m_1)^{-1} + m_2^{-1}$ ,  $\mu_1 = G(m_0 + m_1)$  and  $\mu_2 = G(m_0 + m_1 + m_2)$ .

Using the fact that  $r_1 \ll r_2$ , we expand the Hamiltonian to the order of 2 in  $r_1/r_2$  as in the previous section:

$$H = \left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1\beta_1}{r_1}\right) + \left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2\beta_2} - \frac{\mu_2\beta_2}{r_2}\right) - G\frac{\beta_1 m_2}{2r_2^3} \left[3\frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2}{r_2^2} - r_1^2\right]. \quad (3.5)$$

The first two terms are Keplerian energies and are equal, respectively, to  $-\mu_1\beta_1/2a_1$  and  $-\mu_2\beta_2/2a_2$ , where  $a_1$  and  $a_2$  are the semimajor axes of the inner and the outer body in our system of coordinates.

We now average over the two mean anomalies  $M_1$  and  $M_2$  in order to get the secular part of the Hamiltonian. We will define four unit vectors which are analogous to the four vectors we used in the first section:  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  are tied to the orbit of the inner binary,  $\mathbf{i}_1$  points in the direction of the perihelion of the inner binary,  $\mathbf{k}_1$  points in the direction of its angular momentum and  $\mathbf{j}_1 = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{i}_1$ . The last vector  $\mathbf{k}_2$  is collinear to the angular momentum of the outer body. In this section, the vectors tied to the orbit of the inner binary will no longer have fixed directions.

Using the same averaging formulae as in the previous section and using the fact that  $(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 + (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 = \mathbf{k}_2^2 = 1$ , we can write:

$$\langle H \rangle_{M_1, M_2} = -\frac{\mu_1\beta_1}{2a_1} - \frac{\mu_2\beta_2}{2a_2} - \frac{3}{8} \frac{Gm_2\beta_1}{(1-e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} \times \left[-\frac{1}{3} + 2e_1^2 + (1-e_1^2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 5e_1^2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2\right]. \quad (3.6)$$

After averaging over the two mean anomalies, the semimajor axes are constant. There are thus four degrees of freedom in the system, associated to the two eccentricities and the two inclinations. As we explained in the previous section, the argument of perihelion of the outer body does not appear in the quadropolar expansion, and thus the norm of the angular momentum of the outer body,  $G_2 = \beta_2\sqrt{\mu_2 a_2(1-e_2^2)}$ , is constant. This implies that its eccentricity  $e_2$  is constant. Using the reduction of the nodes would leave only one degree of freedom in the reduced Hamiltonian, associated to

6 *F. Farago and J. Laskar*

the couple  $(e_1, \omega_1)$ . The full reduction of the Hamiltonian and its expression in elliptical variables is the approach that has been used widely, since it yields a very similar Hamiltonian function as in the inner restricted problem (Harrington 1969; Lidov & Ziglin 1976; Ferrer & Osacar 1994).

We want, however, to look at the motion of the nodes, or equivalently the motion of the vector  $\mathbf{k}_2$  in the moving frame  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  of the orbit of the second body.

In order to easily compute the equations of motion, we introduce two vectors associated to the orbit of the binary that are collinear to  $\mathbf{i}_1$  and  $\mathbf{k}_1$ , and include in their norm the eccentricity of the binary, as in (Tremaine et al. 2009)

$$\mathcal{K}_1 = \sqrt{1 - e_1^2} \mathbf{k}_1, \quad \mathcal{I}_1 = e_1 \mathbf{i}_1. \quad (3.7)$$

If we drop all the constant terms in equation (3.6) and use the above vectors, we get

$$\langle H \rangle_{M_1, M_2} = -\frac{\alpha' G_2}{2} [2\mathcal{I}_1^2 + (\mathcal{K}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 5(\mathcal{I}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2], \quad (3.8)$$

where

$$\alpha' = \frac{3}{4} n_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^{7/2} \frac{\beta_1}{\mathcal{M}_{01}} \frac{1}{(1 - e_2^2)^2} \sqrt{1 + \frac{m_2}{\mathcal{M}_{01}}}, \quad (3.9)$$

and  $\mathcal{M}_{01}, n_1$  are defined as in Section 2.

### 3.2 Equations of motion

The components of  $\mathcal{K}_1, \mathcal{I}_1$  and  $\mathbf{k}_2$  have the following Poisson brackets<sup>4</sup> (Borisov & Mamaev 2005; Boué & Laskar 2006):

$$\{\mathcal{K}_{1i}, \mathcal{K}_{1j}\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{\Lambda_1} \mathcal{K}_{1k}, \quad \{\mathcal{K}_{2i}, \mathcal{K}_{2j}\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{G_2} \mathcal{K}_{2k}, \quad (3.10)$$

$$\{\mathcal{I}_{1i}, \mathcal{I}_{1j}\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{\Lambda_1} \mathcal{K}_{1k}, \quad \{\mathcal{K}_{1i}, \mathcal{I}_{1j}\} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{\Lambda_1} \mathcal{I}_{1k}, \quad (3.11)$$

where  $\Lambda_1 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}$  and  $\epsilon_{ijk}$  is the Levi-Civita symbol.<sup>5</sup>

The equations of motion for the three vectors are thus

$$\dot{\mathcal{K}}_1 = -\frac{1}{\Lambda_1} (\mathcal{K}_1 \wedge \nabla_{\mathcal{K}_1} H + \mathcal{I}_1 \wedge \nabla_{\mathcal{I}_1} H), \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathcal{I}}_1 = -\frac{1}{\Lambda_1} (\mathcal{I}_1 \wedge \nabla_{\mathcal{K}_1} H + \mathcal{K}_1 \wedge \nabla_{\mathcal{I}_1} H), \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{k}}_2 = -\frac{1}{G_2} \mathbf{k}_2 \wedge \nabla_{\mathbf{k}_2} H. \quad (3.14)$$

In order to look at the motion of the vector  $\mathbf{k}_2$  in the moving frame  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  of the orbit of the second body, we use as Boué & Laskar (2006) the above system to derive equations for  $x = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1)$ ,  $y = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1)$ ,  $z = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1)$  and  $e_1$ . Indeed,  $x = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathcal{I}_1)/|\mathcal{I}_1|$ ,  $z = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathcal{K}_1)/|\mathcal{K}_1|$ ,  $e_1 = |\mathcal{I}_1|$  and  $y$  is obtained using the identity  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ :

$$\dot{x} = \alpha' (1 - e_1^2) yz + \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} \sqrt{1 - e_1^2} y (2 - 5x^2), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -\alpha' (1 + 4e_1^2) xz \\ & - \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} \frac{x}{\sqrt{1 - e_1^2}} [(1 - e_1^2) (2 - 5x^2) + 5e_1^2 z^2], \end{aligned} \quad (3.16)$$

<sup>4</sup> We use the following convention, where  $p_i$  are momenta and  $q_i$  positions:  $\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$ .

<sup>5</sup>  $\epsilon_{ijk} = +1$  if  $(i, j, k)$  is an even permutation of  $(1, 2, 3)$ ,  $\epsilon_{ijk} = -1$  if the permutation is odd and  $\epsilon_{ijk} = 0$  in all other cases.

$$\dot{z} = 5\alpha' e_1^2 xy + \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} \frac{5e_1^2}{\sqrt{1 - e_1^2}} xyz, \quad (3.17)$$

$$\dot{e}_1 = \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} 5e_1 \sqrt{1 - e_1^2} xy. \quad (3.18)$$

The equations for  $x, y$  and  $z$  contain two terms: the first one is identical to the outer restricted system and the second one includes the motion of the reference frame  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  induced by the interaction with the third body. Note that when  $\Lambda_1$  is very large compared to  $G_2$  so that we can assume that  $G_2/\Lambda_1$  is equal to zero, which corresponds to the case where  $m_2 \ll m_0$  and  $m_1$ , the above system is identical to the outer restricted system (2.16)–(2.18).

The conservation of the total angular momentum  $\mathbf{C} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$  introduces the two main parameters of the problem. Indeed,

$$\Lambda_1^2 (1 - e_1^2) + G_2^2 + 2\Lambda_1 \sqrt{1 - e_1^2} G_2 z = C^2. \quad (3.19)$$

We note  $\gamma = C/\Lambda_1$ ,  $\gamma_2 = G_2/\Lambda_1$ . The above expression of the norm of the total angular momentum can be rewritten as a second-degree equation giving  $\sqrt{1 - e_1^2}$  as a function of  $z$  using the two parameters  $\gamma$  and  $\gamma_2$ :

$$(1 - e_1^2) + 2\gamma_2 z \sqrt{1 - e_1^2} + \gamma_2^2 - \gamma^2 = 0. \quad (3.20)$$

The Hamiltonian can then be rewritten as

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{2} \alpha' \Lambda_1 \gamma_2 [z^2 + e_1^2 (2 - z^2 - 5x^2)]. \quad (3.21)$$

The inequalities  $-1 \leq z \leq 1$  and  $0 \leq e_1 < 1$  give the boundaries of the parameter space and the range of possible values of  $e_1$  for any given couple of parameters<sup>6</sup>  $(\gamma, \gamma_2)$ :

$$|\gamma - \gamma_2| \leq 1, \quad (3.22)$$

$$|\gamma - \gamma_2| \leq \sqrt{1 - e_1^2} \leq \min[\gamma + \gamma_2, 1]. \quad (3.23)$$

With these notations, the outer restricted problem of Section 2 corresponds to the limit where  $\gamma_2 = 0$ , and in this case  $e_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}$  is constant as we saw. Note that when  $\gamma_2 > \gamma$ , we have  $G_2 > C$ , so this part of the parameter space contains only retrograde motions. Our aim in this paper is to show the continuity between the outer restricted case we studied in Section 2 and the inner restricted case that was investigated by Kozai (1962) and Lidov (1962). Both these problems lie in the region of parameter space where  $\gamma > \gamma_2$  so we will restrict our study to this case.<sup>7</sup>

In our case where  $\gamma > \gamma_2$ , there is only one acceptable root to equation (3.20), which is

$$\sqrt{1 - e_1^2} = -\gamma_2 z + \sqrt{(\gamma_2 z)^2 + \gamma^2 - \gamma_2^2}. \quad (3.24)$$

This relation implies that  $e_1$  is a growing function of  $z$ . Note that  $z = \cos i_2$ , where  $i_2$  is the inclination of the outer body in the reference frame of the inner binary. As such, coplanar prograde

<sup>6</sup> The left part of the second inequality is strict if  $\gamma = \gamma_2$ .

<sup>7</sup> The other half of the parameter space ( $\gamma \leq \gamma_2$ ) corresponds to retrograde motions which are of less physical interest and much more technical to study using our approach, in particular because equation (3.20) does not have a unique solution in this case. The interested reader will find a complete discussion of this case in Lidov & Ziglin (1976) and Ferrer & Osacar (1994).

motions ( $z = 1$ ) will always occur for the maximal value of the eccentricity of the inner binary:

$$e_{1,\max} = \sqrt{1 - (\gamma - \gamma_2)^2}. \quad (3.25)$$

Conversely, low eccentricities for the binary will be associated to lower values of  $z$ , and thus higher inclinations. Relation (3.23) implies that the inner binary can only have a circular motion if  $\gamma + \gamma_2 \geq 1$ . In this case, coplanar retrograde motion ( $z = -1$ ) is not allowed, and the lowest value of  $z$  is

$$z_0 = \cos i_{2,\max} = \frac{\gamma^2 - \gamma_2^2 - 1}{2\gamma_2}. \quad (3.26)$$

When  $\gamma + \gamma_2 < 1$  however, coplanar retrograde motion ( $z = -1$ ) is possible and the associated value of the eccentricity of the binary is

$$e_{1,\min} = \sqrt{1 - (\gamma + \gamma_2)^2}. \quad (3.27)$$

### 3.3 Dynamical regimes

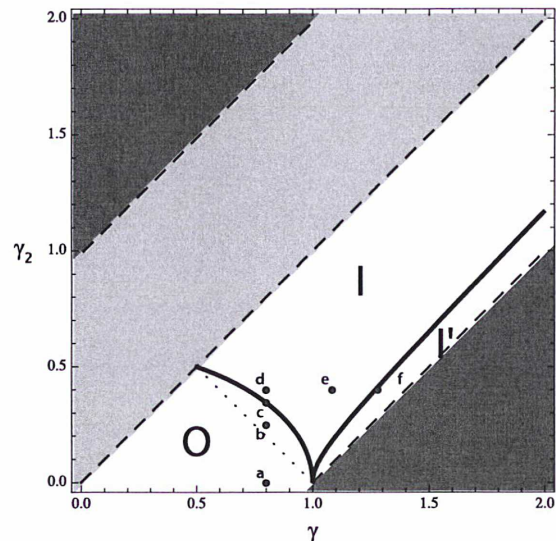
In Appendix A, we briefly derive in the framework of the present study the fixed points of the system and the boundaries of the dynamical regimes in parameter space that are given in Ferrer & Osacar (1994). The fixed points are named as follows: the north pole is called  $N$  and the south pole  $S$ ; linearly stable fixed points are named  $E$ , as elliptic and linearly unstable points are named  $H$ , as hyperbolic; finally, signs are placed as indices to refer to the symmetry of the problem with respect to the two planes  $x = 0$  and  $y = 0$ . There are three dynamical regimes in the region of parameter space we study.

In region O of Fig. 4, the parameter  $\gamma_2 = G_2/\Lambda_1$  is small (less than  $1/2$ ). This is the case in particular when the mass ratio  $m_2/m_1$  is small. Moreover,  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 < 1$ . The phase space is topologically equivalent to the outer restricted problem of Section 2. The north pole which corresponds to coplanar prograde motion with maximal eccentricity for the binary is linearly stable. There are two additional stable fixed points  $E_{\pm}$  in the plane  $y = 0$  (see Section A4). They belong to the same family as the fixed points  $y = z = 0$ ,  $x = \pm 1$  of the outer restricted problem that are responsible for the stable high-inclination orbits observed by Verrier & Evans (2009). When  $\gamma + \gamma_2 \leq 1$ , the south pole which corresponds to coplanar retrograde motion with minimal eccentricity for the binary is also linearly stable. The panel (a) of Figs 5 and 6 provides a visualization of the topology of this case.<sup>8</sup> When  $\gamma + \gamma_2 > 1$ , the south pole is no longer accessible as stated in the previous section. It is, however, replaced by a stable trajectory at a maximal inclination given by equation (3.26), as can be seen in panel (b) of Figs 5 and 6. This trajectory corresponds to a circular inner binary (see Section A2). Finally, there are two unstable points  $H_{\pm}$  in the  $x = 0$  plane that belong to the same family as the unstable points of the outer restricted problem  $x = z = 0$ ,  $y = \pm 1$  (see Section A3).

Panel (c) of Figs 5 and 6 shows the limiting case between regions O and I. On this boundary,  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 = 1$ . The two unstable points  $H_{\pm}$  are now located on the boundary of the accessible part of the sphere.

Regions I and I' of Fig. 4 are both in the part of the parameter space defined by  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 > 1$ . In this zone, the problem becomes

<sup>8</sup> Note that the south pole in Fig. 5 a corresponds to the outmost trajectory; this is an artefact of the coordinate map  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  which sends the south pole of the sphere onto the circle  $i_2 = 180^\circ$ .



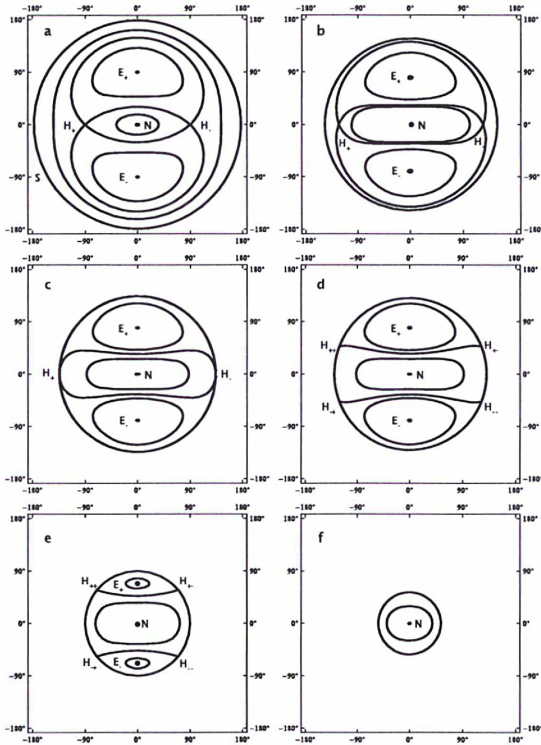
**Figure 4.** Parameter space. The dark grey areas are excluded by equation (3.22), the light grey area corresponds to the part of parameter space corresponding to  $\gamma_2 \geq \gamma$  which we do not study. The dotted line  $\gamma + \gamma_2 = 1$  separates the zone where there can be coplanar retrograde motion associated to a minimum eccentricity for the inner binary that is strictly higher than 0 (below the dotted line) and the zone where the inner binary can be circular but the inclination is bounded (see Section A2). In zone O, the problem is topologically equivalent to the outer restricted problem. In zones I and I', it is topologically equivalent to the inner restricted problem, with zone I being equivalent to situations above the critical inclination and zone I' being equivalent to situations under the critical inclination. The letters a – f correspond to the values of the parameters used to plot the corresponding panels in Figs 5 and 6.

topologically equivalent to the inner restricted problem studied by Lidov (1962) and Kozai (1962). In the inner restricted case, there is a critical value of the inclination ( $\cos i_2 = \sqrt{3/5}$ ) under which a circular inner binary is always linearly stable, and above which a circular inner binary is always linearly unstable, giving rise to Kozai cycles.

In region I of Fig. 4, the dynamical regime is topologically equivalent to the inner restricted problem in the case where the inclination is superior to the critical value. The limit trajectory  $z = z_0$  which corresponds to a circular inner binary becomes linearly unstable. However, the north pole and the two fixed points  $E_{\pm}$  are still stable. In the inner restricted phase space, when the inclination is superior to the critical value, there are two possible behaviours for the periastron of the inner particle: it can either circulate or librate around  $\pm 90^\circ$ . In our representation, the circulation case corresponds to trajectories around the north pole, and the libration islands correspond to the two fixed points  $E_{\pm}$ . This is shown in panels (d) and (e) in Figs 5 and 6.

In region I' of Fig. 4, the dynamical regime is topologically equivalent to the inner restricted problem in the case where the inclination is inferior to the critical value. Only one stable fixed point remains, on the north pole of the sphere, associated to prograde coplanar motion. This is shown in panel (f) in Figs 5 and 6.

In both regions I and I', the parameter  $\gamma_2 = G_2/\Lambda_1$  can take higher values. This is in particular true when the mass ratio  $m_2/m_1$  increases.

8 *F. Farago and J. Laskar*


**Figure 5.** Trajectories in the  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  plane for different values of the parameters. See Section 3.3 for a detailed discussion and Appendix A for calculations. a:  $(\gamma, \gamma_2) = (0.8, 0)$  outer restricted case with  $e_1 = 0.6$ . b:  $(\gamma, \gamma_2) = (0.8, 0.25)$ . c:  $\gamma = 0.8, \gamma_2^2 = (1/3)(1 - \gamma^2)$ . d:  $(\gamma, \gamma_2) = (0.8, 0.4)$ . e:  $(\gamma, \gamma_2) = (1.08, 0.4)$ . f:  $(\gamma, \gamma_2) = (1.28, 0.4)$ .

The curve between regions I and I' is linked to the critical inclination that is defined in the inner restricted case. Indeed, along that curve, given by equation (A10), we have the following limits when  $\gamma \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\gamma_2}{\gamma} \rightarrow 1, \quad \gamma_2 - \gamma \rightarrow -\sqrt{\frac{3}{5}}. \quad (3.28)$$

When  $G_2$  is very large compared to  $G_1$ , we can make the following first-order expansion:

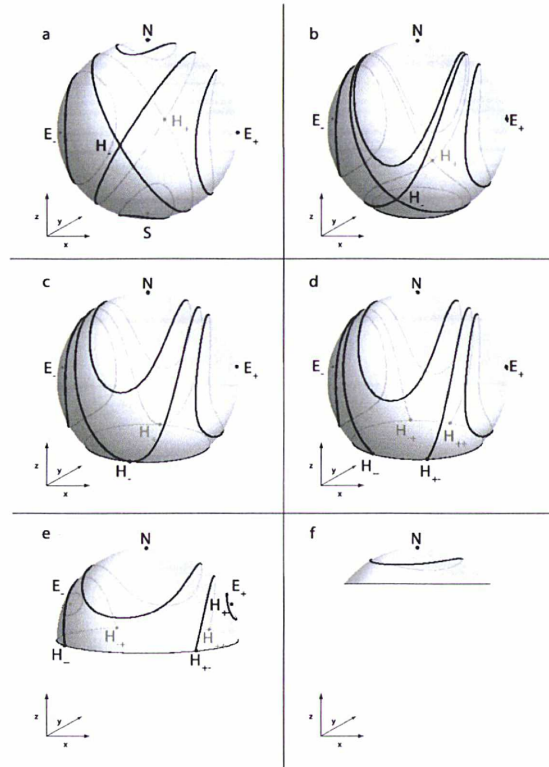
$$\gamma_2 - \gamma = \frac{G_2 - C}{\Lambda_1} \quad (3.29)$$

$$= \frac{G_2 - \sqrt{G_2^2 + G_1^2} + 2(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_1)}{\Lambda_1} \quad (3.30)$$

$$\approx \frac{G_2 - G_2(1 + (\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_1)/G_2^2)}{\Lambda_1} \quad (3.31)$$

$$\approx -\frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_1)}{\Lambda_1 G_2} \quad (3.32)$$

$$\approx -z\sqrt{1 - e_1^2}. \quad (3.33)$$



**Figure 6.** Trajectories on the unit angular momentum sphere for different values of the parameters. See Section 3.3 for a detailed discussion and Appendix A for calculations. a:  $(\gamma, \gamma_2) = (0.8, 0)$  outer restricted case with  $e_1 = 0.6$ . b:  $(\gamma, \gamma_2) = (0.8, 0.25)$ . c:  $\gamma = 0.8, \gamma_2^2 = (1/3)(1 - \gamma^2)$ . d:  $(\gamma, \gamma_2) = (0.8, 0.4)$ . e:  $(\gamma, \gamma_2) = (1.08, 0.4)$ . f:  $(\gamma, \gamma_2) = (1.28, 0.4)$ .

As such, we see that along the border between regions I and I', when  $\gamma$  and  $\gamma_2$  both tend to infinity, we have the relation

$$z\sqrt{1 - e_1^2} \approx \sqrt{\frac{3}{5}}. \quad (3.34)$$

Recall that  $z = \cos i_2$ , where  $i_2$  is the inclination of the outer orbit in the reference frame of the inner orbit. Thus, the inclination of the inner orbit relatively to the outer orbit is  $i_1 = -i_2$ , and the above equation becomes:

$$\cos i_1 \sqrt{1 - e_1^2} \approx \sqrt{\frac{3}{5}}. \quad (3.35)$$

This relation is precisely the one giving the critical value of the normal component of the angular momentum of the inner body in the inner restricted problem.

#### 4 CONCLUSION

We first studied the case of a massless particle orbiting a binary at a long distance, and, in the secular and quadrupolar approximations, gave a full analytical description of the motion along with the expression of the period of the secular motion. When the inner binary is circular, only nodal precession takes place. However, when the binary is elliptic, libration islands appear at high inclinations, and these islands grow bigger when the eccentricity of the binary rises.

Verrier & Evans (2008, 2009) observe a similar nodal libration in their study of the stability of particle populations in the quadruple stellar system HD 98800, and we showed that the analytical framework that we derived for the outer restricted problem is well suited to explain the results of Verrier and Evans.

The quadrupolar secular three-body problem is still integrable when all the bodies have positive masses (Harrington 1969; Lidov & Ziglin 1976; Ferrer & Osacar 1994). Using a vectorial formalism as (Boué & Laskar 2006, 2009; Tremaine et al. 2009), we looked at this problem from the point of view of the outer restricted case. We showed how the outer restricted problem relates to the general case, and to the inner restricted case studied by Kozai (1962) and Lidov (1962): when the mass of the outer body is small enough compared to the mass of the inner body, the general case behaves similarly to the outer restricted problem. When the mass of the outer body increases enough, the general case behaves like the inner restricted problem. We gave an expression of the boundary between these two regimes.

The outer restricted problem and its generalization to the non-restricted case provide an interesting starting point in the study of circumbinary planetary systems, such as the one discovered recently around the eclipsing sdB+M system HW Virginis (Lee et al. 2009). In this system, the inner binary is very tight with a period of 2.8 h, while the proposed planetary companions have periods of 9.1 and 15.8 years, so the quadrupolar expansion is fully justified. Another field of application of the outer restricted problem is the study of the motion of stars orbiting around binary black holes (Mikkola & Merritt 2008; Gillessen et al. 2009; Merritt, Gualandris & Mikkola 2009).

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work benefited from support from PNP-CNRS.

#### REFERENCES

- Borisov A. V., Mamaev I. S., 2005, Dynamics of the Rigid Body (in Russian). R&C Dynamics, Moscow, <http://ics.org.ru/>
- Boué G., Laskar J., 2006, *Icarus*, 185, 312
- Boué G., Laskar J., 2009, *Icarus*, 201, 750
- Ferrer S., Osacar C., 1994, *Celest. Mech. Dynamical Astron.*, 58, 245
- Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., Alexander T., Genzel R., Martins F., Ott T., 2009, *ApJ*, 692, 1075
- Harrington R. S., 1969, *Celest. Mech.*, 1, 200
- Kinoshita H., Nakai H., 2007, *Celest. Mech. Dynamical Astron.*, 98, 67
- Kozai Y., 1962, *AJ*, 67, 591
- Laskar J., 1989, in Benest D., Froeschle C., eds, *Modern Methods in Celestial Mechanics. Systèmes de Variables et Eléments*. Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, p. 63
- Lee J. W., Kim S.-L., Kim C.-H., Koch R. H., Lee C.-U., Kim H.-I., Park J.-H., 2009, *AJ*, 137, 3181
- Lidov M. L., 1962, *Planet. Space Sci.*, 9, 719
- Lidov M. L., Ziglin S. L., 1976, *Celest. Mech.*, 13, 471
- Malige F., Robutel P., Laskar J., 2002, *Celest. Mech. Dynamical Astron.*, 84, 283
- Merritt D., Gualandris A., Mikkola S., 2009, *ApJ*, 693, L35
- Mikkola S., Merritt D., 2008, *AJ*, 135, 2398
- Palacián J. F., Yanguas P., 2006, *Celest. Mech. Dynamical Astron.*, 95, 81
- Palacián J. F., Yanguas P., Fernández S., Nicotra M. A., 2006, *Physica D*, 213, 15
- Poincaré H., 1905, *Leçons de Mécanique Céleste*, t.I, Gauthier-Villars, Paris
- Touma J. R., Tremaine S., Kazandjian M. V., 2009, *MNRAS*, 394, 1085
- Tremaine S., Touma J., Namouni F., 2009, *AJ*, 137, 3706

- Verrier P. E., Evans N. W., 2008, *MNRAS*, 390, 1377
- Verrier P. E., Evans N. W., 2009, *MNRAS*, 394, 1721

#### APPENDIX A: FIXED POINTS AND BIFURCATIONS

The fixed points and boundaries presented in Section 3.3 have already been studied by Lidov & Ziglin (1976) and Ferrer & Osacar (1994). We briefly present here their derivation in the framework of the present formalism. With the notations of Section 3, we will limit ourselves to  $\gamma > \gamma_2$ .

##### A1 Poles of the sphere, $x = y = 0$

This case corresponds to case 1 in section 5 of Ferrer & Osacar (1994). Note that their sphere is constructed using the eccentricity and perihelion of the inner binary, and is thus different from our angular momentum sphere.

For all values of the parameters in the domain we study, the north pole  $z = 1$ , which corresponds to coplanar prograde motion, is a fixed point of the system. The associated eccentricity of the inner binary is

$$e_{1,\max} = \sqrt{1 - (\gamma - \gamma_2)^2}. \quad (\text{A1})$$

It is the maximal value of the eccentricity. This fixed point is always linearly stable. It is noted *N* in Figs 5 and 6. Fig. 5 shows the lines of equal energy in the  $(i_2 \cos \Omega_2, i_2 \sin \Omega_2)$  plane, and Fig. 6 shows these lines plotted on the sphere of unit angular momentum of the outer body  $k_2^2 = 1$ .

When  $\gamma + \gamma_2 < 1$  (under the dotted line in Fig. 4), the south pole  $z = -1$  (noted *S* in the following figures), which corresponds to coplanar retrograde motion, is also a linearly stable fixed point of the system. The eccentricity of the inner binary is minimal and equal to:

$$e_{1,\min} = \sqrt{1 - (\gamma + \gamma_2)^2}. \quad (\text{A2})$$

Note that in this region of parameter space the inner binary cannot be circular.

When  $\gamma + \gamma_2 \geq 1$  (above the dotted line in Fig. 4), the minimal eccentricity of the binary is 0 as deduced from (3.23). The south pole  $z = -1$  does not correspond to a real value of the eccentricity in this case. This limit, however, is not a bifurcation strictly speaking. When crossing it, the stable south pole of the sphere is replaced by a stable trajectory at maximal inclination.

##### A2 Circular trajectories for the inner binary

In the region of parameter space where circular trajectories exist for the binary (above the dotted line in figure 4), the value of  $z$  which corresponds to such trajectories is minimal and equal to

$$z_0 = \frac{\gamma^2 - \gamma_2^2 - 1}{2\gamma_2}. \quad (\text{A3})$$

The equations of motion on the small circle of the sphere  $z = z_0$  are

$$\dot{x} = \alpha' y [z_0 + \gamma_2(2 - 5x^2)], \quad (\text{A4})$$

$$\dot{y} = -\alpha' x [z_0 + \gamma_2(2 - 5x^2)], \quad (\text{A5})$$

$$\dot{z} = 0, \quad (\text{A6})$$

$$\dot{e}_1 = 0. \quad (\text{A7})$$

10 *F. Farago and J. Laskar*

The right-hand sides of equations (A4) and (A5) vanish for a certain value of  $x$  equal to

$$x_0^2 = \frac{\gamma^2 + 3\gamma_2^2 - 1}{10\gamma_2^2}. \quad (\text{A8})$$

The curve  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 = 1$  separates in Fig. 4 the regions noted O and I. We can distinguish three cases.

(i)  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 < 1$ . In region O of Fig. 4,  $x_0^2 < 0$  so there is no fixed point on the circle  $z = z_0$ . As such, this circle is a trajectory for which the inner binary is circular and the outer orbit precesses at a fixed inclination given by  $i_{2,\text{max}} = \arccos z_0$ . Moreover, this trajectory is linearly stable.

(ii)  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 = 1$ . There are two fixed points on the circle  $z = z_0$  at the coordinates  $(x = 0, y = \pm\sqrt{1 - z_0^2})$ .

(iii)  $\gamma^2 + 3\gamma_2^2 > 1$ . In this case, we must also check that  $y_0^2 = 1 - x_0^2 - z_0^2 \geq 0$ . The limit case where there is equality yields

$$5\gamma_2^4 - (4 + 10\gamma^2)\gamma_2^2 + (5\gamma^4 - 8\gamma^2 + 3) = 0. \quad (\text{A9})$$

This boundary limits the regions I and I' in Fig. 4. When solving the above equation for  $\gamma_2^2$  and selecting only the relevant solution satisfying  $\gamma > \gamma_2, \gamma + \gamma_2 \geq 1$ , we obtain a solution that corresponds to equation (44) in section 5.2 of Ferrer & Osacar (1994) and can be written using our notations as

$$\gamma_2^2 = \frac{2 + 5\gamma^2 - \sqrt{60\gamma^2 - 11}}{5}, \quad \gamma + \gamma_2 \geq 1. \quad (\text{A10})$$

In region I,  $y_0^2 > 0$  so there are four fixed points on the circle  $z = z_0$ , at the coordinates  $(\pm x_0, \pm y_0)$ . They are noted  $H_{\pm\pm}$ , in panels (d) and (e) of Figs 5 and 6. Moreover, the trajectories that correspond to circular binaries are unstable in this zone. In region I', however,  $y_0^2 < 0$  so we are again in a region of parameter space where there are no fixed points on the circle  $z = z_0$ , and the trajectories associated to circular binaries are again stable.

**A3 The  $x = 0$  plane**

When  $x = 0$ , the only non-trivial equation remaining in system (3.15)–(3.18) is  $\dot{x} = 0$ . Looking for a fixed point different from  $x = y = 0$ , we have to solve

$$z\sqrt{1 - e_1^2} + 2\gamma_2 = 0, \quad (\text{A11})$$

which after using relation (3.20) yields

$$e_1 = \sqrt{1 - \gamma^2 - 3\gamma_2^2}, \quad (\text{A12})$$

$$x = 0, \quad (\text{A13})$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_2^2}}{\sqrt{\gamma^2 + 3\gamma_2^2}}, \quad (\text{A14})$$

$$z = -\frac{2\gamma_2}{\sqrt{\gamma^2 + 3\gamma_2^2}}. \quad (\text{A15})$$

We thus have two symmetric fixed points in the plane  $x = 0$ . They are noted  $H_{\pm}$  in Figs 5 and 6. For these fixed points to exist, the associated eccentricity must be a real number. As such, their domain of existence is the region noted O in Fig. 4. This is case 2.1 in section 5 of Ferrer & Osacar (1994).

These two fixed points are linearly unstable in their domain of existence. Note that in the outer restricted problem ( $\gamma_2 = 0$ ) these fixed points are simply  $x = z = 0, y = \pm 1$ .

**A4 The  $y = 0$  plane**

When  $y = 0$ , the only non-trivial equation we must solve is  $\dot{y} = 0$ . Here again, we look for another fixed point than  $x = y = 0$ , thus we have to solve

$$(1 + 4e_1^2)z + \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - e_1^2}}[(1 - e_1^2)(2 - 5x^2) + 5e_1^2 z^2] = 0. \quad (\text{A16})$$

Substituting  $1 - z^2$  in place of  $x^2$  and then  $\sqrt{1 - e_1^2}$  in place of  $z$  using (3.20), we get

$$(1 - e_1^2)^3 - \left(\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma_2^2 + \frac{5}{8}\right)(1 - e_1^2)^2 + \frac{5}{8}(\gamma^2 - \gamma_2^2)^2 = 0. \quad (\text{A17})$$

This equation is the same as equation number 40 in Ferrer & Osacar (1994). In our region of parameter space, there is at most one root which satisfies to the constraint (3.23). The curve separating the zone where there is one solution and the zone where there is no solution corresponds to the case where the limit value  $e_1 = 0$  is a solution, and coincides with the boundary between regions I and I' in Fig. 4 which is given by equation (A10).

When there is a solution, the value of  $e_1$  can be translated into a value of  $z$  using (3.20). Since  $y = 0$ , we get two values of  $x = \pm\sqrt{1 - z^2}$ , and there are thus two symmetric fixed points on the sphere, which are both linearly stable. They are noted  $E_{\pm}$  in Figs 5 and 6. When  $\gamma_2 = 0$ , these fixed points become simply  $y = z = 0, x = \pm 1$ , which are responsible of the stable orbits at high inclination as discussed in the previous sections.

This paper has been typeset from a  $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.

# Chapitre 4

## Effets dissipatifs et corps étendus – Le cas de HD 80606

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Le cas de HD 80606b

Comme nous l'avons déjà souligné, les propriétés orbitales des planètes extrasolaires sont souvent étonnantes comparées à celles des planètes du système solaire, notamment en ce qui concerne leurs demi-grands axes et leurs excentricités.

La planète HD 80606b, dont la masse minimale initialement publiée était de  $3.9M_{\text{Jup}}$  (Naef et al., 2001), possède l'excentricité la plus forte de toutes les planètes actuellement connues<sup>1</sup> :  $e = 0.93$ . Elle orbite son étoile hôte, de type solaire, avec une période de 111.8 jours, soit à une distance d'environ 0.45 UA. La séparation entre la planète et l'étoile au niveau du périastre est donc seulement de 0.033 UA, soit environ 7 rayons solaires ! Notons que pour cette configuration, la limite de Roche, c'est-à-dire la distance étoile-planète en-dessous de laquelle la planète serait détruite par la marée stellaire, est de  $6.4 \cdot 10^5$  km, soit moins de un rayon solaire : une telle planète peut donc bien survivre à des interactions aussi intenses avec son étoile.

HD 80606 b a de plus bénéficié d'observations de différentes natures : initialement détectée par la méthode des vitesses radiales (Naef et al., 2001), son transit secondaire (c'est-à-dire son passage derrière son étoile hôte) a ensuite été observé grâce au satellite infrarouge Spitzer (Laughlin et al., 2009), et enfin son transit principal a été observé en Février 2009 (Moutou et al., 2009). Le nombre des observations a confirmé la forte excentricité de HD 80606 b, et la diversité des techniques a donné accès à de nombreux paramètres du système : ainsi, on connaît maintenant la vraie masse de la planète,  $3.94M_{\text{Jup}}$ , son rayon de  $1.029R_{\text{Jup}}$ . Surtout, l'observation du transit spectroscopique a révélé un non-alignement estimé à  $50^\circ$  entre l'axe

---

1. HD 20782b a été annoncée avec une excentricité de 0.97 (Jones et al., 2006), mais une analyse plus récente excluant certains points extrêmes donne une valeur de 0.57 (O'Toole et al., 2009).



de rotation de l'étoile hôte et l'orbite de la planète (Pont et al., 2009).

La question de savoir si un tel système peut se former comme tel est particulièrement ardue. Les modèles actuels de formation dans les disques proto-planétaires prévoient en effet un état en fin de formation où la rotation propre planétaire, la rotation propre stellaire et l'orbite planétaire sont toutes alignées, et l'orbite planétaire est faiblement excentrique. C'est pourquoi de nombreux travaux se sont plutôt portés vers des scénarios où la planète est formée à une distance plus grande de l'étoile, et amenée par la suite à sa situation actuelle grâce à une interaction supplémentaire.

Cependant, le modèle dominant de migration planétaire est basé sur l'interaction entre la planète naissante et le disque de gaz dans lequel elle se forme (Goldreich et Tremaine, 1980; Papaloizou et Terquem, 2006). Même si ce mécanisme peut exciter l'excentricité de la planète, l'efficacité d'une telle excitation ne commence à se faire sentir que pour des planètes très massives ( $M > 10 - 20M_{\text{Jup}}$ ) (Papaloizou et al., 2001).

L'étoile HD 80606 possède en revanche un compagnon lointain, HD 80607, qui est de même type spectral. La contamination lumineuse mutuelle entre ces deux sources donne lieu à une forte incertitude dans les données Hipparcos concernant leur position relative, mais une distance projetée entre 1000 et 2000 UA est communément admise (Naef et al., 2001). Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, un tel compagnon lointain peut exciter l'excentricité de la planète par l'intermédiaire du mécanisme de Lidov-Kozai, pourvu que l'orbite de la planète et celle du compagnon lointain soient initialement non coplanaires.

On peut alors envisager un scénario dans lequel la planète se forme à distance de l'étoile hôte HD 80606, à environ 5 AU par analogie avec le système Soleil – Jupiter. Si l'orbite initiale de la planète est suffisamment inclinée par rapport à celle du compagnon lointain, l'excentricité planétaire peut alors monter suffisamment haut grâce au mécanisme de Lidov-Kozai, et donc la distance au périastre peut être assez petite pour que les interactions de marées soient très fortes à chaque passage au périastre.

La dissipation qui intervient alors lors des passages au périastre à chaque maximum d'excentricité du cycle de Kozai diminue progressivement le demi-grand axe planétaire. Lorsque le demi-grand axe planétaire décroît, les périodes associées aux autres interactions, et notamment la précession du périastre planétaire due à la relativité générale, deviennent plus courtes que la période associée aux cycles de Kozai. On s'attend donc à ce que l'efficacité des cycles de Kozai diminue à chaque maximum d'excentricité, et à ce que les cycles s'arrêtent dans un état où la planète possède une excentricité élevée et une orbite moins inclinée par rapport à l'orbite du compagnon lointain que dans l'état initial.

Les deux étoiles sont beaucoup plus massives que la planète, et le demi-grand axe du compagnon lointain est beaucoup plus grand que celui de la planète. On s'attend donc à ce que leurs propriétés orbitales et rotationnelles soient beaucoup moins modifiées que celles de la planète au cours de l'évolution du système. Si le processus de formation planétaire conduit à un état initial où les moments cinétiques rotationnels de la planète et de l'étoile HD 80606

sont alignés avec le moment cinétique orbital de la planète, on doit pouvoir observer à la fin de l'évolution orbitale de la planète un non-alignement entre l'axe de rotation stellaire et le moment cinétique orbital planétaire. Un tel non-alignement a été observé lors de la récente campagne d'observation du transit principal de la planète en Février 2009, grâce à la mesure du transit spectroscopique et à l'analyse de l'effet Rossiter-McLaughlin (Gaudi et Winn, 2007) : Pont et al. (2009) donnent un angle de  $50^\circ$  environ entre la normale à l'orbite de la planète et l'axe de rotation de l'étoile.

Comme les interactions de marées dépendent de la séparation  $r$  entre les deux corps qui interagissent comme  $1/r^6$ , la distance atteinte au péricentre est un paramètre particulièrement sensible dans ce scénario d'évolution. Or, la distance au péricentre dépend de l'excentricité de la planète, et donc par l'intermédiaire de l'intégrale de Lidov-Kozai, de l'inclinaison initiale de l'orbite planétaire par rapport à l'orbite du compagnon lointain. Les simulations présentées plus loin montreront en effet qu'il faut une inclinaison initiale très importante, supérieure à  $85^\circ$ , pour produire une évolution compatible avec les propriétés actuelles de HD 80606b sur une durée de l'ordre de l'âge des deux étoiles HD 80606 et HD 80607, estimé à 7.5 milliards d'années environ (Saffe et al., 2005).

Ce type de scénario est appelé dans la littérature *Kozai migration* ou *Kozai cycles with tidal friction (KCTF)* ce qui se traduit simplement en *cycles de Kozai avec dissipation de marées* ou encore *migration de Kozai*.

Harrington (1968) a d'abord suggéré ce mécanisme comme un facteur d'évolution important pour les étoiles triples. Eggleton et al. (1998), puis Eggleton et Kiseleva-Eggleton (2001) ont développé un ensemble d'équations séculaires pour modéliser l'évolution à long terme d'une étoile binaire sous l'effet des marées levées par chaque composant sur son compagnon, les couples exercés sur les bourrelets rotationnels des deux étoiles, la précession relativiste du périhélie, ainsi que l'action sur l'orbite de la binaire d'un troisième compagnon stellaire lointain. Ces équations ont été replacées dans un contexte planétaire par Mardling et Lin (2002), et utilisées par Wu et Murray (2003) et Fabrycky et Tremaine (2007) pour modéliser l'évolution de HD 80606b. Plus récemment, Barker et Ogilvie (2009) y ont ajouté un effet de freinage magnétique qui ne sera pas évoqué ici.

### 4.1.2 But de notre modélisation

Nous redérivons ici un ensemble d'équations analogue à ceux utilisés dans les travaux précédents de Wu et Murray (2003) et Fabrycky et Tremaine (2007) pour modéliser le mouvement séculaire d'une planète dans un système binaire. Dans le but de retrouver dans un premier temps les résultats des travaux précédents, on prend en compte les mêmes effets que ces deux articles, à savoir :

- L'interaction quadripolaire entre l'étoile lointaine et la planète proche (Kozai) ;
- La marée levée sur la planète par l'étoile proche et la précession ainsi que la dissipation

qui en résultent ;

- La marée levée sur l'étoile proche par la planète ;
- La précession du périhélie de la planète causée par le terme relativiste le plus significatif ;
- Les précessions du périhélie et de l'axe de rotation de la planète dues à l'aplatissement de la planète ;
- Les précessions du périhélie de l'orbite planétaire et de l'axe de rotation de l'étoile dues à l'aplatissement de l'étoile.

Un des points critiques de ce modèle est la façon dont on représente le mécanisme de dissipation de l'énergie dû à la marée à l'intérieur des corps étendus. Nous adopterons la méthode de Mignard (1979), reprise notamment par Neron de Surgy et Laskar (1997) et Correia et al. (2003). Cette approche consiste à considérer que la réponse d'un corps étendu au potentiel de marée d'un perturbateur est linéaire et retardée d'un temps  $\Delta t$  petit, puis à développer le potentiel résultant au premier ordre en  $\Delta t$ . Les travaux de Eggleton et al. (1998) sur lesquels sont basées les études existantes sur HD 80606b (Wu et Murray, 2003; Fabrycky et Tremaine, 2007), aboutissent au même modèle par un autre moyen : ils supposent que la variation de l'énergie totale du corps étendu (orbitale et rotationnelle) est directement proportionnelle à la variation de forme du corps, représentée à l'ordre le plus bas par la variation du tenseur d'inertie quadripolaire. Leur approche conduit également à un temps de réponse constant pour la marée (Eggleton et al., 1998, section 3).

Cette hypothèse simplificatrice correspond à un modèle de marée d'équilibre, un régime dans lequel l'évolution orbitale se fait suffisamment lentement pour que les déformations des corps étendus correspondent à chaque instant à des déformations statiques. Afin d'obtenir un modèle de dissipation plus réaliste, il faut intégrer les équations de l'hydrodynamique à l'intérieur des corps et les coupler avec l'évolution orbitale du système afin d'obtenir un modèle de marée dynamique. La mise en oeuvre numérique de ces modèles les limite pour l'instant à des situations très particulières : typiquement avec un perturbateur qui évolue sur une orbite circulaire dans le plan de l'équateur rotationnel du corps étendu, et en faisant des hypothèses simplificatrices sur la rotation différentielle du corps déformé (Terquem et al., 1998; Ogilvie et Lin, 2004; Wu, 2005; Ogilvie et Lin, 2007; Goodman et Lackner, 2009). L'évolution orbitale complexe qui est supposée à l'oeuvre dans le système HD 80606, notamment du fait de la forte excentricité de la planète et du non-alignement entre son moment cinétique orbital et l'axe de rotation stellaire, fait de ce système un candidat particulièrement difficile pour les modèles de marée dynamique.

Nous essayerons néanmoins de clarifier les conditions initiales des études précédentes sur HD 80606 afin de proposer une façon d'approfondir et de raffiner le modèle existant.

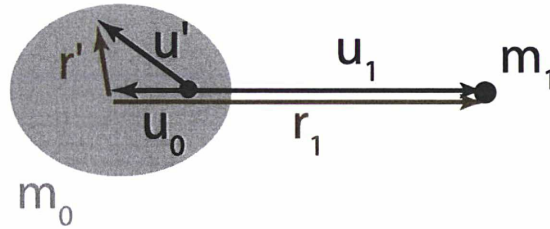


FIGURE 4.1: Coordonnées barycentriques ( $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}'$ ) de la primaire, du perturbateur et du point de calcul de l'intégration de marées, et coordonnées relatives à la primaire ( $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}'$ ).

## 4.2 Effets dus à l'étendue des corps

### 4.2.1 Marées

#### Potentiel de marée instantanée

Le but de cette section est d'expliquer comment un corps perturbateur de masse  $m_1$  lève une marée sur un corps étendu de masse  $m_0$  et de rayon  $R_0$ , et de calculer le potentiel qui résulte de la déformation du corps étendu en un point quelconque de l'espace.

Pour ce faire, on considère le mouvement d'une particule test située à l'intérieur ou à la surface du corps étendu, repérée par rapport au barycentre des deux masses  $m_0$  et  $m_1$  par  $\mathbf{u}'$ , et par rapport au corps étendu  $m_0$  par le vecteur  $\mathbf{r}'$ . De même, ( $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_1$ ) sont les positions barycentriques de  $m_0$  et  $m_1$  et  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$  repère  $m_1$  par rapport à  $m_0$  (figure 4.1). La partie de l'accélération subie par la particule test qui est due au perturbateur  $m_1$  est :

$$\ddot{\mathbf{u}}'|_1 = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1|^3}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_1) = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1). \quad (4.1)$$

La primaire étendue est de même soumise à l'attraction de  $m_1$  :

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \frac{Gm_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1. \quad (4.2)$$

La partie de l'accélération de la particule relativement à la primaire  $m_0$  et due au perturbateur  $m_1$  est donc :

$$\ddot{\mathbf{r}}'|_1 = \ddot{\mathbf{u}}'|_1 - \ddot{\mathbf{u}}_0 = -Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) = -\nabla_{\mathbf{r}'} V_1, \quad (4.3)$$

avec :

$$V_1 = -Gm_1 \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right). \quad (4.4)$$

La particule test se trouvant à l'intérieur de la primaire  $m_0$ , on a  $r' < r_1$ , et ce potentiel peut se développer formellement en série de puissances du rapport  $r'/r_1$  de façon classique, en utilisant les polynômes de Legendre :

$$V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -\frac{Gm_1}{r_1} \left( \sum_{l \geq 0} \left( \frac{r'}{r_1} \right)^l P_l \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r' \cdot r_1} \right) - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^2} \right). \quad (4.5)$$

Le terme  $l = 0$  du développement formel ne dépend pas de  $\mathbf{r}'$ , et nous pouvons donc l'ignorer dans le potentiel. De plus, le terme  $l = 1$  vaut  $(r'/r_1)P_1(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1 / r' \cdot r_1) = (r'/r_1) \cdot (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1 / r' \cdot r_1) = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1 / r_1^2$ , et annule ainsi le dernier terme de  $V_1$ . On trouve alors l'expression classique du potentiel dû à un perturbateur, à une position  $\mathbf{r}'$  du centre d'un corps perturbé, avec  $r' < r_1$  (Kaula, 1964) :

$$V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -\frac{Gm_1}{r_1} \sum_{l \geq 2} \left( \frac{r'}{r_1} \right)^l P_l \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r' \cdot r_1} \right). \quad (4.6)$$

Si l'on suppose de plus que le perturbateur est loin par rapport au rayon de la primaire noté  $R_0$ , on peut ne garder que le premier terme de ce développement, à savoir :

$$V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \approx -\frac{Gm_1}{r_1} \left( \frac{r'}{r_1} \right)^2 P_2 \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r' \cdot r_1} \right). \quad (4.7)$$

La planète répond à ce potentiel perturbateur en se déformant. En première approximation, et lorsque les contraintes mécaniques internes ne sont pas trop fortes (Efroimsky et Williams (2009) citent une limite de  $10^{-6}$ ), la déformation donne lieu à un potentiel supplémentaire  $U_t$  à l'intérieur de la primaire qui est proportionnel au potentiel perturbateur<sup>2</sup> :

2. Si l'on garde l'expression complète du potentiel perturbateur 4.6, le potentiel dû à la déformation de la primaire est une somme d'harmoniques dont chacune est proportionnelle à l'harmonique perturbatrice

$$U_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -k_{2,0} \frac{Gm_1}{r_1} \left( \frac{r'}{r_1} \right)^2 P_2 \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r' r_1} \right), \quad \text{à l'intérieur et jusqu'à la surface de la primaire.} \quad (4.9)$$

Le coefficient de proportionnalité  $k_{2,0}$  s'appelle *deuxième nombre de Love du potentiel de la primaire*.

Le potentiel  $U_t$  est une harmonique sphérique de degré 2 : pour satisfaire l'équation de Laplace dans le vide, il doit donc être proportionnel à  $r'^{-2-1}$  en dehors de la primaire :  $U_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \propto P_2(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1 / r' r_1) / r'^3$ . Par continuité entre les expressions à l'intérieur et à l'extérieur de la primaire, on obtient le coefficient de proportionnalité, et on peut écrire le potentiel à l'extérieur de la primaire (Kaula, 1964; Mignard, 1979; Neron de Surgy et Laskar, 1997) :

$$U_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -k_{2,0} \frac{Gm_1 R_0^5}{r_1^3 r'^3} P_2 \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r' r_1} \right), \quad \text{à l'extérieur de la primaire.} \quad (4.10)$$

### Dissipation et potentiel retardé

Le potentiel de marée (4.10) correspond à une primaire parfaitement élastique, qui réagit instantanément aux déformations causées par la marée du perturbateur  $m_1$ . L'inélasticité de la primaire se traduit par la dissipation de l'énergie orbitale à l'intérieur de la primaire, ainsi que par un retard  $(\Delta t)_0$  dans la déformation<sup>3</sup>. Ce temps de retard est un petit paramètre qui permet d'effectuer un développement au premier ordre. Pendant cet intervalle de temps, la primaire tourne donc d'un angle  $\omega_0(\Delta t)_0$  (son vecteur rotation instantanée est noté  $\omega_0$ ). De plus, le perturbateur  $m_1$  se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1$ . Le point de calcul du potentiel quant à lui ne change pas. Suivant Mignard (1979), Neron de Surgy et Laskar (1997), et Correia et al. (2003), on considère donc que le potentiel de marée est donné par l'expression retardée suivante :

$$U_{t,r}(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}') = U_t[\mathbf{r}_1(t - (\Delta t)_0) + (\Delta t)_0 \omega_0 \wedge \mathbf{r}_1(t - (\Delta t)_0), \mathbf{r}'] , \quad (4.11)$$

avec au premier ordre en  $(\Delta t)_0$  :

correspondante :

$$U_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -\frac{Gm_1}{r_1} \sum_{l \geq 2} k_{l,0} \left( \frac{r'}{r_1} \right)^l P_l \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1}{r' r_1} \right) . \quad (4.8)$$

3. Si l'on développe le potentiel de marée de manière à faire apparaître les combinaisons des angles du problème, on peut introduire des retards différents pour chaque combinaison linéaire – ou de manière équivalente chaque fréquence. Ici, nous suivons Mignard (1979) et Neron de Surgy et Laskar (1997) en supposant que tous ces retards sont égaux. Pour une discussion détaillée, voir (Kaula, 1964; Efroimsky et Williams, 2009).

$$U_{t,r}(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}') = U_t[\mathbf{r}_1(t) + (\Delta t)_0(\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{v}_1(t)), \mathbf{r}'] . \quad (4.12)$$

Si l'on développe maintenant l'expression (4.12) au premier ordre dans le retard de marée, à l'aide de (4.10), on obtient l'expression suivante pour le potentiel de marée, que l'on notera désormais  $U_T$  (Mignard, 1979; Neron de Surgy et Laskar, 1997; Correia et al., 2003) :

$$U_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -k_{2,0} \frac{Gm_1 R_0^5}{r_1^3 r'^3} P_2 \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}'}{r_1 r'} \right) - (\Delta t)_0 \frac{3k_{2,0} Gm_1 R_0^5}{r_1^5 r'^5} \left\{ (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}') [\mathbf{r}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{r}_1) - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}_1] + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1}{2r_1^2} [5(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}')^2 - r_1^2 r'^2] \right\} \quad (4.13)$$

On notera de plus  $U_T = U_{T,0} + U_{T,1}$ , où les indices font référence à l'ordre en  $(\Delta t)_0$ .

### Forces de marée

S'il se trouve un corps de masse  $m'$  à la position  $\mathbf{r}'$ , la force subie par ce corps due à la marée levée sur le corps étendu par le corps perturbateur est :

$$\mathbf{F}_T = -m' \nabla_{\mathbf{r}'} U_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = \mathbf{F}_{T,0} + \mathbf{F}_{T,1} . \quad (4.14)$$

Ici,  $\mathbf{F}_{T,0}$  et  $\mathbf{F}_{T,1}$  correspondent respectivement à  $U_{T,0}$  et  $U_{T,1}$ . Si on suppose après le calcul du gradient que le corps qui subit la force due à la marée levée sur le corps étendu est le perturbateur  $m_1$  lui-même, on obtient :

$$\mathbf{F}_{T,0}^{(\rightarrow 1)} = -3k_{2,0} \frac{Gm_1^2 R_0^5}{r_1^8} \mathbf{r}_1 ; \quad (4.15)$$

$$\mathbf{F}_{T,1}^{(\rightarrow 1)} = -3(\Delta t)_0 k_{2,0} \frac{Gm_1^2 R_0^5}{r_1^8} \left[ 2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1}{r_1^2} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{v}_1 \right] . \quad (4.16)$$

### 4.2.2 Aplatissement

La primaire étendue  $m_0$  peut se déformer non-seulement sous l'effet de la marée levée sur elle par le perturbateur  $m_1$ , mais également sous l'effet de sa propre rotation. Lorsque ces deux effets sont suffisamment faibles, on peut les calculer séparément et négliger leurs interactions

éventuelles. On ne va calculer que les effets d'ordre le plus bas, et considérer que la primaire reste symétrique de révolution.

Le potentiel gravitationnel d'un corps non-sphérique mais symétrique de révolution et de rayon moyen  $R_0$ , à une distance  $r'$  de son centre et en un point dont la colatitude est  $\theta'$ , est donné par :

$$U_g(\mathbf{r}') = -\frac{Gm_0}{r'} \left( 1 - \sum_{l \geq 2} J_l \left( \frac{R_0}{r'} \right)^l P_l(\cos \theta') \right) . \quad (4.17)$$

De ce développement, nous ne garderons que le terme d'ordre 2,

$$U_{g,2}(\mathbf{r}') = \frac{Gm_0}{r'} J_2 \left( \frac{R_0}{r'} \right)^2 P_2(\cos \theta') . \quad (4.18)$$

A cet ordre, la déformation de la primaire est entièrement caractérisée par le coefficient  $J_2$  et par son orientation, c'est-à-dire la direction de l'origine des colatitudes.

### Aplatissement dû à la marée

Pour calculer le  $J_{2,T}$  dû à la marée, on se place dans la situation idéalisée où le perturbateur reste fixe par rapport au corps étendu. La marée consiste alors en un bourrelet dirigé vers le perturbateur, et son potentiel est décrit par l'expression instantanée (4.10). On comptera donc les colatitudes  $\theta'$  dans ce paragraphe à partir de la normale à la direction du perturbateur (voir figure 4.2 a). Dans cette situation, on a  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1 / r' r_1 = \sin \theta'$ . Or,  $P_2(\cos \theta') + P_2(\sin \theta') = 1/2$ , et donc l'égalité entre la dépendance angulaire du potentiel de marée instantané et la dépendance angulaire du potentiel gravitationnel de la planète s'écrit :

$$k_{2,0} \frac{Gm_1 R_0^5}{r_1^3 r'^3} P_2(\cos \theta') = \frac{Gm_0}{r'} J_{2,T} \left( \frac{R_0}{r'} \right)^2 P_2(\cos \theta') . \quad (4.19)$$

On trouve ainsi à l'ordre le plus bas :

$$J_{2,T} = k_{2,0} \left( \frac{m_1}{m_0} \right) \left( \frac{R_0}{r_1} \right)^3 . \quad (4.20)$$



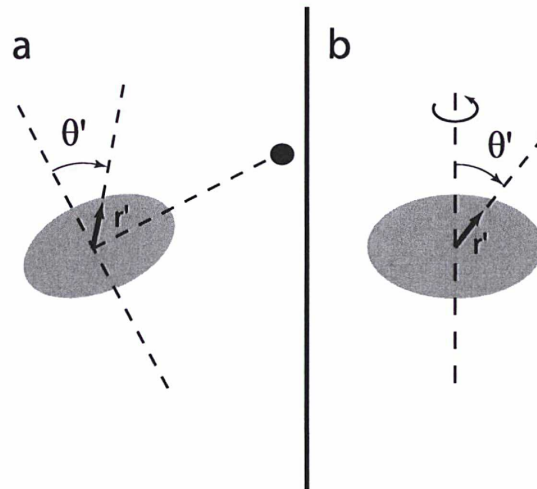


FIGURE 4.2: a : Convention de latitude pour le calcul de la déformation de marée à partir de la normale à l'orbite du perturbateur. b : Convention de latitude pour le calcul de la déformation rotationnelle à partir du pôle rotationnel de la primaire.

### Aplatissement rotationnel

La rotation propre d'un corps solide le déforme selon les mêmes principes que ceux qui ont été exposés pour les marées : le potentiel centrifuge lié à la rotation propre engendre une réponse de la part du corps en rotation, et une première approximation consiste à traiter cette réponse de manière linéaire en utilisant à nouveau le nombre de Love  $k_{2,0}$  (Love, 1927; Alexander, 1973; Yoder, 1995).

On considère que l'état de rotation du corps étendu est la rotation solide. Dans ce cas, la déformation consiste en un bourrelet orthogonal au vecteur rotation  $\omega_0$  du corps. On comptera donc dans ce paragraphe les colatitudes  $\theta'$  à partir du pôle rotationnel de la primaire (figure 4.2 b). Notons que les colatitudes définies dans le paragraphe précédent ne coïncident avec celles du présent paragraphe que dans le cas où l'axe de rotation de la primaire est colinéaire au moment cinétique orbital du perturbateur.

Avec ces conventions, le potentiel dû à la rotation à l'intérieur de la primaire est donné en un point repéré par rapport au centre du corps par le vecteur  $\mathbf{r}'$  et par la colatitude  $\theta'$ , par le potentiel centrifuge :

$$U_R(\mathbf{r}') = -\frac{\omega_0^2 r'^2}{2}(1 - \cos^2 \theta') = -\frac{1}{3}\omega_0^2 r'^2(1 - P_2(\cos \theta')) . \quad (4.21)$$

La partie purement radiale ne contribue pas à l'aplatissement du solide. En revanche, le second terme est une harmonique sphérique d'ordre deux dans l'intérieur de la primaire. La réponse de la primaire dans son intérieur consiste en une harmonique de même ordre qui lui

est proportionnelle (Love, 1927, paragraphe 179),

$$k_{2,0} \frac{1}{3} \omega_0^2 r'^2 P_2(\cos \theta') . \quad (4.22)$$

La continuité au niveau de la surface de la primaire entre cette réponse interne et l'expression du potentiel (4.18) valable à l'extérieur de la primaire permet alors d'écrire :

$$\frac{Gm_0}{R_0} J_{2,R} P_2(\cos \theta') = k_{2,0} \frac{1}{3} \omega_0^2 R_0^2 P_2(\cos \theta') . \quad (4.23)$$

On en déduit finalement la valeur du coefficient  $J_{2,R}$  (Dermott et al., 1988; Yoder, 1995) :

$$J_{2,R} = \frac{1}{3} k_{2,0} \frac{\omega_0^2 R_0^3}{Gm_0} . \quad (4.24)$$

### Importance relative des deux effets

Rappelons tout d'abord qu'en général, le plan orbital du perturbateur n'est pas nécessairement confondu avec l'équateur rotationnel de la primaire, même si c'est le cas à la fin de l'évolution du système et lorsque l'équilibre est atteint (Hut, 1981). On peut cependant comparer  $J_{2,R}$  et  $J_{2,T}$  pour estimer leur importance relative :

$$\frac{J_{2,T}}{J_{2,R}} = \frac{3Gm_1}{\omega_0^2 r_1^3} . \quad (4.25)$$

Le cas de HD 80606 que nous souhaitons modéliser ici fait interagir une planète d'environ  $3.9M_{\text{Jup}}$  avec une étoile de type solaire (Naef et al., 2001). Si l'on prend pour les autres paramètres des valeurs typiques du système Soleil – Jupiter, en plaçant initialement la planète à 5 unités astronomiques de son étoile, on trouve les rapports suivants :

$$\left( \frac{J_{2,T}}{J_{2,R}} \right)_{\text{planète}} \approx 4.10^{-8} , \quad \left( \frac{J_{2,T}}{J_{2,R}} \right)_{\text{étoile}} \approx 4.10^{-7} . \quad (4.26)$$

Ainsi, aussi bien pour l'étoile que pour la planète, on peut négliger la déformation due à la marée par rapport à celle qui est due à la rotation, au moins dans la configuration initiale.

### Force due à l'aplatissement rotationnel

Le bourrelet rotationnel quadripolaire crée une force en plus du terme Newtonien. Dans le cas rotationnel, l'angle  $\theta'$  qui apparaît dans l'expression du potentiel (4.18) est comme nous l'avons dit l'angle entre la direction du vecteur rotation de la primaire et la direction du point où l'on évalue le potentiel. En tenant compte de cela et de l'expression (4.24), le potentiel dû à l'aplatissement rotationnel en un point  $\mathbf{r}'$  est donné par :

$$U_P(\mathbf{r}') = \frac{1}{3} k_{2,0} \frac{\omega_0^2 R_0^3}{r'} \left( \frac{R_0}{r'} \right)^2 P_2 \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega}_0}{r' \omega_0} \right). \quad (4.27)$$

On en déduit la force qui s'exerce sur un objet ponctuel de masse  $m_1$  situé à la distance  $r_1$ ,  $\mathbf{F}_P^{(\rightarrow 1)} = -m_1 \nabla_{\mathbf{r}_1} U_P(\mathbf{r}_1)$  :

$$\mathbf{F}_P^{(\rightarrow 1)} = -m_1 k_{2,0} \frac{R_0^5}{2r_1^5} \left[ 2(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{r}_1) \boldsymbol{\omega}_0 + \left( \omega_0^2 - 5 \frac{(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{r}_1)^2}{r_1^2} \right) \mathbf{r}_1 \right]. \quad (4.28)$$

## 4.3 Equations séculaires du mouvement

Maintenant que nous avons exposé les modèles que nous utilisons pour les effets dus à l'extension des corps, il nous faut mettre en place les équations du mouvement séculaire du système formé par HD 80606b, son étoile hôte, et l'étoile compagnon lointaine. Pour ce faire, nous utilisons de nouveau une technique de moyennisation issue du travail de Boué et Laskar (2006).

L'étoile centrale aura pour indice 0, la planète l'indice 1, et l'étoile lointaine l'indice 2. On repère la planète par rapport à l'étoile qu'elle orbite par  $\mathbf{r}_1$  et on repère l'autre étoile par rapport au centre de gravité de la planète et de la première étoile par  $\mathbf{r}_2$ . Les demi-grands axes associés sont  $a_1$  et  $a_2$  et l'on suppose que  $a_1 \ll a_2$ .

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, nous prenons en compte à la fois les effets de marée et d'aplatissement dus à l'étoile centrale et à la planète. Nous considérerons ici que l'étoile est ponctuelle lorsqu'elle lève une marée sur la planète, et réciproquement que la planète est ponctuelle lorsqu'elle lève une marée sur l'étoile. D'après Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009), qui développent une théorie complète des interactions entre deux corps déformés dans un formalisme tensoriel inspiré par la relativité générale, la limite au-delà de laquelle il faut considérer l'interaction entre les moments quadripolaires des corps correspond à des valeurs de  $J_2$  supérieures à  $10^{-2}$  pour des séparations inférieures à 5 rayons des corps en interactions. Nous discuterons de ces conditions après avoir présenté les résultats de nos simulations.

### 4.3.1 Interactions de marées séculaires

La force subie par la planète lorsqu'elle lève une marée sur l'étoile est donnée par les expressions (4.15) et (4.16). De même, la force subie par l'étoile lorsqu'elle lève une marée sur la planète est :

$$\mathbf{F}_{T,0}^{(\rightarrow 0)} = -3k_{2,1} \frac{Gm_0^2 R_1^5}{r_1^8} (-\mathbf{r}_1) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{F}_{T,1}^{(\rightarrow 0)} = -3(\Delta t)_1 k_{2,1} \frac{Gm_0^2 R_1^5}{r_1^8} \left[ 2 \frac{(-\mathbf{r}_1) \cdot (-\mathbf{v}_1)}{r_1^2} (-\mathbf{r}_1) + (-\mathbf{r}_1) \wedge \boldsymbol{\omega}_1 + (-\mathbf{v}_1) \right] \quad (4.30)$$

Ainsi, d'après le principe des actions réciproques, la planète subit une force opposée et d'égale magnitude, si bien que la force de marée totale subie par la planète est :

$$\mathbf{F}_{T,0} = \mathbf{F}_{T,0}^{(\rightarrow 1)} - \mathbf{F}_{T,0}^{(\rightarrow 0)} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{F}_{T,1} = \mathbf{F}_{T,1}^{(\rightarrow 1)} - \mathbf{F}_{T,1}^{(\rightarrow 0)} . \quad (4.32)$$

Le moment cinétique orbital de la planète, noté  $\mathbf{G}_1$  varie sous l'effet du couple de cette force :

$$\dot{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge (\mathbf{F}_{T,0} + \mathbf{F}_{T,1}) = \boldsymbol{\Gamma}_T \quad (4.33)$$

Le vecteur de Laplace, qu'on a déjà appelé  $\mathcal{I}_1$  varie selon l'équation :

$$\mu_1 \beta_1^2 \dot{\mathcal{I}}_1 = (\mathbf{F}_{T,0} + \mathbf{F}_{T,1}) \wedge \mathbf{G}_1 + \beta_1 \dot{\mathbf{r}}_1 \wedge \boldsymbol{\Gamma}_T . \quad (4.34)$$

Enfin, la partie dissipative de la force de marée crée une variation de l'énergie orbitale  $E_1$  de la planète, et donc de son demi-grand axe. L'expression  $E_1 = -\mu_1 \beta_1 / 2a_1$  implique une variation du demi-grand axe selon  $\dot{a}_1 / a_1 = -\dot{E}_1 / E_1$ , soit :

$$\dot{a}_1 = \frac{2a_1^2}{\mu_1 \beta_1} [(\mathbf{F}_{T,0} + \mathbf{F}_{T,1}) \cdot \mathbf{v}_1] . \quad (4.35)$$

Afin d'obtenir les évolutions séculaires du moment cinétique, du vecteur de Laplace et du demi-grand axe, on moyennise maintenant les trois équations précédentes par rapport à l'anomalie moyenne  $M_1$  de la planète. On considère comme précédemment que  $\mathbf{i}_1$  est un

vecteur unitaire colinéaire au vecteur de Laplace de l'orbite de la planète,  $\mathbf{k}_1$  est un vecteur unitaire colinéaire au moment cinétique orbital de la planète et que  $\mathbf{j}_1 = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{i}_1$ .

Le résultat est donné par une somme de deux termes correspondant respectivement aux marées levées par la planète sur l'étoile, et aux marées levées par l'étoile sur la planète. Les deux termes ont la même forme, il suffit d'échanger les indices dans les quantités  $m$ ,  $k_2$ ,  $\Delta t$ ,  $R$ ,  $\omega$ . Le terme d'évolution du moment cinétique orbital dû à la marée levée par l'étoile sur la planète est :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle = & \frac{3(\Delta t)_1 k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^6 (1 - e_1^2)^{9/2}} \left\{ \right. \\ & \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{1}{16} e_1^4 \right) (\omega_1 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{9}{4} e_1^2 + \frac{5}{12} e_1^4 \right) (\omega_1 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 \\ & \left. - \left( \frac{1 + 15e_1^2/2 + 45e_1^4/8 + 5e_1^6/16}{(1 - e_1^2)^{3/2}} n_1 - (1 + 3e_1^2 + 3e_1^4/8) (\omega_1 \cdot \mathbf{k}_1) \right) \mathbf{k}_1 \right\} \quad (4.36) \end{aligned}$$

En utilisant la relation  $\omega_1 = (\omega_1 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\omega_1 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1 + (\omega_1 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1$  pour éliminer le terme  $(\omega_1 \cdot \mathbf{j}_1) \mathbf{j}_1$  (ceci afin de se limiter aux deux directions du vecteur de Laplace et du moment cinétique), on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle = & \frac{3(\Delta t)_1 k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^6 (1 - e_1^2)^{9/2}} \left\{ \right. \\ & - \left( \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{1}{4} e_1^4 \right) (\omega_1 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{1}{16} e_1^4 \right) (\omega_1 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 + \\ & \left. (1/2 + 9e_1^2/4 + 5e_1^4/16) \omega_1 - \frac{1 + 15e_1^2/2 + 45e_1^4/8 + 5e_1^6/16}{(1 - e_1^2)^{3/2}} n_1 \mathbf{k}_1 \right\} \quad (4.37) \end{aligned}$$

On substitue maintenant  $\mathcal{I}_1 = e_1 \mathbf{i}_1$  et  $\mathcal{K}_1 = \sqrt{1 - e_1^2} \mathbf{k}_1 = \mathbf{G}_1 / \Lambda_1$  :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle = & - \frac{3(\Delta t)_1 k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^6 (1 - e_1^2)^{9/2}} \left\{ (3/2 + e_1^2/4) (\omega_1 \cdot \mathcal{I}_1) \mathcal{I}_1 - (1/2 + 9e_1^2/4 + 5e_1^4/16) \omega_1 \right. \\ & \left. - \left( \frac{(1/2 + 3e_1^2/4 + e_1^4/16)}{(1 - e_1^2)} (\omega_1 \cdot \mathcal{K}_1) - \frac{1 + 15e_1^2/2 + 45e_1^4/8 + 5e_1^6/16}{(1 - e_1^2)^2} n_1 \right) \mathcal{K}_1 \right\} \quad (4.38) \end{aligned}$$

Le terme analogue dû à la marée levée par la planète sur l'étoile,  $\Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle$  est donné dans la table récapitulative 4.2, équation (4.70).

L'interaction de marée instaure des transferts entre le moment cinétique orbital du perturbateur et le moment cinétique du corps étendu sur lequel la marée est levée, si bien que le moment cinétique total est conservé. En notant  $I_0$  et  $I_1$  les moments d'inertie de l'étoile centrale et de la planète par rapport à leur axe de rotation, et en se plaçant dans l'approximation gyroscopique où le moment cinétique rotationnel est colinéaire au vecteur rotation, on peut finalement récapituler l'action des termes séculaires de marée par :

$$\Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1 \rangle_{\text{marée}} = \Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle + \Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle \quad (4.39)$$

$$I_0 \langle \dot{\omega}_0 \rangle_{\text{marée}} = -\Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle \quad (4.40)$$

$$I_1 \langle \dot{\omega}_1 \rangle_{\text{marée}} = -\Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle \quad (4.41)$$

Il faut maintenant appliquer la même procédure de moyennisation sur  $M_1$  à l'équation (4.34). Ici encore, un terme est dû à la marée levée sur l'étoile par la planète et un autre est dû à la marée levée sur la planète par l'étoile. Pour ce dernier on a après moyennisation :

$$\begin{aligned} \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle = & \frac{n_1 e_1 \beta_1 3k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^5} \left\{ \right. \\ & \frac{5(1 + 3e_1^2/2 + e_1^4/8)}{2(1 - e_1^2)^5} \mathbf{j}_1 - (\Delta t)_1 \frac{(1 + 3e_1^2/2 + e_1^4/8)}{2(1 - e_1^2)^5} (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_1) \mathbf{k}_1 \\ & \left. - 9(\Delta t)_1 \left( \frac{(1 + 15e_1^2/4 + 15e_1^4/8 + 5e_1^6/64)n_1}{(1 - e_1^2)^{13/2}} - \frac{11}{18} \frac{1 + 3e_1^2/2 + e_1^4/8}{(1 - e_1^2)^5} (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1) \right) \mathbf{i}_1 \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

En substituant  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{K}_1$  et en écrivant que  $\mathbf{j}_1 = (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1)/(e_1 \sqrt{1 - e_1^2})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle = & \frac{n_1 \beta_1 3k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^5} \left\{ \right. \\ & \frac{5(1 + 3e_1^2/2 + e_1^4/8)}{2(1 - e_1^2)^{11/2}} (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1) - (\Delta t)_1 \frac{(1 + 3e_1^2/2 + e_1^4/8)}{2(1 - e_1^2)^{11/2}} (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{I}_1) \mathcal{K}_1 \\ & \left. - 9(\Delta t)_1 \left( \frac{(1 + 15e_1^2/4 + 15e_1^4/8 + 5e_1^6/64)n_1}{(1 - e_1^2)^{13/2}} - \frac{11}{18} \frac{1 + 3e_1^2/2 + e_1^4/8}{(1 - e_1^2)^{11/2}} (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{K}_1) \right) \mathcal{I}_1 \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Le terme analogue dû à la marée levée sur l'étoile par la planète,  $\mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle$  est présenté dans la table récapitulative 4.1, comme la somme d'un terme instantané (4.62) et d'un terme retardé (4.63). La variation totale du vecteur de Laplace est alors donnée par :

$$\mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{L}}_1 \rangle_{\text{marée}} = \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{L}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle + \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{L}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle \quad (4.44)$$

Enfin, la variation séculaire du demi-grand axe planétaire s'obtient en moyennisant la relation (4.35). Comme pour le vecteur de Laplace et le moment cinétique, la dissipation dans l'étoile et la dissipation dans la planète contribuent chacune pour un terme :

$$\langle \dot{a}_1^{\rightarrow 0} \rangle = 6k_{2,1}(\Delta t)_1 \frac{Gm_0^2 R_1^5}{\mu_1 \beta_1 a_1^4 (1 - e_1^2)^{13/2}} n_1^2 \left( (1 + 15e_1^2/2 + 45e_1^4/8 + 5e_1^6/16) \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{K}_1}{n_1} - \frac{1 + 31e_1^2/2 + 255e_1^4/8 + 185e_1^6/16 + 25e_1^8/64}{1 - e_1^2} \right); \quad (4.45)$$

$$\langle \dot{a}_1^{\rightarrow 1} \rangle = 6k_{2,0}(\Delta t)_0 \frac{Gm_1^2 R_0^5}{\mu_1 \beta_1 a_1^4 (1 - e_1^2)^{13/2}} n_1^2 \left( (1 + 15e_1^2/2 + 45e_1^4/8 + 5e_1^6/16) \frac{\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathcal{K}_1}{n_1} - \frac{1 + 31e_1^2/2 + 255e_1^4/8 + 185e_1^6/16 + 25e_1^8/64}{1 - e_1^2} \right); \quad (4.46)$$

$$\langle \dot{a}_1 \rangle_{\text{marée}} = \langle \dot{a}_1^{\rightarrow 0} \rangle + \langle \dot{a}_1^{\rightarrow 1} \rangle. \quad (4.47)$$

### 4.3.2 Effets séculaires de l'aplatissement rotationnel des corps

La force subie par la planète du fait de l'aplatissement rotationnel de l'étoile est donnée par l'expression (4.28). De même, la force subie par l'étoile du fait de l'aplatissement rotationnel de la planète est :

$$\mathbf{F}_P^{(\rightarrow 0)} = -m_0 k_{2,1} \frac{R_1^5}{2r_1^5} \left[ 2(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (-\mathbf{r}_1))\boldsymbol{\omega}_1 + \left( \omega_1^2 - 5 \frac{(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (-\mathbf{r}_1))^2}{r_1^2} \right) (-\mathbf{r}_1) \right]. \quad (4.48)$$

D'après le principe des actions réciproques, la planète subit une force opposée et d'égale magnitude, si bien que la force totale subie par la planète dûe à l'aplatissement des deux corps est :

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{F}_P^{(\rightarrow 1)} - \mathbf{F}_P^{(\rightarrow 0)} \quad (4.49)$$

L'évolution résultante du moment cinétique orbital et du vecteur de Laplace de la planète est donnée par :

$$\dot{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_P = \boldsymbol{\Gamma}_P; \quad (4.50)$$

$$\mu_1 \beta_1^2 \dot{\mathcal{L}}_1 = \mathbf{F}_P \wedge \mathbf{G}_1 + \beta_1 \dot{\mathbf{r}}_1 \wedge \boldsymbol{\Gamma}_P. \quad (4.51)$$

En moyennisant les deux équations d'évolution du moment cinétique (4.50) et du vecteur de Laplace (4.51) sur l'anomalie moyenne de la planète on trouve pour les termes dus respectivement à l'aplatissement de l'étoile et à celui de la planète :

$$\begin{aligned}\langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle &= \frac{k_{2,0}}{2} \frac{m_1 R_0^5}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} ((\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{i}_1)(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1)\mathbf{j}_1 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{j}_1)(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1)\mathbf{i}_1) \quad (4.52) \\ \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle &= \frac{k_{2,0}}{2} \frac{n_1 e_1 m_1 \beta_1 R_0^5}{a_1^2 (1 - e_1^2)^2} \left( \frac{2(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{i}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{j}_1)^2}{2} \mathbf{j}_1 \right. \\ &\quad \left. + (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{j}_1)(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1)\mathbf{k}_1 \right) \quad (4.53)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle &= \frac{k_{2,1}}{2} \frac{m_0 R_1^5}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} ((\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_1)(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1)\mathbf{j}_1 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{j}_1)(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1)\mathbf{i}_1) \quad (4.54) \\ \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle &= \frac{k_{2,1}}{2} \frac{n_1 e_1 m_0 \beta_1 R_1^5}{a_1^2 (1 - e_1^2)^2} \left( \frac{2(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{j}_1)^2}{2} \mathbf{j}_1 \right. \\ &\quad \left. + (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{j}_1)(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1)\mathbf{k}_1 \right) \quad (4.55)\end{aligned}$$

Contrairement aux forces de marée, il n'y a cette fois pas de dissipation de l'énergie orbitale. En revanche, il y a toujours un transfert entre le moment cinétique orbital et les moments cinétiques rotationnels : l'interaction entre le bourrelet rotationnel de l'étoile et la planète considérée comme ponctuelle crée un transfert entre le moment cinétique orbital et le moment cinétique rotationnel de l'étoile. De même, l'interaction entre le bourrelet rotationnel de la planète et l'étoile considérée comme ponctuelle crée un transfert entre le moment cinétique orbital et le moment cinétique rotationnel de la planète.

Pour récapituler, les équations du mouvement sous l'influence des deux aplatissements sont :

$$\langle \dot{\mathbf{G}}_1 \rangle_{\text{aplat.}} = \langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle + \langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle \quad (4.56)$$

$$I_0 \langle \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \rangle_{\text{aplat.}} = - \langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle \quad (4.57)$$

$$I_1 \langle \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \rangle_{\text{aplat.}} = - \langle \dot{\mathbf{G}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle \quad (4.58)$$

$$\mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1 \rangle_{\text{aplat.}} = \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 1)} \rangle + \mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1^{(\rightarrow 0)} \rangle \quad (4.59)$$

### 4.3.3 Interaction quadripolaire avec le compagnon lointain

On modélise l'interaction entre le compagnon lointain et le système formé par l'étoile centrale et sa planète par le Hamiltonien quadripolaire et séculaire non restreint (voir chapitre 3).



TABLE 4.1: Contributions à l'évolution du vecteur de Laplace de l'orbite planétaire.

Marée levée par le corps d'indice 0 sur le corps d'indice 1

Terme instantané :

$$\frac{15}{2} \frac{n_1 \beta_1 k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^5 (1 - e_1^2)^{11/2}} \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{1}{8} e_1^4 \right) (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1) \quad (4.60)$$

Terme retardé :

$$\begin{aligned} & -3(\Delta t)_1 \frac{n_1 \beta_1 k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^5 (1 - e_1^2)^{11/2}} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{1}{16} e_1^4 \right) (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{I}_1) \mathcal{K}_1 \right. \\ & \left. + 9 \left[ \left( 1 + \frac{15}{4} e_1^2 + \frac{15}{8} e_1^4 + \frac{5}{64} e_1^6 \right) \frac{n_1}{(1 - e_1^2)} - \frac{11}{18} \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{1}{8} e_1^4 \right) (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{K}_1) \right] \mathcal{I}_1 \right\} \quad (4.61) \end{aligned}$$

Marée levée par le corps d'indice 1 sur le corps d'indice 0

Terme instantané :

$$\frac{15}{2} \frac{n_1 \beta_1 k_{2,0} G m_1^2 R_0^5}{a_1^5 (1 - e_1^2)^{11/2}} \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{1}{8} e_1^4 \right) (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1) \quad (4.62)$$

Terme retardé :

$$\begin{aligned} & -3(\Delta t)_0 \frac{n_1 \beta_1 k_{2,0} G m_1^2 R_0^5}{a_1^5 (1 - e_1^2)^{11/2}} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{1}{16} e_1^4 \right) (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathcal{I}_1) \mathcal{K}_1 \right. \\ & \left. + 9 \left[ \left( 1 + \frac{15}{4} e_1^2 + \frac{15}{8} e_1^4 + \frac{5}{64} e_1^6 \right) \frac{n_1}{(1 - e_1^2)} - \frac{11}{18} \left( 1 + \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{1}{8} e_1^4 \right) (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathcal{K}_1) \right] \mathcal{I}_1 \right\} \quad (4.63) \end{aligned}$$

Influence du bourrelet rotationnel du corps d'indice 1

$$\frac{k_{2,1}}{2} \frac{n_1 e_1 m_0 \beta_1 R_1^5}{a_1^2 (1 - e_1^2)^2} \left( \frac{2(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{j}_1)^2}{2} \mathbf{j}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{j}_1) (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \right) \quad (4.64)$$

Influence du bourrelet rotationnel du corps d'indice 0

$$\frac{k_{2,0}}{2} \frac{n_1 e_1 m_1 \beta_1 R_0^5}{a_1^2 (1 - e_1^2)^2} \left( \frac{2(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{i}_1)^2 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{j}_1)^2}{2} \mathbf{j}_1 + (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{j}_1) (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \right) \quad (4.65)$$

Influence du compagnon lointain d'indice 2<sup>a</sup>

$$\mu_1 \beta_1^2 \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} [2\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1 + (\mathcal{K}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{I}_1 \wedge \mathbf{k}_2 - 5(\mathcal{I}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{K}_1 \wedge \mathbf{k}_2] \quad (4.66)$$

Précession relativiste du périhélie

$$\mu_1 \beta_1^2 3 \frac{G m_0}{c^2} \frac{n_1}{a_1 (1 - e_1^2)^{3/2}} \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1 \quad (4.67)$$

Evolution du vecteur de Laplace

$$\mu_1 \beta_1^2 \langle \dot{\mathcal{I}}_1 \rangle = (4.60) + (4.61) + (4.62) + (4.63) + (4.64) + (4.65) + (4.66) + (4.67) \quad (4.68)$$

<sup>a</sup>  $\alpha'$  est défini par (4.84)

TABLE 4.2: Contributions à l'évolution des moments cinétiques.

---

 Marée levée par le corps d'indice 0 sur le corps d'indice 1

Terme retardé :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3(\Delta t)_1 k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{a_1^6 (1 - e_1^2)^{9/2}} \left\{ \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{4} e_1^2 \right) (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{I}_1) \mathcal{I}_1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{9}{4} e_1^2 + \frac{5}{16} e_1^4 \right) \boldsymbol{\omega}_1 \right. \\
 & \left. - \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{1}{16} e_1^4 \right) \frac{(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{K}_1)}{(1 - e_1^2)} - \left( 1 + \frac{15}{2} e_1^2 + \frac{45}{8} e_1^4 + \frac{5}{16} e_1^6 \right) \frac{n_1}{(1 - e_1^2)^2} \right] \mathcal{K}_1 \right\} \quad (4.69)
 \end{aligned}$$


---

Marée levée par le corps d'indice 1 sur le corps d'indice 0

Terme retardé :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3(\Delta t)_0 k_{2,0} G m_1^2 R_0^5}{a_1^6 (1 - e_1^2)^{9/2}} \left\{ \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{4} e_1^2 \right) (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathcal{I}_1) \mathcal{I}_1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{9}{4} e_1^2 + \frac{5}{16} e_1^4 \right) \boldsymbol{\omega}_0 \right. \\
 & \left. - \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{1}{16} e_1^4 \right) \frac{(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathcal{K}_1)}{(1 - e_1^2)} - \left( 1 + \frac{15}{2} e_1^2 + \frac{45}{8} e_1^4 + \frac{5}{16} e_1^6 \right) \frac{n_1}{(1 - e_1^2)^2} \right] \mathcal{K}_1 \right\} \quad (4.70)
 \end{aligned}$$


---

Influence du bourrelet rotationnel du corps d'indice 1

$$\frac{k_{2,1}}{2} \frac{m_0 R_1^5}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} [(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{i}_1)(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{j}_1 - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{j}_1)(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{i}_1] \quad (4.71)$$


---

Influence du bourrelet rotationnel du corps d'indice 0

$$\frac{k_{2,0}}{2} \frac{m_1 R_0^5}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} [(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{i}_1)(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{j}_1 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{j}_1)(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{i}_1] \quad (4.72)$$


---

 Influence du compagnon lointain d'indice 2<sup>a</sup>

$$\alpha' G_2 [(\mathcal{K}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{K}_1 \wedge \mathbf{k}_2 - 5(\mathcal{I}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{I}_1 \wedge \mathbf{k}_2] \quad (4.73)$$


---

Evolution des moments cinétiques orbitaux et rotationnels

$$\Lambda_1 \langle \dot{\mathcal{K}}_1 \rangle = (4.69) + (4.70) + (4.71) + (4.72) + (4.73) \quad (4.74)$$

$$\langle \dot{\mathbf{G}}_2 \rangle = - (4.73) \quad (4.75)$$

$$I_1 \langle \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \rangle = - (4.69) - (4.71) \quad (4.76)$$

$$I_0 \langle \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \rangle = - (4.70) - (4.72) \quad (4.77)$$


---

<sup>a</sup>  $\alpha'$  est défini par (4.84)

TABLE 4.3: Contributions à l'évolution du demi-grand axe planétaire.

Marée levée par le corps d'indice 0 sur le corps d'indice 1  
Terme retardé :

$$(\Delta t)_1 \frac{6k_{2,1} G m_0^2 R_1^5}{\mu_1 \beta_1 a_1^4 (1 - e_1^2)^{13/2}} n_1 \left[ \left( 1 + \frac{15}{2} e_1^2 + \frac{45}{8} e_1^4 + \frac{5}{16} e_1^6 \right) (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathcal{K}_1) - \left( 1 + \frac{31}{2} e_1^2 + \frac{255}{8} e_1^4 + \frac{185}{16} e_1^6 + \frac{25}{64} e_1^8 \right) \frac{n_1}{1 - e_1^2} \right] \quad (4.78)$$

Marée levée par le corps d'indice 1 sur le corps d'indice 0  
Terme retardé :

$$(\Delta t)_0 \frac{6k_{2,0} G m_1^2 R_0^5}{\mu_1 \beta_1 a_1^4 (1 - e_1^2)^{13/2}} n_1 \left[ \left( 1 + \frac{15}{2} e_1^2 + \frac{45}{8} e_1^4 + \frac{5}{16} e_1^6 \right) (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathcal{K}_1) - \left( 1 + \frac{31}{2} e_1^2 + \frac{255}{8} e_1^4 + \frac{185}{16} e_1^6 + \frac{25}{64} e_1^8 \right) \frac{n_1}{1 - e_1^2} \right] \quad (4.79)$$

Evolution du demi-grand axe planétaire

$$\langle \dot{a}_1 \rangle = (4.78) + (4.79) \quad (4.80)$$

Pour rappel, les équations qui en résultent sont :

$$\left( \dot{\mathcal{K}}_1 \right)_{\text{Kozai}} = \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} [(\mathcal{K}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{K}_1 \wedge \mathbf{k}_2 - 5(\mathcal{I}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{I}_1 \wedge \mathbf{k}_2] , \quad (4.81)$$

$$\left( \dot{\mathcal{I}}_1 \right)_{\text{Kozai}} = \alpha' \frac{G_2}{\Lambda_1} [2\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1 + (\mathcal{K}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{I}_1 \wedge \mathbf{k}_2 - 5(\mathcal{I}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \mathcal{K}_1 \wedge \mathbf{k}_2] , \quad (4.82)$$

$$\left( G_2 \dot{\mathbf{k}}_2 \right)_{\text{Kozai}} = -\Lambda_1 \left( \dot{\mathcal{K}}_1 \right)_{\text{Kozai}} , \quad (4.83)$$

$$\alpha' = \frac{3}{4} n_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^{7/2} \frac{\beta_1}{m_0 + m_1} \frac{1}{(1 - e_2^2)^2} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_0 + m_1}} . \quad (4.84)$$

Notons que l'emploi du Hamiltonien non restreint à la différence de (Eggleton et Kiseleva-Eggleton, 2001; Wu et Murray, 2003; Fabrycky et Tremaine, 2007), permet d'envisager des situations où le corps extérieur est sensible aux perturbations du couple intérieur. Dans le cas de HD 80606, où le compagnon stellaire lointain possède un très grand demi-grand axe, le modèle restreint est toutefois suffisant.

### 4.3.4 Précession relativiste

On intègre ici la précession du périhélie planétaire à l'ordre relativiste le plus bas. Elle n'agit que sur le vecteur de Laplace, et est donnée par le terme suivant (Lestrade et Bretagnon, 1982; Touma et al., 2009, par exemple) :

$$\langle \dot{\mathcal{I}}_1 \rangle_{\text{relat}} = 3 \frac{Gm_0}{c^2} \frac{n_1}{a_1(1-e_1^2)^{3/2}} \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{I}_1 \quad (4.85)$$

### 4.3.5 Modèle complet

Les tables 4.1, 4.2 et 4.3 présentent les équations du modèle complet. Du fait de la conservation du moment cinétique total, il n'est pas nécessaire d'inclure l'équation sur le moment cinétique du compagnon lointain (4.75), mais nous l'intégrons néanmoins.

Nous simulons numériquement l'évolution des 5 vecteurs  $(\mathcal{K}_1, \mathcal{I}_1, \mathcal{G}_2, \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_1)$  et du scalaire  $a_1$  grâce à un programme que nous avons écrit en Fortran, basé sur un intégrateur Dopri d'ordre 8 écrit par l'équipe ASD (Hairer et al., 1987).

## 4.4 Résultats et discussion

### 4.4.1 Paramètres physiques et orbitaux utilisés

Nous effectuons des simulations numériques du modèle présenté dans les sections précédentes dans un contexte proche de celui de HD 80606. Afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de Wu et Murray (2003) et Fabrycky et Tremaine (2007), nous utilisons les mêmes paramètres qu'eux.

Ainsi, les deux étoiles ont pour masses  $m_0 = m_2 = 1.1M_\odot$  et la planète a une masse  $m_1 = 7.5 \cdot 10^{-3}M_\odot \approx 7.5M_{\text{Jup}}$ . Le rayon de l'étoile hôte est pris égal au rayon solaire tel que donné dans (Yoder, 1995), soit  $R_0 = 696000$  km, et le rayon planétaire est pris à peu près égal au rayon de Jupiter, soit  $R_1 = 72000$  km. De même, les facteurs géométriques qui interviennent dans les moments d'inertie, soit  $r_g = I/mR^2$ , ont reçu des valeurs proches de celles qu'on peut trouver dans (Yoder, 1995) pour Jupiter et le Soleil, soit :  $r_{g,1} = 0.25$  et  $r_{g,0} = 0.08$ . Le nombre de Love planétaire possède également une valeur comparable à Jupiter, soit :  $k_{2,1} = 0.5$ . Le nombre de Love stellaire utilisé est issu de (Eggleton et al., 1998; Eggleton et Kiseleva-Eggleton, 2001)<sup>4</sup>, où il est déterminé pour un polytrope de degré 3 représentant

---

4. Notons que ces articles utilisent des notations qui entrent en conflit avec les nôtres : ainsi le nombre de Love divisé par 2 est-il noté  $Q$  !

une étoile comme étant égal à  $k_{2,0} = 0.028$ .

Les périodes de rotation propre initiales de la planète et de l'étoile sont encore une fois prises comparables aux valeurs de Jupiter et du Soleil, à 0.5 jour et 20 jours respectivement. Les obliquités initiales de l'étoile et de la planète par rapport à l'orbite planétaire sont de  $0^\circ$  en accord avec l'hypothèse de formation de l'étoile et de la planète dans un même disque.

On place initialement la planète à 5 UA de son étoile, et l'étoile lointaine à 1000 UA. Les périhélie initiaux n'ont pas d'influence notable sur l'évolution et on les fixe donc à 0. On assigne une excentricité de  $e_2 = 0.5$  au compagnon lointain, mais elle n'apparaît que dans le facteur numérique  $\alpha'$  (4.84). On assigne également une excentricité initiale de  $e_1 = 0.1$  à l'orbite planétaire.

L'inclinaison initiale joue ici un rôle important car à travers l'intégrale de Lidov-Kozai  $\sqrt{1 - e_1^2} \cos i_1$ , c'est d'elle que dépend l'excentricité maximale atteinte par la planète, et donc la distance de passage au périhélie, critique pour l'intensité des interactions de marée. La figure 4.3 montre ainsi un cas où l'inclinaison initiale était insuffisante pour produire une évolution significative sur 5 milliards d'années, malgré des excentricités atteintes de plus de 0.9. L'inclinaison initiale nécessaire pour produire une migration de Kozai dépend également des paramètres physiques des corps, notamment des décalages de marée  $(\Delta t)_1$  et  $(\Delta t)_0$ . De manière générale, dans les simulations que nous avons faites, une inclinaison supérieure à  $86^\circ$  était nécessaire pour produire la migration.

La détermination des paramètres  $(\Delta t)_i$  est la plus problématique, et nous l'aborderons dans le paragraphe suivant.

## 4.4.2 Facteur de qualité

### Définition

Un corps comme une planète ou une étoile est un système mécanique complexe, et modéliser sa déformation sous l'effet de contraintes qui dépendent de multiples fréquences éventuellement changeantes est un problème qui reste ouvert. Notamment, il n'est pas clair de savoir si la dissipation des modes sismiques propres, qui sont des modes libres du corps, suit les mêmes lois que la dissipation des modes excités par un perturbateur (Greenberg, 2009).

Les paramètres les moins bien connus dans le système que nous intégrons sont par conséquent  $(\Delta t)_1$  et  $(\Delta t)_0$ , qui représentent la dissipation intérieure à la planète et à l'étoile centrale. Par analogie avec l'oscillateur harmonique forcé (Alexander, 1973), l'usage est de quantifier la dissipation en utilisant non pas un décalage temporel, mais un facteur de qualité  $Q$ .

Rappelons que pour un oscillateur harmonique de fréquence propre  $\omega_0$ , soumis à un forçage périodique sinusoïdal de fréquence  $\omega_f$  et d'amplitude  $A_f$ , en présence d'un frottement représenté

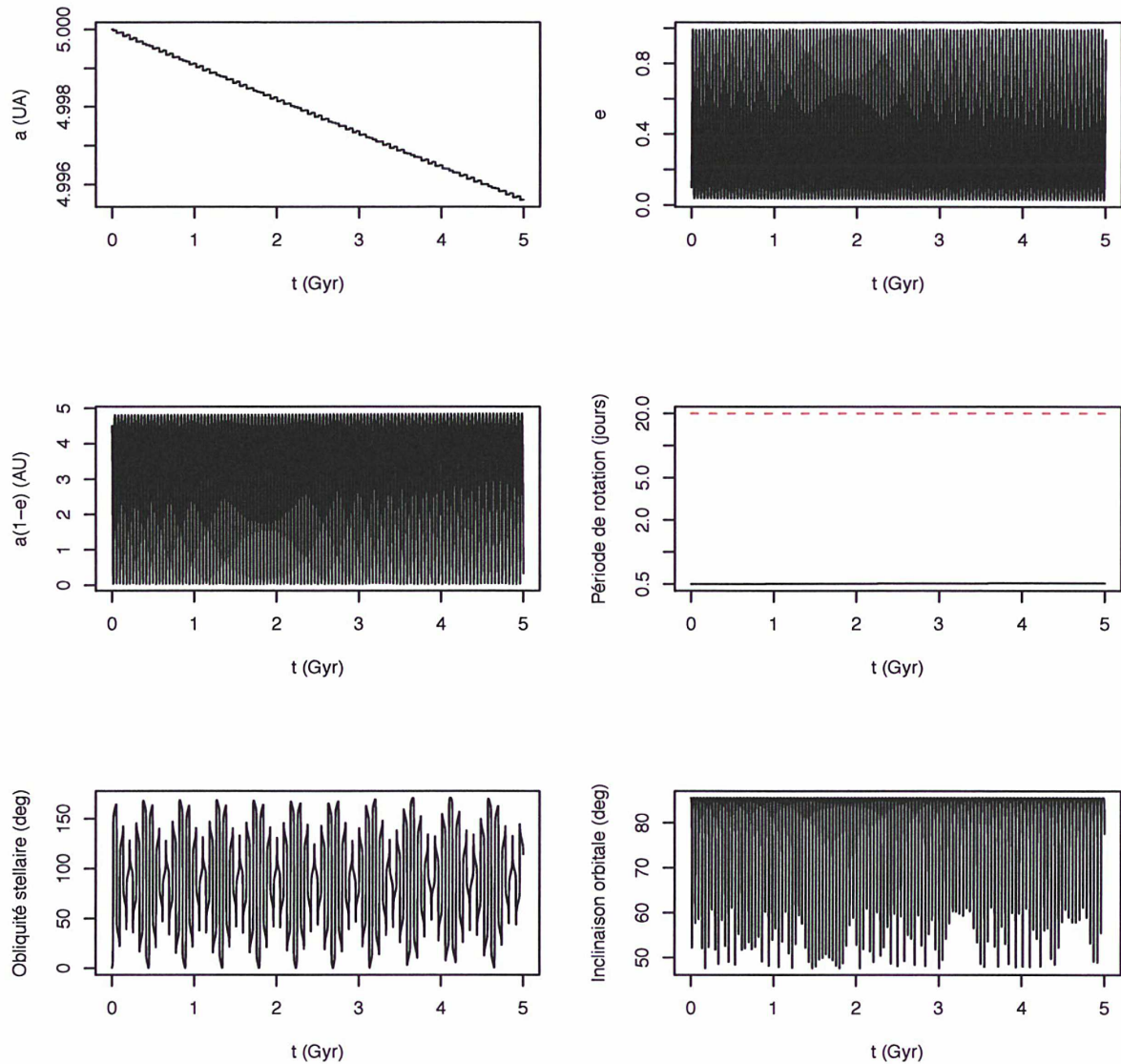


FIGURE 4.3: De haut en bas et de gauche à droite : demi-grand axe planétaire ; excentricité planétaire ; distance au périhélie planétaire ; superposition de la période de rotation propre de l'étoile (tirets) et de la planète (trait plein) ; obliquité de l'axe stellaire par rapport à l'orbite planétaire ; inclinaison de l'orbite planétaire par rapport à l'orbite du compagnon lointain. L'inclinaison initiale planétaire de  $85.6^\circ$  et les excentricités supérieures à 0.9 qui en résultent sont malgré tout insuffisantes pour provoquer la migration, illustrant la grande sensibilité du mécanisme par rapport à la valeur initiale de l'inclinaison.

par le coefficient  $\nu$ , l'équation d'évolution de la quantité oscillante  $x$  est :

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 = A_f \cos(\omega_f t) \quad (4.86)$$

La solution de cette équation d'évolution contient des termes propres atténués, et un terme forcé  $x_f(t)$  qui s'écrit :

$$x_f(t) = \frac{A_f \cos \epsilon}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t - \epsilon), \quad \text{avec} \quad \tan \epsilon = \frac{\nu \omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} =_{\text{def}} \frac{1}{Q}. \quad (4.87)$$

Le facteur de qualité peut s'exprimer comme :

$$Q = \frac{1}{\omega_f \Delta t}, \quad \text{avec} \quad \Delta t = \frac{\nu}{\omega_0^2 - \omega_f^2}. \quad (4.88)$$

Remarquons que si le déphasage  $\epsilon$  est petit (et donc le facteur  $Q$  très grand), on peut alors le réécrire comme  $\epsilon \approx \tan \epsilon = \omega_f \Delta t$ , si bien que le terme forcé dans l'équation (4.87) peut s'écrire :

$$x_f(t) = \frac{A_f \cos \epsilon}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f(t - \Delta t)) \quad (4.89)$$

Dans le cadre de la théorie des marées,  $Q$  peut dépendre de la fréquence d'excitation de manière plus complexe que dans le cas de l'oscillateur harmonique forcé. Choisir la façon dont  $Q$  dépend de la fréquence de forçage revient alors à proposer un modèle rhéologique du corps soumis aux perturbations de marées. C'est un problème non encore élucidé, même pour les planètes telluriques qui concentrent la majorité des informations qui sont disponibles de par l'étude du système Terre – Lune. *A fortiori*, la rhéologie des planètes géantes et des étoiles de type solaire est-elle encore moins bien connue.

Dans ce contexte, deux types d'hypothèses sont faites en général sur  $Q$  :

1. il est souvent pris constant comme par exemple chez Goldreich et Soter (1966) ;
2. il est pris inversement proportionnel à la fréquence d'excitation, c'est-à-dire que  $\Delta t$  est constant dans (4.88).

Notons que nous n'avons pas eu besoin de  $Q$  pour dériver nos équations d'évolution. Cependant, il est nécessaire de l'introduire afin de comparer nos résultats à d'autres travaux. Le modèle de marée que nous avons choisi relève de la deuxième catégorie. Nous pouvons alors choisir une valeur de  $(\Delta t)_1$  pour la planète HD 80606 b à partir de valeurs de  $Q$  proposées pour Jupiter, et comparer ces valeurs à celles qui sont utilisées dans les deux articles de Wu et Murray (2003) et Fabrycky et Tremaine (2007).

Fabrycky et Tremaine (2007) choisissent un « temps de viscosité » qu'ils relient au facteur de qualité par leur équation (A 10)<sup>5</sup>. Cette équation indique que leur facteur  $Q$  est proportionnel à la période planétaire, donc  $Q \propto 1/n_1$ . En utilisant l'analogie avec l'oscillateur forcé (4.88), on suppose donc la relation :

$$Q_i = \frac{1}{n_1(\Delta t)_i}, \quad i = 0, 1. \quad (4.90)$$

Avec les choix de temps de viscosité de Fabrycky et Tremaine (2007) de  $10^{-3}$  années pour la planète et 50 ans pour l'étoile, et en se plaçant à une distance initiale de 5 UA pour la planète, soit une fréquence orbitale  $n_1 = 0.56 \text{ rd.an}^{-1}$ , le facteur  $Q$  qu'on peut déduire de leur équation (A 10) pour la planète est  $Q_1 = 7 \cdot 10^5$  et pour l'étoile de  $Q_0 = 3 \cdot 10^8$ . On en déduit d'après (4.90) à la même fréquence :  $(\Delta t)_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ an}$  et  $(\Delta t)_0 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ an}$ .

Wu et Murray (2003) choisissent explicitement pour le facteur  $Q$  planétaire une valeur de  $Q_1 = 3 \cdot 10^5$  et pour le facteur  $Q$  stellaire une valeur de  $Q_0 = 10^6$ . Même si le modèle qu'ils utilisent est identique à celui de Fabrycky et Tremaine (2007), la dépendance qu'ils utilisent pour  $Q$  par rapport à la fréquence d'excitation est très peu claire. Nous utiliserons donc leurs valeurs pour comparer leurs résultats à une simulation à  $Q$  constant.

Par comparaison, Goldreich et Soter (1966) calculent pour Jupiter  $Q_{\text{Jup}} \geq 10^5$  en utilisant l'argument que lo ne pourrait pas exister depuis 4.5 milliards d'années avec une valeur inférieure, dans un modèle où  $Q_{\text{Jup}}$  est constant. En calculant  $(\Delta t)_1$  à partir de cette dernière valeur, mais cette fois à la fréquence de lo (1.77 jours soit environ  $1300 \text{ rd.an}^{-1}$ ), on obtient  $(\Delta t)_1 \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ an}$ .

En ce qui concerne  $Q_0$  ou  $(\Delta t)_0$ , il semble qu'il n'y ait pas de valeur de référence en l'état actuel des connaissances. Les valeurs utilisées par Wu et Murray (2003) et Fabrycky et Tremaine (2007) semblent choisies de manière à ce que l'efficacité de la dissipation dans l'étoile soit au moins un ordre de grandeur au dessus de la dissipation dans la planète<sup>6</sup>. Nous adopterons la même démarche dans nos choix de paramètres.

En nous basant sur les paragraphes précédents, nous avons donc conduit trois types de simulations :

1. Un premier type utilisant des valeurs de  $Q$  constantes pour la planète et l'étoile afin d'illustrer les conséquences d'un tel choix.
2. Un deuxième type utilisant des  $\Delta t$  constants déduits des valeurs de (Fabrycky et Tremaine, 2007), soit :  $(\Delta t)_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ an}$  et  $(\Delta t)_0 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ an}$ .

5. Dans (Fabrycky et Tremaine, 2007), la quantité  $k_1$  est égale à la moitié du nombre de Love  $k_2$  que nous avons utilisé dans ce travail.

6. « Unable to infer hard constraints on  $Q_{\text{slow}}$ , we decide to adopt  $Q_* = Q_{\text{slow}} = 10^6$  in our study. With this choice, dissipation in the planet is roughly 10 times more important than dissipation in the star. » (Wu et Murray, 2003)



3. Un troisième type utilisant la valeur de  $Q_{\text{Jup}} = 3 \cdot 10^5$  utilisée par Wu et Murray (2003), mais en calculant  $(\Delta t)_1$  avec la fréquence orbitale de Io dans (4.90). De plus, nous utiliserons une valeur pour l'étoile qui assure une dissipation largement supérieure. Finalement, ces simulations utilisent :  $(\Delta t)_1 = 2 \cdot 10^{-9}$  ans et  $(\Delta t)_1 = 2 \cdot 10^{-10}$  ans.

Concluons en remarquant que les modèles numériques de dissipation dans les planètes géantes et les étoiles, qui se basent sur des modèles hydrodynamiques et impliquent les interactions entre l'excitation de marée et les modes propres du corps, aboutissent à une relation très complexe entre la fréquence d'excitation et la dissipation (Ogilvie et Lin, 2004; Wu, 2005; Ogilvie et Lin, 2007). La valeur moyenne de  $Q$  qu'on peut déduire de ces modèles est, de plus, très supérieure aux valeurs obtenues en étudiant l'évolution orbitale des satellites des planètes géantes. Elle dépend, de plus, fortement du modèle utilisé. Un exemple frappant est la valeur de  $Q_{\text{Jup}} \approx 10^{13}$  obtenue par Goldreich et Nicholson (1977) en considérant les effets de la viscosité turbulente à l'intérieur de Jupiter. Avec une telle dissipation, aucune évolution orbitale décelable n'est possible pour Io.

### 4.4.3 Résultats

La figure 4.4 montre un résultat typique d'une intégration à  $Q$  constant pour les deux corps ( $Q_1 = 3 \cdot 10^5$ ,  $Q_0 = 10^6$ ). Lorsque l'inclinaison initiale est suffisante pour provoquer la migration, les caractéristiques de l'évolution initiale avant la suppression des cycles de Lidov-Kozai sont communes à tous les types d'intégrations que nous avons conduits : la vitesse de rotation planétaire se synchronise rapidement avec sa vitesse angulaire orbitale instantanée au périastre (un mécanisme que Hut (1981) a nommé *pseudo-synchronisation*) ; à mesure que le demi-grand axe diminue, l'amplitude des cycles de Kozai diminue également jusqu'à s'annuler dans un état d'excentricité maximale. A ce moment, l'inclinaison de l'orbite planétaire par rapport à l'orbite du compagnon lointain se fixe, ainsi que l'obliquité de l'étoile par rapport à l'orbite planétaire reproduisant le phénomène de non-alignement entre axe de rotation stellaire et orbite planétaire observé par Pont et al. (2009). Le demi-grand axe termine sa chute vers une valeur d'équilibre. La différence principale par rapport aux modèles où  $Q \propto 1/n_1$  réside dans le comportement de l'excentricité : ici, son déclin est très lent.

La figure 4.5 montre une intégration obtenue en prenant les mêmes paramètres que Fabrycky et Tremaine (2007), avec un modèle à  $\Delta t$  constant pour les deux corps. Rappelons que la valeur de  $Q_1$  qu'on peut déduire de leurs paramètres est égale à  $7 \cdot 10^5$ , à la fréquence orbitale initiale de  $0.56 \text{ rd.yr}^{-1}$ . Elle correspondrait à la fréquence orbitale de Io par l'intermédiaire de la formule (4.90) à une valeur de  $Q_1 \approx 300$ , bien en-dessous des bornes inférieures proposées pour Jupiter. Lainey et al. (2009) déduisent par exemple d'observations astrométriques une valeur de  $3.6 \cdot 10^4$ . La figure 4.5 peut être comparée directement avec la figure 1 de Fabrycky et Tremaine (2007) et montre une bonne reproduction de leurs résultats. Le mécanisme de la migration jusqu'à l'annulation des cycles de Kozai est quasiment identique au cas précédent où on avait  $Q$  constant pour les deux corps. Cependant, une fois les cycles complètement atténués, l'excentricité subit un amortissement exponentiel, beaucoup plus rapide que dans

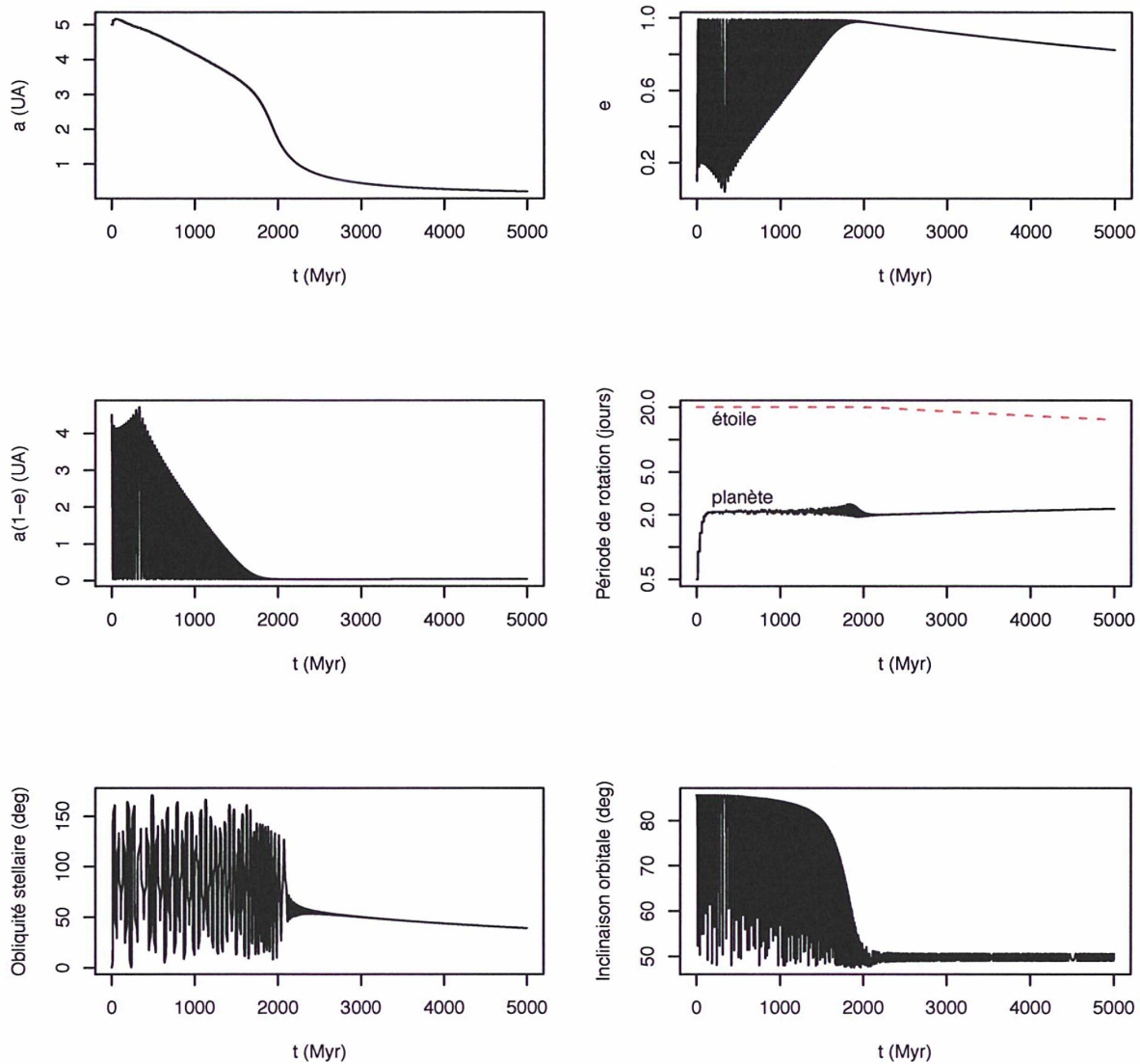


FIGURE 4.4: Simulation basée sur un modèle où les valeurs des facteurs de qualités planétaire et stellaire sont constants et égaux à  $Q_1 = 3 \cdot 10^5$  et  $Q_0 = 10^6$ . Après une période initiale pendant laquelle les cycles de Kozai sont progressivement atténués, l'excentricité se fixe à son niveau maximal puis décroît lentement. Cette décroissance lente est caractéristique du modèle à  $Q$  constant. De haut en bas et de gauche à droite : demi-grand axe planétaire ; excentricité planétaire ; distance au périhélie planétaire ; superposition de la période de rotation propre de l'étoile (tirets) et de la planète (trait plein) ; obliquité de l'axe stellaire par rapport à l'orbite planétaire ; inclinaison de l'orbite planétaire par rapport à l'orbite du compagnon lointain.

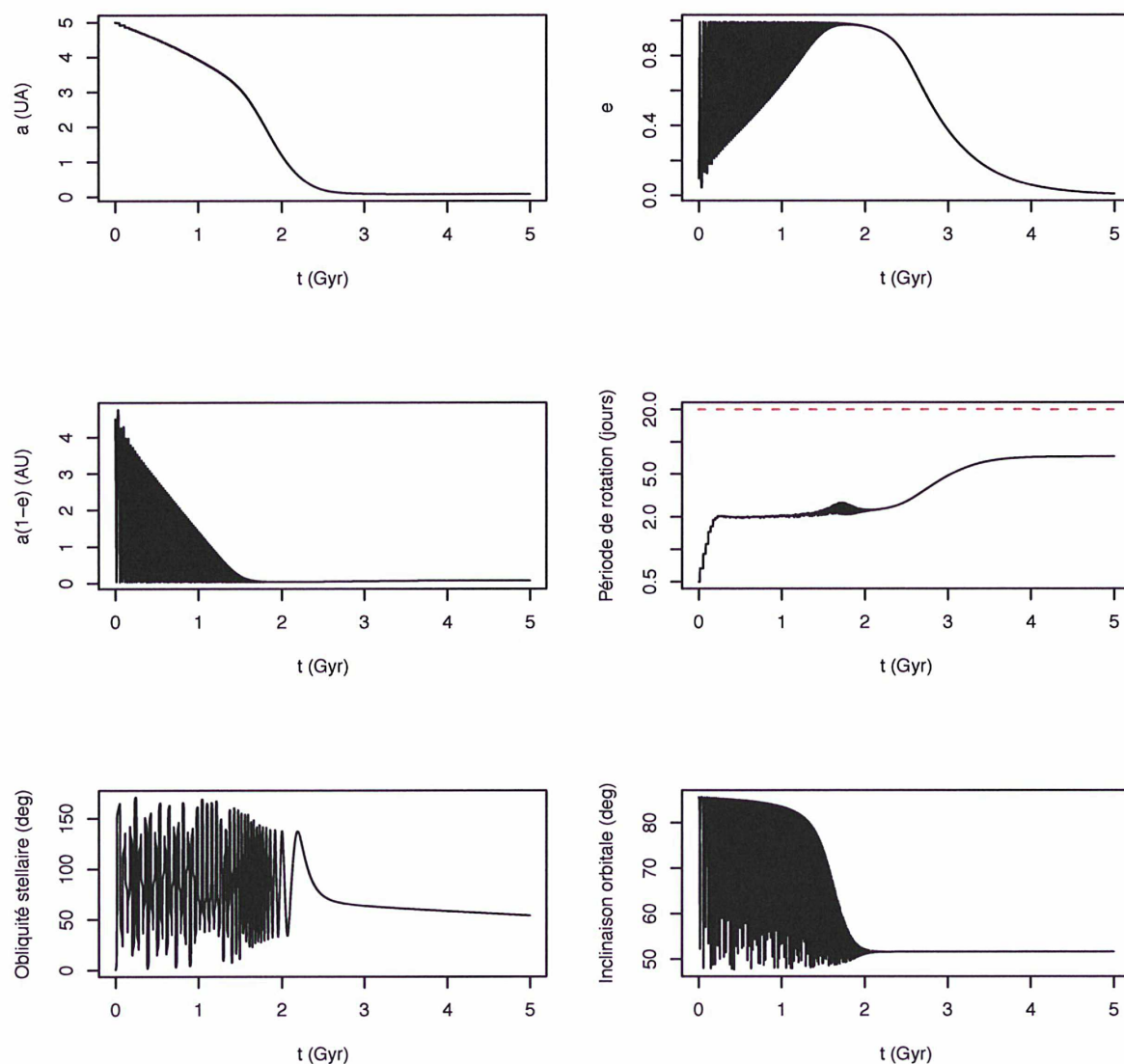


FIGURE 4.5: Modèle à  $\Delta t$  constants pour la planète et pour l'étoile, dont les paramètres sont repris de Fabrycky et Tremaine (2007). La décroissance de l'excentricité planétaire est extrêmement rapide une fois les cycles de Kozai éteints. Les quantités tracées sont les mêmes que sur la figure 4.4.

le cas précédent. Le point d'observation présent se situe juste au début de cette chute exponentielle. Si l'évolution de HD 80606 b suivait exactement ce modèle, nous serions donc extrêmement privilégiés de pouvoir observer le système dans son état actuel.

La figure 4.6 montre une intégration réalisée à partir d'un  $(\Delta t)_1 = 2 \cdot 10^{-9}$  et d'un  $(\Delta t)_0 = 3 \cdot 10^{-9}$  très proche. Il s'agit pour la grandeur planétaire d'une valeur obtenue à partir du  $Q$  planétaire égal à  $3 \cdot 10^5$  utilisé par Wu et Murray (2003), mais à la fréquence orbitale de Io pour lequel Goldreich et Soter (1966) avaient dérivé la valeur. Pour cette intégration, nous avons gardé la valeur stellaire inchangée par rapport aux intégrations précédentes. Les deux dissipations stellaire et planétaire étant ici comparables, on assiste à la fin de l'évolution à la synchronisation des rotations stellaire et planétaire qui a lieu en même temps que la circularisation de l'orbite et l'alignement du moment cinétique rotationnel de l'étoile avec l'axe de l'orbite planétaire.

La figure 4.7 montre une intégration réalisée avec  $(\Delta t)_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ , et pour l'étoile un  $(\Delta t)_0 = 3 \cdot 10^{-10}$  que nous avons choisi un ordre de grandeur au-dessous de la valeur planétaire pour amoindrir le phénomène de circularisation et d'alignement des moments cinétiques à la fin de l'évolution. L'amortissement de l'excentricité dans ce cas est beaucoup plus lent.

#### 4.4.4 Discussion et conclusion

Les résultats que nous avons présentés montrent que le modèle de migration de Kozai permet de produire une évolution depuis un état initial où la planète est formée sur une orbite comparable à celle de Jupiter, c'est-à-dire peu excentrique, à 5 UA de son étoile, et où le moment cinétique orbital de la planète ainsi que les moments cinétiques rotationnels de l'étoile et de la planète sont alignés, mais où l'orbite planétaire est inclinée par rapport au compagnon stellaire lointain, vers un état à forte excentricité et petit demi-grand axe comparable à celui de HD 80606 b telle qu'elle est observée aujourd'hui. La migration de Kozai permet également d'expliquer l'origine du non-alignement entre l'axe de rotation stellaire et l'orbite planétaire comme un signe résiduel de l'inclinaison initiale du système au moment de sa formation.

L'évolution des systèmes que nous avons simulés semble suivre les mêmes mécanismes dans sa première phase d'atténuation des cycles de Kozai. Rappelons que la limite de Roche pour la planète HD 80606 b est inférieure au rayon solaire, et que dans les évolutions que nous avons présentées, la distance au périhélie peut atteindre  $3.1R_0$ , mais reste supérieure à la limite de Roche. Cependant, une fois les cycles de Kozai arrêtés, l'évolution du système dépend fortement du modèle de marée choisi, et notamment de la façon dont est modélisée la dissipation dans la planète comme dans l'étoile, aussi bien en ce qui concerne l'amplitude de la dissipation que sa dépendance dans la fréquence excitatrice.

Une forte décroissance de l'excentricité à ce moment semble suggérer que nous serions très privilégiés de pouvoir observer le système HD 80606 dans son état actuel. Cela semble indiquer la nécessité d'une meilleure modélisation des mécanismes de marée et d'aplatissement

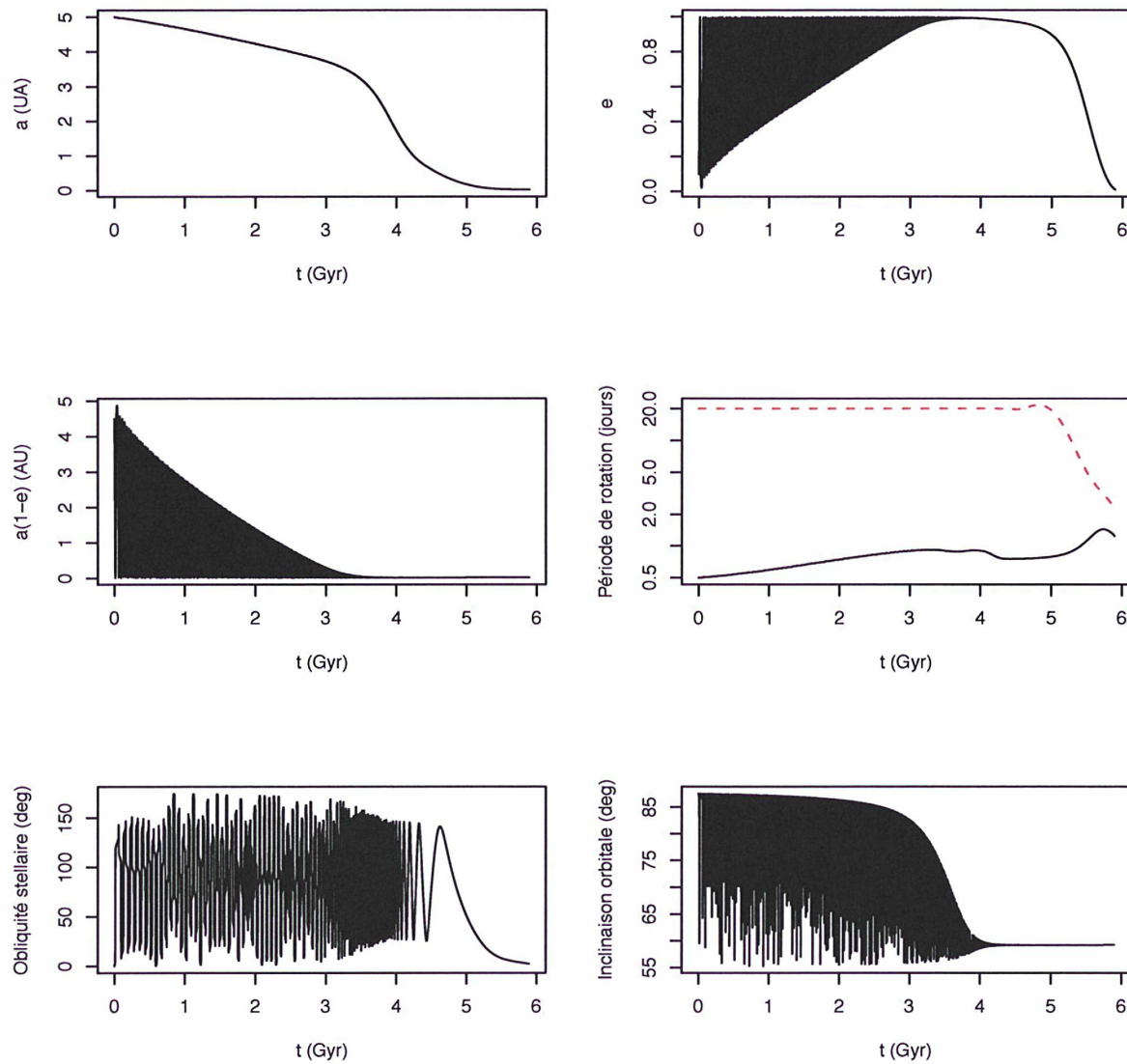


FIGURE 4.6: Modèle à  $\Delta t$  constants. Cette fois,  $(\Delta t)_1$  est égal à la valeur obtenue à partir de la formule (4.90) en utilisant pour  $Q_1$  la valeur de  $3 \cdot 10^5$  utilisée par Wu et Murray (2003) et pour  $n_1$  la fréquence orbitale de Io, qui est utilisée classiquement pour avancer cette valeur de  $Q$  pour Jupiter. De même,  $(\Delta t)_0$  est calculé à partir de la valeur de  $Q_0 = 10^6$  choisie par Wu et Murray (2003) et de la fréquence orbitale de  $0.56 \text{ rd.yr}^{-1}$  de la planète à 5 UA. Les deux valeurs de  $\Delta t$  stellaire et planétaire qui en résultent sont du même ordre de grandeur, menant à une synchronisation rapide des rotations propres de l'étoile et de la planète ainsi qu'à l'alignement de leurs axes de rotation une fois les cycles de Kozai arrêtés.

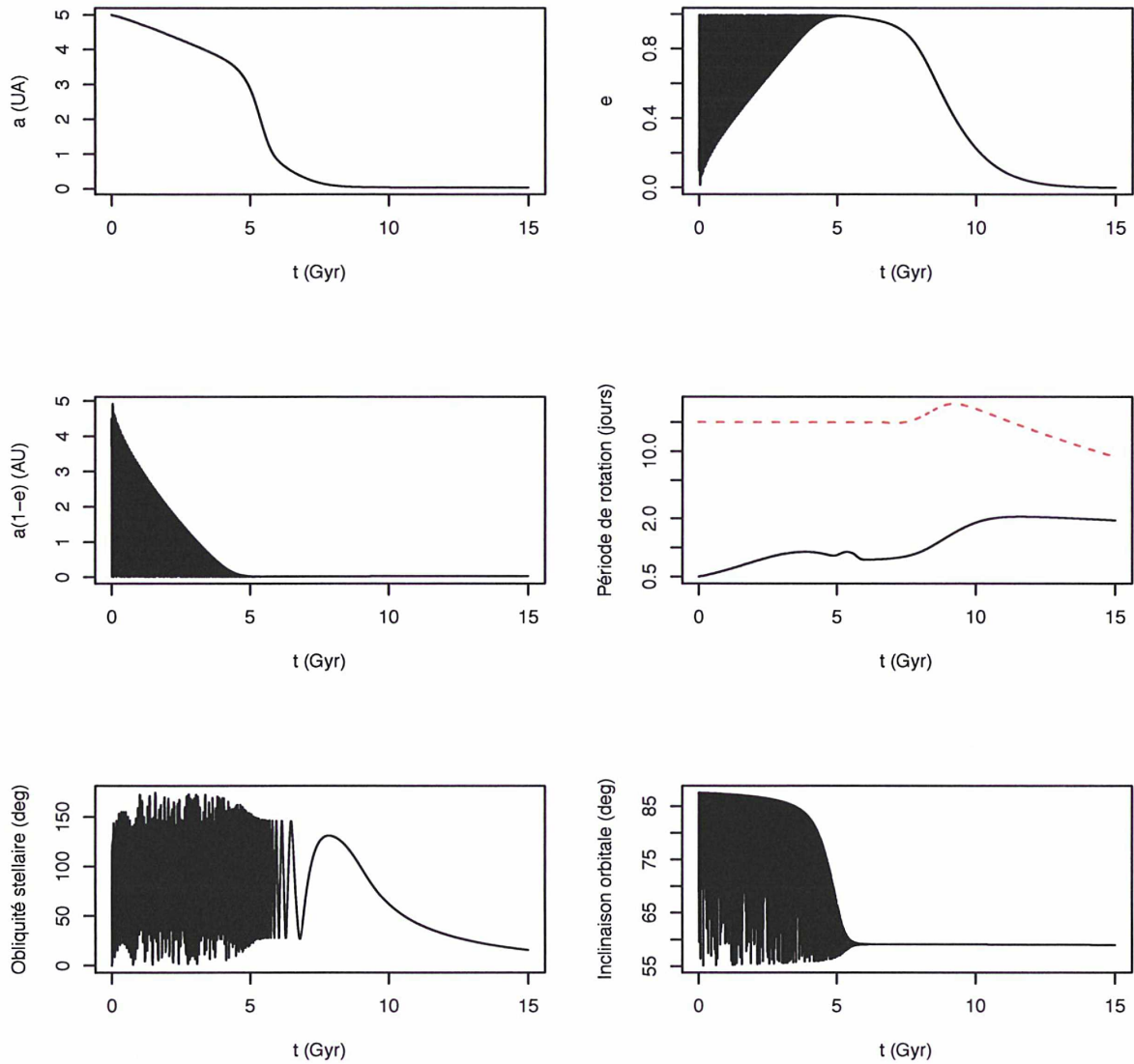


FIGURE 4.7: Même modèle que celui de la figure 4.6, où l'on a artificiellement diminué  $(\Delta t)_0$  d'un ordre de grandeur pour imposer une dissipation dix fois plus efficace dans l'étoile que dans la planète. Le déclin de l'excentricité planétaire est plus lent que dans les modèles précédents, sans que l'étoile ne se synchronise trop rapidement avec la planète.

ou l'introduction d'effets supplémentaires pour ralentir le déclin de l'excentricité planétaire.

Lors des passages très proches au périhélie, on se rapproche de la limite de 5 rayons stellaires proposée par Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009), en-dessous de laquelle ils suggèrent de prendre en compte les interactions mutuelles entre les termes de déformation quadripolaire de l'étoile et de la planète. De même, la planète subit des chocs thermiques au moment des passages au périastre (Laughlin et al., 2009) qui sont susceptibles d'avoir une influence sur les paramètres physiques et donc sur l'orbite de la planète.

Nous avons également fait la supposition que les aplatissements dus aux marées étaient négligeables par rapport aux aplatissements rotationnels. La figure 4.8 montre les valeurs des  $J_2$  rotationnels et de marée données par les équations (4.24) et (4.20), ainsi que le rapport  $J_{2,T}/J_{2,R}$  (4.25), pour chacun des deux corps, dans la simulation qui est montrée figure 4.7. Au début de l'évolution, lorsque le demi-grand axe est encore suffisamment grand, ce rapport est négligeable. Cependant, une fois que les cycles de Kozai sont totalement annulés et que le demi-grand axe diminue fortement, la déformation due à la marée devient rapidement comparable à celle qui est due à la rotation. Un modèle prenant en compte cette déformation semble souhaitable pour rendre compte de manière plus fidèle de ce qui se passe durant cette phase.

Il semble finalement que le modèle de migration de Kozai proposé ici soit, dans sa première phase, c'est-à-dire avant l'extinction totale des cycles de Kozai, assez robuste et conforme aux hypothèses que nous avons faites. Cette évolution mène à un état de forte excentricité et d'inclinaison relative entre l'axe de rotation stellaire et l'orbite planétaire qui correspond aux observations actuelles du système HD 80606. Cependant, une fois les cycles de Kozai totalement arrêtés, le comportement du système dépend fortement du modèle de marée adopté, et les déformations dues à la marée ne peuvent vraisemblablement plus être négligées.

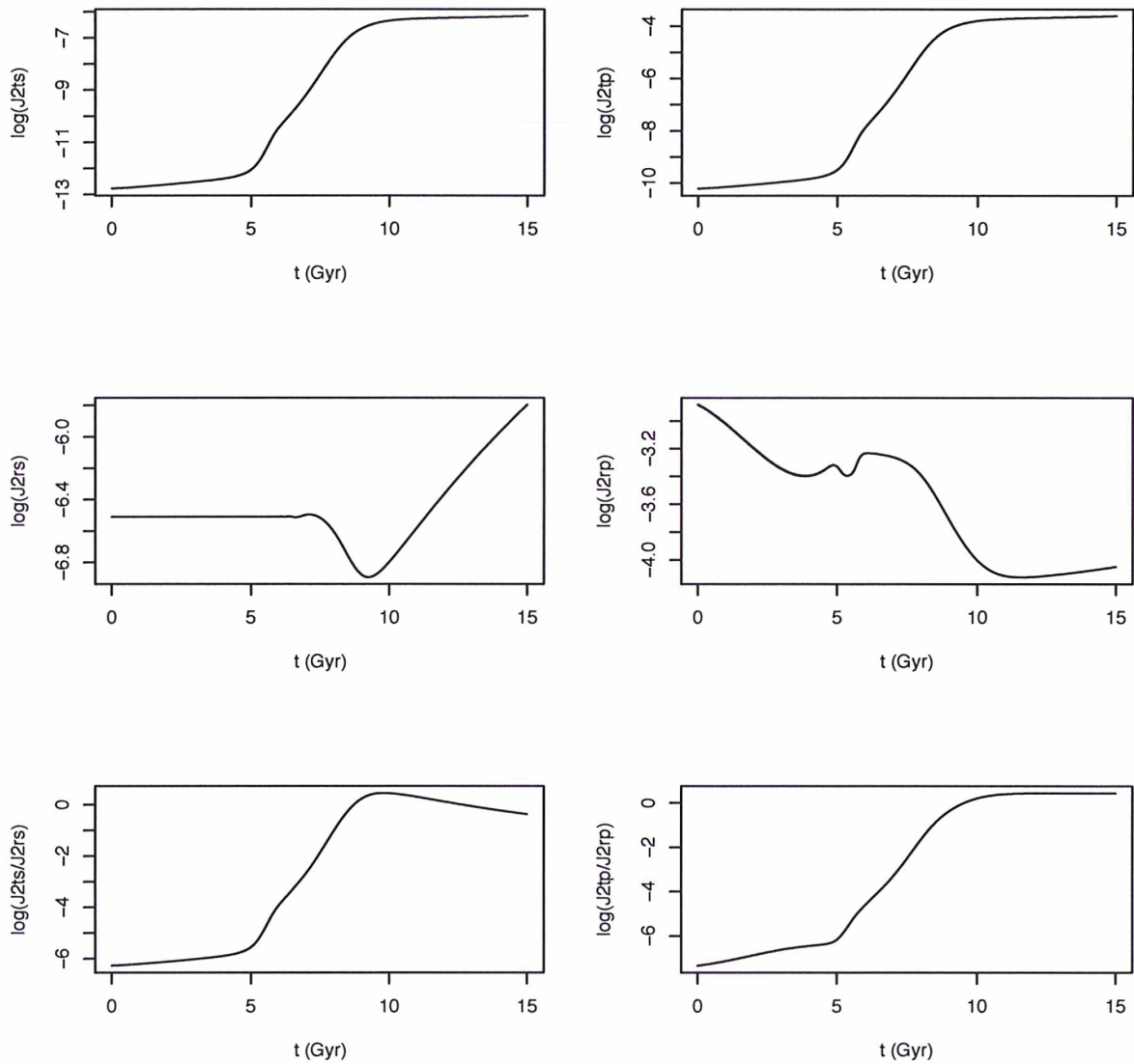


FIGURE 4.8: De haut en bas sont représentées les évolutions au cours de la simulation de la figure 4.7 des quantités  $J_{2,R}$ ,  $J_{2,T}$ , et  $\log_{10} J_{2,T}/J_{2,R}$ . Dans la colonne de gauche se trouvent les quantités relatives à l'étoile, et dans celle de droite les quantités de la planète.



# Conclusions et perspectives

Nous avons dans cette thèse tout d'abord développé une méthode de moyennisation partielle d'un système planétaire possédant une planète très rapide pour tirer parti de cette rapidité au lieu d'en faire le facteur limitant du pas d'intégration. Cette méthode, qui ne suppose aucune restriction sur la valeur de l'excentricité ou de l'inclinaison pour la planète moyennisée, est particulièrement adaptée aux systèmes extrasolaires. Elle a déjà été appliquée des analyses de stabilité dans le système GJ 876 (Correia et al., 2010). Elle pourrait également être intégrée à un outil d'ajustement de données.

L'utilisation de moyennisations et de développements dans les puissances du rapport des demi-grands axes nous ont naturellement amené à nous intéresser au problème des trois corps séculaire et quadripolaire. La méthode vectorielle issue de Boué et Laskar (2006) que nous avons utilisée nous a permis de reformuler le problème du point de vue de la dynamique du noeud et de l'inclinaison mutuelle des corps, plutôt que du point de vue traditionnel de l'excentricité et du périhélie du corps intérieur. Nous avons ainsi pu proposer une formulation du problème qui relie simplement les deux cas restreints extrêmes : celui où le corps intérieur est sans masse, et celui où, au contraire, le corps extérieur est sans masse. Nous avons également pu formuler le problème restreint extérieur de manière simple, et utiliser cette formulation pour expliquer les résultats de Verrier et Evans (2008, 2009).

Le modèle quadripolaire restreint extérieur, déjà étudié par Palacián et al. (2006) et Palacián et Yanguas (2006), ne semble pas avoir reçu beaucoup d'attention. Il pourrait cependant être utilisé potentiellement dans l'étude des objets lointains du Système Solaire ou des orbites stellaires autour de trous noirs binaires. La découverte récente d'un système planétaire autour d'une étoile binaire (Lee et al., 2009) et les découvertes similaires qui suivront fourniront peut-être aussi un champ d'application à ce modèle et à ses raffinements.

Les développements multipolaires que nous avons faits dans ce travail se sont principalement arrêtés à l'ordre 2. A cet ordre, comme nous l'avons vu, le périhélie du corps extérieur n'apparaît pas. Les ordres suivants ne présentent plus cette particularité, et pourraient être utilisés pour étudier les résonances séculaires entre périhélies planétaires, sans les restrictions sur les excentricités et inclinaisons qui sont à la base de la théorie classique de Laplace-Lagrange.

Nous nous sommes enfin penchés sur le cas de HD 80606, et avons présenté le modèle d'évolution qui est accepté aujourd'hui pour ce système. L'interaction entre le mécanisme de Kozai et les forces dissipatrices des marées produisent bien une évolution depuis un état initial qui nous est familier, semblable au système Jupiter-Soleil, vers l'état actuel de HD 80606 avec

#### *Chapitre 4 Effets dissipatifs et corps étendus – Le cas de HD 80606*

sa forte excentricité. Cependant, une fois cette phase d'évolution terminée, la façon dont la forte excentricité planétaire est conservée nécessite une investigation plus poussée.

# Bibliographie

- Alexander, M. E. *The Weak Friction Approximation and Tidal Evolution in Close Binary Systems*. *Astrophysics and Space Science*, 23, 459–510, 1973.
- Barker, A. J. et Ogilvie, G. I. *On the tidal evolution of Hot Jupiters on inclined orbits*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 395, Issue 4, pp. 2268-2287., 2009.
- Beaulieu, J., Bennett, D. P., Fouqué, P., Williams, A., Dominik, M., Jørgensen, U. G., Kubas, D., Cassan, A. et al. *Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing*. *Nature*, 439, 437–440, 2006.
- Béletski, V. *Essais sur le mouvement des corps cosmiques*. Editions Mir, Moscou, 1986.
- Benedict, G. F., McArthur, B. E., Forveille, T., Delfosse, X., Nelan, E., Butler, R. P., Spiesman, W., Marcy, G. et al. *A Mass for the Extrasolar Planet Gliese 876b Determined from Hubble Space Telescope Fine Guidance Sensor 3 Astrometry and High-Precision Radial Velocities*. *Astrophysical Journal*, 581, L115–L118, 2002.
- Bodenheimer, P., Lin, D. N. C. et Mardling, R. A. *On the Tidal Inflation of Short-Period Extrasolar Planets*. *Astrophysical Journal*, 548, 466–472, 2001.
- Borisov, A. V. et Mamaev, I. S. *Dynamics of the Rigid Body (in Russian)*. R&C Dynamics, Moscou (<http://ics.org.ru/>), 2005.
- Boué, G. et Laskar, J. *Precession of a planet with a satellite*. *Icarus*, 185, 312–330, 2006.
- Boué, G. et Laskar, J. *Spin axis evolution of two interacting bodies*. *Icarus*, 201, 750–767, 2009.
- Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Brown, T. M., Contos, A. R., Korzennik, S. G., Nisenson, P. et Noyes, R. W. *Evidence for Multiple Companions to  $\nu$  Andromedae*. *ApJ*, 526, 916–927, 1999.
- Charbonneau, D., Brown, T. M., Burrows, A. et Laughlin, G. *When Extrasolar Planets Transit Their Parent Stars*. *Protostars and Planets V*, p. 701–716, 2007.
- Charbonneau, D., Brown, T. M., Latham, D. W. et Mayor, M. *Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star*. *Astrophysical Journal*, 529, L45–L48, 2000.

## Bibliographie

- Correia, A. C. M., Couetdic, J., Laskar, J., Bonfils, X., Mayor, M., Bertaux, J. L., Bouchy, F., Delfosse, X. et al. *The HARPS search for southern extra-solar planets XIX. Characterization and dynamics of the GJ876 planetary system.* <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1001.4774C>, 2010.
- Correia, A. C. M. et Laskar, J. *Mercury's capture into the 3/2 spin-orbit resonance as a result of its chaotic dynamics.* *Nature*, 429, 6994, 848–850, 2004.
- Correia, A. C. M. et Laskar, J. *Mercury's capture into the 3/2 spin-orbit resonance including the effect of core-mantle friction.* *Icarus*, Volume 201, Issue 1, p. 1-11., 2009.
- Correia, A. C. M., Laskar, J. et de Surgy, O. N. *Long-term evolution of the spin of Venus : I. theory.* *Icarus*, 163, 1, 1–23, 2003.
- Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D. et Santos, N. C. *The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD 202206 or a circumbinary planet ?* *A&A*, 440, 751–758, 2005.
- Couetdic, J., Laskar, J., Correia, A. C. M., Mayor, M. et Udry, S. *Dynamical stability analysis of the HD202206 system and constraints to the planetary orbits.* <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0911.1963C>, 2009.
- Cowling, T. G. *On the motion of the apsidal line in close binary systems.* *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 98, 734, 1938.
- Delsate, N., Robutel, P., Lemaître, A. et Carletti, T. *Frozen Orbits at high eccentricity and inclination : Application to Mercury orbiter.* *A paraître*, 2010.
- Dermott, S. F., Malhotra, R. et Murray, C. D. *Dynamics of the Uranian and Saturnian satellite systems - A chaotic route to melting Miranda ?* *Icarus*, 76, 295–334, 1988.
- Dormand, J. R. et Prince, P. J. *New Runge-Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy.* *Celestial Mechanics*, 18, 223–232, 1978.
- Efroimsky, M. et Lainey, V. *Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution.* *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 112, 12003, 2007.
- Efroimsky, M. et Williams, J. G. *Tidal torques : a critical review of some techniques.* *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 104, Issue 3, pp.257-289, 2009.
- Eggleton, P. P., Kiseleva, L. G. et Hut, P. *The Equilibrium Tide Model for Tidal Friction.* *Astrophysical Journal* v.499, p.853, 1998.
- Eggleton, P. P. et Kiseleva-Eggleton, L. *Orbital Evolution in Binary and Triple Stars, with an Application to SS Lacertae.* *The Astrophysical Journal*, Volume 562, Issue 2, pp. 1012-1030., 2001.
- Fabrycky, D. et Tremaine, S. *Shrinking Binary and Planetary Orbits by Kozai Cycles with Tidal Friction.* *The Astrophysical Journal*, Volume 669, Issue 2, pp. 1298-1315., 2007.

- Farago, F. et Laskar, J. *High-inclination orbits in the secular quadrupolar three-body problem*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Online Early, 2009.
- Farago, F., Laskar, J. et Couetdic, J. *Averaging on the motion of a fast revolving body. Application to the stability study of a planetary system*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 104, 291–306, 2009.
- Ferrer, S. et Osacar, C. *Harrington's Hamiltonian in the stellar problem of three bodies : Reductions, relative equilibria and bifurcations*. Celest. Mech. Dyn. Astron., 58, 245–275, 1994.
- Ford, E. B., Havlickova, M. et Rasio, F. A. *Dynamical Instabilities in Extrasolar Planetary Systems Containing Two Giant Planets*. Icarus, 150, 303–313, 2001.
- Ford, E. B., Kozinsky, B. et Rasio, F. A. *Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems*. ApJ, 535, 385–401, 2000.
- Fridlund, M. *Future Space Missions to Search for Terrestrial Planets*. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008SSRv.tmp....3F>, 2008.
- Gaudi, B. S. et Winn, J. N. *Prospects for the Characterization and Confirmation of Transiting Exoplanets via the Rossiter-McLaughlin Effect*. Astrophysical Journal, 655, 550–563, 2007.
- Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., Alexander, T., Genzel, R., Martins, F. et Ott, T. *Monitoring stellar orbits around the Massive Black Hole in the Galactic Center*. ArXiv e-prints, 2008.
- Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., Alexander, T., Genzel, R., Martins, F. et Ott, T. *Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center*. ApJ, 692, 1075–1109, 2009.
- Goldreich, P. et Nicholson, P. D. *Turbulent viscosity and Jupiter's tidal Q*. Icarus, 30, 301–304, 1977.
- Goldreich, P. et Sari, R. *Eccentricity Evolution for Planets in Gaseous Disks*. Astrophysical Journal, 585, 1024–1037, 2003.
- Goldreich, P. et Soter, S. *Q in the Solar System*. Icarus, 5, 375–389, 1966.
- Goldreich, P. et Tremaine, S. *Disk-satellite interactions*. Astrophysical Journal, 241, 425–441, 1980.
- Goodman, J. et Lackner, C. *Dynamical Tides in Rotating Planets and Stars*. Astrophysical Journal, 696, 2054–2067, 2009.
- Greenberg, R. *Frequency Dependence of Tidal q*. Astrophysical Journal, 698, L42–L45, 2009.
- Hairer, E., Norsett, S. P. et Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations*, t. I. Springer, 1987.

## Bibliographie

- Harrington, R. S. *Dynamical evolution of triple stars*. *Astronomical Journal*, 73, 190–194, 1968.
- Harrington, R. S. *The Stellar Three-Body Problem*. *Celest. Mech.*, 1, 200–209, 1969.
- Holman, M., Touma, J. et Tremaine, S. *Chaotic variations in the eccentricity of the planet orbiting 16 Cygni B*. *Nature*, 386, 254–256, 1997.
- Hubbard, W. B. et Smoluchowski, R. *Structure of Jupiter and Saturn*. *Space Science Reviews*, 14, 599–662, 1973.
- Hut, P. *Tidal evolution in close binary systems*. *Astronomy and Astrophysics*, 99, 126–140, 1981.
- Innanen, K. A., Zheng, J. Q., Mikkola, S. et Valtonen, M. J. *The Kozai Mechanism and the Stability of Planetary Orbits in Binary Star Systems*. *Astronomical Journal*, 113, 1915, 1997.
- Jones, H. R. A., Butler, R. P., Tinney, C. G., Marcy, G. W., Carter, B. D., Penny, A. J., McCarthy, C. et Bailey, J. *High-eccentricity planets from the Anglo-Australian Planet Search*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 369, 249–256, 2006.
- Kalas, P., Graham, J. R., Chiang, E., Fitzgerald, M. P., Clampin, M., Kite, E. S., Stapelfeldt, K., Marois, C. et al. *Optical Images of an Exosolar Planet 25 Light-Years from Earth*. *Science*, 322, 1345, 2008.
- Karato, S. *Deformation of earth materials : an introduction to the rheology of solid earth*. Cambridge University Press, 2008.
- Kaula, W. M. *Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites*. *Geophysical Journal International*, 5, 104–133, 1961.
- Kaula, W. M. *Tidal Dissipation by Solid Friction and the Resulting Orbital Evolution*. *Reviews of Geophysics*, 2, 661–685, 1964.
- Kinoshita, H. et Nakai, H. *Analytical Solution of the Kozai Resonance and its Application*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 75, 125–147, 1999.
- Kinoshita, H. et Nakai, H. *General solution of the Kozai mechanism*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 98, 67–74, 2007.
- Konacki, M., Torres, G., Jha, S. et Sasselov, D. D. *An extrasolar planet that transits the disk of its parent star*. *Nature*, 421, 507–509, 2003.
- Kopal, Z. *Dynamics of close binary systems*. Springer Science & Business, 1978.
- Kozai, Y. *The motion of a close earth satellite*. *Astronomical Journal*, 64, 367, 1959.
- Kozai, Y. *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*. *AJ*, 67, 591–598, 1962.

- Krymowski, Y. et Mazeh, T. *Studies of multiple stellar systems - II. Second-order averaged Hamiltonian to follow long-term orbital modulations of hierarchical triple systems*. MNRAS, 304, 720–732, 1999.
- Lainey, V., Arlot, J., Karatekin, Ö. et van Hoolst, T. *Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations*. Nature, 459, 957–959, 2009.
- Landau, L. D. et Lifshitz, E. M. *Mechanics*, t. 1 de *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 2<sup>e</sup> éd., 1969.
- Laskar, J. *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system*. Nature, 338, 237, 1989.
- Laskar, J. *Systèmes de Variables et Eléments*. Dans Benest, D. et Froeschle, C., réds., *Modern Methods in Celestial Mechanics*, p. 63–87. Editions Frontières, 1989.
- Laskar, J. *The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones*. Icarus, 88, 266–291, 1990.
- Laskar, J. *Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion*. Physica D Nonlinear Phenomena, 67, 257–281, 1993.
- Laskar, J. *Chaotic diffusion in the Solar System*. Icarus, 196, 1–15, 2008.
- Laskar, J. et Gastineau, M. *Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth*. Nature, 459, 817–819, 2009.
- Laskar, J. et Robutel, P. *Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 62, 193–217, 1995.
- Laskar, J. et Robutel, P. *High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 80, 39–62, 2001.
- Laughlin, G., Deming, D., Langton, J., Kasen, D., Vogt, S., Butler, P., Rivera, E. et Meschiari, S. *Rapid heating of the atmosphere of an extrasolar planet*. Nature, 457, 562–564, 2009.
- Lee, J. W., Kim, S.-L., Kim, C.-H., Koch, R. H., Lee, C.-U., Kim, H.-I. et Park, J.-H. *The sdB+M Eclipsing System HW Virginis and its Circumbinary Planets*. AJ, 137, 3181–3190, 2009.
- Lee, M. H. et Peale, S. J. *Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems*. ApJ, 592, 1201–1216, 2003.
- Léger, A., Rouan, D., Schneider, J., Barge, P., Fridlund, M., Samuel, B., Ollivier, M., Guenther, E. et al. *Transiting exoplanets from the CoRoT space mission. VIII. CoRoT-7b : the first super-Earth with measured radius*. Astronomy and Astrophysics, 506, 287–302, 2009.
- Lestrade, J.-F. et Bretagnon, P. *Perturbations relativistes pour l'ensemble des planètes*. A&A, 105, 42, 1982.

## Bibliographie

- Lidov, M. L. *The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies*. P&SS, 9, 719–759, 1962.
- Lidov, M. L. et Ziglin, S. L. *Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case*. Celest. Mech., 13, 471–489, 1976.
- Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1927.
- Malige, F., Robutel, P. et Laskar, J. *Partial Reduction in the N-Body Planetary Problem using the Angular Momentum Integral*. Celest. Mech. Dyn. Astron., 84, 283–316, 2002.
- Malmberg, D. et Davies, M. B. *On the origin of eccentricities among extrasolar planets*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters, Volume 394, Issue 1, pp. L26-L30., 2009.
- Marchal, C. *The three-body problem*. N° 4 dans Studies in Astronautics, Studies in Aeronautics. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- Mardling, R. A. et Lin, D. N. C. *Calculating the Tidal, Spin, and Dynamical Evolution of Extrasolar Planetary Systems*. The Astrophysical Journal, Volume 573, Issue 2, pp. 829–844., 2002.
- Mathis, S. et Le Poncin-Lafitte, C. *Tidal dynamics of extended bodies in planetary systems and multiple stars*. Astronomy and Astrophysics, 497, 889–910, 2009.
- Mayor, M. et Queloz, D. *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*. Nature, 378, 355–359, 1995.
- Mazeh, T., Krymowski, Y. et Rosenfeld, G. *The High Eccentricity of the Planet Orbiting 16 Cygni B*. Astrophysical Journal, 477, L103, 1997.
- Merritt, D., Gualandris, A. et Mikkola, S. *Explaining the Orbits of the Galactic Center S-Stars*. ApJ Lett., 693, L35–L38, 2009.
- Migaszewski, C. et Goździewski, K. *Relativistic Lidov-Kozai resonance in binaries*. arXiv :0901.0102M, 2008.
- Mignard, F. *The evolution of the lunar orbit revisited. I*. Moon and Planets, 20, 301–315, 1979.
- Mikkola, S. et Merritt, D. *Implementing Few-Body Algorithmic Regularization with Post-Newtonian Terms*. AJ, 135, 2398–2405, 2008.
- Moutou, C., Hébrard, G., Bouchy, F., Eggenberger, A., Boisse, I., Bonfils, X., Gravallon, D., Ehrenreich, D. et al. *Photometric and spectroscopic detection of the primary transit of the 111-day-period planet HD 80 606 b*. Astronomy and Astrophysics, 498, L5–L8, 2009.
- Murray, C. D. et Dermott, S. F. *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, 1999.



- Naef, D., Latham, D. W., Mayor, M., Mazeh, T., Beuzit, J. L., Drukier, G. A., Perrier-Bellet, C., Queloz, D. et al. *HD 80606 b, a planet on an extremely elongated orbit*. *Astronomy and Astrophysics*, v.375, p.L27-L30 (2001), 2001.
- Ogilvie, G. I. et Lin, D. N. C. *Tidal Dissipation in Rotating Giant Planets*. *Astrophysical Journal*, 610, 477–509, 2004.
- Ogilvie, G. I. et Lin, D. N. C. *Tidal Dissipation in Rotating Solar-Type Stars*. *Astrophysical Journal*, 661, 1180–1191, 2007.
- O'Toole, S. J., Tinney, C. G., Jones, H. R. A., Butler, R. P., Marcy, G. W., Carter, B. et Bailey, J. *Selection functions in doppler planet searches*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392, 641–654, 2009.
- Palacián, J. F. et Yanguas, P. *From the circular to the spatial elliptic restricted three-body problem*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 95, 81–99, 2006.
- Palacián, J. F., Yanguas, P., Fernández, S. et Nicotra, M. A. *Searching for periodic orbits of the spatial elliptic restricted three-body problem by double averaging*. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 213, 15–24, 2006.
- Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P. et Masset, F. *Orbital eccentricity growth through disc-companion tidal interaction*. *Astronomy and Astrophysics*, 366, 263–275, 2001.
- Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P. et Terquem, C. *On the Eccentricities of the Extrasolar Planets*. Dans Beaulieu, J., Lecavelier des Etangs, A. et Terquem, C., réds., *Extrasolar planets : Today and Tomorrow*. *ASP Conference Series*, t. 321, p. 379. 2004.
- Papaloizou, J. C. B. et Terquem, C. *Dynamical relaxation and massive extrasolar planets*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 325, 221–230, 2001.
- Papaloizou, J. C. B. et Terquem, C. *Planet formation and migration*. *Reports on Progress in Physics*, 69, 119–180, 2006.
- Peale, S. J. et Greenberg, R. J. *On the Q of Jupiter*. Dans *Proceedings of the 11th Lunar and Planetary Science Conference*, t. 11, p. 871–873. 1980.
- Pepe, F., Correia, A. C. M., Mayor, M., Tamuz, O., Couetdic, J., Benz, W., Bertaux, J.-L., Bouchy, F. et al. *The HARPS search for southern extra-solar planets. VIII.  $\mu$  Arae, a system with four planets*. *A&A*, 462, 769–776, 2007.
- Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- Poincaré, H. *Leçons de mécanique céleste*, t. I. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- Pont, F., Hébrard, G., Irwin, J. M., Bouchy, F., Moutou, C., Ehrenreich, D., Guillot, T., Aigrain, S. et al. *Spin-orbit misalignment in the HD 80606 planetary system*. *Astronomy and Astrophysics*, 502, 695–703, 2009.

## Bibliographie

- Pravdo, S. H. et Shaklan, S. B. *An ultracool Star's Candidate Planet*. *Astrophysical Journal*, 700, 623–632, 2009.
- Queloz, D., Bouchy, F., Moutou, C., Hatzes, A., Hébrard, G., Alonso, R., Auvergne, M., Baglin, A. et al. *The CoRoT-7 planetary system : two orbiting super-Earths*. *Astronomy and Astrophysics*, 506, 303–319, 2009.
- Quinn, T. R., Tremaine, S. et Duncan, M. *A three million year integration of the earth's orbit*. *Astronomical Journal*, 101, 2287–2305, 1991.
- Rasio, F. A., Nicholson, P. D., Shapiro, S. L. et Teukolsky, S. A. *A observational test for the existence of a planetary system orbiting PSR1257 + 12*. *Nature*, 355, 325, 1992.
- Rauer, H. et Erikson, A. *The Transit Method*. Dans Dvorak, R., éd., *Extrasolar Planets. Formation, Detection and Dynamics*, p. 205. Wiley, 2007.
- Rivera, E. J., Lissauer, J. J., Butler, R. P., Marcy, G. W., Vogt, S. S., Fischer, D. A., Brown, T. M., Laughlin, G. et al. *A  $\approx 7.5M_{\oplus}$  Planet Orbiting the Nearby Star, GJ 876*. *ApJ*, 634, 625–640, 2005.
- Saffe, C., Gómez, M. et Chavero, C. *On the ages of exoplanet host stars*. *Astronomy and Astrophysics*, 443, 609–626, 2005.
- Saleh, L. A. et Rasio, F. A. *The Stability and Dynamics of Planets in Tight Binary Systems*. *The Astrophysical Journal*, Volume 694, Issue 2, pp. 1566-1576 (2009)., 2009.
- Stam, D. M., Hovenier, J. W. et Waters, L. B. F. M. *Using polarimetry to detect and characterize Jupiter-like extrasolar planets*. *A&A*, 428, 663–672, 2004.
- Struve, O. *Proposal for a project of high-precision stellar radial velocity work*. *The Observatory*, 72, 199–200, 1952.
- Neron de Surgy, O. et Laskar, J. *On the long term evolution of the spin of the Earth*. *Astronomy and Astrophysics*, v.318, p.975-989, 1997.
- Takeda, G., Kita, R. et Rasio, F. A. *Induced Kozai Migration and Formation of Close-in Planets in Binaries*. *Transiting Planets, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, Volume 253*, p. 181-187, 2009.
- Terquem, C. et Papaloizou, J. C. B. *Migration and the Formation of Systems of Hot Super-Earths and Neptunes*. *Astrophysical Journal*, 654, 1110–1120, 2007.
- Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P. et Lin, D. N. C. *On the Tidal Interaction of a Solar-Type Star with an Orbiting Companion : Excitation of g-Mode Oscillation and Orbital Evolution*. *Astrophysical Journal*, 502, 788, 1998.
- Touma, J. R., Tremaine, S. et Kazandjian, M. V. *Gauss's method for secular dynamics, softened*. *MNRAS*, 394, 1085–1108, 2009.

- Tremaine, S., Touma, J. et Namouni, F. *Satellite Dynamics on the Laplace Surface*. AJ, 137, 3706–3717, 2009.
- Tremaine, S. et Zakamska, N. L. *Extrasolar Planet Orbits and Eccentricities*. Dans Holt, S. S. et Deming, D., réds., *The Search for Other Worlds : Fourteenth Astrophysics Conference*, t. 713, p. 243–252. 2004.
- Verrier, P. E. et Evans, N. W. *HD 98800 : a most unusual debris disc*. MNRAS, 390, 1377–1387, 2008.
- Verrier, P. E. et Evans, N. W. *High-inclination planets and asteroids in multistellar systems*. MNRAS, 394, 1721–1726, 2009.
- Winn, J. N., Johnson, J. A., Albrecht, S., Howard, A. W., Marcy, G. W., Crossfield, I. J. et Holman, M. J. *HAT-P-7 : A Retrograde or Polar Orbit, and a Third Body*. Astrophysical Journal, 703, L99–L103, 2009.
- Wright, J. T. *A Survey of Multiple Planet Systems*. ArXiv e-prints, 2009.
- Wright, J. T., Upadhyay, S., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Ford, E. B. et Johnson, J. A. *Ten New and Updated Multiplanet Systems and a Survey of Exoplanetary Systems*. ApJ, 693, 1084–1099, 2009.
- Wu, Y. *Tidal Circularization and Kozai Migration*. Dans Deming, D. et Seager, S., réds., *Scientific Frontiers in Research on Extrasolar Planets. ASP Conference Series*, t. 294, p. 213–216. 2003.
- Wu, Y. *Origin of Tidal Dissipation in Jupiter. II. The Value of Q*. Astrophysical Journal, 635, 688–710, 2005.
- Wu, Y. et Murray, N. *Planet Migration and Binary Companions : The Case of HD 80606b*. The Astrophysical Journal, 589, 1, 605–614, 2003.
- Yoder, C. F. *Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System*. Dans Ahrens, T. J., réd., *Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants.*, t. 1 de AGU reference shelf Series, p. 1. American Geophysical Union, 1995.