



HAL
open science

Les équations de Maxwell sous forme covariante, application à l'étude dans les guides périodiques et à la diffraction par les réseaux

Jean Chandezon

► **To cite this version:**

Jean Chandezon. Les équations de Maxwell sous forme covariante, application à l'étude dans les guides périodiques et à la diffraction par les réseaux. Electromagnétisme. Université de Clermont-Ferrand II, 1979. Français. NNT: . tel-02090202

HAL Id: tel-02090202

<https://hal.science/tel-02090202>

Submitted on 4 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE CLERMONT-FERRAND II

(U. E. R. des Sciences Exactes et Naturelles à dominante Recherche)

POUR OBTENIR LE GRADE

DE

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean CHANDEZON

LES EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME COVARIANTE
APPLICATION A L'ETUDE DE LA PROPAGATION DANS LES
GUIDES PERIODIQUES ET A LA DIFFRACTION PAR LES RESEAUX

Thèse soutenue le 9 mars 1979 devant la commission d'examen:

PRESIDENT: M. G. RAOULT

EXAMINATEURS: M. J. ARNAUD

M. M. CADILHAC

M. R. COMBE

M. G. CORNET

M. D. MAYSTRE

M. R. PETIT

UNIVERSITE DE CLERMONT II

U.E.R. des Sciences Exactes et Naturelles

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE : Monsieur CABANES Pierre

DIRECTEUR (Recherche) : Monsieur ROCHE Guy

PROFESSEURS

Mr. LAPADU-HARGUES Pierre	Minéralogie
Mr. LUTZ Hubert	Biologie Animale
Mr. RAOULT Gaston	Optique Physique Atomique et Moléculaire
Mr. CHAMPAGNAT Paul	Physiologie Végétale
Mr. DUPLESSIS-KERGOMARD	Chimie Organique
Mme HENNEQUIN Françoise	Mathématiques Pures
Mlle BERTHET Ginette	Physique Electronique
Mr. LOISEAU Jean	Biologie et Physiologie Végétales
Mr. COMBE René	Physique du Solide et Cristallographie
Mr. DE PUYTORAC Pierre	Zoologie
Mme AVAN Madeleine	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mr. DELOST Paul	Physiologie Animale
Mr. VIALLARD André	Chimie Physique
Mr. KOHLMULLER Robert	Chimie Minérale
Mr. GUILLAUME Marcel	Algèbre
Mr. COMBE Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mr. HENNEQUIN Paul-Louis	Mathématiques Appliquées
Mr. VINCENT Pierre	Volcanologie
Mr. VESSIERE Roger	Chimie Organique
Mr. BAILLAUD Lucien	Biologie et Physiologie Végétales
Mr. JOYON Louis	Biologie I.U.T. Clermont
Mr. PETERLONGO Jean-Marc	Géologie
Mr. ISABELLE Didier	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mr. SOULAGE René	Géophysique
Mr. LEMAIRE Jacques	Chimie Physique
Mr. ACCARY André	Métallurgie C.U.S.T.
Mr. BADRIKIAN Albert	Mathématiques Appliquées
Mr. MARTINET Pierre	Chimie Organique

Mr. ACKERMANN Patrick	Electronique Automatique C.U.S.T.
Mr. COURDUROUX Jean-Claude	Biologie et Physiologie Végétales
Mr. LARPENT Jean-Paul	Microbiologie Appliquée C.U.S.T.
Mr. THOMAS Jean	Optique Physique Atomique et Moléculaire
Mr. LEVY Philippe	Physique
Mr. GRAIN Jean	Zoologie et Biologie Cellulaire

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle DUCHER Suzanne	Chimie Organique
Mr. BATHIER Marcel	Physique du Solide et Cristallographie
Mr. CAPESTAN Michel	Chimie Minérale
Mr. FALGAS Maurice	Mathématiques Pures
Mr. MAISONNEUVE Jacques	Géologie
Mr. ROCHE Jean	Physique I.U.T. Clermont
Mr. LENOIR Marcel	Mathématiques Pures
Mr. PRORIOU Joseph	Physique I.U.T. Montluçon
Mr. ROCHE Guy	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mr. TEMPIER Paul	Géologie
Mr. DUFAURE Jean-Pierre	Cytophysologie
Mr. FANGUIN René	Physique I.U.T. Clermont
Mr. COUSSEINS Jean-Claude	Chimie Minérale
Mr. NIGOND Jacques	Agronomie I.U.T. Clermont
Mr. VELLEJ Georges	Psychophysologie
Mr. CHADEYRAS Marcel	Mathématiques Pures
Mr. MIGNOT Jean-Pierre	Zoologie
Mr. DURAND Roger	Biochimie C.U.S.T.
Mr. LE PHANH PHONG	Mathématiques Pures

MAITRES DE CONFERENCES

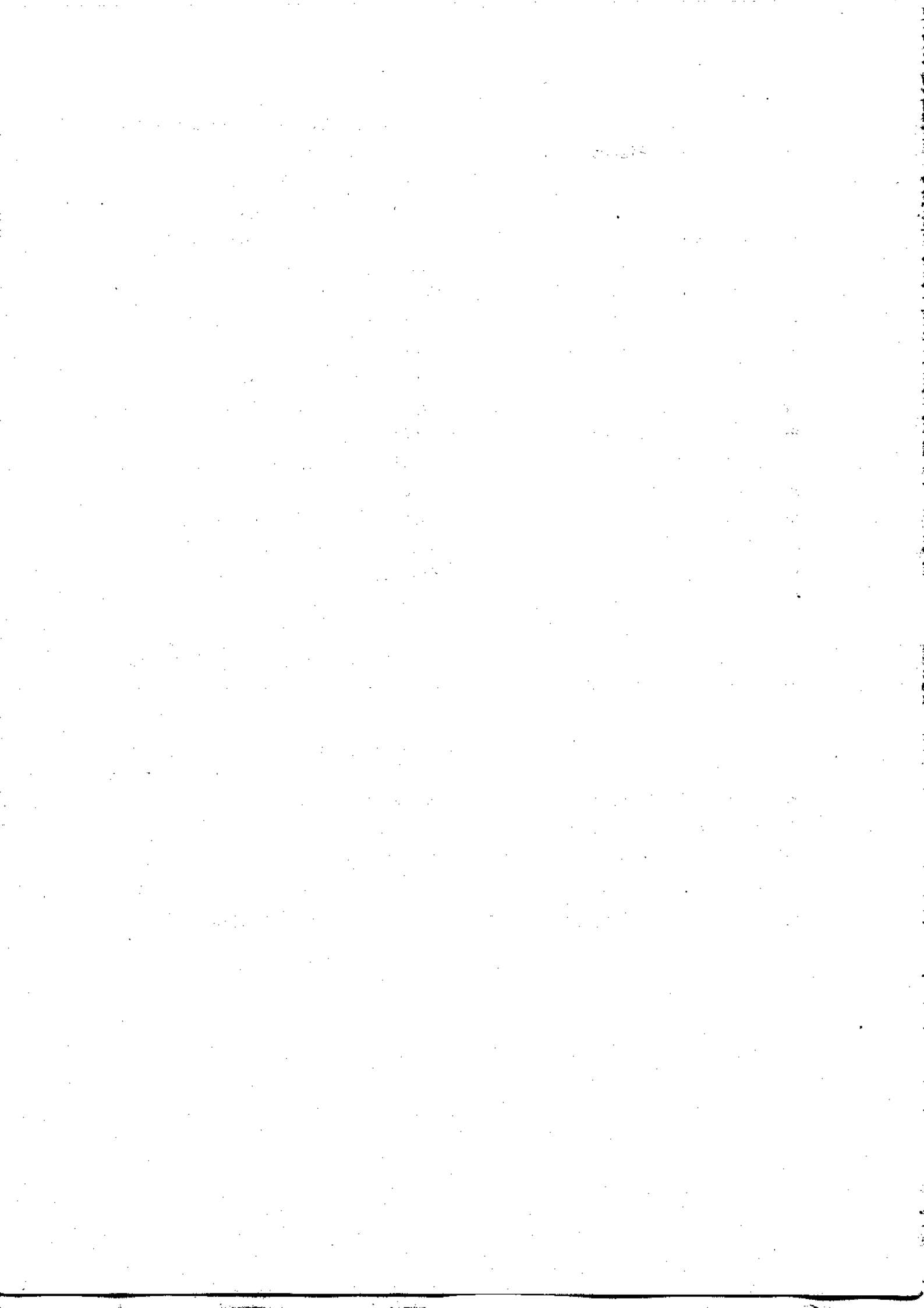
Mme BESSERRE Anne-Marie	Mathématiques Pures
Mr. JEAN Claude	Physiologie Comparée et Endocrinologie
Mr. FONDEVILLE Jean-Claude	Biologie et Physiologie Végétales
Mr. BOILLAT Guy	Mathématiques Pures
Mr. CADORET Robert	Physique du Solide et Cristallographie
Mr. BESSERRE Daniel	Spectroscopie C.U.S.T.

Mr. LHOMME Jean	Chimie des Substances Naturelles C.U.S.T.
Mr. IMBAUD Jean-Pierre	Physique Electronique
Mr. MERCIER Michel	Physique I.U.T. Montluçon
Mr. AUSLENDER Alfred	Mathématiques Appliquées
Mr. GRAMAIN Jean-Claude	Chimie et Biochimie des Substances Nat.
Mr. DUCATEAU Charles	Mathématiques Appliquées I.U.T. Clermont
Mr. HADDAD Labib	Mathématiques Pures
Mr. IRIGARAY Jean-Léon	Physique I.U.T. Clermont
Mr. BREGLIANO Jean-Claude	Génétique
Mr. FONTAINE Jacques	Génie Electrique C.U.S.T.
Mr. HUGON Lionel	Physique I.U.T. Montluçon
Mr. KORNPROBST Jacques	Géologie
Mr. QUERROU Michel	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mr. SCHNEIDER Michel	Informatique C.U.T.S.
Mr. YOUNES Antoine	Biochimie I.U.T. Clermont
Mr. RODDIER Pierre	Mathématiques Pures C.U.S.T.
Mr. CHEVALIER Raymond	Physique
Mr. MOREL Jean-Pierre	Chimie Physique
Mr. LEMAIRE Maurice	Génie Civil C.U.S.T.
Mr. LECHER Pierre	Biologie
Mr. DUPONT André-Marcel	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

Mr. COFFI-NKETSIA Barben	Mathématiques Pures
Mr. MAISONNEUVE Georges	Informatique C.U.S.T.
Mr. BRUNHES Jacques	Zoologie

SECRETAIRE GENERALE DE L'UNIVERSITE Mme CHOPART Marie-Louise



Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radioélectricité de l'Université de Clermont-Ferrand II.

Que Monsieur le Professeur G. RAULT veuille bien trouver, ici, le témoignage de ma profonde gratitude pour m'avoir accepté dans son laboratoire et pour l'aide, la compréhension, et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Monsieur G. CORNET a été mon Directeur de Recherche ; Il s'est acquitté de cette charge en ami, bien au delà de ce qui peut sembler nécessaire. Je le prie sincèrement de bien vouloir trouver ici le témoignage de ma reconnaissance pour sa constante et capitale collaboration à ce travail.

Il m'est très agréable de souligner ici l'accueil que m'a réservé Monsieur le Professeur R. PETIT dans son Laboratoire d'Optique Electromagnétique de Marseille. Respectueusement, je le remercie de tous ses précieux conseils ainsi que de la confiance dont il a fait preuve à mon égard en montrant de l'intérêt pour mes travaux.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur M. CADILHAC pour m'avoir, au cours de nombreuses et fructueuses discussions, fait bénéficier de sa haute compétence scientifique et ainsi permis, par de judicieux conseils, de résoudre bien des problèmes théoriques. Il a également su me donner les encouragements nécessaires au maintien de la sérénité de mon moral.

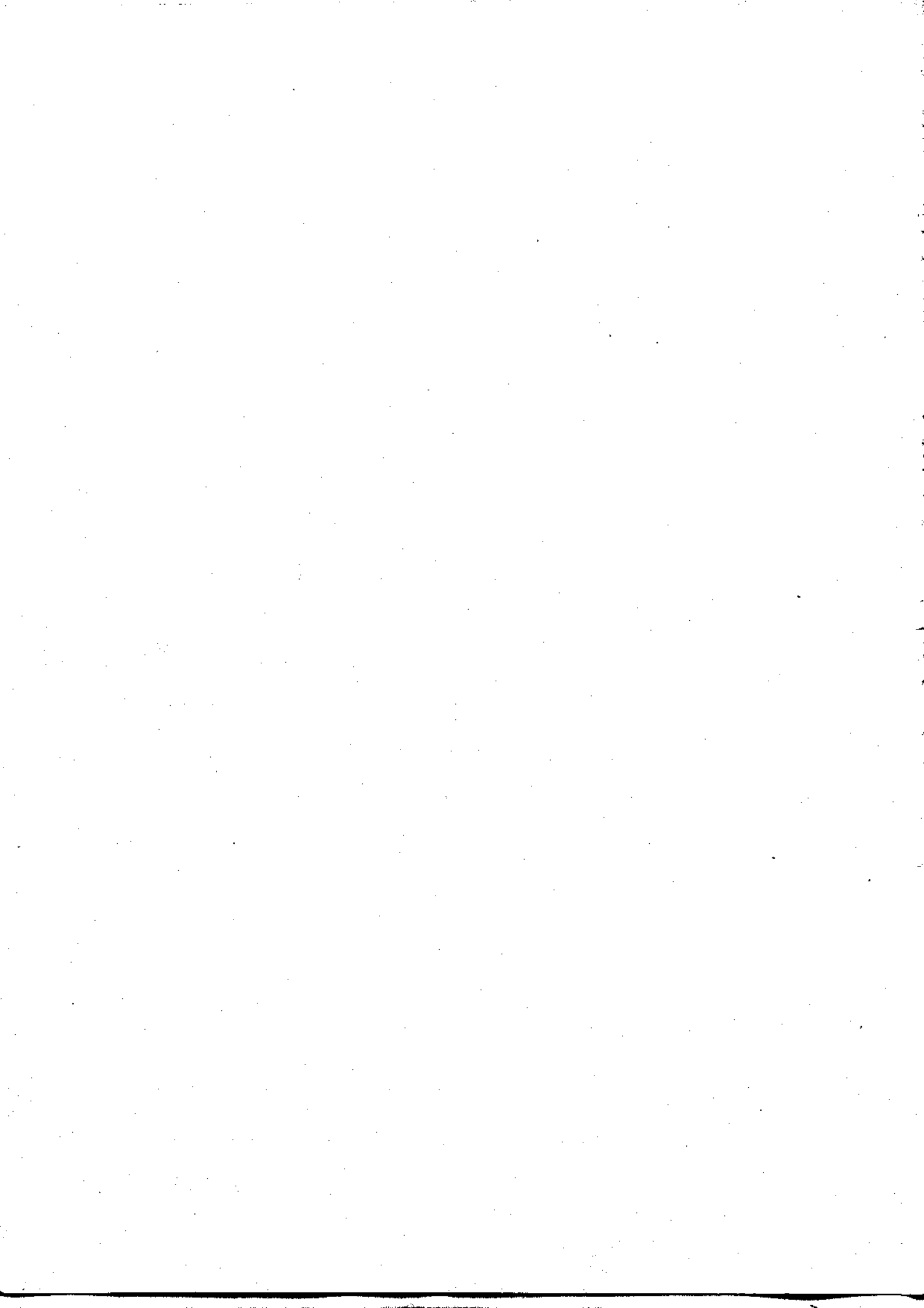
Monsieur D. MAYSTRE, Maître de Recherche, m'a fait l'honneur et l'amitié de s'intéresser activement à mes recherches et de me faire ainsi bénéficier de sa très grande expérience en optique électromagnétique ; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de mes remerciements les plus cordiaux.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur le Professeur R. COMBE dont les travaux et l'enseignement m'ont été fort utiles tout au long de mes recherches et qui a bien voulu examiner ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur J. ARNAUD qui, malgré de nombreuses charges, a spontanément accepté de faire partie de ce Jury de soutenance.

Je ne dois pas oublier tous les membres du Laboratoire de Radioélectri-
cité, ainsi que ceux du Laboratoire d'Optique Electromagnétique de Marseille,
pour l'atmosphère amicale et optimiste qu'ils ont toujours su créer.

Enfin, je remercie Monsieur D. PAYS qui, au Centre de Calcul de
l'Université de Clermont-Ferrand II, s'est chargé avec efficacité d'une grande
partie des calculs numériques, ainsi que Madame N. ROUGANNE qui a assuré,
avec beaucoup de compétence et de gentillesse, la frappe de ce mémoire.



Sommaire

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>PREMIERE PARTIE : PRESENTATION DU FORMALISME</u>		
<u>INTRODUCTION</u>	5
<u>CHAPITRE I : LES EQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNEES CURVILIGNES</u>		
I.1 : Les équations de Maxwell sous forme classique.....		7
I.2 : Les équations de Maxwell sous forme covariante.....		9
I.3 : Les équations de Maxwell sous forme covariante tridimensionnelle.		13
I.4 : Les relations entre la forme covariante et la forme traditionnelle des équations de Maxwell.....		17
I.5 : Les conditions aux limites.....		19
I.6 : Les équations de propagation des champs pour un milieu isotrope diélectrique et magnétique parfait.....		22
I.7 : Le théorème de Poynting en coordonnées curvilignes.....		25
<u>DEUXIEME PARTIE : LES GUIDES PERIODIQUES</u>		
<u>INTRODUCTION</u>	29
<u>CHAPITRE II : ETUDE DES GUIDES PERIODIQUES PAR UNE METHODE DE PERTURBATION</u>		
II.1 : Position du problème.....		31

II.2 : Recherche d'une solution par une méthode de perturbation.....	34
II.3 : Application à un guide de révolution à génératrice sinusoidale.....	36
II.4 : Etude particulière au voisinage du mode π	40
II.5 : Calcul au second ordre au mode π	43
II.6 : Etude numérique de l'équation de dispersion du guide sinusoidal et vérification expérimentale.....	44
II.7 : Etude théorique et numérique des guides bipériodiques au mode π	49

CHAPITRE III : ETUDE DES GUIDES PERIODIQUES PAR UNE METHODE DIFFERENTIELLE

III.1 : Position du problème.....	53
III.2 : Dépendance radiale des champs (modes TE_{0q}).....	56
III.3 : Dépendance radiale des champs (modes TM_{0q}).....	58
III.4 : Dépendance axiale des champs (modes TE_{0q}).....	61
III.5 : Dépendance axiale des champs (modes TM_{0q}).....	63
III.6 : Etude de l'équation de dispersion.....	64
III.7 : Quelques exemples d'études numériques de la courbe de dispersion....	65

TROISIEME PARTIE : LES RESEAUX

<i>INTRODUCTION</i>	75
---------------------------	----

**CHAPITRE IV : ETUDE PAR UNE METHODE DE PERTURBATION, DE LA DIFFRACTION
PAR UN RESEAU**

IV.1 : Position du problème.....	77
IV.2 : Mise en équation du problème.....	78
IV.3 : Développement de Rayleigh.....	81

IV.4 : Méthode du développement de Rayleigh.....	82
IV.5 : Sur la validité de la méthode du développement de Rayleigh.....	84
IV.6 : Recherche d'une solution par une méthode de perturbation.....	87
IV.7 : Méthode du développement de Rayleigh en série entière de $\frac{2\pi h}{\lambda}$	89
IV.8 : Résultats analytiques pour les efficacités.....	93
IV.9 : Approximation polynomiale et méthode des approximants de Padé.....	97
IV.10: Réseau sinusoidal au Littrow lorsque seuls les ordres 0 et -1 sont diffractés.....	102

CHAPITRE V : ETUDE PAR UNE METHODE DIFFERENTIELLE, DE LA DIFFRACTION

PAR UN RESEAU

V.1 : Position du problème.....	107
V.2 : Mise en équations du problème dans le milieu diélectrique.....	108
V.3 : Résolution des équations dans le milieu diélectrique.....	111
V.4 : Mise en équations dans le milieu conducteur.....	117
V.5 : Résolution des équations dans le milieu conducteur.....	118
V.6 : Application à la diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau.....	120
V.7 : Calcul des efficacités.....	122
V.8 : Méthode différentielle modifiée.....	126

<u>CONCLUSION</u>	137
-------------------------	-----

Annexe A.1 : Vecteurs, tenseurs et systèmes de coordonnées.....	139
Annexe A.2 : Table des intégrales utilisées.....	153
Annexe A.3 : Séries de Fourier-Bessel.....	155
Annexe A.4 : Efficacités des réseaux (formulaire).....	157

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	161
----------------------------	-----

SYMBOLES FREQUEMMENT UTILISES DANS CE MEMOIRE

\mathbb{N}^*	ensemble des nombres entiers strictement positifs.
\mathbb{N}	ensemble des nombres entiers positifs (y compris 0)
\mathbb{Z}	ensemble des nombres entiers relatifs (positifs et négatifs)
$\forall x$	pour tout x
\in	appartient à
$\text{Re}(x)$	partie réelle du complexe x
$\text{Im}(x)$	partie imaginaire du complexe x
x^*	complexe conjugué du complexe x
A^*	matrice adjointe de la matrice A
(x^i)	système de coordonnées de l'espace à trois dimensions
(x^λ)	système de coordonnées de l'espace-temps
∂_i	$\frac{\partial}{\partial x^i}$
g_{ij}	tenseur métrique
$\det(g_{ij})$	déterminant de la matrice (g_{ij})
a_i	composante covariante du vecteur \vec{a}
a^i	composante contravariante du vecteur \vec{a}
\bar{a}_i	composante cartésienne du vecteur \vec{a}
T^{ij}	composante d'un tenseur
T^{ij}	composante d'un pseudo-tenseur
δ_{ij}, δ^{ij}	symbole de Kronecker
$\epsilon_{ijk}, \epsilon^{ijk}$	indicateur de Levi Civita.

Introduction

Notre ambition initiale était de réaliser en microondes des expériences relativistes de propagation des ondes électromagnétiques dans des diélectriques en mouvement. Ceci nous a conduit à étudier au préalable, le calcul tensoriel et la géométrie différentielle qui sont les outils indispensables de l'électromagnétisme relativiste.

Il nous est rapidement apparu que ces méthodes, surtout utilisées pour l'espace quadridimensionnel de la relativité, pouvaient également rendre de grands services pour poser et résoudre les problèmes tridimensionnels de l'électromagnétisme classique, lorsqu'ils présentent un aspect géométrique tourmenté. Il nous a donc semblé intéressant de consacrer dès lors nos travaux de recherche à la mise au point de ces nouvelles méthodes et à les illustrer en résolvant quelques problèmes d'électromagnétisme. Il est vraisemblable que si, jusqu'alors, ces techniques n'avaient pas fait l'objet de beaucoup d'applications dans ce domaine, cela était essentiellement dû à l'aspect rébarbatif du calcul tensoriel qui, le plus souvent, rebute à priori le physicien. En fait, ce formalisme n'est compliqué qu'en apparence et s'avère à l'usage le plus simple et le plus rationnel, son avantage primordial résidant dans la facilité d'écriture des conditions aux limites.

En effet, la résolution complète des équations de Maxwell nécessite d'écrire la continuité de certaines composantes de champ sur des surfaces limites. Ceci n'est analytiquement possible que si ces surfaces limites sont aussi

des surfaces de coordonnées. Très souvent, on élude cette difficulté soit en se restreignant aux problèmes qui peuvent être traités avec les systèmes traditionnels de coordonnées orthogonales (cartésien, cylindrique, sphérique, etc...), soit en abandonnant l'analyticité au profit du calcul numérique. Malgré tout, il semble bien, que pour les problèmes les plus généraux, la recherche de solutions, au moins partiellement analytiques, conduise inévitablement à utiliser de nouveaux systèmes de coordonnées non orthogonales.

De plus, dans ce formalisme, les limites interviennent explicitement sous la forme de paramètres fonctionnels dans les équations de propagation, à la manière des propriétés diélectriques et magnétiques du milieu. Cela rend possible, à partir de solutions de problèmes connus, la résolution des problèmes voisins, par des méthodes de perturbation dont l'originalité est de porter sur le système de coordonnées lui-même.

Dans la première partie, nous présentons tout d'abord le formalisme quadridimensionnel des équations de Maxwell sous forme covariante développé par E.J. POST [19]. Nous en donnons ensuite une écriture simplifiée adaptée à l'espace tridimensionnel et valable pour tout système curviligne de coordonnées. Afin de pouvoir illustrer nos méthodes, nous avons été amenés à introduire deux nouveaux systèmes de coordonnées (Annexe I), dans lesquels nous projetons les équations de Maxwell :

- le système de coordonnées "de révolution" pour l'étude (faite dans la seconde partie) de la propagation des ondes dans les guides cylindriques périodiques ;

- le système de coordonnées "de translation" pour l'étude (faite dans la troisième partie) de la diffraction d'une onde plane par un réseau.

Pour ces deux problèmes, nous avons développé deux techniques différentes ; d'une part, une méthode de perturbation des conditions aux limites permettant d'obtenir quelques formules analytiques ; d'autre part, une méthode rigoureuse mais plus numérique faisant appel aux méthodes de l'algèbre linéaire (calcul des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice).

Première partie

PRESENTATION DU FORMALISME

Chapitre I

LES EQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNEES CURVILIGNES

I. 1. LES EQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNEES CURVILIGNES

L'état électromagnétique d'un milieu continu est défini par cinq champs vectoriels et un champ scalaire :

- \vec{E} champ électrique
- \vec{H} champ (ou excitation) magnétique
- \vec{D} excitation électrique
- \vec{B} induction (ou champ) magnétique
- \vec{J} densité de courant
- ρ densité de charge.

Ces grandeurs satisfont aux équations de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{I.1.1a})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (\text{I.1.1b})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (\text{I.1.1c})$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho. \quad (\text{I.1.1d})$$

Il est habituel d'ajouter une autre équation qui n'est pas indépendante des précédentes et exprimant la conservation de l'électricité :

$$\text{div } \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (\text{I.1.1e})$$

Ces relations constituent la base de l'électromagnétisme et ont valeur de postulat.

Dans tout ce qui suit, nous étudions des champs qui sont des fonctions harmoniques du temps et nous utilisons la méthode des imaginaires. Aux composantes des champs, sont associées des grandeurs complexes, les composantes réelles étant obtenues en prenant la partie réelle de ces grandeurs complexes.

Nous supposons que toutes les grandeurs complexes dépendent du temps par le facteur $\exp(i\omega t)$, où ω représente la pulsation. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega. \quad (\text{I.1.2})$$

Remarque -

Afin d'alléger l'écriture, et comme cela ne prête en général pas à confusion, nous adopterons dans les chapitres suivants les mêmes notations pour les amplitudes complexes et pour les champs eux-mêmes.

▫ Les relations de milieu

Pour résoudre les équations de Maxwell (I.1.1), il faut faire des hypothèses sur les propriétés électromagnétiques du milieu dans lequel existent les champs. Ces hypothèses se traduisent sous la forme des relations du milieu qui, dans le cas le plus simple d'un milieu homogène, isotrope, diélectrique et magnétique parfait, s'écrivent :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (\text{II.1.3a})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (\text{II.1.3b})$$

et pour un milieu conducteur,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (\text{II.1.3c})$$

Les grandeurs ϵ , μ et σ sont de simples scalaires. ϵ désigne la permittivité, μ la perméabilité et σ la conductivité. Dans le cas le plus général, ces grandeurs sont tensorielles et dépendent des coordonnées d'espace et de temps.

Les équations de Maxwell (I.1.1) sont des équations affines alors que les relations de milieu sont des équations métriques.

I. 2. LES EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME COVARIANTE [13, 15, 19, 23]

Après avoir constaté dans les équations de Maxwell une certaine similitude de comportement des champs vis-à-vis des variables d'espace et de la variable temps, Minkowsky fut l'un des premiers à chercher si les grandeurs électromagnétiques pouvaient s'exprimer sous la forme de champs de l'espace quadridimensionnel espace-temps. Pour cela, il a été conduit à associer aux champs classiques, des tenseurs de l'espace-temps selon le processus suivant :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} &\rightarrow F_{\lambda\nu} = -F_{\nu\lambda} \quad \lambda, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \left. \begin{array}{l} \vec{D} \\ \vec{H} \end{array} \right\} &\rightarrow G^{\lambda\nu} = -G^{\nu\lambda} \\ \left. \begin{array}{l} \vec{J} \\ \rho \end{array} \right\} &\rightarrow C^\lambda \end{aligned} \quad (I.2.1)$$

$F_{\lambda\nu}$ est un tenseur deux fois covariant, $G^{\lambda\nu}$ est un pseudo-tenseur de poids +1 deux fois contravariant, C^λ est un pseudo-vecteur contravariant de poids +1.

Les lettres grecques sont réservées aux indices relatifs à l'espace-temps, l'indice zéro est relatif à la variable temps : $x^0 = t$.

En utilisant les tenseurs champ électromagnétique (I.2.1), Minkowsky a généralisé les équations de Maxwell (I.1.1) à l'espace-temps. E.J. Post [19] a repris les équations ainsi obtenues et les a écrites dans le système MKS rationalisé.

Equations de Maxwell-Minkowsky :

$$\partial_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} = 0 \quad (I.2.2a)$$

$$\partial_{\nu} G^{\lambda\nu} = C^\lambda \quad (I.2.2b)$$

Le symbole "crochet" $[K, \lambda, \nu]$ intervenant dans l'équation (I.2.2a) possède la signification suivante :

$$P_{[K, \lambda, \nu]} = \frac{1}{3!} (P_{K\lambda\nu} + P_{\nu K\lambda} + P_{\lambda\nu K} - P_{\lambda K\nu} - P_{\nu\lambda K} - P_{K\nu\lambda}) \quad (\text{I.2.3})$$

En tenant compte de l'antisymétrie du tenseur $F_{\lambda\nu}$, l'équation (II.2.2a) peut donc aussi s'écrire :

$$\partial_K F_{\lambda\nu} + \partial_\nu F_{K\lambda} + \partial_\lambda F_{\nu K} = 0. \quad (\text{I.2.4})$$

Pour un milieu au repos dans un système cartésien de coordonnées, on peut, entre les tenseurs F , G et C , et les vecteurs du champ électromagnétique faire les identifications suivantes :

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (\text{I.2.5})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.6})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & G^{01} & G^{02} & G^{03} \\ G^{10} & 0 & G^{12} & G^{13} \\ G^{20} & G^{21} & 0 & G^{23} \\ G^{30} & G^{31} & G^{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.7})$$

$$C^0 = \rho$$

$$C^1 = J_1$$

$$C^2 = J_2$$

$$C^3 = J_3$$

(I.2.8)

Si l'on sépare la variable temps des variables d'espace, les équations affines de Maxwell-Minkowsky (I.2.2) se réduisent aux équations habituelles (I.1.1).

Nous admettons que ce sont les équations de Maxwell-Minkowsky (I.2.2) qui constituent le postulat fondamental de l'électromagnétisme.

■ Invariance des équations de Maxwell-Minkowsky

Les équations de Maxwell-Minkowsky sont invariantes [19], c'est-à-dire, conservent leur forme analytique pour tous les systèmes de coordonnées à quatre dimensions, si l'on fait les deux hypothèses suivantes :

1. Tous les systèmes de coordonnées peuvent être obtenus de manière holonôme (A.3.6) à partir d'un système dans lequel les équations sont supposées valables.

2. Les composantes de $F_{\lambda\nu}$, $G^{\lambda\nu}$ et C^λ se transforment dans un changement de coordonnées selon les lois tensorielles (on dit alors qu'elles sont "covariantes").

Ces deux hypothèses ont la signification analytique suivante:

Soient (x^λ) et $(x^{\lambda'})$ deux systèmes de coordonnées espace-temps ; la transformation est holonôme si :

$$\partial_{\nu'} A_{\lambda'}^{\lambda'} = \partial_{\lambda} A_{\nu}^{\lambda'}, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} ; \quad (\text{I.2.9})$$

$$\partial_{\nu'} A_{\lambda'}^{\lambda} = \partial_{\lambda'} A_{\nu}^{\nu}, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\nu'}} \quad (\text{I.2.10})$$

Les composantes des champs sont covariantes si :

$$F_{\lambda'\nu'} = A_{\lambda'\nu'}^{\lambda\nu} F_{\lambda\nu} \quad (\text{I.2.11})$$

$$G^{\lambda'\nu'} = |\Delta|^{-1} A_{\lambda\nu}^{\lambda'\nu'} G^{\lambda\nu} \quad (\text{I.2.12})$$

$$c^{\lambda'} = |\Delta|^{-1} A_{\lambda}^{\lambda'} c^{\lambda} \quad (\text{I.2.13})$$

Ces conditions étant remplies, le système (I.2.2) est invariant :

$$\partial_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} = \partial_{[\kappa'} F_{\lambda'\nu']} \quad (\text{I.2.14a})$$

$$\partial_{\nu} G^{\lambda\nu} = \partial_{\nu'} G^{\lambda'\nu'} \quad (\text{I.2.14b})$$

De plus, on peut démontrer :

$$\nabla_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} = \partial_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} - 2F_{\sigma[\kappa} \Gamma_{\lambda\nu]}^{\sigma} = \partial_{[\kappa} F_{\lambda\nu]} \quad (\text{I.2.15})$$

$$\nabla_{\nu} G^{\lambda\nu} = \partial_{\nu} G^{\lambda\nu} + G^{\sigma\nu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + G^{\lambda\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} G^{\lambda\nu} = \partial_{\nu} G^{\lambda\nu} \quad (\text{I.2.16})$$

Le symbole ∇_{λ} désigne la dérivation covariante et $\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}$ le symbole de Christoffel.

Les relations (I.2.15) et (I.2.16) montrent qu'il n'est pas utile de faire intervenir la dérivation covariante et par suite les symboles de Christoffel dans les équations de Maxwell-Minkowsky (I.2.2). Les dérivations étant des dérivations ordinaires ou naturelles ∂_{λ} , on dit que les équations de Maxwell-Minkowsky sous la forme (I.2.2) sont naturellement invariantes.

▣ Les relations de milieu

On pose qu'il existe entre les tenseurs champ électromagnétique une relation linéaire (II.2.17) qui est la relation de milieu :

$$G^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \chi^{\lambda\nu\sigma\kappa} F_{\sigma\kappa} \quad (\text{I.2.17})$$

Le tenseur du milieu $\chi^{\lambda\nu\sigma\kappa}$ est un pseudo-tenseur de poids +1, d'ordre quatre, quatre fois contravariant. En raison des propriétés d'antisymétrie des tenseurs $G^{\lambda\nu}$ et $F_{\sigma\kappa}$, il vient :

$$\chi^{\lambda\nu\sigma\kappa} = -\chi^{\nu\lambda\sigma\kappa} = -\chi^{\lambda\nu\kappa\sigma} = \chi^{\sigma\kappa\nu\lambda} \quad (\text{I.2.18})$$

En raison de (I.2.18), le tenseur de milieu possède au plus 21 composantes non nulles différentes, mais seulement 20 composantes indépendantes

car dans le cas général, on peut montrer [19] qu'il existe une relation supplémentaire :

$$\chi^{[\lambda\nu\sigma\kappa]} = 0 \quad (\text{I.2.19})$$

Les relations (I.2.18) et (I.2.19) sont indépendantes des propriétés de symétrie du milieu.

Dans un changement de base, il vient pour le tenseur χ :

$$\chi^{\lambda'\nu'\sigma'\kappa'} = |\Delta|^{-1} A_{\lambda\nu\sigma\kappa}^{\lambda'\nu'\sigma'\kappa'} \chi^{\lambda\nu\sigma\kappa}.$$

La relation de milieu (I.2.17) est une relation métrique entre le tenseur $G^{\lambda\nu}$ de l'espace vectoriel E_4 et le tenseur $F_{\lambda\nu}$ de l'espace dual E_4^* ; les composantes $\chi^{\lambda\nu\sigma\kappa}$ du tenseur de milieu dépendent non seulement des propriétés électromagnétiques du milieu mais aussi des propriétés géométriques du système de coordonnées utilisé, par l'intermédiaire du tenseur métrique g_{ij} .

I. 3. LES EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME COVARIANTE TRIDIMENSIONNELLE

Un tenseur antisymétrique d'ordre deux de l'espace à quatre dimensions possède six composantes non nulles indépendantes ; c'est-à-dire le même nombre que deux vecteurs de l'espace à trois dimensions. Associons des vecteurs tridimensionnels aux tenseurs électromagnétiques :

$$\begin{aligned} E_i &= F_{0i}, & B^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}, & i, j, k \in \{1, 2, 3\} \\ D^i &= G^{0i}, & H_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G^{jk} \\ \rho &= C^0, & J_i &= C^i \end{aligned} \quad (\text{I.3.1})$$

ϵ^{ijk} est l'indicateur de Levi-Civita.

Avec ces grandeurs, les équations de Maxwell-Minkowsky s'écrivent :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = - \frac{\partial B^i}{\partial t}, \quad (\text{I.3.2a})$$

$$\partial_i B^i = 0, \quad (\text{I.3.2b})$$

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j H_k = \frac{\partial D^i}{\partial t} + J^i, \quad (\text{I.3.2c})$$

$$\partial_i D^i = \rho. \quad (\text{I.3.2d})$$

Compte-tenu des identifications (I.3.1), le système (I.3.2) est équivalent (et possède donc les mêmes propriétés d'invariance) que les équations de Maxwell-Minkowsky (I.2.2). En particulier, il est invariant pour toutes les transformations holonômes de coordonnées de l'espace affine \mathbb{E}_4 . Par contre, les quantités définies par (I.3.1) et qui interviennent dans ces équations ne sont pas covariantes ; elles n'ont donc un comportement tensoriel que si les transformations considérées n'affectent pas la variable temps $\dot{x} = t$, ce qui s'écrit :

$$A_{\lambda}^{\circ'} = \delta_{\circ}^{\circ'}, \quad A_{\circ}^{\lambda} = \delta_{\circ}^{\circ'}. \quad (\text{I.3.3})$$

Si cette condition (II.3.3) est remplie, les équations (II.3.2) sont naturellement invariantes car nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E_{z'} &= A_{z'}^z E_z & B^{z'} &= |\Delta|^{-1} A_{z'}^z B^z \\ H_{z'} &= A_{z'}^z H_z & D^{z'} &= |\Delta|^{-1} A_{z'}^z D^z \quad i, z' \in \{1, 2, 3\} \\ J^{z'} &= |\Delta|^{-1} A_{z'}^z J^z & \rho' &= |\Delta|^{-1} \rho \end{aligned} \quad (\text{I.3.4})$$

On peut remarquer que, par nature, \vec{E} et \vec{H} sont des vecteurs covariants et \vec{B} , \vec{D} et \vec{J} des pseudo-vecteurs contravariants.

Toute identification entre \vec{E} et \vec{D} d'une part, \vec{B} et \vec{H} d'autre part (comme dans les anciens systèmes d'unités) suppose l'abandon du caractère affine des équations de Maxwell. Celles-ci contiennent alors de manière implicite les propriétés géométriques du système de coordonnées et les propriétés spécifiques du milieu considéré.

▣ Les relations de milieu

Pour un milieu au repos par rapport au système de coordonnées, certaines des 21 composantes du tenseur χ sont nulles ; il vient :

$$\chi^{oijk} = 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{I.3.5})$$

La propriété (II.3.5) ramène à 12 le nombre des composantes non nulles ; ce nombre est alors égal à celui des composantes indépendantes de deux tenseurs symétriques d'ordre deux de l'espace à trois dimensions. A partir de $\chi^{\lambda\nu\sigma\kappa}$ nous définissons deux nouveaux tenseurs ϵ^{ij} et χ_{ij} de la manière suivante :

$$\epsilon^{ij} = \chi^{oioj}, \quad (\text{I.3.6})$$

$$\chi_{ij} = \delta_{ikl} \delta_{jmn} \chi^{klmn}, \quad (\text{I.3.7})$$

avec :

$$\epsilon^{ij} = \epsilon^{ji} \quad \text{et} \quad \chi_{ij} = \chi_{ji} \quad i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{I.3.8})$$

Si la condition (I.3.5) est remplie, la relation de milieu (I.2.17) devient :

$$\mathbf{D}^i = \epsilon^{ij} \mathbf{E}_j \quad (\text{I.3.9a})$$

$$\mathbf{H}_i = \chi_{ij} \mathbf{B}^j \quad (\text{I.3.9b})$$

et en inversant ces relations :

$$\mathbf{E}_i = \eta_{ij} \mathbf{D}^j, \quad (\text{I.3.9c})$$

$$\mathbf{B}^i = \mu^{ij} \mathbf{H}_j \quad (\text{I.3.9d})$$

avec :

$$(\eta_{ij}) = (\epsilon^{ij})^{-1} \quad \text{et} \quad (\mu^{ij}) = (\chi_{ij})^{-1}. \quad (\text{I.3.10})$$

Si la condition (I.3.3) est vérifiée, les quantités représentant le milieu ont un comportement tensoriel :

$$\epsilon^{i'j'} = |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} \epsilon^{ij}, \quad (\text{I.3.10a})$$

$$\chi_{i'j'} = |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} \chi_{ij}, \quad (\text{I.3.10b})$$

$$\eta_{i'j'} = |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} \eta_{ij}, \quad (\text{I.3.10c})$$

$$\mu^{i'j'} = |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} \mu^{ij}. \quad (\text{I.3.10d})$$

Comme la relation de milieu quadrimensionnelle (I.2.17), les relations (I.3.9) sont des relations métriques car elles établissent une connexion entre les vecteurs covariants et contravariants.

▣ Les équations de propagation de champs

Dans l'équation (I.3.2c), remplaçons H_k par sa valeur en fonction de B^k tirée de (I.3.9b) :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j \chi_{kl} B^l = \frac{\partial D^i}{\partial t} + J^i. \quad (\text{I.3.12})$$

Dérivons par rapport au temps, en supposant que les tenseurs du milieu sont indépendants du temps :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j \chi_{kl} \frac{\partial B^l}{\partial t} = \frac{\partial^2 D^i}{\partial t^2} + \frac{\partial J^i}{\partial t} \quad (\text{I.3.13})$$

Reportons (I.3.9a) et (I.3.2a) dans cette dernière relation :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \chi_{kl} \partial_m E_n + \epsilon^{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} + \frac{\partial J^i}{\partial t} = 0. \quad (\text{I.3.14})$$

Si nous nous plaçons dans le cas d'un milieu conducteur, nous pouvons ajouter aux relations de milieu :

$$J^i = \sigma^{ij} E_j, \quad (\text{I.3.15})$$

et en reportant cette dernière valeur dans (I.3.14) :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \chi_{kl} \partial_m E_n + \epsilon^{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} + \sigma^{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} = 0. \quad (\text{I.3.16a})$$

En procédant de la même manière pour les équations relatives à H_i (II.3.2c), on obtient :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \eta_{kl} \partial_m H_n - \epsilon^{ijk} \partial_j \eta_{kl} J^l + \mu^{ij} \frac{\partial^2 H_j}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.3.16b})$$

Si le milieu possède une conductivité nulle ($\sigma^{ij} \equiv 0$), il vient :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \chi_{kl} \partial_m E_n + \epsilon^{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{I.3.17a})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \eta_{kl} \partial_m H_n + \mu^{ij} \frac{\partial^2 H_j}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{I.3.17b})$$

Dans le cas où $\rho \equiv 0$, à ces deux relations nous pouvons ajouter les

deux relations suivantes, qui ne sont pas indépendantes de (I.3.17a) et (I.3.17b) :

$$\partial_i \epsilon^{ij} E_j = 0, \quad (\text{I.3.18a})$$

$$\partial_i \mu^{ij} H_j = 0. \quad (\text{I.3.18b})$$

Compte-tenu des restrictions que nous avons faites, les trois couples d'équations ($i = 1, 2, 3$) (I.3.17) sont valables pour tout système de coordonnées curvilignes. Elles représentent le dalembertien sous sa forme la plus générale. Il est possible d'obtenir pour les composantes B^i et D^i des relations similaires ; toujours avec $\sigma^{ij} \equiv 0$, il vient :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \epsilon_{kl} \partial_m \chi_{np} B^p + \frac{\partial^2 B^i}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.3.17c})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \chi_{kl} \partial_m \epsilon_{np} D^p + \frac{\partial^2 D^i}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.3.17d})$$

I. 4. LES RELATIONS ENTRE LA FORME COVARIANTE ET LA FORME TRADITIONNELLE DES EQUATIONS DE MAXWELL

▣ Les équations de Maxwell en coordonnées cartésiennes

La distinction entre les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur est inutile pour un espace métrique en coordonnées cartésiennes. Les systèmes (II.3.1) et (II.3.2) sont identiques en posant :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_x, & B^1 &= B_x, & D^1 &= D_x, & H_1 &= H_x, & J^1 &= J_x, & \rho &= 0, \\ E_2 &= E_y, & B^2 &= B_y, & D^2 &= D_y, & H_2 &= H_y, & J^2 &= J_y, & & \\ E_3 &= E_z, & B^3 &= B_z, & D^3 &= D_z, & H_3 &= H_z, & J^3 &= J_z. & & \end{aligned} \quad (\text{I.4.1})$$

Pour un milieu diélectrique et magnétique parfait isotrope, les équations de propagation (I.3.18) se réduisent au dalembertien habituel en coordonnées cartésiennes, avec :

$$\epsilon^{ij} = \delta^{ij} \epsilon, \quad \chi_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\mu}. \quad (\text{I.4.2})$$

▣ Les équations de Maxwell en coordonnées curvilignes orthogonales

Le repère naturel en un point quelconque est alors orthogonal, mais n'est pas orthonormé, car les vecteurs de base ne sont pas unitaires ($g_{ii} \neq 1$). De plus, ces vecteurs de base n'ont pas nécessairement la dimension d'une longueur. Pour ces deux raisons, il faut distinguer les composantes covariantes a_i des composantes contravariantes a^i d'un vecteur \vec{a} . Afin d'échapper à cette distinction, on définit souvent les composantes cartésiennes \hat{a}_i de \vec{a} selon (A.3.12) :

$$\hat{a}_i = \sqrt{g_{ii}} a^i = \frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{A.3.12})$$

Les composantes \hat{a}_i ont la même dimension que le vecteur \vec{a} alors que ce n'est pas le cas en général pour a_i et a^i . Par contre, dans un changement de coordonnées, les composantes \hat{a}_i n'ont pas un comportement tensoriel, ce qui nécessite l'élaboration de règles de calcul et l'obtention d'expressions analytiques spécifiques à chaque système.

De plus, la définition (A.3.12) des composantes d'un vecteur implique que dans les équations du milieu, les grandeurs ϵ et μ soient invariantes alors que dans le formalisme (I.3.2) les grandeurs ϵ et μ se comportent comme des tenseurs.

Compte-tenu de ces remarques, les équations de propagation des champs (II.3.17) se réduisent au d'Alembertien en coordonnées curvilignes orthogonales.

▣ Les équations de Maxwell en coordonnées curvilignes non orthogonales

Le repère naturel n'est pas orthogonal et les vecteurs de base ne sont pas unitaires ; la distinction entre les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur est alors indispensable. Les équations de Maxwell sous forme tensorielle (I.3.2) sont particulièrement bien adaptées à l'obtention des équations de propagation dans de tels systèmes. Quelques travaux [38, 39, 40] ont porté sur ces problèmes. En général, ils sont basés sur un formalisme développé par Stratton [21] qui est à mi-chemin entre le formalisme classique et le formalisme covariant. Grâce au calcul préalable des opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes quelconques, cette méthode permet d'explicitier les équations de Maxwell classiques (I.1.1).

Le système obtenu est plus complexe que (I.3.2) et perd le caractère affine, car il suppose que dans les relations de milieu les grandeurs ϵ et μ sont invariantes. En raison de cette complexité, il devient difficile d'obtenir les équations de propagation des champs, ce qui nécessite l'utilisation d'approximations précoces, inutiles avec le formalisme covariant.

I. 5. LES CONDITIONS AUX LIMITES

Considérons une surface S de séparation entre deux milieux (1) et (2), de propriétés électromagnétiques différentes ; M un point de cette surface, \vec{n} vecteur unitaire normal à S en ce point, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

En s'appuyant sur les équations de Maxwell (I.1.1) on peut montrer qu'il existe, pour les différents champs électromagnétiques, certaines relations de continuité au passage d'un milieu à l'autre, soit :

$$\vec{n} \times (\vec{E}_{(2)} - \vec{E}_{(1)}) = \vec{0}, \quad (\text{I.5.1a})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_{(2)} - \vec{D}_{(1)}) = \sigma_e, \quad (\text{I.5.1b})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_{(2)} - \vec{J}_{(1)}) = -\frac{\partial \sigma_e}{\partial t}, \quad (\text{I.5.1c})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{(2)} - \vec{B}_{(1)}) = 0, \quad (\text{I.5.1d})$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_{(2)} - \vec{H}_{(1)}) = \vec{K}. \quad (\text{I.5.1e})$$

Les indices (1) et (2) indiquent qu'il s'agit des grandeurs relatives au milieu (1) ou au milieu (2) au point M .

σ_e désigne la densité de charge de surface sur S ;

\vec{K} désigne le vecteur densité de courant de surface sur S .

Si les deux milieux ont une conductivité finie, ($\vec{K} = \vec{0}$ et $\sigma_e = 0$), les relations (I.5.1) montrent qu'il existe deux types de conditions aux limites :

1°) continuité des composantes tangentielles pour \vec{E} et \vec{H} ;

2°) continuité des composantes normales pour \vec{B} , \vec{D} et \vec{J} .

Définition :

système naturel de coordonnées attaché à une surface S.

Nous appelons ainsi un système, orthogonal ou non, tel que l'une de ses surfaces de coordonnées coïncide avec la surface S. Dans un tel système, la surface S est définie par $x^i = \text{cte}$.

Cette définition est une généralisation au cas non orthogonal de la définition donnée par Bouix [5] du "système fondamental".

A une surface S correspond une infinité de systèmes naturels.

▣ Expression des conditions aux limites dans un système naturel

Considérons une surface S séparant le milieu (1) du milieu (2) ; soit (x^i) un système naturel de coordonnées attaché à S ; soit $\vec{a}(M)$ un champ de vecteurs, donné par $\overset{(1)}{a}$ dans le milieu (1) et $\overset{(2)}{a}$ dans le milieu (2).

En utilisant l'interprétation géométrique des composantes d'un vecteur (§ A.3), il vient :

- continuité des composantes tangentielles sur la surface $S(x^1 = \text{cte})$:

$$\overset{(1)}{a}_2 = \overset{(2)}{a}_2 \quad (\text{I.5.2a})$$

$$\overset{(1)}{a}_3 = \overset{(2)}{a}_3 \quad (\text{I.5.2b})$$

- continuité de la composante normale :

$$\overset{(1)}{a}^1 = \overset{(2)}{a}^1 \quad (\text{I.5.3})$$

Ce qui donne, si $\sigma_e = 0$ et $\vec{K} = \vec{0}$:

$$\overset{(1)}{E}_2 = \overset{(2)}{E}_2 \quad \text{et} \quad \overset{(1)}{E}_3 = \overset{(2)}{E}_3 \quad (\text{I.5.4a})$$

$$\overset{(1)}{D}^1 = \overset{(2)}{D}^1 \quad (\text{I.5.4b})$$

$${}^{(1)}J^1 = {}^{(2)}J^1 \quad (\text{I.5.4c})$$

$${}^{(1)}B^1 = {}^{(2)}B^1 \quad (\text{I.5.4d})$$

$${}^{(1)}H_2 = {}^{(2)}H_2 \quad \text{et} \quad {}^{(1)}H_3 = {}^{(2)}H_3 \quad (\text{I.5.4e})$$

On remarque que ce sont les mêmes types de composantes du champ qui interviennent dans les conditions aux limites (I.5.4) et dans les équations de Maxwell (I.3.2). Ceci indique que ces propriétés de conservation sont des propriétés affines (elles sont une conséquence des équations de Maxwell) qui peuvent s'exprimer comme suit :

- au passage à travers une surface de discontinuité, il y a conservation de la composante externe à la surface pour les champs contravariants et conservation des composantes internes (ou tangentielles) pour les champs covariants.

Un cas particulier très important est celui d'une surface limite infiniment conductrice. Soit $x^1 = u_0$, l'équation d'une telle limite ; la loi de continuité du champ électrique prend la forme simple suivante :

$$E_2(u_0, x^2, x^3) = E_3(u_0, x^2, x^3) = 0. \quad (\text{I.5.5})$$

▣ Les conditions aux limites pour les tenseurs champ électromagnétique

En se reportant aux définitions des tenseurs F et G, les relations (I.5.4) prennent, dans le système naturel, une forme très simple. Si $x^i = \text{cte}$ représente la surface de discontinuité S, il vient :

$${}^{(1)}F_{\lambda\mu} = {}^{(2)}F_{\lambda\mu} \quad \text{avec } \lambda, \mu \neq i \quad (\text{I.5.6})$$

$${}^{(1)}G^{i\lambda} = {}^{(2)}G^{i\lambda} \quad (\text{si } \vec{K} = \vec{0} \text{ et } \sigma_e = 0) \quad (\text{I.5.7})$$

I. 6. LES EQUATIONS DE PROPAGATION DES CHAMPS POUR UN MILIEU ISOTROPE DIELECTRIQUE ET MAGNETIQUE PARFAIT

Pour un tel milieu, dont l'espace vide de matière est un cas particulier, la permittivité ϵ et la perméabilité μ qui interviennent dans les relations de milieu (I.1.3) en formalisme classique sont de simples scalaires.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{I.1.3a})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.1.3b})$$

$$\vec{J} = \vec{0}. \quad (\text{I.1.3c})$$

Au § (I.4), nous avons montré que les différents formalismes coïncident en coordonnées cartésiennes. Compte-tenu des identifications (I.4.1) qui sont alors possibles et du système (I.1.3), les relations du milieu (II.3.9) s'écrivent :

$$D^i = \epsilon \delta^{ij} E_j \quad (\text{I.6.1a})$$

$$B^i = \mu \delta^{ij} H_j \quad (\text{I.6.1b})$$

$$E_i = \frac{\delta_{ij}}{\epsilon} D^j, \quad (\text{I.6.1c})$$

$$H_j = \frac{\delta_{ij}}{\mu} B^i. \quad (\text{I.6.1d})$$

Le système étant cartésien :

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad g^{ij} = \delta^{ij} \quad (\text{A.3.10})$$

Les différents tenseurs de milieu sont alors :

$$\epsilon^{ij} = \epsilon \delta^{ij} = \epsilon g^{ij}, \quad (\text{I.6.3a})$$

$$\mu^{ij} = \mu \delta^{ij} = \mu g^{ij}, \quad (\text{I.6.3b})$$

$$\eta_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\epsilon} = \frac{g_{ij}}{\epsilon}, \quad (\text{I.6.3c})$$

$$\chi_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\mu} = \frac{g_{ij}}{\mu}. \quad (\text{I.6.3d})$$

Pour un système curviligne quelconque, reportons (I.6.3a) dans (I.3.11a)

$$\epsilon^{i'j'} = |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} \epsilon^{ij} = \epsilon |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} g^{ij} = \epsilon |\Delta|^{-1} g^{i'j'} \quad (\text{I.6.4})$$

De plus, il est possible de montrer que pour une telle transformation, on a :

$$|\Delta|^{-1} = \sqrt{|g'|}, \text{ avec } g' = \det(g_{i'j'}) = [\det(g^{i'j'})]^{-1}, \quad (\text{I.6.5})$$

donc,
$$\epsilon^{i'j'} = \epsilon \sqrt{|g'|} g^{i'j'}.$$

Finalement, en coordonnées curvilignes (x^i), pour un milieu isotrope diélectrique et magnétique parfait, les différents tenseurs du milieu s'écrivent à partir du tenseur métrique et des constantes ϵ et μ :

$$\epsilon^{ij} = \epsilon \sqrt{g} g^{ij}, \quad (\text{I.6.6a})$$

$$\mu^{ij} = \mu \sqrt{g} g^{ij}, \quad (\text{I.6.6b})$$

$$\chi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\mu \sqrt{g}}, \quad (\text{I.6.6c})$$

$$\eta_{ij} = \frac{g_{ij}}{\mu \sqrt{g}}. \quad (\text{I.6.6d})$$

En reportant ces valeurs (I.6.6) dans les équations (II.3.17), on obtient les équations de propagation des champs harmoniques ($\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$) :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m E_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} E_j = 0, \quad (\text{I.6.7a})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m H_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} H_j = 0, \quad (\text{I.6.7b})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m \frac{g_{np}}{\sqrt{g}} D^p - k^2 B^i = 0, \quad (\text{I.6.7c})$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m \frac{g_{np}}{\sqrt{g}} D^p - k^2 D^i = 0. \quad (\text{I.6.7d})$$

Ces équations sont valables si ϵ et μ ne dépendent pas des coordonnées, avec :

$$c^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{I.6.8})$$

Chaque système (II.6.7) donne trois équations correspondant aux trois valeurs possibles de l'indice i . Par exemple, pour l'équation (II.6.7a) et $i = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} & \partial_1 \frac{g_{31}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) + \partial_2 \frac{g_{32}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) + \partial_3 \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) \\ & + \partial_3 \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3) + \partial_1 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) + \partial_2 \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{11} E_1 - k^2 \sqrt{g} g^{12} E_2 - k^2 \sqrt{g} g^{13} E_3 = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.6.9})$$

Les deux autres équations ($i = 2$ et $i = 3$) peuvent être obtenues à partir de (I.6.9) par permutation circulaire des indices.

Pour un milieu isotrope de conductivité finie, on peut ajouter aux relations de milieu, la relation suivante :

$$\sigma^{ij} = \sigma \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{I.6.6e})$$

L'équation (II.6.7a) s'écrit alors :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m E_n - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) E_j = 0 \quad (\text{I.6.10a})$$

Nous pouvons écrire une relation identique pour \vec{H} à partir de (I.3.16b) ; en effet :

$$\eta_{kl} j^l = \eta_{kl} \sigma^{ln} E_n = \frac{\sigma}{\epsilon} g_{kl} g^{ln} E_n = \frac{\sigma}{\epsilon} \delta_k^n E_n, \quad (\text{I.6.11})$$

d'où :

$$\epsilon^{ijkl} \partial_j \eta_{kl} j^l = \frac{\sigma}{\epsilon} \epsilon^{ijk} \partial_j E_k, \quad (\text{I.6.12})$$

et d'après (II.3.2a), (II.3.9b) et (II.6.6b) :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\mu \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (\text{I.6.13})$$

En définitive, l'équation (II.3.16b) peut s'écrire :

$$g^{ijk} g^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m H_n - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) H_j = 0. \quad (\text{I.6.10b})$$

Pour un milieu conducteur homogène isotrope, les équations de propagation des champs E_i et H_i sont donc identiques.

I. 7. LE THEOREME DE POYNTING EN COORDONNEES CURVILIGNES

Définissons le vecteur de Poynting comme un pseudo-vecteur contravariant dont les composantes N^i sont données par :

$$N^i = g^{ijk} E_j H_k. \quad (\text{I.7.1})$$

Ecrivons la divergence de ce vecteur, soit :

$$\partial_i N^i = g^{ijk} H_k \partial_i E_j + g^{ijk} E_j \partial_i H_k, \quad (\text{I.7.2})$$

soit encore :

$$\partial_i N^i = g^{kij} H_k \partial_i E_j - g^{jik} \partial_i H_k E_j. \quad (\text{I.7.3})$$

Reportons les équations de Maxwell (I.3.2a) et (I.3.2c) dans (I.7.3), (en supposant qu'il n'existe pas de courants vrais) ; il vient alors :

$$\partial_i N^i = - E_i \frac{\partial D^i}{\partial t} - H_i \frac{\partial B^i}{\partial t}. \quad (\text{I.7.4})$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_i D^i) = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{ij} E_i E_j = E_i E_j \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{ij} + \epsilon^{ij} E_j \frac{\partial E_i}{\partial t} + \epsilon^{ij} E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} \quad (\text{I.7.5a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (H_i B^i) = \frac{\partial}{\partial t} \mu^{ij} H_i H_j = H_i H_j \frac{\partial}{\partial t} \mu^{ij} + \mu^{ij} H_j \frac{\partial H_i}{\partial t} + \mu^{ij} H_i \frac{\partial H_j}{\partial t} \quad (\text{I.7.5b})$$

Si l'on suppose que les propriétés du milieu (ϵ , μ) sont indépendantes du temps, et compte-tenu de la symétrie de ϵ^{ij} et μ^{ij} , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_i D^i) = 2 \epsilon^{ij} E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} = 2 E_i \frac{\partial D^i}{\partial t} \quad (\text{I.7.6a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (H_i B^i) = 2 \mu^{ij} H_i \frac{\partial H_j}{\partial t} = 2 H_i \frac{\partial B^i}{\partial t}. \quad (\text{I.7.6b})$$

En reportant ces relations dans l'équation (I.7.4), on obtient une nouvelle relation qui traduit le théorème de Poynting :

$$\partial_i N^i = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E_i D^i + H_i B^i), \quad (\text{I.7.7})$$

La densité d'énergie électromagnétique \mathcal{E} , s'écrivant :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (E_i D^i + H_i B^i) \quad (\text{I.7.8})$$

Sur une surface S appartenant à une surface de coordonnées le flux Φ du vecteur de Poynting prend une forme très simple. Pour la surface $x^1 = \text{cte}$, par exemple :

$$\Phi(N) = \iint_S N^1 dx^2 dx^3. \quad (\text{I.7.9})$$

* *
o

Deuxième partie

LES GUIDES PERIODIQUES

Introduction

Les guides d'ondes cylindriques périodiquement chargés par des iris ont de nombreuses applications en microondes, par exemple dans les tubes à ondes progressives, dans les lignes à retard, et surtout, dans les accélérateurs linéaires de particules. Nous avons donc été amenés à étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans ces guides. Une des premières théories électromagnétiques, directement issue des équations de Maxwell, a été donnée en 1949 par WALKINSHAW [42] mais en raison des faibles moyens de calculs numériques de l'époque, il n'a pu exploiter qu'une théorie approchée élémentaire donnant des résultats assez peu satisfaisants.

Plus tard, en 1959, R. COMBE et M. FEIX ont donné de ce problème une solution rigoureuse pour laquelle les calculs numériques, rendus possibles par l'apparition des premiers gros ordinateurs, conduisent à des résultats en très bon accord avec l'expérience [31].

Cependant, en raison de l'augmentation des puissances électromagnétiques à transmettre, il a fallu très rapidement, pour limiter les risques de claquage, réduire les effets de pointe dus aux angles vifs des iris en utilisant des iris à bords arrondis. Malheureusement, pour de tels guides, les théories élaborées jusqu'alors n'étaient plus utilisables. En effet elles sont basées sur la méthode dite des "raccordements" qui s'applique seulement si le domaine dans lequel on intègre les équations des champs se subdivise en sous-domaines

élémentaires dans lesquels on connaît les solutions ; les constantes d'intégration sont alors obtenues en raccordant les diverses solutions sur les frontières communes de ces domaines. En 1966, J. BERNARD a généralisé, aux prix de certaines approximations, la méthode des raccordements à l'étude des guides à iris à bords arrondis. [24].

Parallèlement, des recherches étaient conduites en vue d'élaborer une théorie plus générale valable pour les guides périodiques quelconques. Ces recherches ont mis en évidence la nécessité d'utiliser un système de coordonnées curvilignes prenant en compte la géométrie du guide. En 1967, H. SNYDER [39] a proposé une telle méthode pour l'étude du guide sinusoïdal. Mais, en raison de la complexité des équations, il lui a fallu dès le départ, faire de nombreuses approximations.

Enfin en 1975, NEVIERE [52] a suggéré l'idée, pour résoudre ce problème, d'utiliser la méthode de la transformation conforme qu'il venait d'appliquer avec succès à l'étude de la diffraction par un réseau.

En raison des considérations précédentes, il nous a semblé intéressant de tester tout d'abord notre formalisme en étudiant la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides de révolution à génératrice périodique, en nous consacrant essentiellement à ce qui peut être considéré comme le problème fondamental, la recherche de l'équation de dispersion.

Dans le chapitre II nous donnons pour le guide sinusoïdal une solution analytique approchée construite au moyen d'une méthode de perturbation à partir de la solution relative au guide lisse. Une étude particulière, dont nous montrons la nécessité, est faite au voisinage du mode π .

Dans le chapitre III, en décomposant les champs axialement en séries de Fourier et radialement en séries de Fourier-Bessel, nous ramenons la résolution des équations de propagation à celle d'un système infini et homogène d'équations algébriques. L'annulation du déterminant de ce système fournit la relation de dispersion ; son inversion permettant ensuite le calcul des diverses composantes du champ électromagnétique.

Chapitre II

ETUDE DES GUIDES PERIODIQUES PAR UNE METHODE DE PERTURBATION

II. 1 POSITION DU PROBLEME

Nous nous proposons d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique, fonction harmonique du temps dans un milieu isotrope diélectrique et magnétique parfait limité par une surface infiniment conductrice S présentant la symétrie de révolution axiale. Nous nous intéressons particulièrement à l'équation de dispersion de l'onde se propageant dans une telle structure lorsque le milieu considéré est le vide et la génératrice de la surface limite une fonction périodique de la variable z (fig. II.1).

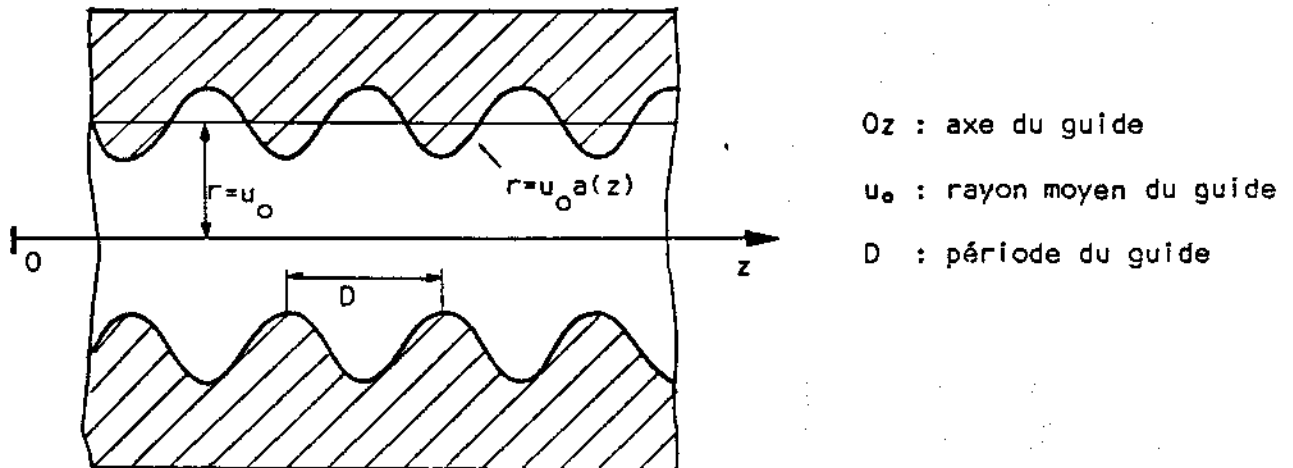


fig. II.1 - Le guide périodique

Pour ce problème, le système de coordonnées de révolution axiale défini au paragraphe (A.6) est un système naturel (I.5) :

$$x^1 = u, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z \quad \text{avec } u = \frac{r}{a(z)}$$

($a(z)$ fonction périodique de période D).

La surface infiniment conductrice S est représentée par :

$$x^1 = u_0 = \text{cte} \quad \text{soit} \quad r = u_0 a(z) \quad (\text{II.1.1})$$

Dans ce système, l'écriture des conditions aux limites sur S, relatives aux composantes covariantes du champ électrique est très simple :

$$\begin{cases} E_2(u_0, \varphi, z) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.2a})$$

$$\begin{cases} E_3(u_0, \varphi, z) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.2b})$$

En coordonnées de révolution, en posant $\dot{a} = \frac{da}{dz}$, le tenseur métrique s'écrit (A.6.7) :

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a \dot{a} u \\ a & a^2 u^2 & 0 \\ a \dot{a} u & 0 & 1 + \dot{a}^2 u^2 \end{bmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1 + \dot{a}^2 u^2}{a^2} & 0 & -\frac{\dot{a} u}{a} \\ 0 & \frac{1}{a^2 u^2} & 0 \\ -\frac{\dot{a} u}{a} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6.7})$$

Compte-tenu de ces valeurs (A.6.7), les équations de propagation relatives aux composantes covariantes du champ électrique (I.6.9) s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1 + \dot{a}^2 u^2}{a^2 u} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} u \left(\frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z} \right) \quad (\text{II.1.3a})$$

$$- k^2 (1 + \dot{a}^2 u^2) u E_u + k^2 a \dot{a} u E_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{u} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II.1.3b})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u} \frac{1 + \dot{a}^2 u^2}{a^2 u} \left(\frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) - k^2 \frac{E_\varphi}{u} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\partial E_u}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{u} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II.1.3c})$$

$$+ k^2 a \dot{a} u E_u - k^2 a^2 u E_z = 0$$

Le système (II.1.3) est l'expression du dalembertien appliqué au champ électrique en coordonnées de révolution. Au sein de l'infinité de solutions possibles, nous cherchons les solutions présentant la même symétrie que les coordonnées, c'est-à-dire telles que :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0 . \quad (\text{II.1.4})$$

Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u E_u}{\partial z^2} + k^2 (1 + a^2 u^2) u E_u = u \frac{\partial^2 E_z}{\partial u \partial z} + k^2 a \dot{a} u^2 E_z \end{array} \right. \quad (\text{II.1.5a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1 + a^2 u^2}{u} \frac{\partial E_\varphi}{\partial u} - \frac{a}{a} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial u \partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{a}{a} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} + k^2 \frac{E_\varphi}{u} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.1.5b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u E_u}{\partial u \partial z} + k^2 a \dot{a} u^2 E_u = \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_z}{\partial u} + k^2 a^2 u E_z \end{array} \right. \quad (\text{II.1.5c})$$

L'équation (II.1.5b) relative à la seule composante E_φ est indépendante des deux autres. Ceci indique qu'il existe deux types de solutions :

$$\text{modes de type } \left\{ \begin{array}{ll} E_\varphi \equiv 0 & , \quad H_\varphi \neq 0 \\ E_z \neq 0 \quad E_u \neq 0 & \quad H_z \equiv H_u \equiv 0 \end{array} \right. \quad \text{TM}_{on}$$

$$\text{modes de type } \left\{ \begin{array}{ll} E_\varphi \neq 0 & \quad H_\varphi \equiv 0 \\ E_z \equiv E_u \equiv 0 & \quad H_z \neq 0 \quad H_u \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{TE}_{on}$$

Dans ce chapitre, nous limitons notre étude aux modes TM_{on} et plus particulièrement au mode TM_{01} . Ce mode a déjà été étudié dans le cas d'un guide à génératrice en créneau, par la méthode classique de raccordement [31] ; il a pour intérêt d'être utilisé dans les accélérateurs linéaires de particules. Une étude des modes TE_{on} est faite au chapitre III.

II. 2. RECHERCHE D'UNE SOLUTION PAR UNE METHODE DE PERTURBATION

A partir de $a(z)$, définissons une nouvelle fonction $Z(z)$ par :

$$a(z) = 1 + \alpha Z(z) \quad (\text{II.2.1})$$

avec :

$$a(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (\text{II.2.2})$$

et α étant un paramètre réel sans dimension.

Pour $\alpha = 0$, le système de coordonnées est le système cylindrique classique.

Recherchons les solutions aux équations (II.1.5a) et (II.1.5b) par une méthode de perturbation, c'est-à-dire sous la forme de séries entières du paramètre α :

$$E_z = E_0 + \alpha E_1 + \alpha^2 E_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n E_n \quad (\text{II.2.3a})$$

$$u E_u \equiv F_u = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F_n \quad (\text{II.2.3b})$$

En reportant ces expressions dans (II.1.5a) et (II.1.5b) et après avoir identifié les termes de même degré en n , les équations de propagation des coefficients E_n et F_n s'écrivent :

$n = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2} + k^2 F_0 = u \frac{\partial^2 E_0}{\partial u \partial z}, \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial u \partial z} = \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_0}{\partial u} + k^2 u E_0, \end{cases} \quad (\text{II.2.4})$$

$n = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + k^2 F_1 = u \frac{\partial^2 E_1}{\partial u \partial z} + k^2 Z u^2 E_0, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial z} + k^2 Z u F_0 = \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_1}{\partial u} + k^2 u E_1 + 2k^2 Z u E_0 \end{cases} \quad (\text{II.2.5})$$

$n \geq 2$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} + k^2 F_n + k^2 Z^2 u^2 F_{n-2} &= u \frac{\partial^2 E_n}{\partial u \partial z} + k^2 Z u^2 E_{n-1} + k^2 Z Z u^2 E_{n-2}, \\ \frac{\partial^2 F_n}{\partial u \partial z} + k^2 Z u F_{n-1} + k^2 Z Z u F_{n-2} &= \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_n}{\partial u} + k^2 u E_n + 2k^2 Z u E_{n-1} \\ &+ k^2 Z^2 u E_{n-2} \end{aligned} \right. \quad (\text{II.2.6})$$

D'après la relation (II.1.2) c'est la composante E_z qui satisfait à une condition aux limites sur S . Nous allons donc rechercher une équation aux dérivées partielles de la fonction E_n mais comportant un second membre fonction de E_{n-1} , E_{n-2} , ... E_0 et F_{n-1} , F_{n-2} , ... F_0 . Ce résultat est obtenu au moyen de dérivations et de combinaisons linéaires des équations (II.2.4), (II.2.5) et (II.2.6).

Ordre zéro ($n = 0$)

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_0}{\partial u} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + k^2 E_0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_0}{\partial u} = -u \frac{\partial E_0}{\partial u} \quad (\text{II.2.7})$$

L'équation (II.2.7) n'est autre que l'équation de Bessel, équation classique de propagation en coordonnées cylindriques.

Ordre un ($n = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} + k^2 E_1 &= Z u \frac{\partial^2 E_0}{\partial u \partial z} + Z u \frac{\partial E_0}{\partial u} - 2Z \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \\ - 2Z \frac{\partial E_0}{\partial z} - 2k^2 Z E_0 + Z \frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2} + 2Z \frac{\partial F_0}{\partial z} &+ (k^2 Z + Z) F_0 \end{aligned} \quad (\text{II.2.8a})$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = Z u \frac{\partial F_0}{\partial z} + Z u F_0 + Z u^2 \frac{\partial E_0}{\partial u} - u \frac{\partial E_1}{\partial z} - 2Z u \frac{\partial E_0}{\partial z} \quad (\text{II.2.8b})$$

Ordre égal ou supérieur à deux ($n \geq 2$)

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_n}{\partial u} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial z^2} + k^2 E_n = Z \dot{Z} u \frac{\partial E_{n-2}}{\partial u \partial z} + (\dot{Z}^2 + Z \ddot{Z}) u \frac{\partial E_{n-2}}{\partial u} - Z^2 \frac{\partial^2 E_{n-2}}{\partial z^2} - 2 Z \dot{Z} \frac{\partial E_{n-2}}{\partial z} - k^2 Z^2 E_{n-2} - \dot{Z}^2 u \frac{\partial^2 F_{n-2}}{\partial u \partial z} - 2 Z \dot{Z} \frac{\partial F_{n-2}}{\partial u} + Z \dot{Z} \frac{\partial^2 F_{n-2}}{\partial z^2} \quad (\text{II.2.9a})$$

$$+ 2 Z \dot{Z} \frac{\partial F_{n-2}}{\partial z} + (Z \ddot{Z} - \dot{Z}^2 + k^2 Z \dot{Z}) F_{n-2} + \dot{Z} u \frac{\partial^2 E_{n-1}}{\partial u \partial z} + \dot{Z} u \frac{\partial E_{n-1}}{\partial u} - 2 Z \frac{\partial^2 E_{n-1}}{\partial z^2} - 2 \dot{Z} \frac{\partial E_{n-1}}{\partial z} - 2 k^2 Z E_{n-1} + \dot{Z} \frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial z^2} + 2 Z \dot{Z} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z} + (\dot{Z}^2 + k^2 Z) F_{n-1}$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial u} = -u \frac{\partial E_n}{\partial z} + Z \dot{Z} u^2 \frac{\partial E_{n-2}}{\partial u} - Z^2 u \frac{\partial E_{n-2}}{\partial z} - \dot{Z}^2 u^2 \frac{\partial F_{n-2}}{\partial u} + Z \dot{Z} u \frac{\partial F_{n-2}}{\partial z} + (Z \ddot{Z} - \dot{Z}^2) u F_{n-2} + \dot{Z} u^2 \frac{\partial E_{n-1}}{\partial u} - 2 Z u \frac{\partial E_{n-1}}{\partial z} + \dot{Z} u \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z} + \dot{Z} u F_{n-1} \quad (\text{II.2.9b})$$

La fonction $Z(z)$ étant donnée, ces systèmes d'équations permettent de calculer par des intégrations successives E_n puis F_n , à partir de E_0 et F_0 , solutions de l'équation non perturbée.

II. 3. APPLICATION A UN GUIDE DE REVOLUTION A GENERATRICE

SINUSOIDALE

Pour un tel guide :

$$Z = -\cos \beta z, \quad \alpha \in [0, 1[, \quad \text{avec } \beta = \frac{2\pi}{D}, \quad (\text{II.3.1})$$

D désignant le pas du guide périodique.

D'après le théorème de Floquet-Bloch, relatif à la propagation des ondes dans les structures périodiques, les composantes de champ dépendent de z par une fonction de la forme : [7.9]

$$f(z) = g(z) e^{-i\gamma_0 z} \quad (\text{II.3.2})$$

$\gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ désignant la constante de propagation, λ_g la longueur d'onde guidée, $g(z)$ une fonction périodique de même période D que la structure et pouvant se développer en série de Fourier à termes complexes ; ce qui met en évidence l'existence d'harmoniques d'espace, celui d'ordre m se propageant à la vitesse $v_{pm} = \frac{\omega}{\gamma_m}$, avec $\gamma_m = \gamma_0 + m\beta$.

Nous pouvons donc écrire :

$$g(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{-im\beta z}, \quad (\text{II.3.3})$$

soit encore, pour E_n et F_n :

$$E_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_{nm}(u) e^{-i\gamma_m z} \quad (\text{II.3.4a})$$

$$F_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{nm}(u) e^{-i\gamma_m z} \quad (\text{II.3.4b})$$

E_{nm} et F_{nm} sont des fonctions à déterminer, de la variable u seulement. L'ensemble des fonctions $f(z)$ du type (II.3.2) constitue un espace vectoriel dont les fonctions $\exp(-i\gamma_m z)$ forment une base.

En reportant (II.3.4) et (II.3.1) dans le système (II.2.9) et après avoir projeté sur la base des $\exp(-i\gamma_m z)$, on obtient un ensemble de $2m.n$ équations différentielles :

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} u \frac{dE_{nm}}{du} + X_m^2 E_{nm} = G_{nm} \quad (\text{II.3.5})$$

$$\frac{d}{du} F_{nm} = H_{nm}. \quad (\text{II.3.6})$$

Le système (II.3.5) est formé d'équations de Bessel inhomogènes d'ordre zéro. Les seconds membres, fonctions de la variable u , sont obtenus pour $n = N$ à partir des solutions E_{nm} et F_{nm} pour toutes les valeurs de n telles que $n < N$.

Toujours pour $n = N$ les fonctions H_{nm} sont formées à partir des solutions E_{nm} et F_{nm} pour $n \leq N$. Il faut donc résoudre, à chaque intégration, d'abord les équations (II.3.5), puis les équations (II.3.6).

De plus, il est facile de montrer que pour le guide sinusoidal, les fonctions G_{nm} s'annulent pour certains couples d'indices :

$$G_{nm} = 0 \text{ si } n \neq 2k + |m| \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.3.7})$$

$$\text{et } G_{00} = 0$$

Par des intégrations successives à partir de E_{00} , les relations (II.3.5) et (II.3.6) permettent de calculer E_{nm} puis F_{nm} .

Dans le cas d'une onde guidée à l'intérieur de la surface $S(u = u_0)$ infiniment conductrice, les champs doivent rester finis sur l'axe ($u = 0$) ; la seule solution acceptable de l'équation de Bessel est donc la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro, soit $J_0(\chi_m u)$. Nous pouvons donc écrire :

$$E_{nm} = A_{nm} J_0(\chi_m u) + B_{nm}(u). \quad (\text{II.3.8})$$

Les coefficients A_{nm} sont des constantes d'intégration et les $B_{nm}(u)$ sont les solutions particulières des équations différentielles inhomogènes (II.3.5). D'après (II.3.7), certaines fonctions B_{nm} sont nulles.

$$B_{00} = 0 \text{ et } B_{nm} = 0 \text{ si } n \neq 2k + |m| \quad (\text{II.3.9})$$

Le calcul des B_{nm} non nuls se fait par la méthode de la variation de la constante appliquée à l'équation de Bessel ; il fait intervenir des intégrales, dont celle de Lommel, portant sur des expressions où interviennent les fonctions de Bessel (une table des intégrales utilisées est donnée dans l'annexe 2).

Les constantes d'intégration A_{nm} sont déterminées à partir de l'une d'entre elles prise comme référence, en écrivant la condition aux limites (II.1.2). Nous les avons calculées à partir de A_0 , amplitude de $J_0(\chi_0 u)$ dans $E_0(u)$, soit :

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n A_{0n}. \quad (\text{II.3.10})$$

Chaque harmonique d'espace de l'onde doit satisfaire la condition aux limites. Pour $m \neq 0$, il vient :

$$E_{nm}(u_0) \equiv 0, \quad \forall m \neq 0 \in \mathbb{Z}. \quad (\text{II.3.11})$$

Condition qui, en tenant compte de (II.3.8) et (II.3.9) s'écrit :

$$A_{nm} = -\frac{B_{nm}(u_0)}{J_m(\chi_m u_0)}, \quad A_{nm} = 0 \text{ pour } n \neq 2k + |m|. \quad (\text{II.3.12})$$

Les relations (II.3.12) expriment les constantes A_{nm} d'intégration en fonction de A_0 pour $m \neq 0$. Pour le fondamental ($m = 0$), la condition aux limites s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n E_{n0}(u_0) = 0, \quad (\text{II.3.13})$$

soit encore, d'après (II.3.8) et (II.3.9)

$$A_0 J_0(\chi_0 u) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n B_{n0}(u_0) = 0. \quad (\text{II.3.14})$$

L'équation (II.3.14) est l'équation de dispersion qui donne en fonction du paramètre α , la relation entre $k = \frac{\omega}{c}$ et $\gamma = \frac{\omega}{v_{p0}}$. Pratiquement, il est nécessaire de limiter cette série à une somme finie de N termes pour effectuer les calculs ; on postule alors que cette somme est une approximation d'autant meilleure de la série que N est grand. Dans cette approximation d'ordre N , le champ électrique peut donc s'écrire :

$$E_z = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^{+n} \alpha^n E_{nm}(u) e^{-i\gamma_m z} \quad (\text{II.3.15})$$

La complication des différents calculs augmente très rapidement avec N ; aussi nous avons limité nos calculs à l'ordre deux ($N = 2$). Pour le fondamental ($m=0$), il vient :

$$E_{00} = A_0 J_0(\chi_0 u), \quad (\text{II.3.16a})$$

$$E_{10} = 0, \quad (\text{II.3.16b})$$

$$\begin{aligned}
E_{20} = A_0 \left\{ \left(\frac{X_0^2}{4} - \frac{\beta^3 \gamma_0^2}{2X_0^2} \right) \frac{u}{X_0} J_1(X_0 u) + \left(\frac{\beta^2 \gamma_0^2}{4X_0^2} - \frac{5}{8} X_0^2 \right) u^2 J_0(X_0 u_0) \right. \\
\left. - \frac{X_0^2 - \beta \gamma_0^2}{4X_0 X_1} u_0 \frac{J_1(X_0 u_0)}{J_0(X_1 u_0)} u J_1(X_1 u) - \frac{(X_0^2 + \beta \gamma_0^2)^2}{4X_0 X_{-1}} \right. \\
\left. u_0 \frac{J_1(X_0 u_0)}{J_0(X_{-1} u_0)} u J_1(X_{-1} u) \right\}.
\end{aligned} \tag{II.3.16c}$$

Toujours à l'ordre deux, l'équation de dispersion s'écrit donc :

$$E_{00}(u=0) = -\alpha^2 E_{20}(u=0), \text{ soit } J_0(X_0 u_0) = -\alpha^2 E_{20}(u=0). \tag{II.3.17}$$

On constate dans (II.3.17) que la relation de dispersion du guide lisse ($J_0(X_0 u_0) = 0$) n'est affectée qu'au second ordre en α par la périodicité.

II. 4. ETUDE PARTICULIERE AU VOISINAGE DU MODE π

Considérons les points de fonctionnement suivants :

$$\gamma_0 = p \frac{\pi}{D} = p \frac{\beta}{2} \quad \gamma_m = -\gamma_{-m-p} \quad X_m = X_{-m-p} \quad (p \in \mathbb{N}^*) \tag{II.4.1}$$

En ces points, la vitesse de phase de l'harmonique d'espace d'ordre m est égale à celle de l'harmonique d'espace d'ordre $-m-1$; le guide d'onde est alors le siège d'ondes stationnaires.

On appelle classiquement "mode π ", le point de fonctionnement défini par $p = 1$, soit $\gamma_m = \gamma_{-m-1}$ (en particulier $\gamma_0 = -\gamma_{-1}$). En ce point, $X_{-1} u_0$ prend une valeur égale à $X_0 u_0$, qui est racine de $J_0(x) = 0$ dans l'approximation d'ordre zéro ($N = 0$). Les expressions des coefficients d'amplitude E_{nm} et F_{nm} , qui comportent $J_0(X_{-1} u_0)$ en facteur au dénominateur, prennent alors des valeurs théoriques infinies, ce qui est incompatible avec notre méthode de développement en séries entières. Il devient alors nécessaire de rechercher la solution du système (II.2.9) sous une autre forme. A cet effet, nous utilisons la propriété remarquable pour l'onde d'être stationnaire au mode π . Cette propriété, conséquence de la nature périodique du problème [7,20], est valable pour toute valeur de α non nulle.

▣ *Etude au premier ordre*

Au voisinage du mode π , l'amplitude du premier harmonique inverse prend une valeur voisine de celle de l'onde fondamentale, ces deux amplitudes étant strictement égales au mode π lui-même. En première approximation, nous pouvons donc substituer les sommes suivantes aux décompositions en séries entières :

$$\begin{aligned} E_z &= E_0(u) e^{-i\gamma_0 z} + E_{-1}(u) e^{-i(\gamma_0 - \beta)z}, \\ F_z &= F_0(u) e^{-i\gamma_0 z} - F_{-1}(u) e^{-i(\gamma_0 - \beta)z} \end{aligned} \quad (\text{II.4.2})$$

avec $\gamma_0 = \frac{\beta}{2} - \delta$ et $\delta \ll \beta$.

En reportant ces expressions dans (II.1.5a et c), en remplaçant $a(z)$ par sa valeur, et en négligeant les termes en α d'ordre supérieur à un, on obtient un système de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{1}{u} \frac{d}{du} u \frac{dE_0}{du} + \chi_0^2 E_0 = \alpha \left[\chi_0^2 + \beta \left(\frac{\beta}{2} - \delta \right) \right] \left[\frac{\xi^2 - \chi_0^2}{2\xi^2} u \frac{dE_{-1}}{du} + E_{-1} \right], \\ \frac{1}{u} \frac{d}{du} u \frac{dE_{-1}}{du} + \xi^2 E_{-1} = \alpha \left[\chi_0^2 + \beta \left(\frac{\beta}{2} - \delta \right) \right] \left[\frac{\chi_0^2 - \xi^2}{2\chi_0^2} u \frac{dE_0}{du} + E_0 \right], \end{cases} \quad (\text{II.4.3})$$

avec

$$\xi^2 = \chi_0^2 - 2\beta\delta. \quad (\text{II.4.4})$$

Toujours dans l'approximation d'ordre un, l'intégration du système (II.4.3) peut être faite en remplaçant les fonctions intervenant au second membre par les solutions du système homogène, soient :

$$E_0 = A_0 J_0(\chi_0 u) \quad \text{et} \quad E_{-1} = A_{-1} J_0(\xi u) \quad (\text{II.4.5})$$

A_0 et A_{-1} étant deux constantes d'intégration.

La résolution du système de deux équations de Bessel d'ordre zéro inhomogènes ainsi obtenu peut être faite par la méthode de la variation de la constante.

Il vient :

$$E_0 = A_0 J_0(\chi_0 u) + \alpha A_{-1} \frac{\chi_0^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta)}{2\xi} u J_1(\xi u), \quad (\text{II.4.6a})$$

$$E_{-1} = A_{-1} J_0(\chi_0 u) + \alpha A_0 \frac{\xi^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta)}{2\chi_0} u J_1(\chi_0 u). \quad (\text{II.4.6b})$$

On remarque dans (II.4.6) que, contrairement à ce qui se passe dans l'hypothèse du développement en série entière, l'onde fondamentale est affectée au premier ordre en α par la périodicité, et que le premier harmonique comporte un terme d'ordre zéro. Au mode π , il n'est donc pas possible d'obtenir une solution en partant d'une seule onde progressive comme au § II.3.

La détermination de la relation qui existe entre les constantes A_0 et A_{-1} se fait en écrivant les conditions aux limites sur la paroi infiniment conductrice où E_0 et E_{-1} s'annulent. Il vient :

$$A_{-1} = \pm A_0 \sqrt{\frac{\xi^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta) \xi J_1(\chi_0 u_0) J_0(\chi_0 u_0)}{\chi_0^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta) \chi_0 J_1(\xi u_0) J_0(\xi u_0)}} \quad (\text{II.4.7})$$

En reportant (II.4.7) dans (II.4.6a), et toujours pour $u = u_0$, on obtient une seconde relation :

$$J_0(\chi_0 u_0) \pm \alpha \sqrt{\frac{\xi^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta) \xi J_0(\chi_0 u_0) J_1(\chi_0 u_0)}{\chi_0^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta) \chi_0 J_0(\xi u_0) J_1(\xi u_0)}} \times \frac{\chi_0^2 + \beta(\frac{\beta}{2} - \delta)}{2\xi} u_0 J_1(\xi u_0) = 0 \quad (\text{II.4.8})$$

Cette relation (II.4.8) permet de déterminer la constante χ_0 pour une valeur de k donnée, qui reportée dans l'équation :

$$k^2 = \gamma_0^2 + \chi_0^2,$$

fournit l'équation de dispersion.

La connaissance de la composante E_z permet alors, en retournant aux équations de Maxwell d'exprimer toute composante de champ.

II. 5. CALCUL AU SECOND ORDRE AU MODE π

L'extension des calculs précédents aux termes du second ordre en α est très pénible en raison de l'extrême complication des équations différentielles obtenues. Par contre, ce calcul est abordable en se plaçant au mode π et non plus à son voisinage. En ce point l'onde est purement stationnaire ; au second ordre près nous pouvons donc poser :

$$E_z = E_0 \left(e^{-i \frac{\beta}{2} z} + \epsilon e^{+i \frac{\beta}{2} z} \right) + \alpha E_1 \left(e^{-i \frac{3\beta}{2} z} + \epsilon e^{+i \frac{3\beta}{2} z} \right) \quad (\text{II.5.1a})$$

$$u E_u = F_u = F_0 \left(e^{-i \frac{\beta}{2} z} - \epsilon e^{+i \frac{\beta}{2} z} \right) + \alpha E_1 \left(e^{-i \frac{3\beta}{2} z} - \epsilon e^{+i \frac{3\beta}{2} z} \right) \quad (\text{II.5.1b})$$

avec $\epsilon = \pm 1$.

En reportant les équations (II.5.1) dans le système (II.1.5a et c), puis après avoir séparé les composantes E_z et F_u , on obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{u} \frac{d}{du} u \frac{dE_1}{du} + X_1^2 E_1 = \frac{\beta^2}{X_0} \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) u \frac{dE_0}{du} + \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) E_0 \quad (\text{II.5.2a}) \\ \frac{1}{u} \frac{d}{du} u \frac{dE_0}{du} + X_0^2 E_0 = \alpha^2 \frac{\beta^4}{8} \frac{u}{X_0^2} \frac{d}{du} u \frac{dE_0}{du} + \alpha^2 \frac{\beta^4}{4} \frac{u}{X_0^2} \frac{dE_0}{du} \\ + \epsilon \alpha \left(X_0^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) E_0 + \alpha^2 \left(\frac{k^2 \beta^2}{4} \frac{(X_0^2 + X_1^2)}{X_1^2} u^2 - \frac{X_0^2}{2} \right) E_0 - \alpha^2 \beta^2 \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) \frac{u}{X_1^2} \frac{dE_1}{du} \quad (\text{II.5.2b}) \\ + \alpha^2 \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) u E_1. \end{array} \right.$$

La résolution de (II.5.2) se fait par une méthode semblable à celle déjà utilisée à l'ordre un. Tous calculs faits, on trouve :

$$E_1 = A_0 \frac{1}{2X_0} \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) \left[u J_1(X_0 u) - \frac{u}{J_0(X_1 u)} \frac{J_1(X_0 u)}{J_0(X_1 u)} J_0(X_1 u) \right] \quad (\text{II.5.3a})$$

$$E_0 = A_0 \left[J_0(\chi_0 u) + \frac{\epsilon\alpha}{2\chi_0} \left(\chi_0^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) u J_1(\chi_0 u) - \alpha^2 \frac{\chi_0^2}{4} u^2 J_0(\chi_0 u) \right. \\ \left. + \alpha^2 \frac{\chi_0}{4} u J_1(\chi_0 u) - \frac{\alpha^2}{4\chi_0\chi_1} \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) u_0 \frac{J_1(\chi_0 u_0)}{J_0(\chi_1 u_0)} u J_1(\chi_1 u) \right] \quad (\text{II.5.3b})$$

Le calcul de la valeur de k au mode π ($\gamma_0 = \frac{\beta}{2}$) se fait en écrivant la condition aux limites relative à E_0 , soit :

$$E_0(u_0) = 0 ;$$

ce qui donne :

$$J_0(\chi_0 u_0) + \frac{\epsilon\alpha}{2\chi_0} \left(\chi_0^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) u_0 J_1(\chi_0 u_0) - \alpha^2 \frac{\chi_0^2}{4} u_0^2 J_0(\chi_0 u_0) \cdot \\ + \frac{\alpha^2}{4} \chi_0 u_0 J_1(\chi_0 u_0) - \frac{\alpha^2}{4\chi_0\chi_1} \left(k^2 - \frac{3\beta^2}{4} \right) u_0^2 \frac{J_1(\chi_0 u_0) J_1(\chi_1 u_0)}{J_0(\chi_1 u_0)} = 0, \quad (\text{II.5.4})$$

avec :

$$\chi_0^2 = k^2 - \gamma_0^2 = k^2 - \frac{\beta^2}{4}. \quad (\text{II.5.5.})$$

II. 6 ETUDE NUMERIQUE DE L'EQUATION DE DISPERSION DU GUIDE SINUSOIDAL ET VERIFICATION EXPERIMENTALE

Les diverses relations (II.3.14), (II.4.8), (II.5.4) que nous avons obtenues permettent de déterminer, pour une valeur donnée de γ_0 , la constante χ_0 . Celle-ci, reportée dans l'équation : $k^2 = \chi_0^2 + \gamma_0^2$, fournit l'équation de dispersion $k(\gamma)$. Les valeurs de k cherchées dépendent évidemment du paramètre α .

1) $\alpha = 0$;

L'équation de dispersion est celle du mode TM_{01} du guide lisse ; $\chi_0 u_0$ premier zéro de J_0 ne dépend pas de γ ($\chi_0 u_0 = 2,4048$) ; la courbe $k(\gamma)$ est alors une hyperbole équilatère.

2) α tend vers 1 ;

le guide peut être considéré comme une succession de cavités identiques de plus en plus faiblement couplées entre elles. Ces cavités résonnent pour une suite de fréquences discrètes si bien que les courbes de dispersion $k = k(\gamma)$ tendent vers des droites parallèles à l'axe des γ , chacune correspondant à la fréquence de résonance de l'un des modes du type TM de révolution pouvant exister dans l'une quelconque des cavités.

3) $\alpha \in]0,1[$;

le passage de l'une à l'autre de ces valeurs à partir de $\alpha = 0$, se fait par l'apparition au mode π de bandes de fréquences interdites pour lesquelles la propagation du mode TM_{01} n'est pas possible.

L'existence de ces phénomènes, indépendants de la forme de la génératrice du guide, est une conséquence directe de la périodicité. Une étude détaillée en est donnée par Slater dans son livre "Microwave Electronics" [20].

Les courbes théoriques de dispersion ont été tracées pour un guide sinusoïdal présentant les caractéristiques géométriques suivantes, choisies arbitrairement ou en fonction de contraintes expérimentales :

- rayon moyen du guide $u_0 = 13,5$ mm
- période de la sinusoïde $D = 30,0$ mm
- amplitude relative $\alpha = 1/9$.

Les calculs numériques, faits sur ordinateur, ont permis de tracer les courbes de la fig. II.2.

La fig. II.2, représente, outre la courbe (I) relative au guide lisse de rayon u_0 pour le mode TM_{01} , les courbes II et III relatives au guide périodique obtenues à partir de la précédente par des corrections, calculées à l'ordinateur et données par les équations (II.3.14) et (II.4.8). Il est remarquable que les courbes (II) et (III) se confondent pratiquement sur une large plage, la courbe III valable a priori seulement au voisinage du mode π , donnant en fait un résultat acceptable presque jusqu'au mode zéro (tableau 1.II).

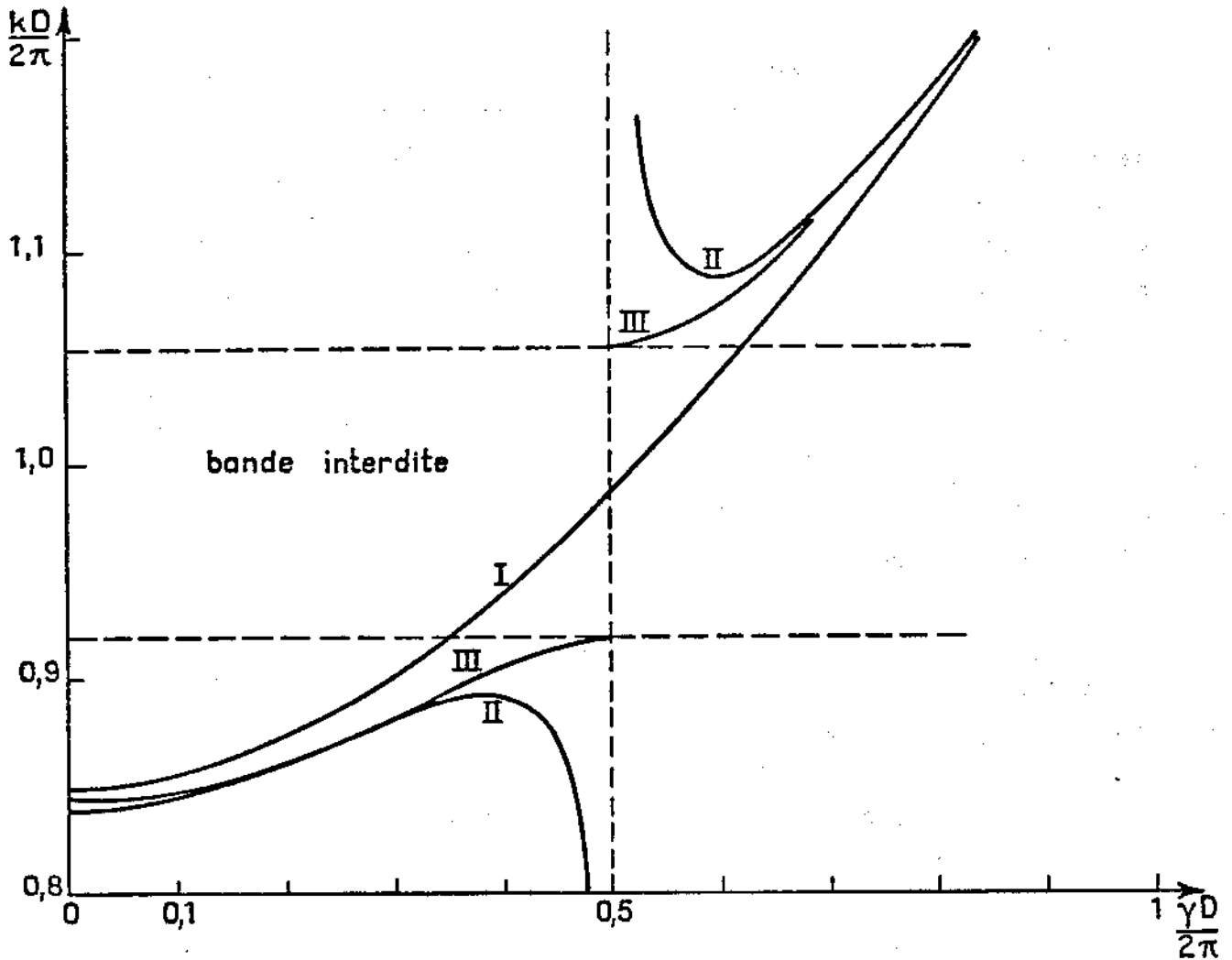


fig. II.2

Afin de vérifier ces résultats, il a été réalisé en cuivre une cavité composée de plusieurs éléments de guide dont la longueur est un multiple de la période D . Les fonds plans de la cavité, perpendiculaires à l'axe Oz , sont placés dans des plans de symétrie du guide ($z = p \frac{D}{2}$). Pour chaque longueur de cavité, la fréquence de résonance des divers modes TM_{01p} a été mesurée dans la bande X, pour différentes valeurs possibles de la constante γ données par :

$$\frac{\gamma D}{2\pi} = \frac{p}{2N}, \quad (\text{II.6.1})$$

N désignant le nombre de pas D contenus dans la longueur de cavité.

Les points expérimentaux se placent sur les courbes théoriques avec une précision relative de l'ordre de quelques millièmes comme le montre le tableau (1.II) où les valeurs théoriques et expérimentales de $\frac{kD}{2\pi} = \frac{D}{\lambda}$ sont données pour diverses valeurs de $\frac{\gamma D}{2\pi} = \frac{D}{\lambda_g}$.

$\frac{kD}{2\pi} = \frac{D}{\lambda}$			
$\frac{\gamma D}{2\pi} = \frac{D}{\lambda_g}$	Valeur théorique (en dehors du mode π) (courbe II)	Valeur théorique (au voisinage du mode π) (courbe III)	Valeur expérimentale
0,00	0,8410	0,8446	0,840 \pm 0,001
0,05	0,8422	0,8448	
0,10	0,8458	0,8476	0,844 \pm 0,002
0,15	0,8517	0,8530	
0,20	0,8596	0,8607	0,857 \pm 0,002
0,25	0,8691	0,8704	0,870 \pm 0,002
0,30	0,8798	0,8816	
0,35	0,8891	0,8936	
0,40	0,8910	0,9051	0,903 \pm 0,002
0,45	0,8193	0,9138	
0,50		0,9172	0,918 \pm 0,002

tableau 1.II Equation de dispersion du guide sinusoïdal

Pour le guide considéré ici, on peut donc constater qu'il existe un excellent accord entre la théorie proposée et les résultats expérimentaux.

Etude théorique de la largeur de la première bande interdite du guide sinusoïdal

En utilisant l'équation (II.5.4), valable au second ordre au mode π , nous avons ensuite étudié théoriquement en fonction du paramètre α , la largeur de la première bande interdite d'un guide sinusoïdal (fig. II.3). Les courbes (IV) et (V) représentent les limites inférieure et supérieure de cette bande ($\gamma_0 = \frac{\pi}{D}$),

la courbe (VI) donnant les valeurs de k au mode zéro ($\gamma_0 = 0$). On constate que la largeur de la bande interdite croît avec α au détriment de la bande permise dont la largeur deviendrait nulle pour $\alpha = 1$.

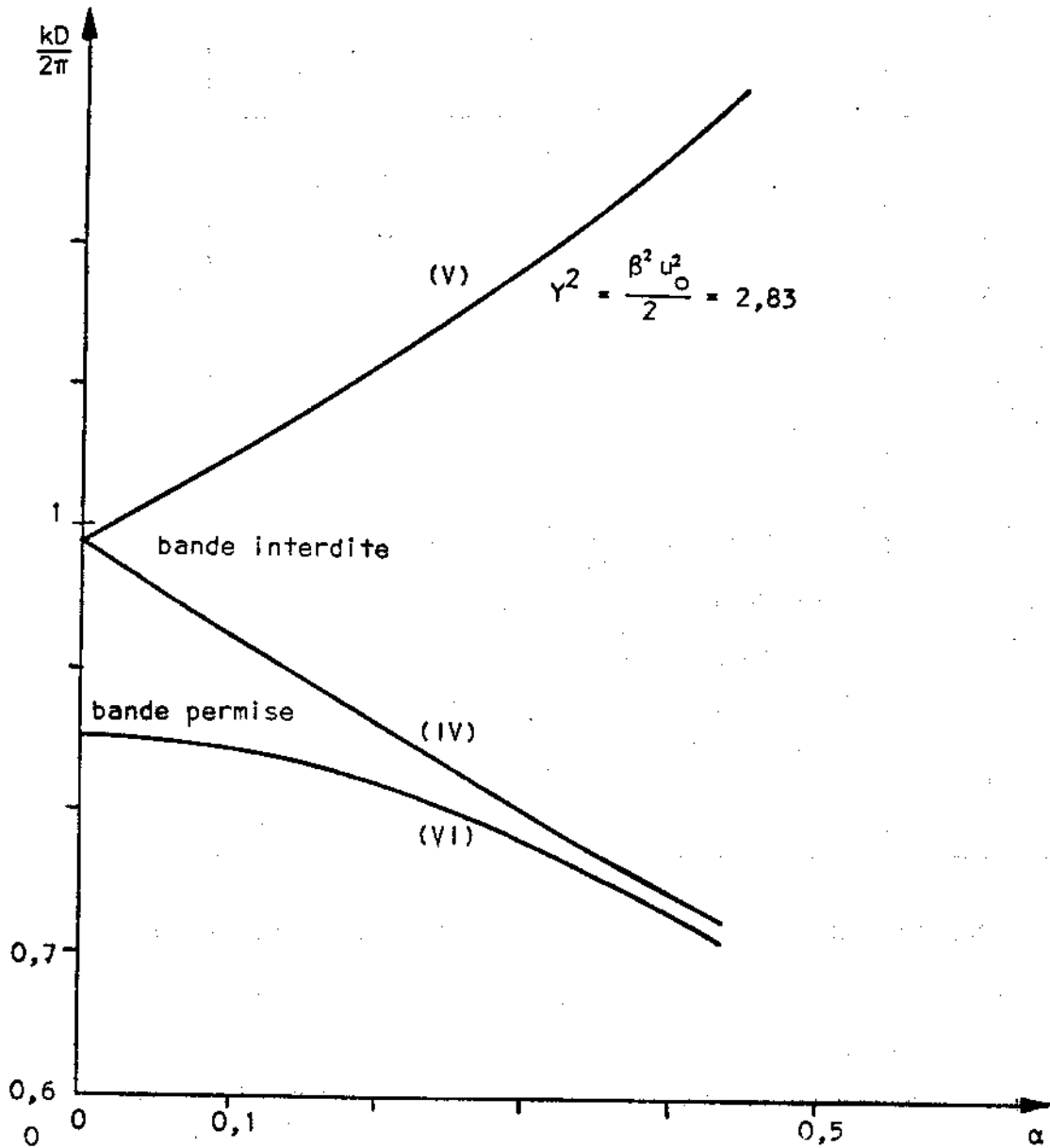


fig. II.3

II. 7 ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DES GUIDES BIPERIODIQUES

AU MODE π

Dans l'étude des guides périodiques chargés destinés aux accélérateurs linéaires de particules, on appelle guides "bipériodiques" des guides comportant deux types alternés de corrugations (fig. II.4) [33].

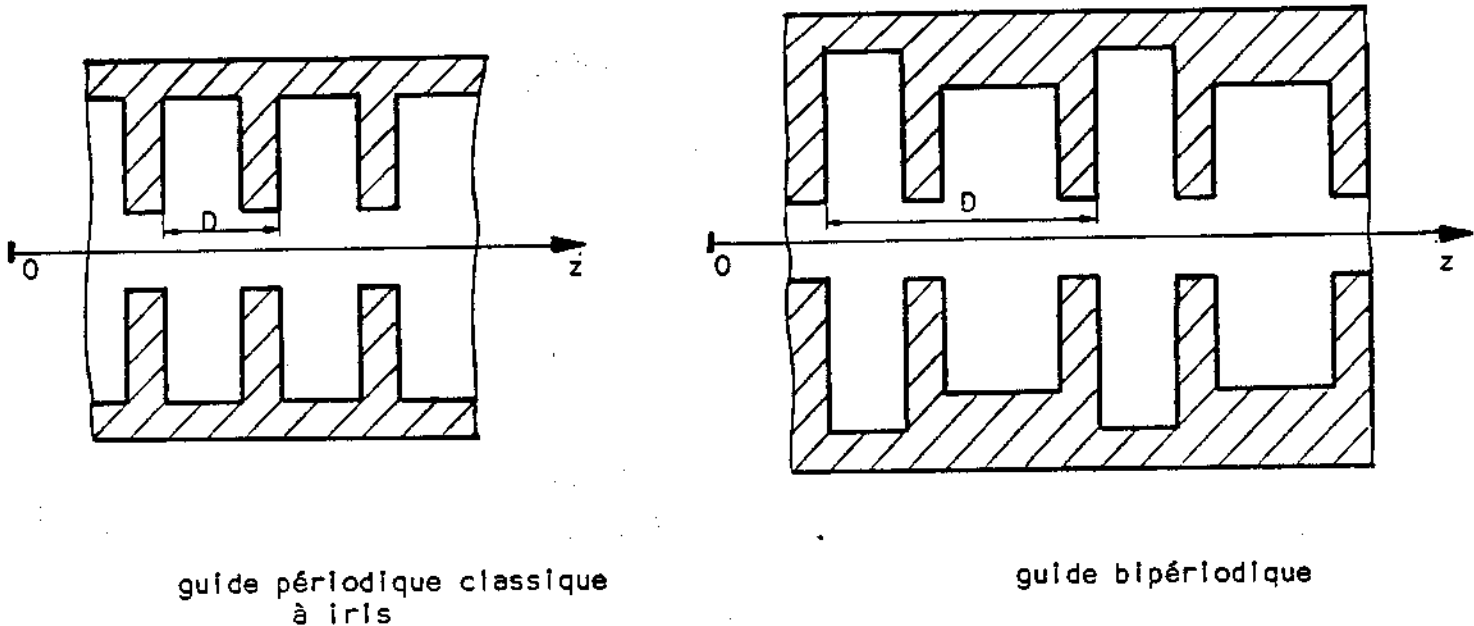


fig. II.4

Le développement en série de Fourier de la fonction $a(z)$, représentant la génératrice du guide, comporte tous les harmoniques dans le cas du guide bipériodique alors qu'il ne comporte que les harmoniques d'ordre impair dans le cas du guide classique à iris.

Au second ordre près, la courbe de dispersion du guide périodique classique est identique à celle du guide sinusoïdal, alors que la présence du premier harmonique pair apporte une correction dans le cas du guide bipériodique.

Pour étudier l'influence, sur la courbe de dispersion, du premier harmonique pair, nous avons repris les calculs relatifs au mode π , faits précédemment pour le guide sinusoïdal, mais en prenant pour fonction génératrice :

$$Z(z) = a_1 \cos \beta z + a_2 \cos 2\beta z \quad \left(\beta = \frac{2\pi}{D} \right) \quad (\text{II.7.1})$$

Dans l'approximation d'ordre deux en α , on trouve (pour $\gamma_0 = \frac{\pi}{D}$) que $k = \frac{\pi}{D}$ doit satisfaire à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & J_0(X) - \frac{\epsilon\alpha}{2X} (X^2 + Y^2) a_1 J_1(X) \\
 & - \frac{\alpha^2}{4} \left\{ X^2 a_1^2 + \left[\frac{X^2}{2} + \frac{4}{3} \frac{Y^2}{X^2} (X^2 - Y^2) \right] a_2^2 + \epsilon (X^2 + Y^2) a_1 a_2 \right\} J_0(X) \\
 & + \frac{\alpha^2}{4X} \left\{ X^2 a_1^2 + \frac{8}{3} \frac{Y^2}{X^2} (X^2 - Y^2) a_2^2 + \epsilon (X^2 + Y^2) a_1 a_2 \right\} J_1(X) \quad (\text{II.7.2}) \\
 & + \frac{\alpha^2}{6} \frac{Y^2}{X} (X^2 - Y^2) a_2^2 J_1(X) \\
 & - \frac{\alpha^2}{4X} \left[(X^2 - Y^2) a_1 + \epsilon (X^2 + 2Y^2) a_2 \right]^2 \frac{1}{\sqrt{X^2 - 4Y^2}} \frac{J_1(\sqrt{X^2 - 4Y^2})}{J_0(\sqrt{X^2 - 4Y^2})} J_1(X) = 0
 \end{aligned}$$

avec :

$$\beta = \frac{2\pi}{D}, \quad X^2 = u_0^2 \left(k^2 - \frac{\beta^2}{4} \right), \quad Y^2 = \frac{\beta^2 u_0^2}{2}, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (\text{II.7.3})$$

Les limites inférieures k_z et supérieure k_g de la première bande interdite sont les racines positives de plus faible valeur de l'équation (II.7.2) avec $\epsilon = \pm 1$.

Les courbes VII et VIII (fig. II.5) représentent les variations des limites k_z et k_g en fonction de αa_2 , les paramètres αa_1 et $\frac{u_0}{D}$ restants constants.

Cette figure met en évidence l'influence du premier harmonique pair de forme (d'amplitude αa_2) sur la largeur et la position de la première bande interdite.

En particulier on peut constater que la largeur de cette bande est nulle au point A, ce qui réalise le phénomène de "confluence". C'est ce point

qui est parfois utilisé comme point de fonctionnement des accélérateurs linéaires de particules.

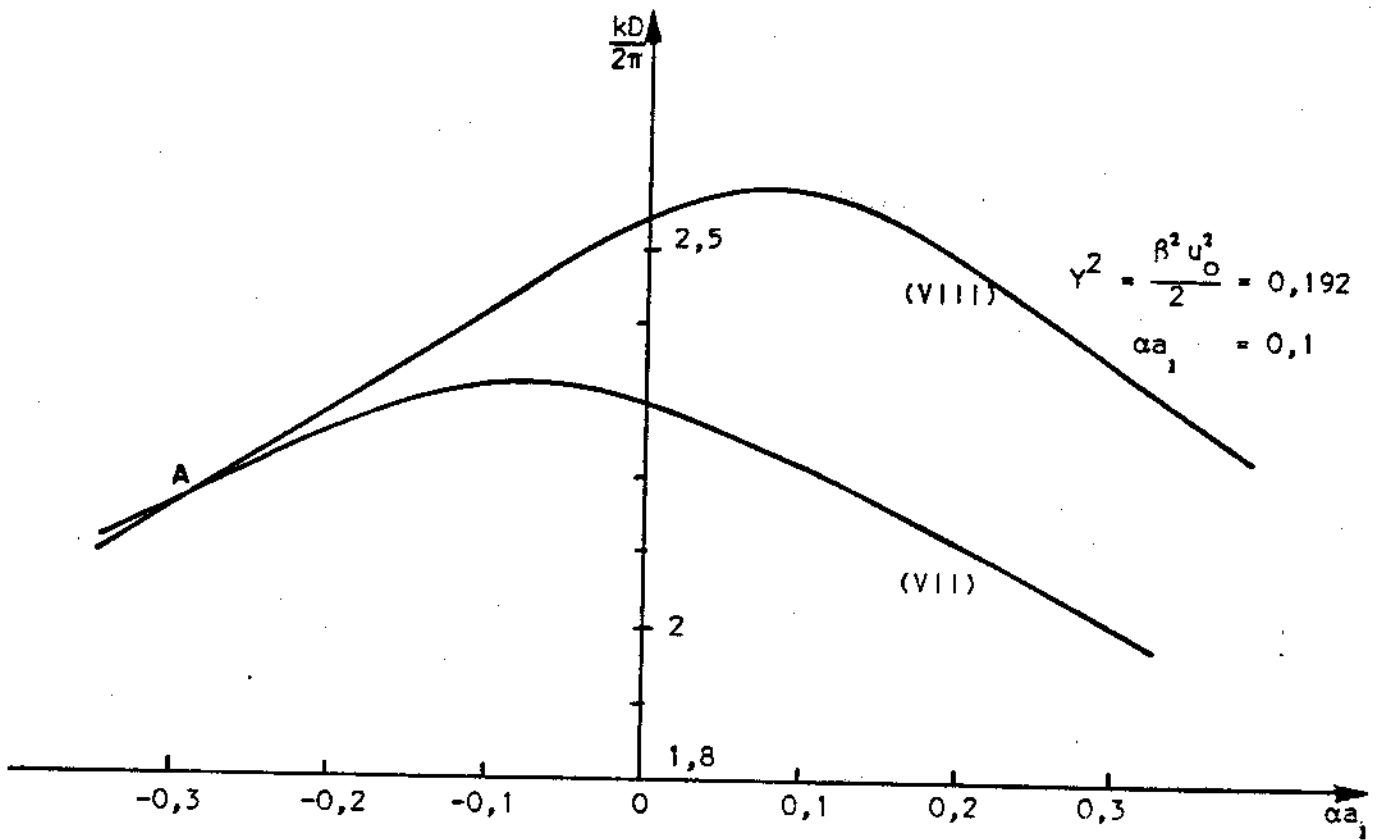
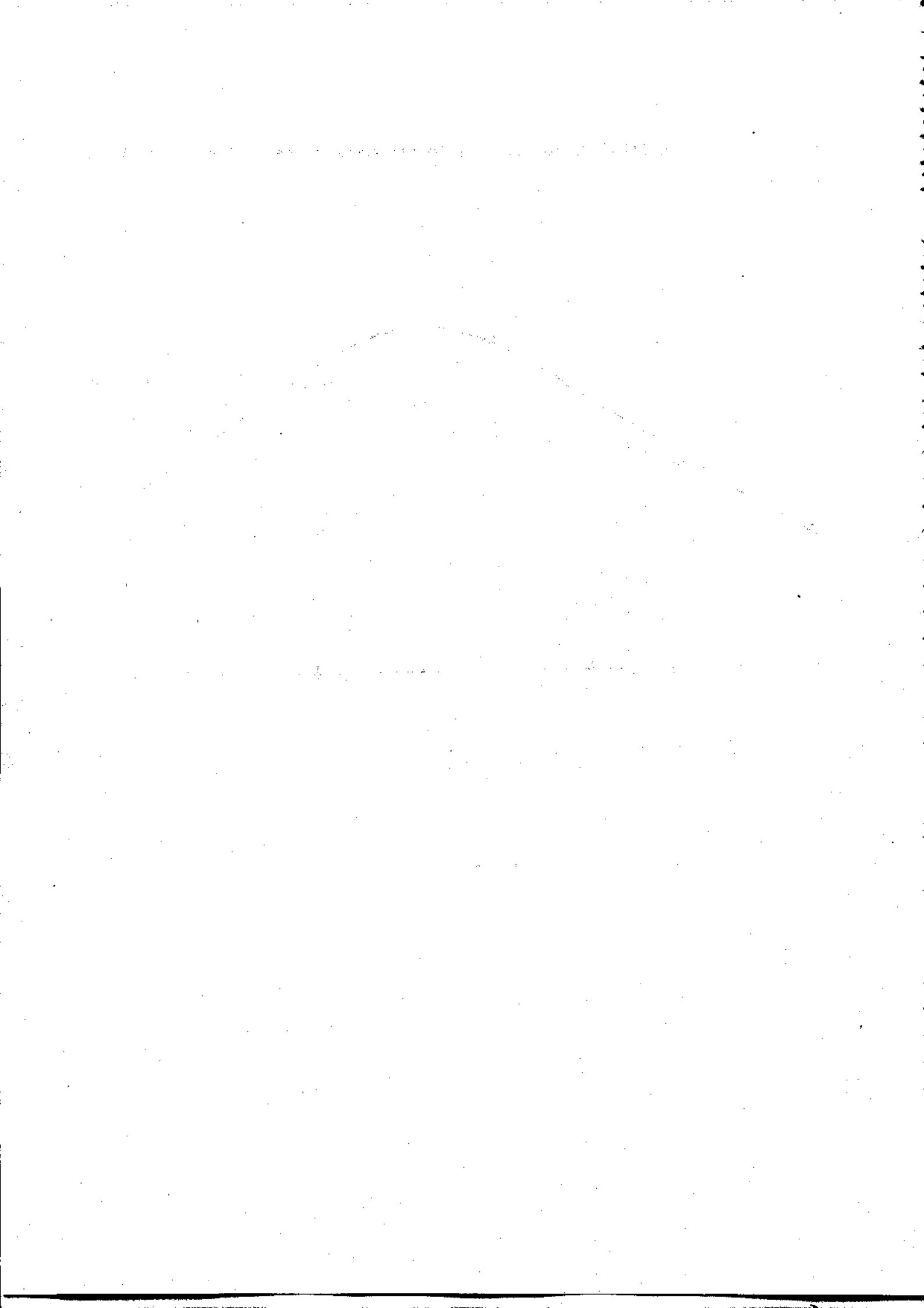


fig. II.5





Chapitre III

ETUDE DES GUIDES PERIODIQUES PAR UNE METHODE DIFFERENTIELLE

III. 1. POSITION DU PROBLEME

Au chapitre précédent nous avons étudié une méthode approchée; nous nous proposons dans ce chapitre de donner une méthode rigoureuse pour l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique, fonction harmonique du temps, dans un guide limité par une surface S infiniment conductrice. Cette surface S présente la symétrie de révolution axiale et sa génératrice $a(z)$ est une fonction deux fois dérivable, périodique et développable en série de Fourier.

Nous nous intéressons aux modes TM_{0q} et TE_{0q} présentant eux-mêmes la symétrie de révolution axiale ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$).

Pour ces modes, en coordonnées de révolution ($x^1 = u$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$) les équations auxquelles doivent satisfaire les composantes covariantes du champ électrique ont été données au chapitre II:

- Modes TM_{0q}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u E_u}{\partial z^2} + k^2 (1 - \dot{a}^2 u^2) u E_u = u \frac{\partial^2 E_z}{\partial u \partial z} + k^2 a \dot{a} u^2 E_z \\ \frac{\partial^2 u E_u}{\partial u \partial z} + k^2 a \dot{a} u^2 E_u = \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial E_z}{\partial u} + k^2 a^2 u E_z \\ E_\varphi \equiv 0 \end{array} \right. \quad (II.1.5a)$$

- Modes TE_{0q}

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1+a^2 u^2}{u} \frac{\partial E_\varphi}{\partial u} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial u \partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{a} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} + k^2 \frac{E_\varphi}{u} = 0 \\ E_z \equiv E_u \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.5b})$$

Sur la paroi métallique, infiniment conductrice définie par $u = u_0$, les composantes E_z et E_φ s'annulent alors qu'il n'existe aucune condition à satisfaire pour E_u .

$$E_z(u_0, z) = 0, \quad E_\varphi(u_0, z) = 0 \quad (\text{III.1.1})$$

Pour $a(z) \equiv 1$, le système (II.1.5) est relatif aux coordonnées cylindriques ; il est formé d'équations de Bessel et ses solutions sont connues.

Modes TE_{0q} du guide cylindrique

$$\begin{cases} E_\varphi = A_0 J_1(\chi_0 u) e^{-i\gamma_0 z}, \\ H_z = i \frac{\chi_0 A_0}{k Z} J_0(\chi_0 u) e^{-i\gamma_0 z} \\ H_u = -\frac{\gamma_0 A_0}{k Z} J_1(\chi_0 u) e^{-i\gamma_0 z} \\ E_u \equiv E_z \equiv H_\varphi \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{III.1.2})$$

où A_0 est une constante et avec :

$$\chi_0^2 = k^2 - \gamma_0^2 \quad \text{et} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{III.1.3})$$

La condition aux limites s'écrit :

$$J_1(\chi_0 u_0) = 0 \quad (\text{III.1.4})$$

Si l'on appelle $\beta_1, \dots, \beta_q, \dots$ les zéros positifs successifs de J_1 , la relation (III.1.4) donne :

$$\chi_0 = \frac{\beta_q}{u_0}, \quad (\text{III.1.5})$$

et par suite :

$$E_{\varphi} = A_0 J_1 \left(\beta_q \frac{u}{u_0} \right) e^{-i\gamma_0 z} \quad (\text{III.1.6})$$

Modes TM_{0q} du guide cylindrique

On trouve cette fois :

$$\begin{cases} E_z = A_0 J_0 \left(\alpha_q \frac{u}{u_0} \right) e^{-i\gamma_0 z}, \\ E_u = i \frac{\gamma_0}{X_0} A_0 J_1 \left(\alpha_q \frac{u}{u_0} \right) e^{-i\gamma_0 z}, \\ H_{\varphi} = i \frac{k}{X_0} \frac{A_0}{Z} J_1 \left(\alpha_q \frac{u}{u_0} \right) e^{-i\gamma_0 z}, \\ E_{\varphi} \equiv H_u \equiv H_z \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{III.1.7})$$

où les grandeurs α_q sont les zéros de J_0 .

Dans le cas général des guides périodiques, il faut rechercher des fonctions de deux variables (u, z) satisfaisant au système (II.1.5) et aux conditions aux limites. Pour cela, nous pouvons remarquer que, vis-à-vis de chacune des variables u et z les solutions cherchées appartiennent à un espace vectoriel.

▣ Dépendance radiale

E_u, E_{φ}, E_z sont des fonctions continues sur l'intervalle $u \in [0, u_0]$; elles sont donc intégrables sur cet intervalle. L'ensemble des fonctions de u intégrables sur $u \in [0, u_0]$ forme sur le corps des complexes un espace vectoriel V_r :

$$V_r = \text{ensemble des fonctions } f(u, z) \text{ intégrables sur } u \in [0, u_0], \forall z \in \mathbb{R} \quad (\text{III.1.8})$$

▣ Dépendance axiale

Si $a(z)$ est une fonction périodique de période D , le théorème de Floquet-Bloch indique que, si F désigne l'une quelconque des composantes du champ \vec{E} , on a :

$$F(u, z+D) = F(u, z) e^{-i\gamma_0 D}, \quad \forall u \in [0, u_0], \forall z \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.1.9})$$

Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions $f(u, z)$ du type (III.1.9) forme également un espace vectoriel V_a sur le corps des complexes.

E_u, E_φ, E_z appartiennent donc à un espace vectoriel $V = V_r \times V_a$. Si (\vec{e}_i) est une base de V_r et (\vec{e}'_j) une base de V_a , les fonctions cherchées s'écrivent :

$$F(u, z) = \sum_i \sum_j F_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j \quad (\text{III.1.10})$$

Le problème consiste donc, après s'être donné deux bases de fonctions, à rechercher les composantes F_{ij} . Nous prendrons pour la dépendance axiale la base de Fourier. Pour la dépendance axiale, la forme des solutions relatives au guide lisse nous incite à prendre une base de Fourier-Bessel propre à chacune des composantes E_u, E_φ, E_z .

Ainsi, grâce à cette méthode, la résolution des équations de Maxwell en coordonnées de révolution se ramène à celle d'un système infini et homogène d'équations algébriques linéaires. L'annulation du déterminant de ce système fournit la relation de dispersion, son inversion permettant ensuite le calcul des diverses composantes du champ électromagnétique.

III. 2. DEPENDANCE RADIALE DES CHAMPS (MODES TE_{0q})

Dans l'équation (II.1.5b), faisons les changements suivants :

$$x = \frac{u}{u_0}, \quad E_\varphi = uF. \quad (\text{III.2.1})$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{u_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \frac{\partial xF}{\partial x} + a^2 x \frac{\partial^2 xF}{\partial x^2} + (2a^2 - a\ddot{a}) \frac{\partial xF}{\partial x} - 2a \dot{a} \frac{\partial^2 xF}{\partial x \partial z} + a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 a^2 F = 0 \quad (\text{III.2.2})$$

En raison de la définition particulière des composantes covariantes des champs, nous remarquerons dans (III.2.1) que si $a(z)=1$, F n'est autre que la composante cartésienne classique \vec{E}_φ (A.3.12).

$$a(z) = 1 \quad E_0 = r \frac{dU_0}{dz} \Rightarrow F = \frac{E_0}{\rho} \quad \text{(III.2.3)}$$

Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, les zéros positifs successifs de J_1 ; les fonctions $J_1(\beta_1 x), J_1(\beta_2 x), \dots, J_q(\beta_q x), \dots$ forment sur l'intervalle $x \in [0, 1]$, une base orthogonale de poids x pour l'espace vectoriel V_r des fonctions intégrables sur $x \in [0, 1]$ (Annexe 3).

La composante F peut ainsi s'écrire :

$$F(x) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q(z) J_1(\beta_q x). \quad \text{(III.2.4)}$$

Ce développement (III.2.4) est valable pour $x = 1$ à condition que la fonction F s'annule pour cette valeur de x , ce qui, en raison de la condition aux limites (III.1.1) est bien le cas. La relation (III.2.4) tient donc compte à priori de la condition aux limites.

En reportant (III.2.4) dans l'équation (III.2.2), on obtient :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\beta_q^2}{u_0} J_1(\beta_q x) A_q + a^2 x \beta_q [J_0(\beta_q x) - \beta_q x J_1(\beta_q x)] A_q + (2a^2 - a\ddot{a}) \beta_q x J_0(\beta_q x) A_q - 2a \dot{a} \beta_q x J_0(\beta_q x) \frac{dA_q}{dz} + a^2 J_1(\beta_q x) \frac{d^2 A_q}{dz^2} + k^2 a^2 J_1(\beta_q x) A_q \right\} = 0 \quad \text{(III.2.5)}$$

Afin de pouvoir projeter l'équation (III.2.5) sur la base des fonctions $J_1(\beta_q x)$, posons :

$$\beta_q x J_0(\beta_q x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_{qn} J_1(\beta_n x) \quad \text{(III.2.6)}$$

$$\beta_q^2 x^2 J_1(\beta_q x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{qn} J_1(\beta_n x) \quad \text{(III.2.7)}$$

Les constantes L_{qn} et M_{qn} sont calculées par la formule donnant les coefficients d'une série de Fourier-Bessel (Annexe 3). Il vient :

$$L_{qn} = \frac{8\beta_n \beta_q}{\beta_q^2 - \beta_n^2} \frac{J_0(\beta_q)}{J_0(\beta_n)} \quad \text{si } q \neq n \quad \text{et } L_{nn} = 0, \quad \text{(III.2.8)}$$

$$M_{qn} = \frac{8\beta_q^3 \beta_n}{(\beta_q^2 - \beta_n^2)^2} \frac{J_0(\beta_q)}{J_0(\beta_n)} \quad \text{si } q \neq n \quad \text{et } M_{nn} = \frac{\beta_q^2}{3}. \quad \text{(III.2.9)}$$

Les projections de l'équation (III.2.5) sur le vecteur de base $J_0(\beta_n x)$ s'écrivent, compte-tenu des relations précédentes (III.2.8) et (III.2.9) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$-\frac{\beta_n^2}{u_0^2} A_n + (3a^2 - aa'') \sum_{q=1}^{\infty} L_{qn} A_q - a'^2 \sum_{q=1}^{\infty} M_{qn} A_q - 2aa' \sum_{q=1}^{\infty} L_{qn} \frac{dA_q}{dz} + a^2 \frac{d^2 A_n}{dz^2} + k^2 a^2 A_n = 0. \quad (\text{III.2.10})$$

Ces équations (III.2.10) sont valables pour toute fonction $a(z)$ continuellement dérivable et tiennent compte de la condition aux limites pour $u = u_0$. Nous poursuivons le calcul (§ III.4) en prenant pour $a(z)$ une fonction périodique.

III. 3. DEPENDANCE RADIALE DES CHAMPS (MODES TM_{0q})

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \dots$ les zéros positifs de J_0 ; les fonctions $J_0(\alpha_q x)$ forment, sur l'intervalle $x \in [0, 1]$ une base orthogonale de poids x (Annexe 3).

La composante E_z peut ainsi s'écrire :

$$E_z = \sum_{q=1}^{\infty} A_q(z) J_0(\alpha_q x), \text{ avec : } x = \frac{u}{u_0}. \quad (\text{III.3.1})$$

En raison de la condition aux limites (III.1.1), E_z s'annule pour $x = 1$; le développement (III.3.1) est alors valable pour cette borne ($x = 1$). En écrivant E_z sous la forme (III.3.1), nous avons donc tenu compte à priori de la condition aux limites.

La forme des solutions de révolution dans le guide lisse (III.1.8) nous incite à développer E_u en série de Fourier-Bessel de seconde espèce d'ordre un (Annexe 3).

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, \dots$ les racines positives mises en ordre croissant de l'équation :

$$\lambda J_1'(\lambda) - H J_1(\lambda) = 0, \quad (\text{III.3.2})$$

où H est une constante arbitraire ; les fonctions $J_1(\lambda_1 x)$, $J_1(\lambda_2 x)$, ..., $J_1(\lambda_q x)$, ... forment sur l'intervalle $x \in [0, 1]$ une base de poids x pour V_r .

En particulier, si $H = 1$, les racines λ_q satisfont à :

$$\lambda J_1'(\lambda) + J_1(\lambda) = 0. \quad (\text{III.3.3})$$

En tenant compte de la formule de récurrence :

$$J_1'(\lambda) = J_0(\lambda) - \frac{J_1(\lambda)}{\lambda}, \quad (\text{III.3.4})$$

on constate que les nombres λ_q sont les zéros de J_0 et sont donc identiques aux α_q .

La composante E_u peut ainsi s'écrire :

$$E_u = \sum_{q=1}^{\infty} B_q(z) J_1(\alpha_q x), \text{ avec } x = \frac{u}{u_0}. \quad (\text{III.3.5})$$

En reportant (III.3.1) et (III.3.5) dans (III.1.5), et en posant $x = \frac{u}{u_0}$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q=1}^{\infty} \left[x \frac{d^2 B_q}{dz^2} J_1(\alpha_q x) + k^2 (1 + \dot{a}^2 u_0^2 x^2) x B_q J_1(\alpha_q x) \right] = \\ \sum_{q=1}^{\infty} \left[-\alpha_q \frac{x}{u_0} \frac{dA_q}{dz} J_1(\alpha_q x) + k^2 a \dot{a} u_0 x^2 A_q J_0(\alpha_q x) \right], \end{array} \right. \quad (\text{III.3.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_q}{u_0} \frac{dB_q}{dz} J_0(\alpha_q x) + k^2 a \dot{a} u_0 x B_q J_1(\alpha_q x) \right] = \\ \sum_{q=1}^{\infty} \left[-\frac{\alpha_q^2}{u_0^2} A_q J_0(\alpha_q x) + k^2 a^2 A_q J_0(\alpha_q x) \right]. \end{array} \right. \quad (\text{III.3.7a})$$

Pour faire apparaître un plus grand nombre de fonctions de base $J_0(\alpha_q x)$, appliquons à l'équation (III.3.6) l'opérateur $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} \left[\alpha_q \frac{d^2 B_q}{dz^2} J_0(\alpha_q x) + k^2 \alpha_q B_q J_0(\alpha_q x) + k^2 \dot{a}^2 u_0^2 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^3 J_1(\alpha_q x) B_q \right] \\ & = \sum_{q=1}^{\infty} \left[-\frac{\alpha_q^2}{u_0} \frac{dA_q}{dz} J_0(\alpha_q x) + k^2 a \dot{a} A_q \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^2 J_0(\alpha_q x) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.3.7b})$$

Posons :

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^3 J_1(\alpha_q x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{qn} J_0(\alpha_n x), \quad (\text{III.3.8})$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^2 J_1(\alpha_q x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{qn} J_0(\alpha_n x), \quad (\text{III.3.9})$$

$$x J_1(\alpha_q x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{qn} J_0(\alpha_n x), \quad (\text{III.3.10})$$

les constantes C_{qn} , D_{qn} , G_{qn} étant calculées par la formule donnant les coefficients d'une série de Fourier-Bessel (Annexe 3). Il vient :

$$C_{qn} = 4\alpha_n \frac{\alpha_n^2 + \alpha_q^2}{\alpha_n^2 - \alpha_q^2} \frac{J_1(\alpha_q)}{J_1(\alpha_n)} \text{ si } n \neq q, \quad C_{nn} = \frac{\alpha_n^2 + 4}{3\alpha_n}, \quad (\text{III.3.11})$$

$$-D_{qn} = \alpha_n G_{qn} = \frac{2\alpha_n \alpha_q}{\alpha_n^2 - \alpha_q^2} \frac{J_1(\alpha_q)}{J_1(\alpha_n)} \text{ si } n \neq q, \quad D_{nn} = \alpha_n G_{nn} = 1. \quad (\text{III.3.12})$$

L'ensemble des fonctions $J_0(\alpha_q x)$ forme, sur l'intervalle $x \in [0, 1]$, une base complète pour toute fonction $f(x) \in V_r$; les projections des équations (III.3.7) sur le vecteur de base $J_0(\alpha_n x)$ s'écrivent, compte-tenu des relations précédentes :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_n \frac{d^2 B_n}{dz^2} + k^2 \alpha_n B_n + k^2 a^2 u_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} C_{qn} B_q &= -\frac{\alpha_n^2}{u_0} \frac{dA_n}{dz} + k^2 a \dot{a} u_0 \sum_{q=1}^{\infty} D_{qn} A_q \end{aligned} \right. \quad (\text{III.3.13a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha_n}{u_0} \frac{dB_n}{dz} + k^2 a \dot{a} u_0 \sum_{q=1}^n G_{qn} B_q &= -\frac{\alpha_n^2}{u_0^2} A_n + k^2 a^2 A_n. \end{aligned} \right. \quad (\text{III.3.13b})$$

Ces équations (III.3.13) sont valables pour toute fonction $a(z)$ continuellement dérivable et tiennent compte de la condition aux limites sur E_2 pour $u = u_0$.

III. 4. DEPENDANCE AXIALE DES COMPOSANTES DE CHAMP ELECTRIQUE

(MODES TE_{0q})

Nous étudions la propagation d'une onde dans un guide périodique de période D ; la fonction $a(z)$ est supposée développable en série de Fourier à termes complexes, sous la forme :

$$a(z) = 1 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p e^{-ip\beta z}, \quad \beta = \frac{2\pi}{D}, \quad a_{-p} = a_p^* \quad (III.4.1)$$

De la même manière, posons :

$$a^2 = 1 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h_p e^{-ip\beta z} \quad \text{avec} \quad h_p = 2a_p + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{p-j} \quad (III.4.2)$$

$$\ddot{a}^2 = -\beta^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p e^{-ip\beta z} \quad \text{avec} \quad b_p = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j(p-j) a_j a_{p-j} \quad (III.4.3)$$

$$2a\dot{a} = -i\beta \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p h_p e^{-ip\beta z}, \quad (III.4.4)$$

$$3\dot{a}^2 - a\ddot{a} = -4\beta^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p e^{-ip\beta z} - \frac{\beta^2}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^2 h_p e^{-ip\beta z} \quad (III.4.5)$$

D'après le théorème de Floquet-Bloch [7,9] relatif à la propagation des ondes dans les structures périodiques, nous pouvons poser :

$$A_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} e^{-i\gamma_m z}, \quad \text{soit} \quad F(u, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} A_{nm} J_1\left(\beta_n \frac{u}{u_0}\right) e^{-i\gamma_m z} \quad (III.4.6)$$

avec :

$$\gamma_m = \gamma_0 + 2m \frac{\pi}{D}, \quad \gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (III.4.7)$$

λ_g étant la longueur d'onde guidée de l'onde fondamentale. L'ensemble des fonctions $e^{-i\gamma_m z}$ forme pour l'espace vectoriel V_a une base complète. Les projections sur cette base de l'équation (III.2.10) s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ K^2 (\delta_{qn} \delta_{pm} + h_{m-p} \delta_{qn}) - \left[(\Gamma+m)^2 + \frac{\alpha^2}{R^2} \right] \delta_{qn} \delta_{pm} \right. \quad (\text{III.4.8})$$

$$\left. - h_{m-p} (\Gamma+p)^2 \delta_{qn} + b_{m-p} (M_{qn} - 4L_{qn}) + \frac{m-p}{2} h_{m-p} (2\Gamma+p+m) L_{qn} \right\} A_{qp} = 0$$

où δ_{qn} et δ_{pm} représentent le symbole de Kronecker et en posant :

$$R = 2\pi \frac{u_0}{D}, \quad K = k \frac{D}{2\pi} = \frac{D}{\lambda}, \quad \Gamma = \gamma_0 \frac{D}{2\pi} = \frac{D}{\lambda_g} \quad (\text{III.4.9})$$

λ étant la longueur d'onde dans le vide.

Nous sommes en présence avec (III.4.8) d'un système algébrique linéaire homogène dont les inconnues sont les amplitudes complexes A_{qp} . Il comporte $m \cdot n$ équations, m variant de $-\infty$ à $+\infty$, et n de 1 à $+\infty$.

En écrivant que le déterminant du système est nul, condition d'existence d'une solution non triviale, nous obtenons une relation entre K et Γ , soit entre λ et λ_g , qui n'est autre que l'équation de dispersion du guide.

En pratique, il est commode de ramener ce problème au calcul des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A opérant dans l'espace vectoriel $V = V_a \times V_r$. En effet, associons à A_{qp} un vecteur $\vec{a} \in V$; la relation (IV.4.8) s'écrit alors :

$$K^2 A_1 \vec{a} = A_2 \vec{a} \quad (\text{III.4.10})$$

soit encore :

$$K^2 \vec{a} = A \vec{a}, \quad \text{avec } A = A_1^{-1} A_2, \quad (\text{III.4.11})$$

A_1, A_2, A sont des matrices opérant sur V .

$$\begin{aligned} A_1 \text{ mpqn} &= \delta_{qn} (\delta_{pm} + h_{m-p}) \\ A_2 \text{ mpqn} &= \delta_{qn} \delta_{pm} \left[(\Gamma+m)^2 + \frac{\alpha^2}{R^2} \right] + h_{m-p} (\Gamma+p)^2 \delta_{qn} + b_{m-p} (M_{qn} - 4L_{qn}) \\ &\quad + \frac{m-p}{2} h_{m-p} (2\Gamma+p+m) L_{qn} \end{aligned} \quad (\text{III.4.12})$$

III. 5. DECOMPOSITION AXIALE DES CHAMPS (MODES TM_{0q})

Pour la décomposition axiale du système (IV.3.13), nous pouvons utiliser un processus identique à celui exposé au paragraphe précédent pour les modes TE_{0q} .

D'après le théorème de Floquet-Bloch [7,9], nous pouvons poser :

$$A_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} e^{-i\gamma_m z} \text{ soit } E_z(u,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} J_0\left(\alpha_n \frac{u}{u_0}\right) e^{-i\gamma_m z}, \quad (\text{III.5.1})$$

$$B_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{nm} e^{-i\gamma_m z} \text{ soit } E_u(u,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{nm} J_1\left(\alpha_n \frac{u}{u_0}\right) e^{-i\gamma_m z}, \quad (\text{III.5.2})$$

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe (IV.4) on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \{ R [(\Gamma+m) \left(\frac{m-p}{2} \right) h_{m-p} G_{qn} - b_{m-p} C_{qn}] + \delta_{qn} \delta_{pm} \frac{\alpha_n}{R} \} B_{qp} \\ - \{ \delta_{qn} \delta_{pm} (\Gamma+m) + \delta_{qn} (\Gamma+m) h_{m-p} - \frac{m-p}{2} h_{m-p} D_{qn} \} A_{qp} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.5.3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \{ \delta_{pm} \delta_{qn} \frac{\alpha_n^2}{R^2} A_{qp} + \delta_{pm} \delta_{qn} (\Gamma+m) \frac{\alpha_n}{R} B_{qp} \\ + K^2 \left[\frac{R}{2} (m-p) h_{m-p} G_{qn} B_{qp} - \delta_{qn} (\delta_{pm} + h_{m-p}) A_{qp} \right] \} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.5.3b})$$

Nous sommes encore avec (III.5.3) en présence d'un système algébrique linéaire homogène comportant cette fois deux sortes de coefficients inconnus A_{qp} et B_{qp} . Nous pouvons à nouveau ramener la recherche des solutions à celle des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A opérant sur V . Associons à A_{qp} et à B_{qp} les vecteurs \vec{a} et $\vec{b} \in V = V_a \times V_r$. En notation matricielle, le système (III.5.3) s'écrit :

$$B_1 \vec{b} = A_1 \vec{a} \quad (\text{III.5.4a})$$

$$A_2 \vec{a} + B_2 \vec{b} + K^2 B_3 \vec{b} + K^2 A_3 \vec{a} = 0, \quad (\text{III.5.4b})$$

où $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ représentent des matrices opérant sur V . Le système (III.5.4) peut encore s'écrire :

$$K^2 \vec{a} = A \vec{a},$$

avec :

$$A = -(B_3 B_1^{-1} A_1 + A_3)^{-1} (B_2 B_1^{-1} A_1 + A_2), \quad (\text{III.5.5})$$

et avec :

$$\begin{aligned} B_{1mpqn} &= R \left[(\Gamma+m) \left(\frac{m-p}{2} \right) h_{m-p} G_{qn} - b_{m-p} C_{qn} \right] + \delta_{qn} \delta_{pm} \frac{\alpha_n}{R} \\ A_{1mpqn} &= \delta_{qn} \delta_{pm} (\Gamma+m) + \delta_{qn} (\Gamma+m) h_{m-p} - \frac{m-p}{2} h_{m-p} D_{qn} \\ A_{2mpqn} &= \delta_{pm} \delta_{qn} \frac{\alpha_n^2}{R^2} \\ B_{2mpqn} &= \delta_{pm} \delta_{qn} (\Gamma+m) \frac{\alpha_n}{R} \\ A_{3mpqn} &= -\delta_{qn} (\delta_{pm} + h_{m-p}) A_{qp} \\ B_{3mpqn} &= \frac{R}{2} (m-p) h_{m-p} G_{qn} B_{qp} \end{aligned} \quad (\text{III.5.6})$$

III. 6. ETUDE DE L'EQUATION DE DISPERSION

Nous avons montré (§ III.4 et III.5) que pour les modes TE_{on} ainsi que TM_{on} l'étude de la relation de dispersion $K(\Gamma)$ se ramène à celle des valeurs propres d'une matrice A opérant dans l'espace vectoriel $V = V_a \times V_r$:

$$A \vec{a} = K^2 \vec{a}. \quad (\text{III.6.1})$$

La matrice A , et par suite ses valeurs propres $K^2 = \frac{D^2}{\lambda^2}$, sont des fonctions de $\Gamma = \frac{D}{\lambda_g}$, ce qui donne $K = K(\Gamma)$.

Le rang de la matrice A est infini vis-à-vis de chacun des espaces V_a et V_r . Dans la pratique, pour effectuer les calculs, il faut limiter ce rang

à une valeur finie P , ce qui se fait en supposant que le champ électromagnétique est assez bien représenté par P vecteurs propres \vec{a} ayant P composantes a_{mn} non nulles :

$$m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad a_{mn} = 0 \text{ pour } |m| > M \text{ et/ou } n > N.$$

La matrice A est alors de rang $P = (2M+1)N$, et elle comporte $(2M+1)N$ valeurs propres K^2 donc $(2M+1)N$ valeurs positives de K .

Dans le cas du guide cylindrique lisse ($a(z) = 0$), A est une matrice diagonale dont les valeurs propres sont :

$$K^2 = K^2(m, n) = (\Gamma + m)^2 + \frac{\lambda_n^2}{R^2} \quad (\text{III.6.2})$$

avec :

$$\text{modes TE}_{on} \quad \lambda_n = \alpha_n$$

$$\text{modes TM}_{on} \quad \lambda_n = \beta_n.$$

L'indice n est le numéro d'ordre des modes TE_{on} ou TM_{on} . L'indice m est le numéro d'ordre de l'harmonique d'espace, celui d'ordre m se propageant avec la vitesse de phase :

$$V_{pm} = \frac{K}{\Gamma + m} c, \quad (\text{III.6.3})$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le guide lisse, la seule onde dont l'amplitude n'est pas nulle est l'onde fondamentale ($m = 0$) de longueur d'onde guidée $\lambda_{g0} = D\Gamma$.

Pour les guides périodiques, ces différents modes et harmoniques sont couplés entre eux, par l'intermédiaire des coefficients b_p et h_p caractérisant la génératrice.

III. 7. QUELQUES EXEMPLES D'ETUDES NUMERIQUES DE LA COURBE DE DISPERSION

Afin de contrôler la validité de notre formalisme, nous avons effectué sur ordinateur des calculs numériques pour le guide sinusoidal et le guide à iris.

Nous avons restreint cette étude au mode TM_{01} utilisé dans les accélérateurs, seul mode pour lequel nous disposons de résultats expérimentaux ; nous donnons cependant, à titre indicatif quelques valeurs numériques pour le mode TE_{01} . Avant de présenter ces résultats nous devons faire quelques considérations d'ordre général.

Quelle que soit la puissance du calculateur dont on dispose, les calculs numériques ne peuvent être faits qu'après avoir, par troncation, ramené le rang de la matrice A à un nombre fini. Bien que les effets précis d'une telle troncation restent mystérieux, il est raisonnable de penser que lorsque le rang de la matrice augmente, les résultats ainsi obtenus convergent vers la solution exacte. Dans notre cas, la matrice A opère dans un espace vectoriel V produit de deux espaces infinis V_a et V_r ; cela soulève une difficulté nouvelle, car il faut effectuer deux troncations distinctes, l'une pour V_a , l'autre pour V_r . Concrètement, cela se traduit dans les relations (III.4.8) et (III.5.3) par une limitation des indices aux valeurs suivantes :

$$|p| \leq M, \quad q \leq N,$$

le rang de la matrice A étant alors $N(2M+1)$. A priori, les entiers M et N peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre, mais l'expérience numérique montre que les meilleurs résultats sont souvent obtenus lorsque $M = 2N$.

▪ Le guide sinusoïdal

C'est ce type de guide qui possède la géométrie la mieux adaptée pour l'emploi de notre formalisme. Aucune approximation n'est nécessaire sur la fonction $a(z)$ et la matrice A comporte de nombreux termes nuls. Nous avons repris l'exemple du guide déjà étudié au chapitre précédent par la méthode des perturbations (II.6).

Dans un premier temps, nous avons étudié en fonction de M et de N pour une valeur donnée de $\Gamma = \frac{D}{\lambda_g}$ la convergence de la valeur calculée de $K = \frac{D}{\lambda}$; ces valeurs numériques sont rassemblées dans le tableau 1. III. Dans ce cas précis, on remarque que jusqu'au quatrième chiffre la convergence est très rapide, puisqu'elle est pratiquement atteinte pour $M = 1$ et $N = 2$; cela s'explique par la faible valeur du paramètre α qui nous situe dans le domaine d'application de la méthode des perturbations. Pour les chiffres suivants, la convergence semble difficile à atteindre ; ce qui peut s'expliquer par le fait que le rang de la matrice A augmentant très rapidement avec M et N , les erreurs d'arrondis, inhérentes

aux calculs sur ordinateur, viennent limiter la précision des résultats.

N \ M	0	1	2	3	4
1	0,93990	0,906193	0,906021	0,906021	0,906023
2	0,93523	0,906896	0,906706	0,906849	0,906709
3	0,93523	0,907067	0,906882	0,906773	0,906510
4	0,93523	0,907815	0,906979	0,906533	0,907067

tableau 1.III

Guide sinusoidal: convergence avec M et N de $K = \frac{D}{\lambda}$ ($\alpha = \frac{1}{9}$, $\frac{u_0}{D} = 0,45$, $\Gamma = 0,4$)

Le tableau 2. III donne des valeurs de K calculées à partir de notre nouveau formalisme et pouvant être comparées à celles issues de la méthode des perturbations. En plus des résultats du mode TM_{01} nous donnons, à titre indicatif, ceux du mode TE_{01} , ainsi que les valeurs $K(\Gamma)$ pour le guide lisse ($\alpha = 0$). A la lecture de ce tableau, on constate qu'il existe un excellent accord entre les deux méthodes.

■ Le guide à iris

Lorsque, comme c'est le cas pour le guide à iris, la fonction $a(z)$ caractérisant la génératrice du guide présente des discontinuités ainsi que ses dérivées, notre formalisme ne peut pas s'appliquer (il nécessite la continuité de $a(z)$, $\frac{da}{dz}$, $\frac{d^2a}{dz^2}$). Cette difficulté n'apparaît pas clairement au cours des calculs analytiques, car, au moyen du théorème de Floquet-Bloch, nous substituons à $a(z)$ son développement en série de Fourier. C'est à ce développement que nous faisons ensuite subir des opérations de dérivation ce qui est mathématiquement incorrect. Il n'est cependant pas inconcevable qu'une telle méthode puisse conduire à des résultats numériques cohérents.

$\frac{\gamma D}{2\pi}$	$K = \frac{D}{\lambda}$				
	mode TM_{01} (perturbation)	mode TM_{01} (nouvelle méthode)	mode TM_{01} (guide lisse $\alpha = 0$)	mode TE_{01} (nouvelle méthode)	mode TE_{01} (guide lisse $\alpha = 0$)
0,00	0,841	0,8419	0,8505	1,3276	1,3552
0,05	0,842	0,8432	0,8520	1,3282	1,3561
0,1	0,846	0,8473	0,8564	1,3298	1,3589
0,15	0,853	0,8530	0,8637	1,3323	1,3635
0,20	0,861	0,8614	0,8737	1,3358	1,3699
0,25	0,870	0,8715	0,8865	1,3401	1,3781
0,30	0,882	0,8830	0,9019	1,3445	1,3880
0,35	0,894	0,8952	0,9197	1,3489	1,3997
0,40	0,905	0,9069	0,9399	1,3527	1,4130
0,45	0,914	0,9157	0,9622	1,3559	1,4279
0,50	0,917	0,9190	0,9866	1,3565	1,4445

† tableau 2. III

Courbe de dispersion du guide sinusoidal

En effet, les calculs numériques étant toujours, comme nous l'avons montré, effectués à partir d'une matrice A de rang fini, ce n'est pas $a(z)$ qui intervient mais une approximation de cette fonction pouvant présenter les conditions de dérivabilité requises par le formalisme. En toute rigueur, on ne résoud pas le problème posé mais un problème voisin, dépendant de l'approximation choisie. Il est clair que l'on a intérêt à choisir dès le départ l'approximation de $a(z)$ en conservant dans son développement en série de Fourier un nombre fini P de termes au plus égal M.

Si cette limitation est faite brutalement, il apparaît une nouvelle difficulté. Pour le montrer, raisonnons sur l'exemple de la figure III.1. Sur cette figure nous avons représenté un guide en créneau, ainsi que la première approximation de ce guide, obtenue en conservant seulement le premier terme de la série de Fourier de la fonction $a(z)$ (le rayon moyen $u_0 = \frac{1}{D} \int_0^D a(z) dz$ restant inchangé). Il est évident qu'une telle approximation ne saurait être valable car il n'y a plus de canal central dans le guide ainsi obtenu, et par suite, il ne peut pas y avoir propagation des champs.

Ces considérations nous ont conduit à adopter comme approximation du guide réel un guide ayant même rayon moyen et même début de spectre de Fourier, l'amplitude du premier harmonique étant choisie de telle manière qu'il possède aussi le même canal central.

Nous avons choisi comme exemple l'un des guide à iris ayant fait, par R. Combe et M. Feix [31] l'objet d'une étude expérimentale et théorique (par la méthode des raccordements) en vue de son utilisation dans un accélérateur de particule. Les caractéristiques géométriques de ce guide, fig.III.2 sont les suivantes :

$$2a = 46,81 \text{ mm}$$

$$2b = 87,84 \text{ mm}$$

$$d = 7,50 \text{ mm}$$

$$D = 10 \text{ mm}$$

$$\frac{u_0}{D} = 3,8791.$$

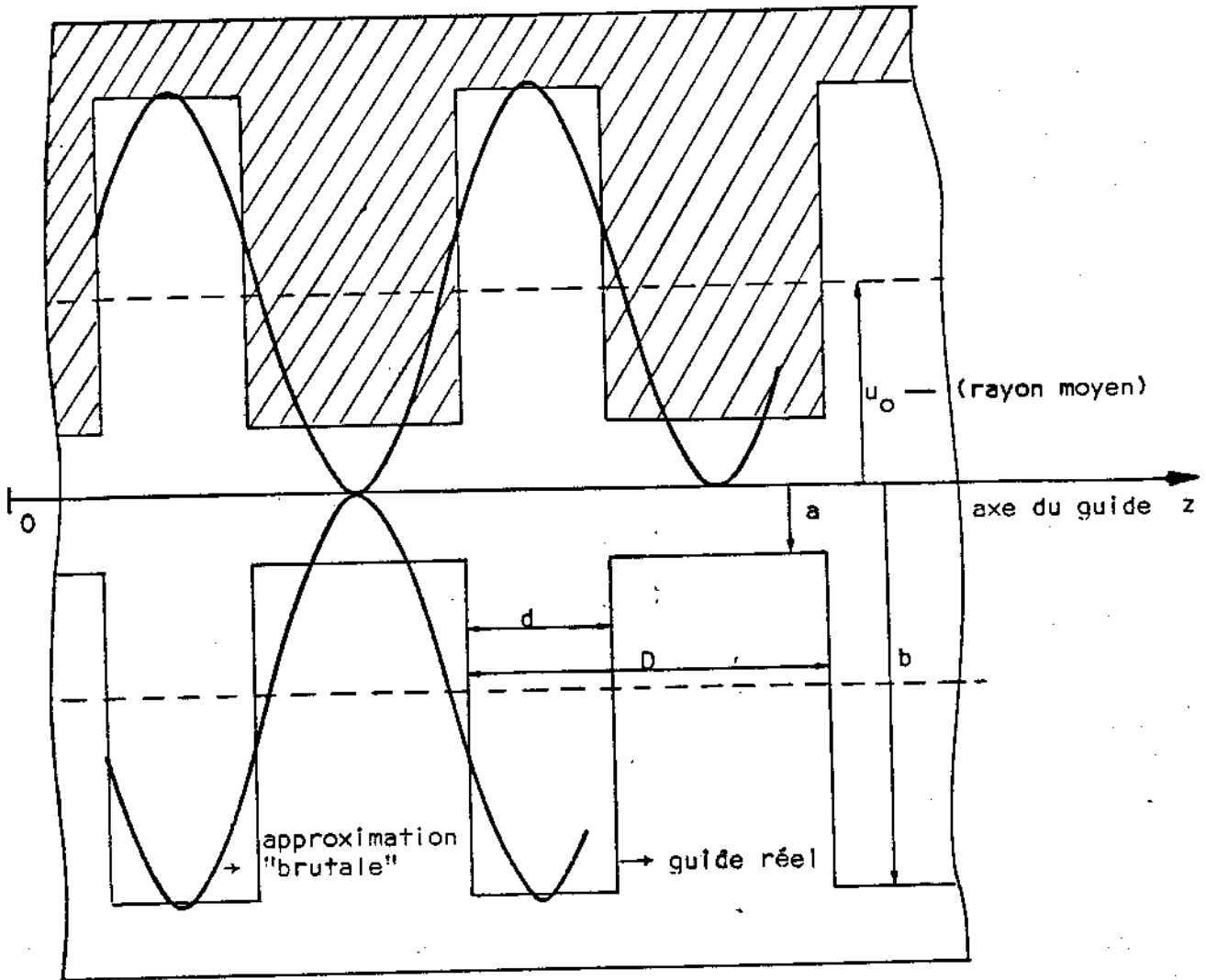
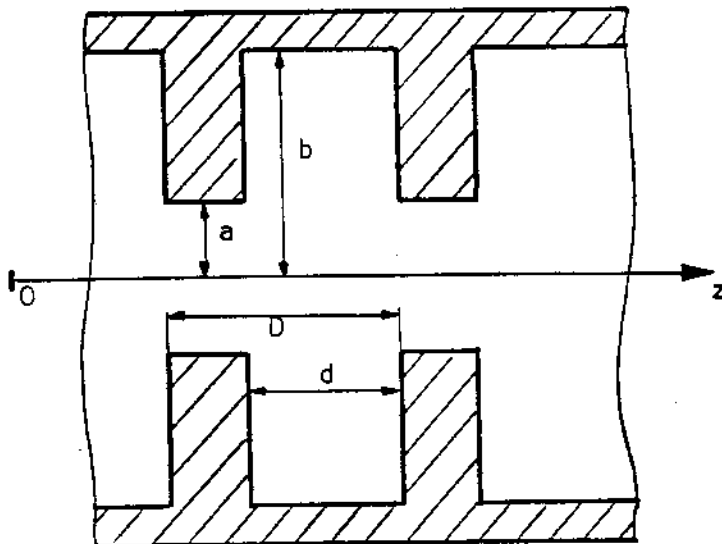


fig. III.1

Approximation du guide en créneaux

$$\frac{d}{D} = 0,4 \quad \frac{b}{a} = 5,867, \quad \frac{u_0}{a} = 2,947$$



$$2a = 46,81 \text{ mm}$$

$$2b = 87,84 \text{ mm}$$

$$d = 7,50 \text{ mm}$$

$$D = 10 \text{ mm}$$

$$\frac{u_0}{D} = 3,8791$$

fig. III.2

Le guide à iris

Dans le tableau 3.III., nous avons, pour ce guide, porté les valeurs expérimentales et calculées de $K = \frac{D}{\lambda}$ en fonction de $\Gamma = \frac{D}{\lambda_g}$ ainsi que, à titre de comparaison, ces mêmes valeurs pour le guide lisse de même rayon moyen. Tous ces calculs ont été faits avec $M = 4$, $N = 3$ et $P = 4$, la matrice A étant alors de rang 27.

$\Gamma = \frac{D}{\lambda_g}$	$K = \frac{D}{\lambda}$		
	Valeurs expérimentales	Valeurs calculées	guide lisse
0	0,0950	0,0951	0,0987
0,0668	0,0976	0,1000	0,1192
0,0868	0,1000	0,1027	0,1314
0,1271	0,1053	0,1084	0,1609
0,1774	0,1111	0,1149	0,2030
0,2589	0,1176	0,1217	0,2771
0,5	0,1238	0,1271	0,5096

tableau 3.III

Courbe de dispersion du guide à Iris

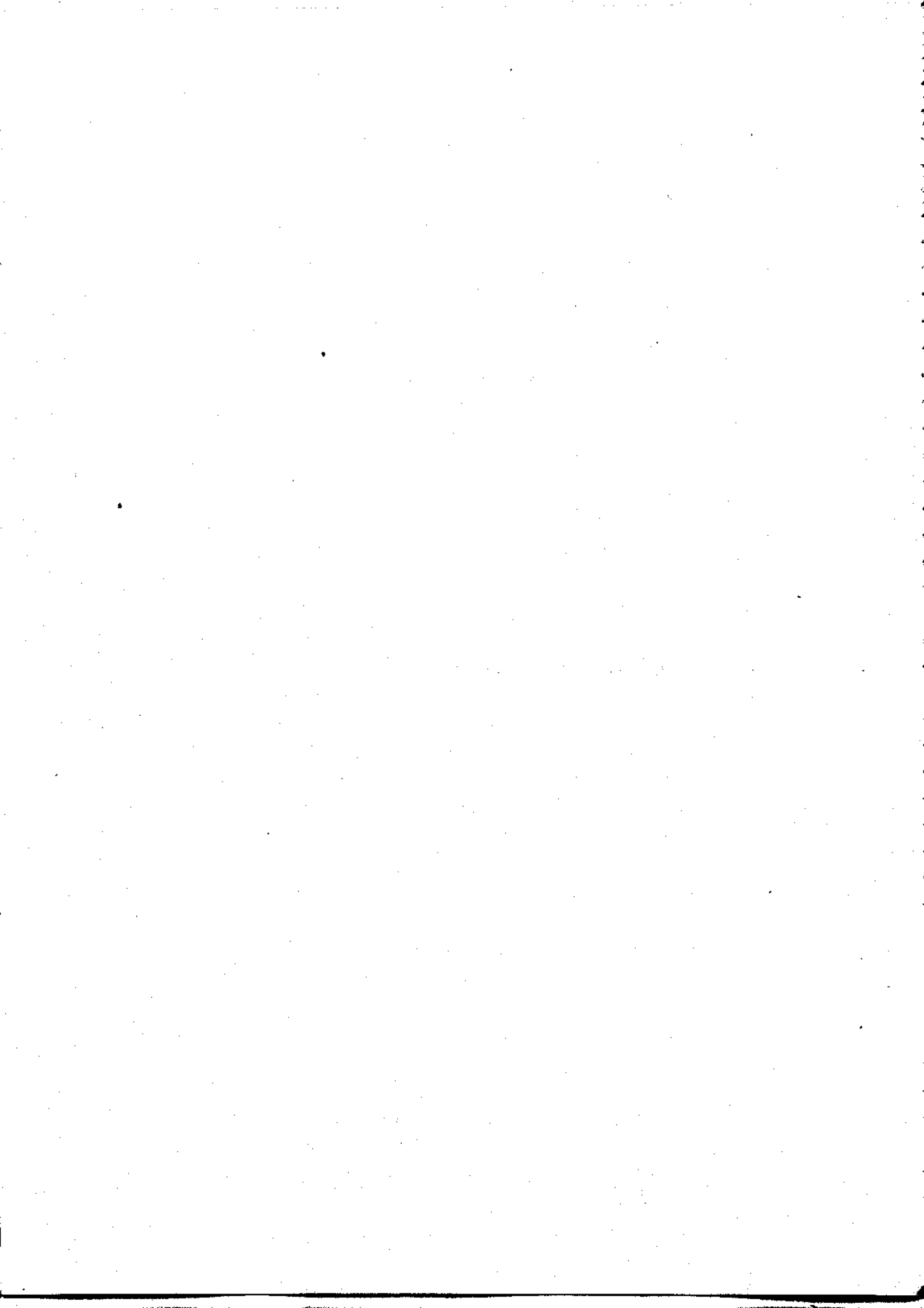
Si l'on tient compte, comme nous l'avons précédemment indiqué, que nous sommes placés ici dans un cas très défavorable pour l'application de notre formalisme, on constate à la lecture de ce tableau que l'accord entre les valeurs expérimentales et calculées est très acceptable.

Cette étude numérique nous a permis de mettre en évidence, l'importance de la notion de rayon moyen des guides périodiques. Cette importance semble avoir été jusqu'à présent le plus souvent ignorée des expérimentateurs. On trouve en effet assez fréquemment des études où il est fait état de l'influence, sur la courbe de dispersion, des paramètres a et b (fig. III.2). En fait toute variation de b et même de a entraîne une variation du rayon moyen u_0 dont l'effet est prépondérant. On en arrive à attribuer à ces paramètres (a ou b) une influence

qu'ils n'ont qu'indirectement. Il semble même que la courbe de dispersion d'un guide périodique soit, en grande partie, déterminée par les dimensions relatives du rayon moyen et du canal central.

Troisième partie

LES RÉSEAUX



Introduction

Au cours des quinze dernières années, le problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau a fait l'objet de très nombreux travaux théoriques (le lecteur intéressé pourra se reporter à une revue détaillée à ce sujet dans un article publié récemment par R. PETIT [61]). Schématiquement, ces théories rigoureuses peuvent être rangées dans deux catégories distinctes selon que le formalisme auquel elles font appel est intégral ou différentiel. On est conduit à résoudre numériquement sur ordinateur une équation intégrale dans le premier cas (ou éventuellement des équations intégrales couplées) ou un système infini d'équations différentielles couplées dans le second cas.

L'emploi des équations de Maxwell sous la forme covariante et d'un système de coordonnées non orthogonales dit "de translation", adapté à la géométrie des réseaux, nous a permis de donner du problème une formulation différentielle originale. En effet, le système infini d'équations différentielles que nous proposons est à coefficients constants. Cette importante particularité permet de ramener la résolution du problème à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice, et rend également aisé l'emploi d'une méthode de perturbation.

Dans le chapitre V, après avoir mis ce problème en équations dans le système de coordonnées "de translation", nous proposons une critique nouvelle de la méthode du développement en ondes planes du champ diffracté dite "méthode du développement de Rayleigh". Nous développons ensuite une méthode de perturbation qui nous permet de donner dans quelques cas particuliers simples des expressions analytiques pour les efficacités.

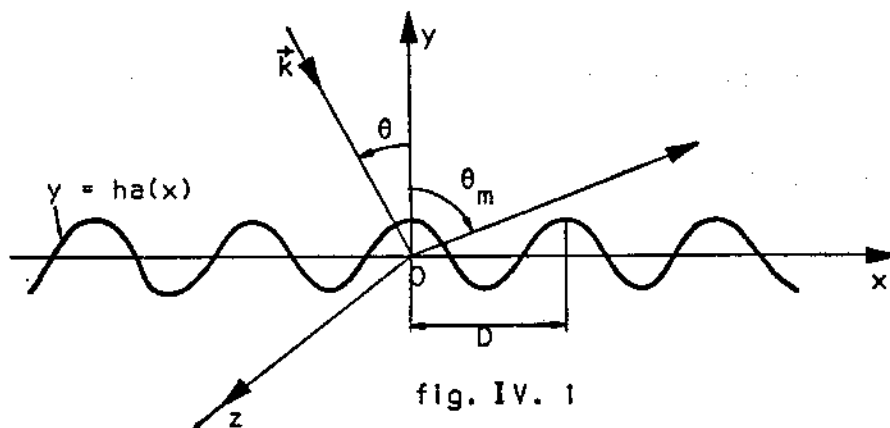
Dans le chapitre V, nous écrivons un système différentiel unique permettant de traiter simultanément les deux cas de polarisation. La résolution de ce système se fait par une technique voisine de celle utilisée en mécanique quantique, pour résoudre l'équation de Schrödinger, notre fonction d'onde présentant toutefois la particularité de comporter deux composantes. Nous proposons ensuite une méthode hybride dans laquelle nous faisons la distinction entre la partie asymptotique du champ qui seule présente de l'intérêt pour le physicien, et la partie évanescence dont la connaissance est indispensable à l'écriture des conditions aux limites. Nous utilisons alors uniquement notre formalisme pour la détermination de ce champ évanescence, le reste du calcul étant conduit de la même manière que dans la méthode du développement de Rayleigh.

Chapitre IV

ETUDE PAR UNE METHODE DE PERTURBATION
DE LA DIFFRACTION PAR UN RESEAU

IV. 1. POSITION DU PROBLEME

Le réseau considéré est une surface cylindrique dont la génératrice, parallèle à l'axe Oz (fig. IV. 1), s'appuie sur la courbe $y = h a(x)$. La fonction a est une fonction deux fois dérivable de la variable x , de période D , développable en série de Fourier, h est un paramètre proportionnel à la profondeur des sillons.



On se propose de rechercher, à partir des équations de Maxwell, l'onde diffractée par ce réseau, lorsqu'il est éclairé par une onde plane incidente de longueur d'onde λ , dont le vecteur d'onde \vec{k} , situé dans le plan xOy , fait l'angle θ avec Oy . Pour cela, on fait les trois hypothèses suivantes :

- (IV. 1.A) Condition d'onde incidente : la seule onde se propageant vers le réseau est l'onde plane incidente dont l'amplitude est connue.

- (IV. 1.8) Condition de rayonnement à l'infini : l'amplitude des champs électromagnétiques reste finie lorsque y tend vers l'infini.
- (IV.1. C) Condition aux limites : le réseau est matérialisé par un métal infiniment conducteur sur la surface duquel la composante tangentielle du champ électrique s'annule (au chapitre suivant le cas d'un métal de conductivité finie est envisagé).

On peut montrer [58] que, loin du réseau, l'onde diffractée peut être considérée comme une somme finie d'ondes planes dont les directions de propagation font les angles θ_m avec Oy. Entre θ et θ_m , il existe une relation dite "formule des réseaux", indépendante de la fonction $a(x)$:

$$\sin \theta_m = \sin \theta + m \frac{\lambda}{D}, \quad (\text{IV.1.1})$$

m étant l'ordre de diffraction.

Pour les réseaux par réflexion, θ et θ_m sont orientés en sens inverse (fig. IV.1).

Cette formule (IV.1.1) établie élémentairement en optique physique, pour un ensemble de fentes étroites est en fait valable pour tous les réseaux ; elle est la traduction de la périodicité de la structure [58].

Le problème fondamental des réseaux est la recherche des efficacités η_m , c'est-à-dire la répartition de l'énergie diffractée dans les différents ordres.

L'onde incidente étant par hypothèse une onde plane, son unique composante de champ E_z ou H_z peut être représentée par son amplitude complexe :

$$\left. \begin{array}{l} E_z = E^i \\ H_z = H^i \end{array} \right\} = E_0 e^{-ikx \sin \theta} e^{iky \cos \theta}, \quad (\text{IV.1.2})$$

avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (\text{IV.1.3})$$

E_0 étant un coefficient d'amplitude que l'on prendra pour la commodité de l'écriture égal à un.

Remarque -

La convention de notation pour les amplitudes complexes, adoptée ici, est encore celle de la propagation guidée, soit :

$$E \mapsto E e^{i(\omega t - \gamma x)},$$

pour une onde se propageant suivant le sens positif.

IV. 2. MISE EN EQUATION DU PROBLEME

Le système de coordonnées de "translation" ($x^1 = x$, $x^2 = u$, $x^3 = z$) (A.5) est, pour la surface S du réseau, un système naturel de coordonnées. Dans ce système :

$$x^2 = u = y - h a(x) \quad (\text{IV.2.1})$$

La surface infiniment conductrice S coïncide avec la surface de coordonnées $u = 0$, soit : $y = h a(x)$.

Les composantes g_{ij} et g^{ij} du tenseur métrique de ce système ont été calculées au §. A.5. :

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 + h^2 \dot{a}^2 & h \dot{a} & 0 \\ h \dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & -h \dot{a} & 0 \\ -h \dot{a} & 1 + h^2 \dot{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.7})$$

$$\sqrt{g} = 1 \quad (\text{A.5.8})$$

Après avoir reporté ces valeurs (A.5.7) dans le système (I.6.9), on arrive aux équations de propagation relatives aux composantes covariantes du champ électrique (ou magnétique) ($E_1 = E_x$, $E_2 = E_u$, $E_3 = E_z$) :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial E_u}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} h \dot{a} \left(\frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) - k^2 E_x + k^2 h \dot{a} E_u = 0 \quad (\text{IV.2.2a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (1 + h^2 \dot{a}^2) \left(\frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} h \dot{a} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.2.2b})$$

$$- k^2 (1 + h^2 \dot{a}^2) E_u + k^2 h \dot{a} E_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} h \dot{a} \left(\frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial u} (1 + h^2 \dot{a}^2) \left(\frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) \quad (\text{IV.2.2c})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u} h \dot{a} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) - k^2 E_z = 0$$

La condition (V.1.A) impose à la solution de posséder la symétrie de translation par rapport à Oz, donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0 \quad (\text{IV.2.3})$$

Le système (V.2.2) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_u}{\partial x \partial u} + k^2 h \dot{a} E_u = \frac{\partial^2 E_x}{\partial u^2} + k^2 E_x \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.4a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_u}{\partial x^2} + k^2 (1 + h^2 \dot{a}^2) E_u = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial u} + k^2 h \dot{a} E_x \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.4b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (1 + h^2 \dot{a}^2) \frac{\partial^2 E_z}{\partial u^2} - 2h \dot{a} \frac{\partial^2 E_z}{\partial u \partial x} - h \dot{a} \frac{\partial E_z}{\partial u} + k^2 E_z = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.5})$$

La relation (V.2.5) est indépendante des deux précédentes ; il existe donc deux types de solutions :

- Polarisation $E_{//}$: $\begin{cases} E_x \equiv E_u \equiv 0, |\vec{E}| = E_z, \text{ le champ électrique est} \\ \text{parallèle au réseau.} \end{cases}$

- Polarisation $H_{//}$: $\begin{cases} E_z \equiv 0, |\vec{H}| = H_z, \text{ le champ magnétique est parallèle} \\ \text{au réseau.} \end{cases}$

Dans le système "de translation", les composantes covariantes $E_{i,1}$ et $H_{i,1}$ des champs \vec{E} et \vec{H} sont obtenues à partir de celles relatives aux coordonnées cartésiennes E_i et H_i par les relations (I.3.4) :

$$E_{i,1} = A_{i,1}^z E_i \quad ; \quad H_{i,1} = A_{i,1}^z H_i, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad (\text{I.3.4})$$

$$\begin{cases} E_{1,1} = E_1 + h \frac{da}{dx} E_2 \\ E_{2,1} = E_2 \\ E_{3,1} = E_3 \end{cases} \quad \begin{cases} H_{1,1} = H_1 + h \frac{da}{dx} H_2 \\ H_{2,1} = H_2 \\ H_{3,1} = H_3 \end{cases} \quad (\text{IV.2.6})$$

En coordonnées "de translation", la condition aux limites (IV.1c) pour les composantes covariantes s'écrit :

$$\text{polarisation } E_{//} : E_{3,1}(x^2) = E_z(u=0) = 0 \quad (\text{IV.2.7a})$$

$$\text{polarisation } H_{//} : E_{1,1}(x^2) = E_x(u=0) = 0 \quad (\text{IV.2.7b})$$

En coordonnées cartésiennes, pour les composantes cartésiennes (notées ici pour éviter les confusions $\overset{c}{E}$), cette condition s'écrit :

$$\text{polarisation } E_{//} : \overset{c}{E}_z(y=ha(x)) = 0 \quad (\text{condition de Dirichlet}) \quad (\text{IV.2.8})$$

$$\text{polarisation } H_{//} : (\overset{c}{E}_x + h \frac{da}{dx} \overset{c}{E}_y)_{y=ha(x)} = 0 \quad (\text{IV.2.9})$$

soit encore :

$$\left(\frac{\partial \overset{c}{H}_z}{\partial y} - h \frac{da}{dx} \frac{\partial \overset{c}{H}_z}{\partial x} \right)_{y=ha(x)} = 0, \quad (\text{IV.2.10})$$

cette dernière relation traduisant la nullité sur la surface de la dérivée normale de H_z (condition de Neumann).

IV. 3. LE DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH [63]

Loïn du réseau, l'onde diffractée est constituée d'une somme finie d'ondes planes (§ IV.1). En coordonnées cartésiennes, la composante E_z ou H_z de cette onde diffractée peut être écrite :

$$\begin{cases} E_z = E^d \\ H_z = H^d \end{cases} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_m e^{-ikx \sin \theta_m} e^{-iky \cos \theta_m}, \quad (\text{IV.3.1})$$

U étant l'ensemble des entiers m tels que :

$$|\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}| \leq 1, \quad (\text{IV.3.2})$$

et avec :

$$\sin \theta_m = \sin \theta + m \frac{\lambda}{D}. \quad (\text{IV.1.1})$$

Le coefficient complexe B_m représente l'amplitude relative de l'onde plane diffractée dans l'ordre m. On peut montrer [60] que l'efficacité \mathcal{E}_m dans l'ordre m est reliée à B_m par la relation suivante :

$$\mathcal{E}_m = B_m B_m^* \frac{\cos \theta_m}{\cos \theta} \quad (\text{IV.3.3})$$

On peut également montrer [58] que la relation (IV.3.1) n'est autre que la partie asymptotique d'un développement plus général de l'onde diffractée valable pour $y > \text{Sup}[h a(x)]$ et connu sous le nom de "développement de Rayleigh" :

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E^d \\ H_z &= H^d \end{aligned} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m e^{-i\gamma_m x} e^{-i\chi_m y}, \quad (\text{IV.3.4})$$

avec :

$$\gamma_m = k(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}) \quad (\text{IV.3.5})$$

et

$$\chi_m = kx_n = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2}, \quad \text{si } \gamma_m^2 \leq k^2, \text{ soit } m \in U, \quad (\text{IV.3.6a})$$

$$\chi_m = kx_n = -i\sqrt{|\gamma_m^2 - k^2|}, \text{ si } \gamma_m^2 > k^2, \text{ soit } m \notin U, \quad (\text{IV.3.6b})$$

Si la quantité χ_m est réelle, l'onde correspondante est une onde plane, si χ_m est imaginaire, l'onde est évanescence.

IV. 4. LA METHODE DU DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH [57,58,59,60,63,64,65,67]

En coordonnées "de translation", l'onde incidente s'écrit d'après les relations (IV.1.2) et (IV.2.6) :

$$\left. \begin{aligned} E_z \\ H_z \end{aligned} \right\} = e^{-i\gamma_0 x} e^{i\chi_0 u} e^{i\chi_0 h a(x)}, \quad (\text{IV.4.1})$$

et le développement de Rayleigh pour l'onde diffractée :

$$\left. \begin{array}{l} E^d \\ H^d \end{array} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m e^{-i\gamma_m x} e^{-i\chi_m u} e^{-i\chi_m ha(x)} \quad (\text{IV.4.2})$$

Le champ total est la somme des champs incident et diffracté. La méthode dite du "développement de Rayleigh" suppose que l'équation (IV.4.2) soit la solution cherchée pour le champ diffracté pour $u \geq 0$, et non pas seulement pour $y > \text{Sup}[ha(x)]$. Cette hypothèse permet d'utiliser ce développement pour écrire la condition aux limites et par suite, pour calculer les coefficients B_m :

$$E_{//} : \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m e^{-i\gamma_m x} e^{-i\chi_m ha(x)} = -e^{-i\gamma_0 x} e^{i\chi_0 ha(x)} \quad (\text{IV.4.3a})$$

$$H_{//} : \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m (\chi_m - h \frac{da}{dx} \gamma_m) e^{-i\gamma_m x} e^{-i\chi_m ha(x)} = -(\chi_0 + h \frac{da}{dx} \gamma_0) e^{-i\gamma_0 x} e^{i\chi_0 ha(x)} \quad (\text{IV.4.3b})$$

L'exploitation des équations (IV.4.3) se fait en projetant sur une base de Fourier les fonctions périodiques de x .

Pour cela, posons :

$$e^{i\chi_0 ha(x)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_m(\chi_0 h) e^{-im\beta x}, \quad (\beta = \frac{2\pi}{D}) \quad (\text{IV.4.4})$$

avec :

$$L_m(\chi_0 h) = \frac{1}{D} \int_0^D e^{i\chi_0 ha(t)} e^{-im\beta t} dt. \quad (\text{IV.4.5})$$

il vient alors :

$$E_{//} : \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m L_{n-m}(-\chi_m h) = -L_n(+\chi_0 h), \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{IV.4.6a})$$

$$H_{//} : \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m (\chi_m - \frac{n-m}{\chi_m} \frac{2\pi}{D} \gamma_m) L_{n-m}(-\chi_m h) = (\chi_0 - \frac{2\pi}{D} n \frac{\gamma_0}{\chi_0}) L_n(+\chi_0 h). \quad (\text{IV.4.6b})$$

Les relations (IV.4.6) forment des systèmes infinis d'équations algébriques linéaires où les inconnues sont les coefficients B_m .

La résolution numérique n'est possible que pour des systèmes tronqués ($|m|, |n| \leq M$) comportant un nombre $2M+1$ fini de B_m ; on aboutit alors à des valeurs que l'on suppose d'autant plus proches des valeurs réelles que M est plus grand. L'expérience numérique montre que cette proposition est vraie à condition que la hauteur h du réseau reste inférieure à une certaine limite h_L , appelée "limite pratique de Rayleigh", dépendant de la forme du réseau. Au-delà de cette valeur limite, il n'y a plus convergence de la méthode.

Pour le réseau sinusoïdal ($a(x) = \cos \frac{2\pi x}{D}$), nous montrons au chapitre suivant que cette hauteur limite est liée au pas du réseau par la relation suivante :

$$\frac{h_L}{D} = \frac{1}{2\pi}.$$

La hauteur limite ne dépend donc ni de la longueur d'onde, ni de la polarisation.

IV. 5. SUR LA VALIDITE DE LA METHODE DU DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH

Pour obtenir des résultats satisfaisants par la méthode du développement de Rayleigh, il est clair que la solution ainsi décomposée à priori en ondes planes et évanescentes (IV.4.2) doit satisfaire aux équations de Maxwell en coordonnées de translation et cela pour tout u positif. Afin de vérifier la validité de cette hypothèse, nous allons étudier de manière plus précise le cas simple du réseau sinusoïdal. Pour un tel réseau :

$$a(x) = \cos \frac{2\pi x}{D} = \cos \beta x. \quad (\text{IV.5.1})$$

D'après le théorème de Floquet-Bloch (II.3), la composante covariante du champ électrique E_z ou magnétique H_z peut s'écrire sous la forme du développement suivant :

$$\left. \begin{array}{l} E_z \\ H_z \end{array} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m(u) e^{-i\gamma_m x}, \quad (\text{IV.5.2})$$

où :

$$\gamma_m = \gamma_0 + m\beta,$$

γ_0 désignant la constante de propagation de l'onde fondamentale :

$$\gamma_0 = k \sin \theta. \quad (\text{IV.5.4})$$

Après avoir reporté la valeur (IV.5.2) dans la relation (IV.2.5) et projeté sur la base de Fourier, on obtient le système infini suivant d'équations différentielles homogènes linéaires à coefficients constants :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_m}{du^2} + \chi_m^2 E_m + \frac{h\beta}{2}(\gamma_m + \gamma_{m-1}) \frac{dE_{m-1}}{du} - \frac{h\beta}{2}(\gamma_m + \gamma_{m+1}) \frac{dE_{m+1}}{du} \\ + \frac{h^2 \beta^2}{2} \frac{d^2 E_m}{du^2} - \frac{h^2 \beta^2}{4} \frac{d^2 E_{m-2}}{du^2} - \frac{h^2 \beta^2}{4} \frac{d^2 E_{m+2}}{du^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.5.5})$$

Les fonctions inconnues $E_m(u)$ sont les solutions de (IV.5.5). Un tel système possède, quand il n'est pas dégénéré, une infinité de solutions indépendantes de la forme :

$$E_{mn}(u) = B_{mn} e^{r_n u}. \quad (\text{IV.5.6})$$

En reportant cette valeur (IV.5.6) dans (IV.5.5), on obtient un système infini d'équations algébriques homogènes linéaires, où les inconnues sont les coefficients B_{mn} . Pour qu'un tel système possède une solution non triviale, il faut que son déterminant s'annule ; cette condition permet de calculer r_n .

Considérons maintenant l'une quelconque des ondes constituant le développement de Rayleigh, soit :

$$\psi = B_n e^{-i\chi_n h a(x)} e^{-i\chi_n u} e^{-i\gamma_n x}, \quad (\text{IV.5.7})$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_n L_{n-m}(-\chi_n h) e^{-i\chi_n u} e^{-i\gamma_m x}. \quad (\text{IV.5.8})$$

Le réseau étant sinusoïdal, la quantité $L_m(x)$ peut s'écrire à partir des fonctions de Bessel $J_m(x)$. Il vient :

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_n i^{n-m} J_{m-n}(\chi_n h) e^{-i\chi_n u} e^{-i\gamma_m x}, \quad (\text{IV.5.9})$$

soit encore :

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_{mn} e^{-i\gamma_m x}, \quad (\text{IV.5.10})$$

en posant :

$$E_{mn} = B_n i^{n-m} J_{m-n}(\chi_n h) e^{-i\chi_n u}. \quad (\text{IV.5.11})$$

En reportant cette expression dans le système (IV.5.5) et en utilisant pour faire des combinaisons linéaires d'équations, les formules de récurrence entre les fonctions de Bessel :

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x), \quad (\text{IV.5.12})$$

on obtient un système infini d'équations différentielles découplées. E_{mn} est une solution, à condition que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\chi_n^2 = k^2 - \gamma_n^2; \quad (\text{IV.5.13})$$

cette relation n'étant autre que la formule des réseaux (IV.1.1).

Le développement de Rayleigh, combinaison linéaire des solutions élémentaires satisfaisant à la condition (IV.5.13), semble donc être la solution du problème. Malheureusement, pour pouvoir faire numériquement le calcul des coefficients B_n à partir des conditions aux limites (§ IV.4), nous avons vu qu'il ne faut conserver qu'un nombre fini $2M+1$ de solutions élémentaires ; ce qui revient à poser :

$$E_{mn} = 0 \text{ pour } |m| > M \text{ ou/et } |n| > M. \quad (\text{IV.5.14})$$

Cela équivaut, vis-à-vis des équations de Maxwell, à ne conserver qu'un nombre fini d'équations dans le système différentiel infini (IV.5.5). On constate alors que les solutions de Rayleigh tronquées (IV.5.10) et (IV.5.14) ne satisfont aux équations de Maxwell tronquées que si la hauteur h du réseau est nulle. (En effet les formules de récurrence des fonctions de Bessel ne permettent alors plus d'obtenir un système d'équations différentielles découplées). On conçoit donc bien qu'une telle solution ne puisse donner des résultats satisfaisants que pour des réseaux de hauteur h faible.

Pour les réseaux de hauteur importante, il est nécessaire de calculer les solutions élémentaires du système différentiel tronqué sous la forme (IV.5.6) ; puis d'écrire ensuite la condition aux limites. Une telle méthode est développée au chapitre suivant.

IV. 6. RECHERCHE D'UNE SOLUTION PAR UNE METHODE DE PERTURBATION

Nous exposons cette méthode en prenant l'exemple du réseau sinusoïdal en polarisation $E_{//}$. Au paragraphe suivant, une généralisation est faite pour tous les réseaux et les deux types de polarisation.

On désire obtenir une solution approchée du système différentiel infini (IV.5.5) par une méthode de perturbation, en prenant comme paramètre :

$\alpha = \frac{h\beta}{2} = \frac{\pi h}{D}$. On recherche la solution E_m sous la forme d'une série entière du paramètre α :

$$E_m(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p E_{m p}(u). \quad (\text{IV.6.1})$$

Après avoir reporté cette expression dans le système différentiel (IV.5.5) et identifié les termes de même degré en α , on obtient les systèmes suivants :

$$n = 0$$

$$\frac{d^2 E_{m0}}{du^2} + \chi_m^2 E_{m0} = 0 \quad (\text{IV.6.2a})$$

$$n = 1$$

$$\frac{d^2 E_{m1}}{du^2} + \chi_m^2 E_{m1} = -(\gamma_m + \gamma_{m-1}) \frac{dE_{m-1,0}}{du} + (\gamma_m + \gamma_{m+1}) \frac{dE_{m+1,0}}{du} \quad (\text{IV.6.2b})$$

$$n \geq 2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{mn}}{du^2} + \chi_m^2 E_{mn} = & -2 \frac{d^2 E_{m,n-2}}{du^2} - (\gamma_m + \gamma_{m-1}) \frac{dE_{m-1,n-1}}{du} \\ & + (\gamma_m + \gamma_{m+1}) \frac{dE_{m+1,n-1}}{du} - \frac{d^2 E_{m+2,n-2}}{du^2} - \frac{d^2 E_{m-2,n-2}}{du^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.6.2c})$$

avec :

$$\chi_m^2 = k^2 - \gamma_m^2. \quad (\text{IV.6.3})$$

Les équations sont toutes des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, sans dérivée première. Les solutions sont de la forme suivante :

$$E_{mn} = A_{mn} e^{i\chi_m u} + B_{mn} e^{-i\chi_m u} + G_{m,n}(u); \quad (\text{IV.6.4})$$

A_{mn} et B_{mn} sont deux constantes d'intégration ; $G_{m,n}(u)$ est une fonction de variable u (constituée d'une somme d'exponentielles), solution particulière de l'équation non homogène.

La condition d'onde incidente (IV.1A) et la condition de rayonnement à l'infini (IV.1.B) permettent d'écrire :

$$A_{mn} = 0 \text{ pour } m \neq 0. \quad (\text{IV.6.5})$$

Pour $m = 0$, la constante A_{0n} est calculée à partir du développement en série entière de l'onde incidente, soit :

$$E_{mn}^i = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n E_{mn}^i e^{i\chi_0 u} \Rightarrow A_{0n} = E_{0n}^i \quad (\text{IV.6.7})$$

La condition aux limites (IV.1c) permet ensuite le calcul des constantes B_{mn} d'intégration. Pour la polarisation $E_{//}$, il vient :

$$E_m(u=0) = 0 \Rightarrow B_{mn} = -A_{mn} - G_{mn}(0), \quad (\text{IV.6.8})$$

ce qui, compte-tenu de (V.6.5) s'écrit :

$$B_{0n} = -A_{0n} - G_{0n}(0), \text{ si } m = 0, \quad (\text{IV.6.9a})$$

$$B_{mn} = -G_{0n}(0), \text{ si } m \neq 0. \quad (\text{IV.6.9b})$$

Finalement la solution cherchée peut se mettre sous la forme :

$$E_{mn} = \sum_{p=-n}^{+n} E_{mnp}^d e^{-i\chi_p u} + E_{mn}^i e^{i\chi_0 u}. \quad (\text{IV.6.10})$$

Le calcul des coefficients complexes E_{mnp}^d permet de construire, terme après terme, l'onde diffractée par le réseau. On remarque que les constantes χ_p (IV.6.3) intervenant dans la relation (IV.6.10) sont identiques à celles données par la formule des réseaux (IV.3.6) et ne sont pas affectées par la perturbation.

Il faut ensuite calculer les efficacités du réseau dans l'approximation d'ordre N par rapport à α . Pour cela, il faut au préalable calculer avec la même approximation les coefficients B_n intervenant dans le calcul de ces efficacités (IV.3.3). Ce calcul se fait par identification du développement de Rayleigh sous la forme (IV.5.9) avec les solutions (IV.6.10) :

$$B_n^{(N)} J_{m-n}(\chi_n h) = \sum_{p=0}^N \alpha^p E_{mnp} \quad (\text{IV.6.11})$$

Cette identification est possible en développant $B_n^{(N)}$ et $J_{m-n}(\chi_n h)$ en séries entières de α . $B_n^{(N)}$ représente B_n dans l'approximation d'ordre N .

On remarque dans la relation (IV.6.11) que l'on a un excès d'équations pour déterminer $B_n^{(N)}$ puisque le choix de l'indice m est arbitraire ; en fait, le calcul montre que les valeurs obtenues sont identiques quelque soit m .

Cette méthode donne, quand N augmente, au prix de calculs devenant rapidement importants et fastidieux, des résultats en bon accord avec l'expérience pour les réseaux sinusoïdaux de faible hauteur. Mais il apparaît au cours des calculs, que cette méthode n'est en fait que la reconstruction pas à pas, car des séries entières, du développement de Rayleigh.

IV. 7. METHODE DU DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH EN SERIE ENTIERE DE $\frac{2\pi h}{\lambda}$

Les résultats donnés par les perturbations sur les équations de Maxwell semblent être identiques à ceux issus de la perturbation du développement de Rayleigh. Dès 1909 [63] Rayleigh lui-même a proposé une telle méthode, reprise et discutée par Wirgin [66], qui pensait que son rayon de convergence était sinon nul du moins très faible alors que nous montrons plus loin qu'il est vraisemblablement du même ordre que celui de la méthode de Rayleigh proprement dite.

Nous allons donc reprendre cette méthode de perturbation à la lumière du fait qu'elle est en accord avec les équations de Maxwell écrites dans un système de coordonnées respectant le profil ce qui, à nos yeux, lui donne une justification nouvelle.

Admettons donc à priori le développement de Rayleigh et recherchons les coefficients inconnus B_m sous forme de séries entières du paramètre h . Pour cela posons :

$$\left. \begin{array}{l} \text{polarisation } E_{//} : B_m \\ \text{polarisation } H_{//} : -B_m \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^n \quad (\text{IV.7.1})$$

$$x_p = k x_p = \frac{2\pi}{\lambda} x_p. \quad (\text{IV.7.2})$$

Développons également la relation (IV.4.5) en série entière :

$$L_m(xh) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ixh)^n}{n!} \frac{1}{D} \int_0^D [a(x)]^n e^{im\beta x} dx, \quad (\text{IV.7.3})$$

soit :

$$L_m(xh) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (xh)^n L_{mn}, \quad (\text{IV.7.4})$$

avec :

$$L_{mn} = \frac{1}{n!} \frac{1}{D} \int_0^D [a(x)]^n e^{im\beta x} dx. \quad (\text{IV.7.5})$$

Dans la relation (IV.7.5), on constate que :

$$L_{mn} = L_{-mn}^* \text{ et } L_{m0} = \delta_{m0} \text{ (symbole de Kronecker)} \quad (\text{IV.7.6})$$

En reportant ces valeurs (IV.7.5) dans les équations (IV.4.6) et après identification des termes de même degré en h , on obtient, pour les deux types de polarisation, une formule de récurrence entre les coefficients B_{mn} :

$$B_{mn} = x_0^n (i^{-n} - i^n) P_{m0} L_{mn} - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{-q} x_0^q P_{mp} L_{m-p,q} B_{p,n-q} \quad (\text{IV.7.7a})$$

$$B_{m0} = -\delta_{m0} \quad (\text{IV.7.7b})$$

$$B_{m1} = -2ix_0 P_{m0} L_{m1} \quad (\text{IV.7.7c})$$

avec :

$$x_p = \sqrt{1 - (\sin \theta + p \frac{\lambda}{D})^2}, \text{ si } |\sin \theta + p \frac{\lambda}{D}| < 1, p \in U; \quad (\text{IV.7.8a})$$

$$x_p = -i \sqrt{1 - (\sin \theta + p \frac{\lambda}{D})^2}, \text{ si } |\sin \theta + p \frac{\lambda}{D}| > 1, p \notin U. \quad (\text{IV.7.8b})$$

Les coefficients P_{mp} dépendent du type de polarisation choisi.

Polarisation $E_{//}$:

$$P_{mp} = 1 \quad \forall m, p \in Z \quad (\text{IV.7.9a})$$

Polarisation $H_{//}$:

$$P_{mp} = \frac{1}{x_m x_p} \left[x_p^2 - (m-p) \frac{\lambda}{D} (\sin \theta + p \frac{\lambda}{D}) \right]. \quad (\text{IV.7.9b})$$

Pour pouvoir calculer les coefficients B_{mn} dans le cas où $n > 1$, il faut limiter la sommation portant sur l'indice p . Cela s'opère naturellement si l'on admet que la fonction a (caractéristique du profil du réseau) est assez bien représentée par un nombre fini k d'harmoniques de Fourier :

$$L_{m1} = 0, \text{ si } |m| > k. \quad (\text{IV.7.10a})$$

Ceci entraîne

$$L_{mn} = 0, \text{ si } |m| > kn. \quad (\text{IV.7.10b})$$

Dans ces conditions, la relation de récurrence (IV.7.7a) devient :

$$B_{mn} = x_0^n (i^{-n} - i^n) P_{m0} L_{mn} + \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{p=-kn}^{+kn} i^{-q} x_p^q P_{mp} L_{m-p,q} B_{p,n-q} \quad (\text{IV.7.11})$$

Les quantités L_{mn} , caractérisant la forme du réseau, peuvent également être calculées par récurrence à partir de L_{m1} :

$$L_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{q=-k}^{+k} L_{q1} L_{m-q,n-1}. \quad (\text{IV.7.12})$$

Pour un réseau sinusoïdal ($k=1$), la formule de récurrence (IV.7.12) prend une forme très simple :

$$L_{00} = 1, \quad L_{-11} = L_{11} = \frac{1}{2}$$

$$L_{mn} = 0 \text{ si } n \neq 2p + |m|, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (\text{IV.7.13})$$

$$L_{mn} = \frac{1}{2n} (L_{m-1, n-1} + L_{m+1, n-1}) \text{ si } n = 2p + |m|.$$

▣ Calcul des efficacités

Les coefficients B_{mn} permettent, à partir de la relation (IV.3.3) d'exprimer les efficacités \mathcal{E}_m dans les différents ordres diffractés sous la forme de séries entières de h . Pour cela, posons :

$$\mathcal{E}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^n \mathcal{E}_{mn}; \quad (\text{IV.7.13})$$

Il est aisé de vérifier que \mathcal{E}_{mn} est nul si n est impair :

$$\mathcal{E}_{m, 2k+1} = 0. \quad (\text{IV.7.14})$$

Les grandeurs réelles \mathcal{E}_{mn} sont obtenues à partir des parties réelles $\mathcal{R}e(B_{mn})$ et imaginaires $\mathcal{J}m(B_{mn})$ des grandeurs complexes B_{mn} :

$$\mathcal{E}_{mn} = \frac{x_m}{x_0} \sum_{q=0}^n [\mathcal{R}e(B_{mq}) \mathcal{R}e(B_{m, n-q}) + \mathcal{J}m(B_{mq}) \mathcal{J}m(B_{m, n-q})] \quad (\text{IV.7.15a})$$

$$\mathcal{E}_{00} = 1 \quad \mathcal{E}_{m0} = 0 \text{ pour } m \neq 0 \quad (\text{IV.7.15b})$$

Le réseau étant supposé infiniment conducteur, toute l'énergie incidente est diffractée, ce qui s'exprime par :

$$\sum_{m \in U} \mathcal{E}_m = 1. \quad (\text{IV.7.16})$$

Cette relation (IV.7.16) implique la condition suivante pour les \mathcal{E}_{mn} :

$$\sum_{m \in U} \mathcal{E}_{mn} = 0, \text{ pour } n \neq 0, \quad (\text{IV.7.17})$$

et $\mathcal{E}_{00} = 1$.

On peut constater, analytiquement pour les premières valeurs de n , et numériquement pour les suivantes, que cette condition est satisfaite. Avec cette méthode, le critère de la conservation de l'énergie est toujours satisfait

ce qui n'est pas le cas avec la méthode classique du développement tronqué de Rayleigh. Par contre, les séries entières ainsi obtenues pour l'efficacité possèdent un rayon de convergence fini h_e . Cette valeur limite semble, sinon identique, du moins voisine de la limite pratique de validité du développement de Rayleigh.

IV. 8. LES RESULTATS ANALYTIQUES POUR LES EFFICACITES

Lorsque la profondeur des sillons est très faible ($\frac{2\pi h}{\lambda} \ll 1$), on peut trouver une valeur approchée des efficacités ξ_m ($m \neq 0$), en remplaçant la série par son premier terme. Celui-ci dépend uniquement de l'amplitude du premier harmonique de Fourier de la fonction $a(x)$; on trouve ainsi :

$$\text{Polarisation } E_{//} : \xi_m = 4 \cos \theta \cos \theta_m |L_{m1}|^2 \left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^2, \quad (m \in \mathbb{U}) \quad (\text{IV.8.1a})$$

$$\text{Polarisation } H_{//} : \xi_m = 4 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_m} (\cos \theta - m \frac{\lambda}{D} \text{tg } \theta)^2 |L_{m1}|^2 \left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{IV.8.1b})$$

avec :

$$L_{m1} = \frac{1}{D} \int_0^D a(x) e^{im\beta x} dx. \quad (\text{IV.8.2})$$

Dans les deux relations précédentes, on constate que le rapport des efficacités entre les deux types de polarisation tend, lorsque h tend vers zéro, vers une limite indépendante de la forme du réseau :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi_m(H_{//})}{\xi_m(E_{//})} = \frac{1}{\cos^2 \theta_m} (\cos \theta - m \frac{\lambda}{D} \text{tg } \theta)^2 \quad (\text{IV.8.3})$$

1er exemple : le réseau sinusoidal

$$a(x) = \cos \frac{2\pi x}{D}$$

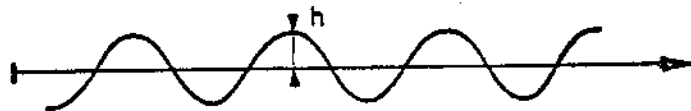


fig. IV.2.

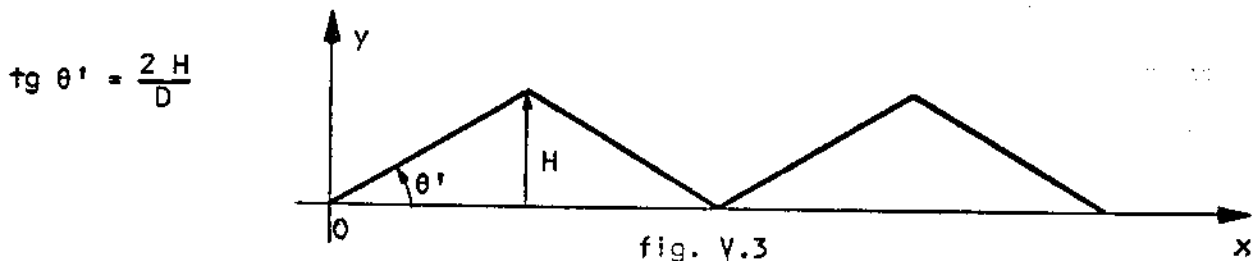
le réseau sinusoidal

$$L_{m1} = 0 \text{ si } m \neq 1 \quad L_{11} = L_{-11} = \frac{1}{2} \quad (\text{IV.8.4})$$

$$E_{//} \quad \xi_{\pm 1} = \cos \theta \cos \theta_{\pm 1} \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.8.5})$$

$$H_{//} \quad \xi_{\pm 1} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_{\pm 1}} \left(\cos \theta \pm \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta \right) \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.8.6})$$

2ème exemple : le réseau échelle symétrique



le réseau échelle symétrique

$$\text{polarisation } E_{//} : \xi_{\pm 1} = 4 \cos \theta \cos \theta_{\pm 1} \left(\frac{4H}{\pi \lambda} \right)^2$$

$$\text{polarisation } H_{//} : \xi_{\pm 1} = \frac{4 \cos \theta}{\cos \theta_{\pm 1}} \left(\cos \theta \pm \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta \right) \left(\frac{4H}{\pi \lambda} \right)^2$$

Pour $n \geq 2$, il n'est pas possible de donner une formule générale pour les efficacités. En effet, les coefficients ξ_{mn} dépendent du profil du réseau et du nombre d'ordres diffractés. Leur expression n'est vraiment simple que pour les réseaux sinusoïdaux.

Dans le formulaire de l'annexe 4, nous donnons les efficacités au second ordre par rapport à α^2 , pour une incidence quelconque.

Afin de contrôler la validité de nos formules, nous avons confronté les résultats ainsi obtenus avec ceux calculés par D. Maystre au moyen du formalisme intégral [45]. Ceux-ci, ayant été très largement confrontés avec l'expérience, peuvent être considérés comme rigoureux.

Ces comparaisons sont rassemblées dans les tableaux 1.IV et 2.IV. Elles ont été faites pour un réseau sinusoïdal et un réseau échelle symétrique (profil de la fig. IV.3) éclairés en incidence normale. Pour les calculs du second ordre, la série de Fourier du profil échelle a été réduite à son premier harmonique.

A la lecture de ces tableaux, on constate que pour les réseaux aux sillons peu profonds les calculs au premier ordre constituent une approximation acceptable ; ceux au second ordre sont très suffisants compte-tenu de la précision de réalisation des profils.

On remarque aussi (réseau échellette) que l'influence de la forme est assez faible (pour la hauteur considérée ici). De plus, et comme c'est souvent le cas, la précision est meilleure pour la polarisation $E_{//}$ que pour la polarisation $H_{//}$.

$\frac{h}{D}$	$\frac{D}{\lambda}$	ξ_1 1er ordre	ξ_1 second ordre	ξ_1 "vrai"
$\frac{0,1}{\pi\sqrt{2}} = 0,0225$	1,1	0,01008	0,0989	0,00995
	1,5	0,0335	0,0326	0,0327
	1,9	0,0614	0,0589	0,0589
	2,1	0,0776	0,0738	0,0730
$\frac{0,2}{\pi\sqrt{2}} = 0,045$	1,1	0,0403	0,0382	0,0383
	1,5	0,1342	0,1202	0,1209
	1,9	0,2456	0,2062	0,2082
	2,1	0,3102	0,2500	0,2426
$\frac{0,3}{\pi\sqrt{2}} = 0,0675$	1,1	0,0907	0,0801	0,0809
	1,5	0,3019	0,2311	0,2391
	1,9	0,5525	0,3522	0,2757
	2,1	0,6980	0,3926	0,3953

tableau 1.IV

Réseau sinusoïdal en incidence normale ($\sin \theta = 0$) et polarisation $E_{//}$

	$\frac{D}{\lambda}$	ϵ_1 1er ordre	ϵ_1 2ème ordre	ϵ_1 "vrai"
E//	1,1	0,0398	0,0377	0,0380
	1,4	0,108	0,0992	0,0994
	1,6	0,158	0,0139	0,141
	1,8	0,212	0,0182	0,184
	2,02	0,279	0,224	0,226
	2,2	0,340	0,245	0,251
H//	1,1	0,229	0,183	0,191
	1,4	0,226	0,185	0,191
	1,6	0,259	0,213	0,220
	1,8	0,306	0,246	0,254
	2,02	0,369	0,158	0,180
	2,2	0,428	0,242	0,259

Tableau 2. IV

Réseau échellette symétrique en incidence normale ($\sin \theta = 0$) $\frac{H}{D} = 0,110266$, $\theta' = 12^\circ$

IV. 9 APPROXIMATION POLYNOMIALE ET METHODE DES APPROXIMANTS DE PADÉ

Le calcul des coefficients ϵ_{mn} peut être fait numériquement à l'ordinateur en fonction de θ , $\frac{\lambda}{D}$ et des paramètres caractérisant le profil du réseau. Lorsque ce profil est donné par une fonction périodique ne comportant qu'un nombre fini d'harmoniques de Fourier (V.7.10), ce calcul est rigoureux et la précision sur les valeurs ϵ_{mn} ainsi obtenues n'est limitée que par les erreurs d'arrondi propres à chaque ordinateur. A partir de ces valeurs, il est ensuite possible de calculer, dans un ordre de diffraction donné, les efficacités $\epsilon(h)$ en fonction de la hauteur h . Pour cela, aux séries entières (IV.7.13) on substitue des polynômes de h de degré $2N$. Quand N augmente ces polynômes convergent vers la valeur exacte cherchée si $h < h_L$ (§ IV.7). Nous appelons ces différentes valeurs $\epsilon(h, N)$: "approximations polynomiales d'ordre N ".

Afin d'obtenir une valeur pour l'efficacité au delà de la hauteur limite h_L , nous pouvons utiliser la méthode des approximants de Padé, [2, 43].

En effet, le défaut principal du développement en série entière (ou de Taylor) d'une fonction d'une variable réelle est que sa convergence est liée à l'existence de singularités pour cette fonction étendue au plan complexe. Ainsi une fonction peut être très régulière sur l'axe réel (comme c'est le cas pour l'efficacité d'un réseau en fonction de la hauteur) et avoir un développement de Taylor dont le rayon de convergence est très petit (c'est par exemple le cas de $y = \frac{1}{1+x^2}$ dont le rayon de convergence est $x = 1$). La méthode des approximants de Padé consiste à rechercher pour la fonction inconnue, ici $\epsilon(h)$, une approximation non plus sous la forme d'un polynôme $\epsilon(h, N)$ mais d'une fraction rationnelle $\epsilon'(h, N)$, en espérant qu'en raison de la présence des pôles introduits par le dénominateur la fraction rationnelle $\epsilon'(h, N)$ soit une meilleure approximation et dans un domaine plus grand que le polynôme $\epsilon(h, N)$.

Pour cela, on recherche une fraction rationnelle dont les N premiers termes non nuls du développement en série entière soient identiques à ceux du polynôme. Les coefficients de la fraction rationnelle étant en général différents d'une approximation à la suivante, il ne peut être question de trouver entre eux une formule de récurrence. De plus, le choix des degrés respectifs du numérateur et du dénominateur est arbitraire (la somme des degrés du numérateur et du dénominateur devant être égale au degré du polynôme). Si k_n est le degré du

numérateur et k_d celui du dénominateur ($k_n + k_d = N$) on dit que le "Padé" est d'ordre $\frac{k_n}{k_d}$.

Cette méthode s'applique avec succès lorsque, comme c'est le cas ici, on connaît avec une aussi grande précision qu'on le désire les coefficients du développement de Taylor.

Concrètement, dans notre cas, le problème se présente sous la forme suivante :

soit l'approximation polynomiale d'ordre $N = 2k$ s'écrivant :

$$\&(k, 2k) = a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots + a_{4k} h^{4k}. \quad (\text{IV.9.1})$$

Nous choisissons l'approximant de Padé $\&'(h, 2k)$ d'ordre $\frac{k}{k}$ (le numérateur et le dénominateur sont des polynomes de degré k par rapport à h^2).

$$\&'(h, 2k) = \frac{b_2 h^2 + \dots + b_{2k} h^{2k}}{1 + c_2 h^2 + \dots + c_{2k} h^{2k}} \quad (\text{IV.9.2})$$

Les $2k$ coefficients inconnus b et c de la fraction rationnelle (IV.9.2) peuvent être obtenus à partir des $2k$ coefficients a au moyen de $2k$ équations algébriques linéaires, par identification entre les relations (IV.9.1) et (IV.9.2).

Dans les tableaux (3. IV) et (4. IV), nous comparons nos résultats avec ceux obtenus par D. Maystre, pour un réseau sinusoïdal. Le tableau (3. IV) correspond à un réseau utilisé en montage de Littrow ($\sin \theta = \frac{\lambda}{2D} = 0,4$) en polarisation $E_{//}$; deux ordres seulement étant diffractés, l'ordre -1 et l'ordre 0 . L'approximation polynomiale est d'ordre $N = 14$ et les approximants de Padé ont un ordre variant de $1/1$ à $7/7$.

Le tableau (4. V) correspond à un réseau utilisé en incidence normale ($\sin \theta = 0$, $\frac{\lambda}{D} = 0,4368$, cinq ordres diffractés : $-2, -1, 0, 1, 2$) l'approximation polynomiale est d'ordre $N = 10$ et les approximants de Padé varient de $1/1$ à $5/5$. Ce dernier réseau est celui qui a servi d'exemple à R. Petit pour montrer l'existence de la limite pratique du développement de Rayleigh [58].

A la lecture de ces tableaux on constate que la méthode des approximations de Padé permet d'étendre le champ d'application de la méthode des perturbations, un "Padé" d'ordre 7/7 donnant des résultats acceptables jusqu'à $h = 2h_L$. Ce doublement du domaine d'application du développement de Rayleigh est un résultat particulièrement intéressant lorsque l'on sait que cela correspond à des hauteurs de l'ordre de grandeur de celle des réseaux commerciaux actuellement utilisés par les opticiens.

$\frac{h}{D}$	ϵ_{-1} "vrai"	ϵ_{-1} polynome 14 termes	ϵ_{-1} Padé 1/1	ϵ_{-1} Padé 2/2	ϵ_{-1} Padé 3/3	ϵ_{-1} Padé 4/4	ϵ_{-1} Padé 5/5	ϵ_{-1} Padé 6/6	ϵ_{-1} Padé 7/7
0,0318	0,05147	0,05147	0,05147	0,05147	0,05147	0,05147	0,05147	0,05147	0,05147
0,0637	0,1941	0,1941	0,1944	0,1941	0,1941	0,1941	0,1941	0,1941	0,1941
0,0955	0,3968	0,3968	0,4004	0,3967	0,3968	0,3968	0,3968	0,3968	0,3968
0,1275	0,6185	0,6185	0,6363	0,6161	0,6185	0,6185	0,6185	0,6185	0,6185
0,1592	0,8165	0,8136	0,8750	0,7947	0,8162	0,8164	0,8164	0,8164	0,8164
0,1910	0,9529	0,955	1,0988	0,7949	0,9514	0,9527	0,9528	0,9528	0,9528
0,2228	1,000	-2,309	1,299	-1,1721	0,9929	0,9990	0,9999	0,9999	0,9999
0,2546	0,9457	-52,27	1,474	3,0161	0,9192	0,9411	0,9452	0,9475	0,9456
0,2865	0,7988	-607,47	1,6231	2,560	0,7204	0,7813	0,7959	0,7959	0,7959
0,3183	0,5892		1,75	2,567	0,3976	0,5371	0,5775	0,6886	0,5846
0,3501	0,3619								
0,3820	0,1651					-0,0927	0,0796	-0,7497	0,1226
0,4138	0,03754								
0,4456	0,000594						0,3063	-1,212	-0,1711

Tableau 3. V

Réseau sinusoidal au Littrow $\sin \theta = \frac{\lambda}{2D} = 0,4$ en polarisation E//

$p=10\pi \frac{h}{D}$	ϵ_1 "vrai"	ϵ_1 polynome	ϵ_1 Padé $\frac{1}{1}$	ϵ_1 Padé $\frac{2}{2}$	ϵ_1 Padé $\frac{3}{3}$	ϵ_1 Padé $\frac{4}{4}$	ϵ_1 Padé $\frac{5}{5}$
1	0,1605	0,1605	0,1626	0,1605	0,1605	0,16045	0,16045
2	0,3851	0,3852	0,4604	0,3841	0,3852	0,3852	0,3852
3	0,3292	0,3293	0,6965	0,3000	0,3296	0,3292	0,3292
4	0,09515	0,0992	0,8489	-0,1136	0,10625	0,09496	0,09519
5	0,01514	0,5064	0,9446	-0,6659	0,11609	0,00909	0,01483
6	0,1335	24,509	1,006	-1,204	0,59389	0,06814	0,1284
7	0,2115	640,90	1,047	-1,668	1,4955	-1,716	0,1719
8	0,1475		1,076	-2,046	2,648	-1,2648	-0,01248
9	0,09183		1,097	-2,348	3,886	-3,549	-0,27242
10	0,1278		1,111	-2,599	5,097	-7,048	-0,326
11							
12							

Tableau 4. V

Réseau sinusoidal en incidence normale ($\sin \theta = 0$, $\frac{\lambda}{D} = 0,4368$), polarisation E//

IV. 10 LE RESEAU SINUSOIDAL AU LITROW LORSQUE, SEULS, LES ORDRES 0 ET -1 SONT DIFFRACTES

Le Littrow pour les réseaux est un point de fonctionnement particulier correspondant au mode π des guides périodiques (chap. III). En ce point, nous avons :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2D} \Rightarrow \sin \theta + m \frac{\lambda}{D} = -(\sin \theta - (m+1) \frac{\lambda}{D}) \Rightarrow \gamma_m = -\gamma_{-m-1} \quad (\text{IV.10.1})$$

Cette relation (IV.10.1) signifie que toutes les directions de propagation des ondes diffractées sont doubles ; en particulier, pour les ordres 0 et -1, compte-tenu des conventions de signe pour les angles (IV.1), on a :

$$\sin \theta_{-1} = -\sin \theta \Rightarrow \theta_{-1} = -\theta \quad (\text{IV.10.2})$$

La direction de l'ordre de diffraction -1 est confondue avec celle de l'onde incidente (fig. IV.4).

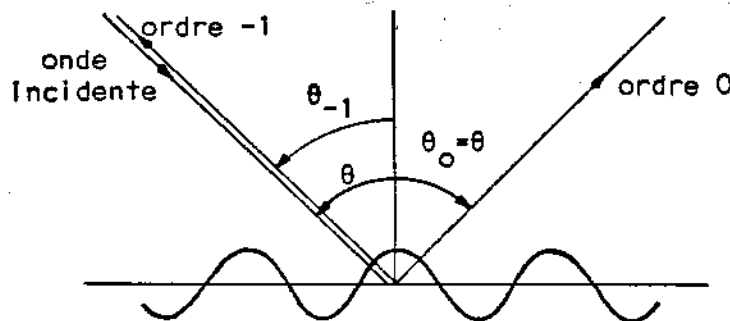


fig. IV.4

Réseau au Littrow

Nous avons vu (chap. II) que, dans le cas des guides périodiques au mode π , l'onde électromagnétique totale est purement stationnaire. Pour les réseaux, cela n'est pas nécessairement le cas. Cependant, bien qu'à notre connaissance il n'existe pas de démonstration, il semble bien, que c'est en ce point et en ce point seulement que l'on puisse avoir une efficacité égale à un dans l'ordre -1,

Considérons le cas particulièrement simple de Littrow où seuls les ordres 0 et -1 sont diffractés, c'est-à-dire lorsque λ et D satisfont à $\frac{1}{3} < \frac{\lambda}{D} < 1$.

Compte-tenu de la loi de la conservation de l'énergie, entre les efficacités ξ_0 dans l'ordre 0 et ξ_{-1} dans l'ordre -1, on a la relation suivante :

$$\xi_0 + \xi_{-1} = 1 \quad (\text{IV.10.3})$$

Nous pouvons donc poser :

$$\xi_0 = \cos^2 \varphi \text{ et } \xi_{-1} = \sin^2 \varphi, \quad (\text{IV.10.4})$$

où φ représente une fonction inconnue de la variable h et de $\frac{\lambda}{2D} = \sin \theta$.

Afin d'avoir une idée de l'allure de la fonction $\varphi(h)$, nous avons, à partir de valeurs calculées par D. Maystre, tracé la courbe représentative de l'efficacité ξ_{-1} dans l'ordre -1, pour un réseau sinusoïdal en polarisation $E_{//}$ (fig. IV.5) et $H_{//}$ (fig. IV.6) pour $\frac{\lambda}{D} = 0,8$.

De l'examen de ces courbes, il ressort essentiellement que, pour la polarisation $E_{//}$, ξ_{-1} peut s'écrire sous la forme extrêmement simple suivante :

$$\xi_{-1} = \sin^2 \Omega h, \quad (\text{IV.10.5})$$

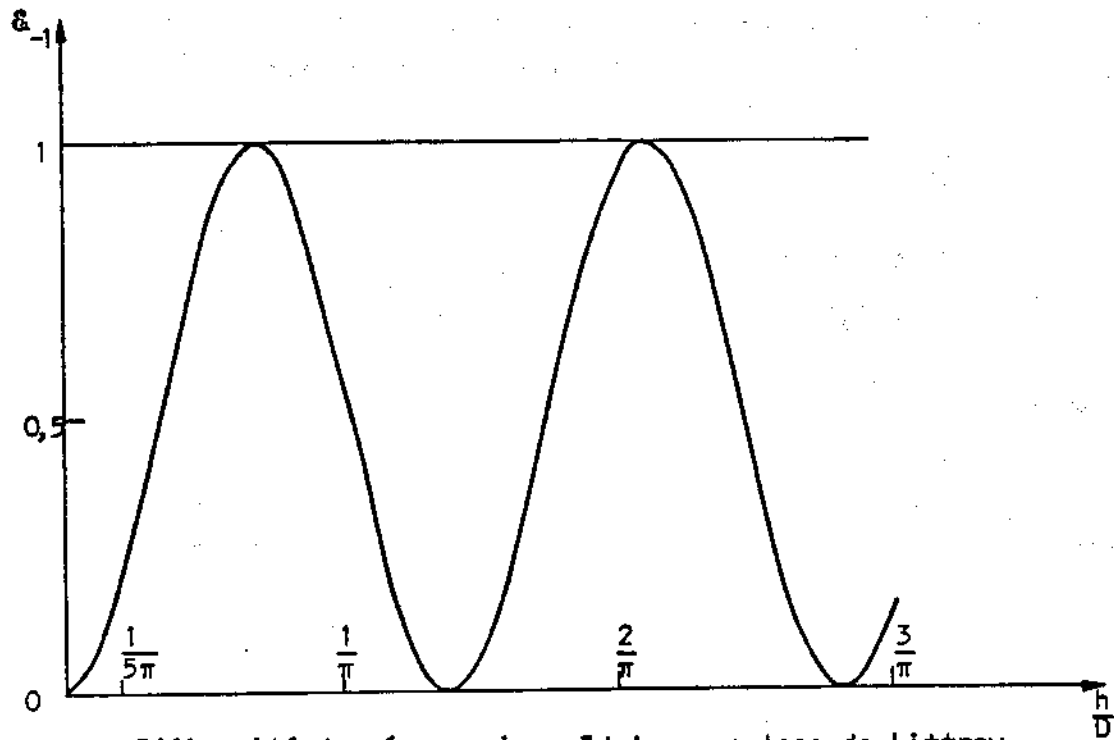
où Ω est une fonction de h pratiquement constante.

En première approximation, nous pouvons prendre Ω comme une constante.

La relation (IV.10.5) peut être développée en série entière de h , le développement ainsi obtenu étant très différent de celui issu de la formule de récurrence (IV.7.11). Ceci peut paraître surprenant, mais il ne faut pas oublier que deux fonctions très voisines peuvent avoir des développements en série entière très différents. Afin de préciser la valeur de Ω nous identifions les premiers termes de ces deux séries entières ; il vient alors :

$$E_{//} \quad \Omega h = 2 \cos \theta \frac{\pi h}{\lambda} \quad \xi_{-1} = \sin^2 2 \cos \theta \frac{\pi h}{\lambda} \quad (\text{IV.10.6a})$$

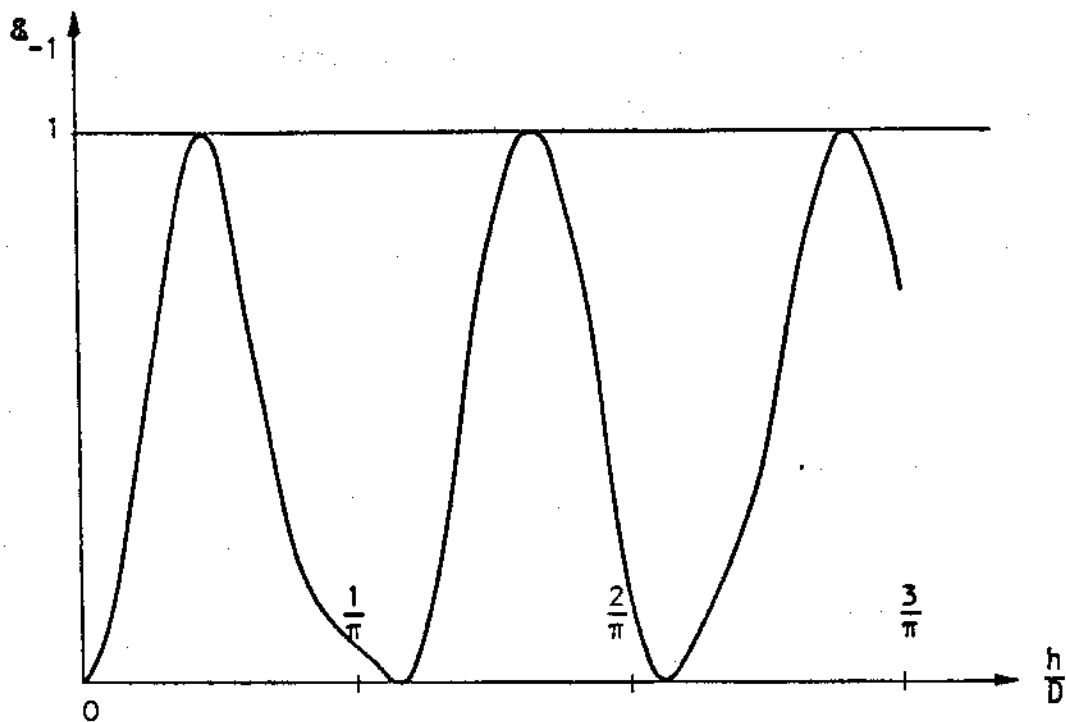
$$H_{//} \quad \Omega h = \frac{2(2 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \frac{\pi h}{\lambda} \quad \xi_{-1} = \sin^2 \frac{2(2 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \frac{\pi h}{\lambda} \quad (\text{IV.10.6b})$$



Efficacité du réseau sinusoïdal en montage de Littrow

Polarisation $E_{//}$, $\frac{\lambda}{2D} = \sin \theta = 0,4$ $\theta = 23.57^\circ$

fig. IV.5



Efficacité du réseau sinusoïdal en montage de Littrow

Polarisation $H_{//}$, $\frac{\lambda}{2D} = \sin \theta = 0,4$

fig. IV.6

Dans le tableau (5. IV) sont rassemblés les résultats rigoureux ainsi que ceux issus des formules (IV.10.6). On constate qu'il existe un excellent accord pour la polarisation $E_{//}$ (même pour des valeurs importantes du rapport hauteur sur pas) et que l'accord est médiocre pour la polarisation $H_{//}$. Cependant, on remarque que les maximums égaux à un de l'efficacité ainsi que les minimums nuls, se produisent sensiblement aux points prévus.

Des formules (IV.10.6), on peut déduire que l'efficacité dans l'ordre -1 passe par un maximum égal à un, lorsque les relations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{//} \\ H_{//} \end{array} \right. \quad \frac{h}{D} = \frac{2n+1}{4\cos\theta} \frac{\lambda}{D} \rightarrow \xi_{-1} = 1, \quad n=0 \quad \frac{h}{D} = \frac{1}{4 \times 0,84} \frac{\lambda}{D} \quad (\text{IV.10.7a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{//} \\ H_{//} \end{array} \right. \quad \frac{h}{D} = \frac{(2n+1)\cos\theta}{4(2-\cos^2\theta)} \frac{\lambda}{D} \rightarrow \xi_{-1} = 1, \quad \frac{h}{D} = \frac{0,7}{0,84} \frac{\lambda}{D} \quad (\text{IV.10.8b})$$

n étant un nombre entier ;

le minimum nul se produisant pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{//} \\ H_{//} \end{array} \right. \quad \frac{h}{D} = \frac{n}{2\cos\theta} \frac{\lambda}{D} \rightarrow \xi_{-1} = 0, \quad (\text{IV.10.8a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{//} \\ H_{//} \end{array} \right. \quad \frac{h}{D} = \frac{n\cos\theta}{2(2-\cos^2\theta)} \frac{\lambda}{D} \rightarrow \xi_{-1} = 0. \quad (\text{IV.10.8b})$$

$10 \pi \frac{h}{D}$	ξ_{-1} "vrai" E//	$\xi_{-1} = \sin^2 2 \cos \theta \frac{\pi h}{\lambda}$	ξ_{-1} "vrai" H//	$\xi_{-1} = \sin^2 \frac{2(2 - \cos \theta)}{\cos \theta} \frac{\pi h}{\lambda}$
1	0,05147	0,05159	0,09748	0,0968
2	0,1941	0,1957	0,3588	0,3498
3	0,3968	0,4026	0,6934	0,6609
4	0,6185	0,6296	0,9533	0,9097
5	0,8165	0,8289	0,9692	0,9999
6	0,9529	0,9621	0,7173	0,8964
7	1,000	0,9989	0,4097	0,6394
8	0,9457	0,9328	0,2139	0,3284
9	0,7988	0,7774	0,1187	0,0839
10	0,5892	0,5647	0,06202	0,0005
11	0,3619	0,3387	0,01240	0,1106
12	0,1651	0,1460	0,01417	0,3715
13	0,03754	0,02631	0,1862	0,6821
14	0,00059	0,00438	0,5289	0,9223
15	0,05648	0,08472	0,8379	0,9989
16	0,1913	0,2508	0,9864	0,8822
17	0,3796	0,4682	0,9723	0,6176
18	0,5889	0,6922	0,8032	0,3074
19	0,7837	0,8766	0,4888	0,0718
20	0,9294	0,9832	0,1514	0,0020
21	0,9974	0,9902	0,00258	0,1251
22	0,9714	0,8959	0,04422	0,3934
23	0,8528	0,7200	0,1446	0,7030
24	0,6629	0,4987	0,2569	0,9339

Tableau 5. V

Le tableau sinusoidal en montage de Littrow $\sin \theta = \frac{\lambda}{2D} = 0,4$

Chapitre V

ETUDE PAR UNE METHODE DIFFERENTIELLE DE LA DIFFRACTION PAR UN RESEAU

V. 1. POSITION DU PROBLEME

Nous nous proposons de résoudre les équations de Maxwell en coordonnées périodiques de translation pour un milieu homogène et isotrope, diélectrique ou conducteur. La méthode employée est une méthode différentielle consistant à rechercher les composantes des champs électromagnétiques sous la forme de solutions d'un système d'équations différentielles directement issu des équations de Maxwell. Afin que le système puisse, pour un diélectrique parfait, permettre de traiter simultanément les deux types de polarisation $E_{//}$ et $H_{//}$, le problème est l'objet, dans ce chapitre, d'une nouvelle mise en équation. Les solutions mathématiques ainsi obtenues sont ensuite utilisées pour l'étude de la diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau (fig. V. 1).

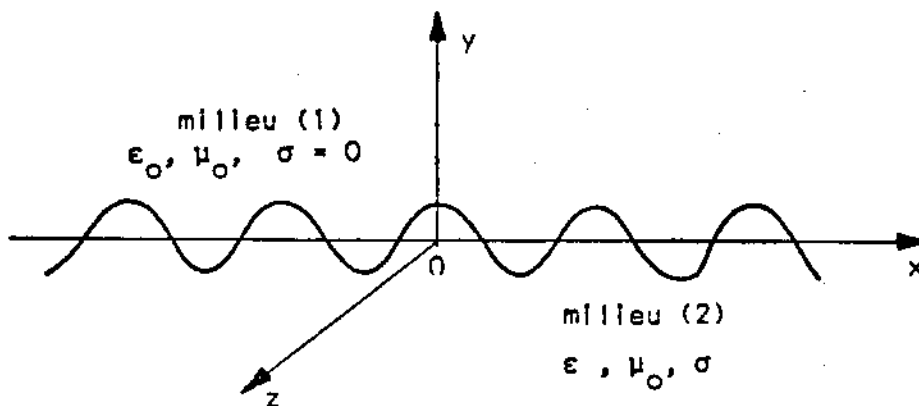


fig. V.1

Les notations ainsi que les hypothèses adoptées ici sont celles du chapitre précédent. Nous envisagerons sans faire d'application numérique le cas où le milieu (2) est un métal de conductivité finie. La surface du réseau est ici représentée par la fonction :

$$y = a(x) \quad (V. 1.1)$$

V. 2. MISE EN EQUATION DU PROBLEME DANS LE MILIEU DIELECTRIQUE

▣ *Polarisation E//*

En coordonnées de translation, comme en coordonnées cartésiennes, seules trois des six composantes des champs \vec{E} et \vec{H} ne sont pas nulles ; posons :

$$\begin{cases} E_x \equiv E_u \equiv 0 \\ E_z = F \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = \frac{G}{Z} & H_u \neq 0 \\ H_z \equiv 0 \end{cases} \quad (V. 2.1)$$

Z étant l'impédance d'onde du vide :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (V. 2.2)$$

Si une surface de coordonnée $u = \text{cte}$ est une surface de séparation entre les milieux (1) et (2), ce sont les composantes covariantes qui satisfont aux conditions de continuité (§ I.5). Nous allons donc rechercher un système de deux équations aux dérivées partielles où E_z et H_x (c'est-à-dire F et G) sont les fonctions inconnues. Une première relation pour E_z (ou F) est donnée par l'équation de propagation (IV. 2.5)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + k^2 F + \dot{a}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \ddot{a} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (V. 2.3)$$

Une seconde relation pour H_x (ou G) est obtenue à partir de l'une des équations de Maxwell (II.3.2a) :

$$\dot{g}^{ijk} \partial_j E_k = - \frac{\partial B^i}{\partial t} = -i\omega \mu^{ij} H_j = -i\omega \mu \sqrt{g} g^{ij} H_j; \quad (I. 3.2a)$$

ce qui donne ici, compte-tenu de l'expression du tenseur métrique :

$$\partial_2 E_3 = -i\omega \mu H_1 + i\omega \mu \dot{a} H_2; \quad (V. 2.4a)$$

$$-\partial_1 E_3 = +i\omega \mu \dot{a} H_1 - i(1+\dot{a}^2)\omega \mu H_2 ; \quad (\text{V. 2.4b})$$

et, après une combinaison linéaire de ces deux dernières relations :

$$(1+\dot{a}^2) \partial_2 E_3 - \dot{a} \partial_1 E_3 = -i\omega \mu H_1 ; \quad (\text{V. 2.5})$$

ce qui, avec les relations précédemment définies s'écrit :

$$kG = i(1+\dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{a} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{V. 2.6})$$

Polarisation $H_{//}$

Reprenons les notations employées pour la polarisation $E_{//}$, en posant :

$$\begin{cases} E_x = -G & E_u \equiv 0 \\ E_z \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_x \equiv H_u \equiv 0 \\ H_z = \frac{F}{Z} \end{cases} \quad (\text{V. 2.7})$$

L'équation de propagation relative à $H_z = \frac{F}{Z}$ étant identique à celle de E_z pour $E_{//}$, nous pouvons conserver la relation (V. 2.3) pour $H_{//}$.

Une seconde relation est obtenue à partir de l'équation de Maxwell (I. 3.2c)

$$g^{ijk} \partial_j H_k = + \frac{\partial D^j}{\partial t} = i\omega \epsilon^{ij} E_j = i\omega \epsilon_0 \sqrt{g} g^{ij} E_j, \quad (\text{I. 3.2c})$$

ce qui, compte-tenu de l'expression du tenseur métrique, permet d'écrire :

$$(1+\dot{a}^2) \partial_2 H_3 - \dot{a} \partial_1 H_3 = i\omega \epsilon_0 E_1 \quad (\text{V. 2.8})$$

soit encore :

$$kG = i(1+\dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{a} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{V. 2.9})$$

En conclusion, quelque soit le type de polarisation, il faut résoudre, dans le milieu (I), l'ensemble des deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} kG = i(1+\dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{a} \frac{\partial F}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (\text{V.2.10a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + k^2 F + \dot{a}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \ddot{a} \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{V.2.10b})$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{pour la polarisation } E_{//} : F &= E_z \text{ et } G = ZH_x ; \\ \text{pour la polarisation } H_{//} : F &= ZH_z \text{ et } G = -E_x. \end{aligned} \quad (\text{V.2.10c})$$

Le système (V.2.10) peut être résolu par rapport à ses dérivées premières en u . Pour cela, on tire de (V.2.10a) la valeur de $\frac{\partial F}{\partial u}$ que l'on reporte dans (V.2.10b). On arrive ainsi à :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= -i \frac{1}{1+d^2} kG + \frac{\dot{a}}{1+a^2} \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (\text{V.2.11a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial kG}{\partial u} &= -i \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1+a^2} \frac{\partial F}{\partial x} - ik^2 F + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\dot{a}}{1+a^2} kG \end{aligned} \right. \quad (\text{V.2.11b})$$

De l'examen des équations (V.2.11), il ressort que seules interviennent explicitement les deux fonctions $c(x)$ et $d(x)$, avec :

$$c(x) = \frac{1}{1+a^2} \text{ et } d(x) = \frac{\dot{a}}{1+a^2} \quad (\text{V.2.12})$$

Remarque

Si l'on cherche, par une méthode de perturbation, une solution au système (V.2.11) sous la forme d'une série entière d'un paramètre h en posant, comme au chapitre précédent :

$$a(x) = h f(x), \quad (\text{V.2.13})$$

la convergence de la solution ainsi obtenue semble liée à celle des développements en séries entières de h , des fonctions $c(x)$ et $d(x)$, convergence imposant la condition suivante :

$$h^2 \sup \left(\frac{df(x)^2}{dx} \right) < 1 \Rightarrow h < \frac{1}{\sqrt{\sup \left| \frac{df}{dx} \right|}}. \quad (\text{V.2.14})$$

En particulier, pour un réseau sinusoïdal ($a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$) la convergence n'est possible que pour :

$$h < \frac{D}{2\pi}, \text{ soit } \frac{2\pi h}{D} < 1, \quad (\text{V.2.15})$$

valeur limite compatible avec celle du développement de Rayleigh.

V. 3. RESOLUTION DES EQUATIONS DANS LE MILIEU DIELECTRIQUE

La fonction $a(x)$ est une fonction périodique de période D :

$$a(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p e^{-ip \frac{2\pi x}{D}} .$$

Les fonctions $c(x)$ et $d(x)$ sont elles-mêmes périodiques. Nous pouvons donc poser :

$$c(x) = \frac{1}{1+a^2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{-ip \frac{2\pi x}{D}} , \quad (V.3.2)$$

$$d(x) = \frac{a}{1+a^2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} d_p e^{-ip \frac{2\pi x}{D}} . \quad (V.3.3)$$

En raison de la périodicité du problème, d'après le théorème de Floquet-Bloch [9], il faut chercher les solutions sous la forme suivante :

$$F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(u) e^{-i\gamma_m x} ; \quad G = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(u) e^{-i\gamma_m x} , \quad (V.3.4)$$

avec :

$$\gamma_m = \gamma_0 + m \frac{2\pi}{D} = k(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}) , \quad (V.3.5)$$

en posant :

$$\gamma_0 = k \sin \theta .$$

Après avoir reporté ces valeurs dans le système (VI.2.11) et projeté sur la base des fonctions $\exp(-i\gamma_m x)$, on obtient le système différentiel infini suivant, du premier ordre à coefficients constants :

$$\gamma_m \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{aligned} i \frac{1}{k} \frac{dF_m}{du} &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D} \right) d_{m-p} F_p + c_{m-p} G_p \right] & (V.3.7a) \\ i \frac{dG_m}{du} &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\left(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D} \right) \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right) c_{m-p} - \delta_{mp} \right] F_p + \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right) d_{m-p} G_p \right\} & (V.3.7b) \end{aligned} \right.$$

Les solutions élémentaires d'un tel système sont de la forme :

$$F_m(u) = F_{m n} e^{-ikr_n u} , \quad G_m(u) = G_{m n} e^{-ikr_n u} , \quad (V.3.8)$$

la solution générale étant une combinaison linéaire des solutions élémentaires.

On peut remarquer que le calcul de ces solutions élémentaires se ramène à la recherche des valeurs propres r_n et des sous-vecteurs propres \vec{f}_n et \vec{g}_n (ayant F_{mn} et G_{mn} pour composantes) d'une matrice généralisée infinie C , formée de quatre sous-matrices $A_1, B_1, I - A_2, B_2$, elles-mêmes infinies (I étant la matrice unité).

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline I - A_2 & B_2 \end{array} \right] \quad (\text{V.3.9})$$

L'équation aux valeurs propres associée au système (V.3.7) s'écrit alors :

$$r \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline I - A_2 & B_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.3.10})$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{1mp} &= (\sin\theta + p \frac{\lambda}{D}) d_{m-p} & B_{1mp} &= c_{m-p} \\ A_{2mp} &= -(\sin\theta + p \frac{\lambda}{D})(\sin\theta + m \frac{\lambda}{D}) c_{m-p}, & B_{2mp} &= (\sin\theta + m \frac{\lambda}{D}) d_{m-p} \end{aligned} \quad (\text{V.3.11})$$

La matrice C n'est pas hermitique, cependant elle possède le même spectre de valeurs propres que sa matrice adjointe C^* . On peut en effet aisément vérifier que les matrices A_2 et B_1 sont hermitiques :

$$A_2 = A_2^* \quad \text{et} \quad B_1 = B_1^* \quad (\text{V.3.12})$$

et que l'on a, entre les matrices A_1 et B_2 , la relation suivante :

$$A_1^* = B_2 \quad \text{et} \quad B_2^* = A_1. \quad (\text{V.3.13})$$

Ces deux propriétés impliquent :

$$C^* = \left[\begin{array}{c|c} A_1^* & I - A_2^* \\ \hline B_1^* & B_2^* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} B_2 & I - A_2 \\ \hline B_1 & A_1 \end{array} \right]$$

Les valeurs propres de C^* sont identiques à celles de C et les vecteurs propres de C^* sont obtenus à partir de ceux de C en intervertissant les fonctions F et G .

Cette propriété reste vraie pour une matrice tronquée de rang $4M+2$; et elle implique deux conséquences importantes :

1) Si r est une valeur propre de C , son complexe conjugué r^* est aussi valeur propre de C .

2) Les vecteurs propres d'une matrice étant orthogonaux avec ceux de sa matrice adjointe, deux sous-vecteurs propres \vec{f}_n et \vec{g}_n correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux ; ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{m=-M}^{+M} F_{mn} G_{mq}^* = 0, \text{ pour } n \neq q. \quad (\text{V.3.15})$$

Dans le cas du miroir plan, la matrice C de rang infini ainsi définie est diagonale et ses valeurs propres r_n sont égales aux valeurs de x_n données par la formule des réseaux :

$$r_n^2 = x_n^2 = 1 - \left(\sin \theta + n \frac{\lambda}{D} \right)^2 \quad (\text{V.3.16})$$

Nous avons montré qu'il en est de même pour le réseau sinusoïdal (§ IV.5), (IV.5.13) et c'est très certainement toujours le cas pour un réseau quelconque.

Dans la pratique, pour effectuer numériquement les calculs, il faut limiter à un nombre fini $4M+2$ le rang de la matrice C en posant :

$$F_m = G_m = 0 \text{ pour } |m| > M. \quad (\text{V.3.17})$$

Remarque

Il peut paraître étrange, alors que l'on connaît rigoureusement les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice C , de faire un calcul approché en limitant le rang de cette matrice, mais il faut bien voir que le problème n'est pas de donner la forme mathématique des solutions propres mais de calculer les coefficients d'une combinaison linéaire de ces solutions permettant de satisfaire au mieux les conditions aux limites. Il est clair qu'un tel calcul n'est possible, dans la pratique, qu'en ne conservant qu'un nombre fini de ces coefficients. Il semble alors logique de calculer les solutions propres dans la même approximation.

La matrice C tronquée de rang $4M+2$ possède (si elle n'est pas dégénérée, c'est-à-dire en dehors du Littrow et de l'incidence normale), $4M+2$ valeurs propres distinctes, r_n formant un ensemble $V_{\rho M}$.

A ces diverses valeurs propres correspond, (d'après nos notations) selon le signe de la partie réelle ou de la partie imaginaire, une onde incidente, diffractée, évanescente ou antiévanescente. Ces correspondances ainsi que les notations utilisées sont rassemblées dans le tableau 1.V).

r_n^2	partie réelle de r_n	partie imaginaire de r_n	Notations utilisées pour les vecteurs propres et les valeurs propres	Nature de l'onde
$r_n^2 > 0$	< 0	$= 0$	$F_{mn}^{(i)}, G_{mn}^{(i)}, r_n \in \mathcal{V}_{pi}$	onde incidente
	> 0	$= 0$	$F_{mn}^{(d)}, G_{mn}^{(d)}, r_n \in \mathcal{V}_{pda} \cup \mathcal{V}_{pd}$ $r_n \in \mathcal{V}_{pd}$	onde diffractée réelle (ou asymptotique)
$r_n^2 < 0$ ou complexe		> 0	$F_{mn}^{(d)}, G_{mn}^{(d)}, r_n \in \mathcal{V}_{pev}$, ou bien $F_{mn}^{(ev)}, G_{mn}^{(ev)}, r_n \in \mathcal{V}_{pd}$	onde diffractée évanescente
		< 0	$F_{mn}^{(aev)}, G_{mn}^{(aev)}, r_n \in \mathcal{V}_{paev}$	onde antiévanescente

Tableau 1.V

Les notations utilisées pour les valeurs propres et les vecteurs propres

Il est facile de vérifier qu'il y a toujours autant de r_n^2 positifs (valeurs propres réelles) que de x_n réels, et que s'il y a un x_n nul il y a également une valeur propre nulle. De plus, si le profil du réseau est symétrique et si r_n est valeur propre, $-r_n$ l'est aussi.

D'autres informations peuvent être obtenues par le calcul sur ordinateur de ces valeurs propres ; on peut constater par exemple (tableau 2.V) que lorsque M augmente, elles convergent vers les x_n :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} r_n(M) = x_n \quad \text{pour } n = N = \text{cte} \quad (\text{V.3.18})$$

Réseau sinusoidal

(deux ordres réels diffractés)

$$a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}, \quad \frac{h}{D} = 0,2, \quad \frac{\lambda}{D} = 0,1, \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{4D}$$

ordre de diffraction	$x_n^2 = 1 - (\sin \theta + n \frac{\lambda}{D})^2$	r_n^2 (M = 5)	r_n^2 (M = 7)	r_n^2 (M = 9)
- 9	-75,56250			-6,98989 + i 22,92494
- 8	-59,06250			-6,56790 + i 20,20281
- 7	-44,56250		-5,24131 + i 13,07476	-12,27934 + i 11,53692
- 6	-32,06250		-4,78395 + i 11,04285	-11,17911 + i 9,65123
- 5	-21,56250	-3,39351 + i 5,96895	-7,98063 + i 4,96034	-12,53655 + i 3,56302
- 4	-13,06250	-2,93395 + i 4,61681	-6,96548 + i 3,69686	-11,08895 + i 2,50514
- 3	- 6,56250	-3,99021 + i 0,95747	-5,97652	- 6,55650
- 2	- 2,06250	-2,10489	-2,06254	- 2,06250
- 1	+ 0,43750	0,43750	0,43750	0,43750
0	+ 0,93750	0,93750	0,93750	0,93750
1	+ 0,56250	-0,56250	-0,56250	- 0,56250
2	- 4,06250	-3,55592	-4,06631	- 4,06250
3	- 9,56250	-3,99021 - i 0,95747	-7,58721	- 9,45063
4	-17,06250	-2,93395 - i 4,61681	-6,96548 - i 3,69686	-11,08895 - i 2,50514
5	-26,56250	-3,39351 - i 5,96895	-7,98063 - i 4,96034	-12,53655 - i 3,56302
6	-38,06250		-4,78395 - i 11,04285	-11,17911 - i 9,65123
7	-51,56250		-5,24131 - i 13,07476	-12,27934 - i 11,53692
8	67,06250			- 6,56790 - i 20,20281
9	84,56250			- 6,98989 - i 22,92494

Tableau 2.V

Convergence des valeurs propres en fonction de M

Cette convergence est extrêmement rapide pour les valeurs propres réelles (ondes planes), et de plus en plus lente pour les ondes évanescentes. On remarque aussi que si x_n^2 est toujours réel et négatif pour les ondes évanescentes, les valeurs propres correspondantes peuvent être complexes.

De plus, on peut penser que lorsque M croît, les ondes incidentes et diffractées ($r_n^2 > 0$) tendent vers des ondes planes dont la direction de propagation fait avec l'axe Oy un angle θ_n tel que :

$$\cos \theta_n = r_n.$$

Dans l'approximation d'ordre M , la solution générale des équations de propagation s'écrit à partir d'une combinaison linéaire des $4M+2$ solutions propres soit, avec une numérotation arbitraire des $4M+2$ valeurs propres :

$$F = \sum_{m=-M}^{+M} \sum_{n=1}^{4M+2} A_n F_{mn} e^{-ikr_n u} e^{-iy_m x}, \quad (\text{V. 3.19a})$$

$$G = \sum_{m=-M}^{+M} \sum_{n=1}^{4M+2} A_n G_{mn} e^{-ikr_n u} e^{-iy_m x}. \quad (\text{V. 3.19b})$$

Les $4M+2$ coefficients complexes A_n sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer à partir de la condition aux limites, de la condition à l'infini, et de la condition d'onde incidente.

En raison de la condition à l'infini, on ne peut pas conserver les ondes antiévanescentes ; les A_n correspondants doivent donc être pris nuls.

La condition d'onde incidente impose que l'on connaisse l'amplitude de toutes les ondes incidentes ($r_n < 0$) ; en général, on n'en conserve qu'une seule correspondant à une onde plane incidente dans l'ordre zéro dont on prend le coefficient A_n égal à l'unité ; nous appelons r_0 la valeur propre correspondante.

En définitive, il reste à déterminer les $2M+1$ A_n relatifs aux ondes diffractées, les fonctions F et G solutions du problème s'écrivent :

$$F = \sum_{m=-M}^{+M} (F_{m0}^{(i)}) e^{-ikr_0 u} + \sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} e^{-ikr_n u} e^{-iy_m x}, \quad (\text{V. 3.20a})$$

$$G = \sum_{m=-M}^{+M} (G_{m0}^{(i)}) e^{-ikr_{0u}} + \sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} e^{-ikr_{nu}} e^{-i\gamma_m x}, \quad (\text{V. 3.20b})$$

la signification des différentes grandeurs intervenant dans ces deux relations ayant été donnée dans le tableau I.V.

V. 4. MISE EN EQUATION DANS LE MILIEU CONDUCTEUR

Les équations de propagation relatives aux composantes covariantes des champs électrique et magnétique sont, pour une onde fonction harmonique du temps, identiques à celles des milieux diélectriques et magnétiques parfaits, à condition de substituer à ϵ_0 une nouvelle valeur complexe ϵ' définie de la manière suivante :

$$\epsilon' = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}, \quad (\text{V.4.1})$$

où ϵ est la permittivité du milieu et σ sa conductivité. Les deux types de polarisation $E_{//}$ et $H_{//}$ peuvent encore exister indépendamment l'un de l'autre, l'équation de propagation pour E_z ou H_z s'écrivant alors :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + k'^2 + a \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2a \frac{\partial^2}{\partial u \partial x} - a \frac{\partial}{\partial u} \right\} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (\text{V.4.2})$$

en posant :

$$k'^2 = \omega^2 \mu \epsilon' = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - \frac{i\sigma}{\omega\epsilon}\right) \text{ et } \operatorname{Re}(k') > 0. \quad (\text{V.4.3})$$

Comme dans le cas du milieu diélectrique parfait, nous associons à chaque type de polarisation $E_{//}$ ou $H_{//}$, le même système d'équations aux dérivées partielles ; pour cela, posons :

polarisation $E_{//}$

$$\begin{cases} E_x \equiv E_u \equiv 0 \\ E_z = F' \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = \frac{G'}{Z'}, H_u \neq 0 \\ H_z \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{V.4.4})$$

avec :

$$Z'^2 = \frac{\mu}{\epsilon'} = \frac{\mu}{\epsilon} \frac{1}{1 - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \text{ et } \operatorname{Re}(Z') > 0 \quad (\text{V.4.5})$$

polarisation $H_{//}$

$$\begin{cases} E_x = -G', & E_u \neq 0 \\ E_z \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_x \equiv H_u \equiv 0 \\ H_z = \frac{F'}{Z'} \end{cases} \quad (V.4.6)$$

Compte-tenu de ces notations, on obtient le même système d'équations que pour le milieu diélectrique parfait en remplaçant k par k' , soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial F'}{\partial u} = \frac{a}{1+a^2} \frac{\partial F'}{\partial x} - \frac{i}{1+a^2} k' G' \end{cases} \quad (V.4.7a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial k' G'}{\partial u} = -i \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1+a^2} \frac{\partial F'}{\partial x} - i k'^2 F' + \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{1+a^2} k' G' \end{cases} \quad (V.4.7b)$$

V. 5. RESOLUTION DES EQUATIONS DANS LE MILIEU CONDUCTEUR

En conservant les notations adoptées au paragraphe (V.3) pour les milieux diélectriques, nous constatons que nous sommes à nouveau conduits à rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice unique permettant de traiter simultanément les deux cas de polarisation.

Par raison de continuité, les vitesses de phase des harmoniques selon Ox de l'onde électromagnétique dans le conducteur et dans le diélectrique sont identiques ; nous pouvons donc encore poser :

$$F' = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F'_m(u) e^{-i\gamma_m x} ; \quad G' = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G'_m(u) e^{-i\gamma_m x} ; \quad (V.5.1)$$

avec :

$$\gamma_m = k(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}). \quad (V.5.2)$$

Après avoir reporté ces expressions ainsi que les développements en série de Fourier de $c(x)$ et $d(x)$ dans les équations (V.4.7), il vient :

$$\forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{i}{k} \frac{dF'_m}{du} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D}) d_{m-p} F'_p + \frac{k'}{k} c_{m-p} G'_p \right] \quad (V.5.3a)$$

$$\frac{i}{k} \frac{dG'_m}{du} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{k'}{k} \left[\delta_{mp} - \frac{k^2}{k'^2} (\sin \theta + p \frac{\lambda}{D}) (\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}) c_{m-p} \right] F'_p \right. \\ \left. + (\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}) d_{m-p} G'_p \right\} \quad (V.5.3b)$$

Les solutions élémentaires d'un tel système sont de la forme :

$$F'_m(u) = F'_{mn} e^{-ikr'_n u}, \quad G'_m(u) = G'_{mn} e^{-ikr'_n u}, \quad (V.5.4)$$

la solution générale étant une combinaison linéaire de ces solutions élémentaires, les grandeurs r'_n étant les valeurs propres d'une matrice C' , F'_{mn} et G'_{mn} les composantes des vecteurs propres.

Cette matrice C' s'écrit à partir des quatre sous-matrices A_1 , A_2 , B_1 et B_2 définies au paragraphe (V. 3) ainsi que la matrice unité I . Il vient :

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \frac{k'}{k} B_1 \\ \hline \frac{k'}{k} I & -\frac{k}{k'} A_2 \\ \hline & B_2 \end{array} \right]$$

Comme précédemment, dans l'approximation d'ordre M , on limite à $4M+2$ le rang de C' . Sur les $4M+2$ valeurs propres complexes r'_n de la matrice C' ainsi tronquée, en raison de la condition de rayonnement à l'infini, on ne peut conserver que les $2M+1$ r'_n comportant une partie imaginaire positive, c'est-à-dire celles qui correspondent à une onde évanescente ; nous appelons $F'_{mn}^{(ev)}$ et $G'_{mn}^{(ev)}$ les composantes des vecteurs propres correspondants.

En conclusion, dans le milieu conducteur, les fonctions F' et G' s'écrivent :

$$F' = \sum_{m=-M}^{+M} \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n F'_{mn}^{(ev)} e^{-ikr'_n u} e^{-iy_m x}, \quad (V.5.6a)$$

$$G' = \sum_{m=-M}^{+M} \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n G'_{mn}^{(ev)} e^{-ikr'_n u} e^{-iy_m x}, \quad (V.5.6b)$$

les constantes d'intégration A'_n étant à déterminer à partir des conditions de continuité des champs sur la surface du réseau.

V. 6. APPLICATION A LA DIFFRACTION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PAR UN RESEAU

▣ Cas du réseau de conductivité infinie

La surface de coordonnée $u = 0$ est matérialisée par un métal parfait infiniment conducteur. Sur cette surface, les composantes covariantes E_z et E_x du champ électrique doivent s'annuler pour toute valeur de la variable x . Cette condition aux limites permet d'écrire un système de $2M+1$ équations algébriques linéaires où les inconnues sont les $2M+1$ coefficients complexes A_n .

polarisation $E_{//}$

$$E_z(u=0) \equiv 0 \Rightarrow F(u=0) \equiv 0, \quad (V.6.1)$$

ce qui donne, dans (V.3.2a) :

$$\sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} = -F_{m0}^{(i)}; \quad \forall m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |m| \leq M. \quad (V.6.2)$$

polarisation $H_{//}$

$$E_x(u=0) \equiv 0 \Rightarrow G(u=0) \equiv 0, \quad (V.6.3)$$

ce qui s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} = -G_{m0}^{(i)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |m| < M. \quad (V.6.4)$$

Les coefficients du système linéaire sont donc issus, selon le type de polarisation, soit de la fonction F , soit de la fonction G .

▣ Cas du réseau de conductivité finie

La surface de coordonnée $u = 0$ est une surface de séparation entre le vide et un métal de conductivité σ . Au passage à travers cette surface, les composantes covariantes E_x et E_z du champ électrique, H_x et H_z du champ magnétique sont continues (§ I.5). Cette condition aux limites permet d'écrire un système algébrique linéaire comportant $4M+2$ équations où les inconnues sont les $2M+1$ coefficients complexes A_n et les $2M+1$ coefficients complexes A'_n .

polarisation E_{//}

$$E_z(u=0) = E'_z(u=0) \Rightarrow F(u=0) = F'(u=0) \quad (V.6.5)$$

$$H_x(u=0) = H'_x(u=0) \Rightarrow G(u=0) = \frac{Z}{Z'} G'(u=0)$$

ce qui se traduit par :

$\forall m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq M$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} - \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n F'_{mn}(ev) = -F_{m0}^{(i)} \\ \sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} - \frac{Z}{Z'} \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n G'_{mn}(ev) = -G_{m0}^{(i)} \end{array} \right. \quad (V.6.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} - \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n F'_{mn}(ev) = -F_{m0}^{(i)} \\ \sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} - \frac{Z}{Z'} \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n G'_{mn}(ev) = -G_{m0}^{(i)} \end{array} \right. \quad (V.6.6b)$$

polarisation H_{//}

$$E_x(u=0) = E'_x(u=0) \Rightarrow G(u=0) = G'(u=0) = 0 \quad (V.6.7)$$

$$H_z(u=0) = H'_z(u=0) \Rightarrow F(u=0) = \frac{Z}{Z'} F'(u=0)$$

ce qui se traduit par

$\forall m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq M$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} - \frac{Z}{Z'} \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n F'_{mn}(ev) = -F_{m0}^{(i)} \\ \sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} - \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n G'_{mn}(ev) = -G_{m0}^{(i)} \end{array} \right. \quad (V.6.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} - \frac{Z}{Z'} \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n F'_{mn}(ev) = -F_{m0}^{(i)} \\ \sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} - \sum_{n=1}^{2M+1} A'_n G'_{mn}(ev) = -G_{m0}^{(i)} \end{array} \right. \quad (V.6.8b)$$

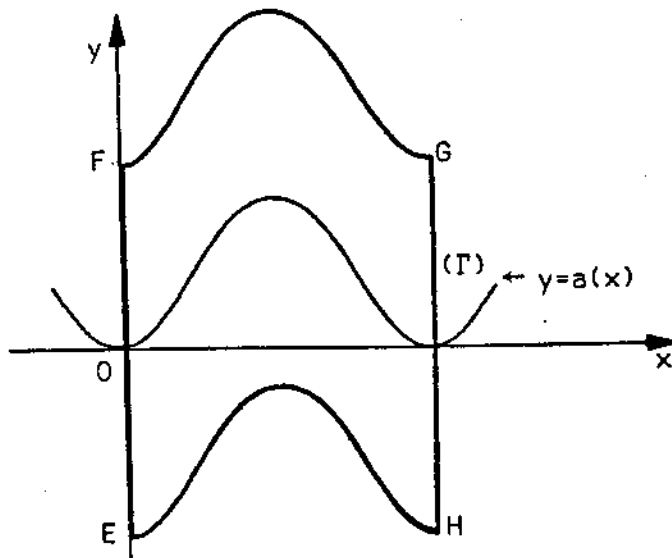
Les coefficients complexes A_n et A'_n étant connus, la solution physique des équations de Maxwell, dans l'approximation d'ordre M , est alors entièrement déterminée. Cependant, il reste à calculer les efficacités du réseau qui, pour le physicien, sont des grandeurs fondamentales.

V. 7. CALCUL DES EFFICACITES

Il est possible de donner à la diffraction par un réseau une interprétation en terme de mécanique quantique. En effet, pour un photon tombant sur le réseau sous l'angle θ l'efficacité ξ_n peut être considérée comme la probabilité de présence de ce photon après diffraction dans la direction donnée par θ_n . Cette direction étant pour le photon, l'analogie d'un niveau d'énergie.

Ceci nous incite à rechercher les efficacités selon un processus calqué sur la mécanique quantique pour les probabilités de présence en utilisant au moyen du théorème de Poynting (§ I.7), les composantes des vecteurs propres de la matrice C.

Considérons la surface (S) formée par une portion de cylindre de longueur l dont la génératrice parallèle à Oz s'appuie sur un contour (Γ) (fig. V. 2) constitué par quatre portions de courbes de coordonnées :



$$\begin{aligned} EF &: x = 0 \\ FG &: u = u_1 > 0 \\ GH &: x = D \\ HE &: u = -u_2 < 0 \end{aligned}$$

fig. V.2

Le contour d'intégration (Γ)

Calculons le flux du vecteur de Poynting sortant par la surface (S) qui, à cause de l'aspect bidimensionnel du problème ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$), se réduit au flux sortant par la surface latérale :

$$\Phi_S(N) = \Phi_{EF} + \Phi_{FG} + \Phi_{GH} + \Phi_{HE} \quad (\text{V. 7.1})$$

En raison de la périodicité par rapport à la variable x, il vient :

$$\Phi_{EF} = -\Phi_{GH} \quad (\text{V. 7.2})$$

De plus, si le milieu (2) est conducteur, les champs sont nuls pour u_2 suffisamment grand ; on peut donc prendre :

$$\Phi_{HE} = 0 \quad (V. 7.3)$$

d'où :

$$\Phi_S(N) = \Phi_{FG} = 2 \int_{x=0}^D N^2 dx \quad (V. 7.4)$$

N^2 étant la composante contravariante du vecteur de Poynting sur l'axe u . Ce flux est égal à la puissance s'échappant à travers (S). Soit \mathcal{E}' cette puissance rapportée à l'unité de surface :

$$\mathcal{E}' = \frac{\Phi_{FG}}{2D} = \frac{1}{D} \int_0^D N^2 dx \quad (V. 7.5)$$

Cette expression montre que \mathcal{E}' n'est autre que la valeur moyenne sur une période de la seconde composante contravariante du vecteur de Poynting. Dans les deux cas de polarisation, cette composante s'écrit à partir des fonctions F et G :

polarisation $E_{//}$

$$N^2 = E_3 H_1 = \frac{FG}{Z} ; \quad (V. 7.6)$$

polarisation $H_{//}$

$$N^2 = -H_3 E_1 = \frac{FG}{Z}.$$

Pour les deux types de polarisation, nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2D} \int_0^D FG dx,$$

et si l'on prend la valeur moyenne $\bar{\mathcal{E}}'$ de cette quantité par rapport au temps :

$$\bar{\mathcal{E}}' = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{D} \int_0^D F^* G dx \right) \quad (V. 7.9)$$

Le calcul précédent peut s'appliquer à chacune des solutions indépendantes des équations de Maxwell. En raison de l'orthogonalité des fonctions $e^{-i\gamma_m x}$

pour l'une quelconque de ces solutions, il vient :

$$\overline{\mathcal{E}}_n^T = \frac{1}{2Z} A_n A_n^* e^{-ikr_n u} (e^{-ikr_n u})^* \operatorname{Re} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{mn}^* G_{mn} \right). \quad (\text{V. 7.10})$$

Si r_n est réel, $\overline{\mathcal{E}}_n^T$ est indépendant de la variable u et s'écrit :

$$\overline{\mathcal{E}}_n^T = \frac{1}{2Z} A_n A_n^* \operatorname{Re} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{mn}^* G_{mn} \right). \quad (\text{V. 7.11})$$

Si r_n est imaginaire pur ou complexe et correspond à une onde évanescente, $\overline{\mathcal{E}}_n^T$ tend vers zéro quand u tend vers l'infini ; seuls les ordres diffractés réels transportent de l'énergie loin du réseau.

Pour l'onde incidente ($A_1 = 1$), la relation (V.7.11) s'écrit :

$$\overline{\mathcal{E}}_1^T = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{m0}^{(1)*} G_{m0}^{(1)} \right). \quad (\text{V. 7.12})$$

L'efficacité \mathcal{E}_n du réseau dans l'ordre n est égale à la fraction d'énergie diffractée dans cet ordre ; c'est donc le rapport changé de signes des deux quantités précédentes (le flux pour les ondes diffractées est positif car c'est un flux sortant, il est négatif pour l'onde incidente, c'est un flux entrant). Il vient :

$$\mathcal{E}_n = - A_n A_n^* \frac{\operatorname{Re} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (F_{mn}^{(d)*} G_{mn}^{(d)})}{\operatorname{Re} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (F_{m0}^{(i)*} G_{m0}^{(i)})} \quad (\text{V. 7.13})$$

Cette relation, permettant le calcul des efficacités \mathcal{E}_n à partir des amplitudes complexes A_n est, comme dans la théorie classique (V. 3.3) indépendante de la polarisation ainsi que de la nature du milieu (2).

Remarque : Conservation de l'énergie

Cette relation (V. 7.13), traduction du théorème de Poynting, contient le critère de la conservation de l'énergie. On constate numériquement que quel que soit l'ordre M (§. V.3) de l'approximation choisie, la somme des efficacités est toujours égale à l'unité :

$$\sum_{n \in U} \mathcal{E}_n = 1, \quad \forall M \in \mathbb{N}. \quad (\text{V. 7.14})$$

Cette propriété se vérifie très simplement analytiquement. En effet le théorème de Poynting nous indique que le flux total sortant par la surface (S) est nul (en valeur moyenne par rapport au temps) ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{D} \int_0^D FG^* dx \right) = 0 \quad (\text{V. 7.15})$$

où F et G sont les solutions générales des équations de Maxwell satisfaisant aux conditions aux limites. En reportant (V.3.20a) et (V.3.20b) dans (V.7.15) il vient :

$$\operatorname{Re} \sum_{m=-M}^{+M} \left[F_{mo}^{(i)} e^{-ikr_{0u}} + \sum_{n=1}^{2M+1} A_n F_{mn}^{(d)} e^{-ikr_n u} \right] \left[G_{mo}^{(i)} e^{-ikr_{0u}} + \sum_{n=1}^{2M+1} A_n G_{mn}^{(d)} e^{-ikr_n u} \right]^* = 0 \quad (\text{V. 7.16})$$

Pour u suffisamment grand et compte-tenu de "l'orthogonalité" des fonctions F et G, la relation (V. 7. 16) s'écrit :

$$\operatorname{Re} \sum_{m=-M}^{+M} \left[F_{mo}^{(i)} G_{mo}^{(i)*} + \sum_{n \in U} A_n A_n^* F_{mn}^{(d)} G_{mn}^{(d)*} \right] = 0, \quad (\text{V. 7.17})$$

et en reportant la relation (V. 7.13),

$$\sum_{n \in U} \mathcal{E}_n(M) = 1,$$

où $\mathcal{E}_n(M)$ désigne l'efficacité dans l'ordre n calculée dans l'approximation M, cette relation traduit la conservation de l'énergie.

La somme des efficacités calculées est donc toujours égale à l'unité ; la loi de conservation de l'énergie ne peut pas servir de critère de convergence, pour notre méthode. Il en est de même, ce qui est plus surprenant, du théorème de réciprocité qui, comme on peut le constater, est toujours vérifié pour tout M. Ce théorème, qui traduit des relations de symétrie entre les efficacités dans les différents ordres pour différentes conditions d'incidence, est pourtant considéré comme particulièrement sévère. [45, 65].

Pour tester l'exactitude des résultats obtenus, il est donc nécessaire de faire appel à d'autres critères ; par exemple, la convergence des résultats en fonction de M, ou, plus simplement la comparaison des valeurs propres r_n avec les x_n issus de la formule des réseaux, la précision sur les efficacités étant du même ordre que celle sur les r_n .

A titre d'exemple sont réunis dans le tableau 3. V. pour quelques valeurs de M les résultats relatifs au réseau sinusoïdal. A la lecture de ce tableau on remarque que, dans ce cas précis, la convergence est très rapide puisqu'elle est pratiquement atteinte pour $M = 3$.

M	E//		H//		r_0	r_{-1}
	ϵ_{-1}	ϵ_{-0}	ϵ_{-1}	ϵ_0		
1	0,7859	0,2141	0,3670	0,6330	0,95650321	0,61236492
2	0,6974	0,3026	0,1900	0,8100	0,96772520	0,65965717
3	0,6932	0,3068	0,1845	0,8155	0,96823675	0,66142088
5	0,6931	0,3069	0,1844	0,8156	0,96824589	0,66143759
Méthode intégrale	0,6931	0,3069	0,1844	0,8156	$\cos \theta_0 =$ 0,96824584	$\cos \theta_{-1} =$ 0,66143783

Tableau 3.V.

Etude, en fonction de M, de la convergence des efficacités calculées et des valeurs propres réelles

Réseau sinusoïdal : $a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$, $\frac{\lambda}{D} = 1$, $\sin \theta = 0,25$, $\frac{h}{D} = 0,125$.

V. 8. METHODE DIFFERENTIELLE MODIFIEE

Une des difficultés de la méthode exposée dans les paragraphes précédents est que, pour affecter une efficacité ainsi calculée à un ordre de diffraction donné, il faut trier les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant aux ondes réelles afin de les associer à la partie asymptotique du champ diffracté.

Lorsque les valeurs propres r_n s'éloignent des valeurs x_n issues de la formule des réseaux, cette identification devient délicate ; elle est même impossible lorsque le système différentiel est dégénéré car deux vecteurs propres correspondent alors à une seule valeur propre. Une telle dégénérescence se produit au Littrow ($\sin \theta = \frac{\lambda}{2D}$; $x_{-n-1} = x_n$) où, par exemple la direction de l'onde diffractée dans l'ordre -1 est confondue avec la direction de l'onde incidente. Pour exploiter la méthode en ce point de fonctionnement, il conviendrait alors de reprendre les calculs en tenant compte de cette dégénérescence.

On peut lever ces différentes difficultés en imposant la forme de l'expression du champ incident comme on le fait habituellement mais également celle du champ diffracté asymptotique.

En effet, on recherche habituellement le champ électromagnétique E comme la somme du champ de l'onde plane incidente $E^{(i)}$ supposé connu et d'un champ diffracté $E^{(d)}$ que l'on se propose de déterminer. Il est à noter qu'à l'intérieur des sillons les notions d'ondes incidentes et diffractées perdent leur signification physique, mais cela est une hypothèse de travail commode, car il est toujours possible d'écrire une fonction inconnue (ici E) sous la forme de la somme d'une fonction connue (ici $E^{(i)}$) et d'une nouvelle fonction inconnue (ici $E^{(d)}$).

$$E = E^{(i)} + E^{(d)} \quad (\text{V. 8.1})$$

De la même manière, nous pouvons poser que pour $u=0$ le champ total E est la somme du champ $E^{(i)}$ de l'onde plane incidente, d'un champ diffracté réel $E^{(da)}$ correspondant à la somme finie d'ondes planes, partie asymptotique du développement de Rayleigh, et d'un champ proche évanescent $E^{(ev)}$ que l'on se propose de déterminer :

$$E = E^{(i)} + E^{(da)} + E^{(ev)} \quad (\text{V. 8.2})$$

Le champ évanescent $E^{(ev)}$ est choisi de telle manière que sur la surface du réseau ($u=0$) le champ total vérifie les conditions aux limites.

$E^{(i)}$ et $E^{(da)}$ sont calculés à partir du développement de Rayleigh écrit en coordonnées de translation ; $E^{(ev)}$ est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions propres de type évanescent ($\text{Im}(r_n) < 0$) du système différentiel (V. 3.7).

Remarque

Ceci ne saurait être confondu avec les considérations inexactes inhérentes à la méthode du "développement de Rayleigh" qui supposent que tout le champ diffracté peut être mis sous la forme d'un développement en ondes planes pour $u > 0$. Pour notre part, nous ne faisons aucune hypothèse sur la forme de $E^{(ev)}$ à l'intérieur des sillons. L'équation (V. 8.2) doit en fait être considérée comme une définition de $E^{(d)}$ et par conséquent de $E^{(ev)} = E^{(d)} - E^{(da)}$; elle est donc parfaitement justifiée sur le plan mathématique.

polarisation $E_{//}$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le champ de l'onde plane incident s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$E_z^{(i)} = e^{iky \cos \theta} e^{-ikx \sin \theta} \quad (V. 8.3)$$

En coordonnées de translation, compte-tenu des notations adoptées au paragraphe (V. 2), cette relation devient :

$$F^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_m(k \cos \theta) e^{ikucos \theta} e^{-i\gamma_m x} \quad (V. 8.4)$$

avec :

$$\gamma_m = k(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D}) \quad (V. 8.5)$$

et :

$$L_m(k \cos \theta) = \frac{1}{D} \int_0^D e^{ik \cos \theta a(x)} e^{im \frac{2\pi x}{D}} dx \quad (V. 8.6)$$

soit encore :

$$F^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{mo}^{(i)} e^{ikucos \theta} e^{-i\gamma_m x} \quad \text{avec } F_{mo}^{(i)} = L_m(k \cos \theta) \quad (V. 8.7)$$

En coordonnées cartésiennes, la partie asymptotique du développement de Rayleigh s'écrit :

$$E_z^{(da)} = \sum_{n \in U} B_n e^{-iky \cos \theta_n} e^{-ikx \sin \theta_n} \quad (V. 8.8)$$

où U est l'ensemble des nombres entiers positifs ou négatifs tels que

$$|\sin \theta + n \frac{\lambda}{D}| \leq 1 \quad (V. 8.9)$$

et :

$$\sin \theta_n = \sin \theta + n \frac{\lambda}{D} \quad (\text{V. 8.10})$$

En coordonnées de translation, la relation (V. 8.8) devient :

$$F^{(da)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in U} B_n L_{m-n}(-k \cos \theta_n) e^{-ik u \cos \theta_n} e^{-i\gamma_m x} \quad (\text{V. 8.11})$$

soit encore :

$$F^{(da)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in U} B_n F_{mn}^{(da)} e^{-ik u \cos \theta_n} e^{-i\gamma_m x} \quad (\text{V. 8.12})$$

en posant :

$$F_{mn}^{(da)} = L_{m-n}(-k \cos \theta_n) = \frac{1}{D} \int_0^D e^{-ik \cos \theta_n a(x)} e^{-i m \frac{2\pi x}{D}} dx \quad (\text{V. 8.13})$$

Nous écrivons la partie évanescente du champ diffracté à partir des composantes $F_{mn}^{(ev)}$ des vecteurs propres des ondes évanescentes ($\text{Im}(r_n) < 0$, $r_n \in V_{pev}$) du système différentiel, soit :

$$F^{ev} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{r_n \in V_{pev}} A_n F_{mn}^{(ev)} e^{-ik r_n u} e^{-i\gamma_m x} \quad (\text{V. 8.14})$$

Le calcul des coefficients complexes inconnus A_n et B_n se fait en écrivant que $E_z = F$ s'annule sur la surface du réseau ($u = 0$). Il vient alors :

$$\sum_{n \in U} B_n F_{mn}^{(da)} + \sum_{r_n \in V_{pev}} A_n F_{mn}^{(ev)} = -F_{m0}^i \quad \forall m \in Z \quad (\text{V. 8.15})$$

La résolution de ce système linéaire (V. 8.15) se fait toujours en limitant l'indice m aux valeurs telles que :

$$|m| \leq M \quad (\text{V. 8.16})$$

Nous disons alors que le problème est résolu dans l'approximation d'ordre M .

Les coefficients B_n étant connus, les efficacités \mathcal{E}_n sont ensuite obtenues par la formule classique (V. 3.3)

$$\mathcal{E}_n = B_n B_n^* \frac{\cos \theta_n}{\cos \theta} \quad (\text{IV. 3.3})$$

polarisation $H_{//}$

En coordonnées cartésiennes, le champ de l'onde plane incidente s'écrit :

$$H_z^{(i)} = \frac{1}{Z} e^{iky \cos \theta} e^{-ikx \sin \theta}, \quad (\text{V. 8.17})$$

l'impédance du vide $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ assurant l'homogénéité avec les formules de la polarisation $E_{//}$.

En coordonnées de translation, la relation (V. 8.17) devient :

$$F^i = e^{iku \cos \theta} e^{-ikx \sin \theta} e^{ik \cos \theta a(x)}, \quad (\text{V. 8.18})$$

A partir de F , nous pouvons, grâce à la relation (V. 2.10a) calculer la fonction $G = -E_x$ sur laquelle portent les conditions aux limites :

$$kG = 1(1+a^2) \frac{\partial F}{\partial u} - ia \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{V. 2.10a})$$

Nous avons :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = ikF \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = ik(a \cos \theta - \sin \theta) F \quad (\text{V. 8.19})$$

d'où

$$G^{(i)} = -(\cos \theta + a \sin \theta) e^{iku \cos \theta} e^{-ikx \sin \theta} e^{ik \cos \theta a(x)} \quad (\text{V. 8.20})$$

D'autre part, nous avons déjà posé (V. 8.6)

$$e^{-ik \cos \theta a(x)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_m(k \cos \theta) e^{-im \frac{2\pi x}{D}}, \quad (\text{V. 8.21})$$

ce qui, après dérivation, donne :

$$a e^{ik \cos \theta a(x)} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\cos \theta} \frac{\lambda}{D} L_m(k \cos \theta) e^{-im \frac{2\pi x}{D}} \quad (\text{V. 8.22})$$

Après avoir reporté ces deux dernières relations dans (V. 8.20), il vient :

$$G^{(i)} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\cos \theta - m \frac{\lambda}{D} \text{tg } \theta) L_m(k \cos \theta) e^{iku \cos \theta} e^{-i\gamma_m x}. \quad (\text{V. 8.23})$$

Soit encore :

$$G^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m0}^{(i)} e^{ikucos\theta} e^{-i\gamma_m x}, \quad (V. 8.24)$$

en posant

$$G_{m0}^{(i)} = -(\cos \theta - m \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) L_m(k \cos \theta). \quad (V. 8.25)$$

Ce calcul peut également être fait pour chacune des ondes planes composant la partie asymptotique du champ diffracté ; ce qui conduit à :

$$G^{(da)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in U} B_n G_{mn}^{(da)} e^{-ikucos \theta_n} e^{-i\gamma_m x}. \quad (V. 8.26)$$

en posant :

$$G_{mn}^{(da)} = [\cos \theta_n - (m-n) \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta] L_{m-n}(-k \cos \theta_n) \quad (V. 8.27)$$

Comme nous l'avons indiqué au début de ce paragraphe, nous écrivons la partie évanescence $G^{(ev)}$ du champ diffracté, à partir des composantes $G_{mn}^{(ev)}$ des vecteurs propres des ondes évanescences du système différentiel :

$$G^{(ev)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{r \in V \\ n \in pev}} A_n G_{mn}^{(ev)} e^{ikr_n u} e^{-i\gamma_m x} \quad (V. 8.28)$$

Les calculs sont ensuite identiques à ceux faits pour la polarisation $E_{//}$, la condition aux limites s'écrivant ici :

$$\sum_{n \in U} B_n G_{mn}^{(da)} + \sum_{\substack{r \in V \\ n \in pev}} A_n G_{mn}^{(ev)} = -G_{m0}^{(i)}, \quad \forall m \in Z \quad (V. 8.29)$$

La relation (IV. 3.3), permettant le calcul des efficacités à partir des coefficients B_n n'est plus, pour une approximation d'ordre M , directement issue du théorème de Poynting, écrit en coordonnées de translation. Il en résulte que la loi conservation de l'énergie n'est pas, pour tout M , systématiquement vérifiée et qu'elle peut constituer un critère de convergence des résultats.

Nous avons effectué des calculs numériques pour le réseau sinusoïdal et le réseau échellette à facettes perpendiculaires. Les résultats principaux sont rassemblés dans les tableaux (3. V) à (4. V) où ils sont comparés avec les résultats dits "vrais" issus de la méthode intégrale de D. Maystre [45].

L'ordre M de l'approximation est variable et peut aller jusqu'à $M = 10$, maximum compatible avec le sous-programme de calcul des vecteurs et valeurs propres, ce qui correspond à des matrices de rang 42. Le temps de calcul est alors sur l'ordinateur CDC 7600 d'environ quatre secondes par point (pour l'ensemble $E_{//}$ et $H_{//}$).

Dans le cas du réseau échellette, l'expérience numérique a montré que la représentation optimale de la fonction $a(x)$ caractérisant le profil est obtenue lorsqu'on limite aux M premiers termes son développement de Fourier (M étant l'ordre de l'approximation).

La précision des calculs est une fonction croissante de M et décroissante de la profondeur des sillons et du nombre d'ordres réels diffractés. Elle ne semble pas avoir d'autre limite que celle, pratique, de la taille des matrices utilisées ; et l'on obtient des résultats valables bien au-delà de la limite pratique du développement de Rayleigh (§ IV. 4).

M	E //		H //		r_0	r_{-1}	r_{-2}
	k_{-1}	$\sum_{n \in U} k_n$	k_{-1}	$\sum_{n \in U} k_n$			
3	0,0681	0,2146	0,1105	0,9223	0,94519670	0,80576057	0,42763897
4	0,0964	0,5898	0,2810	0,9166	0,97358958	0,85356773	0,47513686
5	0,1133	0,8624	0,2818	1,1302	0,98988771	0,88172496	0,48678325
6	0,1227	0,9730	0,2710	1,0056	0,99734007	0,89479650	0,48682194
7	0,1264	0,9958	0,2658	1,0010	0,99955748	0,89876030	0,48666025
9	0,1273	0,9999	0,2641	1,0000	0,99999615	0,89955196	0,48664470
					1,000000	0,89955865	0,48664468
					$\cos \theta_0$	$\cos \theta_{-1}$	$\cos \theta_{-2}$
					$\cos \theta_n = \sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda^2}{D^2}}$		

Tableau 4. V

Réseau sinusoidal en incidence normale : $\theta = 0$, $\frac{\lambda}{D} = 0,4368$ (cinq ordres diffractés). Convergence des efficacités et des valeurs propres en fonction de M ; $a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$, $\frac{h}{D} = \frac{1}{\pi} = 2 \frac{h_L}{D}$. (La limite pratique du développement

$$\text{de Rayleigh est } \frac{h_L}{D} = \frac{1}{2\pi})$$

$\frac{h}{D}$	E //					H //		
	ε_{-1} Méthode Intégrale	ε_{-1}	ε_0	$\varepsilon_{-1} + \varepsilon_0$	ε_{-1} Méthode Intégrale	ε_{-1}	ε_0	$\varepsilon_{-1} + \varepsilon_0$
$\frac{1}{2\pi}$	0,8165	0,8164	0,1836	1,0000	0,9692	0,9692	0,0308	1,0000
$\frac{1}{\pi}$	0,5892	0,5900	0,4100	1,0000	0,0620	0,0620	0,9380	1,0000
$\frac{3}{2\pi}$	0,0565	0,0552	0,9448	1,0000	0,8379	0,8367	0,1623	0,9990
$\frac{2}{\pi}$	0,9294	9247 0,9103	0,07523 0,0722	0,9999 0,9825	0,1514	0,1518 0,1823	0,8482 0,8212	1,0000 1,0035
$\frac{5}{2\pi}$	0,4399	0,4598 0,4543	0,5394 0,5417	0,9992 0,9960		0,4110 0,3988	0,5880 0,5970	0,9990 0,9958

Tableau 5. V

Réseau sinusoïdal au Littrow $a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$, $\frac{\lambda}{D} = 0,8$, $\sin \theta = \frac{\lambda}{2D} = 0,4$, $\theta = 23^{\circ}34'41''$

Limite pratique de validité du développement de Rayleigh $\frac{h_L}{D} = \frac{1}{2\pi}$

Pour $\frac{h}{D} = \frac{2}{\pi}$ et $\frac{5}{2\pi}$ les résultats sont moins bons que ne le laisse prévoir la loi de conservation de l'énergie

	E //						H //				
	$\xi_{-2} = \xi_2$	$\xi_{-1} = \xi_1$	ξ_0	$\sum_{n \in U} \xi_n$	ξ_1 "vrai"	$\xi_{-2} = \xi_2$	$\xi_{-1} = \xi_1$	ξ_0	$\Sigma \xi_n$		
$\frac{h}{D}$											
$\frac{1}{5\pi}$	0,0488	0,3852	0,1321	1,0001	0,3851	0,1107	0,3479	0,0829	1,0001		
$\frac{2}{5\pi}$	0,2616	0,0952	0,2864	1,0000	0,0952	0,4773	0,00005	0,0453	1,0000		
$\frac{3}{5\pi}$	0,1849	0,1335	0,3633	0,9998	0,1335	0,1118	0,1292	0,5172	0,9992		
$\frac{4}{5\pi}$	0,1721	0,1478	0,3603	1,0001	0,1475	0,05617	0,1859	0,5158	0,9999		
$\frac{1}{\pi}$	0,2442	0,1273	0,2569	0,9999	0,1278	0,01299	0,2641	0,4458	1,0000		

Tableau 6. V

Réseau sinusoidal en incidence normale $a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$, $\theta = 0$, $\frac{\lambda}{D} = 0,4368$, $M = 9$

α	E //					H //				
	ξ_{-1} "vrai"	ξ_{-1}	ξ_0	$\xi_0 + \xi_{-1}$	ξ_{-1} "vrai"	ξ_{-1}	ξ_0	ξ_{-1}	ξ_0	$\xi_{-1} + \xi_0$
5°	0,0198	0,0204	0,9804	1,0008	0,0728	0,0730	0,9276	0,9276	1,0006	
10°	0,0800	0,0870	0,9234	1,0004	0,3167	0,3138	0,6901	0,6901	1,0039	
15°	0,1700	0,1768	0,8430	1,0198	0,6451	0,6346	0,3730	0,3730	1,0076	
20°	0,2803	0,2809	0,7209	1,0018	0,8648	0,8647	0,1360	0,1360	1,0007	
25°	0,4002	0,4001	0,6012	1,0013	0,9663	0,9618	0,0344	0,0344	0,9962	
30°	0,5073	0,5071	0,4911	0,9982	0,9785	0,9661	0,0214	0,0214	0,9875	
35°	0,5859	0,5867	0,4133	1,0000	0,9020	0,9017	0,0980	0,0980	0,9997	
40°	0,6323	0,6327	0,3674	1,0001	0,7670	0,7671	0,2325	0,2325	0,9996	
45°	0,6474	0,6471	0,3524	0,9995	0,6931	0,6935	0,3061	0,3061	0,9996	

Tableau 7. V

Réseau échelle à facettes perpendiculaires ($M=10$) $\frac{\lambda}{D} = 1$, $\sin \theta = \frac{1}{4}$, $\theta_0 = 14^\circ 28' 39''$, $\theta_{-1} = -48,59' 04''$

Les résultats bons dans l'ensemble sont cependant médiocres pour $\alpha = 15^\circ$ en E // et $\alpha = 30^\circ$ en H //

Conclusion

Au cours de la dernière décennie, l'essor du calcul sur ordinateur a permis de traiter numériquement un grand nombre de problèmes d'électromagnétisme restés jusque là sans solutions. Cette expansion a souvent fait négliger la recherche des solutions analytiques. Mais, malheureusement, pour résoudre tous les problèmes de l'électromagnétisme il ne suffit pas de programmer une fois pour toutes les équations de Maxwell sur un ordinateur géant, car la compréhension en profondeur des phénomènes physiques souvent indispensable pour effectuer une programmation efficace nécessite de faire, au moins partiellement, un traitement analytique.

Dans ce but, nous avons, au début de ce travail, présenté les équations de Maxwell sous forme covariante, outil commode emprunté à la physique relativiste, que nous avons adapté à l'emploi dans l'espace à trois dimensions de la physique classique. Ce formalisme peut à première vue, sembler compliqué et inutile ; il s'avère pourtant pratiquement indispensable si l'on désire que les limites du domaine d'intégration interviennent explicitement dans les équations, par l'intermédiaire du système de coordonnées. Ce choix d'un système de coordonnées adéquat est fondamental et il suffit pour s'en convaincre d'imaginer les difficultés qui surgiraient dans la résolution d'un problème ayant la symétrie cylindrique si l'on utilisait des coordonnées sphériques. On pourrait également penser que l'introduction de coordonnées non orthogonales pour la mise en équation de problèmes aux dérivées partielles avec conditions aux limites complique inutilement la résolution. En réalité la complexité des équations n'est que le reflet de celle des conditions aux limites, et l'utilisation de ces coordonnées semble être la voie naturelle pour résoudre ces types de problèmes.

L'introduction des limites, sous la forme de paramètres fonctionnels dès la mise en équation du problème est donc la caractéristique essentielle de notre formalisme. Cela nous a permis, pour l'étude de la propagation dans des guides périodiques et de la diffraction par un réseau, de développer une méthode de perturbation ne souffrant d'aucune restriction mathématique ; ce qui nous a conduit, dans quelques cas particuliers, à obtenir des petites formules, simples d'emploi, pouvant présenter de l'intérêt pour un expérimentateur. Dans le cas du réseau nous avons pu ainsi montrer que l'échec de la méthode dite du "développement de Rayleigh" n'est vraisemblablement pas, comme on le présente le plus souvent, la conséquence d'inexactitudes mathématiques mais plutôt celle de la troncature brutale d'un système infini d'équations algébriques, ce que semblent montrer par ailleurs quelques travaux récents [44].

De plus, le fait d'introduire explicitement les limites dans les équations permet de rechercher ensuite les diverses composantes du champ électromagnétique sous la forme de développements en séries. Cet artifice conduit alors à substituer à la résolution du système initial d'équations aux dérivées partielles, la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un opérateur linéaire. Ainsi le traitement numérique de ces équations peut se faire en utilisant des méthodes bien éprouvées en mécanique quantique ; avec toutefois une difficulté supplémentaire provenant de la non hermiticité des matrices.

Les quelques exemples traités dans ce mémoire devraient suffire à montrer l'efficacité de notre formalisme, efficacité due à la bonne adaptation de l'outil mathématique à la géométrie du problème physique. Cette méthode devrait pouvoir apporter une contribution utile à la mise en équation et à la résolution de problèmes actuels de l'électromagnétisme.

Annexe 1

Vecteurs, tenseurs et systèmes de coordonnées

A. 1. TENSEURS ET PSEUDO-TENSEURS ASSOCIES A UN ESPACE VECTORIEL

On désigne par E_n un espace vectoriel à n dimensions, et par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de cet espace. Un vecteur quelconque \vec{a} de E_n s'écrit en fonction des vecteurs de base de la manière suivante :

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a^i \vec{e}_i \quad (\text{A.1.1})$$

Nous adopterons la convention d'Einstein, qui sous-entend la sommation pour les indices qui figurent deux fois dans le même monôme, une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur. Nous conviendrons donc d'écrire :

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i \quad (\text{A.1.2})$$

Soit $(\vec{e}_{i'})$ une autre base de E_n . Les relations de changement de base s'écrivent :

$$\vec{e}_{i'} = A_{i'}^i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{e}_i = A_i^{i'} \vec{e}_{i'}, \quad \text{avec} \quad A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i, \quad (\text{A.1.3})$$

δ_j^i étant le symbole de Kronecker, $A_{i'}^i$, et $A_i^{i'}$ désignant les coefficients du changement de base.

Soient a^i les composantes du vecteur \vec{a} sur la base (\vec{e}_i) et $a^{i'}$ ses composantes sur la base $(\vec{e}_{i'})$; nous avons entre a^i et $a^{i'}$ les relations

suivantes :

$$a^{i'} = A_{i'}^i a^i ; \quad a^i = A_{i'}^i a^{i'} \quad (\text{A.1.4})$$

Ces composantes se transforment à l'inverse des vecteurs de base ; pour cette raison, elles sont dites "composantes contravariantes" et le vecteur \vec{a} est un vecteur contravariant.

□ Espace dual et vecteurs covariants

L'ensemble des formes linéaires sur E_n forme un nouvel espace vectoriel E_n^* appelé "espace dual" de E_n . A une base (\vec{e}_i) de E_n , il est possible d'associer une base (\vec{e}^i) de E_n^* . A un changement de base dans E_n $(\vec{e}_i) \rightarrow (\vec{e}_{i'})$ correspond un changement de base dans E_n^* $(\vec{e}^i) \rightarrow (\vec{e}^{i'})$ satisfaisant aux relations :

$$\begin{aligned} \vec{e}_{i'} &= A_{i'}^i \vec{e}_i & ; & & \vec{e}^{i'} &= A_{i'}^i \vec{e}^i & ; \\ \vec{e}_i &= A_{i'}^i \vec{e}_{i'} & ; & & \vec{e}^i &= A_{i'}^i \vec{e}^{i'} \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

Si \vec{a}^* est un élément de E_n^* , il vient :

$$\vec{a}^* = a_{i'}^* \vec{e}^{i'} = a_i^* \vec{e}^i \quad \text{avec} \quad a_{i'}^* = A_{i'}^i a_i^* \quad \text{et} \quad a_i^* = A_{i'}^i a_{i'}^* \quad (\text{A.1.6})$$

Les composantes de ce vecteur se transforment de la même manière que les vecteurs de la base (\vec{e}_i) de E_n ; pour cette raison, elles sont dites "composantes covariantes", le vecteur \vec{a}^* étant un vecteur covariant.

□ Tenseurs, pseudo-tenseurs

Soient Δ et Δ^{-1} les déterminants formés au moyen des coefficients de changement de base (A.1.3)

$$\Delta = \det (A_{i'}^i) \quad \Delta^{-1} = \det (A_{i'}^i) \quad (\text{A.1.7})$$

On appelle pseudo-tenseur affine T d'ordre (ou de variance) p associé à E_n , un ensemble de n^p grandeurs ou composantes qui dans un changement de base se transforment de la manière suivante, par exemple pour $p = 3$:

$$T_{j'k'}^{i'} = \Delta^{-k} A_{i'}^i A_{j'}^j A_{k'}^k T_{jz}^i \quad (\text{A.1.8})$$

On dit que les indices inférieurs, (ici j et l), sont des indices covariants et les indices supérieurs (ici i) des indices contravariants ; k est le poids du pseudo-tenseur.

Si $k=0$, T est un tenseur ; sinon c'est un pseudo-tenseur. Les pseudo-tenseurs de poids $k = \pm 1$ très fréquents en physique sont appelés densités tensorielles si $k = +1$, et capacités tensorielles si $k = -1$.

Afin de simplifier l'écriture nous posons :

$$A^{i'j'l} = A^{i'} A^j A^l \quad (A.1.9)$$

$$i'j'l'$$

soit, pour la relation (1.1.8) :

$$T^{i'} = |\Delta|^{-k} A^{i'j'l} T^i$$

$$j'l'$$

Afin de noter différemment les tenseurs vrais et les pseudo-tenseurs nous utilisons les majuscules d'imprimerie pour les premiers et les majuscules en caractères gras pour les seconds.

Un pseudo-tenseur très important est l'indicateur ϵ de Levi-Civita (ou tenseur d'antisymétrie).

$$\left. \begin{array}{l} g_{i,j,\dots,n} \\ \text{(poids +1)} \\ \epsilon_{i,j,\dots,n} \\ \text{(poids -1)} \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ +1 & \text{si les indices sont dans un ordre obtenu au moyen} \\ & \text{d'un nombre pair de permutations à partir de} \\ & (1, 2, 3, \dots, n) \\ -1 & \text{pour un nombre impair de permutations} \end{cases} \quad (A.1.10)$$

A. 2. TENSEURS ET PSEUDO-TENSEURS ASSOCIES A UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

Un espace vectoriel est euclidien quand il est muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une loi de composition externe associant à tout couple de vecteurs (\vec{a}, \vec{b}) un nombre réel noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$. On est conduit à considérer les produits scalaires de l'ensemble des couples des vecteurs de base :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad \text{avec} \quad g_{ij} = g_{ji}$$

L'ensemble des n^2 quantités g_{ij} forme un tenseur symétrique d'ordre deux appelé "tenseur métrique".

De la même manière, pour l'espace dual E_n^* , on pose :

$$g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \quad \text{avec} \quad g^{ij} = g^{ji}. \quad (\text{A.2.2})$$

Entre les composantes g_{ij} et g^{ij} des tenseurs métriques de E_n et E_n^* , il existe la relation suivante :

$$g_{ik} g^{jk} = \delta_i^j, \quad (\text{A.2.3})$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker.

Compte-tenu de la symétrie du tenseur métrique, la relation (A.2.3) est équivalente à la relation matricielle suivante :

$$(g_{ij})(g^{ij}) = I \quad \Rightarrow \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad (\text{A.2.4})$$

I étant la matrice unité.

Le calcul des g^{ij} peut donc se faire par inversion de la matrice formée par les composantes g_{ij} du tenseur métrique de E_n .

La formule (A.2.3) permet de réaliser une connexion entre E_n et son dual E_n^* . Pour le passage de la base (\vec{e}_i) à la base duale (\vec{e}^i) , il vient :

$$\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j \quad \text{et} \quad \vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j. \quad (\text{A.2.5})$$

Un vecteur peut alors être considéré (par un abus de langage) comme élément de E_n et de E_n^* ; il possède à la fois des composantes covariantes et des composantes contravariantes.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a^i \vec{e}_i & \text{avec} & \quad a^i = \vec{a} \cdot \vec{e}^i ; \\ \vec{a} &= a_i \vec{e}^i & \text{avec} & \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

Le tenseur métrique donne des relations entre composantes contravariantes et covariantes :

$$a_i = g_{ij} a^j \quad ; \quad a^i = g^{ij} a_j .$$

Il permet également de changer la variance relative à un indice quelconque d'un tenseur, par exemple pour un tenseur d'ordre trois nous pouvons écrire :

$$T_{ij}^k = g_{jL} T_i^{kL} . \quad (\text{A.2.8})$$

A. 3. ESPACES PONCTUELS ET SYSTEMES DE COORDONNEES

Pour le physicien, l'espace est le domaine dans lequel se produisent les phénomènes naturels qu'il désire étudier. Le plus souvent, il lui accorde d'emblée les propriétés de la géométrie euclidienne. Sous l'impulsion de la physique relativiste, on a été amené à se pencher de plus près sur ces propriétés, et à étudier des structures mathématiques plus générales, tels les espaces ponctuels \mathcal{E}_n à n dimensions (ou plus généralement les variétés ponctuelles) pouvant les représenter. De cette étude, il est apparu qu'il est nécessaire de distinguer les propriétés affines (ne faisant pas intervenir la notion de longueur) et les propriétés métriques de ces espaces. Bien qu'en physique classique, cette distinction soit rarement faite, nous nous efforcerons d'examiner les différents problèmes sous ces deux aspects.

▣ Les systèmes de coordonnées de l'espace affine \mathcal{E}_n

Le "repérage" d'un point M quelconque, élément de \mathcal{E}_n , est fait au moyen d'un système de coordonnées qui associe à ce point M , d'une manière unique, un ensemble de n nombre réels (x^i) appelés coordonnées du point M .

Les courbes de coordonnées sont les ensembles des points M ayant $n-1$ coordonnées fixées.

Les surfaces de coordonnées sont les ensembles des points M ayant une seule coordonnée fixée.

Le système de coordonnées le plus simple est celui des coordonnées rectilignes pour lequel, les courbes de coordonnées sont des droites. Mais un tel système n'est possible que pour un espace euclidien \mathcal{E}_n . Dans ce cas, cet espace est isomorphe à un espace vectoriel.

Cet isomorphisme explique la confusion qui est souvent faite, en physique, entre espace vectoriel et espace ponctuel.

L'ensemble d'une base (\vec{e}_i) de E_n et d'un point O de \mathcal{E}_n appelé origine définit un repère R de \mathcal{E}_n . A chaque point M de \mathcal{E}_n est alors associé de manière biunivoque un vecteur \vec{x} de E_n , les composantes x^i de ce vecteur \vec{x} sur la base (\vec{e}_i) de E_n étant les coordonnées rectilignes de M .

Donnons nous n fonctions $x^{i'}$ continuellement dérivables des n variables x^i :

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n). \quad (\text{A.3.1})$$

Supposons que ces fonctions soient inversibles, c'est-à-dire qu'il est possible d'écrire :

$$x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'}). \quad (\text{A.3.2})$$

Ainsi, à un ensemble de n valeurs $x^{i'}$ correspond un point M de \mathcal{E}_n . Si les fonctions $x^{i'}$ ne sont pas linéaires, nous dirons qu'elles définissent sur \mathcal{E}_n un système de coordonnées curvilignes.

□ Repère naturel

A chaque point M de \mathcal{E}_n , associons un repère $R(M)$ que nous appelons "repère naturel" en M du système $(x^{i'})$ ayant pour origine M et pour vecteurs de base les vecteurs $\vec{e}_{i'}$, obtenus à partir de la base (\vec{e}_i) de R par les relations (A.1.3) :

$$\vec{e}_{i'} = A_{i'}^i \vec{e}_i \quad ; \quad \vec{e}_i = A_i^{i'} \vec{e}_{i'} \quad (\text{A.1.3})$$

avec

$$A_{z'}^z = \frac{\partial x^z}{\partial x^{z'}} \quad \text{et} \quad A_{z'}^{z'} = \frac{\partial x^{z'}}{\partial x^z}. \quad (\text{A.3.3})$$

Les coefficients de changement de base $A_{z'}^z$ et $A_{z'}^{z'}$ dépendant des coordonnées curvilignes $x^{z'}$, le repère $R(M)$ dépend donc du point M .

Les vecteurs de base $(\vec{a}_{z'})$ sont portés par les tangentes aux n courbes de coordonnées se coupant en M .

Afin de simplifier l'écriture, nous adopterons les conventions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x^z} = \partial_z ; \quad \frac{\partial}{\partial x^{z'}} = \partial_{z'}. \quad (\text{A.3.4})$$

Nous écrirons par exemple :

$$A_{z'}^z = \partial_{z'} x^z ; \quad A_{z'}^{z'} = \partial_{z'} x^{z'}. \quad (\text{A.3.5})$$

Nous dirons qu'un changement de coordonnées est holonôme si :

$$\partial_{z'} A_{z'}^j = \partial_j A_{z'}^j \quad \text{et} \quad \partial_{z'} A_{z'}^j = \partial_j A_{z'}^j. \quad (\text{A.3.6})$$

▣ Champs de tenseurs

Si en chaque point M d'un domaine D de \mathbb{E}_n est défini un tenseur de E_n , l'ensemble ainsi obtenu constitue un champ de tenseurs. En coordonnées curvilignes, ces tenseurs sont définis par leurs composantes relatives à la base du repère naturel en M .

A un changement de coordonnées, correspond un changement de repère naturel associé et, par suite, une transformation des composantes des tenseurs du champ. Cette transformation s'effectue selon les formules définies au § A.1 en utilisant les coefficients $A_{z'}^z$ et $A_{z'}^{z'}$ de (A.3.3).

▣ Espace ponctuel métrique

Si l'espace vectoriel E_n associé à \mathbb{E}_n est doté d'un produit scalaire, alors \mathbb{E}_n est un espace ponctuel métrique dans lequel les notions de longueur et d'angle ont une signification. De la même manière qu'au § A.2,

nous posons :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad (\text{A.3.7})$$

où les vecteurs \vec{e}_i sont les vecteurs de la base du repère naturel en M. Le tenseur métrique dont les composantes g_{ij} dépendent du point M considéré, constitue un champ de tenseurs. Dans un changement de coordonnées, on a :

$$g_{i'j'} = A_{i'j'}^{ij} g_{ij}. \quad (\text{A.3.8})$$

L'élément d'arc ds de l'espace \mathcal{E}_n s'écrit en coordonnées curvilignes :

$$ds = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Les composantes g_{ij} du tenseur métrique définissent à la fois l'espace \mathcal{E}_n et le système de coordonnées. Etant données à priori les fonctions g_{ij} si, par un changement de coordonnées, il est possible pour tout point M de \mathcal{E}_n , d'obtenir :

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.3.10})$$

alors l'espace est euclidien et le système de coordonnées obtenu est le système cartésien. Dans le cas contraire, l'espace est courbe ou riemannien.

Les coordonnées sont orthogonales si :

$$g_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \quad (\text{A.3.11})$$

▣ Remarques

1) En coordonnées curvilignes orthogonales, la base du repère naturel associé à un point M quelconque n'est pas orthonormée :

$$g_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ mais } g_{ii} \neq 1. \quad (\text{A.3.11})$$

Il est alors nécessaire d'après (A.2.7) de faire la distinction entre les composantes covariantes a_i et contravariantes a^i d'un vecteur $\vec{a}(M)$. En calcul vectoriel classique, cette distinction n'est pas faite et on appelle composante du vecteur \vec{a} , ses projections \mathcal{E}_i sur les supports des vecteurs de la base naturelle en M. Entre les différents types de composantes, il existe les relations suivantes :

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} a^i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} a_i, \text{ soit } (\mathcal{E}_i)^2 = a_i a^i \quad (\text{A.3.12})$$

2) En coordonnées non orthogonales, la base du repère naturel est oblique, les composantes covariantes et contravariantes sont respectivement proportionnelles aux projections perpendiculaires et parallèles du vecteur \vec{a} sur la base naturelle ; fig. (A.1) :

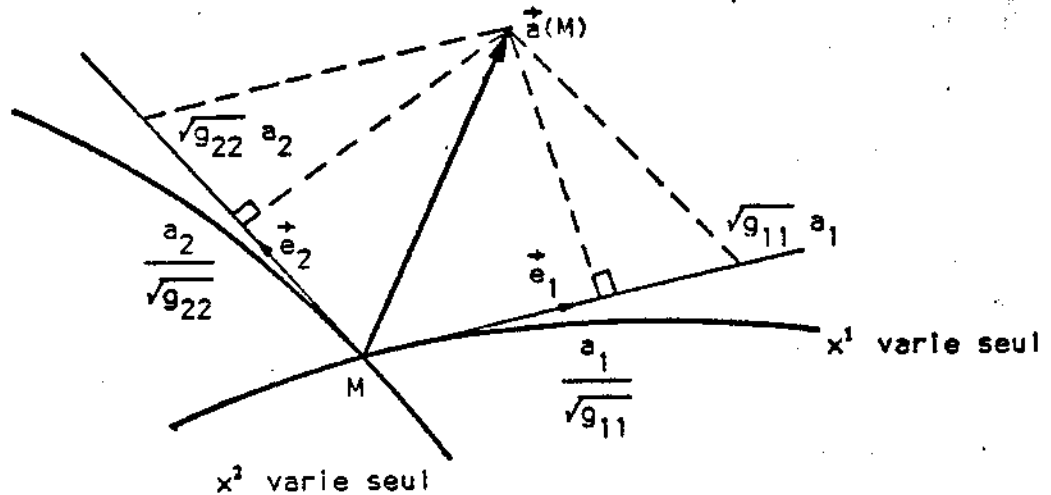


fig. A.1

Les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur du plan en coordonnées curvilignes

3) la nullité d'une composante de \vec{a} peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante :

$a_i = 0$: \vec{a} est normal à la tangente en M à la courbe de coordonnée : $(x^i \text{ varie seul})$

$a^i = 0$: \vec{a} est contenu dans le plan tangent en M à la surface de coordonnée : $(x^i = \text{cte})$.

On peut également noter que, sauf pour les systèmes orthogonaux, les composantes covariantes et contravariantes ne sont simultanément nulles.

LES SYSTEMES DE COORDONNEES DE L'ESPACE EUCLIDIEN

A TROIS DIMENSIONS

A. 4. POSITION DU PROBLEME

Pour pouvoir résoudre les équations, vectorielles ou tensorielles, de la physique des milieux continus -et en particulier les équations de l'électromagnétisme- il faut préalablement se donner un système de coordonnées afin de pouvoir projeter ces équations. Le choix de ce système est conditionné par la géométrie du problème à étudier. Les systèmes les plus fréquemment utilisés sont les systèmes orthogonaux (cartésien, cylindrique, sphérique, etc ...) parce qu'ils sont associés à des problèmes présentant un aspect géométrique simple. Dans les cas plus compliqués, certains artifices de calcul permettent de conserver ces systèmes mais l'utilisation de systèmes non orthogonaux paraît inévitable pour traiter les problèmes les plus généraux.

Dans le cadre de la physique non relativiste, l'espace considéré est l'espace euclidien à trois dimensions \mathbb{E}_3 pour lequel il est toujours possible d'employer un système cartésien (A.3.9), à partir duquel peuvent être définis tous les systèmes curvilignes. Mais il est également possible, et pratiquement plus rapide, de prendre pour référence un système orthogonal classique mettant primitivement en évidence les symétries du système cherché.

En fait nous avons été amenés à définir deux grandes familles de transformations, soient :

x^1, x^2, x^3 , le système initial de coordonnées,

$x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, le système transformé de coordonnées

et a une fonction plusieurs fois continuellement dérivable de x^2 et/ou de x^3 par exemple.

Les transformations de type additif sont telles que :

$$x^{1'} = x^1 - a, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad (\text{A.4.1})$$

et les transformations de type multiplicatif sont telles que :

$$x^{1'} = \frac{x^1}{a}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \quad (\text{A.4.2})$$

Les deux autres coordonnées pouvant être l'objet de telles transformations.

Les transformations de type multiplicatif peuvent s'appliquer à tous les systèmes classiques (cartésien, cylindrique, sphérique) ; mais les transformations de type additif ne s'appliquent bien qu'au système cartésien.

A. 5. LE SYSTEME DE COORDONNEES DE TRANSLATION

Un cas particulièrement simple de transformation de type additif conduit au système de coordonnée dit de "translation". A partir du système cartésien ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$), définissons un nouveau système par :

$$x^{1'} = x, \quad x^{2'} = u, \quad x^{3'} = z, \quad (\text{A.5.1})$$

avec :

$$x^{2'} = x^2 - a(x^1) \quad \text{soit : } u = y - a(x) \quad (\text{A.5.2})$$

où $a(x)$ est une fonction continuellement dérivable de la variable x . Les éléments des matrices de changement de base s'écrivent :

$$(A_{z'}^{z'}) = (\partial_{z'} x^{z'}) = \begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5.3})$$

$$(A_{z'}^{z'}) = (\partial_{z'} x^{z'}) = \begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +\dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

avec :

$$\dot{a} = \frac{da}{dx} \quad (\text{A.5.5})$$

$$\Delta = \det (A_{i'}^{j'}) = 1.$$

Le calcul du tenseur métrique se fait à partir de (A.3.8) et (A.5.4)

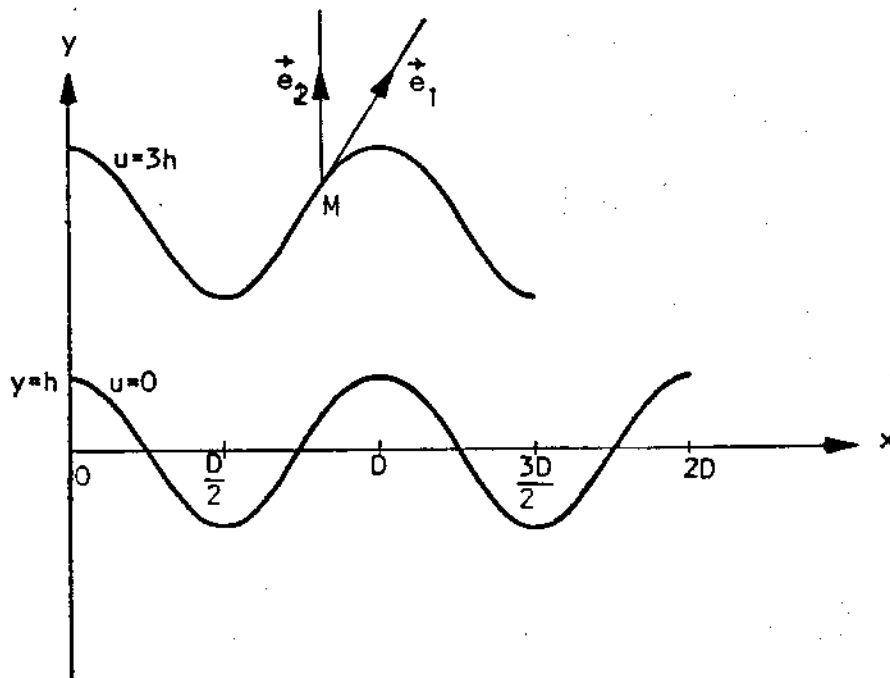
$$(g_{i'j'}) = \begin{bmatrix} 1+a^2 & \dot{a} & 0 \\ \dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (g^{i'j'}) = (g_{i'j'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\dot{a} & 0 \\ -\dot{a} & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.7})$$

$$\sqrt{\det(g_{i'j'})} = \sqrt{g} = 1. \quad (\text{A.5.8})$$

L'élément de longueur d'arc satisfait à l'équation :

$$ds^2 = (1+a^2) dx^2 + du^2 + dz^2 + 2a dx du \quad (\text{A.5.9})$$

La figure (A.2) est relative aux coordonnées de translation dans la cas où $a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$, h et D étant deux paramètres. Les courbes de coordonnées $u = 0$ et $u = 3h$ sont tracées dans le plan $z = \text{cte}$. Ces courbes sont des sinusoides et les surfaces de coordonnées $u = \text{cte}$ s'appuient sur des directrices sinusoidales. Ces surfaces se déduisent toutes de l'une quelconque d'entre elles par des translations parallèles à Oy .



Le système de coordonnées de translation

fig. A.2

A. 6. LE SYSTEME DE COORDONNEES DE REVOLUTION AXIALE

Un cas particulièrement simple de transformation de type multiplicatif conduit au système de coordonnées dit "de révolution axiale".

A partir du système cylindrique ($x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$), définissons un nouveau système par :

$$x^{1'} = u, \quad x^{2'} = \varphi, \quad x^{3'} = z, \quad (\text{A.6.1})$$

avec

$$x^{1'} = \frac{x^1}{a(x^3)} \text{ soit } u = \frac{r}{a(z)}, \quad (\text{A.6.2})$$

où $a(z)$ est une fonction de la variable z , plusieurs fois continuellement dérivable, ne s'annulant jamais.

Il vient :

$$(A_{i'}^{j'}) = (\partial_{i'} x^{j'}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{\dot{a}}{a} u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6.3})$$

$$(A_{i'}^{j'}) = (\partial_{i'} x^{j'}) = \begin{bmatrix} a & 0 & \dot{a}u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6.4})$$

avec

$$\dot{a} = \frac{da}{dz}. \quad (\text{A.6.5})$$

$$\Delta = \det (A_{i'}^{j'}) = \frac{1}{a} \quad (\text{A.6.6})$$

Le tenseur métrique s'écrit

$$(g_{i'j'}) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a\dot{a}u \\ 0 & a^2u^2 & 0 \\ a\dot{a}u & 0 & 1+a^2u^2 \end{bmatrix} (g^{i'j'}) = \begin{bmatrix} \frac{1+a^2u^2}{a^2} & 0 & -\frac{\dot{a}}{a}u \\ 0 & \frac{1}{a^2u^2} & 0 \\ -\frac{\dot{a}}{a}u & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6.7})$$

$$\sqrt{g} = a^2 u \quad (\text{A.6.8})$$

$$ds^2 = a^2 du^2 + a^2 u^2 d\varphi^2 + (1 + \dot{a}^2 u^2) dz^2 + 2a\dot{a}u du dz.$$

La figure A.3 est relative aux coordonnées de révolution axiale dans le cas où :

$$a = 1 - \alpha \cos \frac{2\pi z}{D},$$

α et D étant des paramètres et $\alpha \in [0, 1[$.

Les courbes de coordonnées $u = \text{cte}$ sont tracées dans le demi-plan $\varphi = \text{cte}$. Les surfaces de coordonnées $u = \text{cte}$ sont les surfaces de révolution d'axe Oz engendrées par ces courbes, la surface $u = 0$ se réduisant à l'axe Oz .

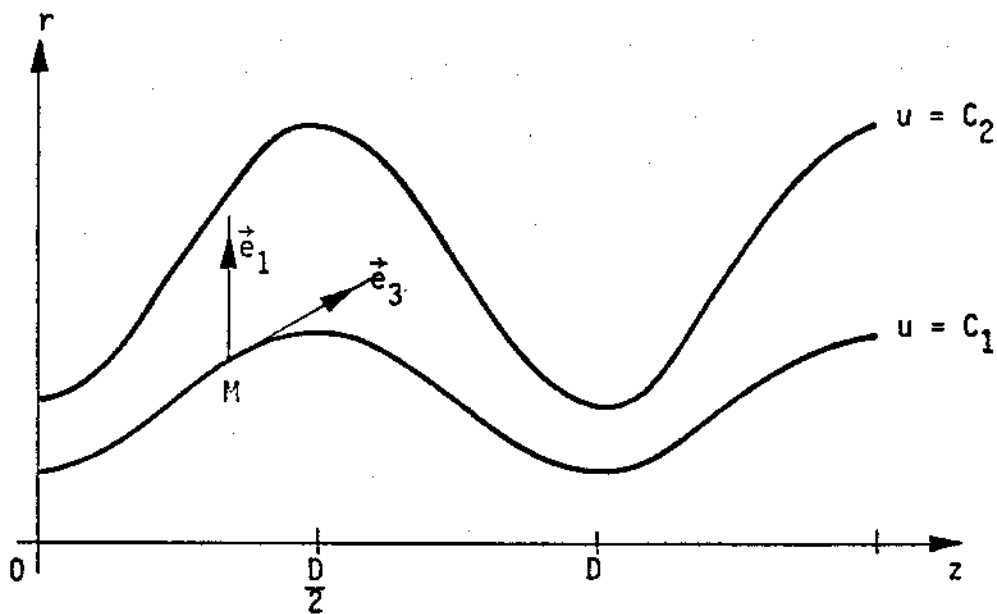


fig. A.3

Le système de coordonnées de révolution

* * *

Annexe 2

TABLE DES INTEGRALES UTILISEES [18]

INTEGRALES DE LOMMEL

$$\int J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta x J_n(\alpha x) J_{n-1}(\beta x) - \alpha x J_{n-1}(\alpha x) J_n(\beta x)] + cte$$

si $n = 0$

$$\int J_0(\alpha x) J_0(\beta x) x dx = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} [\beta x J_0(\alpha x) J_1(\beta x) - \alpha x J_1(\alpha x) J_0(\beta x)] + cte$$

$\alpha = \beta$

$$\int J_n^2(\alpha x) x dx = \frac{x^2}{2} \left[J_n'^2(\alpha x) + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right) J_n^2(\alpha x) \right] + cte$$

$$\int J_0^2(\alpha x) x dx = \frac{x^2}{2} [J_0^2(\alpha x) + J_1^2(\alpha x)] + cte$$

AUTRES INTEGRALES

$$\int x^m J_{m-1}(x) dx = x^m J_m(x) + cte$$

$$\int x \frac{\alpha J_0(\alpha x) J_0(\beta x) + \beta J_1(\alpha x) J_1(\beta x)}{J_0^2(\beta x)} dx = x \frac{J_1(\alpha x)}{J_0(\beta x)} + cte$$

$$\int J_0(\alpha x) J_1(\beta x) x^2 dx = \frac{x^2}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_0(\alpha x) J_0(\beta x) + \alpha J_1(\alpha x) J_1(\beta x)]$$

$$+ \frac{2\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)} [\beta J_0(\alpha x) J_1(\beta x) - \alpha J_1(\alpha x) J_0(\beta x)] + cte$$

$\alpha = \beta$

$$\int J_0(\alpha x) J_1(\alpha x) x^2 dx = \frac{x^2}{2\alpha} J_1^2(\alpha x) + cte$$

$$\int x \frac{J_1^2(\alpha x)}{J_0^2(\alpha x)} dx = \frac{x}{\alpha} \frac{J_1(\alpha x)}{J_0(\alpha x)} - \frac{x^2}{2} + cte$$

$$\int J_0^2(x) x^3 dx = \frac{x^4}{6} (J_0^2(x) + J_1^2(x)) + \frac{x^3}{3} J_0(x) J_1(x) - \frac{x^2}{3} J_1^2(x) + cte$$

Annexe 3

LES SERIES DE FOURIER-BESSEL [18, 22]

LES SERIES DE FOURIER-BESSEL DE PREMIERE ESPECE

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines positives mises en ordre croissant, de l'équation $J_p(x) = 0$ ($p > -1$). L'ensemble des fonctions

$$J_p(\lambda_1 x), J_p(\lambda_2 x), \dots, J_p(\lambda_n x), \dots$$

forme sur l'intervalle $x \in [0, 1]$ un système orthogonal de poids x . Toute fonction $f(x)$ continue par morceaux sur l'intervalle $x \in [0, 1]$ peut, sur cet intervalle s'écrire :

$$f(x) = c_1 J_p(\lambda_1 x) + c_2 J_p(\lambda_2 x) + \dots$$

avec

$$c_n = \frac{1}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx$$

LES SERIES DE FOURIER-BESSEL DE SECONDE ESPECE

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines positives mises en ordre croissant de l'équation

$$x J_p'(x) - H J_p(x) = 0$$

où H est une constante.

L'ensemble des fonctions

$$J_p(\lambda_1 x), J_p(\lambda_2 x), \dots, J_p(\lambda_n x), \dots$$

forme, sur l'intervalle $x \in [0,1]$ un système orthogonal de poids x . Toute fonction $f(x)$ intégrable sur l'intervalle $x \in [0,1]$ peut sur cet intervalle s'écrire :

$$f(x) = c_1 J_p(\lambda_1 x) + c_2 J_p(\lambda_2 x) + \dots$$

avec

$$c_n = \frac{2 \lambda_n^2}{\lambda_n^2 J_p'^2(\lambda_n) + (\lambda_n^2 - p^2) J_p^2(\lambda_n)} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx$$

En particulier, si $H = p$, les racines λ_n satisfont à :

$$x J_p'(x) + p J_p(x) = 0$$

et, en tenant compte de la formule de récurrence

$$J_p'(x) = J_{p-1}(x) - p \frac{J_p(x)}{x}$$

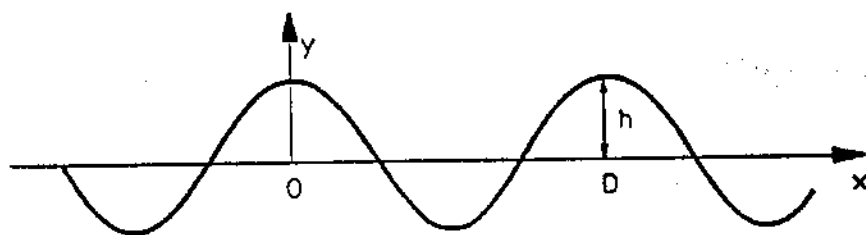
on constate que les nombres λ_n sont les racines de $J_{p-1}(x) = 0$. En particulier pour $p = 1$ ce sont les racines de $J_0(x) = 0$ et pour le calcul des coefficients c_n il vient alors :

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x f(x) J_1(\lambda_n x) dx.$$

Annexe 4

 LES EFFICACITES DES RESEAUX (FORMULAIRE) DE FAIBLE HAUTEUR

Les formûles sont valables pour le réseau sinusoïdal (fig. 1)

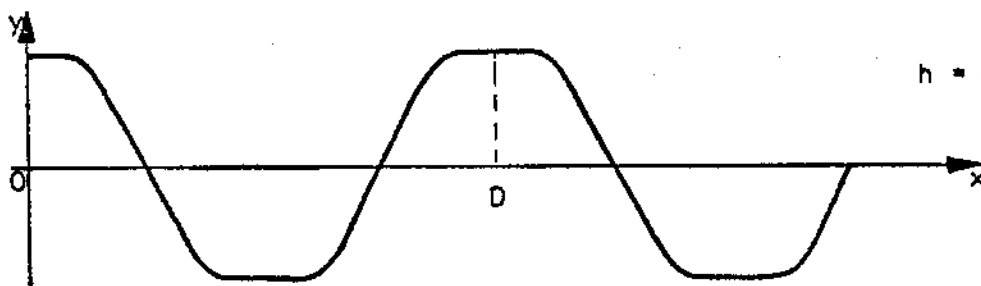


$$a(x) = h \cos \frac{2\pi x}{D}$$

fig. 1

Réseau sinusoïdal

Les formûles sont également valables pour les réseaux symétriques proches des réseaux sinusoïdaux (fig. 2) avec :



$$h = \frac{2}{D} \int_0^D a(x) \cos \frac{2\pi x}{D} dx$$

$$a(-x) = a(x)$$

fig. 2

Réseau symétrique

POLARISATION E //

□ Cinq ordres ou plus sont diffractés $(-2, -1, 0, 1, 2)$ $(\frac{\lambda}{D} \leq \frac{1+\sin \theta}{2})$

$$\mathcal{E}_{-2} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^4 \cos \theta_0 \cos^2 \theta_{-1} \cos \theta_{-2}$$

$$\mathcal{E}_{-1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \cos \theta_0 \cos \theta_{-1} \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{-1} - 2 \cos^2 \theta_{-1} + 2 \cos \theta \right. \\ \left. \times (\cos \theta_1 + \cos \theta_{-1}) + 2 \cos \theta_{-1} \cos \theta_{-2} \right]$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 - \mathcal{E}_{-2} - \mathcal{E}_{-1} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_{+1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \cos \theta_0 \cos \theta_1 \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{-1} - 2 \cos^2 \theta_1 + 2 \cos \theta \right. \\ \left. \times (\cos \theta_1 + \cos \theta_{-1}) + 2 \cos \theta_{-1} \cos \theta_{-2} \right]$$

$$\mathcal{E}_{+2} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^4 \cos \theta_0 \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2$$

(Si les ordres -3 et 3 sont diffractés) :

$$\mathcal{E}_{-3} = \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^6 \cos \theta \cos \theta_{-3} \left(\frac{\cos^2 \theta}{3} + 2 \cos \theta_{-1} \cos \theta_{-2} - \cos^2 \theta_{-1} \right)^2$$

$$\mathcal{E}_{+3} = \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^6 \cos \theta \cos \theta_3 \left(\frac{\cos^2 \theta}{3} + 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos^2 \theta_1 \right)^2$$

□ Seuls les ordres -1, 0, 1, sont diffractés $(\frac{1+\sin \theta}{2} < \frac{\lambda}{D} < 1 - \sin \theta)$

$$\mathcal{E}_{-1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \cos \theta \cos \theta_{-1} \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{-1} - 2 \cos^2 \theta_{-1} + 2 \cos \theta (\cos \theta_1 + \cos \theta_{-1})) \right]$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 - \mathcal{E}_{-1} - \mathcal{E}_1$$

$$\mathcal{E}_{+1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \cos \theta \cos \theta_1 \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{-1} - 2 \cos \theta_1 + 2 \cos \theta (\cos \theta_1 + \cos \theta_{-1})) \right]$$

▣ Deux ordres seulement sont diffractés (-1, 0)

$$\mathcal{E}_{-1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^2 \cos \theta_0 \cos \theta_{-1} \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^2 (2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta_{-1} + 2 \cos^2 \theta \cos \theta_{-1} - \frac{2\lambda}{D} \sin \theta - \frac{\lambda^2}{D^2}) \right]$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 - \mathcal{E}_{-1}$$

POLARISATION H//

▣ Cinq ordres au moins (-2, -1, 0, 1, 2) sont diffractés

$$\mathcal{E}_{-2} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^4 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_{-2}} (\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta)^2 (\cos \theta_{-1} + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1})^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_{-1}} (\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta)^2 & \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_{-1} + 2 (\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) \right. \right. \\ & \left. \left. (\cos \theta_{-1} - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}) + 2 (\cos \theta_{-2} - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-2}) (\cos \theta_{-1} + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 (\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) (\cos \theta_1 + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1) - \cos \theta_1 (\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) \frac{\cos \theta_1 + \frac{2\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1}{\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 - \mathcal{E}_{-2} - \mathcal{E}_{-1} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_{+1} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1} (\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta)^2 \left[1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_1 + 2 (\cos \theta_2 + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_2) \right. \right.$$

$$\left. (\cos \theta_1 - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) + 2 (\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) (\cos \theta_1 + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1) \right.$$

$$\left. + 2 (\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) (\cos \theta_{-1} - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}) - \cos \theta_{-1} (\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta) \frac{\cos \theta_{-1} - \frac{2\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}}{\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} \right]$$

$$\mathcal{E}_{+2} = 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^4 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} (\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta)^2 (\cos \theta_1 - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1)^2$$

▣ Si les ordres -3 et +3 sont diffractés

$$\mathcal{E}_{-3} = \left(\frac{\pi h}{\lambda} \right)^6 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_{-3}} (\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta)^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{3} \frac{\cos \theta + \frac{3\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} + 2 (\cos \theta_{-1} + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}) \right.$$

$$\left. (\cos \theta_{-2} + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-2}) - \cos \theta_{-1} (\cos \theta_{-1} + \frac{2\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}) \right]^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{+3} &= \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^6 \frac{\cos \theta}{\cos^3 \theta} \left(\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right)^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{3} \frac{\cos \theta - \frac{3\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} + 2 \left(\cos \theta_1 - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1\right) \right. \\ &\quad \left. \left(\cos \theta_2 - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_2\right) - \cos \theta_1 \left(\cos \theta_1 - \frac{2\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1\right) \right]^2 \end{aligned}$$

▣ Trois ordres (-1, 0, 1) seulement, sont diffractés

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-1} &= 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta_{-1}} \left(\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_{-1} + \left(2 \cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\cos \theta_{-1} - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}\right) + 2 \left(\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right) \left(\cos \theta_1 + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1\right) - \cos \theta_1 \left(\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right) \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\cos \theta_1 + \frac{2\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1}{\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 - \mathcal{E}_{-1} - \mathcal{E}_1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{+1} &= 4 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta_1} \left(\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_1 + \left(2 \cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\cos \theta_1 + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_1\right) + 2 \left(\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right) \left(\cos \theta_{-1} + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}\right) - \cos \theta_{-1} \left(\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right) \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\cos \theta_{-1} - \frac{2\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta_{-1}}{\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

▣ Deux ordres (-1, 0) seulement sont diffractés

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-1} &= \frac{4\pi h}{\lambda} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta_{-1}} \left(\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \left[\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta_{-1} + \frac{\cos \theta - \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta + \frac{\lambda}{D} \operatorname{tg} \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\sin \theta_1 + \frac{\lambda}{D}\right) \left(\sin \theta + \frac{3\lambda}{D}\right) - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 - \mathcal{E}_{-1}$$

Bibliographie

OUVRAGES

- 1 ANGOT
Compléments de Mathématiques (Masson, Paris, 1972)
- 2 BAKER G.A. Jr.
Essentials of Padé approximants (Academic Press, 1975)
- 3 BECKER
Théorie des électrons (Alcan, Paris, 1938)
- 4 BEVENSEE R.M.
Electromagnetic slow wave systems (Wiley, New-York, 1964)
- 5 BOUX R.
Les discontinuités du rayonnement électromagnétique (Dunod, Paris, 1966)
- 6 BRILLOUIN L.
Les tenseurs en mécanique et en élasticité (Masson, Paris, 1946)
- 7 BRILLOUIN L. et PARODI M.
Propagation des ondes dans les milieux périodiques (Masson, Paris, 1956)
- 8 BRUCK
Accélérateurs circulaires de particules (P.U.F. Paris, 1966)
- 9 CAMPBELL R.
Théorie générale de l'équation de Mathieu (Masson, Paris, 1955)

- 10 CARTAN E.
Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann (Gauthier-Villars, Paris, 1930)
- 11 COLLIN R.E.
Field theory of guided waves (Mc. Graw-Hill, New-York, 1960)
- 12 DENIS-PAPIN M. et KAUFMANN A.
Cours de calcul tensoriel (Albin Michel, Paris, 1956)
- 13 DUTHEIL R.
Initiation à la physique relativiste (Gauthier-Villars, Paris, 1969)
- 14 LAPOSTOLLE P.M. et SEPTIER L.A.
Linear accelerators (North-Holland, Amsterdam, 1970)
- 15 LICHNEROWICZ A.
Elements de calcul tensoriel (Armand Colin, Paris, 1950)
- 16 MITTRA R. and LEE S.W.
Analytical Techniques in the Theory of guided waves (Macmillan Company, New-York, 1971)
- 17 NIKIFOROV A. et OUVAROV V.
Elements de la théorie des fonctions spéciales (M.I.R. Moscou, 1974)
- 18 PETIAU G.
La théorie des fonctions de Bessel (CNRS, Paris, 1955)
- 19 POST E.J.
Formal structure of electromagnetics (North-Holland, Amsterdam, 1962)
- 20 SLATER J.C.
Microwave electronics (Dover, New-York, 1969)
- 21 STRATTON J.A.
Electromagnetic theory (Mc. Graw-Hill, New-York, 1941)
- 22 TOLSTOV
Fourier séries (Prentice Hall, New-Jersey, 1962)
- 23 TONNELAT M.A.
Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation (Gauthier-Villars, Paris, 1965)

ARTICLES

GUIDES PERIODIQUES

- 24 BERNARD J.
Thèse, série A, n° 201, Orsay, 1966
- 25 CHANDEZON J., CORNET G. et RAOULT G.
- 26 C.R. Acad. Sc. T. 276, pp 507-09, 1973
- 27 C.R. Acad. Sc. t. 277, pp 355-58, 1973
- 28 C.R. Acad. Sc. t. 277, pp 403-05, 1973
- 29 C.R. Acad. Sc. t. 279, pp 239-42, 1974
- 30 COMBE R.
Thèse A.D. 2920, Paris, 1956
- 31 COMBE R. et FEIX
Il Nuovo Cimento, Série X, Vol. 15, p. 760-773, 1960
- 32 CORNET G.
Thèse, série E, n° 154, Clermont-Ferrand, 1971
- 33 DURET R.
Thèse de 3ème Cycle, n° 332, Clermont-Ferrand, 1973
- 34 ELACHI C.
Proc. of IEEE, Vol. 64, n° 12, 1976
- 35 HESSEL
Proc. IEEE, Vol. 61, n° 2, pp 183-195, 1973

- 36 KIRSCHBAUM H.S. and TSU R.
I.R.E. Trans. microwave theorie tech., Vol. 7, pp 142-148, 1959
- 37 MARCUSE D. and DEROSIER R.
Bell. syst. Tech. J., Vol. 98, pp. 3217-3242, 1959
- 38 RAFIK and ASFAR O.
IEEE Trans. microwave théorie tech., 23, n  9, pp 728-734, 1975
- 39 SNYDER H.
Revue telecom., n  42/3, pp 281-301, 1967
- 40 SOLLFREY W.
J. Applied Phys., 22, n  7, pp 905-910, 1971
- 41 WALDRON R.A.
Quart. Journal Mech. and Applied Math., Vol. 11, n  4, pp 438-461, 1958
- 42 WALKINSHAW
J. Applied Phys. Vol. 20, 634, 1949

RESEAUX

- 43 GILEWICZ J.
Thèse Université de Provence, Marseille, 1977
- 44 IKUNO H. and YASUURA K.
IEEE, AP 21, 657, 1973
- 45 MAYSTRE D.
Thèse A.O.n 9545, 1974
- 46 Optics Commun., Vol. 2, n  7, 1970
- 47 Nouv. Rev. Optique appliquée, Vol. 2, n  2, p. 115-120, 1971
- 48 Optics commun., Vol. 5, n  2, 1972
- 49 Nouv. Rev. Optique appliquée, Vol. 5, n  2, pp 79-85, 1974
- 50 MEECHAM W.C.
J. Appl. Phys., 27, 361, 1956
- 51 MILLAR R.F.
Proc. Cambridge, Phil Soc., Vol.69, p. 175, 1971

- 52 NEVIERE M.
Thèse A.O., n° 11556, Marseille, 1974
- 53 NEVIERE M., CADILHAC M., PETIT R.
IEEE Trans. on ant. and prop., AP-21, n° 1, pp 37-46, 1973
- 54 NEVIERE M. et CADILHAC M.
Opt. Commun., Vol. 2, n° 5, 1970
- 55 Opt. Commun., Vol. 3, n° 6, 1971
- 56 NEVIERE M., CERUTTI-MAORI G. and CADILHAC M.
Opt. Commun., Vol. 3, n° 1, 1971.
- 57 PAVAGEAU J. et BOUSQUET J.
Opt. Acta, Vol. 17, n° 6, pp 469-478, 1970
- 58 PETIT R.
Thèse A.O. 1150, 1966
- 59 Rev. Opt., Vol. 45, pp 249-276 et 353-370, 1965
- 60 Rev. Opt., Vol. 6, pp. 245-276, 1966
- 61 Nouv. Rev. Optique, t. 6, n° 3, pp 129-135, 1975
- 62 MC. PHEDRAN R.
Thèse, Tasmania Hobart, 1973
- 63 LORD RAYLEIGH
Proc. Roy. Soc., A. 79, 399, 1907
- 64 STROKE G.W.
Rev. Opt., Vol 39, p. 350, 1960
- 65 URETSKY J.L.
Ann. Phys., Vol. 33, n° 3, pp 400-427, 1965
- 66 WIRGIN
Thèse A.O., 1429, 1967
- 67 Rev. Opt., Vol. 43, pp 449-462, 1964
- 68 C.R. Acad. Sc., T. 259, 5, p. 1486, 1964