



**HAL**  
open science

# Etude des effets d'un impact sur la rotation d'un corps céleste à l'aide d'un paramétrage multi-dimensionnel

Damien Gauchez

## ► To cite this version:

Damien Gauchez. Etude des effets d'un impact sur la rotation d'un corps céleste à l'aide d'un paramétrage multi-dimensionnel. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2005. Français. <NNT : >. <tel-02071415>

**HAL Id: tel-02071415**

**<https://hal.science/tel-02071415v1>**

Submitted on 18 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Corrigé

OBSERVATOIRE DE PARIS

THÈSE DE DOCTORAT

*Spécialité :*  
Dynamique des systèmes gravitationnels

ÉTUDE DES EFFETS D'UN IMPACT SUR  
LA ROTATION D'UN CORPS CÉLESTE  
A L'AIDE D'UN PARAMÉTRAGE  
MULTI-DIMENSIONNEL

Damien GAUCHEZ

Soutenue à l'Observatoire de Paris le 16 décembre 2005 devant le jury  
composé de :

Bruno Sicardy  
Anne Lemaître  
Tadashi Tokieda  
Patrick Michel  
Giovanni B. Valsecchi  
Alain Vienne  
Jean Souchay

*Président*  
*Rapporteur*  
*Rapporteur*  
*Examineur*  
*Examineur*  
*Membre invité*  
*Directeur de Thèse*

18 Janvier 2006  
20 05 OBSP 0125

OBSERVATOIRE DE PARIS

18 JAN. 2007

THÈSE DE DOCTORAT

*Spécialité :*  
Dynamique des systèmes gravitationnels

ÉTUDE DES EFFETS D'UN IMPACT SUR  
LA ROTATION D'UN CORPS CÉLESTE  
A L'AIDE D'UN PARAMÉTRAGE  
MULTI-DIMENSIONNEL

Damien GAUCHEZ



Soutenue à l'Observatoire de Paris le 16 décembre 2005 devant le jury  
composé de :

Bruno Sicardy  
Anne Lemaître  
Tadashi Tokieda  
Patrick Michel  
Giovanni B. Valsecchi  
Alain Vienne  
Jean Souchay

*Président*  
*Rapporteur*  
*Rapporteur*  
*Examineur*  
*Examineur*  
*Membre invité*  
*Directeur de Thèse*

## Remerciements

Il m'est impossible de débiter les remerciements sans penser en premier lieu à Jean Souchay qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de DEA. Il a bien voulu encadrer mon travail malgré la discontinuité de mes recherches due à mon travail d'enseignant à l'extérieur de l'Observatoire. Je le remercie notamment pour la qualité de son encadrement, pour l'analyse critique de mon travail ainsi que pour son enthousiasme constant. Grâce à sa bonne humeur coutumière, les instants passés en sa compagnie tout au long de ces années resteront inoubliables.

Mes remerciements également à Nicole Capitaine et à Philip Tuckey, directeurs successifs du SYRTE, qui m'ont autorisé à effectuer au sein du laboratoire une thèse dans des conditions particulières.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse, Anne Lemaître et Tadashi Tokieda, pour l'intérêt porté à ce document et pour le temps qu'ils ont consacré à sa lecture. Je remercie également Bruno Sicardy, Giovanni Valsecchi, Patrick Michel et Alain Vienne d'avoir bien voulu faire parti de mon jury. Je suis particulièrement reconnaissant à Anne Lemaître et Patrick Michel pour leurs commentaires qui m'ont permis d'améliorer le contenu et la présentation du document. Je remercie par ailleurs Patrick Michel pour sa disponibilité lors de nos visites, avec Jean Souchay, de l'Observatoire de Nice en avril 2003 et en février 2004.

Je tiens également à remercier Danielle Michoud et Ana Gomez de l'Ecole Doctorale ainsi que toute l'équipe du SYRTE, en particulier Pascale Baudoin pour son aide dans les démarches administratives, Jean-Baptiste Nguyen pour ses interventions techniques en informatique et Teddy Carlucci pour sa disponibilité et son aide précieuse dans l'utilisation d'outils informatiques.

Enfin je remercie tous mes proches, amis et parents, qui m'ont entouré durant ces années. En particulier, je remercie Marc Fouchard pour son soutien permanent.

## Résumé

Les cratères observés sur les différents corps du système solaire témoignent de l'intensité des événements collisionnels se produisant depuis leur formation. Ces corps ont été formés dans un processus d'agglomération ou après la fragmentation d'un corps parent après une collision destructrice. Ils ont ensuite subi au cours de leur histoire des impacts non destructeurs, qui ont entraîné des modifications de leurs caractéristiques initiales telles un changement de masse, de taille, de la vitesse angulaire de rotation ou de la direction de l'axe de rotation. L'objectif de cette thèse est d'étudier, à l'aide d'un modèle mathématique que nous avons développé, les variations rotationnelles (période, direction de l'axe de rotation) d'un corps subissant un tel impact.

Dans un premier temps, nous avons synthétisé les différentes approches actuellement utilisées pour étudier les effets de collisions qu'elles soient destructrices ou non. Ces approches sont basées sur des expériences effectuées en laboratoire, sur des simulations numériques ou sur des expressions analytiques. Elles nous ont fourni des informations sur les processus pouvant avoir lieu suite à un impact : formation d'un cratère, formation de fragments, caractéristiques de ces fragments, processus d'accrétion.

Nous avons ensuite développé un modèle d'étude des conséquences d'un impact d'un seul projectile sur la rotation d'une cible supposée de forme ellipsoïdale. Deux cas ont été considérés : le cas où le projectile s'accumule sur la cible sans qu'une quantité significative de masse ne soit éjectée (on nommera ce cas "accrétion") et le cas où la cible subit une érosion avec la formation d'éléments éjectés et d'un cratère. Pour ces deux types d'impacts, notre modélisation prend en compte un nombre important de paramètres tels que les tailles des corps en présence, leur composition, la position du point d'impact sur la cible (latitude et longitude), la vitesse d'impact, les angles d'impact c'est-à-dire les angles selon lesquels la particule rentre en collision sur la cible.

Ces études théoriques nous ont permis d'effectuer des simulations d'impacts en faisant varier les différents paramètres et en étudiant leurs influences sur les caractéristiques rotationnelles de la cible, en particulier sur la vitesse angulaire de rotation et sur la direction de l'axe de rotation. Le but de ces applications est de montrer que notre modélisation est particulièrement flexible et bien adaptée pour traiter tous les cas d'impacts non destructeurs possibles.

**Mots-clés :** Impact, modélisation, rotation, accrétion, cratérisation

## Abstract

Observations of craters on asteroids or planets attest that each of these bodies have its own collisional history. They have been formed in a process of accumulation or after the disruption of a parent body following a catastrophic collision. Then their initial properties have been modified by several collisional events which can involve a change of mass, of size and of rotational properties, such as the angular speed of rotation and the direction of the axis of rotation. The aim of this work is to study the effects on the rotational properties of these non catastrophic collisions, using a model which we developed.

First we synthesize the various approaches currently used to study the consequences of impacts whatever their type (catastrophic or not). Then we propose a full parametrization of an impact on a target body considered as ellipsoidal, including several geometrical parameters such as the longitude and the latitude of the impact point, the angles of impact that is to say the angles under which the particules enter in collision with respect the surface. Then we construct a model of the rotational evolution of the target body arising from a single impact, by taking into account the various parameters of our model. For that we consider two cases : in the first one, that we call "accretion", the projectile is simply stuck to the target without a significant amount of mass ejected. In the second case, the target body is eroded with formation of ejecta and of a crater.

These theoretical studies enable us to carry out simulations of impacts and then to evaluate the influences of the various parameters on the rotational evolution of the target, in particular the angular speed of rotation and the direction of the axis of rotation. Our purpose is to emphasize the fact that our formulas are particularly flexible and well suited to treat any specific impact case.

**Keywords :** Impact, modeling, rotation, accretion, craterisation

# Table des matières

<b>Notations et Définitions</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Processus d'Impacts : les Différentes Approches</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Les différentes méthodes . . . . .	21
1.2.1 Etude expérimentale . . . . .	22
1.2.2 Utilisation d'un code hydrodynamique . . . . .	22
1.2.3 Méthode analytique . . . . .	23
1.3 Etude du degré de fragmentation . . . . .	25
1.4 Fragmentations collisionnelles . . . . .	34
1.4.1 La formation de fragments . . . . .	35
1.4.2 Forme des fragments . . . . .	35
1.4.3 Vitesse des fragments . . . . .	36
1.4.4 Rotation des fragments . . . . .	36
1.5 Impact à cratérisation . . . . .	37
1.5.1 Introduction . . . . .	37
1.5.2 Phase de contact et de compression . . . . .	38
1.5.3 Formation de l'excavation . . . . .	39
1.5.4 Phase de modification . . . . .	42
1.6 Variation de la vitesse de rotation après un impact à cratérisation	44
1.6.1 Cas où l'impact est suivi d'une accréation . . . . .	45
1.6.2 Impact suivi d'une perte de masse . . . . .	48
1.6.3 Effet de la perte de masse sur la vitesse de rotation . .	53
1.6.4 Conclusion . . . . .	62
<b>2 Description d'une Nouvelle Modélisation</b>	<b>65</b>
2.1 Introduction . . . . .	65
2.2 Paramétrisation . . . . .	66
2.2.1 Choix du référentiel inertiel . . . . .	66

2.2.2	Repérage angulaire du point d'impact . . . . .	66
2.2.3	Détermination d'une base lié au point d'impact . . . . .	67
2.2.4	Repérage du point d'impact dans le repère de référence	68
2.2.5	Caractérisation de la vitesse d'impact . . . . .	73
2.3	Impact suivie d'une accréation . . . . .	75
2.3.1	Moment cinétique total juste avant l'impact . . . . .	75
2.3.2	Moment cinétique total juste après l'impact . . . . .	76
2.3.3	Vitesse de rotation du système après l'impact . . . . .	83
2.4	Impacts à cratérisation . . . . .	83
2.4.1	Dimensions d'un cratère . . . . .	84
2.4.2	Algorithme de cratérisation et constantes utilisées . . . . .	95
2.4.3	Hypothèses considérées dans la modélisation d'impacts à cratérisation . . . . .	96
2.4.4	Transfert du moment cinétique initial du projectile . . . . .	98
2.4.5	Tenseurs d'inertie de la cible après impact . . . . .	104
2.4.6	Vitesse de rotation après impact et formation d'un cratère . . . . .	118
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>121</b>
3.1	Introduction . . . . .	121
3.2	Conditions générales . . . . .	122
3.3	Etude d'approximations possibles . . . . .	124
3.3.1	Prise en compte du rayon du projectile . . . . .	124
3.3.2	Etude des composantes de la vitesse d'impact $V$ . . . . .	128
3.4	Impacts à cratérisation . . . . .	135
3.4.1	Influence de la vitesse d'impact $V$ . . . . .	135
3.4.2	Transfert du moment cinétique . . . . .	141
3.5	Comparaison entre accréation et cratérisation . . . . .	143
3.5.1	Contraintes sur la vitesse d'impact . . . . .	144
3.5.2	Influence de la taille du projectile et de la vitesse d'impact	147
3.5.3	Influence du lieu d'impact . . . . .	151
3.5.4	Influence des angles d'impact $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	156
3.5.5	Influence des paramètres $\eta$ et $\zeta$ . . . . .	161
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>165</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>

# Notations et Définitions

Variabes	Définition	Pages
$V$	Vitesse d'impact	19
$m$	Masse de l'impacteur	19
$r$	Rayon de l'impacteur supposé sphérique	19
$M$	Masse de la cible	19
$R$	Rayon d'une cible de forme sphérique	19
$f_l$	Degré de fragmentation	19
$G$	Constante gravitationnelle $G = 6.6742 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$	21
$V_l$	Vitesse de libération d'un corps sans rotation	21
$Q$	Energie d'impact	22
$\mu, \nu$	Constantes pour les lois d'échelle $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ et $\nu = \frac{1}{3}$	24
$\delta$	Masse volumique de l'impacteur	24
$n(\sigma)$	Distribution de Weibull donnant le nombre de défauts par unité de volume s'activant à une contrainte inférieure ou égale à $\sigma$	24
$n_0, \phi_0$	Paramètres de Weibull	24
$E$	Energie cinétique du projectile	25
$Q^*$	Energie critique d'impact	25
$S$	Densité d'énergie	26
$\rho$	Masse volumique de la cible	26
$Q_D^*$	Energie critique de dispersion	27
$\bar{Q}_D^*$	Moyenne des énergies critiques de dispersion effectuée sur les angles d'impact	28
$Q_0, B_0, a_0, b_0$	Constantes permettant d'exprimer $\bar{Q}_D^*$ en fonction de $R$	28
$K_0, c_0$	Constantes permettant d'exprimer $f_l$ en fonction de $Q$ selon Fujiwara <i>et al.</i> (1977)	31

Variabes	Définition	Pages
$s$	Constantes permettant d'exprimer $f_l$ en fonction de $Q$ selon Benz et Asphaug (1999)	32
$\theta$	Angle d'impact mesuré à partir de la normale de la cible au point d'impact ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ )	32
$\bar{f}_l$	Moyenne de $f_l$ effectuée sur les angles d'impact $\theta$	32
$a \geq b \geq c$	Dimensions d'une cible de forme ellipsoïdale	35
$\omega$	Vitesse de rotation de la cible	36
$\omega_{norm}$	Vitesse de rotation de la cible d'un corps normalisée par la vitesse de rotation la plus répandue dans une population contenant ce corps	36
$\tau$	Temps mis par le projectile pour parcourir dans la cible une distance égale à son diamètre	38
$D_{at}, R_{at}$	Diamètre, rayon d'un cratère après la phase d'excavation mesuré au niveau de la surface initiale	40
$H_{at}$	Hauteur d'un cratère après la phase d'excavation mesurée au niveau de la surface initiale	40
$D_t, R_t$	Diamètre, rayon d'un cratère après la phase d'excavation mesuré à partir des bords du cratère	41
$H_t$	Hauteur d'un cratère après la phase d'excavation mesurée à partir d'une ligne joignant les bords du cratère	41
$H, D$	Dimensions finales (hauteur, diamètre) d'un cratère	42
$l$	Paramètre d'impact	45
$\mathcal{H}, \mathcal{I}$	Moment cinétique et moment d'inertie de la cible	45
$\Delta\mathcal{H}, \Delta\mathcal{I}, \Delta\omega$	Variations de $\mathcal{H}, \mathcal{I}$ et de $\omega$ dues à l'impact	45
$\psi$	Colatitude du point d'impact	46
$\tilde{\zeta}$	Fraction du moment cinétique du projectile transféré vers la cible	47
$Y$	Résistance de la matière	48
$v$	Vitesse d'éjection d'éléments de la cible	48
$m_*( > v)$	Quantité de masse éjectée à une vitesse supérieure à $v$	48
$M_*$	Masse totale éjectée	48
$v_{min}$	Vitesse minimum d'éjection des éléments	48
$k_0$	$k_0 = \frac{9}{4}$	48
$L$	Coefficient de proportionnalité entre $M_*$ et l'énergie cinétique du projectile	49

Variables	Définition	Pages
$\tilde{\theta}$	Angle d'éjection d'un élément par rapport à la verticale	49
$\tilde{\phi}$	Azimut d'un élément par rapport à la verticale	49
$d^3M$	Densité de masse d'un élément éjecté	49
$v_l$	Vitesse de libération d'une cible en rotation	50
$R_{min}$	Rayon limite d'une cible sphérique pour laquelle tous les éléments éjectés s'échappent	51
$\delta M$	Quantité de masse éjectée réussissant à s'échapper	51
$R_a$	Rayon d'une cible sphérique pour laquelle $\delta M = m$	51
$\delta\mathcal{H}, \delta\mathcal{I}, \delta\omega$	Variations de $\mathcal{H}, \mathcal{I}, \omega$ dues à la perte de masse $\delta M$	53
$d^3\mathcal{H}$	Moment cinétique d'un élément de masse $d^3M$ éjecté	54
$v_{sud}, v_{est}, v_{vert}$	Composantes de la vitesse d'éjection d'un élément suivant les directions du sud, de l'est et de la verticale	54
$I$	Point d'impact sur la cible	55
$K$	Nom de la cible	65
$k$	Nom du projectile	65
$\mathcal{R}_0 = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	le repère de référence	66
$\Omega$	Centre de masse de la cible	66
$\lambda, \phi$	Longitude et latitude du point d'impact	66
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Base liée au point d'impact	67
$[P]$	Matrice de passage de $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	68
$(x_I, y_I, z_I)$	Coordonnées de I dans $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	68
$ p_I $	Distance du point d'impact $I$ à l'axe $(O, \vec{Z})$	68
$\mathcal{A}(\lambda)$	$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 \lambda}}$	69
$\Pi_I$	Plan méridien passant par le point d'impact $I$	70
$w(\lambda, \phi)$	$w(\lambda, \phi) = \sqrt{1 + \frac{c^2 - \mathcal{A}(\lambda)^2}{\mathcal{A}(\lambda)^2} \sin^2 \phi}$	71
$\epsilon(\lambda)$	$\epsilon^2(\lambda) = \frac{\mathcal{A}^2(\lambda) - c^2}{\mathcal{A}^2}$	72
$\vec{n}$	Vecteur normal au plan tangent à la cible au point d'impact	73
$\alpha, \beta$	Angles d'impact	73

Variables	Définition	Pages
$V_n, V_t$	Composantes de la vitesse d'impact suivant respectivement $(I, \vec{i})$ et $(I, \vec{j}, \vec{k})$	73
$A, B, C$	Moments d'inertie de la cible $K$ par rapport aux axes principaux d'inertie	75
$[J_0]$	Tenseur d'inertie de la cible avant l'impact	75
$[\Omega_0]$	Vecteur instantanée de rotation de la cible avant l'impact	75
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	Composantes de $[\Omega_0]$ dans $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	75
$[S_n], [S_t]$	Composantes du moment cinétique du projectile suivant respectivement $(I, \vec{i})$ et $(I, \vec{j}, \vec{k})$	76
$[J_1]$	Tenseur d'inertie de la cible après l'impact	76
$[\Omega_1]$	Vecteur instantanée de rotation de la cible après l'impact	76
$I_{xx}^k, I_{yy}^k, I_{zz}^k$	Moments d'inertie du projectile $k$ par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	77
$I_{xy}^k, I_{xz}^k, I_{yz}^k$	Produits d'inertie du projectile $k$ par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	77
$O'$	Point d'intersection entre l'axe $(I, \vec{i})$ et le plan $(O, \vec{X}, \vec{Y})$	77
$O''$	Centre de masse du projectile	78
$d_{\vec{i}}$	Distance entre les axes $(O, \vec{i})$ et $(O', \vec{i})$	78
$d_{\vec{j}}$	Distance entre les axes $(O, \vec{j})$ et $(O', \vec{j})$	78
$d_{\vec{k}}$	Distance entre les axes $(O, \vec{k})$ et $(O', \vec{k})$	78
$(x_{O''}, y_{O''}, z_{O''})$	Coordonnées de $O''$ dans le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	79
$(X_{O''}, 0, Z_{O''})$	Coordonnées de $O''$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	80
$Id_3$	Matrice identité $3 \times 3$	82
$\mathcal{V}$	Volume du cratère formé après l'impact	85
$g$	Gravité à la surface de la cible	85
$\pi_{\mathcal{V}}$	$\pi_{\mathcal{V}} = \frac{\rho \mathcal{V}}{m}$	85
$\pi_2$	$\pi_2 = \frac{gr}{V^2}$	85
$\pi_3$	$\pi_3 = \frac{Y}{\rho V^2}$	85
$K_1, K_2$	Coefficients permettant d'exprimer $\pi_{\mathcal{V}}$ en fonction de $\pi_2, \pi_3$ et de $\frac{\rho}{\delta}$	86
$n$	$n = \frac{3\mu}{2+\mu}$	86
$\bar{Y}$	$\bar{Y} = K_2 Y$	87
$\bar{\pi}_3$	$\bar{\pi}_3 = \frac{\bar{Y}}{\rho V^2}$	87

Variables	Définition	Pages
$r_e$	Rayon final d'un cratère simple mesuré au niveau de la surface initiale	89
$h_e$	Profondeur finale d'un cratère simple mesurée à partir de la surface initiale	89
$r_b$	Rayon final d'un cratère simple mesuré à partir des bords du cratère	89
$h_b$	Profondeur finale d'un cratère simple mesurée à partir d'une ligne joignant les bords du cratère	89
$h$	$h = h_b - h_e$	89
$R_e$	Rayon final d'un cratère complexe mesuré au niveau de la surface initiale	92
$H_e$	Profondeur finale d'un cratère complexe mesurée à partir de la surface initiale	92
$R_b$	Rayon final d'un cratère complexe mesuré à partir des bords du cratère	92
$H_b$	Profondeur finale d'un cratère complexe mesurée à partir d'une ligne joignant les bords du cratère	92
$R^*$	Rayon de transition entre un cratère simple et un cratère complexe	93
$\eta, \zeta$	Fraction de quantité de mouvement du projectile transférée vers la cible suivant des directions normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact	98
$M'$	Masse de la cible après l'impact	98
$v_n, v_t$	Composantes normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact de la vitesse d'impact $V$	98
$v'_n, v'_t$	Composantes normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact de la vitesse de la cible après l'impact	98
$(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$	Base liée au point d'impact. Le plan $(I, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$ est le plan tangent en $I$ à la surface de la cible	100
$(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$	$\vec{I}_2 = \frac{1}{\ \vec{I}_1\ } \vec{I}_1, \vec{J}_2 = \frac{1}{\ \vec{J}_1\ } \vec{J}_1, \vec{K}_2 = \frac{1}{\ \vec{K}_1\ } \vec{K}_1$	100
$[Q]$	Matrice de passage de la base $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ à la base $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$	101
$M^{ej}$	Masse totale de la matière éjectée de la cible juste après l'impact et s'échappant	102
$m^{ej}$	Quantité de matière du projectile qui s'est transformée en vapeur	102
$\vec{v}^{ej}$	Vitesse du centre de masse de tous les éléments éjectés	102

Variables	Définition	Pages
$v_n^{ej}, v_t^{ej}$	Composantes normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact de la vitesse $\vec{v}^{ej}$	102
$\eta_0, \zeta_0$	Paramètres permettant d'exprimer $\eta, \zeta$ en fonction de l'angle d'impact $\theta$	103
$[J_{crat}]$	Tenseur d'inertie d'un solide uniforme ayant la même forme que celle du cratère formé	105
$m_{crat}$	Masse pouvant être contenue dans le cratère	105
$r_0, h_0$	Rayon et hauteur de la calotte sphérique représentant le cratère	105
$R_0$	Rayon de la sphère dont la calotte sphérique représentant le cratère est issue	105
$\tilde{\Omega}$	Centre de la sphère dont la calotte sphérique représentant le cratère est issue	105
$\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}}$	$\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}} = (\tilde{\Omega}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	105
$(\tilde{r}, \Theta, \varphi)$	Coordonnées sphériques d'un point de la calotte sphérique	106
$\varphi_0$	$\sin \varphi_0 = -\frac{R_0 - h_0}{R_0}$	106
$r_{min}$	$r_{min} = \frac{R_0 - h_0}{\sin \varphi}$	106
$\mathcal{R}_G$	$\mathcal{R}_G = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $G$ centre de masse du corps de la forme d'une calotte sphérique représentant le cratère	107
$I_{xx}^{crat}, I_{yy}^{crat}, I_{zz}^{crat}$	Moments d'inertie de la calotte sphérique par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $\mathcal{R}_G$	107
$I_{xy}^{crat}, I_{xz}^{crat}, I_{yz}^{crat}$	Produits d'inertie de la calotte sphérique par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $\mathcal{R}_G$	107
$A_{crat}, B_{crat}, C_{crat}$	Moments d'inertie de la calotte sphérique par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}}$	109
$J_{11}, J_{22}, J_{33}$	Moments d'inertie de la calotte sphérique par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	116
$J_{12}, J_{13}, J_{23}$	Tenseurs d'inertie de la calotte sphérique par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	118
$T_0$	Période de rotation de la cible avant l'impact	122
$T_1$	Période de rotation de la cible après l'impact	125
$\tilde{\Omega}_1, \tilde{T}_1$	Vitesse et période de rotation de la cible après l'impact en négligeant la taille du projectile	125
$\Delta \tilde{T}_1$	$\tilde{T}_1 - T_1$	125
$\tilde{\Omega}_1, \tilde{T}_1$	Vitesse et période de rotation de la cible après l'impact en supposant $\vec{v}_n = \vec{V}_n$ et $\vec{v}_t = \vec{V}_t$	128
$\Delta \tilde{T}_1$	$\tilde{T}_1 - T_1$	128

# Introduction

Les cratères observés sur les différents corps du système Solaire témoignent de l'intensité des événements collisionnels se produisant depuis leur formation. Ces corps ont été formés dans un processus d'agglomération ou après la fragmentation d'un corps parent après une collision destructrice. En effet, au début de sa formation il y a 4,5 milliards d'années, le système Solaire se composait vraisemblablement d'un grand nombre de petits corps de diamètre variant de quelques kilomètres à quelques centaines de kilomètres de diamètre, appelés planétésimaux et formés par agglomération de grains de poussière. Suite à des collisions mutuelles à des vitesses relatives proches de leur vitesse de libération (environ 10 m/s selon Safronov (1969)), les planétésimaux se sont ensuite agrégés sous l'effet de la gravitation. On appelle *accrétion* ce processus d'agglomération à l'origine de la formation de corps devenant de plus en plus massifs pouvant devenir des planètes telluriques.

Deux théories s'opposent sur la croissance des planétésimaux : selon Safronov (1969), tous les corps grandissent de manière ordonnée à la même vitesse en attirant des planétésimaux plus petits situés dans leur voisinage alors que les premières simulations numériques effectuées par Greenberg *et al.* (1978) suggèrent que seuls les corps les plus importants grandissent, devenant de plus en plus massifs en attirant progressivement par leur gravité croissante les petits planétésimaux qui les entourent. Cependant la théorie de Safronov (1969) ne permet pas d'aboutir à la formation d'une planète en moins de 100 millions d'années comme cela a été le cas pour la Terre alors que la croissance des planétésimaux selon la théorie de Greenberg *et al.* (1978) est accompagnée d'une accélération du phénomène d'accrétion suivant un effet "boule de neige" et permet de former en 100 000 ans un corps d'un centième de masse terrestre à une unité astronomique du Soleil. Les astéroïdes ou les comètes sont considérés comme issus de restes de planétésimaux ou d'un processus d'accrétion inachevé.

L'accroissement des planétésimaux, évoqué précédemment, aboutit à la formation de protoplanètes, qui sont entourées par un nombre décroissant de corps. Les accrétions diminuent ainsi fortement. Des collisions violentes ont

alors lieu entre protoplanètes. Le bombardement des jeunes corps par un ensemble de petits objets est intense et affecte l'ensemble de leur surface : il va durer ainsi environ 700 millions d'années. Ces collisions entraînent soit la formation d'un cratère sur le corps impacté résultant de l'explosion due à l'impact, soit la cassure et la fragmentation des corps en présence, formant ainsi de nouveaux corps pouvant se réaccréter.

Des témoignages de ces collisions continues dans notre système Solaire sont donnés par la Lune, Mercure ou Mars. Grâce à la datation en laboratoire des échantillons rapportés au cours des différentes missions effectuées sur le satellite de la Terre, Neukum *et al.* (1975) ont pu déterminer le taux de cratérisation, c'est-à-dire le nombre de cratères par unité de surface, en fonction de la date de leur formation (voir figure 1).

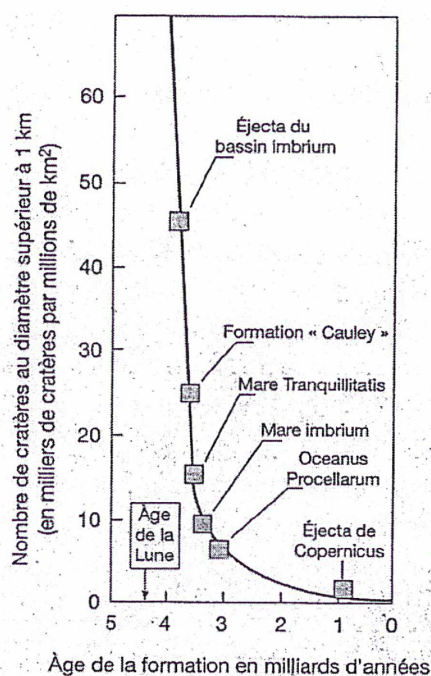


FIG. 1: Nombre de cratères lunaires d'un diamètre supérieur à un kilomètre par unité surface en fonction de leur âge. (Source : Brahic, A., Hoffert, M., Schaaf, A. et Tardy, M., 1999 : 'Sciences de la Terre et de l'Univers', Ed. Vuibert)

La figure 1 montre l'intensité du bombardement au cours du premier milliard d'années de la formation du système Solaire après la formation des planètes. Depuis 3,5 milliards d'années jusqu'à aujourd'hui, le taux de

cratérisation a décré et demeure plus ou moins constant.

Les collisions continuent mais sont maintenant beaucoup plus rares. Par exemple la probabilité de collision d'un corps de plus de 5 km de diamètre sur la Terre a été estimée par Morrison et Chapman (1990) à un impact tous les 10 millions d'années, et pour un corps de 1 km de diamètre à un impact tous les 300 000 ans. Plus récemment, Morbidelli *et al.* (2002) ont estimés que la Terre devait subir tous les  $63\,000 \pm 8\,000$  ans (respectivement tous les  $925\,000 \pm 121\,000$  ans) la collision d'un projectile ayant une énergie cinétique de 1 000 mégatonnes TNT (respectivement de 100 000 mégatonnes TNT) ce qui correspond à un projectile de  $277 \pm 7$  mètres (respectivement de  $1287 \pm 33$  mètres) de diamètre. Des objets rentrent certes en collision chaque jour avec la Terre mais leur taille est limitée : la probabilité de collision d'un corps de 10 m de diamètre est d'un impact tous les 10 ans selon Morrison et Chapman (1990) et beaucoup parmi eux sont détruits en pénétrant dans l'atmosphère.

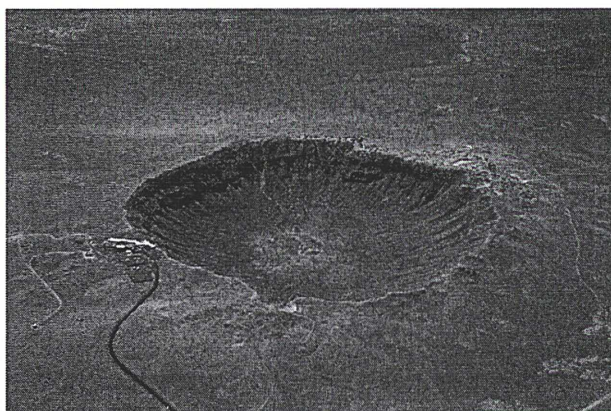


FIG. 2: Image du Meteor Crater situé en Arizona (USA), formé il y a 49 000 ans et dont le diamètre est de 1.2 km et la profondeur de 200 m. Ce cratère est la conséquence de l'impact à une vitesse de 12 km/s d'un astéroïde à l'origine de 100 m de diamètre désintégré à 85% dans l'atmosphère.

Tous les corps du système solaire ont donc subi au cours de leur histoire des impacts. Certains destructeurs, d'autres pas. Les impacts non destructeurs ont entraîné des modifications des caractéristiques initiales du corps impacté telles un changement de masse, de taille, de la vitesse angulaire de rotation ou de la direction de l'axe de rotation. On pense, par exemple, que l'inclinaison de l'axe de rotation de Uranus de  $90^\circ$  serait due à une telle collision avec un corps céleste, tôt dans l'histoire du système solaire.

L'objectif de cette thèse est d'étudier, à l'aide d'un modèle mathématique que nous développerons, les variations rotationnelles (période, direction de l'axe de rotation) d'un corps subissant un impact non destructeur.

Dans le premier chapitre de la thèse, nous synthétiserons les différentes approches actuellement utilisées pour étudier les effets de collisions qu'elles soient destructrices ou non. Ces approches sont basées sur des expériences effectuées en laboratoire, sur des simulations numériques ou sur des expressions analytiques. Nous évoquerons les informations que ces approches nous fournissent sur les processus pouvant avoir lieu suite à un impact : formation d'un cratère, formation de fragments, caractéristiques de ces fragments, processus d'accrétion.

Dans le deuxième chapitre, nous développerons un modèle d'étude des conséquences d'un impact d'un seul projectile sur la rotation d'une cible supposée de forme ellipsoïdale. Deux cas sont considérés : le cas où le projectile s'accumule sur la cible sans qu'une quantité significative de masse ne soit éjectée (on nommera ce cas "accrétion") et le cas où la cible subit une érosion avec la formation d'éléments éjectés et d'un cratère. Pour ces deux types d'impacts, notre modélisation prendra en compte un nombre important de paramètres tels que les tailles des corps en présence, leur composition, la position du point d'impact sur la cible (latitude et longitude), la vitesse d'impact, les angles d'impact c'est-à-dire les angles selon lesquels la particule rentre en collision sur la cible.

Ces études théoriques permettront d'effectuer, dans le troisième chapitre, des simulations d'impacts en faisant varier les différents paramètres et en étudiant leurs influences sur les caractéristiques rotationnelles de la cible, en particulier sur la vitesse angulaire de rotation et sur la direction de l'axe de rotation. Le but de ces applications est de montrer que notre modélisation est particulièrement flexible et bien adaptée pour traiter tous les cas d'impacts non destructeurs possibles.

# Chapitre 1

## Processus d'Impacts : les Différentes Approches

### 1.1 Introduction

On considère dans cette partie l'impact à une vitesse  $V$  d'un projectile sphérique de masse  $m$  et de rayon  $r$  sur une cible sphérique (un astéroïde ou une planète) de masse  $M$  et de rayon  $R$ . Les conséquences d'une telle collision dépendent d'un ensemble de facteurs : la vitesse de collision, l'angle d'impact mais aussi la composition chimique, la structure physique et la taille des deux corps. Les cas extrêmes, d'une part celui d'un rebond inélastique où les deux corps restent intacts et, d'autre part celui d'une fragmentation complète de la cible peuvent se rencontrer.

Dans la ceinture d'astéroïdes, les collisions à vitesse relative importante produisent différents résultats dépendant principalement du rapport de masse entre le projectile et la cible et de leur structure interne (degré de porosité, par exemple). On observe deux types de situation : d'une part, des rapports de masses petits aboutissent à la formation de cratères sur la cible et à l'éjection de fragments. Alors selon la vitesse d'éjection de ces fragments et la taille de la cible, une partie ou tous les fragments s'échappent de l'influence gravitationnelle de la cible ou bien sont capturés. D'autre part, des rapports de masse plus grands entraînent un éclatement de la cible. Selon les données expérimentales, la transition entre les deux situations, qui dépend de différentes propriétés physiques, est mince. Un paramètre simple permet de mesurer le degré de fragmentation. Il est donné par  $f_l$ , le rapport entre la masse du fragment le plus important après la collision et la masse initiale de la cible.

Pour les collisions telles que  $f_l > 0.5$ , c'est-à-dire telles que la masse du plus grand fragment est supérieure à la moitié de la masse initiale de la cible, on admet que le corps initial n'est pas détruit et que l'on est dans la situation de la formation d'un cratère et de l'éjection de fragments. Ces collisions seront appelées "impacts à cratérisation". Bien que pour ce type d'impact, le projectile est pulvérisé dans la plupart des cas, de telles collisions peuvent s'accompagner d'une accréation de l'impacteur, c'est-à-dire qu'après la collision l'impacteur reste "collé" à la surface de la cible. Des éléments peuvent également s'éjecter voire s'échapper de l'influence gravitationnelle de la cible. Nous avons le témoignage de telles collisions dans le système solaire en observant les cratères sur différents corps : sur la Lune, dont certains cratères sont des traces d'impact de projectiles de l'ordre de 100-200 km de diamètre formant des bassins de plus de 1000 km de diamètre ; sur la Terre avec par exemple le Meteor Crater ou Cratère Barringer en Arizona de 1.2 km de diamètre et de 200 m de profondeur (voir la figure 2 de l'introduction de la thèse), sur Mercure avec le bassin Carolis, ou sur les satellites de planètes extérieures tels que sur les satellites de Saturne, Mimas (voir fig. 1.1) et Thethys. L'accroissement des données observationnelles permet également de recueillir le témoignage de tels événements sur des astéroïdes, comme par exemple Eros et Mathilde.

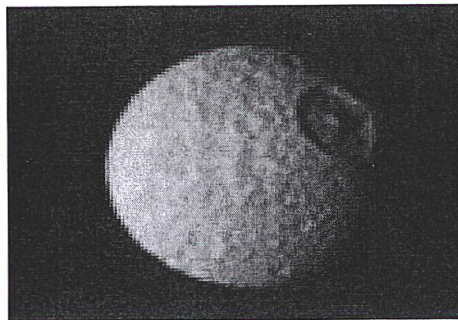


FIG. 1.1: Image de Mimas, un des satellites de Saturne, prise lors de la mission spatiale Voyager 2 le 25-08-1981. Le cratère Herschel, le plus important, a un diamètre de 130 km soit un tiers du diamètre de Mimas, et une profondeur de 10 km. Source : Nasa/JPL, ID Number :P23210

On parlera de fragmentation collisionnelle lorsque le fragment le plus important résultant de la collision contient moins de 50% de la masse initiale de la cible (autrement dit  $f_l \leq 0.5$ ). Ce type de collisions correspond à un choc violent entre les deux corps et a lieu lorsque les vitesses d'impact sont

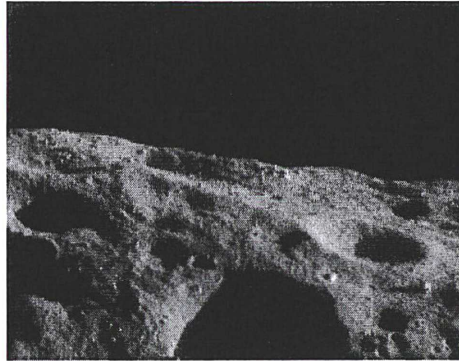


FIG. 1.2: Image de l'astéroïde 433 Eros prise par la sonde NEAR Shoemaker le 6-08-2000 à une altitude de 49 km. Source : Nasa Image ID Number :NEAR 0140941905

grandes et le rapport des masses des deux corps élevé. Dans ce cas, une partie ou toute la cible a éclaté suite à l'onde de choc générée par l'impact mais les éléments éjectés ne se sont pas nécessairement dispersés. Certains peuvent éventuellement se réaccumuler pour former de nouveaux corps, des "rubble piles". Des éléments éjectés peuvent également ne pas s'échapper de la cible lorsque leur vitesse relative est inférieure à la vitesse de libération de la cible  $V_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ , en particulier lorsque la cible est importante, ce qui entraîne un champ de gravité significatif.

Lorsque plus de 50 % de la masse initiale de la cible est éjecté et se disperse, on parlera de destruction catastrophique.

Avant de décrire les modélisations basées sur les données expérimentales et les résultats des simulations numériques susceptibles de reproduire les phénomènes de collision dans le cas d'impacts à cratérisation ou d'impacts destructeurs, nous allons étudier les différentes approches permettant d'étudier le degré de fragmentation  $f_l$ .

## 1.2 Les différentes méthodes

Trois approches différentes mais complémentaires permettent d'étudier à la fois les différents processus et les conséquences d'un impact. Elles ont cependant chacune leurs propres imperfections. Nous les présentons dans la suite :

### 1.2.1 Etude expérimentale

Tout d'abord, des expériences en laboratoire ayant pour objectif de reproduire sur une petite échelle (centimétrique) le phénomène de collision destructrice entre des corps de la taille d'astéroïdes de plusieurs kilomètres, ont permis de donner des informations sur ce type d'impact. De vrais impacts ont été réalisés par des tirs à grandes vitesses de petits projectiles sur des cibles et, dans d'autres expériences, des simulations ont été effectuées en plaçant des charges explosives sur la surface d'une cible (voir Fujiwara *et al.*, 1989 et Giblin *et al.*, 1994a,b). Les résultats de ces expériences donnent des informations sur les distributions des tailles, formes et vitesses des fragments éjectés et dans certains cas, sur leur rotation après l'impact. Les relations entre ces propriétés physiques et l'énergie d'impact  $Q$  (c'est-à-dire le quotient de l'énergie cinétique du projectile sur la masse  $M$  de la cible) ou avec les caractéristiques générales de la cible (composition, structure interne,...) ont été analysées. Les résultats de ces études sont bien sûr essentiellement empiriques et des difficultés majeures sont rencontrées lorsqu'une extrapolation aux astéroïdes est entreprise. Il est en effet difficile d'établir comment les relations trouvées dans le cas d'expériences impliquant des cibles de quelques centimètres de diamètre peuvent se généraliser à des corps ayant des masses beaucoup plus importantes. Les conséquences d'un impact sur une petite cible sont gouvernées par la résistance de la matière alors que sur un astéroïde important elles dépendent des forces gravitationnelles. De plus, les propriétés physiques de cibles centimétriques (par exemple, la distribution de défauts naturels) pourraient s'avérer bien différentes de celles des astéroïdes.

### 1.2.2 Utilisation d'un code hydrodynamique

Une autre approche pour étudier les processus intervenant lors d'une collision consiste à effectuer des simulations numériques basées sur des principes physiques fondamentaux en utilisant la puissance de calcul de plus en plus grande des ordinateurs. Un code a été développé par Benz et Asphaug (1994) simulant la phase de fragmentation reproduisant les résultats obtenus sur une petite échelle en laboratoire.

Comme la phase de fragmentation se déroule en un temps rapide de telle sorte que la gravitation n'a pas le temps d'agir sur la dynamique des fragments, deux codes numériques différents successifs sont utilisés pour la modélisation des collisions aux échelles des astéroïdes. Le premier est un code hydrodynamique de fracture de corps solide appelé "hydrocode" à trois dimensions qui calcule la fragmentation de la cible due à l'impact. Développé par Benz et Asphaug (1994), ce code résout les équations hydrodynamiques

classiques de conservation (masse, quantité de mouvement, et énergie) en considérant également une équation d'état reliant la contrainte (pression), la déformation (densité), et la température (énergie). Ces équations permettent de déterminer par le calcul la propagation de l'onde de choc créée par la collision tout en reproduisant les comportements transitoires et non-linéaires entre les trois types d'ondes (élastique, plastique, de choc) se propageant dans la cible. Afin d'évaluer les contraintes et les déformations pouvant entraîner une fragmentation, un modèle de fracture est également considéré dans le code hydrodynamique. Elle permet de calculer la propagation des fissures dans le corps subissant l'impact, entraînant la création de fragments. Ce code se base sur la méthode numérique SPH ("Smooth Particle Hydrodynamics") qui décrit la cible par un ensemble fini de points (d'une dizaine de milliers à une centaine de milliers), appelés particules. Les quantités hydrodynamiques (pression, densité, vitesse,...) sont connues en ces points qui se déplacent. La répartition spatiale de ces points étant donnée, ce premier code permet de calculer leur évolution spatiale. Il s'agit donc d'un code Lagrangien, qui, à l'inverse des codes Eulériens, suit l'histoire des particules, ce qui est essentiel car le degré de dommage d'une particule dépend de son passé. Une étude détaillée incluant la description des différentes équations et des différents modèles utilisés ainsi qu'une méthode de réalisation explicite des défauts est effectuée par Benz et Asphaug (1994).

Dans un deuxième temps, un code N-corps parallèle permet de simuler l'interaction gravitationnelle des nombreux fragments résultant de la fracture. Ce code tient compte des possibles réaccumulations de fragments à l'origine de la formation des "rubble piles" (agrégats liés par la gravitation).

L'hydrocode a permis de prédire avec une grande précision les tailles, les positions et les vitesses des fragments les plus importants formés dans les expériences d'impact en laboratoire. En tenant compte du rôle de la gravitation, la modélisation utilisant les deux codes a également permis de reproduire les principales caractéristiques des familles d'astéroïdes qui se sont formées suite à la destruction d'un corps parent. Pour plus de détails sur cette méthode et son champ d'application, on pourra également consulter les articles de Michel *et al.* (2003, 2004a,b)

Cependant cette méthode peut être limitée par la difficulté à définir et à modéliser correctement les réactions à la collision de divers matériaux géologiques en fonction de la variété des paramètres en présence.

### 1.2.3 Méthode analytique

Une troisième approche consiste à développer des modèles analytiques en établissant, à partir des expériences en laboratoire, des observations des

astéroïdes et aussi de simulations numériques, des relations entre les paramètres en jeu tels que la taille et la composition des corps, la vitesse d'impact, la gravité.

Une telle approche a été utilisée par Housen et Holsapple (1990) et Holsapple (1993). Elle est basée sur l'idée qu'en dehors d'une région très proche du lieu d'impact, les caractéristiques du projectile (dimensions, vitesse, masse volumique) n'ont pas d'effets importants de telle sorte que l'on peut considérer que l'effet de l'impact sur la cible peut être représenté par une solution point-source en énergie et quantité de mouvement c'est-à-dire par la limite de solutions correspondant à des projectiles de plus en plus petits avec des vitesses de plus en plus grandes. Cette solution est alors mesurée à l'aide d'un paramètre noté  $C$  qui caractérise le projectile et qui s'exprime en fonction de sa taille  $r$ , de sa masse volumique  $\delta$ , et de la vitesse d'impact  $V$  de la manière suivante :

$$C \propto rV^\mu \delta^\nu \quad (1.1)$$

où  $\mu$  et  $\nu$  dépendent de la matière de la cible. Dans le cas où  $\mu = \frac{2}{3}$  et  $\nu = \frac{1}{3}$ , cette mesure  $C$  est proportionnelle à la racine cubique de l'énergie cinétique du projectile et correspond à une loi d'échelle sur l'énergie supposant que les caractéristiques du projectile sont importantes uniquement dans la détermination de l'énergie d'impact  $Q$  et n'ont pas d'effets sur les conséquences de la collision. Le cas où  $\mu = \frac{1}{3}$  et  $\nu = \frac{1}{3}$  correspond à une loi d'échelle sur la quantité de mouvement. D'une manière générale,  $\mu$  dépend de la porosité de la cible et est compris entre  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{3}$ . L'exposant  $\nu$  est proche de la valeur  $\frac{1}{3}$ .

Cette première idée n'est cependant plus valable pour des impacts avec une vitesse de collision faible ou avec des corps de taille similaire. Elle est ensuite associée, pour les petits corps, à l'idée que la fragmentation d'une cible résulte de l'activation, de la propagation et de la coalescence de défauts internes (voir Housen et Holsapple, 1990). Le degré de diminution de la résistance de la cible avec l'augmentation de sa taille (plus un corps est important, moins il est résistant) est lié à la donnée d'une distribution des défauts. Cette distribution, dépendant du matériau, donne le nombre de fissures par unité de volume s'activant à un seuil de contrainte critique inférieur à une contrainte fixée, selon une loi de puissance, appelée distribution de Weibull, donnée par :

$$n(\sigma) = n_0 \sigma^{\phi_0} \quad (1.2)$$

où  $\sigma$  est la contrainte et  $n(\sigma)$  est le nombre de défauts par unité de volume s'activant à un seuil de contrainte inférieur ou égal à  $\sigma$ .  $n_0$  et  $\phi_0$  sont les paramètres de Weibull qui dépendent du matériau. La distribution de Weibull est validée par comparaison avec des résultats de collisions effectuées

en laboratoire sur différents types de matériaux poreux ou non poreux (voir Holsapple et Schmidt, 1987, Holsapple, 1993, Housen et Holsapple, 1999) et permet de déterminer, par extrapolation, les conséquences de l'impact pour des échelles de taille variées. D'autres paramètres sont également considérés, en particulier pour les corps plus importants, afin de prendre en compte les forces gravitationnelles qui deviennent prépondérantes selon la taille de la cible. Des lois d'échelle sont déduites permettant d'exprimer par exemple le degré de fragmentation ou le volume d'un cratère résultant d'un impact en fonction des caractéristiques des corps en présence (masses volumiques, rayons, vitesse d'impact, gravité à la surface de la cible, résistance de la matière). Cependant ces relations, supposées valides à toute échelle, peuvent paraître comme idéalisées pour rendre compte des conséquences d'un impact. En particulier, elles supposent une uniformité du processus et une continuité structurelle qui n'ont pas lieu en réalité.

Ces trois approches ont permis d'étudier le degré de fragmentation d'une cible au cours d'un impact.

### 1.3 Etude du degré de fragmentation

Le degré de fragmentation,  $f_l$ , est défini comme le rapport entre la masse du fragment le plus important après la collision et la masse initiale de la cible. Il dépend de plusieurs paramètres : de l'énergie d'impact  $Q$  définie comme le rapport de l'énergie cinétique  $E$  du projectile par la masse  $M$  du corps impacté, de la structure interne de la cible, de la composition des corps en présence. La transition entre les impacts à cratérisation et les impacts destructeurs est caractérisée, par convention, par  $f_l = 0.5$ . Dans ce cas, le fragment le plus massif contient 50 % de la masse initiale de la cible. Les plus petites valeurs de  $f_l$  correspondent à des impacts destructeurs et les plus grandes à des impacts à cratérisation. Mais la transition adoptée à une valeur de  $f_l$  de 0.5 est brutale et le régime de cratérisation correspond plutôt à des valeurs de  $f_l$  supérieures à 0.8. La distinction entre ces deux types d'impacts est nécessaire dans la mesure où ils sont régis par des processus physiques différents.

Une étude importante et difficile consiste, pour une valeur du degré de fragmentation  $f_l$  fixée, à déterminer en fonction de la taille de la cible et de la vitesse d'impact, l'énergie d'impact  $Q$  nécessaire pour obtenir cette valeur. On considérera en particulier le cas où  $f_l = 0.5$ . A cet effet, on définit comme l'énergie critique d'impact,  $Q^*$ , l'énergie spécifique minimum nécessaire pour

fragmenter un corps de sorte que le plus grand fragment résultant possède la moitié de la masse du corps initial. La densité d'énergie correspondante,  $S$ , est alors définie par :

$$S = \rho Q^* \quad (1.3)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique de la cible.  $Q^*$  s'exprime en énergie par unité de masse et  $S$  en énergie par unité de volume.  $Q^*$  est déterminée soit expérimentalement, soit à l'aide de simulations numériques.

Plusieurs études expérimentales d'impacts à vitesses variables sur des cibles de compositions différentes (cf Davis, 1998 et Holsapple *et al.*, 2002) ont permis d'obtenir des valeurs de  $Q^*$  pour des cibles composées de glace ( $Q^* = 8.0 \times 10^4$  erg/g), de silicates ( $Q^* = 3.2 \times 10^6$  erg/g) et de fer ( $Q^* = 6.8 \times 10^8$  erg/g). Ces résultats, obtenus sur des cibles ayant une taille d'une dizaine de centimètres au maximum, montrent que l'énergie critique d'impact  $Q^*$  dépend du matériau considéré. Cependant les impacts planétaires ont lieu à des échelles complètement différentes de celles des expériences réalisées en laboratoire. Peut-on alors généraliser les résultats obtenus expérimentalement et supposer que  $Q^*$  est indépendant de la taille de la cible ou de la vitesse d'impact ? Davis *et al.* (1995) ont montré que l'hypothèse, selon laquelle  $Q^*$  ne dépend pas de la taille de la cible, aboutit à des résultats en contradiction avec les observations si on essaie de calculer la distribution en taille de familles d'astéroïdes c'est-à-dire d'astéroïdes issus du même corps parent et dispersés suite à un impact. En effet, en supposant que  $Q^*$  ne dépend pas de la taille de la cible, on obtient des corps de familles d'astéroïdes avec une taille beaucoup plus petite que celle observée.

Supposer, pour des petits corps, que  $Q^*$  est indépendant de la taille de la cible revient à considérer que la résistance matérielle ne dépend pas des effets du taux de déformation, de la distribution des défauts (les corps plus gros ont une probabilité plus grande d'avoir des défauts plus grands qui s'activent à des niveaux de déformation moins élevés selon la distribution de Weibull) ou de la taille de la cible alors qu'en fait le taux de déformation diminue à mesure que la taille de la cible augmente, affaiblissant en particulier, parmi ces corps, les plus importants. Ainsi pour des petits corps, l'énergie spécifique d'impact  $Q^*$  diminue dès lors que le rayon de la cible augmente. Pour des corps beaucoup plus importants, les forces gravitationnelles prédominent et l'énergie d'impact  $Q^*$  nécessaire pour fragmenter un corps de sorte que le fragment résultant le plus important possède la moitié de la masse du corps initial augmente alors avec la taille de la cible.

On peut alors distinguer deux types de régime pouvant intervenir lors d'une collision : le régime de résistance ("strength regime") d'une part, pour lequel les conséquences d'un impact sont régies uniquement par les contraintes

maximales que la cible peut subir (autrement dit sa résistance à la traction) avant qu'une fracture ou une rupture ait lieu et, le régime de gravité ("gravity regime"), d'autre part, pour lequel les conséquences d'un impact sont gouvernées par les interactions gravitationnelles entre les différents éléments en présence après la collision. Le régime de résistance, correspondant à des cibles petites pour lesquelles l'attraction gravitationnelle entre les parties de la cible peut être ignorée (les fragments ne se réaccumulent pas), est le régime intervenant lors des expériences en laboratoire.

Il apparaît aussi que l'énergie critique d'impact  $Q^*$  dépend de la vitesse d'impact. Une autre démarche pour déterminer  $Q^*$  consiste à effectuer des simulations numériques. Benz et Asphaug (1999) utilisent un code numérique basé sur la méthode SPH pour simuler des collisions sur des cibles en basalte ou en glace de rayon variant entre quelques centimètres et quelques centaines de kilomètres. Les simulations entreprises par Benz et Asphaug (1999) prennent en compte les effets combinés de la résistance de la matière (en utilisant un modèle de fragmentation) et de la gravité permettant d'obtenir des résultats dans chacun des deux régimes précédemment définis (régime de résistance ou régime de gravitation) mais aussi dans un régime intermédiaire.

En plus de  $Q^*$ , l'énergie d'impact nécessaire pour fragmenter un corps de sorte que le fragment résultant le plus important possède la moitié de la masse du corps initial, ils définissent une deuxième énergie critique d'impact  $Q_D^*$  correspondant à l'énergie spécifique minimum nécessaire à la fois pour fragmenter puis disperser la cible en une multitude de fragments, certains pouvant être des objets réaccumulés de sorte que le plus gros corps résultant possède exactement la moitié de la cible initiale. Dans un régime de résistance où la gravité ne joue aucun rôle, les fragments ne se réaccumulent pas et on a  $Q^* = Q_D^*$ . Dans un régime de gravité cependant,  $Q_D^*$  est toujours supérieure à  $Q^*$  puisque l'énergie d'impact  $Q$  doit être suffisante non seulement pour fragmenter la cible mais également pour éviter sa recomposition due à l'attraction gravitationnelle.

Les résultats obtenus montrent que l'énergie critique d'impact  $Q_D^*$  dépend

Matière	$V$ (km/s)	$Q_0$ (erg/g)	$B_0$ (erg cm <sup>3</sup> /g <sup>2</sup> )	$a_0$	$b_0$
Basalte	5	$9.0 \times 10^7$	0.5	-0.36	1.36
Basalte	3	$3.5 \times 10^7$	0.3	-0.38	1.36
Glace	3	$1.6 \times 10^7$	1.2	-0.39	1.26
Glace	0.5	$7.0 \times 10^7$	2.1	-0.45	1.19

TAB. 1.1: Constantes estimées pour  $\bar{Q}_D^*$ . D'après Benz et Asphaug (1999)

à la fois du matériau, de la taille du corps initial (et donc de sa masse) et de l'angle d'incidence d'impact, mesuré à partir de la normale à la surface au point d'impact et, d'une moindre mesure de la vitesse d'impact (plus récemment, Michel *et al.* (2003) ont mis en évidence l'influence de la structure interne du corps initial, par exemple homogénéité ou présence de vide et de fractures macroscopiques). Pour les deux types de matériau considérés (basalte et glace) et, pour les différentes vitesses d'impact et les différents angles d'incidence considérés,  $Q_D^*$  est une fonction décroissante de la taille pour des cibles petites ( $Q_D^* = Q^*$ ) alors qu'elle est une fonction croissante de la taille pour des cibles plus importantes. Ces deux comportements correspondent à des collisions se produisant respectivement dans un régime de résistance et dans un régime de gravité. Selon Benz et Asphaug (1999), la transition entre ces deux régimes a lieu pour des cibles sphériques en basalte ou en glace ayant un rayon compris entre 100 m et 1 km. Au point de transition, l'énergie critique d'impact est minimale et de l'ordre de  $10^6$  erg/g. Benz et Asphaug (1999) notent également la dépendance importante de  $Q_D^*$  vis-à-vis de l'angle d'incidence : les énergies critiques d'impact pour des angles d'incidence variant de 0 degré à 75 degrés diffèrent d'un facteur d'environ 10. Benz et Asphaug (1999) ont ensuite effectué une moyenne  $\bar{Q}_D^*$  des énergies spécifiques d'impact obtenues à une vitesse fixée, sur tous les angles d'impact  $\theta$  mesurés à partir de la normale à la surface au point d'impact. Ils en déduisent que  $\bar{Q}_D^*$  peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{Q}_D^* = Q_0 R^{a_0} + B_0 \rho R^{b_0} \quad (1.4)$$

avec  $R$  représentant le rayon en cm de la cible,  $\rho$  la masse volumique de la cible (en  $g/cm^3$ ).  $Q_0$ ,  $B_0$ ,  $a_0$  et  $b_0$  sont des constantes données par le tableau 1.1. La relation (1.4) peut être considérée comme une loi prenant en compte les deux types de régime existants : le régime de résistance de la matière (avec le premier terme dont l'exposant  $a_0$  est négatif) et le régime de gravité (avec le deuxième terme dont l'exposant  $b_0$  est positif). La figure 1.3 représente les courbes correspondantes pour des collisions sur des cibles en basalte à des vitesses d'impact respectivement de 3 km/s et de 5 km/s.

Par une approche analytique (voir Housen et Holsapple, 1990), les lois d'échelle permettent d'obtenir une relation entre l'énergie critique d'impact,  $Q^*$ , la vitesse d'impact  $V$  et le rayon de la cible,  $R$  en cm dans les deux régimes. Dans le régime de résistance, on a selon Housen et Holsapple (1990) :

$$Q^* \propto R^{\frac{-9\mu}{2\phi_0+3}} V^{2-3\mu} \quad (1.5)$$

Selon Holsapple (1994) et, Housen et Holsapple (1999) :

$$Q^* \propto R^{\frac{-9\mu}{2\phi_0-3}} V^{2-3\mu} \quad (1.6)$$

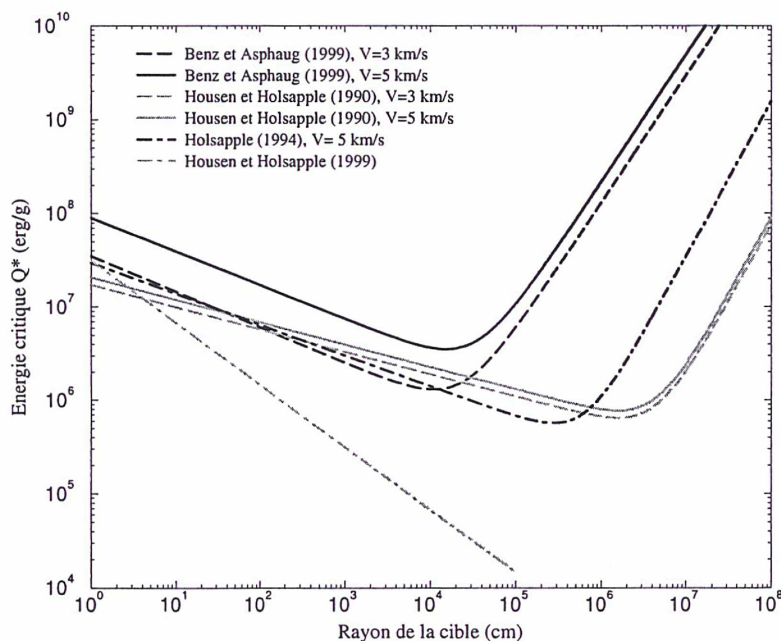


FIG. 1.3: Energie critique de fragmentation en fonction de la taille de la cible pour des corps rocheux (Housen et Holsapple, 1990, 1999 et Holsapple, 1994) et en basalte (Benz et Asphaug, 1999).

$\phi_0$  est un des paramètres de Weibull (l'exposant de la contrainte) de la distribution des défauts et varie entre 6 et 12.  $\mu$  est lié à la vitesse d'impact. Son apparition s'explique par le fait que pour cette approche, on a supposé que le projectile est petit par rapport à la cible et que la vitesse d'impact est grande en comparaison des vitesses des matériaux. On a  $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$ . Il a été établi que  $\mu$  vaut environ 0.4 pour des matériaux poreux tels que le sable sec et varie de 0.55 à 0.6 pour des impacts à grandes vitesses sur des matériaux non poreux tels que la glace et les métaux (voir Holsapple, 1993). L'origine de la différence des exposants dans les expressions (1.5) et (1.6) réside dans la considération d'hypothèses différentes : Housen et Holsapple (1990) supposent que le taux de déformation est constant tandis que Holsapple (1994) et, Housen et Holsapple (1999) considèrent le cas plus probable d'une impulsion de contrainte avec une augmentation rapide en pression suivie d'une diminution plus lente.

Dans le régime de gravité, on a :

$$Q^* \propto R^{3\mu} V^{2-3\mu} \quad (1.7)$$

On a représenté sur la figure 1.3 les courbes correspondantes pour des corps rocheux en utilisant les paramètres précédents. Le tableau 1.2 synthétise les expressions et les paramètres utilisés afin d'obtenir ces courbes. Housen et Holsapple (1990) et Holsapple (1994) considèrent que pour des corps rocheux,  $\mu = 0.55$  et  $\phi_0 = 9$  alors qu'en comparaison avec des résultats expérimentaux sur des cibles en granite, Housen et Holsapple (1999) préfèrent choisir la valeur  $\phi_0 = 6$ . La courbe correspondante est représentée uniquement dans le régime de résistance avec  $\mu = \frac{2}{3}$ .

Auteurs	Régime de résistance	Régime de gravité	$\mu$	$\phi_0$
Housen et Holsapple (1990)	Eq. (1.5)	Eq. (1.7)	0.55	9
Holsapple (1994)	Eq. (1.6)	Eq. (1.7)	0.55	9
Housen et Holsapple (1999)	Eq. (1.6)	-	$\frac{2}{3}$	6

TAB. 1.2: Expressions et paramètres associés aux courbes de la figure 1.3

On remarque que les résultats obtenus ont des allures qualitativement similaires à ceux de Benz et Asphaug (1999) : chaque courbe possède d'abord une pente négative correspondant au régime de résistance puis une pente positive correspondant au régime de gravité avec une zone de transition entre ces deux régimes. Les courbes de Benz et Asphaug (1999) ainsi que celles de Housen et Holsapple (1990) qui supposent que la moitié de la masse disséminée de la cible a une vitesse plus grande que la vitesse de libération, donnent l'énergie critique de dispersion  $Q_D^*$  qui est toujours supérieure à l'énergie critique d'impact  $Q^*$  dans le régime de gravité. La courbe de Holsapple (1994) est basée sur l'observation sur de nombreux corps, des cratères les plus grands. Elle peut donc être considérée dans le régime de gravité comme une représentation minorée de l'énergie critique de dispersion  $Q_D^*$  mais les valeurs obtenues devraient être supérieures à l'énergie critique d'impact  $Q^*$ . On peut observer, dans le régime de gravité, pour une même vitesse d'impact, de larges différences entre chacune des courbes, qu'elles soient issues des simulations numériques ou des lois d'échelle. En revanche pour une même expression, il y a peu de différences entre des choix différents de la vitesse d'impact.

Les différences observées dans la région correspondant au régime de résistance

sont moindres mais existent tout de même.

Notons également que selon Housen et Holsapple (1990) et selon Holsapple (1994), la transition entre les deux régimes se ferait à un rayon de l'ordre respectivement de 10 km et de 5 km pour des cibles rocheuses alors que les simulations SPH indiquent une transition pour un rayon de quelques centaines de mètres (voir sur la figure 1.3, les courbes correspondant aux expressions de Benz et Asphaug, 1999).

Les études décrites précédemment permettent d'étudier le degré de fragmentation  $f_l$ . De nombreuses expériences en laboratoire ont en effet mis en évidence la corrélation entre les paramètres  $f_l$  et  $Q$  en effectuant une série d'impacts frontaux sur un même type de cible mais en faisant varier  $Q$  afin de produire différents types de fragmentation. Ainsi Fujiwara *et al.* (1977) considèrent que ces deux paramètres sont reliés par une expression de la forme :

$$f_l = K_0 Q^{-c_0} \quad (1.8)$$

Par définition de  $Q^*$  et de  $S$  (voir la relation (1.3)), on a :

$$K_0 = 0.5(Q^*)^{c_0} = 0.5 \left( \frac{S}{\rho} \right)^{c_0} \quad (1.9)$$

Le paramètre  $K_0$  varie suivant la composition de la cible et prend en compte la densité d'énergie  $S$ . L'exposant  $c_0$ , quant à lui, est déterminé par ajustement aux données. En combinant les expressions (1.8) et (1.9), on peut aussi écrire :

$$f_l = 0.5 \left( \frac{Q}{Q^*} \right)^{-c_0} \quad (1.10)$$

Avec une telle expression, on retrouve le fait que si  $Q > Q^*$ , c'est-à-dire si l'énergie d'impact est supérieure à celle nécessaire pour que le plus gros fragment restant contienne 50 % de la cible, alors  $f_l < 0.5$ . Le tableau (1.3) donne les expressions de  $f_l$  obtenues pour quatre types de matériaux. La combinaison des expressions de ce tableau et de la formule (1.10) implique, comme nous l'avons déjà signalé, que ces auteurs ne prennent pas en compte la dépendance de l'énergie critique d'impact  $Q^*$  vis-à-vis de la taille de la cible. Seule la dépendance de  $Q^*$  par rapport à la composition de la cible est considérée. Cela s'explique par le fait que ces lois sont issues d'expériences à la même échelle (centimétrique).

Notons également que ces expressions sont valables pour des impacts frontaux qui sont les plus destructeurs. Davis *et al.* (1985) ont montré qu'il est possible

Composition	$f_l$	Source
Glace	$f_l = 1.7 \times 10^3 Q^{-0.72}$	Davis(1998)
Silicates	$f_l = 6.0 \times 10^4 Q^{-0.78}$	Davis(1998)
Basalte	$f_l = 1.66 \times 10^8 Q^{-1.24}$	Fujiwara <i>et al.</i> (1977)
Fer	$f_l = 7.2 \times 10^{12} Q^{-1.49}$	Davis(1998)

TAB. 1.3: Expressions du degré de fragmentation  $f_l$  en fonction de l'énergie d'impact  $Q$  et de la composition de la cible

de donner une estimation de la valeur moyenne  $\bar{f}_l$  de  $f_l(\theta)$  moyennée sur tous les angles d'impact  $\theta$  mesurés à partir de la normale à la surface de la cible au point d'impact ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ). On a :

$$\bar{f}_l = 3f_l^{2/3} - 2f_l \quad (1.11)$$

où  $f_l$  est donné par les expressions du tableau 1.3 qui correspond au degré de fragmentation pour un angle d'impact  $\theta = 0^\circ$  ( $f_l = f_l(0)$ ). Cette expression indique que, pour une même énergie critique  $Q^*$  d'impact, le fragment le plus important résultant d'un impact oblique sera plus massif que celui résultant d'un impact frontal ( $\bar{f}_l > f_l$  si  $f_l = 0.5$ ).

Benz et Asphaug (1999), en utilisant leurs simulations sur des cibles en basalte ou en glace de taille variant de quelques centimètres à quelques kilomètres, ont estimé que le paramètre  $f_l$  peut s'exprimer de la manière suivante :

$$f_l = -s \left( \frac{Q}{Q_D^*} - 1 \right) + 0.5 \quad (1.12)$$

avec pour une cible en basalte :  $s = 0.35$  si  $V = 5$  km/s et  $s = 0.5$  si  $V = 3$  km/s et pour une cible en glace :  $s = 0.6$  pour  $V = 3$  km/s. Cette expression très simple est valable pour des cibles de rayon variant de 3 cm à 100 km et des angles d'incidence compris entre 0 degré et 75 degrés. La masse du fragment restant le plus important n'est pas en fait déterminée par un processus simple mais soit par la résistance de la matière, soit par la gravité dépendant de la taille de la cible. La simplicité de l'expression 1.12 est donc étonnante, d'autant plus que dans le cas d'une collision sur une cible en glace à une vitesse de 0.5 km/s, Benz et Asphaug (1999) n'obtiennent pas une relation aussi simple, sans que les auteurs puissent l'expliquer.

Les résultats précédents appliqués à une cible en basalte sont représentés par la figure 1.4. Pour les courbes correspondant à la formule (1.12) proposée par Benz et Asphaug (1999) les deux valeurs de  $s$  choisies sont celles

précisées précédemment. La courbe correspondant à la formule de Fujiwara *et al.* (1977) est obtenue à partir de l'expression (1.10) avec la valeur  $c_0$  du tableau 1.3 pour une cible en basalte ( $c_0 = 1.24$ ). Cette expression ainsi que l'expression (1.12) avec  $s = 0.5$  donnée par Benz et Asphaug (1999) pour une vitesse d'impact de 3 km/s, correspondant au degré de fragmentation suite à un impact frontal, sont respectivement utilisées dans l'expression (1.11) déterminée par Davis *et al.* (1985) afin d'obtenir les courbes de la figure 1.4 notées respectivement [a] et [b].

Nous avons représenté sur la figure 1.4 la courbe correspondante à l'expres-

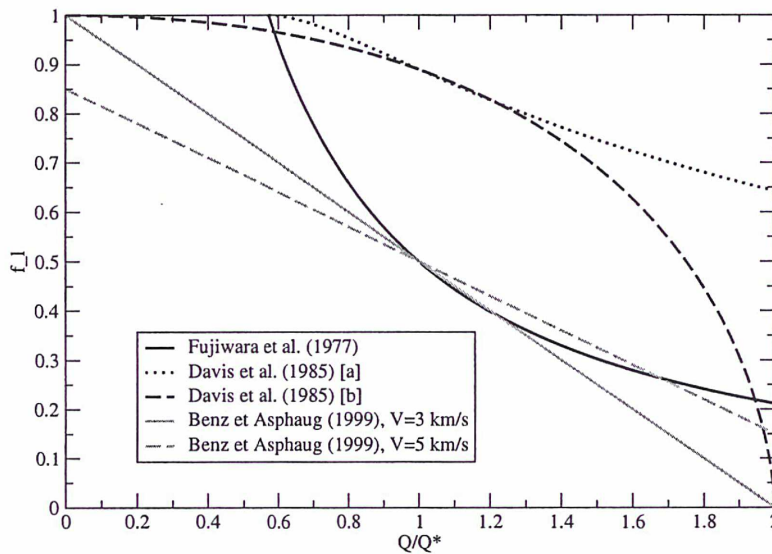


FIG. 1.4: Degré de fragmentation  $f_l$  en fonction du rapport  $\frac{Q}{Q^*}$  pour un corps en basalte. D'après Fujiwara *et al.* (1977), Davis *et al.* (1985) et Benz et Asphaug (1999).

sion (1.10) de Fujiwara *et al.* (1977) avec  $c_0 = 1.24$ , pour des valeurs de  $\frac{Q}{Q^*}$  supérieures ou égales à 0.571 afin d'avoir des valeurs de  $f_l$  inférieures ou égales à 1. La courbe de Davis *et al.* (1985) [a] obtenue en utilisant l'expression de Fujiwara *et al.* (1977) dans la relation (1.11) a aussi été tracée à partir de  $\frac{Q}{Q^*} = 0.571$ . La raison de ce choix résulte dans le fait que la formule (1.10) de Fujiwara *et al.* (1977), exprimant  $f_l$  sous la forme d'une puissance négative du rapport  $\frac{Q}{Q^*}$ , donne des résultats très élevés pour  $f_l$  pour les petites valeurs

de  $\frac{Q}{Q^*}$ . En ne tronquant pas la courbe correspondante, on aurait des résultats très surprenants sur la courbe de Davis *et al.* (1985) [a]. En effet, pour certaines valeurs de  $\frac{Q}{Q^*}$  inférieures à 0.571, le fragment le plus important issu d'un impact oblique serait alors moins massif (voire de masse nulle) que pour un même type d'impact avec  $Q = Q^*$ .

En comparant les courbes de Fujiwara *et al.* (1977) et de Davis *et al.* (1985) [a] d'une part et, celles de Benz et Asphaug (1999) pour  $V = 3$  km/s et de Davis *et al.* (1985) [b] d'autre part, on remarque également que quelle que soit la valeur de l'énergie d'impact  $Q$ , les impacts frontaux ont des conséquences plus importantes que les impacts obliques.

Par ailleurs, avec l'expression (1.12) de Benz et Asphaug (1999) pour un impact à une vitesse de 5 km/s sur une cible en basalte, il est étonnant d'obtenir une perte de masse de la cible de 15% lorsque  $Q = 0$  erg/g. On a, de manière plus cohérente,  $f_l = 1$  lorsque  $Q = 0$  erg/g avec la même expression (1.12) mais avec  $V = 3$  km/s. Les courbes correspondantes indiquent en fait que des collisions avec des petites valeurs de  $Q$  de l'ordre de 0.1% ou de 1% de l'énergie critique d'impact  $Q_D^*$  entraînent une plus grande perte de masse lorsque  $V = 5$  km/s que lorsque  $V = 3$  km/s. Cette perte de masse semble négligeable pour  $V = 3$  km/s. L'expression (1.12) de Benz et Asphaug (1999) avec le choix du paramètre  $s$ , différent pour les deux vitesses d'impact considérées ( $V = 5$  km/s et  $V = 3$  km/s), implique aussi que dès que  $Q > Q_D^*$  le fragment le plus important résultant d'un impact sera plus massif avec une vitesse d'impact plus grande (pour  $V = 5$  km/s).

Les conséquences d'une collision d'un projectile sur une cible dépendent donc fortement de l'énergie d'impact. Suivant la valeur de  $Q$ , l'impact peut aboutir à l'accrétion du projectile, à la formation d'un cratère ou, à un éclatement total ou partiel de la cible avec l'apparition de nombreux fragments. Dans la section suivante (section 1.4), nous nous intéresserons aux propriétés des fragments issus d'une collision suivie d'une fragmentation voire d'une destruction de la cible ( $f_l \leq 0.5$ ). Puis la partie 1.5 sera consacrée à des impacts moins destructeurs pour lesquels  $f_l \geq 0.5$  et ayant pour conséquence la formation d'un cratère. Nous décrirons en particulier les différents processus intervenant dans la formation de ce cratère.

## 1.4 Fragmentations collisionnelles

Selon Davis *et al.* (1989), les changements les plus importants intervenant sur la taille et sur la vitesse de rotation des astéroïdes sont plutôt causés par des collisions destructrices relativement peu fréquentes que par les effets cu-

mulés de petites collisions à cratérisation. On étudiera dans cette partie les impacts suivis de fragmentations voire d'une destruction de la cible, pour lesquels plus de la moitié de la cible est fragmentée mais n'est pas nécessairement dispersée ( $f_t \leq 0.5$ ).

Les résultats des expériences en laboratoire et les observations astronomiques permettent d'obtenir une description qualitativement conforme du processus de collision, permettant de donner notamment une description des propriétés des fragments issus d'un tel impact. Ces propriétés, qui ont été en particulier synthétisées par Fujiwara *et al.* (1989) puis complétées par Paolicchi *et al.* (2002) et par Holsapple *et al.* (2002), portent sur les caractéristiques morphologiques et cinématiques de ces fragments.

### 1.4.1 La formation de fragments

Plusieurs expériences montrent que les fragments les plus importants issus d'une collision catastrophique proviennent de zones éloignées du point d'impact. Selon Giblin *et al.* (1994a, 1998) le fragment le plus important se forme en effet aux antipodes du point d'impact et dans son voisinage se trouvent également d'autres fragments massifs. D'autres expériences (cf Fujiwara *et al.*, 1989) font apparaître la formation d'un noyau central. Des expériences effectuées à de petites vitesses d'impacts aboutissent à des conclusions similaires à savoir à une fragmentation avec une série de fragments importants formés également à une certaine distance du point d'impact.

Aux échelles adaptées aux astéroïdes, des agrégats de fragments liés par la gravitation (ou "rubble piles") peuvent ensuite se constituer. Cependant les fragments formés dans une zone proche du point d'impact sont éjectés à des vitesses plus élevées. Ainsi la possible réaccumulation de fragments due à la gravitation devrait être d'autant plus probable pour les fragments formés à des distances d'autant plus éloignées du point d'impact.

### 1.4.2 Forme des fragments

Les fragments éjectés ont des formes différentes. Mais en approchant la forme irrégulière d'un fragment par un ellipsoïde, Giblin *et al.* (1998) ont mesuré les longueurs des axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  des fragments obtenus en faisant une expérience d'un impact à une vitesse de 6 km/s et ont obtenu pour les rapports  $\frac{b}{a}$  et  $\frac{c}{a}$  des valeurs moyennes respectivement de 0.6 et de 0.4. Ces valeurs sont légèrement différentes de celles proposées par Fujiwara *et al.* (1989) qui sont respectivement de 0.7 et de 0.5. La différence peut s'expliquer par les conditions expérimentales. Cependant il faut rester prudent en extrapolant

les résultats obtenus en laboratoire à l'ensemble des astéroïdes puisque des études suggèrent que la plupart des astéroïdes sont des "rubble piles" qui ont été fracturés et réaccumulés plusieurs fois au cours de leur existence (voir Richardson *et al.*, 2002) modifiant ainsi leur forme par rapport à celle résultant immédiatement d'une fragmentation comme en laboratoire.

### 1.4.3 Vitesse des fragments

Fujiwara et Tsukamoto (1980) ont les premiers observé, qu'après un impact avec une vitesse importante, les fragments sont éjectés en s'écartant de points, situés dans la cible sous le point d'impact et que les vitesses d'éjection sont symétriques par rapport à un axe passant par le point d'impact et le centre de la cible. Leurs expériences ont également montré que les fragments provenant de la surface de la cible ont des vitesses plus grandes que les autres fragments et, plus ces fragments ont une position initiale proche du point d'impact, plus leur vitesse est grande. Selon Martelli *et al.* (1994), les fragments les plus rapides sont généralement petits. Les fragments les plus importants ont des vitesses plutôt modérées. En général, les vitesses d'éjection dépendent fortement du degré de fragmentation. Les simulations numériques de Michel *et al.* (2004a) suggèrent qu'elles sont de l'ordre de 100 m/s pour les plus gros fragments (après ré-accumulation). L'évaluation correcte des vitesses pour les processus impliquant les astéroïdes reste un problème majeur encore entier.

### 1.4.4 Rotation des fragments

Les expériences ont montré qu'en général, les fragments les plus importants ont des vitesses de rotation plus petites que les petits fragments. De plus les fragments ayant des vitesses de rotation grandes proviennent d'une région proche du point d'impact. Même si certains tournent à des vitesses extrêmement rapides, la limite d'éclatement rotationnel n'est pas atteinte. La distribution des astéroïdes de diamètre supérieur à 40 km suivant leur vitesse de rotation est proche d'une distribution Maxwellienne c'est-à-dire d'une distribution suivant une loi de densité proportionnelle à  $\omega_{norm}^2 e^{-\omega_{norm}^2}$  où  $\omega_{norm}$  représente la vitesse de rotation  $\omega$  d'un astéroïde normalisée par la vitesse de rotation la plus répandue. Mais les fragments issus d'expériences collisionnelles en laboratoire n'ont pas des vitesses de rotation suivant une telle distribution puisque ces fragments ne subissent pas d'autres processus collisionnels que l'impact initial et beaucoup parmi eux conservent une rotation proche de leur rotation originelle. Comme le suggère Binzel *et al.* (1989), tout se passe comme si les fragments avaient une mémoire de la rotation de

la cible avant l'impact.

Selon les expériences en laboratoire, l'axe de rotation n'est pas nécessairement proche de l'axe correspondant au moment d'inertie le plus grand (cf Fujiwara et Tsukamoto, 1981) mais cette propriété n'apparaît pas expérimentalement aussi souvent que l'on pourrait penser.

Fujiwara et Tsukamoto (1981), Nakamura *et al.* (1992) et Nakamura (1993) ont étudié la répartition des vitesses de rotation de fragments issus d'impacts sur une cible en basalte en fonction de la taille de ces fragments. Ils en ont déduit une loi de puissance avec un exposant compris entre  $-1.5$  et  $-1$ , en utilisant cependant des données limitées. A partir d'expériences d'impact à une vitesse de 6 km/s, Giblin *et al.* (1998) ont obtenu un exposant beaucoup moins important (de l'ordre de  $-0.5$ ) mais admettent que leur représentation d'un impact par une explosion (en plaçant une charge explosive sous la cible) ne donne pas une description réaliste des données.

## 1.5 Impact à cratérisation

### 1.5.1 Introduction

On considère désormais que l'impact de la cible par un projectile n'entraîne pas la fragmentation de l'impacté mais a pour conséquence la formation d'un cratère. On a dans ce cas :  $f_i > 0.5$ .

La formation d'un cratère est un processus continu et rapide, qui commence dès que le projectile (l'impacteur) entre en contact avec la surface de la cible et se termine avec les derniers mouvements de débris autour du cratère. Selon Melosh (1989), ce processus se divise en plusieurs phases caractérisées chacune par des phénomènes physiques différents. Il est cependant impossible de déterminer avec précision l'instant où une de ces phases se termine et lorsque la suivante débute. En raison de la continuité du processus, il pourrait alors sembler inadapté de le diviser artificiellement en plusieurs phases. Mais selon Melosh (1989), le véritable intérêt d'une telle division réside dans une meilleure compréhension de l'ensemble des étapes ayant lieu au cours d'un impact. Une description complète de ces processus est obtenue à partir de modélisations numériques ainsi qu'à partir d'études expérimentales. Gault *et al.* (1968) ont les premiers proposés trois phases : la phase de contact et de compression, la formation de l'excavation et la phase de modification. Ces phases ont été décrites et détaillées par Melosh (1989) à partir de résultats issus d'expériences et de simulations numériques. Nous donnerons, dans les paragraphes suivants, les principaux résultats de cette étude.

### 1.5.2 Phase de contact et de compression

La figure 1.5 illustre les différentes étapes de la phase de contact et de compression après un impact vertical sur un projectile sphérique.

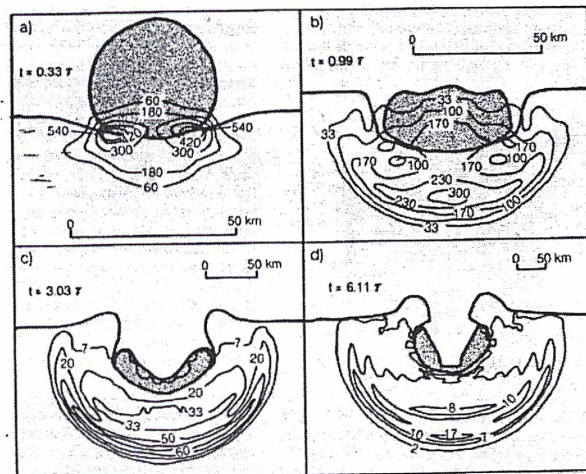


FIG. 1.5: Représentation de quatre étapes différentes suite à un impact d'un projectile de 46.4 km de diamètre sur une cible en anorthosite gabbroïque à une vitesse de 15 km/s. (a), (b), (c) illustrent trois étapes de la phase de contact et de compression, et (d) le début de la formation de l'excavation. Les isobares sont représentés, les pressions étant exprimées en GPa.  $\tau$  est le temps mis par le projectile pour traverser une distance égale à son diamètre. D'après Melosh (1989)

Cette phase débute dès que le projectile entre en collision avec la surface de la cible (voir fig 1.5 (a)) : le projectile, ayant une vitesse importante, comprime une partie de la cible lors du contact et accélère cette quantité de matière qui atteint une fraction importante de la vitesse d'impact. Au même moment, la cible résistant à cette pénétration désaccélère le projectile. Une petite région avec des pressions élevées se développe le long de l'interface cible-projectile incluant une partie de ces deux corps. En particulier, le contact de zones du projectile sur la surface de la cible dans une direction oblique entraîne l'apparition d'"îlots" de pressions élevées à partir desquels de la matière fortement heurtée, fondue ou évaporée, est éjectée à des vitesses plusieurs fois supérieures à celle du projectile. Ces éjections sont relativement faibles lors d'impacts verticaux mais peuvent être plus importantes lors d'impacts obliques.

La cible et le projectile sont ainsi tous les deux comprimés et commencent à se déformer. Cette forte compression est à l'origine de l'apparition d'ondes de choc ayant pour origine le premier point de contact du projectile. Comme le projectile poursuit son mouvement à l'intérieur de la surface de la cible, les ondes de choc s'étendent et se propagent à la fois dans la cible et le projectile. L'onde de choc se propageant à l'intérieur du projectile finit par atteindre sa surface arrière. La figure 1.5 (b) illustre cet événement. A cet instant, l'interface entre le projectile et la cible se situe dans la cible à une profondeur équivalant approximativement à la moitié du diamètre du projectile. Une partie de plus en plus importante de la cible est touchée par l'onde de choc et les éléments heurtés sont accélérés à des vitesses élevées.

L'onde de choc dans le projectile, après l'avoir traversé et atteint sa surface arrière, est alors réfléchiée en une "onde de raréfaction". Cette onde, se propageant à la vitesse du son, est à l'origine de la diminution de la pression et de la décélération de la matière comprimée. Le projectile peut pendant cette phase subir des transformations sous forme soit de fonte, soit d'évaporation. Une quantité importante de matière du projectile s'évapore durant cette phase sans commencer à se disperser. Le projectile est fortement déformé et la cavité du cratère naissant apparaît. Cette dernière étape est illustrée par la figure 1.5 (c). L'onde de choc dans la cible continue à se propager.

Le principal résultat de la phase de contact et de compression est le transfert d'une grande partie de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du projectile à la cible. Cette phase est caractérisée par des pressions, des températures et des vitesses élevées toutes situées dans une région comparable en taille au projectile. Elle est la plus courte parmi les trois phases évoquées puisque sa durée correspond au temps nécessaire pour que l'onde de choc traverse le projectile et pour que les pressions élevées à l'intérieur de ce corps diminuent. Sa durée dépend donc de la taille, de la composition et de la vitesse d'impact du projectile. La figure 1.5 (d) illustre le début de la phase suivante : la formation de l'excavation.

### 1.5.3 Formation de l'excavation

La formation de l'excavation débute après la fin de la phase précédente. Elle est caractérisée par deux processus qui coexistent à différents degrés de réalisation :

a) Le premier de ces processus est la propagation dans la cible de l'onde de choc apparue durant la phase précédente. Cette onde de choc poursuit son évolution, en s'affaiblissant avec le temps. Le passage rapide de l'onde de

choc à travers la cible laisse la matière derrière elle en mouvement, créant un champ d'écoulement de matière dirigé vers le haut et vers l'extérieur.

b) Ce flux constitue le deuxième processus et est à l'origine de l'excavation c'est-à-dire de la formation du cratère. Ce processus est beaucoup plus long que le précédent : au moment où le flux a complètement formé un cratère provisoire, l'onde de choc, devenue en s'affaiblissant une onde élastique, est déjà très loin.

Ces deux processus sont responsables de phénomènes physiques différents. Ainsi l'expansion et la transformation de l'onde de choc sont les principaux régulateurs des processus thermodynamiques lors de la cratérisation. Les masses et températures des éléments fondus ou évaporés sont presque entièrement déterminées par la dynamique de l'onde de choc se propageant (en particulier la vitesse de déclin de l'onde). D'autre part, la forme et la taille du cratère final sont déterminées presque exclusivement par les conditions du deuxième processus. Les deux processus n'interviennent en commun que dans quelques phénomènes seulement, tels que l'expansion d'éléments évaporés issus de la cible ou du projectile, qui s'éjectent en dehors du cratère naissant avec des vitesses élevées ou tels que l'éclatement d'éléments proches de la surface. Il n'est cependant pas possible de séparer clairement les deux processus dans la mesure où le premier est à l'origine du second et où ce dernier débute dans la région de l'impact avant que l'onde ait mis en mouvement de la matière plus éloignée.

Durant la phase d'excavation dont il est question ici, le cratère résultant de l'impact se forme. Son diamètre final est plusieurs fois celui du projectile. Melosh (1989) a décrit les différentes étapes de sa formation : la cavité a commencé à apparaître lors de la phase précédente de contact et de compression. Elle a alors la forme d'une demi-sphère avec un diamètre comparable au diamètre du projectile (voir Fig. 1.6 (a)). Pendant cette phase, la profondeur du cratère croît linéairement avec le temps. La forme de la cavité évolue ensuite de plus en plus lentement pendant la phase d'excavation jusqu'à atteindre d'abord sa profondeur maximale  $H_{at}$  (voir Fig.1.6 (b)). L'évolution de la profondeur au cours du temps  $t$  suit d'après plusieurs expériences (voir Holsapple et Schmidt, 1987) une loi proportionnelle à  $t^n$  avec  $n = 0.4$ . Une fois la profondeur finale du cratère atteinte, la formation se poursuit par l'agrandissement du diamètre, en suivant une loi d'évolution comparable à celle de la profondeur. L'excavation cesse finalement lorsque plus aucune matière n'est éjectée du cratère. Le cratère résultant, de diamètre  $D_{at}$ , est alors plus grand qu'une demi-sphère et peut être approximativement décrit par un paraboloïde de révolution (voir Fig.1.6 (c)). Les dimensions du cratère

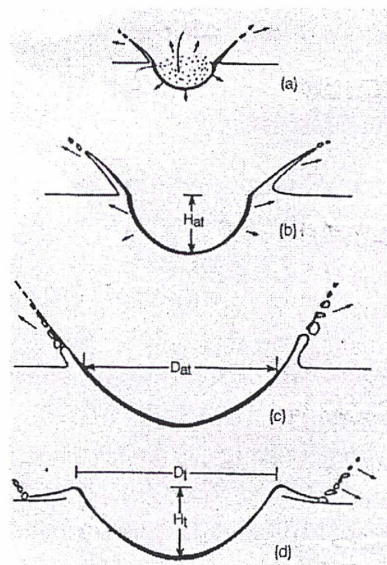


FIG. 1.6: Formation du cratère : (a) Formation initiale d'un cratère hémisphérique, (b) Evolution de la profondeur, (c) Fin de l'excavation, (d) Formation du cratère résultant, appelé "cratère provisoire". D'après Melosh (1989)

$D_{at}$  et  $H_{at}$  sont obtenues à la fin de la phase d'excavation. Le diamètre  $D_{at}$  du cratère est mesuré au niveau de la surface au sol initiale de la cible et  $H_{at}$  est la profondeur maximale du cratère en dessous de ce niveau. Ces paramètres sont donc des dimensions apparentes et sont plus faciles à mesurer en laboratoire que sur des cratères extraterrestres. On utilise plus fréquemment dans les travaux géologiques le diamètre  $D_t$  obtenu en mesurant la distance d'un bord à l'autre, et la profondeur maximale  $H_t$  du cratère à partir du niveau du bord puisque ces dimensions sont plus facilement mesurées à partir de photographies. On a observé, à partir de cratères de petites dimensions obtenus en laboratoire, que les diamètres mesurés d'un bord à l'autre étaient 25 % plus grands que les diamètres apparents (soit :  $D_t = 1.25D_{at}$ ). Ces expériences et des observations in situ ont permis d'évaluer que la profondeur  $H_t$  du cratère se situe entre un quart et un tiers du diamètre  $D_t$ .

La phase d'excavation dure beaucoup plus longtemps que la phase précédente de contact et de compression. Des effondrements ultérieurs dûs à la gravité peuvent modifier et agrandir le diamètre du cratère. C'est pourquoi le cratère obtenu à la fin de la phase d'excavation est dit "provisoire" (voir Fig.1.6 (d)). Ces effondrements constituent la principale caractéristique de

la phase suivante : la phase de modification.

### 1.5.4 Phase de modification

Cette troisième et dernière phase commence presque immédiatement après la formation du cratère provisoire et l'éjection d'éléments. Elle se caractérise par l'effondrement du cratère, généralement attribué à la gravité. Les effets de l'effondrement varient en fonction de la taille du cratère provisoire. Des débris instables glissent le long des parois des petits cratères alors que les cratères plus grands s'effondrent plus spectaculairement entraînant une altération importante de leur forme : le niveau de la surface du cratère s'élève, des pics centraux apparaissent et, les bords s'affaissent et forment une série de terrasses. Deux types de cratères finaux apparaissent donc à l'issue de cette phase : les cratères simples et les cratères complexes.

Les cratères simples sont, par définition, des cavités en forme de cuvette qui ressemblent superficiellement aux cratères provisoires à partir desquels ils se forment (voir Fig.1.7). Le sol des cratères provisoires, en conséquence de l'excavation, ont été recouverts par des couches sédimentaires de roches brisées, mélangées à des débris heurtés et à des éléments fondus. Une partie des bords des cratères provisoires glisse également à l'intérieur de la cavité du cratère formant ainsi des cratères simples. On a observé sur les corps

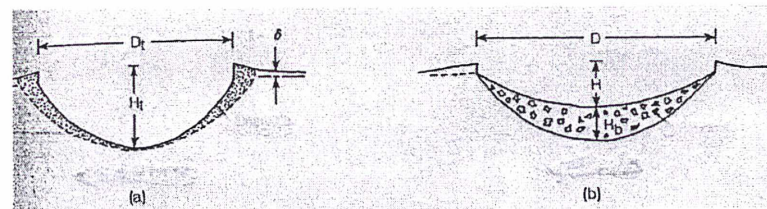


FIG. 1.7: *Modèle géométrique de la formation d'un cratère simple : (a) Cratère provisoire de diamètre  $D_t$  et de profondeur  $H_t$ , (b) Cratère simple de diamètre  $D$ , de profondeur  $H$ . D'après Melosh (1989)*

planétaires que ces cratères ont des morphologies similaires avec en particulier un rapport entre la profondeur et le diamètre  $\frac{H}{D}$  compris entre  $\frac{1}{5}$  et  $\frac{1}{3}$ . Leurs tailles s'échelonnent de quelques centimètres en laboratoire ou sur la Lune à quelques kilomètres (voir par exemple le Meteor Crater en Arizona aux Etats-Unis, figure 2 de l'introduction de cette thèse) et peuvent même atteindre près de 100 km de diamètre comme en attestent le cratère Pan du petit satellite jovien Almathea et le cratère Herschel du satellite saturnien

Mimas (voir la figure 1.1 de ce chapitre). L'épaisseur maximale de la couche sédimentaire qui s'est déposée suite à l'effondrement est approximativement égale à la moitié de la profondeur  $H$  entre le bord et le sol du cratère. Son volume représente à peu près la moitié du volume du cratère (de 40% du volume du cratère pour le cratère terrestre Brent dans l'Ontario au Canada, de 3.4 kilomètres de diamètre à 70 % du volume du cratère pour le cratère Meteor d'un kilomètre de diamètre.)

D'autre part, plus un cratère provisoire est grand, plus il s'écarte d'une stabilité gravitationnelle. Ainsi les cratères plus grands qu'une certaine taille bien définie s'effondrent plus spectaculairement, modifiant complètement l'apparence du cratère provisoire. Des pans entiers des parois du cratère s'affaissent et une série de terrasses se forment sur les parois. Un pic central, parfois entouré de collines, apparaît : ce sont les cratères dits complexes (voir Fig. 1.8). Pour ces cratères, le rapport  $\frac{H}{D}$  entre la profondeur et le diamètre est très faible en comparaison avec les cratères simples, indiquant que le diamètre du cratère final  $D$  est beaucoup plus important que celui du cratère provisoire  $D_t$ . Les cratères complexes les plus importants, de l'ordre de plusieurs centaines de kilomètres de diamètre, forment des bassins entourés d'anneaux concentriques montagneux. On trouve des exemples de tels cratères sur Mercure avec le bassin Caloris de 1300 km de diamètre, sur la Lune avec Mare Imbrium.

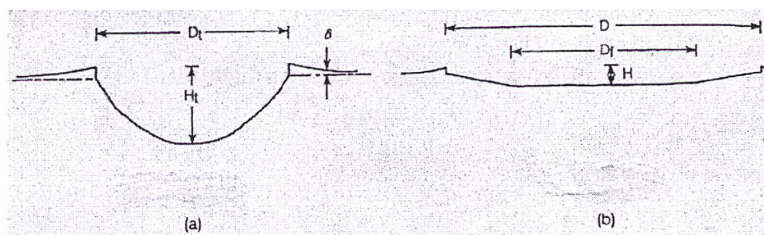


FIG. 1.8: Modèle géométrique de l'effondrement d'un cratère complexe : (a) Cratère provisoire de diamètre  $D_t$  et de profondeur  $H_t$ , (b) Cratère complexe de diamètre  $D$ , de profondeur  $H$ .  $D_f$  est le diamètre de la surface intérieure plate. D'après Melosh (1989)

Suivant les dimensions finales du cratère, la cible subit des modifications morphologiques plus ou moins importantes. L'impact entraîne des variations des propriétés de la cible, en particulier des propriétés rotationnelles. Dans la partie suivante, nous décrirons les modèles développés par Harris (1979)

et, Dobrovolskis et Burns (1984) permettant d'évaluer les variations de la vitesse de rotation de la cible.

## 1.6 Variation de la vitesse de rotation après un impact à cratérisation

Harris (1979) a décrit un modèle de l'évolution de la vitesse de rotation moyenne d'un corps sphérique subissant des impacts multiples, en supposant qu'après l'impact les différents projectiles s'accumulent sur la cible. Il montra que, dans ces conditions, la tendance de la vitesse de rotation à augmenter suite à des collisions rares de corps importants est compensée par l'introduction d'un terme de ralentissement dû aux nombres plus élevés de petites collisions. Davis *et al.* (1979) ont repris et simplifié dans le cadre d'un seul impact cette présentation. Nous décrirons et développerons dans le paragraphe (1.6.1) cette simplification.

Cependant l'hypothèse effectuée par Harris (1979) n'est pas réaliste : des éléments peuvent s'éjecter et s'échapper de l'environnement de la cible. Dans ce cas, ni la masse, ni le moment cinétique du système cible-projectile ne sont conservés si on tient compte des éléments disparus. La perte correspondante de moment cinétique s'accompagne d'une baisse de la vitesse de rotation. En effet, la collision délivre, pendant la phase de contact et de compression décrite précédemment dans la partie 1.5.2, une impulsion de moment cinétique qui a tendance à augmenter la vitesse de rotation de la cible. Dans le même temps, la cible absorbe une partie de la masse du projectile. L'énergie d'impact  $Q$  est à l'origine d'une explosion à la surface de la cible qui peut entraîner la libération de certains éléments éjectés. Selon leurs importances respectives, on peut observer soit une diminution, soit une augmentation de la masse et du moment d'inertie de la cible. Finalement les éléments éjectés s'échappant de l'environnement de la cible entraînent aussi une diminution du moment cinétique initial de la cible. Dobrovolskis et Burns (1984) ont tenu compte de ce dernier phénomène en ajoutant un terme à la formule obtenue par Harris (1979). Leur procédé revient à diviser l'impact en deux phases : un impact parfaitement inélastique (le projectile se dépose sur la cible sans perte de masse) suivi par des éjections symétriques d'éléments issus à la fois de la cible et du projectile.

Nous détaillerons dans le paragraphe (1.6.3) les raisonnements et les calculs effectués par Dobrovolskis et Burns (1984). Considérons cependant, en premier lieu, le cas d'une collision suivie de l'accrétion du projectile, sans perte de masse. **Dans la suite, nous écrivons les équations attachées à ce**

cas, étudié par Harris (1979) et simplifié par Davis *et al.* (1979). Alors que ces auteurs ne donnent pas de détails sur leurs calculs, nous nous efforcerons de développer au maximum les étapes permettant d'obtenir ces équations

### 1.6.1 Cas où l'impact est suivi d'une accréation

L'impact d'un projectile de masse  $m$  sur la cible délivre un moment cinétique valant  $mVl$  où  $V$  est la vitesse relative de rencontre et  $l$  le paramètre d'impact (c'est-à-dire la distance minimum entre la trajectoire extrapolée du projectile et le centre de la cible). Pour chaque projectile, on prendra pour  $l$  et  $V$  des valeurs moyennes.

Soit  $\mathcal{H}$  le moment cinétique de la cible. On a :  $\mathcal{H} = \mathcal{I}\omega$ ,  $\mathcal{I}$  étant le moment d'inertie de la cible et  $\omega$  sa vitesse de rotation. Harris (1979) considère que l'impulsion de moment cinétique ne s'accumule pas linéairement mais quadratiquement. On peut écrire que :  $\Delta(\mathcal{H}^2) = 2\mathcal{H}\Delta(\mathcal{H})$ . Comme :  $\Delta(\mathcal{H}) = \mathcal{I}\Delta\omega + \omega\Delta\mathcal{I}$  où  $\Delta\mathcal{I}$  et  $\Delta\omega$  sont les variations respectivement du moment d'inertie et de la vitesse de rotation de la cible dues à l'impact du projectile. Harris (1979) en déduit que :

$$\Delta(\mathcal{H}^2) = 2\mathcal{I}\omega(\mathcal{I}\Delta\omega + \omega\Delta\mathcal{I}) \quad (1.13)$$

D'où :

$$m^2V^2l^2 = 2\mathcal{I}\omega(\mathcal{I}\Delta\omega + \omega\Delta\mathcal{I}) \quad (1.14)$$

En isolant  $\Delta\omega$ , Harris (1979) obtient :

$$\frac{m^2V^2l^2}{2\mathcal{I}\omega} = \mathcal{I}\Delta\omega + \omega\Delta\mathcal{I} \quad (1.15)$$

Soit :

$$\frac{m^2V^2l^2}{2\mathcal{I}\omega} - \omega\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}\Delta\omega \quad (1.16)$$

Et :

$$\Delta\omega = \frac{m^2V^2l^2}{2\mathcal{I}^2\omega} - \frac{\Delta\mathcal{I}}{\mathcal{I}}\omega \quad (1.17)$$

Le premier terme de cette expression indique une tendance de la vitesse de rotation à augmenter de manière inversement proportionnelle à  $\omega$ . Le

deuxième représente une diminution proportionnelle à  $\omega$ . Pour mieux comprendre la nécessité de ce deuxième terme introduit pour la première fois par Harris (1979), considérons le cas où le projectile a une vitesse d'approche  $V$  négligeable. Il accroît alors la masse et le rayon (et par conséquent le moment d'inertie) sans augmenter le moment cinétique ( $mVl \ll 1$ ). Puisque le moment cinétique est le produit du moment d'inertie et de la vitesse de rotation, cela entraîne alors une diminution de la vitesse de rotation. Dans la formule (1.17),  $\mathcal{I}$ ,  $l$  et  $\Delta\mathcal{I}$  dépendent de la forme de la cible. Nous avons supposé que la cible est sphérique. Le moment d'inertie d'une sphère de masse  $M$  et de rayon  $r$  est  $\frac{2}{5}MR^2$ . La valeur moyenne du carré du paramètre d'impact est  $l^2 = \frac{1}{2}r^2$ .

$\Delta\mathcal{I}$  dépend de la colatitude  $\psi$  du point d'impact. Cette colatitude est considérée à partir du pôle "nord" de rotation. On a :

$$\Delta\mathcal{I} = \Delta\mathcal{I}(\psi) = m \times (R \sin \psi)^2 \quad (1.18)$$

$\Delta\mathcal{I}$  varie donc en fonction du lieu d'impact sur la sphère. Harris (1979) prend la même valeur pour  $\Delta\mathcal{I}$  quelle que soit la localisation de l'impact. Il considère en effet comme valeur pour  $\Delta\mathcal{I}$ , la moyenne des valeurs de  $\Delta\mathcal{I}(\psi)$  sur l'ensemble de la surface de la sphère. Effectuons le calcul afin de retrouver le résultat proposé par Harris (1979). On a :

$$\Delta\mathcal{I} = \frac{\int_0^\pi \Delta\mathcal{I}(\psi) \times 2\pi R \sin \psi \times R d\psi}{\int_0^\pi 2\pi R \sin \psi \times R d\psi} \quad (1.19)$$

$$= \frac{\int_0^\pi m \times (R \sin \psi)^2 \times 2\pi R \sin \psi \times R d\psi}{\int_0^\pi 2\pi R \sin \psi \times R d\psi} \quad (1.20)$$

$$= \frac{2 \times m \times \pi R^4}{4\pi R^2} \times \int_0^\pi \sin^3 \psi d\psi \quad (1.21)$$

$$= \frac{m \times R^2}{2} \times \int_0^\pi (1 - \cos^2 \psi) \sin \psi d\psi \quad (1.22)$$

$$= \frac{m \times R^2}{2} \times \left[ -\cos \psi + \frac{\cos^3 \psi}{3} \right]_0^\pi \quad (1.23)$$

$$= \frac{m \times R^2}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \quad (1.24)$$

D'où :

$$\Delta\mathcal{I} = \frac{2}{3}mR^2 \quad (1.25)$$

Nous avons donc trouvé la variation moyenne du moment d'inertie de la cible en effectuant une moyenne sur l'ensemble de la surface de la sphère c'est-à-dire en considérant une répartition uniforme des impacts sur la cible.

**Expression de  $\Delta\omega$  :**

En utilisant les expressions précédentes de  $\mathcal{I}$  et de  $l^2$ , l'expression (1.25) de  $\Delta\mathcal{I}$ , la variation de la vitesse de rotation (1.17) dans le cas où la cible est sphérique de masse  $M$  et de rayon  $R$  peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta\omega = \frac{25}{16} \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{V^2}{R^2\omega} - \frac{5}{3} \left(\frac{m}{M}\right) \omega \quad (1.26)$$

Cette expression n'est cependant valable que lorsque la collision est suivie d'une accréation sans perte de masse. Au cours de l'impact, des éléments de masse peuvent être éjectés. Ces éléments peuvent provenir de la cible mais également du projectile. Certains peuvent ensuite s'échapper de la gravitation de la cible si leur vitesse d'éjection est supérieure à la vitesse de libération de cette dernière.

Pour tenir compte de l'éjection et de la perte éventuelle de masses et de la non conservation du moment cinétique, Burns et Safronov (1973) ont introduit un facteur  $\tilde{\zeta}$ , représentant la fraction de moment cinétique transférée du projectile vers la cible. L'impulsion du moment cinétique de la cible due à une simple collision devient alors  $\tilde{\zeta}mvl$  ce qui introduit un facteur  $\tilde{\zeta}^2$  dans le premier terme de l'expression (1.17), le deuxième terme restant inchangé. En effet l'expression (1.17) obtenue par Harris (1979) donnant la variation de la vitesse de rotation devient alors :

$$\Delta\omega = \frac{\tilde{\zeta}^2 m^2 V^2 l^2}{2\mathcal{I}^2 \omega} - \frac{\Delta\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \omega \quad (1.27)$$

soit pour une cible sphérique :

$$\Delta\omega = \frac{25}{16} \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{\tilde{\zeta}^2 V^2}{R^2\omega} - \frac{5}{3} \left(\frac{m}{M}\right) \omega \quad (1.28)$$

Une autre approche du problème est de déterminer directement la variation du moment cinétique due à la perte de masse et d'en déduire la diminution de la vitesse de rotation correspondante. Cette approche proposée par Dobrovolskis et Burns (1984) nécessite, en premier lieu, une étude approfondie de la perte de masse en fonction des différents paramètres tels que le rayon de la cible, la masse du projectile, la vitesse d'impact, etc ... (voir la partie (1.6.2)). Nous étudierons ensuite dans la section (1.6.3) l'effet de la perte de masse sur la vitesse de rotation de la cible.

## 1.6.2 Impact suivi d'une perte de masse

### Modélisations des vitesses d'éjection

Des expériences en laboratoire (voir Gault *et al.*, 1963 et Housen *et al.*, 1991) ont permis d'étudier la distribution des vitesses d'éjection suite à la collision d'un projectile sur une cible à une vitesse élevée, c'est-à-dire la relation entre la quantité de masse éjectée suite à l'impact en fonction de la vitesse des fragments s'éjectant. Les résultats obtenus par Gault *et al.* (1963) proviennent d'impacts sur des cibles en basalte à une vitesse de 7 km/s. Tous les éléments éjectés le sont à des vitesses supérieures à 45 m/s. Les impacts effectués par Housen *et al.* (1991) ont lieu à une vitesse d'environ 2 km/s sur des cibles constituées de fragments de basalte et de fer, de cendres et d'eau permettant de simuler le processus de cratérisation sur une cible rocheuse à une échelle plus grande. Pour une même quantité de masse éjectée, les vitesses d'éjection obtenues par Housen *et al.* (1991) sont d'un ordre de grandeur inférieur à celles de Gault *et al.* (1963). Notons qu'il est difficile d'extrapoler ces résultats, obtenus par des expériences au cours desquelles la résistance de la matière domine, à des corps suffisamment importants, qui subissent des impacts dans le régime de gravité. En représentant le projectile par un point-source, Housen *et al.* (1983) ont mis en évidence l'influence de la résistance de la matière  $Y$  de la cible sur la distribution des vitesses d'éjection en montrant que dans le régime de résistance, la fraction des éléments éjectés à une vitesse plus grande que  $v$  est, lorsque  $v$  est suffisamment grand :  $(v\sqrt{\frac{\rho}{Y}})^{-3\mu}$  où  $\rho$  est la masse volumique de la cible et  $\mu = 0.55$ . Les expériences de Housen *et al.* (1991) sont en accord avec cette expression.

Dans un souci de simplification, nous allons utiliser les expressions données par Greenberg *et al.* (1978) pour représenter la distribution des vitesses d'éjection après un impact à une vitesse de 5 km/s. A cet effet, notons par  $M_*$  la masse totale éjectée suite à l'impact.  $M_*$  est la somme des masses des éléments s'éjectant après le choc à des vitesses différentes. Désignons alors par  $m_*$  la quantité de masse éjectée à une vitesse supérieure à une vitesse considérée  $v$ . Pour des impacts à cratérisation, Greenberg *et al.* (1978) considèrent alors que cette quantité de masse  $m_*$  suit la loi suivante :

$$m_*( > v ) = M_* \text{ si } v \leq v_{min} \quad (1.29)$$

$$m_*( > v ) = M_* \left( \frac{v}{v_{min}} \right)^{-k_0} \text{ si } v > v_{min} \quad (1.30)$$

où  $v_{min}$  est définie comme la plus petite vitesse d'éjection d'un élément. Cette vitesse dépend de l'énergie d'impact. La valeur de  $k_0$  a été estimée à environ

$$k_0 = \frac{9}{4}.$$

Ces relations, valables pour des impacts à cratérisation, ont été généralisées aux impacts à fragmentations. Les expériences de Gault *et al.* (1963) suggèrent également que la masse totale  $M_*$  éjectée est proportionnelle à l'énergie cinétique du projectile. On peut alors écrire :

$$M_* = LmV^2 \quad (1.31)$$

où  $m$  est la masse du projectile et  $V$  la vitesse relative de rencontre.

Le tableau (1.4) donne les valeurs de  $v_{min}$ , du coefficient  $L$ , et de la masse vo-

Modèle	$v_{min}$ (m/s)	$L$ (s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> )	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Cible poreuse	1	$200 \times 10^{-6}$	2000
Modèle intermédiaire <sup>†</sup>	7	$50 \times 10^{-6}$	2500
Cible en basalte	50	$5 \times 10^{-6}$	3000

<sup>†</sup> Dobrovolskis et Burns (1984)

TAB. 1.4: Caractéristiques de différents modèles de cible (Dobrovolskis and Burns, 1984).

luminique  $\rho$  pour trois modèles de cible (voir Stoeffler *et al.*, 1975, Greenberg *et al.*, 1978, Davis *et al.*, 1979). Pour une cible en basalte, les expressions (1.29) et (1.30) ainsi que les valeurs correspondantes du tableau (1.4) constituent une approximation des résultats de Gault *et al.* (1963) pour le même type de cible.

### Détermination de la perte de masse

Les formules précédentes (1.29) et (1.30) donnant la quantité de masse éjectée à une vitesse supérieure à une vitesse donnée  $v$  ont été utilisées par Dobrovolskis et Burns (1984), qui considèrent alors qu'un élément éjecté à une vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$ , avec un angle par rapport à la verticale compris entre  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\theta} + d\tilde{\theta}$  et un azimut (c'est-à-dire un angle, sur le grand cercle de l'horizon, avec le point sud, compté positivement dans le sens rétrograde) compris entre  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\phi} + d\tilde{\phi}$  a une densité de masse de la forme :

$$d^3 M = k_0 M_* \left( \frac{v}{v_{min}} \right)^{-k_0} \left[ \frac{dv}{v} \right] \delta \left( \tilde{\theta} - \frac{\pi}{4} \right) d\tilde{\theta} \left[ \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \right] \quad (1.32)$$

où  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\phi}$  sont exprimés en radians. Notons que pour des raisons de symétrie, l'azimut  $\tilde{\phi}$  n'apparaît pas dans l'expression (1.32) alors que l'angle  $\tilde{\theta}$  apparaît

à travers la fonction de Dirac  $\delta\left(\tilde{\theta} - \frac{\pi}{4}\right)$ . (Rappelons que  $\delta\left(\tilde{\theta} - \frac{\pi}{4}\right)$  est nulle partout sauf en  $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{4}$  où elle est infinie et que son intégrale vaut 1). Cette expression représente un cône d'ouverture de  $45^\circ$  par rapport à la verticale indiquant la direction des trajectoires des éléments éjectés. Cette dernière hypothèse est en conformité avec les expériences mettant en évidence que les angles d'éjection ont une mesure par rapport à la verticale comprise entre  $40^\circ$  et  $50^\circ$  environ (voir Stoeffler *et al.*, 1975). Dans la suite, nous conserverons cette hypothèse.

L'expression (1.32) s'applique en fait lorsque la vitesse d'éjection  $v$  est plus grande que  $v_{min}$  puisqu'aucun élément n'est éjecté à une vitesse inférieure à  $v_{min}$ . Posons alors  $d^3M = 0$  si  $v < v_{min}$ .

Nous allons alors vérifier que la formule (1.32) proposée par Dobrovolskis et Burns (1984) donnant la densité de masse pour un élément éjecté, prend en compte que la masse totale éjectée suite à l'impact est  $M_*$ . On doit en effet avoir :

$$\int_{(v, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})} d^3M = M_* \quad (1.33)$$

Calculons  $\int_{(v, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})} d^3M$  :

$$\begin{aligned} \int_{(v, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})} d^3M &= \int_{\tilde{\phi}=0}^{2\pi} \int_{\tilde{\theta}=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v_{min}}^{+\infty} d^3M \\ &= \int_{\tilde{\phi}=0}^{2\pi} \int_{\tilde{\theta}=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v_{min}}^{+\infty} k_0 M_* \left(\frac{v}{v_{min}}\right)^{-k_0} \left[\frac{dv}{v}\right] \delta\left(\tilde{\theta} - \frac{\pi}{4}\right) d\tilde{\theta} \left[\frac{d\tilde{\phi}}{2\pi}\right] \\ &= M_* \int_{\tilde{\phi}=0}^{2\pi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \times \int_{\tilde{\theta}=0}^{\frac{\pi}{2}} \delta\left(\tilde{\theta} - \frac{\pi}{4}\right) d\tilde{\theta} \times \int_{v_{min}}^{+\infty} k_0 v_{min}^{k_0} v^{-k_0-1} dv \\ &= M_* \times 1 \times 1 \times \left[-\frac{v_{min}^{k_0}}{v^{k_0}}\right]_{v_{min}}^{+\infty} \\ &= M_* \times [0 + 1] \\ &= M_* \end{aligned} \quad (1.34)$$

Mais tous les éléments éjectés ne s'échappent pas nécessairement de l'environnement de la cible. Un élément éjecté ne peut s'échapper de l'attraction de la cible que si sa vitesse  $v$  excède la vitesse de libération  $v_l$ . Si la cible n'est soumise à aucune rotation, cette vitesse de libération est égale à :  $\sqrt{\frac{2GM}{R}} = R\sqrt{\frac{8}{3}G\pi\rho}$  où  $G$  est la constante de gravitation,  $M$  la masse de la cible,  $R$  son rayon et  $\rho$  sa masse volumique. Désignons par  $V_l$  cette valeur de

$v_l$ . Comme la vitesse de libération de la cible varie en fonction de son rayon  $R$ , la quantité de masse éjectée s'échappant (c'est-à-dire la perte de masse) dépend de la taille de la cible.

Définissons  $R_{min}$  par l'égalité :

$$R_{min} = \frac{v_{min}}{\sqrt{\frac{8}{3}G\pi\rho}} \quad (1.35)$$

et supposons que le mouvement de rotation de la cible soit initialement nul. Si  $R < R_{min}$ , c'est-à-dire si la cible est suffisamment petite, alors d'après les expressions donnant  $V_l$  et  $v_{min}$ ,  $V_l < v_{min}$ . Tous les éléments éjectés s'échappent alors. La perte de masse  $\delta M$  est alors d'après (1.29) et (1.31) :

$$\delta M = M_* = LmV^2 \quad (1.36)$$

$\delta M$  dépend, dans ce cas, uniquement de l'énergie d'impact ( $Q \propto mV^2$ ) et de la taille de la cible. Il s'agit du régime de résistance pour lequel la libération des fragments est limitée par les forces de résistance. Si  $R > R_{min}$ , c'est-à-dire si la cible est suffisamment grande, alors  $V_l > v_{min}$ . D'après (1.30), (1.31) et les définitions de  $V_l$  et de  $R_{min}$ , la perte de masse est alors :

$$\delta M = M_* \left( \frac{V_l}{v_{min}} \right)^{-k_0} = LmV^2 \left( \frac{R}{R_{min}} \right)^{-k_0} \quad (1.37)$$

Seule la fraction  $\left( \frac{v_{min}}{V_l} \right)^{k_0} = \left( \frac{R_{min}}{R} \right)^{k_0}$  de la masse éjectée  $M_*$  dépasse la vitesse de libération et est perdue. Il s'agit du régime de gravité pour lequel la libération des fragments est limitée par l'attraction gravitationnelle de la cible.  $R_{min}$  est la valeur critique du rayon entre ces deux cas.

Définissons désormais  $R_a$  comme le rayon critique entre le cas où les collisions

Modèle	$R_{min}$ (km)	$R_a$ (km)
Cible poreuse	0.9	32
Modèle intermédiaire <sup>†</sup>	6	141
Cible en basalte	39	330

<sup>†</sup> Dobrovolskis et Burns (1984)

TAB. 1.5: Valeurs de  $R_{min}$  et de  $R_a$  pour différents modèles de cible (Dobrovolskis et Burns, 1984)

sont suivies d'une accréation ( $\delta M < m$ , la masse s'échappant définitivement est inférieure à celle du projectile) et d'une érosion ( $\delta M > m$ , la masse s'échappant définitivement est supérieure à celle du projectile).  $R_a$  est donc le rayon de la cible pour lequel  $\delta M = m$ .

Notons que lorsque  $\delta M = m$ , il n'est pas exclu qu'après le choc une quantité de masse supérieure à  $m$  soit éjectée mais tous ces éléments ne s'échappent pas : seulement une quantité de masse  $m$  ou bien le projectile lui-même réussissent à se libérer. On a donc a priori, d'après l'étude précédente,  $R_a > R_{min}$  et, d'après les égalités (1.37) et  $\delta M = m$  :

$$LmV^2 \left( \frac{R_a}{R_{min}} \right)^{-k_0} = m \quad (1.38)$$

On en déduit que :

$$R_a = R_{min} (LV^2)^{\frac{1}{k_0}} \quad (1.39)$$

Le tableau (1.5) indique les valeurs de  $R_{min}$  et de  $R_a$  pour les différents modèles de cible données par Dobrovolskis et Burns (1984).

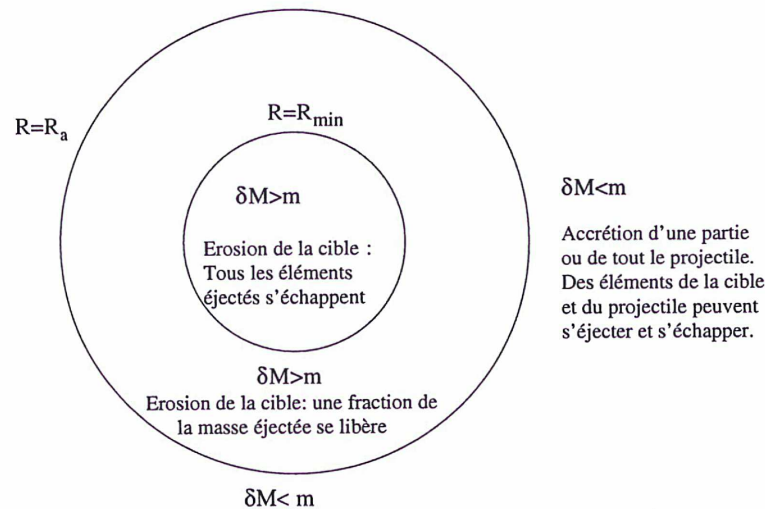


FIG. 1.9: Représentation des "différents cas" en fonction du rayon  $R$  de la cible.

En résumé : Si  $R < R_{min}$  alors  $\delta M > m$  (car  $R_{min} < R_a$ ) : il y a érosion d'une partie de la cible et tous les éléments éjectés s'échappent.

Si  $R_{min} < R < R_a$  alors on a également  $\delta M > m$  : il y a érosion d'une partie de la cible mais dans ce cas une fraction seulement de la masse éjectée se libère.

Si  $R > R_a$  alors  $\delta M < m$  : la collision entraîne une accréation d'une partie ou de tout le projectile.

### 1.6.3 Effet de la perte de masse sur la vitesse de rotation

Les raisonnements du paragraphe précédent supposent que la cible n'a pas de mouvement de rotation. Dobrovolskis et Burns (1984) ont montré qu'en fait la vitesse de rotation initiale de la cible n'influe pas sur la perte de masse (ce qui pourrait être cependant contredit par les expériences récentes de Housen (2004) suggérant que l'énergie spécifique d'impact  $Q^*$  dépend de la vitesse de rotation initiale de la cible : la cible serait plus fragile quand elle tourne. Mais l'extension de ce résultat à l'échelle des astéroïdes reste incertaine). Dobrovolskis et Burns (1984) ont également évalué l'effet de la perte de masse  $\delta M$ , étudiée précédemment, sur la vitesse de rotation. En effet, toute quantité de masse  $\delta M$  se libérant d'un corps en rotation entraîne une diminution du moment cinétique d'une valeur notée  $\delta \mathcal{H}$ . La variation correspondante,  $\delta \omega$ , de la vitesse de rotation du corps s'écrit alors :

$$\delta \omega = \delta \left( \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{I}} \right) \quad (1.40)$$

$$= \mathcal{I}^{-1} \delta \mathcal{H} - \mathcal{H} \mathcal{I}^{-2} \delta \mathcal{I} \quad (1.41)$$

Soit :

$$\delta \omega = \mathcal{I}^{-1} \delta \mathcal{H} - \mathcal{I}^{-1} \omega \delta \mathcal{I} \quad (1.42)$$

#### Détermination de $\mathcal{I}$

Dans le cas d'une cible sphérique de rayon  $R$ , le moment d'inertie  $\mathcal{I}$  a pour expression :

$$\mathcal{I} = \frac{2}{5} M R^2 \quad (1.43)$$

#### Détermination de $\delta \mathcal{I}$

$\delta \mathcal{I}$  est la variation du moment d'inertie du corps due à la perte de masse  $\delta M$  et peut s'écrire comme dans le paragraphe 1.6.1 :

$$\delta \mathcal{I} = \delta M \times R^2 \sin^2 \psi \quad (1.44)$$

où  $R$  est la distance entre le centre de la cible et le point d'impact et  $\psi$  est la colatitude du point d'impact.

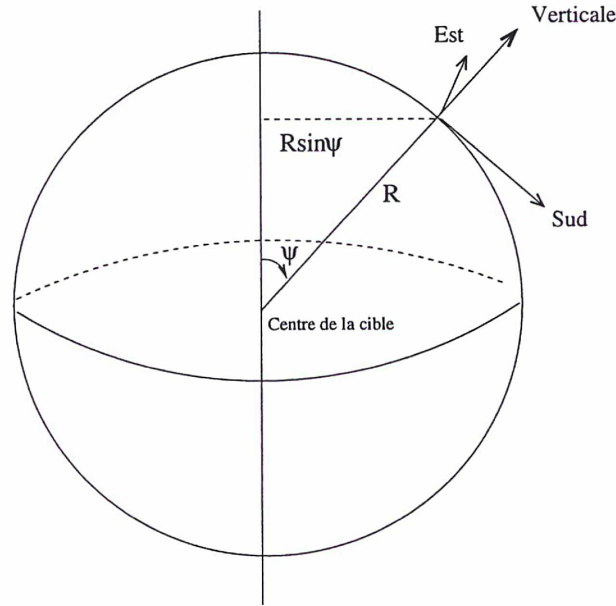


FIG. 1.10: Représentation de la colatitude  $\psi$  et du repère lié au corps tournant.

### Détermination de $\delta\mathcal{H}$

Déterminons le moment cinétique  $d^3\mathcal{H}$  d'un élément de masse  $d^3M$  éjecté. on suppose que cet élément est projeté du point d'impact avec une vitesse initiale  $v$ , en faisant un angle  $\tilde{\theta}$  avec la verticale. On note  $\tilde{\phi}$  son azimut mesuré positivement dans le sens rétrograde à partir du sud sur le cercle de l'horizon. Dans un référentiel lié au corps tournant et formé par les directions du sud local, de l'est et de la verticale (voir les figures 1.10 et 1.11), les composantes de la vitesse  $v$  sont respectivement :

$$v_{sud} = v \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} \quad (1.45)$$

$$v_{est} = -v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \quad (1.46)$$

$$v_{vert} = v \cos \tilde{\theta} \quad (1.47)$$

Pour obtenir la vitesse de l'élément dans un référentiel inertiel dont les axes sont orientés suivant les directions du sud local, de l'est, et de la verticale au point d'impact au moment de la collision, il suffit d'ajouter à la composante  $v_{est}$ , la vitesse par rapport à ce référentiel du point d'impact :

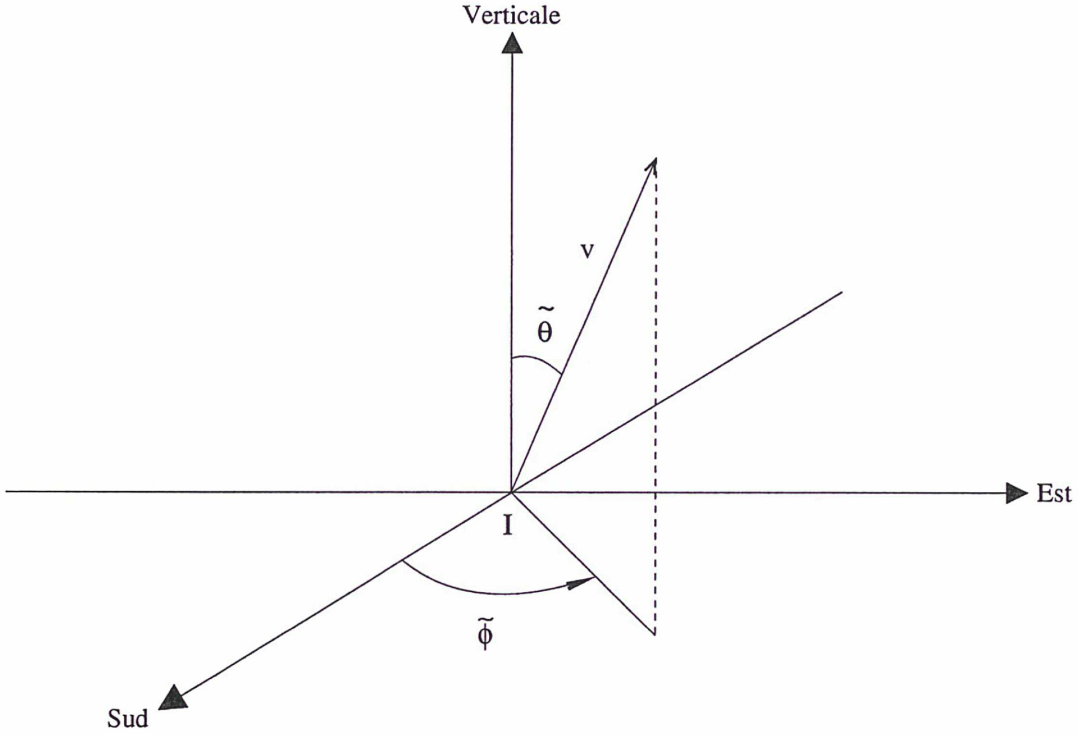


FIG. 1.11: Répère lié au corps tournant et d'origine le point d'impact  $I$ .

$\omega R \sin \psi$ . Par définition le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation est la projection sur cet axe du vecteur :

$$\vec{R} \wedge \vec{v} d^3 M \quad (1.48)$$

où  $\vec{R}$  désigne le vecteur position de l'élément de masse et  $\vec{v}$  la vitesse de cet élément par rapport au référentiel inertiel. Dans ce référentiel inertiel on a :

$$\vec{R} \wedge \vec{v} d^3 M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_{sud} \\ v_{est} + \omega R \sin \psi \\ v_{vert} \end{pmatrix} d^3 M \quad (1.49)$$

$$= \begin{pmatrix} -R(v_{est} + \omega R \sin \psi) \\ Rv_{sud} \\ 0 \end{pmatrix} d^3 M \quad (1.50)$$

Or l'axe de rotation est dirigé selon le vecteur dont les composantes dans ce référentiel inertiel sont :

$$\begin{pmatrix} -\sin \psi \\ 0 \\ \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

La projection suivant l'axe de rotation est alors :

$$d^3\mathcal{H} = R \sin \psi (v_{est} + \omega R \sin \psi) d^3 M \quad (1.52)$$

soit :

$$d^3\mathcal{H} = R \sin \psi (-v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} + \omega R \sin \psi) d^3 M \quad (1.53)$$

La variation de moment cinétique due à une perte de masse après un impact à la colatitude  $\psi$  est donc :

$$\delta\mathcal{H} = \iiint d^3\mathcal{H} \quad (1.54)$$

où l'intégrale porte sur tous les éléments éjectés se libérant de l'attraction de la cible. On a alors d'après (1.53) :

$$\delta\mathcal{H} = - \iiint R \sin \psi \times v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} d^3 M + \iiint \omega R^2 \sin^2 \psi d^3 M \quad (1.55)$$

La colatitude  $\psi$  et la vitesse de rotation du corps sont fixées. Comme le corps est sphérique,  $R$  est également constant. L'expression précédente peut s'écrire :

$$\delta\mathcal{H} = -R \sin \psi \iiint v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} d^3 M + \omega R^2 \sin^2 \psi \iiint d^3 M \quad (1.56)$$

Comme l'intégration porte sur tous les éléments éjectés s'échappant,  $\int d^3 M$  représente la perte totale de masse, soit  $\delta M$ . Donc :

$$\delta\mathcal{H} = -R \sin \psi \iiint v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} d^3 M + \omega R^2 \sin^2 \psi \times \delta M \quad (1.57)$$

### Détermination de $\delta\omega$

En utilisant (1.57) et (1.44), l'expression (1.42) de  $\delta\omega$  devient :

$$\begin{aligned} \delta\omega &= -\mathcal{I}^{-1} R \sin \psi \iiint v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} d^3 M \\ &\quad + \mathcal{I}^{-1} \omega R^2 \sin^2 \psi \times \delta M - \mathcal{I}^{-1} \omega R^2 \sin^2 \psi \times \delta M \end{aligned} \quad (1.58)$$

Soit :

$$\delta\omega = -\mathcal{I}^{-1} R \sin \psi \iiint v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} d^3 M \quad (1.59)$$

L'intégrale porte sur tous les éléments éjectés s'échappant définitivement c'est-à-dire sur l'ensemble des  $(v, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$  tels que :  $0 < \tilde{\phi} < 2\pi$ ,  $0 < \tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}$

et tels que  $v > v_l$ ,  $v_l$  étant la vitesse de libération de la cible. On peut alors également écrire :

$$\delta\omega = -\mathcal{I}^{-1}R \sin \psi \int_{\tilde{\phi}=0}^{2\pi} \int_{\tilde{\theta}=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v=v_l}^{v=+\infty} v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} d^3M \quad (1.60)$$

où  $d^3M$  est défini par l'égalité (1.32). Le calcul de cette intégrale serait alors facile si la vitesse de libération  $v_l$  était constante comme c'est le cas pour une sphère sans rotation où on a :  $v_l = V_l = R\sqrt{\frac{8}{3}G\pi\rho}$ . D'une manière générale la vitesse de libération  $v_l$  dépend aussi bien de l'angle zénithal  $\tilde{\theta}$  et de l'azimut  $\tilde{\phi}$  que de la vitesse de rotation  $\omega$  de la cible et de la colatitude  $\psi$ . Dobrovolskis et Burns (1980) et Dobrovolskis (1981) montrent en effet que :

$$\begin{aligned} v_l &= v_l(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \\ &= [V_l^2 - \omega^2 R^2 \sin^2 \psi (1 - \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\phi})]^{\frac{1}{2}} + \omega R \sin \psi \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Etudions alors deux cas possibles, celui où tous les éléments éjectés s'échappent de l'attraction gravitationnelle de la cible et celui où seule une partie des éléments éjectés s'échappent.

### Cas où tous les éléments éjectés s'échappent

Tous les éléments éjectés ne se libèrent que si  $v_{min} > v_l(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$  quelles que soient leurs directions d'éjection. Comme  $v_{min}$  est la vitesse minimale d'éjection, l'intégrale de l'expression (1.59) porte alors sur l'ensemble des  $(v, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$  tels que :  $0 < \tilde{\phi} < 2\pi$ ,  $0 < \tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}$  et tels que  $v > v_{min}$ . On peut alors calculer cette intégrale multiple en la transformant en trois intégrales simples dont l'une d'elles est :  $\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\phi} d\tilde{\phi}$ . L'hypothèse effectuée par Harris (1979) et par Dobrovolskis et Burns (1984) considérant que les éléments éjectés le sont symétriquement suivant la direction azimutale implique que  $\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\phi} d\tilde{\phi} = 0$ . On obtient alors que :  $\delta\omega = 0$ . La perte de moment cinétique est dans ce cas entièrement compensée par les variations du moment d'inertie de la cible de telle sorte que sa vitesse de rotation reste inchangée.

Pour une sphère sans rotation initiale, on a établi au paragraphe (1.6.2) que :  $v_l(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$  était constant et égale à  $V_l$ . Le cas présent correspond alors au cas où  $R < R_{min}$  c'est à dire au cas où la cible est suffisamment petite.

**Cas où  $v_{min} < v_l(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ , pour tout  $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$**

On ne peut pas dans ce cas ramener le calcul de l'intégrale de l'expression (1.60) aux produits de trois intégrales simples. En utilisant l'expression (1.32) de  $d^3M$  dans (1.60), on obtient cependant :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta\omega}{I^{-1}R \sin \psi} \tag{1.62} \\ = & - \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \int_{\tilde{\theta}=0}^{\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}} \int_{v=v_l}^{v=+\infty} v \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \times k_0 M_* \left( \frac{v}{v_{min}} \right)^{-k_0} \left[ \frac{dv}{v} \right] \delta \left( \tilde{\theta} - \frac{\pi}{4} \right) d\tilde{\theta} \left[ \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \right] \\ = & - \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \int_{\tilde{\theta}=0}^{\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{v=v_l}^{v=+\infty} k_0 M_* \left( \frac{v}{v_{min}} \right)^{-k_0} dv \right) \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} \times \delta \left( \tilde{\theta} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} d\tilde{\theta} \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \int_{v=v_l}^{v=+\infty} k_0 M_* \left( \frac{v}{v_{min}} \right)^{-k_0} dv &= k_0 M_* v_{min}^{k_0} \left[ \frac{1}{1-k_0} v^{1-k_0} \right]_{v=v_l}^{v=+\infty} \\ &= \left( \frac{k_0}{k_0-1} \right) M_* v_{min}^{k_0} v_l^{1-k_0} \end{aligned} \tag{1.63}$$

et comme :  $\delta \left( \tilde{\theta} - \frac{\pi}{4} \right) = \delta \left( \frac{\pi}{4} - \tilde{\theta} \right)$ , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta\omega}{I^{-1}R \sin \psi} \tag{1.64} \\ = & \left( \frac{k_0}{k_0-1} \right) M_* v_{min}^{k_0} \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \left( \int_{\tilde{\theta}=0}^{\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}} v_l^{1-k_0}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \times \sin \tilde{\theta} \times \delta \left( \frac{\pi}{4} - \tilde{\theta} \right) d\tilde{\theta} \right) \sin \tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \end{aligned}$$

$\int_{\tilde{\theta}=0}^{\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}} v_l^{1-k_0}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \times \sin \tilde{\theta} \times \delta \left( \frac{\pi}{4} - \tilde{\theta} \right) d\tilde{\theta}$  est, par définition, le produit de convolution en  $\frac{\pi}{4}$  entre la fonction  $f : \tilde{\theta} \mapsto v_l^{1-k_0}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \times \sin \tilde{\theta}$  et la fonction de Dirac  $\delta$ . Autrement dit :

$$\int_{\tilde{\theta}=0}^{\tilde{\theta}=\frac{\pi}{2}} v_l^{1-k_0}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \times \sin \tilde{\theta} \times \delta \left( \frac{\pi}{4} - \tilde{\theta} \right) d\tilde{\theta} = f * \delta \left( \frac{\pi}{4} \right) \tag{1.65}$$

Or les propriétés de la fonction de Dirac  $\delta$  entraînent que pour tout réel  $t$  tel que  $f * \delta(t)$  existe, on a :

$$f * \delta(t) = f(t) \tag{1.66}$$

En particulier :

$$f * \delta \left( \frac{\pi}{4} \right) = f \left( \frac{\pi}{4} \right) = v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) \times \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) \tag{1.67}$$

D'où :

$$\frac{\delta\omega}{I^{-1}R \sin \psi} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \left( \frac{k_0}{k_0 - 1} \right) M_* v_{min}^{k_0} \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) \sin \tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \quad (1.68)$$

$v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right)$  s'obtient à partir de l'expression (1.61) en prenant  $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{4}$ . En mettant  $V_l$  en facteur, cette expression s'écrit :

$$v_l \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) = V_l \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2 R^2}{V_l^2} \sin^2 \psi \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tilde{\phi} \right) \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{\omega R}{V_l} \sin \psi \sin \tilde{\phi} \right] \quad (1.69)$$

Comme la vitesse en chaque point de la sphère est négligeable devant la vitesse de libération, on peut développer  $v_l \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right)$  par rapport à  $\frac{\omega R}{V_l}$ . Un tel développement à l'ordre 1 donne :

$$v_l \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) = V_l \left[ 1 + \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \psi \sin \tilde{\phi} \right] + o \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \quad (1.70)$$

Un développement à l'ordre 1 en  $\frac{\omega R}{V_l}$  de  $v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right)$  est donc :

$$v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) = V_l^{1-k_0} \left[ 1 + (1 - k_0) \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \psi \sin \tilde{\phi} \right] + o \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \quad (1.71)$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) \sin \tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \\ &= \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} V_l^{1-k_0} \left[ 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \sin \psi \sin \tilde{\phi} \right] \sin \tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} + o \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \\ &= V_l^{1-k_0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \sin \tilde{\phi} d\tilde{\phi} + \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \sin \psi \times \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \sin^2 \tilde{\phi} d\tilde{\phi} \right) \\ & \quad + o \left( \frac{\omega R}{V_l} \right) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Comme l'intégrale  $\int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \sin \tilde{\phi} d\tilde{\phi}$  est nulle, alors :

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) \sin \tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) V_l^{-k_0} \omega R \sin \psi \times \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \sin^2 \tilde{\phi} d\tilde{\phi} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) V_l^{-k_0} \omega R \sin \psi \times \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} \frac{1 - \cos(2\tilde{\phi})}{2} d\tilde{\phi} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) V_l^{-k_0} \omega R \sin \psi \times \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \sin(2\tilde{\phi}) \right) \right]_0^{2\pi} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) V_l^{-k_0} \omega R \sin \psi \times \left( \frac{1}{4\pi} \times 2\pi \right) + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.73)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\tilde{\phi}=0}^{\tilde{\phi}=2\pi} v_l^{1-k_0} \left( \frac{\pi}{4}, \tilde{\phi} \right) \sin \tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{2\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} (1 - k_0) V_l^{-k_0} \omega R \sin \psi + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.74)$$

On a alors en substituant (1.74) dans l'expression (1.68) :

$$\frac{\delta\omega}{I^{-1}R \sin \psi} = \frac{1}{4} \omega R \sin \psi \times k_0 M_* \left( \frac{V_l}{v_{min}} \right)^{-k_0} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.75)$$

Soit :

$$\delta\omega = \frac{1}{4} I^{-1} \omega R^2 \sin^2 \psi \times k_0 M_* \left( \frac{V_l}{v_{min}} \right)^{-k_0} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.76)$$

#### Variation moyenne de la vitesse de rotation

La formule (1.76) est valable pour un impact spécifique à la colatitude  $\psi$  avec  $v_{min} < v_l(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ .  $\delta\omega$  s'exprime en effet en fonction de  $\psi$ . Pour obtenir la variation moyenne de la vitesse de rotation due à une collision, on effectue une moyenne sur la surface de la sphère. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overline{\delta\omega} &= \frac{\int_0^\pi \delta\omega(\psi) \times 2\pi R \sin \psi \times R d\psi}{\int_0^\pi 2\pi R \sin \psi \times R d\psi} \\
&= \frac{\int_0^\pi \delta\omega(\psi) \times \sin \psi \times d\psi}{\int_0^\pi \sin \psi \times d\psi} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \delta\omega(\psi) \times \sin \psi \times d\psi \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta\omega(\psi) \times \sin \psi \times d\psi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \delta\omega(\psi) \times \sin \psi \times d\psi \right) \quad (1.77)
\end{aligned}$$

En posant dans la seconde intégrale :  $\psi = \pi - \psi'$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \delta\omega(\psi) \times \sin \psi \times d\psi &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \delta\omega(\pi - \psi') \times \sin(\pi - \psi') \times (-d\psi') \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta\omega(\pi - \psi') \times \sin(\pi - \psi') \times d\psi' \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta\omega(\psi') \times \sin(\psi') \times d\psi' \quad (1.78)
 \end{aligned}$$

car  $\sin(\pi - \psi') = \sin(\psi')$  et  $\delta\omega(\pi - \psi') = \delta\omega(\psi')$ . On en déduit donc :

$$\overline{\delta\omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta\omega(\psi) \times \sin \psi \times d\psi \quad (1.79)$$

On en déduit alors en utilisant l'expression (1.76) de  $\delta\omega$  que :

$$\overline{\delta\omega} = \frac{1}{4} I^{-1} \omega R^2 k_0 M_* \left( \frac{V_l}{v_{min}} \right)^{-k_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \psi d\psi + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.80)$$

Comme :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \psi d\psi = \left[ -\cos \psi + \frac{\cos^3 \psi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \quad (1.81)$$

on a :

$$\overline{\delta\omega} = \frac{1}{6} I^{-1} \omega R^2 k_0 M_* \left( \frac{V_l}{v_{min}} \right)^{-k_0} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.82)$$

Dans le cas présent la cible est supposée sphérique. Le moment d'inertie  $I$  a pour valeur  $\frac{2}{5}MR^2$ . Donc :

$$\overline{\delta\omega} = \frac{5}{12} k_0 \omega \frac{M_*}{M} \left( \frac{V_l}{v_{min}} \right)^{-k_0} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.83)$$

Comme :  $V_l = R\sqrt{\frac{8}{3}G\pi\rho}$  et comme  $R_{min}$  est défini par :  $R_{min}\sqrt{\frac{8}{3}G\pi\rho} = v_{min}$ , on a :  $\frac{V_l}{v_{min}} = \frac{R}{R_{min}}$ . On peut alors écrire en utilisant (1.29) :

$$\overline{\delta\omega} = \frac{5}{12} k_0 \omega \frac{m}{M} LV^2 \left( \frac{R}{R_{min}} \right)^{-k_0} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.84)$$

Soit avec (1.39) :

$$\overline{\delta\omega} = \frac{5}{12} k_0 \omega \frac{m}{M} \left( \frac{R}{R_a} \right)^{-k_0} + o\left(\frac{\omega R}{V_l}\right) \quad (1.85)$$

### Ajout d'un nouveau terme

En synthétisant les résultats obtenus dans les deux cas étudiés, on peut dire que la variation moyenne de la vitesse de rotation due à la perte de masse suite à la collision d'un seul projectile est donc donnée d'une manière générale par l'expression :

$$\overline{\delta\omega} = \frac{5}{12} k_0 \omega \frac{m}{M} \left( \frac{R}{R_a} \right)^{-k_0} \times 1_{\{R > R_{min}\}} \quad (1.86)$$

où  $1_{\{R > R_{min}\}} = 1$  si  $R > R_{min}$  et  $1_{\{R > R_{min}\}} = 0$  si  $R \leq R_{min}$

On doit soustraire cette variation à celle obtenue en (1.28). On en déduit que la variation de la vitesse de rotation dans le cas où la cible est sphérique de masse  $M$  et de rayon  $R$  est :

$$\Delta\omega = \frac{25}{16} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{V^2}{R^2\omega} - \frac{5}{3} \left( \frac{m}{M} \right) \omega - \frac{5}{12} k_0 \omega \frac{m}{M} \left( \frac{R}{R_a} \right)^{-k_0} \times 1_{\{R > R_{min}\}} \quad (1.87)$$

#### 1.6.4 Conclusion

Dans le cadre d'un impact à cratérisation, un petit projectile de masse  $m$  rentrant en collision à une vitesse d'impact  $V$  avec une cible sphérique plus grande de masse  $M$  et de rayon  $R$  modifie à la fois le moment cinétique et la masse de la cible, et entraîne une modification de la vitesse de rotation de la cible.

Les modèles proposés par Harris (1979) et, Dobrovolskis et Burns (1984) divisent le processus de collision en deux phases : la première consiste en un impact parfaitement inélastique avec le projectile se déposant sur la cible sans perte de masse. Ces modèles considèrent ensuite que dans une seconde phase, des éléments s'éjectent symétriquement entraînant une perte de masse de la cible.

La variation moyenne de la vitesse de rotation à l'issue de la première phase est donnée par l'égalité :

$$\Delta\omega = \frac{25}{16} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{V^2}{R^2\omega} - \frac{5}{3} \left( \frac{m}{M} \right) \omega \quad (1.88)$$

Dans le cas où dans la seconde phase, tous les éléments éjectés sont soit tous retenus par la cible (cas d'accrétion sans perte de masse), soit s'échappent tous, il n'y a pas de nouvelles variations du moment cinétique et de la vitesse de rotation. La variation moyenne de la vitesse de rotation de la cible à la fin du processus d'impact est alors donnée par l'expression (1.88). Dans le cas où

dans la seconde phase une partie seulement des éléments éjectés s'échappe, on doit tenir compte d'un effet de perte du moment cinétique qui implique une baisse de la vitesse de rotation et qui est due aux éléments s'éjectant dans le même sens que celui de la rotation de la cible. Pour prendre en compte cette baisse, on doit ajouter à l'expression du membre de droite de l'expression (1.88) le terme défini par l'expression (1.86). La variation moyenne de la vitesse de rotation de la cible à la fin du processus d'impact est alors donnée par l'expression :

$$\Delta\omega = \frac{25}{16} \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{V^2}{R^2\omega} - \frac{5}{3} \left(\frac{m}{M}\right) \omega - \frac{5}{12} k_0 \omega \frac{m}{M} \left(\frac{R}{R_a}\right)^{-k_0} \quad (1.89)$$

Il est cependant à noter que la théorie de Dobrovolskis and Burns (1984) suppose que les éléments sont éjectés d'un lieu de la cible proche du lieu d'impact et qu'ils le sont symétriquement par rapport à la direction azimutale. Selon Davis *et al.* (1989) et Farinella *et al.* (1992), ces hypothèses ne sont pas nécessairement vérifiées pour des éléments éjectés ou bien d'un cratère important, ou bien suite à un impact oblique.

De plus, supposer que le projectile se dépose sur la cible sans perte de masse n'est pas une bonne approximation : la quantité de mouvement de cibles après un impact a été mesurée au cours d'expériences en laboratoire par Yanagisawa *et al.* (1996) et par Yanagisawa et Hasegawa (2000). Les résultats montrent qu'à l'exception des impacts rasants, les impacts ne sont pas parfaitement inélastiques suivant la direction tangentielle à la surface de la cible au point d'impact pendant la formation des cratères. La composante tangentielle de la quantité de mouvement des éléments éjectés lors de la première phase de Dobrovolskis et Burns (1984) (qui correspond à la phase de contact et de compression décrit dans la partie 1.5.2) représente une part importante de la quantité de mouvement initiale du projectile. De plus, les éléments éjectés le sont symétriquement au cours de la seconde phase de Dobrovolskis et Burns (1984) ce qui explique en particulier la formation d'un cratère de forme circulaire lors d'impacts obliques mais les éjections ne sont pas symétriques lors de la phase de contact et de compression.



# Chapitre 2

## Description d'une Nouvelle Modélisation

### 2.1 Introduction

Nous avons étudié à la fin du chapitre 1 une méthode développée par Harris (1979) et par Dobrovolskis et Burns (1984) permettant d'évaluer les effets sur la vitesse de rotation d'un impact sur une cible sphérique et avons exposé dans la section 1.6.4 les limites de ce modèle. Plusieurs paramètres caractérisant la collision sur un corps céleste (astéroïde ou planète) n'apparaissent pas dans les formules analytiques finales car le modèle proposé moyenne certaines expressions. Ces paramètres sont, par exemple, la latitude du lieu d'impact, les angles d'impact c'est-à-dire les angles selon lesquels la particule entre en collision avec la cible. On peut y ajouter la longitude du lieu d'impact si on considère, contrairement à ce modèle, que la cible n'est pas sphérique.

On considèrera donc dans cette partie un corps rigide  $K$  (un astéroïde ou une planète) de masse  $M$  de la forme d'un ellipsoïde triaxial de demi-axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  avec  $a \geq b \geq c$ . Ce corps sera la cible d'un impact d'un corps sphérique  $k$  de rayon  $r$ . Nous proposons tout d'abord une paramétrisation complète d'un tel impact incluant plusieurs paramètres géométriques (voir la section 2.2). Puis nous avons construit une modélisation étudiant les changements rotationnels suite à l'impact en tenant compte des différents paramètres. Deux cas seront alors considérés : le premier que nous appellerons *impact avec accréation* suppose, comme le fait Harris (1979), que le projectile s'accumule sur la cible sans perte de masse. Cette hypothèse, comme nous l'avons déjà dit, n'est pas réaliste. Un tel impact entraîne plutôt une érosion de la cible avec la formation

d'un cratère et avec des éléments s'éjectant et s'échappant éventuellement de l'attraction gravitationnelle de la cible : il s'agit du deuxième cas étudié que nous appellerons *impact à cratérisation*. Commençons cependant par définir différents paramètres permettant de caractériser géométriquement un impact dans le but d'en étudier les conséquences.

## 2.2 Paramétrisation

### 2.2.1 Choix du référentiel inertiel

Avant tout impact, le corps  $K$  décrit un mouvement quasi-elliptique autour du soleil. Entre l'instant  $t - \delta t$  avec  $\delta t \ll 1$  et l'instant  $t$  où l'impact a lieu, on peut supposer que ce corps est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. On définit alors un référentiel inertiel noté  $(\mathcal{R}_0)$  dont le système d'axes associé  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  est tel que le centre de masse du corps impacté  $\Omega$  (qui est le centre de l'ellipsoïde) coïncide avec l'origine  $O$  dans l'intervalle de temps  $[t - \delta t; t]$  et tel que les axes principaux d'inertie de  $K$  coïncident avec ses axes. Pendant l'intervalle de temps considéré, l'axe  $(O, \vec{X})$  (respectivement  $(O, \vec{Y})$  et  $(O, \vec{Z})$ ) est en fait l'axe de l'ellipsoïde associé au demi-axe  $a$  (respectivement  $b$  et  $c$ ).

On notera également  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  la base dont les vecteurs ont la même direction que les axes  $(O, \vec{X})$ ,  $(O, \vec{Y})$  et  $(O, \vec{Z})$ .

### 2.2.2 Repérage angulaire du point d'impact

Pour tout point de l'ellipsoïde, on définit d'une part, le plan méridien passant par ce point comme le plan contenant l'axe  $(O, \vec{Z})$  et le point considéré et d'autre part, le méridien en ce point comme l'intersection entre le plan méridien passant par ce point et la surface de l'ellipsoïde. Parmi tous les plans méridiens, celui contenant les axes  $(O, \vec{X})$  et  $(O, \vec{Z})$  est choisi comme plan de référence et sera appelé "plan méridien origine".

Le point d'impact  $I$  du projectile sur le corps  $K$  peut être repéré par deux angles  $\lambda$  et  $\phi$  (voir figure 2.1) :  $\lambda$  correspond à la longitude du point d'impact, c'est-à-dire l'angle orienté mesuré dans le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$  entre le plan méridien origine  $(O, \vec{X}, \vec{Z})$  et le plan méridien passant par  $I$ .  $\lambda$  est orienté positivement "vers l'est" et on a  $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$ .

$\phi$  est l'angle orienté, mesuré dans le plan méridien passant par  $I$ , entre le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$  et la normale en  $I$  au méridien passant par  $I$ .  $\phi$  est mesurée positivement "vers le nord" soit lorsque la troisième composante de  $I$  dans

le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  est positive. On a  $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ .  $\phi$  représente la latitude du point d'impact.

### 2.2.3 Détermination d'une base lié au point d'impact

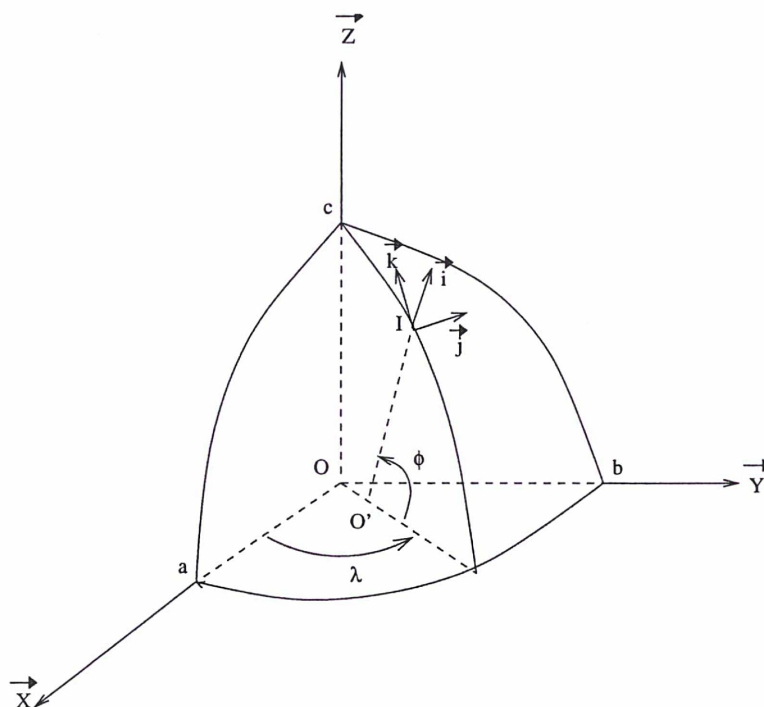


FIG. 2.1: Repérage angulaire du lieu d'impact

A partir des deux paramètres  $\lambda$  et  $\phi$ , on peut définir une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  représentée sur la figure 2.1 et définie de la manière suivante :

$$\vec{i} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.1)$$

$$\vec{j} \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.2)$$

et :  $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$  soit :

$$\vec{k} \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.3)$$

On vérifie aisément que les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  constituent une base orthonormale. La matrice de passage de la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est alors la matrice :

$$[P] = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On remarque qu'en utilisant les matrices de rotation,  $[P]$  peut s'écrire plus simplement :

$$[P] = R_3(\lambda)R_2(-\phi) \quad (2.5)$$

avec :

$$R_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

et :

$$R_2(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Ainsi si  $(a_1, a_2, a_3)$  désigne les composantes d'un vecteur dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  [respectivement dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ] alors les composantes de ce vecteur dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  [respectivement dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ] sont :  $[P] {}^t(a_1, a_2, a_3)$  [respectivement  $[P]^{-1} {}^t(a_1, a_2, a_3)$ ].

On remarquera également que :

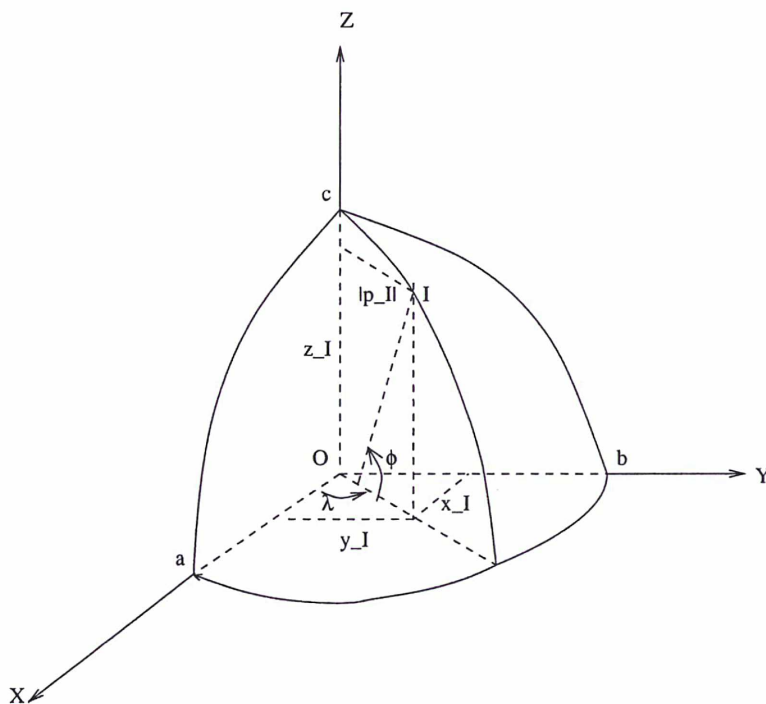
$$[P]^{-1} = {}^t[P] = R_2(\phi)R_3(-\lambda) \quad (2.8)$$

### 2.2.4 Repérage du point d'impact dans le repère de référence

Soient  $(x_I, y_I, z_I)$  les coordonnées cartésiennes du point d'impact  $I$  dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . Si  $|p_I|$  représente la distance de ce point à l'axe  $(O, \vec{Z})$  (voir figure 2.2), on a alors :

$$x_I = |p_I| \cos \lambda \quad (2.9)$$

$$y_I = |p_I| \sin \lambda \quad (2.10)$$

FIG. 2.2: Repérage du lieu d'impact dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ 

avec :

$$p_I^2 = x_I^2 + y_I^2 \quad (2.11)$$

L'équation cartésienne de la surface de l'ellipsoïde dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  implique que les coordonnées  $(x_I, y_I, z_I)$  du point  $I$  vérifient la relation :

$$\frac{x_I^2}{a^2} + \frac{y_I^2}{b^2} + \frac{z_I^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (2.12)$$

La relation (2.12) peut également s'écrire en utilisant  $p_I$  :

$$\frac{p_I^2 + \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right]y_I^2}{a^2} + \frac{z_I^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (2.13)$$

Comme  $y_I = |p_I| \sin \lambda$  alors :

$$\frac{p_I^2}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 \lambda\right) + \frac{z_I^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (2.14)$$

Posons alors :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 \lambda}} \quad (2.15)$$

On a donc :

$$\frac{p_I^2}{\mathcal{A}(\lambda)^2} + \frac{z_I^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (2.16)$$

$\mathcal{A}(\lambda)$  dépend de la forme de l'ellipsoïde et de la longitude du point d'impact. Ainsi pour tous les points du plan méridien passant par  $I$  (que l'on notera  $\Pi_I$ ), la valeur de  $\mathcal{A}(\lambda)$  reste la même.

En raisonnant de la même manière que pour  $I$ , on montre que tous les points du plan  $\Pi_I$  situés sur l'ellipsoïde et de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère de référence vérifient l'égalité :

$$\frac{p^2}{\mathcal{A}(\lambda)^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (2.17)$$

avec :

$$p^2 = x^2 + y^2 \quad (2.18)$$

$(p, z)$  constitue un système de coordonnées dans le plan méridien  $\Pi_I$ . Les axes associés à ce système sont la droite d'intersection du plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$  et du plan méridien ( $\Pi_I$ ) (axe des abscisses associé à  $p$ ) et, l'axe  $(O, \vec{Z})$  (axe des ordonnées associé à  $z$ ). Par convention, on considère que :  $z \geq 0$  si  $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$  et :  $z < 0$  sinon. On considère également que :  $p \geq 0$  pour tous les points de ( $\Pi_I$ ) dont la deuxième coordonnée  $y$  est positive.

L'égalité (2.17) est donc l'équation d'une ellipse dans le plan  $\Pi_I$ , muni du système de coordonnées  $(p, z)$ . Cette équation est vérifiée par les points du plan méridien ( $\Pi_I$ ) situés sur l'ellipsoïde. En dérivant cette égalité par rapport à  $p$ , on obtient ( $\mathcal{A}(\lambda)$  étant constant) :

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{c^2}{\mathcal{A}(\lambda)^2} \frac{p}{z} \quad (2.19)$$

Cette dérivée représente en fait la pente dans le plan méridien  $\Pi_I$  de la tangente à l'ellipse au point considéré. On a alors (voir figure 2.3) :

$$\frac{dz}{dp} = -\cot \phi \quad (2.20)$$

On déduit de (2.19) et de (2.20) l'expression de  $z$  :

$$z = p \frac{c^2}{\mathcal{A}^2} \tan \phi \quad (2.21)$$

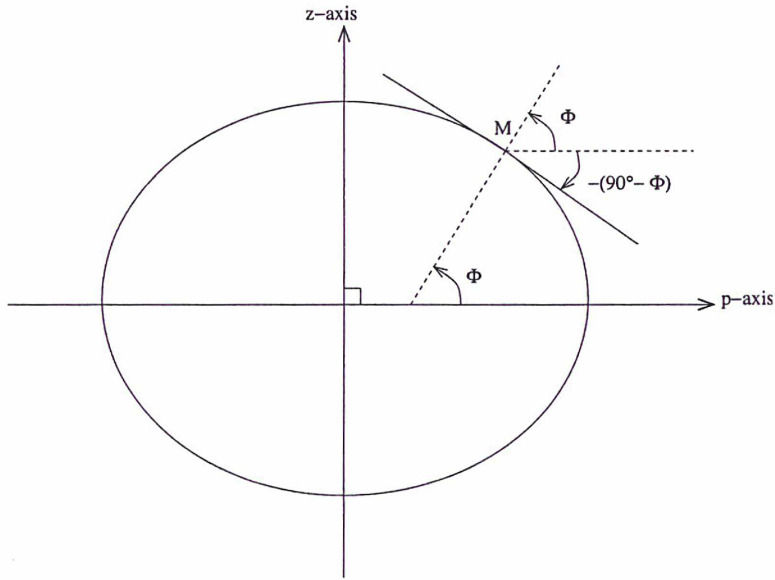


FIG. 2.3: Pente de la tangente en  $M$  à l'ellipse dans le plan  $(\Pi_I)$  :  $\frac{dz}{dt} = \tan(-(90^\circ - \phi))$

Puis en reportant l'égalité précédente dans (2.17), on obtient l'expression de  $|p|$  :

$$|p| = \frac{\mathcal{A}(\lambda)^2 \cos \phi}{\sqrt{\mathcal{A}(\lambda)^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.22)$$

soit :

$$|p| = \frac{\mathcal{A}(\lambda) \cos \phi}{w(\lambda, \phi)} \quad (2.23)$$

avec :

$$w(\lambda, \phi) = \sqrt{1 + \frac{c^2 - \mathcal{A}(\lambda)^2}{\mathcal{A}(\lambda)^2} \sin^2 \phi} \quad (2.24)$$

Les égalités (2.21), (2.23) et (2.24) sont également valables lorsque le point considéré est  $I$ . On peut donc, à l'aide également des égalités (2.9) et (2.10), exprimer les coordonnées  $(x_I, y_I, z_I)$  du point d'impact  $I$  dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  en fonction de sa latitude  $\phi$ , de sa longitude  $\lambda$  et des paramètres de l'ellipsoïde. On a :

$$x_I = \frac{\mathcal{A}(\lambda) \cos \lambda \cos \phi}{w(\lambda, \phi)} \quad (2.25)$$

$$y_I = \frac{\mathcal{A}(\lambda) \sin \lambda \cos \phi}{w(\lambda, \phi)} \quad (2.26)$$

$$z_I = \mathcal{A}(\lambda)(1 - \epsilon(\lambda)^2) \frac{\sin \phi}{w(\lambda, \phi)} \quad (2.27)$$

avec :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 \lambda}} \quad (2.28)$$

$$\epsilon(\lambda)^2 = \frac{\mathcal{A}(\lambda)^2 - c^2}{\mathcal{A}(\lambda)^2} \quad (2.29)$$

et :

$$w(\lambda, \phi) = \sqrt{1 - \epsilon(\lambda)^2 \sin^2 \phi} \quad (2.30)$$

Le point d'impact  $I$  étant fixé,  $\lambda$  et  $\phi$  restent constants. Par commodité, on écrira dans la suite  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\epsilon^2$  et  $w$ ) au lieu de  $\mathcal{A}(\lambda)$  (respectivement au lieu de  $\epsilon(\lambda)^2$  et de  $w(\lambda, \phi)$ ), en sous-entendant la dépendance en fonction de  $\lambda$ .

D'autre part, par définition  $a \geq \mathcal{A} \geq b$  et, comme  $a \geq b \geq c$  alors  $\mathcal{A} \geq c$ . L'égalité (2.17) permet alors d'affirmer que, dans le plan  $\Pi_I$ ,  $I$  appartient donc à une ellipse de demi-grand axe  $\mathcal{A}$ , de demi-petit axe  $c$  et d'excentricité  $\epsilon$ .

### Remarque concernant la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le plan  $(I, \vec{j}, \vec{k})$  n'est pas a priori le plan tangent en  $I$  à l'ellipsoïde. Ce plan est le plan tangent en  $I$  à l'ellipsoïde si et seulement si  $a = b$  c'est-à-dire si et seulement si l'ellipsoïde considéré est un ellipsoïde de révolution aplati. On a en effet le théorème suivant :

**Théorème :** On considère  $U$  un ouvert de  $R^3$ ,  $f : U \rightarrow R$  une fonction de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) sur  $U$  et  $\Sigma$  la surface d'équation cartésienne  $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ . Soit  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point non singulier de  $\Sigma$  (c'est-à-dire tel que  $\overrightarrow{\text{Grad}}_f(M) \neq 0$ ).

$\Sigma$  admet alors un plan tangent en  $M$ . Ce plan tangent passe par  $M$  et est normal au vecteur  $\overrightarrow{\text{Grad}}_f(M)$ .

Appliquons ce théorème à l'ellipsoïde pour lequel :

$$U = R^3, f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (2.31)$$

et au point d'impact  $I$  dont les coordonnées cartésiennes sont notées  $(x_I, y_I, z_I)$ .  $I$  n'est pas un point singulier puisque  $\overrightarrow{Grad}_f(I) = (\frac{2x_I}{a^2}, \frac{2y_I}{b^2}, \frac{2z_I}{c^2})$  et  $(x_I, y_I, z_I) \neq (0, 0, 0)$ .

L'ellipsoïde admet donc un plan tangent au point d'impact  $I$  dont un vecteur normal est colinéaire au vecteur :

$$\vec{n}\left(\frac{x_I}{a^2}, \frac{y_I}{b^2}, \frac{z_I}{c^2}\right) \quad (2.32)$$

On a alors, d'après les relations (2.25), (2.26), (2.27) donnant les coordonnées de  $I$  dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  et d'après (2.29) :

$$\vec{n}\left(\frac{\mathcal{A}}{a^2 w} \cos \lambda \cos \phi, \frac{\mathcal{A}}{b^2 w} \sin \lambda \cos \phi, \frac{1}{\mathcal{A} w} \sin \phi\right). \quad (2.33)$$

Pour que ce plan tangent soit en fait le plan  $(I, \vec{j}, \vec{k})$ , il faut et il suffit que  $\vec{n}$  et  $\vec{i}$  soient colinéaires. On montre alors facilement que c'est le cas si et seulement si  $a = b$ .

### 2.2.5 Caractérisation de la vitesse d'impact

La vitesse d'impact  $\vec{V}$  relativement à  $O$  (soit relativement au centre de masse  $\Omega$  de  $K$ ) est déterminée par trois paramètres : sa norme  $V$  et deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  (voir figure 2.4).  $\alpha$  est l'angle d'incidence du vecteur-vitesse  $\vec{V}$  mesuré à partir de l'axe  $(I, \vec{i})$  et le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et,  $\beta$  est l'angle orienté entre  $\vec{j}$  et  $-\vec{V}_t$  où  $\vec{V}_t$  est le projeté orthogonal de  $\vec{V}$  dans le plan  $(I, \vec{j}, \vec{k})$ . On a donc :

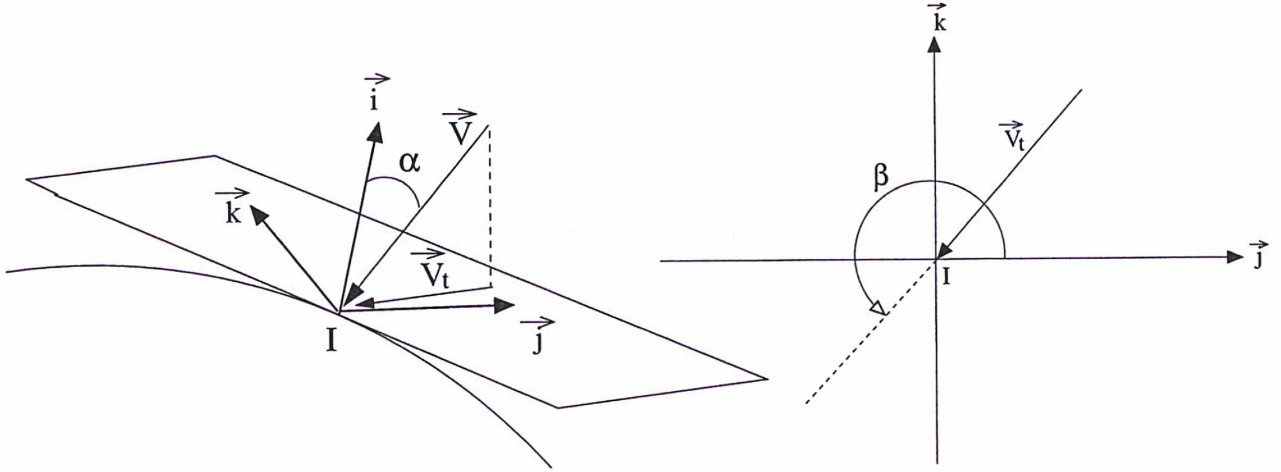
$$\alpha = (\vec{i}, -\vec{V}) \quad (2.34)$$

$$\beta = (\vec{j}, \vec{V}_t) \quad (2.35)$$

avec :  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  et  $0 \leq \beta \leq 180^\circ$ . Les composantes de  $\vec{V}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont donc :

$$\vec{V} \begin{pmatrix} -V \cos \alpha \\ V \sin \alpha \cos \beta \\ V \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \quad (2.36)$$

On retiendra qu'une incidence rasante correspond à  $\alpha = 90^\circ$ . On définit également la composante  $\vec{V}_n$  de la vitesse d'impact  $\vec{V}$  suivant la normale au

FIG. 2.4: Angles d'impact  $\alpha$  et  $\beta$ 

point d'impact  $I$  au méridien passant par  $I$  c'est-à-dire suivant l'axe  $(I, \vec{i})$ .  
On a donc :  $\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_t$  avec :

$$\vec{V}_n \begin{pmatrix} -V \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \quad (2.37)$$

et :

$$\vec{V}_t \begin{pmatrix} 0 \\ V \sin \alpha \cos \beta \\ V \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \quad (2.38)$$

En utilisant la matrice de passage  $[P]$  définie en (2.4), on en déduit les composantes des vecteurs vitesse  $\vec{V}_n$  et  $\vec{V}_t$  dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . On a en effet :

$$\vec{V}_n \begin{pmatrix} -V \cos \alpha \cos \phi \cos \lambda \\ -V \cos \alpha \cos \phi \sin \lambda \\ -V \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.39)$$

et :

$$\vec{V}_t \begin{pmatrix} -V(\sin \alpha \cos \beta \sin \lambda + \sin \alpha \sin \beta \sin \phi \cos \lambda) \\ -V(-\sin \alpha \cos \beta \cos \lambda + \sin \alpha \sin \beta \sin \phi \sin \lambda) \\ V \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \end{pmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.40)$$

## 2.3 Impact suivie d'une accrétion

On considère dans cette partie que la cible  $K$  subit un seul impact provenant d'un corps sphérique  $k$  de masse  $m$  et de rayon  $r$ . D'après la partie précédente, cet impact est caractérisé par 5 paramètres : les deux angles  $\lambda$  et  $\phi$  permettant de repérer le point d'impact sur l'ellipsoïde  $K$ , la norme  $V$  de la vitesse d'impact et les angles d'impact  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous supposons dans cette partie que la collision est suivie d'une accrétion de  $k$  sur  $K$  et que le système formé par les deux corps conserve sa masse et son moment cinétique par rapport à l'origine  $O$  du repère de référence.

### 2.3.1 Moment cinétique total juste avant l'impact

Le moment cinétique total juste avant l'impact est égal à la somme des moments cinétiques des deux corps.

Puisque le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \mathcal{R}_0$  est lié aux axes principaux d'inertie de  $K$ , le tenseur d'inertie de  $K$  exprimé dans ce repère est de la forme :

$$[J_0]_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les moments d'inertie de  $K$  par rapport aux axes principaux d'inertie. Comme  $K$  est de la forme d'un ellipsoïde de demi-axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  alors :

$$A = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{M}{5}(a^2 + c^2), \quad C = \frac{M}{5}(a^2 + b^2) \quad (2.42)$$

Le moment cinétique du corps  $K$  juste avant l'impact est alors :  $[J_0][\Omega_0]$ , où  $[\Omega_0]$  représente le vecteur instantané de rotation de  $K$  avant l'impact. Posons :

$$[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

On a donc :

$$[J_0]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Le moment cinétique de  $k$  juste avant l'impact est :  $m\vec{OI} \wedge \vec{V}$ ,  $\Omega$  le centre de masse de la cible et  $O$  le centre du repère de référence coïncidant juste avant

la collision. Ce moment cinétique peut s'écrire :

$$m\vec{OI} \wedge \vec{V} = m\vec{OI} \wedge \vec{V}_n + m\vec{OI} \wedge \vec{V}_t \quad (2.45)$$

Notons  $[S_n]$  et  $[S_t]$  les matrices-colonnes dont les éléments sont les composantes respectivement des vecteurs  $m\vec{OI} \wedge \vec{V}_n$  et  $m\vec{OI} \wedge \vec{V}_t$ . En utilisant les coordonnées de  $I$  dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  données par (2.25), (2.26) et (2.27) ainsi que les expressions (2.39) et (2.40) donnant les composantes normale et tangentielle (au point d'impact  $I$  au méridien passant par ce point) du vecteur vitesse dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ , on obtient :

$$[S_t] = -mV \frac{\mathcal{A}}{w} \sin \alpha \begin{pmatrix} (1 - \epsilon^2)(\sin \phi \cos \beta \cos \lambda - \sin \beta \sin \lambda) - \epsilon^2 \sin \beta \cos^2 \phi \sin \lambda \\ (1 - \epsilon^2)(\sin \phi \cos \beta \sin \lambda + \sin \beta \cos \lambda) + \epsilon^2 \sin \beta \cos^2 \phi \cos \lambda \\ - \cos \phi \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

et :

$$[S_n] = -mV \frac{\mathcal{A}}{w} \epsilon^2 \cos \alpha \sin \phi \cos \phi \begin{pmatrix} \sin \lambda \\ -\cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

### 2.3.2 Moment cinétique total juste après l'impact

On suppose qu'après l'impact, les deux corps restent liés, leur point de contact étant  $I$  et on étudie le système  $(K + k)$  à l'instant  $t + \delta t$ , suffisamment proche de l'instant  $t$  de l'impact pour que l'on puisse considérer que le centre de masse et les axes principaux d'inertie de  $K$  coïncident toujours respectivement avec  $O$  et les axes attachés au référentiel inertiel choisi. Le tenseur d'inertie du système  $(K + k)$  juste après l'impact est égal à la somme des tenseurs d'inertie des corps  $K$  et  $k$  juste après l'impact. On notera  $[J_1]$  (respectivement  $[J_1^K]$  et  $[J_1^k]$ ) le tenseur d'inertie du système  $(K + k)$  juste après l'impact (respectivement de  $K$  et de  $k$ ). En conséquence de l'augmentation de masse due à la nature de l'impact considéré, le centre de masse de la cible après l'impact n'est pas le même que celui de l'ellipsoïde avant l'impact (c'est-à-dire  $\Omega$  confondu avec  $O$ ). Le tenseur d'inertie  $[J_1]$  et la vitesse angulaire de rotation  $[\Omega_1]$  de la cible après l'impact ne sont donc pas définis par rapport au même point que  $[J_0]$  et  $[\Omega_0]$ . Par un souci de simplification, nous approcherons les valeurs de  $[J_1]$  et de  $[\Omega_1]$  mesurées par rapport au centre de masse de la cible après l'impact par celles mesurées par rapport à l'origine  $O$  du repère de référence  $\mathcal{R}_0$ . On a dans ce repère :

$$[J_1]_{\mathcal{R}_0} = [J_1^K]_{\mathcal{R}_0} + [J_1^k]_{\mathcal{R}_0} \quad (2.48)$$

avec :

$$[J_1^K]_{\mathcal{R}_0} = [J_0]_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Il reste donc à déterminer  $[J_1^k]_{\mathcal{R}_0}$ .

Exprimons d'abord le tenseur d'inertie du corps  $k$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  coïncide avec le centre de masse du corps impacté  $K$  et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est la base liée au point d'impact telle qu'elle a été définie au chapitre 2.2.3. On notera  $[J_1^k]_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  l'expression de ce tenseur dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Ce tenseur est de la forme :

$$[J_1^k]_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} I_{xx}^k & I_{xy}^k & I_{xz}^k \\ I_{xy}^k & I_{yy}^k & I_{yz}^k \\ I_{xz}^k & I_{yz}^k & I_{zz}^k \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Il s'agit d'une matrice symétrique. Les moments d'inertie  $I_{xx}^k$ ,  $I_{yy}^k$  et  $I_{zz}^k$  et les produits d'inertie  $I_{xy}^k$ ,  $I_{xz}^k$ ,  $I_{yz}^k$ ,  $I_{yz}^k$  du corps  $k$  par rapport aux systèmes de coordonnées liés au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont définis par les égalités :

$$I_{xx}^k = \int_k (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy}^k = \int_k (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz}^k = \int_k (x^2 + y^2) dm \quad (2.51)$$

et :

$$I_{xy}^k = - \int_k xy dm, \quad I_{xz}^k = - \int_k xz dm, \quad I_{yz}^k = - \int_k yz dm \quad (2.52)$$

**Détermination de  $I_{xx}^k$ ,  $I_{yy}^k$ ,  $I_{zz}^k$  :**

Soit  $O'$  le point d'intersection entre l'axe  $(I, \vec{i})$  et le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$  (voir figure 2.1). Dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , la troisième composante de  $O'$  est nulle. En exprimant la colinéarité des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{O'I}$ , on détermine les deux premières composantes de ce point. On a ainsi :

$$O' \begin{pmatrix} \epsilon^2 \frac{A}{w} \cos \lambda \cos \phi \\ \epsilon^2 \frac{A}{w} \sin \lambda \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}_{(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.53)$$

En utilisant la matrice de passage  $[P]^{-1} = {}^t[P]$  de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  définie par l'égalité (2.8), on en déduit que :

$$O' \begin{pmatrix} \epsilon^2 \frac{A}{w} \cos^2 \phi \\ 0 \\ -\epsilon^2 \frac{A}{w} \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \quad (2.54)$$

On a en particulier :

$$OO'^2 = \epsilon^4 \frac{\mathcal{A}^2}{w^2} \cos^2 \phi \quad (2.55)$$

Le théorème de Huygens indique que : *si on considère un solide de masse  $m$ , un axe passant par le centre d'inertie  $G$  de ce solide par rapport auquel le moment d'inertie est  $J_G$  et, un axe  $\Delta$  parallèle au premier, distant de  $d$ , par rapport auquel le moment d'inertie est  $J_\Delta$  alors, on a :  $J_\Delta = J_G + md^2$ .* En appliquant ce théorème au corps  $k$ , on montre que :

$$I_{xx}^k = \frac{2}{5}mr^2 + md_i^2 \quad (2.56)$$

où :  $\frac{2}{5}mr^2$  est le moment d'inertie du corps  $k$  et  $d_i$  représente la distance entre les axes  $(O, \vec{i})$  et  $(O', \vec{i})$  Or :

$$d_i = OO' \sin \phi \quad (2.57)$$

Donc :

$$I_{xx}^k = \frac{2}{5}mr^2 + m\epsilon^4 \frac{\mathcal{A}^2}{w^2} \sin^2 \phi \cos^2 \phi \quad (2.58)$$

Pour déterminer  $I_{yy}^k$  et  $I_{zz}^k$ , on utilise  $O''$  le centre de masse de l'impacteur  $k$ . Le théorème de Huygens permet d'écrire aussi que :

$$I_{yy}^k = \frac{2}{5}mr^2 + md_j^2 \quad (2.59)$$

$$I_{zz}^k = \frac{2}{5}mr^2 + md_k^2 \quad (2.60)$$

où  $d_j$  représente la distance entre les axes  $(O'', \vec{j})$  et  $(O, \vec{j})$ , c'est-à-dire la plus courte distance entre deux points de ces deux droites. On définit de manière similaire  $d_k$ .

Les égalité vectorielles :

$$\overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IO''} \quad (2.61)$$

$$\overrightarrow{IO''} = r\vec{i} \quad (2.62)$$

et les expressions donnant les composantes du vecteur  $\vec{i}$  et les coordonnées de  $I$  dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  permettent de connaître les coordonnées de  $O''$  dans ce repère. On a :

$$O'' \begin{pmatrix} (\frac{\mathcal{A}}{w} + r) \cos \lambda \cos \phi \\ (\frac{\mathcal{A}}{w} + r) \sin \lambda \cos \phi \\ [\frac{\mathcal{A}}{w}(1 - \epsilon^2) + r] \sin \phi \end{pmatrix}_{(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.63)$$

Désignons ces coordonnées par :  $(x_{O''}, y_{O''}, z_{O''})$ . L'équation cartésienne de la droite passant par  $O''$  et de vecteur directeur  $\vec{j} \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  est donc (en supposant  $\lambda \neq \frac{k\pi}{2}$ ),  $k$  étant entier) :

$$\frac{x - x_{O''}}{-\sin \lambda} = \frac{y - y_{O''}}{\cos \lambda} \quad (2.64)$$

$$z = z_{O''} \quad (2.65)$$

Soit  $M$  un point de cette droite dont la première composante est notée  $x$ . On a alors :

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.66)$$

avec :

$$y = -\cot \lambda (x - x_{O''}) + y_{O''} \quad (2.67)$$

$$z = z_{O''} \quad (2.68)$$

$OM^2$  est alors minimal lorsque :

$$x = \cos \lambda \sin \lambda \times y_{O''} + \cos^2 \lambda \times x_{O''} \quad (2.69)$$

et vaut :

$$d_j^2 = (\cos \lambda \times x_{O''} + \sin \lambda \times y_{O''})^2 + z_{O''}^2 \quad (2.70)$$

D'après (2.63), on a alors :

$$d_j^2 = \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + r \right)^2 \cos^2 \phi + \left( \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + r \right)^2 \sin^2 \phi \quad (2.71)$$

On a supposé que  $\lambda \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k$  étant entier. Dans le cas où  $\lambda = \frac{k\pi}{2}$ , on démontre que l'expression précédente est encore valable.

Par un raisonnement et des calculs similaires, on montre d'autre part que :

$$d_k^2 = \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + r \right) \cos^2 \phi + \left( \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + r \right) \sin^2 \phi \right]^2 \quad (2.72)$$

D'où :

$$I_{xx}^k = \frac{2}{5} mr^2 + m\epsilon^4 \frac{\mathcal{A}^2}{w^2} \cos^2 \phi \sin^2 \phi \quad (2.73)$$

$$I_{yy}^k = \frac{2}{5} mr^2 + m \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + r \right)^2 \cos^2 \phi + \left( \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + r \right)^2 \sin^2 \phi \right] \quad (2.74)$$

$$I_{zz}^k = \frac{2}{5} mr^2 + m \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + r \right) \cos^2 \phi + \left( \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + r \right) \sin^2 \phi \right]^2 \quad (2.75)$$

Détermination de  $I_{xy}^k, I_{xz}^k, I_{yz}^k$  :

Considérons le repère  $(O'', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O''$  désigne toujours le centre de masse de l'impacteur positionné au centre de la sphère représentant ce corps. On a démontré précédemment que :

$$O'' \begin{pmatrix} (\frac{A}{w} + r) \cos \lambda \cos \phi \\ (\frac{A}{w} + r) \sin \lambda \cos \phi \\ [\frac{A}{w}(1 - \epsilon^2) + r] \sin \phi \end{pmatrix}_{(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.76)$$

En utilisant la matrice de passage  $[P]^{-1} = {}^t[P]$  de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  définie par l'égalité (2.8), on en déduit que :

$$O'' \begin{pmatrix} (\frac{A}{w} + r) - \epsilon^2 \frac{A}{w} \sin^2 \phi \\ 0 \\ -\epsilon^2 \frac{A}{w} \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \quad (2.77)$$

Désignons par  $(X_{O''}, 0, Z_{O''})$  ces coordonnées. Notons  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point  $M$  de l'impacteur dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $(x'', y'', z'')$  celles de  $M$  dans le repère  $(O'', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $\delta$  la masse volumique de l'impacteur. On a alors :

$$\int_k xy dm = \int_k xy \delta(x, y, z) dx dy dz \quad (2.78)$$

$$\int_k xz dm = \int_k xz \delta(x, y, z) dx dy dz \quad (2.79)$$

$$\int_k yz dm = \int_k yz \delta(x, y, z) dx dy dz \quad (2.80)$$

D'autre part comme  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO''} + \overrightarrow{O''M}$ , le passage d'un système de coordonnées à un autre est donné par les égalités suivantes :

$$x = x'' + X_{O''} \quad (2.81)$$

$$y = y'' \quad (2.82)$$

$$z = z'' + Z_{O''} \quad (2.83)$$

On en déduit que :

$$\int_k xy \delta dx dy dz = \int_k x'' y'' \delta'' dx'' dy'' dz'' + X_{O''} \int_k y'' \delta'' dx'' dy'' dz'' \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \int_k xz \delta dx dy dz &= \int_k x'' z'' \delta'' dx'' dy'' dz'' + X_{O''} \int_k z'' \delta'' dx'' dy'' dz'' \\ &+ Z_{O''} \int_k x'' dm + X_{O''} Z_{O''} \int_k \delta'' dx'' dy'' dz'' \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\int_k yz \delta dx dy dz = \int_k y'' z'' \delta'' dx'' dy'' dz'' + Z_{O''} \int_k y'' \delta'' dx'' dy'' dz'' \quad (2.86)$$

avec :

$$\delta = \delta(x, y, z) \quad (2.87)$$

$$\delta'' = \delta''(x'', y'', z'') = \delta(x'' + X_{O''}, y'', z'' + Z_{O''}) \quad (2.88)$$

Dans les égalités (2.84), (2.85) et (2.86), on intègre en fait pour les intégrales des membres de gauche sur l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  de  $R^3$  tels que  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  appartienne à l'impacteur  $k$ . Pour les intégrales du membre de droite, on intègre sur l'ensemble de  $R^3$  composé des triplets  $(x'', y'', z'')$  tels que  $M$  de coordonnées  $(x'', y'', z'')$  dans le repère  $(O'', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  appartienne à l'impacteur  $k$ . Ces deux ensembles s'expriment différemment mais sont identiques. Toutes les intégrations portent sur tous les points constituant le volume de l'impacteur. On a alors désigné le domaine d'intégration par le nom de l'impacteur :  $k$ .

Par ailleurs comme le plan  $(O'', \vec{i}, \vec{j})$  est un plan de symétrie de l'impacteur supposé sphérique de centre de masse  $O''$  alors :

$$\delta''(x'', y'', z'') = \delta''(x'', y'', -z'') \quad (2.89)$$

On a alors :

$$\int_k x'' y'' \delta'' dx'' dy'' dz'' = 0 \quad (2.90)$$

$$\int_k x'' \delta'' dx'' dy'' dz'' = 0 \quad (2.91)$$

$$\int_k y'' \delta'' dx'' dy'' dz'' = 0 \quad (2.92)$$

On montre de même que :

$$\int_k x'' z'' \delta'' dx'' dy'' dz'' = 0 \quad (2.93)$$

$$\int_k y'' z'' \delta'' dx'' dy'' dz'' = 0 \quad (2.94)$$

$$\int_k z'' \delta'' dx'' dy'' dz'' = 0 \quad (2.95)$$

D'où :

$$\int_k xy dm = 0 \quad (2.96)$$

$$\int_k xz dm = m X_{O''} Z_{O''} \quad (2.97)$$

$$\int_k yz dm = 0 \quad (2.98)$$

Soit :

$$I_{xy}^k = 0 \quad (2.99)$$

$$I_{xz}^k = m\epsilon^2 \frac{\mathcal{A}}{w} \sin \phi \cos \phi \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + r \right) - \epsilon^2 \frac{\mathcal{A}}{w} \sin^2 \phi \right] \quad (2.100)$$

$$I_{yz}^k = 0 \quad (2.101)$$

### Expression du tenseur d'inertie de l'impacteur :

Le tenseur d'inertie  $[I_{ap}^k]_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est donc de la forme :

$$[J_1^k]_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} I_{xx}^k & 0 & I_{xz}^k \\ 0 & I_{yy}^k & 0 \\ I_{xz}^k & 0 & I_{zz}^k \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

On en déduit alors l'expression du tenseur d'inertie du corps  $k$  dans la base  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . en utilisant la matrice de passage  $[P]$  de la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$[J_1^k]_{\mathcal{R}_0} = [P][J_1^k]_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} {}^t[P] \quad (2.103)$$

Ecrivons alors :

$$[J_1^k]_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \frac{2}{5}mr^2 Id_3 + F_3 \quad (2.104)$$

avec :

$$F_3 = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ f_{13} & 0 & f_{33} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

où :

$$f_{11} = I_{xx}^k - \frac{2}{5}mr^2 \quad (2.106)$$

$$f_{22} = I_{yy}^k - \frac{2}{5}mr^2 \quad (2.107)$$

$$f_{33} = I_{zz}^k - \frac{2}{5}mr^2 \quad (2.108)$$

$$f_{13} = I_{xz}^k \quad (2.109)$$

On a donc :

$$[J_1^k]_{\mathcal{R}_0} = \frac{2}{5}mr^2 Id_3 + \mathcal{F}_3 \quad (2.110)$$

avec :

$$\mathcal{F}_3 = [P]F_3 {}^t[P] \quad (2.111)$$

### Expressions du tenseur d'inertie et du moment cinétique du système dans le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ :

Le tenseur d'inertie du système  $(K+k)$  exprimé dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  est donc :

$$[J_1]_{\mathcal{R}_0} = [J_1^K]_{\mathcal{R}_0} + [J_1^k]_{\mathcal{R}_0} \quad (2.112)$$

$$= [J_0]_{\mathcal{R}_0} + \frac{2}{5}mr^2 Id_3 + \mathcal{F}_3 \quad (2.113)$$

Le moment cinétique du système juste après l'impact est alors :  $[J_1]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0}$  où  $[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0}$  est le vecteur instantané de rotation du système après l'impact mesuré par rapport à l'origine du repère de référence  $\mathcal{R}_0$ . Il représente donc une approximation de la vitesse de rotation mesurée par rapport au centre de masse de la cible après l'impact.

### 2.3.3 Vitesse de rotation du système après l'impact

La conservation du moment cinétique s'écrit :

$$[J_0][\Omega_0] + m\vec{O}I \wedge \vec{V} = [J_1][\Omega_1] \quad (2.114)$$

on a donc dans le repère de référence  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  :

$$[J_0]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} + [S_n] + [S_t] = [J_1]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0} \quad (2.115)$$

On en déduit alors :

$$[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0} = [J_1]_{\mathcal{R}_0}^{-1} ( [J_0]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} + [S_n] + [S_t] ) \quad (2.116)$$

$[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0}$  représente le vecteur vitesse de rotation de  $K$  avant la collision, mesuré dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$  de centre  $O$  et,  $[J_0]_{\mathcal{R}_0}$  et  $[J_1]_{\mathcal{R}_0}$  sont respectivement définis par les expressions (2.41) et (2.113). Les composantes de  $[S_t]$  et de  $[S_n]$  sont données par les égalités (2.46) et (2.47). L'égalité (2.116) permet alors de déterminer les composantes dans le repère de référence de  $[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0}$ , qui représente une approximation de la vitesse de rotation de la cible après l'impact par rapport à son centre de masse.

## 2.4 Impacts à cratérisation

De la même manière que dans la partie 2.3, on considère l'impact d'un corps sphérique  $k$  de masse  $m$ , de rayon  $r$  sur une cible  $K$  de masse  $M$  de la forme d'un ellipsoïde avec des demi-axes mesurant  $a$ ,  $b$  et  $c$  avec  $a \geq$

$b \geq c$ . Cependant la supposition effectuée dans la partie précédente n'est pas réaliste, en particulier dans le cas d'impacts à des vitesses élevées. De tels impacts entraînent plutôt une érosion de la cible qu'une accrétion du projectile. L'événement a alors pour conséquences l'apparition d'un cratère sur la cible et d'une perte de masse éventuelle correspondant aux éléments issus d'un au moins des deux corps et qui sont éjectés lors de l'impact en ayant réussi à se soustraire de l'influence gravitationnelle de la cible. La masse initiale de la cible et du projectile n'est alors pas conservée et seule une fraction du moment cinétique du projectile est transférée à la cible. Avant de déterminer les variations des propriétés rotationnelles suite à un tel impact, décrivons les formules analytiques permettant d'évaluer les caractéristiques du cratère formé.

### 2.4.1 Dimensions d'un cratère

En observant sur un astéroïde ou une planète un cratère qui témoigne de l'existence d'une collision passée, on peut logiquement se demander si il est possible de connaître les caractéristiques du projectile à l'origine de ce cratère. C'est une question délicate mais il paraît évident que la taille du cratère dépend à la fois de la taille et de la masse du projectile, de la vitesse relative et de l'angle d'impact. Elle dépend également de facteurs tels que la composition du projectile, ainsi que de la structure et la matière de la surface dans laquelle le cratère se forme, et de la gravité à la surface de la cible. La détermination de la taille initiale du projectile connaissant celle du cratère est en fait difficile dans la mesure où, dans ce cas, la vitesse et l'angle d'impact sont rarement connus.

La question inverse consistant à prévoir la taille du cratère formé par un projectile dont la taille, la vitesse et l'angle d'impact sont connus est beaucoup plus simple. Cependant des incertitudes demeurent puisqu'il n'existe pas de données expérimentales ou observationnelles sur des cratères avec un diamètre plus grand qu'une dizaine de mètres. Les formules proposées et utilisées sont en effet des extrapolations, plus ou moins bien fondées, de connaissances expérimentales, de solutions analytiques ou de résultats de codes incluant les équations mises en jeu, soit les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) et les équations prenant en compte la composition de la matière de la cible.

Nous allons décrire dans la suite la démarche permettant d'établir les formules donnant les dimensions d'un cratère en nous basant sur la méthode analytique décrite dans la partie 1.2.3 du premier chapitre. A cet effet, considérons l'impact d'un corps sphérique de rayon  $r$ , de masse volumique  $\delta$ ,

avec une vitesse relative  $V$ , sur une cible dont la gravité à la surface est  $g$ , la masse volumique est  $\rho$  et la mesure de la résistance  $Y$ . On pourrait considérer d'autres paramètres du problème susceptibles d'affecter le résultat mais en supposant que l'impact est normal à la surface de la cible, le volume  $\mathcal{V}$  du cratère formé suite à cet impact est, selon Holsapple (1993), déterminé par une formule du type :

$$\mathcal{V} = f[\{r, V, \delta\}, \{\rho, Y\}, g] \quad (2.117)$$

où les variables définissant l'impacteur ( $r, V, \delta$ ) et celles définissant la matière de la cible ( $\rho, Y$ ) ont été regroupées. L'analyse dimensionnelle constitue le premier outil utilisé pour obtenir une formule. L'équation (2.117) est constituée de 7 paramètres liés aux trois unités indépendantes : masse, longueur et temps. Il existe alors une relation plus simple entre quatre "groupes" sans dimension issues de combinaisons de ces paramètres. Le choix de ces groupes n'est pas unique. Holsapple (1993) considère pour mettre en relation ces groupes sans dimension, une expression de la forme :

$$\frac{\rho\mathcal{V}}{m} = \tilde{f} \left[ \frac{gr}{V^2}, \frac{Y}{\rho V^2}, \frac{\rho}{\delta} \right], \quad m = \frac{4\pi}{3} \delta r^3 \quad (2.118)$$

Analysons les quatre quotients sans dimension de la relation (2.118) : dans le membre de gauche se trouve le rapport de la masse de matière de la cible éjectée du cratère sur la masse de l'impacteur. Ce rapport représente l'efficacité (la performance) de la cratérisation et est noté  $\pi_{\mathcal{V}}$ . Le premier quotient du membre de droite  $\frac{gr}{V^2}$  est le rapport entre d'une part la pression lithostatique  $\rho gr$  à une profondeur dans la cible égale au rayon du projectile et d'autre part la pression dynamique initiale  $\rho V^2$  générée par l'impacteur. On notera ce rapport  $\pi_2$ . La présence de ce paramètre dans l'équation (2.118) permet à l'efficacité de la cratérisation  $\pi_{\mathcal{V}}$  de varier lorsque soit la taille de l'impacteur, soit la gravité augmentent. Le deuxième terme dans la fonction est le rapport entre la résistance de la croûte  $Y$  et la pression dynamique initiale et sera noté  $\pi_3$ . Le dernier terme est le rapport des masses volumiques. On a alors :

$$\pi_{\mathcal{V}} = \tilde{f} \left[ \pi_2, \pi_3, \frac{\delta}{\rho} \right] \quad (2.119)$$

avec :

$$\pi_{\mathcal{V}} = \frac{\rho\mathcal{V}}{m}, \quad \pi_2 = \frac{gr}{V^2}, \quad \pi_3 = \frac{Y}{\rho V^2} \quad (2.120)$$

Selon Holsapple et Schmidt (1979), une expression empirique de la forme suivante convient :

$$\pi_{\nu} = K_1 \left( \pi_2 \left( \frac{\rho}{\delta} \right)^{\frac{(6\nu-2-\mu)}{3\mu}} + \left[ K_2 \pi_3 \left( \frac{\rho}{\delta} \right)^{\frac{(6\nu-2)}{3\mu}} \right]^{\frac{2+\mu}{2}} \right)^{\frac{-3\mu}{(2+\mu)}} \quad (2.121)$$

où les deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  ainsi que les exposants  $\mu$  et  $\nu$  peuvent être choisis de manière à obtenir des résultats cohérents dans chacun des régimes : celui où la gravité domine ( $\pi_3 \ll \pi_2$ ) et celui où la résistance de la matière domine ( $\pi_2 \ll \pi_3$ ).

Les paramètres  $\mu$  et  $\nu$  sont ceux définis dans la partie 1.2.3 du premier chapitre. En se basant sur des hypothèses plausibles, Holsapple et Schmidt (1982) ont montré que les expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie permettent de donner un encadrement de  $\mu$ . On a :

$$\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3} \quad (2.122)$$

Dans les deux cas limites, on a :  $\nu = \frac{1}{3}$  ce qui est probablement, selon Holsapple (1993), la valeur de  $\nu$  en général. D'autre part, comme dans tous les cas étudiés le rapport des masses volumiques est de l'ordre de l'unité, les termes contenant ce quotient pourront être omis.

La figure 2.5 qui représente l'efficience de la cratérisation  $\pi_{\nu}$  en fonction du paramètre  $\pi_2$  illustre le choix de ces paramètres et de l'expression (2.121) : dans le régime où la résistance domine ("strength regime"),  $\pi_{\nu}$  est indépendant du paramètre  $\pi_2$  puisque l'efficience de la cratérisation reste constante lorsque la taille de l'impacteur augmente. Elle dépend en revanche de la vitesse d'impact. D'autre part, en augmentant la taille de l'impacteur avec une vitesse d'impact constante, on évolue progressivement vers un régime où la gravité domine. Dans ce régime,  $\pi_{\nu}$  décroît lorsque la taille du projectile augmente en suivant une loi de puissance dont l'exposant, par identification avec la relation (2.121), est :  $-\frac{3\mu}{2+\mu}$ . On notera  $-n$  cet exposant représentant. On a alors :

$$\frac{3}{7} \leq n \leq \frac{3}{4} \quad (2.123)$$

On supposera désormais que dans tous les cas :  $\nu = \frac{1}{3}$ , ce qui simplifiera les formules. La résistance de la matière  $Y$  apparaît dans l'expression (2.121) au numérateur du deuxième terme du membre de droite dans le produit  $K_2 Y$  qui est déterminé à partir d'expériences de cratérisation dans le régime de résistance. On peut donc prendre pour  $K_2$  la valeur 1 et déterminer une

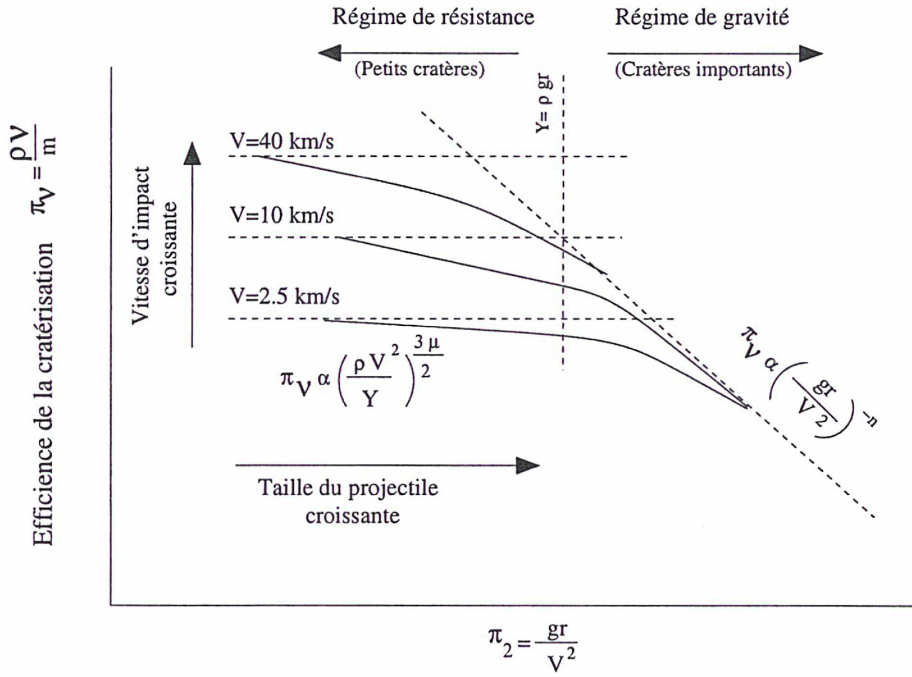


FIG. 2.5: Evolution de l'efficience de cratérisation  $\pi_V$  en fonction de  $\pi_2$ . Selon Holsapple (1993).

résistance effective  $\bar{Y}$  cohérente avec les résultats de cratérisation à petite échelle dans le cas d'un régime où la résistance de la matière domine. Cette approche sera désormais considérée et la notation  $\bar{\pi}_3$  sera utilisée avec :

$$\bar{\pi}_3 = \frac{\bar{Y}}{\rho V^2} \quad (2.124)$$

Avec la valeur de  $\nu$  choisie, l'expression (2.121) s'écrit plus simplement :

$$\pi_V = K_1 \left( \pi_2 \left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} + \bar{\pi}_3^{\frac{2+\mu}{2}} \right)^{\frac{-3\mu}{(2+\mu)}} \quad (2.125)$$

En omettant, comme nous l'avons expliqué précédemment, le facteur  $\left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$ , l'équation précédente devient :

$$\pi_V = K_1 \left( \pi_2 + \bar{\pi}_3^{\frac{2+\mu}{2}} \right)^{\frac{-3\mu}{(2+\mu)}} \quad (2.126)$$

Nous utiliserons cette expression pour la détermination du volume d'un cratère pour tout type de matière. La transition entre les deux régimes

précédemment évoqués a lieu lorsque les deux termes à l'intérieur des parenthèses sont égaux c'est-à-dire lorsque le paramètre de gravitation  $\pi_2$  est égal à celui de résistance  $\left(\frac{\bar{Y}}{\rho V^2}\right)^{\frac{(2+\mu)}{2}}$ . Cependant, il est à noter que les nombreuses expériences réalisées ont lieu par défaut dans le régime où la résistance domine.

Schmidt et Housen (1987) ont donné des estimations de la formule (2.126) pour des sols humides et secs, et pour l'eau. Schmidt *et al.* (1986) ont d'autre part présenté une série complète d'estimations à partir d'explosions d'éléments de composition différente et à des profondeurs variées. Holsapple (1980) a en effet démontré qu'un impact avec une énergie donnée produira un cratère presque identique à celui créé par une explosion avec la même énergie si dans la cible l'explosif est enfoui à une distance d'environ 1 à 2 fois son rayon. Les estimations obtenues sont donc la combinaison de ces deux sources. Des valeurs représentatives pour plusieurs types de matériau de la cible sont données dans le tableau 2.1.

Matière	$K_1$	$\mu$	$n$	$\bar{Y}$ (MPa)
Eau	0.98	0.55	0.65	0
Sable sec	0.132	0.41	0.51	0
Sols secs	0.132	0.41	0.51	0.065
Sols mouillés	0.095	0.55	0.65	0.44
Roche tendre	0.095	0.55	0.65	3.0
Roche dure	0.095	0.55	0.65	6.9

TAB. 2.1: Paramètres utilisés pour le calcul du volume d'un cratère suite à un impact.

## Dimensions d'un cratère simple

Pour un cratère simple, identique à ceux en forme de "cuvette" obtenus en laboratoire et aux petits cratères lunaires, nous avons vu dans la partie 1.5 que deux types de rayon peuvent être considérés juste après la phase d'excavation :  $R_{at}$  le rayon mesuré au niveau de la surface initiale de la cible au voisinage du point d'impact et  $R_t$  le rayon mesuré à partir du bord du cratère. Des effondrements peuvent ensuite avoir lieu et agrandir la taille du cratère. Le rayon final est alors le rayon du cratère résultant. Selon Melosh

(1989), la variation du rayon par rapport à celui mesuré après la phase d'excavation est d'environ 20 % pour les cratères simples. Dans sa modélisation, Holsapple (1993) considère directement le rayon final. Il définit ainsi deux rayons : le rayon final  $r_e$ , mesuré au niveau de la surface initiale de la cible et le rayon final  $r_b$ , mesuré à partir des bords du cratère (voir figure 2.6).

Les données de Pike (1977) concernant les cratères lunaires permettent

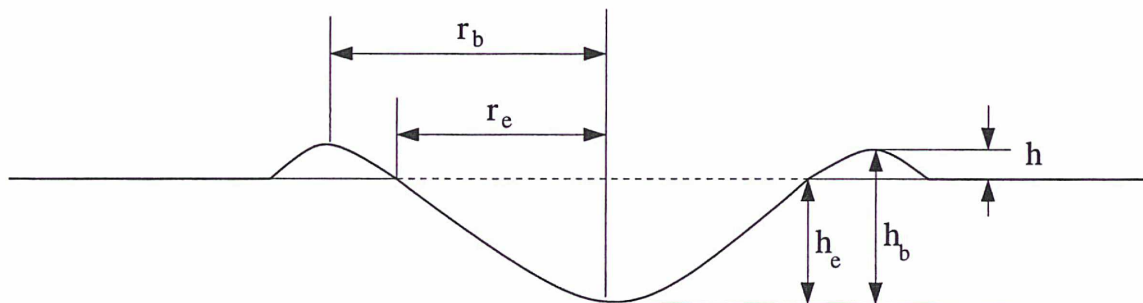


FIG. 2.6: Paramètres utilisés dans la modélisation d'un cratère simple.

d'écrire leur volume en fonction de leur rayon final. En généralisant cette relation, on peut déterminer le rayon final du cratère à partir de son volume. L'expression (2.126) permet de calculer le volume  $\mathcal{V}$  du cratère. On a en effet :

$$\mathcal{V} = \frac{m}{\rho} \pi \nu \quad (2.127)$$

On relie alors  $r_e$  et le volume  $\mathcal{V}$  par une relation simple de la forme :

$$r_e = \kappa \mathcal{V}^{1/3} \quad (2.128)$$

où  $\kappa$  est un réel à fixer. Holsapple (1993) en déduit alors la valeur de  $r_b$  en estimant que d'une manière générale, on a :

$$r_b = 1.3 r_e \quad (2.129)$$

Holsapple (1993) définit également deux paramètres pour caractériser la profondeur du cratère :  $h_b$  mesurée à partir d'une ligne joignant les bords du cratère et  $h_e$  mesurée à partir de la surface initiale de la cible. La différence entre ces deux paramètres sera notée  $h$  et représente la taille des bords du cratère au dessus de la surface initiale de la cible. Des expériences (voir Schmidt *et al.*, 1986) permettent d'écrire :

$$\frac{h}{r_b} = 0.07 \quad (2.130)$$

De plus des observations sur des cratères lunaires (voir Pike, 1977) montrent que :

$$\frac{h_b}{r_b} = 0.4 \quad (2.131)$$

Selon Melosh (1989), on a d'une manière générale :

$$\frac{2}{5} \leq \frac{h_b}{r_b} \leq \frac{2}{3} \quad (2.132)$$

Essayons maintenant d'estimer le rapport  $\frac{h_e}{r_e}$  entre la profondeur finale et le rayon final du cratère mesurés à partir de la surface initiale de la cible. L'égalité (2.130) peut s'écrire :

$$h_e = h_b - h = \frac{h_b}{r_b} \times r_b - 0.07r_b \quad (2.133)$$

soit à l'aide de la relation (2.129) :

$$\frac{h_e}{r_e} = 1.3 \left( \frac{h_b}{r_b} - 0.07 \right) \quad (2.134)$$

On en déduit d'après (2.132) que :

$$0.429 \leq \frac{h_e}{r_e} \leq 0.776 \quad (2.135)$$

Il reste alors à déterminer le réel  $\kappa$  de la relation (2.128) (tel que :  $r_e = \kappa \mathcal{V}^{1/3}$ ). Supposons que le cratère final soit de la forme d'une calotte sphérique. Le volume de la masse déplacée est le volume de la calotte sphérique délimitée par la surface initiale de la cible. Ce volume est par ailleurs égal à  $\mathcal{V}$ . La formule permettant de calculer le volume d'une calotte sphérique de rayon  $r_e$  et de hauteur  $h_e$  donne :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{h_e}{r_e} + \frac{1}{3} \left( \frac{h_e}{r_e} \right)^3 \right] r_e^3 \quad (2.136)$$

Notons que l'expression plus simple obtenue en enlevant le cube situé entre les crochets correspond au volume d'un parabolôïde cylindrique. En utilisant l'expression (2.136) ainsi que les contraintes données par (2.135), on a :

$$0.715 r_e^3 \leq \mathcal{V} \leq 1.463 r_e^3 \quad (2.137)$$

Autrement dit :

$$0.881 \nu^{1/3} \leq r_e \leq 1.118 \nu^{1/3} \quad (2.138)$$

On a alors :

$$0.881 \leq \kappa \leq 1.118 \quad (2.139)$$

On peut également écrire à l'aide de la relation (2.129) que :

$$1.145 \nu^{1/3} \leq r_b \leq 1.454 \nu^{1/3} \quad (2.140)$$

Selon Schmidt et Housen (1987), on a pour des cibles rocheuses :

$$r_b \approx 1.36 \nu^{1/3} \quad (2.141)$$

Holsapple et Housen (2004) considèrent que pour le même type de cible, on a :

$$r_b \approx 1.33 \nu^{1/3} \quad (2.142)$$

## Dimensions d'un cratère complexe

Nous avons vu qu'en plus du régime où la résistance prévaut pour les petits cratères et du régime où la gravité domine pour des cratères plus grands, il existe pour des cratères très larges un autre régime caractérisé par une cratérisation complexe. Ce régime est le témoignage d'un nouveau phénomène qui est généralement interprété comme étant un effondrement des cratères simples ayant une taille dépassant un certain seuil (de 15 à 20 km de diamètre pour la Lune, de 3 km pour la Terre). Cet effondrement serait dû aux forces gravitationnelles. Cette hypothèse semble confirmée par Pike (1988) qui a constaté que la transition entre les deux types de cratères a lieu pour plusieurs corps tels que la Terre, la Lune, Mercure et Mars, à des valeurs inversement proportionnelles à la gravité à la surface.

Les théories étudiant les relations entre le cratère provisoire en forme de "cuvette" et le cratère final complexe supposent que l'effondrement du cratère est un processus qui conserve le volume. L'expression permettant d'évaluer le paramètre  $\pi_\nu$  pour un cratère simple peut alors s'appliquer pour des cratères complexes mais les relations permettant d'obtenir la profondeur et le rayon du cratère doivent être modifiées. Si l'effondrement observé est un phénomène indépendant de la phase de formation du cratère provisoire, les formules usuelles, appliquées dans un régime où la gravité domine, peuvent être utilisées pour obtenir le rayon  $R_t$  du cratère provisoire maximum mesuré à partir

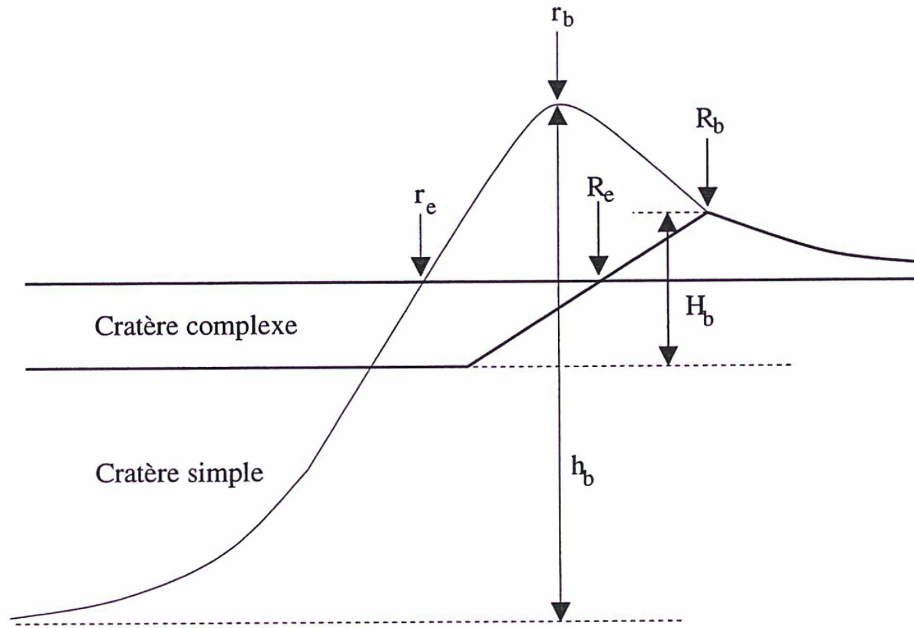


FIG. 2.7: Représentation des paramètres utilisés dans la modélisation des cratères simples et complexes.

des bords . La phase de modification du cratère subséquente ne dépend en aucun cas de l'impacteur mais seulement de la taille du cratère provisoire, de la gravité, de la masse volumique de la cible et de la résistance de la matière. Le rayon final  $R_b$  du cratère complexe mesuré à partir du bord est donc donné par une relation de la forme :

$$R_b = f(R_t, \rho, g, Y) \quad (2.143)$$

ou en utilisant une forme sans dimension :

$$\frac{R_b}{R_t} = f\left(\frac{\rho g R_t}{Y}\right) \quad (2.144)$$

La fonction  $f$  reste alors à déterminer. La solution la plus simple serait de prendre une fonction constante. En effet selon Melosh (1989) la variation du diamètre suivant l'effondrement est de 30 % à 70 % pour les cratères les plus larges. Davis (1999) estime, lui, que les effondrements des bords du cratère provisoire entraînent généralement une augmentation de sa taille de 50%. On pourrait alors fixer en fonction de ces observations une valeur constante pour  $f$  (par exemple,  $f = 1.50$ ).

La relation (2.144), permettant d'évaluer le rayon  $R_b$  du cratère complexe,

est valable uniquement lorsque le rayon du cratère est supérieur à un certain seuil  $R_*$ . A ce seuil, on a :  $R_t = R_*$  et également :  $R_b = R_*$  de telle manière que la fonction  $f$  doit prendre la valeur 1 lorsque  $R_t = R_*$ . La relation (2.144) entraîne alors que :

$$R_* \propto \frac{Y}{\rho g} \quad (2.145)$$

Le rayon de transition  $R_*$  doit donc être proportionnel à la mesure de la résistance de la matière et inversement proportionnel à la gravité. La relation (2.145) donne une forme utile de la relation (2.144) en éliminant le terme  $Y$  et en faisant apparaître le rayon de transition observable. On peut en effet écrire une égalité de la forme :

$$\frac{R_b}{R_t} = \bar{f} \left( \frac{R_b}{R_*} \right) \quad (2.146)$$

où  $\bar{f}$  est une fonction qui doit valoir 1 pour des cratères ayant un rayon inférieur au rayon de transition  $R_*$  et qui doit être croissante au dessus de ce seuil. La fonction proposée par Holsapple (1993) a été déterminée à partir de comparaisons entre les dimensions mesurées de cratères simples et celles observées sur des cratères complexes de la Lune. Les mesures utilisées de cratères simples sont celles effectuées en laboratoire par Schmidt *et al.* (1986) et Schmidt et Housen (1987). Pour la forme et le volume des cratères simples, les formules établies précédemment à partir de  $\pi_V$  (voir le paragraphe concernant les cratères simples) sont utilisées. Les données de Pike (1977) pour les cratères lunaires donnent leur volume en fonction du rayon final  $R_b$ . On peut alors déterminer l'importance de l'effondrement et définir la fonction adéquate. Les résultats de cette analyse sont représentés par la figure 2.8. Sur cette figure se trouvent deux courbes : la première représentant le rapport du rayon final  $R_b$  sur le rayon provisoire  $r_b$ , mesurés tous les deux à partir des bords et la seconde représentant le rapport du rayon final  $R_b$  mesuré à partir des bords sur le rayon provisoire  $r_e$  mesuré à partir de la surface initiale de la cible. On peut relier ces deux rapports par un facteur de 1.3. On obtient à partir de la figure 2.8 les fonctions suivantes :

$$\frac{R_b}{r_b} = 1.02 \left( \frac{R_b}{R_*} \right)^{0.079} \quad (2.147)$$

et :

$$\frac{R_b}{r_e} = 1.326 \left( \frac{R_b}{R_*} \right)^{0.079} \quad (2.148)$$

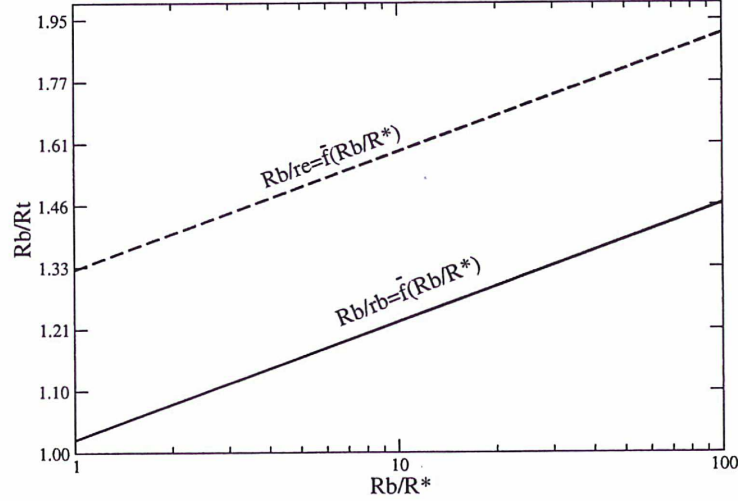


FIG. 2.8: Expression du rapport entre le rayon final  $R_b$  du cratère complexe et le rayon  $R_t$  du cratère simple en fonction du rapport entre  $R_b$  et le rayon de transition  $R_*$  avec  $R_t = r_e$  et  $R_t = r_b$  (échelles logarithmiques).

En transformant la relation (2.147), on a :

$$R_b = 1.022 \times r_b^{1.086} \times R_*^{-0.086} \quad (2.149)$$

où  $r_b$  est défini par l'égalité (2.129). La profondeur correspondante du cratère complexe est donnée par l'égalité :

$$\frac{H_b}{R_*} = 0.313 \left( \frac{R}{R_*} \right)^{0.31} \quad (2.150)$$

Les expressions (2.147), (2.148), (2.149) et (2.150) sont uniquement valables lorsque  $R_b$  est supérieure à  $R_*$ . On suppose que le rayon de transition est égal à  $R_* = 8.5$  km pour la Lune et on considère que  $R_*$  dépend de l'inverse de la gravité. On utilisera alors pour calculer le rayon de transition entre les deux types de cratère, l'expression suivante :

$$R_* = 8.5 \times \frac{g_L}{g} \quad (2.151)$$

où  $g_L$  représente la gravité à la surface de la Lune ( $g_L \approx 1.635 \text{ ms}^{-2}$ ) et où  $R_*$  est exprimé en km.

### 2.4.2 Algorithme de cratérisation et constantes utilisées

Nous allons décrire dans cette partie les étapes de l'algorithme que nous utiliserons dans nos simulations et qui permet de déterminer la taille du cratère formé suite à un impact. La première étape consiste à calculer, pour la cible considérée, le rayon de transition  $R_*$  à l'aide de l'expression (2.151). On calcule ensuite  $r_b$ . Les développements précédents considèrent un impact normal à la surface de la cible au voisinage du point d'impact. Dans le but de prendre en compte l'angle d'impact  $\alpha$  c'est-à-dire l'angle d'incidence mesuré entre la normale au point d'impact au méridien passant par ce point et la direction de la vitesse d'impact, on remplacera, dans les égalités (2.120) et (2.124) définissant  $\pi_2$  et  $\bar{\pi}_3$ , la vitesse  $V$  par  $V \cos \alpha$ . On a ainsi :

$$\pi_2 = \frac{gr}{(V \cos \alpha)^2} \quad (2.152)$$

et :

$$\bar{\pi}_3 = \frac{\bar{Y}}{\rho(V \cos \alpha)^2} \quad (2.153)$$

On en déduit alors l'expression du volume  $\mathcal{V}$  du cratère mesuré à partir de la surface initiale de la cible. On a :

$$\mathcal{V} = \frac{m}{\rho} \pi_{\mathcal{V}} \quad (2.154)$$

avec, en vertu de l'équation (2.126) :

$$\pi_{\mathcal{V}} = K_1 \left( \pi_2 + \bar{\pi}_3^{\frac{2+\mu}{2}} \right)^{\frac{-3\mu}{2+\mu}} = K_1 \left( \pi_2 + \bar{\pi}_3^{\frac{3}{3-n}} \right)^{-n} \quad (2.155)$$

où les constantes  $K_1$ ,  $\mu$ ,  $n$  et  $\bar{Y}$ , dépendant de la nature de la cible, sont données par le tableau 2.1. Dans les simulations que nous effectuerons, nous considérerons des cibles et des projectiles en basalte c'est-à-dire en roche dure. On prendra donc :  $K_1 = 0.095$ ,  $\mu = 0.55$ ,  $n = 0.65$  et  $\bar{Y} = 6.9$  MPa.

Nous choisirons également dans nos simulations, la valeur 0.5 pour le rapport  $\frac{h_b}{r_b}$  entre la profondeur et le rayon du cratère mesurés à partir d'une ligne joignant les bords. Avec cette valeur, on obtient d'après les égalités (2.134) et (2.136) :

$$r_e = 1.010 \mathcal{V}^{1/3} \quad (2.156)$$

En utilisant la relation (2.129), on a alors :

$$r_b = 1.313 \mathcal{V}^{1/3} \quad (2.157)$$

On effectue alors un test sur la valeur obtenue :

-si  $r_b \leq R_*$  alors le cratère obtenu est un cratère simple dont les dimensions sont :  $r_b$  et  $h_b$ . Dans ce cas les dimensions  $r_e$  et  $h_e$  mesurées à partir de la surface initiale de la cible vérifient les égalités (2.129) et (2.134). D'après la relation (2.129), on a :

$$r_e = \frac{r_b}{1.3} \quad (2.158)$$

Avec le choix de la valeur 0.5 pour  $\frac{h_b}{r_b}$ , la relation (2.134) permet d'écrire que :

$$\frac{h_e}{r_e} = 0.559 \quad (2.159)$$

-si au contraire  $r_b > R_*$  alors le cratère est un cratère complexe dont les dimensions  $R_b$  et  $H_b$  mesurées à partir d'une ligne joignant les bords sont définies par les égalités (2.149) et (2.150) par :

$$R_b = 1.022 \times R_*^{-0.086} \times r_b^{1.086} \quad (2.160)$$

$$H_b = 0.313 \times R_*^{0.69} \times R_b^{0.31} \quad (2.161)$$

### 2.4.3 Hypothèses considérées dans la modélisation d'impacts à cratérisation

En nous basant à la fois sur la paramétrisation décrite dans la partie 2.2 et sur les développements effectués dans la partie 2.4.1 sur la détermination de la taille d'un cratère formé, nous allons étudier les variations de la rotation de la cible après un impact. On utilisera à nouveau le référentiel inertiel ( $\mathcal{R}_0$ ) dont le système d'axes attachés est noté  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . Rappelons que ce système est tel que le centre de masse du corps impacté coïncide avec l'origine  $O$  dans l'intervalle de temps  $[t - \delta t; t]$  et tel que les axes principaux d'inertie de  $K$  coïncide à l'instant  $t_0$  avec ses axes. Pendant l'intervalle de temps considéré, l'axe  $(O, \vec{X})$  [resp.  $(O, \vec{Y})$  et  $(O, \vec{Z})$ ] est en fait l'axe de l'ellipsoïde associé au demi-axe  $a$  [resp.  $b$  et  $c$ ]. La base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  liée à l'impacteur  $k$  définie dans la section 2.2.3 est également utilisée. On considère le système de masse totale  $M + m$  constitué, avant l'impact, par la cible et par le projectile et, après l'impact, par la cible localement transformée et par les éléments éjectés et s'échappant de l'influence gravitationnelle de la cible. Avant l'impact, le moment cinétique du système est :

$$[J_0][\Omega_0] + [S_n] + [S_t] \quad (2.162)$$

Rappelons que  $[J_0]$  est le tenseur d'inertie et  $[\Omega_0]$  la vitesse instantanée de rotation de la cible  $K$  avant l'impact.  $[S_t]$  et  $[S_n]$ , définies par les égalités (2.46) et (2.47), sont les composantes tangentielle et normale (au point d'impact au méridien passant par ce point) du moment cinétique du projectile juste avant l'impact c'est-à-dire les composantes suivant respectivement le plan  $(I, \vec{j}, \vec{k})$  et la direction  $(I, \vec{i})$  (normale en  $I$  au méridien passant par  $I$ ).  $[J_0]$ ,  $[\Omega_0]$ ,  $[S_n]$  et  $[S_t]$  sont définis par rapport au centre de masse  $O$  de la cible  $K$  et peuvent être exprimés dans le repère de référence  $(\mathcal{R}_0)$ . Après l'impact et après la formation d'un cratère, le moment cinétique de la cible seule est noté  $[J_1][\Omega_1]$ .  $[J_1]$  et  $[\Omega_1]$  sont respectivement le tenseur d'inertie et la vitesse instantanée de rotation de la cible après l'impact et la formation du cratère. Ils sont exprimés par rapport au centre de masse de la cible après l'impact. Cependant en conséquence de la perte de masse due à la collision, le centre de masse de la cible après l'impact n'est pas le même que celui avant l'impact de telle sorte que  $[J_1]$  et  $[\Omega_1]$  d'une part et,  $[J_0]$  et  $[\Omega_0]$  d'autre part, ne sont pas définis par rapport au même point. On approchera alors les valeurs de  $[J_1]$  et  $[\Omega_1]$  par leurs mesures par rapport au centre de masse de la cible avant l'impact  $O$ . La difficulté réside désormais dans l'évaluation du moment cinétique des éléments éjectés s'échappant. Notons  $[S_1]$  ce moment cinétique. La conservation du moment cinétique peut alors s'écrire dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  :

$$[J_0][\Omega_0] + [S_n] + [S_t] = [J_1][\Omega_1] + [S_1] \quad (2.163)$$

Soit en posant  $[S_0] = [S_n] + [S_t]$  :

$$[J_1][\Omega_1] - [J_0][\Omega_0] = [S_0] - [S_1] \quad (2.164)$$

$[S_0] - [S_1]$  représente la quantité du moment cinétique du projectile qui a été transférée à la cible pendant la collision. Ce transfert a lieu principalement pendant la phase de contact et de compression décrite par Melosh (1989). Le reste du moment cinétique est attribué aux éléments éjectés s'échappant de l'influence gravitationnelle de la cible.

Dans la prochaine section, nous étudierons les différentes évaluations de la quantité de moment cinétique transférée  $[S_0] - [S_1]$  qui apparaît dans l'égalité (2.164) puis nous donnerons dans la section suivante une expression du tenseur d'inertie  $[J_1]$  dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ , nous permettant alors d'exprimer  $[\Omega_1]$  en fonction des paramètres d'impact.

#### 2.4.4 Transfert du moment cinétique initial du projectile

Burns et Safronov (1973) ont les premiers introduit dans leur modélisation un paramètre qui représente la fraction du moment cinétique transféré du projectile vers la cible (voir la fin de la section 1.6.1 du chapitre 1). Ce paramètre,  $\tilde{\zeta}$ , peut être évalué à partir d'expériences en laboratoire. Fujiwara et Tsukamoto (1981) ont montré à partir d'expériences sur des cibles en basalte que, dans le cas d'un impact non destructeur, seulement 10 % environ du moment cinétique du projectile réapparaît dans la rotation du corps le plus important résultant de la collision, impliquant une valeur de  $\tilde{\zeta}$  proche de quelques dixièmes. Par la suite, Yanagisawa *et al.* (1991) ont étudié, à partir de cibles sphériques et de projectiles de compositions différentes et, avec des vitesses d'impact de moins de 1 km/s., la dépendance de  $\tilde{\zeta}$  par rapport à la solidité de la cible et à l'angle d'impact  $\theta$ , mesuré à partir de la normale à la surface de la cible au point d'impact ( $\theta \neq \alpha$ ). Shirono *et al.* (1993) ont réalisé plusieurs impacts à des vitesses différentes utilisant des cibles en mortier et des projectiles en nylon. Ils obtiennent une fraction  $\tilde{\zeta}$  variant de 0.04 à 0.4 et semblant être indépendante de la vitesse d'impact lorsque celle-ci est plus grande que 2 km/s. Dans des conditions similaires, Yanagisawa et Hasegawa (1999) ont mis en évidence une corrélation nette entre la fraction de moment cinétique transférée et l'angle d'impact.

Au lieu d'étudier directement la fraction  $\tilde{\zeta}$  du moment cinétique transféré du projectile vers la cible, Yanagisawa *et al.* (1996) ont les premiers considéré deux coefficients de transfert  $\eta$  et  $\zeta$  correspondant respectivement à la fraction de la quantité de mouvement qui a été transférée du projectile vers la cible suivant des directions normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact. Ces deux paramètres sont définis par :

$$\eta = \frac{M'v'_n}{mv_n} \quad (2.165)$$

$$\zeta = \frac{M'v'_t}{mv_t} \quad (2.166)$$

où  $m$  est la masse du projectile dont la vitesse relativement à la cible est  $V$ .  $M'$  est la masse de la cible après l'impact.  $v'_n$  et  $v'_t$  (respectivement  $v_n$  et  $v_t$ ) représentent les composantes normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact de la vitesse de la cible après l'impact (respectivement de la vitesse d'impact). Notons que ces paramètres ont été évalués en laboratoire par Yanagisawa *et al.* (1996) puis par Yanagisawa et Hasegawa (2000) à partir d'impacts obliques sur une des faces plates de cibles cylindriques. Les composantes  $v_n$  et  $v_t$  ne coïncident pas avec les composantes  $V_n$  et  $V_t$  de

la vitesse d'impact définies par les expressions (2.39) et (2.40) de la partie 2.2.5. En effet  $v_n$  et  $v_t$  sont définies respectivement par rapport à la normale et à la tangente à la surface de la cible au point d'impact alors que  $V_n$  et  $V_t$  le sont respectivement par rapport au vecteur  $\vec{i}$ , normal au point d'impact au méridien passant par ce point d'impact et par rapport au plan  $(I, \vec{j}, \vec{k})$  orthogonal au point d'impact à  $\vec{i}$ . L'axe  $(I, \vec{i})$  n'est pas en général normal au plan tangent à l'ellipsoïde au point d'impact. C'est le cas uniquement lorsque les demi-axes  $a$  et  $b$  de la cible sont égaux c'est-à-dire lorsque la cible est de la forme d'un sphéroïde oblong.

Yanagisawa *et al.* (1996) ont montré que les coefficients  $\eta$  et  $\zeta$  sont reliés au moment cinétique que la cible acquiert lors d'un impact à cratérisation de la manière suivante :

$$[J_1][\Omega_1] - [J_0][\Omega_0] \approx \eta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_n) + \zeta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_t) \quad (2.167)$$

$O$  désignant le centre de masse de la cible avant l'impact et  $I$  le point d'impact. Comme nous avons approché  $[J_1]$  et  $[\Omega_1]$  par les mesures respectivement du tenseur d'inertie et de la vitesse angulaire de la cible après l'impact par rapport à l'origine  $O$  du repère  $\mathcal{R}_0$ , l'expression (2.167) n'est pas une égalité mais peut être considérée comme telle si on suppose que la masse  $m$  du projectile est petite par rapport à la masse  $M$  de la cible. Cette supposition revient également à considérer, dans le cas où les deux corps étudiés ont des masses volumiques proches, que le rayon  $r$  du projectile est "négligeable" devant le demi-axe  $c$  de la cible. La relation (2.167), que nous allons adapter à notre modélisation, correspond à la relation (2.164) qui traduit la conservation du moment cinétique du système considéré. Pour évaluer à partir de l'égalité (2.167) la vitesse angulaire de rotation de la cible juste après l'impact, nous devons déterminer dans le repère  $\mathcal{R}_0$  les expressions des composantes  $\vec{v}_n$  et  $\vec{v}_t$  de la vitesse d'impact. Dans un souci de simplification, nous supposons dans un premier temps que la cible a la forme d'un ellipsoïde de révolution ( $a = b$ ) de telle sorte que le plan  $(I, \vec{j}, \vec{k})$  est le plan tangent à la cible en  $I$ . On a dans ce cas :  $\vec{v}_n = \vec{V}_n$  et  $\vec{v}_t = \vec{V}_t$ . Les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_0$  de  $\vec{V}_n$  et de  $\vec{V}_t$  en fonction des paramètres  $V$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par les égalités (2.39) et (2.40). L'expression dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  de l'égalité (2.167) est ainsi :

$$[J_1]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0} - [J_0]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} \approx \eta[S_n] + \zeta[S_t] \quad (2.168)$$

où les matrices-colonnes  $[S_t]$  et  $[S_n]$  sont données dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  par les égalités (2.46) et (2.47). Si, en particulier, la cible a une forme sphérique,



$\vec{OI}$  et  $\vec{V}_n$  ont la même direction. L'égalité (2.168) devient alors :

$$[J_1]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0} - [J_0]_{\mathcal{R}_0}[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} \approx \zeta[S_t] \quad (2.169)$$

Le coefficient  $\zeta$  est alors, dans ce cas, égal au coefficient  $\tilde{\zeta}$ .

Si en revanche, la cible a la forme d'un ellipsoïde quelconque ( $a$  et  $b$  n'étant pas alors nécessairement égaux), nous devons exprimer dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  les composantes  $\vec{v}_t$  et  $\vec{v}_n$  du vecteur vitesse  $\vec{V}$  relativement au plan tangent à l'ellipsoïde au point d'impact  $I$  et à la direction normale à ce plan tangent. Cette direction diffère certes de celle de l'axe  $(I, \vec{i})$  mais nous avons établi dans la partie 2.2.4 qu'un vecteur normal au plan tangent en  $I$  à l'ellipsoïde est donné dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  par l'expression (2.33), à savoir :

$$\vec{n} \left( \frac{\mathcal{A}}{a^2 w} \cos \lambda \cos \phi, \frac{\mathcal{A}}{b^2 w} \sin \lambda \cos \phi, \frac{1}{\mathcal{A} w} \sin \phi \right) \quad (2.170)$$

Considérons alors le vecteur  $\vec{I}_1 = \frac{w}{\mathcal{A}} \vec{n}$ . On a :

$$\vec{I}_1 \left( \begin{array}{c} \frac{\cos \lambda \cos \phi}{\frac{a^2}{\sin \lambda \cos \phi}} \\ \frac{b^2}{\sin \phi} \\ \mathcal{A}^2 \end{array} \right)_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.171)$$

Définissons également les vecteurs  $\vec{J}_1$  et  $\vec{K}_1$  par :

$$\vec{J}_1 \left( \begin{array}{c} \frac{-\sin \lambda}{b^2} \\ \frac{\cos \lambda}{a^2} \\ 0 \end{array} \right)_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.172)$$

et :  $\vec{K}_1 = \vec{I}_1 \wedge \vec{J}_1$ , soit :

$$\vec{K}_1 \left( \begin{array}{c} \frac{-\sin \phi \cos \lambda}{\frac{a^2 \mathcal{A}^2}{b^2}} \\ \frac{-\sin \phi \sin \lambda}{\frac{b^2 \mathcal{A}^2}{a^2}} \\ \frac{\cos^2 \lambda \cos \phi}{a^4} + \frac{\sin^2 \lambda \cos \phi}{b^4} \end{array} \right)_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.173)$$

On vérifie aisément que les vecteurs  $\vec{I}_1$ ,  $\vec{J}_1$  et  $\vec{K}_1$  constituent une base orthogonale. Afin d'avoir une base orthonormale, normalisons ces vecteurs et posons :

$$\vec{I}_2 = \frac{1}{\|\vec{I}_1\|} \vec{I}_1 \quad (2.174)$$

$$\vec{J}_2 = \frac{1}{\|\vec{J}_1\|} \vec{J}_1 \quad (2.175)$$

$$\vec{K}_2 = \frac{1}{\|\vec{K}_1\|} \vec{K}_1 \quad (2.176)$$

La matrice de passage de la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  à la base  $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$  est alors la matrice :

$$[Q] = \begin{pmatrix} \frac{\cos \lambda \cos \phi}{a^2 \|\vec{I}_1\|} & \frac{-\sin \lambda}{b^2 \|\vec{J}_1\|} & \frac{-\sin \phi \cos \lambda}{a^2 \mathcal{A}^2 \|\vec{K}_1\|} \\ \frac{\sin \lambda \cos \phi}{b^2 \|\vec{I}_1\|} & \frac{\cos \lambda}{a^2 \|\vec{J}_1\|} & \frac{-\sin \phi \sin \lambda}{b^2 \mathcal{A}^2 \|\vec{K}_1\|} \\ \frac{\sin \phi}{\mathcal{A}^2 \|\vec{I}_1\|} & 0 & \frac{\cos^2 \lambda \cos \phi}{a^4 \|\vec{K}_1\|} + \frac{\sin^2 \lambda \cos \phi}{b^4 \|\vec{K}_1\|} \end{pmatrix} \quad (2.177)$$

Il est à noter que comme  $\vec{I}_2$  est un vecteur normal au plan tangent à l'ellipsoïde au point d'impact  $I$ , alors ce plan tangent est le plan  $(I, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$ .

Avant d'exprimer les composantes  $\vec{v}_t$  et  $\vec{v}_n$  du vecteur vitesse  $\vec{V}$  dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , nous allons déterminer les expressions de ces vecteurs dans la base  $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$ . Grâce aux relations (2.39) et (2.40), on connaît en effet l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}$  dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . En utilisant la matrice de passage  $[Q]$  définie par (2.177), on en déduit les composantes de ce vecteur dans la base  $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$ . On a en effet :

$$\vec{V}_{(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)} = [Q]^{-1} \vec{V}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.178)$$

La base  $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$  étant orthonormale, la matrice  $[Q]$  est orthogonale. On a donc :  $[Q]^{-1} = {}^t[Q]$ .

D'autre part, comme  $\vec{V} = \vec{v}_n + \vec{v}_t$  avec  $\vec{v}_n$  s'exprimant en fonction de  $\vec{I}_2$ , et  $\vec{v}_t$  s'exprimant à l'aide des vecteurs  $\vec{J}_2$  et  $\vec{K}_2$ , la relation (2.178) permet de connaître les composantes de  $\vec{v}_n$  et de  $\vec{v}_t$  dans la base  $(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$ . On a alors :

$$\vec{v}_{n(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} = [Q] \vec{v}_{n(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)} \quad (2.179)$$

$$\vec{v}_{t(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} = [Q] \vec{v}_{t(\vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)} \quad (2.180)$$

La connaissance des composantes des vecteurs  $\vec{v}_n$  et  $\vec{v}_t$  dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  pour une cible ayant une forme ellipsoïdale quelconque nous permet alors d'écrire la relation (2.167) dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ .

Les coefficients  $\eta$  et  $\zeta$  ont été obtenus expérimentalement par Yanagisawa *et al.* (1996) et par Yanagisawa et Hasegawa (2000) en mesurant au cours d'un impact des variations de la quantité de mouvement de la cible qui correspondent aux paramètres  $\eta m \vec{v}_n$  et  $\zeta m \vec{v}_t$ . Ces expériences ne tiennent pas compte de l'effet de la courbure de la surface de la cible et, utilisent des vitesses d'impact d'environ 5 km/s, correspondant aux vitesses de collision largement rencontrées dans la ceinture d'astéroïdes (voir Bottke *et al.*, 1994).  $\eta$  et  $\zeta$  dépendent a priori de la vitesse d'impact, de l'angle d'incidence et des propriétés physiques de la cible et du projectile. A l'aide d'une série d'impacts

obliques à des vitesses élevées (0.66-6.7 km/s) de projectiles en polycarbonate (matière plastique) sur des cibles en mortier (mélange de sable, d'eau, d'un liant tel que de la chaux ou du ciment), en acier léger ou en aluminium (alliage), Yanagisawa *et al.* (1996) ont montré que  $\eta$  est une fonction croissante de la vitesse d'impact, de valeur plus élevée pour des cibles en mortier que des cibles métalliques. D'après également leurs expériences avec des cibles en mortier, le paramètre  $\zeta$  semble croître avec la vitesse d'impact pour des vitesses ne dépassant pas 2 km/s et semble décroître pour des vitesses d'impact de plus en plus grandes, même si cette dépendance n'est pas nette. Cette propriété n'est pas évidente pour les autres types de cible. Les auteurs ont aussi montré la corrélation entre  $\zeta$  et l'angle d'impact  $\theta$  dans le cas de cibles en aluminium. Cependant, ils n'ont pas établi dans les autres cas la dépendance de ces paramètres avec cet angle d'impact.

Les impacts obliques à cratérisation, à des vitesses variant de 1 km/s à 4.5 km/s environ, effectués par Yanagisawa et Hasegawa (2000) avec des projectiles en nylon et des cibles de composition différente (en basalte, en aluminium, en acier léger, en mortier ou en nylon) montrent, quant à eux, que  $\eta$  est toujours supérieur à  $\zeta$  : l'impact "pousse" préférentiellement la surface de la cible, dans une direction proche de la verticale à l'exception des impacts rasant. Cette poussée a aussi été montrée par Yanagisawa et Hasegawa (1999) avec des cibles en mortier. La composante normale de l'impulsion due à la collision peut donc effectivement faire tourner les astéroïdes non sphériques et de forme ellipsoïdale, alors que seule la composante tangentielle agit dans le cas d'astéroïdes proche de la sphère. En l'absence d'accrétion, on a  $\zeta < 1$  et  $\eta > 1$ . En effet, notons  $M^{ej}$  la masse totale de la matière éjectée et s'échappant de la cible,  $m^{ej}$  la quantité de matière du projectile qui s'est transformée en vapeur, en poussière ou en fragments pourvus d'une vitesse suffisamment grande pour s'échapper de l'attraction gravitationnelle de la cible. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\vec{V} = M'\vec{V}' + (M^{ej} + m^{ej})\vec{v}^{ej} \quad (2.181)$$

où :  $M' = M + m - (M^{ej} + m^{ej})$  et  $\vec{v}^{ej}$  représente la vitesse du centre de masse de tous les éléments éjectés. En projetant cette égalité suivant la direction de la normale à la surface au point d'impact, on obtient :

$$mv_n = M'v'_n - (M^{ej} + m^{ej})v_n^{ej} \quad (2.182)$$

$v_n$ ,  $v'_n$  et  $v_n^{ej}$  sont les normes des vecteurs vitesses associés. L'apparition du signe "-" dans la relation (2.182) s'explique par le fait que les éléments s'échappant de la cible sont éjectés dans la direction opposée de celle du

projectile et de la cible après l'impact. On en déduit que :

$$\eta = \frac{M'v'_n}{mv_n} = 1 + \frac{(M^{ej} + m^{ej})v_n^{ej}}{mv_n} \quad (2.183)$$

On a alors :  $\eta > 1$ . Si on projette maintenant la relation (2.181) suivant la composante tangentielle, on obtient :

$$mv_t = M'v'_t + M^{ej}v_t^{ej} \quad (2.184)$$

les éjections ayant une composante tangentielle dans la même direction que la composante tangentielle de la vitesse du projectile. On en déduit que :

$$\zeta = \frac{M'v'_t}{mv_t} = 1 - \frac{(M^{ej} + m^{ej})v_t^{ej}}{mv_t} \quad (2.185)$$

On a alors :  $\zeta < 1$ .

Les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  rendent compte de l'impulsion due aux éjections symétriques d'éléments suite à la collision. La cible subit en effet un mouvement de recul dans une direction normale à la surface au point d'impact et dans le sens opposé à la direction du projectile. Une valeur de  $\eta$  beaucoup plus grande que 1 représente cette impulsion. Notons également que le choix d'une petite valeur pour  $\zeta$  et d'une grande pour  $\eta$  correspond à une impulsion proche de la normale.

En revanche, dans le cas d'un impact où le projectile s'accumule sur la cible sans perte de masse, on a :  $\eta = 1$  et  $\zeta = 1$ .

Les expériences en laboratoire ont permis d'établir que les deux paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  dépendent fortement de l'angle d'incidence  $\theta$  du projectile, mesuré à partir de la normale à la surface de la cible au point d'impact. Pour exprimer cette dépendance et par analogie avec les courbes obtenues suite aux résultats expérimentaux, Yanagisawa et Hasegawa (2000) ont proposé, pour ces deux paramètres, les formules mathématiques suivantes :

$$\eta(\theta) = 1 + \eta_0 \cos^2 \theta \quad (2.186)$$

$$\zeta(\theta) = \zeta_0 \cos^2 \theta \quad (2.187)$$

Ces formules tiennent compte, en particulier, de la décroissance de ces paramètres lorsque l'angle d'incidence croît. Les coefficients  $\eta_0$  et  $\zeta_0$  ont été obtenus lors d'expériences avec une vitesse d'impact de 4 km/s et sont donnés par le tableau 2.2 en fonction de la composition de la cible. L'angle d'impact  $\alpha$ , considéré dans notre modélisation, est mesuré par rapport à la normale au point d'impact au méridien passant par ce point. Il diffère donc de l'angle

	Cible en basalte (Astéroïde rocheux)	Cible en acier (Astéroïde métallique)	Cible sableuse (...)
$\eta_0$	1.52	0.305	-
$\zeta_0$	0.409	0.209	0.687

TAB. 2.2:

d'impact  $\theta$  mesuré par rapport à la surface de la cible au point d'impact, si la cible a la forme d'un ellipsoïde de dimensions  $a \times b \times c$  avec  $a \neq b$ . On peut cependant penser que dans ce cas, les valeurs des deux angles sont proches. Dans nos simulations, nous utiliserons pour les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$ , les expressions suivantes :

$$\eta = 1 + \eta_0 \cos^2 \alpha \quad (2.188)$$

$$\zeta = \zeta_0 \cos^2 \alpha \quad (2.189)$$

Les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  permettent également d'évaluer le transfert total de moment cinétique du projectile vers la cible. Avec les notations utilisées, on a en effet :

$$\tilde{\zeta} = \frac{\|\eta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_n) + \zeta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_i)\|}{\|(m\vec{OI} \wedge \vec{V})\|} \quad (2.190)$$

L'expression (2.167) de la conservation du moment cinétique nous permet donc d'évaluer  $[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0}$ , qui est une approximation de la vitesse de rotation après l'impact (puisque  $[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0}$  est mesuré par rapport au centre de masse  $O$  de la cible avant l'impact). Le tenseur d'inertie  $[J_0]$  et la vitesse de rotation  $[\Omega_0]$  de la cible avant l'impact sont supposés connus. Les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  ont été étudiés expérimentalement et les informations issues de ces expériences (et résumées précédemment) seront utilisées pour modéliser au mieux ces paramètres. Il reste donc à exprimer, dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , le tenseur d'inertie  $[J_1]$  de la cible après l'impact et la formation d'un cratère. La détermination de ce tenseur nous contraint à des développements mathématiques plus complexes qui font l'objet du paragraphe suivant.

### 2.4.5 Tenseurs d'inertie de la cible après impact

On cherche dans cette partie à déterminer, dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , le tenseur d'inertie  $[J_1]$  de la cible après l'impact et après la formation d'un cratère. On supposera que le cratère a la forme d'une calotte sphérique de rayon  $r_0$

et de hauteur  $h_0$ . La relation considérée entre le rayon  $r_0$  et la profondeur  $h_0$  a été décrite dans la partie 2.4.2 de ce chapitre (on prendra :  $r_0 = r_e$  et  $h_0 = h_e$  dans le cas d'un cratère simple). Si on admet que la cible après la formation du cratère a la forme d'un ellipsoïde tronqué d'une partie ayant la forme d'une calotte sphérique et si on approxime  $[J_1]$  par sa mesure par rapport au centre de masse  $O$  de la cible avant l'impact, on peut alors écrire :

$$[J_1] = [J'_0] - [J_{crat}] \quad (2.191)$$

où  $[J'_0]$  est le tenseur d'inertie d'un ellipsoïde uniforme de centre  $O$  représentant de manière approximative la cible juste après l'impact sans tenir compte d'un point de vue géométrique de l'excavation entraînée par la collision.  $[J'_0]$  aura donc la même forme que  $[J_0]$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  mais doit être adapté en raison du changement de masse dû à l'excavation.  $[J_{crat}]$  représente le tenseur d'inertie d'un solide uniforme ayant la même forme et la même position spatiale que celles du cratère formé suite à l'impact. On appellera dans la suite  $[J_{crat}]$ , le tenseur d'inertie du cratère.

Le travail consiste désormais à déterminer l'expression de ce tenseur  $[J_{crat}]$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

## Tenseur d'inertie du cratère relativement à son centre de masse

### Considérations générales

On considère que le cratère formé dans l'ellipsoïde a la forme d'une calotte sphérique de hauteur  $h_0$  pouvant contenir une masse  $m_{crat}$  issue d'une sphère de rayon  $R_0$ .  $m_{crat}$  représente la quantité de masse éjectée de la cible et se dispersant. On note  $r_0$  le rayon de la base de la calotte sphérique (voir la figure 2.9).

On a alors :

$$R_0^2 = (R_0 - h_0)^2 + r_0^2 \quad (2.192)$$

Soit :

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{r_0^2 + h_0^2}{h_0} \quad (2.193)$$

On considère le repère  $\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}} = (\tilde{\Omega}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dont l'origine  $\tilde{\Omega}$  est le centre de la sphère et dont les axes sont dirigés dans la même direction que ceux du repère lié au point d'impact  $(I, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et définis par les expressions (2.1), (2.2) et (2.3). Un point  $P$  de la calotte sphérique de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}}$

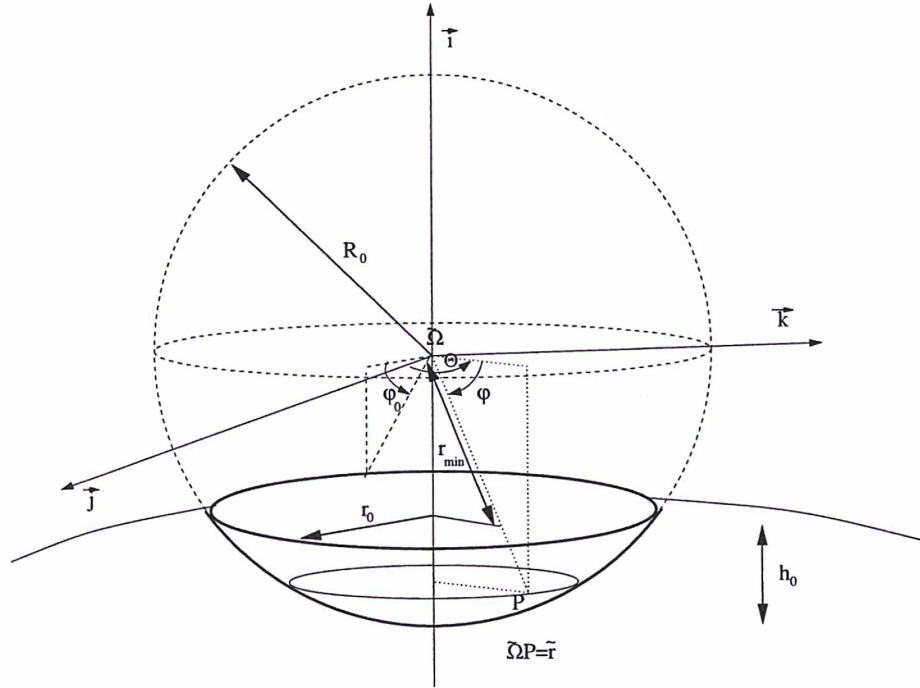


FIG. 2.9: Paramètres  $r_0$ ,  $h_0$ ,  $R_0$ ,  $\tilde{r}$ ,  $\Theta$ ,  $\varphi$  et  $\varphi_0$  utilisés dans la représentation géométrique du cratère.

est également repéré par ses coordonnées sphériques  $(\tilde{r}, \Theta, \varphi)$  avec :  $\tilde{r} = \tilde{\Omega}P$ . Les angles  $\Theta$  et  $\varphi$  sont respectivement la longitude et la latitude de ce point définies à partir des axes du repère  $\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}}$  (voir la figure 2.9). On a alors :

$$x = \tilde{r} \sin \varphi \quad (2.194)$$

$$y = \tilde{r} \cos \varphi \cos \Theta \quad (2.195)$$

$$z = \tilde{r} \cos \varphi \sin \Theta \quad (2.196)$$

On a :  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \varphi_0$  où  $\varphi_0$  est la latitude de tous les points du cercle de rayon  $r_0$  servant de base à la calotte sphérique.  $\varphi_0$  vérifie, avec l'orientation des angles choisie, l'égalité suivante :

$$\sin \varphi_0 = -\frac{R_0 - h_0}{R_0} \quad (2.197)$$

Tout point de latitude  $\varphi$  appartenant à la calotte sphérique est à une distance  $\tilde{r}$  du point  $\tilde{\Omega}$  comprise entre  $r_{min}(\varphi)$  et  $R_0$  avec :

$$r_{min}(\varphi) = \frac{R_0 - h_0}{\sin \varphi} \quad (2.198)$$

La longitude  $\Theta$  correspondante est comprise entre 0 et  $2\pi$ .

Considérons d'autre part,  $G$ , "le centre de masse du cratère" c'est-à-dire le centre de masse du corps rigide homogène de la forme d'une calotte sphérique qui représente le cratère, une fois la matière qui constitue ce corps dispersée. On définit alors le repère  $\mathcal{R}_G = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dont l'origine est  $G$  et dont les axes ont les mêmes directions que ceux du repère  $\mathcal{R}_{\tilde{\Omega}}$ . Notons  $I_{xx}^{crat}$ ,  $I_{yy}^{crat}$  et  $I_{zz}^{crat}$  les moments d'inertie d'un corps rigide, de la même forme que celle d'une calotte sphérique, relativement respectivement aux axes  $(G, \vec{i})$ ,  $(G, \vec{j})$  et  $(G, \vec{k})$  du repère  $\mathcal{R}_G$ . On note  $I_{xy}^{crat}$ ,  $I_{xz}^{crat}$  et  $I_{yz}^{crat}$  les produits d'inertie de la calotte sphérique par rapport à ces axes.

Avant de déterminer ces moments et ces produits d'inertie, nous devons déterminer la position exacte du centre de masse  $G$ . Comme les plans  $(\tilde{\Omega}, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(\tilde{\Omega}, \vec{i}, \vec{k})$  sont des plans de symétrie, il paraît naturel de penser que  $G$  se trouve sur l'axe  $(\tilde{\Omega}, \vec{i})$ . Nous allons retrouver ce résultat par un calcul et préciser la position sur cet axe du centre de masse par rapport à  $\tilde{\Omega}$ .

Par définition, le centre de masse du cratère représenté par une calotte sphérique est le point  $G$  tel que :

$$\vec{\tilde{\Omega}}G = \frac{1}{m_{crat}} \int_{crat} \vec{\tilde{\Omega}}P dm \quad (2.199)$$

$m_{crat}$  représente la masse totale que peut contenir le cratère et qui a été éjectée suite à la collision. Le volume d'une calotte sphérique exprimé en fonction de  $R_0$  et de  $h_0$  est égale  $\pi h^2 \left( R_0 - \frac{h_0}{3} \right)$ . On a donc :

$$m_{crat} = \rho \times \pi h_0^2 \left( R_0 - \frac{h_0}{3} \right) \quad (2.200)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique de la cible.  $dm$  est la masse d'un élément de volume  $\tilde{r}^2 \cos \varphi d\tilde{r} d\Theta d\varphi$  du cratère. On a :

$$dm = \rho \times \tilde{r}^2 \cos \varphi d\tilde{r} d\Theta d\varphi \quad (2.201)$$

On déduit alors de (2.200) que :

$$dm = \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left( R_0 - \frac{h_0}{3} \right)} \tilde{r}^2 \cos \varphi d\tilde{r} d\Theta d\varphi \quad (2.202)$$

En utilisant d'une part, les coordonnées sphériques du point  $P$ , définies par les expressions (2.194), (2.195) et (2.196) et d'autre part, l'expression (2.202) donnant l'élément de masse  $dm$ , l'égalité (2.199) peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\tilde{\Omega}}G = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \quad (2.203)$$

avec :

$$c_1 = \frac{1}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{\mathcal{D}} \tilde{r}^3 \sin \varphi \cos \varphi d\tilde{r}d\Theta d\varphi \quad (2.204)$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{\mathcal{D}} \tilde{r}^3 \cos^2 \varphi \cos \Theta d\tilde{r}d\Theta d\varphi \quad (2.205)$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{\mathcal{D}} \tilde{r}^3 \cos^2 \varphi \sin \Theta d\tilde{r}d\Theta d\varphi \quad (2.206)$$

où  $\mathcal{D}$  est le domaine d'intégration défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (\tilde{r}, \varphi, \Theta); -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \varphi_0, r_{min}(\varphi) \leq \tilde{r} \leq R_0, 0 \leq \Theta \leq 2\pi \right\} \quad (2.207)$$

où  $\varphi_0$  et  $r_{min}(\varphi)$  sont donnés par les égalités (2.197) et (2.198).

Comme la variable  $\Theta$  est indépendante des deux autres  $\tilde{r}$  et  $\varphi$ , on peut intégrer séparément selon cette variable. Comme  $\int_0^{2\pi} \cos \Theta = \int_0^{2\pi} \sin \Theta = 0$ , on a alors :  $c_2 = c_3 = 0$ . Ce résultat signifie que  $G$  se trouve, comme nous le présentons, sur l'axe  $(\vec{\Omega}, \vec{i})$ . Poursuivons alors le calcul de  $c_1$  :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2\pi}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \left( \int_{r_{min}}^{R_0} \tilde{r}^3 d\tilde{r} \right) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{2}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{1}{4} \left( R_0^4 - \frac{(R_0 - h_0)^4}{\sin^4 \varphi} \right) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - (R_0 - h_0)^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( \frac{R_0^4}{2} (\sin^2 \varphi_0 - 1) + \frac{(R_0 - h_0)^4}{2} \left( \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.208)$$

Comme :  $\sin \varphi_0 = -\frac{R_0 - h_0}{R_0}$ , on en déduit que :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^2 (R_0 - h_0)^2 - R_0^4 + R_0^2 (R_0 - h_0)^2 - (R_0 - h_0)^4 \right) \\ &= \frac{-1}{4h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^4 - 2R_0^2 (R_0 - h_0)^2 + (R_0 - h_0)^4 \right) \\ &= \frac{-1}{4h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^2 - (R_0 - h_0)^2 \right)^2 \\ &= \frac{-1}{4h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} h_0^2 (2R_0 - h_0)^2 \end{aligned} \quad (2.209)$$

On obtient finalement que :  $\vec{\Omega G} = c_1 \vec{i}$  avec :

$$c_1 = -\frac{\left(R_0 - \frac{h_0}{2}\right)^2}{\left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \quad (2.210)$$

### Calcul des moments d'inertie

La connaissance de la position de  $G$  sur l'axe  $(\vec{\Omega}, \vec{i})$  permet de connaître les distances entre d'une part, les axes  $(G, \vec{j})$  et  $(\vec{\Omega}, \vec{j})$  et d'autre part, les axes  $(G, \vec{k})$  et  $(\vec{\Omega}, \vec{k})$  respectivement du repère  $\mathcal{R}_G$  et du repère  $\mathcal{R}_{\vec{\Omega}}$ . Les deux distances sont égales et valent donc  $|c_1|$ . On a alors, en utilisant le théorème de Huygens :

$$A_{crat} = I_{xx}^{crat} \quad (2.211)$$

$$B_{crat} = I_{yy}^{crat} + m_{crat} \times c_1^2 \quad (2.212)$$

$$C_{crat} = I_{zz}^{crat} + m_{crat} \times c_1^2 \quad (2.213)$$

où  $A_{crat}$ ,  $B_{crat}$  et  $C_{crat}$  sont les moments d'inertie du cratère relativement aux axes  $(\vec{\Omega}, \vec{i})$ ,  $(\vec{\Omega}, \vec{j})$  et  $(\vec{\Omega}, \vec{k})$ . Ces moments s'écrivent :

$$A_{crat} = \int_{crat} (y^2 + z^2) dm \quad (2.214)$$

$$B_{crat} = \int_{crat} (x^2 + z^2) dm \quad (2.215)$$

$$C_{crat} = \int_{crat} (x^2 + y^2) dm \quad (2.216)$$

Comme le plan  $(\vec{\Omega}, \vec{i}, \vec{j})$  est un plan de symétrie de la calotte sphérique, on a :  $B_{crat} = C_{crat}$ .

$(x, y, z)$  représente le système de coordonnées lié au repère  $(\vec{\Omega}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . D'autre part, les coordonnées sphériques permettent d'écrire que :

$$y^2 + z^2 = \tilde{r}^2 \cos^2 \varphi \quad (2.217)$$

$$x^2 + z^2 = \tilde{r}^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \Theta + \sin^2 \varphi) = \tilde{r}^2 (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Theta) \quad (2.218)$$

$$x^2 + y^2 = \tilde{r}^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \Theta + \sin^2 \varphi) = \tilde{r}^2 (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta) \quad (2.219)$$

### Calcul de $A_{crat}$

$$A_{crat} = \int_{crat} (y^2 + z^2) dm$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{\mathcal{D}} \tilde{r}^4 \cos^3 \varphi d\tilde{r} d\Theta d\varphi \\
&= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \times 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \left( \cos^3 \varphi \int_{r_{min}}^{R_0} \tilde{r}^4 d\tilde{r} \right) d\varphi \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{m_{crat}}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos^3 \varphi d\varphi - (R_0 - h_0)^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^5 \varphi} d\varphi \right)
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Or :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos^3 \varphi d\varphi = \sin \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 + \frac{2}{3} \tag{2.221}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^5 \varphi} d\varphi = -\frac{(\sin^2 \varphi_0 - 1)^2}{4 \sin^4 \varphi_0} \tag{2.222}$$

avec :

$$\sin \varphi_0 = -\frac{R_0 - h_0}{R_0}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
A_{crat} &= \frac{2}{5} \times \frac{m_{crat}}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^5 \left( \sin \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 + \frac{2}{3} \right) + \frac{(R_0 - h_0)^5 (\sin^2 \varphi_0 - 1)}{4 \sin^4 \varphi_0} \right) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{m_{crat}}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( -R_0^4 (R_0 - h_0) + \frac{1}{3} R_0^2 (R_0 - h_0)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} R_0^5 + \frac{(R_0 - h_0)}{4} [(R_0 - h_0)^2 - R_0^2]^2 \right) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{m_{crat}}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^2 \left[ -R_0^3 + R_0^2 h_0 + \frac{1}{3} R_0^3 - R_0^2 h_0 + R_0 h_0^2 - \frac{h_0^3}{3} + \frac{2}{3} R_0^3 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(R_0 - h_0)}{4} [-2R_0 h_0 + h_0^2]^2 \right) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{m_{crat}}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^2 (R_0 h_0^2 - \frac{h_0^3}{3}) + \frac{(R_0 - h_0)}{4} h_0^2 (2R_0 - h_0)^2 \right) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{m_{crat}}{h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left( R_0^2 h_0^2 \left( R_0 - \frac{h_0}{3} \right) + (R_0 - h_0) h_0^2 \left( R_0 - \frac{h_0}{2} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.223}$$

Soit finalement :

$$A_{crat} = \frac{2}{5}m_{crat}R_0^2 + \frac{2}{5}m_{crat} \frac{(R_0 - h_0) \left(R_0 - \frac{h_0}{2}\right)^2}{\left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \quad (2.224)$$

Calcul de  $B_{crat}$

$$B_{crat} = \int_{crat} (x^2 + z^2) dm \quad (2.225)$$

De la même manière que pour le calcul de  $A_{crater}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} B_{crat} &= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{\mathcal{D}} \left(\tilde{r}^4 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Theta)\right) d\tilde{r} d\Theta d\varphi \\ &= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \left(\cos \varphi \int_{r_{min}}^{R_0} \tilde{r}^4 d\tilde{r} \times \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Theta) d\Theta\right) d\varphi \end{aligned} \quad (2.226)$$

Or :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta d\Theta = \pi \quad (2.227)$$

D'où :

$$\begin{aligned} B_{crat} &= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \left(\frac{1}{5} \cos \varphi \left(R_0^5 - \frac{(R_0 - h_0)^5}{\sin^5 \varphi}\right) \times (2\pi - \pi \cos^2 \varphi)\right) d\varphi \\ &= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left(2R_0^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos \varphi d\varphi - R_0^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos^3 \varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. - 2(R_0 - h_0)^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\sin^5 \varphi} d\varphi + (R_0 - h_0)^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^5 \varphi} d\varphi\right) \end{aligned} \quad (2.228)$$

Les égalités :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi_0 + 1 \quad (2.229)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\sin^5 \varphi} d\varphi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \sin^4 \varphi_0} \quad (2.230)$$

permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
B_{crat} &= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ 2R_0^5(\sin \varphi_0 + 1) - R_0^5 \left( \sin \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 + \frac{2}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2(R_0 - h_0)^5 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \sin^4 \varphi_0} \right) - (R_0 - h_0)^5 \frac{(\sin^2 \varphi_0 - 1)^2}{4 \sin^4 \varphi_0} \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ R_0^5 \left( -\frac{R_0 - h_0}{R_0} - \frac{1}{3} \frac{(R_0 - h_0)^3}{R_0^3} + \frac{4}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + (R_0 - h_0)^5 \left( -\frac{1}{2} + \frac{R_0^4}{2(R_0 - h_0)^4} - \frac{[(R_0 - h_0)^2 - R_0^2]^2}{4(R_0 - h_0)^4} \right) \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ R_0^2 \left( -R_0^3 + R_0^2 h_0 + \frac{4}{3} R_0^3 - \frac{R_0^3}{3} + R_0^2 h_0 - R_0 h_0^2 + \frac{h_0^3}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + (R_0 - h_0) \left( -\frac{(R_0 - h_0)^4}{2} + \frac{R_0^4}{2} - \frac{[(R_0 - h_0)^2 - R_0^2]^2}{4} \right) \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ h_0 \left( 2R_0^4 - R_0^3 h_0 + \frac{R_0^2 h_0^2}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + (R_0 - h_0) \left( 2R_0^3 h_0 - 3R_0^2 h_0^2 + 2R_0 h_0^3 - \frac{h_0^4}{2} - R_0^2 h_0^2 - \frac{h_0^4}{4} + R_0 h_0^3 \right) \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ h_0 \left( 2R_0^4 - R_0^3 h_0 + \frac{R_0^2 h_0^2}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + (R_0 - h_0) \left( 2R_0^3 h_0 - 4R_0^2 h_0^2 + 3R_0 h_0^3 - \frac{3h_0^4}{4} \right) \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ h_0 \left( 2R_0^4 - R_0^3 h_0 + \frac{R_0^2 h_0^2}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + h_0 \left( 2R_0^4 - 4R_0^3 h_0 + 3R_0^2 h_0^2 - \frac{3R_0 h_0^3}{4} - 2R_0^3 h_0 + 4R_0^2 h_0^2 - 3R_0 h_0^3 + \frac{3h_0^4}{4} \right) \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ 2R_0^2 - R_0^3 h_0 + \frac{R_0^2 h_0^2}{3} \right. \\
&\quad \left. + 2R_0^4 - 4R_0^3 h_0 + 3R_0^2 h_0^2 - \frac{3R_0 h_0^3}{4} - 2R_0^3 h_0 + 4R_0^2 h_0^2 - 3R_0 h_0^3 + \frac{3h_0^4}{4} \right] \\
&= \frac{m_{crat}}{5h_0 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left[ 4R_0^4 - 7R_0^3 h_0 + \frac{22}{3} R_0^2 h_0^2 - \frac{15}{4} R_0 h_0^3 + \frac{3}{4} h_0^4 \right] \quad (2.231)
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$B_{crat} = \frac{m_{crat}}{60h_0 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left(48R_0^4 - 84R_0^3h_0 + 88R_0^2h_0^2 - 45R_0h_0^3 + 9h_0^4\right) \quad (2.232)$$

Calcul de  $C_{crat}$

$$\begin{aligned} C_{crat} &= \int_{crat} (x^2 + y^2) dm \\ &= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{\mathcal{D}} \left(\tilde{r}^4 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta)\right) d\tilde{r} d\Theta d\varphi \\ &= \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \left(\cos \varphi \int_{r_{min}}^{R_0} \tilde{r}^4 d\tilde{r} \times \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta) d\Theta\right) d\varphi \end{aligned} \quad (2.233)$$

Or :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta d\Theta \quad (2.234)$$

Donc :

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta) d\Theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Theta) d\Theta \quad (2.235)$$

On retrouve alors par le calcul que :

$$C_{crat} = B_{crat} \quad (2.236)$$

*Conclusion*

En utilisant les égalités (2.211), (2.212) et (2.213) et, les expressions (2.224), (2.232) et (2.236) obtenues pour les moments d'inertie  $A_{crat}$ ,  $B_{crat}$  et  $C_{crat}$ , on a :

$$I_{xx}^{crat} = \frac{2}{5} m_{crat} R_0^2 + \frac{2}{5} m_{crat} \frac{(R_0 - h_0) \left(R_0 - \frac{h_0}{2}\right)^2}{\left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \quad (2.237)$$

$$\begin{aligned} I_{yy}^{crat} &= \frac{m_{crat}}{60h_0 \left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)} \left(48R_0^4 - 84R_0^3h_0 + 88R_0^2h_0^2 - 45R_0h_0^3 + 9h_0^4\right) \\ &\quad - m_{crat} \frac{\left(R_0 - \frac{h_0}{2}\right)^4}{\left(R_0 - \frac{h_0}{3}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.238)$$

$$I_{yy}^{crat} = I_{zz}^{crat} \quad (2.239)$$

avec :

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{r_0^2 + h_0^2}{h_0}$$

### Calcul des produits d'inertie

On a tout d'abord :

$$I_{xy}^{crat} = I_{yx}^{crat} \quad (2.240)$$

$$I_{yz}^{crat} = I_{zy}^{crat} \quad (2.241)$$

$$I_{xz}^{crat} = I_{zx}^{crat} \quad (2.242)$$

Comme les plans  $(G, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(G, \vec{i}, \vec{k})$  sont des plans de symétrie, on a :  $I_{xy}^{crat} = 0$  et  $I_{xz}^{crat} = 0$ . Il reste alors à calculer  $I_{yz}^{crat}$ . Comme un point  $P$  de la calotte sphérique de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}_G$  a pour coordonnées dans  $\mathcal{R}_{\hat{\Omega}}$  :  $(x - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})}, y, z)$ , on a alors en utilisant les coordonnées sphériques :

$$I_{yz}^{crat} = \int_{crat} yz dm = \frac{m_{crat}}{\pi h_0^2 (R_0 - \frac{h_0}{3})} \int_{\mathcal{D}} \tilde{r}^4 \cos^3 \varphi \sin \Theta \cos \Theta d\tilde{r} d\Theta d\varphi \quad (2.243)$$

Or :

$$\int_0^{2\pi} \sin \Theta \cos \Theta d\Theta = 0 \quad (2.244)$$

Donc :  $I_{yz}^{crat} = 0$ .

### Conclusion

On peut donc exprimer le tenseur d'inertie du cratère relativement aux axes du repère  $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $G$  désigne le centre de masse du cratère. On obtient une matrice diagonale dont les éléments peuvent s'exprimer en fonction de  $m_{crat}$ ,  $r_0$  et  $h_0$  respectivement de la masse totale issue du cratère, le rayon de la base et la profondeur du cratère de la forme d'une calotte sphérique. On a en effet :

$$[J_{crat}]_{\mathcal{R}_G} = \begin{pmatrix} I_{xx}^{crat} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{crat} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{crat} \end{pmatrix} \quad (2.245)$$

où  $I_{xx}^{crat}$ ,  $I_{yy}^{crat}$  et  $I_{zz}^{crat}$  sont donnés par les expressions (2.237), (2.238) et (2.239)

### Tenseur d'inertie du cratère dans le repère $\mathcal{R}_0$

Il reste à déterminer  $[J_{crat}]_{\mathcal{R}_0}$ . On utilise les résultats précédents donnant l'expression du tenseur d'inertie  $[J_{crat}]$  du cratère dans le référentiel  $\mathcal{R}_G = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Pour "passer" du référentiel  $\mathcal{R}_G$  au référentiel  $\mathcal{R}_0$ , on calcule les distances entre les axes  $(O, \vec{i})$  et  $(G, \vec{i})$ ,  $(O, \vec{j})$  et  $(G, \vec{j})$ , et  $(O, \vec{k})$  et  $(G, \vec{k})$ . A cet effet, on adapte pour les moments d'inertie, les résultats (2.73), (2.74) et (2.75) obtenus dans le cas d'un impact avec accréation dans la partie 2.3.2. Il suffit de remplacer dans chacune de ces expressions, le premier terme " $\frac{2}{5}mr^2$ " respectivement par  $I_{xx}^{crat}$ ,  $I_{yy}^{crat}$  et  $I_{zz}^{crat}$  et, de remplacer dans le deuxième terme de ces expressions, " $r$ " par  $(R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})}$  dont la valeur absolue représente la profondeur du centre de masse  $G$  relativement à la surface de la cible (voir figure 2.10) et, " $m$ " par  $m_{crat}$ , la quantité de masse éjectée du cratère .

On a alors pour les moments d'inertie de la calotte sphérique relativement

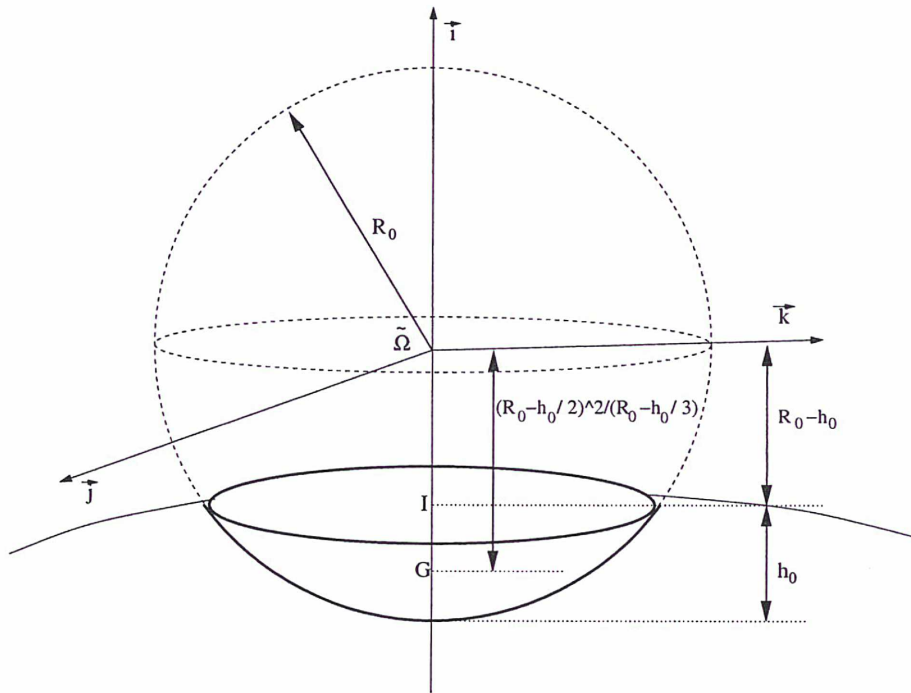


FIG. 2.10: Position du centre de masse  $G$  du cratère représenté par une calotte sphérique.

aux axes du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$J_{11} = I_{xx}^{crat} + m_{crat} \times \epsilon^4 \frac{\mathcal{A}^2}{w^2} \cos^2 \phi \sin^2 \phi \quad (2.246)$$

$$J_{22} = I_{yy}^{crat} + m_{crat} \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) \cos^2 \phi \right. \\ \left. + \left( \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) \sin^2 \phi \right] \quad (2.247)$$

$$J_{33} = I_{xy}^{crat} + m_{crat} \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) \cos^2 \phi \right. \\ \left. + \left( \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) \sin^2 \phi \right] \quad (2.248)$$

Pour déterminer les produits d'inertie de la calotte sphérique dans  $\mathcal{R}_0$ , on utilise les coordonnées de  $G$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On démontre de manière similaire à la section 2.3.2 (voir l'expression (2.76)) que :

$$G \begin{pmatrix} \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) \cos \lambda \cos \phi \\ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) \sin \lambda \cos \phi \\ \left[ \frac{\mathcal{A}}{w} (1 - \epsilon^2) + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right] \sin \phi \end{pmatrix}_{(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.249)$$

On en déduit en utilisant la matrice de passage  $[P]^{-1} = {}^t[P]$  de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  :

$$G \begin{pmatrix} \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) - \epsilon^2 \frac{\mathcal{A}}{w} \sin^2 \phi \\ 0 \\ -\epsilon^2 \frac{\mathcal{A}}{w} \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \quad (2.250)$$

Notons  $(x_G, 0, z_G)$  ces coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Comme  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$ , le passage d'un système de coordonnées à un autre est donné par les égalités suivantes :

$$x = x' + x_G \quad (2.251)$$

$$y = y' \quad (2.252)$$

$$z = z' + z_G \quad (2.253)$$

$(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  désignent les coordonnées de  $P$  respectivement dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et dans  $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{crat} xy\rho dx dy dz &= \int_{crat} x'y'\rho' dx' dy' dz' + x_G \int_{crat} y'\rho' dx' dy' dz' \\ &= I_{xy}^{crat} + x_G \int_{crat} y'\rho' dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (2.254)$$

$$\begin{aligned} \int_{crat} xz\rho dx dy dz &= \int_{crat} x'z'\rho' dx' dy' dz' + x_G \int_{crat} z'\rho' dx' dy' dz' \\ &+ z_G \int_{crat} x' dm + x_G z_G \int_{crat} \rho' dx' dy' dz' \\ &= I_{xz}^{crat} + x_G \int_{crat} z'\rho' dx' dy' dz' \\ &+ z_G \int_{crat} x' dm + x_G z_G \int_{crat} \rho' dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (2.255)$$

$$\begin{aligned} \int_{crat} yz\rho dx dy dz &= \int_{crat} y'z'\rho' dx' dy' dz' + z_G \int_{crat} y'\rho' dx' dy' dz' \\ &= I_{yz}^{crat} + z_G \int_{crat} y'\rho' dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (2.256)$$

avec :

$$\rho = \rho(x, y, z) \quad (2.257)$$

$$\rho' = \rho'(x', y', z') = \rho(x' + x_G, y', z' + z_G) \quad (2.258)$$

Comme les plans  $(G, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(G, \vec{i}, \vec{k})$  sont des plans de symétrie, on a :

$$\int_{crat} x'\rho' dx' dy' dz' = 0 \quad (2.259)$$

$$\int_{crat} y'\rho' dx' dy' dz' = 0 \quad (2.260)$$

$$\int_{crat} z'\rho' dx' dy' dz' = 0 \quad (2.261)$$

De plus, on a montré que :  $I_{xy}^{crat} = I_{xz}^{crat} = I_{yz}^{crat} = 0$ . On a donc :

$$\int_{crat} xy dm = 0 \quad (2.262)$$

$$\int_{crat} xz dm = m x_G z_G \quad (2.263)$$

$$\int_{crat} yz dm = 0 \quad (2.264)$$

Soit :

$$J_{12} = 0 \quad (2.265)$$

$$J_{13} = m\epsilon^2 \frac{\mathcal{A}}{w} \sin \phi \cos \phi \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{w} + (R_0 - h_0) - \frac{(R_0 - \frac{h_0}{2})^2}{(R_0 - \frac{h_0}{3})} \right) - \epsilon^2 \frac{\mathcal{A}}{w} \sin^2 \phi \right] \quad (2.266)$$

$$J_{23} = 0 \quad (2.267)$$

On a déterminé tous les éléments de  $[J_{crat}]_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ . La matrice de passage  $[P]$  de la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  définie par (2.4) permet alors d'obtenir  $[J_{crat}]_{\mathcal{R}_0}$ . On a :

$$[J_{crat}]_{\mathcal{R}_0} = [P][J_{crat}]_{(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} {}^t[P] \quad (2.268)$$

#### 2.4.6 Vitesse de rotation après impact et formation d'un cratère

Après la formation du cratère, la cible a une forme ellipsoïdale tronquée d'une partie ayant la forme d'une calotte sphérique dont la profondeur et le rayon sont respectivement  $h_0$  et  $r_0$ . Ces dimensions sont obtenues à partir de l'algorithme décrit dans la section (2.4.2) et doivent aboutir à des résultats de même ordre de grandeur si on évalue  $m_{crat}$ , d'une part à l'aide de (2.200) ou d'autre part en utilisant l'expression (2.126) de  $\pi_\nu$  et l'égalité :

$$m_{crat} = m\pi_\nu \quad (2.269)$$

cette expression étant déduite de la première égalité de (2.120).

On fera, d'autre part, l'approximation considérant le centre de masse de la cible avant la collision  $O$  comme le centre de masse de la cible après l'impact et la formation du cratère. La masse de la cible est alors  $M + m - \delta M$ ,  $M$  étant la masse initiale de la cible,  $m$  celle du projectile et  $\delta M$  la quantité de masse perdue, c'est-à-dire la quantité de masse éjectée suite à la collision et s'échappant de l'attraction gravitationnelle de la cible. Rappelons que Dobrovolskis et Burns (1984) ont proposé des expressions permettant d'évaluer cette perte de masse (voir les expressions (1.36) et (1.37) du chapitre 1). Cependant ces expressions ne prennent pas en compte l'angle d'incidence d'impact  $\alpha$  alors que les dimensions d'un cratère dépendent de cet angle. D'autre part, comme tous les éléments éjectés lors de la formation du cratère à partir de la phase de contact et de compression ne s'échappent pas, la quantité de

masse perdue  $\delta M$  est inférieure à  $m_{crat}$ , définie dans la partie précédente par l'expression (2.200) en supposant que le cratère formé suite à l'impact a la forme d'une calotte sphérique. Dans le cas d'une cible importante avec une faible vitesse d'impact, il se peut aussi qu'aucun fragment éjecté ne se libère et que tous "retombent" sur la cible. On a alors :  $\delta M = 0$ . La détermination de  $\delta M$  est donc difficile mais comme nous le verrons dans le chapitre 3, la quantité de masse perdue représente une faible part de la masse initiale de la cible. Il serait cependant intéressant de comparer les résultats obtenus pour  $m_{crat}$  avec ceux obtenus pour la perte de masse  $\delta M$  à partir des expressions (1.36) et (1.37) du chapitre 1.

Avec ces considérations, le tenseur d'inertie de la cible après l'impact et la formation du cratère est, dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , de la forme :

$$[J_1]_{\mathcal{R}_0} = [J'_0]_{\mathcal{R}_0} - [J_{crat}]_{\mathcal{R}_0} \quad (2.270)$$

$[J'_0]_{\mathcal{R}_0}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont respectivement :  $\frac{1}{5}(M+m-\delta M)(b^2+c^2)$ ,  $\frac{1}{5}(M+m-\delta M)(a^2+c^2)$  et  $\frac{1}{5}(M+m-\delta M)(a^2+b^2)$ .  $[J_{crat}]_{\mathcal{R}_0}$  est définie par (2.268).

L'expression (2.168) permet de déterminer, dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  les composantes de la vitesse instantanée de rotation de la cible après l'impact. On a en effet :

$$[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0} \approx [J_1]_{\mathcal{R}_0}^{-1} \left( [J_0]_{\mathcal{R}_0} [\Omega_0]_{\mathcal{R}_0} + \eta [m\vec{OI} \wedge \vec{v}_n]_{\mathcal{R}_0} + \zeta [m\vec{OI} \wedge \vec{v}_t]_{\mathcal{R}_0} \right) \quad (2.271)$$

où  $\vec{v}_n$  et  $\vec{v}_t$  sont données par (2.179) et (2.180). Les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  ont été modélisés par Yanagisawa (2002) : nous utiliserons dans nos simulations, les relations (2.188) et (2.189) avec les valeurs du tableau 2.2 correspondant à une cible en basalte. Ces valeurs ont été estimées en se basant sur des expériences en laboratoire alors que les effets de la gravité de la cible et des processus de réaccumulation n'apparaissent pas en laboratoire. Cependant  $\eta$  et  $\zeta$  peuvent être changés à l'avenir dans le but d'obtenir des paramètres mieux adaptés à la réalité, sans que le formalisme général ne soit modifié. Il nous est donc possible dans nos simulations de faire varier les valeurs de  $\eta$  et de  $\zeta$  en considérant, comme nous l'avons expliqué dans la partie 2.4.4 que, dans le cas d'un impact à cratérisation, on a :  $\eta > 1$  et  $\zeta < 1$ .

Rappelons aussi que dans l'expression (2.271),  $[J_0]_{\mathcal{R}_0}$  et  $[\Omega_0]_{\mathcal{R}_0}$  représentent respectivement le tenseur d'inertie, défini par (2.41), et le vecteur vitesse de rotation de la cible avant l'impact mesurés dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ . De la même manière que dans le cas d'un impact suivi d'une accréation,  $[\Omega_1]_{\mathcal{R}_0}$  n'est pas mesuré par rapport au centre de masse de la cible après l'impact et peut être considéré comme une approximation du vecteur vitesse de rotation

de la cible après la collision et la formation du cratère par rapport à son centre de masse.

# Chapitre 3

## Applications

### 3.1 Introduction

Nous allons appliquer dans cette partie les résultats du chapitre précédent basés sur notre paramétrisation multi-dimensionnelle afin d'évaluer les conséquences d'un impact sur la rotation d'un corps fictif (mais auquel nous pourrions faire correspondre un quelconque cas réel). Nous considérerons aussi bien le cas d'un impact suivi d'une accumulation du projectile sur la cible sans qu'une quantité de masse significative ne soit éjectée (on nommera ce cas "accrétion"), qu'un impact suivi de la formation d'un cratère (on nommera ce cas "cratérisation").

Nous allons tout d'abord évaluer la pertinence d'avoir pris en compte dans nos formules la valeur du rayon  $r$  du projectile au lieu de considérer une valeur nulle pour ce paramètre, étant donné que les impacts étudiés ne sont pas destructeurs et mettent donc en présence une cible avec des projectiles de taille limitée. A cet effet, nous évaluerons sur deux types de cible, l'influence de la taille du projectile en fonction de la vitesse d'impact  $V$ . De plus dans les simulations suivantes, nous étudierons s'il est raisonnable ou non d'approcher les composantes tangentielle et normale de la vitesse d'impact  $V$  à la surface de l'ellipsoïde au point d'impact  $I$  par respectivement les composantes tangentielle et normale en  $I$  au méridien passant par ce point.

Nous effectuerons ensuite une série de simulations dans le but d'étudier l'influence des différents paramètres utilisés dans notre modélisation (rayon  $r$  du projectile, vitesse d'impact  $V$ , angles d'impact  $\alpha$  et  $\beta$ , coordonnées  $\lambda$  et  $\phi$  du lieu d'impact,...) en considérant dans un premier temps des vitesses élevées de l'ordre de 5 km/s puis en choisissant dans un second temps des vitesses

d'impact  $V$  peu élevées de telle sorte que l'on puisse considérer les deux types d'impact (avec accréation et avec cratérisation). Notons que dans nos simulations, nous fixerons arbitrairement certains paramètres pour en faire varier d'autres mais dans le cadre de notre modélisation, d'autres choix peuvent être effectués. Notre objectif est également de montrer que nos formules qui impliquent un nombre important de paramètres sont particulièrement flexibles et bien adaptées pour traiter des cas d'impacts spécifiques.

## 3.2 Conditions générales

On considère une cible de forme ellipsoïdale de dimensions  $a \times b \times c$  égales respectivement à  $100 \times 50\sqrt{2} \times 50$  kilomètres avec une masse volumique de  $3 \text{ g/cm}^3$ , proche de celle d'une cible basaltique. La cible est animée d'une rotation initiale autour de son plus petit axe avec une période de  $T_0 = 10$  heures. On suppose que le projectile a la même masse volumique que la cible. En dehors des cas où ces paramètres seront l'objet de l'étude, nous utiliserons pour les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  dans le cas d'un impact à cratérisation, les expressions (2.188) et (2.189) en prenant :  $\eta_0 = 1.52$  et  $\zeta_0 = 0.409$  (valeurs pour une cible basaltique), et ce, même dans les cas où les conditions de nos simulations seront différentes de celles ayant permis l'obtention de ces paramètres. Par ailleurs, l'algorithme utilisé permettant d'évaluer les dimensions du cratère a été décrit dans la partie 2.4.2. Dans le cas d'impacts à une vitesse faible, suivis d'une accréation ou de la formation d'un cratère (voir la partie 3.5), nous avons considéré que peu d'éléments réussissent à s'éjecter et à s'échapper de l'attraction gravitationnelle de la cible. Nous avons alors posé :  $\delta M = 0$ . Pour les autres simulations de collisions à cratérisation, nous avons approché la perte de masse  $\delta M$  par la quantité de masse  $m_{\text{crat}}$  éjectée et à l'origine de la formation du cratère. Cette approximation revient à considérer que tous les éléments éjectés de la cible suite à l'impact ont réussi à se disperser.

Notre objectif est alors d'étudier les variations de la période de rotation et de la direction de l'axe de rotation de la cible, suite à l'impact, en fonction de différents paramètres tels que la taille de la cible, des angles d'impact, de la localisation du lieu d'impact, de la vitesse d'impact. Des tests d'arrêt sont effectués au cours des simulations d'impact de telle manière que l'on considèrera que la collision n'est possible que si certains critères sont respectés. Cinq critères ont été retenus. Deux concernent les conditions précédant l'impact : tout d'abord, on doit s'assurer que la période  $T_0$  choisie

est suffisamment grande pour que la vitesse de rotation de la cible ne dépasse pas la limite de fission classique. Les unités étant convenablement choisies, on doit avoir pour une cible sphérique de rayon  $R$  :

$$T_0 > \frac{2\pi}{\omega_{max}} \quad (3.1)$$

avec :

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un ellipsoïde de dimensions  $a \times b \times c$ , nous prendrons :

$$R = \sqrt[3]{abc} \quad (3.3)$$

D'autre part, la vitesse d'impact  $V$  doit être supérieure à la vitesse de libération mutuelle  $V_l$  au lieu d'impact, définie par :

$$V_l = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{OI+r}} \quad (3.4)$$

où  $M$  et  $m$  sont les masses respectivement de la cible et du projectile;  $r$  représente le rayon du projectile supposé sphérique et,  $OI$  la distance entre le centre de la cible et le lieu d'impact (les coordonnées de  $I$  dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  étant connues grâce aux expressions (2.25), (2.26), (2.27) du chapitre 2). En effet, pour que la collision ait lieu avec la formation d'un cratère ou bien avec une accréation, le projectile doit atteindre la surface de la cible. Sa vitesse doit donc être suffisamment grande pour qu'il ne soit pas "capturé" par la cible et devienne un de ses satellites.

Au cours des simulations, on veillera également à ce que l'énergie d'impact  $Q$  ne dépasse pas une certaine limite fixée à  $10^8$  erg/g. Cette valeur a été choisie à partir des courbes de la figure 1.3 du chapitre 1 donnant l'énergie spécifique d'impact  $Q^*$  en fonction du rayon de la cible. Le choix d'une telle limite permet de s'assurer que l'impact n'aboutisse pas à une fragmentation de la cible mais à la formation d'un cratère. D'après la figure 1.3, pour une cible sphérique d'environ 100 km de rayon, la valeur limite est convenablement choisie si on se réfère aux courbes de Benz et Asphaug (1999). Ce n'est pas le cas selon les courbes de Housen et Holsapple (1990), et celle de Holsapple (1994) pour lesquelles, à partir d'une énergie d'impact  $Q$  de  $10^6$  erg/g, la cible perd au moins 50% de sa masse.

Les deux derniers critères d'arrêt portent sur l'état de la cible après la collision : si la perte de masse de la cible représente plus de 40% de la masse initiale de la cible ou si le cratère a un diamètre dépassant 40% de la taille du petit axe initial de la cible, la simulation s'interrompt. En utilisant les notations utilisées dans cette thèse, ces deux critères s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\delta M}{M} \leq 0.4 \quad (3.5)$$

et :

$$D \leq 0.8c \quad (3.6)$$

Notons que le seuil de perte de masse fixé par (3.5) n'a jamais été atteint. Dans les cas où la taille maximale du cratère fixée par la relation (3.6) a été atteinte, nous avons poursuivi les calculs jusqu'à la limite peu réaliste  $D = 2c$  mais nous avons indiqué le cas échéant sur les graphiques ou dans les commentaires, le seuil d'arrêt concernant ce critère. L'absence d'indications correspond à un seuil non atteint.

### 3.3 Etude d'approximations possibles

#### 3.3.1 Prise en compte du rayon du projectile

Les premières questions que nous nous posons portent sur le rayon du projectile : est-il nécessaire d'en tenir compte dans les expressions permettant d'évaluer les propriétés rotationnelles de la cible après l'impact ? Est-il possible de le négliger sans que cette approximation entraîne des écarts trop importants dans les résultats ? Pour répondre à ces questions, nous avons effectué deux types de simulations qui nous ont permis d'évaluer les périodes de rotation et les directions de l'axe de rotation de la cible après l'impact, en tenant compte d'une part de la valeur réelle du rayon  $r$  du projectile de masse  $m$  et en négligeant d'autre part ce rayon. Cela revient, dans le deuxième cas, à considérer un projectile ponctuel ( $r = 0$  km) de masse  $m$ . Les autres paramètres utilisés ( $\alpha, \beta, V, \lambda, \phi, \dots$ ) sont les mêmes dans les deux types d'impact.

**Nous nous sommes placés dans les conditions décrites dans la partie 3.2, en considérant le même ellipsoïde avec les mêmes conditions initiales ( $T_0 = 10$  heures). L'impact a lieu en un point de la cible de latitude  $\phi = 45^\circ$  et de longitude  $\lambda = 45^\circ$  et a pour**

conséquence la formation d'un cratère. Nous avons choisi trois valeurs possibles pour  $\alpha$  :  $\alpha = 0^\circ$  qui correspond à un impact normal au méridien de la cible passant par le point d'impact,  $\alpha = 45^\circ$  (angle d'impact intermédiaire) et  $\alpha = 90^\circ$  qui correspond à un impact rasant. On a aussi :  $\beta = 0^\circ$ .

Notons  $T_1$  et  $\bar{T}_1$  les périodes de rotation de la cible après l'impact, obtenues respectivement en tenant compte du rayon du projectile et en considérant un projectile ponctuel. On pose  $\Delta\bar{T}_1 = \bar{T}_1 - T_1$ .  $(\Omega_1, \bar{\Omega}_1)$  représente l'écart angulaire entre les directions des axes de rotation de la cible après l'impact obtenues suivant les deux types de simulation.

Les figures 3.1 et 3.2 représentent, en fonction du rapport  $\frac{r}{a}$  entre le rayon de la cible et la longueur du plus grand demi-axe de la cible, les différences relatives sur la période de rotation et sur la direction de l'axe de rotation de la cible après l'impact, dues à l'approximation effectuée sur le rayon  $r$  du projectile. Deux valeurs de la vitesse d'impact ont été considérées :  $V = 5$  km/s (courbes en noir) et  $V = 0.5$  km/s (courbes claires). Au cours de ces simulations, le critère d'arrêt portant sur la taille du cratère (voir la relation 3.6) a été atteint avec  $\alpha = 0^\circ$ , pour  $\frac{r}{a} \approx 6.2 \times 10^{-2}$  ( $Q \approx 8.5 \times 10^5$  erg/g) lorsque  $V = 0.5$  km/s, correspondant à une baisse de la période  $T_1$  de 2.2% et à un écart angulaire de  $0.83^\circ$  et, pour  $\frac{r}{a} \approx 1.7 \times 10^{-2}$  ( $Q \approx 1.85 \times 10^6$  erg/g) lorsque  $V = 5$  km/s, correspondant à une baisse de  $T_1$  de 0.48% et un écart angulaire de  $0.2^\circ$ . Avec  $\alpha = 45^\circ$ , les valeurs correspondantes de  $\frac{r}{a}$  sont légèrement supérieures :  $\frac{r}{a} \approx 7.5 \times 10^{-2}$  ( $Q \approx 1.5 \times 10^6$  erg/g) lorsque  $V = 0.5$  km/s ce qui représente une baisse de la période  $T_1$  de 1.6% et un écart angulaire de  $1.3^\circ$  et,  $\frac{r}{a} \approx 2.1 \times 10^{-2}$  ( $Q \approx 3.3 \times 10^6$  erg/g) lorsque  $V = 5$  km/s, ce qui représente une baisse de  $T_1$  de 0.35% et un écart angulaire de  $0.3^\circ$ . Nous avons poursuivi les simulations en nous limitant à des cratères ayant un diamètre inférieur à la longueur du plus petit axe de l'ellipsoïde. Cette démarche aboutit à des rayons  $r$  du projectile représentant environ 20% de la longueur du plus grand demi-axe  $a$  pour  $V = 0.5$  km/s et environ 5% pour  $V = 5$  km/s. Les résultats obtenus au voisinage de ces valeurs limites sont cependant à considérer avec prudence.

Lorsque  $\alpha = 90^\circ$ , les simulations s'interrompent en raison de la valeur de l'énergie d'impact atteignant  $10^8$  erg/g lorsque  $\frac{r}{a} \approx 0.3$  pour  $V = 0.5$  km/s et lorsque  $\frac{r}{a} \approx 6.6 \times 10^{-2}$  pour  $V = 5$  km/s. Pour des valeurs du rayon du projectile inférieures ou égales à  $10^{-2}a$ , les différences avec les résultats obtenus en considérant un projectile de masse et de taille négligeables, sont petites : on a en effet  $\left| \frac{\Delta\bar{T}_1}{T_1} \right| < 0.1\%$  et  $(\Omega_1, \bar{\Omega}_1) \leq 0.04^\circ$ . Les différences deviennent plus conséquentes pour un rayon  $r$  du projectile supérieures à  $5 \times 10^{-2}a$  lorsque  $V = 5$  km/s et à  $10^{-1}a$  avec  $V = 0.5$  km/s. A partir de ces

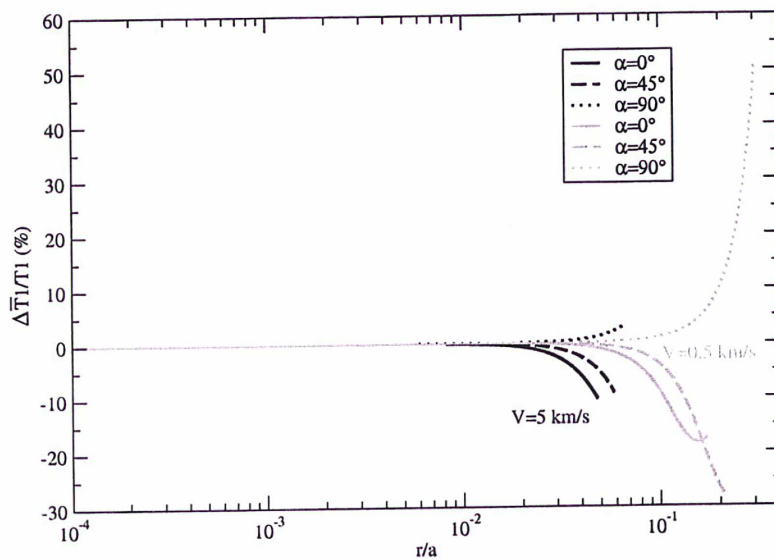


FIG. 3.1 : Différences relatives en % entre les périodes de rotation de la cible après l'impact, obtenues en considérant respectivement que  $r \neq 0$  et  $r = 0$ , en fonction de la taille du projectile.

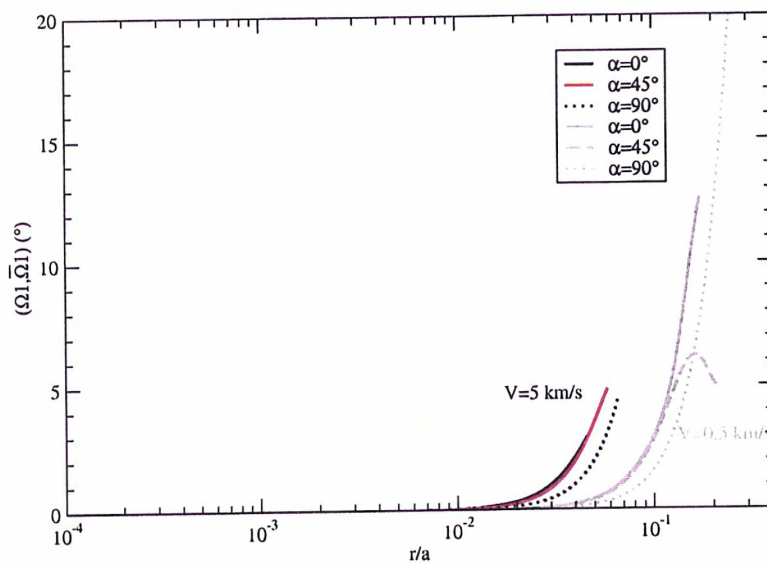


FIG. 3.2 : Angle entre les directions des axes de rotation obtenues en considérant respectivement que  $r \neq 0$  et  $r = 0$ , en fonction de la taille du projectile.

seuils, la baisse de la période  $T_1$  dépasse 10% pour  $\alpha = 0^\circ$  et 5% pour  $\alpha = 45^\circ$  et, l'écart angulaire  $(\Omega_1, \bar{\Omega}_1)$  dépasse  $2^\circ$  pour  $\alpha = 0^\circ$  et  $1^\circ$  pour  $\alpha = 45^\circ$ . L'angle  $(\Omega_0, \Omega_1)$  correspondant est, pour  $V = 5$  km/s de  $12.6^\circ$  et de  $5^\circ$  respectivement pour  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 45^\circ$  et, pour  $V = 0.5$  km/s de  $19^\circ$  et de  $7.5^\circ$  respectivement pour  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 45^\circ$ .

Nous avons également représenté l'évolution de l'énergie d'impact  $Q$  en fonction de la taille du projectile (voir figure 3.3). Nous pouvons ainsi associer aux résultats précédents pour un rayon  $r$  fixé, l'énergie d'impact correspondant.

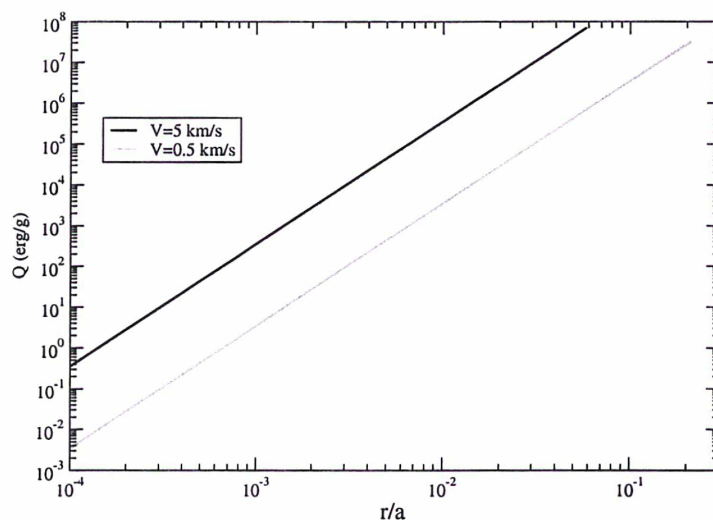


FIG. 3.3 : Energie d'impact  $Q$  en fonction de la taille du projectile.

- Nous constatons donc, à travers ces simulations, que le rayon du projectile ne joue pas un rôle important sur les variations des propriétés rotationnelles de la cible pour des valeurs de  $r$  inférieures à  $2 \times 10^{-2}a$ . Pour des valeurs supérieures à ce seuil, les conséquences sont plus importantes.

- Nous avons décidé, dans la suite de notre travail, de prendre en compte la valeur de ce rayon.

### 3.3.2 Etude des composantes de la vitesse d'impact $V$

Dans le cas d'un impact à cratérisation, afin d'utiliser l'expression (2.167) :

$$[J_1][\Omega_1] - [J_0][\Omega_0] \approx \eta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_n) + \zeta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_t)$$

nous devons déterminer dans le repère de référence  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  les composantes  $\vec{v}_t$  et  $\vec{v}_n$  de la vitesse d'impact, respectivement tangentielle et normale à la surface de l'ellipsoïde au lieu d'impact  $I$ . Avec le choix de nos paramètres, les composantes  $\vec{V}_t$  et  $\vec{V}_n$  respectivement tangentielle et normale au méridien passant par le point d'impact  $I$  s'expriment facilement en fonction de  $V$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  (voir les relations (2.40) et (2.39)). Cependant comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, ces composantes diffèrent respectivement de  $\vec{v}_t$  et de  $\vec{v}_n$  si les dimensions de  $a \times b \times c$  de l'ellipsoïde représentant la cible sont telles que  $a \neq b$ , même si on peut penser que les vecteurs sont généralement proches les uns des autres. Nous avons toutefois réussi à déterminer les expressions permettant d'obtenir les composantes de  $\vec{v}_t$  et de  $\vec{v}_n$  dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  après avoir considéré une nouvelle transformation (voir l'obtention des expressions (2.179) et (2.180)). On peut cependant se demander si il est possible, dans un souci de simplification, d'effectuer l'approximation :  $\vec{v}_t \approx \vec{V}_t$  et  $\vec{v}_n \approx \vec{V}_n$  dans l'expression (2.167), sans que les résultats finaux en soient significativement affectés.

Dans cette partie, nous cherchons donc à évaluer les différences obtenues sur les résultats décrivant les variations des propriétés rotationnelles de la cible suite à un impact, en considérant dans la relation (2.167), d'une part les expressions exactes de  $\vec{v}_t$  et de  $\vec{v}_n$  données par (2.179) et (2.180), et d'autre part l'approximation  $\vec{v}_t = \vec{V}_t$  et  $\vec{v}_n = \vec{V}_n$ . A cet effet dans nos simulations, la cible est supposée de forme ellipsoïdale de dimensions  $a \times b \times c$  avec  $a \neq b$  et ayant une période initiale  $T_0$  de 10 heures. On considère un rayon  $r$  du projectile de 2 km et une vitesse d'impact  $V$  de 5 km/s. Les angles d'impact sont  $\alpha = 45^\circ$  et  $\beta = 0^\circ$ . On effectue des simulations en considérant dans un premier temps plusieurs positions du point d'impact sur un ellipsoïde donné puis en considérant des formes différentes de l'ellipsoïde. On calcule pour chaque simulation, les périodes de rotation  $T_1$  et  $\tilde{T}_1$  de la cible après l'impact, correspondant aux expressions obtenues respectivement en utilisant les expressions exactes de  $\vec{v}_t$  et  $\vec{v}_n$ , et en effectuant les approximations. On définit alors  $\Delta\tilde{T}_1$  par la différence  $\tilde{T}_1 - T_1$ . On évalue également l'angle  $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1)$  entre l'orientation des axes instantanés de rotation correspondants.

### Influence de la position du lieu d'impact

Nous considérons à nouveau une cible basaltique de forme ellipsoïdale dont les dimensions  $a \times b \times c$  sont :  $a = 100$  km,  $b = 50\sqrt{2}$  km et  $c = 50$  km et dont la période de rotation autour de son plus petit axe est de  $T_0 = 10$  heures. Le projectile a un rayon de :  $r = 2$  km et la vitesse d'impact est de :  $V = 5$  km/s. Les angles d'impact sont :  $\alpha = 45^\circ$  et  $\beta = 0^\circ$ . La figure 3.4 présente l'écart relatif entre les deux périodes  $T_1$  et  $\tilde{T}_1$  et la figure 3.5 l'écart angulaire entre les axes instantanés de rotation de la cible après l'impact. Ces figures montrent clairement l'amplitude des différences dues à l'approximation effectuée en fonction de la position du point d'impact sur la cible. On observe sur chacune des figures une périodicité des courbes, modulo  $180^\circ$ , qui s'explique par les symétries de l'ellipsoïde.

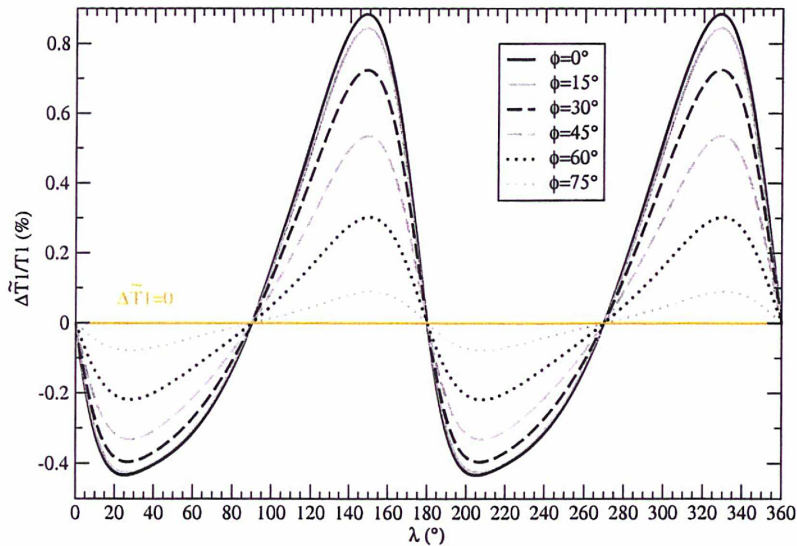


FIG. 3.4 : Variation relative de la période de rotation de la cible après l'impact  $T_1$  en fonction de la longitude  $\lambda$  du lieu d'impact.

Sur la figure 3.4, on observe que pour une longitude  $\lambda$  fixée, l'écart relatif des périodes est d'autant plus important que la latitude  $\phi$  est grande. Pour

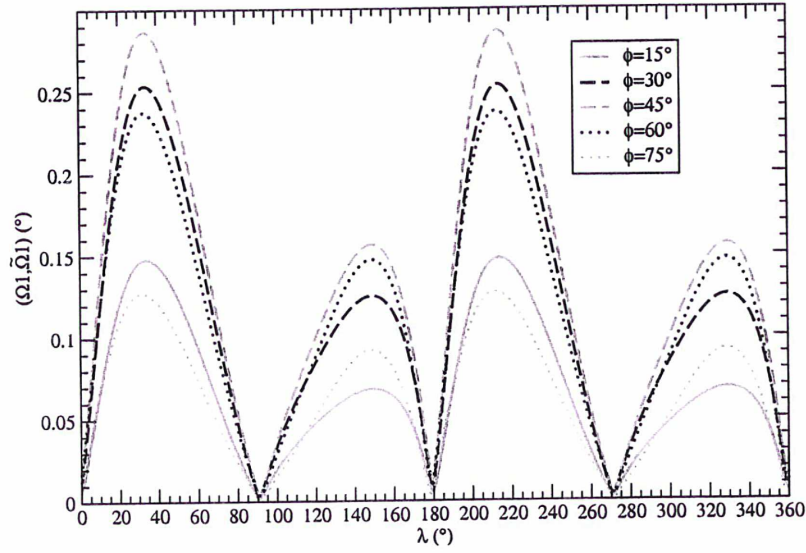


FIG. 3.5 : Différences de direction de l'axe de rotation  $\Omega_1$  suivant les composantes de la vitesse utilisées, en fonction de la longitude  $\lambda$  du lieu d'impact.

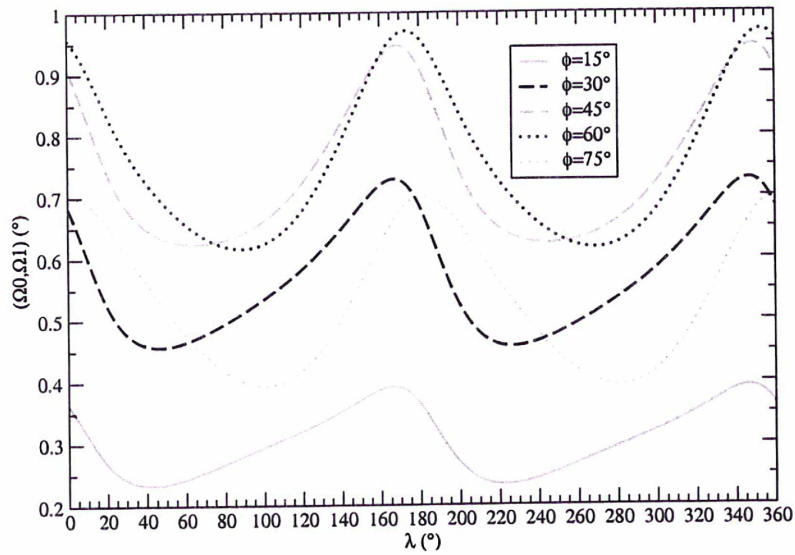


FIG. 3.6 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation  $\Omega_0$  de la cible en fonction de la longitude  $\lambda$  du lieu d'impact.

des valeurs de la longitude  $\lambda$  comprises entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , les approximations effectuées aboutissent à une baisse de la période  $T_1$  pouvant atteindre  $-0.43\%$  pour  $\lambda \approx 25^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ , ce qui correspond à un écart de 3 minutes entre les valeurs de  $T_1$  et de  $\tilde{T}_1$  (respectivement de 9 h 56 min et de 9 h 53 min). Pour des valeurs de la longitude  $\lambda$  comprises entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ , les courbes montrent une augmentation de la période  $T_1$  qui est maximale pour un point d'impact tel que  $\lambda \approx 149^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$  et qui correspond à une augmentation de  $T_1$  de près de  $0.9\%$ . On a dans ce cas :  $T_1 \approx 9\text{h}49$  min et  $\tilde{T}_1 \approx 9\text{h}54$  min. Bien que dans chacun des cas, l'écart entre les périodes  $T_1$  et  $\tilde{T}_1$  est faible, les différences entre les variations par rapport à la période initiale  $T_1 - T_0$  et  $\tilde{T}_1 - T_0$  sont importantes puisque au maximum,  $\tilde{T}_1 - T_0$  représente presque le double de  $T_1 - T_0$  lorsque  $\lambda \approx 25^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$  et la moitié de  $T_1 - T_0$  lorsque  $\lambda \approx 149^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ .

D'autre part pour des longitudes valant  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  ou  $180^\circ$ , les deux périodes  $T_1$  et  $\tilde{T}_1$  sont égales, quelle que soit la latitude  $\phi$  considérée. En effet pour ces valeurs, les expressions donnant  $\vec{v}_t$ ,  $\vec{v}_n$ ,  $\vec{V}_t$  et  $\vec{V}_n$  se simplifient de telle sorte qu'on ait les égalités :  $\vec{v}_t = \vec{V}_t$  et  $\vec{v}_n = \vec{V}_n$ . Ainsi, on a aussi :  $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1) = 0^\circ$  pour chacun de ces cas (voir la figure 3.5).

La figure 3.5 montre que les approximations effectuées donnent un écart maximal entre les axes de rotation de la cible après l'impact pour des valeurs de  $\lambda$  proches de  $36^\circ$  et de  $216^\circ$ , atteignant  $0.29^\circ$  pour  $\phi = 45^\circ$ . Afin d'évaluer l'importance relative de ces écarts, nous avons représenté sur la figure 3.6 l'évolution de la direction de l'axe de rotation de la cible  $(\Omega_0, \Omega_1)$ , même si cet angle n'est pas nécessairement dans le même plan que  $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1)$ . Ainsi pour une position du point d'impact qui correspond à l'écart le plus grand entre les axes de rotation après l'impact ( $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda \approx 36^\circ$ ), on a :  $0.65^\circ < (\Omega_0, \Omega_1) < 0.7^\circ$  ce qui correspond à un peu plus du double de l'écart obtenu ( $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1) \approx 0.29^\circ$ ). Notons également pour une longitude  $\lambda$  fixée, que, l'influence de la latitude  $\phi$  est plus complexe que pour l'étude de la période. En fait pour des latitudes  $\phi$  comprises  $0^\circ$  et  $40^\circ$ , l'écart entre les axes instantanés de rotation après impact est d'autant plus grand que la latitude  $\phi$  est grande ; pour des valeurs supérieures de la latitude, l'écart diminue progressivement. D'autre part, nous n'avons pas tracé sur cette figure les résultats correspondants à la latitude  $\phi = 0^\circ$  puisque avec cette latitude, nous avons :  $(\Omega_0, \Omega_1) = 0^\circ$  et  $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1) = 0^\circ$ .

## Influence de la forme de la cible

Dans cette partie, on utilise les mêmes paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $V$ ,  $r$  et  $T_0$  que précédemment. On considère cependant des cibles ellipsoïdales dont les dimensions  $a \times b \times c$  sont telles que  $a$  reste fixe ( $a = 100$  km) et,  $b$  et  $c$  varient en vérifiant :  $1 \leq \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \leq 2.5$ . Cela entraîne en particulier une variation de la masse de la cible. Afin d'évaluer l'influence des approximations effectuées en fonction de la forme de la cible respectivement sur la période et la direction de l'axe de rotation, nous fixerons la longitude respectivement à  $\lambda = 149^\circ$  et à  $\lambda = 36^\circ$ . Ces valeurs correspondent aux écarts relatifs maximaux obtenus dans la section précédente de la période  $T_1$  pour  $\lambda = 149^\circ$  (fig. 3.7) et de la direction de l'axe de rotation après l'impact pour  $\lambda = 36^\circ$  (fig. 3.8). Pour ces valeurs de la longitude, nous prendrons, comme précédemment plusieurs valeurs de la latitude. Pour chacune des figures 3.7, 3.8 et 3.9, nous avons indiqué par un trait vertical les résultats correspondant à l'ellipsoïde considéré auparavant à savoir tel que :  $a = 100$  km et  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \sqrt{2}$ . Notons également que la taille maximale du cratère fixée par la condition (3.6) est atteinte dans les figures 3.7 et 3.8 pour des valeurs de  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  comprises entre 1.43 (pour  $\phi = 0^\circ$ ) et 1.48 (pour  $\phi = 75^\circ$ ). Nous avons poursuivi les simulations jusqu'à ce que la taille du cratère atteigne celle du plus petit axe.

La figure 3.7 montre que les différences relatives sur la période dues aux approximations effectuées sur les directions normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact sont d'autant plus grandes que le rapport des longueurs  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  est grand, ce qui correspond à des cibles de plus en plus aplaties suivant les deux plus petits axes. Pour un même rayon  $r$  du projectile, le rapport de masses associé entre le projectile et la cible est également de plus en plus grand, passant d'un facteur 1 à 3 si on considère la condition (3.6), d'un facteur 1 à 10 sinon. Ainsi ces approximations peuvent aboutir à des variations de la période  $T_1$  de l'ordre de 7.3% pour une latitude  $\phi = 0^\circ$  pour des ellipsoïdes de dimensions  $100 \times 45.05 \times 20.29$  kms ( $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \approx 2.22$ ). On a dans ce cas :  $\tilde{T}_1 \approx 8.97$  h alors que :  $T_1 \approx 9.62$  h, ce qui correspond à une différence non négligeable d'environ 39 minutes. Si on se limite cependant aux résultats respectant le critère (3.6), on aboutit seulement à une différence relative de moins de 1% de  $T_1$  ( $T_1 \approx 9.8$  h et  $\Delta T_1 \approx 5.6$  min) pour un ellipsoïde de dimensions  $100 \times 69.93 \times 48.90$  kms ( $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \approx 1.43$ ). Les différences relatives sont par ailleurs d'autant moins importantes que la latitude est grande, ne dépassant pas 4 % pour  $\phi = 60^\circ$  ( $\Delta T_1 \leq 21$  min pour  $9.2 \text{ h} \leq T_1 \leq 9.999 \text{ h}$ ) et 1.6% pour  $\phi = 75^\circ$  ( $\Delta T_1 \leq 8.8$  min alors que

$9.5 \text{ h} \leq T_1 \leq 9.999 \text{ h}$ ).

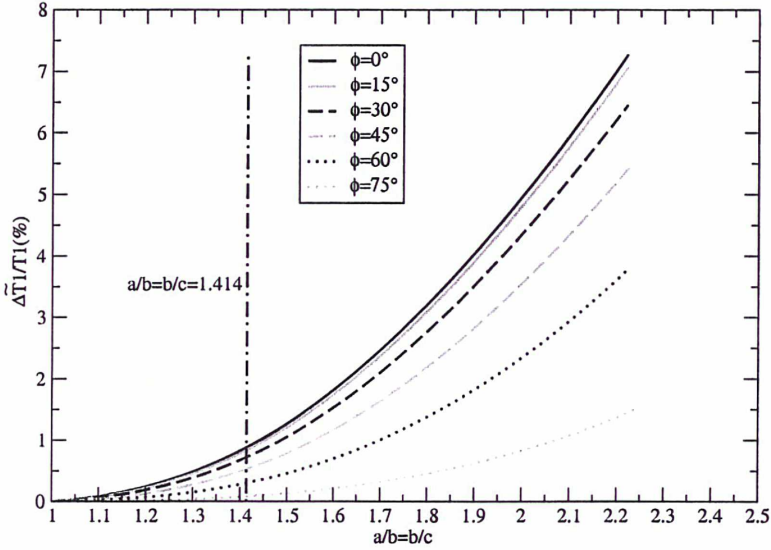


FIG. 3.7 : Variation relative de la période de rotation  $T_1$  suivant les composantes de la vitesse utilisées, en fonction de la forme de la cible, avec  $\lambda = 149^\circ$ .

Dans la figure 3.8 pour laquelle  $\lambda = 36^\circ$ , nous observons également que l'écart angulaire dû aux approximations considérées dans cette partie, est d'autant plus grand que le rapport  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  est grand, atteignant lorsque  $\phi = 45^\circ$ ,  $0.33^\circ$  pour  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \approx 1.43$  si on considère la condition d'arrêt (3.6) et  $5.7^\circ$  sinon. La figure 3.9 permet de comparer l'écart angulaire de l'axe de rotation de la cible après l'impact selon que l'on prenne en compte ou non les approximations déjà évoquées, avec les variations de l'axe de rotation initial de ce corps dues à l'impact. Même si ces angles  $((\Omega_1, \tilde{\Omega}_1)$  et  $(\Omega_0, \Omega_1)$ ) ne sont pas nécessairement dans le même plan, nous constatons que les valeurs de  $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1)$  ne sont pas négligeables par rapport à  $(\Omega_0, \Omega_1)$ . Comme précédemment, nous n'avons pas tracé sur cette figure les résultats relatifs à la latitude  $\phi = 0^\circ$  puisque avec cette latitude, nous avons :  $(\Omega_0, \Omega_1) = 0^\circ$  et  $(\Omega_1, \tilde{\Omega}_1) = 0^\circ$ .

Signalons que toutes les simulations de cette partie ont été effectuées à

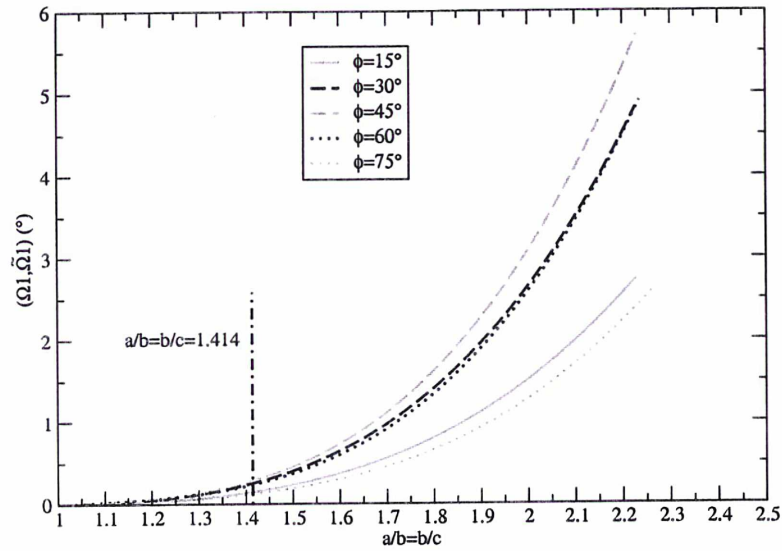


FIG. 3.8 : Différences de direction de l'axe de rotation  $\Omega_1$  suivant les composantes de la vitesse utilisées, en fonction de la forme de la cible, avec  $\lambda = 36^\circ$ .

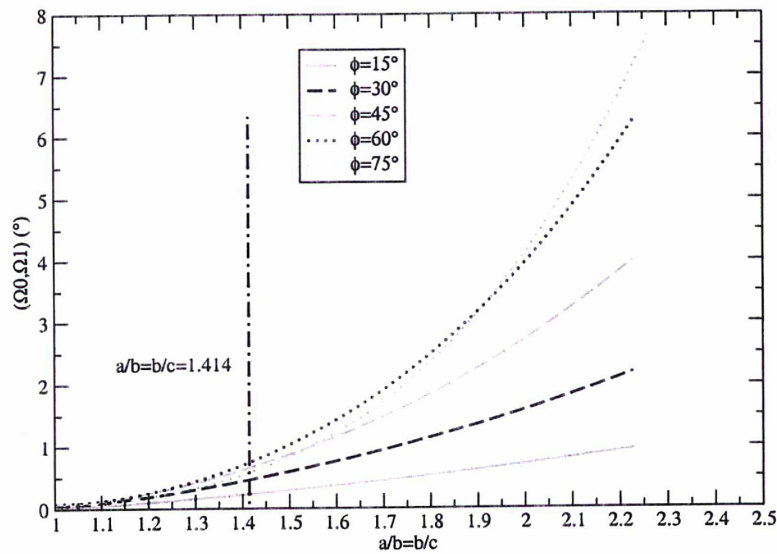


FIG. 3.9 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation  $\Omega_0$ , en fonction de la forme de la cible, avec  $\lambda = 36^\circ$ .

des énergies d'impact  $Q$  de l'ordre de  $10^6 - 10^7$  erg/g.

- Avec les paramètres choisis, en particulier avec le choix d'une cible ellipsoïdale dont les dimensions sont  $a = 100$  km,  $b = 50\sqrt{2}$  km et  $c = 50$  km, on obtient peu d'écart entre les valeurs exactes et les valeurs approchées des caractéristiques rotationnelles de la cible après l'impact (période et direction de l'axe de rotation) suivant la position du lieu d'impact sur l'ellipsoïde. Cependant l'influence des approximations effectuées apparaît nettement si on compare, dans chacun des cas, les variations obtenues par rapport aux caractéristiques initiales.

- Nos simulations mettent également en évidence que le fait de confondre les directions normales au point d'impact respectivement à la surface de l'ellipsoïde et au méridien passant par ce point, aboutit à des différences d'autant plus importantes que l'aplatissement de l'ellipsoïde est élevé.

- Dans la suite, dans le cas d'impacts à cratérisation, nous utiliserons les expressions exactes des composantes  $\vec{v}_n$  et  $\vec{v}_t$  de la vitesse d'impact.

## 3.4 Impacts à cratérisation

### 3.4.1 Influence de la vitesse d'impact $V$

On considère dans toute cette partie un impact d'un projectile sphérique de rayon  $r = 2$  km sur une cible de forme ellipsoïdale de dimensions  $100 \times 50\sqrt{2} \times 50$  kilomètres ayant une rotation initiale de période  $T_0 = 10$  heures autour son plus petit axe. On suppose ici que l'impact a lieu sur la cible en un point de longitude  $\lambda = 45^\circ$  et de latitude  $\phi = 45^\circ$ . On a choisi trois valeurs pour l'angle d'impact  $\alpha$  :  $\alpha = 0^\circ$  ce qui correspond à un impact suivant la direction normale au point d'impact au méridien passant par ce point,  $\alpha = 45^\circ$  (angle d'impact intermédiaire) et  $\alpha = 90^\circ$  qui correspond à un impact rasant. On a également  $\beta = 0^\circ$ . En premier lieu, nous avons fait varier la vitesse d'impact  $V$  de 1 km/s à 15 km/s, en considérant que l'impact associé est suivi de la formation d'un cratère.

Sur toutes les figures de cette partie, nous avons indiqué par un trait

vertical les résultats obtenus pour une énergie d'impact de  $Q = 10^6$  erg/g et de  $Q = 10^7$  erg/g. Notons également que pour les premières valeurs de la vitesse d'impact ( $V = 1$  km/s), on a :  $Q \approx 10^5$  erg/g et que pour  $V = 15$  km/s,  $Q \approx 2.55 \times 10^7$  erg/g. Si on se réfère aux courbes de la figure 1.3 du premier chapitre donnant l'évolution de l'énergie critique d'impact  $Q^*$  en fonction du rayon de la cible supposée sphérique, l'énergie d'impact  $Q$  de nos simulations d'impacts non destructeurs, supposant la formation d'un cratère, est conforme avec les limites imposées par les courbes de Benz et Asphaug (1999), au contraire de celles de Housen et Holsapple (1990) et de Holsapple (1994). En effet, la cible choisie dans notre étude n'est pas sphérique mais si on considère qu'elle est proche d'une cible sphérique de même masse (de rayon  $R = \sqrt[3]{abc} \approx 70.71$  km), les valeurs correspondantes de  $Q^*$  pour une vitesse d'impact  $V$  de 5 km/s sont, d'après la figure 1.3, de l'ordre de  $3 \times 10^9$  erg/g selon Benz et Asphaug (1999), de  $2 \times 10^7$  erg/g selon Holsapple (1994), et de  $2 \times 10^6$  erg/g pour Housen et Holsapple (1990). Rappelons que ces valeurs de l'énergie d'impact  $Q$  sont celles pour lesquelles la masse du corps le plus important résultant de la collision est la moitié de la masse initiale de la cible alors que les conditions d'impact que nous considérons (formation d'un cratère) n'entraînent pas un tel bouleversement de la cible. Pour nos simulations, nous avons pour  $V = 5$  km/s,  $Q \approx 3 \times 10^6$  erg/g.

Les figures 3.10 et 3.11 illustrent d'ailleurs les changements relativement faibles de la masse de la cible après la collision. La figure 3.10 représente le pourcentage de masse perdue par la cible par rapport à sa masse initiale, en comparant les résultats obtenus suivant trois types d'expressions : d'une part l'expression (2.269) de Holsapple (1993) évaluant le volume du cratère formé après l'impact, d'autre part l'expression (2.200) évaluant la masse éjectée d'un cratère de la forme d'une calotte sphérique, et les expressions (1.36) et (1.37) obtenues par Dobrovolskis et Burns (1984). Notons que sur cette figure, les courbes correspondant aux formules de Holsapple (1993) et celles correspondant à l'approximation du cratère par une calotte sphérique, considèrent que toute la masse éjectée de la cible suite à l'explosion due à la collision et à l'origine de la formation du cratère s'est échappée de l'attraction gravitationnelle. Rappelons aussi que selon les paramètres utilisés par Dobrovolskis et Burns (1984) (voir le tableau 1.4 du premier chapitre), en suivant les valeurs obtenues par Gault *et al.* (1963), les vitesses d'éjection pour un impact sur une cible basaltique à une vitesse de 6 km/s sont au moins de 50 m/s. Cette vitesse est inférieure à la vitesse de libération de l'ellipsoïde considéré qui est de l'ordre de 80 à 100 m/s. Une approche plus précise de la quantité de masse éjectée aboutirait à un rapport encore moins grand entre la quantité de masse perdue et la masse initiale que ceux observés sur la figure 3.10.

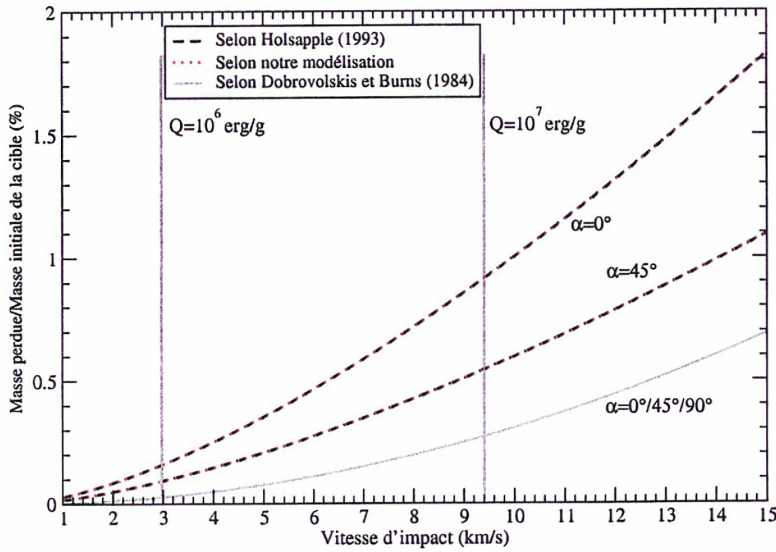


FIG. 3.10 : Proportion de la masse de la cible (en %) s'échappant après l'impact, en fonction de la vitesse d'impact  $V$ .

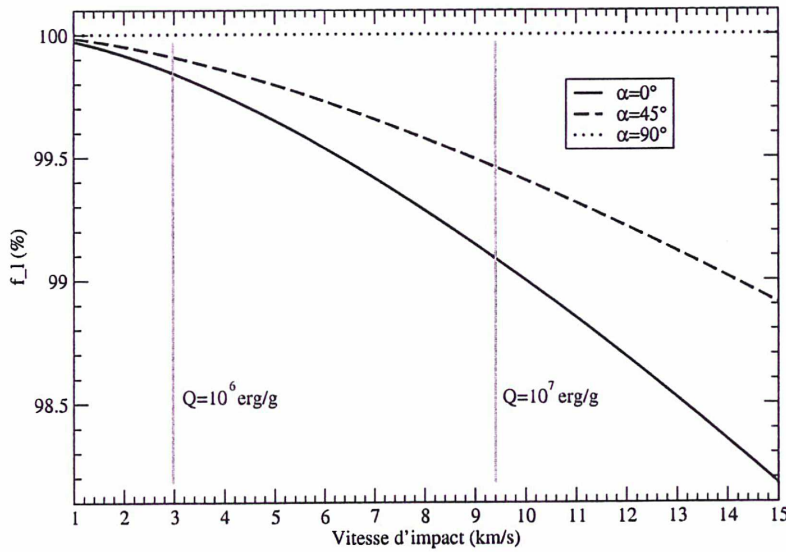


FIG. 3.11 : Rapport  $f_l$  (en %) des masses de la cible après l'impact et avant l'impact, en fonction de la vitesse d'impact  $V$ .

Les courbes de la figure 3.10 correspondant à l'algorithme permettant d'estimer la taille d'un cratère de bord à bord à partir des expressions de Holsapple (1993) (voir la partie 2.4.2 du deuxième chapitre) et les courbes correspondant à l'estimation du cratère par une calotte sphérique sont pratiquement identiques. Ce résultat est important dans la mesure où dans le cas d'un impact à cratérisation, nous avons évalué le tenseur d'inertie de la cible après l'impact en considérant une approximation de la forme du cratère qui est apparemment en cohérence avec les formules analytiques de Holsapple (1993). Les courbes précédentes diffèrent cependant avec celles obtenues à partir des expressions de Dobrovolskis et Burns (1984). Ces différences (au maximum de 0.4 % pour  $\alpha = 45^\circ$  et de 1.1 % pour  $\alpha = 0^\circ$ ) sont minimes en comparaison de la masse initiale de la cible et peuvent s'expliquer par le fait que ces formules tiennent compte du fait que tous les éléments éjectés ne s'échappent pas nécessairement.

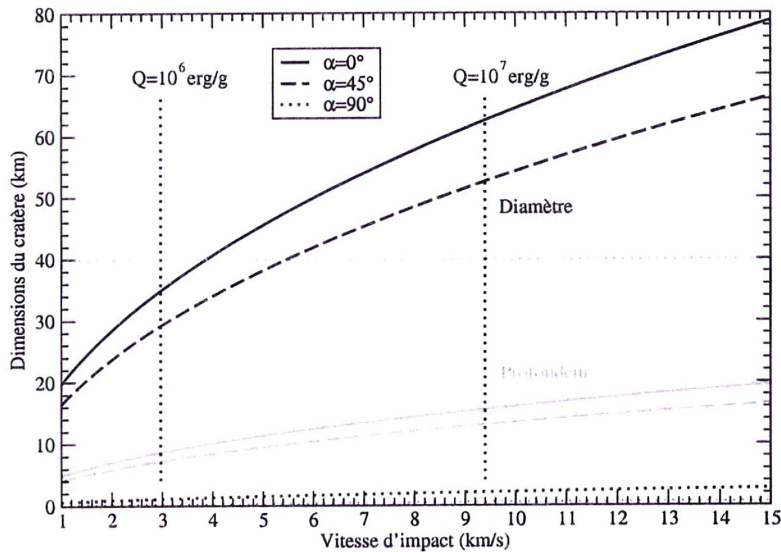


FIG. 3.12 : Dimensions du cratère en fonction de la vitesse d'impact  $V$ .

Dans la figure 3.11, on étudie la proportion de masse restante de la cible en fonction de la vitesse d'impact et de l'angle d'impact  $\alpha$ . Nous avons utilisé l'expression de la quantité de perte de masse correspondant à l'expres-

sion (2.269) de Holsapple (1993). On observe que, la masse de la cible après l'impact représente plus de 98 % de la masse initiale, et pour  $\alpha = 90^\circ$ , la différence est négligeable.

La figure 3.12 représente les dimensions du cratère (diamètre et profondeur) en fonction de la vitesse d'impact  $V$ . Les expressions correspondent aux dimensions obtenues à partir de l'algorithme de la partie 2.4.2 avec les expressions de Holsapple (1993). Notons qu'il est possible de comparer les dimensions du cratère avec celles de la cible, le plus petit axe de l'ellipsoïde mesurant 100 km et le plus grand axe, 200 km. Nous avons indiqué par un trait horizontal la limite correspondant au critère d'arrêt (3.6) : ce seuil est de  $V \approx 3.9$  km/s pour  $\alpha = 0^\circ$  et  $V \approx 5.5$  km/s pour  $\alpha = 45^\circ$ . Ces limites sont également à prendre en considération dans l'analyse des figures 3.13 et 3.14.

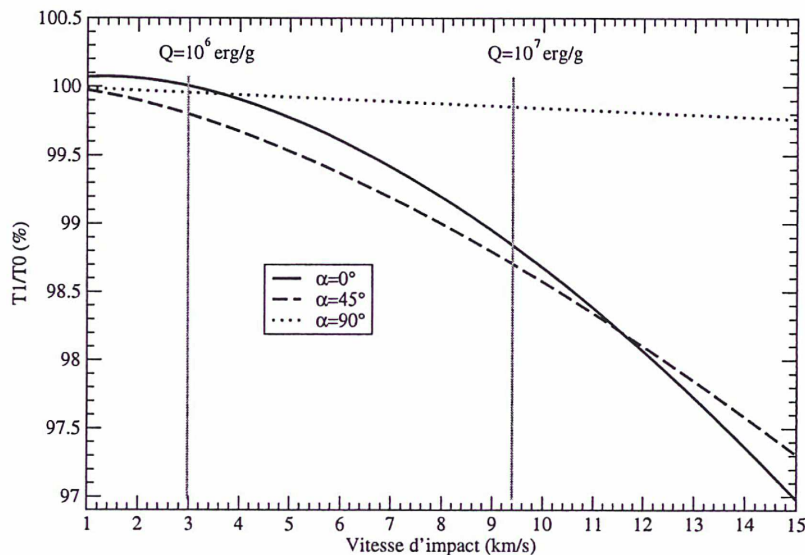


FIG. 3.13 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction de la vitesse d'impact  $V$ .

Les courbes des figures 3.13 et 3.14 représentent les variations des propriétés rotationnelles de la cible en fonction de la vitesse d'impact. On observe

sur la figure 3.13, que pour un angle d'impact  $\alpha$  valant  $0^\circ$  et pour une vitesse d'impact  $V$  inférieure à environ 3.04 km/s, la collision a pour conséquence un ralentissement de la rotation de la cible ( $T_1 > T_0$ ). Dans les autres cas, on assiste à une accélération de la vitesse de rotation qui est négligeable lorsque  $\alpha = 90^\circ$  ( $0.9977 \times T_0 \leq T_1 \leq 0.9999 \times T_0$ ). Cette accélération est plus importante pour  $\alpha = 45^\circ$  que pour  $\alpha = 0^\circ$  si les vitesses d'impact sont comprises entre 3.04 km/s et 11.5 km/s. Pour des vitesses supérieures, on observe l'inverse.

L'étude des variations de la direction de l'axe de rotation de la cible en fonction de la vitesse d'impact (voir fig. 3.14) aboutit à des courbes interagissant moins les unes avec les autres que celles de la figure 3.13. Les changements sont en effet d'autant plus grands que l'angle d'impact  $\alpha$  est petit, atteignant pour  $V = 15$  km/s environ  $4.8^\circ$  si  $\alpha = 0^\circ$ ,  $2.1^\circ$  si  $\alpha = 45^\circ$  et à peine  $0.4^\circ$  si  $\alpha = 90^\circ$ . Les variations semblent également dépendre linéairement de la vitesse d'impact  $V$ .

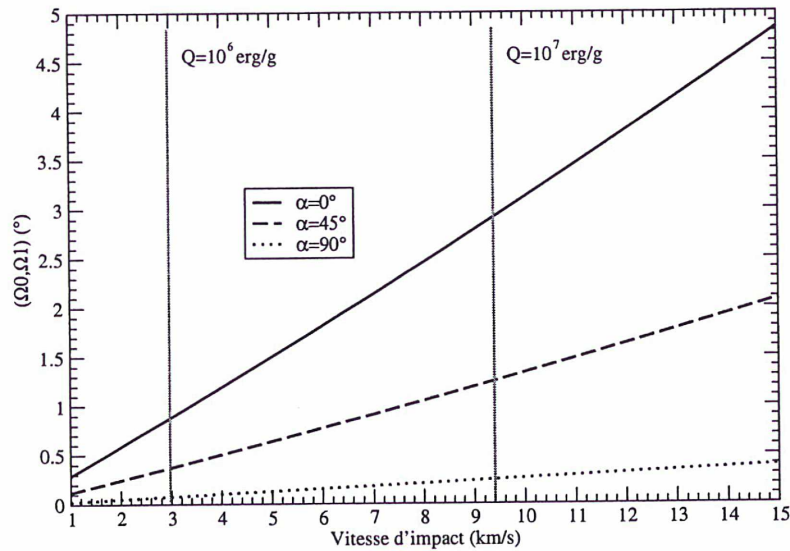


FIG. 3.14 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction de la vitesse d'impact  $V$ .

### 3.4.2 Transfert du moment cinétique

Nous avons également évalué la fraction  $\tilde{\zeta}$  du moment cinétique du projectile transférée à la cible au cours de l'impact. Avec les notations déjà utilisées et empruntées à Yanagisawa et Hasegawa (2000), nous avons :

$$\tilde{\zeta} = \frac{\|\eta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_n) + \zeta(m\vec{OI} \wedge \vec{v}_t)\|}{\|m\vec{OI} \wedge \vec{V}\|} \quad (3.7)$$

où  $I$  est le point d'impact sur la cible ;  $\vec{v}_t$  et  $\vec{v}_n$  représentent respectivement les composantes tangentielle et normale de la vitesse d'impact  $\vec{V}$  à la surface de la cible au point d'impact.  $\eta$  et  $\zeta$  rendent compte de l'impulsion due à la collision. La cible subit après l'impact un mouvement de recul dans une direction normale à la surface au point d'impact et dans le sens opposé à la direction du projectile. Ce mouvement s'explique par la symétrie des éjections. Le choix d'une petite valeur pour  $\zeta$  et d'une grande pour  $\eta$  correspond à une impulsion collisionnelle proche de la normale.

En considérant des conditions initiales identiques à celles du paragraphe précédent (forme de la cible, période de rotation de la cible, lieu d'impact, valeur de  $\beta$ , rayon du projectile) et en faisant varier la vitesse d'impact  $V$ , nous avons obtenu pour chaque angle d'impact  $\alpha$ , des résultats (non illustrés ici) qui semblaient restés constants quelle que soit la vitesse d'impact  $V$ . En effet  $\tilde{\zeta} \approx 2.67$  avec  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\tilde{\zeta} \approx 0.51$  avec  $\alpha = 45^\circ$  et  $\tilde{\zeta} \approx 0.11$  avec  $\alpha = 90^\circ$ . La figure 3.15 étudie par ailleurs les variations du paramètre  $\tilde{\zeta}$ , en fonction de la forme de la cible et suivant des valeurs différentes de  $\alpha$  et de  $\beta$  :  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  avec 7 valeurs différentes de  $\beta$ , et  $\alpha = 90^\circ$  avec  $\beta = 0^\circ$ . Nous avons pris :  $r = 2$  km,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 45^\circ$  et une vitesse d'impact valant :  $V = 5$  km/s.

Lorsque  $\alpha = 0^\circ$ , la collision se fait suivant la verticale du lieu d'impact correspondant à un impact frontal. On a alors  $\vec{v}_t \approx 0$  et  $\vec{v}_n \approx \vec{V}$  (ce ne sont pas des égalités en raison des définitions de  $\vec{v}_t$  et de  $\vec{v}_n$ ). C'est pourquoi, dans chacune de nos simulations, nous trouvons pour  $\tilde{\zeta}$  une valeur proche de  $\eta$  (on a avec  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\eta = 2.52$ ) et plus grande que 1. Pour  $\alpha = 90^\circ$ , on a en revanche  $\vec{v}_t \approx \vec{V}$ ,  $\vec{v}_n \approx 0$ . Cependant avec le choix des expressions (2.188) et (2.189) respectivement pour  $\eta$  et  $\zeta$ , nous avons pour cette valeur de l'angle d'impact :  $\zeta = 0$ . Cela explique les valeurs étonnamment faibles obtenues pour  $\tilde{\zeta}$  dans chacun des cas, alors qu'on aurait pu s'attendre pour  $\alpha = 90^\circ$ , correspondant à un impact rasant à une valeur beaucoup plus grande ainsi qu'à des variations des propriétés rotationnelles plus conséquentes que celles obtenues et illustrées par la courbe correspondante de la figure 3.13. En fait

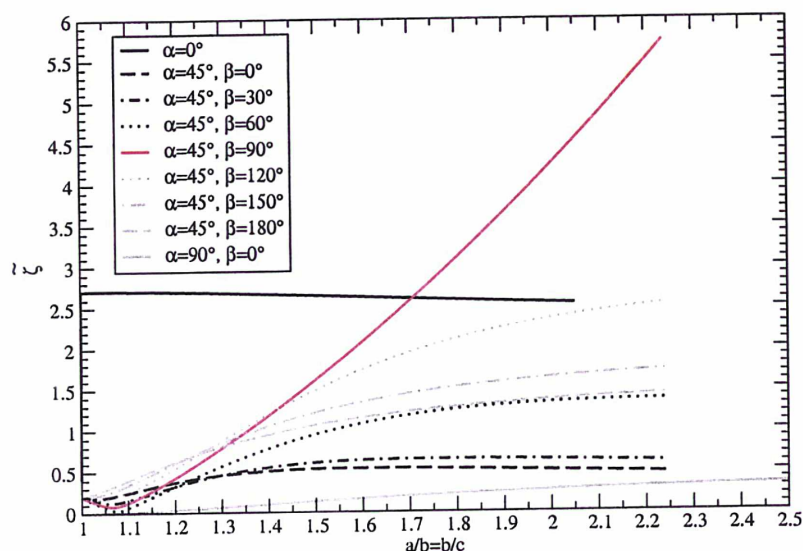


FIG. 3.15 : Variation du paramètre  $\tilde{\zeta}$ , caractérisant le transfert du moment cinétique du projectile, en fonction de la forme de la cible, avec  $a = 100$  km.

pour un tel impact, le projectile glisse sur la cible sans interaction avec elle. La masse du projectile correspond alors à la masse éjectée après l'impact et, la composante tangentielle des éléments éjectés est  $\vec{v}_t$ , ce qui explique que  $\zeta = 0$ .  $\eta \neq 0$  puisque les éléments éjectés ont également une composante normale.

La figure 3.13 montre que pour un angle  $\alpha$  intermédiaire ( $\alpha = 45^\circ$ ), les valeurs de  $\tilde{\zeta}$  sont plus importantes pour des impacts se faisant dans le sens opposé à la rotation initiale de la cible ( $\beta > 90^\circ$ ). Pour  $\beta < 90^\circ$  ou pour  $\beta > 90^\circ$ , le transfert de moment cinétique  $\tilde{\zeta}$  est également d'autant plus grand que  $\beta$  est proche de  $90^\circ$ . Pour  $\beta = 90^\circ$ , les variations de  $\tilde{\zeta}$  en fonction de la forme de la cible montrent une croissance rapide de ce paramètre à mesure que les dimensions de la cible diminuent.

Les simulations d'un impact d'un projectile sphérique sur une cible supposée de forme ellipsoïdale environ 50 fois plus grande, à une vitesse élevée ( $V = 1 - 15$  km/s) et suivi de la formation d'un cratère ont donc montré les points suivants :

- Un tel impact entraîne une perte de masse relativement faible de la cible et ce, même à des vitesses d'impact très élevées de l'ordre de 10 km/s. De plus, l'hypothèse faite sur la forme du cratère représentée par une calotte sphérique dans notre paramétrisation donne des résultats sur l'évaluation de la masse éjectée en cohérence avec les expressions analytiques de Holsapple (1994).

- Une collision avec un angle d'impact  $\alpha$  de  $45^\circ$  ou de  $90^\circ$  dans le sens de la rotation de la cible ( $\beta = 0^\circ$ ) entraîne une accélération de la vitesse de rotation de la cible. C'est également le cas lorsque  $\alpha = 0^\circ$  pour des vitesses d'impact supérieures à 3.04 km/s. Cependant si la vitesse d'impact est inférieure à 11.5 km/s, cette accélération est plus petite que celle observée lorsque  $\alpha = 45^\circ$ . Un impact vertical à une vitesse inférieure à 3.04 km/s entraîne un léger ralentissement de la rotation de la cible.

- Les études des variations des caractéristiques rotationnelles de la cible et du transfert du moment cinétique ont mis en évidence l'influence des angles d'impact  $\alpha$  et  $\beta$ . En particulier, un impact rasant dans le sens de la rotation de la cible ( $\alpha = 90^\circ$  et  $\beta = 0^\circ$ ) n'aboutit pas à des modifications rotationnelles importantes.

### 3.5 Comparaison entre accrétion et cratérisation

On considère dans cette section la collision d'un corps sphérique sur une cible de forme ellipsoïdale et de dimensions  $100 \times 50\sqrt{2} \times 50$  correspondant à un rapport des demi-axes  $a : b : c$  de  $2 : \sqrt{2} : 1$ . On étudiera les variations de la période de rotation ainsi que de la direction de l'axe de rotation dans le cas où cet impact entraîne la formation d'un cratère sur la cible. Mais notre but est ici de comparer ce cas avec celui, où dans les mêmes conditions, l'impact aboutit à une accrétion des deux corps.

Les conditions de la simulation sont celles énoncées dans la partie 3.2. Nous avons décidé de tenir compte de la valeur exacte du rayon  $r$  du projectile (et de ne pas faire l'approximation  $r = 0$  km) ainsi que des directions normale et tangentielle à la surface de la cible au point d'impact, même si certains résultats des sections précédentes faisaient apparaître peu de différences. D'autre part, afin d'être en cohérence avec les critères d'arrêt définis dans la partie 3.2, certains paramètres sont à fixer avec précaution. A cet effet, étudions la vitesse de libération mutuelle en fonction de la latitude du lieu

d'impact  $\phi$  pour différents rayons du projectile et la vitesse de libération mutuelle en fonction du rayon du projectile pour différentes valeurs de la latitude.

### 3.5.1 Contraintes sur la vitesse d'impact

Dans le cadre de notre étude de comparaison des résultats suivant le type d'impact (accrétion ou cratérisation), les contraintes sur la vitesse d'impact sont cruciales. En effet la vitesse d'impact doit d'abord être supérieure à la vitesse de libération mutuelle des deux corps en présence afin que le projectile puisse rentrer en collision avec la cible sans être capturé par l'attraction gravitationnelle exercée par celle-ci. D'autre part pour que le cas d'un impact avec accrétion puisse être envisagé de manière réaliste, cette vitesse ne doit pas être trop élevée.

Nous avons tout d'abord étudié les variations de la vitesse de libération

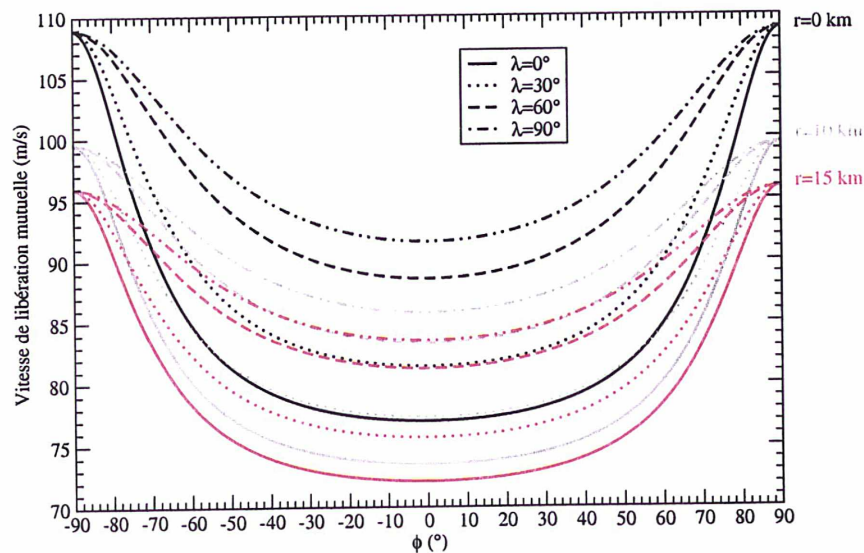


FIG. 3.16 : Vitesse de libération mutuelle en fonction de la latitude  $\phi$  du lieu d'impact, pour trois rayons du projectile :  $r = 0$  km,  $r = 10$  km et  $r = 15$  km, et pour quatre valeurs différentes de la longitude  $\lambda$  du lieu d'impact.

mutuelle en fonction de la latitude  $\phi$  du lieu d'impact en considérant quatre

valeurs de la longitude  $\lambda$  :  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$  (fig. 3.16). Dans la figure 3.17, la latitude a été fixée à  $\phi = 45^\circ$  et la longitude  $\lambda$  varie. Pour ces figures, le choix de la taille du projectile s'est porté sur les valeurs du rayon  $r = 0$  km (masse ponctuelle),  $r = 10$  km et  $r = 15$  km. La similarité des formes des courbes de chacune de ces figures permet cependant de donner un ordre de grandeur de la vitesse de libération pour des valeurs du rayon  $r$  du projectile comprises entre deux des trois rayons choisis. Nous avons aussi étudié dans les figures 3.18 et 3.19 l'évolution de la vitesse de libération en fonction du rayon  $r$  du projectile pour différentes valeurs de la latitude  $\phi$  et de la longitude  $\lambda$  du point d'impact.

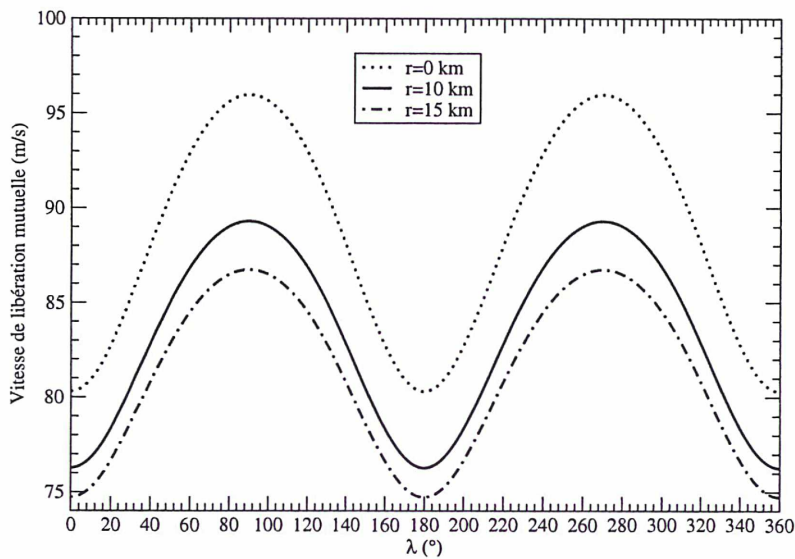


FIG. 3.17 : Vitesse de libération mutuelle en fonction de la longitude du lieu d'impact, pour différents rayons du projectile et pour une latitude  $\phi = 45^\circ$  du lieu d'impact.

Pour une même latitude  $\phi$  et un même rayon  $r$  du projectile, on observe une vitesse de libération maximale lorsque  $\lambda = 90^\circ$  (voir figs. 3.17 et 3.18) et d'autant plus grande que la valeur absolue de la latitude est élevée (voir figs. 3.16 et 3.19) ce qui correspond à une distance minimum du point d'impact au centre de la cible. La vitesse de libération est également d'autant plus grande que le rayon  $r$  du projectile est petit (voir figs 3.18 et 3.19).

Toutes ces figures nous indiquent que pour étudier l'effet sur la rotation d'une collision en n'importe quel point de la cible, nous devons choisir des vitesses d'impact au moins égales à 105 m/s ou à 110 m/s si on néglige la taille du projectile par rapport à celle de la cible. En effet pour des vitesses d'impact inférieures, le projectile pourrait être capturé en raison de l'attraction gravitationnelle de la cible, sans qu'une collision n'ait lieu. L'influence de la vitesse d'impact sera étudiée dans la suite mais nous choisirons dans les simulations où cette vitesse devra être fixée, une vitesse d'impact égale à  $V = 110$  m/s. Nous considérerons également que pour des collisions à une telle vitesse, la quantité de masse éjectée et réussissant à s'échapper de l'attraction gravitationnelle de la cible n'est pas significative. Nous prendrons :  $\delta M = 0$ .

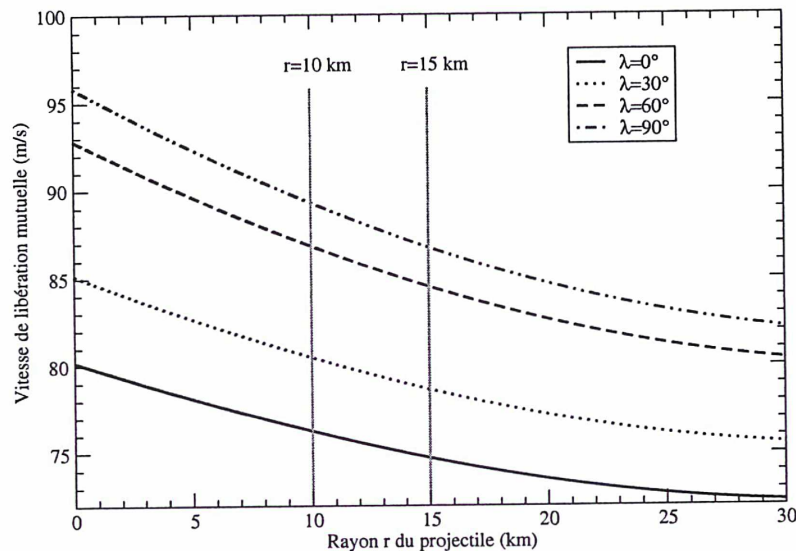


FIG. 3.18 : Vitesse de libération mutuelle en fonction de la taille du projectile, pour une latitude  $\phi = 45^\circ$  et pour différentes longitudes  $\lambda$  du lieu d'impact.

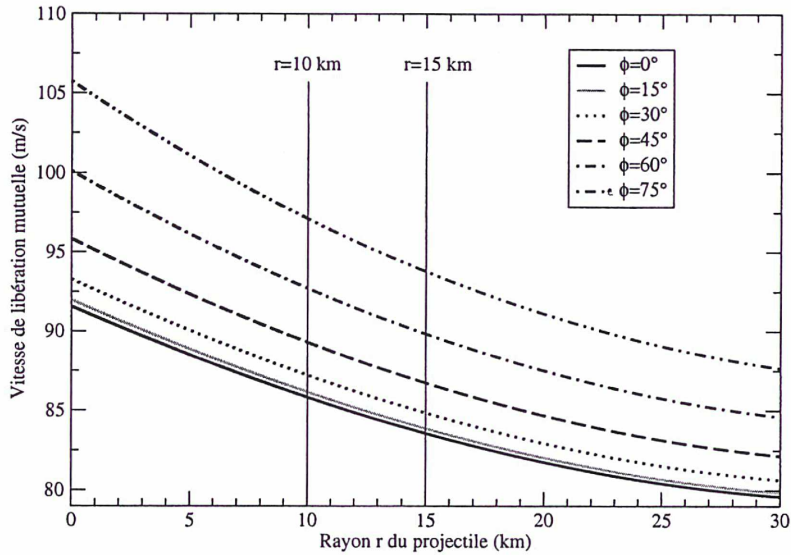


FIG. 3.19 : Vitesse de libération mutuelle en fonction de la taille du projectile, pour une longitude  $\lambda = 90^\circ$  et pour différentes latitudes du lieu d'impact.

### 3.5.2 Influence de la taille du projectile et de la vitesse d'impact

Les variations de la période de rotation (initialement  $T_0 = 10$  h) et de la direction de l'axe de rotation de la cible dues à l'impact sont montrées en fonction respectivement du rayon  $r$  du projectile (figs. 3.20 et 3.21) et de la vitesse d'impact  $V$  (figs. 3.22 et 3.23). Dans tous ces cas, le lieu d'impact est repéré par  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$  et, les angles d'impact valent  $\alpha = 45^\circ$  et  $\beta = 0^\circ$ . Pour les figures 3.20 et 3.21, la vitesse d'impact est celle choisie précédemment, à savoir :  $V = 110$  m/s et pour les figures 3.22 et 3.23, on a fixé trois valeurs différentes pour le rayon du projectile :  $r = 5$  km,  $r = 10$  km et  $r = 15$  km. Les lignes verticales tracées sur chacune des figures correspondent à l'arrêt de la simulation en application du critère de la partie 3.2 concernant la taille du cratère (voir la relation (3.6)).

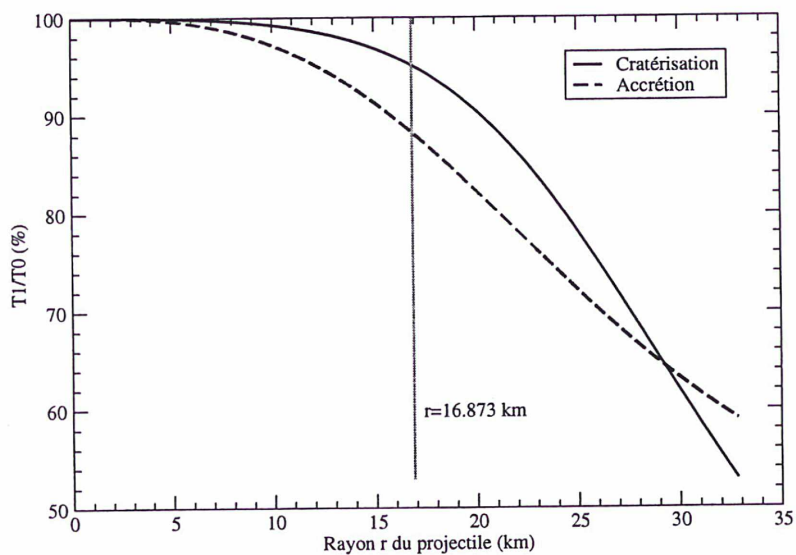


FIG. 3.20 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction du rayon du projectile, pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  et  $V = 110$  m/s.

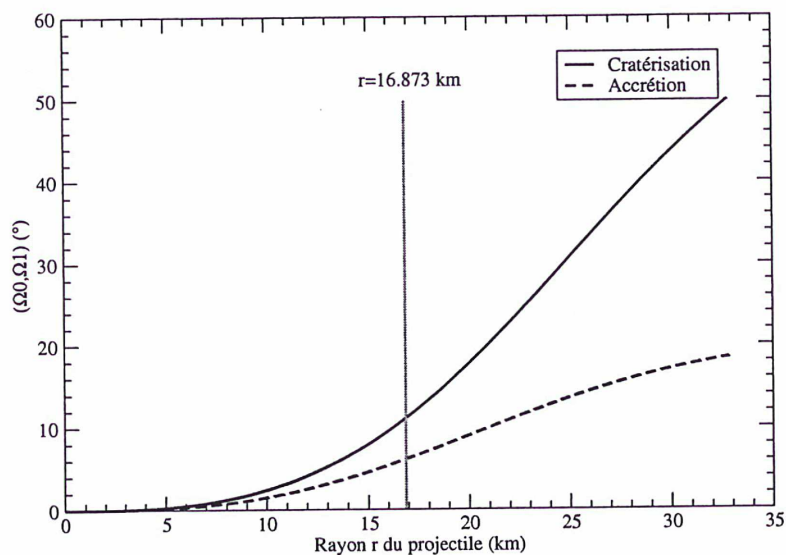


FIG. 3.21 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction du rayon du projectile, pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  et  $V = 110$  m/s.

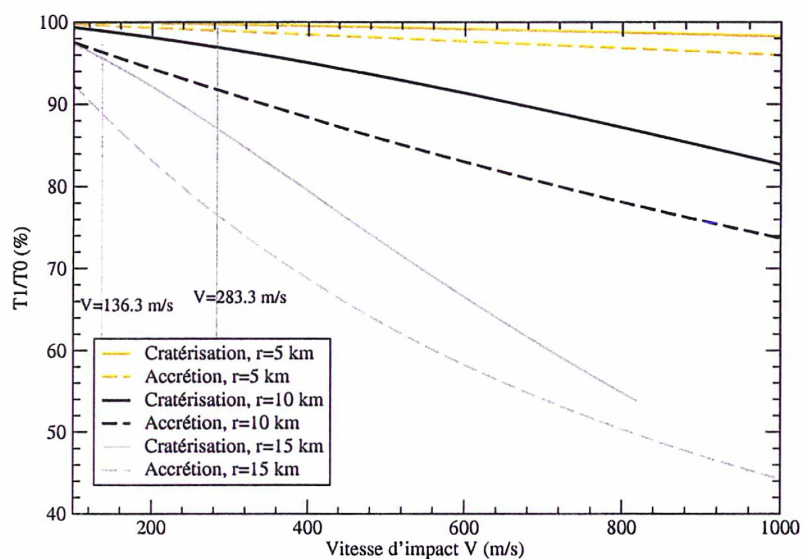


FIG. 3.22 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction de la vitesse d'impact  $V$ , pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile, avec :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

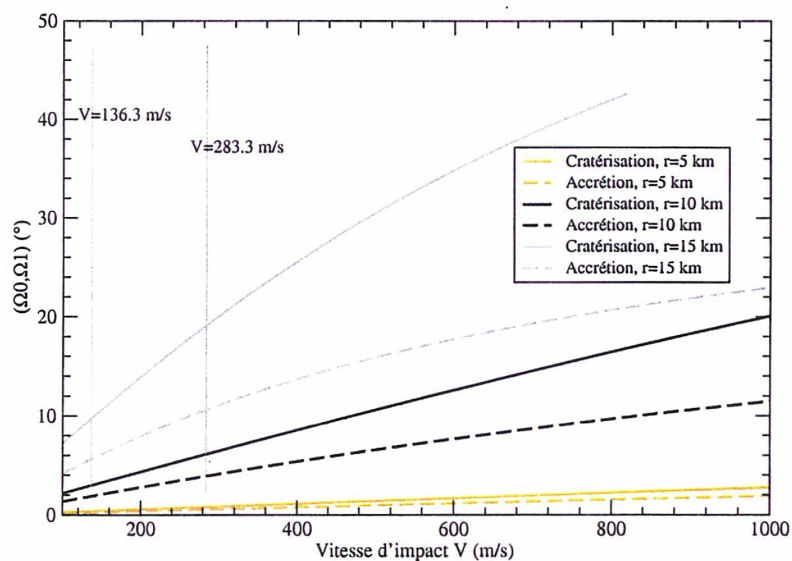


FIG. 3.23 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction de la vitesse d'impact  $V$  et pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile, avec :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

Les figures 3.24 et 3.25 donnent les dimensions de la taille du cratère dans le cas d'un impact à cratérisation, en fonction respectivement du rayon du projectile  $r$  et de l'énergie d'impact  $Q$ . On aboutit à la valeur limite de  $r \approx 17$  km pour la taille de la cible avec  $V = 110$  m/s (figs. 3.20 et 3.21), ce qui correspond à une énergie d'impact de  $Q \approx 8 \times 10^5$  erg/g. Dans les figures 3.22 et 3.23, les valeurs limites de la vitesse d'impact  $V$  sont de  $V \approx 283$  m/s pour  $r = 10$  km ( $Q \approx 10^6$  erg/g) et de  $V \approx 136$  m/s pour  $r = 15$  km ( $Q \approx 2 \times 10^7$  erg/g).

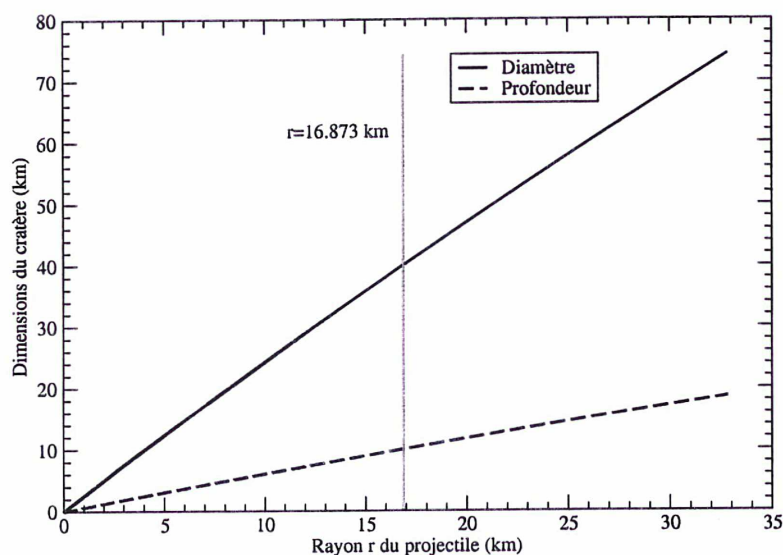


FIG. 3.24 : Dimensions du cratère en fonction de la taille de la cible, pour une vitesse d'impact  $V = 110$  m/s et un angle d'impact  $\alpha = 45^\circ$ .

On notera que, tandis que la décroissance de la période de rotation par rapport à la taille de la cible est environ deux fois plus grande dans le cas d'une accrétion que dans le cas d'une cratérisation dans la zone de tolérance (fig. 3.20), le phénomène s'inverse pour les variations de la direction de l'axe de rotation (fig. 3.21). Les variations par rapport à la vitesse d'impact (figs. 3.22 et 3.23) sont quant à elles quasi linéaires, quels que soient les cas considérés. Une vitesse d'impact  $V = 283$  m/s, qui est considérée comme

petite en comparaison avec les vitesses accompagnant les impacts dans le système solaire mais qui est, pour  $r = 10$  km, à la limite de la tolérance que nous nous sommes fixée, aboutit à une variation de la période de rotation initiale atteignant 23% dans le cas d'une accréation et à un déplacement de l'angle de rotation de  $19^\circ$  dans le cas d'une cratérisation. Dans tous les cas, on observe une accélération de la vitesse angulaire de rotation ( $T_1 < T_0$ ).

**Nous pouvons conclure que plusieurs impacts de ce type pourraient modifier considérablement les caractéristiques rotationnelles de la cible sans affecter notablement sa forme.**

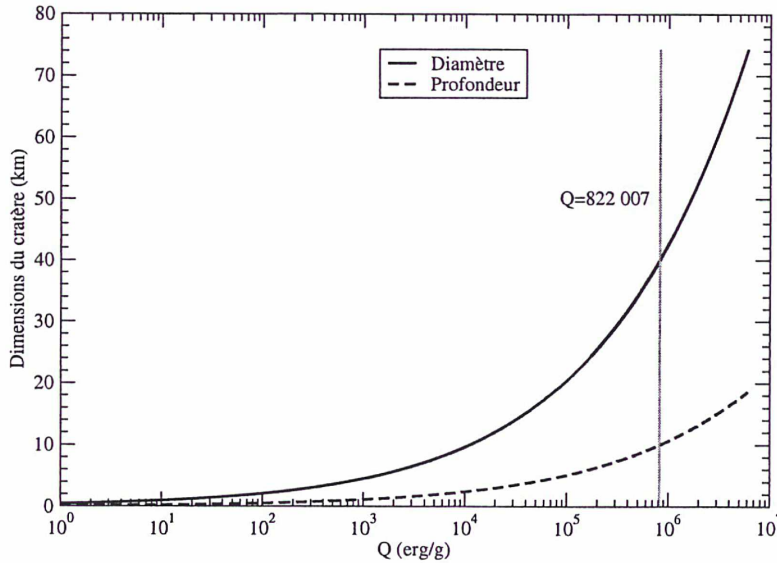


FIG. 3.25 : Dimensions du cratère en fonction de l'énergie d'impact  $Q$ , pour une vitesse d'impact  $V = 110$  m/s et un angle d'impact  $\alpha = 45^\circ$ .

### 3.5.3 Influence du lieu d'impact

On s'intéresse maintenant à l'influence de la latitude  $\phi$  (figs. 3.26 et 3.27) et de la longitude  $\lambda$  (figs. 3.28 et 3.29) du point d'impact sur les propriétés rotationnelles de la cible. **Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $V$  ainsi que les caractéristiques de la cible avant l'impact restent inchangés, à savoir :**

$\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  et  $V = 110$  m/s. Pour les figures 3.26 et 3.27,  $\lambda = 0^\circ$  et pour les figures 3.28 et 3.29,  $\phi = 45^\circ$ .

La figure 3.26 montre clairement que pour des latitudes  $\phi$  comprises entre  $-60^\circ$  et  $60^\circ$ , les variations de la période de rotation restent stables quel que soit le rayon  $r$  du projectile, atteignant une valeur relative maximale d'environ 9% dans le cas d'un impact suivi d'une accrétion avec  $r = 15$  km. La figure montre aussi que la variation de la période est quasi similaire pour une accrétion avec  $r = 10$  km et pour une cratérisation avec  $r = 15$  km avec une valeur relative d'environ 3% de la période initiale correspondant à une accélération de la vitesse angulaire de rotation ( $T_1 < T_0$ ). Cela signifie que dans le second cas, le fait que l'impacteur soit approximativement 3.5 plus massif est compensé par le fait qu'une quantité importante de l'énergie d'impact  $Q$  est perdue pendant l'explosion générée par la collision. En comparaison, une cratérisation avec  $r = 10$  km n'aboutit pas à un changement significatif de la vitesse angulaire ( $0.995 \times T_0 \leq T_1 \leq 1.005 \times T_0$ ). D'autre part, dans le cas d'un impact à cratérisation et pour les trois rayons  $r$  considérés, on observe que des impacts à des latitudes  $\phi$  inférieures à environ  $-84^\circ$  ou supérieures à environ  $84^\circ$  s'accompagnent d'un ralentissement de la vitesse de rotation de la cible après la collision ( $T_1 > T_0$ ). En revanche, en considérant le même type d'impact mais avec des valeurs de la latitude comprises entre  $-84^\circ$  et  $84^\circ$  ou le cas des impacts avec accrétion (pour toutes les valeurs du rayon  $r$  du projectile et de la latitude  $\phi$ ), nous constatons une accélération de la vitesse de rotation de la cible ( $T_1 < T_0$ ).

La figure 3.27 montre que le changement angulaire de la direction de l'axe de rotation suite à la collision dépend très sensiblement de la latitude de l'impact. Il peut atteindre plusieurs degrés ( $8^\circ$  dans le cas d'une accrétion et  $8.5^\circ$  dans le cas d'une cratérisation avec dans les deux cas  $r = 15$  km), ces variations étant beaucoup plus petites lorsque  $r = 10$  km ( $2.5^\circ$  pour les deux types d'impact) et lorsque  $r = 5$  km (moins de  $0.5^\circ$  pour les deux types d'impact). Ces valeurs maximales sont obtenues à des latitudes intermédiaires ( $\phi \approx \pm 55^\circ$ ) dans le cas d'une cratérisation et à des latitudes  $\phi = \pm 90^\circ$  dans le cas d'une accrétion. La symétrie parfaite des courbes (le signe de  $\phi$  n'influence pas le résultat) s'explique aisément par la symétrie de la cible supposée de la forme d'un ellipsoïde. Notons également que l'effet de l'impact est nul lorsque  $\phi = 0^\circ$ , ce qui est tout à fait logique : lorsque  $\beta = 0^\circ$ , la direction de l'impulsion produite par l'impacteur est la même que celle du mouvement du point d'impact avant la collision, ce mou-

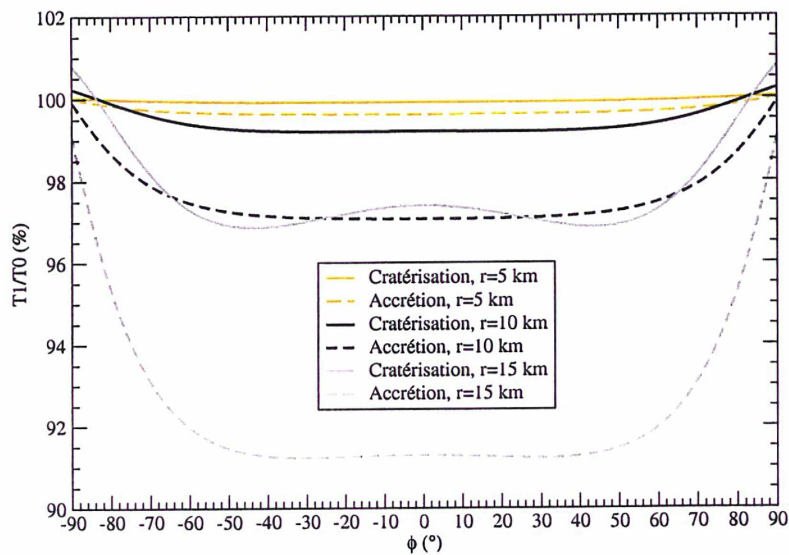


FIG. 3.26 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction de la latitude  $\phi$ , pour différentes valeurs du rayon du projectile et pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

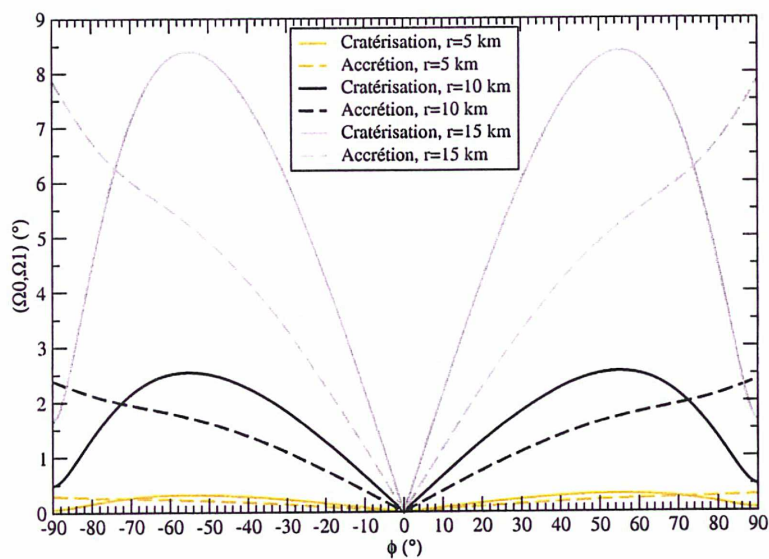


FIG. 3.27 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction de la latitude  $\phi$ , pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

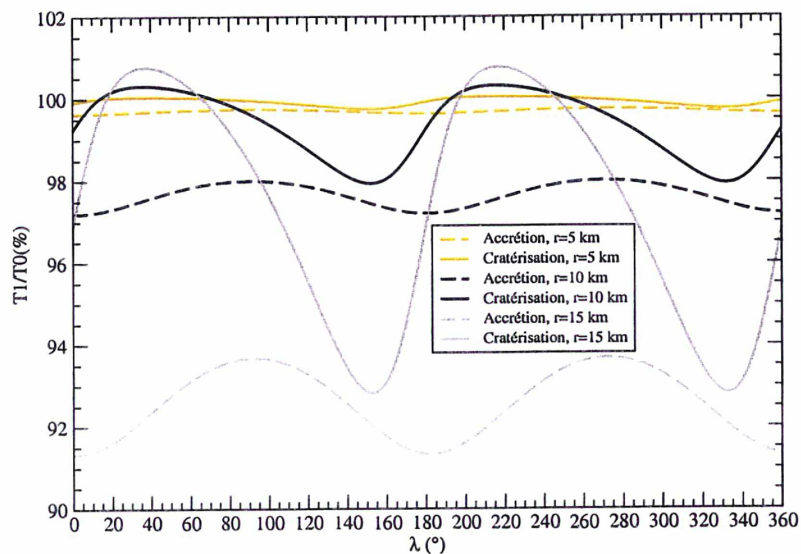


FIG. 3.28 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction de la longitude  $\lambda$ , pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  et  $\phi = 45^\circ$ .

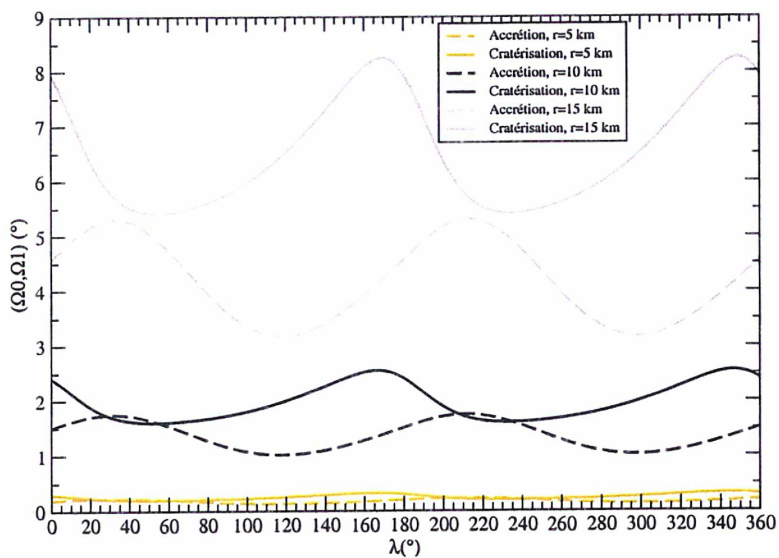


FIG. 3.29 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction de la longitude  $\lambda$ , pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  et  $\phi = 45^\circ$ .

vement s'expliquant par la rotation initiale de la cible.

La symétrie de la cible de forme ellipsoïdale explique aussi la périodicité, modulo  $180^\circ$ , observée sur les six courbes des figures 3.28 et 3.29. Ces figures représentent l'influence de la longitude  $\lambda$  du point d'impact sur les propriétés rotationnelles de la cible. Quel que soit le rayon  $r$  considéré, les amplitudes (écart entre les valeurs extrêmes) des courbes sont plus importantes dans le cas d'un impact suivi de la formation d'un cratère que dans le cas d'un impact avec accrétion, atteignant environ 8% pour la période de rotation (fig. 3.28) et environ  $3^\circ$  pour la direction de l'axe de rotation (fig. 3.29) pour  $r = 15$  km.

Comme nous pouvons le penser, les variations minimales et maximales de la période de rotation (fig. 3.28) sont atteintes, dans le cas d'un impact avec accrétion, pour des valeurs de la longitude respectivement de  $\lambda = 90^\circ$  (et  $\lambda = 270^\circ$ ) et de  $\lambda = 0^\circ$  ( $\lambda = 180^\circ$ ). La variation minimale est de 2% de la période initiale  $T_0$  pour  $r = 10$  km et de 6.3% pour  $r = 15$  km. La variation maximale représente environ 3% de  $T_0$  pour  $r = 10$  km et environ 8.7% pour  $r = 15$  km.

Cependant dans le cas d'un impact avec cratérisation, les valeurs correspondantes de la longitude  $\lambda$  sont tout à fait différentes : les variations les plus importantes de la période de rotation sont d'environ 2% pour  $r = 10$  km et d'environ 7% pour  $r = 15$  km. Elles sont atteintes en  $\lambda \approx 150^\circ$  (et  $\lambda \approx 330^\circ$ ) et correspondent à une accélération de la vitesse angulaire de rotation de la cible ( $T_1 < T_0$ ). Lorsque  $r = 10$  km (resp.  $r = 15$  km), la variation de la période est nulle ( $T_1 = T_0$ ) pour  $\lambda \approx 13^\circ$  et  $\lambda \approx 72^\circ$  (resp. pour  $\lambda \approx 17^\circ$  et pour  $\lambda \approx 66^\circ$ ), modulo  $180^\circ$ . Pour des valeurs de la longitude  $\lambda$  non comprises entre ces deux valeurs et pour chacun des rayons, l'impact s'accompagne d'une accélération de la vitesse angulaire de rotation de la cible, comme dans le cas d'un impact avec accrétion. En revanche, entre ces deux valeurs de la longitude, on observe un ralentissement du mouvement de rotation ( $T_1 > T_0$ ), qui est maximal pour  $\lambda \approx 40^\circ$  (et  $\lambda \approx 220^\circ$ ). La période  $T_1$  représente alors moins de 1% de  $T_0$  pour  $r = 10$  km et près de 1% pour  $r = 15$  km.

Les courbes de la figure 3.29, qui représentent la variation de la direction de l'axe de rotation en fonction de la longitude, ont des formes similaires entre elles mais avec un décalage suivant le type d'impact considéré. Ce décalage est de  $50^\circ$  en longitude et de  $1^\circ$  environ en "amplitude" pour  $r = 10$  km, de  $3^\circ$  environ pour  $r = 15$  km. Contrairement aux résultats de la figure 3.28, quel que soit le rayon du projectile considéré et pour presque toutes les valeurs de la longitude  $\lambda$ , les variations de la direction de l'axe de rotation de la cible

sont plus importantes dans le cas d'une collision suivie d'une cratérisation, atteignant  $8.25^\circ$  pour  $r = 15$  km. Nous observons la situation inverse uniquement lorsque  $r = 10$  km avec  $25^\circ \leq \lambda \leq 55^\circ$  ou avec  $205^\circ \leq \lambda \leq 235^\circ$ . Les variations angulaires extrêmes sont atteintes pour des longitudes différentes suivant le type d'impact : pour un impact suivi d'une accréation, une variation minimale de  $1^\circ$  pour  $r = 10$  km et de  $3^\circ$  pour  $r = 15$  km est obtenue pour  $\lambda \approx 120^\circ$  (et  $\lambda \approx 300^\circ$ ), et une variation maximale d'environ  $1.75^\circ$  pour  $r = 10$  km et de  $5.3^\circ$  pour  $r = 15$  km est atteinte pour  $\lambda \approx 32^\circ$  (et  $\lambda \approx 212^\circ$ ). Dans le cas d'un impact avec cratérisation, les valeurs correspondantes sont de  $1.5^\circ$  pour  $r = 10$  km et de  $5.5^\circ$  pour  $r = 15$  km pour les variations minimales atteintes lorsque  $\lambda \approx 50^\circ$  (et  $\lambda \approx 230^\circ$ ). Les variations maximales sont dans ce cas obtenues pour  $\lambda \approx 170^\circ$  (et  $\lambda \approx 350^\circ$ ) et sont de  $2.55^\circ$  pour  $r = 10$  km et de  $8.5^\circ$  pour  $r = 15$  km.

Notons également que, quelle que soit la position du point d'impact, le cas où le rayon du projectile est de  $r = 5$  km aboutit à des faibles variations de la période de rotation et de la direction de l'axe de rotation de la cible et ce, pour les deux types d'impact considérés.

L'étude que nous venons d'effectuer sur l'influence de la localisation du lieu d'impact sur les caractéristiques rotationnelles de la cible, a donc montré deux aspects fondamentaux :

- les effets de la latitude du lieu d'impact sont très stables, et ce, pour des latitudes comprises entre  $-84^\circ$  et  $84^\circ$ .
- d'autre part la localisation en longitude des extremums observés dans les changements des propriétés rotationnelles sont très différentes suivant le type d'impact (accréation ou cratérisation) et la propriété rotationnelle étudiée (période ou direction de l'axe de rotation de la cible).

### 3.5.4 Influence des angles d'impact $\alpha$ et $\beta$

Les directions des angles d'impact  $\alpha$  et  $\beta$  jouent également et de toute évidence un rôle fondamental dans les variations des caractéristiques rotationnelles de la cible, comme peuvent le montrer les figures 3.30 et 3.31 pour  $\alpha$  et les figures 3.32 et 3.33 pour  $\beta$ . **Pour cette étude, nous conservons les valeurs :  $V = 110$  m/s,  $\lambda = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  pour les figures 3.30 et 3.31, et  $\alpha = 45^\circ$  pour les figures 3.32 et 3.33.** Notons tout d'abord sur les figures 3.30 et 3.31 que dans le cas d'un impact à cratérisation, on aboutit pour  $\alpha < 29^\circ$  à une taille de cratère au delà de la limite envisagée

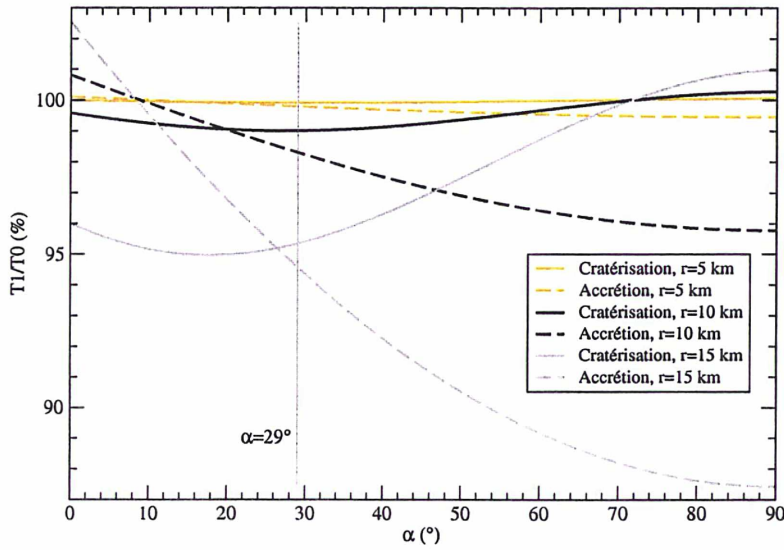


FIG. 3.30 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction de l'angle d'impact  $\alpha$  pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

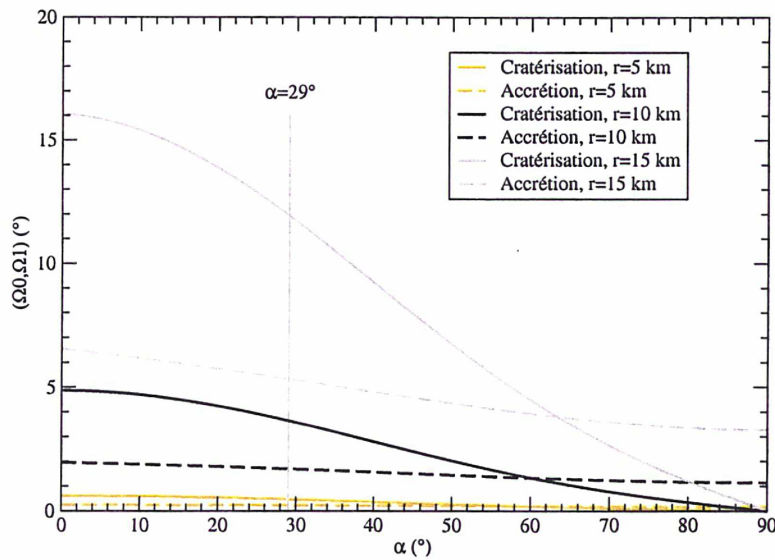


FIG. 3.31 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction de l'angle d'impact  $\alpha$  pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

dans la partie 3.2.

Dans la figure 3.30, des résultats tout à fait différents sont obtenus suivant le type d'impact considéré. Dans le cas d'un impact entraînant la formation d'un cratère, le changement maximal de la période de rotation est obtenu lorsque l'impact se produit avec une direction de seulement  $\alpha \approx 18^\circ$  par rapport à la verticale pour  $r = 10$  km et de  $\alpha \approx 27^\circ$  pour  $r = 15$  km, ce qui semble plutôt paradoxal : nous pouvions nous attendre à ce que plus la direction de l'impact, représentée par l'angle  $\alpha$ , était proche de la verticale, moins l'énergie d'impact  $Q$  est transférée au moment cinétique rotationnel. Néanmoins cette dernière propriété est vérifiée dans le cas d'une accréation pour laquelle la variation maximale de la période est obtenue pour  $\alpha = 90^\circ$ , ce qui correspond à un impact rasant pour lequel une partie importante du moment cinétique du projectile est naturellement transférée à la rotation de la cible. Nous pouvons aussi remarquer que pour des valeurs basses de  $\alpha$  ( $\alpha < 10^\circ$ ) i.e. pour des impacts quasi-normaux, les effets sont opposés suivant le type d'impact : nous observons un ralentissement de la vitesse angulaire de rotation ( $T_1 > T_0$ ) dans le cas d'une accréation, et une accélération ( $T_1 < T_0$ ) dans le cas d'une cratérisation. Ces propriétés sont par ailleurs inversées au delà de  $\alpha \approx 72^\circ$ .

En comparaison avec la figure précédente (fig. 3.30) qui montrait une grande variabilité des effets, caractérisée par l'intersection des courbes, la figure 3.31 montre une influence plus "stable" de l'angle d'impact  $\alpha$  sur les changements angulaires de l'axe de rotation, quels que soient le type d'impact et le rayon  $r$  du projectile considérés. Comme on pouvait le présager, les variations sont d'autant moins importantes que l'angle  $\alpha$  est grand, devenant pour un impact rasant ( $\alpha = 90^\circ$ ) nulles dans le cas d'une accréation et très petites dans le cas d'une cratérisation. Cette observation est parfaitement compréhensible dans la mesure où avec la valeur choisie pour  $\beta$  ( $\beta = 0^\circ$ ), un impact rasant s'accompagne d'un gain de moment cinétique, exactement dans la même direction que le sens de rotation de la cible, ce qui a pour conséquence de ne pas changer la direction de l'axe de rotation. Notons néanmoins que la pente négative est de manière significative plus prononcée dans le cas d'une cratérisation que dans le cas d'une accréation. Par ailleurs, pour les valeurs importantes de  $\alpha$  ( $\alpha > 64^\circ$ ), pour un même rayon  $r$  du projectile, l'effet d'une accréation sur la direction de l'axe de rotation devient moins importante que celui d'une cratérisation alors qu'on observait l'inverse pour  $\alpha < 64^\circ$ .

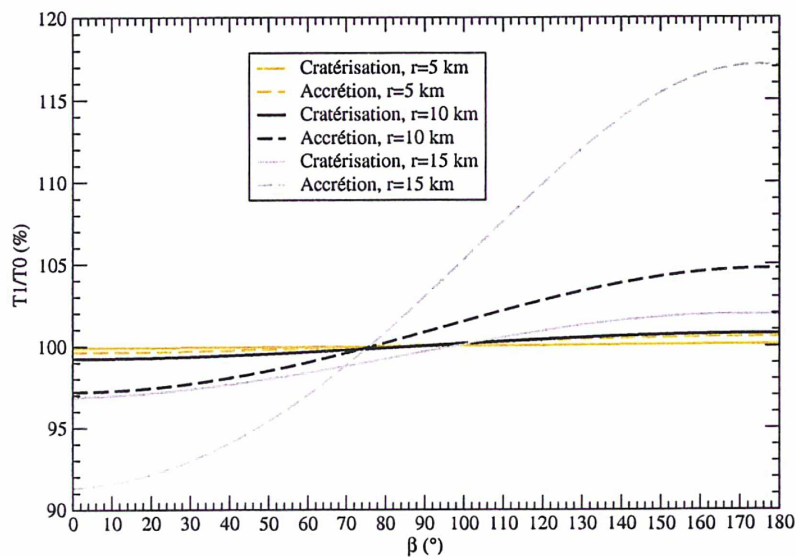


FIG. 3.32 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction de l'angle d'impact  $\beta$ , pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

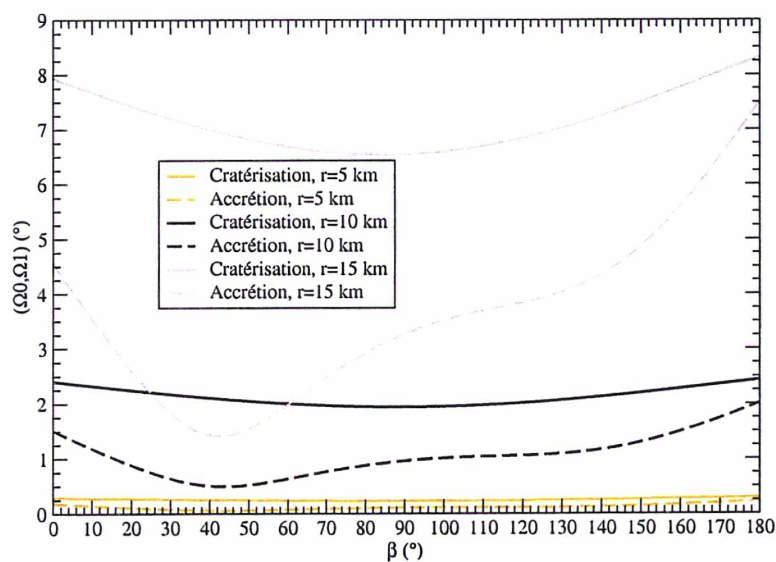


FIG. 3.33 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction de l'angle d'impact  $\beta$  pour différentes valeurs du rayon  $r$  du projectile et pour :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ .

Dans la figure 3.32, on étudie l'influence de la valeur de l'angle  $\beta$  sur la vitesse angulaire de rotation. Nous remarquons que plus  $\beta$  est grand, plus la quantité de moment cinétique de l'impacteur transférée dans la vitesse rotationnelle de la cible diminue. En conséquence, les courbes montrant les variations de la période de rotation ont une pente positive, quel que soit le cas considéré, la période de rotation post-impact  $T_1$  devenant plus grande que  $T_0$  autour de la valeur  $\beta = 75^\circ$ , ce qui correspond à peu près à la valeur pour laquelle toutes les courbes s'interceptent. Pour des valeurs plus importantes de  $\beta$ , on observe clairement une décélération de la rotation de la cible dont l'amplitude est d'autant plus grande que le rayon  $r$  du projectile est grand (la période augmente d'environ 16% pour  $r = 15$  km).

Les courbes correspondantes représentant les changements de la direction de l'axe de rotation (fig. 3.33) montrent des profils tout à fait différents, avec la présence d'un minimum en  $\beta \approx 40^\circ$  dans le cas d'une accréation et en  $\beta \approx 90^\circ$  dans le cas d'un impact avec cratérisation.

- Dans le cadre de nos simulations, nous avons constaté que l'influence de l'angle d'impact  $\alpha$  sur les variations de la direction de l'axe de rotation de la cible est importante (pouvant atteindre  $10^\circ$ ), et est d'autant plus grande que la collision a lieu suivant une direction proche de la verticale.

- L'influence de  $\alpha$  sur la période de rotation est plus complexe à analyser dans le cas d'un impact suivi de la formation d'un cratère avec pour chacun des rayons, une variation maximale de la période atteinte pour  $20^\circ < \alpha < 30^\circ$ .

- Pour des angles d'impact  $\beta$  supérieurs à  $75^\circ$  (avec  $\alpha = 45^\circ$ ), on observe un ralentissement de la vitesse de rotation de la cible quels que soient le type d'impact et le rayon considérés, avec des variations plus grandes de la période dans les cas d'un impact suivi d'une accréation.

- On constate également une plus grande instabilité de la direction de l'axe de rotation suivant  $\beta$  pour les collisions suivies d'une accréation mais pour un même rayon, les variations sont plus grandes pour un impact suivi de la formation d'un cratère.

### 3.5.5 Influence des paramètres $\eta$ et $\zeta$

Dans les simulations précédentes, le choix des paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  dans le cas d'un impact à cratérisation (voir les expressions (2.188) et (2.189)) s'est fait en adaptant les expressions (2.186) et (2.187) proposées par Yanagisawa et Hasegawa (2000) à partir d'études d'impacts effectués en laboratoire sur des cibles sans rotation initiale. Nous avons pris pour les coefficients  $\eta_0$  et  $\zeta_0$  les valeurs évaluées au cours de ces expériences dans le cas d'un impact à une vitesse de 4 km/s sur une cible en basalte à savoir :  $\eta_0 = 1.52$  et  $\zeta_0 = 0.409$ . Les conditions de nos simulations sont toutefois différentes de celles dans lesquelles ces expressions ont été déterminées. Cependant cela ne remet pas en cause la modélisation proposée pour déterminer la période de rotation et la direction de l'axe de rotation de la cible après l'impact mais il se peut que les valeurs des coefficients  $\eta$  et  $\zeta$  considérées ne soient pas correctement adaptées aux conditions des simulations. C'est pourquoi nous étudierons dans cette section l'influence de ces coefficients sur les propriétés rotationnelles de la cible.

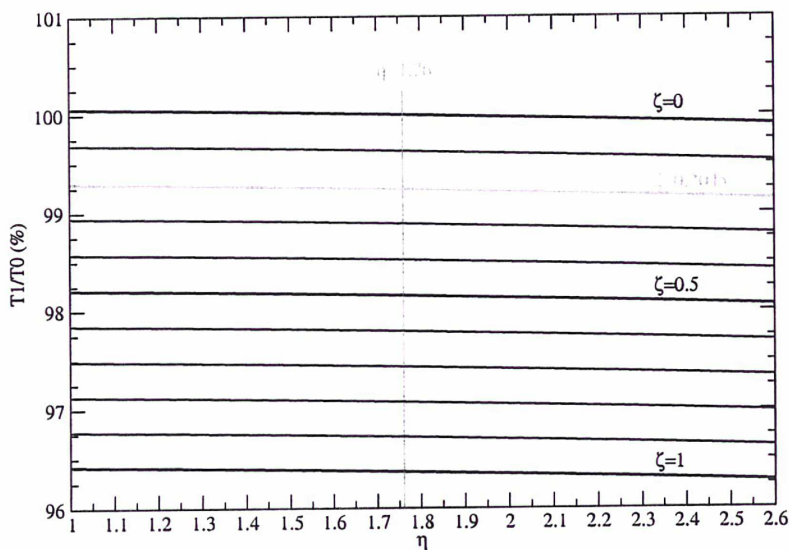


FIG. 3.34 : Variation de la période de rotation initiale de la cible en fonction du paramètre  $\eta$ , pour différentes valeurs de  $\zeta$ .

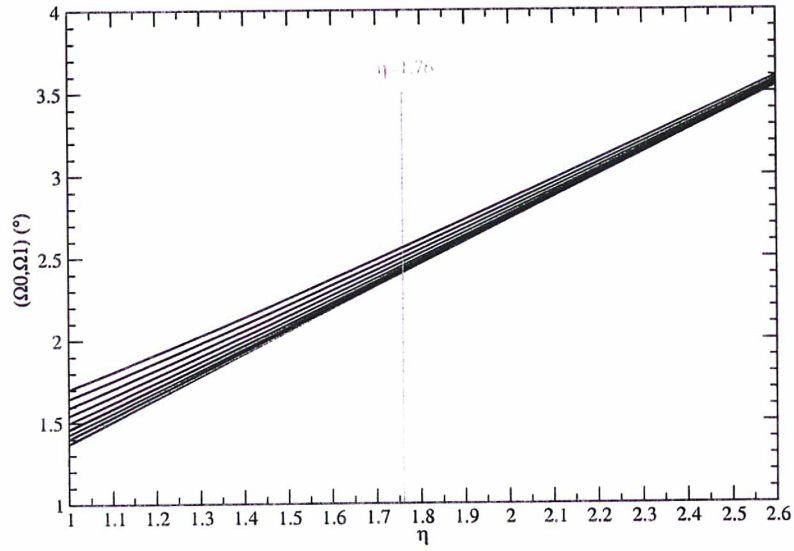


FIG. 3.35 : Variation de la direction initiale de l'axe de rotation de la cible en fonction du paramètre  $\eta$ , pour différentes valeurs de  $\zeta$ .

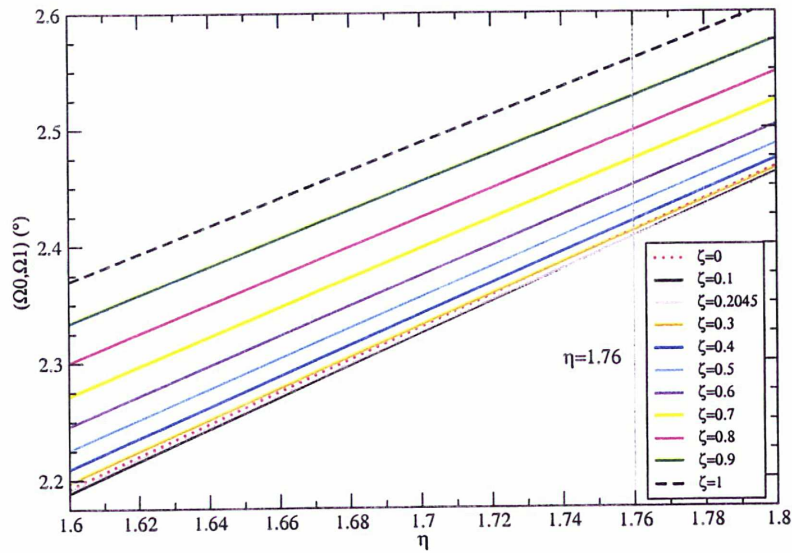


FIG. 3.36 : Détail de la figure 3.35 avec  $1.6 \leq \eta \leq 1.8$ .

Nous avons considéré, dans les figures 3.34, 3.35 et 3.36, uniquement des impacts suivis d'une cratérisation et avons choisi les paramètres suivants :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$ ,  $V = 110$  m/s,  $r = 10$  km. Le paramètre  $\eta$  varie de 1 à 2.6 (rappelons que  $\eta \geq 1$ ) et nous avons fixé des valeurs pour  $\zeta$  variant de 0.1 en 0.1 entre 0 et 1 (on a également  $\zeta \leq 1$ ). Nous avons également représenté les résultats correspondants aux valeurs obtenues à partir des expressions (2.188) et (2.189) avec  $\eta_0 = 1.52$  et  $\zeta_0 = 0.409$ .  $\alpha$  étant égal à  $45^\circ$ , ces expressions donnent :  $\eta = 1.76$  et  $\zeta = 0.2045$ .

Sur la figure 3.34 qui représente l'évolution de la période de rotation de la cible, nous observons, pour une valeur de  $\zeta$  fixée, peu d'évolution suivant le paramètre  $\eta$ , et une variation d'autant plus grande que  $\zeta$  est grand, atteignant environ 3.5% de  $T_0$  pour  $\zeta = 1$ . Inversement, les figures 3.35 et 3.36 indiquent une variation plus significative suivant  $\eta$  de la direction de l'axe de rotation de la cible et moins importante suivant  $\zeta$ . Les variations angulaires sont d'autant plus grandes que  $\eta$  est grand, allant environ de  $1.5^\circ$  pour  $\eta = 0$  à  $3.5^\circ$  pour  $\eta = 2.6$ .

Ces observations sont cohérentes avec les définitions (2.165) et (2.166) des paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  ainsi qu'avec leur rôle sur l'évolution des propriétés rotationnelles de la cible après l'impact. En effet dans l'expression (2.167),  $\eta$  est en relation avec la composante normale à la surface de la cible au point d'impact du moment cinétique du projectile et  $\zeta$  avec la composante tangentielle de ce moment cinétique.

Or la composante tangentielle du moment cinétique influe sur le sens et la vitesse de rotation de la cible alors qu'une partie seulement de la composante normale va agir sur ces éléments et une autre composante va influencer sur le mouvement de révolution de la cible (la normale à la surface de la cible au point d'impact ne passant pas nécessairement par le centre de ce corps). C'est pourquoi il paraît juste de penser que  $\zeta$  agira davantage sur la vitesse de rotation de la cible alors que  $\eta$  influera plutôt sur la direction de l'axe de rotation.



## Conclusion et Perspectives

Nous avons développé une modélisation détaillée permettant d'étudier les variations des caractéristiques rotationnelles d'un corps céleste quelconque subissant l'impact d'un projectile. L'intérêt de notre modélisation réside dans la possibilité de l'appliquer à un nombre important de cas au sein de notre système solaire. L'avantage de notre modélisation est de prendre en compte un nombre important de paramètres liés à la cible et au projectile : des paramètres classiques tels que leur forme, leur taille, leur masse, la rotation initiale de la cible mais aussi plusieurs paramètres caractérisant les circonstances de l'impact tels que la localisation du lieu d'impact sur la cible à travers sa longitude  $\lambda$  et sa latitude  $\phi$ , la vitesse d'impact et les angles d'impact  $\alpha$  et  $\beta$ .

De plus, notre modélisation peut traiter deux cas : le premier consiste en une accumulation du projectile sur la cible, que nous avons nommé "accrétion" et qui pourrait être valable pour des vitesses d'impact faibles. Le second cas, moins élémentaire et sans doute plus réaliste, considère que la collision non destructrice aboutit à la formation d'un cratère. Il est basé sur l'utilisation de deux paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  caractérisant le transfert de la quantité de mouvement du projectile à la cible suivant des directions normale et tangentielle au point d'impact à la surface de la cible. Un des problèmes importants qui reste évidemment à résoudre est la détermination des valeurs exactes de ces deux paramètres en fonction des conditions de la collision considérée, en particulier de l'angle d'impact et de la vitesse d'impact. Néanmoins cette incertitude ne remet pas en cause notre modélisation dans le cas d'un impact à cratérisation et, il est possible de comparer les différences obtenues suivant le type d'impact considéré, accrétion ou cratérisation, avec différentes valeurs de  $\eta$  et de  $\zeta$  en prenant les mêmes conditions initiales pour tous les autres paramètres.

Nous avons appliqué notre modèle dans un cas spécifique et fictif pour un astéroïde de forme ellipsoïdale de dimensions  $100 \times 50\sqrt{2} \times 50$  kilomètres en fixant certains paramètres géométriques liés à la position du point d'impact

et la direction de la collision. Nous avons, par exemple, pris lorsque ces paramètres étaient fixés :  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ . Nous avons alors étudié l'influence de tous les paramètres sur les variations des caractéristiques rotationnelles (période de rotation, direction de l'axe de rotation de la cible) dues à la collision en vérifiant que le choix du rapport de masses entre le projectile et la cible n'entraîne pas la destruction de la cible par le projectile. Ainsi, nous avons obtenu des résultats intéressants, qui ont montré la complexité de la détermination, suivant les nombreux paramètres introduits ci-dessus, des changements rotationnels de la cible suite à l'impact considéré, même si plusieurs de ces paramètres sont fixés et restent constants. Des simulations d'impacts à cratérisation avec un angle d'impact  $\alpha$  variant de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  et, avec  $\beta = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$  ont même abouti à des modifications de la période de rotation de la cible en contradiction avec celles auxquelles nous pouvions nous attendre. Nous avons aussi montré que chacun des paramètres considérés a une influence importante sur les changements des propriétés rotationnelles de la cible après l'impact. Bien que nous ayons considéré dans nos simulations des conditions spécifiques d'impact, nous avons ainsi obtenu une très grande richesse dans les résultats.

Notons que dans le développement de la modélisation et ses applications, nous avons effectué un certain nombre d'hypothèses : pour les deux types d'impact, nous avons supposé que le rapport des masses entre le projectile et la cible est petit ce qui est équivalent à considérer que les dimensions du projectile sont petites en comparaison de celles de la cible. Dans la modélisation prenant en considération la formation d'un cratère, nous avons supposé que la cible et le cratère avaient respectivement la forme d'un ellipsoïde et d'une calotte sphérique, ce qui correspond à la morphologie d'une partie seulement des cratères que nous pouvons observer.

En dépit de ces simplifications, notre modèle semble suffisamment complet pour étudier les influences de chaque paramètre d'impact évoqué ci-dessus, quelle que soit sa nature : géométrique (latitude et longitude du lieu d'impact), cinétique (amplitude et direction de la vitesse d'impact), physique (nature des corps, rapport des masses, moment cinétiques, transfert, etc...). On pourra donc l'appliquer naturellement à des situations réelles de notre système solaire : parmi les cas envisagés, on pourra par exemple chercher sous quel type d'impact l'axe de rotation d'Uranus a pu faire l'objet d'un basculement proche de  $90^\circ$ . On pourra également estimer les effets rotationnels de l'impact gigantesque sur Mercure ayant donné naissance au bassin Caloris. Une connaissance accrue de la morphologie des astéroïdes (fournie par exemple par la sonde NEAR autour de Eros et de Mathilde) nous per-

met de contraindre les paramètres des gros impacts qu'ils ont subis afin d'en déduire les conséquences sur leur vitesse de rotation et l'orientation de leur axe de rotation. Enfin, notre travail est particulièrement intéressant dans la perspective de la mission Don Quijote qui envisage de mettre en collision un engin spatial avec un astéroïde d'environ 500 mètres de diamètre avec une vitesse relative d'au moins 10 km/s et d'observer, entre autres, les effets d'un tel impact sur les propriétés orbitales et rotationnelles de l'astéroïde. Dans le cadre de cette mission, notre étude permettrait d'estimer les conséquences rotationnelles d'une telle collision suivant les paramètres d'impact choisis. Les résultats de cette mission pourraient également nous fournir des informations importantes pour ajuster les paramètres de notre modèle.



# Bibliographie

- [1] Benz, W. and Asphaug, E. : 1994, 'Impacts Simulations with Fracture : I. Method and tests'. *Icarus* **107**, pp. 98-116.
- [2] Benz, W. and Asphaug, E. : 1999, 'Catastrophic Disruption Revisited'. *Icarus* **142**, pp. 5-20.
- [3] Binzel, R.P., Farinella, P., Zappalà, V. and Cellino, A.. : 1989, 'Asteroid Rotation Rates : Distributions and Statistics'. In *Asteroids II*, ed. T. Gehrels, pp. 416-441. Tucson : Univ. of Arizona Press.
- [4] Bottke, W.F., Nolan, M.C., Greenberg, R. and Kolvoord, R.A. : 1994, 'Velocity Distributions among Colliding Asteroids'. *Icarus* **107**, pp. 255-268.
- [5] Burns, J.A. and Safronov, V.S. : 1973, 'Asteroid Nutation Angles'. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **165**, pp. 403-411.
- [6] Capaccioni, F., Cerroni, P., Coradini, M., Farinella P., Flamini E., Martelli, G., Paolicchi, P., Smith, P.N. and Zappalà, V. : 1984, 'Shapes of Asteroids Compared with Fragments from Hypervelocity Impact Experiments'. *Nature* **308**, pp. 832-834.
- [7] Davis, D.R. : 1998, 'The Experimental and Theoretical Basis for Studying Collisional Disruption in the Solar System'. In *Impacts on Earth*, Benest D. and Froeschlé C. eds, pp. 113-136. Springer-Verlag, Berlin
- [8] Davis, D.R. : 1999, 'The Collisional History of Asteroid 253 Mathilde'. *Icarus* **140**, pp. 49-52.
- [9] Davis, D.R., Chapman, C.R., Greenberg, R., Harris, A.W. : 1979, 'Collisional Evolution of Asteroids : Populations, Rotations and Velocities'. In *Asteroids*, ed. T. Gehrels, pp. 528-557. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- [10] Davis, D.R., Chapman C.R., Weidenschilling S.J. and Greenberg, R. : 1995, 'Collisional History of Asteroids : Evidence from Vesta and the Hirayama Families'. *Icarus* **62**, pp. 30-53.
- [11] Davis, D.R., Ryan, E.V. and Farinella, P. : 1995, 'On How to Scale Disruptive Collisions'. *Lunar Planet. Sci* **XXVI**, pp. 319-320

- [12] Davis, D.R., Weidenschilling, S.J., Farinella, P., Paolicchi, P. and Binzel, R.P. : 1989, 'Asteroid Collisional History : Effects on Sizes and Spins'. In *Asteroids II*, ed. T. Gehrels, pp. 805-826. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- [13] Dobrovolskis, A.R. : 1981, 'Ejecta Patterns Diagnostic of Planetary Rotations'. *Icarus* **47**, pp. 203-219.
- [14] Dobrovolskis, A.R. and Burns, J.A. : 1980, 'Life near the Roche Limit : Behavior of Ejecta from Satellites close to Planets'. *Icarus* **42**, pp. 422-441.
- [15] Dobrovolskis, A.R. and Burns, J.A. : 1984, 'Angular Momentum Drain : A Mechanism for Despinning Asteroids'. *Icarus* **57**, pp. 464-476.
- [16] Farinella, P., Davis, D.R., Paolicchi, P., Cellino, A. and Zappalà, V. : 1992, 'Asteroid Collisional Evolution : An Integrated Model for the Evolution of Asteroid Rotation Rates'. *Astron. Astrophys.* **253**, pp. 604-614.
- [17] Fujiwara, A., Cerroni, P., Davis, D., Ryan, E., Di Martino, M., Holsapple, K. and Housen, K. : 1989, 'Experiments and Scaling Laws for Catastrophic Disruptions'. In *Asteroids II*, ed. T. Gehrels, pp. 240-265. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- [18] Fujiwara, A., Kamimoto, G. and Tsukamoto, A. : 1977, 'Destruction of Basaltic Bodies by High-Velocity Impacts'. *Icarus* **31**, pp. 277-288.
- [19] Fujiwara, A. and Tsukamoto, A. : 1980, 'Experimental Study on the Velocity of Fragments in Collisional Breakup'. *Icarus* **44**, pp. 142-153.
- [20] Fujiwara, A. and Tsukamoto, A. : 1981, 'Rotation of Fragments in Catastrophic Impact'. *Icarus* **48**, pp. 329-334.
- [21] Gault, D.E., Quaide, W.L. and Orbeck, V.R. : 1968, 'Impact Cratering Mechanics and Structure'. In *Shock Metamorphism of Natural Materials*, B.M. French and N.M. Short Eds, pp. 87-99. Mono Book Co., Baltimore, Md.
- [22] Gault, D.E., Shoemaker, E.M. and Moore, H.J. : 1963, 'Spray Ejected from the Lunar Surface by Meteoroid Impact'. *NASA Tech. Note D-1767*.
- [23] Giblin, I., Martelli, G., Farinella P., Paolicchi P., Di Martino, M. and Smith, P.N. : 1998, 'The Properties of Fragments from Catastrophic Disruption Events'. *Icarus* **134**, pp. 77-112.
- [24] Giblin, I., Martelli G., Smith, P.N., Cellino, A., Di Martino, M., Zappalà, V., Farinella P. and Paolicchi P. : 1994a, 'Field Fragmentation of Macroscopic Targets Simulating Asteroidal Catastrophic Collisions'. *Icarus* **110**, pp. 203-224.
- [25] Giblin, I., Martelli, G., Smith, P.N. and Di Martino, M., : 1994b, 'Simulation of Hypervelocity Impacts using a Contact Charge'. *Planet. Space Sci.* **42**, pp. 1027-1030

- [26] Greenberg, R., Hartmann, W.K., Chapman, C.R. and Wacker, J.F. : 1978, 'Planetesimals to Planets : Numerical Simulation of Collisional Evolution'. *Icarus* **35**, pp. 1-26
- [27] Harris, A.W. : 1979, 'Asteroid Rotation Rate. II. A Theory for the Collisional Evolution of Rotation Rates'. *Icarus* **40**, pp. 145-153.
- [28] Holsapple, K.A. : 1980, 'The Equivalent Depth of Burst for Impact Cratering'. *J. Geochem. Soc. Meteoritical Soc., Suppl.* **14**, pp. 2379-2401.
- [29] Holsapple, K.A. : 1993, 'The Scaling of Impact Processes in Planetary Sciences'. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **21**, pp. 333-373.
- [30] Holsapple, K.A. : 1994, 'Catastrophic Disruptions and Cratering of Solar System Bodies : A Review and New Results'. *Planet. Space Sci.* **42**, pp. 1067-1078.
- [31] Holsapple, K.A., Giblin, I., Housen, K.R., Nakamura A. and Ryan E. : 2002, 'Asteroid Impacts : Experiments and Scaling Laws'. In *Asteroids III*, W.F. Bottke Jr *et al.*, eds., pp. 443-462. Univ. of Arizona, Tucson.
- [32] Holsapple, K.A. and Housen, K.R. : 2004, 'The Cratering Database : Making Code Jockeys Honest'. *Lunar and Planetary Science XXXV*.
- [33] Holsapple, K.A. and Schmidt, R.M. : 1979, 'A Material Strength Model for Apparent Crater Volume'. *J. Geochem. Soc. Meteoritical Soc., Suppl.* **13**, pp. 2757-2777.
- [34] Holsapple, K.A. and Schmidt, R.M. : 1982, 'On the Scaling of Crater Dimensions 2. Impact Processes'. *Journ. Geophys. Res.* **87**, **B3**, pp. 1849-1870.
- [35] Holsapple, K.A. and Schmidt, R.M. : 1987, 'Point-Source Solutions and Coupling Parameters in Cratering Mechanics'. *Journ. Geophys. Res.* **92**, **B7**, pp. 6350-6376.
- [36] Housen, K.R. : 2004, 'Collisional Fragmentation of Rotating Bodies'. *Lunar and Planetary Science XXXV*.
- [37] Housen, K.R. and Holsapple, K.A. : 1990, 'On the Fragmentation of Asteroids and Planetary Satellites'. *Icarus* **84**, pp. 226-253.
- [38] Housen, K.R. and Holsapple, K.A. : 1999, 'Scale Effects in Strength-Dominated Collisions of Rocky Asteroids'. *Icarus* **142**, pp. 21-33.
- [39] Housen, K.R., Schmidt, R.M. and Holsapple, K.A. : 1983, 'Crater Ejecta Scaling Laws-Fundamental Forms Based on Dimensional Analysis'. *Journ. Geophys. Res.* **88**, pp. 2485-2499.
- [40] Housen, K.R., Schmidt, R.M. and Holsapple, K.A. : 1991, 'Laboratory Simulations of Large Scale Fragmentation Events'. *Icarus* **97**, pp. 180-190.

- [41] Martelli, G., Ryan, E.V., Nakamura, A.M. and Giblin, I. : 1994, 'Catastrophic Disruption Experiments : Recent Results'. *Planet. Space Sci.* **42**, pp. 1013-1026.
- [42] Melosh, H.J. : 1989, *Impact Cratering : A Geologic Process*. Oxford Univ. Press, New York.
- [43] Michel, P., Benz, W. and Richardson : 2003, 'Disruption of Fragmented Parent Bodies as the Origin of Asteroid Families'. *Nature* **421**, pp. 608-611.
- [44] Michel, P., Benz, W. and Richardson : 2004a, 'Catastrophic Disruption of Pre-Shattered Parent Bodies'. *Icarus* **168**, pp. 420-432.
- [45] Michel, P., Benz, W. and Richardson : 2004b, 'Catastrophic Disruption of Asteroids and Family Formation : a Review of Numerical Simulations Including both Fragmentation and Gravitational Reaccumulations'. *Planetary and Space Science* **52**, pp. 1109-1117.
- [46] Morbidelli, A., Jedicke, R., Bottke W.F., Michel, P. and Tedesco, E.F. : 2002, 'From Magnitudes to Diameters : The Albedo Distribution of Near Earth Objects and the Earth Collision Hazard'. *Icarus* **158**, pp. 329-342.
- [47] Morrison, D. and Chapman, C.R. : 1990, 'Target Earth -It will happen'. *Sky and Telescope* **79**, pp. 261-265.
- [48] Nakamura, A.M. : 1993, *Laboratory Studies on the Velocities of Fragments from Impact Disruptions*. ISAS Report 651. Institut of Space and Astronautical Science, Tokyo.
- [49] Nakamura, A.M., Suguiyama, K., and Fujiwara, A. : 1992, 'Velocity and Spin of Fragments from Impact Disruption. I- An Experimental Approach to a General Law Between Mass and Velocity'. *Icarus* **100**, pp. 127-135.
- [50] Neukum, G., Koenig B. and Fechtig H. : 1975, 'Cratering in the Earth-Moon System : Consequences for Age Determination by Crater Country'. In *Lunar Science Conference, 6th, Houston, Texas, Proceedings*, Volume **3**, pp. 2597-2620. Pergamon Press, New York.
- [51] Paolicchi, P., Burns, J.A., Weidenschilling S.J. : 2002, 'Side Effects of Collisions : Spin Rate Changes, Tumbling, Rotation States, and Binary Asteroids'. In *Asteroids III*, W.F. Bottke Jr *et al.*, eds., pp. 517-526. Univ. of Arizona, Tucson.
- [52] Paolicchi, P., Cellino, A., Farinella, P. and Zappalà, V. : 1989, 'A Semi-Empirical Model of Catastrophic Breakup Process'. *Icarus* **77**, pp. 187-212.
- [53] Paolicchi, P., Verlicchi, A. and Cellino, A. : 1996, 'An Improved Semi-Empirical Model of Catastrophic Impact Process. I.Theory and Laboratory Experiments'. *Icarus* **121**, pp. 126-157.

- [54] Pike, R.J. : 1977, 'Size-Dependence in the Shape of Fresh Impact Craters on the Moon'. In *Impact and Explosive Cratering*, D.J. Roddy *et al.* eds, pp. 489-509. Pergamon, New York.
- [55] Pike, R.J. : 1988, 'Geomorphology of Impact Craters on Mercury'. In *Mercury*, F. Vilas *et al.* eds, pp. 165-273. Univ. of Arizona, Tucson.
- [56] Richardson, D.C., Leinhardt, Z.M., Melosh, H.J., Bottke, W.F. Jr. and Asphaug E. : 2002, 'Gravitational Aggregates : Evidence and Evolution'. In *Asteroids III*, W.F. Bottke Jr *et al.*, eds.), pp. 501-515. Univ. of Arizona, Tucson.
- [57] Safronov, V.S. : 1969, *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the Earth and Planets*. Nauka Press, Moscou. (NASA-TT-F-677, 1972)
- [58] Schmidt, R.M., Holsapple K.A. and Housen, K.R. : 1986, 'Gravity Effects in Cratering'. *DNA Rep. DNA-TR-86-182*, Washington, DC : Defense Nucl. Agency.
- [59] Schmidt, R.M. and Housen, K.R. : 1987, 'Some Recent Advances in the Scaling of Impact and Explosion Cratering'. *Int. J. Impact Eng.* **5**, pp. 543-560.
- [60] Shirino, S., Tada, M., Nakamura A.M., Kadono T., Rivkin A. and Fujiwara, A. : 1993, 'Efficiency of Linear and Angular Momentum Transfer in Oblique Impact'. *Planet. Space Sci.* **41**, pp. 687-692.
- [61] Stoeffler, D., Gault, D.E., Wedekind J. and Polkowski G. : 1975, 'Experimental Hypervelocity Impact into Quartz Sand- Distribution and Shock Metamorphism of Ejecta'. *J. Geophys. Res.* **80**, pp. 4062-4077.
- [62] Yanagisawa, M. : 2002, 'Collisional Spin Up of Nonspherical Asteroids'. *Icarus* **159**, pp. 300-305.
- [63] Yanagisawa, M., Eluszkiewicz, J. and Ahrens, T.J. : 1991, 'Angular Momentum Transfer in Low Velocity Oblique Impacts-Implications for Asteroids'. *Icarus* **94**, pp. 272-282.
- [64] Yanagisawa M. and Hasegawa, S. : 1999, 'Angular Momentum Transfer in Oblique Impacts : Implications for 1989ML'. *Earth, Planets and Space* **51**, pp. 1163-1171.
- [65] Yanagisawa M. and Hasegawa, S. : 2000, 'Momentum Transfer in Oblique Impacts : Implications for Asteroid Rotations'. *Icarus* **146**, pp. 270-288.
- [66] Yanagisawa, M., Hasegawa, S. and Shirogane, N. : 1996, 'Momentum and Angular Momentum Transfer in Oblique Impacts : Implications for Asteroid Rotations'. *Icarus* **123**, pp. 192-206.

- [67] Zappalà, V., Cellino, A., Dell'Oro, A. and Paolicchi, P. : 2002, 'Physical and Dynamical Properties of Asteroid Families'. In *Asteroids III*, W.F. Bottke Jr *et al.*, eds.), pp. 619-631. Univ. of Arizona, Tucson.

