



Apport de l'analyse non linéaire à l'étude géophysique de la rotation de la Terre

Valérie Frède

► To cite this version:

Valérie Frède. Apport de l'analyse non linéaire à l'étude géophysique de la rotation de la Terre. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1999. Français. <NNT : >. <tel-02071395>

HAL Id: tel-02071395

<https://hal.science/tel-02071395v1>

Submitted on 18 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Observatoire de Paris

THÈSE DE DOCTORAT

*spécialité : Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et
Géodésie*

Valérie Frède

APPORT DE L'ANALYSE NON LINÉAIRE À L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE DE LA ROTATION DE LA TERRE

Soutenue le 1^{er} OCTOBRE 1999 devant le jury composé de:

Monsieur François Barlier	<i>Président</i>
Monsieur Paul Manneville	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Paul Pâquet	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Claude Froeschlé	<i>Examineur</i>
Madame Nicole Capitaine	<i>Examineur</i>
Monsieur Daniel Gambis	<i>Directeur de thèse</i>

Travaux effectués à l'UMR 8630/DANOF, Obs. de Paris, 61 av. de l'Observatoire, 75014 PARIS

(a3)
FRE

Observatoire de Paris

THÈSE DE DOCTORAT*spécialité : Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et
Géodésie***Valérie Frède****APPORT DE L'ANALYSE NON LINÉAIRE
À L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE DE LA
ROTATION DE LA TERRE****Soutenue le 1^{er} OCTOBRE 1999 devant le jury composé de:**

Monsieur François Barlier	<i>Président</i>
Monsieur Paul Manneville	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Paul Pâquet	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Claude Froeschlé	<i>Examineur</i>
Madame Nicole Capitaine	<i>Examineur</i>
Monsieur Daniel Gambis	<i>Directeur de thèse</i>

Travaux effectués à l'UMR 8630/DANOF, Obs. de Paris, 61 av. de l'Observatoire, 75014 PARIS



Résumé

La rotation de la Terre n'est pas uniforme et présente de fortes irrégularités dans le temps. Nombres d'entre elles sont relativement bien expliquées par les forces extérieures agissant sur la Terre. Cependant, des interrogations persistent quant à l'origine et la nature de certaines fluctuations observées.

Par exemple, les fluctuations rapides (inférieures à 100 jours), observées dans les paramètres d'orientation de la Terre, sont induites par les excitations atmosphériques et océaniques principalement. Présentant un spectre de Fourier continu et apériodique, elles ont toujours été caractérisées comme des processus aléatoires. Or, les fluides géophysiques (océan-atmosphère) responsables de leur existence, possèdent des dynamiques non linéaires et déterministes. Nous avons par conséquent cherché s'il était possible de déceler une composante non linéaire déterministe analogue dans les fluctuations rapides de la rotation de la Terre.

La méthode employée est l'analyse non linéaire de séries temporelles. Elle repose sur la reconstruction d'une figure géométrique (attracteur) représentant l'évolution asymptotique du système observé, dans un espace multidimensionnel. Le calcul d'invariants dynamiques (dimensions, exposants de Lyapunov) permet de préciser la nature du système qui a donné naissance à la série. Il devient possible de distinguer un processus aléatoire d'un processus chaotique tandis que leur spectre de Fourier est identique.

Un signal déterministe non linéaire de faible dimension semble bien présent dans les séries à courtes périodes de la rotation de la Terre et permet de trancher avec la description stochastique usuelle. La comparaison des invariants dynamiques trouvés pour les séries de rotation de la Terre [1-100] jours et les séries atmosphériques [1-100] jours montre de plus, que le processus déterministe décelé est directement induit par la dynamique atmosphérique et reflète ses propriétés.

Concernant le mode propre de la Terre (terme de Chandler), en adoptant la même approche, nous avons montré que celui-ci pouvait être modélisé comme un oscillateur dissipatif forcé possédant une variété instable. Ceci implique là encore, que les excitations responsables de sa variation seraient de nature non linéaire déterministe, et de ce fait, non stochastique.

Table des matières

Introduction	7
1 Rotation de la Terre et systèmes dynamiques	12
1 Théorie et Observation de la rotation terrestre	13
1 Introduction	13
2 Théorie de la rotation terrestre	16
1 Description cinématique	16
2 Description dynamique et équations de Liouville	17
3 Composantes théoriques propres à la rotation de la Terre	19
4 Liens avec les excitations	20
3 Observations	22
1 Méthodes	22
2 <i>EOP</i> : Paramètres d’Orientation de la Terre	25
3 Mouvement du pôle	26
4 Longueur du jour	29
5 Description de la série combinée C04 de l’IERS	34
4 Discussion	41
1 Limites théoriques	41
2 Limites liées aux méthodes d’analyse	41
5 Conclusion	43
2 Introduction aux systèmes dynamiques	45
1 Introduction	45
2 Equations différentielles et systèmes dynamiques	47
1 Définitions préalables	47
2 Equations différentielles.	47
3 Systèmes dynamiques.	49
4 Espace des phases	50
3 Caractérisations géométriques des orbites	51
1 Types de solutions	52
2 Stabilité	52
3 Attracteur	55
4 Exposants de Lyapunov	59
5 Dimensions d’attracteur	60
6 Bifurcations	61
4 Quantités caractéristiques	62

5	Exemple: l'Attracteur de Lorenz	67
1	Contexte physique, équations	67
2	Bifurcations	69
6	Conclusion	73
3	Méthodes de Reconstruction d'Espaces à partir de Séries Temporelles	75
1	Introduction	75
2	Spectre de Fourier et signaux non linéaires	77
1	Présentation générale	77
2	Exemples et discussion:	78
3	Plongement, Reconstruction d'espace	81
4	Détermination du temps de retard τ	83
1	Fonction d'autocorrélation	84
2	Fonction d'information mutuelle moyenne	84
3	Exemples et discussion	85
5	Dimension de plongement	85
1	Méthode des faux voisins	87
2	Exemples et discussion	89
3	Méthode de l'intégrale de corrélation	91
4	Exemples et discussion	92
6	Dimension Locale ou Dynamique	93
1	Méthode de calcul	93
2	Exemples et discussion	95
3	Comparaisons des deux méthodes	96
7	Exposants de Lyapunov globaux	97
1	Méthode de calcul	97
2	Exemples et discussion	98
8	Exposants de Lyapunov locaux	101
1	Méthode de calcul	101
2	Exemples et discussion	101
9	Dimensions d'Attracteur	102
1	Méthode de calcul	102
2	Exemples et discussion	103
10	Exemples d'attracteurs reconstruits	106
11	Limites et Nécessité d'une analyse complète	108
1	Cas de la marche aléatoire	108
2	Problèmes liés à des séries courtes et mal échantillonnées	112
12	Conclusion	115

2 Applications aux séries de rotation de la Terre et aux séries de moment cinétique atmosphérique 117

4	Caractérisation non linéaire des séries à courtes périodes de la rotation terrestre, <i>EOP</i>[1-100] jours	119
1	Introduction	119
2	Motivations	119
3	Résultats	123

1	Données	123
2	Temps de retard	123
3	Dimension de plongement	125
4	Reconstruction 3D	129
5	Dimension locale	132
6	Exposants de Lyapunov globaux	134
7	Exposants de Lyapunov locaux	138
8	Dimension de l'attracteur	143
4	Discussion et conclusion	146
5	Etude des séries de moment cinétique atmosphérique. Comparaison avec la rotation terrestre	151
1	Introduction	151
2	Motivations	151
3	Description des séries de moment cinétique atmosphérique	153
4	Analyse non linéaire des séries à courtes périodes de moment cinétique atmosphérique ($\chi_1 p$, $\chi_2 p$ et $\chi_3 w$)	159
5	Analyse générale linéaire comparée entre $LOD_{\chi_3 w}$ et LOD	165
6	Analyse non linéaire de la série $LOD_{\chi_3 w}$ [1-100] jours. Comparaisons numériques avec la série LOD [1-100] jours	168
7	Discussion	173
8	Conclusion	176
6	Nature dynamique du terme de Chandler.	177
1	Introduction	177
2	Motivations	177
3	Données	179
4	Analyse non linéaire de la série temporelle globale du terme de Chandler	182
1	Analyse des dimensions et de la géométrie du terme de Chandler, CX et CY	182
2	Reconstruction 3D de l'attracteur	183
3	Analyse dynamique et stabilité du terme de Chandler	184
5	Discussion	188
6	Discussion critique	190
1	Méthodologie employée	190
2	Analyse spectrale singulière	191
7	Conclusion	191
	Conclusion	193
3	Annexes, Glossaire et Bibliographie	197
	Annexes	198
1:	Analytical versus Semi-analytical Determinations of the Oppolzer Terms for a Non-Rigid Earth	198
2:	Detectability of Deterministic Nonlinear Processes in Earth Rotation Time Series .	210
I-	Embedding	210
II-	Dynamics	225

3: Dynamical analysis of the atmospheric angular momentum short term fluctuations. Comparison with the Earth	241
4: A preliminary Nonlinear Analysis of the Earth's Chandler Wobble	264
Glossaire	281
Bibliographie	286

Introduction

La rotation de la Terre fût longtemps considérée comme uniforme et stable. La durée du jour, (ou le Temps Universel, UT1), servit d'ailleurs de référence pour la définition de l'échelle de temps légal et de l'unité de temps, jusqu'en 1960. Dès l'apparition des premières observations optiques, des variations de la latitude furent mesurées (fin 19^{ème} siècle dans le mouvement du pôle). Puis, grâce à l'amélioration des techniques d'observations géodésiques et l'introduction des horloges atomiques, un nombre croissant de fluctuations significatives fût répertorié dans le mouvement du pôle, le temps universel et la longueur du jour.

La Terre est un corps complexe composé de couches dont les propriétés chimiques et dynamiques sont différentes et interagissent entre elles. D'autre part, elle est soumise à des actions gravitationnelles extérieures et possède une oscillation propre présentant des variations. Par conséquent, chacune des fluctuations observée dans le mouvement de rotation de la Terre, s'avère être de type très distinct et d'origine tout aussi diverse. Leurs échelles de temps caractéristiques s'échelonnent de l'âge de la Terre à quelques heures. Aussi la connaissance de la rotation de la Terre fournit-elle des renseignements pertinents sur le comportement des couches internes et externes de son manteau, noyau, mais aussi sur le mouvement des corps célestes. La démarche usuelle d'étude de la rotation de la Terre se base sur le découplage des effets de chaque excitation sur la rotation de la Terre. Ainsi, on attribue les variations à très longues périodes (séculaires) à la fonte des glaciers (pour le pôle) et à la dissipation d'énergie due aux marées (pour la longueur du jour), à longues périodes (décennies) aux mouvements des couches internes (noyau, manteau). Les oscillations périodiques et saisonnières proviennent à la fois des attractions gravitationnelles des corps célestes (principalement la Lune et le Soleil) et des mouvements périodiques des fluides géophysiques (marées océaniques, saisons atmosphériques). Des variations transitoires et apériodiques de l'ordre de 100 jours maximum sont aussi présentes dans les séries et sont principalement d'origine atmosphérique ou hydrologique.

Par conséquent, l'étude des variations de la vitesse de rotation et de l'orientation de la Terre est un axe de recherche primordial pour la communauté scientifique puisqu'il se situe au carrefour de plusieurs disciplines: l'astronomie, la géophysique interne, la météorologie, l'océanographie et la recherche spatiale.

La modélisation de la rotation de la Terre a beaucoup évolué depuis la description dynamique faite par Euler d'un corps sphérique rigide en rotation uniforme. D'une part parce que les modèles de rhéologie du manteau et des couches internes sont plus de plus en plus réalistes: l'ellipticité de la Terre fût mesurée au 18^{ème} siècle grâce aux grandes expéditions géodésiques. Un siècle plus tard, les observations de variations de la latitude, mirent en évidence les propriétés d'élasticité du manteau. Depuis le début du 20^{ème} siècle, la sismologie a permis de découvrir les grandes subdivisions du globe et continue de fournir des indications sur leurs

principales propriétés.

D'autre part, concernant les excitations extérieures qui agissent sur la Terre, parce qu'on dispose depuis une vingtaine d'année, d'un modèle précis de l'action gravitationnelle luni-solaire sur le bourrelet équatorial de la Terre (précession-nutation, modèle UAI 1980).

Cependant, les fluides géophysiques possèdent des dynamiques fortement non linéaires et dynamiquement instables (circulation atmosphérique). Les modèles dynamiques atmosphériques et océaniques sont extrêmement compliqués et possèdent des solutions apériodiques et chaotiques pour certaines valeurs de leurs paramètres. Ceci implique que leur évolution présente une très forte sensibilité aux conditions initiales qui induit une prédiction limitée dans le temps. Il reste de ce fait très difficile de fabriquer des modèles globaux de circulation atmosphérique et surtout océanique dans la mesure où les observations qui permettent de contraindre les modèles sont peu accessibles au milieu de l'océan. Il en est de même pour les modélisations des mouvements du noyau liquide et de la graine solide à l'intérieur de la Terre. D'autre part certains phénomènes sont négligés, (triaxialité de la Terre), ou très peu modélisés (séismes, mouvement des plaques tectoniques, variations climatiques très rapides). Ceci implique que, bien que progressant, la modélisation globale de la rotation de la Terre et de ses excitations n'est pas encore parfaite.

La principale source d'information, pour les études géophysiques de la rotation de la Terre, est l'observation sous forme de séries temporelles de mesures de la longueur du jour ou du temps universel et du mouvement du pôle. D'une part, l'étude du contenu spectral de ces séries permet d'isoler et de décrire les principales composantes du mouvement de rotation de la Terre; d'autre part, ces observations peuvent être directement utilisées pour apporter des informations sur certains comportements dynamiques irréguliers des fluides géophysiques qu'aucun autre moyen ne permet d'obtenir.

Les séries temporelles de mesures comportent une information riche puisqu'elles résultent de la combinaison de tout ce qui agit sur la rotation de la Terre. Elles sont à la fois très complètes (information complexe contenue dans une seule variable) et très simples (séries temporelles unidimensionnelles). La difficulté est alors d'en extraire au mieux le maximum d'informations pertinentes.

Depuis le milieu du 20^{ième} siècle, des séries temporelles de mouvement du pôle et de longueur du jour sont maintenues de manière systématique, d'abord par le BIH (Bureau International de l'Heure) puis par l'IERS (International Earth Rotation Service). On s'est rendu compte grâce à ces observations, que la période théorique définie par Euler de rotation propre de la Terre (306 jours) était allongée d'un facteur 0.7 (détectée par Chandler dans les séries). Ceci a permis de mettre en évidence certaines propriétés d'élasticité de la Terre. D'autre part, on observe que ce mode propre n'est pas purement périodique. Parallèlement, basées sur le principe de conservation du moment cinétique, des corrélations linéaires entre les séries terrestres et les séries géophysiques ont permis de caractériser certaines causes d'excitations (essentiellement les termes atmosphériques saisonniers).

Même si on explique, depuis les années 1980, de manière de plus en plus précise une grande partie du signal observé, des interrogations persistent quant à l'origine de certaines oscillations peu régulières. Le débat sur l'excitation, l'amortissement et la variation de l'oscillation libre de la Terre (terme de Chandler) dans le mouvement du pôle est par exemple loin d'être clos. De même, les causes de certaines fluctuations rapides du mouvement du pôle et de la longueur du

jour restent connues de manière incomplète.

Ces manques dans la connaissance des phénomènes observés peuvent provenir à la fois du bruit de mesure superposé aux données, du manque de précision de certains modèles conduisant à des comparaisons erronées et des méthodes employées dans l'analyse du signal.

Il est frappant et intéressant de remarquer que bien que les non linéarités soient omniprésentes dans la nature, il a toujours été de rigueur d'appliquer des linéarisations. Paradoxalement, ce type d'approche permet d'expliquer et de modéliser une grande partie des phénomènes observés, cependant il s'avère parfois nécessaire de sortir de ce cadre linéaire.

De quelle manière analyse-t-on linéairement une série temporelle? L'analyse linéaire de traitement du signal se base tout d'abord sur le calcul du spectre de Fourier de la série. La première étape consiste alors à séparer le fond continu appelé "bruit stochastique" de la partie du signal représentée par des raies fines dans le spectre "partie déterministe". On décrit le signal en fonction de ses propriétés spectrales comme une somme d'oscillations indépendantes et du bruit. Cette démarche est justifiée par le fait que les phénomènes oscillants et vibratoires existent à toutes les échelles dans la nature. Les modèles d'évolution se basent sur la recherche de coefficients d'autorégression de la série temporelle. Ce type d'approche exclut totalement toute composante non linéaire éventuelle dans le signal.

Dans la mesure où les excitations géophysiques (atmosphère, océans) de la rotation de la Terre possèdent des dynamiques fortement non linéaires, il devient naturel de s'interroger sur la possibilité de détecter, voire de caractériser une telle composante déterministe non linéaire dans les fluctuations de la rotation de la Terre.

Ceci est rendu possible grâce à l'analyse non linéaire des séries temporelles:

Issues de la théorie mathématique des systèmes dynamiques, des techniques de traitement du signal ont été développées, depuis une quinzaine d'années, afin de permettre la reconstruction de la dynamique asymptotique d'un système physique inconnu dont la seule source d'information est une ou plusieurs séries temporelles. Concrètement, l'approche non linéaire de traitement du signal s'appuie sur des principes totalement différents de l'analyse de Fourier. Il s'agit dans un premier temps de trouver le signal déterministe en séparant, dans la partie continue du spectre, le signal dû au bruit stochastique de celui dû au signal déterministe (cela signifie que l'on considère qu'un spectre continu n'est pas synonyme uniquement de stochasticité mais peut appartenir à un signal physique déterministe non linéaire). Les analyses et description du signal ne se font plus dans l'espace fréquentiel mais dans un espace multidimensionnel appelé espace de reconstruction ou pseudo espace des phases. Ce n'est plus la série unidimensionnelle qui est étudiée en tant qu'objet mathématique mais un ensemble de vecteurs dont les composantes sont les points de la série décalés dans le temps. Ils forment une figure géométrique nommée attracteur dont les propriétés caractérisent de manière univoque le comportement du système observé. Les quantités invariantes ne sont plus les valeurs des fréquences mais les exposants de Lyapunov (mesure de la stabilité d'une orbite) et les dimensions fractales de l'attracteur. Enfin les modèles recherchent une loi d'évolution locale ou globale de la dynamique sur l'attracteur grâce à la construction d'applications polynômiales.

L'analyse non linéaire intéresse un nombre croissant de scientifiques confrontés à des séries temporelles issues de processus complexes dont une classe particulière est le chaos. Elle a d'ores et déjà permis de mettre en évidence des comportements dynamiques chaotiques insoupçonnés peu de temps avant. Il semble d'ailleurs que la majorité des processus physiques naturels, après

des phases de bifurcations, aboutissent à des comportements déterministes apériodiques. Par exemple, Ruelle et Takens(1971) se sont rendu compte que la turbulence apparaissant dans un fluide, n'était pas le résultat de l'excitation d'une infinité de modes mais plutôt le comportement déterministe chaotique d'un système très simple à faible degrés de liberté. Le paradigme du nombre de modes excité (Fourier) s'est vu peu à peu remplacé par celui du nombre de degrés de liberté actifs et du nombre d'exposants de Lyapunov positifs (mesure de la chaotité d'un système).

L'attracteur de Lorenz est par ailleurs un exemple tout aussi intéressant puisqu'il montre qu'avec seulement 3 variables non linéairement couplées, on peut obtenir pour une certaine classe de paramètres, un comportement asymptotique des orbites qui est chaotique. Il est intéressant de noter que le modèle de Lorenz est issu des équations tronquées de la convection atmosphérique. D'ailleurs, l'application de ces méthodes en dynamique atmosphérique a déjà permis de caractériser des attracteurs chaotiques à partir de séries de mesure de pression ou de vitesse de vents.

La présente thèse s'insère naturellement au centre de ce débat: les caractérisations linéaires des séries de rotation de la Terre s'avèrent insuffisantes pour expliquer de manière satisfaisante tout le spectre. Les principales excitations de la rotation de la Terre sont d'origine dynamique instable (atmosphère, océans). Il est plus naturel de se pencher sur l'analyse non linéaire des séries de rotation de la Terre afin de caractériser le type de processus réel physique sous-jacent. Cette étude offre la possibilité de considérer que certaines composantes du signal ne résultent pas d'une dynamique purement linéaire et que les irrégularités observées peuvent être déterministes et non stochastiques, reflétant le comportement des excitations qui leur ont donné naissance. Le rapport est articulé de la façon suivante:

- **La première partie** comporte trois chapitres concernant la rotation de la Terre, les systèmes dynamiques et l'analyse des séries temporelles.

Le *chapitre 1* est consacré à la théorie de la rotation de la Terre et à la caractérisation linéaire des séries. Il permet d'introduire les insuffisances liées d'une part aux modèles utilisés et d'autre part au type d'analyse. Nous donnons un éventail des excitations agissant sur la Terre et des techniques d'observation permettant de fournir les séries temporelles.

Le *chapitre 2* est une introduction à la théorie des systèmes dynamiques. Il est essentiel à l'élaboration et à la compréhension de la démarche puisqu'il fournit au lecteur les notions de base.

Le *chapitre 3* décrit les principes et les théorèmes fondamentaux concernant la reconstruction d'attracteurs à partir de séries temporelles. L'explication détaillée d'un choix de méthodes d'analyse non linéaire du signal est présentée ici. Elles sont fondées sur la théorie des systèmes dynamiques et la description géométrique de l'attracteur dans l'espace des phases. Des exemples synthétiques illustrant chaque méthode familiarisent avec le type de résultat possible et les problèmes pouvant apparaître dans le comportement des algorithmes.

- **La seconde partie** comporte trois chapitres d'application de ces méthodologies aux séries temporelles de la rotation de la Terre, dans un but géophysique. Ils répondent à un questionnement précis: comment peut-on expliquer davantage de composantes du signal et de quelle manière peut-on relier dynamiquement les excitations et leurs fluctuations?

Le *chapitre 4* traite des fluctuations inférieures à 100 jours des séries de rotation de la Terre. Celles-ci présentent un spectre de puissance continu proche de celui d'une marche aléatoire. Leur existence est attribuée à l'excitation atmosphérique principalement. Une démarche alternative à la description statistique usuelle est menée dans l'espace des phases afin de chercher la nature dynamique (déterministe ou stochastique) réelle de ces fluctuations aperiodiques.

Dans le *chapitre 5*, notre attention s'est portée sur les séries de moment cinétique atmosphérique pour des périodes inférieures à 100 jours. Les propriétés dynamiques des attracteurs associés permettent non seulement de décrire une composante du système atmosphérique mais aussi d'envisager une réponse à la question suivante: fortement corrélées entre elles dans le temps, les séries atmosphériques et terrestres de périodes inférieures à 100 jours, ont-elles aussi une dynamique semblable?

Enfin, le *chapitre 6* est consacré à l'étude du terme de Chandler. Depuis sa découverte, divers modèles linéaires ont été proposés pour l'expliquer. Schématiquement c'est un oscillateur dissipatif forcé dont l'amplitude et la phase varient au cours du temps. On ne connaît pas précisément les excitations responsables de son entretien ni les raisons de ses fluctuations. Une analyse non linéaire de ce terme permettra de savoir si globalement les fluctuations du terme de Chandler sont induites de manière aléatoire ou par une excitation déterministe non linéaire et instable.

- **La troisième partie** est réservée aux *annexes*. Celles-ci comportent les *articles* publiés ou en cours de publication à l'issue de ces trois années de travail. Enfin, un *glossaire* rassemble les définitions des principales notions utilisées dans la thèse et une *bibliographie* les ouvrages consultés.

Partie 1

Rotation de la Terre et systèmes dynamiques

Chapitre 1

Théorie et Observation de la rotation terrestre

1 Introduction

Ce chapitre est consacré au rappel de la modélisation actuelle de la rotation de la Terre ainsi qu'aux observations de celle-ci. Nous introduirons la matrice de passage entre les repères terrestre et céleste directement liée aux observations de géodésie spatiale, et expliciterons la description dynamique de la rotation de la Terre en établissant les équations de Liouville. Ces équations relient théoriquement les composantes de l'axe instantané de rotation de la Terre aux fonctions d'excitations s'exerçant sur la Terre. On peut écrire une équation pour chaque couche terrestre considérée. Divers modèles existent pour les fonctions d'excitation. Nous donnerons l'exemple des fonctions effectives du moment cinétique atmosphérique (*EAAM*) d'après le formalisme de Barnes *et al.* (1983).

Nous présenterons également les principales techniques d'observation géodésiques servant à fournir les séries de Paramètres d'Orientations de la Terre (*EOP*), qui sont aussi les paramètres de la matrice de passage du repère céleste de référence au repère terrestre de référence. Les fluctuations observées dans le signal seront classées selon leur échelle de temps et nous rappellerons les connaissances et hypothèses sur leurs origines géophysiques. Notre attention se portera plus particulièrement sur les trois premiers paramètres (*EOP*), le mouvement du pôle selon X et Y (notés PMX et PMY pour le "Polar Motion" suivant les coordonnées X orientées le long du méridien de Greenwich dans le plan équatorial, et les coordonnées Y orientées suivant la longitude 90 degrés ouest respectivement) et la longueur du jour (notée LOD comme "Length of Day" et correspondant à la différence entre la durée du jour D déterminée par les mesures astronomiques et la constante 86400 secondes du temps atomique international (*TAI*)).

Des périodicités et corrélations sont obtenues par les méthodes linéaires de traitement du signal et permettent une première classification des séries temporelles observées des *EOP*. Cependant nous insisterons sur les limites à la fois théoriques et pratiques de ces approches appliquées à l'étude de la rotation de la Terre. D'une part, les modèles utilisés sont linéaires et souvent très simplifiés, d'autre part, l'analyse du signal repose sur une approche stochastique¹

¹Un processus stochastique est par définition la réalisation d'une famille de variables aléatoires (Bosq et Lecoutre, 1992). Soit $x(n)$ une série observée. Celle-ci peut être décomposée en un terme de tendance, des termes périodiques et un signal résiduel supposé stationnaire (sa variance ne dépend pas du temps). L'approche stochastique consiste à éliminer les termes prévisibles (partie déterministe) (tendance, périodicités) et à modéliser les résidus (partie stochastique) grâce au résultat que tout processus stationnaire peut être écrit sous la forme d'une somme de "chocs aléatoires" indépendants. Ceci revient à écrire le signal sous la forme d'un bruit blanc et

des évènements. Dans la mesure où les excitations géophysiques sont fortement non linéaires (dynamique océanique et atmosphérique), il serait intéressant d'adopter des méthodes plus appropriées² afin de ne rien négliger dans le signal. Les chapitres suivants traiteront ce sujet en détail.

Nous présenterons la série combinée journalière C04 de l'IERS (International Earth Rotation Service) comme illustration.

Le graphe ci-après (d'après Lambeck, 1980) témoigne de la diversité des forces agissant sur la Terre et donc sur sa rotation. En effet, chaque excitation géophysique ou astronomique modifie la rotation de la Terre sur différentes échelles de temps en créant des couples ou des déplacements de matière dans la Terre. Les variations à longues périodes observées sur le mouvement du pôle et sur *LOD* sont principalement attribuées aux mouvements des couches internes de la Terre (par référence au graphe: "viscous torques", "electromagnetic coupling"...), et à des processus très lents comme la fonte des glaces ("melting of ice"). D'autre part, les vents et les courants océaniques et atmosphériques ("winds", "sea level loading"...), induisent des variations à plus courtes périodes (termes saisonniers et résiduels) dans les *EOP*.

L'action du couple luni-solaire sur le bourrelet équatorial de la Terre, induit des mouvements célestes périodiques des axes de la Terre, la précession-nutation, qui est très bien modélisée théoriquement (à une milliseconde de degré près (mas^3)). La participation des tremblements de Terre dans les variations des *EOP* n'a pas encore pu être clairement mise en évidence dans les observations.

Cette brève introduction des différentes excitations nous laisse deviner leur grande complexité et la nécessité de disposer de modèles pour tenir compte séparément de tel ou tel processus dynamique agissant sur la rotation de la Terre, ainsi que de modèles précis et réalistes de rhéologie de la Terre (élasticité, comportements des fluides et des couches internes, les propriétés d'élasticité du manteau vont différer selon l'échelle temporelle de la réponse de la Terre...). Ce chapitre tentera d'énumérer les principaux mécanismes d'excitation et de clarifier leurs influences respectives sur la rotation de la Terre.

d'une régression linéaire sur ses valeurs passées. En théorie, ces modèles possèdent une infinité de paramètres, cependant dans la pratique on les tronque afin de pouvoir estimer ces paramètres (ce sont les modèles linéaires *AR* ou *MA* ou *ARMA* qui sont les plus utilisés en rotation de la Terre). Sans parler de modélisation, l'approche stochastique consiste à décrire la série résiduelle grâce à ses propriétés statistiques (fonction d'autocorrélation, spectre de puissance) qui donnent une indication sur le type de "bruit" observé.

²Ceci revient à considérer que la série peut être issue d'un couplage (non linéaire) entre les variables d'un système physique décrit par un petit nombre d'équations différentielles ordinaires. Par déterministe on entendra un processus qui n'est pas stochastique (aléatoire), c'est-à-dire, un système dont l'évolution temporelle est déterminée de façon unique à partir de la seule spécification de ses conditions initiales. Le spectre de puissance n'est plus un indicateur robuste pour certains types processus dans cette classe et nous aurons recours à des méthodes de reconstruction d'espace pour décrire le déterminisme de la série.

³ $1000mas = 1'' = \frac{1}{3600}^\circ$

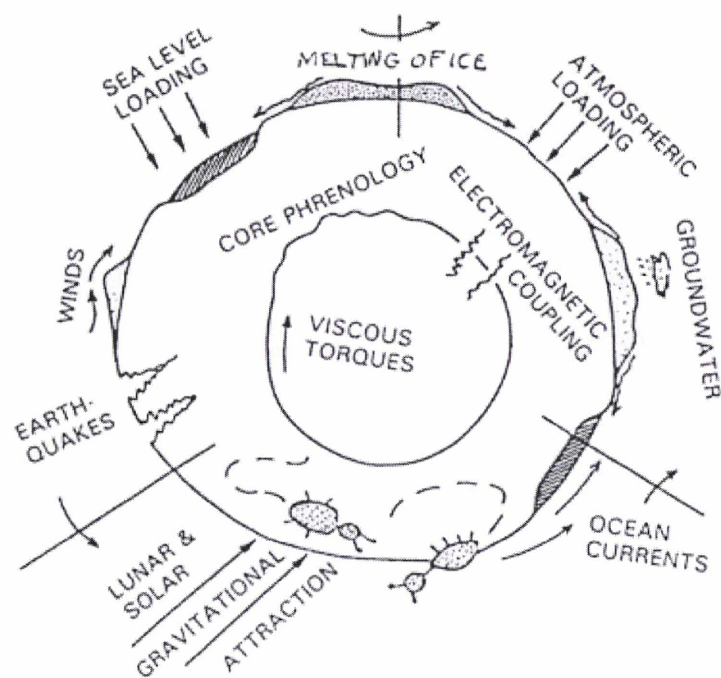


Figure 1.1: Les excitations de la rotation de la Terre, d'après Lambeck (1980).

2 Théorie de la rotation terrestre

1 Description cinématique

L'étude cinématique de la rotation de la Terre consiste à décrire l'orientation du système de référence conventionnel lié à la Terre (Terrestrial Reference System ou TRS) dans le système de référence céleste inertiel (Celestial Reference System ou CRS), c'est-à-dire un système dont les axes sont fixes en direction et dont l'origine n'a pas de mouvement autre que rectiligne et uniforme. Ces systèmes conventionnels sont définis par l'UAI (Union Astronomique Internationale) et l'UGGI (Union Géophysique et Géodésique Internationale). La réalisation du système de référence terrestre, appelé repère terrestre, repose sur des modèles géophysiques de déplacement de plaques tectoniques et des mouvements séculaires des stations d'observations.

La réalisation du système céleste est basée sur l'observation de radio sources extragalactiques dont les mouvements propres peuvent être considérés comme négligeables. Le repère céleste est donc obtenu à partir des coordonnées équatoriales moyennes pour l'époque de référence J2000.0 (1er janvier 2000 à 12h) des radio sources observées par la technique VLBI dont nous reparlerons ultérieurement. La maintenance de ces deux repères est faite par l'IERS (International Earth Rotation Service, dont le bureau central est à l'Observatoire de Paris).

Théoriquement, l'orientation du repère terrestre dans un repère céleste peut être donnée par trois paramètres. Mais pour des raisons pratiques imposées par la nature des observations, on utilise 5 paramètres d'orientation qui sont liés à un axe de référence: le *CEP*.

La Terre tourne autour de son axe de rotation. Cependant, les observations dépendent directement de la position de l'axe de figure de la Terre (ou de l'axe G_z) et la plupart des observations géodésiques ne peuvent être reliées aux composantes de l'axe de rotation. Ainsi, en 1980, l'UAI, a-t-elle défini le pôle céleste des éphémérides, *CEP* (Celestial Ephemeris Pole) comme un axe conventionnel, calculé à partir du modèle conventionnel de précession-nutation, et auquel se rapportent toutes les déterminations astrométriques. Physiquement, d'après Seidelmann (1982), le *CEP* représente une sorte de moyenne sur une journée du pôle instantané de rotation. Bizouard (1995), définit le *CEP* comme l'axe dont le mouvement spatial se réduit aux composantes de périodes supérieures à un jour de l'axe G_z . Les observations donnent la position spatiale réelle du *CEP* et permettent de définir les "écarts au pôle céleste" conventionnel. Les variations résiduelles observées à l'issue de cette transformation, sont appelées mouvement du pôle (c'est le mouvement du *CEP* par rapport à G_z). Enfin, pour passer complètement du repère terrestre au repère céleste, une rotation autour du *CEP* est nécessaire (angle de rotation de la Terre). Plus précisément, la matrice de passage Q entre un vecteur \vec{x}_t appartenant au repère terrestre et un vecteur \vec{x}_i du repère inertiel (Eubanks, 1993) est donnée par:

$$\vec{x}_i = Q\vec{x}_t = (PN)(U)(XY)\vec{x}_t \quad (1.1)$$

La matrice XY est associée aux paramètres décrivant le mouvement, vu depuis le repère terrestre, du pôle céleste des éphémérides (*CEP*) : x_p et y_p . La matrice U est liée au temps sidéral moyen de Greenwich (*GMST*) lui même lié au temps universel *UT1* par une relation conventionnelle (Aoki *et al.*, 1982), c'est-à-dire au paramètre décrivant l'angle de rotation de la Terre. On définit concrètement *UT1 - TAI* comme les variations du temps universel par rapport à un temps uniforme, *TAI* étant le temps atomique international. Enfin la matrice PN est associée aux mouvements de Précession-Nutation du *CEP* : les paramètres $\delta\psi$, $\delta\epsilon$ intervenant dans cette matrice sont les écarts en longitude et obliquité respectivement du *CEP* observé par rapport

au pôle céleste conventionnel (CEP , $J2000$) calculé à partir des modèles de précession-nutation. Les 5 paramètres d'orientation de la Terre (EOP): $x_p, y_p, UT1 - TAI, \delta\psi, \delta\epsilon$, sont déterminés à l'heure actuelle par les observations de géodésie spatiale. Nous reviendrons plus en détail sur la signification de ces paramètres dans le paragraphe consacré aux observations de la rotation de la Terre.

La séparation entre mouvement du pôle et précession-nutation est arbitraire mais utile pour des études géophysiques dans la mesure où le mouvement du pôle représente le mouvement de l'axe du pôle céleste des éphémérides (CEP) dans le repère fixe de référence lié à la Terre (repère "terrestre") causé par des processus internes à la Terre (atmosphère, océans, noyau...) tandis que la précession-nutation représente le mouvement du même axe vu depuis le repère céleste et causé principalement par l'action gravitationnelle des corps célestes sur le bourrelet équatorial de la Terre.

Les mouvements de précession-nutation sont périodiques et bien modélisés. Aussi dans la suite de cette étude, nous appliquerons cette séparation et étudierons plus particulièrement le mouvement du pôle.

La figure suivante (Figure 1.2) illustre les deux repères: terrestre $Gxyz$ et céleste $GX^*Y^*Z^*$.

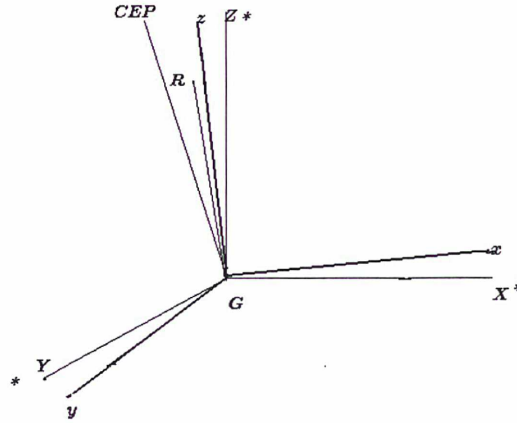


Figure 1.2: Repère terrestre ($Gxyz$) et repère céleste ($GX^*Y^*Z^*$). R est l'axe instantané de rotation de la Terre et CEP l'axe du Pôle céleste des éphémérides.

2 Description dynamique et équations de Liouville

Afin d'étudier les variations de la rotation de la Terre ainsi que leur causes, il est nécessaire d'adopter un modèle dynamique pour la rotation de la Terre. Le modèle que nous présentons se base sur la théorie d'Euler concernant la rotation de tout corps sphérique, rigide autour de son centre de masse. Elle s'appuie sur l'application du théorème fondamental de conservation du moment cinétique dans le repère inertiel:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} \Big|_{\text{inertiel}} = \vec{L} \quad (1.2)$$

où \vec{H} est le moment cinétique total de la Terre et \vec{L} représente l'ensemble des couples extérieurs agissant sur la Terre (i.e couple luni solaire, atmosphérique si l'atmosphère est considéré comme

un agent extérieur). Cette équation exprimée dans le repère de référence lié à la Terre T , $Gxyz$, et tournant à la vitesse $\vec{\omega}$ par rapport au repère inertiel, devient:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} |_{Gxyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{L} \quad (1.3)$$

avec

$$\vec{H} = \int_T (\vec{r} \wedge \vec{v}) dm = \int_T \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm + \int_T (\vec{r} \wedge \vec{v}_r) dm \quad (1.4)$$

$$\vec{H} = I\vec{\omega} + \vec{h} \quad (1.5)$$

où \vec{v} est la vitesse de l'élément de masse dm dans le repère inertiel, $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ avec \vec{v}_r la vitesse de cet élément dans $Gxyz$ et \vec{r} le rayon vecteur du centre de masse G à l'élément de masse dm .

Dans le repère terrestre, le vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$ reste voisin du pôle géographique G_z et sa valeur reste proche de la vitesse de rotation moyenne Ω ($\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s). C'est pourquoi on l'écrit sous la forme:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 + 1 \end{pmatrix} \Omega$$

où m_1 et m_2 donnent la position de $\vec{\omega}$ dans le plan équatorial terrestre et m_3 la vitesse de rotation. \vec{h} est le moment cinétique relatif, il est créé par des mouvements relatifs de masse dans la Terre.

I est la matrice d'inertie du système dans le repère terrestre.

$$I = \begin{pmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & A + c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C + c_{33} \end{pmatrix}$$

A est le moment principal d'inertie équatorial, C le moment d'inertie axial.

Les c_{ij} sont des incréments d'inertie dus à la redistribution des masses dans la Terre du fait de sa non rigidité. Si la Terre était rigide, ces termes ainsi que le moment cinétique relatif seraient nuls.

Le développement de l'équation vectorielle de conservation du moment cinétique (1.3) conduit aux équations d'Euler. La forme linéarisée de ces équations sont les équations de Liouville qui décrivent la rotation de la Terre en première approximation, soit:

$$A\Omega\dot{m} - i\Omega^2(C - A)m + i\Omega^2c + i\Omega h + \dot{c}\Omega + \dot{h} = L \quad (1.6)$$

$$C\Omega\dot{m}_3 + \dot{c}_{33}\Omega + \dot{h}_3 = L_3 \quad (1.7)$$

La première équation regroupe les termes équatoriaux sous forme complexe:

$m = m_1 + im_2$, $c = c_{13} + ic_{23}$, $h = h_1 + ih_2$, $L = L_1 + iL_2$.

Posons $\sigma_E = \frac{(C-A)}{A}\Omega$, appelée fréquence d'Euler, nous avons:

$$\dot{m} - i\sigma_E m = \frac{L}{A\Omega} - i\frac{\Omega c}{A} - i\frac{h}{A} - \frac{\dot{c}}{A} - \frac{\dot{h}}{A\Omega} \quad (1.8)$$

$$\dot{m}_3 = \frac{L_3}{C\Omega} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} \quad (1.9)$$

Nous pouvons regrouper les termes du second membre sous la forme d'une fonction d'excitation totale $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ et Ψ_3 :

$$\dot{m} - i\sigma_E m = -i\sigma_E \Psi \quad (1.10)$$

$$\dot{m}_3 = \dot{\Psi}_3 \quad (1.11)$$

$$\Psi = \frac{iL}{(C-A)\Omega^2} + \frac{c}{C-A} - i\frac{\dot{c}}{(C-A)\Omega} + \frac{h}{(C-A)\Omega} - i\frac{\dot{h}}{(C-A)\Omega^2} \quad (1.12)$$

$$\dot{\Psi}_3 = \frac{L_3}{C\Omega} - \frac{\dot{c}_{33}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} \quad (1.13)$$

Le développement final des équations dépend du modèle de Terre T choisi, (rigide, à deux couches (manteau et noyau liquide), à trois couches (graine solide)). Ici nous avons écrit l'équation de Liouville pour la Terre entière. On peut écrire une équation de Liouville pour chaque couche terrestre considérée.

L'étude des perturbations se base sur la modélisation des diverses composantes de la fonction d'excitation selon les excitations considérées. On peut ainsi étudier leurs répercussions sur la rotation de la Terre en confrontant les observations et les modélisations à diverses échelles de temps.

En pratique, on assimile abusivement les quantités m_1, m_2 du vecteur instantané de rotation de la Terre aux composantes x_p et y_p du mouvement du pôle (CEP) observé, dans les études concernant la rotation de la Terre. Bien que relativement proches, le CEP et l'axe instantané de rotation sont distincts et il faut en tenir compte lors d'études impliquant à la fois les équations de Liouville et les observations géodésiques (Gross, 1992; Brzeziński et Capitaine, 1993). Ceci provient du fait qu'on a longtemps pensé que les observations astrométriques donnaient accès à l'axe de rotation de la Terre et non à un axe finalement plus proche de l'axe de figure (axe d'inertie moyen) et définit comme le " CEP ". D'autre part, les modèles géophysiques sont encore imparfaits et il est impossible d'expliquer tout le spectre de la rotation de la Terre.

3 Composantes théoriques propres à la rotation de la Terre

En l'absence d'excitation extérieure ($L = 0$), la Terre rigide ($c = 0, h = 0$) se comporte comme un oscillateur d'équation ($\Psi = 0$):

$$i\dot{m}/\sigma_E + m = 0$$

La solution de cette équation est un mouvement circulaire au sol de l'axe instantané de rotation de la Terre de période $2\pi/\sigma_E$ (environ 10 mois) appelé le mouvement d'Euler. Cette oscillation est un mode propre (oscillation libre) de la Terre. Or, il a été impossible de retrouver cette période théorique par les observations. Chandler décela une oscillation de 14 mois appelée aujourd'hui oscillation de Chandler. L'allongement de la période eulerienne d'un facteur 0.7 résulte de la nature quasi-élastique de la réponse de la Terre aux excitations. D'une manière générale, la prise en compte des déformations élastiques de la Terre se fait grâce à l'utilisation des nombres de Love entrant comme facteurs dans les équations des incréments d'inertie. Il faut cependant noter que la rhéologie de la Terre est très complexe puisqu'elle diffère suivant les fréquences spectrales des excitations et suivant les "couches" considérées (croûte, manteau, lithosphère). En effet, les temps de réponse élastique et le comportement n'est pas le même aux périodes sismiques, de marées, de fonte des glaces et de convection. Depuis, on observe des fluctuations de la phase et de l'amplitude du terme de Chandler dans le mouvement du pôle. Celles-ci restent mystérieuses ainsi que le mécanisme d'excitation et de maintenance de cette

oscillation libre. Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre 6 consacré à l'étude non linéaire de certains signaux terrestres.

4 Liens avec les excitations

Couples extérieurs luni solaire, Précession-Nutation

L'action de la Lune et du Soleil (et dans une moindre mesure celle des planètes du système solaire) crée un couple gravitationnel \tilde{L} qui agit sur le bourrelet équatorial de la Terre tendant à le faire basculer sur le plan de l'écliptique. Ce couple peut être exprimé théoriquement en fonction du temps à l'aide de développements en séries périodiques des arguments astronomiques de la Lune, du Soleil et des planètes.

Il en résulte principalement un mouvement conique en 26 000 ans du pôle céleste des éphémérides (*CEP*), autour du pôle de l'écliptique: la précession. Superposées à ce mouvement, du fait des variations périodiques dans les mouvements de la Lune et du Soleil, de petites oscillations périodiques, les nutations apparaissent. Les nutations existent et peuvent être définies de la même manière pour les différents axes de la Terre (axe de rotation, axe du moment cinétique) comme les mouvements spatiaux de ces axes causés par l'action de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre.

Le modèle de Précession-Nutation (UAI, 1980) est précis à environ 7-8 millisecondes de degré (*mas*) près. Les écarts restant entre prédictions du modèle et observations ($\delta\psi$, $\delta\epsilon$) sont dûs largement à la mauvaise modélisation de la nutation libre du noyau qui introduit une résonance dans les nutations. Les observations nous permettent d'accéder avec précision aux nutations du Pôle Céleste des Ephémérides (*CEP*).

On définit les termes d'Oppolzer d'un axe comme étant l'écart spatial entre les nutations de cet axe et celles du *CEP*. Nous avons calculé analytiquement ces termes pour l'axe de rotation de la Terre non rigide et l'axe du moment cinétique pour les principales fréquences de nutations. Nous avons confirmé le rôle primordial du noyau dans l'augmentation de la valeur de ces termes par rapport à ceux d'une Terre rigide. Notre travail s'est plus particulièrement porté sur la comparaison des valeurs des termes d'Oppolzer calculés d'une part grâce aux équations analytiques de Liouville pour chaque couche terrestre et d'autre part en utilisant la fonction de transfert de Wahr (Wahr, 1979a,b) entre la Terre rigide et non rigide provenant d'une intégration numérique (méthode appelée "semi-analytique"). Les résultats obtenus sont très encourageants puisque les différences entre les deux méthodes sont très faibles. La méthode semi-analytique est plus précise mais la méthode analytique a l'avantage de clairement séparer la contribution de chaque couche terrestre dans les termes d'Oppolzer. Il serait intéressant de reprendre ce travail en ajoutant l'effet de la graine solide dans le calcul analytique des termes d'Oppolzer. Nous ne développerons pas ce sujet d'avantage, dans la mesure où cette thèse est consacrée à l'étude du mouvement du pôle et de la longueur du jour et à leurs variations d'origine géophysique. Le lecteur intéressé pourra néanmoins consulter l'article donné en Annexe 1 (Frède et Dehant, 1999).

Excitations géophysiques

Si l'on applique la séparation (cf équation 1.1) entre le mouvement du pôle et la précession-nutation, on considère que les excitations du mouvement du pôle sont toutes⁴ d'origine géophysique (océans, atmosphère, couplage noyau-manteau,...) et peuvent être prises en compte sous

⁴En fait une très faible proportion du mouvement du pôle est aussi due, en théorie, aux marées gravitationnelles, cf Bretagnon *et al.*, 1997

forme d'échange de moment cinétique entre la Terre et les différentes couches géophysiques considérées.

Afin de décrire les excitations atmosphériques de la rotation terrestre, nous adopterons l'approche fondée sur le moment cinétique atmosphérique (il existe une autre approche basée sur les couples, dans laquelle on considère que l'atmosphère est un corps extérieur à la Terre, son action se calcule alors sous la forme d'un couple extérieur).

Barnes *et al.* (1983), ont proposé une nouvelle formulation des fonctions d'excitation atmosphériques: ce sont les fonctions effectives de moment cinétique atmosphérique (*EAM*) notées χ_1, χ_2, χ_3 . En première approximation, ces fonctions peuvent être séparées en un terme de "pression" et un terme de "vent" (notés $\chi_{i=1,3}^p$ et $\chi_{i=1,3}^w$ respectivement). Le terme de "pression" est représentatif des variations de densité des masses d'air associées aux changements de pression atmosphérique, tandis que le terme de "vent" est associé aux variations causées par les déplacements des masses d'air. Ainsi il est possible de considérer séparément la contribution de chaque composante sur la rotation de la Terre.

L'évaluation de ces fonctions est rendue possible à partir de modèles météorologiques complexes et de mesures consistant en des valeurs de pression, de température, de vitesse de vents (pour n'en citer que quelques uns) en différents points du globe (Kalnay *et al.*, 1994: NCEP Reanalysis). Bien que les données météorologiques résultent de traitements complexes, le calcul des fonctions effectives de moment cinétique atmosphérique est très simple. Rappelons de quelle manière, les équations de Liouville permettent de relier le mouvement du pôle et la longueur du jour aux fonctions d'excitation:

$$m_1 - \dot{m}_2 / \sigma_C = \Psi_1$$

$$m_2 + \dot{m}_1 / \sigma_C = \Psi_2$$

$$\dot{m}_3 = \dot{\Psi}_3$$

où σ_C est la fréquence de Chandler et Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 les fonctions de moment cinétique atmosphériques (Barnes *et al.*, 1983):

$$\chi_1 = \chi_1^p + \chi_1^w = \quad (1.14)$$

$$\frac{-1.00R^4}{(C-A)g} \int \int p_s \sin \phi \cos^2 \phi \cos \lambda d\lambda d\phi \quad (1.15)$$

$$- \frac{1.43R^3}{\Omega(C-A)g} \int \int \int (u \sin \phi \cos \phi \cos \lambda - v \cos \phi \sin \lambda) d\lambda d\phi dp. \quad (1.16)$$

$$\chi_2 = \chi_2^p + \chi_2^w = \quad (1.17)$$

$$\frac{-1.00R^4}{(C-A)g} \int \int p_s \sin \phi \cos^2 \phi \sin \lambda d\lambda d\phi \quad (1.18)$$

$$- \frac{1.43R^3}{\Omega(C-A)g} \int \int \int (u \sin \phi \cos \phi \sin \lambda + v \cos \phi \cos \lambda) d\lambda d\phi dp. \quad (1.19)$$

$$\chi_3 = \chi_3^p + \chi_3^w = \quad (1.20)$$

$$\frac{0.70R^4}{Cg} \int \int p_s \cos^3 \phi d\lambda d\phi \quad (1.21)$$

$$+ \frac{R^3}{\Omega Cg} \int \int \int u \cos^2 \phi d\lambda d\phi dp. \quad (1.22)$$

ϕ désigne la latitude, λ la longitude, $p_s(\phi, p, t)$ la pression de surface et $u(\phi, \lambda, p, t)$ et $v(\phi, \lambda, p, t)$, les composantes est et nord de la vitesse du vent à la pression p .

Les facteurs 1, 1.43 et 0.70 sont les nombres de Love traduisant la non rigidité de la Terre. R est le rayon moyen de la Terre ($R = 6370\text{km}$) et g la constante de gravitation ($g = 9.81\text{ms}^{-2}$), C et A sont les moments principaux d'inertie de la Terre ($C = 7.04 \times 10^{37}\text{kg.m}^2$ et $\frac{C-A}{C} = 0.0033$). Les intégrations se font pour la latitude ϕ entre 0 et π , pour la longitude λ entre $-\pi$ et π . En principe le terme de vent devrait être intégré de la pression au sol jusqu'en haut de l'atmosphère, cependant les modèles se limitent en général à une surface isobare de 50 millibars. Néanmoins dans la série issue d'une réanalyse globale des données atmosphériques de ces quarante dernières années par le NCAR (National Center for Atmospheric Research) et le NCEP (National Center for Environmental Prospect), l'intégrale atteint la valeur 10 millibars (Salstein et Rosen, 1997). Ceci permet de prendre en compte une partie plus importante de la stratosphère. Il est important d'inclure la plus grande partie possible de la stratosphère dans les déterminations des fonctions atmosphériques puisque les vents zonaux stratosphériques annuels et quasi-bienaux ont un rôle primordial dans l'excitation saisonnière des *EOP*. En pratique, ces quantités sont évaluées à partir de grilles de pression et de vent recouvrant le globe. Ces valeurs du vent et de la pression sont pour une grande partie, issues de modèles atmosphériques contraints par des observations météorologiques.

Il est possible d'utiliser la même formulation pour définir les fonctions de moment cinétique océaniques (Ponte, 1997). En effet les océans ont été reconnus comme ayant un rôle non négligeable dans les variations de la rotation de la Terre. Cependant les observations sont plus difficiles et les modèles globaux océaniques encore très simplifiés.

Mentionnons d'autres phénomènes géophysiques induisant également une variabilité significative de la rotation de la Terre: mouvements d'eau souterraine, mouvements de convection dans le manteau.... Mais leurs impacts restent encore mal connus et leur modélisation incomplète. Nous décrirons en détail chacun de ses effets, dans la partie consacrée aux observations.

Ainsi, vu la complexité de la physique de la Terre, le manque de modèles pour certains phénomènes, la simplicité des modèles pour d'autres, les linéarisations fréquentes, la théorie de la rotation de la Terre et de ses excitations reste incomplète. La meilleure connaissance que nous ayons de la rotation de la Terre provient des déterminations astrométriques (à condition d'utiliser les méthodes de traitement du signal les plus adéquates). Nous allons les présenter dans le paragraphe suivant.

3 Observations

1 Méthodes

Il n'est pas possible d'observer directement la rotation de la Terre. Par contre, il est possible de déterminer les positions et mouvements précis de certains instruments liés à la croûte terrestre. Ceci permet de définir l'orientation d'une base terrestre dans un repère céleste inertiel. Jusqu'en 1969, les observations de la rotation de la Terre utilisaient exclusivement des moyens optiques (Astrolabe de Danjon, instruments méridiens), qui permettaient de déterminer l'instant de passage d'une étoile au méridien pour une distance zénithale donnée. Ces méthodes ont permis de mettre en évidence de nombreuses variations des *EOP* mais restent limitées en précision. Aujourd'hui, les méthodes optiques ont été largement supplantées par les techniques dites de géodésie spatiale: l'interférométrie à très longue base (VLBI), la télémétrie laser sur la Lune (LLR) et sur les satellites artificiels (SLR), les systèmes de positionnement global (GPS) et les observations Doppler (DORIS). Nous allons décrire ces techniques plus précisément:

- Le VLBI (Interférométrie à très longue base):

La mesure brute par cette technique est le retard que met la même onde radio venant d'une source extragalactique pour arriver en deux (ou plusieurs) radio télescopes situés sur le sol. Les informations recueillies sont à la fois les positions des radio sources et des radio télescopes et permettent de calculer les 5 composantes de la matrice de rotation Q , c'est-à-dire les EOP . Les radio sources observées sont à des distances d'environ 10^{10} années lumière⁵ de la Terre. La technique VLBI est donc inertielle en ce sens que le mouvement propre de ces objets peut être considéré comme négligeable, on réalise alors un repère quasi-inertiel (concrètement, les radio sources ont une structure qui évolue et induit un petit mouvement propre non nul (Charlot, 1991)). La précision des observations VLBI est très grande et les systèmes de référence très bien réalisés; de même, les EOP sont actuellement déterminés avec des erreurs de l'ordre d'un dixième de milliseconde de degré (mas) (environ 3mm sur le sol) pour le mouvement du pôle et 0.02 ms pour la longueur du jour. La principale source d'incertitude dans la détermination des EOP avec la technique VLBI réside dans la modélisation des mouvements des plaques tectoniques, des horloges et de propagation atmosphérique (les effets de structure des sources interviennent dans une moindre mesure).

- SLR (Satellite Laser Ranging), GPS, Doris:

La télémétrie laser sur satellite est une technique "satellitaire", dynamique par la connaissance de l'orbite du satellite. Les observations d'un satellite ou d'un ensemble de satellites peuvent être considérées comme définissant un repère céleste quasi-inertiel en rotation lente par rapport à un vrai repère inertiel. La quantité observée est le temps aller-retour que met une impulsion laser entre la station d'observation terrestre d'où elle est émise et le satellite muni de réflecteurs qui renvoient l'impulsion. La principale source d'erreurs provient des erreurs de modélisation des effets perturbateurs de l'orbite du satellite. Par exemple, le satellite LAGEOS est une petite sphère couverte de réflecteurs, en orbite à une altitude d'environ 6000 km qui permet de définir un repère de référence stable et fournit des séries de mouvement du pôle tous les trois jours avec une précision de l'ordre de 0.2/0.3 mas. Il est cependant très difficile de bien séparer les éléments orbitaux des variations dans l'orientation de la Terre et la détermination du temps universel aux longues périodes est impossible.

Il existe d'autres techniques dites "satellitaires" telles que le GPS et le système DORIS. Pour DORIS, l'observable de base est la vitesse entre la station au sol et le satellite (effet Doppler). On en déduit des séries de mouvement du pôle dont la précision est de 1 ou 2 mas, mais les données servent essentiellement à la détermination d'un repère de référence terrestre.

Le GPS est un réseau d'au moins 18 satellites dont 4 à 8 sont observables en même temps, en orbite à haute altitude. L'observable principale est la différence de phase entre l'horloge du satellite et celle du récepteur GPS au sol. Le fait de disposer d'un nombre important de satellites permet de mieux séparer les erreurs d'orbites des variations de la rotation de la Terre et donc de mesurer les variations à très courtes périodes de la rotation de la Terre. De plus, l'utilisation de cette technique est très peu coûteuse (contrairement au VLBI par exemple). La précision des EOP journaliers obtenus par GPS est de l'ordre de 0.2 mas pour le mouvement du pôle et de 0.04 ms pour UT.

⁵1 année lumière = 9500 milliard de km

- LLR (Lunar Laser Ranging):

La télémétrie laser sur la Lune est une technique similaire (quoique techniquement plus difficile à mettre en oeuvre (il n'y a qu'une Lune!)) à la technique de télémétrie laser sur satellites. Grâce à des réflecteurs déposés sur la Lune, il est possible de mesurer le temps aller-retour d'une impulsion laser entre une station terrestre et la Lune. Les principales sources d'erreurs de cette technique sont causées par le fait qu'on ne dispose que de deux ou trois stations, de plus, le mouvement de la Lune étant très lent l'estimation du mouvement du pôle est difficile.

Grâce à la masse importante de la Lune, son orbite fournit un repère céleste quasi-inertiel. La précision des données *EOP* est un peu plus faible que pour les autres techniques de géodésie spatiale. La technique VLBI reste la seule à pouvoir fournir à la fois un repère céleste inertiel et les 5 paramètres de rotation de la Terre avec précision et simultanément.

Toutes les techniques décrites précédemment donnent accès à des observables qui sont liées aux paramètres d'orientation de la Terre, entre autres. Chaque centre d'analyse traite les observations brutes (temps aller-retour d'une impulsion...) avec des procédures de calculs propres dont nous ne parlerons pas ici, mais dont l'idée principale est d'écrire des équations d'observations linéaires liant les observations et les paramètres d'un modèle, puis d'ajuster ces paramètres en cherchant à minimiser les écarts entre observations et modèle (par exemple par moindres carrés). Le but recherché est de déterminer au mieux la matrice "Q" d'orientation de la Terre (Equation 1.1).

Dans ce type de résolution, de nombreux facteurs interviennent comme par exemple, la modélisation des erreurs d'observation, de la transmission atmosphérique, le choix du modèle *a priori*, des corrélations entre les variables... et demande donc un traitement important avant de fournir les résultats des *EOP* qui nous intéressent directement. D'autre part, des simplifications en aval sont faites en considérant que pour la détermination des 5 paramètres de rotation de la Terre, les erreurs de mesures sont indépendantes et suivent une loi gaussienne. De plus, à l'exception des très courtes périodes (sub-diurnes), les 5 paramètres sont déclarés indépendants.

Au final, chaque centre d'analyse produit des séries temporelles des *EOP* individuelles en donnant pour chacune d'elle un facteur d'incertitude formelle. Les fréquences d'échantillonnage des séries varient selon le type de problème à étudier. Il existe par exemple des campagnes intensives d'observation VLBI sur 24 heures où l'on recueille une mesure toutes les 5 à 7 minutes, tandis que plus généralement, la période d'échantillonnage des séries est en de 1 jour. Pour une description plus détaillée de chaque série, le lecteur pourra se reporter au rapport annuel de l'IERS (IERS, 1997). Il n'est pas question dans le cadre de cette thèse d'énumérer précisément les caractéristiques de toutes les séries. Notons simplement que, d'une manière générale, les séries recueillies par VLBI fournissent les 5 *EOP* la plupart du temps et parfois aussi le "*LOD*" (la longueur du jour peut être estimée indépendamment par les observations GPS et VLBI, ou bien être obtenue simplement par dérivation du temps universel). Les séries issues de GPS donnent plutôt accès au mouvement du pôle *PMX*, *PMY* et à *LOD*. Le SLR fournit *PMX*, *PMY* et *UT*, Le LLR fournit plutôt *UT* et les écarts au pôle céleste ($d\psi$, $d\epsilon$), et Doris fournit *PMX* et *PMY*.

De plus, pour une même technique, les incertitudes formelles fournies par les centres d'analyse varient beaucoup. Aussi, ces incertitudes formelles individuelles ne peuvent pas être comparées entre elles entre deux centres différents et ne sont pas très représentatives. Elles doivent être recalibrées conjointement: l'IERS recalcule les incertitudes de chaque série après les avoir corrigées d'un biais, en les comparant à une série de référence et après élimination des points aberrants (en considérant une répartition en cloche des erreurs, on élimine les points en dehors

des bornes $[\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$ (\bar{X} est la moyenne de la série notée X et σ son écart type). La source principale de biais entre les séries vient des méthodes d'analyses différentes des centres, de l'évolution choisie pour les repères de référence et des modèles des plaques tectoniques. L'IERS détermine alors les variances de paires ou variance d'Allan, (Gray et Allan, 1974) entre les séries et en déduit un facteur d'échelle. Au final, l'incertitude d'une série sera son incertitude formelle multipliée par ce facteur d'échelle et sera plus réaliste. Dans les opérations de combinaison de séries, on détermine une série finale résultant de la somme pondérée de plusieurs séries individuelles et provenant de techniques différentes. L'IERS produit plusieurs séries combinées utilisées pour des études géophysiques de la rotation de la Terre (par exemple: C01, C02, C04 que nous utiliserons plus tard).

2 EOP: Paramètres d'Orientation de la Terre

Les techniques d'observation décrites précédemment permettent d'avoir accès aux Paramètres d'Orientation de la Terre (*EOP*) sous forme de séries temporelles qui, comme nous l'avons vu à travers la matrice de passage, relie le repère de référence terrestre au repère de référence céleste inertiel. Ces cinq paramètres sont les suivants:

- x_p et y_p qui sont les coordonnées du pôle dans le repère terrestre ($p = x_p - iy_p$). L'observation donne la localisation du Pole Céleste des Ephémérides (*CEP*) et non celle de l'axe instantanée de rotation. Les théories dynamiques (Liouville) sont basées sur le mouvement de l'axe de rotation instantané: m_i . Gross (1992), a montré que la relation théorique entre mouvement du pôle p et mouvement de l'axe instantané de rotation m est:

$$m(t) = p(t) - i\dot{p}(t)/\Omega$$

Pour toute la suite, nous noterons la série temporelle de mouvement du pôle suivant x_p : *PMX* et suivant y_p , *PMY*.

- $UT1 - TAI$, le troisième paramètre d'orientation de la Terre est l'écart entre le temps universel (*UT1*) lié conventionnellement à l'angle de rotation de la Terre et le temps de référence atomique international (*TAI*). La dérivation temporelle de cette expression donne la durée du jour (*LOD*) fréquemment utilisée pour des études géophysiques de la rotation de la Terre. Nous utiliserons par la suite les séries temporelles de longueur du jour (*LOD*) et non $UT1 - TAI$.
- $d\psi$, $d\epsilon$, Les deux derniers paramètres apparaissent du fait de la séparation du mouvement du pôle en deux (jauge de rotation, cf Eubanks, 1993) et représentent les écarts au pôle céleste. Ce sont des corrections aux nutations (mouvement céleste du *CEP*). Les mouvements de précession-nutation sont bien modélisés et correspondent aux variations spatiales du *CEP* causées principalement par les couples gravitationnels sur le bourrelet équatorial de la Terre. Dans la suite nous ne parlerons pas de ces paramètres et notre étude portera sur les séries de mouvement du pôle *PM* et de longueur du jour *LOD*, leur décomposition et leurs variations d'origine géophysique.

3 Mouvement du pôle

Description des composantes du mouvement du pôle

Les séries d'observation du mouvement du pôle possèdent diverses composantes à diverses échelles de temps. Soit $x(t)$, la série totale de mouvement du pôle PMX et $y(t)$ la série PMY . Les séries $x(t)$ et $y(t)$ peuvent être séparées en différentes composantes temporelles grâce au filtre CENSUS X-11 (Shiskin *et al.*, 1967) qui permet d'écrire les séries sous la forme:

$$x(t) = x(t)^l + x(t)^{ch} + x(t)^s + \epsilon_x(t)$$

$$y(t) = y(t)^l + y(t)^{ch} + y(t)^s + \epsilon_y(t)$$

c'est-à-dire d'isoler un terme de tendance l , le terme associé à l'oscillation libre de Chandler ch , un terme saisonnier regroupant les variations annuelles et semi-annuelles s et enfin un terme contenant les hautes fréquences (courtes périodes) $\epsilon(t)$ et étant considéré comme un résidu principalement gouverné par du bruit. Cette décomposition est effectuée pour les séries de mouvement du pôle en X et en Y : Figure 1.3.

La série utilisée ici est la série C01 de l'IERS depuis 1900 jusqu'à aujourd'hui. C'est la série combinée de mouvement du pôle la plus longue disponible, elle est uniforme et donnée tous les 20 ième d'années. Nous voyons que la tendance est plus marquée sur la composante Y du pôle, elle correspond à la dérive séculaire vers l'ouest du pôle. Il est aussi évident que les techniques d'observation ayant fortement progressé, la précision de la série totale n'a cessé de s'accroître et les résidus causés par les bruits de mesures sont moins importants au cours du temps.

On voit d'autre part, que la composante dominante du mouvement du pôle est le terme de Chandler.

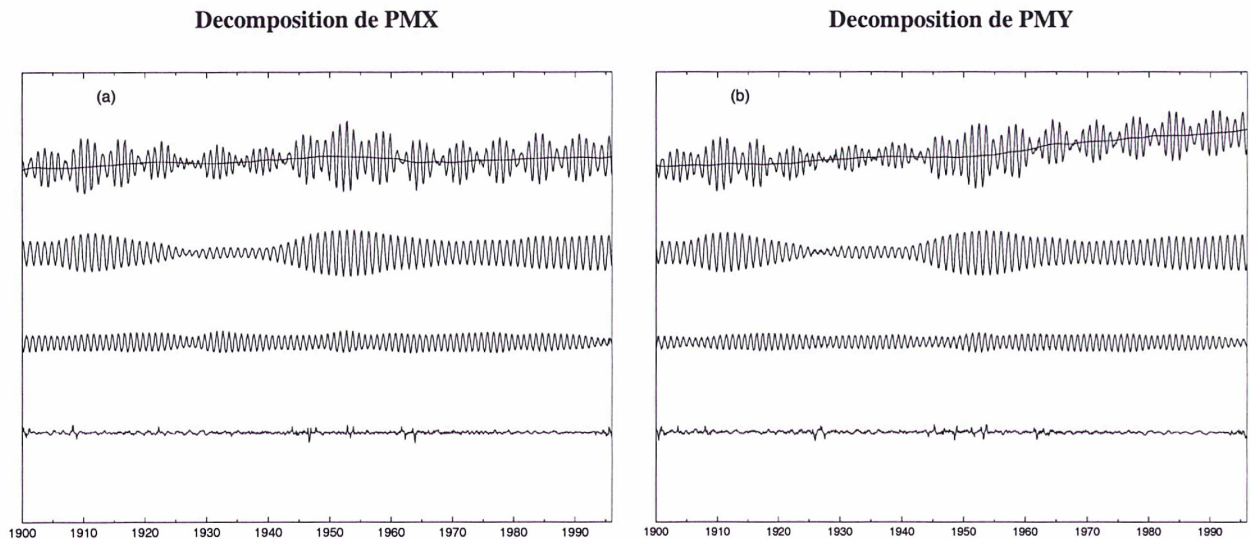


Figure 1.3: Décomposition des séries de mouvement du pôle PMX (a) et PMY (b): De haut en bas: Série totale, terme de Chandler, variations saisonnières et résidus. Les séries totales présentent des oscillations maximales de $0.4''$ (secondes de degrés), le terme de Chandler oscille dans une bande inférieure à $0.2''$, les termes saisonniers ont des amplitudes de l'ordre de $0.1''$ tandis que les résidus sont nettement inférieurs à $0.05''$

Causes géophysiques des variations du mouvement du pôle

Variations à longues périodes

Les variations à long terme du pôle comportent les mouvements séculaires (plusieurs siècles) et décennaux (plusieurs dizaines d'années). La composante séculaire est estimée entre 1.6 mas/an (Ming et Danam, 1988) et 3 mas/an (Gross, 1990) le long du méridien 70 degrés ouest. Les différences entre les deux déterminations proviennent sans doute du manque de précision des séries optiques. Il faudra reprendre ces estimations avec des séries plus longues et en utilisant les nouvelles mesures de géodésie spatiale.

La tendance séculaire observée dans le mouvement du pôle proviendrait de l'effet de la fonte des glaces il y a 10 000 ans et de la lente réponse anélastique de la Terre à ces échelles de temps. Cette effet est connue sous le nom de "rebond post glaciaire".

Les variations décénales du mouvement du pôle, aussi connues sous le nom d'oscillation de Markowitz, ont une période d'environ 20/30 ans et une amplitude de 20 mas. La réalité physique de cette oscillation reste controversée. En effet, il n'a pas été reconnu que cette variation soit d'origine géophysique mais pourrait provenir simplement d'erreurs de mesures de l'astrométrie optique. Des séries de géodésie spatiale plus longues et précises permettront de clarifier ce point.

Cependant, plusieurs comportements terrestres pourraient intuitivement expliquer l'existence de variations décénales dans le mouvement du pôle: ce sont les transfert de masses causés par les mouvements interannuels du niveau de la mer, des masses d'eau souterraine et des glaces. Dans la mesure où le liquide peut s'accumuler pendant des années sous différentes formes sur et sous la Terre (glace, lac..), les variations à longues périodes du mouvement du pôle sont plus sujettes à être générées par ces éléments liquides que par des variations atmosphériques (échelles de temps beaucoup plus rapides) .

Oscillation de Chandler

De période environ 433 jours, l'oscillation chandlérienne présente des variations d'amplitude et de phase au cours du temps qui restent inexplicées. Sont-elles causées par des fluctuations aléatoires ou proviennent-elles de variations systématiques de l'excitation? Nous remarquons par exemple sur le graphe qu'il s'est produit un renversement de phase inexplicé entre 1930 et 1940.

De même l'origine de l'amortissement (mesuré par le facteur d'amortissement Q) du terme de Chandler reste incompris (les causes les plus probables sont l'anélasticité du manteau et la dissipation océanique dans les fonds marins).

D'une part l'oscillation chandlerienne est amortie, d'autre part, il faut une source d'excitation pour la maintenir. Divers candidats ont été proposés bien qu'aucun d'eux ni même leurs effets combinés n'aient été retenus comme ayant suffisamment d'énergie pour expliquer l'oscillation:

- Les fluctuations des masses d'air (atmosphère)
- Les mouvements des masses fluides souterraines
- Les tremblements de Terre

- Les couples électromagnétiques ou topographiques entre le noyau et le manteau dûs à la présence du noyau liquide

Il semble que les variations de pression atmosphérique soient la source la plus importante dans l'excitation du terme de Chandler. Wahr (1983), a montré que l'atmosphère explique 25 % de l'excitation totale avec un effet du terme des vents négligeable. Il utilise pour cela une approche mixte avec les formalismes "moment cinétique" et "couples".

L'étude des eaux souterraines nécessite un traitement complexe puisqu'il faut mesurer ou modéliser les taux de précipitation et d'évaporation en tout point du globe. Cependant, on explique 30 % de l'oscillation de Chandler par les effets combinés de la pression atmosphérique et des eaux souterraines (Kuehne et Wilson, 1991).

Les tremblements de Terre se sont révélés trop faibles pour intervenir de manière significative sur l'excitation de Chandler (Souriau et Cazenave, 1985; Gross, 1986) et notre connaissance limitée sur la rhéologie du manteau donne à toutes ces études un côté incertain .

L'étude des couples noyau-manteau a montré que les variations de pression à la frontière noyau-manteau (CMB) seraient de magnitude suffisante pour exciter l'oscillation de Chandler (Le Mouél *et al.*, 1985; Runcorn *et al.*, 1990). Cependant il manque des preuves observationnelles pour confirmer ces hypothèses.

Termes saisonniers

Contrairement au terme de Chandler, l'oscillation annuelle est très stable et varie peu en amplitude et phase au cours du temps. Du fait de la proximité de la période de Chandler (433 jours) et de la période annuelle (365 jours), il faut au moins 6 ans de mesures pour séparer les deux signaux.

Les causes de l'excitation des termes annuel et semi-annuel sont attribuées aux variations atmosphériques, océaniques et des eaux souterraines. La prise en compte de la pression atmosphérique, des termes de vent et des excitations d'eau souterraine permettent d'expliquer 50 % de la valeur du terme annuel (Kuehne et Wilson, 1991). Il reste donc à identifier les sources d'excitation intervenant dans les 50 % restant (il faudrait étudier le rôle des redistributions de masses océaniques entre autres). Les termes saisonniers sont cependant relativement faciles à prédire à court terme.

Termes à courtes périodes

La partie comportant les courtes périodes du signal reste la plus difficile à prédire puisqu'elle est représentée statistiquement la plupart du temps par un bruit "coloré" de spectre de puissance proche de celui d'une marche aléatoire (f^{-2}). On désigne les bruits colorés par leur loi de spectre de puissance. Ainsi un bruit blanc sera dit suivre une loi en " f_0 " (la pente de son spectre de puissance est nulle) et une marche aléatoire a un spectre de puissance dont la pente est " -2 ".

On ne détecte pas de périodicités dominantes et les oscillations sont très rapides. De plus, comme l'écart quadratique moyen " rms "⁶ (root mean square) de ces termes est faible, le bruit de mesure est d'autant plus visible dans les données. La principale source d'excitation reconnue est l'atmosphère (Eubanks *et al.*, 1988). En effet, une forte corrélation entre les séries courtes périodes des variations résiduelles " ϵ_t " du mouvement du pôle et les séries χ^p et χ^w

$${}^6rms = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x(i) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(j) \right)^2}$$

atmosphérique a été mise en évidence par de nombreux travaux. Pour des périodes allant de deux semaines à quelques mois, la corrélation atteint 50 pour cent et devient supérieure si l'on applique la correction de baromètre inverse aux océans (c'est-à-dire si l'on considère qu'une hausse de pression atmosphérique est compensée par une baisse du niveau de l'eau, donc que l'océan répond comme un baromètre inverse à la pression atmosphérique). La proportion maximale du signal expliqué est environ 60 %. On sait qu'une partie de l'excitation manquante provient des océans (les couples de pression et friction océanique). Cependant les calculs de tels couples restent compliqués par manque de mesures globales et de modèles précis. Ponte (1990) a montré en utilisant un modèle océanique de densité constante, que le rôle de l'océan (χ_{ocean}^p) ne peut plus être négligé pour le mouvement du pôle sur une échelle de temps de quelques jours à quelques mois. Cependant, il faudrait pouvoir quantifier précisément le rôle des vents atmosphériques sur les changements de pression dans les fonds marins. Des mesures de pression ou un modèle adapté permettraient de mieux évaluer l'effet du moment cinétique océanique sur le mouvement du pôle.

D'autre part, les variations à courtes périodes du mouvement du pôle ont été reliées à des variations barotropes (verticales) de modes normaux (oscillations propres) dans l'atmosphère (Eubanks *et al.*, 1988), (ce sont les modes de Rossby-Haurwitz, oscillations dominées par la force de Coriolis et reliées aux champs de pression et de vents atmosphériques). Ces mêmes modes sont visibles dans les données météorologiques globales. Le mode principal est H_3^1 (Madden, 1979) de période 10 jours (ce mode est visible dans χ^p).

Pour les variations à très courtes périodes, le rôle des séismes a été étudié mais ceux-ci sont trop faibles pour expliquer l'excitation manquante et restent indécélables dans les observations actuelles. De plus, grâce à la technique VLBI on a pu étudier à travers des campagnes intensives d'observations, les variations du mouvement du pôle pour des périodes inférieures à quelques jours et celles-ci sont largement reliées, là encore, aux excitations atmosphériques (la corrélation étant plus faible pour Y : 0.5 contre 0.9 pour X).

Ainsi, nous avons une connaissance limitée des causes des variations affectant le mouvement du pôle ainsi que de la modélisation géophysique des excitations et de la réponse de la Terre. Afin de déterminer l'effet océanique sur le mouvement du pôle, il faut créer un modèle dynamique de la réponse de l'océan plus sophistiqué que le baromètre inverse (Wilson, 1993) et pouvoir recueillir des observations de la pression des fonds marins.

4 Longueur du jour

Description des composantes de la longueur du jour

La série d'observation de la longueur du jour (LOD) possède diverses composantes à diverses échelles de temps (Hide et Dickey, 1991). La série totale $LOD(t)$ peut être séparée en différentes composantes temporelles grâce au filtre CENSUS X-11 soit:

$$LOD(t) = LOD(t)^l + LOD(t)^s + LOD(t)^m + \epsilon_{LOD}(t)$$

c'est-à-dire d'isoler une tendance l , le terme associé aux marées m , un terme saisonnier regroupant les variations annuelles et semi-annuelles s et enfin un terme contenant les hautes fréquences (courtes périodes) $\epsilon(t)$ et étant considéré comme un résidu principalement gouverné par du bruit. Ce type de décomposition est représenté pour la série de longueur du jour en Figure 1.4.

La série utilisée ici est la série C02 donnée tous les 5 jours de l'IERS depuis 1970 jusqu'à aujourd'hui.

L'amplitude des oscillations pic à pic est inférieure à 4 ms (millisecondes). Les variations dues aux marées zonales (marées de la Terre solide) et aux marées océaniques ne sont pas représentées sur ce graphe. L'ordre de grandeur des marées zonales pour des périodes inférieures à 35 jours dans le signal LOD , est du même ordre que les variations saisonnières c'est à dire 0.5 ms environ. L'effet des marées zonales pour des périodes supérieures à 35 jours est lui beaucoup plus faible. Les marées zonales peuvent être parfaitement modélisées et sont souvent retirées des séries temporelles pour les études géophysiques des variations de LOD . Au centre l'oscillation saisonnière fait bien apparaître un terme annuel et un terme semi-annuel. L'amplitude pic à pic de 1 ms. Et enfin le terme résiduel a une amplitude nettement inférieure à 0.5 ms. On repère immédiatement une variation importante de la longueur du jour aux alentours de 1982 dans les résidus. Cette forte oscillation correspond à l'évènement El Niño de 1982-1983.

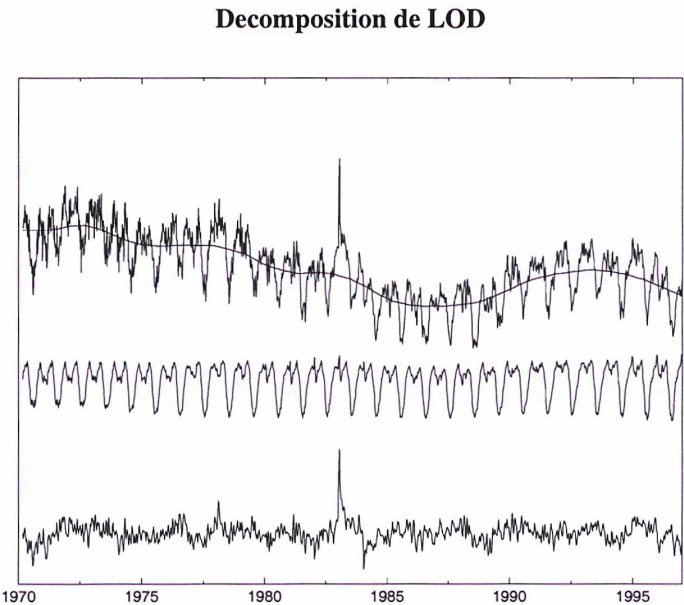


Figure 1.4: Décomposition de la série de longueur du jour LOD :
De haut en bas: Série totale corrigée des termes de marées, termes saisonniers, et résidus.

Causes géophysiques des variations de la longueur du jour

Les variations du mouvement du pôle sont principalement dues à des redistributions de masses dans la Terre et ses couches fluides. En ce qui concerne la durée du jour, les variations sont principalement induites par la friction des vents et des courants océaniques à la surface de la Terre solide.

Variations à longues périodes

La vitesse de rotation de la Terre subit un ralentissement séculaire attribué à la dissipation d'énergie par frottement associée aux marées. Ce ralentissement se traduit par une augmentation de la longueur du jour de 1.4 ms par siècle. D'autre part, le système Terre-Lune étant conservatif, ce ralentissement séculaire s'accompagne d'un éloignement de la Lune de quelques centimètres par an.

On observe également dans le signal de la longueur du jour, des variations de quelques dizaines d'années (décénales) dont l'amplitude atteint 3 ms. Elles sont expliquées par l'existence de couples à la frontière noyau-manteau (CMB), (couples électromagnétiques, topographiques, de pression...). Cependant la connaissance que nous avons sur les propriétés physiques et le mouvement du noyau ainsi que sur la topographie du CMB est assez limitée car on ne peut pas observer l'intérieur de la Terre. Il est par conséquent difficile de calculer les couples en question. De plus divers modèles ont été proposés et en général les couples déterminés ont un ordre de grandeur plus élevé que nécessaire pour expliquer les données de rotation de la Terre.

Les marées zonales

Les couples gravitationnels créent des marées terrestres et océaniques sur la Terre. On observe ces termes sous forme de variations périodiques dont l'amplitude peut atteindre environ 0.5 ms. L'effet des marées océaniques est nettement plus faible que celui des marées terrestres. Ces phénomènes sont parfaitement modélisables et prévisibles et ne sont pas pris en compte pour les études géophysiques de la longueur du jour (on a l'habitude de soustraire ces termes des séries de mesures). Pour information, le modèle de marées est celui de Yoder *et al.* (1981).

Variations interannuelles (1-10 ans)

Les variations interannuelles de la longueur du jour ont une amplitude moyenne pic à pic de 0.5 ms. Ces variations sont largement corrélées à l'oscillation *SO* (Southern Oscillation) et à l'oscillation *QBO* (Quasi Biennial Oscillation) qui sont deux oscillations quasi-périodiques apparaissant dans les paramètres atmosphériques et océaniques. L'oscillation *SO* se manifeste sous forme de variations de périodes entre 2 et 6 ans dans les mesures de pression et niveau de la mer dans le Pacifique. Les anomalies induites sur la température de surface de la mer et sur les vents zonaux perturbent les systèmes atmosphériques et océaniques de façon notable. En particulier, l'évènement connu sous le nom de "El Niño", apparaît comme un déplacement d'eau chaude dans le Pacifique pendant plusieurs mois et cause des perturbations météorologiques à l'échelle planétaire. Ainsi, le niveau de la mer varie de 20 cm et plus au fur et à mesure que la zone de courant chaud traverse le Pacifique pour venir se perdre au Pérou où elle engendre des catastrophes écologiques (pénurie de poissons, pluies diluviennes). Cette hausse du niveau de l'océan est causée principalement par les variations des vents de surface au dessus du Pacifique. Le phénomène El Niño étant reconnu comme la phase océanique de l'oscillation *SO*, on

a l'habitude de les référer ensemble sous le nom de "*ENSO*" (El Niño-Southern Oscillation). Globalement *ENSO* est une large anomalie saisonnière de la température de surface de la mer et des vents zonaux, qui affecte tous les 2-6 ans les systèmes hydrologique et atmosphérique de la Terre. El Niño correspond à la phase chaude de *ENSO* et à l'opposé "La Niña" correspond à la phase froide. L'oscillation *ENSO* est expliquée comme étant produite par des interactions non linéaires entre l'air et l'eau. En effet, des changements de la température de la surface de la mer entraînent des modifications dans les vents tropicaux. Ces vents forcent l'océan qui en retour est modifié par les nouvelles conditions météorologiques (Barnett, 1991).

L'apparition des événements *ENSO* n'est pas périodique, divers modèles essaient d'expliquer cette oscillation. Longtemps, une approche stochastique a été privilégiée: on considérait que la variabilité d'*ENSO* résultait d'une excitation extérieure stochastique sur un modèle linéaire de bruit gaussien corrélé. Plus récemment, une nouvelle école de pensées a appréhendé *ENSO* du point de vue non linéaire et a proposé que l'irrégularité de l'oscillation *ENSO* soit le résultat d'un chaos déterministe de faible dimension causé par les interactions non linéaires dans le système océanique et atmosphérique du Pacifique. Stone *et al.* (1998), proposent un modèle couplé en examinant l'effet d'une excitation stochastique sur un modèle non linéaire déterministe de *ENSO*. Ils montrent que le "bruit" pourrait jouer un rôle important dans la dynamique océano-atmosphérique induisant les oscillations chaotiques de *ENSO*⁷. Aucune de ces hypothèses n'a cependant été démontrée dans la mesure où *ENSO* se base sur des sorties de modèles, les observations étant encore insuffisantes pour utiliser sans réserve les techniques d'analyse non linéaires du signal et valider les modèles.

Pour mesurer et répertorier *SO* et El Niño (*ENSO*), on utilise l'indice *SOI* (Southern Oscillation Index) qui correspond à la mesure de la différence de pression de surface du Pacifique entre Tahiti et Darwin. Les corrélations entre les séries de longueur du jour et les événements *ENSO* sont très fortes et particulièrement lors du grand El Niño de 1982-1983.

L'autre oscillation *QBO* est une oscillation atmosphérique quasi biennale produite par des variations interannuelles des vents zonaux dans la stratosphère. Chao (1989) a trouvé une variation quasi biennale dans la série axiale de moment cinétique atmosphérique (χ_3^w) et dans la série de longueur du jour *LOD*, qu'il a attribuée à *QBO*. Il a d'ailleurs recherché la corrélation entre les variations interannuelles de la longueur du jour et l'indice combiné *ENSO* + *QBO* entre 1964 et 1988 et a trouvé une valeur moyenne très forte: 0.75.

En résumé, dans cette bande de fréquence, les processus atmosphériques dominant et expliquent environ 50 % de la variance de la série interannuelle de *LOD*. Les sources manquantes d'excitation sont à rechercher dans les ondes océaniques principalement (des modèles d'océans à deux couches ont montré que les ondes baroclines pourraient expliquer presque toute l'excitation interannuelle manquante).

Variations saisonnières

Les variations saisonnières de la longueur du jour comportent des variations annuelles d'amplitude 0.35 ms et semi-annuelles d'amplitude 0.3 ms. Elles sont induites principalement par des variations dans les vents zonaux et stratosphériques (χ_3^w). Les faibles différences observées entre *LOD* et χ_3^w pourraient venir de l'effet du terme de pression χ_3^p (Naito et Kikuchi, 1990) ou bien des erreurs de mesures (Rosen et Salstein, 1991). La contribution océanique est étudiée par Höpfner (1998). Il montre que les différences entre les séries de *LOD* et de moment

⁷Une excitation stochastique peut transformer un système quasipériodique en un système chaotique

cinétique atmosphérique (avec et sans l'hypothèse de baromètre inverse) viennent, dans le cas du terme annuel, de l'effet négligé lors des intégrations, des vents de la haute stratosphère. Pour le terme semi annuel, il préconise en plus la contribution des océans.

Variations à courtes périodes

Les variations à courts termes de la longueur du jour (inférieures à 100 jours) ont longtemps été regardées comme des erreurs stochastiques sans cause géophysique car le spectre de la longueur du jour pour les périodes inférieures à 100 jours est continu et est qualifié de bruit rouge. Il en est de même pour les variations courtes périodes ([1-100] jours) des séries de moment cinétique atmosphérique pour le terme de vent.

Aujourd'hui on montre que la cohérence entre les séries atmosphériques et de longueur du jour est très forte (> 0.9) pour des périodes descendant jusqu'à 8 jours (Dickey *et al.*, 1992). Les différences restantes peuvent à la fois provenir des erreurs de mesures mais aussi de l'existence d'autres sources d'excitations (le candidat le plus probable est l'océan).

Au début des années 1980, une oscillation aux alentours de 50 jours a été détectée dans les séries de longueur du jour (Feissel et Gambis, 1980). Cette oscillation est aussi présente dans les séries de moment cinétique atmosphérique χ_3^w et est associée à des fluctuations dans les vents zonaux. La période de cette oscillation est instable et varie entre 30 et 60 jours selon les séries utilisées et les périodes choisies pour la retrouver. L'oscillation à 50 jours n'est toujours pas expliquée. On observe des pics à 30, 40, 50 jours dans le spectre de LOD et χ_3 . De même des variations dans les vents zonaux tropicaux à environ 50 jours avaient été vues auparavant par Madden-Julian (1971). Une des explications de l'oscillation à 50 jours dans les séries atmosphériques de vent est la manifestation de l'oscillation tropicale de Madden Julian. Une autre explication est qu'il existe des instabilités propres à la circulation zonale subtropicale atmosphérique (Ghil *et al.*, 1991). De plus, en 1985, Legras et Ghil ont développé un modèle numérique non linéaire de l'atmosphère et y ont trouvé des oscillations similaires à celles de LOD (notons que leur modèle est chaotique). Ce modèle chaotique explique l'apparition des oscillations à 50 jours comme des changements brusques de la circulation des vents dûs à la topographie, et faisant passer le système d'un régime à un autre. Cependant, ces instabilités et l'oscillation de Madden Julian sont deux phénomènes indépendants dans l'atmosphère et présents tous deux dans les séries de longueur du jour LOD et de moment cinétique χ_3^w . On a également retrouvé une oscillation à 50 jours dans les séries liées à l'activité solaire (indice géomagnétique A_p , nombre de Wolf), (Kosek, 1993; Djurovic *et al.*, 1994).

D'autre part, lors de El Niño 1982-1983, il semble que l'oscillation à 50 jours ait été amplifiée indiquant là encore une relation étroite entre les systèmes océaniques et atmosphériques et la rotation de la Terre.

Ainsi les variations à courtes périodes de la longueur du jour sont principalement attribuées aux échanges de moment cinétique entre la Terre solide et l'atmosphère (Rosen et Salstein, 1983; Eubanks *et al.*, 1985). Les échanges de moment cinétique se font avec l'atmosphère mais aussi avec les océans. Il est important d'étudier leur rôle exact sur la variabilité de la rotation de la Terre à courtes périodes. Ponte (1997) a évalué les séries de moment cinétique océanique χ_{ocean} et montre que ceux-ci ne peuvent pas être négligés dans le bilan de la longueur du jour pour des périodes d'une dizaine de jours et moins. En l'absence de mesures globales océaniques, il est difficile d'évaluer ces fonctions et les modèles disponibles restent très simplifiés: par exemple, le modèle utilisé par Ponte est un modèle dynamique océanique à deux couches dont les équations du mouvement sont séparées en deux systèmes: un caractérisé par des mouvements sensiblement uniformes sur la verticale (barotrope), l'autre ayant une dépendance à la profondeur et

tel que les mouvements sont très variables sur la verticale (barocline).

Tout comme pour le mouvement du pôle, ce paragraphe nous montre les limites des connaissances actuelles sur les causes des fluctuations de la vitesse de rotation de la Terre. Bien que le spectre de la longueur du jour soit principalement expliqué par les excitations atmosphériques associées aux vents, il manque une compréhension précise du rôle des océans et des échanges de moment cinétique entre la Terre et les fluides géophysiques. D'autre part, la limite en cohérence entre les séries de *LOD* et les séries atmosphériques provient peut être aussi de l'inadaptation des méthodes d'analyse. La dynamique non linéaire des excitations nous invite à rechercher dans les séries de rotation de la Terre des signaux non linéaires déterministes qui sont indécélables par les méthodes de traitement du signal actuellement en vigueur⁸.

5 Description de la série combinée C04 de l'IERS

Pour le mouvement du pôle et la longueur du jour, L'IERS construit une série combinée journalière depuis 1962 jusqu'à aujourd'hui. Cette série est régulièrement homogénéisée sur toute sa longueur. Elle est obtenue grâce à une combinaison linéaire de plusieurs séries indépendantes provenant de techniques différentes. Pour connaître les séries exactes intervenant dans les solutions de L'IERS ainsi que leurs propriétés et provenance, le lecteur pourra se rapporter au rapport annuel de l'IERS (IERS, 1997). Ce qui nous intéresse ici sont les propriétés des séries finales combinées puisque nos analyses se porteront sur elles.

Chaque technique apportant son avantage, l'idée d'une combinaison de données a pour but de garder le meilleur de chaque constituant et donc d'améliorer la précision de la série finale en préservant au mieux le signal. Un simple exemple prouvant que la combinaison de deux séries temporelles mesurant le même signal, noté $a(t)$, donne un résultat plus précis que chaque série prise séparément est le suivant:

Soient les séries

$$x_1(t) = a(t) + \epsilon_1(t)$$

et

$$x_2(t) = a(t) + \epsilon_2(t)$$

les séries sont considérées comme non corrélées. Soient σ_1^2 et σ_2^2 les variances des bruits $\epsilon_1(t)$ et $\epsilon_2(t)$. On affecte chaque série individuellement d'un poids k_i et on écrit alors la série combinée sous la forme:

$$x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

La condition $k_1 + k_2 = 1$ doit être vérifiée. L'erreur quadratique moyenne de la série combinée, avec le choix optimal $k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, est:

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Une simple étude du signe de

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1^2$$

et

$$\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_2^2$$

⁸cf le paragraphe "Discussion"

montre que la précision de la série combinée est supérieure à la précision de chacune des séries initiales.

Dans le cadre des combinaisons faites à l'IERS, pour évaluer les poids k_i , des facteurs d'échelle et des incertitudes sont recalculés (grâce à l'analyse par la variance d'Allan) pour chaque série en connaissance des limites et précision des centres d'analyse et des techniques servant à fournir les séries de rotation de la Terre. Rappelons que chaque série est de plus corrigée d'un biais et éventuellement d'une pente afin de la ramener dans le système de l'IERS.

Les séries intervenant dans la combinaison ne sont pas forcément journalières, l'opération de combinaison permet par interpolation linéaire de densifier les séries afin d'obtenir un point chaque jour et de pouvoir mener des études géophysiques à courtes périodes. Il faut noter que la combinaison actuelle faite par l'IERS se base sur des techniques linéaires de traitement du signal avec une forte hypothèse qui stipule que les bruits sont gaussiens. Les paramètres de la solution optimale combinée sont ajustés par la méthode des moindres carrés.

Cependant la série C04 est très précise et convient parfaitement à des études géophysiques de la rotation de la Terre. Entre 1962 et aujourd'hui, la précision du mouvement du pôle a gagné un facteur 100: on donnait le mouvement du pôle avec une incertitude de 30 mas en 1962, actuellement on donne les composantes X et Y avec une précision de 0.2/0.1 mas. Pour la longueur du jour la précision est également meilleure aujourd'hui puisqu'on la détermine à 0.02 ms près contre 1.4 ms en 1962. La progression a été très marquée au début des années 1980 avec l'introduction massive des observations VLBI et l'abandon des observations optiques.

Nous avons représenté les séries temporelles journalières C04 de mouvement du pôle (PMX et PMY) et de longueur du jour (LOD) entre 1970 et 1997 (Figure 1.5). On remarque immédiatement dans les séries de mouvement du pôle, la période de battement de 6 ans entre le terme de Chandler et le terme annuel. L'amplitude du terme de Chandler est la plus importante du signal et peut atteindre jusqu'à 0.3", (300 mas c'est à dire 9 mètres à la surface du sol).

Pour le LOD , la série est corrigée des marées zonales périodiques. On voit distinctement les termes semi annuel et annuel perturbés par des variations à hautes fréquences.

Afin de faire ressortir ces termes principaux, nous avons effectué la transformée de Fourier des trois séries brutes (Figure 1.6). L'axe des abscisses est la période en jours et nous représentons les spectres d'amplitude des séries. Pour le mouvement du pôle, on distingue deux pics élargis importants centrés sur les périodes 365 et 433 jours qui correspondent à la période du terme annuel et du terme de Chandler. Pour la longueur du jour, les deux pics annuel et semi annuel dominant sans aucune ambiguïté. Le reste du spectre est continu et plat.

Nous avons représenté les spectres pour des périodes inférieures à 500 jours afin de souligner les périodicités dominantes, les termes à plus longue période et les tendances ne nous intéressent pas dans le cadre du présent travail.

Afin de nous pencher sur des variations plus fines des séries, nous devons nous débarrasser des grandes périodicités en filtrant la série. Nous avons choisi de nous limiter à la période [1-100] jours du spectre, partie très mal modélisée et dont les variations sont essentiellement d'origine atmosphérique et océanique. Nous avons utilisé un filtre de Vondr  k (Vondr  k, 1977a,b) afin d'isoler les courtes périodes. Ces séries ($x(i)$, $i = 1..N$) sont représentées sur la Figure 1.7. Nous avons centré les séries c'est-  dire réduit leur moyenne à zéro. La comparaison des écarts quadratiques moyens, (rms) des séries brutes et filtrées nous indique que le signal traité ici est très petit. Les valeurs des rms sont données dans la Table 1.1.

Au vue des représentations graphiques, les séries semblent très aléatoires sans périodicité apparente. L'analyse de Fourier (Figure 1.8) confirme cette constatation en dévoilant un spec-

tre continu. Nous pouvons deviner un pic autour de 50 jours pour le mouvement du pôle en X , 50 et 70 jours pour PMY et 40 jours pour LOD . Ces pics correspondraient à des modes propres atmosphériques et à l'oscillation Madden-Julian discutés auparavant. Il serait intéressant d'étudier cette oscillation particulière qui n'est pas de période constante et dont la nature reste controversée.

Séries	Unité	<i>rms</i>
PMX	"	0.1409265
PMY	"	0.1412674
LOD	<i>ms</i>	0.6921793
$PMX\ filt$	"	0.0023008
$PMY\ filt$	"	0.0015653
$LOD\ filt$	<i>ms</i>	0.1165719

Table 1.1: *rms* des séries EOP centrées brutes et filtrées ([1-100] jours) (*filt*). Les unités sont en secondes de degré pour le mouvement du pôle (") et en millisecondes pour la longueur du jour (ms)

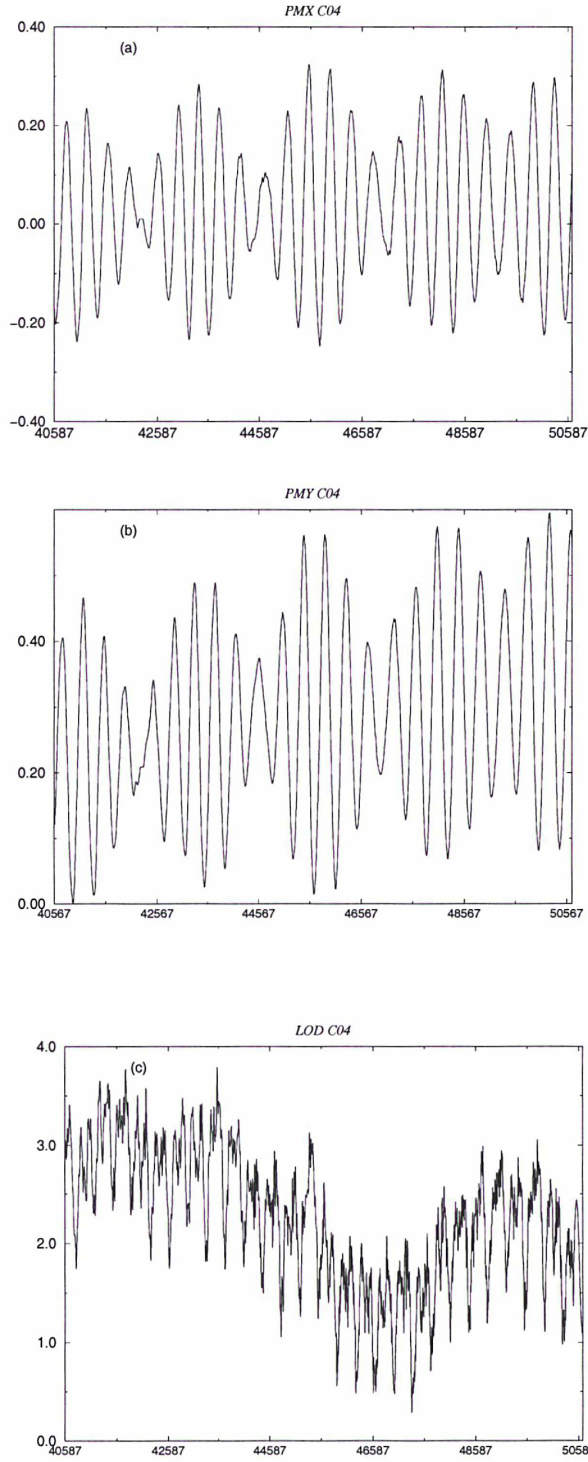


Figure 1.5: Séries combinée C04 de mouvement du pôle PMX (a), PMY (b) et de la longueur du jour LOD (c) .

Les dates sont exprimées en jour julien modifié (MJD). Ceux-ci sont comptés à partir de 1830 au lieu de l'an -4000 avant J.C, l'année 1830 est l'année besselienne. Le jour julien 51544.5 correspond au premier janvier 2000 à minuit. Les ordonnées sont en secondes de degré pour le mouvement du pôle et en millisecondes pour la longueur du jour.

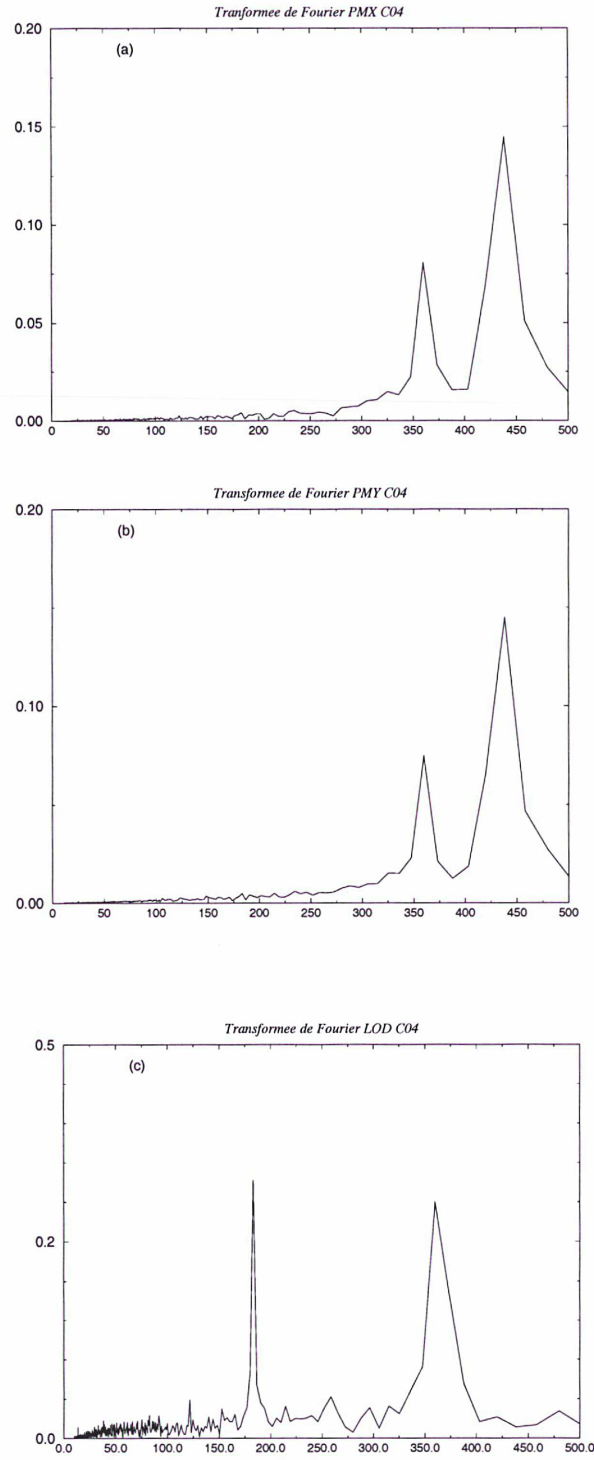


Figure 1.6: Transformée de Fourier de la série PMX (a), PMY (b) et LOD (c). Le spectre est coupé à la période de 500 jours. Les termes annuel et de Chandler pour PMX et PMY apparaissent clairement. Il en est de même pour les termes semi annuel et annuel de LOD.

Unités: en abscisses, la période; en ordonnées, l'amplitude.

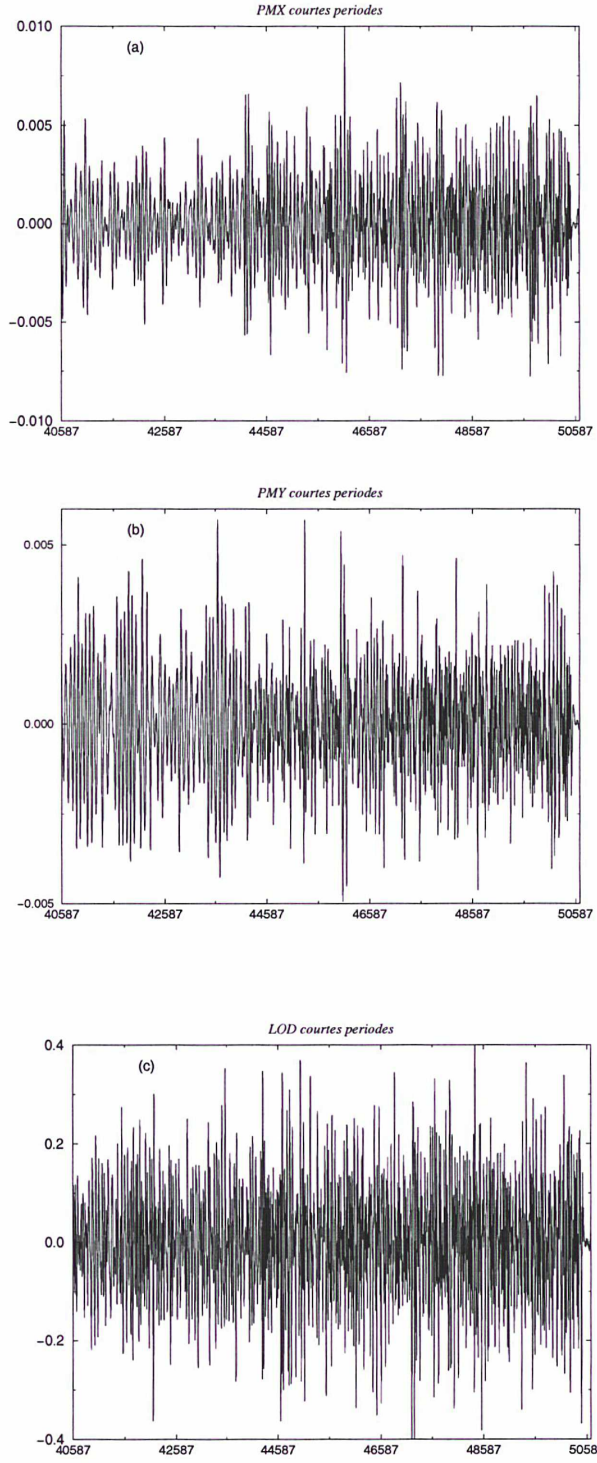


Figure 1.7: Série à courtes périodes ($[1-100]$ jours) du mouvement du pôle PMX (a), PMY (b) et de la longueur du jour LOD (c).
Unités: en abscisses, MJD; en ordonnées, secondes de degré (a) et (b), millisecondes (c).

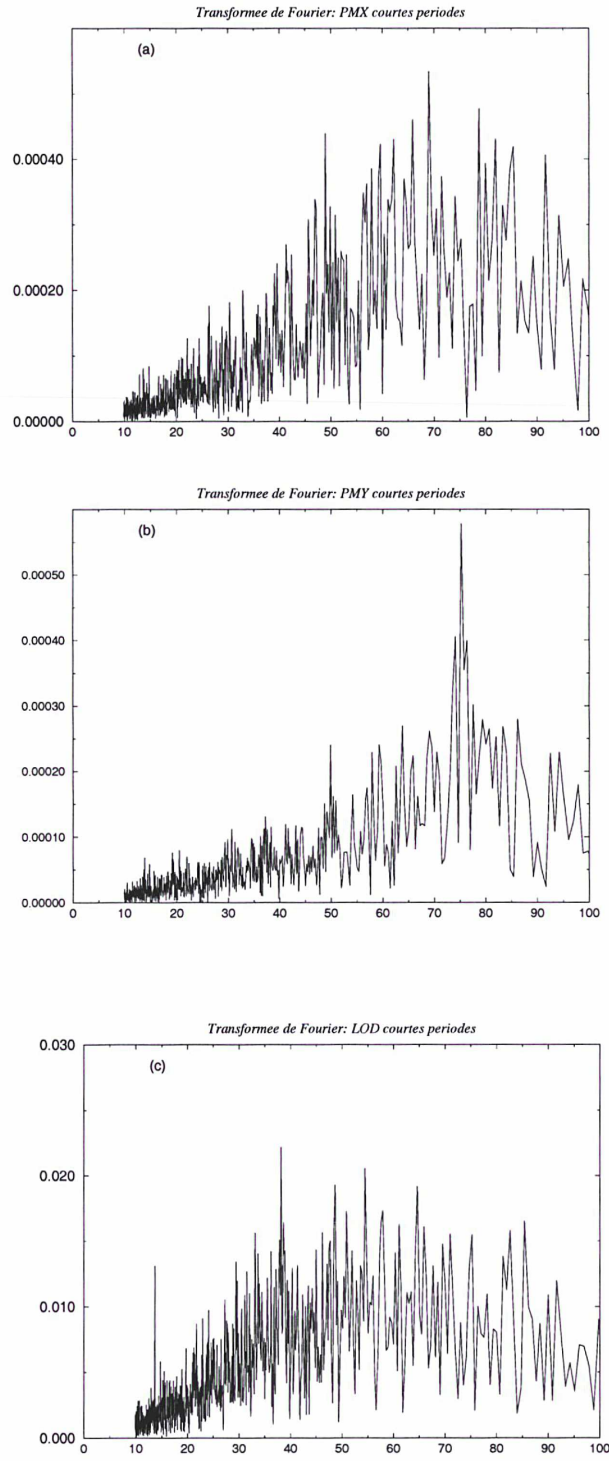


Figure 1.8: Transformée de Fourier des séries à courtes périodes ($[1-100]$ jours) de PMX (a), PMY (b) et LOD (c). Les spectres sont continus.
Unités: en abscisses, la période; en ordonnées, l'amplitude.

4 Discussion

1 Limites théoriques

La théorie dynamique fondée sur les équations de Liouville fournit un modèle dynamique de la rotation de la Terre à partir duquel il est possible d'entreprendre des études géophysiques en comparant fonctions d'excitations et variations de la rotation de la Terre.

La plupart des études publiées consistent à prédire une composante des variations des *EOP* à partir d'un modèle dynamique du comportement d'une couche terrestre. Plusieurs raisons peuvent expliquer des écarts entre prédictions et observations. Tout d'abord, la théorie dynamique des équations de Liouville fournit un modèle dynamique linéaire simplifié de la rotation de la Terre (par exemple, on suppose que la Terre est biaxiale et on néglige les termes d'ordre 2 dans les équations, éliminant par là toute éventuelle composante non linéaire). De plus, les équations de Liouville, sont écrites pour les variations de l'axe de rotation de la Terre tandis que les observations donnent accès au mouvement du *CEP*. Il y a donc dans de nombreuses études, un abus de langage lorsqu'on compare directement modèles géophysiques et observations des *EOP*. D'autre part, ces équations supposent qu'on adopte un modèle de Terre pas nécessairement parfait (en géométrie et rhéologie: paramètres d'élasticité, équilibre hydrostatique...). Bien entendu, nous avons encore une connaissance très limitée du comportement réel des différentes couches terrestres.

Certains processus dynamiques sont omis ou peu connus et il faut tenir compte également des erreurs des modèles dynamiques. Les modèles atmosphériques et surtout océaniques reposent souvent sur de grandes simplifications. Par exemple, dans Barnes, l'atmosphère est considérée comme une couche fine sphérique de rayon constant R et le manteau élastique est complètement découplé du noyau liquide; Ponte (1990) utilise un modèle océanique de densité constante pour fournir des valeurs de champs de pression et de vitesse de l'océan. Par conséquent, ces modèles reflètent imparfaitement la dynamique réelle. Très peu de modèles océaniques globaux sont disponibles et fiables à l'heure actuelle car, tout comme pour l'intérieur de la Terre, il est très difficile de faire des observations au sein des océans (la plupart des mesures océaniques concernent la surface de l'océan et restent éparses et rares pour la pression des fonds marins). Notons cependant que le modèle de Marcus *et al.* (1998), avec un océan à plusieurs couches améliore significativement les précédents modèles utilisés pour calculer les fonctions de moment cinétique océanique.

Bien entendu, tous ces modèles sont contraints par des données climatologiques et observationnelles et par conséquent dépendent aussi des erreurs de mesures et des méthodologies adoptées pour leur traitement.

2 Limites liées aux méthodes d'analyse

Dans toutes les études menées sur les séries temporelles de rotation de la Terre et leurs excitations, que ce soit pour la modélisation d'une série ou la comparaison de plusieurs séries, une approche stochastique et linéaire est adoptée bien que la plupart des processus dynamiques dans les fluides géophysiques soient fortement non linéaires. En effet, on recherche des périodicités, des corrélations, des lois de puissance. On cherche à décrire le système comme une somme de signaux périodiques indépendants. Or, un événement commun à deux systèmes peut être invisible sur un spectre global de Fourier mais bien décelable dans une représentation locale de l'espace des phase associé au système observé. Nous illustrerons cela au chapitre 4. Les traitements linéaires utilisés présupposent que les bruits sont gaussiens et les séries stationnaires. Or dans la réalité, ceci n'est pas correct.

Afin d'étudier leur influence sur le mouvement du pôle, Brzeziński (1987) modélise les séries des termes de pression des fonctions effectives de moment cinétique atmosphérique (*EEAM*), pour des périodes inférieures à 100 jours, comme des processus autorégressifs d'ordre 3 (*AR(3)*) et les termes de vents comme des *AR(1)*. Il considère par là que ce sont des processus stochastiques simples. Nous verrons qu'une caractérisation non linéaire de ces termes donne des conclusions opposées (Chapitre 5).

Dans la plupart des études concernant les prédictions des séries *EOP*, une approche stochastique est également utilisée. Les séries de paramètres d'orientation de la Terre sont alors modélisées sous forme de processus autorégressifs ou à moyenne mobile, ou encore sous forme de bruit coloré. Dans ce cas, un choix erroné de stochasticité dans les mesures peut conduire à des déterminations des *EOP* imprécises ou limitées. Le fait de se placer uniquement dans le domaine temporel et fréquentiel pour rechercher des explications aux variations observées des *EOP* réduit le problème à la recherche d'une identification des processus dans une classe restreinte (bruit, périodicité, quasi périodicité).

Dans la mesure où les excitations de la rotation de la Terre possèdent des dynamiques non linéaires, il est naturel de s'interroger sur l'existence de signatures non linéaires et déterministes dans le signal de la rotation de la Terre. Si celles-ci existent, les méthodes linéaires de traitement du signal sont incapables de les détecter et donc à fortiori de caractériser la dynamique dont elles sont issues. En effet, on sait que le spectre de Fourier d'un bruit aléatoire est continu (un bruit aléatoire peut être considéré comme un processus de dimension infinie), or le spectre de Fourier d'une série temporelle extraite de l'attracteur de Lorenz (chapitre suivant) est lui aussi continu. Nous verrons pourtant que les équations de Lorenz modélisent un phénomène déterministe non linéaire chaotique de faible dimension. Ainsi deux dynamiques totalement opposées auront un spectre de Fourier identique. Cet exemple simple démontre l'impossibilité de détecter autre chose que des signaux linéaires et/ou stochastiques dans les série de rotation de la Terre en utilisant une transformée de Fourier. Ainsi il est intéressant de regarder de quelle manière les dynamiques non linéaires provenant des excitations géophysiques sont transmises à la Terre et sous quelle forme. Nous nous proposons donc dans cette thèse d'introduire des outils nouveaux pour étudier les séries de rotation de la Terre d'un point de vue non linéaire et apporter des réponses sur la modélisation dynamiques de certaines parties du spectre mal expliquées en terme de modes de Fourier ou rangées dans la classe stochastique.

Dans le chapitre suivant, nous introduirons les définitions, notions et concepts principaux de la théorie des systèmes dynamiques dont nous aurons besoin pour effectuer les analyses non linéaires de la rotation de la Terre.

La Figure 1.9 montre les spectres de puissance (carré du module de la transformée de Fourier⁹ ou transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation) des séries filtrées [1-100] jours de la rotation de la Terre (a,c,d) et celui de l'attracteur de Lorenz (b). Superposées aux spectres sont dessinées des droites correspondant au comportement spectral type d'un bruit blanc (f_0), d'un bruit de flicker (f_{-1}) et enfin d'une marche aléatoire (f_{-2}). Nous voyons ici que les spectres de la rotation de la Terre et de l'attracteur de Lorenz sont très semblables et que les dynamiques cachées dans les séries à courtes périodes de la rotation de la Terre tout comme dans les séries issues de l'attracteur de Lorenz sont difficilement différenciables à partir de leurs seules propriétés spectrales. L'analyse de Fourier seule ne permet pas de conclure et d'autres outils sont donc nécessaires pour caractériser le contenu réel du signal (ce graphe important sera repris au chapitre 4).

⁹voir chapitre 3

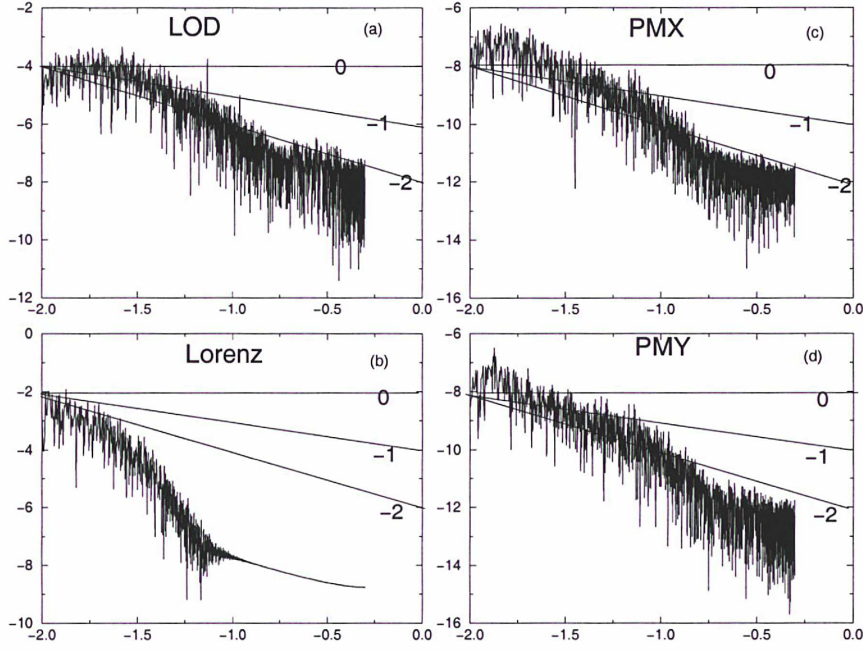


Figure 1.9: Spectre de puissance (en échelle log/log) de la série à courtes périodes de la longueur du jour (a), de la série $x(t)$ issue du système chaotique de Lorenz (b), de la série de mouvement du pôle à courtes périodes PMX (c), de la série de mouvement du pôle à courtes périodes PMY (d). La ligne "0" correspond au comportement spectral d'un bruit blanc, la ligne en "-1" à celui d'un bruit de Flicker et en "-2" d'une marche aléatoire.

5 Conclusion

En résumé, des modèles et des mesures plus sophistiqués doivent être mis en oeuvre pour identifier les processus dynamique au sein des océans, de l'atmosphère.. et en déduire les fonctions de moment cinétique directement comparables aux séries *EOP*. En outre, les outils d'analyse des différentes séries doivent être revus. De meilleurs modèles pour les excitations des *EOP* et de meilleures observations permettront sans doute d'expliquer plus de choses dans les résidus observés. S'il existe, dans une partie du signal, une composante qui n'est ni périodique, ni stochastique mais qui possède une dynamique plus complexe n'appartenant pas à la classe stochastique, les techniques recherchant de simples corrélations et des lois de puissance n'apporteront rien de plus sur la compréhension du signal. Il sera toujours possible de décrire et modéliser plus ou moins bien cette composante statistiquement mais nous serons limités en précision (prédiction) et surtout nous passerons totalement à coté de sa nature physique réelle.

De plus, indépendamment des caractérisations non linéaires qui font l'objet de cette thèse, notons que l'analyse en ondelettes est très prometteuse en rotation de la Terre puisque contrairement à l'analyse de Fourier qui est globale, les ondelettes permettent de caractériser un signal soudain et bref dans une série.

Cet aperçu des connaissances actuelles sur le signal de la rotation de la Terre nous a permis d'en souligner les limites et d'introduire l'idée de nouvelles méthodes capables de détecter des composantes non linéaires déterministes.

Le chapitre suivant est consacré à l'introduction de notions fondamentales concernant la théorie

des systèmes dynamiques. Ces notions seront reprises largement lors de l'application des méthodes non linéaires de reconstruction d'espace à des séries quelconques (bruit, chaos, périodicités) puis aux séries de rotation de la Terre (LOD et PMX , PMY), ainsi qu'aux séries atmosphériques.

Chapitre 2

Introduction aux systèmes dynamiques

1 Introduction

La théorie des systèmes dynamiques permet d'étudier l'évolution temporelle de systèmes physiques décrits par des équations différentielles ordinaires (autonomes ou non) ou des équations aux dérivées partielles, à travers une caractérisation géométrique et topologique des trajectoires dessinées par les variables d'état du système dans l'espace des phases.

Lorsque le système est dissipatif (ce qui est le cas de tout système réel, soumis à des phénomènes de frottement), il y a perte de mémoire des conditions initiales associées à chaque trajectoire individuelle. Dans ce cas, on distingue la phase transitoire du régime permanent. Ce dernier correspond au régime asymptotique que le système atteint après la disparition du transitoire. L'étude d'un système dynamique passe par la description du régime permanent sous forme de solutions particulières du système. Celles-ci sont de types différents, par exemple, les solutions d'un système d'équations différentielles peuvent être des points fixes, des cycles périodiques ou quasi-périodiques, ou présenter des comportements turbulents (apériodiques). On appelle ces solutions asymptotiques, les ensembles limites du système. Ces derniers sont ensuite étudiés du point de vue de leur stabilité. D'autre part, les systèmes dynamiques peuvent être contrôlés par un paramètre extérieur et le même système d'équations peut ainsi présenter, selon les valeurs du paramètre, des comportements tantôt périodiques, tantôt quasi-périodiques, tantôt apériodiques, ou intermittents (coexistence de périodicités perturbées par des bouffées anarchiques (bouffées de turbulence)). L'étude de ces différents comportements repose sur la théorie des bifurcations. Il existe divers types de bifurcations, ou "routes" vers le chaos.

L'observation d'une solution d'un système implique nécessairement que celle-ci est stable. Cela signifie qu'elle est robuste aux perturbations. On définit alors un attracteur comme l'évolution asymptotique d'un régime permanent stable. Ceci implique que l'attracteur soit atteint par un grand nombre de conditions initiales (formant le bassin d'attraction) et tel que toute trajectoire initialisée dans son bassin d'attraction soit attirée vers l'attracteur et ne s'en éloigne pas. Un attracteur est donc un ensemble limite stable.

L'étude des systèmes dynamiques a apporté un grand bouleversement concernant la théorie de la turbulence. En effet, jusqu'en 1971, il était largement admis que, pour obtenir un comportement apériodique, un nombre illimité de fréquences était nécessaire. Landau (1944) expliquait la turbulence dans les fluides par l'augmentation progressive du nombre de modes actifs faisant passer le système d'un état périodique, bipériodique puis n -périodique, n tendant vers l'infini.

En 1971, Ruelle et Takens proposent une description "chaotique" du phénomène en introduisant le concept d'attracteur étrange. Selon leur théorie, seul un nombre fini et limité de bifurcations est nécessaire pour aboutir à la turbulence.

Notons cependant que Lorenz (1963), avait déjà montré grâce à un système de trois équations non linéaires couplées, que seulement trois degrés de liberté¹ suffisaient pour obtenir un comportement apériodique, remettant ainsi en cause l'idée que seuls les processus de dimension infinie (nombre infini de modes) pouvaient engendrer un comportement complexe dans l'espace des phases.

Nous nous proposons de présenter ici les principales notions concernant la théorie des systèmes dynamiques, sans entrer dans les détails, en nous limitant au cas des équations différentielles autonomes. Ce chapitre ne se veut pas mathématiquement rigoureux puisque nous n'énoncerons aucun théorème et ne démontrerons aucun résultat. Le lecteur intéressé par la théorie mathématique des équations différentielles et des systèmes dynamiques pourra se rapporter par exemple aux livres de Glendinning (1994), Verhulst (1989) ou à l'article de Smale (1967) et pour une approche plus "physique" de cette théorie, nous conseillons vivement le livre de Manneville (1990).

Dans cette optique, nous allons donner un aperçu qualitatif de la théorie des systèmes dynamiques et des équations différentielles appliqués à des problèmes physiques. Nous adopterons plutôt une description géométrique, les systèmes dynamiques pouvant aussi être abordés de manière plus statistique grâce à la théorie ergodique des systèmes dynamiques (Eckmann et Ruelle, 1985).

Plus particulièrement, le chapitre est articulé de la façon suivante:

Nous définissons les équations différentielles, les orbites, l'espace des phases; nous présentons ensuite les types de solutions et les méthodes de mesure de leur stabilité. Nous décrivons les différents types d'attracteurs observables. Des définitions relatives aux attracteurs et au chaos (dimensions, exposants de Lyapunov) sont aussi proposées. Bien qu'un attracteur soit une solution robuste du système, nous expliquons comment celui-ci peut perdre sa stabilité structurelle sous l'effet d'un changement de paramètre du système (bifurcation). Enfin, nous concluons par l'étude d'un exemple d'attracteur étrange: l'attracteur de Lorenz, et de ses propriétés géométriques, dynamiques et topologiques.

Les notions qui seront introduites tout au long de ce chapitre sont indispensables à la compréhension de la suite du travail concernant l'analyse non linéaire des séries temporelles, et apportent le fondement théorique des méthodes de reconstruction d'espace (Chapitre 3).

¹On associe dans ce contexte un degré de liberté à une variable d'état du système. Cette définition diffère de celle usuellement employée en mécanique analytique

2 Equations différentielles et systèmes dynamiques

1 Définitions préalables

Nous allons donner brièvement les définitions mathématiques à connaître pour comprendre la suite de notre exposé:

- Une application $f : U \rightarrow V$, où U est un ouvert de R^m et V un ouvert de R^n , est **différentiable** au point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $Df_a : R^m \rightarrow R^n$ telle que:

$$f(a + u) = f(a) + (Df_a)(u) + o\|u\| \quad (2.1)$$

(la notation $o\|u\|$ désigne une fonction g telle que $\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{g(u)}{\|u\|} = 0$)

- f est de **classe C^1** (continûment différentiable) si chaque dérivée partielle de f est continue sur U .
 f est de classe C^r si les dérivées partielles de f sont de classe C^{r-1}
- Un **difféomorphisme** (de classe C^r) d'un ouvert $U \subset R^n$ dans un ouvert $V \subset R^n$ est une application bijective $\phi : U \rightarrow V$ différentiable (C^r) de même que son application réciproque (ϕ^{-1}).
- Deux objets géométriques déduits l'un de l'autre par un difféomorphisme sont équivalents du point de vue de la topologie différentielle.
- Une variété topologique de dimension m est un espace topologique dont tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de R^m . Une variété différentiable est une variété topologique munie d'une structure différentielle. C'est une hypersurface de R^m dont tout point admet un voisinage ouvert difféomorphe à R^m (exemple: un cercle, une sphère, un tore...).

2 Equations différentielles.

Définition

On appelle équation différentielle ordinaire **non-autonome** d'ordre n , une équation de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $x(t) \in R^n$, $f : U \subset R^{n+1} \rightarrow R^n$ est le champ de vecteurs, $\dot{x} = dx/dt$.

f est une fonction continue par rapport à t et x . (Elle peut être linéaire ou non linéaire).

On appelle équation différentielle ordinaire **autonome** d'ordre n , une équation de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $x(t) \in R^n$, $f : U \subset R^n \rightarrow R^n$ est le champ de vecteurs, $\dot{x} = dx/dt$.

f est une fonction continue par rapport à x . Elle ne dépend pas explicitement du temps.

Il est toujours² possible, en théorie, de passer d'une équation non autonome à une équation autonome par un changement de variables et l'ajout d'équations différentielles du premier ordre supplémentaires. Ainsi nous nous limiterons à l'étude des équations différentielles autonomes. Schématiquement, une équation différentielle est donc tout simplement la donnée d'une évolution temporelle de variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ à travers la fonction f et de conditions initiales $x_i(t_0)$. La donnée d'une équation différentielle d'ordre n se ramène à n équations d'ordre 1.

Solutions et unicité

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution $\gamma_{x_0}(t)$ de l'équation différentielle (2.3) pour chaque condition initiale fixée x_0 : La fonction $\gamma_{x_0}(t)$ est n fois dérivable et définie d'un ouvert I de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n telle que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} (t, \gamma_{x_0}(t)) &\in I \times U \\ \dot{\gamma}_{x_0} &= f(\gamma_{x_0}(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

γ est appelée une courbe intégrale du champ de vecteurs f .

Flot

On appelle flot d'une équation différentielle (ou du champ de vecteurs) en t et x_0 , l'application ϕ de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}^n définie par:

$$\phi_t(x_0) = \gamma_{x_0}(t) \tag{2.5}$$

γ étant la solution de l'équation différentielle pour la donnée initiale x_0 .

Le flot possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} &= \phi_{t_1+t_2} \\ \phi_0(x_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

De plus

$$\phi_t(x) = \phi_t(y) \Leftrightarrow x = y \tag{2.7}$$

Ceci souligne l'unicité de la solution d'une équation différentielle et la non intersection de deux orbites différentes.

De plus, on admet que le flot est un difféomorphisme sur \mathbb{R}^n pour tout t .

Intuitivement si l'on pense à f comme à un champ de vitesse pour un fluide, $\phi_t(x_0)$ donne la position au bout d'un temps t d'une particule initialement observée à la position x_0 .

Orbites

On définit l'orbite passant par x_0 comme le lieu des points:

$$\{\phi_t(x_0), -\infty < t < +\infty\} \tag{2.8}$$

²En pratique, seuls les cas d'excitations périodiques peuvent être traités simplement

Portrait de phases

Lorsqu'on veut représenter graphiquement l'allure des courbes intégrales du champ de vecteurs f , on en dessine quelques unes en indiquant le sens de parcours de chaque orbite par des flèches. L'ensemble de toutes les orbites ainsi orientées s'appelle le portrait de phase du champ de vecteur f .

Graphiquement

On peut schématiser les différentes notions précédentes de la manière suivante:

La solution $\gamma_{x_0}(t)$ pour la donnée initiale (x_0, t_0) est un point de l'orbite passant par x_0 .

Le flot pour la condition initiale x_0 permet de définir les points solutions pour chaque t fixé le long d'une orbite.

L'orbite passant par x_0 est l'ensemble des solutions lorsque t varie de moins l'infini à plus l'infini (Figure 2.1).

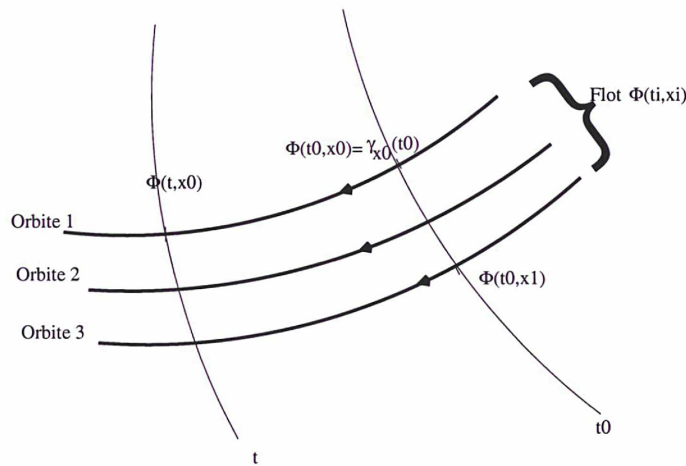


Figure 2.1: Orbites et Flot

3 Systèmes dynamiques.

Les équations différentielles sont utilisées pour modéliser et décrire des phénomènes dynamiques. Nous allons donner ici la définition d'un système dynamique et noter la correspondance avec les équations différentielles ordinaires. Dans des situations concrètes, la variable t représente le temps et les variables x_i les paramètres décrivant l'état d'un système physique donné. Les équations différentielles traduisent donc la loi d'évolution du système matériel considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres (ou variables du système). Ainsi trouver les solutions des équations différentielles, tracer certaines orbites du flot, connaissant les conditions initiales, revient à prévoir l'état du système à un instant t donné et donc à décrire son évolution au cours du temps. Les systèmes physiques décrits ainsi sont des systèmes dynamiques.

Systèmes dynamiques continus et discrets:

Un système dynamique déterministe peut être décrit par un système fini d'équations différentielles ordinaires autonomes d'ordre n :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.9)$$

Si f est différentiable, le système dynamique est différentiable, ϕ est le flot et dans ce cas on parle de systèmes à temps continus.

On définit également des systèmes à temps discrets décrits par des applications itérées:

$$\begin{aligned} F & : R^n \rightarrow R^n \\ x_{k+1} & = F(x_k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

dans ce cas $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ est appelé l'orbite.

On peut toujours passer d'un flot continu à un système discret. Cette opération est possible grâce aux "sections de Poincaré³" qui reviennent à couper les trajectoires de R^n par des hypersurfaces de dimension $n - 1$ et à recueillir ainsi un système discrétisé. L'idée de diminuer la dimension d'un système est intéressante car elle permet une simplification de la dynamique tout en préservant les propriétés du système.

Ainsi système dynamique signifie tout simplement évolution temporelle, dont la description est rendue possible à travers la résolution d'équations différentielles décrivant l'évolution de chacune des variables du système en question.

Tout phénomène physique décrit par des équations différentielles⁴ est un système dynamique (oscillateur paramétrique, réaction chimique de Belousov-Zhabotinsky, convection de Rayleigh-Bénard....) (Bergé *et al.*, 1984) dont on peut étudier la stabilité et le comportement au cours du temps. Ce sont des systèmes **déterministes**: leur évolution temporelle est déterminée de façon unique à partir de la seule spécification des conditions initiales.

4 Espace des phases

Soit le système d'équations différentielles ou le système dynamique, $\dot{x} = f(x)$, $x \in U \subset R^n$.

L'espace U des solutions s'appelle **l'espace des phases**. C'est l'espace dans lequel on décrit le comportement des variables x_i au cours du temps. Les axes de cet espace sont constitués par les variables x_i du système et un point de l'espace des phases a donc pour coordonnées: $(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

L'évolution au cours du temps t des solutions $\gamma(t)$ du système dynamique s'appellent les orbites (ou trajectoires) dans l'espace des phases.

Dimension de l'espace des phases

Il convient de s'interroger sur la dimension de l'espace des phases. Intuitivement, la dimension D_E de l'espace des phases est le nombre de variables d'état du système, dont l'évolution temporelle est décrite par le système d'équations différentielles

$$(\dot{x}_1 = f_1(x), \dots, \dot{x}_n = f_n(x)) \quad (2.11)$$

Les solutions d'un système de n équations différentielles autonomes du premier ordre évoluent dans un espace des phases de dimension $D_E = n$.

Grâce au théorème d'unicité des solutions d'une équation différentielle, deux orbites différentes

³Cette méthode n'est cependant intéressante que lorsque la "surface de section" a de bonnes propriétés c'est-à-dire si le système est presque périodique

⁴Les systèmes dynamiques peuvent également être décrits par des équations aux dérivées partielles

ne peuvent avoir de point d'intersection dans l'espace des phases et chaque orbite est uniquement définie par ses conditions initiales.

L'ensemble de toutes les trajectoires (correspondant à des conditions initiales différentes), dans l'espace des phases, permet de suivre le comportement temporel du système.

Exemple:

Soit l'équation harmonique suivante:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (2.12)$$

Nous voulons passer à un système d'équations différentielles autonomes d'ordre un. Le changement de variable $x = x_1$ et $\dot{x} = x_2$ conduit au système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'espace des phases de ce système est de dimension 2 dont les variables sont (x_1, x_2) , on résoud le système par

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} \quad (2.14)$$

Les orbites décrivent des cercles concentriques autour de l'origine. La forme analytique de la solution est tout simplement, en prenant comme conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = b$, $x(t) = a \cos t + b \sin t$.

Chaque cercle correspond à un ensemble de conditions initiales différentes (Figure 2.2).

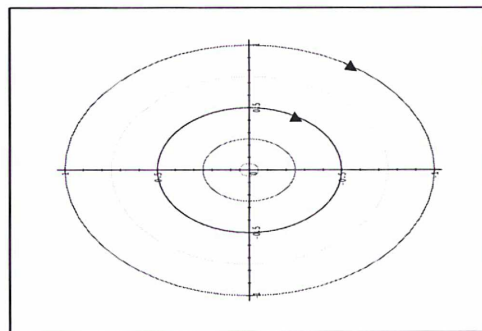


Figure 2.2: Equation harmonique: orbites

3 Caractérisations géométriques des orbites

Nous nous plaçons toujours dans le cas où le système est dissipatif et nous nous intéressons aux propriétés du régime permanent asymptotique du système, c'est-à-dire à la description de ses

ensembles limites. Nous allons dans un premier temps présenter les solutions particulières que peut posséder un système. Nous verrons ensuite comment discuter la stabilité de tels ensembles limites. L'étude de la stabilité nous permettra de définir la notion d'attracteur qui correspond à une solution stable plus ou moins complexe. Nous donnerons les propriétés principales d'un attracteur et verrons de quelle manière sont construits les attracteurs chaotiques.

Enfin, bien qu'un attracteur soit robuste, il peut perdre sa stabilité structurelle par variation d'un paramètre du système et présenter une bifurcation vers un autre type de solution. Toutes ces notions seront rassemblées sous forme d'un exemple: l'attracteur de Lorenz.

Dans toute la suite de l'étude, nous nous restreindrons aux cas des attracteurs puisque dans la pratique, ce sont les seules solutions observables du flot.

1 Types de solutions

Il existe plusieurs types de solutions pour le système d'équations différentielles autonomes ordinaires d'ordre n : $\dot{x} = f(x)$:

- Les solutions stationnaires ou points d'équilibre.
On appelle point d'équilibre, un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ qui est un zéro de f c'est-à-dire tel que $f(a) = 0$.
- Les solutions périodiques.
Soit $\gamma(t)$ une solution du système dynamique précédent.
 $\gamma(t)$ est une solution périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t + T) = \gamma(t)$ pour tout t .
Une solution périodique produit donc une orbite fermée dans l'espace des phases (cycle limite).
- Les solutions quasi-périodiques.
Les solutions quasi-périodiques s'expriment comme une somme de fonctions périodiques de périodes incommensurables.

$$\gamma(t) = \sum h_i(t), i = 1 \dots n \quad (2.15)$$

h_i est de période T_i et T_i/T_j est irrationnel.

Les orbites reposent sur un n -tore T^n ou sur des difféomorphismes de ce tore (Un tore est un produit cartésien de cercles : $T^n = S^1 * \dots * S^1$).

- Les solutions apériodiques.
Les trajectoires apériodiques sont comme leur nom l'indique, des systèmes sans périodicité ou quasi-périodicité apparente. Ils comprennent les systèmes intermittents (coexistence de phases périodiques perturbées par des bouffées de turbulence) et les systèmes chaotiques.

2 Stabilité

L'étude de l'évolution d'un système passe par l'étude de la stabilité de ses ensembles limites. On dit qu'une solution est stable si une petite perturbation ne la fait pas dévier loin de son orbite initiale. En conséquence, une solution est qualifiée d'instable si l'effet d'une petite perturbation se répercute de manière significative sur la trajectoire.

Les points d'équilibre, les solutions périodiques, quasi-périodiques et chaotiques peuvent être étudiés du point de vue de leur stabilité en mesurant l'effet d'une petite perturbation sur l'orbite

initiale.

Par exemple, pour étudier la stabilité d'un flot autour d'un point d'équilibre a , on détermine grâce à une linéarisation du champ de vecteurs f en a :

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= Df(a).\delta x \\ \delta x(0) &= \delta x_0\end{aligned}\tag{2.16}$$

Df est la matrice jacobienne de f en a .

L'étude de la stabilité de la solution autour du point d'équilibre repose sur l'étude du signe de la partie réelle des valeurs propres λ'_i de $Df(a)$, (pour un système discret, la même étude est faite en regardant le module des valeurs propres et leur appartenance à l'intérieur du cercle unité). Celles-ci mesurent en effet le taux de contraction ou d'expansion de la solution autour du point d'équilibre a dans la direction des vecteurs propres associés.

Si $Re(\lambda'_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres, une petite perturbation va disparaître rapidement au cours du temps lorsque t tend vers l'infini. Dans ce cas on dit que le point d'équilibre a est asymptotiquement stable (Figure 2.3 (gauche): les orbites convergent vers le point d'équilibre). C'est un *attracteur*.

Si $Re(\lambda'_i) > 0$ pour toutes les valeurs propres, une petite perturbation va grandir au cours du temps et le point d'équilibre est qualifié d'instable (Figure 2.3 (milieu), les orbites s'éloignent toutes du point d'équilibre). C'est un *répulseur*.

S'il existe des valeurs propres de partie réelle positive et d'autres négatives, on a affaire à un point qui est aussi instable (Figure 2.3 (droite)). Ce n'est pas un attracteur.

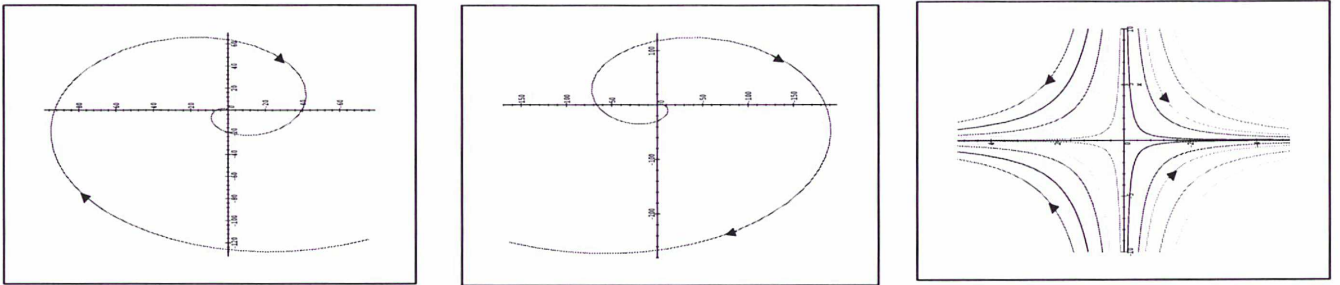


Figure 2.3: **gauche:** Point stable (foyer), **milieu:** Point instable (foyer), **droite:** Point instable (col). Les trajectoires d'allure hyperbolique s'approchent du point fixe dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative (stable) puis s'en écarte le long de l'autre direction (instable).

Dans le cas d'une orbite périodique, c'est la théorie de Floquet qui est utilisée. On regarde comment une petite perturbation de l'orbite périodique évolue dans les directions perpendiculaires à la trajectoire en calculant les valeurs propres du système discrétisé et linéarisé (matrice de Floquet). La solution est stable si le module des valeurs propres est inférieur à 1 (c'est à dire si les valeurs propres sont contenues dans le cercle unité). S'il existe au moins une valeur propre de la matrice de Floquet dont le module est supérieur à 1, alors une petite perturbation va croître exponentiellement au cours du temps et la trajectoire sera instable.

D'une manière générale, pour étudier la stabilité d'un système quelconque, on utilise toujours une linéarisation du flot autour de la trajectoire qu'on veut étudier (point fixe, cycle limite...) en appliquant une petite perturbation à l'orbite, puis on détermine les valeurs propres de la matrice de linéarisation (Df , matrice de Floquet..).

La généralisation de l'étude de la stabilité d'un point fixe ou d'un cycle limite à une orbite quelconque, (non nécessairement astreinte à se refermer sur elle même), est obtenue grâce au calcul des exposants de Lyapunov λ_i . Ceux-ci sont directement reliés aux valeurs propres de " Df " (flot linéarisé) et ont l'avantage de s'appliquer à la caractérisation de tous types de dynamiques. Nous verrons comment les calculer ultérieurement.

Du point de vue global, un ensemble limite issu d'un flot possède trois directions principales. Une direction stable, une direction neutre et éventuellement une direction instable. Pour le système linéarisé, on détermine le sous espace vectoriel stable V^s comme l'ensemble des vecteurs propres de Df associés aux valeurs propres de partie réelle négative. Par analogie, on associe à l'ensemble des vecteurs propres construits à partir des valeurs propres de partie réelle positive, un sous espace vectoriel dénomé instable V^u . L'espace neutre correspond aux valeurs propres de partie réelle nulle V^c .

Le système dynamique non linéaire initial possède les mêmes propriétés de stabilité que le système linéarisé. On définit alors les trois sous variétés stable W^s , instable W^u et neutre W^c comme les ensembles des trajectoires tangentes au point de stabilité étudié aux sous espaces vectoriels V^s , V^u et V^c respectivement. Intuitivement, les non linéarités déforment les espaces vectoriels linéaires en variétés non linéaires. La variété neutre n'est pas unique (Figure 2.4).

Le long de la variété stable, les orbites seront stables et convergeront vers l'ensemble limite, une perturbation appliquée dans cette direction disparaîtra exponentiellement dans le temps. Par contre le long de la variété instable, toute perturbation sera considérablement amplifiée et les trajectoires quitteront l'ensemble limite. Le long de la variété neutre, l'effet d'une perturbation sera sans conséquence sur la trajectoire.

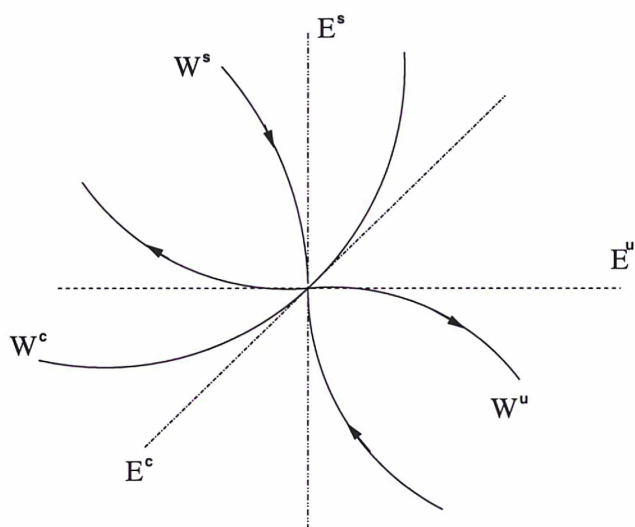


Figure 2.4: Espaces et variétés stables (s) neutres (c) et instables (u) pour un point fixe

3 Attracteur

Un attracteur est défini comme un ensemble limite stable, c'est-à-dire, pour un grand nombre de conditions initiales (appartenant à son bassin d'attraction⁵), les trajectoires convergeront asymptotiquement vers lui (caractère dissipatif, contraction des volumes) et ne le quitteront pas sous l'effet d'une petite perturbation (caractère stable).

Plusieurs attracteurs peuvent coexister dans l'espace des phases d'un même système. Chaque attracteur possède son bassin d'attraction. Les différents attracteurs et leur bassin sont distincts respectant ainsi la condition d'unicité des solutions d'une équation différentielle.

Un attracteur est une solution robuste dans l'espace des phases. On comprend alors que seuls les attracteurs sont les solutions observables d'un système. Nous allons décrire les types d'attracteurs possibles:

1. Un point d'équilibre est appelé un point attracteur si toutes les orbites convergent vers celui-ci asymptotiquement.

La dimension \underline{D}_A d'un tel attracteur est celle d'un point c'est-à-dire zéro. Sur la Figure 2.5 le point fixe est un attracteur (c'est-à-dire, les orbites tendent vers le point fixe lorsque t tend vers plus l'infini, $Re\lambda < 0$). Celui de la Figure 2.6 est un répulseur, il faut alors faire tendre t vers moins l'infini, $Re\lambda > 0$).

L'autre exemple (Figure 2.7) est celui du pendule amorti d'équation:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(t) \\ \dot{y} &= -0.4y(t) - \sin(x)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Le facteur d'amortissement est 0.4.

Nous avons représenté le portrait de phase (les orbites et leur direction dans l'espace des phases) du pendule amorti pour une condition initiale: $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Ce système possède un nombre infini⁶ de points d'équilibre en $(k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les points d'équilibre pour k pair sont des points attracteurs.

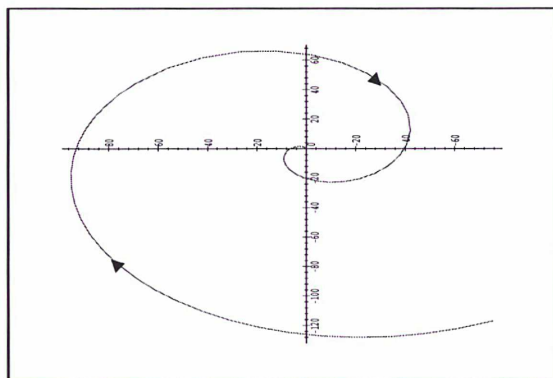


Figure 2.5: Attracteur $(0,0)$. Les flèches donnent le sens de parcours de l'orbite

⁵Région déterminée autour de l'attracteur dans laquelle toute orbite initialisée est attirée asymptotiquement vers l'attracteur

⁶En fait seulement 2 compte tenu du modulo sur la position. L'espace des phases est en réalité un cylindre

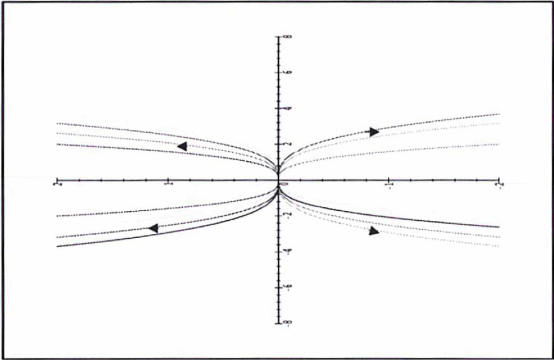


Figure 2.6: Répulseur (ensemble limite) $(0,0)$. Physiquement cet ensemble limite n'a pas de signification et est non observable.

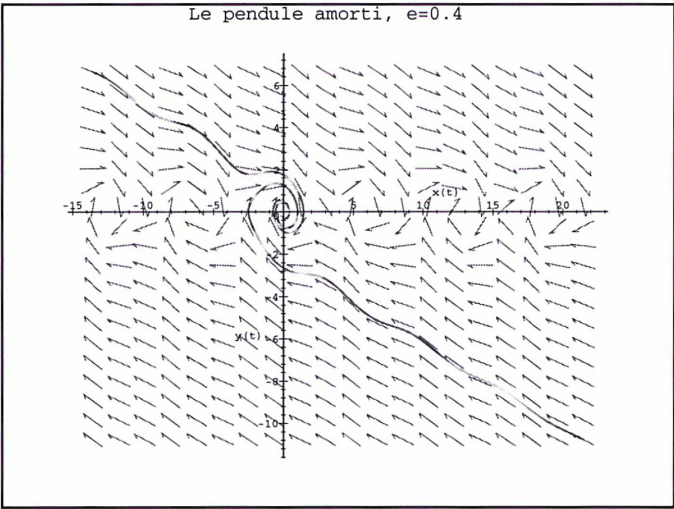


Figure 2.7: Portrait de phases du pendule amorti. Les points $(k\pi, 0)$ sont des points attracteurs.

2. Dans le cas d'un régime oscillant avec une fréquence de base, l'attracteur sera défini par un cycle limite vers lequel les orbites tendent asymptotiquement. La dimension D_A d'un tel attracteur est celle d'un cercle c'est-à-dire 1.

La Figure 2.8 représente le portrait de phases, c'est-à-dire les orbites orientées dans l'espace des phases du système de l'équation de Van der Pol:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(t) \\ \dot{y} &= (1 - x(t)^2)y(t) - x(t)\end{aligned}\tag{2.18}$$

Pour les conditions initiales suivantes: $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Les orbites tendent toutes vers le cycle limite qui apparait clairement ici, les flèches donnent le sens de parcours des orbites vers l'attracteur. Celui-ci est donc de dimension 1 puisque difféomorphe à un cercle.

Physiquement, l'équation de Van der Pol modélise le mouvement d'un oscillateur entretenu. Les orbites partant de l'intérieur du cycle limite croissent jusqu'à l'atteindre asymptotiquement et inversement, les orbites débutant à l'extérieur sont attirées rapidement sur le cycle limite.

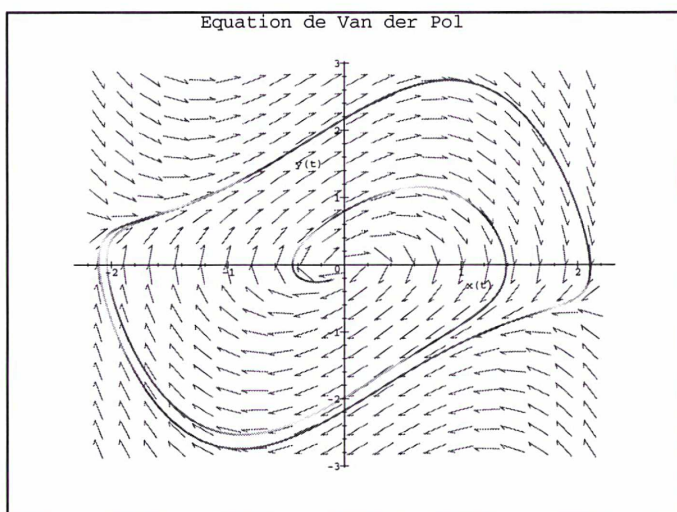


Figure 2.8: Cycle limite de Van der Pol

3. Pour un régime quasi-périodique possédant r fréquences de base indépendantes, l'attracteur est un tore. Sa dimension est celle du tore T^r c'est-à-dire r ($D_A = r$).

Nous avons représenté en Figure 2.9, un 2-tore (produit de deux cercles) c'est-à-dire, l'attracteur d'un système bipériodique, T_1, T_2 .

S'il existe (p, q) tels que $pT_1 = qT_2$, l'orbite fait un tour fermé en p boucles suivant la première direction et q suivant la seconde, elle est alors périodique et repose sur la surface du 2-tore (dans ce cas, $D_A = 1$). L'attracteur n'est alors plus le 2-Tore mais un cycle limite.

Si les périodes sont incommensurables, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entiers (p, q) remplissant la condition précédente, l'orbite ne se ferme jamais et remplit la surface du tore de manière de plus en plus dense au fur et à mesure qu'on intègre dans le temps les équations. On a alors affaire à une orbite bipériodique et $D_A = 2$. L'attracteur est le 2-tore.

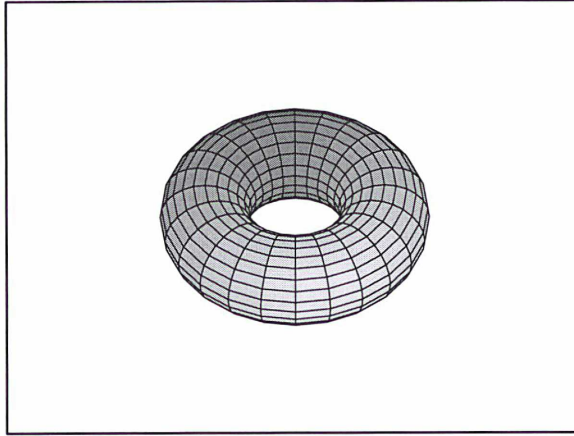


Figure 2.9: Attracteur d'un système bipériodique: 2-tore.

4. Dans le cas d'un système chaotique⁷, l'attracteur est apériodique et sa dimension est en générale non entière. L'attracteur associé à un système chaotique est géométriquement et topologiquement complexe. Ceci vient du fait que, bien que par définition un attracteur chaotique soit robuste, il possède au moins un élément instable. En effet, les orbites d'un système chaotique possèdent une double propriété: d'une part, si l'on applique au temps t_0 , une petite perturbation δx à une orbite, cette perturbation va croître exponentiellement au cours du temps (instabilité). Cette forte sensibilité aux conditions initiales (SCI) a pour conséquence d'entraîner une très forte divergence locale des trajectoires liée à l'existence d'un exposant de Lyapunov positif. Les orbites auront tendance à s'éloigner exponentiellement les unes des autres tout en restant sur une figure bornée (dissipation et attraction). Ce type de comportement n'est possible sur un attracteur que grâce à un repliement des orbites sous forme de feuillets qui forment ce que l'on appelle un attracteur étrange.

⁷Il n'existe pas de consensus pour la définition du chaos. Nous choisissons celle reposant sur la mesure du taux de divergence des orbites (SCI, Sensibilité aux conditions initiales) directement liée aux valeurs des exposants de Lyapunov du système. Nous verrons de quelle manière on peut calculer ces exposants à partir des valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé. Un système chaotique aura la particularité de posséder au moins un exposant de Lyapunov positif.

En résumé, les attracteurs chaotiques sont caractérisés par l'existence d'une variété instable⁸ alors qu'un tore attracteur ne possède pas de variété instable (il ne peut pas y avoir divergence des trajectoires sur le tore sinon, il y aurait intersection des orbites). Avant de décrire plus amplement les attracteurs étranges, revenons à la mesure de la stabilité des orbites sur l'attracteur, grâce aux exposants de Lyapunov.

4 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont des généralisations de la mesure de stabilité à des courbes quelconques non nécessairement astreintes à se refermer sur elles-mêmes. Tout comme pour les valeurs propres de la matrice linéarisée dans le cas d'un point fixe, c'est le signe des exposants de Lyapunov qui détermine le taux de contraction ou d'expansion d'une perturbation appliquée à la trajectoire. Un exposant de Lyapunov négatif est associé à la direction contractante (stable) du flot, un exposant nul à la direction neutre du flot et un exposant positif est associé à la direction instable c'est à dire mesure le taux de divergence des trajectoires proches initialement.

Soit $\delta_{x(0)}$, une petite perturbation appliquée à l'orbite au temps 0, celle-ci évoluera au cours du temps dans la direction i comme:

$$\delta_{x(t)} = \delta_{x(0)} e^{\lambda_i t} \quad (2.19)$$

Selon le signe de l'exposant de Lyapunov, λ_i , la perturbation grandira exponentiellement ou au contraire disparaîtra très vite (Figure 2.10, d'après Pires et al., 1996).

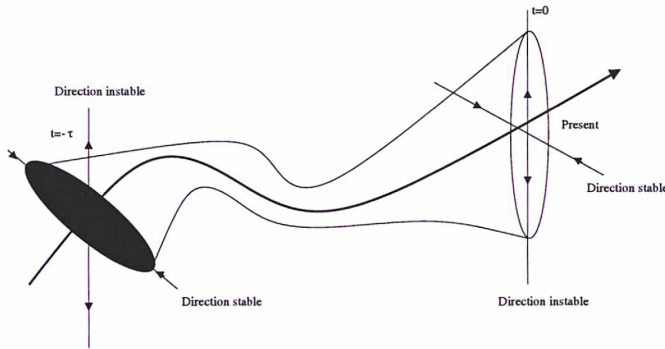


Figure 2.10: Stabilité globale

Voici de quelle manière l'attracteur d'un système de dimension n (n équations différentielles autonomes du premier ordre) peut être qualifié grâce à ses n exposants de Lyapunov:

- Un point d'équilibre est asymptotiquement stable si les exposants de Lyapunov sont tous négatifs.
- Une solution périodique a un cycle limite asymptotiquement stable si un exposant est nul et les $n - 1$ autres négatifs.

⁸Un attracteur étrange est schématiquement une union de variétés instables possédant une structure d'ensemble de Cantor dans la direction transverse à ces variétés.

- Une solution K-quasi-périodique a un K-tore asymptotiquement stable si K exposants sont nuls et les $n - K$ autres négatifs.

Pour ces trois attracteurs, aucun exposant positif n'apparaît. L'existence d'un exposant positif pour un attracteur, traduit une divergence des trajectoires et l'existence d'une variété instable, ces conditions sont typiques des attracteurs chaotiques. Comme l'attracteur est par définition stable et dissipatif, cette instabilité se manifeste par un repliement des orbites sous forme de feuillets conciliant ainsi la contraction et la dilatation des orbites. Pour un attracteur chaotique, on a besoin d'au moins trois dimensions, une associée au repliement des orbites (exposant de Lyapunov négatif), une associée à la direction du flot (exposant de Lyapunov nul) et enfin celle associée à la divergence des trajectoires (exposant de Lyapunov positif).

Pour un système non chaotique possédant un attracteur, c'est le nombre d'exposants de Lyapunov nuls qui donne la dimension topologique de l'attracteur.

On retrouve bien 0 pour un point d'équilibre attracteur, 1 pour un cycle limite et K pour un K-Tore. Pour un système chaotique, le nombre de directions neutres et dilatantes donne la dimension topologique de la partie continue de l'attracteur (pour l'attracteur de Lorenz, la dimension topologique de sa composante continue est 2).

La somme des exposants de Lyapunov est négative et mesure le taux de dissipation du système. Tout volume de l'espace des phases diminuera dans le temps bien que des segments restent de longueur invariante le long de la variété neutre ou bien soient étirés le long de la variété instable.

5 Dimensions d'attracteur

La dimension de l'attracteur permet de caractériser sa structure géométrique. Nous avons vu que la dimension d'un attracteur non chaotique était identique à sa dimension topologique. Dans la mesure où par construction les attracteurs étranges ne sont pas des variétés régulières, comment définir leur dimension? La structure feuilletée des attracteurs étranges n'est pas sans rappeler l'ensemble triadique de Cantor et la dimension d'une telle famille d'objets est non entière (fractale).

Afin de calculer la dimension d'un attracteur étrange, nous introduisons la dimension fractale D_F . Il s'agit de calculer le nombre d'hypercubes $N(\epsilon)$ d'arêtes ϵ nécessaires pour recouvrir tout l'attracteur. On définit cette dimension par:

$$D_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln N(\epsilon) / \ln(1/\epsilon) \quad (2.20)$$

D_F est bien égale à la dimension euclidienne dans le cas d'une figure simple (point ou d'un k-tore ($k=1\dots n$)). Par contre, pour un objet fractal, elle prend des dimensions non entières. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor dont nous avons parlé ci dessus, est construit de la façon suivante: on divise le segment de longueur unitaire en trois parties égales et on élimine la partie centrale. On applique ensuite la même opération aux deux parties extrêmes restantes et ceci indéfiniment. Au final, l'ensemble se réduit à une infinité de points disjoints. La dimension de cet ensemble est forcément supérieure à 0 (0 étant la dimension d'un point) et intuitivement inférieure à 1 (1 étant la dimension d'une droite). En prenant en guise d'hypercubes, des segments de longueur $1/3$ pour recouvrir l'ensemble, on calcule alors $D_F = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.63$.

La dimension fractale ne caractérise que la géométrie de l'attracteur or il est intéressant de connaître la dynamique sur l'attracteur. Pour cela on introduit les dimensions généralisées D_q qui prennent en considération la densité de probabilité des points sur l'attracteur, rendant compte du fait que toutes les régions ne sont pas visitées uniformément. Plus particulièrement,

nous utiliserons la dimension D_2 mesurant la distribution de probabilité de paires de points sur l'attracteur. Cette dimension sera identifiée avec la dimension D_A de l'attracteur obtenue par la méthode de l'intégrale de corrélation (Chapitre 3).

L'avantage de la dimension D_2 , est qu'elle dépend directement de la densité de points sur l'attracteur (contrairement à D_F qui dépend uniquement de la géométrie de l'objet considéré) et est donc plus adaptée à la caractérisation d'attracteurs étranges dont la densité de points varie fortement d'une région à une autre. D'autre part, D_F est une borne supérieure de D_2 : $D_2 \leq D_F$.

Un exemple classique "d'attracteur étrange"⁹ qui reviendra sans cesse dans la thèse, est l'attracteur de Lorenz. Sa dimension vaut environ 2.06. Nous avons représenté en Figure 2.11 l'attracteur chaotique de Lorenz.

Les deux lobes de l'attracteur de Lorenz semblent évoluer dans un plan. Cependant, nous avons vu que la structure feuilletée d'un attracteur étrange est telle que, transversalement, il existe un très grand nombre de feuillets très serrés et séparés par du vide tels que le support des orbites ne peut pas être une surface continûment différentiable. Ainsi la dimension est supérieure à 2, mais aussi forcément inférieure à 3 puisque ce n'est pas un volume.

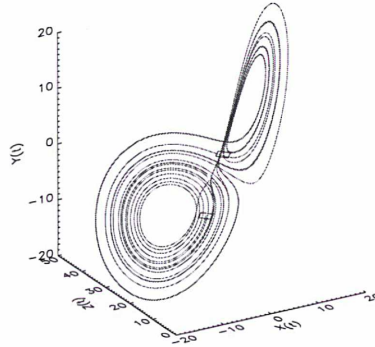


Figure 2.11: Attracteur chaotique de Lorenz vu en perspective

Un même système dynamique peut présenter pour des valeurs de paramètres de contrôle différents, tous les types d'orbites précédents. Chaque état étant à son tour déstabilisé pour donner naissance à une nouvelle dynamique (bifurcations).

6 Bifurcations

Un système dynamique ne reste pas forcément dans le même état au cours de son évolution. La théorie des bifurcations (Crawford, 1991) est complexe et nous allons en donner les principes. Les systèmes dynamiques peuvent être dépendants d'un ou plusieurs paramètres appelés paramè-

⁹Un attracteur chaotique possède les propriétés de sensibilité aux conditions initiales. Un attracteur chaotique est étrange s'il est aussi fractal (dimension non entière). Il existe des attracteurs chaotiques non étranges et des attracteurs de dimension fractale, non chaotiques.

tres de contrôle du système μ tel que:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad (2.21)$$

Il existe différents types de bifurcations. Par exemple, selon différentes valeurs de μ , le même système peut passer d'un état périodique à un état quasi-périodique et chaotique. Ce sont les "routes vers le chaos". Ainsi la théorie de la bifurcation est l'étude des évolutions topologiques du système sous l'influence de paramètres extérieurs.

Par exemple, sous quelles conditions un régime périodique perd-il sa stabilité linéaire (cas où les valeurs propres de la matrice de Floquet appartiennent à l'intérieur du disque unité). Selon l'évolution de ces valeurs propres, on observe trois grands types de comportement:

Si les valeurs sortent du cercle unité par la valeur "+1", on a ce qu'on appelle des intermit- tences: la solution périodique est instable et disparaît. Puis au delà du seuil de bifurcation, des phases d'évolution régulières (presque périodiques) interrompues temporairement par un comportement anarchique (bouffée de turbulence) apparaissent.

Si la valeur propre sort du cercle unité par "-1", on a affaire à une cascade sous harmonique normale. C'est à dire, une nouvelle solution périodique stable apparaît de période deux fois plus longue que la précédente (qui elle est devenue instable). Ce doublement de la période se répète successivement et on obtient au final une séquence infinie de bifurcations qui conduit au chaos.

Le troisième type de bifurcation à partir d'une solution périodique est si l'on a deux valeurs propres complexes conjuguées qui traversent le cercle unité: dans ce cas c'est une bifurcation de Hopf. Il y a apparition d'un attracteur stable voisin du cycle limite initial qui lui est de- venu instable. C'est un tore T^2 . S'il se produit une deuxième bifurcation de Hopf, un tore de dimension 3 apparaît. Cette séquence répétée conduit à l'apparition du chaos.

Ces exemples ont juste pour but d'introduire une idée sur les bifurcations. Bien entendu, cette théorie est très complexe et nous recommandons vivement l'article de Crawford (1991) à ceux qui veulent aller plus loin. Notons également qu'une évolution initiale périodique d'un système n'est pas une condition nécessaire à l'apparition du chaos et qu'il existe diverses routes vers le chaos par variations de un ou plusieurs paramètres extérieurs au système. Par exemple, un système quasi-périodique forcé (aléatoirement ou "chaotiquement") peut évoluer après une perte de stabilité transverse sur le tore, à un attracteur étrange et non chaotique puis au fi- nal à un attracteur chaotique (Ding *et al.*, 1989; Yalçinkaya et Lai, 1997). Une application immédiate et prometteuse de la théorie des bifurcations est le contrôle de systèmes physiques par modulation du paramètre (Lefranc *et al.*, 1997).

4 Quantités caractéristiques

Nous allons regrouper l'ensemble des définitions précédentes concernant les attracteurs, donner explicitement le calcul des exposants de Lyapunov et les diverses quantités caractéristiques (di- mensions, exposant de Lyapunov) permettant de décrire complètement un système dynamique dissipatif et possédant un attracteur. Nous avons vu que les exposants de Lyapunov permet- taient de mesurer la stabilité d'un système quelconque et de le classer parmi les divers types de régimes dynamiques (comportements périodiques, chaotiques etc...). Un attracteur d'un système est plongé dans l'espace des phases de dimension D_E . La dimension de l'attracteur D_A est donc intuitivement inférieure à D_E . D'autre part, on définit une autre dimension très utile: la dimension locale D_L (appelée aussi dimension dynamique, Abarbanel, 1996). Elle correspond

au nombre de degrés de liberté dynamiquement actifs dans le système c'est-à-dire au nombre d'équations ordinaires autonomes d'ordre 1 nécessaires à la description de l'évolution des orbites du système sur l'attracteur. Ainsi, $D_L \leq D_E$. Une fois l'attracteur identifié, on s'intéresse donc à la description dynamique des orbites sur celui-ci, c'est-à-dire au nombre de variables qui localement agiront sur leur évolution. Par exemple, l'espace nécessaire pour représenter l'attracteur d'une orbite bipériodique (l'attracteur est un 2-tore), est de dimension 3, par contre, localement, le nombre de directions principales (ou de degrés de liberté) est $D_L = 2$. Trouver une dimension locale de 2 implique que la description de l'évolution dynamique des orbites sur le 2-tore¹⁰ peut se ramener à un système de deux équations différentielles autonomes du premier ordre.

Il existe autant d'exposants de Lyapunov réels que de directions locales (D_L) dans le système. Nous allons dans ce paragraphe présenter plus en détail la méthode de calcul de ces exposants pour des équations différentielles écrites sous forme d'application itérée (rappelons qu'un flot continu peut être discrétisé) (Eckmann et Ruelle, 1985).

Nous distinguerons les exposants de Lyapunov globaux qui donnent une sorte de mesure de la stabilité globale du système, c'est-à-dire de la stabilité moyennée sur tout l'attracteur, et les exposants de Lyapunov locaux. Ces derniers sont calculés sur un morceau d'orbite correspondant à l'intégration du système sur une durée finie et permettent de connaître localement les variations de stabilité d'un système selon l'état de celui-ci dans l'espace des phases.

Nous verrons également qu'on peut définir une dimension caractéristique de l'attracteur du système à partir des exposants globaux, la dimension de Lyapunov. De plus, parler d'exposants de Lyapunov ou d'horizon de prédiction est équivalent. En effet la "prédictibilité"¹¹ d'un système dépend fortement de sa stabilité. Un horizon de prédiction théorique peut être déduit directement de la valeur de l'exposant principal de Lyapunov (le plus grand positif pour un système chaotique). Pour un système périodique, l'exposant le plus grand est nul et ainsi, l'horizon de prédiction associé est infini. Ceci traduit bien le fait qu'une orbite périodique est prévisible à l'infini (en l'absence de perturbations). On peut aussi définir localement des horizons de prédiction associés aux exposants de Lyapunov locaux.

Méthode de calcul

Il existe plusieurs méthodes de calcul des exposants de Lyapunov selon que l'on veut obtenir l'ensemble de ses exposants ou bien seulement l'exposant principal. Nous avons choisi de présenter la méthode la plus classique (Eckmann et al. 1986), et basée sur la détermination des valeurs propres de la matrice d'Oseledec. Soit un système dynamique décrit par l'application itérée:

$$y(i) \longrightarrow F(y(i)) = y(i+1) \quad (2.22)$$

On applique à l'orbite $y(i)$, une petite perturbation $\delta(i)$ et on regarde au cours du temps comment cette perturbation modifie l'orbite. Cette opération est possible grâce à une linéarisation autour du point $y(i)$ à partir duquel on applique la perturbation:

Au temps $i+1$, l'évolution de cette perturbation est décrite par:

$$y(i+1) + \delta(i+1) = F(y(i) + \delta(i)) \simeq DF(y(i)).\delta(i) + F(y(i)) \quad (2.23)$$

$$\delta(i+1) = DF(y(i)).\delta(i)$$

¹⁰ c'est-à-dire localement sur l'attracteur

¹¹ Possibilité d'être prédit: le lecteur excusera certains néologismes parfois bien utiles et explicites

Au temps $i+L$:

$$\delta(i+L) = DF^L(y(i)).\delta(i) \quad (2.24)$$

DF est la jacobienne, DF^L est le produit de L jacobiens.

$$DF^L(y(i)) = DF(y(i+L-1)).DF(y(i+L-2))...DF(y(i)) \quad (2.25)$$

Les exposants de Lyapunov λ_i sont calculés à partir des valeurs propres de cette matrice DF^L . Pour les déterminer, il faut former la matrice symétrique d'Oseledec:

$$S(y(i), L) = [DF^L(y(i))^T . DF^L(y(i))]^{\frac{1}{2L}} \quad (2.26)$$

T est la transposition. La matrice d'Oseledec est construite sur une séquence infinie de composition de matrices ($L \rightarrow \infty$) et le choix du point initial $y(i)$ n'est pas important. En effet, ceci repose sur le théorème multiplicatif d'Oseledec (Oseledec, 1968). Ce théorème peut être vu comme la généralisation des études classiques de stabilité linéaire sous l'effet d'une petite perturbation. Nous avons vu que dans le cas d'un point fixe, on étudie les valeurs propres du système linéarisé autour de ce point. Dans le cas d'une orbite périodique, la théorie analogue est connue sous le nom de théorie de Floquet.

Dans le cas d'un système quelconque (orbite pas forcément fermée), c'est le théorème multiplicatif d'Oseledec qui permet d'étudier la stabilité selon le signe du logarithme des valeurs propres de S . Ce théorème assure de plus que la limite $L \rightarrow \infty$ existe bien et qu'elle est indépendante du point $y(i)$ initial (à condition que ce point soit choisi dans le bassin d'attraction de l'attracteur). D'autre part, si une trajectoire est stable (ou instable) en un point, elle le sera pour toute la trajectoire (c'est une des propriétés du déterministe assurant que toute variation est continue sur l'attracteur).

Numériquement, le calcul des valeurs propres de la matrice produit des jacobienues est délicat. En effet, plus L est grand, plus les matrices sont mal conditionnées (le conditionnement d'une matrice mesure en quelque sorte la dispersion des valeurs propres). Afin de palier ce problème, nous décomposons la matrice DF^L en une forme QR récursive (Golub et van Loan, 1989), c'est-à-dire que nous décomposons cette matrice en un produit d'une matrice Q orthogonale et de $L-1$ matrices R triangulaires supérieures:

$$DF^L = Q(L-1).R(L-1).R(L-2)..R(1).R(0) \quad (2.27)$$

Puisque les matrices Q sont orthogonales, le calcul de la matrice d'Oseledec fournit:

$$DF^{LT}.DF^L = R(0)^TR(L-1)^T .R(L-1)....R(0) \quad (2.28)$$

Ainsi, les exposants de Lyapunov globaux sont calculés à partir des termes diagonaux de la matrice R de la sorte:

$$\lambda_i = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \text{Log}[R_{ii}(k)] \quad (2.29)$$

$R_{ii}(k)$ est la composante (i,i) de la k ième matrice triangulaire $R(k)$.

Dimension de Lyapunov

La dimension de Lyapunov D_{Lyap} (Kaplan et Yorke, 1979) est directement évaluée à partir des exposants globaux de Lyapunov:

$$D_{Lyap} = K + \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i}{|\lambda_{K+1}|} \quad (2.30)$$

avec $\sum_{i=1}^K \lambda_i > 0$ and $\sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i < 0$. L'entier K est choisi tel que $K < D_L$ et $\lambda_{K+1} < 0$. D_{Lyap} est une limite supérieure de la dimension de l'attracteur D_A et permet donc de caractériser le type d'attracteur du système étudié.

Horizon théorique de prédiction

Il est possible de déterminer un horizon de prédiction au delà duquel il est impossible de connaître à l'avance l'état du système. En effet l'existence d'exposants positifs introduit une limite à la "prédictibilité" du système de part la divergence exponentielle des orbites. Ainsi on définit l'horizon de prédiction H_P à partir de l'exposant principal de Lyapunov (le plus grand positif), λ_1 par:

$$H_P = 3.9/\lambda_1 \quad (2.31)$$

Le facteur 3.9 est arbitraire et vient du fait que l'horizon de prédiction est choisi comme étant le moment où deux trajectoires initialement distantes de 1 % de la taille moyenne de l'attracteur R_A , s'écartent de $0.5 R_A$. H_P est une estimation très utile du temps au delà duquel il est impossible de faire une prédiction valide ou même statistiquement significative de l'évolution du système.

Exposants de Lyapunov locaux

Les exposants de Lyapunov globaux sont des invariants du système (ils ne dépendent pas des conditions initiales) et donnent une caractérisation de la stabilité de l'attracteur en moyenne. Cependant, il peut exister des variations locales de la stabilité d'un système le long d'une orbite.

On calcule ces variations en définissant des exposants de Lyapunov locaux qui varient dans le temps. Ils sont très utiles pour les prédictions à court terme puisque l'exposant principal local nous fournira un horizon local théorique de prédiction variable au cours du temps en se déplaçant le long de l'orbite.

La méthode de calcul des exposants locaux reste la même que les globaux sauf qu'au lieu de faire tendre L vers l'infini, on se limite au calcul de la matrice d'Oseledec sur un intervalle fini L choisi. On aura un exposant de Lyapunov valable sur l'intervalle de temps L . Plus L est choisi grand, plus la stabilité est moyennée le long de l'orbite.

Exposants et types d'attracteurs

Rappelons brièvement quels types d'attracteurs sont associés à quels types d'exposants globaux de Lyapunov. Plaçons nous dans le cas d'un système tridimensionnel. Alors un point d'équilibre est un attracteur si les trois exposants de Lyapunov sont négatifs, un cycle limite aura un exposant nul et deux négatifs, un tore aura deux exposants nuls et un négatif et enfin

Type d'attracteur	$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	D_A	D_{Lyap}	Horizon H_p
Point fixe	$(-, -, -)$	0	/	/
Cycle limite	$(0, -, -)$	1	/	∞
Tore	$(0, 0, -)$	2	/	∞
étrange	$(+, 0, -)$	$2 < D_A < 3$	$D_A \leq D_{Lyap} < 3$	$3.9/\lambda_1$

Table 2.1: Tableau récapitulatif en dimension 3

un attracteur étrange, un exposant positif, un nul et un négatif.

Relations entre les diverses dimensions associées à un système dynamique
 D_E est la dimension globale de la dynamique, c'est la dimension de l'espace des phases dans lequel les orbites sont représentées.
 D_L est la dimension locale représentant le nombre de variables localement et dynamiquement actives au cours de l'évolution temporelle des orbites sur l'attracteur. C'est aussi le nombre d'exposants de Lyapunov globaux. Nous avons

$$D_L \leq D_E \quad (2.32)$$

D_A est la dimension de l'attracteur du système. Elle est liée à D_L par

$$D_A \leq D_L < D_A + 1 \quad (2.33)$$

D_{Lyap} est la dimension de Lyapunov, caractéristique de l'attracteur. C'est une borne supérieure de la dimension D_A .

$$D_A \leq D_{Lyap} \quad (2.34)$$

La Table 2.1 résume le signe des exposants de Lyapunov (λ_i), les dimensions (D_A , D_{Lyap}) et horizon de prédiction (H_p), associés à un type d'attracteur considéré.

5 Exemple: l'Attracteur de Lorenz

Ce paragraphe permet d'illustrer les notions précédemment introduites avec l'étude d'un cas désormais classique: l'attracteur de Lorenz.

1 Contexte physique, équations

Le modèle de Lorenz (Lorenz, 1963) découle de l'étude de la convection atmosphérique. Partant des équations de convection de Rayleigh (1916) décrivant les mouvements convectifs d'une couche de fluide de profondeur constante et telle que la différence de température entre la surface et le fond soit constante, Saltzman (1962), transforma ces équations non linéaires aux dérivées partielles en un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Lorenz reprit les équations de Saltzman en les tronquant pour obtenir finalement un système de 3 équations différentielles ordinaires non linéaires couplées représentant un modèle simple de convection cellulaire atmosphérique. Le but de l'étude de Lorenz était de montrer qu'avec seulement 3 modes couplés, on pouvait obtenir des solutions non périodiques et instables face à des petites perturbations. Les équations du modèle de Lorenz sont:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.35}$$

Les paramètres σ, r et b sont des réels positifs.

Il sont usuellement choisis de valeur: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (valeurs prises par Lorenz).

Le paramètre r lié au nombre de Rayleigh de la convection est le paramètre de bifurcation. Selon les valeurs de r , le système passe par des états dynamiques différents. Pour la valeur $r = 28$, on est dans les conditions d'apparition d'un régime chaotique (attracteur de Lorenz). Le système d'équations de Lorenz n'est pas intégrable analytiquement. Afin de le résoudre, il faut utiliser des méthodes numériques d'approximation de la solution pas à pas en choisissant des conditions initiales (x_0, y_0, z_0) .

Espace des phases

Nous avons trois équations différentielles couplées autonomes et trois variables x, y, z . La dimension de l'espace des phases naturel du système c'est-à-dire l'espace dans lequel les orbites évoluent est donc de dimension $D_E = 3$.

Les axes de l'espace des phases sont définis par les 3 variables $x(t), y(t), z(t)$. Pour $r = 28$, localement, nous avons besoin de 3 directions sur l'attracteur pour décrire dynamiquement le système (il y a trois degrés de liberté). Une direction stable, une direction neutre et enfin la direction caractéristique du chaos, la direction instable. Ainsi, $D_L = 3$. Il est possible de déterminer le taux de contraction des volumes dans l'espace des phases par le calcul de la dérivée de Lie, c'est-à-dire, pour $r = 28$:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\sigma - 1 - b = \frac{-41}{3}\tag{2.36}$$

Cette valeur est représentative de la dissipation du flot qui dans le cas de l'attracteur chaotique de Lorenz est très forte.

Exposants de Lyapunov

D'autre part, le calcul des 3 exposants globaux du système de Lorenz (dans le cas d'une orbite intégrée avec $r = 28$) donne comme valeurs (Zeng *et al.*, 1991):

$$\lambda_1 = 1.50, \lambda_2 = 0.00, \lambda_3 = -22.46$$

L'existence d'un exposant positif, associé à la variété instable, est témoin de la divergence des trajectoires et de leur grande sensibilité aux conditions initiales (SCI). L'exposant nul est lié à la direction neutre du flot et l'exposant négatif important témoigne là aussi du caractère fortement dissipatif du système (la somme des exposants est clairement négative) et du côté borné des orbites. Ainsi l'attracteur de Lorenz est chaotique. Le calcul de la dimension de l'attracteur est $D_A \simeq 2.06$. C'est une dimension non entière (fractale, caractéristique de la structure feuilletée des attracteurs étranges). Si nous traçons l'attracteur dans l'espace des phases de dimension 3 de coordonnées x, y, z , nous voyons que celui-ci est presque plan et a un volume nul. Le fait de trouver une valeur de dimension de l'attracteur D_A très proche de 2 provient du très grand taux de dissipation du système (on contracte les volumes).

D'autre part, à partir des exposants de Lyapunov, nous pouvons déterminer la dimension de Lyapunov D_{Lyap} , elle vaut environ 2.066.

Nous savons que la stabilité locale des orbites sur l'attracteur varie au cours du temps. Cette variation provient de la forme de l'attracteur lui même. En effet, lorsque l'orbite passe vers le milieu de la Figure 2.12, le point (0,0,0) est instable, elle a deux choix possibles, ou continuer sur le même lobe ou changer de lobe. Ainsi le système est moins stable lors du passage d'un lobe à l'autre (l'exposant de Lyapunov local principal associé est plus grand).

Deux autres points fixes symétriques sont visibles autour desquels les orbites passent: ce sont les deux autres points instables (C et C') de l'espace des phases (Figure 2.12). La valeur de l'exposant principal positif est la moyenne de ces petites instabilités locales.

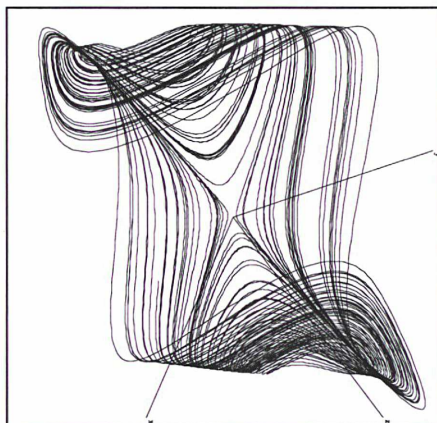


Figure 2.12: Attracteur chaotique de Lorenz: 3 points instables

2 Bifurcations

Etudions brièvement le système de Lorenz du point de vue de la théorie des bifurcations. Nous choisissons toujours les valeurs prises par Lorenz pour b et σ mais allons faire varier r . Par définition, les points d'équilibre du système sont tels que:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad (2.37)$$

c'est-à-dire:

$$y = x, z = x^2/b, x = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad (2.38)$$

Pour $0 \leq r \leq 1$ le système possède un point d'équilibre stable: $(0,0,0)$. C'est l'état de non convection.

Quand r franchit la valeur 1, cette solution devient instable et donne naissance à deux autres solutions stables:

$$\begin{aligned} C &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, b(r-1)) \\ C' &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, b(r-1)) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Physiquement, ces deux solutions correspondent à l'apparition de la convection. A ce stade, on a donc trois points fixes, un instable à l'origine et deux stables. Cette première bifurcation s'appelle une bifurcation fourche. Cet état se maintient jusqu'en $r = 24.74$.

Cependant dès $r = 13.926$, il y a apparition d'un chaos métastable¹² qui devient stable en $r = 24.06$.

Ainsi, pour $24.06 < r < 24.74$ il y a coexistence de deux points fixes stables et de l'attracteur étrange (stable) de Lorenz

¹²Cela signifie que l'attracteur étrange existe dès cette valeur mais que deux types de comportement apparaissent: Soit le système est attiré directement vers le point fixe stable, soit la trajectoire évolue chaotiquement plus ou moins longtemps puis atteint une zone où elle converge asymptotiquement vers le point fixe.

Pour la valeur critique ($r = 24.74$), les deux solutions stables précédentes perdent leur stabilité et chacune d'elle donne naissance à une bifurcation de Hopf.

Entre 24.74 et 30.1, le comportement apériodique se maintient. Les points critiques sont instables. L'attracteur de Lorenz est la seule solution stable du flot.

La figure 2.13, d'après Bergé *et al.* (1984), résume schématiquement les bifurcations du système de Lorenz.

Au delà de la valeur 30.1, le comportement des solutions devient extrêmement complexe présentant une alternance de régimes chaotiques et périodiques.

Afin de compléter l'illustration du phénomène de bifurcations dont nous venons de parler qualitativement, nous avons intégré numériquement le système de Lorenz pour des conditions initiales aléatoires. Nous avons choisi de prendre cinq valeurs différentes du paramètre de "Rayleigh": $r = 22$, $r = 28$, $r = 38$, $r = 200$ et $r = 450$ et de tracer le comportement des orbites correspondantes dans l'espace des phases (Figures 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 et 2.18 respectivement). Nous voyons que en dessous de la valeur critique ($r = 24.74$), nous n'avons pas de comportement apériodique et les orbites convergent rapidement vers le point d'équilibre C ou C' selon les conditions initiales choisies.

Pour $r = 28$, nous sommes dans le cas de l'attracteur chaotique stable de Lorenz, les orbites oscillent autour des deux points instables C et C' en changeant de lobe autour de $(0, 0, 0)$ lui aussi instable.

Pour $r = 38$, l'attracteur est très semblable au cas $r = 28$, c'est aussi le cas pour $r = 200$.

Notons que pour des valeurs de r très grandes (supérieures à 315), l'attracteur ultime du système est un cycle limite stable (Bergé *et al.*, 1984).

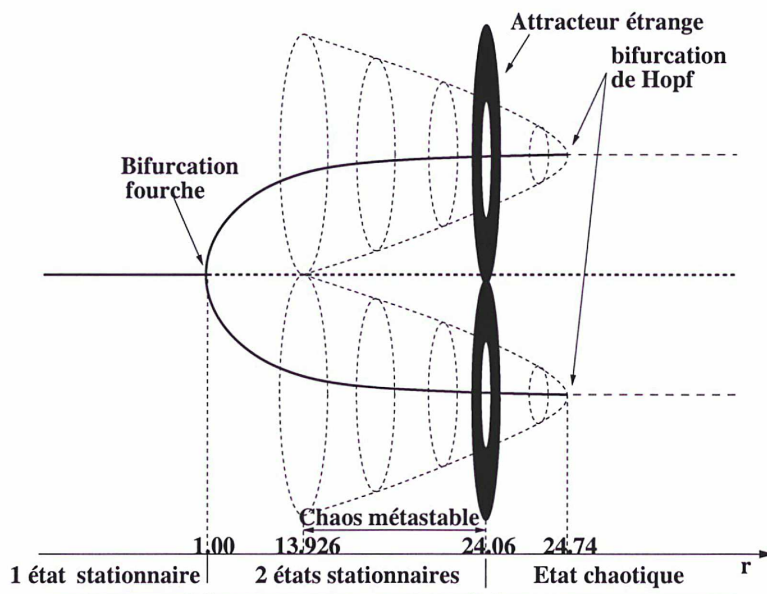


Figure 2.13: Diagramme de bifurcation du modèle de Lorenz, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, r est variable.

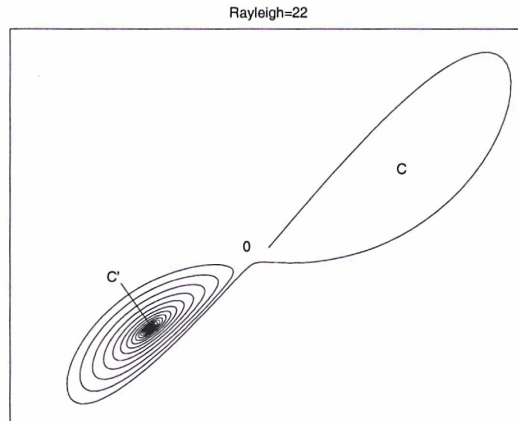


Figure 2.14: Orbite de Lorenz pour $r=22$, $X=f(Y)$. Il y a convergence vers un des deux points fixes stables du flot (C ou C')

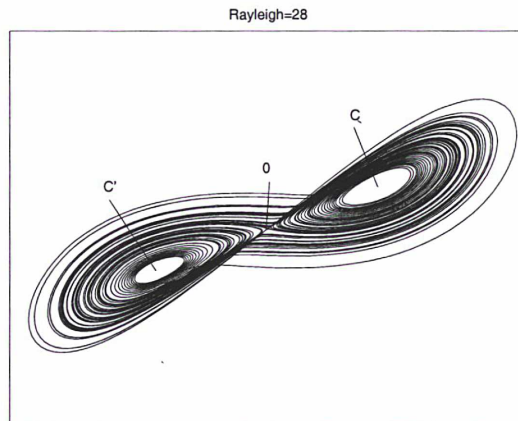


Figure 2.15: Orbite de Lorenz pour $r=28$. Attracteur étrange. Les trois points fixes sont instables

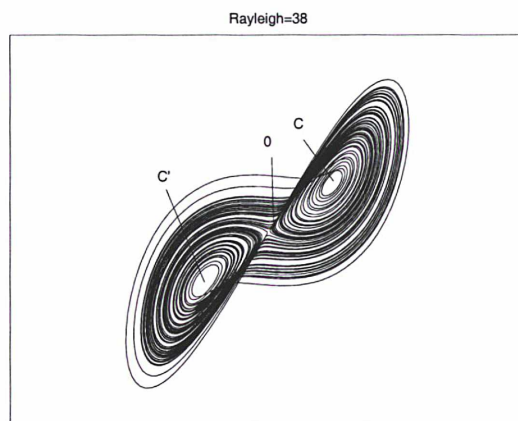


Figure 2.16: Orbite de Lorenz pour $r=38$. Attracteur étrange et régimes périodiques en alternance

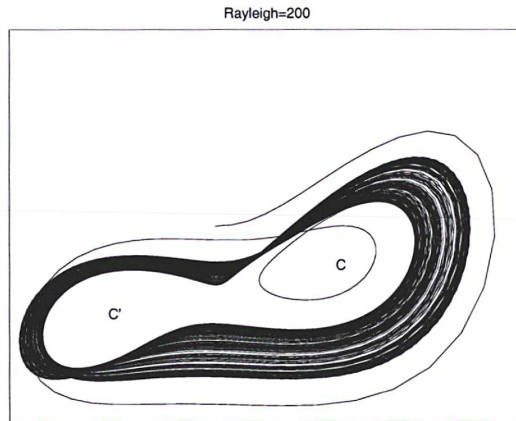


Figure 2.17: Orbite de Lorenz pour $r=200$. Cycle limite et attracteur étrange en alternance

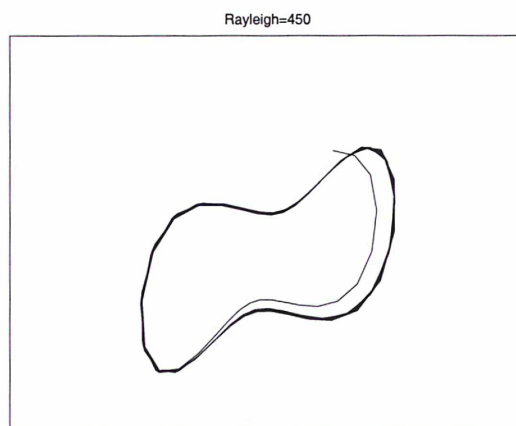


Figure 2.18: Orbite de Lorenz pour $r=450$. Cycle limite

6 Conclusion

Nous venons d'introduire les notions essentielles de la théorie des systèmes dynamiques dont nous allons avoir besoin dans les chapitres suivants (espace des phases, dimensions, attracteurs, exposants de Lyapunov). Les systèmes physiques peuvent être décrits en terme d'équations différentielles ordinaires et peuvent présenter des comportements complexes apériodiques avec seulement un petit nombre de degrés de liberté (ex: Lorenz). D'autre part, grâce à une représentation des orbites dans l'espace des phases, on est capable de reconnaître le type de dynamique sous jacente. En effet, il n'est pas toujours possible de modéliser ou de connaître les équations différentielles de chaque processus physique. La plupart du temps, la seule information disponible est une ou plusieurs séries temporelles d'une ou plusieurs variables du système. La plupart des méthodes d'analyse de séries temporelles se basent sur les modes de Fourier et adoptent donc une approche linéaire qualifiant de bruit aléatoire tout phénomène qui n'est pas déterministe au sens de Fourier (un processus déterministe pour Fourier est: un signal périodique ou quasi-périodique) excluant totalement toute possibilité de comportement non linéaire et a fortiori chaotique.

Depuis une dizaine d'années de nouvelles méthodes non linéaires de traitement du signal basées sur les concepts théoriques des systèmes dynamiques, sont apparues et ont permis de déceler dans de nombreux domaines, des comportement chaotiques et des attracteurs jusqu'à lors ignorés parmi des systèmes physiques divers.

D'autre part, une représentation de l'espace des phases permet de distinguer entre un bruit blanc (pas d'orbite continue et une répartition aléatoire des points) et un système du type Lorenz (attracteur étrange) sachant que leur spectre de Fourier est continu. Nous allons présenter ces méthodes dans le chapitre suivant et voir de quelle façon il est possible de trouver la dimension de l'espace des phases, la dimension locale des variables actives, la dimension de l'attracteur, les exposants de Lyapunov et la dimension de Lyapunov, si elle existe, à partir simplement d'une série temporelle unidimensionnelle d'observations et ainsi de caractériser la dynamique d'un processus observé (stochastique de grande dimension ou déterministe de faible dimension).

Les bases théoriques des méthodes qui seront développées au chapitre 3 appartiennent à la théorie des systèmes dynamiques.

Chapitre 3

Méthodes de Reconstruction d'Espaces à partir de Séries Temporelles

1 Introduction

Le chapitre précédent était consacré aux définitions topologiques et dynamiques concernant les systèmes physiques décrits par des équations différentielles ordinaires du premier ordre. En pratique, il est rare d'avoir accès au système d'équations qui gouverne un processus physique complexe. On est souvent simplement en mesure de recueillir une ou plusieurs séries temporelles d'observations liées non linéairement et de manière inconnue, aux variables du système physique source.

Les méthodes usuelles d'analyse du signal permettent de dresser le spectre de Fourier, de calculer la fonction d'autocorrélation et de modéliser les résidus de la série par des processus autorégressifs (*AR*), moyenne mobile (*MA*) ou une combinaison des deux: *ARMA*. Evidemment tous les systèmes physiques ne rentrent pas dans ce cadre. Nous avons vu que des systèmes très simples (système de Lorenz) pouvaient présenter des comportements très irréguliers ("désordre déterministe") bien qu'ils ne soient pas générés par des processus aléatoires.

De nouvelles techniques capables de recueillir et de décrire les composantes déterministes d'un système (dont une classe particulière est le chaos) à partir d'une série de mesures ont été développées depuis une dizaine d'années. Ces méthodes, principalement géométriques, sont basées sur la théorie des systèmes dynamiques.

Il est intéressant de noter qu'elles ont permis de découvrir des propriétés déterministes à des systèmes modélisés jusqu'alors comme des processus aléatoires. Leur champ d'application est extrêmement vaste. Elles ont été mises en oeuvre aussi bien en biologie (évolution de la taille des populations animales), médecine (réflexe d'accommodation à la lumière de la pupille de l'oeil), physique (étude de la turbulence d'un fluide, dynamique des étoiles pulsantes) qu'en économie-finance (étude des marchés financiers, cours boursiers) et musique (vibrations d'une cymbale). Les paragraphes suivants sont consacrés au développement de "la marche à suivre" lors de l'étude non linéaire d'une série temporelle. Nous verrons comment relier au mieux les définitions mathématiques du chapitre précédent à des problèmes concrets.

Bien entendu, comme dans toute science expérimentale, ces méthodes possèdent des limites et leur application nécessite l'acquisition d'une certaine habitude. Une série devra être traitée différemment d'une autre selon sa longueur, son taux de contamination par du bruit et sa

précision. Par conséquent, il faut être prudent et mener des études approfondies et complètes pour ne pas tirer de conclusion erronée sur la nature du système étudié.

Nous allons présenter principalement les méthodologies générales d'analyse non linéaire d'une série temporelle. Les points plus particuliers liés à l'expérience seront introduits au fur et à mesure des problèmes rencontrés dans ce chapitre et les suivants.

Le paragraphe ci-après discute le rôle du spectre de Fourier dans le cas de signaux non linéaires. Puis nous verrons de quelle manière il est possible, à partir d'une série de mesures uniquement, de retrouver un espace des phases multidimensionnel et d'y reconstruire des orbites et des attracteurs ayant les mêmes propriétés géométriques et topologiques que ceux de la dynamique sous-jacente. Le théorème fondamental justifiant toutes ces recherches s'appelle, le *théorème de plongement*. De plus, nous expliquerons comment calculer les exposants de Lyapunov et comment de ce fait caractériser la stabilité d'un système à partir d'une simple série unidimensionnelle.

Remarque: Nous parlons au cours de ce chapitre de "séries chaotiques, séries linéaires...". C'est un abus de langage et il faut bien entendu comprendre, "séries issues d'un processus chaotique et séries issues d'un processus linéaire..."

2 Spectre de Fourier et signaux non linéaires

1 Présentation générale

Le premier réflexe pour analyser un signal inconnu est de tracer sa transformée de Fourier ou son spectre de puissance. Par cette approche, nous décomposons le signal sous forme d'une somme d'oscillations indépendantes et cherchons à décrire le système en terme de nombre de modes actifs. Soit $x(n)_{n=1..N}$ une série temporelle unidimensionnelle, la transformée de Fourier de cette série s'écrit dans le domaine des fréquences:

$$x(k) = \sum_{n=1}^N x(n) \exp(-i2\pi nk) \quad (3.1)$$

On peut aussi travailler à partir du spectre de puissance de la série qui correspond simplement à la représentation du carré de la transformée de Fourier $|x(k)|^2$ en fonction de la fréquence k , et qui permet de classer le type de signal suivant la loi d'échelle de son spectre. Un bruit, processus aléatoire, est identifié par sa transformée de Fourier continue (infinité de modes actifs). Un signal périodique ou quasi périodique, est identifié dans le domaine des fréquences par un nombre fini de raies distinctes correspondant aux fréquences actives et leurs harmoniques associées.

Par ailleurs, le spectre de Fourier d'un signal provenant d'un système chaotique est lui aussi continu. Dans le domaine temporel, une série issue d'un processus chaotique et une série aléatoire ont toutes deux des comportements complexes qu'il n'est pas non plus possible d'identifier *a priori*.

L'analyse de Fourier est donc très performante pour caractériser des signaux issus de processus périodiques mais est incapable de faire la distinction entre un processus de dimension infinie (aléatoire, stochastique) et un processus chaotique de faible dimension (turbulence, attracteur étrange) dans la mesure où leur spectres respectifs sont similaires: le spectre de puissance n'est pas un outil adapté aux signaux issus de processus chaotiques puisque l'information liée à la phase¹ n'est pas préservée (Eckmann et Ruelle², 1985). En effet, pour l'étude des attracteurs étrange, tout le signal (toute l'information) est importante car le concept restreint de fréquences indépendantes ou de nombre de modes actifs n'est pas adapté (cf. turbulence). On ne peut donc plus raisonner uniquement en ces termes.

Ainsi, lorsque la nature aléatoire d'un processus n'est pas incontestablement vérifiée, il est important d'aller au delà de l'analyse de Fourier. Sans quoi, le risque est une interprétation incorrecte (ou trop "linéaire", cf le problème de la turbulence) de la dynamique réelle sous-jacente du système observé. Pour la compréhension de la physique, la modélisation et la prédiction, la possibilité de distinguer entre un système linéaire possédant un nombre fini de modes, un bruit

¹Cette remarque a déjà été considérée par les statisticiens qui ont développé des méthodes spectrales, dites d'ordre supérieurs (calcul de bispectre, de trispectre, etc...) (Ce sont les fameux HOS : Higher order statistics), qui permettent de prendre en compte les informations contenues dans la phase (Cyril Touzé: communication personnelle). Cependant, ces méthodes s'appliquent à des cas très précis et nous tenions simplement à mentionner leur existence.

²Ceux-ci ont insisté sur la notion de phase afin de justifier d'autant plus la théorie de la turbulence de Ruelle-Takens (1971) face à celle de Landau: dans la théorie de Landau, avec une infinité de bifurcations, on obtient un système dont les relations de phase entre les différentes composantes de Fourier sont fixées une fois pour toute et donc il n'y a pas de décroissance exponentielle de la fonction d'autocorrélation. Du point de vue de Ruelle-Takens, la turbulence apparaît après des interactions non linéaires entre ces relations de phases. Ceci entraîne alors une décroissance rapide de la fonction de corrélation: c'est d'ailleurs ce qui est observé en pratique.

stochastique et un système dynamique non linéaire de faible dimension, est indispensable. Nous allons illustrer ces remarques à l'aide de séries synthétiques particulières et regarder de quelle façon se comporte le spectre de Fourier.

2 Exemples et discussion:

Nous avons représenté quatre séries temporelles différentes de longueur 10080 points (Figure 3.1) et leur spectre de Fourier associé (Figure 3.2). Le choix de cette longueur est totalement arbitraire mais sera utile pour permettre des comparaisons avec les séries à courtes périodes de la rotation de la Terre traitées dans le chapitre suivant et dont la longueur disponible est du même ordre.

- La première série est issue du système chaotique de Lorenz après intégration des équations différentielles par la méthode de Runge Kutta. Nous traçons ici la variable $x(t)$.
- La seconde série est un bruit blanc c'est-à-dire une suite aléatoire de chiffres suivant une loi de probabilité uniforme.
- La troisième série est un bruit coloré de type marche aléatoire c'est-à-dire, un bruit corrélé dans le temps. Dans la littérature, on l'appelle plus précisément, une marche aléatoire ou bruit rouge. Ce type de bruit est très répandu parmi les "bruits" géophysiques.
- La dernière série est une série bipériodique c'est-à-dire la somme de deux oscillations périodiques (les périodes sont commensurables).

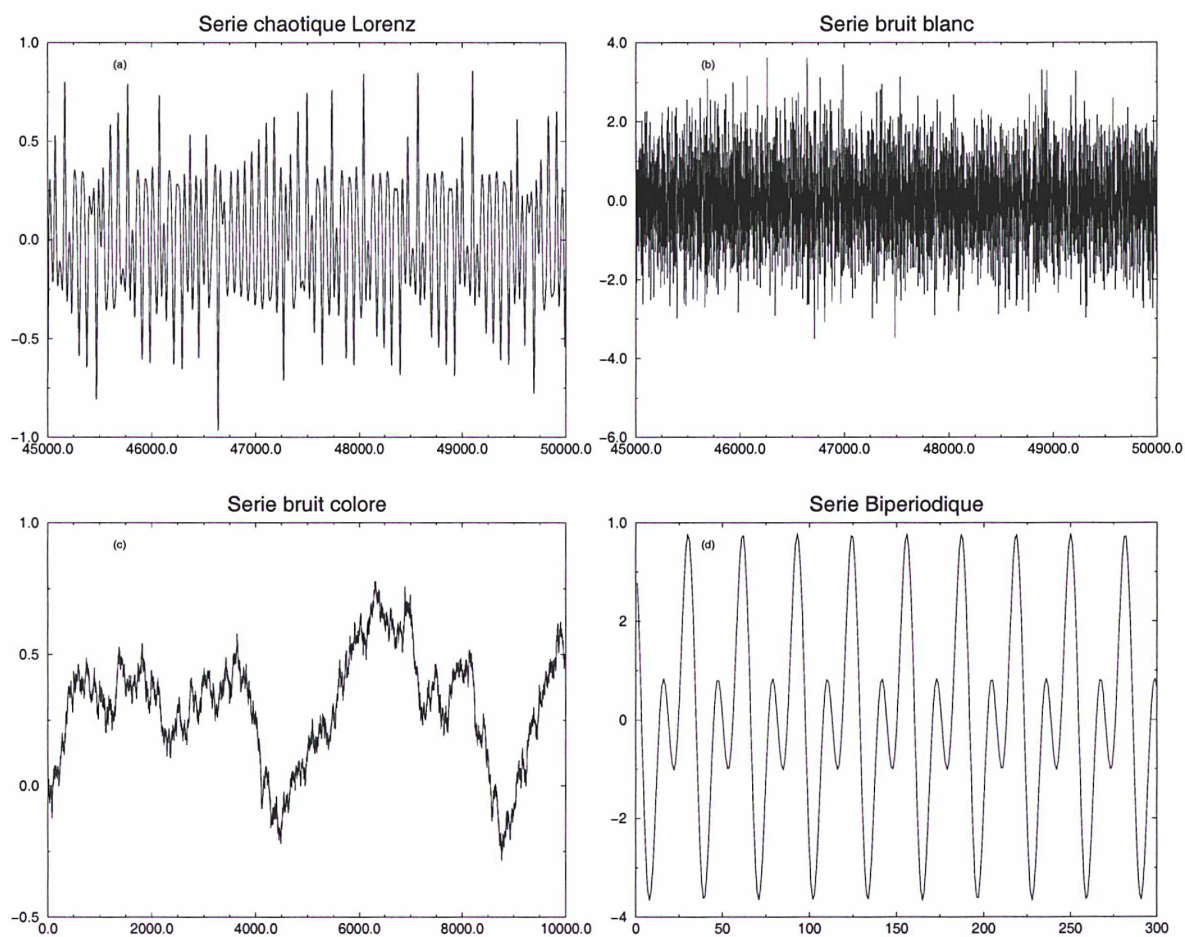


Figure 3.1: Séries temporelles de longueur 10080 points:

- a) Série $x(t)$ du système de Lorenz.
- b): Série aléatoire f_0 de bruit blanc.
- c): Série de marche aléatoire f_{-2} .
- d): Série biperiodique.

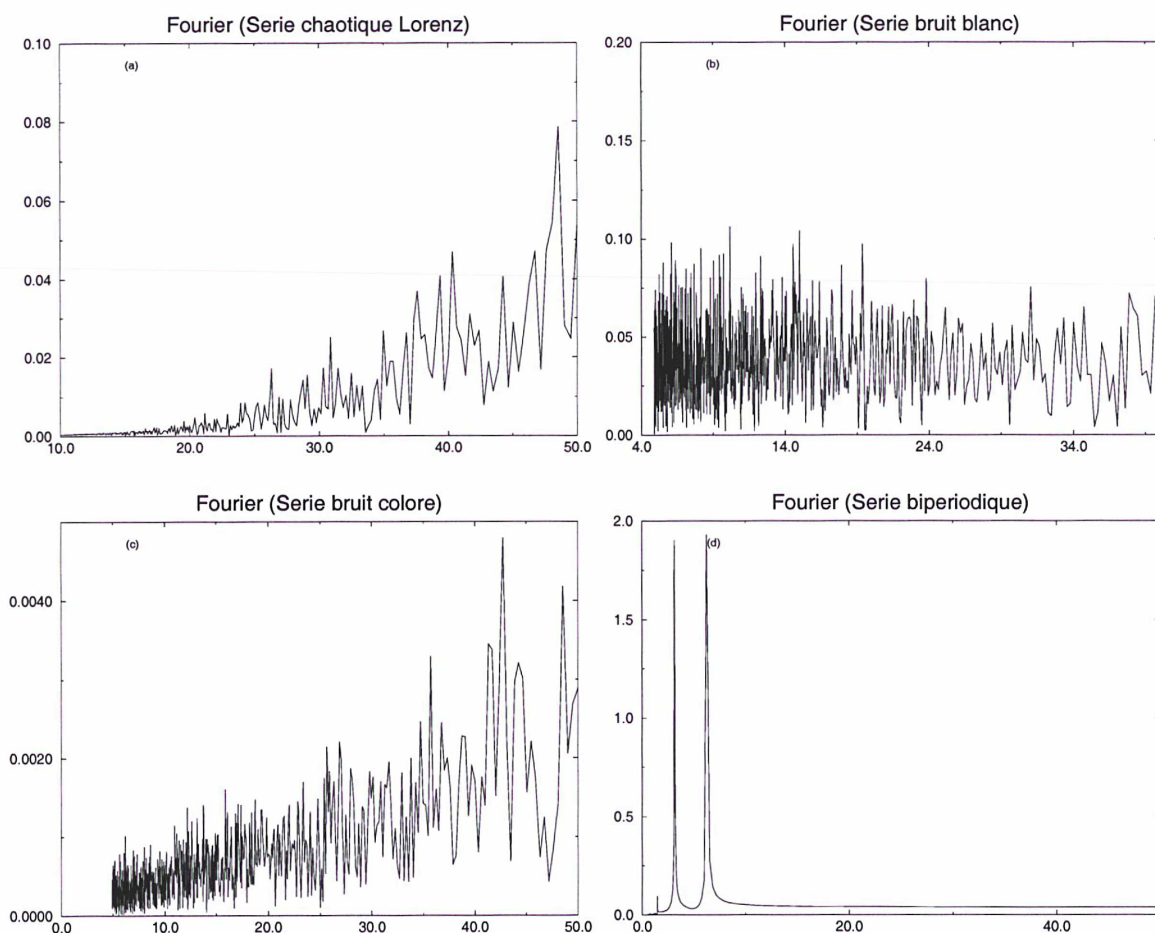


Figure 3.2: Transformée de Fourier (réelle). En ordonnées: l'amplitude, en abscisse, les périodes.

- a) Série de Lorenz.
- b) Série aléatoire.
- c) Série de marche aléatoire.
- d) Série bipériodique.

Il est intéressant de vérifier à travers ces exemples que le spectre de Fourier est bien insuffisant pour la classification d'un système inconnu. En effet la transformée de Fourier de la série chaotique (processus déterministe de faible dimension) (Figure 3.2a) pourrait³ être interprétée comme celle d'un bruit coloré (processus stochastique de dimension infinie) (Figure 3.2c). La méthode de la transformation de Fourier est cependant bien adaptée à des séries périodiques, l'exemple de la série *d* confirme ce point (Figure 3.2d) où l'on retrouve bien les deux fréquences

³En fait, un signal déterministe issu d'un système dynamique présente usuellement une décroissance exponentielle de son spectre de Fourier aux très hautes fréquences tandis qu'un bruit conservera toujours une loi de puissance bien définie, (Manneville, communication personnelle).

de base sous forme de deux pics distincts.

Le spectre de Fourier étant limité à un domaine d'application particulier, nous allons présenter ci-après, une méthode alternative permettant d'identifier le déterminisme linéaire ou non linéaire d'une série et basée sur les concepts de la théorie des systèmes dynamiques. Par cette méthode, consistant en une reconstruction d'espace des phases, un bruit apparaît comme un phénomène de dimension infinie (il faut un espace de dimension infinie pour le reconstruire), un signal k -périodique apparaît comme dessinant un k -tore lors de sa reconstruction et un signal chaotique non linéaire apparaît comme une structure cohérente et compacte de faible dimension dans l'espace de reconstruction. La reconstruction d'espace permet alors de distinguer entre un bruit aléatoire et un signal déterministe de faible dimension à travers l'introduction de dimensions.

3 Plongement, Reconstruction d'espace

Lorsque l'on observe un système dynamique dissipatif quelconque, on ne connaît pas dans la majorité des cas, le système d'équations différentielles qui régit son évolution temporelle. On ne connaît d'ailleurs pas non plus les variables exactes du système. L'information recueillie est une ou plusieurs séries de mesures de quantités observables et qui sont des combinaisons inconnues des vraies variables du système dynamique. L'idée de base du "plongement", consiste à reconstruire rigoureusement un espace multidimensionnel (pseudo espace des phases) et une structure géométrique (pseudo attracteur), "semblable" dynamiquement à l'attracteur inconnu sous jacent, à partir d'une série temporelle à une dimension. En effet, soit A , l'attracteur du système dynamique source, la reconstruction donne accès à un nouvel attracteur $F(A)$ difféomorphe à A . Cela signifie que les propriétés topologiques, dynamiques, géométriques des deux attracteurs sont identiques.

Plus précisément, un plongement est un difféomorphisme F de classe C^1 de A sur $F(A)$. Il existe différents types de plongement.

En 1936, Whitney montre que si A est une variété compacte continûment différentiable (de classe C^1), de dimension d , et incluse dans R^k , alors presque toutes les applications de classe C^1 de R^k dans R^{2d+1} sont des plongements de A . Ce théorème prouve l'existence de tels plongements mais reste peu adapté à des observations réelles puisqu'il implique de connaître un grand nombre de variables indépendantes simultanément (Sauer *et al.*, 1991). En 1981, Takens introduit une classe d'applications particulières: les applications à coordonnées retardées qui sont beaucoup plus pratiques puisqu'elles n'imposent la connaissance que d'une seule variable, c'est-à-dire plus précisément une série temporelle d'observations $x(t)$. Il montre qu'une telle application d'un ensemble compact différentiable de dimension d de R^k dans R^{2d+1} est un plongement.

Cependant, les théorèmes précédents restent limités à des variétés différentiables ou des ensembles compacts de dimension entière. Sauer *et al.* (1991) ont généralisé et démontré les théorèmes de Whitney et Takens à des structures pouvant être fractales. Ainsi, le théorème de Takens généralisé devient:

Soit g un flot (ou un champ de vecteurs quelconque) sur un sous ensemble ouvert U de R^k ($\equiv E$, espace des phases de dimension D_E). Soit A un sous ensemble compact de U de dimension (fractale) d . Soit h une fonction de classe C^1 de U dans R et τ un nombre positif appelé temps de retard.

L'application $P(h, g, \tau)$ de U dans $R^l (\equiv E^*$, espace des phases de dimension D_E^*) à coordonnées retardées est un plongement et s'écrit:

$$P(h, g, \tau)(\vec{z}) = (h(\vec{z}), h(g_\tau(\vec{z})), \dots, h(g_{(l-1)\tau}(\vec{z}))) \quad (3.2)$$

Plus concrètement, considérons un système dynamique décrit par un ensemble d'équations différentielles ordinaires autonomes du premier ordre, dont les variables sont

$\vec{z} = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_{D_E}(t))$, l'espace des phases de ce système est de dimension D_E .

L'observation du système donne accès à une quantité $x(t)$ résultant d'une certaine combinaison non linéaire inconnue h des solutions du système (état du système à chaque instant): $h(g(\vec{z}))$. Les fonctions h et g sont de classe C^1 pour assurer le plongement. Cependant, afin de lier aisément les observations $x(t)$ et les variables du système dynamique, on choisit h telle que $h(\vec{z}(t)) = x(t)$. D'autre part, g est définie par: $g_\tau(\vec{z}(t)) = \vec{z}(t + \tau)$.

Ainsi, en notant $P(h, g, \tau)\vec{z}(t) = \vec{y}(t)$, on a finalement le plongement⁴ suivant:

$$\vec{y}(t) = [x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (D_E^* - 1)\tau)] \quad (3.3)$$

Les vecteurs $\vec{y}(t)$ dessinent les orbites reconstruites (pseudo orbites) dans le pseudo espace des phases de dimension D_E^* . Le théorème de plongement à l'aide des variables retardées assure donc, à travers la reconstruction de nouveaux vecteurs $\vec{y}(t)$, que la plupart des propriétés du système dynamique inconnu décrit par $\vec{z}(t)$ sont reproduites sans altération dans le pseudo espace des phases. Les vecteurs $\vec{y}(t)$ dessinent une structure multidimensionnelle (attracteur) telle que l'évolution séquentielle des $\vec{y}(t) \longrightarrow \vec{y}(t + 1)$ suive parfaitement celle des $\vec{z}(t) \longrightarrow \vec{z}(t + 1)$. Ainsi l'importance pratique de ce théorème est qu'à l'aide d'une simple série temporelle unidimensionnelle $x(t)$ provenant de l'observation d'un système dynamique complexe inconnu, on est en mesure de retrouver ses propriétés fondamentales par une caractérisation essentiellement géométrique des orbites reconstruites $\vec{y}(t)$ dans le pseudo espace des phases. Ceci nous fournit un moyen rigoureux de calculer les exposants de Lyapunov, la dimension de l'attracteur et la dimension locale du système, ceux-ci étant invariants par plongement.

Notons cependant, que pendant le plongement, l'information différentielle est conservée le long des directions continûment différentiables de l'attracteur: ce sont les variétés instables. Ceci implique qu'il sera possible sans aucun problème de calculer les exposants de Lyapunov positifs (Sauer et al., 1991). Au contraire, les variétés stables peuvent avoir des intersections avec l'attracteur étrange, au niveau de ses espaces de Cantor et il sera plus difficile de déterminer les exposants négatifs d'un système chaotique à partir d'une reconstruction d'espace.

D'autre part, concernant le nombre d'exposants de Lyapunov, il est évident que même si le pseudo espace des phases est de dimension D_E^* , alors il ne sera pas possible de calculer plus de D_L exposants vrais.

Il est rassurant de savoir que les quantités essentielles à la reconstruction: τ et D_E^* sont évaluables elles-aussi à partir de la série temporelle uniquement. Nous allons présenter les

⁴Un autre type de plongement qui permet d'éviter de prendre en compte des données trop proches, est le suivant (Manneville, communication personnelle):

$$\begin{aligned} y(1) &= [x(1), x(1 + \tau), \dots, x(1 + (D_E^* - 1)\tau)] \\ y(2) &= [x(1 + \tau), x(1 + 2\tau), \dots, x(1 + (D_E^*)\tau)] \\ y(3) &= [x(2 + \tau), x(1 + 3\tau), \dots, x(1 + (D_E^* + 1)\tau)] \\ &\dots \end{aligned}$$

moyens de trouver ces valeurs dans les paragraphes suivants.

La Figure 3.3 résume graphiquement l'opération de reconstruction.

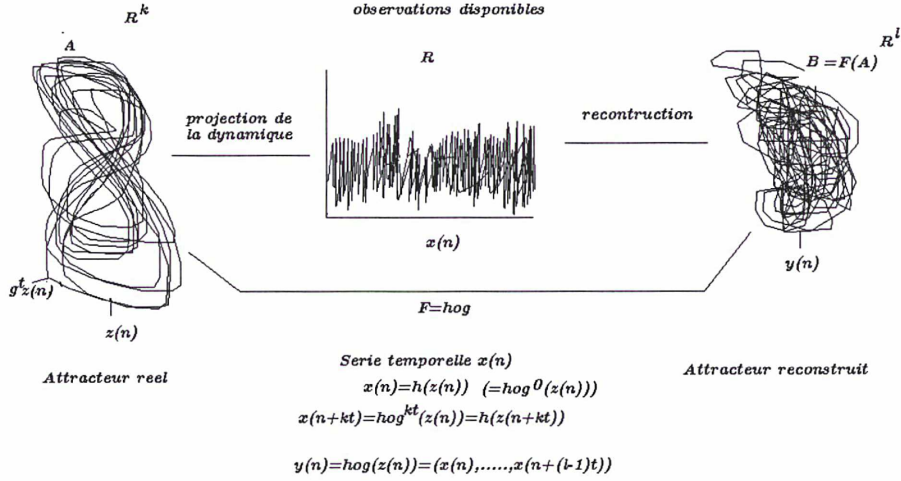


Figure 3.3: A gauche: l'attracteur réel du système dynamique source,
Au centre: la série temporelle $x(n)$ disponible,
A droite: L'attracteur reconstruit grâce au plongement de $x(n)$.

4 Détermination du temps de retard τ

Théoriquement, le théorème de plongement permet de choisir n'importe quelle valeur du temps de retard τ pour procéder à la reconstruction de la dynamique. Cependant, dans la pratique, avec des séries de longueur finie et bruitées, la valeur du temps de retard ne peut plus être arbitraire. Elle doit être définie pour construire des vecteurs $\vec{y}(n)$ dont les composantes $x(n)$ sont suffisamment indépendantes mais pas trop afin que chaque nouvelle composante apporte plus d'information que les précédentes. Plus explicitement, si τ est choisi trop petit, $x(n)$ et $x(n + \tau)$ ne seront pas suffisamment indépendants et $x(n + \tau)$ ne nous apprendra rien de plus que $x(n)$. Les vecteurs $\vec{y}(n)$ seront distribués plus ou moins de long d'une ligne. D'autre part si τ est trop grand, on aura perdu toute connexion entre les mesures et nous ne pourrons trouver aucune corrélation entre les points pour reconstruire l'attracteur. Nous discuterons la sensibilité du choix de la valeur du temps de retard dans les applications consacrées aux séries de rotation de la Terre (chapitres suivants).

Nous allons opposer deux méthodes qui permettent de choisir un temps de retard. La première repose sur la fonction d'autocorrélation linéaire usuelle. Nous verrons qu'elle est peu adaptée pour traiter les séries issues de processus non linéaires. La seconde méthode est une sorte d'autocorrélation non linéaire, c'est la fonction d'information mutuelle moyenne (notée schématiquement: AMI ou $I(T)$) et qui permet de mesurer le gain d'information apporté par chaque nouvelle mesure. Elle a été introduite par Fraser et Swinney (1986). La fonction AMI est basée sur la distribution de probabilité des événements dans la série et permet de ce fait de définir

une mesure plus globale de la dépendance.

1 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation est directement liée à la transformation de Fourier, c'est-à-dire, à une analyse linéaire. Soit la série temporelle centrée $x(n)$, la fonction d'autocorrélation de x est:

$$S(T) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x(n+T) \quad (3.4)$$

Elle mesure la dépendance linéaire entre les variables ou le degré de ressemblance du signal avec lui même au fur et à mesure qu'on avance dans le temps. Lorsque $S(T) = 0$, on perd la connexion entre les mesures et les variables $x(n)$, $x(n+T)$ sont indépendantes statistiquement. Ainsi un choix logique pour le temps de retard pour le plongement est le premier zéro de la fonction d'autocorrélation. Bien entendu, ce concept marche très bien avec des signaux linéaires. Cependant, face à des signaux non linéaires et chaotiques, les résultats fournis par cette méthode ne sont pas toujours valables. Ceci vient sans doute du fait qu'un processus linéaire stable ne génère aucune information (entropie nulle) tandis qu'un processus chaotique génère de l'information (entropie positive). La fonction d'autocorrélation classique n'est pas basée sur ces principes d'entropie ou de gain d'information puisqu'elle est adaptée à la classe des processus linéaires. D'autre part, des événements récurrents mais non successifs dans le temps ne seront pas vus par cette fonction: un processus non linéaire peut présenter des dépendances spatiales mais non temporelles. Une approche basée sur la densité de probabilité des points est plus adaptée pour mesurer une dépendance globale.

2 Fonction d'information mutuelle moyenne

La fonction d'information mutuelle moyenne (AMI) permet de détecter des séquences similaires qui ne sont pas nécessairement proches dans le temps. La fonction AMI est liée à la notion d'information entre les mesures. Etant donnée une observation $x(i)$, on se demande quel est le taux d'information supplémentaire qu'on peut recueillir d'une observation $x(j)$. Ainsi cette fonction est adaptée aux systèmes chaotiques où la notion d'information est primordiale. Soit une série de longueur N : $x(n)$, $n = 1..N$, on définit donc la fonction d'information mutuelle moyenne $I(T)$ par:

$$I(T) = \sum_{n=1}^N P(x(n), x(n+T)) \ln \left[\frac{P(x(n), x(n+T))}{P(x(n))P(x(n+T))} \right] \quad (3.5)$$

où $P(x(n), x(n+T))$ est la densité de probabilité du couple $(x(n), x(n+T))$. On identifie la densité de probabilité $P(x(n))$, à la fréquence de distribution des échantillons $x(n)$ (Jaynes, 1968). Ainsi, pratiquement, on calcule ces densités de probabilités en dressant l'histogramme des valeurs. La densité de probabilité associée au couple de variables est donnée par l'histogramme bidimensionnel associé au couple $(x(n), x(n+T))$.

La solution proposée par Fraser et Swinney (1986) pour choisir le temps de retard τ , est la valeur de T pour laquelle la fonction $I(T)$ passe par son premier minimum (ce n'est pas forcément le minimum global).

3 Exemples et discussion

Nous représentons ci-dessous superposées sur le même graphique, la fonction d'autocorrélation (cercle o) et la fonction d'information mutuelle (étoile *) pour une série de Lorenz (Figure 3.4a) et pour une série bipériodique (Figure 3.4b). Dans le second cas, la valeur du temps de retard donnée par les deux fonctions est légèrement différente. L'autocorrélation est parfaitement adaptée à une série purement linéaire tandis que la fonction AMI semble un peu moins performante. A l'inverse, nous voyons que la fonction d'autocorrélation et la fonction d'information mutuelle donnent un temps de retard vraiment différent pour la série chaotique. En effet la fonction linéaire d'autocorrélation (directement lié à la tranformation de Fourier) est inadaptée à un phénomène purement chaotique. (Les valeurs sont, à titre indicatif, pour la série de Lorenz: $\tau_{I(T)} = 5$ contre $\tau_{C(T)} = 15$.)

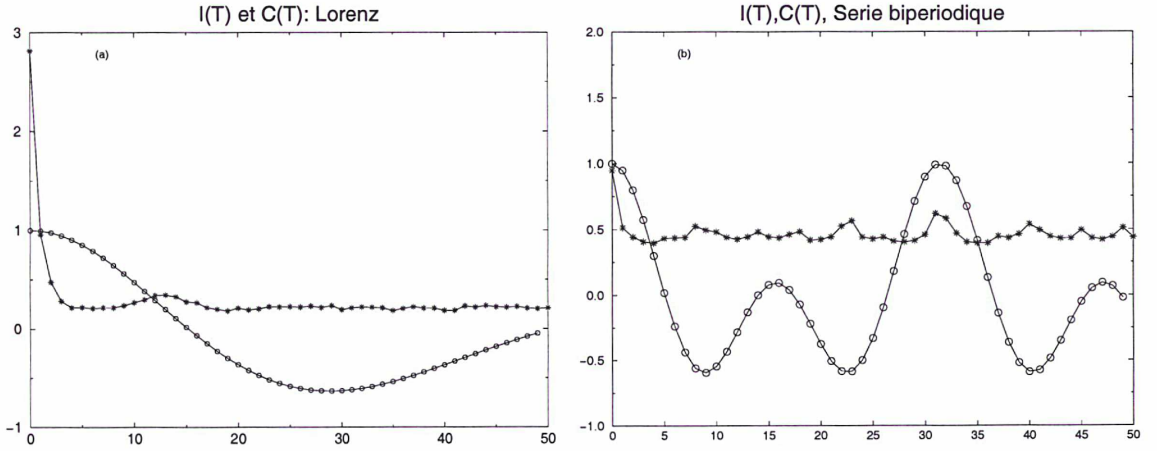


Figure 3.4: Comparaison fonction d'autocorrélation (cercles o) et fonction d'information mutuelle (étoiles *).

a) Pour la série $x(t)$ de Lorenz.

b) Pour la série bipériodique.

5 Dimension de plongement

Nous venons de voir de quelle manière choisir le meilleur temps de retard possible intervenant dans l'opération de reconstruction des vecteurs $\tilde{y}(n)$ grâce à la fonction d'information mutuelle qui permet de ne pas exclure de composantes non linéaires. Il convient maintenant de déterminer la dimension suffisante (D_E^*) du pseudo-espace des phases E^* dans lequel seront reconstruites ces orbites.

Nous rappelons qu'il est impossible de retrouver la dimension réelle (D_E) de l'espace des phases initial (E) c'est-à-dire l'espace des phases du système dynamique (dont les variables sont les z_i , $i = 1 \dots D_E$) sous-jacent aux mesures.

Nous observons une série temporelle $x(n)$ résultant d'une combinaison non linéaire des variables réelles z_i . Les orbites que nous allons reconstruire à partir de la série d'observation $x(n)$, présenteront les mêmes propriétés dynamiques (exposants de Lyapunov, dimension d'attracteur et dimension locale) que celles du système initial. Ceci est dû à l'invariance de telles quantités

sous l'action des difféomorphismes du plongement.

Cependant la dimension de l'espace de reconstruction n'est pas unique. En effet, si nous observions deux séries différentes $x_1(n)$ et $x_2(n)$ provenant du même système dynamique, nous pourrions trouver des valeurs différentes de la dimension des pseudo espace des phases E_1^* et E_2^* , bien que la dimension de l'espace des phases E du système source soit toujours la même. Dans la mesure où chaque série d'observation est une combinaison non linéaire différente des variables z_i du système, certaines combinaisons peuvent requérir plus de dimensions pour qu'une structure cohérente et difféomorphe à l'attracteur réel apparaisse. En général, la dimension de l'espace de reconstruction est différente de la dimension réelle de l'espace des phases. Soit D_A la dimension de l'attracteur, une valeur suffisante (mais pas nécessaire) de la dimension de plongement est telle que $D_E^* > 2D_A$. La valeur précise de D_E^* est en fait relativement peu importante. La condition à respecter est de se placer dans un espace de dimension suffisamment grande pour avoir déplié totalement les orbites afin de pouvoir travailler sur la détermination de leurs caractéristiques dynamiques sans artefact dû à une projection.

La série d'observation est unidimensionnelle (c'est une suite de points indexée dans le temps). Elle résulte indirectement d'une projection de la dynamique complète du système sous jacent sur un axe.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'idée de la reconstruction est de former des vecteurs multidimensionnels recréant une structure spatiale géométrique. Il est nécessaire de changer d'espace, en augmentant sa dimension peu à peu. Ceci permet de voir apparaître et de caractériser la structure du processus inconnu. Les orbites dessinées par les vecteurs reconstruits ne doivent pas avoir de points d'intersection dans leur espace des phases E^* de par la définition même d'une orbite. Ainsi la dimension D_E^* du pseudo espace des phases sera celle pour laquelle les orbites reconstruites $\tilde{y}(n)$ seront totalement dépliées, sans point d'intersection d'une part, et d'autre part, telles que en passant à la dimension $D_E^* + 1$, l'écart entre chaque point $\tilde{y}(n)$ de la trajectoire reste constant.

Le graphe suivant (3.5) illustre le choix d'une dimension de plongement suffisamment grande dans le cas d'une série temporelle issue du système de Lorenz. Si la dimension $D_E^* = 1$, tous les points se concentrent sur une droite et la structure de l'attracteur est invisible (on est dans le cas où $\tilde{y}(n) = (x(n))$). Lorsqu'on passe en dimension 2, l'attracteur est presque totalement déplié et reconstruit (rappelons que la dimension de l'attracteur de Lorenz est 2.06), cependant il existe encore des points d'intersections dûs à la projection des orbites dans un espace trop petit (ceci se voit en haut du graphe) (on est dans le cas où $\tilde{y}(n) = (x(n), x(n + \tau))$). Dès la dimension $D_E^* = 3$, la structure est totalement dépliée ($\tilde{y}(n) = (x(n), x(n + \tau), x(n + 2\tau))$). Augmenter la dimension n'apportera rien de plus, la distance entre les points reste constante. Une valeur suffisante de la dimension de plongement est donc 3.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'explication de deux méthodes différentes permettant de calculer la dimension de plongement.

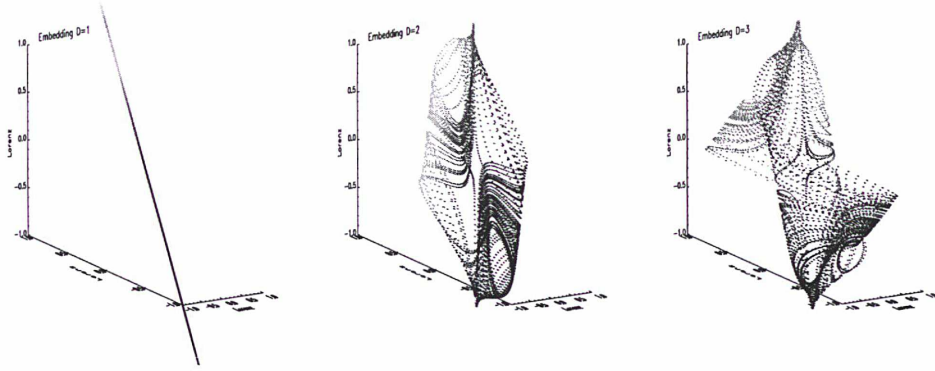


Figure 3.5: Illustration du plongement ("Embedding") de l'attracteur de Lorenz (reconstruction à partir de la série $x(t)$) en dimension 1 (gauche), 2 (milieu) et en dimension 3 (droite) avec un temps de retard optimal obtenu grâce à la fonction d'information mutuelle.

1 Méthode des faux voisins

La conception géométrique de dépliement des orbites a permis de mettre au point un algorithme basé sur la même idée (Kennel *et al.*, 1992):

Etant donné un point de l'orbite, $\vec{y}(n)$, on sélectionne ses proches voisins ($\vec{y}^v(n)$) pour une dimension unitaire ($D=1$) de l'espace de reconstruction, puis on incrémente la dimension recherchée ($D=D+1$) et on regarde ce que deviennent les distances entre le point et ses voisins. C'est-à-dire, on ajoute au vecteur $\vec{y}(n)$ peu à peu, une nouvelle dimension (ou composante).

On comprends bien ici que tant que la dimension sera trop petite (la structure ne sera pas totalement dépliée), il existera des voisins du point $\vec{y}(n)$ qui le seront du fait de la projection des orbites sur un espace de dimension trop faible. Ces voisins ne sont pas "dynamiquement" proches. Dès que la dimension D_E^* sera atteinte, les voisins de $\vec{y}(n)$ seront des vrais voisins c'est-à-dire, seront des points proches du fait de la dynamique de l'attracteur et non du fait du manque de coordonnées de l'espace de reconstruction. A partir de ce moment là, incrémenter la dimension du pseudo-espace des phases n'aura aucune conséquence sur le nombre de faux (ou vrais!) voisins de $\vec{y}(n)$. On aura totalement déplié l'attracteur reconstruit.

Nous allons présenter plus précisément les étapes de l'algorithme:

Soit $\vec{y}(n)$ un vecteur reconstruit dans un espace de dimension D :

$$\vec{y}(n) = [x(n), x(n + \tau), \dots, x(n + (D - 1)\tau)] \quad (3.6)$$

Soit $\vec{y}^v(n)$ son voisin:

$$\vec{y}^v(n) = [x^v(n), x^v(n + \tau), \dots, x^v(n + (D - 1)\tau)] \quad (3.7)$$

On dira que $\vec{y}^v(n)$ est un faux voisins de $\vec{y}(n)$ lorsque leur distance euclidienne dans un espace de dimension $D + 1$ dépasse un certain seuil fixé s_1 , c'est-à-dire si:

$$\frac{|x(n + D\tau) - x^v(n + D\tau)|}{R_D(n)} > s_1 \quad (3.8)$$

avec

$$R_D(n) = \left[\sum_{d=1}^D [x(n + (d-1)\tau) - x^v(n + (d-1)\tau)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

Il a été montré (Abarbanel *et al.*, 1993) que ce critère était insuffisant lorsque le signal était un bruit blanc. En effet l'algorithme fournit des résultats indiquant une valeur finie et faible pour la dimension de l'espace de reconstruction (que nous savons être infinie). Un second test a alors été ajouté afin de s'affranchir de cette erreur. Les données doivent de plus vérifier:

$$\frac{|x(n + D\tau) - x^v(n + D\tau)|}{rms} > s_2 \quad (3.10)$$

où rms est l'écart quadratique moyen de la série:

$$rms = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i) - x_m]^2 \right)} \quad (3.11)$$

x_m sa valeur moyenne et s_2 un autre seuil.

Ce second test permet de rectifier l'insuffisance du premier: le pourcentage de faux voisins augmente désormais avec D dans le cas d'un bruit blanc.

De plus il nous a paru utile, lorsque l'on travaille avec des données finies et bruitées, d'ajouter un troisième test afin de définir ce qu'on entend par "voisin" pour la dimension $D = 1$. Ce test est important car la distance initiale choisie peut s'avérer trop grande (plus grande que la taille de l'attracteur, dans ce cas tous les points seront qualifiés de vrais voisins dès la dimension 2), ou trop petite (dans le cas d'un attracteur peu densifié (peu d'observations, série courte), on ne trouvera jamais aucun voisin pour le point $\tilde{y}(n)$, ou trop peu pour avoir des déterminations statistiquement significatives). Ainsi, deux points sont qualifiées de voisins en dimension 1 lorsque leur distance est une certaine fraction du rms des données (schématiquement: de la taille de l'attracteur):

$$|x(n) - x^v(n)| < s_3 rms \quad (3.12)$$

Ceci est donc la première opération à effectuer dans l'algorithme puis les deux précédentes sont appliquées afin de déterminer la dimension de plongement D_E^* en incrémentant D .

En ce qui concerne les seuils s_1 et s_2 , Abarbanel (1996) a estimé leur valeur grâce à divers tests sur des séries différentes et il semble raisonnable d'adopter les valeurs 15 et 2 pour s_1 et s_2 respectivement. Il a également montré que dans le cas d'un attracteur bien densifié, la valeur de s_1 était peu importante (malheureusement dans des cas expérimentaux, il est difficile d'obtenir des séries très longues et l'attracteur n'est pas toujours bien densifié).

En ce qui concerne le seuil s_3 , il nous a semblé raisonnable de choisir $s_3 = 0.005$ à l'issue de plusieurs tests effectués sur une série de Lorenz ($x(t)$) de 10080 points pour laquelle nous attendions $D_E^* = 3$ et sur une série aléatoire de bruit blanc (f_0) pour laquelle nous attendions $D_E^* >> 15$.

Au "départ", en dimension 0, le pourcentage de faux voisins d'un point est proche de 100% puisque tout est concentré en ce point. Plus on incrémente la dimension de l'espace, plus la structure se déplie et moins persistent de faux voisins dus à la projection sur un espace trop petit. Théoriquement, la valeur de la dimension de plongement est atteinte lorsque le pourcentage de faux voisins devient nul (ceci est valable pour des séries non bruitées et suffisamment longues).

2 Exemples et discussion

Les graphes suivants illustrent le calcul du pourcentage de faux voisins en fonction de la dimension de plongement recherchée pour:

Graphe 3.6:

- (a) Une série de bruit blanc,
- (b) Une série de bruit coloré de loi de puissance f_{-1} ,
- (c) Une série de bruit coloré de marche aléatoire,
- (d) Une série de Lorenz.

Chaque série comporte 10080 échantillons.

Graphe 3.7:

- (a) Une série aléatoire de 120 000 points environ,
- (b) Une série de Lorenz de 280 000 points environ.

Du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, les bruits peuvent être qualifiés de processus non déterministes de dimension infinie. Il est impossible de trouver une dimension de plongement finie pour effectuer une quelconque reconstruction. Un bruit blanc remplit toutes les dimensions de l'espace qui lui sont offertes et augmenter la dimension recherchée de plongement n'aboutira jamais à une convergence vers une valeur finie. C'est ce que nous voyons sur les Figures 3.6 (a) et (b), le pourcentage de faux voisins n'atteint jamais la valeur nulle et reste relativement élevé (15/20 pour cent). Travailler avec une série plus longue assure une non convergence plus flagrante (pourcentage plus élevé) et une remontée des valeurs avec la dimension croissante (Figure 3.7a).

Pour la marche aléatoire, Figure 3.6c, qui est aussi un processus non déterministe de dimension infinie, les résultats sont moins évidents. Le pourcentage de faux voisins devient très faible à la valeur $D_E^* = 4$. Sans aucune connaissance préalable du système nous pourrions interpréter cette série comme un processus déterministe de faible dimension. Ce résultat biaisé est dû à la structure fractale de la courbe et non à sa dynamique. Ensuite la courbe oscille légèrement autour de zéro. Ce comportement est dû à la longueur relativement courte de la série utilisée face à des méthodes originellement développées pour des séries de longueur infinies. Dans toute la suite du travail nous verrons que le bruit "rouge" fournit des résultats surprenants et qu'il faut une caractérisation dynamique complète des séries avant de tirer toute conclusion.

Pour la série de Lorenz, la valeur zéro de pourcentage de faux voisins est atteinte pour la dimension 3 comme attendu (Figure 3.6d). Nous observons de petites oscillations à partir de la dimension 4, la valeur du pourcentage ne restant pas nulle. Ceci vient du fait que la série est relativement courte (10080 points), dans ce cas l'attracteur n'est donc pas couvert complètement. Ce problème disparaît dès que nous travaillons avec une série suffisamment longue (environ 280 000 points) (Figure 3.7b).

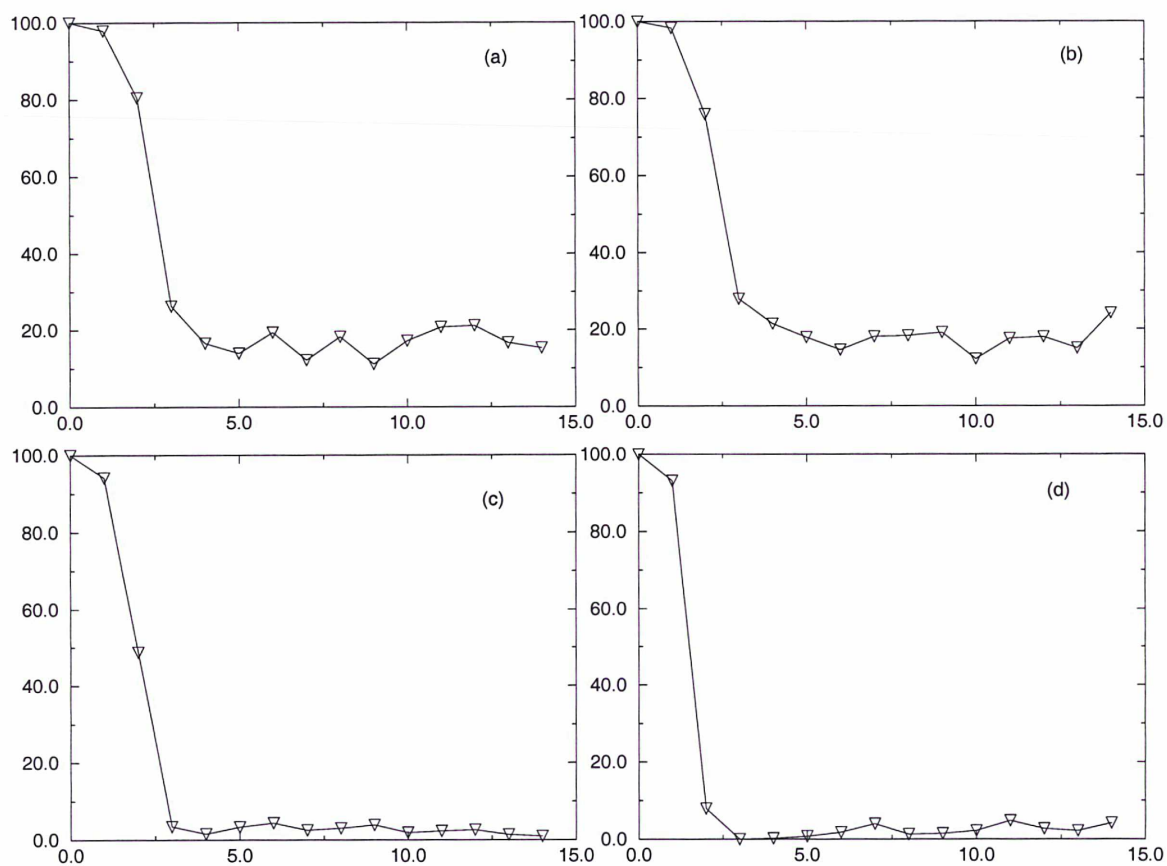


Figure 3.6: Pourcentage de faux voisins globaux en fonction de la dimension de plongement pour des séries comportant 10080 points:

a) un bruit blanc ($D_E^* = \infty$), b) Un bruit de Flicker ($D_E^* = \infty$), c) Une marche aléatoire ($D_E^* = 4?$), d) Une série chaotique de Lorenz ($D_E^* = 3$).

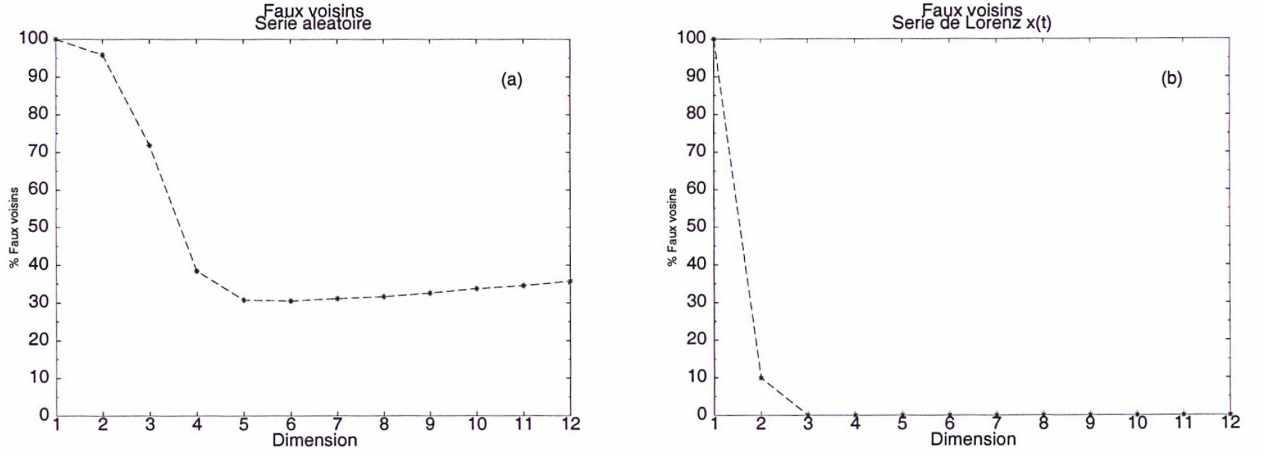


Figure 3.7: Pourcentage de faux voisins globaux en fonction de la dimension de plongement pour

a) Une série de bruit blanc de longueur 120 000 points ($D_E^* = \infty$) b) Une série chaotique de Lorenz de longueur 280 000 points ($D_E^* = 3$).

Nous avons aussi représenté ce que sont les résultats pour une série k -périodique. Nous savons qu'un tel système possède un attracteur de dimension k (k -tore) et qu'il faut au moins $k + 1$ dimensions pour plonger ce tore correctement. Le graphe (3.8) s'applique à un signal bipériodique comportant 10080 points (la dimension de plongement nécessaire est bien 3.)

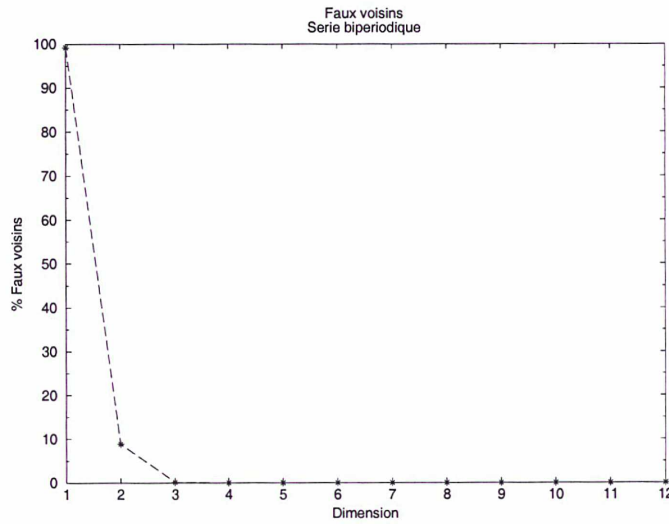


Figure 3.8: Pourcentage de faux voisins en fonction de la dimension de plongement pour une série bipériodique ($D_E^* = 3$).

3 Méthode de l'intégrale de corrélation

Ce second algorithme permettant de déterminer la dimension de l'espace de reconstruction est plus connu sous le nom de l'algorithme de Grassberger et Procaccia (1983). Il fût développé dans l'optique de fournir la dimension D_A de l'attracteur d'un système reconstruit à partir

d'une simple série temporelle d'observation. Son principe est de faire un comptage de la densité de points sur l'attracteur dans des hypersphères de rayon r et d'en déduire une loi de puissance en r . L'intégrale de corrélation est définie par:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N H(r - |\vec{y}(i) - \vec{y}(j)|) \tag{3.13}$$

H est la fonction de Heavyside telle que:

$$H(x) = 0, x < 0, H(x) = 1, x > 0 \tag{3.14}$$

Lorsque les orbites dessinent un attracteur de dimension D_A , Grassberger et Procaccia ont montré que cette intégrale se comporte suivant la loi " r^{D_A} " lorsque r tend vers zero. Nous verrons dans le paragraphe consacré aux dimensions d'attracteurs, que pratiquement, D_A est lue comme étant la valeur de la pente du diagramme $\log C(r)/\log r$ en $D = D_E^*$. L'intégrale de corrélation est donc une fonction de r mais aussi de la dimension de plongement D . En effet pour un système déterministe, dès que D est égal ou supérieur à D_E^* , les orbites sont bien dépliées et la pente des courbes $\log C(r)/\log r$ se stabilise sur D_A . En effet, la loi de la densité de points sur l'attracteur n'évolue plus si les $y(i)$ sont augmentés d'une ou plusieurs dimensions. Ainsi on choisira la dimension de plongement D_E^* comme étant la dimension à partir de laquelle les pentes du diagramme $\log C(r)/\log r$ deviennent constantes, c'est-à-dire quand la densité de points sur l'attracteur ne dépend plus de la dimension dans laquelle il est plongé. Nous verrons que cet algorithme marche très bien dans le cas de séries longues et peu bruitées mais qu'il est souvent préférable d'utiliser la méthode géométrique des faux voisins globaux, plus robuste. Elle donne des résultats plus précis de la dimension suffisante du pseudo-espace des phases du système reconstruit.

4 Exemples et discussion

Nous présentons ici deux exemples de systèmes opposés c'est-à-dire, l'intégrale de corrélation associée à un bruit blanc (Figure 3.9a) (processus de dimension infinie) et celle associée au système de Lorenz (Figure 3.9b) (dimension de plongement égale à 3). Pour l'attracteur de Lorenz, les courbes $\log C(r)/\log r$ présentent une saturation dès la dimension 3, tandis qu'aucune saturation n'apparaît dans le cas du bruit blanc comme attendu.

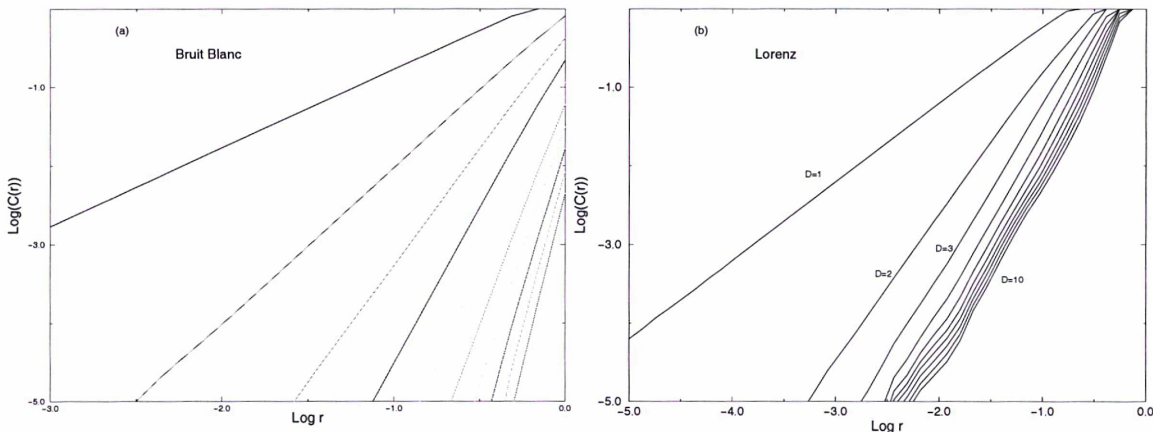


Figure 3.9: Intégrale de corrélation pour des dimensions de $D = 1$ à $D = 10$ (de gauche à droite).

a) cas du bruit blanc: il n'y a aucune saturation des pentes.

b) cas de la série $x(t)$ de Lorenz: les pentesaturent dès la dimension $D = 3$.

6 Dimension Locale ou Dynamique

La dimension du pseudo-espace des phases de reconstruction D_E^* est une dimension globale du système. Elle fournit le nombre de degrés de liberté suffisants pour que l'attracteur reconstruit soit bien déplié et offre un espace de dimension adéquat pour y effectuer toute sorte de caractérisation dynamique et topologique. Cependant, comme déjà mentionné au chapitre 2, localement, la dimension requise pour décrire le système peut être plus faible. L'exemple le plus simple pour comprendre la différence entre ces deux dimensions est celui du 2-tore: L'attracteur 2-tore reconstruit provient d'un système bipériodique tel que les fréquences sont incommensurables. Les orbites reposent donc sur ce 2-tore. Il faut un espace de dimension au moins $D_E^* = 3$ pour reconstituer le tore tandis que localement seules deux variables ($D_L = 2$) sont actives (dans ce cas, on peut voir géométriquement et schématiquement la dimension locale comme celle de l'hypersurface tangente à l'attracteur).

La dimension locale, ou dynamique, permet donc de connaître le nombre effectif de variables dynamiquement actives $D_L \leq D_E^*$. Elle fournit de ce fait le nombre d'équations différentielles autonomes du premier ordre dont nous aurons besoin pour décrire mathématiquement les orbites du système sur l'attracteur, ainsi que le nombre d'exposants de Lyapunov globaux. En effet ceux-ci sont associés à chaque direction principale (ou variété) du flot. De plus, elle correspond au nombre de degrés de liberté suffisamment grands numériquement pour être vus dans la série.

Contrairement à la dimension de plongement, D_E^* , qui n'est pas nécessairement la même pour deux reconstructions à partir de deux séries $x_1(t)$ et $x_2(t)$ issues d'un même système dynamique, la dimension locale sera identique. C'est une quantité invariante dans la mesure où elle appartient à la dynamique propre du système sous jacent. Comme le plongement préserve les propriétés dynamiques de l'attracteur initial, si celui-ci possède une dimension locale l dans un espace des phases de dimension n alors le plongement assure sa reconstruction dans un espace de dimension n' en conservant ses caractéristiques dynamiques et par conséquent sa dimension locale l .

1 Méthode de calcul

L'algorithme qui permet de définir la dimension locale a été mis au point par Abarbanel et Kennel en 1993.

La dimension locale est obtenue à partir de l'étude de la distribution locale des vecteurs $\vec{y}(n)$ sur l'attracteur. L'idée de base est donc de construire des applications locales qui modélisent l'évolution du voisinage d'un point à un autre le long de l'orbite reconstruite en incrémentant peu à peu la dimension de travail. Ces applications sont ensuite utilisées afin de prédire localement l'évolution des orbites. Il s'avère que les prédictions sont statistiquement valables lorsque la dimension recherchée utilisée pour la construction des applications est la dimension locale du système.

Derrière cet algorithme, se cache une idée géométrique primordiale: on recherche en fait le nombre de directions principales sur l'attracteur le long desquelles se répartissent les données.

Aussi, nous a-t-il paru judicieux de regarder l'ensemble des valeurs propres moyennes issues des matrices locales de covariance de chaque voisinage des points de l'orbite. Dans ce cas, une valeur raisonnable de D_L sera le nombre de valeurs propres significatives. Les valeurs propres trop petites traduisent souvent des erreurs d'approximation et d'observation. Elles sont pour la plupart causées par le bruit aléatoire superposé au signal visant à créer des dimensions supplémentaires et n'ont pas leur place dans la description de la dynamique locale.

Pratiquement, pour calculer D_L , il est préférable de se placer dans un espace des phases de dimension suffisamment grande, on choisit une valeur $D > D_E^*$.

Soit un point $\vec{y}(i)$ d'une orbite reconstruite et ses N_v plus proches voisins $\vec{y}^v(i)$. La matrice de covariance pour chaque voisinage s'écrit:

$$COV(i) = \frac{1}{N_v} \sum_{v=1}^{N_v} [\vec{y}^v(i) - \vec{y}_m(i)][\vec{y}^v(i) - \vec{y}_m(i)]^T \quad (3.15)$$

Le vecteur local moyen des voisins est défini par:

$$\vec{y}_m(i) = \frac{1}{N_v} \sum_{v=1}^{N_v} \vec{y}^v(i) \quad (3.16)$$

où $[\vec{y}^v(i) - \vec{y}_m(i)]$ est un vecteur ligne. On détermine les valeurs propres de $COV(i)$ que l'on range dans l'ordre décroissant:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (3.17)$$

Cette opération est effectuée pour chaque point $\vec{y}(i)$ de la trajectoire, afin de pouvoir calculer les valeurs propres moyennes le long de toute l'orbite et les normaliser par la plus grande λ_1 . Nous définissons finalement ce que nous appelons les "valeurs propres moyennes relatives". Selon nous, la dimension locale peut être donnée par le nombre significatif de valeurs propres qui indiquent les directions principales de répartition des points dans l'espace. Il est alors possible d'arrêter ici l'algorithme, nous verrons à travers des exemples que les valeurs trouvées pour la dimension locale avec ce test, sont satisfaisantes.

Cependant, dans l'algorithme de base (Abarbanel et Kennel, 1993), on calcule en plus de l'ensemble des valeurs propres de la matrice de covariance, les projections des voisins $\vec{y}^{v'}(i)$ de $\vec{y}(i)$ sur les vecteurs propres associés aux valeurs propres. Après k pas de temps η , les projections deviennent: $\vec{y}^{v'}(i + k\eta)$. Par la méthode des moindres carrés, on détermine l'application linéaire locale qui transforme $\vec{y}^{v'}(i)$ en $\vec{y}^{v'}(i + k\eta)$. L'évolution temporelle du point $\vec{y}(i)$ est alors prédite grâce à cette application et comparée au vrai vecteur $\vec{y}(i + k\eta)$ de l'orbite. On teste la validité des applications locales pour chaque $\vec{y}(i)$ en analysant l'erreur quadratique moyenne de prédiction. A partir d'un certain seuil fixé, toute prédiction est qualifiée de mauvaise. La méthode consiste à augmenter peu à peu le nombre de vecteurs propres sur lesquels on projette. La dimension locale D_L est atteinte lorsque le pourcentage de mauvaises prédictions devient nul et indépendant du nombre de vecteurs propres utilisés pour la construction des applications. Le choix du nombre de voisins N_v n'obéit pas à un critère bien établi, ni celui de l'horizon de prédiction $k\eta$. Ils dépendent de la série étudiée, de sa précision et de sa longueur. Nous avons sélectionné grâce à une série test $x(t)$ de Lorenz, un nombre de voisins $N_v = 10$ ou 25 et des horizons $k\eta$ satisfaisants de l'ordre de $\tau/2$. Ces valeurs nous permettant d'obtenir la dimension locale attendue $D_L = 3$.

La méthode présentée ici étant locale, elle est très sensible à la contamination par le bruit. De

plus, si nous avons trop peu de voisins ou si nous prédisons sur un intervalle trop petit, nous perdons le sens statistique des déterminations. Dans ce cas le risque est de ne prédire que le bruit et de perdre le schéma d'évolution des orbites. La Figure 3.10 montre ce que deviennent les orbites de l'attracteur de Lorenz lorsque la série est contaminée par 10 pour 100 de bruit blanc. Cet exemple illustre le fait que toute détermination locale sera faussée par la présence de bruit dans les mesures. A l'opposé, choisir trop de voisins ou un horizon de prédiction trop grand, solliciterait la construction d'applications polynômiales de degré élevé afin de prendre bien en compte les courbures de l'attracteur, et donc la possession d'un très grand nombre de données.

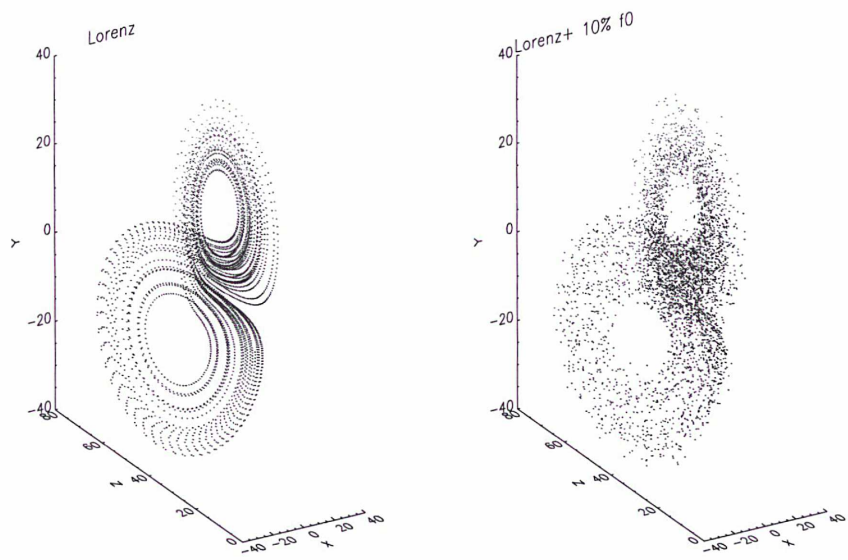


Figure 3.10: Attracteur étrange de Lorenz, à gauche: orbite "propre", à droite: orbite contaminée par 10% de bruit blanc.

2 Exemples et discussion

Les deux exemples suivants illustrent l'opposition du comportement dynamique entre une série issue d'un processus déterministe et une série issue d'un processus aléatoire. Le test du pourcentage de faux voisins locaux fournit des résultats satisfaisants lorsque l'on utilise des séries suffisamment longues. Ainsi les graphes sont parlant d'eux mêmes: La dimension locale pour l'attracteur de Lorenz (Figure 3.11a) est atteinte à partir de $D_L = 2$, en fait c'est 3 bien que localement on ait presque un plan (la dimension de l'attracteur étant 2.06, la projection sur la troisième valeur propre très petite, ne s'exprime pas). Dans le cas du bruit blanc (Figure 3.11b), aucune dimension locale n'est atteinte ce qui est logique puisqu'il est déjà impossible de plonger ce processus dans un espace de reconstruction de dimension finie. Localement, l'algorithme trouve des points dans toutes les directions. Il ne peut pas isoler de directions principales puisque le nombre de degrés de liberté actifs est infini.

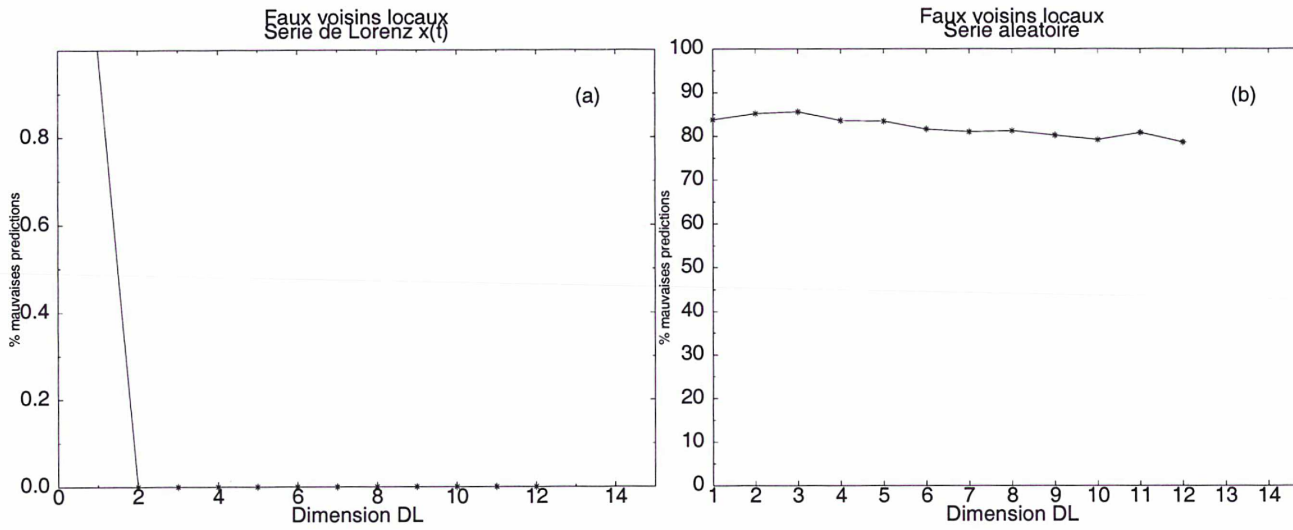


Figure 3.11: Pourcentage de mauvaises prédictions en fonction de la dimension locale D_L :

a) pour une série $x(t)$ de Lorenz.

b) pour une série de bruit blanc.

3 Comparaisons des deux méthodes

Nous avons testé comparativement les deux méthodes présentées précédemment dans le cas d'une série provenant du système de Lorenz (Lorenz) mais de longueur relativement courte (10080 points). Il apparaît qu'avec des séries courtes, le test des valeurs propres relatives moyennes (Figure 3.12a) est plus robuste: en effet ce test donne bien une valeur de la dimension locale égale à 3 tandis que le pourcentage de faux voisins locaux (mauvaises prédictions (Figure 3.12b)) fournit une valeur à nouveau sous-estimée (2). D'une façon générale, la méthode des valeurs propres moyennes étant uniquement géométrique et ne faisant appel à aucune prédiction, semble plus robuste.

Nous avons également contaminé cette série avec 10 pour cent de bruit aléatoire (" $\text{Lorenz} + f_0$ ") afin de voir l'influence du bruit sur les résultats. La contamination a pour effet de masquer partiellement le processus de faible dimension, en effet l'algorithme ne converge plus vers la valeur attendue mais vers une valeur plus importante dû à la présence du processus de dimension infinie polluant la série.

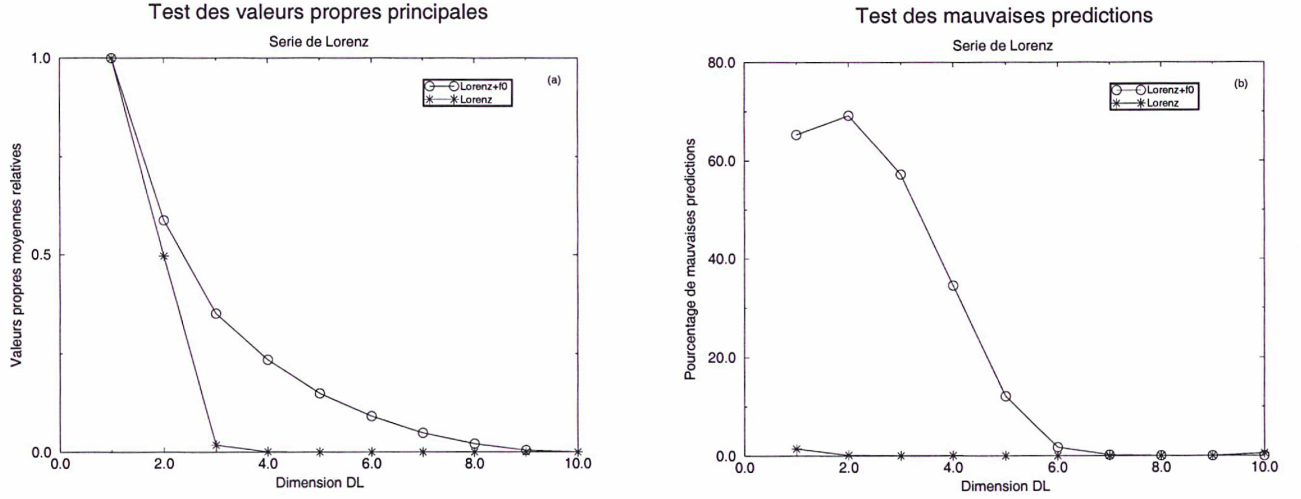


Figure 3.12: Détermination de la dimension locale D_L pour la série de Lorenz et sa contamination par du bruit.

a) test des valeurs propres moyennes relatives. "Lorenz": $D_L = 3$, "Lorenz+ f_0 ": $D_L \rightarrow 9$.
b) test des mauvaises prédictions pour un nombre de voisins de 10. "Lorenz": $D_L = 2$, "Lorenz+ f_0 ": $D_L \rightarrow 8$.

7 Exposants de Lyapunov globaux

Nous avons présenté dans le chapitre précédent la définition et l'intérêt des exposants de Lyapunov globaux pour caractériser la dynamique d'un système. Nous avons dérivé la méthode générale de calcul à partir d'une application F et de l'introduction de la matrice d'Oseledec. Cependant il est très intéressant de pouvoir calculer l'ensemble des exposants globaux de Lyapunov à partir d'une simple série temporelle d'observation, sans aucune connaissance de l'application itérée ou du flot associés au système dynamique. Dans ce cas il faut retrouver les composantes de la matrice jacobienne à partir des mesures. Diverses méthodes ont été proposées et testées (Eckmann *et al.*, 1986; Bryant *et al.*, 1990). Nous présenterons celle décrite dans Brown *et al.*, (1991). Cette version se base sur l'estimation des matrices jacobienues en utilisant un ajustement polynomial afin de mieux modéliser les courbures sur l'attracteur.

1 Méthode de calcul

Là encore la notion géométrique de voisinage est primordiale. En effet il convient de considérer un point $\vec{y}(i)$ du pseudo-espace des phases et ses N_v proches voisins. Nous définissons alors une application locale qui modélise l'évolution temporelle des voisins:

$$\vec{y}_i^v \longrightarrow \vec{y}_{i+1}^v \quad (3.18)$$

où \vec{y}_{i+1}^v est le v -ième voisin de \vec{y}_i au temps $i+1$. L'application locale s'écrit:

$$\vec{y}(v; i+1) = \sum_{m=1}^M \vec{c}(m, i) \Phi_m(\vec{y}_i^v) \quad (3.19)$$

avec Φ_m qui sont des fonctions de plusieurs variables de bases à priori (polynômes) et les $c_a(m, i)$ sont des coefficients locaux à déterminer. Ils sont obtenus en minimisant l'erreur entre le point de l'espace des phases au temps $i+1$ et le modèle d'évolution:

$$\sum_{v=1}^{NB} |\vec{y}_{i+1}^v - \sum_{m=1}^M \vec{c}(m, i) \Phi_m(\vec{y}_i^v)|^2 \quad (3.20)$$

Il est alors possible de relier cette application aux composantes de la matrice jacobienne inconnue, en effet, les composantes (a, b) de cette matrice sont définies par:

$$DF_{ab}(\vec{y}_i) = \sum_{m=1}^M c_a(m, i) \frac{\partial \Phi_m(\vec{y}_i)}{\partial x_b} \quad (3.21)$$

C'est à partir de cette matrice jacobienne que l'on forme la matrice d'Osedelec S et la méthode devient exactement la même que celle présentée au chapitre précédent.

Les exposants de Lyapunov λ_i , sont déterminés comme la limite asymptotique en L de l'expression:

$$\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \text{Log}[R_{ii}(k)]$$

où $R_{ii}(k)$ est la (i, i) i -ième composante de la k ème matrice triangulaire $R(k)$.

Dans la pratique, nous avons rarement des séries temporelles de longueur infinie et les exposants globaux doivent plutôt être compris comme des exposants "locaux" moyennés sur la longueur des orbites reconstruites. (Les exposants locaux seront traités dans le paragraphe suivant.) Ainsi les exposants globaux que nous calculons sont représentatifs de la stabilité moyenne du système sur le temps d'observation disponible. Rappelons aussi l'équivalence entre stabilité et "prédictibilité" d'un système chaotique. En effet l'horizon de prédiction théorique moyen est calculé à partir de l'exposant principal ($\lambda_1 > 0$): $H_P = 3.9/\lambda_1$. Expérimentalement, la détermination des exposants de Lyapunov a un intérêt primordial concernant la prédiction d'un système.

2 Exemples et discussion

Nous avons déterminé les exposants de Lyapunov globaux pour une série chaotique de Lorenz ($D_L = 3$) et pour une série périodique⁵ ($D_L = 1$). Chaque série possède 18000 points.

Comme attendu, les trois exposants de Lyapunov trouvés pour le premier système ont les valeurs respectives: 1.7346, -0.1062 et -23.7518 (Figure 3.13a). L'exposant négatif est associé à la direction stable du flot, le nul (-0.10) à la direction neutre du flot et le positif à la direction instable indiquant que le système est chaotique. Leur somme est négative, ce qui signifie que le système est dissipatif, de plus, la dimension de Lyapunov, D_{Lyp} , déduite des 3 exposants est environ 2.068.

Pour la série périodique (Figure 3.13b), nous avons calculé 2 exposants de Lyapunov: l'exposant nul témoigne de la direction du flot (cycle limite, $D_L = 1$). L'exposant négatif indique que si un

⁵c'est en fait plus précisément une série bipériodique telle que les périodes sont commensurables

petit écart perpendiculaire à la trajectoire est imposé, celui-ci sera dissipé au taux de l'exposant négatif car la trajectoire est stable. De même, pour une série bipériodique, les orbites remplissent un 2-tore et le calcul en dimension 3 fournit 2 exposants nuls ($D_L = 2$) et un négatif. Il n'y a aucun exposant positif car les orbites ne peuvent pas diverger (sans quoi il y aurait des intersections).

En théorie, les exposants de Lyapunov associés à un système aléatoire sont infinis (leur horizon de prédiction est nul). Dans la pratique, il est apparu que des exposants positifs pouvaient être trouvés essentiellement à cause de la longueur trop courte de la série. Tanaka *et al.* (1996) ont montré qu'à partir de 100 000 points, l'exposant principal de Lyapunov est négatif. Heureusement, dans un tel cas, d'autres tests (pourcentage de faux voisins, projection de l'attracteur) permettent de rectifier un tel artefact et de ne pas conclure à l'existence d'une variété instable.

D'autre part, il existe un moyen efficace pour éliminer les exposants fallacieux d'un système, en les calculant normalement puis avec la série inversée (c'est-à-dire, en prenant le dernier point comme origine et en remontant le temps vers le point initial). Seuls les vrais exposants changent de signe et gardent une valeur absolue proche de la détermination d'origine. Il a été également souligné que des exposants erronés positifs induits simplement par l'opération de plongement, et multiples des vrais exposants pouvaient être calculés. Un moyen de les déceler est d'utiliser des applications d'ordre supérieur pour approcher le flot tangent (Sauer *et al.*, 1998).



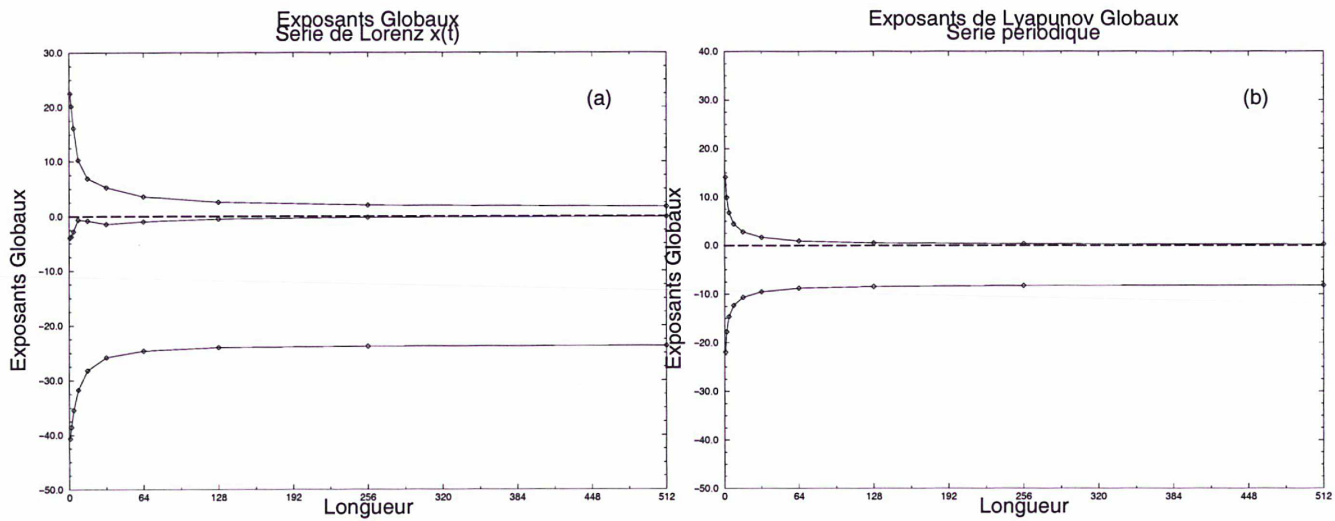


Figure 3.13: Exposants de Lyapunov globaux:

a) pour une série $x(t)$ de Lorenz (l'existence d'un exposant positif prouve que le système sous jacent est chaotique).

b) une série périodique (la non existence d'un exposant positif prouve que le système sous jacent n'est pas chaotique).

La valeur de l'exposant global est lue à l'extrémité droite des graphes. Cela signifie qu'on calcule les exposants sur une longueur moyenne d'environ $L = 500$ (500 matrices jacobiniennes sont déterminées). Plus précisément, on calcule les exposants sur des fenêtres de longueur 500 que l'on fait glisser au fur et à mesure, d'un pas de temps jusqu'à la fin de la série. Les exposants de Lyapunov globaux déterminés ici sont alors les moyennes de tous les exposants "locaux".

8 Exposants de Lyapunov locaux

Les exposants de Lyapunov globaux permettent de décrire la stabilité globale du régime dynamique du système. Cependant il peut exister localement des variations de stabilité selon la position occupée sur l'attracteur (Abarbanel *et al.*, 1991). Ces variations de stabilité locale sont très importantes pour la connaissance de la dynamique dans la mesure où elles sont directement liées aux variations de l'horizon de prédiction du système. La connaissance de l'exposant principal de Lyapunov ($\lambda_1(t) > 0$), nous donne donc accès à une limite théorique ($H_P(t)$) du temps de prédiction.

Nous nous plaçons toujours dans le cas où aucune connaissance sur les équations régissant le système n'est disponible. Il est alors tout de même possible de déterminer les exposants de Lyapunov locaux à partir d'une série temporelle unidimensionnelle. Cela consiste à se limiter à l'étude de la divergence locale de segments finis d'orbites en différents points de l'attracteur. On met ainsi en évidence, les variations locales de l'exposant global principal.

1 Méthode de calcul

La méthode est identique à celle qui permettait de déterminer les exposants de Lyapunov globaux à la seule différence que les exposants locaux sont calculés sur un morceau fini et court d'orbite de longueur L (L est aussi le nombre de matrices jacobiennes DF entrant dans la décomposition de la matrice d'Oseledec).

Dans la pratique, on s'intéressera uniquement aux variations de l'exposant local principal de Lyapunov ($\lambda_1(t)$). En effet dans le cas d'un système chaotique, cet exposant est positif et donne, comme déjà vu, de par sa variation, à la fois les variations de la stabilité du système au fur et à mesure de sa progression sur l'attracteur et aussi les variations temporelles de la "prédictibilité" du système. Pour un système (quasi)périodique, l'exposant principal est nul, l'évolution du système est prévisible à l'infini. Un système aléatoire est imprévisible par définition.

D'une manière générale, les variations locales de l'exposant principal sont intéressantes, car elles fournissent des horizons de prédiction théoriques qui sont variables selon l'évolution du système. De plus, dans le cas d'un système non autonome observé, elles peuvent donner des indications sur les fréquences d'apparition et l'origine des excitations qui créent les instabilités.

2 Exemples et discussion

Nous représentons les variations temporelles de l'exposant principal de Lyapunov $\lambda_1(t)$ pour une série temporelle issue du système de Lorenz (Figure 3.14). Nous voyons que selon la place occupée sur l'attracteur le système est plus ou moins stable et par conséquent plus ou moins prévisible. Les valeurs "4, 8, 16, 32, 64" présentes dans la légende, sont les nombres L de matrices jacobiennes évaluées dans l'application de l'algorithme. Cela signifie que les "fenêtres" sur lesquelles sont calculées les variations de l'exposant principal sont de longueur respectives 4, 8, 16, 32, 64 pas d'échantillonnage. On représente alors exactement la moyenne de l'exposant sur ces longueurs. Il apparaît de plus que plus la fenêtre est choisie large, plus les variations rapides sont moyennées et cela revient en gros à faire un lissage des variations de λ_1 (par exemple les raies très fines correspondent à $L = 4$). Pour des séries réelles, afin de recueillir des variations locales significatives, il est préférable de choisir une longueur L proche de la valeur

du temps de retard τ .

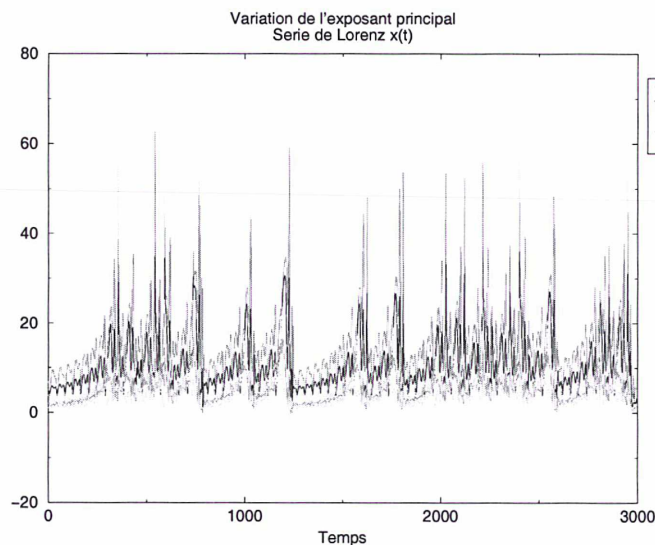


Figure 3.14: Variations de l'exposant principal de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz. Les valeurs "4, 8, 16, 32, 64" sont les nombres L de matrices jacobienues calculées dans l'application de l'algorithme.

9 Dimensions d'Attracteur

1 Méthode de calcul

Nous avons donné dans le chapitre précédent la définition d'un attracteur et de sa dimension. Nous allons présenter ici l'algorithme usuel et très simple permettant à partir d'une série temporelle reconstruite d'estimer la dimension de l'attracteur dans le pseudo-espace des phases. Cet algorithme est le fameux algorithme de Grassberger Procaccia (1983) basé sur le calcul de l'intégrale de corrélation $C(r)$.

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N H(r - |\vec{y}(i) - \vec{y}(j)|) \quad (3.22)$$

Il existe d'autres dimensions qu'on peut déterminer expérimentalement (par exemple, la dimension D_0 obtenue par l'algorithme de "comptage de boîtes" et qui correspond à la dimension fractale; les dimensions D_q ($q \neq 2$) qui sont analogues à la dimension de corrélation ν (ou D_2) mais dont nous reparlerons pas car elles sont plus difficiles à évaluer numériquement; Pawelzik et Schuster, 1987).

Précédemment, l'intégrale de corrélation nous a permis d'identifier la valeur de la dimension de plongement nécessaire à l'opération de reconstruction. Cette intégrale se comporte en suivant une loi de puissance. En effet, aidons nous du petit raisonnement suivant:

Si nous considérons que les orbites reconstruites $\vec{y}(i)$ sont distribuées uniformément sur une surface, le nombre de toutes les paires de points qui sont à une distance inférieure à un certain

r , est proportionnel à r^2 . Dans le cas d'une hypersurface quelconque de dimension D_A , le même raisonnement peut être suivi, l'intégrale $C(r)$ (symbolisant le nombre de paires de points dont la distance est inférieure à r) est alors proportionnelle à r^{D_A} pour r tendant vers zéro et le nombre de points de la série N tendant vers l'infini.

L'intégrale de corrélation fournit une mesure très appropriée de la dimension d'un attracteur reconstruit puisqu'elle est sensible à la façon dont l'attracteur est recouvert dynamiquement. De ce fait la dimension D_A résultante est légèrement différente de la dimension fractale usuelle (D_F) (Chapitre 2) ($D_A \leq D_F$) (Eckmann et Ruelle, 1985). En effet la différence avec la dimension fractale est que celle-ci est obtenue à l'issue d'un recouvrement de l'attracteur par des cubes de longueur l . Ainsi la dimension fractale est uniquement sensible à la structure géométrique globale de l'attracteur et non à la densité de points sur l'attracteur.

Pratiquement, la valeur D_A est lue sur le diagramme $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ comme étant la valeur de la pente linéaire de la courbe en dimension D_E^* pour des valeurs faibles de r .

Cette méthode a été largement appliquée à de nombreuses séries afin de retrouver des dimensions d'attracteurs dans des systèmes atmosphériques, solaires, économiques...(citons par exemple, Nicolis et Nicolis, 1984; Essex *et al.*, 1987; Tsonis et Elsner, 1988).

Cependant, nous verrons que cette méthode n'est pas appropriée à traiter des séries temporelles courtes et bruitées et qu'il faut rester prudents quant à l'interprétation des résultats face à des séries de ce type.

Une autre dimension d'attracteur est la dimension de Lyapunov définie au chapitre 2. Celle-ci est directement liée aux exposants de Lyapunov globaux et apparaît plus robuste aux diverses contaminations possibles dans une série temporelle. Rappelons brièvement sa définition (Kaplan et Yorke, 1979):

$$D_{Lyap} = K + \frac{\sum_{a=1}^K \lambda_a}{|\lambda_{K+1}|} \quad (3.23)$$

avec $\sum_{a=1}^K \lambda_a > 0$ et $\sum_{a=1}^{K+1} \lambda_a < 0$. L'entier K est choisi tel que $K < D_L$ et $\lambda_{K+1} < 0$.

D_{Lyap} est une borne supérieure de la dimension d'attracteur D_A .

La seule limitation de cette dimension réside dans la difficulté à calculer précisément les exposants négatifs d'un système à partir d'une série temporelle.

2 Exemples et discussion

Nous représentons ci-après, les courbes $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ pour des dimensions de plongement comprises entre 1 et 10 dans le cas d'une série issue du système de Lorenz, d'un bruit blanc et d'une série bipériodique (telle que les fréquences sont incommensurables).

Nous confirmons l'absence d'attracteur et de déterminisme dans le cas d'un bruit blanc puisqu'il n'y a aucune convergence des pentes vers une valeur constante. On remarque qu'à chaque dimension, la pente a environ la valeur de cette dimension.

Dans le cas du signal bipériodique, nous vérifions que la dimension de plongement est 3 puisqu'il apparaît une saturation des pentes dès $D_E^* = 3$. La valeur de la pente trouvée est voisine de 2. L'erreur commise est d'environ 5 %.

Pour le système de Lorenz, dès la dimension de plongement égale à 3, on trouve une valeur de la pente de l'ordre de 2.15 puis celle-ci reste entre 2.1 et 2.2 lorsqu'on augmente la dimension. Avec une série de 10080 points on est capable de retrouver la dimension théorique ($D_A \simeq 2.06$) avec une précision de l'ordre de 4%.

La valeur des pentes doit être lue pour des valeurs faibles de r (théoriquement r doit tendre vers zéro). Lorsque les séries sont courtes et bruitées, on ne peut pas prendre de r trop petits

dans la mesure où l'effet du bruit y sera très dominant. D'autre part, la précision des séries elles-mêmes est limitée même en l'absence de contamination et des effets de troncatures empêchent également de travailler vers les "r" trop petits.

De plus, on observe parfois un coude dans les courbes c'est-à-dire, un point où la pente change. Celui-ci a été attribué (Theiler, 1986) à un mauvais comptage des paires de points voisins dans l'espace de reconstruction, qui serait dû au fait que ceux-ci soient proches dans le temps simplement. Pour éviter cela il a proposé de démarrer la sommation intervenant dans l'intégrale de corrélation non pas à 1 mais à une valeur W supérieure au temps de retard τ .

L'existence d'un tel coude peut aussi tout simplement être le témoin d'une caractéristique particulière de la dynamique sous jacente. Eckmann et Ruelle (1985) ont expliqué la présence d'un coude comme le résultat de la superposition de deux ou plusieurs systèmes dynamiques.

La validité de la dimension d'attracteur trouvée dans le cas d'une série expérimentale courte peut être discutée: Ruelle (1990) a proposé un critère de sélection qui permet de savoir si la valeur calculée est raisonnable. En effet la dimension trouvée n'est valable que si celle-ci est inférieure à deux fois le logarithme du nombre N de points dans la série. Toute dimension trop proche de cette limite est à regarder avec suspicion:

$$D_A < 2 \log N \quad (3.24)$$

Ainsi certaines études ayant appliqué l'algorithme de Grassberger-Procaccia seul à des séries expérimentales jugées trop courtes, ont été critiquées par Ruelle.

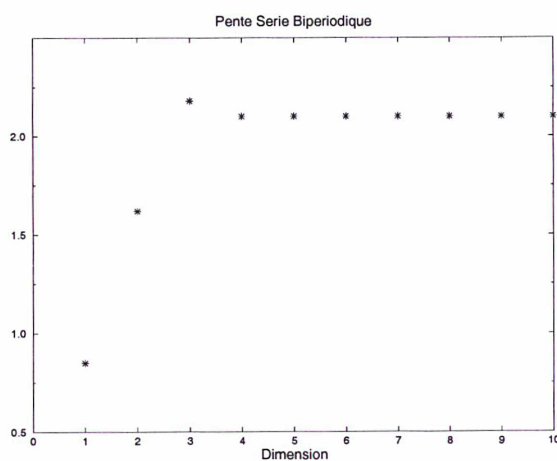
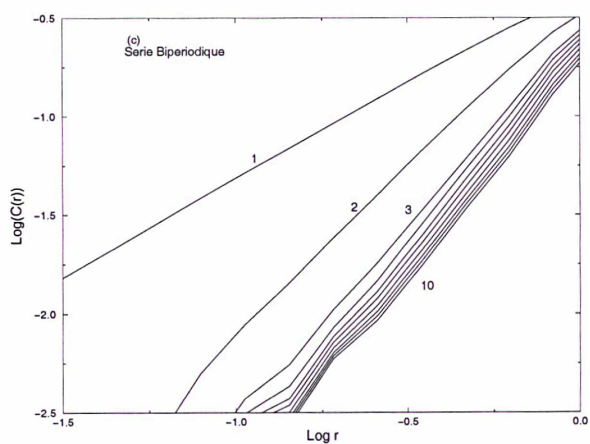
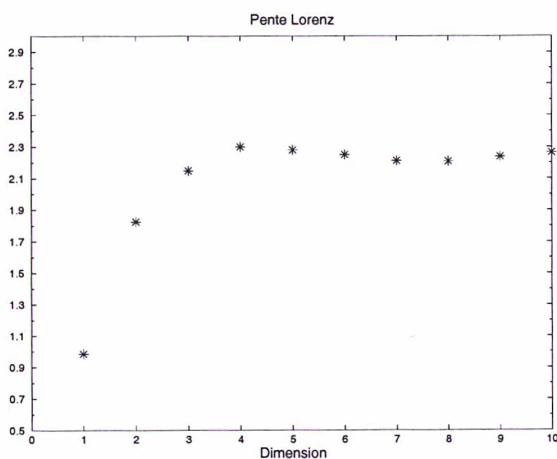
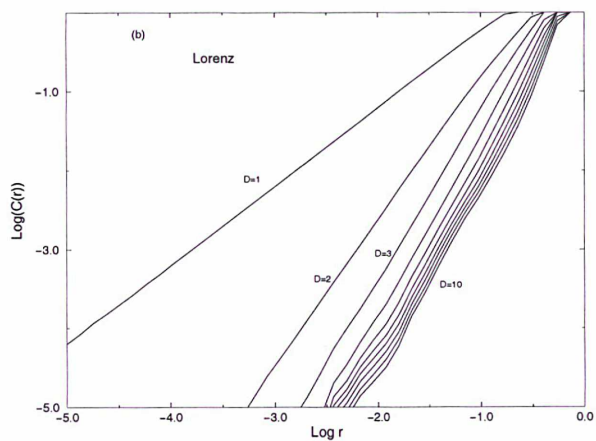
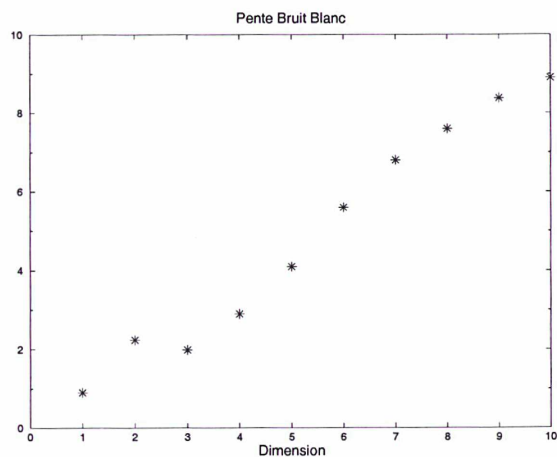
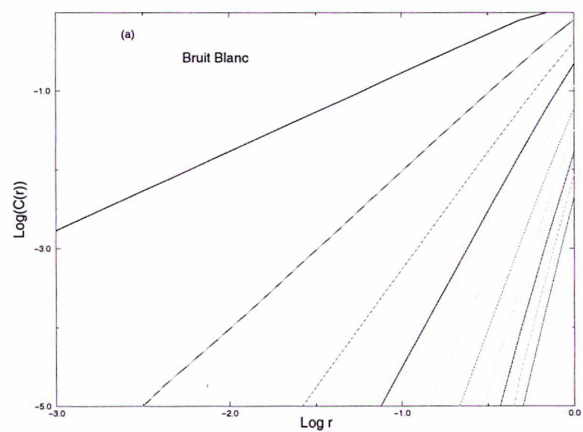


Figure 3.15: Intégrale de corrélation pour des dimensions de plongements de 1 à 10 (gauche) et valeur de la pente associée (droite).
a) pour une série de bruit blanc.
b) pour une série de Lorenz.
c) pour une série biperiodique.

10 Exemples d'attracteurs reconstruits

Nous donnons simplement sous forme de graphes (Figure 3.16), quelques exemples d'attracteurs reconstruits à partir de séries temporelles synthétiques de 10 000 points environ. Ces "attracteurs" sont plongés dans des espaces de dimensions variables mais pour une visualisation possible, leur projection 2D est représentée ici.

- Signal périodique ($D_E^* = 2$)
- Signal bipériodique ($D_E^* = 3$)
- Signal de "Lorenz" ($D_E^* = 3$)
- Marche aléatoire (choix arbitraire: $D_E^* = 5$)
- Bruit blanc (choix arbitraire: $D_E^* = 5$)

Il est important de remarquer que selon le type de processus physique considéré, les orbites reconstruites se comportent de manière tout à fait typique et différente dans l'espace des phases: un signal déterministe périodique dessine comme attendu un cycle limite, un signal déterministe bipériodique, un 2-tore. Un système déterministe chaotique de faible dimension (Lorenz) produit des trajectoires continues et lisses qui suivent une forme cohérente dans l'espace 2D. Le support des orbites n'est pas une figure topologiquement simple mais un objet de dimension fractale. En d'autres termes, un processus déterministe a une structure dans l'espace des phases (figure compacte et bornée).

Dans le cas d'un bruit blanc, la façon dont les points se répartissent est totalement aléatoire, ils s'éparpillent dans toutes les directions à la fois. Il n'y a aucune structure ni continuité dans cette répartition. On obtient simplement un nuage de points qui tendent à remplir toutes les directions de l'espace qui leur est offert.

Pour la marche aléatoire, on voit se former très nettement une courbe de structure fractale non différentiable.

Ce type de représentation peut aider à identifier la nature d'un processus pour lequel les autres méthodes ne permettent pas vraiment de trancher. Nous allons illustrer ceci dans le paragraphe suivant à l'aide d'exemples.

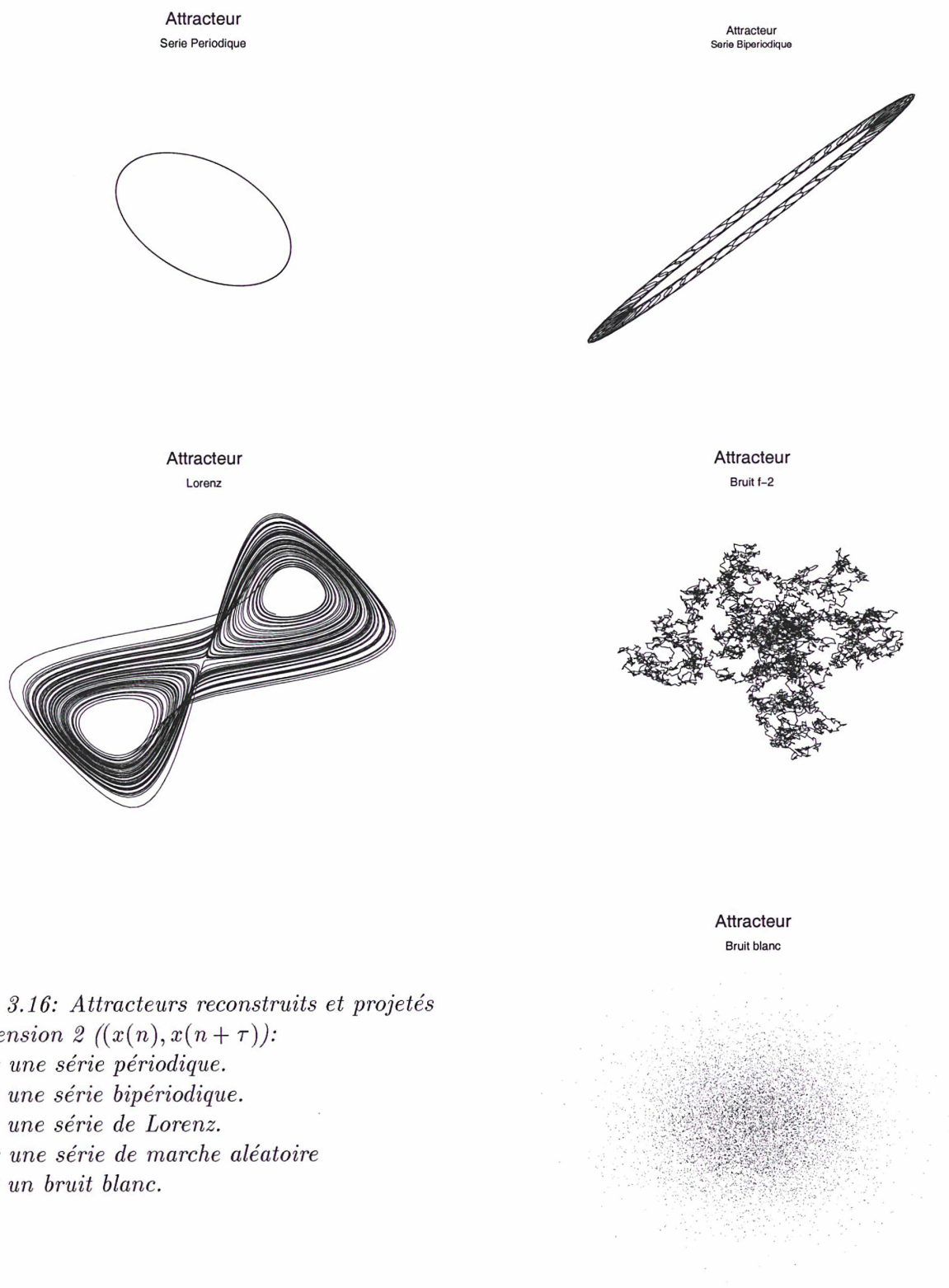


Figure 3.16: Attracteurs reconstruits et projetés en dimension 2 $((x(n), x(n + \tau)))$:

- a) pour une série périodique.
- b) pour une série bipériodique.
- c) pour une série de Lorenz.
- d) pour une série de marche aléatoire
- e) pour un bruit blanc.

11 Limites et Nécessité d'une analyse complète

Nous décidons de présenter dans ce paragraphe deux exemples de problèmes pouvant apparaître lorsqu'on travaille avec des séries inconnues et qu'on ne pousse pas l'analyse assez loin. Nous sommes convaincus que le traitement non linéaire des séries temporelles ne doit pas se limiter à appliquer un test ou deux, mais, du fait de la complexité des séries, doit comporter toutes les étapes décrites précédemment, voire d'avantage, comme nous allons l'expliquer ci dessous. Il n'y a pas de conclusion évidente face à des séries expérimentales, et il convient d'être toujours prudent et critique vis à vis des résultats obtenus.

1 Cas de la marche aléatoire

Appliquons les algorithmes de reconstruction d'espace au cas d'une série de marche aléatoire de longueur moyenne 10080 points. Le spectre de Fourier est continu laissant entendre que le système mesuré est, ou aléatoire, ou déterministe et non linéaire. La fonction d'information mutuelle ou la fonction d'autocorrélation indiquent que le système est corrélé dans le temps: ce n'est pas un bruit blanc (autocorrélation nulle) mais ce peut être un bruit coloré ou un "chaos"⁶.

L'algorithme des faux voisins globaux indique une valeur finie de la dimension de l'espace de reconstruction bien que la convergence en zéro n'ait pas lieu nettement (ce problème provient de la longueur limitée de la série). Ainsi une dimension de plongement raisonnable pour ce processus, serait 4 ou 5 (Figure 3.6c). Nous serions donc en bonne voie pour penser que le signal traité provient d'un processus déterministe de faible dimension.

Il devient alors nécessaire de s'interroger sur la dimension de l'attracteur du système. En effet l'application de l'algorithme de Grassberger-Procaccia fournit une valeur de la dimension D_A autour de $D_E^* = 4$ qui semble non entière. Cependant, ce résultat ne suffit pas pour conclure au chaos déterministe de la série.

En effet une série de marche aléatoire est une courbe fractale c'est-à-dire, une courbe non différentiable de longueur infinie et dont la dimension est non entière. Ce que l'algorithme de Grassberger-Procaccia traduit ici, est la dimension fractale de la courbe et non une quelconque dimension d'attracteur étrange (Figure 3.16d). Osborne et Provenzale (1989) ont discuté ce point à travers divers exemples de bruits colorés.

D'autre part, chaos n'est pas synonyme de fractal. Il existe des attracteurs de dimension fractale qui ne sont pas chaotiques. Rappelons que la chaotité est directement liée à la condition de sensibilité aux conditions initiales (SCI) des orbites c'est à dire à l'existence d'exposants de Lyapunov positifs. Un moyen de trancher serait donc ici de poursuivre l'étude en calculant les exposants de Lyapunov du système. L'existence d'aucun exposant positif démontre alors que la divergence des trajectoires est absente dans le système et qu'il ne peut pas de ce fait être chaotique.

En admettant qu'il existe une série de bruit coloré qui passe triomphante à travers tous ces tests, un bon moyen d'éliminer les séries issues de processus non déterministes est de procéder d'une part à un filtrage des données (Roberts, 1991) et d'autre part à une projection 2D ou 3D des orbites de l'espace de reconstruction.

⁶Néanmoins la fonction d'autocorrélation peut parfois donner une autre indication sur la nature du processus sachant que les signaux issus de processus chaotiques sont caractérisés par une décroissance rapide de leur fonction d'autocorrélation tandis qu'une marche aléatoire possède une mémoire plus "grande" (la série temporelle est auto-similaire: même structure à toutes les échelles).

Une série de Lorenz filtrée ("filtre de Vondr  k"⁷, Vondr  k, 1977a, 1977b)) garde une structure dans l'espace des phases (Figure 3.18a) tandis qu'une série de bruit rouge filtrée, par exemple, perd toute sa cohérence fractale (Figure 3.18b) et sa forme se rapproche de celle d'un bruit blanc, (répartition aléatoire des points dans l'espace des phases).

Un autre moyen de trancher sur la nature d'un signal quand les résultats sont mitigés, est de visualiser en dimension 2 ou 3, selon les possibilités, les orbites de l'espace de reconstruction de cette série (voir paragraphe précédent). Simplement à titre d'illustrations supplémentaires, nous avons projet   en dimension 3 les "attracteurs" de trois systèmes vus sous différents angles: nous avons choisi arbitrairement un espace de reconstruction de dimension 6, et représenté 4 combinaisons possibles de 3 variables retardées des vecteurs reconstruits afin d'effectuer la projection 3D. Nous avons appliqué cette opération à deux séries de bruit (bruit blanc (Figure 3.17a) et marche aléatoire (Figure 3.17b)) et pour la série de Lorenz (Figure 3.17c).

Finalement, nous tenons à mentionner, bien que cet aspect ne soit pas traité dans cette thèse, que les prédictions non linéaires peuvent être également un bon moyen de reconnaître si l'on a affaire à un bruit aléatoire ou à un signal déterministe.

Il s'agit de représenter l'erreur de prédiction en fonction de la dimension de plongement (Casdagli, 1989). Un signal chaotique est caractérisé par une chute soudaine de l'erreur de prédiction dès que la dimension de plongement requise est atteinte, un bruit blanc non.

Dans le cas d'un bruit coloré, l'erreur reste constante quelque soit le temps de prédiction, tandis que pour un signal chaotique, celle-ci croît avec le temps indiquant par là même, l'existence d'un exposant de Lyapunov positif (Tsonis et Elsner, 1992).

Ainsi, Kennel *et al.* (1992), proposent le test suivant: soit une série de mesure dont le processus sous-jacent est inconnu, un moyen de trancher entre chaos et bruit est de comparer l'erreur de prédiction de ce signal avec celle d'un ensemble synthétique de points aléatoires dont le spectre et la fonction d'autocorrélation sont identiques à ceux de la série origine. Si les erreurs de prédiction de la série réelle sont suffisamment plus faibles que ceux de la série synthétique, la série observée n'est pas un bruit stochastique.

⁷Le filtre de Vondr  k sera utilisé pour traiter les séries de rotation de la Terre et les séries de moment cinétique atmosphérique. C'est un filtre numérique passe haut caractérisé par une courbe de réponse dans le domaine fréquentiel. Les fonctions de réponse de ce filtre pour différentes valeurs du coefficient caractéristique ainsi que l'algorithme de la méthode, sont discutés dans les articles cités.

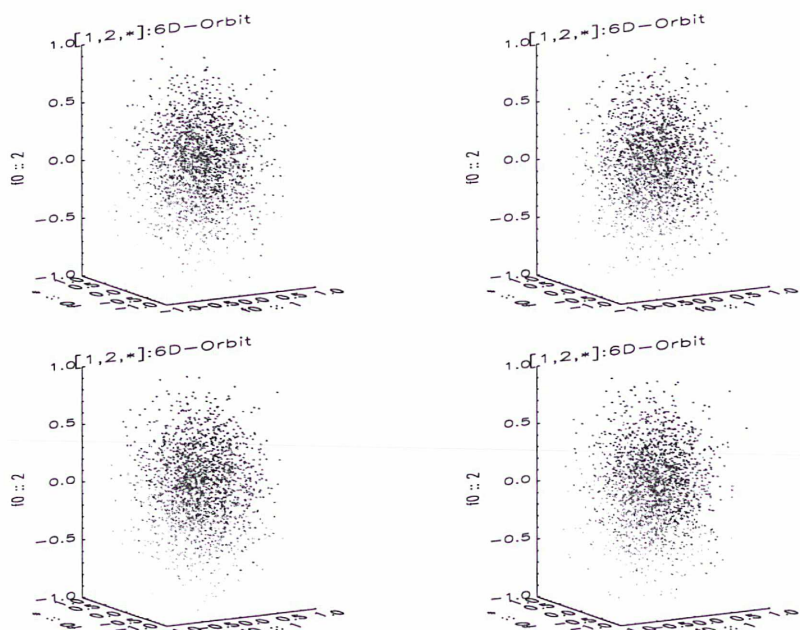


Figure 3.17a: Reconstruction sous 4 projections 3D différentes, de la dynamique plongée en dimension 6, d'un bruit blanc.
Les coordonnées reconstruites sont respectivement de gauche à droite puis de haut en bas: $(1,2,3)$; $(1,2,4)$; $(1,2,5)$ et $(1,2,6)$.

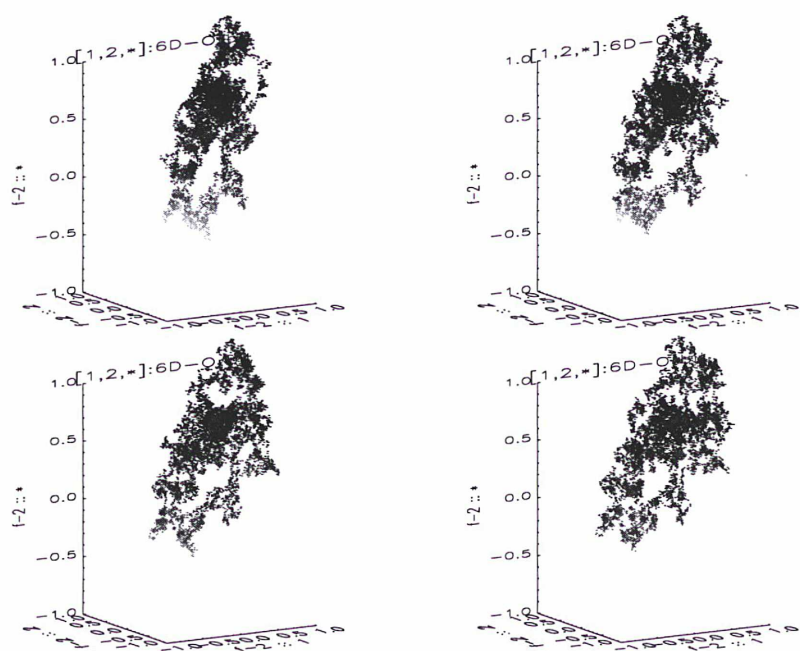


Figure 3.17b: Reconstruction sous 4 projections 3D différentes, de la dynamique plongée en dimension 6, d'une marche aléatoire.

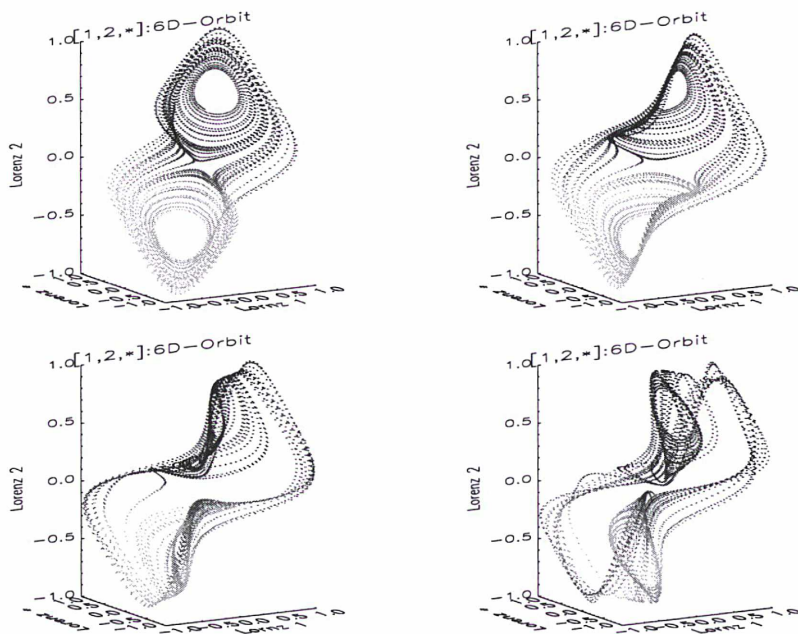
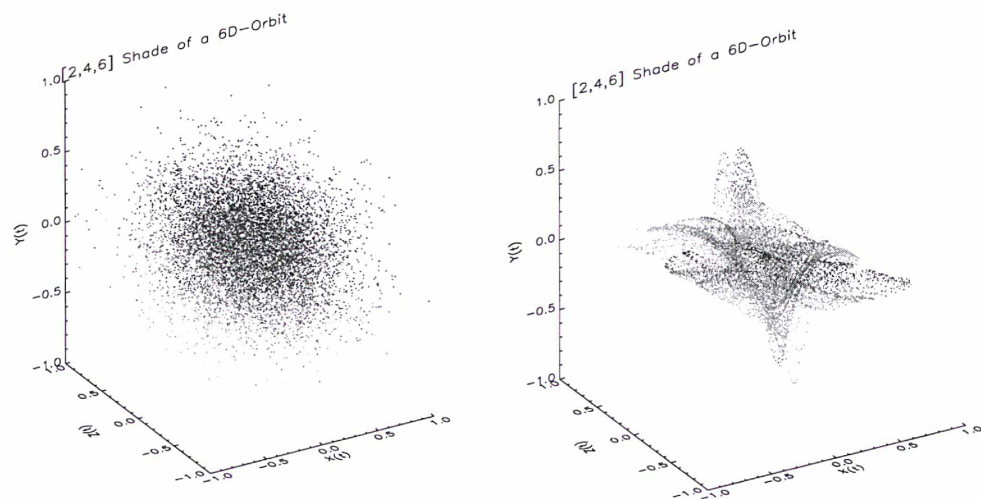


Figure 3.17c: Reconstruction sous 4 projections 3D différentes, de la dynamique plongée en dimension 6, d'un signal $x(t)$ issu de l'attracteur de Lorenz.



Figures 3.18: Reconstruction des séries filtrées (passe haut) des dynamiques plongées en dimension 6:

- a) d'une marche aléatoire (gauche).
- b) d'un signal de Lorenz (droite).

2 Problèmes liés à des séries courtes et mal échantillonnées

Nous avons déjà mentionné que l'effet du bruit de mesure superposé au signal pouvait avoir des conséquences désastreuses dans l'interprétation de la dynamique. Le bruit a pour effet général de surestimer les dimensions calculées car c'est un processus de dimension infinie qui occupe toutes les dimensions qui lui sont offertes.

Notons également que la théorie sur laquelle reposent les techniques d'analyse non linéaire de série temporelles, est asymptotique. Travailler avec des séries trop courtes entraîne des imprécisions dans les déterminations. La qualité des données elles mêmes (incertitudes, troncature..) est un facteur d'erreur dans les résultats des algorithmes.

En particulier, à l'aide du cas d'école arbitraire suivant, nous illustrerons l'effet d'un mauvais échantillonnage de la série.

Considérons qu'on puisse observer un signal résultant de la superposition de deux dynamiques déterministes différentes: un chaos (de type Lorenz) et un signal bipériodique (dont les fréquences sont commensurables). Qu'observe-t-on dans le domaine des fréquences? La Figure 3.19 exhibe sans ambiguïté deux pics relatifs aux deux périodes et un fond continu. Une démarche logique serait de filtrer la série de manière à isoler les deux fréquences bien définies puis d'analyser indépendamment le résidu. Nous trouverions d'une part qu'il s'agit d'un signal périodique et d'autre part d'un signal chaotique issu de l'attracteur de Lorenz.

Cependant, nous décidons pour notre étude de garder le signal complet et de l'étudier dans l'espace des phases uniquement.

Les deux séries que nous utilisons sont:

La série mixte "1" (chaos + bipériodique) de longueur 18000 points et bien échantillonnée (Figure 3.20a).

La série mixte "2" (chaos + bipériodique) de longueur 10080 points et mal échantillonnée (Figure 3.20b) (elle n'est pas lisse).

Nous allons alors comparer les différentes déterminations dans l'espace des phases afin de quantifier sur cet exemple, l'effet d'un mauvais échantillonnage associé à une série relativement courte.

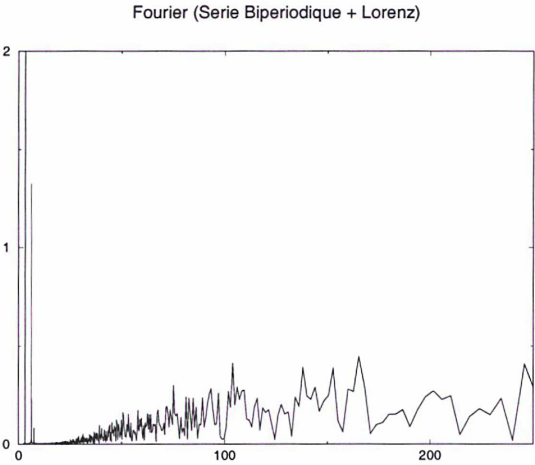
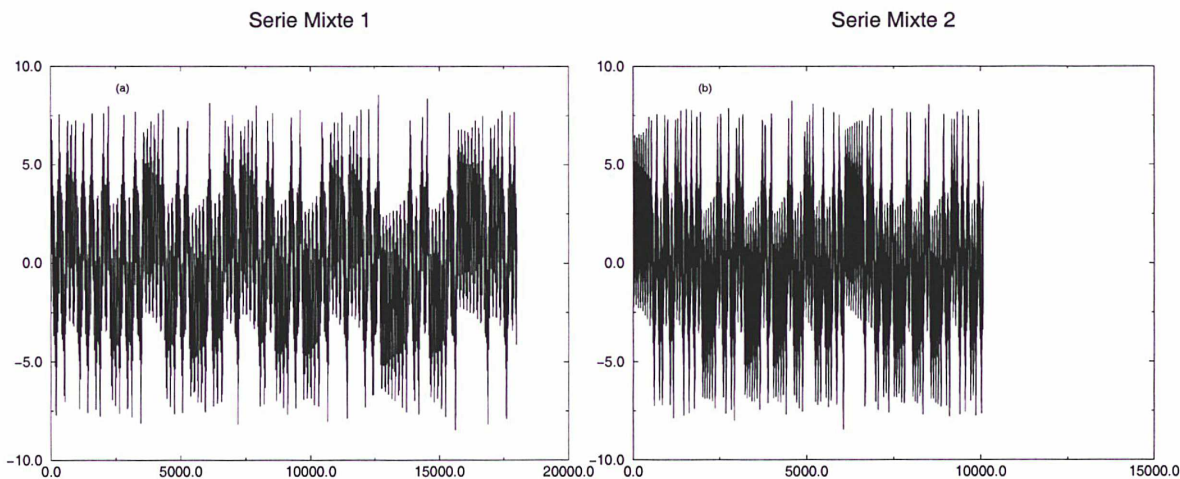


Figure 3.19 : Transformée de Fourier de la série mixte.



Figures 3.20 : Série temporelle mixte "chaos + bipériodique"

a) longue et bien échantillonnée (a)

b) courte et mal échantillonnée (b).

La Figure 3.21 illustre l'influence d'un mauvais échantillonnage sur la détermination du temps de retard τ . On ne trouve pas vraiment de minimum ou très (trop) proche de zéro et la courbe n'est pas lisse. On choisit donc un temps de retard arbitraire d'après la valeur trouvée pour la série "1".

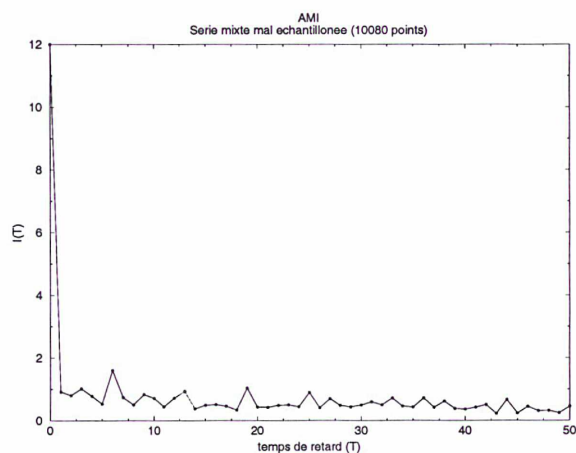
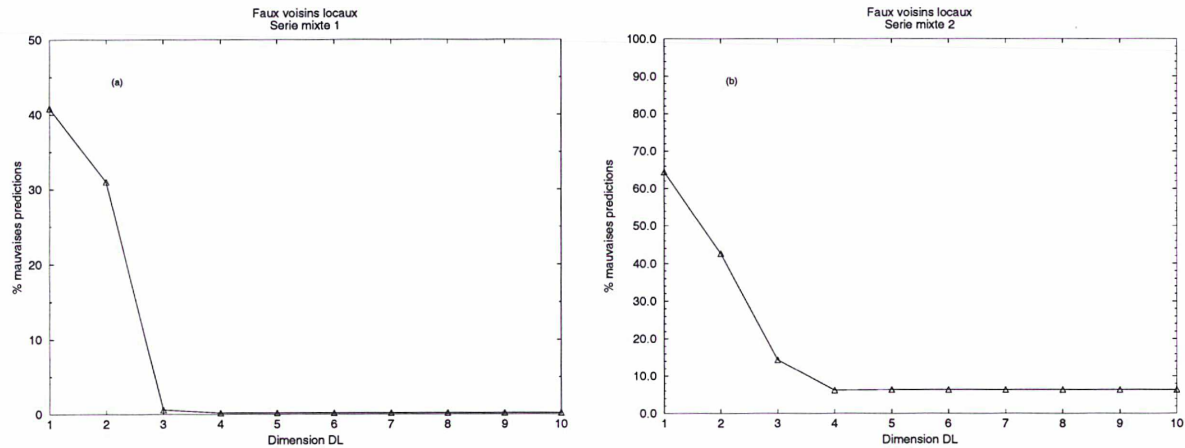


Figure 3.21: Détermination de la fonction $AMI(T)$ pour la série mal échantillonnée.

L'algorithme des faux voisins est assez robuste et fournit dans les deux cas une dimension de plongement suffisante de 5. Pour la dimension locale, la série 1 affiche une convergence parfaite en dimension 3 ou 4 tandis que la série mal échantillonnée n'atteint jamais un pourcentage nul (Figures 3.22a et 3.22b). Les exposants de Lyapunov calculés sont différents mais dans les deux cas, il existe un exposant positif indiquant que le système global présente une grande sensibilité aux conditions initiales et possède une variété instable.

D'autre part, la reconstruction de l'attracteur "mixte" est très mauvaise pour la série mal échantillonnée (Figure 3.23b) (un mauvais échantillonnage de la série revient à un mauvais échantillonnage dans l'espace des phases, il manque de l'information) tandis qu'il est intéressant de voir dans l'espace des phase comment se représente la superposition d'un chaos et d'un signal bipériodique (Figure 3.23a).



Figures 3.22 : Détermination des faux voisins locaux pour les séries mixtes.



Figures 3.23 Attracteurs reconstruits pour les séries mixtes bien (a, gauche) et mal (b, droite) échantillonnées.

12 Conclusion

Le fondement de tout ce chapitre repose sur le théorème de plongement de Takens (1981). Il nous a permis de présenter rigoureusement, un certain nombre de méthodes, constituant "l'analyse non linéaire de séries temporelles".

La caractérisation non linéaire de séries temporelles a permis d'adopter un regard nouveau sur certains phénomènes physiques qui étaient jusqu'alors rangés dans la classe des bruits stochastiques.

Le dernier paragraphe nous a montré qu'il était dangereux de se limiter à l'analyse de Fourier d'une série car on pouvait passer à côté de dynamiques intéressantes se situant dans la partie continue du spectre. Cependant l'analyse de Fourier est très importante et ne doit pas être mise de côté au profit uniquement de ces nouvelles méthodes. Celles-ci doivent être utilisées conjointement. En effet pour le cas d'école concernant la superposition de deux signaux, l'analyse de Fourier permet de déceler les deux périodes et de les éliminer. Sans cela l'analyse non linéaire sur la série totale ne nous renseigne pas sur les deux dynamiques simultanément en jeu car il n'est pas possible de séparer les deux signaux dans l'espace des phases.

D'autre part, nous ne nous limitons plus à une description en nombre de modes actifs ou d'oscillateurs linéaires indépendants pour une série temporelle, mais en terme d'exposants de Lyapunov. Les caractérisations, essentiellement à partir de la géométrie locale de l'attracteur, nous permettent d'en déduire certaines de ses propriétés géométriques et dynamiques globales (dimension, horizon de prédiction..).

Des études atmosphériques suivant différentes échelles de temps ont été menées à partir de séries variées provenant par exemple de mesures des vitesses de vents ou d'enregistrements d'isotopes dans les fonds marins. En étudiant des séries à l'échelle de l'heure, Tsonis et Elsner (1988) ont trouvé un attracteur atmosphérique de dimension 7.3, Essex *et al.* (1987) et Fraedrich (1987) ont eux relevé un attracteur de dimension entre 6 et 7 pour des échelles saisonnières. Des études océaniques similaires ont mis en évidence des comportements chaotiques et des attracteurs associés (Vallis, 1986; Tziperman *et al.*, 1994).

Ce type de travaux est étendu à l'ensemble des domaines de recherche: médecine, biologie, finance et musique.

Nous avons souligné au chapitre consacré à la rotation de la Terre (Chapitre 1), que les fluctuations de la rotation de la Terre étaient fortement influencées par l'action de l'atmosphère et des océans. Il apparaît donc nécessaire aujourd'hui de se demander si des caractéristiques déterministes non linéaires similaires à celles existant pour ses excitations, peuvent être retrouvées dans les fluctuations de la rotation de la Terre. Pour cela, nous avons à notre disposition des séries combinées précises (Chapitre 1) des paramètres de rotation de la Terre (*EOP*). Nous allons effectuer plusieurs études non linéaires appliquées à diverses séries issues de l'observation de la rotation de la Terre et voir s'il est possible d'y détecter une composante non linéaire déterministe de faible dimension.

Ces études font l'objet de la partie ci-après.

Partie 2

Applications aux séries de rotation de la Terre et aux séries de moment cinétique atmosphérique

Introduction générale

Le Chapitre 1 était consacré à la présentation de la théorie et des connaissances actuelles concernant la rotation de la Terre. Nous y décrivions également les séries temporelles de mesures des paramètres d'orientation de la Terre, *EOP* (*PMX* et *PMY* pour le mouvement du pôle et *LOD* pour la longueur du jour) et donnions une caractérisation linéaire simple sous forme de décomposition en composantes périodiques principales et résiduelles du signal (terme annuel, semi annuel, Chandler, bruit..).

Le Chapitre 2 était une introduction aux notions principales et au vocabulaire de la théorie des systèmes dynamiques dont nous avons besoin au Chapitre 3 (espace des phases, orbites, attracteur..). Ce dernier présentait en effet de manière critique à l'aide d'exemples, des méthodes récentes d'analyse non linéaire de signaux reposant sur la théorie des systèmes dynamiques.

Les Chapitres 4, 5 et 6 sont des chapitres d'application de tous ces résultats à des séries de rotation de la Terre (Chapitres 4 et 6), à des séries atmosphériques (Chapitre 5).

Dans le Chapitre 4, nous allons étudier la partie résiduelle du spectre de Fourier (périodes inférieures à 100 jours) pour les séries de paramètres d'Orientation de la Terre (*EOP*), tandis que le Chapitre 6 sera consacré aux modulations inconnues et inexplicables du terme de Chandler dans le mouvement du pôle.

Le Chapitre 5 est en quelque sorte une étude dynamique comparative entre les séries issues de l'observation de la Terre et les séries issues de l'observation de ses excitations (ici principalement l'atmosphère). Nous caractériserons dynamiquement les séries de moment cinétique atmosphérique (*EEAM*) afin d'essayer de dégager des signatures analogues à celles présentes dans le signal de rotation de la Terre. Cette étude permettra sans doute de mieux comprendre l'interaction entre les fluctuations terrestres et les excitations atmosphériques.

D'une façon générale, il est toujours intéressant d'aborder un problème sous différents angles. L'introduction des méthodes non linéaires d'analyse du signal pour la caractérisation des séries de rotation de la Terre ne pourra que compléter et préciser nos connaissances actuelles.

Chapitre 4

Caractérisation non linéaire des séries à courtes périodes de la rotation terrestre, $EOP[1-100]$ jours

1 Introduction

Cette partie a fait l'objet de deux publications dans le journal: *Geophysical Journal International* (Annexes 2a et 2b).

La question que nous nous posions avant d'entamer ce travail était la suivante:

Est-il possible, (est-on capable actuellement avec les méthodes disponibles, la qualité et longueur des séries de rotation de la Terre ainsi que la nature de la dynamique réelle) de déceler une composante non linéaire déterministe de faible dimension dans les séries EOP à courtes périodes? Nous allons montrer que non seulement cela a été possible mais nous avons même pu donner des caractéristiques dynamiques et dimensionnelles de cette composante.

Les résultats sont très encourageants et novateurs puisqu'ils ouvrent la voie à des extensions telles que la prédiction non linéaire des séries et la modélisation déterministe de certaines composantes de la rotation de la Terre.

2 Motivations

- Les fluctuations de la rotation terrestre, pour des périodes inférieures à 100 jours, sont principalement d'origine atmosphérique et océanique (Eubanks *et al.*, 1988; Rosen et Salstein, 1983). Or, les dynamiques propres des océans et de l'atmosphère sont très complexes pouvant aller du point fixe à la turbulence. La plupart des modèles de circulation dans les fluides géophysiques comportent un couplage non linéaire des variables et possèdent tantôt des solutions stables, tantôt des solutions instables selon les valeurs des paramètres du modèle. Il existe plusieurs "routes" conduisant à des comportements chaotiques, détectées dans des modèles numériques de variations atmosphériques (voir Legras et Ghil, 1985; ou Palmer, 1993). Concernant par exemple l'oscillation El Niño, les modèles actuels décrivent le phénomène atmosphéro-océanique couplé "*ENSO*" comme résultant d'une série d'accrochage en fréquence due aux résonances non linéaires de ce phénomène avec le cycle annuel et conduisant finalement au chaos (par exemple, chronologiquement avec des modèles de plus en plus précis et réalistes: Vallis, 1986; Tziperman *et al.*, 1994; Jin *et al.*, 1994; Stone *et al.*, 1998). Le phénomène El Niño intervient fortement dans

les variations des séries de rotation de la Terre et de moment cinétique atmosphérique aux échelles saisonnières mais aussi dans les "résidus" confirmant le rôle primordial de la dynamique océanique/atmosphérique sur la dynamique terrestre.

Ainsi, les divers modèles de circulation océanique et atmosphérique présentent les mouvements de ces fluides comme des processus non linéaires pouvant, après bifurcations, conduire à des solutions apériodiques, et chaotiques. Les flots atmosphériques et océaniques sont par conséquent des systèmes présentant des comportements turbulents bien reconnus. Leur influence temporelle sur la rotation de la Terre est directement mesurable dans les séries de paramètres de rotation de la Terre, qu'en est-il de leur dynamique?

D'autre part, l'étude de certaines séries temporelles liées aux systèmes atmosphériques et océaniques a été menée du point de vue de l'analyse non linéaire. Par exemple, Tziperman *et al.* (1994) dérivait une série temporelle de "ENSO" à partir du modèle de prédiction de Zebiak et Cane (1987) et confirmait la chaoticité du système en isolant une dimension fractale d'attracteur. Cependant ce type de caractérisation reste dépendant d'un modèle *a priori*. Il est malheureusement difficile de travailler à partir des séries d'observation réelles de ENSO (par exemple l'indice SST) car celles-ci restent à l'heure actuelle trop courtes pour être introduites dans les méthodes non linéaires de traitement du signal.

Plus généralement, la dynamique atmosphérique a été étudiée du point de vue de l'analyse non linéaire des séries à partir d'observables diverses. Dès 1984, Nicolis et Nicolis appliquait l'algorithme de Grassberger-Procaccia à une série d'isotopes marins. L'information contenue dans un tel enregistrement est importante pour la connaissance de l'évolution climatique à longue échelle. Leur conclusion est que le système climatique possède un attracteur étrange de dimension 3.1. En 1987, partant de la même approche, Essex *et al.* ont caractérisé comme chaotique, la dynamique climatique à l'échelle journalière. Fraedrich (1987) a lui aussi analysé une série journalière de pression atmosphérique de surface et trouvé une dimension d'attracteur entre 6.8 et 7.1 et un horizon de prédiction du système associé de 12-17 jours pour le climat (à l'échelle saisonnière). Parallèlement, Tsonis et Elsner (1988), dont l'étude a porté sur les variations atmosphériques à très courtes périodes (vitesse des vents à 10 mètres au dessus du sol mesurée toutes les 10 secondes) ont mis en évidence un autre attracteur chaotique atmosphérique.

Concernant les océans, des comportements chaotiques ont été trouvés par Osborne *et al.* (1986) à partir de séries océaniques.

Ce qui est à retenir de ces travaux, est que les processus dynamiques au sein des océans et de l'atmosphère, considérés sur diverses échelles de temps, présentent des comportements chaotiques que l'on retrouve aussi bien à travers les modèles que par l'analyse des observations.

Notons qu'ici la discussion liée à la turbulence et au modèle de Lorenz prend sa place. En effet, le modèle de Lorenz décrit le comportement d'une couche fluide horizontale chauffée par le bas. La partie chaude du fluide formée en bas est plus légère et a tendance à monter en créant des courants de convection. La modélisation de ce processus par Lorenz conduit pour une certaine fenêtre de valeurs des paramètres, à un comportement chaotique. Il est intéressant de noter que ce type de phénomène a lieu dans l'atmosphère où l'air au sol est chauffé et s'élève.

- Les équations de Liouville donnent une description théorique de la rotation de la Terre. Les excitations extérieures y agissent à travers des modifications du tenseur d'inertie et du moment cinétique relatif de la Terre. En l'absence de simplifications, les équations de Liouville sont des équations différentielles ordinaires non linéaires couplées (non autonomes)). Non seulement la non linéarité des équations peut favoriser des résonnances entre différents modes du système qui conduisent à l'apparition de mouvements chaotiques, mais aussi, les excitations extérieures à la Terre présentant des dynamiques chaotiques n'ont pas de raison d'être transformées en processus stochastiques par l'intermédiaire des équations de Liouville.
- Enfin, la simple interprétation du spectre de Fourier des fluctuations à courtes périodes de la rotation de la Terre est ambiguë et problématique. Ce spectre continu peut être à la fois le témoin d'un processus stochastique de grande dimension ou d'un processus déterministe non linéaire de faible dimension (Abarbanel 1996). La Figure 4.1 rappelle les spectres de puissance des séries *LOD* (a), *PMX* (c), *PMY* (d) pour des périodes inférieures à 100 jours et de la série $x(t)$ de Lorenz (b) (cette dernière comporte environ 1000 oscillations chaotiques sur une longueur de 10080 points). Superposé à ces spectres, nous avons représenté le comportement spectral typique d'un bruit blanc (0), de Flicker (-1) et d'une marche aléatoire (-2).

La vue de ces quatre spectres indique qu'aucun d'eux ne suit une loi de puissance spectrale simple et bien définie. La similarité de ces quatre figures montre qu'un spectre continu n'est pas forcément synonyme de la présence d'un bruit (Lorenz est issu d'un phénomène purement chaotique). Ainsi on ne peut pas qualifier les séries de rotation de la Terre à courtes périodes ni la série de Lorenz, de bruit aléatoire, ou de marche aléatoire. Il faut rechercher de quelle nature exacte sont les processus sous jacents présentant un spectre de Fourier continu. Pour Lorenz on connaît déjà la réponse, pour les séries de rotation de la Terre, c'est cette recherche que nous entreprenons dans toute la suite de ce chapitre. Dans la littérature scientifique, cette partie du spectre de la rotation de la Terre est cependant qualifiée de "bruit coloré" (Eubanks, 1993). En effet, les fluctuations inférieures à 100 jours mesurées dans les séries de rotation de la Terre, présentent des oscillations apériodiques dont la loi de puissance est proche de celle d'une marche aléatoire. Par exemple, l'oscillation à 50 jours caractérisée dans les séries de longueur du jour n'est pas purement périodique (elle peut varier entre 30 jours et 60 jours). Elle apparaît avec une certaine apériodicité et de manière intermittente. Elle pourrait être le résultat de la manifestation d'une instabilité chaotique, cependant, le débat sur son origine stochastique ou déterministe n'est pas clos. Ainsi, les fluctuations inférieures à 100 jours des *EOP* apparaissent comme la superposition d'oscillations apériodiques peu comprises et d'un signal dont le fond spectral global est bruité de manière apparemment aléatoire. L'étude non linéaire de l'ensemble de ces irrégularités est un moyen efficace de savoir si celles-ci sont globalement d'origine stochastique ou le fruit de non linéarités déterministes.

Ainsi pour toutes ces raisons, il nous a paru intéressant de nous interroger sur l'existence d'une éventuelle composante déterministe non linéaire dans les séries de rotation de la Terre (*PMX*, *PMY* et *LOD*) (qui proviendrait sans doute de l'action des fluides géophysiques), dans la mesure où nous avons désormais les moyens techniques de la rechercher (analyse non linéaire). Nous allons chercher des contraintes quantitatives (dimensionnelles, de stabilité...) pour construire un modèle capable de "capturer" la dynamique des excitations des courtes périodes de la rotation terrestre (sachant qu'il n'est pas possible de faire tourner des modèles

globaux océaniques et atmosphériques très précis). Nous pourrions alors savoir s'il est plus judicieux d'adopter des modèles stochastiques ou bien non linéaires déterministes pour les variations à courtes périodes de la Terre. Est-il possible de décrire dynamiquement cette partie du spectre? Dans quelle mesure la chaotité des excitations est-elle retrouvée dans les séries terrestres?

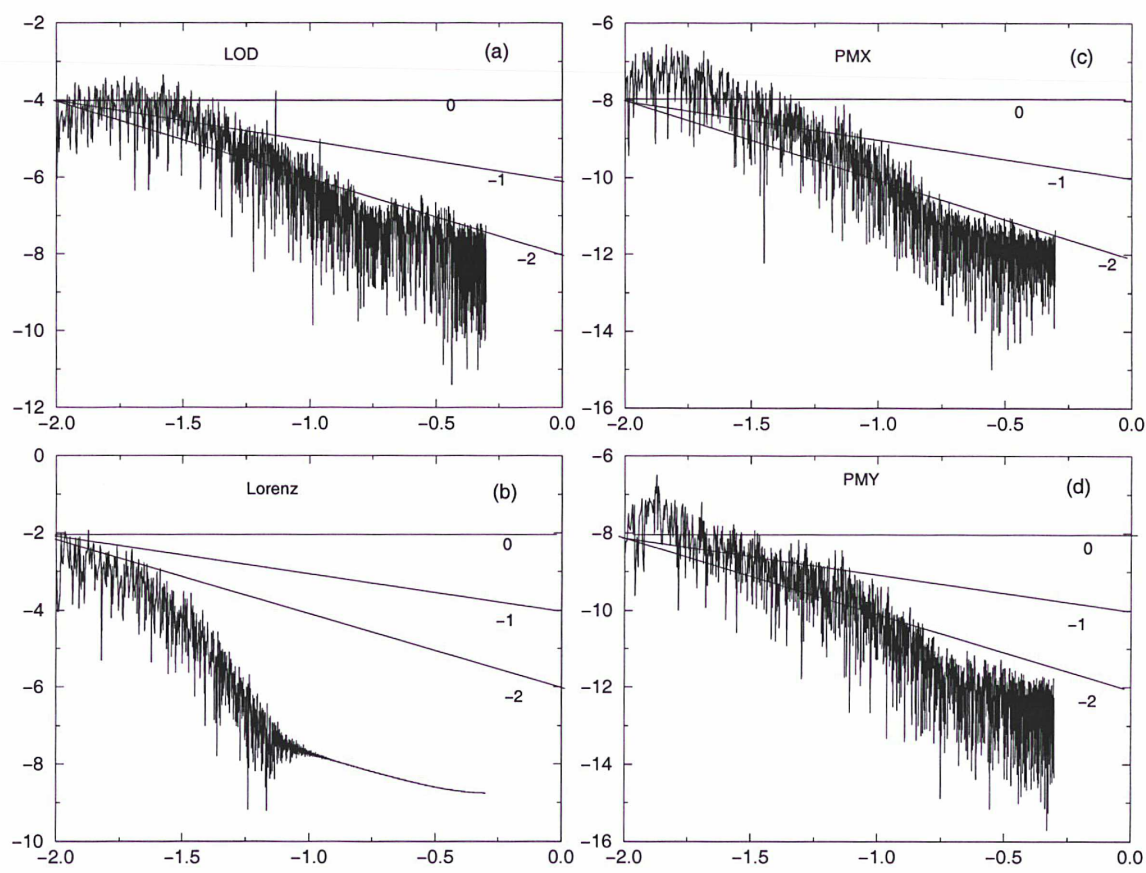


FIGURE 4.1: Tracé Log-Log du spectre de puissance en fonction de la fréquence (en cycle/jour) pour
a) LOD (ms^2).
b)d) PM (mas^2).
c) Lorenz chaotique (sans unité).
Pour permettre une comparaison, les droites symbolisent le comportement théorique des spectres de puissance d'un bruit blanc (0), de Flicker (-1) et de marche aléatoire (-2).

3 Résultats

Nous présentons ici les résultats publiés dans les deux articles précédemment cités, sans insister sur les tests de sensibilité à divers paramètres. Ceux ci sont expliqués plus longuement dans les dits articles.

1 Données

Nous utilisons la série combinée C04 de l’IERS (IERS, annual report 1997) pour le mouvement du pôle PMX et PMY et pour la longueur du jour LOD . Nous ne gardons que la partie correspondant à des périodes inférieures à 100 jours afin de nous affranchir des grandes périodicités (annuelle, Chandler...) grâce à l’application d’un filtre de Vondrāk (Vondrāk, 1977a et b). La série LOD est également corrigée des effets de marées (signaux périodiques bien connus). Les séries contiennent 27 ans de données (de 1970 à 1997) avec un échantillonnage de un point par jour (10080 points). Nous donnons à titre indicatif les valeurs des écarts quadratiques moyens (rms) de ces séries (Table 4.1).

Séries	Unités	rms
PMX	mas	2.30
PMY	mas	1.57
LOD	ms	0.117

Table 4.1: rms des séries EOP filtrées ($[1-100]$ jours).

Afin de faire une analyse critique des résultats, nous formons également des séries contaminées dans une proportion de 10 % rms^1 de bruit stochastique (bruit blanc f_0 , bruit de flicker f_{-1} et bruit rouge f_{-2}) et d’un signal purement chaotique issu du système de Lorenz (lor). Notons qu’un tel niveau de bruit est assez irréaliste car il est réellement grand. De ce fait, la robustesse des résultats à ces contaminations, ne les rendra que plus convaincants. Dans un premier temps nous devons rechercher le temps de retard et la dimension de plongement de l’espace de reconstruction.

2 Temps de retard

Nous avons calculé et tracé les fonctions d’autocorrélation des séries PMX , PMY et LOD (Figure 4.2a). Le premier zéro de ces fonctions fournit une valeur possible du temps de retard (Abarbanel, 1996). Nous avons ensuite calculé et tracé les fonctions d’information mutuelle (AMI) pour ces mêmes séries (Figure 4.2b). Dans ce cas, le premier minimum de cette ”autocorrélation non linéaire” fournit elle aussi une valeur possible du temps de retard (Fraser et Swinney, 1986).

¹ $EOP_c(i) = EOP(i) + 0.1 \left(\frac{rms_{EOP}}{rms_{CONT}} \right) CONT(i)$,
 EOP équivaut à PMX , PMY ou LOD et $CONT$ s’applique à f_{-2} , f_0 , f_{-1} ou lor

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont très similaires. La Table 4.2 permet de comparer les valeurs du temps de retard (exprimées en fréquence d'échantillonnage, ici donc en jours) pour chaque série.

Series	τ correl.	τ AMI
<i>PMX</i>	15	15
<i>PMY</i>	18	18
<i>LOD</i>	11	10

Table 4.2: valeur du temps de retard optimal (en jour) suivant la fonction d'autocorrélation (correl) et la fonction d'information mutuelle (AMI).

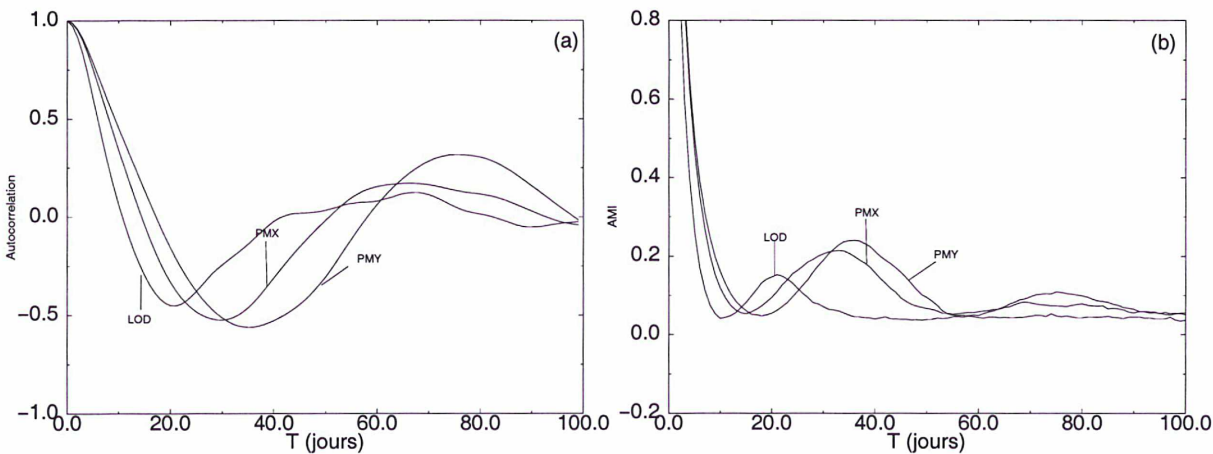


Figure 4.2: Recherche du temps de retard τ pour les EOP filtrées:
a) par la fonction d'autocorrélation (la valeur de τ est lue au premier zéro).
b) par la fonction d'information mutuelle (la valeur de τ est lue au premier minimum).

Nous savons que la fonction AMI est davantage adaptée aux signaux non linéaires. Cependant, la similitude des résultats AMI/correl ne nous donne aucune information quant à la nature linéaire ou non des séries observées. Par contre, aucun dilemme ne se pose quant au choix des valeurs à adopter.

Nous avons testé la sensibilité de la valeur de τ à la longueur N de la série. Plus la série est longue, plus la valeur du temps de retard semble diminuer. Cependant elle se stabilise à partir de $N = 6000$ points. Ainsi il apparaît que nous avons un nombre de données suffisant ($N = 10080$) pour avoir une estimation de τ convenable et constante.

Nous avons également testé la sensibilité de l'algorithme à la présence de contamination en appliquant le calcul du temps de retard aux séries contaminées des paramètres d'orientation de la Terre évoquées précédemment. Les valeurs de τ trouvées ne sont pas affectées par cette

”contamination”.

Nous avons aussi étudié l’influence sur τ , de la fréquence d’échantillonnage Δ_t des séries *EOP* en faisant varier Δ_t de 1 à 10 jours. On observe une croissance linéaire de τ avec Δ_t . Une augmentation de la période d’échantillonnage correspond à une troncature de la partie à courtes périodes du spectre, ainsi le temps de corrélation (mesuré grossièrement par τ) s’allonge. Cette dépendance quasi linéaire de τ à la période d’échantillonnage, indique que la partie du signal de périodes inférieures à la période de coupure de l’opération de combinaison (30 jours en 1970 et 3 jours en 1990), est certainement perdue.

En conclusion, nous pensons que les valeurs de τ sont assez peu sensibles aux contaminations et à la période d’échantillonnage. Elles sont peut être légèrement surestimées à cause de la longueur finie des séries et de leur période d’échantillonnage. Néanmoins il faut garder à l’esprit que ces valeurs ne sont pas des invariants dynamiques des fluctuations à courtes périodes de la rotation de la Terre mais sont les meilleures déterminations possibles, en moyenne, par rapport à l’information disponible dans chaque série, permettant une reconstruction convenable. Nous verrons de plus que la sensibilité des algorithmes à la valeur du temps de retard est marginale voire inexistante. Ainsi les valeurs de temps de retard trouvées semblent assez robustes pour construire les composantes indépendantes des vecteurs $\vec{y}(n)$ et passer à la seconde opération du plongement à savoir trouver la dimension de plongement D_E^* .

3 Dimension de plongement

Dans le chapitre précédent, nous avons souligné grâce à plusieurs exemples, les limites des algorithmes destinés à calculer D_E^* . En connaissance de cause, nous appliquons tout d’abord l’algorithme du pourcentage de faux voisins aux séries *EOP*[1 – 100] jours.

Pour les trois séries, le pourcentage de faux voisins atteint un minimum faible (entre 5 et 10 %) dès la dimension $D = 4$ mais ne vaut jamais zéro. Ce résultat peut être à la fois le témoin de la présence d’un processus de type ”bruit rouge” ou d’un processus déterministe de faible dimension contaminé par du bruit (qui empêche la convergence nette vers zéro). Abarbanel *et al.* (1993), ont trouvé les mêmes problèmes de non stabilité à zéro avec une série de Lorenz contaminée par du bruit blanc.

Interrogeons nous également sur la sensibilité des résultats à divers changements de paramètres. Le nombre de points de la série ne semble pas vraiment être important pour le pourcentage de faux voisins détectés par l’algorithme. L’addition de 10 % *rms* de contamination ne modifie pas grand chose non plus et la sensibilité à la valeur de τ est elle aussi marginale. Les Figures 4.3 présentent le pourcentage de faux voisins en fonction de la dimension de plongement D recherchée, pour (a) *PMX*, (c) *PMY* et (e) *LOD* ainsi que le même algorithme appliqué aux séries *EOP* contaminées (graphes de droite).

On remarque que dans le cas d’une contamination par une série de Lorenz, le pourcentage de faux voisins suit exactement la progression de la détermination initiale, tandis que la contamination par le bruit de grande dimension augmente légèrement et systématiquement les valeurs du pourcentage.

Ceci peut, peut-être, être une première indication de l’origine déterministe des séries. En effet, si le signal était une ”marche aléatoire”, l’addition d’un léger pourcentage de ”marche aléatoire” ne devrait pas influencer sur le résultat de l’algorithme. Par contre, ajouter deux dynamiques opposées a toutes les chances selon nous d’apparaître à ce niveau. La pollution ”chaotique” de faible dimension ne perturbe pas le résultat laissant présumer que le signal inconnu possède déjà une dynamique assez semblable. Cependant, les variations observées sont tellement faibles

que ces remarques restent fortement subjectives. A ce stade, on peut choisir une dimension de plongement suffisante $D_E^* = 5$ pour les trois séries *EOP*.

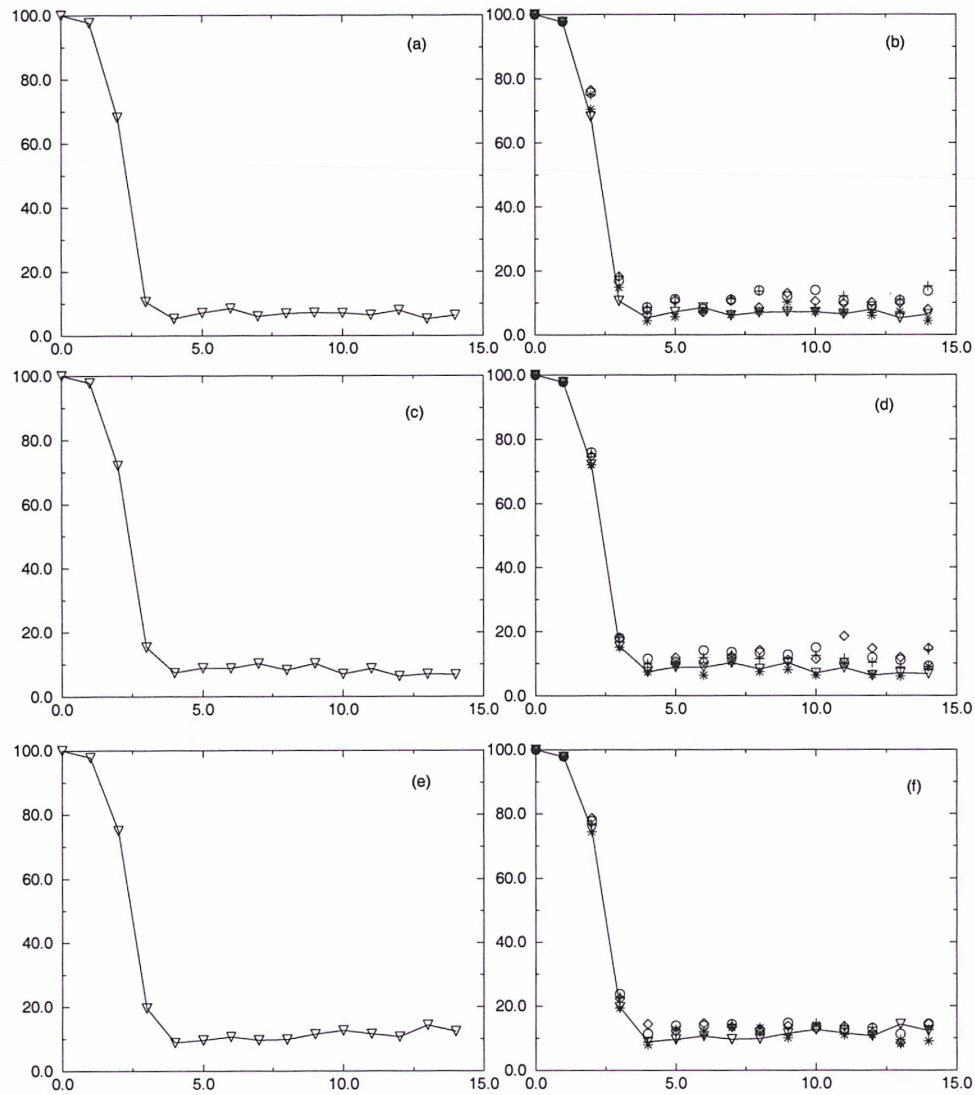


Figure 4.3: Pourcentage de faux voisins globaux en fonction de la dimension de plongement pour:
 a) PMX, c) PMY, e) LOD, b) PMX contaminé, d) PMY contaminé, f) LOD contaminé.

Concernant les symboles: le triangle est associée à la série initiale, l'étoile correspond à la contamination par un signal issu de l'attracteur chaotique de Lorenz, le losange correspond à la contamination par un bruit blanc, le cercle, à un bruit de Flicker et la croix à un bruit rouge.

l'intégrale de corrélation est un second moyen de déterminer la dimension de plongement. Les résultats fournis par cet algorithme permettront de confirmer ou non les valeurs retenues précédemment. Les courbes $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ présentent des pentes qui semblent saturer à partir de $D_E^* = 5$ (Figure 4.4).

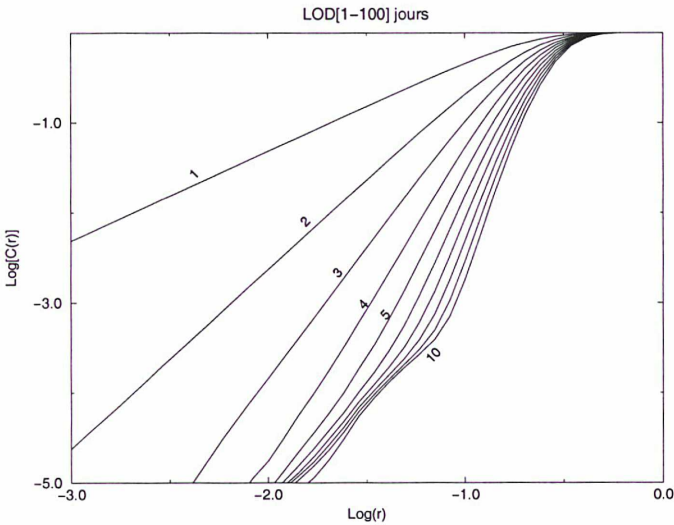


Figure 4.4: Détermination de l'intégrale de corrélation en fonction de la dimension de plongement pour LOD filtré [1-100] jours:
Les pentes demeurent stables dès la dimension 5.

Nous avons représenté l'évolution des pentes estimées en fonction du rayon r pour PMX , PMY et LOD respectivement, la valeur de saturation en D_E^* égal 5 est confirmée (Figure 4.5). La saturation n'a lieu que sur la partie de la courbe correspondant à des valeurs de r particulières pour PMX , PMY (compris entre 10^{-4} et 10^{-3}) et LOD (compris entre 10^{-2} et 10^{-1}). Les valeurs de r sont associées à la partie "la plus linéaire" des courbes ($\text{Log}C(r)/\text{Log}r$). Théoriquement, il faudrait considérer : $r \rightarrow 0$ (Roberts, 1991). Or en pratique, on est limité par plusieurs effets: Pour r petit, il y a apparition de "plateaux" au début des courbes $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ correspondant à la troncature des données et aux erreurs d'arrondis. Le problème du bruit se pose également. Si l'on prend des hypersphères de rayon r trop petit, leur contenu sera composé uniquement par le bruit et non par les points de la trajectoire. Pour r grand, on arrive à une saturation des pentes, c'est-à-dire que si r atteint la taille de l'attracteur, on comptabilise alors tous les points et $\text{Log}C(r) \rightarrow 0$. La lecture des pentes doit donc se faire sur une partie finie et linéaire des courbes. Il n'est pas possible de donner de règle générale. C'est l'expérience qui permet petit à petit de repérer cette zone au mieux et de comprendre en quoi consiste le signal.

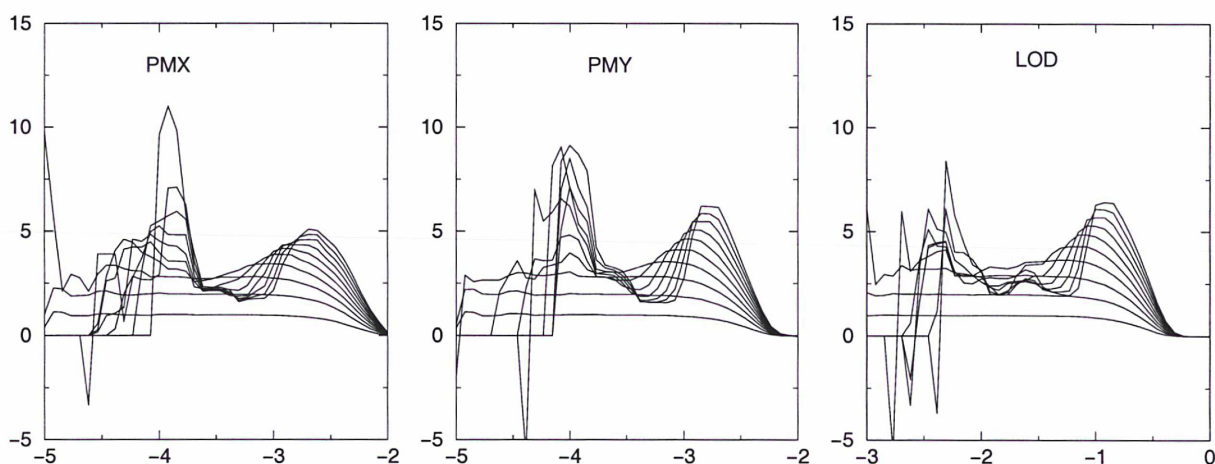


Figure 4.5: valeur des pentes de l'intégrale de corrélation en fonction de r et de la dimension de plongement pour:

PMX (gauche), PMY (milieu) et LOD (droite).

La pente la plus basse (pour $r = -2$), correspond à la dimension 1 puis la courbe juste au dessus correspond à la dimension 2 etc... jusqu'à la dimension 10.

(On observe une saturation des pentes dès la dimension 5 correspondant à la première partie des courbes $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$, avant le coude.)

La saturation de la pente est donc effective en $D_E^* = 5$ pour les trois séries. Cette dimension est valide dans la mesure où le critère de sélection de Ruelle (1990) est vérifié: $D_E^* < 2\text{Log}_{10}N$ avec $N = 10^4$. Nous avons bien $D_E^* < 8$.

L'algorithme n'est pas sensible à la variation de la longueur de la série. Cependant pour des valeurs inférieures à 3000 points, la dimension diminue mais les résultats ne rentrent plus dans le critère de Ruelle. Il faut au moins une série de 3000 points pour accorder confiance à la valeur de la dimension de plongement. Avec 10080, nous sommes assurés d'avoir une longueur suffisante. La sensibilité à τ est inexistante.

Nous avons de plus analysé l'effet de la contamination sur le comportement des intégrales de corrélation. Les résultats obtenus sont intéressants car nous voyons que lorsque la série EOP est contaminée par du chaos, la courbe $C(r)$ n'est pas modifiée et garde la même forme tandis que la contamination par du bruit tend à changer la forme particulière de la courbe (en éliminant le coude) (Figure 4.6). Ce résultat semble être une nouvelle indication de la présence d'un processus de même nature qu'un chaos déterministe dans les séries de rotation de la Terre.

Rappelons que le "coude" apparaissant parfois dans les diagrammes $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ peut être dû à deux choses:

D'une part, le comptage des paires de points dans l'algorithme Grassberger-Procaccia doit être commencé non pas à 1 mais à une valeur supérieure à τ car sinon on risque de considérer des points proches temporellement et pas dynamiquement (Theiler, 1987).

D'autre part, Eckmann et Ruelle (1985) ont souligné que l'existence d'un tel coude était typique des systèmes chaotiques et pouvaient refléter également la superposition de deux dynamiques déterministes.

Ici, le coude disparaît avec la contamination par le bruit. Ceci peut être interprété comme le fait que le signal aléatoire détruit le déterminisme. Ainsi si le coude apparent résulte de la superposition de deux dynamiques non linéaires, le bruit tend à masquer celle associée aux r petits en remplissant les "boules" $C(r)$ associées et en faisant perdre le sens des trajectoires. Par contre ajouter une contamination chaotique ne modifie pas l'éventuel déterminisme du processus.

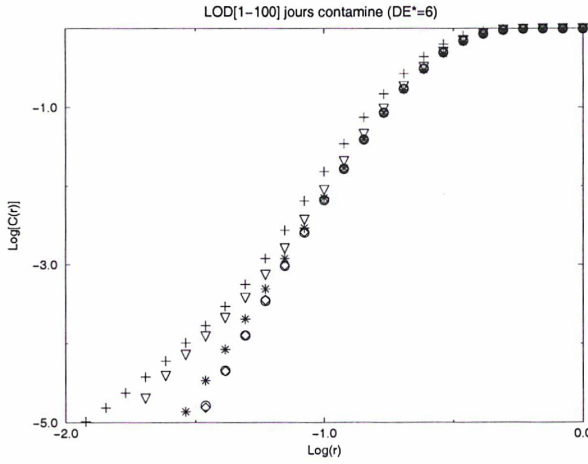


Figure 4.6: Comportement de la courbe $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ pour la dimension de plongement 6 pour LOD (triangle) et LOD contaminé: par du chaos (Lorenz: symbole croix), par du bruit (symboles: étoile (f_{-2}), cercle (f_0) et losange (f_{-1})).

Nous retenons comme valeur de dimension de plongement, la valeur suffisante: $D_E^* = 5/6$. Nous sommes alors quasiment assuré d'avoir trouvé un espace de reconstruction de dimension assez grande pour que les orbites soient bien dépliées et qu'on puisse y effectuer des déterminations dynamiques correctes.

4 Reconstruction 3D

Nous pouvons considérer, à ce stade de la discussion, que les séries *EOP* courtes périodes (< 100 jours), sont soit la somme d'un processus déterministe de faible dimension et d'un bruit stochastique masquant une convergence nette des résultats, soit le résultat d'un processus fallacieux de type marche aléatoire. Notre conjecture en faveur de la première solution est étayée par les raisons suivantes:

- 1) Le spectre de Fourier est continu et ne suit pas de loi de convergence nette.
- 2) Le pourcentage de faux voisins globaux tend à se stabiliser sur une valeur constante faible (5/10 %) dès que la dimension de plongement atteint 5.
- 3) Les pentes de $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ saturent aussi autour de la même valeur de D_E^* et possèdent un coude.
- 4) La contamination chaotique ne modifie pas le comportement des algorithmes.
- 5) Ces résultats sont cohérents entre eux bien qu'ils soient obtenus avec des séries relativement courtes, bruitées, filtrées et pas forcément bien échantillonnées.

Nous ne pensons pas que la convergence vers une dimension finie soit due à la présence d'un

bruit rouge. Afin d'en être sûr, nous avons décidé de tracer la projection 3D des orbites reconstruites dans un espace de dimension 6 (assurant un bon dépliement des orbites des *EOP*) pour chaque série de rotation de la Terre *PMX*, *PMY* et *LOD*.

Ce procédé nous permettra de savoir si l'on a affaire à des courbes fractales ou à une trajectoire continue (voir Chapitre 3). Nous avons choisi plusieurs combinaisons possibles de 3 composantes retardées parmi 6 (d'où les quatre graphes indiquant simplement une projection différente des orbites en 3D, Figure 4.7, pour *PMY*).

Les orbites projetées de *PMX* et *LOD* forment des figures très similaires. Les conclusions s'appliquant à *PMY* sont aussi valables pour les deux autres séries. Les vecteurs $\vec{y}(n)$ s'enroulent de façon continue et ordonnée. Les intersections apparentes, proviennent de la projection des orbites sur un espace trop petit. Cette projection 3D élimine donc l'hypothèse de l'existence d'un processus stochastique dominant et renforce la thèse de l'origine déterministe des fluctuations des séries *EOP* ([1-100] jours). Ce résultat est en accord avec la nature même de la réponse dynamique de la Terre (équations de Liouville) mais aussi avec l'origine déterministe de la plupart des flots géophysiques induisant les fluctuations de la rotation de la Terre. Les vecteurs reconstruits dessinent donc un attracteur borné pour le système dans l'espace des phases. Bien entendu, les séries possèdent un certain niveau de bruit aléatoire qui perturbe un peu les résultats en masquant partiellement la véritable nature déterministe (on voit la présence du bruit sur les courbes en 3D au centre de la figure où les points se repartissent de manière moins continue et plus aléatoire). Les trajectoires reconstruites à partir des séries *EOP* peuvent donc être décrites par un système d'équations différentielles ordinaires autonomes.

Ayant mis en évidence la très probable existence de cette dynamique déterministe de faible dimension, il convient désormais de la décrire en calculant ses caractéristiques. Cela signifie que nous allons évaluer la dimension locale de l'attracteur reconstruit D_L , sa dimension propre D_A ainsi que les exposants de Lyapunov. On pourrait s'interroger sur le fait qu'on ne retrouve pas une dimension de plongement égale à 3 alors que les équations de Liouville possèdent 3 variables d'états. Or, les excitations atmosphériques et océaniques s'expriment à travers les incréments d'inertie, les couples et le moment cinétique relatif de la Terre. Ces derniers dépendent du temps. Ainsi, les équations de Liouville sont non autonomes et il faut ajouter des dimensions (des variables d'état liées aux excitations) pour les rendre autonomes. Ce sont d'ailleurs les signatures des excitations (de dimension supérieure à 3) qui sont, selon nous, transmises aux séries *EOP* et caractérisées ici.

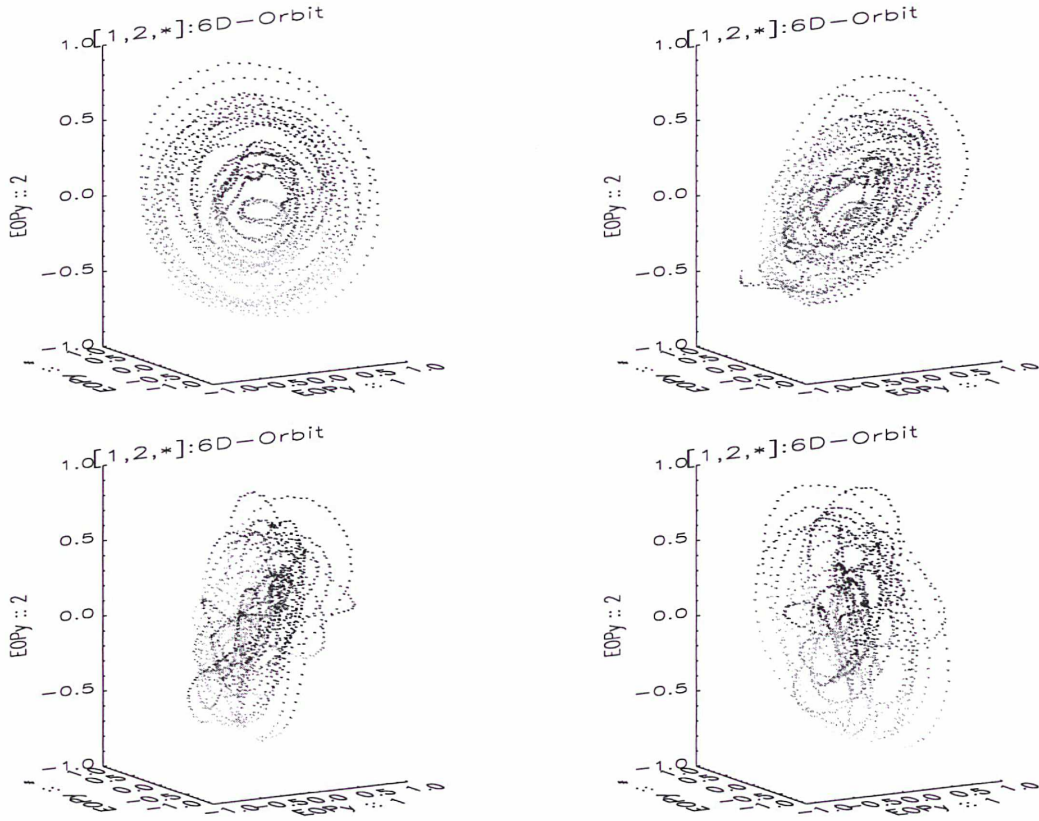


Figure 4.7: Reconstruction des orbites du système lié à PMY en dimension 6 sous 4 projections 3D différentes.

5 Dimension locale

Nous recherchons désormais la dimension locale de la dynamique ou plus précisément le nombre d'exposants de Lyapunov que nous aurons à évaluer pour décrire la divergence des orbites sur l'attracteur du système. La valeur de la dimension locale est également intéressante puisqu'elle indique le nombre d'équations différentielles ordinaires autonomes d'ordre 1 qu'il faudrait pour décrire la dynamique observée localement sur l'attracteur, reconstruit à partir de la série temporelle $x(n)$.

Dans le cas géophysique qui nous intéresse, cela permet de connaître le nombre de variables et d'équations différentielles dont nous aurions besoin pour modéliser les fluctuations à courtes périodes des *EOP*. Ce modèle déterministe est bien entendu inconnu. Il serait intéressant, bien que le défi soit bien plus compliqué, de trouver alors, d'une part un jeu de variables adéquat, et d'autre part les équations différentielles en ces variables capables de rendre compte de façon satisfaisante des propriétés dynamiques et dimensionnelles des attracteurs déduits des séries *EOP* observées. On pourrait ainsi pour chaque *EOP*, construire un système d'équations différentielles modélisant de manière unique les systèmes associés. Cette description déterministe serait une solution alternative à la description stochastique usuelle et est à développer dans le futur.

Appliquons les algorithmes du pourcentage de mauvaises prédictions et du nombre de valeurs propres significatives, aux séries de rotation de la Terre.

Les séries sont plongées dans un espace de dimension $D > D_{E*}$ afin que les orbites soient bien dépliées (ici on choisit $D = 10$). La dimension locale trouvée par la méthode des mauvaises prédictions vaut environ 6 ou 8 pour le mouvement du pôle et est autour de 7-9 pour la longueur du jour, (Figure 4.8 gauche). Ces valeurs sont surestimées puisqu'elles dépassent la valeur de la dimension de plongement D_E^* . Nous avons remarqué au Chapitre 3, la très grande sensibilité de cette prédiction locale à la présence de bruit. En effet l'algorithme a tendance à prédire le bruit local et perd toute notion de la trajectoire réelle. Cet effet est d'ailleurs amplifié avec l'analyse des séries contaminées par 10 % de bruit. Dans ce cas on a 100 % de mauvaises prédictions pour toutes les dimensions quasiment (la chute soudaine de la courbe en $D_{E*} = 9$ provient uniquement du nombre fini de données). Si nous augmentons D , et quelque que soit sa valeur, nous aurons 100% de mauvaises prédictions jusqu'à une chute à la dimension $D - 1$. Par contre, lorsque les séries sont contaminées par du chaos, le pourcentage de mauvaises prédictions suit fidèlement le comportement initial des séries non contaminées.

La grande sensibilité de l'algorithme aux contaminations stochastiques provient du fait que le bruit occupe toutes les directions de l'espace qui lui sont offertes. Ainsi localement, en présence de bruit, on aura tendance à trouver des points dans de nombreuses directions n'ayant rien à voir avec celles de la dynamique réelle. C'est pour cela que la dimension locale qui comptabilise le nombre de directions principales des orbites est toujours surestimée en présence de bruit. Pour Lorenz, le système occupe seulement 3 directions (dont une très faiblement car l'attracteur est quasi-plan), sa contamination est donc moins "génante" (d'autant moins si ces directions coïncident avec celles des systèmes *EOP*).

L'autre méthode (notée ici "vpmr" (valeur propre moyenne relative)) plus géométrique donne des résultats plus convaincants. En effet, on obtient des valeurs de la dimension locale entre 5 et 6 pour *LOD* et entre 4 et 5 pour *PMX* et *PMY* (Figure 4.8 droite). Là encore, les

séries contaminées confirment le surestimation des valeurs de la dimension locale par le bruit. Cependant cette seconde méthode est plus robuste face à des données réelles car elle ne nécessite pas d'ajustement par moindre carrés ni de prédiction. Bien entendu les petites valeurs propres sont difficile à trouver à cause du niveau bruit. Cependant, les conséquences sur la valeur de la dimension locale trouvée sont moindres qu'avec le premier algorithme. Cet effet y était amplifié par la projection sur les directions associées à ces valeurs propres mal déterminées. D'autre part, les résultats obtenus avec cette méthode ("vpmr") pour des séries synthétiques (Chapitre 3), se sont avérés meilleurs que ceux obtenus par l'algorithme du pourcentage de mauvaises prédictions. Le comportement stable des résultats face à une contamination par une série de Lorenz est là encore une indication possible de la présence d'un processus déterministe non linéaire de faible dimension dans les séries de rotation de la Terre possédant des directions principales communes avec l'attracteur de Lorenz.

On retiendra comme valeur de la dimension locale, le compromis: $D_L = 5$ pour les 3 *EOP*.

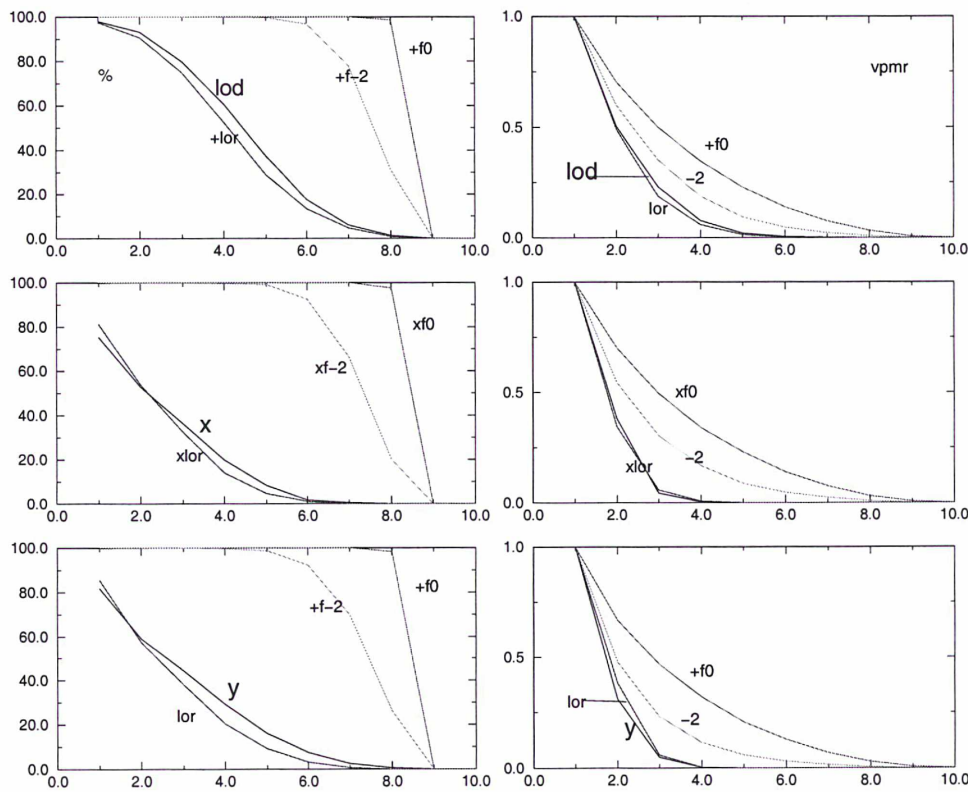


Figure 4.8: Détermination de la dimension locale D_L par le test du pourcentage de mauvaises prédictions (% , graphe de gauche) et le test des valeurs propres moyennes relatives (vpmr, graphes de droite). Les trois figures représentent de haut en bas: LOD, PMX et PMY chacune contaminée par des bruits stochastiques (+f-2, +f0) et un signal chaotique (+lor).

6 Exposants de Lyapunov globaux

Nous nous intéressons à la stabilité globale des systèmes dynamiques décrits par les séries de rotation de la Terre. La connaissance de l'ensemble des exposants de Lyapunov est primordiale pour la reconnaissance du type de phénomène sous-jacent. L'existence d'exposants positifs traduit une divergence exponentielle des trajectoires. En effet, un exposant positif est associé à une direction instable de l'attracteur et traduit donc la présence d'un comportement chaotique (forte sensibilité aux conditions initiales).

Pour les séries de rotation de la Terre, nous nous attendons à trouver un exposant nul (associé à la direction neutre le long du flot) puisque d'une part les fluides géophysiques sont décrits par des flots et d'autre part la rotation de la Terre décrite en terme d'équations de Liouville est aussi un système continu d'équations différentielles. De plus, la précision de cet exposant nous fournira une idée de l'erreur commise sur la détermination des autres. D'une manière générale, les exposants positifs sont les plus facile à déterminer. En effet, ceux-ci correspondent à une dilatation des volumes dans l'espace des phases tandis que les exposants négatifs sont les plus difficiles à obtenir dans la mesure où ils correspondent à une contraction des volumes et donc leur effet disparaît très rapidement dans le temps.

Afin de calculer l'ensemble des exposants globaux de Lyapunov associé à chaque série *EOP*, nous avons décidé de travailler en dimension locale, $D_L = 5$. Ainsi l'algorithme fournira 5 exposants.

Un moyen pratique de tester si le nombre d'exposants calculé est correct, est de les évaluer avec d'un coté le temps t positif, puis en inversant le signe du temps ($t \rightarrow -t$). Un exposant réel change de signe quand t change de signe et garde approximativement la même valeur absolue tandis qu'un faux exposant se comporte de manière totalement quelconque lorsque t change de signe. Ainsi, si la dimension locale D_L a été choisie trop grande, on aura $D_L - D'_L$ faux exposants et la dimension locale réelle sera $D'_L < D_L$. Si la dimension locale a été choisie trop petite, les D_L exposants seront vrais et il manquera le complément en exposants négatifs. Ceci est moins important puisque les exposants négatifs permettent de définir le taux de dissipation du système mais c'est surtout l'existence d'un exposant principal positif qui a un rôle primordial dans la caractérisation dynamique d'un processus.

Le calcul des exposants de Lyapunov globaux fournit pour *LOD*, *PMX* et *PMY*, deux exposants positifs, un exposant nul (avec une précision avoisinant les 5%), et deux exposants négatifs (Figure 4.9 et Table 4.3). Seuls les résultats pour *LOD* sont présentés car ceux concernant *PMX* et *PMY* sont similaires. La précision obtenue pour les exposants positifs est donc supérieure à 5% tandis que pour les exposants négatifs, nous ne pouvons pas vraiment donner de barre d'erreur. Le test sur le temps inverse nous assure la réalité dynamique de ces cinq exposants.

La somme des exposants est négative indiquant la nature dissipative du système. Les conditions sont donc ici réunies pour affirmer avec peu de réserves que la dynamique cachée sous les 3 séries *EOP* à courtes périodes est non seulement déterministe et plus particulièrement chaotique. Il faut cependant être prudent car il a été montré (Tanaka *et al.*, 1996) qu'il était possible de trouver de faux exposants positifs pour une série aléatoire. Or, d'une part le test du temps inverse permet de résoudre ce problème et d'autre part, en amont même du calcul des exposants de Lyapunov, les autres algorithmes sont capables de démasquer le bruit (les dimensions, et surtout la reconstruction 3D nous ont assuré que les systèmes étaient bien déterministes). Il serait donc surprenant d'être trompé jusqu'à ce stade par un bruit aléatoire. Tanaka *et al.* ont d'ailleurs souligné ce point en indiquant que leur étude était purement un cas d'école.

Nous avons de plus effectué le calcul des exposants de Lyapunov pour les séries *EOP* contaminées. L'addition de 10 % de bruit blanc perturbe fortement la valeur des exposants de Lyapunov en faisant "exploser" la valeur de l'exposant principal. Les résultats ne sont plus valides dans la mesure où la somme des exposants devient positive (système ni conservatif ni dissipatif). Deux trajectoires déjà divergentes apparaissent comme encore plus divergentes avec une contamination par du bruit blanc. L'exposant nul perd fortement sa précision et il faudrait augmenter largement la dimension locale pour retrouver un résultat physiquement réaliste. L'addition d'un bruit coloré f_{-2} ou d'un système de Lorenz ne change pas de beaucoup les résultats (pour Lorenz les valeurs diffèrent de moins de 10 %) (Table 4.4).

Finalement, l'exposant principal de Lyapunov ($\lambda_1 > 0$) est égal à:

- 0.33 (/j) pour *LOD*
- 0.34 (/j) pour *PMX*
- 0.38 (/j) pour *PMY*.

Celui-ci nous permet de définir un horizon théorique de prédiction (H_p). Au delà de cet horizon de prédiction, l'erreur de prédiction sera de l'ordre du *rms* de la série. Nous trouvons les valeurs suivantes (nous rappelons que ces valeurs s'appliquent aux séries à courtes périodes (inférieures à 100 jours) de la rotation de la Terre):

- 11.8 jours pour *LOD*
- 11.5 jours pour *PMX*
- 10.2 jours pour *PMY*

Cela signifie qu'une erreur de l'ordre de 0.001 *ms* sur *LOD* atteindra la valeur 0.06 *ms* au bout de 12 jours. Pour *PMX* et *PMY*, des erreurs respectives de 0.02 *mas* et 0.015 *mas* atteindront 1.15 et 0.75 *mas* au bout d'une dizaine de jours.

Les valeurs données dans les Tables 4.3 et 4.4 ont été calculées pour des séries de longueur sensiblement différente de celles utilisées pour la rédaction des articles des annexes 4 a et b, et filtrées légèrement différemment (IERS, 1997). Nous voyons que, de ce fait les valeurs des exposants principaux sont légèrement modifiées mais le comportement dynamique général reste le même (exposant de Lyapunov positif, horizon de prédiction de l'ordre de 10 jours et comportement global dissipatif).

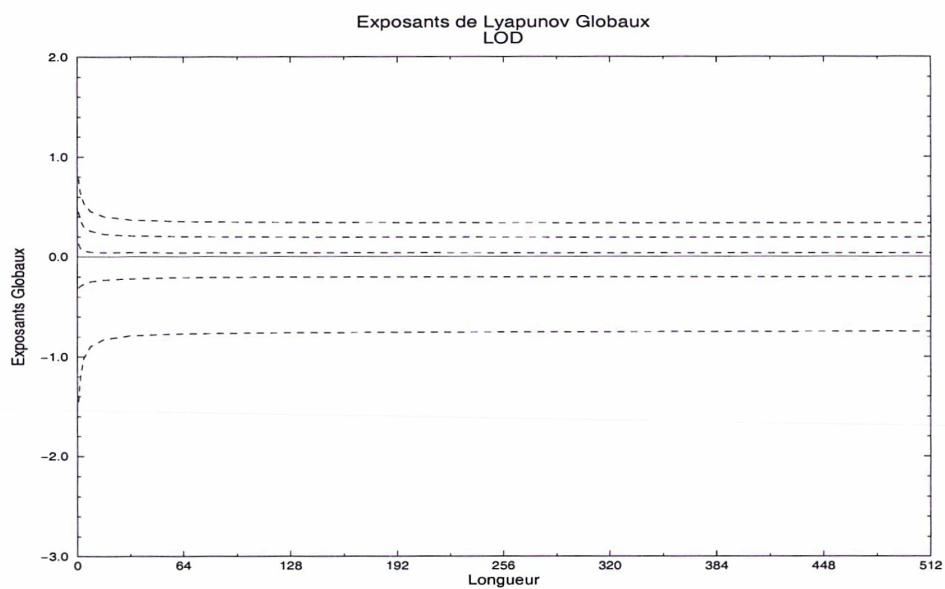


Figure 4.9: Exposants de Lyapunov Globaux pour LOD.

<i>Series</i>	<i>LOD</i>	<i>PMX</i>	<i>PMY</i>
λ_1+	0.3335	0.3407	0.3845
λ_1-	0.4675	0.5225	0.4868
λ_2+	0.1895	0.1688	0.2198
λ_2-	0.2970	0.3275	0.3111
λ_3+	0.0348	0.0443	0.0639
λ_3-	0.1143	0.1349	0.1146
λ_4+	-0.2015	-0.1244	-0.1504
λ_4-	-0.1631	-0.1238	-0.1688
λ_5+	-0.7481	-0.6961	-0.7366
λ_5-	-0.7712	-0.7452	-0.8062
$\sum \lambda_i+$	-0.3918	-0.2667	-0.2187
$\sum \lambda_i-$	-0.0556	0.1160	-0.0625
D_{Lyap}	4.47	4.62	4.70
H_p	11.8	11.5	10.2

Table 4.3: Valeurs des exposants de Lyapunov globaux:

λ_i+ correspond à l'exposant λ_i calculé pour le temps "normal". (Les exposants sont ordonnés dans l'ordre décroissant). λ_i- correspond à $-1 \times$ l'exposant λ_i calculé pour le temps "inversé". $\sum \lambda_i+/-$ est la somme des exposants indiquant la nature dissipative ou non du système. D_{Lyap} est la dimension de Lyapunov déduite des valeurs des exposants de Lyapunov. H_p est l'horizon de prédiction du système (en jour).

<i>Series</i>	<i>LOD + f_0</i>	<i>LOD + f_{-2}</i>	<i>LOD + lorenz</i>
λ_1+	0.8554	0.3785	0.3442
λ_1-	0.9392	0.4577	0.4575
λ_2+	0.6725	0.2245	0.1985
λ_2-	0.7433	0.2902	0.2877
λ_3+	0.4555	0.0574	0.0274
λ_3-	0.5201	0.0901	0.1029
λ_4+	0.1076	-0.2284	-0.1853
λ_4-	0.18921	-0.1893	-0.1727
λ_5+	-0.5928	-0.8599	-0.7543
λ_5-	-0.5325	-0.8618	-0.7840
$\sum \lambda_i+$	1.4982	-0.4277	-0.3696
$\sum \lambda_i-$	1.8593	-0.2131	-0.1094
D_{Lyap}	-	4.50	4.51
H_p	4.6	10.3	11.4

Table 4.4: Valeurs des exposants de Lyapunov globaux pour LOD contaminé:
L'effet des contaminations sur les exposants de PMX et PMY sont semblables.

7 Exposants de Lyapunov locaux

L'étude des variations temporelles de l'exposant principal $\lambda_1(t)$ permet de caractériser la stabilité locale des processus chaotiques de faible dimension observés dans les séries de rotation de la Terre. Nous avons calculé les exposants pour des matrices locales de longueur $L = 8$ et $L = 64$. La valeur $L = 8$ jours est choisie car assez proche du temps de retard (celui-ci est, on le rappelle, l'intervalle minimum nécessaire pour avoir des données non-linéairement indépendantes). La valeur $L = 64$ jours correspond à une moyenne des variations courtes des exposants sur environ 2 mois.

Les graphes de la série temporelle de l'exposant principal local pour *LOD*, *PMX* et *PMY* montrent une grande variabilité, indiquant des pertes significatives de stabilité autour de certaines dates (correspondant à des positions particulières sur l'attracteur).

Examinons tout d'abord le cas de la longueur du jour (Figure 4.10). Le pic le plus important se distingue nettement autour de l'année 1983. A cette époque, la valeur de l'exposant moyen (global) est multiplié par un facteur 2 à 3, par conséquent l'horizon de prédiction H_p est réduit d'un même facteur. Il est intéressant de remarquer que cette perte de stabilité du système apparaît pendant l'évènement majeur El Niño de 1982-1984. Ce que nous voyons ici n'est pas l'effet de El Niño sur l'évolution temporelle de la longueur du jour mais la perturbation qu'il exerce sur la stabilité propre de l'évolution dynamique du système reconstruit à partir de la variable *LOD*.

Ainsi non seulement les fluctuations à courtes périodes de la rotation de la Terre sont de nature chaotique mais ont de plus des variations locales de stabilité cohérentes avec les excitations qui s'exercent sur la Terre à diverses échelles de temps. En effet, n'oublions pas que nous travaillons avec les séries *EOP* filtrées au dessus de 100 jours. La variabilité observée, liée aux excitations extérieures, est le résultat d'évènements géophysiques particuliers sur cette partie du signal. Même si un évènement El Niño dure plusieurs mois, on trouve sa signature sur les *EOP* à courtes périodes. Cependant, cette variation a lieu tout le temps où l'excitation est maintenue.

La chaotité de la rotation de la Terre pour ces courtes périodes est héritée de la complexité dynamique du système océanique/atmosphérique et la perte locale de "prédictibilité" de la longueur du jour est directement reliée à la perte de stabilité du système océanique/atmosphérique couplé. Ceci renforce la réalité physique de l'exposant positif car ses variations temporelles sont liées sans ambiguïté à des mouvements géophysiques des fluides.

Un autre "pic" important a lieu en 1977 et correspond également à l'apparition d'un phénomène *ENSO* dans le système océanique/atmosphérique. La courbe 4.11 montre d'ailleurs l'indice *SST* ("Sea Surface Temperature" entre Darwin et Tahiti) mesurant les El Niño entre 1970 et 1998.

On observe également des pertes de stabilité un peu plus faibles en 1972-73 et 1996. Celles-ci sont sans doute aussi reliées à des phénomènes *ENSO*. L'apparition apériodique des *ENSO* entraîne une perte apériodique de la stabilité de la vitesse de rotation de la Terre. D'autre part, la stabilité de *LOD* est aussi dépendante de sa propre dynamique interne et de processus atmosphériques et océaniques autres que El Niño, qu'il n'est pas possible ici d'identifier ou de mettre en évidence séparément. Notons que le fait que la courbe "64" détecte les évènements avant la courbe "8" n'a rien de dynamique mais est uniquement dû à la façon dont l'algorithme fonctionne. En chaque point correspondant au "temps t_0 ", l'algorithme calcule respectivement le résultat de la moyenne de $L = 8$ et 64 matrices jacobiniennes prises à partir de t_0 . Un évènement au temps t_{60} sera déjà perçu en t_0 pour les longueurs "64" tandis qu'il faudra attendre d'être

au temps $t_0 \equiv t_{52}$ ou t_{53} pour que ce même évènement se fasse sentir sur la stabilité locale de fenêtre 8. Ainsi la détection des évènements est un peu décalée. En résumé, plus L est pris grand, plus tôt le même évènement sera enregistré.

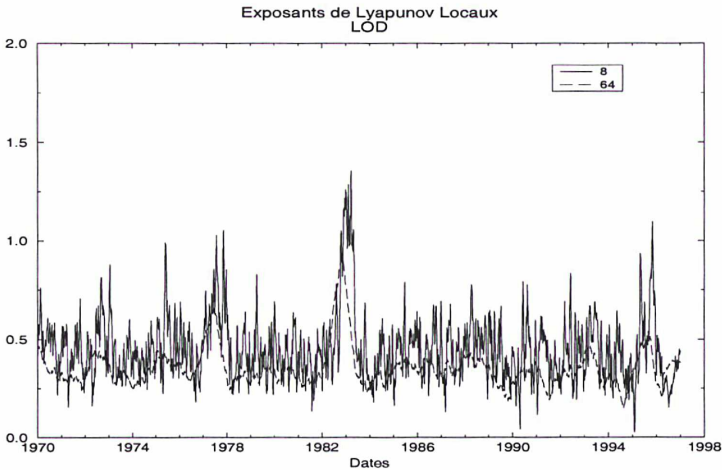


Figure 4.10: Variations temporelles locales, moyennées sur 8 et 64 jours, de l'exposant principal de Lyapunov de la série LOD.

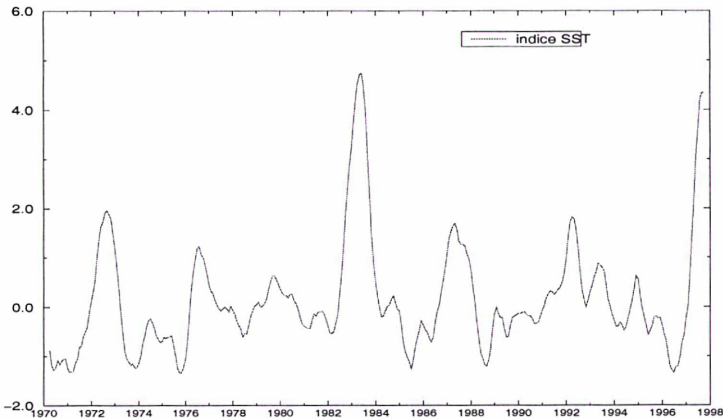


Figure 4.11: Indice SST (variation de température à la surface de la mer entre Darwin et Tahiti) entre 1970 et 1998.

Pour PMX (Figure 4.12), une forte variation de $\lambda_1(t)$ est visible autour des années 1971-74. Là encore, l’horizon de prédiction du système est réduit à environ 3 jours. Cette période correspond, pour le système océan/atmosphère, au changement de polarité entre deux évènements La Niña et El Niño de 1973 (La Niña correspond à l’anomalie inverse de El Niño). Les autres pics sont moins significatifs.

Néanmoins les pertes de stabilité secondaires les plus importantes sont situées autour des années 1976-77, 1980, 1987, 1991 et 1996. On remarque un pic en forme de "Dirac" en 1984 au niveau des variations de l'ordre de 8 jours. Ce pic n'est pas suivi par les fluctuations lissées (64 jours). Il peut être dû à un artefact (aucune signification physique) ou bien à un événement très précis et dont le temps caractéristique très court aurait fait basculer le régime dynamique de PMX de façon importante et soudaine. Il n'est pas possible d'expliquer chaque variation observée de manière aussi évidente que El Niño.

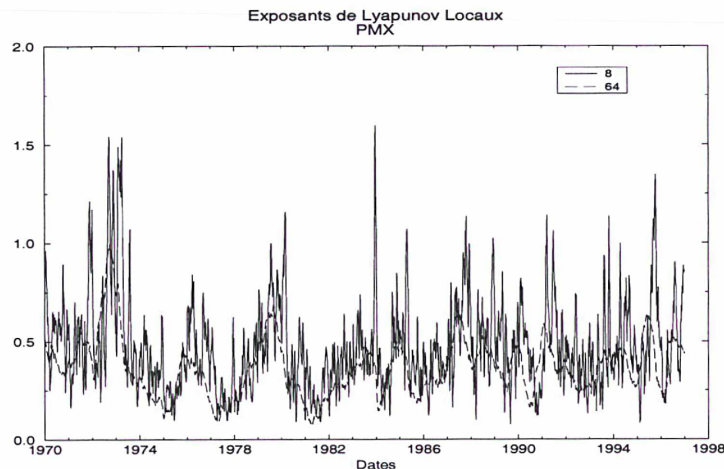


Figure 4.12: Variations temporelles locales de l'exposant principal de Lyapunov de la série PMX .

Pour PMY (Figure 4.13), on observe deux pics bien marqués (en 1975-76 et en 1982-83). Le premier peut être attribué à la transition La Niña/El Niño, tandis que le second semble clairement correspondre au El Niño de 1982-83.

Un troisième pic extrêmement important en 1996 n'a pas pu être relié à une anomalie dans le système océan/atmosphère. Nous nous sommes alors interrogés sur le rôle que pouvaient jouer les séismes sur la stabilité de la rotation de la Terre. Nous savons que les tremblements de Terre sont trop faibles pour être détectés dans les séries de rotation de la Terre (e.g. Chao et Gross, 1987) mais ceci ne signifie pas qu'ils n'ont aucun effet sur la stabilité du système. Nous avons relevé pour l'année 1996 (Engdahl *et al.*, 1998), 5 tremblements de Terre de magnitude élevée (supérieure à 7.5 sur l'échelle de Richter). Il est envisageable que l'accumulation de grands séismes cette année là soit la cause de la variation de la stabilité locale de la composante PMY . Cependant, par manque de connaissance sur les séismes, nous ne préférons rien conclure mais restons persuadés qu'une étude serait à mener dans cette direction.

D'autre part, nous avons vu que l'exposant principal global pouvait "exploser" lors d'une contamination par du bruit blanc. Ainsi le pic de 1996 n'aurait peut être aucune signification physique et proviendrait d'une présence plus forte de bruit dans cette région de l'attracteur et faisant "exploser" localement λ_1 .

Néanmoins, le fait de pouvoir relier certaines variations locales de $\lambda_1(t)$ à des processus atmosphériques et océaniques renforce la réalité physique de cet exposant.

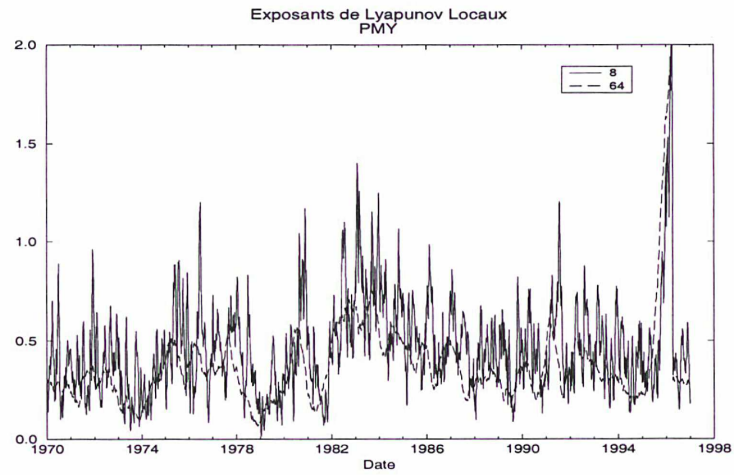


Figure 4.13: Variations temporelles locales de l'exposant principal de Lyapunov de la série PMY.

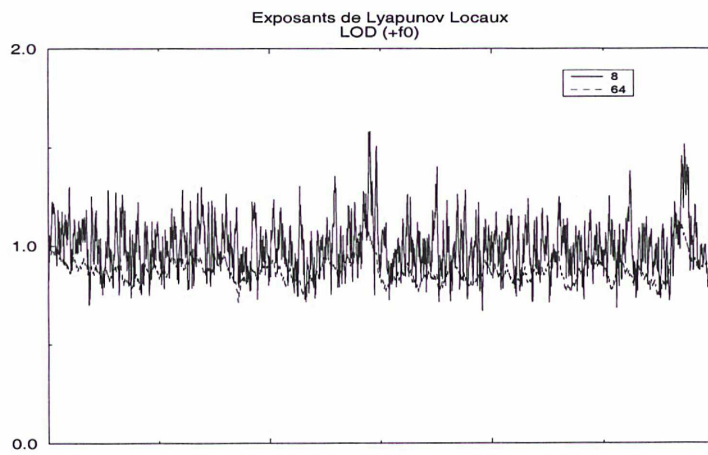


Figure 4.14: Variations temporelles locales de l'exposant principal de Lyapunov de la série LOD contaminée par du bruit blanc.

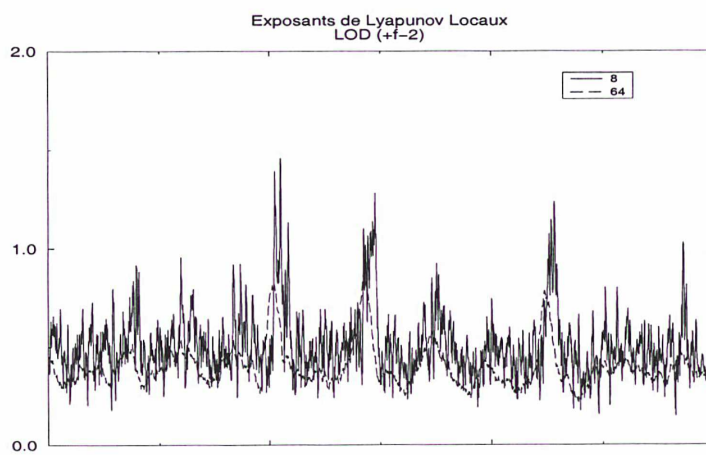


Figure 4.15: Variations temporelles locales de l'exposant principal de Lyapunov de la série LOD contaminée par une marche aléatoire.

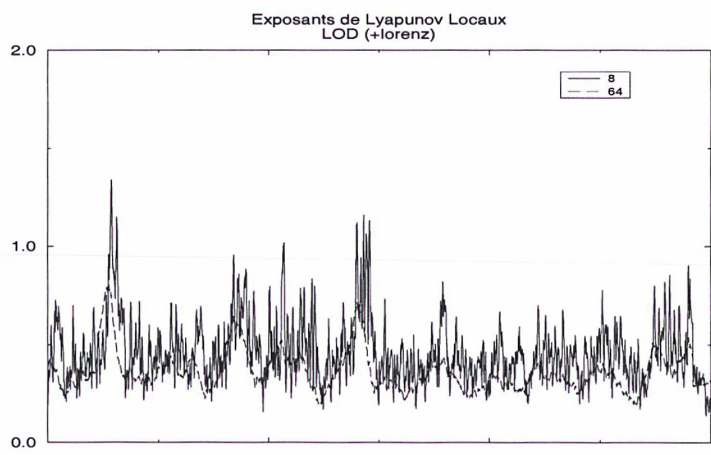


Figure 4.16: Variations temporelles locales de l'exposant principal de Lyapunov de la série *LOD* contaminée par une série chaotique.

L'étude de la variation de l'exposant local principal dans le cas des séries contaminées de rotation de la Terre montre que les pics dominants sont conservés.

Par exemple pour *LOD*, la contamination par le bruit blanc a fait "exploser" la valeur moyenne de λ_1 mais les pertes de stabilité en 1982-84 et 1996 sont toujours bien visibles (Figure 4.14). La contamination par f_{-2} accentue la variation en 1992 beaucoup plus faible sur la série non contaminée (Figure 4.15). Enfin la contamination par Lorenz accentue un événement en 1972-73 (Figure 4.16). Le comportement général reste cependant le même et le El Niño 1982-83 est toujours bien marqué.

On pourrait s'interroger sur la raison pour laquelle, un même événement El Niño n'est pas visible sur la stabilité des trois séries *EOP*, (ceci est valable d'ailleurs pour tout type d'excitation). En effet, un même événement sera présent de façon plus ou moins marquée dans les séries de stabilité de rotation de la Terre, selon la position occupée sur l'attracteur au moment où l'excitation a lieu. L'exemple de Lorenz permet de visualiser ceci, si on exerce une perturbation extérieure quand l'orbite passe par le centre de la figure, celle-ci apparaît au moment où le système est le moins stable et peut changer de lobe très facilement. Au contraire, la même perturbation exercée sur l'extrémité d'un lobe de l'attracteur aura un effet peu sensible sur la trajectoire et par conséquent sur la variation locale de l'exposant principal.

Ainsi le fait qu'on distingue très nettement l'effet de tel El Niño et non de tel autre sur la stabilité de *LOD* par exemple n'a rien de surprenant. Tout dépend de l'état du système au moment où celui-ci a lieu. De plus la rotation de la Terre est perturbée par diverses forces et l'effet cumulé de celles-ci peut annuler certaines variations de stabilité et en augmenter d'autres le long de telle ou telle composante.

D'autre part, nous ne voyons aucune signature de El Niño de 1997. Ceci vient probablement du fait qu'il faudrait travailler sur des séries d'au moins deux années plus longues ou que le système se trouve dans un état relativement stable (plus stable qu'en 1982-83).

La Table 4.5 relève les variations principales de la stabilité locale pour chaque série *EOP* et les dates associées. En dernière ligne nous rappelons les valeurs moyennes globales à titre comparatif. Dans cette table, les valeurs de la ligne supérieure sont celles de l'exposant principal et les valeurs juste dessous sont celles des horizons de prédiction (en jours) associés.

Dans tous les cas, nous n'attachons pas trop d'importance aux valeurs exactes des exposants locaux ou des horizons de prédiction associés. Leur estimation dépendant fortement de la qualité des données. Par contre, leur signe, leur résistance au test du temps inverse et la corrélation de leurs variations temporelles avec des excitations extérieures reconnues sont des facteurs robustes à considérer. Notons également que nous travaillons sur la stabilité du système pour des périodes inférieures à 100 jours, c'est-à-dire, toutes les déterminations s'appliquent aux séries à courtes périodes. Il est évident que si nous avions travaillé avec les séries brutes, les horizons de prédiction seraient plus grands et la taille de l'attracteur aussi.

Series	LOD	PMX	PMY
Date des évènements			
1972-73	0.5	1.2	0.38
	7.8	3.3	10.2
1977-78	0.7	0.2	0.6
	5.6	19.5	6.5
1979-80	0.33	0.75	0.38
	11.8	5.2	10.2
1982-84	1.4	0.4	0.8
	2.7	9.8	4.9
1991-92	0.33	0.7	0.8
	11.8	5.6	4.9
1995-97	0.6	0.9	2
	6.5	4.3	1.9
Valeurs Moyennes globales	0.33	0.34	0.38
	11.8	11.5	10.2

Table 4.5: Dates des variations principales de stabilité associées aux séries EOP. La première ligne donne la valeur de l'exposant local et la seconde l'horizon de prédiction associé en jours. Certaines pertes de stabilité pourraient avoir une cause géophysique commune.

8 Dimension de l'attracteur

Les caractérisations précédentes ont fait émerger l'existence d'un processus déterministe non linéaire et chaotique de faible dimension dans les séries courtes périodes de rotation de la Terre probablement témoin des excitations géophysiques non linéaires. Ainsi l'attracteur du système devrait avoir une dimension fractale.

Une première valeur de la dimension de l'attracteur est fournie par la dimension de Lyapunov obtenue à partir de exposants globaux de Lyapunov. Les valeurs trouvées sont fractales:

$$D_{Lyap} = 4.47 \text{ pour } LOD$$

$$D_{Lyap} = 4.62 \text{ pour } PMX$$

$$D_{Lyap} = 4.70 \text{ pour } PMY$$

Il est très difficile de mettre une barre d'erreur sur ces déterminations. Les limitations viennent de la détermination plus ou moins bonne des exposants négatifs. Nous allons ici essayer de vérifier ces résultats par une autre méthode. Nous savons que la dimension de Lyapunov est

une borne supérieure de la dimension d'attracteur D_A obtenue par l'intégrale de corrélation. Une chose dont on est sûr, est que la dimension d'attracteur est forcément supérieure à 3 puisque les orbites ont encore des points d'intersection en dimension 3 (vu en projection 3D). Reprenons les résultats de l'algorithme qui calcule la fonction de corrélation $C(r)$ (algorithme de Grassberger et Procaccia, 1983, cf Chapitre 3). Nous représentons les valeurs des pentes mesurées sur la partie linéaire des courbes $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ pour les trois séries *EOP* courtes périodes (Figure 4.17).

Malheureusement il est difficile de constater une convergence nette des pentes vers une valeur constante autour de la dimension de plongement raisonnable $D_E^* = 5/6$ (les résultats pour *PMX* sont un peu meilleurs). On observe grossièrement, le comportement suivant pour les trois séries: les pentes augmentent jusqu'à la dimension 5 ou 6 puis continuent de croître mais de plus en plus faiblement, comme si un signal aléatoire superposé au signal déterministe, contrebalançait en partie l'effet de saturation attendue en "tirant" les courbes.

Il n'est donc pas possible de déterminer une dimension d'attracteur précise avec cette méthode. Cependant une "fourchette" raisonnable à la vue des courbes, pour la dimension d'attracteur est:

Entre 4.5 et 5.5 pour *LOD*

Entre 3.5 et 4.5 pour *PMX*

Entre 4 et 5 pour *PMY*

En outre, l'application de ce seul algorithme ne permet pas de conclure sur la nature chaotique d'un système pour deux raisons principales:

1. Les incertitudes dans l'évaluation de D_A : la dimension d'un 2-tore ne peut pas être retrouvée strictement égale à deux, avec un nombre fini de points (Chapitre 3, Figure 3.15c).
2. L'existence d'attracteurs étranges (D_A fractale) et non chaotique.

Pour *LOD*, la dimension de Lyapunov n'est pas vraiment une borne supérieure de la dimension de l'attracteur obtenue par cet algorithme. Ceci vient sans doute du fait que l'intégrale de corrélation est peu précise et si *LOD* contient un petit pourcentage de bruit de mesure, celui-ci aura tendance à induire une pente de convergence plus grande. C'est ce que nous observons ici. Nous voyons que l'application de ce seul algorithme est insuffisant lorsqu'on traite de données expérimentales bruitées. En effet, ce test n'indique pas de valeur précise de D_A qui d'après les "fourchettes" pourrait être aussi bien entière que fractale. Le calcul des exposants de Lyapunov est plus crédible (ce point est souligné par Ruelle, 1990).

La prise en compte conjointe de ces résultats et de la valeur de la dimension de Lyapunov fournit finalement plus précisément des valeurs de D_A :

- Entre 4.5 et 4.47 pour *LOD*, ceci signifie en gros que la dimension a de forte chance d'être bien fractale et égale à 4.5.
- Entre 3.5 et 4.6 pour *PMX*
- Entre 4 et 4.7 pour *PMY*, les conclusions ici sont moins évidentes.

Il est difficile de conclure assurément à une quelconque dimension fractale de l'attracteur à la vue des résultats des algorithmes. Selon nous, la dimension de l'attracteur est cependant bien fractale mais ceci repose plutôt sur un ensemble de remarques précédentes. L'exposant

de Lyapunov positif est associé à une direction instable sur l'attracteur. Dans la plupart des systèmes chaotiques, cette variété instable a une structure feuilletée de dimension non entière qui rend l'attracteur étrange (des attracteurs chaotiques de dimension entière ont été trouvés dans des systèmes théoriques mais n'ont pas encore été observés). Concernant les séries *EOP*, l'existence d'une variété instable est non ambiguë (robustesse de la valeur de l'exposant principal de Lyapunov). D'autre part, nous accordons une confiance plus grande aux valeurs des dimensions de Lyapunov qu'aux valeurs des dimensions de corrélation. Enfin, les dynamiques responsables des variations observés des *EOP* possèdent des attracteurs étranges dont la structure et les directions instables ont toutes les chances d'être transmises de manière quasi-transitive à celles de la rotation de la Terre à courtes périodes.

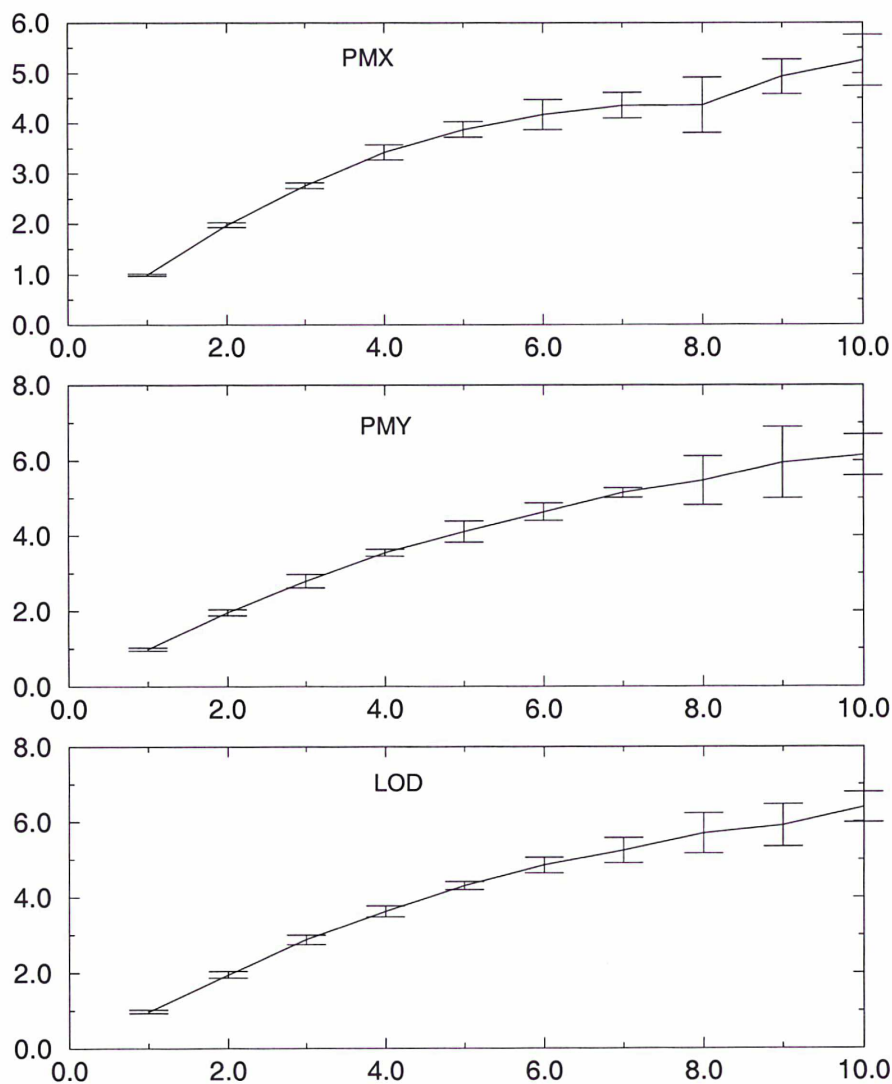


Figure 4.17: Valeur de la pente $\text{Log}C(r)/\text{Log}r$ en fonction de la dimension de plongement pour PMX (haut), PMY (milieu) et LOD (bas). Les barres d'erreur sont calculées comme étant la valeur du rms de la pente sur sa moyenne.

4 Discussion et conclusion

Nous avons dégagé les caractéristiques dimensionnelles (dimension de plongement, locale, d'attracteur) et dynamiques (exposants de Lyapunov) des séries à courtes périodes (inférieures à 100 jours) des paramètres d'orientation de la Terre (*EOP* [1-100] jours). Les divers tests effectués nous ont assuré une certaine robustesse des résultats face à la contamination par un autre processus ainsi qu'à la longueur des séries et au choix du temps de retard du plongement. En particulier, nous avons remarqué que les caractéristiques dimensionnelles sont surestimées lorsque le signal est contaminé par du bruit stochastique tandis qu'elles sont peu modifiées lorsque la contamination consiste en une série issue d'un système chaotique (Lorenz), ce qui laisse supposer que les processus en question sont de nature proche. D'autre part, il est certain que les prétraitements appliqués aux séries peuvent partiellement éliminer certaines parties du signal et en particulier les très courtes périodes.

Concrètement, nous avons reconstruit chacune des 3 séries de rotation de la Terre [1 – 100] jours (*PMX*, *PMY* et *LOD*) dans un espace de reconstruction de dimension 5 ou 6. La continuité des trajectoires fût la preuve de la nature déterministe à opposer à stochastique de ces fluctuations. Nous avons déterminé deux vrais exposants de Lyapunov globaux positifs. Ces exposants positifs sont révélateurs de la nature non linéaire et chaotique des fluctuations courtes périodes de la rotation de la Terre entre 1970 et 1997. Les orbites remplissent donc un attracteur chaotique dont la dimension semble être une valeur fractale entre 4 et 5. Certaines grandes variations locales de la stabilité ont été largement reliées à des événements El Niño. Malheureusement il n'existe pas à l'heure actuelle de caractérisation dynamique ni dimensionnelle complète et unanime de ce phénomène chaotique permettant une comparaison directe avec la Terre.

Notre analyse éclaire cependant sur la relation de causalité entre *ENSO* et les fluctuations de la rotation de la Terre à partir d'un point de vue totalement différent. En effet, les variations locales des exposants de Lyapunov des *EOP*, mesurent en quelque sorte, l'augmentation temporaire de la chaotité du système causée par un événement *ENSO*.

Les fluides atmosphériques et océaniques sont d'une manière générale les principaux responsables de l'instabilité mesurée sur les attracteurs *EOP* reconstruits. Ils agissent à la fois sur la dynamique globale mais aussi sur les variations temporelles de l'exposant principal de Lyapunov. En effet, des comportements turbulents sont omniprésents dans les fluides excitant la Terre à diverses échelles de temps. Aussi, les valeurs caractéristiques de la dynamique terrestre sont-elles représentatives de l'instabilité moyenne du système. Les processus atmosphériques et océaniques à différentes échelles de temps et agissant en différents lieux, se superposent pour engendrer les fluctuations observées de la Terre. De plus, le système océanique/atmosphérique est assez complexe pour autoriser la coexistence de plusieurs attracteurs et comporter des bifurcations.

En effet, il peut exister plusieurs attracteurs dans un même espace des phases. A cause des excitations extérieures et/ou du bruit, les orbites peuvent passer d'un attracteur à un autre de façon apparemment erratique. S'il n'y a qu'un seul attracteur, le système peut aussi changer d'état par variation d'un paramètre interne. Les caractéristiques obtenues par l'analyse d'une série temporelle résulterait d'une sorte de moyenne de ces états.

Le lecteur pourrait s'interroger sur le fait qu'on ne retrouve pas les mêmes caractéristiques dimensionnelles et dynamiques (même variations dans $\lambda_1(t)$ par exemple) pour les trois séries *EOP* compte tenu qu'elles sont les trois variables des équations de Liouville. Or le point essentiel est que la Terre ne constitue pas un système dynamique chaotique en soi. Ce qui est caractérisé à travers les trois *EOP* n'est pas le système rotation de la Terre isolé. D'autre part, les équations de Liouville n'étant pas autonomes, elles ne se limitent pas à un système de trois équations non linéaires. Par contre, les fluctuations courtes périodes des *EOP* témoignent bien d'une signature chaotique qui est directement induite par les excitations géophysiques. Dans la mesure où les excitations sont couplées différemment selon qu'elles agissent sur *PMX*, *PMY* ou *LOD*, il est normal de ne pas retrouver les mêmes attracteurs en chaque *EOP*. On trouve un attracteur pour *LOD* qui n'a pas les mêmes propriétés que celui de *PMY* ou *PMX* tout simplement parce que les variables intervenant dans sa description et les processus géophysiques responsables de son existence sont différents. De plus, il serait intéressant d'étudier le signal complexe $PMX + iPMY$ dans la mesure où la définition des orientations de l'axe du pôle suivant "x" et "y" est sans doute entachée d'arbitraire.

En conclusion, cette étude complète, issue de la théorie des systèmes dynamiques est appliquée pour la première fois aux séries de rotation de la Terre ([1-100] jours). Des caractérisations non linéaires des séries de longueur du jour ont été menées de façon préliminaire dans trois études antérieures. En 1990, Malinestkii *et al.* (1990) relèvent une borne inférieure de dimension d'attracteur magnétohydrodynamique de 1.3 ± 0.3 , à partir de données de *LOD* tous les 6 mois entre 1656 et 1984. D'autre part, Tiwari *et al.* (1992) appliquent uniquement l'algorithme de Grassberger-Procaccia (1983) à une série journalière de longueur du jour filtrée à un an. Ils concluent, moyennant quelques réserves, à une valeur de dimension d'attracteur entre 5 et 7, et donc à la présence de chaos dans *LOD*. Cependant, la légitimité de leurs résultats, assez imprécis, n'est pas discutée. Nous avons obtenu, avec le même algorithme, des évaluations de la dimension d'attracteur, insatisfaisantes. D'autre part, cet algorithme utilisé seul ne permet pas de conclure directement sur la nature chaotique d'un processus issu d'une série d'observations. En outre, les résultats de Tiwari *et al.*, ne vérifient pas le critère de sélection de Ruelle (série trop courte face à la dimension proposée). En 1994, Tiwari *et al.*, estiment "l'entropie de Kolmogorov", K_2^2 , de la même série et déduisent un temps de prédiction théorique pour *LOD* de l'ordre de 7-8 jours. Cette valeur est comparable avec l'horizon de 11 jours estimé à partir de l'exposant principal de Lyapunov.

Les résultats de notre étude répondent bien à la question initiale: il est possible de déceler une composante non linéaire déterministe et chaotique de faible dimension dans les séries *EOP* courtes périodes. Les séries étant à la fois de qualité suffisante et les algorithmes robustes aux contaminations. L'ayant décelée, il a même été possible d'en donner ses principales caractéristiques.

La Table 4.6 résume les résultats numériques associés à la caractérisation dynamique des séries *LOD*, *PMX* et *PMY*.

² $K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \ln \left(\frac{C_m(r)}{C_{m+1}(r)} \right)$, $C_m(r)$ étant l'intégrale de corrélation à la dimension m

<i>Series</i>	<i>LOD</i>	<i>PMX</i>	<i>PMY</i>
τ	10	15	18
D_E^*	5/6	5/6	5/6
D_L	5	5	5
λ_1	0.33	0.34	0.38
$\sum \lambda_i$	-0.39	-0.27	-0.22
D_{Lyap}	4.5	4.6	4.7
D_A	4.5	4.6	4.7
H_p	12	11.5	10

Table 4.6: Caractéristiques dynamiques des systèmes observés à travers les séries *LOD*, *PMX* et *PMY* filtrées.

τ est le temps de retard (en jours), D_E^* la dimension de plongement, D_L la dimension locale, λ_1 , l'exposant principal de Lyapunov (en jour^{-1}), $\sum \lambda_i$ la somme de tous les exposants et les dimensions d'attracteur: D_{Lyap} et D_A , enfin la dernière ligne donne l'horizon de prédiction théorique (H_p) en jours, de ces systèmes.

Des séries plus longues et plus précises des paramètres de rotation de la Terre nous permettraient de reconstruire un attracteur mieux densifié. Le calcul de ses propriétés dynamiques serait d'autant plus précis et permettrait de les relier plus objectivement aux variations de stabilité des systèmes océno/atmosphériques par exemple (certaines pertes de stabilité des *EOP* restent mystérieuses).

Finalement qu'apprenons-nous d'une telle étude?

Nous pensons qu'aborder l'étude des séries *EOP* de cette manière est nécessaire. En effet, si nous nous étions limité à l'analyse de Fourier, nous aurions sans doute caractérisé le spectre [1-100] jours des *EOP* de marche aléatoire. En effet, le comportement spectral des *EOP* ([1-100] jours) et celui d'une "marche aléatoire" sont semblables. Cependant, le comportement dynamique est totalement différent (la reconstruction 3D en est la preuve). Dans l'espace des phases, une marche aléatoire possède une dimension de corrélation fractale due à la construction de la trajectoire et non à la présence d'une variété instable dans sa dynamique (qui est stochastique). A l'opposé, les séries *EOP* ont des orbites continues et différentiables telles que celles d'un système déterministe issu d'un flot. L'attracteur possède une variété instable et sa dimension fractale provient de sa dynamique chaotique. Ceci a une implication directe concernant la modélisation. Elle ouvre une alternative à la modélisation autorégressive habituelle.

Concernant la prédiction, il nous a été possible de proposer un temps théorique au delà duquel le système ne peut plus être prédit à cause de la divergence des trajectoires sur l'attracteur. Il faudrait maintenant tester des prédictions dynamiques (dans l'espace des phases sur l'attracteur) des séries *EOP* et non pas dans l'espace temporel (série chronologique). Peut être pourrions-nous améliorer les prédictions actuelles grâce à cette nouvelle approche qui prend en compte la nature dynamique réelle du système et non simplement sa description statistique. L'avantage des méthodes non linéaires de prédiction repose sur l'identification d'un attracteur. La prévision est alors effectuée de manière à rester proche de lui en évitant les points "aberrants".

Outre la réponse même à la question de la détection d'un processus non linéaire de faible dimension dans les séries de rotation de la Terre courtes périodes, plusieurs résultats de cette étude ont des implications fondamentales concernant la nature et l'origine géophysique des fluctuations observées de périodes inférieures à 100 jours.

Il faudra comparer activement les caractéristiques dynamiques (dimension stabilité..) des fluides océaniques et atmosphériques obtenues à partir de séries typiques aux caractéristiques dynamiques de la présente étude. Ce point est repris de manière préliminaire dans le Chapitre 5.

D'autre part, il est intéressant de remarquer que ce type d'analyse n'est pas restrictif à une classe de processus contrairement à l'analyse de Fourier. En effet, bien utilisé, il permet tout aussi bien de mettre en évidence la périodicité d'un système, sa chaoticité ou sa nature aléatoire.

Finalement, les résultats obtenus pour les *EOP* ([1-100] jours) permettent d'espérer une extension de notre méthodologie à:

- La prédiction non linéaire des séries courtes périodes de rotation de la Terre.
- La caractérisation systématique (afin de rechercher "du signal") des résidus des séries temporelles de rotation de la Terre et de géophysique d'une manière générale.
- La comparaison dynamique entre différents systèmes interactifs en complément de l'habituelle comparaison temporelle (Chapitre 5).
- La reconstruction d'un système d'équations différentielles non linéaires autonomes tel que ses solutions aient les mêmes propriétés dynamiques et de stabilité que les séries ([1-100] jours) des *EOP*; par opposition à la modélisation statistique et stochastique des mêmes séries.
- L'étude d'autres signaux terrestres pour lesquels la description statistique n'est pas suffisante (Chapitre 6).

Chapitre 5

Etude des séries de moment cinétique atmosphérique. Comparaison avec la rotation terrestre

1 Introduction

Ce chapitre a fait l'objet de la publication d'un article au *Journal of Geodesy* en avril 1999 (annexe 3). Ce dernier est à l'heure actuelle sous presse. Le travail développé ici a pour but de proposer une étude dynamique de certaines séries atmosphériques et de permettre une comparaison et un lien avec les résultats dynamiques concernant les séries *EOP*.

2 Motivations

La Terre solide et l'atmosphère échangent leur moment cinétique selon la loi de conservation du moment cinétique total (la Terre et l'atmosphère formant un système fermé). Ainsi toute variation du moment cinétique atmosphérique est accompagnée d'un changement égal mais opposé du moment cinétique de la Terre.

Depuis Barnes *et al.* (1983), on calcule les fonctions effectives de moment cinétique atmosphérique (*EAAM*) par intégration volumique d'un certain nombre de variables atmosphériques (température, pression...) données par les centres météorologiques évaluant la prédiction du climat en temps réel (Freedman *et al.*, 1994). Elles représentent ainsi une mesure globale de la dynamique atmosphérique. Ces fonctions sans unités, peuvent ensuite être converties en unités "*EOP*" (par l'intermédiaire des équations de Liouville, voir Chapitre 1). Elles permettent de comparer directement les séries géodésiques et les séries de moment cinétique atmosphérique, et de mesurer la partie atmosphérique des fonctions d'excitation totales responsables des variations des paramètres d'orientation de la Terre (*EOP*) observées.

Ce type de comparaison a mis unanimement en évidence que la principale source d'excitation des *EOP* pour des périodes saisonnières et inférieures, est l'atmosphère. Par exemple, Feissel et Nitschelm (1985) ont souligné une très forte corrélation (0.8/0.9) entre la série de longueur du jour observée et la série de longueur du jour induite par le moment cinétique axial atmosphérique pour des périodes de 30 à 400 jours. Plus récemment, possédant des séries de

meilleure qualité, Dickey *et al.* (1992) ont pu faire le même genre de constatation pour des périodes descendant à 8 jours. Il est aujourd'hui sans aucun doute reconnu que l'atmosphère est le principal responsable des variations observées dans les *EOP*.

Bien entendu, les comparaisons usuelles se font dans le domaine du temps (séries temporelles, corrélations) et des fréquences (spectre de fourier, ondelettes). Même si ces méthodes ont fourni des résultats très intéressants, nous sommes restreints en un mode de pensée linéaire, c'est pourquoi changer d'espace de travail ne peut que compléter et enrichir notre connaissance actuelle.

Dans la mesure où une composante non linéaire déterministe chaotique a été caractérisée dans les séries *EOP*[1-100] jours, il est légitime de se demander de quelle nature dynamique est l'excitation principale (atmosphère) de ces processus. Nous avons donc calculé les propriétés topologiques et dimensionnelles des séries de moment cinétique atmosphérique [1-100] jours et nous les avons comparées avec les caractéristiques trouvées pour les séries *EOP*[1-100] jours.

A terme, une comparaison complète dans l'espace des phases des séries *EOP* à diverses échelles de temps et des séries de moment cinétique atmosphérique responsables de leur excitation, permettra de mieux comprendre de quelle manière la dynamique de l'atmosphère est transmise à la Terre: retrouve-t-on la dynamique atmosphérique intégralement? à quel moment apparaît le chaos? comment les équations de Liouville transforment-elles une dynamique particulière?

Nous essayons ici d'amorcer une réponse à toutes ces questions en adoptant une approche non linéaire ou plus précisément, en cherchant à décrire dynamiquement les séries de mesures dans l'espace des phases.

Les dimensions et les diverses quantités non linéaires nous renseignent à la fois sur le processus sous-jacent aux mesures de moment cinétique atmosphérique (propriétés de l'attracteur), sur le mode de transmission entre l'atmosphère et la Terre mais aussi sur le candidat supposé manquant dans le spectre de la fonction d'excitation totale de la Terre.

Il n'est pas inutile de rappeler que l'atmosphère présente à différentes échelles de temps, des comportements chaotiques. Depuis une dizaine d'années, les études non linéaires de la dynamique atmosphérique se sont développées (pour une revue récente de l'application de la théorie des systèmes dynamiques aux sciences atmosphériques, le lecteur est fortement invité à consulter l'article de Ghil *et al.*, 1991). Notre étude est donc loin d'être la première à se pencher sur la mise en évidence et la description d'un attracteur atmosphérique à partir d'une série temporelle. Nicolis et Nicolis (1984), utilisent une série d'enregistrements d'isotopes marins pour obtenir un attracteur climatique de dimension 3.1. Essex *et al.* (1987), conduisent une analyse similaire à partir d'observations météorologiques journalières et retrouvent un attracteur atmosphérique de dimension environ 6. Ceci confirme le fait que un système aussi complexe que l'atmosphère peut être représenté par un attracteur de faible dimension. Tsonis et Elsner (1988), analysent des mesures de vitesse de vent à 10 mètres du sol, données toutes les 10 secondes et caractérisent alors un attracteur de dimension estimée 7.3.

D'une manière générale, pour caractériser l'éventuel attracteur d'un système atmosphérique, la variable observée peut être la pression ou la température. Fraedrich (1987), utilise d'ailleurs des mesures journalières de pression de surface pour obtenir un attracteur atmosphérique de dimension entre 6.8 et 7.1. Finalement, Henderson et Wells (1988), analysent deux séries différentes (l'intensité des vents d'ouest corrigée du cycle annuel et la vitesse des vents lors d'un orage). Ils obtiennent pour ces deux systèmes des dimensions d'attracteurs respectivement

entre 5-6.5 et 4-5.5. Le spectre de puissance associé à ces deux séries avait révélé des pentes respectivement de -3 et -5/3. La valeur -5/3 est une valeur clé puisque c'est celle de la loi du spectre de puissance d'un processus turbulent bien développé. D'une manière générale, toutes ces études montrent que l'attracteur associé à des séries météorologiques est de faible dimension (entre 3 et 7). Les résultats dynamiques obtenus pour les séries atmosphériques sont importants du point de vue de la modélisation numérique des processus météorologiques dans la mesure où ils permettent d'identifier le comportement du système (type d'attracteur) et suggèrent quelque chose à propos de la taille du système (dimension de plongement). En outre, il devient possible de tester des modèles théoriques en comparant leurs attracteurs aux attracteurs empiriques reconstitués à partir de séries temporelles.

Le texte est articulé de la façon suivante:

Tout d'abord, nous présentons les séries atmosphériques et leurs caractéristiques linéaires classiques. Les séries de moment cinétique atmosphérique sont très intéressantes puisqu'elles sont issues de la réanalyse globale des données atmosphériques mondiales de ces 40 dernières années par deux instituts américains: le NCEP et le NCAR (Kalnay *et al.*, 1996) et sont par conséquent récentes, homogènes, précises et longues.

Nous étudions dans un second temps, la dynamique des séries "EAAM" (Effective Atmospheric Angular Momentum) à courtes périodes [1-100] jours, $\chi_1 p$, $\chi_2 p$ et $\chi_3 w$ c'est-à-dire les composantes de pression du moment cinétique atmosphérique équatorial et le terme de vent du moment cinétique axial. Cette partie nous renseigne sur la nature dynamique propre de la partie atmosphérique forçant la Terre.

Les divers résultats obtenus quant à la chaotité des processus atmosphériques nous amènent à confirmer que le chaos observé dans les courtes périodes des *EOP* est bien induit par le chaos de l'atmosphère pour des échelles de temps similaires.

Nous limitons ensuite notre étude pratique à la série *LOD* atmosphérique issue du moment cinétique axial et à la série de longueur du jour observée. La conversion de la série axiale sans unité en unité millisecondes (ms) permet de quantifier la part des variations de la longueur du jour causée par l'atmosphère.

Nous comparons alors ces deux séries à la fois dans le domaine temporel et dans l'espace des phases afin de conjecturer sur une éventuelle excitation non atmosphérique à prendre en compte.

En discussion, nous présentons nos idées sur la suite du travail à effectuer et les résultats à espérer afin de mieux comprendre et caractériser les liens entre la Terre et ses couches fluides (océans, atmosphère).

3 Description des séries de moment cinétique atmosphérique

Nous utilisons les séries effectives de moment cinétique atmosphérique (*EAAM*) décrites dans Barnes *et al.* (1983) et calculées à partir des résultats de la réanalyse NCEP/NCAR. Le but de cette réanalyse était de délivrer, à partir de mesures variées (satellites, bateaux, avions...), des variables multiples de champs atmosphériques (comme par exemple le potentiel du taux d'évaporation, la pression à la tropopause...). Les calculs sont effectués de manière uniforme sur toute la longueur de l'intervalle d'étude, avec le même système global d'analyse, de manière à éviter les "sauts" artificiels dans les données causés simplement par le changement de méthode. Les séries effectives de moment cinétique atmosphérique sont ensuite calculées selon Barnes *et al.* (1983) en termes de pression et de vent pour chaque hémisphère. Ces séries sont données toutes les 6 heures pendant 40 ans, soit au total, plus de 40000 points sont disponibles. Ce

grand nombre de données un atout non négligeable pour la partie non linéaire de l'analyse. Nous avons choisi de former les séries de pression et de vent globales (somme de l'hémisphère sud et de l'hémisphère Nord), en intégrant jusqu'à la pression 10 mb et sans correction de baromètre inverse. Notons que la correction de baromètre inverse stipule que les océans répondent localement à une variation de pression atmosphérique par une variation de la hauteur d'eau de sorte que la pression au fond des océans demeure inchangée. Cette fonction fournit des séries quasi identiques mais légèrement plus faibles en magnitude (Barnes *et al.*, 1983)).

Les sources principales d'incertitudes de ces séries météorologiques, viennent de la dissymétrie des mesures sur le globe. En effet, l'hémisphère Nord et les continents sont beaucoup plus couverts que l'hémisphère sud et les océans. Ainsi, il existe des zones entières sur le globe pour lesquelles aucune mesure n'est disponible. D'autre part, les modèles utilisés sont encore limités à cause des approximations physiques et numériques effectuées.

La prédiction dynamique de l'atmosphère est très sensible aux erreurs de modèle d'une part et d'autre part aux erreurs dans les conditions initiales, réduisant toute prédiction réaliste à 2 semaines maximum (Rosen *et al.* 1987). Cette dernière remarque est très intéressante car elle est à mettre directement en parallèle avec les horizons théoriques de prédiction trouvées pour les *EOP*[1-100] jours qui étaient de l'ordre de 10 jours. Nous discuterons ce point dans la partie consacrée à la caractérisation non linéaire des séries à courtes périodes de moment cinétique atmosphérique.

La Figure 5.1 représentent les séries effectives de moment cinétique atmosphériques équatoriales $\chi_1 w$ et $\chi_2 w$ de vent et de pression $\chi_1 p$ et $\chi_2 p$, et axiales $\chi_3 w$ et $\chi_3 p$.

La transformée de Fourier fait apparaître une forte composante annuelle pour chaque série et une composante semi-annuelle parfois très peu marquée superposées à un fond continu (Figure 5.2).

De même le spectre de puissance semble indiquer que ce fond continu suit une pente plus ou moins associée à une marche aléatoire (cela a déjà été souligné dans plusieurs études (par exemple, Eubanks *et al.*, 1985) (Figure 5.3). Ce fond continu correspond à la partie à courtes périodes [1-100] jours des séries de moment cinétique atmosphérique ou plus précisément à la partie non périodique des séries atmosphériques.

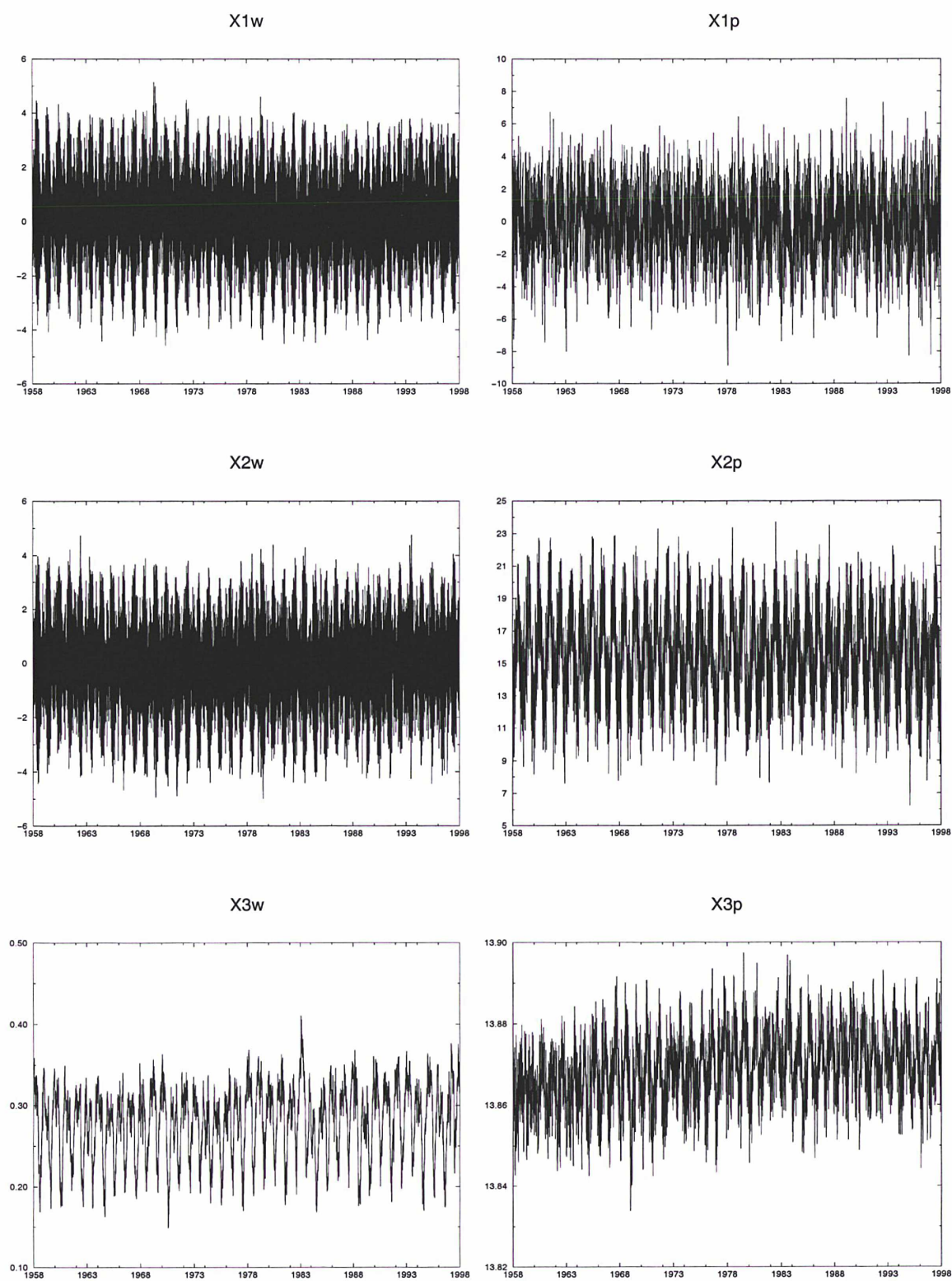


Figure 5.1: Séries temporelles de moment cinétique atmosphérique.

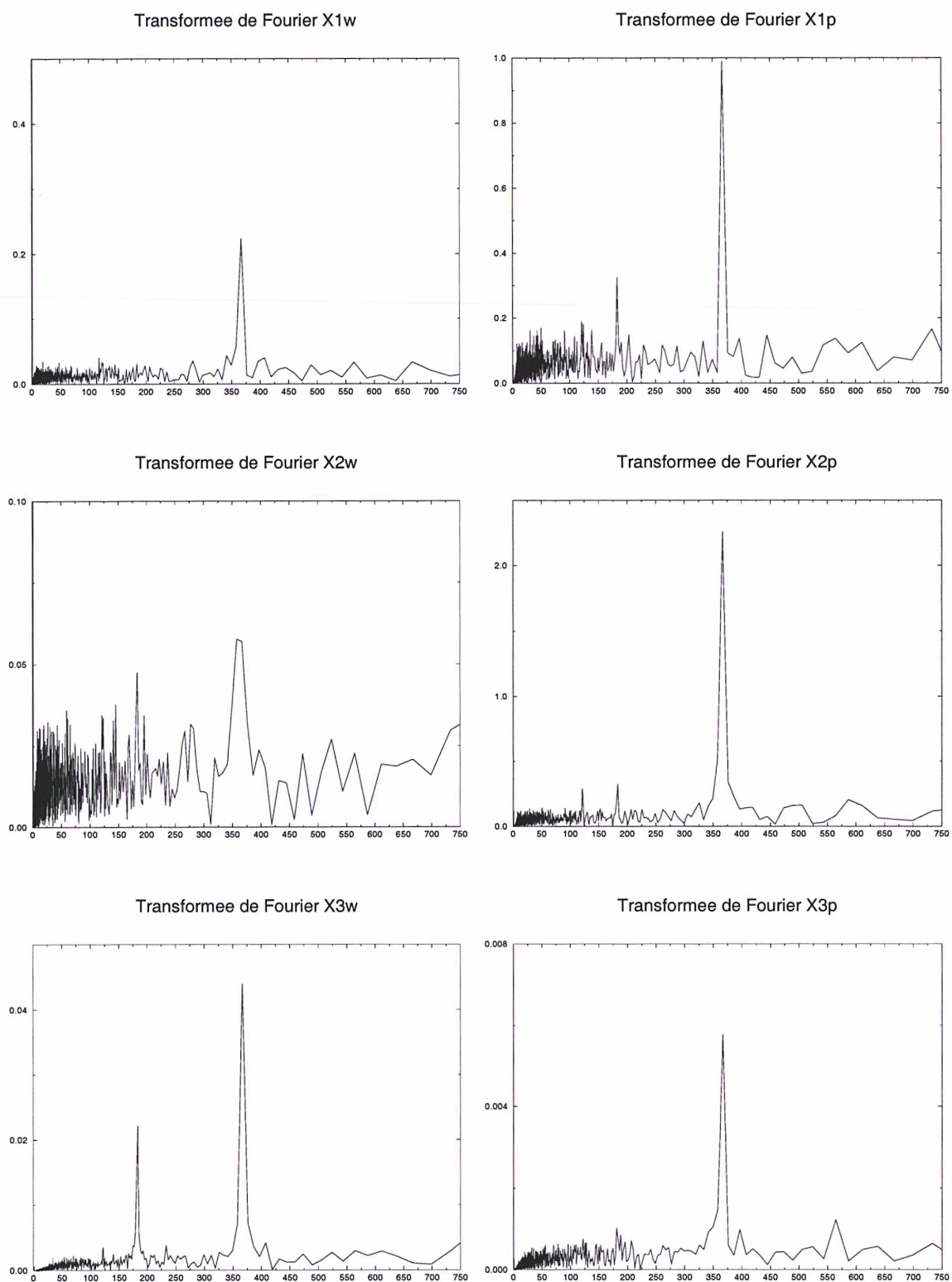


Figure 5.2: Transformées de Fourier des séries temporelles de moment cinétique atmosphérique.

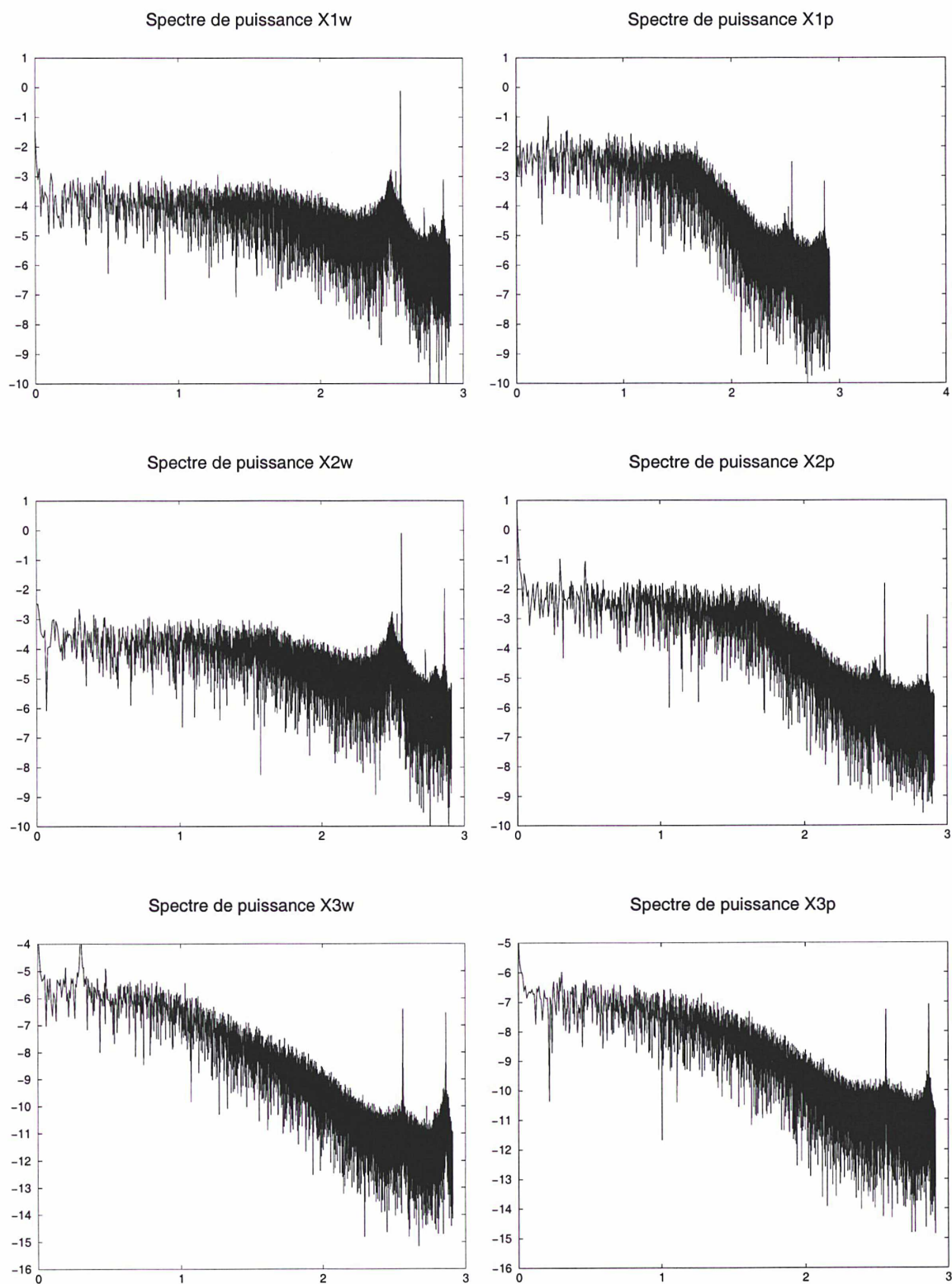


Figure 5.3: Spectre de puissance des séries temporelles de moment cinétique atmosphérique.

Rappelons que la forme continue d'un spectre de puissance est à la fois un indicateur possible d'un bruit stochastique ou d'un chaos déterministe et qu'il n'est pas raisonnable de conclure quoi que ce soit quant à la nature du processus à partir de la forme de son spectre uniquement.

La Table 5.1 donne les moyennes et *rms* des 6 séries précédentes. Les séries effectives de moment cinétique atmosphérique sont sans unité (s.u.).

Series	Moyenne	<i>rms</i>
$\chi_1 p$ (s.u.)	-0.1529	1.999
$\chi_1 w$ (s.u.)	0.1676	1.2632
$\chi_2 p$ (s.u.)	15.49	2.506
$\chi_2 w$ (s.u.)	$4.7 \cdot 10^{-3}$	1.2814
$\chi_3 p$ (s.u.)	13.87	$8.5 \cdot 10^{-3}$
$\chi_3 w$ (s.u.)	0.281	$4.41 \cdot 10^{-2}$

Table 5.1: Statistiques des séries brutes de moment cinétique atmosphérique.

Dans les séries équatoriales, les termes de pression, $\chi_1 p$ et $\chi_2 p$, sont dominants. En effet, leur écart quadratique moyen est environ deux fois plus important que celui des termes de vent $\chi_1 w$ et $\chi_2 w$. Ainsi la composante principale dans les séries χ_1 et χ_2 est la composante de pression. Il a d'ailleurs été fortement souligné (par exemple, Barnes *et al.*, 1983) que la corrélation entre $\chi_1 p$ et $\chi_2 p$ et les séries de mouvement du pôle respectivement *PMX* et *PMY* était très importante, tandis que les composantes de vent $\chi_1 w$ et $\chi_2 w$ se révélaient de manière moindre dans l'excitation de *PMX* et *PMY*.

Le phénomène inverse apparaît pour la composante axiale de moment cinétique atmosphérique. En effet, le terme de vent $\chi_3 w$ est dominant d'un facteur environ 5 en *rms* sur le terme de pression $\chi_3 p$. Là encore, il a été montré que la corrélation entre l'excitation "vent" et la longueur du jour était très forte, et que l'influence du terme de pression était quasiment négligeable.

Ce qui nous intéresse désormais concerne la description dynamique des séries de moment cinétique atmosphérique responsables pour la majeure partie de l'excitation de la rotation de la Terre (c'est à dire $\chi_1 p$, $\chi_2 p$ et $\chi_3 w$).

Les variations à courtes périodes des *EOP* témoignent d'une signature chaotique. Leur excitation principale étant l'atmosphère à travers un échange de moment cinétique, nous nous demandons si ce chaos observé est induit et transmis à la Terre par la dynamique propre atmosphérique. Nous allons donc dans le paragraphe suivant, isoler la partie à courtes périodes des séries $\chi_1 p$, $\chi_2 p$ et $\chi_3 w$, et étudier les propriétés de leur dynamique dans l'espace des phases afin de savoir si l'excitation principale des *EOP* à courtes périodes est dans un premier temps déterministe ou aléatoire, puis si le déterminisme est retenu, est-elle chaotique ou non? Nous aurions pû choisir de nous affranchir des périodicités et de la tendance, c'est-à-dire du déterminisme linéaire ("traitement stochastique") afin de caractériser les "résidus" du signal atmosphérique mais pour permettre une comparaison temporelle et dynamique avec les *EOP*[1-100] jours, nous avons décidé ici d'appliquer le même filtrage "courtes périodes" aux *EAAM*.

4 Analyse non linéaire des séries à courtes périodes de moment cinétique atmosphérique (χ_1p , χ_2p et χ_3w)

Nous avons appliqué le filtre de Vondrák (1977a,b) aux séries χ_1p , χ_2p et χ_3w brutes afin de ne garder que les périodes inférieures à 100 jours par analogie avec l'étude des *EOP* [1-100] jours du chapitre 4. Les séries sont également centrées et légèrement lissées afin d'éliminer le léger bruit superposé au signal. Les trois séries ont un spectre de puissance continu s'apparentant à celui d'une marche aléatoire. Il est donc important d'entamer une étude non linéaire de ces séries. Afin de pouvoir éventuellement reconstruire les orbites liées aux systèmes dynamiques observés des *EAAM* [1-100] jours, nous devons évaluer les temps de retard grâce à la fonction AMI. Nous trouvons respectivement pour χ_1p [1-100] jours, χ_2p [1-100] jours et χ_3w [1-100] jours, des temps de 10, 10 et 15 (échantillons) (Figure 5.4). Lorsque les résultats pour les trois séries atmosphériques [1-100] jours sont similaires, seul un exemple est représenté graphiquement (ici c'est la série χ_1p [1-100] jours).

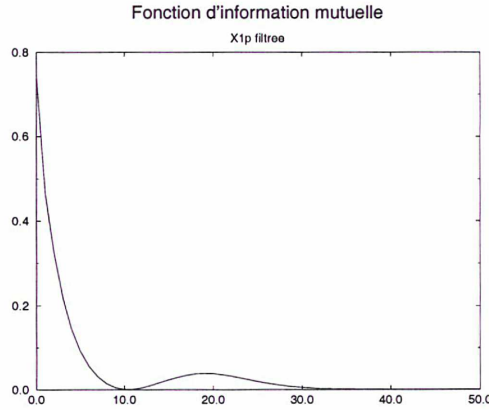


Figure 5.4: Fonction d'information mutuelle de la série filtrée équatoriale χ_1p [1-100] jours de moment cinétique atmosphérique.

Le pourcentage de faux voisins globaux atteint zéro pour les trois séries à partir de la dimension de plongement 5 (Figure 5.5). Nous remarquons que contrairement aux *EOP*[1-100] jours la convergence est parfaite. Cela vient sans doute de deux raisons: d'une part nous avons appliqué un léger lissage aux séries afin d'éliminer la plus grande partie du bruit de mesure et d'autre part nous travaillons avec des séries homogènes de 50 000 points environ contre 10 000 pour les *EOP*.

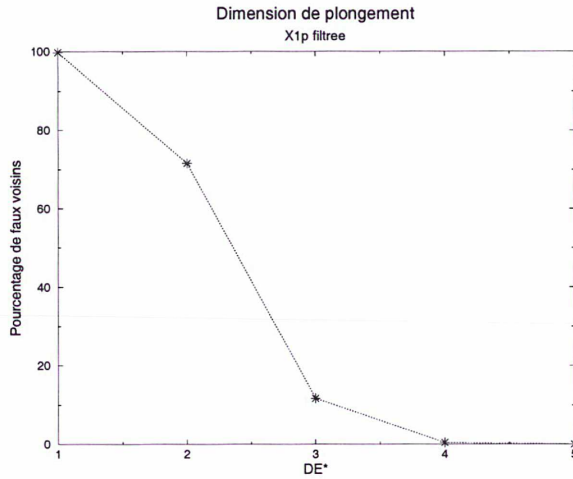


Figure 5.5: Pourcentage de faux voisins en fonction de la dimension de plongement pour $\chi_{1p}[1-100]$ jours.

Les séries $EAAM[1-100]$ jours peuvent donc être plongées dans un espace de dimension finie (valeur suffisante, $D_{E^*}=5$). Malheureusement nous avons vu que certains bruits expérimentaux de par leur structure pouvaient être plongés à tort dans un espace de dimension faible et finie. Afin de caractériser réellement la dynamique sous jacente, il est utile de tracer une projection des orbites reconstruites. Celles-ci, projetées en 2D forment des trajectoires continues pour les trois séries (Figure 5.6). Il semble que l'on ait donc affaire à des processus déterministes de faible dimension (par opposition à des bruits). Pour identifier la nature de ce déterminisme, le calcul de l'ensemble des exposants de Lyapunov est approprié.

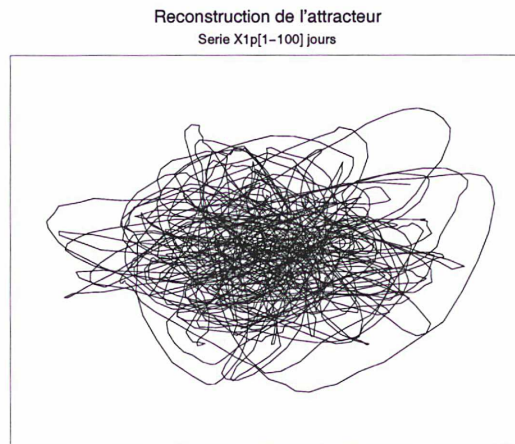


Figure 5.6: Projection 2D de l'attracteur reconstruit en dimension 5 pour $\chi_{1p}[1-100]$ jours.

Nous avons appliqué l'algorithme décrit au chapitre 3 de calcul de l'ensemble des exposants de Lyapunov aux séries χ_{1p} , χ_{2p} et χ_{3w} filtrées et nous avons évalué pour chacune d'entre elle, 5 exposants globaux et leur équivalent avec le temps inversé.

Nous en avons déduit la dimension de Lyapunov associée et l’horizon théorique de prédiction. Les trois systèmes sont dissipatifs (somme des exposants négative), tous les exposants sont ”vrais” (similitude des exposants t et -t), et possèdent un exposant positif, indicateur robuste de leur nature chaotique. Les Tables 5.2, 5.3 et 5.4 résument numériquement les résultats obtenus tandis que la Figure 5.7 concerne la représentation des exposants de Lyapunov globaux pour $\chi_1p[1 - 100]jours$.

<i>Series</i>	χ_3w
λ_1+	0.2329
λ_1-	0.2282
λ_2+	0.1203
λ_2-	0.1208
λ_3+	-0.0074
λ_3-	-0.0061
λ_4+	-0.1655
λ_4-	-0.1720
λ_5+	-0.5730
λ_5-	-0.5624
$\sum \lambda_i+$	-0.3927
$\sum \lambda_i-$	-0.3914
D_{Lyap}	4.31
H_p	17 (4.5 jours)

Table 5.2: Résultats dynamiques (exposants de Lyapunov, dimension de Lyapunov et horizon de prédiction) pour la série $\chi_3w[1-100]$ jours

<i>Series</i>	χ_1p
λ_1+	0.1783
λ_1-	0.2150
λ_2+	0.0745
λ_2-	0.1054
λ_3+	-0.0160
λ_3-	-0.0015
λ_4+	-0.1503
λ_4-	-0.1514
λ_5+	-0.4841
λ_5-	-0.5166
$\sum \lambda_i+$	-0.3976
$\sum \lambda_i-$	-0.3490
D_{Lyap}	4.18
H_p	22 (6 jours)

Table 5.3: Résultats dynamiques (exposants de Lyapunov, dimension de Lyapunov et horizon de prédiction) pour la série $\chi_1p[1-100]$ jours

<i>Series</i>	χ_{2p}
λ_1+	0.1813
λ_1-	0.2026
λ_2+	0.0795
λ_2-	0.0926
λ_3+	-0.0118
λ_3-	0.0001
λ_4+	-0.1529
λ_4-	-0.1372
λ_5+	-0.4955
λ_5-	-0.5124
$\sum \lambda_i+$	-0.3994
$\sum \lambda_i-$	-0.3543
D_{Lyap}	4.19
H_p	21.6 (6 jours)

Table 5.4: Résultats dynamiques (exposants de Lyapunov, dimension de Lyapunov et horizon de prédiction) pour la série $\chi_{2p}[1-100]$ jours

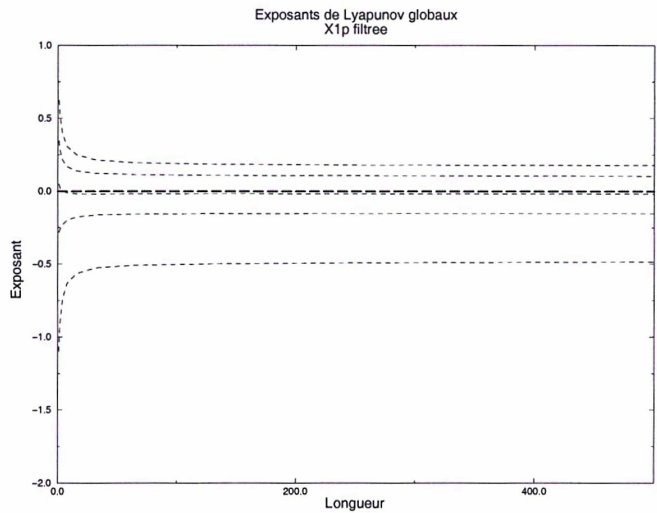


Figure 5.7: Exposants de Lyapunov globaux de la série reconstruite $\chi_{1p}[1-100]$ jours.

Nous pouvons mesurer au cours du temps la stabilité locale du système à travers les variations locales de l'exposant de Lyapunov principal $\lambda_1(t)$ (Figure 5.8). Il n'est pas évident de corrélérer des variations de stabilité avec des événements extérieurs connus ayant agi sur l'atmosphère mais nous remarquons que les variations locales sont fortes.

En particulier, les pertes de stabilité les plus importantes ont lieu au cours des années 1959/1960,

1971/1972, 1982/1983 et 1991/1992 pour la série χ_{1p} ; 1963/1964, 1971/1972, 1985/1986, 1992/1993 pour χ_{2p} et 1962/1963, 1971/1972, 1980, 1994 pour χ_{3w} . Nous n'avons pas recherché systématiquement une cause à ces variations puisque nous pensons que la dynamique observée est propre aux systèmes "atmosphériques". Ainsi les variations de stabilité dépendent fortement de la forme de l'attracteur et des interactions non linéaires entre les variables du système. Bien sûr, des processus océanique et atmosphérique comme El Niño jouent un rôle dans la variation de la stabilité et nous pouvons deviner (bien que les résultats soient beaucoup moins convaincants que pour les *EOP* [1-100] jours), un pic commun aux trois séries dans les années 1971/1972, correspondant peut être à la transition La Niña/ El Niño. Paradoxalement, le phénomène El Niño 1982/1984 semble nettement moins marqué. La répercussion d'une excitation sur la stabilité dépend de l'état même du système à l'instant où l'excitation a lieu. De toute façon, une corrélation temporelle entre deux phénomènes n'implique pas une répercussion transitive systématique sur la stabilité des systèmes.

Les processus non linéaires en jeu ici sont tellement complexes qu'il faudrait tous les prendre en compte ainsi que l'état propre du système pour témoigner des variations de stabilité locales plus ou moins marquées. Chercher une corrélation systématique avec El Niño (ou un autre évènement isolé) est bien entendu insuffisant.

A l'issue de ces caractérisations, il semblerait que la dynamique associée aux variations à courtes périodes des séries de moment cinétique atmosphérique soit chaotique et possède un attracteur de dimension non entière entre 4 et 5. Il est difficile de donner des barres d'erreur dans ces estimations. Simplement, pour χ_{3w} [1-100] jours, l'exposant principal est donné avec une imprécision inférieure à 1% (erreur de l'exposant nul), χ_{1p} [1-100] jours avec une erreur de 1.6% et χ_{2p} [1-100] jours, 1.2%. Il n'est pas évident de connaître l'erreur commise sur les exposants négatifs et donc sur la dimension de Lyapunov. Cependant dans notre cas particulier, la forte similitude entre les exposants initiaux et ceux calculés avec le temps inverse assure une certaine précision et fiabilité des exposants négatifs.

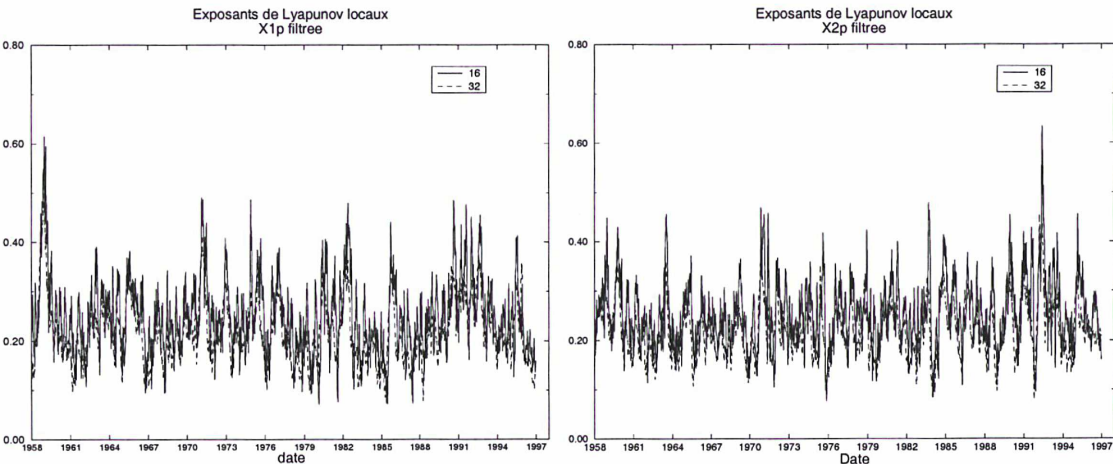


Figure 5.8a,b: Variations temporelles de l'exposant de Lyapunov principal des séries χ_{1p} [1-100] jours (gauche) et χ_{2p} [1-100] jours (droite).

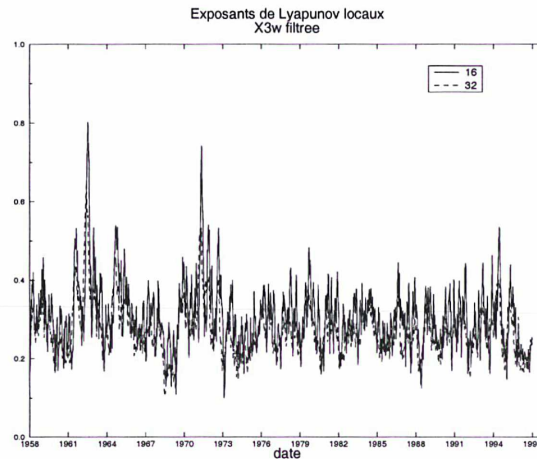


Figure 5.8c: Variations temporelles de l'exposant de Lyapunov principal de la série $\chi_{3w}[1-100]$ jours.

Rappelons que globalement, l'état de l'atmosphère ne peut être prédit au delà de 2 semaines (Rosen *et al.* 1987). Dans un article de 1987, Fraedrich trouvait des horizons de prédictions de l'ordre de 12-17 jours à partir d'une série temporelle journalière de pression de surface (la dimension associée de son attracteur était de l'ordre de 6.8-7.1).

Ici pour les courtes périodes, le comportement chaotique associé aux séries de moment cinétique atmosphérique limite la prédiction en moyenne à 6 jours. Ce résultat est cohérent avec les limites déduites de la prédiction dynamique des séries de moment cinétique atmosphérique. Bien que les séries à courtes périodes de moment cinétique atmosphérique puissent être modélisées comme des marches aléatoires, leur prédiction statistique s'est avérée délicate. Des méthodes de prédiction dynamiques ont révélé de bien meilleurs résultats (Rosen *et al.*, 1987). Ces méthodes se basent sur des intégrations de modèles climatiques. A partir de ce type d'approche, Bell *et al.* (1991) ont montré que la limite de prédiction pour la composante χ_{3w} était de 5 jours. De même en examinant les prévisions dynamiques des composantes équatoriales, ils ont conclu que χ_p ne pouvait pas être prédit au delà de 5 jours. La cohérence entre nos résultats, déduits directement de la valeur de l'exposant principal de Lyapunov (retrouvée par reconstruction d'une série temporelle dans l'espace des phases), et ceux de Bell *et al.* (1991), obtenus à partir de modèles, confirme totalement la réalité physique de l'exposant positif et donc la réalité physique du chaos dans la dynamique des *EAAM*.

Il est intéressant d'ajouter que les prédictions à courtes périodes de la longueur du jour (*LOD*) sont nettement améliorées lorsque l'on utilise les prédictions dynamiques de χ_{3w} (Freedman et Dickey, 1991) (on passe alors de 5 à 10 jours: une dizaine de jours était la valeur obtenue pour l'horizon théorique de prédiction des *EOP*[1-100] jours dans le chapitre 4 à partir du calcul des exposants de Lyapunov).

Les séries de moment cinétique atmosphérique sont issues de traitements complexes et représentent en quelque sorte une moyenne de dynamiques atmosphériques différentes et donc complexes. Le résultat de ce "moyennage" fournit un système dont les orbites peuvent être

décrites par 5 équations différentielles ordinaires non linéaires couplées avec la particularité de présenter une très grande sensibilité aux conditions initiales.

La conclusion de cette partie est que nous avons trouvé plusieurs indications d'un chaos dans la dynamique atmosphérique sous jacente aux séries de moment cinétique pour les courtes périodes. Ce chaos a des caractéristiques similaires à celui décelé dans les *EOP* [1-100] jours, ce qui laisserait entendre que le chaos atmosphérique est transmis de manière quasi identique à la Terre et se retrouve dans les variations à courtes périodes de la rotation de la Terre. Les temps de prédiction moyens théoriques sont cependant plus faibles que pour la rotation de la Terre indiquant une plus forte sensibilité des processus atmosphériques aux conditions initiales.

Nous allons désormais nous focaliser sur la série de longueur du jour *LOD* observée (géodésique) et la série associée de longueur du jour atmosphérique LOD_{χ_3} (exprimée en *ms*). Tout d'abord nous allons présenter une analyse linéaire comparative entre les deux séries filtrées. La création de la série notée LOD_{χ_3} permet de comparer dans le domaine temporel les ordres de grandeur des deux séries. Ensuite, nous ferons une étude non linéaire comparative. Les différences permettront de connaître la dynamique de l'excitation non atmosphérique manquant dans le signal *LOD* géodésique.

Il sera intéressant d'effectuer le même travail sur les séries χ_1p et χ_2p converties en unités "*EOP*".

5 Analyse générale linéaire comparée entre LOD_{χ_3w} et *LOD*

Les équations de Liouville linéarisées relient les *EOP* aux fonctions d'excitation totales inconnues Ψ_i .

$$\dot{m}_1/\sigma + m_2 = \Psi_2$$

$$\dot{m}_2\sigma - m_1 = -\Psi_1$$

$$\dot{m}_3 = \dot{\Psi}_3$$

Si l'on considère que toute l'excitation de la longueur du jour est causée par l'atmosphère, il est possible d'exprimer la fonction axiale d'excitation atmosphérique χ_3 en millisecondes et de comparer les séries temporellement (troisième équation de Liouville). Nous notons LOD_{χ_3} la série en millisecondes, obtenue à partir de χ_3 sans dimension, et représentant la partie de *LOD* forcée par le moment cinétique axial atmosphérique.

$$LOD_{\chi_3} = -a\chi_3 + b$$

Avec a , le facteur 8640000 convertissant χ_3 sans unité en millisecondes et b une constante assurant la coïncidence des courbes à une date initiale.

Les comparaisons usuelles entre *LOD* observé (*LOD* "géodésique") et LOD_{χ_3} (*LOD* "atmosphérique") permettent de voir dans quelle mesure l'atmosphère agit sur la longueur du jour totale, c'est-à-dire de définir son action relative dans la variation totale de *LOD* observée.

Tout comme χ_3 , LOD_{χ_3} peut être séparé en un terme de vent (w) et un terme de pression (p).

La Table 5.5 résume les statistiques des séries LOD , $LOD_{\chi_3 w}$ et $LOD_{\chi_3 p}$ lissées (lis) légèrement puis centrées (lisc). La réduction à zéro de toutes les moyennes permet simplement une comparaison graphique plus aisée. Nous voyons là encore que la participation de la composante de pression est très faible comparée à celle du terme de vent.

Séries	Moyenne	rms
$LOD (ms)$	2.18	0.657
$LOD_{\chi_3 wlis} (ms)$	2.42	0.381
$LOD_{\chi_3 plis} (ms)$	119.8	$8.4 \cdot 10^{-2}$
$LODc (ms)$	0	0.657
$LOD_{\chi_3 wlisc} (ms)$	0	0.381
$LOD_{\chi_3 plisc} (ms)$	0	$8.4 \cdot 10^{-2}$

Table 5.5: Statistiques des séries LOD et LOD_{χ_3} lissées puis centrées.

Les séries $LOD_{\chi_3 p}$ et $LOD_{\chi_3 w}$ ont ensuite été filtrées de manière à garder la partie du spectre 1 jour-100 jours par analogie avec la série déjà étudiée de longueur du jour (Chapitre 4).

Les écarts quadratiques moyens (rms) des séries $LOD_{\chi_3 w}$ et LOD filtrées sont du même ordre de grandeur (Table 5.6) indiquant que le terme de vent est la principale cause de variation de la longueur du jour pour des périodes inférieures à 100 jours. Pour illustration, nous avons représenté en Figure 5.9 les séries LOD filtrée et $LOD_{\chi_3 w}$ filtrée entre plusieurs dates arbitraires.

Series	Moyenne	rms
$LODfiltc (ms)$	0	0.117
$LOD_{\chi_3 w filtlisc} (ms)$	0	0.108
$LOD_{\chi_3 p filtlisc} (ms)$	0	$2.76 \cdot 10^{-2}$

Table 5.6: Statistiques des séries $LOD[1-100]$ jours et $LOD_{\chi_3}[1-100]$ jours lissées, centrées et filtrées.

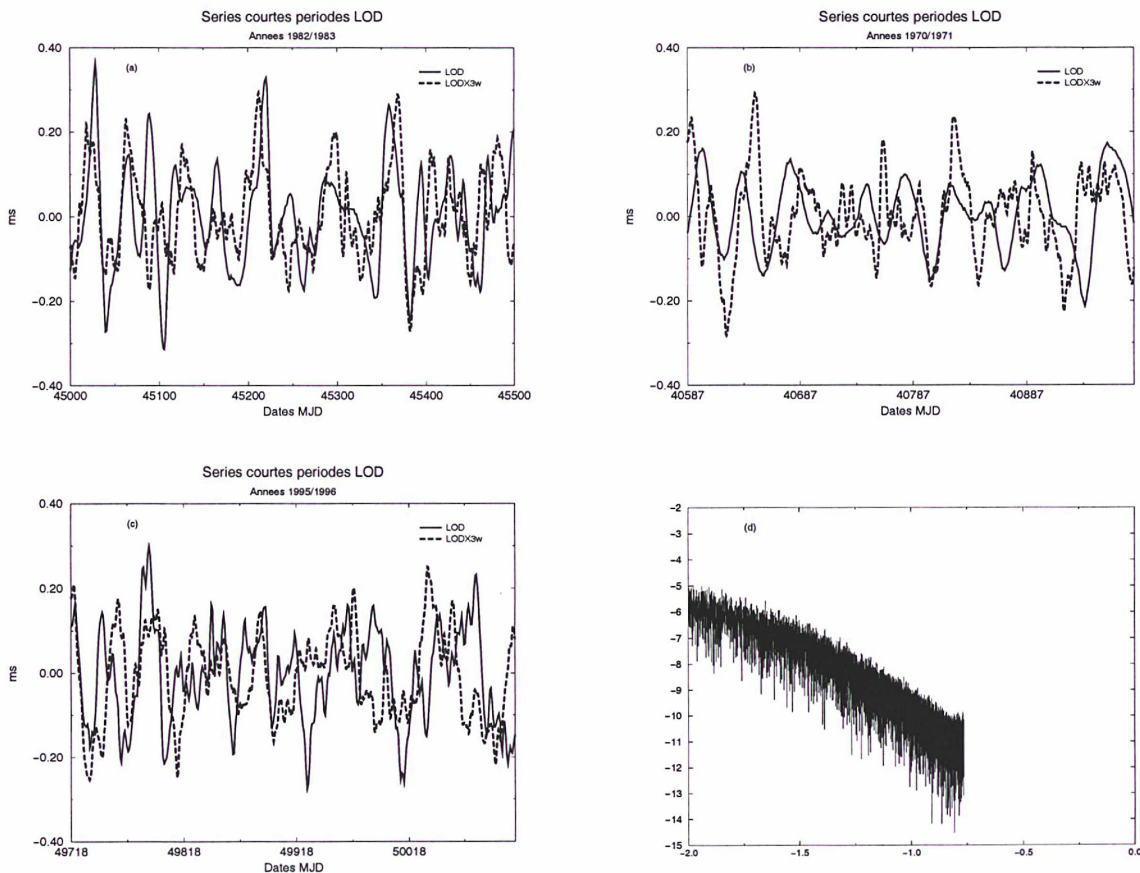


Figure 5.9: Comparaison temporelle des séries $LOD[1-100]$ jours observée et $LOD\chi_{3w}[1-100]$ jours calculée entre différentes dates arbitraires a) entre 1982-1983, b) 1970-1971, c) 1995-1996.

Figure 5.10: Spectre de puissance de la série $LOD\chi_{3w}[1-100]$ jours (d).

La similitude des courbes pour les différentes dates est très grande indiquant que les deux processus (LOD causé par le terme de vent axial atmosphérique et LOD , longueur du jour observée) suivent globalement la même évolution temporelle. On retrouve en grande partie dans le signal LOD celui de son excitation principale, χ_{3w} .

Ce fait a déjà été démontré pour les séries saisonnières de longueur du jour géodésique et atmosphérique (Höpfner, 1998) ainsi que pour les séries totales (Barnes *et al.*, 1983). Ici la comparaison ne concerne que la partie du spectre 1 jour-100 jours.

Nous retrouvons le résultat stipulant que dans le domaine temporel (Figure 5.9) et le domaine des fréquences (Figure 5.10), la série de LOD causée par le moment cinétique axial atmosphérique (terme de vent) et la série de longueur du jour observée sont très proches: pratiquement toute la variation courte période de LOD est causée par le terme de vent de χ_3 . Jusqu'alors, nous n'apportons rien de nouveau par rapport aux études précédentes si ce n'est

que nous avons utilisé plus de 40 ans de données du "NCEP/NCAR reanalysis project" et travaillé sur la partie [1-100] jours du spectre.

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude dynamique dans l'espace des phases de la série LOD_{χ_3} filtrée. Nous avons déjà réalisé une analyse non linéaire des EOP [1-100] jours dont les résultats particuliers sont naturellement à comparer à ceux obtenus pour les séries atmosphériques [1-100] jours. Cette nouvelle approche permettra de mieux expliquer et caractériser le mode de transmission entre l'atmosphère et LOD et de connaître plus précisément les dimensions du signal manquant dans l'excitation totale (océans).

De plus, il est tout à fait possible que deux signaux aient le même type de comportement spectral mais aient des dynamiques et une géométrie (dans l'espace des phases) totalement différentes. Ce qui est par exemple le cas pour une série chaotique de type Lorenz et une série de marche aléatoire qui ont toutes deux un spectre de puissance continu mais qui sont pour le premier, un processus déterministe et chaotique de dimension faible et finie et pour le second, un processus stochastique de dimension infinie.

6 Analyse non linéaire de la série $LOD_{\chi_3 w}$ [1-100] jours. Comparaisons numériques avec la série LOD [1-100] jours

Puisque les variations à court terme de LOD sont principalement causées par les excitations atmosphériques mais pas totalement, et que nous ne connaissons pas le candidat manquant, il est intéressant de comparer numériquement les caractéristiques dynamiques de la série LOD atmosphérique $LOD_{\chi_3 w}$ (1-100 j) à celles de LOD géodésique [1-100] jours (chapitre 4). La dynamique de LOD [1-100] jours a été caractérisée comme étant déterministe et chaotique. On sait de plus que c'est la conséquence d'une excitation chaotique ($\chi_3 w$ [1-100] jours est chaotique).

Les temps de retard optimaux sont respectivement pour LOD , de 11 jours et pour $LOD_{\chi_3 w}$ de 12 jours (50 échantillons) (Figure 5.11). La dimension de plongement adéquate pour $LOD_{\chi_3 w}$ est 4 ou 5 (Figure 5.12). Nous avons retenu $D_E^* = 5$ pour la série LOD . La meilleure convergence de l'algorithme des faux voisins globaux pour $LOD_{\chi_3 w}$ par rapport à LOD provient certainement du fait que la série $LOD_{\chi_3 w}$ est très longue et les méthodes non linéaires de traitement du signal sont plus adaptées à travailler avec des séries longues.

Néanmoins, les deux séries peuvent être plongées dans des pseudo espaces des phases de même dimension ($D_E^* = 5$) et avec des temps de retard quasiment identiques ($\tau = 11$ et 12).

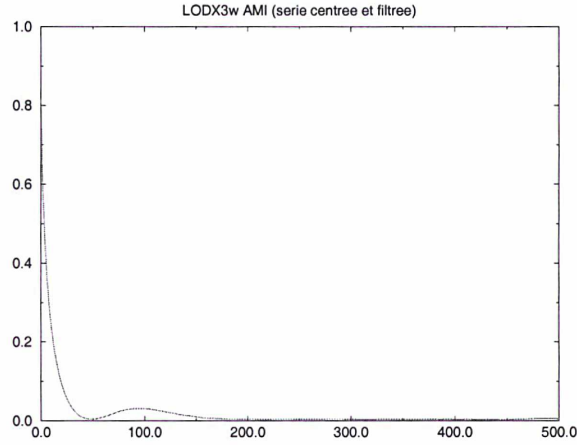


Figure 5.11: Fonction d'autocorrélation mutuelle de la série $LOD_{\chi_3 w}[1-100]$ jours.

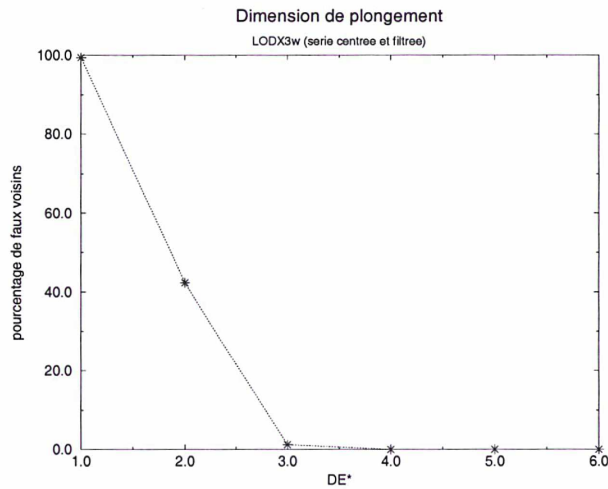


Figure 5.12: Pourcentage de faux voisins en fonction de la dimension de plongement pour la série $LOD_{\chi_3 w}[1-100]$ jours.

L'attracteur de la série $LOD_{\chi_3 w}$ a été reconstruit en dimension 5 et projeté en dimension 2 (Figure 5.13). On observe encore des intersections dans la mesure où l'espace de projection est trop petit par rapport à l'espace des phases naturel. Les orbites sont cependant lisses et continues et suivent une trajectoire qui n'est ni aléatoire ni fractale. L'attracteur a été reconstruit avec un nombre limité de points afin de pouvoir visualiser les choses. En prenant tous les points de la série, il est impossible de distinguer les orbites car elles sont trop entremêlées.

Une comparaison rapide avec l'attracteur associé à $LOD[1-100]$ jours (Chapitre 4) montre que le même type de comportement se produit pour les deux systèmes. Nous avons dans les deux cas, des trajectoires lisses, continues et entremêlées qui ne sont ni de bruit blanc, ni du bruit coloré (fractal) et qui peuvent être plongées dans un espace de dimension finie.

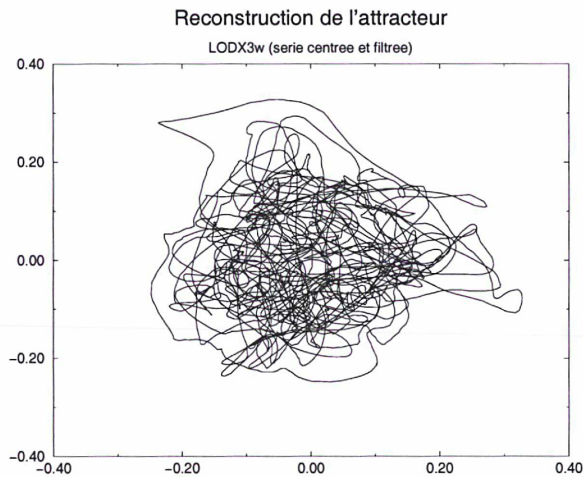


Figure 5.13: Projection 2D de l'attracteur reconstruit en dimension 5 de la série $LOD\chi_3w[1-100]$ jours.

La dynamique liée à la série de LOD atmosphérique (pour le terme de vent) ($LOD\chi_3w[1-100]$ jours), peut être plongée dans un espace de dimension fini ($D_E^* = 5$) tout comme $LOD[1-100]$ jours et $\chi_3w[1-100]$ jours.

Ainsi la dynamique issue de $LOD\chi_3w[1-100]$ jours est un processus déterministe (par opposition à stochastique) de faible dimension. L'examen de la stabilité globale de l'attracteur nous renseigne sur sa nature plus profonde. Il possède au moins une variété instable (existence d'un exposant de Lyapunov positif) (Figure 5.14). Cela signifie que le processus déterministe est de plus non linéaire et chaotique.

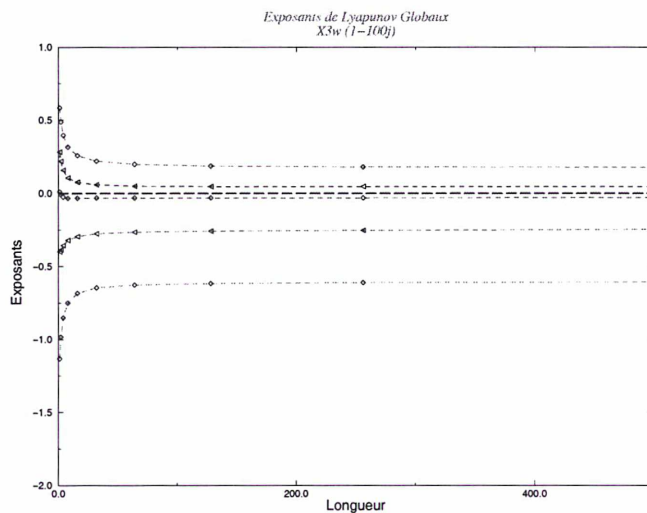


Figure 5.14: Exposants de Lyapunov globaux de la série $LOD\chi_3w[1-100]$ jours.

La valeur de l'exposant positif est environ 0.18/échantillons soit 0.72/jours. La Table 5.7 fournit les valeurs des 5 exposants globaux calculés pour le temps normal et pour le temps inversé. Il apparaît que les 5 exposants sont vrais. De ces calculs se déduit la dimension de Lyapunov du système. On voit également que le système est dissipatif et que l'horizon de prédiction au delà duquel toute prédiction devient fausse est d'environ 6 jours. La précision de l'exposant positif principal peut être devinée grâce à celle de l'exposant nul. Ce dernier est déterminé avec une erreur inférieure à 3%.

<i>Series</i>	<i>LODχ_3w</i>
λ_1+	0.1784
λ_1-	0.1666
λ_2+	0.0636
λ_2-	0.0470
λ_3+	-0.0276
λ_3-	-0.0661
λ_4+	-0.1856
λ_4-	-0.2455
λ_5+	-0.6062
λ_5-	-0.7465
$\sum \lambda_i+$	-0.5773
$\sum \lambda_i-$	-0.8440
d_{Lyap}	4.05
H_p	22 (6 jours)

Table 5.7: Résultats dynamiques concernant la série $LOD\chi_3[1-100]$ jours .

Ces divers résultats sont très intéressants car ils sont à comparer directement avec ceux obtenus pour la série équivalente $LOD[1-100]$ jours mesurée (chapitre 4). Nous avons un exposant positif (0.33 (/jours)), une dimension de Lyapounov égale à 4.47 et un horizon de prédiction théorique de l'ordre de 12 jours. Si l'atmosphère était seul intervenant dans l'excitation de la rotation de la Terre, et si cette excitation était transmise de manière purement linéaire (equations de Liouville linéaires) alors nous devrions trouver (moyennant quelques imprécisions faibles près), des valeurs d'exposant principal global, de dimension de Lyapunov et d'horizon de prédiction global, identiques entre LOD géodésique et LOD atmosphérique. Or nous observons des différences qui ne peuvent pas être négligées. Bien que ce soit effectivement le chaos atmosphérique (χ_3w [1-100] jours) qui soit transmis à la Terre, le chaos mesuré dû uniquement à l'atmosphère dans LOD géodésique est différent du chaos total de LOD géodésique. Ceci peut vouloir dire plusieurs choses:

1. Les différences sont dues à des erreurs de calculs (imprécisions) et à la longueur limitée de la série observée.
De telles erreurs comptent mais ne peuvent expliquer toute la différence à elles seules.
2. Tous les autres candidats interviennent de façon négligeable mais c'est la transmission entre la Terre et l'atmosphère qui ne peut être approximée justement de manière linéaire

(non validité des équations de Liouville linéarisées). La non linéarité des équations de Liouville induirait alors ces différences.

Nous pensons également que cette explication ne peut justifier une telle différence car la dynamique propre de la Terre est très faiblement non linéaire.

3. Nous n'avons pas pris en compte toutes les excitations de LOD . Il y a bien sûr χ_3p mais sa participation est faible. Par contre, on doit rechercher dans la dynamique océanique, une excitation rendant compte des différences observée essentiellement en stabilité (en effet les dimensions de Lyapunov ne sont pas si éloignées). Cette explication nous semble la plus probable et est en accord avec les études linéaires ayant mis en évidence dans le signal de LOD , une composante océanique en plus de celle liée aux marées (Wilson, 1998).

D'autre part il est important de regarder comment évolue la stabilité locale de la série LOD atmosphérique, $LOD\chi_3w$. La Figure 5.15 est obtenue pour des fenêtres dont les valeurs encadrent le temps de retard (50). Nous voyons que le système a une stabilité variable selon la position occupée sur l'attracteur avec des pics cependant plus importants dans les années 1963, 1966, 1970/1972, 1987/1988. Certains pics pourraient être reliés à une transition La Niña/ El Niño ou à un évènement El Niño. Les autres proviennent simplement de la dynamique chaotique propre du système (voir l'attracteur de Lorenz pour lequel les variations locales de stabilité sont purement internes à sa dynamique selon son "trajet" sur l'attracteur). Les variations locales de stabilité de $LOD\chi_3w$ ne sont pas les mêmes que celles de LOD induisant l'hypothèse d'une réponse différée de la part de la Terre aux excitations atmosphériques localement. Bien qu'il y ait une forte corrélation temporelle entre les séries, il n'y a pas de corrélation évidente au niveau de la stabilité locale. Globalement les dynamiques restent cependant très proches.

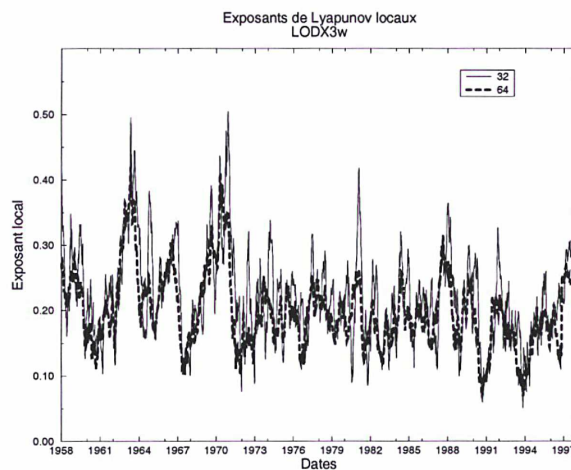


Figure 5.15: Variations temporelles de l'exposant principal de Lyapunov de la série $LOD\chi_3w[1-100]$ jours, sur des fenêtres de 32 et 64 échantillons (8 et 16 jours).

Remarque: Il aurait été logique de trouver des valeurs dynamiques de l'analyse non linéaires, identiques entre la série χ_3w [1-100] jours et la série $LOD\chi_3w[1-100]$ jours puisque l'opération de conversion consiste simplement en un facteur multiplicatif et une translation.

Or nous avons pour $\chi_3 w$ un exposant de Lyapunov valant en valeur absolue : 0.23 contre 0.18 pour $LOD\chi_3 w$. Nous pensons que ces faibles différences proviennent principalement des troncatures et approximations successives non désirées appliquées à la série $\chi_3 w$ au cours des calculs matriciels et des déterminations d'applications locales sur l'attracteur. En effet, les valeurs de cette série sont extrêmement faibles, (la série centrée possède un *rms* de l'ordre de 10^{-3}), et sont sujettes à des imprécisions numériques. Les valeurs obtenues pour $LOD\chi_3 w$ [1-100] jours nous semblent plus robustes et c'est d'ailleurs celles-ci que nous avons choisies de comparer aux valeurs de LOD [1-100] jours géodésique. Retenons cependant que les algorithmes non linéaires restent très sensibles à une légère différence de filtrage ou lissage ou tout autre opération linéaire et qu'il n'est pas possible de se fier à des valeurs numériques très précises tant que nous travaillons avec des séries expérimentales bruitées et auxquelles nous appliquons des prétraitements multiples. Nous pouvons au mieux à l'heure actuelle donner des ordres de grandeur et surtout une description qualitative des processus. La précision est néanmoins suffisante pour comparer de manière objective les systèmes "atmosphérique" et "terrestre".

7 Discussion

Globalement, une telle étude nous renseigne sur plusieurs points:

1. Nous sommes en mesure de caractériser non linéairement un signal atmosphérique particulier (dimension, attracteur, stabilité...). Ce point est déjà très intéressant car il nous permet d'apprendre des choses sur la dynamique propre de l'atmosphère. Des études antérieures ont mis en évidence du chaos dans des séries atmosphériques différentes pour diverses échelles de temps. Ici, nous trouvons du "chaos" dans les séries de moment cinétique atmosphérique filtrées à [1-100] jours pour le terme de vent axial ($\chi_3 w$) et les termes de pression équatoriale ($\chi_1 p$ et $\chi_2 p$). Ces processus interviennent de manière dominante dans l'excitation de la rotation de la Terre. De plus leurs caractéristiques dimensionnelles et dynamiques sont du même ordre de grandeur que celles de leurs séries *EOP* correspondantes.

Ceci nous amène à conclure que le chaos observé et décrit dans les séries *EOP* [1-100] jours provient quasiment intégralement de la dynamique atmosphérique. Nous avons donc isolé deux systèmes dont la dynamique est chaotique (les fluctuations observées de la rotation de la Terre et les fluctuations du moment cinétique atmosphérique). Le second système (atmosphère) est chaotique de par sa dynamique globale très non linéaire et est capable d'engendrer seul du chaos. Celui-ci agit sur la Terre en la forçant et en créant des fluctuations mesurables à diverses échelles de temps. Le chaos observé dans les *EOP* est bien produit par les fluides agissant sur la rotation de la Terre comme supposé au chapitre 4.

2. La dynamique atmosphérique issue des séries à courtes périodes de moment cinétique peut être modélisée par un ensemble de 5 équations différentielles ordinaires telles que deux variétés instables soient présentes sur son attracteur. Ce type d'approche permet de qualifier les séries atmosphériques de processus déterministe non linéaire et chaotique de faible dimension à l'aide de dimensions caractéristiques et de propriétés de stabilité. Elle ouvre une alternative à la description stochastique usuelle en terme de processus autorégressifs. Breziński (1987), modélise les termes de pression $\chi_i p$ [1-100] jours par des autorégressifs d'ordre 3 (AR(3)) et $\chi_i w$ [1-100] jours par un AR(1). Il conclut que les variations à courtes périodes des *EAAM* peuvent être interprétées comme de simples processus

stochastiques. Parallèlement, Eubanks *et al.* (1985) montrent par analyse spectrale, que $\chi_3 w[1-100]$ jours peut être modélisé par une marche aléatoire. Ces approches respectent les propriétés statistiques globales et le spectre de la série observée mais ne se préoccupent pas de sa nature dynamique.

Au sujet de la prédiction, nous sommes en mesure de fixer un temps théorique de prédiction en mettant en évidence la classique sensibilité aux conditions initiales des mouvements atmosphériques. La valeur voisine de 5 ou 6 jours est cohérente avec les limites de prédiction déduites de la prévision dynamique des séries de moment cinétique atmosphérique. D'autre part, ce résultat confirme l'intérêt d'utiliser des méthodes alternatives à la prédiction par "marche aléatoire", couramment utilisée pour les séries de moment cinétique à courtes périodes, car les prédictions dynamiques à partir de l'intégration de modèles (dynamiques) météorologiques améliorent les résultats.

Une extension directe et prometteuse de notre approche "reconstruction d'espace" concerne la prévision de ces mêmes séries dans l'espace des phases à partir de la recherche de voisins et d'applications locales. Les algorithmes de prédiction non linéaire à partir de séries temporelles gagnent certainement à être utilisés à la fois pour les *EAAM*[1-100] jours mais aussi pour les *EOP*[1-100] jours (Annexe 2).

3. Au sujet de *LOD* uniquement

Les caractéristiques temporelles (similitude des séries) et fréquentielles (transformée de Fourier) des séries de *LOD* mesurée et de *LOD* issue du moment cinétique axial atmosphérique ($LOD\chi_3 w$), sont très proches et indiquent que l'atmosphère est responsable de la variation observée sur *LOD*.

En terme de dimensions et d'attracteurs, les deux séries *LOD*[1-100] jours et $LOD\chi_3 w[1-100]$ jours (qui représente la partie de *LOD* forcée uniquement par le terme de vent du moment cinétique axial atmosphérique) peuvent être plongées dans un espace de dimension 5 et leur attracteur reconstruit avec un temps de retard de l'ordre de 11 jours. L'analyse de la stabilité du système atmosphérique observé à travers $LOD\chi_3 w$ démontre que celui-ci est chaotique avec des valeurs caractéristiques proches de celles de *LOD*[1-100] jours.

4. Si le terme de vent du moment cinétique axial atmosphérique était le seul candidat excitant la vitesse de rotation de la Terre, et si l'excitation était transmise de manière linéaire (équations de Liouville réellement linéaires) alors on devrait retrouver le chaos atmosphérique intégralement dans la dynamique de la longueur du jour [1-100] jours. Cela signifie que les caractéristiques dimensionnelles et dynamiques des séries *LOD*[1-100] jours et $LOD\chi_3 w$ [1-100] jours devraient être égales. Indépendamment des imprécisions dans les calculs et de la participation du terme de pression $\chi_3 p$, nous observons des différences réelles. Celles-ci prouvent qu'un autre processus intervient (océanique principalement) dont nous ne pouvons donner de caractéristique. Il n'est pas question de faire la différence entre les dimensions ou les exposants de Lyapunov car nous sommes en présence de l'observation d'une dynamique non linéaire. D'autre part, elle peut provenir de la superposition de plusieurs dynamiques différentes, chaotiques ou non et une superposition d'attracteurs dans l'espace des phases ne peut pas être vue comme une simple addition.

Bien que relativement semblables globalement, les chaos "géodésique" et "atmosphérique" de $LOD[1-100]$ jours diffèrent localement, on voit que les deux systèmes réagissent avec des pertes de stabilité en des dates différentes (associées à des événements El Niño mais aussi associée à l'évolution propre du système dynamique chaotique atmosphérique).

Ceci pourrait signifier à nouveau que l'évolution locale de la stabilité de LOD dépend d'autres excitations. En particulier, le El Niño 1982/1984 très marqué dans la stabilité locale de $LOD[1-100]$ jours est quasiment inexistant dans la stabilité locale de $LOD_{\chi_3 w}[1-100]$ jours, ce qui indique que cette perte de "prédictibilité" est peut-être plutôt induite par la dynamique océanique.

5. PERSPECTIVES

Il serait intéressant de former la série temporelle des différences entre les séries LOD géodésique observée et LOD_{χ_3} totale (c'est à dire en prenant en compte aussi le terme de pression) pour les courtes périodes $[1-100]$ jours et en admettant que la linéarisation perturbe de manière négligeable les résultats. Pour cela il sera important d'avoir des séries de même longueur et de même échantillonnage. Malheureusement les séries les plus précises et homogènes disponibles de LOD géodésique sont plus courtes et moins denses. Ensuite il faudrait faire une analyse non linéaire de cette série des différences qui intuitivement représente bien la série de l'excitation non atmosphérique inconnue de LOD .

Ses caractéristiques non linéaires seraient à comparer avec les caractéristiques non linéaires de séries de longueur du jour causées par le moment cinétique océanique axial ("LOD océan"). Nous verrions d'une part, si l'océan est bien la seconde excitation de la dynamique de LOD mais aussi si le signal en question est un vrai signal déterministe et non un bruit de mesure. Parallèlement il faudrait faire une étude non linéaire des séries de moment cinétique océanique à courtes périodes afin de décrire la nature de leur dynamique.

Il est en effet aujourd'hui possible de calculer, grâce à des modèles globaux de circulation océanique, des séries de moment cinétique océanique (OAM) analogues aux $EAAM$ atmosphériques (Marcus *et al.*, 1998). Des analyses linéaires préliminaires ont déjà permis de détecter une composante océanique significative dans les séries de longueur du jour (Wilson, 1998) ne provenant pas des marées.

Une étude plus poussée sur la dynamique des OAM et sur la dynamique du signal non atmosphérique de LOD à courtes périodes, peut permettre de relier ces deux processus. Il y a donc encore beaucoup à faire dans cette optique.

6. Bien entendu, il serait intéressant de faire ce travail complet dans le cas du mouvement du pôle à courtes périodes et des séries de mouvement du pôle "atmosphérique" associées (équations 1 et 2 de Liouville). Dans ce cas le mode de transmission est plus complexe que pour LOD puisque les équations font intervenir une résonnance à la fréquence de Chandler.

Les dynamiques à courtes périodes de moment cinétique atmosphérique équatorial pour le terme de pression ($\chi_1 p[1-100]$ jours et $\chi_2 p[1-100]$ jours), sont elles aussi chaotiques: elles forcent les fluctuations du mouvement du pôle PMX et PMY qui présentent pour les courtes périodes une composante chaotique caractérisée au chapitre 4 du même ordre de grandeur que les séries atmosphériques responsables de leur existence.

Il sera intéressant de regarder aussi s'il existe d'autres candidats dans l'excitation totale en caractérisant le signal "résiduel" : "PM géodésique- PMatmosphérique".

Cependant il faut attendre d'avoir accès à des séries OAM plus longues et plus précises issues d'observations et de modèles plus complexes avant de se lancer dans la partie

”océanique” du travail.

Enfin, notre choix de filtrer les séries d’une façon particulière est arbitraire, nous aurions tout aussi bien pû isoler les différents termes (saisonniers, résidus et la tendance) pour les séries *EOP*, les séries atmosphériques et les séries océaniques et travailler sur les résidus uniquement. Le filtrage ayant certainement un effet polluant dans les analyses non linéaires, nous aurions obtenu peut-être par cette méthode des résultats plus robustes.

Bien sûr un travail complémentaire effectué sur les équations de Liouville théoriques elles même s’avère très utile afin de voir comment une dynamique chaotique synthétique (ou des dynamiques superposées chaotiques, périodiques,...) est transmise et transformée par les équations linéarisées et réelles (non linéarisées).

7. Une autre étude immédiate concerne le signal résiduel:

$$EOP - EOP_{atmo} - EOP_{ocean}$$

Son étude dans l’espace des phases pourrait permettre de trancher sur sa véritable nature: est-ce un signal réel (venant peut être des vents de la stratosphère, Rosen *et al.*, 1990) ou bien simplement un bruit aléatoire (Dickey *et al.*, 1992).

8. Enfin, le développement d’algorithmes de prédiction non linéaires à partir de la reconstruction de séries temporelles permettra de comparer les prédictions des courtes périodes des séries *EAAM* et *LOD* avec celles issues des modèles dynamiques atmosphériques et avec les prédictions statistiques usuelles.

8 Conclusion

Les excitations à courtes périodes atmosphériques ont longtemps été considérées comme aléatoires et donc identifiables par des descriptions stochastiques. Par exemple, le modèle le plus simple est un bruit blanc. Eubanks *et al.* (1983), modélise les fonctions $\chi_i[1-100]$ jours par des AR(1). Plus tard, ils expliquent l’excitation atmosphérique comme une oscillation annuelle plus une marche aléatoire. Plus récemment Breziński (1987) propose des modèles autorégressifs d’ordre 3.

Ce chapitre montre qu’une alternative peut être choisie: si on considère que le spectre de puissance n’est pas révélateur de la nature aléatoire d’un processus et si l’on adopte de ce fait une approche non linéaire, on montre que les excitations à courtes périodes $\chi_i[1-100]$ jours peuvent être modélisées par un système de 5 équations différentielles ordinaires dont les solutions forment un attracteur chaotique dans l’espace des phases. Sa variété instable explique l’horizon de prédiction limité (5-10 jours) de la dynamique atmosphérique. D’autre part, ce type d’approche est plus cohérent avec la nature chaotique générale reconnue des variations climatiques.

Schématiquement, on peut retenir de ce travail les points suivants:

- 1) *LOD* [1-100] jours observé est chaotique.
 - 2) La partie de *LOD*[1-100] jours forcée par l’atmosphère est chaotique ($LOD\chi_3w[1-100]$ jours). Ce chaos est induit principalement par l’atmosphère lui même: $\chi_3w[1-100]$ jours est chaotique.
 - 3) Les différences proviennent d’une autre excitation (océans).
 - 4) *PMX* et *PMY* [1-100] jours sont chaotiques.
- Ce chaos est induit principalement par l’atmosphère : χ_1p et χ_2p [1-100] jours sont chaotiques.

Chapitre 6

Nature dynamique du terme de Chandler.

1 Introduction

Ce chapitre a fait l'objet de la publication d'un article dans le journal: *Discrete Chaotic Dynamics in Nature and Society* (annexe 4).

Nous proposons de faire une étude non linéaire préliminaire¹ des séries temporelles associées au terme de Chandler et de voir de quelle manière notre nouvelle approche pourrait permettre de mieux comprendre l'excitation, les causes et la nature de l'oscillation Chandlérienne.

La dynamique du terme de Chandler dans sa globalité peut être décrite en tant que processus déterministe dont l'attracteur est de dimension environ 2.5. Il faut bien comprendre ici que cette valeur est révélatrice de la nature même des excitations qui agissent sur l'oscillateur Chandler et celles-ci sont d'ailleurs principalement d'origine atmosphérique.

2 Motivations

Le terme de Chandler est un mode résonant de l'axe de rotation de la Terre autour de son axe de figure, dont le mécanisme d'excitation demeure inconnu. La période de cette réponse libre de la Terre fut calculée théoriquement par Euler en 1765, pour un modèle de Terre rigide, à 306 jours solaires. Cependant, en 1891, à partir d'observations de la variation de la latitude, Chandler détecta cette réponse libre avec une période d'environ 14 mois (430 jours). L'allongement de la période d'Euler est expliquée par l'élasticité de la Terre.

Sans source d'excitation pour maintenir cette oscillation, appelée désormais, terme de Chandler, elle disparaîtrait par dissipation. Il faut donc une source d'énergie excitatrice qui maintienne ce terme. Cette source d'excitation reste à ce jour mystérieuse. Parmi les candidats proposés (les séismes, les couples électromagnétiques à la frontière noyau-manteau, les contributions atmosphériques et océaniques) aucun, ni même leur effet combiné ne semble apporter l'énergie nécessaire. Wahr (1983) n'explique que 25% du signal par les excitations atmosphériques indiquant qu'une autre source principale d'excitation doit être envisagée. Cependant, son étude ne se base que sur une comparaison dans le domaine des fréquences entre terme de Chandler et excitations. Plus récemment, à partir de mesures et modèles océaniques et atmosphériques plus

¹Nous verrons dans la conclusion comment il serait intéressant de poursuivre ce travail en travaillant à partir des équations de Liouville directement

précis, plusieurs auteurs ont été conduits à expliquer l'excitation du terme de Chandler majoritairement par l'action des fluides géophysiques (par exemple Kuehne *et al.*, 1993 ou Chao, 1993).

Il y a eu d'autres études qui ont cherché à caractériser le terme de Chandler à partir des séries temporelles de mesures. En effet, on observe et étudie les variations de phase et d'amplitude du terme de Chandler par rapport à un mouvement purement périodique depuis longtemps. En 1982, Okubo suggéra que les variations de phase pourraient être simplement un artéfact dû aux erreurs d'observations ou bien, pourraient résulter d'une excitation aléatoire inconnue. D'autre part il a été avancé que plusieurs signaux périodiques autour du terme de Chandler, considéré comme périodique, pourraient être la cause de la variabilité du signal (Colombo et Shapiro, 1968). Alternativement, Vondrāk (1990) proposa plutôt que le terme de Chandler possède une seule fréquence dépendant de l'amplitude et variant légèrement dans le temps. Cette dépendance serait due à une réponse non linéaire des océans.

Jusqu'à présent, la plupart des analyses concernant l'identification des sources d'excitation ou concernant l'extraction des paramètres chandlériens étaient conceptuellement basées sur des hypothèses de processus stochastiques. Ainsi de manière conventionnelle, les études stipulent que le terme de Chandler est excité par un processus à large bande (continu). De ce fait, le signal exciteur du terme de Chandler est fréquemment modélisé par un bruit gaussien et on admet que l'oscillation chandlérienne est excitée aléatoirement (Jeffrey, 1940; Chao, 1985; Wilson et Vicente, 1990). Or, si l'excitation est à dominante atmosphérique (Wilson et Hausdrich, 1976), nous savons que ce type de modélisation est peu approprié (l'hypothèse que la fonction d'excitation est un processus aléatoire gaussien est malheureusement un cas d'école qui semble assez éloigné de la réalité physique des excitations de la rotation de la Terre). Concernant la caractérisation du terme de Chandler lui même, des processus autorégressifs et autorégressifs à moyenne mobile ont été utilisés (Jeffrey, 1968; Ooe, 1978). Ce type de modélisation se base à nouveau sur des hypothèses de stochasticité des processus invoqués.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les outils de l'analyse non linéaire des séries temporelles développés au chapitre 3, à la série observée du terme de Chandler en X et en Y. En effet nous recherchons si une signature non linéaire déterministe de faible dimension existe dans le signal, celle-ci pourrait être induite par les excitations du terme de Chandler (atmosphère, océans...). La caractérisation ci-après révèle la nature dynamique du terme de Chandler et offre la possibilité de faire par la suite des comparaisons basées sur les propriétés topologiques et dynamiques des présumées excitations en adoptant un nouvel espace de travail. Nous verrons que l'analyse non linéaire du terme de Chandler entier fournit des résultats très intéressants confirmant la nature topologique de "tore perturbé" de ce terme et permettent de suggérer ici que le terme de Chandler répond globalement aux excitations comme un processus déterministe chaotique de faible dimension. Ces résultats sont très prometteurs parce qu'ils proviennent directement des séries *EOP* et pourraient être directement comparés avec des résultats obtenus sur des séries atmosphériques ayant le même contenu spectral par exemple. D'autre part, ces résultats dévoilent à nouveau la nature instable et chaotique de certains signaux terrestres forcés et en donnent des invariants.

3 Données

Nous utilisons la série C01 de l’IERS (IERS, 1996) c’est la série combinée homogène la plus longue disponible (depuis 1846). La précision de cette série combinée a progressé avec l’amélioration des techniques d’observations et en particulier depuis l’introduction de la géodésie spatiale et de la technique VLBI. Aujourd’hui, la série de mouvement du pôle PMX et PMY est donnée avec une précision de 0.3 mas. La série C01 est donnée avec un pas de temps de 10 données par an de 1846 à 1889 puis 20 données par an de 1890 à aujourd’hui.

La première opération que nous avons effectuée a été d’interpoler la série par splines cubiques afin d’avoir un pas de temps homogène sur toute la longueur de la série étudiée, celui-ci est choisi de 100 données par an (de 1846 à 1997: environ 15000 points).

Puis afin d’isoler le terme de Chandler ”en X et Y” (suivant les coordonnées X et les coordonnées Y respectivement), noté par la suite CX et CY , nous avons utilisé le filtre Census X-11 (Shinskin *et al.*, 1967) qui décompose une série temporelle en une tendance, des termes saisonniers et des résidus (ou termes irréguliers). Pratiquement, nous avons utilisé des moyennes mobiles estimées sur des intervalles de 7 ans afin de séparer le terme annuel et le terme de Chandler dont la période de battement est de 6 ans. Ainsi la série de mouvement du pôle pour la composante X et la composante Y a été décomposée en une tendance, un terme annuel, un terme de Chandler et un terme résiduel (Figures 6.1a et 6.1b). Les moyennes et écarts quadratiques moyens (rms), pour chacun des termes, sont données dans la Table 6.1.

Les résultats pour CX et CY sont très semblables, la différence principale est due à la forte tendance existant sur la composante CY (4 mas/ an depuis 1900). Nous ne nous intéressons pas davantage à cette tendance sans doute causée par le rebond postglaciaire et les variations des glaces polaires (Mc Carthy et Luzum, 1997).

Nous avons retenu comme période centrale pour le terme de Chandler, la valeur 433 jours solaires d’après les déterminations les plus récentes de ce paramètre (Vicente et Wilson, 1997).

A cause de la précision limitée des méthodes d’observation optiques, le taux de bruit est important dans la série de 1846 à 1890 et est responsable de la forte valeur du rms de la partie résiduelle du mouvement du pôle (40 mas). Notons que le rms calculé sur la série après 1890 est réduit à 10 mas.

De plus un faible filtrage par ajustement parabolique local avec une fenêtre de 150 jours est appliqué au terme de Chandler avant de commencer l’analyse non linéaire globale. La valeur de l’oscillation instantanée est prise comme la valeur du point milieu de la parabole locale ajustée. Ce filtrage réduit CX et CY de 2 mas rms seulement et permet de retirer la plus grande partie de bruit de mesure de la série Chandler.

<i>PM Décomposition</i>	Moyenne $X - Y$ (<i>mas</i>)	RMS $X - Y$ (<i>mas</i>)
<i>Series Brutes</i>	-15.7 49.8	142.9 188.4
<i>Tendance</i>	-15.3 50.3	39.7 135.0
<i>Chandler</i>	0.0 0.0	102.9 101.4
<i>Annuel</i>	0.0 0.0	65.0 57.7
<i>Irrégulier</i>	-0.3 - 0.5	41.3 42.4

TABLE 6.1: Moyenne et RMS des séries brutes du mouvement du pôle en X-Y, et de leur tendance, terme annuel, terme de Chandler et résidus associés (unités: mas).

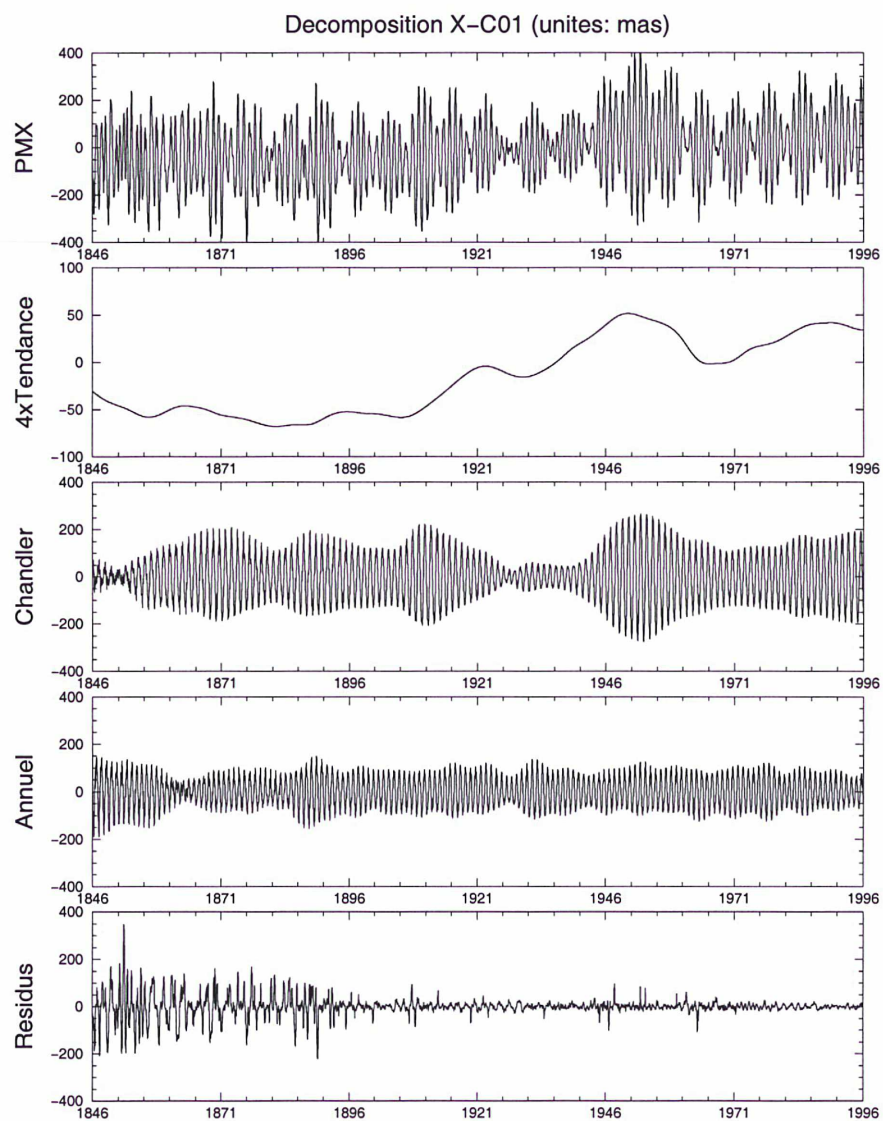


Figure 6.1a: Décomposition de la série PMX par Census X-11. De haut en bas: (série totale, tendance, Chandler, annuel et résidus).

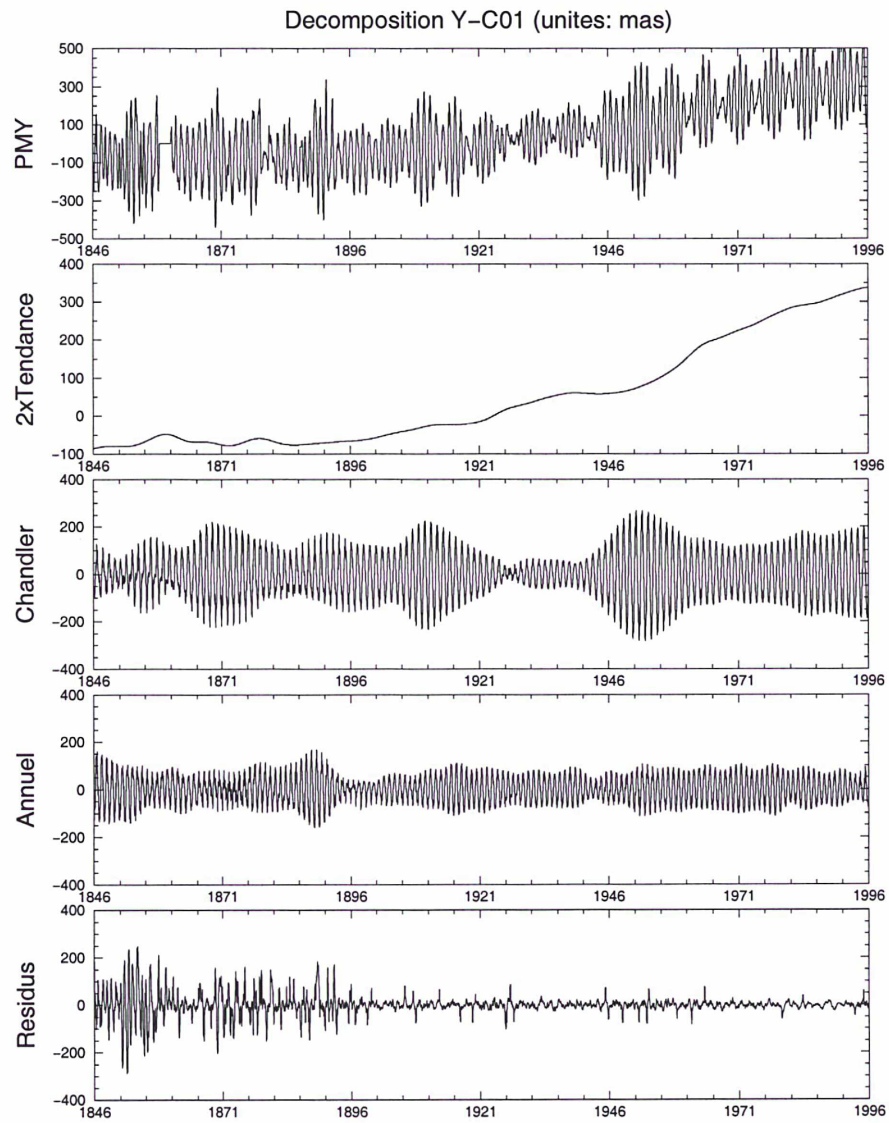


Figure 6.1b: Décomposition de la série PMY par Census X-11. De haut en bas: (série totale, tendance, Chandler, annuel et résidus).

4 Analyse non linéaire de la série temporelle globale du terme de Chandler

1 Analyse des dimensions et de la géométrie du terme de Chandler, CX et CY

Nous cherchons à décrire le déterminisme des séries du terme de Chandler dans l'espace multidimensionnel. Dans cette partie, nous allons calculer le temps de retard τ et la dimension D_{E^*} de l'espace de reconstruction nécessaires au dépliement des orbites et à la reconstruction de l'attracteur du système observé à travers les séries temporelles du terme de Chandler en X et Y.

Rappelons que les propriétés géométriques, topologiques et dynamiques de l'attracteur reconstruit, sont liées par difféomorphisme aux propriétés réelles du système physique sous jacent aux mesures.

Le temps de retard est calculé à partir de la fonction d'information mutuelle (AMI) et vaut respectivement environ 105 jours pour la composante CX du terme de Chandler et 115 jours pour la composante CY . (Figures 6.2a,b)

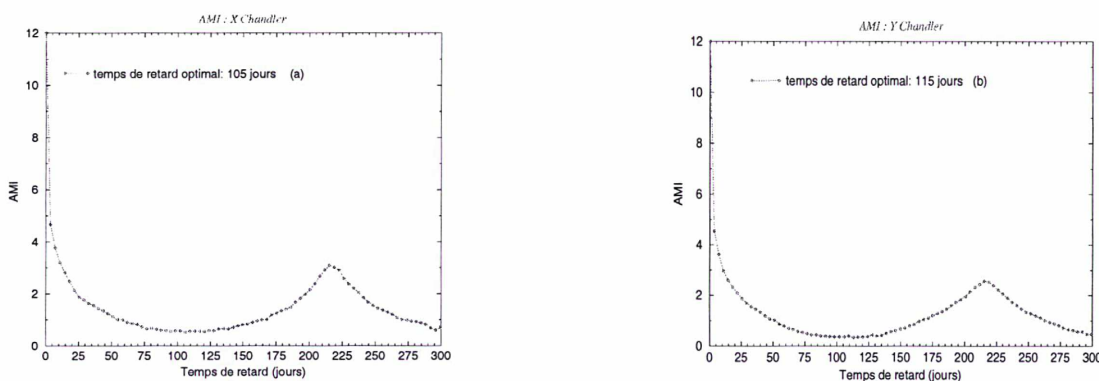


Figure 6.2: Fonction d'information mutuelle pour a) X-Chandler
b) Y-Chandler

La méthode des faux voisins globaux permet de trouver la dimension de plongement D_{E^*} . Le pourcentage de faux voisins globaux atteint la valeur zéro à la dimension de plongement 4 pour les deux séries. Notons qu'en dimension 3, la pourcentage de faux voisins est très proche de zéro et que le fait qu'il n'y ait pas convergence dès la dimension 3 provient peut être de la présence de bruit dans les mesures (le bruit est un phénomène de très grande dimension tendant à masquer les processus de faible dimension en augmentant systématiquement les dimensions, Chapitre 3). (Figures 6.3a,b)

Jusqu'à présent, nous pouvons simplement dire que les processus associés aux termes de Chandler en X et Y peuvent être caractérisés par des processus de dimension finie (inférieure à 4).

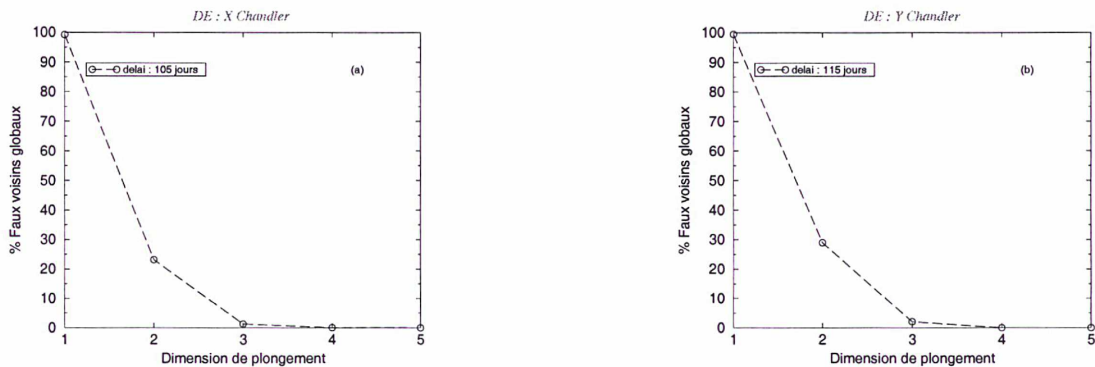


Figure 6.3: Pourcentage de faux voisins globaux en fonction de la dimension de plongement pour a) le terme de Chandler en X
b) le terme de Chandler en Y .

2 Reconstruction 3D de l'attracteur

Afin de visualiser la forme de l'attracteur dans l'espace des phases, nous avons représenté une projection de l'orbite reconstruite dans un espace de dimension 4 pour les séries CX et CY . Comme attendu, nous observons un 1-tore (qui seul correspondrait à un phénomène purement périodique d'amplitude et de phase constante) perturbé (les modulations sont causées par les processus qui agissent sur la variabilité et l'excitation du terme de Chandler, et dont les fluides géophysiques en font majoritairement partie).

On voit aussi que les modulations autour du tore fixe peuvent atteindre jusqu'à environ 100 mas (Figure 6.4a,b). Ainsi la dimension de l'attracteur sera différente de celle d'un 1-tore (c'est à dire 1). La valeur que nous trouverons sera révélatrice de la nature des excitations responsables de ces perturbations. Dans la mesure où les excitations du terme de Chandler peuvent s'exprimer différemment selon la composante X ou Y , (à cause de la disposition des continents) il n'y a pas de raison de trouver exactement les mêmes caractéristiques dynamiques pour CX et CY . Globalement, le 1-tore est la structure commune mais les modulations autour de ce tore ont dans chaque cas leur propre signature.

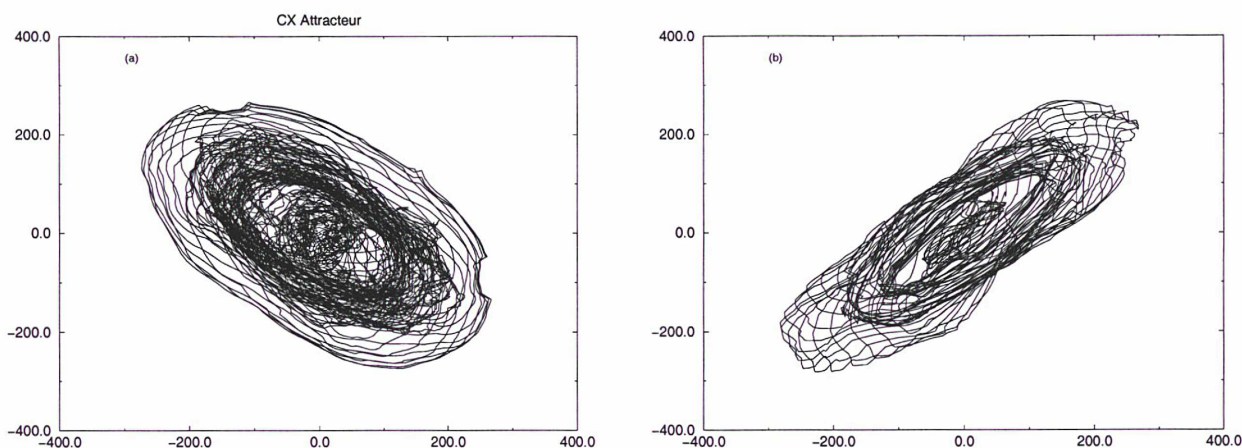


Figure 6.4: Reconstruction de l'attracteur plongé en dimension 4 pour a) la série de Chandler en X , b) la série de Chandler en Y .

3 Analyse dynamique et stabilité du terme de Chandler

(a) Dimension locale

Rappelons que la dimension locale nous indique le nombre d'exposants de Lyapunov à déterminer ainsi que le nombre de degrés de liberté réel du système. Utilisant l'algorithme de prédiction des valeurs propres décrit au chapitre 3, nous trouvons un pourcentage de mauvaises prédictions qui reste assez élevé (25-40 %) pour les séries CX et CY . Ceci provient du fait que cet algorithme est très sensible au bruit car il s'applique localement dans l'espace des phases. Ainsi, le fait d'éliminer la partie la plus bruitée du signal, correspondant aux 10 premières années de mesure, assure la convergence de l'algorithme vers un pourcentage nul de mauvaise prédiction dès la dimension 3 (Figure 6.5a,b). L'existence de données très bruitées sur quelques années perturbe globalement tout l'attracteur reconstruit interdisant la convergence de l'algorithme. En effet, dans l'opération de reconstruction, des points proches temporellement se retrouvent distribués sur tout l'attracteur et leurs imperfections agissent donc de façon étendue tout au long de l'orbite. La détermination de la dimension locale pour CX et CY n'est pas sensible ici au nombre de voisins utilisés.

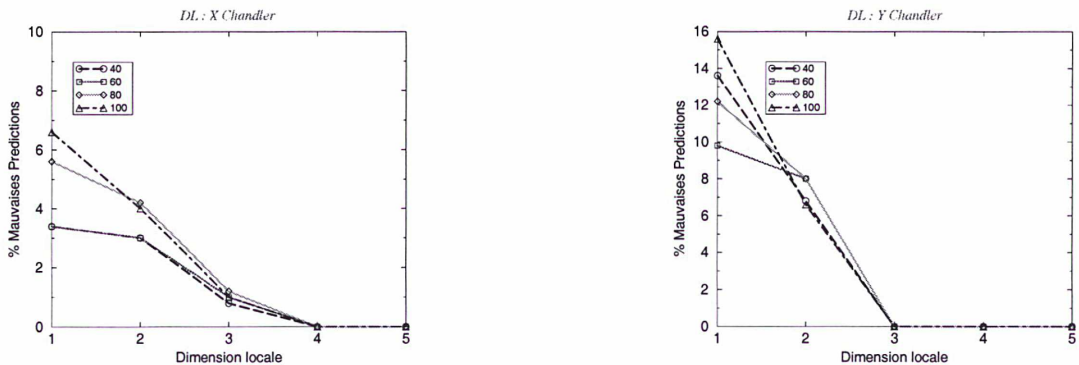


Figure 6.5: Pourcentage de mauvaises prédictions en fonction de la dimension locale pour le terme de Chandler suivant X (CX , gauche) et le terme de Chandler suivant Y (CY , droite). Les différentes courbes (40,60...) correspondent au nombre de voisins choisi pour la prédiction.

(b) Exposants de Lyapunov

La détermination des matrices jacobiniennes à partir des séries temporelles reconstruites du terme de Chandler, nous permet de calculer leurs valeurs propres et par conséquent d'en déduire les exposants de Lyapunov globaux associés à la stabilité du système.

3 exposants sont à déterminer. Nous obtenons un exposant nul, un exposant positif et un exposant négatif pour les séries de Chandler CX et CY (Figure 6.6a,b). L'exposant nul est celui associé à la direction neutre de l'attracteur et est témoin de l'existence d'un flot pour décrire les données (équations différentielles autonomes du premier ordre). Dans la mesure où le système est dissipatif, il est normal d'obtenir au moins un exposant négatif afin d'assurer que la somme de tous les exposants soit négative. D'autre part, nous avons obtenu un exposant positif pour les deux séries CX et CY . La validité de celui-ci est assurée par le calcul des exposants "inverses" c'est à dire grâce à l'opération qui consiste

à renverser la série temporelle (de 1997 à 1857 en inversant le temps) et à calculer les exposants de Lyapunov de cette nouvelle série. Ceux-ci doivent avoir environ la même valeur absolue que les exposants calculés sur la série initiale et être de signe contraire. Si ces conditions ne sont pas vérifiées pour un exposant, celui-ci est qualifié de "faux" et ne doit pas être pris en compte.

Ici nous obtenons 3 exposants "vrais", un positif, un nul et un négatif. La somme des trois est bien négative assurant le caractère dissipatif du système. La présence d'un exposant positif nous indique la nature chaotique du système observé (ici le terme de Chandler global en X et en Y). L'existence d'un exposant positif implique que les instabilités non linéaires peuvent se développer le long d'une variété de dimension 1. En effet, l'exposant positif mesure le taux de divergence des trajectoires et fournit alors une limite théorique du temps moyen de prédiction du système. Pour CX et CY cette limite est respectivement 368 jours et 276 jours. Cela signifie concrètement qu'on est en mesure de faire une bonne prédiction du terme de Chandler sur son attracteur jusqu'à un an environ et qu'au delà de cette limite, les prédictions ne sont plus crédibles (quelque soit la nature des algorithmes utilisés pour ces prédictions).

De plus, la dimension de Lyapunov associée aux propriétés topologiques de l'attracteur et déterminée à partir du spectre des exposants de Lyapunov (Kaplan et Yorke, 1979) vaut environ 2.5 pour les deux séries CX et CY . Les deux conditions réunies (sensibilité aux conditions initiales (exposant positif, existence d'une variété instable sur l'attracteur) et dimension fractale (attracteur étrange ayant une structure feuilletée) assurent la caractérisation d'un processus déterministe de faible dimension dont la dynamique est chaotique pour les séries CX et CY .

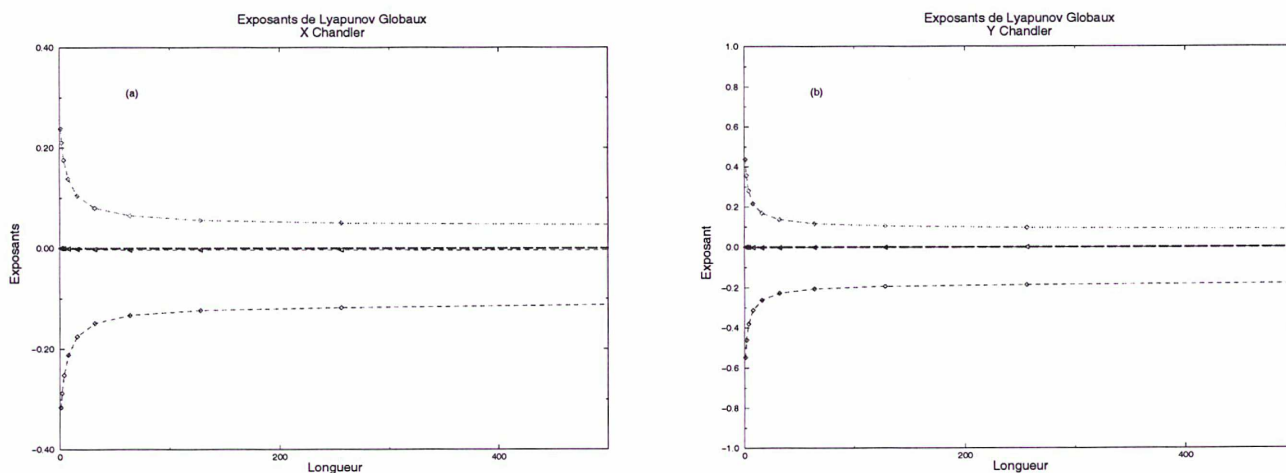


Figure 6.6: Exposants de Lyapunov pour a) le terme de Chandler en X , b) le terme de Chandler en Y .

(c) Exposants de Lyapunov locaux, Variation locale de la stabilité

Les exposants de Lyapunov locaux (c'est-à-dire les variations temporelles de l'exposant principal) ont été tracés pour CX et CY avec des fenêtres de 6 et 24 ans (Figure 6.7a,b). Le choix de la valeur 6 est lié au choix de la fenêtre de la moyenne mobile utilisée pour

la séparation du terme annuel et du terme de Chandler dans la partie initiale du travail. Prendre une résolution supérieure (fenêtre inférieure à 6 ans) ne donnerait sans doute pas d'autres variations temporelles significatives. D'autre part, le choix de 24 ans vient de la valeur raisonnable du taux de dissipation (entre 20 et 70 ans: déduit du facteur de qualité Q) du terme de Chandler (Furuya et Chao, 1996). Le facteur de qualité du terme de Chandler est un élément primordial à connaître pour expliquer ce terme. Il correspond au taux de dissipation de l'oscillation et est inversement proportionnel au rapport entre l'énergie perdue en un cycle et l'énergie totale de l'oscillation non entretenue.

L'augmentation de la largeur de la fenêtre correspond à une augmentation du lissage des variations temporelles locales des exposants principaux. Là aussi (cf Chapitre 4), l'exposant de Lyapunov présente des variations significatives au cours du temps témoin d'une perte de stabilité (ou baisse de l'horizon de prédiction) comparée à la valeur moyenne.

Les principales pertes de stabilité ont lieu entre 1860-1870 et 1940-1950 et sont plus sensibles sur la série *CY*. Les années 1920-1930 (coïncidant avec un "présupposé" renversement de phase du terme de Chandler) sont assez stables (exposant petit) bien que toujours chaotique (exposant positif).

Là encore nous pensons que les variations observées sont induites par les excitations inconnues qui agissent sur le terme de Chandler. Selon nous, l'analyse des séries temporelles d'un candidat possible ne doit pas forcément être parfaitement corrélée avec la série du terme de Chandler mais doit plutôt présenter le même genre d'évolution temporelle au niveau de sa stabilité (de ses exposants de Lyapunov). Nous avons déjà remarqué ce genre de choses lors de l'étude des séries *EOP*[1-100] jours où les variations de stabilité avaient pu être clairement reliées à des événements El Niño.

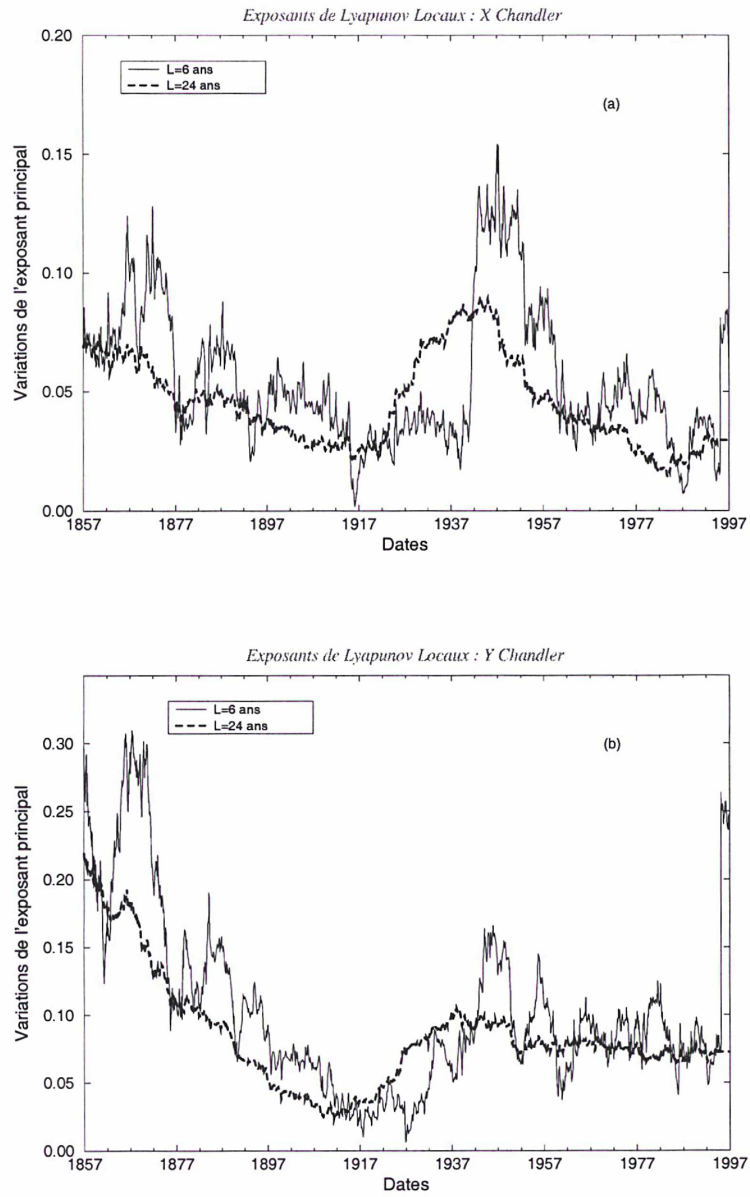


Figure 6.7: Variations temporelles locales de l'exposant principal de Lyapunov pour a) Le terme de Chandler en X, b) le terme de Chandler en Y.

5 Discussion

La Table 6.2 résume les résultats précédents.

Caractéristiques	X-Chandler	Y-Chandler
$\tau(jours)$	105	115
D_{E^*}	4	4
D_L	3	3
D_u	1	1
λ_1	.046	.086
λ_2	−0.008	−0.009
λ_3	−0.111	−0.18
$\sum \lambda_i$	−.073	−.103
D_{Lyap}	2.43	2.42
$H_P(jours)$	368	276

Table 6.2: τ est le temps de retard, D_{E^*} la dimension du pseudo espace des phases, D_L la dimension locale, D_u le nombre de variété instables, λ_i les exposants de Lyapunov, $\sum \lambda_i$ leur somme, D_{Lyap} le dimension de Lyapunov et H_p l’horizon théorique de prédiction déduit de la valeur de l’exposant principal.

Cette première étude nous montre que le terme de Chandler observé se comporte comme un oscillateur dissipatif conduit par des processus qui rendent sa dynamique déterministe et chaotique. La traduction de ce comportement dans l’espace des phases passe par la reconstruction d’un 1-tore perturbé. L’existence d’un exposant de Lyapunov positif démontre que le terme de Chandler évolue dans le temps avec une variété instable dans sa dynamique. Grâce à notre expérience, nous pensons que les résultats sont robustes et indiquent l’origine non linéaire du mécanisme d’excitation du terme de Chandler.

L’aspect novateur de cette étude est de considérer l’oscillation de Chandler en tant que processus déterministe non linéaire² forcé. En effet, jusqu’à présent, les études préconisaient une origine stochastique et linéaire des variations observées dans le terme de Chandler, ce point de vue se comprend bien historiquement:

D’une part, les concepts d’analyse non linéaire de séries temporelles sont très récents et d’autre part, les comportements des fluides géophysiques agissant sur la rotation de la Terre ont eux aussi longtemps été étudiés dans le contexte stochastique. Ce n’est que très récemment qu’on a souligné des comportements chaotiques de l’atmosphère par exemple.

De plus, ces résultats nous apprennent que nous avons besoin de ($D_L=$) 3 variables dynamiques pour reconstituer le système d’équations propre à la dynamique chandlérienne.

Bien entendu, il est important à ce stade de se poser la question suivante:
Avons nous identifié le mécanisme d’excitation du terme de Chandler?

²Une première approche théorique suivant cette optique a été menée, par Kudlay (1995,1998), qui montre à l’aide de simulations numériques, que les équations non linéaires de Liouville (ordre 2) présentent des solutions similaires aux observations, et que la forme du spectre et la nature non harmonique du terme de Chandler proviennent certainement d’effets non linéaires.

La réponse est non, cependant les divers invariants que nous avons extraits des séries du terme de Chandler, sont reliés à ces excitations recherchées. La dynamique d'un pendule linéaire dissipatif (modélisé par les équations de Liouville linéaires) ne possède pas d'évolution chaotique. Partant d'un état de non-équilibre, l'orbite suit une spirale pendant sa phase de transition jusqu'au point fixe d'équilibre. Les dimensions locales et de Lyapunov correspondantes sont $D_L = 2$ et $D_{Lyap} = 0$ (Il n'y a pas de variété instable). Toutes les variations observées autour de ces valeurs, pour le terme de Chandler, proviennent de l'évolution temporelle des excitations. Une remarque similaire peut s'appliquer au facteur de qualité Q . Est ce que Q estimé à partir des séries *EOP* est révélateur de la manière dont la Terre solide dissipe les afflux d'énergie extérieure ou bien est ce une mesure du processus dissipatif en jeu dans la dynamique des excitations?

Nous ne pouvons pas donner de réponse directe à cette question, cependant, le taux de contraction estimé par la somme des exposants de Lyapunov devrait pouvoir donner des indices. En particulier, il serait intéressant de rechercher la relation entre la définition de Q et la somme des exposants de Lyapunov.

Grâce à l'analyse non linéaire, un pas supplémentaire peut être franchi: en général, l'identification d'un processus exciteur de la Terre est faite en comparant les séries temporelles correspondantes (en terme de moment angulaire) avec les variations observées des paramètres de rotation et en comparant les spectres de puissance correspondants. Or nous avons vu que le spectre était un indicateur erroné de la nature d'un processus physique non linéaire. De plus, la description usuelle du terme de Chandler est faite dans la classe des processus autorégressifs. Ici, nous proposons un autre type de modélisation dans l'espace des phases en terme de dimensions et stabilité. Une approche nouvelle et complémentaire consisterait à comparer les variations de stabilité des deux (ou plusieurs) séries en jeu. Nous pensons que les variations observées de stabilité sont produites par les excitations inconnues du terme de Chandler et qu'une telle comparaison apporterait une forte contrainte pour l'identification des excitations agissant sur l'oscillation chandlérienne.

Extension directe en terme de modulations d'amplitude et de phase du terme de Chandler.

Nous avons vu que le terme de Chandler se comporte en première approximation, comme un oscillateur (solution des équations de Liouville). Si la Terre était un système non dissipatif, les oscillations seraient "constantes" c'est-à-dire auraient toujours la même amplitude et la même période et n'auraient pas besoin d'être entretenues par des apports extérieurs (1-tore). Comme la Terre est dissipative, les oscillations de Chandler diminuent d'un taux mesuré par le facteur de qualité Q . Or Nous observons que le terme de Chandler perdure, il est donc forcément entretenu par des mécanismes inconnus et présente une amplitude et une phase variables dans le temps.

Ceci se traduit dans l'espace des phases par l'existence d'un 1-tore perturbé. Les variations par rapport au tore sont une mesure de la dynamique des excitations. Ainsi, un moyen d'analyser la nature même des excitations responsables de cet écart au tore pourrait être mené de la façon suivante: il s'agirait d'isoler les modulations d'amplitude et de phase du terme de Chandler autour de la période fixe 433 jours puis de les analyser de manière non linéaire. Les caractéristiques dynamiques trouvées devraient être proches de celles du signal total car la variété instable présente dans la dynamique globale du terme de Chandler est induite par ces modulations. Nous allons tout d'abord expliquer de quelle façon on peut isoler ces modulations du reste du signal grâce à la méthode de démodulation complexe (Bloomfield, 1976). Cette méthode est écrite pour étudier une série dont l'amplitude et la phase varient au cours du temps. C'est

donc typiquement le cas pour les séries CX et CY du terme de Chandler.
Considérons une série temporelle de la forme:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \Phi(t)) + \epsilon(t)$$

Où $A(t)$ est l'amplitude variable du signal, $\Phi(t)$, la phase, ω la fréquence et $\epsilon(t)$ la partie résiduelle.

Pour isoler la partie des modulations autour de la fréquence choisie ω_{ch} , il faut former une nouvelle série $y(t) = x(t) \times e^{-i\omega_{ch}t}$:

$$y(t) = 0.5A(t)e^{i\Phi(t)} + 0.5A(t)e^{-i(2\omega_{ch}t + \Phi(t))} + \epsilon(t)e^{-i\omega_{ch}t}$$

L'étude des modulations est possible grâce au premier terme de l'expression précédente:

$(0.5A(t)e^{i\Phi(t)})$ dans la mesure où il représente les variations couplées de l'amplitude et de la phase uniquement. Sous les hypothèses $A(t)$ et $\Phi(t)$ sont lisses, le premier terme $0.5A(t)e^{i\Phi(t)}$ l'est aussi. On admet de plus que le terme résiduel n'a pas d'énergie à la fréquence ω_{ch} et une énergie négligeable à la fréquence nulle. Ainsi il suffit d'isoler la partie lisse de la série $y(t)$ (cette partie est concentrée sur la fréquence nulle) grâce à un filtre passe bas qui sépare les hautes fréquences (terme $0.5A(t)e^{-i(2\omega_{ch}t + \Phi(t))}$ de fréquence $2 \times \omega_{ch}$ et les basses fréquences ($0.5A(t)e^{i\Phi(t)}$)).

Ce sont dans les basses fréquences du signal que se trouvent les modulations de phase et d'amplitude de la série étudiée.

6 Discussion critique

1 Méthodologie employée

La méthodologie employée peut être critiquée pour plusieurs raisons (Manneville, communication personnelle).

D'une part, la façon d'isoler le terme de Chandler et surtout de le séparer du terme annuel, peuvent induire des imprécisions dans les déterminations finales à cause de la résonnance proche. Un moyen plus efficace proposé serait d'utiliser des méthodes d'analyse spectrale singulière, (décrites juste après), permettant d'éliminer la tendance et le bruit de la série brute de manière très performante. De plus l'idée de la démodulation serait à appliquer, en adoptant cette approche, au signal bipériodique, en prenant comme période de démodulation celle de l'année solaire.

Ce mode de traitement évitant une suite de décomposition du signal est en accord avec la philosophie "non linéaire" de traitement du signal.

Un autre point discutable provient du rééchantillonnage des données. En effet, nous n'avons pas évalué le "bruit" introduit par cette pratique. Cependant, nous pensions que celui-ci appartenant aux hautes fréquences, ne devait pas perturber le terme de Chandler de façon importante.

Cependant malgré la méthodologie des prétraitements, à reconsidérer, il est intéressant de remarquer que l'analyse ainsi menée de la série de Chandler a tout de même fourni un résultat nouveau et primordial indiquant la nature déterministe et instable des modulations observées de ce terme. Cette description permet de trancher avec les descriptions stochastiques usuelles (notons que ces déterminations se basent aussi sur l'extraction de la série de Chandler avec des techniques similaires à celles employées ici).

Même si quantitativement, les résultats sont à recalculer, quantitativement, l'origine non linéaire et déterministe du mécanisme d'excitation du terme de Chandler est bien apparente.

2 Analyse spectrale singulière

La méthode de décomposition en valeurs singulières est particulièrement adaptée à des séries courtes et bruitées, issues de l'observation de systèmes chaotiques. Elle permet d'extraire des informations pertinentes d'un système sans connaissance de la dynamique sous jacente. C'est une sorte de filtrage adaptatif tel que le signal est décomposé sur une base optimale formée par les vecteurs propres de la matrice de covariance. Ceci permet d'éliminer le bruit correspondant aux directions non principales. De plus, c'est une technique robuste de retrait de la tendance et de détection des oscillations (Broomhead et King, 1986).

Le signal est ensuite reconstruit sur des bandes spectrales bien choisies. Ce type d'approche pourrait sans aucun doute améliorer l'analyse du terme de Chandler mais également celle des autres signaux de rotation de la Terre. D'ailleurs, ces techniques ont été appliquées à de nombreuses séries géophysiques où elles ont fait leurs preuves (Vautard *et al.*, 1992)

7 Conclusion

Ce premier développement nous donne des caractéristiques dynamiques des séries temporelles CX et CY : Une dimension de plongement suffisante de 4, une dimension locale de 3, un exposant de Lyapunov positif présentant des variations temporelles.

Un prolongement très intéressant de ce travail serait d'intégrer les équations de Liouville (linéaires et non linéarisées (bien que la nonlinéarité des équations de Liouville elles mêmes soit très faible)) dans le cas d'une excitation artificielle chaotique³ et de regarder de quelle manière le système dynamique (oscillation de Chandler) répond à cette excitation (celle-ci pourrait modéliser sommairement la dynamique de l'atmosphère par exemple). Jusqu'alors, les fonctions d'excitations théoriques étudiées sont restées des fonctions de Dirac, de Heavyside ou des fonctions de types périodiques (Munk et Mac Donald, 1960) appliquées aux équations de Liouville linéarisées (ce type de démarche et d'approche théorique (basée sur les équations de Liouville et la modélisation des fonctions d'excitations afin de voir leur effet sur les *EOP*) n'est évidemment pas restreint au cas particulier du terme de Chandler).

De plus, comme nous avons mis en évidence que le terme de Chandler était globalement maintenu par un processus déterministe chaotique de faible dimension, une caractérisation plus précise de la dynamique de ce processus pourrait être obtenue par l'étude dans l'espace des phases des attracteurs liés aux modulations du terme de Chandler.

D'autre part, des calculs similaires devraient être effectués avec les séries de mouvement du pôle obtenues par différents centres d'analyse, afin de comparer les déterminations. Bien entendu, ces séries ne seront jamais totalement indépendantes puisque les données historiques de mouvement du pôle (milieu 19 ième siècle) sont peu nombreuses. Cependant, la sélection des mesures, les prétraitements et la combinaison peuvent être effectués différemment et conduire à des résultats plus ou moins convergents. Les caractéristiques globales (τ , D_{E*} , λ_1) extraites des séries de l'IERS ne seront certainement pas affectées par des changements dans les séries de référence. Mais les caractéristiques locales (exposants de Lyapunov locaux), sont susceptibles de changer de manière significative. Ce type de sensibilité devrait être vérifié avant de procéder à des interprétations détaillées, des variations de stabilité du terme de Chandler.

³reste à définir..

Conclusion

L'apport des méthodes non linéaires de traitement du signal, à l'étude géophysique de la rotation de la Terre, que nous avons exploré dans le cadre de cette thèse, nous semble non négligeable. D'une part, nous avons montré que certaines composantes terrestres pouvaient être modélisées sous forme de processus non linéaire déterministe de faible dimension dans l'espace des phases et non plus uniquement de manière stochastique dans l'espace des fréquences. Ces résultats ont permis de quantifier des invariants dynamiques, de proposer des temps limites de prédiction en ouvrant la voie à de nouvelles comparaisons. Il devient ainsi possible de comparer les propriétés dynamiques des processus atmosphériques agissant sur la Terre et les propriétés dynamiques des fluctuations terrestres. Ceci permet de quantifier d'une nouvelle manière le rôle de l'atmosphère dans l'existence d'irrégularités de la rotation de la Terre. D'autre part, les dynamiques turbulentes et non linéaires étant omniprésentes dans la Nature, nous ne pouvons plus d'une manière générale, nous limiter à une description linéaire des phénomènes.

Nous avons par ailleurs souligné l'extrême prudence avec laquelle il convenait d'utiliser ces méthodes. La longueur de la série, son niveau de bruit, les prétraitements, sont autant de facteurs pouvant induire des résultats erronés. Il n'est pas à conseiller d'appliquer ces méthodes à l'aveuglette ni de se limiter comme dans certaines études (Nicolis et Nicolis, 1984; Tiwari *et al.*, 1992) à l'application d'un seul algorithme (par exemple celui de Grassberger-Procaccia). Il existe heureusement des moyens pour éviter de mauvaises interprétations.

Une bonne piste pour trancher entre déterminisme et stochasticité est de tracer la projection de l'attracteur reconstruit. Générer un signal synthétique stochastique possédant les mêmes propriétés statistiques (spectre, Fourier) que le signal étudié puis comparer leurs "attracteurs" respectifs forment alors, méthodologiquement parlant, la meilleure démarche. De cette manière, nous avons montré que pour les *EOP*[1-100] jours et les *EAAM*[1-100] jours, le comportement dynamique asymptotique des orbites est fondamentalement différent de celui d'une série de marche aléatoire de même spectre.

Alternativement, une autre méthode sélective à développer est la prédiction non linéaire. Le comportement de l'erreur de prédiction en fonction du temps est typique du processus. Pour un bruit non corrélé (blanc), l'erreur reste constante, pour un signal issu d'un système chaotique, elle décroît très vite. Malheureusement pour un bruit corrélé, elle décroît aussi rendant l'analyse difficile. Il devient tout de même possible de trancher sur la nature déterministe ou stochastique du système, en étudiant le coefficient de corrélation entre la valeur prédite et la valeur réelle de la série: Son comportement est différent entre un signal chaotique et un signal aléatoire. C'est par cette méthode que Elsner et Tsonis (1992) ont confirmé, à partir de la prédiction d'une série d'indice *SOI*, la chaoticité de "*ENSO*".

La caractérisation non linéaire des séries principales de moment cinétique atmosphérique a

mis en évidence dans notre travail, un nouvel attracteur atmosphérique chaotique de dimension fractale entre 4 et 5. Les horizons de prédiction théoriques déduits de cette étude sont d'environ 5 jours. Ce résultat est en parfaite coïncidence avec les horizons de prédiction dynamiques atmosphériques obtenus à partir de modèles, ce qui justifie la réalité physique de l'exposant principal de Lyapunov calculé.

Les mouvements atmosphériques excitent la Terre qui répond sous forme de fluctuations rapides et apériodiques de son axe de rotation et de la longueur du jour. Ces fluctuations mesurent en quelque sorte la moyenne de tous les processus dynamiques qui influencent la rotation de la Terre. La similitude des valeurs obtenues pour les invariants dynamiques des fluctuations de la rotation de la Terre et ceux de l'excitation atmosphérique démontre que le principal responsable des irrégularités observées de la rotation de la Terre est l'atmosphère. Les petites différences cependant existantes, sont à attribuer principalement aux excitations océaniques (dont la dynamique est là aussi fortement non linéaire) et dans une moindre mesure, aux erreurs observationnelles et à la finitude des données.

Comment faut-il interpréter l'attracteur chaotique présent dans les fluctuations rapides de la rotation de la Terre? Nous pensons que le système "Terre" n'est pas chaotique. Cette composante déterministe non linéaire de faible dimension n'est pas induite par la dynamique propre de la Terre mais est plutôt transmise par les excitations atmosphériques qui sont elles, par nature, non linéaires. Les fluctuations de la rotation de la Terre sont la signature directe des excitations et leur description dynamique est un indicateur robuste du type de processus qui les a engendrées. En quelque sorte, l'étude non linéaire des séries temporelles est un type de problème inverse de la dynamique non linéaire qui permet d'éclairer les propriétés de la source des données.

De plus, les horizons de prédiction des *EOP*[1-100] jours sont de l'ordre de 12 jours, indiquant que l'instabilité atmosphérique, est transmise à la Terre tout en étant légèrement réduite.

Concernant le terme de Chandler, nous sommes les premiers à considérer son étude du point de vue de l'analyse non linéaire de sa série. Dynamiquement il peut être décrit comme un oscillateur dissipatif forcé possédant une variété instable induite par les excitations. L'existence de la variété instable induit une limite prédictive de ce terme de l'ordre d'une année.

Le taux de dissipation (dont une borne inférieure est fournie par la somme des exposants de Lyapunov) du système serait à comparer directement avec le facteur de qualité Q du terme de Chandler. Une recherche comparative pourrait alors aboutir à une détermination plus précise de ce terme.

D'autre part, puisque la maintenance et les variations de l'oscillation de Chandler restent encore mystérieuses, une étude poussée des dimensions et des variations de stabilité de l'attracteur de Chandler pourrait aider à isoler et identifier les excitations qui manifestement ne sont pas de nature aléatoire.

Le travail que nous concluons ici, fût initialement entrepris avec la motivation d'essayer de savoir s'il était possible de détecter une composante déterministe apériodique non linéaire dans les fluctuations rapides causées par les excitations géophysiques de la rotation de la Terre. Cette étude découle donc d'une démarche originale et au vu de résultats encourageants, s'est finalement poursuivie par la détection puis la caractérisation de ces composantes ainsi que leur comparaison active aux séries atmosphériques. Il est dorénavant possible d'envisager des exten-

sions multiples à cette recherche qui trouve toute sa place dans les études géophysiques de la rotation de la Terre dans la mesure où les centres d'analyses fournissent des séries de mesures de plus en plus précises, denses et longues.

PERSPECTIVES:

Caractérisation

A l'issu de nos recherches, il nous paraît intéressant en premier lieu, en ce qui concerne l'étude du terme de Chandler, de reprendre son étude non linéaire en changeant légèrement de méthodologie et en utilisant le principe de démodulation. En effet les résultats obtenus sont suffisamment encourageants pour tenter de caractériser précisément à l'aide de dimensions et stabilité, les causes des modulations observées. Ceci permettra également de confirmer les dimensions d'attracteurs trouvées et de décrire plus précisément la stabilité locale du terme de Chandler.

D'une manière générale, l'étude de la rotation de la Terre ne peut plus se limiter à une description purement linéaire. Ceci concerne à la fois les modèles des excitations et le traitement des mesures. Ainsi, il faudrait entreprendre des analyses similaires sur des séries temporelles autres que les EOP[1-100] jours. Par exemple, une étude sur les résidus (séries corrigées des périodicités, saisons et tendances) compléterait efficacement les présents résultats.

La caractérisation dans le pseudo espace des phases, d'une série issue d'un signal purement périodique, est équivalente à sa caractérisation dans l'espace des fréquences. Par la caractérisation temporelle, on rendra bien compte de la périodicité du processus. De même, l'attracteur reconstruit dans l'espace des phases sera un cycle limite sur lequel la périodicité apparaîtra clairement. Par contre dans le cas d'un système apériodique, la description linéaire de la série sera très difficile dans la mesure où celle-ci sera très perturbée, tandis que dans l'espace des phases, le processus apparaîtra sous forme d'une figure bien définie (dimension, stabilité) et pour laquelle les relations spatiales seront plus apparentes.

Le choix des méthodes de prétraitements des séries pourrait être revu afin de sélectionner les séries les plus précises possibles. Par exemple, une technique qui doit être utilisée dans les analyses futures concerne la décomposition par valeur singulière. Rappelons que cette technique consiste à décomposer le signal sur une base optimale (on choisit la base des vecteurs propres de la matrice de corrélation), afin d'éliminer le bruit, puis de recomposer la série débruitée sur des bandes spectrales bien choisies (Broomhead et King, 1986). Cette méthode permet également de retirer la tendance d'un signal et d'identifier les oscillations. Elle est particulièrement adaptée à des signaux courts, bruités et issus de systèmes chaotiques (Vautard *et al.*, 1992).

Prédictions

A ce stade de nos recherches, les meilleures prédictions des paramètres d'orientation de la Terre reposent sur des techniques classiques linéaires. Les méthodes les plus courantes de prédiction des *EOP* trouvées dans la littérature scientifique sont, des simples autorégressions (ou combinaisons d'autorégressifs) (Vondrák, 1989), des modélisations "ARMA" c'est-à-dire possédant une composante autorégressive et une composante moyenne mobile (Handom et Sung, 1996), une prédiction par "autocovariance" (Kosek, 1996). Les précisions obtenues par les

différentes méthodes sont sensiblement les mêmes. Les principales sources d'erreur viennent des fluctuations observées du terme de Chandler et des oscillations à courtes périodes des *EOP* causées par les excitations atmosphériques (Kosek, 1996).

Vu la nature dynamique instable des *EOP*[1-100] jours et du terme de Chandler, introduire des méthodes de prédictions basées sur la reconstruction d'un attracteur dans l'espace des phases ne pourrait selon nous qu'améliorer les résultats actuels. Les méthodes de prédiction dans l'espace des phases privilégient un traitement local basé sur la notion de voisinage d'un point, plus précisément, elles s'appuient sur des modélisations locales du flot sur l'attracteur grâce à la description du comportement de points voisins (Abarbanel et al., 1994). Tandis que les méthodes linéaires classiques travaillent séquentiellement dans le temps, les méthodes d'espace des phases ont l'avantage de pouvoir exploiter les "corrélations" spatiales.

Un travail très intéressant à entreprendre consisterait en une comparaison des performances des prédictors linéaires (de type AR, MA, ARMA), des prédictors dynamiques de reconstruction d'espace et aussi des prédictors de régression non linéaire (réseaux de neurones; Bonnet, 1997) dans le cas de la prédiction des résidus des *EOP*.

Modélisation

L'application des méthodes non linéaires de traitement du signal permet de décrire les séries dans l'espace des phases en termes d'invariants dynamiques. Une étape supplémentaire concerne la modélisation de ces processus en termes d'équations différentielles.

L'approche linéaire habituelle modélise le comportement temporel d'une série par la somme d'un terme linéaire apériodique (tendance), de plusieurs fonctions périodiques et d'une somme d'autorégressifs ou moyennes mobiles, déduits des propriétés de corrélation temporelle ainsi que celles du spectre de Fourier. Une démarche physiquement plus réaliste, concerne la modélisation du comportement des orbites dans l'espace des phases. La différence entre ces deux types de modélisation est fondamentale: d'un côté on modélise la série temporelle, de l'autre on modélise la dynamique du processus physique observé.

Concrètement, il s'agit de travailler dans l'espace des phases en trouvant des lois globales d'évolution sur l'attracteur approximant le flot. Ceci permet de construire un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre dont les solutions reposent sur un attracteur possédant les mêmes propriétés dynamiques que l'attracteur empirique reconstruit. Il est alors logique que, selon le système de coordonnées choisi pour la reconstruction, il y ait non unicité des équations différentielles reconstituables. Par exemple, pour la rotation de la Terre [1-100] jours, nous avons besoin d'au moins 5 équations différentielles pour décrire la dynamique sur l'attracteur. Trouver ces équations et les variables associées constitue un grand défi qui possède un intérêt théorique et pratique certain pour la description des irrégularités de la rotation de la Terre.

Plusieurs méthodes ont déjà été proposées pour la reconstruction d'équations différentielles (par exemple Crutchfield et McNamara, 1987; Gouesbet, 1991). Leur principale difficulté provient vient du fait qu'il faille analyser de manière globale l'attracteur. Les méthodes prédictives se basant sur des analyses locales sont plus faciles à mettre en oeuvre dans le cas d'attracteurs reconstruits issus d'observations. D'ailleurs à notre connaissance, les méthodes de reconstructions d'équations différentielles ne sont pas encore opérationnelles pour des systèmes physiques réels observés.

Partie 3

Annexes, Glossaire et Bibliographie

Annexe 1: Analytical versus Semi-analytical Determinations of the Oppolzer Terms for a Non-Rigid Earth

Analytical versus semi-analytical determinations of the Oppolzer terms for a non-rigid Earth

V. Frede¹, V. Dehant²

¹ Observatoire de Paris, URA 1125, 61, avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France e-mail: fred@hplbi.obspm.fr

² Observatoire royal de Belgique, 3, avenue circulaire, B-1180 Bruxelles, Belgique

Received: 23 February 1998 / Accepted: 18 November 1998

Abstract. Estimations of the Oppolzer terms for the angular momentum and rotation axes of a non-rigid Earth are obtained from two different approaches and compared. The first approach is an analytical method which relies on the solutions of the Liouville equations for a two-layer Earth model. The Oppolzer terms are evaluated from analytical expressions. The results are then compared to those calculated from Wahr's theory of nutation for a non-rigid Earth, which is the second approach used. Results are obtained for the main nutation frequencies and for the precession case. The differences between the two solutions are generally quite small (the relative error is most of the time under 8%) and are, for a large part, due to successive approximations and truncation effects during their determination. Departures of the results from the two methods are significantly larger for frequencies near the Free Core Nutation (FCN) resonance. This is particularly true for the Oppolzer terms of the angular momentum axis. The Earth model adopted is a little bit different in each case: for the Liouville system solution, we have limited the model to a homogeneous elastic mantle and a homogeneous liquid core. Another source of some of the small differences in the results is the presence of a solid inner core in Wahr's theory. We confirm through the analytical calculation the strong effect of the core on the Oppolzer terms of the angular momentum axis for a non-rigid Earth at the precession frequency. Finally, an application is given in the determination of the axes' position at J2000 for a non-rigid Earth.

Key words. Non-rigid Earth · Nutations · Transfer function · Oppolzer terms

1 Introduction

The Oppolzer terms of any geocentric axis close to the terrestrial G_z -axis are the angular increments between the geographic pole position and the time-dependent position of that axis caused by the gravitational tidal torque coming from the Sun and the Moon (and to a lesser extent from the planets) acting on the Earth. Those terms have been calculated for a rigid Earth (e.g. Woolard 1953) and for an elastic Earth (e.g. McClure 1973). The differences induced by the non-rigidity of the Earth on the Oppolzer terms have been discussed by Brzezinski (1986) who showed that the offset between the rotation axis and the angular momentum axis is about 40 times larger for an elastic Earth with a liquid core than for one without. He used Wahr's results of non-rigid nutations to correct the Oppolzer terms given by McClure (1973) for an elastic Earth and thus calculate the Oppolzer terms for a non-rigid Earth including the free core nutation (FCN) effect.

It should be noted that the term 'diurnal polar motion' is found in the literature (Brzezinski 1986; McClure 1973); the Oppolzer terms and diurnal polar motion have the same amplitude. The Oppolzer terms refer to the offset between the nutations of an axis close to G_z , and the G_z -axis, expressed in a celestial frame (they have long periods), while the diurnal polar motion refers to the same offset but expressed in the terrestrial reference frame (they have diurnal periods). Additionally, we note that having nutation expressions for the different axes is, in fact, perfectly equivalent to having Oppolzer term expressions and rigid-Earth nutations of one axis. The advantage of having the Oppolzer terms for a non-rigid Earth is that the rigid-Earth nutation theory can be developed for one axis only, as is usually done. There is no need for further developments in this frame.

We develop here an analytical expression of the Oppolzer terms based on Liouville equations. The model is an elastic Earth with a liquid core. The advantage of this



approach is that the FCN resonance effects appear clearly. The analytical method is derived from the analytical theory developed by Dehant et al. (1993) and Legros et al. (1993) for a three-homogeneous-layer Earth and the associated numerical values. Several other analytical studies of lunisolar perturbations in Earth rotation have been performed in the past (Sasao et al. 1980); in that paper, the rotational motion of the core and that of the whole Earth were solved analytically. The corresponding analytical expressions are equivalent in the case of a two-layer Earth. Mathews et al. (1991a,b) and De Vries and Wahr (1991a, b) have also added the effect of a solid inner core to those equations but did not have complete analytical expressions as in Dehant et al. (1993) (they have a semi-analytical approach).

Alternatively, Wahr's numerical nutation theory (Wahr 1981a, b) also gives the values of the Oppolzer terms for a non-rigid Earth, as we will show in this paper. Here, we compare the results from the two different approaches. For the analytical method, we can express the Oppolzer terms as functions of the tidal potential and Love numbers describing the non-rigidity of the adopted Earth model. In Wahr's non-rigid-Earth nutation theory, the Earth model includes also a solid inner core. The comparison between the results of the two methods to obtain the Oppolzer terms could also make it possible to see the effect of the inner core on the determination of the Oppolzer terms.

We will not deal with all the nutation frequencies as in Brzezinski (1986), but will focus our comparisons on the main ones, being the retrograde and prograde 18.6-year nutation, and the nutation corresponding to the diurnal ψ_1 tide, S_1 tide, ϕ_1 tide, P_1 tide, O_1 tide OO_1 tide and K_1 tide.

In Sect. 2, we will introduce the general expressions of the Oppolzer terms. Section 3 will then be devoted to the analytical evaluation of the Oppolzer terms for the angular momentum and rotation axes as a function of the external potential and of the Love numbers. Section 4 will deal with the same kind of concerns but applying Wahr's transfer function for non-rigid-Earth nutations. In Sect. 5 the numerical computation of the Oppolzer terms for the angular momentum and the rotation axes from both methods is performed for the main nutation frequencies. The results, summarized in Table 3 in comparison with Brzezinski's, are then discussed, focusing on the respective advantages and limitations of each approach. Finally, the case of the precession, also treated in Sect. 5, leads, in Sect. 6, to an evaluation of the axes' positions at J2000.

2 Definition of the Oppolzer terms

The Euler angles (θ_E, ψ_E, Φ) define the orientation of the terrestrial frame $Gxyz$ with respect to the celestial one $GXYZ$ (Fig. 1; Capitaine 1982).

In order to obtain the positions of the Gz axis in a celestial frame that will be required to express the nutations and thus the Oppolzer terms of any axis, we use

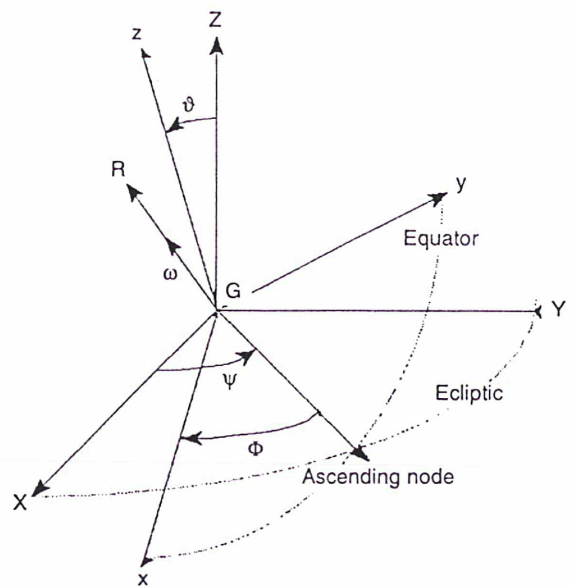


Fig. 1. Euler angles ($\theta_E = -\theta$, $\psi_E = \psi$) linking the celestial inertial reference frame $GXYZ$ to the rotating frame $Gxyz$ whose instantaneous velocity vector is $\vec{\omega}$

Euler's kinematic relation as written (with other conventions) by McClure (1973) and Capitaine (1982)

$$\dot{\theta}_E + i\dot{\psi}_E \sin \theta_E = \Omega m e^{i\Phi} \quad (1)$$

where $\Phi \approx \Omega t$, Ω is the mean velocity of the Earth, m is the complex sum of the first two components of the terrestrial position of the instantaneous Earth's rotation vector ($m = m_1 + im_2$), $\vec{\omega}$ is the instantaneous velocity vector of the Earth ($\omega = \omega_1 + i\omega_2$) and $\omega = m/\Omega$, i is the complex number such that $i^2 = -1$, and t is the time difference with respect to J2000 ($t = 0$).

Euler's angles (θ_E, ψ_E) and nutation angles $(\varepsilon_{\text{nut}}, \psi_{\text{prec/nut}}$ or $\theta, -\psi$) are conventionally linked by

$$\theta_E = -\theta = -\varepsilon_{\text{nut}} \quad (2)$$

$$\psi_E = \psi = -\psi_{\text{prec/nut}} \quad (3)$$

because the Euler angles are taken positively eastward and because the IERS conventions (McCarthy 1996) consider, for nutation in obliquity, nutation in longitude and precession, a positive angle starting from the ascending node in the westward direction.

The nutations of the Gz -axis nut_{Gz} are given by the integration of Euler's relation

$$\begin{aligned} \text{nut}_{Gz} &= \Delta\theta + i \sin \theta_0 \Delta\psi = \Delta\varepsilon_{\text{nut}} - i \sin \varepsilon_0 \Delta\psi_{\text{prec/nut}} \\ &= - \int_0^t \Omega m e^{i\Omega t} dt \end{aligned} \quad (4)$$

where $\theta_0 = \theta(t=0)$ and $\varepsilon_0 = \varepsilon(t=0)$, as done for instance in Capitaine (1982). The nutations of any other axis are expressed in a similar way, except that we usually note them adding a subscript which identifies the axis. The Oppolzer terms of any axis J (J stands for R the rotation axis, or CEP the celestial ephemeris pole, or

H the angular momentum axis) are written $[\delta\theta_J + i\delta\psi_J \sin\theta_{J0}]_{\text{grav}}$ where the angular increments $(\delta\theta_J, \delta\psi_J)$ forced by gravitational tides must be added to the Gz nutations in order to obtain the nutations of J . We want to express these terms in space for a non-rigid Earth. The Oppolzer terms for J are thus

$$\begin{aligned} & [\delta\theta_J + i\delta\psi_J \sin\theta_{J0}]_{\text{grav}} \\ &= [\Delta\theta_J + i\Delta\psi_J \sin\theta_{J0}]_{\text{grav}} \\ &- [\Delta\theta + i\Delta\psi \sin\theta_0]_{\text{grav}} \end{aligned} \quad (5)$$

The subscript grav means that we only keep the forced part of the expression. Because the motion caused by the gravitational tides of the terrestrial Gz -axis in space corresponds to the motion of the conventional CEP (Seidelmann 1982), Eq. (5) can also be written as

$$\begin{aligned} & [\delta\theta_J + i\delta\psi_J \sin\theta_0]_{\text{grav}} \\ &= [\Delta\theta_J + i\Delta\psi_J \sin\theta_0]_{\text{grav}} \\ &- [\Delta\theta_{\text{CEP}} + i\Delta\psi_{\text{CEP}} \sin\theta_0] \end{aligned} \quad (6)$$

We are interested in finding the Oppolzer terms of the rotation and the angular momentum axes for forced frequencies. The first step is to determine the nutations of the various axes under consideration.

2.1 Nutations of the CEP

The rotation axis position in the terrestrial frame keeping only the gravitational part, which in the case of an external tidal forcing can be derived from a potential $W = W_0 e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})}$ at any frequency λ , is given in a celestial frame by (as in Capitaine 1982)

$$m e^{i\Omega t} = m_{0_{\text{grav}}} e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} \quad (7)$$

with $\lambda' = \lambda + \Omega$; λ is the frequency expressed in the terrestrial frame and λ' is the frequency expressed in space. Note that all the variables are expressed in the terrestrial frame in an exponential form similar to the external potential, as for instance $m = m_{0_{\text{grav}}} e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})}$. Integrating Eq. (1), using Eqs. (2) and (3), keeping only their forced part, and taking the expression of m given by Eq. (7), the nutations of the CEP for a frequency λ' in space can be expressed by

$$\begin{aligned} & \Delta\theta_{\text{CEP}}(\lambda') + i\Delta\psi_{\text{CEP}}(\lambda') \sin\theta_0 \\ &= i m_{0_{\text{grav}}} \frac{\Omega}{\lambda'} e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \quad (8)$$

Following Eq. (6), these expressions of the CEP nutations are used below to obtain the Oppolzer terms for the rotation axis, noted $\text{Opp}R(\lambda')$ and for the angular momentum axis, noted $\text{Opp}H(\lambda)$.

2.2 Rotation axis

In order to obtain the position of the rotation axis in space, it is necessary to sum its position relative to the Gz -axis expressed in space, and the Gz position around GZ (also in space) (see Fig. 1).

From Eq. (8) and the definition of the CEP, we have

$$\Delta\theta + i\Delta\psi \sin\theta_0 = i \frac{\Omega}{\lambda'} m_{0_{\text{grav}}} e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} \quad (9)$$

which expresses that for one particular frequency the nutational motion of Gz around GZ is obtained by an integration of Eq. (4) with the proper expression for m [Eq. (7)]. The sum of Eq. (9) and the nutational motion [nutations or positions of any axis only differ from a $\pi/2$ phase as shown schematically by Defraigne et al. (1995b)] associated with the relative position of the rotation axis with respect to Gz , expressed in space and given by Eq. (7) [i.e. take $-i \times$ Eq. (7) + Eq. (9)], gives the nutations of the instantaneous rotation axis for a given forcing frequency λ' .

$$\begin{aligned} & \Delta\theta_R(\lambda') + i\Delta\psi_R(\lambda') \sin\theta_0 \\ &= -i m_{0_{\text{grav}}} \left(1 - \frac{\Omega}{\lambda'}\right) e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \quad (10)$$

This allows us to write the Oppolzer terms of the rotation axis for the frequency λ' as

$$\text{Opp}R(\lambda')$$

$$\begin{aligned} &= (\delta\theta_R + i \sin\theta_0 \delta\psi_R)_{\text{grav}} \\ &= \left(\Delta\theta_R(\lambda') + i\Delta\psi_R(\lambda') \sin\theta_0\right) \\ &- \left(\Delta\theta_{\text{CEP}}(\lambda') + i\Delta\psi_{\text{CEP}}(\lambda') \sin\theta_0\right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$= -i m_{0_{\text{grav}}} e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} = m_{0_{\text{grav}}} e^{i(\lambda' t + \eta)} \quad (12)$$

It is interesting to note that the Oppolzer terms of the rotation axis are simply the diurnal polar motion constituents expressed in space.

2.3 Angular momentum axis

The angular momentum conservation equation provides the expression of the nutations of the angular momentum axis as a function of the external torque \vec{L} acting on the Earth. Indeed, the angular momentum vector \vec{H} is related to the external torque in space by

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{L} \quad (13)$$

Integrating the first two components and normalizing in order to express the nutation angles of \vec{H} , we obtain to the first order for a particular frequency λ' (Roosbeek and Dehant 1998)

$$\Delta\theta_H(\lambda') + i\Delta\psi_H(\lambda') \sin \varepsilon_0 = -\frac{1}{\lambda'} \frac{L e^{i\Omega t}}{C\Omega} \quad (14)$$

where C is the polar principal moment of inertia.

$L = L_0 e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})}$ is the complex sum of the first two components of the external torque acting on the equatorial bulge of the Earth. It results principally from the forces of the Moon and the Sun (the effects of the other planets are of second order). It depends on the gravitational force which is directly proportional to the tidal potential W . The latter is developed in spherical harmonics of which the main part is the degree 2 part. Only the degree 2 order 1 component plays a role in the expression of the torque. W and L can be related by $L = -3iAW\alpha/r^2$ with $L = L_1 + iL_2$ and $W = W_1 + iW_2$.

Note that the rigid-Earth and non-rigid Earth nutations are the same for this axis, as the variation of the angular momentum vector in space is equal to the external torque acting on the Earth (and the external torque does not depend on rigidity at the first order).

From the difference between the forced nutations of the angular momentum axis H as given by Eq. (14) and the nutations of the CEP as given by Eq. (8), the Oppolzer terms of H are derived as

$$\text{Opp } H(\lambda') = -\frac{1}{\lambda'} \left(\frac{L_0}{C\Omega} + im_{0\text{grav}} \Omega \right) e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} \quad (15)$$

L and m are related by the Liouville equations applied to the whole Earth expressing the angular momentum balance

$$L = A\Omega\dot{m} + \dot{c}\Omega - i\Omega^2 m(C - A) + \dot{h} + i\Omega^2 c + i\Omega h \quad (16)$$

as given in Dehant et al. (1993), where $c = c_{13} + ic_{23}$ is the complex sum of two incremental inertia products caused by mass redistribution in the Earth, and $h = h_1 + ih_2$ is the complex sum of the first two components of the relative angular momentum. For a simplified Earth model with a liquid core obeying a Poincaré fluid law, the relative angular momentum h comes from the differential rotation of the core with respect to the mantle, $h = A^f w^f$. A^f is the moment of inertia of the core and w^f its differential rotation relative to the mantle. In the above equations all the terms have the same form as the external potential and are easily derived

$$m = m_0 e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} c = c_0 e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})}$$

$$h = h_0 e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} L = L_0 e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} \dot{m} = i\lambda m \dots$$

Replacing L given by Eq. (16) in Eq. (15), we obtain

$$\begin{aligned} \text{Opp } H(\lambda') &= (\delta\theta_H + i \sin \theta_0 \delta\psi_H)_{\text{grav}} \\ &= -i \left(\frac{Am}{C} + \frac{c}{C} + \frac{h}{C\Omega} \right) e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (17)$$

Equations (12) and (17) give the general expressions of the Oppolzer terms for the angular momentum and rotation axes. The analytical method expresses the quantities m , c and h by using the solution of a system

of two Liouville equations and applying the generalized Love number formalism (Legros 1987).

3 Expressions of the Oppolzer terms using the two-layer-Earth Liouville equations

The expressions of the Oppolzer terms as a function of the Earth's interior parameters can be obtained from Liouville equations in the case of a diurnal approximation. We consider a two-homogeneous-layer Earth which consists of a liquid core of mean density $\rho^f = 10.89 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ and an elastic mantle of density $\rho^m = 4.45 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (the mean density of the whole Earth being $\rho = 5.51 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). We adopt as in Sasao et al. (1980) an initial Earth in hydrostatic equilibrium and a Poincaré fluid for the core. For simplicity, we only keep the first-order terms of the expressions in the frame of the diurnal frequency approximation. These hypotheses are chosen in order to derive completely analytical expressions, but it should be noted that the final results are not as accurate as those derived from numerical models. The aim was to see where the different physical properties of a non-rigid Earth as well as the FCN resonance entered in the game.

The solution gives the differential rotation of the mantle ω with respect to the mean Earth's rotation Ω and the differential rotation of the core relative to the mantle ω_f as a function of the tesseral components of the tidal external potential W as in Sasao et al. (1980). ω is thus directly proportional to the corresponding tidal amplitude potential given in the literature as normalized amplitudes $A(\lambda)$ for each frequency λ . In the case of the diurnal tesseral potential, this yields

$$W(\lambda) = W_0(\lambda) e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} = \frac{-2}{3} DA(\lambda) e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} \quad (18)$$

where D is the Doodson constant ($D = 2.6 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$). Table 1 gives the amplitudes W_0 of the tidal potential used in this paper (as taken from Roosbeek 1996).

The system to solve is composed of two Liouville equations, one for the whole Earth and the other one for the core. In order to be able to solve these equations analytically, the previous simplifications (as a two-homogeneous-layer Earth model initially in hydrostatic equilibrium) are necessary; a further simplification as the

Table 1. W_0 values of the tidal potential $W = W_0 e^{i(\lambda t + \eta)}$ as a function of the frequency λ

λ	W_0
$\lambda_1 \psi_1$	0.007
$\lambda_2 \phi_1$	0.013
$\lambda_3 18.6p$	0.124
$\lambda_4 OO_1$	0.028
$\lambda_1^* S_1$	0.009
$\lambda_2^* P_1$	-0.303
$\lambda_3^* 18.6r$	-0.018
$\lambda_4^* O_1$	-0.653
λ_{K1}	0.918

diurnal approximation has been considered. After some algebra [determination of the eigenmodes of the system; see Frede (1996) for details], the solutions of these equations for a two-layer Earth and for a forcing diurnal frequency λ are given by

$$\omega^f(\lambda) = \frac{3\alpha W_0 A}{A^m a^2} \left(\frac{1 + \frac{q_0 h^f \lambda}{2\alpha\Omega}}{(\lambda - \lambda_{FCN})} \right) e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} \quad (19)$$

$$\omega(\lambda) = \frac{3\alpha W_0}{a^2 \Omega} \left(1 + (\lambda + \Omega) \frac{A^f}{A^m} \left(\frac{1 + \frac{q_0 h^f \lambda}{2\alpha\Omega}}{(\lambda - \lambda_{FCN})} \right) \right) \times e^{i(\lambda t + \eta + \frac{\pi}{2})} \quad (20)$$

with

$$\lambda_{FCN} = -\Omega \left(1 + \left[\frac{A}{A^m} \left(\alpha^f - \frac{q_0}{2} \bar{h}_1^f \right) \right] \right)$$

as is given in other notation by Sasao et al. [1980, Eqs. (78), (79), (74) and (75)]. λ_{FCN} is the free core nutation frequency. Here, $q_0 = \frac{1}{289}$ represents the ratio of the centrifugal acceleration to the gravitational acceleration; a is the mean radius of the Earth; α and α_f are the flattenings of the whole Earth and of the core respectively; A , A^m and A^f are the moments of inertia of the whole Earth, mantle and core respectively; k^f is a Love number expressing the Eulerian potential induced by the deformation at the core mantle boundary (CMB) (superscript f) in response to a global Earth external potential; h^f is the Love number expressing the radial displacement corresponding to the deformation at the CMB; and \bar{h}_1^f is a Love number expressing the radial displacement at the CMB induced by a pressure (indicated by an overbar) in the core acting on the CMB. Here, we use the same convention as in Dehant et al. (1993) or Legros et al. (1993). We also use the numerical values of these papers (see Table 2).

Knowing that $m\Omega = \omega$, we finally obtain from Eqs. (12) and (20) the following analytical expressions for the Oppolzer terms of the rotation axis at frequency λ for a non-rigid Earth (elastic mantle and liquid core)

$$\text{Opp } R(\lambda) = \frac{3\alpha W_0}{a^2 \Omega^2} \left(1 + (\lambda + \Omega) \frac{A^f}{A^m} \left(\frac{1 + \frac{q_0 h^f \lambda}{2\alpha\Omega}}{(\lambda - \lambda_{FCN})} \right) \right) \times e^{i(\lambda' t + \eta)} \quad (21)$$

Table 2. Constants and Love numbers used in the analytical approach

A [Kg · m ⁻³]	8.37×10^{37}
A^m [Kg · m ⁻³]	7.44×10^{37}
A^f [Kg · m ⁻³]	9.26×10^{36}
q_0	$\frac{1}{289}$
α	$\frac{1}{299.9}$
α^f	$\frac{1}{393}$
$a_{[m]}$	6 371 000
k	0.333
κ	0.939
h^f	1.157
\bar{h}_1^f	0.342
C [Kg · m ⁻³]	8.39×10^{37}

It can be noted that when $\lambda \rightarrow -\Omega$ (corresponding to the case of precession), the Oppolzer terms for a non-rigid Earth are identical to those for a rigid Earth.

In order to be able to give the same kind of expression for the Oppolzer terms of the angular momentum axis, not only the expression of m is required, but also the expressions of h and c . The detailed steps for the expression of the incremental inertia product ' c ' can be found in Dehant et al. (1993) for a non-rigid Earth with an inner core. In our simplified Earth model (elastic mantle and liquid core) these are given, after simplifications, by

$$\frac{h}{C\Omega} = \frac{A^f \omega^f}{C\Omega} \quad (22)$$

$$\frac{c}{C} = \frac{\left(\frac{\alpha A}{\kappa\Omega} (k\omega + \bar{k}_1 \omega^f) - \frac{3\alpha A}{\kappa\Omega^2 a^2} kW \right)}{C} \quad (23)$$

as given by Brzezinski [1986, Eq. (3.12)] and Sasao et al. [1980, Eq. (54)], where k and \bar{k}_1 are Love numbers related to the potential associated with the mass redistribution induced by a unit global Earth external potential for k and by a unit pressure acting on the CMB for \bar{k}_1 (again the overbar indicates that it is related to pressure and the subscript 1 indicates that the forcing is applied on the CMB). $\kappa = \frac{3(C-A)G}{\Omega^2 a^5}$ is the secular Love number.

Substituting Eqs. (19), (20), (22) and (23) in Eq. (17), and knowing that $m\Omega = \omega$, we obtain

$$\begin{aligned} \text{Opp } H(\lambda) = & \left[\left(\frac{A}{C} \frac{3\alpha W_0}{a^2 \Omega^2} \left(1 + (\lambda + \Omega) \frac{A^f}{A^m} \left(\frac{1 + \frac{q_0 h^f \lambda}{2\alpha\Omega}}{(\lambda - \lambda_{FCN})} \right) \right) \right) \right. \\ & + \left(\frac{\left(\frac{\alpha A}{\kappa\Omega} (k\omega_0 + \bar{k}_1 \omega_0^f) - \frac{3\alpha A}{\kappa\Omega^2 a^2} kW_0 \right)}{C} \right) \\ & \left. + \left(\frac{A^f}{C\Omega} \frac{3\alpha W_0 A}{A^m a^2} \left(\frac{1 + \frac{q_0 h^f \lambda}{2\alpha\Omega}}{(\lambda - \lambda_{FCN})} \right) \right) \right] \\ & \times e^{i(\lambda' t + \eta)} \quad (24) \end{aligned}$$

It can be noted that when $\lambda \rightarrow -\Omega$ (precession), the Oppolzer terms for a non-rigid Earth are not identical to those for a rigid Earth. We see from the final analytical expression of the Oppolzer terms of the angular momentum and rotation axes, that they are proportional to the external potential amplitude and exhibit a resonance near the FCN frequency. A numerical evaluation (presented in Sect. 5 of this paper) of the Oppolzer terms expressed analytically is performed using the parameter values given in Table 2.

4 Expressions of the Oppolzer terms from Wahr's semi-analytical theory

In a second step, we have used Wahr's transfer function between rigid-Earth and non-rigid-Earth nutations. This transfer function is expanded as a function of the forcing frequency and of the normal mode frequencies. These

modes, which have an important influence on the theory of tides and nutations, are the classical Chandler wobble (CW), the free core nutation (FCN) and the tilt-over-mode (TOM), (Wahr 1979, 1981a). Wahr (1979, 1981b) introduces the quantity called B_{ratio} directly linked to the transfer function and depending on the frequency λ

$$\frac{\text{nut}(\lambda)}{\text{nut}_{\text{rig}}(\lambda)} - 1 = B_{\text{ratio}}(\lambda) \quad (25)$$

where nut holds for non-rigid nutations of the CEP and nut_{rig} for the rigid-Earth nutations of that axis. Wahr considers an ellipsoidal, elastic Earth with a solid inner core inside a fluid core. In order to express the Oppolzer terms of the angular momentum axis, we write the difference between the forced nutations of the chosen axis and those of the CEP as before

$$\text{Opp } H = \text{nut } H - \text{nut CEP} \quad (26)$$

$$= \text{nut}_{\text{rig}} H - (1 + B_{\text{ratio}}) \times \text{nut}_{\text{rig}} \text{ CEP} \quad (27)$$

$$= \text{Opp}_{\text{rig}} H - B_{\text{ratio}} \text{nut}_{\text{rig}} \text{ CEP} \quad (28)$$

Eq. (28) can also be written as

$$\text{Opp } H = \text{Opp}_{\text{rig}} H - \frac{B_{\text{ratio}}}{(1 + B_{\text{ratio}})} \times \text{nut CEP} \quad (29)$$

The nutations for the CEP as given by Wahr and adopted by the IAU in 1980, are expressed in terms of cosine and sine-series

$$\text{nut CEP}(\lambda') = \Delta \varepsilon_{\text{nut}} - i \sin \varepsilon_0 \Delta \psi_{\text{prec/nut}} \quad (30)$$

with

$$\Delta \psi_{\text{prec/nut}} = \sum_{\lambda'} A_{\Delta \psi}(\lambda') \sin(\theta_t) \quad (31)$$

$$\Delta \varepsilon = \sum_{\lambda'} A_{\Delta \varepsilon_{\text{nut}}}(\lambda') \cos(\theta_t) \quad (32)$$

$A_{\Delta \psi}$ and $A_{\Delta \varepsilon}$ are the amplitudes of the nutations given in Wahr's nutation tables. For each nutation frequency λ' , we can also write the nutations of the CEP in the following form:

$$\text{nut CEP}(\lambda') = i \left[a^+ e^{i(\theta_t + \frac{\pi}{2})} + a^- e^{i(-\theta_t + \frac{\pi}{2})} \right] \quad (33)$$

where

$$a^- = - \frac{A_{\Delta \psi} \sin \varepsilon_0 + A_{\Delta \varepsilon}}{2} \quad (34)$$

$$a^+ = + \frac{A_{\Delta \psi} \sin \varepsilon_0 - A_{\Delta \varepsilon}}{2} \quad (35)$$

a^+ is the coefficient associated with $\theta_t = \lambda' t + \eta$ and a^- the one associated with $-\theta_t = -(\lambda' t + \eta)$ (whether the nutation amplitudes a^+ and a^- correspond to amplitudes of retrograde or prograde nutations depends on the sign of λ' . See Defraigne et al. (1995 b) for a complete discussion on a^+ and a^- . The derivative of Eq. (30) gives the left-hand side of the Euler kinematic relation which was used in the beginning of this paper [see Eq. (1)]

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{\text{nut}} - i \sin \varepsilon_0 \Delta \dot{\psi}_{\text{prec/nut}} = - \Omega m e^{i\Omega t} \quad (36)$$

Using Eqs. (30), (33) and (36), the expression of m is

$$m e^{i\Omega t} = \frac{\lambda'}{\Omega} \left[a^+ e^{i(\lambda' t + \eta + \frac{\pi}{2})} - a^- e^{i(-\lambda' t - \eta + \frac{\pi}{2})} \right] \\ = \frac{i\lambda'}{\Omega} \left[a^+ e^{i(\lambda' t + \eta)} - a^- e^{i(-\lambda' t - \eta)} \right] \quad (37)$$

From Eqs. (12) and (37), we can obtain the Oppolzer terms of the angular momentum axis and of the rotation axis

$$\text{Opp } R(\lambda') = \frac{\lambda'}{\Omega} \left[a^+ e^{i(\lambda' t + \eta)} - a^- e^{i(-\lambda' t - \eta)} \right] \quad (38)$$

Splitting Eq. (38) into a retrograde term and a prograde term gives

$$\text{Opp } R^{(+/-)}(\lambda') = \frac{(+/-)\lambda'}{\Omega} a^{(+/-)} e^{(+/-)i(\lambda' t + \eta)} \quad (39)$$

From the rigid-Earth part of Eq. (17) mA/C , from Eq. (29) and from Eqs. (33) and (37), we obtain

$$\text{Opp } H^{(+/-)}(\lambda') = \left(\frac{(+/-)A\lambda'}{C\Omega} + B_{\text{ratio}(+/-)}(\lambda') \right) \\ \times \frac{a^{(+/-)}}{1 + B_{\text{ratio}(+/-)}(\lambda')} e^{(+/-)i(\lambda' t + \eta)} \quad (40)$$

These expressions are written for one nutation frequency λ' expressed in space. We obtain the Oppolzer terms when summing over all the frequencies of nutations (not only the principal ones which have been evaluated here).

5 Numerical results and comparison

We have carried out the computations of the Oppolzer terms of the rotation and angular momentum axes with both the analytical and semi-analytical methods for the main nutation frequencies:

1. for the retrograde annual nutation with frequency $\lambda_1 = -\Omega(1 + \frac{1}{366.26})$ which corresponds to the ψ_1 tide;
2. for the prograde annual nutation with frequency $\lambda_1^* = -\Omega(1 - \frac{1}{366.26})$ which corresponds to the S_1 tide;
3. for the retrograde semi-annual nutation with frequency $\lambda_2 = -\Omega(1 + \frac{1}{183.12})$ which corresponds to the ϕ_1 tide;
4. for the prograde semi-annual nutation with frequency $\lambda_2^* = -\Omega(1 - \frac{1}{183.12})$ which corresponds to the P_1 tide;
5. for the retrograde 18.6 nutation with frequency $\lambda_3 = -\Omega(1 + \frac{1}{18.6 \times 366.26})$;
6. for the prograde 18.6 nutation with frequency $\lambda_3^* = -\Omega(1 - \frac{1}{18.6 \times 366.26})$;

7. for the retrograde 13.66 solar days nutation with frequency $\lambda_4 = -\Omega(1 + \frac{1}{13.697})$ which corresponds to the OO_1 tide;
8. for the prograde 13.66 solar days nutation with frequency $\lambda_4^* = -\Omega(1 - \frac{1}{13.697})$ which corresponds to the O_1 tide;
9. for the K_1 tide with frequency $\lambda_{K1} = -\Omega$ which corresponds to the precession.

We have solved the last case separately because we are faced with a zero frequency in space.

We give in Table 3 the amplitudes ($|\text{Opp } H_0|$) of the Oppolzer terms for the angular momentum axis ($\text{Opp } H = \text{Opp } H_0 e^{i(\lambda' + \eta)}$) and the amplitudes ($|\text{Opp } R_0|$) of the rotation axis ($\text{Opp } R = \text{Opp } R_0 e^{i(\lambda' + \eta)}$) calculated from our analytical expressions [see Eqs. (21) and (24) in Sect. 3] and from Wahr's nutation amplitudes as treated in the previous section (see Eqs. (39) and (40)). For comparison, we also give the results from Brzezinski's calculation based also on a normalized Wahr's B_{ratio} for the non-rigid Earth. Brzezinski (1986) works in the terrestrial frame which allows him to 'normalize' (or 'renormalize', or 'denormalize') Wahr's transfer function by dividing it by (λ'/Ω) . This function (called ' α_w ' in his paper, $\alpha_w = \frac{C}{A} B_{\text{ratio}} / \frac{\lambda'}{\Omega}$) is thus also defined at the diurnal frequency K_1 corresponding to precession, and thus allows him to evaluate the Oppolzer term for the precession.

Note that Brzezinski (1986) firstly evaluated his ' α ' function from the analytical theory of Sasao et al. (1980) and performed a computation of the diurnal polar motion of the rotation and angular momentum axes. In addition, he made the same computation with the equivalent 'normalized' Wahr's transfer function (' α_w '). He found a very good agreement at the level of 99% for R and 98% for H . The values that he gives in his tables and which we will compare here are those obtained from the 'normalized' B_{ratio} .

From the comparison of the numerical results of Table 3, we immediately see that an overall very good agreement is reached between the results of the analytical and semi-analytical methods and between the results of the different authors. We shall discuss the small differences below.

5.1 Comparison between the results from our semi-analytical approach based on Wahr's nutations and the results from Brzezinski (1986)

The Oppolzer terms calculated from Wahr's transfer function in the present study and those obtained from the normalized B_{ratio} by Brzezinski (1986) are very similar. Indeed, the error is less than 0.02 mas, except for the Oppolzer terms for the angular momentum axis at the ψ_1 tide frequency where the difference reaches 0.08 mas. The ψ_1 tide is very close to the FCN resonance and a small difference, such as a difference in the forcing amplitudes, can be amplified and can lead to such a departure.

The relative error between our results and those of Brzezinski is the most important for the nutation corresponding to the OO_1 tide (λ_4). However, we believe that this is not significant because we are dealing with very small quantities.

Generally, we think that the eventual differences could result from the different tidal forcing used: Brzezinski uses Cartwright and Tayler (1971) and Cartwright and Edden (1973) tide-generating potential while we use the nutations published by Wahr (1981a, b) and derived from Kinoshita's (1977) rigid-Earth nutations.

Brzezinski gives a value for the Oppolzer terms at the K_1 frequency using the normalized B_{ratio} approach. We did perform the same kind of operation because we are working in a celestial frame and because Wahr's theory is not developed to retrieve any offset between axes and is dedicated to nutations. The B_{ratio} of Wahr is zero at the precession frequency, which does not allow us to compute directly the Oppolzer terms for the precession from it. Instead, on the one hand, we have performed computations from the analytical expression of the Oppolzer terms and, on the other hand, we have used the same approach as Brzezinski's normalized B_{ratio} (called α_w in his paper), to compute the Oppolzer terms for the precession (see Table 3).

The Oppolzer terms for precession of the rotation axis for a non-rigid Earth are the same as for a rigid Earth as explained after Eq. (21). They can be obtained from the Euler kinematic relation

Table 3. Amplitude of the Oppolzer terms (in mas) obtained by the analytical method ($|\text{Opp } H_0|$ and $|\text{Opp } R_0|$) and by the semi-analytical method ($|\text{Opp } Hw_0|$ and $|\text{Opp } Rw_0|$) for the angular

momentum axis H and rotation axis R . ($|\text{Opp } Hb_0|$ and $|\text{Opp } Rb_0|$) are the results based on a semi-analytical method obtained by Brzezinski (1986)

	$ \text{Opp } Hw_0 $	$ \text{Opp } Hb_0 $	$ \text{Opp } H_0 $	$ \text{Opp } Rw_0 $	$ \text{Opp } Rb_0 $	$ \text{Opp } R_0 $
λ_1, ψ_1	6.06	6.15	6.02	0.085	0.086	0.083
λ_2, ϕ_1	1.80	1.79	1.74	0.13	0.13	0.13
$\lambda_3, 18.6r$	30.16	30.17	28.71	1.18	1.18	1.15
λ_4, OO_1	0.0016	0.0014	0.017	0.26	0.27	0.27
λ_1^*, S_1	0.75	0.75	0.97	0.07	0.07	0.09
λ_2^*, P_1	21.15	21.16	20.36	3.00	3.00	2.91
$\lambda_3^*, 18.6p$	3.87	3.87	3.72	0.17	0.17	0.17
λ_4^*, O_1	9.25	9.24	8.66	6.87	6.87	6.38
λ_{K1}	207.85	207.9	198	8.71	8.71	8.51

$$\Delta \dot{\epsilon} - i\Delta \dot{\psi} \sin \epsilon_0 = -\Omega m c e^{i\Phi}$$

Working only with precession, we have $\Delta \dot{\epsilon} = 0$ and thus

$$m_{\text{preces}} e^{i\Phi} = \frac{i\Delta \dot{\psi} \sin \epsilon_0}{\Omega}$$

The lunisolar precession constant $\Delta \dot{\psi}$ being $50.2909655''/\text{year}^{-1}$ and $\sin \epsilon_0$ being 0.3978, this yields

$$m_{\text{preces}} = 8.71 \text{ mas}$$

Taking Eq. (12), we obtain

$$\text{Opp } R_0(K_1) = m_0(K_1) = 8.71 \text{ mas}$$

The Oppolzer terms for precession of the angular momentum axis for a non-rigid Earth can be evaluated from the normalized B_{ratio} (which is no longer singular at the precession frequency) and from the Oppolzer terms for a rigid Earth for precession of H , which, in turn, can be obtained from the Oppolzer terms of the rotation axis R by multiplying by the factor A/C (see Capitaine 1982). We have obtained 207.85 mas, as given in Table 3.

5.2 Comparison between the results from our semi-analytical approach based on Wahr's nutations and the results from our analytical approach

The main goal of this paper was to compare the results from the semi-analytical approach and the computations with the analytical method based on the solution of two Liouville equations (one for the whole Earth and a second for the liquid core). We show in Table 3 that the correspondence between the numerical values from the analytical method and those based on Wahr's results, is satisfying. A percentage evaluation of the relative errors was made and showed that it was always under 8%, except for the nutation at λ_1^* frequency where it reaches about 30%. The values at λ_1^* are quite small for the angular momentum axis [0.75 mas (semi-analytical), 0.97 mas (analytical)] and even smaller for the rotation axis [0.07 mas (semi-analytical), 0.09 mas (analytical)]. Since the precision of the estimated results is no more than 0.05 mas, the relative error is magnified when dealing with such small terms. This is the case for the λ_4 nutation as well (OO_1) where for the angular momentum axis, the Oppolzer terms are of the order of 2×10^{-3} mas for the semi-analytical approach and 2×10^{-2} mas for the analytical method. The relative error measure is meaningless for such small terms, the absolute error being of the order of 10^{-2} mas only.

Apart from the truncation errors which perturb the smaller terms, the differences between the Oppolzer terms from the two approaches come from several sources.

First, the Oppolzer terms' values are linked directly to the potential amplitude and are themselves with their associated errors amplified by the potential values and by the resonance effects. Second, in the theory of Wahr, the Earth is composed of an elastic mantle, a liquid core and a solid inner core. Moreover, Wahr's Earth model is stratified and he integrates numerically from the center of

the Earth to the surface, taking into account the radial dependency of the rheological properties of the Earth. In addition, Wahr considers general motions in the fluid core including a differential rotation. In the analytical case, we have taken several approximations and simplifications, as a two-homogeneous-layer Earth with the Poincaré hypothesis for the core. We must also note that Wahr's FCN frequency is 460 days whereas ours, obtained by the analytical computation is 455 days (Legros et al. 1993), in better agreement with the observed value of approximately 433 days (Defraigne et al. 1994, 1995a).

We have looked at the effect of an inner core on the Oppolzer terms for the angular momentum axis in the case of precession and we saw that this effect was very small (0.6 mas) compared to the one of the liquid core alone (192 mas). Indeed, it is coherent with the results of Dehant et al. (1993), who showed that the inner core had a very small influence on m , c and h , when compared to the effects of the core and the mantle.

Even if the present analytical determination seems to be less precise than the one using Wahr's results, its great advantage is in the possibility of separating the origin of the different contributions to the value of the Oppolzer terms. For instance, we see that the liquid core is the most significant contributor to the Oppolzer amplitude because of the presence of the resonance. For the angular momentum axis at the K_1 frequency, the amplitude of the rigid Oppolzer terms is of the order of 6 mas while the liquid core is responsible for a 192 mas increment in the h term. We see as well that the elasticity contained in the c terms is less significant relative to the FCN amplification, except away from resonance, as at the λ_4^* frequency corresponding to O_1 .

In order to illustrate the importance of the analytical decomposition, let us focus on the Oppolzer terms' expressions given by Eqs. (21) and (24) and consider the different mechanisms contributing to the Oppolzer terms. We see in the expression of the rotation axis Oppolzer terms [Eq. (21)] that the resonance effect is not very important because it is multiplied by a small term. So, the amplitude of these terms will be essentially modified by the amplitude of the external forcing potential W_0 . Indeed, the largest Oppolzer term is the offset at K_1 frequency where W_0 is equal to $0.918 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Then, for the O_1 tide, the Oppolzer term's amplitude is 6.38 mas and the potential one is $0.65 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. On the contrary, for the ψ_1 tide, the potential amplitude is very small and so is the corresponding Oppolzer term of the rotation axis.

For the angular momentum, the expression of the Oppolzer terms depends not only on m but also on h and c [see Eq. 24] and shows a large resonance associated with the FCN. Of course, the potential amplitude also plays an important role. The two effects act, in fact, in conjunction with each other. For the ψ_1 tide which is very close to the resonance, the Oppolzer terms of H are not so high because the associated potential is very low (0.007). For the retrograde 18.6-year nutation which is relatively close to the resonance, the potential is quite high ($0.12 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) and so are the Oppolzer terms. On the contrary, for the OO_1 tide, we are far away from the

resonance and, the potential being very small, the Oppolzer terms are very low. For the O_1 tide we are far from the resonance but the potential amplitude is $0.65 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Thus the effect on the incremental inertia products c and on the rotation m is important and the Oppolzer terms reach about 9 mas. For the precession, we are close to the resonance at the diurnal frequency and, moreover, the potential amplitude is very high, so that the two effects together lead to an increase in the Oppolzer term of the angular momentum axis from a rigid Earth of about 200 mas.

The previous discussion is summarized in Table 4, where we present the relative contribution of each part of the non-rigid Earth to the values of the Oppolzer terms.

5.3 Results in graphics

As an illustration, the Oppolzer time series for the angular momentum Opp $H(t)$ and for the rotation axis Opp $R(t)$ are drawn in Fig. 2a and b for the year 1995. They result from the sum of all the nutation frequencies except the precession. We used a program estimating the nutations and added Wahr’s B_{ratio} formulae in order to determine the Oppolzer terms from the semi-analytical method for all frequencies (except precession). Figure 2a, b shows the Oppolzer terms of the angular momentum (a) and rotation (b) axes around the CEP pole. As we work on 1 year of estimation, the 18.6-year nutation is not visible on the Oppolzer terms. We clearly see the annual movement, the semi-annual movement (two large limit circles) and the 13.66-day phenomena (the little curly curves superimposed on the semi-annual circles). The other nutation frequencies are not clearly visible because the corresponding Oppolzer terms are very small.

Table 4. Estimations of the different analytical contributions to the Oppolzer terms as a function of the frequency. m_0 gives the Oppolzer term Opp R_0 of the rotation axis, $A/Cm_0 + h_0/C\Omega + c_0/C$ gives the Oppolzer term Opp H_0 of the angular momentum axis. The effect of the liquid core resonance is mainly contained in h , while c and m contain mainly the effects of elasticity and redistribution of mass in the Earth due to its non-rigidity. Note that the sign convention here is the opposite to Brzezinski’s and Wahr’s (we define the diurnal rotation as negative when retrograde, while they consider it as positive)

	$m_0(\text{mas})$	$\frac{h_0}{C\Omega}(\text{mas})$	$\frac{c_0}{C}(\text{mas})$
λ_1, ψ_1	8.3×10^{-2}	-6.07	-3.6×10^{-2}
λ_2, ϕ_1	0.13	-1.82	-4.6×10^{-2}
$\lambda_3, 18.6r$	1.15	27.9	-0.34
λ_4, OO_1	0.27	-0.16	-0.092
λ_1^*, S_1	0.092	0.91	-2.9×10^{-2}
λ_2^*, P_1	-2.91	-18.40	0.95
$\lambda_3^*, 18.6p$	-0.17	-3.5	-5.1×10^{-2}
λ_4^*, O_1	-6.38	-4.4	2.12
λ_{K1}	8.51	192	-2.5

6 Application: axes positions and offsets at epoch J2000

We propose here to give the axis position at J2000 as a function of the Oppolzer terms and offsets calculated in the previous sections from both methods.

We treat separately the precession case which is associated with the response of the Earth to an exactly diurnal forcing. In this case, we obtain the constant offsets between the different axes when observed from a space-fixed frame. These quantities are very interesting to estimate because they can be compared with the observed values as they will be determined by very long base interferometry (VLBI) for J2000 (Arias 1994). In terms of nutation angles, any axis position can be written from its precession, obliquity rate, nutation, and mean position in the celestial reference frame (CRF) (noted $\Delta\epsilon_{\text{offset}}$ and $\Delta\Psi_{\text{offset}}$). At any time t we have

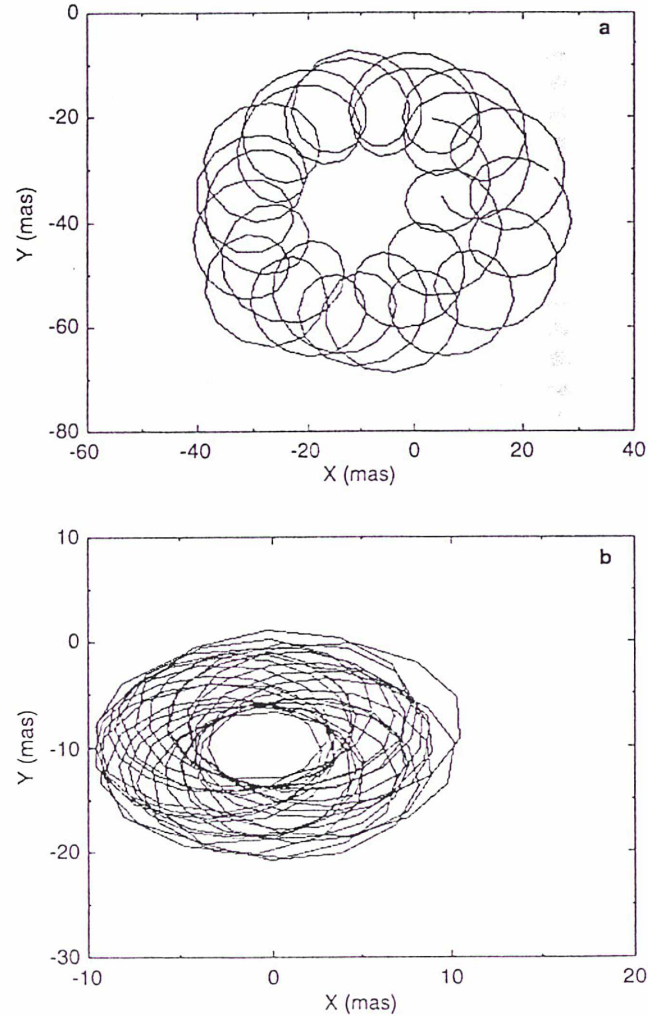


Fig. 2. The Oppolzer terms (mas) of a the angular momentum axis and of b the rotation axis around the CEP in the celestial equatorial plane for the year 1995. Along X is the in-phase component (cos) and along Y the quadrature component (sine)

$$\psi(t) = \Delta\psi_{\text{offset}} + \dot{\psi}t + \sum_s \Delta\psi_{\text{nut}}(t) \quad (41)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{\text{offset}} + \dot{\varepsilon}t + \sum_s \Delta\varepsilon_{\text{nut}}(t) \quad (42)$$

6.1 Figure axis

We apply the previous formulae to the figure axis of the rigid Earth at epoch J2000 ($t = 0$). Let F_{Rig} be the figure axis position (of the rigid Earth), ΔF_{Rig} the offset, and δF_{Rig} the result when summing over all the nutation frequencies (index s). We obtain

$$F_{\text{Rig}} = \Delta F_{\text{Rig}} + \delta F_{\text{Rig}} \quad (43)$$

$$= \Delta F_{\text{Rig}} + \sum_s \delta F_{\text{Rig}}^s \quad (44)$$

This can also be written

$$\begin{aligned} F_{\text{Rig}} &= \Delta F_{\text{Rig}} - \Delta H + \Delta H - \Delta B + \Delta B + \delta F_{\text{Rig}} \\ &= -\text{Opp}_{\text{offset}} H_{\text{rigid}} + \text{Opp}_{\text{offset}} H \\ &\quad - \left(\sum_s (1 + B_{\text{ratio}}^s) \right) \delta F_{\text{Rig}}^s + \sum_s \delta F_{\text{Rig}}^s \\ &= -\text{Opp}_{\text{offset}} H_{\text{rigid}} + \text{Opp}_{\text{offset}} H \\ &\quad - \left(\sum_s B_{\text{ratio}}^s \right) \delta F_{\text{Rig}}^s \end{aligned}$$

Here, B stands for the CEP and H for the angular momentum axis. $\text{Opp}_{\text{offset}}$ Axis is the contribution corresponding to the K_1 frequency in the sum constituting the Oppolzer terms and evaluated from the analytical method.

6.2 Other axes

The method is rigorously the same when applied to any other axis. We thus managed to express the different axes positions at epoch J2000 as a function of the Oppolzer terms, Wahr's B_{ratio} and associated non-rigid nutations. We did not try to determine precise numerical results because our interest was only to give an idea of the offset existing between the different axes of the Earth for the epoch J2000. More precise computations have to be made if we want to compare with observations. In order to give another example, the spatial offset at J2000 between the rotation axis and the angular momentum axis for a non-rigid Earth is

$$H - R = \Delta H - \Delta R + \Delta B - \Delta B + \delta H - \delta R \quad (45)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Opp}_{\text{offset}} H - \text{Opp}_{\text{offset}} R + \sum_s \text{Opp} H^s \\ &\quad - \sum_s \text{Opp} R^s. \end{aligned} \quad (46)$$

From a numerical evaluation of these terms, we show that the difference between these two axes for a non-

rigid Earth is quite important (100–200 mas) because $\text{Opp}_{\text{offset}} H$ is important. Indeed, the other terms entering in the determination are much smaller: the sum of all of the Oppolzer terms of the rotation axis is of the order of 9 mas, the sum for the angular momentum axis of the order of 30 mas, and the offset for R is around 8 mas; the offset for H , because of the resonance of the core and the large potential amplitude, reaches 200 mas.

We will give another example which can be interesting for VLBI intensive campaigns during which we have access to instantaneous observations of the Earth rotation and Earth orientation parameters (Bolotin et al. 1997). It concerns the relative positions of the rotation axis for a non-rigid Earth R and the CEP, denoted B

$$\begin{aligned} R - B &= \Delta R + \delta R - B \\ &= \Delta R - \Delta B + \Delta B + \delta R \\ &= \text{Opp}_{\text{offset}} R + \delta R - \delta B \\ &= \text{Opp}_{\text{offset}} R + \sum_s \text{Opp} R^s \end{aligned}$$

As we calculate this offset for J2000, the position of the CEP is zero by definition, in the reference frame linked to the CEP ($B = 0$). We can thus say that the offset between the rotation axis of the non-rigid Earth and the CEP at J2000 is small because it is the sum over all frequencies of the rotation axis' Oppolzer terms. For the precession, the offset is of the order of 8.5 mas and for the other frequencies, the higher value is -6.9 mas for O_1 . Consequently, the offset between these two axes at J2000 is around 1 mas.

7 Conclusion

We have evaluated the Oppolzer terms of the rotation and the angular momentum axes for the main nutation frequencies in the case of a non-rigid Earth from two different methods: an analytical method based on the solutions of the Liouville equations for a two-layer Earth, and a semi-analytical method which used Wahr's nutations. The results obtained only differ by a small amount and are generally in good agreement. For the numerical computations, the semi-analytical method using Wahr's theory is more accurate, but in order to understand the contributions of the different hypotheses concerning the physics of the Earth's interior to the value of the Oppolzer terms, the analytical method is more adequate.

In particular, it allowed us to show the large influence of the FCN resonance on the Oppolzer terms of the angular momentum axis, while for the Oppolzer terms of the rotation axis, the amplitude of the forcing expressed in the terrestrial frame has the largest influence.

Acknowledgements. The authors would like to thank Christian Bizouard and Nicole Capitaine for valuable discussions and for providing software and support for our work. A. Brzezinski and J. Wahr, the two reviewers of this paper, are acknowledged for their very constructive, detailed and complete review. Denis D. McCarthy is thanked for his help in improving the English of this paper.

References

- Arias EF (1994) Relationships between the extragalactic reference frame and the precession-nutation models. *JD19, XXI IAU General Assembly, The Hague, Netherlands*
- Bolotin S, Bizouard C, Loyer S, Capitaine N (1997) High frequency variations of the Earth's instantaneous angular velocity vector. *Astron Astrophys* 317: 601–609
- Brzezinski A (1986) Contribution to the theory of polar motion for an elastic earth with liquid core. *Manuscr Geod* 11: 226–241
- Capitaine N (1982) Effets de la non rigidité de la Terre sur son mouvement de rotation: Etude théorique et utilisation d'observations. Thèse d'état, Observatoire de Paris
- Cartwright DE, Edden AC (1973) Corrected tables of tidal harmonics. *Geophys J R Astron Soc* 33: 53–264
- Cartwright DE, Tayler RJ (1971) New computations of the tide-generating potential. *Geophys J R Astron Soc* 23: 45–74
- Defraigne P, Dehant V, Hinderer J (1994) Stacking gravity tide measurements and nutation observations to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble. *J Geophys Res* 99(B5): 9203–9213
- Defraigne P, Dehant V, Hinderer J (1995a) Correction to Stacking gravity tide measurements and nutation observations to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble. *J Geophys Res* 100(B2): 2041–2042
- Defraigne P, Dehant V, Paquet P (1995b) Link between the prograde and retrograde nutations and the nutations in longitude and in obliquity. *Celest Mech* 62: 363–376
- Dehant V, Hinderer J, Legros H, Leffitz M (1993) Analytical approach to the computation of the Earth, the outer core and the inner core rotational motions. *Phys Earth Planet Int* 76: 259–282
- De Vries D, Wahr JM (1991) The effects of the solid inner core and non-hydrostatic structure on the Earth's forced nutations and Earth tides. *J Geophys Res* 95(B5): 8275–8293
- Frede V (1996) Détermination des termes d'Oppolzer de l'axe du moment cinétique et de l'axe de rotation pour une Terre non rigide. DEA en Astronomie fondamentale, mécanique céleste et géodésie, Observatoire de Paris
- Kinoshita H (1977) Theory of the rotation of the rigid Earth. *Celest Mech* 15: 277–326
- Legros H, Hinderer J, Leffitz M, Dehant V (1993) The influence of the solid inner core on gravity changes and spatial nutations induced by luni-solar tides and surface loading. *Phys Earth Planet Int* 76: 283–315
- Legros H (1987) Sur quelques problèmes de dynamique planétaire. PhD Thesis, Université Louis Pasteur de Strasbourg
- Mathews PM, Buffett BA, Herring TA, Shapiro II (1991a) Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics, 1, Theory. *J Geophys Res* 96(B5): 8219–8242
- Mathews PM, Buffett BA, Herring TA, Shapiro II (1991b) Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics, 2, Numerical results and comparisons. *J Geophys Res* 96(B5): 8243–8257
- McCarthy DD (1996) IERS Conventions. IERS Tech Note 21, Paris Observatory
- McClure P (1973) Diurnal polar motion. GSFC Rep X-529-73-259, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland
- Roosbeek F (1996) RATGP: an harmonic development of the tide generating potential using an analytical method. *Geophys J Int* 126: 197–204
- Roosbeek F and Dehant V (1998) RDAN97. An analytical development of rigid Earth nutations series using the torque approach. *Celest Mech Dynamical Astron.* 70 pp 215–253
- Roosbeek F, Dehant V (1998) Precession, obliquity-rate, and nutations for a rigid Earth from the torque approach. *Celest Mech*
- Sasao T, Okubo S, Saito M (1980) A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth. In: Fedorov EP, Smith ML, Bender PL (eds) *Proceedings of IAU Symposium no 87: Nutation and the Earth's rotation*, Kiev, May 1977. Reidel, Dordrecht, pp 165–183
- Seidelmann PK (1982) 1980 IAU theory of nutation: the final report of the IAU working group on Nutation. *Celest Mech* 27: 79–106
- Wahr JM (1979) The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth. PhD Thesis, University of Colorado
- Wahr JM (1981a) A normal mode expansion for the forced response of a rotating Earth. *Geophys J R Astron Soc* 64: 651–675
- Wahr JM (1981b) The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. *Geophys J R Astron Soc* 64: 705–727
- Woolard EW (1953) Theory of the rotation of the earth around its center of mass. *Astr J* 58, 2

Annexe 2: Detectability of Deterministic Nonlinear Processes in Earth Rotation Time Series

I-Embedding

Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series—I. Embedding

V. Frede¹ and P. Mazzega²

¹ *Observatoire de Paris, 61, avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France. E-mail: fred@hplvbi.obspm.fr*

² *UMR 5566-CNRS-CNES, 8 av. E. Belin, 31401 Toulouse cedex 4, France. E-mail: ciamp@boreal-ci.cst.cnes.fr*

Accepted 1998 November 27. Received 1998 November 9; in original form 1998 January 26

SUMMARY

Atmospheric and oceanic flows generate the main perturbations in the Earth's rotation for periods shorter than about 100 days. Both their own dynamics and the Earth's response being non-linear, we expect to find non-linear low-dimensional deterministic signatures in filtered time-series of Earth orientation parameters (EOP). Starting from daily observations of the length of day (LOD) and polar motion components (PMX, PMY) spanning more than 27 years, we apply non-linear time-series analysis techniques based on the embedding theory in order to determine the dimensional (this paper) and dynamic (Paper II) characteristics of the sought signal source. Estimates of the time delays required to embed the scalar data time-series in a pseudo-phase space E^* are obtained from the average mutual information function. They are of 10 days for LOD, 15 days for PMX and 18 days for PMY. The dimension D_{E^*} of the embedding space E^* then has to be determined to unfold the expected source attractor. We try two independent determinations, based on the percentage of global false neighbours and on the correlation integrals. We obtain embedding dimensions between 5 and 7 for the three EOP time-series. The robustness of the results with regard to various data contaminations and series degradations is checked throughout. Finally, 3-D projections of delayed coordinate data vectors are drawn. They are clearly different from stochastic power-law noise and seem to issue from a smooth dynamical system whose dynamical characteristics are investigated in Paper II.

Key words: dimension theory, Earth rotation, non-linear analysis.

1 INTRODUCTION

Fluctuations in the orientation of the Earth for periods ranging from one day to 100 days are mainly caused by atmospheric and oceanic torques exerted on the solid Earth (Eubanks *et al.* 1988; Dickey *et al.* 1992; Eubanks 1993; Ponte *et al.* 1998; Marcus *et al.* 1998). By changing the instantaneous inertia tensor and relative angular momenta, the mass motions of the geophysical fluids also contribute to the variations in Earth's rotation. These time-dependent forcing terms enter the non-linear coupled ordinary differential equations (Liouville's equations) which describe the dynamical evolution of the (x, y) components of the pole of rotation and rotation rate as observed, for instance, in a terrestrial reference frame (Lambeck 1980). It should be stressed that non-linear processes are almost ubiquitous in this system, not only because of the Earth's response, but also at all space- and timescales of the fluid flows. Indeed, after low-dimensional chaotic attractors were theoretically postulated in turbulent flows (see e.g. Berge *et al.* 1983; Ruelle 1991), they were unambiguously detected

from climatic to subdaily timescales in records of atmospheric state variables (Nicolis & Nicolis 1984; Essex *et al.* 1987; Tsonis & Elsner 1988) as well as from meteorological model forecasts (Fraedrich 1987; Palmer 1993). Although less documented, similar characterizations would also apply to ocean dynamics (see e.g. Osborne *et al.* 1986).

From these premises, we ought to be able to trace back corresponding non-linear signatures in the time-series of measured pole motion [PMX(t), PMY(t)] and length of day LOD(t). At present, four reasons can be invoked to account for the significant departures between the observed and predicted series: (1) the comparisons are based on the linearized Liouville equations; (2) only approximate models of the geophysical fluid dynamics are used (Dehant *et al.* 1997); (3) questions remain open about the complete source of excitations; (4) the measured parameters are contaminated by various types of noise in the data time-series.

We consider here that the sole source of information we have is the Earth orientation parameters (EOP) times-series estimated via a combination of observations derived from several

modern geodetic techniques. We investigate the detectability of deterministic low-dimensional non-linear processes from these data sets and the possibility of extracting both their dimensional (this paper) and their dynamical (Paper II, Frede & Mazzega 1999) characterizations. Such information would lead to a better understanding of the fluctuations of the Earth's rotation when compared to known signatures of geophysical fluid flows. It would also impinge on the medium- and long-range forecasts of the Earth's orientation, for example by putting limitations on the applicability of linear predictive algorithms or, in the presence of chaos, by defining a theoretical horizon of predictability (Gershenfeld & Weigend 1993).

Linear methods of time-series analysis are inadequate for detecting and characterizing non-linear processes. For example, Fourier spectra do not distinguish between coloured noises and chaos, both spectra being broad band. The usual autocorrelation function, where only successive data along the time axis are considered, cannot measure 'non-linear correlations' resulting from the dynamical system being returned in the neighbourhood of a past state in the appropriate multidimensional phase space. Over the last decade, new analysis tools based on the theory of dynamical systems have been developed (Abarbanel 1996). Most instrumental devices only provide a few scalar time-series of measurements from a complex system involving a large number (possibly infinite) of state variables evolving in their phase space E with dimension D_E . Due to the non-linear coupling between the state variables, a single data series may still carry information about several such variables, thus the approach consists of embedding the data time-series in a multidimensional pseudo-phase space E^* , different from the true phase space E . From reconstructed pseudo-orbits, we then extract information about the underlying unknown system, thanks to the smooth properties of the embedding operations (Sauer *et al.* 1991).

Although we cannot retrieve the orbits of the genuine dynamical variables $z(t)$ in phase space E , the pseudo-orbits of D_{E^*} -dimensional vectors $y(t)$ linked to observations $x(t)$ in E^* have temporal evolutions that 'follow' to some extent those of the z s. More precisely, their dimensional and dynamical characteristics are closely related to those of the original system variables. In particular, if the reconstructed orbits remain on a manifold of low dimension $D_A \leq D_{E^*}$ embedded in E^* , we can conclude that the original system has an attractor. If its dimension D_A is fractal, the attractor is strange. The system is chaotic if two nearby orbits at a given time move off exponentially from each other over a finite time interval, a condition that can be checked from the embedded data vectors $y(t)$. If the dimension is an integer, we deal with torus-like attractors which capture periodic motions.

In this paper we will focus on two quantities related to the embedding problem: the time delay τ from which it is possible to reconstruct vectors in the pseudo-phase space E^* from the observations only (Takens 1981), and the dimension of the pseudo-phase space D_{E^*} , which gives an indication of how many dimensions are necessary to unfold the reconstructed orbits before proceeding to dynamical characterization of the underlying system. Note that we cannot reconstruct the true phase space of dimension D_E or the true underlying differential equations.

Hereafter we use daily observations of the polar motion [PMX(t), PMY(t)] and length of day LOD(t) spanning about 27 years. Each time-series is contaminated by undesirable

geophysical signals which need to be filtered out (Chandler wobble, tides, annual and seasonal fluctuations) and by noise. The finite sampling rate, limited series length and deterministic and stochastic contaminations are likely to hamper the characterization of any non-linear signal contained in the EOP time-series. The robustness of the results produced by the corresponding algorithms must be carefully checked and their meaning considered with caution. Thus, this paper deals with the problem of the detectability of a postulated low-dimensional deterministic non-linear signature in the empirical time-series of polar motion and length of day. To solve this problem we applied our calculations to the real series as well as to the same series contaminated with known synthetic power-law noise or a chaotic process. In this manner we are able to test the sensitivity of the dimensional (this paper) or dynamical (Paper II) characterizations we obtain to various contaminations and to modifications of some key parameters of the algorithms.

In Section 2, we introduce the EOP series and describe the different synthetic contaminations that will be used throughout this study. Section 3 gives a brief overview of the embedding theory. Section 4 is devoted to the choice of the time delay τ that will be used to embed the scalar time-series in the pseudo-phase space E^* . We then try to estimate the embedding dimension D_{E^*} both from a global false neighbour algorithm (Section 5) and from the correlation integrals (Section 6). The salient results and their significance are discussed in Section 7. We end with a conclusion (Section 8) that links our results concerning the detectability and dimensionality of a deterministic non-linear process in EOP time-series with its dynamical properties, which are considered in Paper II.

2 EOP TIME-SERIES AND SYNTHETIC CONTAMINATIONS

Several geodetic techniques provide independent determinations of EOP time-series. The measured quantities are different in each case (offset of the arrival time of a radio signal for Very Long Baseline Interferometry, traveltime of laser pulses to the Moon for Lunar Laser Ranging or to artificial satellites for Satellite Laser Ranging), as are the corrections to be applied to the raw measurements. However, after the required data processing all these techniques provide estimates of the orientation of a conventional terrestrial frame relative to a conventional inertial celestial frame. This orientation is decomposed into the product of several matrices whose coefficients are linked to the EOP.

We are interested in the EOP time-series specified by the following:

- (1) the equatorial coordinates of the celestial pole CEP in a terrestrial body fixed frame (PMX, PMY);
- (2) the rate of rotation given by an angle UT1 and transformed by a time derivative into the length of day (LOD);
- (3) the offsets of nutation which represent the celestial coordinates of the CEP.

We will not deal with those series related to nutations as they are quite well understood and predictable and thus apply the rotation gauge (Eubanks 1993). The pole coordinates are referred to as the polar motion. PMX(t) and PMY(t). The series LOD(t) gives the variability of the length of day compared

to a uniformly rotating earth. For this particular study, we start from the series C04 produced by the International Earth Rotation Service (see IERS 1997 for details). This series results from a linear combination of several series coming from different technique centres (VLBI, Global Positioning System, SLR, etc.) (Gambis 1996). A smoothing is applied during the combined data processing so that for the last decade periods under three days are removed and periods under 15 days are not completely seen because of the transfer function of the smoothing. Going back in time, the smoothing is much heavier. For example the cut-off period is about 30 days for the polar motion time-series and 15 days for the LOD series in the 1970s (see Table 0-6 in IERS 1996).

The resulting series in $PMX(t)$, $PMY(t)$ and $LOD(t)$ are sampled at a 1 datum day⁻¹ rate. Since the availability of VLBI measurements, their accuracy has been considerably improved. It is estimated to be about 0.3 mas for the PM series and 0.02 ms for LOD for recent years. It is probably worse by one or even two orders of magnitude in the 1970s. For our study we remove the well-known zonal tides in LOD (Yoder *et al.* 1981) and we eliminate strong long-term periodicities (annual, semi-annual, Chandler wobble) by performing a filter which retains periods shorter than 100 days. We choose series of 10 080 points from January 1970 to mid-1997.

For algorithm testing purposes, we generate four synthetic series of 10 080 points each. Three of them are stochastic noises named by their spectral power law: a white noise $f0$, a flicker noise $f-1$ and a random walk $f-2$ (where f stands for frequency). The fourth synthetic series (named *lor*) is extracted from a time integration of the Lorenz equations (Lorenz 1963) with parameters $\sigma=10$, $\rho=28$, $\beta=8/3$. The initial conditions $(-4.62, -6.61, 17.94)$ are chosen on the attractor. The time evolution of the first state variable constitutes our series. It gives about 1000 chaotic oscillations over the 10 080 days. High-pass filtering is applied to the three EOP series (PMX , PMY , LOD), to the noise series (white noise $f0$, flicker noise $f-1$, random walk $f-2$) and to the chaotic series (*lor*). We give in Table 1 the rms of each filtered series, the mean value being zero for each.

With the previous synthetic series ($f0$, $f-1$, $f-2$ and *lor*) we then generate contaminated EOP series in the following way: to each EOP series we add a 10 per cent rms contamination,

$$EOPc(i) = EOP(i) + 0.1(rms_{EOP}/rms_{CONT})CONT(i), \quad (1)$$

where EOP stands for LOD , PMX or PMY , while $CONT$ stands for $f0$, $f-1$, $f-2$ or *lor* and i is the sample index. rms_{EOP} and rms_{CONT} are the rms of the EOP and $CONT$ series respectively. The contaminated series $EOPc$ will be used to test

Table 1. Rms values of the filtered data time-series of the polar motion components (PMX , PMY), the length of day (LOD) and the synthetic contaminations (white noise $f0$, flicker noise $f-1$, random walk $f-2$ and Lorenz chaos *lor*). Each time-series has 10 080 samples.

Series	Unit	rms
PMX	mas	2.30
PMY	mas	1.57
LOD	ms	0.117
$f0$	none	0.99
$f-1$	none	0.98
$f-2$	none	0.021
<i>lor</i>	none	0.29

the robustness of our results to noise and low-dimensional deterministic contaminations. The 10 per cent contamination level is unrealistically high so we are quite confident in the results, which are robust against such time-series perturbations.

In Fig. 1 we show the log-log power spectra of the EOP series (LOD in a, PMX in c, PMY in d) and of the Lorenz series (*lor* in b). Superimposed on these spectra, the three lines correspond to the log-log spectral tendency of a white noise (0), a flicker noise (-1) and a random walk (-2). We see that the EOP series show broad-band spectra with no residual tidal (Fig. 1a) or seasonal lines. Moreover, these spectra exhibit complex behaviour, their slopes changing significantly with frequency. Indeed, for periods near 100 days, their power increases and then decreases for intermediate periods, finally approaching the power law of a random walk or flicker noise (it is not clear which) for very short periods. A broad-band spectrum is also usually associated with a non-linear phenomenon, as is illustrated by the Lorenz chaotic series (Fig. 1b). Thus, at this level we simply cannot qualify the EOP series as high-dimensional processes with well-defined power-law spectra. Our investigation turns to other possibilities such as a mixture of stochastic processes or low-dimensional deterministic processes.

3 RECONSTRUCTED EMBEDDING OF A TIME-SERIES

The basic step in the non-linear analysis of a scalar time-series consists of embedding the data in a multidimensional pseudo-phase space E^* . In E^* , the data are arranged so as to form a curve (with the time as a parameter), from which several geometric characteristics can be extracted. These characteristics are intimately related to the dynamical regime of the source of the data and to its stability, as will be explained in detail below.

Let us illustrate this idea with a classical example taken from the dynamical system theory, the Lorenz attractor. No reference to the physical context of this model needs to be made here but details can be found in the original Lorenz (1963) paper (see also Berge *et al.* 1983). The Lorenz model is built from three ordinary differential equations with real coefficients (σ, ρ, β) . The system state at any time t is given by the three state variables $[x(t), y(t), z(t)]$. The corresponding trajectory evolves in a space called the phase space E whose dimension is $D_E=3$ and in which the dynamics are completely captured. For random initial conditions $[x(0), y(0), z(0)]$ and appropriate parameters (σ, ρ, β) , all the corresponding trajectories are rapidly confined in a bounded region of E , the attractor. Starting with initial conditions far from the attractor will only generate transients that will die out at an exponential rate. Because of strong non-linear coupling in the Lorenz system, the three state variables are active. The dynamical dimension D_L of the system somewhat quantifies the strength of this coupling. Incidentally, $D_L=3$ for this system but in general $D_L < D_E$ (see Paper II). The D_L volume of phase space not being completely filled by the trajectories, an attractor dimension D_A is defined as well. With the parameter values chosen for our synthetic series *lor*, the non-integer dimension value $D_A=2.06$ is related to the instability of the trajectories populating the attractor.

So, from a set of n coupled ordinary differential equations, the orbit describing the time evolution of the system state 'naturally' takes place in the n -dimensional phase space E .

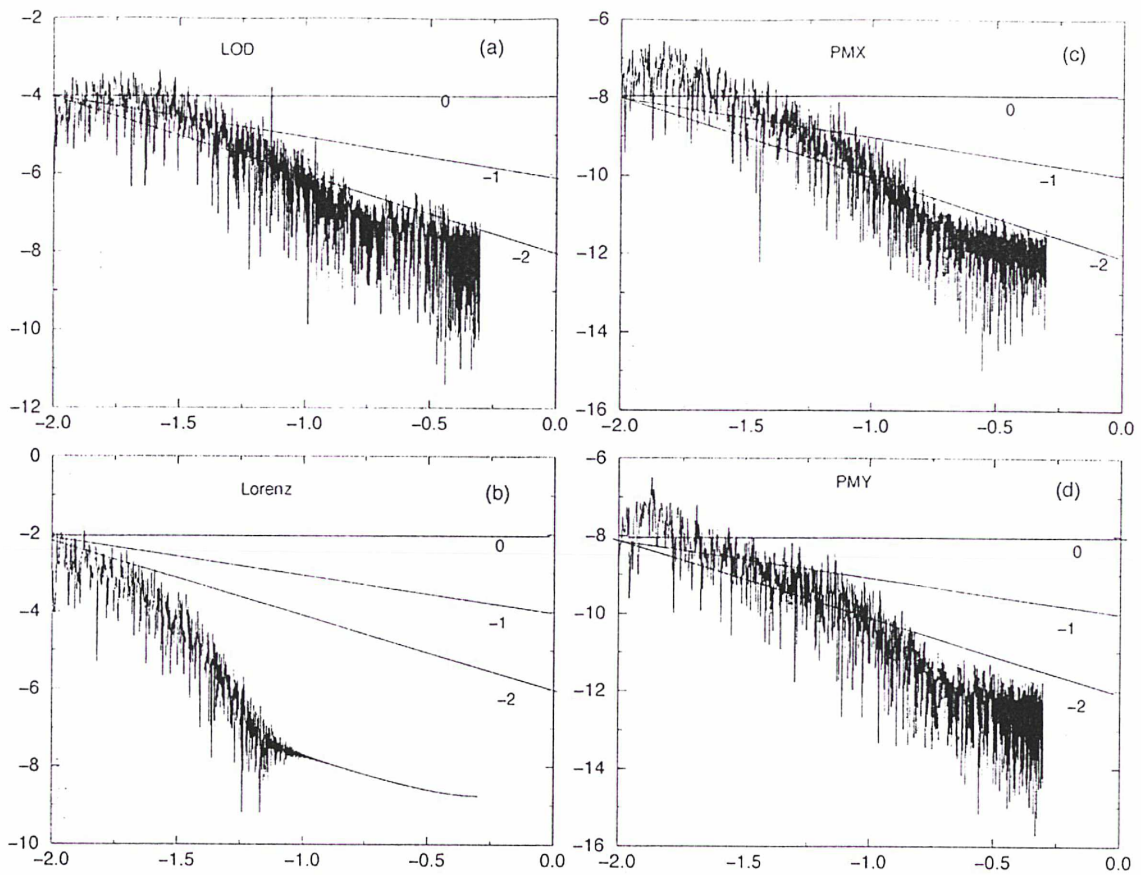


Figure 1. \log_{10} - \log_{10} plot of the power spectra as functions of the frequency in cycles per day for (a) the LOD (ms^2), (b) and (d) polar motion components PMX and PMY (mas^2), (c) Lorenz chaotic series lor (no unit). For comparison the straight lines give the theoretical power laws for a white noise (0), a flicker noise (-1) and a random walk (-2).

When dealing with time-series of measurements the problem is quite different. The only thing we can exploit is an observed univariate time-series, say $x(t)$. The source system from which $x(t)$ is issued involves n unknown variables z_i evolving in E . We generally do not know the genuine differential equations describing the data source dynamics. The full system state at t is given by the vector $z(t)$, with

$$z(t) = [z_1(t), \dots, z_n(t)]. \quad (2)$$

In a natural system, these variables are usually not observed. More often, we simply do not know what the variables are. At best the $x(t)$ data time-series results from a non-linear combination of several true dynamical variables z_i .

What the embedding method says is that it is possible to construct a pseudo-phase space E^* from the data $x(t)$ which provides information about the unknown source dynamical system, as long as all the transformations between x and z_i are diffeomorphisms (Sauer *et al.* 1991). More precisely, the multivariate dynamics can be unfolded from a transformation of the observed $x(t)$ into pseudo-orbits $y(t)$ embedded in a D_{E^*} -dimensional space. The time evolution of the $y(t)$ is similar to that of the $z(t)$ and the deterministic behaviour of the reconstructed trajectories is the same as the dynamical behaviour of the source system. It should be further noted that observations of one state variable z_i also give information about several other state variables thanks to their non-linear coupling.

An easy way to construct the pseudo-phase space was developed by Takens (1981), who proposed using time-delay

coordinates. With a convenient time delay τ we build vectors y from the data $x(t)$ as follows:

$$y(t) = [x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(D_{E^*}-1)\tau)] \quad (3)$$

in a D_{E^*} -dimensional pseudo-phase space. Fortunately the key quantities, the time delay τ and dimension D_{E^*} , can be obtained from the data series $x(t)$, as will be shown in Section 4 and in Sections 5 and 6 respectively. While the dimension of the phase space is unique for a dynamical system, different scalar measurements $x(t)$ or $x'(t)$ both arising from the same source may lead to different embedding dimensions D_{E^*} , thus the dimension of the pseudo-phase space just gives us a lower limit to unfold the sought attractor from the embedded data series.

If the $x(t)$ come from a differentiable dynamical system, the pseudo-orbit $y(t)$ will draw a smooth curve in E^* . Under a chaotic regime, the embedded vectors $y(t)$ will curl on the attractor. From this reconstructed figure, we should be able to detect neighbour states experienced by the underlying system in the E^* space, although they will not necessarily correspond to successive data sequences along the time axis. When the data series is long enough, all parts of the attractor are more or less homogeneously visited by the $y(t)$. This situation is required to obtain reliable global dimensional (e.g. D_{E^*} , D_L) and dynamical (e.g. global Lyapunov exponents) characteristics of the source system. When seeking for local characteristics (e.g. local Lyapunov exponents) of the attractor, we need a $y(t)$ sample density that is as high as possible. Stochastic noise may also partially hide the local shape of the attractor as seen on a

restricted horizon (typically in a ball with a small radius when compared to the data rms).

One of the most decisive criterion to distinguish a data series $x(t)$ coming from a purely stochastic source is probably its dimension. Indeed, in this case no finite embedding dimension D_E^* can be found to unfold the vectors of delayed coordinates $y(t)$. Some of the other characteristics may be similar to those obtained from deterministic non-linear processes, as will be seen below. We thus believe that only a conjunction of independent arguments can help to decide about the stochastic or deterministic nature of the data source. We have to proceed with caution when dealing with empirical data as the corresponding series is finite in length, sampled at a finite rate, contaminated by noise and may even result from the sum or interaction of several dynamical signal sources.

For now, our first task is to determine the time delay τ to be used for the embedding of the EOP time-series.

4 CORRELATIONS AND AVERAGE MUTUAL INFORMATION

In order to embed any scalar EOP time-series in a pseudo-phase space E^* we need to find a system of statistically independent coordinates. Using delayed data series, the determination of the time delay τ is of great importance for the application of the embedding theorem. Indeed, if τ is chosen too small, two measurement series $x(t)$ and $x(t+\tau)$ will not be independent enough and we will not learn anything more from $x(t+\tau)$ than from $x(t)$. As a consequence, it will be impossible to unfold any geometric structure in E^* whatever its dimension. The reconstructed vectors $y(t)$ will more or less be on line. On the other hand, if τ is taken too high, we lose the connection between the measurements and we cannot find any coherence for reconstructing the sought smooth attractor. However, between these two extreme situations, there is usually a fairly large interval of suboptimal values of the time delay which allow us to unfold properly a family of reconstructed orbits with the same dimensional and dynamical invariants (these orbits can be transformed from each other by diffeomorphisms). The reconstruction of a smooth attractor in the pseudo-phase space E^* is an *a posteriori* clue that an adequate time delay was chosen for the non-linear analysis of the time-series.

One way to determine the time delay τ is to look at the autocorrelation function $C(|t-t'|)$ of the data. Selecting the time interval corresponding to the first zero of $C(|t-t'|)$ as the delay τ ensures the linear statistical independence of the embedding coordinates. However, Fraser & Swinney (1986) showed that the results from this conventional method could be totally spurious for non-linear processes. The autocorrelation function measures the local similarity between the data series $x(t)$ and its time-delayed version $x(t')$. Recurrent events unevenly distributed in time may remain unseen by this measure. Thus they introduced a more global measure of similarity, the averaged mutual information (AMI), which is directly based on the probability distribution of events in the data series, regardless of whether the system is linear or not. This function is most suitable for detecting similar state sequences that will be neighbours in phase space but not necessarily along the time axis.

Let us consider N data indexed by their sample number $x(n)$. We identify the probability distribution $P(x(n))$

with the sample's frequency distribution (Jaynes 1968). In the same way we build the joint probability distribution between the data series $x(n)$ and its delayed version $x(n+T)$, i.e. $P(x(n), x(n+T))$, from the joint histogram in the $[x(n); x(n+T)]$ variables. The average mutual information for the trial delay T is defined by

$$I(T) = \sum_{n=1}^N P(x(n), x(n+T)) \ln \left[\frac{P(x(n), x(n+T))}{P(x(n))P(x(n+T))} \right]. \quad (4)$$

Note that for two independent series $x(n)$ and $x(n+T)$, $I(T)$ drops to zero (the argument of the logarithm is 1). We choose as the time delay for embedding the value of T where $I(T)$ reaches its first minimum. This may not coincide with the global minimum (Fraser & Swinney 1986).

We apply both methods to determine the time delays of the EOP series. The results are summarized in Table 2. In Fig. 2(b) the autocorrelation functions of the EOP series are shown. Remembering that the correlation time is the inverse Fourier transform of the power spectrum, the more power we have in short periods, the shorter the correlation time will be. From the first zero of these functions, we obtain time delays τ of 11 days for LOD, 15 days for PMX and 18 days for PMY. The AMI functions $I(T)$ are given for each data series in Fig. 2(a). The first minima are obtained for time delays of 10 days for LOD, 15 days for PMX and 18 days for PMY. These determinations are very similar to the previous ones. Although no information about the deterministic or stochastic nature of our data series is gained from this comparison, we are not in a dilemma over choosing the delays.

Let us test the robustness of these results, first with regard to the length of the data time-series. We run the AMI algorithm for different sets containing from 3080 to 10 080 data in steps of 500 data. The corresponding time delays are given in Fig. 3(a) for the LOD series only but similar results are obtained for the PMX and PMY series: the more data we have, the lower the value of τ determined by the AMI method. However, it tends to saturate when the number of data reaches more than 8080 points, except for PMY, for which it saturates with only 6080 points. Thus the time delays obtained are only slightly sensitive to the length of the series we analyse. Working with much larger time-series would probably only decrease the time delays for the EOP series by one or two days. In any case, we will test the sensitivity of the other time-series characterizations to changes in the delays below.

We then test the determination of τ when increasing the sampling period of the EOP series from 1 day (as in the original series) to 10 days. We see in Fig. 3(b) that the delay τ for the LOD series broadly speaking grows linearly with the sampling period. An increase in the sampling period is equivalent to a

Table 2. Embedding time delays (in days) of the filtered EOP series as obtained from the first zero of the autocorrelation function (τ correl.) and from the first minimum of the average mutual information function (τ AMI).

Series	τ correl.	τ AMI
PMX	15	15
PMY	18	18
LOD	11	10

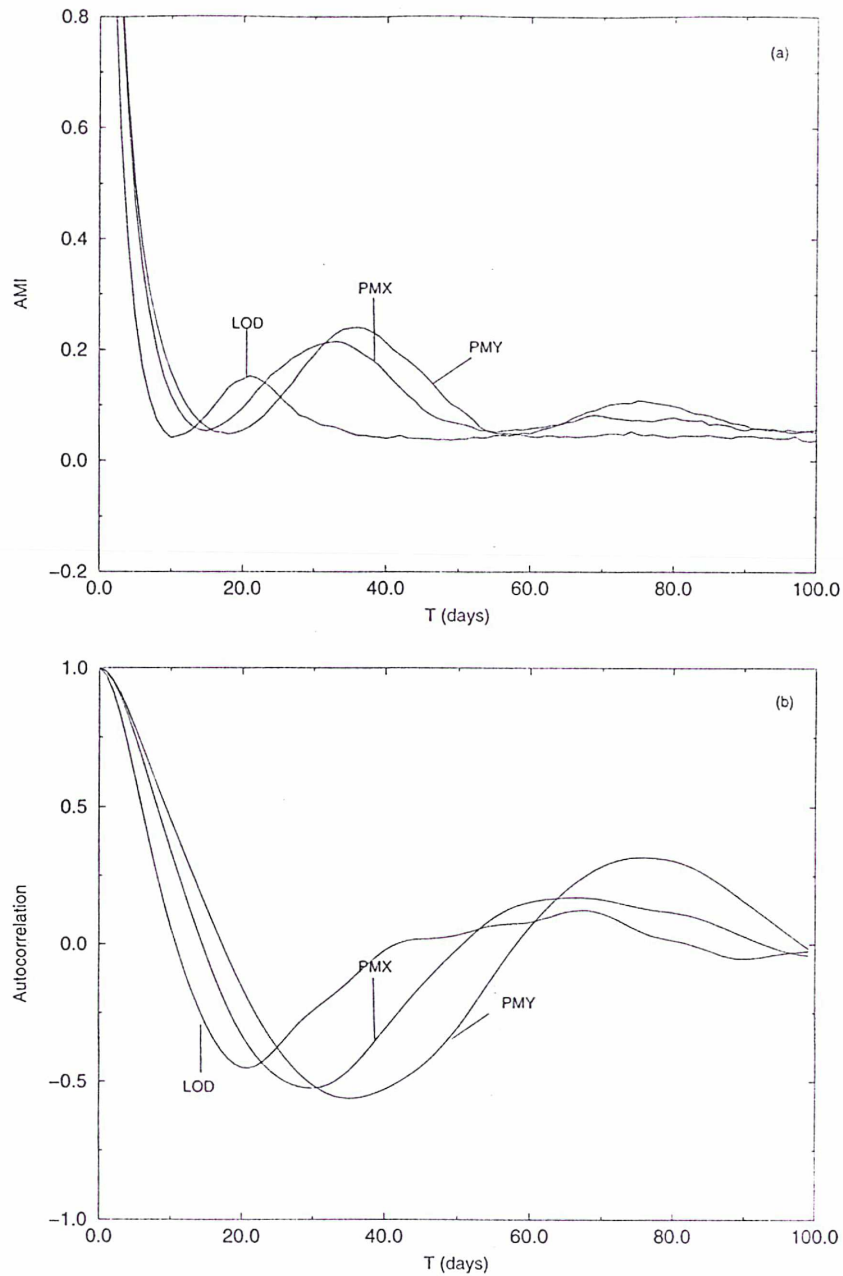


Figure 2. (a) Average mutual information and (b) autocorrelation functions of the time delay (in days) for the three EOP time-series.

truncation of the high-frequency part of the power spectrum of the time-series (except for the aliasing phenomenon), so the ‘correlation’ time (as estimated from the linear correlation function or from the non-linear AMI function) is correspondingly longer. The nearly monotonic growth of τ with the sampling period is probably a consequence of the power spectrum of the series being broad band and devoid of spikes. The same kind of dependence is observed for the PMX and PMY series.

We finally apply the AMI algorithm to the contaminated EOP time-series described in the previous section. The values of the time delay are not affected by any of the additional contamination (stochastic noise of high dimension or deterministic low-dimensional chaos) of the original EOP series. In fact, our time-series seem to be long enough not to have their information content spoiled by contamination.

We thus have quite robust estimates of the time delays required to embed the EOP time-series in pseudo-phase spaces. These delays (Table 2) may be overestimated because of the limited series length and finite data sampling rate (1 datum day⁻¹). The estimations of the time delays also result from the time-dependent smoothing of the combined IERS series. In fact, the strong data smoothing in the 1970s lowers their estimation. Although these delays should not be interpreted as invariants of the rapid fluctuations of the Earth’s rotation they are still optimal on average with regard to the information provided by the complete data time-series for the purpose of orbit reconstruction and analysis. Moreover, determinations of τ by the usual correlation or by the AMI function give equivalent results. We are now ready to evaluate the dimension of the pseudo-phase space E^* (the embedding dimension).

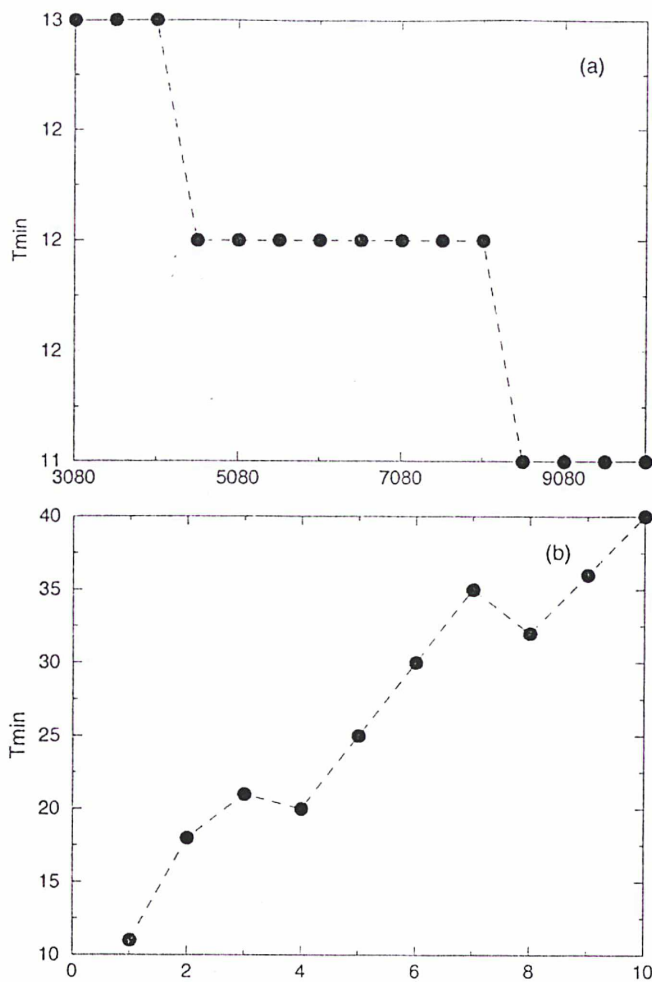


Figure 3. Determination of the embedding time delay (days) as a function of (a) the number of data samples (1 datum per day) and (b) the sampling period (days) for the LOD time-series (10 080 samples).

5 EMBEDDING DIMENSION FROM GLOBAL FALSE NEIGHBOURS

Equipped with a time delay τ (hereafter τ is an integer corresponding to a number of sampling intervals) from each EOP scalar time series, i.e. $[x(i), i=1, N]$, we can build D -dimensional data vectors $y(n)$ as follows:

$$y(n)=[x(n), x(n+\tau), x(n+2\tau), \dots, x(n+(D-1)\tau)], \quad (5)$$

where $n=1, N'$ with $N'=N-(D-1)\tau$. For large data sets and a low-dimensional embedding, N' almost equals N . The series of the N' vectors $y(n)$ outline a reconstructed orbit in D -dimensional space. Our aim is to find the lowest dimension D_{E^*} which allows us to capture the full source dynamics. This is achieved as soon as the pseudo-orbit is completely unfolded so that increasing the embedding dimension does not change its shape. On the other hand, if the trial dimension D is chosen too small (lower than D_{E^*}) then several neighbouring data vectors in D -space will separate from each other when incrementing the embedding dimension. Indeed, their false neighbourhood results from a projection which misses out one or several independent coordinates.

This property sets an algorithmic basis for the determination of the proper embedding dimension D_{E^*} . We count the global

number of neighbours in the data series for a trial dimension D . We then count how many of them are still neighbours when incrementing the trial embedding dimension by 1. D_{E^*} is obtained when the percentage of global false neighbours (GFN) reaches zero, a criterion for the complete unfolding of the reconstructed orbit. Two neighbouring vectors $y^a(n)$ and $y^b(n)$, where

$$y^a(n)=[x^a(n), x^a(n+\tau), \dots, x^a(n+(D-1)\tau)], \quad (6)$$

$$y^b(n)=[x^b(n), x^b(n+\tau), \dots, x^b(n+(D-1)\tau)], \quad (7)$$

in D -space are considered as false neighbours when their relative Euclidian distance increment in $(D+1)$ -space goes beyond a given threshold s_1 , say

$$\frac{|x^a(n+D\tau) - x^b(n+D\tau)|}{R_D(n)} > s_1, \quad (8)$$

with

$$R_D(n) = \left[\sum_{d=1}^D [x^a(n+(d-1)\tau) - x^b(n+(d-1)\tau)]^2 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

For the detection of high-dimensional signals from limited data sets, it has been found necessary to add the following criterion of false neighbourhood:

$$\frac{|x^a(n+D\tau) - x^b(n+D\tau)|}{\text{rms}} > s_2, \quad (10)$$

where rms is the data set root mean square,

$$\text{rms} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i) - x_m]^2, \quad (11)$$

x_m its mean value and s_2 another given threshold. Without matching the second criterion, the GFN algorithm applied to white noise gives a low value for D_{E^*} although it is an infinite-dimensional process. The second test corrects the mistake by showing that with increasing embedding dimension, the percentage of GFN tends to increase (Abarbanel 1996). Furthermore, in one dimension, two measurements are labelled as neighbours when their distance is a given fraction s_3 of the data rms:

$$|x^a(n) - x^b(n)| < s_3 \text{ rms}. \quad (12)$$

After the pairs of neighbouring data are found with the previous test, the trial embedding dimension D is incremented until the percentage of GFN is zero. Using a trial-and-error method, Abarbanel *et al.* (1993) estimated the thresholds s_1 and s_2 for a large variety of data sources, so it seems reasonable to adopt the same values, $s_1 = 15$ and $s_2 = 2$. It was also shown that with enough data to cover the attractor well, the percentage of GFN is not sensitive to the value of s_1 . The choice of s_3 is much more critical when working with quite short series (10 080 points). If it is taken too large, it becomes difficult to detect false neighbours from dimension 2. Two data labelled as neighbours with $D=1$ but far apart on the attractor will not be separated in higher dimensions as the denominator for the first test is already large. Moreover, with a limited data set the attractor is badly covered and if s_3 is taken too small we find too few neighbours in dimension 1 to obtain a statistically

significant orbit unfolding rate in higher dimensions. We choose an optimal value with regards to expected embedding dimensions for our Lorenz series (lor for which $D_{E^*} = 3$) and for the white noise series $f0$ ($D_{E^*} \gg 15$), both containing 10 080 points. We found a scaling factor $s_3 = 0.005$ to be applied to the rms of the contamination or EOP series.

We applied the GNF algorithm to the synthetic contamination series (Section 2).

(1) For the white noise series $f0$ (Fig. 4a), the percentage of false neighbours fluctuates and remains quite large (about 15–20 per cent) when incrementing the dimension. Indeed, being infinite-dimensional, a white noise embedded in any low-dimensional space can never be completely unfolded (except spuriously with a finite data set).

(2) For the flicker noise series $f-1$ the results are much the same (Fig. 4b). We can easily identify the stochastic nature of those processes.

(3) For a coloured noise (random walk $f-2$), the conclusion is not so obvious. Indeed, the percentage of false neighbours is very small for dimension 4 (Fig. 4c) and we could interpret that minimum as a convergence of the algorithm to a low embedding dimension if we were working with experimental data from an unknown source. This shows that we must be very careful and try other tests before giving a definite conclusion about the origin of the analysed data series.

(4) For the Lorenz series lor (Fig. 4d), we reach exactly zero false neighbours for dimension 3 as expected. The percentage oscillations for $D > 4$ probably results from the sparse

attractor coverage, at least near its outer boundaries. Such spurious GFN detections disappear with long time-series (say with 50 000 points or more).

Being aware of the behaviour of the GNF algorithm for well-known processes sampled over limited data sets, we apply it to the EOP series. As can be seen from Fig. 5(a) for PMX, Fig. 5(b) for PMY and Fig. 5(c) for LOD, it is not possible to give a definite conclusion. Indeed, in each case the percentage of GFN reaches a minimum for $D=4$ but never drops to zero (the value still remains very low). This may be relevant for either a coloured noise process or a low-dimensional deterministic process contaminated by noise, these two data components having opposite tendencies. Note that a similar result was obtained by Abarbanel *et al.* (1993) with a Lorenz series contaminated by white noise (at least 25 000 points). They showed that the percentage of GNF does not stabilize to zero and rise with increasing dimensions over $D=4$.

We now check the robustness of the previous results to various parameter changes and data contaminations. Decreasing the number of data by 1000 or 2000 samples does not significantly modify the percentage of false neighbours detected by the algorithm. Being aware that the time delays might be overestimated (Section 4), we also run the GNF algorithm with shorter and longer delays. The delay τ can be divided or multiplied by a factor of 2 or 3 without altering the embedding results. This low sensitivity of the D_{E^*} estimate is probably a consequence of the fact that the corresponding reconstructed orbits are equivalent up to a diffeomorphism.

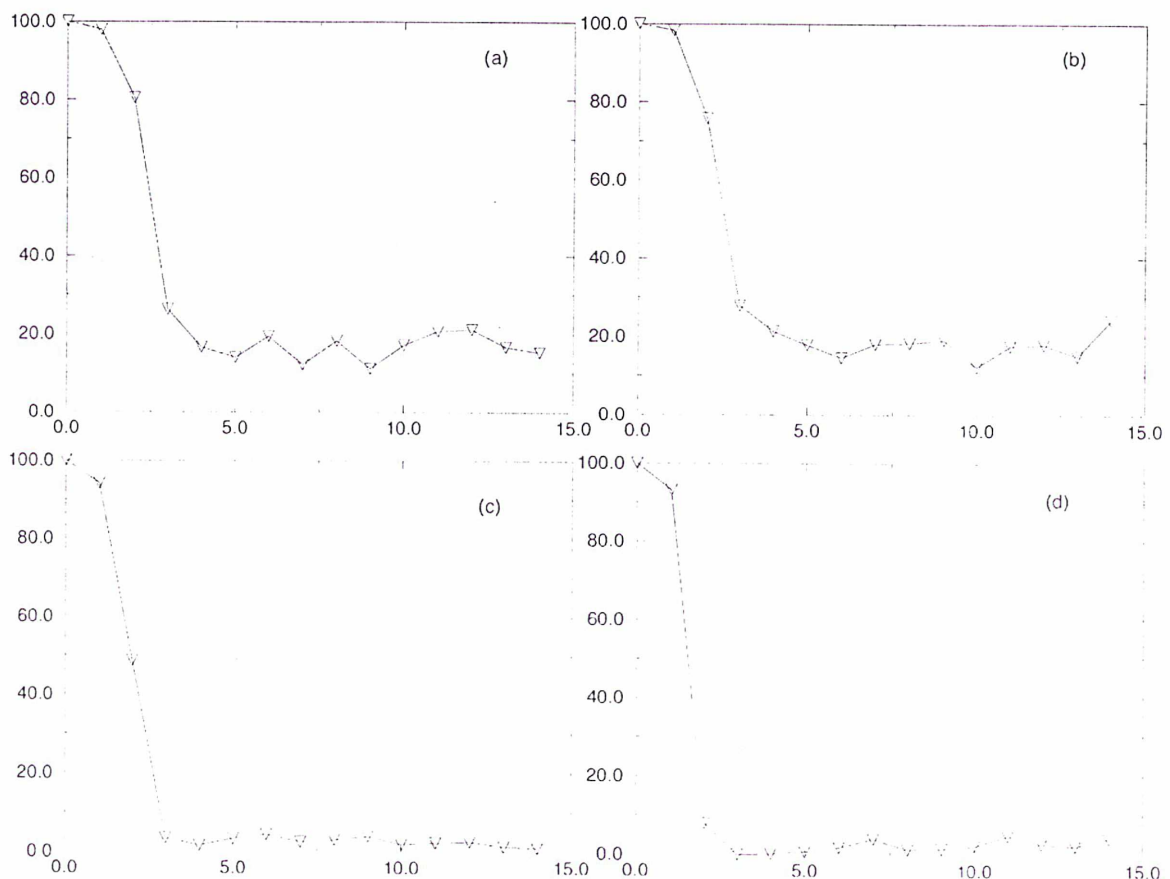


Figure 4. Percentage of global false neighbours as a function of the trial embedding dimension for time-series of data contaminations: (a) white noise $f0$; (b) flicker noise $f-1$; (c) random walk $f-2$; (d) Lorenz chaos lor.

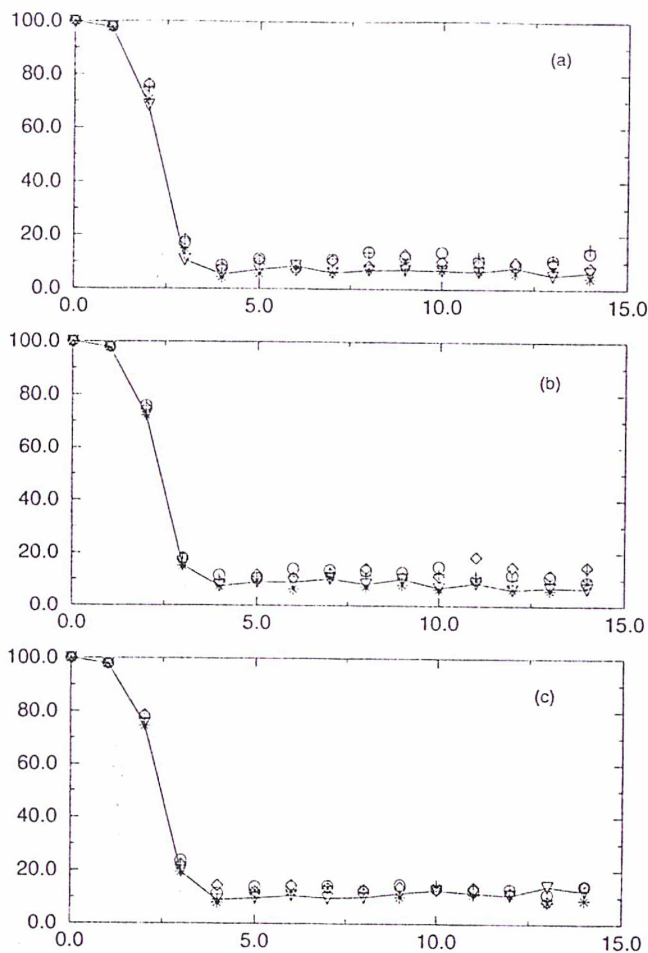


Figure 5. Percentage of global false neighbours as a function of the trial embedding dimension for the EOP time-series and their contaminated equivalents: (a) PMX data series; (b) PMY data series; (c) LOD data series. The symbols are as follows: triangle=uncontaminated series; star=Lorenz chaos contamination; diamond, circle and cross=added white noise, flicker noise and random walk, respectively.

For each EOP series, the tests performed with 10 per cent rms of additional contamination give similar results (see Fig. 5). The differences are smaller than 1 per cent and the general behaviour remains the same: only the level changes. 10 per cent might be too small to change anything, even though for LOD adding a noise seems to increase the percentage slightly, while adding a chaotic signal decreases it slightly. Anyway, this sensitivity is marginal.

Thus the embedding dimension D_{E^*} of 4 or 5 that we find for the three EOP series with the GFN algorithm has to be compared with other determinations from a different approach. Indeed, we are not fully satisfied with the results shown in Fig. 4 for known processes with 10 080 samples. Fairly consistent results (D_{E^*} around 5 or 6, see below) are obtained with correlation integrals, and appear to be more reliable.

6 EMBEDDING DIMENSION FROM THE CORRELATION INTEGRAL

An efficient algorithm was proposed by Grassberger & Procaccia (1983) to estimate the dimension of an attractor D_A using correlation integrals. The Euclidian distance $| \cdot |$

between every pair $[y(i), y(j)]$ of data vectors embedded in a D -dimensional space is estimated. Then the correlation integral is computed over the data set as

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N H(r - |y(i) - y(j)|), \quad (13)$$

where H is the Heaviside distribution,

$$H(x) = 0, \quad x < 0, \quad H(x) = 1, \quad x > 0. \quad (14)$$

The correlation integral $C(r)$ thus defined is a function of the hypersphere radius r and also implicitly a function of the embedding dimension D . When the data vectors populate an attractor, this function scales like r^{D_A} for N tending to infinity and r tending to zero. As is shown in Paper II, the dimension D_A is read as the slope on a log-log plot of the correlation function. This slope actually depends on the embedding dimension of the data vectors. However, as soon as D is larger than or equal to the true pseudo-phase space dimension D_{E^*} , the reconstructed orbit being unfolded, it stabilizes to the attractor dimension. On the other hand, for a high-dimensional process (typically for white noise) the slope never saturates as the process remains partly folded whatever the embedding dimension is. Thus here we try increasing the dimension D and find D_{E^*} for which the scaling of the $C(r)$ function no longer changes significantly. This popular method is widely used in a wide range of studies (medicine, economy, ecology, etc.) and now benefits from several algorithmic improvements (see e.g. Theiler 1987). It provides satisfactory results as long as enough time-series are available. Here we use it as an alternative way to determine the pseudo-phase space dimension D_{E^*} and compare the results with those obtained in the previous section.

We applied this algorithm to the three EOP series. In each case the slopes seem to saturate for embedding dimensions between 5 and 7. As an illustration the log-log plot of the correlation integral for the LOD series is given in Fig. 6. These results are consistent with the values obtained from the GFN algorithm (Section 5). The estimated slopes are shown in Fig. 7 as a function of the radius r for the PMX, PMY and LOD time-series. In theory, the slopes have to be determined for r approaching zero. However, with experimental data r cannot be taken too small (see e.g. Roberts 1991). Indeed, the data quantization and limited accuracy impose a lower bound for the radius r . Below this bound the correlation integral looks like a step function and slightly above its slope is not smooth (this part of the plot is not shown in Fig. 6). Moreover, the function $C(r)$ is much more sensitive to inhomogeneities in the attractor coverage when r is small and the trial embedding dimension high (see the left side of the curves in Fig. 7 even with some negative local slopes). On the other hand, when r is of the order of the data rms or larger, any hypersphere includes more and more data so that the correlation function slowly tends to the unit constant function and the corresponding slope is progressively more meaningless. For the determination of D_{E^*} , we consider the slopes for radii in the range 10^{-4} – 10^{-3} for PMX and PMY and in the range 10^{-2} – 10^{-1} for LOD (Fig. 7). On these curve segments we clearly see the slope saturations for D_{E^*} between 5 and 7. The length of the EOP time-series fits the theoretical requirement stressed by Ruelle (1990), the higher embedding dimension reliably determined from a set of about $N = 10^4$ data being $8 (2 \log_{10}(N))$.

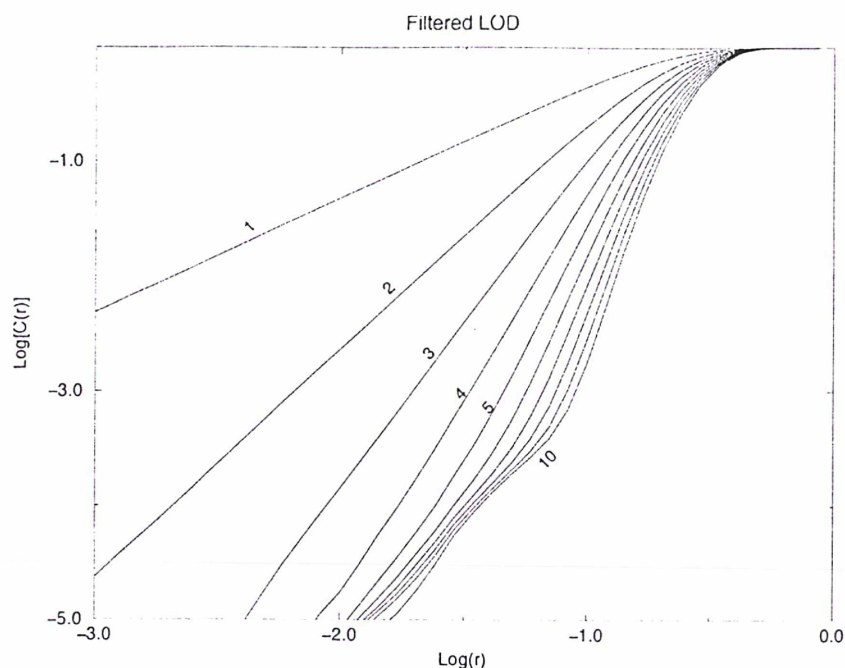


Figure 6. \log_{10} – \log_{10} plot of the correlation integral $C(r)$ as a function of the hypersphere radius r . The trial embedding dimension goes from 1 (top curve) to 10 (bottom curve).

We then verified that the dimension for which the slopes begin to saturate is not modified when using smaller data sets. Only with 3000 data or less did the dimension found decrease a little, a response which might simply reflect a break from Ruelle's criterion. As was previously mentioned for the GNF algorithm (see Section 5), there is no visible sensitivity to the choice of longer or shorter time-delay values either. An interesting observation can be made when analysing the effect of contamination on the correlation integral. For each EOP series, the $C(r)$ curve is not perturbed when adding a low-dimensional process (Lorenz chaos) to the data, whilst it is sensitive to high-dimensional noise (f_0 , $f-1$ and $f-2$) for small radius r . For example, in Fig. 8 we give the log–log plot of the correlation integrals with a $D_{E^*}=6$ -dimensional embedding for the LOD series and its derived contaminated equivalents. In the acceptable range of radii (10^{-2} – 10^{-1} for LOD) the curve slope is steeper in the presence of any

stochastic noise but has minute changes with the chaotic contamination. This remark also applies to the PMX and PMY correlation integrals. Such behaviour might be a first tiny indication of the chaotic nature of the data source.

Focusing on the saturation of the slopes, we see that the addition of a white noise or a flicker noise to the LOD series (Figs 9a and b) destroys the slope convergence and requires an ever increasing embedding dimension. These two high-dimensional processes dominate over the EOP fluctuations and mask them. When we add a random walk, the slope saturation is weaker and occurs later, with a dimension around 7 or 8 (Fig. 9c), thus a coloured noise has the effect of artificially increasing the sought after embedding dimension. We could also conclude that the high-dimensional process also masks the underlying signal by giving a false dimension which no longer satisfies Ruelle's criterion and is thus not reliable. We suspect that an even higher false dimension would be found

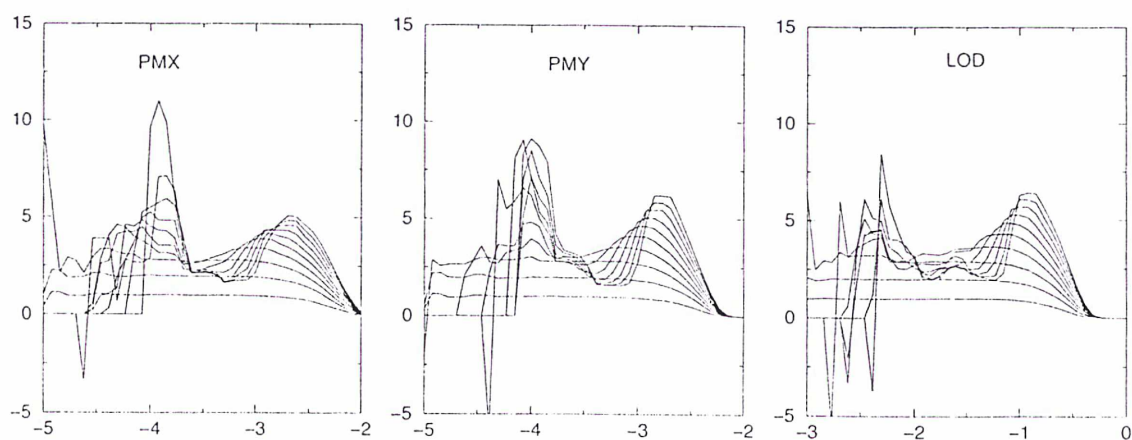


Figure 7. Local slopes of the \log_{10} – \log_{10} plot of the correlation integral $C(r)$ as a function of the radius r for the PMX, PMY and LOD series. The trial embedding dimension goes from 1 (bottom curves) to 10 (top curves) (to be read on the right-hand sides of the plots).

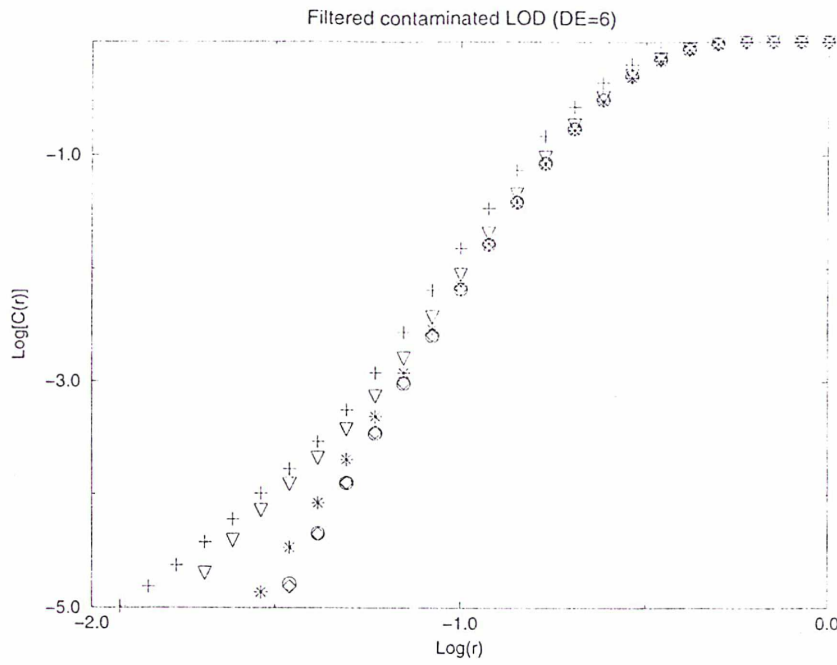


Figure 8. \log_{10} - \log_{10} plot of the correlation integral $C(r)$ as a function of the radius r for the LOD series (triangles) and its equivalents contaminated by Lorenz chaos (crosses), random walk (stars), flicker noise (circles) and white noise (diamond). The embedding dimension is $D_E = 6$.

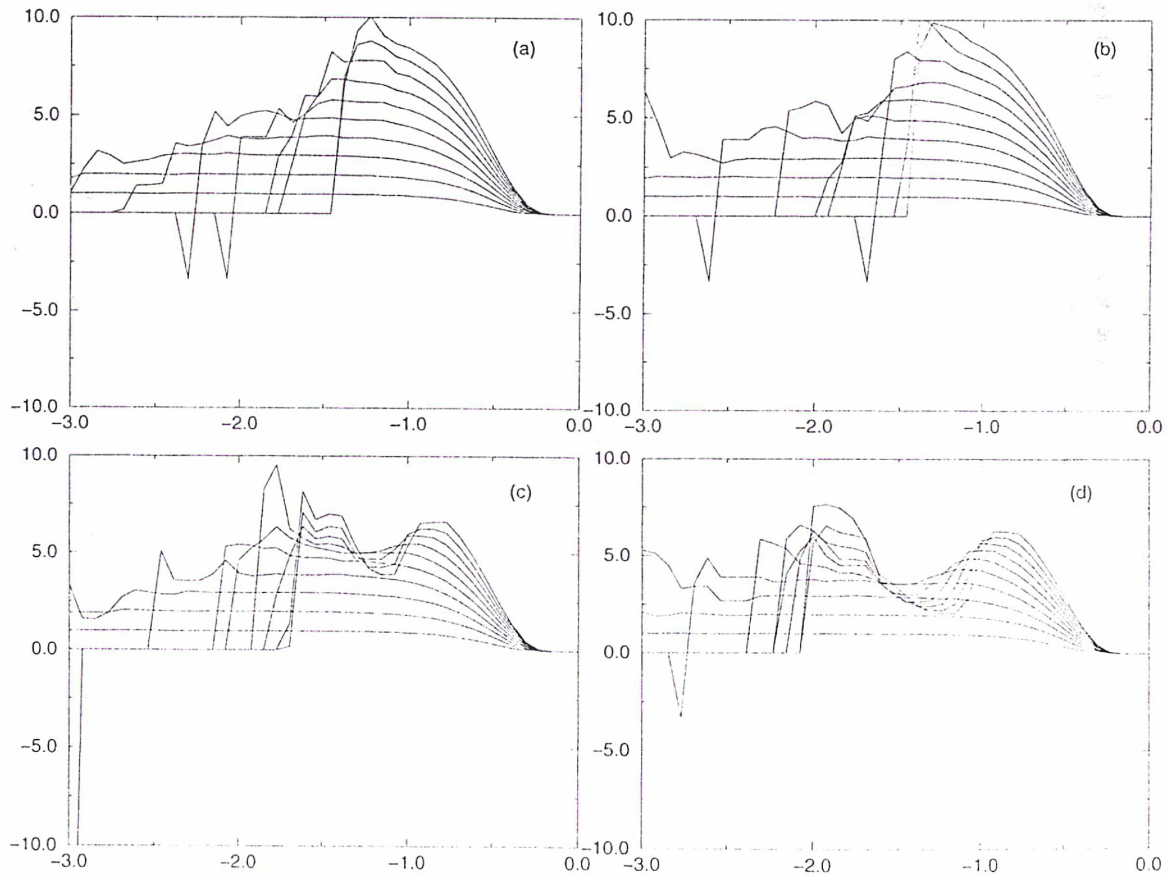


Figure 9. Local slopes of the \log_{10} - \log_{10} plot of $C(r)$ for the LOD series contaminated by (a) a white noise, (b) a flicker noise, (c) a random walk and (d) Lorenz chaos. The trial embedding dimension goes from 1 (bottom curves) to 10 (top curves) (to be read on the right-hand sides of the plots). No slope saturation is seen when infinite-dimensional stochastic contaminations are added to the LOD series (a to c). On plot (d) we find an embedding dimension D_E between 5 and 7.

with longer time-series. On the other hand, when adding a low-dimensional process the saturation happens at $D=6$, which is the closest value to the original determination (Fig. 9d). This slight dimension increase might be caused by the superposition of two or more low-dimensional processes (this problem does not seem to have been addressed in the literature).

In summary, the EOP contamination by a low-dimensional deterministic process does not really affect the determination of the embedding dimension D_{E^*} via the correlation integral. This may bear witness to the presence of a process of this kind in the EOP series. D_{E^*} is likely to be between 5 and 7, in accordance with the determination obtained from the GFN algorithm.

7 DISCUSSION

As pointed out by Wilson (1995), LOD changes are inherently broad-band power spectra processes. Moreover, it was shown by Kuehne *et al.* (1993) that the non-seasonal polar motion in response to atmospheric excitations (down to about 24 cycles yr^{-1}) is non-stationary. Both properties may be relevant to stochastic as well as deterministic underlying dynamics. The nature of the source of EOP fluctuations can be quantified by a dimensional analysis and a dynamical characterization of the observed Earth orientation changes as long as the data time-series are long enough and only marginally spoiled by noise contamination.

At this point in our study, we feel inclined to think that the EOP time-series for periods under 100 days are a combination of weak high-dimensional noise contamination and low-dimensional deterministic processes. This position results from the convergence of several independent indications: (1) the power spectra of the series are broad band and do not follow any simple power law (Fig. 1); (2) the percentage of global false neighbours tends to stabilize to a low constant value (about 5–10 per cent) for embedding dimensions $D > 4$ –5 (Fig. 5); and (3) the slopes of the correlation integrals saturate around the same embedding dimensions (Fig. 7). It should be stressed that these coherent properties emerge from length-limited (about 10^4 data each), coarsely sampled (1 datum per day), filtered (remaining periods in the range [30 days, 100 days] in the 1970s and [2–3 d, 100 d] in the 1990s) and noisy data time-series. In particular, it was shown that in the presence of noise contamination the determinations of an embedding dimension are biased towards values that are too high. With algorithms based on correlation integrals confusion may even occur between a low-dimensional deterministic process and a random walk in the interpretation of the results. Osborne & Provenzale (1989) pointed out that the Grassberger & Procaccia (1983) method leads to a finite embedding dimension for red noise because of the fractal structure of the curve drawn in phase space. Conversely, these similarities in power spectra, time evolution and also (apparent) embedding dimension have probably encouraged the application of the random walk paradigm to polar motion studies (although at longer time-scales; see e.g. Souriau & Cazenave 1986).

A convenient way to decide between these two possibilities is to plot 3-D projections of the orbit reconstructed with data time-delayed coordinates. We might be able to see if we have a fractal curve (red noise) or a self-crossing trajectory (low-dimensional process). A pseudo-phase space dimension $D_{E^*}=6$ ensures a complete unfolding of the geometrical

structure. We performed various 3-D projections of data vectors $y(n)$ for the EOP and synthetic contamination series. All the $N \approx 10^4$ points of any series are not drawn because the total data set obscures the picture. Thanks to several tests performed with varying τ , we first conclude that the values adopted for the time delays are correct; we properly unfold all the trajectories without losing their coherence. It should also be noted that no qualitative difference appears between the segments of the orbit reconstructed from the first 10 years of data and from the last 10 years. In other words, the time-dependent data smoothing (IERS 1996) is likely to have erased some events of the Earth's rotation fluctuations, in particular in the 1970s, but it does not compromise the orbit reconstruction and analysis as a whole. Fig. 10(a) represents a 3-D projection of the white noise $f0$ embedded in the D_{E^*} -dimensional space (similar images are obtained whatever the projection for all the orbits discussed below). We can easily see the random distribution of points in space. They fill the space without any coherence and no structure appears. For the coloured noise $f-2$ (Fig. 10b), the points follow a complicated pattern which looks like a fractal curve. Self-similarity cannot be rigorously verified as we have a data series finite in both length and resolution. For the Lorenz series (lor, Fig. 10d), the attractor (whose dimension is $D_A=2.06$) is reconstructed, although in an unusual form as this mapping is obtained from the embedding theorem from the $x(t)$ state variable alone (see Section 2). In Fig. 10(c), we plot a reconstructed orbit projection of the filtered PMY series. We see that the data vectors $y(n)$ are circling in a smooth way. The picture is more tricky when the oscillations are smaller, i.e. near the centre of the orbit projection. In this part, which is more slowly travelled through by the embedded data vectors than the outer boundaries (see the point spacing in the figure), we distinguish orbit fluctuations due to a noisy component of the EOP time-series. Pictures of the same kind are obtained with the PMX and LOD data series.

A simple comparison of these figures strengthens the idea that we are not dealing with any white or coloured noise in the EOP series, in the sense that their respective behaviours are completely different. All the projections that can be drawn for the three EOP series show continuous and regular trajectories which seem to issue from a smooth dynamical system. This assumption of course agrees with the nature of the dynamical response of the Earth but it also agrees with the low-dimensional deterministic origin of most geophysical fluid flows inducing the Earth's rotational fluctuations. A subtle issue is raised by the embedding dimension $D_{E^*} \approx 5$ –7 that we obtained; indeed, only three 'state' variables enter Liouville's equations (that is, small dimensionless factors to be applied to the mean angular velocity). Thus, we may think that a 3-D space is sufficient to embed the EOP data time-series. In fact, Liouville's equations describe the evolution of a non-autonomous system. Atmospheric and oceanic forcings, among others, expand the number of state variables through time-varying torques, inertia tensors and relative angular momenta. It is mainly their signatures, with dimensions higher than 3, that should be transitively transmitted to the EOP data series.

8 CONCLUSIONS

Most of the observed fluctuations in the length of day and polar motion for periods between 1 day and 100 days are

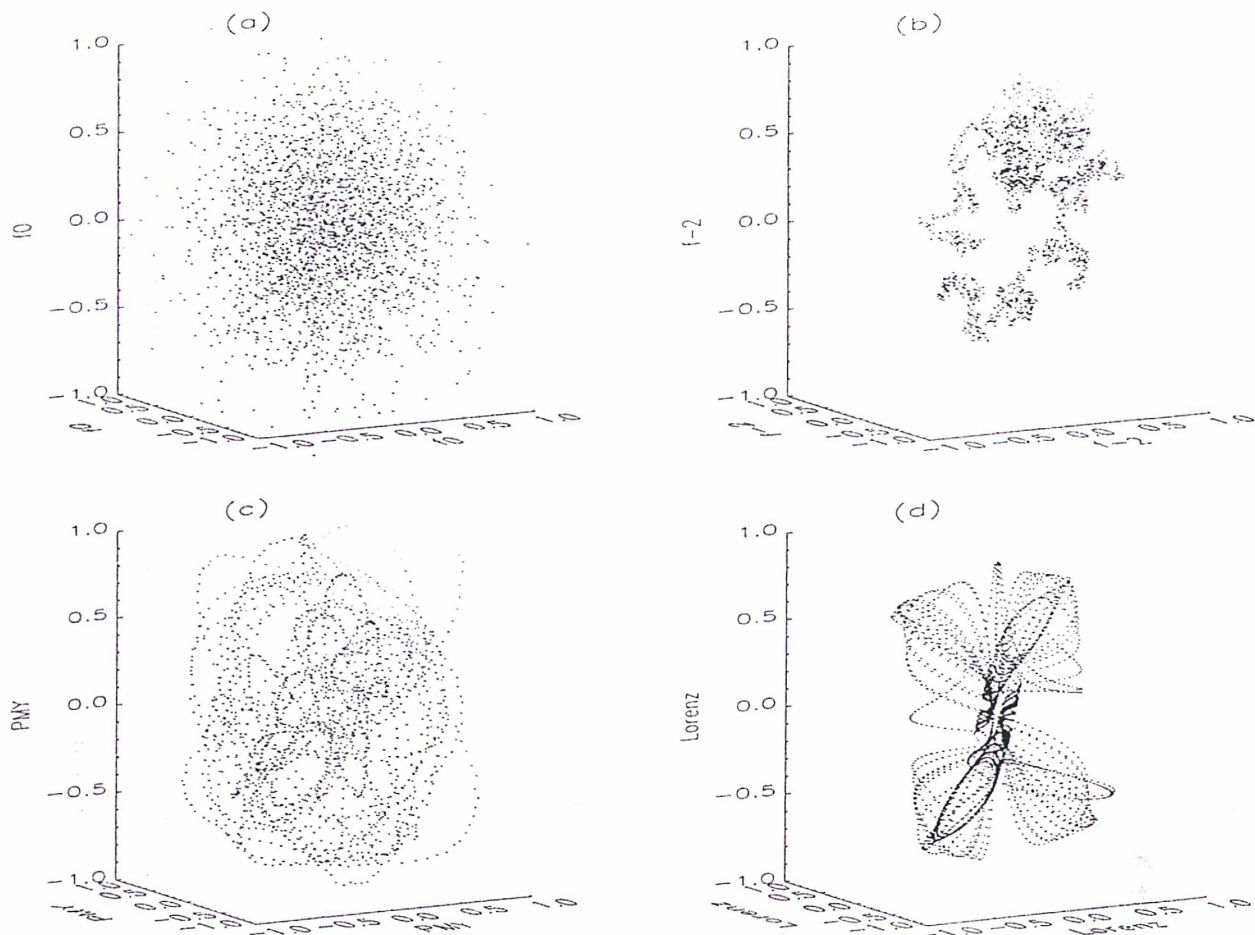


Figure 10. 3-D projections of 6-D reconstructed orbits with time-delayed coordinates. For a white noise (a) we have a cloud of points which erratically occupy the 3-D subspace. The random walk (b) gives a fractal curve. The delayed data vectors of the PMY series gently trace a fairly continuous curve (partly folded in this 3-D plot, the embedding dimension D_{E*} being between 5 and 7). A small noise component can be seen, in particular near the centre of the orbit. The signal source is likely to be a smooth dynamical system. The partly folded attractor (d) is reconstructed from the sole x -component of the Lorenz equations.

induced by atmospheric and oceanic excitations. These fluid flows develop strong non-linearities at all time- and space scales. During the past decade, several studies have proposed dimensional characterizations of the corresponding phase space attractors (Nicolis & Nicolis 1984; Essex *et al.* 1987; Tsonis & Elsner 1988; Osborne *et al.* 1986). The Earth's response being weakly non-linear, we expect to find the signature of these fluid flows in the EOP data time-series. Recent advances in the non-linear analysis of time-series relying on the embedding theory for dynamical systems provide the conceptual framework to investigate this possibility. With empirical data, the determination of dimensional and dynamical characterizations of the source must overcome difficulties caused mainly by the finite length and sampling rate of the available data time-series and by noise contaminations and signal mixture.

In practice we have to embed the scalar data series in D_{E*} -dimensional pseudo-phase space and analyse the stability of the reconstructed orbit. For each filtered EOP series spanning over about 27 years, we first estimate time delays from the average mutual information function. The time delays are of 10 days for LOD, 15 days for the x -component of polar motion PMX and 18 days for its y -component PMY. These

estimates are robust against noise contaminations and only weakly dependent on the series length. A quasi-linear dependence on the sampling period indicates that interesting signal power at periods shorter than the cut-off of the time-dependent filter (about 30 days in the 1970s and 3 days in the 1990s) might be lost when dealing with combined EOP observations.

We then obtained determinations of the proper embedding dimension D_{E*} from two independent techniques: (1) the percentage of false nearest neighbours, which nearly equals zero as soon as the reconstructed orbit is entirely unfolded; and (2) the slopes of the correlation integrals, which tend to saturate when the delayed data vectors are embedded in a pseudo-phase space with high enough dimension. Results from both methods are in agreement and seem to indicate that the three EOP series can be modelled as low-dimensional deterministic processes. Indeed, the embedding dimension D_{E*} is about 5 or 6. These values are nicely below the upper limit of 8 allowed by the length of the data series of about 10^4 samples that we analysed. However, we have shown that these dynamical characterizations are quite sensitive to small stochastic contaminations. In any case, the effect of such contaminations is always to provide a more or less overestimated dimension, in accordance with their high-dimensional nature.

An inspection of the orbits reconstructed in this way and projected on 3-D plots further suggests that the LOD series and the PMX and PMY components of polar motion (at least at these periods) issue from a smooth dynamical system with complex behaviour. As can be seen in Fig. 10, the behaviour of the EOP orbits is clearly different from those of power-law noises.

From these reconstructed orbits it will be possible to extract dynamical characterizations of the EOP data time-series (Paper II). The number of dynamically active variables D_L and (eventually) the attractor dimension D_A can be retrieved from the statistical distribution of the data vectors in pseudo-phase space. Moreover, the intrinsic stability of the EOP data time-series can be quantified both globally and locally by scrutinizing the geometry of the corresponding orbits. We postpone any tentative answer about the detectability of non-linear processes in the EOP series to the second part of this study, as the dynamical characterizations of the data series will provide new information on this issue.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank M. Feissel and an anonymous referee for their useful comments on the IERS data series and S. Loyer for providing us with a generator of stochastic series. We are grateful to A. Lucas and P. Richard who helped us to implement our codes on the CRAY YMP at the Centre National d'Etudes Spatiales (Toulouse) where all the computations were performed. This study was supported by the Centre National de la Recherche Scientifique under contract 2E0025 (programme Modélisation et Simulation Numérique).

REFERENCES

- Abarbanel, H.D.I., 1996. *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer Verlag, Berlin.
- Abarbanel, H.D.I., Brown, R., Sidorowich, J.J. & Tsimring, L.S., 1993. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 1331–1392.
- Berge, P., Pomeau, Y. & Vidal, C., 1983. *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann, Paris.
- Dehant, V., Wilson, C.R., Salstein, D.A., Chao, B.F., Gross, R.S., Le Provost, C. & Ponte, R.M., 1997. Study of Earth's rotation and geophysical fluids progresses, *EOS, Trans. Am. geophys. Un.*, **78**, 357–360.
- Dickey, J.O., Marcus, S.L., Steppe, J.A. & Hide, R., 1992. The Earth's angular momentum budget on subseasonal time scales, *Science*, **255**, 321–324.
- Essex, C., Lookman, T. & Nerenberg, M.A.H., 1987. The climate attractor over short timescales, *Nature*, **326**, 64–66.
- Eubanks, T.M., 1993. Variations in the orientation of the Earth, in *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Earth Dynamics*, Geodynamics Series, Vol. 24, pp. 1–54, eds Smith D.E. & Tureotte, D.L., AGU, Washington.
- Eubanks, T.M., Steppe, J.A., Dickey, J.O., Rosen, R.D. & Salstein, D.A., 1988. Causes of rapid motions of the Earth's pole, *Nature*, **334**, 115–119.
- Fraedrich, K., 1987. Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. atmos. Sci.*, **44**, 722–728.
- Fraser, A.M. & Swinney, H.L., 1986. Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev. A*, **33**, 1134–1140.
- Frede & Mazzega, 1999. Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series—II. Dynamics, *Geophys. J. Int.*, **137**, 565–579 (this issue).
- Gambis, D., 1996. Multi-technique EOP combinations, in *Proc. IGS Analysis Center Workshop*, Vol. 96, pp. 61–70, eds Van Scoy, P. & Neylan, R.E., JPL Publ., Silver Spring, Pasadena.
- Gershenfeld, N.A. & Weigend, A.S., 1993. The future of time series: learning and understanding, in *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, pp. 1–70, eds Weigend, A.S. & Gershenfeld, N.A., SFI Studies in the Science of Complexity, Proc. XV, Addison-Wesley, Reading.
- Grassberger, P. & Procaccia, I., 1983. Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 346–349.
- International Earth Rotation Service (IERS), 1997. *IERS 1996 Annual Report*, Central Bureau of IERS, Paris.
- International Earth Rotation Service (IERS), 1996. *IERS 1995 Annual Report*, Central Bureau of IERS, Paris.
- Jaynes, E.T., 1968. Prior probabilities, *IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern.*, Vol. SSC-4, **3**, 227–241.
- Kuehne, J., Johnson, S. & Wilson, C.R., 1993. Atmospheric excitation of nonseasonal polar motion, *J. geophys. Res.*, **98**(B11), 19 973–19 978.
- Lambeck, K., 1980. *The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences*, Cambridge University Press, London.
- Lorenz, E.N., 1963. Deterministic nonperiodic flow, *J. atmos. Sci.*, **20**, 130–141.
- Marcus, S.L., Chao, Y., Dickey, J.O. & Gegout, P., 1998. Detection and modeling of nontidal oceanic effects on Earth's rotation rate, *Science*, **281**, 1656–1659.
- Nicolis, C. & Nicolis, G., 1984. Is there a climatic attractor?, *Nature*, **311**, 529–532.
- Osborne, A.R. & Provenzale, P., 1989. Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra, *Physica D*, **35**, 357–381.
- Osborne, A.R., Kirwan, A.D., Jr, Provenzale, A. & Bergamasco, L., 1986. A search for chaotic behaviour in large and mesoscale motions in the Pacific ocean, *Physica D*, **23**, 75–83.
- Palmer, T.N., 1993. Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model, *Bull. Am. met. Soc.*, **74**, 49–65.
- Ponte, R.M., Stammer, D. & Marshall, J., 1998. Oceanic signals in observed motions of the Earth's pole of rotation, *Nature*, **391**, 476–479.
- Roberts, D.A., 1991. Is there a strange attractor in the magnetosphere?, *J. geophys. Res.*, **96**(A9), 16 031–16 046.
- Ruelle, D., 1990. Deterministic chaos: the science and the fiction, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A427**, 241–248.
- Ruelle, D., 1991. The turbulent fluid as a dynamical system, in *New Perspectives in Turbulence*, pp. 123–138, ed. Sirovich, L., Springer Verlag, Berlin.
- Sauer, T., Yorke, J.A. & Casdagli, M., 1991. Embedology, *J. Stat. Phys.*, **65**, 579–616.
- Souriau, A. & Cazenave, A., 1986. Random walk and the Earth's pole related to the Chandler wobble excitation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **86**, 455–465.
- Takens, F., 1981. Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence*, pp. 366–381, eds Rand, D. & Young, L.S., Lecture Notes in Mathematics 898, Springer Verlag, Berlin.
- Theiler, J., 1987. Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points, *Phys. Rev. A*, **36**, 4456–4462.
- Tsonis, A.A. & Elsner, J.B., 1988. The weather attractor over very short timescales, *Nature*, **333**, 545–547.
- Wilson, C.R., 1995. Earth rotation and global change, *Rev. Geophys.*, Suppl., 225–229.
- Yoder, C.F., Williams, J.G. & Parke, M.E., 1981. Tidal variations of Earth rotation, *J. geophys. Res.*, **86**(B2), 881–891.

II-Dynamics

Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series—II. Dynamics

V. Frede¹ and P. Mazzega²

¹ *Observatoire de Paris, 61, avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France. E-mail: fred@hplbi.obspm.fr*

² *UMR 5566-CNRS-CNES, 18 av. E. Belin, 31401 Toulouse cedex 4, France. E-mail: ciamp@boreal-ci.est.cnes.fr*

Accepted 1998 November 27. Received 1998 November 9; in original form 1998 January 26

SUMMARY

We investigate the possibility of detecting non-linear low-dimensional deterministic processes in the time-series of the length of day (LOD) and polar motion components (PMX, PMY), filtered to keep the period range [≈ 1 day–100 days]. After each time-series has been embedded in a pseudo-phase space with dimension $D_E = 5$ or 6 (see Frede & Mazzega 1999, hereafter referred to as Paper I) we extract the geometric and dynamical characteristics of the reconstructed orbit. Using a local false neighbours algorithm and an analysis of the data local covariance matrix eigenspectrum, we find a local dimension $D_L = 5$ for the three EOP series. The principal Lyapunov exponents averaged over the ≈ 27 years of observation (1970–1997) are positive. This result unambiguously indicates the chaotic nature of the Earth's rotational dynamical regime in this period range of fluctuations. As a consequence, some theoretical prediction horizons cannot be exceeded by any tentative forecast of the EOP evolution. Horizons of 11.3 days for LOD, 8.7 days for PMX and 8.1 days for PMY are found, beyond which prediction errors will be of the order of the rms of the filtered EOP series, say 0.12 ms, 2.30 mas (milliarcsecond) and 1.57 mas respectively. From the Lyapunov spectra we estimate the Lyapunov dimension D_{Lyap} , which is an upper bound for the corresponding attractor dimension D_A . We find $D_{\text{Lyap}}(\text{LOD}) = 4.48$, $D_{\text{Lyap}}(\text{PMX}) = 4.90$ and $D_{\text{Lyap}}(\text{PMY}) = 4.97$. These determinations are in broad agreement with those of the attractor dimensions obtained from correlation integrals, i.e. $D_A(\text{LOD}) = 4.5$ – 5.5 , $D_A(\text{PMX}) = 3.5$ – 4.5 , $D_A(\text{PMY}) = 4$ – 5 . We finally show that the Earth's rotational state experiences large changes in stability. Indeed, the local prediction horizons, as deduced from the local Lyapunov exponents, occasionally drop to about 3.3 days for LOD in the years 1982–1984, 2.6 days for PMX in 1972–1973 and 2.6 days for PMY in 1996–1997. Some of these momentary stability perturbations of the Earth's rotation are clearly related to El Niño events, although others lack an obvious source mechanism.

Key words: Earth rotation, El Niño, Lyapunov exponents, non-linear analysis, stability.

1 INTRODUCTION

In this study we investigate the possibility of detecting a low-dimensional deterministic process in data time-series of the earth orientation parameters (EOP) which may come from non-linear atmospheric and oceanic excitations. Daily time-series of the polar motion components (PMX, PMY) and length of day (LOD) from 1970 to 1997 (10 080 samples in each series) are analysed. They result from a combination of individual series determined by various geodetic techniques (VLBI, SLR, GPS, etc.; Gambis 1996). We focus on EOP fluctuations with periods between a few days and 100 days. In this second part of our study, our goal is to find various

dynamical characteristics of the time-dependent Earth orientation from the data series alone. We will compare them with the characteristics (attractor dimensions, eventually horizon of prediction, see below) obtained by several authors for various timescales of the atmospheric (see e.g. Nicolis & Nicolis 1984; Essex *et al.* 1987; Fraedrich 1987; Tsonis & Elsner 1988) and oceanic (see e.g. Vallis 1986; Jin *et al.* 1994; Tziperman *et al.* 1994) flows.

In Paper I we obtained dimensional characterizations of the short-term variations in Earth rotation. First we estimated optimal time delays required to build multidimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ from the scalar time-series of EOP in a system of statistically independent coordinates. From the averaged

mutual information function (Fraser & Swinney 1986) we found time delays of 10, 15 and 18 days for the LOD, PMX and PMY series respectively. In order to apply the embedding theory to our data sets (Takens 1981) we then needed to retrieve the dimension D_{E^*} of a pseudo-phase space where any reconstructed orbits from the $y(n)$ vectors will be unfolded. Two approaches were tested for this task: we investigated changes in the global percentage of false neighbours (Abarbanel 1996) and changes in the slopes of the correlation integrals (Grassberger & Procaccia 1983) when the trial embedding dimension was incremented. From both methods we determined the embedding dimension D_{E^*} to be between 5 and 7. This result agrees with the hypothesis of a EOP fluctuation source of low dimension and deterministic nature. However, we must bear in mind that it was impossible to give a precise value for D_{E^*} because the EOP series are quite short and noisy. Then, from 3-D plots of 6-D reconstructed orbits (Paper I, Fig. 10), we pointed out that the general behaviour of a high-dimensional process such as a white or coloured noise is fundamentally different from those we obtained with the EOP time-series. While a stochastic noise fulfils the 3-D subspace in an erratic way or traces a fractal curve, the embedded EOP series trace a smooth trajectory which might originate from a differentiable dynamical system.

The goal of this second paper is to characterize the dynamics of the Earth rotation fluctuations through determinations of the dynamical (or local) dimension D_L , the spectrum of the global Lyapunov exponents λ_i (with $i=1, D_L$), the time-dependent principal local Lyapunov exponent $\lambda_1(t)$ and the attractor dimension D_A . D_{E^*} is the global dimension of the embedding space in which any reconstructed orbit from vectors of time-delayed coordinates is unfolded. The dimension D_L gives the effective number of dynamically active variables. It is obtained from the local distribution of the data vectors $y(n)$ on the attractor. While the analysis of two time-series originating from the same source may lead to different embedding dimensions D_{E^*} , the dynamical dimension D_L will be the same. This property is another consequence of the embedding theorem (Takens 1981; Sauer *et al.* 1991). In any case, $D_L \leq D_{E^*}$ gives the exact number of ordinary differential equations one needs to describe the underlying system and capture its full dynamics.

The spectrum of Lyapunov exponents λ_i provides useful information on the global stability of the system. Each exponent expresses how a small perturbation of the orbit in an eigendirection of the dynamics will evolve in time. Directions associated with null exponents are neutral in the sense that any perturbation applied along them will remain constant. Those directions associated with negative λ_i are stable: any perturbation component lying on them will asymptotically die out. Positive exponents characterize unstable directions along which a perturbation will grow exponentially during a finite time. The rate of growth is precisely related to the exponent. Note that these directions change when going over the orbit. D_L exponents can be computed from a reconstructed orbit in the embedding pseudo-phase space E^* . A system which possesses only negative or null exponents is stable, whereas a chaotic system (characterized by its sensitivity to initial conditions) has at least one positive exponent. The Lyapunov exponents are invariants of the dynamics, so their determination does not depend on the particular orbit used to compute them. Of course, this statement should be treated with

caution when dealing with orbits reconstructed with finite and noisy data time-series or, from a dynamical point of view, when several attractors coexist in phase space, as will be discussed later. If the sum of the Lyapunov exponents is negative, the dynamical system is dissipative.

The ability to predict the evolution of a time-series is intimately related to its principal Lyapunov exponent λ_1 . If $\lambda_1 > 0$, any error made on the present state of the system will grow quickly and reach unacceptable bounds. However, by scanning in E^* the divergence of nearby orbit segments at various places along the attractor, it can be shown that the principal exponent experiences local variations. In other words, the stability of the system and its predictability depend on the system state or equivalently on time. The interest in computing local exponents $\lambda_1(t)$ is thus twofold: first it sets a theoretical horizon of prediction that cannot be exceeded for a given state of the observed system; second, for a non-autonomous system, it may hopefully provide some information on the time-varying external forcings which prompt system instabilities.

If the system possesses an attractor in phase space, the determination of its dimension is also useful information. The attractor is a geometric figure with dimension $D_A < D_{E^*}$ on which all the orbits in phase space converge rapidly after transients have died out. For example, the attractor of a two-periodic system is a 2-torus which captures the asymptotic behaviour of the system evolution. When the attractor dimension is an integer, we are dealing with periodic orbits, while a fractal dimension denotes the attractor 'geometric' strangeness. Dynamical chaos is typified by the sensitivity of the system state evolution to initial conditions. At this stage non-linear analysis of the data series must be conducted very carefully. Indeed, we cannot conclude from the non-integer determination of D_A the chaotic nature of the dynamical regime for two reasons: first, given the uncertainties in the evaluation of D_A , the recovery of the integer dimension of, say, an n -torus is practically impossible from a finite data set; second, there exist some strange non-chaotic attractors (with negative principal Lyapunov exponent; Ding *et al.* 1989). In any case, there is a fundamental difference between chaotic regime and fractal attractor dimension. A fractal dimension D_A is only relevant for characterizing the self-similarity of the orbit (for example of a random walk) or the way it fills the phase space (for example on the Lorenz attractor). The notion of a chaotic regime adds the idea of sensitivity to initial conditions (Eckmann & Ruelle 1985; Osborne & Provenzale 1989). A complete dynamical characterization of any system is clearly required before giving any conclusion on the nature of its dynamical regime.

All these dynamical characteristics belonging to the dynamical system theory are asymptotic quantities and assume infinite time spans to apply rigorously to a problem. We will thus meet several difficulties whilst working with finite and noisy time-series. As in Paper I, the robustness of the results produced by the diverse algorithms will be checked with the help of various tests concerning their sensitivity to data contamination and length of the time-series or sampling intervals. The dynamical analysis of well-known series will help us in our investigation.

In Section 2, we will estimate the local dimension D_L from the three EOP data series. Section 3 is devoted to the computation of the global Lyapunov exponents and constitutes a

major step in this study. In Section 4 we estimate the time variations of the principal Lyapunov exponent $\lambda_1(t)$ over the 27 years of observations for the polar motion components and length of day. Section 5 deals with the determination of the attractor dimension. Besides answering the question of the detectability of a non-linear low-dimensional process in Earth rotation, several results of this study have fundamental implications concerning the nature and geophysical origin of observed fluctuations with periods shorter than 100 days; these are discussed in Section 6.

2 DETERMINATION OF THE DYNAMICAL DIMENSION D_L

The embedding operation gave us the global dimension D_E , needed to unfold properly the orbits reconstructed from data vectors in delayed coordinates. Now we want to pinpoint the exact number of dynamical variables which are really active during the evolution of the system. This dynamical or local dimension D_L is lower than or equal to D_E . In order to illustrate the difference between the embedding and local dimensions, let us consider a quasi-periodic system composed of two incommensurable frequencies. The trajectories lie on a 2-torus. We need a 3-D phase space to unfold this torus ($D_E=3$), whilst the effective number of active dynamical variables is $D_L=2$. This is seen geometrically because a local proxy for the shape of the attractor is its tangent plane.

The local dimension D_L can also be estimated from observations of a single variable. It can be conceived as the number of autonomous ordinary differential equations required to describe the source dynamics (and therefore the number of Lyapunov exponents to be determined). The method employed to compute the local dimension is the local false nearest neighbours (LFN) algorithm (Abarbanel & Kennel 1993), which looks locally at the dimension required to represent unambiguously the dynamical evolution. The method relies on the determination of local maps from neighbourhood to neighbourhood along the reconstructed orbit. These maps are then used to make local predictions of the orbit evolution. The predictions are statistically reliable only when the trial dimension used in the mapping is the local dimension. As will be shown below, we also found it very useful to look at the eigenspectrum of the local data covariance, so we add this option to the basic LFN algorithm.

In practice, the LFN algorithm selects the local principal directions in phase space where most of the data lie. For this purpose we embed the data in a working space of dimension D_w higher than D_E (here we choose $D_w=10$). Taking a point of the pseudo-orbit $y(i)$ and its N_r nearest neighbours $y^r(i)$, we form the data covariance matrix, i.e.

$$C(i) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} [y^r(i) - y_m(i)][y^r(i) - y_m(i)]^T, \quad (1)$$

with the local mean vector

$$y_m(i) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} y^r(i). \quad (2)$$

We then calculate the eigenvalues of $C(i)$ arranged in a non-increasing order:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n, \quad (3)$$

where n is the value of the trial local dimension. This operation is performed for each point of the trajectory. We finally calculate the mean eigenvalues over the whole orbit and normalize them by the largest value to get the mean relative eigenvalues (MRE). In this approach the local dimension D_L is given by the number of significant eigenvalues. They are associated with directions of phase space where data points $y(i)$ really accumulate. Eigenvalues that are too small are not relevant and reflect numerical approximations, covariance matrix ill-conditioning, truncation errors, data quantization or observational noise. For example, the local dimension of the Lorenz system is 3, whilst the attractor dimension is 2.06. If we calculate the MRE spectrum, we select two large eigenvalues and a smaller one which corresponds to the fractal direction of the Cantor set structure of the attractor. This third direction is much less populated as the Lorenz attractor locally lies in a quasi-plane. Therefore, its detection will be more sensitive to noise contamination. There is no general criterion to decide about the irrelevance of some part of the eigenvalue spectrum, so we shall find a threshold value for the significance of the MRE from the analysis of our contamination series.

The next step in the basic LFN algorithm consists of computing the projected vectors $y'_r(i)$ of the N_r neighbours of $y(i)$ on the eigenvectors. After k time steps η taken along the flow they become the projected vectors $y'_r(i+k\eta)$. We determine by a least-squares method the local linear map which transforms the $y'_r(i)$ into the $y'_r(i+k\eta)$. The time evolution of the centre point $y(i)$ is then predicted from the local mapping and compared to the true vector $y(i+k\eta)$. We look at the reliability of the local maps computed for every $y(i)$ by examining the rms prediction error. We fix a threshold over which any prediction is labelled a bad one. Increasing the number of eigenvectors selected, we reach the local dimension D_L when the percentage of bad predictions becomes independent of the number of local eigenvectors used in the mapping process.

The choice of a number of neighbours N_r adapted to our problem was made by testing it on the Lorenz series (or (see Paper I, Section 2) of 10 080 samples. The expected local dimension $D_L=3$ was retrieved for $N_r=10$ or 25. As we are working locally, a lower number of neighbours will lack statistical significance and will provide results much more sensitive to any noise contamination. A higher number would require polynomial mappings of higher degree to account for the curvature effects on the attractor. The test performed with the Lorenz series also showed that the determination of D_L based on the eigenvalues of the covariance matrix gives better results than the percentage of bad predictions, which has a marked tendency to increase the estimates of the local dimension. This is due to the limited number of data points available (10 080). Indeed, the same test performed on a series of 30 000 points gives the correct result. Moreover, we applied the LFN algorithm to a white noise series of 30 000 points and found no local dimension, the percentage of bad predictions remaining close to 100 per cent whatever the number of retained eigen-directions. This is related to the fact that points are randomly distributed without preferred directions. Like for the Lorenz series, working with a short series (f_0 , 10 080 samples) gives spurious results by showing a finite local dimension for a white noise. This drawback is significantly reduced when considering the MRE spectrum.

The algorithm was also applied to the raw data of the random walk time-series $f-2$ (10 080 samples) and to the

same data filtered so as to keep the 1–100 day spectral band. The percentage of bad predictions for the raw coloured noise starts at only 3 and decreases slowly to zero when the trial local dimension is 6. Such behaviour is due to the fractal structure of the curve, which implies self-similarities characteristic of the Cantor set structure of an attractor. Nevertheless, there is no low-dimensional process here. This spurious result is suppressed when working with the filtered time-series. Indeed, the fractal structure is lost and the filtered $f-2$ series behaves more like a white noise. The percentage of bad predictions remains at 100 per cent for a trial local dimension of 9 before dropping suddenly to zero (probably as a consequence of the limited number of samples). Such behaviour is not characteristic of chaotic systems. Here a striking difference occurs when performing the same test with a chaotic series. The percentage of bad predictions is nearly invariant when dealing with the Lorenz series *lor* or with its filtered version. In both cases the correct local dimension $D_L=3$ is found, so we must be very careful if the percentage of bad predictions we obtain is very low in dimension 1 and decreases rapidly to zero, because this can be either a fractal curve or a chaotic process. The way to distinguish between the two possibilities is to analyse the high-pass-filtered time-series also.

We now apply the LFN algorithm to the EOP series and to their companion series contaminated by power-law noise or low-dimensional processes. The three series have the same kind of behaviour (Fig. 1a). The percentage of bad predictions is quite high at the beginning and decreases progressively down to zero with increasing trial local dimension. D_L as estimated from this analysis alone would be around 6–8 for the PMX and PMY series and 7–9 for LOD. The effect of adding 10 per cent noise is, not surprisingly, enormous. Indeed, the local dimension determination is very sensitive to noise contamination because we are working in very confined neighbourhoods ($N_t=25$). Locally the noise has a large effect by perturbing the optimal mapping recovery. The algorithm partly tries to predict the noise. It also becomes very difficult to choose a valid prediction horizon ($k\eta$ in the explanation above). If the horizon is taken too short, we predict the noise only. If it is too long, we are faced with curvature effects and orbit segment divergence that can be tackled with higher polynomial maps only, which in turn require a huge number of data samples in order to be constructed reliably. Adding 10 per cent white or coloured noise to the LOD time-series thus totally changes the behaviour of the percentage of bad predictions, as shown in Fig. 1(b). The noise is dominant and we cannot see the signal any more. This important remark shows us that if our data series are even slightly contaminated by noise, the D_L estimated via the LFN algorithm will be significantly overestimated. On the other hand, the addition of 10 per cent Lorenz chaos to the LOD data does not have any significant effect on the percentage of bad predictions. The same results are obtained with the PMX and PMY series. This test has shown that the relative behaviour of the EOP time-series and that of the high-dimensional time-series are completely different. Moreover, the previous values for the EOP local dimensions are probably overestimated.

Inspection of the mean relative eigenvalues (MRE) spectrum offers a geometrical way to determine the local dimension D_L . It consists of finding the local directions along which the data are preferentially distributed. This test was performed on the original and contaminated EOP time-series as well as on the synthetic noise and Lorenz chaos. The main limitations of

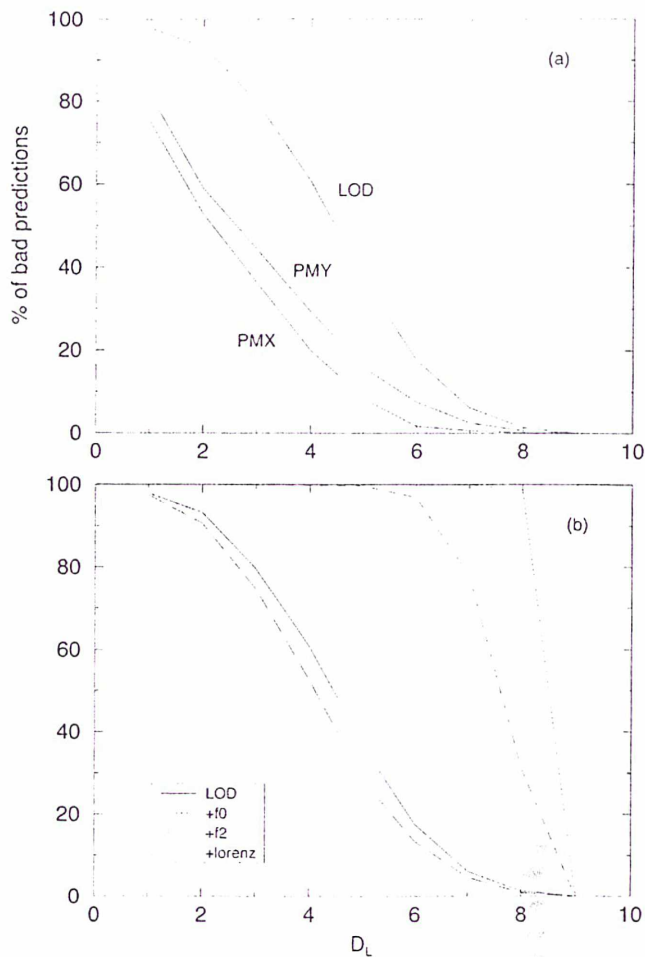


Figure 1. Percentage of bad predictions as a function of the trial local dimension D_L . (a) For the LOD, PMX and PMY series. (b) For LOD (solid line) and its contaminated equivalents: $+f_0$ (dotted line), $+f-2$ (dashed line), $+lor$ (long-dashed line).

this algorithm come from the great local variations observed for the eigenvalues. A robust estimate of the MRE spectrum would require the use of time-series long enough to find the asymptotic characteristics of the data distribution in phase space. Moreover, the determination of very small eigenvalues is very difficult and the associated eigenvectors are given mostly by local noise. Note that this weakness of the MRE approach is shared with the LFN algorithm. Nevertheless, this method seems to give better results than the prediction method with our limited series. The local dimension estimate was more relevant for known series (e.g. for the Lorenz series *lor* and noises f_0 and $f-2$). We also checked that this geometrical method was more robust in the presence of noise: this is probably because no least-squares fit to the data for the determination of mapping coefficients is involved, nor any prediction skill.

The MRE spectra for the three EOP series are shown in Fig. 2(a). The local dimensions obtained from this analysis are around 4–5 for the PMX and PMY series and 5–6 for LOD. They are systematically lower by two units than the determinations found with the percentage of bad predictions. We are more confident in the results of the MRE analysis as it appears less biased by noise contamination. In Fig. 2(b) the MRE spectra for the LOD and for its contaminated companions are shown. The local dimension is overestimated in

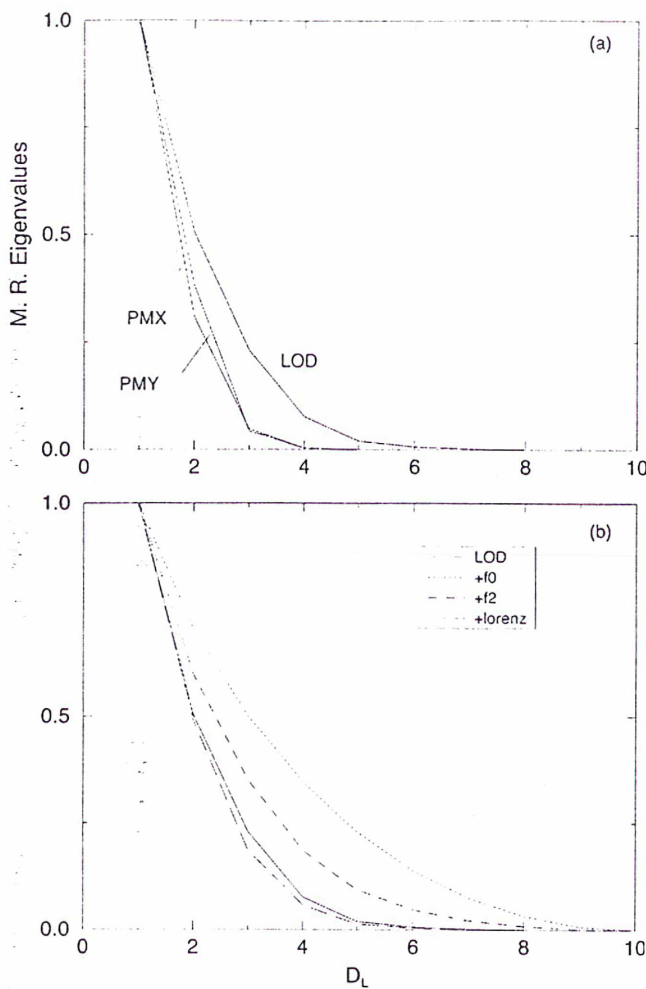


Figure 2. Mean relative eigenvalues of the local data covariances as a function of the trial local dimension D_L . (a) For LOD, PMX and PMY. (b) For LOD (solid line) and its contaminated equivalents: +f0 (dotted line), +f-2 (dashed line), +lor (long-dashed line).

the presence of noise, although this artefact is less marked than with the LFN algorithm (compare with Fig. 1b). Once again the chaotic contamination has no significant effect on the determination of D_L . This possibly indicates the presence of low-dimensional chaos in the EOP series. In summary, the most reliable estimates are as follows:

- (1) $D_L = 5$ or 6 for LOD;
- (2) $D_L = 4$ or 5 for PMX;
- (3) $D_L = 4$ or 5 for PMY.

As a common local dimension we report the value of $D_L = 5$ in Table 1, which summarizes the dimensional and dynamical characteristics we obtain for the three EOP series.

3 GLOBAL LYAPUNOV EXPONENTS

The global Lyapunov exponents characterize the global stability of the regime of a dynamical system (see e.g. Thompson & Stewart 1987; Tuffillaro *et al.* 1992). Each exponent indicates the rate of contraction or expansion of an orbit perturbation taken on a local eigendirection of the system dynamics (see below). A negative exponent implies a contraction of the orbit

Table 1. Summary of the dimensional and dynamical results for the filtered time-series of the LOD and polar motion components PMX and PMY: time delay τ in days; embedding dimension D_E^* ; local dimension D_L ; principal Lyapunov exponent λ_1 ; sum of the Lyapunov exponents $\Sigma \lambda_i$; Lyapunov dimension $D_{L,yap}$; attractor dimension D_A ; prediction horizon H_P in days.

	LOD	PMX	PMY
τ (days)	10	15	18
D_E^*	5–6	5–6	5–6
D_L	5	5	5
λ_1	0.35	0.45	0.48
$\Sigma \lambda_i$	–0.41	–0.08	–0.02
$D_{L,yap}$	4.48	4.90	4.97
D_A	4.5–5.5	3.5–4.5	4–5
H_P (days)	11.3	8.7	8.1

perturbation lying on the corresponding stable manifold. On the other hand, if the system possesses at least one positive Lyapunov exponent λ_i , its time evolution is sensitive to the choice of initial conditions in a particular direction. Any small perturbation $\delta(0)$ exerted on the orbit at $t=0$ along that direction grows exponentially with time, so that

$$\delta(t) = \delta(0) e^{\lambda_i t}. \quad (4)$$

A zero Lyapunov exponent is always associated with a continuous dynamical system (a flow). It corresponds to the absence of both contractions and expansions if the perturbation is exerted along the orbit itself (neutral manifold). Systems whose sum of Lyapunov exponents is negative are dissipative. Any volume of the n -dimensional phase space will shrink with time, although some directions may remain unchanged (along neutral manifolds) or even stretch (along unstable manifolds). For example, k -periodic systems have k zero Lyapunov exponent and $n-k$ negative exponents. Initial conditions taken on a stable manifold will die out at an exponential rate and the orbit will 'stick' to the attracting k -torus. The existence of positive exponents is typical of the chaotic nature of the system regime. Perturbations taken 'outside' the attractor will be damped but two orbits will rapidly separate from each other on the attractor because of the instability.

We want to find the global Lyapunov spectra of the Earth rotation dynamics from the EOP time-series of polar motion and LOD. We expect to find at least one zero exponent because we are dealing with a flow underlying our data. Indeed, the atmospheric and oceanic excitations are ruled by flows and Liouville's equations describing the Earth's rotational response are themselves a set of differential equations. The accuracy of the determination of the zero exponent will give us an idea about the reliability of the Lyapunov spectrum recovery. The positive exponents are quite easy to find from a time-series because they correspond to dilatation directions of the nearby segments of the reconstructed orbit. On the other hand, it is difficult to determine the negative exponents because they correspond to the contraction of orbit perturbations, so their effect disappears rapidly in time. As a consequence, they are associated with very small eigenvalues of the Jacobian matrix entering into their determination, which makes these matrices ill-conditioned. The global Lyapunov exponents are invariants of the motion evolving over the infinite time axis.

This is a key point because working with a single time-series realization the global Lyapunov exponents we calculate are representative of the entire dynamical system regime.

Several methods have been proposed to find the Lyapunov spectrum from a time-series (Eckmann *et al.* 1986; Bryant *et al.* 1990; Brown *et al.* 1991). The updated method we use is detailed in Abarbanel (1996). Consider a dynamical system with vector of state variables y_i at a discrete time i described by a map

$$y_{i+1} = F(y_i), \quad (5)$$

where F is a differentiable function. Using linearized dynamics, a small perturbation δ_i applied to the orbit y_i at time i will become at time $i+1$

$$\delta_{i+1} = DF(y_i)\delta_i, \quad (6)$$

where $DF(y_i)$ is the Jacobian matrix of F at y_i . After L time steps we have

$$\delta_{i+L} = DF(y_{i+L-1})DF(y_{i+L-2}) \cdots DF(y_i)\delta_i \equiv DF^L(y_i)\delta_i. \quad (7)$$

The Lyapunov exponents are directly linked to the eigenvalues of the previous composition of Jacobian matrices. In order to calculate them, we form the symmetric Oseledec matrix:

$$S(y_i, L) = [DF^L(y_i)^T DF^L(y_i)]^{1/2L}, \quad (8)$$

where the superscript T is for transpose. In theory, the Oseledec matrix is built from an infinite sequence of matrix composition ($L \rightarrow \infty$) so that the choice of starting point y_i is of no concern. In practice we start at the beginning of the embedded data series and compose the local matrix over the finite series length. Therefore, we do not really obtain the global Lyapunov exponents but rather averaged exponents which are representative of the average stability of the system over the observation time span.

When working with a time-series, we first have to determine the successive unknown Jacobian matrices. This is done by looking at a point in the pseudo-phase space and at its nearest neighbours. We then define a local map which models the evolution of the neighbours in time:

$$y_i^r \rightarrow y_{i+1}^r, \quad (9)$$

where y_{i+1}^r is the r th neighbour of y_i at time $i+1$. The local map is built as

$$y_{i+1}^r = \sum_{m=1}^M c(m, i) \Phi_m(y_i^r), \quad (10)$$

where the Φ_m are *a priori* basis functions and the $c(m, i)$ are local coefficients to be determined. The (a, b) component of the Jacobian matrix is defined by

$$DF_{ab}(y_i) = \sum_{m=1}^M c_a(m, i) \frac{\partial \Phi_m(y_i)}{\partial x_b}. \quad (11)$$

From this empirical Jacobian, we form the Oseledec matrix. Its ill-conditioning prevents the direct computation of its eigenspectrum, so we perform a recursive QR decomposition (Golub & van Loan 1989) leading to the following product of an orthogonal matrix Q and $2L$ upper-right triangular matrices $R(\cdot)$:

$$S = QR(2L)R(2L-1) \cdots R(1). \quad (12)$$

The Lyapunov exponents are computed from the diagonal terms of the R matrices as follows:

$$\lambda_a = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \sum_{k=1}^{2L} \log[R_{aa}(k)], \quad (13)$$

where $R_{aa}(k)$ is the (a, a) component of the k th triangular matrix $R(k)$. We see that this is an asymptotical limit, the matrix Q going to identity. Thus for finite data sets, this condition cannot be achieved and we have to apply the recursive QR decomposition iteratively as explained in the next section.

We have determined the averaged Lyapunov exponents for the EOP series and tested the result sensitivity to various contaminations. Dealing with a local dimension $D_L = 5$, we evaluate both the forward and backward exponents in order to eliminate the possible false exponents. A true exponent changes sign when time is reversed (Abarbanel 1996). For PMX, PMY and LOD the five exponents are true and we can find two positive exponents. The principal exponents are 0.35, 0.45 and 0.48 for LOD, PMX and PMY respectively. We also obtain for the three series the expected zero exponent corresponding to the flow direction of the data, with an accuracy of about 5 per cent. The accuracy of the positive exponent determinations is probably slightly better. We also obtain two negative exponents as illustrated in Fig. 3 for LOD. The negative sum $\sum_{a=1}^{D_L} \lambda_a$ of the global exponents indicates the dissipative nature of the system (Table 1). The Lyapunov dimension D_{Lyap} (Kaplan & Yorke 1979) is directly evaluated from the exponents by

$$D_{\text{Lyap}} = K + \frac{\sum_{a=1}^K \lambda_a}{|\lambda_{K+1}|}, \quad (14)$$

with $\sum_{a=1}^K \lambda_a > 0$ and $\sum_{a=1}^{K+1} \lambda_a < 0$. The integer K is chosen so that $K < D_L$ and $\lambda_{K+1} < 0$. D_{Lyap} is an upper bound of the attractor dimension D_A . It is a dynamical characteristic of a chaotic motion. For its calculation, one needs to know the full Lyapunov spectrum, including the negative exponents. Working with noisy data and finite series may be an obstacle to obtaining a precise determination of either of the negative exponents and then the Lyapunov dimension. For the Lorenz system, the Lyapunov exponent is exactly the same as that of the attractor ($D_A = 2.06$), a value we recover with the lor series of $\approx 10^4$ samples only. The Lyapunov dimensions obtained for the EOP time-series are as follows:

- (1) $D_{\text{Lyap}} = 4.48$ for LOD;
- (2) $D_{\text{Lyap}} = 4.90$ for PMX;
- (3) $D_{\text{Lyap}} = 4.97$ for PMY.

Finally, horizons of prediction H_P (in days) are evaluated for each EOP time-series from their respective principal exponents λ_1 by

$$H_P = 3.9 / \lambda_1. \quad (15)$$

The factor 3.9 scales the predicting horizon to be the point where two trajectories, initially distant by 1 per cent of the mean attractor size R_A , separate from each other by $0.5 R_A$ (here we take the data series rms for R_A). H_P is a crude estimate of the time until which it is possible to make a valid prediction of the system evolution. Over this time, the forecast error is of the order of the data rms. For the time-series filtered at 100

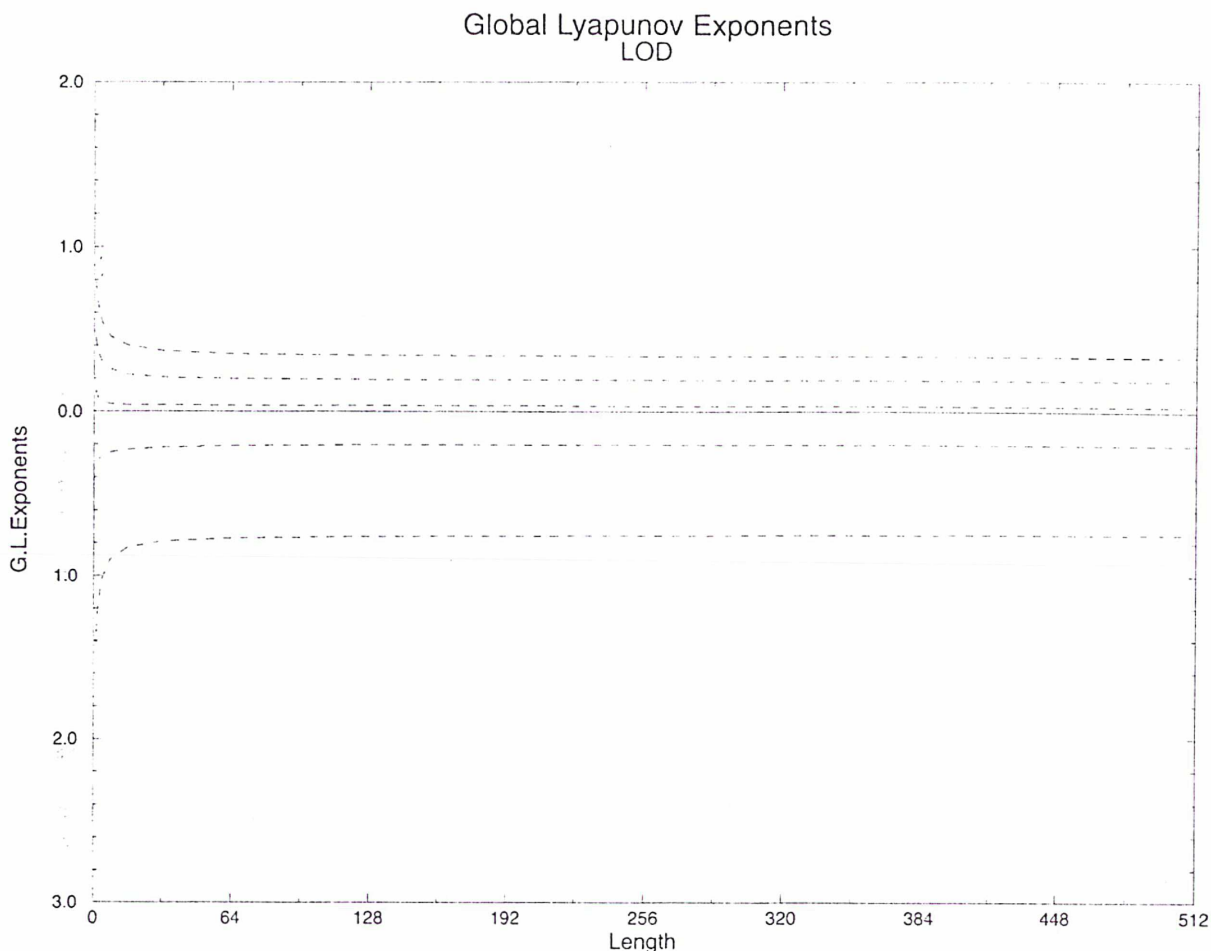


Figure 3. Values of the global Lyapunov exponents for LOD. Each global exponent is obtained as the average of 3×10^3 local exponents computed on the basis of the composition of L Jacobian matrices estimated at the rate of one per day (see text). L is given on the abscissa.

days, the predicting horizon is about 11.3 days for LOD (recalling that the $\text{rms} = 0.12$ ms), about 8.7 days for PMX ($\text{rms} = 2.3$ mas) and 8.1 days for PMY ($\text{rms} = 1.6$ mas).

It has recently been shown that it is possible to find spurious positive exponents from random time-series (Tanaka *et al.* 1996). We have thus performed the same computations for the EOP time-series contaminated by noise and by the Lorenz series (see Paper I, Section 2). The addition of 10 per cent white noise greatly perturbs the determination of the Lyapunov exponents, but the results are clearly no longer valid because $\sum_{a=1}^{D_1} \lambda_a > 0$ (system neither conservative nor dissipative). This comes first from the fact that a white noise is a high-dimensional process which cannot be embedded and second from the fact that the white noise component completely hides the underlying smooth EOP signal because the determination of the Jacobians is a local operation that is very sensitive to erratic point distribution over the attractor. The addition of a coloured noise $f-2$ or of a Lorenz signal does not significantly change the results. It thus seems that we could mistake a random walk for a chaotic signal. In fact, such a coloured noise might be detected by analysing the data series with reversed times. Indeed, in such a situation, after the normal sign correction accounting for the time reversal was applied, we obtained a positive sum of the exponents with the series $f-2$. Time reversal has been tested with the EOP series and never causes such an unphysical result. The Lorenz con-

taminated series not only successfully pass this test, but their principal Lyapunov exponents are changed by no more than 10 per cent.

In summary, the estimates we obtained for at least the principal Lyapunov exponents λ_1 are quite robust with regard to noise contamination. They are positive for the three (filtered) EOP series. This result characterizes the dynamical chaos of the Earth rotation fluctuations in the period range $[\approx 1-100 \text{ days}]$. As a consequence, theoretical bounds (related to the system dynamics) exist beyond which no reliable forecast of the Earth's orientation variations at short periods can be given. In practice, an error of ≈ 0.001 ms on LOD will grow to 0.06 after 11 or 12 days. In the same way, errors of $[0.02, 0.015]$ mas on the polar motion components [PMX, PMY] will reach about $[1.15, 0.75]$ mas after ≈ 8.5 days.

4 LOCAL LYAPUNOV EXPONENTS

Being invariants of the dynamics, the global Lyapunov exponents characterize the attractor as a whole. There can exist local variations of the system stability along an orbit. Those local variations are quantified by the local Lyapunov exponents (Abarbanel *et al.* 1991). They vary with the position of the state vector y_i in phase space. Their knowledge is very useful for short-term predictions. If the principal exponent λ_1 is positive, its variations $[\lambda_1(t) \text{ hereafter}]$ give equivalent time

variations of the predicting horizon $H_P(t)$. System stability changes of this kind are well known, for example in large-scale atmospheric dynamics (see e.g. Palmer 1993; Palmer *et al.* 1994).

In the previous section, we finished the algorithmic part after the Oseledec matrix (eq. 8) was recursively decomposed (eq. 12). For convenience we call the 'length' of the Oseledec matrix, $S(y_i, L) = [DF^L(y_i)^T DF^L(y_i)]^{1/(2L)}$, the number L of local Jacobian matrices DF entering its composition, and y_i its starting point on the attractor. The most reliable 'global' Lyapunov exponents discussed in Section 3 are formed by averaging the local exponents of the Oseledec matrices of length $L=512$ estimated at 3000 starting locations. For short time spans (small L), the basic recursive QR decomposition is inadequate for providing accurate estimates of the Oseledec matrix eigenvalues. Indeed, the orthogonal Q matrix (eq. 12) does not fit the identity matrix. Applying the recursive QR decomposition iteratively overcomes this difficulty, although preserving the eigenvalues of the decomposed matrix (Abarbanel 1996). In Section 3 we showed that

$$S_0 = Q_0 R_0(2L) R_0(2L-1) \cdots R_0(1), \quad (16)$$

where the zero subscript stands for the 0th iteration. We then define the matrix

$$S_1 = Q_0^T S_0 Q_0 \quad (17)$$

and perform a new recursive QR decomposition on S_1 . We repeat this process until Q_K fits the identity matrix to the desired accuracy. The sequence of $S_{k=1,K}$ matrices have the same eigenvalues. The local Lyapunov exponents are obtained at the K th iteration from the diagonal terms of the R matrices:

$$\lambda_a = \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^{2L} \log[R_{K[aa]}(j)]. \quad (18)$$

With our time-series, the Q matrix converges to the identity within an accuracy of 10^{-6} after two iterations at most.

Our aim is now to look at the variations of the (local) principal exponents $\lambda_1(t)$ over the years of EOP observations. All the results presented below are obtained with 28 years of observation (10 234 samples for each EOP series), ending in December 1997. This slightly longer EOP series results from minute differences in data combination and filtering routines (new combined IERS series). The previous dimensional and dynamical characterizations were recomputed for these slightly longer time-series without noticeably changing the results. We shall focus on those exponents obtained from local matrices of length $L=8$ and $L=64$ which are representative of stability fluctuations of the corresponding number of days. The 8 day stability is chosen so as to fit broadly the embedding time delay corresponding to the minimum interval required to have non-linearly independent data (see Paper I, Section 4). The 64 day stability is studied because we lose any mutual information between the successive measurements over 2 months and the corresponding local exponents will smooth out somewhat fluctuations in Earth's rotational stability that are too rapid.

The time-series of local exponents $\lambda_1(t)$ for LOD is given in Fig. 4. We immediately note important variations with regard to the average exponent. The most striking feature is the peak for both the $L=8$ and the $L=64$ exponents in the year 1983. Throughout 1983, the local Lyapunov exponents are between two and three times their mean values, and consequently the corresponding horizon of prediction is divided by the same factor. Obviously, this transitory relative loss of stability in the Earth's rotational dynamics must be related to the strongest El Niño on record. No other exceptional event is seen in this plot. Using the previous shorter LOD series of 10 080 samples, we obtain a second, although less marked, peak for the year 1977

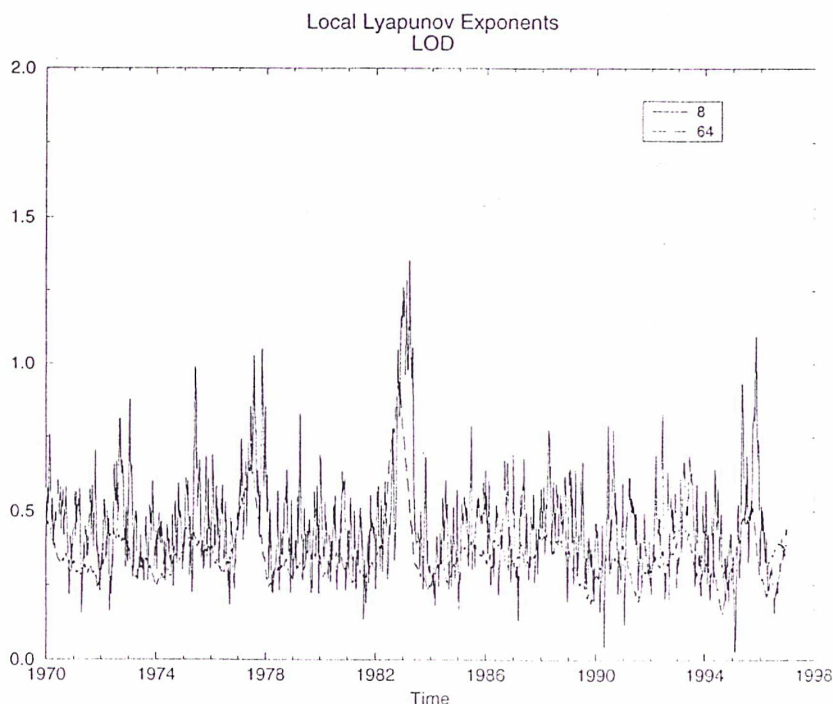


Figure 4. Time variations of the LOD principal local Lyapunov exponent from 1970 to 1998 for a length $L=8$ days (solid line) and $L=64$ days (long-dashed line).

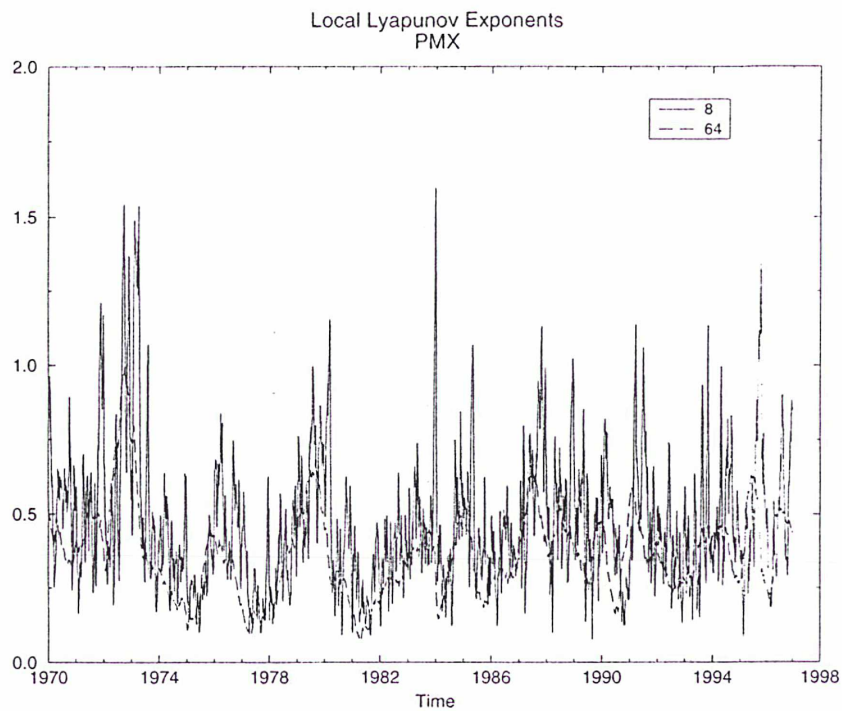


Figure 5. Time variations of the PMX principal local Lyapunov exponent from 1970 to 1998 for a length $L=8$ days (solid line) and $L=64$ days (long-dashed line).

which might correspond to the mild El Niño observed at that time in the sea surface temperature and in the sea level pressure.

Local exponents for the PMX and PMY series are shown in Figs 5 and 6 respectively. The major event in the stability of the x -component of polar motion lasts over three successive years,

from 1971 to 1974. The magnification factor is larger than 3 (and the prediction horizon reduces to about 2.9 days only). A candidate excitation could be the two strong changes in polarity of the tropical ocean–atmosphere coupled system, with two La Niña events flanking a well-marked El Niño (1973). No other clear stability signal can be matched to known

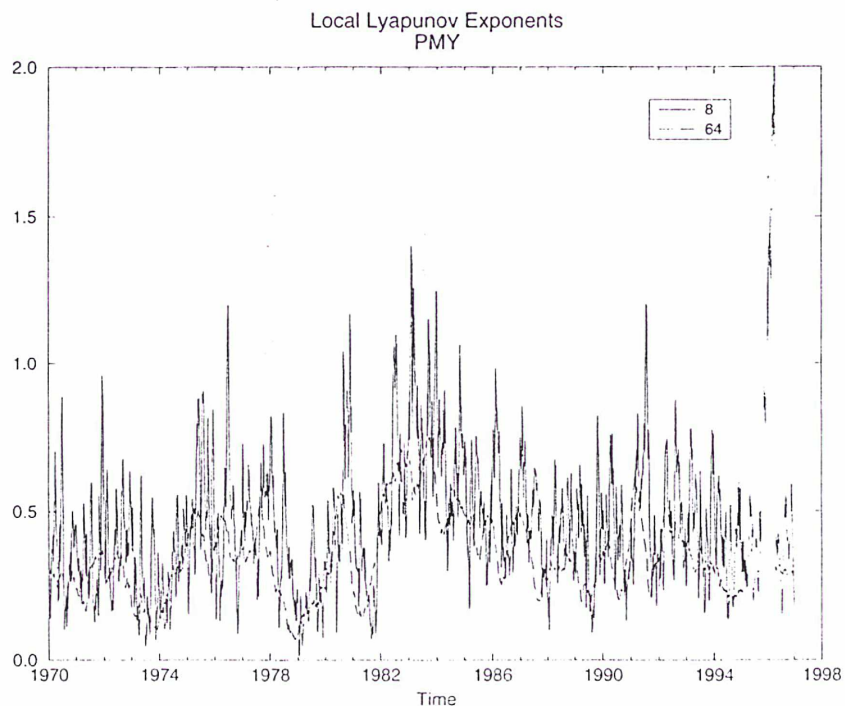


Figure 6. Time variations of the PMY principal local Lyapunov exponent from 1970 to 1998 for a length $L=8$ days (solid line) and $L=64$ days (long-dashed line).

atmospheric or oceanic excitation except perhaps the 1992 El Niño event where the prediction horizon seems to be reduced by a factor 2. More variability is seen in the local Lyapunov exponents of the PMY series (Fig. 6). Two relative losses of stability occur from mid-1975 to the end of 1976, and from mid-1982 to the end of 1983. If the second anomaly is induced by the famous El Niño, the first could perhaps be related to La Niña–El Niño twins for the same period. No clear signature for the 1997 El Niño appears in the EOP local exponents. An indistinct rise of both local exponents seems to start in Fig. 5 for PMX. This very unclear anomaly has yet to be confirmed during the ensuing few months, while El Niño might be in partial retreat since December 1997. Remembering that we are dealing with EOP time-series high-pass filtered at 100 days, the variability that we observe and link to external excitations is the result of geophysical events on that particular timescale. Even if the El Niño event lasts several months, we here recover its signature on short periods in the Earth rotation. The predicting horizon we give is thus for the signal under 100 days only; it is obvious that working with raw data would give different values for the horizon of prediction and also a much larger attractor mean size, or equivalently a larger bound for any error growth.

Stronger magnification of the PMY local exponents occurs in 1996 (Fig. 6). No significant anomaly in the ocean–atmosphere circulation can be invoked as a candidate source for this particular perturbation in Earth rotation stability. In a recent catalogue of earthquake magnitudes (Engdahl *et al.* 1998) we found five very powerful events with magnitude >7.5 occurring in 1996 [01/01 with (north latitude, east longitude; magnitude) $(-20.4, -174.2; M=7.9)$; 17/02 with $(-00.9, +136.9; M=8.2)$; 10/06 with $(+51.6, -177.6; M=7.9)$; 17/06 with $(-07.1, +122.6; M=7.9)$; 12/11 with $(-15.0, -075.7; M=7.7)$]. This suggested relation between earthquake energy release and polar motion fluctuations has been studied in the past (see e.g. Chao & Gross 1987). Whilst no evidence for such a mechanism was found from the observations, the theoretical studies indicated that earthquake energy output larger by an order of magnitude or two would be required to pass the threshold of detectability with the current measurement techniques. The accuracy of the combined EOP series has been much improved during the last 10 years. Moreover, we do not correlate earthquakes with EOP measurements but with relative stability losses in rapid fluctuations of the Earth rotation. We are wary of drawing premature conclusions from this, but feel that there is a need to re-investigate this question.

In Table 2, we report several such transitory relative losses of the Earth's rotational stability as detected from the local Lyapunov time-series $\lambda_1(t)$ for LOD, PMX and PMY. Most of them have an obvious signature on one or two of the EOP 'stability' series only. We tested the robustness of these peaks in the $\lambda_1(t)$ by performing the same analysis with the contaminated EOP series (see Paper I, Section 2). All the events discussed above are still visible in the presence of 10 per cent rms of stochastic or deterministic contamination. The added white noise has the worst effect by raising the background level of the $\lambda_1(t)$ series so as to partially merge the peaks. However, the significant peaks are still clearly seen with preserved values of the associated prediction horizons $H_P(t)$. The effect of the random walk $f-2$ contamination is to increase spuriously some of the smaller peaks and reduce the

Table 2. Date of events related to local variations of the principal Lyapunov exponent $\lambda_1(t)$ for LOD, PMX and PMY time-series. The upper number is the value of the local Lyapunov exponent and the lower one is the associated horizon of prediction H_P in days. The last line gives the global principal Lyapunov exponent and the corresponding horizon of prediction for the 1970–1998 time interval.

Series	LOD	PMX	PMY
Event date			
1972–1973	0.5 7.8	1.5 2.6	0.48 8.1
1976–1977	0.5 7.8	0.6 6.5	0.8 4.9
1982–1984	1.2 3.3	0.45 8.7	0.8 4.9
1991–1992	0.4 9.7	0.8 4.9	0.75 5.2
1996–1997	0.6 6.5	0.6 6.5	1.5 2.6
Global values	0.35 11.3	0.45 8.7	0.48 8.1

higher ones, the events previously reported still being signalled by dominant peaks. The Lorenz contamination for slightly tapers the peaks or equivalently induces a false increase of the local predicting horizons.

In any case we do not attach too much importance to the exact values of the local Lyapunov exponents or prediction horizons. Their precise estimation is quite sensitive to data contamination. On the other hand, their relative change with time is robust and can be correlated with external excitations of Earth rotation. It should also be kept in mind that the time-dependent smoothing of the combined EOP series (with a cut-off period as long as 30 days for the polar motion and 15 days for LOD before 1980; see Paper I, Section 2) is likely to have seriously damped those events affecting the very short periods of Earth rotation fluctuations in the 1970s. The strength and weakness of our very tentative interpretations is discussed in Section 6.

5 DETERMINATION OF THE ATTRACTOR DIMENSION D_A .

In Paper I, the Grassberger & Procaccia (1983) algorithm gave us a mean to evaluate the embedding dimension D_{E^*} , defined as the first trial dimension from which the slopes of the $\log[C(r)]$ versus $\log(r)$ diagram begin to saturate. $C(r)$ being the correlation integral. Here we are interested in finding an attractor dimension for the EOP time-series.

An attractor is a geometric figure lying in the phase space of a dissipative dynamical system which captures all the orbits belonging to a given basin of initial conditions after transients fade out. Several competing attractors can coexist with very intricate basin boundaries (see e.g. Sommerer & Ott 1993). Their attracting nature is intimately related to the existence of stable manifolds along which any orbit perturbation will shrink at an exponential rate (see Section 4). Therefore, $D_A < D_{E^*}$. The local D_L and Lyapunov $D_{L_{\text{Lyap}}}$ dimensions found in Sections 2 and 4, respectively, are also related to the attractor

dimension:

$$D_A \leq D_L < D_A + 1, \quad (19)$$

$$D_A \leq D_{\text{Lyap}}. \quad (20)$$

The dimension of the attractor D_A is a good characterization of the dynamical regime of the non-linear system. For instance, a white noise process has no attractor since the embedded points are randomly distributed in an infinite-dimensional phase space without exhibiting any particular structure. The attractor of a k -quasi-periodic system is a k -torus (with k integer), a smooth well-defined geometric figure in phase space. On the other hand, a strange attractor is a complicated figure whose dimension is not an integer. In such a case the dimension provides a measure of the Cantor set structure of the attractor. In the past, most dynamical systems having this kind of attractor were found to be chaotic, in particular through the analysis of their global Lyapunov exponents, but strange non-chaotic attractors were also discovered (Ding *et al.* 1989). We must thus be very careful before concluding from the fractal dimension of an attractor the chaoticity of the system. The chaotic nature of the rapid fluctuations in Earth rotation has already been established (Section 4), thus we have no such dilemma.

It has also been shown that a coloured noise might exhibit a non-integer dimension as determined by the correlation integral (Osborne & Provenzale 1989) because its reconstructed curve in pseudo-phase space is fractal (self-similar and not differentiable). From a projection in 3-D space of the EOP trajectories (Paper I, Fig. 10), we saw that the orbits were smooth and formed a figure which did not fill the space randomly like a white noise nor fractally like a random walk. As mentioned previously, the presence of positive Lyapunov exponents reveals the existence of a strange attractor in phase space. The sum of the global Lyapunov exponents being negative further indicates that dissipative mechanisms are active in the rapid fluctuations of Earth rotation. For the EOP time-series, the dimension of the attractor must be greater than 3 because the orbits are still self-crossing in a 3-D space. D_A cannot be greater than 5 with regard to the determinations of the embedding dimension, local dimension and the Lyapunov dimension made previously.

In order to determine the attractor dimension D_A , we use the Grassberger & Procaccia (1983) algorithm based on the computation of the correlation integral $C(r)$ (see Paper I, Section 6 for details). When the embedded data vectors $y(i)$ populate an attractor, the correlation integral ('spatial correlation of points'), $C(r)$, behaves like a scaling law. Consider that the $y(i)$ s are homogeneously distributed on a surface: the number of pairs of points which are at a distance of less than r then grows proportionally to r^2 as r is increased. For an attractor of dimension D_A , we have the same kind of behaviour: $C(r)$ behaves like r^{D_A} for r going to zero and the number of data points N going to infinity. We see that working with finite sets of experimental data will be an obstacle for the convergence of the $C(r)$ slope to the attractor dimension. Obviously r cannot be taken too small because of the truncation and limited accuracy of the data, nor can N go to infinity; that is, the embedded data vectors $y(i)$ poorly and inhomogeneously sample the attractor. In theory the way the correlation integral is constructed gives a relevant measure for the attractor dimension because it is sensitive to the dynamical process

of coverage of the attractor and in that sense it is different from the usual Hausdorff dimension D_H , even if they are very close ($D_A \leq D_H$) (Eckmann & Ruelle 1985). The Hausdorff dimension results from a coverage of the attractor by cubes of length l . The number $nb(l)$ of cubes needed to cover the attractor is related to the dimension by $nb(l) \approx l^{-D}$. We see that D_H is only sensitive to the geometric structure of the attractor as a whole and not to the density of points.

Plots of $\log[C(r)]$ versus $\log(r)$ have been drawn for the three EOP time-series (see e.g. Paper I, Fig. 6 for LOD). We then select a range of $\log(r)$ values where the $\log[C(r)]$ curve is almost linear (note that this range depends on the trial embedding dimension). The mean slope over this curve segment is an estimate of the attractor dimension and the slope rms about its mean is reported as an error bar in Fig. 7. The higher the trial embedding dimension, the narrower the range of admissible $\log(r)$ values. As a consequence, error bars tend to be larger for higher embeddings, and our uncertainty estimates are mainly representative of the way we pick the slopes, not really of the effect of various error sources on the slope determinations. No such theoretical accuracy bounds have been published. There is no obvious convergence of the slope to a constant value around an embedding dimension $D_E = 5$, thus it is not straightforward to select a precise attractor dimension. The increase in the slope is much the same for LOD (Fig. 7a), PMX (Fig. 7b) and PMY (Fig. 7c). It increases until the trial embedding dimension reaches 5 or 6 and then grows more and more slowly, as if a random process, superimposed on the deterministic signal, was partly counterbalancing the saturation effect of dynamical origin by pulling up the curve. The slope quasi-saturation is more evident for the PMX data series (Fig. 7b). For comparison, the slope of the correlation integral for a white noise process always equals the trial embedding dimension (it is shown as a dashed diagonal line in Fig. 7). Assuming an embedding dimension of 5 or 6, from Fig. 7 we obtain attractor dimensions of 4.5–5.5 for LOD, 3.5–4.5 for PMX and 4–5 for PMY. These results verify the inequality constraints relating D_A to the local and Lyapunov dimensions (eqs 19–20).

We are not very confident in the way that these determinations of D_A are obtained. Because of the limited number of data, their quantization and the presence of noise contamination, the correlation integral algorithm is unable to provide robust results (see also Roberts 1991). Indeed, in Paper I the saturation of the $C(r)$ slopes was clearly detected (Paper I, Section 6 and Fig. 7) for an embedding dimension between 5 and 7. This behaviour is in fact mainly observed for small radii r corresponding to the part of the $\log[C(r)]$ curve that shows a 'knee' (Paper I, Fig. 8); our D_A estimates must be performed in a higher range of r values corresponding to linear segments of the plot. The knee is partly generated by 'false' counting of pairs whose points are neighbours in phase space E^* only because they are consecutive in time. Discarding these pairs (Theiler 1986) is of no real help for short time-series because the sparse coverage of the attractor provides a very restricted number of 'true' neighbours. This knee might also be a genuine signature of the underlying dynamics. In fact, in the tests performed in Section 6 of Paper I we saw that the knee disappeared when the EOP data series were contaminated by noise, but remained unchanged when low-dimensional chaos was added. Eckmann & Ruelle (1985) also noted that such a knee might result from the observed dynamical variable

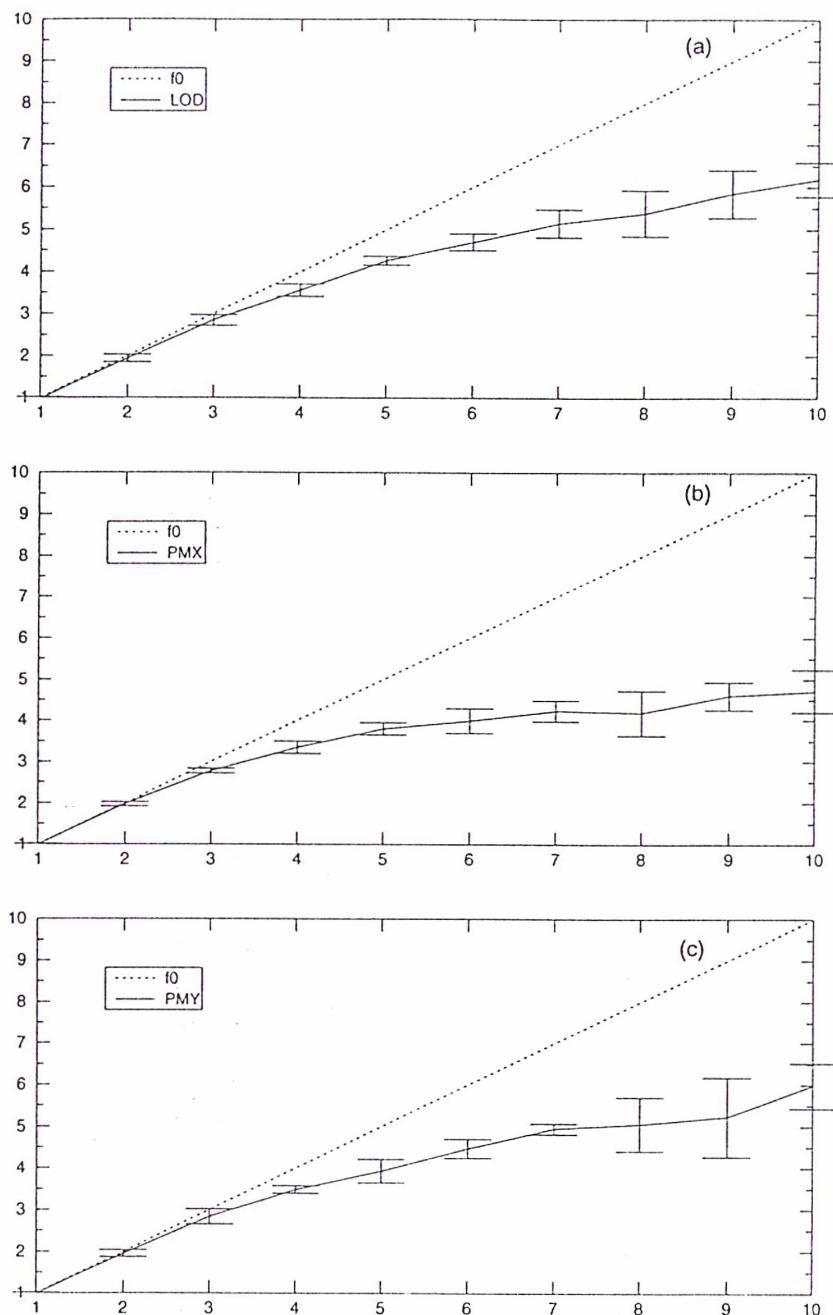


Figure 7. Slope of the correlation integral as a function of the trial embedding dimension D_E^* (for the error bars evaluation see Section 5): (a) for LOD (solid line) and corresponding slope for a white noise (dashed line); (b) for PMX (solid line) and corresponding slope for a white noise (dashed line); (c) for PMY (solid line) and corresponding slope for a white noise (dashed line).

being the superimposition of two non-interacting dynamical system outputs. Moreover, data given at constant time steps cannot homogeneously cover the attractor. The corresponding steps in E^* will be stretched when approaching the most external boundaries of the attractor. The $C(r)$ estimate will be even more penalized by the data scarcity in these regions of E^* . Noise contamination effects will be most often observed for small radii. For large radii r , $C(r)$ is only slightly representative of the attractor geometry. Indeed, when increasing r , orbit segments in E^* with distance $\leq r$ will progressively lose their dynamical connection. The slope of $C(r)$ is more and more meaningless for increasing radii.

We could hardly draw conclusions about the detectability of non-linear deterministic processes in EOP from the application

of this algorithm alone. The range of attractor dimensions we give allows both integer and non-integer values. The computation of the Lyapunov exponents behaves better than the correlation interval (such a remark is made by Ruelle 1990). We thus take the Lyapunov dimension for a more reliable characterization of the attractor strangeness of the EOP series.

6 DISCUSSION

Dimensional and dynamical characteristics extracted from the filtered EOP data series are summarized in Table 1. We have checked that most of the results reported are robust against data contamination. Such topics and more specific issues are discussed in each section with regard to the basic

geometrical or statistical principle used to design the corresponding algorithm. Globally speaking, however, we are faced with the same difficulties throughout this study.

The non-linear time-series analysis performed here relies on concepts of the dynamical system theory as well as on the possibility of obtaining information on the underlying source dynamics by embedding the data time-series in a reconstruction space. To operate these concepts rigorously, making them valid for characterizing asymptotic time evolution, one would need infinite uncontaminated time-series of measurements. Working with finite sets of noisy data has been a recurrent problem throughout this study. Several algorithms designed and tested so as to give accurate results with long series of clean synthetic data provided mitigated results. For example, it appears that the dimensional characteristics (embedding, local and attractor dimensions) are overestimated when dealing with EOP series contaminated with high-dimensional stochastic processes. Contamination by a low-dimensional chaotic process does not significantly change the determinations.

Other assumptions are implicit in this approach. We mentioned that several attractors can coexist in a phase space. Due to external forcings or to noise, the system orbit may switch from one attractor to another in an apparently erratic manner. In the presence of a single attractor, the system can also experience bifurcations induced by time variations of some parameter controlling its dynamical regime. The characteristics obtained from the analysis of the corresponding time-series will probably result from some sort of averaging process. No systematic study has been conducted to find out the effects of such qualitative change on the characteristics of the observed system. The ocean-atmosphere coupled system is complex enough to allow for the coexistence of competing attractors and certainly obeys bifurcation sequences. For example, the famous El Niño is probably in subharmonic resonance with the atmospheric annual cycle (Jin *et al.* 1994). A possible scenario for its unpredictable evolution is a succession of jumps from one frequency-locked mode to another with possible transitions to chaos (Tziperman *et al.* 1994, 1995). Among the characteristics of the EOP we obtained, only the local Lyapunov exponents could detect such a time evolution of the dynamics. Relative losses in Earth rotation stability, with different strengths, are clearly related to El Niño or La Niña events (Section 4).

We found two positive global Lyapunov exponents associated with each EOP time-series embedded in a $D_E = 5$ phase space. These are indicators of the chaotic nature of the rapid fluctuation in Earth rotation in the years 1970–1997. Dissipation is also active, as is shown by the negative sum of the exponents. Because of the presence of stable manifolds in the pseudo-phase space E^* , the orbit reconstructed from the EOP data series will not occupy a full 5-D volume, but will be confined to an attractor of lower dimension D_A . The Lyapunov dimension $D_{L,yap}$ is an upper bound for D_A . From the respective Lyapunov spectra we obtained $D_{L,yap}(LOD) = 4.48$, $D_{L,yap}(PMX) = 4.90$ and $D_{L,yap}(PMY) = 4.97$. The attractor dimensions found from the correlation integral algorithm are broadly similar [$D_A(LOD) = 4.5$ – 5.5 , $D_A(PMX) = 3.5$ – 4.5 and $D_A(PMY) = 4$ – 5]. Large uncertainties in their determination do not allow one to ascertain their non-integer nature from this computation only. Once again, these exponents and dimensions are only representative of the average instability of the

system, whilst several oceanic and atmospheric processes with different time- and space scales are superimposed to excite the observed fluctuations in EOP.

Two studies have been undertaken to extract the dimension of an assumed attractor from LOD time-series. They both rely on the correlation integral approach as proposed by Grassberger & Procaccia (1983). From the long-period variations in LOD, Malinetskii *et al.* (1990) found a lower bound for the attractor dimension of 1.3 ± 0.3 . They used 6 month averaged data from 1656 to 1984. Here the underlying source is the magnetohydrodynamical processes in the Earth's innermost regions. Studying the rapid fluctuations, Tiwari *et al.* (1992) applied the approach to ≈ 5300 daily observations of LOD from 1976 to 1990. They found an attractor dimension between 5 and 7 and concluded chaoticity of the LOD variations. The reliability of this result obtained with the same algorithm, which appears unsatisfactory to us, is not discussed. Nevertheless, both the dimension and the associated large uncertainty are in agreement with our results in Section 5. Tiwari *et al.* (1994) also estimated the production rate of Kolmogorov entropy and found an intrinsic timescale of 7–8 days. This value is comparable to the horizon of prediction $H_P(LOD) = 11.3$ days that we estimated from the principal Lyapunov exponent $\lambda_1(LOD)$. Note that the way we convert $\lambda_1(LOD)$ into a prediction horizon is, to some extent, arbitrary and is intended to meet some operational requirement (H_P is the time necessary for a 1 per cent rms error to grow to 50 per cent rms).

Several similar studies were carried out for various time-scales of the atmosphere dynamics. Atmospheric flows are the dominant source of excitation for the rapid fluctuations of Earth rotation considered in this study. Attractors corresponding to hourly (Tsonis & Elsner 1988; $D_A = 7.3$), seasonal (Essex *et al.* 1987; Fraedrich 1987; D_A between 6 and 7) and climatological (Nicolis & Nicolis 1984; $D_A = 3.1$) processes have been detected from the correlation integral analysis of data time-series (velocity winds, isotope records of deep sea cores, etc.). Some of these results were disputed because of the shortness of the data records (see e.g. Eckmann & Ruelle 1992). Nonetheless, chaos is probably ubiquitous over a wide range of time- and space scales in the flows forcing Earth rotation, with different dimensional and dynamical characteristics portraying each mechanism at work. The Lyapunov dimension we obtain from the filtered EOP series might be a signature of the averaged weather dynamical regime.

Some of the relative losses of Earth's rotational stability are clearly related to La Niña and El Niño events. Unfortunately, no dimensional and dynamical characteristics of these major phenomena have been published. Stability analyses attempt to provide explanations for its pathological irregularity based on dynamical grounds (Vallis 1986; Jin *et al.* 1994; Tziperman *et al.* 1994, 1995). No long and dense enough data time-series are available to undertake a non-linear analysis based on embeddings and compare the resulting El Niño characterizations with those deduced from the EOP time-series. The impact of El Niño on the LOD was observed soon after the strong 1982–1983 event (Rosen *et al.* 1984; see also Chao 1989). The associated atmospheric angular momentum as deduced from operational weather models accounts for more than 90 per cent of the LOD interannual variability during these years (Dickey *et al.* 1994). We should stress that our analysis sheds light on the causality relationship between

- Chao, B.F. & Gross, R.S., 1987. Changes in the Earth's rotation and low degree gravitational field induced by earthquakes, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **91**, 569–596.
- Dickey, J.O., Marcus, S.L., Hide, R., Eubanks, T.M. & Boggs, D.H., 1994. Angular momentum exchange among the solid Earth, atmosphere and ocean: a case study of the 1982–1983 El Niño event, *J. geophys. Res.*, **99**(B12), 23 921–23 937.
- Ding, M., Grebogi, C. & Ott, E., 1989. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: from quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic, *Phys. Rev. A*, **39**, 2593–2598.
- Eckmann, J.P. & Ruelle, D., 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617–656.
- Eckmann, J.P. & Ruelle, D., 1992. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems, *Physica D*, **56**, 185–187.
- Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O., Ruelle, D. & Ciliberto, S., 1986. Liapunov exponents from time series, *Phys. Rev. A*, **34**, 4971–4979.
- Engdahl, E.R., Van der Hilst, R. & Buland, R.P., 1998. Global teleseismic earthquake relocation with improved travel times and procedures for depth determinations, *Bull. seism. Soc. Am.*, submitted.
- Essex, C., Lookman, T. & Nerenberg, M.A.H., 1987. The climate attractor over short timescales, *Nature*, **326**, 64–66.
- Fraedrich, K., 1987. Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. atmos. Sci.*, **44**, 722–728.
- Fraser, A.M. & Swinney, H.L., 1986. Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev. A*, **33**, 1134–1140.
- Frede, V. & Mazzega, P., 1999. Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series—I. Embedding, *Geophys. J. Int.*, **137**, 551–564 (this issue).
- Gambis, D., 1996. Multi-technique EOP combinaisons, *Proc. IGS Analysis Center Workshop, Silver Spring*, Vol. 96, eds Van Scoy, P. & Neylan, R.E., Pasadena, JPL Publ.
- Golub, G.H. & van Loan, C.F., 1989. *Matrix Computations*, 2nd edn, John Hopkins University Press, London.
- Grassberger, P. & Procaccia, I., 1983. Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 346–349.
- Jin, F.F., Neelin, J.D. & Ghil, M., 1994. El Niño on the Devil's staircase: annual subharmonic steps to chaos, *Science*, **264**, 70–72.
- Kaplan, J.L. & Yorke, J.A., 1979. Chaotic behaviour in multi-dimensional difference equations, in *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 730, pp. 228–237, Springer, Berlin.
- Malinetskii, G.G., Potatov, A.B., Gizzatulinan, S.M., Ruzmaikin, A.A. & Rukavishnikov, V.D., 1990. Dimension of geomagnetic attractor from data on length of day variations, *Phys. Earth planet. Inter.*, **59**, 170–181.
- Nicolis, C. & Nicolis, G., 1984. Is there a climatic attractor?, *Nature*, **311**, 529–532.
- Osborne, A.R. & Provenzale, P., 1989. Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra, *Physica D*, **35**, 357–381.
- Palmer, T.N., 1993. Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model, *Bull. Am. Met. Soc.*, **74**, 49–65.
- Palmer, T.N., Buiza, R., Molteni, N., Chen, Y.C. & Corti, S., 1994. Singular vectors and the predictability of weather and climates, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A348**, 459–475.
- Roberts, D.A., 1991. Is there a strange attractor in the magnetosphere?, *J. geophys. Res.*, **96**(A9), 16 031–16 046.
- Rosen, R.D., Salstein, D.A., Eubanks, T.M., Dickey, J.O. & Steppe, J.A., 1984. An El Niño signal in atmospheric angular momentum and Earth rotation, *Science*, **225**, 411–414.
- Ruelle, D., 1990. Deterministic chaos: the science and the fiction, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A427**, 241–248.
- Sauer, T., Yorke, J.A. & Casdagli, M., 1991. Embedology, *J. Stat. Phys.*, **65**, 579–616.
- Sommerer, J.C. & Ott, E., 1993. A physical system with qualitatively uncertain dynamics, *Nature*, **365**, 138–140.
- Takens, F., 1981. Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence*, pp. 366–381, eds Rand, D. & Young, L.S., Lecture Notes in Mathematics 898, Springer Verlag, Berlin.
- Tanaka, T., Aihara, K. & Taki, M., 1996. Lyapunov exponents of random time series, *Phys. Rev. E*, **54**, 2122–2124.
- Theiler, J., 1986. Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data, *Phys. Rev. A*, **34**, 2427–2432.
- Thompson, J.M.T. & Stewart, H.B., 1987. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, J. Wiley & Sons, New York.
- Tiwari, R.K., Negi, J.G. & Rao, K.N.N., 1992. Attractor dimensions in non-linear fluctuations of length of the day (LOD) variations, *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 909–912.
- Tiwari, R.K., Negi, J.G. & Rao, K.N.N., 1994. Strange attractor in nonlinear fluctuations of length of the day (LOD) time series, in *Nonlinear Dynamics and Predictability of Geophysical Phenomena*, Geophys. Monogr., **83**, IUGG Vol. 18, pp. 61–67.
- Tsonis, A.A. & Elsner, J.B., 1988. The weather attractor over very short timescales, *Nature*, **333**, 545–547.
- Tufillaro, N.B., Abbott, T. & Reilly, J., 1992. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison Wesley, New York. + annexes.
- Tziperman, E., Stone, L., Cane, M.A. & Jarosh, H., 1994. El Niño chaos: overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean-atmosphere oscillator, *Science*, **264**, 72–74.
- Tziperman, E., Cane, M.A. & Zebiak, S.E., 1995. Irregularity and locking to the seasonal cycle in an ENSO prediction model as explained by the quasi-periodicity route to chaos, *J. atmos. Sci.*, **52**, 293–306.
- Vallis, G.K., 1986. El Niño: a chaotic dynamical system?, *Science*, **232**, 243–245.

ENSO (El Niño/Southern Oscillation) events and fluctuations in Earth rotation from a completely different point of view. Indeed, the local Lyapunov exponents drawn in Fig. 4 for LOD and Figs 5 and 6 for PMX and PMY measure to some extent temporary chaoticity increases caused by an ENSO. A naive approach would be to try to find a systematic 'response' in the local exponents to a known excitation. In fact, we see that an ENSO event is able to cause a deterioration in the stability of one or two EOP time-series without affecting the other one (compare the effect of the 1982–1983 El Niño on the $\lambda_1(t)$ s for LOD and PMY with that for PMX). Moreover, the local stability of a system may depend on the system state so that the same external excitation will induce different perturbations in its time evolution. Such issues must be carefully investigated for the Earth's rotational system.

All the EOP perturbations studied here concern the rapid fluctuations of Earth rotation. The signature of events such as El Niño is seen in this period range, from a few days to 100 days, but lasts as long as the excitation is maintained. The data pre-processing is an important step that can partially exclude some signal components. In particular, the heavy smoothing performed in the early years of the IERS combined series has probably damped out some 'local' events of the Earth's rotation dynamics, without compromising the global reconstruction, dimensional and stability analysis of the embedded orbits. Longer and less smoothed EOP time-series with a much higher sampling rate (not artificially increased by data interpolations) would be highly valuable in order to obtain more accurate dimensional and dynamical characteristics of the reconstructed orbit. With a better coverage of the Earth rotation attractor we should be able to improve the resolving capability of the local Lyapunov exponents and to relate the corresponding stability variations to weaker or shorter excitation processes.

7 CONCLUSIONS

For the first time, a complete set of concepts from the dynamical system theory has been exploited to characterize the dynamical behaviour of Earth rotation for periods under 100 days. Dimensional (Paper I) and dynamical (this paper) characteristics of the underlying data source have been extracted from three filtered EOP time-series of daily observations spanning 27 years, using their embedding in a pseudo-phase space E^* . The estimates of these characteristics are summarized in Table 1. We have checked that these values are quite robust against noise contamination of the time-series. However, some degree of uncertainty is associated with these determinations, mainly resulting from the fact that the data sets are limited (about 10^4 samples in each series).

The orbits have been reconstructed from data vectors in time-delayed coordinates. The optimal delays (10 days for LOD, 15 days for PMX and 18 days for PMY) were obtained from the function of average mutual information (Paper I, Section 4). A 5- or 6-D space E^* is shown to be adequate for unfolding the reconstructed orbits (Paper I, Sections 5 and 6). The three orbits corresponding to LOD and to the two components of polar motion traced smooth but complicated trajectories in E^* that seem to have been generated from a differentiable dynamical system. Their behaviour is in strong contrast with the erratic and fractal curves reconstructed

from white noise and random walk time-series respectively (Paper I, Fig. 10).

Geometric and statistical analyses of these orbits provided further characterization of the EOP time-series. We obtained several consistent clues establishing the chaotic nature of the rapid fluctuations in Earth rotation. A low-dimensional deterministic process is at work that can be captured with a set of $D_L = 5$ active dynamical variables. Two positive Lyapunov exponents are associated with each EOP series. The corresponding intrinsic horizons of prediction are of 11.3 days for LOD, 8.7 days for PMX and 8.1 days for PMY. Beyond these time intervals, any initial error of 1 per cent of the series rms will exceed the 50 per cent rms level. Both this sensitivity of the system time evolution to its initial state and the dissipative nature of the underlying dynamical process (as demonstrated by the negative sum of the Lyapunov exponents) imply the presence of a strange attractor in the phase space of each series. The Lyapunov dimension $D_{L_{\text{Lyap}}}$ is 4.48 for LOD, 4.90 for PMX and 4.97 for PMY. As an upper bound for the attractor dimension, it agrees with the dimensions D_A obtained from the correlation integrals.

Moreover, it was shown that major relative losses in Earth's rotation stability may be associated with La Niña and El Niño events. Such perturbations in the system stability have their signature in the time-series of the local Lyapunov exponents (Figs 4–6). The local horizons of prediction are correspondingly reduced and can sometimes reach values as low as 2.5–5 days (Table 2). Not all of the three EOP stabilities are equally degraded by external excitations. At the moment some observed strong stability losses are unexplained (see the 1996 peak in the local Lyapunov exponents of the PMY time-series). A detailed stability analysis of the Earth's rotational system dynamics is required. Low-dimensional deterministic processes are detectable in the time-series of Earth rotation.

ACKNOWLEDGMENTS

All the computations were performed on the CRAY YMP at the Centre National d'Etudes Spatiales (Toulouse). This study was supported by the Centre National de la Recherche Scientifique under contract 2E0025 (programme Modélisation et Simulation Numérique).

REFERENCES

- Abarbanel, H.D.I., 1996. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer Verlag, Berlin.
- Abarbanel, H.D.I. & Kennel, M.B., 1993. Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data. *Phys. Rev. E*, **47**, 3057–3068.
- Abarbanel, H.D.I., Brown, R. & Kennel, M.B., 1991. Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor. *J. Nonlinear Sci.*, **1**, 175–199.
- Brown, R., Bryant, P. & Abarbanel, H.D.I., 1991. Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series. *Phys. Rev. A*, **43**, 2787–2806.
- Bryant, P., Brown, R. & Abarbanel, H.D.I., 1990. Lyapunov exponents from observed time series. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 1523–1526.
- Chao, B.F., 1989. Length of day variations caused by El Niño-southern oscillation and quasi-biennial oscillation. *Science*, **243**, 923–925.

Annexe 3: Dynamical analysis of the atmospheric angular momentum short term fluctuations. Comparison with the Earth

Dynamical analysis of the atmospheric angular momentum short term fluctuations. Comparison with the Earth

FREDE V.

UMR 8630 Observatoire de Paris
61, avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France
fred@hpvbi.obspm.fr

April 1999

Abstract

The general behaviour of the geophysical flows (atmosphere, oceans) is mainly nonlinear. Nevertheless, up to now most of the studies concerning the atmospheric angular momentum functions and the Earth rotation time series, were devoted to their linear characterization and comparison, assuming their stochastic nature.

In order to look for an alternative description of that time series, we apply nonlinear time series analysis to the EAAM short term fluctuations (the pressure term of the equatorial functions and the wind term of the axial function) evaluated from the NCEP/NCAR Re-analysis Project, assuming a possible deterministic and nonlinear nature of these systems. The method consists in embedding the time series into a multidimensional space to recover the "attractor" of the system.

We show that the dynamics of those processes are indeed nonlinear, deterministic and low dimensional thanks to their geometrical and topological description in the embedded space. The existence of a positive Lyapunov adds the property of chaoticity to the underlying system. We learn two main things: First of all, the atmospheric processes observed through the angular momentum functions are chaotic and we are able to quantify the associated characterizations ($D_E = 5$, $4 < D_{Lyap} < 5$, variations of stability). We can also evaluate a theoretical horizon of prediction for the systems of about 6 days. Those results suggest that the atmospheric angular momentum time series should not be described as purely stochastic processes anymore.

Additionally, the various nonlinear quantities evaluated are of the same order as those previously found for the short term fluctuations of the Earth rotation indicating that the observed chaotic dynamics in Earth rotation is induced (through forcing processes) and belongs for a large part to the atmospheric own dynamics, as expected.

Key words. Atmospheric angular momentum, Nonlinear Time Series analysis.

1 Introduction

The angular momentum of the atmosphere experiences fluctuations in its three components caused by some mass redistribution and action of winds within the atmosphere. For the short term periods (seasonal and less), the total angular momentum between the solid Earth and the atmosphere is assumed to be preserved, meaning that every small change in the atmospheric angular momentum should induce an opposite small change in the solid Earth angular momentum.

Indeed, it has been demonstrated in numerous studies that the observed variations in the atmospheric angular momentum were highly correlated with the fluctuations observed in the Earth Orientation Parameters (EOP) time series (PMX, PMY and LOD stand for Polar Motion in X, Y and Length of Day respectively). For example, Feissel and Nitschelm (1984) have found a correlation around 0.8/0.9 between the time series of the axial angular momentum of the atmosphere and the geodetic measurements of the length of day for periods between 30 and 400 days, for the years 1976-1981.

Recently, thanks to the better geodetic measurements and atmospheric models (integration taking into account more parts of the atmosphere), Dickey et al. (1992) found a great correlation down to 8 days between LOD and the axial angular momentum of the atmosphere, concluding that the discrepancies and the loss of correlation for shorter periods were due either to measurement noise, or to another source of angular momentum (for periods under 100 days). For the Polar motion, the atmosphere is responsible for about 60 per cent of the short term fluctuations for periods under 300 days (Salstein and Rosen 1989) and its participation is increased when considering an Inversed Barometer (IB) response of the oceans to atmospheric pressure, that is to say under the assumption of an equilibrium response of the oceans, (Salstein and Rosen 1989, Gross and Lindqwister 1992). The other sources of forcings have to be searched mainly in the oceanic angular momentum.

The atmospheric dynamics are mainly nonlinear and chaotic behaviour have been searched in various atmospheric time series, from nonlinear time series analysis. Nicolis and Nicolis (1984) have examined, an isotope record of deep-sea core time series to conclude to the existence of a climatic chaotic attractor. For shorter time scales (decades), Essex et al. (1987) found as well a low dimensional attractor in the atmospheric/ oceanic coupled dynamics. Eventually, Tsonis and Elsner (1988) studied the behaviour of the very short time scales (hours) of weather related time series, and concluded with caution to the presence of a chaotic strange attractor. On the other hand efforts have been made to modelize the atmospheric angular momentum functions in the stochastic framework. The simplest and widespread model used is a white noise process. Eubanks et al. (1983) concluded from a frequency analysis that a first order autoregressive AR(1) process (Bosq and Lecoutre 1992) could fit well to the atmospheric functions. More recently, Brzezinski (1987) modeled from statistical investigations and autoregression analysis, the equatorial atmospheric pressure term for periods under 100 days by a 3rd order autoregressive process AR(3) (purely stochastic) and the wind term by an AR(1). Those determinations rely only on the properties of the time series power spectrum but don't care about the physical origin of the system.

Because of the presence on strong nonlinearities in the atmospheric and oceanic dynamics, we think that analyzing the atmospheric angular momentum functions (which are a fundamental measure of the dynamic state of the atmosphere (Rosen and Salstein 1983)) in the context of the nonlinear time series analysis rather than in the stochastic framework is inescapable.

The method used is Nonlinear time series analysis, consisting in a reconstruction in phase space of the attractor of the unknown dynamical system underlying the observed available data. Focusing on the topological and dynamical properties of that geometrical multidimensional object, we can learn about the deterministic nature (noise, low dimensional chaotic, periodic ..) of the complex physical process observed through a single variable, as long as we have long enough and precise time series.

The nonlinear time series analysis has already been applied to the short term fluctuations (under 100 days) of the Earth orientation Parameters (EOP) (Frede and Mazzega 1999a, 1999b). The processes underlying the short variations of the geodetic data appeared to be low dimensional chaotic dynamics (despite their continuous power spectrum making them classed in the random walk processes from stochastic investigations). More over the examination of the local stability of that systems showed that their temporal variations were correlated to some oceanic/atmospheric disruptions (in particular, El Niño).

Because the EOP fluctuations are mainly caused by the atmospheric forcing, and because the Earth rotation is only very slightly nonlinear (Liouville equations), we think strongly that the observed chaos is in fact induced by the oceanic and atmospheric dynamics, subject to the chaotic nature of the associated atmospheric and oceanic processes.

To characterize the dynamics of the atmosphere acting on the EOP, we apply nonlinear time series analysis to the short term fluctuations of the precession term of the equatorial angular momentum and wind term of the axial angular momentum of the atmosphere, $\chi_1 p$, $\chi_2 p$ and $\chi_3 w$. We use the effective atmospheric angular momentum functions (EAAM) as described in Barnes et al. (1983) and obtained from the NCEP/NCAR reanalysis project (Kalnay et al. 1996). It is the first time that such a nonlinear approach is performed on the EAAM time series. Those time series are very long (around 60 000 points) and homogeneous on 40 years (1958-1998), which is very interesting for nonlinear time series analysis algorithms. The choice of the precession terms for the equatorial components and the wind term for the axial component is motivated by the fact that these components are the dominant terms in the excitation budget of the related EOP.

First of all, we find a chaotic dynamics through the three time EAAM series indicating that the short term fluctuations of the atmospheric angular momentum are driven by a nonlinear chaotic process which can be accounted for, by only 5 active degrees of freedom. Then the fact that these chaos have similar properties than the related EOP ones, makes us think that the proper chaos of the atmospheric dynamics is transmitted to the Earth through angular momentum exchanges.

More over the real differences between dimensions and stability indicate that another dynamic is acting jointly to the atmosphere (certainly the oceans) and that the resulting dynamics observed through the EOP time series is a more or less complex melting of various nonlinear and chaotic geophysical processes.

Section 2 is devoted to the brief description of the time series used for the nonlinear analysis. Section 3 resumes the ideology and principal methods of nonlinear analysis time series and remind us the results obtained for the EOP(1-100days). Section 4 deals with the application of the nonlinear time series analysis to the atmospheric angular momentum time series and present the various results obtained in terms of dimensions and stability. Then we end in Section 5, with a discussion on the comparison between the EOP chaoticity and the EAAM one, and explain

the further step to take in order to check for oceanic and other (hydrologic) trial forcings.

2 Description of the effective atmospheric angular momentum time series

The atmospheric time series used for this study are taken from the NCEP/NCAR Reanalysis Project (Kalnay et al. 1996). They result of an homogeneous treatment of various atmospheric records on 40 years of observations and are computed from products of atmospheric general circulation models. Apart from homogeneity, the other improvements compared to previous determinations are the density of the data (4 points each day as opposed to 2 points each day) and the inclusion of vertical levels to take into account more of the upper stratosphere (integration to 10 mb versus 50 previously) (Salstein and Rosen 1997). The time series computed are the "effective angular momentum functions" as described in Barnes et al. 1983, for an integration up to 10 mb and no IB correction applied.

Those series represent the longest angular momentum time series available. We form the global series: data from North hemisphere plus South hemisphere, keeping the separation into a wind term and a pressure term. Eventually, the time series we work with are: $\chi_1 p$, $\chi_2 p$, $\chi_1 w$, $\chi_2 w$ for the pressure and wind terms of the equatorial effective angular momentum functions, and $\chi_3 p$, $\chi_3 w$ for the pressure and wind term of the axial angular momentum function.

The main source of uncertainty in those series comes from the non homogeneous distribution of the observations on the globe, the South hemisphere and the oceanic parts of the planet being less covered, but globally the functions are quite precise and their length is an important appeal for the nonlinear analysis. They have no dimension. Being the result of observations mixed to dynamical atmospheric models, a certain part of contamination due to the model can be present in their final form. However, the wind and pressure fields given by the NCEP/NCAR reanalysis and used for the EAAM time series computation, belong to the "A" class (P. Nelson, private communication). Because the "A" class is the most reliable one, (it is the less model-dependent one (Kalnay et al. 1996)), they can be considered as very representative of the atmospheric state. As a consequence, we believe that the EAAM time series are a fundamental measure of the atmospheric dynamic and can be used to describe reliably the atmospheric angular momentum real fluctuations.

For information, their raw statistics are given in Table 1. The pressure term of the equatorial functions ($\chi_1 p$, $\chi_2 p$) and the wind term of the axial function ($\chi_3 w$), have a dominant root mean square compared to the others. More over, it has always been shown that those terms were the main forcings in the excitation budget of the Earth rotation (Barnes et al. 1983). We thus decide for the rest of the analysis, to deal only with these 3 particular time series.

The first operation we applied is to evaluate the power spectrum of the series (Figure 1 for the χ_2 pressure equatorial term). The general behaviour is the same for the two others: the power spectrum exhibits a strong annual periodicity superimposed to a continuous broadband process. That broadband process corresponds to the short term part of the signal (under 100 days mainly) and looks like a random walk as often remarked (Eubanks et al. 1985). However a broadband spectrum is obtained for stochastic noises but also for chaotic systems. Thus it is an additional reason to investigate nonlinear analysis when a time series has a broadband spectrum and when the physical process underlying the measurements is not well defined. Then we applied the Vondr k filter (Vondr k 1977a,b) to the EAAM selected series of pressure

term ($\chi_1 p$ and $\chi_2 p$) and wind term ($\chi_3 w$), in order to keep the short term fluctuations only (1day-100days) by analogy to the EOP (1-100days) study (Frede and Mazzega 1999a,b). Then, a slight smoothing was applied to eliminate the small observed noise superimposed to the data. In the time domain, the correlation between the atmospheric forcings and the EOP observed fluctuations is very high for periods under 100 days mainly. We have already characterize the dynamical nature of that fluctuations, we are now interested in the dynamical properties of their direct forcings. If the chaos observed through the EOP is induced by the atmosphere, it will appear through the EAAM(1-100days) nonlinear analysis (with schematically, $\chi_1 p_{[1-100d]}$ responsible for PMX fluctuations, $\chi_2 p_{[1-100d]}$ for PMY and $\chi_3 w_{[1-100d]}$ for LOD fluctuations). Before proceeding to the EAAM nonlinear analysis, let summarize briefly the general concepts and methods.

3 Nonlinear time series analysis

In the past 10 years, nonlinear time series analysis was developed theoretically from the dynamical systems theory and applied to various fields of science and economy where nonlinear and chaotic dynamics were supposed to exist (biology, financial data...) and where no exact differential equations were available.

The main idea of this method is to retrieve the dynamical properties of a complex system from operations on a unidimensional time series $x(n)_{n=1..N}$ alone: we try to extract from a time series measurements, the dynamical characteristics of a physical unknown process. This can be achieved thanks to the embedding theorem (Takens 1981).

This approach gives the possibility to adopt a new point of view on irregular behaviour. For example, the turbulence in the fluids was explained by the manifestation of an infinite number of superimposed modes (continuous Fourier spectrum) leading to an aperiodic and erratic behaviour. In 1971, Ruelle and Takens introduced a new concept, telling that the observed aperiodicity could simply result from nonlinear interaction of a few variables of the system, leading after bifurcations phases, to what they called a strange chaotic attractor. Their explanation of turbulence appears nowadays more realistic. The paradigm of the number of superimposed modes (linear point of view) was remplaced by the consideration of the lyapunov exponents of the system or the active degrees of freedom.

A chaotic system and a stochastic one have the same frequency power spectrum. Thanks to nonlinear time series analysis, it becomes possible to identify, in a new space (the embedding space or reconstructed phase space), those two apparently similar processes in the frequency domain but totally opposed in the dynamical domain. Suppose that we observe a single variable linked to a dynamical system for which the equations of motion are unknown. The embedding theorem allows for the construction of multidimensional vectors whose components are the delayed points of the time series. It tells also that their evolution is similar to that of the underlying observed unknown physical system. This last point is fundamental because it gives the possibility to describe rigorously a complete dynamical system from a unique time series. There exists a diffeomorphism between the orbits in the initial phase space of the observed dynamical system and the orbits drawn by the reconstructed time series in the embedding space. The observed time series is from this point of view, considered as the projection on one axis, thanks to the nonlinear coupling of the true variables, of all the complete nonlinear dynamics.

The fundamental operation of this approach is to open this projected structure to be able to characterize it dynamically (topological and geometrical considerations). This method applies to linear as well as to nonlinear systems. For example, a biperiodic system will be embedded in a 3-dimensional space and the reconstructed attractor will be a 2-torus. A stochastic process won't be able to be embedded in any finite space.

Practically, the nonlinear time series analysis can be used to find a real physical signal in its residual part, that usual linear (Fourier) tools would have classed into "noise" category. It thus shows that an aperiodic signal is not synonymous of randomness but can be completely deterministic and nonlinear.

In general, when the Fourier spectrum is continuous and the stochastic nature of the system not well assumed (especially for atmospheric times series), it is important to perform nonlinear time series analysis to retrieve the true dynamical properties of the system and check for its stability. As nonlinearities and chaotic behaviour are widespread in Nature, it becomes inescapable to use nonlinear time series analysis and not to stay confined in linear tools. The latter can indeed lead to spurious interpretation of the observation source (cf. the problem of turbulence).

The first step of such an analysis is to evaluate a sort of "nonlinear" correlation lag for the data (the time delay: τ), using instead of linear correlations (which are restricted to linear processes), probability distribution of events in the time series (Fraser and Swinney 1986). Practically, the joint probability between the points $x(n)$ and their delayed versions $x(n + T)$, say $P[x(n), x(n + T)]$, can be evaluated from the joint histogram in the $[x(n), x(n + T)]$ variables. The resulting average mutual information function (AMI) stands either for linear processes or nonlinear ones and is defined for any delay T as:

$$AMI(T) = \sum_{n=1}^N P[x(n), x(n + T)] \ln \left[\frac{P[x(n), x(n + T)]}{P[x(n)]P[x(n + T)]} \right] \quad (1)$$

The optimum time delay is read as the value of the first minimum of that function. It mustn't be too large otherwise the connexion between points is lost, nor too small otherwise no new information is gained from one point to its delayed version.

The obtained delay is then used to construct multidimensional vectors $\vec{y}(n)$ which draw the orbit of the system in phase space and are defined as:

$$\vec{y}(n) = (x(n), x(n + \tau), \dots, x(n + (D_E - 1)\tau))$$

This operation is called the embedding and consists in embedding the attractor (asymptotic behaviour of the orbit after transients) of the system in an adequate multidimensional space. The way the orbits $\vec{y}(n)$ behave is similar to the way the unknown orbits of the underlying dynamical system behave. The dimension D_E of the embedding space must be large enough to avoid self intersection of the orbit due to projection of the attractor on a too small space. It is not an invariant of the system and can be completely different from the phase space dimension of the underlying dynamical system. It is evaluated using a false nearest neighbors algorithm (Abarbanel and Kennel 1993) testing if neighbors in dimension $D_E = 1$ remain neighbors when incrementing the trial dimension D_E in the reconstruction process; if not, they are labeled as false neighbors. We mean by neighbors, two reconstructed vectors which are at a distance smaller than a given threshold. Only the true neighbors verify the neighborhood conditions for all tested dimensions. When the number of false neighbors is zero, we have reached the optimal embedding dimension D_E .

Dynamically, this test separates real similar states in phase space from undesirable projections (false neighbors) because only the true neighbors of dynamical origin remain when the optimal embedding dimension is reached. The dimension D_E , can be seen as the sufficient dimension for which we have opened correctly the one dimensional- projected dynamics observed in the time series. For example, a two periodic system possesses an attractor lying on a 2-Torus and we need at least 3 dimensions to embed it properly ($D_E = 3$). A noise is by definition an infinite dimensional process, thus we can't embed it in any finite space, there always remain a high number of false neighbors at any dimension. By opposition, a chaotic system is low dimensional and can be embedded in a small space. The phase space differences between the 2-Torus and the chaotic attractor are their topological dimensions. A chaotic attractor has a cantor set structure and thus a non integer dimension while a 2-Torus has a well defined integer topological dimension. More over their stability properties are completely different.

Indeed, a fundamental information of the underlying system, that we can extract from the reconstructed dynamics, is the stability. It is obtained through the evaluation of the Lyapunov exponents of the system. The stability information is able to decide unambiguously between a stochastic, periodic or chaotic underlying dynamic. There exist several methods to evaluate the exponents from a single time series, lying on local maps determinations to recover the Jacobian matrices, we will describe briefly one of them. The interested readers can refer to Abarbanel (1996) for technical details.

The Lyapunov exponents measure the rate of sensibility of the system evolution to initial conditions. Indeed if a small perturbation $\delta y(0)$ is applied to the orbit at initial time "0", this perturbation will evolve at a certain rate, the Lyapunov exponents λ are indicators of the kind of evolution in time through:

$$\delta y(t) = \delta y(0) \exp[\lambda t] \quad (2)$$

where $\delta y(t)$ is the perturbation state at time t .

For a stochastic system, all the Lyapunov exponents are negative indicating that a small perturbation will disappear rapidly in time. It shows the stability of such a system even if that system is unpredictable. For a k-periodic orbit, there exist both negative and nul exponents. The particularity of a chaotic system is the existence of at least one positive exponent characterizing the unstability of the orbit along the unstable manifold. Paradoxically, the principal exponent (the largest positive one), tells that the system is predictable and gives a theoretical limit of predictability over which all tempted predictions will be incorrect. It is defined as :

$$H_p = 3.9/\lambda_1$$

where λ_1 is the principal exponent and the factor 3.9 stands for the moment where two initially closed trajectories separate from each other by 50 per cent of the attractor size (corresponding to the root mean square of the data). For a system issued from a flow (continuous differential equations), we find at least one positive exponent, one nul exponent corresponding to the direction of the flow (any perturbation exerted in that direction will have no effect) and at least one negative exponent to "keep" the orbit on the attractor (more precisely on a bounded domain). There are as many exponents as autonomous differential equations one needs to describe the unknown system.

Let's give now the ideas for their calculations. We consider a dynamical system observed at discrete time,

$$y_{n+1} = F(y_n) \quad (3)$$

where F is a differentiable function. From linearized dynamics, the small perturbation δ_n applied to the orbit y_n is transformed after K time steps by the compositions of K local Jacobian matrices DF like:

$$\delta_{n+K} = DF(y_{n+K-1}).DF(y_{n+K-2})...DF(y_n).\delta_n \equiv DF^K(y_n).\delta_n \quad (4)$$

The Lyapunov exponents are related to the eigenvalues of the Oseledec matrix, $S(y_n, K)$, (see e.g. Eckmann and Ruelle 1985) defined by:

$$S(y_n, K) = [DF^K(y_n)^T.DF^K(y_n)]^{\frac{1}{2K}} \quad (5)$$

where T stands for transpose.

The Jacobian matrices DF can be evaluated from a single time series without any knowledge of the function F . They are obtained from the evaluation of local maps modelizing the neighborhoods evolution in time. Indeed if $y_{v;n+1}$ is the v -th neighbor of y_n at time $n+1$, the local map describing its evolution can be defined as:

$$y_{v;n+1} = \sum_{m=1}^M c(m, n) \Phi_m(y_n^v) \quad (6)$$

where the Φ_m are a priori basis functions and the $c(m, n)$ are local coefficients to be determined. The (a, b) component of the Jacobian matrix in $y(n)$ is defined by:

$$DF_{ab}(y_n) = \sum_{m=1}^M c_a(m, n) \frac{\partial \Phi_m(y_n)}{\partial x_b} \quad (7)$$

We are able from this equation, to retrieve the Jacobian matrices components and to evaluate the corresponding Oseledec matrices. Because the Oseledec matrices are ill conditionned, we can't get directly their eigenvalues and have to perform a QR-decomposition (Golub and Loan 1989). Eventually, we write any Oseledec matrix S as the product of an orthogonal matrix Q and of $2K$ upper right triangular matrices $R(.)$:

$$S = Q.R(2K).R(2K-1)..R(1) \quad (8)$$

The Lyapunov exponents are then defined as:

$$\lambda_a = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^{2K} \text{Log}[R_{aa}(k)] \quad (9)$$

where $R_{aa}(k)$ is the (a,a) component of the k th triangular matrix $R(k)$. From experimental data, the condition $K \rightarrow \infty$ can't be achieved and the Lyapunov exponents are in fact formed by the average of 3000 local exponents (corresponding to 3000 different locations on the attractor) obtained from the composition of $K = 512$ Jacobian matrices (those values are the exact ones used in next section for the application to the EAAM series). The Lyapunov exponents are invariants of the dynamics. Thus, from nonlinear analysis, we recover the same values as those we would have obtained from the underlying differential equations of the unknown system.

A practical test to verify if the "p" evaluated Lyapunov exponents are not spurious, is to retrieve them from the initial time series indexed by t and from the inversed time series $(-t)$ (meaning that the computations are made with the time series read from the end to the beginning). The backward $(-t)$ and forward (t) exponents obtained must have approximatively

the same absolute value and opposite sign. If the values for an exponent are far away, it is a false one and have to be eliminated from the Lyapunov spectrum, meaning that the number of autonomous differential equations needed to describe the dynamic is not p but $p - 1$.

If the sum of the Lyapunov exponents is negative, the system is dissipative. More over the knowledge of the Lyapunov exponents of a system is very useful because it gives also an upper bound of the attractor dimension: the Lyapunov dimension (Kaplan and Yorke 1988):

$$D_{Lyap} = K + \frac{\sum_{a=1}^K \lambda_a}{|\lambda_{K+1}|} \quad (10)$$

with $\sum_{a=1}^K \lambda_a > 0$ and $\sum_{a=1}^{K+1} \lambda_a < 0$. The integer K is chosen so that $K < p$ (p is the number of true Lyapunov exponents) and $\lambda_{K+1} < 0$. This quantity is also an invariant of the system because it depends on the Lyapunov exponents directly. For a non integer value, the attractor is said to be strange.

For a chaotic system, the temporal variations of the principal exponent can be evaluated (Abarbanel et al. 1991) showing that the stability of any system is not constant in time but exhibits loss or gain of predictability depending on the system state alone or on external forcings on the system. In fact the global exponents have to be understood as averaged local exponents over the whole attractor, as already mentionned. Such interesting remarks have been expressed for the short term fluctuations of the EOP time series where loss of stability was sometimes associated to El Niño events. For a more critical discussion and complete algorithmic development of the nonlinear time series analysis in geophysics, see the articles of Frede and Mazzega (1999a,b) devoted to the EOP time series.

They show that the dynamic of the short term fluctuations of the Earth rotation observed through the EOP time series is low dimensional. The attractor of the systems can be reconstructed in dimension 5, its dimension being fractal around 4 and 5. The existence of a positive Lyapunov exponent adds a chaotic nature to that dynamic. It gives an average theoretical limit of predictability of the system around 10 days.

We strongly think that the observed chaos in the EOP time series doesn't belong to the Earth dynamics which is too slightly nonlinear to engender chaos alone but is inherited from the atmosphere or atmospheric/oceanic coupled system which are very nonlinear by nature. Thus we want to see if the principal forcing of the EOP at that period range (1-100days), that is to say the pressure terms of the equatorial effective angular momentum functions $\chi_1 p_{[1-100d]}$ and $\chi_2 p_{[1-100d]}$ and the wind term of the axial effective angular momentum function, $\chi_3 w_{[1-100d]}$, are chaotic or not and with which properties.

4 Application to the selected EAAM time series

The length of a time series is an important consideration for the nonlinear time series analysis because it follows an asymptotical theory. The EAAM time series contain about 60 000 points which is large enough to expect robust results.

We first calculate the time delay τ for the three filtered EAAM time series: $\chi_1 p_{[1-100d]}$, $\chi_2 p_{[1-100d]}$, $\chi_3 w_{[1-100d]}$ (1-day ,100-days) by looking at the first minimum of the average mutual information function. Figure 2 is the AMI function for the time series $\chi_2 p_{[1-100d]}$. The data are given every 0.25 days, thus the time delay read on the curve is expressed in unit, not in days.

The application of the nearest false neighbor algorithm to the EAAM time series makes us choose a common embedding dimension of 5. Figure 3 shows the results of the algorithm for the time series $\chi_2 p_{[1-100d]}$. The good convergence of the algorithm is an indication of the very low random noise level contamination of the time series.

Table 2 resumes the values of time delays (unit) and embedding dimension for the three series. At this stage, we know that we are in presence of a low dimensional system (and as expected, deterministic) whose attractor can be embedded in a 5 dimensional space. For illustration we present a projection in Figure 4 of the reconstructed attractor for the $\chi_2 p_{[1-100d]}$ series. The orbit is continuous, still self crossing because of projection but doesn't follow the phase space behaviour of a noise (random or fractal distribution).

In order to learn about the nature of the dynamics of the system, we have applied the algorithm of calculation of the global Lyapunov exponents from a time series (Abarbanel 1996) to the three atmospheric series. We have evaluated 5 exponents which are all "true" because they have the same value calculated with the time t and the inverse time $-t$ (starting from 1998 and ending in 1958).

Two of them are positive indicating unambiguously that the dynamic state of the atmosphere observed through the EAAM time series is of chaotic nature. One exponent is null because the data are arising from a flow and the two other exponents are negative assuring the dissipation of the system (the sums of the Lyapunov exponents are negative). Figure 5 illustrates the global exponents for the time series $\chi_2 p_{[1-100d]}$.

Table 3 gives the values of the 5 exponents (λ_i^+) and their reserved time equivalent (λ_i^-) per unit (sign corrected) as well as the derived Lyapunov dimension and the theoretical horizon of prediction in days for the three atmospheric time series.

The Lyapunov dimension is fractal between 4 and 5 like for the EOP time series attractor. The theoretical horizon of prediction associated to the equatorial pressure angular momentum is around 6 days and 4.5 days for the axial term. This means that the "EAAM chaotic system" can't be predicted more than 6 days in the future whatever the method of prediction employed. Note that this result was retrieved from the evaluation of the principal Lyapunov exponent of the reconstructed attractor. Similar prediction time were obtained from dynamical forecast model of the EAAM (Bell et al. 1991). This implies that the physical reality of the principal exponent and the chaoticity of the underlying dynamics is unambiguous. More over a fundamental result is that the determinism described through the EAAM time series is nonlinear and low dimensional.

We remark additionally, that, the short period fluctuations of the EAAM functions can't be predicted as long as their related forced EOP short terms fluctuations.

Nevertheless, the characteristics of the observed chaotic dynamic of the short terms atmospheric fluctuations are of the same order as those of the observed chaos in the short term EOP time series fluctuations indicating that it is the chaoticity of the atmosphere which is transmitted to the Earth and found in the EOP measurements.

Concerning the local stability of the EAAM time series, we see that it is not obvious to associate a loss of stability to a repertoried event like for the EOP where El Niño influence was detected. This is not surprising because we have to keep in mind that we are not observing the time series but its related phase space local temporal stability. More over the variations of stability are not only dependent on external events but depend strongly on the system evolution itself in case of a chaotic system. Indeed it is not surprising to find no obvious correlation between El Niño for example and EAAM (which rises from a chaotic system) while for the EOP, the chaos induced by the atmosphere has a stability varying by other external actions. Figures 6 a,b,c give the

local stability of the three time series. The main stability loss for the $\chi_1 p_{[1-100d]}$ equatorial function happen in the years 1959, 1971, 1982 and 1986 where the predictability can be reduced by a factor 2. For the $\chi_2 p_{[1-100d]}$ function, the variations are less marked except for the years 1971 and 1992. Eventually, for the wind term $\chi_3 w_{[1-100d]}$, a big loss of stability appears around 1962 and 1971. In 1982, the system local stability and predictability are increased in opposition to the short terms LOD local stability, showing that two time series can be highly correlated in time but have opposite stability properties in phase space.

5 Discussion

The nonlinear time series analysis applied for the first time to the EAAM short terms fluctuations indicates that the underlying atmospheric dynamics creating the angular momentum variations for periods 1-100 days are low dimensional chaotic processes.

The dynamics, locally on the attractor, of the $\chi_i p_{[1-100d]}$ time series ($i = 1, 2$) for periods under 100 days can be modeled by 5 ordinary differential equations (the number of true Lyapunov exponents being 5). The construction of a system of equations has been made from time series of well known systems by, for example, Crutchfield and McNamara (1987). The construction of equations from an observational series is a very difficult task which should be performed in future works and applied to the EAAM time series.

This kind of approach (construction of differential equations) can be opposed to the one of Brezinski (1987) and usual stochastic previous studies. Indeed Brezinski found that the pressure terms $\chi_i p$ ($i = 1, 2$) for periods under 100 days can be modeled by an AR(3) which is a purely stochastic system. This process has the same frequency and statistical properties as the measured functions. Unfortunately, we know that working in the frequency space is insufficient to characterize the nature of a system because, for example, a chaotic system possesses a broadband spectrum similar to the one of a noise. More over, even if this consideration fits well the time series spectral properties, it misses the physical deterministic real nature of the fluctuations.

Working in the reconstructed phase space gives an alternative more general point of view and the opportunity to rise the true nature of the observed process (which can be either a noise, a periodic system or a chaotic nonlinear one). There, typically, the positive exponent close the debate: the $\chi_i p_{[1-100d]}$ terms ($i = 1, 2$) and the $\chi_3 w_{[1-100d]}$ term for periods under 100 days are chaotic systems and not of stochastic nature. Moreover, we are confident in the validity of the positive exponents because on the one hand, the time series used are very long (60000 points), homogeneous and precise, and on the other hand because we were expected such a kind of behaviour in the atmospheric dynamics due to its nonlinear well known nature.

The existence of chaotic dynamics induces a theoretical limit for prediction, which is to take into account for predictions studies. Moreover, to predict such time series, it could be useful to work in the nonlinear framework and use nonlinear methods like neural networks (Wan 1993) or phase space neighborhood (Abarbanel et al. 1994). That is to say, it could be better to exploit the dynamical coherence of the system (on the attractor) and not only the temporal evolution of the time series (like in autoregressive prediction schemes). We may reach an improvement of forecasts using the real dynamical nature of the system and not only its statistical apparent linear behaviour. Following this idea, in 1987, Rosen et al. have tried dynamical forecasts of the EAAM from atmospheric models and found better results than those usually obtained from stochastic methods. The next question would be, how can we improve the predictions by dynamical considerations on the time series (on the reconstructed attractor)?

The associated dimensions (D_E , D_{Lyap}), horizon of prediction (H_p), and global stability (two positive exponents) of the EAAM dynamics are quite similar to those obtained for their associated EOP time series. This is an indication of the important role that the atmosphere plays to create EOP short term fluctuations. The atmosphere processes forcing the Earth rotation on short time scales are chaotic. They transmit through angular momentum exchange, their chaoticity to the Earth. The response of the Earth obtained is thus found as well as chaotic even if it is only the reflect of the atmosphere.

The EOP(1-100days) are chaotic because the EAAM(1-100days) are chaotic and the similitude between the two chaos reveals that the atmosphere is the principal responsible of the Earth Rotation fluctuations and that the process of transmission is nearly linear (close to identity).

Nevertheless, the phase space determinations are not equal and the observed discrepancies between the Earth rotation dynamics and the EAAM one can be due to several things:

1. Errors of measurements, length of the data, pretreatments, truncation effects, model influence. This is certainly true (for example, the theoretical nul exponent is not perfectly nul) but we think that this kind of imprecisions can't account for all the observed discrepancies. It may come as well from the mode of transmission of the dynamics from the atmosphere to the Earth.
2. We haven't included the effect of the total terms (pressure for the axial angular momentum forcing, and wind for the equatorial forcings). We have to take these terms into account even if their participation in the EOP fluctuations is quite small. More over we haven't taken the IB correction for the calculation. Anyway we think that the sum of the effects of the previous points is not enough to explain all the differences.
3. We have to look for other causes. Many linear studies have already mentionned that the total excitation budget was not achieved from correlation analysis and that the principal candidate to fill the discrepancies was the ocean. The observed EOP chaos results from the coupled oceanic/atmospheric chaotic dynamics. We have seen that the related atmospheric processes are chaotic.

What about the oceanic processes?

We have to see, if the missing forcing is assumed to be the ocean, what kind of dynamics it implies to the Earth and what nature is its proper dynamics.

To answer to that question, it would be very interesting to study with the same nonlinear tools the signal consisting in the difference between the EOP observed time series $EOP(t)$ and the EOP fluctuations induced by the atmospheric forcing $EOP\chi(t)$, for the short periods: $M(t) = EOP(t)_{[1-100d]} - EOP\chi(t)_{[1-100d]}$.

Indeed, on the assumption that the transmission process is linear (Liouville), we can quantify the exact part of the EOP fluctuations caused by the atmospheric forcing and evaluate the "EOPatmo" ($EOP\chi(t)$). For the Lenght of day, the relation consists only in a multiplicative factor and a constant translation applied to χ_3 whereas for the Polar Motion, the transformation is a little bit more complex (Barnes et al. 1983) to convert the EAAM into EOP units.

Then a complete nonlinear analysis on $M(t)$ would tell us about the nature of that residual signal: is it a noise due to measurements errors only or is it a real deterministic signal due to another geophysical forcing on Earth rotation, or both.

We already know that the oceans have to be taken into account in the EOP excitation budget.

Indeed, preliminary analysis have already detected a significant non tidal oceanic component in the LOD time series (Wilson 1998). Several authors have avanced the idea of an angular momentum exchange between the Earth and the ocean for short periods (Ponte 1990). Ponte et al. (1998) derived a global ocean model and evaluated the angular momentum functions of the oceans, they showed that we obtained a better agreement between the geodetic series and the joint oceanic atmospheric excitation than with the atmospheric series alone especially for the polar motion. Marcus et al. (1998) have obtained also oceanic angular momentum functions (OAM) analogue to the atmospheric EEAM, by integration of more and more precise global models of oceanic circulation. The nonlinear analysis of that time series (OAM) will tell us about the dynamical behaviour of the ocean processes acting on the Earth and a direct comparison with the dynamical characteristics of the above "residual" signal ($M(t)$) will help us to understand how the ocean acts on the Earth chaotic dynamics and in which proportions.

Nevertheless, it is difficult to say precisely which geophysical chaotic process is responsible for which part of the chaotic observed EOP dynamics in that sense that in phase space, the coexistence of several attractors is not a simple relation between numerical values. They can't be added for example because the dynamics are nonlinear. Depending on the location in the phase space, we can be on one or on the other attractor. It is obvious that we can't work in phase space like in the time domain. Having quantified the atmospheric forcing dynamics $EOP\chi(t)$ (1-100days), it is impossible to substract dynamical and dimensional quantities to analyze the discrepancies. In general let $X_a(t)$ be a time series associated to atmospheric dynamics characteristics D_a , let $X_o(t)$ a time series associated to the oceanic dynamics characteristics D_o . Let D_e be the dynamical characteristics of the Earth rotation observed through a geodetical time series $X_e(t)$ ($X_e(t)$ stands for either PMX, PMY or LOD). If we assume no noise and the only forcings of the Earth fluctuations to be the atmosphere and the oceans, it is possible to retrieve $X_o(t)$ by subtraction of $X_e(t) - X_a(t)$ but the characteristics of D_o can't be derived simply from those of D_e and D_a .

Globally it is difficult to say which attractor is dominant on the EOP stability, but locally we may understand better the processes. For example, we saw that for the LOD local stability was strongly modified in the years 1982-84 corresponding to a great El Niño event. On the contrary, the local stability of the $\chi_3 w_{[1-100d]}$ time series seems marginally affected at that time. This can mean two things: on the one hand the proper chaotic atmospheric system was very stable at that time and the El Niño event appeared invisible and the second explanation is that this induced loss of stability on LOD was due to the oceanic dynamics, the attractor of the ocean was expressing itself more than the attractor of the atmosphere. Note that the relative contribution of the ocean and atmosphere to the signature of El Niño in the LOD is not yet well known (Wilson 1998). El Niño is an interannual fluctuation in the atmosphere. It is not present in the short time fluctuations of the atmospheric angular momentum functions nor in its stability but affects through unknown mechanisms the stability of the short term EOP fluctuations.

The linear correlation and variances studies (Ponte et al. 1998) between the excitations functions and the EOP series reveal that there are still discrepancies to be understood (even when we take into account the ocean and atmosphere). We propose to study with the nonlinear tools, the residual signal " $EOP - EOP_{atmo} - EOP_{ocean}$ " and check if it is a noise (as thought by Dickey et al. 1992) or another source of excitation (like the stratospheric winds effects as proposed in Rosen et al. (1990)).

More over, a theoretical study of chaotic transmission to the Earth could be to create a synthetic process having the dynamical properties of the atmospheric system or atmospheric and oceanic

systems and see how both the linearized and nonlinear Liouville equations modify the dynamics.

We show in this preliminary study that we mustn't stay confined in the linear tools for the Earth rotation studies especially for signal related to atmospheric or oceanic dynamics. It is widespread that models for the excitation functions and short term EOP variations are white noise, random walk or autoregressive processes. Even if those models stands well to recover the frequency and statistical properties of the observed signals, they can't capture and be representative of their real underlying dynamics. Thus we may be limited for prediction or even to understand in a more suitable way the interaction between the Earth and its fluid parts, just because of inappropriate analysis tools. We think that it is now impossible to ignore nonlinear processes in the atmospheric and oceanic dynamics and related Earth rotation fluctuations and that we should introduce more and more nonlinear tools in the methods of analyze of time series.

Working in this new context could lead to a better understanding, modelization and prediction of the Earth's rotation fluctuations and its related forcings processes. More over, in order to check for the effects of a possible corruption from the model used to evaluate the wind and pressure fields, on the numerical results obtained for the "EAAM attractor", it would be very appropriate to perform the same nonlinear determinations with different EAAM times series (whose variables come from other initial models). Indeed, we can't say exactly in which proportion the numerical results obtained from our analysis are affected by the underlying model. However, we strongly believe that the chaoticity found here belongs to the real atmospheric angular momentum fluctuations and not to the deterministic part induced by the model. This conviction is amplified by the good coherence obtained between the dynamical values of the EAAM and the EOP short term fluctuations.

6 Conclusion

The short term fluctuations of the EAAM time series are resulting from a low dimensional chaotic process. The chaos of the atmosphere is acting on the Earth rotation inducing a similar response of the Earth. Indeed the previous characterization of the EOP short term fluctuations had revealed a comparable low dimensional chaotic dynamic.

On the other hand, there exist differences in the numerical values showing that another source of dynamical system is acting on the Earth. These results are in agreement with those already remarked thanks to the linear correlations between time series. We think as well that the missing forcing comes from the oceanic dynamics. We encourage futur study to apply nonlinear time series analysis to the oceanic angular momentum time series related to the EOP in order to check for chaoticity in the ocean and transmission to the Earth rotation.

In conclusion we can keep in mind that the short term (under 100 days) fluctuations of the atmospheric angular momentum functions can be modeled by 5 ordinary differential equations and that their global dynamic is chaotic (under those time scales). The strange attractors of these systems have a dimension between 4 and 5 and can't be predicted more than, in average, 6 days in the future.

References

- [1] Abarbanel HDI (1996) Analysis of Observed Chaotic Data. Springer Verlag, Berlin, 272 pp.
- [2] Abarbanel HDI, Brown R, Kennel MB (1991) Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor. J. Nonlinear Sci. 1: 175-199
- [3] Abarbanel HDI, Kennel MB (1993) Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data. Phys. Rev. E 47: 3057-3068
- [4] Abarbanel HDI, Carroll TA, Pecora LM, Sidorowich JJ, Tsimring LS (1994) Predicting physical variables in time-delay embedding. Physical Review E 49,3: 1840-1852
- [5] Barnes RTH, Hide R, FRS, White AA, Wilson CA (1983) Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion. Proc. R. Soc. Lond. A 387: 31-73
- [6] Bell RS, Hide R, Sakellarides G (1991) Atmospheric angular momentum forecasts as novel test of global numerical weather prediction models. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 334: 55-92
- [7] Bosq D, Lecoutre JP (1992) Analyse et prévision des séries chronologiques. Méthodes paramétriques et non paramétriques. Masson, Paris 1992.
- [8] Brzezinski A (1987) Statistical investigations on atmospheric angular momentum functions and their effects on polar motion. Manuscripta Geodaetica 12: 268-281
- [9] Crutchfield J, McNamara B (1987) Equation of Motion from a data series. Complex systems 1: 417
- [10] Dickey JO, Marcus SL, Steppe JA, Hide R (1992) The Earth's Angular Momentum Budget on Subseasonal Time Scales. Science 255: 321-324
- [11] Eckmann JP, Ruelle D (1985) Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. Mod. Phys. 57: 617-656
- [12] Eubanks TM, Steppe JA, Dickey JO (1983) Atmospheric excitation of polar motion. JPL briefing paper, unpublished
- [13] Eubanks TM, Steppe JA, Dickey JO, Callahan PS (1985) A spectral Analysis of the earth's angular momentum budget. Journal of geophysical research 90, B7: 5385-5404
- [14] Essex C, Lookman T, Nerenberg MAH (1987) The climate attractor over short timescales. Nature 326: 64-66
- [15] Feissel M, Nitschelm C (1985) Time-dependent aspects of the atmospheric driven fluctuations in the duration of the day. Annales Geophysicae 3,2: 181-186
- [16] Fraser AM, Swinney HL (1986) Independent coordinates for strange attractors from mutual information. Phys. Rev. A 33(2): 1134-1140

- [17] Frede V, Mazzega P (1999a) Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series –I.Embedding. *Geophysical Journal International* 137(2): 551-564
- [18] Frede V, Mazzega P (1999b) Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series –II.Dynamics. *Geophysical Journal International* 137(2): 565-580
- [19] Ghil M, Kimoto M, Neelin JD (1991) Nonlinear Dynamics and Predictability in the Atmospheric Sciences. *Rev. of Geophys. Suppl.* 46-55.
- [20] Golub GH, van Loan CF (1989) *Matrix Computations*, John Hopkins Univ. Press, 2d edition, London, 642 pp.
- [21] Gross RS, Lindqwister UJ (1992) Atmospheric excitation of polar motion during the GIG'91 measurement campaign. *Geophysical Research letters* 19, 9: 849-852
- [22] Kalnay E, Kanamitsu M, Kistler R, Collins W, Deaven D, Gandin L, Iredell M, Saha S, White G, Woollen J, Zhu Y, Chelliah M, Ebisuzaki W, Higgins W, Janowiak J, Mo KC, Ropelwski C, Wang J, Leetmaa A, Reynolds R, Roy Jenne, Dennis Joseph (1996) The NCEP/NCAR 40-Year Reanalysis Project. *Bulletin of the American Meteorological Society* 77,3: 437-471
- [23] Kaplan JL, Yorke JA (1979) Chaotic behaviour in multi- dimensional difference equations. H.O. Peitgen and H.O. Walther eds., *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points* : 204-227, Springer, Berlin.
- [24] Marcus SL, Chao Y, Dickey JO, Gegout P (1998) Detection and Modelling of nontidal oceanic effects on Earth's rotation rate. *Science* 281: 1656-1659
- [25] Nicolis C, Nicolis G (1984) Is there a climatic attractor ? *Nature* 311: 529-532
- [26] Ponte RM (1990) Barotropic Motions and the exchange of angular momentum between the oceans and solid earth. *Journal of geophysical research* 95, C7: 11,369-11,374
- [27] Ponte RM (1997) Oceanic excitation of daily to seasonal signals in Earth rotation: results from a constant-density numerical model. *Geophysical Journal International* 130: 469-474
- [28] Ponte RM, Stammer D, Marshall J (1998) Oceanic signals in observed motions of the Earth's pole of rotation. *Nature* 391: 476-479
- [29] Rosen DR, Salstein DA, Nehrkorn DA, Mccalla M, Miller AJ, Dickey JO, Eubanks TM, Steppe JA (1987) Medium-range Numerical Forecasts of Atmospheric Angular momentum. *Mon. Weather. Rev.* 115: 2170-2175
- [30] Rosen DR, Salstein DA (1983) Variations in atmospheric Angular Momentum on Global and Regional Scales and the Length of day. *Journal of Geophysical Research* 88, C9: 5451-5470
- [31] Rosen RD, Salstein DA, Wood TM (1990) Discrepancies in the Earth-Atmosphere Angular momentum Budget. *Journal of Geophysical Research* 95: 265-279

- [32] Ruelle D, Takens F (1971) On the nature of turbulence. *Comm. in Math. Physics*, 20: 167 *Journal of Geophysical Research* 95: 265-279
- [33] Salstein DA, Rosen RD (1997) Global Momentum and energy signals from reanalysis systems. *American meteorological society*, 7th Climate variations: 344-348
- [34] Salstein DA, Rosen RD (1989) Regional Contributions to the Atmospheric Excitation of Rapid Polar Motions. *Journal of Geophysical Research* 94, D7: 9971-9978
- [35] Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence*, Rand D. and L.S. Young eds., *Lecture Notes in Mathematics* 898, Springer Verlag, Berlin, pp. 366-381.
- [36] Tsonis AA, Elsner JB (1988) The weather attractor over very short timescales. *Nature* 333: 545-547
- [37] Vondrák J (1977a) Problem of smoothing observational data, *Bull. Astron. Inst. Czech.* 20: 349.
- [38] Vondrák J (1977b) Problem of smoothing observational data II, *Bull. Astron. Inst. Czech.* 28: 84-89
- [39] Wan EA (1993) Time series prediction by using a connectionist network with internal delay lines. *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, Weigend AS and Gershenfeld NA Eds, *SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Proc. Vol XV, Addison-Wesley.
- [40] Wilson CR (1998) Oceanic effects on Earth's rotation rate. *Science* 281: 1623-1624

TABLE CAPTION

Raw Series	Mean	rms
$\chi_1 p$	-0.1529	1.999
$\chi_1 w$	0.1676	1.2632
$\chi_2 p$	15.49	2.506
$\chi_2 w$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	1.2814
$\chi_3 p$	13.87	$8.5 \cdot 10^{-3}$
$\chi_3 w$	0.281	$4.41 \cdot 10^{-2}$

Series	τ AMI	D_E
$\chi_1 p_{[1-100d]}$	10	5
$\chi_2 p_{[1-100d]}$	10	5
$\chi_3 w_{[1-100d]}$	15	5

Series	$\chi_1 p_{[1-100d]}$	$\chi_2 p_{[1-100d]}$	$\chi_3 w_{[1-100d]}$
λ_1+	0.1783	0.1813	0.2329
λ_1-	0.2150	0.2026	0.2282
λ_2+	0.0745	0.0795	0.1203
λ_2-	0.1054	0.0926	0.1208
λ_3+	-0.0160	-0.0118	-0.0074
λ_3-	-0.0015	0.0001	-0.0061
λ_4+	-0.1503	-0.1529	-0.1655
λ_4-	-0.1514	-0.1372	-0.1720
λ_5+	-0.4841	-0.4955	-0.5730
λ_5-	-0.5166	-0.5124	-0.5624
$\sum \lambda_i+$	-0.3976	-0.3994	-0.3927
$\sum \lambda_i-$	-0.3490	-0.3543	-0.3914
D_{Lyap}	4.18	4.19	4.31
H_p	6 days	6 days	4.5 days

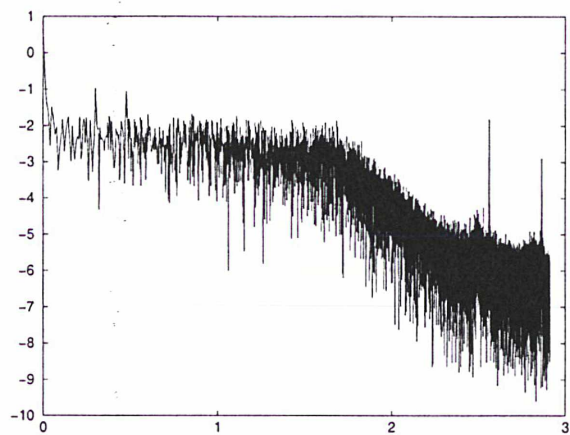
- **Table 1.** Mean and root mean square of the raw EAAM time series (they have no dimension). p stands for pressure term and w for wind term. The index 1 is related to the equatorial function in "X"-direction, 2 is related to the equatorial function in "Y"-direction and 3 is related to the axial function.

- **Table 2.** Time delays τ (in units: 0.25 days) obtained from the average mutual information function (AMI) and embedding dimension D_E for the filtered (1day-100 days) EAAM time series.
- **Table 3.** Global Lyapunov exponents λ_i evaluated both with the correct (+) and inversed (-) time, sum of the 5 exponents $\sum \lambda_i$, Lyapunov dimension D_{Lyap} and theoretical mean horizon of prediction (H_p) in days for the $\chi_1 p_{[1-100d]}$ filtered time series, the $\chi_2 p_{[1-100d]}$ filtered time series and the $\chi_3 w_{[1-100d]}$ filtered time series.

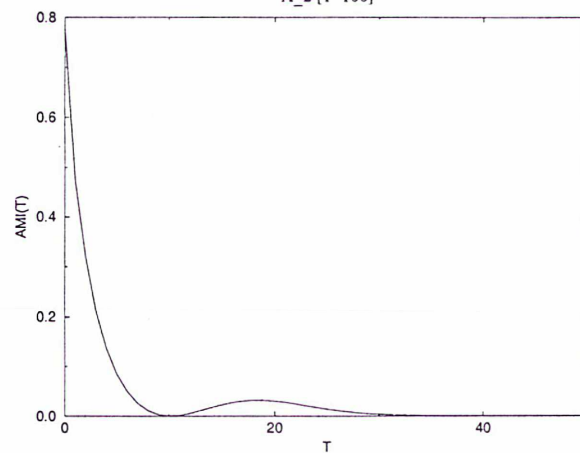
FIGURE CAPTION

- **Fig. 1** $\text{Log}_{10} - \text{Log}_{10}$ representation of the power spectrum of the raw $\chi_2 p$ time series (no unit), as a function of the frequency (cycles per 0.25 days).
- **Fig. 2** Average mutual information function for the filtered $\chi_2 p_{[1-100d]}$ time series. The optimal time delay is read as the first minimum of that function and is expressed in unit: 0.25 days.
- **Fig. 3** Percentage of global false neighbors as a function of the trial embedding dimension D_E . The best dimension is obtained when the percentage of false neighbors reaches zero.
- **Fig. 4** 2D-Projection of the 5-D reconstructed $\chi_2 p_{[1-100d]}$ attractor with $\tau=10$ for delayed coordinates.
- **Fig. 5** Spectrum of the global Lyapunov exponents of $\chi_2 p_{[1-100d]}$. The length is the number of Jacobian matrices evaluated in the mapping reconstruction. Each global exponent is obtained as the average of $3 \cdot 10^3$ local exponents computed with the composition of K (length) Jacobian matrices.
- **Fig. 6** Local temporal stability variations of the principal Lyapunov exponent from 1958 to end 1997 of a) $\chi_1 p_{[1-100d]}$, b) $\chi_2 p_{[1-100d]}$ and c) $\chi_3 w_{[1-100d]}$. The windows $K = 16$ and 32 (units) correspond to the number of local Jacobian matrices evaluated and their value are chosen to form a compromise between enough small temporal variations ($K = 16$) and sufficient smoothing ($K = 32$) of the local stability all along the attractor.

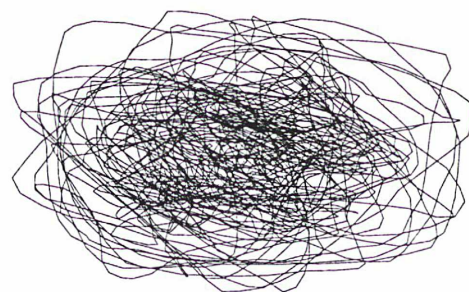
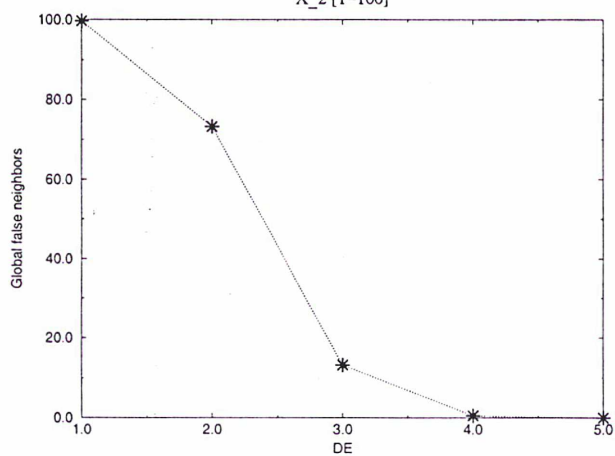
Power Spectrum X2p

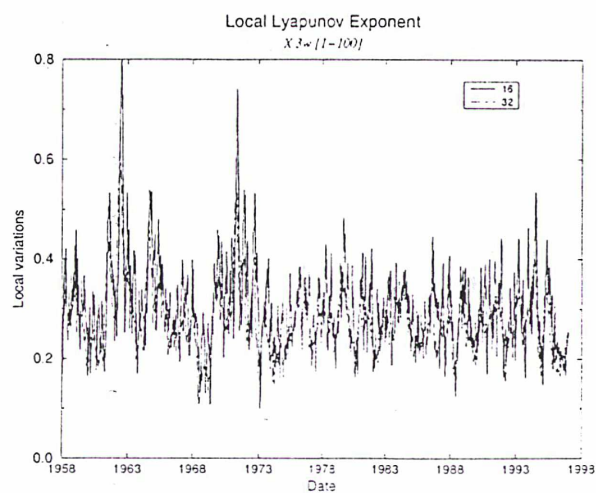
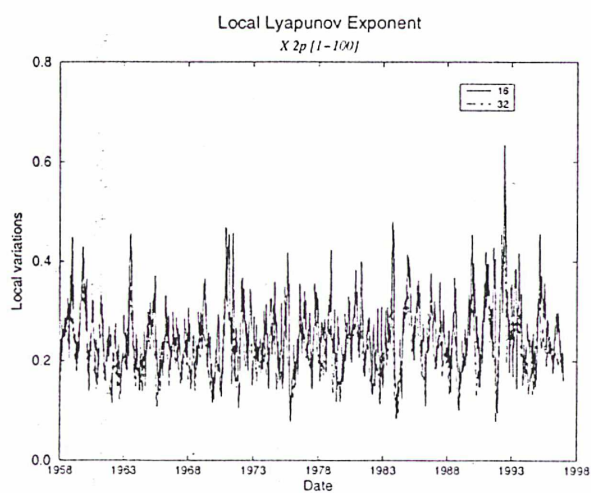
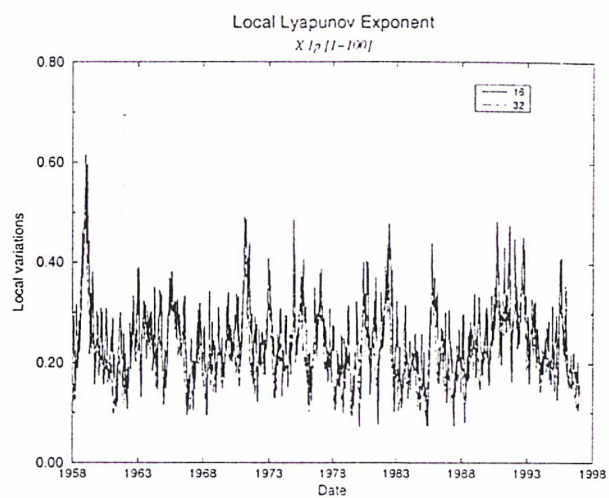
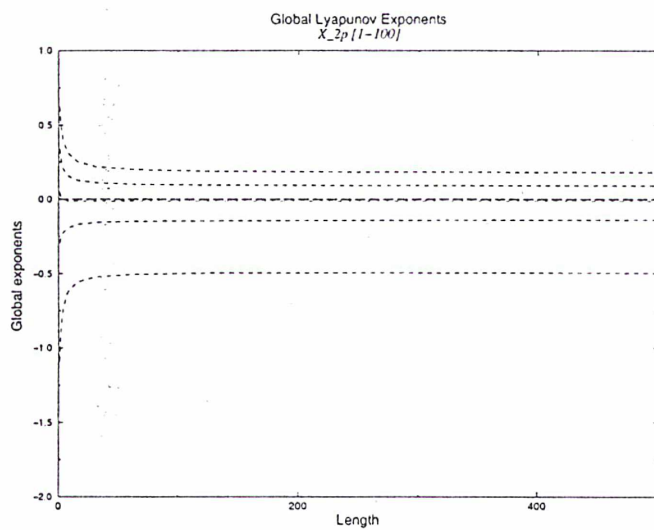


Average Mutual Information Function
X_2 [1-100]



Percentage of global false neighbors
X_2 [1-100]





Annexe 4: A preliminary Nonlinear Analysis of the Earth's Chandler Wobble

991019

DDNS - 92

Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 00, pp. 1-15
Reprints available directly from the publisher
Photocopying permitted by license only

© 1999 OPA (Overseas Publishers Association) N.V.
Published by license under
the Gordon and Breach Science
Publishers imprint
Printed in Malaysia.

A Preliminary Nonlinear Analysis of the Earth's Chandler Wobble

V. FREDE^{a,*} and P. MAZZEGA^b

^aURA 1125 Observatoire de Paris, 61, avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France;

^bUMR 5566-CNRS-CNES, 18 av. E. Belin, 31401 Toulouse cedex 4, France

(Received 31 January 1999)

The Chandler wobble (CW) is a resonant response of the Earth rotational pole wandering around its figure axis whose excitation mechanism is still uncertain. It appears as polar motion oscillations with an average period of about 433 days and a slowly varying amplitude in the range (0–300) milliarcsec (mas). We here perform a nonlinear analysis of the CW via a time-delay coordinate embedding of its measured X and Y components and show that the CW can be interpreted as a low dimensional unstable deterministic process.

In a first step the trend, annual wobble and CW are separated from the raw polar motion data time series spanning the period 1846–1997. The optimal delays as deduced from the average mutual information function are 105 and 115 days for the X and Y components respectively. Then from the global statistics of the false neighbours, the embedding dimension $D_E = 4$ is estimated for both series. The local dimension D_L can also be extracted from the time series by testing the predictive skill of local mappings fitted to the embedded data vectors. The result $D_L = 3$ is quite robust and corroborate the idea that the CW behaves like a dissipative oscillator driven by a deterministic process. Indeed the orbit reconstructions in pseudo-phase space both draw the figure of a perturbed 1-torus.

The computation of the Lyapunov spectra further shows that this torus-like figure is an attractor with a 1D unstable manifold. The theoretical horizons of prediction deduced from the (positive) principal exponents are about 367 and 276 days for the X and Y Chandler components respectively. Moreover the local Lyapunov exponents exhibit significant variations with maxima (and corresponding losses of predictability) in the decades 1860–1870 and 1940–1950.

Keywords: Chandler wobble, Chaos, Lyapunov exponents, Time series

1 INTRODUCTION

The Earth rotation rate and spin axis position relative to the Earth's figure axis, experience

fluctuations at all time scales. Variations in the length of day (LOD) and polar motion (PM) are observed in response to applied external (e.g. tidal) and internal (e.g. topographic coupling between

* Corresponding author. E-mail: fred@hplbi.obspm.fr.

core and mantle) torques, to angular momentum exchanges between the solid and fluid parts of the Earth and to global mass redistributions primarily associated to geophysical fluid motions which perturb the Earth inertia tensor (Lambeck, 1980). Nowadays, the high accuracy geodetic measurements of these fluctuations provide useful constraints on the time evolution of the Earth–Moon system and on the modelling of the earth's core and mantle as well as hydrosphere and atmosphere dynamics (Hide and Dickey, 1991; Dehant *et al.*, 1997).

The Chandler wobble (CW) is a resonant response of the PM. The corresponding free oscillation was already predicted by Euler in 1765 with a period of about 306 solar days for an axisymmetric flattened rigid Earth model. But it was only observed by Chandler in 1891 from data of the variation of latitudes, with a period of about 14 months (~ 436 days). This increase of the period is well accounted for by the elastic yielding of the Earth. Several processes in the Earth's global dynamics being dissipative (e.g. the wind and oceanic current drag on the crust), the CW must be sustained by an excitation source which has resisted any reliable identification until today.

Several candidates have been proposed in the past but none of them appear to be appropriate. The energy input by earthquakes is probably between two or five orders of magnitude too small to excite the wobble (Souriau, 1986; Chao and Gross, 1987). Other possible excitation mechanisms were searched for in pre- or post-seismic deformations (Sabadini *et al.*, 1984) and in convective processes of the core external layers (Le Mouel *et al.*, 1985) without reaching conclusive results. Early investigations about the possible excitation by atmospheric or oceanic variabilities (Ooe, 1978; Wahr, 1983; Chao, 1984) are somewhat supported by recent advances in global ocean-atmosphere modelling (Vondrák, 1990; Chao, 1993) but with rather mitigated results. Significant departures between the predicted and observed wobble are still unexplained so that other mechanisms might – at least partly – sustain the Chandler oscillation (Eubanks, 1993).

Other studies have been dedicated to the characterization of the CW from the data series. Variations in amplitude and departures from a purely periodic motion are reported since a long time (see e.g. Jeffreys, 1940). Frequency modulations were also sought with diverging conclusions that should result from differences in the way data were analyzed and from data contaminations by a time-dependent noise. Indeed phase variations of the CW could be an artifact of observational errors or result from random unknown excitations (Okubo, 1982). Two or more free frequencies could also coexist near the Chandler frequency supposed constant and modulate the signal (Colombo and Shapiro, 1968). A single Chandler frequency might be amplitude-dependent due to nonlinear response to the oceans and change with time (Carter, 1981).

Major information on the CW energy sources and sinks can be gained from the estimation of its quality factor Q_{CW} . This factor, which is inversely proportional to the ratio of the energy loss $-\Delta E_{CW}$ in one wobble cycle to the energy E_{CW} of an unsustained wobble, can be retrieved from the width of the CW spectral line (Stacey, 1992). Recent estimates of Q_{CW} range from ~ 50 to ~ 180 (Furuya and Chao, 1996) that correspond to decays of an unmaintained CW with typical time scales of ~ 20 – 70 years respectively.

Until now almost all analyses aiming at the identification of excitation sources or at extracting CW parameters from the data were conceptually confined to the “stochastic process paradigm”. However the resonant response of a damped oscillator is stronger when the forcing has a rich spectral content about its free period. Following this idea, quasi-periodic angular momentum fluctuations in the atmosphere near the 14 month period were recently retrieved by Furuya *et al.* (1996). Unfortunately their study relies on linear analyses (Fourier spectra, coherence functions) though it is known that the dynamics of the various geophysical fluids (core, mantle, ocean, ground-water, atmosphere) are driven by nonlinear processes at sub-daily to climate time scales.

Au Q: please check
spelling discrepancy

Results presented here suggest that the CW is sustained by a low dimensional nonlinear deterministic process. The nonlinear data time series analysis of the rapid fluctuations of the LOD and PM in the frequency band (2–100) days already supported a similar conclusion (Frede and Mazzega, 1999a). In particular nonlinear signatures of *El Niño – Southern Oscillation* events (Harrison and Larkin, 1998) were recovered in the time-dependent local Lyapunov exponents, indicating that at these periods the unstable modes of the Earth's rotation are prompted by the ocean-atmosphere coupled dynamics (Frede and Mazzega, 1999b).

In the next section we present the data time series and explain how the CW signal is routinely separated from the annual wobble, trend and residues. In Section 3, the embedding D_E and local D_L dimensions are determined from global and local neighbourhood analyses of the embedded data vectors. The Lyapunov exponents and dimensions are then computed from the data time series as explained Section 4 and the results discussed in Section 5. However this analysis should be considered as preliminary. Indeed we do not tried here to test the robustness of these results. Similar computations should also be undertaken with PM data time series published by other Earth's rotation center. The algorithms and sensitivity tests (to noise contaminations, limited data series, etc.) are detailed in the context of Earth's rotation studies in the twin papers by Frede and Mazzega (1999a,b). From our experience, we think that the results presented below are robust and ascertain the nonlinear determinist origin of the CW excitation mechanism.

2 TIME SERIES OF THE CHANDLER WOBBLE (1846–1997)

The CW is extracted from data series of the raw PM components X (along the Greenwich meridian) and Y (along the 90° E meridian) as edited by the International Earth Rotation Service (IERS, Observatory of Paris). The longest available series

(the C01 series, see IERS, 1996) extends from 1846 up to 1997. During this one and half century of survey the techniques of PM observation have considerably evolved and the resulting C01 series is a concatenation or, when possible, an optimal combination of partial data series (Vicente and Wilson, 1997). For example in the early period (1846–1890) the PM is deduced from astrometric optical measurements of absolute declinations with a frequency band covering almost only the Chandler and annual wobbles and an accuracy probably not better than a few tens of milliarcsec (mas). The latest two decades of data combine geodetic observations from Very Long Base Interferometry (VLBI), Global Positioning System (GPS) and Satellite and Lunar Laser Ranging (SLR and LLR respectively, IERS, 1996) with an accuracy of 0.3 mas. The sampling rate is 10 data year from 1846 to 1889 and 20 data year from 1890 up to now.

The PM is dominated by two main components: the annual wobble which is presumably excited by the ocean-atmosphere system and the CW. They can be quite well separated from each other with a 7 year-long record of PM as during such a time interval 6 full cycles of the CW are completed. The splitting of a time series into trend, seasonal and irregular components is a practical issue in financial time series analysis. The Census X-11 filter (Shiskin *et al.*, 1967) achieves this kind of decomposition on the basis of local trend estimators for non-seasonal time series using finite moving averages (Gray and Thomson, 1997). It is routinely implemented in an iterative data analysis scheme at IERS in order to separate the annual and Chandler wobbles (see IERS, 1991, for details).

In a first step, the X and Y time series of the PM have been re-interpolated with a homogeneous sampling rate of 100 data year all over the (1846–1997) interval with a cubic spline. Then we applied the iterative decomposition with the finite moving averages being estimated over moving 7-year sub-intervals in order to separate the annual and Chandler wobble without smothering too much the time variability of these signals. We retain a central

Au. Q: please
Check 1996 or
1997

period of 433 solar days for the CW in good agreement with the recent determinations of this parameter (see e.g. Vicente and Wilson, 1997). It should be noted that the frequency resolution of the moving averages over 7-year time span is quite low so that weak frequency modulations of the CW about its central frequency are implicitly permitted in the decomposition process. The annual wobble is about 60 mas RMS, the CW about 100 mas RMS and the irregular part about 40 mas RMS on both components of the PM (means and RMS are summarized in Table I). The statistics of the wobbles and irregular parts of the X and Y series are similar. The main difference between the two raw series is a consequence of the strong trend in the Y component of the PM (~ 4 mas year since the beginning of this century). We will not be interested in this secular drift that might be caused by the postglacial rebound or changes in polar ice covering (McCarthy and Luzum, 1996).

The raw series, trend, wobbles and irregular part are drawn in Fig. 1 for the Y component (similar curves are obtained with the X component of PM). The quite high noise level in the years (1846–1890) is responsible for 40 mas RMS of the irregular (or residual) part of PM . It would rather be of the order of 10 mas RMS when considering the data obtained after 1890. The noise is also spoiling the annual and CW recovery before 1890 as can be seen on Fig. 1. Then the most striking phenomenon is the low amplitude of the CW in the years (1925–1940). This strong modulation has been interpreted as a phase reversal of the wobble (see e.g. Vondrák, 1990) whose origin is still unknown (this modulation occurs on the X component as well). In fact the

time variations of the excitation mechanism should be searched in these slow modulations of the resonant response of the Earth's rotation (and may be on related frequency modulations that are more difficult to track).

A detailed examination of the annual and Chandler wobbles also reveals that these two components might not be perfectly separated by the Census X-11 algorithm. This is not so surprising as we operate the decomposition over the smallest possible moving window of 7 years. In the computations described below, the first 10 years of data are skipped in order to limit the effect of the data noise on the results. Moreover a weak smoothing via local parabolae fitting to data included in a (moving) window of 150 days, is applied to the Chandler series before entering the nonlinear analysis. The instantaneous wobble is taken as the value of the fitted local parabola middle point. This filtering only reduces the X and Y CW series by ~ 2 mas RMS though removing most of the residual noise contaminations in the data series.

3 DIMENSIONAL ANALYSIS OF THE CHANDLER WOBBLE

Dimensional and dynamical invariants of a complex system can be extracted from the nonlinear analysis of an univariate data time series issued from that system. Data vectors are constructed in a D_E -dimensional phase space E^* in a frame of time delayed coordinates. In E^* the time series of data vectors draws an orbit whose statistical and geometrical properties, thanks to the embedding theorem (Takens, 1981), we know to be directly inherited from the unknown source dynamics (Eckmann and Ruelle, 1985). The deep theoretical background of this approach will not be addressed at all in this study. The interested reader will refer to the papers cited above or to the recent overview given by Abarbanel (1996).

Here the complex system is the Earth with its various interacting envelopes (solid parts, geophysical fluids, etc.) that we study from the point of view

TABLE I Mean and RMS of the raw series of the X - Y components of the PM and of their respective trend, CW, annual wobble and irregular part (unit: mas)

PM decomposition	Mean X - Y (mas)	RMS X - Y (mas)
Raw series	-15.7 ± 49.8	142.9 ± 188.4
Trend	-15.3 ± 50.3	39.7 ± 135.0
Chandler	0.0 ± 0.0	102.9 ± 101.4
Annual	0.0 ± 0.0	65.0 ± 57.7
Irregular	-0.3 ± -0.5	41.3 ± 42.4

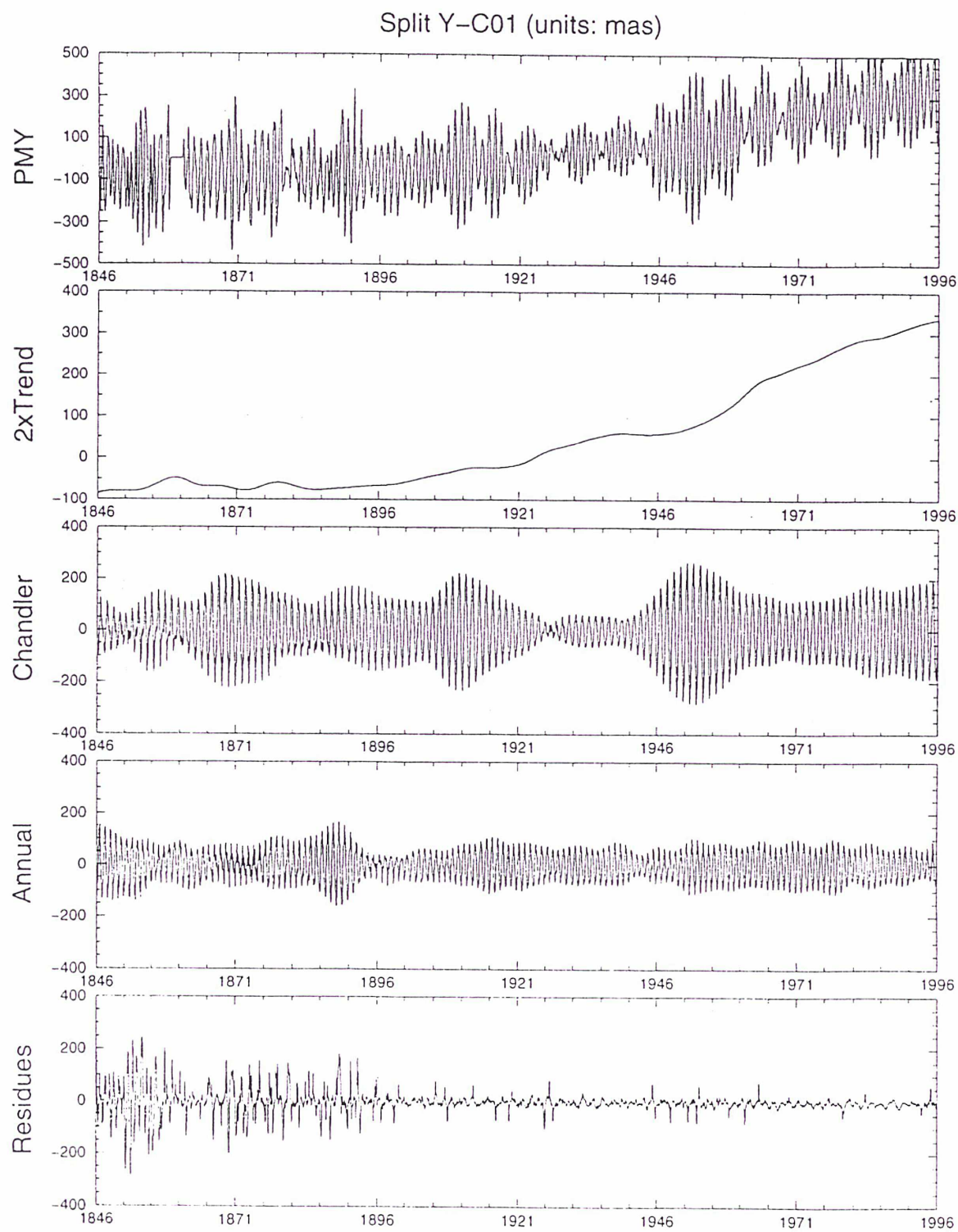


FIGURE 1 The raw time series of the Y-PM (upper panel) is splitted into a secular trend (scaled by a factor 2), the Chandler (period ~ 433 days) and annual (period 365.25 days) wobbles and an irregular or residual part (lower panel). Units are in mas. Very similar plots are obtained with the X component of PM.

of its rotational dynamics. In the computations below, we consider separately the X and Y components of the CW. Being extracted from the same dynamics they should lead us to the same estimates of the system invariants. The series of the CW being limited in length and contaminated by noise, the coherence of the results extracted from both series is a crude way to give some confidence in the characterizations so obtained.

The dimensional analysis starts with the determination of the smallest dimension of the space E^* required to unfold the reconstructed orbits. Note that this dimension D_{E^*} might depend on the data series extracted from the system and so is not an invariant of the dynamics. From the data time series at hand $x(t)$ we construct $D_{E^*}^{\text{trial}}$ -dimensional vectors $y(t)$ using a time delay τ by:

$$y(t) = [x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (D_{E^*}^{\text{trial}} - 1)\tau)]. \quad (1)$$

In E_{trial}^* , the time series of the vectors $y(t)$ draws some parametric curve with a lot of neighbour points (or even intersections). These neighbourhoods, which can be easily counted, result either from the system passing again similar states in phase space during its evolution or from undesirable projections of the reconstructed orbit in a too low dimension space. These "false" neighbours are progressively eliminated when increasing the trial embedding dimension $D_{E^*}^{\text{trial}}$. Only true neighbours remain as soon as the smallest dimension required to completely unfold the orbit, say D_{E^*} , is reached. Stochastic processes being infinite dimensional, their data contamination tends to give an overestimated embedding dimension, and even sometimes compromises its determination (Frede and Mazzega, 1999a).

In Eq. (1), the definition of a system of statistically independent coordinates relies on the choice of the time-delay τ . In the context of nonlinear dynamics, it has been shown that the best way to estimate a reliable delay is to calculate the Average Mutual Information (AMI) function (Fraser and Swinney, 1986) which, shortly speak-

ing, is based on the probability distribution of events in the time series. The joint probability distribution between the data series $x(n)$ and its delayed version $x(n + T)$, say $P[x(n), x(n + T)]$ is obtained from the joint histogram in the $[x(n), x(n + t)]$ variables (for simplicity we here assume that the data are given at discrete times $n = 1, N$). The AMI for any delay T is defined by:

$$\begin{aligned} \text{AMI}(T) &= \sum_{n=1}^N P[x(n), x(n + T)] \ln \left[\frac{P[x(n), x(n + T)]}{P[x(n)]P[x(n + T)]} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

The first minimum of the AMI function is the sought delay. We obtain time delays of 105 and 115 days respectively for the X and Y components of the CW. It can be seen from the AMI function for Y plotted in Fig. 2, that the minimum is surrounded by weak gradients. So the estimation of τ is not very acute and could easily vary within ± 10 days or so. Anyway, the various orbits that would be reconstructed on the basis of slightly different time delays are diffeomorphic and equally lead to the sought invariant estimates.

With the optimal delay for a given series, we build data vectors as in Eq. (1) for a trial dimension $D_{E^*}^{\text{trial}}$. For each vector, we count the number of neighbour vectors and compare it to the number of neighbours

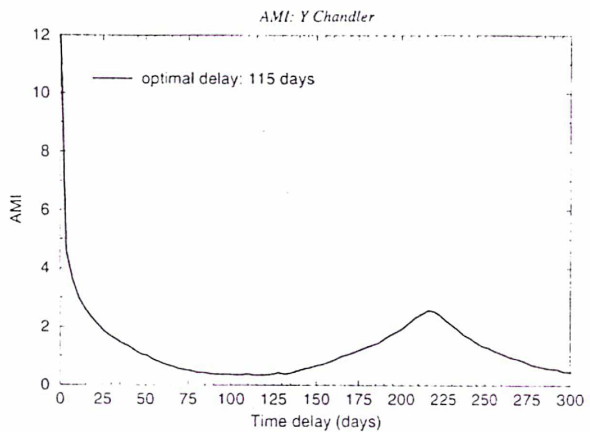


FIGURE 2 AMI as a function of the time-delay T . The delay τ for data embedding corresponds to the first minimum of the AMI function.

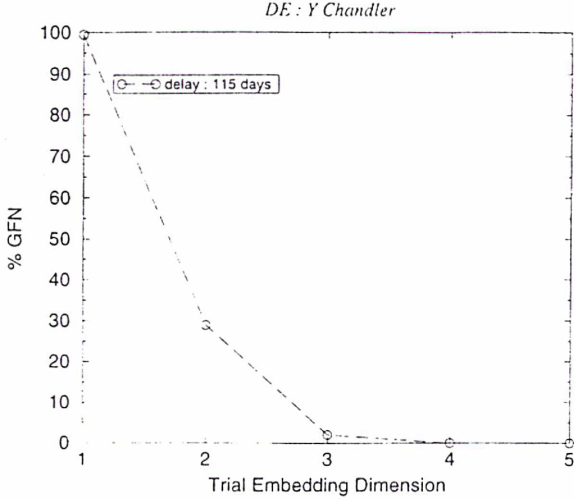


FIGURE 3 Global percentage of false neighbours as a function of the trial embedding dimension D_E^{trial} for the *Y*-Chandler data time series. The 0% in dimension $D_E = 4$ corresponds to the complete unfolding of the reconstructed orbit in pseudo-phase space E^* .

in dimension $D_E^{\text{trial}} + 1$. Those neighbourhood of dynamical origin are not affected while those resulting from a projection are gradually eliminated by the unfolding of the embedding space. In Fig. 3 we plot the global percentage of false neighbours as a function of the trial embedding dimension D_E^{trial} for the *Y* series with a delay $\tau = 115$ days (once again similar plots are systematically obtained for the *X* series). Almost all the neighbours in dimension 1 are false neighbours (globally $\sim 100\%$ of false neighbours) as the data are artificially projected on a line. This percentage decreases to zero for a trial dimension of 4. At this stage it is difficult to know if the very low percentage in dimension 3 is not a remanent of data contamination by a weak noise. However, exactly the same behaviour being observed for the *X* component, we retain an embedding dimension $D_E = 4$ in the following. It can be shown that these results are not sensitive to the value of the radius used to define any neighbourhood as long as it is chosen as a small fraction of the data series RMS.

From the knowledge of the time-delay τ and embedding dimension D_E , the orbit is reconstructed in pseudo-phase space E^* . A 3D projection of the *Y*-Chandler orbit is drawn in Fig. 4. It looks

like interweaving “circles” more or less confined in a bounded disk-like sub-space. Much will be learnt about the dynamics of the CW from the geometry of such a reconstructed orbit.

The next dimension to be determined is the local dimension. Whereas the embedding dimension D_E is a global dimension, the dynamical dimension D_L is related to the exact number of degrees of freedom activated during the system evolution. It is an invariant of the system dynamics that can be also extracted from a time series of observations. The broad lines of the algorithm are summarized as follows (see Abarbanel and Kennel, 1993 for details): the orbit is reconstructed in a working space with high enough dimension $D_a > D_E$ to ascertain that true neighbours only are kept. We then consider a given point of the orbit, say $y(n)$, select its Nb nearest neighbours $[y_i^{\text{neghb}}(n); i = 1, Nb]$ and compute the corresponding covariance matrix. The eigenvectors of this matrix give the principal local directions along which are distributed the selected data vectors. Keeping only the D_L^{trial} local directions, we build a mapping which carries the vectors $y_i^{\text{neghb}}(n)$ to their images $y_i^{\text{neghb}}(n+m)$ after m time steps of the ambient flow. This mapping is finally applied to the vector $y(n)$ and the result $y_{\text{pred}}(n+m)$ is compared to its true image $y(n+m)$. The prediction is considered successful if the euclidian distance $\|y(n+m) - y_{\text{pred}}(n+m)\|$ is below a predefined fraction of the data series RMS (typically 10%). These operations are repeated for all the points $y(n)$ of the orbit and the percentage of bad predictions is estimated. All the predictions are successful only when the local mappings are built in the right dynamical dimension D_L . In this case the performance of the prediction does not depend on the number of neighbours Nb nor on the success criterion.

The choice of Nb for a limited time series in the presence of noise contamination is discussed in Frede and Mazzega (1999b). Indeed we found this algorithm to be quite sensitive to noise because it basically works with neighbourhoods so that the local evolution of the flow is partially hidden by noisy features of the reconstructed orbit. The

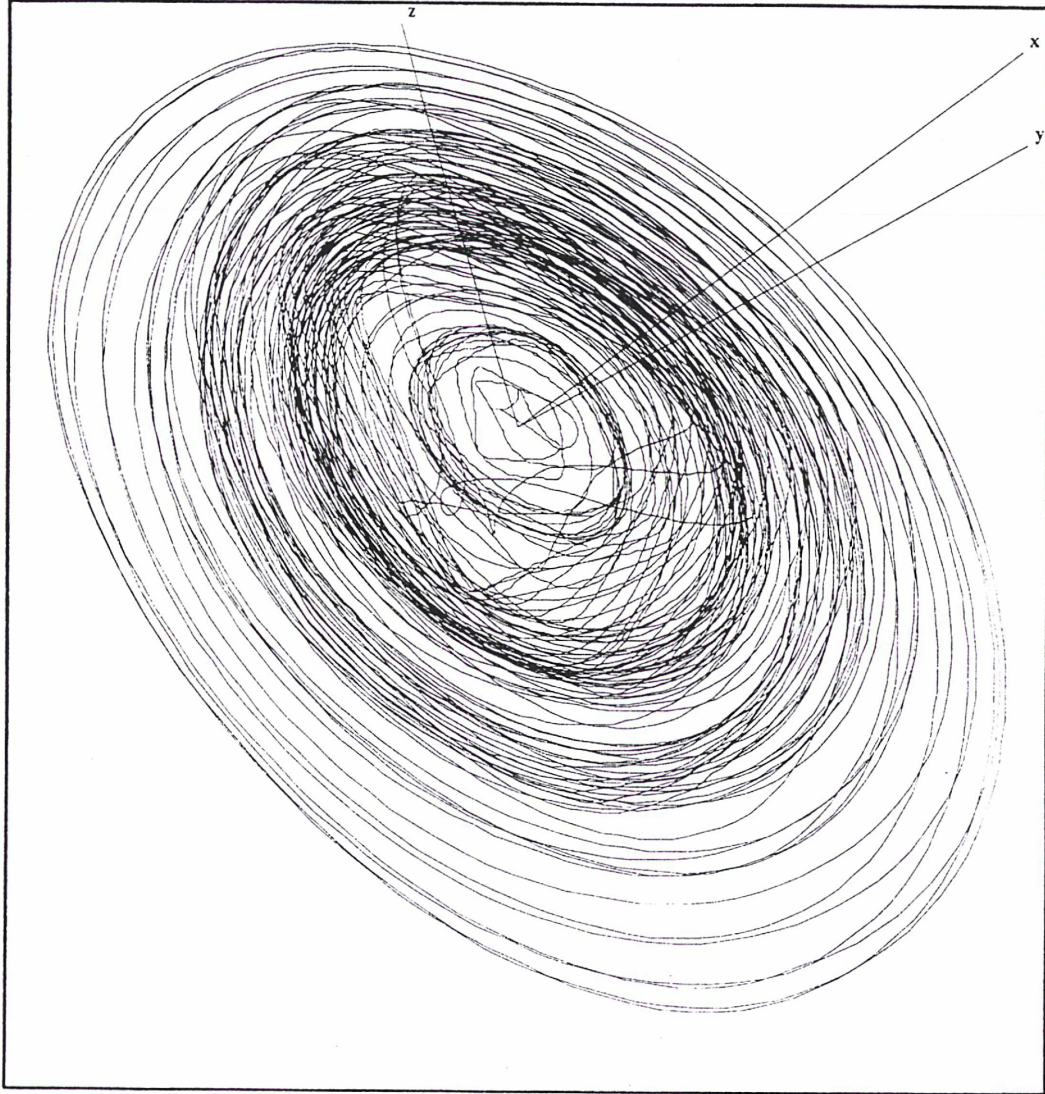


FIGURE 4 Y component of the CW reconstructed as an orbit in 4D pseudo-phase space E^* (one of its 3D projection is drawn here). The delay for embedding is 115 days. The radius of the torus-like structure is about twice the data series RMS (~ 100 mas).

algorithm applied to the complete Chandler series spanning the period (1847–1997) gives no results: the percentage of bad predictions remains about 25–40% whatever the trial local dimension is. It converges to $D_L = 3$ when skipping the first 10 years of observations of the Y component (Fig. 5). Thirty years of data (1847–1876) have to be skipped for observing a convergence to the 0% level of bad prediction for the X component of the CW. Once

again the corresponding local dimension is $D_L = 3$. A few tens of years of very noisy observations (see the residues in Fig. 1) can spoil the whole determination of D_L because such a data sub-series is whirling several times around the attractor draw in Fig. 4 and contaminates the decomposition of all the local data covariance matrices. Indeed in phase space E^* the set of the nearest neighbours to some recent accurate data vector often includes old and

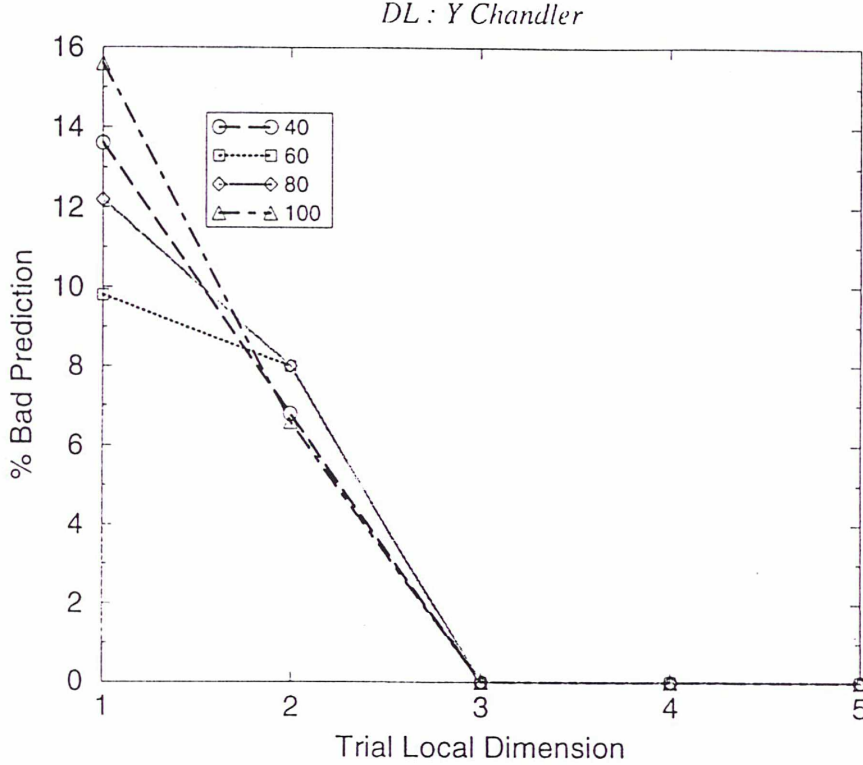


FIGURE 5 Percentage of bad predictions as a function of the trial local dimension D_L^{trial} for the *Y*-Chandler data time series. The 0% prediction error level reached in dimension $D_L = 3$ does not depend on the number of nearest neighbours fixed to build the local covariance matrices (see text) and indicated in the window.

noisy measurements. Anyway, the removal of the too noisy early data ensures the convergence of the local dimension determination to the value $D_L = 3$ for both series.

4 STABILITY ANALYSIS OF THE CHANDLER WOBBLE

Information related to the stability of the observed CW can also be gained from the nonlinear data analysis. The first point is to understand what can be the fate of a small perturbation of the wobble orbit, say δy : will it fade away, remain unchanged or grow with time? These three possibilities, encapsulated in the following formula:

$$\delta y(t) = \delta y(0) \exp[\lambda t], \quad (3)$$

are clearly determined by the sign of the Lyapunov exponent λ (here $\delta y(0)$ is the perturbation of the reconstructed orbit at an arbitrary time considered as “initial” and $\delta y(t)$ the perturbation at time t). Any infinitesimal perturbation taken along the direction locally tangente to the orbit, cannot grow nor fade with time as the perturbed state $y + \delta y$ belongs to the same orbit and so actually corresponds to a near past or near future state of the system. As a consequence the Lyapunov exponent associated to this neutral direction is zero, a value that should be retrieved from the data (up to noise contamination). The CW being modellized by a three degrees of freedom system ($D_L = 3$), two more directions must be considered that can be associated to stable (negative exponent) or unstable (positive exponent) manifolds. The wobble resulting from the interaction of dissipative processes, the sum of the

exponents must be negative, a condition that expresses the overall contraction of volumes in phase space and the confinement of orbits in a bounded domain.

Without entering technical details, we briefly report how the Lyapunov spectrum can be extracted from a data series. Consider the CW as a dynamical system observed at discrete times indexed by integers i :

$$y_{i+1} = F(y_i). \quad (4)$$

After K time steps, the perturbation δ_i applied to y_i is transformed by the composed action of the local jacobian matrices DF of the dynamics along the orbit, say:

$$\begin{aligned} \delta_{i+K} &= DF(y_{i+K-1}) \cdot DF(y_{i+K-2}) \cdots DF(y_i) \cdot \delta_i \\ &\equiv DF^K(y_i) \cdot \delta_i. \end{aligned} \quad (5)$$

It can be shown that the sought Lyapunov exponents are related to the eigenvalues of the Oseledec matrix $S(y_i, K)$ (see e.g. Eckmann and Ruelle, 1985) defined by:

$$S(y_i, K) = [DF^K(y_i)^T \cdot DF^K(y_i)]^{1/(2K)}, \quad (6)$$

where the superscript T is for transpose. Besides those computational difficulties involved in the decomposition of S because of its intrinsic bad conditioning (see Abarbanel, 1996 for algorithmic details), the important point to be noted here is that the DF 's can be estimated from the data time series, without prior knowledge of the dynamics in closed formulae. They are obtained from the partial derivatives of local maps

$$y_i^j \rightarrow y_{i+j+1} \quad (7)$$

developed on basis functions so to fit the time evolution of the embedded data vectors (y_{i+j+1} is the j th neighbour of y_i at time $i+1$). The global exponents are obtained from the Oseledec matrix which spans all the data series (starting from y_1 and

K being the length of the vector series). Theoretically the Lyapunov spectrum is invariant with regard to changes in the initial conditions, as long as the data series is infinite ($K \rightarrow \infty$). The possible effects of series finiteness and noise contaminations on the estimation and reliability of Lyapunov exponents are empirically studied and discussed in a similar context in Frede and Mazzega (1999b). We here just mention that our series seem to be long enough and not too much spoiled by noises so that significative estimates of the three exponents can be extracted. The coverage of the phase space sub-volumes visited by the CW system is dense enough and allows the proper computations to be robust. This statement will be further documented below when considering time-reversed data series. However, the genuine "global" Lyapunov exponents of the CW are definitely beyond the observational grasp. The exponents we actually compute are average values over the measurement time span.

The Lyapunov exponents for the X and Y components of the CW have been computed. For both series the principal exponent λ_1 is positive ($\lambda_1^+(X) = 0.046$ and $\lambda_1^+(Y) = 0.086$ respectively, see Table II). The exponent associated with the neutral manifold is smaller than 0.01 in absolute value for X and Y . These departures from the exact zero value result from the series finiteness, noise contaminations and numerical approximations.

TABLE II Numerical characteristics of the nonlinear dimensional and stability analysis of the X and Y components of the CW

Characteristic	X -Chandler	Y -Chandler
τ (days)	105	115
D_E	4	4
D_U	3	3
D_0	1	1
$\lambda_1 = -$	0.046 0.032	0.086 0.018
$\sum \lambda_i = -$	-0.073 -0.026	-0.103 -0.024
$D_{L, \text{app}}$	2.43	2.42
H_P (days)	386	276

Time-delay τ deduced from the AMI function; embedding D_E and local D_U dimensions; dimension of the unstable manifold D_0 ; principal Lyapunov exponent $\lambda_1 = -$; sum of the Lyapunov exponents $\sum \lambda_i = -$; Lyapunov dimension $D_{L, \text{app}}$ and horizon of the prediction H_P . The " $-$ " and " $|$ " refer to the forward and backward time series respectively.

However it is well below those estimates of the λ_1 exponents which are, from a computational point of view, better approximated. As expected, both third exponents are associated with stable manifolds (-0.115 for X and -0.179 for Y), the wobble process being dissipative and the sum of the exponents being negative (Table II).

Apart from the exact value of λ_1 , the key information is about its sign. The presence of a positive exponent in the CW series would imply that nonlinear instabilities can grow on a $D_u=1D$ manifold so putting an intrinsic limitation to the possibility to predict its time evolution over a finite time interval (the so-called horizon of prediction), whatever might be the nature and skill of the algorithm designed for this task. Our confidence in the positiveness of the λ_1 exponents can be reinforced by considering now the CW series with reversed time (starting from 1997 and ending on 1857). Any direction expanding (contracting) forward in time will contract (expand) backward so that the corresponding exponent will change sign (note that sign corrections are applied in the discussion below and Table II for comparisons). With time reversed, we find again the principal exponents to be positive but smaller than before ($\lambda_1^-(X) = 0.032$ and $\lambda_1^-(Y) = 0.018$, the minus superscript indicating time reversal). The exponents associated with the neutral manifolds are $\lambda_2^-(X) = -0.004$ and $\lambda_2^-(Y) = -0.001$ and the sums of the exponents always negative as it should be. Moreover these characterizations of the X and Y components of the CW processed independently from each other are coherent.

All these results strongly suggest that the CW is an unstable (or equivalently "chaotic") low dimensional deterministic process. From our past experience, we know that the nonlinear analysis of a finite time series dominated by a stochastic component sometimes converges to a finite embedding D_E and (much less convincingly) local D_L dimensions. But until now we found not a single example of such a series providing forward and backward negative exponent sums and sign-invariant principal exponent.

On the basis of the average principal exponents ($\lambda_1 = [\lambda_1^+ + \lambda_1^-]/2$), we estimate the horizon of prediction H_P for both series by:

$$H_P = C \cdot \ln(50)/\lambda_1. \quad (8)$$

This somewhat arbitrary definition corresponds to the time necessary for a 1% RMS error on the system state to grow up to 50% RMS (for the CW a ~ 1 mas error will grow to about 50 mas) along the unstable manifold. The constant C in (8) is required to scale the horizon in days. We obtain 368 days and 276 days for the X and Y wobble components respectively. If these values are to be confirmed, this would mean that reliable predictions of the CW cannot be given beyond about one year. The observed departure between the horizons for X and Y probably reflects uncertainties in the estimates of the principal Lyapunov exponents. It might also result from some noise or physical process being predominantly "polarized" on the Y component of the wobble. Such a possibility is not unrealistic as for example we noticed before that the trend component of PM is preferentially polarized on that component (see Section 2).

Another fundamental invariant of the CW dynamics, the Lyapunov dimension $D_{L,yap}$ is extracted from the data series. It provides a characterization about the way the orbit (as drawn in Fig. 4) fulfills the phase space. It is conjectured that $D_{L,yap}$ equals the attractor dimension D_A . However we found its estimation to be much more robust than the one of D_A based on the correlation integral (Frede and Mazzega, 1999b). The Lyapunov dimension is defined from the exponent spectrum by (Kaplan and Yorke, 1979):

$$D_{L,yap} = K + \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i}{|\lambda_{K+1}|} \quad (9)$$

with $\sum_{i=1}^K \lambda_i > 0$ and $\sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i < 0$. A striking result is that the estimates of $D_{L,yap}$ is very robust when considering the forward and backward time series though the Lyapunov spectra exhibit serious (but not sign affecting) departures as reported above. Indeed we find $D_{L,yap}^+(X) = 2.34$ to be compared to

$D_{\text{Lyap}}^-(X) = 2.52$ and, for the Y series, $D_{\text{Lyap}}^+(Y) = 2.43$ to be compared to $D_{\text{Lyap}}^-(Y) = 2.41$. The average dimensions of the two series are even in better agreement with $D_{\text{Lyap}}(X) = 2.43$ and $D_{\text{Lyap}}(Y) = 2.42$ (these are the values quoted in Table II). It should be noted that these fractal values do not characterize the orbits themselves (which are of course differentiable) but the way the bounded domain of phase space is fulfilled by the system state whirling on the attractor. Such non-integer dimension is often associated with chaotic time series (strange attractor).

5 DISCUSSION

At this point of our study what have we learned? Probably the most promising break-through is about the usefulness of considering the CW as a deterministically driven process of low dimension. The assumption of a stochastic origin has always been at the fundament of the various analyses of wobble observations. Such a partiality is well explained from an historical perspective: first, it is only recently that a set of nonlinear concepts and analysis tools are available for an alternative approach; second, the complex behaviours of the forcing geophysical fluids were themselves traditionally recasted in the paradigm of stochastic processes.

The nonlinear data analysis by phase space reconstruction also provides us with qualitative and quantitative results. As illustrations of the first one, we have shown the CW to evolve in time with a 1D unstable manifold embedded in its dynamics and that any model of the wobble given in form of a system of coupled ordinary differential equations requires three degrees of freedom ($D_L = 3$). A quantitative bound of about 1 year is found beyond which any attempt to reliably predict the CW is doomed to failure.

Have we identified the forcing mechanism of the CW? Not yet but this could be hardly done from the analysis of PM observations only. However the various invariants we have extracted from the

wobble data series are related to those of the sought forcing. Indeed the dynamics of a linear dissipative pendulum (modellized by Liouville equations, see Lambeck, 1980) does not exhibit any chaotic time evolution. Starting from a non-equilibrium state, the orbit is spiraling during the transient response, down to the fixed point equilibrium. The corresponding local and Lyapunov dimensions are $D_L^{\text{trans}} = 2$ and $D_{\text{Lyap}}^{\text{trans}} = 0$ (no unstable manifold) for the transient and $D_L^{\text{fp}} = 0$ and $D_{\text{Lyap}}^{\text{fp}} = 0$ for the fixed point. All departures from these values observed in the CW are inherited from the time evolution of the forcing(s).

A similar comment might apply as well to the quality factor Q . Is the Q factor estimated from Earth Orientation Parameters relevant to the way the solid Earth relaxes external energy inputs or is it a measure of the dissipative processes at work in the forcing dynamics? We have no direct answer to this question. However the rate of volume shrinking in phase space to a lower dimensional structure (the attractor set) as estimated from the sum of the Lyapunov exponents should give some clue. In particular the relationship between the working definition of the quality factor Q and the exponent sum should be investigated.

A further step can be done with the nonlinear data analysis. Usually the identification of a forcing field of Earth rotation is done by comparing the corresponding time series (projected in terms of angular momentum or inertia tensor changes) with the measured variation of the relevant rotation parameter. A complementary approach would consist in comparing the variation in stability of both series. In the previous section we derived the global Lyapunov exponents from the Osedelec matrix $S(y_1, K)$ built with all the jacobians of the time series (see Eq. (6)). In the same way, local exponents can be computed from local Osedelec matrices starting at sample y_i with k jacobians (k integer). The exponents so obtained give a measure of the average stability (or, more precisely, unstability if we consider a positive exponent) over the k following time steps in the data series. Time variations of the stability with state evolution is a well

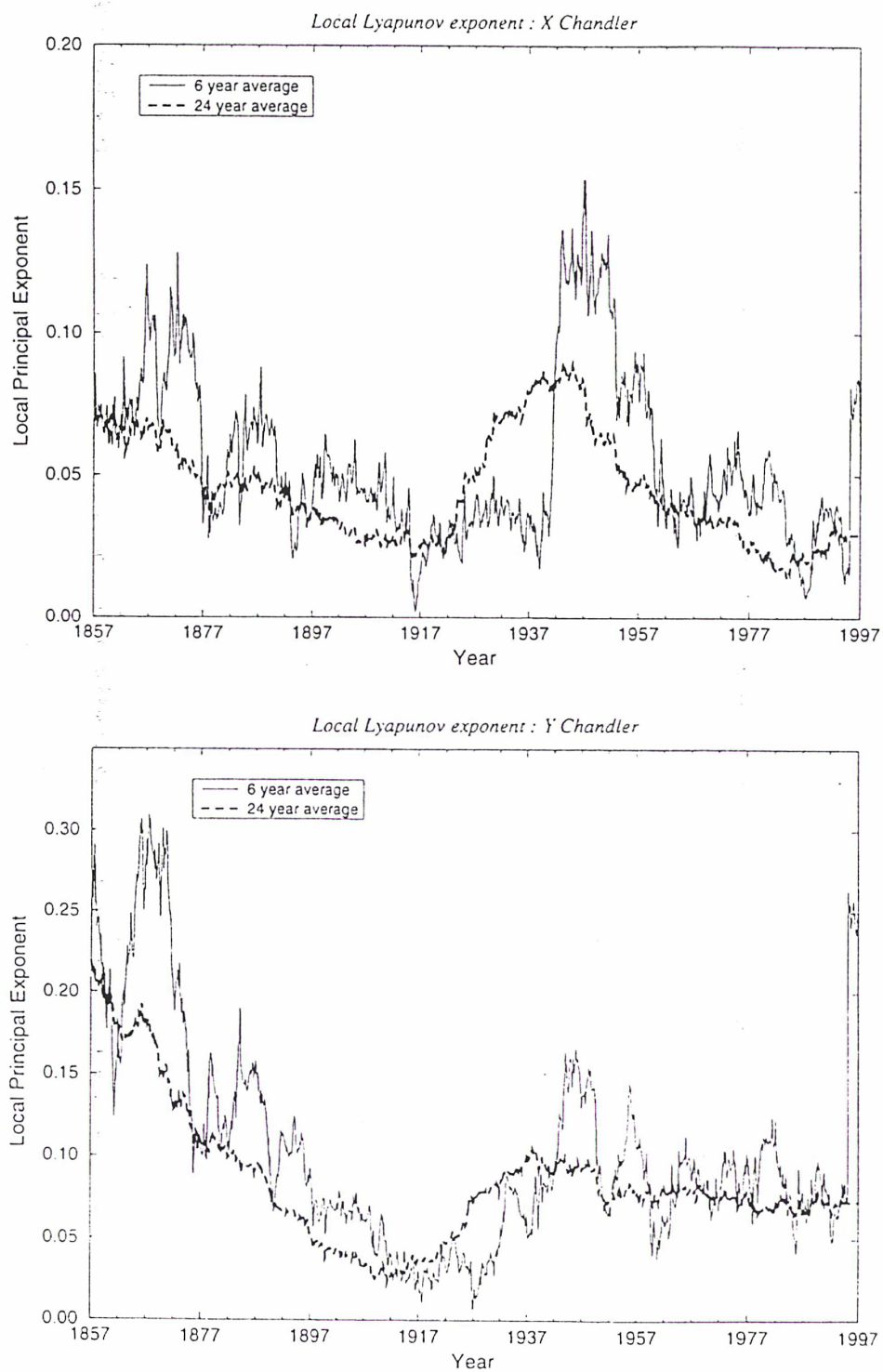


FIGURE 6 Time series of the local principal Lyapunov exponent for the X (upper panel) and Y (lower panel) components of the CW. The plotted exponents are averaged over running windows of 6 and 24 years. High picks in the series correspond to relative losses of stability and reduced horizons of prediction (note that the global exponents are 0.046 and 0.086 for the X and Y series respectively).

known feature of dynamical systems (Abarbanel *et al.*, 1991).

In Fig. 6 are plotted the time series of the local principal exponents for the X and Y components of the CW. In each case, we computed the average exponents over 6 year and 24 year intervals. The choice for a 6 year window is related to the choice of the same moving window used to separate the annual and CW (Section 2). Significant time variations in stability can probably not be retrieved with a higher resolution. The 24 year window is within the accepted range of dissipation rate (deduced from the quality factor; see Section 1) at the CW period. When increasing the window length, the variations in the local exponent are progressively smoothed out. We notice first that the principal Lyapunov exponents are always positive and exhibit large variations, up to a multiplicative factor ~ 3 when compared to the global exponents of Table II. Then the corresponding horizons of prediction are divided by the same factor (see Eq. (8)). For example, in the decades 1860–1870 and 1940–1950, predictions of the future state of the CW attempted from past observations were intrinsically limited to 4 or 6 months rather than 1 year as stated in the previous Section. Stability variations are even more sensible in the Y component of the wobble. The 1920–1930 decade of weak wobble (see Fig. 1 for Y) is also quite stable (small exponents) though still chaotic (positive exponents).

Once again we stress on the fact that the observed stability variations are inherited from the unknown forcing of the CW. The time series of a candidate forcing should not only match as much as possible the observed wobble but it should also present the same time evolution of the local Lyapunov exponent. Such a comparison will bring a strong constraint for the identification of the Chandler forcing(s). Such analyses revealed quite successful in recognizing the ocean-atmosphere system coupled in strong *El Niño* events as a major source of instability in the rapid fluctuations of the Earth rotation (Frede and Mazzega, 1999b).

The various results presented in this study are derived from the data series of the International

Earth Rotation Service (IERS, Paris). Similar computations should be performed with PM series estimated by other institutes and the results compared. These “challenging” series cannot be statistically independent because only a few historical records going back to the middle of the previous century exist. However the data selection, pre-processing and combination can be performed in different ways and lead to more or less diverging results. The global characteristics (time delay, embedding and local dimensions, positivity of the principal Lyapunov exponent) extracted from the IERS data will probably not be affected by such a change in the reference series. But the local characteristics, in particular the local exponents, are likely to change significantly. This kind of result robustness should be checked before proposing detailed interpretations of the time variations of the CW stability.

6 CONCLUSION

We give strong evidences that the CW is driven by a deterministic low dimensional process. The X and Y components of the wobble extracted from PM data series, are embedded in multi-dimensional pseudo-phase spaces with a system of delayed coordinates. The optimal time delay as deduced from the average mutual information function is 105 and 115 days respectively. The embedding dimension is $D_E = 4$. Both series can be locally approximated by a three degree of freedom system (local dimension $D_L = 3$). Then the CW is shown to be a chaotic process with a $D_u = 1$ D unstable manifold. The Lyapunov dimension is probably in the range 2.40–2.50. The nonlinear analysis of both components of the wobble converges to the same kind of conclusions, even when considering the data series with reversed time. The average horizon of prediction is about 1 year. Nevertheless strong fluctuations in the wobble stability can be seen from the time series of the local Lyapunov exponents. These stability crises are inherited from the unknown wobble excitation source and might contribute to its identification.

Acknowledgements

This study was supported by the Centre National de la Recherche Scientifique under contract 2E0025 (programme Modélisation et Simulation Numérique).

References

- Abarbanel, H.D.I., 1996, *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer Verlag, Berlin, 272 pp.
- Abarbanel, H.D.I., Brown, R. and Kennel, M.B., 1991, Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor, *J. Nonlinear Sci.*, **1**, 175–199.
- Abarbanel, H.D.I. and Kennel, M.B., 1993, Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data, *Phys. Rev. E*, **47**, 3057–3065.
- Carter, W.E., 1981, Frequency modulation of the Chandlerian component of polar motion, *J. Geophys. Res.*, **86**(B3), 1653–1658.
- Chao, B.F., 1984, The excitation of the Chandler wobble by the Southern Oscillation, based on ILS data, *EOS Trans. Am. Geophys. Un.*, **65**, 859.
- Chao, B.F., 1993, Excitation of Earth's polar motion by atmospheric angular momentum variations, 1980–1990, *Geophys. Res. Lett.*, **20**(2), 253–256.
- Chao, B.F. and Gross, S.R., 1987, Changes in the Earth's rotation and low-degree gravitational field induced by earthquakes, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **91**, 569–596.
- Colombo, G. and Shapiro, I.I., 1968, Theoretical model for the Chandler wobble, *Nature*, **217** 156–157.
- Dehant, V., Wilson, C.R., Salstein, D.A., Chao, B.F., Gross, R.S., Le Provost, C. and Ponte, R.M., 1997, Study of Earth's rotation and geophysical fluids progresses, *Eos Trans. AGU*, **78**(34), 357–360.
- Eckmann, J.P. and Ruelle, D., 1985, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. Mod. Physics*, **57**, 617–656.
- Eubanks, T.M., 1993, Variations in the Orientation of the Earth, in *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Earth Dynamics*, Smith D.E. and D.L. Turcotte, Eds., Geodynamics Series, Vol. 24, AGU Washington, pp. 1–54.
- Fraser, A.M. and Swinney, H.L., 1986, Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev. A*, **33**(2), 1134–1140.
- Frede, V. and Mazzega, P., 1999a, Detectability of deterministic nonlinear processes in Earth rotation time series: I Embedding, *Geophys. J. Int.*, (in press).
- Frede, V. and Mazzega, P., 1999b, Detectability of deterministic nonlinear processes in Earth rotation time series: II Dynamics, *Geophys. J. Int.*, (in press).
- Furuya, M. and Chao, B.F., 1996, Estimation of period and Q of the Chandler wobble, *Geophys. J. Int.*, **127**, 693–702.
- Furuya, M., Hamano, Y. and Naito, I., 1996, Quasi-periodic wind signal as a possible excitation of Chandler wobble, *J. Geophys. Res.*, **101**(B11), 25,537–25,546.
- Gray, A. and Thomson, P., 1997, Design of moving-average trend filters using fidelity, smoothness and minimum revisions criteria, Bureau of the Census, Stat. Res. Div. Report Series No. RR96 01, 99 pp.
- Harrison, D.E. and Larkin, N.K., 1998, *El Niño*-Southern Oscillation sea surface temperature and wind anomalies, 1946–1993, *Rev. of Geophysics*, **36**(3), 353–399.
- Hide, R. and Dickey, J.O., 1991, Earth's variable rotation, *Science*, **253**, 629–637.
- International Earth Rotation Service, 1991, IERS 1990 Annual Report, Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, Paris.
- International Earth Rotation Service, 1997, IERS 1996 Annual Report, Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, Paris.
- Jeffreys, H., 1940, The variation of latitude, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc. London*, **100**(3), 139–155.
- Kaplan, J.L. and Yorke, J.A., 1979, Chaotic behaviour in multi-dimensional difference equations, in Peitgen, H.O. and H.O. Walthers, Eds., *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin, pp. 204–227.
- Lambeck, K., 1980, *The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 449 pp.
- Le Mouél, J.L., Gire, C. and Hinderer, J., 1985, The flow of the core fluid at the core mantle boundary as a possible mechanism to excite Chandler Wobble, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **301**(II), 27–32.
- McCarthy, D.D. and Luzum, B.J., 1996, Path of the mean rotational pole from 1899 to 1994 *Geophys. J. Int.*, **125**, 623–629.
- Okubo, S., 1982, Is the Chandler period variable? *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **71**, 629–646.
- Ooe, M., 1978, An optimal complex ARMA model of the Chandler wobble, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **53**, 445–457.
- Sabadini, R., Yuen, D.A. and Boschi, E., 1984, The effects of postseismic motions on the moment of inertia of a stratified viscoelastic Earth with an asthenosphere, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **79**, 727–745.
- Shiskin, J., Young, A.H. and Musgrave, J.C., 1967, The X-11 variant of the Census method II seasonal adjustment program, Tech. Paper 15, Bureau of the Census, US Dept. of Commerce, Washington D.C.
- Souriau, A., 1986, The influence of earthquakes on the Polar Motion, in *Earth Rotation: Solved and Unsolved Problems*, Cazenave, A. Ed., Reidel Publ. Comp., pp. 229–240.
- Stacey, F.D., 1992, *Physics of the Earth*, Brookfield Press, 3rd edition, Brisbane, 513 pp.
- Takens, F., 1981, Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence*, Rand, D. and L.S. Young Eds., Lecture Notes in Mathematics, 898, Springer Verlag, Berlin, pp. 366–381.
- Vicente, O. and Wilson, C.R., 1997, On the variability of the Chandler frequency, *J. Geophys. Res.*, **102**(B9), 20,439–20,455.
- Voudrák, J., 1990, Atmospheric and groundwater excitation of polar motion in case of variable Chandler frequency, *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **41**, 211–220.
- Warh, J.M., 1983, The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations in the length of day-II Results, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **74**, 451–487.

Ac. &: please update

Glossaire

- **Aléatoire.** Mouvement non déterministe désordonné. Il ne possède aucune structure, ni spatiale ni temporelle. Un processus aléatoire ne peut pas être décrit par un ensemble fini d'équations différentielles.
- **Analyse linéaire.** L'analyse linéaire de séries temporelles revient à considérer que le processus observé est linéaire et résulte de la superposition de plusieurs modes et de résidus stochastiques. La méthode la plus répandue dans cette optique est l'analyse de Fourier. Par cette démarche, il n'est pas possible d'identifier de composantes non linéaires. Le chaos n'a pas non plus de signification ici.
- **Analyse non linéaire.** L'analyse non linéaire est une méthode d'analyse du signal qui s'adapte aussi bien aux systèmes linéaires que non linéaires. Elle consiste à décrire le déterminisme d'une série à partir de considérations géométriques et topologiques de la série décalée reconstruite dans un espace multidimensionnel. Par cette méthode, il est possible de rechercher du déterminisme non linéaire (pouvant être de plus chaotique) dans les "résidus" de Fourier. Lorsqu'un système observé est très complexe et peu connu, cette démarche permet de caractériser la véritable source des données (déterministe ou stochasticité) et n'exclut aucune nature de processus.
- **Attracteur.** Un attracteur est un objet borné et "attirant" de l'espace des phases vers lequel toutes les orbites de conditions initiales, prises dans son bassin d'attraction, vont converger asymptotiquement. Un point, un cycle limite, et des objet géométriquement plus complexes peuvent être attracteurs.
- **Attracteur étrange.** Un attracteur étrange est une classe particulière d'attracteurs tels que leur dimension de Hausdorff est non entière (attracteur fractal) et tels que chaque orbite possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales (attracteur chaotique).
- **Bassin d'attraction.** Un bassin d'attraction est un ensemble de points ou une région bornée de l'espace des phases telle que toutes les orbites y entrant soient attirées vers le même attracteur. Il n'y a aucune intersection entre les bassins d'attractions d'un même espace des phases.
- **Bifurcations.** Désigne un changement d'état ou de topologie de la solution du système lorsqu'un paramètre varie.
- **Chaos.** Evolution déterministe d'un système non linéaire se classant entre mouvement régulier et mouvement stochastique (le chaos est un désordre déterministe). La définition que nous adoptons est la suivante: un système est chaotique si son évolution présente une forte sensibilité aux conditions initiales. On mesure le taux de divergence des trajectoires

grâce aux exposants de Lyapunov. Un système chaotique est prévisible avec une précision limitée dans le temps. Le chaos possède une structure dans l'espace.

- **Degrés de liberté.** Le nombre de degrés de liberté actifs d'un système observé est le nombre de variables principales "visibles" à partir des données. Il est déterminé par la dimension locale de l'attracteur et permet de connaître localement sur l'attracteur, combien d'équations différentielles autonomes d'ordre un, sont nécessaires pour rendre compte de l'évolution des orbites.
- **Dimensions.** Un système stochastique possède une infinité de degrés de liberté actifs et est de dimension infinie. A l'opposé, un système déterministe est principalement de dimension finie et possède un nombre fini de degrés de libertés actifs. Il existe des systèmes déterministes possédant mathématiquement, un nombre infini de degrés de liberté. Cependant, seul un nombre fini d'entre eux sont actifs et dynamiquement significatifs.
- **Dimension de plongement.** C'est la dimension nécessaire pour déplier l'attracteur d'un système déterministe observé à partir d'une série temporelle de dimension un. La dimension de plongement est entière.
- **Dimension locale ou dynamique.** C'est le nombre de dimensions (ou de variables) réellement actives et dynamiquement significatives pour le système.
- **Dynamique non linéaire.** Un système déterministe possède une dynamique non linéaire si les équations qui régissent son évolution sont non linéaires c'est-à-dire si les variables sont couplées entre elles.
- **EOP: Paramètres d'Orientation de la Terre.** Les paramètres d'orientation de la Terre sont les composantes de la matrice de rotation Q qui permet de passer du repère céleste au repère terrestre. Ils sont au nombre de cinq et sont fournis sous forme de séries temporelles unidimensionnelles:
 $\delta\phi$ et $\delta\epsilon$ sont les écarts au CEP J2000.0 calculé par les modèles de précession-nutation. L'angle de rotation autour du CEP fournit le troisième paramètre lié conventionnellement au temps universel.
 PMX et PMY sont le mouvement du pôle et correspondent à l'écart entre le CEP et G_z . Le mouvement du pôle rassemble les composantes non prévisibles du mouvement de G_z .
Toute la modélisation astrométrique est fondée sur cette décomposition.
- **ENSO.** Oscillation aperiodique des paramètres océaniques et atmosphériques apparaissant tous les 3, 4 ans environ et perturbant fortement la rotation de la Terre. Cette aperiodicité pourrait résulter soit d'une excitation aléatoire d'origine inconnue soit directement d'un processus purement déterministe du système tropical atmosphéro-océanique dans le Pacifique.
- **Espace des phases.** Un système dynamique est décrit par des équations différentielles continues ou des applications itérées. Dans les deux cas, les vecteurs multidimensionnels qui composent l'évolution des orbites, reposent dans un espace de dimension entière appelé espace des phases. L'espace des phases est différent de l'espace de reconstruction (ou plongement). Dans un cas c'est l'espace lié aux variables dynamiques du système décrit par un système d'équations différentielles, dans le second cas, c'est l'espace des vecteurs reconstruits à partir du théorème de plongement de Takens et d'une simple série de mesure.

- **Excitations.** Une excitation est une force appliquée à la Terre pouvant perturber sa rotation.
- **Exposant de Lyapunov.** Les exposants de Lyapunov mesurent le taux avec lequel deux orbites voisines vont s'approcher, s'éloigner ou rester à distance égale. La divergence (liée à un exposant positif) est typique des systèmes présentant une évolution chaotique.
- **Flot, Application itérée.** On dira qu'un système dynamique est décrit par un flot si son évolution temporelle est continue. Un système dynamique est décrit par une application itérée après discrétisation d'un flot (obtenue à partir d'observations discrètes ou de sections de Poincaré).
- **Fluides géophysiques.** Les fluides géophysiques sont les éléments liquides ou gazeux de la Terre. En particulier ce sont les océans et l'atmosphère terrestre. Ces fluides possèdent des propriétés thermodynamiques complexes et la modélisation de leur mouvement relève de la mécanique des fluides.
- **Géodésie.** Etude de la mesure et de la forme de la Terre. La géodésie remonte du temps d'Erastosthène (250 av JC) qui avait donné une évaluation du rayon terrestre. Les meilleures techniques actuelles sont dites de géodésie spatiale et permettent entre autres, de mesurer l'orientation spatiale de la Terre et d'en déduire les 5 EOP.
- **Modèles atmosphériques et océaniques.** Les modèles atmosphériques et océaniques résultent des équations hydrodynamiques et de la prise en compte d'un nombre de variables et de conditions aux limites incroyables. Leur complexité autorise beaucoup de non linéarités et de processus apériodiques ou transitoires.
- **Mouvement forcé.** Un mouvement forcé d'un système est un mouvement qui apparaît après l'intervention d'une action extérieure sur le système et qui disparaît dès que l'action est arrêtée.
- **Mouvement libre.** Un mouvement libre est une oscillation propre au système. Il nécessite une intervention extérieure pour l'exciter (pensons à la corde de guitare pincée) mais en l'absence de frottement, perdure indéfiniment.
- **Processus.** Nous utilisons souvent le terme processus. Dans notre travail, il désigne ou un système, ou le mécanisme dont les observations constituent la série temporelle.
- **Reconstruction.** La reconstruction de la dynamique, ou le plongement, est une opération mathématiquement rigoureuse, qui permet à partir d'une simple série temporelle de mesure, de retrouver des orbites difféomorphes aux orbites du système dynamique inconnu observé. La série temporelle observée peut être considérée comme la projection sur un axe de toute la dynamique complexe du système. Ainsi pour exploiter cette projection, il faut la déplier en faisant apparaître une structure géométrique dont les propriétés topologiques et dynamiques fourniront des renseignements directs sur la nature du système dynamique sous jacent.
- **Rotation de la Terre.** La Terre tourne sur elle même en 24 heures environ et est soumise à diverses actions extérieures qui rendent son mouvement non uniforme. L'étude de la rotation de la Terre consiste en la description et la modélisation des différentes composantes de son mouvement.

- **Série temporelle.** Une série temporelle est une séquence de mesures d'une quantité observable dans le temps. Les informations contenues dans un tel objet sont primordiales pour la description du système observé.
- **Système déterministe.** Un système déterministe est un système tel que son évolution soit définie parfaitement par la spécification de ses conditions initiales. Un système déterministe ne possède aucune composante aléatoire.
- **Système dissipatif.** Un système dynamique est dissipatif si au cours de son évolution, il perd de l'énergie (par exemple par frottement).
- **Système dynamique.** C'est un système qui possède une évolution dans le temps et un état initial.
- **Système stochastique.** Un système stochastique, par opposition à purement déterministe, est un système dont l'évolution est à la fois imprévisible et aléatoire (elle résulte d'une suite de "chocs aléatoires").
- **Terme de Chandler.** Oscillation libre de la Terre de période environ 433 jours dont l'amplitude et la phase varient de manière inexpliquée.

Bibliographie

- [Abarbanel H.D.I.] , 1996, *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer Verlag, Berlin, 272 pp.
- [Abarbanel H.D.I., Carrol T.A., Pecola L.M., Sidorowich J.J. et Tsimring L.S.] , 1994, Predicting physical variables in time-delay embedding, *Phys. Rev. E*, 49,3, 1840-1853.
- [Abarbanel H.D.I. et M.B. Kennel] , 1993, Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data, *Phys. Rev. E*, 47, 3057-3068.
- [Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J. et L.S. Tsimring] , 1993, The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Rev. Mod. Physics*, 65(4), 1331-1392.
- [Aoki S. et H. Kinoshita] 1983, Note on the relation between the equinox and Guinot's Non rotating Origin, *Celestial Mechanics*, 29, 335-360.
- [Barnes R.T.H., R. Hide, A.A. White et C.A. Wilson] , 1983, Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion, *Proc. R. Soc. Lond. A* 387, 31-73.
- [Barnett, T.P., Latif M., Kirk E. et E. Roeckner] , 1991, on *ENSO*, *Physics, J. Climate*, 4, 487-513.
- [Bell R.S., Hide R. et Sakellarides G.] , 1991, Atmospheric angular momentum forecasts as novel tests of global numerical weather prediction models, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 334, 55-92.
- [Bergé P., Y. Pomeau, Ch. Vidal] , 1984, *L'ordre dans le chaos*, Hermann Editeurs des sciences et des arts.
- [Bizouard C.] , 1995, *Modélisation astrométrique et géophysique de la rotation de la Terre*, thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- [Bloomfield P.] 1976, *Fourier Analysis of Time Series: An introduction*, John Wiley, new York.
- [Bonnet D.] , 1997, *Apport du connexionnisme aux methodes statistiques de la prévision*, thèse de doctorat, ENST Paris.
- [Bosq D. et Lecoutre J.P.] , 1992, *Analyse et Prévision des séries chronologiques*, Masson ed., 207 pp.
- [Broomhead D.S et G.P. King] , 1986, *Physica D*, 20, 217.
- [Brown R., Bryant P. et H.D.I. Abarbanel] , 1991, Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series, *Phys. Rev. A*, 43(6), 2787-2806.

- [Bryant P., Brown R. et H.D.I. Abarbanel] , 1990, Lyapunov exponents from observed time series, 1990, Phys. Rev. Lett., 65(13), 1523-1526.
- [Brzeziński A.] , 1987, Statistical investigations on atmospheric angular momentum functions and on their effects on polar motion, Manusc. Geodetica 12, 268-281.
- [Brzeziński A. et N. Capitaine] , 1993, The use of precise Observations of the Celestial Ephemeris Pole in the analysis of geophysical excitation of Earth Rotation, J. Geophys. Res., 98, B4, 6667-6675.
- [Chao B.F.] , 1989, Length-of-day Variations Caused by El Niño-Southern Oscillation and Quasi-Biennial Oscillation, Science 243, 923-925.
- [Chao B.F.] , 1985, On the excitation of the Earth's polar motion, Geophys. Res. Lett., 12, 526-529.
- [Chao B.F.] , 1993, Excitation of Earth's polar motion by atmospheric angular momentum variations, 1980-1990, Geophys. Res. Lett., 20, 2, 253-256.
- [Colombo G. et I.I. Shapiro] , 1968, Theoretical model for the Chandler wobble, Nature, 217, 156-157.
- [Crawford J.D.] Introduction to bifurcation theory, 1991, Rev. of Modern Physics, Vol 63, No 4, 991-1037.
- [Crutchfield J. et McNamara B.] , 1987, equations of Motion from a data Series, Complex systems, 1, 417.
- [Dickey J.O., Marcus S.L., Steppe J.A. et R. Hide] , 1992, The Earth's Angular Momentum Budget on Subseasonal Time Scales. Science, 255, 321-324.
- [Ding M., Grebogi C. et E. Ott] , 1989, Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic., Phys. Rev. A., 39, 2593-2598.
- [Djurovic D., P. Pâquet, Billiau A.] , 1994, New indications for the solar origin of the 50-day cycle in the atmospheric circulation and earth's rotation, Astron. Astrophys. 288, 335-341.
- [Eckmann J.P. et D. Ruelle] , 1992, Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems, Physica D 56, 185-187.
- [Eckmann J.P. et D. Ruelle] , 1985, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Reviews of Modern Physics, vol 57, No 3, Part I, 617-656.
- [Eckmann J.P., Kamphorst S.O., D. Ruelle D. et S. Ciliberto] , 1986, Liapunov exponents from time series, Phys. Rev. A, 34(6), 4971-4979.
- [Engdahl E.R., van der Hilst R. et R.P. Buland] , 1998, Global teleseismic earthquake relocation with improved travel times and procedures for depth determinations, submitted to Bull. Seismol. Soc. Am.
- [Essex C., Lookman T. et M.A.H. Nerenberg] , 1987, The climate attractor over short timescales, Nature, 326, 64-66.

- [Eubanks T.M., J.A. Steppe, J.O. Dickey, R.D. Rosen et D.A. Salstein] , 1988, Causes of rapid motions of the Earth's pôle, *Nature* 334, 115-119.
- [Eubanks T.M.] , 1993, Variations in the Orientation of the Earth, *Earth Dynamics Geodynamics* 24, 1-54.
- [Eubanks T.M., J.A. Steppe, J.O. Dickey et P.S. Callahan] , 1985, A spectral Analysis of the Earth's angular Momentum Budget, *Journal Geophys. Res.*, vol 90, No B7, 5385-5404.
- [Eubanks T.M., Steppe J.A. et J.O. Dickey] , 1988, The atmospheric excitation of rapid polar motions, in *The earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics*, 365-371, Bancok and Wilkins eds., Kluwer, Dordecht.
- [Frede V. et V. Dehant] , 1999, Analytical versus Semi-analytical Determinations of the Opolzer Terms for a Non-Rigid Earth, *Journal of Geodesy* 73: 94-104.
- [Frede V. et P. Mazzega] , 1999a, Detectability of Deterministic NonLinear Processes in Earth Rotation Time Series: I-Embedding, *Geophysical Journal International* 137, 2:551-564.
- [Frede V. et P. Mazzega] , 1999b, Detectability of Deterministic NonLinear Processes in Earth Rotation Time Series: II-Dynamics, *Geophysical Journal International* 137, 2:565-580.
- [Frede V. et P. Mazzega] , 1999c, A preliminary Nonlinear Analysis of the Earth's Chandler Wobble, accepté (sous presse) dans: *Discrete Chaotic Dynamics in Nature and Society*.
- [Frede V.] 1999, Dynamical analysis of the atmospheric angular momentum short term fluctuations. Comparison with the Earth, soumis au *Journal of Geodesy* en avril 1999 (accepté sous presse).
- [Freedman A.P. et Dickey J.O.] , 1991, Intercomparison of AAM analysis and Forecast data in UT1 Estimates and Predictions, in *Proceedings of the Chapman conference on Geodetic VLBI: Monitoring Global Change*, NOAA Technical Report NOS 137 NGS 49, 279.
- [Freedman A.P., Steppe J.A., Dickey J.O., Eubanks T.M. et Sung L.Y.] , 1994, The short term prediction of universal time and lenght of day using atmospheric angular momentum, *Journal of Geophys. Res.*, 99, B4, 6981-6996.
- [Feissel M. et D. Gambis] , 1980, La mise en évidence de variations rapides de la durée du jour, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t.291, 271-273.
- [Feissel M., Nitschelm C.] , 1985, Time-dependent aspects of the atmospheric driven fluctuations in the duration of the day. *Annales Geophysicae* 3, 2: 181-186
- [Fraedrich K.] , 1987, Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. Atm. Sci.*, 44(4), 722-728.
- [Fraser A.M. et H.L. Swinney] , 1986, Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev. A*, 33(2), 1134-1140.
- [Furuya M. et B.F. Chao] , 1996, Estimation of period and Q of the Chandler wobble, *Geophys. J. Int.*, 127, 693-702.
- [Ghil M., Kimoto M. et Neelin J.D.] , 1991, Nonlinear Dynamics and Predictability in the Atmospheric Sciences. *Reviews of Geophysics*, 29 supplement, 46-55.

- [Glendinning P.] , 1994, *Stability, instability and Chaos*, Cambridge Texts in Applied Mathematics.
- [Golub G.H. et C.F. van Loan] , 1989, *Matrix Computations*, John Hopkins Univ. Press, 2d edition, London, 642 pp.
- [Gouesbet G.] , 1991, Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series, *Phys. Rev. A*, 43, 5321
- [Grassberger P. et I. Procaccia] , 1983, Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, 50, 346-349.
- [Gray J.E. et Allan D.W.] , 1974, *Proc. 28th Ann. Symp. on Frequency Control*, 243.
- [Gross R.S.] , 1992, Correspondance between theory and observations of polar motion, *Geophys. Journal. Int.* 109, 162-170.
- [Gross R.S.] , 1990, The secular Drift of the rotation Pole, in *Earth Rotation and Coordinates Reference Frames*, IAG Symp. 105, Boucher and Wilkins eds, 146-153.
- [Gross R.S.] , 1986, The influence of earthquakes on the Chandler Wobble during 1977-1983, *G. J. R. astr. Soc*, 85, 161-177.
- [Hamdan K. et Sung L.Y.] , 1996, Stochastic modelling of length of day and universal time, *J. of Geodesy*, 70, 307-320.
- [Hendersen H.W. et Wells R.] , 1988, Obtaining attractor dimensions from meteorological time series. *Advances in Geophysics*, 30, 205-237.
- [Hide R. et J.O. Dickey] , 1991, Earth's Variable Rotation, *Science* 253, 629-637.
- [Höpfner J.] , 1998, Seasonal variations in lenght of days and atmospheric angular momentum. *Geophys. J. Int.*, 135, 407-437.
- [International Earth Rotation Service (IERS)] , 1997, IERS 1996 Annual Report, Central Bureau of IERS, Paris.
- [Jaynes E.T.] , 1968, Prior probabilities, *IEEE Trans. Syst. Sci. and Cybern.*, vol. ssc-4, 3, 227-241.
- [Jeffreys H.] , 1940, The variation of latitude, *Monthly Not. Roy. astr. Soc. London*, 100(3), 139-155.
- [Jeffreys H.] , 1968, The variation of latitude, *Monthly Not. Roy. astr. Soc. London*, 141, 255-268.
- [Jin F.F., Neelin J.D. et M. Ghil] , 1994, El Niño on the Devil's staircase: annual subharmonic steps to chaos, *Science*, 264, 70-72.
- [Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R., Collins W., Deaven D., Gandin L., Iredell M., Saha S., White G., Woollen J., Zhu Y., Chelliah M., Ebisuzaki W., Higgins W., Janowiak J., Mo K.C., Ropelwski C., Wang J., Leetmaa A., Reynolds R., Roy Jenne, Dennis Joseph], 1996, The NCEP/NCAR 40-Year Reanalysis Project. *Bulletin of the American Meteorological Society* 77, 3: 437-471.

- [Kantz H.] , 1994, A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponents of a time series. *Physics Letters A*, 185, 77-87.
- [Kennel M.B., Brown R. et H.D.I. Abarbanel] , 1992, Determining embedding dimension for phase space reconstruction using a geometrical construction, *Phys. Rev. A*, vol 45, no 6, 3403-3411.
- [Kosek W.] , 1993, The common short periodic oscillations in the Earth's rate of rotation, atmospheric angular momentum and solar activity, *Bull. Geod* 67, 1-9.
- [Kosek W., MacCarthy D.D. et Luzum B.J.] , 1998, Possible improvement of Earth orientation forecast using autocovariance prediction procedures, *Journal of Geodesy* 72, 189-199.
- [Kudlay O.] , 1995, Some items of non-linear theory of the Earth rotation, *Journées -95, Space Research centre Polish Academy of Sciences, Observatoire de Paris, Warsaw*.
- [Kudlay O] , 1998, Hamiltonian approach to the problem of Earth normal modes excitation, *Journées -98, Observatoire de Paris (sous presse)*.
- [Kuehne J.K. et C.R. Wilson] , 1991, Terrestrial Water Storage and Polar Motion, *Journal Geophys. Res.*, vol 96, No B3, 4337-4345.
- [Kuehne J., Johnson S. et C.R. Wilson] , 1993, Atmospheric excitation of nonseasonal polar motion, *J. Geophys.Res.*, 98, 19, 973-19, 978.
- [Kuehne J., Johnson S. et C.R. Wilson] , 1993, Atmospheric excitation of nonseasonal polar motion, *J. Geophys. Res.*, 98, 19, 973- 19, 978.
- [Lambeck K.] , 1980, The Earth's Variable Rotation, *Nature* p.104.
- [Lambeck K.] , 1980, *The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences* , Cambridge Univ. Press, Cambridge, 449 pp.
- [Landau L.D.] , 1944, On the problem of turbulence, *Akad. Nauk. Doklady* 44, 339.
- [Lefranc M., Bielawski S., Derozier D. et Glorieux P.] , 1997, Caractérisation topologique et contrôle du chaos, *CNRS: Images de la Physique*, 53-60.
- [Legras B., Ghil M.] , 1985, Persistent Anomalies, Blocking and Variations in Atmospheric Predictability, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 42, 433-471.
- [Le Mouel J.L., C. Gire et J. Hinderer] , 1985, Sur l'excitation possible de l'oscillation Chandlerienne par les mouvements à la surface du noyau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.301, II, 27-32.
- [Lorenz E.N.] , 1963, Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 20, No. 2, 130-141.
- [MacCarthy D.D. et Luzum B.J.] , 1991, Prediction of Earth Rotation, *Bull. Geodesique*, 65, 18-21.
- [Madden R.A. et P.R. Julian] , 1971, Detection of a 40-50 day oscillation in the zonal wind in the tropical Pacific, *J. Atmos. Sci.*, 28, 702-708.

- [Madden R.A.] , 1979, Observations of large scales Travelling Rossby Waves, Rev. Geophys. Space. Phys., 17, 1935-1949.
- [Malinetskii G.G., A.B. Potatov, S.M. Gizzatulina, A.A. Ruzmaikin et V.D. Rukavishnikov] , 1990, Dimension of geomagnetic attractor from data on length of day variations, Phys. Earth. Planet. Inter., 59, 170-181.
- [Manneville P.] , 1990, *Dissipative Structures and Weak Turbulence*, Perspectives in Physics, Academic Press, inc, Harcourt Brace Jovanovich Publishers.
- [Marcus S.L., Chao Y., Dickey J.O. et Gegout P.] , 1998, Detection and Modelling of nontidal oceanic effects on Earth's rotation rate. Science 281: 1656-1659
- [Ming Z. et D. Danan] , 1988, A new Research for the secular Polar Motion in this Century, in The earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics, 385-392, Bancok and Wilkins eds., Kluwer, Dordecht.
- [Munk W.H. et MacDonald G.J.F.] , 1960, *The rotation of the Earth*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [Naito I. et N. Kikuchi] , 1990, A seasonal budget of the Earth's axial angular momentum, Geophys. Research Lett. 17, 631-634.
- [Nicolis C. et G. Nicolis] , 1984, Is there a climatic attractor ?, Nature 311, 529-532.
- [Nicolis C. et G. Nicolis] , 1987, Evidence for climatic attractor. Nature, 326: 523.
- [Okubo S.] , 1982, Is the Chandler period variable ?, Geophys. J. R. astr. Soc., 71, 629-646.
- [Ooe M.] , 1978, An optimal complex AR.MA model of the Chandler wobble, Geophys. J. R. astr. Soc. ,53, 445-457.
- [Osborne A.R., Kirwan A.D., Provenzale A. et Bergamasco L.] , 1986, A search fot chaotic behavior in large and mesoscale motions in the Pacific Ocean, Physica 23D, 75-83.
- [Osborne A.R. et P. Provenzale] , 1989, Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law sepectra, Physica D 35, 357-381.
- [Oseledec V.I.] , 1968, A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trudy Mosk. Mat. Obsc., 19: 197.
- [Palmer T.N.] , 1993, Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model, Bull. Am. Meteo. Soc., 74(1), 49-65.
- [Parliz U.] , 1992, Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series, Int. J. Bif. Chaos, 2, 155-165.
- [Pawelzik K. et H.G. Schuster] , 1987, Generalized dimensions and entropies from a measured time series, Phys. Rev. A., 34, 1, 481-484.
- [Pires C., R. Vautard, et O. Talagrand] , 1996, On extending the limits of variational assimilation in nonlinear chaotic systems, Tellus, 48A, 96-121
- [Ponte R.M.] , 1990, Barotropic Motions and the Exchange of Angular Momentum Between the Oceans and Solid Earth, Journal Geophys. Res., vol 95, No C7, 11, 369-11,374.

- [Ponte R.M.] , 1997, Oceanic excitation of daily to seasonal signals in Earth rotation: results from a constant-density numerical model, *Geophys. Journal Int.* 130, 469-474.
- [Rayleigh Lord] , 1916, On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.*, 32, 529-546.
- [Roberts D.A.] , 1991, Is There a Strange Attractor in the Magnetosphere?, *J. Geophys. Res.*, 96(A9), 16031-16046.
- [Rosentsein M.T., Collins J.J. et De Luca C.J.] , 1993, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D* 65, 117-134.
- [Rosen R.D. et D.A. Salstein] , 1983, Variations in Atmospheric Angular Momentum on Global and Regional Scales and the Length of Day, *Journal Geophys. Res.* vol 88, No C9, 5451-5470.
- [Rosen R.D. et D.A. Salstein] , 1991, Comment on "A seasonal budget of the Earth's axial angular momentum by Naito I. and N. Kikuchi, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1925-1926.
- [Rosen R.D., Salstein D.A. et Wood T.M.] , 1990, Discrepancies in the Earth-Atmosphere Angular momentum Budget. *Journal of Geophysical Research* 95: 265-279.
- [Rosen R.D., Salstein D.A., Nehrkorn T., Mccalla M., Miller A.J., Dickey J.O., Eubanks T.M., et J.A. Steppe] , 1987, Medium-Range Numerical Forecasts of Atmospheric Angular Momentum. *Mon. Weather Rev.*, 115, 2170-2175.
- [D. Ruelle, F. Takens] , 1971, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, 20, p.167.
- [Ruelle D.] , 1990, Deterministic chaos: the science and the fiction, *Proc. R. Soc. Lond. A* 427, 241-248.
- [Runcorn S.K., Wilkins G.A., Groten E., Lenhardt H., Campbell J., Hide R., Chao B.F., Souriau A., Hinderer J., Legros H., Le Mouel J.L. and M. Feissel], 1990, The excitation of the Chandler Wobble, *Surv. Geophys.* , 9, 419-449.
- [Salstein D.A. et Rosen R.D.] , 1997, Global Momentum and energy signals from reanalysis systems. *American meteorological society*, 7th Climate variations: 344-348
- [Saltzman B.] , 1962, Finite amplitude free convection as an initial value problem-I. *J. Atmos. Sci.*, 19, 329-341.
- [Sante Fe] , 1992, Time Series prediction: Forecasting the future and understanding the past. *Proceedings of the NATO. Advanced Research workshop on Comparative Time Series Analysis held in Santa Fe, New Mexico, May 14-17.* Andreas S. Weigend, Gershenfeld N.A, Proceeding volume XV, Sante Fe Institute, *Studies in the Sciences of Complexity*.
- [Sauer T.D., Tempkin J.A. et J.A. Yorke] , 1998, Spurious Lyapunov exponents in attractor reconstruction, *Phys. Rev. Lett*, 81, 20, 4341-4344.
- [Sauer T., Yorke J.A. et M. Casdagli] , 1991, Embedology, *J. Stat. Physics*, 65 (3/4), 579-616.
- [Seidelmann P.K.] 1982, 1980 IAU Theory of Nutation: the final report of the IAU working group on Nutation", *Celest. Mech.*, 27, 79-106.

- [Shiskin J., Young A.H. et J.C. Musgrave] , 1965, The X-11 variant of the Census method II seasonal adjustment program, Tech. Paper 15, Bureau of the Census, U.S. Dept. of Commerce, Washington D.C. kfiled Press, 3d edition, Brisbane, 513 pp.
- [Smale S.] , 1967, Differentiable Dynamical Systems, Bull. Am. Math. Soc, 73, 747-817.
- [Sano M. et Sawada Y.] , 1985, Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series, Phys. Rev. Lett., 55, 1082-1085.
- [Souriau A. et A. Cazenave] , 1985, Reevaluation of the Chandler woble seismic excitation from recent data, Earth Planet. Sci. Lett, 75, 410-416.
- [Stone L., Saparin P.I., Huppert A. et Price C.] , 1998, El Niño chaos: The role of noise and stochastic resonance on the ENSO cycle, Geophys. Res. Lett., 25, 2, 175-178.
- [Takens F.] , 1981, Detecting strange attractors in turbulence, Lecture Notes in Mathematics. No 898, Springer-Verlag.
- [Tanaka T., K. Aihara, M. Taki] , 1996, Lyapunov exponents of random time series, Phys. Rev. E. 54, 2, 2122-2124.
- [Theiler J.] , 1986, Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data, Phys. Rev. A, 34(3), 2427-2432.
- [Tiwari R.K., Negi J.G. et K.N.N. Rao] , 1992, Attractor dimensions in non-linear fluctuations of length of the day (*LOD*) variations, Geophys. Res. Lett., 19(9), 909-912.
- [Tsonis A.A. et J.B. Elsner] , 1988, The weather attractor over very short timescales, Nature 333, 545-547.
- [Tsonis A.A. et J.B. Elsner] , 1992, Nonlinear prediction as a way of distinguishing chaos from random fractal sequences, Nature, 358, 217-220.
- [Tziperman E., Stone L., Cane M.A. et H. Jarosh] , 1994, El Niño chaos: overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean-atmosphere oscillator, Science, 264, 72-74.
- [Tziperman E., Cane M.A. et S.E. Zebiak] , 1995, Irregularity and locking to the seasonal cycle in an ENSO prediction model as explained by the quasi-periodicity route to chaos, J. Atm. Sci., 52(3), 293-306.
- [Vallis G.K.] , 1986, El Niño: a chaotic dynamical system ?, Science, 232, 243-245.
- [Vautard R., P. Yiou et M. Ghil] , 1992, Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals, Physica D, 58, 95-126.
- [F. Verhulst] , 1989, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag.
- [Vicente O. et C.R. Wilson] , 1997, On the variability of the Chandler frequency, J. Geophys. Res., 102(B9), 20,439 - 20,455.
- [Vondrák J.] , 1977a, Problem of smoothing observational data, Bull. Astron. Inst. Czech., vol 20, p.349.

- [Vondrák J.] ,1977b, Problem of smoothing observational data II, Bull. Astron. Inst. Czech., vol 28, pp.84-89.
- [Vondrák J.] , 1990, Atmospheric and groundwater excitation of polar motion in case of variable Chandler frequency, Bull. Astron. Inst. Czechosl., 41, 211-220.
- [Wan E.A.] , 1993, Time series prediction by using a Connectionist Network with internal delay Lines, in Time series prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past, Weigend A.S, Gershenfeld N.A Eds., SFI studies in the Sciences of Complexity, proc Vol. XV, Addison-Wesley.
- [Wahr J.M.] , 1983, The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations in the length of day. II-Results, Geophys. J.R.Astr.Soc, 74, 451-487.
- [Wahr J.M.] , 1979, The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth. Thèse de doctorat, Université du Colorado.
- [Wilson C.R.] , 1993, Contributions of Water Mass Redistribution to Polar Motion Excitation, Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Earth Dynamics, Geodynamics series, Vol 24, D.E. Smith and D.L. Turcotte Editors.
- [Whitney H.] , 1936, Differential Manifolds, Ann. Math. 37: 645-680.
- [Wilson C.R. et Vicente O.] , 1990, Maximum likelihood estimates of polar motion parameters, in *Variations in Earth Rotation, Geophys. Monogr. Ser.*, vol 59, edited by D.D. McCarthy and W.E. Carter, pp. 151-155, AGU, Washington, D.C.
- [Wilson C.R. et Hausbrich R.A.] , 1976, Meteorological excitation of the Earth wobble, Geophys. J. R. Astron. Soc., 46, 707-743.
- [Wilson C.R.] , 1998, Oceanic effects on Earth's rotation rate. Science 281: 1623-1624
- [Wolf A., J.B. Swift, H.L. Swinney et Vastano J.A.] , 1985, Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica D, 16, 285-317.
- [Yalçinkaya T. et Lai Y.C.] , 1997, Bifurcation to strange nonchaotic attractors, Phys. Rev. E., 56, 2, 1623-1630.
- [Yoder C.F., J.G. William et M.E. Parkes] , 1981, Tidal variations of Earth Rotation, Journal Geophys. Res., 86, 881-891.
- [Zebiak S.E. et Cane M.] , 1987, A model El Niño-Southern Oscillations, Mon. Wea. Rev., 115, 2262-2278.
- [Zeng X., R. Eykholt et R.A. Pielke] , 1991, Estimating the Lyapunov-exponent Spectrum from short time Series of low precision, Phys. Rev. Letters, vol 66, No 25, 3229-3232.

