



**HAL**  
open science

**Ανάπτυξη Μεθόδου Αλληλεπίδρασης Ροής-Δομής για  
Ανάλυση Αεροτομών Δύο Στοιχείων Μεταβαλλόμενης  
Γεωμετρίας**

Alexandros Kontogiannis

► **To cite this version:**

Alexandros Kontogiannis. Ανάπτυξη Μεθόδου Αλληλεπίδρασης Ροής-Δομής για Ανάλυση Αεροτομών Δύο Στοιχείων Μεταβαλλόμενης Γεωμετρίας. Fluids mechanics [physics.class-ph]. University of Patras, 2017. Greek. ⟨NNT:⟩. ⟨tel-02067067⟩

**HAL Id: tel-02067067**

**<https://hal.science/tel-02067067>**

Submitted on 14 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

Πανεπιστήμιο Πατρών  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών

---

**Ανάπτυξη Μεθόδου Αλληλεπίδρασης  
Ροής-Δομής για Ανάλυση Αεροτομών Δύο  
Στοιχείων Μεταβαλλόμενης Γεωμετρίας**

Διπλωματική Εργασία  
**Κοντογιάννης Αλέξανδρος**

---

Επιβλέποντες  
Σαραβάνος Δημήτρης  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών  
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ριζιώτης Βασίλης  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πάτρα 2017



# Ανάπτυξη Μεθόδου Αλληλεπίδρασης Ροής-Δομής για Ανάλυση Αεροτομών Δύο Στοιχείων Μεταβαλλόμενης Γεωμετρίας

Διπλωματική Εργασία  
Κοντογιάννης Αλέξανδρος

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστίασε στην ανάπτυξη αεροδυναμικού κώδικα (Foil2E) χαμηλού υπολογιστικού κόστους, τύπου Viscous/Inviscid Interaction (VII) (συννοριακή μέθοδος ζωνικής προσέγγισης όγκου ρευστού) και στη σύζευξη αυτού με το ABAQUS για την ανάπτυξη μεθόδου αλληλεπίδρασης ροής-δομής. Ο κώδικας Foil2E αναπτύχθηκε ειδικά για ταχύα ανάλυση αεροτομών δύο στοιχείων ως επέκταση του κώδικα Foil2W του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής του ΕΜΠ και η μέθοδος ασθενούς αλληλεπίδρασης ABAQUS-Foil2E επιτρέπει την γρήγορη ανάλυση αεροτομών μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με διεγέρτες σύρματος κράματος μνήμης σχήματος (SMA) για εφαρμογές σχεδιασμού. Αρχικά περιγράφονται οι βασικές αρχές των μεθόδων VII και τα φυσικά φαινόμενα που οφείλουν να μοντελοποιηθούν στην ανάλυση αεροτομών. Έπειτα, παρουσιάζεται η διατύπωση της ιδανικής ροής μέσω της μεθόδου των ιδιομορφιών, το μοντέλο για τα φαινόμενα συνεκτικότητας καθώς και η ολοκληρωτική διατύπωση των εξισώσεων οριακού στρώματος συμπεριλαμβανομένου του μοντέλου τύρβης και μετάβασης της ροής. Τέλος, περιγράφεται η διατύπωση των διακριτών εξισώσεων όπως υλοποιήθηκε στον κώδικα Foil2E, η επικύρωση του κώδικα με ειδικές μετρήσεις αεροσήραγγας για αεροτομή δύο στοιχείων καθώς και η μέθοδος αλληλεπίδρασης ABAQUS-Foil2E και τα αποτελέσματα της ανάλυσης για μία αεροτομή δύο στοιχείων με μεταπτερύγιο μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με διεγέρτη σύρματος SMA. Η παρούσα αεροδυναμική μέθοδος προτείνεται αντί μίας πλεγματικής μεθόδου τύπου RANS καθώς για δεδομένη τάξη ακρίβειας απαιτεί 1/100 λιγότερους αγνώστους ενώ μπορεί να επεκταθεί για ψευδο-τριδιάστατες (2.5D) αναλύσεις πτερυγίων μεταβαλλόμενης γεωμετρίας.





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

University of Patras  
Mechanical Engineering and Aeronautics Dept.

# Viscous-Inviscid Fluid-Structure Interaction Method for the Analysis of Multielement Morphing Airfoils

Diploma Thesis

**Kontogiannis Alexandros**

Supervisors

Saravanos Dimitris

Professor, Mechanical Engineering  
and Aeronautics Dept.  
University of Patras

Riziotis Vasilis

Assistant Professor, Mechanical Engineering Dept.  
National Technical University of Athens

Patras 2017

---

## Abstract

In the present diploma thesis, the development of a two-body viscous-inviscid interaction method (Foil2E) is described as an extension of the Foil2W code of the Laboratory of Aerodynamics of the School of Mechanical Engineering of National Technical University of Athens and weakly coupled with ABAQUS to perform fluid-structure interaction analysis for morphing multielement airfoils using Nitinol wire actuators. Firstly, the basic principles of VII methods and the fluid phenomena that occur and need to be modeled are presented. Then, the panel method for the purely inviscid flow is described as well as the viscous displacement model for the equivalent inviscid flow (EIF) and the integral boundary layer model including the  $e^n$  transition criterion. Finally, the thesis concludes with the numerical formulation for the VII as it was implemented in Foil2E, the validation of the code using experimental data from AGARD and the results of the FSI analysis of an airfoil with morphing fowler flap. Viscous-inviscid interaction codes are well suited for rapid and interactive aerodynamic analysis. Hence, Foil2E code could be of great use in the analysis of high-lift slotted airfoils, biplane and canard configurations. Moreover, due to the low computational cost and time of VII methods, the present method is promising for rapid quasi-3D FSI computations including the material models for Nitinol, as developed by the Structural Analysis and Smart Materials group of the department.



## Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτρη Σαραβάνο για την καθοδήγηση του κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής και την συνεργασία που μου επέτρεψε με τον κ. Βασίλη Ριζιώτη. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ίδιο αλλά και τους υπόλοιπους καθηγητές του τομέα της Εφαρμοσμένης Μηχανικής του τμήματος των Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών για την υψηλής ποιότητας διδασκαλία που προσφέρουν και την προθυμότητα τους. Εξίσου θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνεπιβλέποντα καθηγητή μου κ. Β. Ριζιώτη του οποίου η συνεργασία και καθοδήγηση στην εργασία αυτή ήταν κομβικής σημασίας καθώς και για την ενεργή υποστήριξη του και τον -ουκ ολίγο- πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσε κατά την διάρκεια της εργασίας μου στο ΕΜΠ. Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες Θεόδωρο Μαχαίρα και Ανάργυρο Καρακαλά για την υποστήριξη που μου παρείχαν στην προσπάθεια να ενσωματωθεί η παρούσα μέθοδος σε αναλύσεις αλληλεπίδρασης ροής-δομής για την ανάλυση αεροτομών με ενεργοποιητές κραμάτων μνήμης σχήματος.





# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>19</b>
1.1	Αλληλεπίδραση Συνεκτικής/μη-Συνεκτικής Ροής . . . . .	19
1.2	Φυσικό Υπόβαθρο . . . . .	20
1.3	Βασικές Αρχές Μεθόδων VII . . . . .	23
1.3.1	Μοντελοποίηση Συνεκτικής Μετατόπισης . . . . .	23
1.3.2	Διατύπωση Οριακού Στρώματος (RVF) . . . . .	24
1.3.3	Μέθοδοι Σύζευξης . . . . .	24
1.4	Ανασκόπηση Μεθόδων για Αεροτομές . . . . .	26
1.5	Στόχος Εργασίας . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Διατύπωση Ιδανικής Ροής</b>	<b>29</b>
2.1	Διατύπωση Προβλήματος . . . . .	29
2.2	Γενικευμένη Λύση Ροϊκού Δυναμικού . . . . .	30
2.3	Παρούσα Διατύπωση Μη-Συνεκτικού Πεδίου . . . . .	32
2.4	Επέκταση Διατύπωσης Μη-Συνεκτικού Πεδίου για Πολλαπλά Σώματα . . . . .	35
2.5	Μοντέλο Συνεκτικής Μετατόπισης . . . . .	36
2.5.1	Μαθηματικό Μοντέλο Διαπνοής Τοιχώματος . . . . .	36
2.5.2	Διατύπωση Πεδίου Διαταραχής . . . . .	38
2.6	Επέκταση Διατύπωσης Πεδίου Διαταραχής για Πολλαπλά Σώματα . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Μοντέλο Οριακού Στρώματος</b>	<b>41</b>
3.1	Οι Εξισώσεις Navier-Stokes . . . . .	41
3.1.1	Γενικευμένη Μορφή Τανυστή Ιξωδών Τάσεων . . . . .	42
3.2	Παραδοχές Λεπού Οριακού Στρώματος . . . . .	43
3.3	Εξισώσεις Οριακού Στρώματος . . . . .	44
3.4	Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Οριακού Στρώματος . . . . .	44
3.4.1	Εξίσωση Ορμής von Karman . . . . .	44
3.4.2	Εξίσωση Κινητικής Ενέργειας . . . . .	45
3.5	Σχέσεις Συσχέτισης Παραμέτρων . . . . .	46
3.5.1	Συσχετίσεις Στρωτής Ροής . . . . .	47
3.5.2	Συσχετίσεις Τυρβώδους Ροής . . . . .	47
3.5.3	Συντελεστής Εκφυλισμού και Εξίσωση Υστέρησης Τάσεων . . . . .	49
3.6	Πρόβλεψη Σημείου Μετάβασης Ροής . . . . .	51

<b>4</b>	<b>Αριθμητικό Σχήμα Συνεκτικής/μη-Συνεκτικής Αλληλεπίδρασης</b>	<b>55</b>
4.1	Διακριτοποίηση της Γεωμετρίας . . . . .	55
4.2	Διακριτές Εξισώσεις Καθαρά μη-Συνεκτικής Ροής . . . . .	57
4.2.1	Η συνθήκη Kutta . . . . .	57
4.2.2	Μητρική Μορφή Συστήματος και Λύση . . . . .	58
4.3	Διακριτές Εξισώσεις Οριακού Στρώματος . . . . .	58
4.3.1	Εξίσωση Συνέχειας - Έλλειμα Μάζας . . . . .	59
4.3.2	Εξισώσεις Ορμής και Κινητικής Ενέργειας . . . . .	61
4.3.3	Εξισώσεις Προσδιορισμού Σημείου Μετάβασης και Υστέρησης Διατμητικών Τάσεων . . . . .	64
4.3.4	Μη-Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων Οριακού Στρώματος . . . . .	65
4.4	Διακριτές Εξισώσεις Ταχύτητας Συνεκτικής Διόρθωσης . . . . .	66
4.5	Αλγόριθμος Επίλυσης Συνεκτικής/μη-Συνεκτικής Αλληλεπίδρασης . . . . .	67
4.6	Υπολογισμός Ταχυτήτων και Δυνάμεων . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Αποτελέσματα - Επικύρωση Κώδικα Foil2E</b>	<b>71</b>
5.1	Καθαρά μη-Συνεκτική Ροή . . . . .	71
5.1.1	Σώματα σε Απομόνωση . . . . .	71
5.1.2	Σώματα σε Αλληλεπίδραση . . . . .	73
5.2	Συνεκτική Ροή . . . . .	77
5.2.1	Σώματα σε Απομόνωση . . . . .	77
5.2.2	Σώματα σε Αλληλεπίδραση . . . . .	77
5.3	Συμπεράσματα . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Μέθοδος Αλληλεπίδρασης Ροής-Δομής</b>	<b>83</b>
6.1	Μοντέλο Αεροτομής με Διεγέρτη SMA . . . . .	83
6.2	Μέθοδος Σύζευξης Foil2E-ABAQUS . . . . .	84
6.2.1	Υπορουτίνα Υλικού SMA (UMAT) . . . . .	84
6.2.2	Υπορουτίνα Αλληλεπίδρασης Foil2E-ABAQUS (DLOAD) . . . . .	85
6.2.3	Αλληλεπίδραση Ροής-Δομής . . . . .	85
6.3	Αποτελέσματα . . . . .	86
6.4	Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία . . . . .	89

# Κατάλογος Σχημάτων

1-1	Φυσικά φαινόμενα συνεκτικότητας ανώτερης τάξης σε αεροτομή. . . . .	20
1-2	Συνήθη φαινόμενα ανώτερης τάξης στην αεροδυναμική. . . . .	21
1-3	Συρρέον οριακό στρώμα σε αεροτομή δύο στοιχείων. . . . .	22
1-4	Μοντέλα μετατόπισης λόγω συνεκτικότητας ειδικά για μεθόδους VII. . .	23
1-5	Μονόδρομη σύζευξη συνεκτικής/μη-συνεκτικής ροής (κλασική επίλυση ΟΣ). . . . .	25
1-6	Αμφίδρομη σύζευξη συνεκτικής/μη-συνεκτικής ροής με μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης (ύπαρξη ιεραρχίας στην εναλλαγή πληροφορίας μεταξύ μη-συνεκτικής και συνεκτικής ροής). . . . .	25
1-7	Αεροτομές υψηλής άντωσης αερομοντέλων στον διαγωνισμό Air Cargo Challenge - Stuttgart τον Αύγουστο του 2015. . . . .	28
1-8	Μη-επανδρωμένο αεροσκάφος ATLAS V κατά την περίοδο των δοκιμαστικών πτήσεων στο αεροδρόμιο Μεσολλογίου πριν την συμμετοχή του στο διαγωνισμό Air Cargo Challenge - Stuttgart τον Αύγουστο του 2015. .	28
2-1	Διατύπωση και ονοματολογία προβλήματος ροϊκού δυναμικού. . . . .	30
2-2	Η ταχύτητα στο πεδίο $\mathcal{V}$ δίνεται ως υπέρθεση της ελεύθερης ροής και των ιδιομορφιών της αεροτομής $S_b$ . . . . .	34
2-3	Η ταχύτητα στο πεδίο $\mathcal{V}$ δίνεται ως υπέρθεση της ελεύθερης ροής και των ιδιομορφιών των αεροτομών $S_b^1, S_b^2$ (επέκταση σχήματος 2-2 για δύο σώματα). . . . .	35
2-4	Οι κατανομές ταχυτήτων $u_e(s)$ (EIF) και $u(s, n)$ (RVF) καθώς και η ταχύτητα διαπνοής τοιχώματος $(v_e)_w(s)$ για ελαφρώς αποκολλημένο ΟΣ. .	37
2-5	Η διανομή κάθετης ταχύτητας στην αεροτομή και το απόρρευμα λόγω της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης $\mathbf{u}^*$ . . . . .	39
2-6	Η διανομή κάθετης ταχύτητας στην αεροτομή και το απόρρευμα λόγω της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης $\mathbf{u}^*$ (επέκταση για δύο σώματα). . .	40
3-1	Οπτικοποίηση υποστρωμάτων ΤΟΣ σε κανάλι νερού με φουσαλίδες υδρογόνου. Τα διάφορα υποστρώματα που διακρίνονται είναι: viscous sublayer ( $y^+ = 2.7$ ), buffer layer ( $y^+ = 38$ ), fully turbulent region ( $y^+ = 101$ ) και wake region ( $y^+ = 407$ ). . . . .	48
3-2	Επίδραση βαθμίδας πίεσης: σε ισχυρά ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (άνω) το ΤΟΣ εκτείνεται και μεταβαίνει σε στρωτό ενώ σε ισχυρά αντιτιθέμενη βαθμίδα πίεσης (κάτω) το πάχος του αυξάνεται και εν τέλει αποκολλάται (R.E. Falco). . . . .	51

3-3	Γραμμικές και μη-γραμμικές αστάθειες του στρωτού οριακού στρώματος. Πηγή: ONERA. . . . .	53
4-1	Ονοματολογία διακριτοποιημένης αεροτομής. Τα τμήματα $\Delta S_i$ (panels) είναι στη πραγματικότητα ευθύγραμμα. Για αιχμηρές ακμές εκφυγής (sharp trailing edge), ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος ταυτίζονται. . . . .	56
4-2	Μητρική αναπαράσταση συστήματος εξισώσεων για τη καθαρά μη-συνεκτική ροή όπως υλοποιήθηκε στον κώδικα Foil2E. . . . .	59
4-3	Διακριτοποίηση εξισώσεων ταχύτητας διαπνοής τοιχώματος (εσωτερικά σημεία αεροτομής και απορρεύματος). . . . .	61
4-4	Ονοματολογία για την διακριτοποίηση των εξισώσεων οριακού στρώματος. . . . .	62
4-5	Συνοριακές συνθήκες οριακού στρώματος σε ακμή προσφυγής και εκφυγής. . . . .	63
4-6	Συνοριακή συνθήκη στο σημείο μετάβασης . . . . .	65
4-7	Διακριτοί βαθμοί ελευθερίας της εξίσωσης για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης. . . . .	67
4-8	Μητρική αναπαράσταση συστήματος εξισώσεων για την ισοδύναμη μη-συνεκτική ροή. . . . .	67
4-9	Σχηματική αναπαράσταση συστήματος Newton για την επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων του οριακού στρώματος για το πρόβλημα της συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης. . . . .	69
5-1	Κατανομή συντελεστή $C_p$ για την NACA0012 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για μη-συνεκτική ροή. . . . .	72
5-2	Κατανομή συντελεστή $C_p$ για την SD7037 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για μη-συνεκτική ροή. . . . .	73
5-3	Κατανομή συντελεστή $C_p$ για την S1223 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για μη-συνεκτική ροή. . . . .	74
5-4	Κατανομή συντελεστή $C_p$ μη-συνεκτικής ροής και καμπύλη $c_l - \alpha$ για την διάταξη διπλάνου και σύγκριση με πλεγματοκή CFD μέθοδο. . . . .	75
5-5	Κατανομή συντελεστή $C_p$ μη-συνεκτικής ροής για την αεροτομή NLR7301 δύο στοιχείων και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα της AGARD. . . . .	76
5-6	Κατανομή συντελεστή $C_p$ για την NACA0012 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για συνεκτική ροή με αριθμό $Re$ ίσο με $250e3$ . . . . .	77
5-7	Κατανομή συντελεστή $C_p$ για την SD7037 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για συνεκτική ροή με αριθμό $Re$ ίσο με $250e3$ . . . . .	78
5-8	Κατανομή συντελεστή $C_p$ συνεκτικής ροής και καμπύλη $c_l - \alpha$ για την διάταξη διπλάνου και σύγκριση με πλεγματοκή CFD μέθοδο. . . . .	79
5-9	Κατανομή συντελεστή $C_p$ συνεκτικής ροής για την αεροτομή NLR7301 δύο στοιχείων και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα της AGARD. . . . .	80
5-10	Σύγκριση κατανομών ταχυτήτων τυρβωδών οριακών στρωμάτων (Foil2E) και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα. . . . .	81
5-11	Πιθανές διατάξεις σωμάτων προς ανάλυση με χρήση του κώδικα Foil2E. . . . .	82
6-1	Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων αεροτομής με διεγέρτη SMA. . . . .	84
6-2	Διάγραμμα πληροφορίας μεθόδου αλληλεπίδρασης ροής-δομής. . . . .	86

6-3	Συντελεστής πίεσης αεροτομής δύο στοιχείων με μεταπτερύγιο μεταβαλλόμενης γεωμετρίας σε κατάσταση αναφοράς και σε παραμόρφωση. . . . .	87
6-4	Παραμόρφωση μεταπτερυγίου με διεγέρτη κράματος μνήμης σχήματος και καμπύλες θερμοκρασίας SMA και παραμόρφωσης άκρου αεροτομής (ακμή εκφυγής) στην απαραμόρφωτη κατάσταση. . . . .	88
6-5	Παραμόρφωση μεταπτερυγίου με διεγέρτη κράματος μνήμης σχήματος και καμπύλες θερμοκρασίας SMA και παραμόρφωσης άκρου αεροτομής (ακμή εκφυγής) στην μέση παραμορφωμένη κατάσταση. . . . .	88
6-6	Παραμόρφωση μεταπτερυγίου με διεγέρτη κράματος μνήμης σχήματος και καμπύλες θερμοκρασίας SMA και παραμόρφωσης άκρου αεροτομής (ακμή εκφυγής) στην τελική παραμορφωμένη κατάσταση. . . . .	89







# Ονοματολογία

## Σύμβολα

### Κεφάλαιο 2

$\varphi$	συνάρτηση ροϊκού δυναμικού
$\varphi_i$	συνάρτηση εσωτερικού ροϊκού δυναμικού
$\varphi_\infty$	συνάρτηση ροϊκού δυναμικού ελεύθερης ροής
$\mathcal{V}$	πεδίο ροής
$S_b$	σύνορο σώματος-αεροτομής
$S_w$	σύνορο απορρέυματος
$S_\infty$	σύνορο πεδίου ροής
$S_e$	σύνορο σφαίρας ή κύκλου ολοκλήρωσης
$\epsilon$	ακτίνα σφαίρας ή κύκλου ολοκλήρωσης
$P$	σημείο ολοκλήρωσης
$\sigma$	ιδιομορφία πηγής
$\mu$	ιδιομορφία διπόλου
$\gamma$	ιδιομορφία στροβίλου
$\mathbf{V}, \mathbf{u}^i$	διάνυσμα ολικής ταχύτητας μη-συνεκτικής ροής
$\mathbf{V}_\infty$	διάνυσμα ταχύτητας ελεύθερης ροής
$\mathbf{V}_\sigma$	διάνυσμα ταχύτητας διαταραχής των πηγών
$\mathbf{V}_w$	διάνυσμα ταχύτητας διαταραχής των στροβίλων
$\psi$	ροϊκή συνάρτηση
$\omega$	διάνυσμα στροβιλότητας πεδίου ροής
$\mathbf{r}$	διάνυσμα θέσης πεδίου ροής
$\mathbf{r}'$	διάνυσμα θέσης ιδιομορφιών
$\mathcal{K}$	διανυσματική συνάρτηση πυρήνα
$\mathbf{u}^*$	διάνυσμα ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης
$u_\tau^*$	εφαπτόμενη στο σύνορο συνιστώσα ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης
$u_v^*$	κάθετη στο σύνορο συνιστώσα ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης
$\mathbf{u}_e$	διάνυσμα ισοδύναμης μη-συνεκτικής ταχύτητας (EIF)
$u_e, v_e$	εφαπτόμενη και κάθετη στο τοίχωμα συνιστώσα ταχύτητας EIF
$u, v$	εφαπτόμενη και κάθετη στο τοίχωμα συνιστώσα ταχύτητας RVF
$\rho_e, \rho$	πυκνότητα ρευστού στην EIF και RVF αντίστοιχα
$\delta$	πάχος οριακού στρώματος
$\delta^*$	πάχος μετάθεσης οριακού σώματος
$m$	έλλειμα μάζας

### Κεφάλαιο 3

$\theta$	πάχος ορμής
$\tau_w$	διατμητική τάση στο τοίχωμα
$c_f$	συντελεστής τριβής
$H$	παράμετρος σχήματος
$Me$	αριθμός Mach στο άκρο του οριακού στρώματος
$\theta^*$	πάχος κινητικής ενέργειας
$\delta^{**}$	πάχος ροής πυκνότητας
$\mathcal{D}$	ολοκλήρωμα εκφυλισμού
$H^*$	παράμετρος σχήματος κινητικής ενέργειας
$H^{**}$	παράμετρος σχήματος ροής πυκνότητας
$c_{\mathcal{D}}$	συντελεστής εκφυλισμού
$H_k$	κινηματική παράμετρος σχήματος
$Re_{\theta}$	αριθμός Reynolds πάχους ορμής
$u_{\tau}$	ταχύτητα τριβής
$y^+$	μεταβλητή τοιχώματος για το μήκος καθ' ύψος του οριακού στρώματος
$u^+$	μεταβλητή τοιχώματος ταχύτητας οριακού στρώματος
$c_{\tau}$	συντελεστής μέγιστης διατμητικής τάσης
$c_{\tau EQ}$	συντελεστής μέγιστης διατμητικής τάσης σε ισορροπία
$U_s$	ταχύτητα ολίσθησης
$\tilde{n}$	λόγος ενίσχυσης ασταθειών στρωτού οριακού στρώματος

### Κεφάλαια 4, 5

$\Delta S^i, \Delta S_w^{iw}$	μήκος πάνελ αεροτομής και απορρεύματος αντίστοιχα
$\mathbf{x}_g^I, \mathbf{x}_{gw}^{Iw}$	συν/γμένη κόμβου αεροτομής και απορρεύματος αντίστοιχα
$\mathbf{x}_{cp}^i, \mathbf{x}_{cpw}^{iw}$	συν/γμένη σημείου ελέγχου αεροτομής και απορρεύματος αντίστοιχα
$S_g^I, S_{gw}^{Iw}$	μήκος τόξου κόμβου αεροτομής και απορρεύματος αντίστοιχα
$S_{cp}^i, S_{cpw}^{iw}$	μήκος τόξου σημείου ελέγχου αεροτομής και απορρεύματος αντίστοιχα
$\Gamma$	κυκλοφορία
$A_{ij}^{\sigma}$	μητρώο συντελεστών επιρροής καθ. ταχύτητας πηγών
$A_i^{\gamma 1}, A_i^{\gamma 2}$	μητρώο συντελεστών επιρροής καθ. ταχύτητας στροβίλων 1,2
$B_{ij}^{\sigma}$	μητρώο συντελεστών επιρροής εφαπτ. ταχύτητας πηγών
$B_i^{\gamma 1}, B_i^{\gamma 2}$	μητρώο συντελεστών επιρροής εφαπτ. ταχύτητας στροβίλων 1,2
$\mathbf{A}_{inv}$	ολικό μητρώο συντ. επιρροής ιδανικής ροής για δύο σώματα
$\mathbf{x}_{inv}$	διάνυσμα βαθμών ελευθερίας ιδανικής ροής (πηγές, στροβίλοι)
$\mathbf{b}_{inv}$	διάνυσμα όρων RHS ιδανικής ροής
$u_{cp}^i$	εφαπτομενική στο πάνελ ταχύτητα υπολογισμένη στο σημείο ελέγχου
$C_p$	συντελεστής πίεσης
$c$	χορδή αεροτομής
$c_l$	συντελεστής άντωσης
$c_d$	συντελεστής αντίστασης
$c_{m,c/4}$	συντελεστής πρόνευσης ως προς $c/4$
$\Delta\theta_{TE}$	γωνία ακμής εκφυγής

## Δείκτες

$(\cdot)_w$	ποσότητα στο τοίχωμα αεροτομής
$(\cdot)_{cp}$	ποσότητα στο σημείο ελέγχου

## Ακρωνύμια

CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds-Averaged Navier Stokes
VII	Viscous-Inviscid Interaction
LSB	Laminar Separation Bubble
BL, ΟΣ	Boundary Layer
RVF	Real Viscous Flow
EIF	Equivalent Inviscid Flow
IBL	Integral Boundary Layer
LST	Low-Speed Tunnel
SMA	Shape-Memory Alloy
RHS	Right-Hand Side (terms)
FSI	Fluid-Structure Interaction
SST $k-\omega$	Shear-Stress Transport (turbulence model)

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Αλληλεπίδραση Συνεκτικής/μη-Συνεκτικής Ροής

Η αεροδυναμική ανάλυση αεροσκαφών απαιτεί ταχύ υπολογισμό των μεγεθών του μέσου ροϊκού πεδίου, όπως είναι η πίεση, η ταχύτητα, η θερμοκρασία, η τριβή στο τοίχωμα και γενικά οι συνολικές δυνάμεις που επιβάλλονται σε αυτό. Για συνηθισμένα αεροσκάφη, ο αέρας θεωρείται ένα συνεχές, ιξώδες και συμπιεστό ρευστό. Επομένως, για την υπολογιστική προσομοίωση του ροϊκού πεδίου απαιτείται η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes για -εν γένει- τυρβώδεις ροές ή ροές με μετάβαση.

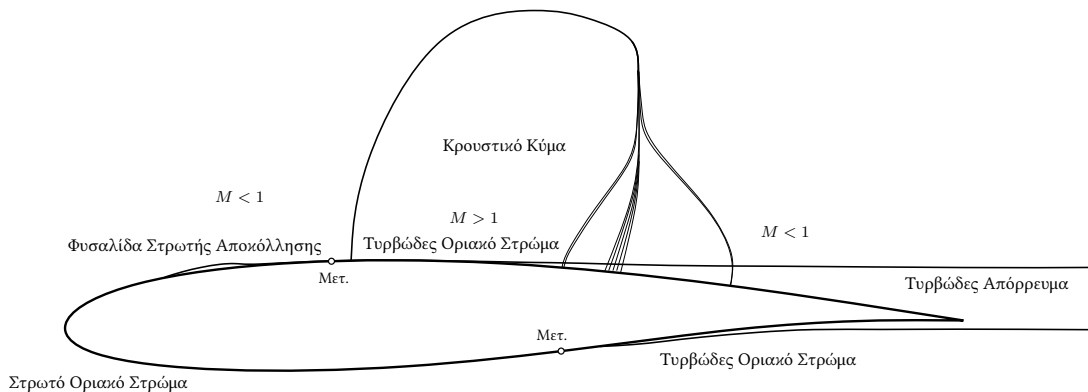
Η μοντελοποίηση τυρβωδών ροών γίνεται με διάφορες μεθόδους και η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται άμεσα από το αντικείμενο διερεύνησης. Έτσι, για την πλήρη περιγραφή της ροής χρησιμοποιείται η Απευθείας Αριθμητική Προσομοίωση (Direct Numerical Simulation ή DNS) η οποία θεωρείται ισοδύναμη ενός πειράματος αεροσήραγγας. Η μέθοδος αυτή είναι μη-πρακτική για σχεδιασμό καθώς το υπολογιστικό κόστος είναι τεράστιο λόγω της ανάγκης πολύ λεπτομερούς πλέγματος που επιβάλλουν οι κλίμακες τύρβης, ιδιαίτερα για ροές υψηλών ταχυτήτων. Αντίθετως, χρησιμοποιείται συνήθως για τη διερεύνηση των συναφών δομών τύρβης και την κατανόηση των σχετικών φαινομένων με σκοπό την βελτίωση των μοντέλων τύρβης. Μία λιγότερο υπολογιστικά επίπονη μέθοδος είναι η Προσομοίωση Μεγάλων Δινών (Large Eddy Simulation ή LES) η οποία αγνοεί τις μικρές κλίμακες δινών και χαλαρώνει τους περιορισμούς του πλέγματος. Τελικά, για εφαρμογές μηχανικών, η μέθοδος που χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις ονομάζεται Reynolds-Averaged Navier Stokes (RANS) και αρκείται στον υπολογισμό της μέσης ροής. Αυτή η προσέγγιση εισάγει επιπλέον όρους τους οποίους καλείται να συμπληρώσει ένα μοντέλο για την τύρβη. Το μοντέλο αυτό δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση φυσικό νόμο παρά μία προσέγγιση για ειδικές μηχανικές εφαρμογές.[1]

Ακόμα και οι μέθοδοι τύπου RANS εμπεριέχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος που πολλές φορές οδηγεί στη χρήση υπερυπολογιστών. Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes σε όλο το υπό εξέταση πεδίο μπορεί να αποφευχθεί αν γίνει η πρακτική θεώρηση ότι τα φαινόμενα συνεκτικότητας (ιξώδους) και τύρβης περιορίζονται σε λεπτά διατμητικά στρώματα (thin shear layers) που λαμβάνουν χώρα στις γειτονικές

περιοχές των περιβραχόμενων επιφανειών και τα απορρεύματα. Έτσι, το μέσο χωρίζεται σε περιοχές όπου το ρευστό θεωρείται συνεκτικό και σε περιοχές που θεωρείται μη-συνεκτικό. Οι αριθμητικές μέθοδοι που εκμεταλλεύονται τη φυσική αυτή συμπεριφορά του ρευστού ονομάζονται Μέθοδοι Συνεκτικής/Μη-Συνεκτικής Αλληλεπίδρασης (Viscous/Inviscid Interaction Methods ή VII) όπου οι υπολογισμοί για το συνεκτικό και μη-συνεκτικό πεδίο συνδυάζονται ώστε να δώσουν μία σύνθετη λύση στο ολικό πεδίο. Το συνεκτικό πεδίο υπολογίζεται μέσω απλοποιημένων (συνήθως) εξισώσεων Navier-Stokes ενώ το μη-συνεκτικό πεδίο καθορίζεται από τις εξισώσεις Euler ή -συνήθως για χαμηλές ταχύτητες- από μία μέθοδο Ροϊκού Δυναμικού των οποίων η επίλυση είναι υπολογιστικά οικονομική και ταχύτερη. Για παράδειγμα, οι αριθμητικές μέθοδοι ροϊκού δυναμικού (ή αλλιώς μέθοδοι πάνελ) για δεδομένη τάξη ακρίβειας απαιτούν 1/100 λιγότερους αγνώστους συγκριτικά με μία πλεγματική μέθοδο [2, Κεφ. 2.9].

## 1.2 Φυσικό Υπόβαθρο

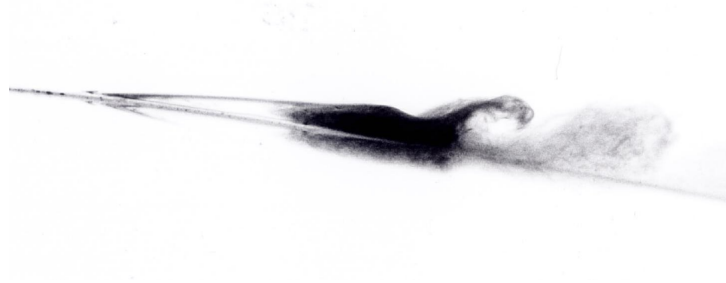
Τα φαινόμενα συνεκτικότητας (ή αλλιώς ιξώδους) είναι κυρίαρχα σε υποηχητικές και διηχητικές ροές και αλληλεπιδρούν ισχυρά σε μία μέθοδο VII. Αντίθετα, σε υπερηχητικές ταχύτητες πτήσης τα φαινόμενα αλληλεπιδρούν ασθενέστερα και μπορούν να αντιμετωπιστούν ξεχωριστά καθώς έχουν δευτερεύουσα σημασία. Στη συνέχεια παρουσιάζονται περιπτώσεις φαινομένων αλληλεπίδρασης που συμβαίνουν σε πτέρυγες αεροσκαφών και που η μαθηματική τους διατύπωση εμπεριέχει όρους ανώτερης τάξης. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις χαρακτηρίζονται ως ισχυρές αλληλεπιδράσεις.



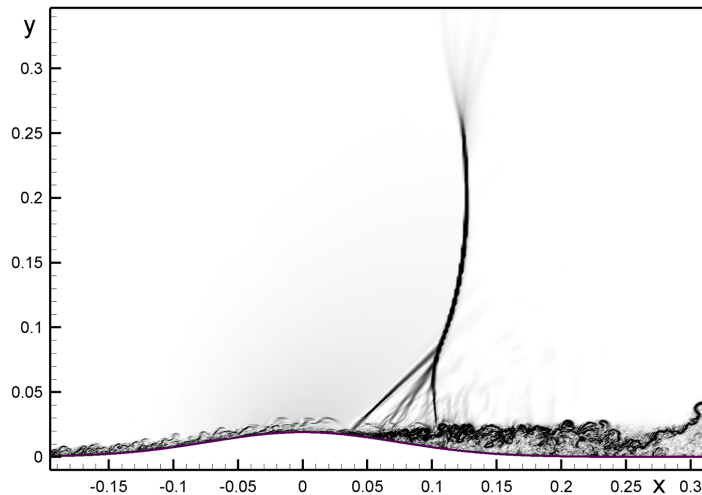
Σχήμα 1-1: Φυσικά φαινόμενα συνεκτικότητας ανώτερης τάξης σε αεροτομή.

Στο Σχήμα 1-1 παρουσιάζεται μία αεροτομή που εμφανίζει -στην πλευρά αναρρόφησης- φουσαλίδα στρωτής αποκόλλησης (Laminar Separation Bubble ή LSB), κρουστικό κύμα (shock wave) που αλληλεπιδρά με το οριακό στρώμα (ΟΣ) και αποκόλληση της ροής με έναρξη την ακμή εκφυγής (trailing edge separation).

Το κυρίαρχο φαινόμενο συνεκτικότητας που επηρεάζει συνολικά τις αεροδυναμικές δυνάμεις σε ένα αεροσκάφος είναι αυτό της μετατόπισης των ροϊκών γραμμών και το οποίο συχνά αναφέρεται ως συνεκτική μετατόπιση (viscous displacement). Όταν η ροή στην πλευρά αναρρόφησης συναντά μεγαλύτερες αντιτιθέμενες βαθμίδες πίεσης συγκριτικά με αυτές της κατώτερης πλευράς, το οριακό στρώμα στην ακμή εκφυγής είναι παχύτερο στην άνω πλευρά απ' ότι στην κάτω. Αυτό ισοδυναμεί με αρνητική καμπυλότητα στην ακμή εκφυγής (viscous decambering) που μειώνει τραγικά την άντωση, ως και 25%, για ταχύτητες πτήσης [3] ενώ επίσης αποτελεί τον μηχανισμό της απώλειας στήριξης (stall). Επιπλέον, σε περιοχές όπου σχηματίζονται φουσαλίδες στρωτής αποκόλλησης [4], η συνεκτική μετατόπιση είναι εμφανής και για χαμηλούς αριθμούς Reynolds οι απώλειες (bubble loss ή drag) επηρεάζουν σημαντικά την οπισθέλκουσα [5] καθώς και την συμπεριφορά της απώλειας στήριξης.



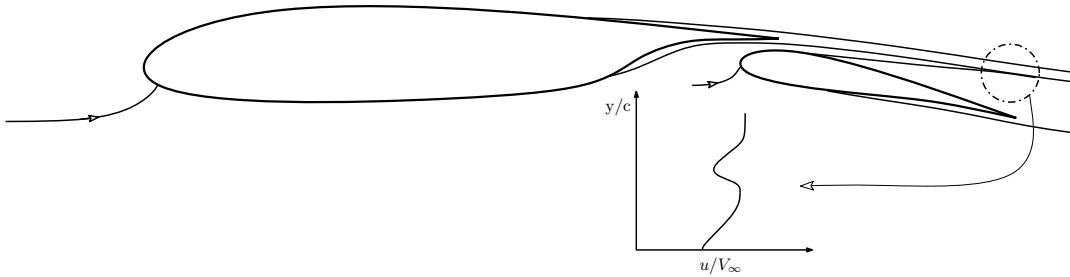
(α') Οπτικοποίηση με καπνό φουσαλίδας στρωτής αποκόλλησης σε αεροτομή. Πηγή: Greg Cole και Prof. Mueller, University of Notre Dame.



(β') Αλληλεπίδραση κρουστικού κύματος με οριακό στρώμα (LES προσομοίωση). Πηγή: Argonne Leadership Computing Facility, Argonne National Laboratory, U.S. DOE.

Σχήμα 1-2: Συνήθη φαινόμενα ανώτερης τάξης στην αεροδυναμική.

Δύο ακόμη φαινόμενα συνεκτικότητας που εμπλέκουν όρους ανώτερης τάξης είναι αυτό της αλληλεπίδρασης οριακού στρώματος με κρουστικό κύμα (shock wave/BL interaction) και της ροής στην ακμή εκφυγής (trailing edge flow). Στην πρώτη περίπτωση, εμφανίζονται σημαντικές βαθμίδες πίεσης τόσο στην διεύθυνση της ροής όσο και στην κάθετη που εμφανίζονται και στα δύο πεδία, συνεκτικής και μη-συνεκτικής ροής. Επίσης, για πολύ ισχυρά κρουστικά κύματα ενδέχεται να αυξηθεί απότομα το πάχος του οριακού στρώματος τοπικά και να επέλθει αποκόλληση της ροής κατάντη αυτής (downstream). Ομοίως, λόγω της καμπυλότητας των ροϊκών γραμμών στην ακμή εκφυγής οι βαθμίδες πίεσης εγκάρσια της ροής γίνονται σημαντικές ενώ καθώς το ΟΣ οδηγείται σε αποκόλληση οι τάσεις Reynolds στην κάθετη διεύθυνση παύουν να είναι αμελητέες όπως συχνά θεωρείται στην απλοποιημένη μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes για λεπτά οριακά στρώματα.



Σχήμα 1-3: Συρρέον οριακό στρώμα σε αεροτομή δύο στοιχείων.

Κατά τη διάρκεια προσγείωσης και απογείωσης ενός αεροσκάφους οι απαιτούμενες υψηλές τιμές άντωσης εξασφαλίζονται με μία διάταξη αεροτομών ή αεροτομή πολλαπλών στοιχείων. Τέτοιες διατάξεις προσθέτουν επιπλέον πολυπλοκότητα στον σχεδιασμό καθώς εισέρχονται τα φαινόμενα του συρρέοντος οριακού στρώματος (confluent boundary layer), της ισχυρής αλληλεπίδρασης των απορρευμάτων (wake/wake interaction) καθώς και της επαναφοράς πίεσης στο απόρρευμα (wake pressure recovery). Αυτό επισημαίνει ότι σε περίπτωση μίξης των οριακών στρωμάτων για την ορθότερη μοντελοποίηση της απώλειας στήριξης και της αντίστασης θα πρέπει να συμπεριληφθεί κάποιο μοντέλο συρρέοντος οριακού στρώματος [6], καθώς επίσης και ότι τα αποτελέσματα έχουν μεγαλύτερη ευαισθησία στην μοντελοποίηση της ροϊκής γραμμής του απορρεύματος σε σχέση με την περίπτωση της απλής αεροτομής.

Τα παραπάνω ροϊκά φαινόμενα οφείλουν να μοντελοποιηθούν όταν αναφερόμαστε σε αεροδυναμικό σχεδιασμό καθώς επηρεάζουν τον φάκελο πτήσης και την απόδοση ενός αεροσκάφους. Μία μέθοδος συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης πρέπει να εξασφαλίζει τις κατάλληλες εσωτερικές οριακές συνθήκες του συνεκτικού με το μη-συνεκτικό πεδίο καθώς και κατάλληλη διατύπωση των εξισώσεων του ΟΣ ώστε τα αποτελέσματα να συμφωνούν με τα πειραματικά εντός αποδεκτών ορίων για εφαρμογές σχεδιασμού.

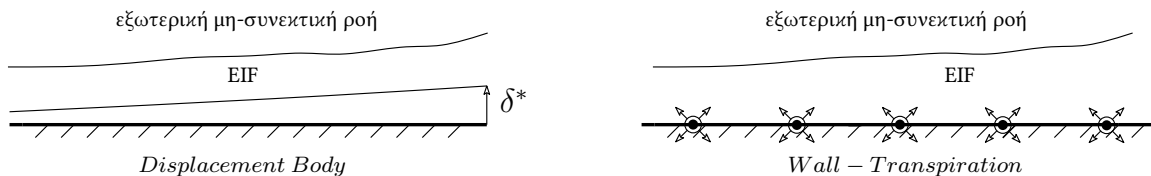
## 1.3 Βασικές Αρχές Μεθόδων VII

### 1.3.1 Μοντελοποίηση Συνεκτικής Μετατόπισης

Το βασικότερο χαρακτηριστικό μίας μεθόδου αλληλεπίδρασης είναι ο προσδιορισμός των εσωτερικών οριακών συνθηκών για τη σύζευξη της συνεκτικής με τη μη-συνεκτική ροή. Η διαδικασία αυτή συντελεί στην σωστή αποτύπωση της μετατόπισης των ροϊκών γραμμών λόγω της συνεκτικότητας.

Αρχικά, πρέπει να διευκρινιστεί η θέση της επιφάνειας που διαχωρίζει το συνεκτικό με το μη-συνεκτικό πεδίο. Μία πρώτη επιλογή του ορίου είναι το ίδιο το όριο των διατμητικών στρωμάτων, το όριο δηλαδή του ΟΣ πάνω στο οποίο οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να επιβάλλουν ίδια διανύσματα ταχυτήτων για τα δύο πεδία. Μία τέτοια μέθοδος αναπτύχθηκε από τον Bradshaw [7] και τους συνεργάτες του στο Imperial College αλλά δεν συνηθίζεται να χρησιμοποιείται καθώς αποτυγχάνει στην περίπτωση αλληλεπίδρασης ΟΣ με κρουστικό κύμα όπως υποδικνύει ο LeBalleur[8]. Ο ίδιος αποδικνύει ότι η αποτυχία αυτή μπορεί να παραταθεί για υψηλότερους αριθμούς Mach εάν ως όριο τεθεί η επιφάνεια πάχους μετατόπισης (displacement surface) και να αποφευχθεί πλήρως εάν ως όριο τεθεί το ίδιο το τοίχωμα, με αποτέλεσμα τα δύο πεδία να αλληλεπικαλύπτονται πλήρως [3].

Η ανάγκη για οριακές συνθήκες της μη-συνεκτικής ροής εντός των διατμητικών στρωμάτων που αποτελούν μέρος της πραγματικής συνεκτικής ροής (Real Viscous Flow ή RVF) οδηγεί στην ιδέα μία ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής (Equivalent Inviscid Flow ή EIF) η οποία είναι αστρόβιλη και περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler (grid method) ή ένα Ροϊκό Δυναμικό (panel method).



Σχήμα 1-4: Μοντέλα μετατόπισης λόγω συνεκτικότητας ειδικά για μεθόδους VII.

Δύο διαδεδομένα μοντέλα για την EIF είναι αυτό της μετατόπισης του σώματος (displacement body) και αυτό της διαπνοής τοιχώματος (wall-transpiration). Αυτά διαφέρουν ανάλογα της διατύπωσης της λύσης για τη μη-συνεκτική ροή ως εξής

- **Displacement Body/Panel Method:** Οι ιδιομορφίες (singularities) δεν διανέμονται πια στο τοίχωμα της αεροτομής αλλά μετατοπίζονται κάθετα σε αυτό σε ύψος ίσο με το πάχος μετατόπισης  $\delta^*$  του ΟΣ στη θέση εκείνη.
- **Displacement Body/Grid Method:** Το πλέγμα που περικλείει την αεροτομή κατά όμοιο τρόπο ξεκινάει από το νέο μετατοπισμένο σώμα που είναι αυτό της αεροτομής συν τη κατανομή του πάχους μετατόπισης  $\delta^*$  λόγω του ΟΣ.



- **Wall-Transpiration/Panel Method:** Οι ιδιομορφίες διανέμονται στο τοίχωμα όπως και σε μια περίπτωση μη-συνεκτικής ροής ενώ εισάγονται νέα στοιχεία πηγών (source elements) στο τοίχωμα για τη μοντελοποίηση της συνεκτικής μετατόπισης.
- **Wall-Transpiration/Grid Method:** Το πλέγμα της αεροτομής ξεκινάει από το τοίχωμα όπως και στη μη-συνεκτική περίπτωση ενώ εισάγεται μία επιπλέον κάθετη στο τοίχωμα ταχύτητα για τη μοντελοποίηση της συνεκτικής μετατόπισης.

Καθώς το μετατοπισμένο σώμα εξαρτάται από την κατανομή του πάχους μετάθεσης  $\delta^*$  το οποίο προσεγγίζεται κατά την επαναληπτική διαδικασία της αλληλεπίδρασης, ένα βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου διαπνοής τοιχώματος είναι ότι η συντελεστές επιρροής για μία μέθοδο ιδιομορφιών υπολογίζονται μόνο μία φορά το οποίο επιταχύνει την διαδικασία ανάλυσης. Αυτό βέβαια δεν ισχύει στην περίπτωση που η γεωμετρία του απορρεύματος ανανεώνεται σε κάθε βήμα της επανάληψης.

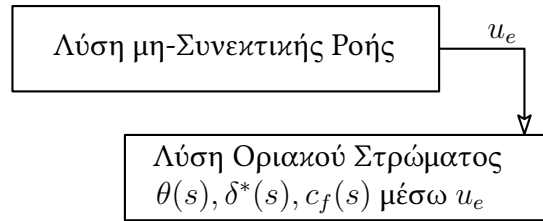
### 1.3.2 Διατύπωση Οριακού Στρώματος (RVF)

Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος για το μοντέλο της RVF μπορούν να διατυπωθούν σε διακριτή ή ολοκληρωτική μορφή. Εν γένει, η διακριτή διατύπωση του ΟΣ είναι ακριβέστερη στην περίπτωση που συμπεριλαμβάνονται οι όροι ανώτερης τάξης, προϋποθέτει όμως την λύση των πλήρων εξισώσεων Navier-Stokes των οποίων το υπολογιστικό κόστος λόγω της ελλειπτικής τους φύσης είναι απαγορευτικό. Η δυσκολία αυτή μπορεί να αποφευχθεί βλέποντας τη μέθοδο διατμητικού στρώματος ανώτερης τάξης του Bradshaw [7] για ροές με ισχυρές εγκάρσιες βαθμίδες πίεσης. Επίσης, στη διακριτή διατύπωση του ΟΣ για το κλείσιμο της τύρβης χρησιμοποιείται συνήθως το αλγεβρικό μοντέλο συνεκτικότητας-δινών (eddy-viscosity) των Cebeci και Smith [9].

Η απλούστερη διατύπωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων ΟΣ (Integral Boundary Layer ή IBL) προτιμάται σε πολλές περιπτώσεις καθώς ενσωματώνει με απλό τρόπο εμπειρικές σχέσεις για την μοντελοποίηση των φαινομένων υψηλότερης τάξης και είναι επίσης ταχύτερη. Για το κλείσιμο της τύρβης στη διατύπωση αυτή συνηθίζεται να χρησιμοποιείται η ιδέα της εγκόλπωσης (entrainment) που εισήχθη από τον Head [10] και αργότερα επεκτάθηκε από τον Green [11] ως μέθοδος υστέρησης-εγκόλπωσης (lag-entrainment method). Η μέθοδος αυτή, με τροποποιήσεις για αποκολλημένες ροές, χρησιμοποιείται ως βάση σε πολλές μεθόδους VII όπως αυτές των Melnik και Drela ενώ ο LeBalleur [12] χρησιμοποιεί μια παρόμοια μέθοδο. Εναλλακτικά, ο Whitfield χρησιμοποιεί μία ολοκληρωτική μέθοδο μέσης κινητικής ενέργειας για να κλείσει το πρόβλημα της τύρβης.

### 1.3.3 Μέθοδοι Σύζευξης

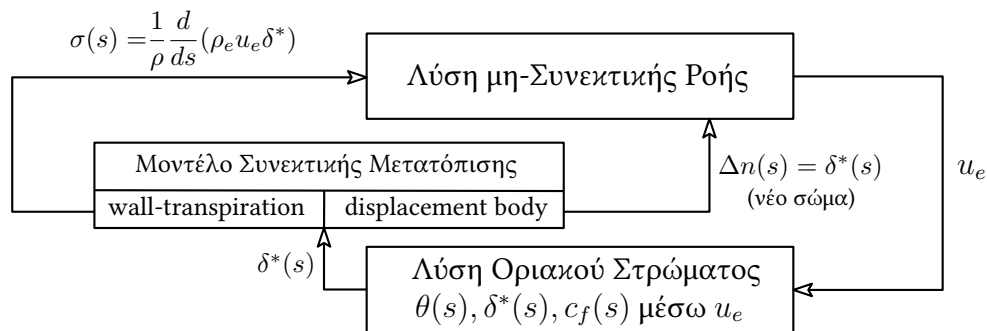
Η κλασική επίλυση του οριακού στρώματος όπως περιγράφεται από τον Thwaites [13] φαίνεται στο Σχήμα 1-5 και δεν συμπεριλαμβάνει μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης. Η μέθοδος αυτή δίνει αποδεκτά αποτελέσματα μόνο σε περιπτώσεις προσκολλημένης ροής, σπάνια συγκλίνει σε ισχυρές αλληλεπιδράσεις ενώ αποτυγχάνει πλήρως σε αποκολλημένες ροές.



Σχήμα 1-5: Μονόδρομη σύζευξη συνεκτικής/μη-συνεκτικής ροής (κλασική επίλυση ΟΣ).

Η απουσία μοντέλου για την συνεκτική μετατόπιση δεν επιτρέπει τη μοντελοποίηση της πτώσης άντωσης λόγω συνεκτικότητας και τελικά της απώλειας στήριξης ενώ, κυρίως για χαμηλούς αριθμούς  $Re$ , η κατανομή πίεσης θα αποκλίνει σημαντικά. Ακόμα, αν το πεδίο ταχύτητας  $u_e(s)$  που προέκυψε από τη λύση της μη-συνεκτικής ροής οδηγήσει σε αποκόλληση, η λύση των εξισώσεων του ΟΣ θα αποτύχουν στο σημείο εκείνο και η διαδικασία θα τερματιστεί λόγω της Ιδιομορφίας Goldstein (Goldstein Singularity) [14].

Η αποτυχία της μεθόδου αυτής εν συντομία οφείλεται στο ότι στο σημείο της αποκόλλησης υπάρχει μόνο μία επιτρεπόμενη τιμή της  $du_e/ds$  για το οριακό στρώμα. Έτσι, το μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης είναι απαραίτητο καθώς μέσω αυτού η ροή του οριακού στρώματος μπορεί να επηρεάσει την ιδανική ώστε να επιβάλλει στο σημείο αποκόλλησης την μοναδική τιμή για την  $du_e/ds$  [2, Κεφ. 4.12.2]. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η σύζευξη γίνεται αμφίδρομη όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-6 όπου η ροή των βελών υποδικνύει μία Απευθείας (Direct) μέθοδο σύζευξης. Η απευθείας μέθοδος σύζευξης αποτυγχάνει και πάλι στο σημείο αποκόλλησης λόγω της Ιδιομορφίας Goldstein καθώς δεν επιτρέπεται στην λύση οριακού στρώματος να μεταβάλλει άμεσα την ταχύτητα στο σημείο αποκόλλησης. Στο σημείο εκείνο θα πρέπει είτε να χρησιμοποιηθεί μία αντίστροφη μέθοδος ή να μην υπάρχει ιεραρχία στην εναλλαγή πληροφορίας μεταξύ συνεκτικής και μη-συνεκτικής ροής ώστε η ιδιομορφία να παρακαμφθεί.



Σχήμα 1-6: Αμφίδρομη σύζευξη συνεκτικής/μη-συνεκτικής ροής με μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης (ύπαρξη ιεραρχίας στην εναλλαγή πληροφορίας μεταξύ μη-συνεκτικής και συνεκτικής ροής).

Συνοπτικά οι τρόποι σύζευξης είναι οι εξής.

- **Απευθείας (Direct):** Συγκλίνει μόνο για προσκολλημένες ροές (ενδέχεται να χρειαστεί υπο-χαλάρωση (under-relaxation) σε ορισμένες περιπτώσεις) ενώ αποκλίνει για ροές με μικρή ή πλήρη αποκόλληση.
- **Πλήρως-Αντίστροφη (Fully-Inverse):** Συγκλίνει μόνο για αποκολλημένες ροές (ενδέχεται να χρειαστεί υπο-χαλάρωση (under-relaxation) σε ορισμένες περιπτώσεις) ενώ αποκλίνει για προσκολλημένες ροές.
- **Ημι-Αντίστροφη (Semi-Inverse):** Δύναται να συγκλίνει σε κάθε περίπτωση.
- **Ψεύδο-Ταυτόχρονη (Quasi-Simultaneous):** Δύναται να συγκλίνει σε κάθε περίπτωση.
- **Πλήρως-Ταυτόχρονη (Fully-Simultaneous):** Δύναται να συγκλίνει σε κάθε περίπτωση.

Ορισμένες επιτυχημένες μέθοδοι σύζευξης τελικά είναι αυτές των Veldman [15] και LeBalleur [12] ενώ η Πλήρως-Ταυτόχρονη μέθοδος των Drela & Giles [16] φαίνεται να είναι η πιο αξιόπιστη δίνοντας αρκετά καλά αποτελέσματα για πολύ ισχυρές αλληλεπιδράσεις και έντονα αποκολλημένες ροές. Οι κώδικες XFOIL [17] και MSES [18] είναι εφαρμογές της μεθόδου αυτής που επιλύει τις εξισώσεις συνεκτικής και μη-συνεκτικής ροής ταυτόχρονα μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Newton [19]. Τέλος, ο κώδικας Foil2W [20], που περιγράφεται και επεκτείνεται για δύο σώματα (Foil2E) στην παρούσα εργασία, βασίζεται στην μέθοδο σύζευξης του XFOIL με ίδια μοντελοποίηση για το οριακό στρώμα αλλά διαφορετική διατύπωση για τη μη-συνεκτική ροή.

## 1.4 Ανασκόπηση Μέθοδων για Αεροτομές

Μέσα στις δεκαετίες του '70 και '80 υπήρξε μία σημαντική ανάπτυξη των μεθόδων VII από πολλούς επιστήμονες και μηχανικούς στον τομέα τις αεροδυναμικής. Σήμερα, ορισμένες από αυτές τις μεθόδους χρησιμοποιούνται ακόμα ευρύτατα στον σχεδιασμό αεροτομών ενώ πρόσφατα η ενσωμάτωση τους στις τρεις διαστάσεις για την ταχύτερη ανάλυση αεροσκαφών διερευνάται στον χώρο της αεροναυπηγικής βιομηχανίας [21].

Ορισμένοι από τους πιο γνωστούς κώδικες VII είναι ο GRUMFOIL (NASA) των Melnik, Chow και Mead [22] που χρησιμοποιεί μία μέθοδο πλήρους ροϊκού δυναμικού <sup>1</sup> για την μη-συνεκτική ροή και ολοκληρωτική διατύπωση για το οριακό στρώμα και το απόρρευμα. Το μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης είναι αυτό της διαπνοής τοιχώματος και η αλληλεπίδραση γίνεται με ημι-αντίστροφο τρόπο. Το κλείσιμο των εξισώσεων του ΟΣ γίνεται με τη μέθοδο lag-entrainment ενώ στην ακμή εκφυγής μοντελοποιούνται φαινόμενα ανώτερης τάξης. Επέκταση του κώδικα για τον εντοπισμό φυσαλίδων αποκόλλησης θα μπορούσε να θεωρηθεί η δουλειά των Vatsa και Carter [23] που μέσω ενός τοπικού μοντέλου διαταραχής που επιβάλλει στην κύρια λύση του GRUMFOIL μπορεί και συλλαμβάνει τις φυσαλίδες αυτές. Ο LeBalleur (ONERA) χρησιμοποιεί μία μέθοδο

<sup>1</sup>Γενικευμένη μορφή ροϊκού δυναμικού για συμπιεστές ροές.

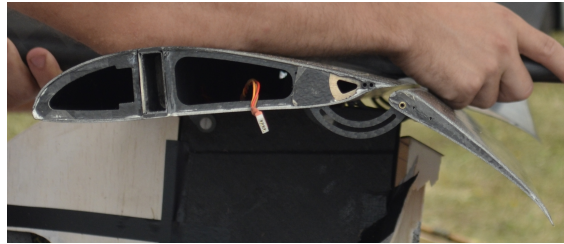
ροϊκού δυναμικού με διαφορική ή ολοκληρωτική διατύπωση για το ΟΣ και με παρόμοιο μοντέλο για τη συνεκτική μετατόπιση. Η αλληλεπίδραση γίνεται με απευθείας ή ημι-αντίστροφο τρόπο με βοήθεια ειδικού αλγορίθμου για υπο-χαλάρωση. Το κλείσιμο της τύρβης πραγματοποιείται με μία μέθοδο παρόμοια της lag-entrainment και με ειδικά προφίλ ταχυτήτων για αποκολλημένες ροές. Σε ίδια γενική κατεύθυνση κινήθηκε και ο Whitfield [24] ο οποίος όμως χρησιμοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση μέσης κινητικής ενέργειας στο κλείσιμο της τύρβης σε αντίθεση με τους προηγούμενους. Ίσως, ο μέχρι σήμερα πιο επιτυχημένος/διαδεδομένος κώδικας συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης να θεωρείται ο XFOIL του Drela καθώς χρησιμοποιείται ευρύτατα στους τομείς της αεροναυπηγικής και της αιολικής ενέργειας και είναι κώδικας ανοιχτού λογισμικού. Η μη-συνεκτική ροή στην περίπτωση αυτή αλληλεπιδρά μέσω διαπνοής τοιχώματος με την συνεκτική η οποία περιγράφεται από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας (two-equation dissipation method). Το τυρβώδες κλείσιμο πραγματοποιείται μέσω των προφίλ ταχυτήτων του Swafford [25] ενώ λύνεται μία επιπλέον εξίσωση που εναλλάσσεται ανάλογα τον τύπο της ροής: στην στρωτή ροή για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης και στην τυρβώδη για την υστέρηση του συντελεστή μέγιστης διατμητικής τάσης για ροές που αποκλίνουν από την ισορροπία. Για την μεταβολή του συντελεστή μέγιστης διατμητικής τάσης από την ισορροπία (equilibrium) εφαρμόζεται η μέθοδος lag-entrainment του Green [11] δίνοντας μία βοηθητική εξίσωση που στην ουσία είναι μια απλουστευμένη μορφή της εξίσωσης μεταφοράς τάσεων (stress-transport equation) των Bradshaw & Ferriss [26, 27]. Επίσης, για αεροτομές πολλαπλών στοιχείων η μέθοδος MSES του Drela εφαρμόζει παρόμοια διατύπωση για το οριακό στρώμα αλλά η μη-συνεκτική ροή υπολογίζεται με την μέθοδο Euler αντί μίας μεθόδου ιδιομορφιών όπως στο XFOIL, και η συνεκτική μετατόπιση μοντελοποιείται με τη μέθοδο του μετατοπισμένου σώματος.

Οι παραπάνω μέθοδοι δίνουν πολύ καλές προβλέψεις της άντωσης και οπισθέλκουσας για γωνίες ακόμα και μετά την απώλεια στήριξης (post-stall region). Ειδικά η μέθοδος του Drela συγκλίνει σε αποδεκτά αποτελέσματα ακόμα και σε πολύ σημαντικές αποκολλήσεις για ακραίως χαμηλούς αριθμούς Reynolds -ως και 1000- εφόσον υπάρχει λύση μόνιμης ροής και απουσία αποβολής στροβίλων (vortex shedding) [28] ενώ η πλήρως συζευγμένη λύση μέσω του καθολικού συστήματος Newton επιτρέπει την μοντελοποίηση των μεταβατικών φουσαλίδων (transitional bubbles).

## 1.5 Στόχος Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η ανάπτυξη υπολογιστικής μεθόδου για σχεδιασμό αεροτομών υψηλής άντωσης, δύο στοιχείων, μεταβλητής γεωμετρίας και λειτουργικών σε πολύ χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Αρχικά, αναπτύχθηκε η υπολογιστική μέθοδος για την αεροδυναμική ανάλυση αεροτομών δύο στοιχείων σε χαμηλούς αριθμούς Re και στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η σύζευξη αυτής με πακέτο πεπερασμένων στοιχείων για την μοντελοποίηση της μεταβολής της γεωμετρίας μέσω συρμάτων κράματος μνήμης σχήματος (SMA wires). Το κίνητρο για την ανάπτυξη ενός τέτοιου υπολογιστικού εργαλείου είναι η βελτιστοποίηση της πτέρυγας του ήδη υπάρ-

χοντος μη-επανδρωμένου αεροσκάφους πολλαπλών ρόλων ATLAS V της ομάδας του Πανεπιστημίου Πατρών ATLAS Aero Group του οποίου τον αεροδυναμικό και δομικό σχεδιασμό συντόνισε ο γραφόντας. Μέχρι σήμερα, βάσει των γνώσεων του συγγραφέα, δεν υπάρχουν αεροτομές υψηλής άντωσης δύο στοιχείων για εξαιρετικά μικρούς αριθμούς Reynolds (κάτω των 500k) και με ιδιότητες μεταβολής γεωμετρίας, δημοσιευμένες στην επιστημονική βιβλιογραφία.



(α') Αεροτομή τύπου morphing (TU Munich). (β') Αεροτομή δύο στοιχείων (Univ. of Zagreb)

Σχήμα 1-7: Αεροτομές υψηλής άντωσης αερομοντέλων στον διαγωνισμό Air Cargo Challenge - Stuttgart τον Αύγουστο του 2015.



Σχήμα 1-8: Μη-επανδρωμένο αεροσκάφος ATLAS V κατά την περίοδο των δοκιμαστικών πτήσεων στο αεροδρόμιο Μεσολογίου πριν την συμμετοχή του στο διαγωνισμό Air Cargo Challenge - Stuttgart τον Αύγουστο του 2015.

# Κεφάλαιο 2

## Διατύπωση Ιδανικής Ροής

Στο παρόν κεφάλαιο διατυπώνεται αρχικά το μαθηματικό πρόβλημα για το πεδίο ταχύτητας της καθαρά μη-συνεκτικής ροής με τη μέθοδο των ιδιομορφιών (ή πάνελ) και η γενικευμένη του λύση. Έπειτα, περιγράφεται η διατύπωση της μεθόδου πάνελ που εφαρμόζεται στον υπολογιστικό κώδικα Foil2W [20, 29] για τη μόνιμη ροή και η επέκτασή της για δεύτερο σώμα στον κώδικα Foil2E. Τέλος, παρουσιάζεται η διατύπωση για τη ταχύτητα διαταραχής μέσω της οποίας αλληλεπιδρά η μη-συνεκτική ροή με τη συνεκτική και που αποτελεί το μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης. Καθώς στον υπολογιστικό κώδικα Foil2E εξετάζεται η μόνιμη ροή σε διατάξεις δύο σωμάτων, όροι όπως αυτοί για την αποβολή στροβιλότητας σε μη-μόνιμη ροή παραλείπονται.

### 2.1 Διατύπωση Προβλήματος

Υποθέτοντας ασυμπίεστη και αστρόβιλη ροή, το ροϊκό πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως η βαθμίδα μίας βαθμωτής συνάρτησης δυναμικού  $\varphi$ . Αφού η ροή θεωρείται ασυμπίεστη, η απόκλιση του πεδίου ταχυτήτων  $\mathbf{V}$  είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.1)$$

το οποίο υπονοεί ότι η  $\varphi$  θα πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης Laplace. Υπάρχει λοιπόν αναλυτική λύση που περιγράφει το πλήρες ροϊκό πεδίο εφόσον επιλεχθούν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες. Για ένα πρόβλημα αεροδυναμικής, συνήθως θεωρείται ένα σώμα εμβυθισμένο στο ροϊκό πεδίο. Έτσι, οι συνοριακές συνθήκες στο τοίχωμα του σώματος  $S_w$  θα πρέπει να επιβάλλουν μηδενική κάθετη στο τοίχωμα συνιστώσα ταχύτητας, δηλαδή

$$\nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.2)$$

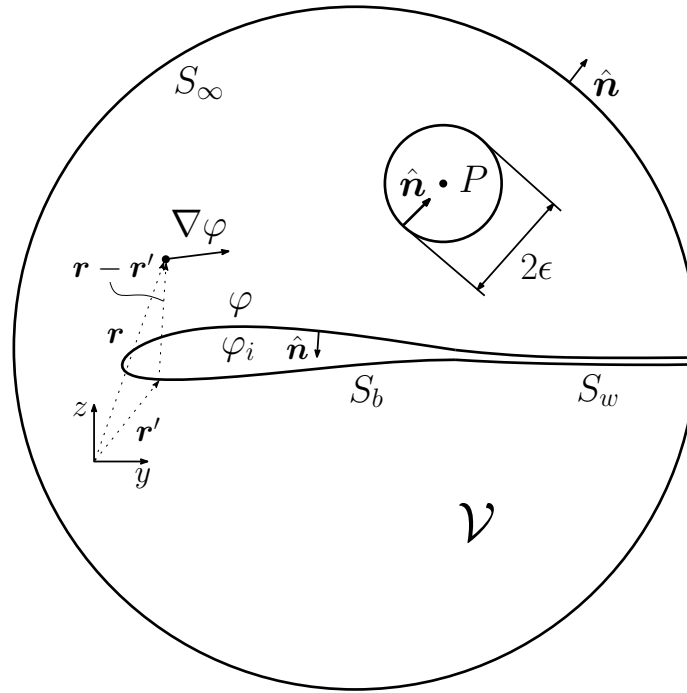
Η παραπάνω συνθήκη είναι γνωστή ως συνθήκη μη-εισχώρησης και διατυπώνεται για ένα σύστημα συντεταγμένων προσδεμένο στο σώμα και ορίζοντας το  $\hat{\mathbf{n}}$  ως το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια  $S_b$  διάνυσμα. Επιπλέον, οποιαδήποτε διαταραχή το σώμα εισάγει στη ροή, αυτή θα πρέπει να φθίνει μακριά από το σώμα και θεωρητικά σε άπειρη απόσταση να προσεγγίζει την ταχύτητα ελεύθερης ροής  $\mathbf{V}_\infty$ . Αυτό συμπληρώνει

τις συνοριακές συνθήκες και επιβάλλεται μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \mathbf{V}_\infty \quad (2.3)$$

όπου  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$  είναι το διάνυσμα θέσης και  $\mathbf{V}_\infty$  το διάνυσμα ταχύτητας ελεύθερης ροής.

## 2.2 Γενικευμένη Λύση Ροϊκού Δυναμικού



Σχήμα 2-1: Διατύπωση και ονοματολογία προβλήματος ροϊκού δυναμικού.

Το μαθηματικό πρόβλημα έγκειται στην λύση του πεδίου ταχύτητας για ένα σώμα αυθαίρετης γεωμετρίας με σύνορο  $S_b$ , περιφραγμένο σε όγκο  $\mathcal{V}$  με εξωτερικό σύνορο  $S_\infty$ . Επίσης, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{n}}$  ορίζεται με φορά εκτός του πεδίου της λύσης. Με χρήση του θεωρήματος απόκλισης για το διάνυσμα  $\mathbf{q} = \varphi_1 \nabla \varphi_2 - \varphi_2 \nabla \varphi_1$ , λαμβάνεται η σχέση [30, σελ. 215]

$$\int_S (\varphi_1 \nabla \varphi_2 - \varphi_2 \nabla \varphi_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\mathcal{V}} (\varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 \varphi_1) dV \quad (2.4)$$

η οποία είναι γνωστή ως η δεύτερη ταυτότητα του Green. Δηλαδή, αντί της επίλυσης του ολοκληρώματος όγκου, η λύση μεταφέρεται στα σύνορα  $S$ . Εν γένει, θεωρείται ένα σύνορο για το αεροδυναμικό σώμα  $S_b$ , ένα για το απόρρευμα  $S_w$  και τα σύνορα που

περικλύουν το πεδίο της λύσης  $S_\infty$  και επομένως  $S = S_b + S_w + S_\infty$ . Θέτοντας

$$\varphi_1 = \frac{1}{r} \quad , \quad \varphi_2 = \varphi \quad (2.5)$$

όπου  $r$  είναι το μέτρο του διανύσματος θέσης και  $\varphi_1$  είναι στην ουσία το δυναμικό ενός στοιχείου πηγής (source element). Για ένα χωρικό σημείο  $P(x, y, z)$  εκτός του όγκου  $\mathcal{V}$  (πεδίο λύσης), αμφότερα  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  ικανοποιούν την εξίσωση Laplace στο σημείο εκείνο και η εξίσωση (2.4) γίνεται

$$\int_S \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (2.6)$$

Αν το σημείο  $P$  περικλύεται από τον όγκο  $\mathcal{V}$  θα πρέπει να εξαιρεθεί από την ολοκλήρωση, δηλαδή να θεωρηθεί εκτός πεδίου λύσης, περικλύοντας το σε μία σφαίρα ακτίνας  $\epsilon$ . Συμβολίζοντας την επιφάνεια της σφαίρας ως  $S_\epsilon$  η εξίσωση (2.4) παίρνει τη μορφή

$$\int_{S+S_\epsilon} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (2.7)$$

$$- \int_{S_\epsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r^2} \right) dS + \int_S \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (2.8)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (2.8) υπολογίστηκε εισάγοντας ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Θεωρώντας τώρα ότι  $\epsilon \rightarrow 0$  και ότι η συνάρτηση δυναμικού συμπεριφέρεται ομαλά στο εσωτερικό της σφαίρας, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$- \int_{S_\epsilon} \frac{\varphi}{r^2} dS = -4\pi\varphi(P) \quad (2.9)$$

και το δυναμικό σε ένα οποιοδήποτε σημείο  $P$  εντός του πεδίου της λύσης  $\mathcal{V}$  είναι

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (2.10)$$

Ομοίως, στην περίπτωση ενός σημείου  $P$  στην επιφάνεια του συνόρου  $S_b$ , η ολοκλήρωση γίνεται μόνο στο ημισφαίριο που περιβάλλει το σημείο αυτό και το δυναμικό δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (2.11)$$

Για την ροή εντός του αεροδυναμικού σώματος, συνόρου  $S_b$ , είναι

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_b} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi_i - \varphi_i \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (2.12)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (2.11) και (2.12) λαμβάνεται μία σχέση για το εσωτερικό



δυναμικό

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_b} \left( \frac{1}{r} \nabla(\varphi - \varphi_i) - (\varphi - \varphi_i) \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w + S_\infty} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.13)$$

Η συνεισφορά από το ολοκλήρωμα στην  $S_\infty$  είναι

$$\varphi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.14)$$

Το δυναμικό αυτό εξαρτάται από το προεπιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Τέλος, θεωρώντας ένα λεπτό στρώμα απορρεύματος, με σταθερό  $\partial\varphi/\partial n$  (καθώς ένα απόρρευμα δεν μπορεί να φέρει φορτία) και εισάγοντας τις θεμελιώδεις λύσεις

$$\text{Δίπολο (doublet)} \quad - \mu = \varphi - \varphi_i \quad (2.15)$$

$$\text{Πηγή (source)} \quad - \sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \quad (2.16)$$

οι οποίες έχουν έμφυτη την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών καθώς μηδενίζονται για  $r \rightarrow \infty$ , το δυναμικό στις 3-διαστάσεις σε ένα σημείο  $P$  του πεδίου λύσης είναι

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_b} \sigma \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_b + S_w} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS + \varphi_\infty(P) \quad (2.17)$$

ενώ για σημείο  $P$  πάνω σε σύνορο ο όρος  $1/4\pi$  αντικαθίσταται από τον  $1/2\pi$  αφού η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε ημισφαίριο.

Στις 2-διαστάσεις, το δυναμικό της πηγής είναι  $\varphi_1 = \ln r$  και το σημείο ολοκλήρωσης περικλείεται από κύκλους αντί για σφαίρες δίνοντας

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \sigma \ln r dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_b + S_w} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] dS + \varphi_\infty(P) \quad (2.18)$$

ενώ για σημείο  $P$  πάνω στο όριο, ο όρος  $1/2\pi$  αντικαθίσταται με  $1/\pi$ .

### 2.3 Παρούσα Διατύπωση Μη-Συνεκτικού Πεδίου

Η παραπάνω ενότητα συμπεριλήφθηκε για λόγους πληρότητας και θεωρητικού υποβάθρου καθώς η παρούσα διατύπωση βασίζεται εν μέρει σε ειδική περίπτωση της σχέσης (2.18) για το δυναμικό. Αντί τώρα έχοντας ως αφετηρία την εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστης ροής (2.1), η διατύπωση ξεκινάει από μία ίσως γενικότερη συνθήκη.

Σύμφωνα με το θεώρημα αποσύνθεσης του Helmholtz κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα ενός αστρόβιλου  $\mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r}, t)$  και ενός ασυμπίεστου  $\mathbf{V}_\omega(\mathbf{r}, t)$  διανυσματικού πεδίου. Για ένα διανυσματικό πεδίο μόνιμης ταχύτητας με

επαρκώς απομακρυσμένο σύνορο  $S_\infty$  ισχύει

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty(\mathbf{r}) + \nabla\varphi(\mathbf{r}) + \nabla \times (\psi(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (2.19)$$

όπου  $\mathbf{V}_\infty(\mathbf{r})$  η ταχύτητα ελεύθερης ροής για την οποία είναι  $\mathbf{V}_\infty(\mathbf{r}) = V_{\infty_y} \hat{\mathbf{y}} + V_{\infty_z} \hat{\mathbf{z}}$ ,  $\varphi(\mathbf{r})$  το δυναμικό και  $\psi(\mathbf{r})$  η ροϊκή συνάρτηση (streamfunction).

Θεωρώντας τώρα ότι η ροή είναι ασυμπίεστη και ότι το πεδίο είναι ιδιόμορφα στροβιλό, δηλαδή ότι η στροβιλότητα είναι κατανεμημένη στις συνοριακές επιφάνειες του σώματος, λαμβάνονται οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r}) = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{ασυμπίεστο}) \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{V}_\omega(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla^2 \psi \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (\text{ιδιόμορφα στροβιλό}) \quad (2.21)$$

όπου  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  το πεδίο στροβιλότητας του χωρίου  $\mathcal{V}$ .

Οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν την διατύπωση αυτή είναι ο μηδενισμός των ταχυτήτων διαταραχής στο άπειρο

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.22)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V}_\omega(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.23)$$

καθώς και η συνθήκη μη-εισχώρησης για το τοίχωμα  $S_b$ , με  $\hat{\mathbf{n}} \in S_b$

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.24)$$

Εφαρμόζοντας την δεύτερη ταυτότητα του Green στις εξισώσεις (2.20) και (2.21) λαμβάνουμε την ολοκληρωματική αναπαράσταση του δυναμικού  $\varphi(\mathbf{r})$  και της ροϊκής συνάρτησης  $\psi(\mathbf{r})$  για οποιαδήποτε θέση  $\mathbf{r}$  του πεδίου ροής  $\mathcal{V}$ . Η αναπαράσταση των δύο πεδίων βασίζεται στη διατύπωση πηγών για το δυναμικό και στροβιλότητας για τη ροϊκή συνάρτηση (Ριζιώτης, [31]) αντίστοιχα και είναι η ακόλουθη

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r}') \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dS \quad (2.25)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \gamma(\mathbf{r}') \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dS \quad (2.26)$$

αγνοώντας στη ροϊκή συνάρτηση τον όρο της διανομής στροβιλότητας στο απόρρευμα καθώς δεν εξετάζεται η περίπτωση μη-μόνιμης ροής με αποβολή στροβιλότητας (vortex shedding) και ορίζοντας ως  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα  $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$  και  $\mathbf{r}'$  το διάνυσμα  $\mathbf{r}' \in S_b$ . Φαίνεται λοιπόν ότι η εξίσωση (2.25) είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης (2.18) για  $\mu = 0$  και χωρίς τον όρο δυναμικού για το σύνορο  $S_\infty$  αφού έχει συμπεριληφθεί με άμεσο τρόπο η ταχύτητα ελεύθερης ροής στη σχέση (2.19). Είναι όμως γνωστό ότι η κυκλοφορία δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί μόνο από στοιχεία πηγών και για το λόγο αυτό όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία πηγών πρέπει να συνοδεύονται από δίπολα ή στρόβιλους για

την μοντελοποίηση ροών με κυκλοφορία. Έτσι, η σχέση (2.26) για τη ροϊκή συνάρτηση είναι απαραίτητη και εισάγει το στοιχείο του στροβίλου για το οποίο ισχύει

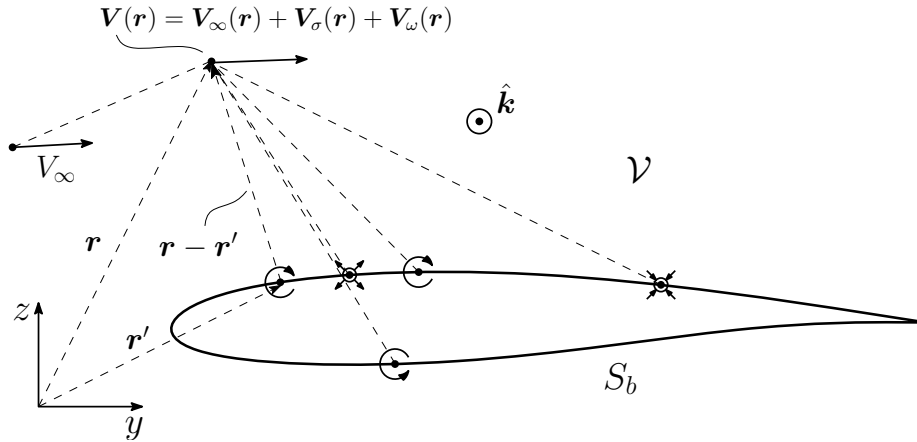
$$\text{Στρόβιλος (vortex)} \quad -\gamma = \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \psi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = -\frac{d\mu}{ds} \quad (2.27)$$

Παίρνοντας τη βαθμίδα του δυναμικού  $\varphi(\mathbf{r})$  και τον στροβιλισμό της ροϊκής συνάρτησης  $\psi(\mathbf{r})$  λαμβάνουμε τις ταχύτητες διαταραχής  $\mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r})$  και  $\mathbf{V}_\omega(\mathbf{r})$  αντίστοιχα.

$$\mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r}) = \nabla \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dS = \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS \quad (2.28)$$

$$\mathbf{V}_\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times (\psi(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} (\gamma(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{k}}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dS = \int_{S_b} (\gamma(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS \quad (2.29)$$

όπου  $\mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  η συνάρτηση πυρήνα (kernel function) η οποία είναι αυστηρά γεωμετρική, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  οι οποίες συνήθως είναι γνωστές κατά την διατύπωση του προβλήματος.



Σχήμα 2-2: Η ταχύτητα στο πεδίο  $\mathcal{V}$  δίνεται ως υπέρθεση της ελεύθερης ροής και των ιδιομορφιών της αεροτομής  $S_b$ .

Συνθέτοντας τώρα τις εξισώσεις (2.28), (2.29) με την εξίσωση για την συνθήκη μη-εισχώρησης (2.24) και την εξίσωση (2.19), λαμβάνουμε την ολοκληρωματική συνθήκη για το διάνυσμα θέσης πάνω στην αεροτομή,  $\mathbf{r} \in S_b$

$$\left\{ \int_{S_b} \sigma(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS + \int_{S_b} (\gamma(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{V}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.30)$$

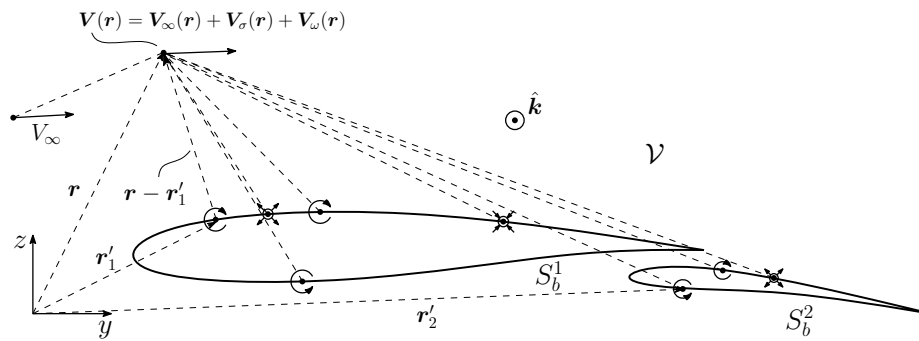
όπου  $\hat{\mathbf{n}}$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S_b$  της αεροτομής.

Η εξίσωση (2.30) αποτελεί την βάση των αριθμητικών μεθόδων πάνελ και έχει ως αγνώστους τις κατανομές πηγών  $\sigma$  και στροβίλων  $\gamma$  οι οποίες βρίσκονται πάνω στο

σύνορο  $S_b$  της αεροτομής. Από τη στιγμή που η τιμή των ιδιομορφιών υπολογιστεί με χρήση της παραπάνω εξίσωσης, η ταχύτητα  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  για τη μόνιμη, ασυμπίεστη, καθαρά μη-συνεκτική ροή υπολογίζεται για οποιοδήποτε σημείο του πεδίου  $\mathcal{V}$  μέσω των εξισώσεων (2.19),(2.28),(2.29). Η συγκεκριμένη διατύπωση είναι ένα πρόβλημα Neumann.

## 2.4 Επέκταση Διατύπωσης Μη-Συνεκτικού Πεδίου για Πολλαπλά Σώματα

Η παραπάνω διατύπωση του προβλήματος συμπεριλάμβανε μόνο ένα σώμα (αεροτομή) πάνω στην οποία διανέμονταν οι ιδιομορφίες και ικανοποιούνταν η συνθήκη μη-εισχώρησης. Η αναλυτική μέθοδος (σχήμα 2-1) εύκολα επεκτείνεται για πολλαπλά σώματα (αεροτομές) για την μοντελοποίηση υπεραντωτικών διατάξεων (slats, fowler flaps κλπ.), διδιάστατης μελέτης διπλάνου ή και canard. Στον υπολογιστικό κώδικα Foil2E η διατύπωση των εξισώσεων καθαρά μη-συνεκτικής ροής των προηγούμενων κεφαλαίων επεκτείνεται για τη μελέτη της αεροδυναμικής δύο σωμάτων (αεροτομών).



Σχήμα 2-3: Η ταχύτητα στο πεδίο  $\mathcal{V}$  δίνεται ως υπέρθεση της ελεύθερης ροής και των ιδιομορφιών των αεροτομών  $S_b^1, S_b^2$  (επέκταση σχήματος 2-2 για δύο σώματα).

Για πολλαπλά σώματα, η καθαρά μη-συνεκτική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N (\mathbf{V}_\sigma^n(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\omega^n(\mathbf{r})) \quad (2.31)$$

όπου  $N$  ο αριθμός των αεροδυναμικών σωμάτων με σύνορο  $S_b^n$ . Για τις ταχύτητες διαταραχής  $\mathbf{V}_\sigma^n$  και  $\mathbf{V}_\omega^n$  ισχύουν όπως και πριν οι συνοριακές συνθήκες (2.22), (2.23) ενώ τώρα η συνθήκη μη-εισχώρησης (σχέση (2.24)) πρέπει να ικανοποιείται πάνω στα σύνορα  $S_b^n$ . Επίσης, οι ταχύτητες διαταραχής διατυπώνονται όπως και πριν από τις εξισώσεις (2.28) και (2.29) με συνέπεια κάθε σύνορο  $S_b^n$  να φέρει ιδιομορφίες στροβίλων και πηγών.

Έτσι, η βασική εξίσωση (2.30) για την μέθοδο πάνελ, επεκτείνεται για πολλαπλά σώματα

και για  $\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}} \in S_b^n$  ως εξής

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \left\{ \int_{S_b^n} \sigma_n(\mathbf{r}'_n) \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) dS + \int_{S_b^n} (\gamma_n(\mathbf{r}'_n) \times \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) dS \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{V}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}}$$

(2.32)

όπου  $\sigma_n, \gamma_n$  και  $\mathbf{r}'_n$  η κατανομή των πηγών, στροβίλων και το διάνυσμα θέσης αντίστοιχα για κάθε επιφάνεια  $S_b^n$ . Εφόσον, η συνθήκη (2.32) πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε αεροτομή το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$  σαρώνει όλα τα  $N$  το πλήθος σώματα.

Η αναλυτική επέκταση του προβλήματος για πολλαπλά σώματα είναι αρκετά απλή. Οι επιπλέον δυσκολίες εισέρχονται κατά τη διάρκεια της διακριτοποίησης του προβλήματος και της αριθμητικής λύσης και συνήθως σχετίζονται με την αλληλεπίδραση των αεροδυναμικών σωμάτων όταν έρχονται σε κοντινή επαφή και το υπολογιστικό κόστος της λύσης.

## 2.5 Μοντέλο Συνεκτικής Μετατόπισης

Στις προηγούμενες ενότητες έγινε η διατύπωση των εξισώσεων της καθαρά μη-συνεκτικής και ασυμπίεστης ροής. Τώρα, για τη μοντελοποίηση της συνεκτικής μετατόπισης και την αλληλεπίδραση μεταξύ συνεκτικής και μη-συνεκτικής ροής εισάγεται ένα πεδίο διαταραχής  $\mathbf{u}^*(\mathbf{r})$  στην εξίσωση (2.19) ή (2.31). Το πεδίο αυτό είναι αποτέλεσμα της μεθόδου διαπνοής τοιχώματος (wall-transpiration) που είχε αναφερθεί στην υποενότητα 1.3.1. Έτσι, σε συνδυασμό με την διατύπωση του οριακού στρώματος, προκύπτει η ισοδύναμη μη-συνεκτική ροή (EIF) ως υπέρθεση του μη-συνεκτικού και του συνεκτικού πεδίου και η οποία εκφράζεται από τη σχέση

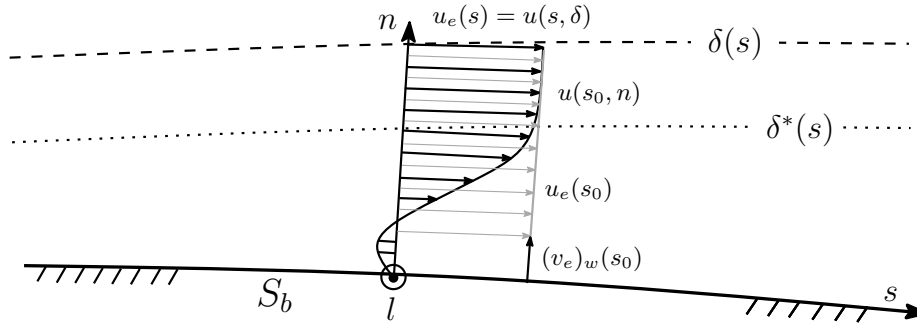
$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\sigma(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\omega(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \quad (\text{EIF, 1 Σώμα}) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N (\mathbf{V}_\sigma^n(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\omega^n(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_n^*(\mathbf{r})) \quad (\text{EIF, } n \text{ Σώματα}) \quad (2.34)$$

όπου  $\mathbf{u}^i \equiv \mathbf{V}$  όπου ο συμβολισμός αυτός με δείκτη  $i$  (inviscid) για να τονίζεται ο διαχωρισμός μεταξύ της καθαρά μη-συνεκτικής ταχύτητας και της ταχύτητας διαταραχής  $\mathbf{u}^*$ .

### 2.5.1 Μαθηματικό Μοντέλο Διαπνοής Τοιχώματος

Στο μοντέλο της διαπνοής τοιχώματος, το πεδίο διαταραχής  $\mathbf{u}^*$  αποτελείται από μία διανομή κάθετης ταχύτητας στο σύνορο της αεροτομής  $S_b$  και στο απόρρευμα  $S_w$  η οποία αναπαριστά το έλλειμα μάζας (mass defect) της πραγματικής συνεκτικής ροής (RVF) σε σχέση με την ισοδύναμη μη-συνεκτική (EIF), στο πάχος του οριακού στρώματος.



Σχήμα 2-4: Οι κατανομές ταχυτήτων  $u_e(s)$  (EIF) και  $u(s, n)$  (RVF) καθώς και η ταχύτητα διαπνοής τοιχώματος  $(v_e)_w(s)$  για ελαφρώς αποκολλημένο ΟΣ.

Η συνθήκη για την κάθετη αυτή ταχύτητα βρίσκεται δουλεύοντας με τη διαφορά των εξισώσεων συνέχειας μόνιμης ροής μεταξύ των δύο ροών στο καμπυλόγραμμο σύστημα  $sln$  πάνω στην αεροτομή  $S_b$  (Σχήμα 2-4)

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho_e u_e) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho_e v_e) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho v) = 0 \quad (2.36)$$

Αφαιρόντας την εξίσωση (2.36) από την (2.35) και ολοκληρώνοντας στο πάχος του οριακού στρώματος  $\delta$  λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial n}(\rho_e v_e - \rho v) dn = - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial s}(\rho_e u_e - \rho u) dn \quad (2.37)$$

Υποθέτοντας ότι τα μεγέθη της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής (EIF) δεν μεταβάλλονται σημαντικά κατά το ύψος του οριακού στρώματος (προσέγγιση μηδενικής τάξης) και ότι οι τιμές τους είναι ίσες με αυτές των αντίστοιχων μεγεθών της συνεκτικής ροής (RVF) στο πάχος  $\delta$  του οριακού στρώματος (θέση πλήρως ανεπτυγμένης ροής), η εξίσωση (2.37) γράφεται

$$(\rho_e v_e)_w = \frac{d}{ds} \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dn \quad (2.38)$$

όπου  $(\cdot)_w$  δηλώνει ότι το μέγεθος υπολογίζεται στο σύνορο (wall) του σώματος  $S_b$ . Ορίζοντας επιπλέον το πάχος μετάθεσης (displacement thickness) ως

$$\delta^* = \frac{1}{\rho_e u_e} \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dn \quad (2.39)$$

η εξίσωση (2.38) γράφεται

$$(\rho_e v_e)_w = \frac{d}{ds}(\rho_e u_e \delta^*) \quad (2.40)$$

Η σχέση (2.40) παρέχει την επιπλέον κάθετη στο σύνορο  $S_b$  ταχύτητα (wall-transpiration velocity) η οποία πρέπει να επιβληθεί στην μη-συνεκτική ροή, έτσι ώστε αυτή να είναι ισοδύναμη προς τη συνεκτική ροή, σε ότι αφορά την παροχή μάζας του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα. Επίσης, αποτελεί την συνοριακή συνθήκη στο σύνορο  $S_b$  για την ταχύτητα διαταραχής  $\mathbf{u}^*$  κατ' αντιστοιχία της συνθήκης μη-εισχώρησης. Παρατηρείται λοιπόν ότι μέσω της συγκεκριμένης συνθήκης για τη μοντελοποίηση της συνεκτικής μετατόπισης, το πεδίο της EIF πάυει να είναι εφαπτόμενο στην αεροτομή. Τέλος, η μορφή της παραπάνω συνθήκης που είναι πρώτης τάξης (η ποσότητα  $\rho_e u_e$  θεωρείται σταθερή κατά το πάχος του ΟΣ) προήλθε αρχικά από τον Lighthill[32]. Για ασυμπίεστη ροή, η εξίσωση (2.40) μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή που συσχετίζει την απαιτούμενη κατανομή έντασης των πηγών  $\sigma^*(s)$  με την ταχύτητα διαπνοής  $(v_e)_w$  βάσει του μοντέλου για το έλλειμα μάζας.

$$\sigma^*(s) = (v_e)_w = \frac{d}{ds}(u_e \delta^*) = \frac{dm}{ds} \quad (2.41)$$

όπου  $m \equiv u_e \delta^*$ <sup>1</sup> το έλλειμα μάζας (mass defect) για ασυμπίεστες ροές.

## 2.5.2 Διατύπωση Πεδίου Διαταραχής

Το πεδίο διαταραχής  $\mathbf{u}^*$  (ή ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης) δίνεται από την ακόλουθη ολοκληρωματική αναπαράσταση

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{r}) = \int_{S_b} \mathbf{u}^*(\mathbf{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{k}} dS + \int_{S_b + S_w} \mathbf{u}^*(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS \quad (2.42)$$

με συνάρτηση πυρήνα  $\mathcal{K} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$

όπου  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στο σύνορο  $S_b$ .

Η αναπαράσταση (2.42) προκύπτει παίρνοντας τη βαθμίδα ενός δυναμικού διαταραχής  $\varphi^*(\mathbf{r})$  του οποίου η μορφή δίνεται από την άμεση διατύπωση μέσω της δεύτερης ταυτότητας του Green (ενότητα 2.2). Έτσι, η ταχύτητα σε κάθε σημείο του πεδίου ροής εκφράζεται συναρτήσει της εφαπτομενικής και κάθετης διανομής της πάνω στο σύνορο της αεροτομής και του «πηδήματος» της κάθετης διανομής στο απόρρευμα (wake sheet velocity jump). Στο απόρρευμα υποθέτουμε ότι η εφαπτομενική συνιστώσα της  $\mathbf{u}^*$  δεν παρουσιάζει ασυνέχεια.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (2.42) πάνω στο σύνορο της  $S_b$ , δηλαδή για  $\mathbf{r} \in S_b$ , και προβάλλοντας την ταχύτητα στο μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα  $\hat{\boldsymbol{\tau}} \in S_b$ , παίρνουμε

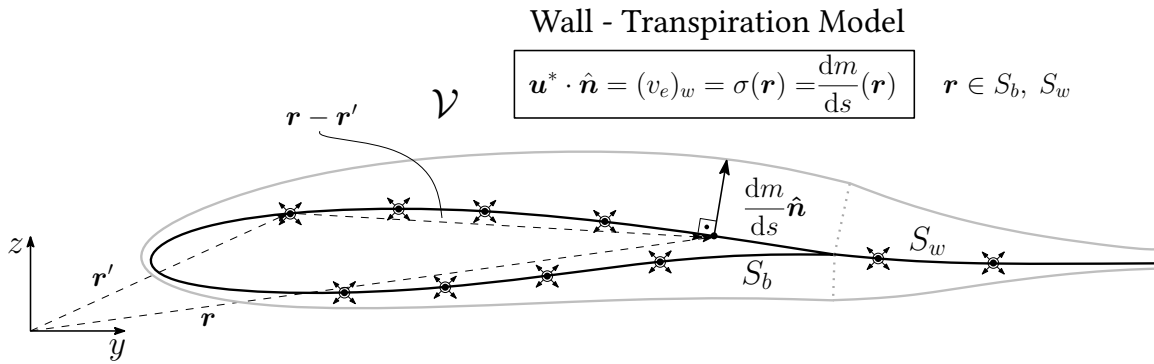
$$u_{\boldsymbol{\tau}}^*(\mathbf{r}) = \int_{S_b} u_{\boldsymbol{\tau}}^*(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_b + S_w} u_v^*(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dS \quad (2.43)$$

<sup>1</sup>Το έλλειμα μάζας συνήθως ορίζεται και ως  $m \equiv \rho_e u_e \delta^*$  όταν συμπεριλαμβάνονται και φαινόμενα συμπίεστικότητας.

όπου  $u_v^* = \mathbf{u}^* \cdot \hat{\mathbf{n}}$  και  $u_\tau^* = \mathbf{u}^* \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$  το μέτρο της κάθετης και εφαπτομενικής συνιστώσας της  $\mathbf{u}^*$  αντίστοιχα. Η (2.43) αποτελεί μία ολοκληρωματική εξίσωση για την εφαπτομενική ταχύτητα στο σημείο  $\mathbf{r} \in S_b$ , ως συνάρτηση μια διανομής κάθετων ταχυτήτων στην επιφάνεια της αεροτομής και το απόρρευμα. Η επίλυση της εξίσωσης (2.43) γίνεται μέσω της συνθήκης στο σύνορο  $S_b$  για το έλλειμα μάζας, δηλαδή

$$\mathbf{u}^* \cdot \hat{\mathbf{n}} = |\mathbf{u}_v^*| = \sigma^*(s) = (v_e)_w = \frac{dm}{ds} \quad (2.44)$$

έτσι ώστε οι εξισώσεις οριακού στρώματος να ορίζουν το πεδίο διαταραχής και να πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση συνεκτικής και μη-συνεκτικής ροής για την εύρεση του ισοδύναμου μη-συνεκτικού πεδίου (EIF).



Σχήμα 2-5: Η διανομή κάθετης ταχύτητας στην αεροτομή και το απόρρευμα λόγω της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης  $\mathbf{u}^*$ .

Συνθέτοντας τις (2.43), (2.44) λαμβάνεται η βασική εξίσωση για την αριθμητική μέθοδο του πεδίου διαταραχής

$$\mathbf{u}_\tau^*(\mathbf{r}) - \int_{S_b} \mathbf{u}_\tau^*(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_b+S_w} \frac{dm}{ds}(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dS \quad (2.45)$$

Οι εξισώσεις (2.30) και (2.45) μαζί με τη συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής συμπληρώνουν το μαθηματικό πρόβλημα της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής εφόσον υπάρχει και ένα μοντέλο οριακού στρώματος για την κατανομή του ελλείματος μάζας στην αεροτομή.

## 2.6 Επέκταση Διατύπωσης Πεδίου Διαταραχής για Πολυλαπλά Σώματα

Όπως και στην ενότητα 2.4 δόθηκε η επέκταση της διατύπωσης της καθαρά μη-συνεκτικής ροής, έτσι και στην ενότητα αυτή για λόγους πληρότητας δίνεται η επέκταση της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης όπως αυτή εφαρμόστηκε στον υπολογιστικό κώδι-

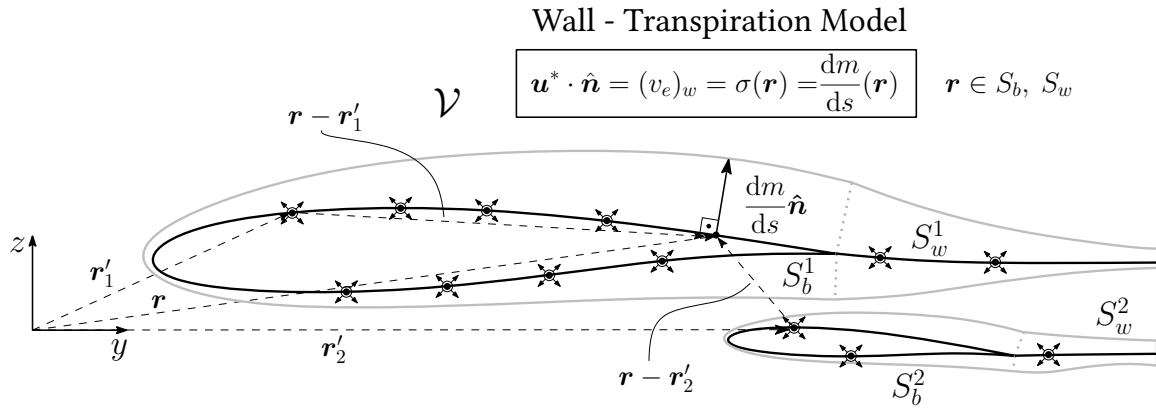


κα Foil2E.

Για πολλαπλά σώματα, πλήθους  $N$ , η εξίσωση (2.45) επεκτείνεται ως εξής

$$u_{\tau}^*(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N \left( \int_{S_b^n} u_{\tau}^*(\mathbf{r}'_n) \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \right) = \sum_{n=1}^N \left( \int_{S_b^n + S_w^n} \frac{dm}{ds}(\mathbf{r}'_n) \mathcal{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \, dS \right) \quad (2.46)$$

Οι εξισώσεις (2.32) και (2.46) μαζί με τις  $N$  το πλήθος συνθήκες Kutta στην ακμή εκφυγής συμπληρώνουν το μαθηματικό πρόβλημα της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής για διατάξεις πολλών αεροδυναμικών σωμάτων εφόσον συνοδεύονται από μοντέλο οριακού στρώματος για το έλλειμα μάζας.



Σχήμα 2-6: Η διανομή κάθετης ταχύτητας στην αεροτομή και το απόρρευμα λόγω της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης  $\mathbf{u}^*$  (επέκταση για δύο σώματα).

## Κεφάλαιο 3

# Μοντέλο Οριακού Στρώματος

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται η διατύπωση των εξισώσεων για το συμπιεστό οριακό στρώμα που χρησιμοποιούνται για τη σύζευξη της μη-συνεκτικής ροής με τη συνεκτική μέσω του ελλείματος μάζας. Το μοντέλο για το οριακό στρώμα είναι αυτό των Drela και Giles [16] και βασίζεται στις ολοκληρωτικές εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας (two-equation dissipation method) ενώ οι σχέσεις συσχέτισης για την τυρβώδη ροή προκύπτουν από εμπειρικά και αναλυτικά προφίλ ταχυτήτων. Επίσης, μία επιπλέον εξίσωση συμπεριλαμβάνεται στο σύστημα που εναλλάσσεται ανάλογα τον τύπο της ροής: στην στρωτή ροή για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης και στην τυρβώδη για την υστέρηση του συντελεστή μέγιστης διατμητικής τάσης για ταχύτατα μεταβαλλόμενες ροές. Για την μεταβολή του συντελεστή μέγιστης διατμητικής τάσης από την ισορροπία (equilibrium) εφαρμόζεται η μέθοδος lag-entrainment δίνοντας μία βοηθητική εξίσωση που στην ουσία είναι μια απλουστευμένη μορφή της εξίσωσης μεταφοράς των διατμητικών τάσεων (stress-transport equation).

### 3.1 Οι Εξισώσεις Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes (N-S) περιγράφουν την συμπεριφορά ενός, εν γένει, συμπιεστού και ιξώδους ρευστού και αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) των οποίων μέχρι σήμερα η αναλυτική λύση δεν έχει βρεθεί. Αν και για ιστορικούς λόγους οι εξισώσεις N-S ονομάζονται συχνά οι εξισώσεις ορμής, στη μοντέρνα βιβλιογραφία όταν κανείς αναφέρεται στην επίλυση των εξισώσεων αυτών, υπονοεί το πλήρες σύστημα των εξισώσεων συνέχειας, ορμής και ενέργειας [33, Κεφ. 2.8]. Στην ενότητα αυτή οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής παρουσιάζονται στη γενική τους μορφή μαζί με τις παραδοχές για το λεπτό οριακό στρώμα (thin-shear layer) καθώς αποτελούν την βάση της διατύπωσης του ολοκληρωτικού οριακού στρώματος (IBL).

Η γενική συντηρητική (conservation form) ή αλλιώς αποκλίνουσα (divergence form) μορφή των εξισώσεων συνέχειας και ορμής για το μέσο ροϊκό πεδίο  $\mathbf{u} = \langle u, v, w \rangle$  είναι

$$\text{Συνέχεια} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Ορμή} \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (3.2)$$

Αναλυτικότερα, οι συνιστώσες της εξίσωσης ορμής γράφονται

$$\text{Ορμή - } x \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (3.3\alpha')$$

$$\text{Ορμή - } y \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (3.3\beta')$$

$$\text{Ορμή - } z \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (3.3\gamma')$$

όπου  $p$  η πίεση,  $\boldsymbol{\tau}$  ο τανυστής δεύτερης τάξης για τις ιξώδεις τάσεις που είναι συμμετρικός και για το 3-διάστατο πρόβλημα έχει 6 ανεξάρτητες συνιστώσες και  $\mathbf{f}$  το διάνυσμα δύναμης πεδίου (π.χ. βαρυτική, ηλεκτρική και μαγνητική δύναμη) που δρα άμεσα στην ογκομετρική μάζα του στοιχειώδους ρευστού.

### 3.1.1 Γενικευμένη Μορφή Τανυστή Ιξωδών Τάσεων

Για ένα Νευτώνιο και ισότροπο ρευστό απαιτούνται δύο συντελεστές για την περιγραφή των ιξωδών τάσεων: ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους  $\mu$  (διάτμηση) και ο δεύτερος συντελεστής ιξώδους  $\lambda$  (διαστολή). Τελικά, η γραμμική καταστατική εξίσωση για τις τάσεις διατυπώνεται ως

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda(\nabla \mathbf{u}) \mathbb{I} + \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (3.4)$$

με  $\mathbb{I}$  τον μοναδιαίο πίνακα. Βάσει της σχέσης (3.4) και της Υπόθεσης του Stokes [34] ότι για τον δεύτερο συντελεστή ιξώδους ισχύει ότι  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , ώστε ο τανυστής τάσεων να έχει μηδενική πρώτη αναλλοίωτη (ίχνος), λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση για τις ιξώδεις τάσεις

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}\sigma \mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\sigma & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \cdot & 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\sigma & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \cdot & \cdot & 2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

όπου  $\sigma \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}$  ο ρυθμός διαστολής (dilatation rate). Συγκεντρώνοντας τώρα τους όρους των επιφανειακών δυνάμεων της πίεσης και των τάσεων (πρώτοι δύο όροι στο δεξί μέρος της σχέσης (3.2)) και υπολογίζοντας το ίχνος βάσει πια της γενικότερης σχέσης (3.4),

ορίζεται η μέση πίεση

$$\bar{p} \equiv -\text{tr}(p\mathbb{I} - \boldsymbol{\tau}) = p - (\lambda + \frac{2}{3}\mu)(\nabla\mathbf{u}) \quad (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \geq 0 \quad (3.6)$$

με τη ποσότητα  $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$  να ονομάζεται ιξώδες όγκου (bulk viscosity) και από φυσική σκοπιά να συνδέεται με τους μηχανισμούς εκφυλισμού κατά την διάρκεια της μεταβολής του όγκου. Δηλαδή, το ιξώδες όγκου, λειτουργεί σαν απόσβεση στις ογκομετρικές ταλαντώσεις που συμβαίνουν σε περιπτώσεις όπως αυτή της απορρόφησης του ήχου και των κρουστικών κυμάτων. Η Υπόθεση του Stokes, ότι δηλαδή το ιξώδες όγκου είναι μηδενικό, είναι αποδεκτή σε αραιά μονοατομικά αέρια, όχι όμως σε πολυατομικά αέρια όπως το διοξείδιο του άνθρακα για το οποίο το ιξώδες αυτό είναι τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το δυναμικό ιξώδες  $\mu$  [35].

## 3.2 Παραδοχές Λεπτού Οριακού Στρώματος

Όταν το γινόμενο του πάχους του οριακού στρώματος  $\delta$  με την καμπυλότητα  $\kappa$  των ροϊκών γραμμών είναι μικρό ( $\delta\kappa \ll 1$ ) μπορούν να γίνουν οι ακόλουθες παραδοχές στο τοπικά-καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $s, n$ , γνωστές ως thin shear layer (TSL) approximations [2, Κεφ. 4.3].

$$v \ll u \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} \ll \frac{\partial u}{\partial n} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \simeq 0 \quad (3.9)$$

Η παραδοχή (3.7) προκύπτει ως γεωμετρική συνέπεια των ροϊκών γραμμών που για λεπτά οριακά στρώματα είναι σχεδόν παράλληλες στο τοίχωμα ενώ η (3.8) λόγω της απότομης μεταβολής της  $u$  κατά το πάχος του οριακού στρώματος (σχήμα 2-4). Μαζί, οι (3.7),(3.8) οδηγούν στην απλοποίηση του τανυστή ιξωδών τάσεων στις δύο διαστάσεις έτσι ώστε μόνο οι όροι εκτός της διαγωνίου να είναι σημαντικοί.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{ss} & \tau_{sn} \\ \tau_{ns} & \tau_{nn} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Τέλος, η σχέση (3.9) πηγάζει από την προσέγγιση ότι οι ροϊκές γραμμές στο οριακό στρώμα είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους. Έτσι, η εξίσωση της  $n$ -ορμής μπορεί να παραλειφθεί με την παραδοχή ότι κατά το πάχος του ΟΣ η πίεση παραμένει σταθερή και ίση με την πίεση της μη-συνεκτικής ροής  $p_e(s)$  στο όριο του.

$$p(s, n) \simeq p_e(s) \quad (3.11)$$

Επομένως, η βαθμίδα της πίεσης κατά μήκος της ροής στην εξίσωση  $s$ -ορμής μπορεί να αντικατασταθεί με την βαθμίδα της ταχύτητας μη-συνεκτικής ροής  $u_e$  στο όριο του ΟΣ

βάσει της εξίσωσης ορμής για τη μη-συνεκτική ροή (Euler).

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{dp_e}{ds} = \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} + \rho_e v_e \frac{\partial u_e}{\partial n} \simeq \rho_e u_e \frac{du_e}{ds} \quad (3.12)$$

### 3.3 Εξισώσεις Οριακού Στρώματος

Βάσει των παραδοχών του λεπτού οριακού στρώματος οι εξισώσεις του οριακού στρώματος γράφονται

$$\text{Συνέχεια} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial n} = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{Ορμή} \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \rho v \frac{\partial u}{\partial n} = \rho_e u_e \frac{du_e}{ds} + \frac{\partial \tau}{\partial n} \quad (3.14)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζονται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων με την  $s$  στη διεύθυνση της ροής και την  $n$  στην διεύθυνση κάθετα στο τοίχωμα. Επίσης, η διατμητική τάση δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} - \overline{\rho u'v'} \quad (3.15)$$

όπου ο όρος  $\overline{\rho u'v'}$  είναι οι γνωστές Τάσεις Reynolds (Reynolds Stress) και εμπεριέχει τις διαταραχές  $u', v'$  των (μέσων) ταχυτήτων  $u, v$  για την συνεισφορά της τύρβης και την συσχέτιση της με την μέση ροή.

### 3.4 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Οριακού Στρώματος

#### 3.4.1 Εξίσωση Ορμής von Karman

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις προκύπτουν άμεσα από τις εξισώσεις Prandtl (3.13), (3.14) ολοκληρώνοντας αυτές κατά το πάχος του οριακού στρώματος. Αρχικά, η ολοκληρωτική εξίσωση ορμής, γνωστή ως εξίσωση von Karman (von Karman integral momentum equation) δίνεται ως

$$\frac{d}{ds}(\rho_e u_e^2 \theta) = \tau_w - \rho_e u_e \delta^* \frac{du_e}{ds} \quad (3.16)$$

όπου ο δείκτης  $()_e$  υποδηλώνει ποσότητες στο όριο του οριακού στρώματος ενώ ο δείκτης  $()_w$  στο τοίχωμα της αεροτομής. Το πάχος μετάθεσης  $\delta^*$  ορίστηκε στην ενότητα 2.39 ενώ το πάχος ορμής  $\theta$  (momentum thickness) ορίζεται ως

$$\theta = \int_0^{n_e} (U - U^2) dn \quad \text{με} \quad U \equiv \frac{u}{u_e} \quad (3.17)$$

Η εξίσωση von Karman στην αδιάστατη μορφή της γράφεται ως

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{c_f}{2} - (H + 2 - M_e^2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{ds} \quad (3.18)$$

ορίζοντας τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{\delta^*}{\theta} && \text{παράμετρος σχήματος (shape parameter)} \\ c_f &\equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} && \text{συντελεστής τριβής τοιχώματος (skin friction coefficient)} \\ M_e &\equiv \frac{u_e}{\alpha_e} && \text{αριθμός Mach στο άκρο του ΟΣ (edge Mach number)} \end{aligned}$$

Η εξίσωση (3.18) είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατύπωση για το ΟΣ καθώς περιγράφει την εξέλιξη του πάχους ορμής  $\theta$  που είναι μεταβλητή ελέγχου.

### 3.4.2 Εξίσωση Κινητικής Ενέργειας

Η ολοκληρωτική εξίσωση κινητικής ενέργειας που προκύπτει από τις εξισώσεις Prandtl (3.13), (3.14) πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση ορμής με την ταχύτητα  $u$  γράφεται

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} \rho_e u_e^3 \theta^* \right) = \mathcal{D} - \rho_e u_e^2 \delta^{**} \frac{du_e}{ds} \quad (3.19)$$

ορίζοντας τις παρακάτω νέες ποσότητες

$$\begin{aligned} \theta^* &\equiv \int_0^{n_e} (U - U^3) dn \quad \left( U \equiv \frac{u}{u_e} \right) && \text{πάχος κιν. ενέργειας (kin. energy thickness)} \\ \mathcal{D} &\equiv \int_0^{n_e} \tau \frac{\partial u}{\partial n} dn && \text{ολοκλήρωμα εκφυλισμού (dissipation integral)} \\ \delta^{**} &\equiv \int_0^{n_e} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_e} \right) \frac{u}{u_e} dn && \text{πάχος ροής πυκνότητας (density flux thickness)} \end{aligned}$$

Το πάχος ροής πυκνότητας  $\delta^{**}$  αντιπροσωπεύει το έργο των βαθμίδων πίεσης σε συνδυασμό με τις μεταβολές πυκνότητας κατά το πάχος του ΟΣ και το ολοκλήρωμα εκφυλισμού  $\mathcal{D}$  την κινητική ενέργεια που εκφυλίζεται σε θερμότητα λόγω των δυνάμεων συνεκτικότητας. Η αδιάστατη μορφή της εξίσωσης κινητικής ενέργειας διατυπώνεται ως

$$\frac{d\theta^*}{ds} = 2c_{\mathcal{D}} - \left( \frac{2H^{**}}{H^*} + 3 - M_e^2 \right) \frac{\theta^*}{u_e} \frac{du_e}{ds} \quad (3.20)$$

με τις παρακάτω νέες αδιάστατες ποσότητες

$$\begin{aligned}
 H^* &\equiv \frac{\theta^*}{\theta} && \text{παράμετρος σχήματος κιν. ενέργειας (kin. energy shape parameter)} \\
 H^{**} &\equiv \frac{\delta^{**}}{\theta} && \text{παράμετρος σχήματος ροής πυκνότητας (density flux shape parameter)} \\
 c_{\mathcal{D}} &\equiv \frac{\mathcal{D}}{\rho_e u_e^3} && \text{συντελεστής εκφυλισμού (dissipation coefficient)}
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (3.18) και (3.20) λαμβάνεται μία εξίσωση για την παράμετρο σχήματος κινητικής ενέργειας

$$\boxed{\theta \frac{dH^*}{ds} = 2c_{\mathcal{D}} - H^* \frac{c_f}{2} - [2H^{**} + H^*(1 - H)] \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{ds}} \quad (3.21)$$

Η εξίσωση ορμής (3.18) μαζί με την εξίσωση για την κινητική ενέργεια (3.21) αποτελούν μία μέθοδο δύο εξισώσεων βασιζόμενη στο κλείσιμο της τύρβης μέσω του συντελεστή εκφυλισμού (two-equation dissipation method). Χαρακτηριστικό των μεθόδων δύο εξισώσεων είναι ότι μπορούν να μοντελοποιήσουν επαρκώς μικρές αποκολλήσεις σε αντίθεση με τις μεθόδους μίας εξίσωσης που αδυνατούν.

### 3.5 Σχέσεις Συσχέτισης Παραμέτρων

Η διατύπωση δύο εξισώσεων για το οριακό στρώμα συνοδεύεται από τις παρακάτω σχέσεις συσχέτισης που αφορούν τις άγνωστες παραμέτρους

$$\begin{aligned}
 H^* &= H^* (H_k, M_e, Re_{\theta}), && H^{**} = H^{**} (H_k, M_e) \\
 c_f &= c_f (H_k, M_e, Re_{\theta}), && c_{\mathcal{D}} = c_{\mathcal{D}} (H_k, M_e, Re_{\theta})
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου  $Re_{\theta} \equiv \frac{\rho_e u_e \theta}{\mu}$  ο συντελεστής Reynolds πάχους ορμής. Επίσης,  $H_k$  ορίζεται η κινηματική παράμετρος σχήματος για σταθερή πυκνότητα κατά το πάχος του ΟΣ.

$$H_k = \frac{\int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dn}{\int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dn} \quad (3.23)$$

Η σχέση για την κινηματική παράμετρο σχήματος που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατύπωση είναι αυτή του Whitfield [36] για αδιαβατική ροή αέρα

$$H_k = \frac{H - 0.290M_e^2}{1 + 0.113M_e^2} \quad (3.24)$$

### 3.5.1 Συσχετίσεις Στρωτής Ροής

Για τη στρωτή ροή, οι σχέσεις (3.22) μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας την μονοπαραμετρική οικογένεια προφίλ ταχυτήτων Falkner-Skan όπως υποδιανύει ο Drela [37]. Έτσι, λαμβάνονται οι παρακάτω σχέσεις συσχέτισης

$$H^* = \begin{cases} 1.515 + 0.076 \frac{(4 - H_k)^2}{H_k}, & H_k < 4 \\ 1.515 + 0.040 \frac{(H_k - 4)^2}{H_k}, & H_k > 4 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$Re_\theta \frac{c_f}{2} = \begin{cases} -0.067 + 0.01977 \frac{(7.4 - H_k)^2}{H_k - 1}, & H_k < 7.4 \\ -0.067 + 0.022 \left(1 - \frac{1.4}{H_k - 6}\right)^2, & H_k > 7.4 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$Re_\theta \frac{2c_D}{H^*} = \begin{cases} 0.207 + 0.00205(4 - H_k)^{5.5}, & H_k < 4 \\ 0.207 - 0.003 \frac{(H_k - 4)^2}{[1 + 0.02(H_k - 4)^2]}, & H_k > 4 \end{cases} \quad (3.27)$$

Η σχέση για την παράμετρο  $H^{**}$  δίνεται και πάλι από τον Whitfield [36] για τυρβώδεις ροές.

$$H^{**} = \left( \frac{0.064}{H_k - 0.8} + 0.251 \right) M_e^2 \quad (3.28)$$

Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται και για την στρωτή ροή, στην παρούσα διατύπωση, καθώς έχει πολύ μικρή επιρροή σε διηχητικές ροές και αμελητέα στις υποηχητικές ροές.

### 3.5.2 Συσχετίσεις Τυρβώδους Ροής

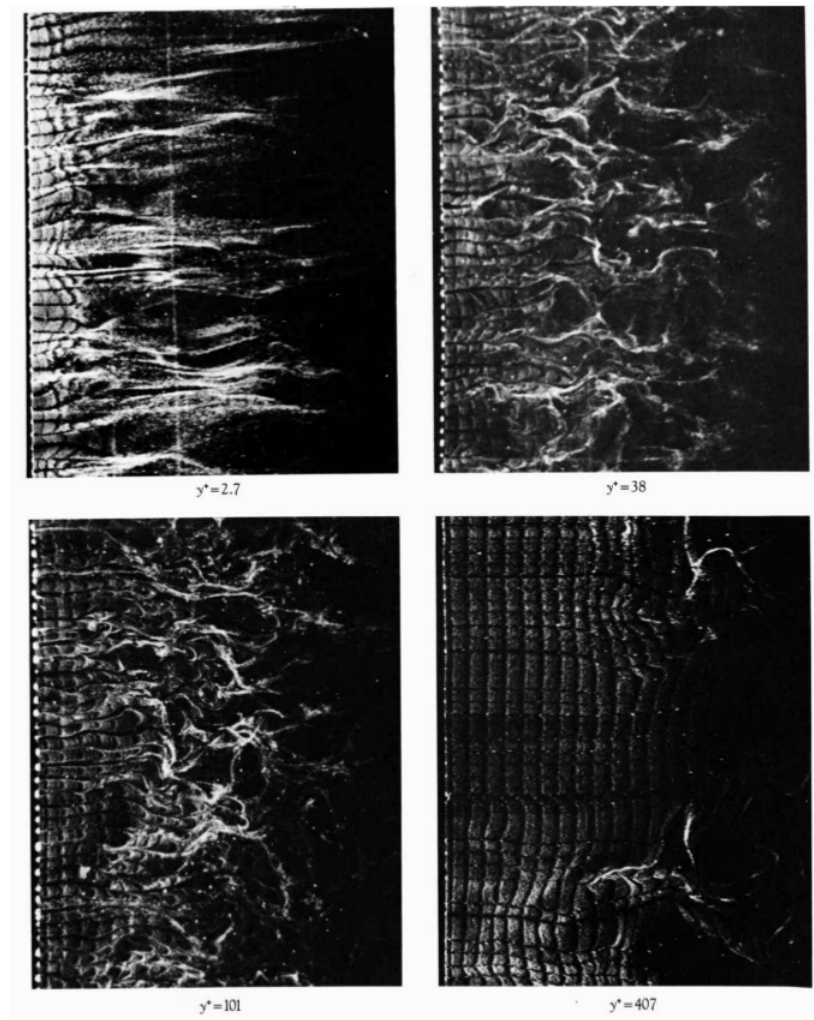
Για τυρβώδεις ροές η εύρεση των σχέσεων συσχέτισης (3.22) είναι πολύ πιο δύσκολη. Η επίλυση των εξισώσεων ΟΣ για την εύρεση τέτοιων σχέσεων γίνεται πολύ πιο περίπλοκη καθώς εισάγονται οι τάσεις Reynolds για τις οποίες ένα εμπειρικό μοντέλο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να τις συσχετίσει με τη μέση ροή. Επίσης, τα τυρβώδη ΟΣ (ΤΟΣ) έχουν μια δομή δύο στρωμάτων (two-layer structure)<sup>1</sup> με το κάθε στρώμα να αντιδρά

<sup>1</sup>Τα ΤΟΣ αποτελούνται από την εσωτερική περιοχή (inner region ή wall layer) και την εξωτερική περιοχή (outer region ή wake layer). Η εσωτερική περιοχή περιλαμβάνει τα viscous sublayer, buffer layer, fully turbulent region και εκεί οι διαδικασίες ανταλλαγής ενέργειας είναι σε ισορροπία, δηλαδή η παραγωγή ενέργειας αντισταθμίζεται από τον εκφυλισμό της. Έτσι, η ροή καθορίζεται από τις τοπικές συνθήκες. Στην εξωτερική περιοχή, κυρίαρχοι είναι οι όροι της συναγωγής και του εκφυλισμού που ισοσταθμίζονται από τον όρο διάχυσης. Η ροή εκεί εξαρτάται από τις τοπικές συνθήκες αλλά και την προϊστορία στον προσήνεμο [9].



διαφορετικά στις κλίμακες πίεσης και διάτμησης. Αυτό σημαίνει ότι, σε αντίθεση με στρωτά ΟΣ, μονοπαραμετρικά προφίλ ταχυτήτων δεν επαρκούν και αναζητείται μία σύνθετη συνάρτηση για το προφίλ ταχύτητας.

Οι εμπειρικές σχέσεις για την τυρβώδη ροή στην παρούσα διατύπωση λαμβάνονται



Σχήμα 3-1: Οπτικοποίηση υποστρωμάτων ΤΟΣ σε κανάλι νερού με φυσαλίδες υδρογόνου. Τα διάφορα υποστρώματα που διακρίνονται είναι: viscous sublayer ( $y^+ = 2.7$ ), buffer layer ( $y^+ = 38$ ), fully turbulent region ( $y^+ = 101$ ) και wake region ( $y^+ = 407$ ).

μέσω των σχέσεων για την τριβή στο τοίχωμα και των προφίλ ταχυτήτων του Swafford [25].

$$F_c c_f = 0.3e^{-1.33H_k} \left[ \log_{10} \left( \frac{Re_\theta}{F_c} \right) \right]^{-1.74-0.31H_k} + 0.00011 \left[ \tanh \left( 4 - \frac{H_k}{0.875} \right) - 1 \right] \quad (3.29)$$

όπου

$$F_c = \sqrt{1 + 0.2M_e^2} \quad (3.30)$$

και

$$\frac{u}{u_e} = \frac{u_\tau}{u_e} \frac{s}{0.09} \arctan(0.09y^+) + \left(1 - \frac{u_\tau}{u_e} \frac{s\pi}{0.18}\right) \tanh^{1/2} [\alpha(\eta/\theta)^b] \quad (3.31)$$

όπου

$$\frac{u_\tau}{u_e} = \left|\frac{c_f}{2}\right|^{1/2}, \quad s = \frac{c_f}{|c_f|}, \quad y^+ = \frac{u_\tau}{\mu_e/\rho_e} \eta, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.32)$$

Οι σταθερές  $a, b$  μπορούν να υπολογιστούν για οποιαδήποτε  $\theta, \delta^*$  μέσω της σχέσης (3.29) και αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα από τη σχέση για το προφίλ ταχύτητας (3.31) στις σχέσεις ορισμού των  $\theta, \delta^*$ , (3.17) και (2.39) αντίστοιχα. Τελικά, βρίσκεται η παρακάτω σχέση συσχέτισης για τη παράμετρο σχήματος κινητικής ενέργειας

$$H^* = \begin{cases} 1.505 + \frac{4}{Re_\theta} + \left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_\theta}}\right) \frac{(H_o - H_k)^{1.6}}{H_k}, & H_k < H_o \\ 1.505 + \frac{4}{Re_\theta} + (H_k - H_o)^2 \left[ \frac{0.04}{H_k} + \frac{0.007 \ln Re_\theta}{(H_k - H_o + 4/\ln Re_\theta)^2} \right], & H_k > H_o \end{cases}$$

όπου

$$H_o = \begin{cases} 4, & Re_\theta < 400 \\ 3 + \frac{400}{Re_\theta}, & Re_\theta > 400 \end{cases}$$

### 3.5.3 Συντελεστής Εκφυλισμού και Εξίσωση Υστέρησης Τάσεων

Ο συντελεστής εκφυλισμού στην τυρβώδη ροή δίνεται ως το άθροισμα της συνεισφοράς της εσωτερικής περιοχής (wall layer) και την εξωτερικής περιοχής (wake layer).

$$c_D = \underbrace{\frac{c_f}{2} U_s}_{\text{wall layer}} + \underbrace{c_\tau (1 - U_s)}_{\text{wake layer}} \quad (3.33)$$

όπου ο συντελεστής διατμητικών τάσεων  $c_\tau \equiv \tau_{max}/(\rho_e u_e^2)$  εκφράζει τις διατμητικές τάσεις στην εξωτερική περιοχή (wake layer) και  $U_s$  η ισοδύναμη κανονικοποιημένη ταχύτητα ολίσθησης στο τοίχωμα (wall slip velocity) που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$U_s = \frac{H^*}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{H_k - 1}{H}\right) \quad (3.34)$$

Κάθε ένας από τους όρους της σχέσης (3.33) αποτελείται από μία κλίμακα ταχύτητας και μία κλίμακα τάσης. Ο συντελεστής τριβής στο τοίχωμα  $c_f$  εξαρτάται μόνο από τις τοπικές παραμέτρους του ΟΣ και η διατύπωση αυτή συμβαδίζει με την φυσική συμπεριφορά της εσωτερικής περιοχής που λέγεται ότι εξαρτάται αποκλειστικά από τις τοπικές συνθήκες. Αντίθετα, ο συντελεστής διατμητικών τάσεων  $c_\tau$  δεν εξαρτάται μόνο από τις τοπικές συνθήκες καθώς οι τάσεις Reynolds στην εξωτερική περιοχή (wake layer) είναι γνωστό ότι εμφανίζουν σχετικά αργή απόκριση στην αλλαγή των εξωτερικών συνθηκών (ιδιαίτερα σε χαμηλούς αριθμούς Re). Έτσι, ο συντελεστής  $c_\tau$  δεν μπορεί να γραφεί ως απευθείας συνάρτηση των τοπικών συνθηκών. Η υστέρηση στην απόκριση που εμφανίζει ο συντελεστής  $c_\tau$  προσομοιώνεται μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης (Drela [17]) ακολουθώντας την μέθοδο των Green et al. [11], η οποία διαφορική εξίσωση αποτελεί μία απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης μεταφοράς των διατμητικών τάσεων των Bradshaw και Ferriss [27].

$$\boxed{\frac{\delta}{c_\tau} \frac{dc_\tau}{ds} = 5.6(c_{\tau EQ}^{1/2} - c_\tau^{1/2}) + 2\delta \left\{ \frac{4}{3\delta^*} \left[ \frac{c_f}{2} - \left( \frac{H_k - 1}{6.7H_k} \right)^2 \right] - \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{ds} \right\}} \quad (3.35)$$

Στην παραπάνω εξίσωση  $\delta$  είναι το πάχος του ΟΣ και  $c_{\tau EQ}$  ο συντελεστής διατμητικών τάσεων για οριακό στρώμα σε ισορροπία (equilibrium boundary layer) τα οποία δίνονται από τις σχέσεις

$$\delta = \theta \left( 3.15 + \frac{1.72}{H_k - 1} \right) + \delta^* \quad (3.36)$$

$$c_{\tau EQ} = H^* \frac{0.015}{1 - U_s} \frac{(H_k - 1)^3}{H_k^2 H} \quad (3.37)$$

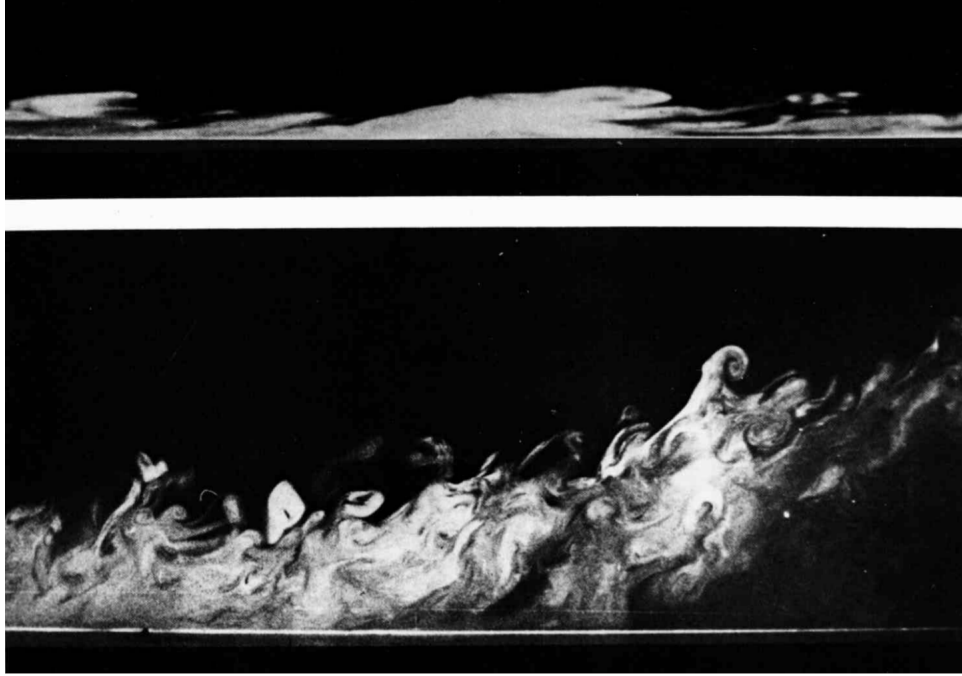
Η διατύπωση του συντελεστή εκφυλισμού (3.33), της ταχύτητας ολίσθησης (3.34) και του συντελεστή διατμητικών τάσεων σε ισορροπημένη ροή (3.37) προέρχονται από τον γεωμετρικό τόπο (locus)  $G - \beta$  για οριακά στρώματα σε ισορροπία (Clauser [38]). Ο εμπειρικός γεωμετρικός τόπος  $G - \beta$  της παρούσα διατύπωσης δίνεται από τις σχέσεις

$$G = 6.7 \sqrt{1 + 0.75\beta} \quad (3.38)$$

με

$$G \equiv \frac{H_k - 1}{H_k} \frac{1}{\sqrt{c_f/2}}, \quad \beta \equiv -\frac{2}{c_f} \frac{\delta^*}{u_e} \frac{du_e}{ds} \quad (3.39)$$

Η απόκλιση του τυρβώδους οριακού στρώματος ή απορρεύματος από τον τόπο ισορροπίας (3.38) καθορίζεται από την εξίσωση υστέρησης (lag equation) (3.35) που «ενεργοποιείται» σε ταχύτατα μεταβαλλόμενες ροές (ροές με ισχυρές αντιτιθέμενες βαθμίδες πίεσης (σχήμα 3-2), ροές σε χαλάρωση). Σε αργά μεταβαλλόμενες ροές, ο συντελεστής  $c_\tau$  δεν αποκλίνει από τον συντελεστή  $c_{\tau EQ}$  και οι σχέσεις συσχέτισης είναι αυτές της ροής σε ισορροπία (equilibrium flow).



Σχήμα 3-2: Επίδραση βαθμίδας πίεσης: σε ισχυρά ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (άνω) το ΤΟΣ εκτείνεται και μεταβαίνει σε στρωτό ενώ σε ισχυρά αντιτιθέμενη βαθμίδα πίεσης (κάτω) το πάχος του αυξάνεται και εν τέλει αποκολλάται (R.E. Falco).

### 3.6 Πρόβλεψη Σημείου Μετάβασης Ροής

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται η μέθοδος  $e^9$  για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη. Η μέθοδος αυτή, η οποία πρωτοεμφανίστηκε από τους Smith και Gamberoni [39] και τον Ingen [40], θεωρεί ότι η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη συμβαίνει όταν το πιο ασταθές Tollmien-Schlichting κύμα στο οριακό στρώμα αυξάνεται κατά ένα συντελεστή, που λαμβάνεται ίσος με  $e^9 \simeq 8100$ . Για να υπολογιστεί ο συντελεστής ενίσχυσης (amplification factor), ο ρυθμός αύξησης των διαταραχών πρέπει να συσχετιστεί με τα μεγέθη του οριακού στρώματος. Με τη χρήση της οικογένειας των προφίλ ταχυτήτων των Falkner-Skan, η εξίσωση των Orr-Sommerfeld λύνεται ως προς το ρυθμό αύξησης των διαταραχών για ένα σημαντικό εύρος τιμών του συντελεστή σχήματος του οριακού στρώματος και «ασταθών» συχνοτήτων. Σύμφωνα με τους Gleyzes et al. [41], ο χάρτης του ολοκληρώματος των ρυθμών ενίσχυσης προσεγγίζεται από ευθείες γραμμές της μορφής

$$\tilde{n} = \frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta}(H_k) [Re_\theta - Re_{\theta_o}(H_k)] \quad (3.40)$$

όπου  $\tilde{n}$  είναι ο λογάριθμος του μέγιστου λόγου ενίσχυσης και  $Re_{\theta_o}$  ο κρίσιμος αριθμός Reynolds για το πάχος ορμής πάνω από τον οποίο οι διαταραχές στο οριακό στρώμα αρχίζουν να αυξάνουν με ρυθμό  $d\tilde{n}/dRe_\theta$ .

Ο ρυθμός ενίσχυσης  $d\tilde{n}/dRe_\theta$  και ο κρίσιμος αριθμός Reynolds προσεγγίζονται από τις ακόλουθες εμπειρικές σχέσεις

$$\frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta} = 0.01 \left\{ \left[ 2.4H_k - 3.7 + 2.5 \tanh(1.5H_k - 4.65) \right]^2 + 0.25 \right\}^{1/2} \quad (3.41)$$

$$\log_{10} Re_{\theta_o} = \left( \frac{1.415}{H_k - 1} - 0.489 \right) \tanh \left( \frac{20}{H_k - 1} - 12.9 \right) + \frac{3.295}{H_k - 1} + 0.44 \quad (3.42)$$

Για όμοιες ροές (similar flows), όπου η παράμετρος  $H_k$  παραμένει σταθερή και ο  $Re_\theta$  μεταβάλλεται συναρτήσει μόνο της μεταβλητής κατεύθυνσης ροής  $s$ , ο λόγος ενίσχυσης (amplitude ratio)  $\tilde{n}$  υπολογίζεται άμεσα από τη σχέση (3.40) ως συνάρτηση του  $s$ . Η μετάβαση θεωρείται ότι συμβαίνει στο σημείο όπου ο λόγος ενίσχυσης είναι  $\tilde{n} = 9$ . Για ροές που δεν είναι όμοιες, ο λόγος ενίσχυσης υπολογίζεται από την ολοκλήρωση του ρυθμού ενίσχυσης  $d\tilde{n}/dRe_\theta$  κατάντι του σημείου που ξεκινάει η αστάθεια. Οι Gleyzes et al. [41] ολοκλήρωσαν τον ρυθμό αυτό σύμφωνα με τη σχέση

$$\tilde{n} = \int_{Re_{\theta_o}}^{Re_\theta} \frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta} dRe_\theta \quad (3.43)$$

Όμως, η σχέση (3.43) δεν είναι κατάλληλη για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης στην περίπτωση εμφάνισης φυμαλίδας αποκόλλησης καθώς ο  $Re_\theta$  ελάχιστα μεταβάλλεται στο τμήμα της φυμαλίδας όπου η ροή είναι στρωτή. Έτσι, η εξίσωση (3.43) υπονοεί ότι η ενίσχυση θα είναι πολύ μικρή στο τμήμα της φυμαλίδας, κάτι το οποίο αποδεικνύεται λανθασμένο. Μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση είναι να ολοκληρωθεί ο ρυθμός μεταβολής του  $\tilde{n}$  ως προς την κατεύθυνση της ροής  $s$ . Χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες της οικογένειας προφίλ ταχυτήτων Falkner-Skan προκύπτει ότι η χωρική μεταβολή του λόγου ενίσχυσης προσδιορίζεται από την σχέση

$$\frac{d\tilde{n}}{ds} = \frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta} \frac{dRe_\theta}{ds} = \frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta} \frac{1}{2} \left( \frac{s}{u_e} \frac{du_e}{ds} + 1 \right) \frac{\rho_e u_e \theta^2}{\mu_e s} \frac{1}{\theta} \quad (3.44)$$

και χρησιμοποιώντας τις εμπειρικές σχέσεις

$$\frac{\rho_e u_e \theta^2}{\mu_e s} \equiv \ell(H_k) = \frac{6.54H_k - 14.07}{H_k^2} \quad (3.45)$$

$$\frac{s}{u_e} \frac{du_e}{ds} \equiv m(H_k) = \left( 0.058 \frac{(H_k - 4)^2}{H_k - 1} - 0.068 \right) \frac{1}{\ell(H_k)} \quad (3.46)$$

ο ρυθμός ενίσχυσης της διαταραχής ως προς την  $s$  εκφράζεται συναρτήσει των ποσοτήτων  $H_k$  και  $\theta$

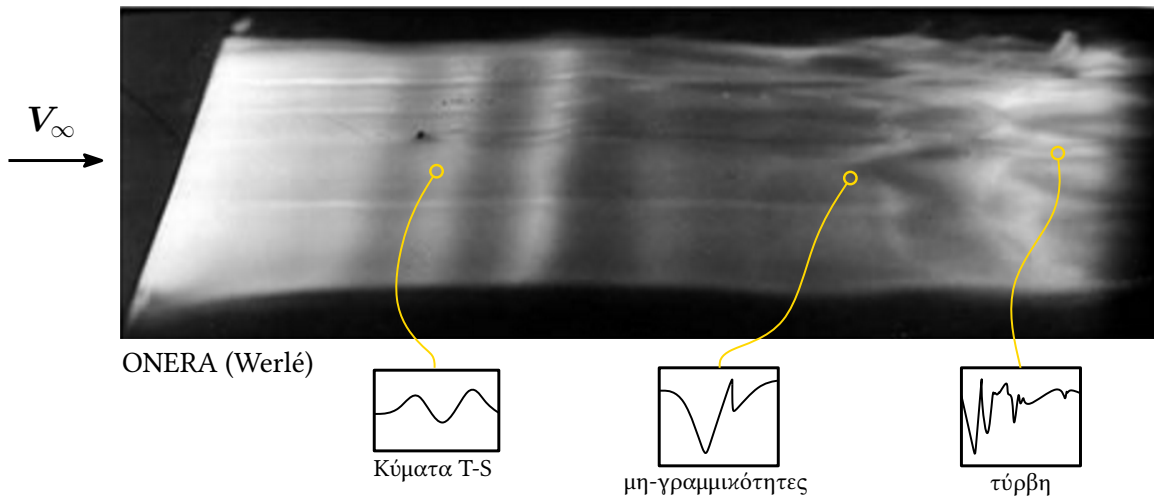
$$\boxed{\frac{d\tilde{n}}{ds}(H_k, \theta) = \frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta}(H_k) \frac{m(H_k) + 1}{2} \ell(H_k) \frac{1}{\theta}} \quad (3.47)$$

Έτσι, λαμβάνεται η ακόλουθη άμεση σχέση για το  $\tilde{n}$

$$\tilde{n} = \int_{s_0}^s \frac{d\tilde{n}}{ds} ds \quad (3.48)$$

όπου  $s_0$  το σημείο για το οποίο ισχύει  $Re_\theta = Re_{\theta_0}$ .

Στην παρούσα διατύπωση δεν χρησιμοποιείται απευθείας η εξίσωση (3.48) αλλά αντίθετα, η εξίσωση (3.47) διακριτοποιείται και λύνεται ως μέρος του καθολικού συστήματος Newton. Έτσι, ο ρυθμός ενίσχυσης  $\tilde{n}$  αντιμετωπίζεται και αυτός ως μία άγνωστη μεταβλητή του οριακού στρώματος. Η αντιμετώπιση αυτή είναι μεγάλης σημασίας για την ευστάθεια και την ταχύτητα επίλυσης του συστήματος δεδομένου ότι η εξίσωση για τον λόγο ενίσχυσης (3.47) είναι πολύ ισχυρά συζευγμένη με τις εξισώσεις ορμής (3.18) και συντελεστή σχήματος κινητικής ενέργειας (3.21) σε μία φυσαλίδα αποκόλλησης [16].



Σχήμα 3-3: Γραμμικές και μη-γραμμικές αστάθειες του στρωτού οριακού στρώματος. Πηγή: ONERA.



## Κεφάλαιο 4

# Αριθμητικό Σχήμα Συνεκτικής/μη-Συνεκτικής Αλληλεπίδρασης

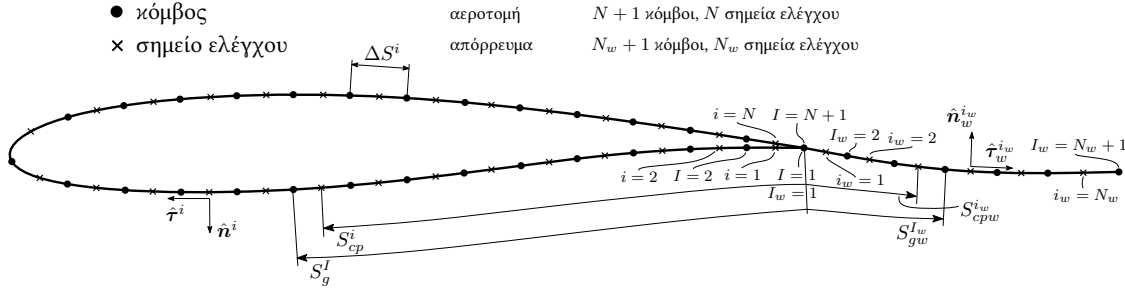
Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται το αριθμητικό σχήμα της παρούσας μεθόδου VII. Αρχικά, περιγράφεται η διακριτοποίηση της γεωμετρίας. Στη συνέχεια οι εξισώσεις για την ισοδύναμη μη-συνεκτική ροή (EIF) καθώς και αυτές του πλήρους μοντέλου για το οριακό στρώμα διακριτοποιούνται κατάλληλα. Η μέθοδος διαπνοής-τοιχώματος παρουσιάζεται στην αριθμητική της μορφή καθώς και η δομή του καθολικού συστήματος Newton μέσω του οποίου πραγματοποιείται η πλήρως συζευγμένη λύση των εξισώσεων. Οι αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάζονται είναι αυτές που έχουν υλοποιηθεί στον υπολογιστικό κώδικα Foil2W και επεκτάθηκαν από τον γραφόντα για αεροτομές δύο σωμάτων στον κώδικα Foil2E.

### 4.1 Διακριτοποίηση της Γεωμετρίας

Η μέθοδος των ιδιομορφιών έχοντας αρκετές ομοιότητες με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (boundary element method) δεν απαιτεί χωρικό πλέγμα αφού η λύση των εξισώσεων μεταφέρθηκε αποκλειστικά στα σύνορα του πεδίου λύσης μέσω του Θεωρήματος του Stokes.<sup>1</sup> Έτσι, η αεροτομή χωρίζεται σε  $N$  το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα (panels) μήκους  $\Delta S^i$ ,  $i = 1, N$  τα οποία ορίζουν  $N + 1$  σημεία πάνω σε αυτή (σχήμα 4-1), τους κόμβους  $\mathbf{x}_g^I(x_g^I, y_g^I)$ ,  $I = 1, N + 1$ . Η αρίθμηση των κόμβων και των τμημάτων ξεκινάει από την κάτω πλευρά της αεροτομής και την ακμή εκφυγής όπως φαίνεται στο σχήμα 4-1. Πάνω σε κάθε τμήμα  $\Delta S^i$  της αεροτομής ορίζεται το μέσο του  $\mathbf{x}_{cp}^i(x_{cp}^i, y_{cp}^i)$ ,  $i = 1, N$  το οποίο αποτελεί σημείο ελέγχου (control ή collocation point) για την ικανοποίηση των διακριτών εξισώσεων, και το κάθετο και εφαπτομενικό διάνυσμα  $\hat{n}^i$  και  $\hat{\tau}^i$  αντίστοιχα. Σε ότι αφορά την διακριτοποίηση της αεροτομής σημειώνεται ότι η διακριτοποίηση λαμβάνεται πιο πυκνή στην ακμή πρόσπτωσης και την ακμή εκφυγής, στην μεν πρώτη διότι οι κλίσεις των ταχυτήτων εκεί είναι μεγάλες, στη δε δεύτερη για

<sup>1</sup>Τέτοιοι μέθοδοι, για δεδομένη τάξη ακρίβειας, απαιτούν 1/100 λιγότερους αγνώστους συγκριτικά με μία πλεγματική μέθοδο τύπου RANS [2].





Σχήμα 4-1: Ονοματολογία διακριτοποιημένης αεροτομής. Τα τμήματα  $\Delta S_i$  (panels) είναι στη πραγματικότητα ευθύγραμμα. Για αιχμηρές ακμές εκφυγής (sharp trailing edge), ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος ταυτίζονται.

την καλύτερη προσέγγιση των ταχυτήτων εκφυγής και επομένως των μεγεθών στο απόρρευμα. Επίσης, σε περιπτώσεις σημαντικών φουσαλίδων στρωτής αποκόλλησης για τη σύγκλιση και την καλύτερη αποτύπωση των ολοκληρωτικών μεγεθών της φουσαλίδας επιβάλλεται η πυκνώση στο σημείο αυτό.

Πάνω στο «φύλλο» του απορρεύματος (wake sheet) λαμβάνονται  $N_w$  το πλήθος τμήματα (σχήμα 4-1), μήκους  $\Delta S_w^{i_w}$ ,  $i_w = 1, N_w$ . Τα τμήματα αυτά ορίζουν τους κόμβους του πλέγματος του απορρεύματος  $\mathbf{x}_{gw}^{I_w}$ ,  $I_w = 1, N_w + 1$ . Η αρίθμηση των κόμβων ξεκινάει από το σημείο εκφυγής του φύλλου. Επίσης, για κάθε τμήμα ορίζουμε το μέσο του  $\mathbf{x}_{cpw}^{i_w}$  ( $x_{cpw}^{i_w}, y_{cpw}^{i_w}$ ),  $i_w = 1, N$  (σημείο ελέγχου) και το κάθετο και εφαπτομενικό διάνυσμα  $\hat{\mathbf{n}}_w^{i_w}$  και  $\hat{\mathbf{t}}_w^{i_w}$  αντίστοιχα. Πιο πυκνή διακριτοποίηση (λογαριθμικής κατανομής) λαμβάνεται στο τμήμα του απορρεύματος που βρίσκεται κοντά στο σημείο εκφυγής, καθώς σε αυτήν την περιοχή η κλίση των διαφόρων μεγεθών είναι σημαντικότερη.

Επιπλέον, πάνω στην αεροτομή και το φύλλο του απορρεύματος ορίζεται μία παράμετρος μήκους τόξου  $S$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 4-1. Η τιμή αυτής της παραμέτρου για τον εκάστοτε κόμβο της αεροτομής δίνεται από τη σχέση

$$S_g^I = \sum_{m=1}^{I-1} \Delta S^m = \sum_{m=1}^{I-1} \sqrt{(y_g^{m+1} - y_g^m)^2 + (x_g^{m+1} - x_g^m)^2}, \quad I = 1, N + 1 \quad (4.1)$$

ενώ για τα σημεία ελέγχου

$$S_{cp}^i = \sum_{m=1}^{i-1} \Delta S^m + \frac{\Delta S^i}{2} = \sum_{m=1}^{i-1} \sqrt{(y_g^{m+1} - y_g^m)^2 + (x_g^{m+1} - x_g^m)^2} + \sqrt{(y_{cp}^i - y_g^i)^2 + (x_{cp}^i - x_g^i)^2}, \quad i = 1, N \quad (4.2)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η παράμετρος μήκους για τους κόμβους  $S_{gw}^{I_w}$ ,  $I_w = 1, N_w + 1$  και τα σημεία ελέγχου  $S_{cpw}^{i_w}$ ,  $i_w = 1, N_w$  στο απόρρευμα.

## 4.2 Διακριτές Εξισώσεις Καθαρά μη-Συνεκτικής Ροής

Για την διακριτοποίηση της εξίσωσης της καθαρά μη-συνεκτικής ροής (εξίσωση (2.30) ή (2.32)) λαμβάνεται σταθερή διανομή πηγών  $\sigma^i$ ,  $i = 1, N$  για κάθε πάνελ της αεροτομής και μία τιμή στροβιλότητας  $\gamma$  σταθερή για κάθε πάνελ της αεροτομής έτσι ώστε η κυκλοφορία να δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = \gamma S_g^{N+1} \quad \text{«ένα φύλλο στροβιλότητας»} \quad (4.3)$$

Στο απόρρευμα, για την καθαρά μη-συνεκτική ροή, δεν υπάρχουν βαθμοί ελευθερίας (ιδιομορφίες) καθώς μελετάται η μόνιμη ροή (steady flow) και δεν υπάρχει αποβολή στροβιλότητας (vortex shedding).

Έτσι, η εξίσωση (2.32) για δύο σώματα, όπως υλοποιήθηκε στον υπολογιστικό κώδικα, γράφεται στη διακριτή της μορφή ως

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N_1} \sigma_j A_{ij}^\sigma + \gamma_1 A_i^{\gamma_1}}_{\text{Διαταραχή από Σώμα 1}} + \underbrace{\sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} \sigma_j A_{ij}^\sigma + \gamma_2 A_i^{\gamma_2}}_{\text{Διαταραχή από Σώμα 2}} = -\mathbf{V}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad \text{με } i = 1, N_1 + N_2 \quad (4.4)$$

όπου  $N_1$  και  $N_2$  το πλήθος των πάνελς για τα σώματα 1 και 2 αντίστοιχα,  $A_{ij}^\sigma$  οι συντελεστές επιρροής (influence coefficients) για τις πηγές και  $A_i^{\gamma_1}$ ,  $A_i^{\gamma_2}$  για τα φύλλα στροβιλότητας του σώματος 1 και 2 αντίστοιχα. Οι συντελεστές επιρροής είναι καθαρά γεωμετρικές ποσότητες που προέρχονται από την ολοκλήρωση της συνάρτησης πυρήνα  $\mathcal{K}$  κατά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της σχέσης (2.32). Ουσιαστικά, στην συγκεκριμένη εξίσωση, εκφράζουν την κάθετη συνιστώσα ταχύτητας που επάγει μία μοναδιαία πηγή ή στρόβιλος  $j$  στο πάνελ  $i$ .

Καθώς το διάνυσμα ταχύτητας ελεύθερης ροής  $\mathbf{V}_\infty$  είναι δεδομένο κατά την ανάλυση όπως και η γεωμετρία του προβλήματος (δηλαδή οι συντελεστές επιρροής), οι άγνωστοι είναι οι  $N_1 + N_2$  πηγές και τα φύλλα στροβιλότητας  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , δηλαδή σύνολο  $N_1 + N_2 + 2$  βαθμοί ελευθερίας. Όμως, οι διακριτές εξισώσεις (4.4) είναι  $N_1 + N_2$  το πλήθος. Το γεγονός ότι οι βαθμοί ελευθερίας είναι ένας παραπάνω για κάθε αεροτομή δεν είναι τυχαίο και οφείλεται στο ότι το πρόβλημα πρέπει να συμπληρωθεί από την συνθήκη Kutta για κάθε αεροτομή εφόσον η ροή στην ακμή εκφυγής πρόκειται να μοντελοποιηθεί σωστά.

### 4.2.1 Η συνθήκη Kutta

Η συνθήκη Kutta, από τον γερμανό μαθηματικό και αεροδυναμιστή Martin Wilhelm Kutta, είναι αναγκαία σε ένα πρόβλημα ροϊκού δυναμικού διότι συμπληρώνει τη φυσική σημασία των δυνάμεων συνεκτικότητας στην ακμή εκφυγής για να δώσει μία αποδεκτή λύση μη-συνεκτικής ροής. Συγκεκριμένα, στην παρούσα υλοποίηση η συνθήκη Kutta

επιβάλλεται με άμεσο τρόπο, δηλαδή εμπεριέχεται μία ακόμα εξίσωση για κάθε αεροτομή που επιβάλλει ότι η εφαπτομενική ταχύτητα στο πρώτο και τελευταίο πάνελ κάθε αεροτομής είναι ίση. Οι δύο επιπλέον εξισώσεις που συμπληρώνουν το αριθμητικό πρόβλημα γράφονται

### Συνθήκη Kutta, Σώμα 1

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_1} \sigma_j (B_{1j}^\sigma + B_{N_1j}^\sigma) + \gamma_1 (B_1^{\gamma_1} + B_{N_1}^{\gamma_1}) + \\ & + \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} \sigma_j (B_{1j}^\sigma + B_{N_1j}^\sigma) + \gamma_2 (B_1^{\gamma_2} + B_{N_1}^{\gamma_2}) = -\mathbf{V}_\infty \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_1 + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{N_1}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

### Συνθήκη Kutta, Σώμα 2

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_1} \sigma_j (B_{N_1+1j}^\sigma + B_{N_1+N_2j}^\sigma) + \gamma_1 (B_{N_1+1}^{\gamma_1} + B_{N_1+N_2}^{\gamma_1}) + \\ & + \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} \sigma_j (B_{N_1+1j}^\sigma + B_{N_1+N_2j}^\sigma) + \gamma_2 (B_{N_1+1}^{\gamma_2} + B_{N_1+N_2}^{\gamma_2}) = -\mathbf{V}_\infty \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_{N_1+1} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{N_1+N_2}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου αυτή τη φορά, συντελεστές επιρροής  $B_{ij}^\sigma$  για τις πηγές και  $B_i^{\gamma_1}$ ,  $B_i^{\gamma_2}$  για τα φύλλα στροβιλότητας του σώματος 1 και 2 αντίστοιχα, εκφράζουν την εφαπτομενική συνιστώσα ταχύτητας που επάγει μία μοναδιαία πηγή ή στρόβιλος  $j$  στο πάνελ  $i$ .

## 4.2.2 Μητρική Μορφή Συστήματος και Λύση

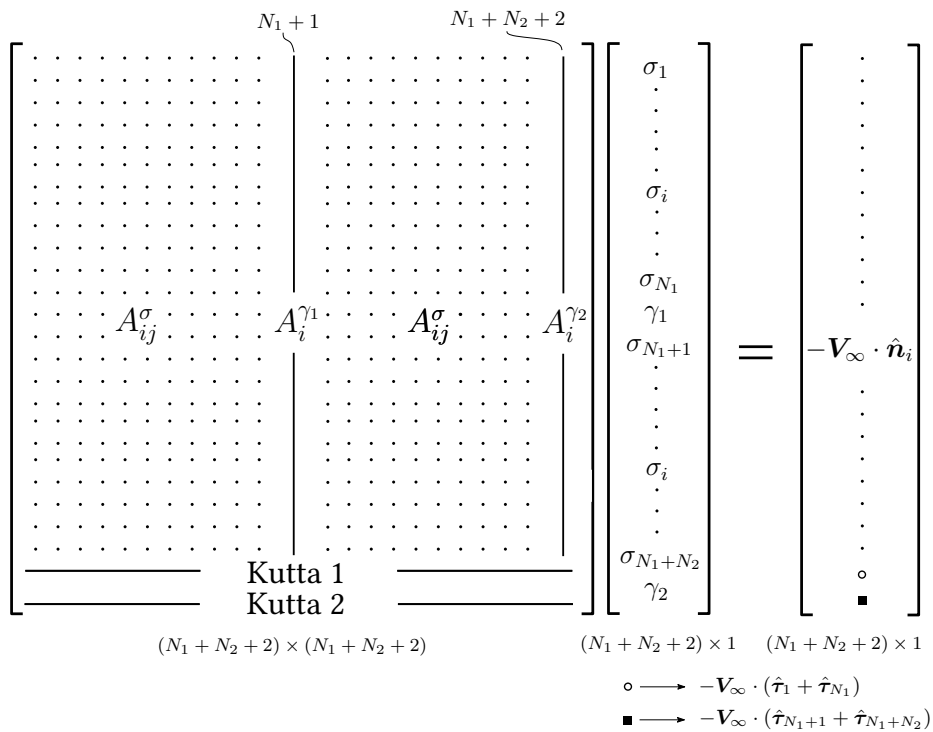
Οι εξισώσεις (4.4) μαζί με τις συνθήκες Kutta για το κάθε σώμα (4.5,4.6) συνιστούν ένα αλγεβρικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων που αποτυπώνεται σε μητρική μορφή στο σχήμα 4-2. Συνοπτικά, το σύστημα αυτό γράφεται

$$[\mathbf{A}_{inv}] \{ \mathbf{x}_{inv} \} = \{ \mathbf{b}_{inv} \} \quad (4.7)$$

και λύνεται υπολογιστικά με τη μέθοδο της LU αποσύνθεσης (LU Decomposition) και της πίσω αντικατάστασης (backward substitution) για τον υπολογισμό των βαθμών ελευθερίας  $\sigma_i$ ,  $i = 1, N_1 + N_2$  και  $\gamma_1, \gamma_2$ .

## 4.3 Διακριτές Εξισώσεις Οριακού Στρώματος

Οι διαφορικές εξισώσεις του οριακού στρώματος διακριτοποιούνται με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών και επιλύονται στην επιφάνεια της αεροτομής και του απορρεύματος. Η επίλυση τους ξεκινά από το σημείο ανακοπής (stagnation point) και οδεύει ξεχωριστά, κατά μήκος της πάνω και της κάτω πλευράς της αεροτομής και στη συνέχεια του απορ-



Σχήμα 4-2: Μητρική αναπαράσταση συστήματος εξισώσεων για τη καθαρά μη-συνεκτική ροή όπως υλοποιήθηκε στον κώδικα Foil2E.

ρεύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα . Οι βασικοί άγνωστοι είναι το πάχος μετάθεσης  $\delta^*$  (το οποίο όμως στη συνέχεια αντικαθίσταται από το έλλειμα μάζας  $m \equiv u_e \delta^*$  για υπολογιστικούς λόγους) και το πάχος ορμής  $\theta$ . Επιπλέον άγνωστοι είναι ο συντελεστής ενίσχυσης  $\tilde{n}$  για την περιοχή της στρωτής ροής και ο συντελεστής μέγιστης διατμητικής τάσης  $c_\tau$  για την περιοχή της τυρβώδους ροής. Οι τρεις παραπάνω άγνωστοι υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου της αεροτομής και του απορρεύματος. Τα υπόλοιπα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις εκφράζονται συναρτήσει των θεμελιωδών μεταβλητών  $\delta^*$  και  $\theta$  μέσω των σχέσεων συσχέτισης (3.22) ενώ η ταχύτητα υπολογίζεται μέσω του μοντέλου της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής (EIF).

### 4.3.1 Εξίσωση Συνέχειας - Έλλειμα Μάζας

Το μοντέλο συνεκτικής μετατόπισης που προκύπτει από την εξίσωση συνέχειας περιγράφηκε στην ενότητα 2.5 και βασίζεται στην αναπαράσταση του ελλείματος μάζας  $m$  μέσω της κάθετης στο τοίχωμα ταχύτητας  $(v_e)_w$ . Η ταχύτητα  $(v_e)_w$  ή αλλιώς η ισοδύναμη κατανομή πηγών  $\sigma^*$  υπολογίζεται στους κόμβους της αεροτομής και η εξίσωση ελλείματος μάζας (2.41) σε μορφή διαφορών γράφεται

$$dm = \int \sigma^* ds \Rightarrow m_i - m_{i-1} = \frac{\sigma_{i-1}^* + \sigma_I^*}{2} \frac{\Delta S_{i-1}}{2} + \frac{\sigma_I^* + \sigma_i^*}{2} \frac{\Delta S_i}{2} \quad (4.8)$$

Θεωρώντας γραμμική μεταβολή της  $\sigma^*(s)$  πάνω στα τμήματα, έτσι ώστε

$$\sigma_{i-1}^* = \frac{\sigma_{I-1}^* + \sigma_I^*}{2}, \quad \sigma_i^* = \frac{\sigma_I^* + \sigma_{I+1}^*}{2} \quad (4.9)$$

και αντικαθιστώντας την σχέση (4.9) στην (4.8), λαμβάνεται η διακριτή εξίσωση

$$m_i - m_{i-1} = \frac{\sigma_{I-1}^* \Delta S_{i-1}}{4} + \frac{3\sigma_I^* \Delta S_{i-1} + \Delta S_i}{4} + \frac{\sigma_{I+1}^* \Delta S_i}{2} \quad I = 2, N \quad (4.10)$$

όπου  $N$  το πλήθος των τμημάτων (panels) και  $N + 1$  των κόμβων της αεροτομής.

Η σχέση (4.10) εφαρμόζεται για όλους τους εσωτερικούς κόμβους της αεροτομής ( $I = 2, N$ ). Δεν είναι όμως δυνατό να εφαρμοστεί στους ακραίους κόμβους της ακμής εκφυγής. Έτσι, θεωρείται ότι η συνάρτηση  $m$  παρουσιάζει γραμμική μεταβολή στο σημείο εκείνο, της μορφής

$$\begin{aligned} m(s) &= m_N + \frac{m_N - m_{N-1}}{S_N^{cp} - S_{N-1}^{cp}}(s - S_N) && \text{άνω πλευρά} \\ m(s) &= m_1 + \frac{m_1 - m_2}{S_1^{cp} - S_2^{cp}}(s - S_1) && \text{κάτω πλευρά} \end{aligned} \quad (4.11)$$

και από παραγωγή των σχέσεων (4.11) λαμβάνονται οι σχέσεις

$$\sigma_{N+1}^* = \frac{m_N - m_{N-1}}{S_N^{cp} - S_{N-1}^{cp}} = \frac{2(m_N - m_{N-1})}{\Delta S_N + \Delta S_{N-1}} \quad (4.12)$$

$$\sigma_1^* = \frac{m_1 - m_2}{S_1^{cp} - S_2^{cp}} = -\frac{2(m_1 - m_2)}{\Delta S_1 + \Delta S_2} \quad (4.13)$$

Οι (4.10), (4.12), (4.13) αποτελούν  $N + 1$  εξισώσεις για τις  $N + 1$  άγνωστες πηγές  $\sigma^*$  που βρίσκονται στους  $N + 1$  κόμβους της αεροτομής, συναρτήσεϊ του ελλείματος μάζας  $m$  υπολογισμένο στο σημείο ελέγχου (μέσο) κάθε τμήματος (panel).

Η παραπάνω διαδικασία για την διακριτοποίηση της εξίσωσης συνέχειας για το έλλειμα μάζας εφαρμόζεται όπως παρουσιάστηκε και για το άλμα ταχύτητας στο απόρρευμα (wake sheet velocity jump) όπου η σχέση (4.10) εφαρμόζεται για τους εσωτερικούς κόμβους και οι (4.12),(4.13) για τους ακραίους. Έτσι, οι εξισώσεις αυτές σε μητρική μορφή γράφονται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D^m & 0 \\ 0 & D_w^m \end{bmatrix}}_{[D^m]} \underbrace{\begin{Bmatrix} m_i \\ (m^u + m^l)_{i_w} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{m}} = \underbrace{\begin{bmatrix} D^{\sigma^*} & 0 \\ 0 & D_w^{\sigma^*} \end{bmatrix}}_{[D^{\sigma^*}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_I^* \\ \sigma_{I_w}^* \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^*} \quad (4.14)$$

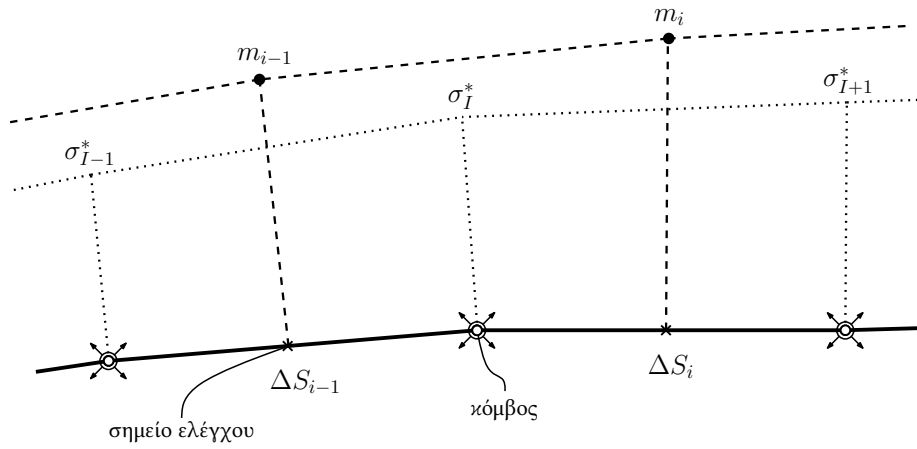
όπου  $i = 1, N$ ,  $I = 1, N + 1$ ,  $i_w = 1, N_w$ ,  $I_w = 1, N + 1$  και  $m^u, m^l$  το έλλειμα μάζας

στην άνω και κάτω πλευρά του φύλλου του απορρεύματος αντίστοιχα.

Έτσι, η ισοδύναμη κατανομή πηγών διαπνοής τοιχώματος  $\sigma_I^*$  στους κόμβους δίνεται συναρτήσεϊ του ελλείματος μάζας  $m_i$  στο σημείο ελέγχου του τμήματος  $\Delta S_i$  μέσω της σχέσης

$$\sigma^* = [D^{\sigma^*}]^{-1}[D^m] \cdot m = [D^*] \cdot m \quad (4.15)$$

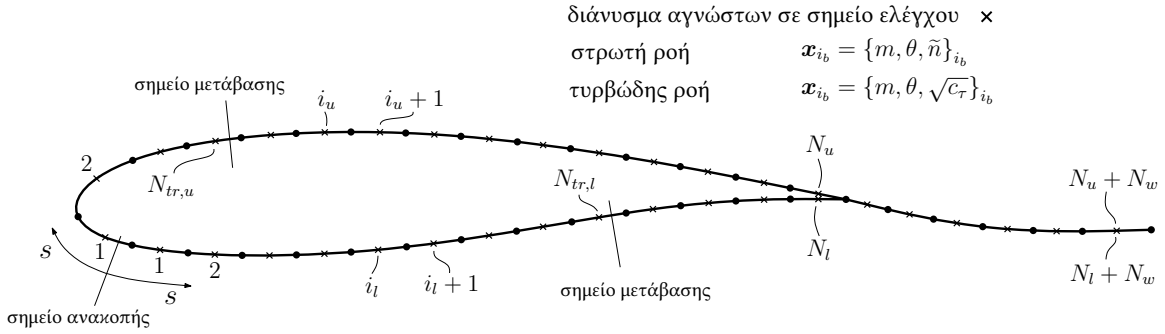
Το μητρώο  $[D^*]$  εξαρτάται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής και του απορρεύματος καθώς και τον τρόπο διακριτοποίησης.



Σχήμα 4-3: Διακριτοποίηση εξισώσεων ταχύτητας διαπνοής τοιχώματος (εσωτερικά σημεία αεροτομής και απορρεύματος).

### 4.3.2 Εξισώσεις Ορμής και Κινητικής Ενέργειας

Οι εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές στο χώρο. Όπως αναφέρθηκε, η επίλυση των εξισώσεων αυτών ξεκινάει από το σημείο ανακοπής και οδεύει χωριστά στην άνω και κάτω πλευρά της αεροτομής και μετέπειτα στο απόρρευμα. Για το λόγο αυτό, ορίζεται η παράμετρος μήκους τόξου  $s$  που έχει την αρχή της στο σημείο ανακοπής και ορίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης, ορίζεται διαφορετική αρίθμηση των σημείων ελέγχου, για τις δύο πλευρές της αεροτομής, η οποία ξεκινά από το πλησιέστερο, στο σημείο ανακοπής, σημείο ελέγχου της κάθε πλευράς και καταλήγει στο απόρρευμα όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, αν η αεροτομή αποτελείται από  $N$  σημεία ελέγχου, τώρα διαχωρίζεται σε  $N_u$  και  $N_l$  σημεία ελέγχου για την άνω και κάτω πλευρά αντίστοιχα, ώστε  $N_u + N_l = N$ . Καθώς το απόρρευμα μοντελοποιείται με δύο φύλλα πηγών (source sheets), τα οποία ταυτίζονται όμως ως γεωμετρίες, ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου είναι  $N_u + N_w$  και  $N_l + N_w$  για την άνω και κάτω πλευρά αντίστοιχα.



Σχήμα 4-4: Ονοματολογία για την διακριτοποίηση των εξισώσεων οριακού στρώματος.

Με βάση τα παραπάνω, και ορίζοντας τις ποσότητες με δείκτη  $a$  την μέση τιμή μεταξύ δύο σημείων ελέγχου, για παράδειγμα

$$\theta_a = \frac{1}{2}(\theta_{i_b} + \theta_{i_b+1}) \quad (4.16)$$

η εξίσωση ορμής (3.18) σε διακριτή μορφή γράφεται

$$\ln\left(\frac{\theta_{i_b+1}}{\theta_{i_b}}\right) + [H_a + 2 - M_{e a}^2] \ln\left(\frac{u_{e i_b+1}}{u_{e i_b}}\right) - \left(\frac{s_a c_f}{\theta_a}\right) \ln\left(\frac{s_{i_b+1}}{s_{i_b}}\right) = 0 \quad (4.17)$$

όπου  $i = 1, N_b + N_w - 1$ ,  $b = u, l$  και  $c_f = c_f(H_{k a}, Re_{\theta a}, M_{e a})$  όπως δίνεται από την σχέση (3.26) αν η ροή είναι στρωτή και από την (3.29) αν η ροή είναι τυρβώδης. Ομοίως, η εξίσωση κινητικής ενέργειας (3.21) σε διακριτή μορφή γράφεται

$$\ln\left(\frac{H_{i_b+1}^*}{H_{i_b}^*}\right) + \frac{s_a}{\theta_a} \left(\frac{c_f}{2} - \frac{2c_D}{H^*}\right) \ln\left(\frac{s_{i_b+1}}{s_{i_b}}\right) + \left(\frac{2H^{**}}{H_a^*} + 1 - H_a\right) \ln\left(\frac{u_{e i_b+1}}{u_{e i_b}}\right) = 0 \quad (4.18)$$

όπου

$$c_f = c_f(H_{k a}, Re_{\theta a}, M_{e a}) \quad \text{όπως δίνεται από την (3.26) ή (3.29)}$$

$$\frac{2c_D}{H^*} = \frac{2c_D}{H^*}(H_{k a}, Re_{\theta a}, M_{e a}) \quad \text{όπως δίνεται από την (3.27) ή (3.33)}$$

$$H^{**} = H^{**}(H_{k a}, M_{e a}) \quad \text{όπως δίνεται από την (3.28)}$$

και  $i = 1, N_b + N_w - 1$ ,  $b = u, l$ .

Η ταχύτητα στο όριο του οριακού στρώματος  $u_e$  είναι και αυτή άγνωστη, όμως προσδιορίζεται από τις εξισώσεις για την ισοδύναμη μη-συνεχτική ροή (EIF) και επομένως δεν αποτελεί επιπλέον άγνωστο για την διατύπωση του ΟΣ. Για τους όρους παραγώγων στις παραπάνω εξισώσεις, χρησιμοποιούνται λογαριθμικές διαφορές για την εξάλειψη σφαλμάτων διακριτοποίησης για μεγάλες τιμές του  $\frac{\Delta s}{s}$  που συμβαίνουν κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Σημειώνεται επίσης ότι για λόγους αριθμητικής ευστάθειας, στην περιοχή της στρωτής ροής, αντί για κεντρικές διαφορές στον χώρο λαμβάνονται πίσω διαφορές.

Έτσι, για όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις διακριτές εξισώσεις (4.17) και (4.18) με δείκτη  $a$ , λαμβάνονται οι τιμές τους στο σημείο ελέγχου  $i_b$ .

Για την επίλυση των δύο παραπάνω εξισώσεων απαιτούνται συνοριακές συνθήκες για τα άγνωστα μεγέθη  $\delta^*$  και  $\theta$ , συγκεκριμένα

- (α') στο σημείο ανακοπής, στην ακμή πρόσφυξης της αεροτομής
- (β') στην ακμή εκφυγής, στην άνω και κάτω πλευρά της αεροτομής

Η συνοριακή συνθήκη (α') απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων πάνω στο σύνορο της αεροτομής ενώ η (β') για την επίλυση των εξισώσεων στο απόρρευμα. Σε ότι αφορά τη συνοριακή συνθήκη για τα  $\delta^*$  και  $\theta$  στο σημείο ανακοπής, δεδομένου ότι στο σημείο αυτό η παράμετρος μήκους και η ταχύτητα μηδενίζονται, οι εξισώσεις (4.17) και (4.18) απειρίζονται. Έτσι, στο πρώτο διάστημα της κάθε πλευράς, το οποίο λαμβάνεται μεταξύ του σημείου ανακοπής και του σημείου ελέγχου (σχήμα 4-5) ορίζεται ψευδοσημείο με παράμετρο μήκους  $s_0$  τέτοιο ώστε

$$\ln \left( \frac{s_1}{s_0} \right) = 1 \quad (4.19)$$

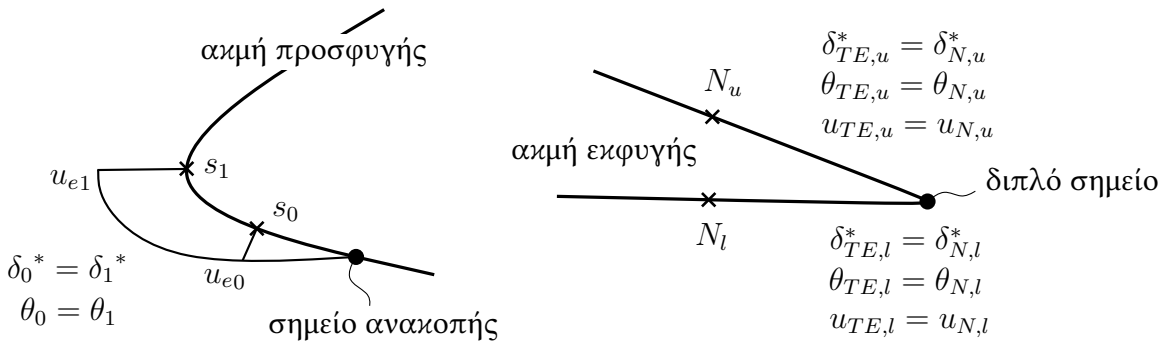
Στο διάστημα μεταξύ του ψευδοσημείου και του πρώτου σημείου ελέγχου θεωρείται ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά, έτσι

$$\frac{u_{e1}}{u_{e0}} = \frac{s_1}{s_0} \Rightarrow \ln \left( \frac{u_{e1}}{u_{e0}} \right) = 1 \quad (4.20)$$

ενώ τα μεγέθη του οριακού στρώματος παραμένουν αμετάβλητα

$$\delta_0^* = \delta_1^*, \quad \theta_0 = \theta_1 \quad (4.21)$$

Σε ότι αφορά τις συνοριακές συνθήκες (β'), στην ακμή εκφυγής τα μεγέθη του ΟΣ παίρνουν τις τιμές των ανάντι κοντινότερων σημείων ελέγχου πάνω στην αεροτομή (σχήμα 4-5).



Σχήμα 4-5: Συνοριακές συνθήκες οριακού στρώματος σε ακμή πρόσφυξης και εκφυγής.



### 4.3.3 Εξισώσεις Προσδιορισμού Σημείου Μετάβασης και Υστέρησης Διατμητικών Τάσεων

Για την πρόβλεψη του σημείου μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη λύνεται η εξίσωση (3.47) για τον λόγο ενίσχυσης  $\tilde{n}$ . Η εξίσωση αυτή, όπως και η εξίσωση ορμής και κινητικής ενέργειας στη στρωτή ροή, διακριτοποιείται με τη χρήση προς τα πίσω διαφορών και έτσι γράφεται

$$\frac{\tilde{n}_{i_b+1} - \tilde{n}_{i_b}}{s_{i_b+1} - s_{i_b}} = \frac{d\tilde{n}}{dRe_\theta}(H_{k_{i_b}}) \frac{m(H_{k_{i_b}}) + 1}{2} \ell(H_{k_{i_b}}) \frac{1}{\theta_{i_b}} \quad (4.22)$$

για  $i = 1, N_{tr,b} - 1$ ,  $b = u, l$  όπου  $N_{tr,b}$  το σημείο ελέγχου, ανάντι του σημείου μετάβασης.

Η επίλυση της (4.22) ξεκινάει από την θέση στην οποία ικανοποιείται η συνθήκη  $Re_\theta \geq Re_{\theta_0}$ , ενώ ως συνοριακή συνθήκη για την τιμή του λόγου ενίσχυσης λαμβάνεται η τιμή  $\tilde{n} = 0$ . Η εξίσωση (4.22) λύνεται μέχρι το σημείο ελέγχου που θα βρεθεί  $\tilde{n} > N_{crit}$  όπου συνήθως  $N_{crit} = 9$ . Κατάντι της θέσης αυτής η ροή γίνεται τυρβώδης, οπότε πλέον αντί της (3.47) λύνεται η εξίσωση (3.35) για την υστέρηση του συντελεστή διατμητικών τάσεων  $c_\tau$ .

Η εξίσωση (3.35) με βάση τα όσα αναφέρθηκαν ήδη για την διακριτοποίηση γράφεται σε διακριτή μορφή ως εξής

$$2\delta_a \ln \left( \frac{\sqrt{c_{\tau_{i_b+1}}}}{\sqrt{c_{\tau_{i_b}}}} \right) = 5.6(\sqrt{c_{\tau_{EQ_a}}} - \sqrt{c_{\tau_a}})(s_{i_b+1} - s_{i_b}) + 2\delta_a \left\{ \frac{4}{3\delta_a^*} \left[ \frac{c_f}{2} - \left( \frac{H_{ka} - 1}{6.7H_{ka}} \right)^2 \right] (s_{i_b+1} - s_{i_b}) - \ln \left( \frac{u_{e_{i_b+1}}}{u_{e_{i_b}}} \right) \right\} \quad (4.23)$$

όπου

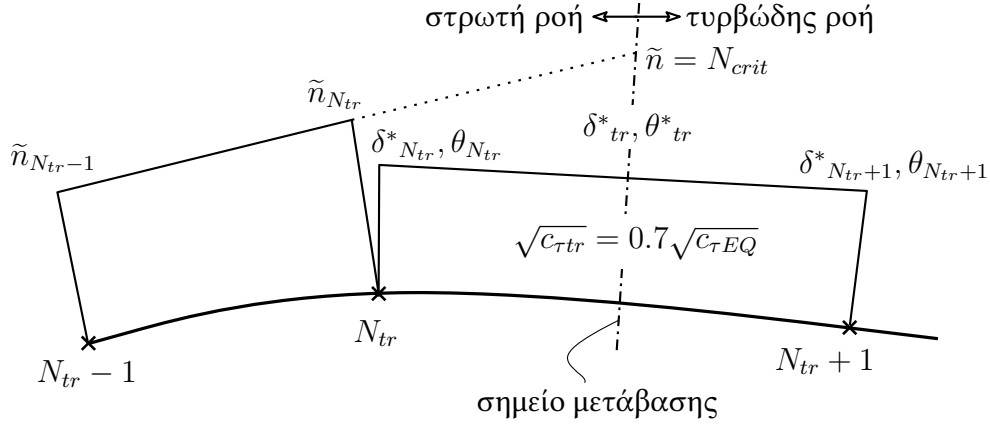
$$c_f = c_f(H_{ka}, Re_{\theta_a}, M_{ea}) \quad \text{όπως δίνεται από την (3.29)}$$

$$c_{\tau_{EQ_a}} = c_{\tau_{EQ_a}}(H^{**}, H_{ka}) \quad \text{όπως δίνεται από την (3.37)}$$

$$H^{**} = H^{**}(H_{ka}, M_{ea}) \quad \text{όπως δίνεται από την (3.28)}$$

για  $i = N_{tr,b}, N_b - 1$ ,  $b = u, l$ .

Ειδική μεταχείριση απαιτείται στον υπολογισμό, για το διάστημα εκείνο στο οποίο εμφανίζεται το σημείο μετάβασης. Το διάστημα αυτό χωρίζεται σε δύο τμήματα, το μήκος των οποίων καθορίζεται από τη θέση του σημείου μετάβασης, εκεί δηλαδή όπου  $N = N_{crit}$ . Στο πρώτο τμήμα η ροή λαμβάνεται στρωτή ενώ στο δεύτερο τυρβώδης. Οι διακριτές εξισώσεις (4.17), (4.18), (4.22) και (4.23) λύνονται χωριστά για το κάθε υποτμήμα. Για την επίλυση των εξισώσεων στα τμήματα αυτά γίνεται η θεώρηση ότι οι τιμές των μεγεθών  $\delta^*$  και  $\theta$  στο σημείο μετάβασης προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών των γειτονικών σημείων ελέγχου, από τα οποία τα πρώτο βρίσκεται



Σχήμα 4-6: Συνοριακή συνθήκη στο σημείο μετάβασης

στην περιοχή της στρωτής ροής και το δεύτερο στην περιοχή της τυρβώδους ροής. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται με σκοπό την αποφυγή εμφάνισης ασυνεχειών στις τιμές του ΟΣ στην περιοχή του σημείου μετάβασης. Για την τιμή του συντελεστή  $\sqrt{c_{\tau}}$  στη θέση του σημείου μετάβασης χρησιμοποιείται η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη όπως προτείνουν οι Drela και Giles [16]

$$\sqrt{c_{\tau tr}} = 0.7 \sqrt{c_{\tau EQ}} \quad (4.24)$$

Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση των μεγεθών  $\delta^*$  και  $\theta$ , θεωρείται ότι στην ακμή εκφυγής ο συντελεστής  $c_{\tau}$  παίρνει την τιμή του ανάντι κοντινότερου σημείου ελέγχου πάνω στο σύνορο της αεροτομής.

#### 4.3.4 Μη-Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων Οριακού Στρώματος

Οι εξισώσεις (4.17), (4.18), (4.22) και (4.23) συνιστούν ένα μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων, με τρεις αγνώστους,  $\mathbf{x}_{i_b} = \{\delta^*, \theta, u_e, \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_{\tau}}\}_{i_b}$  για κάθε σημείο ελέγχου  $i_b$  της αεροτομής και του απορρεύματος. Κάθε εξίσωση του συστήματος εξαρτάται από τις τιμές των παραπάνω αγνώστων μεγεθών σε δύο γειτονικά σημεία ελέγχου. Έτσι, αν

$F_1$  Η εξίσωση για το  $\tilde{n}$  ή το  $c_{\tau}$  για στρωτή ή τυρβώδη ροή αντίστοιχα

$F_2$  Η εξίσωση ορμής

$F_3$  Η εξίσωση κινητικής ενέργειας

το μη-γραμμικό σύστημα των εξισώσεων γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i_b}) = \begin{Bmatrix} F_1(x_{i_b}, x_{i_b+1}) \\ F_2(x_{i_b}, x_{i_b+1}) \\ F_3(x_{i_b}, x_{i_b+1}) \end{Bmatrix} = 0, \quad i = 0, N_b - 1, \quad b = u, l \quad (4.25)$$

όπου  $x_{i_b}$  είναι το συνολικό διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων οριακού στρώματος.

Όπως παρουσιάζεται και στη συνέχεια, μέσω των εξισώσεων της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής, η ταχύτητα  $u_e$  εκφράζεται συναρτήσει του ελλείματος μάζας  $m$ . Επομένως, η  $u_e$  αποτελεί εξαρτημένη μεταβλητή για τις εξισώσεις του οριακού στρώματος. Έτσι, το διάνυσμα των αγνώστων σε κάθε σημείο ελέγχου μπορεί να γραφτεί στη μορφή  $x_{i_b} = \{m, \theta, \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}\}_{i_b}$  όπου η  $u_e$  απαλείφεται και το πάχος μετατόπισης  $\delta^*$  αντικαθίσταται από έλλειμα μάζας  $m \equiv u_e \delta^*$ , για λόγους που διευκολύνουν την αριθμητική επίλυση.

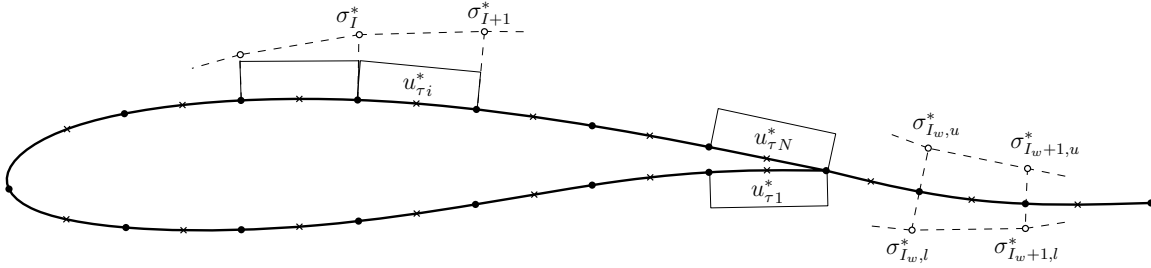
## 4.4 Διακριτές Εξισώσεις Ταχύτητας Συνεκτικής Διόρθωσης

Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.5, η ταχύτητα ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής  $u_e$  δίνεται ως υπέρθεση της ταχύτητας της καθαρά μη-συνεκτικής ροής  $u^i$  και της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης  $u^*$ . Οι διακριτές εξισώσεις της καθαρά μη-συνεκτικής ροής παρουσιάστηκαν αναλυτικά στην ενότητα 4.2, στην ενότητα αυτή δίνεται η διακριτή μορφή της εξίσωσης για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης, όπως αυτή εκφράζεται από την σχέση (2.46).

Για την διακριτοποίηση της εξίσωσης (2.46), λαμβάνεται σταθερή τμηματικά διανομή εφαπτομενικής ταχύτητας  $u_\tau^*$  στα σύνορα  $S_b^n$  των αεροτομών, δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας  $u_{\tau_j}^*$  για κάθε τμήμα (panel)  $\Delta S^i$  και η τιμή αυτή υπολογίζεται στο σημείο ελέγχου του τμήματος. Σε ότι αφορά την κάθετη στο τοίχωμα ταχύτητα και την ασυνέχεια της ταχύτητας στο απόρρευμα (wake-jump velocity), που βάσει του μοντέλου για την συνεκτική μετατόπιση ισοδυναμεί με μία κατανομή πηγών που ικανοποιεί την σχέση (2.44), λαμβάνεται γραμμική κατανομή, με τις τιμές να υπολογίζονται στους κόμβους του πλέγματος και όχι στα σημεία ελέγχου (σχήμα 4-7). Τελικά, η εξίσωση (2.46) επαληθεύεται στα σημεία ελέγχου της αεροτομής και βάσει των παραπάνω γράφεται σε διακριτή μορφή ως εξής.

$$\sum_{j=1}^{N_1+N_2} u_{\tau_j}^* (\mathbb{I}_{ij} - A_{ij}^\sigma) = \sum_{j=1}^{N_1^{tot}+N_2^{tot}} \sigma_j^* C_{ij} \quad \text{για } i = 1, N_1 + N_2 \quad (4.26)$$

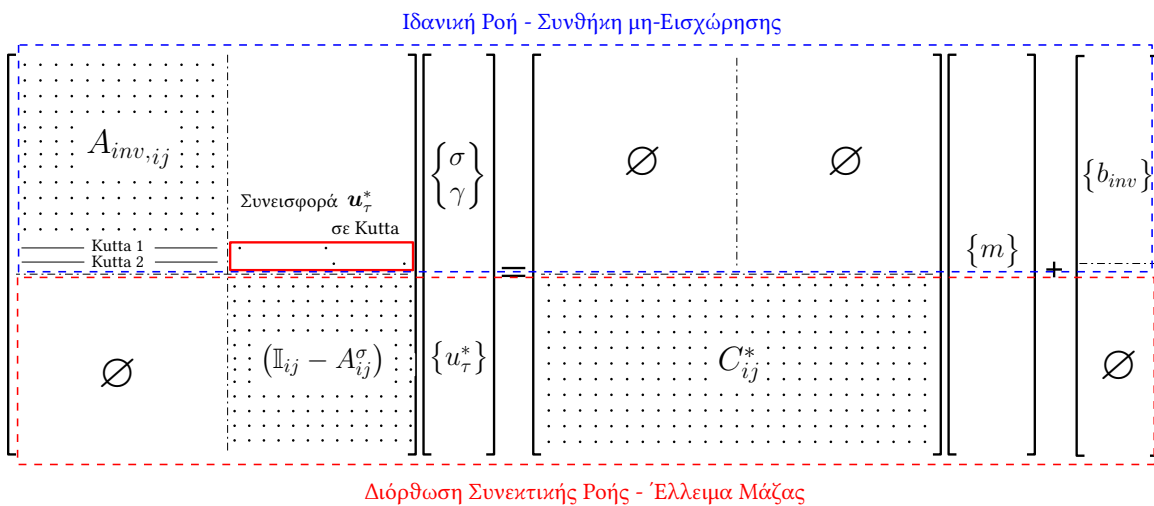
Το σύστημα των διακριτών εξισώσεων που περιγράφει η σχέση (4.26) εφαρμόζεται για αεροτομές δύο σωμάτων όπου  $N_1^{tot}$ ,  $N_2^{tot}$  είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων για κάθε αεροτομή, δηλαδή  $N_1^{tot} = N_1 + 2N_{w_1}$  και ομοίως για το δεύτερο σώμα. Οι κόμβοι για το φύλλο του απορρεύματος είναι  $2N_w$ , για κάθε αεροτομή, καθώς είναι διπλοί (διπλό σημείο στον χώρο) και αντιστοιχούν σε άνω και κάτω πλευρά. Ο πίνακας συντελεστών επιρροής  $A_{ij}^\sigma$  παρουσιάστηκε προηγουμένως, στην ενότητα 4.2, ενώ  $C_{ij}$  είναι ο πίνακας συντελεστών επιρροής για την κατανομή πηγών  $\sigma^*$ .



Σχήμα 4-7: Διακριτοί βαθμοί ελευθερίας της εξίσωσης για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης.

## 4.5 Αλγόριθμος Επίλυσης Συνεκτικής/μη-Συνεκτικής Αλληλεπίδρασης

Τα άγνωστα μεγέθη της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής, σύμφωνα με τα όσα ήδη έχουν ειπωθεί, συνοψίζονται στις  $N_1 + N_2$  τμηματικά σταθερές διανομές πηγών  $\sigma_i$ , στην ένταση της στροβιλότητας της κάθε αεροτομής  $\gamma_1, \gamma_2$  και τις  $N_1 + N_2$  τιμές της εφαπτομενικής ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης  $u_{\tau i}^*$ . Οι εξισώσεις της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής γραμμικοποιούνται με την υπόθεση ότι η γεωμετρία του κοντινού απορρεύματος είναι γνωστή εκ των προτέρων, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος. Με βάση την παραπάνω υπόθεση διαμορφώνεται ένα γραμμικό σύστημα  $2(N_1 + N_2) + 2$  εξισώσεων. Από την αντιστροφή του συστήματος των εξισώσεων της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής προκύπτει μία γραμμική εξάρτηση των βαθμών ελευθερίας αυτής, συναρτήσεως της ποσότητας  $m \equiv u_e \delta^*$ , δηλαδή συναρτήσεως βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων οριακού στρώματος. Έτσι, το σύστημα των εξισώσεων της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής (EIF) παρουσιάζεται σε μητρική μορφή στο σχήμα 4-8.



Σχήμα 4-8: Μητρική αναπαράσταση συστήματος εξισώσεων για την ισοδύναμη μη-συνεκτική ροή.

Το σύστημα εξισώσεων που παρουσιάζεται στο σχήμα 4-8 φαίνεται ότι αποτελείται από το άνω μέρος που εμπεριέχει την συνθήκη μη-εισχώρησης όπως ήδη διατυπώθηκε στην εξίσωση (4.7) και στο σχήμα 4-2 και το κάτω μέρος που εμπεριέχει την συνθήκη για το έλλειμα μάζας μεταξύ της πραγματικής και της ιδανικής ροής που περιγράφει η εξίσωση (4.26). Σημαντική είναι επίσης η συνεισφορά της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης στην συνθήκη Kutta για την σύγκλιση της μεθόδου ειδικά στην περίπτωση που προσεγγίζεται η απώλεια στήριξης ή όταν αναπτύσσεται φουσαλίδα αποκόλλησης στην περιοχή αυτή.

Το σύστημα της ισοδύναμης μη-συνεκτικής ροής (EIF) μπορεί να γραφεί σε πιο συνοπτική μορφή ως εξής.

$$[A_{eq}] \mathbf{x}_{eq} = [C_{eq}] \mathbf{m} + \mathbf{b}_{eq} \quad (4.27)$$

Από την εξίσωση (4.27) λαμβάνεται

$$\mathbf{x}_{eq} = [A_{eq}^{-1}] [C_{eq}] \mathbf{m} + [A_{eq}^{-1}] \mathbf{b}_{eq} = [D_{eq}] \mathbf{m} + \mathbf{b}'_{eq} \quad (4.28)$$

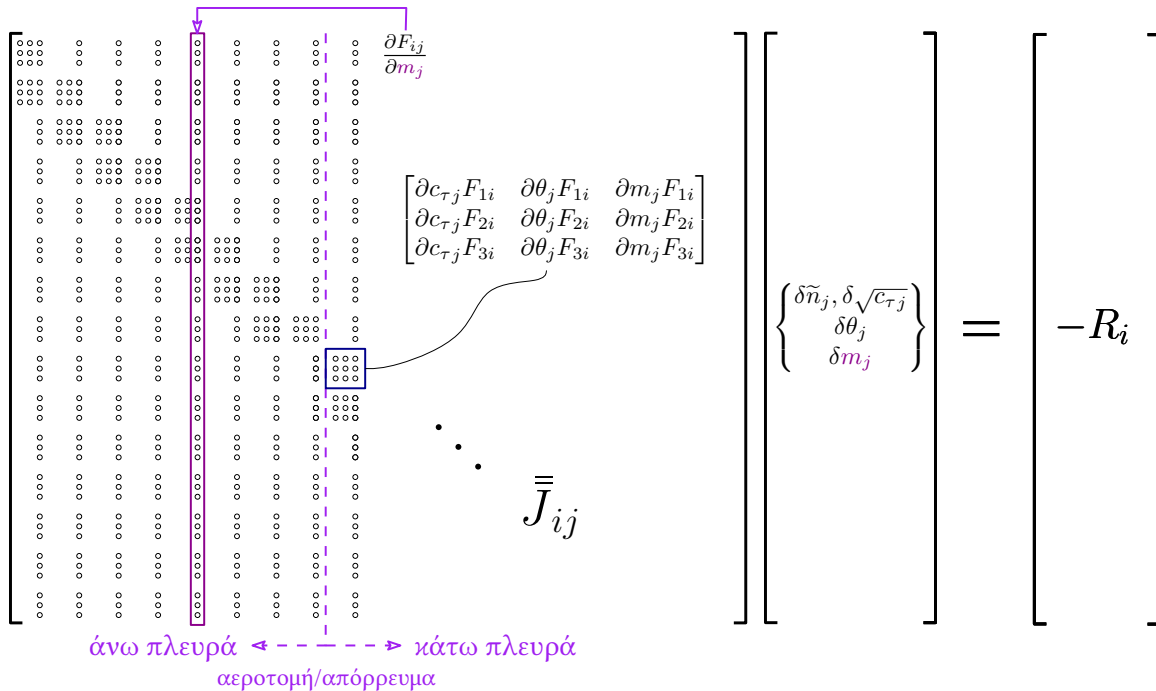
όπου το μητρώο  $[D_{eq}]$  και το διάνυσμα  $\mathbf{b}'_{eq}$  είναι καθαρά γεωμετρικά και εξαρτώνται από το σχήμα διακριτοποίησης και την γωνία προσβολής της αεροτομής. Επομένως, η εξίσωση (4.28) εκφράζει τους βαθμούς ελευθερίας  $\mathbf{x}_{eq}$  (κατανομή πηγών  $\sigma$ , στροβιλότητες  $\gamma_1, \gamma_2$  και ταχύτητες συνεκτικής διόρθωσης  $u_r^*$ ) συναρτήσει του ελλείματος μάζας  $m$ . Χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωτικές σχέσεις για τον υπολογισμό της ταχύτητας που αναφέρονται στο κεφάλαιο 2 και παίρνοντας την εφαπτομενική ταχύτητα στην αεροτομή και το απόρρευμα, λαμβάνεται η σχέση

$$\boxed{\mathbf{u}_e = [D] \mathbf{m} + \mathbf{b} = \mathcal{F}(\mathbf{m})} \quad (4.29)$$

στην οποία το μητρώο  $[D]$  και το διάνυσμα  $\mathbf{b}$  διατηρούν καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα έτσι ώστε η ταχύτητα  $u_e$  να δίνεται συναρτήσει μόνο του ελλείματος μάζας. Η γραμμική σχέση (4.29) εκφράζει τον νόμο αλληλεπίδρασης μεταξύ μη-συνεκτικής και συνεκτικής ροής. Η ταχύτητα σε κάθε σημείο ελέγχου της αεροτομής και του απορρεύματος καθορίζεται από την συνεισφορά των τιμών του ελλείματος μάζας κάθε σημείου ελέγχου. Έτσι, η ταχύτητα απαλείφεται από το σύστημα των μη-γραμμικών εξισώσεων του οριακού στρώματος οι οποίες τελικά γράφονται στη μορφή

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i_b}) = \left\{ \begin{array}{l} F_1 \left( \{ \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}, \theta \}_{i_b-1}, \{ \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}, \theta \}_{i_b}, \mathbf{m} \right) \\ F_2 \left( \{ \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}, \theta \}_{i_b-1}, \{ \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}, \theta \}_{i_b}, \mathbf{m} \right) \\ F_3 \left( \{ \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}, \theta \}_{i_b-1}, \{ \tilde{n} \text{ ή } \sqrt{c_\tau}, \theta \}_{i_b}, \mathbf{m} \right) \end{array} \right\} = 0, \quad i = 1, N_b, \quad b = u, l \quad (4.30)$$

Το μη-γραμμικό σύστημα (4.30), που πλέον λαμβάνει ελλειπτική μορφή μέσω της καθολικής επιρροής του ελλείματος μάζας στην ταχύτητα  $u_e$ , επιλύεται με την μέθοδο Newton και η μορφή του παρουσιάζεται στο σχήμα 4-9. Σημειώνεται ότι η μορφή του μητρώου  $[D]$  στο νόμο αλληλεπίδρασης (4.29) παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση της



Σχήμα 4-9: Σχηματική αναπαράσταση συστήματος Newton για την επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων του οριακού στρώματος για το πρόβλημα της συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης.

μεθόδου Newton ιδιαίτερα σε ροές με ισχυρή αποκόλληση και φουσαλίδες αποκόλλησης. Για να υπάρχει σύγκλιση απαιτείται το μητρώο  $[D]$  να είναι θετικά ορισμένο με ισχυρή κύρια διαγώνιο. Η παραπάνω απαίτηση επιτυγχάνεται μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης που χρησιμοποιείται στην έκφραση της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης.

## 4.6 Υπολογισμός Ταχυτήτων και Δυνάμεων

Γνωρίζοντας τις τιμές του ελλείματος μάζας, η εφαπτομενική ταχύτητα στο σημείο ελέγχου του κάθε πάνελ υπολογίζεται εύκολα βάσει του νόμου της συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης που δίνεται από την εξίσωση (4.29). Η πίεση, υπολογίζεται στη συνέχεια πάνω στο τοίχωμα κάθε αεροτομής με τη βοήθεια της εξίσωσης ορμής εκφρασμένης πάνω σε μία ροϊκή γραμμή (streamline), δηλαδή της εξίσωσης Bernoulli για ασυμπίεστη και μόνιμη ροή.<sup>2</sup> Στην ανάλυση αεροτομών, το προφίλ πίεσης της αεροτομής περιγράφεται μέσω του αδιάστατου συντελεστή  $C_p$ , που ονομάζεται συντελεστής πίεσης. Για την περίπτωση της μόνιμης και ασυμπίεστης ροής ο συντελεστής πίεσης εκφράζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης Bernoulli από τη σχέση

<sup>2</sup>Σημειώνεται ότι ένα πρόβλημα ροϊκού δυναμικού λύνει μόνο το κινηματικό πρόβλημα της ροής (streamlines) ενώ η δυναμική της συμπληρώνεται μετά τη λύση, με την προσθήκη της εξίσωσης Bernoulli.

$$C_p = 1 - \left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^2 \quad (4.31)$$

όπου  $u_e$  η ταχύτητα στην επαπτόμενη στην αεροτομή ροϊκή γραμμή και  $u_\infty$  η ταχύτητα πάνω στην ίδια ροϊκή γραμμή μακριά από την αεροτομή, στην ελεύθερη ροή.

Η εξίσωση (4.31) υπολογίζεται στο σημείο ελέγχου κάθε πάνελ μέσω της παρακάτω σχέσης

$$(C_p^i)_{cp} = 1 - \left(\frac{u_{e_{cp}}^i}{u_\infty}\right)^2 \quad (4.32)$$

και δίνει τον συντελεστή πίεσης της καθαρά μη-συνεκτικής ροής από τον οποίο οι αδιάστατοι συντελεστές δυνάμεων πάνω στην αεροτομή υπολογίζονται εύκολα βάσει των ακόλουθων σχέσεων

$$c_l = \int_0^1 -\Delta C_p d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (4.33)$$

$$c_{m,c/4} = \int_0^1 -\Delta C_p \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{4}\right) d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (4.34)$$

όπου  $c_l$  ο συντελεστής άντωσης,  $c_{m,c/4}$  ο συντελεστής πρόνευσης,  $c$  η χορδή και  $x \in [0, c]$  η συντεταγμένη κατά μήκος της χορδής. Επίσης,  $\Delta C_p = C_{p_l} - C_{p_u}$  με  $C_{p_l}$ ,  $C_{p_u}$  τους συντελεστές πίεσης για το κάτω και άνω τοίχωμα της αεροτομής αντίστοιχα.

Σε ότι αφορά την αντίσταση της αεροτομής, ο πιο ακριβής τρόπος υπολογισμού της, τουλάχιστον στην περίπτωση της μόνιμης ροής, είναι αυτός που βασίζεται στην εφαρμογή του θεωρήματος της ορμής. Με εφαρμογή του ολοκληρωτικού θεωρήματος της ορμής σε ένα χωρίο που περιλαμβάνει την αεροτομή λαμβάνεται ότι

$$c_d = 2\frac{\theta_\infty}{c} \quad (4.35)$$

όπου  $c$  η χορδή της αεροτομής και  $\theta_\infty$  η παράμετρος πάχους ορμής του οριακού στρώματος, κατάντι της αεροτομής και σε μεγάλη απόσταση από αυτήν. Η τιμή του  $\theta_\infty$  συσχετίζεται με το πάχος ορμής  $\theta_w$  σε κάποια άλλη θέση στο απόρρευμα όπου η ταχύτητα στο άκρο είναι  $u_e$  μέσω της σχέσης

$$\theta_\infty = \theta_w \left(\frac{u_e}{V_\infty}\right)^{\frac{H+5}{2}} \quad (4.36)$$

και επομένως

$$c_d = 2\frac{\theta_w}{c} \left(\frac{u_e}{V_\infty}\right)^{\frac{H+5}{2}} \quad (4.37)$$

όπου  $V_\infty$  η ταχύτητα ελεύθερης ροής. Η παραπάνω σχέση υπολογισμού του συντελεστή αντίστασης εξάγεται για συνθήκες μόνιμης ροής.

## Κεφάλαιο 5

# Αποτελέσματα - Επικύρωση Κώδικα Foil2E

Η υπολογιστική λύση της μεθόδου συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4 υλοποιήθηκε στον κώδικα Foil2E ως επέκταση του κώδικα Foil2W του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την περίπτωση της μόνιμης ροής σε δύο σώματα. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στη συνέχεια για τα δύο σώματα σε απομόνωση (πρακτικά άπειρη απόσταση μεταξύ τους) καθώς και σε αλληλεπίδραση. Η επικύρωση του κώδικα Foil2E γίνεται αρχικά για την περίπτωση της καθαρά μη-συνεκτικής ροής και έπειτα για την συνεκτική ροή με τον πλήρη κώδικα αλληλεπίδρασης συνεκτικής/μη-συνεκτικής ροής.

### 5.1 Καθαρά μη-Συνεκτική Ροή

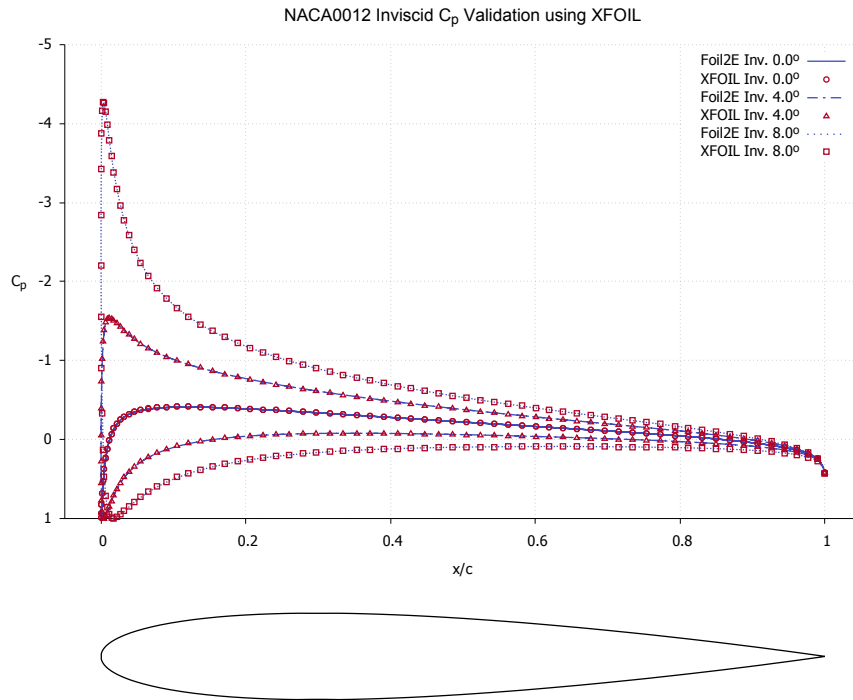
#### 5.1.1 Σώματα σε Απομόνωση

Αρχικά, για την επικύρωση του κώδικα δύο σωμάτων διερευνήθηκε το προφίλ συντελεστή πίεσης για δύο ίδια σώματα (αεροτομές) σε πρακτικά άπειρη απόσταση μεταξύ τους (απομόνωση) και με ίδια γωνία προσβολής. Στην περίπτωση αυτή τα προφίλ πίεσης των δύο σωμάτων θα πρέπει να συμπίπτουν. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στη συνέχεια για την συμμετρική αεροτομή NACA0012, την αεροτομή με καμπυλότητα SD7037 και την αεροτομή υψηλής άντωσης S1223. Η επικύρωση του κώδικα Foil2E έγινε συγκρίνοντας τα προφίλ πίεσης με αυτά του XFOIL.

Στα σχήματα 5-1, 5-2 και 5-3 η κατανομή πίεσης που λαμβάνεται μέσω του Foil2E για δύο ίδια σώματα σε απομόνωση φαίνεται να συμφωνεί αρκετά καλά με τα αποτελέσματα του κώδικα XFOIL. Κατ' επέκταση, βάσει των εξισώσεων (4.33) και (4.34), οι συντελεστές  $c_l$  και  $c_m$  εμφανίζουν αποκλίσεις μικρότερες του 5% σε σχέση με το XFOIL. Επίσης, ο συντελεστής  $c_d$  δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω μίας μεθόδου μη-συνεκτικής ροής καθώς η θεώρηση απουσίας φαινομένων συνεκτικότητας οδηγεί στο παράδοξο του D'Alembert, ότι δηλαδή για ένα σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ασυμπίεστο και

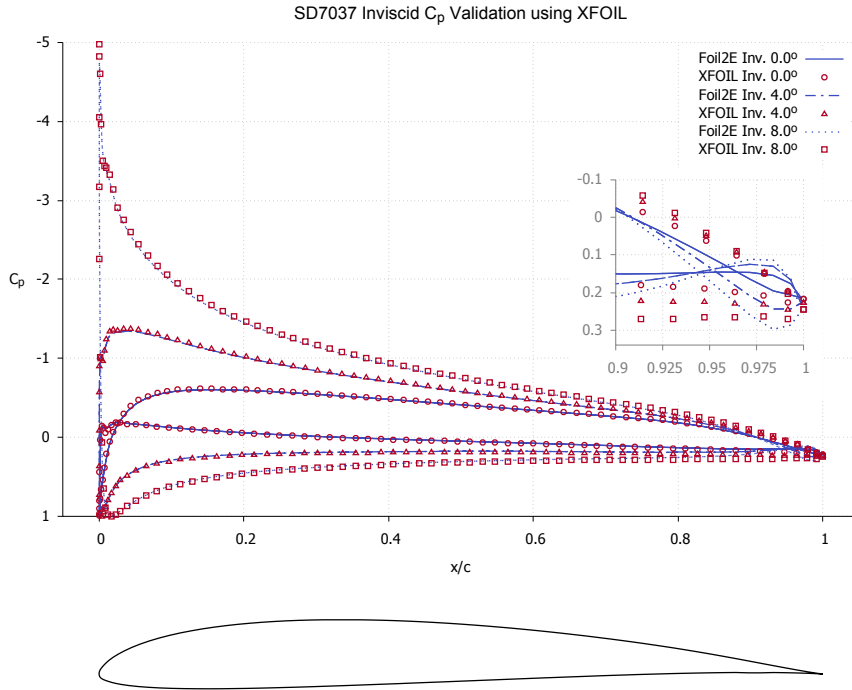


μη-συνεκτικό ρευστό ο συντελεστής αντίστασης  $c_d$  είναι μηδέν.



Σχήμα 5-1: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  για την NACA0012 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για μη-συνεκτική ροή.

Η αεροτομή NACA0012 επιλέχθηκε καθώς αποτελεί μία κλασική αεροτομή για επικύρωση κώδικα (code validation) ενώ οι αεροτομές SD7037 και S1223 επιλέχθηκαν για την ανάδειξη των δυσκολιών που προκύπτουν στις μεθόδους πάνελ όταν η ακμή εκφυγής είναι αιχμηρή (sharp trailing edge) και κατα συνέπεια η γωνία της ακμής εκφυγής  $\Delta\theta_{TE}$  (η εσωτερική γωνία των πάνελ  $i = 1$  και  $i = N$ ) είναι πολύ μικρή ( $\Delta\theta_{TE} < 5^\circ$ ). Για το λόγο αυτό στα σχήματα 5-2 και 5-3 εστιάζεται η περιοχή της ακμής εκφυγής όπου παρατηρείται μια μικρή αδυναμία της μεθόδου να μοντελοποιήσει ομαλά την ροή στο σημείο αυτό. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στην τοπική γεωμετρία της αεροτομής καθώς και την τοπική της διακριτοποίηση που επιβάλλει πύκνωση στο σημείο αυτό και θα μπορούσε να διορθωθεί αυξάνοντας το μήκος  $\Delta S$  του τελευταίου πάνελ ή (ίσως) ικανοποιώντας τις εξισώσεις (4.5, 4.6) σε κάποιο τοπικό εσωτερικό σημείο της αεροτομής. Οι δύο αυτοί τρόποι έχουν ως σκοπό την αποφυγή της περίπτωσης που μία ιδιομορφία (πηγή, στρόβιλος, δίπολο) έρχεται σε πολύ κοντινή απόσταση με ένα σημείο ελέγχου καθώς στην περίπτωση αυτή επηρεάζεται αρνητικά η υπολογιστική λύση. Οι Katz & Plotkin διερευνούν το πρόβλημα αυτό για διάφορες μεθόδους πάνελ και αναφέρουν ότι η μέθοδος γραμμικής κατανομής στρόβιλων με συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann φαίνεται να είναι λιγότερο ευαίσθητη σε αιχμηρές ακμές εκφυγής [42, Κεφ. 11.7].



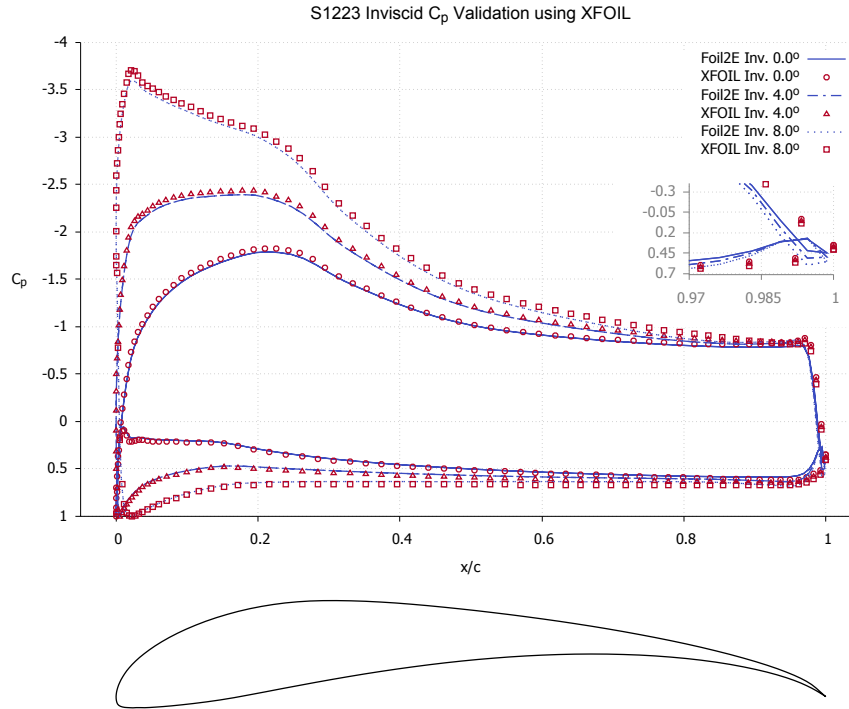
Σχήμα 5-2: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  για την SD7037 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για μη-συνεκτική ροή.

### 5.1.2 Σώματα σε Αλληλεπίδραση

Αφού επικυρώθηκε η αριθμητική διατύπωση για τα σώματα σε απομόνωση, ακολούθησε η επικύρωση για την περίπτωση που οι αεροτομές έρχονται σε κοντινή απόσταση και αλληλεπιδρούν αεροδυναμικά. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο  $A_{inv}$  της εξίσωσης 4.7, που φαίνεται πιο αναλυτικά στο σχήμα 4-2, είναι πλήρες. Δύο περιπτώσεις παρουσιάζονται, μία για διάταξη διπλάνου<sup>1</sup> και μία για ειδική περίπτωση της AGARD για επικύρωση κώδικα CFD σε αεροτομή δύο στοιχείων με μεταπτερύγιο (flap).

Στο σχήμα 5-4 φαίνονται τα χαρακτηριστικά του διπλάνου, οι κατανομές συντελεστή πίεσης της άνω (αριστερά) και κάτω (δεξιά) αεροτομής καθώς και σύγκριση της καμπύλης  $c_l - \alpha$  του Foil2E (καθαρά μη-συνεκτικής ροής) σε σχέση με πλεγματική μέθοδο RANS με το μοντέλο SST k- $\omega$ . Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, οι κατανομές πίεσης για την κάθε αεροτομή είναι διαφορετικές καθώς οι κυκλοφορίες των δύο αεροτομών αλληλεπιδρούν. Έτσι, οι ισοδύναμοι συντελεστές του διπλάνου  $c_l$ ,  $c_m$  έχουν μεγάλη

<sup>1</sup>Σχεδιάστηκε από τον γραφόντα κατά τη συμμετοχή του (2014-2015) στο αεροναυπηγικό γκρουπ με όνομα ATLAS Aero Group του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών του Πανεπιστημίου Πατρών για το σχεδιασμό ενός μη επανδρωμένου τηλεκατευθυνόμενου διπλάνου εκπετάσματος μεγαλύτερου των 3 μέτρων με συμμετοχή στον πανευρωπαϊκό διαγωνισμό αεροναυπηγικής EUROAVIA - Air Cargo Challenge 2015 Stuttgart όπου και έλαβε την 2η θέση για τον σχεδιασμό και την 8η στην τελική κατάταξη μεταξύ περίπου 30 πανεπιστημιακών ομάδων.

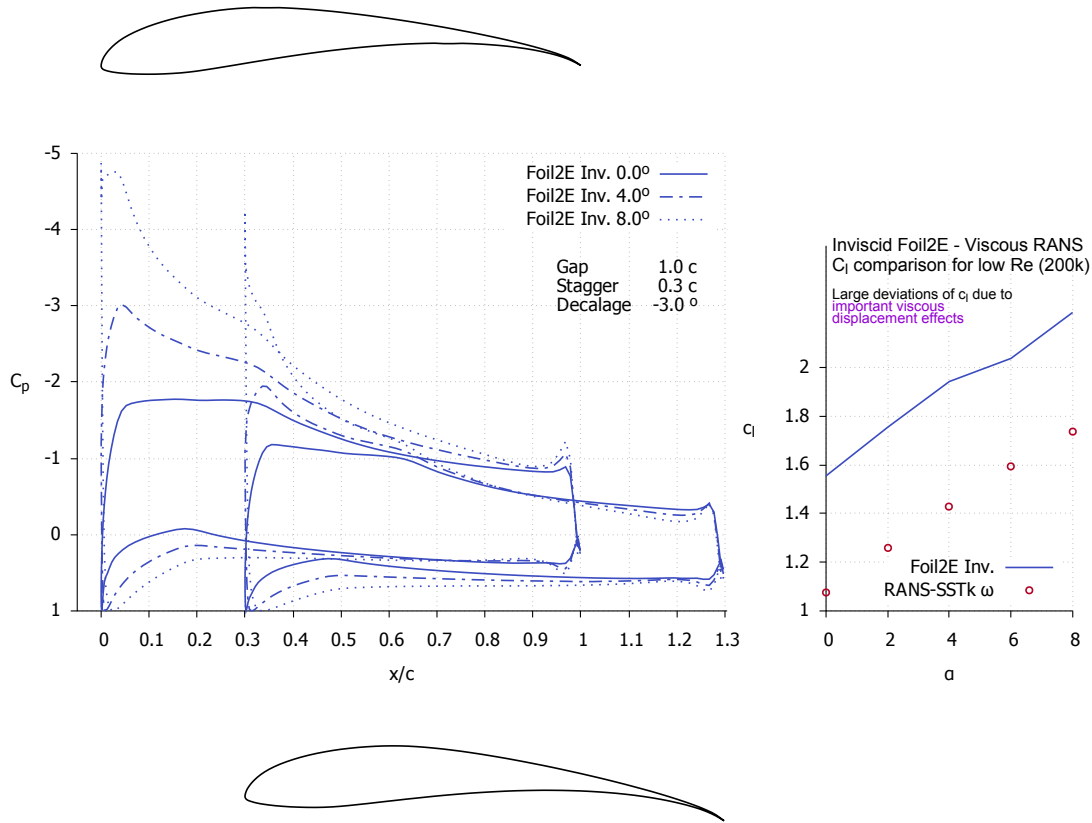


Σχήμα 5-3: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  για την S1223 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για μη-συνεκτική ροή.

ευαισθησία στη σχετική θέση των δύο αεροτομών. Ο σχεδιαστικός στόχος σε διατάξεις διπλάνου για την διατήρηση του μέγιστου συντελεστή άντωσης  $c_l$  είναι η σύγχρονη απώλεια στήριξης και για τις δύο αεροτομές [43] με κατάλληλη επιλογή αεροτομών και σχετικών αποστάσεων και γωνιών μεταξύ αυτών (gap, stagger, decalage). Επίσης, η σημαντική ασυμφωνία των δύο υπολογιστικών μεθόδων στην καμπύλη  $c_l - \alpha$  οφείλεται στο γεγονός ότι η προσομοίωση στη πλεγματική μέθοδο έγινε σε πολύ χαμηλό αριθμό Reynolds ( $200e3$ ) έτσι ώστε τα φαινόμενα συνεκτικότητας να είναι έντονα (σημαντικές αποκολλήσεις και παχύ οριακό στρώμα) και να εμφανίζεται αυτό που αναφέρθηκε στην ενότητα 1.2 ως viscous decambering, δηλαδή απώλεια στην άντωση λόγω μείωσης της λειτουργικής καμπυλότητας της αεροτομής καθώς το οριακό στρώμα της άνω πλευράς είναι αρκετά παχύτερο από αυτό της κάτω. Τέλος, η εμφάνιση του «γόνατου» στην καμπύλη  $c_l - \alpha$  που υπολογίστηκε από το Foil2E μεταξύ των γωνιών 4 και 6 μοιρών έχει αναφερθεί και στο παρελθόν στη βιβλιογραφία [44] και οφείλεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο αεροτομών. Φαίνεται πως τα φαινόμενα συνεκτικότητας στην περίπτωση της μεθόδου RANS έχουν αποσβέσει αυτή τη συμπεριφορά του διπλάνου.

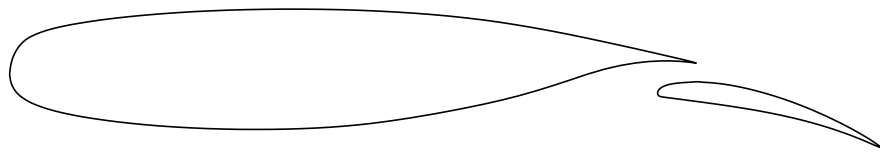
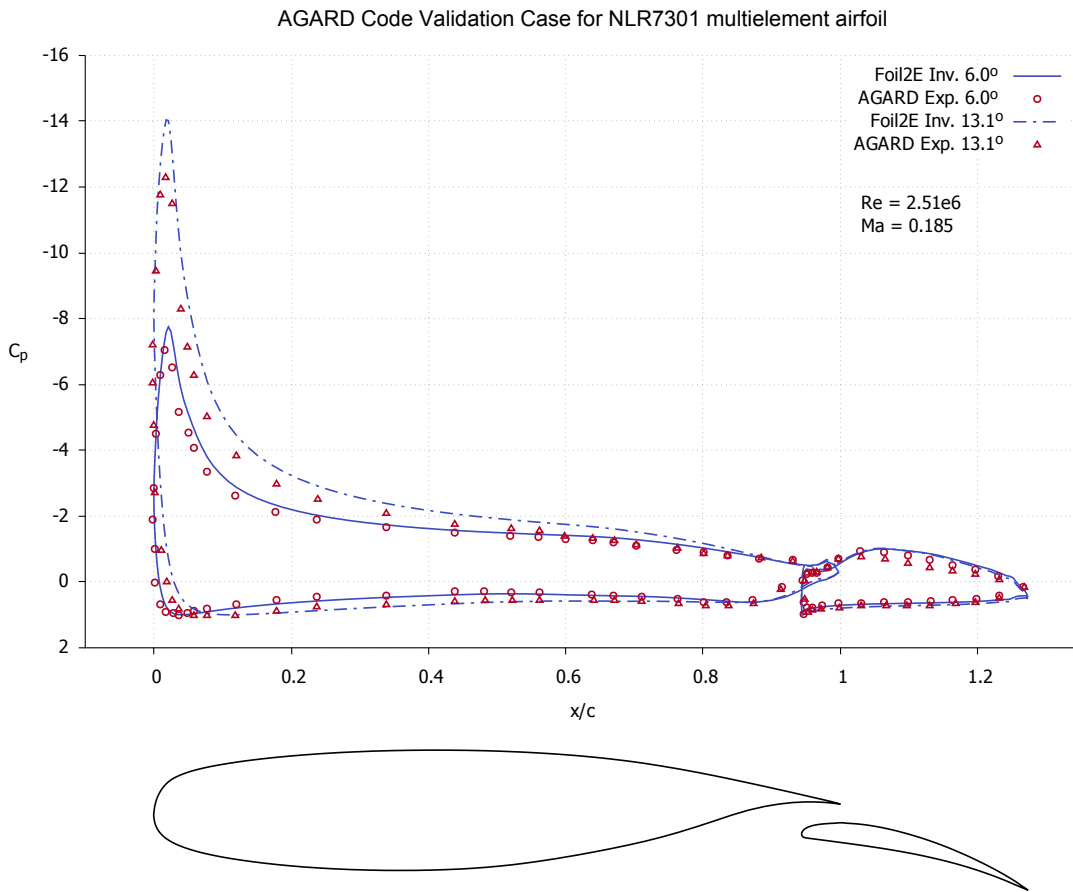
Η πιο εύστοχη περίπτωση για την επικύρωση του καθαρά μη-συνεκτικού πεδίου του κώδικα Foil2E είναι αυτή της AGARD (σχήμα 5-5). Οι υψηλές τιμές του αριθμού Reynolds ( $2.51e6$ ) και ο χαμηλός αριθμός Mach (0.185) επιτρέπουν την σύγκριση της κατανομής πίεσης με τη καθαρά μη-συνεκτική ροή. Τα πειραματικά δεδομένα της AGARD είναι ειδικά για CFD code validation και μάλιστα προέρχονται από δύο αεροσήραγες χαμηλής ταχύτητας (LST) της NLR. Οι συνθήκες του πειράματος περιγράφονται αναλυτικά

S1210 Biplane Inviscid  $C_p$  and  $C_l$  comparison with RANS



Σχήμα 5-4: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  μη-συνεκτικής ροής και καμπύλη  $C_l - \alpha$  για την διάταξη διπλάνου και σύγκριση με πλεγματική CFD μέθοδο.

στον πρώτο τόμο της AGARD [45] και οι μετρήσεις για την πίεση στο τοίχωμα καθώς και για το οριακό στρώμα δίνονται στον δεύτερο τόμο [46]. Οι κατανομές του  $C_p$  φαίνεται να συμφωνούν ικανοποιητικά με μία μικρή απόκλιση που οφείλεται στο σχετικά λεπτό οριακό στρώμα. Καθώς η γωνία προσβολής αυξάνεται από τις 6 στις 13.1 μοίρες, λόγω της αύξησης του πάχους του οριακού στρώματος, τα αποτελέσματα αποκλίνουν περισσότερο από τα πειραματικά.

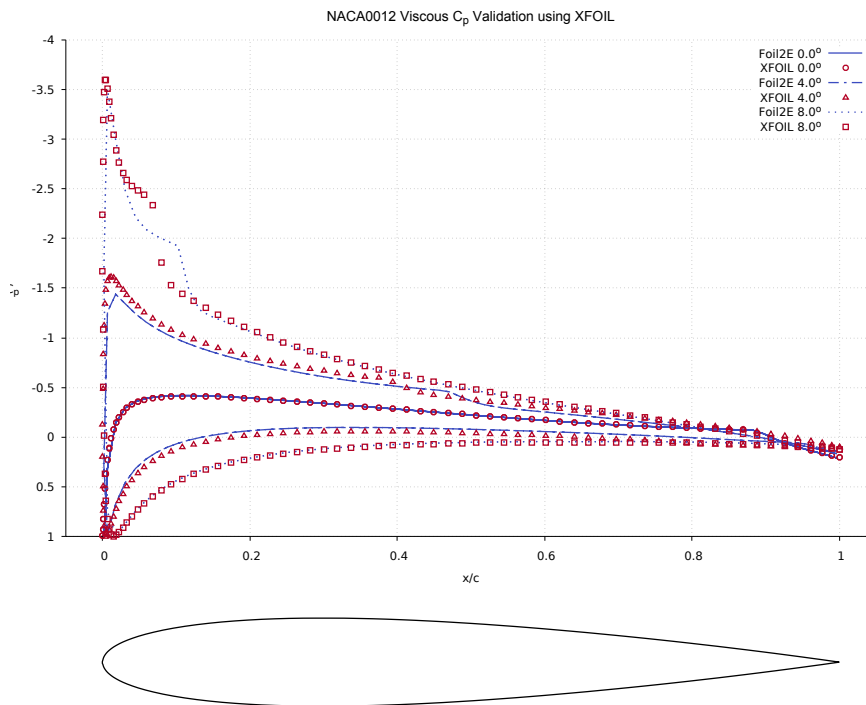


Σχήμα 5-5: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  μη-συνεκτικής ροής για την αεροτομή NLR7301 δύο στοιχείων και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα της AGARD.

## 5.2 Συνεκτική Ροή

### 5.2.1 Σώματα σε Απομόνωση

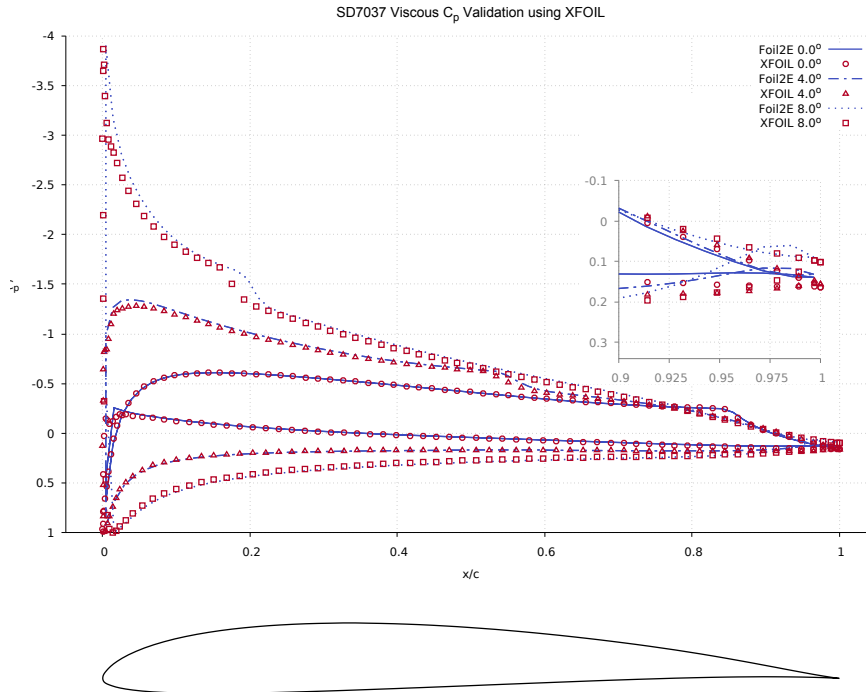
Όπως και για την περίπτωση της μη-συνεκτικής ροής, τώρα για την περίπτωση της συνεκτικής ροής επαληθεύεται ο κώδικας αρχικά για σώματα σε απομόνωση (απόσταση  $1000c$ ) τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 5-6 και 5-7. Τα προφίλ των συντελεστών πίεσης θα πρέπει να είναι τα ίδια και για τις δύο απομονωμένες αεροτομές όπως και συμβαίνει. Τα αποτελέσματα του κώδικα Foil2E φαίνεται να συμφωνούν αρκετά καλά με αυτά του XFOIL. Πιο σημαντικές αποκλίσεις φαίνεται να παρουσιάζονται στα προφίλ πίεσης με 8 μοίρες γωνίας προσβολής καθώς στην άνω επιφάνεια εμφανίζεται φουσαλίδα αποκόλλησης (σχηματισμός γονάτου). Οι δύο κώδικες προβλέπουν ελαφρώς διαφορετική θέση της φουσαλίδας που συσχετίζεται άμεσα με το κριτήριο μετάβασης και την ευαισθησία αυτού στις βαθμίδες πίεσης.



Σχήμα 5-6: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  για την NACA0012 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για συνεκτική ροή με αριθμό  $Re$  ίσο με  $250e3$ .

### 5.2.2 Σώματα σε Αλληλεπίδραση

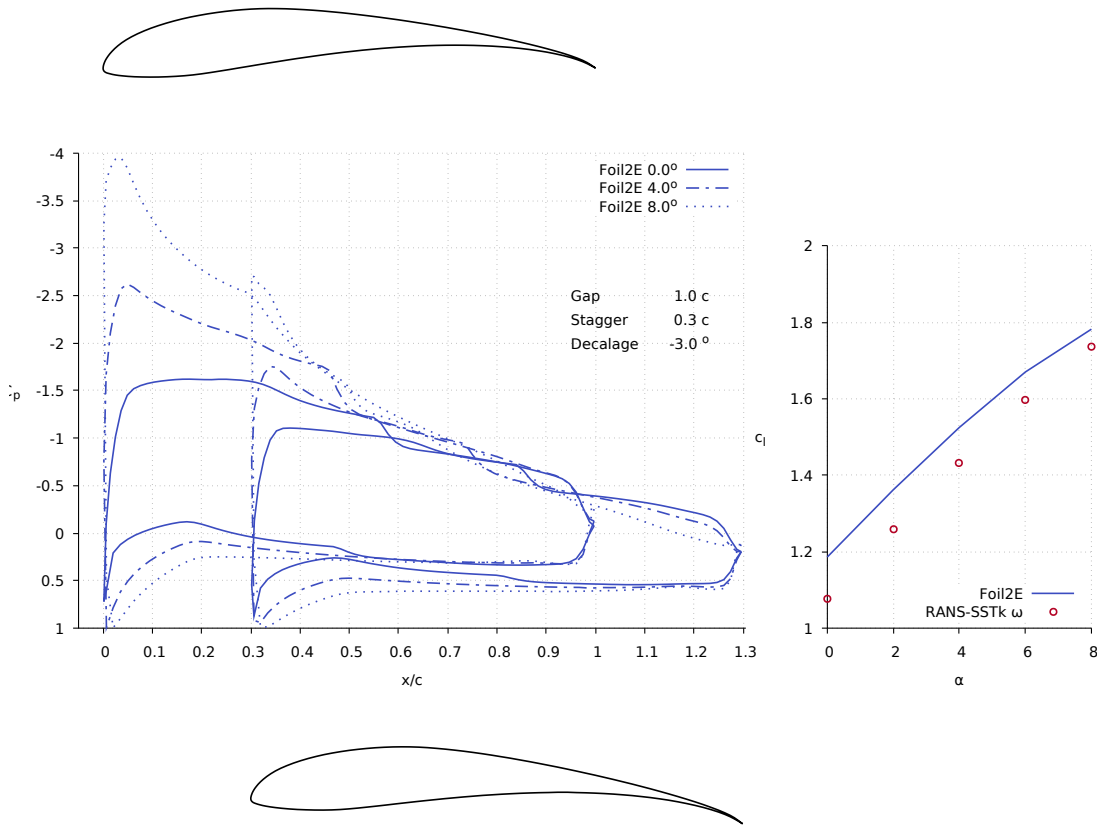
Στο σχήμα 5-8 παρουσιάζονται ξανά τα χαρακτηριστικά του διπλάνου, οι κατανομές συντελεστή πίεσης της άνω (αριστερά) και κάτω (δεξιά) αεροτομής καθώς και σύγκριση της καμπύλης  $c_l - \alpha$  του πλήρους κώδικα Foil2E (συνεκτικής ροής) σε σχέση με πλεγματοκή μέθοδο RANS με μοντέλο SST  $k-\omega$  για την τύρβη. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί,



Σχήμα 5-7: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  για την SD7037 σε απομόνωση και σύγκριση με XFOIL για συνεκτική ροή με αριθμό  $Re$  ίσο με  $250e3$ .

η καμπύλη του συντελεστή άντωσης προσεγγίζει πολύ καλύτερα τα αποτελέσματα της ανάλυσης RANS συγκριτικά αυτή του σχήματος 5-4. Η πολύ ισχυρή επίδραση των φαινομένων συνεκτικότητας στο προφίλ του συντελεστή πίεσης (viscous decambering) ακόμα και για μικρές γωνίες προσβολής, όταν ο αριθμός  $Re$  είναι μικρός, είναι εμφανής. Επίσης, η σταθερή υπερεκτίμηση του συντελεστή άντωσης που υπολογίζεται μέσω του Foil2E παρατηρείται σε παρόμοιους κώδικες, όπως ο XFOIL, για αεροτομές υψηλής άντωσης με πολύ μεγάλη καμπυλότητα.

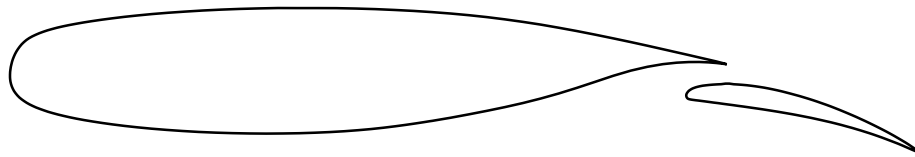
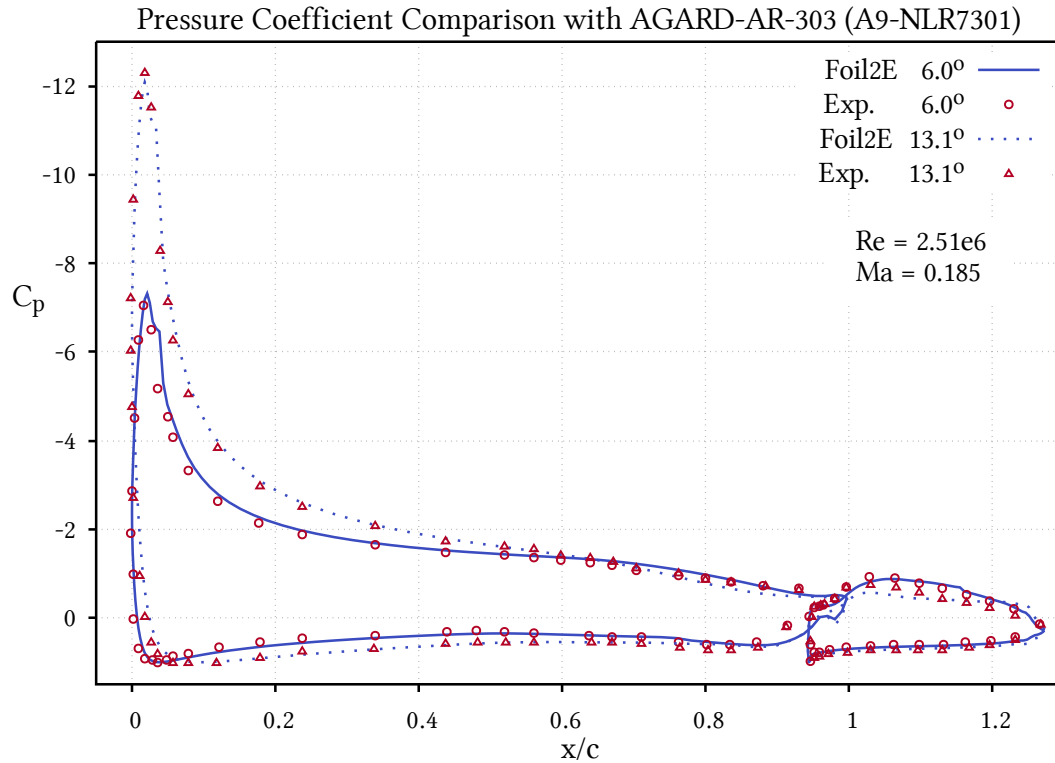
Η περίπτωση της αεροτομής δύο σωμάτων NLR7301 εξετάζεται ξανά (σχήμα 5-9) και χρησιμοποιείται ως η βασική περίπτωση επικύρωσης (test case) του πλήρους κώδικα συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης Foil2E. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά του σχήματος 5-5 παρατηρείται ότι, ειδικότερα για τις 13.1 μοίρες γωνίας προσβολής ο συντελεστής πίεσης  $C_p$  προσεγγίζει πολύ καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα καθώς το πάχος του οριακού στρώματος λαμβάνεται υπόψη. Επίσης, το γόνατο που εμφανίζεται στην περιοχή της ακμής προσφυγής συνδέεται με την εμφάνιση φυσαλίδας αποκόλλησης στην περιοχή αυτή, την οποία ο κώδικας συλλαμβάνει σωστά βάσει των πειραματικών αποτελεσμάτων. Η επιρροή του γόνατου αυτού μπορεί να μην είναι μεγάλης σημασίας στην κατανομή του συντελεστή πίεσης αλλά όμως διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του πάχους ορμής που καθορίζει τον συντελεστή αντίστασης  $c_d$  και είναι ιδιαίτερα σημαντικός στην διαδικασία της ανάλυσης και του σχεδιασμού.



Σχήμα 5-8: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  συνεκτικής ροής και καμπύλη  $C_l - \alpha$  για την διάταξη διπλάνου και σύγκριση με πλεγματική CFD μέθοδο.

Στο σχήμα 5-10 παρατίθενται η σύγκριση των υπολογισμένων προφίλ οριακού στρώματος για διάφορες θέσεις στην κύρια αεροτομή συγκριτικά με πειραματικές μετρήσεις. Καθώς ο κώδικας Foil2E χρησιμοποιεί ολοκληρωτική διατύπωση οριακού στρώματος, τα προφίλ ταχυτήτων που παρουσιάζονται είναι στην ουσία αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των ολοκληρωτικών παραμέτρων για τις σχέσεις συσχέτισης της τυρβώδους ροής όπως αναφέρθηκαν στην ενότητα 3.5.2. Ο Swafford παρέχει ειδικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των προφίλ ταχυτήτων [25] που αποτελούν ημ εμπειρικές σχέσεις της μορφής  $u^+ = u^+(H, Re_\theta)$  όπου  $u^+$  η αδιάστατη ταχύτητα σε μορφή μεταβλητής τοιχώματος (wall variable) που χρησιμοποιείται στην ανάλυση τυρβωδών οριακών στρωμάτων. Καθώς η ολοκληρωτική διατύπωση των εξισώσεων δεν εμπεριέχει επιπλέον απλοποιήσεις στις εξισώσεις Navier-Stokes εκτός από την ήδη υπάρχουσα του λεπτού οριακού στρώματος (thin-shear layer), που υπάρχει και στην διακριτή μορφή των εξισώσεων, η επιτυχία της ολοκληρωτικής μεθόδου βασίζεται σχεδόν αποκλειστικά στις κατανομές ταχυτήτων που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των σχέσεων συ-





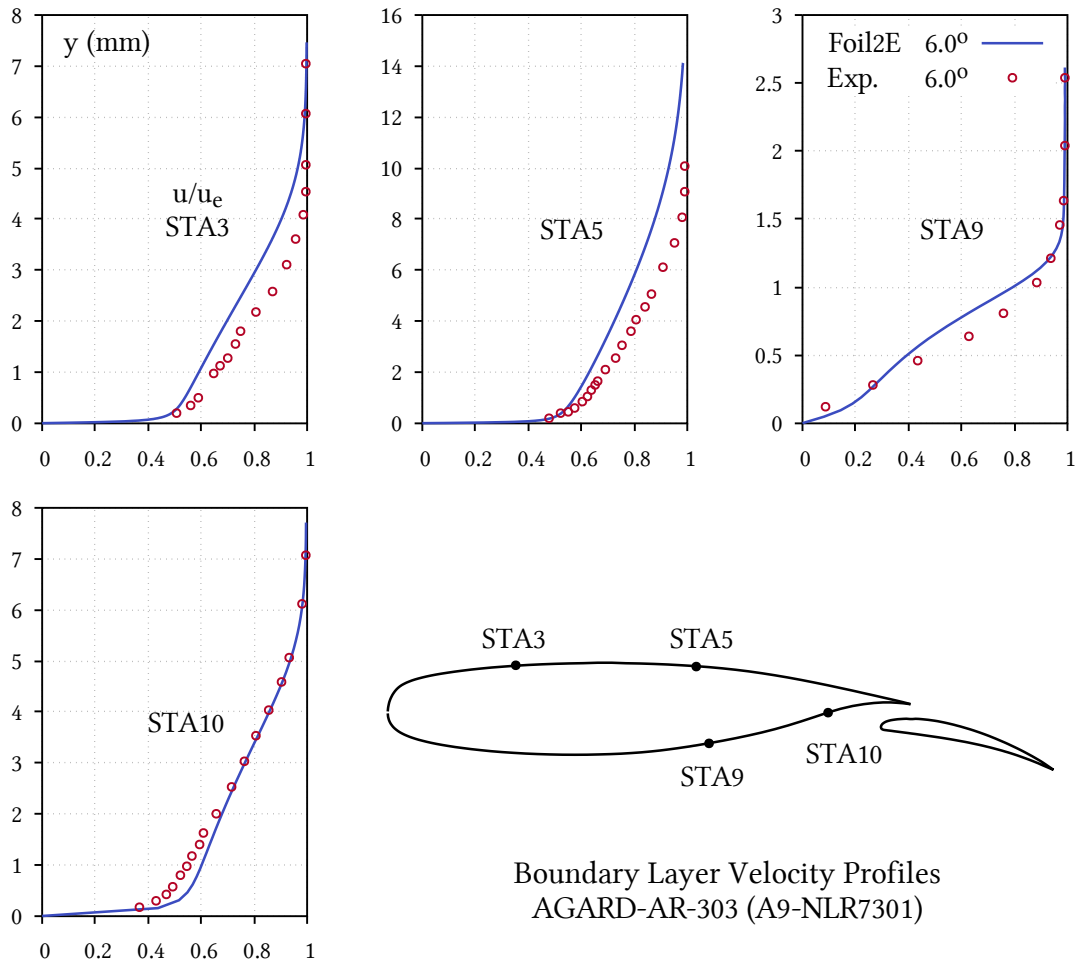
Σχήμα 5-9: Κατανομή συντελεστή  $C_p$  συνεκτικής ροής για την αεροτομή NLR7301 δύο στοιχείων και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα της AGARD.

σχέτισης. Καθώς για την στρωτή ροή το πρόβλημα είναι ιδιαίτερα απλούστερο λόγω της απουσίας των τάσεων Reynolds, η σχέσεις συσχέτισης της τυρβώδους ροής καθορίζουν την ακρίβεια της μεθόδου<sup>2</sup>. Τα προφίλ ταχυτήτων στην δεδομένη περίπτωση συμφωνούν αρκετά καλά με τα πειραματικά δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε ένα πρόβλημα τύρβης όπου τα σφάλματα συνήθως είναι σημαντικά.

### 5.3 Συμπεράσματα

Οι υπορουτίνες γεωμετρίας και καθαρά μη-συνεκτικής ροής του υπολογιστικού κώδικα συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης Foil2W του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής

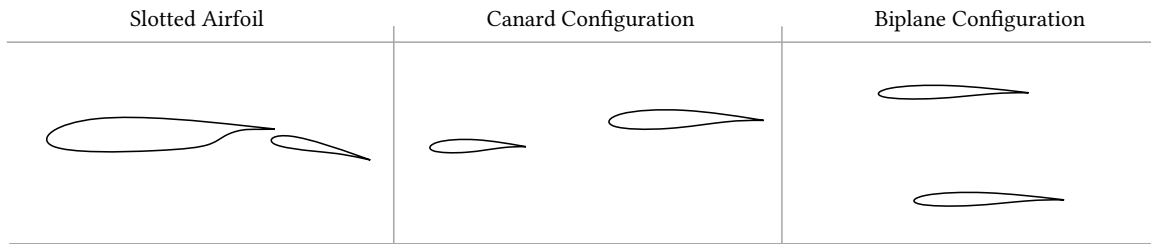
<sup>2</sup>Βέβαια, ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η μέθοδος πρόβλεψης του σημείου μετάβασης της ροής καθώς αν το πειραματικό σημείο μετάβασης διαφέρει σε σχέση με το υπολογισμένο η σύγκριση των κατανομών ταχυτήτων δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί επί ίσοις όροις.



Σχήμα 5-10: Σύγκριση κατανομών ταχυτήτων τυρβωδών οριακών στρωμάτων (Foil2E) και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα.

του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου επεκτάθηκαν κατάλληλα για την ανάλυση δύο σωμάτων που βρίσκει εφαρμογές σε αεροτομές υψηλής άντωσης με δύο στοιχεία, διατάξεις διπλάνου, διατάξεις canard (Σχήμα 5-11) και γενικότερα σε μελέτη ροϊκών διαταραχών σε μία αεροτομή που επάγεται από γειτονικό σώμα με ομαλή γεωμετρία. Η ανάπτυξη και επικύρωση των υπορουτίνων καθαρά μη-συνεκτικής ροής του κώδικα Foil2E ολοκληρώθηκε στα πλαίσια της παρούσας σπουδαστικής εργασίας με σκοπό στη συνέχεια (διπλωματική εργασία) να επεκταθεί η πλήρης μέθοδος συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης για δύο σώματα. Οι μέθοδοι συνεκτικής/μη-συνεκτικής αλληλεπίδρασης έχουν ιδιαίτερη επιτυχία σε εφαρμογές σχεδιασμού ενώ στη συνέχεια θα διερευνηθεί και η δυνατότητα σύζευξης του συγκεκριμένου κώδικα με πακέτο πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση αλληλεπίδρασης ροής-δομής (fluid-structure interaction) με τελικό σκοπό τις αναλύσεις αλληλεπίδρασης ροής-δομής για αεροτομές μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με κράματα μνήμης σχήματος (SMA). Αυτό καθώς η υπολογιστική ταχύτητα μίας μεθόδου VII σε συνδυασμό με την

εύκολη διακριτοποίηση της γεωμετρίας και την απουσία χωρικών πλεγμάτων την καθιστά πολύ ελκυστική για τη χρήση αυτή.



Σχήμα 5-11: Πιθανές διατάξεις σωμάτων προς ανάλυση με χρήση του κώδικα Foil2E.

## Κεφάλαιο 6

# Μέθοδος Αλληλεπίδρασης Ροής-Δομής

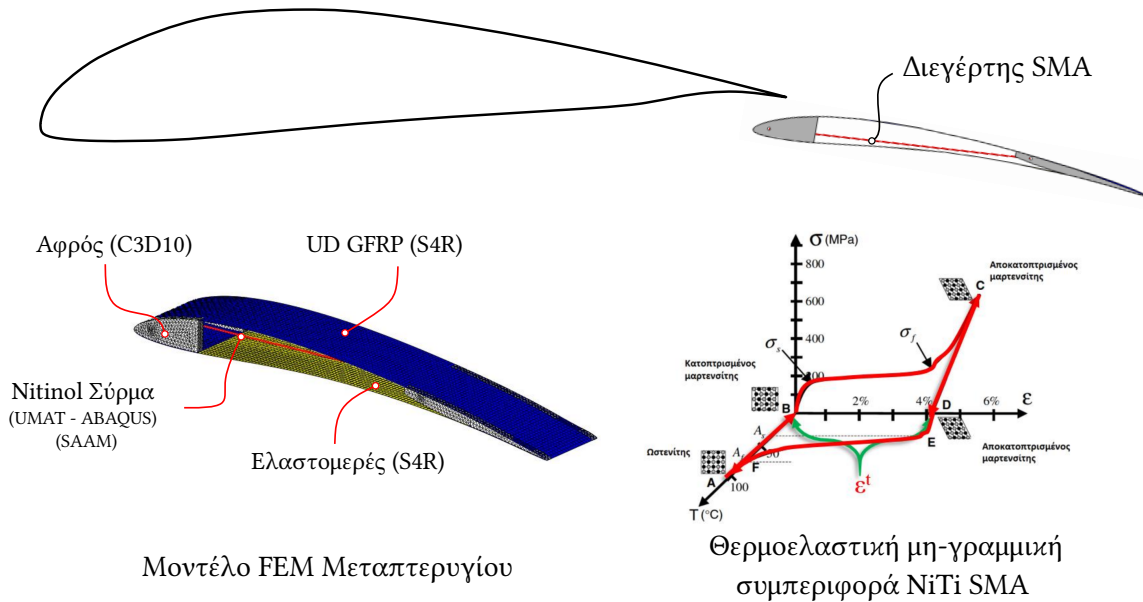
Αφού ο κώδικας αλληλεπίδρασης συνεκτικής/μη-συνεκτικής ροής Foil2E υλοποιήθηκε και επικυρώθηκε, χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο μίας συνολικότερης μεθόδου αλληλεπίδρασης ροής-δομής η οποία υλοποιήθηκε στο εμπορικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS και περιγράφεται στη συνέχεια στο παρόν κεφάλαιο. Η παρούσα μέθοδος επιτρέπει την ανάλυση ροής-δομής αεροτομών δύο στοιχείων (ή ενός), μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με μοντέλο θερμοελαστικής συμπεριφοράς για ενεργοποιητές σύρματος κράματος μνήμης σχήματος (SMA wire).

### 6.1 Μοντέλο Αεροτομής με Διεγέρτη SMA

Το μοντέλο της αεροτομής που δημιουργήθηκε αποτελείται από δύο στοιχεία των οποίων τα χαρακτηριστικά περιγράφονται στη συνέχεια και απεικονίζονται στο σχήμα 6-1.

- **Κύρια Αεροτομή.** Είναι το κύριο αεροδυναμικό στοιχείο της διάταξης και θεωρείται άκαμπτο καθώς για πραγματικές εφαρμογές τα αεροδυναμικά φορτία κατά μήκος της χόρδης είναι αρκετά μικρά ώστε να μην επιβάλλουν σημαντικές παραμορφώσεις στο κέλυφος της δομής. Στο παρόν μοντέλο η κύρια αεροτομή δεν διαθέτει μηχανισμό μεταβολής της γεωμετρίας της και επομένως δεν μοντελοποιείται στην δομική ανάλυση. Παρόλα αυτά δεν μπορεί να εξαιρεθεί από την αεροδυναμική ανάλυση καθώς επηρεάζει δραματικά τις αεροδυναμικές πιέσεις του μεταπτερυγίου, όπως και το μεταπτερύγιο επηρεάζει την κύρια αεροτομή.
- **Μεταπτερύγιο.** Η λειτουργία του σε αεροτομές δύο στοιχείων είναι μεταξύ άλλων η αύξηση της κυκλοφορίας  $\Gamma$  της κύριας αεροτομής και επομένως η αύξηση του συντελεστή άντωσης της διάταξης. Στο παρόν μοντέλο, το μεταπτερύγιο διαθέτει σύρμα κράματος μνήμης σχήματος το οποίο είναι κατάλληλα τοποθετημένο ώστε να μεταβάλλει την καμπυλότητα της αεροτομής (camber morphing). Για το λόγο αυτό, για την κάτω επιφάνεια (skin) της αεροτομής χρησιμοποιείται εύκαμπτο ελαστομερές (στοιχεία S4R) ενώ για την πάνω, πολυμερές ενισχυμένο με ίνες γυαλιού (στοιχεία S4R). Για την έδραση του σύρματος SMA χρησιμοποιείται δομικός

αφρός στην ακμή προσφυγής (στοιχεία C3D10) στον οποίο θεωρείται ότι βρίσκεται δομικό στοιχείο για την πάκτωση του σύρματος. Ομοίως, το άλλο άκρο του σύρματος εδράζεται με ίδιο τρόπο σε δομικό αφρό (στοιχεία C3D10) στην ακμή εκφυγής. Το μεταπτερύγιο, διαθέτοντας μηχανισμό μεταβολής της γεωμετρίας του, προϋποθέτει την συζευγμένη ανάλυση ροής-δομής και επομένως είναι αυτό που μοντελοποιείται στο πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS.



Σχήμα 6-1: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων αεροτομής με διεγέρτη SMA.

## 6.2 Μέθοδος Σύζευξης Foil2E-ABAQUS

Η μέθοδος σύζευξης του Foil2E με το εμπορικό πακέτο ABAQUS είναι μία ασθενής μέθοδος σύζευξης (weak coupling) αλλά υψηλής υπολογιστικής ταχύτητας για την ανάλυση αεροτομών μεταβαλλόμενης γεωμετρίας. Η μέθοδος Foil2E-ABAQUS περιγράφεται μέσω του διαγράμματος ροής πληροφορίας στο σχήμα 6-2. Ο ρόλος των υπορουτίνων DLOAD και UMAT καθώς και η πλήρης αλληλεπίδραση των επιμέρους κομματιών σχολιάζονται στη συνέχεια.

### 6.2.1 Υπορουτίνα Υλικού SMA (UMAT)

Οι καταστατικές εξισώσεις που περιγράφουν την θερμοελαστική μη-γραμμική συμπεριφορά του διεγέρτη σύρματος SMA έχουν υλοποιηθεί στο εμπορικό πακέτο ABAQUS με χρήση της υπορουτίνας UMAT (UserMATerial) [47] στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών του Πανεπιστημίου Πατρών και χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Στην αρχή κάθε χρονικού βήματος οι τιμές της παραμόρφωσης  $\epsilon_{t+\Delta t}$  και θερμοκρασίας  $T_{t+\Delta t}$  υπολογίζονται βάσει του καθολικού λύτη

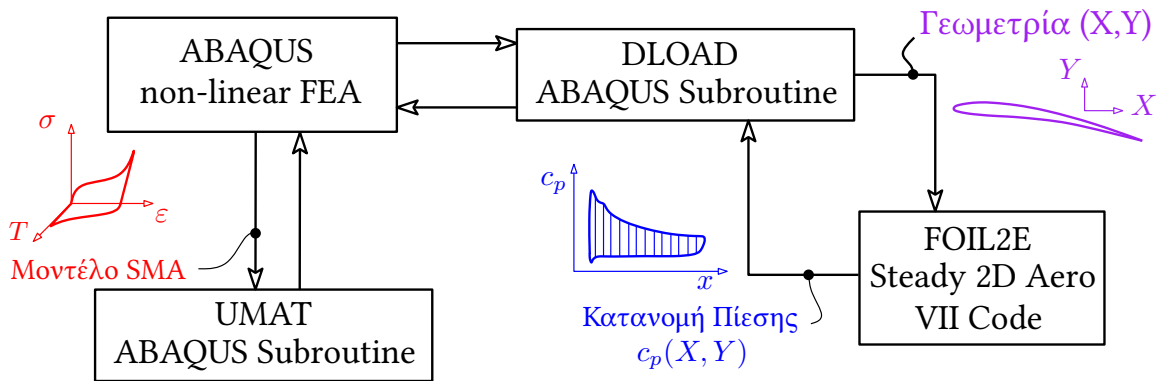
Newton του πακέτου πεπερασμένων στοιχείων. Οι ποσότητες αυτές, δηλαδή, αποτελούν είσοδο για την υπορουτίνα UMAT. Ομοίως, οι επιλεγμένες μεταβλητές κατάστασης, που είναι α) η περιεκτικότητα κατά όγκο σε μαρτενσίτη  $\xi$  και β) η παραμόρφωση μετασχηματισμού  $\varepsilon^t$ , που περιγράφουν μεταβολές στην μικροδομή του υλικού, θεωρούνται ίσες με την τιμή τους στο τελευταίο χρονικό βήμα για το οποίο επιτεύχθηκε σύγκλιση. Έπειτα, πραγματοποιείται το βήμα για την πρόβλεψη της θερμοελαστικής συμπεριφοράς, το οποίο ως δοκιμαστικό βήμα, επαληθεύει εάν οι δοκιμαστικές τιμές των εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης ικανοποιούν τις συνθήκες συμβατότητας στον διακριτό χρόνο. Για τον σκοπό αυτό, η τάση  $\sigma$  και η συνάρτηση μετασχηματισμού  $\Phi$  υπολογίζονται. Αν η συνάρτηση μετασχηματισμού  $\Phi$  είναι μεγαλύτερη του μηδέν τότε ο μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα και οι διορθώσεις για τις τιμές  $\xi$ ,  $\varepsilon^t$  υπολογίζονται βάσει μίας προσέγγισης που συχνά αναφέρεται στην υπολογιστική πλαστικότητα (computational plasticity) ως χαρτογραφικός αλγόριθμος επιστροφής κοντινότερης προβολής (closest projection return mapping algorithm) [48][49].

### 6.2.2 Υπορουτίνα Αλληλεπίδρασης Foil2E-ABAQUS (DLOAD)

Η υπορουτίνα DLOAD (DistributedLOAD) επιτρέπει την επιβολή μεταβαλλόμενων κατανεμημένων φορτίων όπως αυτό της αεροδυναμικής πίεσης για σταθερό φορτίο σε κάθε έδρα ενός στοιχείου (element face) [47]. Στην παρούσα μέθοδο η υπορουτίνα DLOAD εξυπηρετεί στην επικοινωνία του αεροδυναμικού εργαλείου (Foil2E) με το δομικό εργαλείο (ABAQUS). Πιο συγκεκριμένα, η λειτουργία της υπορουτίνας αφορά την δημιουργία ειδικού αρχείου με α) τις συντεταγμένες των κόμβων της εξωτερικής (αεροδυναμικής) επιφάνειας του μοντέλου της αεροτομής, β) τον αριθμό του πεπερασμένου στοιχείου καθώς και τον αριθμό του σημείου ολοκλήρωσης (integration point) για το οποίο καλείται και γ) το τρέχον βήμα θερμοκρασίας increment του SMA. Τα δεδομένα αυτά αποθηκεύονται κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης (iteration) του καθολικού λύτη Newton του ABAQUS. Έτσι, το αρχείο με τις συντεταγμένες του παραμορφωμένου σώματος για κάθε επανάληψη διαβάζεται από τον αεροδυναμικό κώδικα Foil2E σε κάθε επανάληψη και υπολογίζεται το νέο πεδίο πίεσης. Το νέο πεδίο πίεσης επιβάλλεται στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων και η διαδικασία συνεχίζεται για κάθε επανάληψη του κάθε βήματος μέχρι το τελευταίο βήμα θερμοκρασίας του SMA.

### 6.2.3 Αλληλεπίδραση Ροής-Δομής

Τα υπολογιστικά εργαλεία που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες υποενότητες χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία της μεθόδου ανάλυσης αλληλεπίδρασης ροής-δομής. Στο απλοποιημένο διάγραμμα ροής του σχήματος 6-2 παρουσιάζεται η αλληλεπίδραση των επιμέρους κομματιών. Το δομικό μοντέλο που δημιουργήθηκε στο ABAQUS είναι αυτό για το μεταπτερύγιο με τον ενσωματωμένο μηχανισμό μεταβολής γεωμετρίας μέσω ενεργοποιητή SMA (σχήμα 6-1). Στο μοντέλο αυτό ορίζονται οι αρχικές θερμομηχανικές συνθήκες που περιγράφουν την αρχική κατάσταση του ενεργοποιητή και τις συνοριακές του συνθήκες (συνθήκες στήριξης). Κατά την αρχικοποίηση της αλληλεπίδρασης



Σχήμα 6-2: Διάγραμμα πληροφορίας μεθόδου αλληλεπίδρασης ροής-δομής.

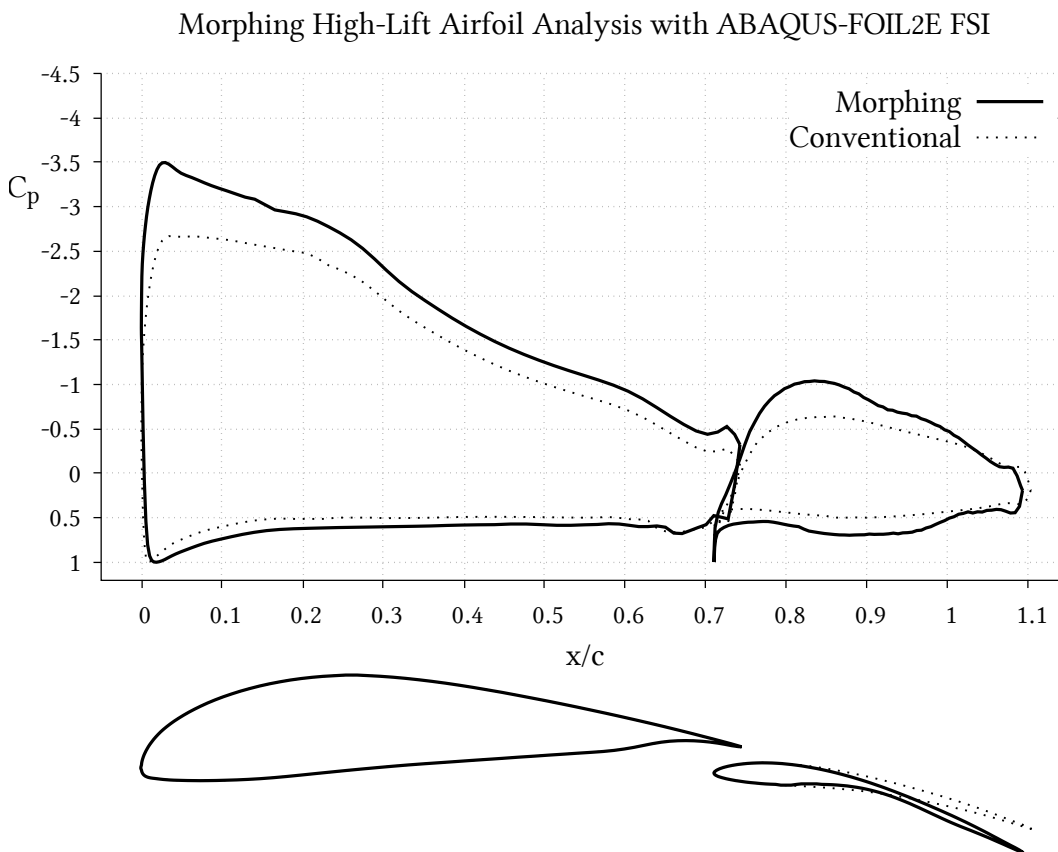
ροής-δομής, η αεροδυναμική πίεση στην αεροτομή θεωρείται μηδενική. Η μεταβολή της θερμοκρασίας θεωρείται ως είσοδος για την ενεργοποίηση του SMA καθώς αυτή παρέχεται από κάποιο άλλο σύστημα το οποίο δεν συμπεριλαμβάνεται στην ανάλυση. Με την είσοδο του επιβαλλόμενου θερμοκρασιακού πεδίου, η υπορουτίνα UMAT χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της μεταβολής της κατάστασης του ενεργοποιητή, που περιγράφεται από την μεταβολή της τάσης, θερμοκρασίας και παραμόρφωσης μετασχηματισμού. Αν λαμβάνει χώρα μετασχηματισμός για το SMA, η γεωμετρία της αεροτομής μεταβάλλεται, και οι συντεταγμένες της νέας γεωμετρίας διαβάζονται από την υπορουτίνα DLOAD και περνάνε στον κώδικα Foil2E για τον υπολογισμό της νέας κατανομής πίεσης. Το νέο πεδίο πίεσης καταγράφεται σε αρχείο το οποίο διαβάζεται από την υπορουτίνα DLOAD και καταμερίζεται ως σταθερή πίεση στην έδρα του κάθε στοιχείου (element face). Η ανανέωση της γεωμετρίας και ο υπολογισμός του πεδίου πίεσης γίνεται σε επίπεδο επανάληψης (iteration) για κάθε βήμα στο θερμοκρασιακό πεδίο (increment). Έτσι, για κάθε βήμα εξασφαλίζεται η σύγκλιση της μεθόδου βάσει κριτηρίου για την παραμόρφωση της αεροδυναμικής επιφάνειας (skin), με προκαθορισμένη ανοχή, που υλοποιήθηκε στον κώδικα Foil2E. Όταν το κριτήριο αναγνωρίσει ότι έχει επιτευχθεί σύγκλιση, επιστρέφει το ίδιο αεροδυναμικό πεδίο με αυτό της προηγούμενης επανάληψης (iteration) και η μέθοδος έπειτα συγκλίνει βάσει του κριτηρίου που εφαρμόζεται στο ABAQUS. Έτσι, η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε βηματική αύξηση (increment) της θερμοκρασίας του SMA και τερματίζεται όταν η θερμοκρασία φτάσει στην τελική της τιμή.

### 6.3 Αποτελέσματα

Στο σχήμα 6-3 φαίνεται η κατανομή πίεσης της αεροτομής δύο στοιχείων με το μεταπτερύγιο μεταβαλλόμενης γεωμετρίας για την απαραμόρφωτη κατάσταση (Conventional) και την παραμορφωμένη κατάσταση (Morphing) για ένα τυχαίο βήμα στο θερμοκρασιακό πεδίο. Παρατηρείται ότι η μεταβολή της γεωμετρίας (camber morphing) του μεταπτερυγίου έχει ως συνέπεια την αύξηση του συντελεστή άντωσης του ( $c_l = \int c_p \frac{x}{c} dx$ ), αλλά πολύ σημαντικότερη είναι η επαγόμενη αύξηση του συντελεστή άντωσης της κύριας αεροτομής. Τα πλεονεκτήματα μίας τέτοιας μεταβολής της γεωμετρίας συγκριτικά με

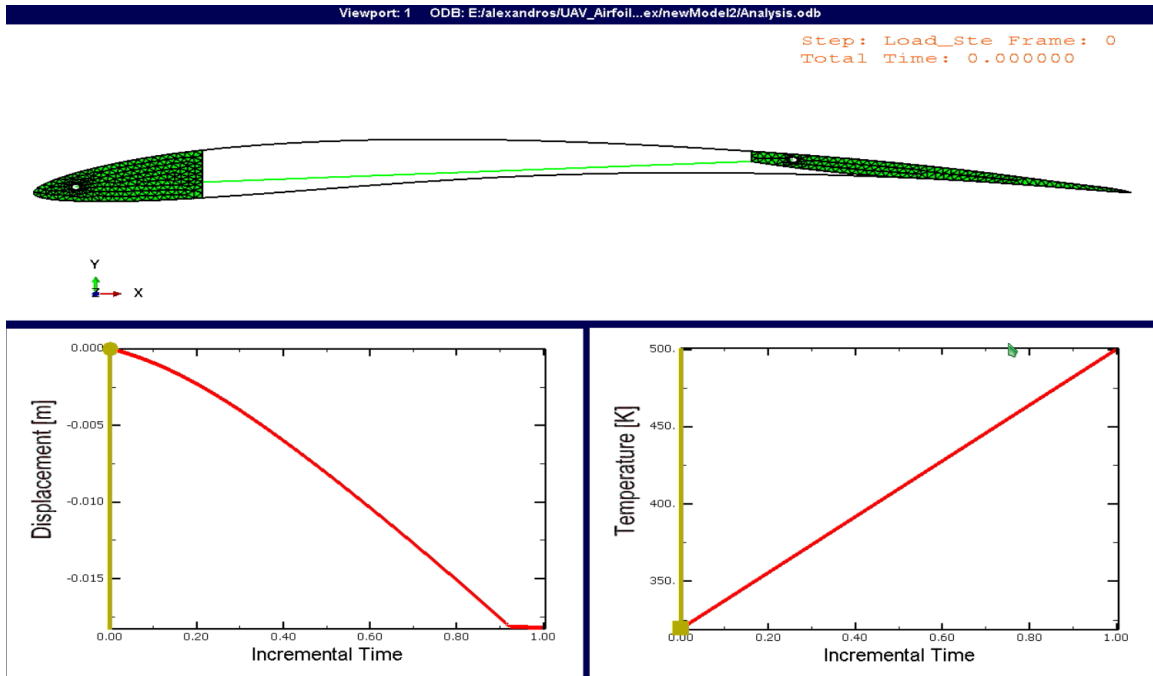
την κοινή μετατόπιση του δεύτερου στοιχείου μέσω ενός μηχανισμού (υδραυλικού ή σερβοκινητήρα) με σκοπό την μεταβολή της γωνίας προσβολής του, είναι οι υψηλότεροι συντελεστές αεροδυναμικής απόδοσης  $c_l/c_d$  και το μειωμένο δομικό βάρος.

Στο σχήμα 6-3 παρουσιάστηκε η επίδραση της μεταβολής της γεωμετρίας στο πεδίο της αεροδυναμικής πίεσης, τώρα, στα σχήματα 6-4, 6-5 και 6-6 φαίνεται η επίδραση του σύρματος SMA (αλλά και του αεροδυναμικού πεδίου, το οποίο όμως δεν φαίνεται) στην παραμόρφωση του μεταπτερυγίου. Τα σχήματα αυτά απεικονίζουν τρία στιγμιότυπα για την απαραμόρφωτη κατάσταση, την κατάσταση μέσης παραμόρφωσης καθώς και την κατάσταση τελικής παραμόρφωσης. Η μετατόπιση της ακμής εκφυγής απεικονίζεται στο κάτω αριστερά διάγραμμα ενώ η θερμοκρασία του SMA στο κάτω δεξιά διάγραμμα του κάθε σχήματος. Ο χρόνος που αναφέρεται ως incremental time είναι στην ουσία ψευδοχρόνος για την υπολογιστική μέθοδο.

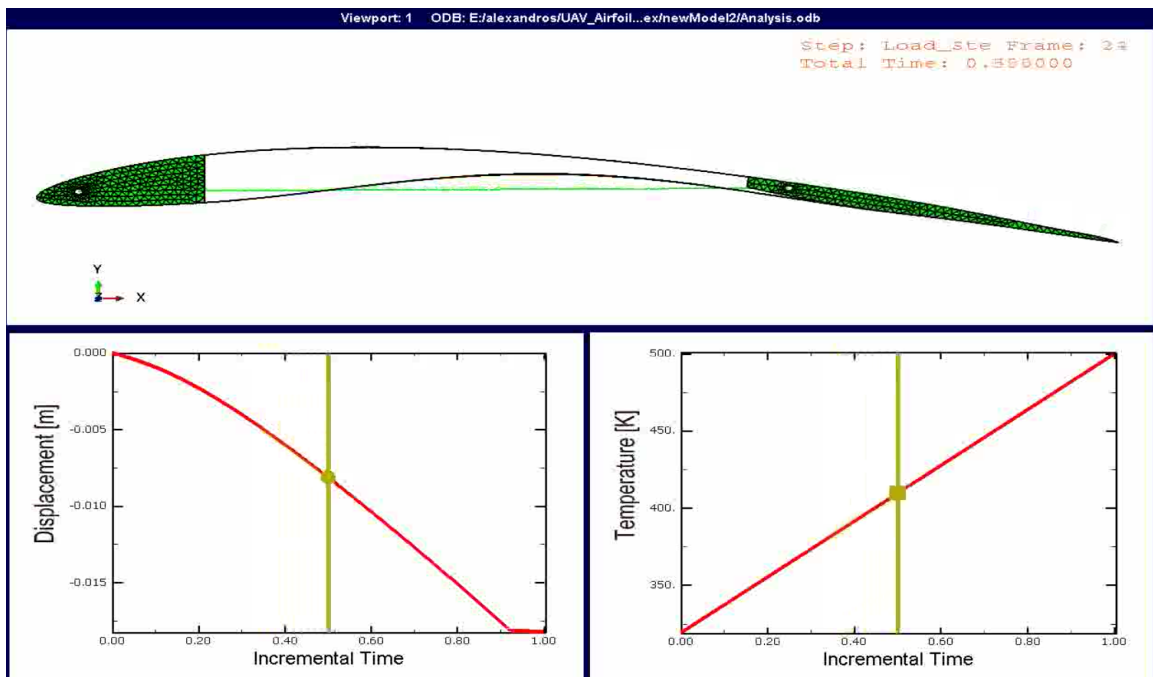


Σχήμα 6-3: Συντελεστής πίεσης αεροτομής δύο στοιχείων με μεταπτερύγιο μεταβαλλόμενης γεωμετρίας σε κατάσταση αναφοράς και σε παραμόρφωση.

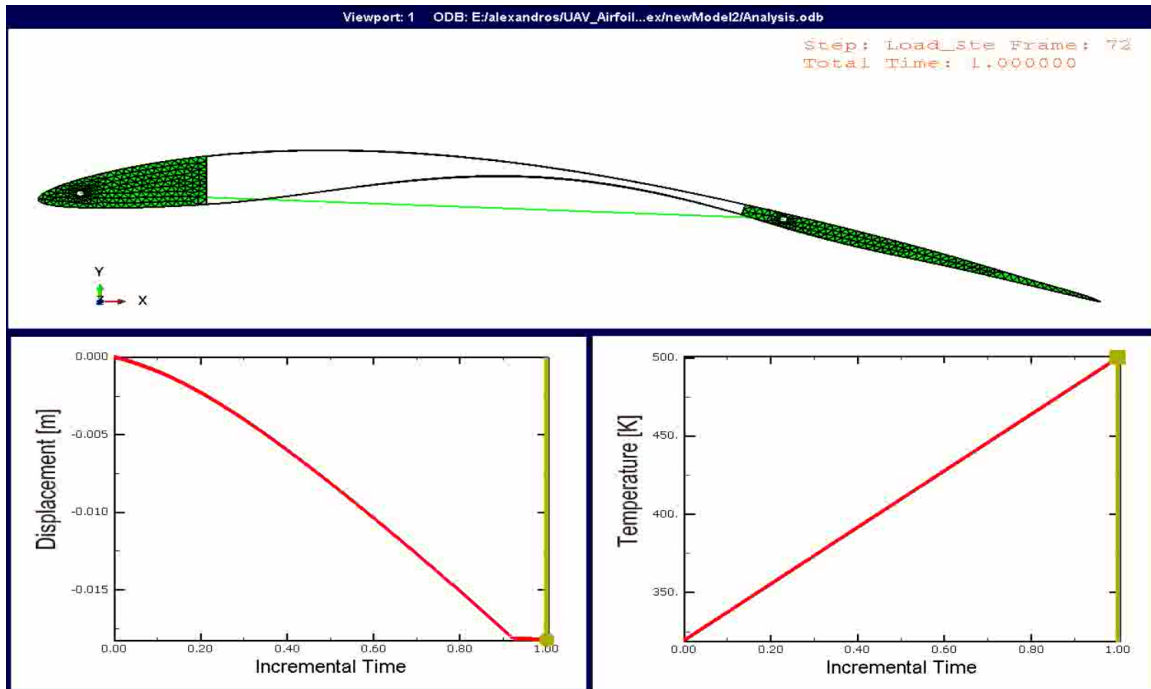




Σχήμα 6-4: Παραμόρφωση μεταπτερυγίου με διεγέρτη κράματος μνήμης σχήματος και καμπύλες θερμοκρασίας SMA και παραμόρφωσης άκρου αεροτομής (ακμή εκφυγής) στην απαμόρφωτη κατάσταση.



Σχήμα 6-5: Παραμόρφωση μεταπτερυγίου με διεγέρτη κράματος μνήμης σχήματος και καμπύλες θερμοκρασίας SMA και παραμόρφωσης άκρου αεροτομής (ακμή εκφυγής) στην μέση παραμορφωμένη κατάσταση.



Σχήμα 6-6: Παραμόρφωση μεταπτερυγίου με διεγέρτη κράματος μνήμης σχήματος και καμπύλες θερμοκρασίας SMA και παραμόρφωσης άκρου αεροτομής (ακμή εκφυγής) στην τελική παραμορφωμένη κατάσταση.

## 6.4 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

Τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας συνοψίζονται στα παρακάτω σημεία.

- Ο κώδικας Foil2W του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου επεκτάθηκε για την ανάλυση αεροτομών δύο στοιχείων σε μόνιμη ροή (κώδικας Foil2E) και επικυρώθηκε επιτυχώς με πειραματικά δεδομένα.
- Αναπτύχθηκε μέθοδος ασθενούς αλληλεπίδρασης μόνιμης ροής-δομής (Foil2E-ABAQUS weak coupling method) με εμπορικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων στο οποίο έχουν ήδη υλοποιηθεί θερμοελαστικά μη-γραμμικά μοντέλα για την μοντελοποίηση συρμάτων SMA.
- Η μέθοδος επιτρέπει την πλήρη ανάλυση αεροτομών μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με διεγέρτες σύρματος SMA σε κλίμακα χρόνου λεπτών για αεροτομές δύο ή ενός στοιχείου και ανεξαρτήτως τύπου μηχανισμού (μόνο η παραμόρφωση της αεροδυναμικής επιφάνειας λαμβάνεται υπόψη στον αεροδυναμικό κώδικα).

Επίσης, προτείνονται τα εξής σημεία ως μελλοντική εργασία με σκοπό την περαιτέρω εξέλιξη της ήδη λειτουργικής μεθόδου.

- Επικύρωση της μεθόδου αλληλεπίδρασης Foil2E-ABAQUS με πειραματικά δεδομένα αεροελαστικών αναλύσεων σε αεροσήραγγα (ΕΜΠ).
- Ανάλυση, σχεδιασμός και κατασκευή πρωτότυπου αεροτομής δύο στοιχείων μεταβαλλόμενης γεωμετρίας και μελέτη για επιτυχή ενσωμάτωση του σε εξελιγμένο μη-επανδρωμένο αεροσκάφος πολλαπλών ρόλων.
- Επέκταση μεθόδου αλληλεπίδρασης ABAQUS-Foil2E για μη-μόνιμες ροές με αποβολή στροβιλότητας (vortex shedding) για την σωστή μοντελοποίηση ενεργοποιητών σχετικά υψηλότερης συχνότητας απόκρισης.
- Επέκταση μεθόδου σε ψευδο-τρισιδιάστατη (2.5D) για την ανάλυση πτερυγίων μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με διεγέρτες SMA. Η μέθοδος στην απλή της μορφή μπορεί να αναπτυχθεί με εκτίμηση του αεροδυναμικού πεδίου του πτερυγίου αναλύοντας ορισμένο αριθμό εγκάρσιων τομών (αεροτομών) με χρήση του 2D κώδικα Foil2E και παρεμβάλλοντας γραμμικά ή με κάποιο άλλο τρόπο τις ενδιάμεσες τιμές της αεροδυναμικής πίεσης. Η μέθοδος αυτή δίνει πολύ αξιόπιστα αποτελέσματα για μηχανικές εφαρμογές εφόσον δεν εμφανίζονται σημαντικές εγκάρσιες βαθμίδες πίεσης που επάγουν εγκάρσια ροή (crossflow) στο πτερύγιο. Υπό την εμφάνιση τέτοιων βαθμίδων πίεσης, ο αεροδυναμικός κώδικας θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει τους διορθωτικούς όρους για την εγκάρσια ροή.

# Βιβλιογραφία

- [1] Joel H. Ferziger and Milovan Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2002.
- [2] Mark Drela. *Flight Vehicle Aerodynamics*. The MIT Press, 2014.
- [3] R. C. Lock and B. R. Williams. Viscous-Inviscid Interactions in External Aerodynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 24(2):51–171, 1987.
- [4] Thomas J. Mueller. Low Reynolds Number Vehicles. Technical report, AGARDograph No.288, 1985.
- [5] Mark Drela. Low-Reynolds-Number Airfoil Design for the M.I.T. Daedalus Prototype: A Case Study. *Journal of Aircraft*, 25(8):724–732, 1988.
- [6] Suresh H. Goradia. *Confluent Boundary Layer Flow Development with Arbitrary Pressure Distribution*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 1971.
- [7] H. E. H. Mahgoub and P. Bradshaw. Calculation of Turbulent-Inviscid Flow Interactions with Large Normal Pressure Gradients. *AIAA Journal*, 17(10), 1979.
- [8] J.C. LeBalleur. Couplage visqueux-non visqueux: méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques. *La Recherche Aérospatiale*, 183:65–76, 1978.
- [9] Tuncer Cebeci and A.M.O. Smith. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. Academic Press, 1974.
- [10] M.R. Head. Entrainment in the Turbulent Boundary Layer. Technical report, ARC R&M 3152.
- [11] J.E. Green, D.J. Weeks, and J.W.F. Brooman. Prediction of Turbulent Boundary Layers and Wakes in Compressible Flow by a Lag-Entrainment Method. Technical report, ARC R&M 3791.
- [12] J.C. LeBalleur. Strong matching method for computing transonic viscous flows including wakes and separations. *La Recherche Aérospatiale*, 3:21–45, 1981.
- [13] B. Thwaites. *Incompressible Aerodynamics*. Clarendon Press, Oxford, 1960.

- [14] S. Goldstein. On laminar boundary layer flow near a point of separation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1:43–69, 1948.
- [15] A. E. P. Veldman. New, quasi-simultaneous method to calculate interacting boundary layers. *AIAA Journal*, 19(1):79–85, 1981.
- [16] Mark Drela and Michael B. Giles. Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils. *AIAA Journal*, 25(10):1347–1355, 1987.
- [17] Mark Drela. XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils. Notre Dame, Indiana, 1989. Conference on Low Reynolds Number Aerodynamics, University of Notre Dame.
- [18] Mark Drela. Newton Solution of Coupled Viscous/Inviscid Multielement Airfoil Flows. In *AIAA 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, 1990.
- [19] Michael Bryce Giles. *Newton Solution of Steady Two-Dimensional Transonic Flow*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology (MIT), 1985.
- [20] Vasilis A. Riziotis and Spyros G. Voutsinas. Dynamic stall modelling on airfoils based on strong viscous–inviscid interaction coupling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56(June 2007):185–208, 2007.
- [21] Mark Drela. Fast 3D Viscous Calculation Methods. In *Boeing\MIT Strategic Research Review*, 2014.
- [22] R. E. Melnik, R. Chow, and H. R. Mead. Theory of Viscous Transonic Flow Over Airfoils at High Reynolds Number. In *AIAA 10th Fluid & Plasmadynamics Conference*, AIAA-P-77-680, 1977.
- [23] V N Vatsa and J E Carter. Analysis of Airfoil Leading-Edge Separation Bubbles. *AIAA Journal*, 22(12):1697–1704, 1984.
- [24] D.L. Whitfield, A. Jameson, and Wolfgang Schmidt. Viscid-Inviscid Interaction on Airfoils using Euler and Inverse Boundary-Layer Equations. In *US-German Data Exchange Meeting, DFVLR-AAVA*, Gottingen, 1981.
- [25] T.W. Swafford. Analytical Approximation of Two-Dimensional Separated Turbulent Boundary-Layer Velocity Profiles. *AIAA Journal*, 21(6):923–926, 1983.
- [26] P. Bradshaw, D.H. Ferriss, and N.P. Atwell. Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 28(3):593–616, 1967.
- [27] P. Bradshaw and D.H. Ferriss. Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation: compressible flow on adiabatic walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(1):83–110, 1971.
- [28] Mark Drela, XFOIL 6.4 version notes. [http://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/version\\_notes.txt](http://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/version_notes.txt).

- [29] Vasilis A. Riziotis. *Aerodynamic and aeroelastic analysis of stall on wind turbine rotors*. PhD thesis, National Technical University of Athens (NTUA), 2003.
- [30] Kellogg O.D. *Foundation of Potential Theory*. Dover, 1953.
- [31] Vasilis A. Riziotis. Investigation of the possibility to model stall by means of vortex methods. Master Thesis, 1994.
- [32] M. J. Lighthill. On displacement thickness. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(4):383–392, 1958.
- [33] John D. Anderson Jr. *Computational Fluid Dynamics, The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [34] Mohamed Gad-el Hak. Stokes’s Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid. *Journal of Fluids Engineering*, 117(1):3–5, 1995.
- [35] George Emanuel. Bulk viscosity of a dilute polyatomic gas. *Physics of Fluids A*, 2:2252–2254, 1990.
- [36] D.L. Whitfield. Integral Solution of Compressible Turbulent Boundary Layers Using Improved Velocity Profiles. Technical report, Arnold Air Force Station, AEDC-TR-78-42, 1978.
- [37] M. Drela. A New Transformation and Integration Scheme for the Compressible Boundary Layer Equations, and Solution Behavior at Separation. Technical report, MIT Gas Turbine & Plasma Dynamics Laboratory Report No. 172.
- [38] F. H. Clauser. Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients. *Journal of Aeronautical Sciences*, 21:91–108, Feb. 1954.
- [39] A.M.O. Smith and N. Gamberoni. Transition, Pressure Gradient, and Stability Theory. Technical report, Douglas Aircraft Co., Rept. ES 26388, 1956.
- [40] J.L. van Ingen. A Suggested Semi-Empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region. Technical report, Delft University of Technology, Dept. of Aerospace Engineering, Rept. VTH-74, 1956.
- [41] C. Gleyzes, Jr. Cousteix, and J. L. Bonnet. Theoretical and Experimental Study of Low Reynolds Number Transitional Separation Bubbles. In *Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 1985, 1978*.
- [42] Joseph Katz and Allen Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2001.
- [43] R. B. Addoms and Spaid F. W. Aerodynamic Design of High-Performance Biplane Wings. *Journal of Aircraft*, 12(8):629–630, 1975.

- [44] H. Kang, N. Genco, and A. Altman. Gap and Stagger Effects on Biplanes with End Plates: Part I. In *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA 2009-1085*, Jan. 2009.
- [45] B. van den Berg and J.H.M. Gooden. *A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes, Volume I*. AGARD-AR-303 Vol. 1, 1994.
- [46] B. van den Berg and J.H.M. Gooden. *A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes, Volume II*. AGARD-AR-303 Vol. 2 (Test Case A9), 1994.
- [47] ABAQUS 6.12. User Subroutines Reference Manual, howpublished = <http://abaqus.software.polimi.it/v6.12/books/sub/default.htm>.
- [48] M. A. Qidway and D.C. Lagoudas. Numerical Implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 47(6):1123–1168, 2000.
- [49] Dimitris C. Lagoudas. *Shape Memory Alloys, Modeling and Engineering Applications*. Springer, 2008.