



**HAL**  
open science

# Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage

Florian Mitjana

► **To cite this version:**

Florian Mitjana. Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2018. Français. NNT : 2018TOU30343 . tel-02063761v2

**HAL Id: tel-02063761**

**<https://hal.science/tel-02063761v2>**

Submitted on 29 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le 07/06/2018 par :

**FLORIAN MITJANA**

**Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage**

---

---

## JURY

PR. SONIA CAFIERI	ENAC	Directrice
DR. FLORIAN BUGARIN	Univ. Toulouse – ICA	Co-directeur
PR. PIERRE DUYSINX	Univ. Liège	Rapporteur
PR. EDOUARD OUDET	Univ. Grenoble	Rapporteur
PR. CHRISTIAN BES	Univ. Toulouse – ICA	Examinateur
PR. CYRIL BORDREUIL	Univ. Montpellier	Examinateur
PR. KEN MCKINNON	Univ. Edimbourg	Examinateur
PR. FRÉDÉRIC MESSINE	ENSEEIH-T-LAPLACE	Examinateur
DR. FABIEN CASTANIE	AVANTIS Project	Invité
PR. MARCEL MONGEAU	ENAC	Invité
DR. STÉPHANE SEGONDS	Univ. Toulouse – ICA	Invité

---

### École doctorale et spécialité :

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées*

### Unité de Recherche :

*Laboratoire de l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile*

### Directeur(s) de Thèse :

*Sonia CAFIERI et Florian BUGARIN*

### Rapporteurs :

*Pierre DUYSINX et Edouard OUDET*



*Les mathématiques ne sont écrites que pour les mathématiciens.*

*Nicolas Copernic*



# Résumé

L'optimisation topologique vise à concevoir une structure en recherchant la disposition optimale du matériau dans un espace de conception donné, permettant ainsi de proposer des designs optimaux innovants. Cette thèse est centrée sur l'optimisation topologique pour des problèmes de conception de structures prenant en compte des contraintes de *flambage*.

Dans une large variété de domaines de l'ingénierie, la conception innovante de structures est cruciale. L'allègement des structures lors la phase de conception tient une place prépondérante afin de réduire les coûts de fabrication. Ainsi l'objectif est souvent la minimisation de la masse de la structure à concevoir. En ce qui concerne les contraintes, en plus des contraintes mécaniques classiques (compression, tension), il est nécessaire de prendre en compte des phénomènes dits de flambage, qui se caractérisent par une amplification des déformations de la structure et une potentielle annihilation des capacités de la structure à supporter les efforts appliqués. Dans le but d'adresser un large panel de problèmes d'optimisation topologique, nous considérons les deux types de représentation d'une structure : les structures *treillis* et les structures *continues*.

Dans le cadre de structures treillis, l'objectif est de minimiser la masse en optimisant le nombre d'éléments de la structure et les dimensions des sections transversales associées à ces éléments. Nous considérons les structures constituées d'éléments *poutres* et nous introduisons une formulation du problème comme un problème d'optimisation non-linéaire en variables mixtes. Afin de prendre en compte des contraintes de manufacturabilité, nous proposons une fonction coût combinant la masse et la somme des seconds moments d'inertie de chaque poutre. Nous avons développé un algorithme adapté au problème d'optimisation considéré. Les résultats numériques montrent que l'approche proposée mène à des gains de masses significatifs par rapport à des approches existantes.

Dans le cas des structures continues, l'optimisation topologique vise à discrétiser le domaine de conception et à déterminer les éléments de ce domaine discrétisé qui doivent être composés de matière, définissant ainsi un problème d'optimisation discret. Pour obtenir une représentation précise de la structure, nous sommes amenés à considérer un grand nombre d'éléments, générant ainsi des problèmes de grandes dimensions, en particulier un problème aux valeurs propres généralisé pour évaluer la résistance au flambage de la structure. Afin de réduire le coût en mémoire de la résolution de ces systèmes, nous proposons un algorithme pour résoudre ces problèmes. Nous introduisons une formulation du problème d'optimisation discret afin de prendre en compte plusieurs champs de déformations liés au flambage. Basé sur le concept de gradient topologique, nous développons un algorithme de résolution du problème discret considéré, et nous proposons une application sur un exemple de structure aéronautique.



# Abstract

Topology optimization aims to design a structure by seeking the optimal material layout within a given design space, thus making it possible to propose innovative optimal designs. This thesis focuses on topology optimization for structural problems taking into account *buckling* constraints.

In a wide variety of engineering fields, innovative structural design is crucial. The lightening of structures during the design phase holds a prominent place in order to reduce manufacturing costs. Thus the goal is often the minimization of the mass of the structure to be designed. Regarding the constraints, in addition to the conventional mechanical constraints (compression, tension), it is necessary to take into account buckling phenomena which are characterized by an amplification of the deformations of the structure and a potential annihilation of the capabilities of the structure to support the applied efforts.

In order to address a wide range of topology optimization problems, we consider the two types of representation of a structure : *lattice* structures and *continuous* structures.

In the framework of lattice structures, the objective is to minimize the mass by optimizing the number of elements of the structure and the dimensions of the cross sections associated to these elements. We consider structures constituted by a set of *frame* elements and we introduce a formulation of the problem as a mixed-integer nonlinear problem. In order to obtain a manufacturable structure, we propose a cost function combining the mass and the sum of the second moments of inertia of each frame. We developed an algorithm adapted to the considered optimization problem. The numerical results show that the proposed approach leads to significant mass gains over existing approaches.

In the case of continuous structures, topology optimization aims to discretize the design domain and to determine the elements of this discretized domain that must be composed of material, thus defining a discrete optimization problem. To obtain an accurate representation of the structure, we need to consider a large number of elements, thus generating large systems, in particular a generalized eigenvalue problem to evaluate the buckling resistance of the structure. In order to reduce the cost in memory of the resolution of these systems, we propose an algorithm to solve these problems. We introduce a formulation of the discrete optimization problem to take into account several deformation fields related to buckling. Based on the topological gradient concept, we develop an algorithm to solve the considered discrete problem, and we illustrate numerical results on one aeronautical example.





# Remerciements

Une thèse n'est pas simplement un mémoire rempli de texte, de formules et d'images démontrant des théories, c'est aussi des rencontres avec des personnes de valeur issues de deux mondes, l'un académique et l'autre industriel. J'ai pu me rendre compte de la complémentarité de ces deux mondes qui semblent si éloignés l'un de l'autre en apparence. La confrontation des idées, des points de vue et des observations sont l'essence même d'un travail de recherche.

Les deux premières personnes que je tiens à remercier chaleureusement sont mes directeurs, Sonia Cafieri et Florian Bugarin, sans qui tout ce travail n'aurait pu être construit. Vos conseils, analyses et questions m'ont été précieux tout au long de ces trois belles années en votre compagnie.

Je remercie sincèrement les rapporteurs, Pierre Duysinx et Edouard Oudet, pour votre temps apporté à la relecture de ce manuscrit ainsi que pour vos précieux conseils et commentaires.

Mes remerciements s'adressent également aux personnes m'ayant fait l'honneur de faire partie de mon jury : Christian Bes, Cyril Bordreuil, Ken McKinnon, Frédéric Messine, Marcel Mongeau et Stéphane Segonds.

Cette thèse n'aurait pu se dérouler sans la participation de la société AVANTIS Project. Je tiens à remercier sincèrement Laurent Ousteau et Fabien Castanie pour la confiance et le soutien que vous m'avez apporté avant, pendant et après cette thèse. Je souhaite également remercier l'ensemble des salariés d'AVANTIS pour votre accueil malgré le fait que ma présence ponctuelle dans la société donnait l'image d'un intermittent du spectacle faisant des mathématiques dans son coin.

Je souhaiterais remercier particulièrement Thierry Druot qui m'a pris sous son aile lors de mon premier stage en entreprise. Vous m'avez permis de voir comment les mathématiques pouvaient être appliqués au monde de l'aéronautique.

Je remercie également Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, ou plus communément JBHU, pour l'amour des mathématiques que vous avez su me transmettre.

Je remercie profondément mes parents, Jean-François et Geneviève Mitjana, qui ont toujours cru en moi et m'ont constamment apporté leur soutien. Je remercie aussi l'ensemble de ma famille pour avoir suivi tout au long de ces trois années l'avancée de mes travaux.

Je tiens à remercier aussi mes amis qui ont toujours porté une attention particulière à mes travaux. Merci à Simon Ariso, Aurore Ballet, Alexandre Da Cunha, Steven Goncalves de Macedo, Lionel Jay et Agathe Longueville.

Je souhaiterais enfin remercier vivement l'ensemble des doctorants et post-doctorants rencontrés à l'ENAC au cours de cette thèse. Merci Romaric Breil pour les cafés, Vincent Courjault-Radé et Hakim Djeriouat pour ces discussions à n'en plus finir, Jun Zhou, Man Liang et Ma Gi (le gang des chinoises) pour votre distribution permanente de gâteaux, Andrija Vidosavljevic pour les expressions serbes, Imen Dhief pour m'avoir supporté dans le bureau et Riadh Omheni pour ta gentillesse et tes conseils.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1 Contexte du problème</b>	<b>21</b>
1.1 Optimisation de structures . . . . .	21
1.2 Types de discrétisation d'une structure . . . . .	23
1.2.1 Structures treillis . . . . .	23
1.2.2 Structures continues . . . . .	24
1.3 Types d'optimisation de structures . . . . .	25
1.3.1 Optimisation dimensionnelle . . . . .	25
1.3.2 Optimisation de forme . . . . .	25
1.3.3 Optimisation topologique . . . . .	26
1.4 Contraintes d'intégrité du matériau et de flambage . . . . .	27
1.5 Contributions . . . . .	30
<b>2 Elasticité linéaire et éléments finis</b>	<b>31</b>
2.1 Notation et Définitions . . . . .	31
2.2 Problème d'élasticité linéaire et formulation variationnelle . . . . .	33
2.3 Méthodes des éléments finis . . . . .	35
2.4 Souplesse et contrainte de Von Mises . . . . .	37
2.5 Flambage linéaire . . . . .	38
2.6 Résolution de l'équation d'équilibre . . . . .	40
2.6.1 Méthode directe . . . . .	41
2.6.2 Méthodes itératives . . . . .	41
2.7 Résolution du problème lié au flambage . . . . .	46
2.8 Conclusion . . . . .	49
<b>3 Etat de l'art des méthodes d'optimisation topologique</b>	<b>51</b>
3.1 Optimisation topologique de structures treillis . . . . .	51
3.2 Optimisation topologique de structures continues . . . . .	54
3.2.1 Solid Isotropic Material with Penalization - SIMP . . . . .	54
3.2.2 Evolutionary Structural Optimization - ESO . . . . .	55
3.2.3 Gradient topologique . . . . .	56
3.2.4 Lignes de niveaux . . . . .	59

3.2.5	Instabilités numériques . . . . .	60
3.3	Optimisation sous des contraintes d'intégrité du matériau . . . . .	62
3.4	Optimisation sous contraintes de flambage . . . . .	64
3.5	Conclusion . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Optimisation de structures poutres</b>	<b>69</b>
4.1	Précision sur la méthode éléments finis . . . . .	69
4.2	Problème d'optimisation . . . . .	71
4.3	Algorithme de résolution . . . . .	78
4.4	Résultats numériques . . . . .	82
4.4.1	Les avantages de la fonction coût proposée . . . . .	82
4.4.2	Influence du coefficient de pénalité $\mu$ . . . . .	85
4.4.3	Impact du nombre de degrés de liberté décrivant les sections transversales . . . . .	86
4.4.4	Applications à divers exemples de référence . . . . .	88
4.5	Conclusion . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Optimisation de structures continues</b>	<b>97</b>
5.1	Problème d'optimisation . . . . .	97
5.2	Résolution des équations d'état . . . . .	101
5.2.1	Equation d'équilibre . . . . .	101
5.2.2	Problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage . . . . .	104
5.3	Méthode du gradient topologique . . . . .	108
5.3.1	Définition du gradient topologique et principe de l'algorithme . . . . .	108
5.3.2	Gradient topologique des données étudiées . . . . .	113
5.3.3	Algorithme de résolution . . . . .	118
5.4	Résultats numériques . . . . .	120
5.4.1	Performance du calcul des valeurs propres . . . . .	120
5.4.2	Influence du nombre de modes propres de flambage dans l'optimisation . . . . .	124
5.4.3	Application aéronautique . . . . .	128
5.5	Conclusion . . . . .	132
	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>

# Table des figures

1.1	Optimisation de structure . . . . .	22
1.2	Différents types d'éléments finis . . . . .	23
1.3	Exemple d'une structure treillis et d'une section transversale . . . . .	24
1.4	Différentes représentations de structures continues . . . . .	24
1.5	Optimisation paramétrique d'un treillis . . . . .	25
1.6	Optimisation de forme d'une plaque . . . . .	26
1.7	Optimisation topologique d'un treillis . . . . .	26
1.8	Optimisation topologique d'une structure continue . . . . .	27
1.9	Structure non-déformée avec les zones de chargements et de fixations . . . . .	27
1.10	Valeur des $(\sigma_i)_{i=1}^N$ au sein de la structure . . . . .	28
1.11	Différentes déformations de la structure dues au flambage . . . . .	29
2.1	Représentation de la structure $\Omega$ . . . . .	32
2.2	Différentes discrétisation d'une structure avec des éléments quadrangles . . . . .	42
2.3	Exemple de la technique d'agglomération pour construire une matrice de réduction de modèle . . . . .	45
3.1	Degré de liberté d'une barre . . . . .	52
3.2	Degré de liberté d'une poutre . . . . .	53
3.3	Concept du gradient topologique . . . . .	57
3.4	Concept des lignes de niveaux . . . . .	59
3.5	Instabilités numériques - Sigmund & Petersson (1998) . . . . .	61
3.6	Différents résultats optimaux selon deux critères d'optimisation pour une structure en L - Le et al. (2010) . . . . .	62
3.7	Différents résultats optimaux en fonction du nombre $r$ de régions d'agrégations des contraintes de $R_m$ pour une structure en L - Le et al. (2010) . . . . .	64
3.8	Optimisation d'une structure treillis en L sous une contrainte de flambage global - Kočvara (2002) . . . . .	65
3.9	Différentes déformations dues au flambage d'une structure continue . . . . .	66
3.10	Illustration d'un spurious buckling mode - Browne (2013) . . . . .	67
4.1	Différentes sections transversales creuses considérées selon leur repère local . . . . .	71
4.2	Ensemble des couples de longueurs de côté et d'épaisseurs représentant une aire constante d'une section carrée creuse . . . . .	75

4.3	Structure soumise à un effort de traction . . . . .	75
4.4	Une conception optimale d'une structure soumise à un effort de traction avec la formulation (4.8) comme fonction coût . . . . .	76
4.5	Valeurs de la fonction (4.10) pour une poutre de section carrée creuse d'aire constante et $\mu$ égal à $\sum_{i=1}^N l_i$ . . . . .	77
4.6	La conception optimale d'une structure soumise à un effort de traction avec (4.10) comme fonction coût . . . . .	77
4.7	Illustration des difficultés liées à la suppression d'éléments pouvant mener à une structure instable . . . . .	80
4.8	Disposition initiale du problème de la structure en L . . . . .	83
4.9	Disposition optimale de poutres pour le problème de la structure en L . . . . .	83
4.10	Evolution de la masse structurale pour le problème de la structure en L . . . . .	84
4.11	Mode de flambage de la structure en L . . . . .	87
4.12	Problème de la structure en triangle . . . . .	91
4.13	Problème du pont . . . . .	92
4.14	Problème de la tour . . . . .	93
4.15	Problème de la structure 3D . . . . .	94
5.1	Structure représentée avec des éléments tri-dimensionnels . . . . .	98
5.2	Discrétisation de la structure avec un seul type d'élément tri-dimensionnel . . . . .	102
5.3	Exemple de la technique d'agglomération pour construire une matrice de réduction de modèle . . . . .	104
5.4	Concept du gradient topologique . . . . .	108
5.5	Concept du gradient topologique . . . . .	109
5.6	Deux structures obtenues à partir de la même structure initiale selon le retrait de diverses fractions de volume $\Delta\alpha$ . . . . .	110
5.7	Algorithme basé sur le gradient topologique . . . . .	111
5.8	Procédé d'extrapolation des valeurs des gradients topologiques . . . . .	112
5.9	Structure en L étudiée . . . . .	121
5.10	Poutre en compression étudiée . . . . .	124
5.11	Evolution de la charge critique de flambage selon le nombre de mode de flambage considéré . . . . .	126
5.12	Evolution de la charge critique de flambage selon le nombre de mode de flambage considéré . . . . .	126
5.13	Structure obtenue sans contrainte de flambage . . . . .	126
5.14	Structure obtenue avec 1 mode de flambage . . . . .	127
5.15	Plan de coupe de la structure obtenue avec 1 mode de flambage . . . . .	127
5.16	Structure obtenue avec 4 modes de flambage . . . . .	127
5.17	Structure obtenue avec 4 modes de flambage . . . . .	128
5.18	Domaine de conception de la structure appelée <i>col de cygne</i> . . . . .	128
5.19	Evolution de la charge critique de flambage . . . . .	129

5.20	Structure obtenue sans contrainte de flambage - les noeuds en rouge correspondent à la zone d'encastrement . . . . .	130
5.21	Structure obtenue avec contrainte de flambage - les noeuds en rouge correspondent à la zone d'encastrement . . . . .	131
5.22	Procédé de fabrication additive appelé Wire Arc Additive Manufacturing . . . . .	135





# Liste des tableaux

3.1	Fonctions d'interpolation classiques . . . . .	55
4.1	Quatre couples de dimensions décrivant une section transversale carrée creuse correspondant à une aire de $1600 \text{ mm}^2$ et les moments d'inertie associés . . . . .	76
4.2	Résultats pour le problème de la structure en L . . . . .	84
4.3	Propriétés géométriques de deux éléments de la structure en L selon les deux fonctions coûts étudiées . . . . .	85
4.4	Résultats pour le problème de la structure en L selon la valeur de $\mu$ . . . . .	85
4.5	Résultats pour le problème de la structure en L . . . . .	86
4.6	Dimensions (mm), aire ( $\text{mm}^2$ ) et moments d'inertie $I_y$ et $I_z$ ( $10^3 \text{ mm}^4$ ) de l'élément en rouge dans la Figure 4.11a . . . . .	87
4.7	Bornes minimales et maximales des dimensions des sections transversales . . . . .	88
4.8	Masse structurale optimale (kg) et temps de calcul (s) pour chaque problème et chaque section transversale . . . . .	89
4.9	Nombre de variables continues et entières à l'état initial . . . . .	90
5.1	Temps de calcul et valeurs propres obtenues pour différentes discrétisation de la structure en L . . . . .	122
5.2	Temps de calcul pour différentes discrétisations de la structure en L . . . . .	122
5.3	Temps de calcul selon différents nombres de groupes dans la méthode du gradient conjugué en base réduite . . . . .	123
5.4	Temps de calcul selon la dimension de l'espace de recherche des valeurs propres pour la structure en L . . . . .	123
5.5	Masse, temps de calcul et charge critique de flambage obtenus pour le problème de la poutre en compression . . . . .	125
5.6	Masse, temps de calcul et charge critique de flambage obtenus pour le problème d'optimisation du col de cygne . . . . .	129



# Introduction

Dans la plupart des secteurs d'activités participant au processus de conception de structures mécaniques, l'identification d'une structure optimale tient une place centrale. Dans ce cadre, l'optimalité correspond à la satisfaction d'un critère donné tel que par exemple la structure présentant le meilleur aérodynamisme ou la structure la plus légère. Cependant, il n'existe pas de processus standard permettant de déterminer une solution optimale. En effet, en se basant sur le retour d'expérience des réalisations antérieures, les ingénieurs procèdent traditionnellement par essais-erreurs. Ainsi, ce type de conception de structures relève de l'expérience métier, limitant la possibilité d'obtenir certaines solutions optimales. Comment alors déterminer des structures innovantes que l'expérience humaine a du mal à appréhender ? Une approche possible est basée sur la modélisation mathématique du problème de conception en termes de problème d'optimisation et sur sa résolution efficace. En particulier, l'optimisation topologique permet de découvrir, via une approche limitant les a priori, des dispositions de matières que l'humain n'aurait pas pressenti.

Dans les domaines de la conception de structures, l'optimisation porte généralement sur l'allègement des pièces tout en conservant certaines propriétés mécaniques telles que la rigidité ou la résistance du matériau. En pratique, deux contraintes mécaniques jouent un rôle déterminant pour la bonne tenue d'une structure. La première est relative à l'*intégrité du matériau* sous les efforts appliqués. Lorsque cette dernière n'est pas vérifiée, des phénomènes de rupture peuvent être observés. D'un point de vue numérique, l'évaluation de ces contraintes en tout point de la structure introduit un premier challenge car celle-ci induit un grand nombre de contraintes d'optimisation. La seconde contrainte mécanique révélatrice du comportement de la structure correspond à la résistance aux phénomènes dits de *flambage*. Ces derniers se caractérisent par une amplification des déformations sous des efforts de compression, pouvant conduire à l'annihilation totale de la résistance de la structure face aux efforts appliqués. La prise en compte de la résistance au flambage nécessite de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé, qui peut être de grande dimension, dont la formulation introduit des contraintes fortement non-linéaires. Un second challenge réside donc dans le choix d'une méthode appropriée de calcul de valeurs propres généralisées permettant de résoudre efficacement le problème d'optimisation.

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodologies d'optimisation topologique pour la conception de structures. Nous considérons des problèmes de minimisation de la masse de la structure sous des contraintes d'intégrité du matériau et de flambage. D'un point de vue mathématique, ce problème d'optimisation s'avère très complexe de par le nombre et la nature non-linéaire des contraintes.

Dans le cadre des simulations numériques des structures, la discrétisation du domaine de conception nous amène à distinguer deux catégories de structures : les structures treillis et les structures continues. Les premières consistent à représenter la structure comme un ensemble de barres reliées entre elles. La seconde catégorie est basée sur une discrétisation de la structure à l'aide d'un ensemble de briques élémentaires. La complexité du problème d'optimisation est donc aussi dépendante de la manière dont la structure est discrétisée puisque chacune présente des avantages et des inconvénients. Une structure treillis permet de représenter des structures creuses de manière simple, à l'image de la Tour Eiffel. Néanmoins, cette simplicité se fait au détriment de la possibilité de représenter certaines formes complexes. Les structures continues pallient ce problème en permettant de représenter n'importe quel type de structure avec une bonne précision, engendrant cependant une grande complexité de calcul. Elles sont particulièrement adaptées pour des structures de taille relativement modeste, à l'image d'une pièce du train d'atterrissage d'un avion. Afin de traiter un large panel de problèmes d'optimisation de structures, nous nous attachons dans cette thèse à résoudre le problème de minimisation de masse sous contraintes d'intégrité du matériau et de flambage pour les deux types de structures. Pour chacun des cas, les différentes contributions portent à la fois sur la modélisation mathématique des problèmes d'optimisation et sur les méthodes permettant de les résoudre.

Dans le cas de structures treillis, nous proposons une fonction coût combinant la masse à des propriétés géométriques de la structure, ainsi qu'un algorithme de résolution adapté. Un élément d'originalité caractérisant ce dernier repose sur une analyse de sensibilité de la résistance au flambage de la structure pour déterminer la disposition optimale de la matière.

Dans le cas de structures continues, nous proposons tout d'abord une modélisation du problème d'optimisation visant à réduire le nombre de contraintes d'intégrité du matériau. Nous présentons ensuite un algorithme de calcul permettant de résoudre efficacement le problème aux valeurs propres généralisé de grande dimension lié à la contrainte de flambage. Enfin, nous proposons un algorithme de résolution du problème d'optimisation basé sur le gradient topologique.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

Le Chapitre 1 introduit le contexte du problème d'optimisation considéré. Après avoir défini les notions générales d'un problème d'optimisation, le processus classique d'optimisation de structure est illustré. Ensuite, les différents types de représentation d'une structure ainsi que les diverses catégories d'optimisation sont présentés. Enfin, nous discutons des verrous scientifiques et des différentes contributions de ces travaux.

Le Chapitre 2 présente les notions mécaniques d'intégrité du matériau et de flambage. Après avoir défini le problème d'élasticité linéaire, nous mettons en exergue la formulation variationnelle associée et la méthode des éléments finis qui en découle. Ensuite, nous définissons les critères mécaniques liés à l'évaluation de l'intégrité du matériau et de la résistance au flambage d'une structure. Enfin, nous présentons différentes méthodes de résolution du système linéaire lié aux déplacements de la structure, et du problème aux valeurs propres généralisé associé aux phénomènes de flambage.

Le Chapitre 3 met en exergue les différentes méthodes d'optimisation topologique issues de la littérature. Dans un premier temps, nous présentons les différentes méthodes d'optimisation

topologique pour des structures treillis. Ensuite, les différentes techniques développées dans le cadre de l'optimisation topologique de structures continues sont introduites. Enfin, les différents challenges de l'intégration des contraintes liées à l'intégrité du matériau et au flambage dans un problème d'optimisation topologique sont présentés.

Le Chapitre 4 propose une méthodologie pour résoudre des problèmes d'optimisation de structures de type treillis. Afin de minimiser la masse de la structure, l'optimisation porte sur le nombre d'éléments structuraux et les dimensions des sections transversales associées. Dans un premier temps, nous explicitons le calcul des contraintes liées à l'intégrité du matériau et au flambage pour des structures treillis. Ensuite, nous formulons le problème d'optimisation comme un problème d'optimisation mixte non-linéaire et proposerons une fonction objectif adaptée. Puis, nous proposons un algorithme de résolution adapté au problème considéré. Enfin, sur un ensemble de problèmes issus de la littérature, nous discutons les résultats numériques obtenus.

Le Chapitre 5 porte sur la résolution des problèmes d'optimisation pour des structures continues. L'optimisation repose sur l'identification des éléments structuraux présents dans le domaine de conception. Dans un premier temps, nous présentons une formulation d'un problème d'optimisation topologique de minimisation de masse sous des contraintes d'intégrité du matériau et de flambage. Dans un second temps, nous présentons la méthode pour résoudre l'équation d'équilibre associé aux déplacements de la structure, puis nous proposons un algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage. Dans un troisième temps, nous définissons le concept de gradient topologique et son principe d'utilisation au sein d'un algorithme d'optimisation. Puis, nous explicitons le mode de calcul des gradients topologiques des données considérées dans cette étude. Ensuite, nous présentons l'algorithme de résolution du problème d'optimisation. Enfin, nous analysons les performances de l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage et nous illustrons les résultats numériques obtenus concernant la résolution du problème d'optimisation.

Pour conclure, nous rappelons les différentes contributions proposées dans cette thèse, et nous discutons des futurs axes de développement.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été menés dans le cadre d'une Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE), réalisée au sein du laboratoire de l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile (ENAC) et de l'Institut Clément Ader (ICA), et en partenariat avec la société AVANTIS Project, qui est un bureau d'étude d'ingénierie mécaniques intervenant principalement dans le domaine aéronautique.



# Chapitre 1

## Contexte du problème

Dans une large variété de domaines de l'ingénierie, l'identification de la *meilleure* structure selon divers critères mécaniques est prépondérante lors de la conception de ponts, de bâtiments, de véhicules ou encore d'avions. D'un point de vue mathématique, cela conduit à résoudre des problèmes d'*optimisation*.

Dans ce chapitre, après avoir défini les notions générales d'un problème d'optimisation, nous présentons le processus classique d'optimisation de structure. Par la suite, nous mettons en exergue les deux catégories de structures, et nous détaillons les différents types d'optimisation (dimensionnelle, de forme et topologique). Enfin, après avoir soulevé les verrous scientifiques liés aux contraintes mécaniques considérées, nous présentons les différentes contributions.

### 1.1 Optimisation de structures

Un problème d'optimisation (P) consiste généralement à minimiser une fonction  $f$ , définie sur un ensemble  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ , sous des contraintes définies par des fonctions  $(g_j)_{1 \leq j \leq p}$  et  $(h_k)_{1 \leq k \leq q}$ , avec  $n$ ,  $p$  et  $q \in \mathbb{N}$ . Il peut se formuler de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \underset{x \in C}{\text{minimiser}} && f(x) \\ & \text{s.l.c.} && g_j(x) \leq 0 ; \forall j = 1, \dots, p \\ & && h_k(x) = 0 ; \forall k = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{P}$$

où :

- Le vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  représente les inconnues du problème. Chaque composante  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est appelée *variable de décision*. Dans le cas de l'optimisation de structures, on les nomme aussi variables de conception ou de design, et elles peuvent caractériser les dimensions, la présence ou non de matière, etc...
- La fonction  $f$  correspond au *critère d'optimisation* et est appelée *fonction objectif* ou *fonction coût*. Dans le cadre de l'optimisation de structures, elle peut caractériser la masse ou encore la résistance aux efforts d'une structure.



- Les fonctions  $(g_j)_{1 \leq j \leq p}$  et  $(h_k)_{1 \leq k \leq q}$  sont respectivement les contraintes d'inégalités et d'égalités, définissant l'ensemble admissible  $E = \{x \in C : g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p ; h_k(x) = 0, k = 1, \dots, q\}$ . Dans le cadre de l'optimisation de structures, celui-ci caractérise les limites acceptées de comportement de la structure : déplacement maximum, limite de résistance aux efforts ou au flambage, etc... Pour un vecteur  $x^* \in E$ , on dit qu'une contrainte  $g_j$  est active en  $x^*$  si  $g_j(x^*) = 0$  et inactive si  $g_j(x^*) < 0$ .

Selon la nature des variables de conception  $x_i$  et des fonctions  $f$ ,  $g_j$  et  $h_k$ , un problème d'optimisation peut appartenir à différentes classes de problèmes d'optimisation. On parle d'un problème d'*optimisation discrète* (ou combinatoire) lorsque les variables de conception correspondent à des nombres entiers. Dans le cas où aucune restriction n'impose une valeur entière à une inconnue, alors l'espace  $C$  correspond à un ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  et le problème est dit d'*optimisation continue*. Certaines formulations amènent à considérer simultanément des variables continues et entières, on parle alors de problème d'*optimisation en variables mixtes*.

Lorsque les fonctions  $f$ ,  $g_j$  et  $h_k$  sont linéaires (respectivement convexes), alors le problème est dit d'*optimisation linéaire* (respectivement *convexe*). Si l'expression d'une de ces fonctions est non linéaire, alors un problème d'*optimisation non-linéaire* est défini.

Dans le domaine de l'optimisation de structures, la résolution du problème d'optimisation suit généralement un procédé itératif alternant deux étapes : l'analyse du comportement de la structure et l'application d'une méthode d'optimisation (voir Figure 1.1). La première phase consiste à résoudre des *équations d'états* permettant de déterminer les différentes *déformations* de la structure : calcul des déplacements, résistance aux efforts, analyse vibratoire, ou encore le transfert de chaleur (Fanchon (2008)). Quant aux méthodes d'optimisation, elles visent à déterminer une valeur optimale des variables de conception.

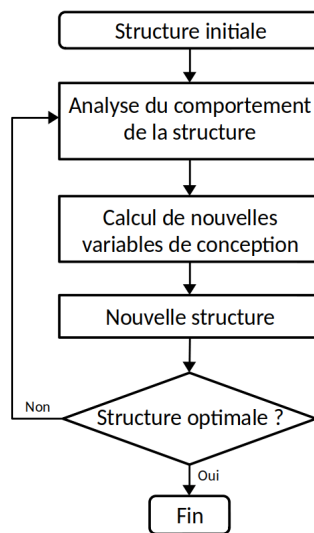


FIGURE 1.1 – Optimisation de structure

## 1.2 Types de discrétisation d'une structure

Au cours de l'optimisation (Figure 1.1), l'analyse du comportement de la structure peut être réalisée à travers une *simulation numérique*. L'une des principales techniques est basée sur la *méthode des éléments finis*, consistant à discrétiser la structure selon un type d'éléments qui peut être uni, bi ou tri-dimensionnel (Figure 1.2) dont chaque extrémité est définie comme un *noeud* de la structure. Le résultat de cette discrétisation est appelée un *maillage*. Selon le type d'éléments finis utilisés, on distingue deux catégories de structures : d'une part les structures dites *treillis*, constituées d'éléments uni-dimensionnels, et d'autre part les structures dites *continues*, discrétisées à l'aide d'éléments bi et tri-dimensionnels.

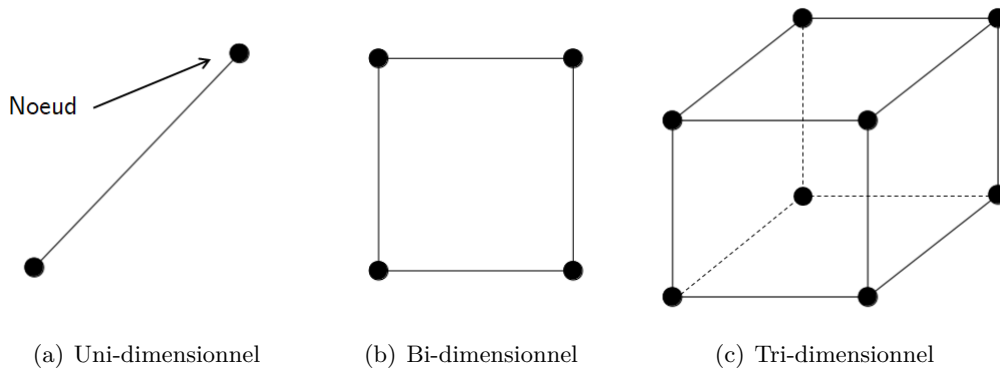


FIGURE 1.2 – Différents types d'éléments finis

### 1.2.1 Structures treillis

Les structures treillis correspondent à un ensemble d'éléments uni-dimensionnels soumis à des efforts et des fixations (Figure 1.3a). A chaque élément de la structure, on associe une section transversale (par exemple, de type carré creuse) et un repère local  $(x, y, z)$ , où  $x$  représente l'axe principal (Figure 1.3b). On distingue deux types d'éléments uni-dimensionnels : les *poutres* et les *barres*. Ces dernières peuvent uniquement transmettre des forces axiales (le long de l'axe principal de l'élément). Quant aux éléments poutres, des forces axiales et transversales (selon un plan de la section) ainsi que des déformations liées aux rotations selon les trois axes locaux sont considérées. Une rotation selon l'axe  $x$  de la poutre traduit un effort dit *moment de torsion*, tandis que les rotations autour des axes  $y$  et  $z$  définissent des déformations appelées *moments de flexion*. Chaque géométrie de section transversale peut être caractérisée par une aire mais aussi par des *moments d'inertie* et un *moment polaire*. Les moments d'inertie, définis selon les axes  $y$  et  $z$  de l'élément, permettent d'analyser la résistance aux moments de flexion, et le moment polaire, défini en un point de la section transversale, est lié à la résistance au moment de torsion. Quant à l'aire, celle-ci est directement reliée à la masse de l'élément.

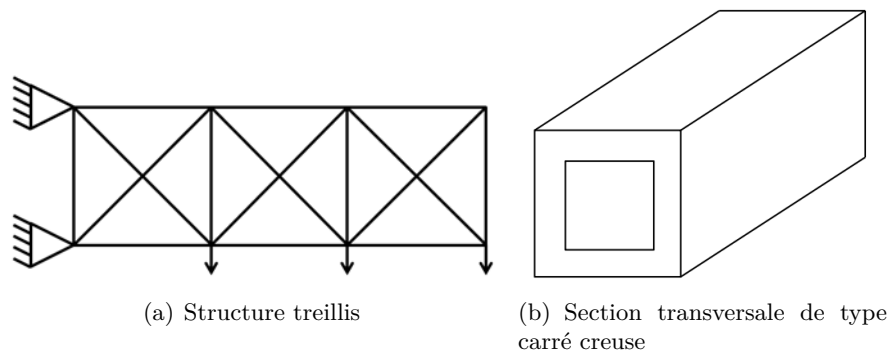


FIGURE 1.3 – Exemple d’une structure treillis et d’une section transversale

### 1.2.2 Structures continues

Des éléments bi-dimensionnels (triangle ou quadrangle) ou tri-dimensionnels (tétraèdre ou hexaèdre) peuvent être utilisés pour représenter des structures continues (Figure 1.4). A chaque noeud de ces éléments sont associés trois degrés de liberté, caractérisant les déplacements dans les trois directions de l’espace. Notons que, dans le but de représenter la troisième dimension, une épaisseur est associée à chaque élément bi-dimensionnel.

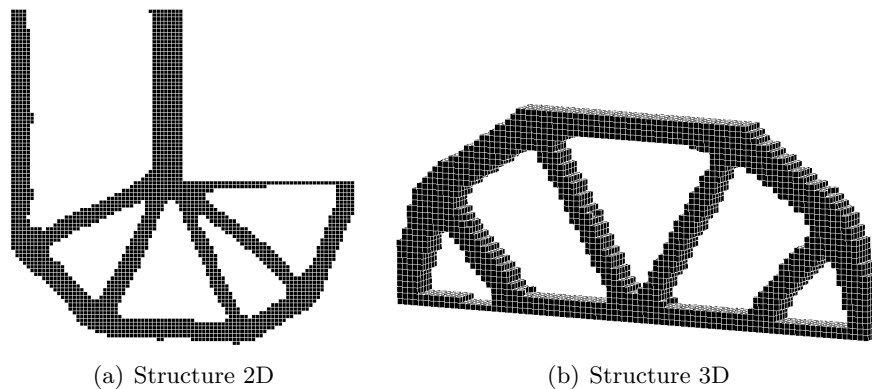


FIGURE 1.4 – Différentes représentations de structures continues

Remarque :

La modélisation d’un problème d’optimisation de structure dépend directement du choix de la discrétisation de la structure. En effet, pour une structure treillis, les variables de conception peuvent être associées aux aires des sections transversales. Pour des structures continues discrétisées avec des éléments bi-dimensionnels, l’optimisation peut porter sur l’épaisseur de chaque élément. Dans le cadre d’une représentation à base d’éléments tri-dimensionnels, l’optimisation peut consister à déterminer quels éléments du domaine initial de conception doivent être présents.

Selon le problème de conception de structure étudié, le choix du type de discrétisation (treillis ou continues) est plus ou moins adapté. Pour des structures creuses (par exemple un pylône électrique), une description basé sur un treillis semble la plus appropriée de part sa capacité à représenter des domaines de conception de grandes tailles de manière simple. Pour des structures plus petites (par exemple une partie du train d’atterrissage d’un avion), nécessitant une bonne précision, la discrétisation s’oriente vers des structures continues. Ainsi, pour répondre à un large panel de problème de conception, nous considérons ces deux types de structures dans ces travaux.

### 1.3 Types d’optimisation de structures

On distingue trois types d’optimisations de structures : l’optimisation dimensionnelle, l’optimisation de forme et l’optimisation topologique.

#### 1.3.1 Optimisation dimensionnelle

L’optimisation dimensionnelle, appelée aussi optimisation paramétrique, consiste à résoudre des problèmes d’optimisation continue où les variables de conception représentent, par exemple, les dimensions des sections transversales de poutres (diamètre ou épaisseur d’un cylindre creux - Figure 1.5) ou les épaisseurs d’une plaque. Dans ce type d’optimisation, la forme et la topologie de la structure ne peuvent être modifiées. Par exemple, dans le cadre d’une optimisation paramétrique d’un treillis, le nombre d’éléments et la forme de chaque section transversale sont fixés.

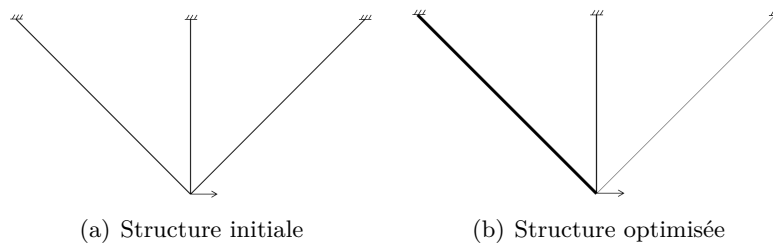


FIGURE 1.5 – Optimisation paramétrique d’un treillis

#### 1.3.2 Optimisation de forme

Dans l’optimisation de forme, appelée aussi optimisation géométrique, les variables de conception paramétrisent les frontières de la structure. Le domaine de conception est représenté à l’aide de fonctions dites homéomorphiques, afin de suivre l’évolution des frontières au cours de l’optimisation et de garder une topologie équivalente à la structure de départ (Figure 1.6). Bien que ce type d’optimisation permette de modifier la géométrie de la structure, le résultat est extrêmement dépendant de la topologie initiale, puisque le nombre de frontières n’évolue pas au cours de l’optimisation.

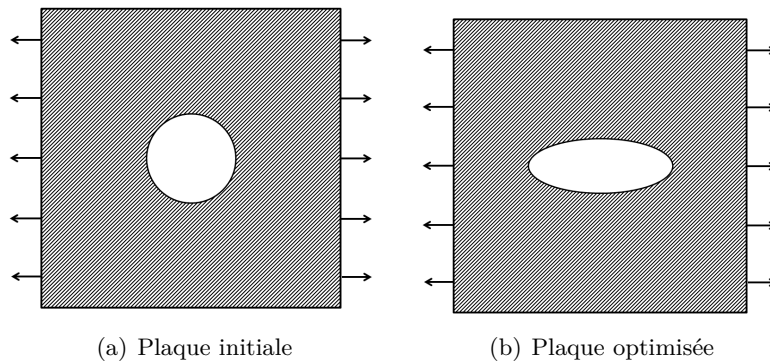


FIGURE 1.6 – Optimisation de forme d'une plaque

### 1.3.3 Optimisation topologique

L'optimisation topologique consiste à rechercher, dans un espace de conception, la distribution optimale de matière représentant la structure. Cette optimisation est beaucoup plus flexible que les deux précédentes, puisque seules les dimensions du domaine de conception, ainsi que les fixations et les zones de chargement de la structure à concevoir, sont connues. Aucun *a priori* n'est donc envisagé sur les frontières de la structure ainsi que sur la forme et les dimensions des sections transversales. C'est pourquoi le nom d'*optimisation de forme généralisée* lui est aussi attribué (Rozvany et al. (1992)).

Pour des structures treillis, l'optimisation topologique consiste à extraire d'un domaine initial (Figure 1.7a) un sous-ensemble optimal d'éléments ainsi que les dimensions des sections transversales de chaque élément (Figure 1.7b). Pour ce type de structures, un problème d'optimisation en variables mixtes peut être défini, où les variables entières représentent la présence des éléments et les variables continues décrivent leurs sections transversales. Dans le cas de structures continues, l'objectif est de déterminer quels éléments du domaine de conception doivent être constitués de matière ou non (Figure 1.8), ce qui peut être formulé comme un problème d'optimisation discret.

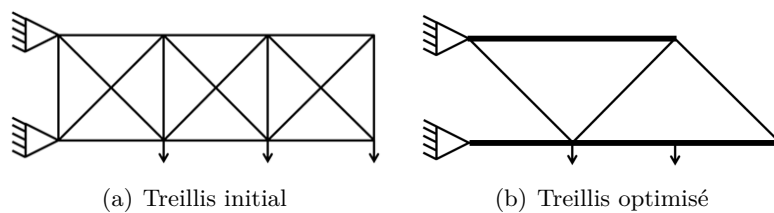


FIGURE 1.7 – Optimisation topologique d'un treillis

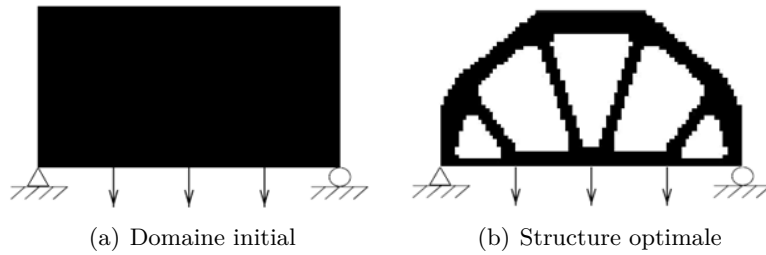


FIGURE 1.8 – Optimisation topologique d’une structure continue

On estime que, pour des problèmes de conception courants, l’optimisation d’un critère de performance peut mener à des gains variant de 40 à 100 % avec l’optimisation topologique. Tandis que, dans le cas de l’optimisation dimensionnelle, les gains oscillent entre 5 et 10 % et entre 10 et 30 % pour de l’optimisation géométrique (Duysinx (1996)). Ainsi, l’optimisation topologique prend une place prépondérante lors de la conception de structures, notamment par sa capacité à proposer des designs optimaux innovants.

#### 1.4 Contraintes d’intégrité du matériau et de flambage

Au sein des problèmes de conception de structures considérés dans ces travaux, nous considérons les contraintes mécaniques suivantes : la *garantie de l’intégrité du matériau* sous les efforts appliqués, et la résistance aux phénomènes de *flambage*. Ces deux contraintes jouent un rôle prépondérant dans la bonne tenue de la structure. Nous illustrons ces deux notions mécaniques à travers une structure (Figure 1.9) issue du plancher de l’Airbus A350, étudiée au sein de la société AVANTIS Project.

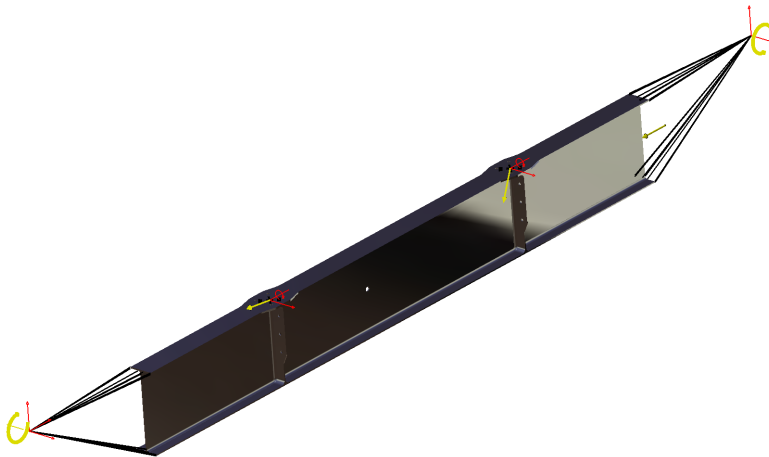


FIGURE 1.9 – Structure non-déformée avec les zones de chargements et de fixations

A chaque matériau est associée une valeur, notée  $\bar{\sigma}$ , constituant la limite en termes d'efforts mécaniques à ne pas dépasser pour garantir l'intégrité du matériau. Les déformations engendrées par l'application des efforts peuvent être évaluées par une fonction notée  $\sigma_i$  en chaque élément issu de la discrétisation de la structure. Nous verrons comment évaluer cette valeur dans la Section 4 du Chapitre 2. Dans la Figure 1.10, nous représentons les valeurs des  $\sigma_i$  au sein de la structure de la Figure 1.9 : plus  $\sigma_i$  est grand, plus le matériau est soumis à des efforts et des phénomènes de cassure peuvent être observés. Garantir l'intégrité du matériau revient à s'assurer que les valeurs des  $\sigma_i$  au sein de la structure ne dépassent pas la limite  $\bar{\sigma}$ . Dans un problème d'optimisation, les contraintes d'optimisation liées à l'intégrité du matériau sont donc données par l'expression suivante :

$$\sigma_i - \bar{\sigma} \leq 0, \forall i = 1, \dots, N$$

où  $N$  représente le nombre d'éléments de la structure issus de la discrétisation. Pour des questions de simplification d'écriture, les contraintes d'optimisation liées à l'intégrité du matériau sont notées par la suite contraintes de  $R_m$  (pour *contraintes de résistance du matériau*).

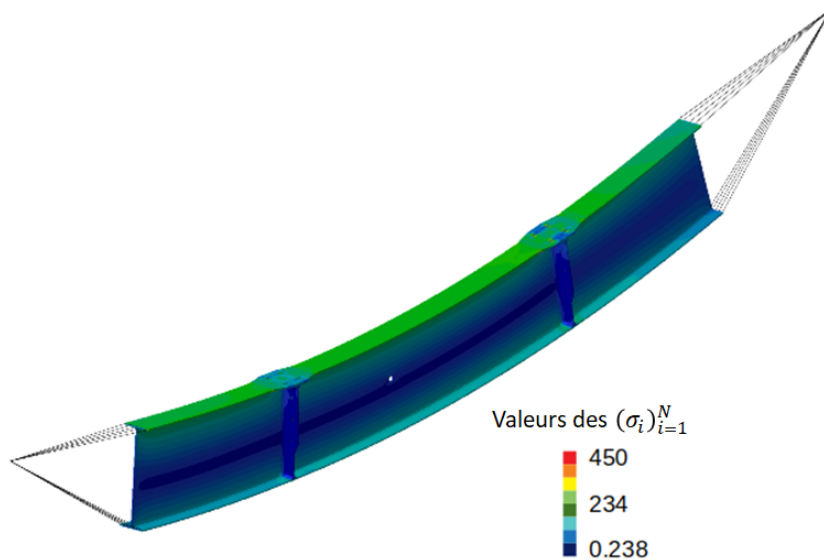
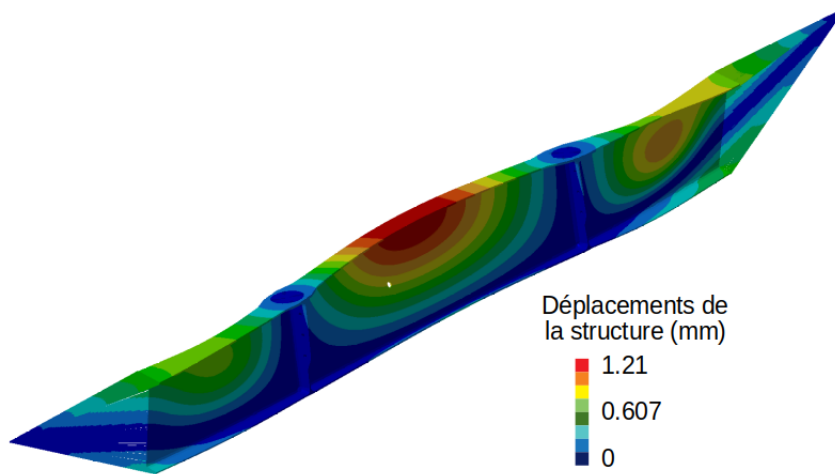


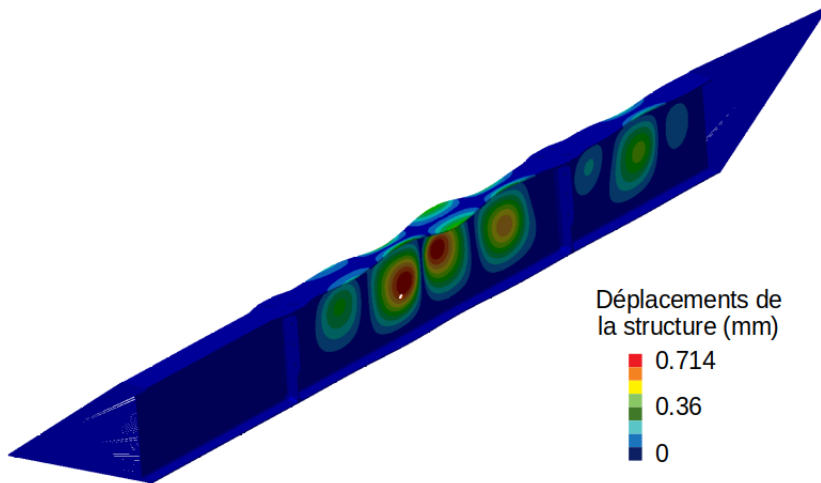
FIGURE 1.10 – Valeur des  $(\sigma_i)_{i=1}^N$  au sein de la structure

La conception des structures les plus légères mène généralement à des formes élancées (telles que des poutres) avec de fines épaisseurs. Sous des efforts de compression, on peut observer au sein de ce type de structure des phénomènes de *flambage*, se caractérisant par une amplification des déformations de la structure qui peuvent être de nature globale ou locale (Figure 1.11). La capacité de la structure à supporter les efforts appliqués peut être ainsi totalement annihilée. Ainsi, il est fondamental de prendre en compte ce type de contrainte lors de la phase de conception.

Cependant, deux challenges numériques sont à considérer. Le premier concerne l'évaluation de la résistance au flambage d'une structure; elle nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisé (défini dans la Section 5 du Chapitre 2). Pour une discrétisation engendrant un grand nombre d'éléments, ce problème peut alors être de grande dimension et nécessite un coût en mémoire et des temps de calcul importants. Le second challenge est caractérisé par le fort caractère non-linéaire des contraintes d'optimisation liées au flambage. Dans les Chapitres 4 et 5, nous présenterons différentes modélisations de ce type de contraintes.



(a) Déformation dite globale



(b) Déformation dite locale

FIGURE 1.11 – Différentes déformations de la structure dues au flambage



## 1.5 Contributions

Dans ce mémoire, l'objectif est développer des méthodologies d'optimisation topologique permettant de minimiser la masse des structures sous des contraintes d'intégrité du matériau et de flambage. Pour chaque type de discrétisation d'une structure, les contributions portent à la fois sur la modélisation mathématique du problème d'optimisation considéré et sur les méthodes permettant de le résoudre.

Pour des structures treillis, l'objectif est à la fois de déterminer la disposition optimale des éléments uni-dimensionnels, et aussi les dimensions des sections transversales associées à ces éléments. L'approche développée consiste à définir un problème d'optimisation en variables mixtes. En associant une variable binaire à un élément, nous sommes en mesure d'indiquer si cet élément est présent ou non. Pour modéliser les sections transversales, nous considérons plusieurs variables continues afin d'obtenir une description précise de chaque section.

Pour tout problème d'optimisation, le choix de la fonction objectif à minimiser est crucial. Rappelons qu'ici, l'objectif est de minimiser la masse de la structure. Cependant, afin de prendre en compte des critères de manufacturabilité, nous proposons une fonction coût définie par une somme pondérée de la masse de la structure et des moments d'inertie de chaque élément.

Selon le niveau de discrétisation du domaine de conception et du nombre potentiels d'éléments au sein de la structure, le problème en variables mixtes peut être de grande dimension. La modélisation d'un tel problème introduit un nombre important de variables binaires, augmentant par conséquent la complexité du problème. Nous avons été amené à développer un algorithme de résolution adapté au problème d'optimisation considéré, proposant notamment de traiter les variables continues et binaires séparément. Concernant la gestion de ces dernières, l'élément d'originalité de notre approche est basé sur une analyse de sensibilité de la contrainte de flambage.

Dans le cadre de structures continues, l'optimisation consiste à déterminer quels éléments du domaine initial de conception doivent être présents, menant ainsi à une formulation du problème d'optimisation en variables discrètes. Ce type de représentation introduisant un grand nombre d'éléments, les problèmes traités sont typiquement de très grandes dimensions et difficiles à résoudre. De plus, les contraintes liées à l'intégrité du matériau étant définie pour chaque élément, un grand nombre de contraintes d'optimisation est ainsi introduit. En ce qui concerne les contraintes de flambage, nous présentons une contrainte permettant de prendre en compte plusieurs déformations liées aux phénomènes de flambage dans le problème d'optimisation. Afin de réduire la complexité du problème, nous présentons une formulation du problème réduisant le nombre de contraintes d'optimisation, puis nous proposons un algorithme de résolution adapté au problème considéré.

Dans le but d'estimer la résistance au flambage d'une structure, il est nécessaire de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé de grande dimension. La résolution d'un tel problème peut nécessiter un important coût en mémoire, notamment dans le stockage des matrices associées à ce problème. Nous proposons un algorithme résolvant le problème aux valeurs propres généralisé permettant de réduire ces coûts en mémoire.

## Chapitre 2

# Elasticité linéaire et éléments finis

Dans ce chapitre, après avoir défini le problème d'élasticité linéaire qui caractérise le comportement des structures, nous mettons en exergue la formulation variationnelle associée ainsi que la méthode des éléments finis. Ensuite, nous définissons les notions mécaniques utilisées au cours de ces travaux. Enfin, nous présentons différentes méthodes de résolution du système linéaire lié aux déplacements de la structure, et du problème aux valeurs propres généralisé associé aux phénomènes de flambage.

### 2.1 Notation et Définitions

Dans le cadre de ces travaux, nous considérons le matériau composant les structures étudiées comme *élastique, isotrope et homogène*. On dit qu'un matériau est élastique lorsque celui-ci peut se déformer sans observer de phénomène de cassure et que la structure revient à sa forme initiale quand on relâche les efforts appliqués. L'isotropie et l'homogénéité d'un matériau se caractérisent par des propriétés physiques qui sont respectivement les mêmes dans toutes les directions et en tout point de l'espace. Un matériau de ce type est défini par son module de Young  $\zeta$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ . Le module de Young définit la rigidité du matériau (i.e. plus il est élevé, plus celui-ci est rigide). Le coefficient de Poisson exprime la capacité de contraction du matériau par rapport à son étirement.

Considérons une structure  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $x$ ,  $y$  et  $z$  les directions de l'espace. Pour des questions de clarté, nous noterons  $\cdot_{,x}$ ,  $\cdot_{,y}$  et  $\cdot_{,z}$  les dérivées partielles respectives selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  tout au long de ce chapitre. On note :

- $\partial\Omega$  la frontière du domaine  $\Omega$  et  $\eta$  la normale unitaire sortante définie sur  $\partial\Omega$ . La frontière  $\partial\Omega$  est constituée de deux zones  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_f$  qui correspondent respectivement aux zones où des déplacements et des forces sont imposés (Figure 2.1).
- $f^s$  et  $f^v$  représentent les forces appliquées respectivement sur la frontière  $\Gamma_f$  et dans la structure  $\Omega$  (Figure 2.1).
- $v \in \mathbb{R}^3$  est le champ des déplacements en un point de  $\Omega$ .

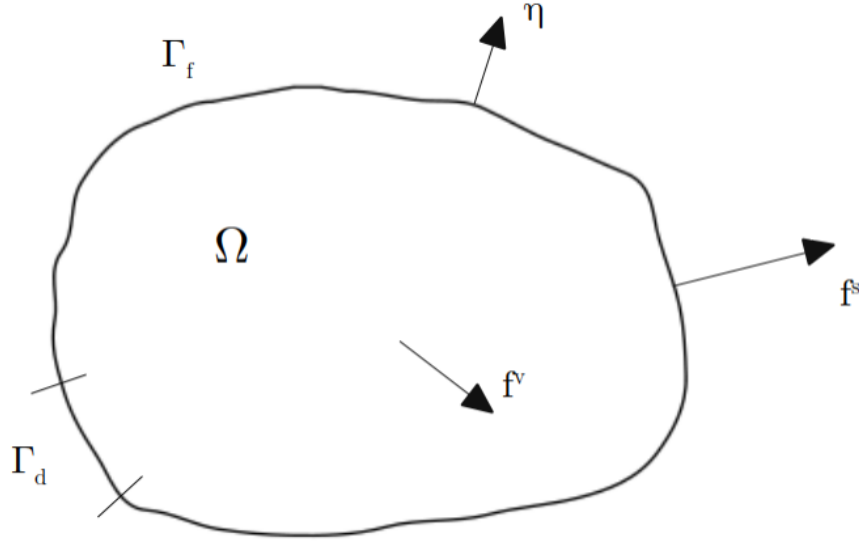


FIGURE 2.1 – Représentation de la structure  $\Omega$

En chaque point de  $\Omega$ , le tenseur des déformations  $E \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est défini par le tenseur de Green-Lagrange (Cook et al. (1974)) :

$$E(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^\top + \nabla v^\top \nabla v) \quad \text{avec } \nabla v = (v_{,x}, v_{,y}, v_{,z}) \quad (2.1)$$

On remarque que le tenseur  $E$  est symétrique et non linéaire par rapport à  $v$ . En notant  $\epsilon$  la partie linéaire de  $E$ , on a :

$$E(v) = \epsilon(v) + o(|\nabla v|) \quad (2.2)$$

où  $\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^\top)$  est défini comme le *tenseur des déformations linéarisées*. Dans cette thèse, nous nous plaçons sous l'hypothèse de petites perturbations correspondant à de petites déformations ( $|\nabla v| \ll 1$ ) de la structure. Par conséquent, le tenseur de déformations linéarisées  $\epsilon$  sera utilisé par la suite et ses composantes seront notées :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

Le tenseur  $\epsilon$ , qui est une matrice symétrique à 9 composantes, peut aussi être noté sous la forme d'un vecteur  $\tilde{\epsilon}$  à 6 composantes de la manière suivante (Cook et al. (1974)) :

$$\tilde{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, ]$$

où  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  correspondent respectivement à  $2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{xz}$  et  $2\epsilon_{yz}$ . On définit  $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  le *tenseur des contraintes* qui est aussi une matrice symétrique dont les composantes sont :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Le tenseur  $\sigma$  peut être noté sous la forme d'un vecteur  $\tilde{\sigma}$  à 6 composantes (Cook et al. (1974)) :

$$\tilde{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}]$$

La loi de Hooke (ou loi de comportement) permet d'exprimer  $\tilde{\sigma}$  en fonction de  $\tilde{\epsilon}$ . Son écriture matricielle est la suivante :

$$\tilde{\sigma}(v) = H\tilde{\epsilon}(v) \quad (2.3)$$

où  $H \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est appelé matrice de Hooke. Lorsque le matériau est isotrope et homogène, la matrice  $H$  peut être définie en fonction du module de Young  $\zeta$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$H = \frac{\zeta}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{où } a = \frac{1-2\nu}{2} \quad (2.4)$$

Notons que l'équation (2.3) peut être reformulée comme  $\sigma(v) = \lambda \text{tr}(\epsilon(v))I + 2\mu\epsilon(v)$  où  $\lambda = \frac{\nu\zeta}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = \frac{\zeta}{2(1+\nu)}$  correspondent aux coefficients de Lamé (Feng & Shi (2013)),  $\text{tr}$  est l'opérateur trace et  $I$  est la matrice identité.

## 2.2 Problème d'élasticité linéaire et formulation variationnelle

A partir des définitions précédentes, nous formulons le problème d'élasticité linéaire sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles. Puis, à partir de la formule de Green, nous présentons la formulation variationnelle en élasticité qui en découle.

En supposant l'équilibre des forces dans la structure  $\Omega$ , selon toutes les directions de l'espace, on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$-\text{div}(\sigma(v)) = f^v \text{ sur } \Omega \quad (2.5)$$

où  $\text{div}$  est l'opérateur de divergence. A l'équation d'équilibre (2.5), nous devons considérer des conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_f$ . Sur  $\Gamma_d$ , on impose un champ de déplacements  $d$ , ainsi on a :

$$v = d \text{ sur } \Gamma_d \quad (2.6)$$

Notons que dans le but de représenter des fixations de la structure (un encastrement par exemple), ce champ de déplacements  $d$  est souvent nul. Sur la frontière  $\Gamma_f$ , un champ de forces surfaciques est appliqué. L'écriture matricielle des équations aux conditions limites sur  $\Gamma_f$  est donnée par :

$$\sigma(v) \cdot \eta = f^s \text{ sur } \Gamma_f \quad (2.7)$$

où  $\eta$  est la normale unitaire sortante définie sur  $\partial\Omega$  (Figure 2.1).

Ainsi, un *problème d'élasticité linéaire* consiste à déterminer le champ des déplacements  $v \in \mathbb{R}^3$ , le champ de déformations  $\epsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et le champ des contraintes du matériau  $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , en tout point de  $\Omega$ , vérifiant les équations suivantes :

— l'équation d'équilibre

$$-\operatorname{div}(\sigma(v)) = f^v \quad \text{sur } \Omega \quad (2.8)$$

— les équations de relation entre les déplacements et les déformations

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^\top) \quad (2.9)$$

— la loi de comportement

$$\sigma(v) = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(v))I + 2\mu\epsilon(v) \quad (2.10)$$

— les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$

– Correspondant à un champ de déplacements imposé sur  $\Gamma_d \in \partial\Omega$

$$v = d \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.11)$$

– Correspondant à un champ de forces appliqué sur  $\Gamma_f \in \partial\Omega \setminus \Gamma_d$

$$\sigma(v) \cdot \eta = f^s \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (2.12)$$

Considérons l'espace de Sobolev suivant :

$$H^1(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) \mid \nabla w \in L^2(\Omega)\}$$

où  $L^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions définies sur  $\Omega$  de carré intégrable. On note l'espace  $W$  tel que :

$$W = H^1(\Omega)^3$$

On définit l'ensemble des solutions admissibles du problème d'élasticité linéaire (2.8)-(2.12) tel que :

$$V_{ad} = \{w \in W \mid w = d \text{ sur } \Gamma_d\}$$

La formule de Green (Riemann (1851)) affirme que pour toutes fonctions régulières  $\alpha$  et  $\beta$  sur un ensemble  $\xi$  et sur sa frontière  $\partial\xi$ , on a :

$$\int_{\xi} (\Delta\alpha)\beta \, d\xi = - \int_{\xi} \nabla\alpha \cdot \nabla\beta \, d\xi + \int_{\partial\xi} (\partial\alpha \cdot \eta)\beta \, d(\partial\xi) \quad (2.13)$$

En multipliant l'équation d'équilibre (2.8) par  $w \in U_{ad}$ , et en intégrant sur l'ensemble  $\Omega$ , nous obtenons l'équation suivante en appliquant la formule de Green (2.13) :

$$\int_{\Omega} \sigma(v) : \epsilon(w) d\Omega - \int_{\Gamma_f} f^s w d(\Gamma_f) = \int_{\Omega} f^v w d\Omega \quad (2.14)$$

où l'opérateur : correspond au produit des deux tenseurs  $\sigma(v)$  et  $\epsilon(w)$  composante par composante, puis de la somme de l'ensemble de ces produits. En utilisant la loi de comportement d'un matériau élastique, isotrope et homogène, on obtient la formulation variationnelle faible suivante :

Trouver  $v \in V_{ad}$  tel que

$$a(v, w) = l(w), \quad \forall w \in U_{ad} \quad (2.15)$$

avec

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (\lambda \text{tr}(\epsilon(v))I + 2\mu\epsilon(v)) : \epsilon(w) d\Omega$$

et

$$l(w) = \int_{\Gamma_f} f^s w d(\Gamma_f) + \int_{\Omega} f^v w d\Omega$$

## 2.3 Méthodes des éléments finis

Dans cette section, nous présentons la technique la plus connue pour résoudre la formulation variationnelle en élasticité (2.15) : la méthode des éléments finis. Nous nous limitons aux structures continues ; pour de plus amples précisions sur la méthode des éléments finis, le lecteur est renvoyé vers les travaux de (Cook et al. (1974)).

Supposons que le champ de déplacements imposé  $d$  soit nul dans la contrainte (2.11) des conditions aux limites. Ainsi la formulation variationnelle devient :

Trouver  $v \in V_{ad}$  tel que

$$a(v, w) = l(w), \quad \forall w \in V_{ad} \quad (2.16)$$

où  $V_{ad} = \{w \in H^1(\Omega)^3 \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma_d\}$ ,

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (\lambda \text{tr}(\epsilon(v))I + 2\mu\epsilon(v)) : \epsilon(w) d\Omega$$

et

$$l(w) = \int_{\Gamma_f} f^s w d(\Gamma_f) + \int_{\Omega} f^v w d\Omega$$

Considérons une discrétisation  $D_h$  de la structure  $\Omega$  en  $N$  éléments finis de type  $T$  (par exemple, triangle ou quadrangle en deux dimensions et tétraèdre ou hexaèdre en trois dimensions) :

$$D_h = \bigcup_{k=1}^N T_k$$

Notons  $s^m$  les noeuds des éléments  $T_k$  n'appartenant pas à  $\Gamma_d$  (où  $1 \leq m \leq p$ , avec  $p$  le nombre total de noeuds). On définit l'espace des fonctions éléments finis scalaires comme :

$$X_h = \{\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \phi \in C^0, \phi|_{T_k} \in P_1, \forall k \in \{1, \dots, N\}, \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_d\}$$

où  $C^0$  est l'ensemble des fonctions continues et  $P_1$  l'ensemble des fonctions affines. On note  $V_h$  l'espace des fonctions éléments finis à valeurs vectorielles :

$$V_h = (X_h)^3$$

Définissons un ensemble de fonctions éléments finis  $\psi_1, \dots, \psi_m$  représentant une base de  $X_h$  :

$$\psi_i \in X_h \text{ et } \psi_i(s^m) = \delta_{im}, \quad 1 \leq i, m \leq 3p$$

où  $\delta_{im}$  est le symbole de Kronecker (valant 1 si  $i = m$ , 0 sinon). Les fonctions  $\psi_i$  sont appelées les *fonctions de forme* de la méthode éléments finis. Ainsi la solution de l'équation variationnelle (2.16) peut être reformulée comme :

Trouver un *déplacement éléments finis*  $v_h = \sum_{i=1}^{3p} u_i \psi_i$  tel que

$$\sum_{i=1}^{3p} u_i a(\psi_i, \psi_j) = l(\psi_j), \quad \forall j = 1, \dots, 3p \quad (2.17)$$

où 3 représente les trois dimensions de l'espace et  $u = (u_1, \dots, u_{3p}) \in \mathbb{R}^{3p}$  est appelé le vecteur *des degrés de liberté nodaux*. L'écriture matricielle de  $v_h$  est donnée par :

$$v_h = Q \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{3p} \end{pmatrix}$$

où  $Q = (\psi_i)_{1 \leq i \leq 3p} \in \mathbb{R}^{3 \times 3p}$  est appelée *matrice d'interpolation*. A partir de la matrice  $D \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  composée des opérateurs de dérivées partielles selon les directions de l'espace, on peut définir la matrice  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 3p}$  dite *matrice des déformations éléments finis* telle que :

$$B = DQ$$

où les composantes de  $B$  sont les dérivées partielles des fonctions de formes  $\psi_i$ .

Ainsi, le problème éléments finis associé à la formulation variationnelle (2.17) revient à déterminer le vecteur des degrés de liberté nodaux  $u \in \mathbb{R}^{3p}$  en résolvant le système linéaire suivant :

$$Ku = f \quad (2.18)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{3p \times 3p}$  est une matrice symétrique définie positive, appelée matrice de *rigidité*, et  $f \in \mathbb{R}^{3p}$  est le vecteur des forces extérieures, dont les composantes sont :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (B^{\top} H B)_{ij} dx$$

$$f_j = \int_{\Omega} (N^{\top} f^v)_j d\Omega + \int_{\Gamma_f} (N^{\top} f^s)_j d(\Gamma_f)$$

A partir du champ des degrés de liberté nodaux, les champs de déformations  $\epsilon$  et de contraintes  $\sigma$  peuvent être déterminés respectivement par les équations (2.9) et (2.10).

Notons que la construction de la matrice de rigidité  $K$  peut être réalisée à partir des matrices de rigidité de chaque élément composant la structure. Considérons un type d'élément composé de  $\alpha$  noeuds menant à une discrétisation en  $N$  éléments de la structure. La matrice de rigidité  $K$  peut se construire de la manière suivante :

$$K = \sum_{i=1}^N [K_i] \quad (2.19)$$

où  $K_i \in \mathbb{R}^{3\alpha \times 3\alpha}$  est la *matrice de rigidité élémentaire* de l'élément  $i$ , et  $[ ]$  représente le procédé d'assemblage par blocs des matrices  $K_i$  dans la matrice  $K$ .

## 2.4 Souplesse et contrainte de Von Mises

Dans cette section, nous présentons deux notions mécaniques couramment utilisées dans l'optimisation de structures découlant directement du calcul du vecteur des degrés de liberté nodaux.

Pour un problème d'optimisation topologique, la minimisation des déplacements dus à un chargement donné correspond à la maximisation de la rigidité globale. Cette optimisation revient aussi à minimiser la *souplesse*  $J$  (ou compliance) de la pièce. Cette donnée mécanique mesure l'énergie élastique de la structure à partir du travail des forces extérieures exercées sur celle-ci et s'exprime comme :

$$J = \int_{\delta\Omega} f^s u \, d(\delta\Omega)$$

Rappelons que le matériau constituant les structures est supposé élastique. Ainsi la structure revient à sa forme initiale lors du relâchement des efforts appliqués, et aucun phénomène de rupture n'est observé suite aux déformations subies. Afin de caractériser les capacités maximales d'un matériau, on lui associe une limite notée  $\bar{\sigma}$ .

Lors de la conception d'une structure, il est nécessaire de s'assurer que la valeur de la fonction mesurant l'intégrité du matériau au sein de chaque élément de la structure ne dépasse pas la limite  $\bar{\sigma}$ . Rappelons qu'une fois le champ des déplacements obtenu, suite à la résolution du système linéaire (2.18), le champ des contraintes  $\sigma$  au sein d'un élément  $i$  s'évalue par la loi de Hooke :

$$\tilde{\sigma}_i(u_i) = [\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i, \sigma_{yz}^i]^\top = H B_i u_i$$

où  $u_i$  correspond aux degrés de liberté nodaux de l'élément  $i$ ,  $H$  est la matrice de Hooke (définie dans l'équation (2.4)) et  $B_i$  est la matrice des déformations de l'élément  $i$ .



Afin d'estimer l'intégrité du matériau en l'élément  $i$ , on utilise généralement le critère de Von Mises (Ford & Alexander (1963)), noté  $\sigma_i$  et défini par :

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x^i - \sigma_y^i)^2 + (\sigma_x^i - \sigma_z^i)^2 + (\sigma_y^i - \sigma_z^i)^2 + 6((\sigma_{xy}^i)^2 + (\sigma_{xz}^i)^2 + (\sigma_{yz}^i)^2)}$$

Les contraintes d'optimisation reliant les contraintes  $\sigma_i$  et la limite  $\bar{\sigma}$ , notées contraintes de  $R_m$ , s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_i - \bar{\sigma} \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

où  $N$  est le nombre total d'éléments.

## 2.5 Flambage linéaire

Dans cette section, après avoir explicité la construction de la matrice de rigidité géométrique, nous définissons le problème aux valeurs propres généralisés lié au flambage.

On note  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\xi$  les déplacements suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement. Les équations (2.1) reliant le champ des déformations à celui des déplacements peuvent être reformulées sous la forme d'équations de déformations dites de *Green-Lagrange* (Cook et al. (1974)) :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \alpha_{,x} + \frac{1}{2}(\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \\ \epsilon_y &= \beta_{,y} + \frac{1}{2}(\alpha_{,y}^2 + \beta_{,y}^2 + \xi_{,y}^2) \\ \epsilon_z &= \xi_{,z} + \frac{1}{2}(\alpha_{,z}^2 + \beta_{,z}^2 + \xi_{,z}^2) \\ \gamma_{xy} &= \alpha_{,y} + \beta_{,x} + (\alpha_{,x}\alpha_{,y} + \beta_{,x}\beta_{,y} + \xi_{,x}\xi_{,y}) \\ \gamma_{xz} &= \alpha_{,z} + \xi_{,x} + (\alpha_{,x}\alpha_{,z} + \beta_{,x}\beta_{,z} + \xi_{,x}\xi_{,z}) \\ \gamma_{yz} &= \beta_{,z} + \xi_{,y} + (\alpha_{,y}\alpha_{,z} + \beta_{,y}\beta_{,z} + \xi_{,y}\xi_{,z}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Au sein d'un élément  $i$  de la structure, supposons que les contraintes  $\tilde{\sigma}_i = [\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i, \sigma_{yz}^i]$  restent constantes lorsque les déformations  $\tilde{\epsilon}_i = [\epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \epsilon_z^i, \gamma_{xy}^i, \gamma_{xz}^i, \gamma_{yz}^i]$  apparaissent. Le travail associé à cet élément est donné par (Cook et al. (1974)) :

$$W^i = \int_{\Omega_i} \tilde{\epsilon}_i^\top \tilde{\sigma}_i d\Omega$$

où  $\Omega_i$  représente le volume occupé par l'élément  $i$ .

En utilisant les équations de Green-Lagrange (2.21), le terme  $\tilde{\epsilon}_i^\top \tilde{\sigma}_i$  peut être réécrit sous la forme suivante (pour des raisons de simplifications d'écriture, nous omettons les indices  $i$  des composantes du vecteur  $\tilde{\epsilon}_i$  par la suite) :

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon}_i^\top \tilde{\sigma}_i &= \epsilon_x \sigma_x^i + \epsilon_y \sigma_y^i + \epsilon_z \sigma_z^i + \gamma_{xy} \sigma_{xy}^i + \gamma_{xz} \sigma_{xz}^i + \gamma_{yz} \sigma_{yz}^i \\
&= \alpha_{,x} \sigma_x^i + \beta_{,y} \sigma_y^i + \xi_{,z} \sigma_z^i + (\alpha_{,y} + \beta_{,x}) \sigma_{xy}^i + (\xi_{,x} + \alpha_{,z}) \gamma_{xz} \sigma_{xz}^i + \\
&\quad (\xi_{,y} + \beta_{,z}) \gamma_{yz} \sigma_{yz}^i + \frac{1}{2} (\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \sigma_x^i + \frac{1}{2} (\alpha_{,y}^2 + \beta_{,y}^2 + \xi_{,y}^2) \sigma_y^i + \\
&\quad \frac{1}{2} (\alpha_{,z}^2 + \beta_{,z}^2 + \xi_{,z}^2) \sigma_z^i + (\alpha_{,x} \alpha_{,y} + \beta_{,x} \beta_{,y} + \xi_{,x} \xi_{,y}) \sigma_{xy}^i + \\
&\quad (\alpha_{,x} \alpha_{,z} + \beta_{,x} \beta_{,z} + \xi_{,x} \xi_{,z}) \sigma_{xz}^i + (\alpha_{,y} \alpha_{,z} + \beta_{,y} \beta_{,z} + \xi_{,y} \xi_{,z}) \sigma_{yz}^i \tag{2.22} \\
&= \sigma : \epsilon + \\
&\quad \frac{1}{2} (\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \sigma_x^i + \frac{1}{2} (\alpha_{,y}^2 + \beta_{,y}^2 + \xi_{,y}^2) \sigma_y^i + \\
&\quad \frac{1}{2} (\alpha_{,z}^2 + \beta_{,z}^2 + \xi_{,z}^2) \sigma_z^i + (\alpha_{,x} \alpha_{,y} + \beta_{,x} \beta_{,y} + \xi_{,x} \xi_{,y}) \sigma_{xy}^i + \\
&\quad (\alpha_{,x} \alpha_{,z} + \beta_{,x} \beta_{,z} + \xi_{,x} \xi_{,z}) \sigma_{xz}^i + (\alpha_{,y} \alpha_{,z} + \beta_{,y} \beta_{,z} + \xi_{,y} \xi_{,z}) \sigma_{yz}^i
\end{aligned}$$

Le terme  $\sigma : \epsilon$  intervenant dans la construction de la matrice de rigidité  $K$ , le travail  $W_\sigma^i$  restant correspond à :

$$W_\sigma^i = \int_{\Omega_i} \left( \frac{1}{2} (\alpha_{,x}^2 + \beta_{,x}^2 + \xi_{,x}^2) \sigma_x^i + \dots + (\alpha_{,y} \alpha_{,z} + \beta_{,y} \beta_{,z} + \xi_{,y} \xi_{,z}) \sigma_{yz}^i \right) d\Omega \tag{2.23}$$

En définissant le vecteur  $\delta_i$  tel que :

$$\delta_i = (\alpha_{,x}, \alpha_{,y}, \alpha_{,z}, \beta_{,x}, \beta_{,y}, \beta_{,z}, \xi_{,x}, \xi_{,y}, \xi_{,z})^\top$$

alors l'équation (2.23) peut être réécrite sous la forme (Cook et al. (1974)) :

$$W_\sigma^i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta_i^\top \begin{pmatrix} s_i & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} \delta_i d\Omega \quad \text{où} \quad s_i = \begin{pmatrix} \sigma_x^i & \sigma_{xy}^i & \sigma_{xz}^i \\ \sigma_{xy}^i & \sigma_y^i & \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{xz}^i & \sigma_{yz}^i & \sigma_z^i \end{pmatrix}$$

Rappelons que le champ de déplacement  $v_i$  de l'élément est donné par la relation  $v_i = Q_i u_i$  où  $Q_i$  et  $u_i$  sont respectivement la matrice d'interpolation et le vecteur des degrés de liberté nodaux de l'élément. Ainsi, en définissant une matrice  $G$  contenant les dérivées partielles des fonctions de formes de  $Q_i$ , nous pouvons relier  $\delta_i$  et  $u_i$  par :

$$\delta_i = G_i u_i$$

où la taille de  $G_i$  dépend du type d'élément considéré pour discrétiser la structure.

Ainsi, le travail  $W_\sigma^i$  associé à un élément  $i$  peut se formuler comme :

$$W_\sigma^i = \frac{1}{2} u_i^\top K_\sigma^i u_i$$

où  $K_\sigma^i$  est la matrice de rigidité géométrique de l'élément  $i$ , définie comme :

$$K_\sigma^i = \int_\Omega G_i^\top \begin{pmatrix} s_i & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} G_i d\Omega_i \quad (2.24)$$

Ensuite, la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma$  peut être construite en assemblant les matrices de rigidité géométrique  $K_\sigma^i$  de chaque élément :

$$K_\sigma = \sum_{i=1}^N [K_\sigma^i] \quad (2.25)$$

où  $N$  représente l'ensemble des éléments représentant la structure et  $[ ]$  est l'opérateur d'assemblage par blocs.

Sous des efforts de compression, on peut observer au sein de la structure des phénomènes de *flambage*. Ils se caractérisent par une amplification des déformations de la structure, et la perte totale de la capacité de la structure à supporter les efforts appliqués peut être occasionnée. L'évaluation de la résistance au flambage d'une structure nécessite deux étapes. La première consiste à déterminer le champ des degrés de liberté par la résolution de l'équation d'équilibre (2.18) impliquant la matrice de rigidité  $K$ . Ensuite, à partir du champ des contraintes  $\sigma$  évalué à l'aide de la loi de comportement (2.3), la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma$  est construite via la formulation (2.25). La seconde étape consiste à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$(K + \lambda K_\sigma)v = 0 \quad (2.26)$$

Chaque valeur propre  $\lambda$  correspond à un coefficient multiplicateur des efforts appliqués, pour lesquels le champ de déplacements de la structure est donné par le vecteur propre associé  $v$ . Les valeurs propres  $\lambda$  sont appelées des *charges critiques* et les vecteurs propres  $v$  des *modes de flambage*. On dit qu'une structure résiste au flambage lorsque la plus petite valeur propre positive, dite *charge critique de flambage*, est supérieure à 1.

Notons que contrairement à la matrice de rigidité  $K$ , la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma$  n'est pas définie positive. Ainsi, lors de la résolution de (2.26), des valeurs propres négatives peuvent apparaître. Dans ce cas-là, les phénomènes de flambage correspondent à des efforts dont les orientations sont opposées à celles des efforts initiaux.

## 2.6 Résolution de l'équation d'équilibre

Dans cette section, nous présentons différentes méthodes de résolution de l'équation d'équilibre correspondant au système linéaire de taille  $n$  suivant :

$$Ku = f \quad (2.27)$$

où la matrice de rigidité  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique définie positive et  $u$  et  $f \in \mathbb{R}^n$  sont respectivement les vecteurs de degrés de liberté nodaux et des forces exercées sur la structure. On distingue deux types de résolution : les méthodes directes et les méthodes itératives.

### 2.6.1 Méthode directe

Généralement utilisées dans le cas de système de taille modérée, les méthodes directes (Golub & Van Loan (2012)) consistent à transformer l'équation (2.27) en un système triangulaire équivalent et de résoudre ce dernier. Sachant que la matrice de rigidité  $K$  est symétrique définie positive, la première phase consiste à factoriser celle-ci à travers une décomposition de Cholesky :

$$K = LL^\top, \text{ où } L \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ est une matrice triangulaire inférieure} \quad (2.28)$$

Cette factorisation permet de ramener l'équation (2.27) aux deux systèmes triangulaires suivants :

$$Ly = f \quad \text{et} \quad L^\top u = y, \text{ où } y \in \mathbb{R}^n$$

Il est important de noter que contrairement à  $K$ , la matrice de Cholesky  $L$  n'est pas creuse. Ainsi la factorisation explicite de la matrice  $K$  nécessite une espace de stockage important. Cette résolution étant extrêmement coûteuse en terme de mémoire, une alternative repose sur le concept des méthodes itératives pour des systèmes de grande dimension.

### 2.6.2 Méthodes itératives

La résolution itérative de (2.27) consiste à générer une suite d'approximations  $(u_k)_k$  de la solution  $u$ , à partir d'une approximation initiale de la solution, tout en faisant tendre le résidu  $r_k$  du système linéaire vers zéro :

$$r_k = f - Ku_k$$

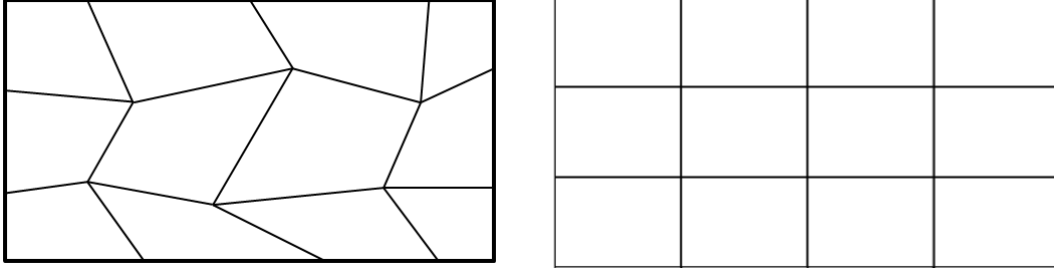
Le principal avantage des méthodes itératives est qu'aucune factorisation de la matrice  $K$  n'est considérée. Ainsi, l'opération la plus coûteuse d'une méthode itérative correspond à la multiplication de la matrice de rigidité matrice  $K$  par un vecteur  $x$ . Généralement, pour réaliser cette opération, la matrice  $K$  est assemblée puis multipliée au vecteur  $x$ . Toutefois, la construction de  $K$  pouvant s'avérer coûteuse en terme de mémoire, Hughes et al. (1983) proposa la méthode de multiplication puis d'assemblage suivante :

$$Kx = \sum_{i=1}^N [K_i x_i] \quad (2.29)$$

où  $N$  est le nombre d'éléments du maillage,  $K_i$  est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément  $i$ ,  $x_i$  représente les degrés de liberté nodaux de l'élément  $i$  et  $[\ ]$  est le procédé d'assemblage par blocs des vecteurs  $K_i x_i$  dans le vecteur  $Kx$ .

Bien que cette technique présente l'avantage de ne jamais assembler la matrice de rigidité  $K$ , l'accès mémoire à la construction de chaque matrice de rigidité élémentaire peut s'avérer important. En effet, chaque matrice étant associée à un élément du maillage, introduire différents types d'éléments (Figure 2.2a) conduit à définir des matrices de rigidité élémentaires différentes l'une de l'autre. Une approche pour réduire les temps de calcul consiste alors à utiliser un seul type d'élément pour définir le maillage de la structure (Figure 2.2b). Ainsi, une seule matrice

de rigidité est nécessaire pour évaluer le produit  $Kx$ , et la quantité de mémoire utilisée pour la résolution du système linéaire est drastiquement réduite (Yadav & Suresh (2014)).



(a) Discrétisation générant plusieurs matrices de rigidité élémentaire (b) Discrétisation amenant à une seule matrice de rigidité élémentaire

FIGURE 2.2 – Différentes discrétisation d’une structure avec des éléments quadrangles

De nombreuses méthodes itératives classiques ont été développées : méthodes de Jacobi et Gausse-Seidel (Saad (1992)), méthode de sur-relaxation successive (Young & Eidson (1970)) ou encore le schéma semi-itératif de Chebyshev (Golub & Varga (1961)). Cependant, l’une des techniques itératives les plus connues pour résoudre le système linéaire (2.27) est la méthode du gradient conjugué (Reid (1971)), dont la procédure est illustrée dans l’Algorithme 1.

---

**Algorithm 1** Algorithme du gradient conjugué - Reid (1971)

---

**input:**  $K, f$ , une approximation initiale  $u_0$  et une tolérance  $\tau$

- 1: Initialisation de  $k = 0$
- 2: Calcul de  $r_0 = f - Ku_0$  ;  $p_0 = r_0$
- 3: **while**  $\frac{\|f - Ku_k\|_2}{\|f\|_2} > \tau$  **do**
- 4:      $\alpha_k = \frac{r_k^\top r_k}{p_k^\top K p_k}$
- 5:      $u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k$
- 6:      $r_{k+1} = r_k - \alpha_k K p_k$
- 7:      $\beta_k = \frac{r_{k+1}^\top r_{k+1}}{r_k^\top r_k}$
- 8:      $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$
- 9:      $k = k + 1$
- 10: **end while**

**output:**  $u_k$

---

Le critère principal d'évaluation d'une méthode itérative concerne la vitesse de convergence vers la solution du système. Celle-ci dépend directement du conditionnement de la matrice  $K$ , noté  $\kappa(K)$ . Cette matrice étant symétrique définie positive, son conditionnement correspond au rapport entre sa plus grande et sa plus petite valeur propre. Le théorème de convergence du gradient conjugué nous assure que (Golub & Van Loan (2012)) :

$$\|u - u_k\|_K \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa(K)} - 1}{\sqrt{\kappa(K)} + 1} \right)^k \|u - u_0\|_K$$

où  $\|u\|_K := \sqrt{u^\top K u}$ . Ainsi, plus le conditionnement de la matrice  $K$  est petit (correspondant à un spectre de valeurs propres rapproché), plus l'algorithme du gradient conjugué converge rapidement. Diverses techniques, telles que le préconditionnement ou la réduction de modèle, ont été développées dans le but de réduire la dispersion du spectre des valeurs propres de la matrice associée au système linéaire considéré.

### Méthode de préconditionnement

Le processus de *préconditionnement* consiste à transformer le spectre des valeurs propres de la matrice  $K$  sans modifier la taille du système afin d'obtenir un système avec un meilleur conditionnement. En définissant une matrice de préconditionnement  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive telle que  $M = CC^\top$ , avec  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive, alors le système (2.27) devient :

$$\tilde{K}\tilde{u} = \tilde{f} \tag{2.30}$$

où  $\tilde{K} = C^{-1}KC^{-1}$ ,  $\tilde{u} = Cu$  et  $\tilde{f} = C^{-1}f$ .

Une des stratégies de préconditionnement les plus utilisées repose sur une factorisation incomplète de Cholesky de la matrice  $K$  (Manteuffel (1980)). L'objectif est d'obtenir une matrice triangulaire creuse approximant la factorisation exacte de Cholesky (2.28). D'autres techniques de préconditionnement existent. Pour de plus amples informations sur celles-ci, le lecteur est renvoyé vers les travaux de Saad (1992) et Golub & Van Loan (2012). Il est important de noter que pour des systèmes de grandes tailles, le coût en mémoire des méthodes de préconditionnement reste élevé. Une autre approche repose sur le concept de réduction de modèle.

### Méthodes de réduction de modèle

Les *méthodes de réduction de modèle* ont pour but de réduire le nombre de variables du système linéaire (2.27). Ce type d'approche permet notamment de faire décroître grandement le coût en mémoire de la méthode de résolution utilisée.

La première étape consiste à définir une matrice rectangulaire  $W$  de taille  $n \times m$  où  $m \ll n$ . Ensuite, le problème initial est projeté sur l'espace réduit :

$$W^\top KW\tilde{u} = W^\top f \tag{2.31}$$

où  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$  représente l'inconnue du système réduit qui peut être résolu par des méthodes directes puisque sa dimension est de  $m \times m$  et  $m \ll n$ . Les coefficients de la solution initiale  $u$  peuvent être obtenus par une opération dite de *prolongation* :

$$u = W\bar{u} \quad (2.32)$$

On définit aussi l'opération de *restriction* telle que :

$$\bar{u} = W^\top u \quad (2.33)$$

La précision de la solution approchée est estimée à l'aide du résidu suivant :

$$r = \frac{\|KW\bar{u} - f\|_2}{\|f\|_2} \quad (2.34)$$

Saad et al. (2000) proposèrent d'intégrer le concept de réduction de modèle au sein de l'algorithme du gradient conjugué. Cette procédure, illustrée dans l'Algorithme 2, porte le nom de *deflated conjugate gradient method* et sera appelée *méthode du gradient conjugué en base réduite* par la suite.

---

**Algorithm 2** Algorithme du gradient conjugué en base réduite - Saad et al. (2000)

---

**input:**  $K, f$ , une approximation initiale  $u_0$  et une tolérance  $\tau$

- 1: Construction de l'espace réduit  $W$
  - 2: Calcul de  $r_0 = f - Ku_0$
  - 3: Calcul de  $u_1 = u_0 + W(W^\top KW)^{-1}W^\top r_0$
  - 4: Calcul de  $r_1 = f - Ku_1$
  - 5: Résolution de  $W^\top KW\mu_1 = W^\top Kr_1$
  - 6: Calcul de  $p_1 = r_1 - W\mu_1$ ;  $k = 1$
  - 7: **while**  $\frac{\|f - Ku_k\|_2}{\|f\|_2} > \tau$  **do**
  - 8:      $\alpha_k = \frac{r_k^\top r_k}{p_k^\top K p_k}$
  - 9:      $u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k$
  - 10:     $r_{k+1} = r_k - \alpha_k K p_k$
  - 11:     $\beta_k = \frac{r_{k+1}^\top r_{k+1}}{r_k^\top r_k}$
  - 12:    Résolution de  $W^\top KW\mu_{k+1} = W^\top Kr_{k+1}$
  - 13:     $p_{k+1} = \beta_k p_k + r_{k+1} - W\mu_{k+1}$
  - 14:     $k = k + 1$
  - 15: **end while**
- output:**  $u_k$
- 

Dans la littérature (Bulgakov & Kuhn (1995); Wang et al. (2007); Gogu (2015)), diverses techniques ont été proposées pour construire l'espace réduit  $W$ . Wang et al. (2007) proposèrent d'utiliser les sous espaces de Krylov pour construire l'espace réduit. Gogu (2015) proposa de

construire la matrice de réduction de modèle dynamiquement au cours d'une optimisation topologique. L'espace réduit est construit successivement en fonction des solutions des équations d'équilibre précédentes et de la convergence de l'optimisation topologique.

Les méthodes *multi-grid* (McCormick (1987); Briggs et al. (2000)) sont basées sur l'idée de construire la matrice du système réduit à partir d'une discrétisation plus grossière que celle considérée. L'opération de restriction (2.33) permet de passer du maillage fin au maillage grossier. Puis la solution issue de la discrétisation d'origine est obtenue par l'opération de prolongation (2.32). Bulgakov & Kuhn (1995) proposèrent de substituer le concept de maillage grossier avec une technique d'agglomération où les noeuds issus de la discrétisation en éléments finis sont répartis dans un faible nombre de groupes (Figure 2.3).

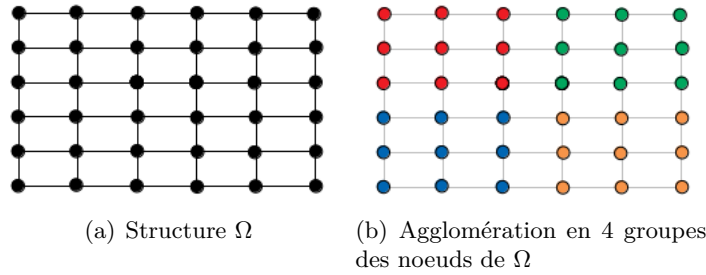


FIGURE 2.3 – Exemple de la technique d'agglomération pour construire une matrice de réduction de modèle

Ensuite, l'espace réduit  $W$  peut être construit en traitant chaque groupe comme un corps rigide (Yadav & Suresh (2014)). On associe à chaque centre de groupe 6 degrés de liberté : trois translations  $(u_g, v_g, w_g)$  selon les trois axes de l'espace, et trois rotations  $(\theta_g, \psi_g, \phi_g)$  autour de ces axes. Ensuite, les trois degrés de liberté  $(u_n, v_n, w_n)$  associés à chaque noeud de chaque groupe peuvent être exprimés comme :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_g - z_n & -(y_g - y_n) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_g - z_n) & 0 & x_g - x_n \\ 0 & 0 & 1 & y_g - y_n & -(x_g - x_n) & 0 \end{pmatrix} d_g \quad (2.35)$$

où  $(x_g, y_g, z_g)$  et  $(x_n, y_n, z_n)$  sont les coordonnées respectives du centre du groupe et du noeud et  $d_g = (u_g, v_g, w_g, \theta_g, \psi_g, \phi_g)^\top$ .



## 2.7 Résolution du problème lié au flambage

La résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage étant non-triviale, nous mettons en exergue dans cette section les différentes méthodes développées afin de déterminer un ensemble de valeurs propres et vecteurs propres associés. Pour rappel, le problème de flambage se formule ainsi :

$$(K + \lambda K_\sigma)v = 0 \quad (2.36)$$

où  $K, K_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont respectivement les matrices de rigidité et de rigidité géométrique et  $n$  correspond à la taille du problème. Notons que le problème (2.36) peut être reformulé comme :

$$K_\sigma v = \mu K v, \quad \text{où } \mu = -\frac{1}{\lambda} \quad (2.37)$$

Pour des problèmes aux valeurs propres généralisés de petite taille, une méthode basée sur la décomposition de Cholesky de la matrice de rigidité est implémentée dans la librairie LAPACK (Anderson et al. (1999a)). En notant  $L$  la matrice de factorisation de Cholesky de la matrice  $K$  (voir équation (2.28)), on peut réécrire (2.37) comme :

$$(L^{-1}K_\sigma L^{-T})(L^\top v) = \mu(L^\top v) \quad (2.38)$$

Ainsi les valeurs propres généralisées de (2.37) correspondent à celles du problème aux valeurs propres suivant :

$$C y = \mu y, \quad \text{où } C = L^{-1}K_\sigma L^{-T} \quad \text{et } y = L^\top v \quad (2.39)$$

Toutefois, à l'image de la résolution du système des équations d'équilibre, la décomposition de Cholesky de la matrice  $K$  n'est pas souhaitable pour des systèmes de grandes tailles.

Une alternative pour résoudre le problème de flambage consiste à transformer l'équation (2.36) afin que les valeurs propres recherchées soient à une extrémité du spectre d'un autre problème aux valeurs propres généralisé. Définissons un scalaire  $\alpha > 0$  et posons  $\mu = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha}$ . Alors, on a  $\lambda = \frac{-\alpha\mu}{1 - \mu}$  et :

$$\begin{aligned} (K + \lambda K_\sigma)v = 0 &\Leftrightarrow ((1 - \mu)K - \alpha\mu K_\sigma)v = 0 \\ &\Leftrightarrow K v = \mu(K + \alpha K_\sigma)v \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ainsi, par cette transformation spectrale, les plus petites valeurs propres positives de (2.36) sont ramenées aux extrémités du spectre des matrices associées au problème suivant :

$$(K + \alpha K_\sigma)^{-1} K v = \mu v \quad (2.41)$$

En effet, supposons que  $\lambda < 0$  est une valeur propre de (2.36). Alors, on a  $\lambda - \alpha < \lambda$  et donc  $0 < \frac{\lambda}{\lambda - \alpha} < 1$ . On en conclut que toutes les valeurs propres négatives de (2.36) correspondent à des valeurs propres positives de (2.41) avec un module inférieur à 1. Dans le cas où  $0 < \lambda < \alpha$ , alors ces valeurs propres de (2.36) correspondent aux valeurs propres négatives de (2.41) car  $\frac{\lambda}{\lambda - \alpha} < 0$ .

Considérons maintenant, deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  du problème (2.36). Supposons que  $0 < \alpha < \lambda_1 < \lambda_2$ , alors on a :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &< \lambda_2 \\ -\alpha\lambda_1 &> -\alpha\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 - \alpha\lambda_1 &> \lambda_1\lambda_2 - \alpha\lambda_2 \\ \lambda_1(\lambda_2 - \alpha) &> \lambda_2(\lambda_1 - \alpha) \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \alpha} &> \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \alpha}\end{aligned}$$

On en conclut que les plus petites valeurs propres supérieures à  $\alpha$  de (2.36) correspondent aux plus grandes valeurs propres positives de (2.41).

La méthode la plus utilisée pour déterminer les valeurs propres recherchées de (2.41) est la *méthode d'Arnoldi* qui est implémentée dans la librairie APARCK (Lehoucq et al. (1998)). Basée sur les sous espaces de Krylov, l'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle implique la résolution du système linéaire suivant pour diverses valeurs de  $y$  et  $\alpha$  :

$$(K + \alpha K_\sigma)v = y \quad (2.42)$$

où  $y \in \mathbb{R}^n$ . Comme mentionné auparavant, pour de grandes dimensions, la résolution de tels systèmes peut s'avérer très coûteuse en terme de mémoire. De plus, si une méthode directe est utilisée, alors la factorisation de Cholesky de la matrice  $(K + \alpha K_\sigma)$  est requise pour chaque valeur du paramètre  $\alpha$ . Ainsi, le coût en mémoire de la méthode d'Arnoldi augmente lorsqu'un nombre important de valeurs propres est requis.

Notons que les méthodes basées sur les sous espaces de Krylov éprouvent certaines difficultés à converger vers une valeur propre dans le cas de valeurs propres très rapprochées ou égales (Dunning et al. (2016)). Lors d'une optimisation topologique, ce phénomène n'est pas envisageable car la perte d'informations liée à des valeurs propres peut entraîner un ralentissement voire une divergence du procédé d'optimisation.

Une alternative à la technique d'Arnoldi correspond à la méthode *Block Jacobi Conjugate Gradient* (BJCG) développée par Ovtchinnikov (2008a,b,c) et implémentée dans les bibliothèques HSL (HSL (2007)) et SPRAL (Dunning et al. (2016)). Cette approche consiste à générer une suite de sous-espaces  $V^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  (avec  $m \ll n$ ) approximant les  $m$  vecteurs propres souhaités et dont les vecteurs sont  $K$ -orthogonaux (ie  $\forall v_i, v_j \in V^i, v_i^\top K v_j = \delta_{ij}$  où  $\delta$  est le symbole de Kronecker). L'algorithme BJCG est basé sur la minimisation des quotients de Rayleigh  $\rho$  associé à chaque vecteur  $v_i \in V^i$ . Dans le cas du problème aux valeurs propres (2.37), le quotient de Rayleigh s'exprime comme :

$$\rho(v_i) = \frac{v_i^\top K_\sigma v_i}{v_i^\top K v_i} \quad (2.43)$$

La génération de l'itéré  $V^{i+1}$  à partir de  $V^i$  est basée sur deux techniques : la procédure de *Rayleigh-Ritz* (Trefethen & Bau III (1997)) et la méthode du gradient conjugué. Pour un espace  $V = [v_1, \dots, v_m]$  et le système (2.37), la procédure de Rayleigh-Ritz consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$V^\top K_\sigma V \bar{z} = \bar{\lambda} V^\top K V \bar{z} \quad (2.44)$$

où les valeurs propres  $\bar{\lambda}$  sont appelées *valeurs de Ritz* et les vecteurs  $z = V\bar{z}$ , où  $\bar{z}$  sont les vecteurs propres de (2.44), sont appelés *vecteurs de Ritz*. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir garantir la  $K$ -orthogonalité des vecteurs  $z$  entre eux. Notons que la résolution du système (2.44) peut être réalisée par la méthode directe décrite précédemment puisque la taille du problème est de  $m \ll n$ . Pour de plus amples précisions sur la méthode BJCG, le lecteur est renvoyé vers Ovtchinnikov (2008a,b,c).

Dunning et al. (2016) montrèrent qu'appliquer l'algorithme BJCG au problème (2.37) mène à une convergence très lente due au mauvais conditionnement de ce système, contrairement au problème aux valeurs propres transformé (2.41) qui présente un spectre de valeurs propres réduit. Afin de garantir une convergence uniquement vers les plus petites valeurs propres positives de (2.36), les auteurs indiquèrent qu'il est nécessaire de connaître le nombre de valeurs propres positives inférieures au paramètre  $\alpha$ . Pour cela, Dunning et al. (2016) utilisèrent une décomposition  $LDL^\top$  de la matrice  $(K + \alpha K_\sigma)$  où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure et  $D$  une matrice diagonale par blocs. En effet, le théorème de l'inertie affirme que le nombre de valeurs propres qui sont inférieures (resp. supérieures) à  $\alpha$  est égal au nombre de valeurs propres négatives (resp. positives) de la matrice  $D$ . Les auteurs notèrent que cette décomposition peut être utilisée pour résoudre le problème linéaire  $(K + \alpha K_\sigma)v = y$  intervenant au cours des itérations de la méthode BJCG. Cependant, à l'image d'une factorisation de Cholesky, une décomposition  $LDL^\top$  mène à des problèmes de gestion de mémoire pour des systèmes de grande taille.

Par conséquent, Dunning et al. (2016) indiquèrent que des méthodes itératives peuvent être utilisées pour résoudre le problème linéaire  $(K + \alpha K_\sigma)v = y$ . Toutefois, considérer la méthode de multiplication puis d'assemblage (2.29) pour le produit de la matrice  $K_\sigma$  avec un vecteur  $v$  pose un challenge numérique plus important que celui entre la matrice  $K$  et le vecteur  $v$ . En effet, chaque matrice de rigidité géométrique élémentaire étant différente, soit chaque matrice de rigidité géométrique élémentaire est stockée, ce qui peut mener à des problèmes de gestion de mémoire, soit elle sont recalculées à chaque produit  $K_\sigma v$ , augmentant le temps de calcul.

Dans l'optique de minimiser le nombre d'opérations  $K_\sigma v$ , Bian et al. (2015) portèrent leur attention sur la méthode *d'itération inverse* (Ipsen (1997)) dont la procédure est décrite dans l'Algorithme 3. Le principe de cette technique est de résoudre itérativement le système suivant afin de minimiser le quotient de Rayleigh du vecteur  $v_i$  :

$$v_{i+1} = -K^{-1}K_\sigma v_i \tag{2.45}$$

---

**Algorithm 3** Méthode d'itération inverse - Bian et al. (2015)

---

**input:**  $K, K_\sigma$ , une approximation initiale  $v_1 \neq 0$ ,  $\|v_1\|_2 = 1$  et une tolérance  $\epsilon$

- 1: Initialisation de  $i = 1$
  - 2: Calcul de  $\lambda_i = -\frac{v_i^\top K v_i}{v_i^\top K_\sigma v_i}$
  - 3: Calcul de  $r_i = K v_i + \lambda_i K_\sigma v_i$
  - 4: **while**  $\|r_i\|_2 \geq \epsilon$  **do**
  - 5:   Calcul de  $z_i = K_\sigma v_i$
  - 6:   Résolution de  $K y_i = z_i$
  - 7:   Calcul de  $v_{i+1} = \frac{y_i}{\|y_i\|_2}$
  - 8:   Calcul de  $\lambda_{i+1} = -\frac{v_{i+1}^\top K v_{i+1}}{v_{i+1}^\top K_\sigma v_{i+1}}$
  - 9:   Calcul de  $r_{i+1} = K v_{i+1} + \lambda_{i+1} K_\sigma v_{i+1}$
  - 10:    $i = i + 1$
  - 11: **end while**
- output:**  $\lambda_i$  et  $v_i$
- 

Sachant que la matrice de rigidité géométrique n'est pas définie positive, alors il n'est pas garanti de trouver une valeur propre positive. Ainsi, la valeur finale de  $\lambda_i$  correspond à la valeur propre de plus petit module. Dans le Chapitre 5, nous proposons de combiner la méthode inverse et la procédure de Rayleigh-Ritz pour déterminer un ensemble de valeurs propres positives du problème (2.36).

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté le système linéaire évaluant les degrés de liberté nodaux de la structure, nous avons défini le critère de Von Mises permettant d'analyser l'intégrité du matériau au sein de la structure sous les efforts appliqués. Ensuite nous avons introduit le problème aux valeurs propres généralisé estimant la résistance d'une structure au flambage. Enfin, nous avons présenté deux types de méthodes pour résoudre les équations d'état considérées dans ces travaux : les techniques directes et les méthodes itératives. Le principal avantage des techniques directes repose sur un nombre fini d'itérations pour résoudre le problème associé. Cependant, le coût en mémoire étant très élevé lorsque la taille des systèmes devient importante, les méthodes itératives représentent une bonne alternative.

Dans le cas de structure treillis, la représentation par des éléments uni-dimensionnels mènent à définir des matrices de rigidité et de rigidité géométrique de petite taille. Ainsi, la résolution des équations d'état considérées s'oriente naturellement vers les techniques directes.

En ce qui concerne les structures continues, afin d'en obtenir une bonne description, un grand nombre d'éléments bi ou tri-dimensionnels sont introduits, menant à des problèmes de grande dimension. Ainsi les méthodes itératives sont à considérer pour ce type de structure.



## Chapitre 3

# Etat de l'art des méthodes d'optimisation topologique

Dans ce chapitre, nous présentons, dans un premier temps, les méthodes d'optimisation topologique pour des structures treillis, puis nous mettons en exergue les différentes techniques développées dans la littérature dans le cadre de l'optimisation topologique de structures continues et les difficultés numériques rencontrées. Enfin, nous discutons de l'intégration de contraintes de  $R_m$  et de flambage dans un problème d'optimisation topologique.

### 3.1 Optimisation topologique de structures treillis

Une structure *treillis* est définie par un ensemble de noeuds connectés entre eux par des éléments unidimensionnels (tels que des barres ou poutres), chacun d'eux étant associé à une section transversale. Généralement l'objectif est de minimiser la masse de la structure, en déterminant quels éléments doivent être inclus dans la structure finale ainsi que les dimensions optimales des sections transversales. Dans ce contexte, l'approche la plus utilisée, appelée *ground structure* (Dorn (1964)), consiste à définir au préalable de l'optimisation l'ensemble des éléments pouvant représenter la structure (bien que d'autres techniques aient été développées telle que *growth based method* par Martinez et al. (2007)). Un problème d'optimisation topologique de treillis consiste généralement à associer une variable continue  $x_i$  à un élément  $i$  pour décrire sa section transversale (i.e. le rayon extérieur d'une section circulaire creuse par exemple). Lorsque l'espace de design est défini par  $N$  éléments, cette optimisation se formule comme un problème d'optimisation continue :

$$\begin{aligned} \underset{x=(x_1, \dots, x_N)}{\text{minimiser}} \quad & f(x) = \sum_{i=1}^N \rho l_i A_i(x_i) \\ \text{s.l.c.} \quad & g_j(x) \leq 0 ; \forall j = 1, \dots, p. \\ & x_i \geq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $x$  est le vecteur des variables de conception,  $f$  représente la masse de la structure treillis,  $l_i$  est la longueur de l'élément  $i$ ,  $A_i$  est l'aire de la section transversale de l'élément  $i$ ,  $\rho$  est la

densité du matériau et  $(g_j)_{1 \leq j \leq p}$  sont les  $p$  contraintes du problème d'optimisation. Ce type de problème peut être résolu par des méthodes de gradients telles que l'optimisation quadratique successive (ou sequential quadratic programming - Boggs & Tolle (1995)) ou encore la méthode des asymptotes mobiles (ou method of moving asymptotes - Svanberg (2002)).

Dans la littérature (Kirsch (1990); Kočvara (2002); Mela (2014)), les éléments unidimensionnels sont généralement considérés comme des *barres*. Par ce choix, l'analyse du comportement de la structure est simplifiée puisque ces éléments structuraux ne peuvent transmettre que des forces axiales et ne sont donc soumis qu'à des déformations axiales (Figure 3.1). Les degrés de liberté associés aux moments de torsion et de flexion sont donc négligés dans l'analyse du comportement de la structure.

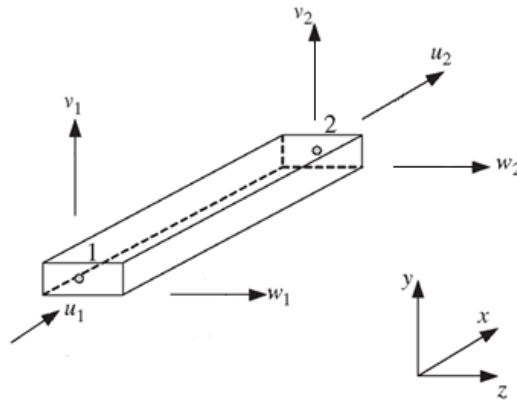


FIGURE 3.1 – Degré de liberté d'une barre

Les premiers travaux d'optimisation topologique de treillis remontent à l'étude de minimisation de masse sous des contraintes de  $R_m$  par Michell (1904). Un demi-siècle plus tard, le problème de minimisation de masse sous contraintes de  $R_m$  a été formulé sous la forme d'un problème linéaire (Dorn (1964), Pedersen (1972)). Pour un problème de treillis à trois barres, Sved & Ginos (1968) démontrèrent que la solution optimale correspond à une structure composée uniquement de deux éléments. Cependant, la résolution du problème d'optimisation par un algorithme de gradient ne permet pas de converger vers cette solution car la contrainte de  $R_m$  liée au troisième élément ne pouvait être vérifiée.

Pour pallier ce problème de convergence vers la topologie optimale, Kirsch (1990) proposa d'introduire une borne infinitésimale, notée  $\epsilon$ , sur les variables décrivant les aires des sections transversales. Cette technique permet de transformer un problème d'optimisation topologique de treillis en un problème de dimensionnement. Une fois la solution optimale obtenue, les éléments de la structure dont l'aire est proche de  $\epsilon$  sont supprimés. Ce type de formulation permet de considérer diverses fonctions objectifs (souplesse et déplacements) pour des problèmes de grandes tailles (Rozvany (2013); Zhou & Rozvany (1991)).

Ben-Tal & Bendsøe (1993) proposèrent une reformulation du problème de minimisation de la souplesse sous une contrainte de volume en utilisant une approche *Simultaneous Analysis And Design* (SAND, Grossmann et al. (1991)). Cette approche consiste à introduire les équations

d'états en tant que contraintes d'optimisation en définissant un ensemble de variables auxiliaires. Sous cette formulation, des problèmes de structures de très grandes tailles peuvent être résolus, notamment par la méthode de point intérieur, en considérant des contraintes de déplacements (Kočvara (1997)), de vibration (Ohsaki et al. (1999)) ou de flambage (Kočvara (2002)).

Une autre formulation du problème d'optimisation topologique de treillis consiste à introduire une variable binaire associée à chaque élément de la structure, permettant ainsi de déterminer si l'élément est présent ou non. Ainsi, à chaque élément de la structure sont associées une variable continue pour décrire sa section transversale et une variable binaire pour indiquer sa présence, définissant un problème d'optimisation en variables mixtes (Ringertz (1986)).

Une alternative aux barres consiste à introduire des éléments *poutres* qui sont capables de capturer les moments de torsion et de flexion ainsi que les forces axiales (Figure 3.2), plutôt que seulement les forces axiales pour les barres. Bien que la recherche sur l'optimisation de structures composées de poutres ait débuté dans les années 1970, celle-ci portait principalement sur l'optimisation dimensionnelle (Grierson & Cohn (1970)). Par la suite, de nombreuses méthodes ont été proposées pour l'optimisation topologique de structures à base de poutres. Fredricson et al. (2003) étudièrent un problème de minimisation de souplesse sous contraintes de masse dans le cas de structures composées de poutres. Takezawa et al. (2007) reformulèrent des problèmes d'optimisation topologique de structure à base de poutres en utilisant des techniques d'optimisation topologique de structure continue telles que la méthode *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP - décrite en Section 3.2.1). Torii et al. (2015) identifièrent les limites d'une structure modélisée par des barres à capturer les déformations dues au flambage et proposèrent d'utiliser des poutres pour remédier à ces difficultés.

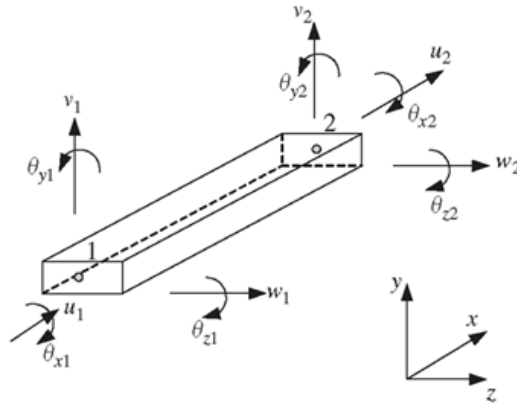


FIGURE 3.2 – Degré de liberté d'une poutre

Dans le cas de barres, les problèmes d'optimisation topologique sous des contraintes de vibration (Ohsaki et al. (1999)) ou de flambage (Kočvara (2002)) peuvent se reformuler sous la forme d'un problème semi défini (SDP). Dans le cas de structures composées de poutres, Yamada & Kanno (2016) indiquèrent que le problème ne peut pas être reformulé sous forme SDP de manière générale.



## 3.2 Optimisation topologique de structures continues

Dans un domaine représenté par des éléments finis bidimensionnels ou tridimensionnels, le problème d'optimisation topologique de structure continue consiste à identifier quels éléments doivent être composés de matière et ceux qui doivent être vides afin de minimiser une fonctionnelle  $f$  sous  $p$  contraintes  $g$ . Cette optimisation se formule comme un problème binaire typiquement de très grande taille :

$$\begin{aligned} & \underset{x=(x_1, \dots, x_N)}{\text{minimiser}} && f(x) \\ \text{s.l.c.} &&& g_j(x) \leq 0 ; \forall j = 1, \dots, p. \\ &&& x_i \in \{0, 1\} ; \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $N$  est le nombre d'éléments de la structure et  $x \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des variables binaires qui représente la présence ( $x_i = 1$ ) ou l'absence ( $x_i = 0$ ) de matière dans chaque élément  $i$ .

Dans cette section, nous présentons les différentes méthodes développées depuis les années 1990 pour résoudre ce type de problème.

### 3.2.1 Solid Isotropic Material with Penalization - SIMP

Dans le but de pouvoir utiliser des méthodes de gradients, la relaxation des variables entières  $x \in \{0, 1\}^n$  en variables continues  $x \in [0, 1]^n$  permet de se ramener à un problème d'optimisation continue. Les variables de conception peuvent ainsi être interprétées explicitement comme la densité de matière dans chaque élément. Notons que la borne minimale 0 peut être ramenée à une valeur faible de densité  $0 < x_{min} \ll 1$  afin d'éviter les problèmes de singularité de la matrice de rigidité  $K$  dans l'équation d'équilibre. La relaxation continue du problème (3.2) est donc :

$$\begin{aligned} & \underset{x=(x_1, \dots, x_N)}{\text{minimiser}} && f(x) \\ \text{s.l.c.} &&& g_j(x) \leq 0 ; \forall j = 1, \dots, p. \\ &&& x_i \in [x_{min}, 1] ; \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Une approche pour converger vers une solution discrète repose sur les techniques de pénalisation. La méthode la plus connue est celle dite *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP). Développée indépendamment par Bendsøe (1989) et Zhou & Rozvany (1991), le terme SIMP a été proposé par Rozvany et al. (1992). Cette méthode consiste à pénaliser les variables de densité par la fonction de pénalisation  $f_p$  suivante :

$$\begin{aligned} f_p(x) & : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ & \quad x \mapsto x^p \end{aligned}$$

où  $p$  est un paramètre de pénalisation de valeur entière. Ensuite, le terme  $x_i^p$  est utilisé lors de la construction de la matrice de rigidité en le multipliant au module de Young  $E_0$  du matériau considéré :

$$E_i := f_p(x_i)E_0 = x_i^p E_0 \tag{3.4}$$

où  $x_i$  est la densité de matière dans l'élément  $i$  et  $E_i$  le module de Young de l'élément  $i$ . Afin de faire évoluer les variables de design dans l'intervalle  $[0,1]$ , l'équation (3.4) peut être ramenée à :

$$E_i := E_{min} + f_p(x_i)(E_0 - E_{min}) \quad (3.5)$$

où  $E_{min}$  correspond à une faible valeur du module de Young (ie  $E_{min} = 10^{-8}E_0$ ).

Rietz (2001) démontra que la méthode SIMP converge vers une solution discrète pour une valeur suffisamment grande du paramètre de pénalisation dans un problème de minimisation de souplesse sous contrainte de volume. Martinez (2005) présenta un théorème de convergence de la méthode SIMP sous de plus faibles hypothèses que Rietz (2001). Pour éviter la convergence vers des minima locaux, Stolpe & Svanberg (2001b) proposèrent une méthode pour incrémenter dynamiquement le paramètre de pénalisation. Toutefois, ils présentèrent des exemples où la méthode SIMP ne permet pas de converger vers une solution discrète, quelle que soit la valeur du paramètre de pénalisation.

Notons que la dérivée de la fonction  $f^p$  par rapport à  $x$  est nulle en zéro. Cette propriété peut provoquer certaines instabilités numériques pour des faibles valeurs de densité (Stolpe & Svanberg (2001a)). En conséquence, une autre fonction de pénalisation a été introduite donnant lieu à la méthode *Rational Approximation of Material Properties* (RAMP, Stolpe & Svanberg (2001a), voir Tableau 3.1). Afin que les densités intermédiaires représentent un volume plus important que des éléments vides ou solides, Bruns (2005) proposa une fonction d'interpolation (voir Tableau 3.1) connue sous le nom de SINH (prononcée *cinch*).

TABLE 3.1 – Fonctions d'interpolation classiques

Méthode	Fonction de pénalisation
SIMP (Bendsøe (1989))	$f(x) = x^p$
RAMP (Stolpe & Svanberg (2001a))	$f(x) = \frac{x}{1+p(1-x)}$
SINH (Bruns (2005))	$f(x) = 1 - \frac{\sinh(p(1-x))}{\sinh(p)}$

Par la suite, d'autres types de problèmes d'optimisation topologique ont été considérés. Calvel (2004) proposa une fonction de pénalisation adaptée à la conception de structures sous des contraintes de vibration. Lindgaard & Dahl (2013) utilisa la méthode SIMP pour maximiser la charge critique de flambage. Sanogo (2016) coupla la méthode SIMP et l'algorithme Brand and Bound pour la conception de circuits magnétiques. Verbart et al. (2017) résolurent un problème de minimisation de masse sous des contraintes de  $R_m$  par la méthode SIMP.

Pour de plus amples références sur la méthode SIMP, le lecteur est renvoyé vers les travaux de Bendsoe (2003) et l'article bibliographique de Deaton & Grandhi (2014).

### 3.2.2 Evolutionary Structural Optimization - ESO

Indépendamment des méthodes considérant des variables continues, d'autres types de techniques ont été développées afin de résoudre (3.2) sans relaxer les variables discrètes. Ces méthodes consistent en la suppression et l'ajout de matière graduellement dans le domaine de conception. La présence dans ce domaine d'un élément du maillage est déterminée par un critère heuristique basé sur l'influence de cet élément sur un critère d'optimisation.

La méthode la plus connue est l'*Evolutionary Structural Optimization* (ESO) qui consiste à uniquement retirer de la matière, et qui a été développée initialement par Xie & Steven (1993). Ils supposèrent qu'une structure est optimale si les contraintes  $\sigma$  au sein de celle-ci sont uniformes et en-dessous de la limite  $\bar{\sigma}$  inhérente au matériau. Ils basèrent donc leur critère de suppression sur l'analyse des contraintes  $\sigma$  au sein de chaque élément. Si le rapport entre la contrainte  $\sigma_i$  de Von Mises (voir Chapitre 2 - Section 4) d'un élément  $i$  et la limite élastique  $\bar{\sigma}$  est inférieure à un ratio de rejet  $r$ , alors l'élément  $i$  est supprimé de la structure :

$$\frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}} \leq r \quad (3.6)$$

Selon un critère similaire à (3.6), Querin et al. (2000a) proposèrent la méthode Additive Evolutionary Structural Optimization (AESO) pour pouvoir uniquement rajouter de la matière. Par la suite, ils proposèrent de combiner les méthodes ESO et AESO pour pouvoir ajouter et retirer des éléments de la structure à chaque itération (Querin et al. (2000b)). Ce type de méthode porte le nom de Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO).

Il est important de noter que les éléments qui ont été supprimés n'apparaissent pas dans la résolution des équations d'état. Ainsi, on ne peut pas déterminer directement leur influence sur un critère d'optimisation. Pour remédier à cette difficulté, il est possible d'extrapoler l'influence des éléments présents dans le domaine de conception vers les éléments absents (Huang & Xie (2007)). Une alternative à la suppression totale des éléments des équations d'état consiste à les modéliser avec un matériau dit fictif (i.e., soit un module de Young  $\zeta \ll 1$  soit  $x_i = 0$  devient  $x_i = \epsilon$  où  $\epsilon \ll 1$ ). Ce type de méthode proposée par Rozvany & Querin (2002) permet de calculer directement l'influence d'un élément  $i$  absent sur un critère d'optimisation.

Sur un simple exemple de minimisation de souplesse sous contraintes de volume, Zhou & Rozvany (2001) identifièrent certaines limites des méthodes du type ESO comme la convergence vers des structures non-optimales. Pour pallier ces difficultés, Huang & Xie (2008) proposèrent de simples procédures comme un raffinement du pas de discrétisation du domaine lorsque la solution diverge. Par la suite, Huang & Xie (2010) mirent en exergue la validité de la méthode BESO à travers diverses améliorations comme des méthodes de filtrage ou l'incorporation de contraintes de déplacements, entre autres.

### 3.2.3 Gradient topologique

Le gradient topologique quantifie l'influence sur un critère d'optimisation de l'insertion d'un trou dans une structure. Introduite par Eschenauer et al. (1994), les auteurs assimilent aussi la notion de gradient topologique au concept de *bubble method*. Récemment, de nombreux auteurs (Sokolowski & Zochowski (1999, 2003); Cécia et al. (2000); Novotny et al. (2007); Feijoo et al. (2005); Suresh (2010)) développèrent des algorithmes basés sur le gradient topologique.

Considérons une structure  $\Omega$  et un point  $p$  de  $\Omega$  (Figure 3.3a). On note  $B(p, r)$  la boule de centre  $p$  et de rayon  $r$  représentant un trou centré en  $p$ . Le domaine engendré par la suppression de cette boule est noté  $\Omega_B$  (Figure 3.3b).

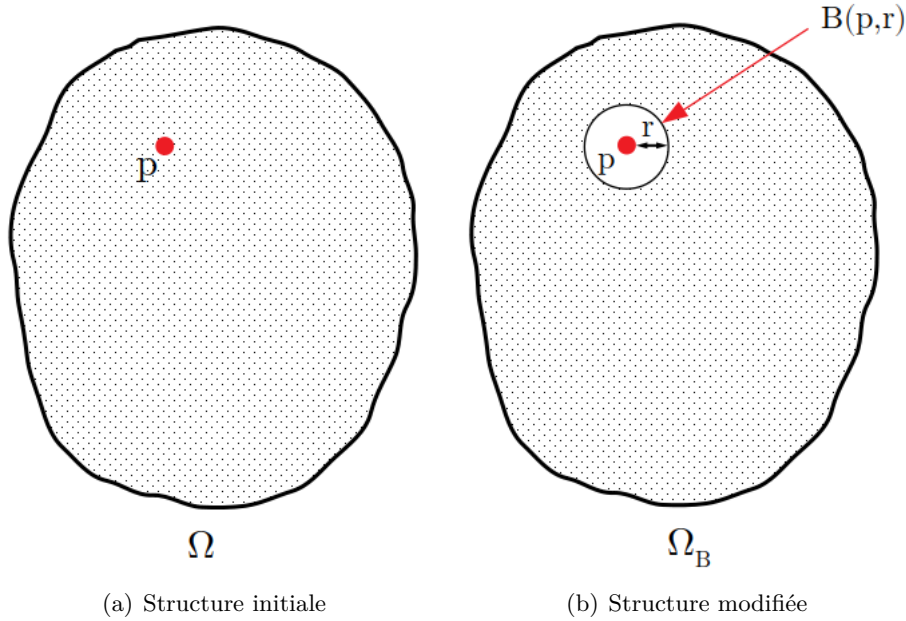


FIGURE 3.3 – Concept du gradient topologique

Considérons un critère  $C$  défini sur les deux domaines  $\Omega$  et  $\Omega_B$ . Le gradient topologique de  $C$  en  $p$  est donné par (Sokolowski & Zochowski (1999)) :

$$G_C(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C(\Omega_B) - C(\Omega)}{f(r)} \quad (3.7)$$

où  $f(r)$  est une fonction scalaire telle que  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0$ . Généralement, le choix de cette fonction correspond à la mesure de Lebesgue de la boule  $B(p, r)$ .

Notons que si la valeur du gradient topologique est petite (resp. grande) en  $p$ , alors le retrait de matière en ce point à un faible (resp. significatif) impact sur le critère  $C$ . Ainsi, le gradient topologique peut être utilisé comme direction de descente dans un algorithme de gradient. Dans le cas d'un problème de minimisation du critère  $C$ , la topologie optimale  $\Omega^{opt}$ , vérifiant  $C(\Omega^{opt}) < C(\Omega)$ , correspond à :

$$\Omega^{opt} = \{p \in \Omega \mid G_C(p) \geq 0\} \quad (3.8)$$

Lors de l'analyse du comportement de la structure, le calcul du champ des degrés de liberté nodaux  $u$  (voir Chapitre 2 - Section 3) est nécessaire pour déterminer la souplesse ou encore la résistance au flambage de la structure. Supposons que la structure est représentée par  $N$  éléments finis. Le champ  $u$  est solution de l'équation d'équilibre suivante :

$$K(x)u(x) = f \quad (3.9)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^N$  est le vecteur des variables de conception, chacune étant associée à un élément du maillage,  $K$  est la matrice de rigidité et  $f$  le champ des forces appliquées à la

structure. Supposons que le critère mécanique  $C$  dépende de  $x$  et du champ de déplacements  $u$ . Alors la dérivée topologique de  $C$  par rapport à un élément  $x_i$  se formule comme :

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \frac{\partial C}{\partial u} \frac{du}{dx_i} \quad (3.10)$$

Si l'on dérive l'équation d'équilibre (3.9) par rapport à  $x_i$ , alors on obtient :

$$K \frac{du}{dx_i} + \frac{\partial K}{\partial x_i} u = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dx_i} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x_i} u \quad (3.11)$$

Par conséquent, la dérivée de  $C$  par rapport à  $x_i$  devient :

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} - \frac{\partial C}{\partial u} K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x_i} u \quad (3.12)$$

Notons que le terme  $-\frac{\partial C}{\partial u} K^{-1}$  ne dépend pas des variables  $\mathbf{x}$  et reste constant quel que soit la variable  $x_i$  dans (3.12). Ainsi, on peut définir la variable adjointe  $\lambda$  (Choi & Kim (2006)) solution de l'état adjoint suivant :

$$K\lambda = -\frac{\partial C}{\partial u} \quad (3.13)$$

Le terme  $-\frac{\partial C}{\partial u}$  peut être appelé *chargement adjoint* puisque l'équation (3.13) s'apparente à l'équation d'équilibre (3.9). Une fois le champ adjoint  $\lambda$  déterminé, le gradient topologique du critère mécanique  $C$  en  $x_i$  est défini par (Feijoo et al. (2005)) :

$$G_C(x_i) = -\frac{4}{1+\nu} \sigma(u(x_i)) : \epsilon(\lambda(x_i)) + \frac{1-3\nu}{1-\nu^2} \text{tr}(\sigma(u(x_i))) \text{tr}(\epsilon(\lambda(x_i))) \quad (3.14)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\sigma(u(x_i))$  le tenseur des contraintes mécaniques selon le champ des déplacements  $u$  de l'élément  $i$  et  $\epsilon(\lambda(x_i))$  est le tenseur des déformations (voir Chapitre 2) du champ adjoint  $\lambda$  de l'élément  $i$ . L'opérateur  $:$  correspond au produit de deux matrices de même dimension composante par composante, puis de la somme de l'ensemble de ces produits. L'opérateur  $\text{tr}$  est l'opérateur trace d'une matrice. On remarque que, pour déterminer le gradient topologique, seuls les champs  $u$  et  $\lambda$  ont besoin d'être calculés sur le domaine initial (i.e. sans le trou infinitésimal).

Une approche intuitive consisterait à éliminer les éléments dont le gradient topologique est de faible valeur. Toutefois, cette méthode présente des phénomènes d'instabilité de convergence (Suresh (2013)). Une autre approche consiste à utiliser le champ du gradient topologique comme une ligne de niveau (Suresh (2010)). L'algorithme de descente de volume proposé consiste à déterminer une valeur seuil des gradients topologiques afin de retirer successivement une fraction de volume donnée. Par la suite, le même auteur développa l'algorithme pour prendre en compte des contraintes de  $R_m$  (Suresh & Takaloozadeh (2013)), de déplacements (Deng & Suresh (2015)) ou encore flambage (Bian et al. (2015)).

Dans le cas où plusieurs champs de gradient topologique sont utilisés au cours d'une itération, on distingue deux stratégies pour former le champ de gradient topologique général. La première propose une somme pondérée de chaque champ des gradients topologiques (Bian & Fang (2017)), la seconde considère le Lagrangien augmenté du problème d'optimisation (Suresh et al. (2012)).

### 3.2.4 Lignes de niveaux

Plutôt qu'une paramétrisation explicite du domaine, les méthodes de lignes de niveaux (ou *level set*) utilisent une fonction implicite  $\phi$  pour définir les frontières de la structure. Introduit par Osher & Sethian (1988), cette fonction  $\phi$  permet de séparer le domaine du matériau de celui du vide. Notons  $\Omega$  le domaine dans lequel la structure peut évoluer, alors on définit  $\phi$  comme :

$$\begin{cases} \phi(x) \leq 0 & \text{si } x \in \Omega_s \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ \phi(x) \geq 0 & \text{si } x \in \Omega_v \end{cases}$$

où  $\Omega_s$  représente le domaine de la structure,  $\partial\Omega$  définit les frontières de la structure et  $\Omega_v$  est le domaine du vide (Figure 3.4). En apparence, ce type d'optimisation semble similaire à l'optimisation de forme, toutefois elle permet de créer, supprimer et fusionner des trous au sein de la structure.

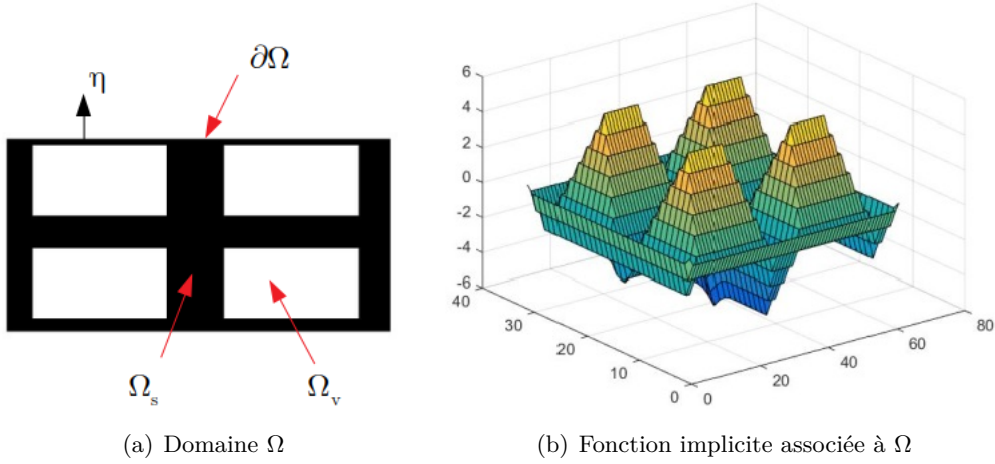


FIGURE 3.4 – Concept des lignes de niveaux

Dans le but de propager les frontières de la structure, un paramètre  $t$  est introduit afin de faire évoluer dans le temps la fonction implicite  $\phi$  et la position des points spatiaux  $x$  du domaine  $\Omega$ . La courbe de niveau zéro caractérisant les frontières de la structure devient donc :

$$\phi(t, x(t)) = 0, \forall (x(t), t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.15)$$

La dérivation de (3.15) par rapport au temps mène à une équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \phi(0, x) = \phi_0(x) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.16)$$

où  $\phi_0(x)$  est une ligne de niveau au temps  $t$  égal à zéro. Notons que la composante  $\partial x / \partial t$  peut être exprimée à partir d'un scalaire  $V_N$  et de la normale sortante unitaire  $\eta$  à la frontière (Figure 3.4) en fonction de  $\phi$  où  $\eta = \nabla_x \phi / \|\nabla_x \phi\|$ . Ainsi l'équation (3.16) devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N \|\nabla_x \phi\| = 0, \phi(0, x) = \phi_0(x) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.17)$$

L'évolution dans le temps des frontières de la structure est classiquement obtenue en résolvant (3.17) à l'aide du schéma d'Euler explicite (Allaire et al. (2002); Wang et al. (2003); Allaire et al. (2004)).

Une des principales limitations des algorithmes proposés lie le résultat fortement à la topologie initiale, puisqu'aucun trou ne peut être créé au sein de la structure. Pour répondre à cette problématique, de nombreux auteurs (Burger et al. (2004); Allaire & Jouve (2006); He et al. (2007)) proposèrent diverses méthodes pour introduire le gradient topologique dans la résolution du problème d'optimisation afin d'insérer de nouveaux trous. Allaire & Jouve (2006) notèrent que les méthodes des lignes de niveaux et de gradient topologique sont toutes deux des méthodes de type gradient, ainsi ils proposèrent de les coupler en alternant les directions de descente. Burger et al. (2004) et He et al. (2007) proposèrent d'ajouter un terme dans l'équation (3.17) afin de pouvoir créer des trous au sein de la structure. Ainsi, ils obtinrent une équation d'Hamilton-Jacobi de la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N \|\nabla_x \phi\| + wG = 0, \phi(0, x) = \phi_0(x) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.18)$$

où  $w$  est un paramètre contrôlant l'influence du terme additionnel  $G$  défini à partir du gradient topologique. Notons qu'en définissant une seconde fonction implicite, Dunning & Alicia Kim (2013) présentèrent une méthode ne nécessitant pas le gradient topologique pour insérer des trous.

Une autre difficulté liée à la méthode conventionnelle des lignes de niveaux concerne la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.16). Généralement, un schéma numérique d'Euler explicite est utilisé, impliquant des pas de temps restreint par la condition de stabilité de Courant – Friedrichs – Lewy. De plus, la fonction implicite doit être régulièrement réinitialisée lorsqu'elle devient trop plate ou abrupte. Ces deux phénomènes dégradent l'efficacité du schéma numérique. Pour pallier ces problèmes, d'autres formulations de l'équation d'Hamilton-Jacobi ou d'autres schémas de résolution peuvent être utilisés. Luo et al. (2008a,b) proposèrent d'utiliser un schéma semi-implicite (Weickert et al. (1998)) ne nécessitant pas de condition de stabilité sur le pas de temps et de réinitialisation de la fonction implicite.

Pour de plus amples références sur la méthode des lignes de niveaux, le lecteur est renvoyé à l'article bibliographique de van Dijk et al. (2013).

### 3.2.5 Instabilités numériques

Quelle que soit la méthode utilisée pour le problème d'optimisation topologique (1), on distingue deux catégories d'instabilités numériques :

- Une **structure en damiers** correspond à la formation de régions alternant des éléments de matière et de vide à l'image d'un damier (Figure 3.5b). Cette disposition était à l'origine considérée comme une microstructure optimale (Berlyand & Kozlov (1992)), toutefois, Diaz & Sigmund (1995) prouvèrent que ce résultat était en réalité due à une mauvaise simulation numérique du comportement de ces structures.
- La **dépendance du maillage** concerne le fait d'obtenir différentes solutions pour diverses discrétisations du domaine (Figure 3.5c).

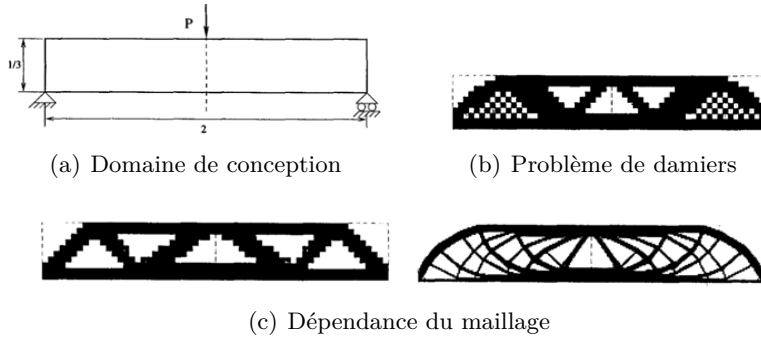


FIGURE 3.5 – Instabilités numériques - Sigmund & Petersson (1998)

Pour remédier à ces instabilités numériques, Haber et al. (1996) proposèrent d'introduire une contrainte sur le périmètre de la structure dans la formulation du problème d'optimisation. Partant du principe que le coût d'évaluation du périmètre de la structure est relativement faible comparé à la résolution des équations d'états, Duysinx (1997) proposa une méthode pour approximer le périmètre. Cependant, le choix de la borne maximale peut s'avérer compliqué et n'est pas toujours possible. Une alternative à l'ajout de contraintes repose sur les méthodes de filtrages :

- Le filtrage de dérivées proposé par Sigmund (1994) a pour but de lisser les dérivées calculées afin d'éviter les problèmes de damiers. Dans le cas du problème (3.3), le lissage de la dérivée de la fonction objectif  $f$  par rapport à une variable  $x_i$  est définie par :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sum_{j=1}^n H_j} \sum_{j=1}^n x_j H_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

où  $H$  est l'opérateur de convolution définie par :

$$H_i = \max\{r_{min} - \text{dist}(i, e), 0\} \quad (3.20)$$

où  $r_{min}$  est un scalaire strictement positif et  $\text{dist}(i, e)$  est la distance entre les centres des éléments  $e$  et  $i$ .

- Une autre méthode de filtrage a été proposée par Huang & Xie (2007) consistant à lisser les dérivées dans les noeuds du maillage puis de les étendre aux éléments. Les dérivées nodales sont initialisées à l'aide des dérivées des éléments auxquels sont liés les noeuds :

$$\alpha_j^n = \sum_{i=1}^k \omega_{ij} \alpha_i^e \quad (3.21)$$

$\alpha_j^n$  est la dérivée du noeud  $j$ ,  $\alpha_i^e$  est la dérivée de l'élément  $i$ ,  $k$  le nombre d'éléments connectés au noeud  $j$  et  $\omega_{ij}$  est un poids donné par :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{k-1} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^k r_{ij}}\right) \quad (3.22)$$



où  $r_{ij}$  est la distance entre le noeud  $j$  et le centre de l'élément  $i$ . Ensuite la dérivée des éléments  $\alpha_i$  est mise à jour par la formule suivante :

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^n w(r_{ij})\alpha_j^n}{\sum_{j=1}^n w(r_{ij})} \quad (3.23)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments total et  $w(r_{ij})$  est un poids défini à l'aide de  $r_{min}$  qui est le radius du filtre :

$$w(r_{ij}) = \max\{0, r_{min} - r_{ij}\} \quad (3.24)$$

On note que cette méthode de filtrage permet notamment d'extrapoler les dérivées des éléments présents dans les éléments dans le vide.

### 3.3 Optimisation sous des contraintes d'intégrité du matériau

Lors de la conception d'une structure, notamment dans le monde de l'aéronautique, un des critères fondamentaux consiste à s'assurer que les contraintes  $\sigma$  au sein de chaque élément de la structure ne dépassent pas la limite  $\bar{\sigma}$  définie par le matériau. On parle de contrainte *locale* car à chaque élément de la structure est associé une contrainte d'optimisation. Comme le souligne Duysinx et al. (2008), la prise en compte de contraintes de  $R_m$  au cours de l'optimisation topologique est fondamentale. Dans le cas contraire, d'importantes phases de post-traitement sont nécessaires afin de garantir que la structure réponde bien à la limite  $\bar{\sigma}$ . De plus, comme l'illustre la Figure 3.6, ce type de critère d'optimisation influence la topologie optimale de la structure. Cependant l'incorporation de telles contraintes se caractérise par deux principales difficultés : (i) les phénomènes de singularité de la contrainte de  $R_m$  et (ii) son caractère local.

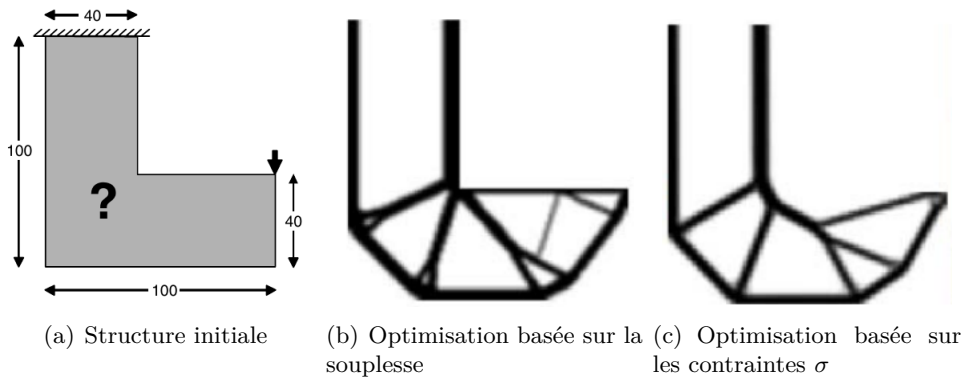


FIGURE 3.6 – Différents résultats optimaux selon deux critères d'optimisation pour une structure en L - Le et al. (2010)

(i) Le phénomène de singularité se caractérise par la violation de la contrainte de  $R_m$  d'un élément lorsque celui-ci est supprimé. Sur une structure composée de trois barres, Sved & Ginos (1968) démontrèrent que la structure optimale correspond à la suppression d'un élément. Or, une méthode d'optimisation par gradient ne permet pas de supprimer cette barre car sa contrainte de  $R_m$  associée ne serait pas vérifiée. En imposant une borne minimale  $\tau$  sur l'aire des éléments de la structure, Kirsch (1990) montra que cette formulation permet d'éliminer les problèmes de topologie singulière due à la suppression d'éléments. Toutefois, lorsque les aires des sections transversales des éléments tendent vers  $\tau$ , les fonctions évaluant les contraintes de  $R_m$  présentent des singularités (Cheng & Guo (1997)).

Pour répondre à ce type de difficulté, l'approche la plus connue consiste à relaxer les contraintes de  $R_m$ . L'une des techniques les plus connues de relaxation a été proposée par Cheng & Guo (1997), et est communément appelée  *$\epsilon$ -relaxation approach*. Ils proposèrent que les contraintes de  $R_m$  et les bornes minimales sur les variables soient perturbées par un paramètre  $\epsilon$ . Ce type de relaxation a été adapté à l'optimisation topologique de structure continue par Duysinx & Bendsøe (1998). Dans le cas d'une modélisation selon la méthode SIMP, ils proposèrent un critère de pénalisation des contraintes de  $R_m$  et adaptèrent l' *$\epsilon$ -relaxation approach*. Dans le cadre de l'optimisation topologique de structure continue, d'autres types de relaxation de contraintes de  $R_m$  ont été proposés. Bruggi (2008) proposa une *qp-approach* consistant à définir un paramètre de pénalisation  $p$  pour la construction de la matrice de rigidité, et un autre paramètre  $q$  pour pénaliser les contraintes de  $R_m$ . Le et al. (2010) proposèrent un autre schéma d'interpolation des contraintes de  $R_m$  dans le cas d'une méthode SIMP. On note que pour des problèmes d'optimisation topologique de structures continues à valeurs discrètes tel que (3.2), les techniques de relaxation des contraintes de  $R_m$  ne sont pas nécessaires.

(ii) Dans un problème d'optimisation topologique, la prise en compte des contraintes de  $R_m$  n'est pas systématique. En effet, du fait de leur caractère local, un nombre important de contraintes d'optimisation est requis. Ainsi, des critères d'optimisation dit *globaux*, tel que la souplesse de la structure, lui sont préférés car une seule contrainte est nécessaire pour optimiser la structure. Dans ce cas-là, le nombre de contraintes étant faible comparé aux nombres de variables, le calcul des dérivées à l'aide d'un état adjoint permet d'accélérer le temps de calcul. Cependant, dans le cas d'un problème d'optimisation sous des contraintes de  $R_m$ , cette affirmation n'est plus vraie car à chaque variable est associée une contrainte d'optimisation. Pour pallier cette difficulté, des techniques d'agrégation permettent de drastiquement réduire le nombre de contraintes de  $R_m$  ainsi que les coûts de calculs des dérivées, tout en approximant la contrainte  $\sigma$  maximale au sein de la structure. Diverses fonctions d'agrégation ont été proposées dans la littérature telles que la fonction de Kreisselmeier-Steinhauser (ou KS-fonction) de (Kreisselmeier & Steinhauser (1980)), la norme-P des contraintes de  $R_m$  (Duysinx & Sigmund (1998)). Récemment, Verbart et al. (2017) proposèrent une approche d'agrégation et de relaxation dans le cadre d'une formulation SIMP. Une des difficultés des méthodes d'agrégation est qu'elles ne permettent pas de s'assurer que les contraintes de  $R_m$  soient vérifiées localement. Ainsi des méthodes d'agrégations sur des régions de la structure ont été développées pour obtenir une meilleure approximation de la contrainte maximale  $\sigma$  au sein de la structure (Le et al. (2010)). Les auteurs adaptèrent la norme-P des contraintes de  $R_m$  pour correspondre à la contrainte maximale  $\sigma$  dans chaque

région de la structure. Ils notèrent qu’une simple approche d’entrelacement des contraintes  $\sigma$  pour former les régions donne les meilleurs résultats. Toutefois, le choix du nombre de régions a une influence sur l’optimisation et doit être adapté à chaque problème (Figure 3.7).

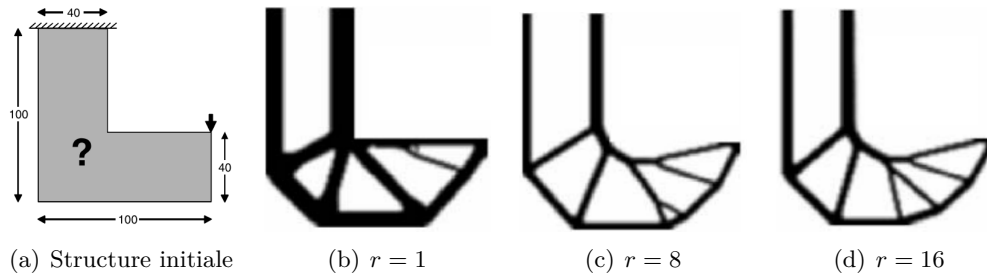


FIGURE 3.7 – Différents résultats optimaux en fonction du nombre  $r$  de régions d’agrégations des contraintes de  $R_m$  pour une structure en L - Le et al. (2010)

### 3.4 Optimisation sous contraintes de flambage

Comme mentionné dans le Chapitre 2, lorsqu’une structure est soumise à des efforts de compression, un phénomène de flambage peut apparaître et se caractérise par une amplification des déformations de la structure. La prise en compte de ces phénomènes est importante car ils peuvent entraîner une perte totale de la capacité de la structure à supporter les efforts appliqués. L’analyse du flambage requiert deux étapes. La première correspond à la résolution de l’équation d’équilibre (3.9) déterminant le champ des déplacements de la structure pour le chargement donné, la seconde consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$(K + \lambda K_\sigma)v = 0 \tag{3.25}$$

où  $K$  est la matrice de rigidité et  $K_\sigma$  la matrice de rigidité géométrique construite à partir du champ des déplacements. Chaque valeur propre  $\lambda$  correspond à un facteur scalaire des efforts appliqués, pour lesquels le champ de déformations de la structure est représenté par le vecteur propre associé  $v$ . Les valeurs propres  $\lambda$  sont définies comme des *charges critiques* et les vecteurs propres  $v$  comme des *modes de flambage*. Lors de la conception d’une structure, il suffit de s’assurer que la plus petite charge critique positive (dite *charge critique de flambage*) soit supérieure à 1 pour que la pièce résiste au flambage. Dans un problème d’optimisation de structure, la prise en compte du flambage peut être considérée soit par une contrainte sur la plus petite valeur propre positive, soit par la maximisation de cette dernière.

Dans le cadre de structure treillis, de nombreux auteurs (Zhou (1996); Rozvany (1996); Achtziger (1999); Stolpe (2004); Mela (2014)) se sont penchés sur des problèmes d’optimisation sous des contraintes de flambage définies par la formule d’Euler (Euler (1947)). Ce type de problème associe à chaque membre de la structure une contrainte représentant la résistance au flambage de l’élément indépendamment des autres. On parle ainsi de flambage *local*. Ne nécessitant pas la

résolution du problème aux valeurs propres généralisé, ce type de problème d'optimisation réduit grandement le challenge numérique et peut notamment être reformulé comme un problème linéaire (Pedersen & Nielsen (2003); Mela (2014)). Cependant, ces contraintes locales ne permettent pas de prendre en compte les déformations globales dues au flambage (Kočvara (2002)) obtenues en résolvant l'équation (3.25). Dans ce cas, on parle de flambage *global*. En utilisant une approche SAND, Kočvara (2002) formula un problème de minimisation de masse sous des contraintes de souplesse et de flambage global comme un problème d'optimisation semi-défini et utilisa la méthode de point intérieur pour le résoudre (Figure 3.8).

A l'image des contraintes de  $R_m$ , des singularités apparaissent dans le cas de contraintes locales et globales de flambage lorsque les aires des sections transversales des barres ou poutres tendent vers zéro. Guo et al. (2001) proposa un schéma de relaxation pour les contraintes locales de flambage similaire au schéma de relaxation de Cheng & Guo (1997). Evgrafov (2005) introduisit une relaxation de l'équation (3.25) dans le cas d'une contrainte globale. Torii et al. (2015) mirent en exergue les différentes difficultés d'analyse du flambage local et global dans le cas d'une modélisation de la structure avec des barres. En conséquence, les auteurs proposèrent de considérer des poutres permettant d'identifier le flambage local et global à travers une seule contrainte d'optimisation.

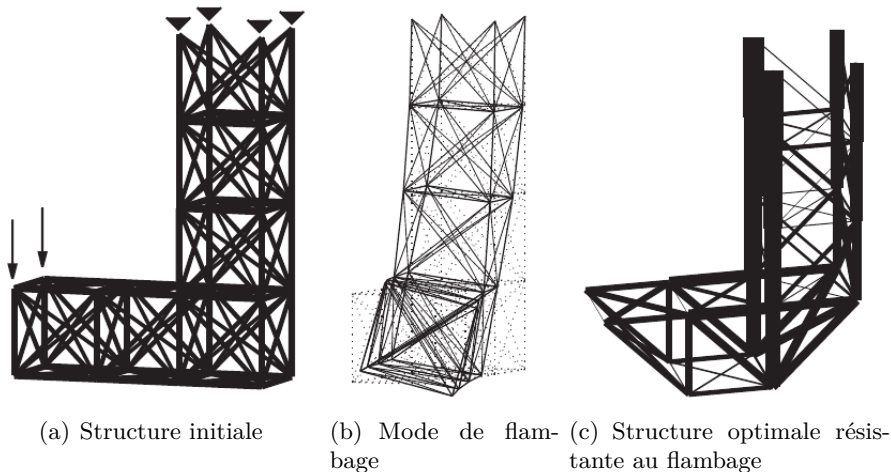
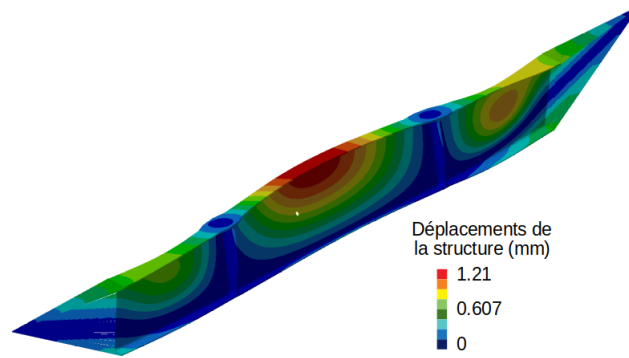


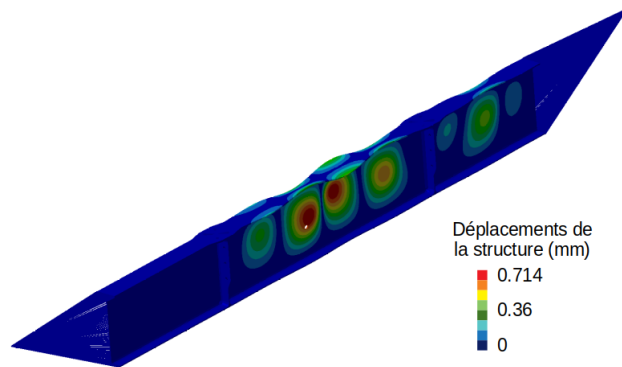
FIGURE 3.8 – Optimisation d'une structure treillis en L sous une contrainte de flambage global - Kočvara (2002)

Dans le cas de structure continue, la résolution du problème aux valeurs propres généralisé (3.25) permet d'obtenir directement les déformations dues au flambage local et global (Figure 3.9). De nombreuses méthodes d'optimisation topologique ont été utilisées pour prendre en compte des contraintes de flambage, comme la méthode SIMP (Lindgaard & Dahl (2013)), la technique ESO (Rong et al. (2001)), les lignes de niveaux (Dunning et al. (2016)), le gradient topologique (Bian & Fang (2017)), ou d'autres types d'algorithmes (Browne et al. (2012); Luo & Tong (2015)). Bruyneel et al. (2008) résume parfaitement le challenge d'introduire des

contraintes de flambage dans l'optimisation de structure continue : *it must be noted that buckling optimisation is a very difficult problem*. En effet, on distingue trois principales difficultés liées aux contraintes de flambage : (i) le calcul des dérivées de la matrice de rigidité géométrique, (ii) le changement du champ de déformation liée à la charge critique de flambage ou encore (iii) l'apparition de faux modes de déformations de flambage.



(a) Flambage global d'une structure continue



(b) Flambage local d'une structure continue

FIGURE 3.9 – Différentes déformations dues au flambage d'une structure continue

(i) Lors de la résolution de l'équation (3.25), la construction de la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma$  dépend des variables de conception et des déplacements de la structure, ces derniers dépendant aussi des variables de design. Au cours du calcul des dérivées de la matrice  $K_\sigma$ , les dérivées des déplacements selon les variables de conception sont souvent ignorées afin de réduire les coûts de calcul (Neves et al. (1995); Bruyneel et al. (2008)). Cette simplification est considérée comme une source d'erreur puisque cette analyse de sensibilité est finalement comparable à celle d'un problème de vibration (Neves et al. (1995); Bruyneel et al. (2008)). Browne et al. (2012) proposa une formulation explicite de la dérivée de la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma$ . Cependant, le temps de calcul des dérivées constitue un obstacle majeur à son utilisation. Van den Boom (2014) proposa de calculer les dérivées liées au flambage en introduisant des états adjoints, réduisant ainsi considérablement les temps de calcul.

(ii) Généralement, l'optimisation sous des contraintes de flambage ne prend en compte que les dérivées liées à la charge critique de flambage (Lindgaard & Dahl (2013); Luo & Tong (2015); Bian & Fang (2017)). Cependant, au cours de l'optimisation, différentes discontinuités peuvent être observées lorsque la valeur propre correspondant à la charge critique de flambage est multiple ou que l'ordre d'apparition des modes de flambage est modifié. Par conséquent, le champ des sensibilités étant lui aussi discontinu, des phénomènes d'oscillations sont observés, limitant ainsi la convergence (Bruyneel et al. (2008)). Eldred et al. (1995) proposa le *mode-tracking* qui consiste à maintenir une correspondance entre l'ordre initial des déformations et celui des itérations suivantes. Bruyneel et al. (2008) montra qu'utiliser l'information fournie par plusieurs modes de flambage permet d'améliorer la convergence de l'optimisation, réduisant ainsi la sensibilité de l'algorithme aux discontinuités des déformations liées à la charge critique de flambage. La prise en compte de plusieurs modes de flambage dans l'optimisation peut être réalisée par une combinaison des valeurs ou vecteurs propres (Ma et al. (1995); Browne et al. (2012)). Une autre modélisation du problème d'optimisation consiste à définir un nombre de contraintes de flambage équivalent au nombre de modes de flambage étudiés (Dunning et al. (2016)).

(iii) Certaines méthodes d'optimisation, comme la méthode SIMP ou les lignes de niveaux, modélisent les éléments absents par un matériau fictif (par exemple avec un module de Young  $\zeta \ll 1$ ) pour éviter les problèmes de singularités des matrices de rigidité. Toutefois, par cette modélisation, des modes de flambage appelés *spurious buckling modes* peuvent apparaître. Ces modes de flambage représentent des déformations uniquement liées aux éléments absents, et ne caractérisent pas la résistance de la structure au flambage (Figure 3.10). Par conséquent, les *spurious buckling modes* ne doivent pas être considéré aux cours de l'optimisation. Ce type de mode de flambage peut être éradiqué lors de la construction de la matrice de rigidité géométrique. En effet, on peut soit réduire les contraintes  $\sigma$  à une valeur proche de zéro, lorsque leur densité est en-dessous d'un certain seuil (Neves et al. (1995)), soit appliquer une fonction d'interpolation sur les contraintes  $\sigma$  similaire à celle de la méthode SIMP (Lindgaard & Dahl (2013)). Une autre méthode consiste à identifier ces faux modes de flambage en comparant l'énergie de déformation de la partie solide à celle du domaine représentant le vide (Gao & Ma (2015)).

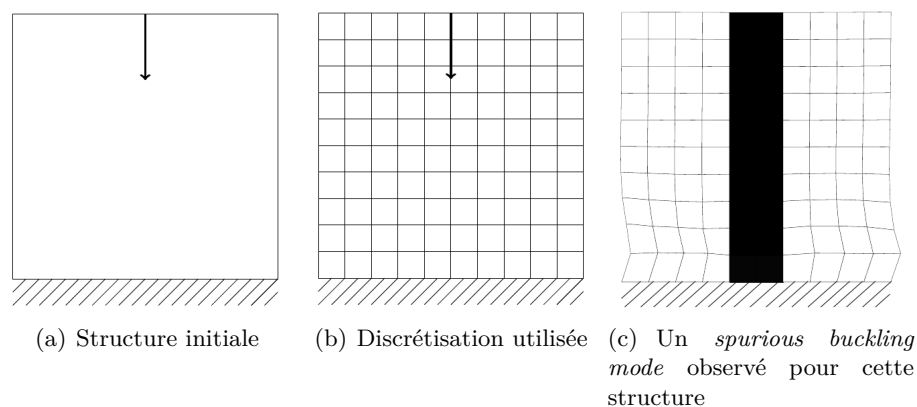


FIGURE 3.10 – Illustration d'un spurious buckling mode - Browne (2013)

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes d'optimisation topologique pour chaque type de représentation d'une structure.

Dans le cas de structures treillis, de part une analyse simplifiée des déformations, une grande partie de la littérature est dédiée à l'optimisation topologique de structures composées de barres menant à de nombreuses formulations du problème d'optimisation : optimisation continue, optimisation en variables mixtes, optimisation semi-définie. Quant aux éléments poutres, de récents travaux portent sur la prise en compte de contraintes de flambage, notamment pour leur capacité à fournir une meilleure analyse des déformations de la structure que les barres.

En ce qui concerne les structures continues, nous avons présenté différentes méthodes d'optimisation topologique (SIMP, ESO, Gradient topologique et Lignes de niveaux) menant à différentes modélisation du problème : optimisation continue, optimisation discrète, introduction d'une fonction implicite. Chacune de ces méthodes est soumise à des instabilités numériques se traduisant par la génération de structures en damiers et d'une dépendance de la finesse de la discrétisation. Pour remédier à ces difficultés, nous avons présenté diverses techniques telles l'introduction d'une contrainte sur le périmètre de la structure ou encore des méthodes de filtrage.

Par la suite, nous avons présenté les techniques de relaxation et d'agrégation des contraintes de  $R_m$  permettant de répondre aux phénomènes de singularité et au caractère local de ce type de contraintes d'optimisation.

Enfin, nous avons mis en exergue les diverses difficultés liées à l'introduction de contraintes de flambage au sein d'un problème d'optimisation (calcul de la dérivée de la matrice de rigidité géométrique, changement du champ de déformation lié à la charge critique et l'apparition de faux modes de flambage).

## Chapitre 4

# Optimisation de structures poutres

Dans ce chapitre, nous portons notre attention sur l'optimisation de structures treillis, constituées de poutres, sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage. L'objectif est de minimiser la masse en optimisant le nombre d'éléments structuraux et les dimensions des sections transversales associées. Dans un premier temps, nous explicitons le calcul des contraintes de  $R_m$  et l'analyse de flambage pour des structures à base de poutres. Ensuite, nous formulons le problème d'optimisation comme un problème d'optimisation non-linéaire en variables mixtes. Puis nous proposons une fonction objectif adaptée et un algorithme de résolution adapté au problème considéré. Enfin, sur un ensemble de problèmes issus de la littérature, nous illustrons les résultats numériques obtenus.

### 4.1 Précision sur la méthode éléments finis

Dans cette section, nous définissons les concepts de base de l'analyse éléments finis d'une structure composée d'éléments uni-dimensionnels, dont chaque extrémité est représentée par un noeud. Une structure peut alors être définie par la positions de  $M$  noeuds et la disposition de  $N$  éléments structuraux.

Comme mentionné dans la Section 1 du Chapitre 3, les éléments uni-dimensionnels sont généralement définis comme des barres qui ne peuvent transmettre que des efforts axiaux. Dans ce chapitre, nous considérons des éléments poutres permettant de prendre en compte des moments de torsion et de flexion ainsi que des efforts axiaux et transversaux. En chaque noeud, on considère donc trois déplacements et trois rotations par rapport aux axes globaux  $(X, Y, Z)$ . Dans le repère local  $(x, y, z)$  d'une poutre  $i$ , l'aire de sa section transversale  $A_i$ , ses moments d'inertie  $I_i^y$  et  $I_i^z$  selon les axes  $y$  et  $z$ , son moment d'inertie polaire  $J_i$ , sa longueur et les propriétés du matériau permettent de définir la matrice de rigidité élémentaire  $K_i \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  (Kattan (2010)). A l'aide d'une matrice de rotation  $R_i$  définie pour chaque élément  $i$ , la matrice de rigidité  $K \in \mathbb{R}^{6M \times 6M}$  peut donc être construite via :

$$K = \sum_{i=1}^N [R_i^T K_i R_i]$$



où  $M$  correspond aux nombres de noeuds de la structure et 6 au degrés de liberté associés à chaque noeud.

En notant le vecteur des forces  $f \in \mathbb{R}^{6M}$  (i.e. le vecteur représentant les chargements appliqués en chaque noeud), le vecteur des degrés de liberté  $u \in \mathbb{R}^{6M}$  peut être calculé par l'équation d'équilibre suivante :

$$Ku = f \quad (4.1)$$

La résolution de (4.1) permet d'évaluer, pour chaque poutre  $j$ , le vecteur des forces et moments internes  $q_i \in \mathbb{R}^{12}$  à partir de ses degrés de liberté  $u_i$  par l'équation suivante (Cook et al. (1974)) :

$$q_i = K_i R_i u_i, \quad \forall j = i, \dots, N$$

où  $q_i$  est composé d'une force axiale, des forces transversales selon les axes  $y$  et  $z$ , du moment de torsion et des moments de flexion selon les axes  $y$  et  $z$  en chaque noeud de l'élément  $j$  en fonction de ses coordonnées locales. A partir du vecteur des forces et moments internes  $q_j$ , nous pouvons exprimer la contrainte  $\sigma_i$  de Von Mises (voir Chapitre 2 - Section 4) au sein de l'élément  $i$  comme (Fanchon (2008)) :

$$\sigma_i := \sigma_i^{VM}(q_i) \quad (4.2)$$

où  $\sigma^{VM}$  est le critère de Von Mises. Notons que, dans ce chapitre, nous considérons négligeable le moment de torsion dans chaque élément. En conséquence, nous fixons la valeur du moment polaire d'inertie  $J_i$  à  $10^5$ , ce qui nous permet d'ignorer le moment de torsion dans l'élément  $i$  dans l'analyse élément fini. Cependant, certains problèmes impliquent un moment de torsion non-négligeable, auquel cas l'analyse complète du critère de Von Mises doit être réalisée sans cette simplification.

A l'aide du vecteur des forces et moments internes  $q_i$  de l'élément  $i$ , la matrice de rigidité géométrique élémentaire  $K_i^\sigma \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  associée peut être obtenue par la formule suivante :

$$K_i^\sigma := \int_{V_i} G^T S(q_i) G dV$$

où  $V_i$  représente le volume de l'élément  $i$ ,  $S$  est une matrice dépendante des efforts et moments internes  $q_i$  dans l'élément  $i$ , et  $G$  est obtenue à partir de la dérivation des fonctions de formes représentant les éléments finis (voir Chapitre 2 - Section 3). La matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma \in \mathbb{R}^{6M \times 6M}$  peut ainsi être assemblée via :

$$K_\sigma = \sum_{i=1}^N [R_i^T K_i^\sigma R_i]$$

Nous sommes donc en mesure d'étudier le problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage correspondant à :

$$(K + \lambda K_\sigma)v = 0 \quad (4.3)$$

où les valeurs propres  $\lambda$  correspondent à des facteurs scalaires de vecteur global des forces  $F$ , et les vecteurs propres  $v$  représentent les déformations de la structure correspondantes. La plus petite valeur propre positive  $\lambda_{cr}$  est appelée *charge critique de flambage*. Pour rappel, on dit qu'une structure résiste au flambage lorsque la valeur de  $\lambda_{cr}$  est supérieure à 1.

## 4.2 Problème d'optimisation

Dans cette section, nous explicitons la formulation en variables mixtes d'un problème d'optimisation de structures treillis sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage et proposons une fonction objectif adaptée.

Dans notre modélisation, nous associons plus d'une variable de conception à chaque poutre, et plus spécifiquement à chaque section transversale. Par conséquent, les sections transversales peuvent être conçues pour être plus efficaces pour supporter les moments de flexion. Par exemple, pour une aire identique, les sections rectangulaires creuses sont plus efficaces que les sections carrées creuses pour contrer des efforts de flexion, car elles peuvent être orientées et dimensionnées en augmentant uniquement le moment d'inertie associé à ce type de déformation. Par conséquent, des structures plus légères peuvent être obtenues lorsque les dimensions des sections transversales sont optimisées pour chaque élément. Ainsi, nous introduisons les variables de décisions suivantes :

$$d_i \in (\mathbb{R}^+)^p, \forall i = 1, \dots, N.$$

où  $d_i$  représente le vecteur des  $p$  dimensions décrivant les sections transversales de la poutre  $i$ . On note  $d \in (\mathbb{R}^+)^p \times \dots \times (\mathbb{R}^+)^p = (\mathbb{R}^+)^{Np}$  le vecteur des variables continues de conception. Dans nos travaux, nous considérerons des sections transversales de type carrées creuses, circulaires creuses, rectangulaires creuses et ellipsoïdales creuses (Figure 4.1). Dans le cas de section carrée creuse (Figure 4.1a), pour chaque élément  $i$ , les variables de conception sont la longueur du côté  $h_i$  et l'épaisseur  $e_i$ . Pour une section rectangulaire creuse (Figure 4.1b), chaque élément  $i$  est décrit par les deux longueurs de côtés  $h_{i,1}$  et  $h_{i,2}$  et les deux épaisseurs  $e_{i,1}$  et  $e_{i,2}$ . Dans le cas d'une section circulaire creuse (Figure 4.1c), les variables de conception sont le rayon  $r_i$  et l'épaisseur  $e_i$  pour chaque poutre  $i$ . Pour une section ellipsoïdale creuse (Figure 4.1d), chaque élément  $i$  est décrit par les deux rayons  $r_{i,1}$  et  $r_{i,2}$  et les épaisseurs  $e_{i,1}$  et  $e_{i,2}$ .

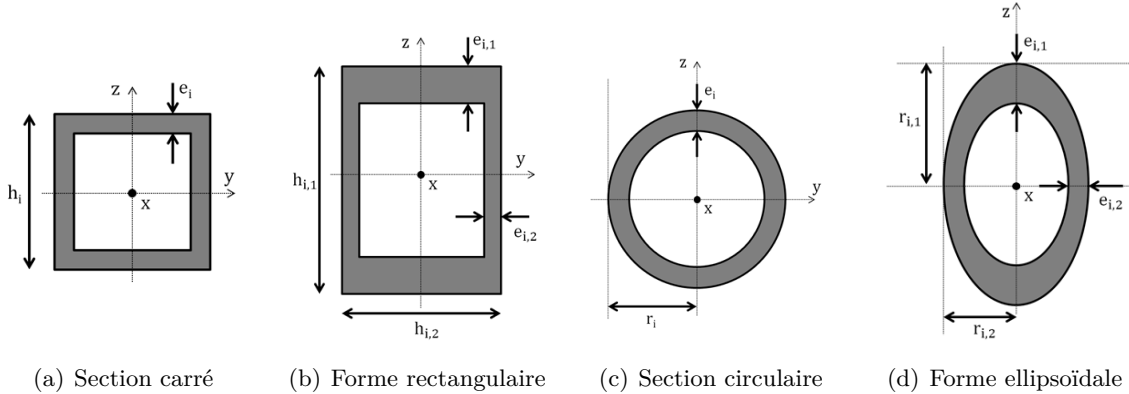


FIGURE 4.1 – Différentes sections transversales creuses considérées selon leur repère local

Des bornes minimales  $d_{min} \in (\mathbb{R}^+)^p$  et maximales  $d_{max} \in (\mathbb{R}^+)^p$  sur les variables de conception  $d_i$  sont définies afin de garantir un comportement de la structure non-dégénéré. Notons que la définition de ces bornes permet d'éviter les singularités liées aux contraintes de  $R_m$  (Kirsch

(1990); Cheng & Jiang (1992)) et de flambage (Evgrafov (2005)) lorsque l'aire des sections transversales tend vers zéro.

Afin d'optimiser la configuration des poutres représentant la structure, nous introduisons une variable binaire  $z_i$ , associée à chaque élément  $i$ , pour indiquer sa présence dans la structure optimisée :

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'élément est } i \text{ présent} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

On note  $z \in \{0, 1\}^N$  le vecteur des variables binaires de conception. Notons que, selon le type de section transversale utilisé, des contraintes géométriques doivent être considérées et se formulent comme :

$$g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

où  $x$  est le vecteur des variables de conception. Par exemple, considérant une section carrée creuse, pour un élément  $i$ , son épaisseur  $e_i$  ne doit pas être supérieure à la moitié de la longueur de côté  $h_i$  associée. Dans ce cas, les contraintes (4.4) sont :

$$g_i(x) := 2e_i - h_i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et dans le cas d'une section rectangulaire creuse, on a :

$$\begin{cases} g_{i,1}(x) := 2e_{i,1} - h_{i,1} \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ g_{i,2}(x) := 2e_{i,2} - h_{i,2} \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases}$$

où, pour un élément  $i$ , les épaisseurs  $e_{i,1}$  et  $e_{i,2}$  ne doivent pas être supérieures à la moitié de leur longueur de côté  $h_{i,1}$  et  $h_{i,2}$  associée. Pour un élément  $i$  de section circulaire creuse, le rayon  $r_i$  doit rester supérieur à l'épaisseur  $e_i$  associée, ainsi les contraintes sont :

$$g_i(x) := e_i - r_i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et dans le cas d'une forme ellipsoïdale creuse, pour un élément  $i$ , les épaisseurs  $e_{i,1}$  et  $e_{i,2}$  doivent être respectivement inférieures aux rayons  $r_{i,1}$  et  $r_{i,2}$ . Les contraintes (4.4) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} g_{i,1}(x) := e_{i,1} - r_{i,1} \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ g_{i,2}(x) := e_{i,2} - r_{i,2} \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Selon la présence des éléments dans la structure, certaines contraintes géométriques ne doivent pas être considérées. Ainsi, pour chaque poutre  $i$  et selon son type de section, les contraintes géométriques peuvent être notées :

$$z_i g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

Afin de simplifier les notations, nous considérerons la formulation (4.5) pour exprimer les contraintes géométriques par la suite. Les contraintes supplémentaires caractérisant le problème considéré sont les contraintes de  $R_m$  et de flambage. Pour chaque élément  $i$ , la valeur du critère  $\sigma_i$  de Von Mises, évaluée par (4.2), doit être inférieure à la limite  $\bar{\sigma}$  du matériau. Cette contrainte

ne doit être considérée que si l'élément de la structure est présent. Par conséquent, les contraintes de  $R_m$  suivantes sont utilisées :

$$z_i(\sigma_i(x) - \bar{\sigma}) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Concernant la contrainte de flambage, les éléments structuraux étant des poutres, une unique contrainte est nécessaire pour s'assurer que la structure ne flambe pas globalement et localement sous les efforts appliqués (Torii et al. (2015)) :

$$1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0 \tag{4.6}$$

où  $\lambda_{cr}$  est la charge critique de flambage obtenue en résolvant (4.3). Cependant, avant d'observer un flambage local ou global, certaines zones (un côté d'une section carrée par exemple) de sections transversales présentant des épaisseurs fines peuvent flamber. Pour prévenir ce type de flambage, appelé aussi *flambage de peau*, nous définissons les contraintes à partir de Wardenier et al. (2002) pour un élément  $i$  :

$$z_i h_i(x) \leq 0$$

où la fonction  $h_i$  dépend du type de la section transversale. Par exemple, pour une section circulaire creuse, la fonction  $h_i$  implique des ratios entre le rayon et l'épaisseur.

En résumé, nous proposons la formulation d'un problème non-linéaire en variables mixtes (ou mixed-integer nonlinear problem - MINLP) suivante :

$$\begin{aligned} & \underset{x=\{z,d\} \in \{0,1\}^N \times (\mathbb{R}^+)^{Np}}{\text{minimiser}} && f(x) \\ \text{s.l.c.} & && z_i(\sigma_i(x) - \bar{\sigma}) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. && \text{contraintes de résistance du matériau} \\ & && 1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0 && \text{contraintes de flambage global} \\ & && z_i h_i(x) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. && \text{contraintes de flambage de peau} \\ & && z_i g_i(x) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. && \text{contraintes géométriques} \\ & && d_{min} \leq d_i \leq d_{max} ; \forall i = 1, \dots, N. && \text{limites des dimensions des sections} \\ & && z_i \in \{0, 1\}; \forall i = 1, \dots, N. && \text{contraintes binaires} \end{aligned} \tag{4.7}$$

où  $x$  est le vecteur des variables de conception,  $f$  est la fonction coût à minimiser,  $\sigma_i$  est la contrainte de Von Mises de l'élément  $i$  calculée à partir de (4.2),  $\bar{\sigma}$  est la limite d'intégrité du matériau,  $\lambda_{cr}$  est la charge critique de flambage obtenue en résolvant (4.3), les fonctions  $g_i$  et  $h_i$ , dépendantes de la forme de la section transversale considérée, correspondent respectivement aux contraintes géométriques et de flambage de peau, et  $d_{min}$  et  $d_{max}$  sont les bornes des dimensions des sections transversales. Cette formulation définit une problème non-linéaire en variables mixtes, de par la présence de variables continues  $d$  et de variables entières  $z$ , et dont le caractère non-linéaire est induit par les expressions (4.2) et (4.3).

Dans les paragraphes suivants, nous motivons le choix d'une fonction coût adaptée au problème étudié. Une section transversale d'un élément peut être caractérisée par son aire et ses moments d'inertie. L'aire de la section transversale est directement reliée à la masse de l'élément, tandis qu'un moment d'inertie mesure la capacité de la poutre à résister à un moment de flexion selon l'axe local  $y$  ou  $z$  (où  $(x, y, z)$  définit le repère local de l'élément et  $x$  représente

l'axe principal de la poutre). Notons que les moments d'inertie reposent uniquement sur des propriétés géométriques et non sur la masse de l'élément. Dans la littérature, la minimisation de la masse de la structure est souvent considérée comme fonction objectif (e.g. Mela (2014); Torii et al. (2015)), et est définie comme :

$$f(x) := \sum_{i=1}^N \rho l_i z_i A(d_i) \quad (4.8)$$

où  $\rho$  est la densité du matériau,  $l_i$  est la longueur de l'élément  $i$ , et  $A(d_i)$  est l'aire de la section transversale de la poutre  $i$ , dépendant de ses dimensions  $d_i$ . Pour chaque membre de la structure, une seule variable de conception est généralement considérée pour décrire l'aire de sa section transversale. Par cette modélisation, les moments d'inertie peuvent être directement exprimés en fonction de l'aire. Ceci permet d'associer un unique couple de moment d'inertie à chaque élément. Par exemple, considérons une section carrée creuse, avec  $h$  représentant la longueur du côté et  $e$  l'épaisseur fixée à un pourcentage  $\beta$  de  $h$  (i.e.  $e = \beta h$ ), alors l'expression de son aire est :

$$A(h) := h^2 - (h - 2e)^2 = (1 - (1 - 2\beta)^2)h^2$$

Les moments d'inertie selon les axes  $y$  et  $z$  ont la même valeur due à la symétrie de la section transversale, et leur expression est (Fanchon (2008)) :

$$I_y(h, e) = I_z(h, e) := \frac{h^4 - (h - 2e)^4}{12} = \frac{(1 - (1 - 2\beta)^4)h^4}{12} = \frac{(1 - (1 - 2\beta)^4)}{12(1 - (1 - 2\beta)^2)^2} A(h)^2 \quad (4.9)$$

Ainsi, par cette modélisation, la minimisation de l'aire des sections transversales correspond à la minimisation du second moment d'inertie. Dans notre modélisation, nous considérons un problème plus général où plusieurs degrés de liberté, sans relation entre eux, sont introduits pour décrire chaque section transversale. Par conséquent, une dépendance entre l'aire et les moments d'inertie d'une section transversale, comme celle dans l'équation (4.9), ne peut être établie. De plus, plusieurs ensembles de variables de conception peuvent correspondre à la même valeur de l'aire d'une section transversale. Par exemple, pour une section carrée creuse, nous représentons, dans la Figure 4.2, un ensemble des couples de longueur de côté et d'épaisseur caractérisant une aire de section constante.

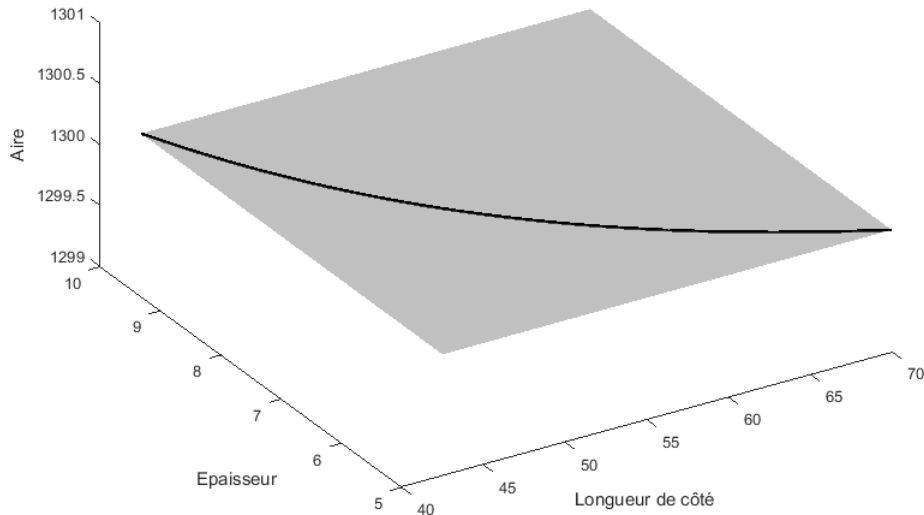


FIGURE 4.2 – Ensemble des couples de longueurs de côté et d'épaisseurs représentant une aire constante d'une section carrée creuse

Ainsi, considérer la masse (4.8) comme fonction coût du problème (4.7) peut mener à un ensemble de solutions équivalentes et potentiellement à des problèmes critiques de design de structures. Par exemple, considérons une structure, composée de deux éléments consécutifs, fixée d'un côté et sous un effort de traction de l'autre côté (Figure 4.3). Pour concevoir la structure, nous considérons une section carrée creuse, où la longueur du côté et l'épaisseur sont les variables de conception.

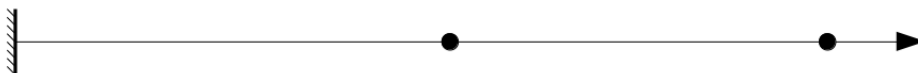


FIGURE 4.3 – Structure soumise à un effort de traction

Dans cet exemple, comme les deux éléments sont soumis aux mêmes efforts, l'aire de la section optimale est identique. Dans le Tableau 4.1, différents couples (noté  $S_i, i = 1, \dots, 4$ ) de dimensions de section transversale sont donnés. Comme illustré dans la Figure 4.4, la structure optimale peut être représentée avec des dimensions de section transversale très différentes (par exemple, à partir du Tableau 4.1,  $S_1$  pour le premier élément et  $S_4$  pour le second). Cependant, on note que les moments d'inertie sont très différents entre les deux poutres. Ainsi, une importante phase de post-traitement est nécessaire afin d'obtenir une structure manufacturable, menant à une augmentation significative de la masse.

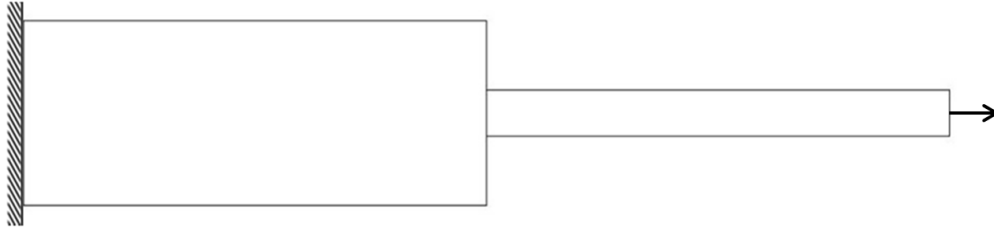


FIGURE 4.4 – Une conception optimale d’une structure soumise à un effort de traction avec la formulation (4.8) comme fonction coût

TABLE 4.1 – Quatre couples de dimensions décrivant une section transversale carrée creuse correspondant à une aire de  $1600 \text{ mm}^2$  et les moments d’inertie associés

Section transversale	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>
Longueur du côté (mm)	200	100	50	40
Épaisseur (mm)	2.02	4.174	10	20
Moment d’inertie ( $10^6 \text{ mm}^4$ )	10.45	2.45	0.45	0.21

Pour surmonter ces difficultés, nous proposons une fonction objectif où les propriétés géométriques de chaque élément, et pas seulement la masse, sont utilisées pour définir le critère d’optimisation. Plus spécifiquement, nous proposons de minimiser la masse de la structure ainsi que la somme des moments d’inertie selon les axes  $y$  et  $z$ . Notons que, pour chaque poutre, les valeurs de ses moments d’inertie peuvent être très supérieures à celle de l’aire. Nous proposons donc une formulation pondérée, où nous pénalisons la somme des moments d’inertie par un coefficient de pénalité  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Ainsi, la fonction coût  $f$  suivante est finalement utilisée dans le problème (4.7) :

$$f(x) := \sum_{i=1}^N \rho z_i \left( l_i A(d_i) + \mu \frac{1}{\sum_{i=1}^N l_i} (I_y(d_i) + I_z(d_i)) \right) \quad (4.10)$$

Dans la Figure 4.5, nous illustrons les valeurs de la fonction (4.10) pour le même ensemble de couples de longueur de côté et d’épaisseur de la Figure 4.2, représentant une section carrée creuse d’aire constante. On note que plus aucun couple de dimension n’est équivalent et que les sections dites *compactes* (i.e. des moments d’inertie faibles) correspondent aux valeurs minimales de la fonction objectif.

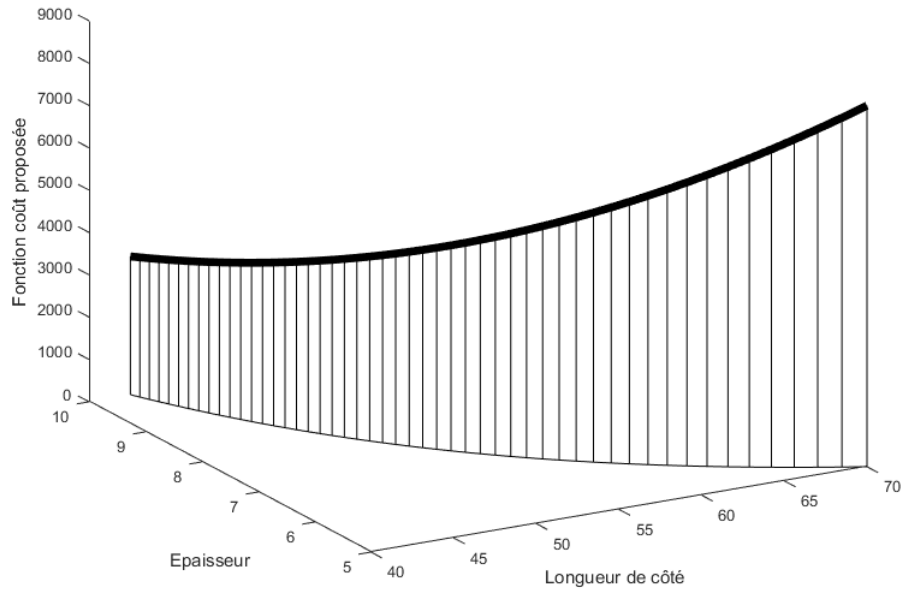


FIGURE 4.5 – Valeurs de la fonction (4.10) pour une poutre de section carrée creuse d’aire constante et  $\mu$  égal à  $\sum_{i=1}^N l_i$

Pour le problème de la structure soumise à un effort de traction, avec la fonction coût proposée (4.10), les deux poutres seront désignées avec le couple  $S_4$  du Tableau 4.1 (voir Figure 4.6). Ainsi le coût de post-traitement est très faible, puisque les problèmes critiques de design ne sont plus présents.



FIGURE 4.6 – La conception optimale d’une structure soumise à un effort de traction avec (4.10) comme fonction coût



Ainsi, nous considérons le problème non-linéaire en variables mixtes suivant :

$$\begin{aligned}
& \underset{x=\{z,d\} \in \{0,1\}^N \times (\mathbb{R}^+)^{Np}}{\text{minimiser}} & f(x) &:= \sum_{i=1}^N \rho z_i \left( l_i A(d_i) + \mu \frac{1}{\sum_{i=1}^N l_i} (I_y(d_i) + I_z(d_i)) \right) \\
& \text{s.l.c.} & & z_i (\sigma_i(x) - \bar{\sigma}) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. \\
& & & 1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0 \\
& & & z_i h_i(x) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. \\
& & & z_i g_i(x) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. \\
& & & d_{min} \leq d_i \leq d_{max} ; \forall i = 1, \dots, N. \\
& & & z_i \in \{0, 1\}; \forall i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{P}$$

où  $(\sigma_i)_{i=1, \dots, N}$  et  $\lambda_{cr}$  sont respectivement évalués par (4.2) et (4.3).

Notons que, dans l'optimisation de structures treillis, les problèmes traités peuvent être potentiellement très grands. Par exemple, Kocvara & Zowe (1996) étudièrent un problème modélisant un avion avec potentiellement 3994 éléments de structure. Dans notre cas, les valeurs des contraintes de  $R_m$  et de flambage peuvent être obtenues par des boîtes noires, tels que les logiciels d'analyses éléments finis. Les solveurs actuels pour des problèmes non-linéaires en variables mixtes ne sont pas capables de considérer des fonctions issues de boîtes noires pour des problèmes de grandes tailles.

### 4.3 Algorithme de résolution

Dans cette section, nous présentons un algorithme de résolution adapté au problème (P). Nous proposons de traiter séparément les variables continues et binaires. À l'état initial, tous les éléments sont considérés présents dans la structure (cela correspond à  $z = 1$ ). Dans un premier temps, les valeurs des variables  $z$  sont fixées et le problème avec les variables continues  $d$  est résolu. C'est un problème non-linéaire (P'), donnant les dimensions  $d$  optimales des sections transversales des éléments présents dans la structure. Dans une seconde étape, à partir de la solution de (P'), nous traitons de nouveau les variables binaires. Estimer les valeurs des variables binaires  $z$  revient à étudier la suppression des éléments structuraux (fixer  $z_i = 0$  correspond à la suppression de l'élément  $i$ ). Ici, une méthode pour supprimer les éléments un par un est présentée. Lorsqu'un élément structural est enlevé, une nouvelle disposition de poutres est obtenue et les deux étapes précédentes (résolution de (P') et suppression d'un élément) sont répétées. Pour l'étape de suppression, nous proposons d'utiliser un critère basé sur une analyse de sensibilité de la charge critique de flambage : ceci représente l'un des éléments d'originalité de notre approche. Le détail des différentes étapes de l'algorithme est donné par la suite.

Premièrement, nous donnons la formulation du problème (P') pour une configuration de structure composée de  $\tilde{N}$  éléments :

$$\begin{aligned}
& \underset{x=d \in (\mathbb{R}^+)^{\tilde{N}p}}{\text{minimiser}} & C(x) & := \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \rho \left( l_i A(d_i) + \mu \frac{1}{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} l_i} (I_y(d_i) + I_z(d_i)) \right) \\
& \text{s.l.c.} & & \sigma_i(x) - \bar{\sigma} \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, \tilde{N}. \\
& & & 1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0 \tag{P'} \\
& & & h_i(x) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, \tilde{N}. \\
& & & g_i(x) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, \tilde{N}. \\
& & & d_{min} \leq d_i \leq d_{max} ; \forall i = 1, \dots, \tilde{N}.
\end{aligned}$$

Le problème (P') est un problème non-linéaire qui peut être résolu par des solveurs tels que l'optimisation quadratique successive (Boggs & Tolle (1995)) ou encore la méthode des asymptotes mobiles (Svanberg (2002)).

Discutons dorénavant de la suppression d'éléments. Comme mentionné dans la section précédente, une seule variable de conception est généralement utilisée dans la littérature pour décrire la section transversale d'un élément, et une faible valeur  $\epsilon$  est définie comme borne minimale sur la variable de conception. Ceci mène à un problème non-linéaire où le nombre d'éléments structuraux est constant. Une fois ce problème résolu, les éléments dont la variable de conception est plus petite qu'un seuil proche de  $\epsilon$  (Torii et al. (2015)) sont supprimés. Dans notre problème d'optimisation, cette procédure peut correspondre à enlever les éléments dont l'aire de la section transversale correspond à la borne minimale. Cependant, certains éléments, dont l'aire est minimale, peuvent avoir un rôle important dans le comportement de la structure. Ces poutres sont définies comme des éléments structuraux de stabilisation. Bien que qu'ils ne supportent aucun chargement significatif, leur présence peut maintenir la résistance au flambage et mener à une structure plus légère.

Ceci est illustré dans l'exemple d'une tour (Figure 4.7) soumise à un chargement axial (Ben-Tal et al. (2000)). Une optimisation des dimensions des sections transversales de la structure de départ (Fig 4.7a) mène à une structure où tous les éléments entre les deux principaux supports de chaque côté de la tour ont atteint les bornes minimales (Figure 4.7b). Leur suppression mène à une structure (Figure 4.7c) qui n'est pas résistante au flambage. Ainsi, dans le but d'obtenir une structure stable sans rajouter d'autres éléments, les sections des poutres restantes dans la Figure 4.7c doivent être significativement augmentées, menant à une augmentation importante de la masse.

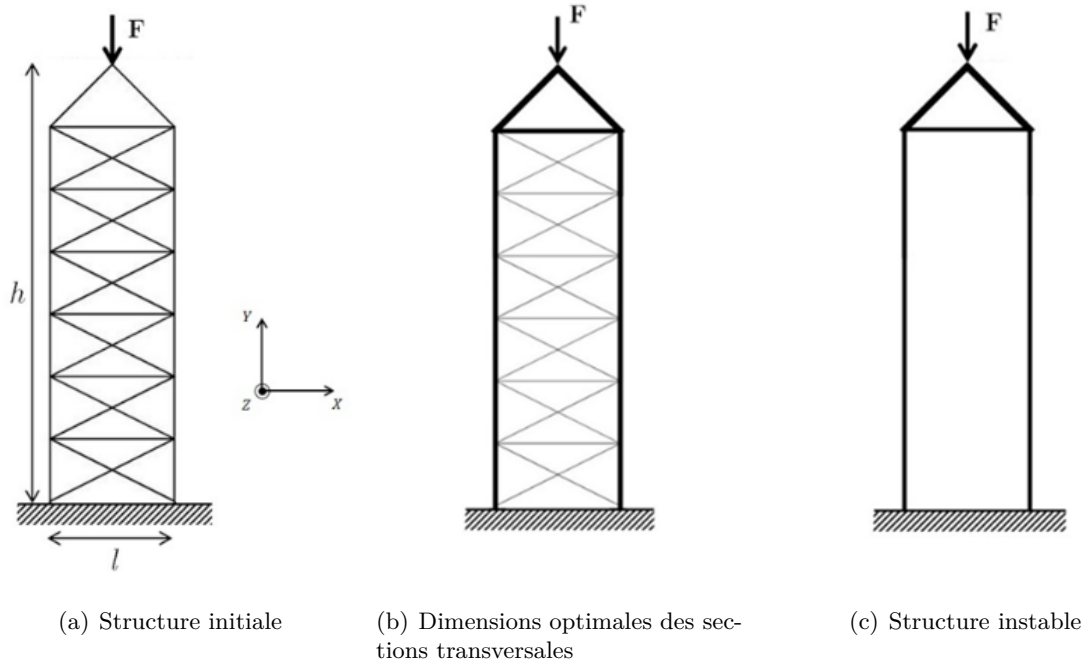


FIGURE 4.7 – Illustration des difficultés liées à la suppression d’éléments pouvant mener à une structure instable

Ainsi, la suppression des éléments doit être réalisée de façon à éliminer les poutres n’ayant aucune influence sur le comportement de la structure, tout en identifiant les éléments de stabilisation ou de raidissement. Pour atteindre ce but, nous proposons de supprimer un par un les éléments structuraux dont l’aire de la section transversale est proche de la borne minimale, une fois que leur impact sur la structure a été évalué.

Afin de déterminer la vraie influence de chaque élément, nous devons déterminer les dimensions optimales des sections transversales associées. Pour rappel, la résolution du problème non-linéaire  $(P')$ , pour une configuration de structure donnée, nous donne les dimensions  $d$  optimales des sections transversales. A partir de ce résultat, un ensemble  $S$  de poutres, dont les aires des sections transversales sont plus petites ou égales à un seuil  $A_T$ , peut être défini :

$$S := \{i \mid A(d_i) \leq A_T\} \quad (4.11)$$

Ensuite, pour chaque élément  $i$  de  $S$ , nous estimons l’impact de la présence de l’élément  $i$  par une analyse de sensibilité sur la charge critique de flambage  $\lambda_{cr}$  :

$$\alpha_i := \lambda_{cr}(d, z_1, \dots, z_i = 0, \dots, z_m) - \lambda_{cr}(d, z_1, \dots, z_i = 1, \dots, z_m), \forall i \in S \quad (4.12)$$

où le premier et le second terme correspondent respectivement à la charge critique de flambage de la structure lorsque l’élément  $i$  est absent et présent. Alors l’élément  $e$ , qui maximise  $\alpha_i$ , est supprimé de la structure (i.e. nous fixons  $z_e = 0$ ) avec :

$$e := \underset{i \in S}{\operatorname{argmax}} \alpha_i \quad (4.13)$$

Une fois qu'un élément a été supprimé, nous obtenons une nouvelle structure sur laquelle on répète le même procédé : nous résolvons le problème associé (P') et nous appliquons le processus de retrait d'une poutre, jusqu'à ce que l'ensemble  $S$  soit vide. A l'état initial, la valeur du seuil  $A_T$  est égale à l'aire minimale définie par les bornes sur les dimensions des sections transversales. Cependant, la suppression d'éléments dont les aires des sections transversales sont voisines de  $A_T$  peut mener à une structure plus légère. Ainsi, lorsque l'ensemble  $S$  est vide, nous proposons d'augmenter la valeur de  $A_T$  en la doublant. L'ensemble  $S$  est mis à jour selon la nouvelle valeur de  $A_T$ , et nous appliquons de nouveau le processus de retrait et la résolution du problème (P'). Lorsque l'ensemble  $S$  est de nouveau vide, alors l'algorithme s'arrête.

On note qu'à chaque itération de l'algorithme, la structure la plus légère (la disposition optimale de poutres et les dimensions des sections transversales associées) est sauvegardée. Nous remarquons aussi que la structure optimale (le résultat final produit par l'algorithme) ne correspond pas toujours à la dernière configuration de structure étudiée. Dans les dernières itérations, en effet, il se peut que la suppression de certains éléments mène à une augmentation de la masse de la structure. En conséquence, la disposition d'éléments correspondante n'est pas retenue, et le résultat final fourni est la structure la plus légère qui a été obtenue précédemment.

On note que la méthode proposée est capable de prendre en considération des fonctions coûts et des contraintes dont les valeurs sont obtenues par des expressions analytiques, des routines extérieures ou des boîtes noires.

La procédure proposée est présentée dans l'Algorithme 4.

---

**Algorithm 4** Algorithme d'optimisation de structure composée de poutres

---

**input:**  $d_{min}$ ,  $d_{max}$ ,  $\bar{\sigma}$  et  $\rho$

- 1: Initialisation :  $z = \{1\}^m$  et  $A_T$ .
- 2: Résoudre (P')
- 3: Calcul de la masse structurale  $m$  selon  $z$  et  $d$
- 4:  $m^* \leftarrow m$ ;  $z^* \leftarrow z$  et  $d^* \leftarrow d$
- 5: **for**  $j = 1, 2$  **do**
- 6:     Construire  $S := \{i \mid A(d_i) \leq j \times A_T\}$
- 7:     **while**  $S \neq \{\emptyset\}$  **do**
- 8:         Calcul des sensibilités  $\alpha_i$
- 9:         Déterminer  $e = \underset{i \in S}{argmax} \alpha_i$
- 10:         Fixer  $z_e \leftarrow 0$
- 11:         Résoudre (P')
- 12:         Calcul de la masse structurale  $m$  selon  $z$  et  $d$
- 13:         **if**  $m \leq m^*$  **then**
- 14:              $m^* \leftarrow m$ ;  $z^* \leftarrow z$  et  $d^* \leftarrow d$
- 15:         **end if**
- 16:         Construire  $S := \{i \mid A(d_i) \leq j \times A_T\}$
- 17:     **end while**
- 18: **end for**

**output:**  $m^*$ ,  $z^*$  et  $d^*$

---

## 4.4 Résultats numériques

Dans cette section, les résultats numériques obtenus en utilisant l’Algorithme 4 pour résoudre le problème (P) sont présentés. Nous considérons un exemple représentatif de la littérature (Mela (2014)), et nous discutons premièrement de l’avantage de considérer la fonction coût proposée. Puis, sur le même exemple, nous analysons l’influence du paramètre de pénalisation dans la fonction coût proposée et ensuite nous montrons l’intérêt de considérer plus de degrés de liberté pour décrire les sections transversales afin d’obtenir des structures plus légères. Enfin, nous discuterons des résultats numériques pour quatre exemples tirés de la littérature (Ben-Tal et al. (2000); Mela (2014); Torii et al. (2015)).

Dans toutes les applications, le matériau considéré est l’acier dont le module de Young est fixé à 210 GPa et le coefficient de Poisson à 0,3. La densité du matériau  $\rho$  est fixée à 0,00785 g.mm<sup>-3</sup>. Sauf indication contraire, la valeur du paramètre de pénalisation  $\mu$  (voir l’équation (4.10)) est fixée à la valeur de  $\sum_{i=1}^N l_i$  dans (P) et  $\sum_{i=1}^{\tilde{N}} l_i$  dans (P’).

Quatre types de sections transversales creuses sont considérés : carré creux, circulaire creux, rectangle creux et ellipsoïdale creux. Pour rappel, les variables de conceptions correspondant aux dimensions des sections transversales sont décrites dans la Section 4.2. Dans les Figures 4.9, 4.11a, 4.12b, 4.13b, 4.14b et 4.15b représentant les structures optimales obtenues, l’épaisseur de la ligne représentant un élément est proportionnelle à l’aire de sa section transversale associée.

L’algorithme a été implémenté en Fortran. Les contraintes de  $R_m$  et de flambage sont calculées à partir de routines extérieures qui ont été codées en Fortran et en utilisant la librairie LAPACK (Anderson et al. (1999b)). La méthode des asymptotes mobiles (Svanberg (2002)) implémentée dans le package NLOpt (Johnson (2011)), est utilisée pour résoudre le problème non-linéaire (P’). Les codes ont été exécutés sur un ordinateur 32-bit Linux OS avec un Intel(R) Core(TM) i7-4710MQ CPU @ 2.50GHz et 16GB RAM.

### 4.4.1 Les avantages de la fonction coût proposée

Premièrement, nous discutons de l’avantage de la fonction coût proposée par rapport à celle de la masse structurale sur un exemple de référence classique : une structure en L (Mela (2014)), dont la disposition initiale des poutres est illustrée en Figure 4.8. Les dimensions de la structure sont  $h$ , égale à 6 mètres, et  $l$ , égale à 3 mètres. La structure est composée de 86 éléments et 21 noeuds. Le chargement  $F$  est de 400 kN. La limite en contrainte  $\bar{\sigma}$  est fixée à 355 MPa. La structure est considérée plane. Dans cette section, nous considérons uniquement des sections transversales de type carré creux, les résultats pour les autres sections seront donnés par la suite. Les bornes sur les dimensions des sections transversales sont présentées dans le Tableau 4.7.

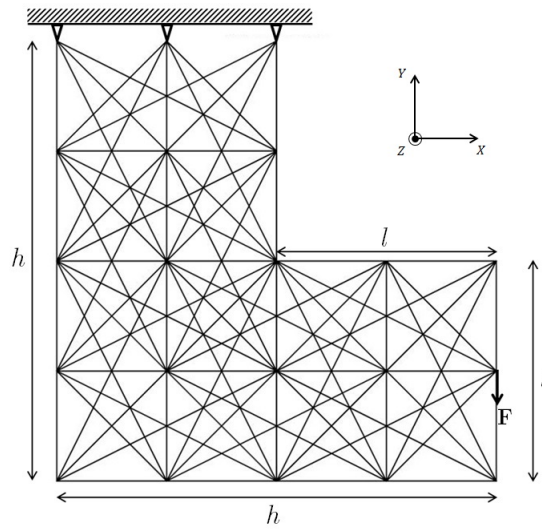


FIGURE 4.8 – Disposition initiale du problème de la structure en L

Pour chacune des deux fonctions objectif, la configuration optimale obtenue est composée de 13 poutres (Figure 4.9), et est analogue à celle obtenue par Mela (2014). On note que, quelle que soit la fonction objectif considérée, la contrainte de flambage est active et la contrainte d'intégrité du matériau de chaque élément est active. Les masses structurales optimales et les temps de résolution selon chaque fonction objectif sont présentés dans le Tableau 4.2, et la Figure 4.10 montre l'évolution de la masse structurale pour les deux fonctions coût. Notons que le nombre d'itérations correspond au nombre d'éléments enlevés de la structure de départ car un seul élément est supprimé à chaque itération.

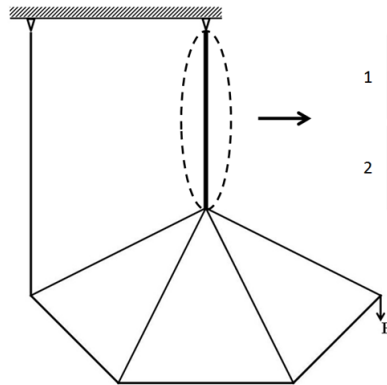


FIGURE 4.9 – Disposition optimale de poutres pour le problème de la structure en L

TABLE 4.2 – Résultats pour le problème de la structure en L

Fonction objectif	Masse (kg)	Temps (s)
Masse	252.08	740
Proposée	253.61	230

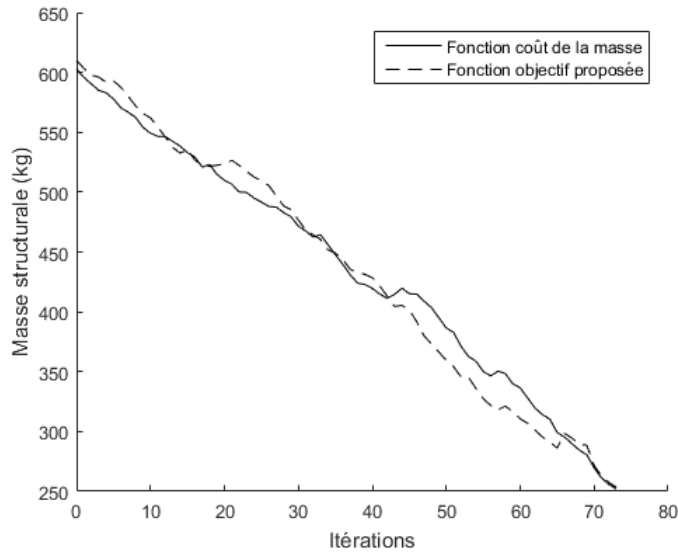
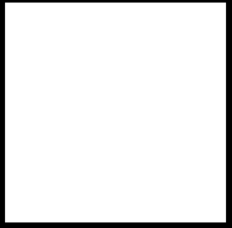





FIGURE 4.10 – Evolution de la masse structurale pour le problème de la structure en L

Bien que la fonction objectif de masse donne une structure plus légère que la fonction coût proposée (une différence de 0.6% est relevée), le résultat mène à une structure nécessitant un important post-traitement. Dans le Tableau 4.3, on rapporte les longueurs de côté, les épaisseurs et les aires des sections transversales obtenues pour les deux fonctions coûts et pour deux éléments indiqués dans la Figure 4.9. On peut voir que la fonction objectif de masse mène à des poutres dont les aires des sections transversales sont similaires mais avec un écart de 60 mm entre les longueurs de côté. Dans le but d'obtenir une structure manufacturable (i.e. sans des grandes discontinuités entre les longueurs des côtés des éléments), le post-traitement mènera à une masse beaucoup plus importante. Notre fonction coût proposée mène à une solution avec des dimensions de sections transversales similaires, et donc un coût de post-traitement peu élevé. On remarque de plus qu'en utilisant la fonction coût proposée, le temps d'optimisation est 3,21 fois plus rapide que celui obtenu avec la fonction objectif de masse.

TABLE 4.3 – Propriétés géométriques de deux éléments de la structure en L selon les deux fonctions coûts étudiées

Fonction coût	Masse		Proposée	
Numéro de l'élément	1	2	1	2
Longueur de côté (mm)	140	79.25	78.81	79.19
Épaisseur (mm)	4.16	8	8	8
Aire (mm <sup>2</sup> )	2260	2280	2265	2278
Design de la section				

#### 4.4.2 Influence du coefficient de pénalité $\mu$

Dans cette section, l'objectif est de décrire l'influence du coefficient de pénalité  $\mu$  dans la fonction objectif proposée. De nouveau, nous considérons la structure en L avec des sections transversales du type carré creux dont les bornes sont présentées dans le Tableau 4.7.

En faisant varier le coefficient de pénalité  $\mu$  dans un ensemble de valeur notées dans le Tableau 4.4, nous obtenons la même configuration de structure vue dans la section précédente. Dans le Tableau 4.4, nous rapportons les masses structurales et le temps de calcul associé à chaque valeur de  $\mu$ . On note que, lorsque la valeur de  $\mu$  est incrémentée progressivement, le temps de calcul décroît alors que la masse augmente. En effet, plus la valeur de  $\mu$  augmente, plus la valeur des moments d'inertie est importante dans la fonction objectif proposée. Ainsi, les sections transversales sont plus *compactes* et une augmentation de l'aire de la section transversale est nécessaire pour supporter les efforts appliqués. Pour la valeur de  $\mu$  égale à  $\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \frac{l_i}{100}$ , la masse structurale et le temps de calcul sont proches des résultats obtenus avec la fonction objectif de masse (vus dans la section précédente). On observe que, pour les trois dernières valeurs de  $\mu$ , le temps de calcul ne décroît plus tandis que la masse continue d'augmenter. On en déduit que la valeur de  $\mu$  égale à  $\sum_{i=1}^m l_i$  est un bon compromis entre la masse optimale et le temps de calcul.

TABLE 4.4 – Résultats pour le problème de la structure en L selon la valeur de  $\mu$

Coefficient de pénalité $\mu$	Masse (kg)	Temps (s)
$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} l_i \setminus 100$	252.17	755
$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} l_i \setminus 50$	252.33	565
$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} l_i \setminus 10$	253.03	375
$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} l_i$	253.61	230
$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} 2l_i$	253.90	228
$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} 3l_i$	254	231



### 4.4.3 Impact du nombre de degrés de liberté décrivant les sections transversales

Dans cette section, l'objectif est d'étudier l'intérêt de considérer plus de degrés de liberté, par rapport à ce qui est fait traditionnellement, pour définir les sections transversales sur le problème de la structure en L. Les résultats obtenus avec les quatre sections considérées seront comparés avec une modélisation où une seule variable de conception est utilisée pour décrire la section transversale. On considère les éléments structuraux avec une section circulaire creuse, avec le rayon extérieur comme variable de conception, tandis que l'épaisseur est fixée à 10% du rayon. Les bornes minimales et maximales sur le rayon sont respectivement égales à  $10^{-5}$  mm et 100 mm.

Pour chaque section transversale, nous obtenons la même configuration optimale (Figure 4.9) vue dans les sections précédentes. Notons que, quelle que soit la section considérée, les contraintes d'intégrité du matériau sont actives, tout comme la contrainte de flambage. Dans le Tableau 4.5, nous rapportons la masse structurale obtenue pour chaque section transversale. Pour une section circulaire creuse, une réduction de 6% de la masse est observée lorsque l'épaisseur n'est plus dépendante du rayon mais considérée comme une variable de conception. Des masses similaires sont obtenues pour des sections transversales avec deux degrés de liberté, 253,61 kg pour les sections carrées creuses et 252,65 kg pour des formes circulaires creuses. Une réduction de la masse jusqu'à 2,3% est obtenue lorsque le nombre de degré de liberté est augmenté à quatre (sections rectangulaires et ellipsoïdales creuses). Afin d'illustrer les gains de masse correspondant au 5 sections transversales considérées, nous sélectionnons un élément (en rouge dans le mode propre de flambage dans la Figure 4.11a) et nous en rapportons les dimensions et les aires des sections transversales obtenues dans le Tableau 4.6.

TABLE 4.5 – Résultats pour le problème de la structure en L

Section transversale creuse	Masse (kg)
Circulaire avec épaisseur fixe	268.80
Carré	253.61
Circulaire	252.74
Rectangulaire	249.12
ellipsoïdale	246.93

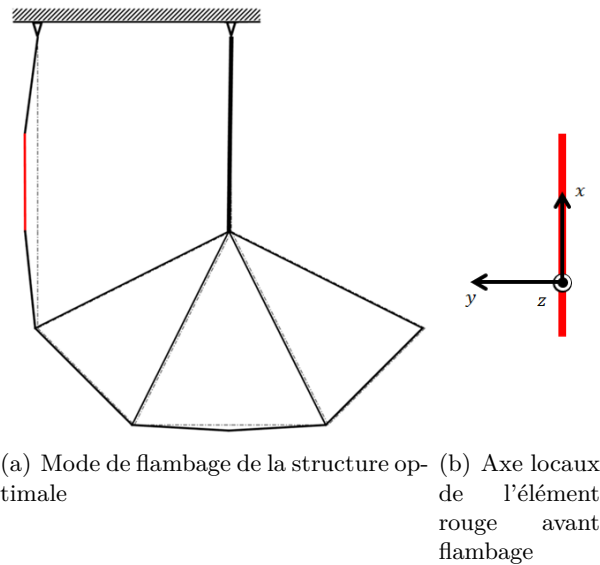


FIGURE 4.11 – Mode de flambage de la structure en L

TABLE 4.6 – Dimensions (mm), aire (mm<sup>2</sup>) et moments d'inertie  $I_y$  et  $I_z$  ( $10^3$  mm<sup>4</sup>) de l'élément en rouge dans la Figure 4.11a

Section transversale creuse	Longueur de côté ou Rayon		Epaisseur		Aire	$I_y$	$I_z$
Circulaire avec épaisseur fixe	62.6		6.26		2,342.1	4,158.4	
Carré	121.92		3.08		1,463.17	3,446.67	
Circulaire	73.04		3		1,348.56	3,452.82	
Rectangulaire	30	140	3.53	8	1,356.3	190.25	3,215.17
ellipsoïdale	18	87.27	3	6.93	1,149.07	186.78	3,287.25

On note que l'augmentation du nombre de degrés de liberté utilisés pour décrire les sections transversales permet de mieux contrer les efforts subis par la structure tout en étant plus léger. Plus précisément, les sections rectangulaires et ellipsoïdales permettent de mieux contrer les efforts des moments de flexion que les sections circulaires et carrées. Pour illustrer cette propriété, nous rapportons les moments d'inertie de l'élément en rouge pour chacune des sections transversales dans le Tableau 4.6 selon son axe local (voir Fig 4.11b). Comme la structure est plane, les moments de flexion selon les axes  $y$  ne sont pas impliqués dans le comportement de la structure, ainsi les moments d'inertie selon l'axe  $y$  de l'élément rouge ne doivent pas être importants. A travers le Tableau 4.6, on relève que les sections rectangulaires et ellipsoïdales permettent de prendre en compte cette information, contrairement aux sections carrées et circulaires. Notons que nous utilisons une structure plane pour mieux illustrer ce comportement, mais le phénomène est similaire pour des structures non planes, et sera mis en exergue pour une structure 3D par la suite.

#### 4.4.4 Applications à divers exemples de référence

Dans cette section, nous discutons des résultats numériques obtenus à partir de 5 exemples issus de la littérature :

- Le premier est la structure en L déjà décrite précédemment.
- Le second exemple est une tour en forme triangle sous un effort de compression adaptée de (Mela (2014)) dont la structure initiale est illustrée dans la Figure 4.12a. Les dimensions sont  $h$ , égale à 6,2m, et  $l$ , égale à 2 m. La structure est composée de 22 poutres et 11 noeuds. Le chargement  $F$  est de 50kN.
- Dans le troisième exemple, nous considérons un pont adapté de (Ben-Tal et al. (2000)) dont la structure initiale est illustrée dans la Figure 4.13a. Les dimensions sont  $l$ , égale à 7m, et  $h$ , égale à 1 m. La structure est composée de 30 poutres et 14 noeuds et le chargement  $F$  est de 50kN.
- Le quatrième exemple considéré est une tour sous compression axiale Ben-Tal et al. (2000). La structure initiale utilisée est illustrée dans la Figure 4.14a. La hauteur  $h$  de la colonne est de 4.2 m, et la distance entre les deux supports est 1.2 m. La structure est composée initialement de 32 poutres et 15 noeuds. Le chargement  $F$  est de 400 kN.
- Le dernier exemple est une structure 3D dont la structure initiale est illustrée dans la Figure 4.15a. Les dimensions sont  $h$ , égale à 4 m,  $l$ , égale à 8 m, et  $p$ , égale à 2 m. La structure est composée de 32 éléments et 12 noeuds, avec une force  $F$  de 200kN.

Pour les deux premiers exemples, la limite en contrainte  $\bar{\sigma}$  est de 355 MPa et pour les autres, sa valeur est fixée à 210 MPa. Pour chaque problème, les bornes minimales et maximales des dimensions des sections transversales sont rapportées dans le Tableau 4.7.

TABLE 4.7 – Bornes minimales et maximales des dimensions des sections transversales

Section transversales creuse		Circulaire et ellipsoïdale		Carré et Rectangulaire	
Exemples	Bornes (mm)	Rayon	Epaisseur	Longueur de côté	Epaisseur
Structure en L	Minimale	18	3	30	3
	Maximale	140	8	140	8
Triangle	Minimale	10	1	16	1
	Maximale	40	6	80	6
Pont	Minimale	6	4	15	4
	Maximale	70	30	70	30
Tour	Minimale	1	1	2	1
	Maximale	50	5	100	5
Structure 3D	Minimale	1	1	2	1
	Maximale	100	5	200	5

Premièrement, on note que la même disposition de poutres est obtenue pour chaque exemple quelle que soit le type de section transversale. Dans chaque résultat final, la charge critique de flambage est égale à 1, ainsi la contrainte de flambage est active. Concernant les contraintes d'intégrité du matériau, la limite en contrainte est atteinte pour tous les éléments dont les lignes sont en gras dans les Figures 4.9, 4.12b, 4.13b, 4.14b et 4.15b. Notons que dans les Figures 4.12b, 4.14b et 4.15b, les contraintes de  $R_m$  dans les autres éléments sont proches de zéro, ainsi ces éléments peuvent être définis comme des éléments structuraux de stabilisation ou de raidissement.

Le Tableau 4.8 rapporte les masses structurales optimales et les temps de calcul pour chaque exemple et chaque type de section transversale. Dans le Tableau 4.9, nous rapportons le nombre de variables continues et entières à l'état initial de chaque problème. On note que les sections circulaires et carrées mènent à des masses similaires. Ainsi un comportement analogue de résistance aux efforts peut être assimilé à ces deux sections. De plus, on relève que les temps d'optimisation obtenus sont très proches. Ceci peut être expliqué par le fait que les problèmes non-linéaires, résolus au cours de l'algorithme, ont le même nombre de variable dans les deux cas (voir Tableau (4.9)). Les mêmes observations s'appliquent aux sections rectangulaires et ellipsoïdales.

TABLE 4.8 – Masse structurale optimale (kg) et temps de calcul (s) pour chaque problème et chaque section transversale

Problèmes	Section transversale creuse							
	Carré		Circulaire		Rectangulaire		ellipsoïdale	
	Masse	Temps	Masse	Temps	Masse	Temps	Masse	Temps
Structure en L	253.61	230	252.74	232	249.12	605	246.93	602
Triangle	62.55	10	62.15	13	62.02	23	61.46	25
Pont	163.84	36	164.90	35	159.68	57	159.65	59
Tour	43.01	13	43.62	14	40.68	35	40.5	33
Structure 3D	487.1	20	489.07	19	482.04	45	482.53	48

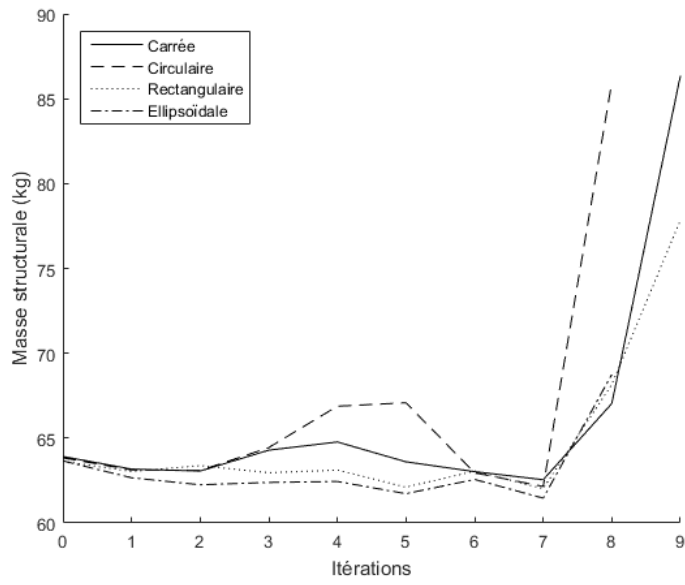
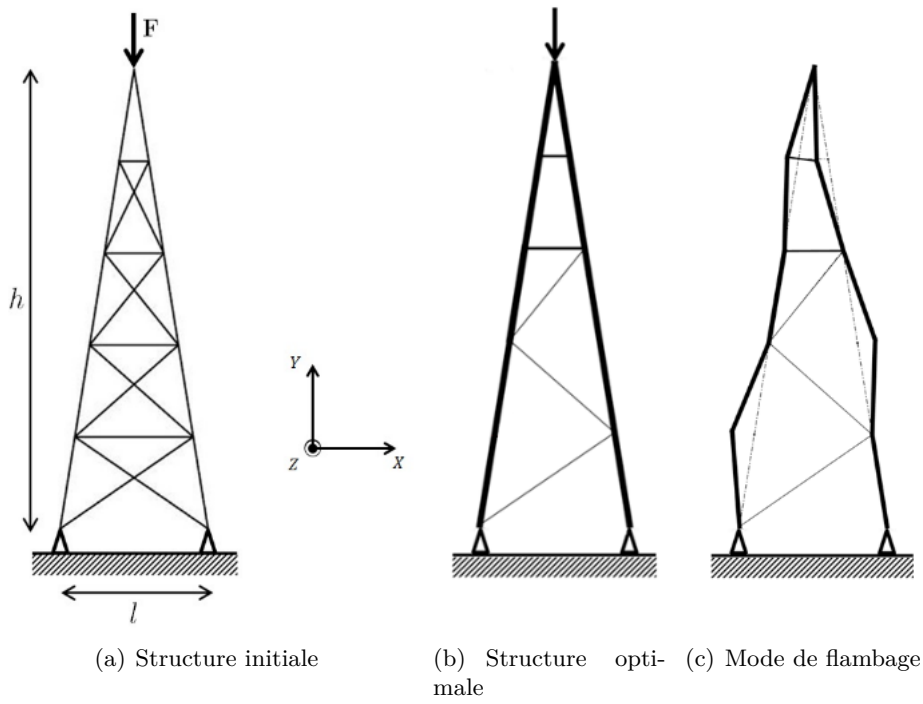
Les Figures 4.12d, 4.13d, 4.14d et 4.15d présentent l'évolution de la masse structurale pour chaque problème et chaque section transversale. Rappelons que la suppression de certains éléments peut mener à une augmentation de la masse. Ainsi, les dispositions de poutres correspondantes ne sont pas retenues, et le résultat final correspond à la structure la plus légère obtenue précédemment. On remarque que, dans les Figures 4.12d, 4.14d et 4.15d, la masse structurale augmente significativement dans les dernières itérations. Ceci indique que l'algorithme proposé essaie, dans ces dernières itérations, de supprimer certains éléments qui sont finalement conservés car ils sont essentiels à la stabilité de la structure.

On note que lorsque l'on compare les sections transversales carrées et circulaires aux sections rectangulaires et ellipsoïdales dans le Tableau 4.9, le nombre de variables continues est multiplié par deux. Par conséquent, lorsque les sections rectangulaires et ellipsoïdales sont utilisées, un gain de masse significatif pourrait être attendu. Selon les résultats du Tableau 4.8, ces gains

sont au maximum de 7,15% ; ceci est potentiellement lié au fait que les problèmes étudiés sont fortement contraints. Ce résultat semble être confirmé par une comparaison des modes propres de flambage lié à la charge critique de flambage (illustrés dans les Figures 4.11a, 4.12c, 4.13c, 4.14c et 4.15c). Quelles que soient les sections transversales considérées, on obtient le même type de déformation pour chaque exemple. Néanmoins, on note que dans le domaine de l'optimisation de structure, un gain de masse de seulement 1% peut être substantiel.

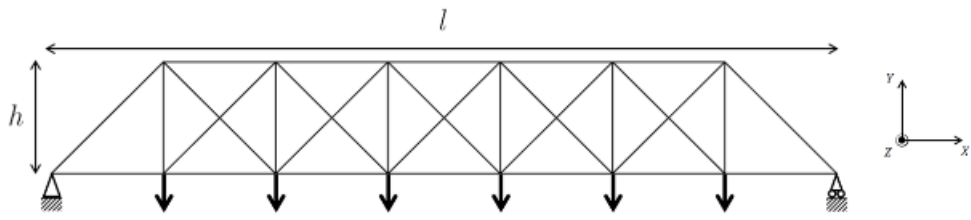
TABLE 4.9 – Nombre de variables continues et entières à l'état initial

Problème	Variables continues selon la section transversale		Variables Entières
	Carré et Circulaire	Rectangulaire et Ellipsoïdale	
Structure en L	172	344	86
Tri	44	88	22
Pont	60	120	30
Tour	64	128	32
Structure 3D	64	128	32

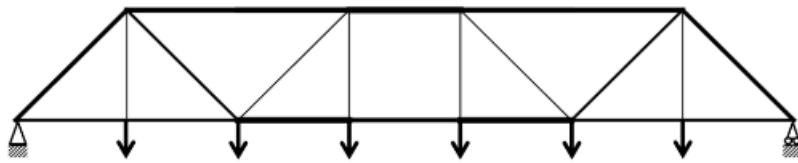


(d) Evolution de la masse structurale pour les différentes sections transversales

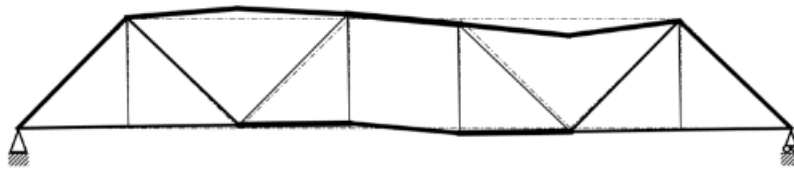
FIGURE 4.12 – Problème de la structure en triangle



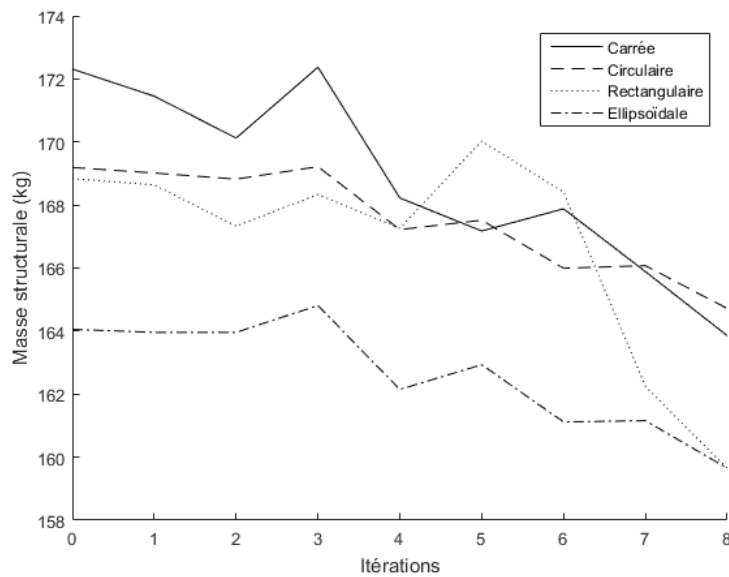
(a) Structure initiale



(b) Structure optimale

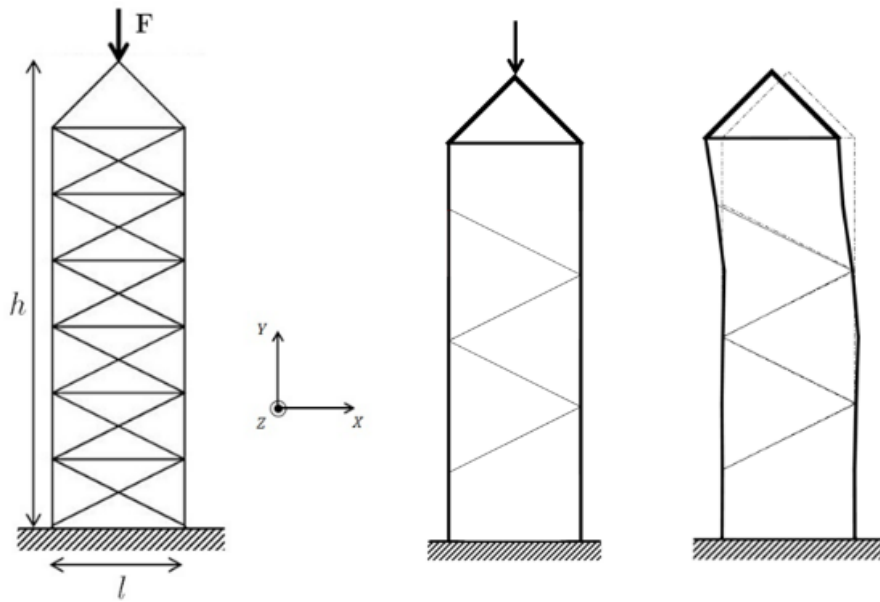


(c) Mode de flambage

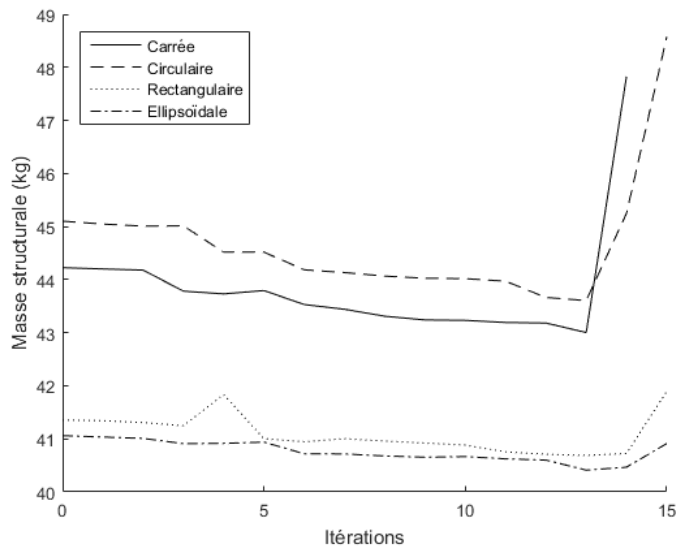


(d) Evolution de la masse structurale pour les différentes sections transversales

FIGURE 4.13 – Problème du pont



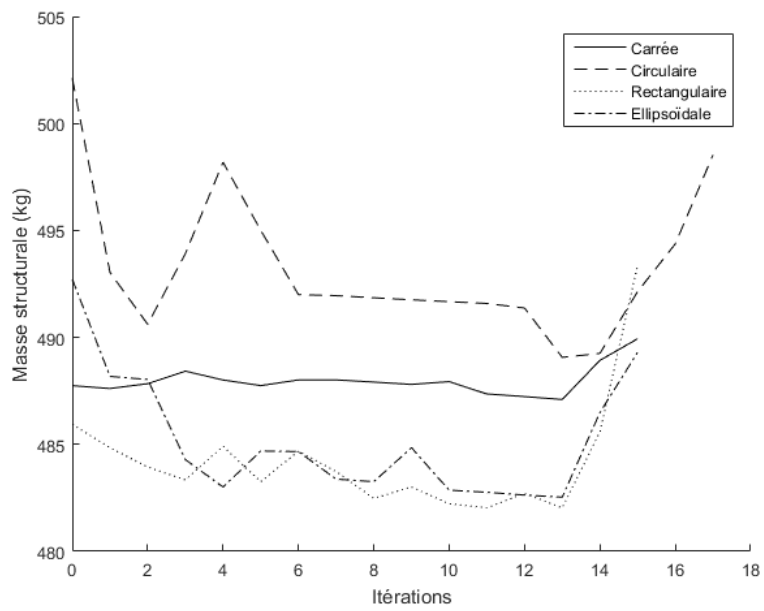
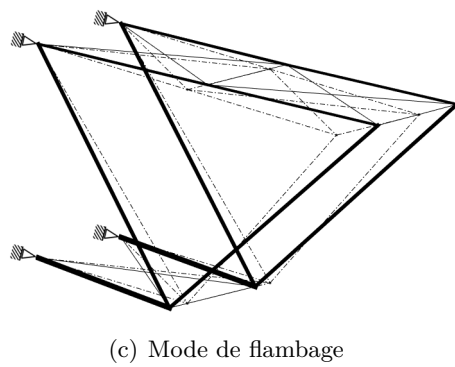
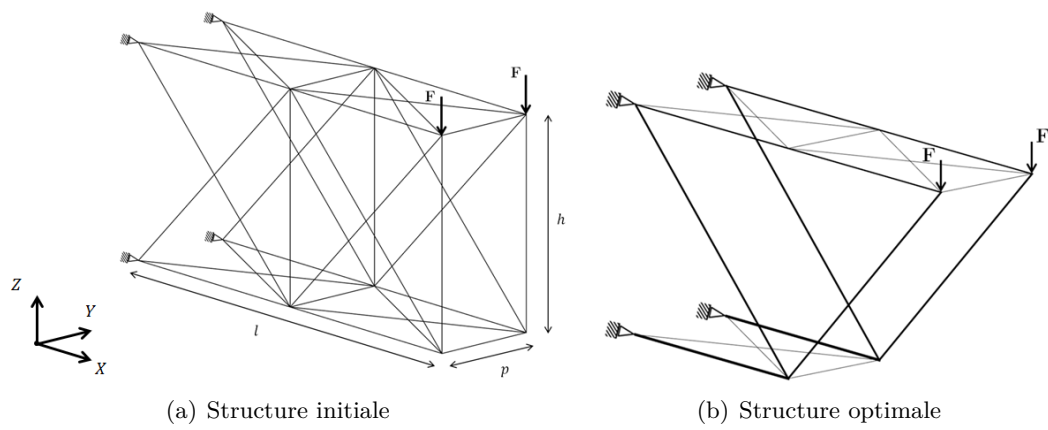
(a) Structure initiale      (b) Structure optimale      (c) Mode de flambage



(d) Evolution de la masse structurale pour les différentes sections transversales

FIGURE 4.14 – Problème de la tour





(d) Evolution de la masse structurale pour les différentes sections transversales

FIGURE 4.15 – Problème de la structure 3D

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème d'optimisation d'une structure constituée de poutres, sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage. Nous avons présenté deux éléments d'originalités :

- A travers une formulation non-linéaire en variables mixtes, nous avons proposé une fonction coût reposant sur une somme pondérée de la masse et des moments d'inertie de chaque élément.
- Un algorithme a été développé, basé d'un côté, sur un problème non-linéaire pour optimiser les dimensions des sections transversales des poutres, et de l'autre sur un critère utilisant une analyse de sensibilité de la charge critique de flambage pour supprimer un par un les éléments de la structure.

Les résultats numériques, sur un ensemble d'exemples de la littérature, montrent que l'augmentation du nombre de degrés de liberté décrivant l'aire des sections transversales mène à des réductions de masse structurale jusqu'à 7,15%. De plus, la fonction objectif proposée permet de converger vers des structures dont les dimensions des sections transversales sont similaires, réduisant par conséquent le coût de la phase de post-traitement.



## Chapitre 5

# Optimisation de structures continues

Dans ce chapitre, nous portons notre attention sur l'optimisation de structures continues sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage. L'objectif est de minimiser la masse de la structure en déterminant quels éléments du maillage doivent être constitués de matière ou de vide. Dans un premier temps, nous présentons une formulation d'un problème d'optimisation topologique de minimisation de masse sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage. Dans un second temps, nous présentons la méthode pour résoudre l'équation d'équilibre associé aux degrés de liberté de la structure, puis nous proposons un algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage. Dans un troisième temps, nous définissons le concept de gradient topologique et son principe d'utilisation au sein d'un algorithme d'optimisation. Puis, nous explicitons le mode de calcul des gradients topologiques des données considérées dans cette étude. Ensuite, nous présentons l'algorithme de résolution du problème d'optimisation. Enfin, nous analysons les performances de l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage et nous illustrons les résultats numériques obtenus concernant la résolution du problème d'optimisation.

### 5.1 Problème d'optimisation

Dans cette section, nous présentons une formulation d'un problème d'optimisation topologique de minimisation de masse sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage pour des structures continues.

Typiquement, la modélisation de ce type de problème débute par la discrétisation du domaine de conception en  $N$  éléments bi-dimensionnels ou tri-dimensionnels (Figure 5.1). Ensuite, une variable binaire  $x_i$  est associée à chaque élément  $i$  afin d'identifier si celui-ci doit être présent ou absent. Ainsi, la masse de la structure est définie par la somme des variables de conception multipliée par la densité  $\rho$  du matériau considéré.

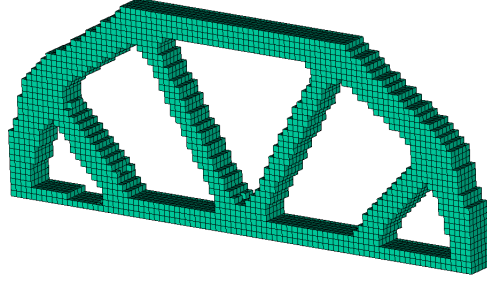


FIGURE 5.1 – Structure représentée avec des éléments tri-dimensionnels

Une des possibilités pour garantir l'intégrité du matériau sous les efforts appliqués revient à s'assurer que la valeur de la contrainte  $\sigma_i$  de Von Mises (Chapitre 2 - Section 4) au sein d'un élément  $i$  de la structure ne dépasse pas la limite  $\bar{\sigma}$  inhérente au matériau. L'évaluation de la contrainte  $\sigma_i$  nécessite au préalable la résolution de l'équation d'équilibre suivante :

$$Ku = f \quad (5.1)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{3M \times 3M}$  est la matrice de rigidité,  $u \in \mathbb{R}^{3M}$  est le vecteur des degrés de liberté nodaux,  $f \in \mathbb{R}^{3M}$  représente les efforts appliqués sur la structure (voir Chapitre 2 - Section 3),  $M$  correspond au nombre de noeuds issus de la discrétisation et 3 correspond aux trois degrés de liberté liés aux déplacements selon les axes de l'espace. Ensuite, la contrainte  $\sigma_i$  de Von Mises en un élément  $i$  est définie par :

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x^i - \sigma_y^i)^2 + (\sigma_x^i - \sigma_z^i)^2 + (\sigma_y^i - \sigma_z^i)^2 + 6((\sigma_{xy}^i)^2 + (\sigma_{xz}^i)^2 + (\sigma_{yz}^i)^2)} \quad (5.2)$$

où  $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i$  et  $\sigma_{yz}^i$  sont les composantes du champ de contrainte  $\sigma$  de l'élément  $i$  obtenues par la loi de Hooke (Chapitre 2 - Section 1) en fonction de  $u$ . A partir de ces composantes, la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  peut être construite via l'expression suivante :

$$K_\sigma = \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\Omega_i} G^\top \begin{pmatrix} s_i & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} G d\Omega_i \right] \quad \text{où} \quad s_i = \begin{pmatrix} \sigma_x^i & \sigma_{xy}^i & \sigma_{xz}^i \\ \sigma_{xy}^i & \sigma_y^i & \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{xz}^i & \sigma_{yz}^i & \sigma_z^i \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

où  $\Omega_i$  représente le volume de l'élément  $i$  et  $G$  est une matrice constituée des dérivées partielles des fonctions de formes caractérisant les éléments finis issus de la discrétisation (voir Chapitre 2 - Section 3). Nous sommes donc en mesure de définir le problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage :

$$(K + \lambda K_\sigma)v = 0 \quad (5.4)$$

où chaque valeur propre  $\lambda$  correspond à un facteur scalaire des efforts appliqués, pour lesquels le champ de déformations de la structure est représenté par le vecteur propre associé  $v$ . Les valeurs propres  $\lambda$  sont appelées *charges critiques* et les vecteurs propres  $v$  *modes de flambage*. Pour rappel, il suffit de s'assurer que la plus petite charge critique positive  $\lambda_{cr}$  (dite *charge critique de flambage*) soit supérieure à 1 pour que la structure résiste au flambage.

Ainsi, le problème de minimisation de masse sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage peut se formuler de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \underset{x=(x_1, \dots, x_N)}{\text{minimiser}} && f(x) := \rho \sum_{i=1}^N x_i \\
& \text{s.l.c.} && x_i(\sigma_i(x) - \bar{\sigma}) \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N. \\
& && 1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0 \\
& && x_i \in \{0, 1\} ; \forall i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

où  $x = \{x_1, \dots, x_N\}$  représente le vecteur des  $N$  variables binaires de conception,  $f$  est la masse de la structure,  $\rho$  est la densité du matériau,  $(\sigma_i)_{i=1}^N$  est la contrainte de Von Mises évaluée par (5.2),  $\bar{\sigma}$  est la limite d'intégrité du matériau et  $\lambda_{cr}$  est la charge critique de flambage obtenue par la résolution de (5.4).

Dans les Sections 2 et 3 du Chapitre 3, nous avons présenté diverses difficultés liées à la nature des contraintes du problème d'optimisation combinatoire (5.5) : (i) le caractère local des contraintes de  $R_m$  et (ii) le changement du champ de déformation de la charge critique de flambage.

(i) L'incorporation des contraintes de  $R_m$  se caractérise par un nombre très important de contraintes d'optimisation puisqu'à chaque élément est associée une contrainte d'optimisation. Par conséquent, le nombre de variables de conception et de contraintes d'optimisation étant élevé, le coût d'analyse des dérivées est important et ne peut être réduit à l'aide d'un état adjoint. Pour remédier à cette difficulté, nous remplaçons les  $N$  contraintes de  $R_m$  par la contrainte  $G_\sigma$  proposée par Verbart et al. (2017) dont l'expression est la suivante :

$$G_\sigma(x) := \frac{1}{P} \ln \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp^{P \cdot g_i(x)} \right) \leq 0, \quad \text{où } g_i(x) = x_i \left( \frac{\sigma_i(x)}{\bar{\sigma}} - 1 \right) \tag{5.6}$$

où  $P$  est un paramètre d'agrégation (Verbart et al. (2017)).

(ii) Généralement, un problème d'optimisation sous des contraintes de flambage prend en compte uniquement la charge critique de flambage  $\lambda_{cr}$ . Néanmoins, au cours de l'optimisation, Bruyneel et al. (2008) identifèrent des phénomènes d'oscillation (voire de divergences) lorsque la valeur propre  $\lambda_{cr}$  est multiple, entre autres. Pour remédier à cette difficulté, Bruyneel et al. (2008) montrèrent que considérer plusieurs modes de flambage permet d'améliorer la convergence et de réduire l'apparition de ces phénomènes d'oscillation. Une des approches consiste à remplacer la contrainte de flambage  $\lambda_{cr} \geq 1$  par une contrainte de semi-définie positivité équivalente (Kočvara (2002)), dont l'expression est la suivante :

$$K + K_\sigma \succeq 0 \tag{5.7}$$

Ce type de contrainte amène à considérer les composantes des deux matrices  $K$  et  $K_\sigma$  comme des variables de conception, augmentant significativement le nombre de variables du problème d'optimisation. Ainsi, en utilisant la définition d'une matrice semi-définie positive, Browne et al. (2012) considèrent la contrainte suivante pour prendre en compte  $m$  modes propres de flambage au cours de l'optimisation :

$$\sum_{j=1}^m v_j^\top (K + K_\sigma) v_j \geq 0 \quad (5.8)$$

où les vecteurs  $v_j$  sont les  $m$  modes propres de flambage du problème aux valeurs propres généralisé (5.4). La formule (5.8) présente l'avantage de ne définir qu'une seule contrainte d'optimisation, quel que soit le nombre de modes propres de flambage utilisé. Pour des questions de mise à l'échelle, nous multiplions la formule (5.8) par un facteur  $\frac{1}{m}$ . Ainsi, nous proposons de considérer la contrainte de flambage  $G_\lambda$  suivante :

$$G_\lambda := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m v_j^\top (K + K_\sigma) v_j \geq 0 \quad (5.9)$$

Pour résumer, nous considérons la formulation suivante du problème de minimisation de masse sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage :

$$\begin{aligned} & \underset{x=(x_1, \dots, x_N)}{\text{minimiser}} && f(x) := \rho \sum_{i=1}^N x_i \\ & \text{s.l.c.} && \frac{1}{P} \ln \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp^{P \cdot g_i(x)} \right) \leq 0, \quad \text{où } g_i(x) = x_i \left( \frac{\sigma_i(x)}{\bar{\sigma}} - 1 \right) \\ & && \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m v_j^\top (K + K_\sigma) v_j \geq 0 \\ & && x_i \in \{0, 1\} ; \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{P})$$

où les valeurs de  $\sigma_i$  sont évaluées par (5.2) et les vecteurs propres  $v_j$  sont obtenus par la résolution de (5.4).

Dans le Chapitre 3, différentes méthodes (Solid Isotropic Material with Penalization, lignes de niveaux ou encore gradient topologique) ont été présentées pour résoudre un problème d'optimisation topologique sous des contraintes de flambage. Les méthodes SIMP et de lignes de niveaux associent un matériau dit fictif aux éléments absents du domaine, soit en considérant un module de Young  $\zeta \ll 1$ , soit en définissant une borne minimale  $\epsilon$  de faible valeur sur les variables de conception ( $x_i \geq \epsilon$ ). Cette modélisation permet d'éviter les problèmes de singularités de la matrice de rigidité  $K$  lors de la résolution de l'équation d'équilibre (5.1), mais engendre un mauvais conditionnement de cette matrice. Par conséquent, la résolution du système linéaire (5.1) par une méthode itérative est ralentie (Suresh (2013)). De plus, lors de la résolution du problème aux valeurs propres généralisé, des modes de flambage, appelés *spurious buckling modes*, peuvent apparaître. Ces modes de flambage caractérisent des déformations uniquement liées aux éléments absents, et n'ont aucun lien avec la résistance de la structure au

flambage. Par conséquent, les *spurious buckling modes* ne doivent pas être considéré aux cours de l'optimisation.

Basé sur le gradient topologique, Suresh (2013) développa un algorithme d'optimisation topologique dit *de descente de masse* : à l'état initial, le domaine de conception est supposé plein de matière (i.e.  $x_i = 1, \forall i = 1, \dots, N$ ), puis l'optimisation vise à enlever des fractions de masse à chaque itération. Dans cette optimisation, un élément  $i$  qui est supprimé ( $x_i = 0$ ) n'apparaît plus dans les équations décrivant le comportement de la structure, n'engendrant pas un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité  $K$  et l'apparition de *spurious buckling modes*. Cependant, les dérivées liées aux éléments absents ne peuvent plus être obtenues directement. Pour pallier cette difficulté, les dérivées des éléments présents peuvent être extrapolées vers les éléments absents (Krishnakumar & Suresh (2015)). Ainsi, il est possible de réintroduire des éléments supprimés. Pour différents problèmes de minimisation de souplesse, Suresh (2013) montra que ce type de méthode propose des résultats comparables aux méthodes classiques d'optimisation topologique. De plus, cette méthode permet de réduire le nombre de résolution des équations d'états du problème d'optimisation (l'équation d'équilibre et le problème aux valeurs propres généralisé dans notre cas), et des gains de temps de calcul substantiels. Pour ces raisons, nous considérons un algorithme basé sur le gradient topologique pour résoudre le problème d'optimisation (P).

Dans les sections suivantes, après avoir présenté les méthodes pour résoudre les équations d'états de notre problème, nous introduisons le concept de gradient topologique et l'algorithme d'optimisation qui en découle.

## 5.2 Résolution des équations d'état

Dans cette section, nous présentons la méthode pour résoudre l'équation d'équilibre associé aux déplacements de la structure, puis nous proposons un algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage. La finesse de la discrétisation d'une structure a un lien direct avec le temps de calcul et la qualité de l'approximation des déformations engendrées par les forces appliquées sur la structure. En effet, plus le nombre d'éléments finis utilisé est grand, plus l'analyse du comportement de la structure est précise ; néanmoins cette analyse amène à considérer des problèmes de grandes dimensions. Le principal coût des méthodes de résolution de ces problèmes repose sur le stockage en mémoire des matrices considérées au sein de ces problèmes. Par la suite, nous mettons en exergue des méthodes pour réduire ces coûts en mémoire.

### 5.2.1 Equation d'équilibre

L'équation d'équilibre lié aux déplacements de la structure correspond au système linéaire suivant :

$$Ku = f \tag{5.10}$$

où  $K \in \mathbb{R}^{3M \times 3M}$  est la matrice de rigidité,  $u \in \mathbb{R}^{3M}$  est le vecteur des degrés de liberté nodaux et  $f \in \mathbb{R}^{3M}$  est le vecteur des chargements (Chapitre 2 - Section 3). Pour résoudre ce système linéaire, nous considérons la méthode développée par Yadav & Suresh (2014). Elle combine la



méthode itérative du gradient conjugué (Reid (1971)) avec une technique de réduction de modèle dont l'espace réduit est construit à l'aide d'une technique d'agglomération (Bulgakov & Kuhn (1995)). Dans les paragraphes suivants, nous rappelons les différents éléments de cette méthode, présentés dans la Section 6 du Chapitre 2.

A partir d'une approximation initiale de la solution  $u$ , la résolution d'un système linéaire par une méthode itérative consiste à générer une suite de solutions  $(u_k)_k$  approchant  $u$ , tout en faisant tendre le résidu  $r_k$  du système vers zéro :

$$r_k = f - Ku_k$$

Il est important de noter que de nombreuses multiplications matrice-vecteur de type  $Ku$  interviennent lors de l'application d'une méthode itérative. L'assemblage de la matrice  $K$  n'étant pas souhaitable du point de vue du coût en mémoire, la méthode de multiplication puis d'assemblage de Hughes et al. (1983) est donc considérée ici. La multiplication de la matrice de rigidité  $K$  par un vecteur  $u$  devient :

$$Ku = \sum_{i=1}^N [K_i u_i] \quad (5.11)$$

où  $N$  correspond au nombre d'éléments du maillage,  $K_i$  est la matrice de rigidité de l'élément  $i$  (Chapitre 2 - Section 3),  $u_i$  représente les degrés de liberté de l'élément  $i$  et  $[ ]$  représente le procédé d'assemblage par blocs des vecteurs  $K_i u_i$  dans le vecteur  $Ku$ .

Bien que cette technique présente l'avantage de ne jamais assembler la matrice  $K$ , l'accès mémoire à la construction de chaque matrice de rigidité élémentaire  $K_i$  peut s'avérer important. Présentée dans la Section 6 du Chapitre 2, une approche pour réduire les temps de calcul consiste à utiliser un seul type d'élément pour définir le maillage de la structure (Figure 5.2). Ainsi, une seule matrice de rigidité élémentaire est nécessaire pour évaluer le produit  $Ku$ , réduisant drastiquement la quantité de mémoire utilisée lors de la résolution du système linéaire (Yadav & Suresh (2014)).

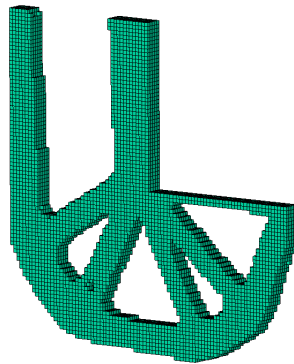


FIGURE 5.2 – Discrétisation de la structure avec un seul type d'élément tri-dimensionnel

La combinaison de la méthode du gradient conjugué (Reid (1971)) et d'une technique de réduction de modèle (Chinesta & Ladevèze (2014)) porte le nom de méthode du gradient conjugué en base réduite (Saad et al. (2000)), dont la procédure est illustrée dans l'Algorithme 5.

---

**Algorithm 5** Algorithme du gradient conjugué en base réduite - Saad et al. (2000)

---

**input:**  $K, f$ , une approximation initiale  $u_0$  et une tolérance  $\epsilon$

- 1: Construction de l'espace réduit  $W$
  - 2: Calcul de  $r_0 = f - Ku_0$
  - 3: Calcul de  $u_1 = u_0 + W(W^\top KW)^{-1}W^\top r_0$
  - 4: Calcul de  $r_1 = f - Ku_1$
  - 5: Résolution de  $W^\top KW\mu_1 = W^\top Kr_1$
  - 6: Calcul de  $p_1 = r_1 - W\mu_1$ ;  $k = 1$
  - 7: **while**  $\frac{\|f - Ku_k\|_2}{\|f\|_2} > \epsilon$  **do**
  - 8:  $\alpha_k = \frac{r_k^\top r_k}{p_k^\top K p_k}$
  - 9:  $u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k$
  - 10:  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k K p_k$
  - 11:  $\beta_k = \frac{r_{k+1}^\top r_{k+1}}{r_k^\top r_k}$
  - 12: Résolution de  $W^\top KW\mu_{k+1} = W^\top Kr_{k+1}$
  - 13:  $p_{k+1} = \beta_k p_k + r_{k+1} - W\mu_{k+1}$
  - 14:  $k = k + 1$
  - 15: **end while**
- output:**  $u_k$
- 

Dans l'Algorithme 5, la matrice  $W$  définit un espace réduit de taille  $n \times m$  avec  $m \ll n$ . Elle permet de transformer la résolution d'un système de taille  $n$  en une suite de résolutions du problème linéaire de taille  $m$  suivant :

$$W^\top KW\mu_{k+1} = W^\top Kr_{k+1} \quad (5.12)$$

De par leur petite taille, ces systèmes peuvent être résolus par des méthodes directes (voir Chapitre 2 - Section 6) implémentées dans la librairie LAPACK (Anderson et al. (1999b)). Quant à la matrice  $W$ , elle est construite à l'aide d'une technique d'agglomération où les noeuds issus de la discrétisation en éléments finis sont répartis dans un faible nombre de groupes (Figure 5.3).

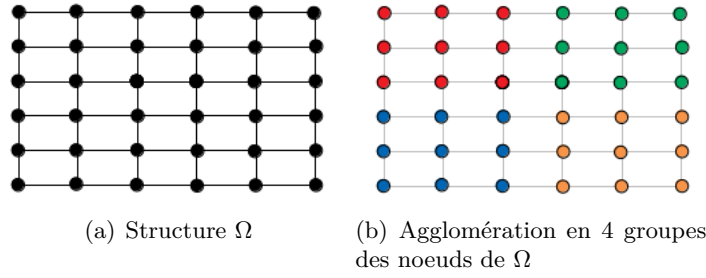


FIGURE 5.3 – Exemple de la technique d’agglomération pour construire une matrice de réduction de modèle

Comme présenté dans le Chapitre 2, chaque groupe de noeuds est considéré comme un corps rigide (Yadav & Suresh (2014)) et on associe 6 degrés de liberté à chaque centre de groupe, correspondant à trois translations  $(u_g, v_g, w_g)$  selon les trois axes de l’espace et trois rotations  $(\theta_g, \psi_g, \phi_g)$  autour de ces axes. Ensuite, on exprime les trois degrés de liberté  $(u_n, v_n, w_n)$  de chaque noeud de chaque groupe par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_g - z_n & -(y_g - y_n) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_g - z_n) & 0 & x_g - x_n \\ 0 & 0 & 1 & y_g - y_n & -(x_g - x_n) & 0 \end{pmatrix} d_g \quad (5.13)$$

où  $(x_g, y_g, z_g)$  et  $(x_n, y_n, z_n)$  sont les coordonnées respectives du centre du groupe et du noeud et  $d_g = (u_g, v_g, w_g, \theta_g, \psi_g, \phi_g)^\top$ .

Pour de plus amples détails sur la méthode du gradient conjugué couplé avec cette technique d’agglomération, le lecteur est renvoyé vers les travaux de Yadav & Suresh (2014).

### 5.2.2 Problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage

Dans cette section, nous proposons une méthode itérative pour déterminer les  $m$  vecteurs propres associés au problème d’optimisation (P). Pour rappel, ces  $m$  vecteurs propres sont associés aux  $m$  plus petites valeurs propres  $\lambda$  positives du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$(K + \lambda K_\sigma)v = 0 \quad (5.14)$$

où  $K$  et  $K_\sigma \in \mathbb{R}^{3M \times 3M}$  sont respectivement les matrices de rigidité et de rigidité géométrique. Notons que les vecteurs propres  $v$  sont supposés  $K$ -orthogonaux entre eux :

$$v_i^\top K v_j = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad \text{où } \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Présentées dans la Section 7 du Chapitre 2, les différentes techniques de résolution du problème aux valeurs propres lié au flambage (la méthode d’Arnoldi (Lehoucq et al. (1998)) et la méthode Block Jacobi Conjugate Gradient (BJCG - Ovtchinnikov (2008a))) requièrent un nombre important de multiplication matrice-vecteur du type  $Kv$  et  $K_\sigma v$ . Pour réduire les coûts

en mémoire, le produit  $Kv$  peut être évalué via la méthode de multiplication puis d'assemblage décrite dans la section 1.2.1. Cependant le calcul du produit  $K_\sigma v$  par cette technique impose un challenge numérique important. En effet, chaque matrice de rigidité géométrique élémentaire est différente contrairement à la matrice de rigidité élémentaire. Ainsi, soit toutes les matrices de rigidité géométrique élémentaire sont stockées (augmentant le coût en espace mémoire), soit elles sont recalculées à chaque produit  $K_\sigma v$  (augmentant le temps de calcul).

Dans le but de réduire le nombre d'opérations  $K_\sigma v$ , Bian & Fang (2017) adaptèrent la méthode d'itération inverse (Ipsen (1997)) au problème de flambage. L'objectif est de déterminer la plus petite valeur propre positive  $\lambda$  et le vecteur propre  $v$  associé en minimisant le quotient de Rayleigh du système (5.14) :

$$\rho(v) = -\frac{v^\top K v}{v^\top K_\sigma v} \quad (5.15)$$

Pour minimiser ce quotient de Rayleigh, le système linéaire suivant :

$$v_{k+1} = -K^{-1} K_\sigma v_k \quad (5.16)$$

où  $v_k$  est une approximation du vecteur propre  $v$  recherché est résolu itérativement. Notons que le système (5.16) ne nécessite qu'un seul produit  $K_\sigma v$ , et qu'il peut être résolu par la méthode du gradient conjugué en base réduite décrite dans la section précédente. La procédure de la méthode d'itération inverse est la suivante :

---

**Algorithm 6** Méthode d'itération inverse - Bian et al. (2015)

---

**input:**  $K, K_\sigma, v_1 \neq 0, \|v_1\|_2 = 1$  et une tolérance  $\epsilon$

- 1: Initialisation de  $k = 1$
- 2: Calcul de  $\lambda_k = -\frac{v_k^\top K v_k}{v_k^\top K_\sigma v_k}$
- 3: Calcul de  $r_k = K v_k + \lambda_k K_\sigma v_k$
- 4: **while**  $\|r_k\|_2 \geq \epsilon$  **do**
- 5:     Calcul de  $z_k = K_\sigma v_k$
- 6:     Résolution de  $K y_k = z_k$
- 7:     Calcul de  $v_{k+1} = \frac{y_k}{\|y_k\|_2}$
- 8:     Calcul de  $\lambda_{k+1} = -\frac{v_{k+1}^\top K v_{k+1}}{v_{k+1}^\top K_\sigma v_{k+1}}$
- 9:     Calcul de  $r_{k+1} = K v_{k+1} + \lambda_{k+1} K_\sigma v_{k+1}$
- 10:     $k = k + 1$
- 11: **end while**

**output:**  $\lambda_k$  et  $v_k$

---

Dans l'Algorithme 6, il est important de noter que la valeur propre finale  $\lambda_k$  correspond à la valeur propre de plus petit module. En effet, la matrice de rigidité géométrique n'étant pas nécessairement définie positive, la valeur propre  $\lambda_k$  n'est pas toujours positive. Ainsi, au cours d'une optimisation de structure, cette méthode peut être appliquée uniquement lorsque la plus petite valeur propre en module est positive.

Dans les paragraphes suivants, nous proposons d'étendre la méthode d'itération inverse pour déterminer les  $m$  plus petites valeurs propres positives du problème aux valeurs propres généralisé (5.14).

Il est important de noter qu'à travers la méthode d'itération inverse, la minimisation du quotient de Rayleigh de  $m$  vecteurs propres convergera vers les  $m$  valeurs propres de plus petits modules. Or, comme noté précédemment, la matrice de rigidité géométrique n'est pas nécessairement définie positive, ainsi les  $m$  valeurs propres de plus petits modules ne sont pas toujours positives. Pour pallier ce problème, considérons l'ensemble  $\Lambda$  des  $\tilde{m}$  valeurs propres de plus petits modules :

$$\Lambda := \{\lambda_j, \forall j = 1, \dots, \tilde{m} \mid |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{\tilde{m}-1}| \leq |\lambda_{\tilde{m}}|\}$$

Si le cardinal de l'ensemble  $\Lambda$  est assez grand, alors on peut en extraire les  $m$  plus petites valeurs propres positives :

$$|\{j \mid \lambda_j \in \Lambda \text{ et } \lambda_j = |\lambda_j|\}| = m$$

Ainsi, afin de déterminer les  $m$  vecteurs propres associés aux  $m$  plus petites valeurs propres positives, nous proposons d'appliquer la méthode d'itération inverse sur un ensemble  $\tilde{m} \geq m$  de vecteurs propres. Notons  $V$  l'espace de recherche engendré par les  $\tilde{m}$  vecteurs propres :

$$V \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times n} := \{v_1, \dots, v_{\tilde{m}}\}$$

Lors de l'optimisation simultanée des quotients de Rayleigh des vecteurs de  $V$ , il est nécessaire de maintenir la  $K$ -orthogonalité des vecteurs approchés, auquel cas ils convergeront tous vers le vecteur associé à la valeur propre de plus petit module. Afin de maintenir la  $K$ -orthogonalité entre les vecteurs de  $V$ , nous proposons d'utiliser la procédure de Rayleigh-Ritz (Trefethen & Bau III (1997)) consistant à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé, de dimension  $\tilde{m}$ , suivant :

$$V^\top K_\sigma V w = \bar{\lambda} V^\top K V w \quad (5.17)$$

où les vecteurs  $\bar{v} = V w$  sont appelés *vecteurs de Ritz* (où  $w$  sont les vecteurs propres de (5.17)) et les valeurs propres  $\bar{\lambda}$  sont appelées *valeurs de Ritz*. Notons que les *vecteurs de Ritz* sont  $K$ -orthogonaux par construction, et que le système (5.17) est beaucoup plus simple à résoudre que le problème initial (5.14) car la taille du problème est de  $\tilde{m} \ll n$ .

Ainsi, pour déterminer un ensemble  $m$  de valeurs et de vecteurs propres du système (5.14), nous proposons de combiner la méthode d'itération inverse et la procédure de Rayleigh-Ritz sur un espace de recherche composé de  $\tilde{m}$  vecteurs. La procédure est présentée dans l'Algorithme 7.

---

**Algorithm 7** Méthode d'itération inverse généralisée

---

**input:** Le nombre  $m$  de vecteurs propres recherchées, la dimension  $\tilde{m}$  de l'espace de recherche et une tolérance  $\epsilon$

- 1: Initialisation de  $V \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times n} = \{v_1, \dots, v_{\tilde{m}}\}$ ,  $p = 1$  et  $l = 1$
  - 2: Résolution de  $V^\top K_\sigma V w = \bar{\lambda} V^\top K V w$
  - 3:  $V \leftarrow V w$
  - 4: **while**  $l < m$  **do**
  - 5:   Calcul de  $z_j = K_\sigma v_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, \tilde{m}$
  - 6:   Résoudre  $K y_j = z_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, \tilde{m}$
  - 7:   Résolution de  $Y^\top K_\sigma Y w = \bar{\lambda} Y^\top K Y w$  où  $Y \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times n} = \{y_1, \dots, y_{\tilde{m}}\}$
  - 8:    $V \leftarrow Y w$
  - 9:   Calcul de  $\lambda_j = -\frac{v_j^\top K v_j}{v_j^\top K_\sigma v_j}$ ,  $\forall j = 1, \dots, \tilde{m}$
  - 10:   Calcul de  $r_j = K v_j + \lambda_j K_\sigma v_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, \tilde{m}$
  - 11:   **while**  $r_p \leq \epsilon$  **do**
  - 12:      $p = p + 1$
  - 13:     **if**  $\lambda_p \geq 0$  **then**
  - 14:        $l = l + 1$
  - 15:     **end if**
  - 16:   **end while**
  - 17: **end while**
- output:**  $\{\lambda_j, v_j \mid \lambda_j = |\lambda_j|\}$
- 

Notons que l'Algorithme 7 s'arrête lorsque les  $m$  plus petites valeurs propres positives ont été déterminées. L'un des désavantages de cette méthode se situe au niveau de l'ordre de convergence des valeurs propres. En effet, les valeurs propres convergent par ordre croissant selon leur module. Ainsi, il est parfois nécessaire de déterminer un ensemble de valeur propre négative avant d'obtenir celles qui sont positives.

En ce qui concerne la résolution des problèmes aux valeurs propres généralisé de taille  $\tilde{m}$  aux étapes 2 et 7, nous utilisons les fonctions implémentées dans la librairie LAPACK (Anderson et al. (1999a)). A l'étape 6, la méthode du gradient conjugué en base réduite, détaillée dans la section précédente, est utilisée pour déterminer la solution des  $\tilde{m}$  systèmes linéaires.

## 5.3 Méthode du gradient topologique

Dans cette section, après avoir défini le concept de gradient topologique, nous présentons son principe d'utilisation au sein d'un algorithme d'optimisation. Ensuite, nous explicitons le mode de calcul des gradients topologiques des données considérées dans cette étude. Enfin, nous présentons l'algorithme de résolution du problème d'optimisation.

### 5.3.1 Définition du gradient topologique et principe de l'algorithme

Comme présenté dans le Chapitre 3, la notion de gradient topologique quantifie l'influence sur un critère d'optimisation de l'insertion d'un trou dans une structure (Eschenauer et al. (1994)).

Considérons une structure  $\Omega$  discrétisée en  $N$  éléments finis (Figure 5.4a) à chacun desquels est associée une variable binaire  $x_i$ . On note  $B(x_i, r)$  la boule centrée en l'élément  $i$  et de rayon  $r$  représentant un trou. Le domaine engendré par la suppression de cette boule est noté  $\Omega_B$  (Figure 5.4b).

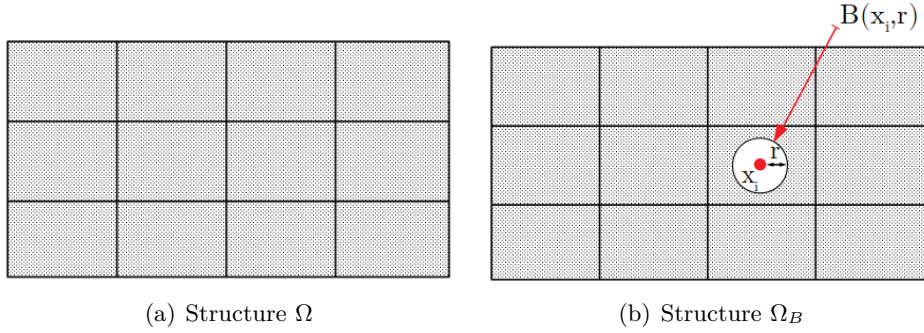


FIGURE 5.4 – Concept du gradient topologique

Considérons un critère  $C$  défini sur les deux domaines  $\Omega$  et  $\Omega_B$ . Le gradient topologique de  $C$  en  $x_i$  est donné par (Sokolowski & Zochowski (1999)) :

$$T(x_i) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C(\Omega_B) - C(\Omega)}{f(r)} \quad (5.18)$$

où  $f(r)$  est une fonction scalaire telle que  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0$ . Généralement, le choix de cette fonction correspond à la mesure de Lebesgue de la boule  $B(x_i, r)$ .

Une fois le champ  $T$  des gradients topologiques déterminé en chaque élément de la structure, une approche d'optimisation consiste à supprimer les éléments dont les valeurs de  $T$  sont faibles. Cependant, ce type d'approche mène à des phénomènes d'instabilités de convergence (Suresh & Takaloozadeh (2013)). Par la suite, nous présentons une autre approche d'utilisation du champ  $T$  des gradients topologiques appelée *topological level-set* (Suresh (2013)).

A l'état initial, le domaine de conception est considéré rempli de matière (i.e.  $x_i = 1, \forall i = 1, \dots, N$ ). On dit que la fraction de volume  $\alpha$  occupé est de 1. Ensuite, l'objectif est

de supprimer successivement des fractions de volume  $\Delta\alpha$  (dont la valeur évolue au cours de l'optimisation) à partir des champs des gradients topologiques. Dans les paragraphes suivants, nous illustrons une étape de cet algorithme sur un exemple de problème de structure en 2D (Figure 5.5a). Après avoir défini un maillage du domaine, le champ des dérivées topologiques liées aux contraintes  $\sigma$  (dont le calcul est détaillé dans la section suivante) peut être déterminé (Figure 5.5b). Notons que si la valeur du gradient topologique de l'élément  $i$  est petite (resp. grande), alors le retrait de cet élément ( $x_i = 0$ ) a un faible (resp. significatif) impact sur les contraintes  $\sigma$ . Pour des questions de clarté du champ des gradients topologique, nous avons normé les valeurs des gradients topologique dans la Figure 5.5b.

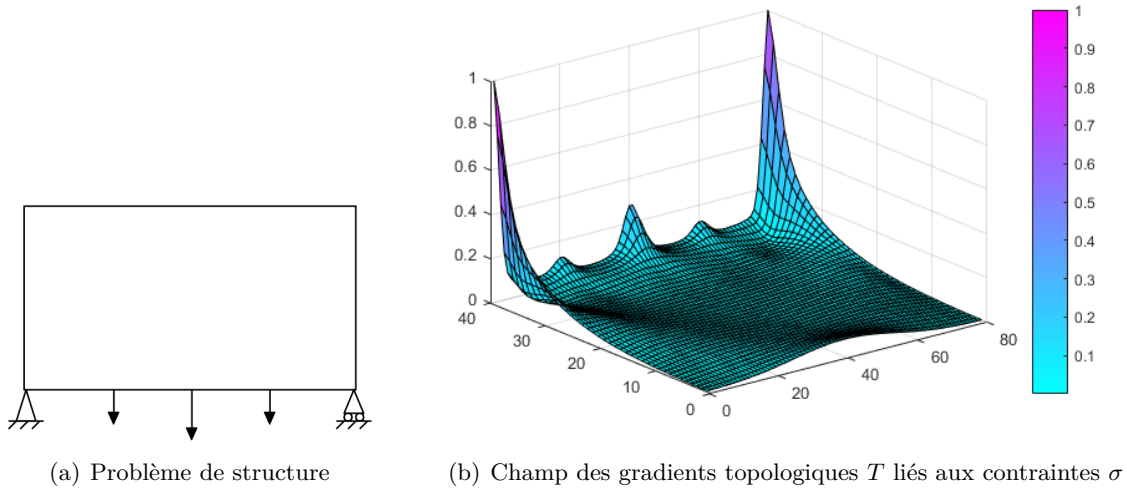


FIGURE 5.5 – Concept du gradient topologique

A partir du champ  $T$  des gradients topologiques et d'un scalaire  $\tau$ , nous pouvons définir un domaine  $\Omega^\tau$  par l'expression suivante :

$$\Omega^\tau = \{x_i \mid T(x_i) > \tau\} \quad (5.19)$$

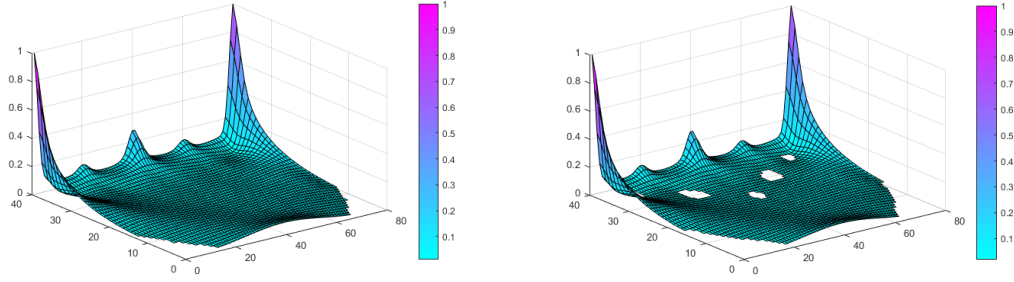
Le domaine  $\Omega^\tau$  correspond aux éléments dont la valeur du gradient topologique est supérieure à  $\tau$ . Cette valeur est choisie afin de retirer une fraction de volume  $\Delta\alpha$  :

$$|\Omega^\tau| := \sum_{i=1}^N x_i = \lfloor N(\alpha - \Delta\alpha) \rfloor$$

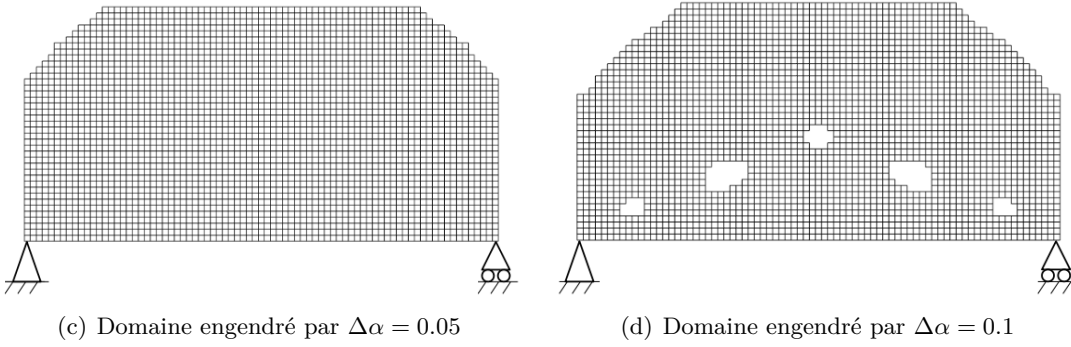
où  $\lfloor N(\alpha - \Delta\alpha) \rfloor$  représente la partie entière de  $N(\alpha - \Delta\alpha)$ .

Par exemple, lorsque  $N$  correspond à 10 000 éléments,  $\alpha$  à un volume de 0,5 et  $\Delta\alpha$  à une fraction de volume de 0,1, alors on cherche une structure  $\Omega^\tau$  composée de 4 000 éléments à partir d'une structure constituée de 5 000 éléments. Il est important de noter que les éléments qui sont retirés du domaine ne sont pas nécessairement contigus. Dans la Figure 5.6, nous illustrons deux domaines  $\Omega^\tau$  engendrés par le champ  $T$  de la Figure 5.5b et deux valeurs différentes de  $\Delta\alpha$ .





(a) Champ  $T$  des gradients topologiques engendré par  $\Delta\alpha = 0.05$  (b) Champ  $T$  des gradients topologiques engendré par  $\Delta\alpha = 0.1$



(c) Domaine engendré par  $\Delta\alpha = 0.05$

(d) Domaine engendré par  $\Delta\alpha = 0.1$

FIGURE 5.6 – Deux structures obtenues à partir de la même structure initiale selon le retrait de diverses fractions de volume  $\Delta\alpha$

Il est important de noter que la fraction de volume  $\Delta\alpha$  joue un rôle crucial puisqu'elle gouverne tout le procédé d'optimisation. En effet, si sa valeur est petite, alors la convergence sera lente, tandis que si sa valeur est trop grande alors l'optimisation peut diverger (Suresh (2013)). Pour s'assurer que l'optimisation ne diverge pas, nous proposons d'analyser la variation de la fonction d'agrégation  $G_\sigma$  des contraintes de  $R_m$  entre la structure  $\Omega$  de l'itération précédente et la nouvelle structure  $\Omega^\tau$  :

$$\frac{|G_\sigma(\Omega) - G_\sigma(\Omega^\tau)|}{|G_\sigma(\Omega)|} \leq \overline{\Delta G_\sigma} \quad (5.20)$$

où  $\overline{\Delta G_\sigma}$  est le seuil d'acceptation de variation de la fonction  $G_\sigma$ . Si la variation relative de la fonction  $G_\sigma$  est inférieure au seuil  $\overline{\Delta G_\sigma}$ , alors on considère que le processus converge (l'itéré  $\Omega^\tau$  est accepté), on détermine le nouveau champ  $T$  des gradients topologiques et on cherche à enlever une fraction de volume  $\Delta\alpha$  supplémentaire. Dans le cas contraire, on rejette l'itéré  $\Omega^\tau$  obtenu, puis on réduit la valeur de la fraction de volume  $\Delta\alpha$ , et enfin on détermine la valeur de  $\tau$  correspondant au nouveau volume recherché. La méthode d'optimisation s'arrête lorsque la valeur de  $\Delta\alpha$  est inférieure à un seuil noté  $\Delta\alpha_{min}$ . Nous illustrons l'algorithme de résolution basé sur le gradient topologique dans la Figure 5.7.

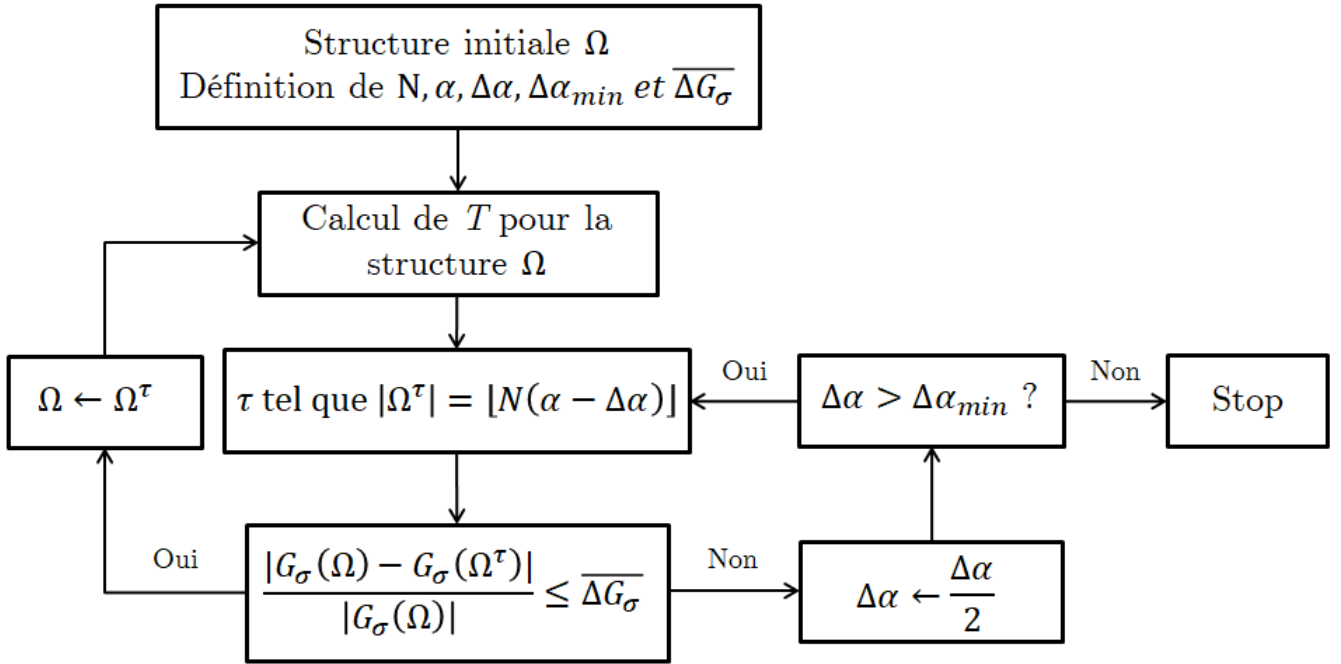
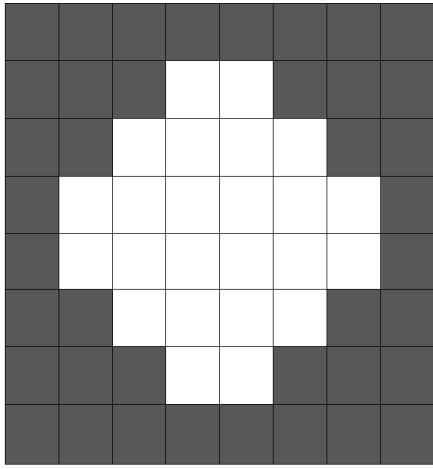
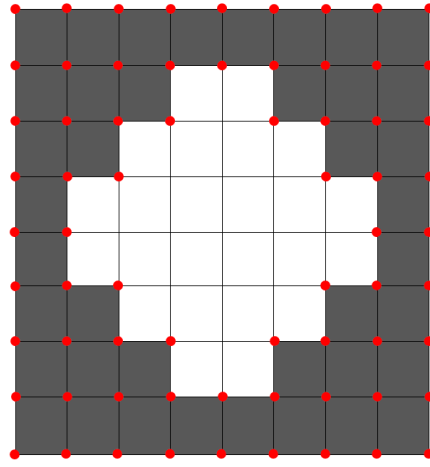


FIGURE 5.7 – Algorithme basé sur le gradient topologique

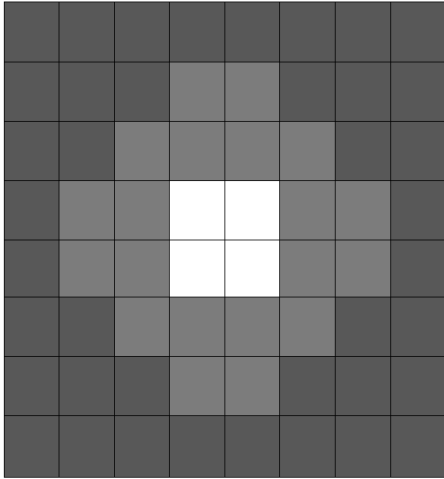
Un point important de la méthode considérée repose sur la possibilité de réintroduire des éléments supprimés au sein de la structure. Rappelons qu'un élément supprimé n'apparaît plus dans l'analyse du comportement de la structure, ainsi l'évaluation analytique de son gradient topologique n'est pas possible. Pour remédier à cette difficulté, Krishnakumar & Suresh (2015) proposèrent d'extrapoler la valeur des gradients topologiques des éléments présents. Nous illustrons ce procédé dans la Figure 5.8. Considérons que nous disposons d'un champ  $T$  de gradient topologique pour les éléments présents (Figure 5.8a). La première étape consiste à évaluer pour chaque noeud du maillage la moyenne des valeurs de  $T$  des éléments connectés à ce noeud (Figure 5.8b). Ensuite, la valeur de  $T$  de chaque élément est recalculée en déterminant la moyenne des dérivées associées aux noeuds connectés à cet élément (Figure 5.8c). Notons que ce procédé peut être appliqué plusieurs fois pour extrapoler les valeurs de  $T$  aux éléments plus éloignés (Figure 5.8d).



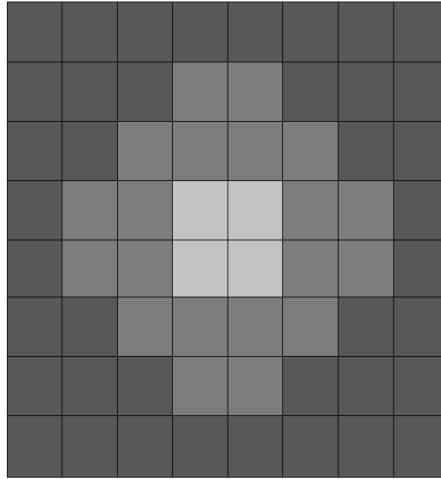
(a) Domaine initial



(b) Extrapolation aux noeuds actifs



(c) Extrapolation aux éléments connectés aux noeuds actifs



(d) Deuxième phase d'extrapolation

FIGURE 5.8 – Procédé d'extrapolation des valeurs des gradients topologiques

### 5.3.2 Gradient topologique des données étudiées

Dans cette section, nous présentons le calcul des champs de gradients topologiques associé au problème d'optimisation (P). Pour déterminer un champ de gradient topologique, deux méthodes peuvent être utilisées : soit en utilisant la formule proposée par Feijoo et al. (2005) (détaillée par la suite,) soit par le calcul direct des dérivées du critère étudié selon la présence d'un élément. Dans la littérature (Suresh & Takaloozadeh (2013)), le champ des gradients topologiques des contraintes de  $R_m$  étant évalué par la formule proposée par Feijoo et al. (2005), nous considérons cette technique pour déterminer le champ associé à la fonction d'agrégation  $G_\sigma$  des contraintes de  $R_m$ . En ce qui concerne la contrainte de flambage  $G_\lambda$ , nous utilisons le calcul direct des dérivées de la fonction associée (Bian et al. (2015); Bian & Fang (2017)).

Pour rappel, pour agréger les contraintes de  $R_m$ , nous considérons la fonction  $G_\sigma$  suivante :

$$G_\sigma(x) := \frac{1}{P} \ln\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp^{P \cdot g_i(x)}\right) \leq 0, \quad \text{où } g_i(x) = x_i \left(\frac{\sigma_i(x)}{\bar{\sigma}} - 1\right) \quad (5.21)$$

Afin d'utiliser la formule de Feijoo et al. (2005), la première étape pour déterminer le champ topologique  $T_\sigma$  associé à  $G_\sigma$  consiste à résoudre le problème dit *état adjoint* suivant :

$$K\mu = -\frac{\partial G_\sigma}{\partial \tilde{u}} \quad (5.22)$$

où  $K$  est la matrice de rigidité,  $\mu$  est la variable adjointe et  $\tilde{u}$  correspond à un vecteur des degrés de liberté nodaux. Nous proposons de déterminer le terme  $-\frac{\partial G_\sigma}{\partial \tilde{u}}$  à partir de l'expression suivante :

$$-\frac{\partial G_\sigma}{\partial \tilde{u}} = -\frac{1}{P} \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp^{P \cdot g_i(x)}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ P \frac{x_i}{\bar{\sigma}} \exp^{P \cdot g_i(x)} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tilde{u}} \right] \quad (5.23)$$

où  $[\ ]$  correspond à l'opérateur d'assemblage par blocs. Afin d'exprimer le terme  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \tilde{u}}$ , rappelons que le critère de  $\sigma_i$  de Von Mises est donné par l'expression suivante :

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x^i - \sigma_y^i)^2 + (\sigma_x^i - \sigma_z^i)^2 + (\sigma_y^i - \sigma_z^i)^2 + 6((\sigma_{xy}^i)^2 + (\sigma_{xz}^i)^2 + (\sigma_{yz}^i)^2)} \quad (5.24)$$

où les composantes  $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i$  et  $\sigma_{yz}^i$  sont évaluées à l'aide des degrés de liberté nodaux  $\tilde{u}_i$  de l'élément  $i$  (dans le cas d'un hexaèdre,  $\tilde{u}_i \in \mathbb{R}^{24}$ ) par la formule de Hooke (Chapitre 2 - Section 1) :

$$(\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i, \sigma_{yz}^i)^\top = HB_i \tilde{u}_i \quad (5.25)$$

où  $H \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est la matrice de Hooke caractérisant les propriétés du matériau et  $B_i$  est la matrice des déformations de l'élément  $i$  (dans le cas d'un hexaèdre,  $B_i \in \mathbb{R}^{6 \times 24}$ ). Ainsi, la dérivée de  $\sigma_i$  par rapport à un déplacement  $\tilde{u}$  peut être exprimé comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tilde{u}} = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2}} & \left( (\sigma_x^i - \sigma_y^i) \left( \frac{\partial \sigma_x^i}{\partial \tilde{u}} - \frac{\partial \sigma_y^i}{\partial \tilde{u}} \right) + (\sigma_x^i - \sigma_z^i) \left( \frac{\partial \sigma_x^i}{\partial \tilde{u}} - \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial \tilde{u}} \right) \right. \\ & \left. + (\sigma_y^i - \sigma_z^i) \left( \frac{\partial \sigma_y^i}{\partial \tilde{u}} - \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial \tilde{u}} \right) + 6 \left( \sigma_{xy}^i \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial \tilde{u}} + \sigma_{xz}^i \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial \tilde{u}} + \sigma_{yz}^i \frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial \tilde{u}} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

A l'aide de l'équation (5.25), on note que les différentes dérivées des composantes  $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i, \sigma_{xy}^i, \sigma_{xz}^i$  et  $\sigma_{yz}^i$  par rapport à un déplacement  $\tilde{u}$  sont constantes et correspondent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^i}{\partial \tilde{u}} = F_{1,:}, \quad \frac{\partial \sigma_y^i}{\partial \tilde{u}} = F_{2,:}, \quad \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial \tilde{u}} = F_{3,:}, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^i}{\partial \tilde{u}} = F_{4,:}, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial \tilde{u}} = F_{5,:}, \quad \frac{\partial \sigma_{yz}^i}{\partial \tilde{u}} = F_{6,:} \end{aligned} \quad (5.27)$$

où  $F = HB \in \mathbb{R}^{6 \times 24}$  et  $F_{i,:} \forall i = 1, \dots, 6$  correspond aux lignes de la matrice  $F$ . Nous sommes donc en mesure d'exprimer le terme  $\frac{\partial G_\sigma}{\partial \tilde{u}}$  par :

$$-\frac{\partial G_\sigma}{\partial \tilde{u}} = -\frac{1}{\sum_{i=1}^N \exp^{P.g_i(x)}} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{x_i}{\bar{\sigma}} \exp^{P.g_i(x)} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\sigma_x^i - \sigma_y^i)(F_{1,:} - F_{2,:}) + \\ (\sigma_x^i - \sigma_z^i)(F_{1,:} - F_{3,:}) + \\ (\sigma_y^i - \sigma_z^i)(F_{2,:} - F_{3,:}) + \\ 6\sigma_{xy}^i F_{4,:} + 6\sigma_{xz}^i F_{5,:} + \\ 6\sigma_{yz}^i F_{6,:} \end{pmatrix} \right] \quad (5.28)$$

Ensuite, la variable adjointe  $\mu$  peut être déterminée en résolvant l'état adjoint (5.22) par la méthode du gradient conjugué en base réduite et le champ  $T_\sigma$  est défini par (Feijoo et al. (2005)) :

$$T_\sigma(x_i) = -\frac{4}{1+\nu} \sigma(u(x_i)) : \epsilon(\mu(x_i)) + \frac{1-3\nu}{1-\nu^2} tr(\sigma(u(x_i))) tr(\epsilon(\mu(x_i))) \quad (5.29)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\sigma(u)$  le tenseur des contraintes selon le vecteur des degrés de liberté nodaux  $u$  de l'élément  $i$  et  $\epsilon(\mu)$  est le tenseur des déformations (voir Chapitre 2) du vecteur adjoint  $\mu$  de l'élément  $i$ . L'opérateur  $:$  correspond au produit de deux matrices de même dimension composante par composante, puis de la somme de l'ensemble de ces produits. L'opérateur  $tr$  est l'opérateur trace d'une matrice.

Pour déterminer le champ topologique  $T_\lambda$  associé au flambage, nous calculons la dérivée de la contrainte de flambage  $G_\lambda$  par rapport à la présence d'un élément  $x_i$ . L'expression est la suivante :

$$\frac{dG_\lambda}{dx_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 2v_i^\top (K + K_\sigma) \frac{dv_i}{dx_i} + v_i^\top \left( \frac{dK}{dx_i} + \frac{dK_\sigma}{dx_i} \right) v_i \quad (5.30)$$

La principale difficulté pour évaluer (5.30) réside dans l'analyse du terme  $\frac{dK_\sigma}{dx_i}$ . En effet, la matrice  $K_\sigma$  dépend des variables de conception et du champ de contraintes  $\sigma$  de chaque élément, dépendant lui aussi des variables de conception. L'évaluation de l'expression (5.30) peut être réalisée de trois manières : soit par une méthode par différences finies, soit par une méthode dite directe, soit par une méthode basée sur des variables adjointes. Dans les paragraphes suivants, nous présentons ces trois méthodes ainsi que leurs avantages et inconvénients.

### Méthode des différences finies

L'analyse par *différences finies* est la méthode simple pour évaluer (5.30). Elle consiste à comparer la valeur de  $G_\lambda$  lorsque l'élément  $i$  est présent ( $x_i = 1$ ) puis lorsqu'il est absent ( $x_i = 0$ ). Cependant, lorsqu'un grand nombre de variables est considéré, ce type de méthode n'est pas viable puisque chaque calcul  $G_\lambda$  implique la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisé de grande dimension. Ainsi, cette méthode n'a pas été considérée par la suite.

### Méthode directe

La méthode *directe* consiste à déterminer analytiquement le terme  $\frac{dK_\sigma}{dx_i}$  dont l'expression est la suivante :

$$\frac{dK_\sigma}{dx_i} = \frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} \quad (5.31)$$

où  $\hat{\sigma} = \{\sigma_x^1, \sigma_y^1, \sigma_z^1, \sigma_{xy}^1, \sigma_{xz}^1, \sigma_{yz}^1, \dots, \sigma_x^N, \sigma_y^N, \sigma_z^N, \sigma_{xy}^N, \sigma_{xz}^N, \sigma_{yz}^N\}$  correspond au vecteur de l'ensemble des composantes du champs de contraintes  $\sigma$  des  $N$  éléments. Pour des raisons de simplifications, on le notera par la suite :

$$\hat{\sigma} = \{\sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma_3^1, \sigma_4^1, \sigma_5^1, \sigma_6^1, \dots, \sigma_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N, \sigma_4^N, \sigma_5^N, \sigma_6^N\}$$

Notons que le second terme de l'équation (5.31) peut être reformulé tel que :

$$\frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^6 \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}_k^j} \frac{d\hat{\sigma}_k^j}{dx_i} \quad (5.32)$$

Or, pour un élément  $j$ , la matrice de rigidité géométrique élémentaire ne dépend que du champ de contrainte de cet élément  $j$ . Donc on a par définition :

$$\frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}_k^j} = \left[ \int_{\Omega_j} G^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial s_j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial s_j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial s_j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} \end{pmatrix} G d\Omega_j \right] \quad \text{où} \quad \frac{\partial s_j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & \frac{\partial \sigma_4^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & \frac{\partial \sigma_5^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} \\ \frac{\partial \sigma_2^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & \frac{\partial \sigma_2^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & \frac{\partial \sigma_6^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} \\ \frac{\partial \sigma_3^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & \frac{\partial \sigma_6^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} & \frac{\partial \sigma_3^j}{\partial \hat{\sigma}_k^j} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Pour chaque composante  $\hat{\sigma}_k^j, \forall k = 1, \dots, 6$ , le calcul de  $\frac{\partial s_j}{\partial \hat{\sigma}_k^j}$  mène à des matrices binaires.

Par exemple, pour  $k = 2$ , on a :

$$\frac{\partial s_j}{\partial \hat{\sigma}_2^j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Comme présenté par (Browne et al. (2012)), le calcul du terme  $\frac{d\hat{\sigma}_k^j}{dx_i}$  nécessite de résoudre un système linéaire impliquant la matrice de rigidité  $K$ . Ainsi, pour déterminer le terme  $\frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i}$ ,

il est nécessaire de résoudre  $N$  systèmes linéaires. Par conséquent, cette technique n'est pas viable pour une optimisation topologique de structures continues où le nombre de variables de conception est important.

### Méthode adjointe

La méthode *adjointe* consiste à introduire des variables dites adjointes dans le calcul des dérivées de  $G_\lambda$  par rapport à la présence d'un élément  $x_i$ . Un choix judicieux de ces variables adjointes permet d'éliminer les termes impliquant un coût numérique important. Afin de déterminer la valeur de (5.30), nous proposons de considérer dans l'expression de  $G_\lambda$  les variables adjointes suivantes :  $\gamma_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^{6N}$  et  $w \in \mathbb{R}^{3M}$ . Nous obtenons la formulation suivante :

$$G_\lambda := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( v_i^\top (K + K_\sigma) v_i + \gamma_i (1 - v_i^\top K v_i) \right) + \beta^\top (\hat{\sigma} - Y u) + w^\top (f - K u) \quad (5.35)$$

où  $Y \in \mathbb{R}^{6N \times n} := \sum_{i=1}^N [(HB)_i]$  correspond à l'assemblage par blocs du produit des matrices de Hooke  $H$  et de déformations éléments finis  $B$  définies pour chaque élément  $i$ , et  $\hat{\sigma} := \{\sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma_3^1, \sigma_4^1, \sigma_5^1, \sigma_6^1, \dots, \sigma_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N, \sigma_4^N, \sigma_5^N, \sigma_6^N\}$  est le vecteur de l'ensemble des composantes des champs de contraintes  $\sigma$ .

La dérivation de l'équation (5.35) par rapport à un élément  $x_i$  nous mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dG_\lambda}{dx_i} = & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( 2v_i^\top (K + K_\sigma) \frac{dv_i}{dx_i} + v_i^\top \left( \frac{dK}{dx_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} \right) v_i \right. \\ & \left. - \gamma_i \left( 2v_i^\top K \frac{dv_i}{dx_i} + v_i^\top \frac{dK}{dx_i} v_i \right) \right) + \beta^\top \left( \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} - \frac{dY}{dx_i} u - Y \frac{du}{dx_i} \right) - w^\top \left( \frac{dK}{dx_i} u + K \frac{du}{dx_i} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Les variables adjointes  $\gamma_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m$  sont déterminées afin d'éliminer les termes  $\frac{dv_i}{dx_i}$  de l'équation (5.36) :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dx_i} (K + K_\sigma) v_i &= \gamma_i \frac{dv_i}{dx_i} K v_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \Leftrightarrow \frac{dv_i}{dx_i} ((1 - \gamma_i) K + K_\sigma) v_i &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.37)$$

Or, nous savons que  $(K + \lambda_i K_\sigma) v_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$ . Ainsi, il suffit de choisir les variables adjointes  $\gamma_i, \forall i = 1, \dots, m$  telles que :

$$\gamma_i = 1 - \frac{1}{\lambda_i}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (5.38)$$

Ainsi l'équation (5.36) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dG_\lambda}{dx_i} = & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( v_i^\top \left( \frac{dK}{dx_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} \right) v_i - \gamma_i v_i^\top \frac{dK}{dx_i} v_i \right) \\ & + \beta^\top \left( \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} - \frac{dY}{dx_i} u - Y \frac{du}{dx_i} \right) - w^\top \left( \frac{dK}{dx_i} u + K \frac{du}{dx_i} \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

La variable adjointe  $\beta$  est choisie telle que le terme  $\frac{d\sigma}{dx_i}$  soit éliminé de l'équation (5.39) :

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i^\top \left( \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} \right) v_i + \beta^\top \frac{d\hat{\sigma}}{dx_i} = 0 \quad (5.40)$$

Après factorisation et réarrangement, la variable adjointe  $\beta$  correspond à (Van den Boom (2014); Bian & Fang (2017)) :

$$\beta^\top = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i^\top \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} v_i \quad (5.41)$$

où le terme  $\frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}}$  correspond à l'assemblage suivant :

$$\frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^6 \frac{\partial K_\sigma}{\partial \hat{\sigma}_{ik}} \quad (5.42)$$

L'équation (5.39) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dG_\lambda}{dx_i} = & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( v_i^\top \left( \frac{dK}{dx_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i} \right) v_i - \gamma_i v_i^\top \frac{dK}{dx_i} v_i \right) \\ & - \beta^\top \left( \frac{dY}{dx_i} u + Y \frac{du}{dx_i} \right) - w^\top \left( \frac{dK}{dx_i} u + K \frac{du}{dx_i} \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

La dernière variable adjointe  $w$  est choisie telle que le terme  $\frac{du}{dx_i}$  soit supprimé de l'équation (5.43) :

$$\beta^\top Y \frac{du}{dx_i} + w^\top K \frac{du}{dx_i} = 0 \quad (5.44)$$

On en déduit que la variable adjointe  $w$  est solution du système suivant :

$$Kw = -Y^\top \beta \quad (5.45)$$

Ainsi, le calcul de  $\frac{dG_\lambda}{dx_i}$  devient :

$$\frac{dG_\lambda}{dx_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( v_i^\top \left( \frac{dK}{dx_i} + \frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i} \right) v_i - \gamma_i v_i^\top \frac{dK}{dx_i} v_i \right) - \beta^\top \frac{dY}{dx_i} u - w^\top \frac{dK}{dx_i} u \quad (5.46)$$

Ainsi, en résolvant un seul système linéaire supplémentaire, nous sommes en mesure d'évaluer l'expression (5.46) pour chaque variable de conception  $x_i$ , réduisant par conséquent les temps de calcul. Notons que les termes restants dans l'équation (5.46) sont simples à calculer :

$$\frac{dK}{dx_i} = [K_i] \quad ; \quad \frac{\partial K_\sigma}{\partial x_i} = [K_\sigma^i] \quad \text{et} \quad \frac{dY}{dx_i} = [(HB)_i]$$

où  $K_i$  et  $K_\sigma^i$  sont respectivement les matrices de rigidité élémentaire et de rigidité géométrique élémentaire de l'élément  $i$ , et  $[\ ]$  est l'opérateur d'assemblage par blocs.



### 5.3.3 Algorithme de résolution

Dans la section 1.3.1, nous avons illustré le fonctionnement de l'algorithme d'optimisation basé sur un seul champ de gradients topologiques. Dans le cas où plusieurs champs de gradients topologiques sont considérés, une approche pour construire un unique champ  $T_w$  consiste à définir une somme pondérée des différents champs (Suresh et al. (2012)). Dans le problème d'optimisation (P) considéré, nous disposons de deux champs de gradients topologiques : un pour les contraintes de  $R_m$ , noté  $T_\sigma$ , et un pour la contrainte de flambage, noté  $T_\lambda$ . Nous proposons de combiner les champs  $T_\sigma$  et  $T_\lambda$  à travers la formule suivante :

$$T_w = T_\sigma + \frac{1}{(\lambda_{cr})^2} T_\lambda \quad (5.47)$$

où  $T_w$  est le champ de gradient topologique pondéré et  $\lambda_{cr}$  est la charge critique de flambage. Par cette formulation, nous proposons une gestion dynamique du champ  $T_\lambda$  associé à la contrainte de flambage. En effet, si la valeur de  $\lambda_{cr}$  est proche de 1, alors le champ  $T_\lambda$  est nécessaire pour optimiser la structure. Dans le cas où  $\lambda_{cr}$  est largement supérieur à 1, alors la structure a une importante résistance au flambage, ainsi il n'est pas nécessaire de considérer  $T_\lambda$  dans  $T_w$ .

Au sein du problème d'optimisation (P), il est important de noter qu'une des difficultés de la contrainte d'agrégation  $G_\sigma$  est de ne pas garantir que toutes les contraintes de  $R_m$  du problème initial (5.5) soient vérifiées (i.e.  $\exists i \mid \sigma_i \geq \bar{\sigma}$ ). Concernant la contrainte de flambage, l'équivalence entre les équations (5.7) et (5.8) n'est pas vraie : une structure peut ne pas résister au flambage (i.e.  $\lambda_{cr} < 1$ ) et vérifier l'équation (5.9) pour les  $m > 1$  premiers vecteurs propres. Ainsi, au cours de l'optimisation, l'itéré ne peut être accepté que si les contraintes du problème initial (5.5) (i.e.  $\lambda_{cr} \geq 1$  et  $\sigma_i - \bar{\sigma} \leq 0 ; \forall i = 1, \dots, N$ ) sont bien vérifiées.

La procédure proposée est présentée dans l'Algorithme 8.

---

**Algorithm 8** Algorithme d'optimisation de structure continues

---

**input:**  $\Delta\alpha, \Delta\alpha_{min}, \overline{\Delta G_\sigma}, \bar{\sigma}$

- 1: Initialisation :  $\alpha = 1, \Omega := \{x_i = 1, \forall i = 1, \dots, N\}$
  - 2:  $\Omega^* \leftarrow \Omega$
  - 3: Résolution de  $Ku = f$  et  $(K + \lambda K_\sigma)v = 0$  pour  $\Omega$
  - 4: Calcul de  $T_\sigma, T_\lambda$  et  $T_w$
  - 5: **while**  $\Delta\alpha \geq \Delta\alpha_{min}$  **do**
  - 6:      $\alpha \leftarrow \alpha - \Delta\alpha$
  - 7:     Déterminer  $\tau$  tel que  $|\Omega^\tau = \{x_i \mid T_w(x_i > \tau)\}| = \alpha$
  - 8:     Résolution de  $Ku = f$  et  $(K + \lambda K_\sigma)v = 0$
  - 9:     Calcul de  $\lambda_{cr}$  et  $\sigma_i, \forall i = 1, \dots, N$
  - 10:     **if**  $\left( \frac{|G_\sigma(\Omega^*) - G_\sigma(\Omega^\tau)|}{|G_\sigma(\Omega^*)|} \leq \overline{\Delta G_\sigma} \right) \& (1 \leq \lambda_{cr}) \& (\sigma_i \leq \bar{\sigma} ; \forall i = 1, \dots, N)$  **then**
  - 11:         Calcul de  $T_\sigma, T_\lambda$  et  $T_w$
  - 12:          $\Omega^* \leftarrow \Omega^\tau$
  - 13:     **else**
  - 14:          $\alpha \leftarrow \alpha + \Delta\alpha$
  - 15:          $\Delta\alpha \leftarrow \frac{\Delta\alpha}{2}$
  - 16:     **end if**
  - 17: **end while**
- output:**  $\Omega^*$
-

## 5.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous analysons dans un premier temps les performances de l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage. Ensuite, nous étudions l'influence du nombre de modes propres de flambage considéré lors de la résolution du problème d'optimisation (P). Enfin, nous présentons les résultats numériques obtenus sur une application aéronautique.

Dans toutes les applications, le matériau considéré est l'aluminium dont le module de Young est fixé à 72 000 MPa et le coefficient de Poisson à 0,33. La densité d'aluminium est de 0,00285 g.mm<sup>-3</sup>. Nous considérons des éléments tri-dimensionnels de type cube pour discrétiser l'ensemble des structures étudiées dans cette section.

Dans le problème d'optimisation (P), la valeur de  $\bar{\sigma}$  est de 510 MPa. Basé sur les expériences numériques, nous fixons le paramètre  $P$  dans la fonction d'agrégation des contraintes de  $R_m$  à 4, le seuil  $\Delta G_\sigma$  d'acceptation de variation de la fonction  $G_\sigma$  est quant à lui fixé à 0,01. La fraction de matière  $\Delta\alpha$  est initialisée à 0,1. Le seuil  $\Delta\alpha_{min}$  est fixé à une valeur de 1 sur le nombre d'éléments issus de la discrétisation du domaine de conception. Ce rapport correspond au volume occupé par un élément au sein de la structure initiale. Ainsi, l'algorithme de résolution s'arrête lorsqu'il n'est plus possible de supprimer un élément de la structure.

Les Algorithmes 5, 7 et 8 (respectivement la méthode du gradient conjugué en base réduite, la résolution du problème aux valeurs propres généralisé et l'algorithme d'optimisation) ont été implémentés en Fortran. Dans la méthode du gradient conjugué en base réduite, la tolérance de convergence est fixée à  $10^{-9}$ . Dans l'Algorithme 7, le seuil de convergence du calcul des vecteurs propres est fixé à  $10^{-4}$ . Nous utilisons la librairie LAPACK (Anderson et al. (1999b)) pour résoudre les systèmes linéaires et les problèmes aux valeurs propres généralisé de petites dimensions. Les codes ont été exécutés sur un ordinateur 32-bit Linux OS avec un Intel(R) Core(TM) i7-4710MQ CPU @ 2.50GHz et 16GB RAM.

### 5.4.1 Performance du calcul des valeurs propres

Dans cette section, nous discutons des performances de l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres généralisé sur une structure en L illustrée dans la Figure 5.9. Les dimensions de la structure sont  $h$ , égale à 192 mm,  $l$ , égale à 96 mm,  $c$ , égale 84 mm et  $e$  égale à 12 mm. La zone hachurée correspond à un encastrement (i.e. tous les degrés de liberté sont bloqués). Le chargement  $F$  est réparti uniformément sur la zone en rouge de la Figure 5.9 et est égal à 35 000 N.

En amont de la résolution du problème aux valeurs propres généralisé, trois paramètres doivent être définis : la finesse de discrétisation de la structure, le nombre de groupes d'agglomération utilisé pour construire l'espace réduit dans la méthode du gradient conjugué en base réduite et la dimension de l'espace de recherche  $V$  des vecteurs propres. Par la suite, nous illustrerons le rôle de ces trois paramètres sur le calcul des 3 premières valeurs propres de flambage (i.e.  $m = 3$  dans l'Algorithme 7) associées à la structure étudiée.

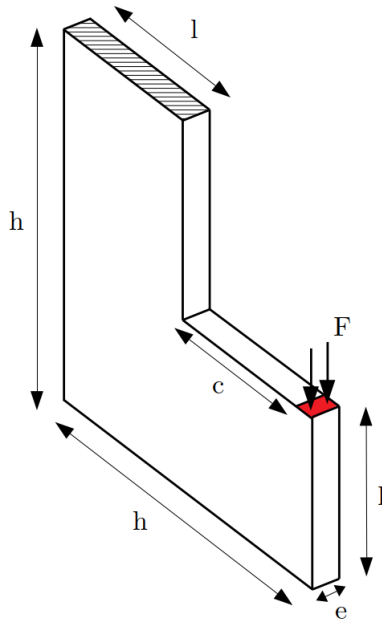


FIGURE 5.9 – Structure en L étudiée

Dans un premier temps, considérons la dimension de l'espace de recherche  $V$  égale à 7 (i.e.  $\tilde{m} = 7$  dans l'Algorithme 7) et le nombre de groupes d'agglomération égal à 150. Pour différents niveaux de discrétisation de la structure, nous rapportons dans le Tableau 5.1 les temps de calcul et les valeurs propres obtenues.

Le niveau de discrétisation de la structure est directement lié à la dimension  $\ell$  du cube considérée pour représenter la structure (illustrée dans la Figure 5.9). Dans le cas où  $\ell$  est égal à 4 mm, la discrétisation génère 5 184 éléments et 7 300 noeuds. Trois degrés de liberté étant associés à chaque noeud, on obtient 21 900 degrés de liberté auxquels il faut soustraire ceux fixés par la zone d'encastrement. Celle-ci étant discrétisée en 100 noeuds, le nombre de degré de liberté final est de 21 600 pour cette discrétisation.

On note que plus le nombre de degrés de liberté est important, plus les valeurs propres obtenues sont précises : pour les deux discrétisations les plus fines (148 176 et 1 089 504 degrés de liberté), des différences de l'ordre de 1 % entre les différentes valeurs propres sont constatées. Cette observation pouvait être attendue puisque plus la discrétisation est fine, plus l'analyse du comportement de la structure est précise. Cependant, la discrétisation la plus fine générant une dimension des systèmes engendrés plus importante, les temps de calcul sont multipliés par un facteur de 14,6 entre les deux discrétisations les plus fines.

TABLE 5.1 – Temps de calcul et valeurs propres obtenues pour différentes discrétisation de la structure en L

Dimension $\ell$ du cube (mm)	Nombre de degrés de liberté	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Temps de calcul
4	21 600	2,82	7,274	11,922	22,2s
3	47 520	2,755	7,169	11,664	59.7s
2	148 176	2,708	7,09	11,473	4min 56s
1	1 089 504	2,678	7,038	11,352	72min 7s

Rappelons que par la méthode proposée pour résoudre le problème aux valeurs propres généralisé permet d’obtenir, les valeurs propres sont déterminées par ordre croissant selon leur module. Ainsi les trois premières valeurs propres obtenues peuvent ne pas correspondre aux valeurs propres de flambage recherchées. En effet, nous avons pu observer que les trois plus petites valeurs propres positives correspondent respectivement au second, troisième et cinquième plus petit module. Par conséquent, la dimension de l’espace de recherche  $V$  doit être au moins de 5 pour pouvoir déterminer ces valeurs propres. Dans le cadre d’une optimisation de structure, l’ordre des valeurs propres en module pouvant varier, il est nécessaire de définir une dimension de l’espace de recherche suffisamment grand afin de garantir d’obtenir toutes les valeurs propres recherchées.

Pour analyser l’augmentation des temps de calcul, nous rapportons, dans le Tableau 5.2 pour l’exemple considéré, le nombre de produits de la matrice de rigidité  $K$  par un vecteur  $v$ , le nombre de produits de la matrice de rigidité géométrique  $K_\sigma$  par un vecteur  $v$  ainsi que les temps de calcul pour évaluer chacun de ces produits. L’augmentation des temps de calcul est liée au nombre de produits  $Kv$  de plus en plus important au fur et mesure que le nombre de degrés de liberté augmente. Il est important noter que les produits  $Kv$  interviennent majoritairement dans la résolution de systèmes linéaires et que le nombre de groupes d’agglomération a une grande importance dans la vitesse de convergence de la méthode du gradient conjugué en base réduite (Yadav & Suresh (2014)). On note aussi que le produit  $K_\sigma v$  est en moyenne 7 fois plus coûteux en temps de calcul que le produit  $Kv$ , justifiant notre approche de réaliser un minimum de produits  $K_\sigma v$ .

TABLE 5.2 – Temps de calcul pour différentes discrétisations de la structure en L

Nombre de degrés de liberté	Nombre de produits $Kv$	Temps de calcul d’un produit $Kv$	Nombre de produits $K_\sigma v$	Temps de calcul d’un produit $K_\sigma v$
21 600	20 812	0.002	318	0.015
47 520	26 258	0.005	302	0.035
148 176	40 496	0.016	378	0.12
1 089 504	78 803	0.135	391	0.98

Afin d'illustrer l'influence du nombre de groupes d'agglomération sur le calcul de valeurs propres de flambage, considérons un nombre de degrés de liberté égal à 1 089 504 et la dimension de l'espace de recherche  $V$  des valeurs propres égal à 6. Pour différents nombres de groupes d'agglomération, nous rapportons dans le Tableau 5.3 les temps de calcul et le nombre de produit  $Kv$  pour déterminer les trois premières valeurs propres de flambage.

TABLE 5.3 – Temps de calcul selon différents nombres de groupes dans la méthode du gradient conjugué en base réduite

Nombres de groupes	Temps de calcul	Nombre de produit $Kv$
150	62min 9s	61 696
294	42min 24s	40 674
600	31min 21s	28 039
1764	30min 46s	19 961
2352	38min 9s	19 683

On observe qu'augmenter le nombre de groupes d'agglomération permet de réduire les temps de calcul et le nombre de produits  $Kv$  par un facteur 2. Il est important de noter que dans la méthode du gradient conjugué en base réduite, plus le nombre de groupes d'agglomération est important plus la dimension des systèmes réduits est importante, améliorant ainsi la convergence de la méthode. Cependant, on note que lorsque le nombre de groupes dépasse une certaine limite, la convergence peut être ralentie car la dimension des systèmes réduits devient trop importante, bien que le nombre de produit  $Kv$  reste stable.

Enfin, nous illustrons l'influence de la dimension de l'espace de recherche  $V$  des valeurs propres dans l'Algorithme 7. Considérons de nouveau la discrétisation de la structure avec 1 089 504 de degrés de liberté et un nombre de groupes d'agglomération de 600. Dans le Tableau 5.4, nous rapportons les temps de calcul, le nombre d'itérations, et le nombre de produits  $Kv$  et  $K_{\sigma}v$  évalués pour converger vers les valeurs propres recherchées.

TABLE 5.4 – Temps de calcul selon la dimension de l'espace de recherche des valeurs propres pour la structure en L

Dimension de l'espace de recherche	Temps de calcul	Nombre d'itérations	Nombre de produit $Kv$	Nombre de produit $K_{\sigma}v$
5	49min 3s	33	27 777	506
6	31min 21s	18	28 099	328
7	36min 23s	18	34 952	389
8	38min 47s	17	39 117	428
9	44min 21s	15	41 043	422
10	49min 51s	15	45 089	463

Lorsque l'on compare les résultats obtenus pour des dimensions de l'espace de recherche de 5 et 6, nous observons un gain de temps de calcul de facteur 1,56 bien que le nombre de produits  $Kv$  reste stable. On en déduit que définir un espace de recherche plus grand permet d'améliorer

la convergence. En effet, le nombre d'itérations et le nombre de produits  $K_\sigma v$  diminue lorsque l'espace de recherche est augmenté. Néanmoins, lorsque cet espace est trop grand, bien que le nombre d'itérations pour converger vers les valeurs propres recherchées diminue, on note une augmentation des temps de calcul liée à un nombre plus important de produits  $Kv$ .

Ainsi, nous en déduisons que le nombre de groupes d'agglomérations et la dimension de l'espace de recherche jouent un rôle prépondérant dans la résolution du problème aux valeurs propres généralisé. Dans un problème d'optimisation sous des contraintes de flambage, un nombre important de résolutions de ce système est requis, ainsi une analyse au préalable de ces deux facteurs est à réaliser selon la discrétisation du domaine choisie.

### 5.4.2 Influence du nombre de modes propres de flambage dans l'optimisation

Dans cette section, nous étudions l'influence du nombre de modes propres de flambage utilisé lors de l'optimisation d'une structure en compression illustrée en Figure 5.10. Les dimensions de la structure sont  $l$ , égale à 240mm,  $h$ , égale à 42mm et  $e$ , égale à 6mm. Le chargement  $F$  est de 18 360 N et est appliqué uniformément sur la surface en rouge de la Figure 5.10. La zone hachurée représente un encastrement. On discrétise la structure à l'aide d'éléments cube d'une longueur de côté de 2mm, menant à 52 920 éléments et 175 644 degrés de liberté.

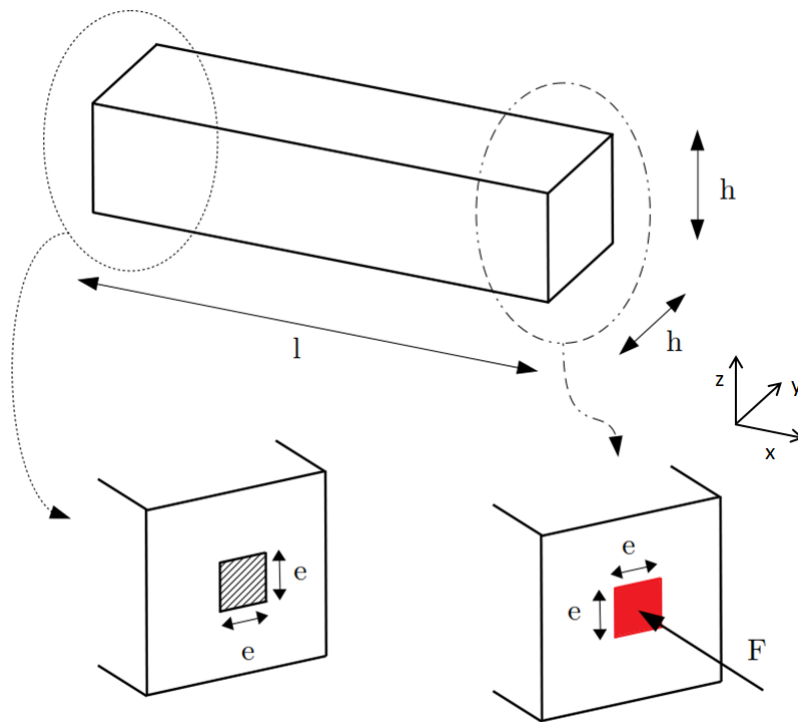


FIGURE 5.10 – Poutre en compression étudiée

Dans le Tableau 5.5, en faisant varier le nombre de modes de flambage considérés dans le problème d'optimisation (P), nous rapportons la masse, la charge critique de flambage, la contrainte de Von Mises maximale et les temps de calcul.

TABLE 5.5 – Masse, temps de calcul et charge critique de flambage obtenus pour le problème de la poutre en compression

Nombre de modes considérés	Masse (g)	Charge critique de flambage	Contrainte $\sigma_i$ maximale	Temps de calcul
0	35,38	0,039	448,95	4 min 7s
1	179,34	1,003	283,39	3h 33 min
4	149,47	1,002	372,91	5h 26 min
6	166,43	1.0006	287.61	8h 39min

Les Figures 5.11 et 5.12 présentent respectivement l'évolution de la masse structurale et de la charge critique de flambage en fonction du nombre de modes de flambage considérés. L'optimisation sans contrainte de flambage mène à une structure correspondant à une simple barre (Figure 5.13) d'une masse de 35,39 g dont la résistance au flambage est très faible puisque la charge critique est de 0,039. La prise en compte du premier mode de flambage dans l'optimisation mène à une structure (Figure 5.14) dont la masse est de 179,34 g. Lorsque nous considérons les quatre premiers modes de flambage, on note une réduction de 16,65% de la masse (Figure 5.16). Dans ces deux cas, la contrainte de flambage est active.

La comparaison des deux structures obtenues (Figure 5.15 et Figure 5.17) permet d'analyser ce gain de masse. Il est important de noter que dans le cas d'une poutre en compression, sa résistance au flambage est caractérisée par son moment d'inertie par rapport aux axes  $y$  et  $z$ . Pour quatre modes de flambage, on observe que la matière est disposé dans les coins du domaine de conception, générant une inertie plus importante et donc une meilleure résistance au flambage en comparaison avec un seul de mode de flambage. De plus, on remarque que la charge critique de flambage décroît moins rapidement pour quatre modes de flambage, permettant de mieux disposer la matière au sein de la structure et de générer une structure plus légère.

A partir de cette observation, une réduction supplémentaire de la masse pourrait être attendue lorsque l'optimisation considère les 6 premiers modes de flambage. Cependant, on obtient une masse de 166,43g correspondant à une augmentation de l'ordre de 11%. Il est important de noter que chaque mode de flambage correspond à une déformation de la structure. Ainsi, si le nombre de modes de flambage est important dans le problème d'optimisation, alors la structure est conçue pour résister à l'ensemble de ces déformations. On en déduit que considérer un trop grand nombre de modes de flambage peut être limitant lors de la conception d'une structure. Toutefois, on note que la structure obtenue avec 6 modes de flambage est 7,2% plus légère en comparaison d'une optimisation avec un seul mode de flambage.



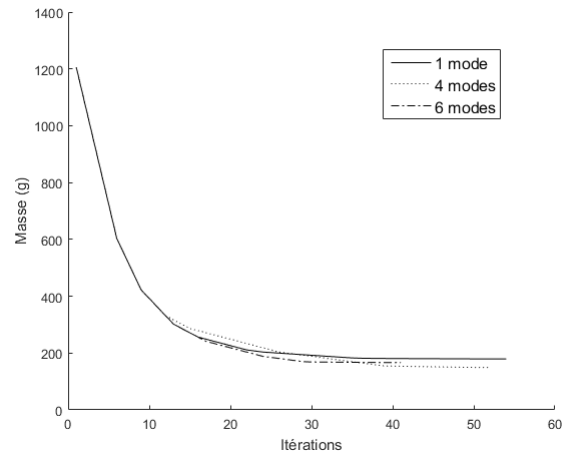


FIGURE 5.11 – Evolution de la charge critique de flambage selon le nombre de mode de flambage considéré

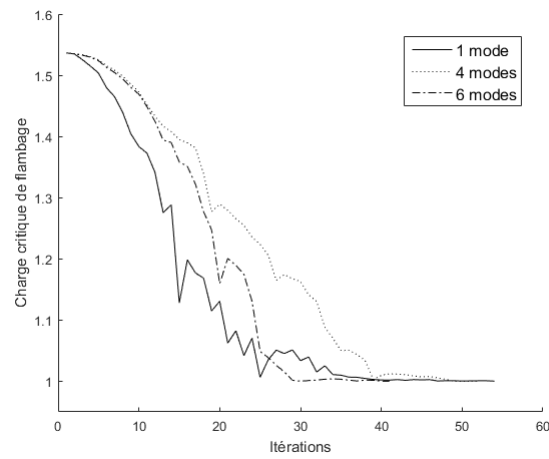


FIGURE 5.12 – Evolution de la charge critique de flambage selon le nombre de mode de flambage considéré

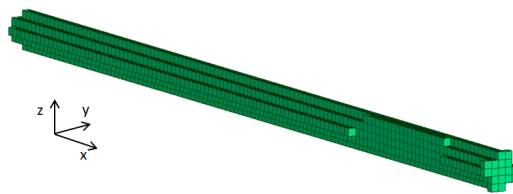


FIGURE 5.13 – Structure obtenue sans contrainte de flambage

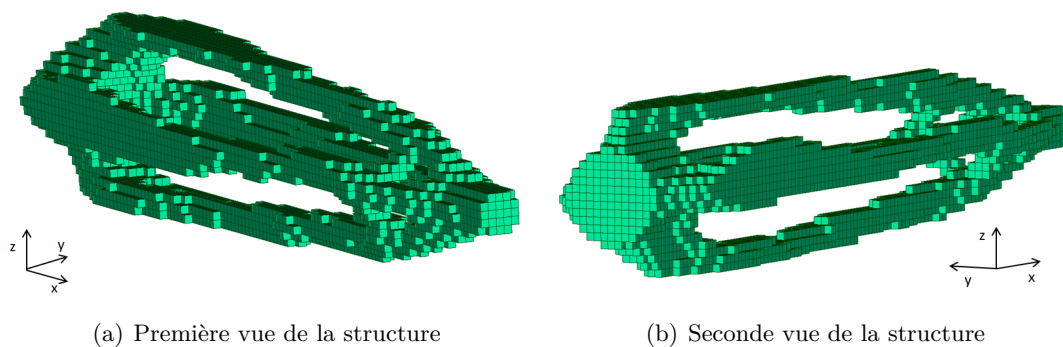


FIGURE 5.14 – Structure obtenue avec 1 mode de flambage

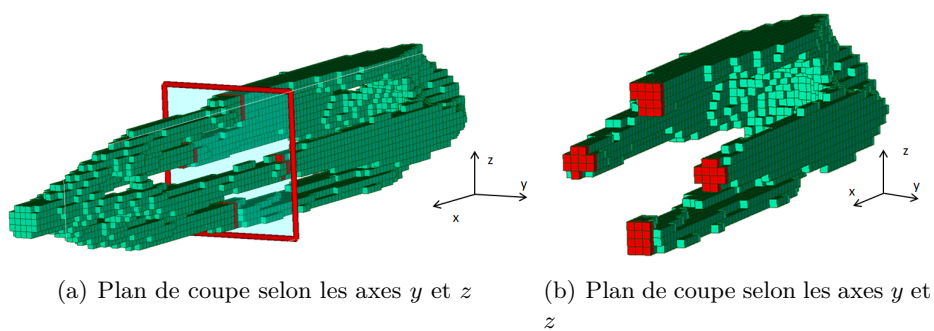


FIGURE 5.15 – Plan de coupe de la structure obtenue avec 1 mode de flambage

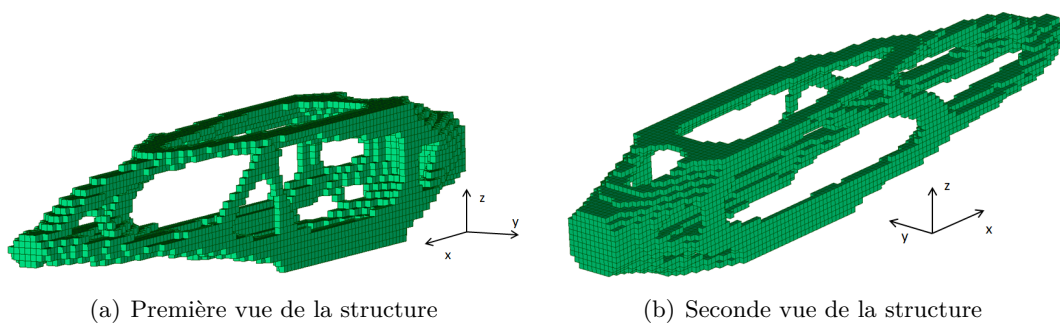


FIGURE 5.16 – Structure obtenue avec 4 modes de flambage

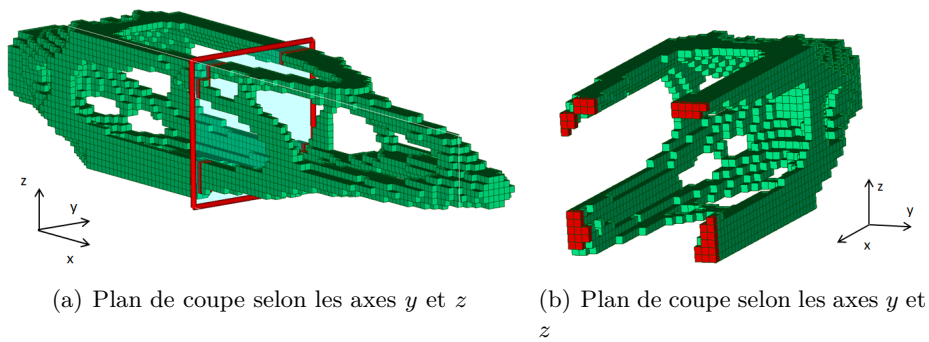


FIGURE 5.17 – Structure obtenue avec 4 modes de flambage

### 5.4.3 Application aéronautique

Dans cette section, nous discutons des résultats numériques obtenus à partir d'une structure aéronautique (illustrée en Figure 5.18) appelée *col de cygne*. Plusieurs de ces structures apparaissent sur les trappes du train d'atterrissage d'un avion. La zone en rouge correspond à un chargement de  $-13\,102$  N selon l'axe  $x$ , de  $12\,968$  N selon l'axe  $y$  et de  $1\,143$  N selon l'axe  $z$ . La zone hachurée représente un encastrement. On discrétise la structure à l'aide d'éléments cube d'une longueur de côté de  $4$  mm, menant à  $59\,940$  éléments et  $192\,672$  degrés de liberté.

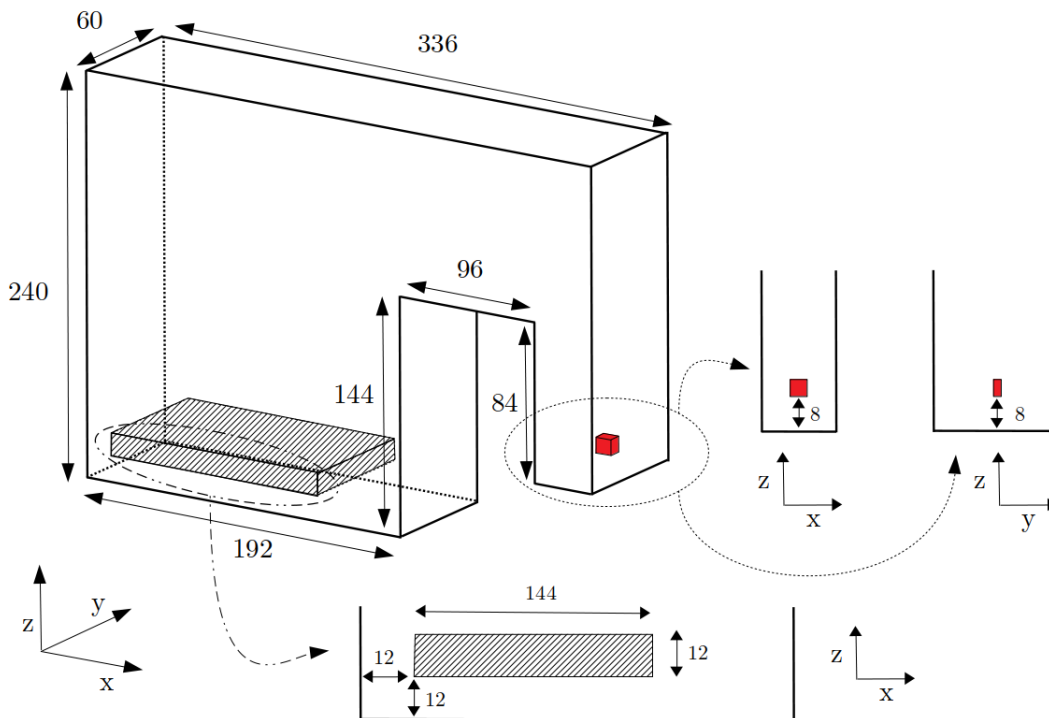


FIGURE 5.18 – Domaine de conception de la structure appelée *col de cygne*

Dans le Tableau 5.6, nous rapportons les temps de calcul, la masse de la structure et la charge critique de flambage obtenus lorsque la contrainte de flambage est considérée ou non dans le problème d’optimisation.

TABLE 5.6 – Masse, temps de calcul et charge critique de flambage obtenus pour le problème d’optimisation du col de cygne

Nombre de modes considérés	Masse (g)	Charge critique de flambage	Contrainte maximale $\sigma_i$	Temps de calcul
0	543,45	0,02	490,42	1h 4min
1	743,11	1,45	375,73	8h 35min

L’optimisation sans contrainte de flambage mène à une structure (Figure 5.20) d’une masse de 543,45 g dont la résistance au flambage est très faible puisque la charge critique est de 0,02. La prise en compte des phénomènes de flambage dans le problème d’optimisation conduit à obtenir une structure (Figure 5.21) d’une masse de 743,11 g, correspondant à une augmentation de 36% par rapport au cas sans flambage.

Dans la Figure 5.19, nous illustrons l’évolution de la charge critique de flambage au cours de l’optimisation. On observe que dans les premières itérations, les valeurs de la charge critique de flambage sont très importantes. Rappelons que dans l’algorithme de résolution du problème d’optimisation, le champ global  $T_w$  des gradients topologiques est une somme pondérée des champs des gradients topologiques  $T_\sigma$  et  $T_\lambda$ . En particulier, celui associé à la contrainte de flambage,  $T_\lambda$ , est multiplié par l’inverse de la charge critique au carré (voir la formule (5.47)). Ainsi, pour cette application, seul le champ  $T_\sigma$  des gradients topologiques lié aux contraintes de  $R_m$  pilote l’optimisation sur ces premières itérations. Cette observation explique la similarité des topologies obtenues dans les Figures 5.20 et 5.21.

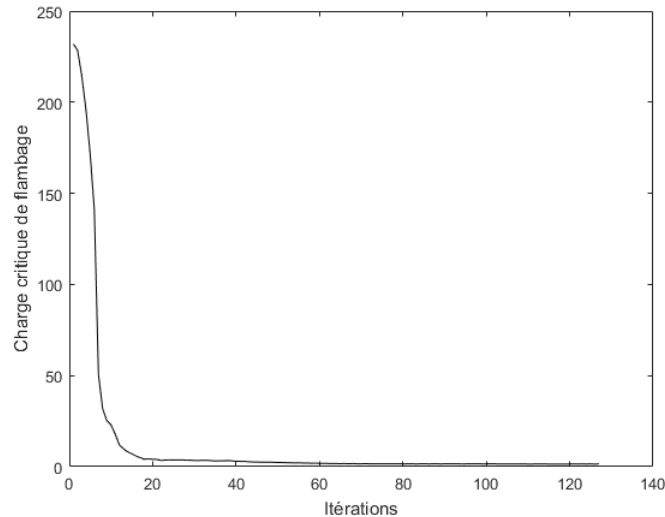
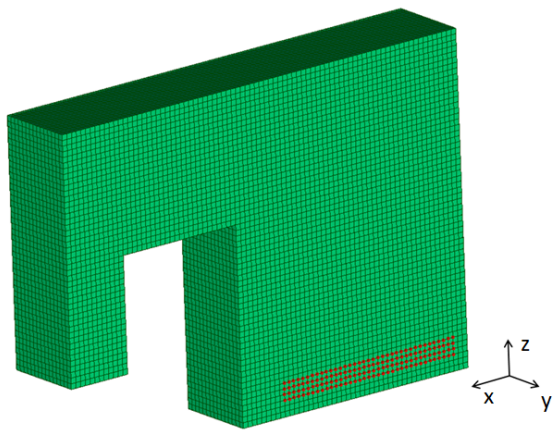
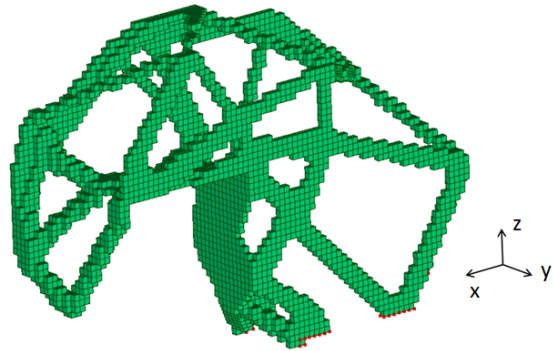


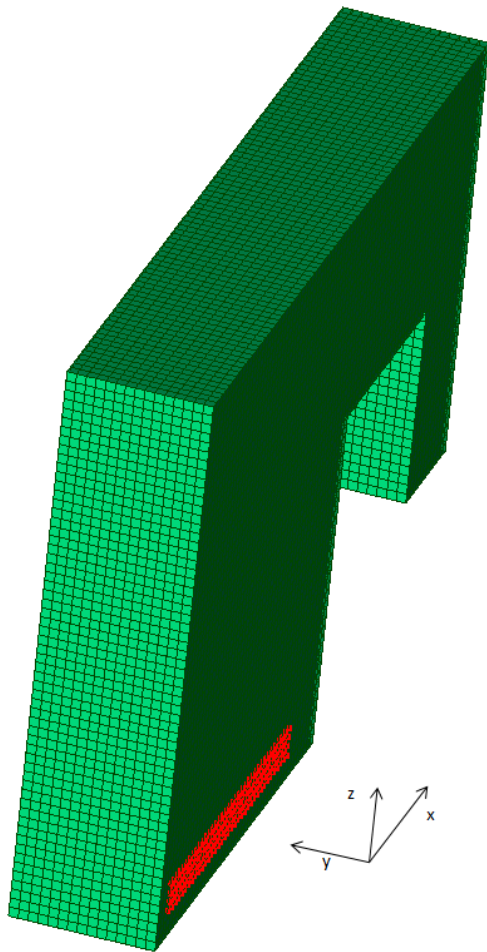
FIGURE 5.19 – Evolution de la charge critique de flambage



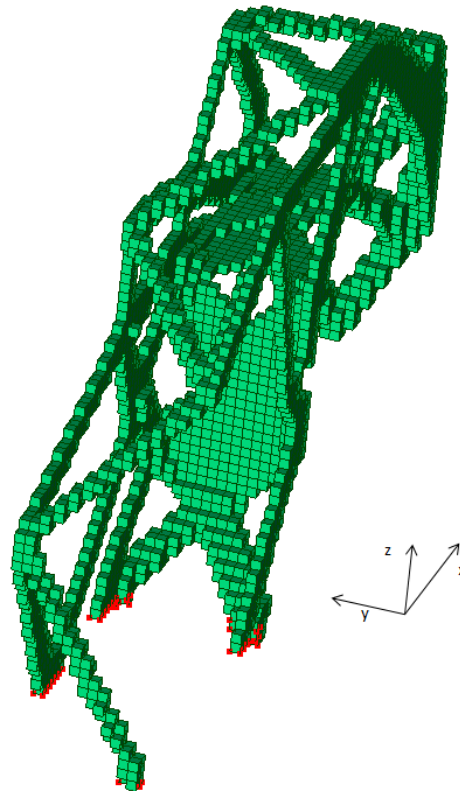
(a) Première vue de la structure initiale



(b) Première vue de la structure obtenue



(c) Seconde vue de la structure initiale



(d) Seconde vue de la structure obtenue

FIGURE 5.20 – Structure obtenue sans contrainte de flambage - les noeuds en rouge correspondent à la zone d'encastrement

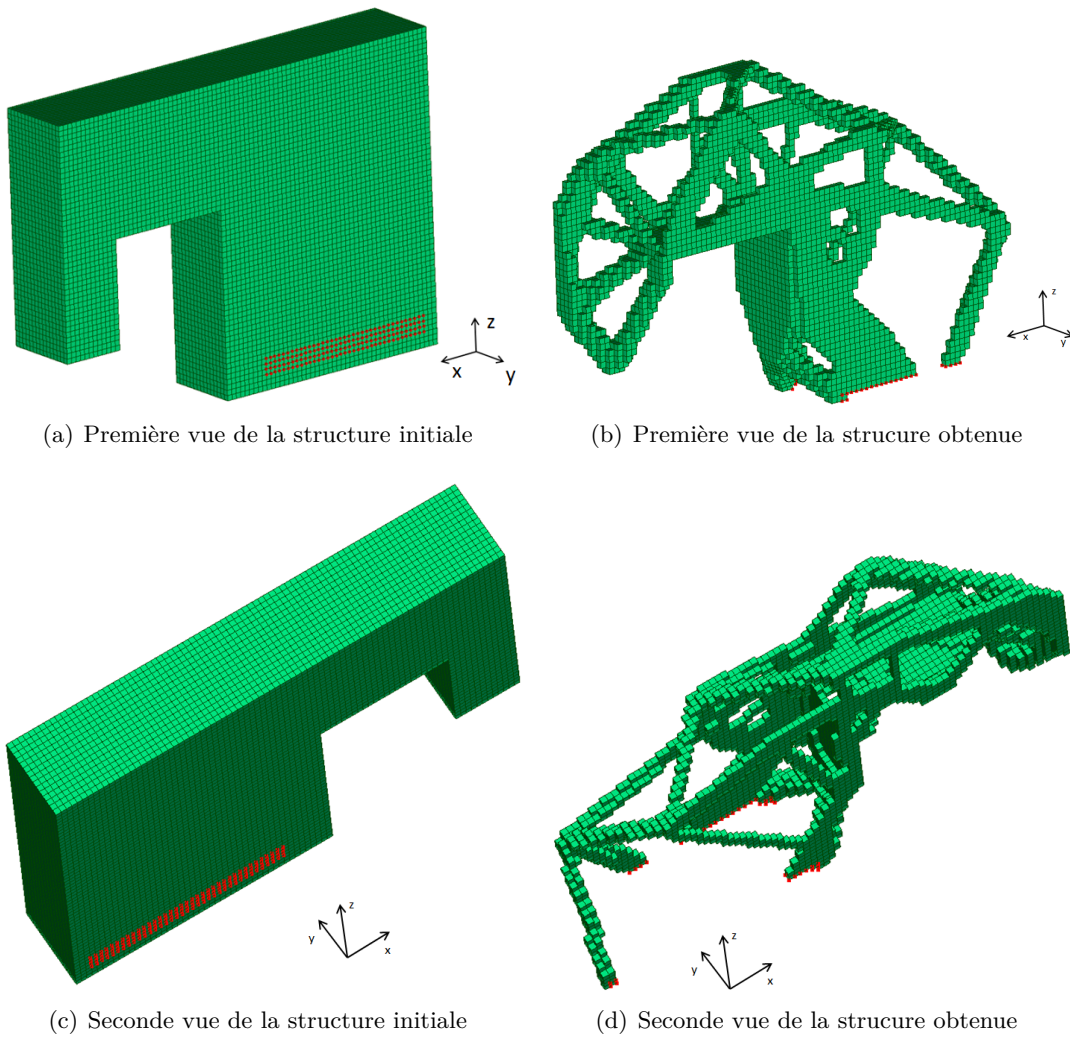


FIGURE 5.21 – Structure obtenue avec contrainte de flambage - les noeuds en rouge correspondent à la zone d'encastrement

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une formulation du problème d'optimisation sous des contraintes de  $R_m$  et de flambage comme un problème discret. Nous avons présenté les éléments d'originalités suivants :

- Pour résoudre le problème aux valeurs propres généralisé permettant d'évaluer la résistance aux flambage de la structure, nous avons proposé un algorithme couplant la méthode d'itération inverse et la procédure de Rayleigh-Ritz.
- Basé sur le concept de gradient topologique, nous avons présenté un algorithme de résolution du problème discret considéré. Pour déterminer les dérivées de la contrainte de flambage, nous avons proposé d'introduire des variables adjointes afin de réduire les temps de calcul. Pour construire le champ des gradients topologiques du problème considéré, nous avons proposé une somme pondérée de chaque champ associé aux contraintes de  $R_m$  et de flambage.

Nous avons présenté diverses applications numériques. Nous avons discuté des performances de la méthode de résolution du problème aux valeurs propres généralisé. Nous avons observé qu'augmenter le nombre de modes de flambage dans l'optimisation permet d'obtenir des structures plus légères. Enfin, nous avons présenté les résultats de l'approche proposée sur un problème de conception de structure aéronautique.

# Conclusion et Perspectives

La problématique de cette thèse est centrée sur l'optimisation topologique pour des problèmes de conception de structures sous des contraintes d'intégrité du matériau et de flambage. Dans un premier temps, nous rappelons les principales contributions de cette thèse. Dans un second temps, nous discutons des différentes perspectives qui peuvent être envisagées par la suite.

## Conclusion

Dans cette thèse, nous avons présenté une méthodologie d'optimisation topologique portant sur la minimisation de masse sous des contraintes de d'intégrité du matériau et de flambage pour les deux types de représentation de structures (treillis et continues).

Dans le cadre de structures treillis, l'objectif est de minimiser la masse en optimisant le nombre d'éléments uni-dimensionnels de la structure et les dimensions des sections transversales associées à ces éléments. Les éléments poutres offrant une meilleure analyse du comportement de la structure que les barres, nous avons considéré ce type d'éléments pour représenter la structure. Nous avons introduit une formulation du problème comme un problème d'optimisation non-linéaire en variables mixtes. Nous avons associé à chaque élément une variable binaire pour indiquer sa présence et plusieurs variables continues pour décrire sa section transversale.

Afin de prendre en compte des contraintes de manufacturabilité, nous avons proposé une fonction coût combinant la masse et la somme des seconds moments d'inertie de chaque poutre. Les résultats numériques montrent que considérer cette fonction objectif, en lieu et place de la fonction masse utilisée dans la littérature, permet de réduire les phases de post-traitement en harmonisant les sections transversales des éléments juxtaposés, tout en obtenant des gains de temps de calcul significatifs.

Pour résoudre le problème d'optimisation considéré, nous avons proposé un algorithme traitant les variables binaires et continues séparément. En fixant les valeurs des variables binaires, nous obtenons un problème d'optimisation continue déterminant les dimensions optimales des sections transversales des éléments présents dans la structure. A partir de la solution du problème d'optimisation continue, nous avons proposé de supprimer les éléments un par un en se basant sur une analyse de sensibilité de la charge critique de flambage. A travers les résultats numériques, nous avons pu observer qu'augmenter le nombre de variables continues décrivant



les sections transversales permet de mieux disposer la matière au sein des structures, et par conséquent à un allègement significatif de ces dernières.

Dans le cadre de structures continues, nous avons introduit une formulation du problème d'optimisation sous des contraintes d'intégrité du matériau et de flambage. Nous avons considéré une fonction d'agrégation des contraintes d'intégrité du matériau afin de réduire le nombre de contraintes d'optimisation. En ce qui concerne la contrainte de flambage, nous considérons une contrainte permettant de prendre en compte plusieurs modes de flambage au cours de l'optimisation.

Pour obtenir une représentation précise de la structure, un grand nombre d'éléments est considéré, générant ainsi des problèmes de grandes dimensions, en particulier pour le problème aux valeurs propres généralisé évaluant la résistance au flambage de la structure. Afin de réduire le coût en mémoire de la résolution de ce problème, nous avons proposé un algorithme couplant la méthode d'itération inverse et la procédure de Rayleigh-Ritz.

Basé sur le concept de gradient topologique, nous avons présenté un algorithme de résolution du problème considéré. Par la méthode adjointe, nous avons proposé une technique pour déterminer les dérivées de la contrainte de flambage. Cette méthode permet de réduire grandement les temps de calcul. Pour construire le champ des gradients topologiques du problème considéré, nous avons proposé une somme pondérée de chaque champ associé aux contraintes de  $R_m$  et de flambage. Les résultats numériques montrent que considérer plusieurs modes de flambage au cours de l'optimisation mène à des gains de masse intéressants.

En conclusion, des problèmes de conception de structures sous des contraintes de flambage ont pu être traités efficacement à travers des modélisations adaptées (fonction objectif prenant en compte la manufacturalité de la structure, agrégation de contraintes permettant de réduire la complexité du problème) et des algorithmes appropriés (traitement alterné des variables continues et binaires, gestion dynamique de la suppression de matière).

## Perspectives

Pour chacune des méthodologies proposées dans cette thèse, on distingue plusieurs axes de développement.

Dans le cadre de structures treillis, une extension naturelle repose sur l'introduction d'une variable de conception caractérisant une rotation de la section transversale autour de l'axe principal de l'élément. Dans le cas d'une section non-symétrique, du type rectangle par exemple, cette modélisation permettrait d'orienter les sections transversales afin d'obtenir une meilleure résistance aux efforts, et par conséquent une structure plus légère pourrait être obtenue.

Lors de la discrétisation de la structure, la localisation des noeuds d'une structure treillis est cruciale puisqu'elle définit l'ensemble des éléments pouvant représenter la structure. L'optimisation de la position des noeuds de la structure permettrait de mieux disposer la matière au sein du domaine de conception et pourrait mener à une possible réduction de masse.

L'encombrement spatial généré par chaque type de section transversale (carrée, circulaire, rectangulaire, ovale ou autres) présente des avantages et des inconvénients selon sa position au sein de la structure et les efforts appliqués sur l'élément associé. Ainsi, un axe de développement repose sur l'optimisation du type de chaque section selon diverses contraintes mécaniques. Une modélisation possible consiste à introduire une variable entière caractérisant le type de section transversale associée à chaque élément.

Concernant la méthode proposée pour résoudre le problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage, il est important de noter que les valeurs propres sont déterminées par ordre croissant selon leur module. Ainsi, il est parfois nécessaire de déterminer un ensemble de valeurs propres négatives avant d'obtenir celles qui sont positives. Dans la littérature, plusieurs méthodes proposent de transformer le problème aux valeurs propres généralisé de façon à ramener les valeurs propres recherchées à une extrémité du spectre. Cependant, ces formulations engendrent la résolution successive de plusieurs systèmes linéaires du type  $(K + \alpha K_\sigma)v = y$ . Le coût du produit  $K_\sigma v$  étant très élevé, la résolution de ces systèmes linéaires par une méthode itérative mène à des temps de calcul très importants. Ainsi, un axe de développement repose sur la transformation du problème aux valeurs propres généralisé limitant le nombre de produits  $K_\sigma v$  lors de sa résolution.

Lors de la conception d'une structure, il est important de tenir compte de la phase de fabrication qui en fait suite. L'usinage et la fabrication additive représentent actuellement les deux principaux procédés de fabrication d'une structure. En partant d'un bloc du matériau considéré (un pavé par exemple), l'usinage consiste à enlever des copeaux de matière pour obtenir la structure souhaitée. La fabrication additive (par exemple le Wire Arc Additive Manufacturing - Figure 5.22) permet de construire les structures par addition de couches successives de matière. Ce type de procédé permet de réduire le coût d'achat de matière mais aussi les délais de production. L'incorporation de contraintes de fabrication additive, telle que la trajectoire suivie pour le dépôt de matière, dans les problèmes d'optimisation topologique constitue un axe prometteur de développement.



FIGURE 5.22 – Procédé de fabrication additive appelé Wire Arc Additive Manufacturing



# Bibliographie

- Achtziger, W. (1999). Local stability of trusses in the context of topology optimization part i : exact modelling. *Structural optimization*, 17(4), 235–246.
- Allaire, G. & Jouve, F. (2006). Coupling the level set method and the topological gradient in structural optimization. In *IUTAM symposium on topological design optimization of structures, machines and materials* (pp. 3–12). : Springer.
- Allaire, G., Jouve, F., & Toader, A.-M. (2002). A level-set method for shape optimization. *Comptes Rendus Mathematique*, 334(12), 1125–1130.
- Allaire, G., Jouve, F., & Toader, A.-M. (2004). Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of computational physics*, 194(1), 363–393.
- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, L. S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., et al. (1999a). *LAPACK Users' guide*. SIAM.
- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., & Sorensen, D. (1999b). *LAPACK Users' Guide*. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, third edition.
- Ben-Tal, A. & Bendsøe, M. P. (1993). A new method for optimal truss topology design. *SIAM Journal on Optimization*, 3(2), 322–358.
- Ben-Tal, A., Jarre, F., Kočvara, M., Nemirovski, A., & Zowe, J. (2000). Optimal design of trusses under a nonconvex global buckling constraint. *Optimization and Engineering*, 1(2), 189–213.
- Bendsoe, M. (2003). Sigmund, topology optimization-theory, methods and applications.
- Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural and multidisciplinary optimization*, 1(4), 193–202.
- Berlyand, L. & Kozlov, S. (1992). Asymptotics of the homogenized moduli for the elastic chess-board composite. *Archive for rational mechanics and analysis*, 118(2), 95–112.
- Bian, X. & Fang, Z. (2017). Large-scale buckling-constrained topology optimization based on assembly-free finite element analysis. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(9), 1687814017715422.

- Bian, X., Yadav, P., & Suresh, K. (2015). Assembly-free buckling analysis for topology optimization. In *ASME-IDETC Conference, Boston, MA*.
- Boggs, P. T. & Tolle, J. W. (1995). Sequential quadratic programming. *Acta numerica*, 4, 1–51.
- Briggs, W. L., Henson, V. E., & McCormick, S. F. (2000). *A multigrid tutorial*. SIAM.
- Browne, P., Budd, C., Gould, N., Kim, H., & Scott, J. (2012). A fast method for binary programming using first-order derivatives, with application to topology optimization with buckling constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(12), 1026–1043.
- Browne, P. A. (2013). *Topology optimization of linear elastic structures*. PhD thesis, University of Bath.
- Bruggi, M. (2008). On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*, 36(2), 125–141.
- Bruns, T. (2005). A reevaluation of the simp method with filtering and an alternative formulation for solid–void topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(6), 428–436.
- Bruyneel, M., Colson, B., & Remouchamps, A. (2008). Discussion on some convergence problems in buckling optimisation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35(2), 181–186.
- Bulgakov, V. & Kuhn, G. (1995). High-performance multilevel iterative aggregation solver for large finite-element structural analysis problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(20), 3529–3544.
- Burger, M., Hackl, B., & Ring, W. (2004). Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, 194(1), 344–362.
- Calvel, S. (2004). *Conception d’organes automobiles par optimisation topologique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- Céa, J., Garreau, S., Guillaume, P., & Masmoudi, M. (2000). The shape and topological optimizations connection. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 188(4), 713–726.
- Cheng, G. & Guo, X. (1997).  $\varepsilon$ -relaxed approach in structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 13(4), 258–266.
- Cheng, G. & Jiang, Z. (1992). Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*, 20(2), 129–148.
- Chinesta, F. & Ladevèze, P. (2014). Separated representations and pgd-based model reduction. *Fundamentals and Applications, International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*, 554.

- Choi, K. K. & Kim, N.-H. (2006). *Structural sensitivity analysis and optimization 1 : linear systems*. Springer Science & Business Media.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (1974). *Concepts and applications of finite element analysis*, volume 4. Wiley New York.
- Deaton, J. D. & Grandhi, R. V. (2014). A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization : post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(1), 1–38.
- Deng, S. & Suresh, K. (2015). Multi-constrained topology optimization via the topological sensitivity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(5), 987–1001.
- Diaz, A. & Sigmund, O. (1995). Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10(1), 40–45.
- Dorn, W. S. (1964). Automatic design of optimal structures. *Journal de mecanique*, 3, 25–52.
- Dunning, P. D. & Alicia Kim, H. (2013). A new hole insertion method for level set based structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(1), 118–134.
- Dunning, P. D., Ovtchinnikov, E., Scott, J., & Kim, H. A. (2016). Level-set topology optimization with many linear buckling constraints using an efficient and robust eigensolver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(12), 1029–1053.
- Duysinx, P. (1996). *Optimisation topologique : du milieu continu à la structure élastique*. PhD thesis, Université de Liège.
- Duysinx, P. (1997). *Layout optimization : a mathematical programming approach*. Technical report.
- Duysinx, P. & Bendsøe, M. P. (1998). Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International journal for numerical methods in engineering*, 43(8), 1453–1478.
- Duysinx, P. & Sigmund, O. (1998). New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. In *Proc of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symp on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, volume 1 (pp. 1501–1509).
- Duysinx, P., Van Miegroet, L., Lemaire, E., Brùls, O., & Bruyneel, M. (2008). Topology and generalized shape optimization : Why stress constraints are so important? *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 2(4), 253–258.
- Eldred, M., Venkayya, V., & Anderson, W. (1995). Mode tracking issues in structural optimization. *AIAA journal*, 33(10), 1926–33.
- Eschenauer, H. A., Kobelev, V. V., & Schumacher, A. (1994). Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 8(1), 42–51.

- Euler, L. (1947). On the strength of columns. *American journal of physics*, 15(4), 315–318.
- Evgrafov, A. (2005). On globally stable singular truss topologies. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29(3), 170–177.
- Fanchon, J.-l. (2008). *Guide de mécanique*. Nathan.
- Feijoo, R., Novotny, A., Taroco, E., & Padra, C. (2005). The topological-shape sensitivity method in two-dimensional linear elasticity topology design. *Applications of Computational Mechanics in Structures and Fluids*.
- Feng, K. & Shi, Z.-C. (2013). *Mathematical theory of elastic structures*. Springer Science & Business Media.
- Ford, H. & Alexander, J. M. (1963). *Advanced mechanics of materials*.
- Fredricson, H., Johansen, T., Klarbring, A., & Petersson, J. (2003). Topology optimization of frame structures with flexible joints. *Structural and multidisciplinary optimization*, 25(3), 199–214.
- Gao, X. & Ma, H. (2015). Topology optimization of continuum structures under buckling constraints. *Computers & Structures*, 157, 142–152.
- Gogu, C. (2015). Improving the efficiency of large scale topology optimization through on-the-fly reduced order model construction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(4), 281–304.
- Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (2012). *Matrix computations*, volume 3. JHU Press.
- Golub, G. H. & Varga, R. S. (1961). Chebyshev semi-iterative methods, successive overrelaxation iterative methods, and second order richardson iterative methods. *Numerische Mathematik*, 3(1), 157–168.
- Grierson, D. & Cohn, M. (1970). A general formulation of the optimal frame problem. *ASME J. Appl. Mech*, 70, 356–360.
- Grossmann, I. E., Voudouris, V., Ghattas, O., et al. (1991). Mixed-integer linear programming reformulations [sic] for some nonlinear discrete design optimization problems.
- Guo, X., Cheng, G., & Yamazaki, K. (2001). A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(5), 364–373.
- Haber, R. B., Jog, C. S., & Bendsøe, M. P. (1996). A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 11(1), 1–12.
- He, L., Kao, C.-Y., & Osher, S. (2007). Incorporating topological derivatives into shape derivatives based level set methods. *Journal of Computational Physics*, 225(1), 891–909.

- HSL, A. (2007). collection of fortran codes for large-scale scientific computation. See <http://www.hsl.rl.ac.uk>.
- Huang, X. & Xie, Y. (2007). Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(14), 1039–1049.
- Huang, X. & Xie, Y. (2008). A new look at eso and beso optimization methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35(1), 89–92.
- Huang, X. & Xie, Y.-M. (2010). A further review of eso type methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(5), 671–683.
- Hughes, T. J., Levit, I., & Winget, J. (1983). An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 36(2), 241–254.
- Ipsen, I. C. (1997). Computing an eigenvector with inverse iteration. *SIAM review*, 39(2), 254–291.
- Johnson, S. G. (2011). *The NLOpt nonlinear-optimization package*.
- Kattan, P. I. (2010). *MATLAB guide to finite elements : an interactive approach*. Springer Science & Business Media.
- Kirsch, U. (1990). On singular topologies in optimum structural design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2(3), 133–142.
- Kočvara, M. (1997). Topology optimization with displacement constraints : a bilevel programming approach. *Structural and multidisciplinary optimization*, 14(4), 256–263.
- Kočvara, M. (2002). On the modelling and solving of the truss design problem with global stability constraints. *Structural and multidisciplinary optimization*, 23(3), 189–203.
- Kocvara, M. & Zowe, J. (1996). How mathematics can help in design of mechanical structures. *PITMAN RESEARCH NOTES IN MATHEMATICS SERIES*, (pp. 76–93).
- Kreisselmeier, G. & Steinhauser, R. (1980). Systematic control design by optimizing a vector performance index. In *Computer aided design of control systems* (pp. 113–117). Elsevier.
- Krishnakumar, A. & Suresh, K. (2015). Hinge-free compliant mechanism design via the topological level-set. *Journal of Mechanical Design*, 137(3), 031406.
- Le, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C., & Tortorelli, D. (2010). Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4), 605–620.
- Lehoucq, R. B., Sorensen, D. C., & Yang, C. (1998). *ARPACK users' guide : solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*. SIAM.



- Lindgaard, E. & Dahl, J. (2013). On compliance and buckling objective functions in topology optimization of snap-through problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3), 409–421.
- Luo, J., Luo, Z., Chen, L., Tong, L., & Wang, M. Y. (2008a). A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, 227(11), 5561–5581.
- Luo, J., Luo, Z., Chen, S., Tong, L., & Wang, M. Y. (2008b). A new level set method for systematic design of hinge-free compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(2), 318–331.
- Luo, Q. & Tong, L. (2015). Structural topology optimization for maximum linear buckling loads by using a moving iso-surface threshold method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52(1), 71–90.
- Ma, Z.-D., Kikuchi, N., & Cheng, H.-C. (1995). Topological design for vibrating structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121(1-4), 259–280.
- Manteuffel, T. A. (1980). An incomplete factorization technique for positive definite linear systems. *Mathematics of computation*, 34(150), 473–497.
- Martinez, J. (2005). A note on the theoretical convergence properties of the simp method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29(4), 319–323.
- Martinez, P., Marti, P., & Querin, O. (2007). Growth method for size, topology, and geometry optimization of truss structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(1), 13–26.
- McCormick, S. F. (1987). *Multigrid methods*. SIAM.
- Mela, K. (2014). Resolving issues with member buckling in truss topology optimization using a mixed variable approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(6), 1037–1049.
- Michell, A. G. M. (1904). Lviii. the limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8(47), 589–597.
- Neves, M., Rodrigues, H., & Guedes, J. (1995). Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10(2), 71–78.
- Novotny, A., Feijóo, R., Taroco, E., & Padra, C. (2007). Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41), 4354–4364.
- Ohsaki, M., Fujisawa, K., Katoh, N., & Kanno, Y. (1999). Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180(1), 203–217.

- Osher, S. & Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1), 12–49.
- Ovtchinnikov, E. E. (2008a). Computing several eigenpairs of hermitian problems by conjugate gradient iterations. *Journal of Computational Physics*, 227(22), 9477–9497.
- Ovtchinnikov, E. E. (2008b). Jacobi correction equation, line search, and conjugate gradients in hermitian eigenvalue computation i : Computing an extreme eigenvalue. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5), 2567–2592.
- Ovtchinnikov, E. E. (2008c). Jacobi correction equation, line search, and conjugate gradients in hermitian eigenvalue computation ii : Computing several extreme eigenvalues. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5), 2593–2619.
- Pedersen, N. L. & Nielsen, A. K. (2003). Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(5), 436–445.
- Pedersen, P. (1972). On the optimal layout of multi-purpose trusses. *Computers & Structures*, 2(5-6), 695–712.
- Querin, O., Steven, G., & Xie, Y. (2000a). Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. *Finite Elements in Analysis and Design*, 34(3), 291–308.
- Querin, O., Young, V., Steven, G., & Xie, Y. (2000b). Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 189(2), 559–573.
- Reid, J. K. (1971). On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations. In *Pro. the Oxford conference of institute of mathematics and its applications* (pp. 231–254).
- Riemann, B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. PhD thesis, EA Huth.
- Rietz, A. (2001). Sufficiency of a finite exponent in simp (power law) methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), 159–163.
- Ringertz, U. T. (1986). A branch and bound algorithm for topology optimization of truss structures. *Engineering Optimization*, 10(2), 111–124.
- Rong, J., Xie, Y., & Yang, X. (2001). An improved method for evolutionary structural optimisation against buckling. *Computers & Structures*, 79(3), 253–263.
- Rozvany, G. I. (1996). Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 11(3), 213–217.

- Rozvany, G. I. (2013). *Optimization of large structural systems*, volume 231. Springer Science & Business Media.
- Rozvany, G. I. & Querin, O. M. (2002). Combining eso with rigorous optimality criteria. *International journal of vehicle design*, 28(4), 294–299.
- Rozvany, G. I., Zhou, M., & Birker, T. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 4(3), 250–252.
- Saad, Y. (1992). *Numerical methods for large eigenvalue problems*. Manchester University Press.
- Saad, Y., Yeung, M., Erhel, J., & Guyomarc’h, F. (2000). A deflated version of the conjugate gradient algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(5), 1909–1926.
- Sanogo, S. (2016). *Conception optimale de circuits magnétiques dédiés à la propulsion spatiale électrique par des méthodes d’optimisation topologique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- Sigmund, O. (1994). *Design of material structures using topology optimization*. PhD thesis, Technical University of Denmark Denmark.
- Sigmund, O. & Petersson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization : a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1), 68–75.
- Sokolowski, J. & Zochowski, A. (1999). On the topological derivative in shape optimization. *SIAM journal on control and optimization*, 37(4), 1251–1272.
- Sokolowski, J. & Zochowski, A. (2003). Optimality conditions for simultaneous topology and shape optimization. *SIAM journal on control and optimization*, 42(4), 1198–1221.
- Stolpe, M. (2004). Global optimization of minimum weight truss topology problems with stress, displacement, and local buckling constraints using branch-and-bound. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(8), 1270–1309.
- Stolpe, M. & Svanberg, K. (2001a). An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(2), 116–124.
- Stolpe, M. & Svanberg, K. (2001b). On the trajectories of penalization methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), 128–139.
- Suresh, K. (2010). A 199-line matlab code for pareto-optimal tracing in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(5), 665–679.
- Suresh, K. (2013). Efficient generation of large-scale pareto-optimal topologies. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(1), 49–61.
- Suresh, K., Ramani, A., & Kaushik, A. (2012). An adaptive weighting strategy for multi-load topology optimization. In *ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*.

- Suresh, K. & Takaloozadeh, M. (2013). Stress-constrained topology optimization : a topological level-set approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(2), 295–309.
- Svanberg, K. (2002). A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM journal on optimization*, 12(2), 555–573.
- Sved, G. & Ginos, Z. (1968). Structural optimization under multiple loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(10), 803–805.
- Takezawa, A., Nishiwaki, S., Izui, K., & Yoshimura, M. (2007). Structural optimization based on topology optimization techniques using frame elements considering cross-sectional properties. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34(1), 41–60.
- Torii, A. J., Lopez, R. H., & Miguel, L. F. (2015). Modeling of global and local stability in optimization of truss-like structures using frame elements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(6), 1187–1198.
- Trefethen, L. N. & Bau III, D. (1997). *Numerical linear algebra*, volume 50. Siam.
- Van den Boom, S. (2014). Topology optimisation including buckling analysis.
- van Dijk, N. P., Maute, K., Langelaar, M., & Van Keulen, F. (2013). Level-set methods for structural topology optimization : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3), 437–472.
- Verbart, A., Langelaar, M., & Van Keulen, F. (2017). A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(2), 663–679.
- Wang, M. Y., Wang, X., & Guo, D. (2003). A level set method for structural topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(1), 227–246.
- Wang, S., Sturler, E. d., & Paulino, G. H. (2007). Large-scale topology optimization using preconditioned krylov subspace methods with recycling. *International journal for numerical methods in engineering*, 69(12), 2441–2468.
- Wardenier, J., Packer, J., Zhao, X., & Van der Vegte, G. (2002). *Hollow sections in structural applications*. Bouwen met Staal Rotterdam,, The Netherlands.
- Weickert, J., Romeny, B. T. H., & Viergever, M. A. (1998). Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE transactions on image processing*, 7(3), 398–410.
- Xie, Y. M. & Steven, G. P. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & structures*, 49(5), 885–896.
- Yadav, P. & Suresh, K. (2014). Large scale finite element analysis via assembly-free deflated conjugate gradient. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 14(4), 041008.

- Yamada, S. & Kanno, Y. (2016). Relaxation approach to topology optimization of frame structure under frequency constraint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53(4), 731–744.
- Young, D. M. & Eidson, H. D. (1970). *On the Determination of the Optimum Relaxation Factor for the SOR Method When the Eigenvalues of the Jacobi Method are Complex*. Technical report, TEXAS UNIV AUSTIN CENTER FOR NUMERICAL ANALYSIS.
- Zhou, M. (1996). Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 11(1), 134–136.
- Zhou, M. & Rozvany, G. (1991). The coc algorithm, part ii : topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1-3), 309–336.
- Zhou, M. & Rozvany, G. (2001). On the validity of eso type methods in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(1), 80–83.

**Author :** Florian Mitjana

## **Structural topology optimization under buckling constraints**

### **Abstract :**

Topology optimization aims to design a structure by seeking the optimal material layout within a given design space, thus making it possible to propose innovative optimal designs. This thesis focuses on topology optimization for structural problems taking into account buckling constraints.

In a wide variety of engineering fields, the lightening of structures during the design phase holds a prominent place in order to reduce manufacturing costs. Thus the goal is often the minimization of the mass of the structure to be designed. Regarding the constraints, in addition to the conventional mechanical constraints (compression, tension), it is necessary to take into account buckling phenomena which are characterized by an amplification of the deformations of the structure and a potential annihilation of the capabilities of the structure to support the applied efforts. In order to adress a wide range of topology optimization problems, we consider the two types of representation of a structure : lattice structures and continuous structures.

**Key words :** Topology optimization, buckling constraints, generalized eigenvalue problem, mixed-integer optimization

**Auteur :** Florian Mitjana

## **Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage**

**Directeurs de thèse :** Sonia Caferi et Florian Bugarin

**Discipline :** Mathématiques appliquées

**Lieu et date de soutenance :** Ecole Nationale de l'Aviation Civile, le 7 juin 2018

**Résumé :**

L'optimisation topologique vise à concevoir une structure en recherchant la disposition optimale du matériau dans un espace de conception donné, permettant ainsi de proposer des designs optimaux innovants. Cette thèse est centrée sur l'optimisation topologique pour des problèmes de conception de structures prenant en compte des contraintes de flambage.

Dans une large variété de domaines de l'ingénierie, l'allègement des structures lors la phase de conception tient une place prépondérante afin de réduire les coûts de fabrication. Ainsi l'objectif est souvent la minimisation de la masse de la structure à concevoir. En ce qui concerne les contraintes, en plus des contraintes mécaniques classiques (compression, tension), il est nécessaire de prendre en compte des phénomènes dits de flambage, qui se caractérisent par une amplification des déformations de la structure et une potentielle annihilation des capacités de la structure à supporter les efforts appliqués. Dans le but d'adresser un large panel de problèmes d'optimisation topologique, nous considérons les deux types de représentation d'une structure : les structures treillis et les structures continues.

**Mots clé :** Optimisation topologique, contraintes de flambage, problème aux valeurs propres généralisé, optimisation en variables mixtes

*Laboratoire de l'Ecole Nationale de l'Aviation Civile  
7 Avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse*