



Homologie symplectique T -équivariante pour les variétés toriques hamiltoniennes

Pierre Mennesson

► To cite this version:

Pierre Mennesson. Homologie symplectique T -équivariante pour les variétés toriques hamiltoniennes. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Paris-Saclay, 2018. Français. NNT : 2018SACLS315 . tel-02055565

HAL Id: tel-02055565

<https://theses.hal.science/tel-02055565>

Submitted on 4 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Pierre MENNESSON

Homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante pour les variétés toriques
hamiltoniennes

Date de soutenance : 22 Octobre 2018

Après avis des rapporteurs : MIHAI DAMIAN (Université de Strasbourg)
URS FRAUENFELDER (Université d'Augsburg)

Jury de soutenance : FRÉDÉRIC BOURGEOIS (Université Paris-Sud) Directeur de thèse
MIHAI DAMIAN (Université de Strasbourg) Rapporteur
URS FRAUENFELDER (Université d'Augsburg) Rapporteur
RÉMI LECLERCQ (Université Paris-Sud) Codirecteur de thèse
ALEXANDRU OANCEA (Université Pierre et Marie Curie) Président du jury
ANNE VAUGON (Université Paris-Sud) Examineur

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent bien évidemment à mon directeur de thèse Frédéric Bourgeois. Frédéric a fait preuve d'une disponibilité que j'ai rarement retrouvée après avoir échangé avec les autres doctorants. Il m'a toujours laissé une grande liberté quant à la direction que prenait la thèse et a su m'expliquer des concepts mathématiques poussés avec passion et pédagogie. Je lui en suis infiniment redevable.

Je remercie également et chaleureusement mon co-directeur Rémi Leclercq. Rémi m'a toujours rassuré et redonné l'énergie nécessaire dans les moments les plus douteux. Ses conseils, ses encouragements et son oreille attentive m'ont permis de m'accrocher, je n'aurais sûrement pas fini ma thèse sans lui. Je tiens aussi à le remercier pour le temps et l'énergie qu'il a mis à corriger mes nombreuses fautes, et ce dans l'urgence, afin d'envoyer le manuscrit dans les temps.

Un grand merci aux rapporteurs Mihai Damian et Urs Frauenfelder pour avoir lu attentivement ma thèse ainsi que leurs nombreuses remarques. Leur lecture attentive et minutieuse a considérablement enrichi cette thèse.

Je remercie ma famille, mon père, ma mère, mes frères, ma soeur et leurs compagnons et leurs enfants pour leur soutien mais surtout leur amour inconditionnel, pas depuis 3 ans mais depuis 26 ans et 10 mois. Je ne serais jamais arrivé là où j'en suis sans eux. Un grand merci aussi à mes deux tantes préférées, ainsi qu'à mes cousins et cousines pour m'avoir accueilli à Paris comme leur fils ou comme leur frère. Une dédicasse très spéciale à mon beau frère Jérémie qui m'a donné le goût des mathématiques, m'a toujours aidé et conseillé avec sincérité et honnêteté quand bien même les vérités en question étaient dures à entendre.

Enfin, comment ne pas parler de mes vieux shlagzer d'Orlins et de Paris. Merci pour ces 9 années sur Paris très très très studieuses, pour avoir été à mes côtés H24, vous m'avez donné tout votre amour et la meilleure jeunesse que j'aurais pu avoir.

Et une petite dédicasse à BiEye pour avoir corrigé les fautes, ça fait plaisir.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Variétés symplectiques toriques	8
2.1	Variétés symplectiques	8
2.2	Variétés de contact	10
2.3	Action hamiltonienne sur une variété symplectique	12
2.4	Variétés de contact toriques	14
2.5	Recollement équivariant	15
2.6	L'indice de Conley-Zehnder	16
3	Théorie de Morse	18
3.1	Fonctions de Morse	18
3.2	L'espace des trajectoires	20
3.3	Homologie de Morse	27
4	Théorie de Floer	28
4.1	Conjecture d'Arnold et équation de Floer	28
4.2	Décroissance exponentielle, propriété de Fredholm et calcul de l'indice	31
4.3	Transversalité et points injectifs	36
4.4	Compacité et Gluing	38
4.5	Homologie de Floer	42
4.6	Homologie symplectique	50
5	Théories équivariantes	55
5.1	Théorie de Morse-Bott	55
5.2	Construction de Borel	57
5.3	Dynamique hamiltonienne équivariante	58
6	Théorie de Fredholm	65
6.1	Espace de configuration	65

6.2	Décroissance exponentielle	68
6.3	Indice de Robbin-Salamon paramétré	74
6.4	Indice de Fredholm	76
7	Transversalité	81
7.1	Points injectifs	81
7.2	Transversalité	82
8	Compacité, Gluing et Orientation	86
8.1	Compacité	86
8.2	Gluing	92
8.3	Orientation	100
9	Homologie symplectique $\mathbb{T}^n$-équivariante	104
9.1	Homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante	104
9.2	Calcul de l'homologie dans le cas fermé : $\partial W = \emptyset$	110

Chapitre 1

Introduction

Le cadre de cette thèse est la géométrie symplectique. Une *variété symplectique* est une variété lisse de dimension paire W^{2n} munie d'une 2-forme fermée et non-dégénérée ω . Une variété hamiltonienne (W, ω, H) est la donnée d'une variété symplectique (W, ω) et d'une fonction $H : S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}$. Le gradient hamiltonien X_H^θ associé à H est défini par $\iota_{X_H^\theta} \omega = dH_\theta$, le difféomorphisme engendré par son flot au temps 1 préserve ω et tout difféomorphisme obtenu ainsi est appelé *difféomorphisme hamiltonien*. Les points fixes de ce difféomorphisme coïncident donc avec les orbites périodiques du gradient hamiltonien.

Une des versions de la conjecture d'Arnold affirme que tout difféomorphisme hamiltonien admet au moins autant d'orbites périodiques que le nombre minimum de points critiques d'une fonction différentiable sur W . A. Floer a apporté une réponse partielle à celle-ci en introduisant une homologie dont le complexe sous-jacent est engendré par les orbites périodiques de H et en montrant qu'elle est isomorphe à l'homologie de Morse. En effet, les orbites périodiques de H sont les points critiques d'une fonctionnelle définie sur l'espace des lacets de W et, cette constatation faite, il est naturel de tenter de construire une théorie de Morse en dimension infinie pour cette dernière. La fonctionnelle en question est définie par :

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = - \int_{[0,1] \times S^1} u^* \omega - \int_{S^1} H(\theta, \gamma(\theta)) d\theta$$

avec $\gamma : S^1 \rightarrow W$ et u une homotopie entre γ et un lacet préalablement choisi.

Une variété symplectique torique (W^{2n}, ω, μ) est la donnée d'une variété symplectique (W, ω) munie d'une action de $\mathbb{T}^n$, le tore de dimension n , et d'une application appelée application moment $\mu : W \rightarrow \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)^*$ vérifiant $d\langle \mu, X \rangle = \iota_{\underline{X}} \omega$ avec $\underline{X}$ le champ de vecteurs sur W induit par $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n) : \underline{X}_x = \frac{d \exp(tX) \cdot x}{dt} \Big|_{t=0}$. Chaque élément du tore induit un difféomorphisme hamiltonien.

Si un hamiltonien défini sur une variété symplectique torique est invariant par l'action de $\mathbb{T}^n$, la fonctionnelle $\mathcal{A}_H$ qu'il définit est aussi invariante par l'action induite sur l'espace des

lacets de W et il en va de même pour ses points critiques. Les orbites périodiques de H sont donc stables par l'action de $\mathbb{T}^n$ et forment donc une réunion de tores.

L'objectif de cette thèse est de construire une théorie de Morse-Bott pour cette fonctionnelle afin de donner une borne inférieure, non pas pour le nombre d'orbites (qui sera infini pourvu qu'il y en ait une étant donnée l'action de $\mathbb{T}^n$) mais pour le nombre de ces "tores d'orbites" en fonction de la topologie de W .

Cependant, l'action de $\mathbb{T}^n$ n'étant pas libre sur W (d'après le théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg, il y a au moins $n+1$ points fixés par l'action), elle ne l'est pas non plus sur $C^\infty(S^1, W)$.

Pour remédier à ce problème, nous nous inspirons librement des travaux de Frédéric Bourgeois et Alexandru Oancea : ces derniers ont, lorsque l'hamiltonien est indépendant du temps et que le cercle agit (de manière non libre) sur les orbites par reparamétrisation, construit une théorie S^1 -équivariante (voir [9],[8],[7]).

Comme ces derniers, nous adoptons le point de vue de Borel : nous choisissons un espace E contractile sur lequel le tore agit librement et regardons l'homologie de Morse-Bott pour la fonctionnelle $\mathcal{A}_H$ équivariante pour l'action *diagonale* de $\mathbb{T}^n$ sur $C^\infty(S^1, W) \times E$ (un tel espace E ne peut être représenté par une variété différentielle compacte, nous serons contraints de choisir des approximations finies).

Pour ce, nous étendons l'hamiltonien en $H : W \times E \rightarrow \mathbb{R}$ équivariant pour l'action *diagonale*. Lorsque la variété est fermée, l'homologie obtenue est bien un invariant de la variété symplectique torique : il ne dépend ni de H ni des choix auxiliaires nécessaires à l'élaboration de l'invariant (lorsque W admet un bord de type contact, l'invariant ne dépend que des valeurs de H près du bord comme en homologie symplectique classique) et coïncide avec l'homologie singulière équivariante de la variété : c'est le contenu des théorèmes centraux de cette thèse : les théorèmes 9.1.1 et 9.2.1. Afin d'assurer la compacité des espaces de modules centraux dans la construction de cette homologie, nous devons restreindre notre construction à des variétés symplectiques monotones dont le nombre de Chern minimal est supérieur ou égal à 2 (voir 2).

Théorème A. *Soit (W, ω, μ) une variété symplectique torique vérifiant l'hypothèse 2. Il existe un $\mathbb{Z}$ -module associé à (W, ω, μ) , l'homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante associée à (W, ω, μ) et notée $\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n}(W)$. Ce module est un invariant, i.e. deux variétés symplectiques toriques isomorphes ont leur homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante isomorphes.*

Théorème B. *Soit (W, ω, μ) une variété torique sans bord vérifiant l'hypothèse 2, alors :*

$$\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n}(W) \simeq H_{\mathbb{T}^n}(W, \Lambda_\omega)$$

avec $H_{\mathbb{T}^n}(W)$ l'homologie $\mathbb{T}^n$ -équivariante de W au sens Borel définie en section 5 avec coefficients dans Λ_ω (voir la section 4.5 pour la définition de Λ_ω).

Si l'on considère les résultats obtenus comme une tentative de réponse à une "conjecture d'Arnold équivariante", il est à noter que des avancées similaires ont été réalisées autour de

la conjecture d'Arnold-Givental : Urs Frauenfelder a montré dans [14] que celle-ci était vraie pour certaines paires (W, L) où W est obtenue comme un quotient symplectique d'une variété torique et L une lagrangienne de W .

La thèse est organisée comme suit.

Dans le chapitre 2, nous rappelons le cadre dans lequel nous nous situons, à savoir celui des variétés symplectiques toriques.

Dans les chapitres 3 et 4, nous exposons rapidement les fondations de la théorie de Morse et de sa fille, la théorie de Floer, qui permet d'obtenir des bornes inférieures sur le nombre minimum d'orbites périodiques d'un hamiltonien en fonction de la topologie de W lorsque celles-ci sont *isolées* (ce qui n'est pas le cas d'un hamiltonien équivariant où celles-ci possèdent de nombreuses symétries liées à l'action torique).

Dans le chapitre 5, nous évoquons la construction de Borel ainsi que la théorie de Morse-Bott et regardons comment celles-ci s'articulent dans notre étude. Naturellement, nous définissons la fonctionnelle d'action, son gradient, ainsi que les trajectoires antigradient. Étant donnée la présence de l'espace de paramètres $(S^{2N+1})^n$, celles-ci prennent la forme de couples $(u, \lambda) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow W \times E$ avec u vérifiant une équation "de type Floer" et λ , une fonction de $\mathbb{R}$ seulement, vérifiant une équation "de type Morse", chacune empêchant l'autre d'être véritablement une équation de Morse/Floer.

Les trois chapitres qui suivent ont pour but d'établir les propriétés-clés des ensembles de ces trajectoires : modulo perturbations, ce sont des variétés différentielles (chapitre 7), dont on peut calculer la dimension (chapitre 6), qui admettent une compactification par d'autres espaces de trajectoires les transformant en variétés à bord (chapitre 8).

Dans le chapitre 9, à partir d'un hamiltonien paramétré équivariant $H : S^1 \times W \times (S^{2N+1})^n \rightarrow \mathbb{R}$, nous construisons un $\mathbb{Z}$ -complexe différentiel engendré par les variétés critiques de $\mathcal{A}_H$ dont la différentielle compte le nombre de "tores de trajectoires" entre deux variétés. Ce compte est algébrique au sens où il prend en compte les orientations des variétés. La classe d'isomorphisme de l'homologie de ce complexe est bien un invariant torique symplectique, c'est *l'homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante* en degré N : $\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N}(W, \omega, \mu)$ et nous définissons l'homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante comme la limite directe de $\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N}(W, \omega, \mu)$ relativement aux inclusions $(S^{2N+1})^n \subset (S^{2N+3})^n$.

Finalement, nous calculons cet invariant lorsque W est une variété sans bord et vérifions qu'il coïncide avec l'homologie torique équivariante de la variété $H_{\mathbb{T}^n}(W)$.

Chapitre 2

Variétés symplectiques toriques

Cette section a pour but de rappeler les bases des actions de groupes toriques sur les variétés symplectiques et de contact. Pour une introduction à ces différents sujets et pour les preuves des démonstrations, nous renvoyons le lecteur à [19] pour la géométrie symplectique, [15] pour la géométrie de contact et, pour les actions toriques, à [2] dans le cas symplectique et [3] dans le cas contact.

2.1 Variétés symplectiques

Définition 2.1.1. *Nous appelons variété symplectique la donnée d'une variété W de dimension $2n$ et d'une 2-forme ω sur W vérifiant :*

- (i) $\forall x \in W$, ω_x est non dégénérée sur $T_x W$ ou de manière équivalente $\omega^{\wedge n} \in \Omega^{2n}(W)$ est une forme volume,
- (ii) ω est fermée, c'est-à-dire $d\omega = 0$.

Contrairement au cas riemannien, toute variété n'admet pas forcément une structure de variété symplectique, quand bien même celle-ci est de dimension paire. La structure de variété symplectique impose notamment une contrainte sur les groupes de cohomologie, du moins dans le cas compact sans bord.

Proposition 2.1.1. *Soit (W, ω) une variété symplectique fermée de dimension $2n$, alors les groupes de cohomologie de de Rham de degré pair sont tous non triviaux : $H^{2k}(W) \neq 0$ pour tout k , $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. $\omega^{\wedge n}$ définit une forme d'orientation sur W en particulier $\omega^{\wedge n}$ n'est pas exacte.

Soit $1 \leq k \leq n$, alors la forme $\omega^{\wedge k}$ est :

- (i) fermée car ω est fermée,
- (ii) non exacte, car si nous avons $\omega^{\wedge k} = d\alpha$ avec α une $(2k - 1)$ -forme, nous aurions $d(\alpha \wedge \omega^{\wedge n-k}) = d\alpha \wedge \omega^{\wedge n-k} = \omega^{\wedge n}$ ce qui est impossible.

On en déduit donc que $\omega^{\wedge k}$ définit un élément non trivial de $H^{2k}(W)$. □

Une autre différence notable avec le cas riemannien est l'absence d'invariants locaux comme la courbure, toute variété symplectique ressemble localement à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$ où ω_{st} est définie par $\omega_{st} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. C'est ce qu'affirme le théorème de Darboux qui suit (voir [19]) :

Théorème 2.1.1. *Soient (W^{2n}, ω) une variété symplectique et $x \in W$.*

Il existe un voisinage ouvert U de x dans W , un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ et un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ tels que

- (i) $\phi(x) = 0$,
- (ii) $\forall x \in U, \phi^*(\omega_{st})_x = \omega_x$.

Définition 2.1.2. *Soit (W, ω) une variété symplectique.*

Nous appelons structure presque complexe compatible avec ω toute section $J : W \rightarrow \text{End}(TW)$ de classe C^∞ vérifiant pour tout $x \in W$:

- (i) $J_x^2 = -\text{Id}_{T_x W}$,
- (ii) J_x préserve $\omega_x : \forall X, Y \in T_x W, \omega_x(J_x(X), J_x(Y)) = \omega_x(X, Y)$,
- (iii) *La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par $\langle X, Y \rangle = \omega_x(X, J_x(Y))$ est symétrique et définie positive sur $T_x(W)$.*

Nous notons $\mathcal{J}(W, \omega)$ l'ensemble des structures presque complexes compatibles avec ω et appelons (W, J) une variété presque complexe.

Toute variété complexe admet une structure presque complexe de manière canonique : la multiplication par i lue dans n'importe quelle carte holomorphe. La réciproque est fausse. Cependant, comme l'affirme la proposition qui suit, toute variété symplectique, à défaut d'admettre une structure holomorphe, admet une structure presque complexe compatible avec sa structure symplectique. Un morphisme entre deux variétés presque complexes $(W_1, J_1), (W_2, J_2)$ n'est autre qu'une application différentiable f de W_1 vers W_2 échangeant les deux structures : $df \circ J_1 = J_2 \circ df$. Lorsque $(W_1, J_1) = (\Sigma, i)$ est une surface, la structure presque complexe est induite par une vraie structure holomorphe (d'après le théorème de Newlander-Nirenberg, voir [27]). Par analogie avec le cas complexe, nous parlons de *courbes pseudoholomorphes* (ou de courbes J -holomorphes si l'on veut préciser le lien avec la structure presque complexe). Ces dernières partagent de nombreuses propriétés avec les authentiques courbes holomorphes notamment leur rigidité au sens où elles vérifient des principes de continuation unique, propriété aussi partagée par les solutions de l'équation de Floer, équation qui, comme nous le verrons plus tard, peut s'interpréter comme une courbe pseudoholomorphe perturbée.

Dans l'article fondateur [16], M. Gromov introduit les concepts de structures presque complexes, de courbes pseudoholomorphes et décrit comment celles-ci se comportent vis-à-vis de

la structure symplectique. Outre ce papier, le lecteur pourra consulter [28] pour une introduction détaillée, dans laquelle il pourra notamment trouver la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 2.1.2. *Soit (W, ω) une variété symplectique, alors $\mathcal{J}(W, \omega)$ est un sous ensemble contractile des sections de $\text{End}(TW)$, en particulier il est non vide et connexe.*

Remarque 2.1.1. *La démonstration repose sur la construction d'une équivalence d'homotopie entre l'espace des structures presque complexes et celui des métriques riemanniennes sur la variété qui forment un espace convexe donc contractile.*

2.2 Variétés de contact

Si la non dégénérescence de ω force la parité de la dimension de W , les variétés symplectiques ont leur analogue de dimension impaire :

Définition 2.2.1. *Une variété de contact (M^{2n+1}, ξ) est la donnée d'une variété compacte M et d'une distribution lisse d'hyperplans $\{\xi_x \in TM_x | x \in M\}$ telle que, localement, si $\xi = \ker \alpha$ avec α une 1-forme, alors $d\alpha|_\xi$ est non dégénérée, ou de manière équivalente $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une $(2n+1)$ -forme partout non nulle. Lorsque la forme est définie globalement, on l'appelle forme de contact.*

Une variété de contact co-orientable est une variété de contact (M, ξ) telle que TM/ξ , qui est un fibré en droites au-dessus de M , soit orientable ou de manière équivalente trivialisable. Une variété de contact co-orientée est la donnée d'une variété de contact co-orientable et d'une orientation de ce fibré.

Remarque 2.2.1. *La définition précédente ne dépend pas du choix de α mais bien de ξ . En effet, si l'on remplace notre forme par $f\alpha$ avec $f : M \rightarrow \mathbb{R}^*$, alors $d(f\alpha)|_\xi = (df \wedge \alpha + f d\alpha)|_\xi = f d\alpha|_\xi$ est non dégénérée si et seulement si α est non dégénérée.*

Proposition 2.2.1. *Une variété de contact est co-orientable si et seulement si elle admet une forme de contact globalement définie.*

Démonstration. Supposons la variété co-orientable et fixons une orientation. On peut trouver un recouvrement d'ouverts fini $(U_i)_{i \in I}$ tel que, au dessus de chaque U_i , $\xi = \ker(\alpha_i)$ avec α_i définie localement et positive sur l'orientation de TM/ξ . Sur $U_i \cap U_j$, $\alpha_i = f \alpha_j$ avec $f > 0$. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité associée au recouvrement des ouverts, alors $\sum_{i \in I} \rho_i \alpha_i$ est une forme de contact globale et positive pour l'orientation choisie de TM/ξ .

Réciproquement, la donnée d'une forme de contact induit pour tout $x \in M$ un isomorphisme entre $(TM/\xi)_x$ et $\mathbb{R}$ et donc une orientation de TM/ξ . $\square$

Comme les variétés symplectiques, les variétés de contact n'ont pas d'invariants locaux, tout point admet un voisinage localement *contactomorphe* au modèle standard $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st} = \ker \alpha_{st})$ avec $\alpha_{st} = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$, voir [15] :

Théorème 2.2.1. *Soient (M^{2n}, ω) une variété de contact et $x \in M$.*

Il existe un voisinage ouvert U de x dans M , un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ et un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ tels que

- (i) $\phi(x) = 0$,
- (ii) $\forall x \in U, \phi_*(\xi)_{\phi(x)} = (\xi_{st})_{\phi(x)}$.

À partir d'une variété de contact co-orientable munie d'une forme de contact globale $(M, \xi = \ker \alpha)$ on peut construire une variété symplectique en la "multipliant" par la droite réelle :

Définition 2.2.2. *Soit $(M, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact co-orientée, alors $\mathbb{R} \times M$ munie de la forme $d(e^t \alpha)$ est une variété symplectique appelée la symplectisation de M (la variable t appartient à la composante réelle).*

La classe d'isomorphisme de la symplectisation ne dépend que de la co-orientation choisie : en remplaçant notre forme par $f\alpha$ avec $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ alors $(t, m) \in \mathbb{R} \times M \mapsto (\ln(f(m))t, m)$ définit un symplectomorphisme entre $(\mathbb{R} \times M, d(e^t f\alpha))$ et $(\mathbb{R} \times M, d(e^t \alpha))$.

Définition/Proposition 2.2.1. (i) *Soit (W, ω) une variété symplectique. Un champ de vecteurs $X : W \rightarrow TW$ est dit Liouville si $\mathcal{L}_X \omega = \omega$.*

(ii) *Soit $\Sigma \subset W$ une hypersurface. S'il existe un champ de Liouville défini sur un voisinage de Σ et transverse à Σ , alors la forme $\alpha := \iota_X \omega$ est une forme de contact sur Σ . La surface est alors dite de type contact.*

(iii) *Une variété symplectique (W, ω) à bord $\partial W = M$, est dite à bord convexe s'il existe un champ de Liouville transverse à M (rendant M de type contact) pointant vers l'extérieur de la variété.*

Démonstration. (ii) Soit $x \in \Sigma$ et $\langle X \rangle_x^{\perp \omega} = \{Y \in T_x W \mid \omega(X, Y) = 0\}$. Comme ω est non dégénérée $\dim \langle X \rangle_x^{\perp \omega} = 2n - 1$. Comme $X \pitchfork \Sigma$, $\ker \alpha_x = \ker(\iota_X \omega)|_{T\Sigma_x} = \langle X \rangle_x^{\perp \omega} \cap T\Sigma_x$ est un espace de dimension $2(n - 1)$ sur lequel $d\alpha = d \circ \iota_X \omega = \mathcal{L}_X \omega = \omega$ est non dégénérée. $\square$

Les deux constructions précédentes sont en quelque sorte réciproques.

Dans la symplectisation d'une variété de contact M , le champ de vecteurs suivant la composante réelle $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ de Liouville transverse à toutes les hypersurfaces $\{t\} \times M$ et la structure de contact induite coïncide avec celle de départ.

Inversement, soit Σ une hypersurface de type contact dans W et X un champ de Liouville, alors $\Psi :]-\epsilon, \epsilon[\times M \rightarrow W$, définie par $(t, m) \mapsto \phi^t(m)$ où ϕ désigne le flot de X , définit un symplectomorphisme sur un voisinage de Σ dans W pour ϵ assez petit et Σ compacte.

Étant donnés une variété symplectique à bord convexe $\partial W = M$ et deux champs de Liouville X_1, X_2 définis sur un voisinage de M et pointant vers l'extérieur, pouvons-nous comparer les deux structures de contact obtenues ? Remarquons que pour tout $t \in [0, 1]$, $X_t = (1-t)X_1 + tX_2$ est un champ de Liouville transverse et pointant vers l'extérieur de la variété, donc $\alpha_t = \iota_{X_t}\omega$ est une forme de contact pour tout t . Le théorème de Gray nous permet d'affirmer que les deux structures de contact sont isomorphes (voir [15]) :

Théorème 2.2.2. *Soit M une variété et $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ une distribution lisse de structures de contact. Alors il existe une famille de difféomorphismes $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $\phi_0 = \text{Id}_M$ et $(\phi_t)_*(\xi_t) = \xi_0$.*

Remarque 2.2.2. *Ces difféomorphismes font correspondre les structures de contact mais non nécessairement les formes de contact. En général, on ne peut affirmer que pour une famille de formes de contact $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ il existe $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$ vérifiant $\phi_t^* \alpha_0 = \alpha_t$.*

Nous finissons cette partie en introduisant le champ de Reeb :

Définition/Proposition 2.2.2. *Soit (M, ξ) une variété de contact, et α une forme de contact pour ξ . Le champ de Reeb associé à α est l'unique champ de vecteurs R_α vérifiant*

- (i) $\alpha(R_\alpha) = 1$,
- (ii) $\iota_{R_\alpha} d\alpha = 0$.

Démonstration. Prenons n'importe quel vecteur X vérifiant $\alpha(X) = 1$. Par non-dégénérescence de $d\alpha|_\xi$ il existe $Y \in \xi = \ker(\alpha)$ vérifiant $\iota_Y d\alpha|_\xi = \iota_X d\alpha|_\xi$ et $R_\alpha := X - Y$ vérifie alors $\alpha(R_\alpha) = \alpha(X) = 1$, $\iota_{R_\alpha} d\alpha|_\xi = \iota_Y d\alpha|_\xi - d\iota_X \alpha|_\xi = 0$, et $\iota_{R_\alpha} d\alpha(R_\alpha) = d\alpha(R_\alpha, R_\alpha) = 0$. Comme $TM = \langle R \rangle \oplus \xi$ on déduit $\iota_{R_\alpha} d\alpha = 0$.

Supposons que R_1, R_2 vérifient tous deux les conditions, alors $R_1 - R_2 \in \ker(\alpha) = \xi$ et $R_1 - R_2 \in \ker d\alpha|_\xi = \{0\}$ ce qui prouve l'unicité. $\square$

Remarquons que R_α préserve la forme de contact : $\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha = d \circ \iota_{R_\alpha} \alpha + \iota_{R_\alpha} \circ d\alpha = 0$. Il ne dépend pas uniquement de la structure de contact, mais bien de la forme choisie. L'homologie de contact (plus ou moins bien définie selon les variétés de contact) vise à associer un invariant de contact à chaque variété de contact (M, ξ) établissant une borne inférieure sur le nombre d'orbites périodiques du champ de Reeb R_α pour une forme de contact définissant ξ . Cette théorie est fortement inspirée de et entretient des liens forts avec son analogue symplectique : l'homologie symplectique dont nous parlerons dans les sections suivantes.

2.3 Action hamiltonienne sur une variété symplectique

La géométrie symplectique permet de formuler mathématiquement la mécanique classique, une variété symplectique permet de modéliser les phases d'un système mécanique, et la forme

symplectique elle même, l'interaction entre deux quantités associées à l'objet : sa position et sa vitesse.

Le principe de Noether affirme qu'à chaque symétrie du système correspond une quantité physique conservée : les définitions suivantes essayent de formaliser rigoureusement ces idées issues de la physique.

Définition 2.3.1. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété symplectique (W, ω) , l'action est dite symplectique si le groupe agit par symplectomorphismes, c'est-à-dire si pour tout $g \in G$, $g^*\omega = \omega$.

Soit $\xi \in \mathfrak{g} = \mathfrak{lie}(G)$. Notons aussi ξ le champ de vecteurs induit sur la variété symplectique $(\frac{d \exp(t\xi).x}{dt})$ lorsqu'il n'y a pas de confusion. Comme, pour tout t , $\exp(t\xi)$ agit par symplectomorphisme, en dérivant l'expression $\exp(t\xi)^*\omega = \omega$, on obtient $0 = \mathcal{L}_\xi \omega = d \circ \iota_\xi \omega + \iota_\xi d\omega = d \circ \iota_\xi \omega$.

La forme $\iota_\xi \omega$ est fermée et donc localement exacte $\iota_\xi \omega = df$. Lorsque la forme est globalement exacte, la fonction f est définie globalement à une constante près et correspond à la quantité conservée, ce qui nous conduit à la définition d'action hamiltonienne :

Définition 2.3.2. Soit (W, ω) une variété symplectique munie d'une action symplectique par un groupe de Lie G , l'action est dite hamiltonienne s'il existe une application $\mu : W \rightarrow \mathfrak{g}^*$ vérifiant :

- (i) $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, $d\mu^\xi := d\langle \mu, \xi \rangle = \iota_\xi \omega$,
- (ii) $\forall (x, g) \in W \times G$, $\mu(g.x) = Ad_g^*(\mu(x))$.

μ est appelée application moment pour l'action hamiltonienne.

Remarque 2.3.1. Soit $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ alors, par non dégénérescence de ω , il existe un unique champ de vecteurs X_f tel que $\iota_{X_f} \omega = df$. Soit f, g deux fonctions réelles sur W , on note $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = -dg(X_f)$ leur crochet de Poisson.

Cette loi munit $C^\infty(W, \mathbb{R})$ d'une structure d'algèbre de Poisson. En dérivant (ii), on obtient que pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ $\{\mu^\xi, \mu^\eta\} = d\mu^\xi(\eta) = \mu^{[\xi, \eta]}$ ou de manière équivalente un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(W, \mathbb{R})$ défini par $\xi \mapsto \mu^\xi$.

Lorsque le groupe est commutatif, l'action adjointe sur l'algèbre de Lie est triviale. L'application moment est donc G -invariante et pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $\omega(\xi, \eta) = 0$. Chaque orbite $G.x$ est une variété car chaque point partage le même groupe d'isotropie et $G.x \simeq G/G_0$ avec $G_0 = \text{Iso}(x)$.

Ces variétés sont *symplectiquement isotropes* au sens où pour tous $X, Y \in TG.x$, $\omega(X, Y) = 0$. Par non dégénérescence de la forme symplectique, la dimension maximale d'une variété isotrope est $\frac{\dim(W)}{2}$, dans ce cas de figure on parle de variété *lagrangienne*. Pour que l'action soit effective, il faut donc que $\dim(G) \leq \frac{\dim(W)}{2}$ (voir [19] pour les propriétés des variétés isotropes et lagrangiennes).

Définition 2.3.3. Une variété torique symplectique (W, ω, μ) est la donnée d'une variété symplectique (W, ω) de dimension $2n$, compacte, munie d'une action hamiltonienne effective d'un tore de dimension n $\mathbb{T}^n$ avec pour application moment μ .

L'application moment fournit une puissante interprétation combinatoire des groupes d'isotopie : son image est un polytope de $\mathfrak{g}$. Pour un point $x \in W$, plus la codimension de la face sur laquelle se trouve $\mu(x)$ est grande plus son groupe d'isotropie est grand. Par exemple, les points fixes de l'action sont envoyés sur les sommets et les points pour lesquels l'action est libre sont envoyés à l'intérieur du polytope, c'est le théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg (voir [2]) :

Théorème 2.3.1. Soit (W^{2n}, ω, μ) une variété torique symplectique. Alors $\mu(W) \subset \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action.

La démonstration de ce théorème fait intervenir les propriétés de *fonctions de Morse-Bott* bien choisies, celles-ci font l'objet de la section suivante, l'étude de leurs points (ou de leurs variétés) critiques peut fournir beaucoup d'informations sur la topologie de W . Observons le phénomène suivant qui met en lumière le lien existant entre points fixes de l'action et points critiques de l'application moment.

Soit $\xi \in \mathfrak{g}$ et $H = \mu^\xi : W \rightarrow \mathbb{R}$, nous distinguons ici l'élément de l'algèbre de Lie ξ et le champ de vecteurs ξ_W qu'il induit sur W . Soit $x \in W$, un point critique de H , alors pour tout $X \in T_x W$, $0 = dH(X) = \omega(\xi_W, X)$. Par non-dégénérescence de ω , $\xi_W = 0$ et x est laissé fixe par le sous-groupe engendré par $(\exp(t\xi))_{t \in \mathbb{R}}$ et par sa fermeture dans G . Lorsque $G = \mathbb{T}^n$, on peut choisir ξ tel que $(\exp(t\xi))_{t \in \mathbb{R}}$ soit dense dans $\mathbb{T}^n$, et les points fixes de l'action sont exactement les points critiques de H .

2.4 Variétés de contact toriques

Définition 2.4.1. Une variété de contact torique est la donnée

- (i) d'une variété de contact (M^{2n-1}, ξ) co-orientée,
- (ii) d'une action effective d'un tore $\mathbb{T}^n$ préservant ξ .

Choisissons une forme de contact α . Comme l'action préserve ξ , pour tous $(g, m) \in \mathbb{T}^n \times M$: $g^* \alpha_m = f(g, m) \alpha_m$ avec $f : \mathbb{T}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^*$. Par connexité du tore, f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $m \in M$, $\int_{\mathbb{T}^n} f(g, m) dg > 0$.

La forme $\int_{\mathbb{T}^n} g^* \alpha_m dg = (\int_{\mathbb{T}^n} f(g, m) dg) \alpha$ est alors une forme de contact $\mathbb{T}^n$ -équivariante.

Remarque 2.4.1. Étant donné que les actions de groupe sur lesquelles nous nous concentrons sont toriques, nous avons directement introduit la notion de variété de contact torique. Néanmoins, la définition et la construction précédente restent valides si l'on remplace le tore par un groupe de Lie G , pourvu qu'il soit connexe et qu'il admette une mesure de Haar.

La définition suivante est l'analogie contact de 2.3.2.

Définition/Proposition 2.4.1. *Soit (M, ξ) une variété de contact torique, alors (M, ξ) admet une application (également appelée application moment) $\mu : M \rightarrow \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ vérifiant*

- (i) $d\langle \mu, \eta \rangle = d\mu^\eta = \iota_\eta d\alpha$,
- (ii) μ est $\mathbb{T}^n$ -équivariante.

Démonstration. Choisissons une forme de contact α équivariante, alors la fonction $\mu : M \rightarrow \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ définie par $\mu^\eta = -\alpha(\eta)$ vérifie :

- (i) $d\mu^\eta = -d \circ \iota_\eta \alpha = -\mathcal{L}_\eta \alpha + \iota_\eta d\alpha = \iota_\eta d\alpha$,
- (ii) pour tous $(x, \eta) \in M \times \mathbb{T}^n$, $\mu^\eta(g.x) = -\alpha_{g.x}(\eta_{g.x}) = -\alpha_{g.x}(g_*\eta_x) = -\alpha_x(\eta_x) = \mu^\eta(x)$.

□

Pour conclure cette section, remarquons que la symplectisation d'une variété de contact torique (M, ξ) hérite d'une structure de variété torique symplectique : $g.(t, m) = (t, g.m)$. L'action du tore commute avec les translations dans la direction verticale, et comme la forme symplectique est exacte, il est possible de choisir $\mu^\xi(t, m) = -e^t \alpha_m(\xi)$ comme application moment.

2.5 Recollement équivariant

Étant donnée une variété symplectique à bord convexe $\partial W = M$, nous avons vu qu'il existe un voisinage du bord dans W symplectomorphe à $(] \epsilon, 0] \times M, d(e^t \alpha))$, où $\alpha = \iota_X \omega$ avec X un champ de Liouville pointant vers l'extérieur.

Il est donc possible de recoller les deux variétés symplectiques W et $\mathbb{R} \times M$. Nous précisons cette construction lorsqu'un groupe de Lie G compact et connexe agit sur W de manière hamiltonienne.

Soit X un champ de Liouville défini sur un voisinage de M dans W . Soit $g \in G$, $x \in M$ et $Y \in T_x W$:

$$(\iota_{g_* X} \omega)_x(Y) = \omega_x(g_* X_{xg^{-1}}, Y) = \omega_{xg^{-1}}(X_{xg^{-1}}, g_*^{-1} Y) = g^{-1*}(\iota_X \omega)_x(Y)$$

Donc $\iota_{g_* X} \omega = g^{-1*}(\iota_X \omega)$, si on applique d de chaque côté, la formule de Cartan nous donne $\mathcal{L}_{g_* X} \omega = g^{-1*}(\mathcal{L}_X \omega) = g^{-1*}(\omega) = \omega$.

En tant que difféomorphisme, chaque élément g préserve le bord, son espace tangent et donc les directions transverses au bord. En particulier pour tout g , $g_* X \pitchfork M$. Comme G est connexe et que $1_{\mathbb{T}^n} X = X$, on en déduit que $g_* X$ pointe toujours vers l'extérieur de la variété le long du bord. Donc pour tout $g \in G$, $g_*(X)$ est un champ de Liouville défini sur un voisinage V de M . Comme M est stable par G nous pouvons, quitte à réduire le voisinage en question, le supposer lui aussi stable par G .

Notons m la mesure de Haar normalisée sur G . Le champ de vecteurs X' défini sur V par $X'_x = \int_G g_* X_{g^{-1}.x} dg$ est un champ de Liouville G -équivariant et $\alpha = \iota_{X'} \omega$ est une forme de contact globale équivariante pour M .

Pour ϵ assez petit l'application $\Psi : [-\epsilon, 0] \times M \rightarrow W$ définie par $(y, t) \mapsto \phi^t(y)$, où ϕ désigne le flot de X' , est un difféomorphisme sur son image. Sur $[-\epsilon, 0] \times M$ la forme symplectique s'écrit $d(e^t \alpha)$. Comme le flot de X' commute avec chaque $g \in G$, l'action s'écrit : $g.(t, m) = (t, g.m)$. On peut donc recoller les deux variétés (W, ω) et $([-\epsilon, +\infty[\times M, d(e^t \alpha))$ pour construire

$$\hat{W} := W \cup_{\Psi} [-\epsilon, +\infty[\times M$$

qui hérite de la structure symplectique *et* de l'action de groupe hamiltonienne.

2.6 L'indice de Conley-Zehnder

Nous terminons cette section avec une discussion sur l'indice de Conley-Zehnder, il s'agit d'un entier associé à certains chemins de matrices symplectiques. Il n'est pas à relier avec les actions de groupes que nous venons d'étudier mais nous l'exposons ici afin de clore ce chapitre qui rassemble tous les outils symplectiques dont nous serons amenés à nous servir.

Nous nous plaçons dans l'espace vectoriel symplectique standard $(\mathbb{R}, \omega_{st})$ muni de la structure (presque) complexe J_0 compatible avec ω_0 définie par $J_0(x_i) = y_i$ ($i = 1 \dots n$) et ne considérons que des symplectomorphismes linéaires. Les matrices associées à ces derniers forment un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$, le *groupe symplectique* que nous notons $Sp(2n)$ et dont nous énonçons quelques propriétés élémentaires (voir [4] section 5).

Proposition 2.6.1. *(i) La rétraction de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ sur $O(2n)$ induit une rétraction de $Sp(2n)$ sur $Sp(2n) \cap O(2n) \simeq U(n)$. En particulier $Sp(2n)$ est connexe, et $\pi_1(Sp(2n)) \simeq \mathbb{Z}$.
(ii) L'ensemble $\Sigma = \{M \in Sp(2n) \mid \det(M - Id_{2n}) = 0\}$ est une sous-variété algébrique de $Sp(2n)$ appelée cycle de Maslov. Elle divise $Sp(2n)$ en deux composantes connexes et simplement connexes. Nous notons $Sp(2n)^* = Sp(2n) \setminus \Sigma$.*

Soient

$$W^+ = -Id_{2n} \in \{M \in Sp(2n) \mid \det(M - Id_{2n}) > 0\}, \text{ et } \\ W^- = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -1, \dots, -1, 2, -1, \dots, -1\right) \in \{M \in Sp(2n) \mid \det(M - Id_{2n}) < 0\}.$$

La rétraction évoquée précédemment envoie W^+ sur $-Id_n$ (opposée de la matrice identité de l'espace vectoriel *complexe* de dimension n) et envoie W^- sur $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, les signes des déterminants sont respectivement $(-1)^n$ et $(-1)^{n-1}$.

Soit $R : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$ un chemin symplectique reliant Id_{2n} à $R(1) \in Sp(2n)^*$. Nous concaténons R avec un chemin dans $Sp(2n)^*$ reliant $R(1)$ à $W^\pm$ selon la composante où se trouve

$R(1)$. En composant ce chemin avec la rétraction sur $U(n)$ suivie de l'application déterminant, on obtient $\rho : [0, 1] \rightarrow S^1$ vérifiant $\rho(0) = 1$ et $\rho(1) \in \{-1, 1\}$. Donc ρ^2 est un lacet basé en 1.

Définition/Proposition 2.6.1. *L'indice de Conley-Zehnder du chemin R est défini comme le degré du lacet ρ^2 .*

- (i) *Deux chemins symplectiques reliant Id_{2n} à une matrice dans $Sp(2n)^*$ sont homotopes par des chemins du même type si et seulement s'ils ont le même indice de Conley-Zehnder.*
- (ii) *L'indice de chemin est invariant par conjugaison par un autre chemin symplectique.*

Démonstration. voir [4] section 7 □

Le lecteur pourra aussi consulter [17] pour une exposition détaillée de l'indice de Conley-Zehnder.

Chapitre 3

Théorie de Morse

Cette section a pour but de rappeler les bases de la théorie de Morse, théorie dont s'est inspiré Andreas Floer pour résoudre la conjecture d'Arnold (voir [13],[12],[11]). Cette théorie vise à illustrer le lien qui existe entre la topologie d'une variété et la nature des points critiques des fonctions définies sur la dite variété.

On peut distinguer deux constructions :

- I Une, plus "chirurgicale", qui exhibe, à partir d'une fonction sur la variété, une décomposition cellulaire. Le lecteur pourra consulter le superbe cours de John Milnor [20] qui comprend aussi une sorte de pré-théorie de Morse en dimension infinie appliquée à l'existence de géodésiques.
- II Une autre approche consiste à construire un complexe différentiel directement, qui dépend de la fonction en question, mais dont l'homologie est bien un invariant *topologique* : on retrouve l'homologie singulière. C'est ce point de vue qui est adopté dans [26] où l'auteur introduit la théorie de Morse "à la Floer".

Nous renvoyons le lecteur à ces deux ouvrages pour les démonstrations des résultats invoqués ici.

3.1 Fonctions de Morse

Soit M une variété compacte sans bord de dimension n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $x \in M$ un point critique, $df_x = 0 \in T_x^*M$. Choisissons des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur un voisinage de x , et considérons deux champs de vecteurs X, Y définis sur ce voisinage. Le calcul

$$X.(Y.f)_x = X.(\sum_i Y^i \frac{\partial f}{\partial x_i})_x = \sum_{i,j} X_x^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + X_x^j Y_x^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j} X_x^j Y_x^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

montre que $X.(Y.f)_x$ ne dépend que de la valeur de Y au point x et non de son comportement autour de x , et, trivialement, ne dépend que de la valeur de X au point x . De plus, cette expression est symétrique en X et en Y , ce que l'on peut constater, soit en regardant son expression écrite dans les coordonnées choisies, soit en remarquant que $X.(Y.f)_x - Y.(X.f)_x = df_x([X, Y]) = 0$. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 3.1.1. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et x un point critique de f . On appelle hessienne de f au point x la forme bilinéaire symétrique sur $T_x M$ définie par $\text{Hess}_x f(X, Y) = X.(\tilde{Y}.f)_x$ où $X, Y \in T_x M$ et $\tilde{Y}$ est n'importe quelle extension de Y sur un voisinage de x .

On définit l'indice de f au point x , $\nu(f)_x$, comme la dimension du plus grand sous-espace de $T_x M$ sur lequel $\text{Hess}_x f$ est définie négative ou, de manière équivalente, le nombre de ses valeurs propres négatives comptées avec multiplicité.

Remarque 3.1.1. Il existe une notion riemannienne de hessienne d'une fonction au point x , avec $df_x \neq 0$. Étant donnée une métrique g , soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée, alors on définit la hessienne par $\text{Hess}_x^g f := (\nabla df)_x \in T_x^* M^{\otimes 2}$.

Ces deux notions coïncident pour x point critique de f , de manière générale : soient ∇_1, ∇_2 deux connexions sur TM , alors $\nabla_1 df - \nabla_2 df$ est tensorielle en df , cet expression ne dépend que de la valeur ponctuelle de df . Donc si $df_x = 0$, alors $\nabla_1 df_x = \nabla_2 df_x$.

Définition 3.1.2. Une fonction de classe C^2 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Morse si pour tout point critique x de f , $\text{Hess}_x f$ est non dégénérée, induisant un isomorphisme $T_x M \simeq T_x^* M$.

Voici une autre manière de caractériser les fonctions de Morse. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ induit une section du fibré cotangent $df : M \rightarrow T^* M$ et $df^{-1}(0)$ correspond à l'ensemble des points critiques. Alors f est Morse si et seulement si df , vue comme section de $T^* M$, intersecte la section nulle de manière transverse. En effet, soit ∇ une connexion sur $T^* M$, alors cette transversalité est équivalente à demander que $\nabla df_x : TM_x \rightarrow T^* M_x$ surjective pour tout point critique x , et donc bijective pour des raisons de dimension.

Comme expliqué dans la remarque précédente, cette condition ne dépend pas de la connexion choisie. En particulier, étant donnée une carte sur un voisinage de x , on peut la choisir égale à la différentiation usuelle (lue dans la carte en question) sur ce voisinage et on retrouve la notion usuelle de non dégénérescence, à savoir l'inversibilité de la matrice $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$.

Cette reformulation, en plus de nous préparer à la théorie de Floer où les questions de transversalité sont cruciales, nous garantit aussi la finitude du nombre de points critiques dans le cas compact :

Proposition 3.1.1. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse, alors l'ensemble des points critiques est fini.

Démonstration. Les points critiques de f correspondent à $df^{-1}(0)$ avec $df \pitchfork 0_{T^*M}$, donc ils forment une variété de codimension $\text{Codim}_M df^{-1}(0) = \text{Codim}_{T^*M} 0_{T^*M} = n = \dim M$. L'ensemble $df^{-1}(0)$ est discret dans M compacte donc il est fini. $\square$

Notons $M^a = f^{-1}(]-\infty, a])$ et $M^{[a,b]} := f^{-1}([a, b])$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons que $M^{[a,b]}$, qui est un compact en tant que fermé de M , ne contienne pas de points critiques. Choisissons une métrique riemannienne sur M , un voisinage V de $M^{[a,b]}$ qui ne contienne pas de points critiques et $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

- (i) $0 \leq \rho \leq 1$,
- (ii) ρ est à support dans V ,
- (iii) $\rho|_{M^{[a,b]}} = 1$.

Soit X défini par $X_x = -\rho(x) \frac{\nabla f_x}{\|\nabla f_x\|^2}$ et soit ϕ^t son flot. Pour $x \in M$, $\frac{df(\phi^t(x))}{dt} = -\rho(\phi^t(x))$ dont on déduit que :

- (i) f est décroissante le long des lignes de flot de X , en particulier, $\phi^t(M^a) \subset M^a$,
- (ii) pour $x \in M^b$ et $t \in [0, b-a]$ soit $\phi^t(x) \in M^a$, soit $\forall t' \in [0, t] : \phi^{t'}(x) \in M^{[a,b]}$, $\frac{df \circ \phi^{t'}(x)}{dt}|_{t'} = -1$ et donc $f(\phi^{t'}(x)) = f(x) - t'$.

Dans tous les cas, au temps $b-a$, le flot a envoyé M^b dans M^a . En particulier il induit une équivalence d'homotopie entre deux ensembles de sous-niveau lorsque les lignes de niveau intermédiaires ne contiennent pas de points critiques.

La topologie ne peut changer que lorsque l'on passe un ou des points critiques. Partant de ce constat, on peut, à partir d'une fonction de Morse, regarder comment évolue la topologie de M^a pour a allant de $-\infty$ ($M^a = \emptyset$) à $+\infty$ ($M^a = M$). Plus précisément, passer un point critique d'indice k correspond à attacher une cellule de dimension k , et l'on obtient ainsi une décomposition cellulaire de la variété. Ce premier point de vue met en lumière le lien qui existe entre les fonctions de Morse et la topologie de la variété, il existe un autre angle d'approche, celui qui a inspiré A.Floer : il consiste à définir un complexe différentiel engendré par les points critiques de la fonction et dont la différentielle compte (avec des signes appropriés) le nombre de trajectoires antigradient reliant deux points critiques d'indice consécutif.

3.2 L'espace des trajectoires

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et g une métrique riemannienne sur M . Pour $x, y \in M$ deux points critiques de f , nous voulons étudier les lignes de flot de l'antigradient $(-\nabla f)$ de f relativement à g , c'est à dire les courbes $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ solutions de l'équation différentielle $\dot{\gamma}(t) + \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Comme M est compacte, ces courbes sont bien définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, de plus elles tendent vers des points critiques en $\pm\infty$.

Proposition 3.2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ une trajectoire antigradient, $\dot{\gamma}(t) + \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Alors $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) \in \text{Crit}(f)$.*

Proposition 3.2.2. *Soit $x \in \text{Crit}(f)$ alors il existe une carte centrée en x telle que, dans cette carte, f s'écrive : $f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$. Une telle carte est appelée carte de Morse.*

En regardant l'expression de la hessienne dans cette carte, on observe que nécessairement $k = \nu(f)_x$. Quitte à réduire la carte et perturber la métrique, on peut supposer cette dernière euclidienne sur un voisinage de x . Le gradient de f au point $(x_1, \dots, x_n)$ a pour expression $-\sum_{i=1}^k 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^n 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ générant le flot

$$\phi^t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 e^{2t}, \dots, x_k e^{2t}, x_{k+1} e^{-2t}, \dots, x_n e^{-2t}).$$

Définition/Proposition 3.2.1. *Soit $x \in \text{Crit}(f)$. L'ensemble*

$$W^u(x) = \{m \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(m) = x\}$$

est une sous-variété de M difféomorphe à une boule ouverte de dimension $\nu_f(x)$ appelée variété instable de f au point x .

De même, l'ensemble $W^s(x) = \{m \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(m) = x\}$ est une sous-variété de M difféomorphe à une boule ouverte de dimension $n - \nu_f(x)$ appelée variété stable de f au point x .

Démonstration. Traitons le cas stable (le cas instable suit en considérant $-f$ et en remarquant $W^u(f) = W^s(-f)$, $\nu_{-f}(x) = n - \nu_f(x)$). Choisissons une carte de Morse (V, ψ) centrée en x . En lisant le flot dans cette carte, nous observons que

$$\psi(V \cap W^s(x)) = \{(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \mid (x_i)_{i=k+1 \dots n} \in \mathbb{R}^{n-k}\}$$

D'autre part, si $y \in W^s(x)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^n(y) \in V$, donc $W^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-n}(V \cap W^s(x))$ est une union croissante d'ensembles difféomorphes à un disque de dimension $n - \nu_f(x)$. On peut (par exemple en exhibant un difféomorphisme de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$) montrer que W^s est elle-même difféomorphe à une boule ouverte de même dimension. $\square$

Remarque 3.2.1. *La propriété 3.2.1 peut se reformuler ainsi : $M = \bigcup_{x \in \text{Crit}(f)} W^s(x)$. Á partir de cette partition, il est possible d'expliciter la décomposition cellulaire mentionnée en fin de section précédente (voir théorème 4.9.3 de [4]).*

Une fois les variétés stables et instables introduites, nous notons $\mathcal{M}(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$ l'espace des trajectoires antigradient joignant x à y . Afin de garantir une structure lisse à cet ensemble, nous devons nous assurer que ces intersections sont transverses.

Définition/Proposition 3.2.2. *Soit M une variété compacte, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et g une métrique riemannienne. La paire (f, g) est dite Morse-Smale si pour tous*

$x, y \in \text{Crit}(f)$, $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$. Pour une telle paire, pour tout $x, y \in \text{Crit}(f)$ $\mathcal{M}(x, y)$ est une variété lisse de dimension $\nu_f(x) - \nu_f(y)$.

L'ensemble des paires Morse-Smale est dense dans $C^2(M, \mathbb{R}) \times \text{Met}$ où Met désigne les métriques riemanniennes sur M .

Une possibilité pour montrer la densité des paires Morse-Smale consiste à perturber "à la main" la métrique et/ou la fonction légèrement afin de rendre chaque intersection transverse. Nous donnons ici les grandes lignes d'une autre démonstration, qui servira de prototype pour le cas Floer.

Définition 3.2.1. Soit $x, y \in \text{Crit}(f)$, l'ensemble $\mathcal{P}^{1,2}(x, y)$ désigne les courbes $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ telles que :

- (i) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = x$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = y$,
- (ii) pour toute carte (U, ψ) sur M , $\psi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$, définit un élément de $W_{\text{loc}}^{1,2}(\gamma^{-1}(U), \mathbb{R}^n)$,
- (iii) $\dot{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TM$ est de carré globalement intégrable. Plus précisément, on sait que $\dot{\gamma}$ est déjà dans L_{loc}^2 . Étant donnée une carte (V, ψ) centrée en y , on sait $\gamma(s) \in V$ pour tout $s \geq R$ où R est un nombre réel suffisamment grand. La condition est alors que $\psi_* \dot{\gamma} : [R, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ définisse un élément de $L^2([R, +\infty[, \mathbb{R}^{2n})$ et de même pour x en $-\infty$.

Cet espace est muni d'une structure de variété de Banach (même de Hilbert). Son espace tangent au point γ est $T_\gamma \mathcal{P}^{1,2}(x, y) = W^{1,2}(\gamma^* TM) \simeq W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, le dernier isomorphisme se déduisant de $\gamma^*(TM) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}$ est contractile.

Enfin, considérons le fibré $\mathcal{E}$ au dessus de $\mathcal{P}^{1,2}$ ayant pour fibre $\mathcal{E}_\gamma = L^2(\gamma^* TM) \simeq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Remarque 3.2.2. La trivialisation de $\gamma^* TM$ doit être choisie prudemment afin d'induire un isomorphisme $L^2(\gamma^* TM) \simeq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$: nous considérons ici des trivialisations qui, près des extrémités, sont induites par une carte comme dans la définition de $\mathcal{P}^{1,2}(x, y)$.

Remarquons également que $\mathcal{F}(\gamma) = \dot{\gamma} + \nabla f(\gamma)$ définit une section de $\mathcal{E}$, telle que $\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(0_{\mathcal{E}})$. Il faut maintenant montrer que $\mathcal{F}$ est transverse à la section nulle $0_{\mathcal{E}}$. Le choix d'une connexion sur M induit une connexion sur ce fibré, $D\mathcal{F}_\gamma : W^{1,2}(\gamma^* TM) \rightarrow L^2(\gamma^*(TM))$, la dérivée covariante de $\mathcal{F}$ en un point $\gamma \in \mathcal{F}^{-1}(0) = \mathcal{M}(x, y)$ s'écrit alors :

$$\xi \mapsto \nabla_t \xi + \nabla_\xi \nabla f(\gamma).$$

Remarque 3.2.3. Nous avons implicitement identifié $\mathcal{M}(x, y)$ avec les solutions d'une équation différentielle. La correspondance peut se faire ainsi :

- (i) $x \in \mathcal{M}(x, y) \rightarrow \gamma$ avec $\gamma(t) = \phi^t(x)$,
- (ii) $\gamma \rightarrow \gamma(0)$.

Nous utiliserons indifféremment ces deux descriptions par souci pratique.

Voici les points-clés à vérifier et qui ont chacun leur analogue en théorie de Floer :

(A) Le choix des espaces de fonctions.

(i) À partir de cartes $(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)$ sur M , pour que $\psi_1 \circ \gamma$ et $\psi_2 \circ \gamma$ aient la même régularité, il faut supposer en premier lieu γ assez régulière, i.e. $\gamma \in W^{1,p}$ avec p assez grand.

(ii) Nous devons pouvoir identifier les éléments de $\mathcal{P}(x, y)$ avec des fonctions continues.

Nous devons aussi choisir des espaces de Sobolev $W^{1,p}$ avec p assez grand.

Dans le cas présent, $p = 2$ suffit et facilite grandement les calculs en utilisant la structure d'espace de Hilbert. Pour le cas Floer, où l'on ne regarde plus des courbes mais des surfaces dans la variété, il faut prendre $p > 2$.

Nous ne nous attarderons pas sur ce point car cette discussion relève plutôt de l'analyse globale sur des variétés au sens large que de la théorie de Morse/Floer. Le lecteur pourra consulter [21] sur la question du "bon cadre" de l'analyse globale.

(B) Une fois les "bonnes variétés de Banach" sur lesquelles définir nos sections choisies, nous devons nous assurer que les solutions recherchées sont dans les variétés en question. L'inclusion $\mathcal{M}(x, y) \subset \mathcal{P}^{1,2}(x, y)$ se prouve en montrant qu'une solution converge vers ses asymptotes *de manière exponentielle* : $\|\dot{\gamma}(t)\| \leq Ce^{-d\|t\|}$ pour certains C, d .

(C) Afin de montrer que, pour f et/ou g choisi(e)s génériquement, $\mathcal{F}$ est transverse à $0_{\mathcal{E}}$, la section nulle de $\mathcal{E}$, on montre que la section $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{P}^{1,2}(x, y) \times C^2(M, \mathbb{R}) \times \text{Met} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $(\gamma, f, g) \mapsto \dot{\gamma} + \nabla_g f(\gamma)$, où $\nabla_g f$ désigne le gradient de f relativement à g , est transverse à $0_{\mathcal{E}}$. Puis, avec des normes appropriées sur $C^2(M, \mathbb{R}) \times \text{Met}$, nous faisons appel à un théorème de transversalité paramétrique suivant (voir [26] section 2.3).

Théorème 3.2.1. *Soit X, S, Y des variétés de Banach, $P \subset Y$ une sous-variété et $F : X \times S \rightarrow Y$ de classe C^1 vérifiant :*

(i) *F est transverse à P ,*

(ii) *pour tout $s \in S$, l'application $F_s := F(s, \cdot)$ a sa différentielle Fredholm en tout point.*

Il existe $S_0 \subset S$ contenant une intersection d'ouverts denses tel que, pour tout $s \in S_0$, F_s soit transverse à P .

On applique alors le théorème avec $X = \mathcal{P}^{1,2}$, $S = C^2(M, \mathbb{R})$ ou $S = \text{Met}$ ou $S = C^2(M, \mathbb{R}) \times \text{Met}$, $F = \tilde{\mathcal{F}}$ et $Y = \mathcal{E}$, $P = 0_{\mathcal{E}}$.

Remarque 3.2.4. *Nous utiliserons plusieurs fois ce théorème, il repose sur une application du théorème de Sard en dimension infinie. Une autre application immédiate de celui-ci permet de montrer la densité des fonctions de Morse pour toute topologie "raisonnable", en observant que la fonction $C^2(M, \mathbb{R}) \times M \rightarrow T^*M$ définie par $(f, x) \mapsto df_x$ est transverse à 0_{T^*M} .*

(D) Une fois la fonction (ou la métrique) perturbée afin de garantir la surjectivité de $D\mathcal{F}_{\gamma}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(x, y)$, comment déterminer la dimension de l'espace de solutions ? Il

s'avère que $D\mathcal{F}_\gamma$ est un opérateur de Fredholm dont l'indice se calcule facilement.

Une trivialisatoin de γ^*TM permet de lire $D\mathcal{F}$ dans une carte adaptée, qui prend alors la forme : $\xi \mapsto D\mathcal{F}(\xi)(t) = \dot{\xi}(t) + A(t)\xi(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ avec $A(t) = \nabla \nabla f(\gamma(t))$, pour tout t .

Si la connexion choisie est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique, alors $\nabla \nabla f : TM \rightarrow TM$ peut, en utilisant l'isomorphisme $TM \simeq T^*M$ induit par g , s'interpréter comme une forme bilinéaire sur TM définie par :

$$(X, Y) \mapsto g(\nabla_X(\nabla f), Y) = X.g(\nabla f, \tilde{Y}) - g(\nabla f, \nabla_X \tilde{Y}) = X.(\tilde{Y}.f) - (\nabla_X \tilde{Y}).f$$

avec $\tilde{Y}$ une extension de Y , comme la connexion est sans torsion cette expression est symétrique en X, Y .

Lorsque t converge vers $+\infty$, la forme bilinéaire associée à la matrice $A(t)$ correspond donc à $(X, Y) \mapsto X.(\tilde{Y}.f) = \text{Hess}_y(f)(X, Y)$, pareillement en $-\infty$ avec x .

La propriété Fredholm découle du lemme suivant (voir [23]).

Lemme 3.2.1. *Soit $F : W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de la forme $F(\xi)(t) = \dot{\xi}(t) + A(t)\xi(t)$ avec $A(t) \in L^2(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$ avec des asymptotes $A^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} A(t)$ inversibles et symétriques. Alors F est un opérateur de Fredholm. Son indice est donné par le changement net du nombre de valeurs propres négatives (comptées avec multiplicité) de A^- vers A^+ , donc par le nombre de valeurs négatives de A^- moins celui de A^+ .*

Dans notre cas, les matrices asymptotiques correspondent à la hessienne aux points critiques, et on retrouve la dimension attendue pour $\mathcal{M}(x, y)$ à savoir $\nu_f(x) - \nu_f(y)$. Dans le cas de la théorie de Floer, pour une variété symplectique (W^{2n}, ω) les matrices $A(t)$ seront remplacées par des opérateurs non bornés sur $L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Ces espaces étant de dimension infinie il peut y avoir un nombre infini de valeurs propres positives et négatives. Il faudra donc définir un indice de Morse "relatif" afin de calculer le changement net de valeurs propres négatives : l'indice de Conley-Zehnder introduit dans la section précédente.

Ces différents points permettent de munir $\mathcal{M}(x, y)$ d'une structure de variété différentielle. Nous voulons maintenant étudier la compacité de ces espaces, ou plutôt celle des trajectoires non paramétrées sous-jacentes. Étant donnés une paire (f, g) Morse-Smale, et deux points critiques x, y , trois cas de figure se présentent :

- (i) $\nu_f(x) < \nu_f(y)$, alors $\mathcal{M}(x, y)$ est vide (il n'y pas de variétés de dimension négative).
- (ii) $\nu_f(x) = \nu_f(y)$, alors $\mathcal{M}(x, y)$ est aussi vide à moins que $x = y$ où $\mathcal{M}(x, y) = \{x\}$.

En effet, supposons qu'il existe $z \in \mathcal{M}(x, y)$ avec $x \neq y$. La fonction f est strictement décroissante le long d'une ligne de flot, $t \mapsto \phi^t(z)$ est donc un plongement de la droite dans un espace de dimension 0 donc discret, ce qui est impossible.

- (iii) $\nu_f(x) > \nu_f(y)$, alors l'argument précédent montre que $\mathbb{R}$ agit librement sur $\mathcal{M}(x, y)$, il n'est pas difficile de montrer que cette action est proprement discontinue.

Définition 3.2.2. Soit $x, y \in \text{Crit}(f)$ avec $\nu_f(x) > \nu_f(y)$, on note $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$ l'espace quotient. Cet espace est l'ensemble des trajectoires antigradient non paramétrées de x à y , c'est une variété de dimension $\nu_f(x) - \nu_f(y) - 1$.

Si $\mathcal{M}(x, y)$ n'est généralement pas un espace compact (par exemple x n'appartient pas à $\mathcal{M}(x, y)$ mais appartient à son adhérence dans M), qu'en est-il du quotient $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$? Commençons par énoncer le lemme suivant.

Lemme 3.2.2. Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de trajectoires antigradient de f i.e. telles que pour tout n , $\dot{\gamma}_n(t) + \nabla f(\gamma_n(t)) = 0$. Cette suite admet une sous-suite convergeant vers une trajectoire antigradient dans C_{loc}^k pour tout entier k .

Démonstration. Pour tout n , $\|\dot{\gamma}_n(t)\| = \|\nabla f(\gamma_n(t))\|$ est bornée par une constante indépendante de n et t car le gradient de f est lui même borné sur M compacte. La famille est donc équicontinue.

Sur chaque intervalle compact I de $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli à $\gamma_n|_I$ pour obtenir une sous-suite convergente au sens C^0 , puis, en prenant une suite dénombrable d'intervalles compacts croissants de plus en plus grands, obtenir une sous-suite convergente dans C_{loc}^0 vers $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Sur tout compact, $\dot{\gamma}_n(t) = -\nabla f(\gamma_n(t))$ tend uniformément vers $-\nabla f(\gamma(t))$, donc γ est dérivable et de plus c'est une trajectoire antigradient. Un raisonnement similaire montre qu'elle est dans C_{loc}^k . $\square$

Remarque 3.2.5. Dans le cas de la théorie de Floer, borner le gradient demande plus de travail, les points où le gradient explose sont le berceau de sphères J -holomorphes comme nous le verrons plus tard.

Pour définir l'homologie symplectique, la variété en question n'est plus compacte, on lui a attaché des fins cylindriques. Pour pouvoir appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli il faut s'assurer que les trajectoires que nous regardons restent dans une partie compacte de la variété, ceci se montre en utilisant un principe du maximum.

Soit maintenant $([\gamma_n])_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(x, y)$ une suite de trajectoires non-paramétrées. Les représentants γ_n admettent une sous-suite convergeant localement vers une trajectoire antigradient γ , mais qu'en est-t-il des asymptotes? A-t-on $[\gamma] \in \mathcal{L}(x, y)$?

Prenons un voisinage V de x , ne contenant pas d'autres points critiques de f . Comme les γ_n tendent vers y en $+\infty$, il existe un instant, $t_n \in \mathbb{R}$, où les trajectoires "sortent" du voisinage pour la première fois, i.e. t_n est défini par $t_n := \sup\{t \in \mathbb{R} | \gamma_n([-\infty, t]) \subset V\}$. Comme nous

voulons regarder la convergence d'une sous-suite de $[\gamma_n]$, on peut choisir comme représentants $t_n \cdot \gamma_n := \gamma_n(\cdot + t_n)$ que nous continuons de noter γ_n . La nouvelle suite vérifie $\gamma_n([-\infty, 0]) \subset V$. La limite γ d'une sous-suite convergente vérifie aussi $\gamma([-\infty, 0]) \subset V$, donc $\gamma \in \mathcal{M}(x, z)$ pour un certain $z \in \text{Crit}(f)$.

Si $z = y$, $[\gamma]$ est la limite cherchée. Sinon, supposons avoir trouvé $k + 1$ points critiques distincts $x = z_0, z_1 \dots z_k$, k suites $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}^k \in \mathbb{R}$ et k trajectoires antigradient γ^i entre z_{i-1} et z_i ($i = 1 \dots k$) tels que $t_n^i \cdot \gamma_n$ converge vers γ^i dans C_{loc}^∞ .

Soit V un voisinage ouvert de z_k ne contenant pas d'autres points critiques, il existe t^* tel que $\gamma_k([t^*, +\infty]) \subset V$, et comme $t_n^k \cdot \gamma_n \rightarrow \gamma^k$, pour n assez grand, $\gamma_n(t_n^k + t^*) \in V$. Or γ_n tend vers $y \neq z_k$ en $+\infty$, il existe donc un instant où elle quitte V . Soit $t_n^{k+1} := \sup\{t \geq t_n^k + t^* \mid \gamma_n([t_n^k + t^*, t]) \subset V\}$.

La suite $t_n^{k+1} - t_n^k$ diverge vers $+\infty$. En effet, supposons le contraire et choisissons $A \in \mathbb{R}$ tel que $t_n^{k+1} - t_n^k \leq A$ pour tout n . On extrait une sous-suite de $t_n^k \cdot \gamma_n$ qui converge vers γ_k sur le compact $[t^*, A]$. Alors $t_n^k \cdot \gamma_n(t_n^{k+1} - t_n^k) = \gamma_n(t_n^{k+1})$ est contenue dans V à partir d'un certain rang, mais, par définition $\gamma_n(t_n^{k+1}) \in \partial V$.

En faisant de nouveau appel à la compacité locale, la suite $t_n^{k+1} \cdot \gamma_n$ admet une sous-suite qui converge localement vers une trajectoire antigradient γ^{k+1} . Soit $t < 0$, à partir d'un certain rang $t_n^k \leq t + t_n^{k+1} < t_n^{k+1}$, donc $\gamma^{k+1}(t) = \lim \gamma_n(t + t_n^{k+1}) \in V$ par définition de t_n^{k+1} et donc $\gamma_{k+1} \in \mathcal{M}(z_k, z_{k+1})$ pour $z_{k+1} \in \text{Crit}(f)$, $z_{k+1} \neq z_k$.

Nécessairement, $\nu_f(z_{i-1}) > \nu_f(z_i)$, l'entier k est borné par $\nu_f(x) - \nu_f(y)$, l'ajout de ces trajectoires "brisées" est une compactification de $\mathcal{L}(x, y)$, cette idée est résumée dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Soit $x, y \in \text{Crit}(f)$, il existe une topologie sur*

$$\bar{\mathcal{L}}(x, y) := \mathcal{L}(x, y) \coprod \left(\coprod_{\substack{(z_1, \dots, z_k) \in \text{Crit}(f)^k \\ \text{t.q. } \nu_f(z_i) > \nu_f(z_{i+1})}} \mathcal{L}(x, z_1) \times \dots \times \mathcal{L}(z_k, y) \right)$$

telle que $\mathcal{L}(x, y) \rightarrow \bar{\mathcal{L}}(x, y)$ soit une injection ouverte d'image dense.

Lorsque $\nu_f(x) = \nu_f(y) + 1$, une suite de trajectoires antigradient ne peut converger vers une trajectoire brisée : l'espace $\mathcal{L}(x, y)$ est déjà compact et de dimension 0, il est fini. Lorsque $\nu_f(x) = \nu_f(y) + 2$, les trajectoires brisées sont des éléments de

$$\coprod_{\substack{z \in \text{Crit}(f) \text{ t.q.} \\ \nu_f(z) = \nu_f(y) + 1}} \mathcal{L}(x, z) \times \mathcal{L}(z, y)$$

et sont donc en nombre fini.

Plus précisément, $\mathcal{L}(x, y)$ est de dimension 1, ses composantes connexes sont donc soit homéomorphes au cercle, soit à un interval ouvert. Les trajectoires brisées jouent le rôle d'extrémités, elles viennent fermer ces intervalles. En effet, les constructions évoquées précédemment peuvent se raffiner dans ce cas pour montrer que $\tilde{\mathcal{L}}(x, y)$ admet une structure de variété compacte avec pour bord (éventuellement vide) : $\coprod \mathcal{L}(x, z) \times \mathcal{L}(z, y)$ où $z \in \text{Crit}(f)$ vérifie $\nu_f(z) = \nu_f(y) + 1$.

3.3 Homologie de Morse

Soit M une variété de dimension n , munie d'une paire Morse-Smale (f, g) . Considérons le complexe différentiel gradué $(\bigoplus_{0 \leq k \leq n} C_k, \partial)$ avec

- (i) $C_k = \bigoplus_{x \in \text{Crit}(f) | \nu_f(x)=k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot \langle x \rangle$, le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les points critiques d'indice k ,
- (ii) $\partial_k : C_{k+1} \rightarrow C_k$ défini par $\partial_k(x) = \sum_{y | \nu_f(y)=k} \# \mathcal{L}(x, y) \cdot y$ avec $\# \mathcal{L}(x, y)$ le nombre de trajectoires non paramétrées de x vers y , comptées modulo 2.

Pour voir que ∂ est bien de carré nul, remarquons que le coefficient de $\partial_{k-1} \circ \partial_k(x)$ en $y \in C_{k-1}$ est

$$\# \left(\coprod_{\substack{z \in \text{Crit}(f) \text{ t.q.} \\ \nu_f(z) = \nu_f(y) + 1}} \mathcal{L}(x, z) \times \mathcal{L}(z, y) \right)$$

et correspond au nombre de composantes de bord d'une union finie de variétés de dimension 1, connexes et compactes, comme expliqué ci-dessus. Ce nombre est pair et sa réduction modulo 2 est nulle. Le lecteur pourra consulter l'appendice 4.9 de [4] pour la preuve du théorème suivant (les auteurs construisent un isomorphisme entre l'homologie de Morse et l'homologie *cellulaire*, elle-même isomorphe à l'homologie *singulière*).

Théorème 3.3.1. *L'homologie du complexe précédent ne dépend pas de la paire (f, g) et coïncide avec l'homologie singulière de la variété M , $H_*(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Remarque 3.3.1. *Il est possible de définir le complexe sur $\mathbb{Z}$: en choisissant une orientation pour chaque variété stable, on obtient une co-orientation naturelle sur chaque variétés instable et aussi sur chaque intersection $\mathcal{M}(x, y)$.*

Pour deux points d'indices consécutifs, on peut associer à un élément de $\mathcal{L}(x, y)$ un signe en comparant l'orientation du flot (l'orientation induite par l'action de $\mathbb{R}$) et l'orientation géométrique en tant que sous-variété orientée.

La situation est différente dans le cas Floer, où nous adoptons un point de vue plus fonctionnel et orientons le noyau d'opérateurs de Fredholm.

Chapitre 4

Théorie de Floer

La donnée d'une variété symplectique (W, ω) et d'un hamiltonien périodique $H : S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}$ pose le problème dynamique suivant : l'étude des orbites périodiques du gradient hamiltonien X_H défini par $\iota_{X_H} \omega = dH$. En considérant ces orbites comme les points critiques d'une fonctionnelle sur l'espace des lacets, il est naturel d'essayer de construire une théorie de Morse en dimension infinie afin d'obtenir l'existence de ces orbites. C'est la théorie de Floer dont nous exposons les grandes lignes dans les paragraphes suivants.

Outre les articles fondateurs de la théorie écrits par Andreas Floer lui même : [13] [12] [11], le lecteur pourra consulter [24] pour une introduction au sujet ou [4] pour un cours complet et détaillé.

4.1 Conjecture d'Arnold et équation de Floer

Soit (W, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et $H : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique, i.e. pour tout $(\theta, x) \in \mathbb{R} \times W$, $H(\theta + 1, x) = H(\theta, x)$. Par non dégénérescence de ω , il existe un unique champ de vecteurs X_H^θ tel que $\iota_{X_H^\theta} \omega = dH_\theta$ avec $H_\theta(x) = H(\theta, x)$.

Ce champ de vecteurs dépendant du temps engendre un flot de difféomorphismes ϕ_H^θ préservant la forme symplectique car $\mathcal{L}_{X_H^\theta} \omega = \iota_{X_H^\theta} \circ d\omega + d \circ \iota_{X_H^\theta} = d^2 H_\theta = 0$. L'hamiltonien H étant 1-périodique, les orbites 1-périodiques correspondent aux points fixes de ϕ_H^1 . La conjecture d'Arnold affirme que, pour un hamiltonien donné, le symplectomorphisme engendré au temps 1 par son flot admet au moins autant de points fixes que le nombre minimum de points critiques d'une fonction différentiable $f : W \rightarrow \mathbb{R}$.

A. Floer a apporté une réponse partielle à cette dernière. Nous exposons les grandes lignes de sa démarche, qui peut s'interpréter comme une *théorie de Morse en dimension infinie*.

Remarque 4.1.1. (i) Nous avons supposé l'hamiltonien périodique afin de nous assurer que toute trajectoire γ du flot X_H^θ , qui vérifie $\gamma(1) = \gamma(0)$, est 1-périodique.

Cependant, ce sont les points fixes du difféomorphisme au temps 1 qui nous intéressent. Partant d'un hamiltonien non nécessairement périodique, nous pouvons le rendre périodique sans modifier le symplectomorphisme qu'il engendre. En effet, choisissons une fonction α de $[0, 1]$ dans lui-même, qui s'annule sur un voisinage de 0 et vaut 1 sur un voisinage de 1. L'hamiltonien 1-périodique, défini par $\alpha'(\theta)H_\theta$ pour $\theta \in [0, 1]$, engendre l'isotopie hamiltonienne $\phi^{\alpha(\theta)\theta}$. En particulier, le difféomorphisme induit au temps 1 est toujours ϕ^1 .

(ii) Lorsque l'hamiltonien est indépendant du temps, alors tout point critique de H est un point stationnaire du flot et donc un point fixe de ϕ_H^1 . La conjecture est donc trivialement vraie pour un tel hamiltonien.

L'idée d'A. Floer est d'exprimer les trajectoires périodiques du flot comme les points critiques d'une fonctionnelle définie sur l'espace des lacets de W , $C^\infty(S^1, W)$. L'ensemble des composantes connexes de $C^\infty(S^1, W)$ correspond aux classes d'homotopie libre des lacets de la variété. Pour chacune de ces composantes, choisissons un élément l_i .

Définition/Proposition 4.1.1. Nous définissons la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H : C^\infty(S^1, W) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = - \int_{[0,1] \times S^1} \sigma^* \omega - \int_{S^1} H^\theta(\gamma(\theta)) d\theta$$

où $\sigma : [0, 1] \times S^1$ désigne une homotopie entre γ et l_i le lacet préalablement choisi dans la même composante connexe que γ .

Cette application est différentiable et sa différentielle en un point γ a pour expression :

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = \int_{S^1} \omega_{\gamma(\theta)}(\dot{\gamma}(\theta) - X_H^\theta(\gamma(\theta)), \xi(\theta)) d\theta$$

pour tout $\xi \in T_\gamma C^\infty(S^1, W)$.

Démonstration. Soit $\sigma : [0, 1] \times S^1 \rightarrow W$ une homotopie entre γ et l_i et $t \mapsto \gamma_t$ une variation telle que $\frac{d\gamma_t}{dt} \big|_{t=0} = \xi$. Nous choisissons une famille d'homotopies σ_t entre γ_t et l_i et étendons ξ en $\tilde{\xi}$ le long de σ par la formule $\frac{d\sigma_t}{dt} \big|_{t=0}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(\xi) &= \frac{d\mathcal{A}_H(\gamma_t)}{dt} \bigg|_{t=0} = - \int_{[0,1] \times S^1} \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \omega - \int_{S^1} \mathcal{L}_\xi H^\theta(\gamma(\theta)) d\theta \\ &= - \int_{[0,1] \times S^1} d \circ \iota_{\tilde{\xi}} \omega + \int_{S^1} dH_{\gamma(\theta)}^\theta(\xi) d\theta \\ &= \int_{\{0\} \times S^1} \iota_{\tilde{\xi}} \omega - \int_{\{1\} \times S^1} \iota_{\xi} \omega - \int_{S^1} \iota_{X_H^\theta} \omega(\xi) d\theta = \int_{S^1} \omega(\dot{\gamma}(\theta) - X_H^\theta(\gamma(\theta)), \xi) d\theta \end{aligned}$$

en remarquant que $\tilde{\xi} = 0$ le long de l_i . □

Afin que cette application soit bien définie, nous faisons l'hypothèse d'*atoroidalité symplectique* suivante. Nous verrons plus tard comment nous pouvons nous en affranchir partiellement.

Hypothèse 1. $\forall \sigma : \mathbb{T}^2 \rightarrow W, \int_{\mathbb{T}^2} \sigma^* \omega = 0$.

Ainsi, la quantité $\int_{[0,1] \times S^1} \sigma^* \omega$ ne dépend que des extrémités de σ . Cette formule nous permet, outre d'identifier $\mathcal{P}(H)$, les orbites 1-périodiques de H , comme les points critiques de $\mathcal{A}_H$, de définir un gradient pour cette fonctionnelle. Soit $(J^\theta)_{\theta \in S^1}$ une famille de structures presque complexes compatibles avec ω indexée par le cercle. Celle-ci induit un produit scalaire sur $C^\infty(S^1, W)$. Soient $\xi, \eta \in T_\gamma C^\infty(S^1, W)$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est donné par

$$\int_{S^1} g^\theta(\xi(\theta), \eta(\theta)) d\theta := \int_{S^1} \omega_{\gamma(\theta)}(\xi(\theta), J^\theta(\eta(\theta))) d\theta.$$

Définition/Proposition 4.1.2. *Soit $(J^\theta)_{\theta \in S^1}$ une famille de structures presque complexes indexée par le cercle. Le gradient de $\mathcal{A}_H$ au point $\gamma \in C^\infty(S^1, W)$, relativement à la métrique induite par $(J^\theta)_{\theta \in S^1}$ et ω , a pour expression*

$$\nabla \mathcal{A}_H : \theta \mapsto J^\theta(\dot{\gamma}(\theta) - X_H^\theta(\gamma(\theta))).$$

Démonstration. Il suffit de calculer, pour $\xi \in T_\gamma C^\infty(S^1, W)$,

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(\xi) &= \int_{S^1} \omega(\dot{\gamma}(\theta) - X_H^\theta, \xi) d\theta \\ &= \int_{S^1} \omega(J^\theta(\dot{\gamma}(\theta) - X_H^\theta), J^\theta(\xi)) d\theta = \int_{S^1} g^\theta(J^\theta(\dot{\gamma}(\theta) - X_H^\theta), \xi) d\theta \end{aligned}$$

ce qui conclut. $\square$

Que deviennent les trajectoires antigradient en dimension infinie ? En suivant le cas Morse à la lettre, une telle trajectoire $u : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(S^1, W)$ devrait vérifier $\frac{du}{ds}(\theta) = J^\theta(\dot{u}(s)(\theta) - X_H^\theta(u(s)))$. Au lieu de voir $u : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(S^1, W)$ nous pouvons voir cette trajectoire comme un cylindre $\mathbb{R} \times S^1 \rightarrow W$, défini par $u(s, \theta) = u(s)(\theta)$. L'équation différentielle en dimension infinie devient une équation aux dérivées partielles, à savoir l'équation de Floer :

$$\partial_s u + J^\theta(\partial_\theta u - X_H^\theta(u)) = 0 \iff \partial_s u + J^\theta \partial_\theta - \nabla H^\theta(u) = 0$$

où ∇H^θ représente le gradient de H^θ relativement à la métrique $g^\theta = \omega(\cdot, J^\theta \cdot)$.

Définition 4.1.1. *Soient $x, y \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H) = \mathcal{P}(H)$. Nous appelons l'ensemble des trajectoires de Floer de x à y , l'ensemble*

$$\mathcal{M}(x, y) := \left\{ u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow W \mid \partial_s u + J^\theta(\partial_\theta u - X_H^\theta(u)) = 0, \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x, \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y \right\}.$$

Les sections qui suivent donnent les arguments clés pour établir les propriétés essentielles de ces espaces, à savoir la structure de variété différentielle, le calcul de sa dimension et la compacité modulo l'ajout de trajectoires brisées.

4.2 Décroissance exponentielle, propriété de Fredholm et calcul de l'indice

$C^\infty(\mathbb{R} \times S^1, W)$ n'admet malheureusement pas une structure de variété de Banach. Nous devons nous placer dans des espaces de type Sobolev pour mener notre analyse. Soit

$$\mathcal{P}^{1,p}(x, y) = \left\{ u \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, W) \left| \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x, \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y, \\ \|\partial_s u\|, \|\partial_\theta u - X_H(u)\| \in L^p(\mathbb{R} \times S^1, TW) \end{array} \right. \right\}$$

avec $\|\cdot\|$ une métrique sur TW . Celles-ci sont toutes équivalentes par compacité de W et le choix d'une norme particulière n'affecte pas la définition de $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$. L'espace tangent au point u est $W^{1,p}(u^*TW)$, l'espace des sections $\xi \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, TW)$ de $u^*(TW)$ telles que $\|\xi\|, \|\nabla_s \xi\|, \|\nabla_\theta \xi\| \in L^p$, avec ∇ n'importe quelle connexion sur W . Soit $\mathcal{E}$ le fibré au dessus de $\mathcal{P}^{1,p}(x, y)$ de fibre $\mathcal{E}_u = L^p(u^*TW)$, et $\partial_{J,H} : W^{1,p}(u^*TW) \rightarrow \mathcal{E}$ la section définie par $\partial_{J,H}(u) = \partial_s u + J^\theta(\partial_\theta u - X_H(u))$.

Nous nous situons dans le cadre de l'analyse globale. Soit M (resp. N) une variété de dimension m (resp. n). On note $W_{loc}^{k,p}(M, N)$ les applications de M vers N qui, lues dans des cartes, définissent un élément de $W_{loc}^{k,p}(U, \mathbb{R}^n)$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Nous choisissons ici $p > 2$ pour deux raisons :

- (i) Soit ϕ une carte sur N , pour donner un sens à $\phi \circ u$ avec $u \in W_{loc}^{k,p}(M, N)$ il faut que u soit continue. Il faut donc choisir $kp > n$ et ici $m = \dim(\mathbb{R} \times S^1) = 2$ et $k = 1$.
- (ii) Nous aimerions que cette définition ne dépende pas de la carte choisie, i.e. soient ϕ_1, ϕ_2 , deux cartes sur N et $u \in W_{loc}^{k,p}(M, N)$ alors $\phi_1 \circ u \in W_{loc}^{k,p}(U, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\phi_2 \circ u \in W_{loc}^{k,p}(U, \mathbb{R}^n)$. Cette condition sera elle même vérifiée si et seulement si l'application $u \mapsto (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \circ u$ envoie $W^{k,p}(U, \mathbb{R}^n)$ sur lui même, ce qui est le cas, comme en (i), lorsque $kp > m$ (voir [21]).

En réalité, le choix de k et de p importe peu, tant que $k \geq 1$ et $p > 2$.

- (i) Si u est une trajectoire de Floer, alors u est à décroissance exponentielle, i.e. il existe des constantes C et d tels que $\|\partial_s u(s, t)\| \leq Ce^{-\delta|s|}$. Dans ce cas, pour tout $q > 2$, $u \in W^{1,q}$. Cette estimation vaut plus généralement pour n'importe quel champ de vecteurs ξ le long de u inclus dans le noyau de l'opérateur linéarisé $(D\partial_{J,H})_u$.
- (ii) Si J et H sont de classe C^k et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, W)$ est solution de $\partial_{J,H}(u) = 0$, alors, par régularité elliptique, $u \in W^{k+1,p}$. Étant donné que nous supposons l'hamiltonien ainsi que la structure complexe lisses, on aura, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(x, y) \in W^{k,p}$ et les solutions de l'équation de Floer associée sont lisses. Le lecteur pourra consulter le chapitre 12 de [4] pour les questions de régularité elliptique dans ce cas précis.

Comme en théorie de Morse, montrer que $\partial_{J,H}$ intersecte $0_{\mathcal{E}}$ de manière transverse revient à montrer la surjectivité de $D\partial_{J,H} : W^{1,p}(u^*TW) \rightarrow \mathcal{E}_u$, où $D\partial_{J,H}$ désigne la dérivée covariante de

$\partial_{J,H}$ relativement à une connexion sur $\mathcal{E}$. Pour obtenir une connexion sur $\mathcal{E}$ de dimension infinie, choisissons une connexion ∇ sur W . Nous notons de la même manière la connexion ∇ sur $\mathcal{E}$ définie comme suit. Soient $(\xi, \sigma) \in W^{1,p}(u^*TW) \times \Gamma(W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, W), \mathcal{E})$, u_τ une courbe dans $W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, W)$ telle que $\tau(0) = u$ et $\frac{du_\tau}{d\tau} = \xi$. Pour (s, θ) fixé, $\tilde{\gamma} : \tau \mapsto \sigma(\tau)(s, \theta)$ est une section de TW le long de $\gamma : \tau \mapsto u_\tau(s, \theta)$. Nous définissons $D_\xi(\sigma)$ par $(D_\xi(\sigma))(s, \theta) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \tilde{\gamma} = \nabla_{\xi(s, \theta)} \tilde{\gamma}$. Comme en dimension finie, cette expression ne dépend que de ξ (et non de u_τ), et de la valeur de σ le long de u_τ , elle est tensorielle en ξ et la différence de deux connexions est tensorielle en σ . En particulier, lorsque $\sigma(u) = 0$, $D\sigma_u$ ne dépend pas du choix de la connexion. Ce choix fait, la dérivée covariante la section $\partial_{J,H}$ au point $u \in \mathcal{M}(x, y)$ a pour expression

$$D\partial_{J,H}(\xi) = \nabla_s \xi + J^\theta(\nabla_\theta \xi - \nabla_\xi X_H^\theta) + (\nabla_\xi J^\theta)(\partial_\theta u - X_H^\theta(u)).$$

Choisissons une trivialisation bornée $u^*(TW) \simeq \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$. Rappelons que $u^*(TW)$ est un fibré, qui hérite de la structure presque complexe sur W , au-dessus d'un espace qui a le même type d'homotopie que le cercle, il est donc trivialisable. On peut choisir une trivialisation qui identifie ω avec ω_{st} et J avec J_0 . La dérivée covariante de $\partial_{J,H}$ en u s'écrit alors $D\partial_{J,H}(\xi) = \partial_s \xi + J_0 \partial_\theta \xi + S\xi$ pour tout $\xi \in W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n})$ avec $S : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $S(s, \theta)$ symétrique pour tous s, θ .

Remarque 4.2.1. *Il est essentiel de choisir une trivialisation $u^*(TW) \simeq \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$ qui soit bornée, i.e. l'isomorphisme induit $\{s\} \times \{\theta\} \times \mathbb{R}^{2n} \simeq T_{u(s, \theta)}W$ soit uniformément borné (dans les deux sens) en (s, θ) , où la norme à droite est induite par une métrique sur W .*

*Si ce n'était pas le cas, des éléments de $W^{1,p}(u^*TW)$ pourraient correspondre à des éléments n'appartenant pas à $W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n})$ et inversement. Ce problème est lié à la non-compacité du domaine de définition $\mathbb{R} \times S^1$.*

Supposons que nous ayons déjà obtenu la surjectivité de $D\partial_{J,H}$ (qui est garantie modulo perturbations de H et/ou de J , voir la section suivante), comment retrouver la dimension de $\mathcal{M}(x, y)$? Il s'avère que la propriété d'être Fredholm ainsi que l'indice ne dépendent que du comportement près des asymptotes x et y . Ces derniers sont donc robustes aux perturbations de H et/ou J pourvu qu'elles soient réalisées en dehors d'un voisinage de $x(S^1) \cup y(S^1)$. Afin de mener une analyse similaire à celle effectuée dans le cas de la théorie de Morse, il serait préférable de se placer dans un espace de Hilbert plutôt que Sobolev. Une fois une trivialisation choisie, nous avons vu que notre opérateur s'écrivait $\partial_s + J_0 \partial_\theta + S$, était défini sur $W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n})$, et prenait ses valeurs dans $L^p(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Par la même formule, on peut définir un opérateur $D\tilde{\partial}_{J,H} : H^1(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Supposons qu'un de ces deux opérateurs soit Fredholm, quelle(s) implication(s) pour l'autre? Soit $F(s) : H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ défini par $(F(s)\xi)(\theta) = J_0 \partial_\theta \xi(\theta) + S(s, \theta)\xi(s, \theta)$. Dans la trivialisation choisie, $D\partial_{J,H}$ (resp. $D\tilde{\partial}_{J,H}$) a pour expression $\xi \mapsto \partial_s \xi + F(s)\xi(s, \cdot)$. Supposons que les opérateurs asymptotiques $F^\pm := \lim_{s \rightarrow \pm\infty} F(s)$ soient inversibles.

- (i) L'image de $D\partial_{J,H}$ est fermée (voir [4] lemme 8.7.2).
- (ii) Tout élément de $\ker D\partial_{J,H}$ est à décroissance exponentielle et donc inclu, pour tout p , dans $W^{1,p}$ (voir [4] théorème 8.9.1, rappelons qu'un élément du noyau est représentable par une fonction lisse par régularité elliptique).
- (iii) Il en va de même pour le conoyau, ou plutôt pour son dual. En effet, comme l'image est fermée, un élément du dual du conoyau peut être identifié avec un élément de $L^q(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n})$, avec $q = p^* = \frac{p}{p-1}$, s'annulant sur l'image de $D\partial_{J,H}$. Cette identification est valable pour tout p et, dans le cas $p = 2$, elle se formule en terme d'orthogonalité : $\text{coker } D\tilde{\partial}_{J,H} \simeq (\text{Im } D\tilde{\partial}_{J,H})^\perp$. Dans les deux cas, un élément du dual du conoyau η est solution faible, i.e. en tant que distribution, de $(D\partial_{J,H})^*\eta = -\partial_s\eta + J\partial_\theta\eta + {}^tS\eta = 0$. L'adjoint formel $(D\partial_{J,H})^*$ de $(D\partial_{J,H})$ a la "même forme" et partage les mêmes propriétés d'ellipticité. Un élément du dual du conoyau est représentable par une authentique fonction qui, comme les solutions de l'équation de Floer, sera aussi régulière que les données H, J . Ici, $(D\partial_{J,H})^*$ admet les mêmes opérateurs asymptotiques, les éléments de son noyau sont eux aussi à décroissance exponentielle et inclus, pour tout p , dans $W^{1,p}$.

En conclusion, lorsque les opérateurs asymptotiques sont inversibles, le noyau et le dual du conoyau sont inclus dans $\cap_{q>1} W^{1,q}$. Pour déterminer leur dimension, il suffit d'étudier l'opérateur $D\tilde{\partial}_{J,H} : W^{1,2} \rightarrow L^2$, défini par la même formule mais sur un espace de Hilbert ce qui facilite grandement les calculs. Pour une étude précise de cet opérateur, le lecteur pourra consulter [25] où l'auteur établit, dans le cas $p = 2$, la propriété Fredholm, introduit l'indice de Conley-Zehnder et calcule l'indice de Fredholm directement. Sinon, on peut faire appel aux théorèmes évoqués dans [23]. Afin d'étudier les opérateurs asymptotiques, nous laissons momentanément la trivialisaton et raisonnons géométriquement.

Pour $\gamma \in \mathcal{P}(H) = \text{Crit } A_H$, on peut aussi définir une version de la hessienne en dimension infinie. Soient η et $\xi \in H^1(\gamma^*TW)$, choisissons une double variation $\gamma_{\tau_1, \tau_2} : S^1 \mapsto W$ telle que

- (i) $\gamma_{0,0} = \gamma$,
- (ii) $\frac{d\gamma_{\tau_1, \tau_2}}{d\tau_1} \Big|_{(\tau_1, \tau_2)=(0,0)} = \xi$,
- (iii) $\frac{d\gamma_{\tau_1, \tau_2}}{d\tau_2} \Big|_{(\tau_1, \tau_2)=(0,0)} = \eta$.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \text{Hess } \mathcal{A}_{H\gamma}(\xi, \eta) &= \frac{\partial^2 \mathcal{A}_H(\gamma_{\tau_1, \tau_2})}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} = \int_{S^1} \nabla_\eta \omega(\dot{\gamma} - X_H, \xi) + \omega(\nabla_\theta \eta - \nabla_\eta X_H, \xi) + \omega(\dot{\gamma} - X_H, \nabla_\eta \xi) \\ &= \int_{S^1} \omega(\nabla_\theta \eta - \nabla_\eta X_H, \xi) = \int_{S^1} g(J(\nabla_\theta \eta - \nabla_\eta X_H), \xi). \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend véritablement que de ξ et η (plutôt que de la variation choisie) et est symétrique en ξ, η . En particulier l'opérateur asymptotique D_γ , défini par $\text{Hess } \mathcal{A}_{H\gamma}(\xi, \eta) = \langle \xi, D_\gamma(\eta) \rangle$, a pour expression $D_\gamma(\xi) = J(\nabla_\theta \xi - \nabla_\xi X_H)$ et est symétrique pour la métrique induite par ω et J . De plus, il ne dépend pas de la connection ∇ choisie pourvu qu'elle soit

symétrique. En effet, soit $\tilde{\nabla}$ une autre connexion symétrique, alors $\tilde{\nabla} - \nabla = A : W \rightarrow T^*W \oplus \text{End}(TW)$ avec A un tenseur symétrique, i.e. pour tous X, Y , $A_{(X)}(Y) - A_{(Y)}(X) = 0$. Alors

$$J(\tilde{\nabla}_\theta \xi - \tilde{\nabla}_\xi X_H) - J(\nabla_\theta \xi - \nabla_\xi X_H) = J(A_{(\tilde{\gamma}(\theta))}(\xi) - A_{(\xi)}(X_H)) = J(A_{(X_H)}(\xi) - A_{(\xi)}(X_H)) = 0.$$

Comme les opérateurs asymptotiques D_γ sont symétriques pour la métrique induite par ω et J , $F^\pm$, étant l'expression d'un de ces derniers dans des coordonnées identifiant $\omega(\cdot, J\cdot)$ avec le produit scalaire usuel, est aussi symétrique pour la métrique usuelle sur $L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Pour montrer qu'il est inversible, il suffit de montrer qu'il est injectif.

Pour ce faire, nous choisissons un voisinage V de $\gamma(S^1)$ isomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^{2n-1}$ ($\mathbb{R}^{2n}$ si γ est constante). La différentiation usuelle d , lue dans une carte sur ce voisinage, induit géométriquement une nouvelle connexion *sans torsion* $\tilde{\nabla}$. Nous avons vu que l'expression de D_γ ne dépendait pas de la connexion choisie. Or, son expression $\tilde{F}^\pm$, dans la trivialisatation induite par la carte, s'écrit $\tilde{F}^\pm(\xi) = \dot{\xi}(\theta) - dX_H(\xi(\theta))$ (nous identifions X_H avec son écriture en coordonnées). Comme $F^\pm$ et $\tilde{F}^\pm$ sont l'expression d'un même opérateur dans des coordonnées différentes, ils sont conjugués. Il suffit de montrer que $\tilde{F}^\pm$ est injectif.

Soit $\xi \in \ker F^\pm$, i.e. $\dot{\xi}(\theta) = dX_H^\theta(\xi(\theta))$. Considérons ξ comme une fonction sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $\xi(0) = \xi(1)$, nous utilisons momentanément la variable t au lieu de θ . En dérivant l'expression $d\phi_H^{-t}(\xi(t))$ et en remarquant que $X_H^t \circ \phi_H^{-t} = (\phi_H^{-t})_*(X_H^t)$, on obtient

$$-dX_H^t(\phi_H^{-t}(\xi(t))) + d\phi_H^{-t}(\dot{\xi}(t)) = d\phi_H^{-t}(\dot{\xi}(t) - dX_H^t(\xi(t))) = 0.$$

Or $d\phi_H^0(\xi(0)) = \xi(0)$ d'où $\xi(t) = d\phi_H^t(\xi(0))$. Rappelons-nous qu'initialement, ξ est définie sur le cercle. Afin d'obtenir un élément du noyau de $\tilde{F}^\pm$ donnant naissance à une vraie solution géométrique incluse dans le noyau de D_γ , il faut que $\xi(1) = d\phi_H^1(\xi(0)) = \xi(0)$, ce qui nous amène à la définition qui suit.

Définition/Proposition 4.2.1. *Un hamiltonien $\mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R}$ est dit non-dégénéré si, pour tout $\xi \in \text{Fix } \phi_H^1$, $d\phi^1 : T_x W \rightarrow T_x M$ n'admet pas 1 comme valeur propre.*

- (i) *Si H est non-dégénéré, alors, pour tout $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ l'opérateur asymptotique D_γ est inversible.*
- (ii) *L'ensemble des hamiltoniens non-dégénérés est dense (pour les topologies $C^k(W, \mathbb{R})$ ou $W^{k,p}(W, \mathbb{R})$ pour tous $k \geq 1$, $p \geq 2$).*

Démonstration. L'assertion (i) découle de la discussion précédente.

Concernant l'assertion (ii), la non-dégénérescence de H est équivalente à la transversalité de l'application graphe $W \times W \rightarrow W \times W$, définie par $(x, y) \mapsto (x, \phi_H^1(y))$, relativement à la diagonale $\Delta \subset W \times W$. On utilise à nouveau la transversalité paramétrique en considérant la section $C^k(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}) \times W \times W \rightarrow W \times W$ définie par $(H, x, y) \mapsto (x, \phi_H^1(y))$. $\square$

Remarque 4.2.2. Cette notion de dégénérescence est un analogue de la notion éponyme en théorie de Morse. Un hamiltonien non-dégénéré a ses orbites périodiques isolées dans $C^k(S^1, W)$. Lorsque H est indépendant du temps, une orbite constante (un point critique de H) égale à $x \in W$ est non dégénérée si et seulement si, en tant que point critique de H , x est non dégénéré (voir proposition 5.4.5 de [4]).

L'objectif de cette thèse est de construire une théorie de Floer lorsque les orbites sont "bien dégénérées", i.e. la dégénérescence est liée à la symétrie issue d'une action de groupe.

Si notre hamiltonien est non dégénéré, nous pouvons faire appel à la généralisation en dimension infinie du lemme 3.2.1 évoquée (voir [23]). Soient $x, y \in \mathcal{P}(H)$ et $u \in \mathcal{M}(x, y)$, alors $D\partial_{J,H}$ au point u est un opérateur de Fredholm dont l'indice est donné par le changement net de valeurs propres négatives entre les deux opérateurs asymptotiques. Replaçons nous dans une trivialisation identifiant la métrique $\omega(\cdot, J\cdot)$ avec le produit scalaire usuel. Bien que $F^\pm$ soit symétrique, il n'y a aucune raison pour que $F(s)$, $s \in \mathbb{R}$ le soit et il devient difficile de "suivre" les valeurs propres. Pour remédier à ce problème, on peut relier $D\partial_{J,H}$, à travers des opérateurs de Fredholm, à un opérateur de la forme $\partial_s + \tilde{F}(s)$ avec $\tilde{F}(s)$ auto-adjoint pour tout s .

Il existe alors des fonctions continues $\lambda_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telles que $(\lambda_j(s))_{j \in J}$ (resp. $(\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \lambda_j(s))_{j \in J}$) constituent l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{F}(s)$ (resp. $F^\pm$) avec multiplicité. L'indice est alors donné par le flot spectral défini par

$$\#\{j \in J \mid \lambda_j(-\infty) < 0, \lambda_j(+\infty) > 0\} - \#\{j \in J \mid \lambda_j(-\infty) > 0, \lambda_j(+\infty) < 0\}.$$

Bien que l'on puisse montrer que ce nombre est bien défini et indépendant de la perturbation, il semble difficile à calculer explicitement. L'indice de Conley-Zehnder nous permet de calculer cet indice de Fredholm. Plus précisément, il est égal à la différence des indices de Conley-Zehnder du flot linéarisé lue dans la trivialisation induite par u entre les deux orbites. Quel est le lien entre nos opérateurs asymptotiques (qui d'après ce qui précède, déterminent entièrement l'indice de Fredholm) et le flot le long de l'orbite (qui détermine l'indice de Conley-Zehnder)? Si l'opérateur asymptotique $\xi \mapsto J_0 \nabla_t \xi - J_0 \nabla_\xi X_H$ le long d'une orbite γ s'écrit $\xi \mapsto J_0 \dot{\xi} + S\xi$ dans une trivialisation donnée, alors $S(t) = -J_0^t dX_H^t(\gamma(t))$ est symétrique et 1-périodique. Soit $R(t)$ l'expression de $d\phi^t$ le long de γ dans cette trivialisation, alors $\dot{R}(t) = dX_H^t(\gamma(t))R(t) = J_0 S(t)R(t)$. Réciproquement, si S est un chemin de matrices symétriques, l'équation différentielle précédente engendre un chemin de matrices symplectiques $t \mapsto R(t)$.

Remarque 4.2.3. Ces constructions sont cohérentes : en gardant la forme symplectique fixe, changer la structure presque complexe modifiera la métrique et vice-versa. Dans notre trivialisation unitaire, une matrice symétrique/complexe correspond à un endomorphisme symétrique/complexe entre deux espaces tangents de W .

Si l'orbite est non dégénérée, alors $R(t)$ est un chemin de matrices symplectiques reliant l'identité à $R(1)$ n'admettant pas 1 comme valeur propre. Il est possible de lui associer l'indice de Conley-Zehnder correspondant (qui dépend de la trivialisation). Le lecteur pourra trouver une démonstration de la proposition suivante dans [4].

Proposition 4.2.1. *Soient $x, y \in \mathcal{P}(H)$ deux orbites non-dégénérées et $u \in \mathcal{M}(x, y)$. Soit $\mu_{CZ}(x)$, (resp. $\mu_{CZ}(y)$) l'indice de Conley-Zehnder du flot linéarisé calculé dans la trivialisation de x^*TW (resp. y^*TW) induite par une trivialisation de u^*TW . Alors $D\partial_{J,H}$ au point u est un opérateur de Fredholm d'indice $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y)$.*

Remarque 4.2.4. *Il est important d'observer que l'indice de Conley-Zehnder doit, le long de x et de y , être calculé dans une trivialisation induite par u . Le choix d'une autre trivialisation fait intervenir la classe de Chern du fibré complexe (TW, J) . Cette classe ne dépend pas de la structure presque complexe choisie. En effet, l'ensemble des structures presque complexes compatibles avec ω est un ensemble contractile et en particulier connexe. Nous reviendrons sur le rôle des trivialisations lorsque nous définirons le complexe de Floer.*

Remarque 4.2.5. *L'indice de Conley-Zehnder peut être vu comme un indice relatif en dimension infinie, i.e. il ne mesure pas le nombre de valeurs propres de l'opérateur asymptotique (celles-ci sont en nombre infini) mais la différence entre deux indices obtenus dans une trivialisation commune, mesure le changement signé de valeurs propres négatives d'après la discussion qui précède.*

4.3 Transversalité et points injectifs

Comme en théorie de Morse, nous pouvons montrer la transversalité, modulo une perturbation de l'hamiltonien et/ou de la structure presque complexe, en utilisant la transversalité paramétrique.

Nous notons par $\mathcal{F}$ la section

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,p} \times \mathcal{H} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{E}; \quad (u, H, J) \longmapsto \partial_s u + J(\partial_\theta u - X_H(u))$$

où $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{J}$) représente l'espace des hamiltoniens (resp. des structures presque complexes compatibles avec ω) muni d'une structure d'espace de Banach appropriée (nous pouvons les choisir aussi réguliers que nous le souhaitons). Il s'agit, encore une fois, de montrer que cette section est transverse à $0_{\mathcal{E}}$. Pour calculer sa différentielle en un point $(u, H, J) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$, nous rajoutons les termes obtenus en dérivant selon l'hamiltonien et la structure presque complexe :

$$D\mathcal{F}_{(u, J, H)}(\xi, Y, h) = \nabla_s \xi + J\nabla_\theta \xi + \nabla_\xi J(\partial_\theta u - X_H(u)) - J\nabla_\xi X_H + Y^\theta(\partial_\theta u - X_H(u)) - \nabla h.$$

En utilisant l'inversibilité des opérateurs limites et la compacité de l'injection $W^{1,p}([-N, N] \times S^1) \subset L^p([-N, N] \times S^1)$, il est possible (voir la section 2 de [24]) de montrer que l'image de $D\partial_{J,H}$ est fermée. Comme elle est de codimension finie (car $D\partial_{J,H}$, en tant qu'opérateur de Fredholm, a une image de codimension finie), l'image de $D\mathcal{F}$ est fermée de codimension finie. Si elle n'est pas égale à $\mathcal{E}_u$, alors il existe $\eta \in L^q$ orthogonal à son image ($q = p^* = \frac{p}{p-1}$). Plus précisément, il existe $\eta \in L^q(u^*TW)$ non nul tel que, pour tous ξ, Y, h :

$$\int_{\mathbb{R} \times S^1} \langle \nabla_s \xi + J_\theta^\nabla \xi + \nabla_\xi J(\partial_\theta u - X_H(u)) - J\nabla_\xi X_H + Y^\theta(\partial_\theta u - X_H(u)) - \nabla h, \eta \rangle = 0.$$

En posant $Y, h = 0$, on constate que η satisfait $\partial_s \eta - J\partial_\theta \eta + A(s, \theta)\eta = 0$ avec $A(s, \theta) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ en tant que distribution. Nous avons déjà mentionné que l'adjoint formel $(D\partial_{J,H})^*$ défini par $(D\partial_{J,H})^*(\xi) = -\partial_s \xi + J_0 \partial_\theta \xi + {}^t S \xi$ partageait, avec $(D\partial_{J,H})$ des propriétés d'ellipticité similaires. En particulier, η est représentable par une authentique fonction aussi régulière que H et J .

Lemme 4.3.1. *Soit $(s, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1$, supposons*

- (i) $\partial_s u(s, \theta) \neq 0$,
- (ii) $u(s, \theta) \notin u(\mathbb{R} \setminus s, \theta)$,
- (iii) $u(s, \theta) \neq x(\theta)$ et $u(s, \theta) \neq y(\theta)$.

Alors $\eta(s, \theta) = 0$

Démonstration. Pour tout $\epsilon_1 > 0$, il existe ϵ_2 tel que $|s' - s| \geq \epsilon_1 \implies d(u(s, \theta), u(s', \theta)) > \epsilon_2$. Supposons le contraire, il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $|s_n - s| \geq \epsilon$ et $d(u(s, \theta), u(s_n, \theta)) \rightarrow 0$. Si la suite n'est pas bornée, on peut extraire une sous-suite qui tend vers $\pm\infty$ ce qui contredit (iii). Si elle est bornée, on peut extraire une sous-suite convergente qui contredit (ii).

On peut aussi trouver un ϵ_3 tel que, quitte à diminuer ϵ_2 , l'assertion précédente reste vraie pour θ' avec $|\theta' - \theta| \leq \epsilon_3$. Il est possible de choisir $Y \in T_J \mathcal{J} = \{Y | JY + YJ = 0\}$ et $\epsilon_2 > 0$ vérifiant :

- (i) $Y^\theta(\partial_s u(s, \theta)) = -\eta(s, \theta)$,
- (ii) $\text{supp}(Y) \subset B(u(s, \theta), \epsilon_2) \times]\theta - \epsilon_3, \theta + \epsilon_3[$,
- (iii) $\langle Y^\theta(-\partial_s u), \eta \rangle \geq 0$ sur $]s - \epsilon_1, s + \epsilon_1[\times]\theta - \epsilon_3, \theta + \epsilon_3[$.

Supposons $\eta(s, \theta) \neq 0$. Alors, en posant $\xi, h = 0$ dans l'intégrale précédente, et, en remarquant que $\partial_\theta u - X_H(u) = -\partial_s u$, on obtient

$$0 = \int_{\mathbb{R} \times S^1} \langle Y^\theta(-\partial_s u), \eta \rangle = \int_{]s - \epsilon_1, s + \epsilon_1[\times]\theta - \epsilon_3, \theta + \epsilon_3[} \langle Y^\theta(-\partial_s u), \eta \rangle > 0$$

ce qui conclut par contradiction. □

À ce stade, il y a plusieurs manières d'obtenir la transversalité annoncée :

- (A) Montrer que les points vérifiant (i)-(iii) forment un ensemble contenant un ouvert dense dans $\mathbb{R} \times S^1$, ce qui suffit à montrer que $\eta = 0$. Ces points sont appelés *points injectifs*. Nous introduirons un raffinement de cette définition dans le cas équivariant, un raffinement qui fera intervenir la géométrie de l'action de groupe.
- (B) L'argument mis en jeu montre en réalité que η s'annule sur un petit voisinage autour de (s, θ) . Or, étant orthogonal à l'image de $D\partial_{J,H}$, η satisfait aussi une équation de type Floer. Plus précisément, elle est dans le noyau de $(D\partial_{J,H})^*$ qui est un *opérateur de Cauchy-Riemann*. Elle satisfait donc, comme les fonctions holomorphes classiques, des propriétés de continuation unique (c'est une conséquence du principe de similarité, théorème 8.2.1 de [28]), ce qui est suffisant pour montrer qu'elle s'annule sur le cylindre entier.

La transversalité étant bien plus dure à établir dans le cas équivariant, nous devons utiliser en même temps ces deux types d'arguments. Dans le cas ici présent, nous obtenons

Théorème 4.3.1. *Soient $H \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{J}_{reg}(H) \subset \mathcal{J}$ l'ensemble des structures complexes J telles que la section $D\partial_{J,H}$ soit transverse à la section nulle. Alors $\mathcal{J}_{reg}(H)$ contient une intersection d'ouverts denses.*

4.4 Compacité et Gluing

Nous continuons de mimer la construction de Morse dans un cadre de dimension infinie et regardons la compacité des espaces de trajectoires non paramétrées $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$. Plus précisément, montrons que ces derniers admettent une compactification par l'ajout de trajectoires de Floer brisées.

L'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{M}(x, y)$ est donnée par $\sigma.u = u(\sigma + \cdot, \cdot)$. Comme $\mathcal{A}_H$ décroît strictement le long d'une trajectoire, cette action est libre (à moins que $x = y$). Il est possible de montrer qu'elle est également proprement discontinue, conférant à $\mathcal{L}(x, y)$ une structure de variété de dimension $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) - 1$. Nous pouvons ici considérer toutes nos données (H et J) de classe C^∞ et nous placer dans les espaces $C^\infty(S^1, W)$ et $C^\infty(\mathbb{R} \times S^1, W)$ ce qui était prohibé, rappelons-le, lors de l'analyse de Fredholm. La seule structure de variété de Fréchet (et donc d'espace métrique) nous suffit pour établir des résultats de compacité.

La première étape consiste à montrer que toute suite de trajectoires de Floer reliant deux orbites périodiques données, admet une sous-suite qui converge localement vers une trajectoire de Floer avec des asymptotes potentiellement différentes.

Proposition 4.4.1. *Le gradient des trajectoires de Floer entre deux orbites $x, y \in \mathcal{P}(H)$ est uniformément borné, i.e. il existe C tel que, pour tout $u \in \mathcal{M}(x, y)$, $\|\nabla u\| \leq C$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de suites $(u_n, s_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $R_n = \|\nabla u_n(s_n, \theta_n)\| \rightarrow +\infty$. Nous choisissons une suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{+*}$ qui tend vers 0 mais assez lentement pour que $\epsilon_n R_n \rightarrow +\infty$ et faisons appel au lemme suivant (voir [10]).

Lemme 4.4.1. *Soient $g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue sur un espace métrique complet, $x_0 \in X$ et $\epsilon_0 > 0$. Il existe $y \in X$, $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ vérifiant*

- (i) $d(y, x_0) \leq 2\epsilon$,
- (ii) $\epsilon g(y) \geq \epsilon_0 g(x_0)$,
- (iii) $g(x) \leq 2g(y) \forall x \in B(y, \epsilon)$.

En prenant $g = \|\nabla u\|$ on obtient des nouvelles suites, toujours notées $s_n, \theta_n, \epsilon_n$, telles que

- (i) $\epsilon_n \|\nabla u_n\|(s_n, \theta_n) \rightarrow +\infty$,
- (ii) $\|\nabla u\| \leq 2\|\nabla u(s_n, \theta_n)\|$ sur $B((s_n, \theta_n), \epsilon_n)$.

Soit $v_n(s, t) = u((s_n, \theta_n) + \frac{(s, t)}{R_n})$ définie sur $B(0, \epsilon_n R_n)$. Alors

- (i) $\|\nabla v_n\| \leq 2$,
- (ii) $\|\nabla v_n\|(0, 0) = 1$,
- (iii) $\partial_s v_n + J^{\theta_n + \frac{1}{R_n}} \partial_\theta v_n - \frac{1}{R_n} J^{\theta_n + \frac{1}{R_n}} X_H(v_n) = 0$.

L'idée cachée derrière le choix de la suite ϵ_n et la reparamétrisation des u_n en v_n est de "zoomer" là où le gradient explose, suffisamment près pour que ∇v_n soit bornée (i), minimiser l'influence du terme hamiltonien (iii) dans l'équation de Floer, mais pas assez pour tendre vers une fonction constante (ii). La suite v_n a son gradient borné, elle est équicontinue et ses domaines de définition $B(0, \epsilon_n R_n)$ forment une suite croissante dont la réunion est égale à $\mathbb{C}$. En appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on extrait une sous-suite convergeant dans $C_{loc}^0(\mathbb{C}, W)$ vers $v : \mathbb{C} \rightarrow W$ et une sous-suite de θ_n convergeant vers θ_0 . D'après (iii), v est solution faible de $\partial_s v + J^{\theta_0} \partial_\theta v = 0$ (θ est maintenant vu comme un réel et représente la coordonnée imaginaire). Remarquons que cette équation peut s'interpréter comme une équation de Floer avec $H = 0$. Les arguments de régularité elliptique précédemment exposés permettent d'affirmer qu'elle est différentiable, solution forte de $\partial_s v + J^{\theta_0} \partial_\theta v = 0$ et aussi régulière que J^{θ_0} . C'est donc une *courbe J-holomorphe*. Nous aimerions étendre cette courbe à l'infini, afin d'obtenir une *sphère J-holomorphe*. D'après le lemme suivant (voir par exemple [16]), il suffit de montrer que son énergie $E(v)$ définie par $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \|\partial_s v\|^2 + \|\partial_\theta v\|^2 = \int_{\mathbb{C}} \|\partial_s v\|^2 = \int_{\mathbb{C}} v^* \omega$ est finie.

Lemme 4.4.2. *Soit (W, ω) une variété symplectique, J une structure presque complexe compatible avec ω , $v : \mathbb{D} \setminus 0 \rightarrow W$ une courbe J-holomorphe contenue dans un compact de W . Si $\int_{\mathbb{D} \setminus 0} u^* \omega < \infty$ alors u admet une extension J-holomorphe au disque entier $\mathbb{D}$.*

En remarquant que $\tilde{v}(z) := v(\frac{1}{z})$ définie sur $\mathbb{C}^*$ est aussi J-holomorphe avec $E(\tilde{v}) = E(v)$, il suffit de montrer que l'énergie de v est finie.

Remarque 4.4.1. *Sans le mentionner explicitement ici, nous exploitons des propriétés fondamentales des courbes J-holomorphes. Au-delà du lemme mentionné, le lecteur peut vérifier que*

l'énergie d'une courbe J -holomorphe

- (i) *est invariante par reparamétrisation holomorphe, i.e. $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|\nabla v\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|\nabla v \circ \phi\|^2$ pour $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un biholomorphisme de la surface de Riemann Σ ,*
- (ii) *bien qu'étant une quantité métrique, ne dépend que de la classe d'homologie de v (relativement à son bord dans le cas d'une surface à bord), i.e. $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|\nabla v\|^2 = \int_{\Sigma} v^* \omega$ et est strictement positive (à moins que la courbe soit constante). Cet argument nous permettra d'obtenir la contradiction comme quoi v est constante.*

Bornons maintenant l'énergie de v .

$$\begin{aligned}
\int_{B(0, \epsilon_n R_n)} \|\nabla v_n\|^2 &= \int_{B_n} \|\partial_s u_n\|^2 + \|\partial_{\theta} u_n\|^2 = \int_{B_n} \|\partial_s u_n\|^2 + \|\partial_{\theta} u_n - X_H(u_n) + X_H(u_n)\|^2 \\
&= \int_{B_n} \|\partial_s u_n\|^2 + 2\|\partial_{\theta} u_n - X_H(u_n)\|^2 + 2\|X_H(u_n)\|^2 \\
&\leq 3 \int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s u_n\|^2 + 2 \int_{B_n} \|X_H(u_n)\|^2.
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 car le rayon de la boule B_n tend vers 0 et X_H est borné sur W compacte. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s u_n\|^2 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R] \times S^1} \|\partial_s u_n\|^2 = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R]} \frac{d\mathcal{A}_H(u(s, \cdot))}{ds} \cdot ds \\
&= - \lim_{R \rightarrow +\infty} (\mathcal{A}_H(u(R, \cdot)) - \mathcal{A}_H(u(-R, \cdot))) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y) < +\infty.
\end{aligned}$$

L'énergie de v est donc finie, on peut l'étendre en sphère J -holomorphe non constante. Or, d'après l'hypothèse 1, $\int_{S^2} v^* \omega = 0$. En effet, il existe une application de degré positif du tore vers la sphère, l'asphéricité symplectique, i.e. pour tout $\sigma : S^2 \rightarrow W$, $\int_{S^2} v^* \omega = 0$, découle de l'atoroidalité symplectique. D'après la remarque précédente sur l'énergie des courbes holomorphes dans une variété symplectique, v est nécessairement constante, d'où la contradiction. $\square$

Il reste un dernier lemme à énoncer avant de pouvoir mimer *mot pour mot* la procédure de compactification de la théorie de Morse.

Lemme 4.4.3. *Soit $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow W$, une solution de $\partial_{J,H} u = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s u\|^2 < \infty$,
- (ii) $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s, \cdot) \in \mathcal{P}(H)$.

Démonstration. (ii) $\implies$ (i) a déjà été montré pour borner le gradient.

(i) $\implies$ (ii) : Nous reprenons l'argument présent dans la section 6.5.b de [4] et traitons uniquement le cas $+\infty$. On peut trouver une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $s_k \rightarrow +\infty$ telle que

$\int_{S^1} \|\partial_s u(s_k, \theta)\|^2 d\theta \rightarrow 0$. Soit $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\gamma_k = u(s_k, \cdot)$. Cette dernière est équi-continue.

$$\begin{aligned} \|\gamma_k(\theta_1) - \gamma_k(\theta_2)\|^2 &\leq \|\theta_1 - \theta_2\| \int_{S^1} \|\partial_\theta u(s_k, \theta)\|^2 d\theta \\ &\leq \|\theta_1 - \theta_2\| (\int_{S^1} \|X_H\|^2 d\theta + \int_{S^1} \|\partial_\theta u(s_k, \theta) - X_H\|^2 d\theta) \end{aligned}$$

Le premier terme du second facteur est borné indépendamment de k, θ_1, θ_2 et le deuxième tend vers 0. Le théorème d'Arzelà-Ascoli donne une sous-suite convergente au sens C^0 vers y . On peut montrer (lemme 6.5.10 de [4]) que y est en fait de classe C^1 et qu'il appartient à $\mathcal{P}(H)$.

Comme $\lim_k \mathcal{A}_H(\gamma_k) = \mathcal{A}_H(y)$ et que $\mathcal{A}_H$ est décroissante le long $s \mapsto u(s, \cdot)$, il vient $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_H(u(s, \cdot)) = \mathcal{A}_H(y)$. Soit $(s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une nouvelle suite qui converge vers $+\infty$ et $v_k := u(\cdot + s'_k, \cdot)$. La compacité locale établie précédemment donne l'existence d'une sous-suite, toujours dénommée v_k , telle que v_k converge vers v , solution de l'équation de Floer et d'énergie finie. Pour tout R , $\mathcal{A}_H(v(R, \cdot)) = \lim_k \mathcal{A}_H(u(R + s'_k, \cdot)) = \mathcal{A}_H(y)$, donc $\int_{-R}^R \|\partial_s v\|^2 = \mathcal{A}_H(v(R, \cdot)) - \mathcal{A}_H(v(-R, \cdot)) = \mathcal{A}_H(y) - \mathcal{A}_H(y) = 0$ et $E(v) = 0$. Comme v est solution de l'équation de Floer et d'énergie nulle, v est indépendant de s et égale à une trajectoire périodique $\tilde{y} \in \mathcal{P}_H$ et $\lim_k u(s'_k, \cdot) = v(0, \cdot) = \tilde{y}$. En résumé, pour toute suite $(s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$, il est possible d'extraire une sous-suite de $(u(s'_k, \cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de $\mathcal{P}_H$. On peut ensuite montrer que la limite en question est unique. En effet, soit V une union de voisinages disjoints connexes des éléments de $\mathcal{P}(H)$ dans $C^\infty(S^1, W)$. Pour s assez grand, $u([s, +\infty[, \cdot) \in V$. Si ce n'était pas le cas, on obtiendrait une sous suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $u(s_k, \cdot) \notin V$. Or celle-ci admettrait une sous-suite convergente vers un élément de $\mathcal{P}(H)$, d'où la contradiction. Par connexité, lorsque s tend vers $+\infty$, $u(s, \cdot)$ ne peut converger que vers une unique orbite périodique. Le cas $-\infty$ est similaire. $\square$

Nous avons désormais tous les arguments pour prouver la compacité.

Théorème 4.4.1. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(x, y)$ avec $x, y \in \mathcal{P}(H)$.*

Il existe $k \in \mathbb{N}$, $k + 1$ orbites distinctes $x_0, \dots, x_k$ (avec $x_0 = x, x_{k+1} = y$), k cylindres $u^i \in \mathcal{M}(x_{i-1}, x_i)$, et k suites $(s_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ ($i = 1 \dots k$), tels que $s_n^i \cdot u_n \rightarrow u^i$ dans $C_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times S^1, W)$.

Démonstration. La suite u_n est équicontinue, elle admet donc une sous-suite convergente, au sens C^0 et sur tout compact, vers v . Celle-ci est solution faible de $\partial_{J,H}(v) = 0$. Par régularité elliptique, elle est de classe C^∞ et c'est une authentique trajectoire de Floer. De plus, son énergie $\int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s v\|^2$ est finie, elle converge donc vers des orbites périodiques de H en $\pm\infty$.

Ceci prouve la compacité locale pour les solutions de l'équation de Floer d'énergie finie, le reste de la preuve se fait exactement comme dans le cas de la théorie de Morse. La partie de cette démonstration repose uniquement sur la métrisabilité de M , on peut remplacer partout M par $C^\infty(S^1, W)$ et voir nos cylindres comme des courbes $u : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(S^1, W)$.

Il reste une subtilité. S'il existe k trajectoires telles que $s_n^i \cdot u_n \rightarrow u^i$, $i = 1 \dots k$, on peut choisir des trivialisations de $u^{i*}TW$ telles que les indices de Conley Zenhder des orbites x_i

coincident vues comme extrémités positives ou négatives. Ceci nous assure qu'une trajectoire de Floer dégénère en une trajectoire brisée d'au plus $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y)$ étages. $\square$

- (i) Lorsque $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) = 1$, $\mathcal{L}(x, y)$ est un espace discret. Il ne peut avoir de point d'accumulation, étant compact, il est fini.
- (ii) Lorsque $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) = 2$, $\mathcal{L}(x, y)$ est de dimension 1, ses composantes connexes sont soit compactes homéomorphes au cercle, soit non compactes et homéomorphes à un intervalle ouvert. Afin de montrer que l'ajout de trajectoires brisées $(u, v) \in \mathcal{L}(x, z) \times (z, y)$ avec $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(z) = \mu_{CZ}(z) - \mu_{CZ}(y) = 1$, compactifie $\mathcal{L}(x, y)$ en une variété à bord, nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 4.4.2. *Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(x, z) \times \mathcal{L}(z, y)$ avec $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(z) = \mu_{CZ}(z) - \mu_{CZ}(y) = 1$. Il existe une application $\psi : [R_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}(x, y)$ telle que :*

- (i) $\lim_{R \rightarrow +\infty} \pi \circ \psi(R) = (u, v)$ où π désigne le quotient par l'action de $\mathbb{R}$,
- (ii) toute suite $w_n \in \mathcal{L}(x, y)$ convergeant vers (u, v) est dans l'image de $\pi \circ \psi$ à partir d'un certain rang.

La propriété (i) est une sorte de réciproque à la compactification. Toute suite de $\mathcal{L}(x, y)$, non convergente dans $\mathcal{L}(x, y)$, converge vers une trajectoire brisée. Réciproquement, toute trajectoire brisée s'obtient comme limite d'authentiques trajectoires.

La propriété (ii) assure qu'une trajectoire brisée correspond à une *unique* extrémité d'intervalle, ce n'est pas un point de branchement entre deux intervalles ouverts.

La démonstration de cette proposition consiste à construire une solution approchée w_R , montrer que $(D\partial_{J,H})_{w_R}$ est surjective avec un inverse uniformément borné (indépendamment de R) et appliquer une version quantitative du théorème des fonctions implicites pour trouver une authentique trajectoire près de w_R .

Remarque 4.4.2. *Dans le cas de la théorie de Floer classique, la surjectivité de l'opérateur en w_R se montre en remarquant qu'il est de Fredholm d'indice 2 puis en trouvant un espace W_R de codimension 2 sur lequel il est injectif. Dans le cas équivariant, les asymptotes sont dégénérées et nous ne pouvons mimer cette démonstration, nous renvoyons le lecteur à [4] pour une démonstration complète de cette proposition.*

4.5 Homologie de Floer

Soient (W, ω) , $H \in \mathcal{H}$ non-dégénéré et $J \in \mathcal{J}_{reg}(H)$, i.e. telle que $\partial_{J,H}$ soit transverse à $0_{\mathcal{E}}$. Ainsi, pour tous $x, y \in \mathcal{P}(H)$, $\mathcal{M}(x, y)$ est une variété. Nous choisissons un lacet de référence $l_i : S^1 \rightarrow W$ pour chaque composante connexe de $C^\infty(S^1, W)$. Nous fixons une trivialisation de l_i^*TW , et pour $x \in \mathcal{P}(H)$, nous choisissons une homotopie $\sigma_x : [0, 1] \times S^1 \rightarrow W$ entre l_i et x .

Étant donnée une trivialisation de σ_x^*TW qui coïncide avec notre trivialisation choisie le long de $\sigma_x(0, \cdot) = l_i$, nous pouvons associer à x son indice de Conley-Zehnder $\mu_{CZ}(x)$, calculé dans cette trivialisation. L'indice est bien défini, il dépend de σ_x mais pas de la trivialisation de σ_x^*TW tant qu'elle coïncide avec celle choisie le long de $\sigma_x(0, \cdot) = l_{[i]}$. En effet, étant données deux telles trivialisations, soient R_1, R_2 les deux chemins dans $Sp(2n)$ correspondants à $t \rightarrow d\phi^t$. Ces derniers sont conjugués par le chemin $\Psi(1, \cdot)$ où $\Psi : [0, 1] \times S^1 \mapsto Sp(2n)$ correspond au changement de trivialisation de $\sigma_x^*(TW)$. En remarquant que $\Psi(0, \cdot) = \text{Id}_{2n}$ (les deux trivialisations coïncident au-dessus de $\sigma_x(0, \cdot) = l_i$), alors $(s, t) \mapsto \Psi(s, t)R_1(t)\Psi(s, t)^{-t}$ est une homotopie entre R_1 et R_2 et, pour tout s , $\Psi(s, 1)R_1(t)\Psi(s, 1)^{-1}$ n'admet pas 1 comme valeur propre.

Nous voulons construire un complexe différentiel, engendré par les points critiques. Nous avons vu que l'indice de Conley-Zehnder avait un rôle analogue à l'indice de Morse en dimension finie et par conséquent, pouvait servir de graduation. Le problème est que, pour $u \in \mathcal{M}(x, y)$, la composante connexe de $\mathcal{M}(x, y)$ contenant u a pour dimension la différence des indices de Conley-Zehnder de x et de y dans des trivialisations de x^*TW et y^*TW induite par u . Une fois nos choix (arbitraires) de lacets de référence l_i , de trivialisations de $l_i^*(TW)$ et d'homotopies σ_x entre x et l_i effectués, comment déterminer la dimension de $\mathcal{M}(x, y)$ près d'une trajectoire u en fonction des indices $\mu_{CZ}(x)$, $\mu_{CZ}(y)$? L'indice de Fredholm de $D\partial_{J,H}$ au point u est donné par $\mu_{CZ}(x) - \tilde{\mu}_{CZ}(y)$, avec $\tilde{\mu}_{CZ}(y)$ l'indice de Conley-Zehnder de y mais calculé dans une trivialisation de $\sigma_{[x]} \# u$. Il s'agit de comparer $\tilde{\mu}_{CZ}(y)$ et $\mu_{CZ}(y)$. Le lecteur pourra trouver une démonstration de la proposition suivante dans [29] :

Proposition 4.5.1. *Soient σ_1, σ_2 deux homotopies entre un lacet γ et une orbite périodique x et μ_{CZ}^1, μ_{CZ}^2 les indices de Conley-Zehnder calculés dans des trivialisation de $\sigma_1^*TW, \sigma_2^*TW$ coïncidant toutes deux le long de γ .*

Alors $\mu_{CZ}^2 = \mu_{CZ}^1 - 2c_1(A)$ où $c_1 \in H^2(W, \mathbb{Z})$ est la première classe de Chern du fibré complexe (TW, J) et $A \in H_2(W, \mathbb{Z})$ représente la surface $[\sigma_1 \# \bar{\sigma}_2]$ où $\bar{\sigma}_2$ représente l'homotopie σ_2 dont l'orientation a été inversée.

Remarque 4.5.1. *Comme $\mathcal{J}$ est contractile, la classe de Chern de TW est bien définie peu importe le choix de notre structure presque complexe compatible avec ω .*

Ce phénomène souligne l'importance de la classe homologique $[u]$ des trajectoires. Afin de construire un complexe différentiel qui prenne en compte cette donnée, nous ne considérons pas simplement le $\mathbb{Z}$ -complexe engendré par les orbites périodiques mais intégrons l'information homologique de la manière suivante.

Pour $x, y \in \mathcal{P}(H)$, nous notons désormais $\mathcal{M}^A(x, y) = \{u \in \mathcal{M}(x, y) | [\sigma_x \# u \# \bar{\sigma}_y] = A\}$. C'est une variété de dimension $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) + 2c_1(A)$ et $\mathcal{L}^A(x, y) = \mathcal{M}^A(x, y)/\mathbb{R}$ est de

dimension $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) + 2c_1(A) - 1$. Soit

$$\Lambda_\omega = \left\{ \sum_{A \in H_2(W, \mathbb{Z})} \lambda_A e^A \mid \lambda_A \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En tant que groupe, cet ensemble est le $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par $H_2(W, \mathbb{Z})$. La structure d'anneau est donnée par $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ et s'étend par linéarité. Comme nous sommes uniquement intéressés par l'action de la première classe de Chern $c_1 : H_2(W, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, nous pouvons remplacer $H_2(W, \mathbb{Z})$ par $H_2^{c_1}(W) = H_2(W, \mathbb{Z}) / \ker c_1$ afin de ne pas manipuler un anneau trop compliqué. Par exemple, les éléments de torsion n'ont aucun rôle. Nous pouvons graduer cet anneau par la classe de Chern en posant $|A| = -2c_1(A)$ et nous considérons le produit tensoriel gradué des modules gradués $(\sum_{x \in \mathcal{P}(H)} \mathbb{Z}\langle x \rangle) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_\omega$ où le premier module est gradué par l'indice de Conley-Zehnder calculé dans une homotopie entre l'orbite et le lacet de référence comme expliqué ci-dessus.

Nous définissons la différentielle du complexe par

$$\partial(x) = \sum_{y \text{ t.q. } |x| - |ye^A| = 1} \left(\sum_{[u] \in \mathcal{L}^A(x, y)} \epsilon(u) \right) y \cdot e^A$$

Regardons de plus près cette expression :

- (i) Nous n'avons pas parlé d'orientation. Il est possible d'orienter chaque espace $\mathcal{M}^A(x, y)$ de manière à ce que le gluing préserve l'orientation. Nous reviendrons plus en détail sur les questions d'orientation dans le cas équivariant. Précisons néanmoins que recoller des trajectoires $(u, v) \in \mathcal{M}^A(x, y) \times \mathcal{M}^B(y, z)$ donne naissance à une famille unidimensionnelle de trajectoires dans $\mathcal{M}^{A+B}(x, z)$ approchant (u, v) .

La décomposition $\partial \mathcal{L}(x, z) = \coprod_y \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$ induit

$$\partial \mathcal{L}^C(x, z) = \coprod_{y, A, B \mid A+B=C} \mathcal{L}^A(x, y) \times \mathcal{L}^B(y, z)$$

- ii) $\epsilon(u) \in \{-1, 1\}$ est alors calculé en comparant l'orientation induite par $\partial_s u$ (celle-ci ne dépend pas du représentant choisi pour $[u]$, ces derniers étant tous translatés les uns par rapport aux autres) et l'orientation géométrique de $\mathcal{M}(x, y)$.
- (iii) Nous étendons ∂ par Λ_ω linéarité, de sorte à ce qu'elle reste de degré -1 .
- (iv) Pour y, A fixés, $\sum_{[u] \in \mathcal{L}^A(x, y)} \epsilon(u)$ est bien une somme finie par compacité. Il reste à voir que pour x, y fixés, il n'y a qu'un nombre fini de A non nuls intervenant dans la somme, ce qui est à nouveau une conséquence de la compacité. Supposons qu'il existe une suite infinie de classes distinctes $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $H_2(W)$ et de trajectoires $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{A_k}(x, y)$, alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge par compacité vers une trajectoire v , possiblement brisée. À partir d'un certain rang, tous les éléments de la suite sont homotopes à v (plus

précisément au recollement des différentes trajectoires composant v si celle ci est brisée). Les surfaces $\sigma_x \# u_k \# \bar{\sigma}_y$ sont homotopes et définissent une même classe d'homologie d'où la contradiction.

Regardons maintenant le coefficient de $\partial^2(x)$ en $z.e^C$, soit

$$\sum_{(u,v) \in \mathcal{L}^A(x,y) \times \mathcal{L}^B(y,z)} \epsilon(u) \epsilon(v)$$

où la somme porte sur les classes A, B telles que $A + B = C$ et les y vérifiant $|x| - |ye^A| = 1$.

Cette somme compte donc le nombre (en prenant en compte l'orientation) d'éléments de $\partial \mathcal{L}^C(x, z)$. Ces derniers sont donc en nombre pair et pour chaque paire $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ venant compactifier une composante de $\mathcal{L}^C(x, z)$ homéomorphe à un intervalle ouvert, on peut vérifier que $\epsilon(u_1)\epsilon(v_1) + \epsilon(u_2)\epsilon(v_2) = 0$. La différentielle est bien de carré nul.

Définition 4.5.1. Soit (W, ω) une variété symplectique compacte, symplectiquement atoroidale, $H : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien non-dégénéré, 1-périodique, et $J \in \mathcal{J}_{reg}(H)$. L'homologie du complexe différentiel construit précédemment est un Λ_ω -module appelée homologie de Floer relativement à (H, J) et notée $HF_*(W, \omega, H, J)$.

Proposition 4.5.2. L'homologie de Floer est un invariant symplectique, i.e. soient $(H_1, J_1), (H_2, J_2)$ deux paires avec H_1, H_2 non dégénérés et $J_i \in \mathcal{J}_{reg}(H_i)$ ($i = 1, 2$). Alors,

$$HF_*(W, \omega, H_1, J_1) \simeq HF_*(W, \omega, H_2, J_2)$$

et l'isomorphisme en question est canonique. L'homologie obtenue est appelée homologie de Floer associée à (W, ω) et est notée $HF_*(W, \omega)$.

Cette proposition repose sur les faits suivants (on trouvera une preuve complète dans le chapitre 11 de [4]) :

- (A) Pour toutes paires $(H_1, J_1), (H_2, J_2)$, il existe un morphisme de complexes induisant un morphisme en homologie $HF_*(W, \omega, H_1, J_1) \rightarrow HF_*(W, \omega, H_2, J_2)$.
- (B) Le morphisme induit en question ne dépend que de (H_1, J_1) et (H_2, J_2) , nous le notons $\Phi_{(H_1, J_1)}^{(H_2, J_2)}$.
- (C) Pour trois paires $(H_i, J_i), i \in \{1, 2, 3\} : \Phi_{(H_2, J_2)}^{(H_3, J_3)} \circ \Phi_{(H_1, J_1)}^{(H_2, J_2)} = \Phi_{(H_1, J_1)}^{(H_3, J_3)}$.
- (D) $\Phi_{(H_1, J_1)}^{(H_1, J_1)} = Id_{HF_*(W, \omega, H_1, J_1)}$.

On en déduit que pour toutes paires $(H_1, J_1), (H_2, J_2)$, il existe (A) un morphisme, (B) canonique, (C) et (D) inversible, de $HF(W, \omega, H_1, J_1)$ vers $HF(W, \omega, H_2, J_2)$. On peut donc définir l'homologie de Floer de la variété symplectique (W, ω) sans ambiguïté. Nous donnons les arguments clés pour démontrer (A).

Choisissons une homotopie $(H_s, J_s)_{s \in \mathbb{R}}$ telle que $(H_s, J_s) = (H_1, J_1)$ pour $s \leq -1$ et $(H_s, J_s) = (H_2, J_2)$ pour $s \geq 1$. Une telle homotopie existe par connexité de $\mathcal{J}$. Nous choisissons aussi des

homotopies σ_x (resp. $\tilde{\sigma}_y$) entre $x \in \mathcal{P}(H_1)$ et l_i , le représentant préalablement choisi dans la composante connexe de x (resp. $y \in \mathcal{P}(H_2)$ et l_i), afin de leur associer un indice de Conley-Zehnder. Nous regardons les solutions u de $\partial_s u + J_s^\theta(\partial_\theta - X_{H_s}^\theta(u)) = 0$. Si une telle solution est d'énergie $E(u) = \int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s u\|^2$ finie, alors les arguments exposés dans le lemme 4.4.3 nous donnent l'existence des limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x \in \mathcal{P}(H_1)$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y \in \mathcal{P}(H_2)$. Nous notons $\mathcal{M}_{1,2}(x, y)$ les solutions de l'équation dépendant de s , d'énergie finie admettant x et y comme asymptotes, et notons $\mathcal{M}_i(x_1, x_2)$ les trajectoires de Floer pour (H_i, J_i) admettant $x_1, x_2 \in \mathcal{P}(H_i)$ comme asymptotes, $i \in \{1, 2\}$.

- (i) Les solutions d'une telle équation vérifient elles aussi des propriétés de décroissance exponentielle (cela ne dépend que de leur comportement asymptotique) et de régularité elliptique.
- (ii) Soit ∂_{J_s, H_s} l'opérateur défini par $\partial_{J_s, H_s}(u) = \partial_s + J_s^\theta(\partial_s u - X_{H_s}^\theta(u))$. Sa différentielle en un point u vérifiant $\partial_{J_s, H_s}(u) = 0$ est d'indice $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y)$ (toujours dans une trivialisations induite par u). En effet, la propriété d'être Fredholm et l'indice ne dépendent que du comportement asymptotique.
- (iii) De même, nous étendons ∂_{J_s, H_s} en $\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,p}(x, y) \times \mathcal{H}_s \times \mathcal{J}_s \rightarrow \mathcal{E}$ où $\mathcal{H}_s$ (resp. $\mathcal{J}_s$) désigne les homotopies d'hamiltoniens $H : \mathbb{R} \times S^1 \times W$ entre H_1 et H_2 (resp. homotopie de structures presque complexes compatibles avec ω entre J_1 et J_2) stationnaires pour $|s| \geq 1$ et $\mathcal{E}$ désigne le fibré au-dessus de cet espace, de fibre $\mathcal{E}_{u, H, J} = L^p(u^*TW)$. Soit $(u, H_s, J_s) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$. Il est facile de montrer que $D\mathcal{F}_{(u, H_s, J_s)}$ est surjective, et ce, sans même utiliser l'existence de points injectifs. En effet, en réexaminant la preuve dans le cas indépendant de s , on voit que la dépendance de H_s et J_s en s permet de perturber sans se soucier d'éventuels compensations. Pour une classe dense d'homotopies, les solutions forment donc une variété.
- (iv) La compacité locale se montre de la même manière, la seule subtilité est la majoration du gradient. L'existence de suites $(s_k, \theta_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u_k(s_k, \theta_k)\|$ donne naissance à la suite rééchelonnée $v_k(s, t) = u((s_k, \theta_k) + \frac{(s, \theta)}{R_k})$ vérifiant

$$\partial_s v_k + J_{s_k + \frac{s}{R_k}}^{\theta_k + \frac{\theta}{R_k}}(\partial_\theta v) - \frac{1}{R_k} J_{s_k + \frac{s}{R_k}}^{\theta_k + \frac{\theta}{R_k}}(X_{H_s}(v_k)) = 0.$$

Le dernier terme tend vers 0 car X_{H_s} est globalement borné (par le choix de notre homotopie). Si $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, alors on peut extraire une sous-suite dont la limite v sera une sphère $J_i^{\theta_0}$ -holomorphe pour un certain θ_0 et $i \in \{1, 2\}$. Donc la suite $(s_k, \theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut extraire des sous-suites convergeant vers (s_0, θ_0) et une sous-suite de $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une sphère $J_{s_0}^{\theta_0}$ -holomorphe.

En adaptant la démonstration de la compacité au cas s -indépendant, étant donnée une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{1,2}(x, y)$, on trouve des suites $(s_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$, $(s_k'^j)_{k \in \mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq k-1$, $1 \leq j \leq l-1$, des orbites $x_0 = x, x_1 \dots x_k \in \mathcal{P}(H_1)$, $y_0 \dots y_{l-1}, y_l = y$, des trajectoires

$w \in \mathcal{M}_{1,2}(x_k, y_0)$, $u^i \in \mathcal{M}_1(x_{i-1}, x_i)$, $v^j \in \mathcal{M}_2(y_{j-1}, y_j)$, $1 \leq i \leq k-1$, $1 \leq j \leq l-1$ tels que

(a) $s_k^i \cdot u_k \rightarrow u_i$, $1 \leq i \leq k-1$,

(b) $u_k \rightarrow w$,

(c) $s_k^j \cdot u_k \rightarrow v_j$, $1 \leq j \leq l-1$.

(les convergences en jeu sont C^∞ sur tout compact). Lorsque $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) + 2c_1(A) = 0$, l'espace $\mathcal{M}_{1,2}^A := \{u \in \mathcal{M}_{1,2}(x, y) \mid [\sigma_x \# u \# \bar{\sigma}_y] = A\}$ est compact et discret donc fini. Contrairement au cas précédemment étudié, il n'est pas nécessairement vide : nous n'avons plus l'action de $\mathbb{R}$ sur l'espace de solutions. Un raffinement du gluing nous donne aussi que pour $x \in \mathcal{P}(H_1)$, $y \in \mathcal{P}(H_2)$ avec $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y) + 2c_1(A) = 1$, la variété compactifiée

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{1,2}^C(x, y) := & \mathcal{M}_{1,2}^C(x, y) \coprod \left(\coprod_{\substack{A, B \text{ t.q.} \\ A+B=C}} \coprod_{\substack{x' \in \mathcal{P}(H_1) \text{ t.q.} \\ \mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(x') + 2c_1(A)=1}} \mathcal{L}_1^A(x, x') \times \mathcal{M}_{1,2}^B(x', y) \right) \\ & \coprod \left(\coprod_{\substack{y' \in \mathcal{P}(H_2) \text{ t.q.} \\ \mu_{CZ}(y') - \mu_{CZ}(y) + 2c_1(B)=1}} \mathcal{M}_{1,2}^A(x, y') \times \mathcal{L}_2^B(y', y) \right) \end{aligned}$$

est compacte et de dimension 1.

Nous définissons le morphisme Φ au niveau des complexes comme l'unique morphisme Λ_ω linéaire vérifiant :

$$\Phi(x) = \sum_{y \mid |x| - |ye^A| = 0} \left(\sum_{[u] \in \mathcal{L}^A(x, y)} \epsilon(u) \right) y \cdot e^A.$$

Muni d'orientations bien choisies, on peut vérifier que $\Phi \circ \partial \pm \partial \circ \Phi$ est de degré -1 et que le coefficient selon ze^C de l'image de x est le compte algébrique de $\partial \overline{\mathcal{M}}_{1,2}^C(x, z)$. Ce coefficient est donc nul, ce qui montre que Φ induit un morphisme $HF_*(W, \omega, H_1, J_1) \rightarrow HF_*(W, \omega, H_2, J_2)$.

Les assertions suivantes se montrent de manière similaire, par exemple, en étudiant les solutions d'équations de type Floer avec des paramètres supplémentaires, on construit une homotopie (au sens homologique) entre deux homotopies de paires.

Pour calculer $HF_*(W, \omega)$, nous choisissons une paire (H, J) facilitant au maximum tous les calculs en jeu. En particulier, si H est indépendante du temps, C^2 petite et Morse, nous retrouvons l'homologie de Morse à coefficients dans Λ_ω (voir chapitre 10 de [4]) :

Proposition 4.5.3. *Soit $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ indépendante du temps et non-dégénérée, définissant ainsi une fonction de Morse. Si H est "suffisamment petite", au sens C^2 ,*

- (i) *il n'y a pas d'orbites périodiques de H autres que ses points critiques,*
- (ii) *pour un point critique x de H , $\nu_H(x) = \mu_{CZ}(x) + n$,*
- (iii) *les trajectoires de Floer $u \in \mathcal{M}(x, y)$ sont indépendantes de θ .*

Il existe une structure complexe $J \in \mathcal{J}$ telle que les trajectoires de Floer entre deux points critiques x et y forment une variété et correspondent exactement aux trajectoires de Morse entre x et y .

La composante connexe à laquelle appartiennent les points critiques de H est celle des lacets contractiles. Nous choisissons un point $* \in W$ comme représentant. Pour chaque point critique x , si nous choisissons une homotopie entre x et $*$, indépendante de θ , alors l'indice de Conley-Zehnder est défini sans ambiguïté. En effet, deux indices calculés dans des trivialisations suivants des chemins distincts, diffèrent par $2c_1(A)$ avec A qui a le type d'homotopie d'un cercle. Dans ce cas, nécessairement, $c_1(A) = 0$. De même, pour $x, y \in \mathcal{P}(H)$, $\mathcal{M}^A(x, y)$ est vide pour $A \neq 0$.

Le morphisme

$$\text{Id} : \left(\bigoplus_{x \in \text{Crit}(H)} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \partial_{\text{Morse}} \right) \otimes (\Lambda_\omega, \partial_{\Lambda_\omega} = 0) \longrightarrow \left(\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{P}(H)} \mathbb{Z}\langle x \rangle \otimes \Lambda_\omega \right), \partial_{\text{Floer}} \right)$$

est un isomorphisme de modules différentiels gradués de degré n . Le module différentiel gradué de gauche est le produit tensoriel, en tant que modules différentiels gradués, du complexe de Morse associé à H avec le module différentiel gradué Λ_ω muni de la différentielle nulle. Celui de droite est celui que nous avons construit pour définir l'homologie de Floer.

La différentielle ∂_{Floer} peut s'avérer très compliquée à calculer. Regarder une fonction de Morse comme nous l'avons fait nous donne un moyen simple pour calculer l'homologie de Floer d'une variété compacte symplectiquement atoroidale (voir chapitre 10 de [4]) :

Théorème 4.5.1. *Soit (W, ω) une variété symplectiquement atoroidale, $HF_*(W, \omega) \simeq H_{*+n}(W, \Lambda_\omega)$.*

Remarque 4.5.2. *En homologie de Morse/singulière, si $M = \coprod_i M_i$ est la décomposition de M en composantes connexes, alors $H_*(M) = \bigoplus_i H_*(M_i)$. La construction effectuée sur $C^\infty(S^1, W)$ peut se faire sur une composante connexe de $C^\infty(S^1, W)$ donnée. Soit a la classe d'homotopie libre de lacets correspondante.*

En notant $HF_^a(W, \omega)$ l'homologie de Floer associée à une telle classe a , l'isomorphisme avec l'homologie de Morse implique $HF_*^0(W, \omega) = H_{*+n}(W, \Lambda_\omega)$ et $HF_*^a(W, \omega) = 0$ pour $a \neq 0$.*

Remarque 4.5.3. *Si l'on choisit d'emblée de ne regarder que les orbites contractiles de H , on peut remplacer la fonctionnelle d'action par $A_H(\gamma) := -\int_{D^2} u^* \omega - \int_{S^1} H^\theta(\gamma(\theta)) d\theta$ avec $u : D^2 \rightarrow W$ vérifiant $u|_{\partial D^2} = \gamma$ et remplacer l'hypothèse d'atoroidalité symplectique par celle plus faible d'asphéricité symplectique, i.e. $\int_{S^2} v^* \omega = 0, \forall v : S^2 \rightarrow W$. En effet, le lecteur peut vérifier que l'hypothèse d'atoroidalité symplectique n'intervient que pour la définition de la fonctionnelle et pour empêcher l'apparition de sphères J -holomorphes pour établir la compacité.*

Comment s'affranchir totalement des hypothèses d'atoroidalité/asphéricité symplectique et construire une théorie de Floer valable pour toute variété symplectique compacte (W, ω) ? Fixons une classe d'homotopie libre a , un de ses représentants l_a , et une trivialisation symplectique de $l_a^*(TW)$.

Nous définissons alors $\mathcal{A}_H : \tilde{C}^\infty(S^1, W) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\mathcal{A}_H(\sigma, \gamma) = - \int_{[0,1] \times S^1} \sigma^* \omega - \int_{S^1} H^\theta(\gamma(\theta)) d\theta$ où $\tilde{C}^\infty(S^1, W)$ désigne l'ensemble des couples (σ, γ) avec $\sigma : [0, 1] \times S^1 \rightarrow W$, une homotopie entre $l_{[\gamma]}$ et γ . Outre nous permettre de définir sans ambiguïté notre fonctionnelle, cet espace permet de définir sans ambiguïté l'indice de Conley-Zehnder d'une orbite périodique (σ, γ) en regardant une trivialisation le long de σ . L'espace choisi est en réalité trop grand pour nos besoins. Nous regardons son quotient par la relation d'équivalence $(\sigma_1, \gamma_1) \sim (\sigma_2, \gamma_2) \iff \gamma_1 = \gamma_2$ et σ_1, σ_2 définissent la même classe d'homologie relativement à leurs frontières, soit $[\sigma_1 \# \bar{\sigma}_2] = 0 \in H_2(W, \mathbb{Z})$. Alternativement, nous définissons la relation d'équivalence

$$(\sigma_1, \gamma_1) \sim (\sigma_2, \gamma_2) \iff \gamma_1 = \gamma_2 \text{ et } [\sigma_1 \# \bar{\sigma}_2] \in \Gamma \subset H_2(W, \mathbb{Z})$$

où $\Gamma = \ker \omega \cap \ker c_1$.

En notant toujours le quotient $\tilde{C}^\infty(S^1, W)$ on obtient que la projection sur le deuxième facteur est un revêtement principal de groupe de Galois $H_2^\Gamma(M) = H_2(W, \mathbb{Z})/\Gamma$. L'action d'un élément A est donnée par $A.([\sigma], \gamma) = ([A \# \sigma], \gamma)$, $\mathcal{A}_H(A.([\sigma], \gamma)) = \mathcal{A}_H([\sigma], \gamma) - \omega(A)$ et $c_1(A.([\sigma], \gamma)) = c_1([\sigma], \gamma) - 2c_1(A)$. C'est l'espace "le plus simple" qui permet de balayer les ambiguïtés lors du calcul de l'indice de Conley-Zehnder et de l'image par la fonctionnelle.

Nous définissons la différentielle ∂ par $\partial([\sigma], x) = \sum_{([\sigma'], y)} \left(\sum_{u \in \mathcal{M}(x, y)} \epsilon(u) \right) . ([\sigma'], y)$ où la somme porte sur les u pour lesquels la dimension de $\mathcal{M}(x, y)$ près de u est égale à 1.

Outre le fait que dans notre définition de Λ_ω , nous devons remplacer partout $H_2(W, \mathbb{Z})$ par $H_2^\Gamma(W)$ (ce que nous avons fait dans le cas atoroidal où $\Gamma = \ker c_1$), il est possible que cette somme soit infinie et qu'il faille considérer des objets plus compliqués que des polynômes en $H_2^\Gamma(W)$. Pour démontrer la compacité dans le cas symplectiquement atoroidal, nous avons utilisé le fait que la quantité $\int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s u\|^2 = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y)$ ne dépend que de x et y .

Dans le cas que nous regardons, pour $[\sigma, x], [\sigma', y]$ fixés, les trajectoires de Floer u entre x et y vérifiant $[\sigma \# u] = [\sigma']$ forment un ensemble compact et donc fini. Cependant, il existe potentiellement une *infinité* de σ' pour lesquelles ces espaces sont non vides. Ce phénomène suggère de remplacer Λ_ω par l'ensemble des séries formelles en $H_2^\Gamma(W)$. Nous pouvons choisir un entre-deux, un anneau moins compliqué mais qui garantit la bonne définition de ∂ . Nous définissons

$$\Lambda_\omega = \left\{ \sum_{A \in H_2^\Gamma(W)} \lambda_A e^A \mid \lambda_A \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{R}, \# \{ \lambda_A \neq 0, \omega(A) \leq c \} < \infty \right\}.$$

Le lecteur remarquera maintenant pourquoi nous avons laissé ω en indice, bien que notre

premier anneau ne faisait pas intervenir la forme symplectique mais seulement le deuxième groupe d'homologie de W .

Reste cependant la question de la compacité, nos deux hypothèses proscrivaient l'apparition de sphères J -holomorphes, quelle est la condition minimale pour remédier à ce problème ? Sous certaines hypothèses, à défaut d'interdire l'existence de sphères J -holomorphes, on peut montrer que, modulo perturbation de la paire (H, J) , ces sphères n'intersecteront ni les orbites $\mathcal{P}(H)$ ni les trajectoires de Floer entre deux orbites. Derrière la définition qui suit, se cache l'idée suivante : l'ensemble des points se trouvant sur des sphères J -holomorphes forment une sous-variété de M dont la dimension dépend de la classe de Chern des sphères en question. Dans certains cas, ces points forment une variété de codimension au moins égale à 4 et n'intersectent ni les orbites, ni les cylindres. Nous renvoyons le lecteur à [18] pour la démonstration du résultat qui suit.

Définition/Proposition 4.5.1. *Par abus de notation, nous dénotons par $\pi_2(W)$ l'image de $\pi_2(W)$ dans $H_2(W)$ par le morphisme d'Hurewicz. Une variété symplectique (W, ω) est dite faiblement monotone si et seulement si elle vérifie une (ou plusieurs) des conditions suivantes :*

- (i) *il existe $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout $A \in \pi_2(W)$, $\omega(A) = \lambda c_1(A)$,*
- (ii) *pour tout $A \in \pi_2(W)$, $c_1(A) = 0$,*
- (iii) *le nombre de Chern minimal N défini par $c_1(\pi_2(W)) = N\mathbb{Z}$ vérifie $N \geq n - 2$.*

L'union de ces conditions est équivalente à la suivante : pour tout $A \in \pi_2(W)$,

$$3 - n \leq c_1(A) \leq 0 \implies \omega(A) \leq 0.$$

Pour une telle variété, l'ensemble des paires (H, J) vérifiant,

- (i) *pour tout $x \in \mathcal{P}(H)$, il n'existe pas de sphères J -holomorphes intersectant l'image de x ,*
- (ii) *pour tous $x, y \in \mathcal{P}(H)$, $u \in \mathcal{M}(x, y)$ avec $(D\partial_{J,H})_u$ d'indice 2, il n'existe pas de sphères J -holomorphes intersectant l'image de u ,*

contient une intersection d'ouverts denses.

4.6 Homologie symplectique

Nous avons pu répondre partiellement à la conjecture d'Arnold, partiellement sur deux plans :

- (A) D'après le théorème 4.5.1, le nombre minimal d'orbites périodiques est borné par $\sum_i \text{rg}(H_i(W, \Lambda_\omega))$. Or ce nombre peut être strictement inférieur au nombre minimum de points critiques d'une fonction de Morse sur la variété W .
- (B) Cette même borne a été établie pour une certaine classe de variétés symplectiques. Outre les restrictions de la définition/proposition 4.5.1 sur le comportement des sphères J -holomorphes, nous avons supposé nos variétés compactes et sans bord.

Pouvons-nous étendre notre construction à des variétés symplectiques plus complexes ? Soit (W^{2n}, ω) une variété compacte à bord $\partial W = M^{2n-1}$ convexe. Considérons $\hat{W} = (W, \omega) \amalg (\mathbb{R} \times M, d(e^t \alpha))$ la variété recollée, avec $\alpha = \iota_X \omega$ pour X un champ de Liouville transverse et pointant vers l'extérieur de W . Nous pouvons, exactement comme le cas fermé sans bord, définir une fonctionnelle $\mathcal{A}_H$ et étudier les trajectoires de Floer entre deux points critiques. Les propriétés de décroissance exponentielle, de régularité elliptique, de transversalité, la propriété de Fredholm se traitent *exactement* de la même manière. La nouvelle difficulté provient de la non compacité de $\hat{W}$. En examinant la preuve de la compacité, le lecteur peut vérifier qu'il faut maintenant établir une borne au sens C^0 , i.e. pour $x, y \in \mathcal{P}(H)$ l'image géométrique d'un élément $u \in \mathcal{M}(x, y)$ doit être contenue dans un compact. Afin que ceci reste vrai pour les trajectoires dans $\hat{W}$, il faut imposer des conditions sur nos paires (H, J) .

Définition 4.6.1. *Notons (t, m) les coordonnées sur $\mathbb{R} \times M$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des hamiltoniens périodiques $H : \hat{W} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :*

- (i) *il existe T_0 tel que $H(\theta, t, m) = \beta e^t + c$ sur $S^1 \times [T_0, +\infty[\times M$ avec $\beta \notin \text{Spec}(\alpha)$, l'ensemble des périodes des orbites périodiques de R_α , le champ de Reeb associé à la forme de contact α ,*
- (ii) *toutes les orbites de H sont non dégénérées.*

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des structures presque complexes sur $\hat{W}$ compatibles avec ω de sorte qu'il existe T_0 tel que, sur $[T_0, +\infty[\times M$,

- (i) *J^θ soit indépendante de θ , invariante par translation selon la coordonnée réelle,*
- (ii) *$J\partial_t = R_\alpha$,*
- (iii) *$J\xi = \xi$.*

Regardons de plus près la condition (i) sur $\mathcal{H}$. Si $H(t, m, \theta) = \beta e^t + c$, ou plus généralement si $H(t, m, \theta) = h(t)$ avec $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $dH_{(t, m)}^\theta = h'(t)dt$. Le calcul du gradient hamiltonien donne $X_H^\theta(t, m) = -e^{-t}h'(t)R_\alpha$. Une orbite 1-périodique de H correspond donc à une orbite du champ de Reeb R_α de période $\int_0^1 e^{-t}h'(t)dt$. Ainsi lorsque $h(t) = \alpha e^t$, $X_H^\theta(t, m) = -\beta R_\alpha$ avec $\beta \notin \text{Spec}(\alpha)$ et il n'admet pas d'orbites périodiques sur $[T_0, +\infty[\times M$. D'après (iii) celles-ci sont isolées, contenues dans $\hat{W}_T = W \amalg [0, T]$ compact donc en nombre fini.

Remarque 4.6.1. *Pour une fonction qui prend la forme $H(\theta, t, m) = h(e^t)$ avec $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors $X_H^\theta(t, m) = -h'(t)R_\alpha$. Dès que $h'(t) \in \text{Spec}(\alpha)$, il y a une orbite 1-périodique de H qui correspond à une orbite de Reeb de période $h'(t)$. En laissant $h'(t)$ croître vers $+\infty$, on retrouve toutes les orbites périodiques du champ de Reeb.*

Ceci met en lumière le lien qui existe entre la dynamique d'un hamiltonien sur W approchant le bord avec une pente de plus en plus grande et la dynamique du champ de Reeb pour une forme de contact α sur M (pour en savoir plus, le lecteur pourra consulter [9]).

Revenons à la question de la compacité.

Proposition 4.6.1. *Soient $H \in \mathcal{H}$, $J \in \mathcal{J}$ et $x, y \in \mathcal{P}(H)$. Il existe $T \geq 0$, tel que, pour tout $u \in \mathcal{M}(x, y)$, $u(\mathbb{R} \times S^1) \subset \hat{W}_T = W \coprod [0, T] \times M$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Il existe T_0 tel que

- (i) pour tout $t \geq T_0$, $H(\theta, t, m) = \beta e^t + c$,
- (ii) sur $[T_0, +\infty[\times M$, J est indépendante de θ , préserve ξ et envoie ∂_t sur R_α ,
- (iii) $x(S^1), y(S^1) \subset W_T$.

Comme $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, \cdot) = x$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, \cdot) = y$, il existe $n \geq 0$ tel que $|s| \geq N$ implique $u(s, \theta) \in W_{T_0+1}$. Si $u(\mathbb{R} \times S^1) \not\subset W_{T_0+1}$ alors $A = u^{-1}([T_0+1, +\infty[\times M)$ est un fermé d'intérieur non vide contenu dans $[-N, N] \times S^1$, il est donc compact. Sur cet ensemble, u peut s'écrire $u = (f, v)$ avec f la coordonnée réelle et v la coordonnée selon M . La fonction f doit atteindre son maximum en un point intérieur de A . Pour obtenir la contradiction, montrons qu'elle vérifie un principe du maximum.

L'équation de Floer s'écrit $\partial_s u + J\partial_\theta u - \nabla H(u) = 0$, i.e. $\partial_s u + J\partial_\theta u - \beta e^t \frac{\partial}{\partial t} = 0$, ce qui est équivalent à

- (i) $\partial_s f - \alpha(\partial_\theta u) - \beta e^f = 0$,
- (ii) $\partial_\theta f + \alpha(\partial_s u) = 0$,
- (iii) $\pi_\xi(\partial_s u) + \pi_\xi(J^\theta(\partial_\theta)) = 0$.

En dérivant la première équation par rapport à s , la deuxième par rapport à θ et en les additionnant, on obtient $\partial_s^2 f - \partial_s(\alpha(\partial_\theta u)) - \beta \partial_s f e^f + \partial_\theta^2 f + \partial_\theta(\alpha(\partial_s u)) = 0$, ou encore

$$\Delta f - \beta \partial_s f e^f = d\alpha(\partial_s u, \partial_\theta u) = d\alpha(\pi_\xi(\partial_s u), \pi_\xi(\partial_\theta u)) = d\alpha(\pi_\xi(\partial_s u), J(\pi_\xi(\partial_s u))) \geq 0.$$

La fonction f satisfait une inégalité aux dérivées partielles l'empêchant d'atteindre son maximum en un point intérieur de A , d'où la contradiction annoncée. $\square$

Remarque 4.6.2. *On comprend dès lors pourquoi nous imposons la condition (i) pour $H \in \mathcal{H}$ et les conditions (ii)-(iii) pour $J \in \mathcal{J}$. Quant à la condition (i), elle assure que W a "une géométrie bornée à l'infini". Même si la métrique grandit exponentiellement sur $\mathbb{R} \times M$, au niveau de M , elle reste en quelque sorte figée. Nous gardons un contrôle lorsque $t \rightarrow +\infty$ qui constitue la seule direction présentant un défaut de compacité.*

Remarque 4.6.3. *Afin d'obtenir la compacité des espaces de solutions, nous avons dû imposer certaines contraintes sur les hamiltoniens et les structures presque complexes en jeu. Il faut également vérifier que les autres propriétés désirées ne sont pas affectées par ces choix. Or ces choix n'affectent pas les propriétés de décroissance exponentielle, de régularité ni l'indice et la propriété Fredholm de l'opérateur linéarisé. De plus, on peut montrer qu'il est toujours possible d'établir la transversalité en se restreignant à nos nouvelles classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{J}$.*

Soient $(H_1, J_1), (H_2, J_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{J}$, est-ce que les homologies associées coïncident comme dans le cas compact sans bord? Pouvons nous les comparer? Essayons de mimer la preuve de

l'invariance pour le cas fermé et choisissons une homotopie $(H_s, J_s) \in \mathcal{H}_s \times \mathcal{J}_s$ entre (H_1, J_1) et (H_2, J_2) stationnaire pour $|s| \geq 1$. Comme précédemment, la nouvelle subtilité est l'établissement d'une borne C^0 , i.e. il faut s'assurer que les solutions u de l'équation de Floer paramétrée $\partial_s u + J_s^\theta \partial_\theta u - \nabla H_s^\theta(u)$ restent dans un compact de $\hat{W}$ fixé. Essayons de réutiliser un principe du maximum.

Comme l'homotopie est stationnaire pour $|s| \geq 1$, il existe T_0 tel que, sur $[T_0, +\infty[$, H ait pour expression $H(s, \theta, t, m) = \beta(s)e^t + c(s)$, J_s^θ soit indépendante de θ , préserve ξ et envoie ∂_t sur R_α . Sur $u^{-1}([T_0, +\infty[)$, u s'écrit (f, v) satisfaisant

- (i) $\partial_s f - \alpha(\partial_\theta u) - \beta(s)e^f = 0$,
- (ii) $\partial_\theta f + \alpha(\partial_s u) = 0$,
- (iii) $\pi_\xi(\partial_s u) + \pi_\xi(J_s^\theta(\partial_\theta)) = 0$.

Cette fois-ci, en dérivant (i)-(ii) et en les sommant, nous obtenons

$$\partial_s^2 f - \partial_s(\alpha(\partial_\theta u)) - \beta(s)\partial_s f e^f - \beta'(s)e^f + \partial_\theta^2 f + \partial_\theta(\alpha(\partial_s u)) = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Delta f - \beta(s)\partial_s f e^f &= d\alpha(\partial_s u, \partial_\theta u) + \beta'(s)e^f = d\alpha(\pi_\xi(\partial_s u), \pi_\xi(\partial_\theta u)) + \beta'(s)e^f \\ &= d\alpha(\pi_\xi(\partial_s u), J(\pi_\xi(\partial_s u))) + \beta'(s)e^f. \end{aligned}$$

Le premier terme $d\alpha(\pi_\xi(\partial_s u), J(\pi_\xi(\partial_s u)))$ reste positif mais il y a le terme supplémentaire $\beta'(s)e^f$. Pour que f vérifie une inégalité aux dérivées partielles similaire, il faut supposer $\beta(s)$ croissante, on ne peut donc définir un morphisme $HF_*(\hat{W}, \omega, H_1, J_1) \rightarrow HF_*(\hat{W}, \omega, H_2, J_2)$ que lorsque $H_1 \leq H_2$ ou du moins asymptotiquement. A priori, ce morphisme n'est pas inversible. On peut essayer de visualiser ce phénomène en imaginant des homotopies d'hamiltoniens "explosant" en approchant le bord (ce qui correspond à $t \rightarrow \infty$).

Remarque 4.6.4. *Pour H fixé, on peut néanmoins exhiber un isomorphisme entre $HF_*(W, \omega, H, J_1)$ et $HF_*(W, \omega, H, J_2)$ en comptant les solutions u de l'équation de Floer paramétrée $\partial_s u + J_s^\theta \partial_\theta u - \nabla H^\theta(u)$ et en raisonnant comme dans le cas d'une variété fermée.*

Définition 4.6.2. *Soit (W, ω) une variété symplectique à bord M convexe, nous définissons l'homologie symplectique de (W, ω) par*

$$\mathbb{SH}_*(W, \omega) = \varinjlim_H HF_*(W, \omega, H).$$

La limite directe est relative au système admettant pour objets $(HF_(W, \omega, H))_{H \in \mathcal{H}}$, et pour morphismes $HF_*(W, \omega, H_1) \rightarrow HF_*(W, \omega, H_2)$ avec $H_1 \leq H_2$ asymptotiquement.*

Outre la nécessité de choisir nos homotopies croissantes pour définir correctement un invariant symplectique, cette construction enrichit considérablement $\mathbb{SH}(W, \omega)$ au sens où elle

contient des informations sur la dynamique de contact du bord de la variété. Plus les hamiltoniens en jeu sont grands, plus leurs orbites périodiques seront proches d'orbites de Reeb. Derrière cet argument informel se cache un lien étroit entre la dynamique hamiltonienne/l'homologie symplectique de W et la dynamique de Reeb/l'homologie de contact de son bord $\partial W = M$. Frédéric Bourgeois et Alexandru Oancea ont réussi à formaliser cette idée dans [9].

Chapitre 5

Théories équivariantes

5.1 Théorie de Morse-Bott

Avant de construire une théorie de Morse $\mathbb{T}^n$ -équivariante pour l'espace des lacets de (W, ω) , regardons, en dimension finie, comment s'articulent les notions d'action de groupe, d'homologie et de théorie de Morse. Pour une introduction détaillée sur le sujet, le lecteur pourra consulter [5].

Soit M une variété compacte de dimension n , munie d'une action libre, propre et lisse d'un groupe de Lie compact G . Le quotient M/G admet alors une structure différentielle et est lui aussi compact. De plus, si M est orientable et G connexe, alors chaque élément G induit un difféomorphisme préservant l'orientation et le quotient est lui aussi orientable.

Nous pouvons donc, pour une fonction de Morse $f : M/G \rightarrow \mathbb{R}$, définir un complexe engendré par les points critiques de f , gradué par l'indice de la Hessienne et dont la différentielle compte le nombre de trajectoires entre deux points critiques donnés.

Regardons le relevé de $f : \tilde{f} = f \circ \pi$ où π désigne la projection canonique $M \rightarrow M/G$. Si $[x] \in \text{Crit}(f) \subset M/G$ alors $G.x = \pi^{-1}([x]) \subset \text{Crit}(\tilde{f}) \subset M$. Donc $\tilde{f}$ n'est pas une fonction de Morse car ses points critiques ne sont pas isolés. De plus, pour tout $x \in M$, $d\tilde{f}_x(T_x G.x) = 0$. Soient $x_0 \in \text{Crit}(f)$, $X \in T_{x_0}M$ et Y un champ de vecteurs défini sur un voisinage de x_0 , colinéaire à l'orbite en tout point, i.e. $Y(x) \in T_x G.x$. Alors $\text{Hess}_{x_0} \tilde{f}(X, Y_{x_0}) = X.(Y.\tilde{f})_{x_0} = 0$, la hessienne est dégénérée.

Cependant, la dégénérescence est maîtrisée. Les points critiques sont regroupés en orbites $(G.x)_{x \in [x]}$ pour $[x] \in \text{Crit}(f)$ et la seule dégénérescence de la hessienne provient des directions tangentes à ces mêmes orbites. Nous sommes dans le cas *Morse-Bott*, une extension du cas Morse que nous définissons ci-dessous.

Définition 5.1.1. Soit M , une variété compacte sans bord et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. La fonction f est dite Morse-Bott si

- (i) $\text{Crit}(f)$ est une union disjointe et finie de sous-variétés connexes S_k de M ,
- (ii) pour tous $k, x \in S_k$: $\text{Hess } f_x : (T_x M / T_x S_k)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est non dégénérée.

Dans ce cas, l'indice de la hessienne est le même pour tout $x \in S_k$, nous le notons encore $\nu_f(S_k)$.

Muni d'une métrique g sur M , comme dans le cas Morse, on considère les variétés stables $W^s(S_k) := \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) \in S_k\}$ (resp. instables $W^u(S_k) := \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(x) \in S_k\}$) de dimension $\dim(S_k) + n - \nu_f(S_k)$ (resp. de dimension $\dim(S_k) + \nu_f(S_k)$) ainsi que les paires (f, g) rendant les intersections $\mathcal{M}(S_k, S_l) = W^u(S_k) \cap W^s(S_l)$ transverses. Partant de ce point de vue, on peut définir un double complexe $C_{i,j} = \Omega^j(S_i)$ où $\Omega^j(S_i)$ désigne les formes différentielles de degré j sur S_i , une différentielle "mixte" (voir [5]) et retrouver l'homologie singulière de M .

Ce n'est pas le point de vue que nous adoptons ici. Premièrement, parce que nous sommes intéressés davantage par le quotient M/G que par M , et aussi parce que nos variétés critiques présentent bien plus de symétries qu'une variété quelconque, ce sont les orbites d'une action de groupe. Étant donnée une métrique G invariante sur M (de telles métriques existent toujours pourvu que le groupe admette une mesure de Haar), le gradient ∇f est invariant et l'action induite sur les espaces $\mathcal{M}(G.x, G.y)$ est propre et libre.

Nous avons deux actions libres sur $\mathcal{M}(G.x, G.y)$, une de la part de G , l'autre de la part de $\mathbb{R}$. L'action produit $\mathbb{R} \times G$ est elle aussi libre ? Une reformulation possible est de se demander si l'action de G sur $\mathcal{M}(G.x, G.y)/\mathbb{R}$ est libre. Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathcal{M}(G.x, G.y)$, $g \neq 1_G$, $T \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t+T) = g.\gamma(t)$. L'action de G sur M étant libre, nécessairement $T \neq 0$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(kT) = g^k \gamma(0)$. On peut construire une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N} \rightarrow \infty$ telle que $g^{\pm s_k}$ convergent, nous donnant l'existence de $z \in G.x \cap G.y$ ce qui est impossible car $\tilde{f}(G.x) > \tilde{f}(G.y)$. L'action de $\mathbb{R} \times G$ sur les espaces de module $\mathcal{M}(G.x, G.y)$ est libre. Observons aussi l'isomorphisme $\mathcal{M}(G.x, G.y)/G \simeq \mathcal{M}(\pi(x), \pi(y))$, cette correspondance est donnée par $[\gamma] \mapsto \pi \circ \gamma$.

- (i) Cette application est bien définie. Si $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, alors il existe $g \in G$ tel que $\gamma_1 = g.\gamma_2$ et $\pi \circ \gamma_1 = \pi \circ \gamma_2$.
- (ii) Elle est injective. Si $\pi \circ \gamma_1 = \pi \circ \gamma_2$, alors il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ tel que $\gamma_1(t) = g(t).\gamma_2(t)$. En dérivant cette expression nous obtenons $\nabla \tilde{f}(\gamma_1(t)) = g'(t)_{\gamma_2(t)} + g(t)_* \nabla \tilde{f}(\gamma_2(t))$ où $g'(t)_{\gamma_2(t)}$ désigne le champ de vecteurs fondamental induit par $g'(t)$ au point $\gamma_2(t)$. Or $\nabla \tilde{f}(\gamma_1(t)) = \nabla \tilde{f}(g(t).\gamma_2(t)) = g(t)_* \nabla \tilde{f}(\gamma_2(t))$ donc $g'(t)_{\gamma_2(t)} = 0 \in T_{\gamma_2(t)} M$ i.e. $g'(t) = 0 \in \mathfrak{g}$ et donc $g(t) = g$ pour tout t et $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.
- (iii) Elle est surjective. Soit $\alpha \in \mathcal{M}(\pi(x), \pi(y))$, notons ϕ^t le flot de $\nabla \tilde{f}$ sur M . Choisissons $m \in \pi^{-1}(\alpha(0))$. Alors $\beta(t) = (\pi \circ \phi^t)(m)$ vérifie $\beta(0) = \pi(m) = \alpha(0)$ et $\beta'(t) = \pi_*(\nabla \tilde{f}(\phi^t(m))) = \nabla f(\pi \circ \phi^t(m)) = \nabla f(\beta(t))$, donc $\beta = \alpha$ et $[t \mapsto \phi^t(m)]$ est envoyé sur α .

On définit le complexe $C = \bigoplus_k C_{0 \leq k \leq n}$ avec $C_k = \bigoplus_{G.x | \nu_{\tilde{f}}(G.x) = k} \langle G.x \rangle \mathbb{Z}$ muni de la différentielle $\partial = (\partial_k)_{1 \leq k \leq n}$ avec $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ définie par :

$$\partial_k(x) = \sum_{G.y | \nu_{\tilde{f}}(G.y) = k-1} \#_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \left(\mathcal{M}(G.x, G.y) / (\mathbb{R} \times G) \right) y$$

Au vu de ce qui précède, on remarque immédiatement que ce complexe est isomorphe au complexe de Morse de f , son homologie est isomorphe à $H_*(M/G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, l'homologie de Morse du quotient M/G .

Remarque 5.1.1. *Il est possible de définir le complexe avec coefficients dans $\mathbb{Z}$ si l'on oriente correctement les espaces de modules. La différentielle compare alors l'orientation géométrique de $\mathcal{M}(G.x, G.y)$ avec celle induite par l'action de $\mathbb{R} \times G$. Nous reviendrons sur ces questions d'orientation dans le cas symplectique équivariant dans la section 8.3.*

5.2 Construction de Borel

Si l'action de G sur M n'est pas libre, le quotient M/G n'admet pas nécessairement une structure de variété différentielle et il devient impossible de construire une théorie de Morse ou même Morse-Bott. De plus, bien que l'espace M/G hérite d'une structure topologique, son homologie singulière est parfois obsolète, au sens où elle ne contient pas d'information sur la topologie de M , ni sur l'action de G . Considérons l'action de S^1 sur la sphère S^2 par rotation, alors $M/G \simeq [0, 1]$ est contractile et $H_*(M/G) = 0$ pour $*$ $\neq 0$.

Supposons qu'il existe un espace EG contractile, muni d'une action libre de G . Alors G agit librement de manière diagonale sur l'espace $M \times EG : g.(m, e) = (g.m, g.e)$, nous notons M_G le quotient. Lorsque l'action sur M est déjà libre, remarquons que la projection $M \times EG \rightarrow M$ induit $M_G \rightarrow M/G$, et que cette surjection est une fibration de fibre EG contractile, donc $H_G(M) := H_*(M_G) \simeq H_*(M/G)$. Cette construction est en réalité universelle (voir [1]), pour G un groupe de Lie "raisonnable" (disons compact). Un tel espace EG existe et est unique à homotopie près ou, plus précisément, à G -homotopie près, de sorte que $H_G(M)$ est bien défini. La correspondance $M \rightarrow H_G(M)$ est un foncteur de la catégorie ayant pour objet les G -espaces et pour flèches les applications G -équivariantes vers la catégorie des groupes abéliens. Lorsque M et EG sont des variétés compactes, le relevé d'une fonction de Morse f sur M_G donne une fonction de Morse-Bott $\tilde{f}$ sur $M \times EG$. Étant donnée une métrique G -invariante, nous pouvons regarder les trajectoires antigradient $\gamma = (a, \lambda) : \mathbb{R} \rightarrow M \times EG$ satisfaisant

- (i) $\dot{a}(t) = \nabla_x \tilde{f}(a(t), \lambda(t))$,
- (ii) $\dot{\lambda}(t) = \nabla_\lambda \tilde{f}(a(t), \lambda(t))$.

Ici ∇_x (resp. ∇_λ) désigne l'image de la dérivée partielle de $\tilde{f}$ selon la coordonnée en M (resp. EG) par l'isomorphisme induit par la métrique induite sur $M \times EG$.

Malheureusement, on ne peut choisir EG (défini à homotopie près) admettant une structure de variété différentielle compacte, un tel espace n'est jamais contractile car son homologie en degré $\dim(EG)$ est non triviale. Prenons le cas le plus simple S^1 , alors E_{S^1} est isomorphe à la limite topologique S^∞ induite par les inclusions $S^1 \subset S^3 \subset \dots \subset S^{2k+1} \subset \dots$. Chaque sphère est munie de l'action de Hopf, la limite hérite elle aussi de cette action et le quotient est isomorphe à $\mathbb{CP}^\infty$ aussi obtenu comme la limite de $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2 \subset \dots \mathbb{CP}^k \subset \dots$. Si l'on définit $H_{S^1}^N(M)$ comme $H_*((M \times S^{2N+1})/S^1)$, alors, il existe un morphisme entre les fibrations $M \rightarrow M \times S^{2N_1+1}/S^1 \rightarrow \mathbb{CP}^{N_1}$ et $M \rightarrow M \times S^{2N_2+1}/S^1 \rightarrow \mathbb{CP}^{N_2}$ pour $N_2 \geq N_1$. En regardant la suite spectrale de Leray-Serre associée à ces fibrations et en remarquant que l'homologie de S^{2N+1} est concentrée dans des degrés de plus en plus hauts, on peut montrer que, pour k fixé, $H_k((M \times S^{2N+1})/S^1)$ se stabilise pour N assez grand. Ainsi, nous pouvons toujours construire une homologie équivariante pour M basée sur des fonctions Morse-Bott sur les approximations $M_{S^1}^N = (M \times S^{2N+1})/S^1$ de M_{S^1} . Nous définissons alors $H_{S^1}(M) = \lim_N H(M_{S^1}^N)$ la limite étant induite par les inclusions $M_{S^1}^N \subset M_{S^1}^{N+1}$.

Remarque 5.2.1. *Lorsque nous avons introduit l'homologie de Morse, nous avons omis d'évoquer les questions de fonctorialité. Bien que nous sachions que l'homologie de Morse soit isomorphe à l'homologie singulière, et que, dans ce cadre, une application continue entre deux espaces topologiques induit un morphisme de groupes abéliens, est-il possible de réinterpréter ce morphisme en termes de fonctions de Morse(-Bott) ? Premièrement, étant données deux variétés M, N et $F : M \rightarrow N$ une application différentiable, F induit un morphisme de $C^2(N, \mathbb{R})$ vers $C^2(M, \mathbb{R})$. Ceci suggère que l'homologie de Morse serait plutôt une théorie cohomologique. Cependant, si f est une fonction de Morse sur N , a priori, $f \circ F$ n'a aucune raison d'être une fonction de Morse sur M . Dans le cas précis que nous regardons, les morphismes sont des plongements $M_G^N \rightarrow M_G^{N+1}$, étant donnée une fonction de Morse sur M_G^N , nous pouvons l'étendre en fonction de Morse sur M_G^{N+1} . Nous obtenons un morphisme injectif de complexes de Morse, et on peut vérifier que le morphisme induit en homologie ne dépend ni de la fonction de Morse, ni de son extension et qu'il coïncide avec le morphisme induit par f au niveau de l'homologie singulière. Lecteur pourra consulter la section 4.6. de [4] pour les questions de fonctorialité du point de vue de la théorie de Morse.*

5.3 Dynamique hamiltonienne équivariante

Soit (W, ω, μ) une variété torique sans bord ou avec bord convexe et $\hat{W}$ la variété torique obtenue en recollant W avec la symplectisation de son bord M (lorsque $\partial W = \emptyset$, $\hat{W} = W$).

Soit $H : S^1 \times \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien invariant par l'action de $\mathbb{T}^n$, i.e. pour tout $(\Theta, \theta, x) \in \mathbb{T}^n \times S^1 \times \hat{W}$, $H_\theta(\Theta.x) = H_\theta(x)$. Autrement dit, $H_\theta \circ \Theta = H_\theta$ où, par abus de notation, nous identifions Θ et l'automorphisme qu'il induit sur $\hat{W}$. Soient $x \in \hat{W}$, $\theta \in S^1$ et $\Theta \in \mathbb{T}^n$ (pour

simplifier la notation, nous notons H_θ par H) :

$$dH_{\Theta.x} \circ \Theta_* = dH_x \iff \omega_{\Theta.x}(X_H(\Theta.x), \Theta_* \cdot) = \omega_x(X_H(x), \cdot).$$

Or, le tore agissant par symplectomorphismes,

$$\omega_x(\Theta_*^{-1}(X_H(\Theta.x)), \cdot) = \omega_x(X_H(x), \cdot) \iff \Theta_*^{-1}(X_H(\Theta.x)) = X_H(x) \iff X_H(\Theta.x) = \Theta_*(X_H(x)).$$

Le champ de vecteurs hamiltonien X_H est donc invariant par l'action du tore. Soit $\gamma \in \mathcal{P}(H)$, alors $\frac{d(\Theta.\gamma(t))}{dt} = \Theta_* \frac{d\gamma(t)}{dt} = \Theta_* X_H(\gamma(t)) = X_H(\Theta.\gamma(t))$ donc $\Theta.\gamma \in \mathcal{P}(H)$. Contrairement au cas classique exposé dans la section précédente, où nous considérions des hamiltoniens non dégénérés et les orbites isolées, nous avons ici un continuum de trajectoires : les orbites sont regroupées en "paquets de tores".

En nous rappelant que la théorie élaborée par A. Floer s'interprète comme une théorie de Morse en dimension infinie sur l'espace des lacets de la variété symplectique, nous pourrions

- (A) considérer l'action du tore induite sur $C^\infty(S^1, \hat{W})$,
- (B) regarder la fonctionnelle $\mathcal{A}_H$ équivariante pour l'action induite sur $C^\infty(S^1, \hat{W})$,
- (C) choisir une structure presque complexe invariante qui, couplée avec ω définit une métrique $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ invariante sur la variété $\hat{W}$ et aussi sur $C^\infty(S^1, \hat{W})$,
- (D) étudier les trajectoires de Floer entre deux tores critiques d'orbites,
- (E) associer une homologie, un invariant algébrique qui permettrait de borner inférieurement le nombre minimum de tores critiques en fonction de la topologie de W .

Grossièrement, nous voudrions élaborer une théorie de Morse pour $C^\infty(S^1, W)/\mathbb{T}^n$. Or, l'action n'étant pas libre sur $\hat{W}$, elle ne l'est pas non plus sur $C^\infty(S^1, \hat{W})$. Nous continuons de nous inspirer du cas de dimension finie en construisant une théorie de Morse/Floer sur $C^\infty(S^1, \hat{W}) \times E\mathbb{T}^n$ avec $E\mathbb{T}^n$ un espace contractile muni d'une action libre du tore de dimension n . Pour des raisons similaires à celles évoquées dans le cas d'une action de S^1 , nous ne pouvons choisir une variété différentielle de dimension finie pour $E\mathbb{T}^n$. Cependant, $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$, donc $(S^\infty)^n$ est un candidat pour $E\mathbb{T}^n$ que nous pouvons "approcher" par $(S^{2N+1})^n$. Ces espaces ont leur homologie concentrée dans des degrés de plus en plus hauts, on peut espérer, obtenir une homologie de Floer équivariante stable pour N assez grand.

Définition 5.3.1. Nous notons $\mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N$ l'ensemble des hamiltoniens $H : S^1 \times \hat{W} \times (S^{2N+1}) \rightarrow \mathbb{R}$,

(i) invariant par l'action diagonale, i.e. pour tout $(\theta, x, z) \in S^1 \times \hat{W} \times (S^{2N+1})^n$, $\Theta \in \mathbb{T}^n$,

$$H(\theta, \Theta.x, \Theta.z) = H(\theta, x, z),$$

(ii) tels qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que, sur $S^1 \times [T, +\infty[\times M \times (S^{2N+1})^n$,

$$H(\theta, t, m, z) = \beta e^t + \beta'(z)$$

avec $\beta \notin \text{Spec}(M, \alpha)$, où α désigne la forme de contact $\iota_X \omega$ avec X un champ de Liouville équivariant.

Nous notons $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$ l'ensemble des couples (J, g) tels que

- (i) $J = (J_z^\theta)_{z \in (S^{2N+1})^n}$ soit une famille de structures presque complexes compatibles avec ω , indexée par $S^1 \times (S^{2N+1})^n$,
(1) équivariante,

$$J_{\Theta.z}^\theta = \Theta_* \circ J_z^\theta \circ \Theta_*^{-1}$$

- (2) telle qu'il existe T , tel que sur $[T, +\infty[\times M$, J

(a) soit invariante par translation dans la direction de $\mathbb{R}$,

(b) préserve ξ ,

(c) vérifie $J(\frac{\partial}{\partial t}) = R_\alpha$ avec $\alpha = \iota_X \omega$ la forme de contact obtenue via ω et X un champ de Liouville,

- (ii) $(g_x^\theta)_{x \in \hat{W}}$ est une famille de métriques sur $(S^{2N+1})^n$ indexée par $S^1 \times \hat{W}$,
(1) équivariante,

$$g_{\Theta.x}^\theta = \Theta^{-1*} g_x$$

- (2) telle qu'il existe T , tel que sur $[T, +\infty[\times M$, $g_{(t,m)} = g_0$ ne dépend pas de la variété symplectique, ce qui implique que g_0 est $\mathbb{T}^n$ -équivariante pour l'action torique sur $(S^{2N+1})^n$.

Remarque 5.3.1. Afin que H soit invariant sur $[T, +\infty[\times M$, il faut que β' soit invariant sur $(S^{2N+1})^n$, autrement dit, nous choisissons le relevé d'une fonction sur $(\mathbb{CP}^N)^n$.

Remarque 5.3.2. À la différence de l'homologie symplectique S^1 -équivariante où la métrique sur l'espace de paramètres peut être choisie indépendante de $\hat{W}$, nous avons besoin de choisir des métriques paramétrées par la variété symplectique pour pouvoir perturber nos données afin d'établir la transversalité.

Si l'on pense l'homologie symplectique équivariante comme une théorie de Morse-Bott sur l'espace $C^\infty(S^1, \hat{W}) \times (S^{2N+1})^n$, il semble alors naturel de considérer des paires de métriques (g_1, g_2) sur l'espace produit induisant une métrique sur un espace et indexée par l'autre.

Dans notre cas de figure, il faudrait donc considérer des métriques sur l'espace de paramètres indexées par $C^\infty(S^1, \hat{W})$ ce qui est le cas ici : $(g_x)_{x \in \hat{W}}$ choisie comme dans (ii) peut s'interpréter comme $(\tilde{g}_\gamma)_{\gamma \in C^1(S^1, \hat{W})}$ avec $\tilde{g}_\gamma(k, l) = \int_{S^1} g_{\gamma(\theta)}^\theta(k, l) d\theta$.

Un couple (J, g) définit une métrique sur $C^\infty(S^1, \hat{W}) \times (S^{2N+1})^n$ comme suit. Au point (γ, z) , soient $(\xi, l), (\eta, k) \in T_{(\gamma, z)} C^\infty(S^1, \hat{W}) \times (S^{2N+1})^n$ le produit scalaire est défini par

$$\langle (\xi, l), (\eta, k) \rangle = \int_{S^1} \omega_{\gamma(\theta)}(\xi(\theta), J_z^\theta(\eta(\theta))) d\theta + \int_{S^1} g_{\gamma(\theta)}^\theta(l, k) d\theta.$$

La nouvelle fonctionnelle d'action a pour expression

$$\mathcal{A}_H(\gamma, z) = - \int_{[0,1] \times S^1} u^* \omega - \int_{S^1} H(\theta, \gamma(\theta), z)$$

avec u une homotopie entre $l_{[\gamma]}$, un représentant préalablement choisi de $[\gamma]$, la classe d'homotopie libre de γ , et γ .

Lemme 5.3.1. $\mathcal{A}_H$ est invariante par l'action de $\mathbb{T}^n$.

Démonstration. Soit $(\gamma, z) \in C^\infty(S^1, \hat{W}) \times (S^{2N+1})^n$, $\Theta \in \mathbb{T}^n$ et u une homotopie entre $l_{[\gamma]}$ et γ . Par connexité du tore, on peut trouver $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^n$ un chemin C^1 entre $1_{\mathbb{T}^n}$ et Θ . Soit $\tilde{u}(s, \theta) = \tau(s)u(s, \theta)$, c'est une homotopie entre $l_{[\Theta.\gamma]} = l_{[\gamma]}$ et $\Theta.\gamma$. Alors, $\partial_s \tilde{u}(s, \theta) = \dot{\tau}(s)\tilde{u}(s, \theta) + \tau(s)_* \partial_s u(s, \theta)$ où $\dot{\tau}(s)\tilde{u}(s, \theta)$ désigne la valeur du champ de vecteurs fondamental induit par $\dot{\tau}(s)$ au point $\tilde{u}(s, \theta)$, soit $\frac{d\tau(s')u(s, \theta)}{ds'} \Big|_{s'=s}$ et $\partial_\theta \tilde{u}(s, \theta) = \tau(s)_* \partial_\theta u(s, \theta)$. Le deuxième terme dans $\mathcal{A}_H(\Theta.\gamma, \Theta.z)$ reste inchangé : $-\int_{S^1} H(\theta, \Theta.\gamma(\theta), \Theta.z) d\theta = -\int_{S^1} H(\theta, \gamma, z) d\theta$. Calculons le premier,

$$\begin{aligned} -\int_{[0,1] \times S^1} \tilde{u}^* \omega &= -\int_{[0,1] \times S^1} \omega(\partial_s \tilde{u}, \partial_\theta \tilde{u}) = -\int_{[0,1] \times S^1} \omega(\dot{\tau}(s)\tilde{u}(s, \theta), \partial_\theta \tilde{u}(s, \theta)) d\theta ds \\ &\quad - \int_{[0,1] \times S^1} \omega(\tau(s)_* \partial_s u(s, \theta), \tau(s)_* \partial_\theta u(s, \theta)) d\theta ds. \end{aligned}$$

Or, $\tau(s)$ agit de manière symplectique, et $\iota_{\dot{\tau}(s)} \omega = d\langle \mu, \dot{\tau}(s) \rangle$ avec μ le moment de notre action torique. L'expression précédente se simplifie en

$$-\int_0^1 \left(\int_{\tilde{u}(s, \cdot)} d\langle \mu, \dot{\tau}(s) \rangle \right) ds - \int_{[0,1] \times S^1} \omega(\partial_s u, \partial_\theta u) d\theta ds = -\int_{[0,1] \times S^1} u^* \omega.$$

En sommant les deux termes on obtient $\mathcal{A}_H(\Theta.\gamma, \Theta.z) = \mathcal{A}_H(\gamma, z)$. $\square$

En appliquant la règle de Leibniz et en se rappelant de la formule dans le cas non équivariant, nous calculons la différentielle au point (γ, z) :

$$d\mathcal{A}_H(\xi, l) = \int_{S^1} \omega(\dot{\gamma}(\theta) - X_{H_z}^\theta(\gamma(\theta)), \xi) d\theta - \int_{S^1} \partial_z H_{(\theta, \gamma(\theta), z)}(l) d\theta.$$

En notant $F_\gamma(z) := -\int_{S^1} H(\theta, \gamma(\theta), z) d\theta$, le couple (γ, z) est un point critique de $\mathcal{A}_H$ si et seulement si $\gamma \in \mathcal{P}(H_z)$ et $z \in \text{Crit}(F_\gamma)$. Comme $\mathcal{A}_H$ est invariante, il en va de même pour ses points critiques. Étant donnée une paire $(J, g) \in \mathcal{J}_{\mathbb{N}}^N$, on peut définir le gradient de la fonctionnelle pour la métrique induite par

$$\begin{pmatrix} J_z^\theta(\dot{\gamma}(\theta) - X_{H_z}^\theta(\gamma(\theta))) \\ -\int_{S^1} \nabla_z H(\theta, \gamma(\theta), z) d\theta \end{pmatrix}$$

où $\nabla_z H$ désigne le gradient de $z \mapsto H(\theta, \gamma(\theta), z)$ relativement à la métrique $g_{\gamma(\theta)}$.

Définition/Proposition 5.3.1. (A) Soit $H \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N$, $p \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, alors $S_p = \mathbb{T}^n.p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$.

(B) Soit $(J, g) \in \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$, $p^\pm \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$. Soit $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ l'ensemble des trajectoires anti-gradient pour $\mathcal{A}_H$, i.e. l'ensemble des applications $U = (u, \lambda) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \hat{W} \times (S^{2N+1})^n$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_s u + J_{\lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u)) = 0, \\ \dot{\lambda}(s) - \int_{S^1} \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta = 0. \end{cases}$$

Alors $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ est stable par l'action du tore, i.e.

$$\Theta \in \mathbb{T}^n, U = (u, \lambda) \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-}) \implies \Theta.U = (\Theta.u, \Theta.\lambda) \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-}).$$

Démonstration. L'assertion (A) découle immédiatement de l'équivariance de la fonctionnelle $\mathcal{A}_H$. Concernant l'assertion (B), observons les identités suivantes.

(i) $H_{\Theta.z} = H_z \circ \Theta^{-1}$ donc $dH_{\Theta.z} = dH_z \circ \Theta_*$ et $\iota_{X_{H_{\Theta.z}}} \omega = \iota_{X_{H_z}} \omega \circ \Theta_*$. Soient $x \in \hat{W}$ et $Y \in T_x \hat{W}$, alors

$$\omega_x(X_{H_{\Theta.z}}, Y) = \omega_{\Theta^{-1}.x}(X_{H_z}, \Theta_*^{-1}Y) = \omega_x(\Theta_*X_{H_z}, Y)$$

donc $X_{H_{\Theta.z}} = \Theta_*X_{H_z}$.

(ii) De même, pour $(x, \theta) \in \hat{W} \times S^1$ notons $f_x^\theta : (S^{2N+1})^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_x^\theta(z) = H(\theta, x, z)$. Le même raisonnement (en remplaçant ω par la métrique $\mathbb{T}^n$ -équivariante sur $(S^{2N+1})^n$) donne $\nabla_z f_{\Theta.x}^\theta = \Theta_* \nabla_z f_x^\theta$. Pour ne pas alourdir la notation, nous ne faisons pas apparaître la dépendance du gradient relativement à la variété symplectique mais il faut garder en tête que le gradient de gauche est défini relativement à $g_{\Theta.\gamma(\theta)}^\theta$ et celui de droite relativement à $g_{\gamma(\theta)}^\theta$.

Notons $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\lambda}) = \Theta.U = (\Theta.u, \Theta.\lambda)$, alors $\tilde{U}$ est aussi une trajectoire antigradient. En effet, d'une part,

$$\begin{aligned} \partial_s \tilde{u} + J_{\tilde{\lambda}(s)}^\theta (\partial_\theta \tilde{u} - X_{H_{\tilde{\lambda}(s)}}^\theta(\tilde{u})) &= \Theta_* \partial_s u + \Theta_* \circ J_{\lambda(s)}^\theta \circ \Theta_*^{-1} (\Theta_* \partial_\theta u - \Theta_* X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u)) \\ &= \Theta_* (\partial_s u + J_{\lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u))) = 0 \end{aligned}$$

et que d'autre part,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\lambda}}(s) &= \Theta_*(\dot{\lambda}(s)) = \int_{S^1} \Theta_*(\nabla f_{u(s, \theta)}^\theta(\lambda(s))) d\theta = \int_{S^1} \nabla f_{\Theta.u(s, \theta)}^\theta(\Theta.\lambda(s)) d\theta \\ &= \int_{S^1} \nabla_z H(\theta, \Theta.u(s, \theta), \Theta.(\lambda(s))) d\theta = \int_{S^1} \nabla_z H(\theta, \tilde{u}(s, \theta), \tilde{\lambda}(s)) d\theta. \end{aligned}$$

Comme $\Theta.S_{p^\pm} = S_{p^\pm}$ on en déduit que $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ est stable par $\mathbb{T}^n$. $\square$

Lorsque nous avons mené l'analyse des espaces de modules dans le cas non équivariant, nous avons constaté qu'il était nécessaire pour notre hamiltonien d'avoir ses orbites non dégénérées,

afin de s'assurer que les opérateurs asymptotiques à $D\partial_{J,H}$ soit inversibles et que ce dernier soit Fredholm. Ce n'est pas le cas ici. Soient $p = (\gamma, z) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ et D_p l'opérateur asymptotique défini sur $H^1(\gamma^*T\hat{W}) \times T_z(S^{2N+1})^n$ par

$$D_p(\xi, k) = \begin{pmatrix} J_z^\theta(\nabla_\theta \xi - \nabla_\xi X_{H_z} - \partial_z X_{H_z}(k)) \\ - \int_{S^1} \nabla_\xi \nabla_z H d\theta - \int_{S^1} \nabla_k \nabla_z H d\theta \end{pmatrix} \in L^2(\gamma^*T\hat{W}) \times T_z(S^{2N+1})^n$$

de sorte que

$$\text{Hess}(\mathcal{A}_H)_p((\xi, k), (\eta, l)) = \langle D_p(\xi, k), (\eta, l) \rangle.$$

Remarque 5.3.3. *Nous utilisons le signe ∇ pour désigner différentes choses mais le lecteur peut s'assurer qu'il n'y a pas d'ambiguïtés. En haut de la formule, ∇ désigne une connexion sur $\hat{W}$, en bas $\nabla_z H$ désigne le gradient de $z \mapsto H(\theta, \gamma(\theta), z)$ relativement à la métrique sur $(S^{2N+1})^n$, et ∇_ξ, ∇_l ses dérivées covariantes relativement à une connexion sur $(S^{2N+1})^n$.*

Notons V_p le sous-espace de $T_p(H^1(S^1, \hat{W}) \times (S^{2N+1})^n)$ de dimension n engendré par l'action torique. Comme $\mathcal{A}_H$ est équivariante $V_p \subset \ker(\text{Hess}(\mathcal{A}_H)) = \ker(D_p)$, l'opérateur D_p n'est donc jamais inversible. Cependant, on peut demander à ce que la dégénérescence soit limitée à cette direction, i.e. $V_p = \ker D_p$.

Définition/Proposition 5.3.2. *Soit $H \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N$, H est dit maximalement non-dégénéré si, pour tout $p \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $\ker D_p = V_p$, ou de manière équivalente $\dim(\ker D_p) = n$.*

L'ensemble $\mathcal{H}_{\mathbb{T}^n, \max}^N$ des hamiltoniens maximalement non-dégénérés contient une intersection d'ouverts denses dans $\mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N$.

Démonstration. L'équivalence des deux assertions découle de l'identité $\text{Hess}(\mathcal{A}_H)_p((\xi, k), (\eta, l)) = \langle D_p(\xi, k), (\eta, l) \rangle$. Pour deux métriques différentes, les opérateurs asymptotiques diffèrent mais ont néanmoins le même noyau égal à $\ker(\text{Hess}(\mathcal{A}_H)_p)$ d'après l'identité précédente. On peut donc prouver ce lemme pour *une métrique donnée*, c'est ce que nous faisons le temps de cette preuve. Nous choisissons la métrique sur $(S^{2N+1})^n$ indépendante de la variété symplectique et de θ , c'est à dire une métrique $\mathbb{T}^n$ -équivariante sur l'espace des paramètres afin de faciliter notre démonstration.

Soient

- (a) $(X_i(z))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une base du sous-espace de $T_z(S^{2N+1})^n$ engendré par l'action torique,
- (b) $\mathcal{E}$ le fibré au dessus de $\mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N \times H^1(S^1, \hat{W}) \times (S^{2N+1})^n \times \mathbb{R}^n$ de fibre $\mathcal{E}_{H, \gamma, z, a_1, \dots, a_n} = L^2(\gamma^*T\hat{W}) \times T_z(S^{2N+1})^n$,
- (c) $\mathcal{F}$ la section définie par

$$\mathcal{F}(H, \gamma, z, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} - X_{H_z}(\gamma) \\ - \int_{S^1} \nabla_z H + \sum_{i=1}^n a_i X_i \end{pmatrix}$$

avec $\nabla_z H$ désignant le gradient de $H(\theta, x, \cdot)$ relativement à la métrique préalablement choisie.

Montrons que $\mathcal{F}$ est transverse à la section nulle $0_{\mathcal{E}}$. Soit $(H, \gamma, \lambda, a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$, alors $D\mathcal{F}_{(H, \gamma, z, a_1, \dots, a_n)}$ donnée par

$$(h, \xi, l, \eta_1, \dots, \eta_n) \mapsto \begin{pmatrix} \nabla_{\theta}\xi - \nabla_{\xi}X_{H_z} - \partial_z X_{H_z}(l) - X_h \\ - \int_{S^1} \nabla_{\xi} \nabla_z H d\theta - \int_{S^1} \nabla_l \nabla_z H d\theta - \int_{S^1} \nabla_z h + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i \end{pmatrix}$$

est surjective. Cela suit des trois points suivants.

- (i) $\langle X_1, \dots, X_n \rangle \in \text{Im}(D\mathcal{F})$.
- (ii) Soit $Y \in T_z(S^{2N+1})^n$ avec $Y \perp \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ alors Y peut s'écrire comme le gradient au point z d'une fonction $\mathbb{T}^n$ -invariante $f : (S^{2N+1})^n \rightarrow \mathbb{R}$.
Soit $h(\theta, x, z) = f(z)$ alors $(0, Y) = D\mathcal{F}(h, 0, 0, 0)$.
- (iii) Soient $\eta \in L^2(\gamma^*T\hat{W})$, $k \in T_z(S^{2N+1})^n$ tels que $(\eta, k) \in \text{Im}(D\mathcal{F})^{\perp}$.

Alors d'après (i)-(ii), $k \equiv 0$, et η est solution faible de $\nabla_{\theta}\eta - \nabla_{\eta}X_{H_z} = 0$, donc η est représentable par une fonction C^{∞} . Supposons qu'il existe θ_0 tel que $\eta(\theta_0) \neq 0$. Soit $h : S^1 \times \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega(-X_h(\gamma(\theta_0)), J^{\theta_0}(\eta(\theta_0))) > 0$. On peut étendre h en une fonction $\mathbb{T}^n$ -équivariante sur $S^1 \times \hat{W} \times (S^{2N+1})^n$ et, en réduisant son support en θ à un petit voisinage autour de θ_0 , on obtient $-\int_{S^1} (\omega(X_h(\gamma(\theta)), J^{\theta}(\eta(\theta)))) d\theta > 0$, d'où la contradiction : $\eta \equiv 0$ et $\mathcal{F}$ est transverse à $0_{\mathcal{E}}$.

On en déduit que, pour H dans une intersection d'ouverts denses, $\mathcal{F}_H = \mathcal{F}(H, \cdot, \cdot, \cdot)$ est transverse à la section nulle de $\mathcal{E}$. Fixons un tel hamiltonien. Soit $p = (\gamma, z) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, alors $(\gamma, z, 0, \dots, 0) \in \mathcal{F}_H^{-1}(0)$ et $L^2(\gamma^*T\hat{W}) \times T_z(S^{2N+1})^n = \text{Im}(D\mathcal{F}_H) = \text{Im}(D_p) + \langle X_1, \dots, X_n \rangle$.

Donc $\dim(\text{coker}(D_p)) \leq n$, or D_p est auto-adjoint car $\text{Hess}(\mathcal{A}_H)_p$ est symétrique, donc $\dim(\ker D_p) \leq n$. Comme $V_p \subset \ker D_p$ il vient $V_p = \ker D_p$. $\square$

Chapitre 6

Théorie de Fredholm

6.1 Espace de configuration

Soient $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ et $S_{p^\pm}$ les variétés critiques correspondantes. Afin de pouvoir mener l'analyse habituelle sur nos espaces de modules $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, nous devons choisir le bon espace dans lequel nous situer. Dans le cas de la théorie de Floer, il s'agissait d'un espace de fonctions de type Sobolev dont les éléments étaient des cylindres convergeant asymptotiquement vers des éléments de $\mathcal{P}(H)$.

Ici, la condition est plus souple, les cylindres doivent avoir leurs asymptotes dans une variété critique de dimension $n = \dim(S_{p^\pm})$. Pour faciliter notre analyse, il faut choisir un espace où les cylindres considérés approchent les variétés critiques rapidement. Nous voulons éviter de considérer des cylindres approchant les variétés critiques de façon trop chaotique. Nous rendons cette idée plus précise en introduisant l'espace sur lequel nous allons définir notre opérateur. Il faudra ensuite s'assurer que toute solution $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ est bien incluse dans cette espace.

Notation 1. *Dans les sections suivantes, sauf mention contraire, nous noterons par souci de concision $E = (S^{2N+1})^n$ et réservons la lettre N pour désigner sa dimension. Nous pensons E comme une variété compacte munie d'une action de groupe et n'avons pas besoin de la structure explicite pour mener notre analyse pour le moment.*

Soit $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{R}^n$, nous notons $\underline{X}$ le champ de vecteurs défini par $\underline{X}(x) = \frac{d \exp(tX) \cdot x}{dt} \Big|_{t=0}$ pour x appartenant à une des trois variétés $\hat{W}$, E ou $\hat{W} \times E$. Dans les rares cas d'ambiguïté, nous noterons $\underline{X}_M$ avec M désignant la variété en question.

Soient $p > 2, \delta > 0$, E un espace vectoriel normé de dimension finie (resp. un fibré vectoriel muni d'une métrique au dessus du cylindre), nous notons

$$W^{1,p,\delta}(E) := \{f : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow E \mid (s, \theta) \rightarrow f(s, \theta)e^{\delta|s|} \in W^{1,p}(\mathbb{R} \times S^1, E)\}$$

l'ensemble des fonctions (resp. des sections) p -intégrables pour la mesure $e^{\delta|s|} ds d\theta$.

- (a) Supposons $\gamma^\pm$ non constante de période minimale m . Soient $V_1^\pm$ un voisinage de $\gamma^\pm(S^1) \times \{z^\pm\}$ dans $\hat{W} \times E$ et $\phi^\pm$ un difféomorphisme de $V_1^\pm$ vers $S^1 \times V_2$ où V_2 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n+N-1}$, tel que $\phi^\pm(\gamma^\pm(\theta), z^\pm) = (\frac{\theta}{m}, 0)$.
- (b) Supposons $\gamma^\pm = c \in \hat{W} \times E$ constante. Soient $V_1^\pm$ un voisinage de c et $\psi^\pm : V_1^\pm \rightarrow V_2$ un difféomorphisme où V_2 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n+N}$.

Définition 6.1.1. Soient $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ et $S_{p^\pm} = \mathbb{T}^n.p^\pm$ les variétés critiques correspondantes. Nous notons $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ l'ensemble des applications $U = (u, \lambda) : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \hat{W} \times E$ telles que

- (a) λ soit indépendant de θ ,
- (b) $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} U(s, \cdot) \in S_{p^\pm}$,
- (c) soit $\Theta^\pm \in \mathbb{T}^n$ définie par $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \Theta^\pm.U(s, \cdot) = p^\pm$.
 - (i) Si $\gamma^\pm$ n'est pas constante, lorsque définie, $\phi^\pm(\Theta^\pm.U(s, \theta)) = (\frac{\theta}{m} + \epsilon_1(s, \theta), \epsilon_2(s, \theta))$ avec $\epsilon_1 \in W^{1,p,\delta}(\mathbb{R})$ et $\epsilon_2 \in W^{1,p,\delta}(\mathbb{R}^{2n+N-1})$.
 - (ii) Si $\gamma^\pm$ est constante, lorsque définie, $\psi^\pm(\Theta^\pm.U(s, \theta)) \in W^{1,p,\delta}(\mathbb{R}^{2n+N})$.

Proposition 6.1.1. $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ est une variété de Banach. Son espace tangent au point U peut être identifié avec $W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times E)) \oplus \overline{V_{p^+}} \oplus \underline{V_{p^-}}$ où $\overline{V_{p^+}}$ et $\underline{V_{p^-}}$ sont des espaces de sections de dimension n dont on trouvera une description plus précise dans la preuve qui suit.

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$. Choisissons deux fonctions $\beta^\pm$ valant 0 (resp. 1) près de $-\infty$ et 1 (resp. 0) près de $+\infty$.

Soit U_1 un voisinage de 0 dans $\text{lie}(\mathbb{T}^n)$ tel que $\exp_{\mathbb{T}^n} : U_1 \rightarrow \mathbb{T}^n$ soit un difféomorphisme sur son image, où $\exp_{\mathbb{T}^n}$ désigne ici l'exponentielle de $\mathbb{T}^n$ en tant que *groupe de Lie*.

Soit U_2 un voisinage de 0 dans $W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times E))$ tel que $\exp : U_2 \rightarrow \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ soit un difféomorphisme sur son image, $\exp$ désigne ici l'exponentielle sur $\hat{W} \times E$ en tant que *variété riemannienne* (avec une métrique, rappelons le, $\mathbb{T}^n$ -invariante), on vérifie facilement que celle-ci est bien à valeurs dans $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$.

Considérons $\Phi : U_1^2 \times U_2 \rightarrow \mathcal{B}_{1,p,\delta}$ définie par

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi)(s, \theta) = \exp_{\mathbb{T}^n}(\beta^-(s)\xi_1) \exp_{\mathbb{T}^n}(\beta^+(s)\xi_2) \cdot \exp_{U(s,\theta)}(\xi(s, \theta)).$$

Alors Φ est

(A) bien définie :

Près de $+\infty$, $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi) = \exp_{\mathbb{T}^n}(\xi_2) \cdot \exp_U \xi$. Comme $U \in \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ et $\xi \in W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times E))$ alors $\exp_U \xi \in \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$. Un argument similaire en $-\infty$ montre que $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi) \in \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$.

(B) injective :

Supposons $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi) = \Phi(\eta_1, \eta_2, \eta)$, alors

$$\exp_{\mathbb{T}^n}(\xi_1).p^- = \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \Phi(\eta_1, \eta_2, \eta) = \exp_{\mathbb{T}^n}(\eta_1).p^-$$

donc $\xi_1 = \eta_1$. De même $\xi_2 = \eta_2$ donc $\exp_U \xi = \exp_U \eta$ et $\xi = \eta$.

(C) surjective sur un voisinage de U :

Sur un voisinage de $U \in \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$, si U' est suffisamment proche de U , on peut trouver ξ_2 tel que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \exp_{\mathbb{T}^n}(\xi_2)^{-1} \cdot U'(s, \theta) = \lim_{s \rightarrow +\infty} U(s, \theta)$ et ξ_1 tel que, de même, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \exp_{\mathbb{T}^n}(\xi_1)^{-1} \cdot U'(s, \theta) = \lim_{s \rightarrow -\infty} U(s, \theta)$. Alors

$$(s, \theta) \mapsto \exp_{\mathbb{T}^n}(\beta^-(s)\xi_1)^{-1} \exp_{\mathbb{T}^n}(\beta^+(s)\xi_2)^{-1} \cdot U'(s, \theta)$$

est un élément de $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ proche de U ayant les mêmes asymptotes, il peut donc s'écrire $\exp_U(\xi)$ pour un certain ξ dans U_2 et $U' = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi)$.

(D) un homéomorphisme sur son image :

Il est facile, toujours en regardant les asymptotes, de montrer que la réciproque suivie de la projection : $Im(\Phi) \rightarrow U_1^2 \times U_2 \rightarrow U_1^2$ est continue. La continuité globale vient de celle de l'exponentielle riemannienne (ou plutôt de son inverse).

Nous venons de construire des cartes sur $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$, les applications de transition prennent la forme

$$U_1^2 \times U_2 \longrightarrow V_1^2 \times V_2; \quad (\xi_1, \xi_2, \xi) \longmapsto (\xi_1 + v_1, \xi_2 + v_2, \eta)$$

avec $v_i \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ (géométriquement il s'agit d'une multiplication, ce qui correspond à une translation dans l'algèbre de lie). L'application $\xi \mapsto \eta$ est construite à partir de l'exponentielle riemannienne. Le lecteur pourra vérifier que ces applications sont toujours lisses en consultant une introduction à l'analyse globale sur les variétés comme par exemple [21].

En différentiant Φ en $(0, 0, 0)$, on obtient une identification de $T_U \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ avec l'espace $W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times E)) \oplus \overline{V_{p^+}} \oplus \underline{V_{p^-}}$ où $\overline{V_{p^+}}$ est engendré par les sections $s \mapsto \beta^-(s)\underline{X}$ et $\underline{V_{p^-}}$ par les sections $s \mapsto \beta^+(s)\underline{X}$, $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$. $\square$

Nous définissons alors, pour $(H, J, g) \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$, la section $\partial_{J,H} : \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-}) \rightarrow \mathcal{E}$ du fibré $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}_U = L^{p,\delta}(U^*T\hat{W} \times E)$ définie par

$$\partial_{J,H}U = \partial_{J,H}(u, \lambda) = \left(\begin{array}{c} \partial_s u + J_{\lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u)) \\ \dot{\lambda}(s) - \int_{S^1} \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta \end{array} \right).$$

Remarque 6.1.1. *Nous omettons g dans la notation $\partial_{J,H}$ par souci de concision et aussi par analogie avec l'opérateur de Floer classique mais il faut se rappeler qu'il dépend aussi de la métrique invariante sur l'espace de paramètres $E = (S^{2N+1})^n$. Le gradient $\nabla_z H$ est calculé relativement à cette métrique.*

Soit $U \in \partial_{J,H}^{-1}(0_{\mathcal{E}})$, nous définissons de manière analogue

$$(D\partial_{J,H})_U : W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times TE)) \rightarrow \mathcal{E}_U$$

la différentielle verticale de $\partial_{J,H}$ au point U par $D\partial_{J,H}(\xi, k) = \begin{pmatrix} A(\xi, k) \\ B(\xi, k) \end{pmatrix}$ avec

$$\begin{aligned} A(\xi, k) &= \nabla_s \xi + J_{\lambda(s)}^\theta \nabla_\theta \xi - J_{\lambda(s)}^\theta \nabla_\xi X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u) + \nabla_\xi J_{\lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta) \\ &\quad + dJ_{\lambda(s)}^\theta(k) (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta) - J_{\lambda(s)}^\theta dX_{H_{\lambda(s)}}(k), \text{ et} \\ B(\xi, k) &= \nabla_s k - \int_{S^1} \nabla_k \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta - \int_{S^1} \nabla_\xi \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta. \end{aligned}$$

Remarque 6.1.2. Dans le cas Morse/Floer, nous avons défini $D\partial_{J,H}$ à l'aide d'une connexion et avons observé qu'en un point $u \in \partial_{J,H}^{-1}(0)$, cet opérateur ne dépendait pas de la connexion choisie, c'est la différentielle verticale de $\partial_{J,H}$ au point u . Il en va de même ici.

6.2 Décroissance exponentielle

Avant de se consacrer à l'étude de $\partial_{J,H}$ (propriété et indice de Fredholm, transversalité), nous devons nous assurer que nos solutions $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ sont en réalité incluses dans $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-})$ pour un certain δ dès que H est maximale non-dégénéré. Soient $H \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n, \max}^N$ et U solution de $\partial_{J,H}U = 0$ avec $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} U(s, \cdot) = p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) \in S_{p^\pm}$. Nous traitons uniquement la question de la convergence en $+\infty$, le cas $-\infty$ étant similaire. Nous allons procéder en plusieurs temps.

- (i) Montrer qu'il existe $\tilde{U} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \hat{W} \times E$, $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^n$ tels que $U(s, \theta) = \Theta(s)\tilde{U}(s, \theta)$ et $\int_{S^1} \|\partial_s \tilde{U}\|^2 \leq Ce^{-\delta s}$.
- (ii) Regarder la composante en E de U qui vérifie une équation de Morse et en déduire une décroissance exponentielle pour Θ .
- (iii) Établir des "inéquations aux dérivées partielles" sur U (classiques en théorie de Floer) pour obtenir la décroissance exponentielle *ponctuellement*.

Lemme 6.2.1. Soit $U : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow W \times E$ vérifiant $\partial_{J,H}U = 0$ avec $H \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n, \max}^N$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} U(s, \cdot) = p^+$, alors il existe $C, \delta \in \mathbb{R}$, $\tilde{U} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \hat{W} \times E$, $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^n$ tels que

- (a) $\int_{S^1} \|\partial_s \tilde{U}\|^2 \leq Ce^{-\delta s}$,
- (b) $U(s, \theta) = \Theta(s)\tilde{U}(s, \theta)$,
- (c) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Theta(s) = 1_{\mathbb{T}^n}$.

Avant de prouver ce lemme, nous spécifions une trivialisations dans laquelle il sera plus facile d'obtenir des estimées sur la représentation en coordonnées de U . Soient $\{X_i \in \mathfrak{g} | i \in \{1 \dots n\}\}$ une base de l'algèbre de Lie et $\{Y_k | k \in \{1 \dots N+n\}\}$ des sections définies sur un voisinage de $\gamma^+(S^1) \times \{z^+\}$ formant une base de $(T\mathbb{T}^n.x)^\perp \subset T\hat{W} \times TE$ en tout point du voisinage. Pour s assez grand, les sections $\underline{X}_i, Y_k$ donnent une trivialisations de $U^*(T\hat{W} \times TE)$, dans laquelle

- (a) $D\partial_{J,H}$ s'écrit $\partial_s + A(s)$ avec $A(s) : H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n+N}) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ et $A_\infty = \lim_{s \rightarrow +\infty} A(s)$ correspond à l'opérateur asymptotique D_{p+} qui, par non dégénérescence de H , est surjectif et admet pour noyau $\{\underline{X}_i \in \mathfrak{g} \mid i \in \{1 \dots n\}\}$,
- (b) la métrique sur $L^2(\gamma^{+*}(T\hat{W}) \times T_z E)$ fournie par ω, J, g induit, par notre choix de coordonnées, un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ sur $L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$,
- (c) les champs de vecteurs $\theta \mapsto \underline{X}_i(\gamma(\theta))$ s'écrivent dans ces coordonnées comme des fonctions constantes, $e_i : \theta \mapsto (0, \dots, 1, \dots, 0)$,
- (d) chaque $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ induit un champ de vecteurs le long de $\gamma^+ \times \{z^+\}$ formant un sous-espace de dimension n de $L^2(\gamma^{+*}T\hat{W} \times T_z E)$ et la projection orthogonale parallèlement à ce sous-espace Q_∞ s'écrit de la manière suivante. Si $Z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{N+n})$ avec $x_i, y_k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} Q_\infty(Z) &= Q_\infty(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{N+n}) \\ &= (x_1 - \langle Z, e_1 \rangle_\infty, \dots, x_n - \langle Z, e_n \rangle_\infty, y_1, \dots, y_{N+n}) \end{aligned}$$

où $\langle Z, e_i \rangle_\infty \in \mathbb{R}$, i.e., en tant que fonction du cercle, celle-ci est *constante*.

Remarquons les faits suivants.

- (A) Comme D_{p+} est auto-adjoint pour la métrique induite par ω, J, g , il est clair que A_∞ est auto-adjoint pour la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$. Pareillement, on sait que A_∞ est surjectif avec un noyau de dimension n engendré par les fonctions constantes $e_i : \theta \mapsto (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Sa restriction à l'image de Q_∞ est donc inversible, il existe δ tel que, pour tout X ,

$$\|(A_\infty \circ Q_\infty)(X)\|_\infty \geq \delta \|Q_\infty X\|_\infty.$$

Remarque 6.2.1. La norme $\|\cdot\|_\infty$ induit une norme $\|\cdot\|_{\infty,1}$ sur le sous espace $H^1 \subset L^2$ définie par $\|X\|_{\infty,1} = \|X\|_\infty + \|\partial_\theta X\|_\infty$. Or $A_\infty : (\text{Im } Q_\infty \cap H^1, \|\cdot\|_{\infty,1}) \rightarrow (L^2, \|\cdot\|_\infty)$ est un opérateur inversible entre deux espaces de Hilbert et $\|\cdot\|_{\infty,1} \geq \|\cdot\|_\infty$ sur H^1 donc

$$\|(A_\infty \circ Q_\infty)(Z)\|_\infty \geq \delta \|Q_\infty X\|_{\infty,1} \geq \delta \|Q_\infty X\|_\infty.$$

- (B) En regardant l'expression de $D\partial_{J,H}$ dans la trivialisatoin le long de U , $\underline{X}_i$ s'écrit toujours en coordonnées comme un fonction constante, cette fois-ci définie sur le cylindre $\mathbb{R} \times S^1$. Nous faisons l'abus de notation en continuant de l'appeler $e_i : (s, \theta) \mapsto (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Comme $D\partial_{J,H}\underline{X}_i = 0$, il vient $\partial_s e_i + A(s)e_i = A(s)e_i = 0$, donc, en regardant à nouveau e_i comme une *fonction du cercle*, on obtient, pour tout s , $A(s)e_i = 0$. Finalement, en observant que, pour tout $Z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n+N}$, $(Id - Q_\infty)(Z) = \sum_i \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, il vient $A(s) \circ (Id - Q_\infty) = 0$ soit

$$A(s) \circ Q_\infty = A(s).$$

Nous pouvons à présent prouver le lemme suivant qui impliquera presque directement le lemme 6.2.1.

Lemme 6.2.2. Soit $Z : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n+N}$ l'écriture en coordonnées de $\partial_s U$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(s) = \frac{1}{2} \|Q_\infty Z(s)\|_\infty^2,$$

il existe C, δ tels que

$$f(s) \leq C e^{-\delta s}.$$

Démonstration. Rappelons/remarquons que

- (a) comme $D\partial_{J,H}\partial_s U = 0$, $\partial_s Z + A(s)Z = 0$,
- (b) $A(s) \rightarrow A_\infty$ et $A(s) \circ Q_\infty = A(s)$,
- (c) A_∞ est auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ et sa restriction à $\text{Im } Q_\infty$ est inversible, pour s assez grand, $A(s)$ l'est aussi. Aussi, en passant à l'adjoint dans l'identité $A_\infty \circ Q_\infty = A_\infty$ on obtient $Q_\infty \circ A_\infty = A_\infty = A_\infty \circ Q_\infty$.

Étant dans le noyau de $D\partial_{J,H}$, $\partial_s U$, ainsi que sa représentation en coordonnées Z , est lisse et f est (au moins) de classe C^2 (voir section 2 de [7] où les auteurs établissent les inégalités nécessaires pour obtenir des propriétés de régularité elliptique). Si l'on dérive deux fois f , on obtient

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle Q_\infty Z(s), Q_\infty \partial_s Z(s) \rangle_\infty \\ f''(s) &= \|Q_\infty \partial_s Z(s)\|_\infty^2 + \langle Q_\infty Z, Q_\infty \partial_s^2 Z(s) \rangle_\infty \\ &= \|Q_\infty A(s)Z(s)\|_\infty^2 + \langle Q_\infty Z(s), -Q_\infty \partial_s A(s)Z(s) \rangle_\infty + \langle Q_\infty Z, Q_\infty A(s)^2 Z \rangle_\infty \\ &= \|Q_\infty A(s)Q_\infty Z(s)\|_\infty^2 + \langle Q_\infty Z(s), -Q_\infty \partial_s A(s)Z(s) \rangle_\infty \\ &\quad + \langle ((A(s))^* - A(s))Q_\infty Z, A(s)Q_\infty Z \rangle_\infty + \|A(s)Q_\infty Z\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Le lecteur peut vérifier que nous *n'avons pas* utilisé $Q_\infty \circ A(s) = A(s) \circ Q_\infty$ (qui n'a par ailleurs aucune raison d'être vraie) mais les relations d'orthogonalité $\langle Q_\infty X, Q_\infty Y \rangle = \langle X, Q_\infty Y \rangle$.

Analysons chacun des termes intervenant dans la somme.

- (i) Comme $A(s) \rightarrow A_\infty$ et $\|Q_\infty A_\infty Q_\infty Z\|_\infty^2 = \|A_\infty Q_\infty Z\|_\infty^2 \geq \delta \|Q_\infty Z\|_\infty^2$, on en déduit que, pour tout ϵ , si s est assez grand, le premier terme est minoré par $(\delta - \epsilon)^2 \|Q_\infty Z\|_\infty^2$.
- (ii) La convergence de $A(s)$ vers A_∞ ne permet pas de conclure directement que $\partial_s A(s) \rightarrow 0$ pour la norme opérateur, cependant, en regardant l'écriture explicite de $A(s)$ dans nos coordonnées, on remarque que celle-ci est suffisamment régulière (pourvu que les données H, J, g le soient aussi) et que $\partial_s A(s)$ tend *fortement* vers 0.
- (iii) Comme en (ii), on peut monter que $A(s)^* - A(s)$ tend fortement vers 0 (A_∞ est autoadjoint).

- (iv) Pour tout $\epsilon > 0$, si s est assez grand, le dernier terme est minoré par $(\delta - \epsilon)^2 \|Q_\infty Z\|_\infty^2$.

Pour $s \geq s_0$, avec s_0 suffisamment grand, on obtient donc $f''(s) \geq \delta^2 f(s)$. Soit $g(s) = f(s_0)e^{-\delta(s-s_0)}$. On a $(f - g)'' \geq \delta^2(f - g)$, $(f - g)(s_0) = 0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} (f - g)$, donc $f - g \leq 0$ sur $[s_0, +\infty[$ car elle ne peut avoir un maximum strict. $\square$

Nous pouvons maintenant donner une preuve du lemme 6.2.1 :

Démonstration. Même si nous ne pouvons pas affirmer pour le moment que $U \in H^1(\mathbb{R} \times S^1, \hat{W} \times E)$, il est clair que pour tout s , $U(s, \cdot) : S^1 \rightarrow \hat{W} \times E$ définit un élément de $H^1(S^1, \hat{W} \times E)$. On peut donc voir U comme une courbe dans la variété de Hilbert $H^1(S^1, \hat{W}) \times E$. Cette dernière hérite de l'action torique, et le quotient hérite lui aussi d'une structure de Hilbert faisant de la projection $\pi_{\mathbb{T}^n}$, comme en dimension finie, une submersion riemannienne. Le noyau de la différentielle en chaque point (γ, z) étant engendré par les champs de vecteurs le long de (γ, z) de la forme $\underline{X}$, $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{U} & H^1(S^1, \hat{W}) \times E \\ & \searrow V & \updownarrow \sigma \pi_{\mathbb{T}^n} \\ & & (H^1(S^1, \hat{W}) \times E) / \mathbb{T}^n \end{array}$$

Montrons que $V = \pi_{\mathbb{T}^n} U : \mathbb{R} \rightarrow (H^1(S^1, \hat{W}) \times E) / \mathbb{T}^n$ vérifie $\|\partial_s V\| \leq C e^{-\delta s}$. Par notre choix de métrique, $\|\partial_s V\|_{(H^1(S^1, \hat{W}) \times E) / \mathbb{T}^n} = \|Q(s) \partial_s U\|_{H^1(S^1, \hat{W}) \times E}$, où $Q(s)$ désigne la projection orthogonale parallèlement à $\langle (\underline{X} \circ U(s, \cdot))_{X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)} \rangle$ pour la métrique au point $U(s, \cdot) \in C^\infty(S^1, \hat{W}) \times E$. Les projecteurs $Q(s)$ et Q_∞ sont donc des projecteurs orthogonaux pour des métriques différentes, mais parallèlement au même espace $\langle \underline{X} \rangle_{X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)}$. En particulier ils ont le même noyau. De plus, comme $Q(s) \rightarrow Q_\infty$, il existe une constante C telle que, pour tout Y , $\|Q(s)(Y)\| = \|Q(s) \circ Q_\infty(Y)\| \leq C \|Q_\infty(Y)\|$. Il vient $\|\partial_s V\| = \|Q \partial_s U\| \leq C f(s)$. Nous pouvons ensuite trouver une section σ définie sur un voisinage de $\pi_{\mathbb{T}^n}(\gamma^+, z^+)$ dans $(H^1(S^1, \hat{W}) \times E) / \mathbb{T}^n$ telle que $(\sigma \circ \pi_{\mathbb{T}^n})(\gamma^+, z^+) = (\gamma^+, z^+)$ et, quitte à réduire ce voisinage, supposer que σ_* est borné. Alors

$$\tilde{U} = \sigma \circ V = \sigma \circ \pi \circ U : \mathbb{R} \longrightarrow H^1(S^1, \hat{W}) \times E$$

convient. L'existence de Θ découle de $\pi \circ \tilde{U} = \pi \circ U$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Theta(s) = 1$ de la construction de σ . $\square$

Établissons maintenant une estimée similaire sur Θ .

Lemme 6.2.3. *Il existe des constantes C, δ telles que $\|\dot{\Theta}(s)\| \leq C e^{-\delta s}$*

Démonstration. Remarquons avant tout que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{T}^n \cdot x \subset E$ est une immersion injective et E est compact. Il existe des constantes C_1, C_2 telles que, pour tout $(X, z) \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n) \times E$: $\|\underline{X}(z)\|_{T_z E} \leq C_1 \|X\|_{\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)} \leq C_2 \|\underline{X}(z)\|_{T_z E}$. En d'autres termes, il est équivalent de borner $\dot{\Theta}$ dans l'algèbre de Lie du tore ou de borner $\underline{\dot{\Theta}}$ le long de n'importe quelle courbe dans E .

Notons u, λ (resp. $\tilde{u}, \tilde{\lambda}$) les composantes suivant $\hat{W}$ et E de U (resp. $\tilde{U}$). Comme λ et Θ ne dépendent pas de θ , il en va de même pour $\tilde{\lambda}$. $\tilde{\lambda}$ vérifie :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\lambda}(s) - \int_{S^1} \nabla_z H(u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta \\ &= \underline{\dot{\Theta}(s)}(\lambda(s)) + \Theta(s)_* \dot{\tilde{\lambda}}(s) - g(\Theta)_* \int_{S^1} \nabla_z H(\tilde{u}(s, \theta), \tilde{\lambda}(s)) d\theta. \end{aligned}$$

Bien que nous ne puissions (pas encore) borner la dérivée de Θ , le morphisme Θ_* ne dépend que de la valeur ponctuelle de Θ , valeur prise dans le compact $\mathbb{T}^n$, $\Theta(s)_*$ est donc un isomorphisme borné *uniformément en s* . De plus, sa norme vérifie :

$$\begin{aligned} \|\dot{\Theta}(s)\| &\leq C_1 \left\| \Theta(s)_* \left(\int_{S^1} \nabla_z H(\tilde{u}(s, \theta), \tilde{\lambda}(s)) d\theta - \dot{\tilde{\lambda}}(s) \right) \right\| \\ &\leq C_2 \left\| \int_{S^1} \nabla_z H(\tilde{u}(s, \theta), \tilde{\lambda}(s)) d\theta - \dot{\tilde{\lambda}}(s) \right\| \leq C_3 \left(e^{-\delta s} + \left\| \int_{S^1} \nabla_z H(\tilde{u}(s, \theta), \tilde{\lambda}(s)) d\theta \right\| \right). \end{aligned}$$

Il reste donc à établir la décroissance exponentielle de $\left\| \int_{S^1} \nabla_z H(\tilde{u}(s, \theta), \tilde{\lambda}(s)) d\theta \right\|$. Pour s assez grand, $\tilde{\lambda}(s)$ est inclus dans une carte centrée en z^+ . La famille de champs de vecteurs paramétrisée par $\hat{W} \times S^1$ et définie par $(\nabla_z H)_{(\theta, w)} = \nabla_z H^\theta(w, \cdot)$ s'écrit dans ces coordonnées comme $F : S^1 \times \hat{W} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, avec F et dF *globalement bornées*. En effet, la seule direction non compacte, dans le cas d'une variété à bord convexe, provient de $\mathbb{R} \times \partial W$, sur laquelle H s'écrit, pour t assez grand, $H(\theta, t, m, z) = \beta e^t + \beta'(z)$. Le gradient $\nabla_z H$ est donc indépendant de la composante en $\hat{W}$. Notons $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ les coordonnées de λ . Comme $\int_{S^1} \nabla_z H^\theta(\gamma^+(\theta), z^+) d\theta = 0$, il vient $\int_{S^1} F(\theta, \gamma^+(\theta), 0) d\theta = 0$ et

$$\begin{aligned} \left\| \int_{S^1} F(\theta, \tilde{u}(s, \theta), a(s)) d\theta \right\| &= \left\| \int_{S^1} F(\theta, \tilde{u}(s, \theta), a(s)) d\theta - \int_{S^1} F(\theta, \gamma^+(\theta), 0) d\theta \right\| \\ &= \left\| - \int_{\{s' \geq s\}} \frac{d}{ds'} \int_{S^1} F(\theta, \tilde{u}(s', \theta), a(s')) d\theta ds' \right\| = \left\| \int_{\{s' \geq s\} \times S^1} dF_\theta(\partial_s \tilde{u}(s', \theta), \dot{\tilde{\lambda}}(s')) d\theta ds' \right\| \\ &\leq C_1 \int_{\{s' \geq s\} \times S^1} \|\partial_s \tilde{U}(s', \theta)\| d\theta ds' \leq \int_{\{s' \geq s\}} C_2 e^{-\delta s'} = \frac{C_2}{\delta} e^{-\delta s} = C_3 e^{-\delta s}, \end{aligned}$$

ce qui conclut. $\square$

En combinant les deux lemmes précédents, nous obtenons une borne sur la norme moyenne le long du cercle pour $\partial_s U$. Pour obtenir une borne point par point nous avons besoin d'établir l'inégalité différentielle qui suit.

Lemme 6.2.4. *Choisissons une base de sections près de $\gamma^+(S^1)$ telle que, le long de u , la structure presque complexe $J_{\lambda(s)}$ s'écrive J_0 , ω s'écrive ω_{st} , ainsi qu'une base de sections orthogonales près de z^+ . Ces sections identifient la métrique sur $\hat{W} \times E$ avec le produit scalaire usuel. Soient Z les coordonnées de $\partial_s U$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta \|Z\|^2 \geq a \|Z\|^2$.*

Démonstration. La différentielle $D\partial_{J,H}(\xi, k)$ a pour expression $\begin{pmatrix} A(\xi, k) \\ B(\xi, k) \end{pmatrix}$ avec

$$\begin{aligned} A(\xi, k) &= \nabla_s \xi + J_{\lambda(s)}^\theta \nabla_\theta \xi - J_{\lambda(s)}^\theta \nabla_\xi X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u) + \nabla_\xi J_{\lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta) \\ &\quad + dJ_{\lambda(s)}^\theta(k)(\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta) - J_{\lambda(s)}^\theta dX_{H_{\lambda(s)}}(k), \text{ et} \\ B(\xi, k) &= \nabla_s k - \int_{S^1} \nabla_k \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta - \int_{S^1} \nabla_\xi \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta. \end{aligned}$$

Il existe donc une matrice $M(s, \theta) \in M_{2n+N}(\mathbb{R})$ telle que $\partial_s Z + J_0 \partial_\theta Z - M(s, \theta) Z = 0$ où, par abus de notation, $J_0(X, Y)$ désigne en réalité $(J_0 X, Y)$.

Le calcul de $\frac{1}{2} \Delta \|Z\|^2$, le laplacien de $\frac{1}{2} \|Z\|^2$, donne

$$\frac{1}{2} \Delta \|Z\|^2 = \frac{1}{2} \partial_s^2 \|Z\|^2 + \frac{1}{2} \partial_\theta^2 \|Z\|^2 = \|\partial_s Z\|^2 + \|\partial_\theta Z\|^2 + \langle Z, \Delta Z \rangle,$$

avec

$$\Delta Z = (\partial_s - J_0 \partial_\theta)(\partial_s + J_0 \partial_\theta) Z = (\partial_s - J_0 \partial_\theta)(M Z) = (\partial_s M) Z + M \partial_s Z - J_0 (\partial_\theta M) Z - J_0 M \partial_\theta Z.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \|Z\|^2 &= \|\partial_s Z\|^2 + \langle Z, M \partial_s Z \rangle + \|\partial_\theta Z\|^2 - \langle Z, J_0 M \partial_\theta Z \rangle \\ &\quad + \langle Z, (\partial_s M) Z \rangle - \langle Z, J_0 (\partial_\theta M) Z \rangle \\ &= \|\partial_s Z\|^2 + \langle {}^t M Z, \partial_s Z \rangle + \|\partial_\theta Z\|^2 + \langle {}^t M J_0 Z, \partial_\theta Z \rangle \\ &\quad + \langle Z, (\partial_s M) Z \rangle - \langle Z, J_0 (\partial_\theta M) Z \rangle \\ &= \|\partial_s Z + \frac{1}{2} {}^t M Z\|^2 - \frac{1}{4} \|{}^t M Z\|^2 + \|\partial_\theta Z + \frac{1}{2} M J_0 Z\|^2 - \frac{1}{4} \|M J_0 Z\|^2 \\ &\quad + \langle Z, (\partial_s M) Z \rangle - \langle Z, J_0 (\partial_\theta M) Z \rangle. \end{aligned}$$

Les quatre premiers termes sont soit positifs, soit bornés inférieurement par $-a\|Z\|^2$ pour un certain $a > 0$. Comme $J_0 \partial_\theta + M$ converge vers l'écriture en coordonnées de l'opérateur asymptotique D_{p+} , M converge quand $s \rightarrow +\infty$ uniformément en θ et ses dérivées convergent aussi vers 0. On peut donc borner les derniers termes par $-a\|Z\|^2$ pour un certain a . $\square$

Pour conclure nous faisons appel au lemme suivant (celui-ci est un lemme propre au domaine des équations aux dérivées partielles, on pourra néanmoins trouver une preuve dans [4], Lemme 8.9.6) :

Lemme 6.2.5. *Soit $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive C^2 telle que $\Delta w \geq -aw$ pour $a > 1$.*

Alors, pour tout $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, $w(s_0, t_0) \leq \frac{8a}{\pi} \int_{B_1(s_0, t_0)} w \, ds dt$.

Finalement,

Proposition 6.2.1. *Soient $H \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N$, $p^\pm \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, il existe $C, \delta \in \mathbb{R}$ telles que, pour tous $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, $(s, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1$,*

$$\|\partial_s U(s, \theta)\| \leq C e^{-\delta|s|}$$

ou encore $U \in \mathcal{B}_{1,p,\delta'}(S_{p^+}, S_{p^-})$ pour tout $\delta' \leq \delta$.

6.3 Indice de Robbin-Salamon paramétré

En homologie de Floer classique, $(D\partial_{J,H})_u : W^{1,p}(u^*(T\hat{W})) \rightarrow L^p(u^*(T\hat{W}))$, la différentielle verticale de $\partial_{J,H}$ au point $u \in \mathcal{M}(x, y)$, a pour indice de Fredholm $\mu_{CZ}(x) - \mu_{CZ}(y)$ où les indices de Conley-Zehnder sont calculés dans une trivialisation le long de U . Dans notre cas, nous ne regardons pas de vraies trajectoires de Floer mais des couples (u, λ) avec u (resp. λ) une trajectoire de Floer dépendant de λ (resp. Morse dépendant de u). Pour se ramener au cas Floer, nous étendons H en $\tilde{H} : S^1 \times \hat{W} \times T^*E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\tilde{H}(\theta, w, (z, p)) := H(\theta, w, z)$. T^*E est une variété symplectique, l'action du tore sur E se relève sur le cotangent conférant à $\hat{W} \times T^*E$ une structure de variété torique.

Remarque 6.3.1. *T^*E n'est pas compacte mais sa géométrie est bornée. Comme $\hat{W}$, elle peut être obtenue comme complété symplectique de DT^*E , l'ensemble des éléments de T^*E de norme 1 (pour n'importe quelle métrique). C'est une variété compacte à bord convexe, en recollant la symplectisation du bord on retrouve T^*E . Finalement, T^*E n'est pas "moins compacte" que $\hat{W}$, du moins quand W admet un bord.*

Soit $\phi_{\tilde{H}}^\theta$ le flot de $X_{\tilde{H}} = X_H - \partial_z H \frac{\partial}{\partial p}$. Ce dernier a pour expression $\phi_{\tilde{H}}^\theta(x, (z, p)) = (\phi_{H_z}^\theta(x), z, p - \int_0^\theta \frac{\partial H}{\partial z}(\tau, \phi_{H_z}^\tau(x), z) d\tau)$. Donc $\theta \mapsto \phi_{\tilde{H}}^\theta(x, z, p)$ est une orbite périodique, si et seulement si,

(a) $\theta \mapsto \phi_{H_z}^\theta(x)$ est bien une orbite périodique de H_z ,

(b) $\int_{S^1}^{\frac{\partial H}{\partial z}}(\tau, \phi_{H_z}^\tau(x), z) d\tau = 0$,

soit $(\gamma, z) \in \text{Crit } \mathcal{A}_H$ (avec $\gamma(\theta) = \phi_{H_z}^\theta(x)$). De plus, si (b) est satisfait, on peut choisir n'importe quel point de la fibre T_z^*E comme point de départ. Les orbites de $\tilde{H}$ sont groupées en espaces affines de dimension $\dim T_z^*E = \dim E$ et il y a une correspondance bijective entre l'ensemble de ces espaces affines et les points critiques de $\mathcal{A}_H$. Nous aimerions prendre comme graduation l'indice de Conley-Zehnder d'une orbite de $\tilde{H}$. Or cet indice est bien défini uniquement pour les chemins symplectiques dont l'extrémité finale se situe dans le complémentaire du cycle de Maslov $Sp(2n)^*$, i.e. n'admet pas 1 comme valeur propre. Ici, au dessus d'un point critique (γ, z) , $\phi_{\tilde{H}}$ laisse toute la fibre invariante.

Il existe une extension de l'indice de Conley-Zehnder, *l'indice de Robbin-Salamon* (dont nous donnerons une description à la fin de cette section) défini pour n'importe quel chemin de

matrices symplectiques. Oublions momentanément l'action torique. Étant donné un hamiltonien $H : S^1 \times \hat{W} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, nous pouvons comme dans le cas équivariant

- (a) définir une fonctionnelle sur $C^\infty(S^1, \hat{W}) \times E$ par la même formule,
- (b) observer ses points critiques qui sont les paires (γ, z) avec $\gamma \in \mathcal{P}(H_z)$ et $z \in \text{Crit}(F_\gamma)$ où $F_\gamma : z \rightarrow \int_{S^1} H(\gamma(\theta), z) d\theta$,
- (c) choisir une famille de structures presque complexes indexée par E , ainsi qu'une métrique sur E , définir un gradient et enfin des trajectoires antigradient pour $\mathcal{A}_H$. Ces couples (u, λ) satisferont la même équation de type Floer-Morse.

À chaque point critique $p = (\gamma, z)$, il correspond un opérateur asymptotique D_p symétrique pour la métrique. On peut montrer, comme dans le cas de la théorie de Floer classique, que cet opérateur est injectif (et donc inversible) si et seulement si la différentielle $d\phi_H^1$ de $\phi_H^1 : (x, z) \rightarrow (\phi_{H_z}^1(x), z)$, qui admet $(\gamma(0), z)$ comme point fixe, n'admet pas 1 comme valeur propre. Cette condition peut encore une fois se reformuler en termes de $\tilde{H}$. Dans ce cas, $(d\phi_{\tilde{H}}^1)_{(\gamma(0), z, 0)}$ n'admet pas 1 comme valeur propre lorsque restreint à $T_{\gamma(0)}\hat{W} \times T_{(z, 0)}0_{T^*E}$. La fibre est le plus grand espace associé à la valeur propre 1.

Si cette condition est satisfaite pour tout point critique p , alors, Frédéric Bourgeois et Alexandru Oancea ont montré dans [8], que $D\partial_{J,H}$ au point u est Fredholm. De plus, son indice est donné

- (A) soit par le flot spectral entre D_{p^+} et D_{p^-} (ce qu'on pouvait déduire directement d'après le théorème principal déjà évoqué dans [23]),
- (B) soit par la différence des indices de Robbin-Salamon $\mu_{RS}(\tilde{\gamma}^-) - \mu_{RS}(\tilde{\gamma}^+)$ avec $\tilde{\gamma}^\pm$ n'importe quel relevé dans $\hat{W} \times T^*E$ de $(\gamma^\pm, z^\pm)$.

Remarque 6.3.2. *L'interlude précédente n'est en fait qu'une esquisse de l'homologie symplectique paramétrée. Soit $H : S^1 \times \hat{W} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ avec E une variété fermée, on peut construire une théorie de Morse/Floer pour la fonctionnelle $\mathcal{A}_H$ définie de manière analogue. L'homologie obtenue est bien un invariant et est égale à $\text{SH}_*(W, \omega) \otimes H_*(E)$. Le lecteur pourra consulter [9] pour une description de cette homologie et la première partie de [7] pour les détails techniques.*

Seulement, ici, les points critiques ne sont pas isolés mais forment une union de tores. En regardant l'extension $\tilde{H}$ sur $\hat{W} \times T^*E$, le flot satisfait

$$\begin{aligned} \phi_{\tilde{H}}^\theta(g.(x, z, p)) &= \phi_{\tilde{H}}^\theta(g.x, g.z, g^*p) \\ &= \left(\phi_{H_{g.z}}^\theta(g.x), g.z, g^*p - \int_0^\theta \frac{\partial H}{\partial z}(\phi_{H_{g.z}}^\tau(x), g.z) d\tau \right) = g.\phi_{\tilde{H}}^\theta(x, z, p). \end{aligned}$$

La fibre n'est pas le seul espace à admettre des vecteurs propres pour la valeur propre 1. La différentielle $D\partial_{J,H}$ n'est donc pas Fredholm, *lorsque définie* sur $W^{1,p}(U^*T\hat{W} \times TE)$. Or nous nous sommes placés sur l'espace $\mathcal{B}_{1,p,\delta}$ dont l'espace tangent au point U est

$$\overline{V}_{p^+} \oplus \underline{V}_{p^-} \oplus W^{1,p,\delta}(U^*T\hat{W} \times TE) \neq W^{1,p}(U^*T\hat{W} \times TE).$$

Néanmoins, pour montrer que, sur cet espace, $D\partial_{J,H}$ est Fredholm et calculer son indice nous allons nous ramener au cas $W^{1,p}$ en conjuguant par les poids exponentiels, ce que nous faisons dans la section suivante.

Nous concluons cette partie avec une courte description de l'indice de Robbin-Salamon, le lecteur pourra consulter [22] pour plus de détails.

Définition/Proposition 6.3.1. *Soient $R : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$ un chemin C^1 avec $R(0) = \text{Id}_{2n}$ et $\Sigma = \{M \in Sp(2n) \mid \det(M - \text{Id}_{2n}) = 0\}$ le cycle de Maslov. Rappelons que, si R est dérivable, alors $S(t)$ défini par $R'(t) = J_0 S(t) R(t)$ est symétrique pour tout t .*

- (i) *On appelle croisement de R tout réel $t \in [0, 1]$, tel que $R(t) \in \Sigma$.*
- (ii) *Un croisement est non-dégénéré si, la forme symétrique $\omega(\cdot, \dot{R}(t) \circ R(t)^{-1} \cdot) = \langle \cdot, S(t) \cdot \rangle$ est non-dégénérée sur $\ker(R(t) - \text{Id})$. Nous notons $Q(t)$ la restriction de cette forme quadratique à $\ker(R(t) - \text{Id})$.*
- (iii) *Supposons que R n'ait que des croisements non-dégénérés. Alors ces derniers sont en nombre fini, et nous définissons l'indice de Robbin-Salamon de R par*

$$\mu_{RS}(R) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(Q(0)) + \sum_{0 < t' < 1} \text{Sgn}(Q(t')) + \frac{1}{2} \text{Sgn}(Q(1))$$

où la somme du milieu porte sur les croisements contenus dans $]0, 1[$ et Sgn désigne la signature de la forme quadratique, i.e. le nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives.

Bien que la dernière définition n'ait de sens que si R est au moins dérivable, il est possible de définir cet indice pour n'importe quel chemin de matrices symplectiques, du moment qu'il est continu.

- (A) *Soit $R : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$, continu, vérifiant $R(0) = \text{Id}_{2n}$, alors R est homotope à extrémités fixées à un chemin n'ayant que des croisements non-dégénérés.*
- (B) *Soient R_1, R_2 deux chemins n'ayant que des croisements non-dégénérés et homotopes à extrémités fixées, alors $\mu_{RS}(R_1) = \mu_{RS}(R_2)$.*

Ces propriétés nous permettent de définir l'indice de Robbin-Salamon d'un chemin $R : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$ par $\mu_{RS}(R) = \mu_{RS}(R')$ avec R' n'importe quel chemin homotope à R et n'ayant que des croisements réguliers.

6.4 Indice de Fredholm

Le but de cette section est de calculer l'indice de Fredholm de $(D\partial_{J,H})_U$, la différentielle verticale de $\partial_{J,H}$ en un point $U \in \partial_{J,H}^{-1}(0)$.

Théorème 6.4.1. *Soient $(H, J, g) \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$, $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, et $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$. Soit $\mu_{RS}(p^\pm)$ l'indice de Robbin-Salamon de $p^\pm$ calculé dans une trivialisation une le long de*

U . Alors, pour δ assez petit, $(D\partial_{J,H})_U : W^{1,p,\delta} \oplus \overline{V}_{p^+} \oplus \underline{V}_{p^+} \rightarrow L^{p,\delta}$ est Fredholm d'indice $\mu_{RS}(p^-) - \mu_{RS}(p^+) + n$.

Démonstration. Nous notons F la restriction de $D\partial_{J,H}$ au point U à $W^{1,p,\delta}(U^*T\hat{W} \times TE)$ et écrivons $W^{1,p,\delta}$ pour $W^{1,p,\delta}(U^*T\hat{W} \times E)$ (pareillement $L^{p,\delta}$, $W^{1,p}$ et L^p). Lorsque l'on conjugue F par la bijection $\xi \in L^{p,\delta} \rightarrow e^{\delta|s|}\xi \in L^p$ on obtient $\tilde{F} : W^{1,p} \rightarrow L^p$.

Remarque 6.4.1. *À proprement parler, cette bijection n'envoie pas $W^{1,p,\delta}$ dans $W^{1,p}$ à cause de la non dérivabilité en 0 de $e^{\delta|s|}$ mais nous pouvons la remplacer par une fonction lisse coïncidant avec celle-ci en dehors d'un voisinage de 0.*

Nous avons vu déjà vu que F pouvait s'écrire en coordonnées $\partial_s + A(s)$ avec $A(s) : H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \times \mathbb{R}^N \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \times \mathbb{R}^N$, $\tilde{F}$ s'écrit alors, $\partial_s + \tilde{A}(s)$ avec $\tilde{A}(s) = A(s) + \delta \text{Id}$ si $s > 0$ et $\tilde{A}(s) - \delta \text{Id}$ si $s < 0$. Les opérateurs asymptotiques $\tilde{D}_{p^\pm}$ de $\tilde{F}$ ont pour expression $D_{p^\pm} \pm \delta \text{Id}$. Or $D_{p^\pm}$ est, pour H non-dégénéré, un opérateur symétrique dont le noyau est exactement les sections engendrées par l'action et donc de dimension n . Si δ est plus petit que la plus petite (en valeur absolue) valeur propre non nulle de $D_{p^\pm}$, alors $D_{p^\pm} \pm \delta \text{Id}$ est injectif et symétrique, donc bijectif. D'après le théorème principal dans [8], $\tilde{F} : W^{1,p} \rightarrow L^p$ est un opérateur Fredholm d'indice $\mu_{RS}(\tilde{R}^-) - \mu_{RS}(\tilde{R}^+)$ où $\tilde{R}^\pm$ est le chemin de matrices symplectiques correspondant à $\tilde{D}_{p^\pm}$ dans une trivialisation de $U^*(T\hat{W} \times TE)$.

Cependant, nous ne pouvons pas directement exprimer $\mu_{RS}(\tilde{R}^\pm)$ en fonction de l'indice de Robbin-Salamon des chemins symplectiques $R^\pm$ associés à $D_{p^\pm}$. Nous allons pour cela considérer un nouvel opérateur $F_{\tau,\delta} : W^{1,p,\delta} \rightarrow L^{p,\delta}$ ayant le même indice de Fredholm que F mais dont le conjugué $\tilde{F}_{\tau,\delta} : W^{1,p} \rightarrow L^p$ a des opérateurs asymptotiques $\tilde{F}_{\tau,\delta}^\pm$ pour lesquels l'indice de Robbin-Salamon associé s'exprime facilement en fonction de celui de $R^\pm$. Nous fixons une trivialisation de $u^*T\hat{W}$ identifiant J avec la structure complexe standard J_0 , la forme symplectique ω avec ω_{st} et donc la métrique $\omega(\cdot, J\cdot)$ avec le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{2n}$. Nous fixons aussi une trivialisation de λ^*TE identifiant la métrique g avec le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^N$. Nous obtenons ainsi une trivialisation de $U^*(T\hat{W} \times TE)$ identifiant la métrique induite par (ω, J, g) avec le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{2n+N}$. Nous faisons l'abus de notation $J(X, Y) := (JX, Y)$ pour $X \in T\hat{W}$ et $Y \in TE$. Nous choisissons aussi les trivialisations bornées, i.e., près des asymptotes, la trivialisation doit être induite par des champs de vecteurs définis sur un voisinage de $\gamma^\pm(S^1) \times \{z^\pm\}$ afin d'identifier correctement $W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times TE))$ (resp. $L^{p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times TE))$) avec $W^{1,p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ (resp. $L^{p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$).

F s'écrit dans ces coordonnées : $\partial_s + J_0\partial_\theta + M(s, \theta)$ avec $M(s, \theta) \in M_{2n+N}(\mathbb{R})$. Nous désignons encore par F son écriture en coordonnées ainsi que $W^{1,p,\delta}$ (resp. $L^{p,\delta}$) pour $W^{1,p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ (resp. $L^{p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$). De plus, nous considérons les cylindres comme des fonctions du plan 1-périodique en leur deuxième variable et substituons à θ la variable t .

Lemme 6.4.1. *Il existe $\tau_0 \in]0, 1[$, $\delta_0 > 0$ tels que, pour tout $(\tau, \delta) \in [\tau_0, 1[\times]0, \delta_0[$, l'opérateur $F_{\tau, \delta} : W^{1, p, \delta} \rightarrow L^{p, \delta}$ défini par*

$$F_{\tau, \delta} = \partial_s + J_0 \partial_t + \frac{1}{\tau} M(s, \frac{t}{\tau}) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) - \delta \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(s) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) \text{Id} + \delta \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(s) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) \text{Id}$$

soit Fredholm de même indice que F .

Démonstration. Considérons l'expression de $F_{\tau, \delta} - F$:

$$\begin{aligned} F_{\tau, \delta} - F &= \frac{1}{\tau} \mathbb{1}_{[0, \tau]}(M(s, \frac{t}{\tau}) - M(s, t)) + \mathbb{1}_{[0, \tau]} M(s, t) \frac{1 - \tau}{\tau} \\ &\quad - \mathbb{1}_{[\tau, 1]} M(s, t) - \delta \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(s) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) \text{Id} + \delta \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(s) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) \text{Id} . \end{aligned}$$

La norme de chacun de ces termes, vu comme un opérateur $W^{1, p, \delta} \rightarrow L^{p, \delta}$ agissant par multiplication, tend vers 0. De plus,

- (i) M est continue et converge uniformément en t quand s converge vers $\pm\infty$ et $\|M(s, \frac{t}{\tau}) - M(s, t)\|$ tend vers 0 quand τ tend vers 1.
- (ii) Par un plongement de Sobolev, nous avons $W^{1, p}(S^1, \mathbb{R}^{2n+N}) \subset C^0(S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ et la norme C^0 est contrôlée par la norme Sobolev. Soit $0 \leq a \leq b \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{[a, b]}(t) \xi\|_{L^{p, \delta}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \|\mathbb{1}_{[a, b]}(t) \xi(s, t)\|^p dt e^{\delta|s|} ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (b-a)^p \sup_{t \in [0, 1]} \|\xi(s, t)\|^p e^{\delta|s|} ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_1(b-a) \left(\int_{\mathbb{R}} \|\xi(s, \cdot)\|_{W^{1, p}(S^1, \mathbb{R}^{2n+N})}^p e^{\delta|s|} ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2(b-a) \|\xi\|_{W^{1, p, \delta}} . \end{aligned}$$

On en déduit que la multiplication par $\mathbb{1}_{[a, b]}$ induit un opérateur borné de $W^{1, p, \delta}$ vers $L^{p, \delta}$ dont la norme tend vers 0 lorsque $b - a$ tend vers 0.

Au vu de (i)-(ii), il est immédiat que les quatre premiers termes tendent vers 0 en norme quand τ tend vers 1. La multiplication par $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^\pm \times [0, \tau]}$ induit aussi un opérateur borné de $W^{1, p, \delta}$ vers $L^{p, \delta}$, les deux derniers termes tendent vers 0 quand δ tend vers 0.

Finalement, $F_{\tau, \delta} \rightarrow_{\tau \rightarrow 1, \delta \rightarrow 0} F$, on conclut en remarquant que F est lui même Fredholm et que cette propriété est ouverte pour la topologie induite par la norme opérateur. $\square$

Pour calculer l'indice de $F_{\tau, \delta}$, nous le conjuguons lui aussi par la multiplication par $e^{\delta|s|}$. Nous obtenons ainsi $\tilde{F}_{\tau, \delta} : W^{1, p} \rightarrow L^p$ admettant pour opérateur asymptotique $\tilde{D}_{p^\pm} := J_0 \partial_t + \frac{1}{\tau} M^\pm(\frac{t}{\tau}) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) \pm \delta \mathbb{1}_{[\tau, 1]} \text{Id}$ avec $M^\pm(t) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} M(s, t)$. Notons $R^\pm$ le chemin de matrices symplectiques associé à $F^\pm$ et $\tilde{R}^\pm$ le chemin de matrices symplectiques associé à $\tilde{F}_{\tau, \delta}^\pm$. Nous avons donc

$$\begin{cases} \tilde{R}^\pm(t) = R^\pm(\frac{t}{\tau}) \text{ si } t \leq \tau, \\ \tilde{R}^\pm(t) = e^{\pm\delta(t-\tau)J_0} \circ R(1) \text{ si } \tau \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A priori, le chemin $\tilde{R}^\pm$ n'est pas C^1 car les dérivées à gauche et à droite en $t = \tau$ n'ont aucune raison de coïncider. Cependant, $R^\pm$ est homotope à *extrémités fixées*, à un chemin $R_0^\pm$ tel que la dérivée à droite en 1 soit égale $\pm \delta J_0 \circ R_0^\pm(1)$. Il suffit de prendre une carte sur $Sp(2n + 2N)$ près de $R(1)$ pour décrire l'homotopie en coordonnées. Ainsi, le chemin $\tilde{R}_0^\pm$ défini par :

$$\begin{cases} \tilde{R}_0^\pm(t) = R_0(\frac{t}{\tau}) \text{ si } 0 \leq t \leq \tau, \\ \tilde{R}_0^\pm(t) = e^{\pm \delta(t-\tau)J_0} \circ R(1) \text{ si } \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est bien un chemin C^1 , homotope à $\tilde{R}^\pm$ dont l'indice de Robbin-Salamon peut être calculé à partir de la formule de croisement.

Donc $\mu_{RS}(\tilde{R}^\pm) = \mu_{RS}(\tilde{R}_0^\pm)$, or $\tilde{R}_0^\pm$ a, pourvu que δ soit assez petit, mêmes croisements que R_0 . En effet, la forme quadratique $Q(1)$ associée à $R_0^\pm$ au croisement $t = 1$ est non dégénérée (voir le paragraphe qui suit). Si $t' > 0$ est assez petit, alors $e^{\pm t'J_0} \circ R(1)$ n'admet pas 1 comme valeur propre et pour τ suffisamment proche de 1, $\tilde{R}_0^\pm$ n'admet pas de croisement sur $]\tau, 1]$. La seule différence est que le croisement de $\tilde{R}_0$ en $t = 1$ correspond à une extrémité et est calculé avec un facteur $\frac{1}{2}$. Le même croisement correspond au point intérieur $t = \tau$ pour $\tilde{R}_0$,

$$\mu_{RS}(\tilde{R}^\pm) = \mu_{RS}(\tilde{R}_0^\pm) = \mu_{RS}(R_0^\pm) + \frac{1}{2} \text{Sgn}(Q(1)) = \mu_{RS}(R^\pm) + \frac{1}{2} \text{Sgn}(Q(1)).$$

Il nous reste à calculer la forme quadratique $Q(1)$ associée au croisement $t = 1$ pour $R_0^\pm$. Or nous avons précisément choisi $R_0^\pm$ de sorte que $\dot{R}_0^\pm(1) = \pm \delta J_0 \circ R_0^\pm(1)$, donc $Q(1) = \omega(\cdot, \pm \delta J_0 \cdot) = \pm \delta \langle \cdot, \cdot \rangle$. Cette forme quadratique est définie positive/négative, sa signature correspond donc à $\pm \dim(\ker R_0(1)) = \pm \dim(\ker R(1))$. Or $R(1)$ est l'écriture dans certaines coordonnées de $d\phi_H^1$, H étant maximale non-dégénéré, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est *exactement* de dimension n engendré par l'action torique, donc $\dim(\ker R_0(1)) = n$.

En conclusion :

$$\mu_{RS}(\tilde{R}^\pm) = \mu_{RS}(R^\pm) \pm \frac{n}{2}.$$

Nous pouvons maintenant achever la preuve du théorème 6.4.1. D'après ce qui précède, la restriction de $D\partial_{J,H}$ à $W^{1,p,\delta}$ est Fredholm d'indice $(\mu_{RS}(p^-) - \frac{n}{2}) - (\mu_{RS}(p^+) + \frac{n}{2}) = \mu_{RS}(p^-) - \mu_{RS}(p^+) - n$. Sachant que $\dim \bar{V}_{p^+} = \dim \underline{V}_{p^-} = n$, on obtient que l'indice de $D\partial_{J,H}$ vaut $\mu_{RS}(p^-) - \mu_{RS}(p^+) - n + 2n = \mu_{RS}(p^-) - \mu_{RS}(p^+) + n$. $\square$

Comme dans le cas non paramétré, il serait souhaitable de pouvoir exprimer l'indice de Fredholm via des indices de Robbin-Salamon prédéfinis, i.e. ne dépendant pas de U , et la classe d'homologie de U . Choisissons un représentant a pour chaque classe d'homotopie libre de lacets $[a]$, ainsi qu'une trivialisations de $a^*T\hat{W}$. L'indice de Robbin-Salamon paramétré de $p = (\gamma, z) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ a été défini dans la section précédente en le considérant comme une orbite de $\tilde{H} : \hat{W} \times T^*(S^{2N+1})^n$. Soit $\tilde{\gamma}$ l'application définie par $\theta \mapsto (\gamma(\theta), z, -\int_0^\theta \frac{\partial H}{\partial z}(\gamma(\tau), z) d\tau)$. C'est

une orbite de $\tilde{H}$, homotope à $\tilde{a}(\theta) := (a(\theta), z, 0) \in \hat{W} \times T^*(S^{2N+1})^n$. Soient $\phi : \gamma^* T\hat{W} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$ et $(\psi_i)_{i=1,2} : T_{T_z^*} T^*(S^{2N+1})^n \simeq \mathbb{R}^{3n(2N+1)}$ des trivialisations. Comme $T_z^*(S^{2N+1})^n$ est contractile, les trivialisations induites par ψ_1 et ψ_2 sont homotopes et il en va de même pour (ϕ, ψ_1) et (ϕ, ψ_2) le long de $\tilde{\gamma}$.

Ainsi, l'indice associé au point critique p ne dépend *que de la classe d'homotopie de la composante symplectique* γ et d'une homotopie σ_γ entre a et γ plutôt que de ses relevés $\tilde{\sigma}_\gamma$ entre $\tilde{a}$ et $\tilde{\gamma}$. De même, soit σ' une autre homotopie entre γ et a induisant une homotopie $\tilde{\sigma}'$ entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{a}$, alors les indices calculés dans les deux trivialisations possibles diffèrent de

$$\pm 2 \langle c_1(T\hat{W} \times T(T^*(S^{2N+1})^n)), [\tilde{\sigma}_\gamma \# \tilde{\sigma}'_\gamma]_{H_2(\hat{W} \times (S^{2N+1})^n)} \rangle = \pm 2 \langle c_1(T\hat{W}), [\sigma'_\gamma \# \bar{\sigma}_\gamma]_{H_2(\hat{W})} \rangle$$

dès que l'on impose à la composante de $\tilde{\sigma}'$ suivant $T(T^*(S^{2N+1})^n)$ de rester dans la fibre contractile $T_{(z,0)}(T^*(S^{2N+1})^n)$.

Finalement, afin que les indices choisis ne dépendent que de la variété critique, i.e. $\mu_{RS}(p) = \mu_{RS}(\Theta.p)$ pour $\Theta \in \mathbb{T}^n$, nous choisissons les homotopies de la manière suivante. Fixons un point critique $p = (\gamma, z)$ par variété critique, de sorte que $\text{Crit}(\mathcal{A}_H) = \coprod_p \mathbb{T}^n.p$ ainsi qu'une homotopie σ_γ entre γ et a , le représentant de $[\gamma]$ et une trivialisation $\phi_\gamma : \sigma^* T\hat{W} \simeq \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$. Pour chaque $\Theta \neq 1_{\mathbb{T}^n}$, choisissons un chemin $\beta : [0, 1) \rightarrow \mathbb{T}^n$ entre $1_{\mathbb{T}^n}$ et Θ . Nous définissons $\sigma_{\Theta.\gamma} : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \hat{W}$, l'homotopie entre a et $\Theta.\gamma$, par $\sigma_{\Theta.\gamma}(s, \theta) = \beta(s).\sigma_\gamma(s, \theta)$ et la trivialisation $\phi_{\Theta.\gamma} : \sigma_{\Theta.\gamma}^*(T\hat{W}) \simeq [0, 1] \times S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$ par $\phi_{\Theta.\gamma}(v, s, \theta) = \phi_\gamma(\beta(s)_*^{-1}v, s, \theta)$. Cette trivialisation coïncide bien avec celle de $a^* T\hat{W}$. Soit $\tilde{\sigma} : [0, 1]^2 \times S^1 \rightarrow \hat{W}$ d'efinie par $\tilde{\sigma}(\tau, s, \theta) = \beta(s\tau).\sigma_\gamma(s, \theta)$ et la trivialisation $\tilde{\phi} : \tilde{\sigma}^*(T\hat{W}) \simeq [0, 1]^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$ par $\tilde{\phi}(v, \tau, s, \theta) = \phi_\gamma(\beta(s\tau)_*^{-1}v, s, \theta)$. Alors ϕ_γ et $\phi_{\Theta.\gamma}$ sont deux sous-trivialisations de $\tilde{\phi}$ et les indices de Robbin-Salamon paramétrés $\mu_{RS}(p)$ et $\mu_{RS}(\Theta.p)$ coïncident.

Corollaire 6.4.1. *Soient $(H, J, g) \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$. Pour chaque variété critique S_p de $\mathcal{H}$, il est possible d'associer un indice de Robbin-Salamon paramétré $\mu_{RS}(S_p)$ tel que, pour $U = (u, \lambda) \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, $(D\partial_{J,H})_U : W^{1,p,\delta} \oplus \bar{V}_{p^+} \oplus \underline{V}_{p^+} \rightarrow L^{p,\delta}$ est Fredholm d'indice $\mu_{RS}(S_{p^-}) - \mu_{RS}(S_{p^+}) + 2c_1(A) + n$ avec $A = [\sigma_{\gamma^+} \# u \# \bar{\sigma}_{\gamma^-}]$.*

Chapitre 7

Transversalité

7.1 Points injectifs

Afin d'établir la transversalité modulo perturbations, nous devons vérifier que les trajectoires vérifient certaines propriétés d'injectivité. Comme nous agissons au niveau des données (H, J, g) , il faut s'assurer que les trajectoires ne passent qu'une et une seule fois près de l'endroit où nous les avons modifiées afin que les perturbations ne soient pas compensées. De plus, nous devons modifier les différents paramètres de manière équivariante.

Bien que le côté paramétré (la présence de λ) complique notre tâche, Frédéric Bourgeois et Alexandru Oancea ont réussi à prouver des conditions suffisantes pour établir la transversalité dans le cas non équivariant (voir [7]).

Dans notre cas, il faut établir des conditions d'injectivité prenant en compte l'action torique. Il nous faut des conditions similaires mais pour l'application : $\tilde{U} : \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{T}^n \rightarrow \hat{W} \times E$ définie par $\tilde{U}(s, \theta, \Theta) = \Theta.U(s, \theta)$.

L'auteur n'a pas encore pu établir les propriétés requises mais émet néanmoins la conjecture qui suit.

Conjecture 1. Soient $H \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n, max}^N$, $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ et $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$.

Soit Ω l'ensemble des points (s, θ) tels que

- (i) $\partial_s U \notin T_{U(s, \theta)} \mathbb{T}^n.U(s, \theta)$,
- (ii) pour tout $\Theta \in \mathbb{T}^n$, $U(s, \theta) \neq \Theta.(\gamma^\pm(\theta), z^\pm)$,
- (iii) $U(\mathbb{R} \setminus \{s\} \times \{\theta\}) \not\subset \mathbb{T}^n.U(s, \theta)$.

Alors, il existe R tel que Ω soit dense dans $[R, +\infty[\times S^1$.

7.2 Transversalité

Pour des raisons techniques qui apparaîtront lors de la démonstration du théorème central de cette section, le théorème 7.2.1, nous devons restreindre nos constructions à certains triplets (H, J, g) .

Définition 7.2.1. Soit $\mathcal{HJ}_{*,\mathbb{T}^n}^N$ l'ensemble des triplets $(H, J, g) \in \mathcal{H}_{max,\mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$ tels que, $\forall p^\pm \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $\forall U = (u, \lambda) \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, U vérifie la condition $(*)$ définie par :

$$\dot{\lambda} \equiv 0 \iff \partial_s u \equiv 0.$$

Formulé autrement, une trajectoire ne peut avoir une seule de ses deux composantes constante en s .

Soient $\mathcal{E}$ le fibré au dessus de $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^+}, S_{p^-}) \times \mathcal{HJ}_{*,\mathbb{T}^n}^N$ avec $\mathcal{E}_U = L^{p,\delta}(U^*T\hat{W} \times E)$ et $\mathcal{F}$ la section définie par

$$\mathcal{F}(U, H, J, g) = \mathcal{F}(u, \lambda, H, J, g) = \begin{pmatrix} \partial_s u + J_{\lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{\lambda(s)}}^\theta(u)) \\ \dot{\lambda}(s) - \int_{S^1} \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de montrer $\mathcal{F} \pitchfork 0_{\mathcal{E}}$. Avant de prouver ceci dans le théorème 7.2.1, nous énonçons le lemme suivant, indispensable à la démonstration.

Lemme 7.2.1. Soient $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ vérifiant $\partial_s U \not\equiv 0$, d la distance induite par la métrique équivariante sur $\hat{W} \times E$ et $(s_0, \theta_0) \in \Omega$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout s ,

$$|s - s_0| > \epsilon \implies d(U(s, \theta_0), \mathbb{T}^n \cdot U(s_0, \theta_0)) > \eta.$$

Démonstration. Raisonnons par contradiction. On peut alors trouver $\epsilon > 0$ et des suites $(s_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(\Theta_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^n$ avec

- (i) $|s - s_m| > \epsilon$,
- (ii) $d(U(s_m, \theta_0), \Theta_m \cdot U(s_0, \theta_0)) \rightarrow 0$.

On procède par disjonction de cas.

- (a) Supposons $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ non bornée.

Alors on peut extraire une sous-suite qui converge vers $\pm\infty$, soit $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} U(s, \cdot) \in S_{p^\pm}$. On peut à nouveau extraire une sous-suite telle que Θ_m converge vers $\Theta^* \in \mathbb{T}^n$ et, en passant à la limite, nous obtenons $(\gamma^\pm(\theta_0), z^\pm) = \Theta^* \cdot U(s_0, \theta_0)$, soit $U(s_0, \theta_0) = \Theta^{*-1} \cdot (\gamma^\pm(\theta_0), z^\pm)$ contredisant $(s_0, \theta_0) \in \Omega$.

- (b) Supposons $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bornée.

On peut extraire une sous suite telle que s_m converge vers s^* et Θ_m converge vers Θ^* . Comme $|s_m - s_0| > \epsilon$, $s^* \neq s_0$ et, en passant à la limite, on obtient $U(s^*, \theta_0) = \Theta^* \cdot U(s_0, \theta_0)$ soit $U(s_0, \theta_0) = \Theta^{*-1} \cdot U(s^*, \theta_0)$ contredisant aussi $(s_0, \theta_0) \in \Omega$.

On obtient bien une contradiction dans les deux cas. $\square$

Nous avons désormais tous les éléments pour établir la transversalité.

Théorème 7.2.1. *Il existe une classe $\mathcal{H}\mathcal{J}_{reg, \mathbb{T}^n}^N \subset \mathcal{H}_{max, \mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$, dense dans un voisinage de $\mathcal{H}\mathcal{J}_{*, \mathbb{T}^n}^N$ et telle que, pour tous $(H, J, g) \in \mathcal{H}\mathcal{J}_{reg, \mathbb{T}^n}^N$, $p^\pm \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, $D\partial_{J,H}$ soit surjective au point U .*

Démonstration. Considérons la section $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ précédemment introduite. Soient $(u, \lambda, H, J, g) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$, $p_\pm := (\gamma_\pm, z_\pm) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} (u(s, \cdot), \lambda(s))$. La différentielle s'écrit comme somme de $(D\partial_{J,H})_{(u, \lambda)}$ et des termes issus de $T\mathcal{H}_{max, \mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$,

$$D\mathcal{F}_{(u, \lambda, H, J, g)}(\xi, k, h, Y, A) = D\partial_{J,H}(\xi, k) + \begin{pmatrix} D_z J(k) J \partial_s u - J D_z X_{H_\lambda}(k) - J X_{h_z} + Y J \partial_s u \\ - \int_{S^1} \nabla_z h - \int_{S^1} A_{\gamma(\theta)}^\theta(\dot{\lambda}) d\theta \end{pmatrix}.$$

Soit $(\eta, l) \in L^q(U^*T(\hat{W} \times E))$ dans le conoyau de $D\mathcal{F}$, i.e. pour tous ξ, k, h, Y, A ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times S^1} \langle D\partial_{J,H}(\xi, k), (\eta, l) \rangle + \int_{\mathbb{R} \times S^1} \langle D_z J(k) J \partial_s u - J D_z X_{H_\lambda}(k) - J X_{h_z} + Y J \partial_s u, \eta \rangle \\ + \int_{\mathbb{R}} \langle - \int_{S^1} \nabla_z h - A_{\gamma(\theta)}^\theta(\dot{\lambda}), l \rangle = 0. \end{aligned}$$

En posant $(h, Y, A) = 0$, il vient $(D\partial_{J,H})^*(\eta, l) = 0$ *faiblement*, puis, par régularité elliptique, (η, l) est en fait représentable par une application de classe C^∞ qui satisfait des propriétés de continuation unique (pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [7] où les auteurs établissent la transversalité dans le cas *paramétré non-équivariant*, la présence de l'action de groupe ne change rien aux propriétés invoquées). Il suffit donc de montrer que la paire (η, l) s'annule sur un ouvert non vide.

(A) $\partial_s U \equiv 0$

Dans ce cas, si H est maximale non-dégénéré, nous montrons que l'opérateur $D\partial_{J,H}$ est déjà, à lui seul, surjectif. Comme $\partial_s U \equiv 0$, $u(s, \theta) = \gamma^+(\theta) = \gamma^-(\theta)$ et $\lambda(s) = z^+ = z^-$. L'opérateur $D\partial_{J,H}$ s'écrit $\partial_s + D_{p^+}$ avec D_{p^+} l'opérateur asymptotique en S_{p^+} (nous faisons un abus de notation en désignant toujours par D_{p^+} l'opérateur défini sur les sections sur le *cylindre* et non sur le cercle).

Notons Q le projecteur orthogonal parallèle à l'espace engendré par l'action torique sur $H^1(S^1, \hat{W} \times E)$ au point (γ^+, z^+) . Comme H est maximale non-dégénéré, nous avons vu que $\ker D_{p^+}$ est précisément égal à cet espace. De plus, D_{p^+} est symétrique, donc il commute avec Q . De plus, il commute avec ∂_s . $D\partial_{J,H}$ est d'indice $\mu_{RS}(S_{p^+}) - \mu(S_{p^-}) + n = n$ et contient dans son noyau l'espace de dimension n engendré par l'action torique (cette fois-ci le long du "cylindre"). Il s'agit de montrer que son noyau est inclus dans cet espace

pour obtenir $\dim \text{coker } D\partial_{J,H} = 0$ et établir la surjectivité. Soit $X \in \ker D\partial_{J,H}$, nous notons $X(s)$ pour $X(s, \cdot) : S^1 \rightarrow T\hat{W} \times TE$. Or

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_s - D_{p^+}) \circ (\partial_s + D_{p^+})(X)(s) = \partial_s^2 X(s) - D_{p^+}^2 X(s), \\ 0 &= Q(\partial_s^2 X - D_{p^+}^2 X)(s) = \partial_s^2 Q(X)(s) - D_{p^+}^2(Q(X))(s), \\ 0 &= \langle \partial_s^2 Q(X)(s) - D_{p^+}^2(Q(X))(s), Q(X)(s) \rangle \\ &= \langle \partial_s^2 Q(X)(s), Q(X)(s) \rangle - \|D_{p^+}(Q(X))(s)\|^2. \end{aligned}$$

Comme la restriction de D_{p^+} à l'image de Q est inversible, il existe une constante $c > 0$ telle que $\|D_{p^+}(Q(X))(s)\|^2 \geq c\|Q(X)(s)\|^2$. La fonction $f(s) = \|Q(X)(s)\|^2$ satisfait $f'' \geq cf$ et $f(s) \rightarrow_{s \rightarrow \pm\infty} 0$ donc $f(s) \equiv 0 \equiv Q(s)$. On en déduit l'existence de $a_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $X_i \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$, $i = 1 \dots n$, tels que $X(s) = \sum_{i=1}^n a_i(s) \underline{X}_i$. En appliquant $D\partial_{J,H} = \partial_s + D_{p^+}$ à cette équation et en se souvenant que $\underline{X}_i \in \ker D_{p^+}$ on obtient $\sum_{i=1}^n a'_i(s) \underline{X}_i = 0$. Les fonctions a_i sont constantes et $\ker D_{p^+} \subset \langle \underline{X}_i | i = 1 \dots n \rangle$

(B) $\partial_s U \neq 0$

Alors, d'après la condition (*) sur $\mathcal{HJ}_{*,\mathbb{T}^n}^N : \partial_s u \neq 0 \neq \dot{\lambda}$.

(i) $\eta \equiv 0$

Soit $(s_0, \theta_0) \in \Omega$, comme Ω est dense dans $[R, \infty[\times S^1$ pour un certain R et que l'on ne peut avoir $\partial_s u \equiv 0$ sur cette partie du cylindre, on peut aussi choisir (s_0, θ_0) tel que $\partial_s u(s_0, \theta_0) \neq 0$. Supposons $\eta(s_0, \theta_0) \neq 0$.

On peut trouver Y tel que $(Y_{\lambda(s_0)}^{\theta_0} \circ J_{\lambda(s_0)}^{\theta_0})(\partial_s u(s_0, \theta_0)) = \eta(s_0, \theta_0)$, il existe alors ϵ tel que : $|s - s_0|, |\theta - \theta_0| \leq \epsilon \implies \langle (Y_{\lambda(s)}^\theta \circ J_{\lambda(s)}^\theta)(\partial_s u(s, \theta)), \eta(s, \theta) \rangle \geq 0$.

D'après le lemme 7.2.1, il existe η tel que $d(U(s, \theta_0), \mathbb{T}^n \cdot U(s_0, \theta_0)) > \eta$ pour $|s - s_0| > \epsilon$. On construit alors une fonction $\rho : \hat{W} \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ équivariante pour l'action diagonale telle que $\rho(U(s_0, \theta_0)) > 0$ et $\rho(x, z) = 0$ dès que $d((x, z), \mathbb{T}^n \cdot U(s_0, \theta_0)) > \eta$. On construit aussi $\psi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\psi(\theta_0) > 0$ et $\psi(\theta) = 0$ si $|\theta - \theta_0| > 0$.

En prenant $\xi = k = h = A = 0$ et en remplaçant Y par $\psi \rho Y$ on obtient que η s'annule autour d'un voisinage de (s_0, θ_0) et donc sur $\mathbb{R} \times S^1$ tout entier.

(ii) $l \equiv 0$

Soit $(s_0, \theta_0) \in \Omega$, comme en (i), on peut choisir s_0 tel que $\dot{\lambda}(s_0) \neq 0$. Supposons $l(s_0) \neq 0$.

Il existe A métrique $\mathbb{T}^n$ -équivariante sur E telle que $A_{\lambda(s_0)}(\dot{\lambda}(s_0)) = l(s_0)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\langle A_{\lambda(s)}(\dot{\lambda}(s)), l(s) \rangle \geq 0$ pour $s \in [s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon]$.

D'après le lemme 7.2.1 nous pouvons construire une fonction $\rho : \hat{W} \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ équivariante pour l'action torique diagonale telle que $(\rho \circ U)(s_0, \theta_0) > 0$ et $(\rho \circ U)(s, \theta_0) = 0$ pour $|s - s_0| > \epsilon$.

On conclut en prenant $\xi = k = h = Y = 0$ et $\tilde{A}_{x,z}^\theta = \rho(x, z) \psi(\theta) A_x$ avec ψ un cut-off choisi convenablement près de θ_0 .

Ceci achève la preuve.



Chapitre 8

Compacité, Gluing et Orientation

8.1 Compacité

Soit $(H, J, g) \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}^n}^N \times \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$, $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$. Afin de monter la compacité des espaces de modules $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ dans le cas non-équivariant, nous avons considéré une suite de trajectoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis montré

- (A) qu'il existe un compact K de $\hat{W} \times E$ tel que, pour tout n , $U_n(\mathbb{R} \times S^1) \subset K$,
- (B) que le gradient des $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément borné,
- (C) que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une trajectoire, possiblement brisée.

L'assertion (A) se montre de la même manière que la proposition 4.6.1, en remarquant que, pour T assez grand,

- (i) $H(\theta, t, m, z) = \beta e^t + \beta'(z)$ donc $\nabla H_z = \beta e^t \frac{\partial}{\partial t}$ est indépendant de z ,
- (ii) J_z^θ envoie $\frac{\partial}{\partial t}$ sur R_α , préserve ξ et est compatible avec $\omega = d\alpha$ et ce, indépendamment du paramètre z .

On peut donc appliquer le principe du maximum, l'espace de paramètres ne joue aucun rôle. De plus, trivialement, l'image des λ_n , $\lambda_n(\mathbb{R})$, est contenue dans l'espace ambiant E compact.

Pour montrer le point (B), dans le cas non équivariant, nous avons supposé qu'il n'existait pas de sphères J -holomorphes. L'hypothèse de monotonicité faible de la Définition/Proposition 4.5.1 est moins restrictive et assure que, modulo perturbation, ces sphères n'intersecteront ni les orbites périodiques de H , ni les trajectoires de Floer, il ne peut donc y avoir de bubbling. Dans le cas équivariant, nous faisons l'hypothèse plus restrictive suivante et supposons désormais que toutes les variétés symplectiques en jeu la satisfont.

Hypothèse 2. *Les variétés symplectiques considérées satisfont les conditions suivantes :*

- (i) *Il existe $\tau \geq 0$ tel que, pour tout $A \in \pi_2(W)$, $\omega(A) = \tau c_1(A)$.*
- (ii) *Le nombre de Chern minimal $N \in \mathbb{N}$, défini par $c_1(\pi_2(W)) = N\mathbb{Z}$, vérifie $N \geq 2$.*

Au lieu de montrer directement le point (B), nous allons établir l'existence d'une sous-

suite convergeant vers une trajectoire brisée "modulo bubbling", nous n'excluons pas d'emblée l'apparition de sphères J -holomorphes. Nous utiliserons ensuite l'hypothèse précédente et raisonnerons sur la dimension des espaces de modules pour montrer que ces dernières ne peuvent se former le long des trajectoires considérées, du moins lorsque les espaces de modules sont de dimensions $n + 1$ ou $n + 2$ afin de définir la différentielle de notre futur complexe.

Dans le cas de la théorie de Floer, nous utilisons la propriété suivante. Une solution de l'équation de Floer u , qui a son énergie finie, converge en $\pm\infty$ vers une trajectoire périodique. La démonstration de cette propriété repose sur le fait que, pour H non-dégénéré, les orbites périodiques sont isolées.

Ici les orbites ne sont pas isolées mais réunies en "paquets de tores", nous nous inspirons de la preuve de [6] pour montrer qu'une trajectoire d'énergie finie converge bien vers *une orbite périodique* donnée.

Définition/Proposition 8.1.1. *Soit $U : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \hat{W} \times E$ solution de $\partial_{J,H}U = 0$, nous définissons son énergie par*

$$E(U) = \int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\partial_s U\|^2.$$

Alors les deux assertions qui suivent son équivalentes :

- (i) $E(U) < +\infty$,
- (ii) *il existe $(\gamma^\pm, z^\pm) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ tels que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} U(s, \cdot) = (\gamma^\pm, z^\pm)$.*

Démonstration. Nous traitons uniquement le cas $+\infty$. La fonction $s \mapsto \int_{S^1} \|\partial_s U(s, \theta)\|^2 d\theta$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après (i). Il existe donc une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ avec $a_k \rightarrow +\infty$ telle que $f(a_k) \rightarrow 0$ soit $\partial_s U(a_k, \cdot) \rightarrow 0$. On peut ensuite montrer, comme dans le lemme 4.4.3, qu'il existe $p_1 = (\gamma_1, z_1) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ tel que $U(a_k, \cdot) \rightarrow p_1$.

Supposons que $U(s, \cdot)$ ne converge pas vers (γ_1, z_1) . Notons d_θ la distance associée à la métrique riemannienne induite par (ω, J^θ, g) . Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout k , il existe $s^* \geq a_k$, θ^* tels que $d_{\theta^*}(U(s^*, \theta^*), (\gamma_1(\theta^*), z_1)) \geq \eta$. Soit $b_k = \inf\{s \geq a_k \mid \sup_\theta d(U(s, \theta), (\gamma_1(\theta), z_1)) > \eta\}$. Nous pouvons aussi extraire une sous-suite telle que $\partial_s U(b_k, \cdot)$ converge vers 0 et $U(b_k, \cdot)$ converge vers $(\gamma_2, z_2) \in S_{p_1}$ avec $(\gamma_2, z_2) \neq (\gamma_1, z_1)$.

Avant de raisonner sur les intervalles $I_k := [a_k, b_k]$ pour obtenir une contradiction, observons l'identité qui suit.

Lemme 8.1.1. *Soit U solution de $\partial_{J,H}U = 0$ et $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$, alors $\langle \partial_s U, \underline{X} \rangle = 0$.*

Démonstration. Lorsque que l'on intègre en θ l'identité $\langle \partial_{J,H} U, \underline{X} \rangle = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle \partial_s U, \underline{X}_{H^1(S^1, \hat{W}) \times E} \rangle &= \int_{S^1} \langle \partial_s u, \underline{X}_{\hat{W}} \rangle + \langle \dot{\lambda}(s), \underline{X}_E \rangle \\
&= - \int_{S^1} \omega(J_{\lambda(s)}^\theta \partial_\theta u, J_{\lambda(s)}^\theta \underline{X}_{\hat{W}}) d\theta + \int_{S^1} \omega(\nabla H_z, J_{\lambda(s)}^\theta \underline{X}_{\hat{W}}) \\
&\quad + \int_{S^1} \langle \nabla_z H(u(s, \theta), \lambda(s)), \underline{X}_E \rangle d\theta \\
&= - \int_{S^1} d\mu^X(\partial_\theta u) d\theta + \int_{S^1} dH_{u(s, \theta), \lambda(s)}(\underline{X}_{\hat{W}}, \underline{X}_E) = 0
\end{aligned}$$

où μ désigne l'application moment de l'action torique et dH la différentielle totale de H vue comme fonction équivariante définie sur $\hat{W} \times E$. $\square$

Choisissons un voisinage de $(\gamma_1 \times \{z_1\})(S^1)$ dans $\hat{W} \times E$ isomorphe à $S^1 \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{N+n-1}$. Quitte à réduire η , on peut supposer que $U([a_k, b_k] \times S^1)$ est contenu dans ce voisinage. En choisissant une trivialisatation comme dans la section 6.2, la projection orthogonale parallèlement à l'action torique (resp. la métrique) le long de (γ_1, z_1) s'écrit Q_∞ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$) dans la trivialisatation de $(\gamma_1 \times \{z_1\})^*(T\hat{W} \times TE)$ induite par nos coordonnées. Rappelons que Q_∞ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$) ne correspond pas à la projection (resp. la métrique) le long de $U(s, \cdot)$ à moins que $U(s, \cdot) = (\gamma_1, z_1)$. Nous notons $Q(s)$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$) cette projection (resp. la métrique) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(s) = \|Q_\infty \partial_s U\|_\infty^2$.

Le lemme précédent a pour corollaire $\|\partial_s U\|_s^2 = \|Q(s) \partial_s U\|_s^2$. $Q(s)$ et Q_∞ sont des projecteurs orthogonaux, pour des métriques différentes certes, *mais parallèlement au même sous-espace*, à savoir celui engendré par les $\underline{X}$, $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$. Ces champs de vecteurs ont leur coordonnées constantes égales à $e \in \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{n+N-1}}\}$. On déduit

$$\|\partial_s U\|_s^2 = \|Q(s) \partial_s U\|_s^2 = \|(Q(s) \circ Q_\infty) \partial_s U\|_s^2 \leq C \|Q_\infty \partial_s U\|_\infty^2 = C f(s).$$

Aussi, si V est choisi petit, le raisonnement effectué dans le lemme 6.2.1 garantit l'existence de $\delta > 0$ tel que $f''(s) \geq \delta^2 f(s)$ pour $s \in I_k$.

Les intervalles I_k sont bornés à droite contrairement au cas précédent, on ne peut donc pas obtenir une décroissance exponentielle *directement*. Néanmoins nous avons l'inégalité

$$f(s) \leq \max(f(a_k), f(b_k)) \frac{\cosh(\delta(s - \frac{a_k+b_k}{2}))}{\cosh(\delta(\frac{a_k-b_k}{2}))}.$$

En effet, soit $g : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(s) = f(s) - \max(f(a_k), f(b_k)) \frac{\cosh(\delta(s - \frac{a_k+b_k}{2}))}{\cosh(\delta(\frac{a_k-b_k}{2}))}$. Alors g vérifie l'inéquation différentielle $g'' \geq \delta^2 g$ et est négative aux extrémités de I_k . Supposons que g ne soit pas négative sur I_k . Alors elle atteint son maximum en un point $c \in]a_k, b_k[$ vérifiant $g(c) > 0$ et $g''(c) < 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. On en déduit $g \leq 0$.

En intégrant l'inégalité précédente et en utilisant Cauchy-Schwarz (relativement à l'intégration en θ) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{S^1} d_\theta(U(a_k, \theta), U(b_k, \theta)) d\theta &\leq \int_{[a_k, b_k] \times S^1} \|\partial_s U\| d\theta ds \\ &\leq C \max(f(a_k), f(b_k))^{\frac{1}{2}} \int_{[a_k, b_k]} \sqrt{\frac{\cosh(\delta(s - \frac{a_k + b_k}{2}))}{\cosh(\delta \frac{a_k - b_k}{2})}} ds. \end{aligned}$$

Sachant que $\sqrt{2} \sinh \frac{x}{2} < \sqrt{\cosh x} < \sqrt{2} \cosh \frac{x}{2}$, on déduit

$$\int_{S^1} d_\theta(U(a_k, \theta), U(b_k, \theta)) d\theta \leq \frac{4C}{\delta} \max(f(a_k), f(b_k))^{\frac{1}{2}} \frac{\sinh(\delta \frac{a_k - b_k}{4})}{\sqrt{\cosh(\delta \frac{a_k - b_k}{2})}} \leq \frac{4C}{\delta} \max(f(a_k), f(b_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Comme par hypothèse, $\partial_s U(a_k, \cdot)$ et $\partial_s U(b_k, \cdot)$ convergent vers 0, on obtient

$$\int_{S^1} d_\theta((\gamma_1(\theta), z_1), (\gamma_2(\theta), z_2)) d\theta = \lim_k \int_{S^1} d_\theta(U(a_k, \theta), U(b_k, \theta)) d\theta = 0$$

et donc $(\gamma_1, z_1) = (\gamma_2, z_2)$ d'où la contradiction. $\square$

Établissons maintenant la convergence "modulo bubbling", soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ une suite de trajectoires.

Soit T tel que, sur $S^1 \times [T, +\infty[\times M \times (S^{2N+1})^n$, $H(\theta, t, m, z) = \beta e^t + \beta'(z)$. Alors $\nabla_z H = \nabla \beta'$ sur $S^1 \times [T, +\infty[\times M \times (S^{2N+1})^n$, on en déduit que $\nabla_z H$ est globalement borné sur $S^1 \times \hat{W} \times (S^{2N+1})^n$ et comme $\dot{\lambda}(s) = \int_{S^1} \nabla_z H(\theta, u(s, \theta), \lambda(s))$, le gradient des λ_n est globalement borné.

Supposons que le gradient des u_n ne soit pas borné. Comme dans le cas classique, on peut trouver des suites $(\epsilon_n, R_n, s_n, \theta_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n R_n = +\infty$
- (B) v_n est définie sur $B(0, \epsilon_n R_n) \subset \mathbb{C}$ et vérifie
 - (i) $\|\nabla v_n\| \leq 2$,
 - (ii) $\|\nabla v_n(0, 0)\| = 1$,
 - (iii) ainsi que l'équation

$$\partial_s v_n + J_{\lambda(s_n + \frac{s}{R_n})}^{\theta_n + \frac{\theta}{R_n}} \partial_\theta v_n - \frac{1}{R_n} J_{\lambda(s_n + \frac{s}{R_n})}^{\theta_n + \frac{\theta}{R_n}} X_{H_{\lambda(s_n + \frac{s}{R_n})}} = 0.$$

On peut extraire une sous-suite telle que $(\lambda(s_n), \theta_n)$ converge vers (z, θ) . En appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli et les principes de régularité elliptique habituels, on obtient la convergence d'une sous-suite des v_n vers $v : \mathbb{C} \rightarrow \hat{W}$ vérifiant $\partial_s v + J_z^\theta \partial_\theta v = 0$. On montre pareillement que $\int_{\mathbb{C}} v^* \omega < +\infty$, v s'étend donc en une sphère J_z^θ -holomorphe.

Le lemme suivant permet, dans le cas non paramétré, de montrer qu'un tel phénomène ne peut se produire qu'en un nombre fini de points.

Lemme 8.1.2. *Soit (W, ω) une variété symplectique monotone, i.e. vérifiant le point (i) de l'hypothèse 2 et J une structure presque complexe compatible avec ω . Il existe $h > 0$ tel que, pour toute sphère J -holomorphe non constante $v : S^2 \rightarrow W$,*

$$\int_{S^2} v^* \omega \geq h$$

Démonstration. Si $\omega(\pi_2(W)) = \{0\}$, il n'y pas de sphères J -holomorphes. Sinon, comme ω est proportionnelle à c_1 qui est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\omega(\pi_2(W))$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ de la forme $h\mathbb{Z}$ avec $h > 0$. Sachant que l'aire symplectique d'une sphère J -holomorphe non constante est toujours positive, on en déduit qu'elle est toujours supérieure ou égal à h . $\square$

Remarque 8.1.1. *Ce lemme reste vraie en supprimant l'hypothèse de monotonie, voir [24].*

La présence du paramètre z n'est pas problématique. En effet, soit $\mathcal{S} := \{(J, z, v) \in \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N \times E \times W^1(S^2, W) | \partial_s v + J_z \partial_\theta v = 0\}$. Comme l'espace des paramètres E est compact, pour $J \in \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$ fixé, $\inf_{(z,v) \text{ t.q. } (J,z,v) \in \mathcal{S}} E(v) > 0$. L'énergie des sphères J_z holomorphes non constantes est uniformément bornée inférieurement en z . Ceci permet de montrer que le bubbling, i.e. l'apparition de sphères J -holomorphes ne peut se produire qu'en un nombre fini de points.

Il existe donc des points $z_1, \dots, z_k$ tels que, sur tout compact de $\mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$, les éléments de la suite ont leur gradient uniformément borné et admettent une sous-suite convergente vers $U = (u, \lambda) : \mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \hat{W} \times E$ vérifiant $\partial_{J,H} U = 0$ et $E(U) < +\infty$. De même, une généralisation au cas Floer paramétré du lemme 4.4.2, permet de montrer que U s'étend en solution définie sur le cylindre tout entier.

Si U n'admet pas $p^\pm$ comme asymptotes, en raisonnant comme dans le cas non-équivariant, il est possible de trouver des suites $(s_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, des trajectoires U_i et des points $z_1^i, \dots, z_{j_i}^i$ tels que $U_n(\cdot + s_n^i, \cdot)$ converge vers U_i sur tout compact de $\mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_1^i, \dots, z_{j_i}^i\}$, $i = 1 \dots k$ avec $\lim_{s \rightarrow -\infty} U_1(s, \cdot) = p^+$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} U_k(s, \cdot) = p^-$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} U_i(s, \cdot) = \lim_{s \rightarrow -\infty} U_{i+1}(s, \cdot)$, $i = 1 \dots k-1$.

La présence de sphères J -holomorphes ne permet pas d'établir la compacité (modulo l'ajout de trajectoires brisées) des différents espaces de modules $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$. Cependant, afin de construire le complexe de la section 9.1, il suffit de garantir la compacité pour ceux dont la dimension n'excède pas $n+2$. Dans ce cas, comme nous allons le voir, l'hypothèse 2 garantit qu'aucun bubbling ne peut se produire le long des solutions.

Théorème 8.1.1. *Soit $(H, J) \in \mathcal{HJ}_{reg, \mathbb{T}^n}^N$, $p^+, p^-, p^1, \dots, p^j \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ et $A \in H_2(W, \mathbb{Z})$, notons*

- (A) $\mathcal{M}^A(S_{p^+}, S_{p^-})$ l'ensemble des $U = (u, \lambda) \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ tels que $[\sigma_{\gamma^+} \# u \# \bar{\sigma}_{\gamma^-}]_{H_2(W, \mathbb{Z})} = A$. D'après le corollaire 6.4.1, la dimension de cet espace est égale à $\mu_{RS}(S_{p^-}) - \mu_{RS}(S_{p^+}) + 2c_1([\sigma_{\gamma^+} \# u \# \bar{\sigma}_{\gamma^-}]) + n$.

(B) $\mathcal{L}^A(S_{p^+}, S_{p^-}) = \mathcal{M}^A(S_{p^+}, S_{p^-})/\mathbb{R}$ le quotient des espaces de modules par l'action de $\mathbb{R}$,

(C) $\underline{ev}(U) := \lim_{s \rightarrow +\infty} U(s, \cdot) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$,

$\overline{ev}(U) := \lim_{s \rightarrow -\infty} U(s, \cdot) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$.

Remarquons que ces applications sont invariantes par l'action de $\mathbb{R}$, nous notons aussi $\overline{ev}$ et $\underline{ev}$ les applications quotient sur $\mathcal{L}(S_{p^+}, S_{p^-})$.

(D) Finalement, nous notons également

$$\mathcal{L}^{A_1}(S_{p^+}, S_{p^1})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \dots \times_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}^{A_i}(S_{p^{i-1}}, S_{p^i})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \dots \mathcal{L}^{A_k}(S_{p^{k-1}}, S_{p^-}) := \\ \{([U_1], \dots, [U_k]) \in \mathcal{L}^{A_1}(S_{p^+}, S_{p^1}) \times \dots \times \mathcal{L}^{A_k}(S_{p^{k-1}}, S_{p^-}) \mid \underline{ev}([U_i]) = \overline{ev}([U_{i+1}]) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)\}.$$

Alors, si $\mu_{RS}(S_{p^-}) - \mu_{RS}(S_{p^+}) + 2c_1(A) \leq 2$, l'espace

$$\bar{\mathcal{L}}^A(S_{p^+}, S_{p^-}) := \mathcal{L}(S_{p^+}, S_{p^-}) \coprod \left(\coprod_{\substack{p^+ = p^0, \dots, p^k = p^- \\ t.q. \mu(p^i) > \mu(p^{i+1}) \\ A_1, \dots, A_k \\ t.q. \sum_i A_i = A}} \mathcal{L}^{A_1}(S_{p^+}, S_{p^1})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \dots \times_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}^{A_i}(S_{p^{i-1}}, S_{p^i})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \dots \mathcal{L}^{A_k}(S_{p^{k-1}}, S_{p^-}) \right)$$

est compact.

Démonstration. Soient $p^\pm = (\gamma^\pm, z^\pm)$ et A tels que $\mu_{RS}(S_{p^-}) - \mu_{RS}(S_{p^+}) + 2c_1(A) \leq 2$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n, \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^A(S_{p^+}, S_{p^-})$. Quitte à extraire une sous-suite, nous avons vu qu'il existait des suites $(s_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, des trajectoires $U_i = (u_i, z_i)$ et des points $z_1^i, \dots, z_{j_i}^i$ tels que $U_n(\cdot + s_n^i, \cdot)$ converge vers U_i sur tout compact de $\mathbb{R} \times S^1 \setminus \{z_1^i, \dots, z_{j_i}^i\}$, $i = 1 \dots k$ avec $\lim_{s \rightarrow -\infty} U_1(s, \cdot) = p^+$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} U_k(s, \cdot) = p^-$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} U_i(s, \cdot) = \lim_{s \rightarrow -\infty} U_{i+1}(s, \cdot)$, $i = 1 \dots k-1$. Les points z_j^i correspondent aux lieux de formation d'éventuelles sphères J -holomorphes, nous les notons $v_j^i : S^2 \rightarrow \hat{W}$. Les trajectoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont, à partir d'un certain rang, homotopes à la somme connexe $U_1 \# \dots \# U_k \# v_1^1 \dots \# v_{j_k}^k$, le recollement des U_i se faisant le long de leur extrémités communes. Soient $p^i = (\gamma^i, z^i) = \underline{ev}(U_i) = \overline{ev}(U_{i+1})$, σ_{γ^i} l'homotopie entre γ^i et les représentants fixés de $[\gamma^i]$ et $A_i = [\sigma_{\gamma^{i-1}} \# u_i \# \bar{\sigma}_{\gamma^i}]$, alors, pour n assez grand,

$$A = [\sigma_{\gamma^+} \# U_n \# \bar{\sigma}_{\gamma^-}] = \sum_i [\sigma_{\gamma^{i-1}} \# U_i \# \bar{\sigma}_{\gamma^i}] = \sum_i A_i$$

et

$$2 = \mu_{RS}(S_{p^-}) - \mu_{RS}(S_{p^+}) + 2c_1(A) = \sum_i \mu_{RS}(S_{p^{i-1}}) - \mu_{RS}(S_{p^i}) + 2c_1(A_i) + 2 \sum_{i,j} c_1([v_{i,j}]).$$

Or, comme la paire (H, J) est régulière, $\mathcal{M}^{A_i}(S_{p^{i-1}}, S_{p^i})$ est une variété de dimension $\mu_{RS}(S_{p^{i-1}}) - \mu_{RS}(S_{p^i}) + 2c_1(A_i) + n$ où n désigne ici la dimension du tore, soit la moitié de la dimension de la variété symplectique. Ces espaces admettant une action libre et lisse de

la part de $\mathbb{T}^n$, ils sont soit vide, soit de dimension supérieur à n . On en déduit, pour tout i , $\mu_{RS}(S_{p^{i-1}}) - \mu_{RS}(S_{p^i}) + 2c_1(A_i) \geq 0$.

La première somme du membre de droite ne comprend que des termes positifs. Le point (i) de l'hypothèse 2 assure aussi qu'une sphère J -holomorphe admet nécessairement un nombre de Chern positif, d'après (ii), si celle-ci n'est pas constante, ce nombre est forcément supérieur à 2. La présence de sphères J -holomorphes impliquerait donc $2 \geq 4$ dans l'égalité précédente.

Il n'y a donc pas de bubbling, le gradient de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a son gradient uniformément borné et admet une sous-suite convergeant vers une trajectoire, potentiellement brisée. $\square$

Remarque 8.1.2. *En réalité, le phénomène de bubbling est plus complexe. En un point où le gradient explose, il peut y avoir en réalité plusieurs sphères J -holomorphes qui apparaissent. Comme pour les cylindres, la sphère que l'on observe dépend fortement de notre reparamétrisation. Il est néanmoins possible de réunir toutes ces sphères sous forme d'"arbres à bulles" (voir [24]) et de montrer que les cylindres U_n sont homotopes à la concaténation des cylindres limites obtenus avec différentes sphères J -holomorphes.*

8.2 Gluing

Cette section a pour but d'établir une sorte de réciproque à la compacité. Soit $(H, J, g) \in \mathcal{HJ}_{reg, \mathbb{T}^n}^N$ de sorte que

- (i) pour tous $p^\pm \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ est une variété,
- (ii) pour tout $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, $D\partial_{J,H}$ est surjective au point U .

Étant donnée une paire de trajectoires $([U], [V]) \in \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$ telles que $\dim \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2}) = n = \dim \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$, il existe une famille de trajectoires $([W_R])_{R \in [R_0, +\infty[}$ convergeant vers $([U], [V])$. Pour établir l'existence d'une solution près de (U, V) , nous construisons d'abord une solution "approchée" pour chaque R , puis nous utilisons une version quantitative du théorème des fonctions implicites en dimension infinie. Le résultat final que nous voulons obtenir est le suivant.

Théorème 8.2.1. *Soient $(p^i)_{i \in \{1,2,3\}} \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ avec $\mu(p^i) - \mu(p^{i+1}) = 1$, alors il existe $R_0 \in \mathbb{R}$, $\psi : \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3}) \times [R_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{L}(p^1, p^3)$ tels que*

- (A) ψ soit équivariante pour l'action diagonale sur $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$,
- (B) $\lim_{R \rightarrow +\infty} \psi([U], [V], R) = ([U], [V])$.

Proposition 8.2.1. *Soit $p_{i \in \{1,2,3\}}^i \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ avec $\mu(p^i) - \mu(p^{i+1}) = 1$, alors le produit fibré $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$ est une variété compacte de dimension n et l'action diagonale du tore induite est libre.*

Démonstration. Pour des raisons d'indice, $\mathcal{L}(S_{p^i}, S_{p^{i+1}})$ pour $i = 1$ et 2 , sont des variétés compactes de dimension n . L'application $\underline{ev} : \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2}) \rightarrow S_{p^2}$ est équivariante, or $S_{p^2} = \mathbb{T}^n \cdot p^2$, on en déduit que c'est une submersion surjective, il en va de même pour $\overline{ev}$.

L'application $\underline{ev} \times \overline{ev} : \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2}) \times \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3}) \rightarrow S_{p^2}$ est donc transverse à la diagonale Δ de codimension n , et $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3}) = (\underline{ev} \times \overline{ev})^{-1}(\Delta)$ est une sous variété compacte de codimension n dans $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2}) \times \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$ et donc (aussi) de dimension n , l'action diagonale préserve cette sous-variété et l'action reste libre. $\square$

Nous ne pouvons pas construire notre application de recollement sur l'espace $\mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3}) := \{(U, V) \in \mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2}) \times \mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3}) | \underline{ev}(U) = \overline{ev}(V) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)\}$ tout entier. Ce problème ne provient pas de l'action torique, il est déjà présent dans la construction de l'homologie de Floer et est lié à la paramétrisation en s des solutions. Celles-ci n'approchent pas leurs asymptotes de manière uniforme car on peut toujours "décaler" une trajectoire. Les espaces $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ ne sont pas précompacts, contrairement à $\mathcal{L}(S_{p^+}, S_{p^-})$, leurs quotients par l'action de $\mathbb{R}$.

Nous pourrions recoller directement au niveau des espaces $\mathcal{L}(p^1, p^2)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(p^2, p^3)$ de la manière suivante. Remarquer que, étant de dimension n et muni d'une action libre de $\mathbb{T}^n$, cet espace peut s'écrire comme réunion $\coprod_{i=1}^k \mathbb{T}^n \cdot ([U_i], [V_i])$ avec $([U_1], [V_1]), \dots, ([U_k], [V_k])$ un nombre fini de couples. Recoller chacun de ces couples pour obtenir une trajectoire dans $\mathcal{L}(p^1, p^3)$ et étendre ψ par équivariance.

Cependant, lorsqu'il s'agira d'orienter ces espaces de modules, il sera nécessaire d'avoir un recollement préservant l'orientation au niveau des espaces de modules non quotientés $\mathcal{M}$. Nous pouvons contourner ce problème en construisant le recollement pour $(U, V) \in K_1 \times K_2$ avec K_1 (resp. K_2) un compact de $\mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2})$ (resp. de $\mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3})$) admettant un représentant pour chaque élément de $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})$ (resp. $\mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$) ou autrement dit, de sorte que l'application quotient restreinte à K_1 , (resp. K_2) reste surjective.

Étant donné un nombre R_0 fixé, nous choisissons K_1 de sorte que, pour $s \geq R_0, \theta \in S^1$ et $U \in K_1$, $U(s, \theta)$ est dans l'image de $\exp_{\underline{ev}(U)}$. Plus précisément, en notant $(\gamma_2, z_2) := \underline{ev}(U)$, et $U(s, \theta) = (u(s, \theta), \lambda_1(s))$ alors il existe $\xi = (\xi_1, \xi_2) : [R_0, +\infty[\times S^1 \rightarrow \gamma_2^*(T\hat{W}) \times T_{z_2}E$, tel que $u(s, \theta) = \exp_{\gamma_2(\theta)}(\xi_1(s, \theta))$ et $\lambda_1(s) = \exp_{z_2}(\xi_2(s))$. $\exp$ désigne ici l'exponentielle riemannienne associée aux métriques $\mathbb{T}^n$ -équivariantes sur $\hat{W}$, E et $\hat{W} \times E$. Nous demandons une condition similaire sur K_2 : pour $-R \leq -R_0$ assez petit et $V \in K_2$:

$$V(s, \theta) = (v(s, \theta), \lambda_2(s)) = (\exp_{\gamma_2(\theta)}(\eta_1(s, \theta)), \exp_{z_2}(\eta_2(s))) = \exp_{(\gamma_2(\theta), z_2)}(\eta(s, \theta)).$$

Pour la suite, nous fixons $(U, V) \in K_1 \times K_2 \cap \mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2}) \times \mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3})$ et notons $(\gamma_2, z_2) = \underline{ev}(U) = \overline{ev}(V)$ l'extrémité commune.

Pour construire ψ , nous allons,

- (i) construire une famille de solutions "approchées" $(W_R)_{R \geq R_0}$, au sens où $\partial_{J,H}(W_R)$ est proche de 0,
- (ii) montrer que $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ admet, pour une paire régulière (H, J) , un inverse à droite obtenu en combinant des inverses à droite pour $D\partial_{J,H}$ aux points U et V ,
- (iii) montrer que cet inverse est uniformément borné en R ,
- (iv) utiliser une version quantitative du théorème des valeurs implicites en dimension infinie pour prouver l'existence d'une vraie solution proche de (W_R) .

Pour construire notre solution approchée W_R , nous modifions d'abord U, V pour les faire "atterrir" sur (γ_2, z_2) en temps fini. Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse, valant 1 sur $] -\infty, -1]$ nulle sur $[0, +\infty[$ et vérifiant $|\alpha'| \leq 2$. Nous définissons

$$U_R(s, \theta) = \begin{cases} U(s, \theta) & \text{pour } s \leq R-1, \\ \exp_{(\gamma_2(\theta), z_2)}(\alpha(s-R)\xi(s, \theta)) & \text{pour } R-1 \leq s \leq R, \\ (\gamma_2(\theta), z_2) & \text{pour } R \leq s, \end{cases}$$

et

$$V_R(s, \theta) = \begin{cases} (\gamma_2(\theta), z_2) & \text{pour } s \leq -R, \\ \exp_{(\gamma_2(\theta), z_2)}(\alpha(-s-R)\eta(s, \theta)) & \text{pour } -R \leq s \leq -R+1, \\ V(s, \theta) & \text{pour } -R+1 \leq s. \end{cases}$$

Nous définissons maintenant W_R par

$$W_R(s, \theta) = \begin{cases} U_R(s+2R, \theta) & \text{pour } s \leq -R, \\ (\gamma_2(\theta), z_2) & \text{pour } -R \leq s \leq R, \\ V_R(s-2R, \theta) & \text{pour } R \leq s. \end{cases}$$

Remarquons que les inclusions de $\mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3})$ dans $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^2}, S_{p^3})$ induisent, au niveau des espaces tangents, l'inclusion

$$T_{(U,V)}\mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3}) \subset W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times TE)) \\ \oplus W^{1,p,\delta}(V^*(T\hat{W} \times TE)) \oplus \overline{V_{p_1}} \oplus \underline{V_{p_3}} \oplus \Delta$$

avec $\Delta = \{(X_1, X_2) \in \underline{V_{p_2}} \oplus \overline{V_{p_2}} \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} X_1 = \lim_{s \rightarrow -\infty} X_2\}$.

Pour simplifier les notations, nous notons

- (a) V_i pour V_{p_i} , $i \in \{1, 2, 3\}$,
- (b) W_{U_R} (resp. L_{W_R}) pour $W^{1,p,\delta}(U_R^*(T\hat{W} \times E))$ (resp. $L^{p,\delta}(U_R^*(T\hat{W} \times E))$) de même pour V_R et W_R .

Nous allons construire un inverse pour $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ basé sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W_{U_R} \oplus W_{V_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus \underline{V}_3 \oplus \Delta & \xleftarrow{P} & L_{U_R} \oplus L_{V_R} \\ G \downarrow & & \uparrow S \\ W_{W_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus \underline{V}_3 & \xrightarrow{D\partial_{J,H}} & L_{W_R} \end{array}$$

En remontant le diagramme, nous obtiendrons une application

$$Q = (D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S : L_{W_R}^1 \longrightarrow L_{W_R}^1$$

telle que $\| \text{Id} - Q \| \leq \frac{1}{2}$, qui nous permettra de construire un inverse pour $(D\partial_{J,H})_{W_R}$. Il restera alors à borner sa norme uniformément en R . Décrivons les différentes flèches intervenant dans ce diagramme. Rappelons que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\bar{V}_i$ (resp. $\underline{V}_i$) est engendré par des sections de la forme $\gamma^- \underline{X}$ (resp. $\gamma^+ \underline{X}$) avec $\gamma^-(s) = 1$ pour $s \leq -\frac{1}{2}$ et $\gamma^-(s) = 0$ pour $s \geq \frac{1}{2}$ (resp. $\gamma^+(s) = 0$ pour $s \leq -\frac{1}{2}$ et $\gamma^+(s) = 1$ pour $s \geq \frac{1}{2}$).

S : Choisissons $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ C^∞ une application lisse, égale à 1 sur $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ et nulle sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Étant donné $\zeta \in L_{W_R}$, nous définissons $S(\zeta) = (\zeta_1, \zeta_2)$ avec

- (i) $\zeta_1(s, \theta) = \gamma(s - 2R)\zeta(s - 2R, \theta) \in L_{U_R}$,
- (ii) $\zeta_2(s, \theta) = (1 - \gamma(s + 2R))\zeta(s + 2R, \theta) \in L_{V_R}$.

On vérifie sans peine que cette application est bien définie : pour $s \leq \frac{1}{2}$, $W_R(s, \cdot) = U_R(s + 2R, \cdot)$. $\gamma(s)\zeta(s, \cdot)$ est un champ de vecteurs le long de W_R nul pour $s \geq \frac{1}{2}$ et ζ_1 est bien un champ de vecteurs le long de U_R , idem pour ζ_2 .

P : Remarquons que U_R (resp. V_R) converge vers U (resp. V) dans $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^1}, S_{p^2})$ (resp. $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p^2}, S_{p^3})$). Comme $(H, J, g) \in \mathcal{HJ}_{reg, \mathbb{T}^n}^N$, $(D\partial_{J,H})_U$ (resp. $(D\partial_{J,H})_V$) est surjectif et son noyau est de dimension finie. Il admet donc un inverse à droite et il en va de même pour $(D\partial_{J,H})_{U_R}$ (resp. $(D\partial_{J,H})_{V_R}$) pour R assez grand que nous notons Q_{U_R} (resp. Q_{V_R}). Ainsi

$$(D\partial_{J,H})_{U_R} \bigoplus (D\partial_{J,H})_{V_R} : (W_{U_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus \underline{V}_2) \bigoplus (W_{V_R} \oplus \bar{V}_2 \oplus \underline{V}_3) \longrightarrow L_{U_R} \bigoplus L_{V_R}$$

admet (Q_{U_R}, Q_{V_R}) comme inverse à droite. Il suffit de trouver un espace supplémentaire F de $(W_{U_R} \oplus \bar{V}_1) \bigoplus (W_{V_R} \oplus \underline{V}_3) \bigoplus \Delta$ dans $(W_{U_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus \underline{V}_2) \bigoplus (W_{V_R} \oplus \bar{V}_2 \oplus \underline{V}_3)$ inclus dans le noyau de $(D\partial_{J,H})_{U_R} \bigoplus (D\partial_{J,H})_{V_R}$ et de considérer $\pi \circ (Q_{U_R}, Q_{V_R})$ où π désigne la projection parallèlement à F . On peut par exemple choisir F comme le sous-espace de dimension n engendré par les couples de sections $(s, \theta) \mapsto (\underline{X}(U_R(s, \theta)), -\underline{X}(V_R(s, \theta)))$ avec $X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$. On vérifie que F est bien inclus dans le noyau et que c'est un supplémentaire de $(W_{U_R} \oplus \bar{V}_1) \bigoplus (W_{V_R} \oplus \underline{V}_3) \bigoplus \Delta$. Nous définissons $P = \pi \circ (Q_{U_R}, Q_{V_R})$ qui définit un inverse à droite pour la restriction de $(D\partial_{J,H})_{U_R} \oplus (D\partial_{J,H})_{V_R}$ à $(W_{U_R} \oplus \bar{V}_1) \bigoplus (W_{V_R} \oplus \underline{V}_3) \bigoplus \Delta$.

G : Pour définir G , nous introduisons deux fonctions cut-off $\beta^\pm$ à décroissance lente (la nécessité d'un tel choix apparaîtra dans les calculs effectués plus loin qui feront intervenir la dérivée de $\beta^\pm$). Soient $\beta^- : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ telle que

- (i) $\beta^-(s) = 1$ si $s \leq \frac{1}{2}$,
 - (ii) $\beta^-(s) = 0$ si $s \geq R$,
 - (iii) $|\beta^{-'}(s)| \leq \frac{2}{R}$ pour tout s ,
- et $\beta^+ : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ telle que

- (i) $\beta^+(s) = 0$ si $s \leq -R$,
- (ii) $\beta^+(s) = 1$ si $s \geq -\frac{1}{2}$,
- (iii) $|\beta^{+'}(s)| \leq \frac{2}{R}$ pour tout s .

Pour $(\xi, \eta) \in W_{U_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus V_{U_R} \oplus \underline{V}_3$ nous définissons $G(\xi, \eta) = \zeta$ avec $\zeta(s, \theta) = \beta^-(s)\xi(S + 2R, \theta) + \beta^+(s)\eta(s - 2R, \theta)$. Remarquons que G agit sur les sections $\bar{V}_1 \oplus \underline{V}_3$ par reparamétrisation : $G(\gamma^\pm \underline{X})(s) = \beta^\pm(s)\gamma^\pm(s \mp 2R)\underline{X} = \gamma^\pm(s \mp 2R)\underline{X}$.

Pour $(\gamma^+ \underline{X}, \gamma^- \underline{X}) \in \Delta$, nous définissons $G((\gamma^+ \underline{X}, \gamma^- \underline{X}))(s) = \gamma^+(s + 2R)\underline{X}$ pour $s \leq 0$ et $G((\gamma^+ \underline{X}, \gamma^- \underline{X}))(s) = \gamma^-(s - 2R)\underline{X}$ pour $s \geq 0$. Autrement dit, $G((\gamma^+ \underline{X}, \gamma^- \underline{X}))(s) = \psi_R(s)\underline{X}$ avec $\psi_R(s) = 1$ sur $[-2R + \frac{1}{2}, 2R - \frac{1}{2}]$ et $\psi(s) = 0$ sur $] -\infty, -2R - \frac{1}{2}] \cup [2R + \frac{1}{2}, +\infty[$.

Proposition 8.2.2. *Pour R assez grand, $(D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S$ est un opérateur inversible dans L_{W_R} .*

Démonstration. Calculons la composée $(D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S$, nous faisons une disjonction de cas suivant la composante de $P \circ S$ en Δ .

- (i) Si $\zeta \in (P \circ S)^{-1}(W_{U_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus W_{V_R} \oplus \underline{V}_3)$, alors ζ est envoyé par S sur (ζ_1, ζ_2) avec $\zeta_1(s, \theta) = \gamma(s - 2R)\zeta(s - 2R, \theta)$ et $\zeta_2(s, \theta) = (1 - \gamma(s + 2R, \theta))\zeta(s + 2R, \theta)$. Pour calculer $((D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P)(\zeta_1, \zeta_2)$ nous décomposons (ζ_1, ζ_2) en $(\zeta_1, 0) + (0, \zeta_2)$. $(\zeta_1, 0)$ est envoyé par $G \circ P$ sur $\tilde{\zeta}_1$ avec $\tilde{\zeta}_1(s, \theta) = \beta^-(s)(\pi \circ (Q_{U_R}, Q_{V_R})(\zeta_1, 0))(s + 2R, \theta)$. Comme $\tilde{\zeta}_1$ est à support inclus dans $] -\infty, R] \times S^1$ et que sur cet ensemble $W_R(\cdot, \cdot) = U(\cdot + 2R, \cdot)$,

$$\begin{aligned} (D\partial_{J,H})_{W_R}(\tilde{\zeta}_1)(s, \theta) &= (D\partial_{J,H})_{U_R}(\tilde{\zeta}_1(\cdot - 2R, \cdot))(s + 2R, \theta) \\ &= \beta^{-'}(s)\pi(Q_{U_R}(\zeta_1, 0))(s + 2R, \theta) + \beta^-(s)\zeta_1(s + 2R, \theta) \\ &= \beta^{-'}(s)\pi(Q_{U_R}(\zeta_1, 0))(s + 2R, \theta) + \beta^-(s)\gamma(s)\zeta(s, \theta). \end{aligned}$$

Un calcul similaire pour $(0, \zeta_2)$ donne

$$\beta^{+'}(s)\pi(Q_{V_R}(0, \zeta_2))(s + 2R, \theta) + \beta^+(s)(1 - \gamma(s))\zeta(s, \theta).$$

En remarquant $\beta^-\gamma = \gamma$ et $\beta^+(1 - \gamma) = 1 - \gamma$ et en additionnant on trouve $((D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S)(\zeta)(s, \theta) = \zeta(s, \theta) + \beta^{-'}(s)\pi(Q_{U_R}(\zeta_1, 0))(s + 2R, \theta) + \beta^{+'}(s)\pi(Q_{V_R}(0, \zeta_2))$ et donc $\|((D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S - \text{Id})(\zeta)\|_{L_{W_R}} \leq \frac{2}{R}C\|\zeta\|$ avec C une constante qui ne dépend pas de R et ζ .

- (ii) $\zeta \in (P \circ S)^{-1}(\Delta)$:

Si $P \circ S(\zeta) = (\gamma^+ \underline{X}, \gamma^+ \underline{X})$ alors en appliquant $(D\partial_{J,H})_{U_R} \oplus (D\partial_{J,H})_{V_R}$ on obtient $S(\zeta) = (\gamma^{+'} \underline{X}, \gamma^{-'} \underline{X})$ soit $\zeta = \psi_R' \underline{X}$ et dans ce cas $((D\partial_{J,H}) \circ G \circ P \circ S)(\zeta) = \zeta$.

□

Pour obtenir l'existence d'une vraie solution près de W_R nous utilisons le lemme d'analyse fonctionnelle suivant (voir lemme 9.4.4 de [4]) :

Lemme 8.2.1. *Soient X, Y deux espaces de Banach et $F : X \rightarrow Y$ une application C^1 , nous écrivons $F(x) = F(0) + dF_0(x) + N(x)$ et dénotons $L = dF_0$.*

Supposons qu'il existe $G : Y \rightarrow X$ telle que

$$(1) \quad L \circ G = Id_Y,$$

$$(2) \quad \|G \circ N(x) - G \circ N(y)\| \leq C\|x - y\| \quad \forall x, y \in B(0, r),$$

$$(3) \quad \|G \circ F(0)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ avec } \epsilon = \min(r, \frac{1}{5C}).$$

Alors il existe un unique $\alpha \in \text{Im}(G) \cap B(0, \epsilon)$ tel que $F(\alpha) = 0$ et $\|\alpha\| \leq 2\|G \circ F(0)\|$.

Afin de pouvoir appliquer ce lemme avec $F = \partial_{J,H}$ près de W_R nous devons vérifier que

(A) $\partial_{J,H}(W_R)$ est assez petit pourvu que R soit assez grand,

(B) $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ admet un inverse à droite dont la norme est uniformément bornée en R .

Proposition 8.2.3. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\partial_{J,H} W_R\| = 0$.

Démonstration. En dehors de $[-R-1, -R] \cup [R, R+1]$, W_R est soit une vraie trajectoire antigradient ou bien un point critique de la fonctionnelle donc $\partial_{J,H} W_R(s, \theta) = 0$.

On a donc les inégalités $\|\partial_{J,H}(W_R)(s, \theta)\|_{[-R-1, -R]} \leq C_1 \|\xi\|_{[R-1, R]}$ pour $s \in [-R-1, -R]$ et $\|\partial_{J,H}(W_R)(s, \theta)\|_{[R, R+1]} \leq C_2 \|\eta\|_{[-R+1, -R]}$ avec C_i indépendant de R . Comme $\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\xi\|_{[R-1, R]} = 0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \|\eta\|_{[-R+1, -R]}$ on en déduit $\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\partial_{J,H} W_R\| = 0$. □

L'inverse à droite pour $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ est donné par $G \circ P \circ S \circ ((D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S)^{-1}$. Nous avons vu que $(D\partial_{J,H})_{W_R} \circ G \circ P \circ S \rightarrow \text{Id}$ quand $R \rightarrow +\infty$. La norme de son inverse est donc uniformément bornée en R et il reste à borner celle de G, P et S . Il est facile de voir que la norme de P reste bornée uniformément en R . En effet, comme (U_R, V_R) converge vers (U, V) , alors $(D\partial_{J,H})_{U_R}$ converge vers $(D\partial_{J,H})_U$, $(D\partial_{J,H})_{V_R}$ converge vers $(D\partial_{J,H})_V$ ainsi que leurs inverses. Afin que les normes de S et de la restriction de G à $W_{U_R} \oplus W_{V_R}$ soient uniformément bornées en R , nous introduisons un nouveau poids lié au décalage en $\pm 2R$.

Définition 8.2.1. *Nous introduisons les normes suivantes, sur W_{W_R} et L_{W_R} , respectivement,*

$$\|\zeta\|_{W_{W_R}} = \left(\int_{\mathbb{R} \times S^1} (\|\zeta(s, \theta)\|^p + \|\partial_s \zeta(s, \theta)\|^p + \|\partial_\theta \zeta(s, \theta)\|^p) f_R(s) ds d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|\zeta\|_{L_{W_R}} = \left(\int_{\mathbb{R} \times S^1} \|\zeta(s, \theta)\|^p f_R(s) ds d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $f_R(s) = e^{p\delta|2R+s|}$ pour $s \leq 0$ et $f_R(s) = e^{p\delta|-2R+s|}$ pour $s \geq 0$.

Cependant, G envoie la diagonale Δ sur des sections à support compact mais croissant linéairement en R dont la norme explose quand $R \rightarrow \infty$. Il faut donc modifier la norme sur $W_{W_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus \underline{V}_3 \oplus \Delta$ afin de rendre la norme des éléments $G(\Delta)$ petite sans pour autant faire exploser la norme de $(D\partial_{J,H})_{W_R}$. Nous notons $\bar{V}_R$ (resp. $\underline{V}_R$) l'espace engendré par les sections $\gamma_R^- \underline{X} := \gamma^-(\cdot + 2R)\underline{X} = G(\gamma^- \underline{X})$ (resp. $\gamma_R^+ \underline{X} := \gamma^+(\cdot - 2R)\underline{X} = G(\gamma^+ \underline{X})$) le long de W_R .

Définition/Proposition 8.2.1. *Nous notons $\|\dots\|_R$ la norme définie par*

$$\|(\zeta, \gamma_R^- \underline{X}_1, \gamma_R^+ \underline{X}_2)\|_R = \|\zeta - b(\zeta)\|_{W_{W_R}} + \|a(\zeta)\|_{\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)} + \|\underline{X}_1\|_{\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)} + \|\underline{X}_2\|_{\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)}$$

sur $W_{W_R} \oplus \bar{V}_1 \oplus \underline{V}_3 = W_{W_R} \oplus \bar{V}_R \oplus \underline{V}_R$, où

- (a) $a(\zeta) = \int_{S^1} pr_\perp \zeta(0, \theta) d\theta \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ avec $pr_\perp : T_x \hat{W} \times TE \rightarrow \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ désigne la projection orthogonale sur $T_x \mathbb{T}^n \cdot x$ suivie de l'identification $T_x \mathbb{T}^n \cdot x \simeq \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$,
- (b) $b(\zeta)(s, \theta) = \psi_R(s) \underline{a}(\zeta)$,
- (c) $\|\dots\|_{\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)}$ désigne une norme euclidienne quelconque sur $\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.

Alors $\|\dots\|_R$ est bien une norme pour laquelle G et $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ sont uniformément bornés en R .

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $\|\dots\|_R$ est une norme et induit une métrique complète. Montrons que G est borné.

- (i) Par notre choix de sections pour représenter l'action torique près des asymptotes, la restriction de G à $\bar{V}_1 \oplus \underline{V}_3$ est une isométrie.
- (ii) Soit $(\gamma^- \underline{X}, \gamma^+ \underline{X}) \in \Delta$, $a(G((\gamma^- \underline{X}, \gamma^+ \underline{X}))) = X \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$, $b(G((\gamma^- \underline{X}, \gamma^+ \underline{X}))) = G(\gamma^- \underline{X}, \gamma^+ \underline{X})$, donc $\|G(\gamma^- \underline{X}, \gamma^+ \underline{X})\|_R = \|X\|_{\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)}$.
- (iii) Nous montrons que G est borné sur W_{U_R} (la démonstration pour W_{V_R} est similaire). Soit $\xi \in W_{U_R}$, $\|G(\xi)\|_R \leq \|G(\xi)\|_{W_{W_R}} + \|\psi_R a(G(\xi))\|_{W_{W_R}} + |a(G(\xi))|$, nous allons borner ces trois termes en fonction de la norme de ξ et de constantes indépendantes de R :
 - (a) $\|G(\xi)\|_{W_R} \leq C\|\xi\|_{U_R}$ car G était déjà uniformément borné pour l'ancienne norme.
 - (b) En utilisant un plongement de Sobolev on obtient une constante C_1 telle que $\|\xi(0, \theta)\| \leq C_1 \|\xi\|_{W^{1,p}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times S^1)}$. On obtient alors que $|a(G(\xi))| = |\int_{S^1} pr_\perp \xi(2R, \theta) d\theta|$ est majoré par $C_1 (\int_{[2R-\frac{1}{2}, 2R+\frac{1}{2}] \times S^1} |\xi|^p + |\nabla \xi|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 e^{-2R} \|\xi\|_{U_R}$. En particulier $|a(G(\xi))| \leq C_2 \|\xi\|_{U_R}$.
 - (c) Remarquons que ψ_R ainsi que sa dérivée sont bornées *ponctuellement* indépendamment de R et que cette fonction est à support dans $[-2R - \frac{1}{2}, 2R + \frac{1}{2}]$. On en déduit que $\|b(G(\xi))\|_{W_R} = \|\psi_R \underline{a}(G(\xi))\|_{W_R}$ est majoré par

$$C_3 |a(G(\xi))| \int_{[-R-\frac{1}{2}, R+\frac{1}{2}]} f_R(s) \leq C_3 C_4 e^{-2R} \|\xi\|_{U_R} e^{2R} = C_5 \|\xi\|_{U_R}.$$

Finalement, montrons que $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ est borné.

- (i) $D\partial_{J,H}\gamma_R^\pm X = \gamma_R^\pm X$. Or, le seul endroit où $\gamma_R^\pm \neq 0$ est un petit intervalle centré en $\pm 2R$, là où f_R est proche de 1, donc $\|D\partial_{J,H}\gamma_R^\pm X\|_{L_{W_R}} \leq C|X|$.
- (ii) $\|D\partial_{J,H}\zeta\|_{L_{W_R}} \leq \|D\partial_{J,H}(\zeta - b(\zeta))\|_{L_{W_R}} + \|D\partial_{J,H}b(\zeta)\|_{L_{W_R}} \leq C_1\|\zeta - b(\zeta)\|_{W_R} + \|\psi'_R a(\zeta)\|_{L_{W_R}}$.
Comme en (i), $\psi'_R = 0$ en dehors d'une union de deux intervalles centrés $\pm 2R$, là où f_R est proche de 1. On déduit $\|\psi'_R a(\zeta)\|_{L_{W_R}} \leq C_2|a(\zeta)|$ avec C_2 indépendant de R et donc $\|D\partial_{J,H}\zeta\|_{L_{W_R}} \leq C_3\|\zeta\|_R$.

□

Proposition 8.2.4. *Il existe $R_0 \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall R \geq R_0$, il existe $\zeta_R \in W_{W_R} \oplus \overline{V_1} \oplus \underline{V_3}$ tel que $\partial_{J,H} \exp_{W_R} \zeta_R = 0$.*

L'application $\tilde{\psi} : (K_1 \times K_2 \cap \mathcal{M}(p^1, p^2)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(p^2, p^3)) \times [R_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^3})$ définie par $\psi(U, V, R) = \exp_{W_R}(\zeta_R)$ est continue et équivariante. Celle-ci induit par passage quotient une application équivariante ψ :

$$\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3}) \times [R_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^3})$$

vérifiant $\lim_{R \rightarrow +\infty} [\psi([U], [V], R)] = ([U], [V])$.

Démonstration. Comme annoncé, il suffit d'appliquer la proposition 8.2.1 avec $F = \partial_{J,H}$ dans un voisinage de W_R , sa différentielle $(D\partial_{J,H})_{W_R}$ étant inversible avec un inverse dont la norme est uniformément bornée en R . Toutes les données utilisées pour construire la solution approchée se comportent bien vis-à-vis de l'action torique rendant $\tilde{\psi}$ équivariante, *mais aussi* vis-à-vis de l'action de $\mathbb{R}$ par reparamétrisation en s rendant ψ bien définie.

Pour la dernière assertion, remarquons :

(A) $\lim_R [W_R] = ([U], [V])$

En effet, soit $R_n \rightarrow +\infty$, alors $W_{R_n}(\cdot - 2R_n, \cdot)$ converge sur tout compact vers U et $W_{R_n}(\cdot + 2R_n, \cdot)$ converge vers V .

(B) $\lim_R \zeta_R = 0$

D'après 8.2.1, $\|\zeta_R\| \leq 2C\|\partial_{J,H}W_R\|$ avec C indépendant de R (C est la norme de l'inverse à droite de $(D\partial_{J,H})_{W_R}$), le résultat découle de $\lim_R \partial_{J,H}W_R = 0$.

On en déduit $\lim_R [\exp_{W_R} \zeta_R] = ([U], [V])$.

□

Remarque 8.2.1. *Un raffinement du lemme 8.2.1 assure qu'il n'y a qu'une seule solution dans un voisinage de W_R . S'il y avait une autre manière d'approcher $([U], [V])$, i.e. il existerait une suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de solutions qui converge vers (U, V) , alors, à partir d'un certain rang, la suite serait incluse dans un voisinage de W_R pour R assez grand et serait donc égale à la solution trouvée auparavant par unicité. Pour une preuve détaillée dans le cas non paramétré, le lecteur pourra consulter [4] section 9.6.*

8.3 Orientation

Nous n'avons pas parlé d'orientation dans l'exposition de la théorie classique de Floer, nous suivons la démarche de Floer et Hofer exposée dans [11] dont nous donnons les étapes.

- (A) Fixer des trivialisations le long des tores d'orbites critiques $(S_p)_{p \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)}$.
- (B) Considérer l'ensemble $\mathcal{O}$ des opérateurs de la forme $\partial_s + A(s) : W^{1,p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N}) \oplus V \rightarrow L^{p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ avec V un espace vectoriel de dimension fini représentant les sections induites par l'action de groupe près des extrémités et $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} A(s)$ représentant un opérateur asymptotique lu dans les trivialisations précédemment choisies.
- (C) Les arguments avancés en section 6 permettent de montrer que $\mathcal{O}$ est constitué d'opérateurs de Fredholm. Soit le fibré $\mathcal{E}$ au dessus de $\mathcal{O}$ de fibre $\mathcal{E}_L := (\bigwedge^{\max} \ker L) \otimes (\bigwedge^{\max} \text{coker } L)^*$. Si l'on considère la restriction de $\mathcal{E}$ au dessus de $\mathcal{O}_{L^+, L^-}$, l'ensemble des opérateurs sur le cylindre admettant $L^\pm$ comme opérateurs asymptotiques, alors, comme cet ensemble est contractile, ce fibré est globalement trivialisable.
- (D) Orienter $\mathcal{E}$ au-dessus de chaque morceau $\mathcal{O}_{L^+, L^-}$ de sorte à ce que l'application de recollement $\mathcal{O}_{L_1, L_2} \times \mathcal{O}_{L_2, L_3}$ préserve l'orientation au niveau des fibrés.
- (E) Étant donné $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, choisir une trivialisation le long de U coïncidant avec celles préalablement choisies le long des asymptotes. Dans ces coordonnées, $(D\partial_{J,H})_U$ représente donc un opérateur dans $L \in \mathcal{O}$, s'il est surjectif, orienter son noyau revient à orienter $(\bigwedge^{\max} \ker L) \otimes (\bigwedge^{\max} \text{coker } L)^*$. Nous pouvons choisir l'orientation donnée par celle de $\mathcal{E}$ et vérifier que l'on obtient bien une orientation sur $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ rendant l'application de recollement orientée.

Pour chaque orbite critique S_p choisissons un élément $p = (\gamma, z) \in S_p$. Nous choisissons une base $(X_i)_{i=1\dots n} \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ ainsi que $(Y_k)_{k=1\dots n+N} \in T\hat{W} \times TE$ de sorte que $\{\underline{X}_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{Y_k \mid k \in \{1 \dots n+N\}\}$ est une base le long de $\gamma(S^1) \times \{z\}$. Nous notons $L_p : H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n+N}) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ l'opérateur asymptotique D_p dans ces coordonnées. Soit $p' = (\gamma', z') = g \cdot (\gamma, z) \in S_p$ une orbite dans la même variété critique, alors $\{g_* \underline{X}_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{g_* Y_k \mid k \in \{1 \dots n+N\}\}$ est une base le long de $\gamma'(S^1) \times \{z'\}$ et, dans la trivialisation induite, l'opérateur asymptotique $D_{p'}$ a aussi pour expression L_p car $D_{p'} = g_* \circ D_p \circ g_*^{-1}$.

Il vient, par notre choix de trivialisation pour chaque orbite critique, qu'il correspond *un unique opérateur par variété critique* S_p que nous notons $L_p : H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n+N}) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$. Soient $p_1, p_2 \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, nous définissons maintenant $\mathcal{O}_{L_{p_1}, L_{p_2}}$ l'ensemble des opérateurs de la forme $L = \partial_s + A(s) : W^{1,p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N}) \oplus V \rightarrow L^{p,\delta}(\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^{2n+N})$ avec

- (a) $\lim_{s \rightarrow -\infty} A(s) = L_{p_1}$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} A(s) = L_{p_2}$,
- (b) $V = V_1 \oplus V_2$ où V_1 (resp. V_2) est engendré par $\beta^- X$ (resp. $\beta^+ X$) avec $X \in \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{n+N}}\}$ et β^- (resp. β^+) est une fonction valant 1 (resp. 0) près de $-\infty$ et 0 (resp. 1) près de $+\infty$.

Comme L_{p_i} correspond à un opérateur asymptotique, encore une fois, le raisonnement ef-

fectué dans la section 6 permet d'affirmer que tous les opérateurs $L \in \mathcal{O}_{L_{p_1}, L_{p_2}}$ sont aussi Fredholm de même indice. Si l'indice reste constant, la dimension du noyau et du conoyau sont susceptibles de changer, il n'est donc pas possible de munir $\cup_L \ker(L)$ de structure de fibré. Cependant, $\mathcal{E}$ introduit en début de section admet une structure de fibré au dessus de $\mathcal{O}_{L_{p_1}, L_{p_2}}$, nous renvoyons à [11] pour la preuve du lemme suit :

Lemme 8.3.1. $\mathcal{E}_{L_{p_1}, L_{p_2}} := \coprod_{L \in \mathcal{O}_{L_{p_1}, L_{p_2}}} (\bigwedge^{max} \ker L) \otimes (\bigwedge^{max} \text{coker } L)^*$ admet une structure de fibré en droite au dessus de $\mathcal{O}_{L_{p_1}, L_{p_2}}$ lui même contractile, ce fibré est donc trivialisable.

Remarque 8.3.1. Le fait que $\mathcal{O}_{L_{p_1}, L_{p_2}}$ soit contractile est (presque) immédiat. C'est un ensemble convexe car une combinaison convexe d'opérateurs ayant les mêmes asymptotes aura aussi les mêmes asymptotes.

Nous exposons maintenant la procédure pour orienter ces différents fibrés. Si les différents opérateurs $(D\partial_{J,H})_U$, $U \in \mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2})$ donnent naissance à des éléments de $\mathcal{O}_{p_1, p_2}$, nous orientons $\mathcal{E}_{L_{p_1}, L_{p_2}}$ au dessus de chaque $L \in \mathcal{O}_{p_1, p_2}$ quand bien même ils ne correspondent à aucune donnée géométrique. La procédure repose sur une construction du gluing déjà évoquée dans un cadre "géométrique" mais qui a son analogue purement "fonctionnel".

Soit $R > 0$, $(p_i) \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $L_1 = \partial_s + A_1(s) \in \mathcal{O}_{p_1, p_2}$ (resp. $L_2 = \partial_s + A_2(s) \in \mathcal{O}_{p_2, p_3}$) avec $A_1(s) = D_{p_2}$ (resp. $A_2(s) = D_{p_2}$) pour $s \geq R$ (resp. $s \leq -R$). Alors pour $\rho \geq R$, A_ρ donné par $A_\rho(s) = A_1(s + \rho)$ si $s \geq 0$ et $A_\rho(s) = A_2(s - \rho)$ si $s \leq 0$ est bien défini ainsi que $L_\rho = \partial_s + A_\rho \in \mathcal{O}_{p_1, p_3}$. Lorsque L_1 et L_2 sont surjectifs, on peut montrer, comme dans le recollement géométrique, que L_ρ est surjectif aussi pourvu que ρ soit assez grand. On peut aussi montrer (voir Proposition 9 de [11]) que la projection orthogonale P_ρ sur $\ker(L_\rho)$, restreinte à $\ker L_1 \times_\Delta \ker L_2 = (\ker L_1 \times \ker L_2) \cap (W^{1,p,\delta} \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \Delta)$ où Δ désigne encore la diagonale, est un isomorphisme (intuitivement, le noyau de L_ρ est proche de la concaténation des sections incluses dans les noyaux de L_1 et L_2). Dans ce cas de figure, $\mathcal{E}$ au dessus de L_1 , L_2 , L_ρ n'est autre que le noyau de ces opérateurs et deux orientations définissent de manière univoque une troisième orientation de sorte que P_ρ préserve l'orientation. Si les opérateurs en jeu ne sont pas surjectifs ou asymptotiquement constants, il reste néanmoins possible de les recoller, donnant naissance à une application $\# : \mathcal{O}_{p_1, p_2} \times \mathcal{O}_{p_2, p_3} \rightarrow \mathcal{O}_{p_1, p_3}$ qui remonte en un morphisme de fibré orienté $\mathcal{E}_{p_1, p_2} \otimes \mathcal{E}_{p_2, p_3} \rightarrow \mathcal{E}_{p_1, p_3}$. Nous décrivons maintenant un "algorithme" pour choisir des orientations cohérentes. Choisissons un point critique p_0 .

- (A) Nous orientons $\mathcal{E}_{p_0, p_0}$. Pour établir la transversalité, nous avons vu que l'opérateur $\partial_s + D_{p_0}$ était surjectif et que son noyau était composé des sections constantes nulles sauf pour les n premières coordonnées. Cet opérateur correspond au linéarisé de $\partial_{J,H}$ le long d'une trajectoire constante, le noyau est engendré par l'action torique et nous choisissons donc l'orientation induite par $\mathbb{T}^n$.
- (B) Nous orientons chaque composante de $(\mathcal{E}_{p_0, p})_{p \neq p_0}$ arbitrairement.

- (C) Nous orientons chaque composante de $(\mathcal{E}_{p,p_0})_{p \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)}$ de sorte que $\# : \mathcal{E}_{p_0,p} \times \mathcal{E}_{p,p_0} \rightarrow \mathcal{E}_{p_0,p_0}$ préserve l'orientation. Les deux choix d'orientation pour $\mathcal{E}_{p_0,p_0}$ coïncident. Il suffit de le vérifier pour $\partial_s + D_{p_0}$. Or, son noyau étant composé de sections à coordonnées constantes, la projection orthogonale

$$\ker(\partial_s + D_{p_0}) \times_{\Delta} \ker(\partial_s + D_{p_0}) \simeq \ker(\partial_s + D_{p_0}) \longrightarrow \ker(\partial_s + D_{p_0})$$

n'est autre que l'identité.

- (D) On oriente finalement les composantes de $(\mathcal{E}_{p_1,p_2})_{p_1,p_2 \in \text{Crit} \mathcal{A}_H \setminus \{p_0\}}$ de sorte que $\#^2 : \mathcal{E}_{p_0,p_1} \times \mathcal{E}_{p_1,p_2} \times \mathcal{E}_{p_2,p_0} \rightarrow \mathcal{E}_{p_0,p_0}$ préserve l'orientation.

Une fois une trivialisations équivariante choisie pour chaque S_p , étant donné $U \in \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, nous choisissons une trivialisations le long de U coïncidant avec celles préalablement choisies le long des orbites. L'opérateur $(D\partial_{J,H})_U$ induit en coordonnées un élément de $L \in \mathcal{O}_{p^+,p^-}$ et l'orientation de $(\mathcal{E}_{p^+,p^-})_L$ induit donc une orientation de $\ker(D\partial_{J,H})_u = T_U \mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$, puis sur chacun des quotients.

Convention 1. *Nous adoptons les conventions d'orientation suivantes.*

- (I) *Soit M^m une variété orientée munie d'une action lisse, libre, propre et préservant l'orientation d'un groupe de Lie G^n lui aussi orienté. Nous orientons le quotient comme suit :*

$(Z_1, \dots, Z_{m-n})$ est une base orientée de TM/G si $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{m-n})$ est une base orientée de TM avec $(X_1, \dots, X_n)$ une base orientée de G et $\pi_(Y_i) = Z_i$, $i = 1 \dots m-n$. Dans notre cas, G désignera $\mathbb{R}, \mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$.*

- (II) *Soit $p_i \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $i = 1, 2, 3$ trois points critiques préalablement choisis dans les variétés critiques correspondantes S_{p_i} avec $\mu(p_{i+1}) - \mu(p_i) = 1$, $i \in \{1, 2\}$.*

Ces choix nous permettent d'identifier chaque S_{p_i} avec $\mathbb{T}^n$ et nous orientons les produits fibrés $\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_{p_2}, S_{p_3})$ suivant la suite exacte

$$0 \rightarrow T(\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_{p_2}, S_{p_3})) \rightarrow T\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2}) \oplus T\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2}) \rightarrow T\mathbb{T}^n \rightarrow 0$$

où la première flèche désigne l'inclusion et la deuxième $-\underline{ev}_ + \overline{ev}_*$.*

Si $(Z_1, \dots, Z_k, Y_1, \dots, Y_n)$ est une base orientée de $T\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2}) \oplus T\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2})$ et l'image de $(Y_1, \dots, Y_n)$ par $-\underline{ev}_ + \overline{ev}_*$ est une base orientée de $T\mathbb{T}^n$, alors $(Z_1, \dots, Z_k)$ est une base orientée de $T(\mathcal{M}(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_{p_2}, S_{p_3}))$. Nous orientons de la même manière les espaces $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p_2}, S_{p_3})$.*

Nous concluons cette section avec la proposition suivante qui permettra de définir la différentielle de notre futur complexe.

Proposition 8.3.1. *Soient $p_i \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $i = 1, 2, 3$ avec $\mu(p_{i+1}) - \mu(p_i) = 1$, $i \in \{1, 2\}$ et $\psi : \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3}) \times [R_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^3})$ donné par le théorème 8.2.1. En tout point où $d\psi$ est inversible, il induit un isomorphisme d'espaces vectoriels orientés.*

Démonstration. En observant la construction de $\tilde{\psi}$ on peut montrer que $\tilde{\psi}_*(-\partial_s, \partial_s) = \partial_R$, nous notons

- (i) ∂_R pour désigner indifféremment le vecteur dérivé suivant le facteur $[R_0, +\infty[$ ou son image par ψ_* et $\tilde{\psi}_*$ (il n'y a pas d'ambiguïté possible),
- (ii) (a) $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{L}_1$) pour $\mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^2})$ (resp. pour $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^2})$),
- (b) $\mathcal{M}_2$ (resp. $\mathcal{L}_2$) pour $\mathcal{M}(S_{p^2}, S_{p^3})$ (resp. pour $\mathcal{L}(S_{p^2}, S_{p^3})$),
- (c) $\mathcal{M}_3$ (resp. $\mathcal{L}_3$) pour $\mathcal{M}(S_{p^1}, S_{p^3})$ (resp. pour $\mathcal{L}(S_{p^1}, S_{p^3})$).

Considérons les deux diagrammes suivants reliant les orientations des différents espaces :

$$\begin{array}{ccc}
 T\mathcal{M}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{d\tilde{\psi}} & T\mathcal{M}_3 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T\mathcal{L}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}_2 \times [R_0, +\infty[& \xrightarrow{d\psi} & T\mathcal{L}_3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & T\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T\mathcal{M}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & T\mathcal{L}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}_2
 \end{array}$$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ telle que $((\underline{X}_{1\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{L}_2}), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{L}_2}), \partial_R)$ soit une base orientée de $\mathcal{L}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}_2 \times [R_0, +\infty[$. Nous supposons que $(X_1, \dots, X_n)$ est aussi une base orientée du tore, l'autre cas se traite exactement de la même manière.

Alors, nous avons les bases orientées suivantes :

- (a) $((\underline{X}_{1\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{L}_2}), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{L}_2}))$ est une base orientée de $\mathcal{L}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}_2$,
- (b) $((\underline{X}_{1\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{L}_2}), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{L}_2}), (-\underline{X}_{1\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{L}_2}), \dots, (-\underline{X}_{n\mathcal{L}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{L}_2}))$ de $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$,
- (c) $((\underline{X}_{1\mathcal{L}_1}, 0), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{L}_1}, 0), (0, \underline{X}_{1\mathcal{L}_2}), \dots, (0, \underline{X}_{n\mathcal{L}_2}))$ de $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$,
- (d) $((\partial_s, 0), (\underline{X}_{1\mathcal{M}_1}, 0), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{M}_1}, 0), (0, \partial_s), (0, \underline{X}_{1\mathcal{M}_2}), \dots, (0, \underline{X}_{n\mathcal{M}_2}))$ de $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$,
- (e) $((\partial_s, \partial_s), (\underline{X}_{1\mathcal{M}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{M}_2}), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{M}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{M}_2}), (-\partial_s, \partial_s), (-\underline{X}_{1\mathcal{M}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{M}_2}), \dots, (-\underline{X}_{n\mathcal{M}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{M}_2}))$ de $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$,
- (f) $((\partial_s, \partial_s), (\underline{X}_{1\mathcal{M}_1}, \underline{X}_{1\mathcal{M}_2}), \dots, (\underline{X}_{n\mathcal{M}_1}, \underline{X}_{n\mathcal{M}_2}), (-\partial_s, \partial_s))$ de $\mathcal{M}_{1\overline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_2$.

Par le choix de notre algorithme d'orientation définie à partir des *opérateurs*, $\tilde{\psi}$ préserve l'orientation. Or sa différentielle envoie la dernière base sur $(\partial_s, \underline{X}_{1\mathcal{M}_3}, \dots, \underline{X}_{n\mathcal{M}_3}, \partial_R)$ qui est donc une base orientée de $T\mathcal{M}_3$. En passant au quotient, il vient que $(\underline{X}_{1\mathcal{L}_3}, \dots, \underline{X}_{n\mathcal{L}_3}, \partial_R)$ est orientée pour $\mathcal{L}_3$, or c'est précisément l'image par la différentielle de ψ de notre base orientée initialement choisie. $\square$

Chapitre 9

Homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante

9.1 Homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante

Fixons $N \in \mathbb{N}$, choisissons un représentant a pour chaque classe d'homotopie libre de lacets $[a]$, ainsi qu'une trivialisation de $a^*T\hat{W}$. Soit $(H, J, g) \in \mathcal{HJ}_{reg, \mathbb{T}^n}^N$ un triplet régulier avec H maximale non-dégénéré, de sorte que $\text{Crit}(\mathcal{A}_H)$ est une réunion finie d'orbites $\coprod_i S_{p_i}$. Comme en théorie de Floer classique, nous définissons un Λ_ω -module $C_*^{N,a}(H, J, g)$ dont la structure sous-jacente de module est $\bigoplus_{S_p \in \text{Crit } \mathcal{A}_H} \Lambda_\omega \cdot S_p$ où la somme porte sur les variétés critiques $S_p = \mathbb{T}^n \cdot p$ où $p = (\gamma, z)$ avec $[\gamma] = [a]$ (la classe d'homotopie libre de γ ne dépend pas du point critique p choisi dans S_p). La graduation est donnée par $|S_p \cdot e^A| = \mu_{RS}(S_p) - 2\langle c_1(T\hat{W}), A \rangle$ où $\mu_{RS}(S_p)$ désigne l'indice de Robbin-Salamon paramétré de $p = (\gamma, z)$, calculé dans une trivialisation le long d'une homotopie σ_γ fixée entre γ et $[a]$.

Nous définissons maintenant la différentielle sur $C_*^{N,a}(H, J, g)$ par

$$\partial^{\mathbb{T}^n}(S_{\bar{p}}) := \sum_{S_{\underline{p}} \mid |S_{\bar{p}}| - |S_{\underline{p}} e^A| = 1} \sum_{[U] \in \mathcal{L}_{\mathbb{T}^n}^A(S_{\bar{p}}, S_{\underline{p}})} \epsilon([U]) S_{\underline{p}} e^A$$

où $\epsilon([U])$ est obtenue en comparant l'orientation de $\mathcal{L}(S_{\bar{p}}, S_{\underline{p}})$ avec celle induite par $\mathbb{T}^n$, ou de manière équivalente, celle de $\mathcal{M}(S_{\bar{p}}, S_{\underline{p}})$ avec celle induite par $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$.

Comme en théorie de Floer classique, l'analyse menée dans le cas équivariant permet d'affirmer que, lorsque $|S_{\bar{p}}| - |S_{\underline{p}} e^A| = 1$, $\mathcal{L}_{\mathbb{T}^n}^A(S_{\bar{p}}, S_{\underline{p}})$ est une variété compacte de dimension 0. Elle admet donc un nombre fini d'éléments et la somme à droite est cohérente avec la structure de Λ_ω -module.

Définition/Proposition 9.1.1. *L'application $\partial^{\mathbb{T}^n}$ définit bien une différentielle sur le complexe $C_*^{N,a}(H, J, g)$:*

$$\partial^{\mathbb{T}^n} \circ \partial^{\mathbb{T}^n} = 0.$$

Nous définissons l'homologie symplectique torique en degré N pour la classe a associée à la paire (H, J, g) comme l'homologie du complexe construit précédemment,

$$\mathbb{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H, J, g) := H_*(C_*^{N, a}(H, J, g), \partial^{\mathbb{T}^n}).$$

Démonstration. Soient p_i , $i = 1, 2$ et $C \in H_2(\hat{W})$ avec $\mu(S_{p_1}) - \mu(S_{p_2}e^C) = 2$. Il s'agit de montrer

$$\sum_{S_p, A, B} \sum_{([U], [V]) \in \mathcal{L}_{\mathbb{T}^n}^A(S_{p_1}, S_p) \times \mathcal{L}_{\mathbb{T}^n}^B(S_p, S_{p_2})} \epsilon([U]) \epsilon([V]) e^{A+B} = 0$$

où la somme porte sur les triplets (p, A, B) vérifiant $A + B = C$, $|S_{p_1}| - |S_p e^A| = 1$ et $|S_p| - |S_{p_2} e^B| = 1$. Or cette somme compte (avec les orientations) les extrémités de $\mathcal{L}_{\mathbb{T}^n}^C(S_{p_1}, S_{p_2})$ qui est une variété de dimension 1. Par notre choix d'orientation nous savons déjà que, pour deux extrémités $([U_i], [V_i])$, $i = 1, 2$, comparer l'orientation $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_p, S_{p_2})$ avec celle induite par $\mathbb{T}^n$ donnera des signes opposés. Il faut donc vérifier que ce signe en question coïncide toujours avec celui $\epsilon([U])\epsilon([V])$. Montrons que, lorsque l'orientation de $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_p, S_{p_2})$ coïncide avec celle de $\mathbb{T}^n$ alors $\epsilon([U])\epsilon([V]) = 1$ (l'autre cas étant similaire). Nous reprenons les notations de la proposition 8.3.1.

Soit $(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{lie}(\mathbb{T}^n)$ une base orientée du tore, alors nous avons :

- (a) $((\underline{X}_{1_{\mathcal{L}_1}}, \underline{X}_{1_{\mathcal{L}_2}}), \dots, (\underline{X}_{n_{\mathcal{L}_1}}, \underline{X}_{n_{\mathcal{L}_2}}))$ une base orientée de $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}(S_p, S_{p_2})$,
- (b) $((\underline{X}_{1_{\mathcal{L}_1}}, \underline{X}_{1_{\mathcal{L}_2}}), \dots, (\underline{X}_{n_{\mathcal{L}_1}}, \underline{X}_{n_{\mathcal{L}_2}}), (-\underline{X}_{1_{\mathcal{L}_1}}, \underline{X}_{1_{\mathcal{L}_2}}), \dots, (-\underline{X}_{n_{\mathcal{L}_1}}, \underline{X}_{n_{\mathcal{L}_2}}))$ une base orientée de $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_p) \times \mathcal{L}(S_p, S_{p_2})$, et
- (c) $((\underline{X}_{1_{\mathcal{L}_1}}, 0), \dots, (\underline{X}_{n_{\mathcal{L}_1}}, 0), (0, \underline{X}_{1_{\mathcal{L}_2}}), \dots, (0, \underline{X}_{n_{\mathcal{L}_2}}))$ une base orientée de $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_p) \times \mathcal{L}(S_p, S_{p_2})$.

Donc, soit l'orientation de $\mathcal{L}(S_{p_1}, S_p)$ et de $\mathcal{L}(S_p, S_{p_2})$ coïncident toutes deux avec celle de $\mathbb{T}^n$, ce qui correspond à $\epsilon([U]) = 1 = \epsilon([V])$, soit elles sont toutes deux opposées, ce qui correspond à $\epsilon([U]) = -1 = \epsilon([V])$. Dans les deux cas $\epsilon([U]) = \epsilon([V])$ et $\epsilon([U])\epsilon([V]) = 1$. $\square$

Définition/Théorème 9.1.1. Soit (W, ω, μ) une variété torique sans bord vérifiant l'hypothèse 2.

- (A) Soit $(H_i, J_i, g_i)_{i=1,2} \in \mathcal{H}_{reg, \mathbb{T}^n}^N$ deux triplets réguliers avec H_1, H_2 maximalement non-dégénérés.
- (i) Si $\partial W = \emptyset$, alors

$$\mathbb{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_1, J_1, g_1) \simeq \mathbb{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_2, J_2, g_2)$$

et cet isomorphisme est canonique.

Nous définissons $\mathbb{SH}^{\mathbb{T}^n, N, a}(W, \omega, \mu)$ l'homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante en degré N pour la classe libre d'homotopie a de (W, ω, μ) par $\mathbb{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H, J, g)$ avec (H, J, g) n'importe quel triplet régulier.

(ii) Si $H_1 \leq H_2$ sur $\partial W \times [T, +\infty[$ pour un certain $T \in \mathbb{R}$, alors il existe un morphisme

$$\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_1, J_1, g_1) \rightarrow \mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_2, J_2, g_2).$$

Nous définissons $\mathrm{SH}^{\mathbb{T}^n, N, a}(W, \mu, \omega)$ l'homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante en degré N pour la classe libre d'homotopie a de (W, ω, μ) par

$$\varinjlim_H \mathrm{SH}^{\mathbb{T}^n, N, a}(H, J, g)$$

où les flèches intervenant dans la limite sont induites par les morphismes

$$\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_1, J_1, g_1) \rightarrow \mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_2, J_2, g_2)$$

lorsque $H_1 \leq H_2$ sur $[T, +\infty[$ pour un certain $T \in \mathbb{R}$.

(B) Nous définissons alors l'homologie torique symplectique équivariante pour la classe d'homotopie a de W par

$$\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, a}(W) := \varinjlim_N \mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(W)$$

où les morphismes $\mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(W) \rightarrow \mathrm{SH}_*^{\mathbb{T}^n, N+1, a}(W)$ sont induits en étendant $H_1 \in \mathcal{H}_N^{\mathbb{T}^n}$ en $H_2 \in \mathcal{H}_{N+1}^{\mathbb{T}^n}$ de manière équivariante et de même pour les structures presque complexes et les métriques.

Démonstration. L'équivalence d'homotopie entre métriques riemaniennes et structures presque complexes induit une équivalence d'homotopie au niveau des métriques/structures presque complexes équivariantes pour l'action torique, en particulier $\mathcal{J}_N^{\mathbb{T}^n}$ est contractile et donc connexe.

La démonstration se calque sur celle en théorie de Floer classique.

(i) Si $\partial W = \emptyset$ ou si $H_1 \leq H_2$ asymptotiquement, alors on peut trouver une homotopie $(H_s, J_s, g_s)_{0 \leq s \leq 1}$ entre les deux triplets, stationnaire pour $|s| \geq 1$.

Soit $p_1 \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H_1})$, $p_2 \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_{H_2})$, nous notons $\mathcal{M}_{1,2}(S_{p_1}, S_{p_2})$ les couples $U = (u, \lambda)$ vérifiant :

(a) les équations :

$$\begin{cases} \partial_s u + J_{s, \lambda(s)}^\theta (\partial_\theta u - X_{H_{s, \lambda(s)}}^\theta(u)) = 0, \\ \dot{\lambda}(s) - \int_{S^1} \nabla_z H_s^\theta(u(s, \theta), \lambda(s)) d\theta = 0 \end{cases}$$

(b) et les limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} U(s, \cdot) \in S_{p_1}$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} U(s, \cdot) \in S_{p_2}$.

Les arguments avancés dans les trois sections précédentes permettent de montrer que, pour une homotopie générique, $\mathcal{M}_{1,2}(S_{p_1}, S_{p_2})$ admet une structure de variété différentielle. Lorsque l'on regarde comment une suite de trajectoires $([U_n])_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{1,2}(S_{p_1}, S_{p_2})$

peut dégénérer, on observe qu'elle se compactifie en une variété à bord :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{1,2}(S_{p_1}, S_{p_2}) := \mathcal{M}_{1,2}(S_{p_1}, S_{p_2}) \amalg & \left(\coprod_{S_p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_1})} \mathcal{M}(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_{1,2}(S_p, S_{p_2}) \right) \\ & \amalg \left(\coprod_{S_p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_2})} \mathcal{M}_{1,2}(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}(S_p, S_{p_2}) \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons orienter les différents espaces $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{1,2}$ de sorte que l'orientation en tant que bord coïncide avec celle préalablement choisie. Soit $A \in H_2(W)$, nous notons $\mathcal{M}_{1,2}^A(S_{p_1}, S_{p_2}) \subset \mathcal{M}_{1,2}(S_{p_1}, S_{p_2})$ l'ensemble des éléments $U = (u, \lambda)$ avec $[\sigma_{\gamma_1} \# u \# \overline{\sigma_{\gamma_2}}] = A$ et le quotient $\mathcal{M}_{1,2, \mathbb{T}^n}^A(S_{p_1}, S_{p_2}) := \mathcal{M}_{1,2}^A(S_{p_1}, S_{p_2}) / \mathbb{T}^n$.

Nous définissons $\Phi : C_*^{N,a}(H_1, J_1, g_1) \rightarrow C_*^{N,a}(H_2, J_2, g_2)$ par

$$\Phi(S_{p_1}) = \sum_{S_{p_2}, A \mid |S_{p_1}| - |S_{p_2}| e^A = 0} \sum_{[U] \in \mathcal{M}_{1,2, \mathbb{T}^n}^A(S_{p_1}, S_{p_2})} \epsilon([U]) e^A S_{p_2}.$$

C'est un morphisme d'espaces vectoriels gradués de degré 0, montrons qu'il commute avec la différentielle. Le morphisme $\Phi \circ \partial^{\mathbb{T}^n} + \partial^{\mathbb{T}^n} \circ \Phi$ est de degré -1 , la composante en $S_{p_2} e^C$ de l'image de S_{p_1} par ce dernier correspond au compte algébrique des éléments de

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}_{1,2}^C(S_{p_1}, S_{p_2}) := & \left(\coprod_{A, B \mid A+B=C} \coprod_{S_p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_1})} \mathcal{M}^A(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_{1,2}^B(S_p, S_{p_2}) \right) \\ & \amalg \left(\coprod_{A, B \mid A+B=C} \coprod_{S_p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_2})} \mathcal{M}_{1,2}^A(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}^B(S_p, S_{p_2}) \right) \end{aligned}$$

et est par conséquent nul : Φ induit bien un morphisme en homologie noté Φ_* .

(ii) Les morphismes induits

$$H_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_1, J_1, g_1) \rightarrow H_*^{\mathbb{T}^n, N, a}(H_2, J_2, g_2)$$

ne dépendent pas de l'homotopie en question.

En raisonnant sur la simple connexité de $\mathcal{J}_N^{\mathbb{T}^n}$, étant données deux homotopies (H_s^1, J_s^1, g_s^1) , (H_s^2, J_s^2, g_s^2) , on peut trouver une "homotopie d'homotopies" : $(H_s^\tau, J_s^\tau, g_s^\tau)_{\tau \in [0,1]}$. De la même manière, on montre facilement que les espaces

$$\mathcal{M}_\tau(S_{p_1}, S_{p_2}) := \{(U, \tau) \mid \partial_{J_s^\tau, H_s^\tau} U = 0, \lim_{s \rightarrow -\infty} U(s, \cdot) \in S_{p_1}, \lim_{s \rightarrow +\infty} U(s, \cdot) \in S_{p_2}\}$$

admettent une structure de variété différentielle modulo une perturbation de l'homotopie d'homotopies. Remarquons que si les deux premières homotopies sont stationnaires pour $|s| \geq 1$, on peut aussi choisir $(H_s^\tau, J_s^\tau, g_s^\tau)$ ainsi pour tout τ , de sorte que chaque U a ses limites dans des variétés critiques fixées.

On définit pareillement $\mathcal{M}_\tau^A(S_{p_1}, S_{p_2})$ pour $A \in H_2(W)$ et on observe que c'est une variété de dimension $\mu_{RS}(p_2) - \mu_{RS}(p_1) + 2c_1(A) + 1 + n$. En effet, $D\partial_{J_\tau^s, H_\tau^s} : W^{1,p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times TE)) \rightarrow L^{p,\delta}(U^*(T\hat{W} \times TE))$ est Fredholm d'indice $\mu_{RS}(p_2) - \mu_{RS}(p_1) + 2c_1(A) + n$, donc $\mathcal{F}$ définie sur $\mathcal{B}_{1,p,\delta}(S_{p_1}, S_{p_2}) \times [0, 1]$ par $\mathcal{F}(\tau, U) = \partial_{H_\tau^s, J_\tau^s} U$ a sa différentielle Fredholm d'indice $\mu_{RS}(p_2) - \mu_{RS}(p_1) + 2c_1(A) + n + 1$ et $\mathcal{F}^{-1}(0)$ admet une structure de variété différentielle de même dimension, près de n'importe quel point régulier. Considérons deux cas particuliers.

(a) $\mu_{RS}(p_2) - \mu_{RS}(p_1) + 2c_1(A) + n = n - 1$.

Alors $\mathcal{M}_{\tau, \mathbb{T}^n}^A(S_{p_1}, S_{p_2}) := \mathcal{M}_\tau^A(S_{p_1}, S_{p_2})/\mathbb{T}^n$ est fini. En effet, supposons par contradiction qu'il existe une suite d'éléments $([U_n], \tau_n)$ distincts deux à deux, alors on peut extraire une sous-suite convergeant localement vers $([V], \tau_\infty)$.

Nécessairement, comme $\mathcal{M}_{\tau, \mathbb{T}^n}^A(S_{p_1}, S_{p_2})$ est discret, $[V]$ ne peut avoir ses deux asymptotes dans S_{p_1} et S_{p_2} *en même temps*. La suite $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une trajectoire brisée et, comme lorsque l'on démontre la compacité, en reparamétrisant en s on peut obtenir la convergence vers un élément $U \in \mathcal{M}(S_{p_1}, S_p)$ avec $\partial_{J_1, H_1} U = 0$ ou bien $U \in \mathcal{M}(S_p, S_{p_2})$ avec $\partial_{J_2, H_2} U = 0$. Or (H_i, J_i, g_i) sont des triplets réguliers et l'existence de telles trajectoires est proscrite pour des raisons d'indice.

(b) $\mu_{RS}(p_2) - \mu_{RS}(p_1) + 2c_1(A) + n = n$.

Nous voulons décrire le bord $\mathcal{M}_\tau(S_{p_1}, S_{p_2})$. Hormis $\mathcal{M}_i := \{(i, U) | \partial_{J_i, H_i} U = 0\}$ avec $i \in \{1, 2\}$, les trajectoires dégénèrent de la même manière : une suite (U_n, τ_n) converge soit vers $(U, [V], \tau_0)$ avec $U \in \mathcal{M}_\tau(S_{p_1}, S_p)$ et $V \in \mathcal{M}(S_p, S_{p_2})$ vérifiant $\partial_{J_2, H_2} V = 0$, soit vers $([U], V, \tau_0)$ avec $U \in \mathcal{M}(S_{p_1}, S_p)$ vérifiant $\partial_{J_1, H_1} U = 0$ et $V \in \mathcal{M}_\tau(S_p, S_{p_2})$.

En conclusion, $\mathcal{M}_\tau^C(S_{p_1}, S_{p_2})$ admet pour compactification :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_\tau^C(S_{p_1}, S_{p_2}) := & \mathcal{M}_\tau^C(S_{p_1}, S_{p_2}) \coprod \mathcal{M}_1^C \coprod \mathcal{M}_2^C \\ & \coprod \left(\coprod_{\substack{S_p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_2}), A, B \\ |S_{p_2}| - |S_p| + 2c_1(A+B) = 0, A+B=C}} \mathcal{M}_\tau^A(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{L}^B(S_p, S_{p_2}) \right) \\ & \coprod \left(\coprod_{\substack{S_p \subset \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_1}), A, B \text{ t.q.} \\ |S_p| - |S_{p_1}| + 2c_1(A+B) = 0, A+B=C}} \mathcal{L}^A(S_{p_1}, S_p)_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_\tau^B(S_p, S_{p_2}) \right). \end{aligned}$$

Soit $\Psi : C_*^{N,a}(H_1, J_1, g_1) \rightarrow C_*^{N,a}(H_2, J_2, g_2)$ défini par

$$\Psi(S_{p_1}) = \sum_{S_{p_2}, A || S_{p_1}| - |S_{p_2}| e^A = -1} \sum_{([U], \tau) \in \mathcal{M}_{\tau, \mathbb{T}^n}^A(S_{p_1}, S_{p_2})} \epsilon([U]) e^A S_{p_2}$$

D'après (a), cette somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de τ et c'est un morphisme de degré +1. En notant Φ_i les morphismes associés à l'homotopie (H_s^i, J_s^i, g_s^i) , $i \in \{1, 2\}$,

la décomposition précédente donne

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Psi \circ \partial^{\mathbb{T}^n} + \partial^{\mathbb{T}^n} \circ \Psi.$$

Les morphismes Φ_1 et Φ_2 induisent donc le même morphisme en homologie et nous le désignons par $\Phi_{(H_1, J_1, g_1)}^{(H_2, J_2, g_2)}$.

(iii) Ces morphismes vérifient

$$\Phi_{(H_1, J_1, g_1)}^{(H_2, J_2, g_2)} \circ \Phi_{(H_2, J_2, g_2)}^{(H_3, J_3, g_3)} = \Phi_{(H_1, J_1, g_1)}^{(H_3, J_3, g_3)}.$$

Soit (H_s^i, J_s^i, g_s^i) deux homotopies entre (H_i, J_i, g_i) et $(H_{i+1}, J_{i+1}, g_{i+1})$ avec $i \in \{1, 2\}$, stationnaires pour $|s| \geq 1$. Nous définissons pour $R \geq 1$:

$$(H_R, J_R, g_R) = \begin{cases} (H_s^1(s+R), J_s^1(s+R), g_s^1(s+R)) & \text{pour } s \leq 0, \\ (H_s^2(s-R), J_s^2(s-R), g_s^2(s-R)) & \text{pour } s \geq 0 \end{cases}$$

qui est une homotopie entre (H_1, J_1, g_1) et (H_2, J_2, g_2) .

Soit U_i solution de $\partial_{J_s^i, H_s^i} U = 0$ avec pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} U_i(s, \cdot) = p_i \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_i})$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} U_i(s, \cdot) = p_{i+1} \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_{i+1}})$. Alors, comme chaque triplet est régulier, $D\partial_{J_R, H_R}$ est inversible à droite pour R assez grand, et on peut trouver une unique solution W_R de $\partial_{J_R, H_R} W_R = 0$ convergeant, quand $R \rightarrow +\infty$ vers la trajectoire brisée (U_1, U_2) . Réciproquement, toute solution est, pour R assez grand, proche d'une telle trajectoire brisée. Montrons cela par contradiction. Notons $\mathcal{M}_i(\cdot, \cdot)$ les solutions de $\partial_{J_s^i, H_s^i} U = 0$ avec $i \in \{1, 2\}$. Supposons qu'il existe $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solutions de $\partial_{J_{R_n}, H_{R_n}} W_n = 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$d\left(W_n, \coprod_{p_i \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{H_i})} \mathcal{M}_1(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_2(S_{p_2}, S_{p_3})\right) > \delta.$$

Par compacité, on peut extraire une sous-suite convergente et la limite sera forcément une trajectoire brisée $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_1(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_2(S_{p_2}, S_{p_3})$ d'où la contradiction. Les couples $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_1(S_{p_1}, S_{p_2})_{\underline{ev}} \times_{\overline{ev}} \mathcal{M}_2(S_{p_2}, S_{p_3})$ sont en bijection avec les solutions W_R de $\partial_{J_R, H_R} W_R = 0$ et les orientations coïncident : nous les avons choisies de sorte à rendre les recollements orientés. En regardant l'expression de $\Phi_{(H_1^s, J_s^1, g_s^1)} \circ \Phi_{(H_s^2, J_s^2, g_s^2)}(S_p)$ on voit qu'elle coïncide avec celle de $\Phi_{(H_R, J_R, g_R)}(S_p)$. Comme les morphismes induits en homologie ne dépendent que des extrémités on déduit

$$\Phi_{(H_1, J_1, g_1)}^{(H_2, J_2, g_2)} \circ \Phi_{(H_2, J_2, g_2)}^{(H_3, J_3, g_3)} = \Phi_{(H_1, J_1, g_1)}^{(H_3, J_3, g_3)}.$$

(iv) Finalement, on a

$$\Phi_{(H_1, J_1, g_1)}^{(H_1, J_1, g_1)} = Id.$$

C'est immédiat en prenant l'homotopie constante $(H_s^1, J_s^1, g_s^1) = (H_1, J_1, g_1)$. Pour $p \in \text{Crit}(\mathcal{A}_H)$, $\mathcal{M}(S_p, S_{p'})$ est vide sauf si $S_p = S_{p'}$ et les seules trajectoires correspondent à $U(s, \cdot) = \Theta.p$ avec $\Theta \in \mathbb{T}^n$. L'homotopie induit l'identité au niveau du complexe, a fortiori, elle induit l'identité en homologie. $\square$

Remarque 9.1.1. *Nous avons affirmé que les raisonnements effectués dans les sections précédentes s'appliquaient mot pour mot afin d'obtenir toutes les propriétés pour les nouveaux espaces de solutions introduits. Le lecteur pourra vérifier que les propriétés de décroissance exponentielle et d'être Fredholm ne dépendent que du comportement asymptotique des solutions. Ici, les cylindres considérés satisfont la même équation quand $s \rightarrow \pm\infty$. La compacité et l'existence de bonnes orientations se montrent de la même manière et la structure de variété ainsi que le gluing reposent sur la surjectivité des opérateurs linéarisés.*

Pour obtenir cette dernière propriété nous avons conjecturé l'existence de points injectifs afin de pouvoir perturber les différentes données, ici la transversalité est bien plus simple à établir. Rajouter des paramètres (en s ou τ) nous permet de perturber au niveau du domaine de définition même $\mathbb{R} \times S^1$ ou bien $\mathbb{R} \times S^1 \times [0, 1]$. Nous n'avons pas besoin de nous soucier des points ou des orbites où les cylindres sont susceptibles de repasser deux fois et compenser une perturbation effectuée, on peut "localiser" les perturbations en s , le lecteur pourra s'en assurer directement en adaptant la démonstration.

9.2 Calcul de l'homologie dans le cas fermé : $\partial W = \emptyset$

Comme en théorie de Floer classique, où l'on prouve $\text{SH}_*(W, \omega) \simeq H_*(W, \Lambda_\omega)$ à un degré près en comparant les complexes de Morse et de Floer, nous aimerions ici nous ramener au cas Morse-Bott. Pour ce, nous regardons, lorsque W est fermée, une classe particulière de fonctions sur $W \times (S^{2N+1})^n$ pour lesquelles l'homologie $\mathbb{T}^n$ -équivariante est bien définie et coïncide aussi avec l'homologie équivariante définie en section 5 comme $\varinjlim_N H_*(W \times (S^{2N+1})^n)$.

Définition/Proposition 9.2.1. *Soit $\mathcal{H}_{\text{split}, \mathbb{T}^n}^N$ l'ensemble des Hamiltoniens de la forme $H(\theta, x, y) = f(x) + g(y)$ avec f (resp. g) une fonction de Morse-Bott équivariante sur W (resp. $(S^{2N+1})^n$) vérifiant les points suivants.*

- (a) *L'ensemble des variétés critiques de f (resp. g) est une réunion finie disjointe d'orbites $\coprod_i \mathbb{T}^n.x_i$ (resp. $\coprod_j \mathbb{T}^n.y_j$).*
- (b) *L'action sur W est libre près des x_i ou, de manière équivalente, ces derniers sont envoyés dans l'intérieur du polytope associé à (W, ω, μ) par l'application moment μ .*
- (c) *H est C^2 petit, de sorte que les orbites périodiques correspondent précisément aux points critiques de H .*

Alors, pour tous $H \in \mathcal{H}_{split, \mathbb{T}^n}^N$, $\epsilon > 0$, il existe $(\tilde{H}, J, g) \in \mathcal{H}\mathcal{J}_{*, \mathbb{T}^n}^N$ vérifiant la condition (*) introduite dans la définition 7.2.1 vérifiant $\|H - \tilde{H}\| < \epsilon$.

Démonstration. Nous allons perturber H en une fonction équivariante pour l'action *diagonale* dont les points critiques auront leurs coordonnées suivant W et $(S^{(2N+1)})^n$ deux à deux distinctes. Dans chaque variété critique de f (resp. g), nous choisissons un point x_i (resp. y_j) de sorte que les points critiques de f (resp. g) forment une union disjointe d'orbites $\coprod_i \mathbb{T}^n.x_i$ (resp. $\coprod_j \mathbb{T}^n.y_j$). Ainsi, les points critiques de H forment une union disjointe $\coprod_{i,j} \mathbb{T}^n.x_i \times \mathbb{T}^n.y_j$.

Choisissons une trivialisations équivariante près de chaque orbite $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{2nN}$) avec U_i (resp. V_j) un voisinage de $\mathbb{T}^n.x_i$ (resp. de $\mathbb{T}^n.y_j$) dans W (resp. $(S^{2N+1})^n$) identifiant $\mathbb{T}^n.x_i$ (resp. $\mathbb{T}^n.y_j$) avec $\mathbb{T}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ (resp. $\mathbb{T}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{2nN}}\}$) et n'intersectant pas d'autres variétés critiques. Ainsi $(\phi_i, \psi_j)_{(i,j) \in I \times J}$ donnent des coordonnées autour de chaque variété critique de H et au voisinage de celles-ci, H s'écrit en coordonnées :

$$H(\Theta_1, \dots, \Theta_n, w_1, \dots, w_n, \tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n, z_1, \dots, z_{2nN}) = \tilde{f}(w_1, \dots, w_n) + \tilde{g}(z_1, \dots, z_n)$$

avec $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{g}$) une fonction de Morse sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^{2nN}$) admettant $\{0\}$ pour unique point critique. Soient

- (a) ϵ une fonction de Morse $\mathbb{T}^n$ et $(\epsilon_k)_{k \in K}$ ses points critiques,
- (b) $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{R}^n$ des points deux à deux distincts,
- (c) $(b_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{R}^{2nN}$ des points deux à deux distincts,
- (d) $\rho : \mathbb{R}^{2nN} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction à support contenu dans un voisinage de 0 valant 1 sur un voisinage de 0.

Soit

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\Theta_1, \dots, \Theta_n, w_1, \dots, w_n, \tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n, z_1, \dots, z_{2nN}) \\ = \tilde{f}(w_1, \dots, w_n) + \tilde{g}(z_1, \dots, z_n) \\ + \rho(w_1, \dots, w_n, z_1, \dots, z_{2nN}) \cdot \left[\tilde{f}((w_1, \dots, w_n) - a_{i,j}) - \tilde{f}(w_1, \dots, w_n) \right. \\ \left. + \tilde{g}((z_1, \dots, z_n) - b_{i,j}) - \tilde{g}(z_1, \dots, z_n) \right] \\ + \rho(w_1, \dots, w_n, z_1, \dots, z_{2nN}) \cdot \epsilon(\Theta_1 \tilde{\Theta}_1^{-1}, \dots, \Theta_n \tilde{\Theta}_n^{-1}). \end{aligned}$$

Sur un voisinage de $\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\} \times \mathbb{T}^n$, $\tilde{H}$ est égale à

$$\tilde{f}((w_1, \dots, w_n) - a_{i,j}) + \tilde{g}((z_1, \dots, z_n) - b_{i,j}) + \epsilon(\Theta_1 \tilde{\Theta}_1^{-1}, \dots, \Theta_n \tilde{\Theta}_n^{-1}),$$

donc $(\Theta, x, \tilde{\Theta}, w)$ est un point critique si et seulement si

- (i) $x = a_{i,j}$,
- (ii) $z = b_{i,j}$,
- (iii) $d\epsilon_{ij} = 0$ soit $\Theta.\tilde{\Theta}^{-1} \in \{\epsilon_k\}_{k=1 \dots 2^n}$.

Les points critiques près de $\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\} \times \mathbb{T}^n$ correspondent donc à $\coprod_{k=1}^{2^n} \mathbb{T}^n \cdot (\epsilon_k, a_{i,j}, 1_{\mathbb{T}^n}, b_{i,j})$ où cette fois-ci le tore agit de nouveau diagonalement. Aussi, si les points $a_{i,j}, b_{i,j}$ sont suffisamment proches de 0 et si ϵ est suffisamment petit, ce seront les seuls points critiques.

Soit maintenant $\gamma = (x, y)$ une trajectoire antigradient non constante entre $p^\pm = (x^\pm, y^\pm)$. Si, en coordonnées, x^+ et x^- (resp. y^+ et y^-) s'écrivent (Θ_1, a_{i_1, j_1}) et (Θ_2, a_{i_2, j_2}) (resp. $(\tilde{\Theta}_1, b_{i_1, j_1})$ et $(\tilde{\Theta}_2, b_{i_2, j_2})$) avec $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ alors nécessairement, x (resp. y) ne peut être constant. Sinon x^+ et x^- (resp. y^+ et y^-) s'écrivent $(\Theta_1, a_{i,j})$ et $(\Theta_2, a_{i,j})$ (resp. $(\tilde{\Theta}_1, b_{i,j})$ et $(\tilde{\Theta}_2, a_{i,j})$). Dans ce cas, la trajectoire est entièrement contenue dans le voisinage choisie pour effectuer la perturbation. En effet, si elle devait sortir de ce voisinage, elle coïnciderait avec une trajectoire non constante de H et ne pourrait revenir dans ce voisinage.

En regardant l'expression de $\tilde{H}$ au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\}$, il vient que $\dot{\gamma}$ a ses composantes suivant les deux coordonnées toriques proportionnelles à l'anti-diagonale, donc soit les composantes toriques de x et y sont toutes les deux non constantes, soit toutes les deux constantes. Supposons les constantes. Alors $\gamma(t) = (\epsilon_k \cdot \Theta_1, w_1(t), \dots, w_n(t), \Theta_1, z_1(t), \dots, z_{Nn}(t))$ avec $\epsilon_k \in \text{Crit}(\epsilon)$ et $t \mapsto (w_1(t), \dots, w_n(t), z_1(t), \dots, z_{Nn}(t))$ une trajectoire gradient de $K : \mathbb{R}^{(2N+1)n} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $K(w_1, \dots, w_n, z_1, \dots, z_{2Nn}) = \tilde{H}(\epsilon_k \Theta_1, w_1, \dots, w_n, \Theta_1, z_1, \dots, z_{2Nn})$ qui tend en $\pm\infty$ vers $(a_{i,j}, b_{i,j})$ donc constante. Finalement, x et y sont soit toutes les deux constantes, soit toutes les deux non constantes.

$\tilde{H}$ vérifie donc la condition (*) de la définition 7.2.1. On vérifie sans peine que $\tilde{H}$ est maximale non-dégénéré. En conclusion, pour n'importe quel $(J, g) \in \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$, $(\tilde{H}, J, g) \in \mathcal{HJ}_{*, \mathbb{T}^n}^N$. $\square$

Théorème 9.2.1. *Soit (W, ω, μ) une variété torique sans bord vérifiant l'hypothèse 2, alors :*

$$\text{SH}(W, \omega, \mu) \simeq H_{\mathbb{T}^n}(W, \Lambda_\omega)$$

avec $H_{\mathbb{T}^n}(W)$ l'homologie $\mathbb{T}^n$ -équivariante de W au sens Borel définie en section 5 avec coefficients dans Λ_ω .

Démonstration. Il suffit de choisir $H \in \mathcal{H}_{split, \mathbb{T}^n}^N$. Pour ϵ assez petit, $\tilde{H}$ choisie comme dans la définition précédente aura ses points critiques comme seules orbites périodiques. Comme dans [4] (chapitre 10), on peut alors choisir (J, g) tel que, pour $p^\pm \in \text{Crit}(\mathcal{A}_{\tilde{H}}) \simeq \text{Crit}(\tilde{H})$, les trajectoires $\mathcal{M}(S_{p^+}, S_{p^-})$ soient en réalité des trajectoires de Morse-Bott pour $\tilde{H}$ et que celles-ci forment bien une variété ou, de manière équivalente, la paire $(\tilde{H}, (\omega(\cdot, J \cdot) + g))$ soit Morse-Smale (au sens Morse-Bott). Alors $(\tilde{H}, J, g) \in \mathcal{J}_{\mathbb{T}^n}^N$ est un triplet régulier, le complexe défini dans la section précédente coïncide avec le complexe de Morse-Bott pour $\tilde{H}$ à coefficients dans Λ_ω soit

$$\text{SH}^{\mathbb{T}^n, N}(W, \omega, \mu) \simeq H_*((W \times (S^{2N+1})^n) / \mathbb{T}^n, \Lambda_\omega)$$

et en passant à limite quand $N \rightarrow +\infty$

$$\mathrm{SH}^{\mathbb{T}^n}(W, \omega, \mu) \simeq H_{\mathbb{T}^n}(W, \Lambda_\omega) .$$

□

Bibliographie

- [1] M.F. Atiyah, R. Bott : *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, vol.23, p.1-28, (1982).
- [2] Michèle Audin : *Torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, vol.93 (2004).
- [3] Michèle Audin, Ana Cannas Da Silva, Eugene Lerman : *Symplectic geometry of integrable hamiltonian systems*, Progress in Mathematics, vol.93 (2003).
- [4] Michèle Audin, Damian Mihai : *Théorie de morse et homologie de floer*, EDP Sciences (2010).
- [5] D.M. Austin, P.J. Braam : *Morse-Bott theory and equivariant cohomology*, The Floer memorial volume, Progress in Mathematics, vol.133 (1995).
- [6] Frédéric Bourgeois : *A Morse-Bott approach to contact homology*, Thèse de doctorat, Stanford University, (2002).
- [7] Frédéric Bourgeois, Alexandru Oancea : *Fredholm theory and transversality for the parametrized and for the S^1 -invariant symplectic Action*, Journal of the European Mathematical Society, vol.12, p.1181-1229, (2010).
- [8] Frédéric Bourgeois, Alexandru Oancea : *The index of floer moduli problems for parametrized action functionnal*, . Geometriae Dedicata, vol.165, p.5-24, (2013).
- [9] Frédéric Bourgeois, Alexandru Oancea : *S^1 -equivariant symplectic homology and linearized contact homology*, International Mathematics Research Notices, vol.2017, p.3489-3937, (2017).
- [10] Ivar Ekeland : *Convexity methods in hamiltonian mechanics*, Springer, Berlin (1990).
- [11] Andreas Floer : *Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry*, Mathematische Zeitschrift, vol.212, p.13-38, (1993).
- [12] Andreas Floer : *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Communications in Mathematical Physics, vol.120, p.575-611, (1989).
- [13] Andreas Floer : *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol.41, p.775-813, (1988).

- [14] Urs Frauenfelder : *The Arnold-Givental conjecture and moment Floer homology*, International Mathematics Research Notice, vol.42, p.2179-2269, (2004).
- [15] Hansjoerg Geiges : *Introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.109, Cambridge University Press, Cambridge, (2008).
- [16] Mikhail Gromov : *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Inventiones Mathematicae, vol.82, p.307-347 (1985).
- [17] Jean Gutt : *The Conley-Zehnder index for a path of symplectic matrices*, arXiv :1201.3728.
- [18] Helmut Hofer, Dietmar Salamon : *Floer homology and Novikov rings*, The Floer memorial volume, Progress in Mathematics, vol.133, p.483-524, (1995).
- [19] Dusa McDuff, Dietmar Salamon : *Introduction to symplectic geometry*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, (1998).
- [20] John Milnor : *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, (1963).
- [21] Richard S. Palais : *Foundations of global non-linear analysis*, Benjamin, New York, (1968).
- [22] Joel Robbin, Dietmar Salamon : *The maslov index for paths*, Topology, vol.32, p.827-844, (1993).
- [23] Joel Robbin, Dietmar Salamon : *The spectral flow and the maslov index*, Bulletin of London Mathematical Society, vol.27, p.1-33, (1995).
- [24] Dietmar Salamon : *Lectures on floer homology*, Notes for lectures held at the IAS/Park city Graduate Summer School on symplectic Geometry and Topology, (1997).
- [25] Dietmar Salamon : *Morse theory for periodic hamiltonian systems*, Communication on Pure and Applied mathematics, vol.45, p.1303-1360, (1992).
- [26] Matthias Schwarz : *Morse homology*, Progress in Mathematics, vol.111, Birkhauser Verlag, Basel, (1993).
- [27] Claire Voisin : *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.77, (2007).
- [28] Chris Wendl : *Lectures on holomorphic curves in symplectic and contact geometry*, arXiv :1011.1690.
- [29] Chris Wendl : *Lectures on symplectic field theory*, arXiv :1612.01009.

Titre : Homologie symplectique $\mathbb{T}^n$ -équivariante pour les variétés toriques hamiltoniennes

Mots Clefs : Géométrie symplectique, Géométrie torique, Homologie de Floer, Théorie de Morse-Bott, Dynamique Hamiltonienne

Résumé : Cette thèse établit l'existence d'une variante de l'homologie de Floer de type Morse-Bott. Étant donné une variété torique (W^{2n}, ω, μ) et un hamiltonien $H : W \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ invariant par l'action du tore de dimension n $\mathbb{T}^n$, les orbites de H sont stables par l'action torique. Cette dernière admettant des points fixes dans W , elle n'est pas libre, pareillement pour celle induit sur les lacets de W et il est, a priori, impossible de construire une théorie de Morse-Bott équivariante au niveau de $C^\infty(S^1, W)/\mathbb{T}^n$.

Nous remédions à ce problème en adoptant la construction de Borel : nous choisissons un espace E contractile muni d'une action libre du tore regardons l'homologie de Morse-Bott en dimension infinie de l'espace $(C^\infty(S^1, W) \times E)/\mathbb{T}^n$ où $\mathbb{T}^n$ agit cette fois de manière diagonale sur le produit.

L'homologie obtenue est un invariant pour les variétés symplectiques toriques et nous le calculons dans le cas d'une variété fermée.

Université Paris-Saclay, Espace Technologique,

Bat. Discovery-RD 128-2e ét., 91190 Saint-Aubin.



Title : $\mathbb{T}^n$ -equivariant symplectic homology for toric hamiltonian manifolds

Keys words : Symplectic geometry, Toric geometry, Floer homology, Morse-Bott Theory, Hamiltonian dynamics

Abstract : This thesis establishes the existence of a version of Floer homology in a Morse-Bott context. Given a toric manifold (W^n, ω, μ) and a hamiltonian $H : W \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ invariant by the action of the torus $\mathbb{T}^n$, the periodical orbits of H are stable by the toric action.

The latter admits fix points in W and hence it not free, neither the one induced on the space of the loops of W and it is, a priori, impossible to establish a equivariant infinite-dimensional Morse-Bott theory on $C^\infty(S^1, W)/\mathbb{T}^n$.

We deal with this problem using Borel's construction : we choose a space contractible E with a free action from the torus and look at the infinite-dimensional Morse-Bott homology of the space $(C^\infty(S^1, W) \times E)/\mathbb{T}^n$ where $\mathbb{T}^n$ act in a diagonal way on the product.

We obtain an invariant for symplectic toric manifold and computes it for a closed manifold.

Université Paris-Saclay, Espace Technologique,

Bat. Discovery-RD 128-2e ét., 91190 Saint-Aubin.

