



HAL
open science

Méthodes lagrangiennes pour le calcul et le contrôle des écoulements tridimensionnels

Philippe Poncet

► **To cite this version:**

Philippe Poncet. Méthodes lagrangiennes pour le calcul et le contrôle des écoulements tridimensionnels. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse (France), 2007. tel-02010718

HAL Id: tel-02010718

<https://hal.science/tel-02010718>

Submitted on 7 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE III – PAUL SABATIER

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Philippe PONCET

Soutenue le 24 octobre 2007

**Méthodes lagrangiennes pour le calcul
et le contrôle des écoulements tridimensionnels**

*Lagrangian methods for computation
and control of three-dimensional flows*

Composition du Jury :

Richard Pasquetti,	<i>Président du jury</i>
Ahmed Ghoniem,	<i>Rapporteur</i>
Jean-Claude Nédélec,	<i>Rapporteur</i>
Olivier Pironneau,	<i>Rapporteur</i>
Jean-Michel Roquejoffre,	<i>Examineur</i>
Jean-Paul Vila,	<i>Examineur</i>

Habilitation à diriger des recherches préparée
à l'Institut de Mathématiques de Toulouse

TABLE DES MATIÈRES / TABLE OF CONTENTS

Introduction	7
1 Méthodes Vortex-in-Cell hybrides en géométrie complexe	15
1.1 La formulation hybride grille-particules	15
1.2 Formulation harmonique pour des bords de géométrie arbitraire	22
1.3 Quelques cas d'écoulements en fluide parfait	25
Figures du chapitre 1 / Figures of chapter 1	27
1 Hybrid Vortex-in-Cell methods in Complex Geometries	41
1.1 Hybrid Grid-Particle formulation	41
1.2 Harmonic formulation for arbitrarily shaped bodies	46
1.3 A few ideal fluid computations	48
2 Conditions aux limites en vorticité pour les méthodes lagrangiennes	51
2.1 Séparation des effets diffusifs et méthode de Chorin	52
2.2 Méthodes PSE discrètes	53
2.3 Formulation intégrale des conditions d'adhérence	55
2.4 Formulation en vorticité du glissement cinématique du premier ordre	57
Figures du chapitre 2 / Figures of chapter 2	61
2 Vortical boundary conditions for Lagrangian methods	69
2.1 Splitting diffusive effects and Chorin's formula	70
2.2 Discrete Particle Strength Exchange methods	71
2.3 Integral formulation of no-slip boundary conditions	73
2.4 Vortical formulation of first order kinematic boundary conditions	75

3	Contrôle des sillages	77
3.1	Algorithme génétique et lissage de profil	77
3.2	Notion d'efficacité, optimisation topologique et VIV	79
3.3	Contrôle 3D uni-modal à amplitude variable	80
3.4	Contrôle 3D multi-modal	81
	Figures du chapitre 3 / Figures of chapter 3	83
3	<i>Control of three-dimensional wakes</i>	89
3.1	Genetic Algorithms and profile smoothing	89
3.2	Efficiency, topological optimization and vortex induced vibration	90
3.3	One-mode 3D control with variable amplitude	91
3.4	Multi-modal control of 3D wakes	92
	Conclusion	95
	Bibliographie / References	101
	Articles de l'auteur / Author's articles	109

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Richard Pasquetti de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury d'habilitation à diriger des recherches, ainsi que Ahmed Ghoniem, Jean-Claude Nédélec et Olivier Pironneau d'avoir pris le temps d'étudier et de rédiger un rapport sur ce manuscrit. Je remercie également Jean-Michel Roquejoffre d'avoir participé à mon jury et de m'avoir encouragé depuis mon arrivée au laboratoire (à présent équipe) MIP.

Je tiens aussi à remercier Jean-Paul Vila qui depuis mon arrivée à l'INSA, a encouragé et favorisé de façon permanente mes choix d'activité de recherche. Les conditions de travail et la liberté que j'ai eues m'ont permis de faire vivre mes collaborations à l'extérieur du laboratoire.

Je remercie également Georges-Henri Cottet, qui, le premier, m'a formé à la recherche, sachant me guider tout en me laissant prendre l'indépendance indispensable à un chercheur. Je lui dois tout ce que je suis devenu scientifiquement.

Je remercie les personnes qui m'ont encouragé et fait confiance depuis le début : Petros Koumoutsakos, Grégoire Winckelmans, André Giovannini, Michel Deville, Yvon Maday. Quelques personnes ont également contribué de manière déterminante à la direction prise par mes recherches, par leurs conseils ponctuels mais éclairés : Alessandro Bottaro, Marie Farge et Michel Provansal.

D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique des départements de génie mathématique et modélisation (GMM) et de génie des procédés pour l'environnement (GPE) de l'INSA Toulouse, avec qui travailler fût un réel plaisir pendant ces quelques années.

INTRODUCTION

Les travaux rassemblés dans ce manuscrit d'habilitation à diriger des recherches sont dédiés à l'élaboration et à l'utilisation de méthodes numériques lagrangiennes pour la résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles en formulation vitesse-vorticité.

Les méthodes lagrangiennes que l'on considère appartiennent à la classe des schémas de *Vortex in Cell*, et ont la particularité de transporter des cellules de tourbillon, dont le calcul des trajectoires utilise un couplage entre grilles et réseaux de particules. La motivation de ce travail est de les généraliser suffisamment pour pouvoir appréhender le calcul et le contrôle des grands écoulements tridimensionnels, et les utiliser dans des cas opérationnels, ou du moins le plus proche possible des géométries réelles. Mon but a donc été de développer ces méthodes numériques dans un souci permanent d'efficacité d'implémentation.

De telles méthodes peuvent présenter de réelles alternatives aux schémas eulériens classiques et aux codes industriels. Leur précision, robustesse, rapidité et fiabilité en font des outils intéressants pour la réalisation d'avant projets. En effet, les cas tests utilisés pour la validation des schémas et de leur implémentation montrent que l'on obtient des diagnostics mécaniques satisfaisant sans ajustement de paramètres. Les champs d'application incluent l'étude du comportement générique des sillages, les écoulements avioniques et en diverses géométries, le contrôle optimal des sillages, ainsi que les micro et nano-fluides, les écoulements biologiques et géophysiques, ces derniers étant en cours de développement.

Tout d'abord, mon travail de thèse de doctorat, sous la direction de G-H. Cottet (LJK Grenoble), a consisté à implémenter une telle méthode dans le cas des coordonnées cylindriques. Quelques pistes ont été données quant à la faisabilité et le coût calculatoire des sillages de cylindre. Mes travaux ont ensuite porté, dans un premier temps, sur la fiabilisation et l'amélioration de cette méthode afin de capturer le comportement des solutions de Navier-Stokes en temps long pour les écoulements instables. Ce comportement est étudié par le calcul de diagnostics mécaniques. Ceci signifie que les solutions sont validées à partir de tout bilan d'énergie du système et par caractérisation de l'attracteur par projection. Dans un second temps, j'ai porté mes efforts sur la mise au point de techniques pouvant généraliser la méthode aux géométries quelconques, et sur l'utilisation intensive du code «cylindre» pour le contrôle optimal des écoulements.

L'esprit dans lequel ces schémas sont développés est de décomposer les équations de Navier-Stokes en sous-problèmes, de telle sorte que l'on puisse utiliser des outils adaptés à chaque sous-

problème, plutôt que de chercher à construire une discrétisation pour les équations originales de Navier-Stokes. En effet, les aspects convectifs et diffusifs sont séparés par une technique d'algorithme à pas fractionnaire, dont l'ordre est contrôlable. En pratique, la partie convective est traitée par une méthode purement lagrangienne, ou particulière, dont la formulation standard et sa généralisation aux géométries arbitraires sont présentées au chapitre 1. La partie diffusive et ses décompositions font l'objet du chapitre 2 : elle est elle-même séparée par linéarité en une partie intérieure au fluide avec conditions aux limites homogènes et une partie avec source aux parois. La partie diffusive est traitée par une méthode arbitrairement eulérienne ou lagrangienne (PSE), tandis que le problème parabolique avec source aux parois est traité par une méthode intégrale. Par ailleurs, ces schémas lagrangiens ne souffrent pas de problèmes de dispersion des réseaux de particules, car des techniques de remaillage d'ordre élevé sont utilisées.

Le premier chapitre présente les concepts élémentaires, à partir desquels mon travail se base : la description du système dynamique d'un fluide en vorticité, et sa discrétisation particulière. La validité et l'efficacité des techniques de reconstruction de vitesse, à partir d'un champ de tourbillon, sont alors fondamentales : il est alors notoirement préférable d'utiliser des grilles sous-jacentes aux réseaux de particules, plutôt que de considérer les formules de Biot-Savart. Sur ces grilles sous-jacentes, la vitesse est alors obtenue par dérivation de la solution d'un problème elliptique.

Cependant, les conditions de non pénétration d'un fluide à travers un bord imperméable (par opposition à des conditions de porositt ) et d'incompressibilité couplent les composantes de la vitesse. Il en résulte que naturellement, le problème elliptique relatif au calcul de vitesse est vectoriel, ce qui nuit au côté calculatoire de la méthode. Une façon de découpler ce problème de fonction courant vectorielle en problèmes elliptiques scalaires, permettant alors l'utilisation des solveurs rapides, est d'introduire une quatrième composante propre aux conditions de non-pénétration.

Tandis que cette quatrième composante peut être explicitée dans des géométries simples, elle est reliée à un problème harmonique dans le cas d'une géométrie arbitraire. Cette méthode rentre dans la classe des techniques de surfaces immergées, et l'étude de l'opérateur de trace intégro-différentiel associé à ce problème harmonique revêt alors une importance toute particulière : les propriétés du spectre de cet opérateur (appelé opérateur d'immersion) sont la garantie d'une convergence rapide. En effet, le regroupement de ses valeurs singulières permet le bon conditionnement des systèmes linéaires en découlant, particulièrement intéressant lors de l'utilisation de méthodes de résolution itératives. En pratique, il est même possible d'inverser cet opérateur de trace, agissant sur les bords du domaine : on obtient alors une méthode extrêmement rapide. Quelques applications sont alors considérées, fournissant des validations de la méthode. Il est cependant montré que l'opérateur d'immersion n'est pas naturellement auto-adjoint.

Le second chapitre s'intéresse au calcul des effets visqueux, c'est à dire comment calculer la solution d'une équation de diffusion sur la vorticité avec conditions aux limites cinématiques (sur la vitesse), dans un contexte de géométrie arbitraire. La formule de Chorin, décrite dans la première section du chapitre 2, est l'outil permettant de convertir des conditions aux limites cinématiques en conditions usuelles, en introduisant la notion de vitesse de glissement résiduelle.

Cette vitesse résiduelle est la conséquence de ce changement de type des conditions aux limites pour le problème de diffusion de vorticité. La solution glissante de cette équation de diffusion est calculée numériquement par une méthode dite de *Particle Strength Exchange*, dont une formulation intrinsèquement discrète est présentée dans la section 2.2, garantissant un ordre de

convergence indépendamment de l'échelle des échanges de force entre particules. Bien que les méthodes PSE soient naturellement lagrangiennes, elles sont utilisées sur des réseaux de particules rééchantillonnés sur des réseaux uniformes, ce qui leur donne des propriétés d'invariance intéressantes.

Afin de garantir les conditions d'adhérence (vitesse nulle fixée aux bords), la vitesse résiduelle est utilisée pour définir la source aux limites d'une équation de diffusion avec conditions aux limites de type Fourier-Robin. Cette dernière équation garantit la génération d'une couche limite tourbillonnaire produite par la condition d'adhérence. Une méthode utilisable à la fois dans un contexte eulérien et lagrangien est la formulation intégrale de ce problème de diffusion. Les valeurs significatives de sa solution sont localisées près des bords, et la solution fondamentale de ce problème parabolique est un flux gaussien dont la densité est définie sur le bord. Cette densité est elle-même solution d'une équation intégro-différentielle. La section 2.3 du chapitre 2 fournit des estimations *ad hoc* de cette densité, faisant notamment intervenir les courbures de la sous-variété de \mathbb{R}^3 sur laquelle cet opérateur est défini.

On s'intéresse alors, dans la section 2.4, à généraliser ces formules intégrales de flux de tourbillon aux conditions de glissement cinématique du premier ordre, du type $u = \lambda \partial u / \partial n$, où λ est appelée longueur de glissement. Lorsque $\lambda > 0$, on parle alors de condition hydrophobe. Ces écoulements glissants concernent de nombreuses applications, dont les modèles de couches limites turbulentes, ou les écoulements micro et nanométriques. En effet, pour des distances à la paroi supérieures à l'épaisseur de la couche de Knudsen, il est possible de négliger les effets cinétiques, tout en n'ayant pas d'adhérence à cette échelle. Bien que de la dynamique de tels écoulements soient souvent complètement déterminée par les effets visqueux (c'est à dire avec des termes convectifs négligeables), de nouveaux matériaux fortement hydrophobes comme les nanotubes de carbones deviennent utilisables comme contrôleurs passifs ou actifs des écoulements aéronautiques, donc à de fortes vitesses pour lesquelles les effets de glissement et les effets convectifs sont tous deux des facteurs dominants de l'écoulement. Ces travaux en cours, menés en collaboration avec P. Koumoutsakos (ETHZ Zürich), sont appelés à fournir des stratégies efficaces de contrôle passif, les premiers résultats dans ce sens étant encourageants.

Le chapitre 3 est relatif au contrôle des écoulements externes, principalement par l'utilisation d'un profil de vitesse tangential au bord (procédé appelé «contrôle par acteurs»). Ce travail a été mené en collaboration avec R. Hildebrand, G-H. Cottet (LJK Grenoble), M. Milano (Arizona State University) et P. Koumoutsakos (ETHZ Zürich). Après avoir considéré plusieurs approches stochastiques (évolutionnaires) et déterministes pour le contrôle des sillages 2D, un profil de référence bidimensionnel a été construit.

Les deux méthodes retenues ont été le lissage d'une solution robuste obtenue par un algorithme génétique, ainsi qu'une méthode de descente de type Newton à énergie variable. Les évaluations d'une fonction objectif pour chaque élément d'une population de paramètres de contrôle (dans le cas stochastique), ainsi que les évaluations par différences finies du gradient et de la hessienne de la fonction objectif (dans le cas déterministe) sont massivement parallélisables, et ont fait l'objet d'un travail d'implémentation.

Ce résultat a été utilisé sur les écoulements tridimensionnels afin d'étudier son impact sur la topologie de l'écoulement et sur l'amplitude de l'oscillation des forces de traînée et de portance (phénomènes de *Vortex-Induced-Vibration*). Par ailleurs, en se focalisant sur le problème de la réduction des forces de traînée, l'étude de la réduction de traînée en fonction de l'amplitude du

contrôle avec ce profil a permis l'élaboration d'une fonction objectif plus pertinente que la simple réduction de traînée.

Nous nous sommes finalement intéressés au contrôle tridimensionnel des sillages. Après avoir défini des fenêtres pertinentes de l'espace de contrôle pour les amplitudes et fréquences de contrôle, un algorithme de descente a été mis au point. Le profil de contrôle est une modulation de l'optimal bidimensionnel par quatre harmoniques déphasées (espace des paramètres de dimension 8). La robustesse, la rapidité et la précision de ces méthodes particulières rendent alors accessibles ces calculs d'écoulements tridimensionnels. Les exécutions du code de calcul, pour chaque ensemble de paramètres de contrôle, ont été massivement parallélisées. On assiste alors à une réduction de traînée importante, vérifiée pour des nombres de Reynolds de 300 et 1000, en simulation numérique directe.

Enfin, en conclusion, on dressera un bilan des enjeux à venir et des développements en cours.

INTRODUCTION

The work presented in this manuscript of accreditation to supervise research resumes my scientific activities related to the development of Lagrangian schemes, as well as their practical considerations, for numerical simulation of three-dimensional Navier-Stokes equations in their velocity-vorticity formulation.

The Lagrangian methods considered herein belongs to the Vortex-in-Cell methods, whose main features are to transport cells of vorticity, and to compute their trajectory using grid-particle coupling. The motivation of this approach is to generalize the VIC methods sufficiently to perform large three-dimensional flow computation, as close as possible to real world configuration, and perform their optimal control. Consequently, the numerical methods presented have been developed with the concern of high computational efficiency.

Such schemes can be a meaningful alternative to standard Eulerian schemes and industrial software. Their accuracy, robustness, speed and liability make them belong to the most interesting tools for mechanical process design. Indeed, test cases for validation of the schemes and their implementation show that one gets satisfactory mechanical diagnostics, without any parameter tuning. Application fields involve generic behaviour of wakes, flows around aeronautics (and other) geometries, optimal control of wakes, micro and nanofluidics, biological and geophysical flows, these two last being currently under development.

My PhD work, under the supervision of G-H. Cottet (LJK, Grenoble, France), has consisted of implementing hybrid Vortex in Cell method in the context of cylindrical coordinates (thus the computation of the flow around a cylindrical body). A few directions have been pointed out, concerning feasibility and computational cost of three-dimensional cylinder wake simulations. My work has then been focused on improvement and reliability of the method, in order to compute the long-time behaviour of the solutions of the Navier-Stokes equations, for physically unstable flows. This behaviour is quantified by means of mechanical diagnostics, that is to say by means of validation of energy dynamics and attractor projection. In a second time, my goal has been to generalize these numerical methods to complex geometries, and to use intensively the computational code in cylindrical geometry for optimal control of wakes.

The spirit of this class of vortex methods is to split it into subproblems related to the Navier-Stokes equations, such as it is possible to use specific tools for each subproblem. Indeed, convective and diffusive effects are split apart by a fractional time step algorithm, for which order can be as high as required, but limited in practice to first or second order in time and up to fourth order in space. The convective part is usually solved by a pure Lagrangian method (or particle

method), whose standard formulation and its generalization to complex geometries are presented in chapter 1. Diffusive part and its decompositions are the topic of chapter 2 : it is itself split by linearity in a part related to the inner part of the fluid with homogeneous boundary conditions, and another part with boundary sources. The first diffusive part is solved by a Particle-Strength-Exchange scheme, which is arbitrarily Eulerian or Lagrangian. The second part, a parabolic equation with boundary source, is solved by means of an integral method. Furthermore, such Lagrangian schemes are not affected by distortion of particle lattice, since these high order remeshing techniques are used jointly.

First chapter presents elementary concepts, from which my work is based on : the description of dynamical system for a vortical flow, and its particle discretization. Validity and efficiency of the velocity computation from a vorticity field are then fundamental : it is then notoriously better to consider underlying grids on which Poisson equations are solved, instead of considering Biot-Savart laws on the particle lattice.

On grids, velocity is basically obtained by means of derivation of stream functions. Nevertheless, no-flow-through conditions on a body (to the opposite of porous media) and incompressibility are coupling velocity components on body boundary when it presents curvature. It follows directly that elliptic problems arising in velocity computation are naturally of vectorial kind, which is a serious drawback when it comes to computational cost. A way to avoid such coupling is to introduce a scalar potential stream (somehow a fourth component to the stream), aiming at satisfying the no-slip-through conditions. It is then possible to split the vectorial elliptic equation on stream into three scalar problems, since only the divergence-free condition is then required.

While this potential stream can be explicitated in simple geometries, it is related to an harmonic problem in the context of complex geometries. This method is a kind of immersed boundaries method, and the analysis of integro-differential operator (called immersion operator) associated to this harmonic problem is then of fundamental interest : its properties, especially its spectrum compactness, can lead to fast convergence of the algorithms enforcing the no-through-flow conditions, whether it is related to iterative methods or not. It is also shown that this immersion operator is not naturally self-adjoint (and not even a normal operator). Furthermore, it is possible, in practice, to inverse this trace operator acting on domain boundaries : one gets then a very fast numerical method. A few applications are finally given in this chapter, mainly in a validation point of view.

Second chapter focuses on computational aspects of viscous effects, that is to say on how to compute the solution of a diffusion equation on vorticity, with kinematic boundary conditions (relying on velocity), in the context of complex geometries.

The Chorin formula, described in the first part of chapter 2, is the appropriate tool for converting kinematic boundary conditions into standard conditions, by introducing the concept of spurious velocity (residual velocity from homogeneous boundary conditions in diffusion equations). The slip-flow velocity field is computed by means of a Particle Strength Exchange, for which an intrinsically discrete formulation is presented in section 2.2, leading to a convergence order independent of the scaling between particle distance and support size of the exchange kernel, which was until recently the main drawback of PSE methods.

In order to satisfy adherence conditions (zero velocity at boundaries), the spurious velocity is used to define boundary source of a diffusion equation with Robin-Fourier boundary conditions. The solution of this last equation generates a vortical boundary layer. Integral methods are well

appropriate tools for such diffusion problems, when used arbitrarily in Eulerian or Lagrangian contexts. Significant values of the solution are localized near boundaries, and the fundamental solution of this parabolic problem is a Gaussian flux whose density is solution of an integro-differential equation. Section 2.3 of chapter 2 describes ad hoc estimates of this density, depending on curvatures of the submanifold of \mathbb{R}^3 defining domain boundary.

We are then interested, in section 2.4, in generalizing these integral formulae of vortical flux to kinematic boundary condition of first order, which read $u = \lambda \partial u / \partial n$, where λ is called slip length. When $\lambda > 0$, the boundary is said to be hydrophobic. Such slipping flows are related to numerous applications, including turbulent boundary layers, micro and nanofluidics, granular flows or rough material. Indeed, for characteristic lengths larger than the Knudsen layer, it is possible to neglect kinetic effects (for non-polarized material), but not the slip at boundary (at this scale).

Although the dynamics of such slip-flows are often related to scales below micrometer, thus completely determined by viscous effects, new trends in flow control involve ultra-hydrophobic material at very high velocity, for which both convection and slip are the dominant feature of the flow. This ongoing work is made in collaboration with P. Koumoutsakos (ETHZ Zürich), and aims at giving efficient strategies of passive control, the first results being encouraging.

Chapter 3 deals with control of external flows, mainly by means of tangential velocity on the body (in practice related to device control called actuators). This work has been made in collaboration with R. Hildebrand, G-H. Cottet (LJK Grenoble), M. Milano (Arizona State University) and P. Koumoutsakos (ETHZ Zürich). After considering several stochastic methods (evolutionary strategies) and deterministic methods for control of two-dimensional wakes, an optimal two-dimensional velocity field has been put forward.

The two selected methods have been on the one hand to smooth a robust solution obtained by means of a genetic algorithm, and on the other hand a Newton method with variable energy. The evaluation of the objective function, in the context of evolutionary algorithms (on every population elements), or in the context of the computation of its gradient and Hessian by means of finite difference schemes, have been massively parallelized and the focus of highly efficient implementation.

This reference profile has been used on three-dimensional flows, in order to analyse its impact on flow topology, and on amplitude of drag and lift oscillations (that is to say on Vortex-Induced-Vibration). Furthermore, we have then focused on the problem of drag reduction : the analysis of drag reduction with respect to control strength allowed us to introduce a more meaningful objective function.

Finally, we have considered three-dimensional control of wakes behind a cylinder. After having defined windows for control parameters (amplitude and wavelength), a descent algorithm has been introduced and implemented. The control profile considered is a modulation of the reference two-dimensional profile by four spanwise harmonics (out of phase, thus a parameter space of dimension 8). Robustness, speed and accuracy of such particle methods make these three-dimensional flow computations accessible. The result is then a dramatic decrease of the drag coefficient, at Reynolds numbers 300 and 1000, for direct numerical simulation.

Eventually, forthcoming challenges and ongoing developments are given as concluding remarks of this manuscript.

MÉTHODES VORTEX-IN-CELL HYBRIDES

EN GÉOMÉTRIE COMPLEXE

Ce premier chapitre est dédié d'une part à la présentation des méthodes de *Vortex-in-Cell* hybrides, c'est à dire utilisant un couplage grilles-particules, et d'autre part à leur généralisation à une géométrie arbitraire dans le cas des fluides parfaits, en utilisant le formalisme de l'analyse harmonique. Les aspects relatifs aux fluides adhérents sont développés dans le chapitre suivant.

La section 1.1 rappelle la construction des équations de Navier-Stokes en vorticité, après avoir énoncé quelques éléments caractéristiques ayant trait au calcul de champs de pression et de vorticité. La discrétisation lagrangienne et la scission de ces équations est alors décrite.

La section 1.2 présente les conditions de non pénétration d'un fluide à travers à corps à l'aide d'un opérateur harmonique «surface vers surface», qui en pratique peut s'inverser et donc permettre des calculs d'écoulements en géométrie complexe pour le même coût calculatoire que dans une boîte cartésienne sans objet.

1.1 La formulation hybride grille-particules

Cette section décrit successivement la construction des équations de Navier-Stokes en vorticité et les méthodes de *Vortex-in-Cell* usuelles, ainsi que leur utilisation pour le calcul de sillages tridimensionnels derrière un cylindre et leur instabilités hydrodynamiques. Une représentation synthétique de l'algorithme est disponible sur la figure 1.2.

L'argumentation du choix entre les formulations vitesse-pression et vitesse-vorticité fait intervenir de nombreux aspects. D'une part, la pression est une quantité naturelle pour les fluides compressibles et la modélisation des fluides à plusieurs espèces ou à surface libre. D'autre part, la dynamique d'un écoulement est sensible aux conditions aux limites sur la pression (notamment aux limites de domaines fictifs), alors qu'elle est moins sensible aux conditions sur la vorticité.

Ceci permet une économie substantielle sur la taille des domaines de calcul considérés pour les formulations en vorticité, même avec des conditions de sortie peu subtiles, tout en gardant des diagnostics mécaniques fiables. Par ailleurs, les méthodes lagrangiennes ne considèrent les champs que sur leurs supports : les champs de vorticité sont numériquement à support compact dans les domaines extérieurs, alors que les champs de pression sont *a priori* partout non nuls. Cependant l'économie ainsi réalisée est marginale, d'autant plus que la vorticité est vectorielle alors que la pression est scalaire.

Un des arguments principalement retenus est le fait qu'il faut une étape de dérivation pour calculer un champ de vorticité à partir d'un champ de vitesse et de pression, d'où une perte de régularité. Par contre, la reconstruction d'un champ de pression à partir d'un champ de vorticité n'introduit pas de perte de régularité. En choisissant de résoudre des équations naturellement formulées en vorticité, on obtient des diagnostics et des champs peu bruités. Enfin, le système dynamique issu de la discrétisation lagrangienne d'une cellule de tourbillon comporte un terme $[\nabla u]^T \omega$ régularisant, terme qui n'est pas présent lors de la discrétisation lagrangienne en vitesse-pression.

Par ailleurs, les discrétisations particulières permettent de s'affranchir des termes de transport et donc de leur condition de stabilité, habituellement très restrictives.

Pour toutes ces raisons, les algorithmes de discrétisation partielle des équations de Navier-Stokes fournissent, dans le cadre de la simulation numérique directe, un ensemble de techniques appropriées pour le calcul des grands écoulements tridimensionnels.

1.1.1 Dérivation usuelle des équations de Navier-Stokes en vorticité

Etablissons tout d'abord les équations de Navier-Stokes en formulation vitesse-vorticité utilisées pour le calcul de la dynamique d'un fluide visqueux incompressible. Bien que ces résultats soient très usuels, il en découle l'écriture de l'évolution d'un champ de vorticité en tant que système dynamique, qui sera utilisée tout au long du manuscrit.

D'une manière générale, on considère un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ . Le champ de vitesse de ce fluide est noté u et sa pression p .

L'équation fondamentale de la dynamique ( quation de Cauchy) est

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \otimes u) = \text{div}(\mathbf{S}) + f$$

où $\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \lambda\text{div}(u\mathbf{I})$ est le tenseur des contraintes, avec $\mathbf{D} = (\nabla u + \nabla u^t) / 2$ étant le tenseur des déformations. Les coefficients λ et μ sont liés par la relation de Stokes $3\lambda + 2\mu = 0$, le coefficient λ pouvant être normalisé de manières différentes suivant les sources bibliographiques [107, 116].

La conservation de la masse s'écrit $\partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0$ et l'incompressibilité $\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0$, leur différence devenant $\text{div} u = 0$ dans tout le domaine couvert par le fluide, qui est la condition habituellement utilisée d'incompressibilité. Le terme de contrainte s'écrit

$$\text{div}(\mathbf{S}) = -\nabla p + \text{div}(2\mu\mathbf{D}) + \lambda\nabla\text{div}u = -\nabla p + \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla\text{div}u$$

De plus, on a

$$\text{div}(\rho u \otimes u) = (u \cdot \nabla \rho)u + \rho u \text{div}u + \rho(u \cdot \nabla)u$$

L'équation de Cauchy s'écrit alors sous la forme des équations dites de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u = \frac{1}{\rho}(f - \nabla p) \quad (1.1)$$

avec $\nu = \mu/\rho$ étant la viscosité cinématique, la vitesse u satisfaisant $\operatorname{div} u = 0$ sur tout le domaine. La condition physique d'adhérence aux parois est $u = 0$ aux bords.

On introduit alors la vorticité $\omega = \operatorname{rot} u$. En prenant le rotationnel des équations de Navier-Stokes (1.1), on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla u - \nu \Delta \omega = \frac{\operatorname{rot} f}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times (f - \nabla p)) \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.2)$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suffisamment régulier ou produit tensoriel d'ouverts suffisamment réguliers, de bord noté $\partial\Omega$, sur lequel on considère le champ normal $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

La vorticité est un champ à divergence nulle par définition. L'opérateur rotationnel permet d'associer la vorticité à la vitesse. On peut en quelque sorte l'inverser, c'est-à-dire reconstruire la vitesse à partir de la vorticité par un opérateur $u = \mathcal{A}\omega$, cet opérateur agissant sur les champs ω à divergence nulle et donnant un champ u sans pénétration au bord, c'est-à-dire $u \cdot n \equiv 0$ sur $\partial\Omega$, et également à divergence nulle. La construction de cet opérateur sera développée dans les sections suivantes.

D'autre part, nous consid rerons dans tout ce document des écoulements sans force extérieure rotationnelle : on s'intéresse principalement au cas où il existe un potentiel ξ tel que $f = -\nabla\xi$. Certains écoulements sont naturellement soumis à une force rotationnelle, tels que les écoulements géophysiques soumis à la force de Coriolis, produisant alors une source de vorticité. Dans le cas d'un fluide à surface libre ou d'un écoulement diphasique sans miscibilité (et sans modèle d'interface diffuse), le terme $\nabla\rho \times \nabla p$ devient singulier, de type Dirac surfacique.

On remarque que dans le cas où la densité ρ est constante à l'instant initial, elle reste constante par incompressibilité, ce qui annule le membre de droite de l'équation (1.2). Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors sous la forme d'un système dynamique

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{A}\omega \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathcal{A}\omega - \nu \Delta \omega = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.3)$$

avec conditions aux limites $u = \mathcal{A}\omega = 0$ dans le cas d'hypothèse d'adhérence sans vitesse du bord.

D'autre part, les fluides parfaits, modélisés par les équations d'Euler, c'est-à-dire le cas non visqueux $\nu = 0$, ne sont pas soumis aux pleines conditions d'adhérences $u = 0$, mais uniquement aux conditions de non pénétration $u \cdot n = 0$, systématiquement satisfaites par définition de l'opérateur \mathcal{A} . Les équations d'Euler s'écrivent donc en vorticité sous forme du système dynamique

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{A}\omega \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathcal{A}\omega = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.4)$$

sans autre condition aux limites que la condition incluse dans la définition de \mathcal{A} .

1.1.2 Schémas Vortex-in-Cell hybrides classiques

La formulation lagrangienne de type Vortex-in-Cell consiste à discrétiser l'espace Ω par un ensemble de cellules de volumes v_p et de positions $x_p(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ (en pratique le centre de gravité). On citera [26, 40] pour une vue d'ensemble des résultats et pratiques usuelles relatifs à ces méthodes.

La discrétisation particulière est alors une somme de masses de Dirac :

$$\omega(t) = \sum_{p=1}^P \omega_p(t) \delta_{x_p(t)} v_p \quad (1.5)$$

Sur chacune des cellules, la vorticit e ponctuelle (ou moyenn e pour la condition initiale) est notée ω_p . De mani ere synth etique, ces variables v erifient le syst eme dynamique suivant, d ecoulant de l' equation (1.3), pour chacune des cellules :

$$\begin{cases} \frac{d\omega_p}{dt} = [\omega \cdot \nabla u]_{x_p} + \nu [\Delta \omega]_{x_p} \\ \frac{dx_p}{dt} = u(x_p) \\ \frac{dv_p}{dt} = v_p(t) \operatorname{div} u(x_p(t)) \equiv 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

o u u est un champ de vitesse v erifiant $\operatorname{div} u = 0$ sur Ω , $\operatorname{rot} u(x_p) = \omega_p$ pour tout p et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Le champ ω utilisée pour calculer $\omega \cdot \nabla u$ et $\Delta \omega$ est une estimation ad equate de la formule (1.5).

L'avantage imm ediat est la disparition du terme convectif $u \cdot \nabla \omega$, qui induit en g en eral une condition CFL de stabilit e tr es restrictive pour les écoulements dont le transport est un ph enom ene dominant, notamment pour des fluides peu visqueux pour lesquels la condition CFL de diffusion n'est pas difficile à satisfaire. On peut alors utiliser des pas de temps beaucoup plus grands que pour une m ethode eul erienne conventionnelle, tout en gardant une fiabilit e d' evaluation des diagnostics m ecaniques.

La difficult e est par contre de construire un tel champ de vitesse. Il est bien s ur possible de la construire en utilisant une formule de convolution

$$u(x) = K \hat{*} \omega(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla K(x-y) \times \omega(y) dy \quad (1.7)$$

o u K est un noyau de Green. Dans \mathbb{R}^3 , K est en pratique une r egularisation de $(4\pi|x|)^{-1}$. C'est historiquement ainsi que les m ethodes de Vortex-in-Cell ont  t e introduites, appel ees justement m ethodes des singularit es : une cellule de vorticit e ω_p de volume v_p , donc de circulation $\alpha_p = \omega_p v_p$, cr ee le champ de vitesse

$$u_p(x) = K \hat{*} (\alpha_p \delta_{x_p}) = \nabla K(x-x_p) \times \alpha_p \quad (1.8)$$

La vitesse en un point \bar{x} est alors donn ee par

$$u(\bar{x}) = \sum_p \nabla K(\bar{x}-x_p) \times \omega_p v_p \quad (1.9)$$

Cependant, un travail de construction d'un noyau adéquat est nécessaire pour assurer $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, qui n'est en pratique pas généralisable à une géométrie arbitraire, à moins d'avoir des symétries particulières ou de résoudre pleinement les équations intégrales associées à ce problème. De plus, ces méthodes de Green ne permettent pas de vérifier la condition d'adhérence totale $u = 0$. Même pour le problème dans \mathbb{R}^3 sans bord, les noyaux de Green ne sont pas à support compact : les sommes d'évaluation de ces noyaux évoluent comme le carré du nombre de particules. Les techniques d'amélioration de ce calcul, comme les sommations hiérarchisées [42] et/ou les développements multi-polaires [32, 59], ne sont cependant pas suffisamment efficaces [13] pour traiter des cas tridimensionnels de grande taille.

Au milieu des années 1990, ces méthodes ont été revisitées en utilisant un couplage grille-particules pour les domaines sans bord physique (domaine ouvert tronqué ou tripériodique, voir [47]) : le champ de vorticité lagrangien est transféré sur une grille via une convolution avec un noyau d'ordre élevé. Une équation de Poisson vectorielle permet de calculer une fonction courant, dont le rotationnel est le champ de vitesse recherché. Il est alors facile de calculer $\omega \cdot \nabla u$ et $\Delta\omega$ sur la grille, puis de transférer ces valeurs sur les particules, afin d'intégrer en temps le système dynamique (1.6) par une méthode d'EDO (méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 ou 4 en pratique).

Une discrétisation temporelle efficace de l'équation (1.2), consiste à faire un algorithme à pas fractionnaire (splitting) convectif-diffusif [38], les deux problèmes étant résolus successivement. Ces deux étapes de convection et diffusion, présentées brièvement ici, sont développées respectivement dans les sections 1.2 et 2.3, et de manière plus exhaustive dans [3] et [4].

Notons \mathcal{A} un opérateur qui «inverse» le rotationnel, c'est à dire qui associe un champ $u = \mathcal{A}\omega$ à divergence nulle et sans pénétration $u \cdot n = 0$   un champ de vorticité ω également à divergence nulle :

$$\mathcal{A} : \{ \omega : \text{div}\omega = 0 \text{ dans } \Omega \} \longrightarrow \{ u : \text{div}u = 0 \text{ dans } \Omega, u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} \quad (1.10)$$

vérifiant $\text{rot}u = \text{rot}\mathcal{A}\omega = \omega$. La construction de cet opérateur \mathcal{A} est décrite à la section 1.2.

L'équation (1.2), sans terme source et sans diffusion, s'écrit alors

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathcal{A}\omega \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathcal{A}\omega = 0 \quad (1.11)$$

avec une condition aux limites $u \cdot n = \mathcal{A}\omega \cdot n = 0$ satisfaite *de facto* par définition de l'opérateur \mathcal{A} . Cet opérateur est construit en géométrie arbitraire dans la section 1.2 en utilisant les outils de l'analyse harmonique. L'équation (1.11) devient alors, par discrétisation lagrangienne, le système dynamique suivant [20] :

$$\begin{cases} \frac{d\omega_p}{dt} = [\omega \cdot \nabla \mathcal{A}\omega]_{x_p} \\ \frac{dx_p}{dt} = \mathcal{A}\omega(x_p) \\ \frac{dv_p}{dt} = v_p(t) \text{div}\mathcal{A}\omega(x_p(t)) \equiv 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Notons que l'équation (1.11) ne crée pas de tourbillon à partir d'un champ de vorticité initialement nul. Lorsque l'on considère ce système dynamique en tant que discrétisation des équations d'Euler, il convient de faire attention à la génération de tourbillons et nappes tourbillonnaires aux

points de perte de régularité (notamment aux bords de fuite non C^1). D'une part il est nécessaire de garantir la compatibilité de la condition initiale avec les équations d'Euler (ce qui peut suffire à introduire la vorticité dans la condition initiale, qui est alors transportée). D'autre part l'opérateur \mathcal{A} génère des singularités statiques lorsque la surface $\partial\Omega$ possède des «coins», singularités à superposer au champ ω dont l'amplitude est donnée par la circulation globale [104, 113]. Cependant, la génération de tourbillon singulier spécifique aux équations d'Euler n'est pas à prendre en compte si l'on considère l'équation (1.11) comme la partie convective des équations de Navier-Stokes, car les effets visqueux et les conditions d'adhérence génèrent le profil tourbillonnaire adéquat, même au bord de fuite [39].

L'étape de diffusion consiste alors à résoudre une équation de la chaleur

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega = 0 \quad (1.13)$$

avec condition aux limites cinématique $u = \mathcal{A}\omega = 0$, en utilisant la valeur finale de la solution de (1.11) comme donnée initiale de (1.13). Cette méthode de pas fractionnaire d'ordre 1, est basée sur le développement

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} + \mathcal{O}(t^2)$$

Un splitting d'ordre 2 peut être mis en œuvre aisément en s'inspirant de la formule de Strang

$$e^{t(A+B)} = e^{tA/2}e^{tB}e^{tA/2} + \mathcal{O}(t^3)$$

ou bien à un ordre plus élevé en utilisant les formules de permutation de Trotter. Un inconvénient potentiel de cette montée en ordre est le raccourcissement de l'échelle de temps de diffusion, correspondant à la génération d'une couche limite tourbillonnaire de plus en plus petite (voir section 2.3). Notons qu'une telle montée en ordre du splitting n'est intéressante que si les calculs de convection et diffusion sont également réalisés à un ordre équivalent. En pratique, on se limite aux ordres 1 et 2 en temps (et jusqu'à 4 en espace).

Une manière de transformer ces conditions cinématiques $u = \mathcal{A}\omega = 0$ en conditions de Neumann ou Robin-Fourier sur la vorticité est d'utiliser la formule de Chorin (voir section 2.3). L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est résolue par méthode intégrale, développée dans un cadre général à la section 2.3 et dans [4, 5].

A ces deux étapes de convection et diffusion, il est nécessaire d'ajouter un traitement de redistribution des particules (remaillage), afin d'éviter les points d'accumulation et les «trous» de densité de particules, notamment près des bords. Ce remaillage, réalisé via une convolution avec un noyau régulier (de classe C^2) d'ordre 3 à support compact (le noyau M'_4 , voir [45]), et particulièrement utile entre ces deux étapes : elle permet de redistribuer les particules sur un réseau uniforme avant de diffuser et d'appliquer un flux de tourbillon aux parois avec suffisamment de particules receveuses. L'ensemble de l'algorithme est représenté sur le diagramme de la figure 1.2.

L'absence de condition de stabilité sur la vitesse imposée aux bords, permet de pouvoir considérer une grande variété de choix pour exercer un contrôle efficace et robuste du fluide par une distribution de vitesse sur le bord. D'autre part, atteindre par de tels schémas les temps longs de la dynamique du fluide permet une estimation fiable des diagnostics mécaniques, au sens où l'on est sûr de ne pas mesurer des effets transitoires. Ces aspects relatifs au contrôle sont développés dans la partie 3.

Par ailleurs, les noyaux de transfert et les supports numériques de gaussienne étant très compact (quelques points de grille dont le nombre est fixé), toutes les étapes de l'algorithme (voir figure 1.2) ont un coût de calcul linéaire en fonction du nombre de points de grille. Seule la résolution des problèmes elliptiques sur une grille cartésienne standard est en $\mathcal{O}(n \log n)$, utilisant la librairie de calcul FISHPACK. L'algorithme général a donc un coût de calcul total, en terme d'opérations et donc de temps de calcul, en $\mathcal{O}(n \log n)$.

1.1.3 Calcul de sillages tridimensionnels générés par un cylindre

Ma thèse de doctorat [16] a consisté à faire l'étude mathématique et numérique de ces schémas dans le cas des géométries cylindriques, incluant la méthodologie pour prendre en compte les conditions aux limites $u = 0$. Mon travail de thèse a également consisté à implémenter un code haute performance pour les calculs de sillages tridimensionnels générés par un cylindre infiniment long. Les points mathématiques originaux ont été la formulation des conditions aux limites en vorticités pour cette géométrie, ainsi que des conditions de sortie du domaine de calcul, de type traction (recollement de vitesse avec l'écoulement potentiel perturbé). Les interpolations entre différents réseaux structurés (grilles) et non structurés (lagrangiens), notamment près des bords, ont également fait l'objet d'une approche originale dans le traitement de la consistance des transferts, en utilisant des interpolations sélectives [16].

Le code a été utilisé pour identifier les bifurcations dans la typologie des sillages, principalement gouvernées par le nombre de Reynolds $Re = U_\infty D / \nu$ où ν est la viscosité du fluide, U_∞ sa vitesse d'entraînement, et D est le diamètre du cylindre (ou plus généralement, la longueur caractéristique de l'objet perpendiculairement à la direction d'entraînement).

L'objectif était notamment l'étude des bifurcations secondaires pour lesquels les sillages de cylindre deviennent spontanément tridimensionnels. En effet, il est maintenant bien connu que pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés (à partir de $Re = 190$), plusieurs modes d'instabilités tridimensionnelles non turbulentes se déclenchent spontanément (phénomène mis en évidence expérimentalement [70] et numériquement [62]). Les instabilités croissent exponentiellement jusqu'à ce qu'elles contiennent autant de circulation que le sillage nominal, atteignant alors un régime de saturation (voir figure 1.1).

Ces instabilités peuvent se superposer aux effets turbulents pour des nombres de Reynolds pas trop grands (au moins jusqu'à $Re = 4000$, voir [68, 63]). Ceci se répercute sur les diagnostics tels que le coefficient de traînée, tracé sur la figure 1.4 et présentant une perte de charge [67].

La figure 1.3 montre la comparaison avec l'expérimentation de l'instabilité de type «mode B» pour $Re \geq 260$. Le profil spectral de ces instabilités hydrodynamiques a pu être décrit avec une précision inégalée (cf. figure 1.5). Des calculs de sillages autour de cylindres en rotation ont permis d'amorcer un thème de recherche sur le contrôle topologique des écoulements (voir section 3.2 et [9, 14]).

Une des priorités fut ensuite de fiabiliser le code en apportant des discrétisations plus efficaces [11], afin de pouvoir atteindre des régimes en temps longs, principalement pour décrire les attracteurs avec une précision suffisante, puisque le fluide ne se comporte plus comme un oscillateur périodique lorsque les instabilités hydrodynamiques sont développées.

Le fait de ne plus avoir de condition CFL de transport permet de considérer des objets dont le bord est en mouvement tangentiel sans avoir à diminuer le pas de temps, ce qui autorise des pas de temps jusqu'à 10^3 plus grands que pour des méthodes eulériennes pour une même précision des diagnostics mécaniques et topologiques :

- pour le cylindre fixe dans un courant uniforme, voir [11] comparé à [65] (éléments spectraux), et [69] (volumes finis) ;
- pour le cylindre en rotation alternée, voir [9] en 3D, validé jusqu'à $Re = 2000$ en 2D et $Re = 500$ en 3D, comparé à [73] et [76], tous deux en 2D et par éléments finis.

1.2 Formulation harmonique pour des bords de géométrie arbitraire

Le but de cette section est de résumer les acquis de mes recherches concernant les techniques efficaces de prise en compte des conditions aux limites de non-pénétration $u \cdot n = 0$ d'un fluide à travers une paroi. Le formalisme développé dans cette section est valide pour un bord suffisamment régulier, ici de classe \mathcal{C}^1 . Des outils adaptés à de telles conditions aux limites, et destiné à analyser la régularité des solutions, existent pour des domaines moins réguliers, voire fractals [103], mais leur utilisation n'est pas envisagée dans cette étude.

L'opérateur de reconstruction de vitesse \mathcal{A} , prend un champ de vorticité ω à divergence nulle et rend un champ de vitesse $u = \mathcal{A}\omega$ vérifiant $\operatorname{div}u = 0$, $\operatorname{rot}u = \omega$ partout dans ω , et $u \cdot n = 0$ au bord.

L'idée habituelle est d'introduire une fonction courant vectorielle ψ telle que $-\Delta\psi = \omega$ dans Ω , ayant comme des conditions aux limites impliquant $\operatorname{rot}\psi \cdot n = 0$ et $\operatorname{div}\psi = 0$.

Le champ $u = \mathcal{A}\omega = \operatorname{rot}\psi$ vérifie alors toutes les conditions requises :

- la non-pénétration par définition des conditions aux limites,
- le champ ψ est à divergence nulle, car $\operatorname{div}\psi$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\operatorname{div}\psi = \operatorname{div}\omega = 0 \\ \operatorname{div}\psi = 0 \end{cases}$$

qui admet la fonction nulle comme solution,

- on a alors $\operatorname{rot}u = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\psi = -\Delta\psi + \nabla\operatorname{div}\psi = \omega$.

La principale lacune d'une telle technique est l'inévitable couplage au bord des deux conditions $\operatorname{rot}\psi \cdot n = 0$ et $\operatorname{div}\psi = 0$, rendant le problème de Poisson systématiquement vectoriel, ne permettant pas l'usage des solveurs rapides disponibles pour les équations de Poisson scalaires. D'autre part, suivant la géométrie que l'on considère, les matrices de rigidité de ce problème elliptique ne sont pas aussi standards que celles découlant des discrétisations usuelles du laplacien en différences finies. Je me suis donc attelé à proposer des solutions mathématiques et numériques pour ces deux problèmes.

Considérons donc l'écoulement autour d'une surface Γ . Une façon de découpler l'équation elliptique vectorielle $-\Delta\psi = \omega$ est d'oublier la géométrie du problème et de plonger Γ dans une boîte de calcul cartésienne Ω^* . On considère alors Γ comme une *surface immergée* Γ dans Ω^* .

Les surfaces immergées ont fait l'objet de nombreuses études et analyses [44], que ce soit dans un cadre elliptique de calcul de champ de vitesse [34, 35, 110], directement dans les équations de

Navier-Stokes [53, 57], conduisant en général à des formulations très lourdes à manipuler, ou alors dans des formulations intégrales plus générales [54, 30]. Notons que le formalisme intégral se prête bien aux discrétisations de type éléments finis, les «éléments de bord» étant une discipline à part entière [58, 46, 37].

Notons également qu'une autre approche du calcul en géométrie complexe consiste à utiliser des méthodes de pénalisation [23], qui sont également rapides mais dont la faiblesse est la prise en compte d'objets minces et la non conservativité algébrique de la géométrie. Cependant les méthodes de surfaces immergées et de pénalisation sont complémentaires l'une de l'autre car toutes deux opérationnelles pour les calculs en géométrie complexe.

L'originalité du travail que j'ai réalisé est de caractériser et quantifier l'opérateur d'immersion. L'implémentation de la méthode relève ici d'un contexte elliptique, grâce à la formulation en vorticités des équations de Navier-Stokes. Ceci conduit à des outils beaucoup plus légers à manipuler que ceux introduits sur les équations primitives de Navier-Stokes en vitesse-pression. En terme de formulation discrétisée, l'encodage de l'opérateur d'immersion sous sa forme matricielle peut être inversé, et permet de réaliser des calculs d'écoulements en géométrie complexe pour un coût de calcul supplémentaire marginale par rapport à un calcul en boîte cartésienne.

La méthode consiste à ne pas imposer la condition de non-pénétration $\text{rot}\psi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \omega \text{ dans } \Omega^* \\ C.L. \Rightarrow \text{div}\psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega^* \end{cases} \quad (1.14)$$

Soumis uniquement à la condition aux limites $\text{div}\psi = 0$ sur $\partial\Omega^*$, le problème de Poisson vectoriel (1.14) peut être découpé composante par composante en trois problèmes de Poisson scalaires. Des solveurs très rapides tels que FISHPACK ou MUDPACK sont alors disponibles.

Afin de garantir la condition $u \cdot n = 0$, on introduit une quatrième équation scalaire harmonique, appelée potentiel courant :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{rot}\psi \cdot n \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.15)$$

Le champ de vitesse u est alors défini par

$$u = \mathcal{A}\omega = \text{rot}\psi - \nabla\phi \quad (1.16)$$

et vérifie $u \cdot n = \text{rot}\psi \cdot n - n \cdot \nabla\phi = 0$, ainsi que $\text{div}u = \text{div}\text{rot}\psi - \Delta\phi = 0$ et

$$\text{rot}u = \text{rot}\text{rot}\psi - \text{rot}\nabla\phi = -\Delta\psi = \omega$$

La géométrie du bord n'intervient pas dans la détermination du courant, du moment que l'on garantit $\text{div}\psi = 0$ sur les bords du domaine de calcul. La géométrie intervient via la trace de son flux sur Γ dans l'équation (1.15).

On peut donc considérer n'importe quelle géométrie pour calculer un champ de vitesse u sans pénétration à travers Γ , à partir du champ de vorticités ω (via la formule (1.16)), du moment que l'on sait résoudre le problème harmonique (1.15), scalaire elliptique.

Il est possible de résoudre le problème harmonique (1.15) en le transformant en

$$-\Delta\phi = T_\mu \text{ dans } \Omega^* \quad (1.17)$$

avec T_μ une distribution surfacique portée par Γ de densité $\mu \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$:

$$\langle T_\mu, \zeta \rangle = \int_\Gamma \mu(x)\zeta(x)d\sigma(x) \quad (1.18)$$

où σ est la mesure induite de Lebesgue sur Γ . Il faut alors chercher la densité μ telle que

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{rot}\psi \cdot n \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.19)$$

L'opérateur $\Lambda : \mu \mapsto n \cdot \nabla\phi$ est appelé *opérateur d'immersion*, qui n'est autre qu'un opérateur harmonique de degré 0, dont on peut attendre de bonnes propriétés spectrales [115]. L'étude de ses propriétés mathématiques et numériques sont décrites dans [3]. Trouver la densité μ adéquate revient alors à calculer $\mu = \Lambda^{-1}(\text{rot}\psi \cdot n)$, c'est à dire à résoudre un système linéaire.

Cependant, chaque évaluation de Λ requiert la résolution de l'équation de Poisson sur ϕ , et résoudre $\Lambda(\mu) = \text{rot}\psi \cdot n$ signifie résoudre deux systèmes linéaires imbriqués :

- celui relatif à $-\Delta\phi = T_\mu$, de grande taille (de la taille de discrétisation de Ω^*) et de forme standard (c'est à dire permettant l'utilisation d'un solveur rapide)
- celui relatif à $\Lambda(\mu) = n \cdot \nabla\phi$, petit comparativement au premier (de la taille de discrétisation de Γ), et résolu en pratique par une méthode itérative de minimisation de résidu (GMRES) dont chaque itération nécessite la résolution du premier système linéaire de grande taille.

Il a été remarqué que ce procédé converge beaucoup plus vite que si l'on construit la matrice de rigidité pour prendre en compte directement la géométrie complexe. Cette approche a été validée assez tôt sur un calcul bidimensionnel jusqu'à un nombre de Reynolds de 9500 (voir [13]).

On montre dans [3] que cet opérateur est auto-adjoint dans $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$, mais non-normal dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)$. Néanmoins, la décomposition en valeurs singulières (SVD), fait apparaître un regroupement de ces valeurs, que la géométrie soit lisse (sphère), singulière (NACA2412), ou complexe (géométrie avionique). Ceci implique un conditionnement borné et petit, garantissant une convergence rapide de la méthode.

Par ailleurs, le cas où la surface immergée Γ est moins régulière que \mathcal{C}^1 , c'est à dire $\mathcal{C}^{0,1}$ (lipschitzienne), fera l'objet d'une étude approfondie ultérieurement.

En pratique, cette méthode est utilisée pour le calcul de champs de vitesse sur une grille : les points de discrétisation de la surface immergée Γ sont transférés sur une grille. La densité μ devient alors volumique, son support étant les points de grille dans un voisinage volumique V_Γ de Γ . L'opérateur d'immersion discrétisé sur la grille est alors une fonction $\Lambda : V_\Gamma \rightarrow V_\Gamma$. Il est montré dans [3] que la formulation volumique est équivalente à la formulation surfacique à plusieurs couches de surfaces, et qu'il n'en résulte pas de dégradation du regroupement du spectre.

La conséquence immédiate du transfert de la surface Γ sur une grille est le lissage des singularités géométriques, ce qui rend la méthode utilisable même pour des surfaces présentant des «coins». Ce lissage est bien entendu invalide pour les équations d'Euler (pour lesquelles il est alors nécessaire de réintroduire les singularités dans l'opérateur \mathcal{A}), mais valide pour les équations de Navier-Stokes avec un bord non régulier et pour les équations d'Euler avec bord régulier.

Notons « $-\Delta^{-1}$ » l'opérateur qui associe la solution de (1.14) à son membre de droite ω , et rappelons la notation T qui injecte l'espace des densités sur Γ dans son dual, par $T(\mu) : \varphi \mapsto \langle \mu, \varphi \rangle_{\Gamma}$.

En résumé, on peut remarquer que tout le procédé, qui construit un champ u sans pénétration à travers Γ à partir d'un champ pénétrant \bar{u} , peut être résumé par l'expression

$$u = \bar{u} + \nabla \Delta^{-1} T(\Lambda^{-1}(\bar{u} \cdot n)) \quad (1.20)$$

Cette expression montre bien le caractère doublement implicite de cette formulation, qui présente l'avantage d'avoir $-\Delta^{-1}$ indépendant de la géométrie du problème et évalué à l'aide de solveurs très rapides.

De plus, Λ agit sur la surface Γ uniquement, donc correspond en pratique à des discrétisations impliquant un nombre de points bien inférieur à celui de Ω^* . Enfin, Λ^{-1} peut être explicité dans les cas où la discrétisation surfacique n'est pas trop raffinée, comme le montre les quelques cas validatifs présentés dans la section suivante 1.3.

1.3 Quelques cas d'écoulements en fluide parfait

1.3.1 Géométrie avionique

Des calculs d'écoulements autour d'une géométrie avionique de type Falcon 20, en hypothèse de fluide parfait, ont été réalisés avec succès, comme le montrent les figures 1.7 et 1.8, au sens où la conservation de la circulation et l'hypothèse de non-pénétration sont vérifiées. On ne s'intéresse pas, dans ce cas, aux nappes singulières de tourbillon générées aux bords de fuite, ces calculs étant destinés à être couplés avec le calcul de couches limites pour les équations de Navier-Stokes (fluides réels), technique développée au chapitre suivant.

L'encodage matriciel de l'opérateur Λ et son inversion conduisent à des calculs extrêmement rapides (moins de 12 minutes pour la simulation relative à la figure 1.8 sur processeur séquentiel Opteron), tout en garantissant algébriquement le respect de la condition de non-pénétration (voir figure 1.6). Les détails de ces simulations sont disponibles dans [3].

1.3.2 Cas d'écoulement autour d'un solide "tressé"

Afin de tester la robustesse de la méthode de surface immergée, j'ai utilisé une géométrie de type génie civil : un pont à structures métalliques (voir figure 1.9). Le spectre de l'opérateur d'immersion pour cette géométrie reste très regroupé autour de l'origine et dans le cercle unité du plan complexe, comme le montre la figure 1.10.

Un telle structure permet l'écoulement de l'air entre ses éléments métalliques (cf. figure 1.11). Il est donc intéressant de pouvoir déterminer à quels endroit de la structure les efforts produits par l'air en mouvement sont les plus forts. Cependant, cette géométrie a été utilisée simplement comme cas test sévère pour la méthode de surface immergée.

Malgré la sévérité de ce test, on obtient un écoulement où l'entrophie et l'énergie sont bornées, avec une conservation de la circulation satisfaisante (voir figure 1.12).

1.3.3 Interaction tourbillon-objet profilé

Ce projet, mené en collaboration avec l'IMFT, en partenariat avec A. Giovannini, consiste à étudier les tourbillons possédant une aspiration axiale, et leur divers régimes d'interaction avec un objet profilé, dans notre cas un profil NACA0012. Cette étude, financée par un contrat DGA, représente l'occasion d'utiliser les méthodes numériques lagrangiennes que je développe sur un problème ouvert de mécanique de fluides opérationnelle.

La première partie de ce projet concerne la dynamique et la stabilité de tels tourbillons. Leur équilibre a été étudié durant la thèse d'Isabelle Gillieron. La construction du protocole expérimental a été réalisé par B. Ferret. L'expérimentation et les tests numériques ont été réalisés par H. Sleiman durant son stage de master recherche, avec l'encadrement respectivement de P. Brancher et moi-même (cf. figure 1.13).

Une fois définie une configuration stable reproductible expérimentalement et par le calcul, l'interaction avec un profil NACA0012 pourrait être mis en œuvre. Le calcul relatif à cette expérience est déjà opérationnel pour le cas d'un fluide parfait (cf. figure 1.14). La condition de non glissement est similaire à celle utilisée pour l'écoulement de l'anneau tourbillonnaire (figure 2.7). L'étude de la dynamique de la vorticité des jets tournants est possible par les méthodes VIC, pouvant généraliser des études telles que [66] aux interactions entre fluide et solide de géométrie complexe.

— Figures du chapitre 1 —

— *Figures of chapter 1* —

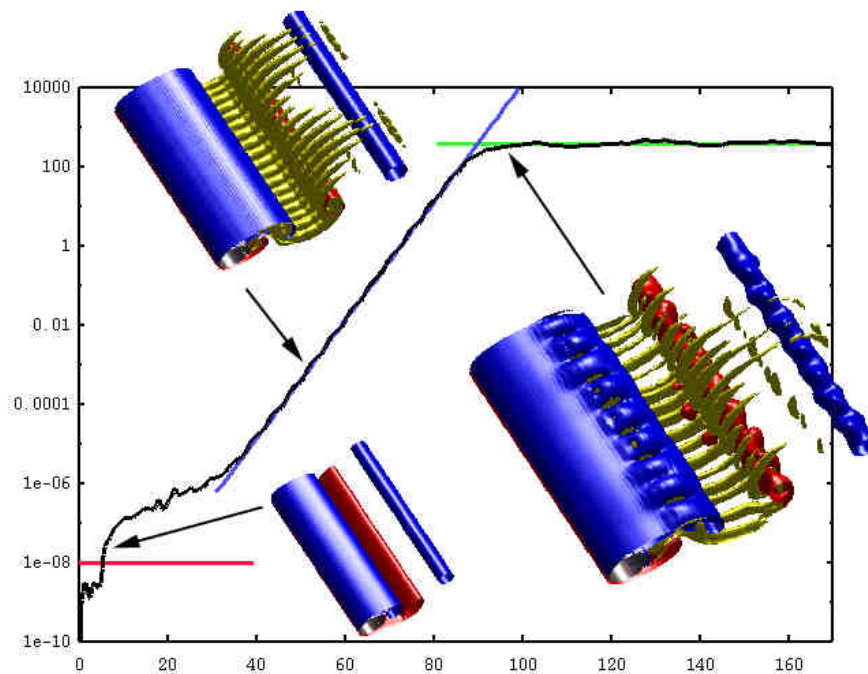


Figure 1.1 – Développement de la partie transverse de l'ensrophie $Z^\perp = (\|\omega_x\|_2^2 + \|\omega_y\|_2^2)$ à Reynolds $Re = 400$, z étant la direction axiale dans le repère (x, y, z) .

Figure 1.1 – Evolution of transverse enstrophy $Z^\perp = (\|\omega_x\|_2^2 + \|\omega_y\|_2^2)$ at Reynolds number $Re = 400$, z being the spanwise direction.

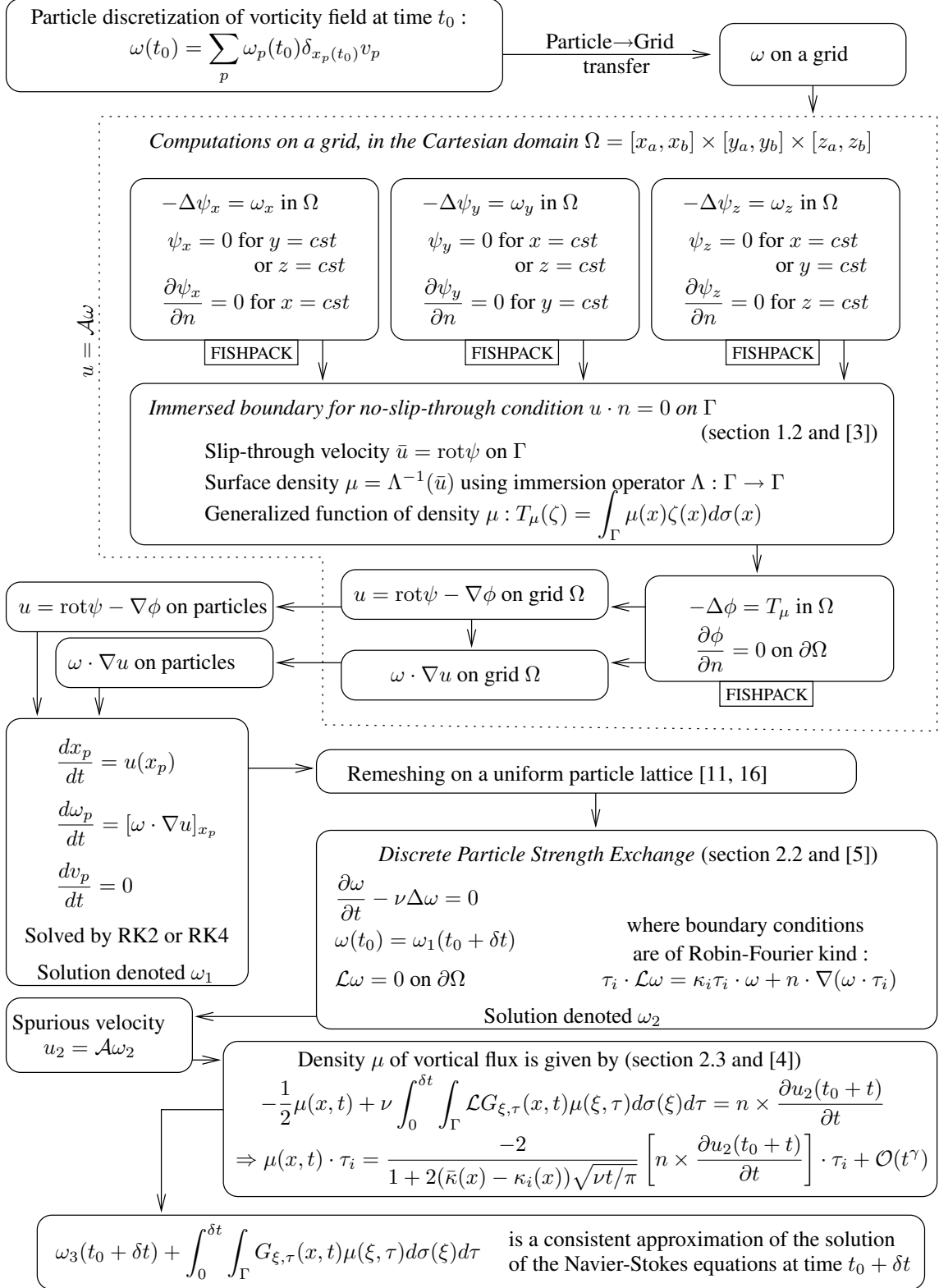


Figure 1.2 – Diagramme typique d'implémentation des méthodes de Vortex-in-Cell Hybrides.

Figure 1.2 – Sketch of typical Hybrid Vortex-in-Cell method.

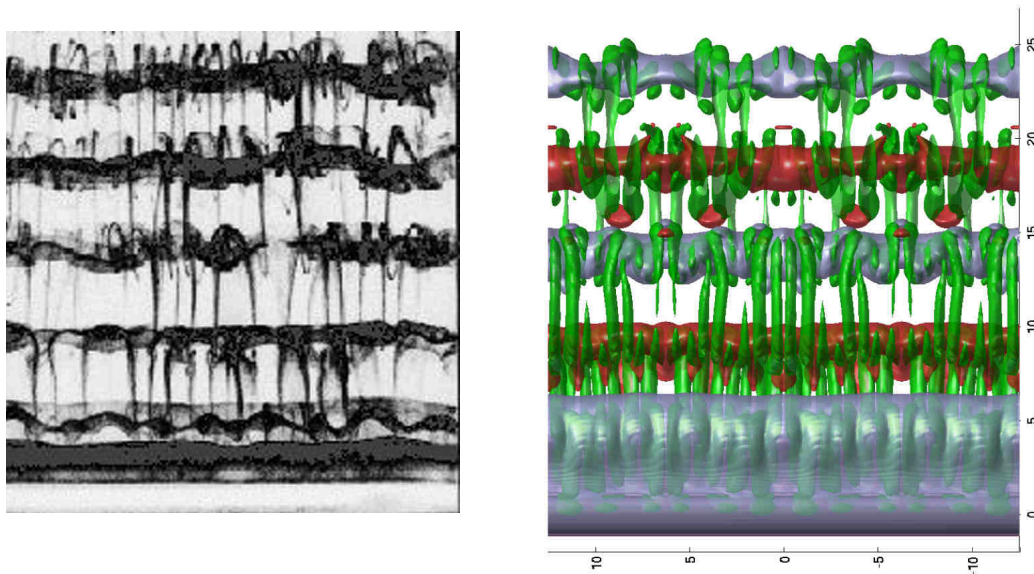


Figure 1.3 – Comparaison de la simulation des instabilités hydrodynamiques de type *mode B* avec l'expérimentation : Williamson [70], à gauche ; Calcul numérique réalisé en 2003, à droite, tiré de [8].

Figure 1.3 – Comparison of mode B hydrodynamic instabilities between experimentation and numerical simulation : Experimental work by Williamson (from [70], to the left), and computation performed in 2003 (from [8]).

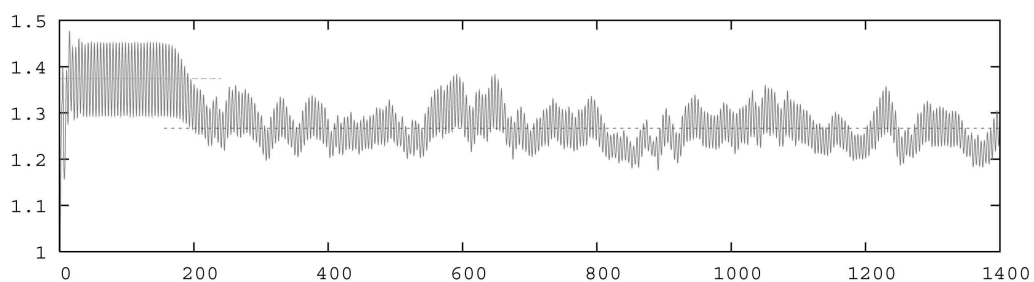


Figure 1.4 – Coefficient de traînée C_D d'un sillage de cylindre à $Re = 300$: la série temporelle perd son caractère d'oscillateur périodique et 20% de sa valeur lorsque les instabilités hydrodynamiques de type mode B deviennent le phénomène dominant (voir [9, 11]).

Figure 1.4 – Drag coefficient C_D for the wake generated behind a cylinder at $Re = 300$: signal is no longer a periodic oscillator and C_D decreases by 20% when hydrodynamic instabilities become the main feature (see [9, 11] for instance).

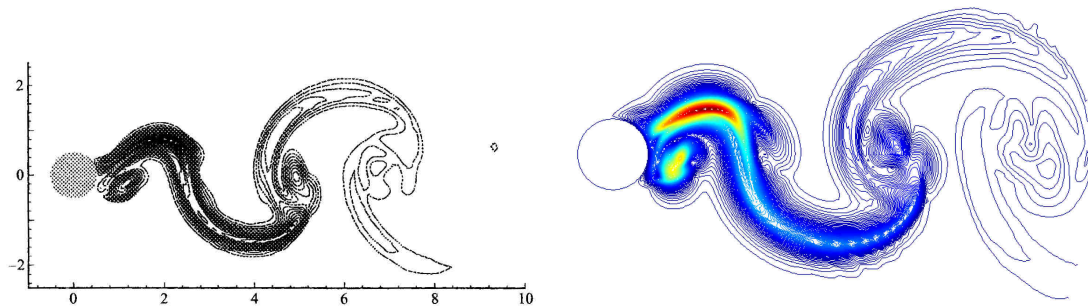


Figure 1.5 – Profil spectral du champ de vitesse dans la longueur d’onde de plus grande croissance, par transformée de Fourier dans la direction axiale, dans le régime non saturé : à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées (à gauche, tiré de [62]), et calculs présents (à droite, tiré de [9]).

Figure 1.5 – Spectral velocity profile related to the wavelength of fastest growth, obtained by Fourier transform in spanwise direction, when instabilities are not yet fully grown : From linearized Navier-Stokes equations (to the left, from [62]), and present computations (to the right, from [9]).

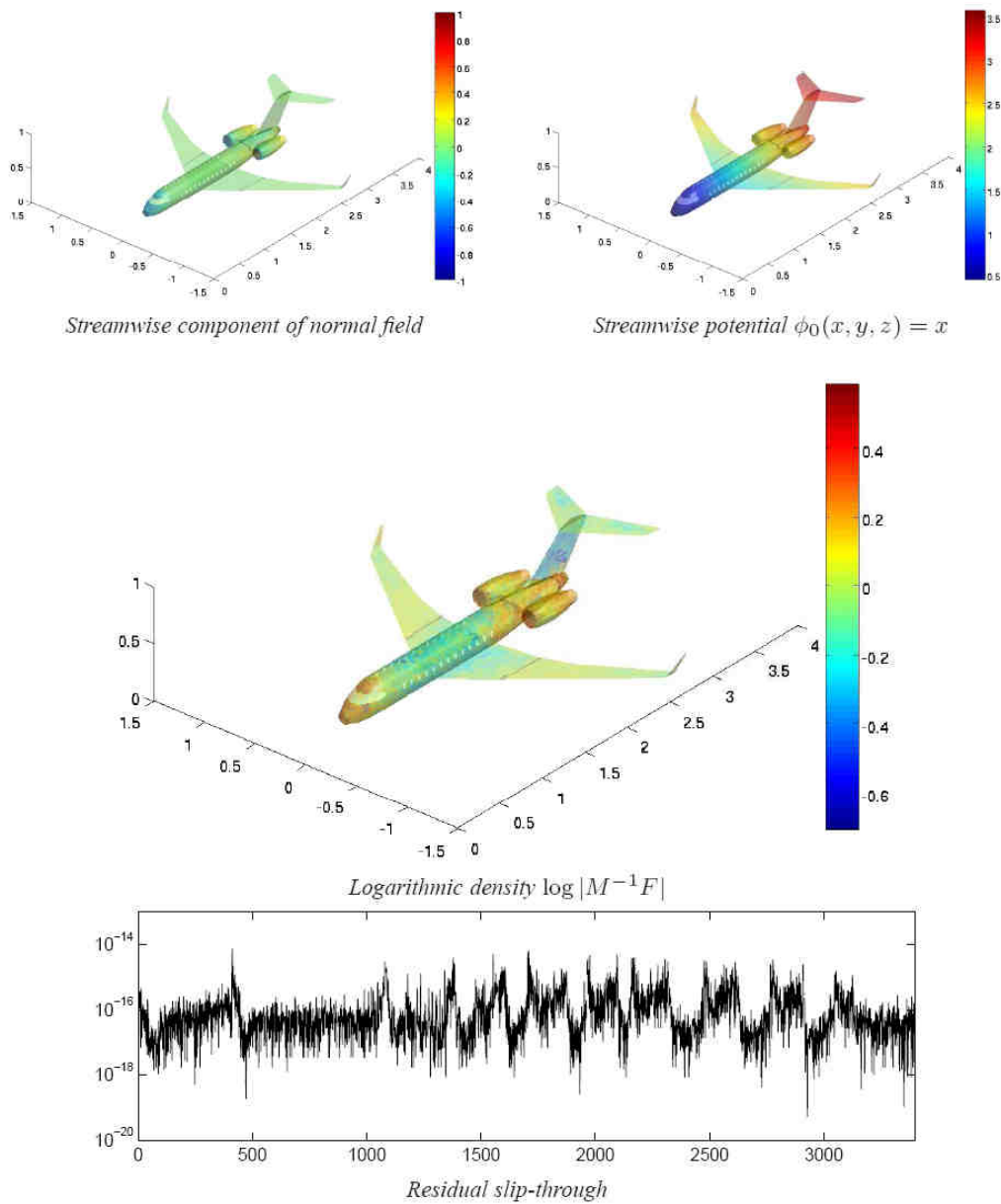


Figure 1.6 – Utilisation de l’opérateur d’immersion M dans le cas du calcul d’un champ potentiel tendant vers $\phi_0 \equiv x$ à l’infini (générant une vitesse de 1 dans la direction e_x , axe de l’avion) autour d’un Falcon 20. La densité résultante $M^{-1}F$ avec $F = n \cdot e_x$ est tracée sur la figure du milieu, et la vitesse résiduelle est tracée en bas.

Figure 1.6 – Immersion operator M used for potential flow computation around a Falcon 20 geometry, with a far field condition $\phi_0 \equiv x$ (generating a velocity equal to 1 in direction e_x , the aircraft main axis). Resulting density $M^{-1}F$ with $F = n \cdot e_x$ is plotted on middle picture, residual slip-through velocity is plotted on bottom picture.

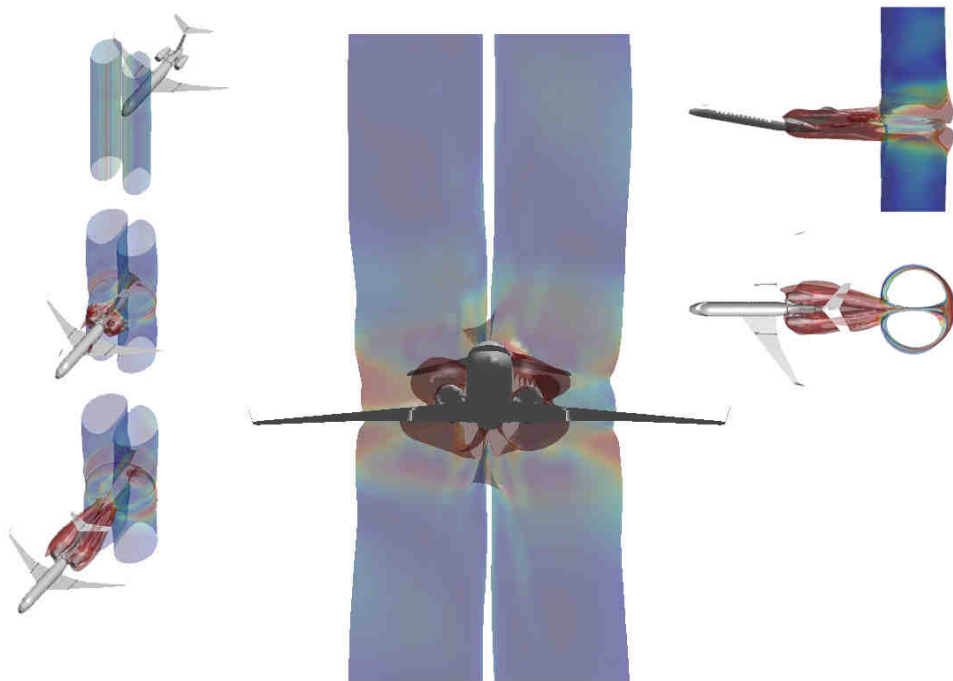


Figure 1.7 – Interaction entre une géométrie de type Falcon 20 et deux tourbillons verticaux (pouvant générer des forces de lacet), dans le cas d'un fluide parfait.

Figure 1.7 – Interaction between a counter-rotating pair of vortex tubes (able to generate yaw angle motion) and a Falcon 20 geometry, in the inviscid case.

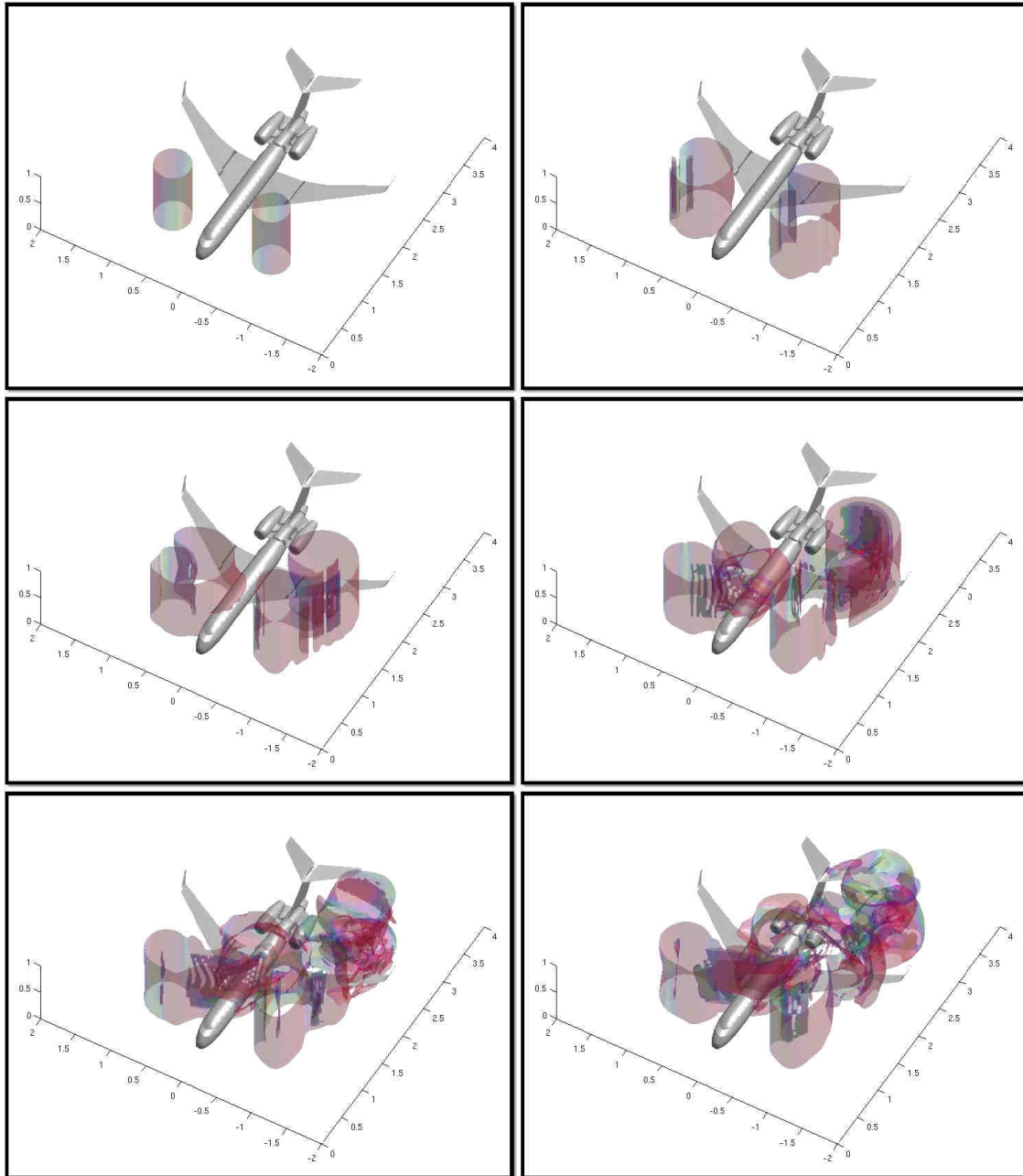


Figure 1.8 – Interaction entre une géométrie avionique et deux tourbillons asymétriques, tiré de [3].
Figure 1.8 – Interaction between aircraft geometry and two non-symmetric vortex tubes, from [3].



Figure 1.9 – A gauche : Pont de Coalbrookdale (1779, Shropshire, Angleterre, Royaume-Uni), construction de type pont en arc métallique, dont la géométrie est de genre «tresse creuse» (Copyright Pr. Michael Littman/Structuræ). A droite : Viaduc de Garabit (1864, Ruynes/Saint-Flour, Cantal, Société Gustave Eiffel & Cie), d'une longueur de tablier de 565m, permettant la traversée des Gorges de la Truyère (affluent du Lot).

Figure 1.9 – To the left : Coalbrookdale Bridge (1779, Shropshire, England, UK), an iron hollow-framed arched-bridge (Copyright Pr. Michael Littman/Structuræ). To the right : Garabit Viaduc (1864, Ruynes/Saint-Flour, Cantal, Société Gustave Eiffel & Cie), a 565m long roadway bridge.

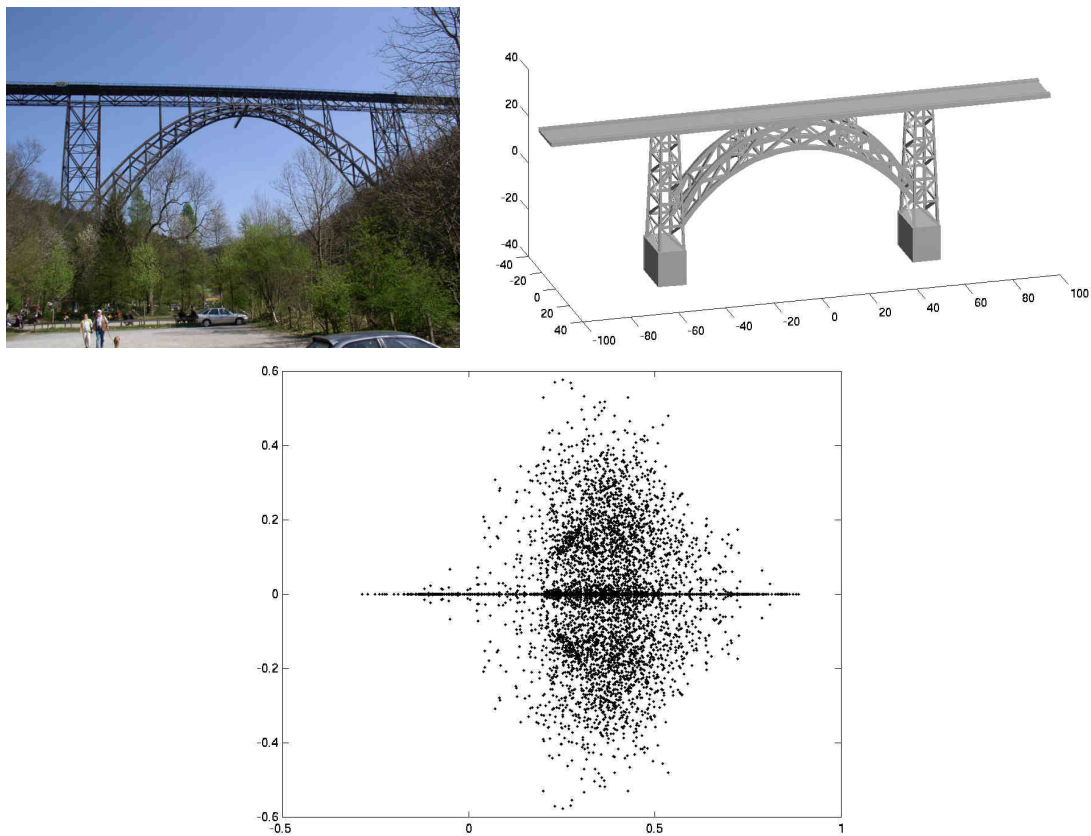


Figure 1.10 – En haut à gauche : Pont de Müngsten (Allemagne). En haut à droite : Géométrie utilisée pour le calcul d'écoulement. En bas : Spectre de l'opérateur d'immersion pour la géométrie du pont.

Figure 1.10 – Top-left corner : Müngsten Bridge (Germany). Top-right corner : Geometry actually used as body for flow computation. Bottom picture : Spectrum of immersion operator for the bridge geometry.

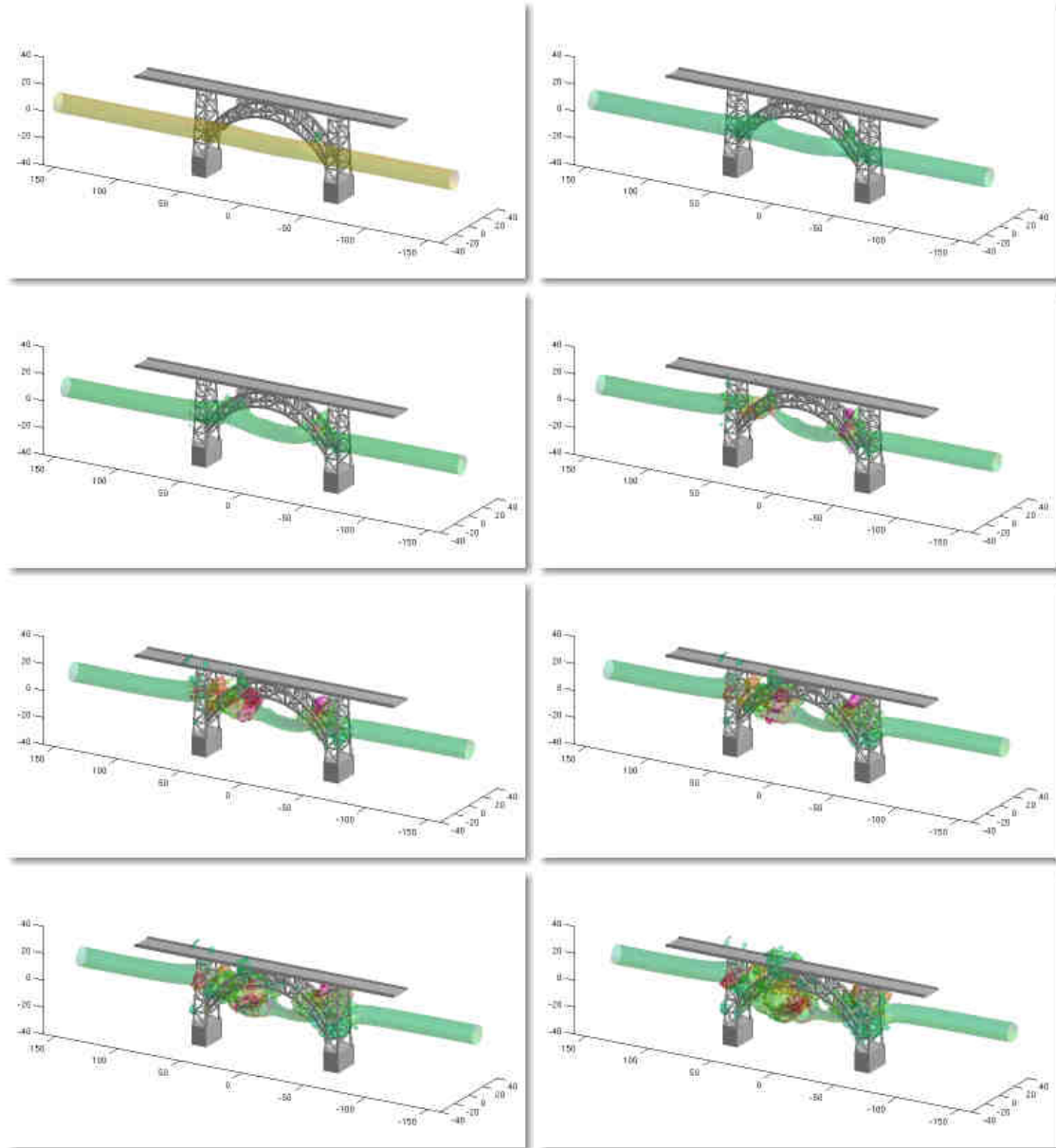


Figure 1.11 – Snapshots de l'écoulement d'un tourbillon interagissant avec un pont de géométrie du même type que celui représenté sur la figure 1.9, pour $t = 0..30$.

Figure 1.11 – Bridge-Vortex flow snapshots for a body whose geometry is of the same kind as the bridge displayed on figure 1.9, for $t = 0..30$.

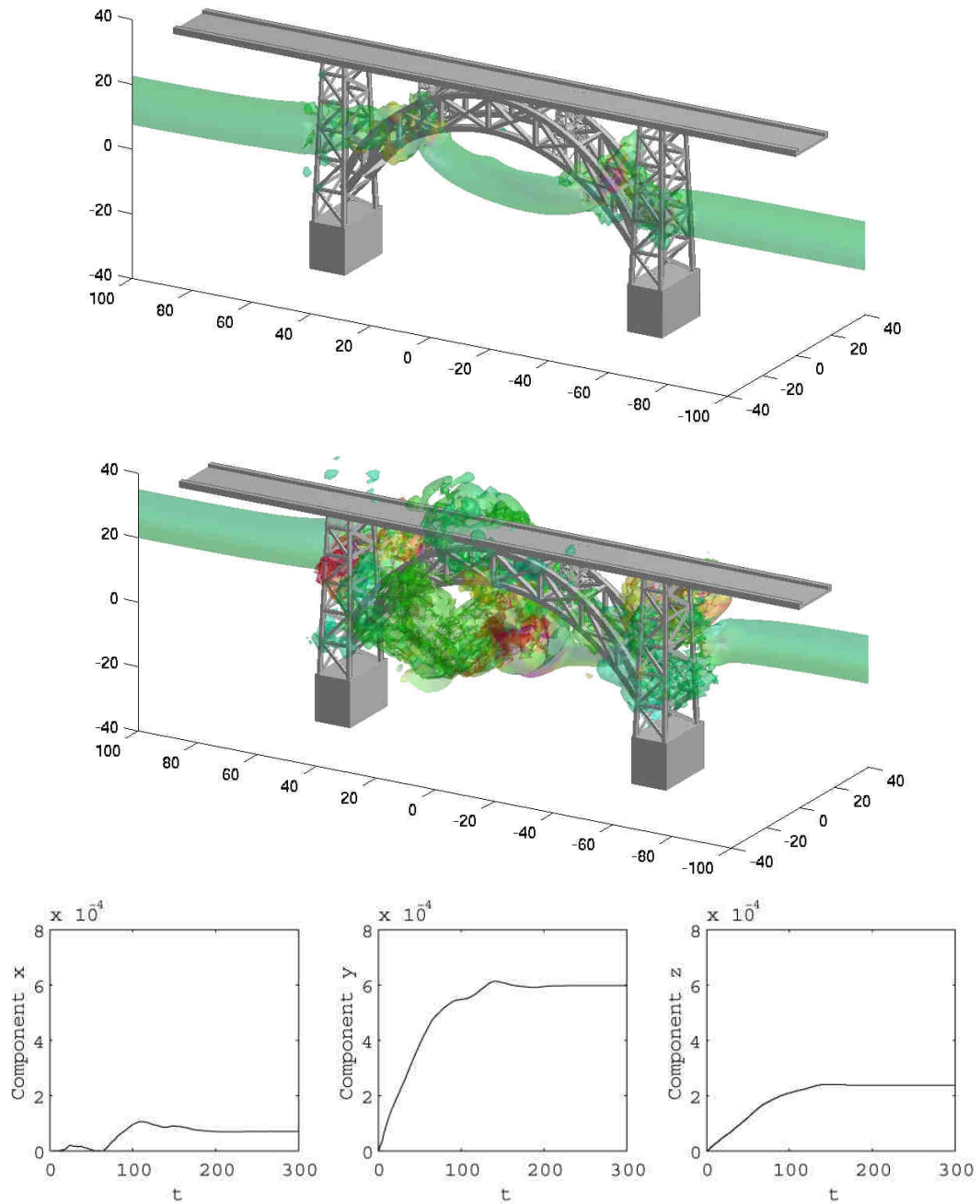


Figure 1.12 – Surface d’isovorticité $\|\omega\| = 0.05$ à $t = 12.5$ et $t = 28$, et erreur relative de circulation pour chaque composante jusqu’à $t = 400$.

Figure 1.12 – Vorticity isovalue at level $\|\omega\| = 0.05$ at $t = 12.5$ and $t = 28$, and circulation relative error up to $t = 400$ for all three components.

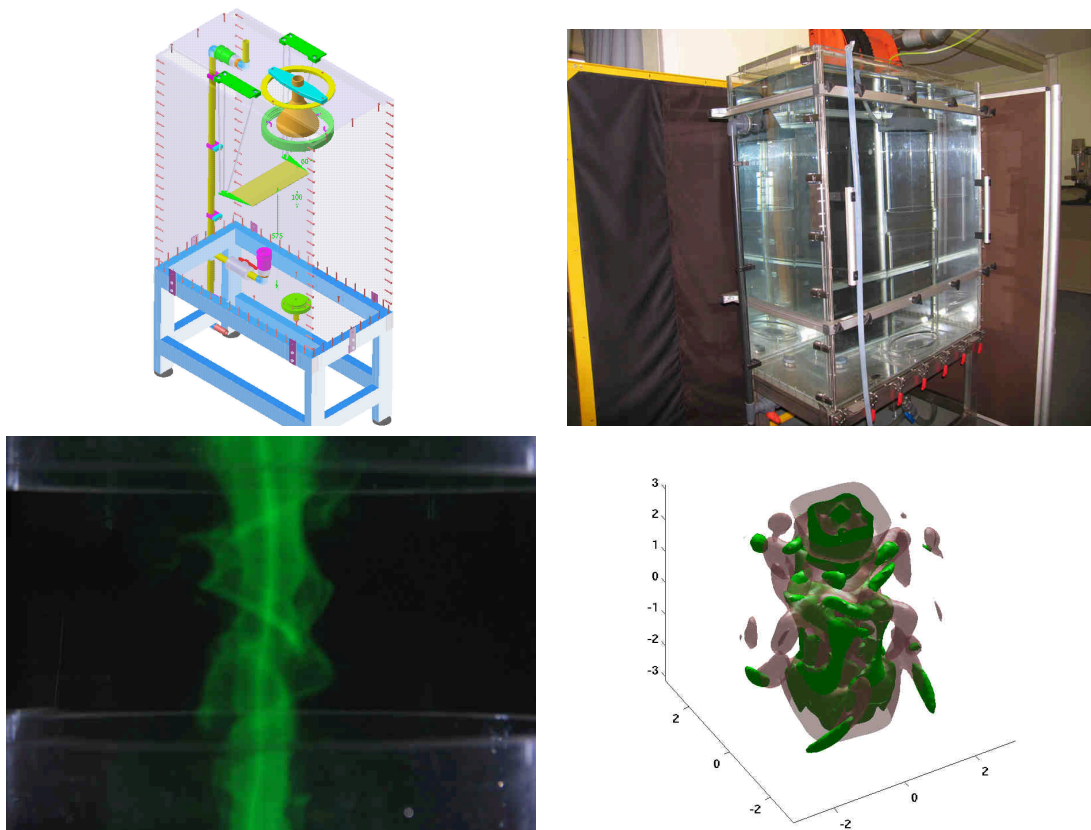


Figure 1.13 – Dispositif expérimental permettant de créer un tourbillon avec un jet interne dans sa direction axiale (en haut), et exemple d’instabilité non linéaire obtenu expérimentalement (en bas à gauche) et numériquement (en bas à droite).

Figure 1.13 – Experimental device generating a column vortex with internal jet aligned with its axis (top pictures), and example of non-linear instability obtained experimentally (bottom left picture) and numerically (bottom right picture).

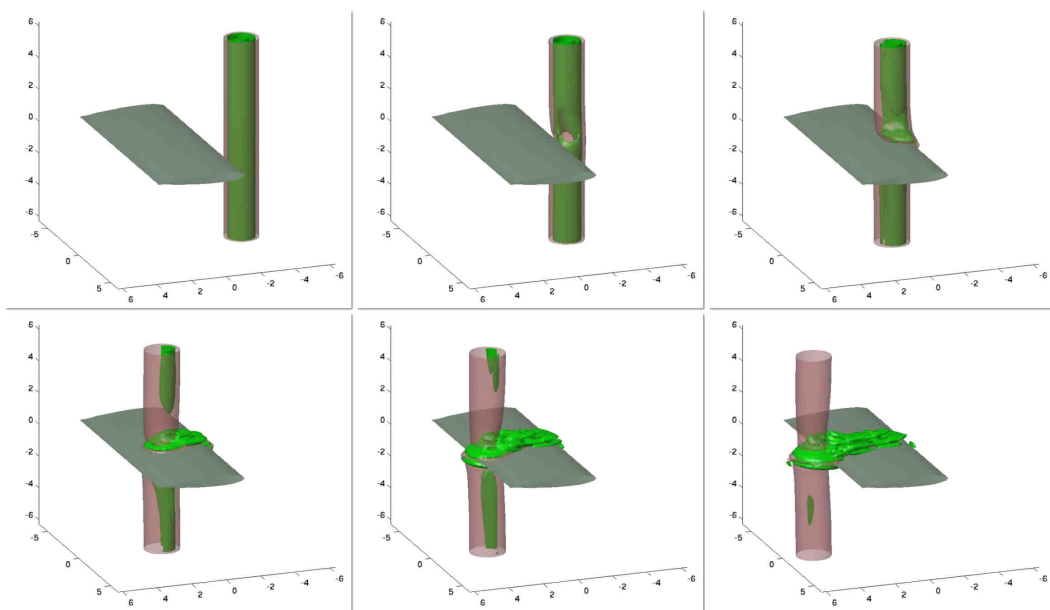


Figure 1.14 – Surfaces d’isovorticité d’un tourbillon impactant un profil NACA0012 tridimensionnel (sans torsion), par méthode de surface immergée. Légende : vorticité colinéaire à l’axe du tourbillon en rouge translucide et orthogonale en vert.

Figure 1.14 – Isovorticity surfaces of a column vortex impacting a NACA0012 profiled body (three-dimensional but torsionless body), using immersed boundary method. Legend : vorticity component colinear to the tube axis (in red), and normal to its axis (in green).

HYBRID VORTEX-IN-CELL METHODS IN COMPLEX GEOMETRIES

This first chapter aims at presenting Hybrid Vortex-in-Cell methods, that is to say the use of coupling between grid and particles, and their extension to complex geometry (ie around an arbitrarily shaped body), using harmonic analysis tools. Aspects related to no-slip flows (or flows with slip laws), are developed in next chapter.

The section 1.1 recalls the construction Navier-Stokes of equations in their vorticity formulation. The Lagrangian discretization and the split of these equations is then described. Moreover, section 1.2 presents no-through-flow boundary conditions with a «surface-to-surface» harmonic operator, which is in practice fully invertible, thus allowing to perform flow computation in complex three-dimensional geometries, for almost the same computational cost as in a standard Cartesian box.

1.1 Hybrid Grid-Particle formulation

The present section describes the Navier-Stokes equations as a pure dynamical systems on vorticity, and the particle discretization following from this formulation. The resulting algorithm, available as a synthetic diagram on figure 1.2, is applied to numerical simulation of three-dimensional wakes behind a circular cylinder.

Among the main advantage of particle methods using vorticity, one finds the fact that convection vanishes in the equations, as well as its stability condition, in practice very restrictive, especially for moving boundaries. Moreover, vortical formulation make all implicitation rely on elliptic problems, allowing the use of very fast solvers and large time step without noticeable loss of quality for mechanical diagnostics.

1.1.1 Set up of Navier-Stokes in their vorticity formulation

One considers a Newtonian fluid of density ρ and of dynamic viscosity μ . The velocity field is denoted u , and the pressure p .

The fundamental equation of dynamics (Cauchy's equation) is

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}(\mathbf{S}) + f$$

where $\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \lambda\operatorname{div}(u\mathbf{I})$ is the stress tensor, with $\mathbf{D} = (\nabla u + \nabla u^t) / 2$ being the strain tensor. Coefficients λ et μ are linked by the Stokes relation $3\lambda + 2\mu = 0$.

Mass conservation and incompressibility lead to the usual Navier-Stokes equations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u = \frac{1}{\rho}(f - \nabla p) \quad (1.1)$$

with $\nu = \mu/\rho$ being the kinematic viscosity and the velocity field u satisfying $\operatorname{div}u = 0$ all over the domain. The physical adherence boundary condition is written $u = 0$.

The vorticity is then introduced as $\omega = \operatorname{rot}u$. By taking the curl of Navier-Stokes equations (1.1), one gets

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla u - \nu \Delta \omega = \frac{\operatorname{rot}f}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times (f - \nabla p)) \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.2)$$

with $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sufficiently smooth, or tensorial product of sufficiently smooth open sets, whose boundary is denoted $\partial\Omega$ and on which one considers the normal field $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

By definition, vorticity is a divergence-free field. While it is obvious to compute vorticity from velocity, it is not obvious, but possible, to build a velocity field satisfying both no-slip-through and divergence-free conditions, from a divergence-free vorticity field. Let such a vorticity-to-velocity field be denoted $u = \mathcal{A}\omega$, which will be described in the next sections.

In the case of biphasic fluid without miscibility (and without diffuse interface models), it is noticeable that the expression $\nabla \rho \times \nabla p$ becomes singular, of surface Dirac function.

Moreover, we will consider only external forces deriving from a potential field (ie $f = -\nabla\xi$). When density ρ is constant (and remains constant by incompressibility), right hand side of equation (1.2) vanishes, and the Navier-Stokes equations can be written as a dynamical system :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{A}\omega \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathcal{A}\omega - \nu \Delta \omega = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.3)$$

with boundary conditions $u = \mathcal{A}\omega = 0$ in the case of adherence conditions without body motion.

Furthermore, ideal fluids ($\nu = 0$), whose dynamical is modelled by the Euler equations, are not satisfying the full no-slip conditions $u = 0$, but only the no-through-flow condition $u \cdot n = 0$, systematically satisfying by definition of vorticity-to-velocity operator \mathcal{A} . The Euler equations, in their vorticity formulation, read as the following dynamical system :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{A}\omega \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathcal{A}\omega = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \quad (1.4)$$

without any other boundary condition than the condition already included in the definition of \mathcal{A} .

1.1.2 Usual Hybrid Vortex-in-Cell methods

Vortex-in-Cell methods consist in discretizing the domain Ω by a set of cells (indexed by p thereafter), of volumes v_p and location $x_p(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On each cell, the vorticity is denoted ω_p . One can refer to [26, 40] for a large scope of usual results and practice related to these methods. The idea is to concentrate on points all the quantities related to the cells, thus introducing the particle discretization as

$$\omega(t) = \sum_{p=1}^P \omega_p(t) \delta_{x_p(t)} v_p \quad (1.5)$$

These quantities, on each cell, satisfy the following dynamical system of finite-dimension, set up from equation (1.3) :

$$\begin{cases} \frac{d\omega_p}{dt} = [\omega \cdot \nabla u]_{x_p} + \nu [\Delta \omega]_{x_p} \\ \frac{dx_p}{dt} = u(x_p) \\ \frac{dv_p}{dt} = v_p(t) \operatorname{div} u(x_p(t)) \equiv 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

where u is the velocity field satisfying $\operatorname{div} u = 0$ in Ω , $\operatorname{rot} u(x_p) = \omega_p$ for all p and $u = 0$ on $\partial\Omega$. The field ω used to compute $\omega \cdot \nabla u$ and $\Delta \omega$ is an appropriate estimation of formula (1.5).

The first advantage of such a formulation is that convective term $u \cdot \nabla \omega$ vanishes, as well as its related CFL condition, usually very restrictive for flow computation, and especially for lightly viscous flows. The difficulty is to build the velocity field. It is of course possible to build it by using the convolution formula :

$$u(x) = K \hat{*} \omega(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla K(x-y) \times \omega(y) dy \quad (1.7)$$

where K is a Green Kernel. In the full space \mathbb{R}^3 , K is in practice a regularization of $(4\pi|x|)^{-1}$ (this is historically how vortex methods have been introduced). A particle of vorticity ω_p and of volume v_p , thus of strength $\alpha_p = \omega_p v_p$, induces the velocity field

$$u_p(x) = K \hat{*} (\alpha_p \delta_{x_p}) = \nabla K(x - x_p) \times \alpha_p \quad (1.8)$$

The velocity at any point \bar{x} is then given by

$$u(\bar{x}) = \sum_p \nabla K(\bar{x} - x_p) \times \omega_p v_p \quad (1.9)$$

Nevertheless, an appropriate kernel needs to be built in order to satisfy $u \cdot n = 0$ on $\partial\Omega$, which is in practice not possible for complex geometries, except by solving fully its related integral equations. Moreover, such Green kernels are not able to make the velocity field satisfy the full no-slip condition $u = 0$ on the body. Furthermore, even in the case of full space \mathbb{R}^3 , Green kernels are not compact supported : the computational cost of such a sum of kernel evaluations involved in velocity computation behaves as the square of particle number. Improvements of summation techniques, such as tree codes [42] and/or multipolar expansion [32, 59], are not sufficiently efficient [13] for considering large three-dimensional flow simulations.

An efficient alternative to Green kernels is the use of grids, underlying the particle lattice. Such a grid-particle coupling has been revisited in the 90s, for domains without physical boundaries, or with periodic boundary conditions (see [47] for instance) : the vorticity field is transferred to the grid by means of a convolution using high order compact-supported kernel. A vectorial Poisson equation, solved on the grid by fast solvers (FISHPACK or MUDPACK in practice), allows to get the stream function whose curl is the velocity field. Quantities $\omega \cdot \nabla u$ and $\Delta\omega$ are computed on the grid by means of finite difference schemes (usually 4th order, as well as for the Poisson equation discretization). The stretching and diffusion terms are interpolated back to particles, in order to perform a step for the ordinary differential equation (1.6), usually using second or fourth order Runge-Kutta schemes.

A meaningful time discretization of equation (1.2) consists in a fractional step algorithm splitting apart convective and diffusive part [43, 38], these problems being solved one after another. These two steps of convection and diffusion, briefly present herein, are detailed respectively in sections 1.2 and 2.3, and even more detailed and analysed in [3] and [4].

Let \mathcal{A} be an operator inverting the curl operator (ie such as $\text{rot}u = \text{rot}\mathcal{A}\omega = \omega$), from and to spaces of divergence free fields, such as $u = \mathcal{A}\omega$ satisfies $u \cdot n = 0$ at boundaries :

$$\mathcal{A} : \{ \omega : \text{div}\omega = 0 \text{ in } \Omega \} \longrightarrow \{ u : \text{div}u = 0 \text{ in } \Omega, u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} \quad (1.10)$$

The full description of operator \mathcal{A} , including its formulation in complex geometries, is given at section 1.2.

Equation (1.2), source-free and without diffusion, reads

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathcal{A}\omega \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathcal{A}\omega = 0 \quad (1.11)$$

whose boundary condition $u \cdot n = \mathcal{A}\omega \cdot n = 0$ is systematically satisfied. The dynamical system (1.11) becomes then, by particle discretization [20] :

$$\begin{cases} \frac{d\omega_p}{dt} = [\omega \cdot \nabla \mathcal{A}\omega]_{x_p} \\ \frac{dx_p}{dt} = \mathcal{A}\omega(x_p) \\ \frac{dv_p}{dt} = v_p(t) \text{div}\mathcal{A}\omega(x_p(t)) \equiv 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

One can notice that equation (1.11) does not create vorticity from void, which may be the case for ideal fluids streaming around non-smooth body (that is to say presenting). Firstly, void vorticity field are not initial conditions compatible to stationary solutions of irrotational flow in singular geometries. Secondly, singular vortex created for ideal fluids at geometry corners is completely determined by global circulation and can be set manually [104, 113]. Thirdly, one aims at considering viscous flows, for which corner effects are dealt with by means of the no-slip conditions, generating appropriate vorticity (possibly strong for sharp corners, see [39]).

The diffusion step consists in solving the following parabolic problem over a time step :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega = 0 \quad (1.13)$$

with kinematic boundary conditions $u = \mathcal{A}\omega = 0$, using the final value of solution of equation (1.11) as initial data.

The combination of these convective and diffusive steps is a first order fractional step, based on the following development :

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} + \mathcal{O}(t^2)$$

A second order splitting can be easily achieved using the Strang formula

$$e^{t(A+B)} = e^{tA/2}e^{tB}e^{tA/2} + \mathcal{O}(t^3)$$

or even at higher order using Trotter permutation formulae. A drawback of reaching high order is that it decreases diffusion characteristic time, thus reducing the numerical boundary layer thickness (see section 2.3). Indeed, direct numerical simulation of such thin boundary layers is then beyond technological limits, which are often almost reached with first order fractional step algorithm, when it comes to large three-dimensional simulations. One may also notice that considering higher splitting order is interesting only if all subproblems are also discretized at least at the same order. In practice, the algorithms used herein are first and second order in time, and up to fourth order in space.

A way to convert kinematic boundary conditions $u = \mathcal{A}\omega = 0$ into standard Neumann or Robin-Fourier conditions on vorticity is the use of Chorin's formula (see section 2.3). The resulting parabolic partial differential equation is numerically solved by an integral method [4, 5].

To these two substeps of convection and diffusion, it is necessary to introduce a remeshing procedure in order to avoid holes or clusters of particles, especially close to boundaries. This remeshing is performed by means of a convolution with smooth third order and compact supported kernel (kernel M'_4 , see [45]). Its use and its modified formulation in order to satisfying remeshing integrity close to boundaries are already fully discussed in [11, 16] and will not be discussed further in the present manuscript. Moreover, recent advances allow to do simultaneously the diffusion and remeshing steps [60], in the case of open domain (without boundaries).

The resulting algorithm involving all the substeps described above is summarized on figure 1.2, page 28.

Furthermore, kernels used for all the convolutions mentioned above are very compact supported (a few grid points, whose number is constant), and consequently all the substeps of the global algorithm over a time step have a computational linear with respect to the number of grid points and particles (themselves scaling linearly with respect to one another). Only the numerical resolution of elliptic problems on a standard Cartesian grid scales as $\mathcal{O}(n \log n)$, using the scientific library FISHPACK. The global algorithm has a computational cost scaling as $\mathcal{O}(n \log n)$.

1.1.3 Computation of three-dimensional wakes behind a circular cylinder

My PhD thesis [16] has consisted in providing numerical analysis of vortex method in cylindrical coordinates for no-slip flows, aiming at performing external flow computations around a three-dimensional body. A few hints and trends have been identified concerning accuracy and computational cost, in order to study the feasibility of reaching long time scales, beyond any transient effects. A highly efficient CFD code has been written.

The code has been used to identify bifurcation of flow topology, mainly governed by the Reynolds number $Re = U_\infty D / \nu$ where ν is the kinematic viscosity, U_∞ the far field velocity and D the cylinder diameter, or more generally the characteristic body crosswise length.

A goal, among others, was to recover the topology of hydrodynamics instabilities when wakes become spontaneously three-dimensional. Indeed, it is now well-known that for sufficiently high Reynolds numbers (above $Re = 190$), several modes of non-turbulent three-dimensional instabilities trigger on spontaneously, exhibited both experimentally [70] and numerically [62]). Such instabilities grow until they contain as much enstrophy as the nominal flow, reaching then a saturated regime (see figure 1.1). At higher Reynolds numbers, these instabilities can coexist with turbulence (at least up to $Re = 4000$, see [68, 63]). Among effects of three-dimensionality, one gets a substantial decrease of drag coefficient (see figure 1.4 and [67]).

Figure 1.3 shows the comparison of mode B (at $Re \geq 260$) between vortex method and experiments. Moreover, vortex method allows to exhibit, with an unequalled accuracy (cf. figure 1.5), the velocity field in the spanwise wavelength of main growth mode. Thanks to the high stability of the numerical method, a research program on rotationally oscillating circular cylinders, and their impact on flow topology, has been initiated (see section 3.2 and [9, 14]).

Top priority has then been given to reliability and improvement of computational code [11], in order to reach long time scales. This mainly aims at describing attractors accurately, since fluid is no longer a periodic oscillator when hydrodynamics instabilities become the dominant feature.

The vanishing of stability conditions on transport allows to consider bodies whose boundary are moving tangentially, without decreasing time step. It is thus possible to use time steps up to 10^3 times larger as for conventional Eulerian schemes, for the same accuracy on mechanical and topological diagnostics :

- In the case of a cylinder uniformly translating in a flow, see [11] compared to [65] (spectral elements), and [69] (finite volumes) ;
- In the case of rotationally oscillating cylinder, also translating uniformly in a flow, see [9] in 3D, validated up to $Re = 2000$ in 2D and $Re = 500$ in 3D, compared to [73] and [76], both these works holding in 2D and performed by finite elements.

1.2 Harmonic formulation for arbitrarily shaped bodies

This section aims at summarize my work on how to satisfy the no-slip-through conditions $u \cdot n = 0$ at boundaries, using the harmonic formulation of immersed boundary technique in the context of elliptic problems. This work is fully detailed in the joint article [3].

Only smooth geometries are considered, herein $\partial\Omega$ being supposed of class C^1 . Mathematical tools aiming at studying regularity of solutions and well-posedness of such problems are available for boundaries presenting less regularity, and even for fractal geometries [103], but they are not planned to be used in the present work.

The vorticity-to-velocity operator \mathcal{A} is usually defined by introducing a stream function ψ such as $u = \text{rot}\psi$ satisfies all the required properties. The main drawback of such a technique is that the no-slip-through and divergence-free conditions introduce a coupling between stream function

components. This makes the Poisson equation (for stream computation) fully vectorial with non-standard boundary conditions, thus a strong loss of performance.

Let the surface around which the flow is computed be denoted Γ . A way to avoid the coupling between components of the vectorial elliptic equation $-\Delta\psi = \omega$ is to forget the boundary Γ and immerse it in a standard Cartesian computational box, denoted Ω^* . The surface Γ is then called an immersed boundary in Ω^* .

Immersed boundaries have been the topic of many studies in the last decades [44], holding for elliptic configurations [34, 35, 110], directly within the Navier-Stokes equations [53, 57], usually leading to expressions uneasy to put into practice, or related to more general integral equations [54, 30]. One can notice that integral formulation is well adapted to discretizations like finite elements, «boundary element methods» being a full research field by itself [58, 46, 37].

My work described in [3] has been to characterize and quantify the immersion operator. Thanks to the vorticity formulation of Navier-Stokes equations, the immersion holds in an elliptic context. The method consists in avoiding to set up the no-through-flow condition $\text{rot}\psi \cdot n = 0$ on $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \omega \text{ in } \Omega^* \\ \text{Boundary conditions implying } \text{div}\psi = 0 \text{ on } \partial\Omega^* \end{cases} \quad (1.14)$$

With only boundary conditions $\text{div}\psi = 0$ on $\partial\Omega^*$, the vectorial Poisson problem (1.14) can be split component by component in three scalar Poisson equations. Fast solvers like FISHPACK or MUDPACK are then available.

In order to satisfy the condition $u \cdot n = 0$, a fourth scalar equation is then introduced, whose solution is harmonic :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{rot}\psi \cdot n \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.15)$$

The velocity field u is then given by

$$u = \mathcal{A}\omega = \text{rot}\psi - \nabla\phi \quad (1.16)$$

and satisfies

$$\begin{aligned} - u \cdot n &= \text{rot}\psi \cdot n - n \cdot \nabla\phi = 0, \\ - \text{div}u &= \text{div}\text{rot}\psi - \Delta\phi = 0 \\ - \text{rot}u &= \text{rot}\text{rot}\psi - \text{rot}\nabla\phi = -\Delta\psi = \omega \end{aligned}$$

The boundary shape Γ is not involved in the computation of stream ϕ . It is then possible to consider any geometry (sufficiently smooth), around which it is possible to compute velocity from vorticity. The harmonic problem (1.15) can be solved by rewriting it under the form

$$-\Delta\phi = T_\mu \text{ in } \Omega^* \quad (1.17)$$

where T_μ is a generalized function Γ -supported, whose density is $\mu \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$:

$$\langle T_\mu, \zeta \rangle = \int_\Gamma \mu(x)\zeta(x)d\sigma(x) \quad (1.18)$$

where σ is the induced Lebesgue measure on Γ . The goal is then to find μ such as

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \text{rot} \psi \cdot n \text{ on } \partial \Omega \quad (1.19)$$

The operator $\Lambda : \mu \mapsto n \cdot \nabla \phi$ is called immersion operator, and is a harmonic operator of degree zero, from which good spectral properties are expected [115]. Its mathematical and numerical properties are described and detailed in [3]. Finding the density μ requires either to compute $\mu = \Lambda^{-1}(\text{rot} \psi \cdot n)$ or to solve the related linear system, for example by using an iterative method like GMRES, which does not require to build the matrix of Λ (but only to be able to evaluate it).

However, each evaluation of Λ also requires to solve the elliptic equation $-\Delta \phi = T_\mu$. It has been shown that it is much faster to solve these two overlapping linear systems than to solve the full linear system coming from the stiffness matrix of the vectorial Poisson equation involving all geometrical features. Such an approach has been validated on the test case of the two-dimensional cylinder wake with impulsive start at $Re = 9500$ [13].

It is shown in [3] that the immersion operator Λ is self-adjoint in $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$, but is a non-normal operator in its natural space $\mathbb{L}^2(\Gamma)$. Nevertheless, it is observed that its singular value decomposition is grouped, whether the geometry is smooth (sphere), singular (NACA2412) or complex (aircraft geometry). This leads to a small conditioning, thus good convergence properties.

Let $\llbracket -\Delta^{-1} \rrbracket$ denote the operator that gives the solution of (1.14) from its right-hand-side ω . One recalls the notation T , which injects the space of densities over Γ in its dual space, by $T(\mu) : \varphi \mapsto \langle \mu, \varphi \rangle_\Gamma$.

As a summary, the immersed boundary method builds a velocity field u satisfying the no-through-flow condition on Γ , from a velocity field \bar{u} a priori flowing through Γ , as follows :

$$u = \bar{u} + \nabla \Delta^{-1} T(\Lambda^{-1}(\bar{u} \cdot n)) \quad (1.20)$$

This expression shows the feature of overlapping linear systems arising in this formulation. One recalls that one of its main advantages is that $-\Delta^{-1}$ is independent of body shape, thus allowing the use of very fast solvers. Moreover, the operator Λ acts only on Γ (a surface), and its discretizations are in practice of much smaller size than the domain Ω (a volume). Consequently, when the surface Γ is not over-refined, it is possible to compute explicitly Λ^{-1} , as shown for a few validating examples described in the next section 1.3.

1.3 A few ideal fluid computations

1.3.1 Aircraft geometry

In order to validate the immersed boundary approach, computations of flows around an aircraft geometry have been performed in the context of incompressible ideal fluid (Euler equations) : without viscosity and with only the no-through-flow boundary condition $u \cdot n = 0$. These simulations have been successfully performed, as shown on figures 1.7 and 1.8. Indeed, circulation is

well conserved, and no-through-flow condition is algebraically satisfied all throughout the time evolution (see figure 1.6).

The matrix encoding of immersion operator Λ and its inversion lead to very fast computation (less than 12 minutes for the simulation shown on figure 1.8, on a sequential Opteron processor). Details of these simulation are available in [3].

1.3.2 Flow around a hollow-framed solid

In order to check robustness of this immersed boundary method, a kind a civil engineering geometry has been used : a hollow-framed iron bridge (see figure 1.9). The spectra of immersion operator is well grouped around origin, as shown on figure 1.10, despite the complexity of body geometry.

Such a solid geometry allows air to flow between its iron pieces (cf. figure 1.11). It is thus interesting to point out where the forces applied by the flow on the structure are the strongest. However, this example has been used only as a benchmark, meaningful due to the complexity of its shape.

Despite this severe benchmark, one gets a flow whose enstrophy and energy are bounded, with an acceptable conservation of circulation (see figure 1.12).

1.3.3 Interaction between a column vortex and a NACA airfoil

This project, in collaboration with A. Giovannini (IMFT, Toulouse, France) and partially funded by DGA, consists in understanding the dynamics of column vortex containing an axial jet, and its different kinds of interaction with a body, presently a NACA0012.

The first part of this project concerns the study of stability of such column vortex. Their equilibrium has been studied during the PhD thesis of I. Gillieron. The experimental device has been set up by B. Ferret. Experimentation and numerical simulations have been performed by H. Sleiman during his Master Thesis, under the supervision of P. Brancher and myself, aiming at identifying stable regime and characteristic instabilities at different Swirl and Reynolds numbers (cf. figure 1.13).

Once a stable configuration is reached and reproducible both by experiments and numerical simulations, the interaction between a column vortex and an airfoil could be studied. Such computations are already available in the case of ideal fluids (cf. figure 1.14). The no-slip-through condition used here is similar to the one used for the dynamics of annular vortex interacting with a solid cylinder (figure 2.7).

Vortex methods are already a valuable tool for computation of vortical rotating jets (see [66]), and could be used to study fluid-structure interaction in complex geometries.

CONDITION AUX LIMITES EN VORTICITÉ POUR LES MÉTHODES LAGRANGIENNES

Une famille de méthodes VIC avec couplage grille-particules a été présentée au premier chapitre. Une technique de surfaces immergées a été également présentée, garantissant en géométrie arbitraire la condition de non-pénétration cinématique $u \cdot n = 0$ reposant sur l'analyse harmonique de l'opérateur d'immersion.

Nous nous intéressons à présent à traduire la condition d'adhérence $u = 0$ au bord en terme de conditions sur la vorticité. La technique utilisée repose essentiellement sur la généralisation des formules de Chorin [105] et la résolution des équations intégrales associées. En effet, la littérature existante ne propose pas d'estimation valide pour les déterminations *ad hoc* de leurs solutions pour le cas tridimensionnel, ni d'analyse d'erreur. Dans la configuration tridimensionnelle, les effets de courbure et de courbure transverse interviennent à l'ordre principal, ce qui n'est pas le cas pour la configuration bidimensionnelle.

L'esprit est sensiblement le même que dans le chapitre premier, à savoir développer une méthode consistante pour une géométrie quelconque, avec une quantification de l'erreur, la moins couteuse possible en terme de temps de calcul, afin de rendre la méthode opérationnelle pour les grands écoulements tridimensionnels.

La section 2.1 décrit comment l'équation de diffusion (1.13) avec condition aux limites cinématique, responsable des effets visqueux, peut être découpée par linéarité en deux parties.

D'une part, une partie diffusive sur tout le domaine fluide avec conditions aux limites usuelles, résolue en pratique par des schémas PSE arbitrairement lagrangiens ou eulériens, décrits à la section 2.2, et plus en détail dans [5].

D'autre part, une partie diffusive générant un flux de tourbillon aux parois, résolue par méthode intégrale. La formulation intégrale de ce problème est décrite dans la section 2.3 et plus en détail dans [4], des validations étant disponible en 2D dans [13] et en 3D dans [11].

On consid ere, de m eme qu'au chapitre pr ec edent, l'op erateur notée \mathcal{A} qui assure la transformation vorticit e \rightarrow vitesse : $u = \mathcal{A}\omega$. La condition d'adh erence $u = 0$ est transposable imm ediatement en condition d'adh erence sur un bord en mouvement tangentiel $u = u_{\text{goal}}$, condition utilis ee de mani ere intensive pour le contr ole des écoulements 3D au chapitre 3. La transposition aux conditions du premier ordre $u = \lambda \partial_n u$ n'est, par contre, pas du tout imm ediate et fait l'objet de la section 2.4 et de [1].

2.1 S eparation des effets diffusifs et m ethode de Chorin

En étudiant s epar ement les contributions visqueuses à l'int erieur du domaine fluide et au voisinage des parois, cela se traduit par la r esolution de deux équations de la chaleur avec des conditions aux limites de type Fourier-Robin, respectivement homog enes avec condition initiale non nulle, et non homog enes avec condition initiale nulle.

Notons que ce splitting est r ealis e par lin earit e de l' equation de la chaleur, donc sans introduire d'erreur de non-commutativit e des semi-groupes, contrairement au splitting convectif-diffusif (1.11)-(1.13).

Il est également à remarquer que ces effets visqueux peuvent être calculées sur un r eseau de particules arbitraire. Cependant, en pratique, il est judicieux de r ealiser le remaillage du r eseau de particules entre les calculs de convection et de diffusion, comme le montre le diagramme 1.2, afin d'obtenir une r epartition plus r eguli ere et plus conservative de la diffusion. De r ecentes techniques permettent de r ealiser la diffusion et le remaillage par un seul calcul de convolution [60]. Une approche également voisine est de suivre des maillages d' el ements finis le long de caract eristiques, la diffusion étant calcul ee sur ce maillage [50].

En effet, on souhaite r esoudre l' equation de diffusion dont la donn ee initiale est le champ de vorticit e ω_0 solution de l' equation de convection (1.11)   l'instant final :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u = \mathcal{A}\omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour ce faire, on consid ere tout d'abord l' equation

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L}\omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

o u \mathcal{L} est un op erateur diff erentiel d efinissant les conditions aux limites de Robin-Fourier pour chaque composante de ω : si τ_i , $i = 1, 2$ est une base mobile tangentielle sur $\partial\Omega$, on a

$$\tau_i \cdot \mathcal{L}\omega = \frac{\partial \omega}{\partial n} \cdot \tau_i + \kappa_i \omega \cdot \tau_i \quad (2.3)$$

o u κ_i est la courbure le long de la direction τ_i (cf. [9, 11]), la courbure moyenne étant not ee $\bar{\kappa} = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$. Cette équation (2.2) est en pratique r esolue par des m ethodes de Particle

Strength Exchange discrètes, élaborées dans un contexte arbitrairement eulérien ou lagrangien, et développées dans [5] et plus brièvement dans la section 2.2.

On résout ensuite l'équation avec donnée initiale nulle et source aux bords :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L}\omega = g & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

Il s'agit de trouver g telle que la somme ω^* des solutions de (2.2) et (2.4), notées respectivement ω_1 et ω_2 , vérifie $u = \mathcal{A}\omega^* = 0$: il s'agit de la formule de Chorin [105] :

$$g(x, t) = n(x) \times \frac{\partial \mathcal{A}\omega_1}{\partial t}(x, t) \quad (2.5)$$

revisitée dans [106], qui prouve l'équivalence asymptotique entre (2.1) et (2.2)-(2.4) au sens $\mathbb{H}^{-2}(\partial\Omega)$. Les sections 2.2 et 2.3 s'intéressent respectivement à la résolution des équations (2.2) et (2.4).

2.2 Méthodes PSE discrètes

Ces travaux relatifs au calcul des effets visqueux, produits par l'équation (2.2), ont eu pour but de lever l'ambiguïté sur la notion de consistance qui leur a été historiquement affectée dans le cadre des méthodes particulières.

Tout d'abord, on remarque facilement que si l'on sait résoudre (2.4), on peut résoudre (2.2) sans imposer de condition aux limites. En effet, si on appelle ω_1 la solution de $\partial_t \omega - \nu \Delta \omega = 0$ avec condition aux limites arbitraire, on peut noter $q = -\nu \mathcal{L}\omega_1$ et considérer $\tilde{\omega}_1$ la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L}\omega = q & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

qui est du même type que (2.4) et qui implique par linéarité que $\omega_1 + \tilde{\omega}_1$ est solution de (2.2).

La méthode de Particle-Strength-Exchange (PSE) consiste, pour résoudre l'équation de la chaleur $\partial_t \omega - \nu \Delta \omega = 0$, à distribuer la circulation d'une particule sur les voisins dans un rayon ε .

D'une manière générale, on considère la description lagrangienne (1.5) de la fonction ω :

$$\omega(t) = \sum_{p=1}^P \omega_p(t) \delta_{x_p(t)} v_p$$

que l'on souhaite diffuser en discrétisant l'équation parabolique suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \operatorname{div}(\mathbf{L} \nabla \omega) = 0$$

L'opérateur d'échange entre particules est défini par

$$Q^\varepsilon \omega(x_k) = \sum_{l=1}^n \sigma^\varepsilon(x_k, x_l) (\omega_l - \omega_k) v_l \quad (2.7)$$

et permet une approximation de $-\text{div}(L \nabla \omega)$. Le but est alors de trouver la relation entre σ^ε et L . La rapidité d'évaluation de cette somme est garantie par le choix d'un noyau σ^ε à support fortement compact.

La formulation PSE basée sur un noyau Θ à symétrie sphérique consiste à écrire σ^ε sous la forme

$$\sigma^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^7} \Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) M\left(\frac{x+y}{2}\right) : (x-y)^{\otimes 2} \quad (2.8)$$

Différents choix pour Θ sont discutés dans [5, 16]. En introduisant A tel que

$$A_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} x_i^2 x_j^2 \Theta(x) dx \quad i, j = 1..3 \quad (2.9)$$

on remarque que $A_{kk} = 3A_{kl} = \gamma$ pour tout $k \neq l$.

Les travaux originaux construisant la méthode PSE (voir [29]) ont établi que

$$M = \gamma^{-1} L - \frac{\gamma^{-1}}{5} \text{Tr}(L) \text{Id}_3 \quad (2.10)$$

Cependant, lorsque l'on introduit la distance caractéristique entre particules, notée h , la convergence d'un tel schéma est en $\mathcal{O}[(h/\varepsilon)^p]$. Ce qui signifie que lors d'un raffinement de maillage à h/veps constant, le schéma n'est pas utilisable sous cette forme. Ceci est régulièrement sujet à controverse quant à l'utilisation des schémas PSE.

Une idée déjà présente dans [16] consiste à introduire les deux moments discrets suivants :

$$\gamma_1 = A_{ii} = \int_{\mathbb{R}^3} x_i^4 \Theta(x) dx, \quad \gamma_2 = A_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} x_i^2 x_j^2 \Theta(x) dx \quad i, j = 1..3, i \neq j \quad (2.11)$$

Il est alors établi dans [5] que

$$M = \frac{2(\gamma_1 + 2\gamma_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2^2} L - \frac{2\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2^2} \text{Tr}(L) \text{Id}_3 + H \quad (2.12)$$

avec

$$H_{ij} = \left(\frac{\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 - 6\gamma_2^2}{\gamma_2(\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2^2)} \right) (1 - \delta_{ij}) L_{ij} \quad (2.13)$$

où δ est le symbole de Kronecker. Cette expression se réduit à $H \equiv 0$ dans le cas d'un opérateur de diffusion L diagonal ou dans le cas $\gamma_1 = 3\gamma_2$ (incluant le cas continu).

Cette méthode basée sur les moments discrets est intrinsèquement convergente, n'ayant pas l'inconvénient de faire intervenir dans le taux de convergence la largeur ε du noyau utilisé. Les exemples validatifs, tirés de [5], sont sévères :

- Conservation de la circulation et validation de l'ordre de convergence avec un anneau tourbillonnaire rendant singulier $\Delta\omega$ sur l'axe de symétrie (figure 2.2),
- Champs de vorticité initiaux aléatoires, validant la valeur du taux de décroissance énergétique (viscosité effective) et développant un spectre d'énergie en $k^{-5/3}$, à $Re = 2000$ (figure 2.1), et $Re = 2 \cdot 10^5$.

Une analyse de sensibilité a également été réalisée dans [5].

2.3 Formulation intégrale des conditions d'adhérence

Cette section s'intéresse à la résolution rapide de l'équation parabolique avec source aux bords (2.4) générant un flux de tourbillon aux parois responsable du phénomène de couche limite :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L} \omega = g & \text{sur } \partial \Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel définissant le type de condition aux limites.

En pratique, la dynamique de l'ensemble d'un fluide est gouvernée par la dynamique de la couche limite [114, 111] : la mise au point d'une méthode efficace pour la résolution de (2.4) est donc essentielle pour obtenir des calculs d'écoulement précis.

Ce calcul de couche limite permet de garantir les conditions d'adhérences. Bien que les méthodes de panneaux aient été intensivement développées et analysées pour les conditions normales (voir section 1.2), elles ont fait l'attention de peu de travaux rigoureux en ce qui concerne leur formulation pour les conditions tangentielles.

Il a été montré que des conditions de Neumann répondent au problème en dimension 2 [106, 61] ou dans le cas du demi-espace pour la dimension 3 [26]. Pour le cas du cylindre, on peut montrer (voir [11]) que la courbure induit une condition de Fourier sur la composante azimutale. Le cas général fait intervenir des conditions de Fourier-Robin sur toutes les composantes.

La source g est donnée par la formule de Chorin (2.5) :

$$g(x, t) = n(x) \times \frac{\partial \mathcal{A} \omega_1}{\partial t}(x, t)$$

L'idée suggérée par [41], utilisée en 1D et 2D dans les années 1990 mais n'ayant pas fait l'objet d'une étude mathématique et conduisant à des résultats erronés à l'ordre principal, est d'exprimer la solution de (2.4) à l'aide des solutions fondamentales [109] de l'équation de la chaleur :

$$\omega(x, t) = \int_0^t \int_{\partial \Omega} G_{\xi, \tau}(x, t) \mu(\xi, \tau) d\sigma(\xi) d\tau \quad (2.14)$$

où μ est la densité du flux de vorticité et $G_{\xi, \tau}$ est la fonction gaussienne suivante :

$$G_{\xi, \tau}(x, t) = \widehat{G}(x - \xi, \nu(t - \tau)) \quad \text{avec} \quad \widehat{G}(x, \eta) = \frac{e^{-x^2/4\eta}}{(4\pi\eta)^{3/2}} \quad (2.15)$$

d'écart-type $\sqrt{2\nu(t - \tau)}$.

Une fois que l'on a la densité μ de cette distribution gaussienne, cela conduit en pratique à un algorithme très rapide, linéaire en fonction du nombre de points de discrétisation de la surface $\partial \Omega$. En effet, on peut considérer que numériquement le support de la gaussienne est de quelques écarts-types.

La densité de flux μ est solution d'une équation intégro-différentielle [108] :

$$-\frac{1}{2}\mu(x, t) + \nu \int_0^t \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}_x G_{\xi, \tau}(x, t) \mu(\xi, \tau) d\sigma(\xi) d\tau = g(x, t) \quad (2.16)$$

Les propriétés de régularité de l'opérateur intégral dans cette équation ont été établis dans de nombreux travaux, tels que [112, 108] (une liste plus conséquente est disponible dans [4]).

Il est alors possible d'approcher la solution de (2.16) par une formule explicite (donc sans c t de calcul significatif pour l'évaluer) ne dépendant que des coefficients de Fourier-Robin, de la courbure moyenne et de $\sqrt{\nu t}$.

Tandis que l'équation 2.16 est souvent traitée en négligeant l'opérateur intégro-différentiel pour les applications aérodynamiques (ce qui conduit simplement à $\mu = -2g$), on peut remarquer que de telles approximations grossières sont totalement erronées pour des nombres de Reynolds modérés et faibles : le facteur K de l'expression $\mu = -Kg$ est tracé sur la figure 2.4, dans le cas cylindrique, montrant qu'il est en effet asymptotiquement égal à 2 mais très diff rent pour les écoulements à bas Reynolds.

Une alternative à l'estimation de cet opérateur, sans négliger son impact sur la solution, est de construire le tenseur d'adjacence densité→glissement numériquement [51, 52].

Les résultats tridimensionnels font intervenir à l'ordre 1/2 la courbure transverse à la vitesse (phénomène intrinsèquement 3D). Cette étude, incluant la quantification des ordres de consistance et de convergence, sont détaillés dans l'article [4] : on montre que

$$\left[1 + 2 (\bar{\kappa}(x) - \kappa_i(x)) \sqrt{\nu t / \pi} \right] \mu(x, t) \cdot \tau_i = -2g(x, t) \cdot \tau_i + \mathcal{O}(t^\gamma) \quad (2.17)$$

avec $\gamma = \min((1 + \alpha)/2, 1 - \varepsilon/2)$, sous des hypothèses d'une régularité $\mathcal{C}^{2, \alpha}$ de la surface $\partial\Omega$ et de $(1 - \varepsilon)$ -Hölder continuité de fonction μ (obtenue via des estimations de Schauder). Ceci valide l'aspect explicite de la singularité en $t^{1/2}$.

Le passage de (2.15)   (2.17) demande d'établir plusieurs estimations successives de l'opérateur intégro-différentiel présent dans l'équation (2.15) :

- la restriction de l'opérateur global à une seule carte par estimation microlocale,
- la quantification de la différence entre l'opérateur local et son estimation sur ses variétés paraboliques partout osculatrices,
- l'existence de leur extension sur le fibré tangent et leur aplatissement, permettant un calcul analytique.

Il est également établi dans [4] que le taux de convergence γ de la densité, à l'ordre 1 ou 3/2, dépend alors de la typologie de surface :

- Si la surface est sans torsion, c'est à dire le tenseur des dérivées troisièmes des cartes de la sous-variété Γ de \mathbb{R}^3 est identiquement nul (cas du cylindre, tore, sphère, plan, . . .), alors le taux de convergence γ va jusqu'à 3/2, comme le montre la figure 2.5.
- Si la surface présente de la torsion (tore «ridé»), le taux γ optimal est limité à 1 (voir figure 2.6).

L'ordre global de croissance des solutions de l'équation de la chaleur originale (2.4) dépend bien sûr de γ , et lui est supérieur, en fonction du choix de discrétisation temporelle et spatiale de la formule de distribution gaussienne (2.14).

La vorticité est distribuée de manière gaussienne aux parois ( quations (2.14)-(2.15)), suivant la densité μ donnée explicitement et sans calcul numérique par la formule (2.17). Il est alors possible de garantir, à un ordre de consistance près, les conditions cinématiques d'adhérences au bord. La formule (2.17) a été établie dans [4] dans le cadre d'une géométrie arbitraire, et ne dépend que de la courbure et de la viscosité.

L'algorithme pour la résolution des équations de Navier-Stokes consiste alors à coupler les points suivants, comme le représente le diagramme sur la figure 1.2 :

- la méthode intégrale présentée ci-dessus (présente section),
- le calcul de diffusion hors parois par une méthode PSE discrète (section 2.2),
- le schéma lagrangien (1.12) pour le calcul des termes convectifs (section 1.1.2), généralisé au cas d'une surface quelconque par l'étude des opérateurs d'immersion (section 1.2).

Le couplage de l'ensemble, élaboré dans un contexte de géométrie arbitraire, a été validé sur les cas tests d'un anneau tourbillonnaire impactant un cylindre (en 3D, figure 2.7), ainsi que d'un sillage à $Re = 9500$ (figure 2.3, à comparer à [64]).

La robustesse de cet algorithme de création de vorticité est illustré sur le cas d'un cylindre en mouvement alterné (conditions aux limites dynamiques), représenté sur la figure 2.8. Un ensemble de cas tests pour les flots oscillants a été réalisé pour des nombres de Reynolds et Keulegan-Carpenter modérés.

2.4 Formulation en vorticité du glissement cinématique du premier ordre

On s'intéresse dans cette section à la façon de calculer, en formulation vorticité, des écoulements soumis à une condition aux limites cinématique du premier ordre, de la forme $u = \lambda \partial_n u$ pour les composantes tangentielles de la vitesse [98, 90, 97]. La grandeur λ est appelée *longueur de glissement* : lorsque $\lambda > 0$, on parle de *condition hydrophobe*. Ce projet a été partiellement soutenu par une attribution de BQR INSA Toulouse. Ces travaux sont en cours de réalisation au moment où ce manuscrit est rédigé.

Les applications concernent notamment :

- Les écoulements autour d'obstacles ayant subis un traitement de surface, dont une partie conséquente conduit à une longueur de glissement physiquement constante [99, 86, 87], jusqu'à des fréquences de cisaillement relativement élevées [91].
- La prise en compte des effets de raréfaction et/ou de potentiels chimiques dans les dispositifs nanotechnologiques [85, 89], notamment pour la physique des nanotubes de carbone [102], que ce soit pour les écoulements internes ou externes.
- La prise en compte des phénomènes de nanobulles [93] ou nano/micro-films gazeux [100] proches des parois, générés par exemple par rugosité [19].
- Les lois de parois pour les écoulements à couche limite turbulente [107].
- Toute superposition des phénomènes énoncés ci-dessus, comme par exemple les écoulements microfluidiques [84, 96] ou turbulents [88, 101], avec bord super-hydrophobe utilisé comme moyen de contrôle de la traînée et du débit [94].

La stabilité du fluide soumis à de telles conditions aux limites a déjà fait l'objet de plusieurs études [92, 95].

Le développement de méthodes numériques performantes pour pouvoir faire de tels calculs est envisagé en collaboration avec l'ETHZ Zürich. Des applications originales de type biomédical sont alors envisageables, telles que la modification génétique d'un noyau de cellule par injection d'une macromolécule d'ARN via l'intérieur d'un nanotube de carbone, comme le montre la figure 2.13. Le mécanisme de passage à travers la membrane cellulaire pour un échange d'ARN-ADN mime à des fins thérapeutiques le fonctionnement de certains virus.

Les schémas numériques robustes lagrangiens sont mis au point dans le même esprit que pour les conditions d'adhérences standards. Cependant, les conditions aux limites hydrophobes transforment les conditions d'adhérence habituelles (c'est à dire de type Dirichlet homogène sur la vitesse) en conditions de type Robin-Fourier sur la vitesse, ce qui nécessite une généralisation des formules de flux de paroi, de même que l'élaboration d'une variante de l'algorithme de Chorin consistante avec ce problème.

En effet, la formule de Chorin consiste, pour les écoulements adhérents, à transformer une condition aux limites cinématique $u = u_g$ en $\nu \partial_n \omega + \beta \omega = F - n \times \partial_t u_g$ où F est lié aux vitesses résiduelles résultant des effets convectifs et où β est une matrice diagonale quantifiant la courbure du bord, comme décrit dans la section précédente.

Il est tentant, par souci de simplicité lors de la discrétisation en temps d'une telle condition aux limites, d'expliciter la condition cinématique sous la forme $u^k = \lambda \partial_n u^{k-1}$: la formule de Chorin devient alors

$$\nu \partial_n \omega + \beta \omega = F - \lambda n \times \partial_n u^{k-1} \quad (2.18)$$

pour laquelle la représentation intégrale est identique à celle relative aux conditions d'adhérence.

Cette transposition par explicitation simpliste (qui est néanmoins l'algorithme en vorticité le plus élaboré actuellement pour les écoulements instationnaires) se paye immédiatement par une condition de stabilité du type $\lambda \leq C_1 \sqrt{\nu \delta t}$ avec C_1 de l'ordre de $1/2$, la CFL usuelle de diffusion étant $\nu \delta t < C_2 \delta x^2$ avec C_2 de l'ordre de $1/6$. Cette constante C_2 peut être un peu plus grande pour des méthodes d'intégration en temps ayant un plus grand rayon de stabilité (RK4 au lieu de RK2 ou Euler). Ceci donne une condition de stabilité hydrophobe $\delta x > \lambda / C_1 \sqrt{C_2}$ qui est très pénalisante sur les longueurs de glissement, et rend impossible la convergence en espace indépendamment de la donnée physique λ .

En effet, pour un sillage de cylindre, on obtient alors une CFL hydrophobe de l'ordre de $\lambda / R < 0.015$, alors que des configurations de nanotubes de carbone mènent jusqu'à $\lambda / R \simeq 0.25$ (voir [102]), avec $\lambda = 5 \text{ \AA}$ et $R \simeq 2 \text{ nm}$. En ce qui concerne les lois de paroi pour les couches limites turbulentes, des longueurs de glissement allant jusqu'à $\lambda / R = 3$ sont envisageables.

Néanmoins, pour de petites valeurs de glissement λ , on peut obtenir plusieurs résultats plutôt motivants. D'une part, les coefficients de traînée diminuent lorsque les parois deviennent hydrophobe, que ce soit en 2D (figure 2.9) ou en 3D (figure 2.10). D'autre part, la figure 2.11 montre par corrélation que la réduction de traînée est due au glissement sur la partie amont du corps créant le sillage, la contribution aval étant négligeable. Enfin, les phénomènes de bulles de séparation du fluide sur la paroi sont fortement réduites, même pour de petites longueurs de glissement (voir figure 2.12).

Il est cependant possible de relier $\partial_n u$ et w sur le fibré tangent du bord, et d'exprimer le flux

de vorticité de manière totalement implicite via une matrice K :

$$\nu \partial_n \omega + \beta \omega - \frac{\lambda}{\nu \delta t} K \omega^\parallel = F \quad (2.19)$$

où ω^\parallel est la projection de ω sur l'espace tangent à la surface, et β la matrice de courbure plongée dans \mathbb{R}^3 . Malheureusement, les opérateurs de représentation intégrale tels que

$$\omega(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_{\xi, \tau}(x, t) \mu(\xi, \tau) d\sigma(\xi) d\tau$$

ne commutent pas avec le projecteur sur le fibré tangent, par effet de courbure uniquement (G représente le noyau de la chaleur). Après un travail d'analyse un peu plus profond, décrit dans [1], on montre que le premier moment de la densité (en $t^{-1/2}$ à sa définition d'exposant de Hölder continuité près), s'exprime par

$$\mu^\parallel(x, t) = - \left[\frac{1}{2} + ((\bar{\kappa}(x) \text{Id} - \beta(x)) \sqrt{\nu \delta t / \pi} - \frac{\lambda(x)}{\sqrt{\pi \nu \delta t}} K^\perp(x)) \right]^{-1} F^\parallel(x, \delta t) + \mathcal{O}(\delta t^{\min(\alpha, \gamma)/2}) \quad (2.20)$$

où γ est l'exposant de Hölder de μ et le bord hydrophobe de classe $\mathcal{C}^{2, \alpha}$, et K^\perp est la matrice de courbure transverse. Notons que la matrice à inverser est diagonale de taille 3×3 . Cette formule permet d'aller bien au-delà de la condition de stabilité hydrophobe énoncée ci-dessus, voire même au-delà de singularité de dégénération de la matrice ci-dessus en facteur de F^\parallel .

Cependant le reste en $\delta^{\alpha/2}$ aspire les termes de courbures, et obtenir une estimation plus fine apparaît comme une nécessité, mais oblige à quantifier les effets de torsion pour que les travaux développés à la section 2.3 fournissent une approximation de la densité d'ordre suffisamment élevée.

— Figures du chapitre 2 —

— *Figures of chapter 2* —

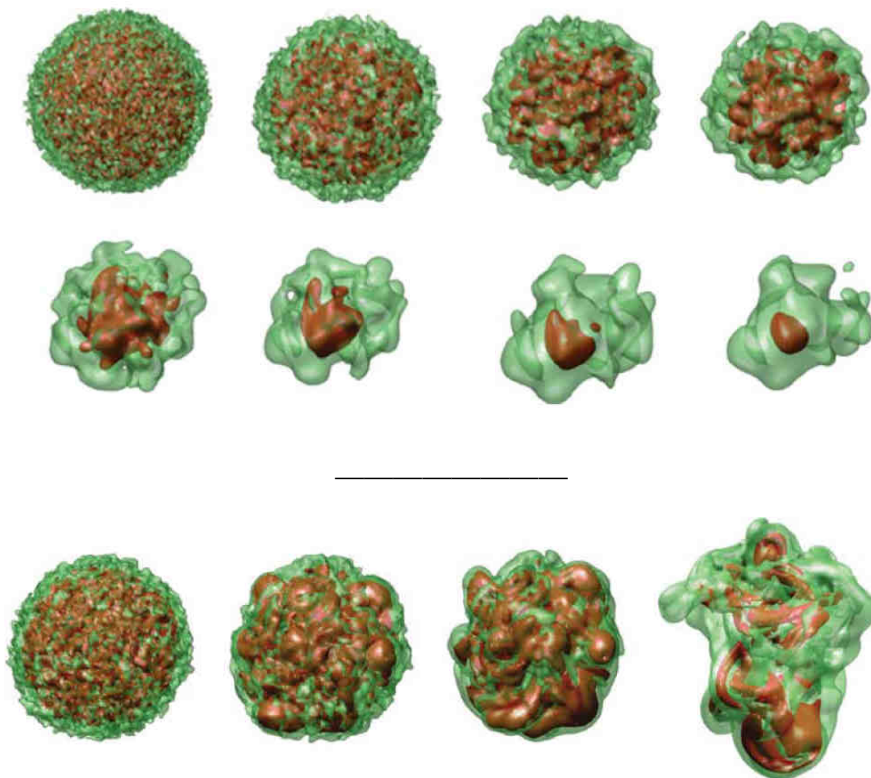


Figure 2.1 – Dynamique d'un blob-vortex sphérique aléatoire à $Re = 210^3$ (en haut) et $Re = 210^5$ (en bas), test de validation des schémas PSE discrets (surfaces d'isovorticité), tiré de [5].

Figure 2.1 – *Temporal evolution of a spherical random vortical blob at $Re = 210^3$ (top picture) and $Re = 210^5$ (bottom picture), providing a test case for validation of discret PSE schemes (isolevel of vorticity).*

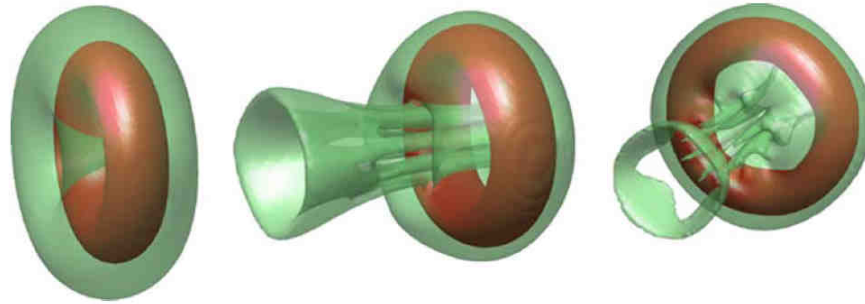


Figure 2.2 – Surfaces d’isovorticité d’un anneau tourbillonnaire peu visqueux expulsant une singularité de diffusion, tiré de [5].

Figure 2.2 – Isolevel of vorticity of a slightly viscous annular vortex sending off a vortical tail generated by diffusion singularity, from [5].

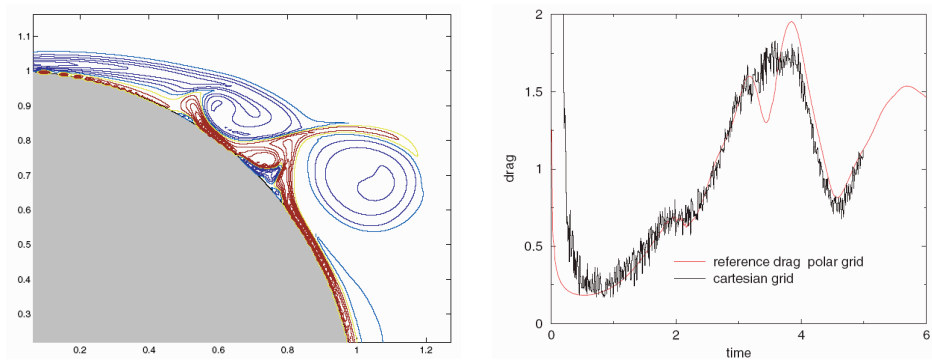


Figure 2.3 – Surfaces d’isovorticité d’un sillage de cylindre 2D à $Re = 9500$, et courbe de coefficient de traînée obtenu, tiré de [13], courbe de référence de [64].

Figure 2.3 – Contour of vorticity for a two-dimensional cylinder wake at $Re = 9500$, and related drag coefficient, from [13], reference drag curve from [64].

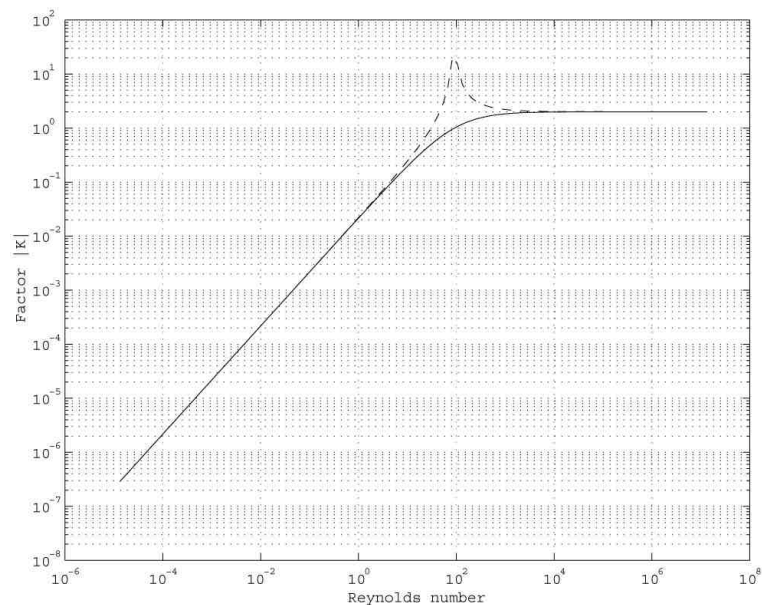


Figure 2.4 – Facteur entre la source aux bords et la densité de la solution fondamentale de l'équation (2.16), en fonction du nombre de Reynolds, dans le cas cylindrique (— pour la composante axiale, - - pour la composante azimutale).

Figure 2.4 – Proportionality factor between boundary source and density of fundamental solution of equation (2.16), with respect to Reynolds number, for a cylindrical geometry (— for spanwise component, - - for azimuthal component).

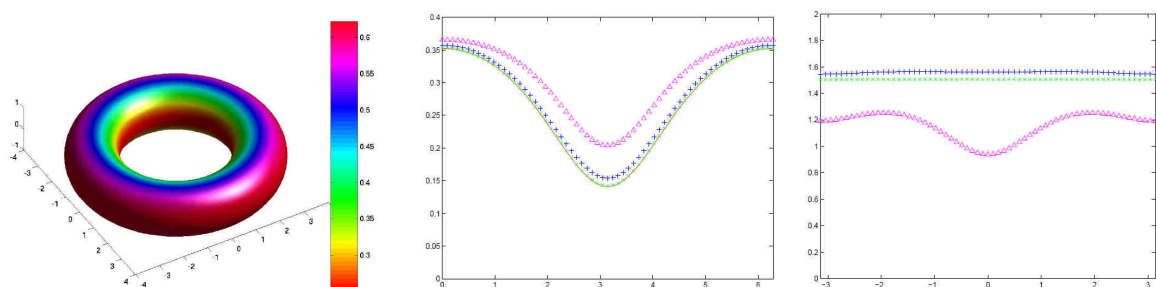


Figure 2.5 – Solide à géométrie torique servant à valider numériquement la convergence de la création de tourbillon vers la densité théorique (au milieu) ainsi que le taux de convergence de la formule (2.17) (à droite), tiré de [4].

Figure 2.5 – Toroidal solid boundary used for numerical validation of vortical flux at boundaries : convergence toward theoretical density (middle picture), and convergence rate of formula (2.17) (right picture), from [4].

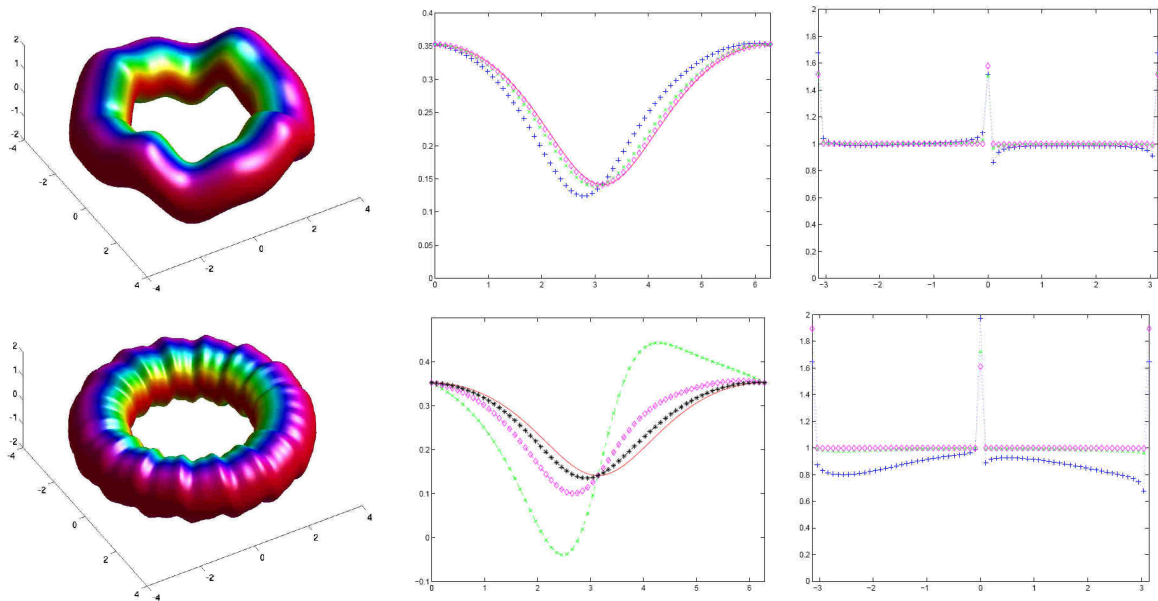


Figure 2.6 – Même légende qu'à la figure 2.5, avec un solide torique «tordu» (en haut) et un «ridé» (en bas), tirés de [4].

Figure 2.6 – Same legend as for figure 2.5, using a «twisted» torus (body presenting torsion, to the top), and a «rippled» torus (presenting strong torsion), from [4].

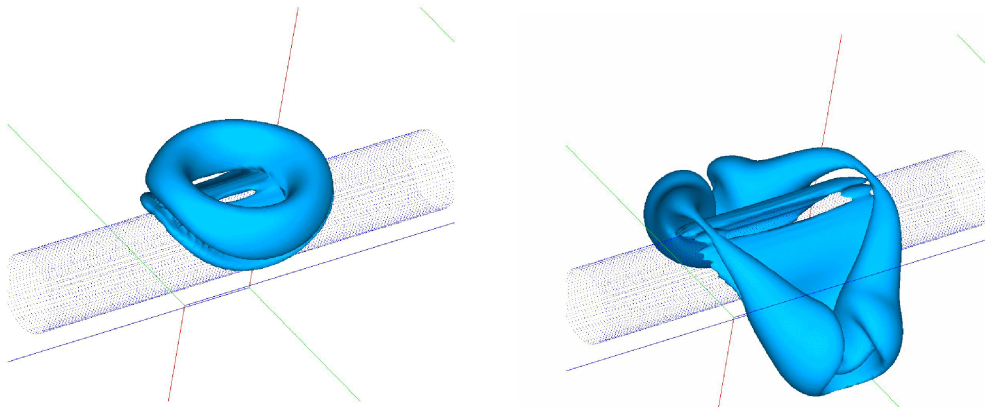


Figure 2.7 – Surfaces d'isovorticité d'un anneau tourbillonnaire se propulsant spontanément sur un cylindre solide, couplant la méthode de surface immergée et la méthode intégrale de flux de vorticité aux parois pour assurer les conditions cinématiques d'adhérence.

Figure 2.7 – Isovorticity surface of an annular vortex self-propelling on a solid cylinder. The numerical VIC method uses both immersed boundaries and integral formulation of vortical flux at boundaries in order to satisfy the full adherence condition.

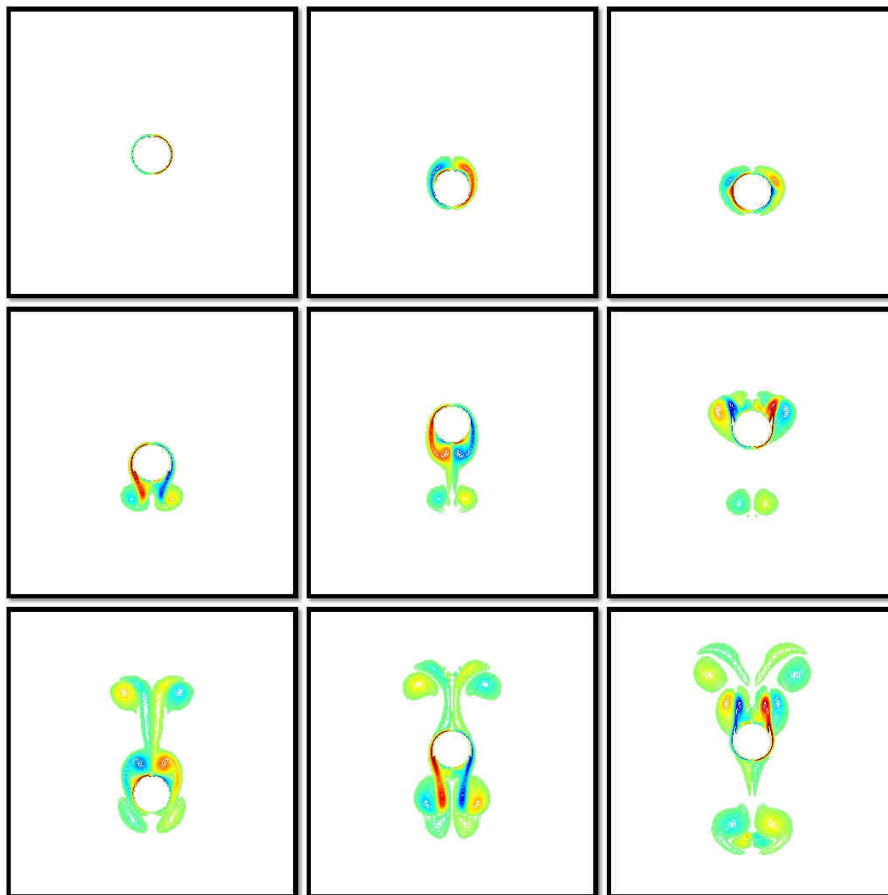


Figure 2.8 – Contours de vorticité d'un fluide autour d'un corps en déplacement oscillant.

Figure 2.8 – Vorticity contours for a fluid around a body with oscillatory motion.

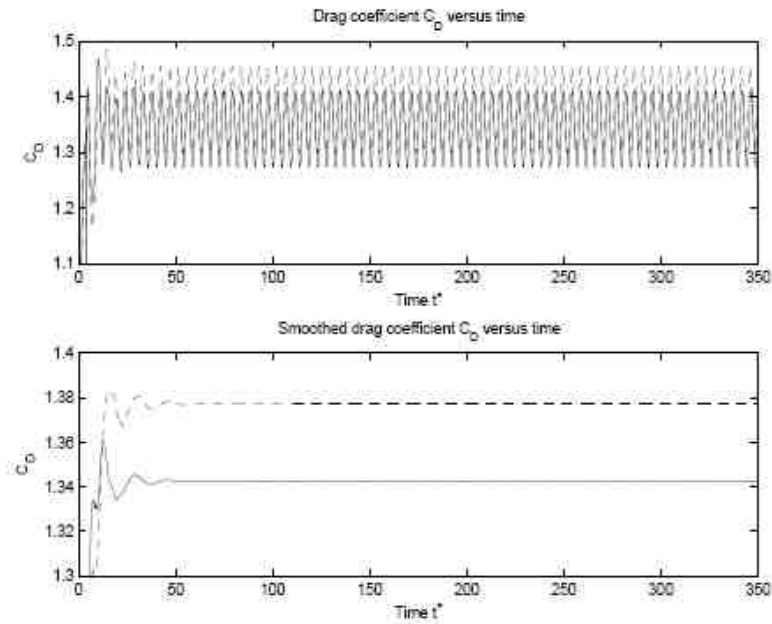


Figure 2.9 – Coefficients de traînée C_D (en haut), à $Re = 300$, pour des écoulements bidimensionnels non-glissant (- -) et hydrophobe (—); C_D moyenné sur une période de l'écoulement (en bas).

Figure 2.9 – Drag coefficient C_D (to the top) at $Re = 300$, for a 2D no-slip flow (- -) and hydrophobic flow (—); Drag coefficient averaged over one flow period (to the bottom).

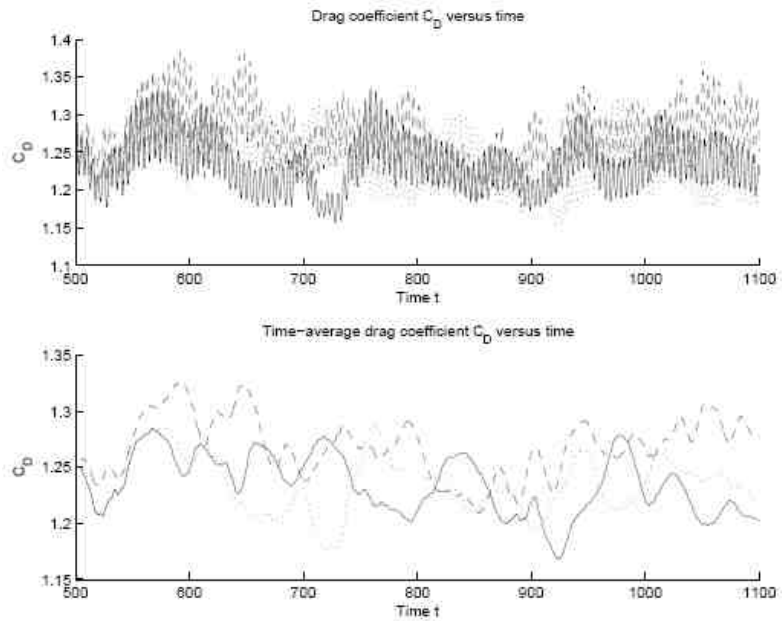


Figure 2.10 – Même légende que la figure 2.9 pour un écoulement tridimensionnel.

Figure 2.10 – Same legend as for figure 2.9 for a 3D flow.

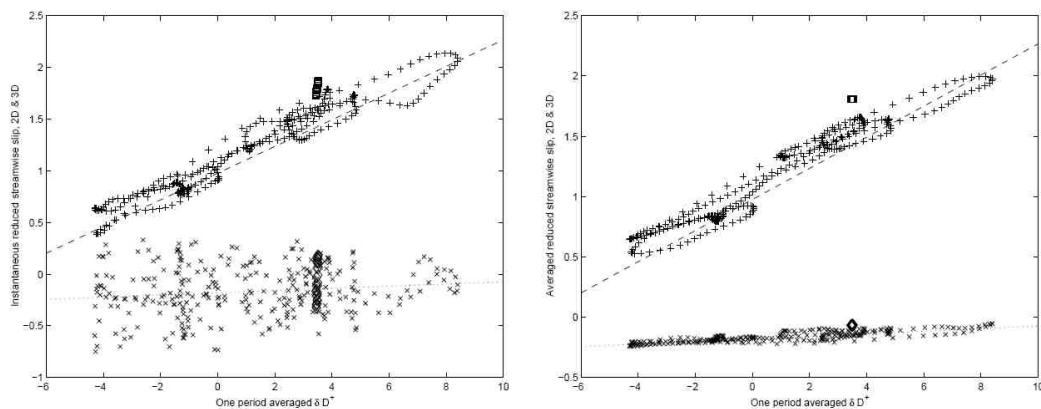


Figure 2.11 – Composante de la vitesse dans la direction de l'écoulement sur la face amont du cylindre en 2D (\square) et en 3D (+), ainsi que sur la face aval en 2D (\diamond) et en 3D (\times) : données instantanées à gauche et moyennées sur une période à droite.

Figure 2.11 – Streamwise component of velocity on the cylinder front side for 2D (\square) and 3D (+) flows, and on the cylinder rear side for 2D (\diamond) and 3D (\times) flows : pointwise data (to the left) and one-period averaged data (to the right).

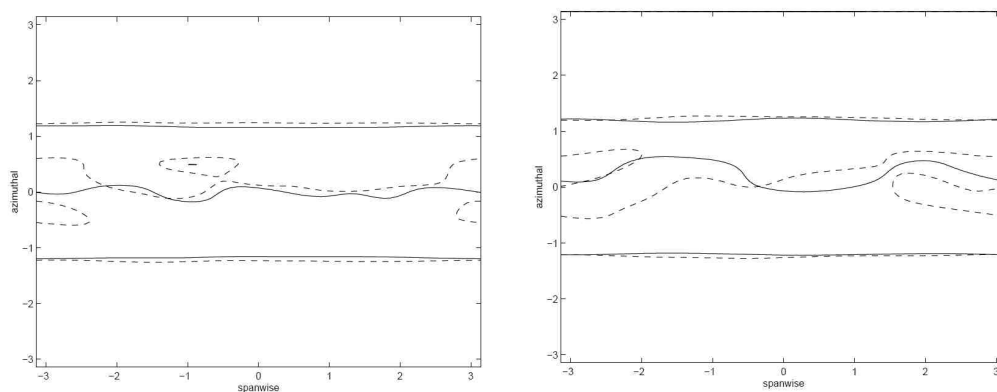


Figure 2.12 – Courbes de séparation du fluide sur la paroi en fonction de l'angle θ (coordonnée azimutale) et la position longitudinale z (coordonnée axiale), pour un fluide non-glissant (- -) et un fluide hydrophobe (—).

Figure 2.12 – Flow separation curves on the cylindrical body with respect to spanwise and azimuthal coordinates, for no-slip (- -) and hydrophobic (—) 3D flows.

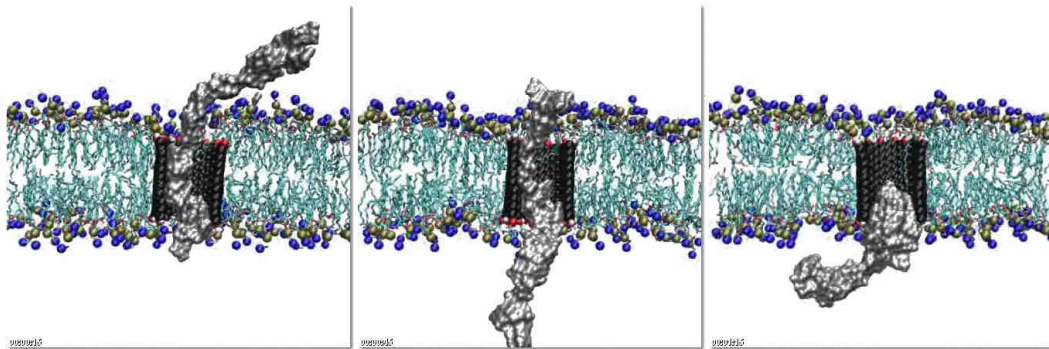


Figure 2.13 – Passage d’une molécule d’ARN à travers une membrane cellulaire par l’intermédiaire d’un nanotube de carbone, utilisant les propriétés hydrophobes du matériau (générées par le potentiel chimique) pour créer un effet canal (avec mes remerciements à J. Walthers et P. Koumoutsakos).

Figure 2.13 – RNA molecule moving through a cellular membrane, following its path through a carbon nanotube, by means of the material hydrophobic property (generated by chemical potential) generating a channel flow (courtesy of J. Walthers and P. Koumoutsakos).

VORTICAL BOUNDARY CONDITIONS FOR LAGRANGIAN METHODS

A class of VIC methods using grid-particle coupling has been presented in the first chapter. An immersed boundary method has also been presented, aiming at satisfying to no-slip-through conditions $u \cdot n = 0$ on an arbitrarily shaped body, and based on harmonic analysis and immersion operator.

We are now interested in translating the full adherence boundary condition $u = 0$ in terms of conditions on vorticity. The technique used is mainly based on generalization of Chorin's formula [105] and on development of their relation integral equations. Indeed, existing literature does not provide valid ad hoc estimations of their solutions, as well as valid error analysis. In the three-dimensional context, curvature and transverse curvature effects arise at main order, which is not the case in 2D configurations.

The approach is similar to the spirit of first chapter, that is to say developing a consistent method for complex geometry, with error quantification, and leading to minimal computational cost, in order to make the method useful for large three-dimensional flow computation.

Section 2.1 describes how the diffusion equation (1.13) with kinematic boundary condition, responsible of viscous effects, can be split by linearity in two parts.

On the one hand, the first part involves usual boundary conditions and the whole fluid domain. It is in practice solved by a discrete PSE scheme, described in section 2.2 and more detailed in [5].

On the other hand, a diffusive part generating vorticity at boundaries is solved by integral method. This integral formulation is described in section 2.3 and detailed in [4], validations being available in [13] for 2D context and [11] for 3D context.

One considers the immersion operator introduced in first chapter and denoted \mathcal{A} , defining the vorticity-to-velocity transformation $:u = \mathcal{A}\omega$. The adherence boundary condition can be transla-

ted immediately to the case of a body with tangentially moving boundary at velocity $u = u_{\text{goal}}$. Such a condition is intensively used for control of 3D wakes in chapter 3.

The generalization of these integral techniques to first order kinematic boundary condition is absolutely not immediate, and is the topic of section 2.4 and [1].

2.1 Splitting diffusive effects and Chorin's formula

The contribution of diffusion close to boundary and to the whole domain are studied apart from one another, which leads to solve two heat equations with Robin-Fourier boundary conditions on vorticity, respectively homogeneous with non-zero initial conditions, and non-homogeneous with zero initial conditions.

It is noticeable that this splitting is performed by linearity of heat equation, hence without introducing error, to the opposite of convection-diffusion splitting (1.11)-(1.13). It is also noticeable that the techniques developed for both these viscous contributions can be used on arbitrary shaped particle lattice. However, in practice, it can be helpful to remesh the particle lattice between convection and diffusion steps, as shown on diagram 1.2, in order to get uniform distribution and thus getting better conservation properties. Moreover, recent advances allow to perform diffusion and remeshing together in one convolution step [60]. A similar approach is to follow finite element meshes along characteristic curves, the diffusion being computed on this moving mesh [50].

One considers the vorticity field ω_0 , solution of convection step (1.11) at the final time of the step. This field is used as initial data for the following diffusion equation :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ u = \mathcal{A}\omega = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

In order to proceed, one first considers the equation

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L}\omega = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

where \mathcal{L} is a differential operator defining the Robin-Fourier boundary conditions for each component of ω . Let τ_i , $i = 1, 2$ be a moving basis tangent to $\partial\Omega$. Then one gets :

$$\tau_i \cdot \mathcal{L}\omega = \frac{\partial \omega}{\partial n} \cdot \tau_i + \kappa_i \omega \cdot \tau_i \quad (2.3)$$

where κ_i is the curvature along direction τ_i (cf. [9, 11]), the mean curvature being denoted $\bar{\kappa} = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

This equation (2.2) is in practice solved by a Discrete Particle Strength Exchange method, established in an arbitrarily Eulerian or Lagrangian context, developed in [5] and more briefly in 2.2.

The diffusion equation with boundary source and zero initial boundary condition is then solved :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L}\omega = g & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

The goal is then to find g such as the sum ω^* of solutions of (2.2) and (2.4), denoted respectively ω_1 and ω_2 , satisfies $u = \mathcal{A}\omega^* = 0$: this is the Chorin's formula [105] :

$$g(x, t) = n(x) \times \frac{\partial \mathcal{A}\omega_1}{\partial t}(x, t) \quad (2.5)$$

revisited in [106], where asymptotic equivalence between (2.1) and (2.2)-(2.4) is proved in $\mathbb{H}^{-2}(\partial\Omega)$. Sections 2.2 and 2.3 describe respectively how to solve numerically equations (2.2) and (2.4).

2.2 Discrete Particle Strength Exchange methods

This work concerning the computation of viscous effects produced by equation (2.2), mainly aims at clarifying the sometimes confusing notion of consistence that has been historically attributed to PSE methods.

One can notice that if it is possible to solve (2.4), it is possible to solve (2.2) without setting any boundary conditions. Indeed, if ω_1 denotes the solution of $\partial_t \omega - \nu \Delta \omega = 0$ obtained with arbitrary boundary conditions, then one can set $q = -\nu \mathcal{L}\omega_1$ and consider $\tilde{\omega}_1$ solution of the following equation :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L}\omega = q & \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

which is of the same kind of (2.4). This implies by linearity that $\omega_1 + \tilde{\omega}_1$ is solution of (2.2).

The Particle-Strength-Exchange (PSE) consists, for solving the heat equation $\partial_t \omega - \nu \Delta \omega = 0$, in distributing a particle circulation on its neighbour particles closer than ε . One considers the Lagrangian description (1.5) of function ω :

$$\omega(t) = \sum_{p=1}^P \omega_p(t) \delta_{x_p(t)} v_p$$

that one aims at diffusing, using the discretization of the following parabolic equation :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \operatorname{div}(\mathbf{L} \nabla \omega) = 0$$

The exchange operator between particles is defined by

$$Q^\varepsilon \omega(x_k) = \sum_{l=1}^n \sigma^\varepsilon(x_k, x_l) (\omega_l - \omega_k) v_l \quad (2.7)$$

and allows an approximation of $-\text{div}(\mathbf{L} \nabla \omega)$.

The goal is then to find a link between σ^ε and \mathbf{L} . The fast evaluation of this sum is obtained by choosing a strongly compact supported kernel σ^ε .

The PSE formulation based on a spherically symmetric kernel consists in writing σ^ε as follows :

$$\sigma^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^7} \Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \mathbf{M}\left(\frac{x+y}{2}\right) : (x-y)^{\otimes 2} \quad (2.8)$$

Different choices for Θ are discussed in [5, 16]. By introducing \mathbf{A} such as

$$A_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} x_i^2 x_j^2 \Theta(x) dx \quad i, j = 1..3 \quad (2.9)$$

one notices that $A_{kk} = 3A_{kl} = \gamma$ for all $k \neq l$.

The original work building the PSE method (see [29]) established that

$$\mathbf{M} = \gamma^{-1} \mathbf{L} - \frac{\gamma^{-1}}{5} \text{Tr}(\mathbf{L}) \text{Id}_3 \quad (2.10)$$

Nevertheless, if one introduces the characteristic length between particles, denoted h , PSE schemes are proved to converge as $\mathcal{O}[(h/\varepsilon)^p]$. This means that when a mesh refinement is performed with constant ratio h/ε , the scheme cannot be used in practice. This point is still sometimes controversial, and the present work aims at building a PSE scheme intrinsically convergent as h^2 . An idea already presented in [16] consists in introducing the two following discrete moments :

$$\gamma_1 = A_{ii} = \int_{\mathbb{R}^3} x_i^4 \Theta(x) dx, \quad \gamma_2 = A_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} x_i^2 x_j^2 \Theta(x) dx \quad i, j = 1..3, i \neq j \quad (2.11)$$

It is then established in [5] that

$$\mathbf{M} = \frac{2(\gamma_1 + 2\gamma_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2^2} \mathbf{L} - \frac{2\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2^2} \text{Tr}(\mathbf{L}) \text{Id}_3 + \mathbf{H} \quad (2.12)$$

with

$$H_{ij} = \left(\frac{\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 - 6\gamma_2^2}{\gamma_2(\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2^2)} \right) (1 - \delta_{ij}) L_{ij} \quad (2.13)$$

where δ is the Kronecker symbol. This expression reduces to $\mathbf{H} \equiv 0$ in the case of a diagonal diffusion operator \mathbf{L} or in the case $\gamma_1 = 3\gamma_2$ (which includes the continuous case).

This methods based on discrete momentum is intrinsically convergent, and does not involve the exchange scale ε in the convergence rate. The examples provided in [5], are chosen among the most difficult benchmarks :

- Circulation conservation and validation of convergence order for a annular vortex with singular expression of $\Delta\omega$ at initial condition on the symmetry axis (figure 2.2),
- Random vorticity fields are used to validate the rate of energy decrease (diagnostic called effective viscosity), and developing an energy spectrum with inertial range scaling as $k^{-5/3}$, at $Re = 2000$ (figure 2.1), and $Re = 2 \cdot 10^5$.

A sensitivity analysis has also been provided in [5].

2.3 Integral formulation of no-slip boundary conditions

This section focuses on fast resolution of parabolic equation with boundary source (2.4) generating a flow of vorticity at boundaries, responsible of boundary layer phenomenon :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ \nu \mathcal{L} \omega = g & \text{on } \partial \Omega \times [0, T] \\ \omega(x, 0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

where \mathcal{L} is the differential operator defining the kind of boundary conditions, as defined above.

In practice, the dynamics of a fluid is governed by the boundary layer [114, 111] : an efficient numerical method is then a crucial point in order to obtain accurate flow computation.

Despite the fact that pannel methods have been intensively developed and analysed for normal conditions (that is to say related to no-slip-through condition, see section 1.2), only little attention has been paid to obtain rigorous results on their formation related to tangential boundary conditions.

It has been shown that Neumann boundary conditions are appropriate in the two-dimensional context [106, 61], or in the case of half space in 3D [26]. Concerning the 3D cylinder case, the curvature induces a Robin-Fourier condition on azimuthal component (usually denoted θ), as described in [11]. Arbitrarily shaped body involves Robin-Fourier on every vorticity components.

The boundary source g is given by the Chorin's formula (2.5) :

$$g(x, t) = n(x) \times \frac{\partial \mathcal{A} \omega_1}{\partial t}(x, t)$$

The idea suggested in [41], used successfully in the 90s for 1D and 2D problems but which has not been subject to mathematical analysis leading to consistent results, is to consider fundamental solutions [109] of equations (2.4) :

$$\omega(x, t) = \int_0^t \int_{\partial \Omega} G_{\xi, \tau}(x, t) \mu(\xi, \tau) d\sigma(\xi) d\tau \quad (2.14)$$

where μ is the density of vortical flux and $G_{\xi, \tau}$ the following Gaussian function :

$$G_{\xi, \tau}(x, t) = \widehat{G}(x - \xi, \nu(t - \tau)) \quad \text{avec} \quad \widehat{G}(x, \eta) = \frac{e^{-x^2/4\eta}}{(4\pi\eta)^{3/2}} \quad (2.15)$$

of standard deviation $\sqrt{2\nu(t - \tau)}$.

Once the density μ of this Gaussian distribution is computed or estimated, one gets a very fast algorithm, whose computation cost is linear with respect to the number of discretization points of the surface $\partial \Omega$. Indeed, one can consider that numerically the support of a Gaussian function is compact, its size begin a few times the standard deviation.

The density flux μ is solution of an integro-differential equation [108] :

$$-\frac{1}{2} \mu(x, t) + \nu \int_0^t \int_{\partial \Omega} \mathcal{L}_x G_{\xi, \tau}(x, t) \mu(\xi, \tau) d\sigma(\xi) d\tau = g(x, t) \quad (2.16)$$

The regularity the integral operator in this equation has been studied in numerous works, such as [112, 108] (a more exhaustive list is available in [4]).

It is then possible to approximate the solution of (2.16) by an explicit formula (thus without significant computational cost), depending only of Robin-Fourier coefficients, curvature and $\sqrt{\nu t}$.

Equation 2.16 is often solved by neglecting the integro-differential operator for aerodynamic simulations (which leads to $\mu = -2g$). One can notice that such coarse approximations are completely erroneous at moderate and low Reynolds numbers : the coefficient of proportionality between the density and the source, that is to say the factor K in expression $\mu = -Kg$ is displayed on figure 2.4 in the cylinder case, and is shown to be far from its asymptotic value 2 at low Reynolds numbers.

An alternative to the estimation of this operator, without neglecting its impact on the solution, is to build to adjacency tensor density \rightarrow slip numerically [51, 52].

Three-dimensional results show that the coefficient of order 1/2 in time involve transverse curvature, which is a typically 3D effect. This study, including quantification of coefficients at different orders of consistence and convergence are detailed in article [4] : one shows that

$$\left[1 + 2(\bar{\kappa}(x) - \kappa_i(x)) \sqrt{\nu t/\pi}\right] \mu(x, t) \cdot \tau_i = -2g(x, t) \cdot \tau_i + \mathcal{O}(t^\gamma) \quad (2.17)$$

with $\gamma = \min((1 + \alpha)/2, 1 - \varepsilon/2)$, under the condition of a surface $\partial\Omega$ of regularity $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ and $(1 - \varepsilon)$ -Hölder continuity of function μ (obtained possibly via Schauder estimates).

Going from (2.15) to (2.17) requires to prove several successive estimations of the integro-differential operator in equation (2.15) :

- restriction of the global operator to one map by microlocal estimation,
- quantification of difference between local operator and its evaluation on the everywhere second order approximation manifold.
- existence of their extension to full tangent bundle, allowing symbolic calculus.

It is also established in [4] that convergence rate γ of density, at order 1 or 1/2, depends then only on surface topology :

- If the surface is torsionless, that is to say the tensor of the third derivatives of maps of Γ , as a submanifold of \mathbb{R}^3 is identically zero (which is the case of the cylinder, torus, sphere, plan, . . .), then the convergence rate can go up to 3/2, as shown on figure 2.5.
- If the surface presents torsion (such as the «rippled» or «twisted» torus), then to optimal convergence rate γ is limited to 1 (see figure 2.6).

Global order of solution growth for the original heat equation (2.4) depends of course on γ , and is larger or equal to γ , depending on the kind of spatial and temporal discretizations used for computing the Gaussian distribution (2.14).

Vorticity is then distributed close to boundaries following a Gaussian distribution (equations (2.14)-(2.15)), with a density μ given explicitly and without numerical computation by means of formula (2.17). It is then possible to satisfy kinematic boundary conditions. Formula (2.17) has been established in [4], in the general context of arbitrarily shaped body, and depends only on curvature and viscosity.

The algorithm used for solving the full Navier-Stokes equations consists in coupling the following points, as shown on the diagram presented on figure 1.2 :

- the present integral method described in this section,
- the diffusion computation by a discrete PSE method (section 2.2),
- the Lagrangian scheme (1.12) for computing convective terms of the Navier-Stokes equations (section 1.1.2), generalized to complex geometry by means of immersed boundary techniques (section 1.2).

Coupling all these points, coded in a context of arbitrary geometry, has been validated with the benchmark of annular vortex impacting a solid 3D cylinder (figure 2.7), as well as with a wake generated by an impulsively started cylinder at $Re = 9500$ (figure 2.3, to be compared to [64]).

Robustness of this algorithm of vorticity creation is illustrated on the case of oscillating wakes, presented on figure 2.8. A set of validating case has been studied by means of oscillating flows at moderate Reynolds and Keulegan-Carpenter numbers.

2.4 Vortical formulation of first order kinematic boundary conditions

This section deals with a way to compute, in vorticity formulation, flows with first order kinematic boundary conditions, like $u = \lambda \partial_n u$ for tangential components of velocity [98, 90, 97]. The length λ is called slip length : the condition is said to be hydrophobic when $\lambda > 0$. This project has been partially funded by a local BQR grant (INSA Toulouse). This work is currently under progress.

Possible applications include

- Flows around body with surface modification or treatment, involving physically constant slip length [99, 86, 87], up to high values of shear rate [91].
- Taking into account rarefaction and/or chemical potentials in nanotechnologic device [85, 89], especially for carbon nanotubes [102], either for internal or external flows.
- Taking into account nanobubbles [93] or gaseous nano/micro-films [100] close to boundaries, generated for example by material roughness [19].
- Models of turbulent boundary layers [107].
- Combination of any phenomena mentioned there above, for example microfluidics [84, 96] or turbulence [88, 101], with super-hydrophobic walls used as drag control [94].

Stability analysis of a fluid with such boundary conditions has already been the topic of several studies [92, 95]. Efficient numerical methods for such problems can be of some help in the development of medical device involving interaction between ARN and cells 2.13.

However, hydrophobic conditions are of Robin-Fourier kind on velocity, instead of Dirichlet kind for no-slip conditions. This requires a generalization of Chorin's formula, consistent with this equation.

Indeed, Chorin's formula consists, for no-slip flows, in changing a kinematic condition $u = u_g$ into $\nu \partial_n \omega + \beta \omega = F - n \times \partial_t u_g$ where F is linked to spurious velocity due to convective effects, and where β is a diagonal matrix quantifying curvature, as described in last section.

An easy way to deal with such condition would be to explicit the right-hand-side of this boundary condition as $u^k = \lambda \partial_n u^{k-1}$: Chorin's formula then becomes

$$\nu \partial_n \omega + \beta \omega = F - \lambda n \times \partial_n u^{k-1} \quad (2.18)$$

for which integral formulation is identical to the one related to no-slip flows.

This simple transposition (which is nevertheless the most elaborated currently for vortical non-stationary flows) introduce a stability condition like $\lambda \leq C_1 \sqrt{\nu \delta t}$ with $C_1 \simeq 1/2$, the usual diffusion CFL being $\nu \delta t < C_2 \delta x^2$ with $C_2 \simeq 1/6$. This constant C_2 can be increased for ODE schemes of larger stability radius (like RK4 instead of RK2 or Euler schemes).

This leads to a hydrophobic stability condition $\delta x > \lambda / C_1 \sqrt{C_2}$ which is very restrictive in practice, and make convergence in space impossible to reach independently of the physical data λ .

Indeed, for a cylinder wake, one gets a hydrophobic CFL like $\lambda / R < 0.015$, while carbon nanotubes can reach $\lambda / R \simeq 0.25$ (see [102]), with $\lambda = 5\text{\AA}$ and $R \simeq 2\text{nm}$. Concerning turbulent boundary layers, one can go up to $\lambda / R = 3$.

Nevertheless, despite these restrictive boundary conditions, one can show that hydrophobic walls lead to drag reduction of wakes (see figure 2.9 and 2.10 in 2D and 3D), and that this reduction is due to the slip at the front side of the body (cf. figure 2.11). Moreover, bubbles of separation curves tends to disappear (see figure 2.12).

It is however possible to link $\partial_n u$ and w on the boundary tangent bundle, and write vortical flux in a completely implicit way by means of a matrix K :

$$\nu \partial_n \omega + \beta \omega - \frac{\lambda}{\nu \delta t} K \omega^\parallel = F \quad (2.19)$$

where ω^\parallel is the projection of ω on the tangent bundle, and β is the curvature matrix extended to \mathbb{R}^3 . But the drawback is that integral operators such as

$$\omega(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_{\xi, \tau}(x, t) \mu(\xi, \tau) d\sigma(\xi) d\tau$$

do not commute with the projection operator, only due to curvature effects (G is the Gaussian heat fundamental solution).

A deepest analysis is under progress [1], showing that the coefficient of $t^{-1/2}$ of the density (the first significant momentum), is given by

$$\mu^\parallel(x, t) = - \left[\frac{1}{2} + ((\bar{\kappa}(x) \text{Id} - \beta(x)) \sqrt{\nu \delta t} / \pi - \frac{\lambda(x)}{\sqrt{\pi \nu \delta t}} K^\perp(x)) \right]^{-1} F^\parallel(x, \delta t) + \mathcal{O}(\delta t^{\min(\alpha, \gamma)/2}) \quad (2.20)$$

where γ is the Hölder exponent of μ , the hydrophobic surface is of class $\mathcal{C}^{2, \alpha}$, and K^\perp is the matrix of transverse curvature. The matrix to be inverted is only 3×3 .

This formula allows going much further than the hydrophobic CFL mentioned above. Nevertheless, the error in $\delta t^{\alpha/2}$ is larger or equal to curvature contribution, and obtaining better estimation appears to be a necessity, but requires to quantify torsion effects in order to have the results developed in section 2.3 available.

CONTRÔLE DES SILLAGES

Le code de calcul implémentant les méthodes numériques développées au deux premiers chapitres a été intensivement utilisé pour le contrôle de sillages. Ces travaux ont été menés en collaboration avec G-H. Cottet, R. Hildebrand (LJK, Grenoble), P. Koumoutsakos (ETHZ Zürich) et M. Milano (Arizona State University, USA).

Nous nous sommes intéressés au contrôle dans le cas conventionnel du sillage tridimensionnel créé derrière un cylindre, à des nombres de Reynolds suffisamment grand pour que la tridimensionnalité du sillage soit totalement développée.

La fonction objectif est le coefficient de traînée, que l'on souhaite minimiser. Le contrôle est effectué par des profils tangentiels de vitesse sur le corps générant le sillage, donc sans adjonction de masse dans le fluide. Ceci apporte une alternative aux contrôles par jets ou micro-jets (vitesse normale avec ou sans apport de masse, voir par exemple respectivement [77] et [75]), ainsi qu'à l'optimisation de forme [74, 78, 79] ou l'interaction entre sillages [80].

Les sections suivantes décrivent l'évolution de la complexité de l'espace des paramètres de contrôle, allant du contrôle bidimensionnel à la section 3.1 au contrôle tridimensionnel multi-fréquentiel à la section 3.4.

3.1 Algorithme génétique et lissage de profil

Cette première section relative au contrôle des écoulements présente différentes approches pour l'optimisation dans le cas bidimensionnel, afin de construire une configuration optimale fiable, pouvant servir de base pour l'optimisation tridimensionnelle développée dans les sections suivantes.

L'optimisation stochastique que l'on considère repose sur des stratégies évolutives, notamment les algorithmes génétiques, c'est à dire sur l'évolution d'une population dans l'espace des paramètres, soumise aux étapes de recombinaison (ou «crossover»), mutation et filtrage (ou

sélection). Elles ont été mises en œuvre afin de définir un profil de vitesse tangentielle (sur le corps générant le sillage) optimal, pouvant servir de profil de référence pour le contrôle tridimensionnel.

Ces techniques stochastiques ont habituellement l'inconvénient de converger très lentement, typiquement en $\mathcal{O}(n^{-1/2})$. Elles ont cependant l'intérêt d'être trivialement parallélisables. Dans sa version la plus simple, ne comportant que la mutation et le filtrage, l'algorithme consiste à faire évoluer un élément C_t (vecteur des paramètres de contrôle) de la manière suivante

$$C_{t+1} = \begin{cases} C_t + \sigma_t Z_t & \text{si } F(C_t + \sigma_t Z_t) \leq F(C_t) \\ C_t & \text{sinon} \end{cases}$$

où F est la fonction à minimiser et Z_t est une variable aléatoire Gaussienne.

Le rayon de la marche aléatoire σ_t peut être adapté au cours du temps en fonction du taux de succès des mutations sur les dernières itérations. La variante CMA (Covariance Matrix Adaptation) consiste à adapter la direction de la marche aléatoire en privilégiant les directions de succès observées dans les étapes précédentes. Une telle adaptation est particulièrement utile lorsque les paramètres de contrôle sont de différentes natures.

Cette méthode avait été utilisée avec succès pour la détermination de l'excitation optimale des tourbillons de bout d'aile [10], en agissant sur la dynamique des instabilités de Crow. Cependant, cette variante n'a pas connu un tel succès pour le contrôle de sillage bidimensionnel, dû principalement à la forte non convexité de la fonction objectif et à la grande dimension de l'espace de contrôle. On retrouve les mêmes symptômes lors de l'implémentation de méthodes de type EGO (Efficient Global Optimization), basée sur la densité locale de population (détection probabiliste des points d'accumulation) pour l'estimation de localisation des minima locaux.

L'autre variante est basée sur le «Clustering Genetic Algorithm» développé par M. Milano et P. Koumoutsakos [81]. D'une manière générale, elle consiste à isoler les composantes les plus significatives. Appliquée au contrôle de l'écoulement derrière un cylindre, cette méthode se décrit ainsi : le cylindre est découpé en 16 parties, appelées *actuateurs*, sur lesquelles on applique une vitesse tangentielle constante sur la longueur de chaque actuateur. Un élément de la population est alors défini par un vecteur $C \in [-l, l]^{16}$, où l est la vitesse de contrôle maximale sur chacun des 16 actuateurs, en pratique de 0.01 à 0.1 pour la configuration retenue (rayon de 1, vitesse d'entraînement de 1 et $Re = 400$, voir figure 3.1).

Un algorithme génétique standard est alors utilisé afin de produire un extremum (voir les histogrammes obtenus sur figure 3.1). Les quatre actuateurs les plus significatifs sont alors isolés (ici les actuateurs 3, 4, 13 et 14) et l'algorithme est reconduit sur ceux-là. La performance d'un actuateur s'évalue par la valeur moyenne des vitesses sur celui-ci, et surtout pas par la variance la plus faible, ce qui correspondrait à un contrôle peu robuste, c'est à dire très sensible aux paramètres de contrôle et éventuellement aux données initiales.

L'avantage du processus de «Clustering» est de réduire considérablement le support de la fonction de contrôle, et donc de fournir un procédé de contrôle peu coûteux en énergie, en concédant moins de 10% sur l'optimal généré à partir de tous les actuateurs.

Ce processus permet, en adoptant une vision plus déterministe du problème, de pouvoir injecter les éléments de la population plus aisément dans des espaces de fonctions plus régulières [10]. Les données obtenues sur ces quatre actuateurs privilégiés sont alors (anti-)symétrisées afin de ne pas convertir le gain de traînée en perte de portance, et un profil approximant ces données

est construit (voir [10]), sous forme du sinus d'un approximant de Padé. La symétrisation est nécessaire car bien que les configurations issues de l'algorithme génétique soient à portance nulle, les opérations de restriction et d'argument maximum sont non-linéaires et brisent la propriété de portance nulle.

Par ailleurs, M. Milano a mis en évidence que l'algorithme CGA appliqué à une recherche de profil optimal en vitesse normale conduit à une réduction de traînée du même ordre de grandeur qu'avec un profil tangentiel.

Afin de valider le profil, une méthode déterministe a été implémentée par R. Hildebrand. Il s'agit d'une méthode de descente à énergie variable basée sur l'algorithme de Newton, l'espace de contrôle étant les coefficients des 5 premiers modes de Fourier, fonction de l'angle sur le cylindre (puis 7 afin d'établir la convergence du résultat). Chaque pas de descente nécessite 31 évaluations de la fonction objectif en parallèle, c'est à dire 31 résolutions numériques des équations de Navier-Stokes (un calcul direct, 5 pour le gradient, 25 pour la hessienne), jusqu'à ce que la solution soit quasi-stationnaire ou alors ait fait plusieurs cycles dans l'attracteur (ou projection de l'attracteur par les fonctions diagnostics). Le profil est très voisin de celui obtenu par la méthode CGA lissée, leur comparaison étant disponible sur [8]. Le résultat le plus surprenant est à quel point la localisation de l'amplitude maximale du profil de contrôle est similaire, par deux méthodes totalement indépendantes, n'utilisant aucune information de localisation *a priori*.

3.2 Notion d'efficacité, optimisation topologique et VIV

Il a été montré que le contrôle d'un sillage 3D de cylindre, par rotation oscillatoire suffisamment forte (voir figure 3.3 et [9]) conduit à un retour de l'écoulement à une topologie bidimensionnelle.

Le même phénomène est observé pour un profil de vitesse tangentielle d'amplitude suffisamment élevée [10, 6], en plus conduit à une atténuation de l'amplitude d'oscillation de forces de traînée et de portance (*Vortex-Induced-Vibration* ou VIV).

De plus, en ce qui concerne les cylindres en rotation oscillante, ils sont associés à une chute de forces de traînée pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés [83], et font donc l'objet d'une attention particulière pour comprendre ce mécanisme [72, 73, 76, 82].

Ces résultats sont accessibles numériquement grâce à la stabilité des méthodes particulières, c'est à dire grâce à l'absence de CFL de transport permettant de mettre une condition cinématique aux bords sans devoir réduire drastiquement le pas de temps. Une telle étude permet de mettre en lumière certains mécanismes de dynamique de la couche limite (détachement/attachement) et de réduction de traînée (et permet surtout de savoir sous quelles conditions il est possible de relier les deux effets).

Afin d'appréhender le problème du contrôle optimal de la réduction de traînée, il est nécessaire de définir une fonction objectif adéquate. L'énergie mise en jeu dans un contrôle de vitesse surfacique V_{slip} de période T , adimensionnée, est donnée par

$$E_c^* = \frac{1}{2T U_\infty^2 \sigma(\partial\Omega)} \int_0^T \int_{\partial\Omega} V_{\text{slip}}(x, t)^2 d\sigma(x) dt \quad (3.1)$$

où $\sigma(\partial\Omega)$ la mesure du cylindre (πD en 2D et πLD en 3D).

En appliquant le profil 2D optimal trouvé précédemment, noté $V_c(\theta)$ et tracé sur la figure 3.2, à un écoulement 3D, avec une amplitude A (c'est à dire $V_{\text{slip}} = A V_c$), on obtient une énergie sans dimension de

$$E_c^* = \frac{1}{4\pi R L U_\infty^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} V_{\text{slip}}(\theta, z)^2 R d\theta dz = \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_c(\theta)^2 d\theta = \frac{A^2}{2} \overline{V_c^2} \quad (3.2)$$

et on remarque que la réduction de traînée $C_D^0 - C_D$ (C_D^0 étant le coefficient de traînée sans contrôle) évolue comme A , ce qui rend compte d'une régression en $[E_c^*]^{1/2}$ (voir [6]), et permet d'introduire un critère d'efficacité du contrôle indépendant du niveau d'énergie :

$$E_{ff} = (C_D^0 - C_D) / \sqrt{E_c^*}$$

D'autre part, lorsque l'amplitude de contrôle A augmente, on observe une diminution progressive des oscillations de forces de portance et de traînée, représentées sur la figure 3.4.

3.3 Contrôle 3D uni-modal à amplitude variable

Il a été montré dans [7], établi pour la première fois numériquement, qu'un contrôle de nature tridimensionnelle conduit à un meilleur résultat qu'un profil optimal bidimensionnel.

Une première étape vers le contrôle optimal tridimensionnel systématique est de produire une modulation harmonique du profil 2D optimal dans la direction axiale. On considère une modulation générant des points d'arrêt, sans introduire de vitesse à courant sur le bord : la formule de glissement devient alors

$$V_{\text{slip}}(\theta, z) = \begin{cases} A\sqrt{2/3} (1 + \sin(kz)) V_c(\theta) & \text{si } k \neq 0 \\ A V_c(\theta) \sin \theta & \end{cases} \quad (3.3)$$

dont l'énergie mise en jeu est toujours définie par la formule (3.2). On considère une configuration d'écoulement à $Re = 300$, présentant des instabilités hydrodynamiques de type mode B, de longueur d'onde naturelle $\lambda_B \simeq 0.8D$.

Un tel contrôle dépend des deux paramètres A et k . Afin de pouvoir définir une fenêtre de valeurs adéquates pour utiliser des stratégies de contrôle plus générales, on se sert de cette modulation pour identifier le comportement du coefficient de traînée en fonction de A et k , représenté sur la figure 3.5. Trois faits sont alors à prendre en compte :

1. Il apparaît que les modulations de longueur d'onde $\lambda = \pi D/k$ pour $k = 2, 3$ sont optimales pour des amplitudes $A \simeq 0.7$ (figure 3.6,C). De manière assez surprenante, pour $k = 4$, correspondant à la longueur d'onde des instabilités naturelles, aucune résonance particulière n'est observée. Notons que pour $A \geq 0.8$, il existe des points sur le bord ayant une vitesse supérieure à $U_\infty = 1$, vitesse du champ lointain : on entre alors dans la physique des jets plutôt que des sillages.
2. Pour une amplitude faible $A \leq 0.3$, une région d'efficacité optimale apparaît spécifique au mode $k = 1$, de longueur d'onde $\lambda = \pi D$, dont le mécanisme de réduction de traînée s'apparente au phénomène typique au mode A pour $\lambda_A \simeq 4D$ (figure 3.6,A).

3. Les modes de contrôle à haute fréquence sont porteurs de beaucoup d'ensrophie. Autrement dit, à ensrophie constante, ils créent des zones de séparation quasi statiques pour un faible coût énergétique. Les tourbillons de Von Kármán «surfernt» alors sur ces structures tourbillonnaires transversales à l'écoulement (cf. [8], et figure 3.6,B), supprimant le phénomène de shedding (oscillation des forces de traînée et portance), retrouvant paradoxalement cette propriété établie pour les contrôles 2D (section précédente).

De ces trois observations découle qu'il est raisonnable de considérer des fenêtres d'amplitude de contrôle $A \leq 0.8$, ainsi que des pulsations $k \leq 4$.

3.4 Contrôle 3D multi-modal

Les travaux présentés dans cette section, décrits dans [2], relatifs au contrôle multimodal sont l'aboutissement des trois sections précédentes. L'implémentation de l'algorithme de descente présenté ci-dessous a été réalisé en collaboration avec Roland Hildebrand (LJK, Grenoble). Les moyens de calcul et de mobilité ont été partiellement financés par une ACI CNRS «masse de données».

En utilisant la fenêtre d'amplitudes et longueurs d'ondes définies dans la section précédente, nous avons le cas beaucoup plus général d'une modulation sur les quatre pulsations $k = 1..4$, à la fois sur les fonctions sinus et cosinus afin de pouvoir intégrer le déphasage entre modes comme inconnues du problème :

$$V_{\text{slip}}(\theta, z) = V_c(\theta) \left(C_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^4 a_k \sin(2kz/D) + b_k \cos(2kz/D) \right) \quad (3.4)$$

L'énergie non dimensionnelle, fixée à 0.1, est définie par

$$E_c^* = (C_0^2 + \|\mathbf{C}\|_2^2) \bar{V}_c^2 / 2 \quad (3.5)$$

où $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^8$ est la variable de contrôle contenant les coefficients a_k et b_k , $k = 1..4$. Le coefficient C_0 n'est alors plus un paramètre de contrôle car il est déduit de \mathbf{C} par la relation d'énergie (3.5).

Pour de telles simulations, chaque évaluation de la fonction objectif (ici la réduction de traînée) représente environ 20H de calcul à $Re = 300$. Etant donné ce coût calculatoire et la grande dimension de l'espace de contrôle, les méthodes conventionnelles de descente sont technologiquement hors de portée. Une méthode de descente projective de dimension 2 a été retenue : un pas de descente s'effectue suivant une direction optimale pour deux modes, le gradient requérant alors seulement 5 simulations en parallèle.

Cependant la fonction objectif est fortement non-convexe, présentant de nombreux minima locaux dans l'espace de contrôle (ainsi que des groupes de symétrie). Afin d'améliorer l'estimation de la longueur de pas et de direction de descente, une technique d'«area-bombing» plan par plan a été mise en œuvre (bombing à 64 éléments). Cette méthode s'est trouvée être extrêmement robuste et de convergence satisfaisante. Nous avons ainsi obtenu une configuration optimale conduisant à une réduction de traînée très réduite, pour $Re = 300$ et $Re = 1000$ (voir figure 3.7 et [2]) : la réduction de traînée est 2.5 fois importante que dans les travaux de référence de Kim et Choi [77] pour une même énergie. Les surfaces d'isovorticité à $Re = 1000$ pour les sillages sans contrôle et avec contrôle optimal 3D sont tracés sur la figure 3.8.

— Figures du chapitre 3 —

— *Figures of chapter 3* —

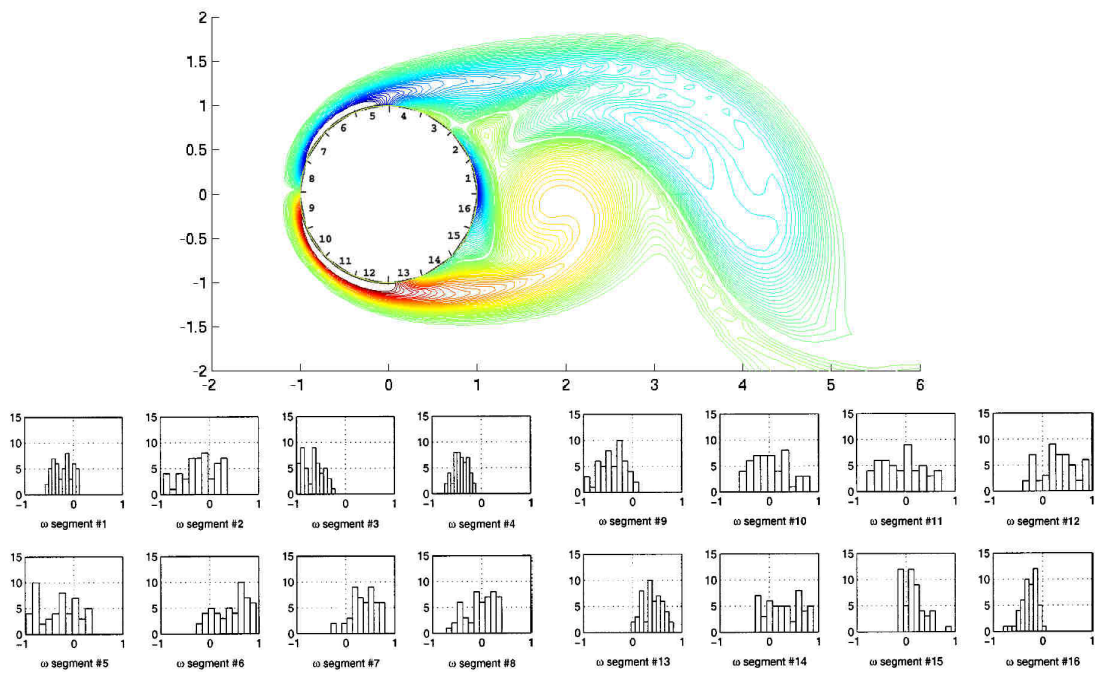


Figure 3.1 – Configuration des 16 actuateurs pour le contrôle de sillage 2D par la vitesse tangentielle, méthode stochastique de type CGA (tiré de [2], histogrammes de [81]).

Figure 3.1 – *Sixteen actuator configuration used for two-dimensional wake control by tangential velocity, found by a Clustering Genetic Algorithm, from [2], histograms from [81].*

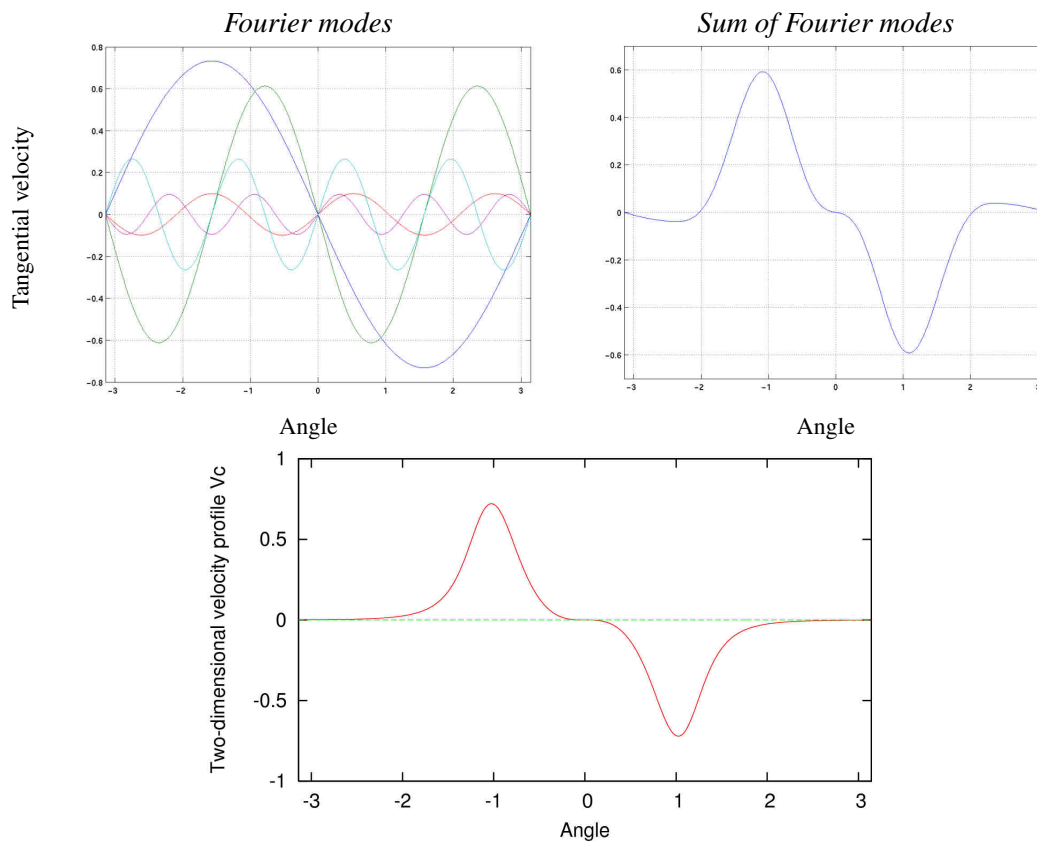


Figure 3.2 – Comparaison entre les profils de vitesse tangentielle pour la minimisation du coefficient de traînée d’un sillage de cylindre à $Re = 400$: méthode déterministe (Algorithme de Newton à énergie variable, en haut) et stochastique (Méthode CGA lissée, en bas), tirés de [8].

Figure 3.2 – Comparison between tangential velocity profiles for minimization of drag coefficient of cylinder wake at $Re = 400$: Deterministic method (energy adjustable Newton algorithm, to the top), and stochastic method (smoothed symmetrized CGA, to the bottom), from [8].

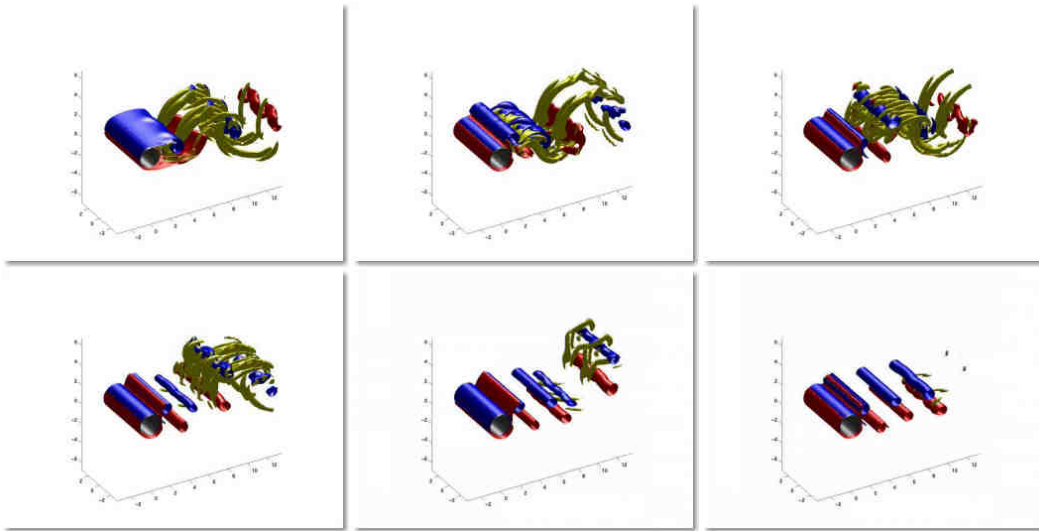


Figure 3.3 – Exemple de sillage à $Re = 400$ d'un cylindre en rotation oscillante à la fréquence double de la fréquence naturelle de l'écoulement, conduisant à un écoulement bidimensionnel (configuration tirée de [9]).

Figure 3.3 – Example of wake at $Re = 400$ behind a oscillatory rotating cylinder, at twice the natural flow frequency, leading the flow back to its nominal two-dimensional state (configuration from [9]).

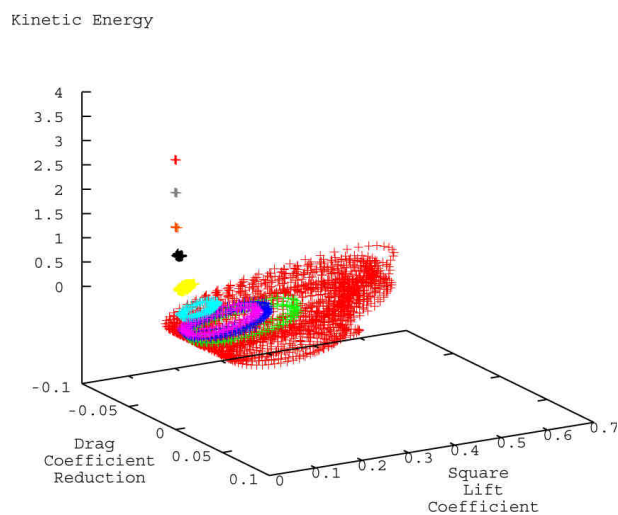


Figure 3.4 – Attracteur portance C_L^2 , écart par rapport à la traînée moyenne $\overline{C_D} - C_D(t)$, énergie adimensionnée E_c^* pour un sillage soumis à un contrôle par vitesse tangentielle : les oscillations de force (VIV) tendent vers 0 lorsque l'énergie mise en jeu dans le contrôle augmente (tiré de [6]).

Figure 3.4 – Attractor C_L^2 , $\overline{C_D} - C_D(t)$, E_c^ (lift, drag deviation and non-dimensional kinetic energy) for a cylinder wake with control using a tangential velocity field : force oscillation tends toward 0 as the energy involved in the control increases (from [6]).*

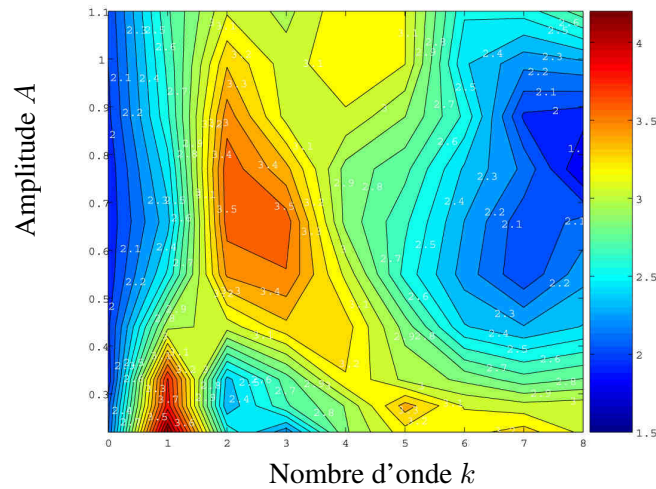


Figure 3.5 – Cartographie de l’efficacité E_{ff} en fonction de l’amplitude du contrôle A et de son nombre d’onde k pour une seule modulation harmonique du profil 2D optimal (tiré de [8]).

Figure 3.5 – Area bombing of efficiency criterion E_{ff} with respect to control amplitude and control modulation wavenumber, for one spanwise harmonic modulation of optimal two-dimensional profile (from [8]).

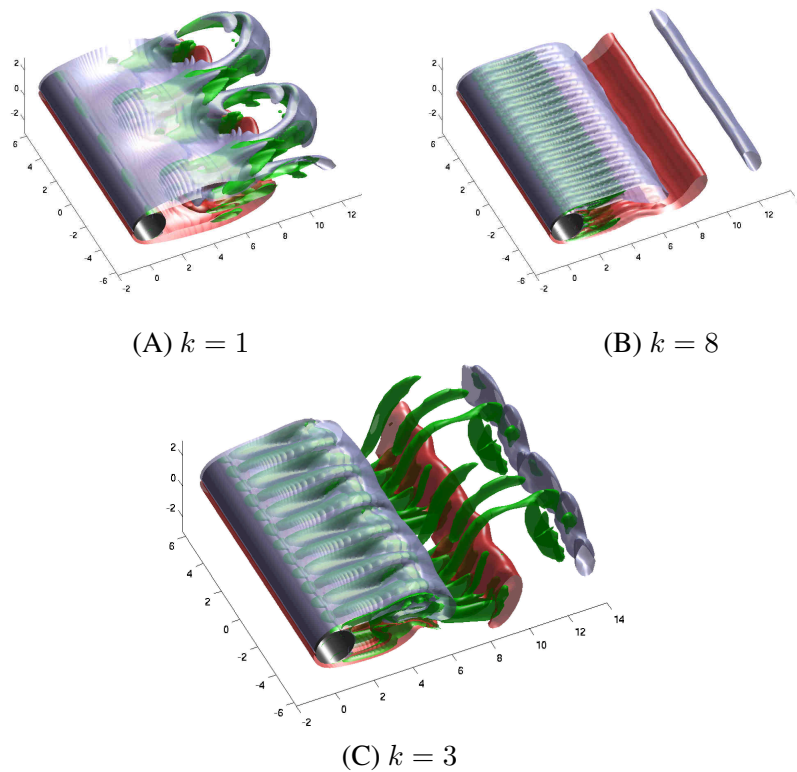


Figure 3.6 – Sillage à $Re = 300$ avec contrôle à modulation harmonique à une longueur d’onde, de basse fréquence (A, $k = 1$), haute fréquence (B, $k = 8$), et fréquence optimale (C, $k = 3$). Images tirées de [8].

Figure 3.6 – Cylinder wake at $Re = 300$ with one wavelength modulation of 2D optimal control, at low frequency (A, $k = 1$), high frequency (B, $k = 8$), and optimal frequency (C, $k = 3$). Pictures from [8].

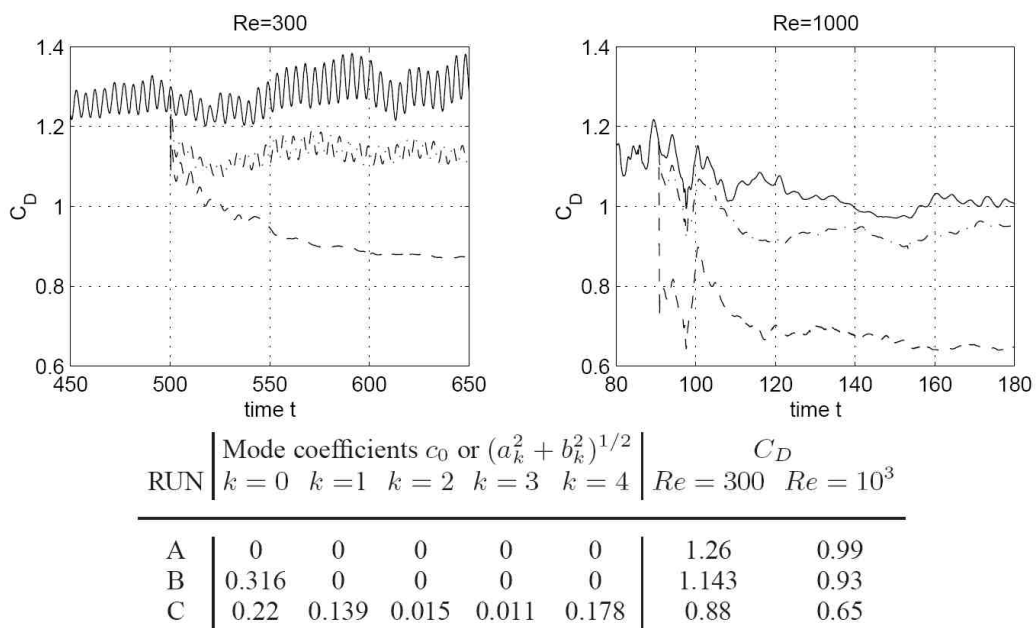


Figure 3.7 – Courbes de coefficient de traînée C_D pour un écoulement sans contrôle (A, —), avec contrôle optimal 2D (B, - · -), et contrôle optimal 3D (C, --), pour $Re = 300$ (à gauche) et $Re = 1000$ (à droite), tirés de [2].

Figure 3.7 – Drag coefficients C_D related to uncontrolled flow (A, —), to optimal 2D control (B, - · -), and to optimal 3D control (C, --), at $Re = 300$ (to the left) and $Re = 1000$ (to the right), from [2].

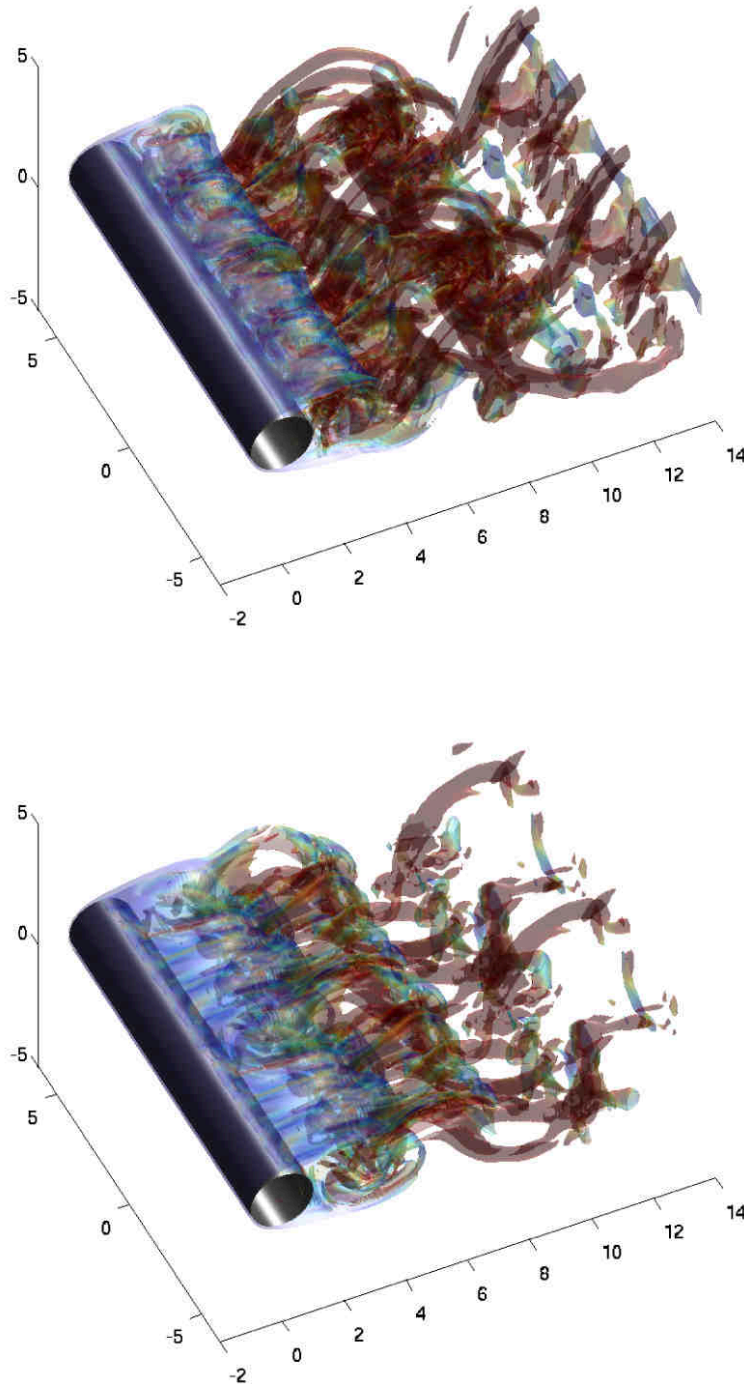


Figure 3.8 – Sillage à $Re = 1000$ sans contrôle (en haut) et avec contrôle tridimensionnel optimal (en bas), tiré de [2].

Figure 3.8 – Wake at $Re = 1000$ without control (top picture) and with optimal three-dimensional control (bottom picture), from [2].

CONTROL OF THREE-DIMENSIONAL WAKES

The program implementing the numerical methods described in the two first chapters has been intensively used for wake control. These results have been obtained in collaboration with G-H. Cottet, R. Hildebrand (LJK, Grenoble), P. Koumoutsakos (ETHZ Zürich) and M. Milano (Arizona State University, USA).

We have been interested in the standard case of a wake generated behind a circular cylinder, at sufficiently high Reynolds numbers so that three-dimensionality of the wake is completely developed.

The objective function is the drag coefficient, which we aim at minimizing. The control is performed by means of a velocity field tangential to the body (its distribution being called velocity profile), thus without adding mass to the flow.

Such control methods give an alternative to conventional strategies, for example :

- control by jets or micro-jets (usually normal to the body, with or without mass damping, see for example respectively [77] and [75]),*
- control by shape optimization [74, 78, 79],*
- control involving secondary wakes (generated by well located objects) interacting with the main wakes [80].*

The following sections describe several kinds of tangential control, ranked by growing complexity of parameter space, going from two-dimensional control in section 3.1 to three-dimensional multi-frequency control at section 3.4.

3.1 Genetic Algorithms and profile smoothing

This first section describes several approaches for control of 2D wakes, in order to build a robust velocity profile which will be a reference profile for the three-dimensional case, developed

in the following sections. The goal is to minimize the drag coefficient.

The first stochastic optimisation considered has been data analysis from the Clustering Genetic Algorithm (CGA) described in [81] : The 2D cylinder generating the wake is subdivided into 16 segments (called actuators), each segment generating a tangential and constant velocity (see figure 3.1). The population is then a set of elements $C \in [-l, l]^{16}$, where l is the maximum admissible velocity on the body, in practice 0.01 or 0.1 in the case of unity radius and far-field velocity, at $Re = 400$. The genetic algorithm makes this population evolve by standard mutation/crossover/selection steps, and then takes out the four most significant actuators, which saves a lot of energy involved in the control, with only a marginal loss on the drag reduction. The fact that an actuator is significant is evaluated by the mean value of velocity histogram, and not by a small standard deviation, which would lead to a weak control (in the sense that the solution would not be robust to perturbations). Other stochastic techniques such as simulated annealing and its CMA variant (Covariance Matrix Analysis), or EGO techniques (Efficient Global Optimization) have given poor results when used for this optimization problem, despite their natural massive parallelization.

Using only the four most significant actuators make the piecewise constant solution (based on the most probable velocity of each actuators, that is to say the maximum value for each histogram) easy to inject in spaces of skew-symmetric smooth functions [10]. A meaningful space of approximation is the set of sine of Padé approximations. The skew-symmetry is a key point in order to keep the body free of lift. Furthermore, M. Milano has shown that the CGA has a similar efficiency for drag reduction, whether it is used with normal or tangential velocities on the body/

In order to validate of this optimal profile, a deterministic descent method has been implemented by R. Hildebrand, based on the Newton method with variable energy. Indeed, the velocity profile is a five-mode Fourier series function of the azimuthal coordinate θ (a seven-mode Fourier decomposition is also used to check that convergence is achieved) : the parameter space is then the five amplitudes of these five modes. The Euclidean norm of this five component vector is the square root of the kinetic energy involved in the control, thus the vector of parameters holds on the sphere of iso-energy in \mathbb{R}^5 . The radius of the sphere is chosen to grow as algorithm increments time steps, until it reaches the desired level of energy. Each descent step requires 31 evaluation of the objective function, that is to say 31 full run of 3D flow computations, using complete parallel computing, until quasi-periodic regime of drag coefficient is reached : one central evaluation, 5 for the gradient and 25 for the Hessian.

The optimal profile obtained by the deterministic method is very close to the one obtained by smoothing the solution of the CGA method, as shown on figure 3.2. The most surprising result is how localization and amplitude of maximum velocities are close, the two methods being completely independent, using no a priori information on extrema location.

3.2 Efficiency, topological optimization and vortex induced vibration

It has been shown that oscillatory rotation of a circular cylinder (of amplitude sufficiently large) acts as control of the wake generated behind it, and makes the flow go back to its nominal two dimensional regime (see figure 3.3 and [9]). Rotating cylinder are associated to drag reduction

at higher Reynolds numbers [83]. Understanding this mechanism is the topic of many works [72, 73, 76, 82].

The same results is obtained for a tangential velocity profile of sufficiently high speed [10, 6], which also leads to a dramatic reduction of oscillation in drag and lift signals (Vortex-Induced-Vibration or VIV), as shown on figure 3.4. These results have been reached thanks to the high stability of vortex methods, that is to say to the non-restrictive stability conditions, especially close to the boundaries where velocity can be significant without reducing time step.

In order to consider a correct approach of optimal drag reduction problem, it is necessary to define a meaningful objective function. The energy involved in a control by a velocity V_{slip} on the body surface, over a time period T , is given by

$$E_c^* = \frac{1}{2T U_\infty^2 \sigma(\partial\Omega)} \int_0^T \int_{\partial\Omega} V_{\text{slip}}(x, t)^2 d\sigma(x) dt \quad (3.1)$$

where $\sigma(\partial\Omega)$ is the cylinder surface measure (πD in 2D and πLD in 3D).

Applying the optimal 2D profile (found in the previous section), denoted $V_c(\theta)$ and plotted on figure 3.2, to a 3D flow with an amplitude A (that is to say $V_{\text{slip}} = A V_c$), one gets a non-dimensional energy as follows :

$$E_c^* = \frac{1}{4\pi R L U_\infty^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} V_{\text{slip}}(\theta, z)^2 R d\theta dz = \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_c(\theta)^2 d\theta = \frac{A^2}{2} \overline{V_c^2} \quad (3.2)$$

Moreover, the drag coefficient reduction $C_D^0 - C_D$ (C_D^0 being the uncontrolled drag) behaves linearly with respect to A , hence the square-root regression as $[E_c^*]^{1/2}$ (see [6]), and the introduction of an efficiency criteria :

$$E_{ff} = (C_D^0 - C_D) / \sqrt{E_c^*}$$

3.3 One-mode 3D control with variable amplitude

It has been established in [7], for the first time numerically, that a three-dimensional control leads to a stronger drag reduction than a two-dimensional profile of velocity.

A first step toward systematic 3D control is to produce a spanwise harmonic modulation of the 2D optimal profile. One considers modulation generating stationnary points (zero velocity) but without counter-stream velocity : the slip velocity reads then

$$V_{\text{slip}}(\theta, z) = \begin{cases} A\sqrt{2/3}(1 + \sin(kz)) V_c(\theta) & \text{si } k \neq 0 \\ A V_c(\theta) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

The formula (3.2) giving the energy involved in the control still holds. The flow considered for control is at $Re = 300$, presenting hydrodynamic instabilities of mode B, of natural spanwise wavelength $\lambda_B \simeq 0.8D$.

Such a control depends on two parameters A and k , for which area bombing is possible, aiming on the one hand at finding an optimal 3D configuration by plotting efficiency, as shown on

figure 3.5, and on the other hand at defining windows for wavelength and amplitude in order to perform more general control. Three facts are then noticeable :

1. Modulation of wavelength $\lambda = \pi D/k$ for $k = 2, 3$ are optimal for amplitudes $A \simeq 0.7$ (figure 3.6,C). Surprisingly, the natural mode of instability $k = 4$ does not lead to any noticeable phenomenon. One can notice that for $A \geq 0.8$, there are points on the body with a velocity larger than $U_\infty = 1$, the far field velocity : the physics of jets is then more appropriate to study these configurations than the physics of wakes.
2. For small amplitudes $A \leq 0.3$, a region of optimal efficiency appears at wavenumber $k = 1$, of wavelength $\lambda = \pi D$, whose mechanism of drag reduction is similar to mode A instabilities of natural wavelength $\lambda_A \simeq 4D$ (figure 3.6,A).
3. High frequency control profiles hold a large quantity of enstrophy. A consequence is that even at moderately low energy, separation points are quasi-stationary. High enstrophy structures generate vortical structures transverse to the nominal flow, behaving as a vortical layer developing in the flow but stationary as one gets close to the body (cf. [8], and figure 3.6,B), making the shedding disappear. For high frequency control, one recovers surprisingly this property of shedding vanishing, as established for 2D control in previous section.

From these three remarks, it seems reasonable to consider a window for parameters as follows : the amplitude may be chosen $A \leq 0.8$, and pulsations $k \leq 4$.

3.4 Multi-modal control of 3D wakes

The work presented in this last section is detailed in [2]. Multi-modal control has been possible thanks to the results of the previous sections. Implementation of the iterative algorithm performing optimisation has been made in collaboration with R. Hildebrand (LJK, Grenoble, France). Computational resources have been partially funded by a grant ACI CNRS.

Using the windows defined in previous section, one considers the much more general case of four pulsation control, both supported by sine and cosine function in order to introduce phase between modes as an unknown quantity of the optimization problem :

$$V_{\text{slip}}(\theta, z) = V_c(\theta) \left(C_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^4 a_k \sin(2kz/D) + b_k \cos(2kz/D) \right) \quad (3.4)$$

The non-dimensional energy, set at 0.1, is defined by

$$E_c^* = (C_0^2 + \|\mathbf{C}\|_2^2) \overline{V_c^2} / 2 \quad (3.5)$$

where $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^8$ is the vector of control parameters containing coefficients a_k and b_k , $k = 1..4$. The coefficient C_0 is then no longer a control parameter since it is deduced from \mathbf{C} by means of the energy expression (3.5).

For such simulations, each evaluation of objective function (here the drag coefficient reduction) requires about 20H of computation at $Re = 300$. Given this computational cost and the large dimension of parameter space, conventional methods of optimization are not technologically available. A projective method of descent of dimension 2 has been chosen : one step of the algorithm

is performed along an optimal direction for two modes, so the gradient computation requires only 5 parallelized simulations.

Nevertheless, the objective function is strongly non-convex, and presents numerous local extrema in the parameter space (and also exhibits symmetries). In order to improve estimation of step length in descent direction, area bombing in each two-dimensional subspace of the parameter space (subset of \mathbb{R}^8) is performed, evaluating 64 configurations in the neighbourhood of the current point \mathbf{C} . This last method has been found to be extremely robust, with a satisfactory convergence rate. We have obtained 3D optima much more efficient than the ones obtained with 3D control of other 3D control strategies. This optimization has been performed at $Re = 300$ and $Re = 1000$ (see figure 3.7 and [2] for instance) : the drag reduction is 2.5 stronger than the reference work of Kim et Choi [77], for an energy level lower or equal to theirs. The surface of isovorticity are displayed on figure 3.8.

CONCLUSION

Les perspectives d'évolution de ces travaux sur les méthodes de Vortex-in-Cell concernent leurs généralisations dans de multiples directions : la multi-physique, le calcul multi-échelle et la modélisation de la turbulence, ainsi que des applications opérationnelles dans des domaines variés. Certaines de ces perspectives relèvent de travaux en cours, d'autres concernent des projets à moyen terme.

L'étude des aspects relatifs à la multi-physique, en utilisant les méthodes particulières, sont en progrès rapide, notamment en formulation densité/quantité de mouvement/énergie : fluides compressibles [27] ou diphasiques [24], interactions fluides-structure [25]. Leur formulation particulière en vorticit   a fait l'objet de plusieurs approches, notamment pour les probl  mes de miscibilit   et viscosit   variable en cavit   entra  n  e [55],   coulements torrentiels [33], ou rupture de barrage (ou *lock-exchange*, voir [22]). Cependant, de nombreux aspects restent ouverts, par exemple la formulation utilisant l'op  rateur de reconstruction de vitesse, afin d'obtenir des sch  ma pr  sentant davantage de stabilit  , ainsi que la prise en compte de g  om  trie complexes.

De plus, la combustion est un cas o   la convection et la dynamique de fronts sont des ph  nom  nes dominants, pour lesquels les m  thodes de caract  ristiques sont naturellement efficaces. Le contr  le et l'optimisation de proc  d  s r  actifs deviennent technologiquement accessibles [31]. Ils sont (et resteront) d'actualit  , d'o   l'utilit   de d  velopper et am  liorer des outils de calcul efficaces pour de tels types d'  coulements.

Afin d'envisager correctement la simulation num  rique des   coulements turbulents, la mise au point de mod  les LES intrins  quement formul  s en vorticit   semble indispensable. En effet,    moins de consid  rer des projections syst  matiques sur les champs    divergence nulle, les d  rivations des filtres LES usuels (en vitesse) ne sont pas    divergence nulle en vorticit   et brisent donc les relations vorticit  /vitesse/courant. Il est cependant envisageable de valider des mod  les sous-maill  s non lin  aires en vorticit   g  n  rant des spectres d'  nergie repr  sentant correctement les cascades d'  nergie et d'  nstrophie, avec une efficacit   comparable aux filtres LES de r  f  rence [48, 63].

Les   coulements glissants, dont l'  tat d'avancement est d  crit dans la section 2.4, sont actuellement un objectif prioritaire. D'une part, ils mod  lisent les effets de rugosit   et de micro-bulles au parois, ainsi que le caract  re hydrophobe de certains mat  riaux. D'autre part, ils permettent surtout de faire le lien entre les   chelles o   les effets cin  tiques sont dominants et les   chelles o   les

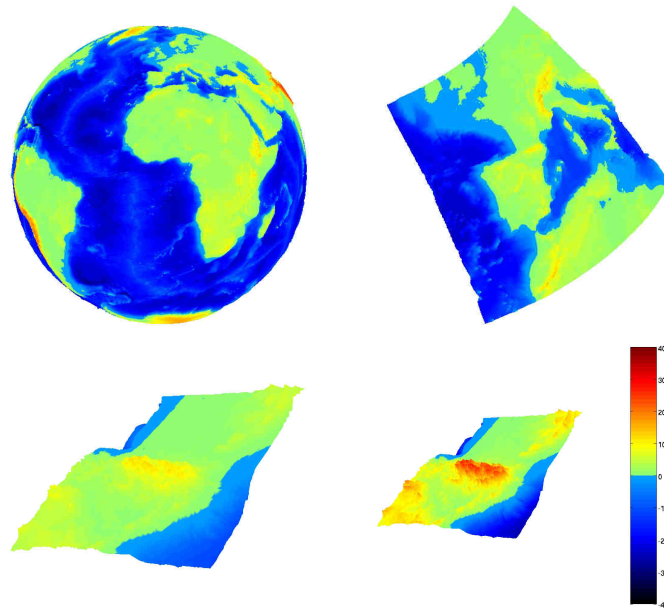


Figure 4.1 – Exemple de données altimétriques multi-échantillonnées ETOPO2, raffinées progressivement vers la région toulousaine (avec un facteur d'échelle en altitude afin de magnifier les reliefs).

Figure 4.1 – Example of altimetric data multiscaled ETOPO2, refined progressively toward Toulouse area (using a scaling factor on altitude in order to emphase landscape).

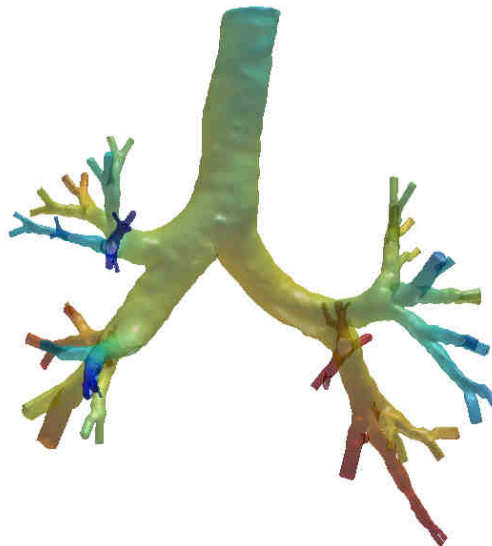


Figure 4.2 – Données réelles de géométrie pulmonaire (INRIA REO), numérisée jusqu'à la sixième génération, reformatée afin d'assurer la compatibilité avec les méthodes de vortex-in-cell hybrides.

Figure 4.2 – Lung geometry scanned up to the sixth generation (team REO, INRIA), and processed in order to be compatible with Lagrangian features of hybrid vortex in cell methods.

équations usuelles de Navier-Stokes sont valides (c'est à dire de raccorder les zones de physiques différentes à la sortie de la couche de Knudsen). En effet, étant donnée la complexité du calcul numérique relatif aux équations de la cinétique, il est judicieux de construire des méthodes numériques limitant leur domaine de résolution effective, en introduisant des couplages bien choisis, notamment avec les méthodes particulières.

Les résultats récents utilisant les méthodes de Vortex-in-Cell semblent prometteurs pour les cas d'étude opérationnels, notamment dans les phases d'avant projets. On citera par exemple la conception de véhicules à effets de sol (GEV, [28]), ou le calcul précis de tourbillons de bout d'aile [71].

Le calcul multi-échelle est incontournable pour des géométries ou des données dont la finesse est localement indispensable mais dont l'utilisation de la résolution la plus fine au niveau global n'est pas gérable par les moyens technologiques actuels. Plusieurs directions ont déjà été proposées, pour l'instant principalement pour des formulations quasi-compressibles [21, 40].

Un premier exemple est le calcul de la dynamique océanique entre les échelles côtière et globale. Cette dynamique est indissociable de la circulation globale, et totalement dépendante de l'altimétrie, qu'il devient nécessaire de multi-échantillonner, telles que les données ETOPO2 représentées sur la figure 4.1.

Un autre projet d'application, réalisé actuellement en collaboration avec le laboratoire Jacques-Louis Lions (Y. Maday et M. Thiriet), en parallèle de l'équipe INRIA REO, consiste à mener des calculs d'écoulements pulmonaires (cf. figure 4.2). Dans ce cas d'écoulement interne avec une faible distance entre les parois, il est nécessaire de raffiner localement les réseaux de particules et grilles.

L'adjonction de la multi-résolution aux méthodes développées dans ce manuscrit est donc également un objectif prioritaire. Elle est l'objet du programme ANR blanc «COMMA». Le principal challenge de ce projet consiste à implémenter et comparer différentes techniques de raccord entre régions de différentes résolutions, dans un cadre indifféremment eulérien ou lagrangien. Les méthodes de transfert entre grilles et particules, notamment près des parois de raccord, nécessitent une attention toute particulière. Les différents aspects des méthodes décrites dans les précédentes sections seront implémentées dans un unique code, gérant les objets géométriques et leur discrétisation de manière à assurer leur compatibilité avec les méthodes particulières.

CONCLUSION

The prospects concerning the development of hybrid vortex-in-cell methods involve their generalisation in several contexts : multi-physics, multi-scale computations, turbulence modelling, and various fields of application. Some of these prospects are already ongoing projects, while other are middle-course prospects.

Development of numerical methods related to multi-physics with particle methods are in constant progress, especially in their density/momentum/energy formulation : compressible fluids [27] or biphasic fluids [24], or fluid-structure interactions [25]. Their particle formulation using vorticity has been the topic of several works, involving flows with variable density [55], mixed flows [33], or lock-exchange problems [22]). However, many problems remain open, for example the use of vorticity-to-velocity operator in order to build more stable schemes, or the way to take into account efficiently the complexity of boundary geometry. Moreover, combustion problems involve a kind of flows for which convection and front dynamics are dominant features. Characteristics methods and more generally particle methods are thus appropriate and efficient for these problems. Control and optimisation of such reactive flows become technologically accessible [31]. They are (and will remain) topical, thus the need of development and improvement of efficient numerical tools for this class of flows.

Furthermore, in order to perform numerical simulation of turbulent flows with hybrid vortex in cell methods, the elaboration of LES models intrinsically defined in vorticity seems to be required. Indeed, if one wants to avoid systematic projection on divergence-free fields, a special care has to be given to divergence of vorticity fields (whether it is produced or not by the LES terms) in order to have valid relations between vorticity, velocity and stream. It is however conceivable to build valid non-linear vortical LES filters, generating correct energy spectra and enstrophy/energy transfers, as efficiently as reference modern LES filters [48, 63].

Slip flows, whose progress is described in section 2.4, are currently of high priority. On the one hand, they are able to model roughness and micro-bubbles close to boundary at microscopic scale, as well as hydrophobic properties of some material. On the other hand, they are the link between scales for which kinetic effects are dominant and for which the usual Navier-Stokes equations are valid. This means slip flows are the link between domain of different physics at the outer side of Knudsen layer. Indeed, given the complexity of numerical simulation of kinetic equations, it could be judicious to consider numerical methods limiting the size of the kinetic computational domain, by means of well-chosen coupling between numerical tools, especially particle methods.

Recent results involving Vortex-in-Cell methods seem to be promising for CAD or more generally for process design, for example about ground effect vehicles [28]), or accurate trailing vortices computation [71].

Multi-scale computing is inevitable for geometries involving thin structures and for which the use of fine resolution everywhere is not affordable technologically. Several alternatives have already been discussed, relying mainly on quasi-compressible formulation [21, 40].

A first example is fluid dynamics in oceanography between coastal and global scales. Such a dynamic strongly depends on global circulation, and also on altimetry, which is required to be multi-sampled, such as ETOPO2 data presented on figure 4.1.

Another example, actually considered in collaboration with laboratory Jacques-Louis Lions (Y. Maday et M. Thiriet), alternatively to the team REO of INRIA, consists in performing flow computations in lungs (cf. figure 4.2). Such a kind of internal flow, with small distance between boundaries, requires to refine locally particle lattice and their underlying grids.

The addition of multi-resolution to the numerical methods described in this manuscript is consequently also a high-priority objective. It is the motivation of research ANR program «COMMA». Its main challenge is to implement and compare several techniques for joining domains of different resolutions, in Lagrangian context. Transfers between particles and grids, especially close to sub-domain boundaries, require a special attention. All the numerical tools described in the last sections will be implemented in a stand-alone code, managing geometrical object and their discretisation, such as they are compatible with particle methods.

BIBLIOGRAPHIE / REFERENCES

Références de l'auteur / *Author's references*

- [1] P. Poncet, *Integral formulation of ultra-hydrophobic and hydrophilic vortical flows*. En préparation.
- [2] P. Poncet, R. Hildebrand, G-H. Cottet and P. Koumoutsakos, *Spatially distributed control for optimal drag reduction of the flow past a circular cylinder*, en révision pour J. Fluid Mech.
- [3] P. Poncet, *Fast immersed boundaries for 3D vortex methods*. Soumis à J. Comp. Phys.
- [4] P. Poncet, *Analysis of direct three-dimensional parabolic panel methods*, SIAM J. Numer. Anal. 45(6), 2259–2297 (2007).
- [5] P. Poncet, *Finite difference stencils based on particle strength exchange schemes for improvement of vortex methods*, J. Turbulence 7 (23), 1-24 (2006).
- [6] P. Poncet and P. Koumoutsakos, *Optimization of Vortex Shedding in 3D Wakes using Belt Actuators*, Intl. J. Offshore Polar Eng. 15 (1), 1-7 (2005).
- [7] P. Poncet, G-H. Cottet and P. Koumoutsakos, *Control of three-dimensional wakes using evolution strategies*, C. R. Mecanique 333, 65-77 (2005).
- [8] P. Poncet, *Bimodal control of three-dimensional wakes*. Proceedings of the ERCOFTAC Workshop DLES-6, Poitiers, France, (september 2005).
- [9] P. Poncet, *Topological aspects of the three-dimensional wake behind rotary oscillating circular cylinder*, J. Fluid Mech. , 517, 27-53 (2004).
- [10] G-H. Cottet and P. Poncet, *New results in the simulation and control of three-dimensional cylinder wakes*, Comp. Fluids 33, 687–713 (2004).
- [11] G-H. Cottet and P. Poncet, *Advances in Direct Numerical Simulations of three-dimensional wall-bounded flows by Particle in Cell methods*, J. Comp. Phys., 193, 136–158 (2003).
- [12] P. Poncet and G-H. Cottet, *Open-loop control of three-dimensional wakes*. Proceedings of the Second MIT conference, Boston, USA, 2348–2351 (2003).

- [13] G-H. Cottet and P. Poncet, *Particle methods for Direct Numerical Simulations of three-dimensional wakes*, J. Turbulence 3(038), 1–9 (2002).
- [14] P. Poncet, *Vanishing of mode B in the wake behind a rotationally oscillating circular cylinder*, Phys. Fluids., 14 (6), 2021–2023 (2002).
- [15] P. Poncet and R. Abgrall, *A few multiresolution schemes for the Black-Scholes equation*, Research Report U-02-08, MAB, Bordeaux, France (2002).
- [16] P. Poncet, *Méthodes particulières pour la simulation des sillages tridimensionnels*, Ph.D. thesis, Univ. J. Fourier, Grenoble, France (2001).
- [17] P. Poncet and F. Robert, *About Successive Gauss-Seidelizations*, Taiwanese J. Math, 3(4), 491-501 (1999).
- [18] P. Poncet and Y. Le Floch, *Iteration de l'opérateur de Gauss-Seidel sur les transformations du N-cube*. Technical report RT161, LMC-IMAG, Grenoble, France (1996).

Méthodes numériques / Numerical methods

- [19] Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin, *Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries*, J. Comput. Phys. 147, 187-218 (1998).
- [20] C. Anderson and C. Greengard, *On vortex methods*, SIAM J. Numer. Anal. 22, 413–440 (1985).
- [21] M. Bergdorf, G.-H. Cottet and P. Koumoutsakos, *Multilevel Adaptive Particle Methods for Convection-Diffusion Equations*, SIAM Multiscale Modeling and Simulation 4, 328–357 (2005).
- [22] V. K. Birman, J. E. Martin, E. Meiburg, *The non-Boussinesq lock-exchange problem. Part 2. High-resolution simulations*, J. Fluid Mech. 537, 125-144 (2005).
- [23] C-H. Bruneau, I. Mortazavi² and G. Wilczyk, *Numerical Simulation and Control of Bluff-Body Flows Using the Penalization Method*, Proceedings of the Third International Conference on Computational Fluid Dynamics ICCFD3, Toronto (2004).
- [24] G.-H. Cottet and L. Weynans, *Particle methods revisited : a class of high-order finite-difference schemes*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 343, 51–56 (2006).
- [25] G.-H. Cottet and E. Maitre, *A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 16, 415–438 (2006).
- [26] G.-H. Cottet and P. Koumoutsakos, *Vortex methods, theory and practice*, Cambridge University Press (2000).
- [27] G.-H. Cottet, *Multi-physics and particle methods*. Proceedings of the Second MIT conference, Boston, USA, 1296-8, Elsevier, 2003.
- [28] G. Daeninck and G. Winckelmans, *Large-eddy simulation of the flow past the Ground Transportation System with realistic ground effects using the combined vortex and boundary element methods*, J. Turbulence (2004).

- [29] P. Degond and S. Mas-Gallic, *The Weighted particle method for convection-diffusion equations*, Math. Comp. 53, 485–526 (1989).
- [30] J. Giroire and J. C. Nédélec, *Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double-layer potential*, Math. Comp. 32, 973–990 (1978).
- [31] A. F. Ghoniem, A. Annaswamy, S. Park, and Z. Sobhani, *Stability and Emissions Control Using Air Injection and H₂ Addition in Premixed Combustion*, Proceedings of the Combustion Institute, Vol 30, 1765-1774 (2004).
- [32] L. Greengard and V. Rokhlin, *A fast algorithm for particle simulation*, J. Comp. Phys. 73, 325–348 (1987).
- [33] C. Härtel, E. Meiburg and F. Necker, *Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part 1. Flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries*, J. Fluid Mech. 418, 189-212 (2000).
- [34] J. L. Hess, *Review of integral-equation techniques for solving potential flow problems with emphasis on the surface-source method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 5, 145–196 (1975).
- [35] J. L. Hess, *Panel methods in computational fluid dynamics*, Ann. Rev. Fluid Mech. 22, 255–274 (1990).
- [36] G. J. Hirasaki and J. D. Hellums, *Boundary conditions on vector and scalar potentials in viscous three-dimensional hydrodynamics*, Quart. Appl. Math. 28, 293 (1970).
- [37] C. Johnson and J. C. Nédélec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, Math. Comp. 35, 1063-1079 (1980).
- [38] J. Kim and P. Moin, *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comp. Phys. 59, 308–323 (1985).
- [39] R. B. Kinney and Z. M. Cielak, *Analysis of unsteady viscous flow past an airfoil. Part I : Theoretical development*, AIAA J. 15, 1712–1717 (1977).
- [40] P. Koumoutsakos, *Multiscale flow simulations using particles*, Ann. Rev. Fluid Mech. 37, 457-487 (2005).
- [41] P. Koumoutsakos, A. Leonard and F. Pepin, *Boundary conditions for viscous vortex methods*, J. Comp. Phys. 113, 52–61 (1994).
- [42] K. Lindsay and R. Krasny, *A particle method and adaptive treecode for vortex sheet motion in 3-D flow*, J. Comp. Phys. 172, 879–907 (2001).
- [43] Y. Maday, A.T. Pakera and E.M. Ronquist, *An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems : application to incompressible fluid flow*, J. Sci. Comp. 5(4), 263–292 (1990).
- [44] R. Mittal and G. Laccarino, *Immersed boundary methods*, Ann. Rev. Fluid Mech. 37, 239–261 (2005).
- [45] J. J. Monaghan, *Extrapolating B-Splines for interpolation*, J. Comp. Phys. 60, 253–262 (1985).

- [46] J. C. Nédélec, *A mixed finite element method for 3D Navier-Stokes equations*, Lectures Appl. Math. 22 (1985).
- [47] M. L. Ould-Salihi, G.-H. Cottet and M. El Hamraoui, *Blending finite-differences and vortex methods for incompressible flow computations*, SIAM J. Sci. Comput. 22, 1655–1674 (2000).
- [48] R. Pasquetti, *High-order LES modeling of turbulent incompressible flows*, C.R. Acad. Sci. Paris 333, 39–49 (2005).
- [49] R. Pasquetti and R. Bwemba, *A spectral algorithm for the Stokes problem in vorticity-vector potential formulation and cylindrical geometry*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 117, 71–90 (1994).
- [50] O. Pironneau, *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier - Stokes equations*, Numer. Math. 38, 309-332 (1982).
- [51] P. Ploumhans, G. Daeninck and G. Winckelmans, *Simulation of three-dimensional bluff body flows using the vortex particle and boundary element methods*, J. Flow Turb. Comb. 73(2), 117–131 (2004).
- [52] P. Ploumhans and G. S. Winckelmans, *Vortex Methods for High-Resolution Simulations of Viscous Flow Past Bluff Bodies of General Geometry*, J. Comp. Phys. 165, 354–406 (2000).
- [53] P. Ramachandran, S. C. Rajan and M. Ramakrishna, *A fast, two-dimensional panel methods*, SIAM J. Sci. Comp. 24, 1864–1878 (2003).
- [54] A. Rathsfeld, *The invertibility of the double layer potential operator in the space of continuous functions defined on a polyhedron : the panel method*, Appl. Anal. 45, 135–177 (1992).
- [55] A. Riaz and E. Meiburg, *Vorticity interaction mechanisms in variable-viscosity heterogeneous miscible displacements with and without density contrast*, J. Fluid Mech. 517, 1-25 (2004).
- [56] S. M. Richardson and A. R. H. Cornish, *Solution of three-dimensional incompressible flow problems*, J. Fluid Mech. 82, 309 (1970).
- [57] J. E. Romate, *Local error analysis of three-dimensional panel methods in terms of curvilinear surface coordinates*, SIAM J. Numer. Anal. 27, 529–542 (1990).
- [58] J. Salvi, *Contribution théorique et numérique des méthodes intégrales de frontière à la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles en Formulation vitesse-tourbillon*, PhD thesis, Ecole polytechnique, Palaiseau, FRANCE (1999).
- [59] J. H. Strickland, L. A. Gritzko, R. S. Baty and G. F. Homicz, *Fast multipole solvers for three-dimensional radiation and fluid flow problems*. In Third international workshop on vortex flows and related numerical methods, ESAIM Proceedings, Vol. 7 (1999).
- [60] Dh. Wee and A. F. Ghoniem, *Modified interpolation kernels and treating diffusion and re-meshing in vortex methods*, J. Comput. Phys. 213, 239–263 (2006).
- [61] J. C. Wu, *Numerical boundary conditions for viscous flow problems*, AIAA J. 14, 1042–1049 (1976).

Sillages / Wakes

- [62] D. Barkley and R. D. Henderson, *Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder*, J. Fluid Mech. 322 215–241 (1996).
- [63] L. Cousin and R. Pasquetti, *High-order methods for the simulation of transitional to turbulent wakes*. In : Y. Lu, W. Sun and T. Tang, Editors, Third Int. Workshop on Scientific Computing and Applications, City University Hong-Kong, 6th–9 January 2003, Advances in Scientific Computing and Applications, Science Press, Beijing, New York, 133–143 (2004).
- [64] P. Koumoutsakos and A. Leonard, *High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods*, J. Fluid Mech. 296 1–38 (1995).
- [65] A. G. Kravchenko, P. Moin and K. Shariff, *B-Spline method and zonal grids for simulations of complex turbulent flows*, J. Comp. Phys. 151, 757–789 (1999).
- [66] Y. M. Marzouk and A. F. Ghoniem, *Vorticity Formulation for an Actuated Jet in Cross Flow*, 42nd AIAA Aerospace Science Meeting, Reno NV, January 2004.
- [67] R. Mittal and S. Balachandar, *Effects of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional flows*, Phys. Fluid. 7, 1841-1865 (1995).
- [68] R. Mittal, *Progress on LES of flow past a circular cylinder*, Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research (1996).
- [69] H. Persillon and M. Braza, *Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation*, J. Fluid Mech. 365, 23–88 (1998).
- [70] C. H. K. Williamson, *Three-dimensional wake behind a cylinder*, J. Fluid Mech. 328 345 (1996).
- [71] G. Winckelmans, R. Cogle, L. Dufresne and R. Capart, *Vortex methods and their application to trailing wake vortex simulations*, C.R. Physique, special issue on Aircraft trailing vortices / Dynamique des sillages tourbillonnaires, vol. 6(4), 467–486 (2005).

Contrôle / Control

- [72] M. Bergmann, L. Cordier and J. P. Brancher, *Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model*, Phys. Fluids 17(9), 097101 (2005).
- [73] S. C. R. Dennis, P. Nguyen and S. Kocabiyik, *The flow induced by a rotationally oscillating and translating circular cylinder*, J. Fluid Mech. 385, 255-286 (2000).
- [74] A. Dobre, H. Hangan and B. J. Vickery, *Wake control based on spanwise sinusoidal perturbations*, AIAA J. 44(3), 485–492 (2006).
- [75] J. H. M. Fransson, P. Konieczny and P. H. Alfredsson, *Flow around a porous cylinder subject to continuous suction or blowing*, J. Fluids Struct. 19(8), 1031–1048 (2004).

- [76] He, J.-W., Glowinski, R., Metcalfe, R., Nordlander, A. & Periaux, J. 2000 Active Control and drag optimization for flow past a circular cylinder, I. Oscillatory cylinder rotation *J. Comp. Phys.*, **163**, 83–117.
- [77] J. Kim and H. Choi, *Distributed forcing of flow over a circular cylinder*, *Phys. Fluids* 17(3), 033103 (2005).
- [78] S. J. Lee, H. C. Lim, M. Han and S. S. Lee, *Flow control of circular cylinder with a V-grooved micro-riblet film*, *Fluid Dynamics Research* 37(4), 246–266 (2005).
- [79] H. C. Lim and S. J. Lee, *Flow control of a circular cylinder with O-rings*, *Fluid Dynamics Research* 35(2), 107–122 (2004).
- [80] S. C. Luo and H. M. Xia, *Parallel vortex shedding at $Re = O(10^4)$ - a transverse control cylinder technique approach*, *J. Fluid Mech.* 541, 134–165 (2005).
- [81] M. Milano and P. Koumoutsakos, *A clustering genetic algorithm for cylinder drag optimization*, *J. Comp. Phys.* 175, 79–107 (2002).
- [82] P. Ray and P. D. Christofides, *Control of Flow Over a Cylinder Using Rotational Oscillations*, *Comp. Chem. Eng.* 29, 877–885 (2005).
- [83] P. Tokumar and P. Dimotakis, *Rotary ooscillation of a cylinder wake*, *J. Fluid Mech.* 224 , 77–90 (1991).

Hydrophobie / slip-flows

- [84] A. K. Balasubramanian, A. C. Miller and O. K. Rediniotis, *Microstructured hydrophobic skin for hydrodynamic drag reduction*, *AIAA J.* 42 411 (2004).
- [85] C. Cheikh and G. Koper, *Stick-slip transition at the nanometer scale*, *Phys. Rev. Lett.* 91, 156102 (2003).
- [86] C.-H. Choi, K. J. A. Westin and K. S. Breuer, *Apparent slip flow in hydrophilic and hydrophobic microchannels*, *Phys. Fluids* 15 2897 (2003).
- [87] C.-H. Choi and C.-J. Kim, *Large Slip of Aqueous Liquid Flow over a Nanoengineered Superhydrophobic Surface*, *Phys. Rev. Letter* 96 066001 (2006)
- [88] K. Fukagata, N. Kasagi and P. Koumoutsakos, *A theoretical prediction of friction drag reduction in turbulent flow by super-hydrophobic surfaces*, *Phys. Fluids* 18 051703 (2006).
- [89] J. Kim and C. J. Kim, *Nanostructured surfaces for dramatic drag reduction of flow resistance in droplet-based microfluidics*, *Technical Digest, IEEE Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Las Vegas, NV, 20-24 january 2002 (IEEE, Piscataway, NJ, 2002), p. 479.
- [90] E. Lauga, M. P. Brenner, *Dynamic mechanisms for apparent slip on hydrophobic surfaces*, *Phys. Review E* 70 026311 (2004).
- [91] E. Lauga, M. P. Brenner and H. A. Stone, *Microfluidics : the no-slip boundary condition*, in *Handbook of experimental fluid dynamics*, Ed. J. Foss, C. Tropea and A. Yarin, Springer, New-York (2005).

- [92] E. Lauga and C. Cossu, A note on the stability of slip channel flow, *Phys. Fluids* 17 088106 (2005).
- [93] E. Lauga and H. A. Stone. Effective slip in pressure-driven Stokes flow. *J. Fluid Mech.* 489, 55–77 (2003).
- [94] T. Min and J. Kim, Effects of hydrophobic surface on skin-friction drag, *Phys. Fluids* 16(7) L55–L58 (2004).
- [95] T. Min and J. Kim, Effects of hydrophobic surface on stability and transition, *Phys. Fluids* 17 108106 (2005).
- [96] J. Ou, B. Perot and J. P. Rothstein, Laminar drag reduction in microchannels using ultrahydrophobic surfaces, *Phys. Fluids* 16, 4635 (2004).
- [97] E. Schnell, Slippage of water over nonwetable surfaces, *J. Appl. Phys.* 27, 1149–1152 (1956).
- [98] P. A. Thompson and S. M. Troian, A general boundary condition for liquid flow at solid boundary, *Nature* 389, 360 (1997).
- [99] D. C. Tretheway and C. D. Meinhart, Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel flow, *Phys. Fluids* 14, L9 (2002).
- [100] O. I. Vinogradova, Drainage of a thin liquid-film confined between hydrophobic surfaces, *Langmuir* 11, 2213–2220 (1995).
- [101] K. Watanabe, Yanuar and H. Udagawa, Drag reduction of Newtonian fluid in a circular pipe with highly water-repellent wall, *J. Fluid Mech.* 381, 225 (1999).
- [102] J. H. Walther, T. Werder, R. L. Jaffe and P. Koumoutsakos, Hydrodynamic properties of carbon nanotubes, *Phys. Rev. E* 69, 062201 (2004).

Références générales / Miscellaneous References

- [103] Y. Achdou and N. Tchou, *Boundary value problems with nonhomogeneous Neumann conditions on a fractal boundary*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 342, 611–616 (2006).
- [104] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [105] A. J. Chorin, *Numerical study of slightly viscous flow*, *J. Fluid Mech.* 57, 785–796 (1973).
- [106] G.-H. Cottet, *A vorticity creation algorithm for the Navier-Stokes equations in arbitrary domain*, in *Navier-Stokes equations and Related Nonlinear Problems*, A. Sequeira (ed.), Plenum Press (1995).
- [107] J. Cousteix, *Turbulence et couche limite*, CEPADUES-Editions, Toulouse (1989).
- [108] A. Friedmann, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1964).
- [109] S. Itô, *Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems*, *Japan J. Math.*, 27 (1957), pp. 55–102.

-
- [110] J. Katz and A. Plotkin, *Low-speed aerodynamics*, McGraw-Hill, New-York (1991).
- [111] S. V. Kozlov, I. K. Lifanov and A. A. Mikhailov, *A new approach to mathematical modelling of flow of ideal fluid around bodies*, Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 6 (1991), pp. 209–222.
- [112] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type* (Translated by Smith, S.), American Mathematical Society. Providence, Rhode Island (1968).
- [113] L. D. Landau, and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics, Volume 6 of Course of Theoretical Physics*, 2nd edition, Butterworth-Heinemann, 1987.
- [114] M. J. Lighthill, *Boundary layer theory*, Oxford University Press, 1963.
- [115] M. Taylor, *Pseudo-differential Operators*, Princeton (1981).
- [116] R. Temam, *Navier-Stokes equations and non linear functional analysis*, SIAM, Philadelphia, (1995).

ARTICLES DE L'AUTEUR / AUTHOR'S ARTICLES

I. Méthodes particulières pour le calcul d'écoulements 3D en géométrie complexe

I.1. Article [3] : P. Poncet, *Fast immersed boundaries for 3D vortex methods*. En révision.

Points originaux : Analyse harmonique pour la formulation du problème de non-pénétration pour les méthodes de surfaces immergées. Nature de l'opérateur l'immersion, estimations de saut de flux, caractère auto-adjoint dans $\mathbb{H}^{-1/2}$ et non-normal dans \mathbb{L}^2 de cet opérateur. Mise en pratique et couplage avec les méthodes particulières pour les équations d'Euler 3D.

I.2. Article [4] : P. Poncet, *Analysis of direct three-dimensional parabolic panel methods*. SIAM J. Numer. Anal. 45(6), 2259–2297 (2007)

Points originaux : Formulation intégrale des flux de vorticité aux parois pour les conditions aux limites cinématiques d'adhérence (problème ouvert depuis 1986 pour le cas 3D, naturellement en adéquation avec les méthodes lagrangiennes). Estimations d'erreur par développement d'opérateurs intégral-différentiels sur les sous-variétés de \mathbb{R}^2 . Cas limites d'application, ordre de convergence numérique.

I.3. Article [5] : P. Poncet, *Finite difference stencils based on particle strength exchange schemes for improvement of vortex methods*, J. Turbulence 7 (23), 1–24 (2006).

Points originaux : Formulation intrinsèquement discrète des méthodes de *Particle Strength Exchange* (PSE), permettant une convergence des calculs de diffusion particulière indépendante de la largeur du support du noyau d'échange utilisé.

I.4. Article [11] : G-H. Cottet & P. Poncet, *Advances in Direct Numerical Simulations of three-dimensional wall-bounded flows by Particle in Cell methods*. J. Comp. Phys., 193, 136–158 (2003).

Points originaux : Algorithme particulière de type *Vortex-in-Cell* avec couplage grilles-particules pour les sillages de cylindres tridimensionnels.

I.5. Article [13] : G-H. Cottet & P. Poncet, *Particle methods for Direct Numerical Simulations of three-dimensional wakes*. J. Turbulence 3(038), 1–9 (2002).

Points originaux : Méthodes de couplage grilles-particules, comparaison des temps de calcul avec les méthodes multipôlaires. Implémentation d'un schéma implicite de non-pénétration pour les surfaces immergées 2D, et validation à $Re = 9500$.

II. Contrôle des sillages tridimensionnels

II.1. Article [2] : P. Poncet, R. Hildebrand, G-H. Cottet and P. Koumoutsakos, *Spatially distributed control for optimal drag reduction in cylinder wakes*. J. Fluid Mech. 599, 111-120 (2008).

Points originaux : Contrôle optimal par vitesse tangentielle avec modulation tridimensionnelle des sillages, pour des nombres de Reynolds $Re = 300$ et $Re = 10^3$.

II.2. Article [8] : P. Poncet, Bimodal control of three-dimensional wakes. Proceedings of the ERCOFTAC Workshop DLES-6, Poitiers, France, Springer-Verlag, Poitiers, France, 449-458 (2005).

Points originaux : Influence de l'amplitude et de la fréquence de modulation harmonique d'un profil optimal 2D de vitesses tangentielles, pour un sillage de cylindre 3D.

II.3. Article [6] : P. Poncet and P. Koumoutsakos, *Optimization of Vortex Shedding in 3D Wakes using Belt Actuators*. Intl. J. Offshore Polar Eng. 15 (1), 1-7 (2005).

Points originaux : Contrôle des vibrations induites par les détachements tourbillonnaires (*Vortex-Induced-Vibration*). Introduction de la notion d'efficacité de contrôle.

II.4. Article [7] : P. Poncet, G-H. Cottet and P. Koumoutsakos, *Control of three-dimensional wakes using evolution strategies*. C. R. Mécanique 333, 65-77 (2005).

Points originaux : Article de revue des méthodes de contrôle de sillage (12p.), invité par les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences : Optimisation par rotation alternée, optimisation stochastique par algorithme génétique groupant (*Clustering Genetic Algorithm*), optimisation topologique par profil 2D. Mise en évidence pour la première fois d'un contrôle 3D plus efficace qu'un profil 2D optimal.

II.5. Article [9] : P. Poncet, *Topological aspects of the three-dimensional wake behind rotary oscillating circular cylinder*. J. Fluid Mech. , 517, 27-53 (2004).

Points originaux : Etude de la topologie d'un sillage tridimensionnel derrière un cylindre en rotation oscillante. Caractérisation de la bifurcation 2D/3D et de l'existence d'instabilités en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'oscillation. Identification du mécanisme de retour à un écoulement bidimensionnel.

II.7. Article [10] : G-H. Cottet and P. Poncet, *New results in the simulation and control of three-dimensional cylinder wakes*. Comp. Fluids 33, 687–713 (2004).

Points originaux : Algorithme évolutionnaire pour la détermination de l'excitation optimale du déclenchement d'instabilités de Crow dans les sillages avioniques, dans la configuration de Crouch et Spalart. Post-processing de lissage d'un algorithme génétique.

II.8. Article [14] : P. Poncet, *Vanishing of mode B in the wake behind a rotationally oscillating circular cylinder*. Phys. Fluids., 14 (6), 2021–2023 (2002).

Points originaux : Mise en évidence de la fragilité de l'instabilité hydrodynamique de type *mode B* derrière un cylindre en rotation alternée.