



# Autour du système de Saint-Venant : Méthodes numériques pour le transport sédimentaire, les fluides en rotation et les équations primitives

Emmanuel Audusse

## ► To cite this version:

Emmanuel Audusse. Autour du système de Saint-Venant : Méthodes numériques pour le transport sédimentaire, les fluides en rotation et les équations primitives. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris 13 Villetaneuse, 2018. tel-02005164

**HAL Id: tel-02005164**

**<https://hal.science/tel-02005164>**

Submitted on 3 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ PARIS 13**

Institut Galilée  
- Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications -

# **Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches**

Spécialité : **Mathématiques**

présenté par

**EMMANUEL AUDUSSE**

---

**Autour du système de Saint-Venant :**

**Méthodes numériques pour le transport  
sédimentaire, les fluides en rotation et les équations  
primitives**

---

soutenu le 22 novembre 2018 devant le jury composé de :

M.	<b>Michael DUMBSER</b>	Université Trento	Rapporteur
M.	<b>Frédéric LAGOUTIERE</b>	Université Lyon	Rapporteur
Mme	<b>Laurence HALPERN</b>	Université Paris 13	
Mme	<b>Raphaelle HERBIN</b>	Université Aix Marseille	
Mme	<b>Nicole GOUTAL</b>	EDF & Lab. Saint-Venant	
M.	<b>Olivier LAFITTE</b>	Université Paris 13	
M.	<b>Benoit PERTHAME</b>	Sorbonne Université	
M.	<b>Pierre Yves LAGREE</b>	Sorbonne Université	
M.	<b>Bertrand MAURY</b>	Université Orsay	





Autour du système de Saint-Venant :  
Méthodes numériques pour le transport sédimentaire,  
les fluides en rotation et les équations primitives de l’océan

Nous présentons dans ce mémoire des travaux liés à la simulation numérique des écoulements géophysiques à surface libre, portant notamment sur les écoulements fluviaux et océaniques. Un des modèles les plus utilisés dans ce contexte, au moins en première approximation, est le système de Saint-Venant, introduit en 1871 dans un *Compte-Rendu à l’Académie des Sciences* rédigé par l’ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant [dSV71]. Dans une version très idéalisée, écoulement dans un canal à section rectangulaire et à fond plat, le système s’écrit :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (0.0.1)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = 0, \quad (0.0.2)$$

où les inconnues sont la hauteur d’eau  $h(t, x) \geq 0$  et la vitesse horizontale moyenne de la colonne d’eau  $u(t, x) \in \mathbb{R}$ . Le paramètre  $g$  désigne la gravité. La seconde variable conservative (le débit de l’écoulement) est souvent notée  $q = hu$ . Dans la plupart des applications, ce système d’équations aux dérivées partielles, similaire aux équations d’Euler pour un fluide barotrope pour sa partie hyperbolique, contient néanmoins des termes sources qui modélisent des phénomènes physiques essentiels : topographie du bassin, rotation terrestre, perte d’énergie par frottement... Pour de nombreuses applications, il peut être également nécessaire de le coupler avec d’autres équations : transport de polluant, biologie marine, transport sédimentaire... L’introduction de ces termes sources, ou de ces phénomènes de couplage, pose des questions, théoriques et numériques, nouvelles. Les trois premiers chapitres de ce mémoire leur seront consacrés à travers l’étude, dans l’ordre, de l’impact du terme source de topographie, de la prise en compte de la rotation du domaine de calcul et enfin du couplage hydro-sédimentaire.

Le système de Saint-Venant modélise bien les phénomènes liés à des grandes longueurs d’onde et dans lesquels la dimension verticale joue un rôle secondaire. Pour des écoulements plus complexes, éventuellement stratifiés, et notamment en océanographie, on préfère souvent utiliser les équations primitives de l’océan, ou équations d’Euler (ou de Navier-Stokes si on inclut un terme de viscosité) pour un fluide à surface libre incompressible et avec hypothèse de pression hydrostatique. Toujours en une dimension d’espace sur l’horizontale, ce système s’écrit

$$\partial_x u + \partial_z w = 0, \quad (0.0.3)$$

$$\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u + \rho^{-1}\partial_x p = 0, \quad (0.0.4)$$

$$\partial_z p = -\rho g \quad (0.0.5)$$

où les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}(t, x, z) = (u, w)^T(t, x, z) \in \mathbb{R}^2$  et la pression  $p(t, x, z)$ . La densité  $\rho(t, x, z)$  peut être une donnée du problème, mais peut aussi être une fonction d'autres grandeurs physiques (salinité ou température par exemple), elles-mêmes solutions d'une équation de type advection-diffusion

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \Delta T = 0.$$

L'étude de méthodes numériques pour le calcul de solutions approchées de ce système, en deux et trois dimensions d'espace, sera l'objet du quatrième chapitre de ce mémoire.

Le premier chapitre du mémoire est consacré à des résultats sur l'analyse numérique du système de Saint-Venant (0.0.1)-(0.0.2) avec un terme source de topographie, qui seront utiles dans la suite. Ces questions ont été abondamment traitées par de nombreux auteurs dans les vingt dernières années, voir à ce propos le livre de F. Bouchut [Bou04a] et les références qu'il contient, ainsi que les chapitres d'ouvrage [MC17, Xin17] pour des références plus récentes.

Nous commencerons par présenter des rappels autour de trois axes : méthode des volumes finis, schémas cinétiques et schémas équilibres, qui reprendront, de façon succincte, mes travaux de thèse [Aud04] et en particulier les travaux présentés dans les références [ABB<sup>+</sup>04, AB05] autour de la méthode de reconstruction hydrostatique.

Nous détaillons ensuite un résultat prolongeant ces travaux que nous avons démontré récemment [ABBSM16] et qui permet un contrôle de la production d'énergie par le schéma quand la reconstruction hydrostatique est utilisée avec un schéma reposant sur une interprétation cinétique des équations. Ce résultat a été utilisé par des collègues pour établir une preuve de convergence [BL17], ce qui, à notre connaissance, est tout à fait original dans le domaine. L'approche numérique que nous avons développée pour les équations primitives permet de plus d'étendre ce résultat à ce cadre plus général, nous y reviendrons au chapitre 4.

Nous présentons également l'application aux systèmes de Saint-Venant de deux autres familles de schémas numériques, les schémas par relaxation et les solveurs de Riemann approchés. Dans les deux cas, nous présentons d'abord l'idée générale de la méthode telle qu'introduite dans les articles fondateurs, puis les utilisations antérieures en mécanique des fluides et, quand elles existent, pour le système de Saint-Venant, et enfin un schéma original, qui sera ensuite étendu au cas du transport sédimentaire dans le chapitre 3.

Les schémas de relaxation, dont les schémas cinétiques sont en fait un cas particulier, reposent sur l'écriture d'un système d'équations aux dérivées partielles approchant, au moins formellement, le système considéré et pour lequel il est possible de résoudre exactement le problème de Riemann. Ils ont été abondamment utilisés en mécanique des fluides. La spécificité du système de Saint-Venant réside là encore dans la prise en compte des termes sources. Il est bien entendu possible de coupler ces schémas avec une technique générique comme la reconstruction hydrostatique, mais il est également possible de proposer des modèles de relaxation incluant directement les termes sources.

Un modèle de type Suliciu avec ajout d'une onde stationnaire est présenté dans le livre [Bou04a]. Nous présentons ici une variante originale, plus simple à mettre en œuvre, pour laquelle on sait démontrer la positivité mais pas d'inégalité d'entropie. Une fois les formules de mise à jour obtenues, le schéma s'avère identique au solveur de Riemann approché introduit dans [Gal03].

Les solveurs de Riemann approchés sont une classe plus générale de schémas volumes finis. L'idée générale est ici de remplacer la solution exacte du problème de Riemann par une solution simplifiée vérifiant certaines propriétés qui assurent la consistance et la stabilité de la méthode. Outre le solveur [Gal03] déjà évoqué, nous présentons ici un nouveau schéma [ACU15], basé une modification du schéma HLL [HLvL83], avec ajout d'une onde stationnaire, qui préserve certains équilibres et pour lequel on sait démontrer la positivité des solutions, mais pas, là encore, d'inégalité d'entropie discrète.

Le deuxième chapitre du mémoire est consacré à une étude sur la simulation numérique des phénomènes de transport sédimentaire en rivière, modélisés par un couplage entre le système de Saint-Venant (0.0.1)-(0.0.2) et une équation de conservation de la masse sédimentaire, introduite par Exner [Exn25], approche utilisée aujourd'hui dans de nombreux codes industriels (TELEMAC, MIKE, DELTARES, par exemple).

Ce problème a fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années, la question centrale étant de savoir s'il est possible d'utiliser une approche faiblement couplée, au sens d'un couplage entre deux solveurs, l'un fluide, l'autre solide, ou si seule une approche fortement couplée, i.e. l'écriture d'un solveur intégré, peut assurer des propriétés de stabilité. Au travers d'une série de proceedings [ACD<sup>+</sup>12, ADL<sup>+</sup>13, ABG<sup>+</sup>15], puis d'un article récent [ACU18], nous proposons ce qui, à ce jour et à notre connaissance, est la réponse la plus complète à cette question. Les méthodes numériques utilisées sont des extensions au modèle considéré des solveurs de relaxation [ACD<sup>+</sup>12, ADL<sup>+</sup>13, ABG<sup>+</sup>15] ou des solveurs de Riemann approchés [ACU18] présentés dans le premier chapitre. Dans le dernier travail [ACU18], nous montrons en particulier qu'il est possible de construire une stratégie basée sur deux solveurs différents à la condition que le solveur de Riemann approché construit pour mettre à jour la partie fluide prenne en compte les vitesses d'ondes maximales du système complet. Le couplage est ainsi réduit à la transmission d'une unique information supplémentaire et les modifications nécessaires sur les solveurs existants sont minimales. Les résultats présentés ici ont, pour une partie, été obtenus dans le cadre de la thèse de P. Ung, soutenue en 2016.

Les perspectives de travail sont nombreuses. D'une part, nous avons commencé à étudier l'influence d'une approche stochastique dans la définition du flux de sédiment. Les résultats sont encore très préliminaires. D'autre part, nous travaillons sur un aspect modélisation pour dériver des modèles alternatifs, possédant de meilleures propriétés mathématiques, par exemple, une équation de décroissance d'une certaine énergie et/ou permettant de prendre en compte d'autres phénomènes, par exemple la croissance, voire la création, de dunes, ou le couplage avec des écoulements dans les aquifères.

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude des écoulements dans un

référentiel tournant, modélisés ici par le système de Saint-Venant (0.0.1)-(0.0.2) en version bidimensionnelle avec un terme source modélisant l’impact de la rotation du domaine, ou force de Coriolis. Les applications visées sont majoritairement liées à des simulations en météorologie ou en océanographie.

Les travaux présentés portent sur deux propriétés fondamentales des méthodes numériques, déjà évoquées dans le premier chapitre : d’une part, les propriétés de conservation, et plus particulièrement la conservation du moment dans le référentiel inertiel [AKO09] et, d’autre part, les propriétés de préservation des états stationnaires, ici appelés équilibres géostrophiques [AKNV11, ADD<sup>+</sup>17, ADOP17, ADOP18]. Les résultats présentés ici ont, pour une partie, été obtenus dans le cadre de la thèse de M.H. Do, soutenue en 2017.

Les méthodes de volumes finis présentées dans le premier chapitre sont bien adaptées au traitement numérique des systèmes de lois de conservation car elles sont naturellement conservatives, ce qui est un élément permettant d’assurer une forme de cohérence des trajectoires dans l’espace des solutions en temps long. Mais, dans le cas des écoulements dans un référentiel en rotation, si la conservation de la masse, indépendante du référentiel considéré, ne change pas de nature, une difficulté supplémentaire apparaît sur la conservation du moment, qui est lui fonction du référentiel considéré : la quantité conservée est le moment dans le référentiel inertiel tandis que la quantité d’intérêt, et mesurable expérimentalement, est le moment relatif, i.e. dans le référentiel en rotation. Ce point est au cœur du travail présenté dans [AKO09], où, à l’aide d’un changement dans l’ordre des opérations effectuées sur le modèle, i.e. discrétisation puis changement de référentiel plutôt que l’inverse, nous parvenons à écrire une méthode numérique permettant le calcul direct du moment relatif, tout en assurant la conservation du moment inertiel.

Nous étendons ensuite les travaux présentés dans le premier chapitre autour de la préservation des équilibres hydrostatiques à la préservation des équilibres dits géostrophiques, question importante en océanographie et en météorologie puisque la plupart des situations rencontrées, hors événements extrêmes, sont des perturbations de ces équilibres. En particulier, dans une série de travaux récents [ADD<sup>+</sup>17, ADOP17, ADOP18], nous montrons que, dans un cadre volumes finis colocalisés, i.e. où toutes les inconnues sont calculées aux mêmes points, les méthodes existantes ne permettent pas une approximation correcte de ces équilibres en temps long. En combinant deux techniques issues de champs séparés, des méthodes préservant des équilibres monodimensionnels [BLV04] d’un côté et des travaux sur l’asymptotique bas Mach [Del10b] d’un autre, nous proposons une méthode originale qui permet pour la première fois, à notre connaissance, de combiner, dans un cadre linéaire, stabilité et préservation des équilibres géostrophiques discrets. Nous travaillons actuellement sur l’extension de la méthode sur des maillages décalés, structurés ou non, utilisés préférentiellement dans les études océanographiques pour de meilleures propriétés de dispersion. Nous essayons également d’étendre les résultats à un cadre non linéaire.



Le quatrième chapitre du mémoire est consacré à l'étude d'une nouvelle méthode pour le calcul de solutions approchées des équations primitives (0.0.3)-(0.0.4). Le lien avec le système de Saint-Venant (0.0.1)-(0.0.2), et donc les chapitres précédents, est double. Tout d'abord, même si les équations primitives prennent en compte la dimension verticale, la distribution de pression est toujours supposée hydrostatique, hypothèse au cœur de la dérivation du système de Saint-Venant. Mais surtout, notre approche des équations primitives repose sur l'écriture d'un modèle intermédiaire qui présente de fortes analogies avec le système de Saint-Venant. Ce modèle, que nous avons présenté dans deux articles [ABPSM11b, ABPSM11a] en 2011 est une discrétisation partielle, uniquement dans la direction verticale, de type volumes finis, des équations primitives. Dans le cas où on ne choisit qu'un seul degré de liberté pour la vitesse, le modèle se réduit au système de Saint-Venant classique. L'intérêt principal de cette approche est de permettre l'utilisation de méthodes numériques robustes et validées dans un cadre Saint-Venant, et que nous avons pu étendre assez naturellement à ce nouveau cadre, en conservant leurs propriétés. Nous commençons par présenter les résultats des articles de 2011 [ABPSM11b, ABPSM11a] : l'écriture du modèle, ses premières propriétés et une méthode numérique basée sur une extension des schémas cinétiques décrits dans le premier chapitre. Nous présentons ensuite deux travaux actuellement en cours de soumission et disponibles sur HAL.

Le premier [ABSM17] porte sur l'extension dans ce nouveau cadre du contrôle de la production d'entropie (ici l'énergie mécanique du système) discrète obtenu pour le système de Saint-Venant en utilisant les schémas cinétiques avec reconstruction hydrostatique [ABBSM16]. Pour le système sans termes sources de topographie, nous parvenons à démontrer la décroissance en temps de l'énergie globale grâce à l'implication d'une partie des termes. Le schéma obtenu reste peu coûteux puisque l'implication partielle conduit à la résolution de systèmes linéaires tridiagonaux, dont la taille est égale au nombre de degrés de liberté sur la vitesse. Pour le système avec termes sources, les termes de production d'énergie sont similaires à ceux obtenus pour le système de Saint-Venant, indépendamment du nombre de degrés de liberté sur la vitesse. L'extension de la méthode proposée à des écoulements à densité variable, fonction d'un (ou plusieurs) traceur(s), est en cours.

Le second travail [AAGP17] porte sur l'analyse du problème de Riemann pour le modèle à deux vitesses. Pour le cas avec une seule dimension d'espace sur l'horizontal, grâce à une réécriture conservative du modèle, nous pouvons proposer une définition des solutions, y compris dans le cas discontinu. Nous utilisons ensuite cette première étape pour proposer une définition des solutions du problème de Riemann à deux états dans le cas à deux dimensions d'espace sur l'horizontal. Ici, nous montrons que l'ensemble des régularisations monotones des discontinuités conduisent à la même définition des relations de saut, y compris dans les cas avec résonance ou avec coalescence des ondes. Nous essayons actuellement d'étendre ce travail dans deux directions, soit en considérant un nombre arbitrairement grand de degrés de liberté en espace, soit en incluant de nouveaux aspects dans le modèle à deux vitesses, et plus particulièrement la variation de

densité et/ou les termes non hydrostatiques. Par ailleurs, ce travail, en proposant des solutions analytiques, est également un moyen de valider, et éventuellement d'amender, les méthodes numériques utilisées.

Nous terminons ce chapitre en présentant deux travaux qui établissent un pont entre ce modèle à plusieurs vitesses et les travaux présentés dans les chapitres précédents.

Le premier article [ABSMS11] porte sur l'étude d'un problème de transport sédimentaire dans lequel la partie fluide est décrite par le modèle à plusieurs vitesses. L'intérêt de l'approche à plusieurs vitesses dans ce type d'applications est clairement de permettre une meilleure approximation de la vitesse proche du fond, qui entre en jeu dans le calcul du flux de sédiment. L'article généralise à ce nouveau contexte une méthode de discrétisation, nommée FVC et introduite dans [BS10], basée sur une approche mêlant volumes finis et méthode des caractéristiques, rapide et précise, mais pour laquelle on ne sait pas démontrer de propriétés de stabilité. Ce travail a permis une première étude de faisabilité, mais il doit être complété, notamment sur la partie modélisation, comme cela a été évoqué précédemment.

Le deuxième travail [ADM10] traite de la dérivation de conditions de transmission bien adaptées dans les problèmes de décomposition de domaines pour les équations primitives visqueuses avec force de Coriolis. Il fait suite à d'autres travaux portant sur les équations de Saint-Venant [Mar09] et s'inscrit dans le contexte des méthodes de Schwarz avec relaxation d'ondes, voir [GH07]. Comme les travaux déjà mentionnés, ce travail utilise une réécriture des équations primitives en projetant les solutions sur une base adéquate, mais il ne s'agit plus ici d'une décomposition de type volumes finis, mais de type spectrale, en utilisant les fonctions propres de l'opérateur de diffusion dans la direction verticale. Le premier mode est alors solution d'un système de Saint-Venant tandis que les modes suivants sont solutions d'un système d'équations d'advection-diffusion. Concernant le premier mode, la principale nouveauté de ce travail par rapport aux résultats antérieurs est d'inclure le terme d'advection dans l'analyse. Le caractère bien posé de l'algorithme proposé est démontré, mais pas sa convergence, qui est évaluée numériquement sur plusieurs cas tests. Une perspective claire est d'étendre cette étude pour des écoulements proches de l'équilibre géostrophique, et d'en déduire des conditions de transmission adéquates.

Le mémoire se termine par une conclusion dans laquelle nous présenterons également des pistes de travail pour les années à venir, qui détailleront les perspectives évoquées à la fin de chaque chapitre, en explicitant les problèmes qui restent à étudier et des méthodes qui pourraient permettre d'y apporter des solutions, à la fois sur des aspects de modélisation, des techniques de résolution numérique et des questions liées à la prise en compte des incertitudes dans les modèles.

Les travaux qui sont présentés ici ont fait l'objet de dix sept articles dans des revues internationales et de huit publications originales dans des proceedings de conférences internationales ou de différentes éditions du CEMRACS (centre d'été mathématique de

recherche avancée en calcul scientifique). Deux publications sont également soumises et en cours de révision et sont disponibles sur la plateforme HAL. Ces publications sont listées au début des différents chapitres, en fonction de leur thématique principale.



## Shallow Water Equations and Related Topics :

### Numerical Analysis for sediment transport problems, flows on rotating domains and primitive equations

**Abstract :** In this manuscript, we present several works devoted to the numerical simulation of free surface geophysical flows. In this context, one of the most used models, at least as a first approximation, is the Saint-Venant system [dSV71], also known as shallow water equations. This system of partial differential equations writes for one dimensional flows in rectangular channels over flat bottom

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (0.0.6)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = 0, \quad (0.0.7)$$

where the unknowns are the water depth  $h(t, x) \geq 0$  and the velocity  $u(t, x) \in \mathbb{R}$  that denotes the meanvalue of the horizontal velocity in the water column. Parameter  $g$  denotes the gravity coefficient. The second conservative unknown (water discharge) is often denoted by  $q = hu$ . The system is similar to the isentropic Euler equations but is complemented for realistic applications with source terms modeling important physical phenomena such as non flat bottom topography, Coriolis forces or friction or with other equations for coupling problems such as pollutant transport, biology processes or sediment transport. The proper way to take the source terms and the coupling into account is the main subject of the first three chapters of this work.

The Saint-Venant system is well adapted for long wave processes where vertical acceleration is negligible. For more general flows, for example stratified ones, more complex models have to be introduced. Here we also refer to the primitive equations, i.e. the free surface incompressible Euler (or Navier-Stokes if viscosity is added) equations with hydrostatic pressure that writes

$$\partial_x u + \partial_z w = 0, \quad (0.0.8)$$

$$\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u + \partial_x p = 0, \quad (0.0.9)$$

$$\partial_z p = -\rho g \quad (0.0.10)$$

where the unknowns are the velocity  $\mathbf{u}(t, x, z) = (u, w)^T(t, x, z) \in \mathbb{R}^2$  and the pressure  $p(t, x, z)$ . Density  $\rho(t, x, z)$  is a given data or a function of other variables as salinity or temperature which are solutions of an advection diffusion equation

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \Delta T = 0,$$

---

The fourth chapter of the manuscript is devoted to the study of numerical methods to compute approximate solutions of such equations.

The manuscript is divided in five parts.

The first part is an introduction where we present some results related to the numerical study of the Saint-Venant system (0.0.6)-(0.0.7) with a source term that refers to the bathymetry that we will use in the other parts of the manuscript. This problem has been studied in a lot of works in the last two decades, see for example the book [Bou04a] and references therein, or [MC17, Xin17] for more recent works.

We first present some well-known results on finite volume approach, kinetic schemes and well-balanced schemes that refer, among other, to our works published in [ABB<sup>+</sup>04, AB05]. Then we detail a recent result [ABBSM16] on the control of the entropy production that we were able to prove by coupling the hydrostatic reconstruction technique with kinetic schemes. This result has been used by colleagues [BL17] to prove the convergence of the scheme, that is a non trivial result in this field. In the fourth chapter we show how to extend this result to the primitive equations.

We also present two other new numerical schemes for the Saint-Venant system that belong to two other well-known families of numerical schemes, the relaxation schemes and the approximate Riemann solvers. In both cases, we recall the original idea of the method, we mention the related schemes that already exist for the Saint-Venant system and we described our new proposal.

Relaxation schemes are based on the exact solution of the Riemann problem for an extended and linearized (in a way that has to be specified) system of equations that approximates, at least formally, the system of interest. Kinetic schemes are a particular case of such schemes. Relaxation schemes have been widely used in fluid mechanics. The specificity of the Saint-Venant system lies in the presence of source terms. A first way to handle these source terms is to couple them with a generic technique like the hydrostatic reconstruction method. Another way is to design relaxation models that take into account the source terms. A Suliciu type relaxation model with a stationary wave is presented in [Bou04a]. Here we present another variant that is easier to deal with and for which we are able to ensure the positivity of the computed water height but no discrete entropy inequality. After straightforward computations, the proposed scheme reduces to the approximate Riemann solver introduced in [Gal03].

Approximate Riemann solvers are a large class of numerical schemes where an approximate solution of the Riemann problem is used instead of the exact one. Relaxation schemes can be interpreted as a particular class of approximate Riemann solvers. We present a new scheme that belongs to this class. The scheme we introduced in [ACU15] is a modification of the well-known HLL scheme with an additional stationary wave. It is very easy to implement and is proved to be well-balanced and positivity preserving.

The second part of the manuscript is devoted to the study of the numerical simula-

tion of sediment transport processes by using the Saint-Venant system (0.0.6)-(0.0.7) coupled with a conservation equation for the sediment, following the early work by Exner [Exn25]. This model is widely used in industrial softwares (TELEMAC, MIKE, DELTARES, for example).

This problem has been widely studied for fifteen years. The main question is to know if a weakly coupled approach where two solvers are coupled can be used or if stability requires the use of a single solver written for the whole system. Most of the works concluded to the need to use a strongly coupled approach but, in a series of proceedings [ACD<sup>+</sup>12, ADL<sup>+</sup>13, ABG<sup>+</sup>15] and in a recent paper [ACU18], we exhibit that it is possible to design stable weakly coupled approaches. The numerical schemes that are designed in these works extend to this new context the relaxation scheme and the approximate Riemann solver that were presented in the first part. A part of these results was obtained in the context of P. Ung's PhD thesis, defended in 2016.

There are a lot of perspectives in this field. First we demonstrated very preliminary results when stochastic sediment fluxes are considered, that have to be investigated in a more proper way. Second we now work on the derivation of alternative models that have better mathematical properties and that are able to reproduce more sophisticated physical processes like dune formation.

The third part of the manuscript is devoted to the study of Saint-Venant system (0.0.6)-(0.0.7) with Coriolis source term that is used as a first step to model large scale flows on Earth.

The presented works [AKO09, AKNV11, ADD<sup>+</sup>17, ADOP17, ADOP18] focus on two fundamental properties of numerical methods, the conservation properties and the preservation of stationary states, also well-known as the well-balanced properties. A part of these results was obtained in the context of M.H. Do's PhD thesis, defended in 2017.

The finite volumes methods presented in the first part are naturally conservative for standard applications. But in the context of flows in rotating domains, the question is more tricky since the computed variable is the momentum in the rotating frame whereas the conserved variable is the momentum in the inertial frame. In [AKO09] we were able to design a finite volume scheme in the rotating frame that exactly preserves the momentum in the inertial frame. The key point is to modify the usual way to deal with this kind of problems : instead of first changing the referential then discretizing the equations, we simply reverse the order of the operations.

In a second series of publications [ADD<sup>+</sup>17, ADOP17, ADOP18] we extend what we present in the first part about well-balanced numerical methods. Here also the problem is more tricky since the so-called geostrophic equilibria refer to stationary states with non-zero velocities. We first exhibit that in the context of colocated finite volume methods, the existing schemes are not well-balanced for two-dimensional flows. Then we combine well-balanced technique [BLV04] with works devoted to the low Mach limit [Del10b] to design numerical schemes that are proved to be stable under a usual CFL conditions and well-balanced in a linear context. We now work to extend these

---

results to the non-linear framework and to staggered grids.

The fourth part of the manuscript is devoted to the study of a new numerical method to compute approximate solutions for primitive equations (0.0.8)-(0.0.9) through the derivation of a *multi-velocities* Saint-Venant system, introduced in [ABPSM11b, ABPSM11a]. We first recall the main properties of this system and the related numerical method, based on an extension of kinetic schemes. Then we present two recent works related to this subject.

The first article [ABSM17] deals with the control of the discrete entropy production for partially implicit (often called IMEX) kinetic schemes applied to the *multi-velocities* Saint-Venant system. It is a generalization to this new framework of the method we presented in [ABBSM16] that was mentioned in the first chapter. As in this previous work, we are able to show that when no topography source term is included, the discrete entropy is decreasing. The extension of this result to incompressible variable density flows is in progress.

The second work [AAGP17] is devoted to the solution of the Riemann problem for the two-dimensional two-velocities model. We first deal with the one-dimensional case that we identify, for regular solutions and after a change of unknowns, to the Euler equations for gas dynamics. It allows us to propose a definition of the discontinuous solutions of the Riemann problem. Then we turn to the two-dimensional case. The problem is more tricky but here also we are able to propose a unique definition of the admissible discontinuous solutions by proving that any monotone regularization of the discontinuities leads to the same jump relations, even when resonance and coalescence of waves are considered. We now try to extend this result for the two-velocities model with variable density on one hand and for the two-velocities model with non hydrostatic terms on the other hand. Note that this solution of the Riemann problem can be used to validate the numerical methods.

We finally present two works that are related to the previous chapters. The first one [ABSMS11] is devoted to numerical simulations for sediment transport processes when the fluid is described with the *multi-velocities* Saint-Venant system. It presents the extension of a finite volume method that uses the method of characteristics as a predictor step, called FVC and introduced in [BS10]. This is a preliminary work that proves the *multi-velocities* Saint-Venant system can be used to obtain a better approximation of the fluid velocity near the bottom since this velocity has a direct influence on the erosion process. The second one [ADM10] is devoted to domain decomposition methods for primitive equations with Coriolis force, and more particularly to the computation of well adapted transmission conditions for Schwarz wave relaxation type methods, see [GH07]. Here also, we use a decomposition of the solutions of the primitive equations on a particular basis, but it is no more a finite volume type discretization but a decomposition on the eigenmodes of the second derivative in the vertical direction. The first mode is then solution of a linearized Saint-Venant system whereas the other modes are solution of coupled advection-diffusion equations. In particular,



the present work generalizes the results in [Mar09] where transmission conditions for a Saint-Venant system with no advection term were derived, but only well-posedness of the algorithm is proved. The study of the convergence of the algorithm is limited to numerical tests. We would like to extend this work to the derivation of adapted transmission conditions where flows near geostrophic equilibrium are considered.

The last part of the manuscript draws some perspectives for future works, including aspects of modeling, numerical resolution techniques and issues related to the consideration of uncertainties in models. It details the perspectives that were previously mentioned at the end of each chapter.

At the beginning of each chapter, I give a list of publications that deal with the topic of the chapter and for which I am one of the authors. This list gathers seventeen articles in international journals and eight publications in proceedings of international conferences or summer schools. Two publications are also under review process and can be read on platform HAL.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Système de Saint-Venant</b>	<b>19</b>
1.1	Le système de Saint-Venant . . . . .	21
1.1.1	Écriture du système . . . . .	22
1.1.2	Hyperbolicité, stabilité, équilibres . . . . .	25
1.2	Schémas numériques pour le système de Saint-Venant . . . . .	29
1.2.1	Les volumes finis . . . . .	29
1.2.2	Les schémas cinétiques . . . . .	32
1.2.3	La reconstruction hydrostatique . . . . .	34
1.2.4	Reconstruction hydrostatique et schémas cinétiques . . . . .	38
1.2.5	Schémas de relaxation . . . . .	39
1.2.6	Solveur de Riemann approché . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Morphodynamique</b>	<b>53</b>
2.1	Description du modèle . . . . .	55
2.2	Simulation numérique . . . . .	57
2.2.1	Stratégie numérique : splitting ou unitaire . . . . .	58
2.2.2	Modèles de relaxation . . . . .	60
2.2.3	Solveurs de Riemann approchés . . . . .	65
2.2.4	Illustrations numériques . . . . .	67
2.2.5	Retour sur les stratégies numériques . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Forces de Coriolis</b>	<b>73</b>
3.1	Description du modèle et propriétés . . . . .	75
3.2	Conservation du moment inertiel . . . . .	76
3.2.1	Dérivation du schéma . . . . .	76
3.2.2	Effets de la discrétisation du terme de Coriolis . . . . .	79
3.3	Équilibre géostrophique . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Équations primitives</b>	<b>93</b>
4.1	Équations primitives et modèles à plusieurs vitesses . . . . .	95
4.1.1	Équations primitives . . . . .	95
4.1.2	Les modèles à plusieurs vitesses . . . . .	96

4.2	Schéma cinétique IMEX et inégalité d'entropie discrète . . . . .	102
4.3	Solution du problème de Riemann pour le modèle à deux vitesses . . .	105
4.3.1	Étude du cas 1d . . . . .	107
4.3.2	Analyse du problème de Riemann en deux dimensions . . . . .	108
4.4	Équations primitives et couplages . . . . .	112
4.4.1	Modèle à plusieurs vitesses et transport sédimentaire . . . . .	112
4.4.2	Force de Coriolis et décomposition de domaine . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>119</b>
5.1	Aspects stochastiques . . . . .	121
5.2	Modèles de transport sédimentaire . . . . .	124
5.3	Équilibres géostrophiques . . . . .	125
5.4	Équations de Navier-Stokes à surface libre . . . . .	127

# Chapitre 1

## Simulation numérique pour les écoulements en eaux peu profondes

Cette première partie est consacrée à un rapide descriptif des points abordés durant ma thèse de doctorat (schémas cinétiques et reconstruction hydrostatique, notamment) ou de schémas numériques classiques (schémas de relaxation, solveurs de Riemann approchés) et qui ont servi de base aux travaux menés par la suite, présentés dans les chapitres suivants. Elle mentionnera également deux travaux récents portant sur l'analyse de schémas numériques pour le système de Saint-Venant, avec une attention particulière accordée à la notion d'entropie discrète en présence de terme source, question qui reste encore largement ouverte. Là encore, ces deux travaux ont servi de première marche pour des développements vers des modèles plus complexes qui seront présentés dans les chapitres 2 et 4 de ce mémoire.

Les travaux décrits dans cette partie ont donné lieu à plusieurs publications dans des revues internationales à comité de lecture.

Audusse E. ; *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes* ; Thèse de doctorat, UPMC, 2004.

Audusse E. & Bristeau M.O. ; *Transport of Pollutant in Shallow Water Flows : A Two Time Steps Kinetic Method* ; M2AN Math. Model. Numer. Anal., 37 (2003) 389-416.

Audusse E., Bouchut F., Bristeau M.O, Klein R. & Perthame B. ; *A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for Shallow Water flows*, SIAM Journal of Scientific Computing, 25 (2004) 2050-2065.

Audusse E. & Perthame B. ; *Uniqueness for discontinuous flux via adapted entropies* ; Proc. of the Royal Society of Edinburgh - Section A : Mathematics, 135 (2005) 253-265.

Audusse E. & Bristeau M.O. ; *A well-balanced positivity preserving second-order scheme for shallow water flows on unstructured meshes*, Journal of Computational Physics, 206 (2005) 311-333.

Audusse E.; Chalons C. & Ung P.; *A simple well-balanced and positive numerical scheme for the shallow-water system*, Communications in Mathematical Sciences, 13 (2015) 1317-1332.

Audusse E.; Bouchut F.; Bristeau M.O. & Sainte-Marie J.; *Kinetic entropy inequality and hydrostatic reconstruction scheme for the Saint-Venant system*, Math. Comp., 85 (2016) 2815-2837.

## 1.1 Le système de Saint-Venant

Le système de Saint-Venant est un système hyperbolique de lois de conservation, introduit à la fin du dix neuvième siècle [dSV71], qui permet de modéliser les fluides géophysiques à surface libre en écoulements dits *peu profonds*, même si la principale hypothèse physique effectuée devrait plus proprement être qualifiée de régime *ondes longues*. Ce système présente deux avantages principaux :

- une validité expérimentale largement reconnue au fil des comparaisons effectuées depuis plusieurs décennies, doublée plus récemment d’une étude, au moins formelle, de ses liens avec des modèles fluides plus généraux, équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible à surface libre notamment, voir [GP01, FS04, Mar07, DBMS09] ;
- une résolution numérique considérablement simplifiée par rapport à ces modèles plus généraux, notamment via une réduction des dimensions du problème, permettant une mise en œuvre sur des échelles de temps et d’espace très étendues et dans des logiques industrielles, voir les suites logicielles DELTARES [Del], HECRAS [Hec], MIKE [Mik] ou TELEMAC [Tel].

Le système de Saint-Venant est ainsi toujours très utilisé, au moins en première approche, pour la simulation de nombreux phénomènes géophysiques d’une importance cruciale : écoulements en rivières et baies côtières, inondations, transport de polluants, qualité d’eau, étude climatique... Les échelles de temps et d’espace mises en jeu rendent toute expérimentation en vraie grandeur impossible. Les expérimentations à échelle réduite sont possibles, mais coûtent cher et sont parfois très complexes à mettre en œuvre. On comprend alors pourquoi la simulation numérique est un enjeu majeur, d’autant que les moyens informatiques disponibles sont maintenant très conséquents à un coût restreint. Ces deux dernières décennies ont ainsi vu un engouement sans précédent pour la résolution numérique du système de Saint-Venant, permettant des simulations dans des cas d’applications complexes et assurant la préservation de certaines propriétés importantes des solutions.

Je me limiterai ici au cadre *volumes finis* [LeV02, GR96, Tor97, EGH00], qui est bien adapté à la résolution de ces problèmes. Notons tout de même qu’il existe des travaux utilisant les éléments finis, voir par exemple [LRC03, HLRLD05, Her07], les schémas aux résidus, voir par exemple [RAD07, Ric15] ou les méthodes de Galerkin discontinues, voir par exemple [TPA07, EPD08, XZC10, DC13, DM14, VBB15]. Dans le cadre volumes finis, les propriétés de conservation (de la masse, ou de la quantité de polluant), inhérentes à la méthode, ne sont pas un objet d’étude. Depuis vingt ans, dates des travaux pionniers sur le sujet [BV94, GL96], les recherches se sont ainsi concentrées sur les propriétés de stabilité non linéaire (positivité de la hauteur d’eau, principe du maximum pour un éventuel traceur, inégalités d’entropie discrètes) et sur les propriétés de préservation des états stationnaires, avec une attention particulière pour l’équilibre dit du *lac au repos*, ce qui a donné lieu au développement des schémas dits *well-balanced*. Mon travail

de thèse, terminé en 2004, s'est inscrit dans cette dynamique et a notamment porté sur la dérivation, l'analyse et la mise en œuvre, dans ce cadre volumes finis, de nouveaux schémas cinétiques avec reconstruction hydrostatique qui satisfont *presque* toutes les propriétés listées ci-dessus. *Presque* car l'inégalité d'entropie, en présence d'un terme source, n'est vérifiée qu'au niveau semi-discret (un des deux travaux récents qui sera détaillé à la fin de ce chapitre porte sur une analyse plus fine de cette *erreur d'entropie* au niveau discret). Ces travaux ont servi de fondations à la plupart des travaux que j'ai menés depuis et qui sont présentés dans les autres parties de ce manuscrit. Il m'a ainsi semblé utile de les rappeler brièvement. Nous détaillons notamment dans la suite de ce chapitre les deux points suivants :

- l'interprétation cinétique du système, et son utilisation pour construire des schémas numériques présentant de bonnes propriétés de stabilité non-linéaire ;
- la méthode de reconstruction hydrostatique, qui permet de construire des schémas numériques dits *well-balanced* car préservant l'équilibre du *lac au repos*.

Il est important de noter que ces développements numériques ont été intégrés depuis une dizaine d'années dans la suite logicielle TELEMAC, développée et gérée par le LNHE (Laboratoire national d'hydraulique et d'environnement du groupe EDF-R&D), et sont donc utilisés quotidiennement dans le cadre des études effectuées par les équipes de cette entreprise, et par toutes celles qui utilisent ce logiciel, aujourd'hui distribué sous une licence libre de droits. Cette collaboration avec le LNHE s'est poursuivie et certains développements plus récents présentés dans les chapitres suivants ont eux aussi vocation à être intégrés dans cette suite logicielle. De plus, au moins trois autres codes de calcul, développés par des équipes de recherche dans des centres universitaires ou des instituts de recherche, mais utilisés pour des études dans des configurations réelles, ont également intégré une partie des schémas proposés dans ces travaux :

- le logiciel FRESHKISS-3D, développé par l'équipe-projet ANGE (INRIA-CEREMA-UPMC-CNRS)
- le projet FULLSWOF, développé par le laboratoire de mathématiques de l'université d'Orléans (MAPMO), autour notamment de S. Cordier, O. Delestre, C. Laguerre et C. Lucas.  
<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF/>
- le projet GERRIS et sa nouvelle mouture BASILISC, soutenus par le National Institute of Water and Atmospheric research (NIWA, Nouvelle-Zélande) et l'Institut Jean le Rond d'Alembert (UPMC), et dont le développeur principal est S. Popinet.  
[http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php/Main\\_Page](http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page) <http://>

### 1.1.1 Écriture du système

Dans la version monodimensionnelle introduite en 1871 dans un *Compte-Rendu à l'Académie des Sciences* rédigé par l'ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Jean-

Claude Barré de Saint-Venant [dSV71], le système décrit l'écoulement de l'eau dans un canal rectangulaire à fond horizontal et sans frottement et s'écrit :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = 0. \quad (1.1.2)$$

Les inconnues sont la hauteur d'eau  $h(t, x) \geq 0$  et la vitesse de la colonne d'eau  $u(t, x) \in \mathbb{R}$ . Le paramètre  $g$  désigne la gravité et la seconde variable conservative est souvent notée  $q = hu$  et désigne le débit de l'écoulement.

Dans l'article de Saint-Venant, la vitesse  $u$  est introduite directement comme vitesse de la colonne d'eau. La vitesse de l'écoulement est donc supposée constante dans la direction verticale : tous les points de la colonne d'eau, du fond jusqu'à la surface, ont la même vitesse horizontale. L'auteur justifie ce choix par un certain nombre d'hypothèses qui le rendent réaliste (canal rectangulaire, fond plat, pas de frottement...). Des travaux récents, dans la lignée de [GP01], voir aussi [FS04, Mar07, DBMS09], ont montré que ce système pouvait être obtenu formellement comme une approximation au premier ordre des équations de Navier-Stokes incompressibles à surface libre, sous l'hypothèse dite d'eau peu profonde, qui consiste en fait à se focaliser sur les ondes longues de l'écoulement en introduisant des dimensions caractéristiques dans les directions verticales et horizontales et en supposant que la première est très petite devant les secondes. Dans ce cas, la vitesse  $u$  désigne la vitesse horizontale moyenne (dans la coordonnée verticale) de l'écoulement et les équations du système (1.1.1)-(1.1.2) sont obtenues par intégration (selon la coordonnée verticale) des équations de Navier-Stokes. La première équation (1.1.1) est exacte. La seconde (1.1.2) est une approximation au premier ordre liée à l'hypothèse effectuée. Notons qu'une des conséquences de l'hypothèse d'eau peu profonde est le caractère hydrostatique (au premier ordre) de la pression dans l'écoulement. Une autre voie pour obtenir les équations de Saint-Venant est donc de partir des équations d'Euler avec hypothèse de pression hydrostatique, mais il faut alors de nouveau supposer *a priori* le caractère constant de la vitesse horizontale dans la coordonnée verticale.

Pour des applications réalistes, il faut considérer une version bidimensionnelle du système qui peut inclure plusieurs termes sources. Nous choisissons ici d'inclure deux termes moteurs liés respectivement à la topographie du bassin et à la rotation terrestre (force de Coriolis) et des termes dissipatifs liés entre autres à l'interaction de l'écoulement avec les parois solides. Dans les chapitres qui suivent, nous rencontrerons régulièrement ce système, parfois dans une version plus simple pour se focaliser sur tel ou tel aspect du problème. Le système de Saint-Venant s'écrit alors

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \left( \frac{g}{2} h^2 \right) = -gh\nabla b - \Omega \times h\mathbf{u} - \tau(h, \mathbf{u}), \quad (1.1.4)$$



où les inconnues sont toujours la hauteur d'eau  $h(t, x, y) \geq 0$  et la vitesse horizontale moyenne  $\mathbf{u}(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ . La fonction  $\tau$  modélise les effets dissipatifs dus notamment à la friction sur les parois. Le paramètre  $\Omega$  est lié à la vitesse angulaire de la rotation terrestre et la donnée  $b(x, y)$  note l'altitude du fond du bassin. La quantité  $\eta = h + b$  est alors la cote de la surface libre de l'écoulement. Le membre de gauche du système (1.1.3)-(1.1.4) est identique aux équations d'Euler isentropiques. La spécificité du système de Saint-Venant réside dans la présence de termes sources. Quelques mots à leur propos :

- la topographie  $b$  est ici présentée comme une fonction de l'espace. Elle est alors une donnée du problème et occupe une place centrale dans les applications puisque sa variation est souvent le moteur de l'écoulement, en particulier pour les applications en rivière. Le terme de topographie intervient aussi dans deux états stationnaires caractéristiques du système de Saint-Venant, l'équilibre du *lac au repos*, qui sera étudié plus loin dans ce chapitre, et l'équilibre pente-frottement. Mais la topographie peut également être une fonction du temps. Cette variation peut être l'effet de contraintes extérieures, par exemple des tremblements de terre ou des glissements de terrain sous-marins, phénomènes qui peuvent être à l'origine des tsunamis. Mais la variation du fond peut aussi être la conséquence des contraintes exercées par l'écoulement fluide. Il s'agit alors de la modélisation des phénomènes de transport sédimentaire, qui sera étudiée dans le chapitre 2 de ce mémoire. Dans ce cas, la fonction  $b$  devient une inconnue du problème, solution d'une équation de conservation supplémentaire.
- la forme du terme de frottement  $\tau(h, \mathbf{u})$  peut varier. Par exemple, la dérivation asymptotique évoquée plus haut [GP01] conduit les auteurs à considérer, au premier ordre, un terme de frottement linéaire du type  $\kappa \mathbf{u}$ . La forme quadratique en vitesse, dite de Manning-Strickler, est néanmoins la plus utilisée dans les applications pour des écoulements en rivière [Her07, Del10a]. L'utilisation du système pour la modélisation d'autres types d'écoulements, comme les avalanches ou les coulées de boues, nécessite d'introduire des termes de friction différents, notamment de type frottement de Coulomb [BMCPV03, BW04]. Le terme de frottement intervient également dans l'équilibre pente-frottement déjà évoqué, et qui occupe une place fondamentale quand on s'intéresse à des écoulements en rivière. Il est surtout au cœur des phénomènes de transport sédimentaire que nous étudierons dans le chapitre 2.
- le terme de Coriolis  $\Omega \times h \mathbf{u}$  est important pour la modélisation des écoulements aux grandes échelles océaniques [Ped03, ZMP03, BLV04]. Il pose alors des problèmes spécifiques, notamment dans la définition des états stationnaires, on parle alors d'équilibre géostrophique, et des quantités conservées, importance de la vorticité potentielle, sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

### 1.1.2 Hyperbolicité, stabilité, équilibres

Nous présentons ici des propriétés importantes du système de Saint-Venant (1.1.3)-(1.1.4). Notre démarche numérique veillera à ce que les solutions approchées satisfassent, quand cela est possible, l'ensemble de ces propriétés.

**Hyperbolicité.** En dehors des zones sèches, le système de Saint-Venant (1.1.3)-(1.1.4) est un système strictement hyperbolique de lois de conservation du premier ordre avec termes sources. Il peut en effet s'écrire

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) = S(W), \quad (1.1.5)$$

où  $W = (h, q_x, q_y)^T$  est le vecteur des variables conservatives et où

$$F(W) = \begin{bmatrix} q_x & q_y \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} & \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_x q_y}{h} & \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x b + \Omega h v - \tau_x \\ -gh\partial_y b - \Omega h u - \tau_y \end{pmatrix},$$

désignent respectivement le flux et les termes sources. Des calculs classiques montrent que le système s'écrit encore sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t W + DF_x \partial_x W + DF_y \partial_y W = S(W), \quad (1.1.6)$$

où  $DF_x$  et  $DF_y$  sont les matrices jacobienues du flux

$$DF_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + gh & 2\frac{q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad DF_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \\ -\frac{q_y^2}{h^2} + gh & 0 & 2\frac{q_y}{h} \end{bmatrix}.$$

Suivant les techniques habituelles [GR96, Ser99], on introduit maintenant un vecteur  $\xi \in \mathbb{R}^2$  et on définit  $DF(\xi) = \xi_x DF_x + \xi_y DF_y$ . Il vient que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , la matrice  $DF(\xi)$  possède trois valeurs propres définies par

$$\lambda_1(\xi) = u_\xi - c, \quad \lambda_2(\xi) = u_\xi \quad \text{et} \quad \lambda_3(\xi) = u_\xi + c, \quad (1.1.7)$$

où  $u_\xi = \xi_x \frac{q_x}{h} + \xi_y \frac{q_y}{h}$  est la vitesse de l'écoulement dans la direction  $\xi$  et  $c = \sqrt{gh}$  représente la célérité de l'information dans l'écoulement. Si la hauteur d'eau est non nulle, il apparaît clairement que, pour tout  $\xi$  non nul,  $\lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \lambda_3(\xi)$ , ce qui démontre bien la stricte hyperbolicité du système. Notons que dans le cas monodimensionnel (1.1.1)-(1.1.2), les valeurs propres sont

$$\lambda_\pm = u \pm \sqrt{gh}, \quad (1.1.8)$$

et les conclusions restent identiques. Nous évoquerons souvent par la suite le nombre de Froude, défini par

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH}},$$

où  $H$  et  $U$  sont une hauteur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement considéré. Ce nombre caractérise la nature de l'écoulement, fluvial, quand il est inférieur à 1 et que les deux valeurs propres ont des signes opposés, torrentiel, quand il est supérieur à 1 et que les deux valeurs propres ont le même signe, l'information ne se déplaçant alors que dans un sens.

Pour le moment, nous n'avons étudié que l'hyperbolicité du système homogène, sans prendre en compte les termes sources. Plusieurs auteurs se sont penchés sur l'analyse du problème avec terme source de topographie. En une dimension d'espace, celui-ci s'écrit

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (1.1.9)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = gh\partial_x b. \quad (1.1.10)$$

Ce système peut être vu comme un système non conservatif de trois équations à trois inconnues en ajoutant la variable  $b$  dans la liste des inconnues, mise à jour par l'équation

$$\partial_t b = 0. \quad (1.1.11)$$

Il est facile de voir que les valeurs propres de ce système étendu sont alors

$$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}, \quad \lambda_0 = 0. \quad (1.1.12)$$

L'étude du système est ici nettement plus délicate. D'abord, il s'agit d'un système non conservatif. En présence d'une topographie discontinue, il faut alors donner un sens au produit non conservatif, par exemple en utilisant la théorie développée dans [DMLM95]. Par ailleurs les valeurs propres ne sont plus ordonnées et, surtout, si  $\lambda_+ = 0$  (ou  $\lambda_-$ ), deux valeurs propres sont égales, le système n'est plus strictement hyperbolique et des phénomènes de résonance peuvent se produire. On peut alors montrer que la solution du problème n'est pas toujours unique. Nous renvoyons le lecteur à [IT92, CLS04, GL04, And05] pour plus de détails. Nous présenterons dans le chapitre 4 une étude portant sur un modèle de Saint-Venant à deux vitesses et incluant des phénomènes de résonance. Il existe par ailleurs plusieurs ouvrages de référence sur les systèmes hyperboliques [GR96, Ser99, LeV02, Daf05]. Nous insisterons ici sur les spécificités liées à l'approximation numérique du système de Saint-Venant, notamment les questions de stabilité non linéaire et d'équilibre.

**Stabilité.** Nous mentionnons ici trois propriétés distinctes, qui peuvent servir de garde-fou pour les méthodes numériques, assurant que la solution approchée respecte certains principes physiques de base.

Commençons par la nature conservative du système de Saint-Venant. Elle traduit le fait que la quantité totale d'eau (ainsi que la quantité de mouvement en l'absence de

termes sources) est constante, hors gain ou perte dus aux conditions limites.

Les variables conservatives du système de Saint-Venant, nous l'avons déjà mentionné, évoluent dans un demi-espace inclus dans  $\mathbb{R}^3$ , puisque la hauteur d'eau reste positive. Notons que, ici comme par la suite, nous entendrons toujours ce terme au sens de positive ou nulle. La présence éventuelle de zones sèches dans l'écoulement, déjà mentionnée elle aussi au paragraphe précédent, rend cette propriété de stabilité centrale. Nous pouvons exhiber une troisième propriété de stabilité liée à la décroissance de l'énergie mécanique associée au système de Saint-Venant. Le système (1.1.3)-(1.1.4) admet en effet l'énergie suivante

$$E(t, x, y) = E_c(h, u) + E_p(b, h) = \frac{h|\mathbf{u}|^2}{2} + gh \left( b + \frac{h}{2} \right), \quad (1.1.13)$$

où  $E_c$  désigne l'énergie cinétique du système et  $E_p$  son énergie potentielle. On montre que les solutions du système de Saint-Venant vérifient l'inégalité suivante

$$\partial_t E + \nabla \cdot \left[ \left( E + \frac{gh^2}{2} \right) \mathbf{u} \right] \leq 0, \quad (1.1.14)$$

l'égalité étant évidente pour les solutions régulières, en l'absence de frottement, et l'inégalité, pour les solutions discontinues admissibles, résultant de calculs classiques, par exemple via la méthode de régularisation visqueuse, voir [Ser99]. L'énergie mécanique, dont il est facile de vérifier qu'elle est convexe par rapport aux variables conservatives, agit donc ici comme une entropie mathématique. Dans le cas du système homogène (sans termes sources), et en dimension un, l'énergie mécanique n'est qu'une des entropies qu'il convient d'associer au système pour que le problème soit bien posé. Cette question ne sera pas traitée ici et on renvoie le lecteur aux ouvrages [Ser99, Daf05] et [LPT94, LPS96] pour le cas particulier des équations d'Euler isentropiques. En deux dimensions d'espace ou quand le système contient le terme source de topographie, il n'existe plus de famille complète d'entropies mathématiques. Dès lors, et même si la seule inégalité (1.1.14) n'est pas suffisante pour une étude mathématique rigoureuse, elle assure néanmoins la présence d'une borne supplémentaire sur une certaine fonction positive des inconnues du système et peut fournir des informations sur le choix d'une solution physique du problème.

Dans le cadre qui nous intéresse ici, celui du calcul de solutions approchées du système (1.1.3)-(1.1.4), il est important de veiller à la préservation de ces propriétés. La méthode des volumes finis, présentée dans la section 1.2.1, vérifie par construction les propriétés de conservation. Les propriétés de positivité et de décroissance de l'énergie sont plus délicates à satisfaire, mais il existe maintenant de nombreux schémas numériques qui remplissent ces deux critères quand ils sont appliqués au système homogène, voir par exemple [GR96, Tor97, LeV02, Bou04a]. Reste maintenant à conserver ces propriétés tout en respectant certains équilibres du système, ce que nous évoquons maintenant.

**Équilibres.** L'existence d'états stationnaires non triviaux, i.e. pour lesquels les inconnues ne sont pas constantes sur le domaine, est une des spécificités du système de Saint-Venant, liée à la présence des termes sources, et qui le distingue, par exemple, des équations d'Euler isentropiques, même s'il existe certaines applications particulières où l'on peut rencontrer des problèmes analogues [CSS14]. Cette question a été un sujet de recherche important depuis le milieu des années 1990, et de nombreuses publications lui ont été consacrées jusqu'à aujourd'hui, voir par exemple les références citées dans les ouvrages [Bou04a, Gos13, MC17, Xin17]. La famille d'équilibres la plus étudiée est liée à la présence du terme source de topographie. Pour le système en dimension un (1.1.9)-(1.1.10), en l'absence de frottement et de forces de Coriolis, et pour des solutions régulières, les équilibres sont caractérisés par les relations suivantes

$$\partial_x q = \partial_x H = 0, \quad (1.1.15)$$

où  $H(t, x) = u^2/2 + g(h + b)$  désigne la charge hydraulique. Notons que si les solutions présentent des discontinuités, il convient, au niveau des chocs, de remplacer ces relations par les relations de Rankine-Hugoniot correspondant à un choc stationnaire (sur fond plat)

$$[q] = 0, \quad [hu^2 + gh^2/2] = 0,$$

où  $[.]$  désigne le saut d'une quantité à travers une discontinuité. En dimension deux, voir le système (1.1.3)-(1.1.4), toujours pour des solutions régulières, les états stationnaires sont caractérisés par les relations suivantes

$$\nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad \nabla H - \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad (1.1.16)$$

où l'opérateur  $\nabla \times$  est ici défini de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . On retrouve alors les équilibres monodimensionnels (1.1.15) lorsque l'on suit les lignes de courant. Celles-ci, pour des écoulements en géométrie complexe, ne peuvent être établies *a priori* et le maillage n'a donc aucune raison d'être correctement adapté. Il apparaît donc très difficile de préserver numériquement l'ensemble des équilibres bidimensionnels excepté celui, déjà mentionné, qui correspond à une zone au repos, et dont la caractérisation est indépendante de la dimension considérée

$$h + b = \eta_0, \quad \mathbf{u} = 0. \quad (1.1.17)$$

Cet état stationnaire particulier, dit du *lac au repos*, est important car de nombreux écoulements, en lacs ou en baies côtières, sont des perturbations autour de cet équilibre. Il est donc fondamental d'éviter que des artefacts numériques viennent perturber la solution approchée. Or la préservation, au niveau numérique, de ces états stationnaires, et même du plus simple d'entre eux (1.1.17), n'a rien d'évident. Ils correspondent en effet à un équilibre entre termes de flux et termes sources, dont les discrétisations ne sont *a priori* pas corrélées, les termes de flux, dans une approche volumes finis explicite en temps, étant toujours décentrés pour assurer la stabilité de la méthode, ce qui n'est

pas forcément le cas des termes sources.

Il existe deux autres catégories d'états stationnaires. La première, étudiée depuis très longtemps par les hydrauliciens [Che76, Man91] car déterminante pour les écoulements en rivière, mais moins étudiée par les numériciens car il s'agit de l'équilibre entre deux termes sources constants, *a priori* relativement facile à satisfaire au niveau discret, correspond à un équilibre, dans le cas d'une pente constante, entre ce terme de pente et les termes de frottement, c'est-à-dire, avec les notations du système (1.1.3)-(1.1.4)

$$-gh\nabla b - \tau(h, u) = 0.$$

Cette relation permet alors de relier hauteur d'eau et débit dans un fleuve ou une rivière en régime stationnaire, une fois connu le coefficient de frottement. Inversement, il permet d'estimer ce coefficient si hauteur d'eau et débit ont été mesurés. Notons qu'on peut montrer que les solutions constantes de cet équilibre ne sont stables que pour des nombres de Froude pas trop grands, la solution présentant au-delà une forme caractéristique appelée *roll waves*, voir [Nob07, Nob09].

La troisième catégorie d'états stationnaires résulte d'un équilibre, dans une version linéarisée du système, entre terme de pression et terme de Coriolis, i.e. avec les notations du système (1.1.3)-(1.1.4)

$$g\nabla h + \Omega \times \mathbf{u} = 0.$$

Cet équilibre est connu sous le nom d'équilibre géostrophique. Aux grandes échelles, les écoulements atmosphériques et océaniques sont la plupart du temps des perturbations de cet équilibre [Ped03, OWE12], qu'il est donc là aussi très important de bien représenter dans les solutions approchées. Cet équilibre présente une complexité supplémentaire par rapport à l'équilibre du *lac au repos* car il met en jeu des vitesses non nulles.

## 1.2 Schémas numériques pour le système de Saint-Venant

### 1.2.1 Les volumes finis

La méthode des volumes finis, que nous décrivons ici, est intimement liée au caractère hyperbolique du système de Saint-Venant et au fait qu'il s'agit, au moins partiellement, d'une loi de conservation. En effet cette méthode, développée initialement dans le cadre du traitement numérique des équations d'Euler, présente le grand intérêt d'être intrinsèquement conservative et s'adapte très bien à l'aspect discontinu des solutions. Il s'agit ici de découper l'espace en cellules, notées  $C_i$ , polygones dont la forme et le nombre de côtés peuvent varier dans le domaine de calcul, puis d'intégrer le système

considéré sur chaque cellule et sur un pas de temps. Apparaissent alors les moyennes des solutions sur chaque cellule et des termes de bords, autrement dit les flux échangés entre les cellules au niveau de leur frontière, ou interface. Ainsi le flux sortant d'une cellule est égal à celui qui rentre dans la cellule voisine, d'où un algorithme conservatif. Il n'y a plus alors qu'à définir une approximation consistante de ces flux pour construire une suite numérique qui approchera la moyenne des solutions sur les cellules, d'où des solutions constantes par morceaux et donc naturellement discontinues, suite définie par la récurrence

$$W_i^{n+1} - W_i^n + \sigma_i^n \sum_{j \in \mathcal{V}_i} l_{ij} F_{\mathbf{n}_{ij}} = \Delta t^n S_i^n. \quad (1.2.1)$$

Dans la notation  $\sigma_i^n = \Delta t^n / |C_i|$ ,  $\Delta t^n$  désigne le pas de temps et  $|C_i|$  le volume de la cellule  $C_i$ . La notation  $\mathcal{V}_i$  désigne l'ensemble des cellules adjacentes à la cellule  $C_i$ , i.e. partageant une interface avec elle. La notation  $l_{ij}$  désigne la mesure de l'interface séparant les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . La notation  $F_{\mathbf{n}_{ij}}$  dénote le flux numérique, i.e. une approximation du flux normal entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . Ce flux normal est mesuré dans la direction de la normale sortante, vue de la cellule  $C_i$ , et par unité de surface. Enfin, la notation  $S_i^n$  désigne une approximation des termes sources. Ne reste alors qu'à établir les formules définissant ces approximations des flux et des termes sources, à partir des valeurs  $W_i$  sur les cellules, pour clore la méthode. Nous nous restreindrons ici aux schémas explicites dits à trois points pour lesquels les flux s'écrivent

$$F_{\mathbf{n}_{ij}} = \mathcal{F}(W_i^n, W_j^n). \quad (1.2.2)$$

On montre facilement que la consistance de la méthode se ramène à la propriété suivante sur le flux numérique

$$\mathcal{F}(W, W) = F(W) \mathbf{n}_{ij} \quad (1.2.3)$$

L'utilisation de schémas explicites en temps conduira naturellement à l'introduction d'une condition de type CFL sur la taille du pas de temps afin d'assurer la stabilité du schéma. Une technique d'implicitation partielle, de type IMEX, sera étudiée dans le chapitre 4 quand nous étendrons l'approche présentée ici à l'approximation des équations primitives, i.e. les équations d'Euler incompressibles et hydrostatiques à surface libre. Notons enfin que la structure du système de Saint-Venant, notamment son invariance par rotation, permet de simplifier le calcul du flux  $\mathcal{F}(W_i^n, W_j^n)$  en se plaçant dans le référentiel lié à l'interface considérée. Les inconnues du problème sont alors la hauteur d'eau et les vitesses normales et transverses à l'interface et le système (1.1.3)-(1.1.4) se décompose en deux sous problèmes :

- le système monodimensionnel (1.1.1)-(1.1.2) dont les inconnues sont la hauteur d'eau et la vitesse normale à l'interface ;
- une équation de transport sur la vitesse transverse, transportée à la vitesse normale.

Une fois calculé le flux de masse pour le problème monodimensionnel, celui-ci peut donc être utilisé pour transporter la vitesse transverse à l'aide d'un simple schéma

décentré amont, voir [GR96, Tor97, LeV02]. Le problème se ramène donc au calcul des flux pour le problème monodimensionnel, voir [AB05] pour plus de détails. La plupart des calculs seront donc écrits par la suite en une dimension d'espace.

Un des schémas volumes finis les plus naturels a été proposé par Godunov [God59]. L'idée est de définir le flux (1.2.2) en utilisant la solution d'un *problème de Riemann* dont les données sont les valeurs  $W_i^n$  et  $W_j^n$ . Le problème de Riemann monodimensionnel est un problème de Cauchy avec une donnée initiale particulière constituée par deux états constants

$$W^0(x) = \begin{cases} W_l & x < 0 \\ W_r & x > 0 \end{cases} . \quad (1.2.4)$$

On montre facilement que la solution de ce problème est autosimilaire, i.e. ne dépend que de la variable  $\zeta = x/t$ . Elle sera notée dans la suite  $W^r(u_l, u_r, \zeta)$ . Supposant connue cette solution sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  entourant l'interface  $x_{i+1/2}$ , le schéma de Godunov peut être interprété de deux manières, équivalentes pour un système conservatif. La première consiste simplement à définir le flux numérique à l'aide de la solution calculée sur l'interface par la relation

$$\mathcal{F}(W_i^n, W_j^n) = F(W^r(W_i^n, W_j^n, 0)), \quad (1.2.5)$$

puis à calculer la nouvelle solution  $U_i^{n+1}$  par la formule (1.2.1). La deuxième manière de décrire le schéma consiste à calculer la nouvelle solution  $W_i^{n+1}$  comme la moyenne sur la cellule  $C_i$  des solutions des problèmes de Riemann aux interfaces  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$ , utilisées respectivement sur les demi-cellules  $[x_{i-1/2}, x_i]$  et  $[x_i, x_{i+1/2}]$ . Dans cette deuxième interprétation, il est facile de montrer que le schéma ainsi défini possède de bonnes propriétés, notamment au niveau de la stabilité. En effet, la première étape consistant à calculer une solution entropique du problème de Riemann, les propriétés sont évidemment satisfaites, et la seconde étape, comme tout processus de moyenne, préserve, par construction, les propriétés de stabilité. Notons que quand le système n'est plus conservatif, ce qui est le cas du système de Saint-Venant avec terme source de topographie, le calcul en termes de moyenne reste en tout point valable, ce qui n'est pas le cas de la première interprétation puisque la solution du problème de Riemann peut être discontinue à l'interface. Quoi qu'il en soit, le point clé de la méthode réside donc dans le calcul de la solution du problème de Riemann. Or, si ce calcul est souvent simple dans le cas d'une équation scalaire sans terme source, il n'en va pas de même dans le cas d'un système, et encore moins pour un système avec termes sources. Dans le cas du système de Saint-Venant avec termes sources (1.1.3)-(1.1.4) qui nous intéresse ici, la structure de la solution du problème de Riemann dépend fortement du choix des données initiales et peut être très complexe. Il existe même des cas où elle n'est pas unique, voir [AB01, CLS04] pour plus de détails. Il apparaît donc nécessaire, ou au moins intéressant, de proposer des schémas alternatifs. Nous présentons dans la suite de ce chapitre trois types de schéma volumes finis que nous appliquons ici au système de Saint-Venant avec termes sources (1.1.3)-(1.1.4) avant de les généraliser



pour d'autres applications dans les chapitres suivants de ce mémoire. Nous commencerons par introduire dans la section 1.2.2 les *schémas cinétiques*, qui seront étendus au cas des équations primitives, voir le chapitre 4, puis nous présenterons les *schémas de relaxation*, section 1.2.5, et les *solveurs de Riemann approchés*, section 1.2.6, que nous utiliserons ensuite dans le cadre des modèles de transport sédimentaire au chapitre 2. Nous introduirons d'abord l'ensemble des schémas dans le cadre du système homogène, i.e. sans termes sources, avant de les étendre au système avec termes sources. Dans ce cadre, nous présenterons dans la section 1.2.3 une technique particulière, dite de *reconstruction hydrostatique*, introduite dans [ABB<sup>+</sup>04]. Dans un travail récent [ABBSM16], nous avons montré que la reconstruction hydrostatique pouvait se réinterpréter dans un cadre cinétique, ce qui permet alors une étude détaillée du comportement de l'entropie des solutions approchées. Nous détaillons ce point dans la section 1.2.4. Pour plus de détails sur les différents schémas volumes finis proposés dans la littérature, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence [GR96, Tor97, LeV02] et plus particulièrement au livre [Bou04a] qui traite spécifiquement des lois de conservation avec termes sources.

### 1.2.2 Les schémas cinétiques

L'idée de base des schémas cinétiques est d'utiliser les liens qui unissent la mécanique des fluides et les équations cinétiques de type Boltzmann. Les schémas cinétiques tels que nous les présentons dans la suite ont été introduits dans [KP94, PQ94] pour le traitement numérique des équations d'Euler et nous les avons utilisés dans [AB05] pour le calcul de solutions approchées du système de Saint-Venant avec terme source de topographie (1.1.3)-(1.1.4). Nous renvoyons à l'ouvrage [Per02] pour une présentation complète des formulations cinétiques des équations hyperboliques.

Commençons ici par considérer le système de Saint-Venant monodimensionnel homogène. Tout le processus qui va être décrit dans la suite repose sur la définition d'un équilibre de Gibbs, autrement dit d'une densité microscopique de particules d'une forme particulière

$$M(t, x, \xi) = M(h(t, x), \xi - u(t, x)) = \frac{h(t, x)}{\tilde{c}} \chi\left(\frac{\xi - u(t, x)}{\tilde{c}}\right), \quad (1.2.6)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}$  désigne une variable additionnelle, homogène à une vitesse, et  $\tilde{c} = c/\sqrt{2}$  avec  $c = \sqrt{gh}$  la célérité de l'information dans l'écoulement. La fonction  $\chi$  est une densité de probabilité paire dont le deuxième moment est égal à 1. Cette définition permet d'établir un lien entre les niveaux cinétiques et macroscopiques, car le système de Saint-Venant homogène peut être obtenu comme moments d'ordre 0 et 1, en la variable  $\xi$ , de l'équation cinétique de type Boltzmann

$$\partial_t M + \xi \partial_x M = Q(t, x, \xi), \quad (1.2.7)$$

pour un terme de collision  $Q(t, x, \xi)$  qui satisfait, pour presque tout  $(t, x)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} Q \, d\xi = 0. \quad (1.2.8)$$

Ainsi, on montre que les fonctions  $(h, q)$  sont solutions du système de Saint-Venant (1.1.1)-(1.1.2) si et seulement si  $M(t, x, \xi)$  est solution de l'équation cinétique (1.2.7). Pour  $\xi$  fixé, et si on ne tient pas compte de son second membre, l'équation (1.2.7) est alors une simple équation de transport linéaire à coefficient constant. La question de sa discrétisation dans le cadre des volumes finis est classique et de nombreux schémas numériques sont à notre disposition, par exemple le schéma décentré amont déjà évoqué plus haut

$$f_i^{n+1,-} - M_i^n + \sigma_i^n [(\xi_+ M_i^n + \xi_- M_{i+1}^n) - (\xi_+ M_{i-1}^n + \xi_- M_i^n)] = 0. \quad (1.2.9)$$

avec les notations  $\xi_+ = \max(0, \xi)$  et  $\xi_- = \min(0, \xi)$ . Il suffit alors d'intégrer ce schéma numérique, toujours en  $\xi$  et contre le vecteur  $(1, \xi)^T$ , pour obtenir un schéma numérique consistant avec le système de Saint-Venant monodimensionnel homogène (1.1.1)-(1.1.2). Le schéma résultant fait partie de la famille des *flux vector splitting schemes*, puisque le flux à l'interface (1.2.2) peut s'écrire

$$\mathcal{F}(W_i, W_{i+1}) = F^+(W_i^n) + F^-(W_{i+1}^n),$$

où l'interprétation cinétique apparaît au niveau de l'écriture de chacun des demi-flux

$$F^\pm(W_i^n) = \int_{\substack{\xi \geq 0 \\ \xi \leq 0}} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} M_i^n(\xi) \, d\xi. \quad (1.2.10)$$

Notons que le second membre de la relation cinétique (1.2.7) n'a pas été pris explicitement en compte dans le schéma proposé. Il intervient implicitement dans l'étape de projection qui a lieu au temps  $t^{n+1}$ . En effet, la densité de particules  $f_i^{n+1,-}$  obtenue par le schéma (1.2.9) n'a aucune raison d'être un équilibre de Gibbs de la forme (1.2.6), mais permet tout de même de recouvrir une quantité macroscopique  $W_i^{n+1}$  consistante grâce à la propriété (1.2.8). Le calcul d'un nouvel équilibre de Gibbs  $M_i^{n+1}$  par la formule (1.2.6) à partir de ces grandeurs macroscopiques revient alors à prendre en compte, en une seule fois et instantanément, toutes les collisions contenues dans le second membre. Il s'agit donc d'un simple splitting d'opérateurs sur l'équation cinétique (1.2.7).

Ne reste pour clore la méthode qu'à définir la probabilité  $\chi$  qui intervient dans l'équilibre de Gibbs (1.2.6). Les conditions posées autorisent de nombreux choix. Trois contraintes supplémentaires conditionnent néanmoins la faisabilité de la méthode. D'une part, la probabilité  $\chi$  doit être prise à support compact pour des questions de stabilité, la positivité de la densité  $f_i^{n+1,-}$ , et par la même de la hauteur d'eau  $h_i^{n+1}$  obtenue par

intégration de cette densité, étant démontrée sous une condition de type CFL qui fait explicitement intervenir la taille du support  $\omega_\chi$  de la probabilité  $\chi$

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{\max_i (|u_i^n| + \omega_\chi \tilde{c}_i^n)},$$

dont on peut montrer qu'elle est toujours plus restrictive que la condition CFL classique

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{\max_{i,k} |\lambda_{i,k}|},$$

où  $\lambda_k$  désignent les valeurs propres de la jacobienne du flux, données ici par la relation (1.1.8), car on peut montrer que les contraintes sur la probabilité  $\chi$  imposent  $\omega_\chi \geq \sqrt{2}$ . D'autre part, il est préférable (indispensable?) que les calculs (1.2.10) puissent être menés explicitement pour éviter des processus d'intégration numérique coûteux. Cette contrainte limite les choix possibles à des densités de probabilité dont la définition reste suffisamment simple pour permettre le calcul analytique des intégrales (1.2.10). Enfin, si on souhaite, en plus de la positivité de la hauteur d'eau, être à même d'étendre au niveau discret la propriété de décroissance de l'énergie macroscopique (1.1.14), la probabilité  $\chi$  devra être choisie de manière à minimiser une certaine énergie au niveau cinétique. On peut montrer qu'il existe un unique choix de densité de probabilité  $\chi$  satisfaisant ces trois contraintes, et la maxwellienne  $M$  est alors définie par

$$M(W, \xi) = \frac{1}{g\pi} \left( 2gh - (\xi - u)^2 \right)_+^{1/2}. \quad (1.2.11)$$

C'est cette densité de probabilité qui sera utilisée dans la section 1.2.4 pour analyser en détail l'évolution de l'énergie des solutions approchées en présence d'un terme source quand on utilise un schéma cinétique couplé avec la méthode de reconstruction hydrostatique présentée dans la section suivante. Dans l'article [AB05] était utilisée une densité de probabilité uniforme

$$\chi(x, y) = \alpha \mathbb{I}_{|x| \leq \beta},$$

où  $\mathbb{I}_\Omega$  désigne la fonction caractéristique du domaine  $\Omega$ . Cette densité de probabilités satisfait les contraintes imposées, mais, n'étant pas un minimiseur de l'énergie au niveau cinétique, elle ne permet pas de contrôler l'évolution de l'énergie macroscopique du système.

### 1.2.3 La reconstruction hydrostatique

Reste maintenant à étendre ces schémas au système avec termes sources. Nous nous limiterons ici aux problèmes posés par la présence des termes sources de topographie. Nous renvoyons au chapitre 2 pour le traitement des termes sources de friction et au chapitre 3 pour les questions liées au terme de Coriolis. La construction de schémas

équilibres, ou well-balanced, déjà évoquée plus haut, a été le sujet de très nombreux travaux durant ces vingt dernières années, voir par exemple, et par ordre chronologique, la liste n'étant pas exhaustive [BV94, GL96, LV98, Gos01, Jin01, PS01, ZCMI01, Gal02, GHN03a, Par06, CDCFNP07, NXS07, BM08, BES10, BEKP11, BF12, CLGP13, DLM13, SMSK16, MDBCF16, BC16, DB16]. Les ouvrages [Bou04a, Gos13] constituent de bonnes références sur le sujet, voir aussi les chapitres [MC17, Xin17] pour des introductions plus récentes. Nous présentons ici une méthode très simple et très générale, introduite dans [ABB<sup>+</sup>04], qui peut s'appliquer en utilisant n'importe quel solveur de type volumes finis pour la partie homogène du système, et qui garantit la préservation de certaines propriétés de stabilité si celles-ci étaient vérifiées par le solveur de départ, notamment la positivité de la hauteur d'eau. Nous présenterons dans la section suivante un travail récent qui apporte une information supplémentaire en termes de stabilité quand la méthode est utilisée conjointement avec un schéma cinétique tel que celui décrit dans la section précédente.

Nous avons montré que les solveurs cinétiques possédaient de bonnes propriétés de stabilité non linéaire, notamment positivité de la hauteur d'eau et inégalité d'entropie discrète, quand ils étaient appliqués au système de Saint-Venant sans termes sources. Il est donc raisonnable de vouloir les étendre au système avec terme source de topographie tout en préservant ces propriétés, mais en assurant également le caractère équilibre du schéma.

Une première possibilité consiste à intégrer le terme source topographique dans l'interprétation cinétique. Cela est aisé au niveau continu, puisqu'on montre que le système de Saint-Venant avec termes sources de topographie peut être obtenu par intégration de l'équation cinétique modifiée

$$\partial_t M + \xi \partial_x M - g \partial_x b \partial_\xi M = Q(t, x, \xi), \quad (1.2.12)$$

dans laquelle on a introduit un terme potentiel. La prise en compte de la topographie dans l'interprétation cinétique au niveau discret est plus ardue et a été obtenue dans [PS01]. Les auteurs y étudient en effet la possibilité, pour une particule cinétique, de passer, ou non, d'une cellule à l'autre, compte-tenu du rapport existant entre son énergie cinétique propre et l'énergie potentielle liée à la différence de topographie entre les deux cellules. Cette idée permet de développer un schéma monodimensionnel positif et entropique, au sens où il satisfait un équivalent discret de l'inégalité d'énergie (1.1.14), et préservant l'équilibre du lac au repos (1.1.17). Cependant ce schéma utilise des algorithmes complexes, difficiles à mettre en œuvre en dimension deux. De plus le calcul des solutions numériques nécessite plusieurs intégrations numériques, ce qui induit des temps de calcul longs, notamment dans le cas bidimensionnel. Notons que l'idée d'introduire la variation de topographie dans l'équation cinétique est également à la base des travaux de Xu [Xu02, Xu04], mais sans que des propriétés de décroissance d'énergie soient établies. Remarquons enfin que, dans le cas scalaire, une interprétation

cinétique du terme source, présentée dans [BPV01], a permis de formuler un schéma numérique qui préserve tous les équilibres et vérifie toutes les entropies discrètes, et pour lequel une preuve de convergence peut être établie.

Devant la complexité algorithmique qui résulte d'une approche cinétique du terme source, nous avons choisi ici de décrire une autre voie, qui consiste à adapter tout schéma volumes finis écrit pour le cas du système de Saint-Venant sans terme source à la prise en compte des termes sources de topographie, avec en tête deux prérequis : la préservation des propriétés de stabilité du schéma sans terme source et la préservation des équilibres du système avec terme source de topographie, et plus particulièrement de celui correspondant au lac au repos (1.1.17). Nous montrerons néanmoins dans la section suivante que cette nouvelle méthode peut également s'interpréter dans un cadre cinétique, ce qui nous permettra d'aller plus loin dans les propriétés de stabilité.

La méthode que nous proposons, dite de *reconstruction hydrostatique*, repose sur l'idée suivante, présentée ici en une dimension d'espace, pour plus de simplicité. Dans le cas du lac au repos, les termes de pression et de topographie s'équilibrent dans le système (1.1.9)-(1.1.10), ce qui s'écrit

$$\partial_x \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh \partial_x b. \quad (1.2.13)$$

Après intégration sur une cellule, nous obtenons donc une approximation consistante du terme source de topographie

$$- \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} gh \partial_x b \, dx = \frac{g}{2} \underline{h}_{i+1/2-}^2 - \frac{g}{2} \underline{h}_{i-1/2+}^2, \quad (1.2.14)$$

qui nécessite la définition de hauteurs d'eau de part et d'autre des interfaces. Un moyen simple de les obtenir est de considérer la forme algébrique (1.1.17) de l'équilibre du lac au repos, ce qui mène aux définitions

$$\underline{h}_{i+1/2-}^* = h_i + b_i - b_{i+1/2}^*, \quad \underline{h}_{i+1/2+}^* = h_{i+1} + b_{i+1} - b_{i+1/2}^*. \quad (1.2.15)$$

Ne reste plus alors qu'à définir une topographie à l'interface  $b_{i+1/2}^*$ . Nous considérons ici la définition suivante

$$b_{i+\frac{1}{2}}^* = \max(b_i, b_{i+1}), \quad (1.2.16)$$

qui permet d'obtenir des bornes supérieures pour les hauteurs d'eau reconstruites. Nous introduisons également des bornes inférieures en utilisant dans notre schéma les parties positives des hauteurs d'eau reconstruites

$$h_{i+1/2\pm}^* = \max(\underline{h}_{i+1/2\pm}^*, 0). \quad (1.2.17)$$

Nous considérons alors la discrétisation du terme source (1.2.14), avec  $h_{i+1/2\pm}^*$  en lieu et place de  $h_{i+1/2\pm}^*$ , et nous construisons les flux (1.2.2) à partir des valeurs reconstruites aux interfaces (1.2.17) en lieu et place des valeurs sur les cellules. Notons que, dans tout le processus de reconstruction, seule la hauteur d'eau est affectée, la vitesse restant inchangée. On peut montrer, voir [ABB<sup>+</sup>04], que, si on part d'un schéma consistant pour le système homogène et qui assure, sous une condition de CFL, la positivité des hauteurs d'eau discrètes et vérifie une inégalité d'entropie discrète, alors le schéma ainsi construit est consistant avec le système avec terme source de topographie, vérifie toujours, sous une condition de CFL inchangée, la positivité des hauteurs d'eau et vérifie une inégalité d'entropie, mais seulement semi-discrète, i.e. dans la limite d'un pas de temps tendant vers zéro, tout en préservant l'équilibre du lac au repos. La démonstration de la consistance des différents termes est presque immédiate et nous ne la détaillons pas. Le point clé de la démonstration de la préservation de la positivité de la hauteur d'eau est que les définitions proposées pour la topographie et les hauteurs d'eau aux interfaces assurent

$$0 \leq \min(h_{i-1/2+}^*, h_{i+1/2-}^*) \leq \max(h_{i-1/2+}^*, h_{i+1/2-}^*) \leq h_i. \quad (1.2.18)$$

La preuve de la préservation des états stationnaires liés au repos est due au fait que, par construction,

$$h_i + b_i = h_{i+1} + b_{i+1} \implies h_{i+1/2-}^* = h_{i+1/2+}^*, \quad (1.2.19)$$

ce qui entraîne l'annulation des flux de masse et l'égalité entre flux de quantité de mouvement et termes sources quand la solution est à l'équilibre, conséquences directes de la propriété de consistance (1.2.3). La démonstration de l'inégalité d'entropie semi-discrète est plus délicate. Nous ne la présentons pas ici puisque nous revenons sur ce point dans la section suivante, dans le cas complètement discret, et dans le cas particulier où le solveur de départ est le schéma cinétique présenté dans la section précédente.

Il existe des extensions de la méthode de reconstruction hydrostatique pour améliorer la précision des schémas avec des reconstructions d'ordre élevé, voir par exemple [CPMP07, CDLGP13]. La méthode a été modifiée pour préserver une plus grande classe d'équilibres parmi les équilibres 1d (1.1.15), voir à ce sujet [BMdL10]. Des adaptations ont été proposées pour adapter la méthode à la prise en compte d'autres termes sources, voir [ ] pour la prise en compte des termes de friction ou pour la prise en compte des termes de Coriolis, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 3. La méthode peut également être étendue à des contextes légèrement différents, par exemple les écoulements sanguins [DL13]. Enfin, des auteurs ont mis en lumière des limitations de la méthode, notamment sur de fortes pentes et pour des discrétisations grossières en espace, voir [Del10a], ce qui a suscité des adaptations ne présentant plus cet inconvénient [MdLCDP13, CN17].

### 1.2.4 Reconstruction hydrostatique et schémas cinétiques

Nous avons vu que la reconstruction hydrostatique ne permettait pas d'assurer une inégalité d'entropie discrète, mais seulement semi-discrète. Ici, nous présentons les résultats d'un travail récent [ABBSM16] où nous avons montré que, grâce à une interprétation cinétique de la reconstruction hydrostatique, il était possible de donner une borne supérieure de la création d'entropie discrète. Il a depuis été étendu au cas des équations primitives, voir chapitre 4. Ce résultat a permis par la suite d'établir une démonstration de convergence pour le schéma [Lhé15, BL17], généralisant ainsi dans le cas d'un système, des résultats de convergence basés sur une formulation cinétique qui avaient été obtenus dans un cadre scalaire [WN00, BPV01]. Nous présentons les calculs en une dimension d'espace.

Dans le cas où le solveur homogène est le schéma cinétique décrit dans la section 1.2.2, il est possible d'écrire la reconstruction hydrostatique au niveau cinétique

$$f_i^{n+1-} = M_i - \sigma_i \left( \xi \mathbb{I}_{\xi < 0} M_{i+1/2+} + \xi \mathbb{I}_{\xi > 0} M_{i+1/2-} + \delta M_{i+1/2-} - \xi \mathbb{I}_{\xi > 0} M_{i-1/2-} - \xi \mathbb{I}_{\xi < 0} M_{i-1/2+} - \delta M_{i-1/2+} \right), \quad (1.2.20)$$

où les termes  $\delta M_{i+1/2-}$  et  $\delta M_{i-1/2+}$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \delta M_{i+1/2-} &= (\xi - u_i)(M_i - M_{i+1/2-}), \\ \delta M_{i-1/2+} &= (\xi - u_i)(M_i - M_{i-1/2+}), \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

et satisfont les propriétés macroscopiques

$$\int_{\mathbb{R}} \delta M_{i+1/2-} d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \delta M_{i+1/2-} d\xi = g \frac{h_i^2}{2} - g \frac{h_{i+1/2-}^2}{2}, \quad (1.2.22)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta M_{i-1/2+} d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \delta M_{i-1/2+} d\xi = g \frac{h_i^2}{2} - g \frac{h_{i-1/2+}^2}{2}, \quad (1.2.23)$$

qui montrent qu'ils sont une représentation au niveau cinétique du terme source de topographie, voir la relation (1.2.14). Grâce à cette écriture au niveau cinétique, il est possible de démontrer une inégalité d'entropie au niveau cinétique, qui se traduit au niveau macroscopique par un contrôle de la création d'entropie du type

$$\begin{aligned} E_i^{n+1} + gb_i h_i^{n+1} &\leq E_i^n + gb_i h_i^n - \sigma_i \left( \tilde{G}_{i+1/2}^n - \tilde{G}_{i-1/2}^n \right) \\ &\quad + C_\beta (\sigma_i^n v_m)^2 \left( g(b_{i+1} - b_i)^2 + g(b_i - b_{i-1})^2 \right), \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

où l'énergie  $E$  a été définie dans la relation (1.1.13) et sous une condition CFL du type

$$\sigma_i^n v_m \leq \beta < 1, \quad (1.2.25)$$

avec  $v_m = \max(|u_i| + \sqrt{2gh_i})$ . Il est important de noter que le terme apparaissant sur la deuxième ligne de la relation (1.2.24) est un terme de création d'entropie, mais qu'il est contrôlé uniquement par la donnée de la topographie  $b$ , indépendamment de la solution  $(h, u)$  du problème. Pour une topographie régulière, ce terme est donc contrôlé par la quantité  $(\Delta x)^2$ . Remarquer aussi que ce terme disparaît si la topographie est constante (on retrouve alors l'inégalité d'entropie associée au schéma cinétique dans le cas homogène) et dans la limite  $\sigma_i^n$  tendant vers 0 (on retrouve alors l'inégalité d'entropie semi-discrète associée à la reconstruction hydrostatique). Nous renvoyons le lecteur au travail [ABBSM16] pour les détails de la preuve, basée sur la forme particulière de l'énergie au niveau cinétique et des possibilités de calcul qui en découlent.

### 1.2.5 Schémas de relaxation

Nous avons vu dans la section 1.2.1 que la difficulté principale inhérente à la méthode proposée par Godunov était la difficulté à résoudre le problème de Riemann associé au système étudié, ici le système de Saint-Venant avec termes sources (1.1.3)-(1.1.4). Dans la section 1.2.2, nous avons proposé une première méthode alternative, basée sur l'interprétation cinétique du système de Saint-Venant. Nous allons ici généraliser cette approche, puisque la méthode conduisant à la définition d'un schéma de relaxation consiste également à travailler non plus sur le modèle de départ, mais sur un autre modèle qui possède trois propriétés essentielles :

- il tend formellement vers le modèle de départ dans une certaine limite à préciser ;
- il est hyperbolique, ce qui assure le caractère bien posé du problème de Riemann ;
- il est, dans un sens à définir, linéaire, et le problème de Riemann associé est donc (relativement) facile à résoudre.

On peut alors écrire un schéma de Godunov pour le modèle relaxé et, dans la limite adéquate, ce schéma fournira un schéma numérique consistant avec le modèle de départ. Cette technique a été introduite et étudiée il y a une vingtaine d'années par plusieurs auteurs [Liu87, CLL94, JX95, Nat96]. Elle a depuis été utilisée pour de nombreux modèles liés à la mécanique des fluides [CC05, BBC<sup>+</sup>05, CC08, CSS14] et qui présentent donc des similitudes avec la question qui nous intéresse. Elle est exposée en détail dans le livre de F. Bouchut [Bou04a], voir aussi le mémoire d'habilitation de C. Chalons [Cha08]. Il est clair que les schémas cinétiques, présentés dans la section 1.2.2, vérifient les trois propriétés listées ci-dessus et constituent donc un cas particulier de schémas de relaxation pour le système de Saint-Venant sans termes sources, le modèle de relaxation associé étant l'équation de type Boltzmann (1.2.7) et le schéma de Godunov se réduisant alors à un schéma décentré amont puisqu'il s'agit essentiellement d'une équation de transport. Nous présentons dans la suite de cette section deux autres schémas de relaxation, qui sont directement définis pour le système avec termes sources, sans avoir besoin de faire appel à une méthode annexe comme la technique de reconstruction hydrostatique, voir section 1.2.3. Le premier est décrit dans [Bou04a], le second est original, mais s'avère finalement identique au solveur de Riemann approché



introduit dans [Gal02, Gal03], dont il donne donc une interprétation en termes de relaxation. Après avoir introduit le cadre mathématique, nous commencerons par décrire la méthode sur une équation scalaire, puis nous passerons au système de Saint-Venant sans terme source avant de nous intéresser au système avec termes sources (1.1.3)-(1.1.4). Là encore nous présentons les calculs en une dimension d'espace pour plus de simplicité.

Soit donc un système de lois de conservations hyperbolique non linéaire

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = 0. \quad (1.2.26)$$

On introduit alors un système de relaxation dont le vecteur d'inconnues est de plus grande dimension

$$\tilde{W}^T = (W^T, Q^T),$$

et qui inclut des termes sources présents uniquement dans les équations portant sur les inconnues auxiliaires  $Q$

$$\partial_t \tilde{W} + \partial_x \tilde{F}(\tilde{W}) = \frac{1}{\epsilon} \tilde{S}(\tilde{W}), \quad (1.2.27)$$

avec

$$\tilde{S}(\tilde{W}) = (S_W(\tilde{W}), S_Q(\tilde{W})), \quad S_W(\tilde{W}) = 0.$$

On suppose que le modèle de relaxation (1.2.27) possède les trois caractéristiques citées en début de paragraphe, plus des propriétés de stabilité qui seront détaillées plus loin. On note  $\tilde{W}(t, x)$  la solution du modèle de relaxation (1.2.27) et  $W(t, x)$  la solution du modèle de départ (1.2.26) pour une même condition initiale  $W(0, x)$ , les données initiales auxiliaires  $Q(0, x)$  étant construites à partir des données initiales sur  $W$ ,  $Q(0, x) = \mathcal{Q}(W(0, x))$ . Alors il existe un opérateur de réduction tel que, au moins formellement,

$$P(\tilde{W}(t, x)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} W(t, x).$$

Le modèle de relaxation (1.2.27) peut alors servir de base à la construction d'un schéma numérique pour approcher les solutions du modèle initial (1.2.26) par la procédure suivante, utilisant un splitting d'opérateur. Partant de données  $\tilde{W}^n$ , à l'instant  $t^n$ , on procède comme suit :

- construction d'un schéma de Godunov pour le modèle (1.2.27) homogène (i.e. sans terme source), utilisant la solution exacte du problème de Riemann et permettant le calcul de l'itéré suivant

$$\tilde{W}^{n+1,-} = H(\tilde{W}^n);$$

- prise en compte des termes sources  $S(\tilde{W})$  par une relaxation instantanée (formellement  $\epsilon = 0$ )

$$W^{n+1} = W^{n+1,-}, \quad Q^{n+1} = \mathcal{Q}(W^{n+1}).$$

**Description dans un cas simple.** Pour illustrer le propos, nous appliquons tout d'abord la méthode de relaxation à une loi de conservation scalaire en une dimension d'espace

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \in \mathbb{R}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (1.2.28)$$

On introduit une variable auxiliaire  $v$ , qui, formellement, sera consistante avec le flux de l'équation de départ, et on construit le système d'équations d'ondes

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \quad (1.2.29)$$

$$\partial_t v + c^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon} (f(u) - v), \quad (1.2.30)$$

où  $c$  et  $\epsilon$  sont deux paramètres positifs. Le paramètre  $c$  sera choisi ultérieurement de manière à assurer la stabilité du modèle. La condition initiale sur  $v$  est donnée par

$$v(0, x) = f(u_0(x)) \in \mathbb{R}. \quad (1.2.31)$$

Il est clair que le modèle relaxé (1.2.29)-(1.2.30) est consistant, au moins formellement, avec le modèle initial (1.2.28) dans la limite  $\epsilon$  tend vers 0. De plus, si on fait abstraction du second membre, il est hyperbolique et linéaire. Sa stabilité est assurée par la condition sous-caractéristique, voir [Liu87], qui impose que les vitesses d'onde du système relaxé soient plus rapides que les vitesses d'onde du modèle original, soit ici

$$c > |f'(u)|, \quad (1.2.32)$$

ce qui peut se traduire par le fait qu'il n'y a pas de perte d'information lors du passage du modèle original au modèle relaxé. Une autre condition de stabilité parfois utilisée repose sur un développement asymptotique du modèle relaxé. De la deuxième équation du système (1.2.29)-(1.2.30), on obtient facilement pour des solutions régulières

$$\begin{aligned} v &= f(u) - \epsilon (\partial_t v + c^2 \partial_x u) \\ &= f(u) - \epsilon (\partial_t f(u) + c^2 \partial_x u) + O(\epsilon^2) \\ &= f(u) - \epsilon (f'(u) \partial_t u + c^2 \partial_x u) + O(\epsilon^2) \\ &= f(u) - \epsilon (c^2 - f'(u)^2) \partial_x u + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

et en reportant dans la première équation du système (1.2.29)-(1.2.30)

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \epsilon \partial_x ((c^2 - f'(u)^2) \partial_x u) + O(\epsilon^2). \quad (1.2.34)$$

On retrouve ici l'idée de régularisation visqueuse évoquée dans la section 1.1.2. Cette équation est en effet une équation de transport-diffusion sous la condition

$$c^2 > (f'(u))^2,$$

qui assure donc la consistance (au deuxième ordre) du modèle (1.2.29)-(1.2.30) avec une équation stable. On retrouve la condition (1.2.32), mais la construction ne repose pas sur le calcul explicite des valeurs propres de la Jacobienne du flux, qui peut être délicate, voire impossible, pour un système général. Notons que des conditions plus générales, tenant compte en particulier des inégalités d'entropie associées au système original, ont également été introduites [CLL94, Bou04b].

Ici, le modèle de relaxation (1.2.29)-(1.2.30), sans terme source, est tellement simple que la résolution du problème de Cauchy est évidente. On écrit le système sous forme diagonale

$$\begin{aligned}\partial_t(u + v) + c \partial_x(u + v) &= 0, \\ \partial_t(u - v) - c \partial_x(u - v) &= 0,\end{aligned}$$

pour faire apparaître des quantités, appelées invariants de Riemann forts, et qui sont simplement transportées aux vitesses  $\pm c$ . On obtient alors très facilement la solution

$$u(t, x) = \frac{u_0(t - cx) + u_0(t + cx)}{2} + \frac{1}{c} \frac{v_0(t - cx) - v_0(t + cx)}{2}, \quad (1.2.35)$$

$$v(t, x) = \frac{v_0(t - cx) + v_0(t + cx)}{2} + c \frac{u_0(t - cx) - u_0(t + cx)}{2}. \quad (1.2.36)$$

Rappelons que ce qui nous intéresse pour mettre en œuvre notre stratégie numérique est la solution du problème de Riemann, i.e. avec la condition initiale particulière

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x \geq 0 \end{cases}. \quad (1.2.37)$$

La condition initiale sur  $v$  (1.2.31) devient  $v_l = f(u_l)$  et  $v_r = f(u_r)$ . On obtient alors, d'après les formules (1.2.35)-(1.2.36)

$$u(t, x) = \begin{cases} u_l & x < -ct \\ \frac{1}{2}(u_l + u_r) - \frac{1}{2c}(f(u_r) - f(u_l)) & -ct \leq x < ct \\ u_r & ct \leq x \end{cases}, \quad (1.2.38)$$

et également

$$v(t, 0) = \frac{f(u_l) + f(u_r)}{2} - \frac{c}{2}(u_r - u_l). \quad (1.2.39)$$

Comme expliqué précédemment, la résolution du problème de Riemann permet alors de mettre en place un schéma de type Godunov pour le système (1.2.29)-(1.2.30) homogène, soit en calculant la moyenne de la solution du problème de Riemann (1.2.38) sur la cellule  $C_i$ , soit en utilisant la valeur (1.2.39) obtenue pour l'inconnue  $v$  à l'interface puisque celle-ci, comme nous l'avons déjà dit, est consistante avec le flux dans la limite  $\epsilon$  tend vers 0, voir la relation (1.2.33)

$$F_{i+1/2} = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2} - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (1.2.40)$$

où le paramètre  $c$ , conformément à la relation (1.2.32), peut être défini par

$$c = \max_i (|f'(u_i^n)|). \quad (1.2.41)$$

Notons par ailleurs que, comme les problèmes de Riemann ne doivent pas interagir entre eux, il apparaît naturellement une condition de type CFL construite sur la vitesse des ondes  $c$ , et qui s'écrit donc, en utilisant la définition ci-dessus

$$\Delta t^n < \min_i \frac{(\Delta x)}{2|f'(u_i^n)|}. \quad (1.2.42)$$

Le paramètre  $c$  peut être choisi différemment de (1.2.41). On peut par exemple vérifier que le choix  $c = \Delta x / \Delta t$ , avec  $\Delta t$  vérifiant la condition CFL (1.2.42), satisfait la condition (1.2.32). La définition du flux (1.2.40) correspond alors au schéma de Lax-Friedrichs, introduit dans [Lax54]. Le paramètre  $c$  peut également être défini localement, à chaque interface. On peut par exemple considérer la définition, consistante avec la relation (1.2.32)

$$c_{i+1/2}^n = \max(|f'(u_i)|, |f'(u_{i+1})|).$$

Le schéma obtenu s'identifie dans ce cas avec le schéma de Rusanov, introduit dans [Rus61]. Il est également possible de compliquer légèrement le modèle de relaxation pour obtenir deux vitesses d'ondes  $c_l$  et  $c_r$  qui ne sont pas forcément l'opposé l'une de l'autre. On obtient alors le schéma HLL (pour Harten, Lax, van Leer) introduit dans [HLvL83]. Il apparaît donc que de nombreux schémas classiques peuvent se réinterpréter dans un cadre relaxation, ce qui permet souvent de démontrer plus facilement des propriétés de stabilité, voir [Bou04a].

**Modèles de relaxation pour le système de Saint-Venant sans termes sources.** La méthode présentée dans le paragraphe précédent peut s'étendre aux systèmes, et en particulier aux équations de Saint-Venant (1.1.1)-(1.1.2). On commence par étudier le problème homogène. Une première possibilité consiste à appliquer la méthode à chacune des équations du système, indépendamment de l'autre. Cette méthode est décrite dans [JX95] où elle est appliquée aux équations d'Euler. Pour le système de Saint-Venant, on obtient le schéma décrit dans [DK03], étendu dans [DK04] au cas avec transport d'une quantité par l'écoulement. La condition sous-caractéristique (1.2.32) s'étend naturellement en tenant compte des valeurs propres de la matrice jacobienne du flux. Cette méthode présente l'avantage d'être très générale mais, en contrepartie, elle ne tient aucun compte des spécificités du système considéré. Nous nous intéressons dans la suite à une autre méthode, introduite spécifiquement pour les équations d'Euler, complètes ou barotropes, et qui permet de linéariser le système en n'introduisant qu'une seule variable de relaxation. Cette approche est connue sous le nom de méthode de relaxation à la *Suliciu*, en référence aux travaux [Sul90, Sul92]. Elle

est décrite et analysée en détail dans [Bou04a]. Elle consiste à introduire une variable auxiliaire consistante avec le terme de pression et le système s'écrit alors

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (1.2.43)$$

$$\partial_t q + \partial_x (hu^2 + \pi) = 0, \quad (1.2.44)$$

$$\partial_t \pi + u \partial_x \pi + \frac{c^2}{h} \partial_x u = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{gh^2}{2} - \pi \right), \quad (1.2.45)$$

où  $c$  est à nouveau un paramètre à déterminer pour assurer la stabilité du modèle. Il est aisé de montrer que ce système est hyperbolique et que ses valeurs propres sont ordonnées

$$\lambda_{\pm} = u \pm c\tau, \quad \lambda_u = u,$$

où nous avons introduit la notation  $\tau = 1/h$ . Rappelons que les valeurs propres du système de Saint-Venant monodimensionnel homogène sont données par (1.1.8), la condition sous-caractéristique (1.2.32) s'écrit donc ici

$$c > h\sqrt{gh}. \quad (1.2.46)$$

On peut là encore montrer que la condition (1.2.34) conduit à la même condition. Notons que le système (1.2.43)-(1.2.45) peut être écrit sous forme conservative, au moins pour sa partie homogène, puisque la troisième équation, en tenant compte de la première, peut se écrire

$$\partial_t (h\pi) + \partial_x (hu\pi + c^2u) = 0.$$

Notons également que le système (1.2.43)-(1.2.45) reste non-linéaire, contrairement au système (1.2.29)-(1.2.30) ou à son extension au système de Saint-Venant présentée dans [DK03]. Néanmoins on peut dire que le système (1.2.43)-(1.2.45) est *presque* linéaire, au sens où tous les champs associés sont linéairement dégénérés, i.e. vérifient la relation

$$\forall j \quad \nabla \lambda_j \cdot r_j = 0, \quad (1.2.47)$$

où  $(\lambda_j, r_j)_j$  désignent les couples valeurs propres - vecteurs propres de la matrice jacobienne du système (1.2.43)-(1.2.45). Ce n'est pas le cas du système de Saint-Venant (1.1.1)-(1.1.2) pour lequel les champs associés aux ondes externes sont vraiment non linéaires. Nous renvoyons le lecteur à [GR96] pour plus de détails sur ces définitions. Cette propriété de linéarité a pour conséquence le fait que les courbes caractéristiques associées à une onde simple sont parallèles, comme pour le cas d'un système linéaire. On ne peut donc avoir ni onde de choc, ni onde de raréfaction, et toutes les ondes sont des discontinuités de contact. Le problème de Riemann associé est alors en général nettement plus simple à résoudre, ce qui permet de construire un solveur numérique par la méthode décrite dans la section précédente. Notons que, dans ce cas, la méthode la plus simple pour résoudre le problème de Riemann n'est plus de diagonaliser le système en identifiant les invariants de Riemann forts, qui peuvent être difficiles à identifier, mais

de trouver les invariants de Riemann faibles, définis comme les quantités continues à la traversée d'une onde simple associée au couple  $(\lambda_j, r_j)$ , soit encore les solutions de la relation

$$\nabla \eta_{k,j} \cdot r_j = 0.$$

Notons que la relation (1.2.47) entraîne immédiatement que la valeur propre  $\lambda_j$  est un invariant de Riemann faible. Si le problème de Riemann est bien posé, il est possible d'identifier  $d - 2$  autres invariants de Riemann pour chacune des ondes, où  $d$  désigne le nombre d'ondes présentes dans le système de Riemann, qui est aussi le nombre d'équations du système relaxé. On obtient alors un système de  $d \times (d - 1)$  équations (le nombre d'ondes, multiplié par le nombre de quantités continues à la traversée de chaque onde) à  $(d - 1) \times d$  inconnues (le nombre d'états intermédiaires entre les ondes, les états extrêmes gauche et droit étant donnés par la solution initiale, multiplié par le nombre d'inconnues scalaires dans chaque état intermédiaire, égal au nombre d'inconnues du système relaxé). Ici,  $d = 3$  et on obtient un système (non-linéaire) de six équations à six inconnues qui peut être résolu relativement facilement. Nous donnons dans la suite le détail de ces calculs. Les invariants de Riemann pour chaque onde sont

- Onde  $u$  :  $u$  et  $\pi$  ;
- Ondes  $u \pm c\tau$  :  $u \pm c\tau$  et  $\pi + c^2\tau$ .

On note  $W_l$  et  $W_r$  les états initiaux du problème de Riemann et  $W_l^*$  et  $W_r^*$  les états intermédiaires apparaissant dans la solution, respectivement entre les ondes  $u - c\tau$  et  $u$  et entre les ondes  $u$  et  $u + c\tau$ . On obtient alors le système non linéaire suivant

$$\begin{aligned} u_l^* &= u_r^*, & \pi_l^* &= \pi_r^*, \\ u_l - c\tau_l &= u_l^* - c\tau_l^*, & \pi_l + c^2\tau_l &= \pi_l^* + c^2\tau_l^*, \\ u_r + c\tau_r &= u_r^* + c\tau_r^*, & \pi_r + c^2\tau_r &= \pi_r^* + c^2\tau_r^*, \end{aligned}$$

dont l'unique solution est

$$u_l^* = u_r^* = u_m - \frac{1}{2c}\Delta\pi, \quad \pi_l^* = \pi_r^* = \pi_m - \frac{c}{2}\Delta u, \quad (1.2.48)$$

$$\tau_l^* = \tau_l - \frac{1}{2c^2}\Delta\pi + \frac{1}{2c}\Delta u, \quad \tau_r^* = \tau_r + \frac{1}{2c^2}\Delta\pi + \frac{1}{2c}\Delta u. \quad (1.2.49)$$

avec les notations  $v_m = (v_l + v_r)/2$  et  $\Delta v = v_r - v_l$ . Notons que les relations définissant les hauteurs d'eau intermédiaires  $h_l^*$  et  $h_r^*$ , via la définition des valeurs  $\tau_l^*$  et  $\tau_r^*$ , imposent des contraintes supplémentaires pour assurer leur positivité, qui s'ajoutent donc à la contrainte de stabilité (1.2.46). Notons aussi que le problème de Riemann n'est pas bien posé si une des deux hauteurs d'eau initiale  $h_l$  ou  $h_r$  est nulle. Rappelons enfin que les états intermédiaires ainsi calculés permettent la mise à jour des variables physiques  $h$  et  $u$  après moyennisation de la solution du problème de Riemann sur les cellules de référence, mais que la variable auxiliaire  $\pi$  est quant à elle mise à jour en utilisant une relaxation instantanée qui revient à poser, au début de chaque pas de temps  $\pi_i^n = g(h_i^n)^2/2$ . Dans [Bou04a], l'auteur propose une extension de ce modèle de

relaxation qui permet de traiter le cas d'une hauteur d'eau nulle. Il montre en particulier qu'il existe un choix explicite du paramètre  $c$  tel que le solveur ainsi construit préserve la positivité de la hauteur d'eau et satisfait une inégalité d'entropie discrète associée à (1.1.14), sous une condition de type CFL.

**Modèles de relaxation pour le système de Saint-Venant avec termes sources.** Nous décrivons finalement deux extensions possibles pour prendre en compte la présence du terme source de topographie dans le système de Saint-Venant (1.1.9)-(1.1.10). Notons qu'une autre possibilité est évidemment de coupler le schéma de relaxation pour le système homogène avec la méthode de reconstruction hydrostatique présentée dans la section 1.2.3. Outre l'intérêt de décrire de nouvelles méthodes, nous présentons les résultats ci-dessous car ils seront étendus au problème de transport sédimentaire dans le chapitre 2. Nous considérons dans la suite la forme non conservative du système (1.1.9)-(1.1.10)-(1.1.11), incluant la topographie dans la liste des inconnues.

Un premier modèle, introduit dans [Bou04a], consiste à ajouter l'équation (1.1.11) au modèle de relaxation (1.2.43)-(1.2.45) pour obtenir le système

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (1.2.50)$$

$$\partial_t q + \partial_x (hu^2 + \pi) + gh\partial_x b = 0, \quad (1.2.51)$$

$$\partial_t \pi + u\partial_x \pi + \frac{c^2}{h}\partial_x u = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{gh^2}{2} - \pi \right), \quad (1.2.52)$$

$$\partial_t b = 0. \quad (1.2.53)$$

Les valeurs propres du système sont maintenant

$$\lambda_{\pm} = u \pm c\tau, \quad \lambda_u = u, \quad \lambda_0 = 0,$$

et il est clair que la condition sous-caractéristique (1.2.46) reste inchangée. Le système relaxé (1.2.50)-(1.2.53) est toujours linéairement dégénéré. Néanmoins, un premier problème apparaît quand une des trois premières valeurs propres s'annule puisque des phénomènes de résonance peuvent survenir, pouvant entraîner la non-unicité des solutions, voir section 1.1.2. Mais même en dehors de ces cas pathologiques, la construction du solveur est nettement plus compliquée puisqu'il y a à présent plusieurs problèmes de Riemann à résoudre (ici quatre), les valeurs propres n'étant plus ordonnées (la valeur propre nulle peut en effet être située n'importe où par rapport au faisceau des trois autres ondes). Il est toutefois possible de construire un schéma numérique appuyé sur ce système et on peut montrer que sous la même condition sous-caractéristique que dans le cas homogène, il préserve toujours la positivité de la hauteur d'eau et satisfait encore une inégalité d'entropie discrète. De plus, ce solveur préserve les états d'équilibre au repos (1.1.17).

Nous décrivons maintenant une deuxième possibilité, qui permet d'obtenir un solveur de relaxation beaucoup plus simple à mettre en œuvre, mais pour lequel on ne sait pas montrer d'inégalité d'entropie discrète. Il s'agit d'introduire une deuxième variable relaxée, consistante avec la topographie, et qui est transportée à la vitesse  $u$ . On obtient alors le système

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (1.2.54)$$

$$\partial_t q + \partial_x (hu^2 + \pi) + gh\partial_x \beta = 0, \quad (1.2.55)$$

$$\partial_t \pi + u\partial_x \pi + \frac{c^2}{h}\partial_x u = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{gh^2}{2} - \pi \right), \quad (1.2.56)$$

$$\partial_t b = 0, \quad (1.2.57)$$

$$\partial_t \beta + u\partial_x \beta = \frac{1}{\epsilon} (b - \beta). \quad (1.2.58)$$

Les valeurs propres du système sont toujours

$$\lambda_{\pm} = u \pm c\tau, \quad \lambda_u = u, \quad \lambda_0 = 0,$$

mais la valeur propre  $u$  est double. Là encore, la condition sous-caractéristique (1.2.46) reste inchangée. La grande différence entre le système (1.2.50)-(1.2.53) et le nouveau système (1.2.54)-(1.2.58) réside dans le fait que l'équation (1.2.57) est découplée des quatre autres, au sens où le seul lien est circonscrit à l'intérieur du terme de relaxation dans l'équation (1.2.58). Puisque ces termes de relaxation sont pris en compte de manière instantanée à chaque début de pas de temps, la phase de transport pour les quatre équations (1.2.54)-(1.2.56) et (1.2.58) peut ainsi être résolue de manière autonome. Or, si on ne considère que ces quatre équations, les valeurs propres sont de nouveau strictement ordonnées et il n'y a donc qu'un problème de Riemann à résoudre, d'où un gain énorme en termes de simplicité. Notons néanmoins que la situation est un peu différente des cas exposés précédemment, puisque la continuité des invariants de Riemann faibles ne conduit plus à un système de  $d \times (d - 1)$  équations contenant le même nombre d'inconnues. Ici, on a en effet simplement deux états intermédiaires (puisque l'on a, non pas quatre, mais seulement trois ondes distinctes) contenant chacun quatre inconnues (le nombre d'équations du système relaxé), soit donc huit inconnues. Le nombre d'équations sera quant à lui égal au nombre d'invariants de Riemann pour l'ensemble des ondes. Pour les ondes simples, associées aux valeurs propres  $u \pm c/h$ , le nombre d'invariants de Riemann est toujours égal à  $d - 1$ , soit ici trois. Il faut donc en trouver deux pour l'onde double associée à la valeur propre  $u$ . Pour cela, il est nécessaire de modifier légèrement le système relaxé en introduisant une linéarisation supplémentaire dans le terme non-conservatif de l'équation de quantité de mouvement

$$\partial_t q + \partial_x (hu^2 + \pi) + g\bar{h}\partial_x \beta = 0. \quad (1.2.59)$$

La nouvelle variable ainsi introduite est définie en fonction des données du problème



et la préservation des états d'équilibre au repos impose

$$\bar{h} = \frac{h_l + h_r}{2}.$$

Avec cette modification, on peut identifier les invariants de Riemann pour chaque onde

- Onde  $u$  :  $u$  et  $\pi + g\bar{h}\beta$  ;
- Ondes  $u \pm c\tau$  :  $u \pm c\tau$ ,  $\pi + c^2\tau$  et  $\beta$  ;

ce qui conduit au système non linéaire

$$\begin{aligned} u_l^* &= u_r^*, & \pi_l^* + g\bar{h}\beta_l^* &= \pi_r^* + g\bar{h}\beta_r^*, \\ u_l - c\tau_l &= u_l^* - c\tau_l^*, & \pi_l + c^2\tau_l &= \pi_l^* + c^2\tau_l^*, & \beta_l &= \beta_l^*, \\ u_r + c\tau_r &= u_r^* + c\tau_r^*, & \pi_r + c^2\tau_r &= \pi_r^* + c^2\tau_r^*, & \beta_r &= \beta_r^*, \end{aligned}$$

dont la solution est

$$u_l^* = u_r^* = u_m - \frac{1}{2c} (\Delta\pi + g\bar{h}\Delta\beta),$$

et

$$\begin{aligned} \beta_l^* &= \beta_l, & \beta_r^* &= \beta_r, \\ \pi_l^* &= \pi_m - \frac{c}{2}\Delta u + \frac{1}{2}g\bar{h}\Delta\beta, & \pi_r^* &= \pi_m - \frac{c}{2}\Delta u - \frac{1}{2}g\bar{h}\Delta\beta, \\ \tau_l^* &= \tau_l - \frac{1}{2c^2} (\Delta\pi + g\bar{h}\Delta\beta) + \frac{1}{2c}\Delta u, & \tau_r^* &= \tau_r + \frac{1}{2c^2} (\Delta\pi + g\bar{h}\Delta\beta) + \frac{1}{2c}\Delta u. \end{aligned}$$

Notons là encore que les états intermédiaires sur les quantités physiques  $h$  et  $u$  sont utilisés pour la mise à jour des quantités conservatives correspondantes  $h$  et  $hu$ , mais que les variables auxiliaires  $\pi$  et  $\beta$  sont mises à jour via une relaxation instantanée en définissant au début de chaque pas de temps

$$\pi_l = \frac{gh_l^2}{2}, \quad \pi_r = \frac{gh_r^2}{2}, \quad \beta_l = b_l, \quad \beta_r = b_r,$$

et rappelons que le calcul de la topographie  $b$  est immédiat puisqu'elle est simplement solution de l'équation stationnaire (1.2.57).

On peut constater *a posteriori* que le solveur construit sur ce modèle de relaxation est identique au solveur de Riemann approché introduit dans [Gal02, Gal03]. Dans ces travaux, il a été montré que le solveur préserve la positivité de la hauteur d'eau et les états d'équilibre au repos. Il ne satisfait par contre pas d'inégalité d'entropie discrète. Notons que les deux propriétés satisfaites apparaissent clairement avec l'approche choisie ici. Pour la préservation des équilibres au repos, les équilibres sont caractérisés par

$$u_m = \Delta u = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\pi + g\bar{h}\Delta\beta = 0.$$

Il vient alors immédiatement

$$u_l^* = u_r^* = 0 \quad \text{et} \quad h_l^* = h_l, \quad h_r^* = h_r,$$

ce qui entraîne la préservation des équilibres au niveau discret. Pour la positivité de la hauteur d'eau, il suffit de montrer que les états intermédiaires sont positifs. Or il apparaît clairement dans les relations (1.2.60) que, si les données du problème de Riemann sont strictement positives, les états intermédiaires le seront aussi si le paramètre  $c$  est convenablement choisi, i.e. est supérieur à une borne dépendant des données du problème de Riemann. Notons de plus que cette borne tend vers 0 avec le pas de maillage pour des données continues et s'avère donc dans ce cas moins restrictive que la condition (1.2.46) assurant la stabilité du modèle. Sur un maillage donné, et pour des solutions potentiellement discontinues, il faudra néanmoins la prendre en compte. Cette approche sera étendue au problème de transport sédimentaire dans la section 2.2.2.

### 1.2.6 Solveur de Riemann approché

Dans cette dernière partie, nous décrivons une troisième approche numérique possible, basée sur les solveurs de Riemann approchés. Le but est toujours de proposer une alternative permettant d'éviter la complexité de la résolution du problème de Riemann associé au système de Saint-Venant avec termes sources. L'idée des méthodes de relaxation était d'introduire un modèle continu approché pour lequel on sait résoudre le problème de Riemann exact. L'idée conduisant au développement des solveurs de Riemann approchés consiste à conserver le modèle exact et à intervenir directement au niveau discret en simplifiant la structure de la solution du problème de Riemann pour le remplacer par un problème de Riemann approché. Les schémas de Rusanov ou de HLL, interprétés plus haut comme des schémas de relaxation, peuvent aussi être vus comme des solveurs de Riemann approchés puisqu'ils consistent à considérer une solution approchée du problème de Riemann, qui ne contient que deux ondes simples de vitesse  $\pm c$  dans le cas de Rusanov ou  $(c_l, c_r)$  dans le cas HLL. Ici, nous allons décrire un solveur de Riemann approché adapté au problème de Saint-Venant avec termes sources (1.1.9)-(1.1.10) que nous avons introduit dans [ACU15].

Nous considérons une structure avec trois ondes simples de vitesse

$$\lambda_l < \lambda_0 = 0 < \lambda_r, \tag{1.2.60}$$

qui peut être vue comme une variante du schéma HLL à même de préserver les équilibres du lac au repos, d'où la présence de l'onde stationnaire en plus des deux ondes extrêmes. Par rapport au schéma HLL, nous ajoutons également des contraintes de signe sur les vitesses d'onde externes pour que les ondes soient ordonnées, ce qui simplifie la résolution du problème de Riemann. La stabilité du solveur de Riemann approché

est alors assurée par une condition similaire à la condition (1.2.32) qui assure que l'information se déplace plus vite dans le solveur approché que dans la solution exacte. Compte tenu de la contrainte (1.2.60), il faut donc que les vitesses des ondes externes satisfassent

$$\lambda_l < \min(0, u - \sqrt{gh}) < \max(0, u + \sqrt{gh}) < \lambda_r. \quad (1.2.61)$$

La consistance du solveur de Riemann approché avec le problème de départ est quant à elle assurée si la solution satisfait les relations dite de consistance intégrale

$$F(U_r) - F(U_l) - S(l, U_r, b_l, b_r) = \lambda_l(U_l^* - U_l) + \lambda_r(U_r - U_r^*), \quad (1.2.62)$$

où  $U = (h, hu)^T$  désigne ici le vecteur des inconnues fluides,  $U_l^*$  désignant alors l'état intermédiaire entre les ondes  $\lambda_l$  et  $\lambda_0$  et  $U_r^*$  l'état intermédiaire entre les ondes  $\lambda_0$  et  $\lambda_r$ . Les notations  $F$  et  $S$  renvoient respectivement au flux des équations de Saint-Venant et à une approximation du terme source de topographie. Les relations de consistance intégrale fournissent deux équations

$$h_r u_r - h_l u_l = \lambda_l (h_l^* - h_l) + \lambda_r (h_r - h_r^*), \quad (1.2.63)$$

$$\begin{aligned} \left( h_r u_r^2 + \frac{gh_r^2}{2} \right) - \left( h_l u_l^2 + \frac{gh_l^2}{2} \right) - S(U_l, U_r, b_l, b_r) \\ = \lambda_l (h_l^* u_l^* - h_l u_l) + \lambda_r (h_r u_r - h_r^* u_r^*), \end{aligned} \quad (1.2.64)$$

et sont donc suffisantes pour déterminer entièrement la solution d'un solveur de Riemann approché ne contenant que deux ondes séparées par un seul état stationnaire  $U^*$ , comme le schéma HLL pour lequel on obtient

$$h_{HLL}^* = \frac{\lambda_r h_r - \lambda_l h_l}{\lambda_r - \lambda_l} - \frac{1}{\lambda_r - \lambda_l} (h_r u_r - h_l u_l), \quad (1.2.65)$$

et

$$q_{HLL}^* = \frac{\lambda_r h_r u_r - \lambda_l h_l u_l}{\lambda_r - \lambda_l} - \frac{\left( h_r u_r^2 + \frac{gh_r^2}{2} \right) - \left( h_l u_l^2 + \frac{gh_l^2}{2} \right)}{\lambda_r - \lambda_l}. \quad (1.2.66)$$

Ici, il faut compléter ces deux égalités par deux autres relations pour déterminer l'ensemble des quatre inconnues correspondant aux états intermédiaires. Ces deux relations supplémentaires peuvent permettre de satisfaire des propriétés qualitatives des solutions, et nous choisissons ici de nous appuyer sur la préservation des équilibres du lac au repos pour imposer deux relations de continuité sur l'onde stationnaire

$$\begin{cases} h_l^* + b_l = h_r^* + b_r, \\ h_l^* u_l^* = h_r^* u_r^*. \end{cases} \quad (1.2.67)$$

$$\begin{cases} h_l^* u_l^* = h_r^* u_r^*. \end{cases} \quad (1.2.68)$$

Notons que la seconde relation correspond à la continuité du flux de masse  $q$  alors que la première est liée à l'équilibre du lac au repos, mais peut aussi être vue comme une

version dégradée de la continuité de la charge hydraulique  $H$  dans le cas  $u = 0$ , voir la relation (1.1.15). Dans [BC16], les auteurs utilisent cette continuité de la charge à la place de la relation (1.2.67). Le schéma obtenu satisfait théoriquement toutes les propriétés de stabilité, mais est complexe à mettre en œuvre. Nous privilégions ici une version plus simple. Les quatre relations (1.2.62) et (1.2.67)-(1.2.68) permettent de calculer l'ensemble des états intermédiaires, qui s'écrivent comme des perturbations de l'état intermédiaire associé au schéma HLL

$$h_l^* = h_{HLL}^* + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_l} \Delta b, \quad (1.2.69)$$

$$h_r^* = h_{HLL}^* + \frac{\lambda_l}{\lambda_r - \lambda_l} \Delta b, \quad (1.2.70)$$

et

$$q^* = h_l^* u_l^* = h_r^* u_r^* = q_{HLL}^* - \frac{g}{\lambda_r - \lambda_l} \Delta x \{h \partial_x b\}, \quad (1.2.71)$$

ces trois relations permettant de déterminer également  $u_l^*$  et  $u_r^*$ . On a utilisé la notation  $\Delta b = b_r - b_l$  et le terme  $\{h \partial_x b\}$  représente une approximation discrète du terme source. On montre facilement que le choix

$$\{h \partial_x b\} = \frac{h_l + h_r}{2 \Delta x} \Delta b,$$

permet de préserver l'équilibre du lac au repos. Pour assurer la positivité des hauteurs d'eau intermédiaires, et par là-même celle de la hauteur d'eau  $h_i^{n+1}$ , on introduit une légère modification, qui dans le cas d'une marche montante  $\Delta b > 0$  s'écrit

$$\tilde{h}_r^* = \max(h_r^*, 0), \quad (1.2.72)$$

$$\tilde{h}_l^* = h_l^* - \frac{\lambda_r}{\lambda_l} (h_r^* - \tilde{h}_r^*), \quad (1.2.73)$$

et assure à la fois la positivité des hauteurs d'eau intermédiaires et la relation de consistance (1.2.62). Notons que dans le cas d'un fond plat, on retrouve le schéma HLL classique. De nombreux exemples numériques sont fournis dans [ACU15] pour illustrer le comportement des différentes méthodes numériques décrites ici : schéma HLL couplé avec une reconstruction hydrostatique, schéma de relaxation avec variables auxiliaires  $(\Pi, \beta)$ , solveur de Riemann approché décrit dans cette section.



## Chapitre 2

# Transport sédimentaire en rivière

Cette partie est consacrée à la simulation numérique des phénomènes de transport sédimentaire en rivière. Le modèle de Saint-Venant Exner étudié ici est classique et couramment utilisé, tant dans des publications scientifiques que dans des codes industriels. L'accent est ici porté sur l'étude des stratégies numériques mises en œuvre pour aborder le couplage entre les parties *solides* et *fluides* de l'écoulement. Nous comparons ainsi les approches par splitting (ou couplage externe) et les approches unitaires (ou couplage interne), discussion qui traverse la communauté sur le sujet depuis une dizaine d'années. Cette étude a été rendue possible grâce à l'écriture de deux schémas numériques originaux, de type volumes finis, l'un basé sur un solveur de Riemann approché, qui a fait l'objet d'un article en processus de soumission, l'autre basé sur un schéma de relaxation, qui a fait l'objet de deux publications dans les proceedings du CEMRACS et dont une version améliorée sera présentée dans une publication en cours de rédaction.

Dans la conclusion de ce mémoire, nous aborderons deux perspectives de développement liées aux problèmes de transport sédimentaire. La première, pour répondre aux limitations du modèle de Saint-Venant Exner, présentera des pistes de dérivation de modèles alternatifs, moins empiriques, utilisant les développements récents dans la modélisation des fluides complexes. La seconde concerne la prise en compte de la propagation d'incertitudes dans les modèles morphodynamiques, dont les calibrations sont souvent peu évidentes, en se concentrant sur le modèle de Saint-Venant Exner dans un premier temps, puis sur des modèles plus complexes par la suite.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués en collaboration avec de nombreux partenaires, tant académiques qu'industriels. Ils ont été initiés dans le cadre d'une collaboration avec le LNHE (Laboratoire national d'hydraulique et d'environnement d'EDF) et poursuivis en partie dans le cadre du co-encadrement de la thèse de P. Ung, soutenue en Mars 2016. Ils ont donné lieu à publication dans les proceedings du CEMRACS, ainsi qu'à la rédaction d'un article en cours de révision.

Audusse, E. ; Berthon, C. ; Chalons, C. ; Delestre, O. ; Goutal, N. ; Jodeau, M. ; Sainte-

Marie, J. ; Giesselmann, J. ; Sadaka, G. ; *Sediment transport modelling : relaxation schemes for Saint-Venant-Exner and three layer models*. CEMRACS 2011 : Multiscale coupling of complex models in scientific computing, ESAIM : Proc., Vol. 38, pp. 78-98, 2012.

Audusse, E. ; Delestre, O. ; Le, M. H. ; Masson-Fauchier, M. ; Navaro, P. & Serra, R. ; *Parallelization of a relaxation scheme modelling the bedload transport of sediments in shallow water flow*. CEMRACS 2012 : Numerical Methods and Algorithms for High Performance Computing, ESAIM : Proc., Vol. 43, pp. 80-94, 2013.

Audusse, E. ; Chalons, C. & Ung, P. ; *Three-wave Approximate Riemann Solver to the Saint-Venant Exner equations*, accepted for publication in International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2018. HAL Id : hal-01204754v2.

Audusse, E. & Ung, P. ; *Relaxation solvers for the Saint-Venant Exner equations*, preprint, 2017.

## 2.1 Description du modèle

Ce chapitre est dédié à la simulation numérique des processus de transport sédimentaire en rivière ou dans les zones côtières. Ces processus peuvent impliquer des quantités très importantes de sédiments et ont un impact notable sur les activités humaines et sur les écosystèmes, que nous ne détaillerons pas ici, mais qui amène à la fois les pouvoirs publics, les responsables de l'aménagement du territoire et les entreprises à s'intéresser à ces questions. En complément des expériences de laboratoire et des mesures *in-situ*, souvent délicates et onéreuses, la simulation numérique est abondamment utilisée par les industriels et bureaux d'études du secteur concerné pour aider au dimensionnement des projets d'aménagement. Le transport sédimentaire est généralement séparé en deux types, dépendant principalement de la nature de l'écoulement et des sédiments considérés : le transport par charriage (i.e. par roulement proche du fond) et le transport par suspension (i.e. dans la colonne d'eau). Nous nous concentrerons dans les travaux qui suivent sur la simulation numérique du transport par charriage. Pour des travaux sur la simulation numérique du transport par suspension, nous renvoyons par exemple le lecteur à [Le12]. Le travail [AB03] que nous avons réalisé autour de la question du traitement numérique du transport d'un polluant peut également trouver des applications dans ce domaine. Pour une introduction plus générale à la physique du transport sédimentaire, le lecteur pourra consulter [LR05, VR06].

Le transport par charriage est modélisé dans de nombreux codes industriels par le système de Saint-Venant – Exner, voir par exemple le module *Sand Transport* du logiciel MIKE, le module *Morphology* de la suite Delft-3D, inclus dans le logiciel DELTARES ou le module *Sysiphe* de la suite logicielle TELEMAC. Ce système couple un modèle fluide, le système de Saint-Venant [BdSV71], très utilisé en hydraulique fluviale et présenté dans le chapitre 1, et une équation de conservation pour les sédiments, l'équation d'Exner [Exn25]. Dans sa version mono-dimensionnelle, l'ensemble constitue un système de trois équations aux dérivées partielles

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\partial_t q + \partial_x \left( \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = -gh \partial_x b - J, \quad (2.1.2)$$

$$\rho_s (1 - p) \partial_t b + \partial_x Q_s = 0, \quad (2.1.3)$$

où le vecteur d'inconnues  $(h, q, b)$  contient respectivement la hauteur de la colonne d'eau  $h$ , le débit de l'écoulement  $q$  (ou plus exactement de sa partie fluide) et l'épaisseur de la couche de sédiment  $b$ . Les paramètres du modèle sont la gravité  $g$ , la masse volumique relative  $\rho_s$  et la porosité  $p$  de la couche sédimentaire. On définit également la vitesse moyenne de l'écoulement par  $q = hu$ . Dans la suite, nous considérons le cas simplifié  $\rho_s = 1$  et  $p = 0$ . Pour clore le système, il est nécessaire de donner deux informations supplémentaires :

- une loi de frottement  $J(h, q, b)$  qui caractérise notamment la réponse du fluide à la présence de la couche sédimentaire ;



- une loi de transport  $Q_s(h, q, b)$  qui caractérise la réponse du matériau sédimentaire à la sollicitation du fluide.

Dans les deux cas, les formules utilisées en pratique reposent pour la plupart sur une analyse des phénomènes physiques mis en jeu afin de dégager des lois d'échelle, complétée par des travaux empiriques. Pour la loi de frottement, les formules les plus couramment utilisées [Del10a] sont les lois *turbulentes*, de type quadratique en vitesse :

- Manning-Strickler [Man91] :  $J = ghC \frac{u|u|}{h^{4/3}}$  ;
- Chezy-Darcy-Weissbach [Che76] :  $J = ghC \frac{u|u|}{h}$ .

Les lois de transport sédimentaires sont beaucoup plus nombreuses, chacune disposant d'une plage de validité dépendant notamment de la nature de l'écoulement et des caractéristiques des sédiments considérés. On peut identifier deux grandes catégories de formules, avec ou sans valeur seuil, illustrées par les deux lois suivantes

- Grass [Gra81] :

$$Q_s = A|u|^{m-1}u; \quad (2.1.4)$$

- Meyer-Peter-Müller [MPM48] :

$$Q_s = A(\tau^*(u, h) - \tau_c^*)_+^m. \quad (2.1.5)$$

Dans la seconde loi, la fonction  $\tau^*$ , appelée paramètre de Shields, dépend du ratio entre la force d'entraînement exercée par le fluide sur les particules composant la couche sédimentaire, directement reliée au terme de frottement  $J$ , et le poids déjaugé de ces particules, i.e. dépendant du rapport de densité entre l'eau et les particules. On obtient donc une formule du type

$$\tau^* = \frac{\rho_s J}{g(\rho_s - \rho)d},$$

où  $d$  est le diamètre des particules. La constante  $\tau_c^*$  caractérise alors la valeur minimale du rapport des forces qui permet le déclenchement du phénomène d'arrachement, et donc de transport sédimentaire. Notons que de nombreuses variantes de ces formules de base peuvent être trouvées dans la littérature sur le sujet. Il est par exemple possible d'ajouter une dépendance explicite en la variable  $b$ , afin de rendre compte à la fois d'une quantité maximale de matériau érodable et d'un possible effet de la pente locale sur la capacité d'arrachement [FNLMdLC14]. Nous ne détaillerons pas ces formules ici car l'objectif de ce travail est justement de proposer des stratégies numériques les plus indépendantes possibles de la forme précise de la loi de transport utilisée. Le modèle de Saint-Venant – Exner (2.1.1)-(2.1.3) a été testé sur de nombreux cas d'applications et donne souvent des résultats satisfaisants, au moins sur un plan qualitatif. Notons néanmoins qu'il présente des limitations d'au moins deux natures. Sur un plan pratique, la nécessaire calibration des lois de frottement et de transport sédimentaire, qui constituent le cœur du modèle puisqu'elles caractérisent l'interaction des deux milieux, fluide et solide, rend l'utilisation du modèle délicate et limite son caractère prédictif. D'autre part, sur un plan mathématique, l'absence d'égalité d'énergie quand le modèle est fermé avec les lois de transport habituelles constitue une lacune en termes de stabilité. Des

réponses, au moins partielles, à ces limitations ont été proposées dans la littérature et nous reviendrons sur ce point plus loin dans ce mémoire.

L'analyse du système (2.1.1)-(2.1.3) a été menée par plusieurs auteurs, voir notamment [ZLFN09, CLMDL11, BBT15]. En particulier, dans [CLMDL11], les auteurs déterminent des plages d'hyperbolicité du modèle, qui dépendent des formules de transport sédimentaire et de frottement choisies : le système est ainsi toujours strictement hyperbolique si on choisit la formule de Grass ou la formule MPM associée à la formule de Chézy-Darcy-Weissbach, il est hyperbolique sous condition dans le cas où la formule MPM est associée à la formule de Manning-Strickler. Dans les cas où le système est hyperbolique, il est possible de calculer ses valeurs propres

$$\lambda = 2\sqrt{Q} \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) + \frac{2u}{3}, \quad (2.1.6)$$

avec

$$\theta = \arccos(RQ^{-3/2}), \quad Q = \frac{ghP}{9}, \quad R = gh\sqrt{gh} \left( \frac{FP}{3} + \frac{1}{2\sqrt{gh}} \xi \partial_h Q_s - \frac{26}{27} F^3 \right),$$

où  $F$  et  $P$  sont deux nombres adimensionnels,  $F$  représente le nombre de Froude, déjà rencontré, qui caractérise le rapport entre la vitesse matérielle et la vitesse des ondes, et le nombre  $P$  prend en plus en compte le transport sédimentaire

$$F = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad P = 1 + F^2 + \xi \partial_q Q_s.$$

En l'absence de transport sédimentaire, on retrouve les valeurs propres du système de Saint-Venant avec terme source de topographie (1.1.12).

Terminons cette introduction en mentionnant trois propriétés importantes du système (2.1.1)-(2.1.3) qu'on veillera à préserver pour les solutions approchées, et qui renvoient toutes à des problématiques déjà évoquées dans le chapitre 1 :

- la hauteur d'eau reste positive si elle l'est à l'instant initial ;
- l'équilibre au repos (1.1.17) est une solution stationnaire du système dès lors que  $Q_s(h, 0, z) = 0$  ;
- la topographie est stationnaire si le transport sédimentaire est nul, i.e.  $Q_s(h, u, z) = 0$  et on retrouve alors le système de Saint-Venant avec terme source étudié au chapitre 1. Dans ce cas, on peut demander au schéma de satisfaire une inégalité d'énergie discrète.

## 2.2 Simulation numérique

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution numérique du système (2.1.1)-(2.1.3), à la fois sur le choix de la méthode employée, en nous limitant ici, comme dans

le chapitre 1, aux approches volumes finis, mais également, en amont, sur le choix de la stratégie utilisée. Nous décrivons ainsi tout d’abord les deux stratégies possibles, par *splitting* (couplage externe) ou unitaire (couplage interne), la première étant largement présente dans les codes industriels et la seconde ayant été étudiée par plusieurs auteurs dans la dernière décennie. Nous détaillons les avantages et inconvénients de chacune, flexibilité d’un côté, sécurité (robustesse) de l’autre. Ensuite, dans le cadre d’une stratégie unitaire, nous décrivons deux nouveaux schémas numériques qui étendent les travaux présentés dans le chapitre 1, le premier basé sur un modèle de relaxation, le second sur un solveur de Riemann approché. Nous montrons enfin que ces deux méthodes peuvent également s’interpréter comme des stratégies de *quasi-splitting*, ce qui établit un pont entre les deux approches. Nous exhibons ainsi ce qui constitue, à notre sens, la *quantité minimale de couplage interne* qu’il est nécessaire de considérer pour assurer la stabilité et la précision d’une simulation numérique de transport sédimentaire basée sur le modèle de Saint-Venant – Exner.

### 2.2.1 Stratégie numérique : *splitting* ou unitaire

**Approche classique par *splitting* (ou couplage externe).** La simulation numérique du système (2.1.1)-(2.1.3) repose dans la totalité des codes industriels évoqués plus haut sur l’utilisation de deux solveurs distincts. La partie *fluide*, i.e. le système de Saint-Venant (2.1.1)-(2.1.2) qui constitue les deux premières équations du système global, est résolue à l’aide du solveur qui constitue le cœur de la suite logicielle, tandis que la résolution de la partie *solide*, i.e. la loi de conservation de la couche sédimentaire (2.1.3), est basée sur l’utilisation d’une brique ajoutée à cette fin dans la suite logicielle. Le couplage est alors assuré par la transmission de deux informations :

- après mise à jour de la partie fluide, passage des informations sur les champs de hauteur et de vitesses pour permettre le calcul de la formule de transport sédimentaire ;
- après mise à jour de la partie solide, passage des informations sur la nouvelle topographie pour permettre le calcul du terme source du modèle fluide.

Cette méthode présente l’avantage d’être très flexible puisque les deux problèmes sont traités séparément. Elle permet notamment d’utiliser tel quel le solveur fluide développé au préalable par les équipes et qui est, dans un code industriel, le résultat de plusieurs années de travail, destiné, outre les problèmes de transport sédimentaire, à communiquer avec de nombreux modules externes (problèmes de qualité d’eau, modèles biologiques, phénomènes de houle...). Elle permet également d’utiliser des stratégies de discrétisation en temps et en espace différentes et adaptées à chacun des milieux considérés, quitte à effectuer les interpolations nécessaires lors de la transmission des données. De plus, elle satisfait évidemment les propriétés de positivité et d’équilibre dès lors que le solveur fluide les satisfait.

Mais cette méthode présente un inconvénient majeur en termes de stabilité et elle peut s’avérer difficile à mettre en œuvre pour des écoulements présentant de fortes variabi-

lités comme les phénomènes de rupture de barrage ou de ressaut hydraulique, conduisant même parfois à de fortes instabilités dans les solutions [CDE02, HS03, HDD<sup>+</sup>05, BGR11, ACD<sup>+</sup>12]. Dans [CLMDL11], les auteurs expliquent ces problèmes notamment par le fait que les valeurs propres de la partie fluide avec topographie stationnaire (1.1.12) ne sont pas toujours des bonnes approximations des valeurs propres du système complet (2.1.6). Ces cas problématiques sont à l’origine du travail présenté ici, initié en collaboration étroite avec des ingénieurs du groupe EDF. Dans toute la suite de ce manuscrit, cette approche sera qualifiée d’approche par *splitting* puisque parties fluide et solide sont mises à jour successivement.

**Approche unitaire (ou couplage interne).** L’alternative la plus naturelle à l’approche par *splitting* est évidemment de considérer le système (2.1.1)-(2.1.3) comme un tout et de développer un solveur spécifique dédié à sa résolution numérique. Dans la dernière décennie, plusieurs travaux ont exploré cette piste. Citons notamment, outre les travaux mentionnés plus haut, [RMF08, CDFNF08, DP08, BSS09, CSdT09, BS11, BSS12] et les extensions bidimensionnelles [HS05, CDFNFP09, CSdT10, BESS13, KDAK14]. Détaillons certaines de ces approches numériques. Hudson *et al.* [HS03] utilisent un schéma de Roe classique sur une version conservative du système (2.1.1)-(2.1.3) (le terme source de topographie étant traité séparément), tandis que Castro *et al.* [CDFNF08] utilisent une extension du schéma de Roe pour les systèmes non-conservatifs (le terme source de topographie est alors inclus dans la partie hyperbolique) basée sur la définition des produits non conservatifs développée dans [DMLM95]. Les travaux de Rosatti *et al.* [RMF08] sont aussi basés sur une généralisation de la méthode de Roe. Benkhaldoun *et al.* utilisent différents schémas numériques, basés sur l’utilisation d’un solveur de Riemann [BSS09] ou sur la méthode des caractéristiques [BS11]. Les travaux de Delis *et al.* [DP08] utilisent quant à eux des modèles de relaxation sur lesquels nous reviendrons dans la section suivante. Notons que tous les solveurs mentionnés sont des extensions de solveurs développés par les mêmes auteurs pour les équations de Saint-Venant sur fond fixe, voir les références précises dans les articles concernés et dans le chapitre 1. Les simulations numériques proposées dans ces différents travaux illustrent la stabilité des méthodes tant sur des écoulements fluviaux (transport d’une dune) que sur des problèmes plus raides (rupture de barrage). Tous les schémas proposés sont consistants avec le système de Saint-Venant quand le flux sédimentaire est nul. Les schémas présentés dans [RMF08, CDFNF08, BSS09, BS11, BSS12] préservent les équilibres au repos. Ce n’est pas le cas pour les solveurs présentés dans [HS03, DP08]. À notre connaissance, il n’existe de preuves formelles de la positivité de la hauteur d’eau pour aucun des schémas évoqués.

Dans la suite de ce chapitre, nous commençons par décrire deux schémas numériques pour le calcul de solutions approchées des équations de Saint-Venant – Exner. Le premier repose sur l’approche par relaxation et étend les travaux présentés dans la section 1.2.5. Le second s’appuie sur la définition d’un solveur de Riemann approché et étend les travaux présentés dans la section 1.2.6. Le fil conducteur de notre démarche

est de respecter les trois principes évoqués plus haut, positivité de la hauteur d'eau, préservation de l'équilibre au repos et consistance avec le système de Saint-Venant, auxquels on ajoute une utilisation minimale des formules de transport sédimentaire, afin d'être en mesure d'utiliser les schémas même pour des formules complexes.

### 2.2.2 Modèles de relaxation

L'approche par relaxation a été décrite en détail dans la section 1.2.5. Nous l'appliquons donc directement ici au problème considéré.

Une première approche a été proposée dans [DP08], étendant les travaux réalisés sur le système de Saint-Venant dans [DK03, DK04]. Elle est basée sur l'approche *à la Jin-Xin*, décrite initialement dans [JX95]. Elle consiste à relaxer chaque équation indépendamment pour obtenir un système contenant deux fois plus d'inconnues que le système de départ, puisque chacune des composantes du flux du système de départ est associée à une inconnue auxiliaire. Un travail récent [KDAK14] propose une version bi-dimensionnelle de ces travaux, incluant des comparaisons avec les résultats issus du code industriel MIKE. Comme évoqué plus haut, le schéma ne préserve ni les équilibres au repos ni la positivité de la hauteur d'eau.

Nous proposons ici une autre technique de relaxation, basée sur l'approche *à la Sulićiu* présentée dans la section 1.2.5. Il s'agit d'une version modifiée et consistante d'un schéma que nous avons introduit dans [ACD<sup>+</sup>12]. Nous partons donc du système de relaxation (1.2.54)-(1.2.58) qui a été utilisé pour construire un schéma numérique pour le système de Saint-Venant avec terme source de topographie, i.e. pour les équations. (2.1.1)-(2.1.2). Ce système contient deux variables de relaxation  $\pi$  et  $\beta$ , associées respectivement à la pression dans le fluide et à la topographie. Nous introduisons ici une troisième variable de relaxation  $\Omega$ , associée au flux sédimentaire  $Q_s$  pour obtenir le système à six équations

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\partial_t q + \partial_x (hu^2 + \pi) + g\bar{h}\partial_x \beta = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\partial_t \pi + u\partial_x \pi + c_1^2 \partial_x u = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{gh^2}{2} - \pi \right), \quad (2.2.3)$$

$$\partial_t b + \partial_x Q_s = 0, \quad (2.2.4)$$

$$\partial_t \beta + u\partial_x \beta + \partial_x \Omega = \frac{1}{\epsilon} (b - \beta), \quad (2.2.5)$$

$$\partial_t \Omega + u\partial_x \Omega + c_2^2 \partial_x \beta = \frac{1}{\epsilon} (Q_s(h, u, b) - \Omega). \quad (2.2.6)$$

Notons que les trois premières équations sont inchangées. Les deux suivantes sont modifiées puisqu'il faut prendre en compte le terme de transport sédimentaire dans

l'évolution de la topographie. La dernière équation donne l'évolution de la nouvelle variable auxiliaire  $\Omega$  et contient un deuxième paramètre de relaxation  $c_2$  qui sera choisi pour assurer la stabilité du modèle, voir la section 1.2.5 et l'analyse ci-dessous. Rappelons que le système (1.2.54)-(1.2.58) était bien adapté à l'écriture d'un schéma numérique car les ondes étaient ordonnées et le problème de Riemann simple à résoudre. Il préservait la positivité de la hauteur d'eau sous une condition CFL, ainsi que la préservation des équilibres au repos. C'est aussi le but recherché dans l'écriture du système (2.2.1)-(2.2.6). On peut ainsi interpréter les deux dernières équations (2.2.5)-(2.2.6) du système comme un modèle de relaxation à la *Jin-Xin* appliqué à la couche de sédiment, mais décalé pour être centré autour de l'onde  $u$ , afin d'être compatible avec le modèle de relaxation à la *Suliciu* appliqué à la partie fluide et constitué par les trois premières équations du système. Notons enfin que, comme c'était le cas pour le système (1.2.54)-(1.2.58), la quatrième équation, qui permet de mettre à jour la topographie  $b$ , est découplée des autres équations du système et peut donc être traitée séparément. Dans la suite, nous présentons donc la résolution du problème de Riemann associé aux cinq équations (2.2.1)-(2.2.3) et (2.2.5)-(2.2.6). Les calculs sont donc identiques à ceux que nous avons présentés dans [ACD<sup>+</sup>12], même si le modèle est différent et possède de meilleures propriétés. En effet, dans [ACD<sup>+</sup>12], méthode également reprise dans [ADL<sup>+</sup>13], nous n'avions pas introduit la variable de relaxation  $\beta$  associée à la topographie et tous les calculs étaient directement menés avec la topographie  $b$ , qui était donc mise à jour par l'équation (2.2.5), et non pas par l'équation (2.2.4). Il en résultait que le schéma n'était pas consistant avec le système original et impliquait une diffusion numérique très excessive, comme nous le verrons dans les exemples numériques. L'approche présentée ici ne souffre pas de cet inconvénient et nous allons donc voir qu'elle possède toutes les propriétés requises (positivité, équilibre, consistance), tout en proposant une résolution qui reste (relativement) simple.

Le calcul des valeurs propres associées au système (2.2.1)-(2.2.3) et (2.2.5)-(2.2.6) conduit aux valeurs suivantes

$$\lambda_u = u, \quad \lambda_{\pm} = u \pm c_1 \tau, \quad \tilde{\lambda}_{\pm} = u \pm c_2 \tau,$$

où on a conservé la notation  $\tau = 1/h$ . Comme pour le modèle (1.2.54)-(1.2.58), les ondes sont donc toujours bien ordonnées. C'était un de nos objectifs. Cependant, l'ordre dépend à présent des valeurs relatives des paramètres  $c_1$  et  $c_2$ . Il y aura donc *a priori* deux problèmes de Riemann distincts à résoudre, selon qu'on a choisi  $c_1 \leq c_2$ , ou l'inverse. La valeur de ces paramètres est, comme on l'a vu dans la section 1.2.5, liée à la stabilité du modèle relaxé. Nous avons vu qu'il existait deux propriétés pour qualifier la stabilité du modèle relaxé, d'une part la condition (1.2.32), qui traduit le fait que les valeurs propres extrêmes du système relaxé sont plus grandes que celles du système de départ, d'autre part la condition qui assure que le modèle relaxé est, au moins formellement, une perturbation du modèle de départ avec ajout d'un terme de diffusion (1.2.34). Ici, la comparaison avec les valeurs propres (2.1.6) du système de

Saint-Venant – Exner est délicate puisque les formules obtenues sont complexes. On choisit donc d'étudier la stabilité à l'aide d'un développement asymptotique du type (1.2.34). À l'aide des équations (2.2.3) et (2.2.6), on établit

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{gh^2}{2} - \epsilon \left( \partial_t \frac{gh^2}{2} + u \partial_x \frac{gh^2}{2} + c_1^2 \partial_x u \right) + O(\epsilon^2), \\ \Omega &= Q_s(h, u, b) - \epsilon \left( \partial_t Q_s(h, u, b) + 2u \partial_x \Omega \left( \frac{c_2^2}{h^2} - u^2 \right) \partial_x b \right) + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Grâce à l'utilisation de la dérivation en chaîne et aux équations (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.5), on peut ensuite exprimer les dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales des quantités physiques  $(h, u, b)$ . On obtient tous calculs faits

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{gh^2}{2} - \epsilon \left( \frac{c_1^2}{h} - gh^2 \right) \partial_x u + O(\epsilon^2), \\ \Omega &= Q_s(h, u, b) + \epsilon \left( (\partial_b Q_s - u) \partial_h Q_s + g \partial_u Q_s \right) \partial_x h \\ &\quad + \epsilon \left( h \partial_h Q_s + (\partial_b Q_s - u) \partial_u Q_s \right) \partial_x u \\ &\quad - \epsilon \left[ c_2^2/h^2 - u^2 - g \partial_u Q_s - \partial_b Q_s (\partial_b Q_s - 2u) \right] \partial_x b + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans les équations (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.5), on peut finalement écrire

$$\begin{aligned}\partial_t \begin{pmatrix} h \\ u \\ b \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hu \\ u^2/2 + g(h+b) \\ Q_s \end{pmatrix} \\ = \epsilon \partial_x \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2/h - gh^2 & 0 \\ A & B & C \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u \\ b \end{pmatrix} \right) + O(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

où

$$C = c_2^2/h^2 - u^2 - g \partial_u Q_s - \partial_b Q_s (\partial_b Q_s - 2u),$$

et

$$A = -((\partial_b Q_s - u) \partial_h Q_s + g \partial_u Q_s), \quad B = -(h \partial_h Q_s + (\partial_b Q_s - u) \partial_u Q_s).$$

La matrice apparaissant dans l'équation (2.2.7) est positive si

$$c_1^2 \geq gh^3, \quad c_2^2 \geq h^2 u^2 + h^2 [g \partial_u Q_s + \partial_b Q_s (\partial_b Q_s - 2u)].$$

La condition sur le paramètre  $c_1$  est identique à la condition sous-caractéristique (1.2.46) obtenue pour le modèle relaxé lié au système de Saint-Venant avec terme source de topographie. Cela n'a rien d'étonnant puisqu'on a vu que les trois premières équations de notre modèle relaxé correspondaient à une relaxation de type Suliciu sur la partie fluide. Par contre, la condition sur le paramètre  $c_2$  couple les informations

sur la partie fluide (le terme  $u^2/2$ ) et sur la partie solide (les termes faisant intervenir la formule de transport sédimentaire  $Q_s$ ). Notons que, abstraction faite du terme de transport sédimentaire intervenant dans  $c_2$ , l'ordonnancement des ondes est lié au régime de l'écoulement puisque le ratio entre les paramètres  $c_2$  et  $c_1$  est égal au nombre de Froude. Il en découle que pour un écoulement fluvial avec un transport sédimentaire modéré le paramètre  $c_1$  sera prépondérant, tandis que le paramètre  $c_2$  sera dominant si le régime est torrentiel ou si le transport sédimentaire est important. Notons enfin que, la matrice de diffusion intervenant dans (2.2.7) étant triangulaire inférieure, seule la quantité diagonale  $C$  a un impact sur la valeur de  $c_2$ . Ainsi la dépendance du flux sédimentaire vis-à-vis de la hauteur d'eau n'intervient pas dans la détermination des paramètres de stabilité. Comme les formules classiques (2.1.4) ou (2.1.5) ne dépendent pas explicitement de la topographie, seule la dépendance vis-à-vis de la vitesse sera donc à prendre en compte.

Afin de pouvoir construire un solveur numérique basé sur ce modèle de relaxation, il s'agit à présent de montrer que les deux problèmes de Riemann liés au système (2.2.1)-(2.2.6) peuvent être résolus de manière analytique. Cela n'a rien d'évident ici puisque nous rappelons en effet que leur résolution nécessite *a priori* le calcul des solutions d'un système non-linéaire où le nombre d'inconnues est égal au nombre d'états intermédiaires séparant les ondes (ici quatre) multiplié par le nombre de composantes des états intermédiaires (ici cinq, puisque la variable  $b$  est découplée des autres), soit donc un (en fait deux, puisqu'il y a deux problèmes de Riemann à résoudre) système non linéaire de vingt équations à vingt inconnues... On commence par donner les invariants de Riemann pour chaque onde (on introduit le paramètre  $\alpha$  défini par  $g\alpha = c_m\Delta c$  avec  $c_m$  la moyenne des deux vitesses d'ondes et  $\Delta c$  leur écart) :

- Onde  $u$  :  $u$ ,  $\pi$ ,  $b$  et  $\Omega$  ;
- Ondes  $u \pm c_1\tau$  :  $u \pm c_1\tau$ ,  $\pi + c_1^2\tau$ ,  $b$  et  $\Omega$  ;
- Ondes  $u \pm c_2\tau$  :  $u \pm c_2\tau$ ,  $\pi + c_2^2\tau$ ,  $b + \alpha\tau^2$  et  $\Omega + (u \pm c_2\tau)\alpha\tau^2$ .

Il faut alors *a priori* distinguer les deux cas possibles, selon que  $c_1 < c_2$  ou  $c_1 > c_2$ . Les deux paramètres n'étant astreints qu'à des bornes inférieures, il est en fait tout à fait possible d'imposer un ordre, c'est par exemple ce qui est fait dans [ACD<sup>+</sup>12], mais cela a nécessairement pour conséquence d'augmenter fortement la dissipation numérique du schéma dans les cas où le choix effectué n'était pas physiquement pertinent. Nous décrivons donc dans la suite les deux cas possibles.

Le premier cas ( $c_1 < c_2$ ) se traite très simplement puisque les problèmes fluides et solides sont alors essentiellement découplés. En effet les solutions  $b$  et  $\Omega$  sont alors continues à la traversée des trois ondes internes  $u - c_1\tau$ ,  $u$  et  $u + c_1\tau$ . Il en découle que, pour le problème restreint à ces trois ondes internes, la situation se ramène au problème de Riemann pour le modèle de relaxation sur fond plat (1.2.43)-(1.2.45) et dont la solution est donnée par les relations (1.2.48)-(1.2.49), les notations devant évidemment être adaptées puisque les données du problème de Riemann interne correspondent mainte-



nant aux états intermédiaires compris entre les ondes  $u - c_2\tau$  et  $u - c_1\tau$  pour l'état gauche et  $u + c_1\tau$  et  $u + c_2\tau$  pour l'état droit. Il reste alors simplement à déterminer ces états intermédiaires liés aux données du problème de Riemann complet au travers des ondes externes  $u \pm c_2\tau$ , ainsi que les données relatives à la partie solide. Pour ces dernières, là encore, le calcul est très simple puisqu'il est clair qu'on se trouve dans une configuration similaire au schéma HLL. On obtient alors immédiatement

$$\begin{aligned} b^* &= \frac{(u_r + c_2\tau_r) b_r - (u_l - c_2\tau_l) b_l}{(u_r + c_2\tau_r) - (u_l - c_2\tau_l)} - \frac{1}{(u_r + c_2\tau_r) - (u_l - c_2\tau_l)} (\Omega_r - \Omega_l), \\ \Omega^* &= \frac{(u_r + c_2\tau_r) \Omega_r - (u_l - c_2\tau_l) \Omega_l}{(u_r + c_2\tau_r) - (u_l - c_2\tau_l)} - \frac{(u_r + c_2\tau_r) (u_l - c_2\tau_l)}{(u_r + c_2\tau_r) - (u_l - c_2\tau_l)} (b_r - b_l). \end{aligned}$$

Pour les états intermédiaires fluides compris entre les ondes  $u - c_2\tau$  et  $u - c_1\tau$  d'une part, notés avec l'indice  $l$ , et  $u + c_1\tau$  et  $u + c_2\tau$  d'autre part, notés avec l'indice  $r$ , des calculs simples mènent alors à

$$\bar{\tau}_l = \left( \tau_l^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(u_r + c_2\tau_r) - (u_l - c_2\tau_l)} (-(u_r + c_2\tau_r) \Delta b + \Delta \Omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.8)$$

$$\bar{\tau}_r = \left( \tau_r^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(u_r + c_2\tau_r) - (u_l - c_2\tau_l)} (-(u_l - c_2\tau_l) \Delta b + \Delta \Omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.9)$$

puis

$$\begin{aligned} \bar{u}_l &= u_l + c_2 (\bar{\tau}_l - \tau_l), & \bar{u}_r &= u_r - c_2 (\bar{\tau}_r - \tau_r), \\ \bar{\Pi}_l &= \Pi_l - c_1^2 (\bar{\tau}_l - \tau_l), & \bar{\Pi}_r &= \Pi_r - c_1^2 (\bar{\tau}_r - \tau_r). \end{aligned}$$

Notons que la définition des états intermédiaires, notamment via les relations (2.2.8)-(2.2.9), impose des conditions supplémentaires sur le choix des paramètres  $c_1$  et  $c_2$ . Le détail des calculs est présenté dans [ACD<sup>+</sup>12].

Le deuxième cas ( $c_1 > c_2$ ) est plus complexe puisque les parties fluides et solides sont alors fortement couplées. Un moyen de simplifier les calculs est de recourir à la linéarisation supplémentaire déjà introduite par la relation (1.2.59) dans le modèle de relaxation (1.2.54)-(1.2.58) et c'est la stratégie adoptée ici. En introduisant un nouveau jeu de variables liées à la moyenne et au saut des états intermédiaires, il est alors possible de découpler le système issu de la continuité des invariants de Riemann en deux sous-systèmes qui peuvent tous deux être résolus de manière analytique. Là encore, notons que le calcul effectif des états intermédiaires introduit de nouvelles contraintes sur le choix des paramètres  $c_1$  et  $c_2$ . Les détails des calculs seront présentés dans une publication en cours de préparation [AU17].

Nous avons évoqué en début de chapitre une liste de trois propriétés, positivité de la hauteur d'eau, préservation de l'état d'équilibre du lac au repos et préservation

d'une topographie stationnaire en l'absence de transport sédimentaire, qui doivent être satisfaites par un schéma volumes finis dédié à la simulation numérique du système de Saint-Venant–Exner. Nous allons montrer ici que le schéma proposé satisfait toutes ces propriétés. La propriété de préservation d'une topographie stationnaire en l'absence de transport sédimentaire est trivialement satisfaite puisque l'équation (2.2.4) se ramène alors à  $\partial_t b = 0$ . Notons tout de même que le modèle de relaxation obtenu dans ce cas sera différent du modèle de relaxation (1.2.54)–(1.2.58) qui correspond au choix  $c_2 = 0$ , ce qui n'est pas le cas ici. Il s'agit donc d'un autre modèle relaxé, consistant avec les équations de Saint-Venant avec terme source de topographie. La préservation des équilibres au repos est clairement satisfaite. En effet, à l'équilibre, la vitesse du fluide et le transport sédimentaire sont nuls, ce qui entraîne  $c_2 = 0$ . Il est alors immédiat de voir qu'on retrouve le modèle de relaxation (1.2.54)–(1.2.58) qui préserve bien l'équilibre. La positivité de la hauteur d'eau pose plus de difficultés. Elle est vérifiée dès lors que la propriété est vraie pour les états intermédiaires puisque la nouvelle solution se calcule par un processus de moyenne. Les calculs effectués montrent qu'il est difficile d'identifier *a priori*, i.e. uniquement en fonction des états initiaux du problème de Riemann, les bornes inférieures sur les paramètres  $c_1$  et  $c_2$  qui peuvent assurer cette propriété. On peut néanmoins affirmer que pour un choix de  $c_1$  (ou de  $c_2$ , selon l'ordonnancement choisi) assez grand, les hauteurs d'eau intermédiaires restent positives dès lors que les données du problème de Riemann sont strictement positives, voir par exemple les relations (2.2.8)–(2.2.9) déjà évoquées plus haut.

### 2.2.3 Solveurs de Riemann approchés

Le schéma de relaxation décrit dans la section précédente possède toutes les propriétés requises. Mais il n'est pas un modèle de simplicité et son implémentation demande un certain investissement. Nous présentons ici une méthode alternative, basée sur un solveur de Riemann approché, qui satisfait les mêmes propriétés mais qui est très simple à implémenter. De plus, les résultats numériques présentés à la fin de ce chapitre montrent que les deux schémas donnent des résultats relativement similaires.

Nous avons introduit les solveurs de Riemann approchés dans la section 1.2.6 où nous avons présenté un solveur de Riemann approché pour le système de Saint-Venant avec termes sources introduit dans [ACU15]. Ce schéma assure la positivité de la hauteur d'eau discrète et la préservation des équilibres au repos. Il est très simple à implémenter et donne des résultats comparables, et parfois meilleurs, que des schémas de référence, voir [ACU15]. Dans ce chapitre, nous étendons l'approche proposée au modèle de Saint-Venant – Exner (2.1.1)–(2.1.3). Ce travail est décrit en détail dans l'article [ACU18].

Nous gardons la même structure que celle du problème de Riemann introduit dans la section 1.2.6, à savoir une solution à trois ondes, dont une onde stationnaire et deux

ondes de vitesse  $\lambda_l < 0$  et  $\lambda_r > 0$ . Il y a donc toujours deux états intermédiaires à calculer, qui comptent maintenant chacun trois inconnues  $(h, u, b)$ , soit donc en tout six quantités à déterminer, qui seront notées  $(h_l^*, u_l^*, b_l^*)$  et  $(h_r^*, u_r^*, b_r^*)$ . Les relations de consistance intégrale qui assurent la consistance du solveur avec le système de départ sont inchangées (1.2.62) mais constituent maintenant un ensemble de trois équations, à savoir les relations (1.2.63) et (1.2.64) pour la partie fluide et la relation

$$Q_s(h_r, u_r, b_r) - Q_s(h_l, u_l, b_l) = \lambda_l (b_l^* - b_l) + \lambda_r (b_r - b_r^*), \quad (2.2.10)$$

pour la partie topographie. Il faut donc ajouter trois relations pour déterminer l'ensemble des états intermédiaires. Nous conservons les deux relations de continuité au travers de l'onde stationnaire (1.2.67)-(1.2.68), qui assurent la préservation de l'équilibre au repos. Pour la dernière relation, nous choisissons d'introduire un problème de minimisation sous contrainte sur la variation de la topographie

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathcal{F}(b_l^*, b_r^*) = (||b_l - b_l^*||^2 + ||b_r - b_r^*||^2) \\ \text{u.c.} \quad & \mathcal{H}(b_l^*, b_r^*) = \lambda_l (b_l^* - b_l) + \lambda_r (b_r - b_r^*) - (Q_s(U_r) - Q_s(U_l)) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Notons que la contrainte est simplement la relation de consistance intégrale (2.2.10) pour l'équation d'Exner (2.1.3) sur la topographie  $b$ . En pratique, le problème (2.2.12) permet de calculer les deux quantités  $b_l^*$  et  $b_r^*$ . Une fois ces quantités connues, les relations (1.2.63)-(1.2.64) et (1.2.67)-(1.2.68) permettent de calculer les quantités intermédiaires fluides par la même technique que celle décrite dans la section 1.2.6. Reste maintenant à déterminer les vitesses d'onde  $\lambda_l$  et  $\lambda_r$  qui doivent être plus grandes, en valeur absolue, que la vitesse maximale des ondes dans le système de départ. Comme nous l'avons déjà dit dans la section 2.2.2 quand nous avons introduit les schémas de relaxation, le calcul des valeurs propres du système de Saint-Venant – Exner est complexe. Là encore, nous proposons donc une méthode alternative, basée sur des bornes (inférieure et supérieure) des racines d'un polynôme de degré 3 dont les trois racines sont réelles (ce qui est ici le cas puisque le système est hyperbolique) proposées par Nickalls dans [Nic11]. En notant  $x_0$  le point d'inflexion de la courbe représentative du polynôme et  $\Omega$  la distance maximale entre les extrema locaux et le point d'inflexion, on montre que le choix

$$\lambda_l = x_0 - 2\Omega \leq 0 \leq \lambda_r = x_0 + 2\Omega, \quad (2.2.12)$$

encadre les racines du polynôme. Notons que le signe des quantités  $\lambda_l$  et  $\lambda_r$  est une conséquence directe de la propriété déjà mentionnée plus haut et démontrée dans [CLMDL11], et qui stipule que le produit des valeurs propres extrêmes du système de Saint-Venant – Exner est négatif. Tous calculs faits, on obtient

$$x_0 = \frac{2u}{3}, \quad \Omega = \frac{1}{3} \sqrt{u^2 + 3gh(1 + \partial_q Q_s)}. \quad (2.2.13)$$

On observe que, comme dans le cas du solveur de relaxation introduit dans la section 2.2.2, seule une des dérivées partielles de la formule de transport sédimentaire intervient dans la détermination de la vitesse des ondes, mais ici, il s'agit de la dépendance par rapport au débit et non plus par rapport à la vitesse, alors que la plupart des formules, voir (2.1.4) ou (2.1.5), font généralement intervenir explicitement la vitesse plutôt que le débit.

Pour le terme de topographie, nous proposons la même discrétisation que dans la section 1.2.6, la préservation des équilibres au repos étant toujours vérifiée. Afin d'assurer la positivité de la hauteur d'eau, nous introduisons les mêmes modifications que dans la section 1.2.6, voir (1.2.72)-(1.2.73). Pour le terme de frottement, nous proposons une discrétisation implicite qui permet de préserver l'équilibre pente-frottement mentionné dans la section 1.1.2. Notons que dans le cas d'une formule de frottement quadratique en vitesse (et donc en débit), le calcul du débit  $q^{n+1}$  reste en fait explicite puisqu'il s'agit simplement de calculer la racine d'un polynôme de degré 2. Remarquons pour finir que dans le cas où le transport sédimentaire est nul, nous retrouvons le schéma introduit dans la section 1.2.6, avec des vitesses d'ondes définies par

$$\lambda_l = \frac{2}{3} \left( u - \sqrt{u^2 + 3gh} \right), \quad \lambda_r = \frac{2}{3} \left( u + \sqrt{u^2 + 3gh} \right). \quad (2.2.14)$$

On peut vérifier facilement qu'on a les deux encadrements

$$\lambda_l \leq u - \sqrt{gh} \leq u + \sqrt{gh} \leq \lambda_r, \quad (2.2.15)$$

et

$$1 \leq \frac{\frac{2}{3} \left( |u| + \sqrt{u^2 + 3gh} \right)}{|u| + \sqrt{gh}} \leq \frac{4}{3}, \quad (2.2.16)$$

ce qui signifie que les valeurs proposées encadrent bien les valeurs propres du système de Saint-Venant (2.2.15) sans introduire de diffusion numérique excessive puisque l'ordre de grandeur est conservé (2.2.16).

### 2.2.4 Illustrations numériques

Nous présentons ici des résultats numériques pour comparer les trois schémas proposés sur un cas test largement étudié dans la littérature, le transport d'une dune de sédiment. Le comportement du système est très différent selon que l'écoulement au dessus de la dune est fluvial ou torrentiel, i.e. que le nombre de Froude est inférieur ou supérieur à 1, i.e. que la vitesse de l'écoulement est inférieure ou supérieure à la vitesse de l'information dans le système au repos.

Dans le cas fluvial, on voit que les trois schémas prédisent le même comportement qualitatif, en accord avec les expériences et les résultats présentés dans la littérature.

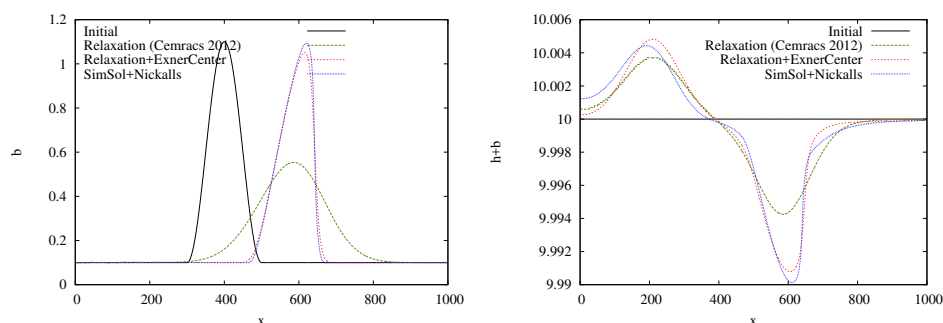


FIGURE 2.2.1 – Écoulement fluvial et transport d’une dune : topographie (à gauche) et surface libre (à droite).

Néanmoins, il apparaît clairement que le schéma de relaxation introduit dans [ACD<sup>+</sup>12] souffre d’une diffusion numérique très excessive, comme cela a été expliqué dans la section 2.2.2. Les solveurs de relaxation introduits dans la section 2.2.2 et de Riemann approché introduit dans [ACU18] et décrit dans la section 2.2.3 donnent des résultats quantitativement similaires. Notons que les stratégies utilisant le splitting d’opérateurs fonctionnent la plupart du temps dans ce cas, voir [HS03, ACU18] pour plus de détails.

Le cas torrentiel est plus intéressant car les résultats obtenus sont moins intuitifs. Là encore les trois schémas prédisent le même comportement qualitatif, mais avec de nouveau une diffusion très importante pour le schéma par relaxation proposé dans [ACD<sup>+</sup>12]. Alors que l’écoulement est toujours dirigé vers la droite, la dune se déplace maintenant vers... la gauche. C’est ce qu’on appelle le phénomène d’antidune, qui a été observé dans les expériences. Ce phénomène est très difficile à reproduire avec les approches par splitting classiques, voir cette fois [CLMDL11, ACU18].

Les deux solveurs décrits dans les sections 2.2.2 et 2.2.3 satisfont les propriétés de stabilité et d’équilibre attendues et fournissent des résultats numériques comparables. Toutefois, comme nous l’avons noté plus haut, le solveur de Riemann approché est d’une implémentation beaucoup plus simple que le solveur par relaxation. Pour plus de résultats numériques avec le solveur de Riemann approché, incluant des comparaisons avec d’autres schémas présentés dans la littérature et des cas tests sur des ruptures de barrage, nous renvoyons le lecteur à [ACU18].

## 2.2.5 Retour sur les stratégies numériques

Nous souhaitons maintenant revenir sur la distinction opérée au début de ce chapitre entre les approches par splitting et les approches unitaires. Les solveurs par relaxation et de Riemann approché introduits dans les sections 2.2.2 et 2.2.3 ont été présentés comme des approches unitaires. Nous allons maintenant montrer qu’ils peuvent tous

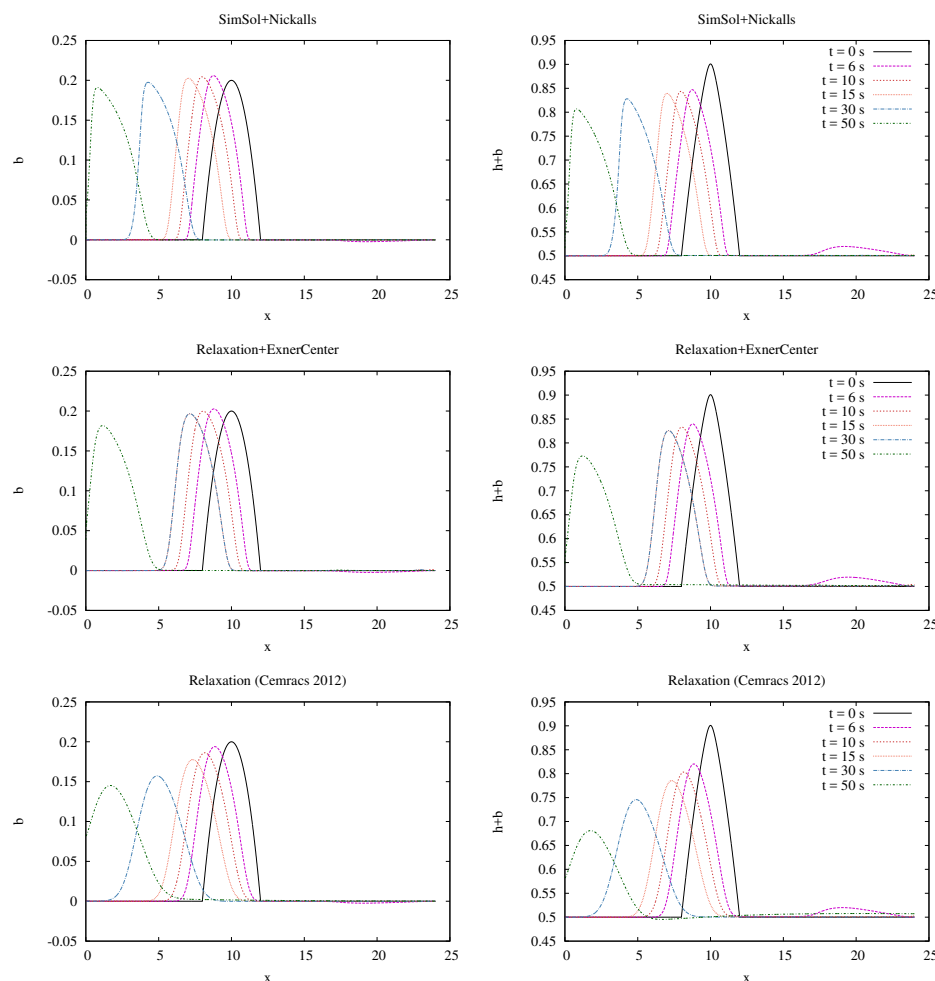


FIGURE 2.2.2 – Écoulement torrentiel et transport d’une dune : topographie (à gauche) et surface libre (à droite) - Solveur de Riemann approché (en haut), solveur de relaxation 2017 (au milieu), solveur de relaxation 2012 (en bas).

deux être interprétés comme des approches par splitting, quitte à transmettre une information supplémentaire au solveur fluide.

Pour le solveur par relaxation introduit dans la section 2.2.2, cela est évident. En effet, nous avons dit que, dans le modèle de relaxation (2.2.1)-(2.2.6), l’équation (2.2.4) d’évolution de la topographie était découplée des cinq autres. Il apparaît donc clairement qu’il s’agit en fait d’une approche par splitting, le solveur fluide étant maintenant obtenu à partir du modèle relaxé (2.2.1)-(2.2.3) et (2.2.5)-(2.2.6). Quelles sont les informations concernant la topographie nécessaires à la mise en œuvre de ce solveur ? La donnée sur la topographie, évidemment, mais également la donnée de la formule de transport sédimentaire  $Q_s$  utilisée qui sera nécessaire au calcul de la vitesse d’onde

$c_2$ , et uniquement pour ce point précis. Côté sédiment, aucune information nouvelle n'est à transmettre puisque les données nécessaires à la mise à jour de la topographie se limitent toujours à la hauteur d'eau et la vitesse, qui sont utilisées dans le calcul de la formule de transport sédimentaire  $Q_s$ . Notons à ce propos que nous n'avons pas précisé quel était le schéma numérique utilisé pour la mise à jour de la topographie. Les résultats numériques de la section 2.2.4 ont été obtenus en appliquant une technique de volumes finis avec une estimation centrée des flux, comme cela est généralement fait pour les stratégies par splitting utilisées dans les codes industriels.

Pour le solveur de Riemann approché décrit dans la section 2.2.2, l'interprétation en tant que méthode par splitting est tout aussi simple. La mise à jour de la topographie, au travers du problème de minimisation sous contrainte (2.2.12), est en effet là encore indépendante de la mise à jour des quantités fluides. Une fois ce calcul effectué, les quantités fluides sont mises à jour à l'aide d'un solveur de Riemann approché adapté au système de Saint-Venant avec termes sources décrit dans la section 1.2.6, auquel il faut toutefois maintenant fournir la donnée de la formule de transport sédimentaire  $Q_s$ , qui là encore, ne sera utilisée que dans le calcul des vitesses d'ondes  $\lambda_l$  et  $\lambda_r$ , voir les formules (2.2.12)-(2.2.13).

Ces deux observations nous ont amenés à conclure que la stratégie par splitting utilisée dans les codes industriels pouvait aisément être stabilisée par la seule modification du calcul de la vitesse des ondes dans le solveur fluide. Nous avons donc mis en œuvre cette stratégie et proposé des validation numériques dans [ACU18]. Nous illustrons ici ce propos sur l'exemple de l'antidune déjà évoqué plus haut. Nous comparons ainsi les résultats du solveur de Riemann approché présenté dans la section 2.2.3, ceux de la stratégie par splitting classique, utilisant le solveur de Riemann approché présenté dans la section 1.2.6 pour la partie Saint-Venant et une discrétisation centrée pour l'équation d'Exner et ceux d'une stratégie par splitting modifiée, où le seul changement porte sur le calcul de la vitesse des ondes dans le solveur de Riemann approché, les valeurs (1.2.61) étant remplacées par les valeurs (2.2.12)-(2.2.13).

Il apparaît clairement que, si la stratégie par splitting classique est instable, la stratégie par splitting modifiée donne des résultats très comparables à ceux obtenus avec le solveur de Riemann approché décrit dans la section 2.2.3. De plus amples résultats numériques sont fournis dans [ACU18].

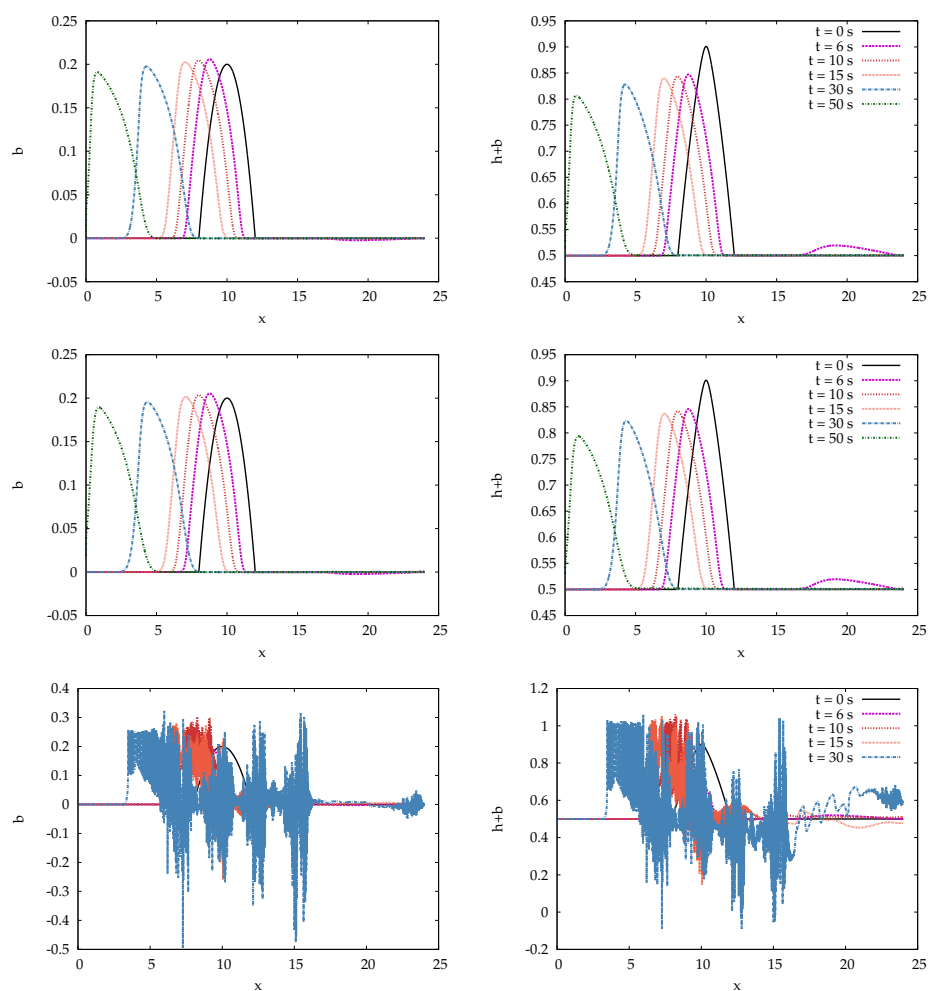


FIGURE 2.2.3 – Écoulement torrentiel et transport d’une dune : topographie (à gauche) et surface libre (à droite) - Solveur de Riemann approché (en haut), splitting modifié (au milieu), splitting classique (en bas).





# Chapitre 3

## Écoulements en rotation à faible nombre de Froude

Cette partie est consacrée à l'étude du système de Saint-Venant pour les écoulements océanographiques (ou atmosphériques) aux grandes échelles, où la rotation terrestre a un impact important. La rotation du domaine est en général prise en compte par l'introduction de la force de Coriolis dans les équations. Plusieurs questions se posent alors. D'une part l'introduction de ce nouveau terme source fait apparaître de nouveaux états stationnaires non triviaux, ici l'équilibre géostrophique, caractérisé par un équilibre entre gradient de pression et force de Coriolis, et qui occupe une place fondamentale dans les écoulements océaniques et atmosphériques aux grandes échelles. D'autre part, la force de Coriolis est une pseudo-force, au sens où elle ne fait que rendre compte de la rotation du domaine, et n'a donc en particulier pas d'impact sur la préservation du moment inertiel ou du moment angulaire. Ces deux propriétés sont loin d'être évidentes à vérifier sur les solutions approchées. C'est sur ces deux sujets que portent les travaux décrits dans ce chapitre. Ils ont donné lieu à un article ainsi qu'à trois publications dans des proceedings de conférences internationales. Un article est en cours de révision.

Dans la conclusion de ce mémoire, nous évoquerons les développements futurs de ces travaux, au premier rang desquels figure l'extension d'une étude, menée ici sur le système linéarisé, au modèle non linéaire. Les travaux sur grilles décalées seront également évoqués, notamment dans un cadre non cartésien.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués en collaboration avec des partenaires français et allemands. Ils se poursuivent actuellement dans le cadre du co-encadrement de la thèse de Do Minh Hieu, qui sera soutenue cet hiver.

Audusse, E. ; Klein, R. & Owinoh, A. *Conservative discretization of Coriolis force in a finite volume framework*. J. Comput. Phys. 228 (2009), no. 8, 2934-2950.

Audusse, E. ; Klein, R. ; Nguyen, D. D. & Vater, S. ; *Preservation of the discrete geo-*

*strophic equilibrium in shallow-water flows*. Finite volumes for complex applications. VI. Problems & perspectives. Volume 1, 2, 59-67, Springer Proc. Math., 4, Springer, Heidelberg, 2011.

Audusse, E. ; Dellacherie, S. ; Do, M.H. ; Omnes, P. & Penel, Y. ; *Godunov type scheme for the linear wave equation with Coriolis source term*. Accepted for publication in ESAIM Proc. 2017. HAL Id : hal-01254888.

Audusse, E. ; Do, M.H. ; Omnes, P. & Penel, Y. ; *Analysis of Apparent Topography Scheme for the Linear Wave Equation with Coriolis Force*. In : Cancs C., Omnes P. (eds) Finite Volumes for Complex Applications VIII - Hyperbolic, Elliptic and Parabolic Problems. FVCA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 200. Springer, Cham, 2017.

Audusse, E. ; Do, M.H. ; Omnes, P. & Penel, Y. ; *Analysis of the modified Godunov type scheme for the linear wave equation with Coriolis source term on cartesian mesh*. Accepted for publication in Journal of Computational Physics, 2018. HAL Id : hal-01618753

## 3.1 Description du modèle et propriétés

Nous nous intéressons ici au système de Saint-Venant sur un domaine en rotation

$$(\partial_t h)_r + \nabla_r \cdot (h \mathbf{u}) = 0, \quad (3.1.1)$$

$$(\partial_t(h\mathbf{u}))_r + \nabla_r \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_r \left( \frac{gh^2}{2} \right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u}) + h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r) = 0, \quad (3.1.2)$$

où  $h(t, \mathbf{x}^r)$  désigne toujours la hauteur d'eau,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}^r)$  la vitesse du fluide dans le repère tournant,  $\boldsymbol{\Omega}$  le vecteur de rotation, et  $g$  l'accélération due à la gravité. L'indice  $r$  indique que nous considérons ici les variables spatiales et les dérivées dans le repère tournant. Le terme  $\boldsymbol{\Omega} \times (h\mathbf{u})$  est appelé force de Coriolis [Cor35]. Le terme  $h\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}^r)$  est appelé force centrifuge. Ce deuxième terme est souvent omis dans les équations car il peut être mis sous la forme d'un gradient et ainsi absorbé dans un terme de pression avec gravité modifiée. Nous nous concentrerons donc la plupart du temps sur le traitement de la force de Coriolis. Ce système est à la base des simulations numériques en océanographie et en météorologie, voir par exemple [Ped03, OWE12] ou pour une approche plus mathématique [Maj02, ZBM<sup>+</sup>07]. Le problème peut également être écrit dans le référentiel inertiel et le système devient

$$(\partial_t h)_i + \nabla_i \cdot (h \hat{\mathbf{u}}) = 0, \quad (3.1.3)$$

$$(\partial_t(h\hat{\mathbf{u}}))_i + \nabla_i \cdot (h\hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}) + \nabla_i \left( \frac{gh^2}{2} \right) = 0, \quad (3.1.4)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}^i)$  désigne maintenant la vitesse mesurée dans le référentiel inertiel. L'indice  $i$  indique que nous considérons ici les variables spatiales et les dérivées dans le repère inertiel. Le système est alors écrit sous forme conservative, ce qui est un avantage. Mais cette seconde écriture présente l'inconvénient majeur de faire intervenir la vitesse mesurée dans le repère inertiel, qui n'est pas la variable d'intérêt en pratique : lors d'un calcul météorologique par exemple, nous sommes intéressés par la vitesse du vent  $u$ , non par la vitesse inertielle  $\hat{u}$  qui représente la vitesse du vent additionnée de la vitesse de rotation terrestre, cette seconde étant d'ailleurs beaucoup plus grande, de l'ordre de mille kilomètres par heure à Paris, par exemple. Un calcul basé sur la vitesse  $\hat{u}$  aurait alors pour conséquence irrémédiable des erreurs d'arrondis importantes sur le calcul de la vitesse  $u$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous aborderons deux problèmes de conservation qui se posent quand on cherche à calculer des solutions approchées du système (3.1.1)-(3.1.2)

- **Conservation du moment inertiel** : il est clair, d'après l'écriture du système sous la forme (3.1.3)-(3.1.4), que la quantité  $h\hat{\mathbf{u}}$  doit être conservée tout au long du calcul. Cela reste évidemment vrai quand on considère le système écrit sous la forme (3.1.1)-(3.1.2) puisque les deux écritures sont équivalentes. Mais

cette conservation fait alors intervenir une compensation entre termes de flux et termes sources qui n'a rien d'évident au niveau discret.

- **Préservation de l'équilibre géostrophique** : si on fait abstraction de la force centrifuge dans le système (3.1.1)-(3.1.2) et que l'on considère une version linéarisée du système autour d'une vitesse nulle (nous précisons plus loin ce que nous entendons par là), les solutions stationnaires sont caractérisées par l'équilibre géostrophique

$$g\nabla h = -2\Omega \times \mathbf{u}. \quad (3.1.5)$$

Là encore, cet équilibre entre termes de flux et termes sources n'aura rien d'évident au niveau discret. On retrouve ici les problématiques déjà abordées au chapitre 1 pour les équilibres faisant intervenir le terme source de topographie.

Notons que les deux problèmes proviennent donc de la difficulté à discrétiser de manière coordonnée des termes de flux et des termes sources.

## 3.2 Conservation du moment inertiel

### 3.2.1 Dérivation du schéma

Considérons le système (3.1.1)-(3.1.2) écrit dans le référentiel tournant. Une discrétisation par une méthode de volumes finis s'écrit sous la forme générale (3.1.2)

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j F_{ij}^h, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q - \mathbf{C}_{1i}^n - \mathbf{C}_{2i}^n, \quad (3.2.2)$$

où  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  désignent respectivement une discrétisation du terme de Coriolis et du terme centrifuge, les autres notations reprenant celles des chapitres précédents. La conservation du moment inertiel s'écrit alors

$$\sum_i (\mathbf{q}_i^{n+1} + h_i^{n+1} \Omega \times \mathbf{x}_i) = R(\Delta t) \left[ \sum_i (\mathbf{q}_i^n + h_i^n \Omega \times \mathbf{x}_i) \right], \quad (3.2.3)$$

où  $R$  désigne la matrice de rotation associée au mouvement du domaine. En effet  $u$  désigne la vitesse dans le référentiel tournant,  $\Omega \times \mathbf{x}_i$  la vitesse du centre de la maille dans le référentiel inertiel, et leur somme est donc bien la vitesse mesurée dans le référentiel inertiel. Il faut appliquer la matrice de rotation car toutes nos grandeurs sont ici considérées dans le référentiel tournant. En insérant les relations de mise à jour (3.2.1)-(3.2.2) dans la relation de conservation (3.2.3), on obtient que les termes  $C_1$  et

$C_2$  doivent nécessairement vérifier la relation

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{1i}^n + \mathbf{C}_{2i}^n &= \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ &\quad + \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) h_i^n \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \left[ F_{ij}^h (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i) + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \right], \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

où  $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$  est un flux conservatif quelconque. Nous renvoyons le lecteur à [AKO09] pour le détail des calculs. Dans cette écriture, nous reconnaissons dans le deuxième terme du membre de droite une discrétisation centrée classique du terme centrifuge, avec un terme correctif en temps. Nous pouvons donc en conclure que, pour assurer la conservation du moment inertiel, le terme de Coriolis doit être discrétisé sous la forme

$$\{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}\}_i^n = \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \left[ F_{ij}^h (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i) + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \right]. \quad (3.2.5)$$

Cette discrétisation fait apparaître deux parties distinctes : une discrétisation centrée classique et une discrétisation non standard. La première partie est consistante avec la moitié du terme de Coriolis. Reste alors à déterminer le flux  $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$  pour que la deuxième partie soit bien consistante avec la deuxième moitié du terme de Coriolis. Pour identifier ce terme, nous allons suivre une stratégie qui inverse le processus habituel. En effet nous allons d'abord effectuer une discrétisation du système (3.1.3)-(3.1.4), écrit dans le référentiel inertiel, puis effectuer le changement de référentiel sur cette forme discrétisée. Ainsi, grâce à la première étape, nous aurons une formulation volumes finis naturellement conservative pour le moment inertiel, et, grâce à la deuxième étape, les inconnues du problème seront bien les variables d'intérêt, à savoir la vitesse dans le référentiel tournant. Nous ne présentons pas ici les détails des calculs, mais le schéma ainsi obtenu s'écrit

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j F_{ij}^h, \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{n+1} &= \mathbf{q}_i^n - h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i + h_i^n R(\Delta t) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i \\ &\quad - \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j (F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

où  $\mathbf{x}_{ij}$  désigne le point milieu de l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . Les corrections en temps apparaissant dans les expressions proviennent du fait que nous considérons des intégrations exactes pour les termes de rotation afin que l'ordre du schéma ne dépende finalement que du choix fait pour l'ordre des approximations des flux. Sur la deuxième ligne, on reconnaît la discrétisation classique de la moitié du terme de Coriolis et sur la troisième ligne le terme de flux habituel. La première et la quatrième ligne doivent donc fournir une approximation consistante avec la somme du terme centrifuge et de la moitié manquante du terme de Coriolis, sur laquelle nous allons revenir. Notons d'abord que la formulation (3.2.7) proposée assure bien la conservation du moment inertiel (3.2.3). En effet le schéma peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{n+1} + h_i^{n+1} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i &= R(\Delta t) (\mathbf{q}_i^n + h_i^n \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j (F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{ij}). \end{aligned}$$

Nous souhaitons maintenant identifier précisément les termes consistants avec la force centrifuge et la moitié manquante de la force de Coriolis. Pour cela, on écrit le schéma sous une troisième forme équivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{n+1} &= \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j \mathbf{F}_{ij}^q \\ &\quad - \Delta t \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|C_i|} \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \sum_j (F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i)) \\ &\quad + h_i^n \left( R(\Delta t) - \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i \\ &\quad + h_i^{n+1} \left( \frac{2}{\Omega \Delta t} \sin\left(\frac{\Omega \Delta t}{2}\right) R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - R(0) \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Il apparaît alors clairement que les deux derniers termes sont consistants avec la force centrifuge, au travers d'une discrétisation semi-implicite en temps. La moitié manquante du terme de Coriolis est donc représentée par le terme sur la troisième ligne du membre de droite. Ce terme s'écrit bien, à la correction en temps près, sous la forme

$$\frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j \left[ F_{ij}^h (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_i) + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \right],$$

que nous avons identifiée dans la relation (3.2.4). Sa consistance avec la force de Coriolis est démontrée dans [AKO09], où sont aussi fournis des résultats numériques illustrant la conservation du moment inertiel.

### 3.2.2 Effets de la discrétisation du terme de Coriolis

Dans la partie précédente, nous avons exhibé deux discrétisations différentes du terme de Coriolis, l'une basée sur une discrétisation centrée sur la cellule

$$-2\Delta t \, \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_i^n, \quad (3.2.9)$$

et l'autre basée sur l'utilisation du flux de masse

$$-2 \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_j [F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{ij})]. \quad (3.2.10)$$

Notons que, dans le cas où la cellule est un polygone régulier, le terme

$$F_{ij}^h \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{ij}),$$

est proportionnel au flux de masse mais tangent à l'interface. Nous avons donc choisi de parler de discrétisation *crosswind* pour le deuxième type de discrétisation.

Nous voudrions maintenant étudier plus avant les effets de la discrétisation choisie sur les résultats numériques. Nous négligeons donc dans la suite la force centrifuge et considérons uniquement la force de Coriolis. Nous considérons un maillage cartésien. Nous étudions d'abord un cas test numérique correspondant à un vortex stationnaire. Le champ de vitesse est donné par

$$\mathbf{u}(\theta, r) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta(r) \end{pmatrix}, \quad u_\theta(r) = \begin{cases} \alpha r & \text{if } r \leq R \\ \alpha(2R - r) & \text{if } R \leq r \leq 2R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (3.2.11)$$

et la hauteur d'eau est solution de l'équation

$$gh'(r) = \frac{u_\theta^2}{r} + 2\Omega u_\theta. \quad (3.2.12)$$

Sur la figure 3.2.1, nous représentons une coupe de la solution à un temps fixé. Il apparaît clairement qu'aucune des deux discrétisations ne préserve l'état stationnaire. Néanmoins la diffusion numérique est bien moins importante quand la discrétisation *crosswind* est utilisée. De plus, la discrétisation *crosswind* est également moins sensible à la distortion du maillage, voir les résultats numériques proposés dans [AKO09]. La même conclusion s'impose sur un autre cas test considéré dans la même publication et étudié auparavant dans [BLV04, KP97]. Il s'agit d'un cas test monodimensionnel d'ajustement géostrophique, i.e. un cas où la solution n'est pas à l'équilibre initialement et va donc *éjecter* des ondes en dehors du domaine et tendre en temps long vers l'équilibre géostrophique, qui, dans la version monodimensionnelle, s'écrit

$$gh'(x) = -2\Omega v, \quad u = 0, \quad (3.2.13)$$



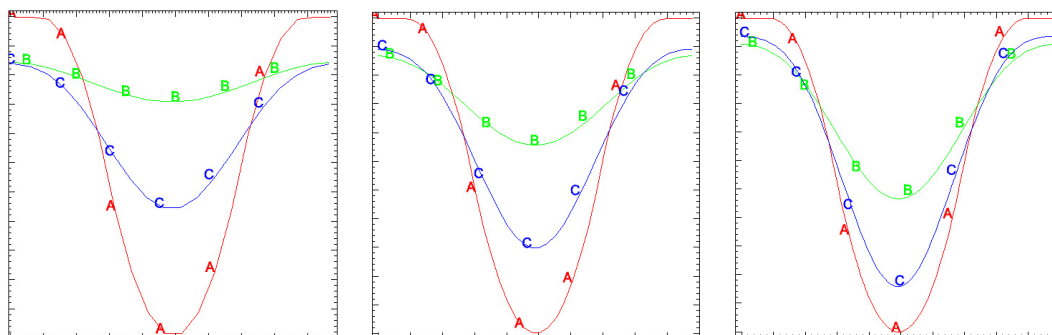


FIGURE 3.2.1 – Hauteur d’eau ; coupe le long de l’axe  $x = 0$  ; 20 (gauche), 40 (centre) et 80 (droite) points de discrétisation dans chaque direction ; solution stationnaire (courbe A), discrétisation centrée (courbe B) et discrétisation crosswind (courbe C)

où  $v$  désigne la vitesse transverse, i.e. dans la direction  $y$ . Sur la figure 3.2.2, nous présentons les profils de hauteur d’eau et de vitesse transverse en temps court, et sur la figure 3.2.3, les mêmes profils en temps long. En temps court, les solutions sont similaires, mais en temps long, les solutions obtenues avec la discrétisation *crosswind* sont une nouvelle fois beaucoup plus précises que celles obtenues avec la discrétisation classique.

Nous avons vu que la discrétisation *crosswind*, introduite dans le but d’assurer la conservation du moment angulaire, avait également un effet sur la qualité des solutions près des états stationnaires. C’est ce problème de la préservation des états stationnaires du système que nous allons aborder plus en détail dans la section suivante.

### 3.3 Équilibre géostrophique

Le système de Saint-Venant avec force de Coriolis s’écrit en variables adimensionnées

$$\text{St } \partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\text{St } \partial_t (h \mathbf{u}) + \nabla \cdot (h \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Fr}^2} \nabla \left( \frac{h^2}{2} \right) = -\frac{1}{\text{Ro}} h \mathbf{u}^\perp, \quad (3.3.2)$$

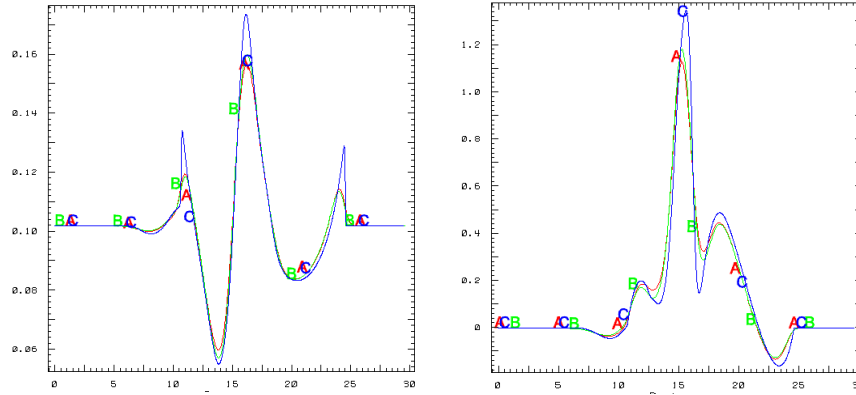


FIGURE 3.2.2 – Hauteur d'eau (gauche) et vitesse  $v$  (droite) en temps court ; discrétisation centrée (courbe A), discrétisation crosswind (courbe B) et solution de référence (courbe C)

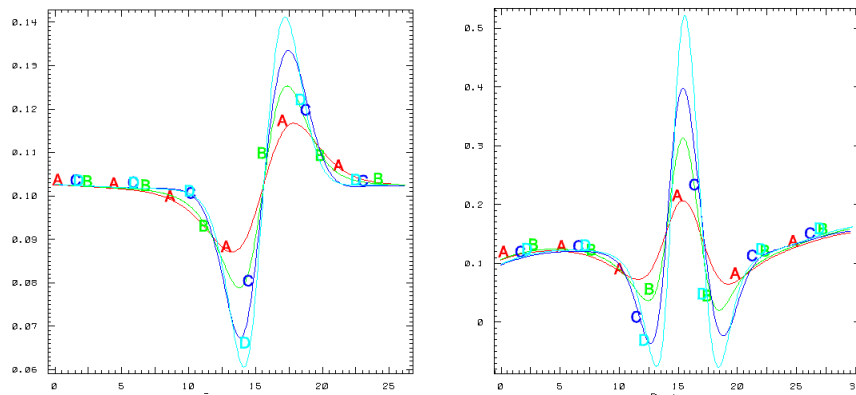


FIGURE 3.2.3 – Hauteur d'eau (gauche) et vitesse  $v$  (droite) en temps long ; discrétisation centrée (courbes A et B), discrétisation crosswind (courbes C et D) sur un maillage grossier (courbes A et C) et sur un maillage fin (courbes B et D)

où les nombres sans dimension  $\text{St}$ ,  $\text{Fr}$  and  $\text{Ro}$  désignent respectivement les nombres de Strouhal, de Froude et de Rossby définis par

$$\text{St} = \frac{L}{UT}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad \text{Ro} = \frac{U}{\Omega L},$$

où les constantes  $U$ ,  $H$ ,  $L$  et  $T$  désignent respectivement une vitesse, une hauteur, une longueur et un temps caractéristiques de l'écoulement considéré. Pour les écoulements océanographiques à grande échelle, des valeurs typiques de ces constantes sont

$$U \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad L \approx 10^6 \text{ m}, \quad H \approx 10^3 \text{ m}, \quad \Omega \approx 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

ce qui entraîne

$$\text{Ro} \approx \text{Fr} \approx 10^{-2}.$$

On se concentrera donc dans la suite sur des écoulements tels que

$$\text{Ro} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{et} \quad \text{Fr} = \mathcal{O}(\epsilon),$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre. Si on considère des temps longs, i.e. un nombre de Strouhal de l'ordre de 1, la hauteur d'eau est constante en première approximation, et, au premier ordre en  $\epsilon$ , le système vérifie l'égalité, avec  $r$  la déviation sur la hauteur d'eau

$$\nabla r = -\mathbf{u}^\perp, \tag{3.3.3}$$

qu'on désigne sous le nom d'équilibre géostrophique. Notons immédiatement que cette relation implique

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{3.3.4}$$

Pour des temps courts, i.e. pour un nombre de Strouhal de l'ordre de  $\epsilon^{-1}$ , le système de Saint-Venant avec force de Coriolis (3.3.1)-(3.3.2) se ramène en première approximation à l'équation des ondes avec force de Coriolis

$$\partial_t r + a_\star \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.3.5}$$

$$\partial_t \mathbf{u} + a_\star \nabla r = -\omega \mathbf{u}^\perp, \tag{3.3.6}$$

où  $a_\star$  désigne une vitesse d'advection et  $\omega$  une vitesse de rotation, toutes deux d'ordre 1, et dont les états stationnaires sont caractérisés par les relations (3.3.3) et (3.3.4). Dans la suite, nous montrons comment construire des schémas numériques pour calculer des solutions approchées du système (3.3.5)-(3.3.6) et qui préservent l'équilibre géostrophique (3.3.3)-(3.3.4). Notons que les versions monodimensionnelles des systèmes linéaire (3.3.5)-(3.3.6) et non-linéaire (3.3.1)-(3.3.2) partagent les mêmes états stationnaires, qui sont donnés par la version monodimensionnelle de l'équilibre géostrophique (3.2.13). Ce n'est pas le cas en deux dimensions d'espace, où l'équilibre géostrophique (3.3.3)-(3.3.4) n'est pas un état stationnaire du système de Saint-Venant avec force de

Coriolis (3.3.1)-(3.3.2). Néanmoins, dans la limite  $\epsilon \ll 1$ , le terme non-linéaire d'advection a un rôle faible et les solutions restent proches de l'équilibre géostrophique, qui conserve donc toute sa pertinence.

La question de la préservation des équilibres géostrophiques (3.2.13) pour le problème en une dimension d'espace a été abordée dans [BLV04, LMNK07, CLP08]. Le problème bidimensionnel est plus complexe et n'a, à notre connaissance, été étudié que dans deux proceedings. Dans [AKNV11], une tentative de généralisation bidimensionnelle de la méthode introduite dans [BLV04] s'est avérée insuffisante pour bien approcher les équilibres. Très récemment, . Par contre nous utiliserons plusieurs travaux dédiés au calcul approché de solutions pour le problème homogène en deux dimensions, i.e. pour les écoulements à faible nombre de Froude, en particulier [Del10b], voir aussi sur le même sujet [VK09, DOR10, Rie11, NBA<sup>+</sup>14, DLV17].

Nous n'aborderons pas en détail dans ce manuscrit le problème de la préservation des équilibres en une dimension d'espace. Pour ce travail préliminaire, nous renvoyons le lecteur aux articles [ADD<sup>+</sup>17, ADOP17]. Dans [ADOP17], nous montrons que la méthode introduite dans [BLV04] appliquée à l'équation des ondes (3.3.5)-(3.3.6), mais dans sa version monodimensionnelle, i.e. quand les inconnues ne dépendent que d'une variable d'espace, la vitesse conservant ses deux composantes, est stable en norme  $L^2$  sous une condition CFL qui n'est pas plus restrictive que les conditions CFL classiques de l'équation des ondes (sans terme de Coriolis) d'une part, et du problème de rotation (sans terme d'advection) d'autre part. Notons que la méthode proposée dans [BLV04] est une adaptation directe au terme source de Coriolis de la méthode de reconstruction hydrostatique développée pour la prise en compte du terme source de topographie, introduite dans [ABB<sup>+</sup>04] et décrite dans la section 1.2.3, et qui a pour effet d'annuler les termes de diffusion numérique dans l'équation de pression (dans une terminologie *ondes*, ou de hauteur d'eau, dans une terminologie *Saint-Venant*) quand la solution est à l'équilibre. Dans la suite, cette méthode sera ainsi appelée méthode de la topographie apparente, ou schéma AT. Dans [ADD<sup>+</sup>17], nous introduisons une autre technique, qui consiste simplement à annuler les termes de diffusion numérique sur l'équation de pression. Elle sera qualifiée de schéma *low Froude*, ou schéma LF, dans la suite de ce chapitre, par analogie avec une terminologie introduite dans [Del10b], où l'auteur proposait d'annuler les termes de diffusion sur l'équation en vitesse, cette fois, pour régler les problèmes rencontrés par les schémas de Godunov dans le traitement de l'équation des ondes bidimensionnelle à bas nombre de Froude sur maillage cartésien. Cette deuxième méthode donne des résultats similaires à la méthode de topographie apparente, avec tout de même une propriété supplémentaire de décroissance de l'énergie dans le cas semi-discret. Là encore, nous démontrons la stabilité  $L^2$  des solutions sous condition de CFL. Dans les deux cas, l'idée est donc de modifier la diffusion numérique des schémas volumes finis sur l'équation de pression afin que cette diffusion soit nulle si les solutions vérifient l'équilibre géostrophique (3.2.13). Ces deux méthodes ne seront

pas suffisantes, utilisées seules, pour résoudre le cas bidimensionnel, mais elles pourront fournir un des ingrédients des schémas proposés. Le problème vient du fait qu'en deux dimensions d'espace, il faut également modifier la diffusion sur l'équation en vitesse pour préserver les équilibres géostrophiques (3.3.3), ce qui n'était pas nécessaire en une dimension, puisque la vitesse  $u$  est nulle sur les équilibres monodimensionnels (3.2.13). Notons que c'était également le cas pour les équilibres du lac au repos, que ce soit en une ou deux dimensions d'espace, voir chapitre 1.

Nous considérons donc maintenant le système des ondes avec force de Coriolis en deux dimensions d'espace (3.3.5)-(3.3.6). La suite de ce chapitre reprend les idées proposées dans [ADOP18]. Nous nous plaçons sur des maillages cartésiens. Le schéma de Godunov classique s'écrit, dans sa version semi-discrete

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r_{i,j}(t) + a_\star \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ - \frac{\kappa_r a_\star}{2} \left( \frac{r_{i+1,j} - 2r_{i,j} + r_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{r_{i,j+1} - 2r_{i,j} + r_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\frac{d}{dt}u_{i,j}(t) + a_\star \left( \frac{r_{i+1,j} - r_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \frac{\kappa_u a_\star}{2} \left( \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x} \right) - \omega v_{i,j} = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\frac{d}{dt}v_{i,j}(t) + a_\star \left( \frac{r_{i,j+1} - r_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) - \frac{\kappa_v a_\star}{2} \left( \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y} \right) + \omega u_{i,j} = 0 \quad (3.3.9)$$

où les termes incluant des paramètres  $\kappa$  désignent des termes de diffusion numérique liés au décentrement des flux et qui assurent la stabilité de la méthode. Des calculs simples montrent que, pour le choix  $\kappa_r \neq 0$ , les équilibres discrets de ce schéma sont caractérisés par les relations

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad r_{ij} = c, \quad u_{ij} = v_{ij} = 0, \quad (3.3.10)$$

qui ne sont pas consistantes avec l'équilibre géostrophique (3.3.3). Dans le cas  $\kappa_r = 0$ , mais avec  $\kappa_u = \kappa_v \neq 0$ , c'est-à-dire une extension directe du schéma LF monodimensionnel évoqué plus haut, les états d'équilibre discrets s'écrivent

$$\forall j \quad \exists u_j \quad \forall i \quad u_{ij} = u_j, \quad \forall i \quad \exists v_i \quad \forall j \quad v_{ij} = v_i, \quad (3.3.11)$$

et

$$\forall (i, j) \quad a_\star \left( \frac{r_{i+1,j} - r_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{r_{i,j+1} - r_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) = -\omega \begin{pmatrix} -v_i \\ u_j \end{pmatrix}. \quad (3.3.12)$$

Cette fois, la relation (3.3.12) est bien consistante avec l'équilibre géostrophique (3.3.3), mais ce sont les contraintes (3.3.11) sur le champ de vitesse, qu'on peut interpréter comme une contrainte de divergence nulle direction par direction, qui posent problème. L'utilisation de la méthode de la topographie apparente décrite plus haut aura les mêmes effets puisqu'elle consiste également à travailler uniquement sur l'équation en

pression. Le choix  $\kappa_r = \kappa_u = \kappa_v = 0$  n'est quant à lui pas envisageable puisqu'il est bien connu dans les problèmes de propagation d'ondes qu'un schéma explicite totalement centré est instable. Un exemple numérique sur un cas test de vortex stationnaire similaire à celui introduit dans la section précédente (3.2.11)-(3.2.12), mais adapté à l'équation des ondes, permet d'illustrer ces comportements. On choisit donc comme condition initiale une solution qui vérifie l'équilibre géostrophique (3.3.3)

$$r(t=0, x, y) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{3x}{0.5} \right)^2 - \left( \frac{3y}{0.5} \right)^2 \right] \quad (3.3.13)$$

$$u(t=0, x, y) = -\frac{6y}{0.5} \exp \left[ - \left( \frac{3x}{0.5} \right)^2 - \left( \frac{3y}{0.5} \right)^2 \right] \quad (3.3.14)$$

$$v(t=0, x, y) = \frac{6x}{0.5} \exp \left[ - \left( \frac{3x}{0.5} \right)^2 - \left( \frac{3y}{0.5} \right)^2 \right], \quad (3.3.15)$$

et on représente sur la figure 3.3.1 les lignes de niveau et sur la figure 3.3.2 une coupe de la hauteur d'eau le long de l'axe  $y = 0$  au temps  $t = 10$  et sur une grille avec 50 points de discrétisation dans les deux directions. Il apparaît bien qu'aucune des stratégies considérées ne parvient à préserver un équilibre géostrophique, même si les résultats semblent moins mauvais avec la stratégie de correction sur l'équation en vitesse que sur l'équation en pression, phénomène sur lequel nous reviendrons plus loin.

Dans la lignée de ce qui a été fait pour le terme source de topographie dans le chapitre 1 de ce mémoire, la suite du travail présenté dans [ADOP18] a donc consisté à proposer des stratégies numériques à même de préserver des états d'équilibre discrets consistants avec l'équilibre géostrophique (3.3.3). L'idée directrice est de modifier la diffusion numérique à la fois sur les équations de pression et de vitesse, tout en préservant la stabilité du schéma ainsi construit. Il apparaît clairement dans les relations (3.3.7)-(3.3.9) que la diffusion numérique du schéma classique est consistante avec le terme

$$\Delta r, \quad (3.3.16)$$

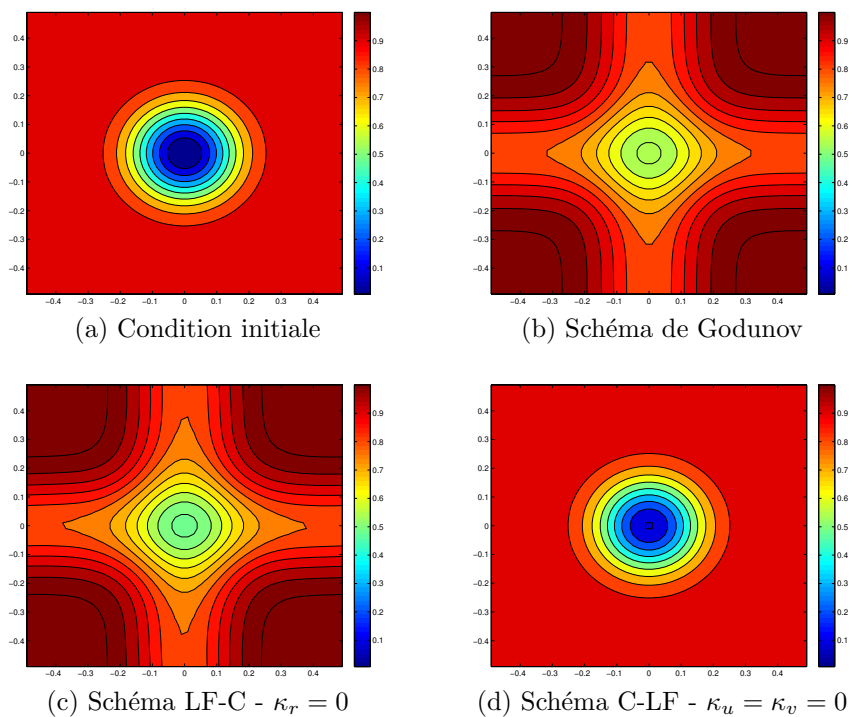
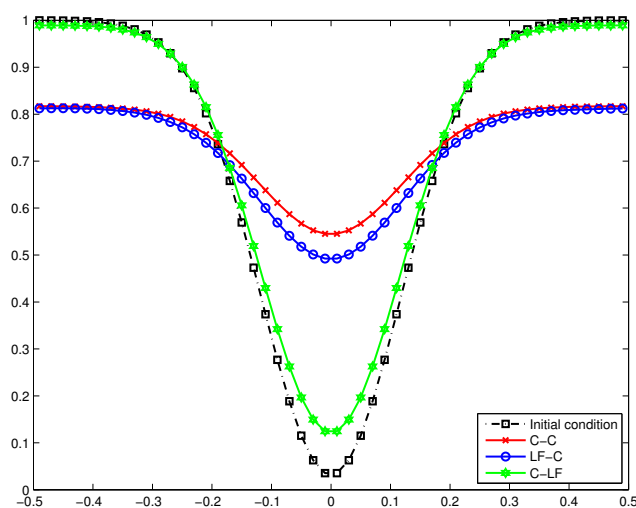
sur l'équation de pression et

$$(\partial_{xx}u, \partial_{yy}v)^T, \quad (3.3.17)$$

sur l'équation en vitesse. Les schémas que nous allons proposer s'appuient donc sur trois ingrédients parmi lesquels nous allons retrouver les deux méthodes introduites dans le cas monodimensionnel :

- la méthode de *topographie apparente* (AT), dans laquelle l'idée est de modifier la diffusion numérique sur l'équation en pression (3.3.16) pour y substituer un terme consistant avec

$$\nabla \cdot (\nabla r + \mathbf{u}^\perp); \quad (3.3.18)$$

FIGURE 3.3.1 – Lignes de niveau de la pression  $r$ FIGURE 3.3.2 – Coupe de la pression  $r$  le long de l'axe  $y = 0$  - C-C : schéma classique ; LF-C : Schéma avec correction sur la pression ; C-LF : schéma avec correction sur la vitesse

- la méthode dite *low Froude* (LF) qui consiste à annuler la diffusion sur l’une ou l’autre équation, en pression ou en vitesse ;
- la méthode qualifiée de *pénalisation par la divergence* (DP), qui consiste à modifier la diffusion numérique classique sur l’équation en vitesse (3.3.17) pour y substituer un terme consistant avec

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) . \quad (3.3.19)$$

Il est immédiat de vérifier que les trois méthodes proposées sont susceptibles de préserver les équilibres géostrophiques (3.3.3) puisque les termes de diffusion numériques sont construits pour s’annuler sur ces équilibres - rappelons en effet que la relation (3.3.3) a pour conséquence la relation (3.3.4). Reste maintenant à expliciter les schémas associés dans un cadre complètement discret et surtout à prouver leur stabilité. Dans la suite, nous qualifierons les schémas en mentionnant, dans l’ordre, la stratégie appliquée sur l’équation en pression, puis celle sur l’équation en vitesse. On parlera ainsi d’un schéma  $AT - LF$  ou d’un schéma  $LF - DP$ , ou encore d’un schéma  $AT - DP$ , ces trois types de schéma étant normalement à même de préserver les équilibres géostrophiques (3.3.3). Quand la diffusion numérique classique sera conservée sur l’une ou l’autre des équations, le schéma sera référencé par la lettre  $C$ , on parlera ainsi de schéma  $AT - C$ , par exemple.

Nous proposons dans [ADOP18] une étude la plus complète possible des trois schémas *équilibres* proposés dans le paragraphe précédent :

- étude des équations modifiées, avec les propriétés sur l’énergie et/ou sur l’évolution des modes de Fourier ainsi que l’étude des sous-espaces invariants, notamment le sous-espace orthogonal aux états d’équilibre ;
- étude des schémas semi-discrets, avec notamment deux versions des schémas, l’une basée sur une discrétisation des équilibres géostrophiques au centre des cellules, conforme à ce qui était proposé dans [Del10b], l’autre sur une discrétisation des équilibres géostrophiques sur les interfaces, plus proche de ce qui avait été proposé dans [BLV04], avec, à chaque fois, une étude des espaces invariants et des propriétés de stabilité, incluant l’étude des relations de dispersion des schémas ;
- étude des schémas totalement discrets, avec l’établissement des conditions CFL assurant la stabilité  $L^2$  pour l’ensemble des schémas introduits, au travers d’une étude à la Von Neumann, dépendant de la stratégie adoptée pour la discrétisation en temps, notamment du terme de Coriolis.

Nous ne mentionnerons pas ici l’ensemble des propriétés établies dans [ADOP18], ni l’ensemble des résultats numériques fournis, ne nous concentrant que sur le résultat central de stabilité  $L^2$  pour les schémas discrets, l’analyse d’un cas test numérique et les possibilités d’extension des méthodes proposées au problème non linéaire du système de Saint-Venant avec force de Coriolis (3.3.1)-(3.3.2).



Dans la version où les équilibres discrets sont écrits au centre des cellules, les schémas étudiés dans [ADOP18] s'écrivent sous la forme générale

$$\begin{cases} \frac{r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^n}{\Delta t} + a_* [\nabla_{2h}^c \cdot \mathbf{u}_h^n]_{i,j} - \nu_r \left[ \nabla_{2h}^c \cdot \left( \nabla_{2h}^c r_h^n + \frac{\omega}{a_*} \mathbf{u}_h^{n,\perp} \right) \right]_{i,j} = 0, \\ \frac{\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j}^n}{\Delta t} + a_* [\nabla_{2h}^c r_h^n]_{i,j} - \nu_u [\nabla_{2h}^c (\nabla_{2h}^c \cdot \mathbf{u}_h^n)]_{i,j} = -\omega \mathbf{u}_{i,j}^{\theta,\perp}. \end{cases} \quad (3.3.20)$$

Dans la version où les équilibres discrets sont écrits aux interfaces, les schémas s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^n}{\Delta t} + a_* f_h^c [\nabla_h^v \cdot \mathbf{u}_h^n]_{i,j} - \nu_r \nabla_h^c \cdot \left[ \nabla_h^v r_h^n + \omega f_h^v (\mathbf{u}_h^n)^\perp \right]_{i,j} = 0, \\ \frac{\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j}^n}{\Delta t} + a_* f_h^c [\nabla_h^v r_h^n]_{i,j} - \nu_u \nabla_h^c [\nabla_h^v \cdot \mathbf{u}_h^n]_{i,j} = -\omega f_h^c [f_h^v (\mathbf{u}_h^n)^\perp]_{i,j}, \end{cases} \quad (3.3.21)$$

où les opérateurs différentiels discrets sont définis au centre des cellules s'ils sont indexés par  $c$  et au sommet du maillage s'ils sont indexés par  $v$ ,  $f_h^c$  et  $f_h^v$  désignant des opérateurs de moyenne, respectivement au centre et au sommet. L'ensemble des opérateurs différentiels discrets vérifient des propriétés mimétiques qui sont détaillées dans [ADOP18], voir aussi [TC12] sur l'importance de ces propriétés en termes de stabilité. Le choix des paramètres  $\nu_r$  et  $\nu_u$  permet de décrire l'ensemble des schémas introduits plus haut. Par exemple, le schéma  $LF - DP$ , qui consiste donc à annuler la diffusion numérique sur l'équation en pression et à utiliser une diffusion numérique modifiée sur l'équation en vitesse, construite sur la divergence de cette même vitesse, correspond au choix  $\nu_r = 0$  et  $\nu_u = 1$ . Le paramètre  $\theta$  fait référence à la discrétisation en temps du terme de Coriolis, les opérateurs d'advection et de diffusion étant choisis explicites, comme c'est le plus souvent le cas pour les problèmes hyperboliques, voir les chapitres précédents. Le choix  $\theta = 0$  correspond à une implication totale, le choix  $\theta = 1$  à une explicitation complète, qui est connue pour être instable, voir par exemple [CLP08]. Dans notre travail  $\theta = (\theta_u, \theta_v)$  est un vecteur car la stratégie en temps peut être différente sur les deux équations en vitesse. Cela présente notamment l'intérêt de pouvoir écrire des schémas semi-implicites qui peuvent en pratique être mis à jour explicitement, par exemple avec le choix  $(\theta_u = 0, \theta_v = 1)$ , même dans le cas où le terme de Coriolis est calculé à partir de la moyenne de la solution sur plusieurs cellules, comme dans le cas des schémas avec équilibres aux interfaces (3.3.21). Nous démontrons dans [ADOP18] que la stabilité  $L^2$  impose de manière générale  $\theta_u + \theta_v \leq 1$ .

Parmi tous les choix possibles, le schéma  $LF - DP$  est celui pour lequel il est possible de démontrer le maximum de résultats de stabilité, dans le cadre le plus général. On peut ainsi démontrer la décroissance de l'énergie pour le schéma semi-discret. Surtout, il est possible d'exhiber une condition CFL assurant la stabilité  $L^2$  du schéma totalement discret, valable à la fois pour les variantes construites sur la discrétisation des équilibres au centre des cellules (3.3.20) et aux interfaces (3.3.21) mais aussi quelle que soit la

discrétisation en temps choisie pour le terme de Coriolis. La condition CFL, obtenue, comme on l'a déjà dit, grâce à une analyse à la *Von Neumann*, s'écrit

$$\Delta t \leq \min\{\Delta t_a, \Delta t_b\} \quad \text{avec} \quad \Delta t_a := \frac{\kappa_u h}{2a_*} \quad \text{et} \quad \Delta t_b := \frac{2}{\omega|\theta_v - \theta_u|}.$$

On reconnaît dans  $\Delta t_a$  la contrainte classique sur le pas de temps pour des problèmes d'advection pure, voir par exemple [Del10b], et dans  $\Delta t_b$  la contrainte classique dans des problèmes de rotation pure, voir [CLP08]. La présence conjointe des deux effets n'a donc pas d'impact négatif sur la condition CFL obtenue. Il apparaît que le choix  $\theta_u = \theta_v$  rend la condition CFL indépendante du terme de Coriolis. Notons que la condition obtenue ici pour le cas bidimensionnel n'est pas optimale, au sens où elle est simplement suffisante pour assurer la stabilité, contrairement au résultat que nous avons obtenu en une dimension d'espace, voir [ADD<sup>+</sup>17]. Pour les autres schémas, la condition CFL est généralement plus compliquée et plus restrictive, tout en restant dans les mêmes ordres de grandeur. Surtout, elle est obtenue pour les choix particuliers de discrétisation temporelle du terme de Coriolis les plus couramment effectués, à savoir l'implication totale  $\theta_u = \theta_v = 0$ , la variante point milieu  $\theta_u = \theta_v = 1/2$  et la semi-implication ( $\theta_u = 0, \theta_v = 1$ ) ou ( $\theta_u = 1, \theta_v = 0$ ).

Le cas test numérique que nous présentons ici a pour condition initiale un fluide au repos présentant en son centre une colonne d'eau circulaire qu'on laisse s'écrouler à l'instant initial. On pourrait ainsi parler de rupture de barrage circulaire. Le phénomène va générer des ondes qui vont sortir du domaine et le fluide va tendre en temps long vers un état d'équilibre du schéma considéré, qu'on souhaite consistant avec l'équilibre géostrophique (3.3.3) construit sur la projection orthogonale de la solution initiale sur l'ensemble de ces équilibres. Il apparaît dans la figure 3.3.3 que les résultats en temps long sont très différents suivant le type de schémas considéré, selon qu'ils sont consistants ou non avec l'équilibre géostrophique. On retrouve ainsi pour le schéma classique une solution presque constante, consistante avec les états d'équilibre (3.3.10) et pour le schéma avec la méthode de topographie apparente utilisée seule,  $AT - C$ , une solution *par bande*, i.e. où les composantes de la vitesse sont quasi constantes dans une direction, conformément aux équilibres (3.3.11). Seuls les schémas avec corrections à la fois sur l'équation en pression et sur l'équation en vitesse, ici le schéma  $AT - DP$ , sont à même de converger vers une solution consistante avec l'équilibre géostrophique (3.3.3). Une coupe des résultats sur la hauteur d'eau le long de l'axe  $y = 0$ , voir figure 3.3.4, montre que, parmi les schémas qui ne préservent pas les équilibres, le schéma  $AT - C$  avec la méthode de topographie apparente utilisée seule donne de meilleurs résultats que le schéma  $C - DP$  avec seulement une correction par une pénalisation sur la divergence. Ce résultat conduit donc à des conclusions à l'opposé de ce qui avait été observé dans la figure 3.3.2 sur le vortex stationnaire et montre donc que seuls les schémas équilibres peuvent donner des résultats satisfaisants sur l'ensemble des situations. Notons également que les trois schémas équilibres convergent vers la même solution en

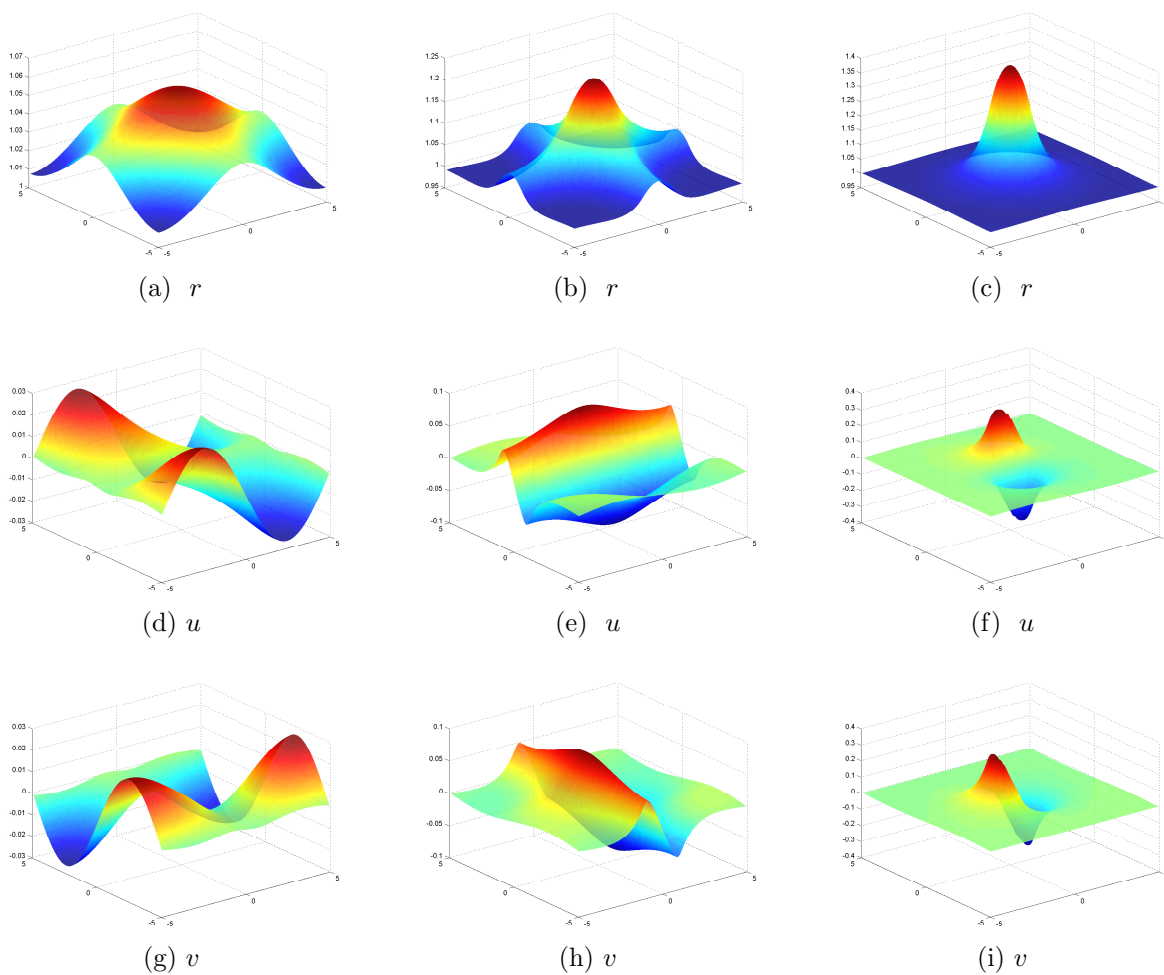


FIGURE 3.3.3 – Hauteur d'eau et vitesses en temps long  $t = 100$  - schéma classique (à gauche), schéma AT-C (au centre) et schéma AT-DP (à droite)

temps long, mais présentent des divergences sur la partie transitoire, comme indiqué dans les résultats fournis dans [ADOP18].

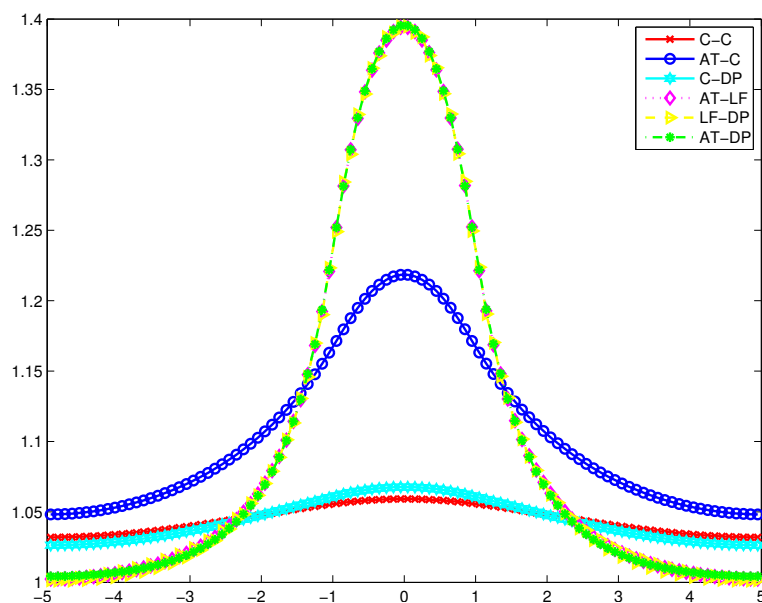


FIGURE 3.3.4 – Hauteur d'eau en temps long  $t = 100$  - Coupe le long de l'axe  $y = 0$

La perspective de ce travail est d'utiliser ces résultats pour construire des schémas équilibres pour le système de Saint-Venant avec force de Coriolis (3.3.1)-(3.3.2). Rappelons pour commencer que les états stationnaires du système (3.3.1)-(3.3.2) ne sont qu'au premier ordre les équilibres géostrophiques (3.3.3) puisque le terme d'advection non linéaire n'est pas nul, mais simplement d'un ordre inférieur. La situation est donc similaire à ce qu'on pourrait attendre d'un schéma préservant les équilibres au repos, le terme source considéré ici n'étant plus lié à la force de Coriolis, mais à la présence de la topographie, tel que décrit dans le chapitre 1 quand on l'applique à une situation d'écoulement à faible nombre de Froude, situations pour lesquelles l'utilisation de schémas équilibres apporte des gains de précision considérables, voir par exemple [Bou04a, ACU15]. L'extension du schéma  $AT - DP$  présenté plus haut promet donc des apports intéressants. Notons à ce propos que la méthode de la topographie apparente à la base des schémas de type  $AT$  étant elle-même inspirée de la méthode de reconstruction hydrostatique présentée dans le chapitre 1 pour la prise en compte des termes sources de topographie, il est immédiat de coupler les deux méthodes pour construire des schémas adaptés à la présence simultanée du terme source de topographie et de la force de Coriolis, telle que rencontrée dans les applications en océanographie. Pour les schémas utilisant la modification *low Froude*, i.e. l'annulation du terme de diffusion numérique sur une des équations, l'extension sera moins directe et il sera probablement nécessaire d'apporter une modification car il a été montré dans [Del10b]

que l'extension de ce type de schéma à l'équation des ondes avec un terme d'advection n'était pas possible directement pour des questions de stabilité. Une solution proposée dans [Del10b], voir aussi [DJOR16] pour l'application aux équations d'Euler, est de construire des schémas *all Froude*, où le terme de diffusion numérique est conservé, mais où le coefficient de diffusion est pris proportionnel au nombre de Froude local, ce qui assure une très bonne précision pour les écoulements à bas Froude, tout en permettant de recouvrer la stabilité du schéma.

# Chapitre 4

## Équations primitives

Ce chapitre est consacré à la simulation numérique des équations primitives de l’océan, i.e. les équations d’Euler, ou de Navier-Stokes, à surface libre, incompressibles et hydrostatiques. En effet, le système de Saint-Venant étudié dans les trois chapitres précédents, et bien que très utilisé pour de nombreuses applications, n’est pas adapté pour des écoulements où les variations verticales, de la vitesse ou de la densité, sont significatives. Tout au long de ce chapitre, nous allons donc présenter les travaux récents effectués autour d’un modèle hyperbolique à plusieurs vitesses (également appelé multi-couche), introduit dans [ABPSM11b], voir aussi [ABPSM11a] pour la prise en compte des variations de densité, et qui constitue une semi-discrétisation, dans la direction verticale, des équations primitives. Ces travaux ont fait suite à une première série de travaux sur un autre modèle à plusieurs vitesses introduits dans [Aud05]. Ils se sont prolongés dans plusieurs publications, jusqu’à deux travaux récents, l’un autour de l’étude des propriétés entropiques d’un schéma cinétique pour ce modèle [ABSM17], l’autre autour de l’analyse et la résolution du problème de Riemann pour le cas à deux vitesses [AAGP17]. Nous mentionnerons en fin de chapitre deux travaux qui font un lien entre ce chapitre et les deux précédents, l’un à propos de l’utilisation des modèles à plusieurs vitesses pour des problèmes de transport sédimentaire [ABS<sup>+</sup>14], l’autre traitant de la dérivation de conditions de transmission pour des problèmes de décomposition de domaine pour les équations primitives avec force de Coriolis [ADM10]. L’ensemble de ces travaux a donné lieu à la publication de huit articles dans des revues internationales. Deux publications sont en cours de revue.

Dans la conclusion de ce mémoire, nous évoquerons plusieurs extensions possibles de ces travaux, dans différentes directions : utilisation des modèles à plusieurs vitesses pour les écoulements à densité variable et/ou sans l’hypothèse de pression hydrostatique, mais aussi discrétisation directe des équations de Navier-Stokes à surface libre par des méthodes éléments finis et travaux autour de modèles simplifiés de houle, linéaires ou non.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont en grande partie été effectués dans le

cadre d'une collaboration régulière avec les membres de l'équipe-projet ANGE (INRIA-CEREMA-UPMC-CNRS). Mais deux aspects ont également donné lieu à des collaborations avec des membres du LAGA (Laboratoire de Géométrie, Analyse et Applications, Université Paris Nord), notamment dans le cadre du post-doctorat de P. Dreyfuss, en 2008-2009, et de la thèse de S. Sari, soutenue en 2013.

Audusse E. ; *A multilayer Saint-Venant System : Derivation and Numerical Validation*. Discrete Contin. Dyn. Syst.-(B), Vol. 5 (2005), 189-214.

Audusse, E. & Bristeau, M.O. ; *Finite volume solvers for a multilayer Saint-Venant system*. Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 17 (2007), 311-320.

Audusse, E. ; Bristeau, M. O. & Decoene, A. ; *Numerical simulations of 3D free surface flows by a multilayer Saint-Venant model*. Internat. J. Numer. Methods Fluids 56 (2008), no. 3, 331-350.

Audusse, E. ; Dreyfuss, P. & Merlet, B. ; *Optimized Schwarz waveform relaxation for the primitive equations of the ocean*. SIAM J. Sci. Comput. 32 (2010), no. 5, 2908-2936.

Audusse, E. ; Bristeau, M.O. ; Perthame, B. & Sainte-Marie, J. ; *A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for shallow water flows. Derivation and numerical validation*. ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 45 (2011), no. 1, 169-200.

Audusse, E. ; Bristeau, M.-O. ; Pelanti, M. & Sainte-Marie, J. *Approximation of the hydrostatic Navier-Stokes system for density stratified flows by a multilayer model : kinetic interpretation and numerical solution*. J. Comput. Phys. 230 (2011), no. 9, 3453-3478.

Audusse, E. ; Benkhaldoun, F. ; Sainte-Marie, J. & Seaid, M. ; *Multilayer Saint-Venant equations over movable beds*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 15 (2011), no. 4, 917-934.

Audusse, E. ; Benkhaldoun, F. ; Sari, S. ; Seaid, M. & Tassi, P. ; *A fast finite volume solver for multi-layered shallow water flows with mass exchange*. J. Comput. Phys. 272 (2014), 23-45.

Audusse E. ; Bristeau M.O. & Sainte-Marie J. ; *Kinetic entropy for layer-averaged hydrostatic Navier-Stokes equations*. 2017. HAL Id : hal-01583511

Aguillon N. ; Audusse, E. ; Godlewski E. & Parisot M. ; *Analysis of the Riemann Problem for a shallow water model with two velocities*. 2017. HAL Id : hal-01618722v2

## 4.1 Équations primitives et modèles à plusieurs vitesses

### 4.1.1 Équations primitives

Les équations primitives de l'océan s'écrivent en une dimension horizontale d'espace et pour une densité constante

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad (4.1.3)$$

posées sur le domaine

$$t > t_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad b(x) \leq z \leq \eta(x, t),$$

où, comme dans les chapitres précédents,  $\eta(t, x)$  désigne l'altitude de la surface libre de l'écoulement,  $b(x)$  la topographie du bassin, et  $p$  et  $\mathbf{u} = (u, w)^T$  respectivement la pression et la vitesse en chaque point de l'écoulement. La hauteur d'eau n'apparaît pas directement mais se calcule aisément par la formule  $h = \eta - b$ . Les conditions limites à la surface libre et au fond du bassin sont des conditions de type cinématique. Pour la surface, on obtient

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = 0, \quad (4.1.4)$$

et, sur le fond du bassin, puisque la topographie est indépendante du temps, la condition se simplifie et devient

$$u_b \frac{\partial b}{\partial x} - w_b = 0, \quad (4.1.5)$$

Il est possible de définir une énergie mécanique associée aux solutions de ces équations

$$E(t, x, z) = \frac{u^2}{2} + gz. \quad (4.1.6)$$

Pour les solutions régulières des équations (4.1.1)-(4.1.3), on montre facilement l'égalité suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta E \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u(E + p) \, dz = 0, \quad (4.1.7)$$

qui devient une inégalité pour les solutions discontinues, l'énergie ne pouvant que décroître à travers les chocs admissibles. Pour ne pas alourdir les notations, nous ferons ici tous les calculs sur une seule dimension horizontale, mais les résultats pourront être généralisés en ajoutant la direction  $y$ . Un résultat, en fin de chapitre, mentionnera



explicitement le cas où la vitesse est bidimensionnelle. Les équations primitives sont utilisées dans de nombreux codes de simulation océaniques, aux échelles globale ou régionale, par exemple les logiciels NEMO ou CROCO, voir [SM05, Mad08] pour une description précise des modèles et algorithmes utilisés, basés principalement sur une approche différences finies. De nombreux travaux ont également été dédiés à l'étude théorique des équations primitives, voir par exemple [Gre99, AG01, HTZ03, LPR10].

Il est possible de combiner la contrainte de divergence nulle (4.1.1) avec les conditions cinématiques (4.1.4) et (4.1.5) pour déduire une nouvelle équation d'évolution, dite de conservation de la masse, portant cette fois sur la hauteur d'eau, écrite sous forme conservative et ne faisant intervenir que la composante horizontale de la vitesse

$$\partial_t h + \int_b^\eta u(t, x, z) dz = 0$$

C'est cette équation, plutôt que l'évolution de la surface libre (4.1.4), qui est utilisée dans la plupart des méthodes numériques dédiées aux équations primitives, par exemple [CC92] et que nous utiliserons également dans la suite. D'autre part, la relation (4.1.3) permet d'écrire la pression dans l'écoulement comme une fonction de la surface libre  $\eta$  (on suppose la pression atmosphérique constante) et les relations (4.1.1) et (4.1.5) permettent d'écrire la vitesse verticale  $w$  comme une fonction de la vitesse horizontale  $u$ . On peut donc considérer que les deux seules inconnues du problème sont l'altitude de la surface libre  $\eta(t, x)$ , ou, de manière équivalente, la hauteur d'eau  $h(t, x)$ , et la vitesse horizontale  $u(t, x, z)$ . On retrouve ici une forte analogie avec le système de Saint-Venant, même si maintenant, la vitesse  $u$  dépend explicitement de la variable verticale, analogie que nous utilisons dans le présent chapitre pour proposer une nouvelle méthode numérique pour le calcul de solutions approchées des équations primitives.

### 4.1.2 Les modèles à plusieurs vitesses

Dans ce chapitre, nous présentons des modèles à plusieurs vitesses qui constituent une semi-discrétisation, selon la verticale, des équations primitives (4.1.1)-(4.1.3). L'intérêt de ces modèles est essentiellement guidé par la simulation numérique. En effet, ils présentent, comme nous allons le voir, une structure similaire à celle du système de Saint-Venant, déjà largement étudié dans ce mémoire, et permettent donc de généraliser un certain nombre de stratégies numériques développées dans ce cadre. Nous consacrons donc une large place au développement de schémas numériques pour ces modèles à plusieurs vitesses, mais nous présenterons également quelques résultats d'analyse des modèles, notamment sur leur hyperbolicité. Précisons tout de suite que les modèles étudiés ici, même s'ils présentent de fortes similarités, à la fois dans la terminologie employée et dans la structure apparente des équations, sont très différents des

modèles de Saint-Venant multicouches étudiés dans [CMP01, CDGRGV<sup>+</sup>07, BMdL08, BZ10, FNCDP11, Mon15, Duc16]. Ces derniers sont en effet destinés à modéliser des écoulements faisant intervenir plusieurs fluides non-miscibles superposés. La définition des couches a donc ici une origine physique, contrairement aux modèles que nous allons étudier, où les couches constituent une discrétisation numérique. Les propriétés des modèles, notamment en termes d'hyperbolicité, sont très différentes.

L'idée directrice est de définir des interfaces de la forme  $z = f_\alpha(t, x)$ , où la suite de fonctions  $(f_\alpha)_{\alpha=0\dots N}$  peut être donnée *a priori* ou au contraire être une inconnue du problème, mais à qui on impose d'être strictement ordonnée, au sens où

$$\forall(t, x) \quad \forall \alpha \quad f_\alpha(t, x) \leq f_{\alpha+1}(t, x),$$

et de coïncider avec les interfaces physiques au fond du bassin et à la surface libre

$$f_0(t, x) = b(x), \quad f_N(t, x) = \eta(t, x).$$

Ces interfaces définissent des *couches de fluide* comprises entre deux interfaces successives, couches qui seront notées  $(L_\alpha)_{\alpha=1\dots N}$ , et dont l'épaisseur sera notée  $h_\alpha$ . On peut procéder à une discrétisation de type éléments finis  $P_0$  sur la verticale pour toutes les quantités dépendant explicitement de la variable  $z$ , ici la vitesse horizontale, mais aussi par exemple la densité si on traite des problèmes à densité variable, pour obtenir

$$u(t, x, z) = \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha(t, x) \mathbb{1}_{L_\alpha(t, x)}(z).$$

Ensuite, on écrit une formulation faible des équations (4.1.1)-(4.1.2) dans cette base, pour obtenir un modèle à  $2N$  équations sur les inconnues  $h_\alpha(t, x)$  et  $u_\alpha(t, x)$ , qui s'écrit

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial x} = G_{\alpha+1/2} - G_{\alpha-1/2}, \quad (4.1.8)$$

$$\frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h_\alpha u_\alpha^2 + \frac{g}{2} h_\alpha^3 \right) = -g h_\alpha \frac{\partial b}{\partial x} + u_{\alpha+1/2} G_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2} G_{\alpha-1/2}, \quad (4.1.9)$$

où les quantités  $G_{\alpha+1/2}$  désignent des termes d'échange de masse entre deux couches voisines et doivent donc respecter les contraintes suivantes, au fond du bassin et à la surface libre

$$G_{1/2} = G_{N+1/2} = 0.$$

Le modèle présente de fortes similarités avec le système de Saint-Venant. Mais il n'est clairement pas fermé puisqu'il comporte  $2N$  équations pour  $4N - 2$  inconnues, à savoir les épaisseurs de couche  $h_\alpha$ , les vitesses  $u_\alpha$ , les termes d'échange  $G_{\alpha+1/2}$  et les vitesses

d'interface  $u_{\alpha+1/2}$ . Trois fermetures différentes ont été proposées. Dans un travail effectué durant ma thèse [Aud05], nous avons imposé

$$\forall \alpha = 1, \dots, N-1 \quad G_{\alpha+1/2}(t, x) = 0.$$

Le modèle ainsi obtenu a une structure très proche des modèles non-miscibles du type [CMP01] évoqués plus haut. Il présente l'inconvénient majeur de ne pas être hyperbolique. Il a pu néanmoins être utilisé pour des premières simulations numériques dans [AB07, ABD08]. Une deuxième fermeture possible, proposée dans [Ram11], consiste à imposer

$$\forall \alpha = 1, \dots, N-1 \quad f_\alpha(t, x) = C_\alpha \in \mathbb{R},$$

ce qui revient à imposer des interfaces horizontales et des couches d'épaisseur  $h_\alpha$  constante en temps et en espace. Les inconnues du modèle sont alors les  $N$  vitesses, les  $N-1$  termes d'échange de masse et l'épaisseur de la couche de surface. Ce modèle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir prendre en compte de grandes variations sur la surface libre, puisque l'épaisseur de la couche de surface pourrait alors devenir très grande, ce qui se paierait en termes de précision, ou même négative, ce que le modèle ne peut accepter. Il reste néanmoins potentiellement adapté à des écoulements océaniques classiques, mais n'a, à notre connaissance, jamais été utilisé en pratique. La troisième fermeture possible, introduite dans [ABPSM11b] et sur laquelle nous allons travailler ici, consiste à définir l'épaisseur de chacune des couches comme une portion, fixe, de la profondeur d'eau totale  $h$ . Les trois possibilités évoquées ici renvoient à trois choix de discrétisation verticale bien connus en océanographie numérique. Nous avons déjà dit que le premier choix, où le flux à travers les interfaces est supposé nul, renvoie aux modèles pour fluides non-miscibles de densités différentes, et, par là, aux coordonnées dites isopycnales, qui suivent les stratifications de densité, introduites dans [BB86]. Le deuxième, où les interfaces sont horizontales, correspond aux coordonnées dites  $z$ , premier type de discrétisation à avoir été utilisé en océanographie [Bry69]. Le troisième choix, que nous privilégions ici et qui définit des couches proportionnelles à la hauteur d'eau, correspond aux coordonnées dites  $\sigma$  introduites dans [BM87].

Détaillons maintenant la structure du modèle multivitesse [ABPSM11b]. L'épaisseur des couches étant proportionnelle à la hauteur d'eau totale, on définit donc des coefficients  $l_\alpha$  tels que

$$\sum_{\alpha=1}^N l_\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall \alpha = 1, \dots, N \quad l_\alpha \in ]0, 1],$$

et on pose

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad h_\alpha(t, x) = l_\alpha h(t, x). \quad (4.1.10)$$

On somme alors les équations (4.1.8) pour obtenir une équation de conservation globale

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial x} = 0, \quad (4.1.11)$$

portant sur la même inconnue que le système de Saint-Venant classique. De plus, les équations (4.1.9) se réécrivent alors

$$l_\alpha \frac{\partial h u_\alpha}{\partial t} + l_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( h u_\alpha^2 + \frac{g h^2}{2} \right) = -g l_\alpha h \frac{\partial b}{\partial x} + u_{\alpha+1/2} G_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2} G_{\alpha-1/2}, \quad (4.1.12)$$

et la structure du membre de gauche, ainsi que celle du terme source de topographie, sont identiques à celle des équations de Saint-Venant. Une somme partielle sur les couches  $L_1$  à  $L_\alpha$  des équations (4.1.8) permet enfin une définition des termes d'échange  $G_{\alpha+1/2}$  par

$$G_{\alpha+1/2} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \left( \frac{\partial h_\beta}{\partial t} + \frac{\partial h_\beta u_\beta}{\partial x} \right), \quad (4.1.13)$$

ce qui s'écrit maintenant, compte tenu de (4.1.10)

$$G_{\alpha+1/2} = \left( \sum_{\beta=1}^{\alpha} l_\beta \right) \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} l_\beta \frac{\partial h u_\beta}{\partial x}, \quad (4.1.14)$$

soit encore, en utilisant (4.1.11)

$$G_{\alpha+1/2} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} l_\beta \left( \frac{\partial h u_\beta}{\partial x} - \sum_{\gamma=1}^N l_\gamma \frac{\partial h u_\gamma}{\partial x} \right). \quad (4.1.15)$$

Il reste à définir les vitesses d'interface  $u_{\alpha+1/2}$ . Pour des raisons de stabilité qui seront précisées plus tard, on privilégiera souvent dans la suite une définition décentrée

$$u_{\alpha+1/2} = \begin{cases} u_\alpha & \text{if } G_{\alpha+1/2} \leq 0 \\ u_{\alpha+1} & \text{if } G_{\alpha+1/2} > 0 \end{cases} \quad (4.1.16)$$

mais d'autres définitions, locales ou non, sont possibles. On peut donc ne conserver comme inconnues principales que les vitesses  $u_\alpha$  et la hauteur d'eau  $h$  et considérer le système composé des  $N + 1$  équations (4.1.11)-(4.1.12), avec la définition (4.1.14) ou (4.1.15) pour les termes d'échange. On peut montrer, voir [ABSM17], que le modèle ainsi obtenu satisfait une inégalité d'énergie qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha \left( E_\alpha + \frac{g h}{2} h_\alpha \right) \right) = - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \frac{1}{2} (u_{\alpha+1} - u_\alpha)^2 |G_{\alpha+1/2}|, \quad (4.1.17)$$

où l'énergie est définie par

$$E_\alpha = h_\alpha \frac{u_\alpha^2}{2} + h_\alpha g \left( \frac{h}{2} + z_b \right). \quad (4.1.18)$$

On peut rapprocher cette inégalité d'énergie de la relation (4.1.7) obtenue pour l'énergie associée aux équations d'Euler hydrostatique. On en déduit que le processus de discrétisation selon la verticale, associé à la définition décentrée des vitesses à l'interface (4.1.16), introduit une diffusion numérique proportionnelle au terme décharge de masse. Notons que l'énergie (4.1.18) n'est pas l'énergie moyenne sur la couche  $L_\alpha$ . En effet, l'énergie cinétique est bien définie sur chaque couche, mais l'énergie potentielle n'a de sens que globalement puisque le modèle ne contient qu'une équation de conservation de la masse globale. Dans [FNKCR14], une extension de ce modèle pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques a été introduite. Dans [ABPSM11a], nous avons étudié le cas à densité variable, sur lequel nous reviendrons dans la conclusion du mémoire. Notons également que la méthode a été étendue à la simulation des écoulements dans les artères [GFL17].

Dans [ABPSM11b], voir aussi le mémoire d'habilitation [SM10], profitant de l'analogie évidente entre le système à plusieurs vitesses (4.1.11)-(4.1.12) et le système de Saint-Venant (1.1.1)-(1.1.2), nous avons proposé une discrétisation numérique du système (4.1.11)-(4.1.12), basée sur une extension des schémas cinétiques, décrits dans la section 1.2.2, et de la reconstruction hydrostatique, décrite dans la section 1.2.3. De nombreux résultats numériques ont également été proposés, incluant des recirculations en bassin fermé sous l'effet d'un vent en surface et des écoulements cisailés par l'introduction d'un terme de friction sur le fond du bassin, phénomènes évidemment impossibles à modéliser avec le système de Saint-Venant classique. Sur les figures 4.1.1 et 4.1.2 sont représentés les résultats correspondant à une recirculation sous l'effet du vent, avec, respectivement, le champ de vitesse, où la composante verticale de la vitesse, qui n'est pas une inconnue du modèle, est obtenue par postprocessing, le profil vertical de la vitesse horizontale en milieu de bassin pour différents nombres de couches, avec comparaison à une solution analytique sur un bassin supposé infini, et une courbe de convergence, relative à ce profil vertical, fonction du nombre de couches utilisées. Le modèle et le schéma numérique ont également été validés par des comparaisons avec des solutions analytiques des équations d'Euler hydrostatiques, notamment celles obtenues dans [BBSM13]. Il est à la base du code Freshkiss, développé par l'équipe ANGE, voir [ABF<sup>+</sup>17]. Un autre type de schéma numérique, introduit dans [BS10] et basé sur une décomposition entre les processus d'advection et les autres phénomènes, a été utilisé dans [ABS<sup>+</sup>14]. À discrétisation spatiale identique, ce schéma dit FVC, pour Finite Volume Characteristic, s'avère plus précis. Néanmoins il n'est pas possible de démontrer des propriétés de stabilité non linéaires (positivité, entropie), comme nous allons le faire maintenant pour le schéma cinétique.

Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons deux travaux récents qui présentent de nouveaux développements autour de ce modèle à plusieurs vitesses. Dans [ABSM17], dans la lignée du travail mené dans [ABBSM16], nous étudions l'évolution de l'énergie discrète pour un schéma cinétique avec reconstruction hydrostatique. Grâce à une im-

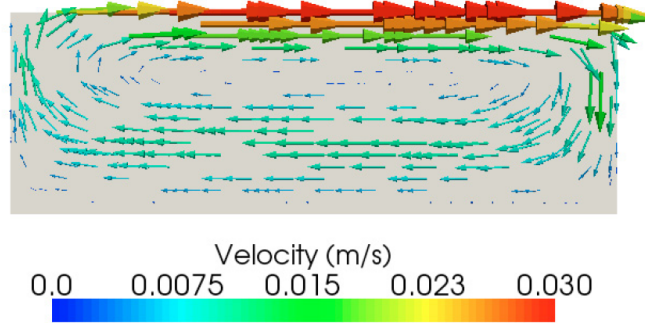


FIGURE 4.1.1 – Recirculation sous l'effet du vent - Champ de vitesse

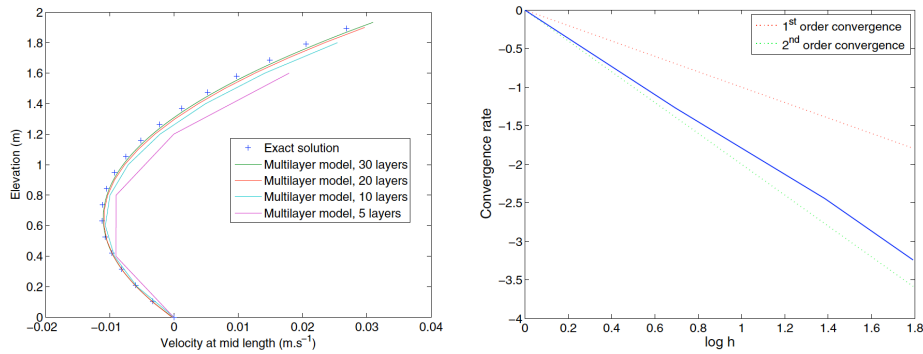


FIGURE 4.1.2 – Recirculation sous l'effet du vent - Profil vertical de la vitesse horizontale (à gauche) et courbe de convergence (à droite)

plicitation des termes d'échange de masse, nous montrons que, sur fond plat, il est possible de construire un solveur qui satisfait une inégalité d'entropie discrète sous une condition de CFL similaire à celle obtenue pour le système de Saint-Venant classique. Pour une topographie non triviale, nous montrons que les résultats obtenus pour le système de Saint-Venant classique dans [ABBSM16] peuvent être étendus au modèle à plusieurs vitesses. Le deuxième travail [AAGP17] porte sur l'étude du modèle à plusieurs vitesses, notamment en terme d'hyperbolicité. Une étude très préliminaire avait conclu dans [ABPSM11b] à l'hyperbolicité du modèle à deux vitesses. Reprenant ce cas particulier, nous avons étudié en détail la solution du problème de Riemann associé à ce problème à deux vitesses, en une dimension et en deux dimensions d'espace. En une dimension d'espace, nous travaillons sur une forme conservative du système qui présente des similarités avec les équations d'Euler compressibles. En deux dimensions d'espace, le modèle comporte des produits non conservatifs, auxquels nous commençons par donner un sens avant de résoudre le problème de Riemann, y compris pour des solutions incluant des coalescences ou des résonances entre les différentes ondes.

## 4.2 Schéma cinétique IMEX et inégalité d'entropie discrète

L'intérêt principal de l'approche multivitesse pour les équations primitives réside dans l'analogie entre le modèle obtenu et le système de Saint-Venant, qui permet d'étendre les travaux effectués sur ce dernier. Plus précisément, nous choisissons ici d'étendre l'interprétation cinétique du modèle de Saint-Venant, pour ensuite construire un schéma numérique dérivé de cette interprétation. Par analogie avec la définition (1.2.6), sous sa forme (1.2.11), nous définissons d'abord un équilibre de Gibbs, ou maxwélienne, par couche

$$M_\alpha = M(U_\alpha, \xi) = \frac{h_\alpha}{c} \chi_0 \left( \frac{\xi - u_\alpha}{c} \right) = \frac{l_\alpha}{g\pi} \left( 2gh - (\xi - u_\alpha)^2 \right)_+^{1/2} = l_\alpha \overline{M}_\alpha, \quad (4.2.1)$$

qui permet de proposer une représentation du modèle (4.1.11)-(4.1.12) à travers le modèle cinétique composé des  $N$  équations linéaires

$$(\mathcal{B}_\alpha) \quad \frac{\partial M_\alpha}{\partial t} + \xi \frac{\partial M_\alpha}{\partial x} - g \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial M_\alpha}{\partial \xi} - N_{\alpha+1/2} + N_{\alpha-1/2} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (4.2.2)$$

où le terme de collision  $Q_\alpha(t, x, \xi)$  satisfait, pour presque tout  $(t, x)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} Q_\alpha d\xi = 0, \quad (4.2.3)$$

mais surtout où nous avons introduit les nouvelles quantités  $N_{\alpha+1/2}$  qui représentent au niveau cinétique les échanges de masse entre les couches et sont définies, à nouveau en utilisant un décentrement, par

$$N_{\alpha+1/2} = \frac{G_{\alpha+1/2}}{h} \overline{M}_{\alpha+1/2}, \quad \overline{M}_{\alpha+1/2} = \begin{cases} \overline{M}_\alpha & \text{si } G_{\alpha+1/2} \leq 0 \\ \overline{M}_{\alpha+1} & \text{si } G_{\alpha+1/2} \geq 0 \end{cases}. \quad (4.2.4)$$

Comme dans la section 1.2.4, voir plus particulièrement la relation (1.2.20), on peut alors construire un schéma numérique pour l'équation cinétique (4.2.2)

$$M_{\alpha,i}^{n*} = M_{\alpha,i} - \sigma_i \left( \xi M_{\alpha,i+1/2-} + \delta M_{\alpha,i+1/2-} - \xi M_{\alpha,i-1/2+} - \delta M_{\alpha,i-1/2+} \right), \quad (4.2.5)$$

$$M_{\alpha,i}^{n+1-} = M_{\alpha,i}^{n*} + \Delta t^n (N_{\alpha+1/2,i}^{n+1-} - N_{\alpha-1/2,i}^{n+1-}), \quad (4.2.6)$$

où la définition des termes  $\delta M_{\alpha,i+1/2-}$  est similaire à la relation (1.2.21), pour chaque couche. Le schéma proposé ici est de type IMEX puisque la première étape est explicite et la seconde est implicite. Ce type de schéma a été introduit dans bon nombre d'applications, l'idée générale étant toujours d'impliciter la partie qui aurait un impact très restrictif sur la condition CFL, ici, les échanges verticaux. Nous renvoyons le lecteur aux travaux [BPR13, BALMN14, Zak16] pour une présentation de ce type de schémas

dans différents contextes liés aux équations de la mécanique des fluides géophysiques. La première étape (4.2.5), explicite, est identique au schéma (1.2.20), là encore pour chaque couche  $L_\alpha$ . Cette première étape vérifie donc, sous des contraintes CFL similaires, toutes les propriétés établies dans [ABBSM16], en particulier la positivité de la hauteur d'eau, et les inégalités d'entropie discrète. Le passage au schéma volumes finis macroscopique, pour les inconnues  $(h, hu_\alpha)$ , se fait de la même manière que dans les sections 1.2.2 et 1.2.3. La seconde étape (4.2.6), implicite, n'affecte pas la hauteur d'eau totale  $h$  puisqu'elle ne prend en compte que les échanges de quantité de mouvement qui apparaissent dans les équations (4.1.12), via les échanges de masse  $G_{\alpha+1/2}$  entre couche. On a donc

$$h_i^{n+1} = h_i^{n*},$$

ce qui permet de calculer les nouvelles épaisseurs de couche  $h_{i,\alpha}^{n+1}$ . L'étape implicite (4.2.6) peut alors se réécrire, en utilisant les définitions (4.2.4),

$$\begin{aligned} -\Delta t^n \frac{|G_{\alpha+1/2,i}|_+}{h_{\alpha+1,i}^{n+1}} M_{\alpha+1,i}^{n+1-} + \left(1 - \Delta t^n \frac{|G_{\alpha+1/2,i}|_- - |G_{\alpha-1/2,i}|_+}{h_{\alpha,i}^{n+1}}\right) M_{\alpha,i}^{n+1-} \\ + \Delta t^n \frac{|G_{\alpha-1/2,i}|_-}{h_{\alpha-1,i}^{n+1}} M_{\alpha-1,i}^{n+1-} = M_{\alpha,i}^{n*}, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$(\mathbf{I}_N + \Delta t \mathbf{G}_{N,i}) M_i^{n+1-} = M_i^{n*}, \quad M_i^k = (M_{1,i}^k, \dots, M_{N,i}^k)^T \quad (4.2.8)$$

avec la matrice

$$\mathbf{G}_{N,i} = \begin{pmatrix} -\frac{|G_{3/2,i}|_-}{h_{1,i}^{n+1}} & -\frac{|G_{3/2,i}|_+}{h_{1,i}^{n+1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{|G_{3/2,i}|_-}{h_{2,i}^{n+1}} & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{|G_{\alpha-1/2,i}|_-}{h_{\alpha,i}^{n+1}} & -\frac{|G_{\alpha+1/2,i}|_- - |G_{\alpha-1/2,i}|_+}{h_{\alpha,i}^{n+1}} & -\frac{|G_{\alpha+1/2,i}|_+}{h_{\alpha,i}^{n+1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & -\frac{|G_{N-1/2,i}|_+}{h_{N-1,i}^{n+1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{|G_{N-1/2,i}|_-}{h_{N,i}^{n+1}} & \frac{|G_{N-1/2,i}|_+}{h_{N,i}^{n+1}} \end{pmatrix}.$$

On montre, voir [ABSM17], que la matrice  $\mathbf{A}_{N,i} = \mathbf{I}_N + \Delta t \mathbf{G}_{N,i}$

- est inversible pour tout  $h_i^{n+1} > 0$ , le système a donc une solution unique, le cas  $h_i^{n+1} = 0$ , étant immédiat puisqu'alors  $u_{i,\alpha}^{n+1} = 0$  sur toutes les couches  $L_\alpha$  ;
- a un inverse qui ne contient que des coefficients positifs, la densité  $M_i^{n+1-}$  est donc positive si la densité  $M_i^{n*}$  l'est ;



— et que pour tout vecteur  $T$  à composantes positives, on a

$$\|\mathbf{A}_{N,i}^{-t}T\|_\infty \leq \|T\|_\infty,$$

la résolution du système linéaire (4.2.8) ne pose donc pas de difficultés, même pour des hauteurs d'eau  $h^n$  arbitrairement petites.

Notons qu'une simple multiplication par  $\xi$  de la relation (4.2.7), suivie d'une intégration sur cette variable, permet d'écrire le schéma au niveau macroscopique, i.e. avec comme inconnues les débits  $q_{i,\alpha}^{n+1}$ , la matrice restant inchangée puisque ces coefficients sont indépendants de la variable  $\xi$ . Nous venons donc d'établir que le schéma numérique basé sur la discrétisation, de type IMEX (implicite-explicite), (4.2.5)-(4.2.6) est bien défini, au sens où il a bien une unique solution à chaque étape. La positivité de la hauteur d'eau est évidente puisque nous avons déjà dit que  $h_i^{n+1}$  est connue après la première étape explicite (4.2.5), identique à celle qui a été analysée dans la section 1.2.4 où nous avons démontré cette propriété de positivité. Grâce aux propriétés de la matrice  $\mathbf{A}_{N,i}$ , nous pouvons même démontrer la positivité des densités cinétiques  $M_i^{n+1-}$ , puisque, là encore, les démonstrations fournies dans la section 1.2.4 assurent que les densités intermédiaires  $M_i^{n*}$  sont bien positives dès que les densités initiales  $M_i^n$  le sont. Cette positivité de la densité cinétique est une étape nécessaire à l'étude de l'évolution de l'énergie, là encore au niveau cinétique, qui s'appuie pour une large part sur les travaux effectués dans [ABBSM16] et rappelés dans la section 1.2.4 puisque l'étape explicite est identique, le processus d'implication sur les échanges verticaux permettant de démontrer une décroissance également pour la seconde étape. Dans le cas d'un fond plat, il est possible de mener tous les calculs et de quantifier l'évolution de l'énergie entre les étapes  $n$  et  $n+1$

$$\begin{aligned} H(\overline{M}_{\alpha,i}^{n+1-}, \xi, b_i) &= H(\overline{M}_{\alpha,i}, \xi, b_i) - \sigma_i \left( \tilde{H}_{\alpha,i+1/2} - \tilde{H}_{\alpha,i-1/2} \right) \\ &\quad - \Delta t^n \left( \hat{H}_{\alpha+1/2,i}^{n+1-} - \hat{H}_{\alpha-1/2,i}^{n+1-} \right) + d_{\alpha,i} + e_{\alpha,i}, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

où  $\tilde{H}_{\alpha,i+1/2}$ , respectivement  $\hat{H}_{\alpha+1/2,i}^{n+1-}$ , désigne un terme de flux horizontal, respectivement vertical, consistant avec les flux d'énergie au niveau continu. Sous une condition CFL légèrement plus restrictive que pour le cas classique (1.2.25), d'un facteur 1/2, et prenant en compte la vitesse dans chaque couche

$$\Delta t^n \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq \alpha \leq N} \min_{i \in I} \frac{\Delta x_i}{|u_{\alpha,i}| + \sqrt{2gh_i}}, \quad (4.2.10)$$

on peut établir que les termes  $d_{\alpha,i}$  apparaissant au membre de droite sont négatifs. Comme les termes  $e_{\alpha,i}$  n'ont pas d'impact au niveau macroscopique, i.e. sont nuls après intégration en  $\xi$  et sommation sur les couches  $L_\alpha$ , on en déduit une inégalité d'énergie au niveau macroscopique, voir [ABSM17] pour le détail des calculs, qui assure que l'énergie macroscopique  $E_{\alpha,i}$ , voir la définition (4.1.18), est décroissante à chaque étape

du calcul

$$\sum_{\alpha=1}^N \bar{E}_{\alpha,i}^{n+1} \leq \sum_{\alpha=1}^N \bar{E}_{\alpha,i} - \sigma_i \left( \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbb{R}} \tilde{H}_{i+1/2} d\xi - \sum_{\alpha=1}^N \int_{\mathbb{R}} \tilde{H}_{i-1/2} d\xi \right).$$

Cette relation est à comparer avec les résultats obtenus sur les équations d'Euler hydrostatiques (4.1.7), puis sur le modèle à plusieurs vitesses avant discrétisation en  $(t, x)$  (4.1.17). Comme dans le cas du système de Saint-Venant classique, voir [ABBSM16], la stratégie adoptée peut être étendue au cas avec topographie et on en déduit une inégalité d'énergie macroscopique, qui fait apparaître un terme de croissance contrôlée, identique à celui apparaissant dans la relation (1.2.24) et qui a déjà été analysé dans la section 1.2.4.

### 4.3 Solution du problème de Riemann pour le modèle à deux vitesses

En complément de la qualité et de la robustesse des simulations numériques, il est important d'étudier les propriétés des modèles à plusieurs vitesses. Il a déjà été établi que le modèle possédait une énergie, consistante avec celle de l'équation d'Euler, voir la section précédente. Une preuve d'hyperbolicité pour le modèle à deux vitesses en une dimension d'espace, dont nous donnons ici la forme bidimensionnelle, avait également été établie dans [ABPSM11b], preuve non constructive ne permettant pas le calcul explicite des valeurs propres du modèle. Nous avons repris et généralisé cette étude dans [AAGP17], analysant l'ensemble du problème de Riemann, à la fois en une et en deux dimensions d'espace, où le modèle s'écrit

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{U}_1 + h_2 \mathbf{U}_2) = 0, \quad (4.3.1)$$

$$\partial_t (h_1 \mathbf{U}_1) + \nabla \cdot \left( h_1 \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{U}_1 + \frac{g}{2} h_1 h \mathbf{I}_d \right) = \mathbf{U}_{3/2} G_{3/2}, \quad (4.3.2)$$

$$\partial_t (h_2 \mathbf{U}_2) + \nabla \cdot \left( h_2 \mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{U}_2 + \frac{g}{2} h_2 h \mathbf{I}_d \right) = -\mathbf{U}_{3/2} G_{3/2}, \quad (4.3.3)$$

avec la vitesse d'interface  $\mathbf{U}_{3/2}$  et le terme d'échange de masse  $G_{3/2}$ , défini par (4.1.14). Une différence notable entre la nouvelle étude et celle de [ABPSM11b] réside dans la définition de la vitesse d'interface  $\mathbf{U}_{3/2}$ , utilisant un décentrement dans [ABPSM11b], voir la définition (4.1.16), et basée sur une formulation centrée dans l'étude qui va suivre

$$\mathbf{U}_{3/2} = \frac{\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2}{2}. \quad (4.3.4)$$

Cette définition a un impact direct sur l'équation d'évolution de l'énergie, décroissante dans le cas décentré, voir la relation (4.1.18), constante, pour des solutions régulières,

pour un choix centré, voir plus loin. Notre étude portera en fait sur une autre écriture du système, conservative en une dimension d'espace

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \bar{\mathbf{U}}) = 0, \quad (4.3.5)$$

$$\partial_t (h \bar{\mathbf{U}}) + \nabla \cdot \left( h \left( \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{U}} \otimes \hat{\mathbf{U}} \right) + \frac{g}{2} h^2 \mathbf{I}_d \right) = 0, \quad (4.3.6)$$

$$\partial_t \hat{\mathbf{U}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{U}} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} = 0, \quad (4.3.7)$$

où  $\bar{\mathbf{U}}$  désigne la moyenne des vitesses et  $\hat{\mathbf{U}}$  la déviation du profil de vitesse par rapport à sa moyenne. On passe du système (4.3.1)-(4.3.3) au système (4.3.5)-(4.3.7) par le changement de variable bijectif

$$(\bar{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{U}}) = \left( \frac{\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2}{2}, \frac{\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1}{2} \right), \quad (4.3.8)$$

et en utilisant la relation

$$2G_{\mathcal{V}_2} = -\nabla (h \hat{\mathbf{U}}),$$

obtenue en calculant la différence des deux équations en vitesses (4.3.2) et (4.3.3). Dans sa forme (4.3.5)-(4.3.7), le modèle à deux vitesses présente des similarités évidentes avec un modèle de Saint-Venant avec cisaillement introduit dans [GIF17]. Dans leurs versions unidimensionnelles, voir [RG12], et pour des solutions régulières, les deux modèles sont même parfaitement équivalents. L'énergie associée au modèle s'écrit, dans les nouvelles variables,

$$E = \frac{h}{2} \left( \|\bar{\mathbf{U}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{U}}\|^2 \right) + \frac{g}{2} h^2, \quad (4.3.9)$$

et, du fait de la définition centrée de la vitesse d'interface (4.3.4), elle vérifie, au moins pour les solutions régulières, l'égalité

$$\partial_t E + \nabla \cdot \left( \left( \left( E + \frac{g}{2} h^2 \right) \mathbf{I}_d + h \hat{\mathbf{U}} \otimes \hat{\mathbf{U}} \right) \bar{\mathbf{U}} \right) = 0, \quad (4.3.10)$$

à comparer avec l'inégalité (4.1.17) obtenue pour une définition décentrée de la vitesse d'interface (4.1.16). Pour assurer la cohérence avec les solutions admissibles du système de Saint-Venant classique dans le cas où la déviation  $\hat{\mathbf{U}}$  est nulle, nous définissons l'admissibilité des solutions discontinues par la décroissance de l'énergie à travers les chocs, ce qui se traduit par l'inégalité, au sens des distributions,

$$\partial_t E + \nabla \cdot \left( \left( \left( E + \frac{g}{2} h^2 \right) \mathbf{I}_d + h \hat{\mathbf{U}} \otimes \hat{\mathbf{U}} \right) \bar{\mathbf{U}} \right) \leq 0. \quad (4.3.11)$$

### 4.3.1 Étude du cas 1d

En une dimension d'espace, le système à deux vitesses s'écrit

$$\partial_t h + \partial_x (h\bar{u}) = 0, \quad (4.3.12)$$

$$\partial_t (h\bar{u}) + \partial_x \left( h (\bar{u}^2 + \hat{u}^2) + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0, \quad (4.3.13)$$

$$\partial_t \hat{u} + \partial_x (\hat{u} \bar{u}) = 0. \quad (4.3.14)$$

Le système est donc conservatif. L'énergie s'écrit

$$E = \frac{g}{2} h^2 + \frac{h}{2} (\bar{u}^2 + \hat{u}^2), \quad (4.3.15)$$

et l'égalité d'énergie associée s'écrit, pour les solutions régulières

$$\partial_t E + \partial_x \left( \left( E + \frac{g}{2} h^2 + h \hat{u}^2 \right) \bar{u} \right) = 0. \quad (4.3.16)$$

On reconnaît formellement dans les trois équations (4.3.12)-(4.3.13)-(4.3.16) le système des équations d'Euler compressible avec pression et énergie interne

$$p = \frac{g}{2} h^2 + h \hat{u}^2, \quad e = \frac{g}{2} h^2 + \frac{h}{2} \hat{u}^2.$$

Pour les solutions régulières du problème de Riemann, on pourra donc utiliser directement les travaux effectués sur les équations d'Euler, voir par exemple [GR96]. Pour des solutions discontinues, les deux systèmes ne sont plus équivalents, puisque nous imposons ici, par analogie avec le système de Saint-Venant, la décroissance de l'énergie (4.3.15) à travers les chocs tandis que, dans les équations d'Euler, c'est l'entropie mathématique du système qui décroît dans les chocs. De plus, l'énergie (4.3.15) n'est pas convexe par rapport aux variables conservatives  $(h, h\bar{u}, \hat{u})$  et, sur une discontinuité, le lien entre la condition de Lax et la décroissance de l'énergie ne peut plus être déduit des théorèmes généraux, voir encore [GR96]. Nous montrons néanmoins qu'il reste valable et que la condition de Lax

$$\lambda(U_L) > \sigma > \lambda(U_R),$$

peut donc toujours être utilisée pour sélectionner les chocs admissibles séparant deux états  $U_L$  et  $U_R$ ,  $\sigma$  désignant la vitesse du choc.

On montre facilement que le système (4.3.12)-(4.3.14) est strictement hyperbolique pour  $h \neq 0$ , avec les trois valeurs propres

$$\lambda_L = \bar{u} - \sqrt{gh + 3\hat{u}^2} < \lambda_* = \bar{u} < \lambda_R = \bar{u} + \sqrt{gh + 3\hat{u}^2}, \quad (4.3.17)$$

et les invariants de Riemann

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\lambda_L} &= \left\{ \bar{u} + \sqrt{gh + 3\hat{u}^2} + \frac{gh}{\sqrt{3}\hat{u}} \log \left( \sqrt{1 + \frac{3\hat{u}^2}{gh}} + \sqrt{\frac{3}{gh}} \hat{u} \right), \frac{\hat{u}}{h} \right\}, \\ \mathbb{I}_{\lambda_*} &= \left\{ \bar{u}, \frac{g}{2} h^2 + h\hat{u}^2 \right\}, \\ \mathbb{I}_{\lambda_R} &= \left\{ \bar{u} - \sqrt{gh + 3\hat{u}^2} - \frac{gh}{\sqrt{3}\hat{u}} \log \left( \sqrt{1 + \frac{3\hat{u}^2}{gh}} + \sqrt{\frac{3}{gh}} \hat{u} \right), \frac{\hat{u}}{h} \right\}.\end{aligned}$$

Les deux ondes externes sont vraiment non linéaires et l'onde interne est une discontinuité de contact. On peut alors résoudre sans grande difficulté technique le problème de Riemann associé, i.e. le problème (4.3.12)-(4.3.14) associé à une donnée initiale constante par morceaux

$$U(0, x) = \begin{cases} U_L = (h_L, \bar{u}_L, \hat{u}_L)^t \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 & \text{if } x < 0, \\ U_R = (h_R, \bar{u}_R, \hat{u}_R)^t \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 & \text{if } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.3.18)$$

On obtient en particulier que la vitesse d'un choc est donnée par

$$\sigma_L = \bar{u}_L - c(h_{L*}; U_L), \quad (4.3.19)$$

avec

$$c((X; (h, \bar{u}, \hat{u}))) = \sqrt{\frac{X}{h} \left( \left(1 + \frac{X}{h}\right) \frac{gh}{2} + \left(1 + \frac{X}{h} + \left(\frac{X}{h}\right)^2\right) \hat{u}^2 \right)}. \quad (4.3.20)$$

Nous renvoyons le lecteur à [AAGP17] pour plus de détails.

### 4.3.2 Analyse du problème de Riemann en deux dimensions

Nous considérons maintenant le problème de Riemann planaire pour le système à deux vitesses en deux dimensions (4.3.5)-(4.3.7). Les données initiales sont donc indépendantes de la direction  $y$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (h, \bar{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{U}})(0, x, y) = \begin{cases} (h_L, \bar{\mathbf{U}}_L, \hat{\mathbf{U}}_L) & \text{if } x < 0 \\ (h_R, \bar{\mathbf{U}}_R, \hat{\mathbf{U}}_R) & \text{if } x > 0 \end{cases}, \quad (4.3.21)$$

et on suppose que la solution le reste pour tout temps. Le système (4.3.5)-(4.3.7) s'écrit alors, avec les notations  $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{u}, \bar{v})^t$  et  $\hat{\mathbf{U}} = (\hat{u}, \hat{v})^t$ ,

$$\partial_t h + \partial_x (h\bar{u}) = 0, \quad (4.3.22)$$

$$\partial_t (h\bar{u}) + \partial_x \left( h(\bar{u}^2 + \hat{u}^2) + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0, \quad (4.3.23)$$

$$\partial_t \hat{u} + \partial_x (\hat{u}\bar{u}) = 0, \quad (4.3.24)$$

$$\partial_t (h\bar{v}) + \partial_x (h(\bar{u}\bar{v} + \hat{u}\hat{v})) = 0, \quad (4.3.25)$$

$$\partial_t \hat{v} + \hat{u}\partial_x \bar{v} + \bar{u}\partial_x \hat{v} = 0. \quad (4.3.26)$$

### 4.3 Solution du problème de Riemann pour le modèle à deux vitesses 109

Le système n'est plus conservatif, voir l'équation (4.3.26), et, pour des solutions discontinues, il faudra donner un sens aux produits non-conservatifs. Néanmoins, on retrouve dans les équations (4.3.22)-(4.3.24) le système en une dimension d'espace (4.3.12)-(4.3.14). Les inconnues  $(h, \bar{u}, \hat{u})$  peuvent donc être calculées comme dans la section précédente, indépendamment des inconnues sur la vitesse transverse  $(\bar{v}, \hat{v})$ . La résolution du problème de Riemann en deux dimensions se ramène donc à un calcul portant essentiellement sur ces deux variables transverses.

Le calcul des valeurs propres du système donne les valeurs

$$\lambda_L < \gamma_L = \bar{u} - |\hat{u}| \leq \lambda_* \leq \gamma_R = \bar{u} + |\hat{u}| < \lambda_R$$

où  $\lambda_L$ ,  $\lambda_*$  et  $\lambda_R$  sont les valeurs propres du problème en une dimension, voir (4.3.17). Les invariants de Riemann associés s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\lambda_L} &= \mathbb{I}_{\lambda_L} \cup \left\{ \bar{v} - \frac{\hat{u}\hat{v}}{\frac{g}{2}h + \hat{u}^2} \bar{u}, \frac{\hat{u}\hat{v}}{\frac{g}{2}h + \hat{u}^2} \right\} \\ \mathbb{J}_{\gamma_L} &= \{h, \bar{u}, \hat{u}, \bar{v} + s\hat{v}\} \\ \mathbb{J}_{\lambda_*} &= \mathbb{I}_{\lambda_*} \cup \{\bar{v}, h\hat{u}\hat{v}\} \\ \mathbb{J}_{\gamma_R} &= \{h, \bar{u}, \hat{u}, \bar{v} - s\hat{v}\} \\ \mathbb{J}_{\lambda_R} &= \mathbb{I}_{\lambda_R} \cup \left\{ \bar{v} - \frac{\hat{u}\hat{v}}{\frac{g}{2}h + \hat{u}^2} \bar{u}, \frac{\hat{u}\hat{v}}{\frac{g}{2}h + \hat{u}^2} \right\} \end{aligned}$$

avec  $s = \text{sgn}(\hat{u})$  et  $\mathbb{I}_{\lambda_L}$ ,  $\mathbb{I}_{\lambda_*}$  et  $\mathbb{I}_{\lambda_R}$  là encore donnés par le problème en une dimension, voir section 4.3.1. Les ondes externes sont toujours vraiment non linéaires et les trois ondes internes sont des discontinuités de contact. Notons que les trois ondes internes se déplacent à des vitesses de l'ordre de la vitesse matière  $u$  tandis que la vitesse des deux ondes externes est également sensible à la vitesse de propagation des ondes de gravité  $\sqrt{gh}$ . Le point le plus important est que la vitesse des ondes est entièrement déterminée par les trois inconnues  $(h, \bar{u}, \hat{u})$  qui peuvent être obtenues par la résolution du problème de Riemann en une dimension d'espace, et peuvent donc être considérées comme des données dans la résolution pour les variables transverses  $(\bar{v}, \hat{v})$ . Néanmoins, l'ordonnancement des ondes n'est plus strict et les discontinuités de contact peuvent entrer en résonance, i.e. deux valeurs propres devenir identiques, si un des états intermédiaires s'annule sur la variable  $\hat{u}$ . De plus, les discontinuités de contact externes peuvent entrer en coalescence avec les ondes non-linéaires si celles-ci sont des ondes de choc. En effet, si les valeurs propres  $\lambda_L$  et  $\gamma_L$  sont bien distinctes dès que  $h > 0$ , rien n'assure que la vitesse du choc  $\sigma_L$ , voir la relation (4.3.19), soit strictement inférieure à la vitesse de la discontinuité de contact  $\gamma_L$ . On montre ainsi que le phénomène de coalescence a lieu si la hauteur d'eau intermédiaire  $h_L^*$  est plus grande que la plus grande racine du polynome

$$P(h_L, \hat{u}_L; X) := \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{X}{h_L} \right) gh_L + \left( 1 + \frac{X}{h_L} + \left( \frac{X}{h_L} \right)^2 - \left( \frac{X}{h_L} \right)^3 \right) \hat{u}_L^2.$$

On a évidemment des résultats similaires pour les ondes  $\gamma_R$  et  $\sigma_R$ . Il y a donc trois types de problème de Riemann à étudier, selon que sont présents, ou non, les phénomènes de résonance et de coalescence. On insiste sur le fait que le calcul de la solution du problème de Riemann en une dimension pour les variables  $(h, \bar{u}, \hat{u})$ , qui reste inchangé, permet de savoir *a priori* dans quelle situation on se trouve et donc quel est le type de problème de Riemann qu'il faut résoudre. Le dernier point qui reste à éclaircir est la définition des produits non conservatifs présents dans l'équation (4.3.26) quand la solution du problème de Riemann comporte des chocs. Un cadre général a été donné dans [DMLM95] où les auteurs construisent une solution du problème via une régularisation au niveau de la discontinuité. La solution obtenue peut dépendre de la régularisation, ou *chemin*, choisie. Ici, nous nous appuyerons plus particulièrement sur les méthodes présentées dans [LST08, Agu14]. Notons qu'il y a un lien étroit entre les phénomènes de résonance ou coalescence et la présence de ces produits non conservatifs, voir [IT92, IT95, GL04].

Dans le cas sans résonance ni coalescence, la solution du problème de Riemann pour les deux variables restant à calculer est très simple. Il y a alors quatre états intermédiaires, puisque cinq ondes, mais les calculs peuvent être découplés car les états intermédiaires compris entre les ondes  $\lambda_L$  et  $\gamma_L$  et entre les ondes  $\gamma_R$  et  $\lambda_R$  sont entièrement déterminés, respectivement, par les états initiaux  $(\bar{v}_L, \hat{v}_L)$  et  $(\bar{v}_R, \hat{v}_R)$ . Dans le cas où les ondes sont des détente, i.e. quand la solution est continue, l'information transite à travers les invariants de Riemann  $\mathbb{J}_{\lambda_L}$  et  $\mathbb{J}_{\lambda_R}$ . Quand l'onde est un choc, et que la solution est discontinue, le problème, comme nous l'avons déjà dit, est plus compliqué puisque nous ne pouvons *a priori* écrire des relations de Rankine-Hugoniot que pour les quatre premières équations conservatives (4.3.22)-(4.3.25)

$$\sigma_k [h] = [h\bar{u}], \quad (4.3.27)$$

$$\sigma_k [h\bar{u}] = \left[ h (\bar{u}^2 + \hat{u}^2) + \frac{g}{2} h^2 \right], \quad (4.3.28)$$

$$\sigma_k [\hat{u}] = [\hat{u}\bar{u}], \quad (4.3.29)$$

$$\sigma_k [h\bar{v}] = [h (\bar{u} \bar{v} + \hat{u} \hat{v})]. \quad (4.3.30)$$

Les trois premières redonnent les relations du problème en une dimension d'espace, et il ne reste donc plus qu'une seule relation pour déterminer deux inconnues  $\bar{v}$  et  $\hat{v}$ . Suivant les travaux [LST08, Agu14], nous montrons néanmoins qu'une procédure de régularisation monotone sur la hauteur d'eau, dont on a prouvé dans le problème en une dimension d'espace qu'elle est toujours croissante à travers un  $\sigma_L$  choc et décroissante à travers un  $\sigma_R$  choc, permet de proposer une cinquième relation de saut,

$$\left[ h \sqrt{(\bar{u} - \sigma_k)^2 - \hat{u}^2} \hat{v} \right] = 0,$$

indépendante de la régularisation choisie, et ainsi de fermer le problème, voir les détails dans [AAGP17]. Ne subsiste plus alors qu'un problème couplé sur les trois discontinuités de contact pour déterminer les états intermédiaires de part et d'autre de l'onde

$\lambda_*$ , issu des quatre invariants de Riemann qui font intervenir les quantités  $\bar{v}$  ou  $\hat{v}$  dans  $\mathbb{J}_{\gamma_L}$ ,  $\mathbb{J}_{\lambda_*}$  et  $\mathbb{J}_{\gamma_R}$ . Les invariants de Riemann étant linéaires en  $\bar{v}$  et  $\hat{v}$ , on obtient un système linéaire, bien posé dans ce cas, et qui se résout facilement. Dans le cas d'une résonance entre deux discontinuités de contact, ce système linéaire n'a plus une solution unique. Mais il est possible de conclure en utilisant, plutôt que l'équation non conservative (4.3.26) sur  $\hat{v}$ , l'équation (4.3.10) sur l'énergie, qui reste constante à la traversée d'une discontinuité de contact. Le dernier cas à considérer est celui de la coalescence, dans le cas d'un choc, entre l'onde  $\sigma_L$  et l'onde  $\gamma_L$  (ou, bien évidemment,  $\gamma_R$  et  $\sigma_R$ ). On commence par montrer que décroissance de l'énergie et condition de Lax sont toujours vérifiées. Néanmoins, dans ce cas, à la traversée de cette nouvelle onde, on doit se contenter des quatre relations de Rankine-Hugoniot (4.3.27)-(4.3.30), la régularisation ne permettant plus de déterminer une cinquième relation. Seule la relation (4.3.30) fait intervenir les quantités  $\bar{v}$  et  $\hat{v}$ . Dans le cas d'une coalescence sur le choc  $\sigma_L$ , elle doit maintenant être couplée avec les trois invariants de Riemann faisant intervenir les quantités  $\bar{v}$  ou  $\hat{v}$  dans  $\mathbb{J}_{\lambda_*}$  et  $\mathbb{J}_{\gamma_R}$ . Le système obtenu sur les inconnues  $\bar{v}$  et  $\hat{v}$  est encore linéaire, bien posé s'il n'y a pas résonance entre les ondes  $\lambda_*$  et  $\gamma_R$ , et peut à nouveau être résolu facilement (dans le cas d'une résonance, il faut à nouveau utiliser l'égalité d'énergie au travers de la discontinuité de contact pour conclure). Des exemples concrets de solutions du problème de Riemann dans différentes configurations étudiées sont donnés dans la figure 4.3.1. Un panorama complet des solutions est donné dans [AAGP17].

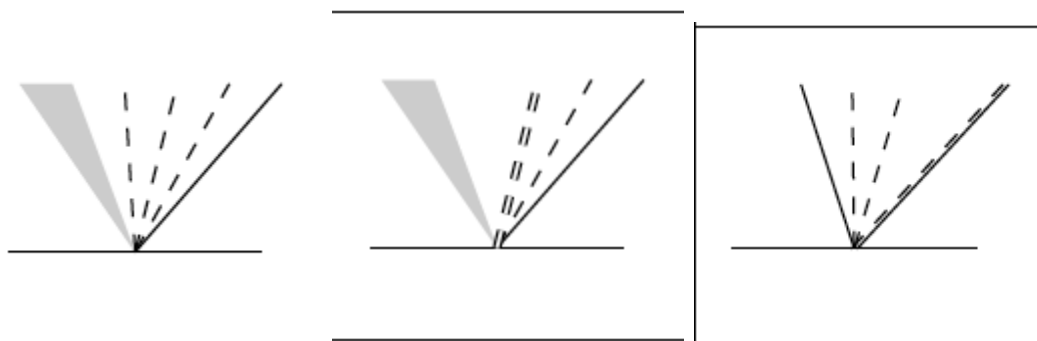


FIGURE 4.3.1 – Différentes solutions du problème de Riemann, avec résonance (au milieu) ou coalescence (à droite)

Deux pistes s'imposent dans la continuité de ce travail : l'étude du système pour un nombre de vitesses plus grand, et l'extension au cas de deux couches à densité variable, voir [ABPSM11a].



## 4.4 Équations primitives et couplages

### 4.4.1 Modèle à plusieurs vitesses et transport sédimentaire

Nous avons déjà dit plus haut dans ce chapitre que, dans le cas d'un écoulement en bassin fermé forcé par un vent en surface, les solutions obtenues avec le système de Saint-Venant et avec les équations primitives (ou le système à plusieurs vitesses) sont très différentes. En effet, les équations primitives autorisent un changement de signe de la vitesse le long de la verticale, et donc une recirculation, consistante avec ce qu'on observe en pratique, quand les équations de Saint-Venant classiques ne le permettent pas puisque, par définition, on ne calcule qu'une seule vitesse moyenne pour toute la colonne d'eau. Nous avons vu dans le chapitre 2 que les formules de transport sédimentaire faisaient intervenir la vitesse moyenne de l'écoulement, calculée par les équations de Saint-Venant. Dans le cas d'une recirculation, cette vitesse moyenne n'est pas une bonne approximation de la vitesse au fond, qui est pourtant celle qui intervient, mécaniquement, dans l'interaction avec la couche sédimentaire. Dans [ABSMS11], nous avons voulu mettre en évidence ce phénomène. Nous avons donc d'un côté calculé l'évolution de la couche sédimentaire obtenue avec le modèle de Saint-Venant Exner décrit dans le chapitre 2, et d'un autre, calculé l'évolution de la couche sédimentaire obtenue avec le modèle à plusieurs vitesses présenté dans ce chapitre, couplé avec une équation d'Exner où le flux sédimentaire n'est plus calculé à partir de la vitesse moyenne sur toute la colonne d'eau, mais à partir de la vitesse calculée dans la couche inférieure. Les résultats sont évidemment très différents. Reste que la stabilité du couplage entre l'équation d'Exner et le système de Saint-Venant, qui était au cœur du chapitre 2, n'a pour l'heure pas du tout été étudiée dans ce nouveau contexte. Des comparaisons avec des données expérimentales sur le même type d'écoulement avec recirculation seront également indispensables, notamment pour le paramétrage des lois de transport sédimentaire. Notons que dans [JLL16], une approche à deux couches d'une nature différente, basée sur une décomposition de l'écoulement entre une couche fluide parfait et une couche visqueuse, a également été proposée, là encore pour mieux décrire l'écoulement à la proximité de l'interface avec les sédiments.

### 4.4.2 Force de Coriolis et décomposition de domaine

Le travail [ADM10] présenté dans cette section concerne l'utilisation des équations primitives avec viscosité pour des applications océanographiques grandes échelles où la force de Coriolis joue un rôle important. Ici, l'accent n'est pas mis, comme dans le chapitre 3, sur la dérivation de schémas numériques préservant les équilibres géostrophiques, mais sur la dérivation de conditions de transmission efficaces pour ce problème, dans le contexte de la décomposition de domaine. Nous considérerons dans la suite le système linéarisé autour d'un état  $(u = u_0(x) > 0, v = 0, h = 1)$ , qui s'écrit en variables

adimensionnées

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}'} \partial_{zz} \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \nabla h + \frac{1}{\text{Ro}} C \mathbf{u} = 0, \quad (4.4.1)$$

$$\partial_t h + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla h + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.4.2)$$

pour  $(t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times [-1, 0]$  où nous rappelons que  $h(t, x, y)$  désigne la hauteur d'eau et  $\mathbf{u}(t, x, y, z) = (u, v)$  la vitesse horizontale,  $\bar{\mathbf{u}}$  désignant la moyenne sur la verticale de cette vitesse. Les nombres adimensionnés  $\text{Re}$ ,  $\text{Fr}$  et  $\text{Ro}$  désignent respectivement le nombre de Reynolds, de Froude et de Rossby

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad \text{Ro} = \frac{U}{\Omega L},$$

et le système est complété par des conditions initiales  $(\mathbf{u}_i, h_i)$  et des conditions de Neumann au fond et en surface sur la vitesse horizontale.

Les méthodes de décomposition de domaines ont aujourd'hui souvent pour but de permettre une répartition des tâches liées au calcul d'une solution approchée sur plusieurs ordinateurs distincts, chacun étant chargé de calculer la solution sur un sous-domaine du domaine de calcul. Il faut alors assurer la transmission de l'information entre les différents ordinateurs, et, si possible, l'optimiser, pour accélérer la convergence de l'algorithme. Notons que la méthode de décomposition de domaine a initialement été introduite par Schwarz [Sch70], dans un article dont on peut traduire le titre par *Sur un passage de frontière utilisant un processus alterné*, dans un tout autre but, celui de calculer des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles, en l'occurrence le problème de Laplace, sur des domaines complexes, en utilisant la connaissance de ces solutions sur des domaines plus simples, rectangles ou disques, par exemple. Dans la version la plus simple, pour un problème de Dirichlet sur un domaine borné  $\Omega$ , et deux sous-domaines, notés  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , tels que

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset,$$

l'algorithme s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u_1^{k+1} = 0 & \text{sur} & \Omega_1 \\ u_1^{k+1} = g & \text{sur} & \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^{k+1} = u_2^k & \text{sur} & \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u_2^{k+1} = 0 & \text{sur} & \Omega_2 \\ u_2^{k+1} = g & \text{sur} & \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2^{k+1} = u_1^k & \text{sur} & \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \end{array} \right. ,$$

avec une initialisation  $(u_1^0, u_2^0)$  régulière et compatible avec la condition de Dirichlet  $g$ . Schwarz montre que cet algorithme converge au sens où, sur  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ), la suite de fonctions  $u_1^n$  (resp.  $u_2^n$ ) converge vers la solution  $u$  du problème de Dirichlet sur  $\Omega$ . Très ancienne, cette méthode a donc été réactualisée et généralisée à un nombre quelconque de sous-domaines à la fin du siècle dernier dans le contexte du développement du

calcul parallèle, voir par exemple [Lio88] pour une étude détaillée. La convergence de la méthode nécessite ici un recouvrement entre les domaines et reste relativement lente. Des méthodes, dites de Schwarz optimisées, et basées sur la transmission d'information autre que de simples conditions de Dirichlet, ont depuis été proposées, voir par exemple [Gan06] pour un large panorama. Les méthodes de décomposition de domaines ont également été étendues aux équations d'évolution en temps. Ici, nous nous placerons dans le cadre des méthodes dites de *Schwarz waveform relaxation*, introduites dans [Gan98]. De manière générique, l'algorithme s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(u_1^{k+1}) = 0 & \text{sur } \Omega_1^T \\ u_1^{k+1}(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega_1 \\ u_1^{k+1} = g & \text{sur } (\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega)^T \\ u_1^{k+1} = u_2^k & \text{sur } (\partial\Omega_1 \cap \Omega_2)^T \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(u_2^{k+1}) = 0 & \text{sur } \Omega_2^T \\ u_2^{k+1}(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} = g & \text{sur } (\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega)^T \\ u_2^{k+1} = u_1^k & \text{sur } (\partial\Omega_2 \cap \Omega_1)^T \end{array} \right. ,$$

où  $\mathcal{L}$  désigne l'opérateur d'évolution et où on a utilisé la notation  $\Omega^T = \Omega \times [0, T]$ . Notons que, au moins formellement, l'algorithme est très proche du précédent. S'y ajoute évidemment la donnée de la condition initiale  $u_0$ . Notons aussi que le problème est résolu indépendamment sur chaque sous-domaine sur une fenêtre en temps, qui peut être l'intervalle de temps en entier, et il n'y a donc pas de transfert d'information à chaque pas de temps, ce qui permet, au prix de quelques interpolations, l'utilisation de stratégies de discrétisation en espace et en temps différentes sur chacun des sous-domaines. Comme dans le cas de l'algorithme de Schwarz classique, il est possible d'optimiser les conditions de transmission, en remplaçant les conditions de Dirichlet sur l'interface  $(\partial\Omega_j \cap \Omega_k)^T$  par des conditions plus avancées, afin d'optimiser la vitesse de convergence et de lever la contrainte du recouvrement entre les sous-domaines. C'est à la dérivation de telles conditions de transmission optimisées, dans le cadre des équations primitives avec conditions de Coriolis, qu'est dédié le travail présenté ici. De telles conditions optimisées ont été construites dans [GHN03b] pour l'équation des ondes, dans [Mar05, GH07] pour l'équation d'advection diffusion, dans [Mar09] pour les équations de Saint-Venant visqueuses, sans terme d'advection. Les conditions de transmission utilisées dans ces travaux sont inspirées des conditions aux limites absorbantes introduites précédemment dans [EM77, Hal86, Hal91] pour des problèmes d'évolution similaires, ici non pas dans l'optique d'un algorithme de décomposition de domaines, mais d'un problème numérique posé sur un domaine borné modélisant une situation posée sur un domaine non borné. L'ensemble de ces travaux s'appuient sur le fait que si l'opérateur de transmission est choisi égal à l'opérateur *Dirichlet to Neumann*, i.e. l'opérateur, qui, pour une donnée d'entrée  $g$ , renvoie la trace normale de l'opérateur de volume  $\mathcal{L}$  sur la frontière, au sens de l'intégration par parties, appliquée à la fonction  $u$  solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur  $\mathcal{L}$  avec conditions de Dirichlet  $g$  sur le bord, alors la convergence de l'algorithme Schwarz waveform relaxation est assurée en deux itérations. Dans tous les cas évoqués, il est possible de calculer, en Fourier, le symbole de cet opérateur Dirichlet to Neumann, qui conduirait à des conditions de transmission *optimales*, mais celui-ci conduit en général à un opérateur pseudo-différentiel

non local en espace-temps, qu'il est donc très délicat, voire impossible, d'implémenter en pratique, et le travail consiste alors à approcher le symbole de l'opérateur par une fonction polynomiale, qui conduit maintenant à un opérateur ne faisant intervenir que des dérivées partielles sur la frontière, permettant ainsi de construire des conditions de transmission *optimisées*. À chaque fois, les auteurs montrent le caractère bien posé de l'algorithme, prouvent sa convergence, et éventuellement, effectuent une optimisation, analytique ou numérique, sur un (ou des) paramètre(s) scalaire(s) intervenant dans les conditions limites.

Dans [ADM10], nous effectuons l'ensemble des étapes décrites dans le paragraphe précédent dans le cas où l'opérateur  $\mathcal{L}$  correspond aux équations primitives visqueuses linéarisées avec force de Coriolis. Comme dans le cas des modèles à plusieurs vitesses, le travail s'appuie sur une réécriture des équations primitives après projection sur un espace de fonctions bien choisi. Ici, la base choisie n'est plus constituée de fonctions locales en espace, de type  $P_0$ , mais des modes propres de l'opérateur dérivée seconde dans la direction verticale, avec condition de Neumann homogène au fond et en surface. Il en résulte une décomposition de la solution en modes barocline et barotrope, termes usuels en océanographie [OWE12]. Le mode barotrope prend en compte le premier mode propre de la décomposition et correspond donc à la vitesse moyenne de l'écoulement le long de la verticale, il est ainsi solution des équations de Saint-Venant visqueuses linéarisées, mais contrairement au cas envisagé dans l'article [Mar09], la linéarisation est ici effectuée autour d'une vitesse d'avection non nulle. Le mode barocline est constitué de l'ensemble des autres modes propres, et correspond à la déviation par rapport à cette moyenne ; on retrouve ici une décomposition similaire à la réécriture proposée dans le travail sur le problème à deux vitesses, voir section 4.3, mais dans un cadre plus général. Chaque mode propre est ici solution d'un système d'équations d'advection diffusion. L'intérêt de la décomposition en modes propres apparaît clairement puisqu'on retrouve des équations déjà évoquées dans le paragraphe précédents et pour lesquelles des conditions de transmission ont déjà été dérivées. La nouveauté de ce travail réside principalement dans l'étude du mode barotrope. En effet, puisque nous prenons ici en compte une vitesse d'advection non nulle, le système n'est plus le même que celui considéré dans [Mar09]. En pratique, il s'avère impossible ne serait-ce que d'écrire le symbole de l'opérateur Dirichlet to Neumann. Contrairement au cas précédent, nous sommes donc contraints d'effectuer les approximations directement sur le problème en Fourier. La seconde différence avec le travail présenté dans [Mar09] réside dans le choix du régime dans lequel nous effectuons les approximations. Dans [Mar09], le régime choisi correspondait à un petit nombre de Reynolds. Ici, nous faisons le choix de nous placer dans un régime correspondant à un petit nombre de Rossby, faisant ainsi ressortir l'importance des forces de Coriolis. On obtient finalement l'algorithme suivant, posé sur deux sous-domaines sans recouvrement, dont on note  $\Gamma$  l'interface

commune

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(U_1^{k+1}) & = & 0 \quad \text{sur } \Omega_1^T \\ U_1^{k+1}(0, \cdot) & = & U_i \quad \text{sur } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_{2 \rightarrow 1} U_1^{k+1} & = & \mathcal{B}_{2 \rightarrow 1} U_2^k \quad \text{sur } \Gamma^T \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(U_2^{k+1}) & = & 0 \quad \text{sur } \Omega_2^T \\ U_2^{k+1}(0, \cdot) & = & U_i \quad \text{sur } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_{1 \rightarrow 2} U_2^{k+1} & = & \mathcal{B}_{1 \rightarrow 2} U_1^k \quad \text{sur } \Gamma^T \end{array} \right. ,$$

où les conditions de transmission s'écrivent

$$\mathcal{B}_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{Re}} \partial_x u - \frac{u_0}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} u - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} v + \frac{1}{2u_0 \text{Fr}^2} \bar{u} - \frac{1}{4u_0 \text{Fr}^2} \bar{v} \\ \frac{1}{\text{Re}} \partial_x v - \frac{u_0}{2} v + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} v + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} u - \frac{1}{4u_0 \text{Fr}^2} \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (4.4.3)$$

et

$$\mathcal{B}_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} \partial_x u + \frac{u_0}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} u - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} v + \frac{1}{2u_0 \text{Fr}^2} \bar{u} - \frac{1}{4u_0 \text{Fr}^2} \bar{v} + \frac{1}{\text{Fr}^2} h \\ -\frac{1}{\text{Re}} \partial_x v + \frac{u_0}{2} v + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} v + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\text{ReRo}}} u + \frac{1}{4u_0 \text{Fr}^2} \bar{u} \\ u_0 h + \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Notons que les conditions de transmission sont dysymétriques puisque du fait de la présence du terme d'advection dans l'équation de transport sur  $h$ , avec une vitesse d'advection positive, il est nécessaire de transmettre une information supplémentaire du domaine  $\Omega_1$  vers le domaine  $\Omega_2$ . Notons également qu'une partie des conditions de transmission s'appliquent à l'ensemble de la vitesse, c'est-à-dire la fois aux modes barotrope et barocline, tandis qu'une partie ne s'applique qu'à la moyenne de la vitesse, c'est-à-dire au mode barotrope. Dans l'article [ADM10], nous montrons que l'algorithme avec ces conditions limites est bien posé. La démonstration se fait en trois étapes : le caractère bien posé de l'équation de transport sur  $h$  avec  $u$  donnée, le caractère bien posé de l'équation parabolique sur  $u$  avec  $h$  donnée, puis un argument de point fixe pour conclure sur le caractère bien posé du problème couplé. Nous proposons également des conditions de transmission généralisées en introduisant deux paramètres scalaires en facteur des termes en vitesse faisant intervenir le nombre de Rossby d'une part et le nombre de Froude d'autre part. Des résultats numériques, donnés sur la figure 4.4.1 illustrent la vitesse de convergence pour différentes valeurs du nombre de Rossby, l'algorithme étant initialisé avec des valeurs aléatoires sur l'interface. Ils montrent que la convergence est plus rapide pour des nombres de Rossby plus faibles, et que, à l'inverse, l'optimisation numérique des paramètres introduits dans les conditions de transmission, comparé aux conditions naturelles (4.4.3)-(4.4.4), apporte un gain plus important quand le nombre de Rossby augmente. Ces deux résultats sont très naturels puisque les conditions (4.4.3)-(4.4.4), obtenues par développement de Taylor, sont d'autant plus optimales que le nombre de Rossby est faible.

Notons que, très récemment, d'autres auteurs [BRT17] ont étudié des conditions de transmission pour les équations de Saint-Venant linéarisées, i.e. pour le mode barotrope seul, sans force de Coriolis, dans le régime d'un petit nombre de Reynolds,

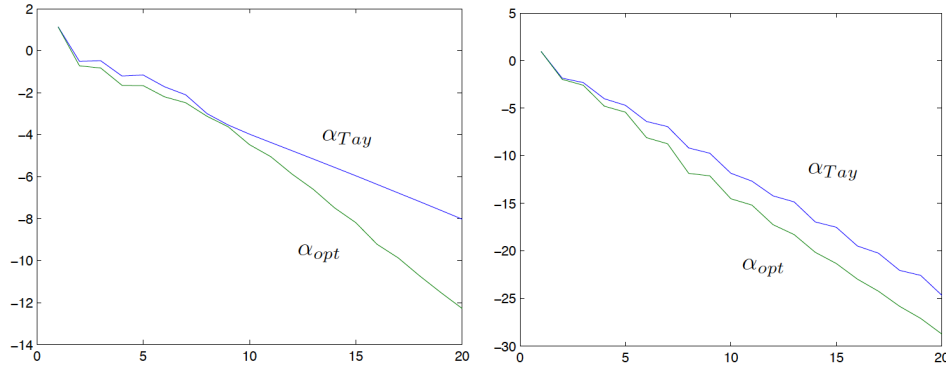


FIGURE 4.4.1 – Convergence de l’algorithme - Erreur en fonction du nombre d’itérations pour  $Ro = 10^{-2}$  (à gauche) et  $Ro = 10^{-3}$  (à droite)

en choisissant des conditions de type Robin, pour lesquelles le caractère bien posé et la convergence de l’algorithme sont démontrés. Une perspective intéressante serait de dériver des conditions de transmission adaptées aux écoulements proches de l’équilibre géostrophique, i.e. pour des petits nombres de Froude et de Rossby.



# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous détaillons plusieurs pistes pour des travaux futurs qui pourraient étendre les résultats obtenus dans les chapitres précédents : aspects stochastiques et nouveaux modèles pour le transport sédimentaire, étude sur grilles décalées et extension au cadre non linéaire pour les équilibres géostrophiques, prise en compte de la densité variable et de la pression non hydrostatique pour les écoulements tridimensionnels...

Ces travaux sont pour une part menés dans le cadre de deux thèses, l'une au sein de l'équipe ANGE par L. Boittin, qui se terminera en décembre 2018, l'autre au sein du LNHE-EDF, et en collaboration avec le LAGA, par P. Quemar, qui se terminera au printemps 2019. Ils ont pour certains déjà fait l'objet de résultats préliminaires disponibles dans les références qui suivent.

Audusse, E. ; Boyaval, S. ; Gao Y. & Hilhorst D. ; *Numerical simulations of the stochastic inviscid burgers equation with stochastic forcing*. CEMRACS 2013 : Modeling and simulation of complex systems, stochastic and deterministic approaches, ESAIM : Proc., Vol. 48, pp. 308-320, 2015.

Audusse, E. ; Boyaval, S. ; Goutal, N. ; Jodeau, M. & Ung, P. ; *Numerical simulation of the dynamics of sedimentary river beds with a stochastic Exner equation*. CEMRACS 2013 : Modeling and simulation of complex systems, stochastic and deterministic approaches, ESAIM : Proc., Vol. 48, pp. 321-340, 2015.

Audusse, E. ; Lafitte O. ; Mélinand B. & Quemar P. ; *Parametric study of the accuracy of an approximate solution for the mild-slope equation*, Proceedings SYSNASC 2017.

Audusse, E. ; Boittin L. & Parisot M. ; *Derivation of a bedload transport model with viscous effects*, preprint, 2017.

Audusse, E. ; Do, M.H. ; Omnes, P. & Penel, Y. ; *Analysis of staggered schemes applied to the linear wave equation with Coriolis source term*, preprint, 2017.



Dans les chapitres précédents, nous avons présenté des travaux réalisés autour de la simulation numérique, dans le cadre de la méthode des volumes finis, des écoulements à surface libre, et plus particulièrement sur les quatre aspects suivants :

- étude des écoulements en lac ou rivière, modélisés par les équations de Saint-Venant, avec une attention particulière portée à la préservation des états stationnaires et aux propriétés de stabilité non linéaire (positivité de la hauteur d'eau, décroissance de l'énergie) des méthodes numériques ;
- étude des phénomènes de transport sédimentaire, modélisés par les équations de Saint-Venant Exner, en prêtant toujours attention aux propriétés d'équilibre et de stabilité, et en étudiant en particulier l'impact de la stratégie numérique de couplage sur ces propriétés ;
- étude des écoulements océaniques aux grandes échelles, modélisés par les équations de Saint-Venant avec force de Coriolis, avec, là encore, l'accent mis sur les propriétés de conservation (des moments linéaires et angulaires) et de préservation des équilibres des méthodes numériques, avec en particulier une étude des équilibres géostrophiques dans un cadre linéarisé ;
- étude des écoulements stratifiés (variation de densité sur la verticale) ou cisailés (variation de vitesse sur la verticale), modélisés par les équations primitives, avec la dérivation de nouveaux modèles multivitesse qui permettent d'étendre les schémas numériques développés dans le cadre Saint-Venant à ce nouveau contexte, ainsi que l'étude du problème de Riemann associé pour le cas particulier de deux vitesses, et l'écriture de conditions de transmission optimisées pour un algorithme de décomposition de domaine.

Bien entendu, ces travaux, s'ils ont permis des avancées intéressantes et ont déjà fait l'objet d'implémentation dans un cadre applicatif, sont très loin d'avoir épuisé leur sujet. Nous avons déjà évoqué des pistes de développements à la fin de chacun des chapitres de ce manuscrit. Ici, nous revenons sur certaines d'entre elles et nous dessinons quelques perspectives pour des travaux futurs, en particulier :

- sur la question du transport sédimentaire, nous détaillerons deux aspects qui proposent chacun un large programme de travail avec, d'une part, la dérivation, puis la simulation numérique, de nouveaux modèles, utilisant les développements récents dans la modélisation des fluides complexes, et, d'autre part, l'étude d'aspects stochastiques, notamment pour la propagation des incertitudes dans les modèles, anciens ou plus récents, et en particulier l'impact de l'incertitude sur les paramètres empiriques ;
- sur la prise en compte des forces de Coriolis, là aussi, de nombreuses extensions s'imposent : d'une part, sur la préservation des équilibres géostrophiques, l'extension des travaux menés au cadre non linéaire, comprenant notamment la généralisation des preuves de stabilité, mais aussi l'extension au cadre non cartésien et/ou sur grilles décalées ; d'autre part, faire un lien avec les méthodes de décomposition de domaine, en dérivant des conditions de transmission bien adaptées à des écoulements proches de ces équilibres ; enfin, continuer à tra-

- vailler sur les propriétés de conservation, notamment sur les aspects moment angulaire et vortacité ;
- sur l'étude des équations primitives, étendre les propriétés de stabilité récemment obtenues pour les modèles multivitesse au cas à densité variable, puis passer de l'étude des équations primitives aux équations non hydrostatiques, à la fois sur la partie modélisation, puis sur la partie schémas numériques.

## 5.1 Aspects stochastiques

Dans le cadre des travaux menés autour des phénomènes de transport sédimentaire en partenariat avec les ingénieurs du LNHE-EDF et du laboratoire Saint-Venant, et dont une partie ont été décrits au chapitre 2, nous souhaitons également étudier les aspects stochastiques liés à la simulation numérique du modèle de Saint-Venant Exner. Le but est à la fois d'étudier la propagation des incertitudes sur les formules de transport sédimentaire dans le modèle, mais également de voir si la prise en compte de ces incertitudes peut avoir un impact sur le comportement moyen des solutions en termes de forme sur la bathymétrie. Dans un premier temps, pour se familiariser avec ce nouveau domaine, nous avons, d'une part, étudié numériquement le comportement d'une équation hyperbolique scalaire avec un terme source aléatoire, voir [ABGH15], et, d'autre part, étudié, toujours numériquement, le comportement du système de Saint-Venant sur une topographie aléatoire, voir [ABG<sup>+</sup>15] et le chapitre dédié à ces questions dans la thèse de P. Ung [Ung16].

L'idée d'utiliser une théorie probabiliste à l'échelle du grain pour en déduire des lois macroscopiques à grande échelle n'est pas nouvelle [Ein50]. Mais des expériences récentes [RFP<sup>+</sup>08] ont montré que les flux sédimentaires pouvaient aussi présenter des comportements stochastiques à des échelles macroscopiques et d'autres travaux, voir par exemple [Anc10], suggèrent que des processus stochastiques à des échelles intermédiaires pourraient expliquer la création de formes macroscopiques sur le fond des rivières ou des bassins. Nous avons donc souhaité étudier d'un point de vue numérique la propagation d'incertitudes dans le système de Saint-Venant Exner. Nous nous limitons ici à une étude préliminaire qui se borne à étudier la propagation d'incertitudes dans le système de Saint-Venant seul quand des variations aléatoires, en espace dans un premier temps, sont imposées sur la topographie. En effet, de premières études sur le système de Saint-Venant Exner ont montré que la prise en compte des effets stochastiques avaient un effet macroscopique sur la décroissance de l'énergie mécanique, phénomène que nous avons tenté de mieux cerner dans un contexte plus simple.

Nous considérons dans la suite le système de Saint-Venant avec terme source de topographie et terme de frottement (2.1.1)-(2.1.2) et nous considérons une topographie

à pente constante modulée par un terme aléatoire de la forme

$$\tilde{b}_{i+1/2} = \alpha \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right), \quad (5.1.1)$$

où  $c_k$  et  $s_k$  sont des coefficients aléatoires de loi normale centrée réduite,  $N_m$  désigne le nombre de modes considérés et  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres qui caractérisent respectivement l'amplitude et la régularité du *bruit* imposé. Cette perturbation suit alors une loi normale centrée

$$\tilde{b}_{i+1/2} \sim \mathcal{N} \left( 0, \alpha^2 \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \right). \quad (5.1.2)$$

On considère des conditions périodiques, ce qui permet de ne pas introduire d'énergie dans le système, et une solution initiale à l'équilibre, i.e. une solution où hauteur d'eau et vitesse sont constantes et telle que le terme de pente moyenne  $b_0$  et le terme de frottement se compensent

$$-gh\partial_x b_0 = J(h, u).$$

On vérifie numériquement, à travers une simulation de type Monte-Carlo avec mille réalisations, que l'introduction de la perturbation sur la topographie, quoique de moyenne nulle, a un impact sur la vitesse moyenne de l'écoulement, qui diminue au fil du temps, voir figure 5.1.1. D'un point de vue modélisation, notons que le terme de frottement  $J(h, u)$  est réputé prendre en compte les rugosités sous-maille de la topographie, voir par exemple la dérivation des équations de Saint-Venant [GP01] à partir des équations de Navier-Stokes avec loi de paroi sur le fond proposée dans [APV98]. D'une certaine manière, l'introduction d'une perturbation aléatoire de la topographie restaure une rugosité sur les mêmes échelles, qui sont donc prises en compte deux fois. Nous avons donc proposé une modification, au fil du calcul, du coefficient de frottement dans les formules utilisées, à même de restaurer la préservation, en moyenne, de la vitesse de l'écoulement. Ce choix reste à discuter par de futurs travaux.

Une fois cette étape effectuée, nous nous sommes d'abord attachés à vérifier la consistance des résultats numériques, notamment vis-à-vis de la cohérence entre les résultats empiriques et théoriques sur la donnée topographique et de la convergence en maillage des résultats sur la hauteur d'eau et le débit, nous pouvons vérifier numériquement que le système semble converger vers un équilibre en temps long, et par exemple évaluer les variances des quantités hydrauliques comme fonctions des paramètres d'entrée  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous pouvons également nous intéresser aux corrélations entre les différents points du domaine, comme reportées sur la figure 5.1.2. Les résultats obtenus sont en cohérence avec la propriété de conservation de la charge hydraulique (1.1.15) en régime stationnaire. En régime fluvial, les termes liés à la partie potentielle de l'écoulement sont dominants et topographie et hauteur d'eau sont très fortement corrélées, ce qui n'est plus le cas en régime torrentiel. Les simulations permettent alors une approche quantitative de ces estimations, par exemple en termes de longueur de corrélation.

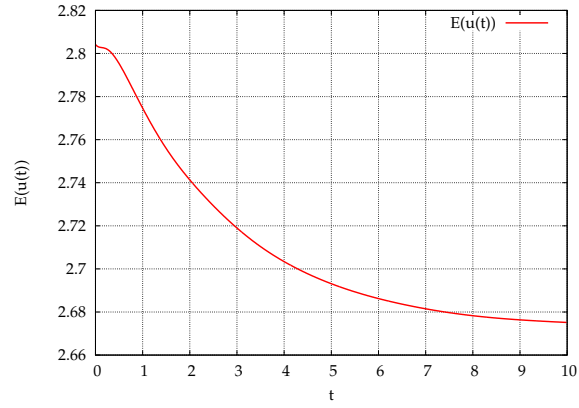
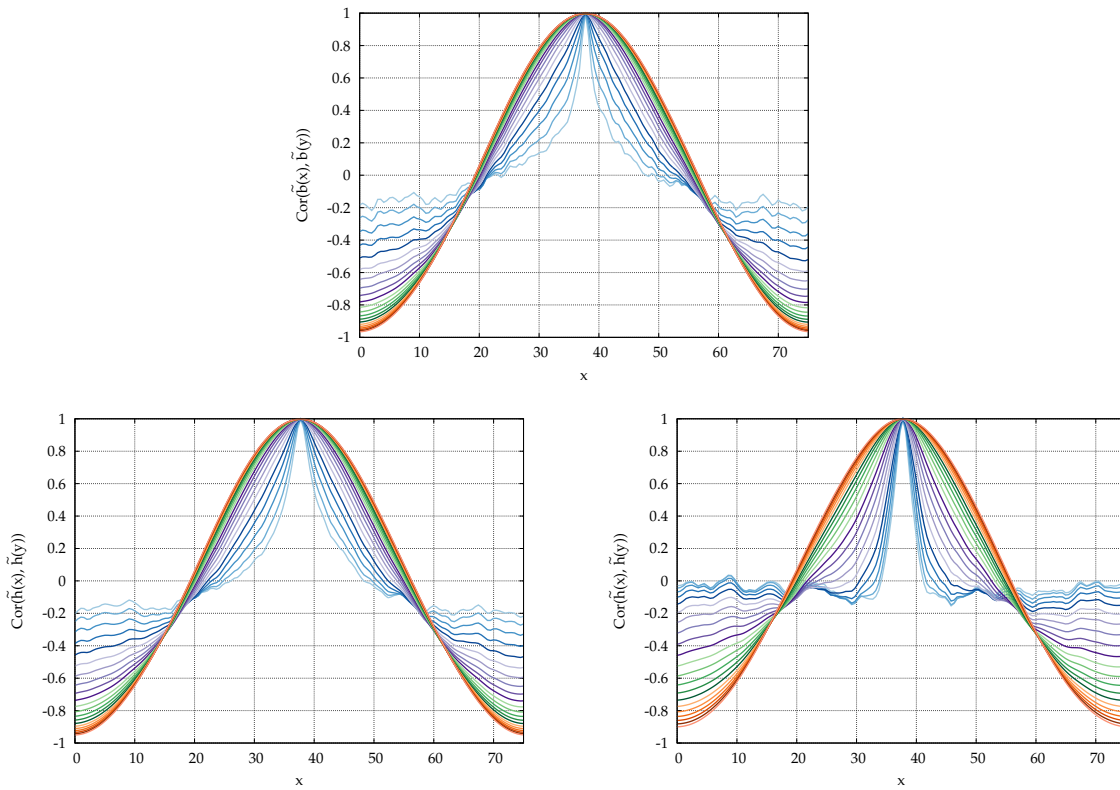


FIGURE 5.1.1 – Moyenne empirique de la vitesse de l'écoulement en fonction du temps.

FIGURE 5.1.2 – Corrélation spatiale de la topographie (en haut) et de la hauteur d'eau (en bas) en régimes fluvial (à gauche) et torrentiel (à droite) pour différentes régularités du bruit  $\beta$

Ces études doivent maintenant être étendues au problème de transport sédimentaire proprement dit, où la topographie n'est plus une donnée du problème. Ici, les paramètres incertains seront introduits dans les lois de transport sédimentaire et dans les lois de frottement. Deux types au moins d'observations sont pertinentes d'un point de vue macroscopique, d'une part sur les espérances, en particulier pour la topographie, d'autre part sur les variances et les corrélations entre topographie et quantités fluides.

## 5.2 Modèles de transport sédimentaire

Dans les travaux présentés au chapitre 2, nous avons utilisé le modèle de Saint-Venant Exner. Ce modèle est en effet très utilisé dans les codes industriels, mais plusieurs publications récentes ont montré qu'il avait un caractère prédictif limité et/ou ont tenté de proposer des modèles alternatifs [BGR11, BM12, BGR13, FNLMdLC14, FNLMdLNRZ17]. C'est aussi dans ce cadre que nous nous inscrivons, à la fois dans l'encadrement du travail de thèse de L. Boittin, en collaboration avec d'autres membres de l'équipe ANGE, en particulier M. Parisot et J. Sainte-Marie, et dans la participation au projet ANR SEDIFLO, porté par S. Boyaval.

Dans une publication récente [FNLMdLNRZ17], les auteurs proposent de dériver un système de type Saint-Venant Exner généralisé à partir d'un écoulement tridimensionnel modélisé par les équations de Navier-Stokes à surface libre et incompressibles, plutôt que par l'introduction de formules de transport sédimentaire en partie empirique, comme cela est fait habituellement. Plus précisément, les auteurs considèrent deux fluides superposés distincts et immiscibles, modélisés chacun par les équations de Navier-Stokes, mais avec des rhéologies différentes, le fluide de la couche supérieure, l'eau, étant considéré comme newtonien, alors que le fluide de la couche inférieure, les sédiments, obéit à une rhéologie plus complexe, de type Drücker-Prager, qui autorise notamment l'arrêt de l'écoulement dans des configurations où l'interface eau-sédiment n'est pas horizontale. Les deux fluides sont couplés via les termes de pression et, au niveau de leur interface, par un terme de friction classique, linéaire ou quadratique. Le terme de friction entre la couche sédimentaire et le fond non érodable, en revanche, est un terme de type frottement de Coulomb, compatible avec la rhéologie de type Drücker-Prager. Sous une hypothèse d'eau peu profonde qui autorise un développement asymptotique, et en suivant les techniques introduites dans [GP01], les auteurs peuvent dériver des modèles intégrés sur la verticale pour chacun des milieux. Sous une hypothèse supplémentaire, qui dit que la vitesse de la couche sédimentaire est de deux ordres inférieurs à la vitesse du fluide, les auteurs établissent une nouvelle catégorie de modèles, bien posés, au sens où ils possèdent une énergie mécanique dont on peut établir la décroissance, ce qui n'est pas le cas pour les modèles de Saint-Venant Exner classiques. De plus, les auteurs montrent que dans des cas simplifiés, les nouveaux modèles introduits sont identiques à certaines variantes des modèles de

type Saint-Venant Exner classiques. Plus précisément, sous les hypothèses adéquates, les modèles s'écrivent

$$\begin{aligned}\partial_t h_f + \partial_x q_f &= 0, \\ \partial_t q_f + \partial_x \left( \frac{q_f^2}{h_f} + \frac{g}{2} h_f^2 \right) + g h_f \partial_x (b + h_s) &= J, \\ \partial_t h_s + \partial_x \left( \frac{C_e d_s}{C_d(1 - \phi)} (\theta_{eff} - \theta_c)_{+} v_b \sqrt{(1/r - 1) g d_s} \right) &= 0,\end{aligned}$$

où  $(h_f, q_f)$  désignent la hauteur de le débit de l'écoulement fluide,  $h_s$  l'épaisseur de la couche sédimentaire,  $\theta_{eff}$  un cisaillement adimensionné et  $v_b$  une vitesse de transport, tous deux fonctions à la fois de la vitesse du fluide mais aussi du gradient d'une pseudo surface libre, pondérée par le rapport des densités, et de l'angle de repos caractéristique du matériau. Les autres quantités sont des constantes physiques caractéristiques du matériau et/ou de l'écoulement et  $J$  désigne toujours le terme de frottement, lui aussi fonction du gradient de la pseudo surface libre et de l'angle de repos caractéristique, voir [FNMdLNRZ17] pour plus de détails. En collaboration avec L. Boittin et M. Parisot, nous menons actuellement un travail similaire, mais sous des hypothèses différentes, notamment car nous ne présupposons pas d'ordre de grandeur pour le rapport des vitesses des deux milieux et nous considérons des asymptotiques différentes pour les termes visqueux. Ces travaux ont mené à la dérivation d'autres types de modèles d'Exner généralisés, pouvant comporter des termes non locaux, ce qui renvoie en partie aux idées avancées dans [Fow02, BM12]. L'étude théorique de ces modèles, l'écriture de schémas numériques et leur implémentation sont en cours.

Les travaux menés dans le cadre du projet ANR SEDIFLO se situent à une échelle différente. Dans le cadre de ce projet, il est notamment prévu de mettre en œuvre des simulations tridimensionnelles, mais sur des échelles réduites, pour des écoulements à densité variable et rhéologie complexe, voir par exemple pour des travaux récents sur ces sujets. L'écriture de modèles physiquement pertinents et mathématiquement bien posés est une question largement débattue à l'heure actuelle. De plus, les simulations numériques sont délicates à réaliser avec les outils actuellement disponibles et vont donc nécessiter des développements importants. Ces simulations pourront en particulier, à terme, valider, ou non, la pertinence des modèles réduits de type Saint-Venant Exner, et fixer leurs limites d'application.

## 5.3 Équilibres géostrophiques

Les travaux relatifs à la préservation des équilibres géostrophiques décrits dans le chapitre 3 ont été effectués dans un cadre linéarisé et sur grille cartésienne colocalisée, i.e. où toutes les inconnues sont discrétisées au même point, ici le centre des mailles.

C'est sur la levée de ces deux limitations que des travaux ont été récemment entamés et sont amenés à se poursuivre. L'extension au modèle non linéaire a été évoquée à la fin du chapitre 2, nous nous concentrerons donc ici sur la partie grille décalée, sur laquelle des premiers travaux sont en cours en collaboration avec P. Omnès et M.H. Do, dans le cadre du travail de thèse de ce dernier.

L'utilisation de grilles décalées pour l'approximation numérique des modèles fluides, en particulier en océanographie, est très classique dans le contexte des méthodes de différences finies, voir notamment l'article [AL81] où sont introduites les grilles  $B$ ,  $C$  et  $D$ , qui sont trois exemples différents de grilles décalées, la grille  $A$  correspondant au cas colocalisé, voir la figure 5.3.1. La grille  $C$  est bien adaptée à la discrétisation de la partie transport de l'équation, la grille  $D$  à la prise en compte du terme de Coriolis, voir [Ran94, NY04, RLRC08, TRKS09].

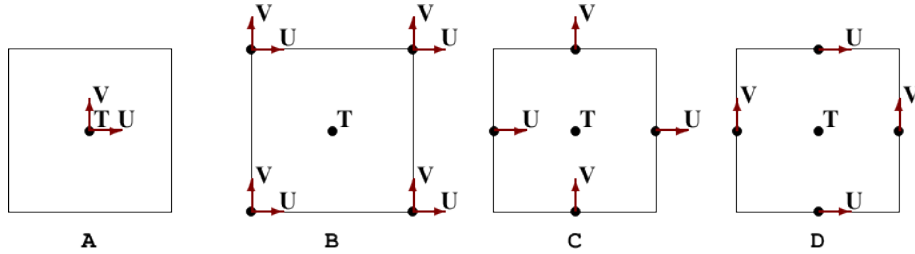


FIGURE 5.3.1 – Grilles dites d'Arakawa

Dans les méthodes volumes finis, la grille colocalisée est souvent privilégiée car les schémas sont généralement associés, comme on l'a vu dans le chapitre 1, à la résolution d'un problème de Riemann qui nécessite la définition de toutes les quantités au même point. Récemment, des méthodes sur grilles cartésiennes décalées dans un contexte volumes finis ont néanmoins été introduites, pour les équations d'Euler isentropiques dans [HLN13], pour les équations de Saint-Venant étudiées dans le chapitre 1, dans des versions implicite [HKL14] et explicite [DG14] en temps, ainsi que pour le système de Saint-Venant Exner étudié dans le chapitre 2, voir [GEP15]. Dans le cadre de l'écriture de schémas volumes finis adaptés à la prise en compte des équilibres géostrophiques, voir le chapitre 2, il peut être intéressant de considérer des grilles décalées pour plusieurs raisons. Sur grilles cartésiennes, on a vu que la méthode de topographie apparente, introduite dans [BLV04], utilisait les inconnues au centre, mais la définition des équilibres aux interfaces, et elle s'étend donc naturellement sur grilles décalées, en particulier la grille  $B$ , qui correspond au cas où la hauteur est définie aux sommets du maillage et les deux composantes de la vitesse au centre des cellules. De plus, et c'est le point le plus important, l'extension des méthodes proposées dans le chapitre 3 pour des grilles cartésiennes à des maillages triangulaires avec inconnues colocalisées pose problème, comme nous le montrons ci-dessous, et l'utilisation d'inconnues décalées offre donc une

alternative intéressante.

Il a été montré dans [Del10b] que, pour les simulations à bas nombre de Froude, les maillages triangulaires ne souffrent pas des mêmes problèmes que les grilles cartésiennes, au sens où le noyau du schéma de Godunov classique est une approximation consistante du noyau de l'opérateur, i.e. de l'espace des vitesses à divergence nulle. Ce résultat s'étend au problème de la préservation des équilibres géostrophiques, au sens où, contrairement au cas des grilles cartésiennes, pour lesquelles il faut modifier la diffusion numérique du schéma à la fois sur l'équation en pression et sur l'équation en vitesse, voir chapitre 3, sur maillages triangulaires, seule une modification sur l'équation en pression est nécessaire. Le schéma de Godunov s'écrit en effet sur maillages triangulaires

$$\frac{d}{dt}r_i(t) + \frac{a_\star}{2|T_i|} \sum_j |A_{ij}| [(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} + \kappa_r(r_i - r_j)] = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_i(t) + \frac{a_\star}{2|T_i|} \sum_j |A_{ij}| [(r_i + r_j) + \kappa_u(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij}] \mathbf{n}_{ij} = -\omega \mathbf{u}_i^\perp \quad (5.3.2)$$

où  $T_i$  désigne un triangle et  $A_{ij}$  les arêtes du maillage adjacentes au triangle  $T_i$ ,  $\mathbf{n}_{ij}$  étant le vecteur normal à l'arête  $A_{ij}$ , sortant du triangle  $T_i$ . On peut alors montrer que, dans le cas  $\kappa_r \neq 0$ , les états stationnaires du schéma sont les mêmes que dans le cas d'une grille cartésienne (3.3.10) et ne sont donc pas consistants avec les équilibres géostrophiques (3.3.3). En revanche, dans le cas  $\kappa_r = 0$ , les états stationnaires satisfont la relation

$$\frac{a_\star}{|T_i|} \sum_j |A_{ij}| \frac{r_i + r_j}{2} \mathbf{n}_{ij} = -\omega \mathbf{u}_i^\perp \quad (5.3.3)$$

qui est une discrétisation consistante de l'équilibre géostrophique (3.3.3). Aucun traitement particulier de l'équation en vitesse n'est donc nécessaire. Par contre, pour  $\kappa_u \neq 0$ , les états stationnaires doivent également satisfaire la relation, voir aussi [Del10b]

$$(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (5.3.4)$$

et il n'est pas clair que les relations (5.3.3) et (5.3.4) soient compatibles, d'où l'intérêt de considérer des discrétisations décalées de la vitesse et de la pression pour proposer une méthode alternative.

## 5.4 Équations de Navier-Stokes à surface libre

Dans le chapitre 4, nous avons traité de la discrétisation des équations primitives de l'océan. Nous avons notamment introduit des modèles à plusieurs vitesses, voir [ABPSM11b], pour lesquels nous avons démontré, voir [ABSM17], des propriétés



de stabilité non linéaire, positivité de la hauteur d'eau, et décroissance de l'énergie discrète, au moins en l'absence de bathymétrie, en particulier. Les modèles à plusieurs vitesses ont été étendus, voir [ABPSM11a], au cas des écoulements à densité variable, où la densité est fonction de marqueurs comme la température et la salinité. Notons que ces modèles restent très différents de ceux considérés dans [CMP01, CDGRGV<sup>+</sup>07, BMdL08, BZ10, FNCDP11, Mon15, Duc16] puisqu'ils continuent à autoriser des échanges de masse entre les différentes couches de fluide. Comme les travaux menés dans [ABSM17] permettent également de démontrer un principe du maximum sur un traceur transporté par le champ de vitesse, il paraît naturel d'essayer d'étendre les résultats de stabilité obtenus dans [ABSM17] au cas de la densité variable. Le problème est néanmoins plus complexe, et une réécriture du système sous une forme différente de celle proposée à l'origine dans [ABPSM11a] pourrait être nécessaire. De plus, les termes de pression s'expriment d'une manière différente dans le cas à densité variable et l'interprétation cinétique doit elle aussi être réexaminée. L'analyse du problème de Riemann pour le modèle à deux couches, voir section 4.3, est également un point à étudier dans le cadre densité variable, où le modèle contient alors cinq équations, une équation de hauteur d'eau, et une équation pour l'évolution de la vitesse et de la densité, ou du marqueur, dans chaque couche.

Le travail sur les équations primitives a été motivé dans le chapitre 4 par le fait que les hypothèses sous-tendant le modèle de Saint-Venant classique étaient dans certains cas peu adaptées aux écoulements considérés. Mais il en va parfois de même des équations primitives puisque celles-ci conservent l'hypothèse de pression hydrostatique, qui n'est parfois pas vérifiée. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer les équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) incompressibles, toujours avec une surface libre. Des premiers travaux ont été effectués dans cette direction au sein de l'équipe ANGE. Dans [ABGSM17], les auteurs proposent des schémas numériques pour un modèle de Saint-Venant non hydrostatique, présentant des analogies avec le modèle de Green-Naghdi, voir [GN76, CLMDL11, LM14]. Dans [FNPPSM17], c'est le modèle à plusieurs vitesses qui est étendu à ce nouveau cadre. Des travaux sur l'écriture de schémas numériques sont en cours. Une option alternative aux modèles à plusieurs vitesses est de considérer une discrétisation directe des équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) à surface libre. C'est le choix qui est fait dans les travaux [Cas99, Cas14] qui prolongent le travail [CC92] sur le modèle hydrostatique déjà évoqué. C'est aussi celui qui prédomine pour l'heure dans l'ensemble des codes industriels, par exemple le logiciel TELEMAC-3D, développé au sein du LNHE-EDF et en partie inspiré des travaux précédents, ou le logiciel MIKE-3D développé par le groupe DHI, voir la page web des logiciels pour plus d'informations. Dans TELEMAC-3D, la discrétisation des équations repose sur des méthodes d'éléments finis, éventuellement associées à d'autres types d'approche pour la partie transport de la surface libre, de la vitesse, et des traceurs, et la dimension verticale est traitée de manière spécifique, via des méthodes ALE et la transformée  $\sigma$  déjà évoquée au chapitre 4, voir [Dec06, DG09]. Les choix effectués pour la modélisation

restent donc finalement assez similaires à ceux adoptés pour les modèles à plusieurs vitesses introduits dans le chapitre 4, et c'est sur le type de discrétisation numérique que s'opèrent les distinctions. Les problèmes d'intérêt restent néanmoins évidemment les mêmes et concernent la stabilité et la précision des méthodes utilisées, avec, en plus, dans le cas des éléments finis, l'étude des propriétés de conservation qui, contrairement au cas des volumes finis, ne sont pas inhérentes à la méthode. Récemment, des travaux ont été menés sur les schémas de transport utilisés dans le logiciel TELEMAC-3D, voir [PAH15, PHRA16]. Ces travaux vont maintenant être étendus à l'ensemble du cœur numérique du logiciel, schémas de transport, donc, mais aussi étape de projection liée à la contrainte de divergence nulle, et réflexion sur l'ensemble de la structure de l'algorithme utilisé, dans le cadre de la thèse de P. Quemar, en collaboration avec les équipes du LNHE-EDF et A. Decoene et O. Lafitte. L'accent a été mis dans un premier temps sur la qualité de la propagation d'une onde solitaire, soit par comparaison avec la solution quasi-analytique proposée dans [DDC14], soit par comparaison avec des solutions numériques obtenues par d'autres logiciels utilisés au LNHE, par exemple le logiciel ARTEMIS, basé sur les équations de Berkhoff [Ber72, CP95]. Dans ce cadre, nous avons effectué un premier travail [ALL<sup>+</sup>17] dans le but de quantifier les écarts entre les solutions de l'équation de Berkhoff et les solutions d'un modèle Euler linéarisé, en fonction notamment de la hauteur d'eau moyenne et de la pente caractéristique de la topographie, travail dans lequel est calculée une solution analytique approchée à l'ordre 2 de l'équation de Berkhoff, le calcul étant basé sur des méthodes d'optique géométrique. Il apparaît que l'apport de l'équation de Berkhoff par rapport à des modèles plus simplifiés ne peut être mesuré par les normes en espace usuelles, de type  $L^2$ , mais doit être analysé en termes de fréquence et d'amplitudes.



# Bibliographie

- [AAGP17] N. Aguillon, E. Audusse, E. Godlewski, and M. Parisot. Analysis of the Riemann problem for a shallow water model with two velocities. hal-01618722v2, 2017.
- [AB01] F. Alcrudo and F. Benkhaldoun. Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a step. *Computers & Fluids*, 6 :643–671, 2001.
- [AB03] E. Audusse and M.-O. Bristeau. Transport of pollutant in shallow water Flows : A two time steps kinetic method. *ESAIM : M2AN*, 37(2) :389–416, 2003.
- [AB05] E. Audusse and M.-O. Bristeau. A well-balanced positivity preserving second-order scheme for shallow water flows on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 206(1) :311–333, 2005.
- [AB07] E. Audusse and M.-O. Bristeau. Finite-volume solvers for a multilayer Saint-Venant system. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 17(3) :311–319, 2007.
- [ABB<sup>+</sup>04] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2050–2065, 2004.
- [ABBSM16] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, and J. Sainte-Marie. Kinetic entropy inequality and hydrostatic reconstruction scheme for the Saint-Venant system. *Mathematics of Computation*, 85 :2815–2837, 2016.
- [ABD08] E. Audusse, M.-O. Bristeau, and A. Decoene. Numerical simulations of 3d free surface flows by a multilayer Saint-Venant model. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 56(3) :331–350, 2008.
- [ABF<sup>+</sup>17] S. Allgeyer, M.O. Bristeau, D. Froger, R. Hamouda, A. Mangeney, J. Sainte-Marie, F. Souill  , and M. Vall  e. Numerical approximation of the 3d hydrostatic Navier-Stokes system with free surface. hal-01393147v3, 2017.

- [ABG<sup>+</sup>15] E. Audusse, S. Boyaval, N. Goutal, M. Jodeau, and P. Ung. Numerical simulation of the dynamics of sedimentary river beds with a stochastic Exner equation. In EDP Sciences, editor, *ESAIM : Proceedings*, volume 48, pages 321–340, 2015.
- [ABGH15] E. Audusse, S. Boyaval, Y. Gao, and D. Hilhorst. Numerical simulations of the stochastic inviscid Burgers equation with stochastic forcing. In EDP Sciences, editor, *ESAIM : Proceedings*, volume 48, pages 308–320, 2015.
- [ABGSM17] N. Aïssiouene, M.O. Bristeau, E. Godlewski, and J. Sainte-Marie. A robust and stable numerical scheme for a depth-averaged Euler system. hal-01162109, 2017.
- [ABPSM11a] E. Audusse, M.-O. Bristeau, M. Pelanti, and J. Sainte-Marie. Approximation of the hydrostatic Navier-Stokes system for density stratified flows by a multilayer model. Kinetic interpretation and numerical validation. *J. Comp. Phys.*, 230 :3453–3478, 2011.
- [ABPSM11b] E. Audusse, M.-O. Bristeau, B. Perthame, and J. Sainte-Marie. A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for Shallow Water flows. Derivation and numerical validation. *ESAIM : M2AN*, 45(1) :169–200, 2011.
- [ABS<sup>+</sup>14] E. Audusse, F. Benkhaldoun, S. Sari, M. Seaid, and P. Tassi. A fast finite volume solver for multi-layered shallow water flows with mass exchange. *Journal of Computational Physics*, 272(1) :23–45, 2014.
- [ABSM17] E. Audusse, M.O. Bristeau, and J. Sainte-Marie. Kinetic entropy for the layer-averaged hydrostatic Navier-Stokes equations. hal-01583511v2, 2017.
- [ABSMS11] E. Audusse, F. Benkhaldoun, J. Sainte-Marie, and M. Seaid. Multilayer Saint-Venant equations over movable beds. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 15(4) :917–934, 2011.
- [ACD<sup>+</sup>12] E. Audusse, C. Chalons, O. Delestre, N. Goutal, M. Jodeau, J. Sainte-Marie, J. Giesselman, and G. Sadaka. Sediment transport modelling : Relaxation schemes for Saint-Venant – Exner and three layer models. In EDP Sciences, editor, *ESAIM : Proceedings*, pages 78–98, 2012.
- [ACU15] E. Audusse, C. Chalons, and P. Ung. A very simple well-balanced positive and entropy-satisfying scheme for the shallow-water equations. *Communication in Mathematical Sciences*, 13 :1317–1332, 2015.
- [ACU18] E. Audusse, C. Chalons, and P. Ung. A simple three-wave Approximate Riemann Solver for the Saint-Venant Exner equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2018.
- [ADD<sup>+</sup>17] E. Audusse, S. Dellacherie, M.H. Do, P. Omnes, and Y. Penel. Godunov type scheme for the linear wave equation with Coriolis source

- term. *ESAIM Proc. LMLFN 2015 – Low Velocity Flows – Application to Low Mach and Low Froude regimes*, 58 :1–26, 2017.
- [ADL<sup>+</sup>13] E. Audusse, O. Delestre, M.H. Le, M. Masson-Fauchier, P. Navaro, and R. Serra. Parallelization of a relaxation scheme modelling the bedload transport of sediments in shallow water flow. In EDP Sciences, editor, *ESAIM : Proceedings*, pages 80–94, 2013.
- [ADM10] E. Audusse, P. Dreyfuss, and B. Merlet. Optimized Schwarz waveform relaxation for primitive equations of the ocean. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32(5) :2908–2936, 2010.
- [ADOP17] E. Audusse, M.H. Do, P. Omnes, and Y. Penel. Analysis of apparent topography scheme for the linear wave equation with Coriolis force. In Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, editor, *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Hyperbolic, Elliptic and Parabolic Problems. FVCA 2017.*, volume 200, 2017.
- [ADOP18] E. Audusse, M.H. Do, P. Omnes, and Y. Penel. Analysis of modified Godunov type schemes for the linear wave equation with Coriolis source term on cartesian meshes. *Journal of Computational Physics*, 2018. hal-01618753.
- [AG01] P. Azerad and F. Guillen. Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics. *SIAM J. Math. Anal.*, 2001.
- [Agu14] N. Aguillon. Riemann problem for a particle–fluid coupling. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25 :39–78., 2014.
- [AKNV11] E. Audusse, R. Klein, D.D. NGuyen, and S. Vater. Preservation of the discrete geostrophic equilibrium in shallow water flows. In Springer, editor, *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*, pages 59–67, 2011.
- [AKO09] E. Audusse, R. Klein, and A. Owinoh. Conservative discretization of Coriolis force in a finite volume framework. *Journal of Computational Physics*, 228 :2934–2950, 2009.
- [AL81] A. Arakawa and V.R. Lamb. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations. *Monthly Weather Review*, 109 :18–36, 1981.
- [ALL<sup>+</sup>17] E. Audusse, O. Lafitte, A. Leroy, B. Melinand, C.T. Phan, and P. Quemar. Parametric study of the accuracy of an approximate solution for the mild-slope equation. In *SYNASC Conference*, 2017.
- [Anc10] C. Ancey. Stochastic modeling in sediment dynamics : Exner equation for planar bed incipient bed load transport conditions. *J. Geophys. Res.*, 115 :1–21, 2010.

- [And05] N. Andrianov. Performance of numerical methods on the non-unique solution to the Riemann problem for the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47 :825–831, 2005.
- [APV98] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147 :187–218, 1998.
- [AU17] E. Audusse and P. Ung. Relaxation solvers for sediment transport problems. preprint, 2017.
- [Aud04] E. Audusse. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [Aud05] E. Audusse. A multilayer Saint-Venant System : Derivation and Numerical Validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 5(2) :189–214, 2005.
- [BALMN14] G. Bispen, K.R. Arun, M. Lukacova-Medvidova, and S. Noelle. Imex large time step finite volume methods for low froude number shallow water flows. *Communications in Computational Physics*, 16 :307–347, 2014.
- [BB86] R. Bleck and D.B. Boudra. Wind-driven spin-up in eddy-resolving ocean models formulated in isopycnic and isobaric coordinates. *J. Geophys. Res.*, 91, 1986.
- [BBC<sup>+</sup>05] M. Baudin, C. Berthon, F. Coquel, R. Masson, and Q.H. Tran. A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law. *Numerische Mathematik*, 99 :411–440, 2005.
- [BBSM13] A.C. Boulanger, M.O. Bristeau, and J. Sainte-Marie. Analytical solutions for the free surface hydrostatic Euler equations. *Communications in Mathematical Sciences*, 11 :993–1010, 2013.
- [BBT15] C. Berthon, B. Boutin, and R. Turpault. Shock profiles for the shallow-water Exner model. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 7 :267–294, 2015.
- [BC16] C. Berthon and C. Chalons. A fully well-balanced, positive and entropy satisfying Godunov type method for the shallow water equations. *Mathematics of Computation*, 85 :1281–1307, 2016.
- [BdSV71] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux avec applications aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 73 :147–154, 1871.

- [BEKP11] S. Bryson, Y. Epshteyn, A. Kurganov, and G. Petrova. Well-balanced positivity preserving central-upwind scheme on triangular grids for the Saint-Venant system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 45(3) :423–446, 2011.
- [Ber72] J. C. W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In ASCE, editor, *13th International Conference on Coastal Engineering*, volume 1, pages 472–490, 1972.
- [BES10] F. Benkhaldoun, I. Elmahi, and M. Seaid. A new finite volume method for flux-gradient and source-term balancing in shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :3324–3335, 2010.
- [BESS13] F. Benkhaldoun, I. Elmahi, S. Sari, and M. Seaid. An unstructured finite-volume method for coupled models of suspended sediment and bed load transport in shallow-water flows. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 72 :967–993, 2013.
- [BF12] C. Berthon and F. Foucher. Efficient well-balanced hydrostatic upwind schemes for shallow-water equations. *Journal of Computational Physics*, 231 :4993–5015, 2012.
- [BGR11] L. Bonaventura, G. Garegnani, and G. Rosatti. Free surface flows over mobile bed : mathematical analysis and numerical modeling of coupled and decoupled approaches. *Communications in applied and industrial mathematics*, 2 :1–22, 2011.
- [BGR13] L. Bonaventura, G. Garegnani, and G. Rosatti. On the range of validity of the Exner-based models for mobile-bed river flow simulations. *Journal of Hydraulics Research*, 51 :380–391, 2013.
- [BL17] F. Bouchut and X. Lhebrard. Convergence of the kinetic hydrostatic reconstruction scheme for the Saint Venant system with topography. hal-01515256v1, 2017.
- [BLV04] F. Bouchut, J. LeSommer, and Zeitlin V. Frontal geostrophic adjustment and nonlinear-wave phenomena in one dimensional rotating shallow water ; Part 2 : high resolution numerical investigation. *J. Fluid Mech.*, 514 :35–63, 2004.
- [BM87] A. F. Blumberg and G.L. Mellor. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. In American Geophysical Union, editor, *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*, pages 1–16, 1987.
- [BM08] C. Berthon and F. Marche. A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations : a class of relaxation schemes. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30 :2587–2612, 2008.



- [BM12] A. Bouharguane and B. Mohammadi. Minimization principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 26 :163–172, 2012.
- [BMCPV03] F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnau, B. Perthame, and J.-P. Vilotte. A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows. *Comptes Rendus Mathematique*, 336(6) :531 – 536, 2003.
- [BMdL08] F. Bouchut and T. Morales de Luna. An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 42 :683–698, 2008.
- [BMdL10] F. Bouchut and T. Morales de Luna. A subsonic-well-balanced reconstruction scheme for shallow water flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48 :1733–1758, 2010.
- [Bou04a] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Birkhäuser, 2004.
- [Bou04b] F. Bouchut. A reduced stability condition for nonlinear relaxation to conservation laws. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1 :149–170, 2004.
- [BPR13] S. Boscarino, L. Pareschi, and G. Russo. Implicit-explicit runge–kutta schemes for hyperbolic systems and kinetic equations in the diffusion limit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35, 2013.
- [BPV01] R. Botchorishvili, B. Perthame, and A. Vasseur. Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources. *Math. Comp.*, 72 :131–157, 2001.
- [BRT17] E. Blayo, A. Rousseau, and M. Tayachi. Boundary conditions and Schwarz waveform relaxation method for linear viscous Shallow Water equations in hydrodynamics. *SMAI JCM*, 3 :117–137, 2017.
- [Bry69] K. Bryan. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. *J. Comp. Phys.*, 4, 1969.
- [BS10] F. Benkhaldoun and M. Seaid. A simple finite volume method for the shallow water equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 234 :58–72, 2010.
- [BS11] F. Benkhaldoun and M. Seaid. Combined characteristics and finite volume methods for sediment transport and bed morphology in free-surface water flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81 :2073–2086, 2011.
- [BSS09] F. Benkhaldoun, S. Sahnim, and M. Seaid. Solution of the sediment transport equations using a finite volume method based on sign matrix. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 31 :2866–2889, 2009.

- [BSS12] F. Benkhaldoun, S. Sari, and M. Seaid. A flux-limiter method for dam-break flows over erodible sediment beds. *Applied Mathematical Modelling*, 36 :4847–4861, 2012.
- [BV94] A. Bermudez and M.E Vazquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computer and Fluids*, 8 :1049–1071, 1994.
- [BW04] F. Bouchut and M. Westdickenberg. Gravity driven shallow water models for arbitrary topography. *Comm. in Math. Sci.*, 2 :359–389, 2004.
- [BZ10] F. Bouchut and V. Zeitlin. A robust well-balanced scheme for multi-layer shallow water equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 13 :739–758, 2010.
- [Cas99] V. Casulli. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 30 :425–440, 1999.
- [Cas14] V. Casulli. A semi-implicit numerical method for the free-surface navier-stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 74 :605–622, 2014.
- [CC92] V. Casulli and R.T. Cheng. Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, pages 629–648, 1992.
- [CC05] C. Chalons and C. Coquel. Navier-Stokes equations with several independent pressure laws and explicit predictor-corrector schemes. *Numerische Mathematik*, 101 :451–478, 2005.
- [CC08] C. Chalons and J.F. Coulombel. Relaxation approximation of the Euler equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 348 :872–893, 2008.
- [CDCFNP07] M.-J. Castro Diaz, T. Chacon, E.-D. Fernandez-Nieto, and C. Pares. On balanced finite volume methods for non-homogenous hyperbolic systems with non-conservative terms. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 29(3) :1093–1126, 2007.
- [CDE02] Z. Cao, R. Day, and S. Egashira. Coupled and decoupled numerical modeling of flow and morphological evolution in alluvial rivers. *J. Hydr. Res.*, 128 :306–321, 2002.
- [CDFNF08] M.-J. Castro Diaz, E.-D. Fernandez-Nieto, and A.-M. Ferreiro. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers & Fluids*, 37(3) :299–316, 2008.

- [CDFNFP09] M.-J. Castro Diaz, E.-D. Fernandez-Nieto, A.-M. Ferreiro, and C. Pares. Two-dimensional sediment transport models in shallow water equations. a second order finite volume approach on unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33 :2520–2538, 2009.
- [CDGRGV<sup>+</sup>07] M.J. Castro Díaz, J.A. García-Rodríguez, J.M. González-Vida, J. Macías, and C. Parés. Improved FVM for two-layer shallow-water models : Application to the Strait of Gibraltar. *Advances in Engineering Software*, 2007.
- [CDLGP13] M.J. Castro Díaz, J. A. López-García, and C. Parés. High order exactly well-balanced numerical methods for shallow water systems. *Journal of Computational Physics*, 246 :242 – 264, 2013.
- [Cha08] C. Chalons. *Approximation numérique de quelques problèmes hyperboliques : relaxation, chocs nonclassiques, transitions de phase, couplage*. PhD thesis, Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre, 2008.
- [Che76] A. Chezy. Formula to find the uniform velocity that the water will have in a ditch or in a canal of which the slope is known. *Annales de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, 1776.
- [CLGP13] M.-J. Castro, J.A. Lopez-Garcia, and C. Parés. High order exactly well-balanced numerical methods for shallow water systems. *Journal of Computational Physics*, 246 :242–264, 2013.
- [CLL94] G.Q. Chen, C.D. Levermore, and T.P. Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47 :787–830, 1994.
- [CLMDL11] S. Cordier, M.H. Le Le, and T. Morales De Luna. Bedload transport in shallow water models : why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Advances in Water Resources*, 34 :980–989, 2011.
- [CLP08] M.J. Castro, J.A. Lopez, and C. Pares. Finite volume simulation of the geostrophic adjustment in a rotating shallow-water system. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31 :444–477, 2008.
- [CLS04] A. Chinnayya, A.Y. LeRoux, and N. Seguin. A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. *International Journal on Finite Volum*, 1 :1–33, 2004.
- [CMP01] M.J. Castro, J. Macias, and C. Pares. A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system. *M2AN*, 35 :107–127, 2001.

- [CN17] G. Chen and S. Noelle. A new hydrostatic reconstruction scheme based on subcell reconstructions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55 :758–784, 2017.
- [Cor35] G.G. Coriolis. Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 15 :142–154, 1835.
- [CP95] P.G. Chamberlain and D. Porter. The modified mildslope equation. *J. Fluid Mech.*, 291 :393–407, 1995.
- [CPMP07] M.J. Castro, A. Pardo Milanés, and C. Parés. Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17 :2055–2113, 2007.
- [CSDT09] A. Canestrelli, A. Siviglia, M. Dumbser, and E.F. Toro. Well-balanced high-order centred schemes for non-conservative hyperbolic systems. applications to shallow water equations with fixed and mobile bed. *Advances in Water Resources*, 32(834 - 844), 2009.
- [CSDT10] A. Canestrelli, A. Siviglia, M. Dumbser, and E.F. Toro. Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed. *Advances in Water Resources*, 33 :291–303, 2010.
- [CSS14] F. Coquel, K. Saleh, and N. Seguin. A robust and entropy-satisfying numerical scheme for fluid flows in discontinuous nozzles. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 249, 2014.
- [Daf05] C.-M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics, 2nd edition*. Springer Netherlands, 2005.
- [DB16] M. Dumbser and D.S. Balsara. A new efficient formulation of the hllm riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 304 :275–319, 2016.
- [DBMS09] A. Decoene, L. Bonaventura, E. Miglio, and F. Saleri. Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations for river hydraulics. *M3AS*, 19(3) :387–417, 2009.
- [DC13] M. Dumbser and V. Casulli. A staggered semi-implicit spectral discontinuous galerkin scheme for the shallow water equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219 :8057–8077, 2013.
- [DDC14] D. Dutykh and D. Didier Clamond. Efficient computation of steady solitary gravity waves. *Wave Motion*, 51 :86–99, 2014.
- [Dec06] A. Decoene. *Modèle hydrostatique pour les écoulements à surface libre tridimensionnels et schémas numériques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2006.

- [Del] Software DELFT3D. <http://oss.deltares.nl/web/delft3d>.
- [Del10a] O. Delestre. *Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2010.
- [Del10b] S. Dellacherie. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *J. Comput. Phys.*, 229 :978–1016, 2010.
- [DG09] A. Decoene and J.-F. Gerbeau. Sigma transformation and ALE formulation for three-dimensional free surface flows. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 59(4) :357–386, 2009.
- [DG14] D. Doyen and P.H. Gunawan. An explicit staggered finite volume scheme for the shallow water equations. In Springer, editor, *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects*, pages 227–235, 2014.
- [DJOR16] S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes, and P.A. Raviart. Construction of modified Godunov type schemes accurate at any Mach number for the compressible Euler system. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 26 :2525–2615, 2016.
- [DK03] A.I. Delis and T. Katsaounis. Relaxation schemes for the shallow water equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 41 :695–719, 2003.
- [DK04] A.I. Delis and T. Katsaounis. A generalized relaxation method for transport and diffusion of pollutant models in shallow water. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 4 :410–430, 2004.
- [DL13] O. Delestre and P.-Y. Lagrée. A "well balanced" finite volume scheme for blood flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72 :177–205, 2013.
- [DLM13] A. Duran, Q. Liang, and F. Marche. On the well-balanced numerical discretization of shallow water equations on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 235 :565–586, 2013.
- [DLV17] G. Dimarco, R. Loubère, and M.H. Vignal. Study of a new asymptotic preserving scheme for the euler system in the low mach number limit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39, 2017.
- [DM14] A. Duran and F. Marche. Recent advances on the discontinuous Galerkin method for shallow water equations with topography source terms. *Computers and Fluids*, 101 :88–104, 2014.
- [DMLM95] G. Dal Maso, P.G. LeFloch, and F. Murat. Definition and weak stability of nonconservative products. *J. Math. Pures Appl.*, 74 :483–548, 1995.

- [DOR10] S. Dellacherie, P. Omnes, and F. Rieper. The influence of cell geometry on the Godunov scheme applied to the linear wave equation. *J. Comput. Phys.*, 229 :5315–5338, 2010.
- [DP08] A.I Delis and I. Papoglou. Relaxation approximation to bed-load sediment transport. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 213 :521–546, 2008.
- [dSV71] A.J.C. de Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sc., Paris*, 73 :147–154, 1871.
- [Duc16] V. Duchesne. The multilayer shallow water system in the limit of small density contrast. *Asymptot. Anal.*, 98, 2016.
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. *Finite Volume Methods. Handbook for Numerical Analysis*. North Holland, 2000.
- [Ein50] H. A. Einstein. The bed load function for sediment transportation in open channel flows. *Technical Bulletin no. 1026, Soil Conservation Service, US Department of Agriculture*, pages 1–71, 1950.
- [EM77] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31 :629–651, 1977.
- [EPD08] A. Ern, S. Piperno, and K. Djadel. A well-balanced Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for the shallow water equations with flooding and drying. *Internat. J. for Numerical Methods in Fluids*, 58(4) :1–25, 2008.
- [Exn25] F. M. Exner. Über die Wechselwirkung zwischen Wasser und geschiebe in Flüssen. *Sitzungber. Acad. Wissenschaften Wien Math. Naturwiss. Abt.*, 134 :165–180, 1925.
- [FNCDP11] E.D. Fernández-Nieto, M.J. Castro Díaz, and C. Parés. On an intermediate field capturing Riemann solver based on a parabolic viscosity matrix for the two-layer shallow water system. *Journal of Scientific Computing*, 48 :117–140, 2011.
- [FNKCR14] E. D. Fernández-Nieto, E. H. Koné, and T. Chacón Rebollo. A multilayer method for the hydrostatic Navier-Stokes equations : a particular weak solution. *Journal of Scientific Computing*, 2014.
- [FNLMDLC14] E. Fernández-Nieto, C. Lucas, T. Morales de Luna, and S. Cordier. On the influence of the thickness of the sediment moving layer in the definition of the bedload transport formula in Exner systems. *Computers & Fluids*, 91 :87–106, 2014.
- [FNMdLNRZ17] E.D. Fernández-Nieto, T. Morales de Luna, G. Narbona-Reina, and J. Zabsonré. Formal deduction of the Saint-Venant Exner model including arbitrarily sloping sediment beds and associated energy. *M2AN*, 51 :115–145, 2017.

- [FNPPSM17] E.D. Fernandez-Nieto, M. Parisot, Y. Penel, and J. Sainte-Marie. A hierarchy of dispersive layer-averaged approximations of Euler equations for free surface flows. hal-01324012v3, 2017.
- [Fow02] A.C. Fowler. Evolution equations for dunes and drumlins. *RACSAM*, 96 :377–387, 2002.
- [FS04] S. Ferrari and F. Saleri. A new two-dimensional shallow water model including pressure effects and slow varying bottom topography. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(2) :211–234, 2004.
- [Gal02] G. Gallice. Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334 :713–716, 2002.
- [Gal03] G. Gallice. Positive and entropy stable Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD equations in lagrangian or eulerian coordinate. *Numerische Mathematik*, 94 :673–713, 2003.
- [Gan98] M.J. Gander. A waveform relaxation algorithm with overlapping splitting for reaction diffusion equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 6 :125–145, 1998.
- [Gan06] M.J. Gander. Optimized Schwarz methods. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, pages 699–731, 2006.
- [GEP15] P. H. Gunawan, R. Eymard, and S. R. Pudjaprasetya. Staggered scheme for the Exner - shallow water equations. *Computational Geosciences*, 19 :1197–1206, 2015.
- [GFL17] A. Ghigo, J.-M. Fullana, and P.-Y. Lagrée. A 2d nonlinear multiring model for blood flow in large elastic arteries. *Journal of Computational Physics*, 350 :136–165, 2017.
- [GH07] M.J. Gander and L. Halpern. Optimized Schwarz waveform relaxation for advection reaction diffusion problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45 :666– 697, 2007.
- [GHN03a] T. Gallouet, J.M. Herard, and Seguin N. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers and Fluids*, 32 :479–513, 2003.
- [GHN03b] M.J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf. Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 41 :1643–1681, 2003.
- [GIF17] S. Gavriluk, K. Ivanova, and N. Favrie. Multidimensional shear shallow water flows : problems and solutions. hal-01529497. preprint, 2017.
- [GL96] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1) :1–16, 1996.

- [GL04] P. Goatin and P.G. LeFloch. The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 21 :881–902, 2004.
- [GN76] A.E. Green and P.M. Naghdi. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, 78 :237–246, 1976.
- [God59] S.K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb.*, 471 :271–306, 1959.
- [Gos01] L. Gosse. A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *M3AS*, 11 :339–365, 2001.
- [Gos13] L. Gosse. *Computing qualitatively correct approximations of balance laws*. Springer, 2013.
- [GP01] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant System for laminar shallow water ; Numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102, 2001.
- [GR96] E. Godlewski and A. Raviart. *Numerical approximations of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, 1996.
- [Gra81] A. J. Grass. *Sediments transport by waves and currents*. University College, London, Dept. of Civil Engineering, 1981.
- [Gre99] E. Grenier. On the derivation of homogeneous hydrostatic equations. *M2AN*, 33 :965–970, 1999.
- [Hal86] L. Halpern. Artificial boundary conditions for the linear advection diffusion equation. *Math. Comp.*, 46 :425–438, 1986.
- [Hal91] L. Halpern. Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems. *SIAM Journal on Math. Anal.*, 22 :1256–1283, 1991.
- [HDD<sup>+</sup>05] J. Hudson, J. Damgaard, N. Dodd, T Chesher, and A. Cooper. Numerical approaches for 1d morphodynamic modelling. *Coast. Eng.*, 52 :691–707, 2005.
- [Hec] Software HEC-RAS. <http://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras>.
- [Her07] J.-M. Hervouet. *Hydrodynamics of free surface flows : modelling with the finite element method*. Wiley, 2007.
- [HKL14] R. Herbin, W. Kheriji, and J.C. Latché. On some implicit and semi-implicit staggered schemes for the shallow water and Euler equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pages 1290–3841, 2014.



- [HLN13] R. Herbin, J.C. Latché, and T.T. Nguyen. Explicit staggered schemes for the compressible Euler equations. *ESAIM : Proceedings*, 40 :83–102, 2013.
- [HLRLD05] E. Hanertab, D. Y. Le Roux, V. Legat, and E. Deleersnijder. An efficient eulerian finite element method for the shallow water equations. *Ocean Modelling*, 10 :115–136, 2005.
- [HLvL83] A. Harten, P. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, 25(1) :35–61, 1983.
- [HS03] J. Hudson and P.K. Sweby. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport. *Journal of Scientific Computing*, 19 :225–252, 2003.
- [HS05] J. Hudson and P.K. Sweby. A high-resolution scheme for the equations governing 2D bed-load sediment transport. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 47 :1085–1091, 2005.
- [HTZ03] C. Hu, R. Temam, and M. Ziane. The primitive equations on the large scale ocean under the small depth hypothesis. *Discrete and continuous dynamical systems*, 2003.
- [IT92] E. Isaacson and B. Temple. Nonlinear resonance in systems of conservation laws. *SIAM J. Appl. Math.*, 52 :1260–1278, 1992.
- [IT95] E. Isaacson and B. Temple. Convergence of the 2x2 Godunov method for a general resonant nonlinear balance law. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 55 :625–640., 1995.
- [Jin01] S. Jin. A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms. *M2AN*, 35 :631–645, 2001.
- [JLL16] F. James, P.-Y. Lagrée, and M. Legrand. A viscous layer model for a shallow water free surface flow. hal-01341563, 2016.
- [JX95] S. Jin and Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Commun. Pure Appl. Math.*, 48 :235–276, 1995.
- [KDAK14] G.V. Kozyrakis, A.I. Delis, G. Alexandrakis, and N.A. Kampanis. Numerical modeling of sediment transport applied to coastal morphodynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 2014.
- [KP94] B. Khobalatte and P. Perthame. Maximum principle on the entropy and second-order kinetic schemes. *Mathematics of Computation*, 62 :119–131, 1994.
- [KP97] A. Kuo and L. Polvani. Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment. *Journal of Physical Oceanography*, 27 :1614 – 1634, 1997.

- [Lax54] P.D. Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Computation. Comm. Pure. Appl. Math.*, 7 :159–193, 1954.
- [Le12] M.H. Le. *Modelisation multi-échelle et simulation numerique de l'érosion des sols de la parcelle au bassin versant*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2012.
- [LeV02] R.J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [Lhé15] X. Lhébrard. *Analyse de quelques schémas numériques pour des problèmes de shallow water*. PhD thesis, Univ. Paris Est, 2015.
- [Lio88] P.L. Lions. On the schwarz alternating method i. In *Proceedings of the 1st International Conference on Domain Decomposition Methods*. SIAM, 1988.
- [Liu87] T. P. Liu. Hyperbolic conservation laws with relaxation. *Commun. Math. Phys.*, 108 :153–175, 1987.
- [LM14] D. Lannes and F. Marche. A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi models for efficient 2D simulations. *Journal of Computational Physics*, pages 238–268, 2014.
- [LMNK07] M. Lukacova-Medvidova, S. Noelle, and M. Kraft. Well-balanced finite volume evolution galerkin methods for the shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 221 :122–147, 2007.
- [LPR10] C. Lucas, M. Petcu, and A. Rousseau. Quasi-hydrostatic primitive equations for ocean global circulation models. *Chinese Annals of Mathematics - Series B*, 31, 2010.
- [LPS96] P.L. Lions, B. Perthame, and P.E. Souganidis. Existence of entropy solutions to isentropic gas dynamics system. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49 :599–638, 1996.
- [LPT94] P.-L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor. A kinetic formulation of scalar multidimensional conservation laws. *J. AMS*, 7 :169–191, 1994.
- [LR05] J.P. Le Roux. Grains in motion : A review. *Sedimentary Geology*, 178 :285–313, 2005.
- [LRC03] D. Y. Le Roux and G. F. Carey. Dispersion analysis of the least-squares finite-element shallow-water system. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 42(607–622), 2003.
- [LST08] F. Lagoutière, N. Seguin, and T. Takahashi. A simple 1d model of inviscid fluid–solid interaction. *Journal of Differential Equations*, 245 :3503 – 3544, 2008.
- [LV98] R.J. Le Veque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods : The quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of Computational Physics*, 146 :346–365, 1998.

- [Mad08] G. Madec. Nemo ocean engine. Technical report, Institut Pierre-Simon Laplace, [https://www.nemo-ocean.eu/wp-content/uploads/NEMO\\_book.pdf](https://www.nemo-ocean.eu/wp-content/uploads/NEMO_book.pdf), 2008.
- [Maj02] A. Majda. *Introduction to PDE's and waves for the atmosphere and ocean*, volume 9 of *Courant Lectures Note*. American Mathematical Society & Courant Institute of Mathematical Sciences, 2002.
- [Man91] R. Manning. On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*, 20 :161–207, 1891.
- [Mar05] V. Martin. An optimized schwarz waveform relaxation method for unsteady convection diffusion equation. *Applied Numerical Mathematics*, 52 :401–428, 2005.
- [Mar07] F. Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European Journal of Mechanic /B*, 26 :49–63, 2007.
- [Mar09] V. Martin. Schwarz waveform relaxation algorithms for the linear viscous equatorial shallow water equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31 :3595–3625, 2009.
- [MC17] C. Parés M.J. Castro, T. Morales de Luna. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems. applied and modern issues. chapter 6 : Well-balanced schemes and path-conservative numerical methods. *Handbook of Numerical Analysis. Editors : Rémi Abgrall and Chi-Wang Shu*, 18 :131–175, 2017.
- [MDBCf16] V. Michel-Dansac, C. Berthon, S. Clain, and F. Foucher. A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography. *Computers and Mathematics with Applications*, 72 :568 – 593, 2016.
- [MdLCDP13] T. Morales de Luna, M.-J. Castro Diaz, and C. Pares. Reliability of first order numerical schemes for solving shallow water system over abrupt topography. *Appl. Math. Comput.*, 219 :9012–9032, 2013.
- [Mik] Software MIKE. <http://www.mikebydhi.com>.
- [Mon15] R. Monjarret. Local well-posedness of the two-layer shallow water model with free surface. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 75 :2311–2332, 2015.
- [MPM48] E. Meyer-Peter and R. Muller. Formulas for bed-load transport. *Proceedings of the 2nd Meeting of the International Association for Hydraulic Structures Research*, pages 39–64, 1948.
- [Nat96] R. Natalini. Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49 :795–823, 1996.

- [NBA<sup>+</sup>14] S. Noelle, G. Bispen, K.R. Arun, M. Lukacova-Medvidova, and C.D. Munz. A weakly asymptotic preserving low mach number scheme for the euler equations of gas dynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36, 2014.
- [Nic11] R.W.D. Nickalls. A new bound for polynomials when all roots are real. *The Mathematical Gazette November*, 95 :520–526, 2011.
- [Nob07] P. Noble. Existence of small amplitude roll-waves in hyperbolic systems with source term. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 67 :1202–1212, 2007.
- [Nob09] P. Noble. Persistence of roll-waves for the saint venant equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 41 :59–90, 2009.
- [NXS07] S. Noelle, Y. Xing, and C.-W. Shu. High-order well-balanced finite volume WENO schemes for shallow water equation with moving water. *Journal of Computational Physics*, 226 :29–58, 2007.
- [NY04] D. Nechaev and M. Yaremchuk. On the approximation of coriolis terms in c-grid model. *AMS Journal*, 2004.
- [OWE12] D. Olbers, J. Willebrand, and C. Eden. *Ocean Dynamics*. Springer, 2012.
- [PAH15] S. Pavan, R. Ata, and J.M. Hervouet. Finite volume schemes and residual distribution schemes for pollutant transport on unstructured grids. *Environ. Earth. Sci.*, 74 :7337–7356, 2015.
- [Par06] C. Pares. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44 :300–321, 2006.
- [Ped03] J. Pedlosky. *Waves in the ocean and atmosphere. Introduction to wave dynamics*. Springer, 2003.
- [Per02] B. Perthame. *Kinetic formulation of conservation laws*. Oxford University Press, 2002.
- [PHRA16] S. Pavan, J.M. Hervouet, M. Ricchiuto, and R. Ata. A second order residual based predictor–corrector approach for time dependent pollutant transport. *J. Comput. Phys.*, 318 :122–141, 2016.
- [PQ94] B. Perthame and C. Qiu. A Variant of Van Leer’s Method for Multidimensional Systems of Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 112(2) :370–381, 1994.
- [PS01] B. Perthame and C. Simeoni. A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo*, 38(4) :201–231, 2001.
- [RAD07] M. Ricchiuto, R. Abgrall, and H. Deconinck. Application of conservative residual distribution schemes to the solution of the shallow

- water equations on unstructured meshes. *J.Comput.Phys.*, 222 :287–331, 2007.
- [Ram11] A. Rambaud. *Modélisation, analyse mathématique et simulations numériques de quelques problèmes aux dérivées partielles multi-échelles*. PhD thesis, Université Lyon 1, 2011.
- [Ran94] D.A. Randall. Geostrophic adjustment and the finite-difference shallow-water equations. *Mon. Weather Rev.*, 122 :1371–1377, 1994.
- [RFP<sup>+</sup>08] A. Recking, P. Frey, A. Paquier, P. Belleudy, and J.-Y. Champagne. Bed-load transport flume experiments on steep slopes. *J. Hydraul. Eng.*, 134, 2008.
- [RG12] G. L. Richard and S. L. Gavriluk. A new model of roll waves : comparison with brock’s experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 698 :374–405, 2012.
- [Ric15] M. Ricchiuto. An explicit residual based approach for shallow water flows. *J.Comput.Phys.*, 280 :306–344, 2015.
- [Rie11] F. Rieper. A low-mach number fix for roe’s approximate riemann solver. *J. Comput. Phys.*, 230 :5263–5287, 2011.
- [RLRC08] V. Rostand, D.Y. Le Roux, and G. Carey. Kernel analysis of the discretized finite difference and finite element shallow water models. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31 :531–556, 2008.
- [RMF08] G. Rosatti, J. Murillo, and L. Fraccarollo. Generalized roe schemes for 1d two-phase, free-surface flows over a mobile bed. *J. Comput. Ph.*, 227 :10 058–10 077, 2008.
- [Rus61] V.V. Rusanov. Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. *J. Comput. Math. Phys. USSR*, 1 :267–279, 1961.
- [Sch70] H.A. Schwarz. über einen grenzübergang durch alternierendes verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15 :272–286, 1870.
- [Ser99] D. Serre. *Systems of Conservation Laws (2 vols.)*. Cambridge University Press, 1999.
- [SM05] A.F. Shchepetkin and J.C. McWilliams. Regional ocean model system : a split-explicit ocean model with a free-surface and topography-following vertical coordinate. *Ocean Modelling*, 9 :347–404, 2005.
- [SM10] J. Sainte-Marie. *Models and numerical schemes for free surface flows. Beyond the Saint-Venant system*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [SMSK16] H. Shirkhani, A. Mohammadian, O. Seidou, and A. Kurganov. A well-balanced positivity-preserving central-upwind scheme for shallow water equations on unstructured quadrilateral grids. *Computers and Fluids*, 126 :25–40, 2016.

- [Sul90] I. Suliciu. On modelling phase transitions by means of rate-type constitutive equations, shock wave structure. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 28 :829–841, 1990.
- [Sul92] I. Suliciu. Some stability-instability problems in phase transitions modelled by piecewise linear elastic or viscoelastic constitutive equations. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 30 :483–494, 1992.
- [TC12] J. Thuburn and C.J. Cotter. A framework for mimetic discretization of the rotating shallow-water equations on arbitrary polygonal grids. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(3) :B203–B225, 2012.
- [Tel] Software TELEMAC-MASCARET. <http://www.opentelemac.org>.
- [Tor97] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1997.
- [TPA07] Bokhove O. Tassi P.A. and Vionnet C. A. Space discontinuous galerkin method for shallow water flows-kinetic and hllc flux, and potential vorticity generation. *Advances in Water Resources*, 30, 2007.
- [TRKS09] J. Thuburn, T. Ringler, J. Klemp, and W. Skamarock. Numerical representation of geostrophic modes on arbitrarily structured c-grids. *J. Comput. Phys.*, 228 :8321–8335, 2009.
- [Ung16] P. Ung. *Simulation numérique du transport sédimentaire. Aspects déterministes et stochastiques*. PhD thesis, Universit’e d’Orléans, 2016.
- [VBB15] S. Vater, N. Beisiegel, and J. Behrens. A limiter-based well-balanced discontinuous galerkin method for shallow-water flows with wetting and drying : one-dimensional case. *Adv. Water Resour*, 85 :1–13, 2015.
- [VK09] S. Vater and R. Klein. Stability of a cartesian grid projection method for zero froude number shallow water flows. *Numer. Math.*, 113 :123–161, 2009.
- [VR06] L.C. Van Rijn. *Principles of Sediment Transport in Rivers, Estuaries and Coastal Seas, Part 2*. Aqua Publications, 2006.
- [WN00] M. Westdickenberg and S. Noelle. A new convergence proof for finite volume schemes using the kinetic formulation of conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37 :742–757, 2000.
- [Xin17] Y. Xing. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems. applied and modern issues. chapter 13 : Numerical methods for the nonlinear shallow water equations. *Handbook of Numerical Analysis. Editors : Rémi Abgrall and Chi-Wang Shu*, 18 :361–384, 2017.
- [Xu02] K. Xu. A well-balanced gas-kinetic scheme for the shallow-water equations with source terms. *Journal of Computational Physics*, 178(2) :533 – 562, 2002.

- [Xu04] K. Xu. A gas-kinetic scheme for shallow-water equations with source terms. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 55 :365–382, 2004.
- [XZC10] Y. Xing, X. Zhang, and Shu C.W. Positivity-preserving high-order well-balanced discontinuous galerkin methods for the shallow water equations. *Advances in Water Ressources*, 33 :1476–1493, 2010.
- [Zak16] H. Zakerzadeh. Asymptotic analysis of the rs-imex scheme for the shallow water equations in one space dimension. Technical Report 455, RWTH Aachen University, 2016.
- [ZBM<sup>+</sup>07] V. Zeitlin, F. Bouchut, S. Medvedev, G. Reznik, and A. Stegner. *Non-linear dynamics of rotating shallow water : methods and advances*, volume 2 of *Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity*. Elsevier, 2007.
- [ZCMI01] J. G. Zhou, D.M. Causon, C.G. Mingham, and D. M. Ingram. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *Journal of Computational Physics*, 168 :1–25, 2001.
- [ZLFN09] J.D.D. Zabsonré, C. Lucas, and E. Fernández-Nieto. An energetically consistent viscous sedimentation model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19 :477–499, 2009.
- [ZMP03] V. Zeitlin, S.B. Medvedev, and R. Plougonven. Frontal geostrophic adjustment and nonlinear-wave phenomena in one dimensional rotating shallow water ; part 1 : Theory. *J. Fluid Mech.*, 481 :269–290, 2003.